N. Самин

DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA

ZA POTREBE FAKULTETA I VISOKIH ŠKOLA

NAPISAO

JURAJ BOŽIČEVIĆ

RED. PROFESOR TEHNIČKOG FAKULTETA U ZAGREBU U M.

ZA TISAK PRIREDIO

DR. V. NIČE

ZAGREB 1948

IZDANJE NAKLADNOG ZAVODA HRVATSKE — REDAKCIJA MINISTARSTVA INDUSTRIJE I RUDARSTVA NRH, ODJEL ZA STRUČNO ŠKOLSTVO

Građa je osim nekoliko manjih izmjena i nadopuna ostala nepromijenjena, a osim redakcije čitave knjige izveo sam i sve crteže. Vrlo savjesni pregled gotovog rukopisa i završenih slika izvršio je prof. dr. Juraj Justinijanović.

U Zagrebu, dne 15. veljače 1948.

Dr. Vilko Niče

SADRŽAJ

Strana

XIX. Konstrukcija sjene

XX. Kosa projekcija

XXI. Perspektivni i projektivni odnosi temeljnih tvorevina

XXII. Afinost

XXIII. O krivuljama u ravnini

XXIV. Krivulje drugoga reda

A) Elipsa

Strana

B) Hiperbola

C) Parabola

XXV. Primjeri ravničnih krivulja višega reda

XXVI. Prostorne krivulje

XXVII. O krivim plohama

XXVIII. Predočivanje stošca i valjka projekcijama

A) Predočivanje stošca projekcijama

Dirne ravnine i sjene stošca

Uvod

§ 1. Zadatak deskriptivne geometrije

Geometrija se dijeli na dva glavna dijela, i to na *ravnu geometriju* ili *planimetriju* i na *prostornu geometriju* ili *stereometriju*. U planimetriji se obrađuju svojstva i odnosi prostornih likova, koji leže u jednoj te istoj ravnini, a u stereometriji se obrađuju likovi, koji po volji leže u prostoru.

Likovi, koji leže u jednoj te istoj ravnini, mogu se crtnjom u toj ravnini prikazati u pravom obliku, a sve konstrukcije, koje se na te likove odnose, mogu se direktno izvesti.

Nalaze li se likovi po volji u prostoru, oni se ne mogu u prostoru nacrtati, niti se mogu izvesti konstrukcije, koje su s njima u vezi. Te bi se konstrukcije u prostoru mogle izvoditi pravljenjem modela. No kako je izradba modela često puta skopčana s velikim poteškoćama, tražile su se metode, koje bi modele nadomjestile crtnjom u ravnini. Te su se metode našle, a uče se u *deskriptivnoj (opisnoj)* ili *nacrtnoj geometriji*.

Deskriptivna je geometrija znanost, koja se bavi grafičkim predočivanjem i istraživanjem prostornih geometrijskih likova i njihovih međusobnih odnosa.

U toj znanosti uče se metode, spomoću kojih se prostorni likovi mogu prikazati crtnjom u ravnini tako, da se iz te crtnje može odrediti oblik, veličina i položaj likova međusobom i u prostoru. U njoj se nadalje uči, kako se crtnjom mogu riješiti različiti stereometrijski zadaci.

Spomoću metoda deskriptivne geometrije mogu se prikazati ne samo predmeti, koji već postoje (na pr. zgrade, strojevi, mostovi, spomenici i t. d.), nego i zamišljeni predmeti, koji se prema crtnjama mogu točno sagraditi. Zato su te crtnje *(nacrti)* neophodno potrebni kod tehničke izvedbe predmeta. Osim praktične vrijednosti deskriptivne geometrije, ona je izvrsno sredstvo za promicanje prostornih predodžbi.

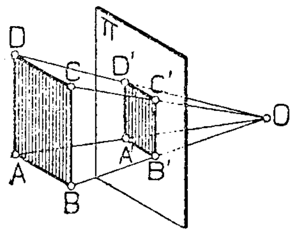
§ 2. Vrste projiciranja. Oznake

1. Vrste projiciranja. Metoda se deskriptivne geometrije sastoji u projiciranju prostornih oblika na kakvugod čvrstu ravninu. Zato se deskriptivna geometrija zove također *nauka o projiciranju*.

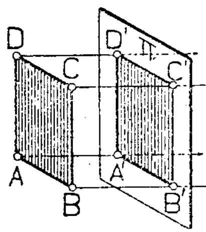
Ako gledamo neki predmet samo jednim okom, onda svaka vidljiva točka predmeta šalje u oko po jednu zraku. Ako pomislimo, da smo sve te zrake presjekli nekom ravninom, dobit ćemo u toj ravnini s l i k u ili p r o j e k c i j u onoga predmeta. Na slici 1. prikazana je projekcija $A'B'C'D'$

četverokuta $ABCD$ iz točke O na ravnini Π. Točka O nadomješta oko i zove se *središte* ili *centrum projiciranja.* Ravnina Π zove se *ravnina slike* ili *projekcije.* Četverokut $A'B'C'D'$ zove se *projekcija* četverokuta $ABCD$ na ravnini Π. Zrake AO, BO, CO, DO zovu se *zrake prometalice.* Kad sve zrake prometalice idu kroz istu točku O, koja je u konačnosti, onda se projekcija predmeta na ravnini Π zove *centralna projekcija* toga predmeta. Četverokut je $A'B'C'D'$ na sl. 1. centralna projekcija četverokuta $ABCD$.

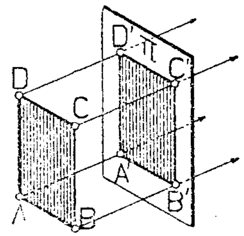
Ako se oko ili središte projiciranja O odmakne od ravnine slike neizmjerno daleko, onda su sve zrake prometalice, koje idu tom neizmjerno dalekom točkom, među sobom usporedne, pa se slika predmeta na ravnini



Sl. 1.



Sl. 2.



Sl. 3.

Π zove *paralelna projekcija* toga predmeta. Na sl. 2. prikazana je paralelna projekcija $A'B'C'D'$ četverokuta $ABCD$ na ravnini Π.

Ako su zrake prometalice AA', BB', CC'... normalne na ravnini Π onda se projekcija predmeta zove *normalna* ili *ortogonalna* (pravokutna), a ako su te zrake kose prema ravnini Π, onda se projekcija zove *kosa* ili *klinogonalna* (sl. 3.).

Prema gornjem razlaganju razlikujemo u glavnom dvije vrste projiciranja, i to *centralno* i *paralelno.* Paralelno projiciranje dijelimo nadalje na *normalno* i *koso projiciranje.*

2. Oznake. U ovoj ćemo knjizi provađati ove oznake: Točke u prostoru označivat ćemo s velikim latinskim slovima $A, B, C, \ldots$; prave i krive crte u prostoru označivat ćemo s malim latinskim slovima $a, b, c, \ldots$; ravne i krive plohe s velikim grčkim slovima $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \ldots$, a kutove malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Ravnine projekcija označivat ćemo s Π_1, Π_2, Π_3... Projekcije točaka i crta označivat ćemo istim slovima, kojima su elementi označeni u prostoru uz dodatak crtica. Ako je točka u prostoru označena slovom T, njezina će se projekcija na Π_1 označivati s T' (čitaj T crtica!), projekcija na Π_2 s T'' (čitaj T dvije crtice!), a projekcija na Π_3 s T'''. Ako je pravac u prostoru označen slovom p, njegove će se projekcije na Π_1, Π_2, Π_3 označivati s p', p'', p'''. Probodišta pravca p

s ravninama Π_1, Π_2, Π_3 označivat će se s P_1, P_2, P_3. Presječnice (tragovi) ravnine Σ s ravninama Π_1, Π_2, Π_3, označivat će se sa s_1, s_2, s_3. Sjene točke A na ravnine Π_1 i Π_2 označivat će se s A_I i A_{II}.

Kosa projekcija, te kosa i ortogonalna aksonometrija točaka $A, B, C, \ldots$ označivat će se sa $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, ...

Budući da se u realnim gimnazijama ne uči grčki jezik, donašamo ovdje slova grčkoga alfabeta.

alfa	α	A	eta	η	H	ni	ν	N	tau	τ	T
beta	β	B	teta	ϑ	Θ	ksi	ξ	Ξ	ipsilon	υ	Υ
gama	γ	Γ	jota	ι	I	omikron	o	O	fi	φ	Φ
delta	δ	Δ	kapa	$\varkappa$	K	pi	π	Π	hi	χ	X
epsilon	ε	E	lambda	λ	Λ	ro	ρ	P	psi	ψ	Ψ
zeta	ζ	Z	mi	μ	M	sigma	σ	Σ	omega	ω	Ω

§ 3. Stereometrijski odnosi i poučci o točkama, pravcima i ravninama

1. Objašnjenje. Deskriptivna se geometrija oslanja na razne pojmove i poučke iz stereometrije, pa će se ovdje bez dokazivanja donijeti ono, što je najvažnije

2. Prostorne tvorevine. 1. Tjelesa, plohe, crte i točke zovu se jednim imenom *prostorne tvorevine (likovi, oblici).* Tijelo je dio prostora, koji je sa svih strana omeđen. Tijelo ima tri dimenzije.

2. Tijelo je omeđeno *plohama.* Ploha ima dvije dimenzije. Ima *ravnih* i *krivih* ploha. Ravna se ploha zove *ravnina.* Tjelesa, koja su omeđena samo ravnim plohama, zovu se *uglasta tjelesa* ili *mnogoplošci (poliedri).* Tjelesa, koja su omeđena samo krivim ili ravnim i krivim plohama zovu se *okrugla* ili *obla tjelesa* (kugla, valjak, stožac).

3. Plohe su omeđene *crtama* ili *linijama.* Crta ima samo jednu dimenziju. Ima ravnih i krivih crta. Ravne se crte zovu *pravci,* a krive *krivulje.*

4. Crte su omeđene *točkama.* Točka nema nikakve dimenzije.

3. O pravcu. — 1. Jedna točka dijeli pravac na dvije *zrake.* Zraka je samo na jednoj strani omeđena točkom *(početna točka zrake).* Dio se pravca zove *dužina.* Dužina je omeđena s dvije točke (krajnje točke dužine). Dužina je najkraća linija, kojom se mogu spojiti dvije točke, pa ona naznačuje *udaljenost* ili *razmak* tih dviju točaka.

2. Jednom točkom S može se u ravnini povući neizmjerno mnogo pravaca. Svi ti pravci čine *pramen pravaca* ili *zrakâ,* kojemu je točka S *središtem.*

3. Položaj je pravca u prostoru s dvije točke potpuno određen. Pravac je također određen jednom svojom točkom u konačnosti i smjerom.

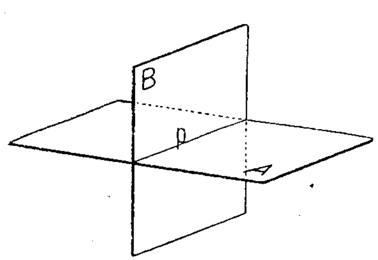
4. Dva pravca mogu imati jednu zajedničku točku ili nijednu. Ako je ta točka u konačnosti, oba se pravca u toj točki sijeku. Ta se točka zove *sjecište* pravaca, a sami pravci zovu se *ukršteni pravci.* Ako je zajednička točka dvaju pravaca neizmjerno daleko, onda su ta dva pravca među sobom usporedna. *Usporedni pravci* imaju isti smjer. Dva ukrštena ili dva usporedna pravca uvijek leže u jednoj te istoj ravnini.

Ako se dva pravca ne sijeku i nijesu usporedni, onda se oni zovu *mimosmjerni* ili *mimoilazni pravci.* Mimosmjerni pravci ne leže u istoj ravnini.

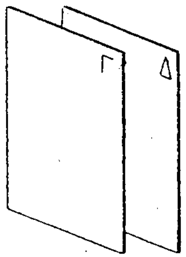
4. Ravnina. — 1. Ravnina ima svojstvo, da se u njoj svakom njezinom točkom mogu potezati pravci u svim smjerovima.

2. Jednom se točkom može položiti neizmjerno mnogo ravnina. Sve te ravnine čine *svežanj ravnina*.

3. Jednim pravcem p može se također položiti neizmjerno mnogo ravnina. Sve te



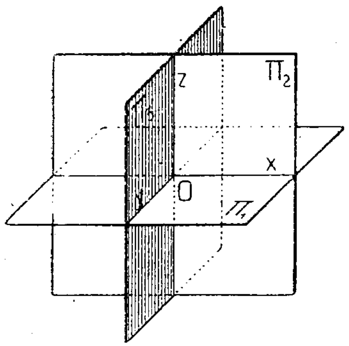
Sl. 4.



Sl. 5.

ravnine čine *pramen ravnina*, kojemu je pravac p *os*. Ravnina se može okretati oko pravca, koji je u toj ravnini.

Pravac, koji je u ravnini, dijeli tu ravninu na dvije *poluravnine*.



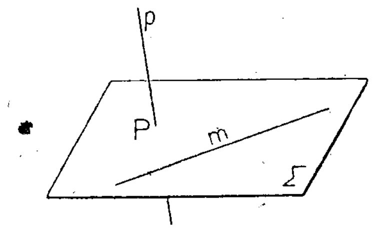
Sl. 6.

4. Ravnina je potpuno određena: — 1. S tri točke, koje nijesu u istomu pravcu, 2. pravcem i točkom, koja nije u tom pravcu, 3. s dva ukrštena pravca, 4. s dva usporedna pravca.

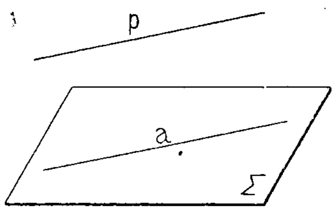
5. Dvije ravnine mogu se sjeći (*ukrštene ravnine*, sl. 4.), ili mogu biti usporedne (sl. 5.). Dvije se ukrštene ravnine sijeku u pravcu, koji se zove *presječnica* ili *trag* ravnina. Kaže se, da se dvije usporedne ravnine sijeku u pravcu, koji je neizmjerno daleko.

6. Tri ravnine Π_1, Π_2, Π_3 mogu imati samo jednu zajedničku točku O, koja se zove *sjecište* tih triju ravnina. Kroz tu točku idu tri presječnice x, y, z, u kojima se sijeku po dvije ravnine (sl. 6.).

5. Pravac i ravnina. Pravac može biti u ravnini, može ravninu sjeći ili može biti s njom usporedan. Pravac je posve u ravnini, kad ima s njom dvije zajedničke točke (m u sl. 7.). Pravac siječe ravninu, kad ima s njom



Sl. 7.



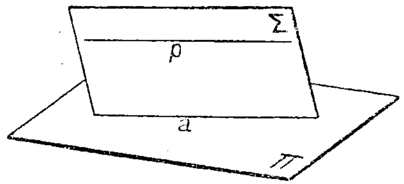
Sl. 8.

jednu zajedničku točku (p na sl. 7.). Ta se točka zove *sjecište* ili *probodište* pravca s ravninom, ili *trag* pravca na ravnini. Pravac je usporedan s ravninom, kad nema s njom nijedne zajedničke točke (p na sl. 8.). Kaže se također, da pravac, koji je usporedan s ravninom, siječe tu ravninu u točki, koja je neizmjerno daleko.

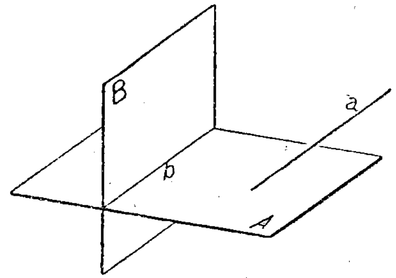
6. Točka i ravnina. Točka može biti u ravnini ili izvan ravnine. Točka je u ravnini, kad se nalazi na jednomu pravcu, koji je u toj ravnini.

7. Usporednost pravaca prema ravninama. — 1. Pravac je p usporedan s ravninom Σ, kad je usporedan s nekim pravcem a te ravnine. (Sl. 8.).

2. Ravnina je Σ usporedna s pravcem p, kad se u njoj nalazi pravac a, koji je usporedan s pravcem p. (Sl. 8.).



Sl. 9.



Sl. 10.

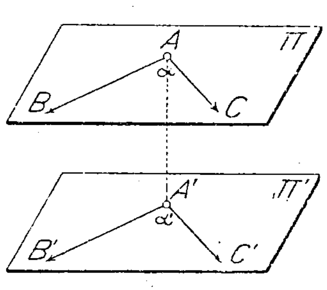
3. Ako su dva pravca p i a među sobom usporedni, pa se na pr. pravcem a položi ravnina Σ, ta je ravnina usporedna s pravcem p. (Sl. 8.).

4. Ako je pravac p usporedan s ravninom Π, onda svaka ravnina Σ, koja je položena pravcem p, siječe ravninu Π u pravcu a, koji je usporedan s pravcem p. (Sl. 9.).

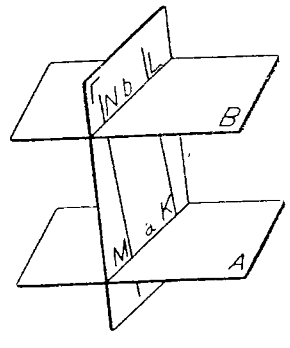
5. Ako je pravac a usporedan s dvije ravnine **A** i **B**, onda je on usporedan i s presječnicom p tih dviju ravnina. (Sl. 10.).

6. Ako je pravac a usporedan s presječnicom p dviju ravnina **A** i **B**, onda je on usporedan i s tima ravninama. (Sl. 10.).

8. Usporednost ravnina. — 1. Ravnina je Π' usporedna s ravninom Π, ako je usporedna s dva ukrštena pravca ravnine Π. (Sl. 11.).



Sl. 11.



Sl. 12.

2. Jednom se točkom izvan ravnine Π može položiti bezbroj pravaca, koji su usporedni s ravninom Π. Svi ti pravci leže u ravnini, koja je usporedna s ravninom Π.

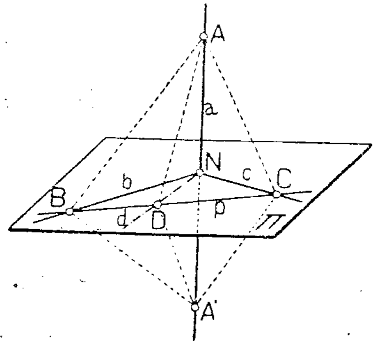
3. Točkom se u prostoru može položiti samo jedna ravnina usporedno sa zadanom ravninom.

4. Dvije usporedne ravnine **A** i **B** siječe treća ravnina **Γ** u dva usporedna pravca a i b. (Sl. 12.).

5. Sve ravnine, koje su usporedne s jednom ravninom, usporedne su i među sobom.

9. Usporedni kutovi. Ako su kraci dvaju kutova u prostoru među sobom naizmjence usporedni u istom ili u protivnom smjeru *(usporedni kutovi)*, ta su dva kuta jednaka, a njihove su ravnine usporedne. (Sl. 11.).

10. Okomitost pravaca prema ravninama. — 1. Kaže se, da je pravac a okomit na ravnini Π, kad je on okomit na svakom pravcu te ravnine, koji ide sjecištem N pravca a. (Sl. 13.).



Sl. 13.

2. Ako je pravac a okomit na dva pravca b i c ravnine Π, koji idu sjecištem N pravca a, onda je on okomit na svakom pravcu te ravnine, koji ide sjecištem N. (Sl. 13.).

3. Pravac je okomit na ravnini, kad je okomit na kojagod dva ukrštena pravca te ravnine.

4. Ako je pravac okomit na ravnini, on je okomit na svakom pravcu te ravnine.

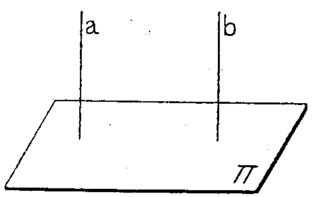
5. S jedne točke prostora može se na ravninu spustiti samo jedna *okomica (normala)*.

6. U jednoj točki ravnine može se na tu ravninu uzdići samo jedna okomica.

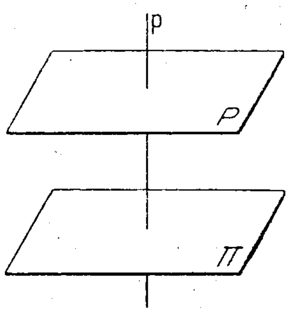
7. Jednom se točkom prostora može na pravac postaviti samo jedna okomita ravnina.

8. Ako su dva pravca usporedna, pa je jedan okomit na ravnini, onda je i drugi pravac okomit na toj ravnini. (Sl. 14.).

9. Svi pravci, koji su okomiti na istoj ravnini, među sobom su usporedni.



Sl. 14.



Sl. 15.

10. Ako su dvije ravnine Π i **P** usporedne, pa je jedna okomita na pravcu p onda je i druga okomita na tom pravcu. (Sl. 15.).

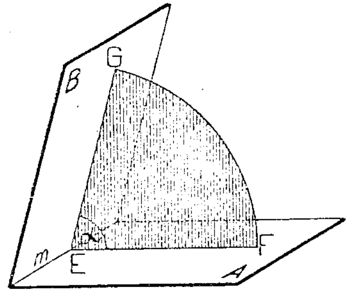
11. Sve ravnine, koje su okomite na istom pravcu, među sobom su usporedne.

12. Okomica, spuštena s točke na ravninu, jest najkraća dužina između svih dužina, kojima se može ta točka spojiti s točkama ravnine. Ta okomica naznačuje udaljenost točke od ravnine.

13. Ako su dvije ravnine usporedne, onda su sve točke jedne ravnine jednako udaljene od druge ravnine.

14. Sve točke ravnine Π, koje su jednako udaljene od jedne točke A izvan te ravnine, leže na kružnici.

11. Prostorni kut. — 1. Dvije poluravnine **A** i **B**, koje su omeđene zajedničkim pravcem m, čine *prostorni kut* ili *klin*. (Sl. 16.). Pravac je m *brid*, a poluravnine **A** i **B** jesu *strane klina*. Ako se položi treća ravnina okomito na brid m, ona siječe strane u pravcima EF i EG, koji su okomiti na m. Pravci EF i EG čine ravan kut α, koji se zove *kut nagiba* ili *priklona* ravnina **A** i **B**. Kut α je mjera za veličinu priklonog kuta ravnina **A** i **B**.



Sl. 16.

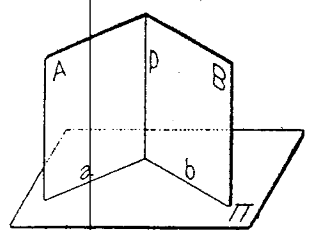
12. Okomite ravnine. — 1. Ako je priklonі kut dviju ravnina pravi kut, onda se kaže, da su te dvije ravnine među sobom okomite ili normalne.

2. Ako je pravac p okomit na nekoj ravnini Π, onda je svaka ravnina, položena tim pravcem, okomita na ravnini Π. (Sl. 17.).

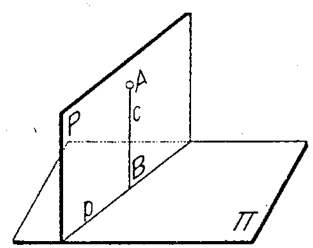
3. Ravnina je **P** okomita na ravnini Π, ako se u **P** nalazi pravac c, koji je okomit na Π. (Sl. 18.).

4. Ako su dvije ravnine **P** i Π okomite, pa s jedne točke A ravnine **P** spustimo okomicu na Π, ta okomica posve leži u ravnini **P**, a nožište joj je u presječnici tih dviju ravnina. (Sl. 18.).

5. Ako su dvije ravnine **A** i **B** okomite na trećoj ravnini Π, onda je i presječnica prvih dviju ravnina okomita na trećoj ravnini Π. (Sl. 17.).



Sl. 17.



Sl. 18.

6. Ako je ravnina Π okomita na presječnici dviju ravnina **A** i **B**, onda je ona okomita i na ravninama **A** i **B**. (Sl. 17.).

7. Jednom točkom prostora može se položiti neizmjerno mnogo ravnina okomito na neku zadanu ravninu.

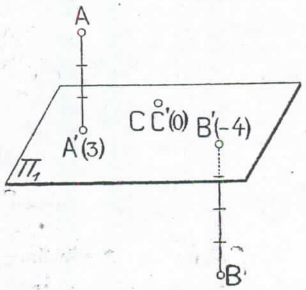
8. Jednim pravcem, koji nije okomit na ravnini, može se položiti samo jedna ravnina okomito na tu ravninu.

9. Ako je zadana ravnina Π i dva usporedna pravca a i b, pa se pravcem a položi ravnina **A** $\perp$ Π, a pravcem b ravnina **B** $\perp$ Π, onda je ravnina **A** $\parallel$ **B**.

I. Projiciranje točke i pravca na jednu ravninu

§ 4. Projiciranje točke na ravninu

1. Objašnjenja. Spusti li se s točke A (sl. 19.) okomica AA' na ravninu Π_1, onda je nožište A' te okomice *ortogonalna* ili *normalna projekcija* točke A na ravnini Π_1.



Sl. 19.

Projekcija je točke na ravnini opet točka. Pravac AA' je *zraka prometalica*, a ravnina Π_1 je *ravnina projekcija.* Obično se uzima, da je ravnina projekcija papir na kojem se crta, ili školska ploča.

Bilješka. Radi jednostavnosti umjesto „ortogonalna projekcija“ ili „normalna projekcija“, govorit ćemo samo „projekcija“.

2. Određenost točke u prostoru. Budući da se s točke A može spustiti samo jedna okomica na ravninu Π_1, to svakoj točki prostora pripada samo jedna točka ravnine Π_1, kao projekcija. Možemo dakle reći:

Projekcija je zadane točke na zadanoj ravnini potpuno određena:

Ako je pak zadana projekcija A' točke A na ravnini Π_1, onda samom tom projekcijom nije točka A u prostoru određena. Točka A leži naime u okomici ravnine Π_1 u točki A', a jer svaka točka te okomice ima svoju projekciju u A', može točka A biti gdjegod u tom pravcu.

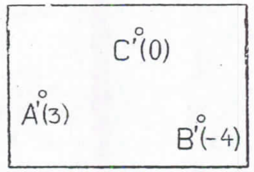
No ako je osim projekcije A' poznata i udaljenost *(distancija)* točke A od ravnine Π_1, onda je ta točka u prostoru potpuno određena. Ako je na pr. točka A udaljena od ravnine Π_1 3 *cm*, onda bi se točka A (sl. 19.) u prostoru našla na taj način, da se u A' postavi okomica na Π_1 i na tu okomicu prenese, počevši od A', 3 *cm*.

Broj, koji naznačuje udaljenost točke od ravnine Π_1, zove se *kota* te točke. Točka A na 19. slici ima kotu 3. Kota točke može biti pozitivna, ili negativna, ili 0, prema tomu, da li je točka povrh ravnine Π_1, ili ispod te ravnine, ili u samoj ravnini. Na sl. 19. nacrtane su točke A, B, C i njihove projekcije na ravnini Π_1. Točka A je povrh Π_1 i ima kotu $+3$, točka B je ispod Π_1 i ima kotu -4, točka C je u Π_1 i ima kotu 0. Točka C i C' padaju zajedno u istu točku. Kote se pišu uz projekcije točaka u zagradi, dakle A' (3), B' (-4), C' (0). Znak $+$ obično se ispušta.

Točka je u prostoru određena svojom projekcijom na ravnini i kotom.

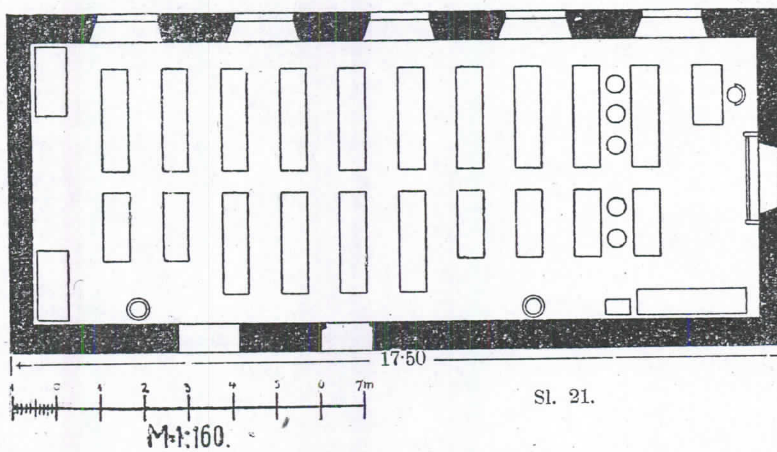
Bilješke. — 1. Normalna projekcija na jednoj ravnini zove se *kotirana projekcija.* 2. Kad je točka A zadana svojom projekcijom A' i kotom $AA' = 3$, onda se kaže: „Zadana je točka A [A' (3)]“.

3. Poklapanje ravnine projekcija s ravninom crtnje. Kad se gleda koso prema ravnini Π_1, onda se ta ravnina i prometalice AA', BB' ... prikažu kao na sl. 19. Tu se ravnina Π_1 ne podudara s ravninom papira.



Sl. 20.

Gleda li se pak prema Π_1 u smjeru, koji je okomit na toj ravnini, dobit će se sl. 20., koja posve odgovara odnosima slike 19. Sad se ravnina Π_1 poklapa s ravninom crtnje, t. j. s ravninom papira. Na slici 20. nema okomica AA', BB' ..., no iz projekcija A' B' ... i kota točaka A, B ... možemo lako naći položaj tih točaka u prostoru. Pomislimo li na pr. da smo u točki B' postavili okomicu na ravninu crtnje (papir) i da smo na nju prenijeli, počevši od točke B', 4 *cm* ispod te ravnine, dobili bismo točku B. Pokaži, gdje se u prostoru nalazi točka A!



Sl. 21.

4. O ravnini projekcija. Obično se uzimlje, da je ravnina projekcija u horizontalnom položaju. Tako se na pr. pomišlja, da se predmeti, koji su u sobi, projiciraju na pod sobe, da se kuća projicira na horizontalnu ravninu, na kojoj je sagrađena ili će se prema nacrtima sagraditi, da se zemaljska površina projicira na površinu morsku, za koju se pomišlja, da je produžena ispod kopna i t. d. Takve zamišljene projekcije obično se prenašaju na papir, a jer su predmeti, koji se prikazuju projekcijom, ponajviše preveliki, a da bi njihove projekcije stale na papir, te se projekcije crtaju u *umanjenom mjerilu.* Tako je na pr. na sl. 21. prikazana, u mjerilu 1:160, dvorana za crtanje sa stolovima, ormarima i pećima.

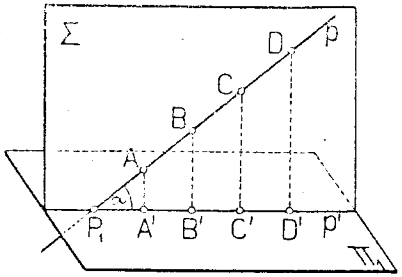
§ 5. Projiciranje pravca na jednu ravninu

1. Objašnjenja. Projekcija se p' pravca p na ravninu Π_1 (sl. 22.) dobije, ako se sve točke toga pravca projiciraju na ravninu Π_1.

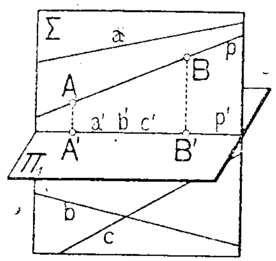
Projekcija je pravca na ravnini uopće opet pravac.

Budući da su sve zrake prometalice, koje projiciraju pravac p, usporedne i da sijeku pravac p, one leže u ravnini Σ, koja je okomita na Π_1, te sadrži projekciju p'. Pravac p' podudara se dakle s presječnicom ravninâ Σ i Π_1; t. j. p' je pravac. Prema tome projekcija se pravca na ravnini Π_1 može dobiti tako, da se tim pravcem položi ravnina $\Sigma \perp \Pi_1$ i odredi presječnica tih dviju ravnina. Ta je presječnica projekcija pravca p na ravnini Π_1.

Ravnina Σ zove se *ravnina prometalica* pravca p, jer ona projicira ili promeće taj pravac na ravninu Π_1.

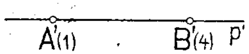


Sl. 22.



Sl. 23.

2. Određenost pravca u prostoru. Svakom pravcu p pripada na zadanoj ravnini samo jedna projekcija p'. Samom pak projekcijom p' nije pravac p u prostoru određen, jer on može biti gdjegod u ravnini Σ, koja ide pravcem p' okomito na Π_1. Svi naime pravci $a, b, c \ldots$ ravnine Σ (sl. 23.) imaju zajedničku projekciju u pravcu p'. Pravac p bio bi u prostoru određen, kad bi mu, osim projekcije p', bile poznate projekcije A'; B' i distancije AA' i BB' dviju njegovih točaka A i B. Ako je pravac p zadan s dvije svoje točke A i B, onda se projekcija p' toga pravca podudara s pravcem $A'B'$ (sl. 24.) pa se piše $p' \equiv A'B'$ (čitaj: pravac p' identičan s pravcem $A'B'$).

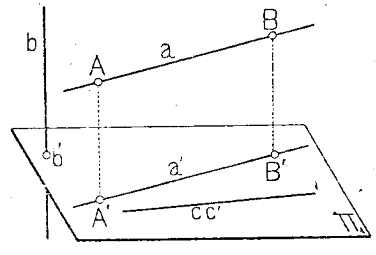


Sl 24.

Bilješka. Kad dva ili više pravaca imaju zajedničku projekciju, onda se takovi pravci zovu *pravci zaklonici.*

3. Osobiti položaji pravca prema ravnini Π_1. *Ako je pravac usporedan s ravninom Π_1, onda je projekcija toga pravca usporedna s pravcem u prostoru.* Zašto? Na slici 25. je pravac $a \parallel \Pi_1$ i $a' \parallel a$.

Ako je pravac okomit na ravnini Π_1, njegova je projekcija točka. Na sl. 25. je pravac $b \perp \Pi_1$: njegova je projekcija točka b'.



Sl. 25.

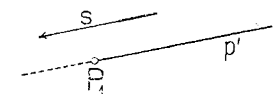
Ako je pravac u ravnini Π_1, onda je on sam svoja projekcija. Na sl. 25. je pravac c u ravnini Π_1, pa je $c' \equiv c$.

§ 6. Probodište i prikloni kut pravca

1. Probodište pravca. Ako je pravac p (sl. 22.) kos prema ravnini Π_1, on siječe tu ravninu u točki P_1, koja se zove *probodište* ili *trag* pravca p na ravnini Π_1. Probodište pravca pada zajedno sa svojom projekcijom.

Projekcija pravca uvijek ide probodištem toga pravca.

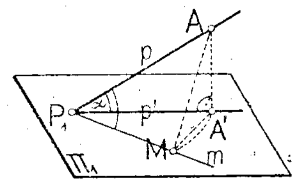
2. Vidljivost. Ako produžimo pravac p preko probodišta P_1, onda će to produženje pasti ispod ravnine Π_1. Gledamo li prema Π_1 odozgo, onda se vidi gornji dio pravca p do probodišta P_1, a ne vidi se njegov donji dio, jer je zaklonjen ravninom Π_1. Da se u projekciji istaknu oba dijela pravca, izvuče se projekcija gornjeg, vidljivog dijela punom, a projekcija donjeg, nevidljivog dijela isprekidanom linijom (sl. 26.). Time je ujedno označen i smjer, na koju je stranu pravac nagnut prema Π_1.



Sl. 26.

3. Prikloni kut pravca. Oštri kut α što ga pravac p (sl. 27.) čini sa svojom projekcijom p' na ravnini Π_1, zove se *prikloni kut* ili *priklon* pravca p prema ravnini Π_1.

Prikloni kut pravca prema ravnini najmanji je od svižu kutova, što ih taj pravac čini s pravcima te ravnine, koji idu njegovim probodištem.



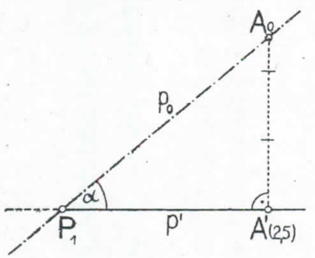
Sl. 27.

Dokaz. Neka je α (sl. 27.) kut priklona pravca p prema ravnini Π_1, a m kojigod drugi pravac te ravnine, koji ide probodištem P_1 pravca p. Prenesemo li na pravac m dužinu $P_1M = P_1A'$ i spojimo li točke A i M, tad se trokuti $P_1A'A$ i P_1MA podudaraju u dvije stranice ($P_1A = P_1A$, $P_1M = P_1A'$), dok su im treće stranice AM i AA' nejednake, i to $AA' < AM$. Odatle slijedi, da su nejednaki i kutovi, koji su tim nejednakim stranicama nasuprot, t. j. $\sphericalangle A'P_1A < \sphericalangle MP_1A$.

§ 7. Prelaganje pravca

1. Prelaganje pravca. Ako ravninu prometalicu $P_1A'A$ pravca p (sl. 22.) preložimo oko p' u ravninu Π_1, onda će pravac p doći u položaj p_0 (sl. 28.), A će doći u A_0, a trokut $P_1A'A$ u $P_1A'A_0$. Kaže se, da smo pravac p *preložili* oko p' u ravninu Π_1, pa se p_0 zove *preložaj* pravca p. Isto tako je A_0 preložaj točke A, a trokut $P_1A'A_0$ preložaj trokuta $P_1A'A$. Prometalica je AA' okomita na p', i ta se okomitost prelaganjem ne mijenja. Prema tome će dužina AA' biti i nakon preloženja okomita na p', t. j. bit će $A'A_0 \perp p'$. Ako je kota točke A (2,5), onda je $A'A_0 = 2{,}5$.

Budući, da pravokutan trokut $P_1A'A_0 \cong \triangle P_1A'A$, to je $\sphericalangle A'P_1A_0 = \sphericalangle A'P_1A = \alpha$, t. j. $\sphericalangle A'P_1A_0$ jednak je pravoj veličini priklonoga kuta pravca p.



Sl. 28.

Pravac je u prostoru potpuno određen, kad mu je zadana projekcija, probodište i prikloni kut. Obično se pravac zadaje tim podacima. Prikloni se kut zadaje direktno ili u preloženju kao kut, što ga čine pravci p' i p_0 (sl. 28). Piše se: $\sphericalangle (pp') = \sphericalangle (p_0p') = \alpha$.

Bilješke. — 1. Ako je pravac a zadan svojom projekcijom a', probodištem A_1 i priklonim kutom α, onda se to kraće piše: „Zadan je pravac a (a', A_1, α)".

2. Preložene točke i pravci označuju se na taj način, da se slovima, kojima su ti elementi označeni u prostoru, dodaju desno dolje ili gore male nule. Ako je točka u prostoru označena s A, njezino se preloženje označi s A_0 ili A^0 (čitaj: A nula). Preložene pravce izvlačimo crticama-točkicama, a preložene prometalice crticama ili točkicama. Gledaj sl. 29.!)

2. Točka i pravac. Točka može biti na pravcu ili izvan pravca. Ako je točka A na pravcu p, onda projekcija A' mora ležati na projekciji p', a preložaj A_0 mora ležati na preloženom pravcu p_0 (sl. 28.).

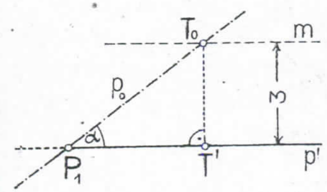
Ako projekcija točke ne leži na projekciji pravca, onda ni točka ne leži na pravcu u prostoru Ako pak projekcija B' točke B leži u p', a B_0 ne leži u p_0, onda točka B ne leži na pravcu p.

3. Zadatak. *Zadan je pravac p svojom projekcijom p', probodištem P_1 i priklonim kutom $\alpha = 30^0$; uzmi na p projekciju A' točke A pravca p i odredi distanciju te točke!*

Rješenje. Pravac se p prevali oko p' u Π_1, t. j. učini se $\sphericalangle (p'p_0) = \alpha = 30^0$ i postavi $A'A_0 \perp p'$. Tada je dužina $A'A_0$ jednaka distanciji točke A. (Gledaj sl. 28!).

4. Zadatak. *Zadan je pravac p svojom projekcijom p', probodištem P_1 i priklonim kutom α; odredi na tom pravcu projekciju one točke T koja leži na p, te joj je kota 3.*

Rješenje: Pravac p prevali oko p' u Π_1, t. j. učini $\sphericalangle (p'p_0) = \alpha$ (sl. 29.), i povuci u daljini 3 pravac $m \parallel p'$. Pravac m siječe pravac p_0 u točki T_0, pa povučeš li $T_0T' \perp p'$, dobit ćeš na p' traženu točku T'.



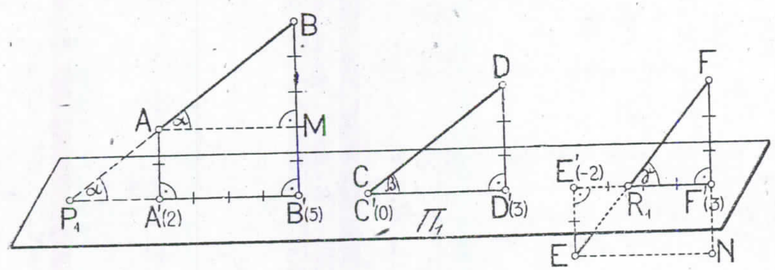
Sl. 29.

§ 8. Projiciranje dužine

1. Objašnjenja. Na sl. 30. prikazana je projekcija $A'B'$ dužine AB na ravnini Π_1.

Projekcija je dužine na ravnini uopće opet dužina.

Obje su krajnje točke A i B nad ravninom Π_1. Lik je $A'B'BA$ trapez, koji kod A' i B' ima prave kutove. Taj se trapez zove *trapez prometač dužine* AB, jer on tu dužinu projicira na ravninu Π_1.



Sl. 30. Sl. 31. Sl. 32.

Dužina je u prostoru potpuno određena, kad su joj poznate projekcije i kote krajnjih točaka.

2. Probodište i prikloni kut dužine. Produžimo li dužinu AB preko točke A i njezinu projekciju preko točke A', oba se ta pravca sijeku u točki P_1, koja je probodište produženja dužine AB s ravninom Π_1.

Kut α, što ga produljena dužina AB čini sa svojom produljenom projekcijom $A'B'$ jest prikloni kut te dužine prema ravnini Π_1.

3. Veličina projekcije dužine. *Veličina projekcije dužine je uopće manja od veličine dužine u prostoru.*

D o k a z. Potegne li se točkom A dužina $AM \| A'B'$ (sl. 30.), tad je $AM = A'B'$. Budući da je trokut ABM pravokutan, to je dužina AM, kao kateta toga trokuta, manja od hipotenuze AB. Prema tomu je i $A'B' < AB$.

Veličina projekcije dužine zavisi o veličini priklonoga kuta te dužine prema Π_1. Iz pravokutnog je trokuta AMB (sl. 30):

$$AM = A'B' = AB \cdot \cos \alpha.$$

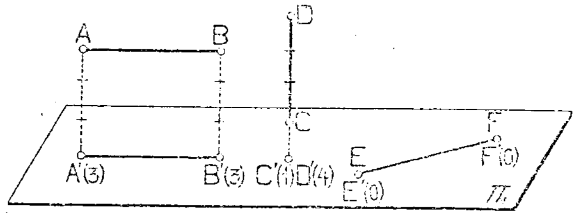
Što je veći α to je manji $\cos \alpha$, a po tom je manja i dužina $A'B'$. Možemo dakle reći:

Što je veći prikloni kut dužine prema Π_1, to je manja njezina projekcija na toj ravnini

4. Položaj dužine prema Π_1-u. Na sl. 30. je čitava dužina AB nad ravninom Π_1. Na sl. 31. dužina je CD tako položena, da joj je krajnja točka C u Π_1. Trapez prometač reducira se ovdje na pravokutan trokut $C'D'D$. Točka C je probodište, a β prikloni kut dužine CD.

Dužina je EF (sl. 32.) tako položena prema Π_1, da su joj krajnje točke E i F na protivnim stranama ravnine Π_1. Dužina je $E'F'$ projekcija dužine EF. Neparalelne stranice trapeza prometača $E'F'FE$ sijeku se u točki R_1, pa se taj trapez raspada na dva pravokutna trokuta $E'R_1E$ i $F'R_1F$. Točka R_1 je probodište, a γ prikloni kut duzine FF.

2. Na sl. 33. prikazane su projekcije $A'B'$, $C'D'$ i $E'F'$ triju dužina AB, CD i FF. Dužina je $AB \| \Pi_1$. Budući da je $AA' \# BB'$, to je $AB \# A'B'$.



Sl. 33.

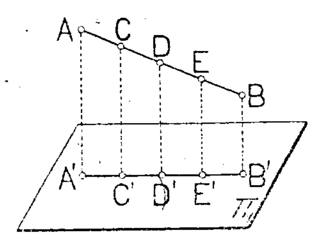
Kad je dužina usporedna s ravninom projekcija, onda se ona na tu ravninu projicira u pravoj veličini.

Dužina je $CD \perp \Pi_1$. Projekcije C' i D' padaju u istu točku.

Kad dvije točke ili više točaka imadu zajedničku projekciju, onda se te točke zovu *točke zaklonice*. Na sl. 33. točka D zaklanja točku C, kad se gleda u smjeru okomitom prema Π_1.

Dužina se EF nalazi u Π_1, pa se $E'F'$ podudara s EF.

5. Dijeljenje dužine i njezine projekcije. Ako točke C, D i E na sl. 34. dijele dužinu AB na 4 jednaka dijela, onda i točke C', D' i E' dijele projekciju $A'B'$ također na 4 jednaka dijela. Ako je dakle $AC = CD = DE = EB$, onda je i $A'C' = C'D' = D'E' = E'B'$. Zašto?



Sl. 34.

Ako točka C' dijeli dužinu AB u omjeru 1 : 3, onda i točka C' dijeli projekciju $A'B'$ u omjeru 1 : 3. Zašto? Projekcija D' polovišta D dužine AB raspolavlja projekciju $A'B'$. Kojegod 4 harmonijske točke nekoga pravca projiciraju se opet kao 4 harmonijske točke. Uopće:

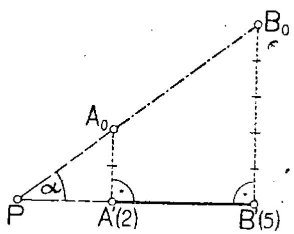
Omjer se, po kojemu je razdijeljena neka dužina u prostoru, ne mijenja projiciranjem na kojugod ravninu.

§ 9. Prelaganje dužine

1. Zadatak. *Zadana je dužina AB svojom projekcijom $A'B'$ i kotama krajnjih točaka A i B; odredi a) pravu veličinu dužine AB, b) pravu veličinu priklonoga kuta, c) probodište dužine AB!*

Neka je: $A'B' = 4$, $AA' = 2$, $BB' = 5$.

R j e š e n j e: Ako se na sl. 30. preloži trapez $A'B'BA$ oko $A'B'$ u Π_1, dobit će se prava veličina toga trapeza, zatim prava veličina dužine AB, prikloni kut i probodište. Potraži u prostoru trapez prometač $A'B'AB$ na temelju sl. 35! Preloži li se taj trapez oko $A'B'$ u Π_1, on će doći u položaj $A'B'B_0A_0$. Taj će se trapez dobiti na taj način, da se povuče $A'A_0 \perp A'B'$, $B'B^0 \perp A'B'$ i učini $A'A_0 = 2$, $B'B_0 = 5$, te spoje točke A_0 i B_0. Tada je trapez $A'B'B_0A_0 \cong$ s trapezom $A'B'BA$, pa je zato $A_0B_0 = AB$.



Sl. 35.

Produlje li se dužine A_0B_0 i $A'B'$ dobit će se probodište P i prava veličina priklona α dužine AB.

Izmjeri li se dužina A_0B_0 na mjerilu, koje vrijedi za distancije, dobit će se mjerni broj prave veličine dužine AB. Na sl. 35. je $A_0B_0 = AB = 5$. Taj se mjerni broj može izračunati po *Pitagorinom poučku* iz pravokutnog trokuta ABM. (Gledaj sl. 30.!) Iz toga je trokuta $AB = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2}$.

Budući, da je $AM = A'B'$, a $BM = BB' - AA'$ tada je

$$AB = \sqrt{(A'B')^2 + (BB' - AA')^2}.$$

Na sl. 35. je $A'B' = 4$, $AA' = 2$, $BB' = 5$. Prema tomu je

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Iz istoga je pravokutnog trokuta ABM (sl. 30.)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AM} = \frac{(BB' - AA')}{A'B'} = \frac{3}{4}.$$

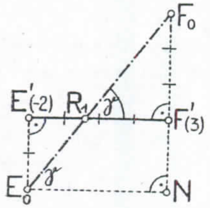
Odatle je $\alpha = 36^0\, 52'\, 11{,}6''$.

Bilješka. Budući da je u pravokutnom trokutu ABM kateta BM jednaka diferenciji ordinata BB' i AA', zato se taj trokut zove *diferencioni trokut.* Spomoću toga trokuta može se odrediti prava veličina i priklon dužine.

2. Zadatak. *Zadana je dužina EF svojom projekcijom $E'F'$ i kotama krajnjih točaka E i F; odredi pravu veličinu, prikloni kut i probodište dužine EF!*

Točke su E i F na različitim stranama ravnine Π_1. Neka je $E'F' = 4$, $EE' = -2$, $FF' = 3$.

Rješenje. Budući da su točke E i F na različitim stranama ravnine Π_1, jedan je dio dužine EF nad Π_1, a drugi dio ispod Π_1. Prevalimo li lik $E'F'FE$ oko $E'F'$ u Π_1 tako, da gornji dio toga lika dođe s gornje strane dužine $E'F'$, onda će donji dio lika doći s donje strane te dužine. Lik $E'F'FE$ došao je nakon prevaljivanja u položaj $E'F'F_0E_0$ (sl. 36.), te je $E_0F_0 = EF = 6{,}4$.



Sl. 36.

Točka R_1 je probodište, a kut γ priklon dužine EF.

Povuče li se na sl. 32. $EN \| E'F'$ i produlji FF' preko F', dobit će se diferencioni trokut ENF, iz kojega je $EF = \sqrt{(EN)^2 + (NF)^2}$. Budući da je $EN = E'F'$ i $NF = FF' + (-F'N) = FF' + (-EE') = FF' - EE'$, to je

$$EF = \sqrt{(E'F')^2 + (FF' - EE')^2},$$

dakle $EF = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6{,}4$.

Iz trokuta je $ENF \sphericalangle NEF = \gamma$ i

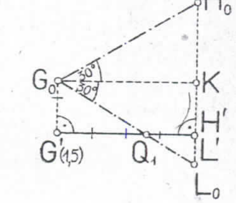
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{NF}{EN} = \frac{FF' - EE'}{E'F'} = \frac{5}{4}, \text{ a odatle } \gamma = 51^0\, 20'\, 25{,}6''.$$

3. Zadatak. *Zadana je dužina EF svojom projekcijom $E'F'$ i kotama krajnjih točaka E i F; odredi projekciju i distanciju točke H, koja dužinu EF dijeli u omjeru $2:3$, t. j. $EH : HF = 2:3$!*

Neka je $E'F' = 5$, $EE' = 1$, $FF' = 4$.

Rješenje: Prevali trapez $E'F'FE$ oko $E'F'$ u Π_1, razdijeli dužinu E_0F_0 točkom H_0 u omjeru $2:3$ i povuci $H_0H' \perp E'F'$. Tada je H' projekcija, a $H'H_0$ distancija točke H. (Nacrtaj sliku!).

4. Zadatak. *Zadana je projekcija $G'H'$ dužine GH' distancija GG' i prikloni kut α; odredi distanciju HH, točke H i pravu veličinu dužine GH! Neka je $G'H' = 4$, $GG' = 1{,}5$ i $\sphericalangle \alpha = 30^0$.* (Sl. 37.).



Sl. 37.

Rješenje: Povuci u G' i H' okomice na $G'H'$, učini $G'G_0 = 1{,}5$, povuči $G_0K \| G'H'$ i na pravac G_0K prenesi kut od 30^0. Drugi krak toga kuta siječe okomicu $H'K$ u točki H_0, te je $H'H_0$ distancija točke H, a $G_0H_0 = GH$.

Budući da se zadani kut može prenijeti i s donje strane pravca G^0K, drugi krak toga kuta siječe pravac KH' u točki L_0, pa je L_0L' distancija krajnje točke L, a G_0L_0 prava veličina druge dužine GL, koja ima istu projekciju i isti prikloni kut, kao i dužina GH. Zadatak ima dva rješenja.

Odredi probodišta jedne i druge dužine!

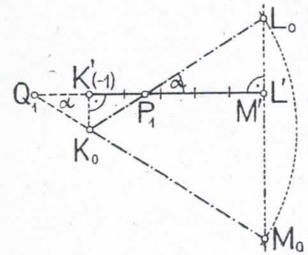
Izračunaj mjerne brojeve distancija točaka H i L te dužine GH!

— Uputa. Iz pravokutnog je trokuta $G_0KH_0 : G_0H_0 = \dfrac{G_0K}{\cos\alpha} = \dfrac{G'H'}{\cos\alpha}$,

$KH_0 = G'H' \operatorname{tg}\alpha$, $H'H_0 = H'K + KH_0 = G'G_0 + G'H' \operatorname{tg}\alpha$ i t. d.

5. Zadatak. *Zadana je prava veličina dužine KL, njezina projekcija K'L' i distancija KK'; odredi distanciju točke L i prikloni kut dužine KL!* Neka je $K'L' = 5$, $KK' = -1$, $KL = 6$. (Sl. 38.).

Rješenje: Postavi u K' i L' okomice na $K'L'$, učini $K'K_0 = -1$ i opiši oko K_0 luk s polumjerom $KL = 6$. Taj luk siječe okomicu u L' u točkama L_0 i M_0, pa su dužine K_0L_0 i K_0M_0 preložene dužine KL i KM, koje imaju istu projekciju $K'L'$ i krajnju točku K zajedničku. Zadatak ima dva rješenja. Dužine $L'L_0$ i $M'M_0$ jesu distancije krajnjih točaka L i M. Točka P_1 je probodište dužine KL, a Q_1 dužine KM $\sphericalangle L'P_1L_0 = \sphericalangle L'Q_1M_0 = \alpha$. Izračunaj mjerne brojeve distancija točaka L i M, te kuta α!



Sl. 38.

Zadaci za vježbu

1. Zadan je pravac p (p', P_1, $\alpha = 45^0$) i na p' projekcija T' točke $T(5)$; ispitaj, da li točka T leži na p!

2. Na zadanom pravcu p (p', P_1, $\alpha = 30^0$) leže točke $A[A'(1)]$, $B[B'(5)]$, $C[C'(-2{,}5)]$; odredi projekcije tih točaka!

3. Zadan je pravac a (a', A_1, $\alpha = 60^0$); odredi projekcije onih točaka toga pravca, kojima su kote 0, 1, 2, 3 . . . , - 1, — 2, — 3 . . . !

4. Zadan je pravac $b\,(b', B_1, \alpha)$; odredi projekcije onih točaka toga pravca, kojima su kote 0; 2,3; 3,7; 4; 6,5!

5. Uzmi na projekciji c' zadanoga pravca $c\,(c', C_1, \alpha)$ projekcije nekoliko točaka na jednoj i drugoj strani probodišta C_1 i odredi distancije tih točaka!

6. Zadan je pravac s dvije točke $A\,[A'(-1{,}3)]$ i $B\,[B'(5{,}6)]$; odredi probodište i priklon toga pravca!

7. Odredi pravu veličinu, probodište i priklon dužine *a)* $AB\,[A\,(0), B(4)]$ *b)* $CD\,[C(1), D\,(5)]$, *c)* $EF\,[E\,(4), F(-5)]$!

8. Izračunaj iz sličnih trokuta $P_1B'B$ i AMB ili trokuta $P_1A'A$ i ABM na sl. 30, mjerne brojeve dužina P_1B', P_1A', P_1B, i P_1A!

9. Izračunaj spomoću sličnosti trokuta $E'E_0R_1$ i $F'F_0R_1$ (sl. 37) mjerne brojeve dužina $E'R_1$, E_0R_1, $F'R_1$ i F_0R_1!

10. Zadana je dužina $AB\,[A\,(4), B\,(2{,}5)]$; odredi projekcije i distancije onih točaka, koje dužinu AB harmonijski dijele u omjeru 2 : 4,5!

11. Zadana je dužina $MN\,[M\,(-1), N(5)]$; odredi projekciju i distanciju točke P, koja raspolavlja dužinu MN!

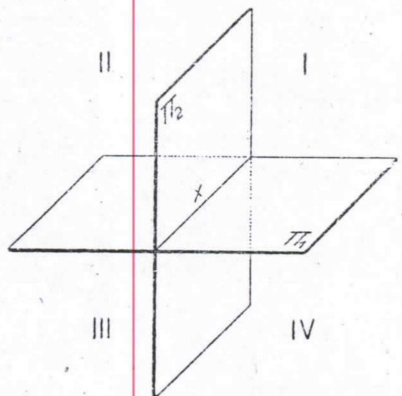
12. Pravac GH zadan je svojom projekcijom $G'H'$, distancijom točke $G\,(5)$ i priklonim kutom $\alpha = 45^0$; odredi probodište i pravu veličinu dužine GH, te distanciju točke H!

13. Zadan je pravac p svojom projekcijom p', projekcijom A' i distancijom AA' jedne njegove točke A te priklonim kutom α; odredi probodište pravca p i projekciju druge njegove točke B, ako je poznata prava veličina dužine AB! Neka je: $AA' = 1$, $\sphericalangle\,\alpha = 60^0$, $AB = 3$. Koliko rješenja ima taj zadatak?

II. Projiciranje točke na dvije ravnine

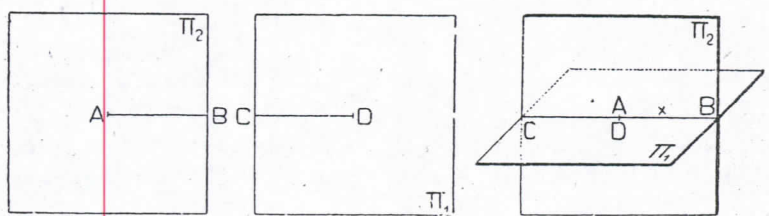
§ 10. O ravninama projekcija

1. Objašnjenja. Kad smo točke projicirali na jednu ravninu, vidjeli smo, da osim projekcija točaka moraju biti zadane i njihove udaljenosti od te ravnine. Kad bi se radilo o tom, da se projekcijom prikaže sastavljeno tijelo, kao zgrade, strojevi, onda bi se pokazalo, da taj način projiciranja nije dovoljno pregledan. Nedostatku projiciranja na jednu ravninu doskočilo se na taj način, da se predmeti projiciraju na dvije ravnine. Obično se uzimlje, da je jedna ravnina projekcija u horizontalnom, a druga u vertikalnom položaju; obje su dakle ravnine među sobom okomite (sl. 39.).



Sl. 39.

Prva se ravnina označuje s Π_1 i zove se *horizontalna* ili *prva ravnina projekcija*, ili *tlocrtna ravnina*. Druga se ravnina označuje s Π_2 i zove se *vertikalna* ili *druga ravnina projekcija*, ili *nacrtna ravnina*. Presječnica se tih dviju ravnina označuje sa x i zove se *os projekcija* ili samo *os x*. Kaže se, da su ravnine Π_1 i Π_2 jedna drugoj pridružene.



Sl. 40.

Projekcija predmeta na Π_1 zove se *horizontalna* ili *prva projekcija*, ili *tlocrt* toga predmeta, a projekcija na Π_2 zove se *vertikalna* ili *druga projekcija*, ili *nacrt*. Kaže se, da su tlocrt i nacrt nekog predmeta *pridružene projekcije*.

*

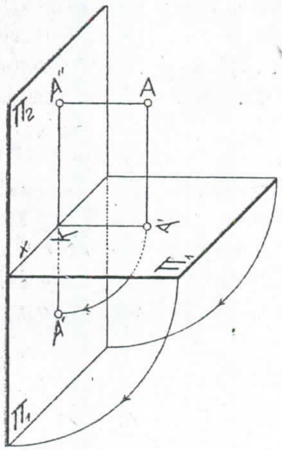
2. Kvadranti. Ako se uzme, da su obje ravnine projekcija neomeđene, onda one dijele prostor na četiri dijela, koji se zovu *prostorni kvadranti*. Ti su kvadranti na sl. 39. označeni rimskim brojkama I, II, III, IV.

Uzima se, da su prednji dio ravnine Π_1 i gornji dio ravnine Π_2 pozitivni, a stražnji dio ravnine Π_1 i donji dio ravnine Π_2 negativni dijelovi tih ravnina.

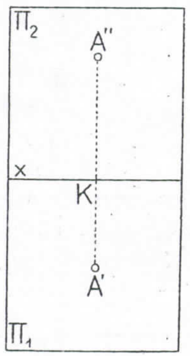
3. Model ravnina projekcija. Izreži iz tankog kartona dva kvadrata, kojima stranice imaju 15 *cm*, i svaki kvadrat proreži do središta uzduž srednjice, t. j. po dužinama AB i CD (Sl. 40). Utakneš li prorez jednoga kvadrata u prorez drugoga, pa karton Π_1 namjestiš u horizontalan, a karton Π_2 u vertikalan položaj, imat ćeš model ravnina projekcija. Kartoni se mogu okretati oko osi x.

§ 11. Projiciranje točke

1. Objašnjenja. Spusti li se s točke A (sl. 41.) okomica AA' na Π_1, onda je nožište A' te okomice *tlocrt* točke A. Spusti li se pak s točke A okomica AA'' na Π_2, onda je nožište A'' te okomice *nacrt* točke A.



Sl 41.



Sl. 42.

2. Određenost točke u prostoru. Ravnina Σ, položena pravcima AA' i AA'' okomita je na Π_1 i na Π_2, dakle i na osi x. (Zašto?) Ravnina Σ siječe ravninu Π_1 u pravcu $A'K$, a Π_2 u pravcu $A''K$. Oba su ta pravca okomita na osi x. (Zašto)? Vidi § 3., t. 12 (7). Budući da je lik $AA'KA''$ pravokutnik, to je $AA' = = A''K$ i $AA'' = A'K$; t. j.: *Točka je udaljena od Π_1 toliko, koliko je njezin nacrt udaljen od osi* x.

Točka je udaljena od Π_2 toliko, koliko je njezin tlocrt udaljen od osi x.

Ako se dakle u točki A' postavi okomica na Π_1 i na nju prenese, počevši od A', dužina $A''K$, dobije se točka A u prostoru.

Ako se pak u točki A'' postavi okomica na Π_2 i na nju prenese, počevši od A'', dužina $A'K$, onda se također dobije točka A u prostoru.

Može se dakle reći:

Točka je u prostoru potpuno određena svojim tlocrtom i nacrtom.

Dužina se $A'K$ zove *prva ordinata*, a dužina $A''K$ zove se *druga ordinata* točke A. Te su ordinate jednake daljinama točke od ravnina projekcija.

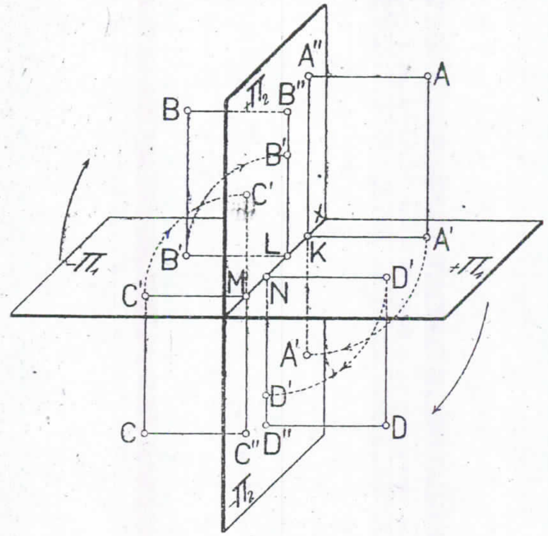
3. Okretanje ravnine Π_1 u ravninu Π_2. Okrene li se ravnina Π_1 oko osi x u smjeru strelicâ (sl. 41.) tako, da ona padne u produljenje ravnine Π_2 ispod osi x, onda kod tog okretaja nacrt AA'' ostane na istom mjestu, dok tlocrt A' opiše četvrtinu kružnice i dođe u Π_2. Sad su obje ravnine Π_1 i Π_2 i obje projekcije A' i A'' sjedinjene u jednoj te istoj ravnini Π_2, pa imamo sl. 42.

Budući da su dužine $A'K$ i $A''K$ prije i poslije okretanja ravnine Π_1 okomite na osi x, obje te dužine čine nakon okretaja jedan te isti pravac $A'A''$, koji je okomit na osi x. Pravac $A'A''$ zove se *ordinala*.

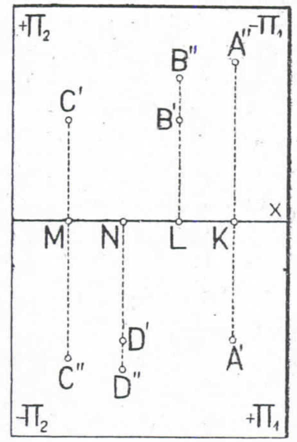
Obje projekcije A' i A'' točke A leže u istoj ordinali, koja je okomita na osi x (sl. 42).

§ 12. Proširenje područja projiciranja

1. Kvadranti. Na sl. 41. prikazali smo projekcije točke A, koja je u I. kvadrantu. No točka može biti i u ostalim kvadrantima, pa smo na



Sl. 43.



Sl. 44.

sl. 43. nacrtali projekcije točaka A, B, C i D, koje su redom u I., II., III. i IV. kvadrantu. Preložimo li prednji dio ravnine Π_1 oko osi x prema dolje u Π_2, stražnji će dio ravnine Π_1 pokriti gornji dio ravnine Π_2, pa imamo sl. 44.

Tlocrt A' i D' točaka A i D, koje su u prostoru pred ravninom Π_2, (I. i IV. kvadrant) padnu ispod osi x, dok tlocrti B' i C' točaka B i C

padnu povrh osi x. Nacrti A'' i B'' točaka A i B, koje su u prostoru povrh ravnine Π_2 (I. i II. kvadrant), nalaze se povrh x, dok nacrti C'' i D'' točaka C i D, koje su ispod Π_1 (III. i IV. kvadrant), nalaze se ispod x. *Tlocrt i nacrt jedne te iste točke uvijek leži u istoj ordinali, koja je okomita na osi* x.

2. Položaj projekcija točaka prema osi. Iz sl. 44. imamo ove poučke:

1. Ako je točka A u I. kvadrantu, onda se njezin tlocrt A' nalazi ispod, a nacrt A'' povrh osi x.

2. Ako je točka B u II. kvadrantu, obje se njezine projekcije B' i B'' nalaze povrh osi x.

3. Ako je točka C u III. kvadrantu onda se njezin tlocrt nalazi povrh, a nacrt ispod osi x.

4. Ako je točka D u IV. kvadrantu, obje se njezine projekcije D' i D'' nalaze ispod osi x.

Obrnuto: Kako će se iz položaja obih projekcija neke točke prema osi x zaključiti, u kojem se kvadrantu nalazi ta točka?

3. Ordinate. Prve ćemo ordinate označivati sa y, a druge sa z.

Ako su tlocrti točaka u prednjem dijelu ravnine Π_1, onda se uzima da su prve ordinate y *pozitivne*, a ako su ti tlocrti u stražnjem dijelu ravnine Π_1, onda se uzima, da su te ordinate *negativne*.

Ako su nacrti točaka u gornjem dijelu ravnine Π_2, onda se uzima, da su druge ordinate z *pozitivne*, a ako su ti nacrti u donjem dijelu ravnine, onda se uzima da su ordinate z *negativne*.

Prema položaju točaka u prostoru prema ravninama Π_1 i Π_2 imamo ovaj pregled, s obzirom na predznake ordinata y i z:

I. kv. $\begin{cases} y = + \\ z = + \end{cases}$	II. kv. $\begin{cases} y = - \\ z = + \end{cases}$	III. kv. $\begin{cases} y = - \\ z = - \end{cases}$	IV. kv. $\begin{cases} y = + \\ z = - \end{cases}$

4. Koordinate. Obično se u osi x uzima gdjegod početna točka ili ishodište O, pa se sa x označuje udaljenost ordinate od te točke. Ta se udaljenost zove *apscisa*. Apscisa može biti pozitivna ili negativna prema tome, da li se ordinata nalazi desno ili lijevo od točke O. Apscisa i obje ordinate neke točke zovu se jednim imenom *koordinate* te točke. S koordinatama su određene projekcije točke, a i sama točka u prostoru.

Bilješka. Ako su zadane koordinate neke točke A, na pr. $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$, onda se piše: „Zadana je točka A (1, 3, 4)". Kao jedinice uzimaju se dužine od $\frac{1}{2}$ *cm*, 1 *cm*, . . .

Sl. 45.

5. Zadatak. *Nacrtaj projekcije točaka* A (1, 3, 2), B (2, —1, 4), C (3, —3, —1), D (4, 2, —4)! (Sl. 45.).

Rješenje. Po predznacima se za ordinate y i z zaključuje, da je točka A u I. kvadrantu, točka B u II., točka C u III. i točka D u IV. kvadrantu.

Da se nacrtaju projekcije tih točaka, povući će se os x i u njoj po volji odabrati ishodište O. Zatim će se prenijeti $OK = 1$, $OL = 2$, $OM = 3$ i $ON = 4$, i točkama K, L, M, N povući će se ordinale. Na te ordinale prenijet će se ordinata y, ako je pozitivna, ispod osi x, a ako je negativna povrh osi x. Ordinata z prenijet će se, ako je pozitivna, povrh osi, a ako je negativna ispod osi x. Prema zadatku učinjeno je; $KA' = 3$, $KA'' = 2$; $LB' = -1$, $LB'' = 4$; $MC' = -3$, $MC'' = -1$; $ND' = 2$, $ND'' = -4$.

6. Određivanje položaja točaka u prostoru. Kad se traži točka u prostoru na temelju svoga tlocrta i nacrta, onda se pita, nalazi li se ta točka povrh ili ispod Π_1, ispred ili iza Π_2. Iz sl. 48. vidi se ovo: Ako je točka povrh Π_1, onda je z pozitivno, ako je točka ispod Π_1, onda je z negativno. Ako je točka ispred Π_2, onda je y pozitivno, ako je točka iza Π_2, onda je y negativno

Točka je u prostoru povrh ili ispod Π_1 *prema tome, da li je ordinata* z *pozitivna ili negativna.*

Točka je u prostoru ispred ili iza Π_2 *prema tome, da li je ordinata* y *pozitivna ili negativna.*

Točka će se u prostoru naći na temelju njezinog tlocrta i nacrta na slijedeći način:

Postavi li se u tlocrtu točke okomica na ravninu crtnje (papir, ploču) i na tu okomicu prenese, počevši od tlocrta, ordinata z; druga krajnja točka te okomice označivat će položaj točke u prostoru s obzirom na Π_1. Ako je ordinata z pozitivna, prenese se povrh (ili ispred) ravnine crtnje, a ako je negativna, prenese se ispod (ili iza) te ravnine.

Postavi li se u nacrtu točke okomica na ravninu crtnje, pa na tu okomicu prenese, počevši od nacrta ordinata y, druga krajnja točka te okomice označivat će položaj točke u prostoru s obzirom na Π_2. Ako je ordinata y pozitivna, prenese se povrh (ili ispred) ravnine crtnje, a ako je negativna, prenese se ispod (ili iza) te ravnine.

Potraži u prostoru točke A, B, C i D na temelju sl. 45!

§ 13. Osobit položaj točaka prema ravninama projekcija

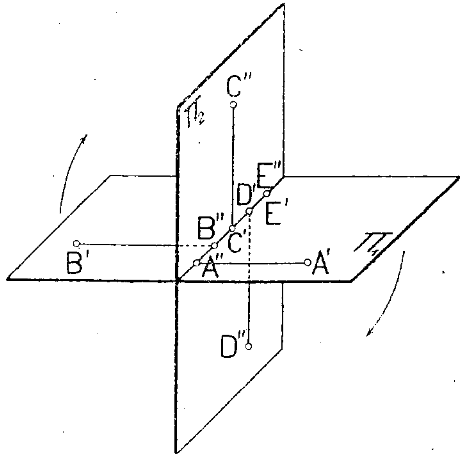
1. Točka je u Π_1 ili u Π_2. — 1. Ako je točka u Π_1, onda je njezin tlocrt u istoj točki, a nacrt u osi x. Na sl. 46. točke su A i B u Π_1.

2. Ako je točka u Π_2, onda je njezin nacrt u istoj točki, a tlocrt u osi x. Na sl. 46. točke su C i D u Π_2.

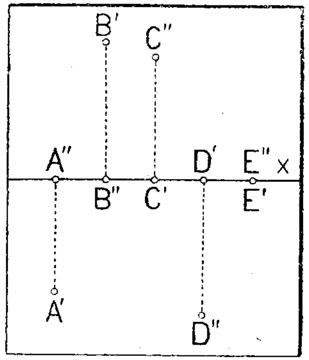
3. Ako je točka u osi x, obje su njezine projekcije u istoj točki osi. Na sl. 46 točka je E u osi x.

Ako se ravnina Π_1 okrene u ravninu Π_2, dobit će se sl. 47.

2. Ravnina simetrije. Ako su ordinate jedne točke jednake, t. j. $y = z$, onda je ta točka u prostoru jednako udaljena od Π_1 i od Π_2. Ako

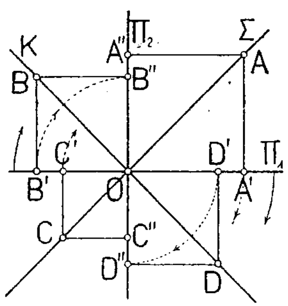


Sl. 46.

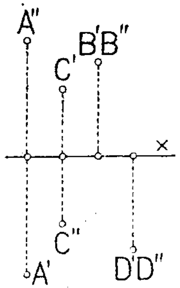


Sl. 47.

su te točke u I. i III. kvadrantu, onda projekcije tih točaka leže, nakon okretanja ravnine Π_1 u Π_2, simetrično prema osi x. Sve te točke u prostoru leže u ravnini Σ, koja ide kroz os x, te raspolavlja I. i II. kvadrant (sl. 48). Ta se ravnina zove *ravnina simetrije.* Na sl. 49. točke A i C su u ravnini simetrije, i to točka je A u I., a točka C u III. kvadrantu.



Sl. 48.



Sl. 49.

3. Ravnina koincidencije. Ako se točke, koje imaju jednake ordinate, nalaze u II. i IV. kvadrantu, onda su one također jednako udaljene od Π_1 i od Π_2, te čine ravninu **K** (sl 48.), koja ide kroz os x, te raspolavlja II. i IV. kvadrant. Ta se ravnina zove *ravnina koincidencije* ili *istovjetnosti.* Projekcije točaka, koje su u toj ravnini, padnu nakon okretanja ravnine Π_1 u Π_2, u istu točku. Na sl. 49. točke su B i D u ravnini koincidencije, i to B je u II., a D u IV. kvadrantu.

Bilješka. Na sl. 48. uzelo se, da su ravnine Π_1, Π_2, Σ i **K** okomite na ravnini crtnje, pa se prikazuju kao pravci. Os x prikazuje se kao točka u O.

Zadaci za vježbu.

1. Nacrtaj projekcije ovih točaka: A (0, 3, 3), B (1, −1, 2), C (2, −4, −3), D (3, 4, −5), E (−1. 2, 4), F (−2, −1, −3), G (−3, 3, 5), H (−4, −3, 3)! U kojim se kvadrantima nalaze te točke? Potraži položaj u prostoru svake od tih točaka s obzirom na Π_1 i na Π_2!

2. Nacrtaj na istoj slici projekcije točaka: *a)* A (3, 4, 2), B (3, 4, 5); *b)* C (5, 3, 2), D (5, 3, 2); *c)* E (2, −1, 3), F (2. −1, 4)! Potraži te točke u prostoru s obzirom na Π_1 i na Π_2! Kako leži jedna točka prema drugoj onog para točaka, kojima tlocrti ili nacrti padaju u istu točku (točke zaklonice)?

3. Nacrtaj projekcije ovih točaka:

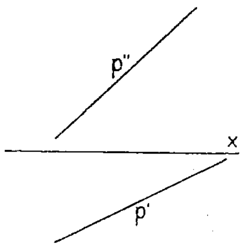
A (0, 2, 0),	E (4, 0, 0),	I (−4, 0, −1),	M (−5, −4, 4).
B (1, −3. 0),	F (−1, 3, 0),	J (4, 4. 3),	N (−6, 2. 2).
C (2, 0. 4),	G (−2, −4, 0),	K (5, 2, −2),	P (0, 0, 0).
D (3, 0, −5),	H (−3, 0, 3),	E (6, −5, −5),	R (0, 3, 3).

Potraži te točke u prostoru! Koje točke leže u Π_1, koje u Π_2, a koje u osi x? Koje su točke u pozitivnom, a koje u negativnom dijelu ravninā Π_1 i Π_2? Koje točke leže u ravnini simetrije, a koje u ravnini istovjetnosti?

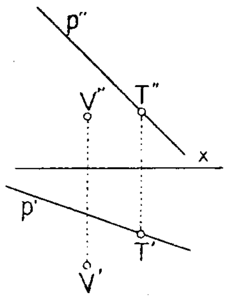
III. Projiciranje pravca na dvije ravnine

§ 14. Projiciranje pravca. Točka i pravac

1. Projiciranje pravca. Položi li se pravcem p ravnina Σ_1 okomito na Π_1, ona će sjeći Π_1 u pravcu p', a položi li se pravcem p ravnina Σ_2 okomito na Π_2, obje će se ravnine sjeći u pravcu p''. Pravac p' je tlocrt, a p'' nacrt pravca p. Projekcije su pravca na Π_1 i na Π_2 opet pravci p' i p'' (sl. 50.).



Sl. 50.



Sl. 51.

Ako su nacrtane projekcije p' i p'' pravca p, te se ravnina Π_1 dovede u horizontalan položaj i zatim se pravcem p' položi ravnina Σ_1 okomito na Π_1, a pravcem p'' ravnina Σ_2 okomito na Π_2, ravnine se Σ_1 i Σ_2 sijeku u pravcu p.

Pravac je u prostoru potpuno određen, kad mu je zadan tlocrt i nacrt.

Bilješka. Ravnina Σ_1 zove se *prva ravnina prometalica*, a ravnina Σ_2 *druga ravnina prometalica* pravca p.

2. Točka i pravac. Iz postanka projekcije pravca (§ 5. t. 1., sl. 22.) slijede ovi poučci:

Ako je točka na pravcu, njezine projekcije leže u istoimenim projekcijama toga pravca.

Pravac ide točkom, ako njegove projekcije idu istoimenim projekcijama te točke.

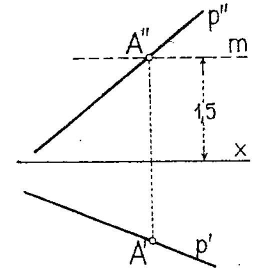
Na sl. 51. točka je T (T', T'') na pravcu p (p', p''), dok točka V (V', V'') nije na tom pravcu. Točka V ne bi bila na pravcu p ni onda, kad bi V' ležao na p', a V'' izvan p'', ili kad bi V'' ležao na p'', a V' izvan p'.

Da se odredi položaj pravca u prostoru s obzirom na Π_1 ili na Π_2, a na osnovi sl. 50., nacrtaju se projekcije kojihgod dviju točaka toga pravca i potraži se položaj tih točaka u prostoru s obzirom na Π_1 ili na Π_2. Te točke određuju položaj pravca p u prostoru s obzirom na jednu ili na drugu ravninu projekcija.

Bilješka. Ako je pravac p zadan s dvije svoje točke A (1, 3, 7) i B (5, 1, 2) onda se piše: $p \equiv AB$ [A (1, 3, 7), B (5, 1, 2)].

3. Zadatak. *Zadane su projekcije p' i p'' pravca p; odredi projekcije one točke toga pravca, kojoj je ordinata $z = 1.5$!* (Sl. 52.).

Rješenje: Potegne li se u daljini 1,5 pravac $m \parallel x$, on siječe p'' u točki A''. S pomoću ordinate točke A'' dobit će se na p' tlocrt A' tražene točke A.



Sl. 52.

4. Osobiti položaji pravca

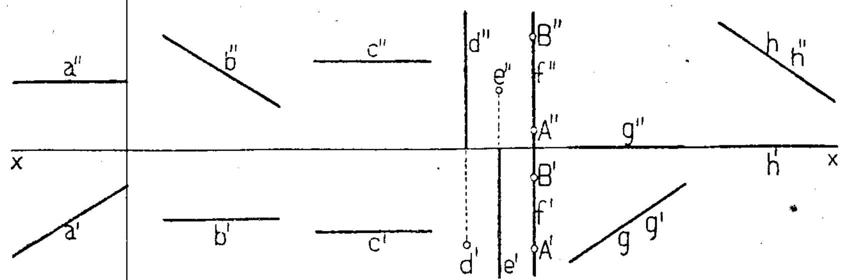
1. *Pravac je $a \parallel \Pi_1$.* Ako je pravac $a \parallel \Pi_1$, onda prva ravnina prometalica, položena tim pravcem, siječe Π_1 u pravcu a', koji je usporedan s pravcem a [§ 3. t. 7(4)]. Druga ravnina prometalica pravca a usporedna je s Π_1 i siječe Π_2 u pravcu a'', koji je usporedan s osi x [§ 3. t. 8(4)].

Ako je pravac a usporedan s Π_1, onda je $a' \parallel a$ i $a'' \parallel e$ (sl. 53.).

2. *Pravac $b \parallel \Pi_2$.* Dokaži da mora biti $b' \parallel x$ i $b'' \parallel b$. (sl. 58.).

3. *Pravac je $c \parallel x$.* Dokaži da je $c' \parallel x$ i $c'' \parallel x$ (sl. 58.).

4. *Pravac je $d \perp \Pi_1$.* Tlocrt je d' točka (sl. 58.). Budući da je $d \parallel \Pi_2$ i $d \perp x$, druga je ravnina prometalica pravca d okomita na osi x i siječe



Sl. 53.

Π_2 u pravcu d'', koji je usporedan s d i okomit na osi x. Budući da druga ravnina prometalica pravca d ide točkom d' i budući da je ta ravnina okomita na osi x, doći će d' nakon preložaja ravnine Π_1 u produženje pravca d''.

Ako je pravac okomit na Π_1 tlocrt mu je točka, a nacrt pravac okomit na osi x. Obje te projekcije leže u istoj ordinali.

5. *Pravac je $e \perp \Pi_2$.* Nacrt je e'' točka, a e' pravac okomit na osi x (sl. 58.). Dokaži, da je tako!

6. *Pravac je f okomit na osi x.* Obje ravnine prometalice toga pravca padaju zajedno, okomite su na osi x i sijeku ravnine Π_1 i Π_2 u pravcima f' i f'', koji su okomiti na osi x (sl. 58.). Kad se Π_1 zaokrene u Π_2, tad obje projekcije f', f'' padaju u istu ordinalu. Pravac je u ovom slučaju samo onda određen, ako su mu zadane projekcije dviju točaka A i B.

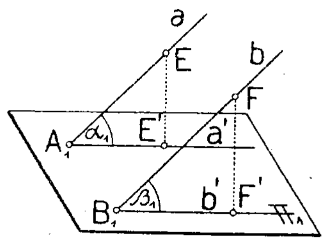
7. *Pravac je g u* Π_1. Tlocrt se g' podudara s g, a nacrt g'' pada u os x (sl. 58.).

8. *Pravac je h u* Π_2. Nacrt se h'' podudara s h, a tlocrt se h' nalazi u osi x. (Sl. 58.).

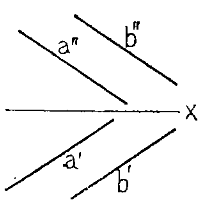
9. Gdje se nalaze projekcije pravca, koji je u osi x?

§ 15. Usporedni pravci

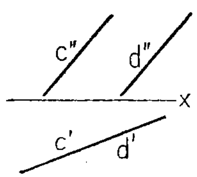
1. Na sl. 54. zadana je horizontalna ravnina Π_1 i dva usporedna pravca a i b. Uzelo se, da pravac a probada ravninu Π_1 u točki A_1, a pravac b, da je probada u točki B_1. Te su točke same svoje projekcije na ravnini Π_1. Uzme li se točka E na pravcu a i točka F na pravcu b i odrede li se projekcije tih točaka E' i F' na ravnini Π_1, onda su B_1E' i B_1F' projekcije pravaca α i b na ravnini Π_1. Pita se sad, u kakvom su položaju među sobom te projekcije? Budući da je $a \parallel b$ i $EE' \parallel FF'$, tad su ravnine prometalice A_1EE' i B_1FF' pravaca a i b među sobom usporedne (§ 3. t. 9.), te one sijeku ravninu Π_1 u dva usporedna pravca [§ 3. t. 8(4)] i to baš u pravcima $A_1E' \equiv a'$ i $B_1F' \equiv b'$. Ako je dakle pravac $a \parallel b$, tada je i $a' \parallel b'$. Na jednak bi se način pokazalo, da je i $a'' \parallel b''$. Na sl. 55. nacrtane su projekcije $a' \parallel b'$ i $a'' \parallel b''$ dvaju usporednih pravaca a i b.



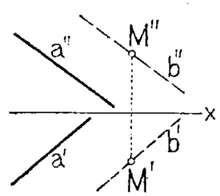
Sl. 54.



Sl. 55.



Sl. 56.



Sl. 57.

Ako su dva pravca među sobom usporedna, onda su među sobom usporedne istoimene projekcije tih pravaca.

Obrnuto: *Ako su istoimene projekcije dvaju pravaca na dvije pridružene ravnine usporedne, onda su i pravci u prostoru među sobom usporedni.*

Ako su dva pravca okomita na osi x, njihove su projekcije usporedne. Kako ti pravci leže u dvije ravnine, koje su okomite na osi x, to svi pravci tih ravnina imaju svoje projekcije u istim pravcima, pa prema tome, i ako su u ovom slučaju istoimene projekcije dvaju pravaca među sobom usporedne, ipak pravci u prostoru ne moraju biti usporedni.

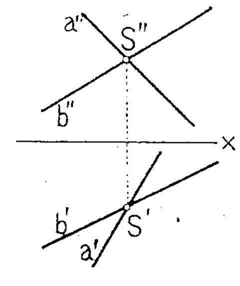
Tlocrti ili nacrti dvaju usporednih pravaca mogu pasti u isti pravac (sl. 56.), a mogu se reducirati i na dvije točke. Kada?

2. Zadatak. *Zadanom točkom M povuci pravac b usporedno sa zadanim pravcem a!* (Sl. 57.).

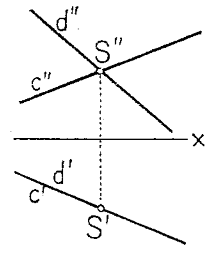
Rješenje: Točkom M' povuci pravac $b' \parallel a'$, a točkom M'' pravac $b'' \parallel a''$. Tada je $b \parallel a$.

§ 16. Ukršteni pravci

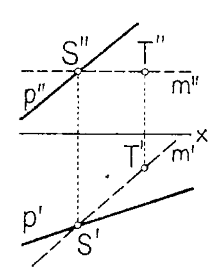
1. Na sl. 58. nacrtane su projekcije dvaju pravaca a i b, koji se sijeku u točki S. Budući da je točka S zajednička točka pravaca a i b, tad S' mora ležati u sjecištu tlocrtâ, a S'' u sjecištu nacrtâ tih pravaca, a osim toga mora biti $S'S'' \perp x$.



Sl. 58.



Sl. 59.



Sl. 60.

Ako se istoimene projekcije dvaju pravaca sijeku tako, da sjecište tlocrta i sjecište nacrta pravaca leži u istoj ordinali, onda se sijeku i oba pravca u prostoru. Samo u slučaju, kad je jedan od tih pravaca okomit na osi x, ne moraju se sjeći oba pravca u prostoru.

Samo tlocrti ili samo nacrti dvaju ukrštenih pravaca mogu pasti u isti pravac (sl. 59.). Kada?

2. Zadatak. *Zadanom točkom M povuci pravac b, koji siječe zadani pravac p!*

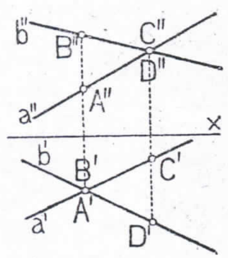
Rješenje: Ima neizmjerno mnogo pravaca, koji idu kroz zadanu točku i sijeku zadani pravac. Jedan će se takav pravac dobiti, ako se na pravcu a uzme točka S po volji, i spoji se M' sa S' i M'' sa S''. Tada je $M'S' \equiv b'$ i $M''S'' \equiv b''$. Nacrtaj sliku!

3. Zadatak. *Zadanom točkom T povuci pravac m, koji siječe zadani pravac p, a usporedan je s* Π_1! (Sl. 60.).

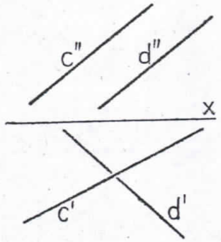
Rješenje: Nacrt m'' ide točkom T'' usporedno s osi x. Pravci m'' i p'' sijeku se u točki S'', koja je nacrt sjecišta S pravaca m i p. Povuče li se ordinala točke S'', ona siječe p' u S', a spoji li se T' i S', dobit će se tlocrt m' traženoga pravca m.

§ 17. Mimosmjerni pravci

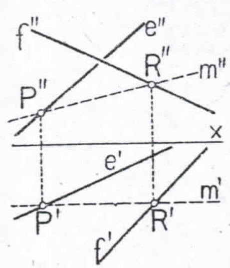
1. Na sl. 61. nacrtane su projekcije dvaju mimosmjernih pravaca, a i b. Tlocrti se a' i b' sijeku. Isto se tako sijeku i nacrti a'' i b'', ali oba ta sjecišta ne leže u istoj ordinali. Jer kad bi oba sjecišta ležala u istoj ordinali, onda bi oba pravca imala jednu zajedničku točku, pa bi se u toj točki sjekli.



Sl. 61.



Sl. 62.



Sl. 63.

U sjecištu tlocrta a' i b' nalaze se projekcije A' i B' dviju točaka A i B, od kojih je A u pravcu a, a B u pravcu b. (Točke zaklonice). Točka B je viša, nego li točka A, pa kad se gleda prema Π_1 pravac b je viši, nego li a. Točka se B u tlocrtu vidi, a A ne vidi.

U sjecištu pravaca a'' i b'' također se nalaze projekcije C'' i D'' dviju točaka C i D. Točka C je u pravcu a, a točka D u pravcu b. Kad se gleda prema Π_2, točka D je udaljenija od Π_2, pa je pravac b ispred pravca a. Točka se D u nacrtu vidi, a točka C ne vidi.

Kroz dva mimosmjerna pravca ne može se položiti jedna ravnina prometalica, pa zato tlocrti ili nacrti takovih pravaca ne mogu pasti u isti pravac.

Ako su prve ili druge ravnine prometalice dvaju mimosmjernih pravaca među sobom usporedne, onda su i tlocrti ili nacrti tih pravaca među sobom usporedni pravci (sl. 62.).

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije pravca m, koji siječe dva zadana mimosmjerna pravca e i f i koji je usporedan s* Π_2! (Sl. 63.).

Rješenje. Ima neizmjerno mnogo pravaca, koji sijeku dva zadana mimosmjerna pravca, a usporedni su s Π_2. Tlocrt je m' jednoga takovoga pravca usporedan s x i siječe tlocrte e' i f' u točkama P' i R', koje su tlocrti sjecišta P i R pravaca e i f s pravcem m. Nacrt $m'' \equiv P''R''$.

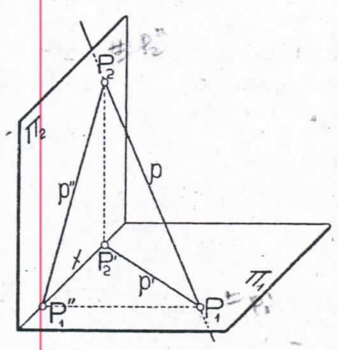
§ 18. Probodišta pravca

1. Objašnjenja. Pravac p na sl. 64. probada ravninu Π_1 u točki P_1, a ravninu Π_2 u točki P_2. Točke P_1 i P_2 zovu se *probodišta* ili *tragovi* pravca p, i to P_1 zove se *prvo probodište* ili *prvi trag*, a P_2 *drugo probodište* ili *drugi trag* toga pravca.

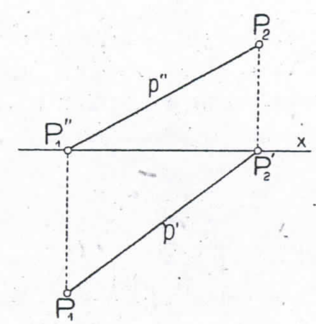
Ako su poznata probodišta P_1 i P_2 pravca p (sl. 64.), onda će se tlocrt i nacrt toga pravca odrediti na temelju ovoga razmatranja:

Budući da je probodište P_1 u Π_1, njegov je tlocrt P_1' u istoj točki, a nacrt P_1'' u osi x. Probodište P_2 nalazi se u Π_2 i zato je njegov nacrt P_2'' u istoj točki, a tlocrt P_2' u osi x. Spoji li se prema tome P_1 s P_2', dobit će se tlocrt p', a spoji li se P_2 s P_1'', dobit će se nacrt p'' pravca p.

Okrene li se ravnina Π_1 oko osi x u Π_2, dobit će se sl. 65. Ako su zadane projekcije p' i p'' pravca p, onda bi se prema toj slici odredila probodišta P_1 i P_2 po ovom pravilu:



Sl. 64.



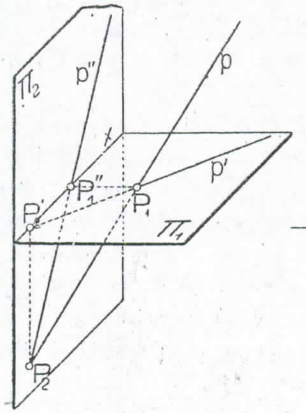
Sl. 65.

Produži li se nacrt p'' do osi x, dobije se točka P_1'', a postavi li se u toj točki okomica na os x, ona siječe p' u prvom probodištu P_1. Produži li se tlocrt p' do osi x, dobije se točka P_2', a povuče li se u toj točki okomica na os x, ona siječe p'' u drugom probodištu P_2. Prvo je probodište pravca uvijek u tlocrtu, a drugo probodište u nacrtu toga pravca.

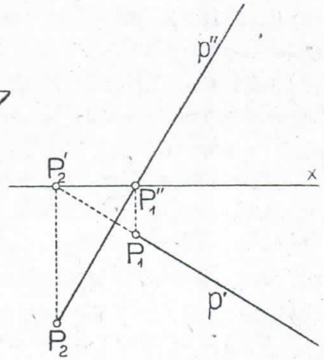
Pravac je p na sl. 65. položen prema Π_1 i Π_2 tako, da mu prvo probodište pada ispod, a drugo povrh osi x.

Bilješka. Budući da je $P_1' \equiv P_1$ i $P_2'' \equiv P_2$ može se pisati P_1 umjesto P_1', a P_2 umjesto P_2''.

2. Pravac siječe prije Π_1, zatim Π_2. Na sl. 66. pravac je p položen prema Π_1 i Π_2 tako, da prije siječe Π_1, a onda Π_2. Drugo je probodište P_2 ispod osi x, a kad se Π_1 prevali oko osi x u Π_2, onda i prvo probo-

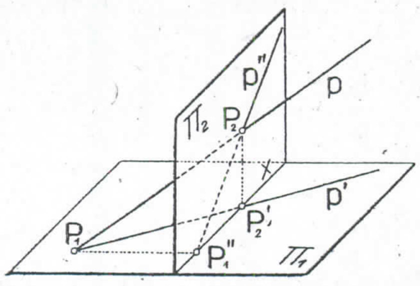


Sl. 66.

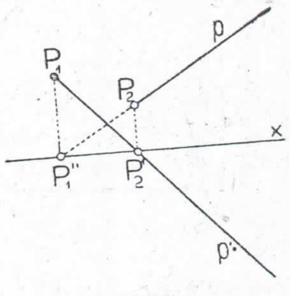


Sl. 67.

dište P_1 dođe pod os x. Na slici 67. određena su oba probodišta pravca p za slučaj, kad oba probodišta padnu ispod osi x. Ta su probodišta određena prema gornjem pravilu **(1)**.



Sl. 68.



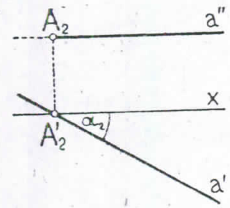
Sl. 69.

3. Pravac siječe prije Π_2, zatim Π_1. Na sl. 68. prikazan je pravac p koji najprije siječe Π_2 u točki P_2, a onda ravninu Π_1 u točki P_1. Pro-

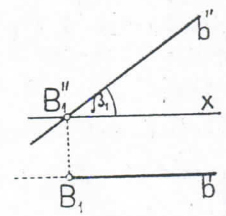
bodište je P_2 nad osi x, a kad se Π_1 okrene oko osi x u Π_2, onda i prvo probodište P_1 dođe nad os x. Na sl. 69. određena su prema gornjem pravilu **(1)** probodišta pravca p za slučaj, kad oba probodišta padnu povrh osi x.

4. Zadatak. ***Odredi probodišta pravca a (a', a''), koji je usporedan s Π_1!***

Rješenje. Pravac a ne siječe ravninu Π_1, jer je s njom usporedan, dok ravninu Π_2 siječe u točki A_2 (sl. 70).



Sl. 70.

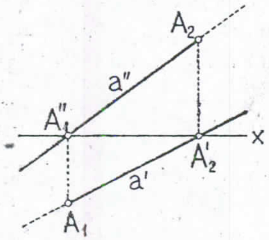


Sl. 71.

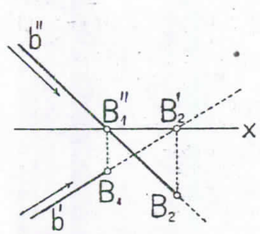
5. Zadatak. *Odredi probodište pravca b (b', b''), koji je usporedan s Π_2!*

Rješenje. Pravac b ne siječe ravninu Π_2, jer je s njom usporedan, dok ravninu Π_1 siječe u točki B_1 (sl. 71).

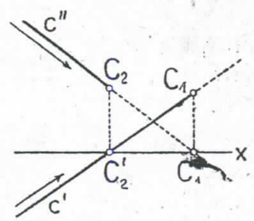
6. Vidljivost. Kad se gleda u smjeru okomitom prema Π_1, i to odozgo prema dolje (sl. 64., 66., 68.), onda se pravac p može vidjeti samo do pr-



Sl. 72.



Sl. 73.



Sl. 74.

voga probodišta P_1. Ako se p produlji preko P_1, onda je to produljenje sakriveno s ravninom Π_1. Ako se pak gleda u smjeru, koji je okomit na Π_2, onda je pravac p vidljiv do drugoga probodišta P_2, dok njegovo produljenje leži iza Π_2, pa se ne vidi. Projekcije se vidljivog dijela pravca izvuku punom, a nevidljivog dijela isprekidanom crtom (sl. 72., 73., 74.).

7. Položaj pravca prema kvadrantima. Iz projekcija se pravca može lako zaključiti, kroz koje kvadrante prolazi pravac u prostoru. Iz sl. 72. vidi se, da pravac a prolazi kroz IV., I. i II. kvadrant. Lijevo naime do A_1, obje projekcije dijela pravca leže ispod osi (IV. kv.), između A_1 i A_2 prva je projekcija dijela pravca ispod, a druga povrh osi (I. kv.), dok desno iza A_2, obje projekcije dijela pravca leže povrh osi x. (II. kv.).

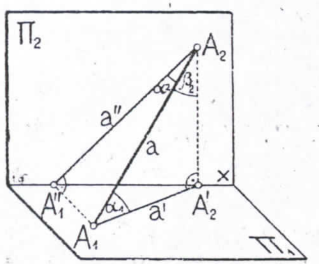
Pravac b (sl. 73.) prolazi kroz I., IV. i III. kvadrant, a pravac c (sl. 74.) prolazi kroz I., II. i III. kvadrant.

Pravac a na sl. 70. prolazi kroz I. i II. kvadrant, a pravac b na sl. 71. prolazi kroz I. i IV. kvadrant.

Pravac može prolaziti najviše kroz tri kvadranta.

§ 19. Prikloni kutovi pravca

1. Objašnjenja. Na sl. 75. nacrtan je pravac a, njegove projekcije a', a'', probodišta A_1, A_2 i oba priklona kuta α_1 i α_2. Kut α_1, što ga pravac a čini sa svojim tlocitom a', zove se *prvi prikloni kut*, a kut α_2, što ga pravac a čini sa svojim nacrtom a'', zove se *drugi prikloni kut* pravca a.

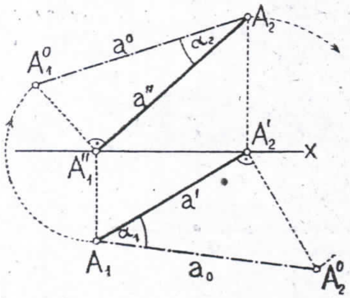


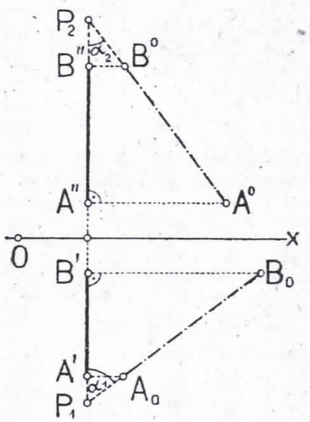
Sl. 75.

2. O zbroju priklonih kutova pravca. *Zbroj je priklonih kutova istoga pravca manji od* 90^0.

Dokaz. U trokutu $A_1A'_2A_2$ kut kod A_2' je pravi kut, pa je prema tome $\sphericalangle \alpha_1 + \beta_2 = 90^0$. Kut β_2 je kut, što ga pravac a čini s pravcem A_2A_2' ravnine Π_2, a jer taj pravac nije nacrt pravca a, to je $\sphericalangle \beta_2 > \alpha_2$. Ako se prema tome u jednadžbi $\alpha_1 + \beta_2 = 90^0$ piše mjesto β_2 manji kut α_2, onda će taj zbroj biti manji od 90^0, t. j. $\sphericalangle \alpha_1 + \alpha_2 < 90^0$.

Ako je pravac a okomit na osi x, onda je $\sphericalangle \beta_2 = \alpha_2$, pa je u tom slučaju $\sphericalangle \alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$.

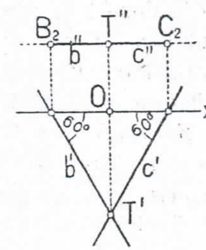

Sl. 76.


Sl. 77.

Ako je pravac $a \parallel \Pi_1$ (sl. 70.), onda je $\sphericalangle \alpha_1 = 0$, a $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle (a'x)$. Ako je pravac $b \parallel \Pi_2$ (sl. 71.), onda je $\sphericalangle \beta_1 = \sphericalangle (b''x)$, a $\sphericalangle \beta_2 = 0$.

Koliki su prikloni kutovi pravca, koji je $a)$ $\perp \Pi_1$, $b)$ $\perp \Pi_2$?

Ako su dva pravca a i b među sobom usporedni, onda su im istoimeni prikloni kutovi jednaki t. j. $\sphericalangle \alpha_1 = \beta_1$ i $\sphericalangle \alpha_2 = \beta_2$. (Zašto?).


Sl. 78.

3. Zadatak. *Zadane su projekcije a' i a'' pravca a; odredi priklone kutove toga pravca!* (Sl. 76.).

Rješenje: Ako se preloži pravokutan trokut $A_1A_2A_2'$ oko A_1A_2' (sl. 75.) u Π_1, dobit će se u preložaju toga trokuta prava veličina kuta α_1. Ako se u sl. 76. povuče $A_2'A_2^0 \perp A_1A_2'$ i učini $A_2'A_2^0 = A_2'A_2$ te spoji A_2^0 s A_1, dobit će preložaj $A_1A_2'A_2^0$ trokuta $A_1A_2'A_2$. Kako će se dobiti drugi prikloni kut α_2?

4. Zadatak. *Zadan je pravac* $AB[A(2,4), 1), B(2, 1, 5)]$; *odredi njegova probodišta i priklone kutove!* (Sl. 77).

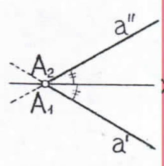
Rješenje: Pravac AB je okomit na osi x. Ako se taj pravac preloži oko $A'B'$ u Π_1 i oko $A''B''$ u Π_2, dobiju se oba probodišta P_1, P_2 i oba priklona kuta α_1 i α_2. Ujedno je $A_0B_0 = A^0B^0 = AB$.

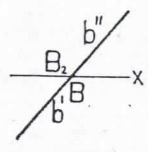
5. Zadatak. *Točkom* T (0, 3, 2) *položi pravac* b $\parallel \Pi_1$ *tako, da mu je drugi prikloni kut* $\beta_2 = 60^0$! (Sl. 78).

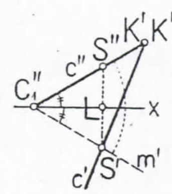
Rješenje: Točkom T'' ide nacrt $b'' \parallel x$. Prikloni je kut β_2 usporedan s Π_1, pa se na tu ravninu projicira u pravoj veličini, a čine ga pravci b' i x. Pravac b' ide točkom T' i čini sa osi x kut $\beta_2 = 60^0$. Zadatak ima dva rješenja.

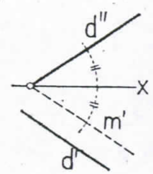
§ 20. Položaj pravca prema ravnini simetrije i ravnini istovjetnosti

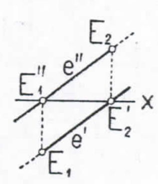
1. — 1. Ako je pravac u ravnini simetrije, obje se njegove projekcije sijeku u osi x i leže simetrično prema toj osi (sl. 79.).


Sl. 79.


Sl. 80.


Sl. 81.


Sl. 82.


Sl. 83.

2. Ako je pravac u ravnini istovjetnosti, obje njegove projekcije leže u istome pravcu (sl. 80.).

3. Ako pravac siječe ravninu simetrije u točki S, onda projekcije S' i S'' te točke moraju ležati na istoimenim projekcijama pravca i simetrično prema osi x. Točke se S' i S'' (sl. 81.) dobiju na slijedeći način:

*

Povuče li se točkom C_1'' pravac m' tako, da on čini s osi x jednaki kut kao i c'' i da su m' i c'' simetrični prema x, onda se S' nalazi u sjecištu pravaca c' i m'. Ordinala točke S' siječe c'' u S''. Da je ta konstrukcija ispravna slijedi odatle, što je trokut $S'\,S''\,C_1''$ istokračan, u kojemu je $S'\,S''$ osnovica, a $C_1''L$ visina.

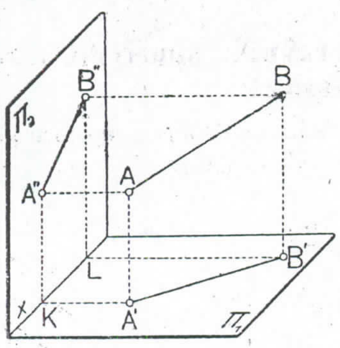
4. Ako pravac c (sl. 81.) siječe ravninu koincidencije u točki K, onda projekcije K' i K'' moraju pasti zajedno i ujedno K' mora biti u c', a K'' u c''. Prema tome K' i K'' leži u sjecištu pravaca c' i c''.

5. Kad bi na sl. 81. pravac c' bio usporedan s m', onda bi točka S'', a po tome i točka S, pala neizmjerno daleko, pa pravac c ne bi sjekao ravninu simetrije, nego bi bio s njom usporedan. Na sl. 82. nacrtane su projekcije pravca d, koji je usporedan s ravninom simetrije. Pravci m' i d'' čine s osi jednake kutove, te je $d' \parallel m'$.

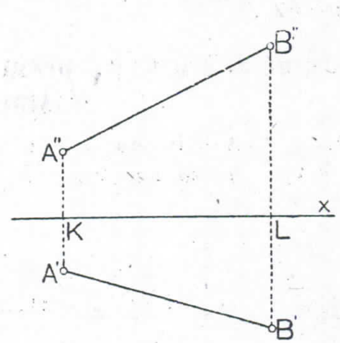
6. Kad bi na sl. 81. bio $c' \parallel c''$, onda bi točke K', K'', a po tome i točka K pala neizmjerno daleko, pa bi pravac c bio usporedan s ravninom koincidencije. Pravac je usporedan s ravninom koincidencije, kad su mu obje projekcije među sobom usporedne (sl. 83.).

§ 21. Projiciranje dužine

1. Objašnjenja. Na sl. 84. uzeta je dužina AB u I. kvadrantu. Ako se odredi tlocrt A', B' i nacrt A'', B'' krajnjih točaka A i B, onda je du-



Sl. 84.

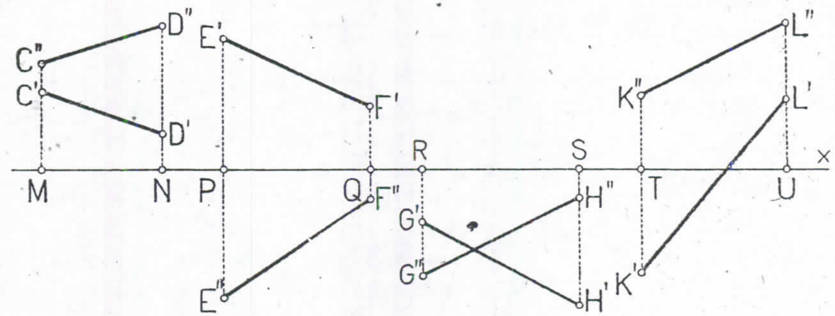


Sl. 85.

žina $A'B'$ tlocrt, a dužina $A''B''$ nacrt dužine AB. Ako se Π_1 okrene oko osi x u ravninu Π_2, dobit će se sl. 85. Projekcije se neke dužine AB nacrtaju tako, da se nacrtaju projekcije krajnjih točaka A i B te dužine, onda istoimene projekcije spoje.

Ako su obje krajnje točke dužine u II., III., ili IV. kvadrantu, onda je i čitava dužina u tom kvadrantu. Na sl. 86.—88. nacrtane su projekcije

dužine CD, koja je u II. kvadrantu, projekcije dužine EF, koja je u III. kvadrantu i projekcije dužine GH, koja je u IV. kvadrantu. Kako leže projekcije dužina, koje su u različitim kvadrantima, prema osi x? — Na sl. 89.



Sl. 86. Sl. 87. Sl. 88. Sl. 89.

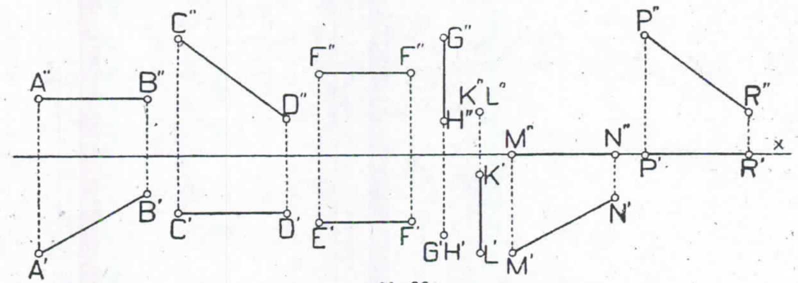
nacrtane su projekcije dužine KL, kojoj su krajnje točke u različitim kvadrantima.

Bilješka. Lik $A'B'BA$ (sl. 84.) zove se *prvi trapez prometač* a lik $A''B''BA$ zove se *drugi trapez prometač* dužine AB.

2. Određivanje položaja dužine u prostoru. Odredimo li prema postavljenom pravilu § 12. (t. 6.) položaj krajnjih točaka dužine iz njezinih projekcija, s obzirom na Π_1 ili Π_2, pa zamislimo, da smo te točke u prostoru spojili, imamo položaj dužine u prostoru s obzirom na Π_1 ili Π_2. Odredi položaj dužina u prostoru na temelju sl. 86.—89. *a)* s obzirom na Π_1, *b)* s obzirom na Π_2!

Dužina je u prostoru potpuno određena svojim tlocrtom i nacrtom.

Bilješka. Ako je dužina AB zadana s koordinatama krajnjih točaka A i B, onda se kaže: „Zadana je dužina AB [A (1, 1, 4), B (5, 3, 1)]".

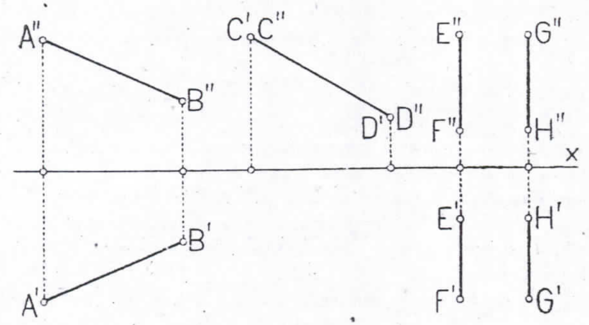


Sl. 90.

3. Osobiti položaj dužina. Sve ono, što se reklo za projekcije pravaca, koji su u osobitom položaju prema ravninama Π_1 i Π_2 [§ 14. (t. 4.)], ili prema ravnini simetrije i koincidencije [§ 20. (t. 1.)], vrijedi i za projekcije dužina, koje su u osobitom položaju prema tim ravninama.

Na sl. 90. nacrtane su projekcije dužina, koje imaju ove osobite položaje:

1. $AB \parallel \Pi_1$; $A'B' \# AB$. (Zašto?).
2. $CD \parallel \Pi_2$; $C''D'' \# CD$. (Zašto?).
3. $EF \parallel x$. Tu je $E'F' \# EF$ i $E''F'' \# EF$. (Zašto?).
4. $GH \perp \Pi_1$; $G''H'' \# GH$.
5. $KL \perp \Pi_2$; $K'L' \# KL$.
6. MN je u Π_1.
7. PR je u Π_2.



Sl. 91.

Na sl. 91. nacrtane su projekcije dužina, koje imaju još ove osobite položaje: 8. AB je u ravnini simetrije. 9. CD je u ravnini istovjetnosti. 10. $EF \perp x$ i $GH \perp x$.

Potraži dužine u prostoru na temelju sl. 90. i 91.!

§ 22. Prava veličina dužine i njezinih priklonih kutova

1. Objašnjenje. Vidjeli smo, da se dužina projicira na Π_1 ili na Π_2 u pravoj veličini, kad je usporedna s tom ravninom. Ako je dužina nagnuta prema ravnini projekcija, onda se na tu ravninu projicira umanjeno (§ 8. t. 3). Prava se veličina dužine može dobiti prelaganjem prvoga trapeza prometača $B'A'BA$ (sl. 84.) oko tlocrta $A'B'$ u Π_1 ili prelaganjem drugoga trapeza prometača $A''B''BA$ (sl. 84.) oko $A''B''$ u Π_2. Prelaganjem tih trapeza dobit će se i prava veličina priklonih kutova α_1 i α_2 dužine AB.

2. Zadatak. *Odredi pravu veličinu dužine AB i njezine priklone kutove, ako su zadane obje projekcije $A'B'$ i $A''B''$ dužine AB!* (Sl. 92.).

Prvo rješenje: *S pomoću trapeza prometača.* Preložimo li prvi trapez prometač $A'B'AB$ oko $A'B'$ u Π_1, on će doći u položaj $A'B'B_0A_0$. Taj ćemo trapez dobiti, ako u točkama A' i B' povučemo okomice na $A'B'$ i na njih prenesemo $A'B_0 = KA''$ i $B'B_0 = LB''$, te spojimo A_0 i B_0. Tada je $A_0B_0 = AB$.

Ako produljimo stranice A_0B_0 i $A'B'$, dobit ćemo prvi prikloni kut α_1.

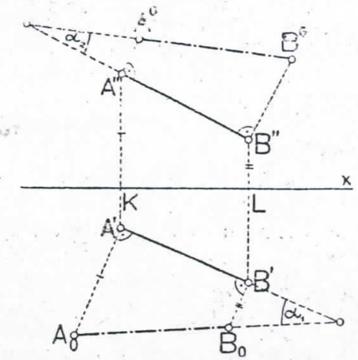
Preložimo li drugi trapez prometač $A''B''AB$ oko $A''B''$ u Π_2, on će doći u položaj $A''B''B^0A^0$. Taj ćemo trapez dobiti, ako u točkama A'' i B'' povučemo okomice na $A''B''$ i učinimo $A''A^0 = KA'$ i $B''B^0 = LB'$ te spojimo A^0 i B^0. Tada je $A^0B^0 = AB$. Ispitaj da li je $A^0B^0 = A_0B_0$!

Ako produljimo stranice $A''B''$ i A^0B^0, dobit ćemo drugi prikloni kut α_2.

Drugo rješenje: *Spomoću diferencionih trokuta.* Već smo vidjeli u § 9. t. 1. (sl. 30.), da je dužina AB hipotenuza u pravokutnom trokutu ABM, u kojem je kateta $AM = A'B'$, a kateta $MB = BB' - AA' =$ diferenciji distancija krajnjih točaka dužine AB.

Ako prema tome konstruiramo pravokutan trokut $A'B'C_0$ (sl. 93.), u kojemu je jedna kateta $A'B'$, a druga $A'C_0 = A''K - B''L = MA''$ (diferencija ordinatâ z), onda je $B'C_0 = AB$. Trokut se $A'B'C^0$ zove *prvi diferencioni trokut.* U tom trokutu imamo kod B' pravu veličinu prvog priklonog kuta α_1.

Ako se konstruira pravokutan trokut $A''B''D_0$ (sl. 93.), u kojemu je kateta $A''B''$, a druga $B''D_0 = B'L - A'K = B'N$ (diferencija ordinatâ y), onda je također $A''D_0 = AB$. Trokut se $A''B''D_0$ zove *drugi diferencioni trokut.* U tom je trokutu kut α_2 prava veličina drugog priklonog kuta dužine.



Sl. 92.

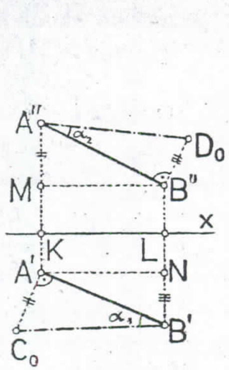
3. Zadatak. *Odredi pravu veličinu dužine $AB[A(1, 2, 3), B(5, 4, -1)]$ i njezine priklone kutove!* (Sl. 94.).

Rješenje. Preložimo li prvi trapez prometač oko $A'B'$ u Π_1, onda će se okomice u A' i B' dužine $A'B'$ postaviti na protivne strane te dužine, jer su točke A i B na različitim stranama ravnine Π_1, pa ordinate z tih točaka imadu protivne predznake.

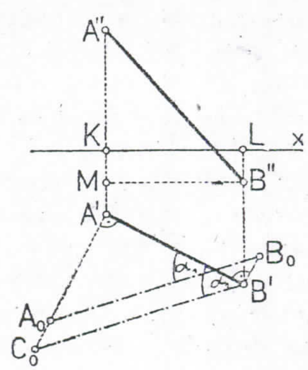
Povučemo li točkom B' dužinu $B'C_0 \parallel A_0B_0$, onda je pravokutan trokut $A'B'C_0$ prvi diferencioni trokut, u kojemu hipotenuza $C_0B' = A_0B_0 = AB$, a kateta $A'C_0 = KA'' - (-B''L) = KA'' + B''L = A''M$.

Kut α_1 je prava veličina prvog priklonog kuta dužine AB.

Odredi pravu veličinu dužine AB i drugi prikloni kut *a)* spomoću drugog trapeza prometača, *b)* spomoću drugog diferencionog trokuta!



Sl. 93.



Sl. 94.

4. Zadaci za vježbu

1. Zadanom točkom S (4, 2, 3) položi dva pravca, od kojih je jedan kos, a drugi *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$, *c)* $\parallel x$, *d)* $\perp \Pi_1$, *c)* $\perp \Pi_2$, *f)* $\perp x$!

2. Točkom S (1, 4, — 3) položi pravac $a \parallel \Pi_1$ i pravac $b \parallel \Pi_2$!

3. Nacrtaj projekcije dvaju ukrštenih pravaca, kojima nacrti padaju zajedno!

4. Dva zadana ukrštena pravca a i b presijeci trećim pravcem c, koji je *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$, *c)* u općem položaju!

5. Zadana dva usporedna pravca a i b presijeci trećim pravcem c, koji je u općem položaju!

6. Točkom A (2, — 3, 1) povuci pravac, koji je $\parallel \Pi_2$, te siječe zadani pravac a, koji je $\parallel \Pi_1$!

7. Nacrtaj projekcije dvaju mimosmjernih pravaca, kojima su tlocrti dva usporedna pravca!

8. Nacrtaj projekcije dvaju mimosmjernih pravaca a i b, ako je *a)* $a \parallel \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$, *b)* a kos, $b \perp \Pi_1$, *c)* $a \perp \Pi_1$, $b \perp \Pi_2$!

9. Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b; nacrtaj projekcije pravca e, koji siječe pravac b, a usporedan je s pravcem a!

10. Zadana su tri mimosmjerna pravca a, b i c, te je $a \parallel \Pi_1$, $b \perp \Pi_2$, e kos; položi onu priječnicu pravaca a i b, koja je usporedna s c!

11. Odredi probodišta i priklone kutove ovih pravaca:

a [A (1, 4, — 1), B (7, — 2, — 5)],
b [C (— 2, — 3, — 4), D (4, — 1, 4)],
c [E (— 1, 1, — 3). F (3, 0, 2)].
d [G (0, — 1, 2), H (4, — 4, — 3)],
e [I (1, 5, 3), J (8, — 2, 3)],
f [F_1 (— 1, 4, 0), F_2 (3, 0, 3)],
g [K (7, 1, 4), L (3, — 3, — 2)],
h [H_1 (1, — 5, 0), H_2 (4, 0, 2)].

Odredi položaj tih pravaca u prostoru! Kroz koje kvadrante prolazi svaki pravac?

12. Nacrtaj projekcije pravca, koji ide zadanom točkom usporedno s Π_1 (ili s Π_2), te s Π_2 (ili s Π_1) čini zadani kut! Na pr.:

a [A (3, 4, 1), $\alpha_1 = 60^0, \alpha_2 = 0^0$],
b [B (1, — 3, — 2), $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 45^0$],
c [C (— 1, 3, — 5) $\gamma_1 = 60^0$, $\gamma_2 = 0^0$)],
d [D (3, — 6, 3), $\delta_1 = 45^0$, $\delta_2 = 0^0$)].

Odredi probodišta tih pravaca! Kroz koje kvadrante prolazi svaki pravac?

13. Zadan je pravac p [P_2 (3, 0, 5), A (7, 1, —) $\alpha_1 = 30^0$]; odredi nacrt p''! Koliko ima rješenja?

14. Odredi probodišta *a)* dvaju ukrštenih, *b)* dvaju usporednih, *c)* dvaju mimosmjernih pravaca!

15. Odredi na zadanom pravcu onu točku, u kojoj taj pravac siječe ravninu simetrije! Neka je:

a [A_1 (4, 5, 0), T (1, 2, 3)]; b [B_1 (3, — 1, 0), B_2 (5, 0, 2)];
c [C (2, 3, 5), $\alpha_2 = 60^0$, $c \parallel \Pi_1$]; d [D (2, 4, 0), $\alpha_1 = 45^0$, $d = \Pi^2$].

16 Odredi na zadanom pravcu onu točku, u kojoj taj pravac siječe ravninu istovjetnosti! Neka je:

a [A (3, 1, — 3), B (0, 1, — 3)]; b [C (0, — 4, 2), D (7, — 4, 6)];
c [E (1, 6, 3), F (6, 1, 3)]; d [G (4, 1, — 5), H (— 4, — 2, 4)].

17. Točkom T (6, 4, 4) povuci pravac, koji leži u ravnini simetrije, te mu projekcije čine sa osi x kutove od 45°! Odredi priklone kutove toga pravca!

18. Točkom T (3, 5, — 5) povuci pravac, koji leži u ravnini istovjetnosti, te mu projekcije čine sa osi x kut od 30°! Odredi priklone kutove toga pravca!

19. Točkom A (4, 2, 1) povuci pravac, koji je usporedan *a)* s ravninom simetrije, *b)* s ravninom koincidencije!

20. Nacrtaj projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b, ako je a u ravnini simetrije, a $b \parallel x$!

21. Nacrtaj projekcije ovih dužina i potraži njihov položaj prema Π_1 i prema Π_2:

AB [A (1, 5, 1), B (6, 2, 4)], IJ [I (— 1, 1, 4), J (4, 3, 4)],
CD [C (2, 6, — 5), D (7, 3, — 1)], KL [K (0, 5, — 1), L (5, 5, — 4)],
EF [E (0, — 3, — 3), F (4, — 4, — 2)], MN [M (1, 5, 1), N (1, 5, 4)],
GH [G (— 2, — 3, 4), H (3, — 1, 1)], PR [P (3, 6, 3). R (3, 1, 3)].

22. Nacrtaj projekcije ovih dužina i potraži njihov položaj u prostoru:

AB [A (0, 1, 1), B (4, 3, 3)], IJ [I (0, 1, 0), J (3, 5, 0)],
CD]C (1, 2, 2), D (1, 5, 5)], KL [K (0, 5 — 1). L (5, 5, — 4)],
EF [E (— 1, — 5, 5), F (4, — 1, 1)], MN [M (0, 2, 2), N (6, — 3, — 3)],
GH [G (2, 3, — 3), H (7, 3, — 3)], PQ [P (4. — 2, 2), Q (— 1, 3, — 5)].

23. Nacrtaj projekcije dužine, koja se nalazi u kojemgod kvadrantu, a osim toga je:

a) $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$, *c)* $\perp \Pi_1$, *d)* $\perp \Pi_2$, *e)* $\parallel x$!

24. Kad se dužina projicira u pravoj veličini?

25. Odredi pravu veličinu dužine i njezinih priklonih kutova *a)* s pomoću trapeza prometača, *b)* s pomoću diferencionih trokuta, ako su zadane koordinate krajnjih točaka Na primjer:

AB [A 1, 2,5, 5), B 5, 4, 1)], IJ [I (3, 3, 7) J (3, 1, 4)],
CD [C (— 2, — 3, 7), D (3, — 1, 2)], KL [K (1, 3, 3), L (6, — 3, — 1)],
EF [E (0, — 1, — 5), F (3, — 4, — 0,5)], MN [M (3, 6, 5), N (5, 1, — 5)],
GH [G (2, 1, — 2), H (— 2, 4, — 5)], PQ [P (1, 4, — 4), Q (5, 1, — 1)].

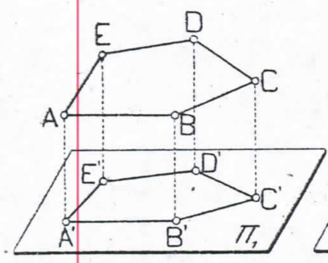
26. Zadan je tlocrt $A'B'$ dužine AB, nacrt A'' i prava veličina te dužine: odredi nacrt $A''B''$! Neka je $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, —)$, $AB = 5{,}5$. Koliko ima rješenja? — Uputa. Spomoću prvog diferencionog trokuta odredi visinsku razliku drugih ordinata krajnjih točaka.

27. Zadan je nacrt $A''B''$ dužine AB, tlocrt A' i drugi prikloni kut α_2; odredi tlocrt $A'B'$ te dužine! Neka je A (2, 1, 1), B (7, —, 5), $\alpha_2 = 30^0$. — Uputa: Sastavi drugi diferencioni trokut!

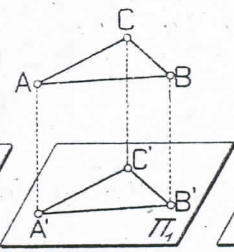
IV. Projiciranje ravnih likova na dvije ravnine

§ 23. Objašnjenja

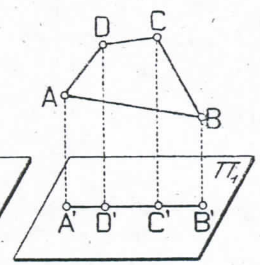
1. Na slici 95. prikazana je ravnina Π_1 i peterokut $ABCDE$ u prostoru. Projiciramo li vrhove toga lika na ravninu Π_1 i spojimo li projekcije tih vrhova onim redom, kojim su spojeni vrhovi u prostoru, imamo



Sl. 95.



Sl. 96.



Sl. 97.

projekciju toga lika. Peterokut $A'B'C'D'E'$ je projekcija peterokuta $ABCDE$ na ravnini Π_1.

Projekcija je ravnog lika na ravnini uopće ravan lik.

Na slici 96. trokut ABC usporedan je s Π_1; njegova je projekcija trokut $A'B'C'$, koji je sukladan s trokutom ABC. (Zašto)?

Kad je ravnina lika usporedna s ravninom projekcija, onda se taj lik projicira u pravoj veličini.

Na slici 97. ravnina je četverokuta $ABCD$ okomita na ravnini projekcija Π_1; projekcija je toga lika dužina $A'B'$.

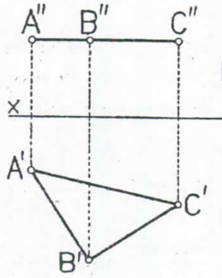
Kad je ravnina lika okomita na ravnini projekcija, onda je projekcija toga lika dužina.

§. 24. Projiciranje trokuta

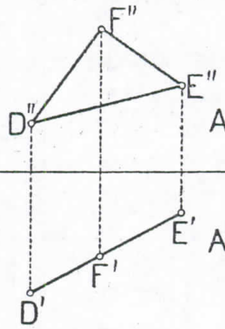
1. **Trokut je u osobitom položaju prema Π_1 i Π_2.** — 1. Na sl. 98. nacrtali smo projekcije trokuta ABC, koji je usporedan s Π_1. Njegov je tlocrt $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$. Budući da je ravnina toga trokuta $\perp \Pi_2$ i $\parallel \Pi_1$, njegov je nacrt dužina $A''C'' \parallel x$. — Nacrtaj projekcije trokuta, koji je $\parallel \Pi_2$!

2. Na sl. 99. nacrtali smo projekcije trokuta DEF, koji je $\perp \Pi_1$, a nagnut prema Π_2. Njegov je tlocrt dužina $D'E'$, koja je nagnuta prema

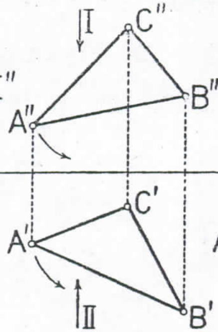
osi x, a nacrt trokut $D''E''F''$. Odredi pravu veličinu toga trokuta prelaganjem oko $D'E'$ u Π_1! Nacrtaj projekcije trokuta, koji je $\perp \Pi_2$, a nagnut prema Π_1, i odredi prelaganjem njegovu pravu veličinu!



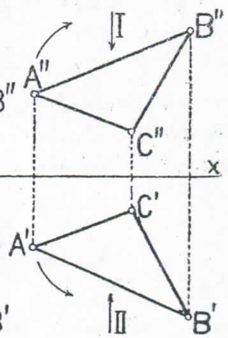
Sl. 98.



Sl. 99.



Sl. 100.



Sl. 101.

2. Trokut je u općem položaju u prostoru. Na sl. 100. prikazan je tlocrt i nacrt trokuta ABC, koji je nagnut prema Π_1 i Π_2. Obje su te projekcije trokuti. Kako ćeš odrediti pravu veličinu toga trokuta?

3. Vidljivost. Odredimo li na osnovi sl. 100. položaj trokuta ABC u prostoru s obzirom na ravninu Π_2, pa taj trokut motrimo odozgo i sprijeda, vidjet ćemo istu stranu toga lika. Na sl. 101. nacrtali smo projekcije još jednoga trokuta ABC, pa potražimo li taj trokut u prostoru s obzirom na ravninu Π_2 i onda ga motrimo odozgo i sprijeda, vidjet ćemo njegove različite strane.

Vidi li se ista strana ili različite strane trokuta, možemo to odrediti i iz samih projekcija lika. Ako na sl. 100. uočimo poredak slova, kojima su označene projekcije vrhova trokuta, vidjet ćemo, da taj poredak ima u tlocrtu i nacrtu isti smjer. Na sl. 101. pak poredak slova A', B', C' i A'', B'', C'' ima protivan smjer, kako je označeno strelicama. Po poretku slova u tlocrtu i nacrtu nekoga lika može se zaključiti, da li se kod promatranja lika odozgo i sprijeda vidi ista strana ili različite strane lika.

Ako poredak slova ima u tlocrtu i nacrtu isti smjer, onda se vidi ista strana lika. Ako poredak slova ima u tlocrtu i nacrtu različite smjerove, onda se vide različite strane lika.

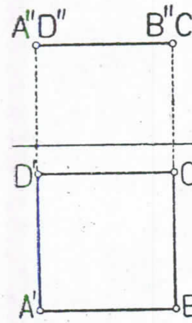
§ 25. Projiciranje četverokuta, mnogokuta i kružnice

1. Projekcije paralelograma. — 1. Na sl. 102. nacrtan je tlocrt i nacrt kvadrata $ABCD$, koji je $\parallel \Pi_1$ i kojemu su stranice AB i CD usporedne

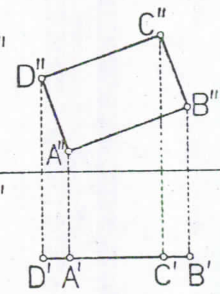
s Π_2, a stranice AD i BC okomite na Π_2. Tlocrt je $A'B'C'D' \cong ABCD$. Nacrt je kvadrata dužina, koja je usporedna s osi x i jednaka AB ili CD.

2. Na sl. 103. nacrtane su projekcije pravokutnika $ABCD$, koji je $\parallel \Pi_2$, i kojemu su stranice nagnute prema Π_1. Nacrt je $A''B''C''D'' \cong ABCD$, a tlocrt je dužina $D'B' \parallel x$.

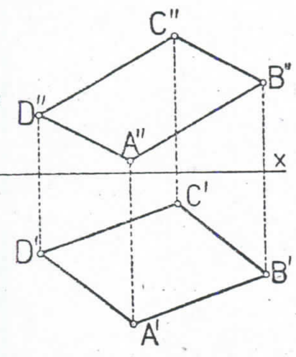
3. Na sl. 104. nacrtane su projekcije romboida $ABCD$, koji je u općem položaju u prostoru. Budući da su dvije i dvije suprotne stranice



Sl. 102.



Sl. 103.

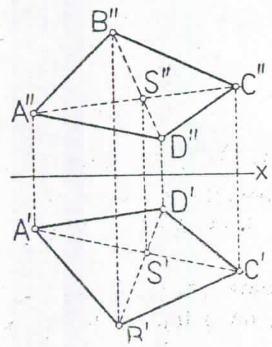


Sl. 104.

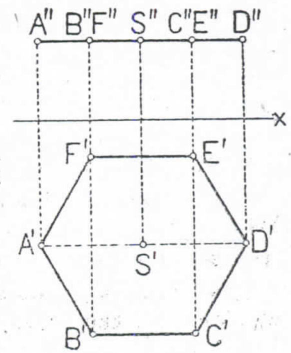
romboida među sobom usporedne, bit će i projekcije tih stranica među sobom usporedne, pa se romboid projicira na Π_1 i na Π_2 opet kao romboid.

Prava se veličina romboida može nacrtati, ako su poznate prave veličine dviju njegovih nejednakih stranica i jedne dijagonale.

Vidi li se kod promatranja romboida odozgo i sprijeda ista strana njegova ili različite strane? Pazi na poredak slova u tlocrtu i nacrtu (§ 24. t. 3)! Nacrtaj projekcije romboida, kojemu su vidljive različite strane!



Sl. 105.



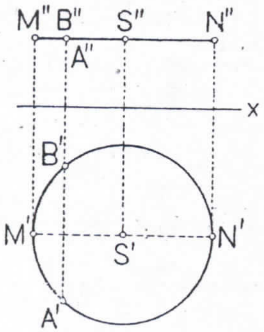
Sl. 106.

2. Projiciranje trapezoida. Ako je trapezoid u općem položaju, onda se projekcije triju njegovih vrhova, na pr. A, B, C, mogu po volji uzeti. Projekcije četvrtoga vrha D ne mogu se uzeti po volji, jer bi se moglo dogoditi, da taj četvrti vrh ne leži u istoj ravnini s prva tri vrha, pa u tom slučaju ne bismo imali ravan, nego t. zv. vitoperi četverokut. Da i četvrti vrh D bude u istoj ravnini s vrhovima A, B i C, nacrtat ćemo projekcije dijagonale AC, uzet ćemo na njoj točku S (S', S'') i spojit ćemo je s vrhom B. Pravac BS je druga dijagonala četverokuta, a jer se obje dijagonale sijeku u točki S, one leže u istoj ravnini, pa možemo četvrti vrh D (D', D'') gdjegod uzeti na dijagonali BS.

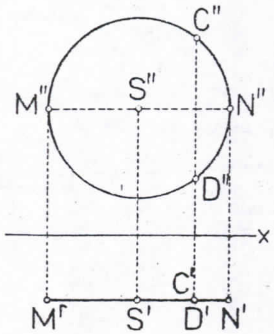
Budući, da jedan par usporednih stranica paralelograma određuje ravninu toga lika, to su projekcijama triju vrhova paralelograma određene projekcije i četvrtoga vrha.

U trapezu dvije usporedne stranice također određuju ravninu toga lika, pa su projekcijama tih dviju stranica određene projekcije i neparalelnih stranica, dakle i samoga lika. Nacrtaj projekcije trapeza!

3. Projekcije pravilnog mnogokuta možemo za sada nacrtati samo onda, ako je ravnina toga lika usporedna s Π_1 ili s Π_2, ili se lik nalazi u jednoj od tih ravnina. Na sl. 106. nacrtane su projekcije pravilnog šesterokuta, koji je $\parallel \Pi_1$.



Sl. 107.



Sl. 108.

4. Projiciranje kružnice. Na sl. 107. nacrtan je tlocrt i nacrt kružnice, koja je usporedna s Π_1. Ta se kružnica projicira na Π_1 u pravoj veličini, a na Π_2 kao dužina $M''N''$, kaja je usporedna s osi x i jednaka promjeru kružnice. Ako je točka na kružnici, onda su njezine projekcije u istoimenim projekcijama te kružnice. Na sl. 107. nacrtane su projekcije dviju točaka A i B kružnice.

Na sl. 108. nacrtane su projekcije kružnice, koja je $\parallel \Pi_2$. Što su projekcije te kružnice? U slici su nacrtane i projekcije dviju točaka C i D, koje leže na kružnici.

Ako je kružnica nagnuta prema ravnini projekcija, ona se na tu ravninu projicira kao elipsa, no o tom će biti poslije govora.

5. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije trokuta, koji je *a)* u Π_1, *b)* u Π_2, *c)* $\parallel \Pi_2$, *d)* $\perp \Pi_2$!
2. Nacrtaj projekcije istostranog trokuta, koji je usporedan s Π_1!

3. Nacrtaj projekcije trokuta ABC [A (3, 5, 7), B (5, 7, 3), C, (7, 3, 5)] i odredi pravu veličinu toga trokuta! — Uputa. Odredi pravu veličinu svake stranice napose i sastavi trokut!
4. U zadanom trokutu povuci pravac $m \parallel \Pi_1$!
5. Nacrtaj projekcije težišta T trokuta ABC [A (1, 4, 2), B (4, 1, 3), C (7, 3, 1)]!
6. Nacrtaj projekcije kvadrata, koji je usporedan s Π_2 i kojemu su sve stranice nagnute prema Π_1!
7. Nacrtaj projekcije kvadrata, koji je u Π_1, te mu je jedna dijagonala $\parallel x$.
9. Nacrtaj projekcije pravokutnika, koji je u Π_2!
8. Nacrtaj projekcije i odredi pravu veličinu paralelograma $ABCD$ [A (0, 1,5, 2,5), B, (3,5, 4,5, 2) C (9, 4, 4,5), D]! — Uputa. Popuni trokut ABC na paralelogram, zatim odredi pravu veličinu toga trokuta i t. d.
10. U zadanom paralelogramu povuci pravac m, koji je *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$! — Uputa za *a)*. Povuci $m'' \parallel x$...
11. Nacrtaj projekcije trapeza, kojemu su usporedne stranice $\parallel \Pi_1$!
12. Nacrtaj projekcije četverokuta $ABCD$ [A (2,2,1), D (6,6,2), B (3,—,4), C (5,—,4)], koji je $\perp \Pi_1$! Odredi pravu veličinu toga lika preloženjem u Π_1 oko $A'D'$.
13. Nacrtaj projekcije pravilnog peterokuta, koji je *a)* u Π_1, *b)* u Π_2, *c)* $\parallel \Pi_1$, *d)* $\parallel \Pi_2$!
14. Nacrtaj projekcije kružnice, koja je *a)* u Π_1, *b)* u Π_2!

V. Projiciranje tjelesa na dvije ravnine

§ 26. O projiciranju tijela uopće

1. Objašnjenja. Projekcija se tijela na ravnini dobije tako, da se na tu ravninu projiciraju sve plohe, kojima je tijelo omeđeno. Uglasto je tijelo omeđeno ravnim plohama, plohe su omeđene ravnim bridovima, a bridovi točkama (vrhovima). Ako se vrhovi uglastoga tijela projiciraju na neku ravninu, pa se te projekcije spoje na način, kako su spojeni vrhovi u prostoru, dobit će se projekcije bridova i ploha, kojima je to tijelo omeđeno.

2. Vidljivost. Gledamo li tijelo u smjeru projiciranja, onda vidimo samo one plohe tijela, koje su okrenute prema oku, a ne vidimo plohe, koje su okrenute prema ravnini projekcijâ. Bridovi, koji dijele vidljivi dio ploha od nevidljivoga, zovu se *prava kontura* tijela, a projekcija tih bridova zove se *prividna kontura*. Bridovi se konture uvijek vide. Isto se tako vide bridovi, u kojima se sijeku vidljive plohe tijela, a ne vide se oni bridovi, u kojima se sijeku nevidljive plohe. Ako se vidi vrh tijela, koji leži unutar konture (na pr. vrh E na sl. 114.), tad se vide svi bridovi, koji se sastaju u tom vrhu. Ako se pak vrh tijela ne vidi, onda se ne vide ni bridovi, koji izlaze iz toga vrha. Ako se projekcije dvaju mimosmjernih bridova tijela sijeku unutar konture (na pr. $E'A'$ i $C'D'$ u sl. 114.), onda je jedan od tih bridova vidljiv, a drugi nevidljiv. Vidljivost se brida odredi na način, koji je prikazan u § 17. t. 1.

Projekcije se vidljivih bridova izvlače punim, a nevidljivih isprekidanim crtama.

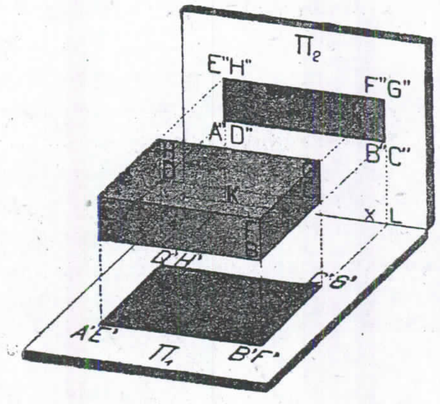
Uzmi model kojegagod uglastoga tijela, motri to tijelo u smjeru, koji je okomit *a)* na Π_1, *b)* na Π_2, i pokaži svaki put, koje plohe, bridove i vrhove vidiš, a koje ne vidiš! Pokaži svaki put one bridove, koji pripadaju konturi! Da li isti bridovi tijela pripadaju konturi kod motrenja prema Π_1 i kod motrenja prema Π_2?

§ 27. Projiciranje prizme

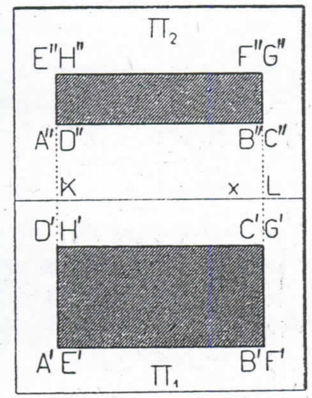
1. Projiciranje pravokutnog paralelepipeda. Na sl. 109. prikazane, su ravnine projekcija Π_1 i Π_2 te pravokutan paralelepiped $ABCDEFGH$, kojemu su osnovke $ABCD$ i $EFGH$ usporedne s Π_1, a prednja i stražnja pobočka usporedne s Π_2. U toj slici nacrtan je nadalje tlocrt i nacrt paralelepipeda. Tlocrt je pravokutnik, koji je sukladan s osnovkama. (Zašto?) Nacrt je pravokutnik, koji je sukladan s prednjom i stražnjom pobočkom. (Zašto?). U tlocrtu je prikazana u pravoj veličini dužina i širina, a u na-

crtu dužina i visina paralelepipeda. Bridovi, koji su među sobom usporedni i jednaki, projiciraju se na istu ravninu kao usporedne i jednake dužine.

Pokaži na sl. 109. tlocrt i nacrt svakoga pravokutnika, kojim je paralelepiped omeđen! Kakovi su likovi te projekcije i zašto su baš takovi likovi? Pokaži projekcije svakoga brida tijela!

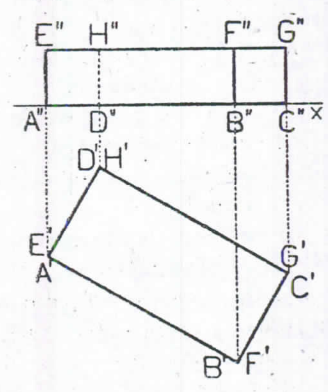


Sl. 109.

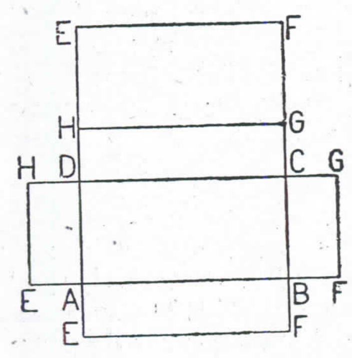


Sl. 110.

Okrene li se ravnina Π_1 oko osi x u Π_2, dobije se tlocrt i nacrt paralelepipeda, kako je prikazan na sl. 110.



Sl. 111.



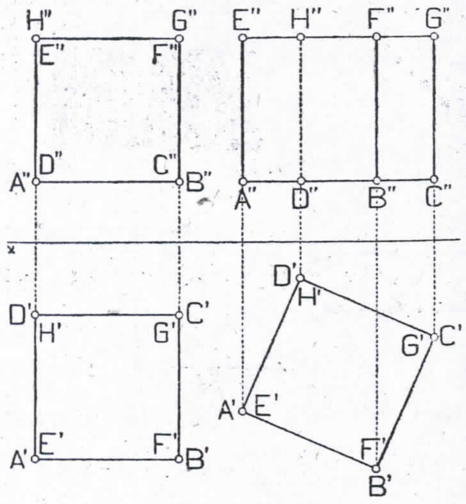
Sl. 112.

Pokaži na osnovci sl. 110. položaj u prostoru *a)* svakog vrha, *b)* svakog brida, *c)* svake plohe tijela s obzirom na Π_1 i na Π_2!

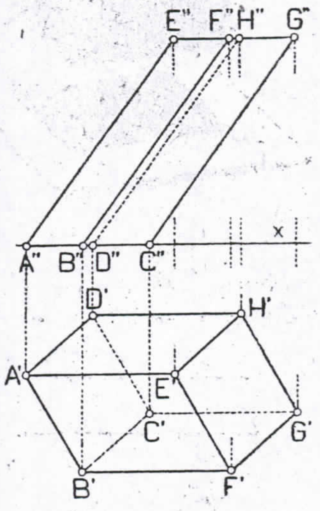
Na sl. 111. nacrtane su projekcije istoga paralelepipeda, koji je tako postavljen, da su mu osnovke usporedne s Π_1, a sve pobočke nagnute prema Π_2. Pokaži, koje se plohe paralelepipeda projiciraju u pravoj veličini, a koje umanjeno! Koji se bridovi projiciraju u pravoj veličini i na koju ravninu?

2. Mreža tijela. Na osnovi tlocrta i nacrta pravokutnog paralelepipeda može se nacrtati njegova mreža (sl. 112.). Iz tlocrta se na sl. 110. ili na sl. 111. uzme dužina i širina, a iz nacrta visina tijela, pa se spomoću tih dimenzija nacrta šest pravokutnika, od kojih su po dva sukladna i poredana kao na sl. 112.

3. Projiciranje kocke i nekih prizama. Na sl. 113. nacrtane su projekcije kocke u dva različita položaja. Najprije se nacrta tlocrt, a onda nacrt.



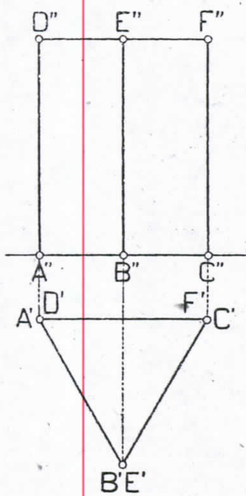
Sl. 113.



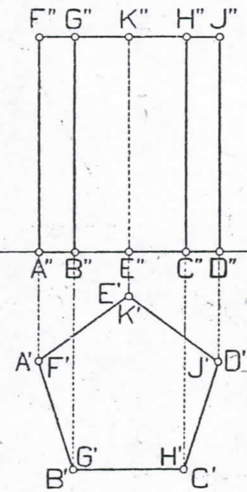
Sl. 114.

Na sl. 114. nacrtane su projekcije kosoga paralelepipeda, kojemu je donja osnovka u Π_1 i kojemu su pobočni bridovi usporedni s Π_2. Bridovi, koji su među sobom usporedni i jednaki, projiciraju se na istoj ravnini kao usporedne i jednake dužine. Na sl. 114. najprije smo nacrtali tlocrt $A'B'C'D'$ donje osnovke tijela, zatim tlocrt $A'E' \parallel B'F' \parallel C'G' \parallel D'H'$ pobočnih bridova, prenijeli smo $A'E' = B'F' = C'G' = D'H'$ i napokon smo nacrtali tlocrt $E'F'G'H'$ gornje osnovke. Pošto smo konstruirali tlocrt, odredimo, na osnovi toga tlocrta, nacrt tako, da najprije nacrtamo nacrte osnovaka, zatim nacrte pobočnih bridova. Nacrt je donje osnovke dužina $A''C''$ u osi x, a nacrt gornje osnovke dužina $E''G'' \parallel x$.

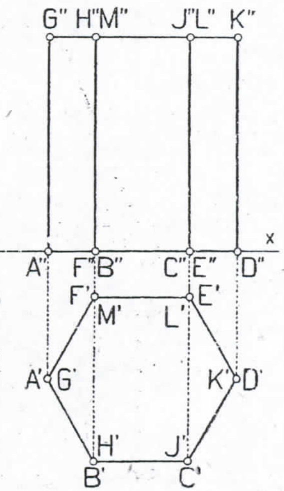
Na sl. 115.—117. nacrtane su projekcije triju uspravnih prizama i to: pravilne trostrane (sl. 115.), pravilne peterostrane (sl. 116.) i pravilne šesterostrane prizme (sl. 117.). Donje su osnovke tih prizama u Π_1, pa se



Sl. 115.



Sl. 116.



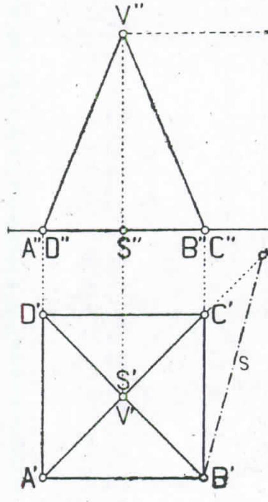
Sl. 117.

na tu ravninu projiciraju u pravoj veličini. Kad je osnovka u Π_1 ili $\parallel \Pi_1$, onda se najprije nacrta tlocrt prizme, a ako je osnovka u Π_2 ili $\parallel \Pi_2$, onda se najprije nacrta nacrt.

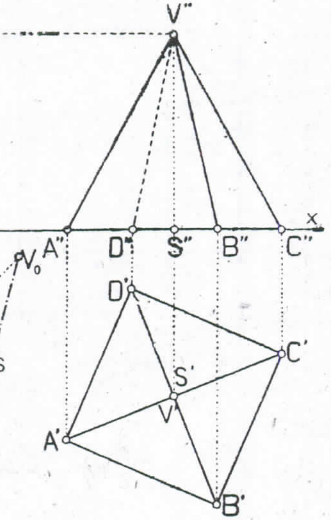
§ 28. Projiciranje piramide

1. Projiciranje kvadratične piramide. Na sl. 118. nacrtane su projekcije kvadratične piramide. Osnovka je te piramide u Π_1, te su joj dva brida usporedna s osi x. Tlocrt je osnovke sukladan s tom osnovkom i taj se tlocrt najprije nacrta. Vrh se V piramide projicira na Π_1 u središte kvadrata $A'B'C'D'$, a pobočni bridovi projiciraju se u dijagonale toga kvadrata. Tlocrti su pobočaka pravokutni sukladni trokuti, koji su manji od pobočaka u prostoru. Budući da je osnovka u Π_1, njezin je nacrt dužina, koja je u osi x i koja je jednaka osnovnom bridu. Visina je piramide okomita na Π_1 i zato je njezin tlocrt točka u V', a nacrt dužina $S''V''$, koja je okomita na osi x i koja je jednaka pravoj veličini visine. Nacrt je prednje pobočke trokut $A''B''V''$, koji je manji od pobočke u prostoru. U isti taj trokut projicira se stražnja pobočka CDV. Desna i lijeva pobočka projiciraju se kao dužine, koje su jednake pravoj veličini pobočnih visina.

Na sl. 119. nacrtane su projekcije iste kvadratične piramide, kojoj je osnovka u Π_1, ali joj nijedan osnovni brid nije usporedan s osi x. Objasni projekcije te piramide!

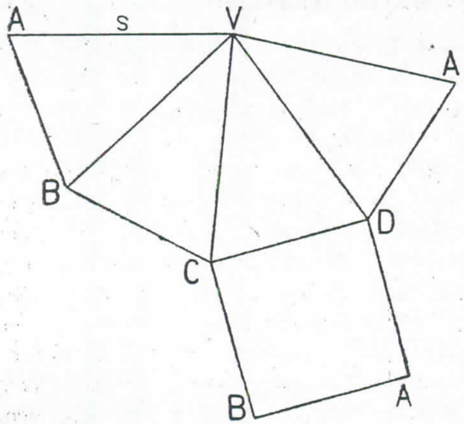


Sl. 118.



Sl. 119.

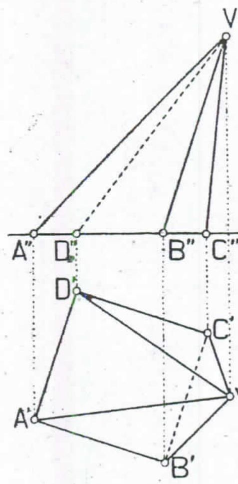
2. Prava veličina pobočnih bridova. Budući da nijedan pobočni brid kvadratične piramide nije usporedan ni s Π_1 ni s Π_2, to se nijedan od tih bridova ne projicira u pravoj veličini. Na sl. 118. određena je prava veličina pobočnog brida BV na način kako se određuje prava veličina dužine, kad su joj zadane projekcije. ($S'V_0 \perp S'B'$, $S'V_0 =$ $= S''V''$; $B'V_0 = BV$).



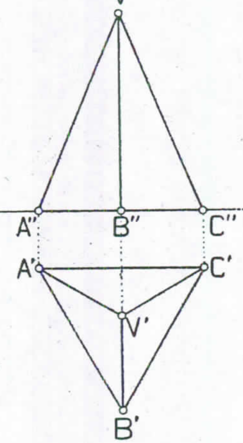
Sl. 120.

3. Mreža. Na osnovi tlocrta i nacrta na sl. 118. nacrtali smo mrežu kvadratične piramide (sl. 120.). Oko V opisali smo luk s polumjerom V_0B' (= pravoj veličini pobočnih bridova), prenijeli smo kao tetive toga luka dužine, koje su jednake $A'B'$ (prava veličina osnovnih bridova) i spojili smo krajnje točke tih tetiva s V. Na taj smo način dobili pobočje piramide (četiri sukladna istokračna trokuta). Na bridu CD nacrtali smo još osnovni kvadrat. Tu smo mrežu mogli nacrtati i na osnovi sl. 119.

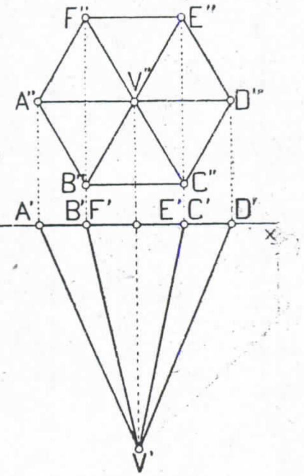
4. Projekcije nekih piramida. Na slici 121. nacrtane su projekcije pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_1, a na sl. 122. nacrtane su projekcije pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_1, a na slici 123. projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_2. Kod prvih dviju piramida najprije se nacrta tlocrt, a kod treće nacrt. Okomica spuštena s vrha na osnovku pravilne trostrane i pravilne šesterostrane piramide, ima svoje nožište u središtu osnovci opisane kružnice, pa je u toj točki projekcija vrha na osnovku.



Sl. 121.



Sl. 122.



Sl. 123.

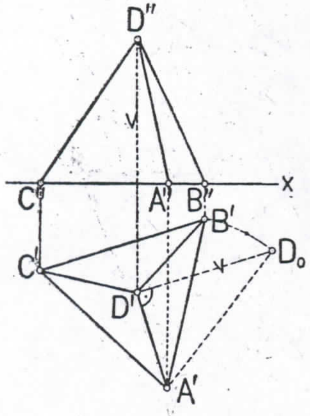
§ 29 Projiciranje tetraedra i oktaedra

1. Objašnjenja. Tetraedar je piramida, koja je omeđena s četiri trokuta, ima 6 bridova i 4 vrha. Tetraedar može biti pravilan ili nepravilan. Pravilan je tetraedar omeđen s 4 sukladna istostrana trokuta, dok je nepravilan tetraedar omeđen s 4 uopće nepravilna i nesukladna trokuta. Četiri točke prostora, koje ne leže u istoj ravnini, mogu se smatrati vrhovima tetraedra.

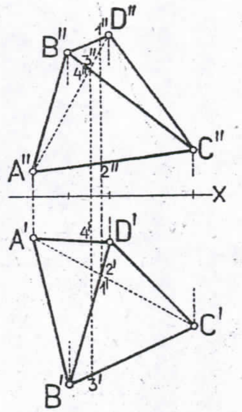
Oktaedar je pravilno tijelo, koje je omeđeno s 8 sukladnih istostranih trokuta, ima 12 jednakih bridova i 6 vrhova. Oktaedar se sastoji iz dvije sukladne kvadratične istobridne piramide sa zajedničkom osnovkom. Oktaedar ima tri jednake, među sobom okomite osi, koje idu kroz istu točku, i u istoj se točki raspolavljaju.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije pravilnog tetraedra, kojemu je strana ABC u* Π_1! (Sl. 124.).

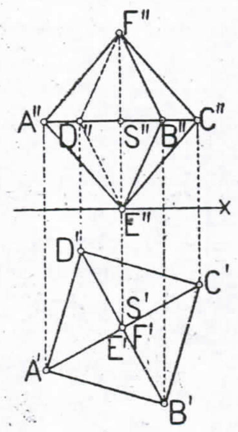
Rješenje. Trokut je $A'B'C'$ istostraničan i sukladan s ABC. Nacrt je toga trokuta dužina $C''B''$ u osi x. Vrh D ima svoj tlocrt D' u središtu trokuta $A'B'C'$ opisane kružnice, te leži u sjecištu triju visina toga trokuta. U te visine padaju tlocrti bridova AD, BD i CD. Nacrt D'' ne može se uzeti po volji, jer to tijelo ima za zadani brid posve određenu visinu v, koja se u nacrtu prikaže u pravoj veličini. Ta se visina može odrediti iz pravokutnog trokuta $A'D'D$, u kojem su $A'D'$ i DD' katete, a $A'D = AB$ hipotenuza. Ako se taj trokut preloži oko $A'D'$ u Π_1 ($D'D_0 \perp A'D'$, $A'D_0 = A'B'$), onda je $D'D_0 = v$.



Sl. 124.



Sl. 125.



Sl. 126.

3. Projiciranje nepravilnog tetraedra. Na sl. 125. nacrtane su projekcije nepravilnog tetraedra, koji je u prostoru u općenitom položaju. Te se projekcije nacrtaju na taj način, da se nacrtaju projekcije četiriju točaka A, B, C i D, a onda se tlocrti tih točaka, te nacrti spoje dužinama.

Vidljivost se bridova AC i BD u tlocrtu odredi s pomoću točaka zaklonica 1 i 2 na način, koji je prikazan u § 17. t. 1. Iz nacrta se vidi, da je točka 1 brida BD viša, nego li točka 2 brida AC. Prema tome je viši i brid BD, nego li AC, i zato se brid BD u tlocrtu vidi, a CA ne vidi.

Vidljivost se bridova AD i BC u nacrtu odredi s pomoću točaka zaklonica 3 i 4. S obzirom na Π_2 točka je 3 brida BC udaljenija od Π_2,

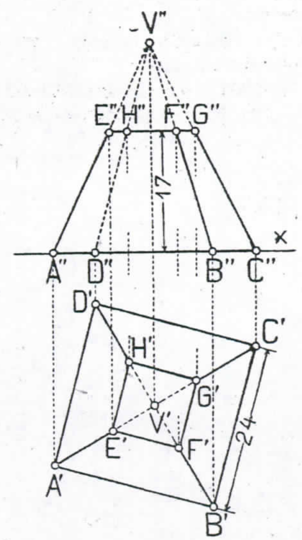
nego li točka 4 brida AD, pa je prema tome brid BC u nacrtu vidljiv, a AD nevidljiv.

Koje se strane tetraedra vide, a koje ne vide *a)* u tlocrtu, *b)* u nacrtu?

4. Projiciranje oktaedra. Na sl. 126. nacrtane su projekcije oktaedra. Uzelo se, da su osi AC i BD usporedne s Π_1, a os $EF \perp \Pi_1$. Prve dvije osi projiciraju se na Π_1 u pravoj veličini i pod pravim kutovima ($A'C' \perp B'D'$, $S'A' = S'B' = S'C' = S'D'$), a treća os EF prikaže se u nacrtu u pravoj veličini ($E'F' \perp x$, $E'F' = A'C'$). Kvadrat je $A'B'C'D'$ tlocrt zajedničke osnovke obiju kvadratičnih piramida, iz kojih se sastoji oktaedar. Nacrt je toga kvadrata dužina $A''C'' \parallel x$, koja ida polovištem S'' dužine $E''F''$.

§ 30 Projiciranje krnje piramide

Projiciranje krnje piramide. Na slici 127. nacrtane su projekcije kvadratične krnje piramide, kojoj je veća osnovka u Π_1. Pokaži na toj slici tlocrt i nacrt *a)* svakoga vrha, *b)* svakoga brida, *c)* svake plohe krnje piramide! Pokaži, u kakvom su položaju pojedini bridovi i plohe prema Π_1 i Π_2! Koji se bridovi i plohe projiciraju u pravoj veličini? Odredi pravu veličinu pobočnih bridova i nacrtaj mrežu krnje piramide, koja je zadana tlocrtom i nacrtom! Koje se plohe krnje piramide vide u tlocrtu, a koje u nacrtu?



Sl. 127.

Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije i mrežu pravilne trostrane prizme, kojoj je donja osnovka u Π_1, te joj je jedan osnovan brid okomit na os x!
2. Nacrtaj projekcije i mrežu kvadratične prizme, kojoj je jedna osnovka u Π_2!
3. Nacrtaj projekcije pravilne osmerostrane prizme, kojoj je donja osnovka u Π_1!
4. Nacrtaj tlocrt školske sobe u mjerilu 1:100, i označi u tom tlocrtu položaj vrata i prozora!
5. Nacrtaj projekcije trostrane kose prizme, kojoj je donja osnovka ABC [A (2, 6, 0), B (7, 4, 0)], C (0, 1, 0) u Π_1, a pobočni je brid AE [E (6, 8, 6)]!
6. Nacrtaj projekcije trostrane kose prizme, kojoj je jedna osnovka u Π_2!
7. Nacrtaj projekcije paralelepipeda, kojemu su zadana tri brida (AB, AD i AE), koji se sastaju u vrhu! Neka je: A (3, 4, 7), B (4, 7, 3), D (7, 3, 4), E (5, 5, 10).
8. Nacrtaj projekcije šesterostrane kose prizme, kojoj je osnovka pravilan šesterokut u Π_2 [središte je stražnje osnovke S (0, 0, 6), jedan vrh A (−1, 0, 9,5), središte prednje osnovke R (12, 10, 9)].

9. Nacrtaj projekcije i mrežu trostrane kose piramide, kojoj je osnovka ABC [A (1, 0, 5), B (3, 0, 1), C (5, 0, 3), a vrh V (6, 6, 6)!

10. Nacrtaj projekcije i mrežu kvadratične piramide, kojoj je osnovka u Π_1, te je jedna dijagonala te osnovke usporedna s osi x!

11. Nacrtaj projekcije uspravne piramide, kojoj je osnovka kvadrat $ABCD$ [A (4, 0, 9), B, C (7, 0, 2), D] u Π_2, a visina $v = 9$!

12. Nacrtaj projekcije četverostrane piramide, kojoj je osnovka paralelogram $ABCD$ [A (7, 6, 2), B (3, 1, 7), C (10, 3. 5), D], a vrh V (4, 7, 10)!

13. Nacrtaj projekcije i mrežu pravilne peterostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_2!

14. Nacrtaj projekcije pravilne šestorostrane piramide, kojoj je osnovka $\parallel \Pi_1$ [središte je osnovke S (3, 5, 2), vrh na osnovci A (3, 8, 2), visina piramide $v = 5$].

15. Nacrtaj projekcije nepravilnog tetraedra $ABCD$:

a) A (0. 4, 3,6), B (2,5, 1,5, 6), C (5,5, 5,5, 2,5), D (4, 3, 1);

b) A (2, 7, 4), B (4, 6, 7,5), C (8, 5,5, 1), D (6, 2, 3);

c) A (1,5, 4, 7), B (5, 1,5, 5), C (8, 1, 0), D (7, 7.5, 7,5);

d) A (1, 3, 5), B (5, 1, 3), C (3, 5. 1), D (6, 6, 6).

16. Nacrtaj projekcije oktaedra, kojemu je jedna os okomita na Π_2!

17. Nacrtaj projekcije kvadratične krnje piramide, kojoj je manja osnovka u Π_1!

18. Nacrtaj projekcije pravilne trostrane krnje piramide, kojoj je *a)* veća, *b)* manja osnovka u Π_1!

19. Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane krnje piramide, kojoj je *a)* veća, *b)* manja osnovka u Π_1!

20. Odredi pravu veličinu *a)* pobočnih bridova, *b)* pobočnih visina u zadacima 1—3!

21. Nacrtaj projekcije raznih predmeta, koji imaju oblik krnjih piramida!

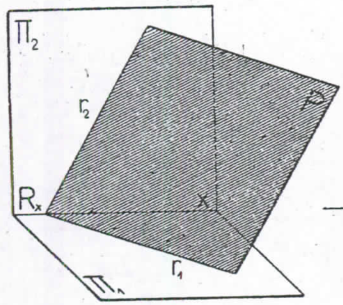
VI. Ravnina

§ 31. Predočenje ravnine tragovima

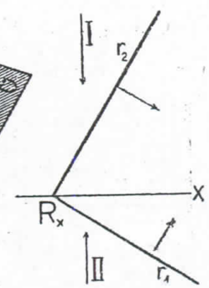
1. Tragovi ravnine. Na sl. 128. prikazane su ravnine projekcija Π_1, Π_2 i ravnina **P**. Ravnina **P** siječe ravninu Π_1 u pravcu r_1, a ravninu Π_2 u pravcu r_2. Oba ta pravca zovu se *tragovi* ravnine **P**, i to: pravac r_1 je *prvi trag*, a pravac r_2 *drugi trag*. Oba se traga ravnine sijeku u istoj točki R_x u osi x (zašto? Isp. 83. t. 4., 6) i oni određuju samo jednu ravninu. Možemo dakle reći:

Ravnina je sa svoja dva pridružena traga potpuno određena.

Ako se ravnina Π_1 okrene oko osi x u Π_2, dobije se sl. 129. Da odredimo položaj ravnine **P** u prostoru zamislimo, da smo ravninu Π_1 s tragom r_1 podigli u horizontalan položaj i da smo onda kroz r_1 i r_2 položili ravninu **P**.



Sl 128.



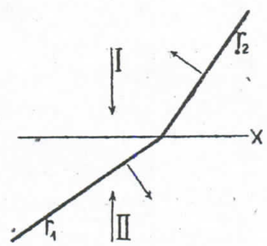
Sl. 129.

Budući da je r_1 u Π_1, njegova je druga projekcija u osi x. Trag r_2 je u Π_2 i zato je njegov tlocrt u osi x.

§ 32. Položaj ravnine prema Π_1 i Π_2

1. Objašnjenja. Ravnina može biti: 1. kosa prema obim ravninama projekcija, 2. okomita na Π_1, ili na Π_2, ili na obje ravnine, 3. usporedna s Π_1 ili s Π_2.

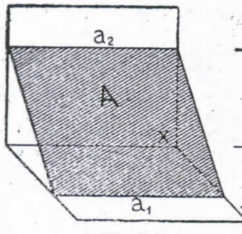
2. — 1. *Ravnina je kosa prema* Π_1, Π_2 *i osi* x. Oba su traga r_1 i r_2 kosa prema osi x i sijeku se u istoj točki te osi (sl. 129 i 130.). Ako napravimo model prema tim slikama, pa gledamo prema Π_1 i Π_2 u smjeru strelica I i II, onda je na sl. 129. vidljiva ista strana ravnine **P**, a prema sl. 130. vidljive su različite strane te ravnine. U prvom su slučaju oba traga ravnine priklonjena prema x ili nadesno ili nalijevo, a

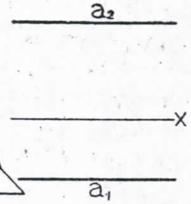


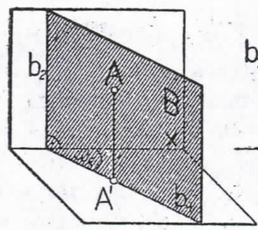
Sl. 130.

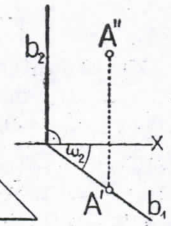
u drugom je slučaju jedan trag priklonjen prema osi nadesno, a drugi nalijevo.

2. *Ravnina je* **A** *kosa prema* Π_1 *i* Π_2, $a \parallel x$ (sl. 131. i 132.). Oba su traga a_1 i a_2 ravnine **A** usporedna s osi x. Kod promatranja ravnine prema Π_1 i Π_2 vidi se ista strana ravnine.

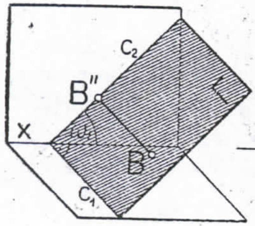

Sl. 131.

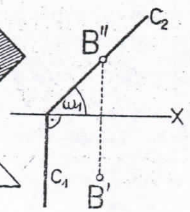

Sl. 132.

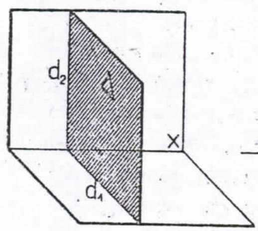

Sl. 133.

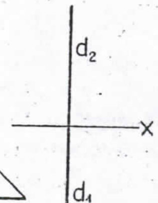

Sl. 134.

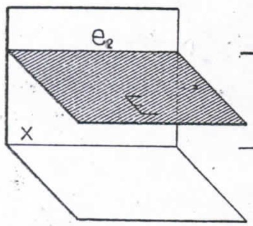
3. *Ravnina* **B** je $\perp \Pi_1$ *i kosa prema* Π_2. Prvi je trag b_1 nagnut prema x, drugi je trag b_2 okomit na x (sl. 133. i 134.). Kad se gleda prema

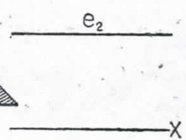

Sl. 135.

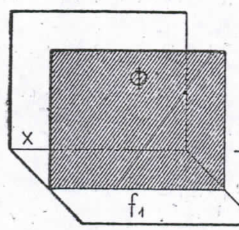

Sl. 136.

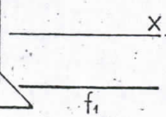

Sl. 137.


Sl. 138.


Sl. 139.


Sl. 140.


Sl. 141.


Sl. 142.

Π_1, ravnina se **B** prikaže kao pravac, a kad se gleda prema Π_2, vidi se jedna strana ravnine **B**. Ravnina, koja je okomita na Π_1, zove se *prva ravnina prometalica*.

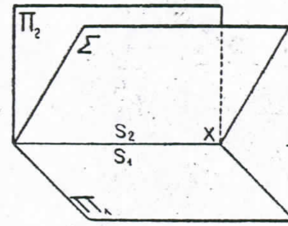
4. *Ravnina je* **Γ** *okomita na* Π_2 *i kosa prema* Π_1. Prvi je trag c_1 okomit na osi x, a drugi je c_2 kos prema x (sl. 135. i 136.). Gleda li se prema

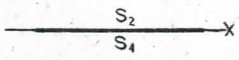
Π_1, vidi se jedna strana ravnine **Γ**, a gleda li se prema Π_2, ta se ravnina prikaže kao pravac. Ravnina, koja je okomita na Π_2, zove se *druga ravnina prometalica*.

5. *Ravnina* Δ *je okomita na* Π_1 *i na* Π_2 (sl. 137. i 138.). Oba su traga te ravnine okomita na osi x. Ravnina koja je okomita na osi x, zove se *profilna ravnina*. Kad se ta ravnina promatra odozgo ili sprijeda, prikaže se kao pravac.

6. *Ravnina je* **E** $\parallel \Pi_1$ (sl. 139. i 140.). Ravnina **E** ima samo drugi trag e_2, koji je $\parallel x$. Ravnina je **E** $\perp \Pi_2$.

7. *Ravnina* je Φ $\parallel \Pi_2$ (sl. 141. i 142.). Ravnina ima samo prvi trag f_1, koji je $\parallel x$. Ravnina je Φ $\perp \Pi_1$.


Sl. 143.


Sl. 144.

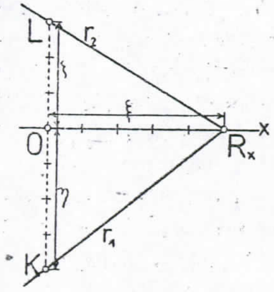
8. *Ravnina* Σ *ide osju* x (sl. 143. i 144.). Oba traga s_1 i s_2 te ravnine padnu zajedno u os x. U ovom slučaju položaj ravnine u prostoru nije određen.

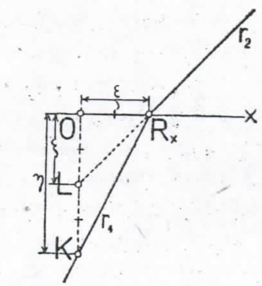
Bilješka. Iz sl. 129, 130, 131., 132., 136. 138. vidi se ovo: Ako jedan trag ravnine siječe os x, onda i drugi trag siječe os u istoj točki. 2. Ako je jedan trag ravnine usporedan s x, onda je i drugi trag usporedan s x.

3. Predočenje ravnine koordinatama. — 1. zadatak. *Nacrtaj tragove ravnine* **P** ($\xi = 5$, $\eta = 4$, $\xi = 3$)! (Sl. 145).

Rješenje. Odaberi na osi x ishodište O i tom točkom povuci okomicu na os x. Zatim prenesi $OR_x = \xi = 5$, $OK = \eta = 4$, $OL = \zeta = 3$ i spoji R_x sa K i L. Tada je $r_1 \equiv R_xK$ i $r_2 \equiv R_xL$.

Ako je ξ negativno, prenaša se lijevo od točke O, ako je η negativno, prenaša se povrh osi, a ako je ζ negativno, prenaša se ispod osi x. Ako je $\xi = \infty$, onda je točka R_x neizmjerno daleko, pa su tragovi r_1 i r_2 usporedni s osi x. Ako je $\eta = \infty$, onda je $r_1 \perp x$, dakle $\perp \Pi_2$, a ako je $\zeta = \infty$, onda je $r_2 \perp x$ ili $\mathbf{P} \perp \Pi_1$.


Sl. 145.

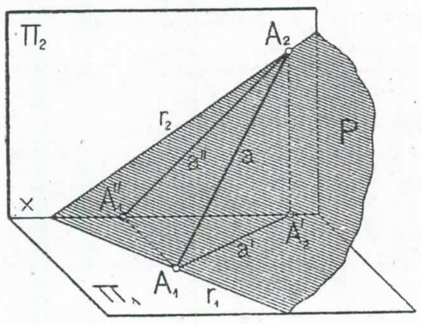

Sl 146.

2. zadatak. *Nacrtaj tragove ravnine* **P** (2,4, — 2)!

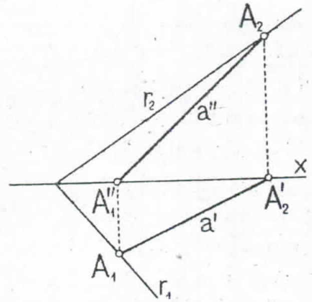
Rješenje se vidi iz sl. 146.

§ 33. Pravac i ravnina

1. Pravac je a **u ravnini P** (sl. 147). Ako je pravac a u ravnini **P**, onda on uopće siječe tragove ravnine u točkama A_1 i A_2. Te su točke probodišta pravca a. Možemo dakle reći:



Sl. 147.



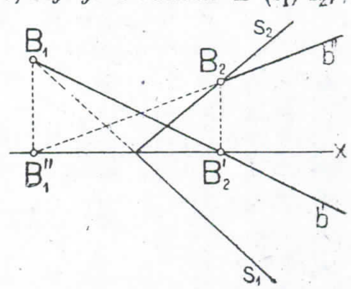
Sl. 148.

Ako je pravac u ravnini, njegova su probodišta u istoimenim tragovima te ravnine. Obrnuto: *Pravac je u ravnini, kad su mu probodišta u istoimenim tragovima te ravnine.*

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije pravca a, koji je u zadanoj ravnini* **P**, *ako su zadana probodišta* A_1 *i* A_2 *pravca a!* (Sl. 148).

Rješenje. U tragu r_1 uzeli smo po volji prvo probodište A_1, a u tragu r_2 drugo probodište A_2 pravca a, pa smo odredili A_1'' i A_2', te spojili A_1 s A_2' i A_2 s A_1''. Na taj smo način dobili projekcije a', a'' pravca a, koji je u ravnini **P**. — Ako je zadan tlocrt a', kako će se odrediti nacrt a''?

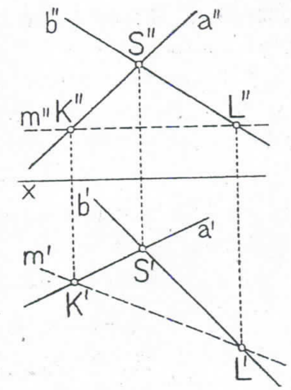
3. Zadatak. *Zadan je nacrt* b'' *pravca b, koji je u ravnini* **E** (s_1, s_2); *odredi tlocrt* b' *toga pravca!* (Sl. 149).



Sl. 149.

Rješenje. Drugo probodište B_2 pravca b leži u sjecištu pravaca b'' i s_2, a nacrt B_1'' prvoga probodišta leži u sjecištu pravca b'' s osi x. Odredimo li spomoću ordinala tlocrt B_2' drugoga probodišta i prvo probodište B_1, koje mora biti u tragu s_1, pa spojimo točke B_1 i B_2', imamo tlocrt b' pravca b. — Ako je zadan tlocrt b' prema slici 149., kako će se odrediti nacrt b''?

4. Zadatak. *Zadana je ravnina* **P** *s dva ukrštena pravca a* (a', a'') *i b* (b', b''); *neka se u toj ravnini povuče pravac m, koji je usporedan s* Π_1! (Sl. 150).



Sl. 150.

Rješenje. Ima neizmjerno mnogo pravaca m, koji leže u ravnini **P**, i koji su usporedni s Π_1. Nacrt m'' jednoga od tih pravaca usporedan je s x (§ 14. t. 4.) i siječe a'' u K'', a b'' u L''. Odredimo li K' na a' i L' na b', onda je $m' \equiv K'L'$.

5. Pravac je u ravninama prometalicama. Ako je pravac u prvoj ravnini prometalici (§ 32. t. 2., 3), onda je njegov tlocrt u prvom tragu te ravnine, dok se nacrt može uzeti po volji. Nacrtaj projekcije pravaca u takovim ravninama!

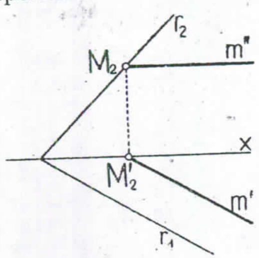
6. Pravac je usporedan s ravninom P. Nacrtamo li projekcije a' i a'' pravca a, koji je u ravnini **P**, pa povučemo gdjegod $b' \parallel a'$ i $b'' \parallel a''$, onda je pravac $b \parallel$ **P** (§ 3. t. 7). Nacrtaj sliku!

Bilješka. O pravcu, koji siječe ravninu, vidi §§ 40. i 41.

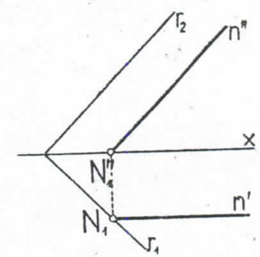
§ 34. Sutražnice

1. Objašnjenja. Pravci ravnine **P**, koji su usporedni s prvim ili drugim tragom te ravnine, zovu se *sutražnice*. Pravci, koji su usporedni s prvim tragom, zovu se *sutražnice prve skupine*, a pravci, koji su usporedni s drugim tragom, zovu se *sutražnice druge skupine*. U ravnini ima neizmjerno mnogo sutražnica prve skupine i sutražnica druge skupine. Sutražnice iste skupine među sobom su usporedne.

Sutražnice prve skupine usporedne su s prvim tragom r_1, dakle s jednim pravcem ravnine Π_1 i zato su te sutražnice usporedne s Π_1 (§ 3. t. 7., 1). Zbog toga se sutražnice prve skupine mogu nazvati i *horizontalnim sutražnicama*.



Sl. 151.



Sl. 152.

S jednakih su razloga sutražnice druge skupine usporedne s Π_2, pa se one nazivlju i *frontalnim sutražnicama*.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije* m', m'' *sutražnice prve vrste m, koja je u zadanoj ravnini* **P** (r_1, r_2)! (Sl. 151).

Rješenje. Budući da je $m \parallel r_1$ i $m \parallel \Pi_1$, to je $m' \parallel r_1$ a $m'' \parallel x$. Nacrt m'' ide drugim probodištem M_2, koje je u drugom tragu r_2, a tlocrt m' ide točkom M_2'.

3. **Zadatak.** *Nacrtaj projekcije n', n'' sutražnice druge skupine n_1, koja je u zadanoj ravnini* P (r_1, r_2)! (Sl. 152).

R j e š e n j e. Budući da je pravac $n \parallel r_2$ i $n \parallel \Pi_2$, to je $n'' \parallel r_2$ i $n' \parallel x$. Tlocrt n ide prvim probodištem N_1, koje je u prvom tragu r_1, a nacrt n'' točkom N_1''.

4. **Zadatak.** *Nacrtaj projekcije m', m'' sutražnice prve skupine m ravnine* **P**, *koja je zadana s dva ukrštena pravca a (a', a'') i b (b', b'')!*

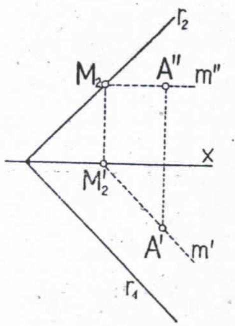
R j e š e n j e. Taj je zadatak riješen u § 33. t. 4. (sl. 150); pravci su m', m'' projekcije sutražnice m. — Nacrtaj na sl. 150. projekcije sutražnice druge skupine!

§ 35. Točka i ravnina. Upotreba sutražnica

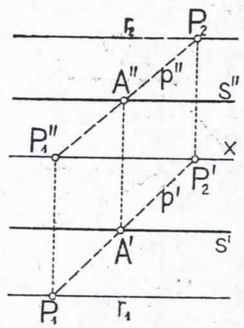
1. **Objašnjenja.** — 1. Ako je točka u prvoj ravnini prometalici, onda je njezin tlocrt u prvom tragu te ravnine, a nacrt gdjegod u ordinali (vidi sl. 133.). Na sl. 134. nacrtane su projekcije A', A'' točke A, koja je u ravnini $\mathbf{B} \perp \Pi_1$.

2. Ako je točka u drugoj ravnini prometalici (sl. 135), njezin je nacrt u drugom tragu te ravnine, a tlocrt gdjegod u ordinali. Na sl. 136. nacrtane su projekcije B', B'' točke B, koja je u ravnini $\mathbf{\Gamma} \perp \Pi_2$.

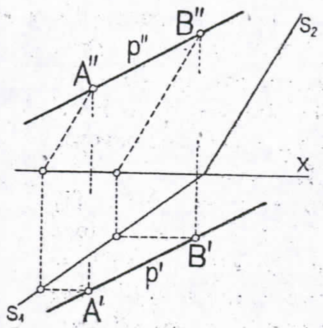
3. *Točka je u ravnini, koja je kosa prema Π_1 i Π_2, kad se nalazi na jednome pravcu te ravnine.* Da se odrede projekcije neke točke kose ravnine,



Sl. 153.



Sl. 154.



Sl. 155.

mogu se upotrebiti projekcije kakvoga god pravca te ravnine, no sutražnice su najzgodniji pravci.

2. **Zadatak.** *Zadan je tlocrt A' točke A, koja je u ravnini* **P** (r_1, r_2); *neka se odredi nacrt A''!*

a) R a v n i n a j e **P** k o s a p r e m a x.

Taj smo zadatak riješili spomoću sutražnice prve skupine m. Točkom A' povukli smo $m' \parallel r_1$ (sl. 153.), odredili smo nacrt m'' i točkom A' povukli ordinalu. Ta ordinala siječe m'' u A''.

b) R a v n i n a j e $\mathbf{P} \parallel x$. (Sl. 154).

R j e š e n j e. Točkom A' povukli smo tlocrt p' kojega god pravca p ravnine **P** i odredili smo nacrt p''. Ordinala točke A' siječe p'' u A''.

Ako se točkom A' na sl. 154. povuče $s' \parallel x$, a točkom A'' pravac $s'' \parallel x$, onda su s', s'' projekcije jedne sutražnice ravnine **P**.

3. **Zadatak.** *Zadan je nacrt p'' pravca p ravnine* $\mathbf{\Sigma}(s_1, s_2)$, *kojemu probodišta padaju daleko; neka se odredi tlocrt p' toga pravca!* (Sl. 155).

R j e š e n j e. Na pravcu p'' uzmemo dvije točke A'' i B'' kao nacrte dviju točaka A i B pravca p i odredimo njihove tlocrte A' i B' s pomoću sutražnica druge skupine. Tada je $p' \equiv A'B'$.

§ 36. Priklonice i prikloni kutovi ravnine

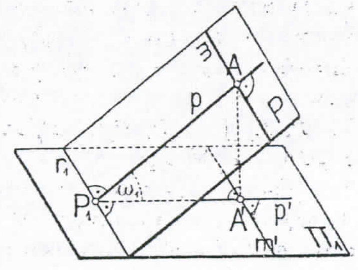
1. **Objašnjenja.** Pravci ravnine **P**, koji su okomiti ili na prvom ili na drugom tragu te ravnine zovu se *priklonice*. Pravci, koji su okomiti na prvom tragu, zovu se *priklonice prve skupine*, a pravci koji su okomiti na drugom tragu, zovu se *priklonice druge skupine.* U jednoj ravnini ima neizmjerno mnogo priklonica prve skupine i priklonica druge skupine. Sve su priklonice iste skupine među sobom usporedne.

2. Na sl. 156. prikazana je ravnina Π_1 i ravnina **P**. U ravnini **P** uzeta je točka A i tom je točkom povučena priklonica $p \equiv AP_1 \perp r_1$. Nadalje je nacrtana projekcija $p' \equiv A'P_1$ priklonice p.

Projekcija je priklonice okomita na tragu ravnine.

D o k a z. Pravci p, p' i AA' leže u ravnini prometalici priklonice p. Budući da je $AA' \perp \Pi_1$, to je r_1 kao pravac ravnine Π_1, okomit na AA', a jer je $r_1 \perp p$, to je r_1 okomit na dva pravca AA' i p ravnine prometalice. Prema tome je pravac r_1 okomit na svakom pravcu ravnine prometalice, dakle je $r_1 \perp p'$ i obrnuto $p' \perp r_1$, što smo htjeli dokazati.

B i l j e š k a. Pravokutni se trokut $AA'P_1$ zove *prikloni trokut.*

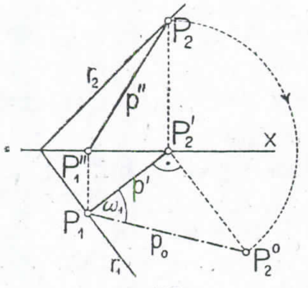


Sl. 156.

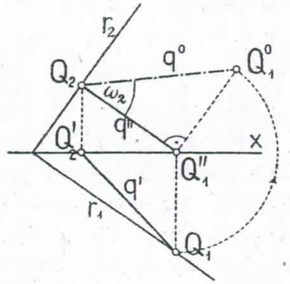
3. Budući da je sutražnica $m \parallel r_1$ (sl. 156.), a priklonica $p \perp r_1$, to je $p \perp m$; t. j.: *Priklonica i sutražnica (prve ili druge) skupine u nekoj točki A ravnine* **P** *među sobom su okomiti pravci.*

Budući da je $m' \parallel r_1$ i $p' \perp r_1$, tad je $p' \perp m'$; t. j.:

Tlocrt priklonice i sutražnice prve skupine (ili nacrt priklonice i sutražnice druge skupine) u nekoj točki ravnine **P** *među sobom su okomiti pravci.*



Sl. 157.



Sl. 158.

4. Zadatak. *Nacrtaj projekcije p', p'' priklonice prve skupine p, koja je u ravnini* **P** (r_1, r_2)!

Rješenje. S obzirom na t. 2. tlocrt p' priklonice p okomit je na tragu r_1, t. j. $p' \perp r_1$. Nacrt se p'' odredi prema tlocrtu p' (§ 33. t. 2.). Taj nacrt nema osobitog položaja ni prema tragovima ravnine **P** ni prema osi x.

5. Zadatak. *Nacrtaj projekcije q', q'' priklonice druge skupine p, koja je u ravnini* **P** (r_1, r_2)! (Sl. 158.).

Rješenje. Budući da je $q \perp r_2$, to je $q'' \perp r_2$ (t. 2.). Tlocrt se q' odredi prema nacrtu q''.

6. Priklonì kutovi ravnine P prema Π_1 i Π_2. — **1.** Kut ω_1 (sl. 156.), što ga priklonica p ravnine **P** čini sa svojom projekcijom p', jednak je priklonom kutu te okomice. Budući da je priklonica p kao pravac ravnine **P** i tlocrt p' kao pravac ravnine Π_1 okomit na tragu r_1, kao presječnici tih dviju ravnina, to je ω_1 jednak priklonom kutu ravnine **P** s Π_1. Kut, što ga priklonica prve skupine čini sa svojim tlocrtom, jednak je dakle priklonom kutu ravnine **P** s Π_1, i zove se *prvi prikloni kut* ravnine **P**. Na sl. 157. prelaganjem priklonice p ili *prvog priklonog trokuta* $P_1 P_2' P_2$ oko tlocrta p' u Π_1 dobili smo pravu veličinu prvog priklonog kuta ω_1 ravnine **P**. ($P_2' P_2^0 \perp p'$, $P_2' P_2^0 = P_2' P_2$). Tim je prelaganjem prikloni trokut došao u položaj $P_1 P_2' P_2^0$.

Kut, što ga priklonica druge skupine čini sa svojin nacrtom, jednak je priklonom kutu ravnine **P** s Π_2. Taj se kut zove *drugi prikloni kut* ravnine **P**. Na sl. 158. određen je drugi prikloni kut ω_2 ravnine **P** prelaganjem priklonice q ili *drugog priklonog trokuta* $Q_2 Q_1'' Q_1$ oko nacrta q'' u Π_2. ($Q_1'' Q_1^0 \perp q''$, $Q_1'' Q_1^0 = Q_1'' Q_1$). Taj je prikloni trokut došao u položaj $Q_2 Q_1'' Q_1^0$.

2. Ako je ravnina $\mathbf{B} \perp \Pi_1$ (sl. 133. i 134.), onda je prvi prikloni kut $\omega_1 = 90^0$, a drugi prikloni kut ω_2 jednak je kutu, što ga trag b_1 čini s osi x. (Zašto ?).

3. Ako je ravnina $\mathbf{\Gamma} \perp \Pi_2$ (sl. 135. i 136.), onda je njezin drugi prikloni kut $\omega_2 = 90^0$, a prvi prikloni kut ω_1 jednak je kutu, što ga trag c_2 čini s osi x. (Zašto ?).

4. Ako je ravnina usporedna s osi x, onda je zbroj njenih priklonih kutova $= 90^0$, a ako je ravnina $\perp x$, taj je zbroj $= 180^0$. Ako je ravnina nagnuta prema osi x, onda je zbroj njezinih kutova veći od 90^0, a manji od 180^0.

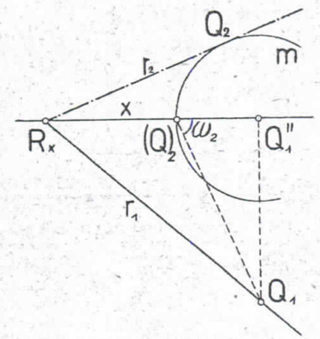
7. Zadatak. *Zadan je prvi trag r_1 i prvi prikloni kut $\omega_1 = 60^0$ ravnine* **P**; *neka se odredi njezin drugi trag r_2!*

Rješenje. Povuče se tlocrt $p' \perp r_1$ (vidi sl. 157.) jedne priklonice prve skupine ravnine **P**, konstruira se pravokutan trokut $P_1 P_2' P_2^0$, u kojemu je kut kod P_1, dakle $\omega_1 = 60^0$, povuče se $P_2' P_2 \perp x$ i učini $P_2' P_2 = P_2' P_2^0$. Trag r_2 ide točkom P_2.

8. Zadatak. *Zadan je prvi trag r_1 ravnine* **P** *i drugi prikloni kut $\omega_2 = 67^0 30'$; odredi drugi trag te ravnine!*

Rješenje. Ako se na sl. 158. opiše kružnica m, kojoj je točka Q_1'' središte, a q'' polumjer, tada ta kružnica dotiče drugi trag r_2 u točki Q_2. Zašto ?

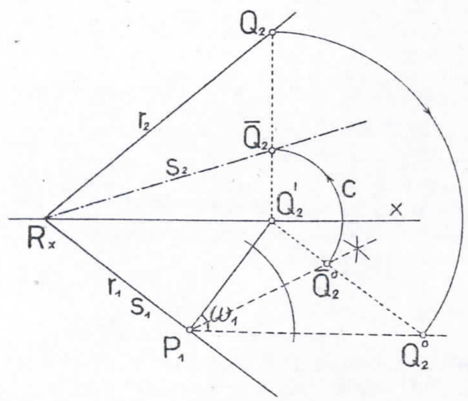
Na sl. 159. nacrtana je os x i prvi trag r_1, koji os x siječe u točki R_x. Konstruira li se pravokutan trokut $Q_1 Q_1'' (Q_2)$, kojega je kateta $Q_1 Q_1'' \perp x$, gdje Q_1 u tragu r_1, a Q_1'' u osi x i kojega je kut ω_2 nasuprot kateti $Q_1 Q_1''$, tada trokut $Q_1 Q_1'' (Q_2)$ odgovara trokutu $Q_1 Q_1'' Q_2$ na sl. 158., te se isporeďivanjem tih dvaju trokuta dolazi do zaključka, da je stranica $Q_1'' (Q_2) = q''$. Ako se prema tome opiše kružnica m, kojoj je središte u točki Q_1'', a polumjer $Q_1'' (Q_2)$, tada se drugi trag r_2 podudara s tangentom kružnice m, koja ide točkom R_x. Koliko rješenja ima gornji zadatak ?



Sl. 159.

9. Zadatak. *Zadana je ravnina* **P** *svojim tragovima r_1, r_2; odredi tragove one ravnine, koja raspolavlja prvi prikloni kut zadane ravnine!*

Rješenje. Prvi je trag tražene ravnine $s_1 \equiv r_1$. Konstruiraj prvi prikloni kut ω_1 ravnine **P**, raspolovi taj kut pravcem $P_1 \overline{Q}_2^0$ (sl. 160.), opiši kružnicu c, kojoj je središte u točki Q_2', a polumjer $Q_2' Q_2^0$. Ta kružnica siječe pravac $Q_2' Q_2$ u točki $\overline{Q}_2$, te je $s_2 \equiv R_x \overline{Q}_2$.



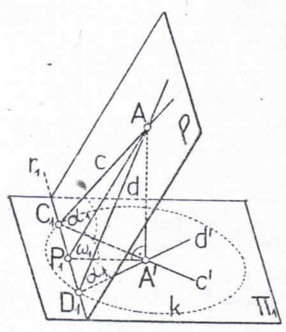
Sl. 160.

10. Zadatak. *U zadanoj ravnini* $\mathbf{P}(r_1, r_2)$ *uzmi točku* $A\,(A', A'')$ *i tom točkom povuci u ravnini* **P** *pravac* c, *koji ima prvi prikloni kut* $\alpha_1 = 30^0$!

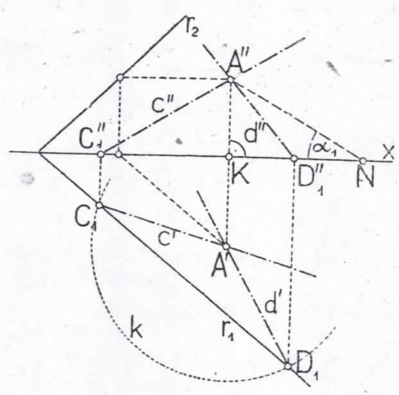
Rješenje: Uzmimo, da smo zadatak već riješili i da smo u **P** našli pravac c, koji s Π_1 čini kut α_1 (sl. 161). Prvo probodište C_1 toga pravca mora ležati u tragu r_1 (§ 32. t. 3.), pa ako se odredi ta točka, onda je $c \equiv AC_1$, a $c' \equiv A'C_1$.

Trokut je $AA'C_1$ pravokutan. U tom je trokutu, osim pravoga kuta kod A', poznata kateta AA' i suprotni kut, koji mora biti jednak α_1. Prema tome je trokut $AA'C_1$ potpuno određen, dakle je određena i druga kateta $A'C_1$, koja označuje udaljenost točke C_1 od A'. Opiše li se oko A' kružnica k s polumjerom, koji je jednak toj drugoj kateti, ona siječe trag r_1 u točkama C_1 i D_1, pa su spojnice AC_1 i AD_1 traženi pravci c i d.

Budući da je na sl. 162. $AA' = A''K$ nacrtali smo pravokutan trokut $A''KN$, u kojemu je $\sphericalangle KNA'' = \alpha_1 = 30^0$. Taj je trokut sukladan s tro-



Sl. 161.



Sl. 162.

kutom $AA'C_1$, pa je $A'C_1 = KN$. Opišemo li oko A' kružnicu k s polumjerom KN, ona siječe trag r_1 u točki C_1, koja je prvo probodište traženog pravca c, te je $c' \equiv A'C_1$, a $c'' \equiv A''C_1''$. Budući da kružnica k siječe

trag r_1 još u jednoj točki D_1, ta je točka prvo probodište drugoga pravca d, koji leži u **P**, ide točkom A i ima prvi prikloni kut α_1. Prema tome zadatak ima dva rješenja.

Determinacija. Iz stereometrije je poznat ovaj poučak:

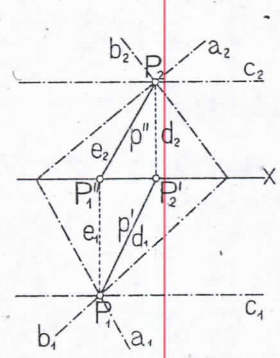
Između svih pravaca ravnine, koji se u njoj mogu povući jednom njezinom točkom, priklonica ima najveći prikloni kut.

Prema tomu poučku naš će se zadatak moći samo onda riješiti, ako je prvi prikloni kut α_1 pravca c manji od prvog priklonog kuta ω_1 ravnine **P** ili je jednak ω_1. Ako je $\sphericalangle \alpha_1 = \omega_1$, onda kružnica k dotiče trag r_1, pa zadatak ima samo jedno rješenje. Ako je $\sphericalangle \alpha_1 > \omega_1$, onda zadatak nema nijednog rješenja.

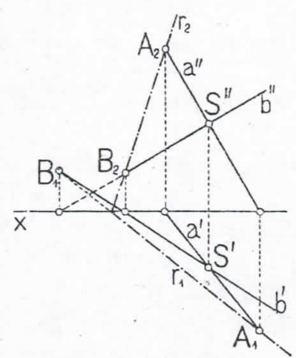
§ 37. Predočivanje ravnine točkama i pravcima.

1. Zadatak. *Zadanim pravcem* $p\ (p', p'')$ *položi ravninu i odredi njezine tragove!*

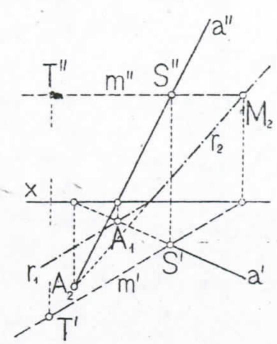
Rješenje. Jednim pravcem može se položiti neizmjerno mnogo ravnina. Prvi tragovi sviju tih ravnina moraju ići prvim probodištem P_1, a drugi tragovi moraju ići drugim probodištem P_2 pravca p. Osim toga moraju se pridruženi tragovi svake ravnine sjeći u istoj točki osi x.



Sl. 163.



Sl. 164.



Sl. 165.

Pravcem p položili smo na sl. 163. tri ravnine $\mathbf{A}(a_1, a_2)$, $\mathbf{B}(b_1, b_2)$ i $\boldsymbol{\Gamma}(c_1, c_2)$. Ravnine su **A** i **B** u općem položaju, dok je ravnina $\boldsymbol{\Gamma} \parallel x$.

Ako je ravnina $\Delta \perp \Pi_1$, onda se njezin prvi trag d_1 podudara s p', a drugi trag d_2 pada u pravac P'_2P_2.

Ako se pravcem p položi ravnina $\mathbf{E} \perp \Pi_2$, onda njezin drugi trag e_2 pada u p'', a prvi trag e_1 u $P_1''P_1$.

2. Zadatak. *Odredi tragove ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca* $a\,(a', a'')$ *i* $b\,(b', b'')$! (Sl. 164.)

Rješenje: Odredi probodišta A_1, A_2 i B_1, B_2 pravaca a i b i spoji istoimena probodišta, t. j. A_1 s B_1 i A_2 s B_2. Tada je A_1B_1 prvi trag, a A_2B_2 drugi trag ravnine.

Kontrola: Oba se traga ravnine moraju sjeći u istoj točki na osi x.

3. Zadatak. *Odredi tragove ravnine, koja je zadana s dva usporedna pravca $c(c', c'')$ i $d(d', d'')$!*

Rješenje je isto kao u prеđašnjem zadatku.

4. Zadatak. *Odredi tragove ravnine, koja je zadana točkom T (T', T'') i pravcem a (a', a'')!*

Rješenje. Točkom T povuče se pravac m, koji siječe pravac a, ili koji je s tim pravcem usporedan, pa se dalje postupa kao u t. 2. Na sl. 165. položili smo točkom T pravac ($m \parallel \Pi_1$, $m'' \parallel x$, $m' = T'S'$), koji siječe a u točki S, pa dalje postupamo kao u t. 2. Budući da je pravac m sutražnica prve skupine tražene ravnine, tada trag r_1 mora biti usporedan s m'.

5. Zadatak. *Zadan je trag r_1 ravnine* **P** *i točka A (A', A''), odredi drugi trag r_2 te ravnine!*

Rješenje. Točkom A povuci sutražnicu $m \parallel r_1$ ($m' \parallel r_1$, $m'' \parallel x$); probodištem M_2 te sutražnice ide drugi trag r_2. (Slika se sastoji iz istih linija, kao i sl. 153.).

6. Zadatak. *Odredi tragove ravnine, koja je zadana s tri točke A (A', A''), B (B', B'') i C (C', C'')!*

Rješenje. Točkama A i B, te A i C povuci pravce i tim pravcima položi ravninu kao u t. 2. Nacrtaj sliku!

7. Zadatak. *Odredi tragove ravnine, koja je položena zadanom točkom S (S', S'') usporedno sa zadanim pravcima a (a', a'') i b (b', b'')!*

Rješenje. Točkom S povuci pravac $c \parallel a$ i $d \parallel b$ ($c' \parallel a'$, $c'' \parallel a''$ i $d' \parallel b'$, $d'' \parallel b''$) i onda pravcima c i d položi ravninu kao u t. 2. Ta je ravnina usporedna s a i b. Zašto? Nacrtaj sliku!

8. Zadatak. *Zadana su dva mimosmjerna pravca a (a', a'') i b $b(', b'')$; odredi tragove ravnine, koja je položena pravcem b usporedno s pravcem a!*

Rješenje. Na pravcu b uzmi točku S (S', S'') i položi njom pravac $m \parallel a$ ($m' \parallel a'$, $m'' \parallel a''$). Pravci b i m određuju traženu ravninu. Zašto? Nacrtaj sliku!

9. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj tragove ovih ravnina:
A (4, 5, 3), B (2, — 1, 3), Γ (3. — 7 4), Δ (— 2, 1, 2), E (— 2, — 4, 1), Z (3, 3, — 3)
H (— 2, ∞, 4), I (∞, 5, 4), K (5, 3, ∞), L (∞, 3, ∞), M (∞, ∞, 2), N (3, ∞, ∞).

2. U zadanoj ravnini leži pravac, kojemu je zadana jedna projekcija; odredi drugu projekciju toga pravca! Na pr.:

A (6, 7, 5), p [A (6, 4. —), B (2, 1, —)];
B (2, — 4, — 1), q [C (0, —, 6), D (7, —, 0)]:
Γ (∞, 3, 4), r [E' (1, 2), F' (4, — 1)];
Δ (— 4, 3, ∞), s [S_1 (1, —, 0), S_2 (— 4, 0, 2)];
E (8, ∞, 5), t [T_1 (—, 5, —), T_2 (2, —, —)].

3. Ravnina **P** zadana je s dva ukrštena pravca; nacrtaj projekcije kojegagod pravca, koji je u toj ravnini!

4. Ravnina **P** zadana je s tri točke A (1, 1, 4), B (7, 5, 2), C (5, 8, 6); nacrtaj projekcije pravca, koji je u toj ravnini, te je *a)* u općem položaju, *b)* $\parallel \Pi_1$, *c)* $\parallel \Pi_2$!

5. Nacrtaj projekcije paralelograma i tlocrt jednoga pravca, koji je u ravnini toga lika; odredi nacrt toga pravca!

6. Zadane su projekcije trokuta i nacrt jednoga četverokuta, koji je u ravnini toga trokuta; odredi tlocrt četverokuta!

7. Zadana je ravnina **P** svojim tragovima r_1, r_2, zatim tlocrt m' i projekcije jedne točke A pravca m, koji je usporedan s ravninom **P**; odredi nacrt m'' pravca m! — Uputa. Nacrtaj projekcije pravca p, koji je usporedan s m i leži u **P**, t. j. povuci $p' \parallel m'$, odredi p''; zatim točkom A'' povuci $m'' \parallel p''$.

8. Riješi isti zadatak, ako je ravnina **P** zadana *a)* s dva ukrštena pravca, *b)* s dva usporedna pravca, *c)* točkom i pravcem!

9. Nacrtaj projekcije sutražnice prve i druge skupine ravnine **P**, koja je *a)* u općem položaju, *b)* $\perp \Pi_1$, *c)* $\perp \Pi_2$, *d)* $\parallel \Pi_1$, *e)* $\parallel \Pi_2$!

10. U ravnini, koja je zadana s dva ukrštena pravca, nacrtaj projekcije jedne sutražnice druge skupine!

11. U ravnini, koja je zadana s dva usporedna pravca, nacrtaj projekcije sutražnice prve i sutražnice druge skupine!

12. U ravnini, koja je zadana pravcem i točkom, položi sutražnicu prve (ili druge) vrste, koja ide zadanom točkom! (Gledaj sl. 165., § 37. t. 4.).

13. U ravnini, koja je zadana s tri točke, povuci sutražnicu prve i sutražnicu druge skupine!

14. Nacrtaj tragove ravnine, koja je *a)* u općem položaju, *b)* $\perp \Pi_1$, *d)* $\parallel$ x, *e)* $\parallel \Pi_1$, *f)* $\parallel \Pi_2$, zatim tlocrt A' i nacrt B'' točaka A i B, koje su u toj ravnini; odredi A'' i B'!

15. Nacrtaj projekcije trokuta, koji je u ravnini **P**! Neka je ravnina **P** *a)* u općem položaju, *b)* $\perp \Pi_1$, *e)* $\perp \Pi_2$, *d)* $\parallel \Pi_1$, *e)* $\parallel \Pi_2$!

16. U ravnini **P** (4, — 3, 3) leži trokut ABC, kojemu je zadan nacrt A'' (1, —, 4), B'' (3, —, 2), C'' (5, —, 3); odredi tlocrt $A'B'C'$!

17. Zadana je ravnina **P** (4, 3, 5) i projekcije točke A (0, 2,5, 4); ispitaj, da li A leži u **P**!

18. Zadane su projekcije trokuta ABC i tlocrt T' točke T, koja leži u ravnini trokuta; odredi nacrt T''! — Uputa. Točkom T položi pomoćni pravac, koji leži u ravnini trokuta.

19. Zadana je ravnina s dva ukrštena pravca a i b i nacrt T'' točke T, koja leži u toj ravnini; odredi T'! — Riješi isti zadatak, ako je $a \parallel b$!

20. Odredi priklone kutove u ravnini, koja je zadana tragovima kao u sl. 130.!

21. Nacrtaj projekcije priklonice druge skupine u ravnini $\mathbf{P} \perp \Pi_1$ i odredi drugi prikloni kut te ravnine!

22. Nacrtaj projekcije priklonice prve skupine, koja je u ravnini $\mathbf{P} \perp \Pi_2$ i odredi prvi prikloni kut te ravnine;

23. Nacrtaj projekcije priklonice u ravnini $\mathbf{P} \parallel$ x i odredi oba priklona kuta? Što si opazio?

24. Koliki su prikloni kutovi *a)* ravnine simetrije, *b)* ravnine istovjetnosti?

25. Zadan je drugi trag i drugi prikloni kut ravnine; odredi prvi trag te ravnine!

26. Kakove kutove čine jedna sutražnica i priklonica prve (ili druge) skupine?

27. U zadanoj ravnini uzmi točku i položi njom pravac, koji leži u toj ravnini i s Π_2 čini kut $\alpha_2 = 45^0$!

28. Odredi tragove ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca a i b! Neka je: *a)* a i b kos, *b)* $a \parallel \Pi_1$, b kos, *c)* $a \parallel \Pi_2$, b kos, *d)* $a \parallel \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$, *e)* $a' \equiv b'$, *f)* $a'' \equiv b''$, *g)* a u ravnini simetrije, b usporedan s ravninom istovjetnosti, *h)* $a \parallel$ x, b kos!

29. Odredi tragove ravnine, koja je zadana s dva usporedna pravca c i d! Neka su oba pravca *a)* kosa, *b)* $\parallel \Pi_1$, *c)* $\parallel \Pi_2$, *d)* $\perp \Pi_1$, *e)* $\perp \Pi_2$; *f)* $c' \equiv d'$, *g)* $c'' \equiv d''$.

30. Odredi tragove ravnine, koja je zadana točkom i pravcem! Na pr.: *a)* A (1, 3. 2), a kos, *b)* B (0, — 4, 1), b leži u Π_1, *c)* C (0, 2, — 3), c siječe os x, *d)* D (0, 3, 4), d kos i d' ide točkom D'.

31. Odredi tragove ravnine, koja je zadana s tri točke A (1, — 1, 1), B (4, 1, 3), C (2, 4, 0)! [A (2, 3, 2), B (4, 4, 1), C (4, 9, 4)].

32. Zadanim pravcem p (p', p'') položi ravninu, koja je *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$ i odredi tragove te ravnine!

33. Pravac je $q \equiv AB$ [A (0. 2, 4). B (3, — 1, 2)] priklonica druge skupine neke ravnine; odredi tragove te ravnine!

34. Odredi tragove ravnine, koja ide zadanom točkom A (A',A'') usporedno s pravcima a i b! Neka je A u IV. kvadrantu, a u Π_1, b u Π_2.

35. Pravcem a (a', a'') položi ravninu usporedno s pravcem b (b', b'')! Neka je $a \parallel \Pi_1$, b kos.

36. Odredi tragove ravnine, koja je položena kroz dvije točke A(A', A'') i B(B', B''), a usporedna je s pravcem p! Neka su A i B u I. kv., a p u Π_2.

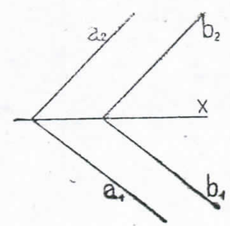
37. Ravnina je zadana trokutom ABC [A (2, 1, 7), B (8, 2, 5), C (5, 6, 4)]; odredi smjer tragova te ravnine! — Uputa. Prvi je trag usporedan s tlocrtom jedne sutražnice prve skupine i t. d.

38. Pravcem p(p', p'') položi ravninu, kojoj je prvi prikloni kut ω_1 jednak prvom priklonom kutu pravca p!

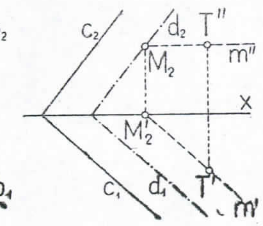
VII. Dvije ravnine. Presjek pravca s ravninom

§ 38. Usporedne ravnine

1. Objašnjenja. Ako su dvije ravnine **A** i **B** među sobom usporedne, onda su među sobom usporedni i istoimeni tragovi tih ravnina, t. j. $a_1 \parallel b_1$ i $a_2 \parallel b_2$. (Sl. 166.). Zašto? (t. 8., 4).



Sl. 166.



Sl. 167.

2. Zadatak. *Zadanom točkom* T (T', T'') *položi ravninu* Δ *usporedno sa zadanom ravninom* Γ (c_1, c_2) *i odredi tragove* d_1, d_2 *ravnine* Δ! (Sl. 167.).

Rješenje. — Budući da tragovi ravnine Δ moraju biti usporedni s istoimenim tragovima ravnine Γ, to će se tragovi ravnine Δ moći nacrtati, ako se odredi jedna točka prvoga ili drugoga traga te ravnine. Budući da točka T mora biti u ravnini Δ, ta točka mora biti na jednom pravcu te ravnine. Kako je poznat smjer tragova d_1, d_2, moći će se točkom T povući jedna sutražnica, na pr. sutražnica prve skupine m, pa će se tim pravcem položiti ravnina $\Delta \parallel \Gamma$. Ako se dakle točkom T' povuče $m' \parallel c_1$, a točkom T'' $m'' \parallel x$ i odredi drugo probodište M_2, onda trag d_2 ide točkom M_2 usporedno s c_2. Trag $d_1 \parallel c_1$.

§ 39. Presjek dviju ravnina

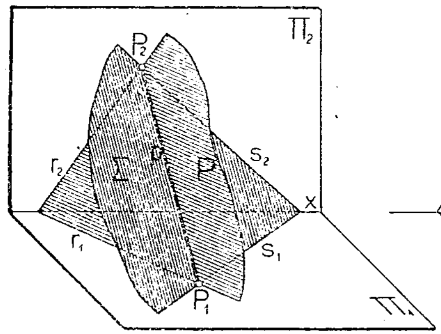
1. Objašnjenja. Dvije se ukrštene ravnine **P** i Σ (sl. 168.) sijeku u pravcu p, koji se zove *presječnica* tih dviju ravnina. Taj je pravac određen, ako su mu poznate dvije točke ili jedna točka i smjer. Za određivanje projekcija presječnice dviju ravnina obično se uzimaju probodišta P_1 i P_2 te presječnice. Probodište se P_1 nalazi u sjecištu tragova r_1 i s_1, a probodište P_2 leži u sjecištu tragova r_2 i s_2. (Zašto?)

2. Zadatak. *Odredi projekcije* p', p'' *presječnice* p, *dviju ravnina* **P** (r_1, r_2) *i* Σ (s_1, s_2), *ako im se istoimeni tragovi sijeku!*

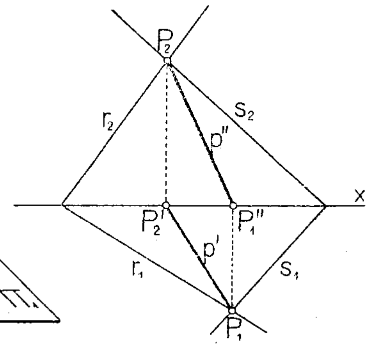
Rješenje. — 1. Na sl. 169.—172. određene su projekcije p', p'' presječnice p ravnina **P** i Σ s pomoću probodišta P_1 i P_2.

2. Na sl. 173. ravnina je $\Sigma \perp \Pi_1$, pa p' padne u trag s_1 (§ 33., t. 158.).

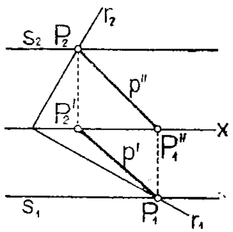
Na sl. 174. obje su ravnine **P** i **Σ** okomite na Π_1, pa je i presječnica $p \perp \Pi_1$.



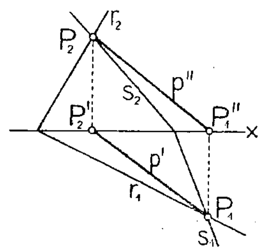
Sl. 168.



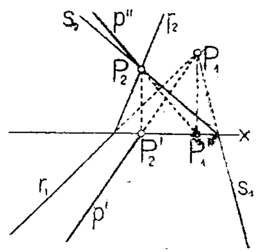
Sl. 169.



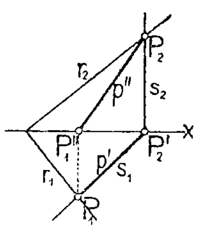
Sl. 170.



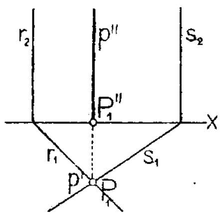
Sl. 171.



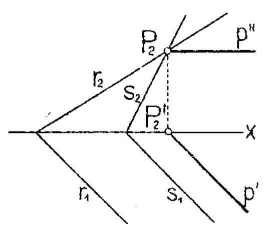
Sl. 172.



Sl. 173.



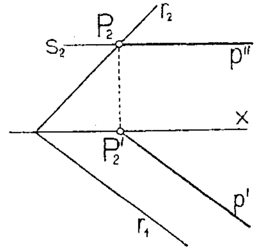
Sl. 174.



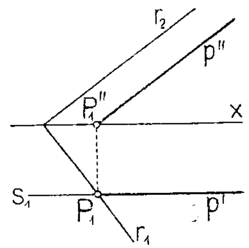
Sl. 175.

4\. Na sl. 175. prvi su tragovi r_1 i s_1 među sobom usporedni, pa i presječnica p mora biti s tim tragovima usporedna, t. j. obje se ravnine sijeku u sutražnici prve skupine.

5\. Na sl. 176. je ravnina $\Sigma \parallel \Pi_1$, dakle je $\Sigma \perp \Pi_2$, pa je nacrt p'' u tragu s_2, a tlocrt p' usporedan je s r_1. Presječnica je p sutražnica prve skupine ravnine **P**.



Sl. 176.

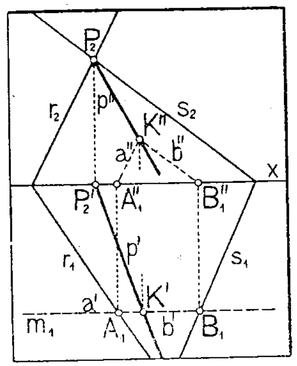


Sl. 177.

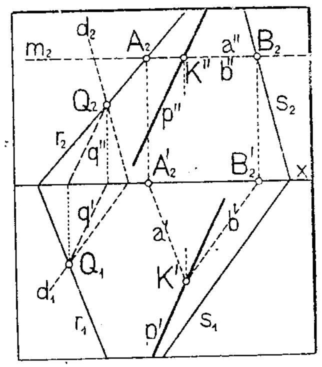
6\. Na sl. 177. je ravnina $\Sigma \parallel \Pi_2$. Tlocrt je p' u tragu s_1, a nacrt $p'' \parallel r_2$. (Zašto?). Pravac p je sutražnica druge skupine ravnine **P**.

3. Zadatak. *Odredi presjek p (p', p'') dviju ravnina* **P** (r_1, r_2) *i* **Σ** (s_1, s_2), *ako sjecište P_1 prvih tragova* r_1 *i* s_1 *padne izvan crtežne plohe!* (Sl. 178.).

Rješenje. — U sjecištu drugih tragova r_2 i s_2 leži drugo probodište P_2 presječnice p. Da se odredi još jedna točka K (K', K'') toga pravca, sjeći će se obje ravnine s trećom, pomoćnom ravninom **M**, koja je na pr.



Sl. 178.



Sl. 179.

usporedna s Π_2 ($m_1 \parallel x$). Ta ravnina siječe ravnine **P** i **Σ** u sutražnicama druge skupine (t. 12., 6) a (a', a'') i b (b', b''), a jer oba ta pravca leže u ravnini **M**, oni se sijeku u točki K. Nacrt K'' leži u sjecištu pravaca a'' i b'', a tlocrt K' leži u tragu m_1. Tlocrt je $p' \equiv P_2'K'$, a nacrt $p'' \equiv P_2K''$.

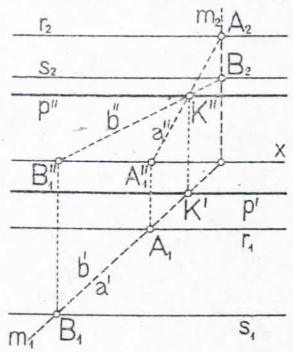
4. Zadatak. *Odredi presjek p (p', p'') dviju ravnina* **P** (r_1, r_2) *i* **Σ** (s_1, s_2), *ako oba probodišta P_1 i P_2 padnu izvan crtežne ravnine!* (Sl. 179.).

Rješenje. — 1. Obje zadane ravnine siječemo s dvije pomoćne ravnine, koje su na pr. usporedne s Π_1, pa ćemo dobiti dvije točke presječnice p, kako se dobila i točka K na sl. 178. (Nacrtaj sliku!).

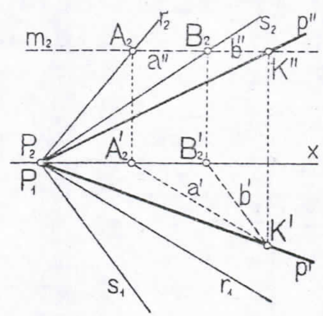
2. Siječemo li obje ravnine **P** i **Σ** s pomoćnom ravninom **M** $\parallel \Pi_1$ ($m_2 \parallel x$), dobit ćemo projekcije K', K'' jedne točke K presječnice p. Da dobijemo smjer presječnice p, sjeći ćemo ravninu **P** s pomoćnom ravninom Δ (d_1, d_2), koja je usporedna sa **Σ** ($d_1 \parallel s_1$, $d_2 \parallel s_2$) i odredit ćemo presječnicu q (q', q'') ravninâ **P** i Δ. Presječnica p ide točkom K usporedno s q. (Zašto?). Točkom K' ide $p' \parallel q'$, a točkom K'' ide $p'' \parallel q''$.

5. **Zadatak.** *Odredi presjek* p (p', p'') *dviju ravnina* **P** (r_1, r_2) *i* **Σ** (s_1, s_2), *ako su obje ravnine usporedne s osi* x! (Sl. 180.).

Rješenje. — Presječnica p obih ravnina **P** i **Σ** mora također biti usporedna s osi x, pa će i njezine projekcije p' i p'' biti usporedne s x. Pošto je poznat smjer presječnice, bit će dovoljno da se odredi samo jedna



Sl. 180.



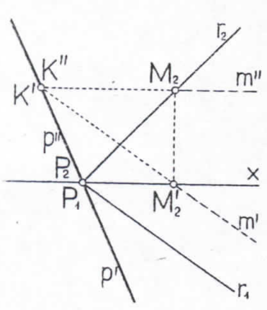
Sl. 181.

točka K (K', K'') te presječnice. Da tu točku odredimo, sjeći ćemo obje zadane ravnine s trećom, pomoćnom ravninom **M**, koja je na pr. okomita na Π_1, u pravcima a (a', a'') i b (b', b''). Pravci se a'', b'' sijeku u točki K'', a K' leži u m_1. Točkom K' ide $p' \parallel x$, a točkom K'' ide $p'' \parallel x$.

6. **Zadatak.** *Odredi presjek* p (p', p'') *dviju ravnina* **P** (r_1, r_2) *i* **Σ** (s_1, s_2), *ako se obje ravnine sijeku u istoj točki osi* x! (Sl. 181.).

Rješenje. — U točku osi x, u kojoj se sijeku tragovi obiju zadanih ravnina, padnu oba probodišta P_1 i P_2 presječnice p, pa tako imamo samo jednu točku te presječnice. Da odredimo drugu točku K (K', K'') presječnice p, siječemo obje zadane ravnine s pomoćnom ravninom **M** $\parallel \Pi_1$; ($m_2 \parallel x$, $a' \parallel r_1$, $b' \parallel s_1$ . . .).

7. **Zadatak.** *Odredi presjek* p (p', p'') *ravnine* **P** (r_1, r_2) *s ravninom koincidencije*! (Sl. 182.).



Sl. 182.

Rješenje. — Oba se traga ravnine koincidencije nalaze u osi x, pa je prema tome točka P_1 ($\equiv P_2$) osi x, u kojoj se sijeku tragovi r_1, r_2, jedna točka tražene presječnice. Da se dobije druga koja točka K (K', K'') presječnice, povući će se u ravnini **P** kojigod pravac, na pr. sutražnica prve skupine m (m', m''), pa će se tražiti probodište K te sutražnice s ravninom koincidencije (§ 20., t. 1., 4). Projekcije K', K'' toga sjecišta leže u sjecištu pravaca m' i m''. Budući da je točka K zajednička točka ravnine **P** i ravnine koincidencije, tom će točkom ići presječnica tih dviju ravnina, te je $p' \equiv p'' \equiv K' P_1 \equiv K'' P_2$. Pravac se p zove *os istovjetnosti*.

§ 40. Presjek pravca ravninom, zadanom tragovima

1. **Zadatak.** *Odredi presjek pravca* p *ravninom* **P**!

Općeniti postupak. *Da se odredi presjek pravca* p *s ravninom* **P** (sl. 183.), *položit će se pravcem* p *kojagod ravnina* **Σ** *i njom će se sjeći ravnina* **P** *u pravcu* q. *Točka* S, *u kojoj presječnica* q *siječe pravac* p, *jest traženo sjecište pravca* p *s ravninom* **P**.

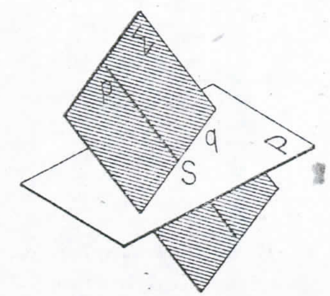
Pravcem p obično se polaže ravnina okomita na Π_1 ili Π_2. Na sl. 185. pravcem je p položena ravnina $\Sigma \perp \Pi_1$.

2. **Zadatak.** *Odredi projekcije* S', S'' *sjecišta* S *pravca* p (p' p'') *s ravninom* **P** (r_1, r_2)!

a) Vidljiva je ista strana ravnine **P**.

Rješenje. — Na sl. 185. pravcem smo p položili ravninu $\Sigma \perp \Pi_1$ ($s_1 \equiv p'$, $s_2 \perp x$) i odredili smo projekcije q', q'' presječnice q ravnina **P** i **Σ**.

Nacrt q'' siječe p'' u točki S'', koja je nacrt traženoga sjecišta S. Tlocrt S' nalazi se u sjecištu pravca p' s ordinalom točke S''.



Sl. 183.

Vidljivost. Ako se uzme, da ravnina **P** nije prozirna, onda će jedan dio pravca p biti vidljiv, a drugi dio bit će sakriven ravninom **P**. Kod promatranja pravca p odozgo i sprijeda, vidjet će se isti dio pravca, t. j. lijevi dio do sjecišta S. Desni se dio ne vidi, pa se mora crtkati.

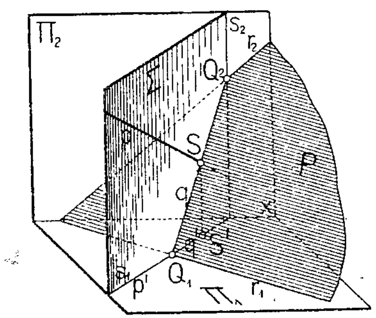
b) Vidljive su različite strane ravnine **P**.

Rješenje. Na sl. 186. određene su projekcije S', S'' sjecišta S pravca p s ravninom **P** na jednak način kao i na sl. 185., samo što se ovdje uzela pomoćna ravnina **E** $\perp \Pi_2$.

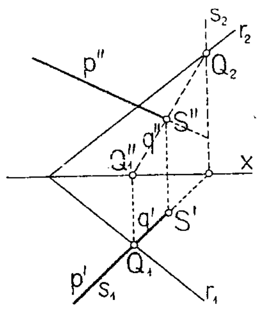
Vidljivost. Kod promatranja pravca p odozgo i sprijeda vide se različite njegove strane, i to u tlocrtu se vidi lijevi dio do sjecišta, a u nacrtu desni dio.

3. **Zadatak.** *Zadane su projekcije p', p'' pravca p i tragovi r_1, r_2 ravnine prometalice* **P**; *odredi projekcije S', S'' sjecišta S pravca p s ravninom* **P**!

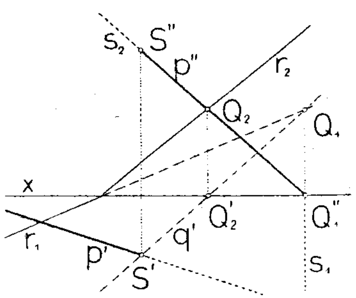
a) Ravnina je $\mathbf{P} \perp \Pi_1$.



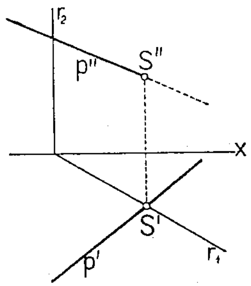
Sl. 184.



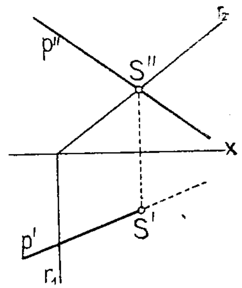
185.



Sl. 186.

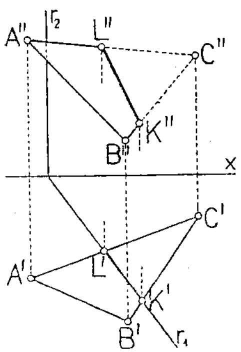


Sl. 187.



Sl. 188.

Rješenje. Budući da sve točke ravnine, koja je okomita na Π_1, imaju svoj tlocrt u prvom tragu r_1, bit će i tlocrt S' traženoga sjecišta S u tragu r_1, a jer S' mora biti i u p', bit će S' u sjecištu pravaca r_1 i p'. Nacrt je S'' u nacrtu p''.



Sl. 189.

Vidljivost. Kod promatranja odozgo vide se oba dijela pravca p, koji leže na različitim stranama ravnine, a kod promatranja sprijeda vidi se lijevi dio do sjecišta S.

b) Ravnina je $\mathbf{P} \perp \Pi_2$.

Rješenje. S jednakih se razloga kao u 1. slučaju nacrt S'' sjecišta S nalazi u sjecištu pravaca p'' i r_2. Tlocrt S' leži u p'.

Vidljivost. Kod promatranja sprijeda vide se oba dijela pravca, koji su na različitim stranama

ravnine **P**, a kod promatranja odozgo vidi se njegov lijevi dio do sjecišta.

4. **Zadatak.** *Odredi presjek trokuta ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) s ravninom* $\mathbf{P}(r_1, r_2)$ *okomitom na* Π_1! (Sl. 189.).

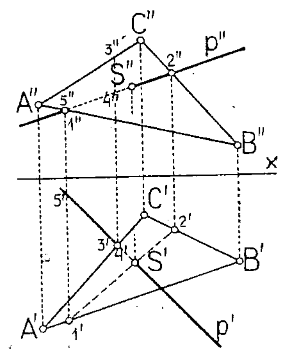
Rješenje. Presječnica trokuta s ravninom je dužina, koja spaja sjecište stranica toga trokuta s ravninom. Ravnina **P** siječe stranicu BC u točki $K(K'K'')$, a stranicu AC u točki $L(L', L'')$, gdje su K' i L' u sjecištima traga r_1 s dužinama $B'C'$ i $A'C'$ (t. 3). Dužina $K'L'$ je tlocrt, a $K''L''$ nacrt presječnice KL trokuta ABC s ravninom **P**. Tlocrt $K'L'$ mora ležati u tragu r_1. Zašto?

Objasni vidljivost trokuta u tlocrtu i nacrtu!

§ 41. Presjek pravca ravninom, zadanom točkama ili pravcima

1. **Zadatak.** *Odredi presjek pravca p (p', p'') s ravninom, koja je zadana s tri točke A (A', A''), B (B', B''), C (C', C'')*! (Sl. 190.).

Rješenje. Spoje li se istoimene projekcije zadanih točaka, dobiju se projekcije trokuta $A'B'C'$ i $A''B''C''$. Ako se pravcem p položi ravnina $E \perp \Pi_2$ ($s_2 \equiv p''$), ona siječe trokut ABC u dužini 1 2, kojoj nacrt $1''2''$ pada u pravac p'', i kojoj je tlocrt dužina $1'2'$. Tlocrt S' leži u sjecištu pravaca p' i $1'2'$, a nacrt S'' leži u sjecištu pravca p'' s ordinalom točke S'.

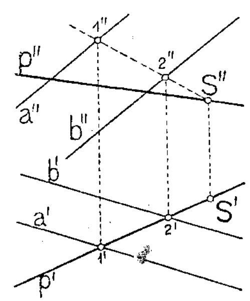


Sl. 190.

Vidljivost. Ako se uzme, da je trokut ABC neproziran, onda će kod promatranja pravca p odozgo i sprijeda biti jedan dio pravca nevidljiv. Da se odredi, koji je dio pravca nevidljiv u tlocrtu ili nacrtu, postupa se kao u § 17., t. 1. upotrebom točaka zaklonica 3 i 4, ili točaka 1 i 5.

Iz nacrta se vidi, da je točka 3 viša negoli točka 4, pa kod promatranja odozgo točka 3 zaklanja nižu točku 4 i po tome se dio pravca $4'S'$ u tlocrtu ne vidi.

Iz tlocrta se vidi, da je točka 1 udaljenija od Π_2, negoli točka 5, pa će kod promatranja sprijeda, točka 1 zakloniti točku 5, te se u nacrtu ne vidi dio pravca $5''S''$.



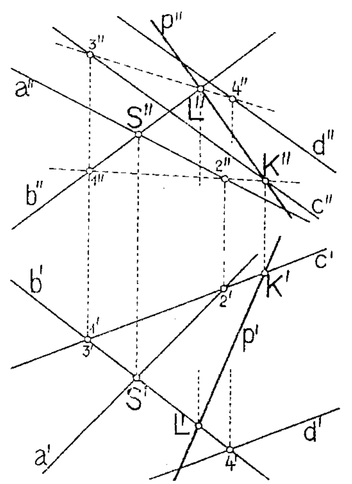
Sl. 191.

2. **Zadatak.** *Odredi presjek pravca p (p', p'') s ravninom, koja je zadana s dva usporedna pravca a (a', b') i b (b', b'')*! (Sl. 191.).

Rješenje. Položi li se pravcem p prva ravnina prometalica $E \perp \Pi_1$ ($s_1 \equiv p'$), ona siječe ravninu ($a\,b$) u pravcu 1 2, gdje je $1'2'$ u p'. Odredi li se nacrt $1''2''$ ($1''$ na a'', $2''$ na b'') presječnice 12, onda je točka S'', u kojoj se sijeku pravci p'' i $1''2''$, nacrt traženog sjecišta pravca p s ravninom (ab). Točka S' leži u sjecištu pravca p' s ordinalom točke S''.

§ 42. Presjek dviju ravnina, zadanih točkama ili pravcima

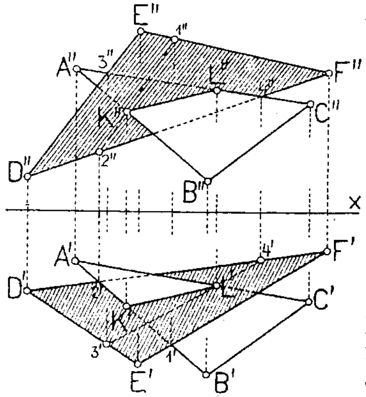
1. Zadatak. *Odredi presjek dviju ravnina, ako je jedna ravnina zadana s dva ukrštena pravca a i b, a druga s dva usporedna pravca c i d!* (Sl. 192.).



Sl. 192.

Ako se odrede sjecišta obih pravaca jedne ravnine s drugom ravninom, ili ako se odredi sjecište po jednoga pravca svake ravnine s drugom ravninom, onda je spojnica tih sjecišta presječnica zadanih ravnina. Na sl. 192. određeno je sjecište $K(K', K'')$ pravca c s ravninom ($a\,b$) s pomoću prve ravnine prometalice pravca c, koja (ab) siječe u pravcu 1 2 ($1'2'$, $1''2''$), zatim je određeno sjecište $L(L'L'')$ pravca b s ravninom (cd), i to s pomoću presječnice 3 4 ($3'4'$, $3''4''$), u kojoj prva ravnina prometalica pravca b, siječe ravninu (cd). Tada je pravac $p \equiv KL$ ($p' \equiv K'L'$, $p'' \equiv K''L''$) presječnica zadanih dviju ravnina.

2. Zadatak. *Odredi presjek dvaju trokuta ABC i DEF, kojima su zadane obje projekcije!* (Sl. 193.).



Sl. 193.

Rješenje. Dva trokuta sijeku se u dužini KL. U točki K probada stranica AB trokut DEF, a u točki L probada taj isti trokut stranica AC. Projekcije točaka K i L odredili smo pomoću pravaca 1 2 i 3 4 na isti način kao i u sl. 190. (§ 41., t. 1).

Vidljivost. Prije konstrukcije izvuku se projekcije stranica trokuta tanko, a tek nakon toga, što su se odredile projekcije presječnice KL, izvuku se deblje stranice ili dijelovi stranica, koji se vide, a iscrtkaju oni dijelovi, koji se ne vide. Kod pogleda odozgo najgornja je stranica EF, pa se ona

u tlocrtu vidi, a jer njezin nacrt $E''F''$ ne pokriva nacrta $A''B''C''$ vidi se i nacrt $E''F''$. Kod pogleda sprijeda vide se čitave stranice BC i DF, pa se one u nacrtu izvuku deblje. Obje te stranice vide se i u tlocrtu. Budući da se u tlocrtu vidi $E'F'$, može se zaključiti, da se dijelovi stranica $A'B'$ i $A'C'$ ne vide od K' i L' do $E'F'$. Isto se tako ne vidi dio stranice $D'F'$, koji je sakriven trokutom ABC. Pošto se u nacrtu vidi stranica $D''E''$, to se dijelovi stranica $B''A''$ i $C''A''$ ne vide od K'' i L'' do stranice $D''E''$. Vidljivost se može odrediti i s pomoću točaka zaklonica, kao i na sl. 190. (§ 41., t. 1.).

3. Zadaci za vježbu

1. Točkom A položi ravninu Σ usporedno s ravninom **P**! Neka je:
a) A (0, 4, — 1), **P** (— 2. 3, — 2); *b)* A (4, — 2, — 1), **P** (4, — 3, 3); *c)* A (5, — 4, 2), **P** (∞, 5, 3); *d)* A (0, — 3, — 2), **P** $\perp \Pi_1$; *e)* A (5, 5, 3), **P** $\perp \Pi_2$.

2. Zadanom točkom T položi ravninu usporedno s ravninom, koja je zadana s dva ukrštena pravca a i b! — Uputa. Točkom T povuci pravac $c \parallel a$ i pravac $a \parallel b$. Tražena je ravnina određena pravcima c i d.

3. Zadanom točkom T položi ravninu usporedno s ravninom, koja je zadana *a)* s tri točke, *b)* s dva usporedna pravca!

4. Odredi presjek dviju ravnina **P** i Σ! Neka je *a)* **P** u općem položaju, $\Sigma \perp \Pi_2$, *b)* **P** i $\Sigma \perp \Pi_2$, *c)* $r_2 \parallel s_2$, *d)* **P** $\parallel x$, $\Sigma \perp \Pi_1$, *e)* **P** $\parallel x$, $\Sigma \perp \Pi_2$, *f)* **P** $\perp \Pi_1$. $\Sigma \parallel \Pi_1$.

5. Odredi presječnicu ovih dviju ravnina: *a)* **A** (— 2, 2, 1), **B** (2, 2, — 4); *b)* Γ (— 3, 4, 2), Δ (2, — 1, 2); *c)* **E** (— 4, — 4, 2), **Z** (1, 3, — 3); *d)* **P** (2, — 1, 2), Σ — 3, 4, ∞); *e)* Φ (∞, 5, 4), Ψ (∞, 2, — 3), *f)* **M** (∞, 5, 4), **N** (6, — 7, 5).

6. Odredi presječnicu dviju ravnina, kojima se prvi tragovi ne sijeku, te je jedna ravnina u općem položaju, a druga $\perp \Pi_2$!

7. Odredi presječnicu dviju ravnina, kojima se drugi tragovi ne sijeku, te je jedna ravnina u općem položaju, a druga $\perp \Pi_1$!

8. Odredi presječnicu dviju ravnina, kojima se ne sijeku ni prvi ni drugi tragovi te je jedna ravnina u općem položaju, a druga $\perp \Pi_1$ (ili $\perp \Pi_2$)!

9. Odredi one točke ravnine **P** (5, 3, 5), koje su od ravnine Π_1 (ili Π_2) udaljene 2 *cm*!

10. Odredi presječnicu ravnine **P** (— 3, — 3, 4) s ravninom istovjetnosti!

11. Točkom A (0, — 1, 3) povuci pravac, koji je usporedan s dvije ravnine **P** (— 2, 1.5, 3) i Σ (4, 5, 2)! — Uputa. Traženi je pravac usporedan s presječnicom ravnina **P** i Σ.

12. Odredi sjecište triju ravnina **A** (— 2, 3, — 3), **B** (4, 3, — 7), Γ (∞, 6, 5)!

13. Točkom M (M', M'') povuci pravac t, koji siječe zadani pravac p (p', p'') i koji je usporedan sa zadanom ravninom **E** (e_1, e_2)! — Uputa: Točkom M i pravcem p položi ravninu Φ i odredi presječnicu s (s', s'') ravnina **E** i Φ Tada je $t \parallel s$.

14. Točkom S (S', S'') položi pravac t (transverzalu), koji siječe dva mimosmjerna pravca a (a', a'') i b (b', b'')! — Uputa: Pravac t je presječnica ravnina [S, a) i (S, b).

15. Zadana su tri pravca a (a', a''), b (b', b'') i c (c', c''); neka se odredi pravac t, koji siječe pravce a i b, a usporedan je s pravcem c! — Uputa: Pravac t je presječnica ravnina položenih pravcem a usporedno s c i pravcem b usporedno s pravcem c.

16. Odredi sjecište kosoga pravca s kosom ravninom s pomoću druge ravnine prometalice!

17. Odredi sjecište pravca, koji je usporedan s Π_1, s kosom ravninom!

18. Odredi sjecište pravca, koji je u ravnini simetrije, s kosom ravninom!

19. Odredi sjecište pravca p s ravninom **P**! Neka je: *a)* $\mathbf{P} \parallel \Pi_1$, p kos, *b)* $\mathbf{P} \parallel \Pi_2$, p kos, *c)* **P** u općem položaju, $p \parallel x$, *d)* $\mathbf{P} \parallel x$, $p \perp \Pi_1$, *e)* $\mathbf{P} \perp \Pi_2$, $p \parallel \Pi_1$, *f)* $\mathbf{P} \parallel \Pi_1$, $p \perp \Pi_1$.

20. Zadana je ravnina $\mathbf{P}$ (r_1, r_2) i dva mimosmjerna pravca a (a', a'') i b (b', b''); odredi onu transverzalu t tih pravaca, koja leži u **P**!

21. Zadanom točkom T položi transverzalu na zadane pravce a i b! — Uputa. Točkom T i pravcem a položi ravninu **P** i njom sijeci pravac b u točki B; tada je TB tražena transverzala!

22. Zadanom točkom M (M', M'') povuci pravac t, koji siječe zadani pravac p (p', p'') i koji je usporedan sa zadanom ravninom $\mathbf{E}$ (e_1, e_2)! — Uputa: Točkom M položi ravninu $\Phi \parallel \mathbf{E}$ i odredi sjecište S pravca p s ravninom Φ. Tada je $t \equiv MS$.

23. Odredi presjek trokuta s ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$!

24. Odredi presjek trokuta ABC [A $(-3, 1, 0)$, B $(-1, 3, 0)$, C $(-6, 4, 6)$] s ravninom **P** $(-7, 7, 4)$!

25. Odredi sjecište pravca p s ravninom, koja je zadana *a)* s dva ukrštena pravca, *b)* točkom i pravcem!

26. Odredi sjecište pravca p, koji je okomit na Π_1, s ravninom, koja je zadana s dva ukrštena pravca a i b!

27. Odredi presjek pravca p s ravninom, koja je zadana s dva usporedna pravca a i b, ako je $a'' \equiv b''$!

28. Odredi presjek pravca s paralelogramom!

29. Odredi presjek dviju ravnina, od kojih je svaka zadana s dva ukrštena pravca a, b i c, d. Neka je: $a \equiv AB$ [A $(5{,}5, 3, 2{,}5)$, B $(4, 1{,}5, 1)$], $b \equiv AC$ [C $(8, 1{,}5, 2)$], $c \equiv DE$ [D $(13, 4, 3)$, E $(11, 0, 5)$], $d \equiv EF$ [F $(3, 4{,}5, -1)$].

30. Odredi presjek dviju ravnina, ako je svaka ravnina zadana s dva usporedna pravca a, b $(a \parallel b)$ i c, d $(c \parallel d)$!

31. Odredi presjek ravnine (trokuta) ABC [A $(2, 3, 2)$, B $(4, 1, 6)$, C $(9, 5, 7)$] s ravninom zadanom s dva ukrštena pravca $a \equiv MN$ [M $(8, 1, 0)$, N $(3, 8, 9)$] i $b \equiv NR$ [R $(5, 0, 0)$]!

32. Odredi presjek dvaju trokuta ABC [A $(3, 2, 3)$, B $(9, 7, 1)$, C $(12, 0, 8)$] i DEF [D $(5, 3, 1)$, E $(13, 6, 7)$, F $(14, 0, 0)$]!

33. Odredi presjek paralelograma $ABCD$ [A $(2, 5, 4)$, B $(4, 2, 6)$, C $(8, 4, 3)$, D] s trokutom EFG [E $(2, 6, 6)$, F $(9, 2, 2)$, G $(7, 8, 0)$]!

34. Odredi presjek dvaju paralelograma $ABCD$ [A $(3{,}5, 0, 0)$, B $(0, 5, 0)$, C $(-5, 0, 6)$, D] i $EFGH$ [E $(-6, 1{,}5, 2{,}5)$, F $(-2{,}5, 4{,}5, 2)$, G $(3, 4, 4{,}5)$, H]!

VIII. Okomitost pravaca i ravnina

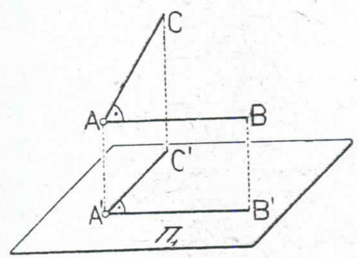
§ 43. Projiciranje pravoga kuta

1. Poučak. — *I. Kad je jedan krak pravoga kuta usporedan s ravninom projekcija, onda se on na tu ravninu projicira opet kao pravi kut.*

Pretpostavka: $\sphericalangle\ BAC = 90^0$ i $AB \parallel \Pi_1$.

Tvrdnja: $\sphericalangle B'A'C' = 90^0$. (Sl. 194.).

Dokaz. Budući da je $AB \parallel \Pi_1$, to je $A'B' \parallel AB$. Kako je nadalje AB okomito na AC i na AA', to je AB okomito i na ravnini prometalici $A'C'CA$ kraka AC, a jer je $A'B' \parallel AB$, to je i $A'B'$ okomito na toj ravnini. Prema tome je $A'B'$ okomito i na pravcu $A'C'$ ravnine $A'C'CA$, t. j. $\sphericalangle\ B'A'C' = 90^0$.



Sl. 194.

II. Ako se kut, kojemu je jedan krak usporedan s ravninom, projicira na tu ravninu kao pravi kut, onda je i kut u prostoru pravi kut.

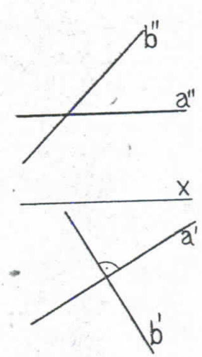
Pretpostavka: $\sphericalangle\ B'A'C' = 90^0$ i $AB \parallel \Pi_1$.

Tvrdnja: $\sphericalangle\ BAC = 90^0$. (Sl. 194.).

Dokaz. Pravac $A'B'$ okomit je na pravcima $A'C'$ i AA', dakle je okomit i na ravnini $AA'C'C$. Budući da je $AB \parallel A'B'$, to je i AB okomit na ravnini $AA'C'C$, dakle je AB okomit i na pravcu AC, t. j. $\sphericalangle\ BAC = 90^0$.

2. Ako su dva mimosmjerna pravca među sobom okomita, pa je jedan pravac usporedan s ravninom projekcija, onda se oba pravca projiciraju na tu ravninu pod pravim kutem.

Obrnuto: Ako se dva mimosmjerna pravca, od kojih je jedan usporedan s ravninom, projiciraju na tu ravninu pod pravim kutem, onda su ti pravci u prostoru među sobom okomiti. Na sl. 195. je $a' \perp b'$ i $a \parallel \Pi_1$, pa je $a \perp b$.

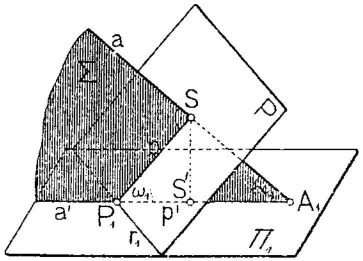


Sl. 195.

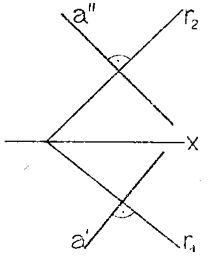
§ 44. Predočenje pravca, koji je okomit na ravnini

1. Poučak. *Kad je pravac okomit na ravnini, onda su mu projekcije okomite na istoimenim tragovima.*

Pretpostavka; $a \perp \mathbf{P}$.
Tvrdnja: $a' \perp r_1$, $a'' \perp r_2$.
Dokaz. Ravnina prometalica Σ pravca a (sl. 196.), okomita je na $\mathbf{P}$, (jer sadrži pravac a, koji je $\perp \mathbf{P}$) i na Π_1, pa je prema tome okomita



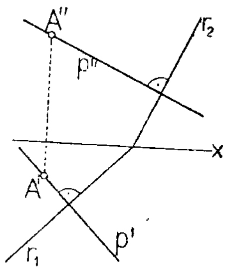
Sl. 196.



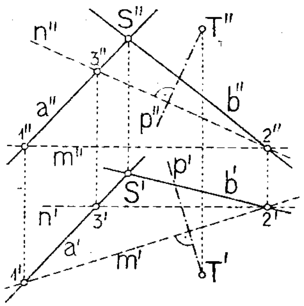
Sl. 197.

i na presječnici r_1 tih ravnina t. j. $\Sigma \perp r_1$. Odatle slijedi, da je $a' \perp r_1$. S istih je razloga i $a'' \perp r_2$ (sl. 197.).

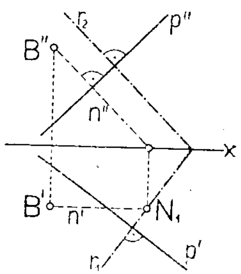
2. Budući da je ravnina $\Sigma \perp r_1$, ona siječe $\mathbf{P}$ u pravcu p (sl. 196.), koji je također okomit na r_1, t. j. p je priklonica prve skupine. Tlocrt p' pada u a'. Budući da je $\triangle P_1 A_1 S$ kod S pravokutan, to je $\sphericalangle \omega_1 + \alpha_1 = 90^0$, t. j. *prvi prikloni kut* ω_1 *ravnine* $\mathbf{P}$ *i prvi prikloni kut* α_1 *pravca* a, *koji je na* $\mathbf{P}$ *okomit, jesu dva komplementna kuta.* Isto tako je i $\sphericalangle \omega_2 + \alpha_2 = 90^0$.



Sl. 198.



Sl. 199.



Sl. 200.

3. **Zadatak.** *Sa zadane točke* $A(A', A'')$ *spusti okomicu* p *na zadanu ravninu* $\mathbf{P}$ (r_1, r_2) *i odredi projekcije* p', p'' *te okomice!* (Sl. 198.).

Rješenje. Točkom A' povuci $p' \perp r_1$, a točkom A'' pravac $p'' \perp r_2$.

4. **Zadatak.** *Sa zadane točke* $T(T', T'')$ *spusti okomicu* $p(p', p'')$ *na ravninu zadanu s dva ukrštena pravca* $a(a', a'')$ *i* $b(b', b'')$! (Sl. 199.).

Prvo rješenje. Odredi tragove r_1, r_2 ravnine *(ab)* i postupaj dalje kao u t. 3.

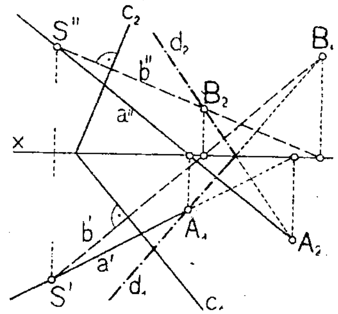
Drugo rješenje. U ravnini *(ab)* povuci sutražnicu prve skupine $m(m', m'')$ i sutražnicu druge skupine $n(n', n'')$; tada je $p' \perp m'$, a $p'' \perp n''$. Zašto?

5. **Zadatak.** *Zadanom točkom* $B(B', B'')$ *položi ravninu* $\mathbf{P}$ *okomito na zadani pravac* $p(p', p'')$ *i odredi tragove* r_1, r_2 *te ravnine!* (Sl. 200.).

Prvo rješenje: Traženi tragovi r_1, r_2 moraju biti okomiti na istoimenim projekcijama pravca p, pa će se ti tragovi moći nacrtati, ako se odredi jedna točka prvoga ili drugoga traga. Budući da točka B mora ležati u ravnini $\mathbf{P}$, ona se mora nalaziti na jednome pravcu te ravnine, na pr. na sutražnici druge skupine $n(n', n'')$. Nacrt n'' te sutražnice mora ići točkom B'' okomito na p (jer mora biti i trag $r_2 \perp p''$ i $n'' \parallel r_2$), a n' mora ići točkom B' usporedno s x. Prvim probodištem N_1 ide trag $r_1 \perp p'$; drugi je trag $r_2 \perp p''$.

Drugo rješenje. Točkom B povuci sutražnicu prve skupine $m(m' \perp p', m'' \parallel x)$ i sutražnicu druge skupine $n(n' \parallel x, n'' \perp p'')$; pravci m i n određuju traženu ravninu.

6. **Zadatak.** *Zadanim pravcem* $a(a', a'')$ *neka se položi ravnina* Δ *okomito na zadanu ravninu* Γ (c_1, c_2) *i odrede tragovi* d_1, d_2 *ravnine* Δ! (Sl. 201.).



Sl. 201.

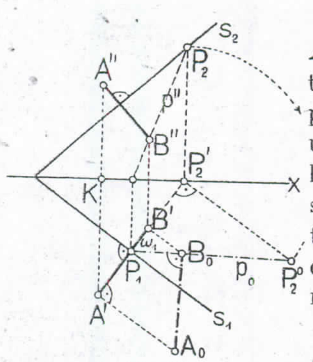
Rješenje. Ravnina će Δ biti okomita na ravnini Γ, ako se u njoj nalazi pravac b, koji je okomit na Γ. Budući da ravnina Δ mora ići pravcem a, tad pravac b mora sjeći pravac a. Uzmemo li prema tome po volji točku $S(S', S'')$ u pravcu a i tom točkom položimo pravac $b \perp \Gamma$ $(b' \perp c_1, b'' \perp c_2)$, onda pravci a i b određuje ravninu Δ. Tragovi se d_1, d_2 odrede kao u § 37. t. 2.

§ 45. Udaljenost točke od ravnine

1. **Zadatak.** *Odredi udaljenost točke* $A(A', A'')$ *od ravnine* $\mathbf{E}$ (s_1, s_2) (Sl. 202.).

Prvo rješenje. Pod daljinom točke od ravnine razumijeva se okomica, spuštena s točke na ravninu. Projekcije su te okomice $A'B' \perp s_1$ i $A''B'' \perp s_2$. Odredimo li projekcije B', B'' točke B, u kojoj ta okomica siječe $\mathbf{E}$, onda su $A'B'$ i $A''B''$ projekcije udaljenosti točke A od ravnine $\mathbf{E}$. Preloženjem dužine AB oko $A'B'$ u Π_1, dobije se njezina prava veličina $A_0 B_0$ (§ 22., t. 2).

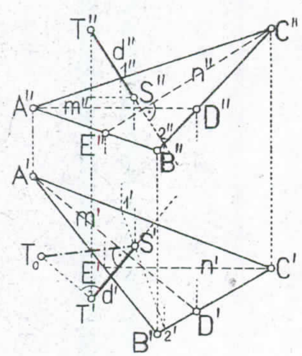
*



Sl. 202.

Drugo rješenje. Budući da je dužina AB okomita na obim priklonicama ravnine u točki B i budući da AB i priklonica prve skupine p leže u istoj ravnini prometalici, bit će i u preložaju $A_0B_0 \perp p_0$. Ako dakle odredimo preložaj A_0 točke A i preložaj p_0 priklonice p, pa s A_0 spustimo okomicu na p_0, njezino je nožište točka B_0, pa je $A_0B_0 = AB$. Spusti li se s B_0 okomica na $A'P_2'$, njezino je nožište B'. Spomoću ordinale te točke odredi se B''.

2. Zadatak. *Odredi daljinu točke $T(T', T'')$ od trokuta ABC, koji je zadan svojim tlocrtom i nacrtom!* (Sl. 203.).



Sl. 203.

Rješenje: Potegnemo li točkom A sutražnicu prve skupine m (m', m''), koja leži u ravnini trokuta, onda je $m'' \parallel x$ i siječe stranicu $B''C''$ u točki D''. Odredimo li D' na $B'C'$, onda je $m' \equiv A'D'$. Potegnemo li vrhom C sutražnicu druge skupine n (n', n''), onda je $n' \equiv C'E' \parallel x$, ili $\perp B'B''$, a $n'' \equiv C''E''$. Budući da su tragovi ravnine trokuta usporedni s m' i n'' i budući da su projekcije okomice d, spuštene s točke T na tu ravninu, okomite na istoimenim tragovima, bit će i tlocrt $d' \perp m'$, a nacrt $d'' \perp n''$.

Odredimo li sad projekcije S', S'' probodišta S okomice d s ravninom trokuta ABC (§ 41. t. 1.), onda je $T'S'$ tlocrt, a $T''S''$ nacrt udaljenosti točke T od trokuta ABC. Spomoću prvog diferencionog trokuta odredili smo pravu veličinu $S'T_0$ te udaljenosti.

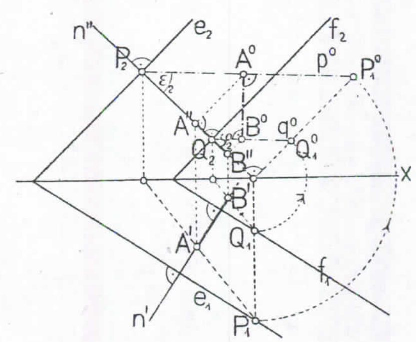
§ 46. Udaljenost dviju usporednih ravnina

1. Zadatak. *Odredi udaljenost dviju usporednih ravnina* E (e_1, e_2) i Φ (f_1, f_2)! (Sl. 204.).

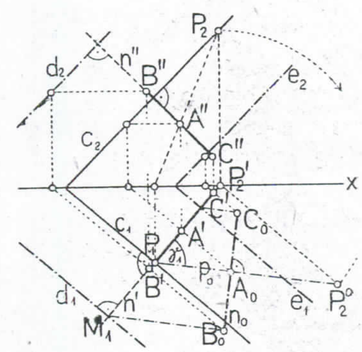
Rješenje. — Okomica AB spuštena s jedne točke ravnine E na drugu usporednu ravninu Φ, označuje udaljenost tih dviju ravnina. Ako se kroz tu okomicu položi na pr. druga ravnina podmetalica Σ, ona siječe ravnine E i Φ u priklonicama druge skupine p i q, koje su okomite na dužini AB. [§ 44. (t. 2.)]. Prevalimo li ravninu Σ zajedno s priklonicama p, q i dužinom AB, bit će $p^0 \parallel q^0$ (jer je $\sphericalangle \varepsilon_2 = \varphi_2$), a A^0B^0 bit će okomito na p^0 i q^0, te je $A^0B^0 = AB$. Dužina se A^0B^0 može između p^0 i q^0 bilo gdje nacrtati.

2. Zadatak. *Odredi projekcije točke B, koja je od zadane ravnine* Γ (c_1, c_2) *udaljena za dužinu a!* (Sl. 205.).

Prvo rješenje. Ima neizmjerno mnogo točaka, koje su od zadane ravnine udaljene za dužinu a. Te točke ispunjaju dvije ravnine, koje su s jedne i druge strane u daljini a usporedne s ravninom Γ. Projekcije B', B''



Sl. 204.



Sl. 205.

jedne tražene točke B odrede se na slijedeći način: U ravnini Γ uzmemo kojugod točku A (A', A''), tom točkom položimo pravac n (n', n'') okomito na Γ ($n' \perp c_1$, $n'' \perp c_2$) i na toj okomici potražimo točku B, koja je od Γ udaljena za a. U tu svrhu preložit ćemo priklonicu prve skupine, koja ide točkom A, u Π_1, pa ćemo u točki A_0 postaviti pravac $n_0 \perp p_0$ (jer je $n \perp p$). Ako na n_0 prenesemo $A_0B_0 = a$, imamo preložaj B_0 točke B. Povučemo li $B^0B' \perp n'$ imamo tlocrt B', dok se B'' nalazi u n''. Položimo li točkom B ravninu Δ ∥ Γ (§ 38. t. 2.), onda je ravnina Δ jedno geometrijsko mjesto točaka, koje su od ravnine Γ udaljene za a.

Prenesemo li na n_0 $A_0C_0 = a$, onda je C_0 preložaj točke C, koja je u pravcu n s druge strane ravnine Γ u daljini a. Odredi C', C'' i točkom C položi ravninu E ∥ Γ! Kakvo značenje ima ravnina E?

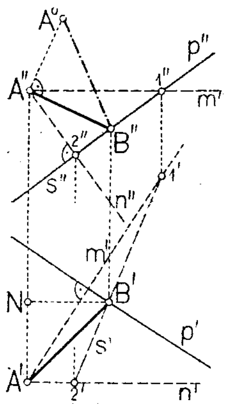
Drugo rješenje. Odredi se položaj p_0 (sl. 205.) jedne priklonice prve skupine ravnine Γ, uzme na p_0 po volji točka A_0, tom točkom povuče pravac $n_0 \perp p_0$ i na nj prenese $A_0B_0 = A_0C_0 = a$. Ako se točkom B_0 povuče $B_0M_1 \parallel p_0$, taj je pravac preložaj priklonice prve skupine ravnine Δ, te prvo probodište M_1 leži na pravcu P_1P_2'! Prema tome točkom M_1 mora ići trag $d_1 \parallel c_1$, dok je trag $d_2 \parallel c_2$. Na jednaki bi se način odredili tragovi e_1, e_2 ravnine E.

§ 47. Udaljenost točke od pravca

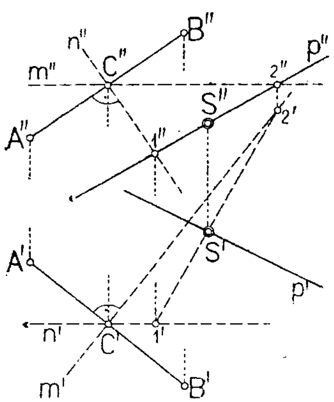
1. **Zadatak.** *Odredi udaljenost zadane točke A (A', A'') od zadanog pravca p (p', p'')!*

Rješenje. Okomica spuštena s točke A na pravac p, naznačuje daljinu te točke od pravca p. Da se dobije ta okomica, položit će se točkom A ravnina **P** okomito na p (§ 44. t. 5.) i s tom će se ravninom sjeći pravac p u točki B. Tada je $AB \perp p$, te AB naznačuje udaljenost točke A od pravca p. Riješi zadatak upotrebom tragova ravnine **P**!

Mi smo na sl. 206. riješili zadatak bez upotrebe tragova ravnine **P**. U toj smo slici ravninu **P** definirali s dvije sutražnice $m \parallel \Pi_1$ i $n \parallel \Pi_2$, koje idu točkom A. Budući da je $\mathbf{P} \perp p$, to je $m' \perp p'$ i $n'' \perp p''$, dok su m'' i n' usporedni s x. Ravninu ($m\,n$) siječemo sad pravcem p na način, koji je izložen u § 41. t. 2. (sl. 191.), s pomoću pravca $s \equiv 12$, gdje je $1''\,2'' \equiv p''$, te $1'$ leži u m', a $2'$ u n'. Pravac $1'2'$ siječe p' u B'; B'' leži u p''. Dužina je $A'B'$ tlocrt, a $A''B''$ nacrt dužine AB. Prava je veličina te dužine jednaka A^0B'', koju smo odredili spomoću drugog diferencionog trokuta ($A''A^0 \perp A''B''$, $A''A^0 = A'N$).



Sl. 206.



Sl. 207.

2. **Zadatak.** *Zadane su dvije točke A (A', A'') i B (B', B'') i pravac p (p', p''); odredi onu točku S (S', S'') pravca p, koja je od točaka A i B jednako udaljena!*

Geometrijsko mjesto svih točaka prostora, koje su jednako udaljene od dviju zadanih točaka A i B, je ravnina, koja ide središtem C dužine AB okomito na tu dužinu. (Simetralna ravnina dužine AB).

Na sl. 207. odredili smo projekcije C', C'' polovišta C dužine AB i tom smo točkom položili po jednu sutražnicu m i n prve i druge skupine ravnine **P**, koja je okomita na AB. ($m' \perp A'B'$, $n'' \perp A''B''$, m'' i $n' \parallel x$). Ta dva pravca određuju ravninu **P**. Siječemo li tu ravninu pravcem p u točki S (S', S''), ta je točka jednako udaljena od točke A i B.

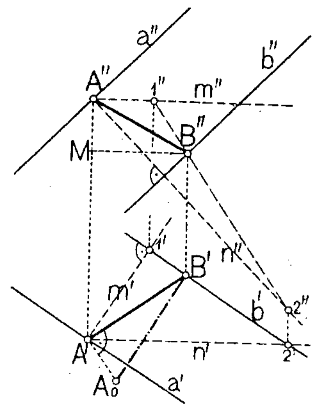
Bilješka. Budući da se zadaci u t. 1. i 2. mogu riješiti bez upotrebe osi x, ispuštena je ta os na sl. 206. i 207. (Gledaj također sl. 191., 192., 199., 203., i 206.!)

§ 48. Udaljenost dvaju pravaca

1. **Zadatak.** *Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca a (a', a'') i b (b', b'')!*

Rješenje. Položi se kakvagod ravnina **P** okomito na a i b i odrede sjecišta A i B tih pravaca s ravninom **P**; tada dužina AB označuje udaljenost usporednih pravaca a i b. Riješi zadatak upotrebom tragova r_1, r_2 ravnine **P**!

Na sl. 208. mi smo zadatak riješili bez upotrebe tragova ravnine **P**. U pravcu a uzeli smo po volji točku A (A', A''), pa smo tražili udaljenost AB točke A od pravca b na način kao na sl. 206. (§ 47. t. 1.), samo što smo kod određivanja projekcija B' i B'' sjecišta B upotrebili prvu ravninu prometalicu Σ pravca b i njom smo sjekli ravninu (mn) u pravcu 12. Nacrt $1''2''$ siječe b'' u točki B''. Prava je veličina dužine AB jednaka A_0B', koju smo odredili spomoću prvog diferencionog trokuta ($A'A_0 \perp A'B'$, $A'A_0 = A''M$).

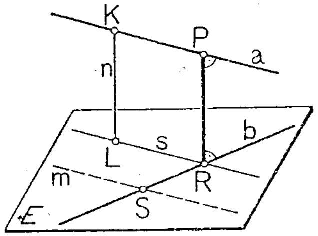


Sl. 208.

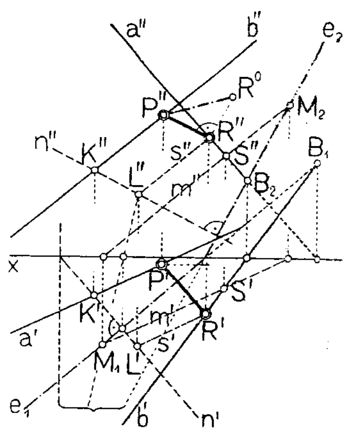
2. **Zadatak.** *Odredi najkraću udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca a (a', a'') i b (b', b'')!*

Rješenje. Dužina, koja označuje najkraću udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca a i b mora biti okomita na pravcu a i na pravcu b, a mora biti okomita i na ravnini **E**, koja je položena pravcem b usporedno s pravcem a (sl. 209.). Spustimo li s kojegod točke K pravca a okomicu KL na ravninu **E**, ta okomica označuje najkraću udaljenost pravaca a i b. Povučemo li točkom L pravac $s \parallel a$, on siječe pravac b u točki R, a povučemo li $RP \parallel LK$, tada je PR zajednička normala pravaca a i b. Da je PR najkraća udaljenost pravaca a i b zaključujemo odatle, što su normalne daljine svih točaka pravca a od ravnine **E** jednake PR i nijedna ne može biti manja od PR.

Na osnovi toga razlaganja mi smo na sl. 210. odredili projekcije $P'R'$ i $P''R''$ najkraće udaljenosti pravaca a i b. Na pravcu b uzeli smo po volji točku S (S', S''), povukli smo kroz nju pravac $m \parallel a$ ($m' \parallel a'$, $m'' \parallel a''$) i odredili smo tragove e_1, e_2 ravnine **E**, koju određuju pravci b i m. Na pravcu a uzeli smo tad po volji točku K (K', K''), spustili smo s te točke pravac $n \perp$ **E** ($n' \perp e_1$, $n'' \perp e_2$) i odredili smo projekcije L', L'' probodišta pravca n s ravninom **E**. Povučemo li točkom L pravac $s \parallel a$ ($s' \parallel a'$, $s'' \parallel a''$), dobijemo na b' točku R', a na b'' točku R''. Sad još povučemo $R'P' \parallel L'K'$ i $R''P'' \parallel L''K''$, pa imamo tražene projekcije $P'R'$ i $P''R''$. Odredi pravu veličinu dužine PR!



Sl. 209.



Sl. 210.

3. Zadaci za vježbu

1. Sa zadane točke A spusti okomicu na ravninu **P**! Neka je:
a) A (2, 3, 3), **P** (4, 2, 3); *b)* A (0, 2, 4), **P** (4, 4, — 7); *c)* A (3, 0, 3), **P** (2, ∞, 2); *d)* A (1, 3, 0), **P** (—3, —3, 3); *e)* A (0, 2, 3), **P** (2, 4, ∞); *f)* A (—2, 0, 0), **R** (—5, 4, 3).

2. Sa ishodišta O spusti okomicu na ravninu Σ (— 3, — 2, 1)!

3. U zadanoj ravnini **P** uzmi točku A i položi njom pravac okomito na tu ravninu!

4. Zadanom točkom T položi ravninu okomito na zadani pravac p! Neka je: *a)* T (3, 4, 1). $p \equiv AB$ [A (1, 4, 6). B (5, 1, 2)], *b)* T (4, 3, 1), $p \equiv CD$ [C (0, 2. 1), D (4, 2, 5)]; *c)* T (0, —3, 1), $p \equiv EF$ [E (—3, 2, —3), F (3, —4, 1)].

5. Točkom T položi ravninu okomito na pravac p, koji je *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$, *c)* $\perp \Pi_1$, *d)* $\perp \Pi_2$. *e)* $\parallel$ x, *f)* u Π_1, *g)* u Π_2!

6. U krajnjim točkama dužine PR [P (0, 2, 1), R (3, 3, 4)] položi ravnine okomito na PR!

7. Polovištem dužine MN [M (—3, 1, 2), N (4, 3, 5)] položi ravninu okomito na dužinu MN! (Simetralna ravnina dužine MN).

8. Zadanom točkom A položi pravac m okomito na zadani pravac p! — Uputa: Pravac m ide točkom A i sjecištem B pravca p s ravninom položenom točkom A okomito na p.

9. Zadanom točkom D (D', D'') položi ravninu E okomito na dvije zadane ravnine Γ (e_1, c_2) i Δ (d_1, d_2)! — Uputa: Ravnina je E okomita na presječnici ravnina Γ i Δ.

10. S točke E (6, 11, 8) spusti okomicu na ravninu trokuta ABC [A (0, 4, 9), B (6, 1, 4), C (2, 11, —2)]! (Upotrebi sutražnice!)

11. U težištu trokuta MNP [M (3, 5, 7), N (5, 7, 3), P (7, 3, 5)] postavi okomicu na ravninu toga trokuta!

12. Sa zadane točke spusti okomicu na ravninu, koja je zadana *a)* s dva ukrštena pravca, *b)* s dva usporedna pravca, *c)* točkom i pravcem! (Riješi zadatak na oba načina, § 44. t. 4!)

13. U ravnini **A** (7, 8, 3) uzmi pravac p [P_1 (0, 8, 0), P_2 (6, 0, —)] i tim pravcem položi ravninu **B** $\perp$ **A**!

14. Pravcem $p \equiv MN$ [M (0, 6, 4), N (7, 3, —1)] položi ravninu okomito na ravninu trokuta ABC [A (2, 1, 7), B (8, 2, 5), C (5, 6, 4)]!

15. Zadana su dva mimosmjerna pravca m i n i ravnina Δ; odredi onu transverzalu pravaca m i n, koja je okomita na Δ! — Uputa. Pravcem m položi ravninu **A**, a pravcem n ravninu **B** okomito na Δ. Presječnica ravnina **A** i **B** je traženi pravac.

16. U zadanoj ravnini Γ uzmi pravac a, pa zadanom točkom T položi drugi pravac b okomito na a! — Uputa. Pravac b je okomit na ravnini Γ. Pravci su a i b mimosmjerni.

17. Točkom A položi pravac t tako, da siječe pravac a i da bude okomit na pravcu b! — Uputa. Pravac t leži u ravnini položenoj točkom A okomito na b.

18. Točkom A (9, 4, 3) položi pravac m, koji je okomit na pravcu $b \equiv EF$ [E (0, 6, 2) F (5, 1, 5)] i $e \equiv GH$ [G (15, 7, 7), H (16,5, 2, 2,5)]! — Uputa. Pravac je t okomit na ravnini, koja je usporedna s b i c.

19. Točkom A položi pravac t, koji je okomit na pravcu m i usporedan s ravninom **P**! — Uputa: Točkom A položi ravninu $\Sigma \perp m$ i odredi presječnicu s ravnina **P** i Σ. Pravac je $t \parallel s$.

20. Odredi udaljenost točke A od ravnine **P** prema 1. zadatku.

21. Odredi daljinu točke E od trokuta ABC prema 11. zadatku.

22. Odredi udaljenost točke M (4, 1, 1) od ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca AB i AC [A(—3, 1, 1), B (0, 3, —1), C (2, 0, 6)]!

23. Odredi udaljenost točke M (0, 1, 4) od ravnine, koja je zadana s dva usporedna pravca AB i CD [A (1, 2,5, 6). B (4, 5,5, 1), C (8, 3,5, 2,5)]!

24. Odredi onu točku ravnine Π_1, koja je od tri točke A (1, 4, 2), B (4, 1, 3) C (7, 3. 1) jednako udaljena! — Uputa. Središtem kojihgod dviju stranica trokuta ABC položi simetralne ravnine tih stranica i odredi njihovu presječnicu p. U toj presječnici leže sve točke prostora, koje su od zadanih točaka jednako udaljene. Probodište pravca p s Π_1 je tražena točka.

25. Odredi onu točku ravnine Φ (∞, —7, 9), koja je jednako udaljena od tri točke O (0, 0, 0), A (6, 3, 7), B (10, —1, 8)! (Gledaj uputu za 24. zadatak!)

26. Odredi udaljenost dviju usporednih ravnina **A** i **B**: *a)* kojima su različite strane okrenute prema Π_1 i Π_2, *b)* koje su $\perp \Pi_1$, *c)* koje su $\perp \Pi_2$!

27. Odredi tragove ravnine, koja je u daljini $d = 2$ *cm* usporedna s ravninom *a)* **P** (4, 3, —2), *b)* Σ (2, ∞. 2)!

28. Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b i ravnina **E**; odredi onu transverzalu pravaca a i b, koja je u daljini $d = 3$ *cm* usporedna s ravninom **E**! — Uputa. Tražena transverzala leži u ravnini Φ. koja je u daljini d usporedna s **E**.

29. Na pravcu $e \equiv MN$ [M (0, 1, 1), N (4, 8, 6)] odredi točku, koja je od ravnine ABC [A (0, 4, 5), B (4, 5, 1), C (4, 4, 2)] udaljena za dužinu $d = 2$ *cm*!

30. Odredi udaljenost točke od pravca, koji je *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$, *c)* $\parallel x$, *d)* u općem položaju!

31. Odredi udaljenost točke T od pravca p prema 4. zadatku.

32. Odredi udaljenost točke od pravca, koji je *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\parallel \Pi_2$, *c)* u Π_1, *d)* u Π_2!

33. Odredi udaljenost točke od pravca, ako je ta točka i pravac *a)* u ravnini simetrije, *b)* u ravnini istovjetnosti!

34. Na pravcu $p \equiv MN$ [M (5, 0, 10), N (—3, 6, 6)] odredi onu točku, koja je jednako udaljena od točaka A (—4, 0, 4) i B (1, 3, 4)!

35. Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca, koji su: *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$, *c)* $\parallel \Pi_1$, *d)* $\parallel \Pi_2$!

36 Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca a i b, ako je $a \equiv AB$ [A (—5, 0, 2), B (1, 6, 7)] i ako b ide točkom C (3, 2, 4)!

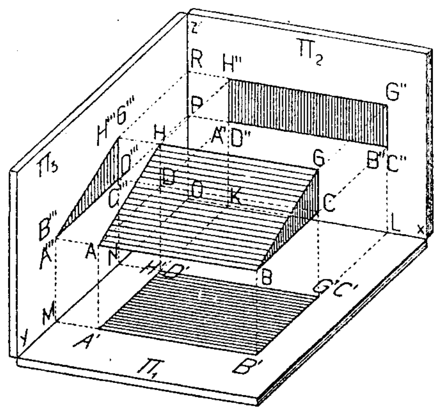
37. Odredi najkraću udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca a i b, ako je *a)* $a \perp \Pi_1$, b kos, *b)* a i b usporedno s Π_1, *c)* $a'' \parallel b''$!

38. Odredi najkraću udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca a i b, ako je
a) $a \equiv AB$ [A (0, 1, 1,3) B (4, 4, 1)], $b \equiv CD$ [C (1, 4, 2), D (5, 4, 4)];
b) $a \equiv AB$ [A (0, 3, 0), B (3, 5, 4), $b \equiv CD$ [C (8, 6, 0), D (7, 5, 2)].

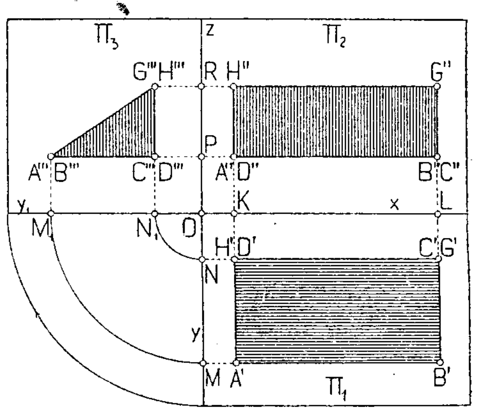
IX. Projiciranje na tri ili više ravnina

§ 49. Bokocrtna ravnina i bokocrt

1. **Objašnjenja.** Ako prerežemo paralelepiped ravninom, koja je položena bridovima AB i HG (gledaj sliku 109.), dobit ćemo dvije sukladne trostrane prizme. Odstranimo li gornju polovicu, a donju zadržimo u istom položaju i projiciramo je na Π_1 i na Π_2, vidjet ćemo, da tlocrt i nacrt ne će imati drugačiji oblik, nego li ga ima tlocrt i nacrt čitave prizme. Prema tome, ako projekcije tijela nijesu dovoljno opisane, ne može se iz njih lako zaključiti, kakvo zapravo tijelo predočuju te slike. Zato je katkada potrebno, da se tijelo projicira još i na treću ravninu Π_3, koja je okomita na Π_1 i na Π_2, dakle okomito i na osi x. Ta se ravnina zove *bokocrtna* ili *profilna*, ili *treća ravnina projekcija*. Sve tri ravnine projekcija sijeku se u tri pravca, tri osi x, y, z (sl. 211.), koje su među sobom okomite i imaju zajedničku točku O (ishodište).



Sl. 211.



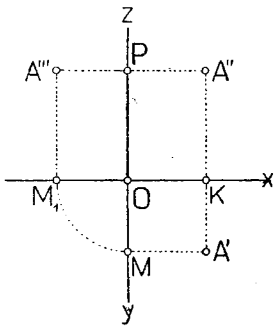
Sl. 212.

Projekcija se tijela na ravninu Π_3 zove *bokocrt* ili *treća projekcija* toga tijela. Bokocrt je trostrane prizme na sl. 211. pravokutan trokut $A'''D'''H'''$ ili $B'''C'''G'''$.

2. **Sjedinjenje triju projekcija u Π_2.** Da dobijemo sve tri projekcije tijela u istoj ravnini, na pr. u ravnini Π_2, okrenut ćemo ravninu Π_1, zajedno s tlo-

crtom oko osi x dolje, a ravninu Π_3 zajedno s bokocrtom oko osi z lijevo u ravninu Π_2, što je prikazano na sl. 212. Kod okretanja ravnine Π_1 oko osi x točke M i N opišu četvrtine kružnicâ, kojima je središte u točki O i kojima su polumjeri dužine OM i ON. Kad se ravnina Π_3 okrene oko osi z u ravninu Π_2, onda se i te četvrtine kružnica prikažu u pravoj veličini.

3. Bokocrt točke. Ako na sl. 211. uočimo točku A i tri njezine projekcije $A'A''A'''$, vidimo, da je $A'''M = AA' = A''K$; t. j. druga i treća projekcija točke A leže u istoj visini nad Π_1. Nadalje vidimo, da je $A'''P = AA'' = A'K$; t. j.:

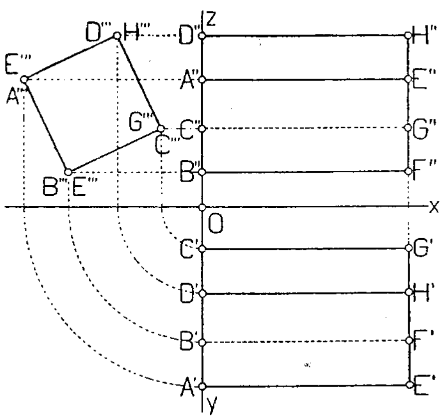


Sl. 213.

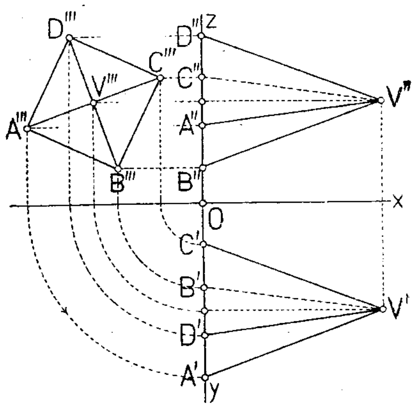
Treća je projekcija točke udaljena od osi z *toliko, koliko je njezina prva projekcija udaljena od osi* x.

Na slici 213. nacrtane su napose sve tri projekcije točke A.

Ako je zadana prva i druga projekcija točke A, onda se njezina treća projekcija dobije na slijedeći način (sl. 213.): Točkom A'' povuče se pravac $A''A''' \parallel x$, a točkom A' pravac $A'M \parallel x$, opiše oko točke O četvrtina kružnice s polumje-



Sl. 214.



Sl. 215.

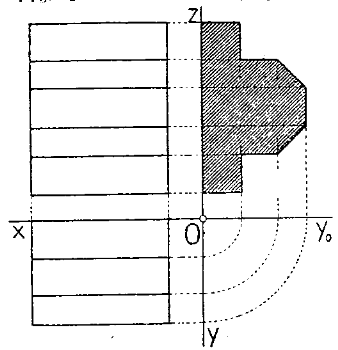
rom OM i u točki M, koja je sad došla u M_1, povuče pravac $M_1A''' \parallel z$. Točka A''' može se kraće odrediti tako, da se točkom A'' povuče usporednica s osi x i na nju prenese $PA''' = KA'$.

Kako ćeš iz nacrta A'' i bokocrta A''' točke A dobiti tlocrt A'?

4. Bokocrt prizme i piramide. Na sl. 214. nacrtane su sve tri projekcije kvadratične prizme, a na sl. 215. nacrtane su sve tri projekcije kvadratične piramide. Osnovke su tih tijela u Π_3, pa se zato najprije nacrta bokocrt, zatim nacrt i napokon tlocrt tijela.

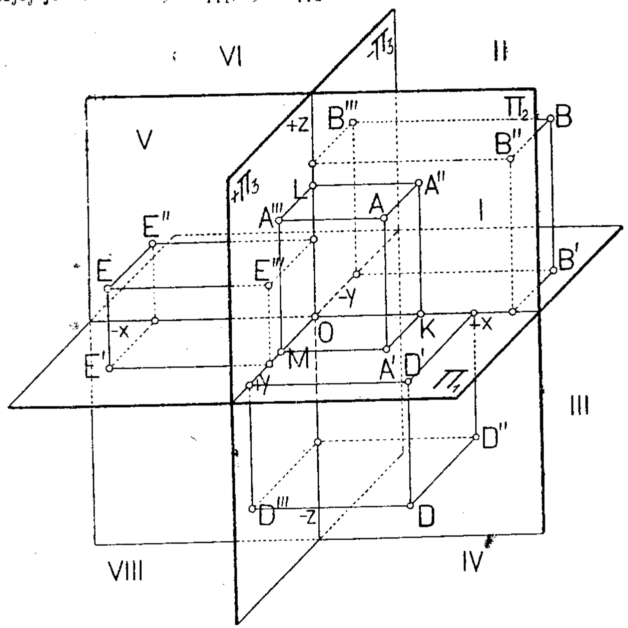
Na sl. 216. nacrtane su sve tri projekcije tijela prizmatičkog oblika. Iz tlocrta i nacrta ne može se zaključiti kakav oblik ima to tijelo. Taj se oblik razabire tek u bokocrtu.

Ako se uzme, da je tlocrt i nacrt tijela lijevo od osi z, onda se treća projekcija nacrta desno od te osi, kako je to učinjeno na sl. 216.



Sl. 216.

Nacrtaj sve tri projekcije kvadratične prizme (piramide), kojoj je osnovka *a)* u Π_1, *b)* u Π_2.



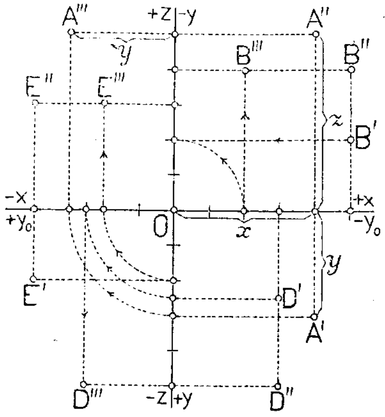
Sl. 217.

§ 50. Oktanti

1. Objašnjenja. Ako pomislimo, da su sve tri ravnine projekcija Π_1, Π_2 i Π_3 neomeđene, one dijele prostor na osam dijelova, koji se zovu *oktanti.* Te oktante označujemo rimskim brojevima I—VIII, te su oktanti I.—IV. desno, a oktanti V.—VIII. lijevo od ravnine Π_3. Oktanti I. i V., II. i VI., III. i VII., IV. i VIII. leže redom u I., II., III. i IV. kvadrantu (sl. 217.).

Ravnine projekcija sijeku se u tri osi x, y, z, koje su među sobom okomite i idu ishodištem O. Os je $x \perp \Pi_3$, $y \perp \Pi_2$, $z \perp \Pi_1$. Uzima se, da su računajući od ishodišta O, pozitivni: desni dio osi x, prednji dio osi y i gornji dio osi z, a negativni: lijevi dio osi x, stražnji dio osi y i donji dio osi z.

2. Projiciranje točaka, koje su u različitim oktantima. Na sl. 217. prikazane su sve tri ravnine projekcija, zatim točke A, B, D i E, koje su redom u I., II., IV. i V. oktantu, i nacrtane su sve tri projekcije tih točaka. Ako se sve tri projekcije sjedine u ravnini Π_2, imamo sl. 218.



Sl. 218.

Položaj tlocrta i nacrta točke prema osi x ravna se prema kvadrantu, u kojem se točka nalazi, dok bokocrt može pasti lijevo ili desno od osi z. Točke, koje se nalaze ispred Π_2, dakle točke, koje su u I., IV., V. i VIII. oktantu, imaju svoje bokocrte u prednjem dijelu ravnine Π_3, a jer taj dio nakon okretanja ravnine Π_3 oko z u Π_2 padne lijevo od osi z, doći će lijevo i bokocrti točaka, koje leže u spomenuta četiri oktanta. Bokocrti točaka, koje su u stražnjim oktantima (II., III., VI. i VII.) padnu desno od osi z.

Projekcije se točaka obično zadaju koordinatama x, y, z. Za različite oktante imaju te koordinate različite predznake, i to prema ovoj skrižaljci:

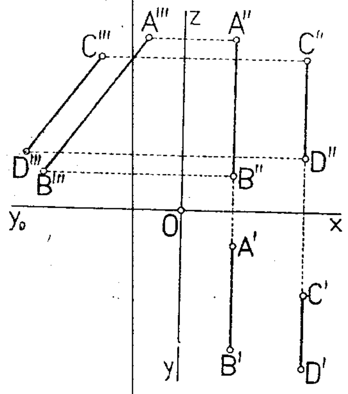
Koordinate	Oktanti							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	+	+	—	—	—	—
y	+	—	—	+	+	—	—	+
z	+	+	—	—	+	+	—	—

Na sl. 218. nacrtane su projekcije točaka A (4, 3, 5), B (5, — 2, 4), D (3, 2,5, — 5), i E (— 4, 2, 3). U kojim su oktantima te točke? Budući

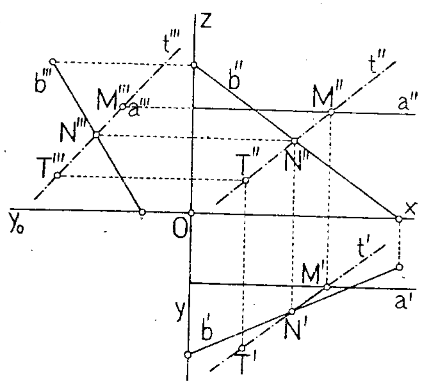
da je udaljenost bokocrta točke od osi z jednaka ordinati y, bit će taj bokocrt za pozitivan y lijevo, a za negativan y desno od osi z.

3. Zadatak. *Zadane su projekcije dviju dužina AB i CD, koje su okomite na osi* x; *ispitaj, jesu li te dužine među sobom usporedne!* (Sl. 219.).

Rješenje. Kad su dvije dužine okomite na osi x, njihovi su tlocrti i nacrti također okomiti na osi x, pa su projekcije tih dužina među sobom usporedne u tlocrtu i nacrtu. No odatle se još ne može zaključiti, da su te dužine i u prostoru među sobom usporedne. Tek, ako su i bokocrti tih dužina među sobom usporedni, usporedne su i dužine u prostoru. U našoj je slici $A'''B''' \parallel C'''D'''$, dakle je $AB \parallel CD$.



Sl. 219.



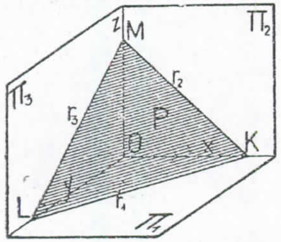
Sl. 220.

4. Zadatak. *Točkom T (T', T'') položi transverzalu t pravaca a (a', a'') i b (b', b''), ako je $a \parallel x$!* (Sl. 220.).

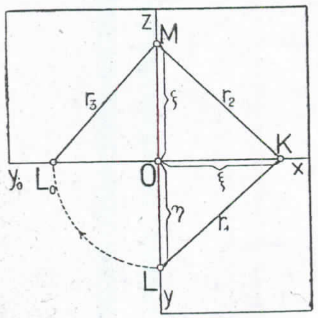
Rješenje. Odredi bokocrte točke T i pravaca a i b. Bokocrt je pravca a točka a'''. Ako tražena transverzala t siječe pravac a u točki M, bokocrt će M''' te točke ležati u a''', pa prema tome bokocrt t''' ide točkama T''' i M'''. Taj pravac siječe b''' u točki N''', pa odredimo li N'' na b'' i N' na b', onda je $t' \equiv T'N'$ i $t'' \equiv T''N''$. Pravac t' siječe a' u M', a t'' siječe a'' u M''.

§ 51. Bokocrtni trag ravnine

1. Objašnjenja. Ravnina **P** siječe ravnine Π_1, Π_2 i Π_3 (sl. 221.) u tragovima r_1, r i r_3. Trag r_3 zove se *bokocrtni* ili *treći trag* ravnine **P**. Po dva traga sijeku se u istim točkama K, L, M osiju x, y i z. Kad se ravnina Π_1 okrene oko osi x dolje u Π_2, a ravnina Π_3 oko osi z nalijevo, dobit će se sl. 222. Točke su K i M ostale na istom mjestu, dok je točka L došla s ravninom Π_1 ispod O, a s ravninom Π_3 lijevo u L_0, te je $OL_0 = OL$. Ako su prema tome zadani tragovi r_1 i r_2, onda se oko O opiše četvrtina kružnice s polumjerom OL i točka L_0 spoji s M; tada je $r_3 \equiv L_0M$.



Sl. 221.



Sl. 222.

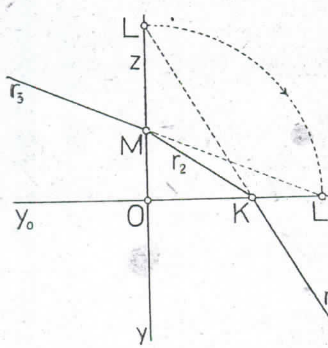
2. Koordinate ravnine. Ako su poznata sjecišta K, L i M triju osi s ravninom **P**, onda je tima sjecištima određena i ravnina **P**. Točke su K, L i M određene svojim daljinama ξ, η i ζ od ishodišta O, gdje je $OK = \xi$, $OL = \eta$ i $OM = \zeta$. Ako je ravnina **P** $\xi = 4$, $\eta = 2$, $\zeta = 3$, onda se kraće piše: **P** (4, 2, 3).

3. Zadatak. *Odredi tragove ravnine* **P** (3, −5, 2)!

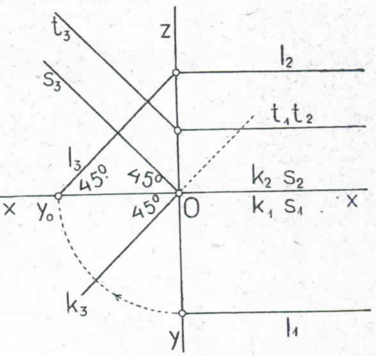
Rješenje se vidi iz sl. 223. Ovoj su ravnini različite strane okrenute prema Π_1 i Π_2.

4. Zadatak. *Nacrtaj tragove ravnine simetrije* **Σ** *i ravnine koincidencije* **K**!

Rješenje. Na sl. 224. nacrtani su tragovi s_1, s_2, s_3 ravnine simetrije **Σ** i tragovi k_1, k_2, k_3 ravnine koincidencije **K**. Prvi i drugi tragovi leže u osi x. Treći trag s_3 raspolavlja $\sphericalangle (y_0\, z)$, a k_3 raspolavlja $\sphericalangle (y\, y_0)$.



Sl. 223.

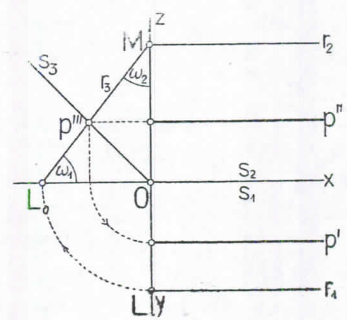


Sl. 224.

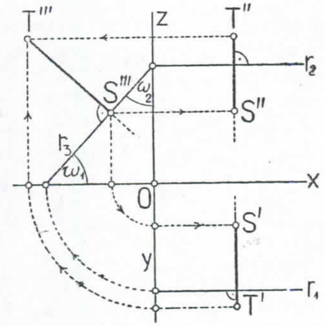
Na istoj slici nacrtani su tragovi t_1, t_2, t_3 ravnine **T**, koja je $\parallel$ **Σ**, i tragovi l_1, l_2, l_3 ravnine **Λ**, koja je $\parallel$ **K**.

5. Zadatak. *Odredi presjek ravnine* **P** $(\infty, 3, 4)$ *s ravninom simetrije* **Σ**! (Sl. 225.).

Rješenje. Budući da je ravnina **P** $\parallel x$, a **Σ** ide osju x, obje su ravnine okomite na Π_3 i sijeku se u pravcu p, koji je također $\perp \Pi_3$, dakle



Sl. 225.



Sl. 226.

i $\parallel x$. Bokocrt je p''' točka u sjecištu tragova r_3 i s_3. Spomoću p''' odredi se tlocrt p' i nacrt p'' (p' i $p'' \parallel x$).

Trag r_3 čini s osi y_0 kut ω_1, a s osi z kut ω_2. Kut ω_1 je prvi, a ω_2 drugi prikloni kut ravnine **P**.

6. Zadatak. *Odredi udaljenost TS točke $T\,(T', T'')$ od ravnine* **P** $\perp \Pi_3$! (Sl. 226.).

Rješenje. Znamo da su projekcije okomice TS spuštene s točke T na ravninu **P** okomite na istoimenim tragovima ravnine **P**, t. j. $T'S' \perp r_1$, $T''S'' \perp r_2$ i $T'''S''' \perp r_3$. Budući da je **P** $\perp \Pi_3$, točka S''' mora ležati u r_3. Spomoću S''' odredi se S' i S''. Budući da je $TS \parallel \Pi_3$, to je $T'''S''' = TS$.

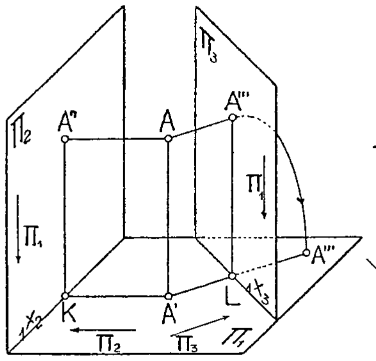
§ 52. Stranocrtna ravnina. Stranocrt

1. Objašnjenja. Kad smo predmete projicirali na tri ravnine, mi smo treću ravninu projekcija Π_3 postavili okomito na Π_1 i na Π_2. Sad ćemo ravninu Π_3 postaviti tako, da bude okomita samo na Π_1 ili samo na Π_2, pa ćemo i na tu treću ravninu projicirati predmete. U ovom se slučaju ravnina Π_3 zove *stranocrtna ravnina*, a projekcija predmeta na tu ravninu zove se *stranocrt* ili također *treća projekcija* toga predmeta.

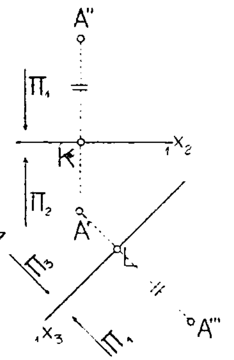
Nove se ravnine projekcija upotrebljavaju zbog toga, što se one mogu tako postaviti, da budu ili usporedne, ili okomite na zadanim pravcima i ravninama pa se zadaci lakše rješavaju. Kaže se, da smo zadatak riješili *premještavanjem* ili *transformacijom* ravnina projekcija.

§ 53. Stranocrt točke

1. Projiciranje točke na ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Na sl. 227. prikazane su sve tri ravnine projekcija Π_1, Π_2 i $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Os, u kojoj se sijeku ravnine Π_1 i Π_2 označena je sad s $_1x_2$, a os, u kojoj se sijeku Π_3 i Π_1, označena je s $_1x_3$. Zatim je po volji uzeta točka A, i određene su sve tri projekcije te točke. Najprije se po volji uzme tlocrt A', zatim se odredi nacrt A'' i napokon stranocrt A'''. Točka se A''' dobije tako, da se s točke A potegne okomica na Π_3; tad je A''' u nožištu te okomice. Okomice AA' i AA''



Sl. 227.



Sl. 228.

čine ravninu, koja je okomita na osi $_1x_3$ i koju siječe u točki L, te je $A'L$ i $A'''L$ okomito na $_1x_3$. Lik je $AA'LA'''$ pravokutnik, te je $A'''L = AA' = A''K$ i $AA''' = A'L$. Sad su A' i A''' dvije pridružene projekcije, kao što su prije bile A' i A''.

Da sve tri projekcije sjedinimo u jednoj ravnini, okrenemo najprije ravninu Π_3 oko osi $_1x_3$ u ravninu Π_1, a onda obje sjedinjene ravnine Π_1 i Π_3 okrenemo oko $_1x_2$ u Π_2. Točke A' i A''' leže u ordinali, koja ide točkom A' okomito na $_1x_3$, te je $A'''L = A''K = z$. Na slici 228. nacrtane su sve tri projekcije točke A nakon izvršenog sjedinjenja.

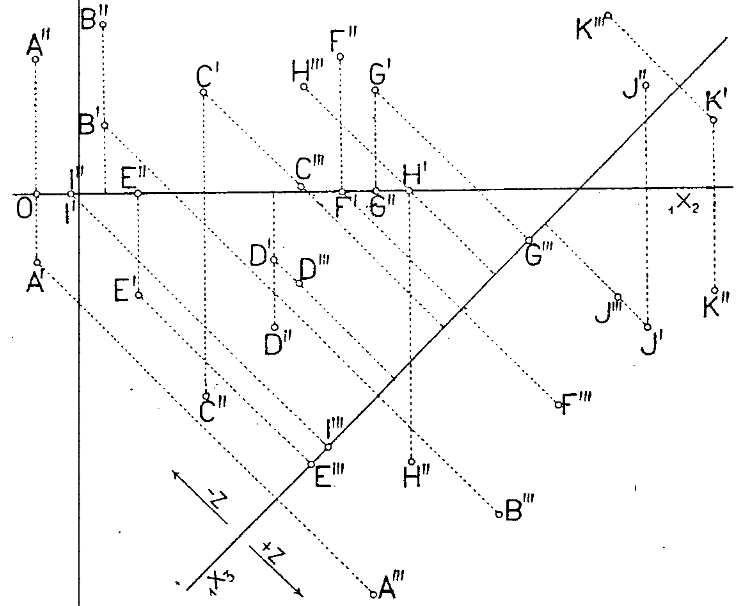
Smjer gledanja prema ravninama projekcija označen je na sl. 227. i 228. strelicama.

Ako je ordinata z negativna, onda A''' padne u donji dio ravnine Π_3, pa ta točka nakon preloženja dođe lijevo od osi $_1x_3$.

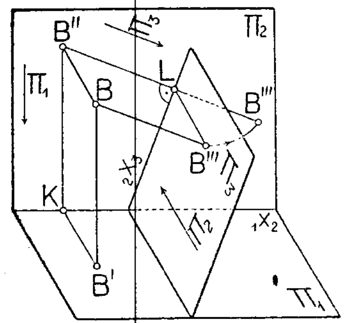
2. Zadatak. *Nacrtaj tri projekcije točaka $A-K$, ako je ravnina $\Pi_3 \perp \Pi_1$ i ako os $_1x_3$ ide točkom* (8, 0, 0), *te s osi $_1x_2$ čini kut od* 45°. *Neka je:* A (0, 1, 2), B (1, −1, 2,5), C (2,5, −1,5, −3), D (3,5, −1, −2), E (1,5, 1,5, 0),

F (4,5, 0, 2), G (5, −5, −0), H (5,5, 0, −4), I (0,5, 0, 0), J (9, 2, 1,5), K (10, −1, −2).

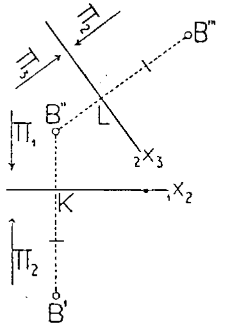
Rješenje. Na sl. 229. nacrtane su sve tri projekcije točaka, koje su u različitim kvadrantima, ili u ravninama projekcija. Budući da ordinate z



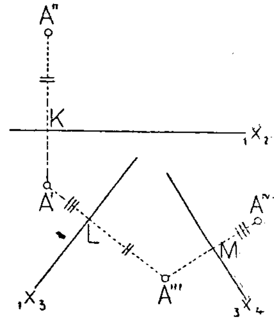
Sl. 229.



Sl. 230.



Sl. 231.



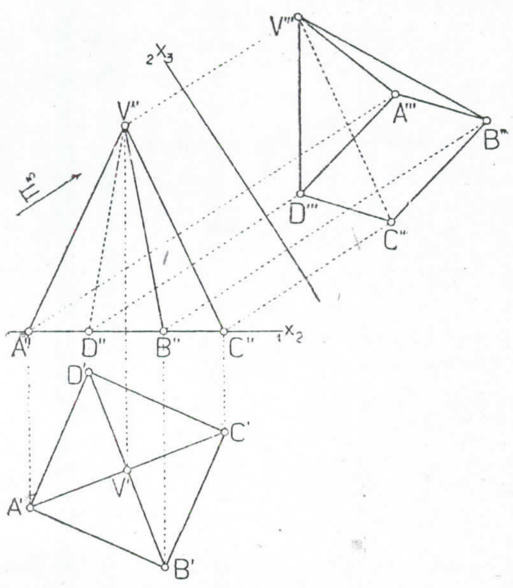
Sl. 232.

točaka A, B, F, J imaju isti predznak (+), bit će treće projekcije tih točaka na istoj strani osi $_1x_3$. Ako se treće projekcije tih točaka nalaze desno od osi $_1x_3$, onda će se treće projekcije točaka C, D, H, K, koje imaju negativne ordinate z, nalaziti na lijevoj strani te osi.

3. **Projiciranje točke na ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_2$.** Na sl. 230. prikazane su tri ravnine projekcija Π_1, Π_2 i $\Pi_3 \perp \Pi_2$. Ravnine se Π_1 i Π_2 sijeku u osi $_1x_2$, a ravnine Π_2 i Π_3 u osi $_2x_3$. S točke B spuštene su tri okomice i to $BB' \perp \Pi_1$, $BB'' \perp \Pi_2$ i $BB''' \perp \Pi_3$. Nožišta su B', B'', B''' projekcije točke B na ravnine projekcija. Okomice BB'' i BB''' čine ravninu, koja je okomita na osi $_2x_3$, i koja siječe Π_2 u pravcu $B''L$, a Π_3 u pravcu $B'''L$. Oba ta pravca okomita su na osi $_2x_3$. Budući da je lik $BB''LB'''$ pravokutnik, to je $B'''L = BB'' = B'K = y$ i $BB''' = B''L$.

Da se sve tri projekcije sjedine u jednoj ravnini, okrene se Π_1 oko osi $_1x_2$ u Π_2, a Π_3 oko osi $_2x_3$ u Π_2, pa se dobije sl. 231. Točke B'' i B''' leže u ordinali, koja je okomita na osi $_2x_3$. Da se dobije točka B''', povuče se točkom B'' pravac okomito na os $_2x_3$ i na taj pravac prenese, počevši od točke L na osi $_2x_3$, $LB''' = KB' = y$. Ako se pozitivne ordinate y prenose na jednu stranu osi $_2x_3$, onda se negativne ordinate y moraju prenositi na protivnu stranu te osi.

4. **Zadatak.** *Nacrtaj sve tri projekcije točaka zadanih u t. 2. za slučaj, da je ravnina Π_3 okomita na Π_2, da os $_2x_3$ ide točkom (8, 0, 0) i da s osi $_1x_2$ čini kut od 135^0!*



Sl. 233.

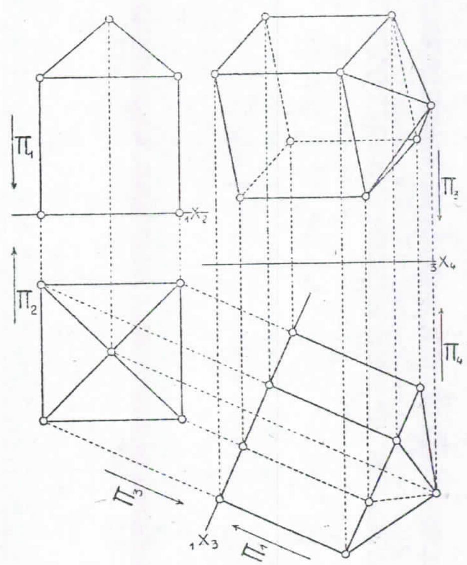
5. **Četvrta projekcija.** Postavimo li četvrtu ravninu projekcija Π_4 okomito na Π_3, pa s točke A spustimo okomicu na Π_4, u nožištu te okomice bit će četvrta projekcija A^{IV} točke A. Ravnine se Π_3 i Π_4 sijeku u osi, koja će se označiti s $_3x_4$.

Na sl. 232. nacrtane su sve četiri projekcije točke A nakon izvršenoga sjedinjenja ravnina projekcija u ravnini Π_2. Na toj je slici $A'A'' \perp {}_1x_3$ i $LA''' = A''K$, $A'''A^{IV} \perp {}_3x_4$ i $MA^{IV} = A'L$.

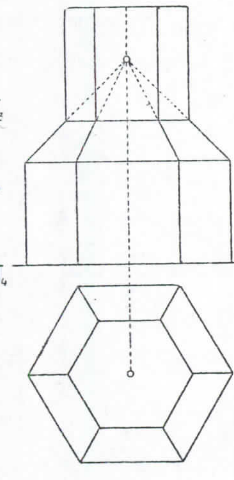
Ako tlocrti dviju točaka leže na protivnim stranama osi $_1x_3$, bit će i četvrte projekcije tih točaka na protivnim stranama osi $_3x_4$.

§ 54. Stranocrt tijela

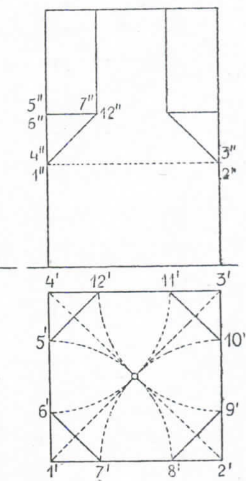
1. **Stranocrt piramide.** Na sl. 233. nacrtane su tri projekcije kvadratične piramide, kojoj je osnovka u Π_3. Ravnina je $\Pi_3 \perp \Pi_2$. Piramida je u stranocrtu zornije prikazana, nego li u tlocrtu i nacrtu. U stranocrtu se vidi osnovka piramide i pobočke ADV i ABV, a ne vide se pobočke CDV i BCV.



Sl. 234.



Sl. 235.



Sl. 236.

2. **Stranocrti složenog tijela.** Na sl. 234. nacrtane su projekcije složenog tijela (kocka s piramidom). Predmet je tek u četvrtoj projekciji prikazan tako, da su jasne predodžbe toga predmeta.

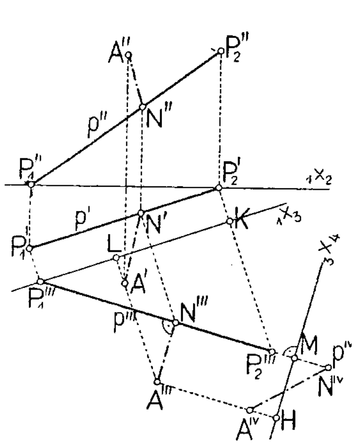
§ 55. Upotreba stranocrta kod rješavanja zadataka

1. **Zadatak.** *Odredi udaljenost točke A (A', A'') od ravnine Σ (s_1, s_2)!*

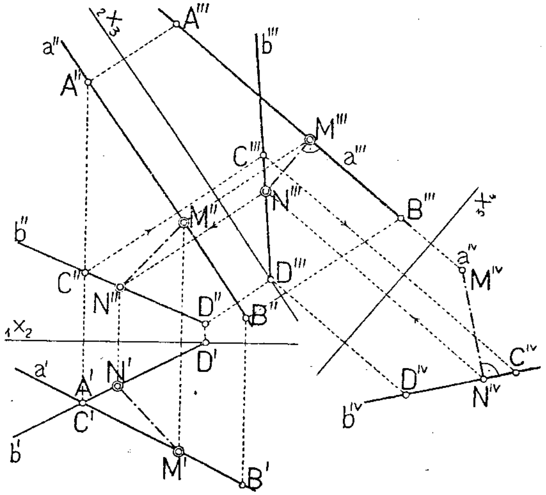
R j e š e n j e. Ovaj se zadatak riješi na jednak način, kao u § 45. t. 1., 2. rješenje. Ravnina Π_3 ($\perp \Pi_1$) podudara se s prvom ravninom prometalicom pravca AB ($A'B' \perp s_1$), os $_1x_3$ pada u pravac $A'B'$, a priklonica prve skupine p, u kojoj ravnina Σ siječe ravninu Π_3, je treći trag s_3 ravnine Σ. Ako se Π_3 preloži oko $_1x_3$ u Π_1, onda je $s_3 \equiv p_0$, $A''' \equiv A_0$, $B''' \equiv B_0$, dakle $A'''B''' \equiv A_0 B_0$, gdje je $A'''B \perp s_3$. Budući da je AB u Π_3, tad je $A'''B''' = AB$. Nacrtaj sliku! Riješi zadatak na taj način, da pravcem AB položiš ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_2$!

2. Zadatak. *Odredi udaljenost točke A (A', A'') od pravca p $(p' \, p'')$!* (Sl. 237.).

Rješenje. Najprije se ravnina Π_3 položi okomito na Π_1 i usporedno s pravcem p. Os je ${}_1x_3 \parallel p'$. Odredimo A''' i p''' $(P_1'''P_2''' \equiv p''')$ i postavimo ravninu $\Pi_4 \perp p$. Os je ${}_3x_4 \perp p'''$.



Sl. 237.



Sl. 238.

Sad odredimo p^{IV} i A^{IV} tako, da učinimo $Mp^{IV} = KP_2'$ i $HA^{IV} = LA'$. Budući da dužine KP_2' i LA' leže na različitim stranama osi ${}_1x_3$, ležat će i četvrte projekcije p^{IV} i A^{IV} na različitim stranama osi ${}_3x_4$. Budući da je pravac $p \perp \Pi_4$, bit će okomica AN, spuštena s A na p, usporedna s Π_4, pa će $A^{IV}N^{IV}$ biti $= AN$, a jer je točka N na pravcu p, bit će N^{IV} u p^{IV}. Pošto je $AN \parallel \Pi_4$, mora biti $A'''N''' \parallel {}_3x_4$. Spomoću N''' odredi se N' na p' i N'' na p''.

3. Zadatak. *Odredi najkraću transverzalu dvaju mimosmjernih pravaca a i b!* (Sl. 238.).

Rješenje. Najprije se položi ravnina Π_3 okomito na Π_1 ili na Π_2 i usporedno ili s a ili s b. Mi smo na sl. 238. uzeli, da je $\Pi_3 \perp \Pi_2$ i $\parallel a$. Os je ${}_2x_3 \parallel a''$. Spomoću projekcija kojih god dviju točaka svakoga pravca a i b odredimo treću projekciju a''' i b'''.

Sad postavimo ravninu $\Pi_4 \perp a$, dakle os ${}_3x_4 \perp a'''$ i odredimo četvrtu projekciju a^{IV}, b^{IV} pravaca a i b. Četvrta je projekcija pravca a točka a^{IV}.

Najkraća je transverzala MN pravaca a i b okomita na tim pravcima. Budući da je pravac $a \perp \Pi_4$, dužina je $MN \parallel \Pi_4$, a jer MN čini s pravcem b

pravi kut, kojemu je krak $MN \parallel \Pi_4$, taj se kut projicira na Π_4 u pravoj veličini. Prema tome mora biti $M^{IV}N^{IV} \perp b^{IV}$. Sad se na b''' odredi N''' i povuče $M'''N''' \parallel {}_3x_4$, gdje je M''' na a'''. Spomoću ordinala odrede se projekcije $M''N''$ i $M'N'$.

4. Zadaci za vježbu

1. Uzmi u svakom oktantu po jednu točku i odredi sve tri projekcije te točke!

2. Nacrtaj sve tri projekcije ovih točaka: $A\,(1, 3, 3)$, $B\,(2, -1, -4)$, $C\,(3, -4, 2)$, $D\,(4, 3, -1)$, $E\,(-1, 4, 3)$, $F\,(-2, -2{,}5, -3)$, $G\,(-3, -2{,}5, 2)$, $H\,(-4, 4, -2)$! U kojim oktantima leže te točke?

3. Nacrtaj sve tri projekcije ovih točaka: $A\,(4, 4, 0)$, $B\,(3, 0, -3)$, $C\,(0, 1, 3)$, $D\,(-4, 1, 0)$, $E\,(0, 1{,}5, -3)$, $F\,(0, -3, -4)$, $G\,(-3, -1, 0)$, $H\,(0, 0, 3)$, $I\,(0, 2, 0)$, $J\,(1, 0, 0)$, $K\,(0, -4, 0)$, $L\,(0, 0, -5)$, $M\,(-2, 0, 0)$! Gdje leži svaka od tih točaka u prostoru?

4. Nacrtaj sve tri projekcije ovih točaka: $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(2, -3, 3)$, $C\,(3, -2, -2)$, $D\,(4, 4, -4)$, $E\,(-1, 3, 3)$, $F\,(-2, 2, -2)$, $G\,(-3, -1, 1)$, $H\,(-4, -1, -1)$! U kojim osobitim ravninama leže te točke!

5. Nacrtaj sve tri projekcije ovih dužina:

a) $AB\,[A\,(4, 0, 0),\ B\,(1, 3, 5)]$; *b)* $CD\,[C\,(-3, 4, 1,)\ D\,(3, -1, -5)]$;
c) $EF\,[E\,(0, 1, -4),\ F\,(6, -3, 1)]$; *d)* $GH\,[G\,(-2, 4, 2),\ H\,(-2, 4, 6)]$;
e) $IJ\,[I\,(3, 2, 5),\ J\,(3, -3, 1)]$; *f)* $KL\,[K\,(6, 2{,}5\ 3{,}5),\ L\,(1, 2{,}5, 3{,}5)]$.

6. Nacrtaj sve tri projekcije trokuta $ABC\,[A\,(0, 2{,}5, 2{,}5),\ B\,(4{,}5, 6, 6),\ C\,(7, 1, 2{,}5)$

7. Odredi sve tri projekcije, sva tri probodišta i sva tri priklona kuta pravca $p \equiv MN\,[M\,(2, 5, 1),\ N\,(7, 2, 4)]$! — Uputa. Treće ćeš probodište P_3 dobiti na p''', ako u sjecištu osi z s p'' postaviš okomicu na z i njom presiječeš p'''.

8. Točkom $A\,(0, 3, -1)$ povuci pravac q usporedno s pravcem $p \equiv MN\,[M\,(4, 2, 3)$, $N\,(4, -3, 5)]$!

9. S točke $T\,(1, 3, 5)$ spusti okomicu na os x i odredi projekcije točaka $A\,(y = 2)$ $C\,(z = -3)$, koje su na toj okomici!

10. Točkom $T\,(0, -1, -2)$ povuci okomicu na pravac $p\,[A\,(3, -1, 5,)\ B\,(3, 4, -1)]$ i odredi udaljenost točke T od pravca p! — Uputa. S T''' spusti okomicu $T'''N'''$ na p'''. Zašto? Kad je treća projekcija pravoga kuta opet pravi kut?

11. Odredi udaljenost usporednih pravaca $AB\,[A\,(4, 2, 3),\ B\,(4, -2, 1)]$ i $CD\,[C\,(0, 3, -1),\ D\,(y = -1)]$!

12. Na os x i pravac $a \equiv AB\,[A\,(1, 1, 10),\ B\,(10, 8, 0)]$ položi transverzalu t, koja je usporedna s pravcem $b \equiv CD\,[C\,(2, -5, 0),\ D\,(4, 0, 5)]$! — Uputa. t''' ide ishodištem O usporedno s b'''.

13. Nacrtaj sva tri traga ovih ravnina: **A** $(1, 4, 2)$, **B** $(3, 2, -5)$, **Γ** $(2, -3, 4)$, **Δ** $(3, 4, \infty)$, **E** $(2, \infty, 4)$, **Z** $(\infty, 3, 2)$, **H** $(\infty, \infty, 4)$, **K** $(\infty, 3, \infty)$, **Λ** $(4, 3, 3)$, **M** $(4, 4, 4)$, **N** $(2, -3, 3)$!

14. Odredi tragove ravnine **P**, koja ide zadanom točkom $A\,(5, 1, 4)$ i pravcem $p\,(y = 3,\ z = 1) \parallel x$! — Uputa. $r_3 \equiv A'''p'''$.

15. U ravnini **P** $(\infty, 5, 4)$ leži točka $A\,(3, -, 2)$; odredi tlocrt te točke! — Uputa. Upotrebi r_3!

16. Odredi presječnicu ravnina P (5, 2, 4) i Σ (5, 5, 3)! — Uputa. Upotrebi r_3 i s_3!

17. Točkom A (2, —2, —3) i osju x položi ravninu i odredi udaljenost točke T (0, —3, 4) od te ravnine!

18. Točkom T (4, —4, —2) položi ravninu okomito na pravac p [A (2, —3, 5), B (2, 4, —1)]!

19. Točkom A (2, —3, 2) položi ravninu Σ usporedno s ravninom P (∞, 4, —3). — Uputa: Točkom A''' ide $s_3 \parallel r_3$.

20. Odredi tragove ravnine Δ, koja je u daljini $d = 2$ *cm* usporedna s ravninom Γ (∞, 3, 4)!

21. U zadanoj ravnini nacrtaj sve tri projekcije *a)* sutražnice treće skupine, *b)* priklonice treće skupine! Odredi treći prikloni kut ravnine!

22. Nacrtaj stranocrte ovih točaka, ako je $\Pi_3 \perp \Pi_1$: A (1, 3, 2), B (5, 2, —3), C (3, —1, 0), D (—1, —2, —4)! Os ${}_1x_3$ neka čini sa osi ${}_1x_2$ kut od 30^0.

23. Nacrtaj stranocrte ovih točaka, ako je $\Pi_3 \perp \Pi_2$, te os ${}_2x_3$ čini sa osi ${}_1x_2$ kut od 45^0 : A (3, — 2, 4), B (0, 3, 5), C (1, 1, — 2), D (— 1, — 4, — 1) E (— 2, 0, — 4)!

24. Nacrtaj četvrte projekcije točaka, koje su zadane u 22. i 23. zadatku!

25. Nacrtaj treću i četvrtu projekciju ovih dužina: *a)* AB [A (0, 3, 4), B (7, — 3, 1); *b)* CD [C (3, — 2, 4), D (— 3, 1, — 5)]! Osi ${}_1x_3$ i ${}_3x_4$ neka se uzmu po volji! — (Ako je ${}_1x_3 \parallel A'B'$ ili ${}_2x_3 \parallel A''B''$, onda je $A'''B''' = AB$. Z što?)

26. Nacrtaj sve četiri projekcije pravca $p \equiv EF$ [E (1, 4, 2), F (6, 1, 4)]! Uzmi, da je os ${}_1x_3 \parallel p'$ (ili os ${}_2x_3 \parallel p''$), a os ${}_3x_4 \perp p'''$. Što si opazio?

27. Nacrtaj treću projekciju trokuta ABC [A (0, 6, 2), B (4, 4, 3), C (2, 1, 6)]. Neka je os ${}_1x_3$ okomita na tlocrtu sutražnice prve skupine, koja je u ravnini trokuta!

28. Nacrtaj treću projekciju tijela, kojemu je na sl. 235. zadan tlocrt i nacrt! Neka je $\Pi_3 \perp \Pi_2$, a os ${}_2x_3$ neka s osi ${}_1x_2$ čini kut od 60^0. (Povećaj sliku tri puta!)

29 Nacrtaj treću i četvrtu projekciju predmeta, kojemu je na sl. 236. zadan tlocrt i nacrt! Neka je $\Pi_3 \perp \Pi_1$, os ${}_1x_3$ neka čini s ${}_1x_2$ kut od 30^0, a os ${}_3x_4$ neka bude $\parallel {}_1x_2$. (Povećaj sliku tri puta!)

30. Nacrtaj sve četiri projekcije kocke, ako je *a)* $\Pi_3 \perp \Pi_1$. *b)* $\Pi_3 \perp \Pi_2$!

31. Odredi udaljenost točke A od ravnine P! Neka je: *a)* A (5,5, 4,5, 4), P (8, 7, 5); *b)* A (1, 4, — 2), P (6, — 8, 5).

32. Odredi udaljenost dviju usporednih ravninâ P i Σ! Neka je: *a)* P (3,5, 3, 3,5), Σ (7, —, —); *b)* P (3, — 6 2), Σ (6, —, —).

33. Odredi tragove ravninâ, koje su u daljini $d = 2$ *cm* usporedne sa zadanom ravninom Γ. Neka je: *a)* Γ (6, 5, 4), *b)* $\Gamma \equiv ABC$ [A (0, 1, 7), C (6, 6, 7)].

34. Odredi udaljenost točke T (1, 1, — 2) od pravca $p \equiv AB$ [A (1, 5, 4), B (7, 2, 0)]!

35. Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca a i b! Neka je: $a \equiv AB$ [A (0, 0, 2), B (6, 6, 7)], b ide točkom C (8, 2, 4).

36. Zadana su dva usporedna pravca $a \equiv AB$ [A (2, 4, 1), B (4, 2, 3)] i b [C (1, 3, 4) $b' \parallel a'$, $b'' \parallel a''$]; odredi pravac c, koji je u daljini $d = 3$ *cm* usporedan s pravcima a i b! — Uputa: Uzmi ${}_1x_3 \parallel a'$, ${}_3x_4 \perp a'''$ i oko a^{IV} i b^{IV} opiši lukove s polumjerom d. Sjecišta su tih lukova četvrte projekcije traženih pravaca.

37. Zadana su tri usporedna pravca a, b, c; odredi četvrti pravac d, koji je usporedan sa zadanim pravcima i od njih jednako udaljen.

38. Odredi najkraću udaljenost (ili os) dvaju mimosmjernih pravaca! Neka je:

a) $a \equiv$ [A (0, 4, 2), B (4, 4, 4)], $b \equiv CD$ [C (—1, 1, 1), D (3, 4, 1)];
b) $c \equiv EF$ [E (0, 1,5, 0), F (3,5, 3,5, 3,5)], $d \equiv GH$ [G (7, 4,5, 0), H (3,5, 0, 3,5)]!

39. Točkom T (0, 3, 2) povuci transverzalu na mimosmjerne pravce $a \equiv AB$ [A (5, 0, 5), B (—4, 10, 5)] i $b \equiv CD$ [C (5, 7, 0), D (—1, 0, 6)]! — Uputa: Povuci os ${}_1x_3 \perp a'$!

40. Položi na dva mimosmjerna pravca $a \equiv AB$ [A (1, 1, 0), B (6, 1, 5)] i $b \equiv CD$ [C (1, 1, 7), D (1, 5, 1)] transverzalu t, koja je usporedna s pravcem c [$\sphericalangle (c'x) = 150^0$, $\sphericalangle (c''x) = 135^0$]. — Uputa: Uzmi os ${}_2x_3 \perp a''$.

41. Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b; odredi na pravcu b onu točku, koja je od pravca a udaljena za dužinu $d = 4$ *cm*! — Uputa: Položi $\Pi_3 \parallel a$, $\Pi_4 \perp a$ i oko a^{IV} opiši kružnicu s polumjerom d.

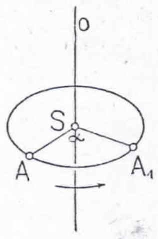
X. Okretanje (rotacija)

§ 56. Okretanje uopće

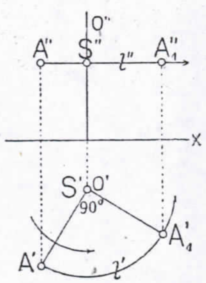
1. Objašnjenja. — I. Okretanjem predmeta, koji su zadani u osobitom položaju, oko nekoga pravca, mogu se ti predmeti dovesti u nove, općenitije položaje prema ravninama projekcija. Ako se nacrtaju projekcije tih predmeta, koje odgovaraju novim položajima, onda su predmeti tim projekcijama zornije prikazani, negoli kad su bili u osobitom položaju prema Π_1 i Π_2. No često je puta potrebno, da se tijelo dovede okretanjem ili rotacijom iz općenitog položaja i u osobite položaje, u kojima se neki zadaci mogu lakše riješiti.

2. Objašnjenja. II. Kad se točka A okreće ili rotira oko pravca o, ona opiše kružnicu. Središte je te kružnice u osi o, i to u nožištu S okomice spuštene s točke A na pravac o, dok je dužina AS polumjer te kružnice. (sl. 239.).

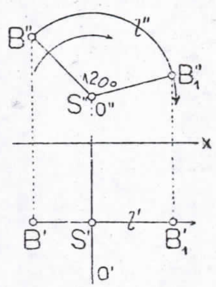
Pravac o zove se *os okretanja* (rotacije), točka S *središte okretanja*, a dužina AS *polumjer okretanja*. Kružnica, koju opiše točka A zove se *kružnica okretanja*. Ta kružnica leži u ravnini E, koja se zove *ravnina okretanja*; ona je okomita na osi okretanja.



Sl. 239.



Sl. 240.



Sl. 241.

Obično se točka okreće oko osi za neki zadani kut, i to na desnu ili lijevu stranu. Ako se točka A (sl. 239.) okrene nadesno za kut α, onda dođe u položaj A_1. Kut se α zove *kut okretanja*. Kod svakog okretanja mora biti zadana os okretanja, kut i smjer okretanja. Obično se uzima, da je os o okomita na Π_1 ili na Π_2, ili da je u jednoj od tih ravnina.

§ 57. Okretanje točke oko pravca

a) Okretanje točke oko osi, koja je okomita na Π_1

1. Zadatak. *Točku* $A\,(A', A'')$ *okreni oko osi* $o\,(o', o'') \perp \Pi_1$ *za kut* $\alpha = 90^0$. (Sl. 240.).

Rješenje. Točka A opiše kružni luk, koji se na Π_1 projicira u pravoj veličini kao luk l'. Središte je S' luka l' u o', a polumjer je $= S'A'$. Kut α prikaže se u Π_1 u pravoj veličini. Točka A' opiše četvrtinu kružnice i dođe u točku A_1'. Nacrt je luka l dužina l'', koja ide točkom A'' usporedno s x. U sjecištu te dužine s ordinalom točke A_1' nalazi se nacrt A_1'' točke A_1, u koju je došla točka A okretanjem oko o za 90^0.

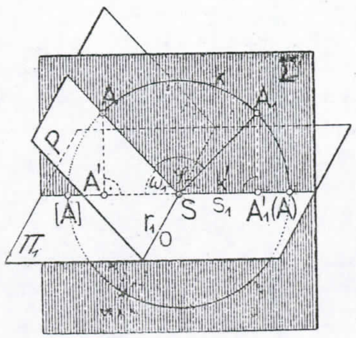
b) Okretanje točke oko osi, koja je okomita na Π_2

2. **Zadatak.** *Okreni točku* $B\,(B', B'')$ *oko osi* $o\,(o', o'') \perp \Pi_2$ *za kut* $\beta = 120^0$! (Sl. 241.).

Rješenje. Točke su B_1' i B_1'' projekcije novog položaja B_1 točke B. Objasni postupak!

c) Okretanje točke oko osi, koja je u Π_1

3. Na sl. 242. prikazana je ravnina Π_1, u toj ravnini pravac o, a izvan nje točka A, kojoj je zadan i tlocrt A'. Ako se točka A okreće oko o, ona će opisati kružnicu k, koja leži u ravnini *okretanja* Σ. Već znamo, da ta ravnina ide točkom A okomito na os o, a u ovom slučaju je okomita i na Π_1. Trag s_1 ravnine Σ ide točkom A' okomito na o; u tom je tragu i tlocrt k' kružnice k. Središte je S te kružnice u sjecištu pravca o sa s_1, a dužina AS je polumjer. Taj je polumjer hipotenuza u pravokutnom trokutu $AA'S$, u kojemu su katete AA' i $A'S$. U tom je trokutu $\sphericalangle A'SA = \omega_1$, prikloni kut polumjera SA.



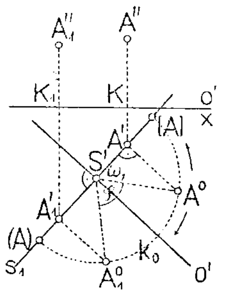
Sl. 242.

Ako se točka A okrene oko o za kut φ, ona će doći u točku A_1, kojoj je tlocrt A_1' u s_1. Okrene li se točka A nalijevo za kut ω_1, ona će doći u točku $[A]$, a okrene li se nadesno za kut $180^0 - \omega_1$, doći će u točku (A). Točke $[A]$ i (A) leže u Π_1; u tim točkama kružnica k siječe trag s_1. Treba li dakle točku A okrenuti oko o do ravnine Π_1, onda će doći u točku $[A]$ ili (A) na pravcu s_1, gdje je $S(A) = S[A] = SA$. Kad se točka vrti oko Π_1, onda se ona obično okrene samo na jednu stranu za kut ω_1 ili $180^0 - \omega_1$.

Na jednak se način postupa, kad se točka okreće oko pravca, koji je u Π_2.

4. **Zadatak** *Zadanu točku $A(A', A'')$ okreni oko osi $o(o', o'')$ koja je u Π_1, za kut $\varphi = 75^0$ i odredi projekcije novog položaja točke A!* (Sl. 243.).

Rješenje. Trag s_1 ravnine okretanja Σ ide točkom A' okomito na o'. U sjecištu S' pravca o' i s_1 leži središte okretanja točke A. Ako se preloži ravnina Σ zajedno s točkom A oko s_1 u Π_1, točka će A doći u A^0 ($A'A^0 \perp s_1$, $A'A^0 = A''K$). Dužina je $S'A^0$ prava veličina polumjera okretanja točke A. Opiše li se tim polumjerom kružnica k^0 oko S', ta je kružnica preložaj kružnice k, što je točka A opiše, kad rotira oko o. Ako točka A treba da opiše luk od 75^0 ona će doći u preloženju u A_1^0, gdje je $\sphericalangle A^0S'A_1^0 = \varphi = 75^0$. Spusti li se s točke A_1^0 okomica na s_1, dobit će se tlocrt A_1' novog položaja točke A. Nacrt A_1'' leži u ordinali točke A_1' te je $A_1''K_1 = A_1'A_1^0$.



Sl. 243.

Ako točka A dođe svojim okretanjem oko o u Π_1, pa je okrenemo za kut ω_1, ona padne u s_1 u točku $[A]$, a okrenemo li je za $180^0 - \omega_1$ ona dođe u (A). Nacrt je tih dviju točaka u osi x.

d) Okretanje točke oko osi, koja je usporedna s Π_1

5. **Zadatak.** *Zadanu točku $A(A', A'')$ okreći oko pravca $o(o', o'')$, koji je usporedan s Π_1, za kut $\varphi = 60^0$!* (Sl. 244.).

Rješenje. Zamislimo li, da smo horizontalnu ravninu paralelno podigli do pravca o, imamo slučaj kao u t. 4. Os x pomakla se u $x_1 \equiv o''$, pa se konstrukcija provede, s obzirom na tu novu os x_1, na jednak način kao u t. 4.

e) Okretanje točke oko osi, koja je u općem položaju

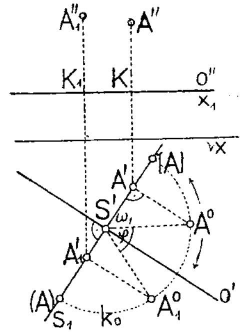
6. **Zadatak**. *Okreni točku A oko kosoga pravca p za kut $\alpha = 60^0$ i odredi projekcije novog položaja točke A!* (Sl 245.).

Rješenje. Taj ćemo zadatak riješiti pomoću metode transformacije (stranocrta). Stranocrtnu ravninu Π_3 položit ćemo pravcem p okomito na Π_1, a ravninu Π_4 položit ćemo okomito na pravac p. U tom slučaju bit će četvrta projekcija pravca p točka p^{IV}, a A^{IV} četvrta projekcija točke A.

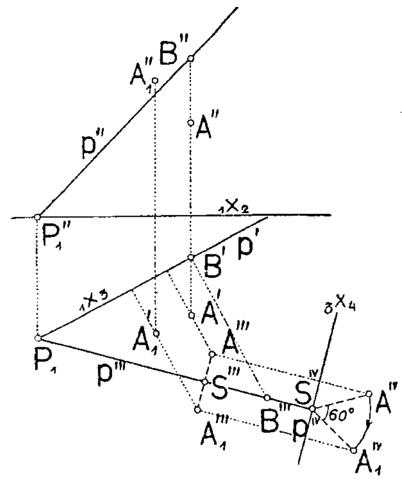
Budući da je pravac p okomit na ravnini Π_4, tad se kružnica rotacije, koju opiše točka A svojim okretanjem oko pravca p, projicira na Π_4 opet kao kružnica, kojoj je središte točka $p^{IV} \equiv s^{IV}$, a polumjer dužina $S^{IV}A^{IV}$. Budući da točka A, opiše prema zadatku, kut od 60^0, tad točka A^{IV} opiše luk od 60^0, te dođe u položaj A_1^{IV}. Treća je projekcija luka

AA_1 dužina $A'''A_1''' \parallel_3 x_4$. Pošto smo odredili točke A_1^{IV} i A_1''', tad se lako odrede točke A_1' i A_1''.

Riješi zadatak uzevši, da stranocrtna ravnina Π_3 ide pravcem p okomito na ravninu Π_2!



Sl. 244.

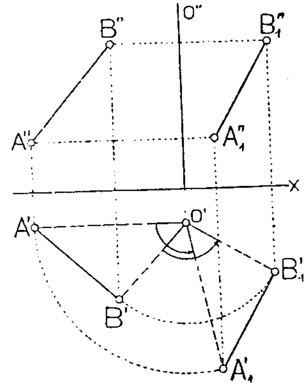


Sl. 245.

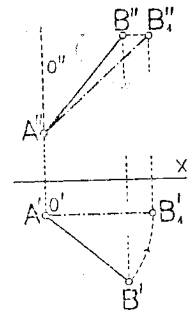
§ 58. Okretanje dužine

1. **Zadatak.** *Okreni dužinu AB ($A'B'$, $A''B''$) oko osi $o \perp \Pi_1$ za kut α!* (Sl. 246.).

Rješenje. Dužina se AB okrene oko pravca o tako, da se okrenu krajnje točke A i B za kut α. Tim okretanjem točka A dođe u točku



Sl. 246



Sl. 247.

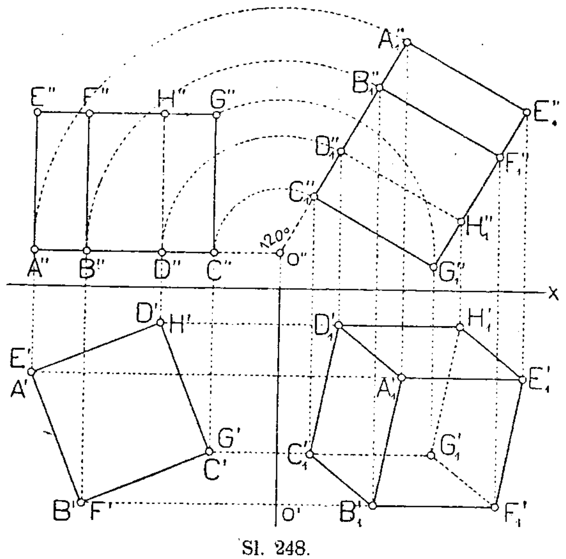
$A_1(A_1', A_1'')$, a točka B dođe u točku $B_1(B_1', B_1'')$. $A_1'B_1'$ je tlocrt, a $A_1''B_1''$ nacrt novog položaja dužine AB. Kad se dužina AB okreće oko osi, koja je okomita na Π_1, ona ne mijenja svoga priklonog kuta prema Π_1 i zato je $A_1'B_1' = A'B'$.

2. Zadatak. *Odredi pravu veličinu dužine* AB $(A'B',\ A''B'')$ *pomoću okretanja.* (Sl. 247.).

Rješenje. Ako se dužina toliko okreće oko nekog pravca da bude usporedna s Π_1 ili s Π_2, ona će se na tu ravninu projicirati u pravoj veličini. Uzet ćemo, da os okretanja o ide točkom A okomito na Π_1 $(o' \equiv A',\ o'' \perp x)$, pa ćemo dužinu AB okretati oko te osi, dok ne bude usporedna s Π_2. Točka A ostane na istom mjestu, a B opiše luk, koji se na Π_1 projicira u pravoj veličini kao luk $B'B_1'$, kojemu je središte o', a polumjer $A'B'$. Budući da je rotirana dužina $AB_1 \parallel \Pi_2$, njezin tlocrt $A'B_1'$ mora biti usporedan s x. Nacrt je luka BB_1 dužina $B''B_1'' \parallel x$, a nacrt rotirane dužine je $A''B_1''$, te je $A''B_1'' = AB$.

§ 59. Okretanje tijela

1. Okretanje kocke. Na sl. 240. nacrtane su projekcije kocke, kojoj su osnovke usporedne s Π_1, te projekcije o', o'' osi $o \perp \Pi_2$. Oko te osi



Sl. 248.

okrenuli smo kocku za kut od 120°. To se okretanje izvrši tako, da se oko osi o okrene svaki vrh kocke za 120°. Kod tog okretanja ne mijenja

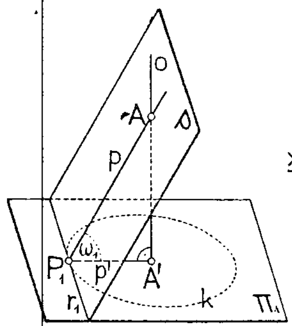
se ni oblik ni veličina nacrta kocke, nego se mijenja samo položaj. Tlocrt je novoga položaja kocke zorna slika te kocke.

Kocka bi se mogla okretati oko nove osi, koja je okomita na Π_1.

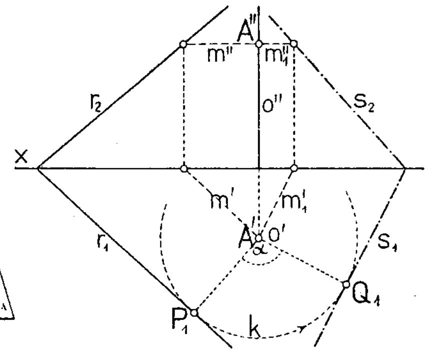
§ 60. Okretanje ravnine

1. Zadatak. *Zadanu ravninu* **P** (r_1, r_2) *okreni oko osi* o (o', o''), *koja je okomita na* Π_1, *za kut* α!

Rješenje. Kad se ravnina **P** (sl. 249.) okreće oko vertikalnog pravca o, njezine sutražnice i priklonice prve skupine ostaju i za vrijeme okretanja sutražnice i priklonice te skupine, a veličina se prvog priklonog kuta ω_1 ne mijenja. Točka A, u kojoj os o siječe ravninu **P**, ostaje na svom mjestu. Svaka točka ravnine **P** opiše kružnicu, koja se na Π_1 projicira u pravoj veličini sa središtem u A'. Takovu kružnicu k opiše i prvo probodište P_1 priklonice p, koja prolazi točkom A. Polumjer je te kružnice $A'P_1$ $(\perp r_1)$. Taj polumjer ostaje okomit na tragu r_1 i za vrijeme rotacije, pa taj trag mora doticati kružnicu k za svaki položaj ravnine **P**, u koji ona dođe rotacijom oko o.



Sl. 249.



Sl. 250.

Opiše li se na sl. 250. kružnica k oko A', gdje je A' u o', s polumjerom $A'P_1$, pa se učini $\sphericalangle P_1A'Q_1 = \alpha$, onda je točka Q_1 nov položaj točke P_1 okrenute oko o za kut α. Tangenta s_1 kružnice k u točki Q_1 jest nov položaj traga r_1 ravnine **P**. Drugi se trag s_2 te ravnine dobije pomoću sutražnice m_1 (m_1', m_1'') točke A, u kojoj os o siječe **P**. [A'' se odredi pomoću sutražnice m (m', m'')].

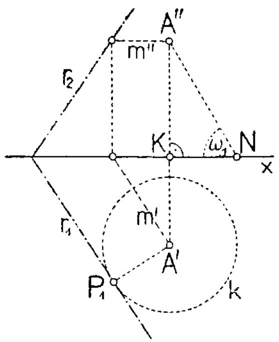
2. Zadatak. *Zadanu ravninu* **P** (r_1, r_2) *okreći oko pravca* $o \perp \Pi_1$, *dok ne bude okomita na* Π_2!

Rješenje. Trag s_1 rotirane ravnine mora biti okomit na osi x i mora doticati kružnicu k (sl. 250.). Trag s_2 mora ići točkom A''. Zašto?

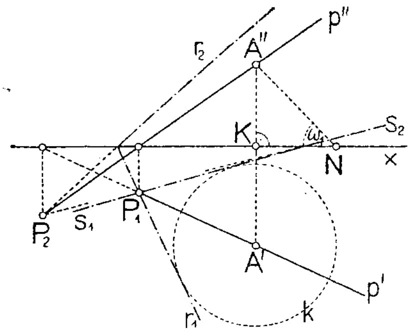
3. **Zadatak.** *Točkom* $A(A', A'')$ *neka se položi ravnina* **P**, *kojoj je prvi prikloni kut* $\omega_1 = 60^0$!

Rješenje. Jednom točkom A (sl. 289.) može se položiti neizmjerno mnogo ravnina, koje s Π_1 čine kut ω_1. Tragovi tih ravnina dotiču kružnicu k (t. **1.**), kojoj je A' središte, a $A'P_1$ polumjer. Taj je polumjer kateta u pravokutnom trokutu $AA'P_1$, u kojemu je poznata druga kateta AA' i suprotni kut ω_1. Taj je dakle trokut određen, pa se može konstruirati.

Ako je točka A zadana svojim projekcijama A', A'' (sl. 251.), onda je $A''K = AA'$. Konstruira li se pravokutan trokut $A''KN$, u kojemu je $A''K$ jedna kateta, a ω_1 suprotni kut, onda je taj trokut sukladan s trokutom $AA'P_1$, pa je $A'P_1 = KN$. Opiše li se oko A' kružnica k s polu-



Sl. 251.



Sl. 252.

mjerom $= KN$, onda se kojagod tangenta r_1 te kružnice može smatrati prvim tragom ravnine **P**, koja ide točkom A i koja s Π_1 čini kut ω_1. Drugi se trag r_2 odredi pomoću sutražnice $m(m', m'')$, koja ide točkom A.

4. **Zadatak.** *Zadanim pravcem* $p(p', p'')$ *položi ravninu, kojoj je prvi prikloni kut* $\omega_1 = 45^0$! (Sl. 252.).

Rješenje. Odredi probodišta P_1, P_2 pravca p, uzmi na tom pravcu kojugod točku $A(A', A'')$, konstruiraj pravokutan trokut $A''KN$, u kojemu je $\sphericalangle KNA'' = \omega_1 = 45^0$, i oko A' opiši kružnicu k s polumjerom KN. (Isporedi t. 3.)! Trag r_1 ide točkom P_1 i dotiče kružnicu k. Kako se odredi trag r_2?

Determinacija. Budući da se s točke P_1 mogu povući na kružnicu k dvije tangente, zadatak ima dva rješenja. U ovom je slučaju prvi prikloni kut ω_1 ravnine **P** veći od prvog priklonog kuta α_1 pravca p. Ako je

$\sphericalangle \omega_1 = \alpha_1$, onda kružnica k ide točkom P_1, pa zadatak ima samo jedno rješenje. Ako je $\sphericalangle \omega_1 < \alpha_1$, onda zadatak nema nijednog rješenja.

4. Zadaci za vježbu

1. Okreni točku A (1, 0, 0) oko osi o (x=4, y=2) $\perp \Pi_1$ za kut od 120^0!

2. Okreni točku A (0, 4, 2) oko osi o (x = 1, z = 0) za kut od 60^0!

3. Okreni točku A oko osi o, koja leži u Π_1, za kut α! Neka je:
 a) A (3, 5, 4), $o \equiv BC$ [B (1, 0, 0), C (5, 5, 0)], $\alpha = 30^0$;
 b) A (4, 2, 1), o [B (2, 4, 0), $\sphericalangle (o'x) = 45^0$], $\alpha = 120^0$.

4. Okreni točku A oko osi o, koja leži u Π_2, za kut α! Neka je:
 a) A (4, 4, 0), $o \equiv BC$ [B (1, 0, 6), C (6, 0, 0)], $\alpha = 60^0$;
 b) A (6, 6, 5), o [D (2. 0, 2). $\sphericalangle (o''x) = 60^0$], $\alpha = 90^0$.

5. Okreći točku T (2, 2, 2) oko pravca $o \equiv AB$ [A (7, 0, 0), B (1, 5, 0)] dok ne padne u Π_1!

6. Okreći točku T (2, 6, 5) oko pravca $o \equiv AB$ [A (0, 0, 0), B (3, 0, 4)], dok ne padne u Π_2!

7. Okreći točku A (0, —2, —1) oko osi $o \equiv MN$ [M (5, 0, 0), N (2, 3, 0)], dok ne bude ordinata *a)* $y = 5$, *b)* $z = -4$!

8. Okreći točku B (—1, 4, —2) oko osi $o \equiv MN$ [M (0, 1, 3), N (5, 4, 3)], *a)* za kut od 90^0, *b)* dok ne padne u Π_1!

9. Okreći točku C (0, 2, 4) oko osi $o \equiv MN$ [M (0, 5, 0), N (6, 5, 4)] dok ne padne u Π_2!

10. Okreći točku D (1, 1, 3) oko osi o (x = 3,5, y = 2) $\perp \Pi_1$, dok ne padne na ravninu Γ (4,5, —5, ∞)!

11. Okreći točku E (1. —4, 0) oko osi x dok ne padne u ravninu **P** (∞, —2, 3)! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

12. Okreni točku F (0, 2, 4) oko osi $o \equiv MF$ [M (2, 6, 0), N (—5, 1, 4)] za 60^0!

13. Okreni dužinu AB [A (2, 5, 4), B (2, 1, 4)] oko pravca o ($x = 1$, $z = 0$) $\perp \Pi_2$ *a)* za kut $\alpha = 60^0$, *b)* dok ne padne u Π_1!

14. Okreni dužinu CD [C (1, 4, 0), D (4, 0, 3)] oko osi $o \perp \Pi_1$, dok ne padne u Π_2! — Uputa: Os o mora ići drugim probodištem dužine CD okomito na os x.

15. Okreći dužinu EF [E (1, 2, 2), F (4, 5, 2)] oko osi $o \perp \Pi_1$ dok ne bude okomita na Π_2!

16. Okreni dužinu GH [G (0, 6, 6), H (3, 3, 3)] oko osi x u Π_2!

17. Okreni dužinu IJ [I (2, —2, 2), J (6, —5, 5)] oko osi x u Π_1!

18. Okreći dužinu KL [K (3, 3, 0). L (6, 4, 0)] oko pravca o, koji leži u Π_1, te je u daljini $d = 2$ usporedan s KL, dok ne bude udaljena od Π_1 za dužinu $m = 2$!

19. Odredi pomoću okretanja pravu veličinu dužine: *a)* AB [A (0, 1, 2), B (7, 3, 5)]; *b)* CD [C (4, 5, 1), D (0, —2, 4)]; *c)* EF [E (1, 2, 3), F (0, —1, —4)]!

20. Zadani trokut ABC okreni za kut α oko osi o, koja je *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$!

21. Uzmi u ravnini Π_1 trokut ABC [A (0, 1, 0), B (3, 2, 0), C (1, 6, 0)] i okreni ga oko osi $o \equiv MN$ [M (, 8, 0), N (6, 2, 0)] za 120^0!

22. Uzmi u ravnini Π_2 kvadrat $ABCD$, pa ga okreni oko pravca o, koji leži u Π_2, za 60^0!

23. Vrhom A trokuta ABC [A (1, 3, 2), B (4, 2, 4), C (6, 6, 1)] položi u tom trokutu sutražnicu prve skupine i okreći trokut oko te sutražnice dok ne bude *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_1$!

24. Okreni trokut ABC [A (0, 3,5, 2), B (4,5, 4, 3), C (3, 1, 5,5)] oko osi $o \equiv MN$ [M (1, 5,6, 0), N (7,5, 0, 3,5)] za 120°! — Uputa: Upotrebi dva stranocrta. (${}_1x_3 \parallel o'$, ${}_3x_4 \perp o''$).

25. Okreći kocku, prikazanu na sl. 248., dok joj vrh G ne padne u Π_1! Gdje se mora nalaziti točka G_1'' nakon okretanja? — Uputa. Najprije okreni točku G, zatim okreni točku C za isti kut, za koji si okrenuo točku G i t. d.

26. Okreni po drugi put kocku na sl. 248. oko osi $m \perp \Pi_1$ za kut $\alpha = 150°$! Uzmi da je m'' desno od E_1'', a m' u pravcu $D_1'H_1'$.

27. Pravilnu šesterostranu prizmatičku ploču, kojoj je osnovka u Π_1, okreni oko pravca o, koji je u Π_1 i okomit na osi x, za kut od 120°!

28. Kvadratičnu piramidu, koja je prikazana na sl. 119. okreći oko osi o, koja je u Π_1 i okomita na osi x! Uzmi da je o'' u C'', a piramidu okreći, dok joj brid CV ne padne u Π_1.

29. Zadanu ravninu A (a_1, a_2) okreni oko osi o (o', o'') $\perp \Pi_2$ *a)* za kut α, *k)* dok ne bude okomita na Π_1, *c)* dok ne bude usporedna s osi x!

30. Zadanom točkom položi ravninu, koja s Π_2 čini kut $\omega_2 = 45°$!

31. Zadanim pravcem p (p', p'') položi ravninu, koja s Π_2 čini kut $\omega_2 = 60°$!

32. Zadanom točkom A (A', A'') položi ravninu, koja je usporedna sa zadanim pravcem a (a', a'') i koja s Π_1 čini kut ω_1 (ili s Π_2 kut ω_2)!

33. Zadanom točkom B (B', B'') položi ravninu, koja je okomita na zadanoj ravnini Γ (c_1, c_2) i koja s Π_1 čini kut ω_1 (ili s Π_2 kut ω_2)!

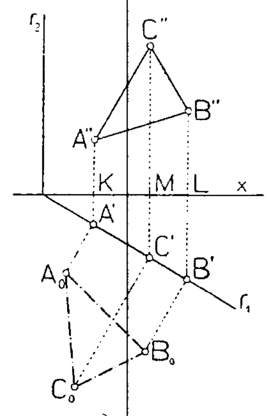
XI. Prelaganje ravnine

§ 61. Prelaganje prve ravnine prometalice

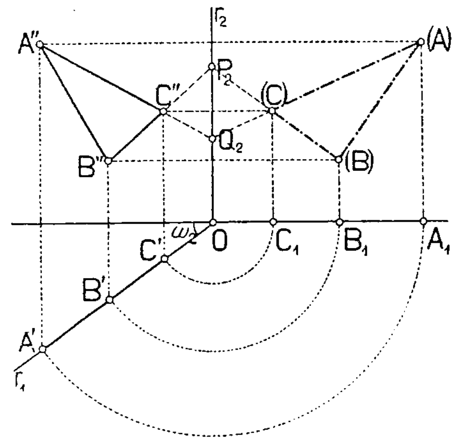
1. Objašnjenja. Da se može odrediti prava veličina nekoga lika, koji je u zadanoj ravnini, obično se ta ravnina okrene zajedno s likom oko prvoga traga u Π_1 ili oko drugoga traga u Π_2. Kaže se, da se ravnina *preložila* u Π_1 ili u Π_2.

2. Zadatak. *Odredi pravu veličinu trokuta ABC, koji je u ravnini* $\mathbf{P} \perp \Pi_1$!

Prvo rješenje. Prelaganjem ravnine oko traga r_1 u Π_1. Ako se ravnina $\mathbf{P}$ prevali oko traga r_1 u Π_1, dobit će se prava veličina $A_0B_0C_0$ trokuta ABC (sl. 253.). Zrake prometalice AA', BB', CC' okomite



Sl. 253.



Sl. 254.

su na tragu r_1 prije i poslije prelaganja, a osim toga će se u preložaju prikazati u pravoj veličini. Ako se dakle povuče $A'A_0 \perp r_1$ i učini $A'A_0 = A'K$ ($= AA'$), dobit će se točka A_0. Na jednak se način odrede točke B_0 i C_0.

Drugo rješenje: Prelaganjem ravnine oko r_2 u Π_2. Ako se ravnina $\mathbf{P}$ okrene oko traga r_2 u Π_2 (sl. 254.), trokut će ABC doći u položaj $(A)(B)(C)$. Točke će A, B, C opisati kružne lukove, koji će se na Π_1 projicirati u pravoj veličini. Središta su tlocrta tih lukova u točki O, a polumjeri su im dužine OA', OB', OC'. Nacrti su lukova dužine, koje idu točkama A'', B'', C'' usporedno sa osi x. Budući da su točke $(A)(B)(C)$

*

u Π_2, njihovi tlocrti moraju biti u osi x, i to u točkama A_1, B_1, C_1, u koje padnu točke A', B', C', nakon okretanja. Prema tome točke će se (A), (B), (C) dobiti na ovaj način: Oko O opišu se kružni lukovi $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, zatim se točkama A'', B'', C'' povuku usporednice s osi x i u točkama A_1, B_1, C_1 uzdignu okomice na os x; te okomice sijeku one usporednice u točkama (A), (B), (C). Tada je $\triangle (A)(B)(C) \cong \triangle ABC$.

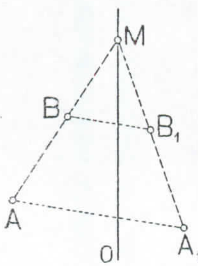
3. **Afinost.** Između trokutâ $A''B''C''$ (sl. 254.) i $(A)(B)(C)$ postoji osobit geometrijski odnos, koji se zove *afinost*. Parovi vrhova A'' i (A), B'' i (B), C'' i (C) [pridružene točke] leže na pravcima, koji su među sobom usporedni. Ti se pravci zovu *zrake afinosti*. Ako se produži stranica $B''C''$ do r_2, dobit će se drugo probodište P_2 stranice BC (§ 33. t. **1.**). Kod okretanja ravnine **P** točka P_2 ostane na istom mjestu. Prema tome i produženje stranice $(B)(C)$ mora ići točkom P_2. S jednakih se razloga moraju sjeći u istoj točki Q_2 traga r_2 produženja pridruženih stranicâ $A''C''$ i $(A)(C)$, a u točki R_2 (koja na sl. 254. nije nacrtana) produženja stranicâ $A''B''$ i $(A)(B)$. Trag r_2 zove se *os afinosti*. Trokuti $A''B''C''$ i $(A)(B)(C)$ imaju ova dva glavna svojstva:

1. Pridruženi vrhovi (točke) leže na pravcima, (zrakama afinosti), koji su među sobom usporedni.

2. Produženja se svakih dviju pridruženih stranica (pravaca) sijeku u istoj točki na tragu r_2 *(osi afinosti).*

Za svaka se dva lika, koji imadu ta dva svojstva kaže, da su *afino srodni* ili da su u *afinom položaju*.

Afinost je potpuno određena, ako je zadana os afinosti o i jedan par pridruženih točaka A i A_1 (sl. 255.). Da se kojojgod točki B nađe pridružena točka B postupa se ovako: Točkom B povuče se zraka afinosti usporedno s AA_1, spoje se točke A i B pravcem, koji siječe os o u točki M, i napokon se spoje točke A_1 i M pravcem, koji siječe zraku afinosti točke B u traženoj točki B_1.



Sl. 255.

Ako je na sl. 254. poznata točka (A), kako ćeš pomoću svojstva afinosti odrediti točke (B) i (C), koje su pridružene točkama B'' i C''?

4. **Zadatak.** *Nacrtaj projekcije trokuta ABC, kojemu je zadana prava veličina, i koji leži u ravnini* $\mathbf{P} \perp \Pi_1$.

To je obrnuti zadatak od zadatka u t. 2.

P r v o r j e š e n j e. Najprije se nacrtaju tragovi r_1, r_2 ravnine **P** (sl. 253.) i u preložaju prava veličina $A_0B_0C_0$ zadanoga trokuta. Spuste li se s vrhova A_0, B_0, C_0 okomice na trag r_1, dobit će se u tom tragu tlocrt $A'B'C'$

zadanoga trokuta. Nacrt A'' točke A dobit će se, ako se na ordinalu točke A' prenese $KA'' = A_0A'$. Na jednak će se način odrediti točke B'' i C''.

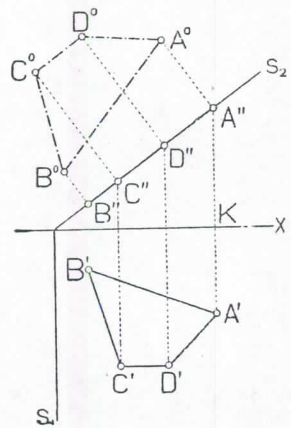
D r u g o r j e š e n j e. Nacrtaju se tragovi r_1, r_2 ravnine **P** i u Π_2 preložaj $(A)(B)(C)$ zadanoga trokuta (sl 254.). Ako se taj trokut okrene oko r_2 u ravninu **P**, njegovi će vrhovi opisati lukove, koji se na Π_1 projiciraju u pravoj veličini sa središtem u O. a na Π_2 kao dužine usporedne s x. Projekcije će se A', A'' točke A dobiti ovako: Povuče se $(A)A_1 \perp x$, opiše se oko O luk A_1A' s polumjerom OA_1, točkom (A) povuče se usporednica s x i ta usporednica presiječe ordinalom točke A' u točki A''. Na jednak se način odrede projekcije B', B'' i C', C'' točaka B i C. Te se projekcije mogu odrediti i upotrebom svojstva afinosti, koje postoji između oba trokuta $(A)(B)(C)$ i $A''B''C''$ (t. 3).

§ 62. Prelaganje druge ravnine prometalice

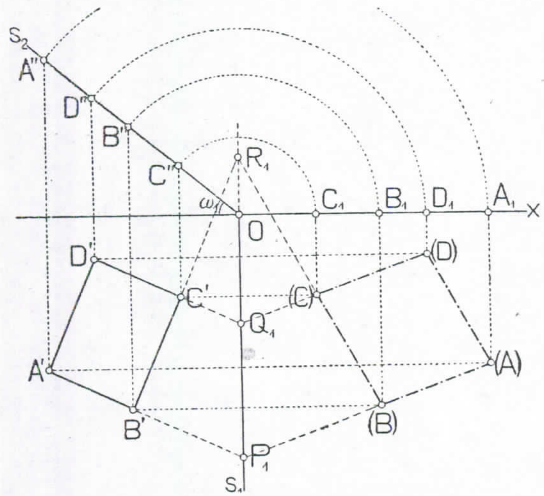
1. **Zadatak.** *Odredi pravu veličinu trapezoida $ABCD$, koji je u ravnini* $\Sigma \perp \Pi_2$!

P r v o r j e š e n j e. P r e l a g a n j e m o k o t r a g a r_2 u Π_2 (sl. 256.).

Nacrt trapezoida mora biti u tragu s_2 (§ 35. t. **1**). Ako se ravnina Σ preloži oko s_2 u Π_2, dobit će se u preložaju prava veličina $A^0B^0C^0D_0$



Sl. 256.



Sl. 257.

četverokuta $ABCD$. Točka će se A^0 dobiti, ako se povuče $A''A^0 \perp s_2$ i učini $A''A^0 = A'K$.

Kako ćeš odrediti projekcije trapezoida, koji je u ravnini $\Sigma \perp \Pi_2$, a poznata mu je prava veličina $A^0B^0C^0D^0$? Isporedi (§ 61. t. 4).

Drugo rješenje: Prelaganjem oko traga r_1 u Π_1. Na sl. 257. nacrtane su projekcije paralelograma $ABCD$, koji je u ravnini $\Sigma \perp \Pi_2$, a onda je ta ravnina okrenuta oko traga r_1 u Π_1. Na taj se način dobila prava veličina $(A)(B)(C)(D)$ paralelograma $ABCD$. Objasni postupak kod okretanja.

Između tlocrta $A'B'C'D'$ i preložaja $(A)(B)(C)(D)$ postoji afina srodnost. Trag r_1 je os afinosti, a $A''(A)$ smjer zraka afinosti.

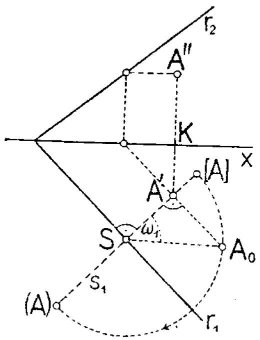
Ako je zadana prava veličina $(A)(B)(C)(D)$ paralelograma $ABCD$ i tragovi s_1, s_2 ravnine $\Sigma \perp \Pi_2$, u kojoj leži taj lik, kako ćeš okretanjem oko s_1 odrediti njegove projekcije?

§ 63. Prelaganje opće ravnine

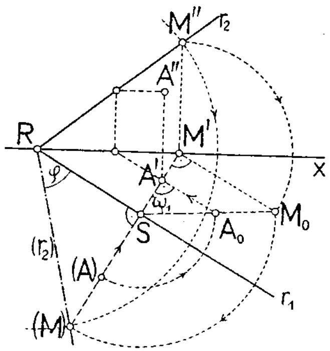
1. Zadatak. *U zadanoj ravnini* **P** (r_1, r_2) *uzmi točku* $A(A', A'')$ *i preloži je oko prvoga traga* r_1 *u* Π_1!

Rješenje. Budući da točku A treba okretati oko pravca r_1, koji je u Π_1, ovaj je zadatak sličan sa zadatkom u § 57. t. 4., pa se i ovdje na jednak način odredi polumjer okretanja za točku A.

Trag s_1 ravnine okretanja točke A ide točkom A' okomito na r_1, t. j. taj se trag podudara s tlocrtom priklonice prve skupine, kojom ide točka A.



Sl. 258.



Sl. 259.

S tom se priklonicom podudara i polumjer okretanja SA točke A. (Gledaj sl. 242!). Ako se ravnina okretanja preloži oko s_1 u Π_1, točka će A doći u A_0 ($A'A_0 \perp s_1$, $A'A_0 = KA''$, (sl. 258.), a polumjer okretanja bit će dužina SA_0. Kut ω_1 je prvi prikloni kut ravnine **P**. Okrene li se točka A oko r_1 za kut ω_1, ona dođe u položaj $[A]$, a okrene li se za kut $180^0 - \omega_1$, ona

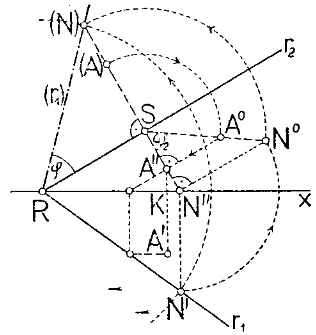
dođe u položaj (A), te je $S(A) = S[A] = SA_0$. Ako se dakle oko S opiše luk s polumjerom SA^0, dobije se u tragu s_1 točka $[A]$ ili (A).

2. Zadatak. *Zadana je ravnina* **P** (r_1, r_2) *i točka* (A) *u* Π_1; *okreći tu točku oko* r_1, *dok ne dođe u ravninu* **P**! (Sl. 259.).

Rješenje. To je obrnuti zadatak od predašnjega. Da se odredi A', povući će se $(A)S \perp r_1$, odrediti prikloni kut ω_1 i iz S opisati s polumjerom $S(A)$ luk, koji preloženu priklonicu SM_0 siječe u A_0. Povuče li se $A_0A' \perp (A)S$, dobit će se tlocrt A'. Nacrt se A'' nađe spomoću sutražnice, ili se učini $KA'' = A'A_0$, kao što je na sl. 258.

3. Zadatak. *Zadana je ravnina* **P** (r_1, r_2) *i točka* A *u* Π_2; *okreći tu točku oko* r_2, *dok ne dođe u ravninu* **P**! (Sl. 260.).

Rješenje. Da se odredi A'', povući će se $(A)S \perp r_2$, odrediti drugi prikloni kut ω_2 ravnine **P** i iz S opisati s polumjerom $S(A)$ luk, koji preloženu priklonicu SN^0 siječe u A^0. Povuče li se $A^0A'' \perp (A)S$, dobit će se nacrt A''. Tlocrt se A' nađe pomoću sutražnice, ili se učini $KA' = A''A^0$.



Sl. 260.

4. Zadatak. *Zadana je ravnina* P *svojim tragovima* r_1, r_2; *odredi pravu veličinu kuta* φ, *što ga čine tragovi ravnine* **P**!

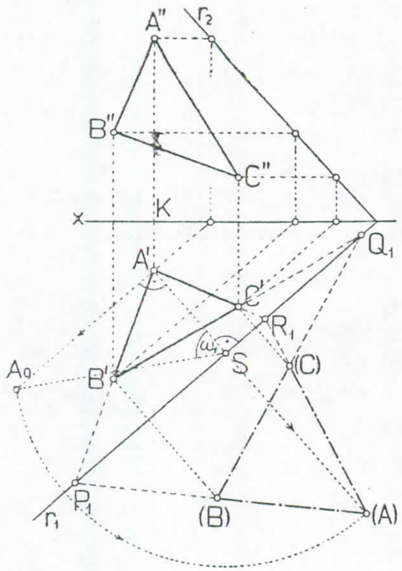
Rješenje. Ako se na sl. 259. odredi točka (M) i spoji s točkom R, onda je pravac $R(M) \equiv (r_2)$ preložaj traga r_2 oko traga r_1 u Π_1, pa je $\sphericalangle [r_1 (r_2)] = \varphi$. Budući da je dio RM' traga r_2 došao u položaj $R(M)$, tad mora biti $R(M) = RM''$.

Okreni na sl. 260. trag r_1 oko r_2 u Π_2, t. j. okreni točku N u Π_2, i spoji (N) s R. Tada je $\sphericalangle [r_2 (r_1)] = \varphi$.

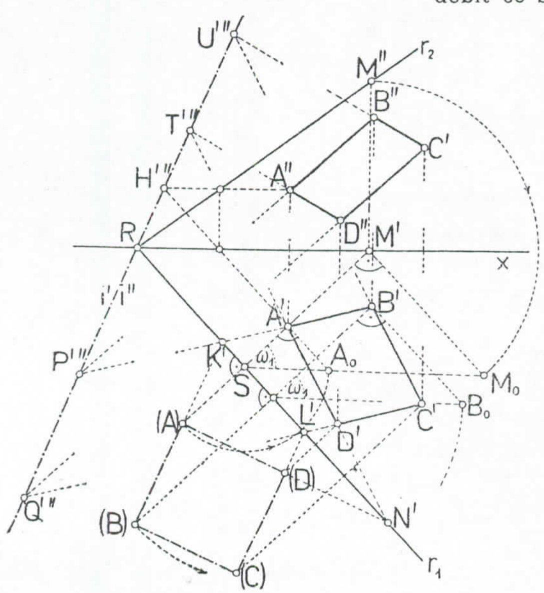
5. Zadatak. *Odredi pravu veličinu trokuta* ABC $(A'B'C', A''B''C'')$, *koji je u ravnini* **P** (r_1, r_2)!

Rješenje. Na sl. 261. uzet je tlocrt $A'B'C'$ po volji, a nacrt je određen spomoću sutražnica ravnine **P**. Da se dobije prava veličina trokuta ABC, okrenut će se oko r_1 u Π_1 u položaj (A) (B) (C). Taj je trokut sukladan s trokutom ABC. Budući da između trokuta $A'B'C'$ i (A) (B) (C) postoji afina srodnost, s obzirom na r_1 kao os afinosti, rotirana je samo točka A na način koji je prikazan u t. 1. [$A'S \perp r_1$, $A'A_0 \perp A'S$, $A'A_0 = KA''$, $S(A) = SA_0$], a onda su točke (B) i (C) određene upotrebom svojstva afinosti.

6. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kvadrata* $ABCD$, *koji je u zadanoj ravnini* **P** (r_1, r_2)! (Sl. 262.).



Sl. 261.



Sl. 262.

Rješenje. Ako se uzme, da je ravnina **P** okrenuta oko r_1 u Π_1, kvadrat će $ABCD$ doći u položaj $(ABCD)$. Zato se najprije nacrta taj kvadrat u Π_1, a onda se oko r_1 okrene u ravninu **P** i odredi njegov tlocrt, pa nacrt. Rotacija se izvede spomoću prvog priklonog kuta ω_1 ravnine **P** na isti način, kako je izvedeno za točku (A) na sl. 259. (t. 2.). Na taj su način rotirani vrhovi (A) i (B) kvadrata $(ABCD)$ na sl. 262., a isto tako mogli bismo rotirati i vrhove (C) i (D).

No kako između likova $(ABCD)$ i $A'B'C'D'$ postoji afina srodnost, gdje je r_1 os afinosti, a $(A)A'$ smjer zraka afinosti, to se C', D' može odrediti spomoću svojstva afine srodnosti tih likova. Ako se (A) (D) produži do točke N' na r_1 i ta točka spoji s A', dobit će se na zraci afinosti točke (D) tlocrt D'. Isto se tako spomoću L' može odrediti C'.

Za određivanje nacrta $A''B''C''D''$ može se upotrebiti os istovjetnosti i' i'', koja se može dobiti spomoću projekcija sutražnice točke A na način, koji je prikazan u § 39. t. 7. (sl. 182). Ako se $A'B'$ produži do $P'P''$ na i' i'' i ta točka spoji s A'', dobit će se na tom pravcu točka B''. Spomoću točke $T'T''$, u kojoj $A'D'$ siječe i' i'', može se dobiti točka D'', a spomoću $Q'Q''$ točka C''. Tlocrt su i nacrt kvadrata dva afina lika; i' i'' je os afinosti, a ordinale su zrake afinosti.

7. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije kvadrata, koji je u ravnini **A** $\perp \Pi_1$!

2. Nacrtaj projekcije pravilnog peterokuta, koji je u ravnini **B** $\perp \Pi_2$!

3. Nacrtaj projekcije pravilnog šesterokuta, koji je u ravnini $\Gamma \perp \Pi_3$, (Γ je treća ravnina prometalica). — Uputa: Okreni Γ oko traga c_3 u Π_3.

4. Nacrtaj projekcije kvadrata $ABCD$ [A (3, 2, 2), B (5, 0, 0)], koji leži u ravnini simetrije Σ! — Uputa: Preloži taj kvadrat oko trećega traga s_3 u Π_3.

5. Uzmi u ravnini **P** točku A i okreći je oko prvoga traga r_1, dok ne padne u Π_1! Neka je: *a)* **P** (5, 3, 4), A (– 1, 2, —); *b)* **P** (4, 3, —3), A (1, —, 2); *c)* **P** (∞, 4, 3), A (0, —, 2).

6. Uzmi u ravnini Σ točku B i okreći je oko drugoga traga s_2, dok ne padne u Π_2! Neka ja: *a)* Σ (3, – 4, 3) B (3, —, 2); *b)* Σ (∞, 3, 5), B (0, 2, —).

7. Zadana je ravnina Γ i točka C u Π_1; okreći tu točku oko prvoga traga e_1, dok ne padne u ravninu Γ! Neka je: *a)* Γ (6, 6, 5), C (1, 2, 0); *b)* Γ (4, —2, 4), C (5, 3, 0).

8. Zadana je ravnina Δ i točka D u Π_2; okreći tu točku oko drugoga traga d_2, dok ne padne u ravninu Δ! Neka je: *a)* Δ (4, 5, —5), D (4, 0, 3); *b)* Δ (∞, 5, 4), D (1, 0, 2); *c)* Δ (5, 4, 5), D (5, 0, 3).

9. Uzmi u ravnini **E** (5, 4, 3) dužinu AB [A (—1, 1, —), B (2, 1,5, —)] i okreni je *a)* oko traga e_1 u Π_1, *b)* oko traga e_2 u Π_2!

10. Odredi pravu veličinu kuta, što ga čine tragovi ravnine *a)* **E** (4, 3, 2), *b)* Φ (4, 3, —3)!

11. Odredi pravu veličinu trokuta ABC [A (0, 4, 1), B (4, 1, 5), C (6,5, 5, 1)] okretanjem oko prvoga traga ravnine toga trokuta u Π_1! (U ovom zadatku i u slijedećim zadacima upotrebite i svojstvo afinosti).

12. Odredi središte kružnice, koja je opisana oko trokuta ABC, koji je zadan u 11. zadatku.

13. U ravnini **P** (3, 3, —3) leži nepravilan četverokut, kojemu je tlocrt A' ($x = 2$, $y = 2$), B' (4, 1), C' (4, 3), D' (1, 4); odredi njegovu pravu veličinu okretanjem oko traga r_2 u Π_2!

14 Nacrtaj projekcije pravokutnika $ABCD$, koji je u ravnini **P** (4, 3, —4), kojemu su stranice nagnute prema r_1 za 45⁰ te je A' ($x = 1$, $y = 2$) tlocrt vrha A, $AB = 4$, $AD = 8$.

15. Nacrtaj projekcije kvadrata $ABCD$ [A (3, 2, 2), B (5, 0, 0), C, D], koji leži u ravnini simetrije Σ! — Uputa: Okreni kvadrat oko s_1 u Π_1, ili oko s_2 u Π_2, ili oko s_3 u Π_3.

16. U ravnini **P**, kojoj je zadan prvi trag r_1 [$\sphericalangle$ (r_1 x) = 45⁰] i prvi prikloni kut $\omega_1 = 60^0$, leži pravilan peterokut, kojemu je jedna stranica usporedna s r_1; odredi projekcije toga lika!

17 Točka je S (3, 4, —) središte pravilnog šesterokuta, koji leži u ravnini **P** (3, —3, 5), te mu je jedan vrh u tragu r_2; nacrtaj projekcije toga lika!

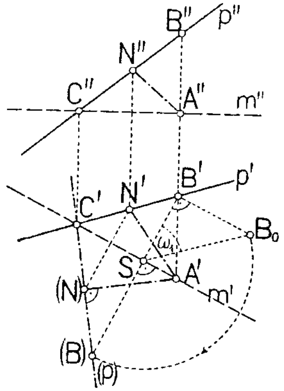
18. Odredi projekcije pravilnog osmerokuta, kojemu je središte u pravcu $p \equiv MN$ [M (1, 8, 0), N (4, 0, 5)], točka A (5, 3, 7) jedan vrh, i kojemu je ravnina okomita na p! — Uputa: Ravnina lika ide točkom $A \perp p$.

XII. Određivanje prave veličine udaljenosti i kutova spomoću okretanja

§ 64. Udaljenost točke od pravca

1. Zadatak. *Neka se odredi udaljenost točke A (A', A'') od pravca $p(p', p'')$*! (Sl. 263.).

Rješenje. Točkom A i pravcem p određena je ravnina **P**. Ako se točkom A povuče sutražnica prve skupine m, ona siječe pravac p u točki C, te je $m'' \equiv A''C'' \parallel x$, a $m' \equiv A'C'$. Okrenemo li ravninu **P** oko sutražnice m u horizontalan položaj, točke će A i C ostati na istom mjestu. Uzmemo li na pravcu p točku B (B', B''), pa je okrenemo oko m za $180^0 - \omega_1$ ($B'S \perp m'$, $B'B^0 \parallel m'$ i $B'B^0 = B''A''$, $S(B) = SB_0$; isp. § 57., t. 5, ona dođe u položaj (B), pa je $(B)C' \equiv (p)$. Spustimo li s točke A' okomicu $A'(N)$ na (p), ta je okomica jednaka pravoj veličini udaljenosti točke A od pravca p. Povučemo li $(N)N' \perp m'$ i $N'N'' \parallel A'A''$, tada je $A'N'$ tlocrt, a $A''N''$ nacrt okomice spuštene s točke A na pravac p.



Sl. 263.

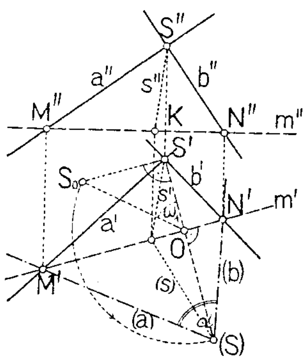
Druga rješenja ovog zadatka vidi u § 47. t. 1. i § 55. t. 2.

Bilješka. Ovaj se zadatak može riješiti bez osi x.

§ 65. Priklon kut dvaju pravaca

1. Zadatak. *Zadana su dva ukrštena pravca $a(a', a'')$ i $b(b', b'')$; odredi pravu veličinu kuta, što ga čine ta dva pravca*! (Sl. 264.).

Rješenje. Okrenemo li ravninu tih dvaju pravaca oko jedne njezine sutražnice prve skupine $m(m', m'' \parallel x)$ u horizontalan položaj, rotirani će pravci (a) i (b) činiti kut α, koji je jednak pravoj veličini kuta, što ga čine pravci a i b. Kod te rotacije ostat će točke M i N na istom mjestu, pa će biti dosta, da se rotira samo sjecište S. Polumjer se rotacije za točku S odredi na



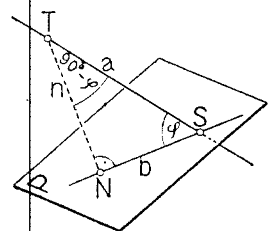
Sl. 264.

isti način, kao u § 57., t. 5. (sl. 244.) za točku A; dakle $S'O \perp m'$, $S'S_0 \parallel m'$ i $S'S_0 = S''K$. Opiše li se oko O luk $S_0(S)$, pa se (S) spoji s M' i N', dobit će se rotirani pravci (a) i (b), koji čine traženi kut. I ovaj se zadatak može riješiti bez upotrebe osi x.

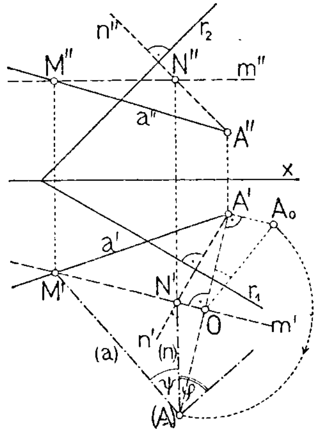
§ 66. Priklon kut pravca prema ravnini

1. Zadatak. *Zadana je ravnina* **P** (r_1, r_2) *i pravac $a(a', a'')$; odredi priklon kut toga pravca prema ravnini* **P**!

Opće rješenje. Priklon je kut φ pravca a prema ravnini **P** jednak oštrom kutu, što ga pravac a čini svojom projekcijom b na ravnini **P**. Uzme li se dakle na pravcu a točka T (sl. 265.) i s nje spusti okomica n na **P**, pa njeno nožište N spoji sa sjecištem S pravca a s **P**, onda je $SN \equiv b$, projekcija pravca a na **P**, $\sphericalangle(ab) = \varphi$, $\sphericalangle(an) = 90^0 - \varphi$.



Sl. 265.



Sl. 266.

Konstrukcija. Na pravcu a (sl. 266.) uzeli smo točku $T(T', T'')$, pa smo tom točkom povukli okomicu n na ravninu **P** ($n' \perp r_1$, $n'' \perp r_2$) te smo na isti način, kao na sl. 264. (§ 65.) odredili pravu veličinu oštroga kuta ψ, što ga čine pravci a i n. Traženi je kut φ komplemenat kuta ψ.

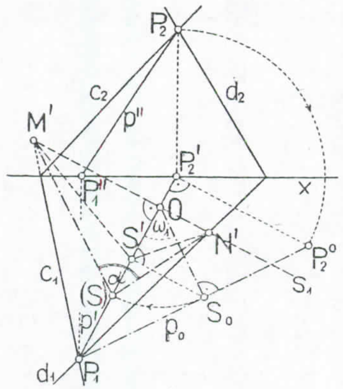
§ 67. Priklon kut dviju ravnina

1. Zadatak. *Ravnine Γ i Δ zadane su svojim tragovima c_1, c_2 i d_1, d_2; odredi priklon kut tih dviju ravnina!* (Sl. 267.).

Prvo rješenje. Odredi se presječnica $p(p', p'')$ zadanih ravnina Γ i Δ, odabere se na toj presječnici točka S i tom točkom položi ravnina Σ okomito na p. Ravnina Σ siječe zadane ravnine u pravcima SM i SN; ta dva pravca čine kut, koji je jednak priklonom kutu ravnina Γ i Δ.

Preložimo presječnicu p oko p' u Π_1, odaberemo S_0 na p_0, postavimo $S_0O \perp p_0$ i točkom O povučemo $s_1 \perp p'$. s_1 je prvi trag ravnine Σ, OS_0

je preložena priklonica te ravnine, koja je okomita na p, točka O je prvo probodište te priklonice. Povučemo li $S_0 S' \perp p'$ i S' spojimo M' i N', onda su $S'M'$ i $S'N'$ tlocrti presječnica ravnina Γ i Δ s ravninom Σ. Okrenemo li ravninu Σ oko s_1 u Π_1, točka će S doći u (S) na q', $[O(S) = OS_0]$, dok M' i N' ostanu na istom mjestu. Traženi je kut $\alpha = \sphericalangle M'(S)N'$.



Sl. 267.

Drugo rješenje. Ako se s kojegod točke spuste okomice na Γ i Δ, obje te okomice čine kut, koji je jednak priklonom kutu tih ravnina. Zadatak se tad riješi kao u § 65. Riješi zadatak na ovaj način!

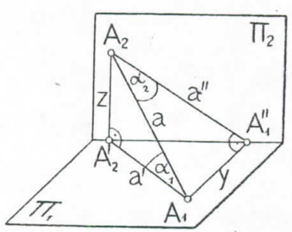
2. Zadatak. *Odredi tragove ravnine* E, *koja raspolavlja prikloni kut dviju ravnina* Γ *i* Δ!

Rješenje. Ravnina E zove se simetrala ravnina prostornog kuta, što ga čine ravnine Γ i Δ. Ta ravnina sadrži presječnicu p i simetralu s priklonog kuta α ravnina Γ i Δ (sl. 267.). Točka S_1 u kojoj preložaj (s) simetrale s siječe trag s_1, jest prvo probodište te simetrale. Trag e_1 ravnine E ide prvim probodištem P_1 i S_1 pravaca p i s. Trag e_2 ide točkom P_2. Nacrtaj sliku prema slici 267. i ovom tumačenju!

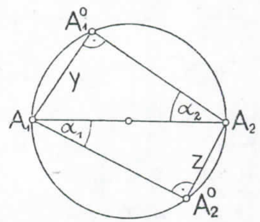
§ 68. Polaganje pravca točkom

1. Zadatak. *Zadanom točkom* A_1 (A'_1, A''_1), *koja je u* Π_1, *položi pravac* a, *koji s* Π_1 *čini kut* α_1, *a s* Π_2 *kut* α_2!*

Objašnjenja. Na sl. 268a prikazane su obje ravnine projekcija, pravac a, njegove projekcije a', a'', probodišta A_1, A_2 i prikloni kutovi α_1, α_2.



Sl. 268a.

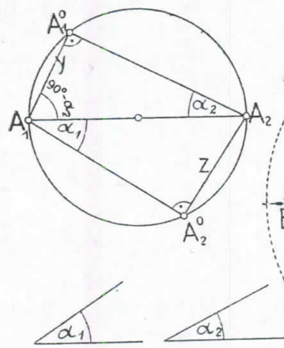


Sl. 268b.

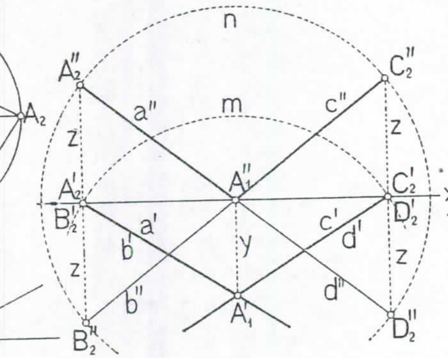
* Zadaci, koji dolaze u §§ 68. i 69., morali bi po svom sadržaju ranije doći, ali jer su to teži zadaci, uvršteni su na ovom mjestu.

Oba su trokuta $A_1A_2'A_2$ i $A_1A_1''A_2$ pravokutna, te im je dužina A_1A_2 zajednička hipotenuza. Ako se oba ta trokuta okrenu oko te zajedničke hipotenuze u istu ravninu, nastat će tetivni četverokut $A_1A_2^0A_2A_1^0$ u kružnici, kojoj je A_1A_2 promjer (sl. 268b). U preloženom pravokutnom trokutu $A_1A_2A_2^0$ dolazi prvi prikloni kut α_1, veličina tlocrta $A_1A_2^0$ dužine A_1A_2 i veličina udaljenosti $A_2A_2^0$ točke A_2'' od osi x. U pravokutnom trokutu $A_1A_2A_1^0$ dolazi drugi prikloni kut α_2, veličina nacrta $A_2A_1^0$ dužine A_1A_2 i veličina udaljenosti $A_1A_1^0$ točke A_1' od osi x. U takvoj se dakle slici nalaze svi podaci, koji su potrebni za rješenje postavljenog zadatka.

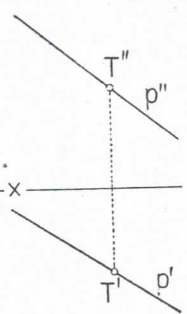
Konstrukcija. Na sl. 269a konstruiran je najprije pravokutan trokut $A_1A_2A_1^0$, u kojemu je kateta $A_1A_1^0 = A_1'A_1''$, a suprotni kut α_2, zatim je $A_1A_2A_1^0$ opisana kružnica, kojoj je promjer $= A_1A_2$, a onda je u toj kružnici nacrtan drugi pravokutni trokut $A_1A_2A_2^0$, u kojemu je $\sphericalangle A_2A_1A_2^0 = \alpha_1$. Sad



Sl. 269a.



Sl. 269b.



Sl. 269c.

se glavna slika 269b konstruira ovako: Oko A_1' opiše se luk m s polumjerom $= A_1A_2^0$, koji os x siječe u točki A_2'. U toj točki postavi se okomica na os x i ta okomica siječe u točki A_2'' s kružnicom n, koja je opisana oko A_1'' s polumjerom $= A_2A_1^0$. Tada je $A_1'A_2' \equiv a'$, $A_1''A_2'' \equiv a''$. Ako je točno crtano, tad mora biti $A_2'A_2'' \equiv A_2A_2^0 = z$.

No kako kružnica n ne siječe okomicu uzdignutu u točki A_2' još u jednoj točki B_2'' tad su b' $(\equiv a')$ i b'' $(\equiv A_1''B_2'')$ projekcije drugoga pravca b, kojemu su također prikloni kutovi α_1 i α_2.

Luk m siječe os x u drugoj točki C_2', a kružnica n siječe pravac povučen tom točkom okomito na os x, u dvije točke C_2'' i D_2'', pa su pravci c', c'' i d', d'' projekcije novih dvaju pravaca c i d, kojima su prikloni kutovi jednaki α_1 i α_2. Ima dakle četiri pravca, koji zadovoljavaju postavljeni zadatak te se kaže, da zadatak ima četiri rješenja.

Zbog simetrije sl. 269 b pravac d'' pada u produženje pravca a'', a c'' pada u produženje pravca b''.

2. **Zadatak.** *Točkom T (T' T''), koja je u prostoru po volji zadana, položi pravac, kojemu su zadani prikloni kutovi α_1 i α_2!*

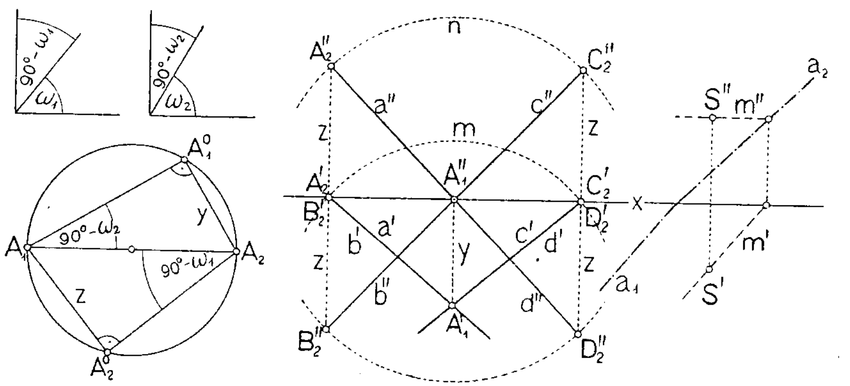
Rješenje. Najprije se konstruiraju projekcije pravca a, koji je položen kojomgod točkom A_1 ravnine Π_1 i kojemu su prikloni kutovi α_1 i α_2, a onda se točkom T položi pravac $p \parallel a$ [$p' \parallel a'$, $p'' \parallel a''$, sl. 269 c]. Da je taj zadatak ispravno riješen slijedi odatle, što usporedni pravci čine s ravninama projekcija jednake priklone kutove.

I ovaj zadatak ima četiri rješenja. Nacrtaj na slici 269 c projekcije triju pravaca i odredi njihova probodišta.

§ 69. Polaganje ravnine točkom

1. **Zadatak.** *Zadanom točkom S (S', S'') položi ravninu, koja s Π_1 čini kut ω_1, a s Π_2 kut ω_2!*

Rješenje. Ako se točkom S ravnine **P** (gledaj sl. 196!) položi pravac a okomito na **P**, on s Π_1 čini kut $\alpha = 90^0 - \omega_1$, a s Π_2 kut $\alpha_2 = 90^0 - \omega_2$. Ako se prema tome konstruiraju projekcije pravca a, kojemu su prikloni



Sl. 270 a. Sl. 270 b. Sl. 270 c.

kutovi jednaki $90^0 - \omega_1$ i $90^0 - \omega_2$, tražena će ravnina ići točkom S okomito na pravac a. Taj smo zadatak riješili na sl. 270. Najprije smo konstruirali pravokutne trokute sa zajedničkom, po volji velikom hipotenuzom A_1A_2 i kutovima $90^0 - \omega_1$ i $90^0 - \omega_2$ (sl. 270 a), zatim smo uzeli u osi x po volji točku A_1'' (sl. 270 b), tom smo točkom povukli okomicu na x i na nju smo prenijeli $A_1''A_1' = A_2A_1^0 = y$, a onda smo konstruirali projek-

cije pravaca a, b, c, d, koji idu točkom A_1 (A_1', A_1''), i kojima su prikloni kutovi jednaki $90^0 - \omega_1$ i $90^0 - \omega_2$, i to na način, koji je prikazan u § 68. t. **1.** Točkom S položili smo tada na način prikazan u t. § **44.** t. **5.** traženu ravninu **A** $\perp a$ ($a_1 \perp a'$, $a_2 \perp a''$).

Položi točkom S ostale tri ravnine **B** $\perp b$, $\Gamma \perp c$, $\Delta \perp d$. Sve te ravnine čine s Π_1 kut ω_1, a s Π_2 kut ω_2. I ovaj zadatak ima četiri rješenja.

2. **Zadatak.** Točkom T (3, 3, 3) položi ravninu, koja s Π_1 čini $\sphericalangle\, \omega_1 = 67^0 30'$, a s Π_2 $\sphericalangle\, \omega_2 = 75^0$!

3. Zadaci za vježbu

1. Odredi udaljenost točke A (3, 3, 4) od pravca $p \equiv MN$ [M (4, 4, 1), N (6, 7, 3)]!

2. Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca s pomoću okretanja!

3. U zadanoj ravnini **P** (7, 6, 5) uzmi pravac $a \equiv AB$ [A (3, 2,5, —), B (0, 1, —)] povuci u toj ravnini drugi pravac b, koji je u daljini $d = 3$ usporedan s a!

4. Odredi pravu veličinu kuta, što ga čine dva ukrštena pravca a i b! Neka je:
a) $a \equiv A_1S$ [A_1 (1, —1, 0), S (5, 3, 5)], $b \equiv B_1S$ [B_1 (9, 4, 0)];
b) $a \equiv A_2S$ [A_2 (5, 0, 7)], $b \equiv B_1S$ [B_1 3, 6, 0), S (0, 3, 4)];
c) $a \parallel \Pi_1$, b kos, *d)* $a \parallel x$, b kos.

5. Točkom A (1, 5, 3) povuci pravac, koji siječe pravac $p \equiv MN$ [M (3, 2, 1), N (6, 4, 3)] i čini s njim kut od 45⁰!

6. Odredi prikloni kut dvaju mimosmjernih pravaca a i b! — Uputa: Na pravcu a uzmi točku S, položi kroz nju pravac $c \parallel b$ i odredi kut pravaca a i c. Taj je kut jednak kutu, što ga čine pravci a i b.

7. Odredi prikloni kut dvaju ukrštenih pravaca, kojima tlocrti padaju u isti pravac!

8. Odredi na sl. 264. projekcije s', s'' simetrale s kuta, što ga čine pravci a i b. — Uputa: Konstruiraj simetralu (s) kuta u preložaju, a onda odredi s' i s''.

9. Odredi projekcije simatrale prvog priklonoga kuta zadanoga pravca m (m', m'')!

10. Odredi prikloni kut dviju ravnina **P** i Σ! Neka je:
a) **P** (—2, 2, 6), Σ (3.5, 8, 4); *b)* **P** (2,5, 4, —4), Σ (8, 4, 7);
c) **P** (∞, 7, 2), Σ (∞, 5, 6); *d)* **P** (—4,5, 6.5, 3), Σ (∞, 4, 4).

11. Odredi tragove ravnine **E**, koja raspolavlja prikloni kut ravnina Γ (—3, 3, 8,5) : Δ (10, 11, 8,5)!

12. Odredi tragove ravnine, koja raspolavlja kut, što ga ravnina **A** (—5, 4, 3) čini *a)* s Π_1, *b)* s Π_2!

13. Odredi prikloni kut dviju vertikalnih ravnina!

14. Odredi prikloni kut dviju ravnina, kojima su prvi tragovi među sobom usporedni!

15. Na pravcu $p \equiv MN$ [M (—5, 4, 2,5), N (2, 1, 2)] odredi točku, koja je jednako udaljena od dviju ravnina **A** (—2, 2, —4,5) i **B** (7, 9, 4)!

16. Zadane su tri točke A (3, 2, 3), B (6, 0,5, 9), C (9, 6, 2); kroz svaku od tih točaka položi po jedan pravac tako, da ti pravci budu među sobom usporedni i da s Π_1 čine kut od 45⁰, a s Π_2 kut od 30⁰! (Nacrtaj samo jedno rješenje).

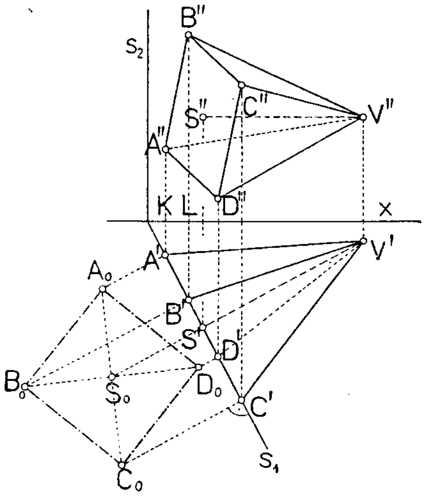
XIII. Predočenje piramida i prizama, koje su u osobitom položaju

§ 70. Predočenje piramide

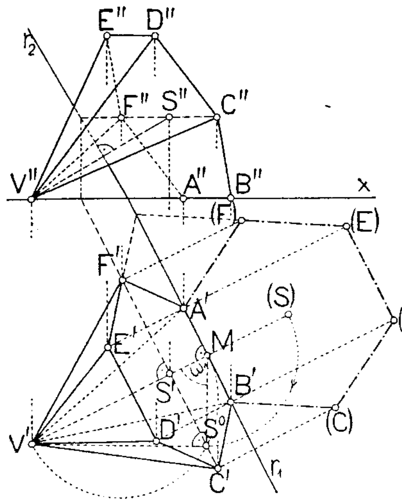
1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kvadratične piramide, kojoj je osnovka u ravnini* $\Sigma \perp \Pi_2$! (Sl. 271.).

Rješenje. Preložimo li ravninu Σ oko prvoga traga s_1 u Π_1, dobit ćemo osnovku (kvadrat) $A_0B_0C_0D_0$ u pravoj veličini. Najprije se nacrta taj kvadrat, zatim tlocrt $A'B'C'D'$, koji je u tragu s_1 i napokon nacrt $A''B''C''D''$ kao u § 61. t. 4. (sl. 253.).

Visina piramide ide središtem S osnovke okomito na ravninu Σ. Nađemo li S_0, zatim S' i S'', tlocrt je visine piramide $S'V' \perp s_1$, a nacrt $S''V'' \perp s_2$. Budući da je visina $SV \parallel \Pi_1$, ona se na tu ravninu projicira u pravoj veličini kao dužina $S'V'$. Spojimo li V' s $A'B'C'D'$, a V'' s $A''B''C''D''$ imamo tlocrt i nacrt kvadratične piramide.



Sl. 271.



Sl. 272.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je pobočka* ABV *u* Π_1!

Rješenje. Na sl. 272. zadan je istokračan trokut $A'B'V'$ kao tlocrt pobočke ABC. Nacrt je toga lika u osi x. Dužina je $A'B'$ jednaka pravoj

veličini osnovnih bridova. Okrenemo li osnovku oko $A'B'$ u Π_1, dobit ćemo njezinu pravu veličinu. Točka (S) je središte osnovci opisane kružnice, kojoj je polumjer $= A'B'$. Dužina je $V'M$ ($\perp A'B'$) pobočna visina piramide, a $(S)M$ je polumjer osnovci upisane kružnice. Trokut je VSM u prostoru pravokutan, te je kateta VS visina piramide, VM je hipotenuza, a $(S)M$ dužina druge katete. Preložimo li taj trokut oko $V'M$ u Π_1, S^0 ležat će na polukružnici opisanoj nad $V'M$ i bit će $MS^0 = M(S)$. Nožište okomice spuštene s S^0 na $V'M$ je tlocrt S' središta S osnovke. U pravac $A'B'$ pada prvi trag r_1 ravnine osnovke, te je $\sphericalangle S'MS^0 = \omega_1$ prvi prikloni kut te ravnine. Točka je S'' udaljena od osi x za dužinu $S'S^0$. Dužina je $S''V''$ nacrt osi piramide. Trag je $r_2 \perp S''V''$. Okrenemo li preloženu osnovku piramide iz Π_1 oko r_1 za $180^0 - \omega_1$, dobit ćemo tlocrt $A'B'C'D'E'F'$ osnovke. Nacrt se može odrediti spomoću sutražnica.

Kontrola: Osnovni su bridovi usporedni s glavnim dijagonalama osnovke.

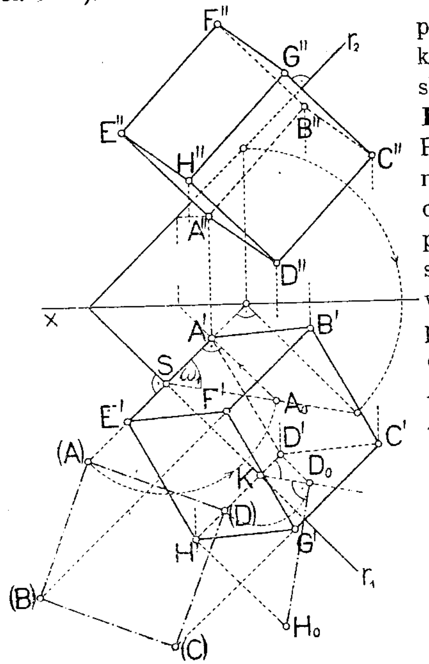
§ 71. Predočenje prizme

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kocke, kojoj je osnovka u ravnini* $\mathbf{P}(r_1, r_2)$! (Sl. 273.).

Rješenje. Najprije se nacrtaju projekcije osnovke t. j. kvadrata $ABCD$, koji je u ravnini **P**. (Isp. § 63. t. 5., sl. 262.). Pobočni su bridovi okomiti na **P** i jednaki su osnovnim bridovima. Projekcije su pobočnih bridova okomite na istoimenim tragovima. Da se odrede projekcije brida DH, odnosno projekcije H', H'' vrha H, postupat će se kao u § 46. t. 2. sl. 205., t. j. povući će se $D_0H_0 \perp KD_0$, gdje je KD_0 preložena priklonica točke D, učinit će se $D_0H_0 = (A)(B)$ i povući će se $H_0H' \perp D'H'$. Nadalje će se učiniti $A'E' = B'F' = C'G' = D'H'$. — Nacrt se dobije iz tlocrta.

Objasni vidljivost ploha i bridova kocke u tlocrtu i nacrtu!

Ako su pobočni bridovi veći od osnovnih bridova, imamo *kvadratičnu prizmu*, a ako su pobočni bridovi manji od osnovnih bridova, imamo *kvadratičnu ploču*.



Sl. 273.

2. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije pravilne peterostrane piramide, kojoj je osnovka u ravnini Σ (3, -6, -2), te je središte osnovke S (6. 4, —), polumjer opisane kružnice $r = 2{,}5$, visina $v = 7$, osnovni brid, $AB \parallel \Pi_1$!

2. Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je osnovka u ravnini Σ (4, 6, -3), te je središte osnovke S (5, 4, —), polumjer opisane kružnice $r = 3$, visina $v = 8$, osnovni brid $AB \parallel \Pi_2$!

3. Nacrtaj projekcije pravilne peterostrane piramide, kojoj je osnovka u ravnini Σ (3, 3, -7), te joj je osnovni brid AB [A (1, —, 0,5), B (3, —, 2)], a dužina pobočnih bridova $s = 7$!

4. Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je os SV [S 3, 4, 5), V (7, 8, 1)], dužina pobočnih bridova $s = 7{,}5$, osnovni brid $AB \parallel \Pi_2$!

5. Nacrtaj projekcije pravilne osmerostrane piramide, kojoj je pobočka ABV [A (4, 7, 0), B (6, 7, 0), V (5, 1, 0)] u Π_1!

6. U ravnini Σ (8, ∞, 4) leži veća osnovka kvadratične krnje piramide, te joj je osnovni brid AB [A (3,5, 2, —), B (5, 4, —)], visina $v = 4$, dužina bridova manje osnovke $e = 1{,}5$; odredi projekcije te piramide!

7. Nacrtaj projekcije kvadratične prizme, kojoj je osnovka u ravnini Σ (2, 7, ∞), te joj je središte S (1, —, 4), jedan vrh A (1,3, —, 5,5), visina $v = 5$!

8. Nacrtaj projekcije pravilne peterostrane prizme, kojoj je osnovka u ravnini $\mathbf{P} \perp \Pi_2$!

9. Odredi projekcije pravilne šesterostrane prizme, kojoj je os MN [M (0, 3, 3), N (3, 6, 6)], a polumjer osnovci opisane kružnice $r = 3$!

10. Odredi projekcije pravilne šesterostrane prizme, kojoj je osnovka u ravnini Σ (∞, 4, 6), a visina $v = 5$ i kojoj jedan osnovan brid leži u Π_1, a jedan u Π_2!

11. Nacrtaj projekcije pravilne peterostrane prizme, kojoj je os MN [M (0, 3, 4), N (6, 3, 4)], a jedan vrh lijeve osnovke A (0, 2, 4,5)! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

12. Šesterostrana pravilna prizma naslonjena je osnovnim bridom AB [A (4, 4, 0), B (6, 4, 0)] na Π_1, a bridom AB na Π_2, te joj je visina $v = 7$; odredi projekcije te prizme! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

XIV. Presjek prizme i piramide ravninom

§ 72. O presjeku tijela uopće

1. Objašnjenja. Ravnina siječe tijelo u ravnom liku, koji se zove *presjek* tijela s ravninom. Presjek je uglastog tijela uopće mnogokut, kojemu vrhovi leže na bridovima, a stranice na plohama, kojima je tijelo omeđeno. Presjek se tijela odredi na taj način, da se odrede sjecišta bridova tijela ravninom, a onda se ta sjecišta spoje dužinama tako, da te dužine leže na plohama tijela.

2. O presjeku prizme. Ako je ravnina usporedna s osnovkom prizme, presjek je sukladan s tom osnovkom. Ako je ravnina usporedna s pobočnim bridovima prizme, presjek je paralelogram, kojemu jedan par suprotnih stranica leži u osnovkama, a drugi par u pobočkama. Presjek se prizme s ravninom, koja sadrži dva pobočna brida i po jednu dijagonalu svake osnovke, zove dijagonalni presjek prizme. Taj je presjek paralelogram. Ravnina može biti tako položena, da siječe sve pobočke ili jedan dio pobočaka te jednu ili obje osnovke.

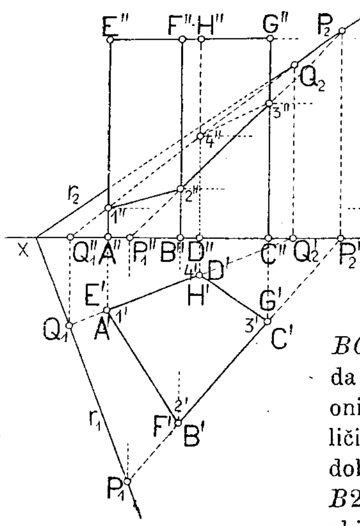
3. O presjeku piramide. Ako je ravnina usporedna s osnovkom, presjek je sličan s tom osnovkom. (To se dokazuje u stereometriji). Ako je ravnina položena vrhom piramide tako, da siječe i osnovku, presjek je trokut, kojemu je jedna stranica u osnovci, a dvije u pobočkama, te idu vrhom piramide. Ravnina može biti tako položena, da siječe sve pobočke ili dio pobočaka i osnovku.

§ 73. Presjek uspravne prizme ravninom

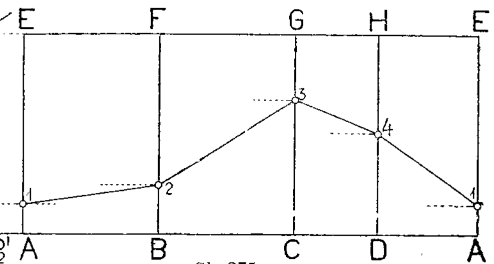
1. Zadatak. *Odredi presjek četverostrane uspravne prizme, kojoj je osnovka u* Π_1, *s kosom ravninom* $\mathbf{P}$ (r_1, r_2)! (Sl. 274.).

Rješenje. Ravnina $\mathbf{P}$ siječe prizmu u četverokutu 1 2 3 4, kojemu se tlocrt 1'2'3'4' podudara s tlocrtom prizme $A'B'C'D'$. Nacrt se 1"2"3"4" može odrediti spomoću sutražnica vrhova presjeka, ili spomoću probodišta stranica presjeka, koja se nalaze u tragovima r_1 i r_2, kako je učinjeno na sl. 274. Ako se na pr. produži 2'3', dobije se u r_1 prvo probodište P_1, a u osi tlocrt P_2' drugoga probodišta. Ako se odredi P_1" u osi i P_2 u r_2, onda u pravcu P_1"P_2 leži nacrt 2"3".

2. Mreža. Razgrnemo li pobočje prizme zajedno s presječnim stranicama u ravninu, imamo mrežu pobočja (sl. 275.). Na toj je slici $AB = A'B'$,



Sl. 274.



Sl. 275.

$BC = B'C'$, $CD = C'D'$ i $DA = D'A'$. Budući da su pobočni bridovi prizme usporedni s Π_2, oni se na tu ravninu projiciraju u pravoj veličini, pa je na sl. 275. $AE = A''E''$. Da se dobije presjek u mreži, učini se $A1 = A''1''$, $B2'' = B''2''$ i t. d. Nadodaju li se toj mreži obje osnovke, imamo mrežu čitave prizme.

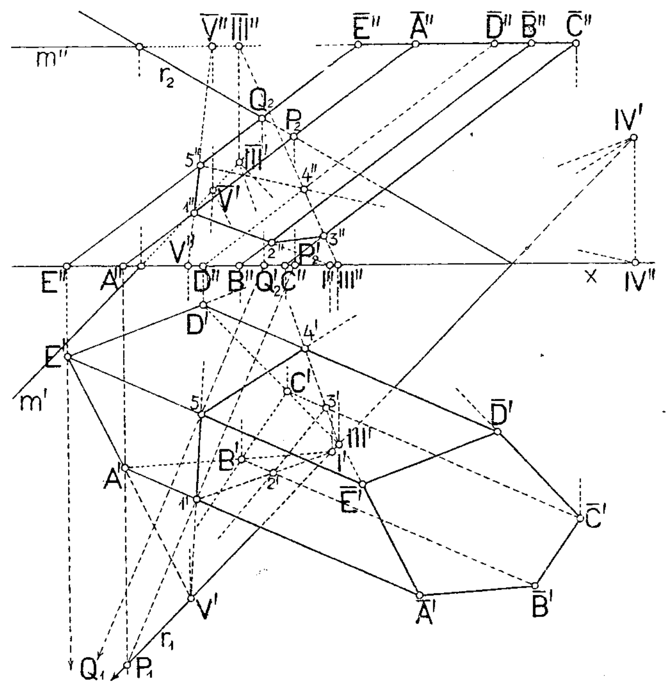
§ 74. Presjek kose prizme ravninom

1. Zadatak. *Odredi presjek peterostrane kose prizme, kojoj je osnovka ABCD u* Π_1, *s općom ravninom* **P** (r_1, r_2)! (Sl. 276.).

Rješenje. Spomoću druge ravnine prometalice, koja se položi bridom $A\overline{A}$ odrede se projekcije $1'$, $1''$ sjecišta toga brida s ravninom **P**, na način, koji je opisan u § 40. t. 2. (sl. 185.). Na isti taj način mogu se odrediti projekcije sjecišta ostalih pobočnih bridova prizme s ravninom **P**. Budući da su sve te ravnine prometalice među sobom usporedne (zašto?), one sijeku ravninu **P** u usporednim pravcima, kojima su prema tome i tlocrti usporedni. Ako je poznat tlocrt jedne presječnice na pr. P_1P_2', tlocrt je druge koje presječnice određen, ako je poznat tlocrt jedne njezine točke. Na pr. tlocrt Q_1Q_2' ide točkom Q_2' usporedno s P_1P_2'. Tlocrt je presjeka peterokut $1'2'3'4'5'$, a nacrt $1''2''3''4''5''$.

2. Afinost. Između osnovaka prizme i presječnog mnogokuta u prostoru, kao i između tlocrta tih likova postoji afina srodnost. Znamo, da kod afinih likova pridružene točke leže na usporednim pravcima, a pridruženi pravci da se sijeku u istoj točki osi afinosti. Pridružene točke na prizmi A i 1, B i 2, C i 3 . . . leže na pobočnim bridovima te prizme, dakle na usporednim pravcima (zrakama afinosti). Pridruženi pravci AB i 1-2 sijeku se u istoj točki I traga r_1, jer su pravci AB, 1-2 i r_1 presječnice triju ravninâ, i to ravnine donje osnovke Π_1, ravnine pobočke $AB\overline{B}\overline{A}$ i ravnine **P**,

pa te tri presječnice moraju ići kroz istu točku I. Na jednak bi se način pokazalo, da se i ostali pridruženi pravci sijeku u istim točkama traga r_1, pa je prema tome taj trag os afinosti između donje osnovke prizme i presjeka. No r_1 je os afinosti i između tlocrta donje osnovke i tlocrta presjeka, pa se na pr. pridruženi pravci $A'B'$ i $1'2'$ moraju sjeći u istoj točki I' osi afinosti r_1. Ako je prema tome poznat tlocrt $1'$ samo jednoga vrha tlocrta presjeka, onda se tlocrti $2'$, $3'$. . . ostalih vrhova mogu odrediti spomoću



Sl. 276.

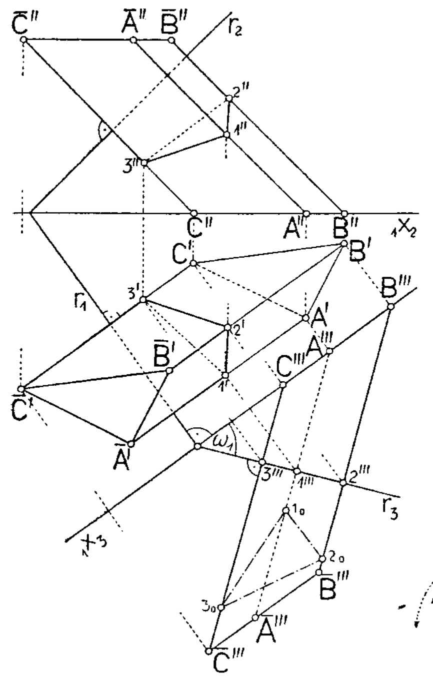
svojstva afine srodnosti. Da se na pr. dobije $2'$ produžit će se $A'B'$ do I' na r_1 i spojit će se $1'$ s I'; pravac $1'I'$ siječe $B'\overline{B}'$ u točki $2'$!

Na jednak bismo način pokazali, da postoji afina srodnost između presjeka i gornje osnovke prizme, kao i između tlocrta tih likova. Os afinosti je za te likove u presječnici m (m', m''), u kojoj ravnina **P** siječe ravninu gornje osnovke. Pridruženi se pravci $\overline{A}'\overline{E}'$ i $1'5'$ sijeku u točki V' pravca m'. Produži li se $A'E'$ do V' na r_1 i $\overline{A}'\overline{E}'$ do $\overline{V}'$ na m', onda u pravcu $V'\overline{V}'$ leži tlocrt $1'5'$ stranice 1 5 presjeka, koja leži na pobočki $AE\overline{E}\overline{A}$. Spomoću te *dvostruke afinosti* može se odrediti tlocrt presječnog mnogokuta. Nacrt se toga mnogokuta može odrediti direktno iz tlocrta spomoću ordinala, ili spomoću sutražnica ravnina **P**, ili pak spomoću nacrta pravca $II\,\overline{II}$, $V\overline{V}$..., gdje je II'', V''... u osi x, a $\overline{II}''$, $\overline{V}''$... u pravcu m''. (Vidi opširnije o afinosti u § 118.—121.).

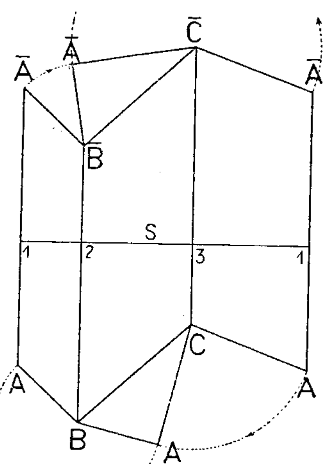
§ 75. Normalni presjek kose prizme

1. Objašnjenja. Pod normalnim se presjekom kose prizme razumijeva presjek te prizme s ravninom, koja je okomita na njezinim pobočnim bridovima.

2. Zadatak. *Odredi normalni presjek trostrane kose prizme s ravninom* **P** (r_1, r_2) *i to spomoću stranocrta (transformacijom)!* (Sl. 277.).



Sl. 277.



Sl. 278.

Rješenje. Tragovi ravnine **P**, koja je okomita na pobočnim bridovima prizme, moraju biti okomiti i na istoimenim projekcijama tih bridova, dakle $r_1 \perp C'\overline{C}'$, $r_2 \perp C''\overline{C}''$, $r_3 \perp C'''\overline{C}'''$. Stranocrtnu smo ravninu Π_3 postavili okomito na r_1, pa je Π_3 okomita na Π_1 i na **P**, a osim toga je usporedna s pobočnim bridovima. Os je ${}_1x_3 \parallel A'\overline{A}'$ ili $\perp r_1$. Donja se osnovka

ABC projicira u os ${}_1x_2$, a gornja osnovka $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ u pravac $\overline{A}'''\overline{B}'''\overline{C}'''$, koji je $\parallel {}_1x_3$. Pobočni se bridovi projiciraju na Π_3 u pravoj veličini. Zašto?

Budući da je ravnina $\mathbf{P} \perp \Pi_3$, to se stranocrt $1'''2'''3'''$ presjeka nalazi u trećem tragu r_3. Spomoću ordinala okomitih na ${}_1x_3$ dobije se tlocrt $1'2'3'$, a spomoću ordinala, okomitih na ${}_1x_2$, dobije se nacrt $1''2''3''$ presjeka $1\ 2\ 3$ prizme s ravninom **P**.

3. Prava veličina presjeka 1 2 3. Preložimo li ravninu **P** oko traga r_3 u Π_3, dobit ćemo pravu veličinu $1_0 2_0 3_0$ presjeka $1\ 2\ 3$ ($1'''1_0 = 1'K$, $2'''2_0 = 2'L$, $3'''3_0 = 3'M$, gdje su K, L, M u osi ${}_1x_3$.

4. Mreža kose prizme. Konstruirat ćemo mrežu kose prizme na temelju sl. 278., i to spomoću normalnog presjeka $1\ 2\ 3$. Budući da je ravnina **P** okomita na pobočnim bridovima prizme, to su stranice presjeka $1\ 2\ 3$ okomite na pripadnim pobočnim bridovima. Kad se pobočje prizme razgrne u ravninu, normalni će se presjek prikazati kao pravac, koji je okomit na pobočnim bridovima. Da se dobije mreža pobočja (sl. 278.) kose prizme postupa se ovako: Na pravac s prenese se $1\,2 = 1_0 2_0$, $2\,3 = 2_0 3_0$ i $3\,1 = 3_0 1_0$, točkama 1, 2, 3, 1 povuku se pravci okomito na s i na te pravce prenesu prave veličine onih dijelova pobočnih bridova, koji leže na protivnim stranama ravnine **P**. Te veličine imamo u stranocrtu, pa će se iz sl. 277. prenijeti na sl. 278., dakle $1A = 1'''A'''$ i $1\overline{A} = 1'''\overline{A}'''$, $2B = 2'''B'''$ i $2\overline{B} = 2'''\overline{B}'''$, $3\,C = 3'''C'''$ i $3\,\overline{C} = 3'''\overline{C}'''$. Dodamo li tomu pobočju obje osnovke, dakle $\Delta\, ABC \cong A'B'C'$ i $\Delta\, \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cong \overline{A}'\,\overline{B}'\,\overline{C}'$, imamo mrežu kose prizme s normalnim presjekom, nacrtanu točno prema sl. 277.

§ 76. Presjek piramide s ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$

1. Zadatak. *Odredi presjek četverostrane piramide, kojoj je osnovka u* Π_1, *s ravninom* $\Sigma \perp \Pi_2$! (Sl. 279.).

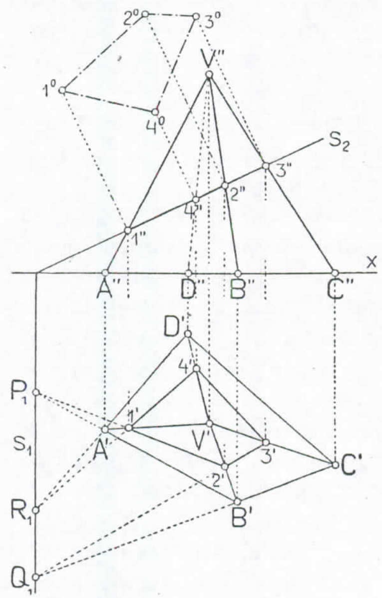
Rješenje. Ravnina Σ siječe piramidu u četverokutu $1\ 2\ 3\ 4$, kojemu je nacrt $1''2''3''4''$ u tragu s_2 (zašto?) dok se tlocrt $1'2'3'4'$ dobije spomoću ordinala.

Objasni vidljivost piramide u tlocrtu i nacrtu!

Na sl. 279. određena je prava veličina presjeka prelaganjem ravnine Σ oko traga s_2 u Π_2.

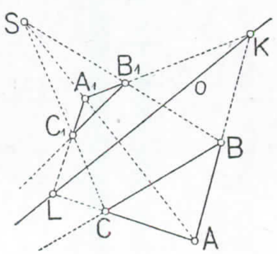
§ 77. Kolinearna srodnost

1. Objašnjenja. Između osnovke $ABCD$ i presjeka $1\ 2\ 3\ 4$ piramide s ravninom Σ (sl. 279.) postoji odnos, koji se zove *kolinearna srodnost.* Takva srodnost postoji također između tlocrtâ $A'B'C'D'$ i $1'2'3'4'$. Parovi točaka A' i $1'$, B' i $2'$, C' i $3'$, D' i $4'$ zovu se *pridružene točke.* Po dvije pridružene točke leže na pravcima (tlocrtu pobočnih bridova), koji idu kroz istu točku V'. Ti se pravci zovu *zrake kolineacije*, a točka V' zove se *središte kolineacije*. Stranice $A'B'$ i $1'2'$, $B'C'$ i $2'3'$, $C'D'$ i $3'4'$, $D'A'$ i $4'1'$ zovu se *pridruženi pravci*. Produženja pridruženih pravaca sijeku se u istoj točki traga s_1, koji se zove *os kolineacije*. Pravci se na pr. $A'B'$ i $1'2'$ moraju sjeći u točki P_1 na s_1 s ovih razloga: Pravci s_1, AB i 1 2 jesu presječnice triju ravnina, i to ravnine osnovke Π_1, ravnine Σ i ravnine trokuta ABV, pa te presječnice moraju ići kroz istu točku P_1, koja opet mora biti na s_1. U P_1 je i tlocrt te točke, pa kroz nju moraju ići i tlocrti $A'B'$ i $1'2'$.



Sl. 279.

2. Svojstva kolinearnih likova. — 1. Svaka je točka kolinearne osi sama sebi pridružena. — 2. Po dvije pridružene točke leže na pravcima (zrakama kolineacije), koji idu kroz istu točku (središtem kolineacije). 3. Po dva pridružena pravca sijeku se u istoj točki osi kolineacije.



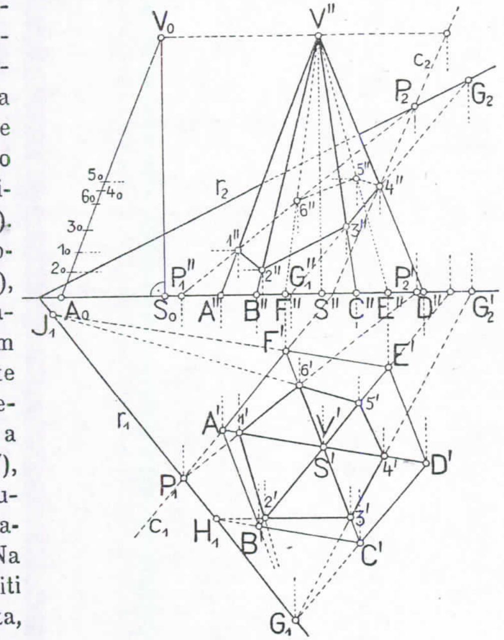
Sl. 280.

3. Određenost kolinearne srodnosti. Ako je za kolineaciju poznata os, središte i jedan par pridruženih točaka, može se za svaku točku naći pridružena kolinearna točka. Na sl. 280. zadana je os o, središte S i par pridruženih točaka A i A_1. Da se odredi točka B_1, koja je pridružena točki B, nacrtat će se zraka kolineacije BS, povući će se pravac AB, koji os o siječe u točki K, i spojit će se A_1 s K. A_1K siječe zraku BS u traženoj točki B_1. Na jednak bi se način našle točke $C_1, D_1 \ldots$, koje su kolinearno srodne sa zadanim točkama $C, D \ldots$

4. Određivanje presjeka piramide spomoću kolinearne srodnosti. Budući da je na sl. 279. poznata os s_1 i središte V' kolineacije i na pr. par pridruženih točaka C' i $3'$, moći će se odrediti i ostale točke $1'$, $2'$ i $4'$ na osnovi kolinearne srodnosti, koja postoji između likova $A'B'C'D'$ i $1'2'3'4'$. Produži li se na pr. $B'C'$ do Q_1 na s_1 i spoji Q_1 s $3'$, dobije se na $B'V'$ točka $2'$. Produži li se $B'A'$ do P_1 na s_1 i ta točka spoji s $2'$, dobit će se na $A'V'$ točka $1'$, i t. d.

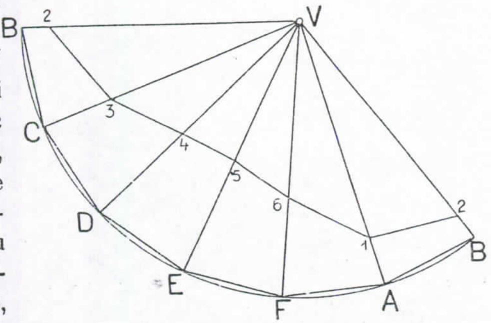
§ 78. Presjek piramide s općom ravninom

1. Zadatak. *Odredi presjek pravilne šesterostrane piramide, kojoj je osnovka u* Π_1, *s općom ravninom* **P** (r_1, r_2)! (Sl. 281.).



Sl. 281.

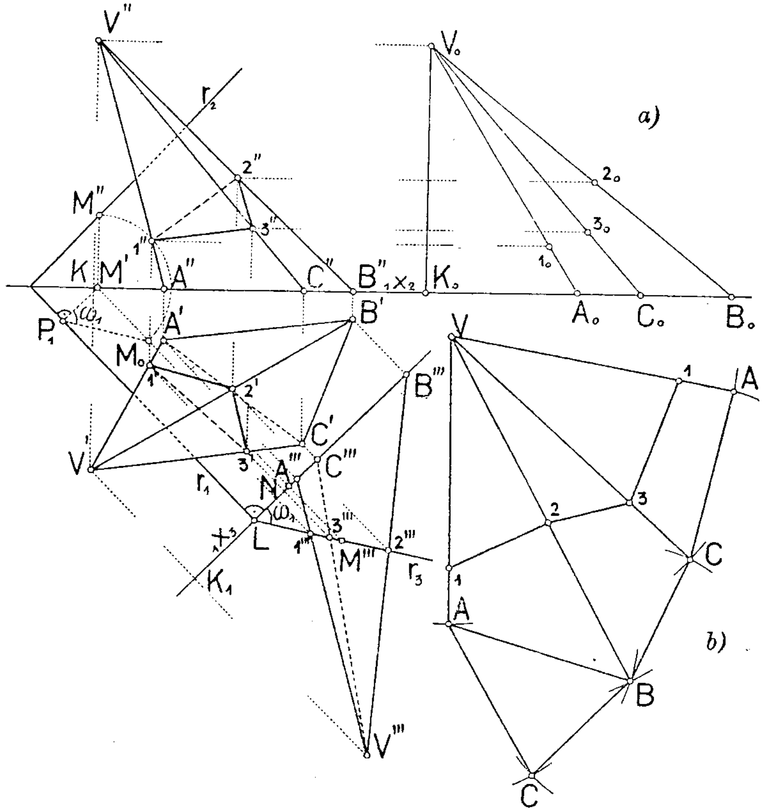
Rješenje. Ravnina **P** siječe zadanu piramidu u šesterokutu 1 — 6, kojemu vrhovi leže u pomoćnim bridovima, a stranice u pobočkama. Točke bi se 1 — 6 mogle odrediti kao sjecišta pobočnih bridova piramide s ravninom **P** (§ 40. t. 2.). Mi smo na sl. 281. položili pobočkom AFV ravninu Γ ($c_1 \equiv A'F'$), c_2 se odredi s pomoću sutražnice ravnine Γ, koja ide vrhom V) i odredili smo presječnicu te ravnine s ravninom **P**. Ta presječnica leži u pobočki AFV, a siječe brid AV u točki 1(1', 1''), a brid FV u točki 6 (6', 6''). Dužina je 1 6 (1'6', 1''6'') jedna stranica presječnog šesterokuta. Na jednak bi se način mogle odrediti i ostale stranice toga šesterokuta, no mi smo te stranice našli s pomoću kolinearne srodnosti, koja postoji između tlocrtâ $A'B'C'\ldots$ i $1'2'3'\ldots$ Trag je r_1 os, a V' središte kolineacije. Produžimo li na pr. $E'F'$ do J_1 na r_1, pravac će $J_1\,6'$ sjeći $E'V'$ u točki 5', i t. d. Nacrt se 1'', 2'', 3'' ... može odrediti direktno s pomoću sutražnica ravnine **P**. Budući da su točke G_1, H_1, P_1, J_1 prva probodišta presječnica 34, 23, 16, 56, nacrti su tih točaka u osi x, te na pr. 3''4'' mora ići točkom G_1'' i t. d. Na taj se način može provesti kontrola točnosti crtnje.



Sl. 282.

2. Mreža piramide. Pobočje se pravilne šesterostrane piramide sastoji od 6 sukladnih istokračnih trokuta, kojima su osnovke jednake osnovnim, a kraci pobočnim bridovima piramide. Na sl. 281. dužina je A_0V_0 jednaka pravoj veličini pobočnih bridova ($S_0V_0 = S''V''$, $S_0A_0 = S'A'$), a $A'B'$ je prava veličina osnovnih bridova.

Opišemo li oko V (slika 282.) kružnicu s polumjerom V_0A_0 (sl. 281.) i na tu kružnicu prenesemo dužinu $A'B'$ 6 puta kao tetivu pa spojimo



Sl. 283.

točke A, B, C . . . s točkom V, imamo mrežu pobočja piramide, koja je prikazana na sl. 281.

Da se u toj mreži odrede presječne linije, moraju se na sl. 281. odrediti prave veličine dužina $V1$, $V2$, $V3$ . . ., pa se onda te dužine prenesu na sl. 282. Ako se na sl. 281. potegnu pravci $1''1_0$, $2''2_0$, $3''3_0$ . . . usporedno s osi x, onda je $V_01_0 = V1$, $V_02_0 = V2$, $V_03_0 = V3$ . . . Ako se

dakle na sl. 282. učini $V1 = V_01_0$, $V2 = V_02_0$, $V3 = V_03_0$ . . ., pa se redom spoje točke 1, 2, 3 . . . imamo u mreži pobočja ucrtane presječne stranice.

§ 79. Presjek piramide pomoću stranocrta

1. Zadatak. *Zadan je tlocrt i nacrt trostrane kose piramide, kojoj je osnovka u* Π_1, *i tragovi* r_1, r_2 *ravnine* **P**; *odredi presjek te piramide ravninom* **P** *pomoću stranocrta!* (Sl. 283.).

Rješenje. Ravninu Π_3 postavimo okomito na trag r_1, dakle okomito na Π_1 i na **P**. Os je ${}_1x_3 \perp r_1$. Stranocrt je $A'''B'''C'''$ osnovke u ${}_1x_3$, a $K_1V''' = KV''$. Treći se trag r_3 ravnine **P** podudara s preložajem priklonice prve skupine, u kojoj ravnina Π_3 siječe **P**. [$r_3 \equiv LM'''$ gdje je $NM''' = M'M_0 = M'M''$]. Budući da je **P** $\perp \Pi_3$, treća se projekcija $1'''2'''3'''$ presjeka 123 nalazi u tragu r_3. Spomoću ordinala odredi se najprije tlocrt $1'2'3'$, zatim nacrt $1''2''3''$. — Trokuti $A'B'C'$ i $1'2'3'$ jesu dva kolinearna lika, gdje je trag r_1 os kolineacije, a točka V' središte kolineacije. Odredi pravu veličinu presjeka okretanjem oko traga r_1 u ravnini Π_1 upotrebom stranocrta!

2. Mreža piramide. Budući da je osnovka piramide u horizontalnoj ravnini, ona se na tu ravninu projicira u pravoj veličini, te je osnovni brid $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. (Sl. 283.).

Prava veličina pobočnih bridova piramide odredi se na način kao na sl. 281. Nacrta li se u nekoj točki K_0 osi x okomica na tu os i na nju prenese visina KV'' tako, da je $K_0V_0 = KV''$, te na os x prenese dužina $V'A'$ tako, da je $K_0A_0 = V'A$, tada je dužina $V_0A_0 = VA$. (Sl. 283a.) Učini li se $K_0B_0 = V'B'$ i $K_0C_0 = V'C'$, tada je dužina $V_0B_0 = VB$ i $V_0C_0 = VC$.

Budući da imamo pravu veličinu svih osnovnih i pobočnih bridova piramide, tad se može nacrtati mreža te piramide. Ta se mreža sastoji od samih raznostranih trokuta, koji se mogu konstruirati po slijedećoj konstrukciji: Uzme se bilo gdje točka V (sl. 283b.), povuče njom zraka i na nju prenese dužina VA tako, da je $VA = V_0A_0$. Da se dobije točka B, opisat će se iz točke V luk s polumjerom V_0B_0 i iz točke A luk s polumjerom $A'B'$; ta dva luka sijeku se u točki B, koja se tad spoji s točkama V i A. Na taj se način dobila prava veličina pobočke ABV. Na sličan se način dobije pobočka BCV ($VC = V_0C_0$, $BC = B'C'$) i pobočka CAV ($VA = V_0A_0$, $CA = C'A'$). Nacrta li se još osnovka $ABC = \triangle A'B'C'$, dobila se potpuna mreža čitave piramide na osnovu tlocrta i nacrta iz sl. 283.

Još treba odrediti u području ili plaštu piramide točke 1, 2, 3, u kojima ravnina **P** siječe pobočne bridove piramide. U tu svrhu odredi se prava veličina dužina $V1$, $V2$, $V3$ na jednak način kao na sl. 281., naime tako, da se usporedno s osi x potegnu pravci $1'' - 1_0$, $2'' - 2_0$, $3'' - 3_0$. jer je tada $V1 = V_0 1_0$, $V2 = V_0 2_0$, $V3 = V_0 3_0$.

Budući da su trokuti $A'B'C'$ i $1'2'3'$ dva kolinearna lika, gdje je trag r_1 os, a točka V' središte kolineacije (sl. 283.), tad se po dvije pripadne stranice tih dvaju likova moraju sjeći u istoj točki traga r_1. Na pr. stranice $A'B'$ i $1'2'$ sjekle bi se u nekoj točki Q_1, a stranice $B'C'$ i $2'3'$ u nekoj točki R_1. Budući da bi dužina $B'Q_1$ bila jednaka pravoj veličini dužine BQ_1, te se u mreži učini $BQ_1 = B'Q_1$, tada bi točkom Q_1 moralo ići produženje dužine $2'1'$. Produže li se u mreži dužine CA i $3\,1$, one bi se sjekle u točki R_1. Provjeri, da li je $CR_1 = C'R_1$!

3. Zadaci za vježbu

1. Odredi presjek trostrane uspravne prizme, kojoj je jedna osnovka u Π_2, s ravninom, kojoj su različite strane okrenute prema ravninama Π_1 i Π_2! Konstruiraj mrežu te prizme s presječnim linijama!

2. Odredi presjek pravilne šesterostrane prizme, kojoj je donja osnovka u Π_1 (polumjer osnovci opisane kružnice $r = 2$, visina prizme $v = 6$) s općom ravninom, te konstruiraj mrežu donjeg dijela prizme!

3. Odredi presjek kvadratične prizme, kojoj je donja osnovka u Π_1 s ravninom, koja je usporedna s osi x! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

4. Odredi presjek peterostrane kose prizme, kojoj je osnovka $ABCDE$ [A (1, 2, 0), B (3, 1, 0), C (5, 2, 0), D (4, 4, 0), E (2, 5, 0)], a pobočni brid $A\bar{A}$ [$\bar{A}$ (4, 6, 4)], s ravninom **P** (7, ∞, 7)!

5. Odredi presjek četverostrane kose prizme s ravninom **P**, koja je usporedna s pobočnim bridovima te prizme. Donja je osnovka prizme kvadrat $ABCD$ [A (2, 0,5, 0), C (3, 2,5, 0)], a pobočni brid $A\bar{A}$ [$\bar{A}$ (7, 3, 4,5)].

6. Zadana je pravilna šesterostrana prizma, kojoj je donja osnovka u ravnini **P** (7, 5, 6), te joj je jedan osnovni brid usporedan s tragom r_1 [središte je osnovke S (1,5, —, 5), polumjer opisane kružnice $r = 2,5$, visina prizme $v = 2$]; odredi presjek te prizme s Π_1 i Π_2!

7. Osnovni brid AB [A (0, 2, 0), B (2, 3,5, 0)] pravilne peterostrane prizme leži u Π_1, a vrh A gornje osnovke leži u Π_2, te je $A\bar{A} = 6$; nacrtaj projekcije te prizme i odredi presjek s ravninom **P** (6, —5, 5)!

8. Nacrtaj projekcije trostrane kose prizme, kojoj je jedna osnovka u Π_2, te su joj pobočni bridovi $\parallel \Pi_1$, i odredi normalni presjek i mrežu te prizme!

9. Nacrtaj projekcije četverostrane kose prizme, kojoj je donja osnovka četverokut $ABCD$ [A (1, 3, 0), B (3, 1, 0), C (5, 2, 0), D (4, 4, 0)] u Π_1, kojoj su pobočni bridovi $\parallel \Pi_2$ i prema Π_1 nagnuti za 45°, a visina $v = 4$. Odredi normalni presjek i mrežu te prizme!

10. Odredi normalni presjek i mrežu četverostrane kose prizme, kojoj je osnovka kvadrat $ABCD$ [A (0, 2, 0), B (2,5, 1, 0)], a pobočni brid $A\bar{A}$ [$\bar{A}$ (0, 6, 6)]! — Uputa: Upotrebi bokocrt.

11. Odredi normalni presjek i mrežu četverostrane kose prizme, kojoj je osnovka paralelogram $ABCD$ [A (1, 0, 3), B (4, 0, 0), C (2, 0, 4,5)], a $D\bar{D}$ [$\bar{D}$ (8, 8, 7)] pobočni brid!

12. Odredi presjek trostrane kose piramide, kojoj je osnovka ABC [A (0, 0, 6), B (8, 0, 1), C (6, 0, 9)], vrh V (2, 11, 1,5) s ravninom **P** (—4, 3, ∞)!

13. Odredi presjek i mrežu piramide, kojoj je osnovka kvadrat $ABCD$ [A (2, 2, 0), B (6, 1, 0)], vrh V (10, 3, 6) s ravninom Σ (9, ∞, 6)!

14. Odredi mrežu piramide s presječnim linijama na osnovi slike 279! Odredi pravu veličinu presjeka okretanjem oko s_1 u Π_1!

15. Odredi presjek i mrežu piramide, kojoj je osnovka trokut ABC [A (—2, 0, 6), B (6, 0, 1), C (4, 0, 9)], vrh V (0, 11, 1,5), s ravninom **P** (10, 6, 15)!

16. Odredi presjek i mrežu pravilne peterostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_1, AB [A (1, 2, 0), B (6, 2, 0)] osnovni brid, a $v = 8$ visina, s ravninom Σ (12,5, 16, 2,8)!

17. Zadana je pravilna šesterostrana piramida, kojoj je osnovka u Π_2 [središte osnovke S (2,5, 0, 3,5), jedan vrh A (0, 0, 4), visina $v = 6$]; odredi presjek s ravninom **P** (11, 4, 12) i pravu veličinu toga presjeka!

18. Osnovka je peterostrane uspravne piramide $ABCDE$ [A (1, 0, 2), B (2, 0, 1), C (5,5, 0, 2), D (5, 0, 4), E (2,5, 0, 5)], a vrh V (3, 5, 3); odredi presjek te piramide s ravninom **E** (4, 3, —4)!

19. Odredi presjek peterostrane kose piramide s ravninom, koja ide vrhom te piramide!

20. Osnovka je kvadratične piramide u ravnini **P** (∞, 5, 4), središte joj je S (4, —, 2), vrh A (3,5, —, 0,5), visina $v = 6$; odredi presjek te piramide s ravninom (—4, 10, 3)!

21. Osnovka je pravilne šesterostrane piramide u ravnini **P** (4, ∞, 6), središte je te osnovke S (2, 3, —), vrh A (3,5, 2,5, —), visina $v = 5$; odredi presjek te piramide s ravninom Σ (12, 10, 7)!

22. Odredi presjek piramide zadane u 15. zadatku, spomoću stranocrtne ravnine $\Pi_3 \perp r_2$, dakle ${}_2x_3 \perp r_2$!

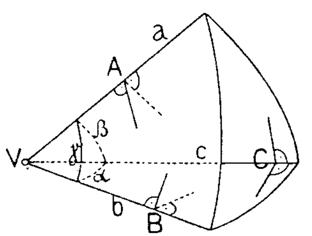
23. Zadana je piramida, kojoj je osnovka kvadrat $ABCD$ [A (1, 2, 0), B (5, 1, 0)], vrh V (9, 3, 7); odredi presjek te piramide s ravninom **P** (∞, 6, 6)! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

24. Zadana je pravilna peterostrana piramida, kojoj je osnovka u Π_2 [središte osnovke S (0, 0, 4), dužina osnovnoga brida $AB = 5$, dužina pobočnoga brida $AV = 8$]; odredi presjek te piramide s ravninom simetrije! — Uputa: Upotrebi bokocrt!

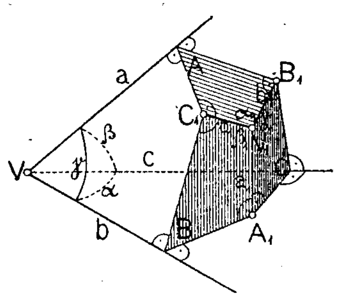
XV. Trostrani ugao (Trobrid)

§ 80. O trostranom uglu uopće

1. Objašnjenje. Tri ravnine, koje prolaze kroz jednu točku, dijele prostor na 8 dijelova. Jedan se takav dio zove *trostrani ugao* ili *trobrid* (sl. 284.). Trostrani je ugao omeđen dijelovima triju ravnina, koji se zovu *strane ugla*. Strane se ugla sijeku u tri pravca a, b, c, koji se zovu *bridovi* ugla. Bridovi ugla idu istom točkom V, koja se zove *vrh* ugla. Bridovi ugla čine tri kuta α, β, γ, koji se zovu *bridni kutovi* ili također *strane ugla*. Strane ugla omeđuju tri prostorna kuta A, B, C, koji se ukratko zovu *kutovi ugla*. Na svakoj strani leže dva kuta, treći je kut toj strani nasuprot.



Sl. 284.



Sl. 285.

2. Poučci o trostranom uglu. Iz stereometrije su poznati ovi poučci o trostranom uglu, a odnose se na strane i kutove:

1. *Zbroj je strana trostranog ugla uvijek manji od* 4 R.
2. *Zbroj je kutova trostranog ugla veći od* 2 R, *a manji od* 6 R.
3. *Svaka je strana trostranog ugla veća od razlike, a manja od zbroja drugih dviju strana.*

3. Određenost trostranog ugla. Trostrani je ugao određen s tri svoja elementa, a ti mogu biti:

1. Sve tri strane, 2. dvije strane i kut među njima, 3. dvije strane i kut, koji je jednoj toj strani nasuprot, 4. jedna strana i dva susjedna kuta, 5. jedna strana, jedan suprotni i jedan susjedni kut, 6. sva tri kuta.

4. Polarni ugao. Ako se s točke V_1 (sl. 285.). spuste okomice a_1, b_1, c_1 na strane α, β, γ ($a_1 \perp \alpha$, $b_1 \perp \beta$, $c_1 \perp \gamma$) trostranog ugla $V(abc)$ dobije se novi trostrani ugao, kojemu je vrh V_1, bridovi a_1, b_1, c_1, strane α_1, β_1, γ_1

i prostorni kutovi A_1, B_1, C_1. Taj se ugao zove *polarni ugao* zadanog trostranog ugla.

Budući da je pravac $b_1 \perp \beta$ i $c_1 \perp \gamma$, tad je i ravnina α_1 okomita na β i γ, dakle i na bridu a. Isto tako je strana $\beta_1 \perp b$ i $\gamma_1 \perp c$. Prema tome su bridovi ugla $V(abc)$ okomiti na stranama ugla $V_1(a_1b_1c_1)$, pa je i ugao V polarni ugao ugla V_1.

Svaki je trostrani ugao polarni ugao svoga polarnog ugla.

Ravnina α_1 siječe ravninu β u pravcu B_1A, koji je okomit na b_1 i na a, a ravninu γ siječe u pravcu C_1A, koji je okomit na c_1 i na a. Prema tome pravci B_1A i C_1A čine kut A ugla V. Strana β_1 siječe α u A_1B, a γ u C_1B, pak je $\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B$. Isto tako je $\sphericalangle B_1CA_1 = \sphericalangle C$.

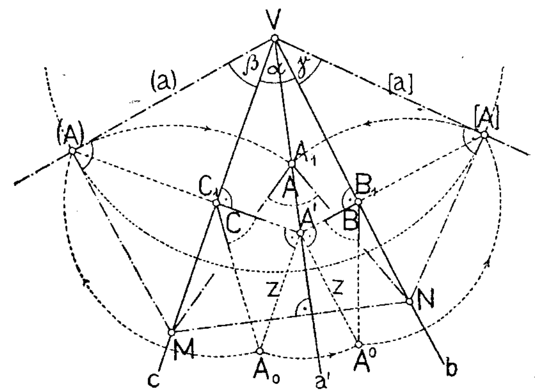
Budući da je BA_1 i CA_1 okomito na a_1, tad je $\sphericalangle BA_1C = \sphericalangle A_1$. Isto tako je $\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle B_1$ i $\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle C_1$.

Budući da su u četverokutu $AB_1V_1C_1$ kutovi kod B_1 i C_1 pravi, tad je $\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle A = 180^0$. Isto tako je $\sphericalangle \beta_1 + \sphericalangle B = 180^0$ i $\sphericalangle \gamma_1 + \sphericalangle C = 180^0$. U četverokutu pak VAC_1B kutovi su kod A i B pravi, te je $\sphericalangle \gamma + \sphericalangle C_1 = 180^0$. Isto tako je $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle A_1 = 180^0$ i $\sphericalangle \beta + \sphericalangle B_1 = 180^0$.

Ako su dva trostrana ugla među sobom polarni uglovi, tada su strane jednoga ugla suplementi prostornih kutova drugoga ugla.

§ 81. Zadaci o razrješavanju trostranog ugla

1. Objašnjenja. Razriješiti trostrani ugao reći će spomoću zadanih triju elemenata ugla nacrtati projekcije toga ugla i odrediti nepoznate elemente u pravoj veličini. Obično se trostrani ugao projicira samo na jednu ravninu, na pr. na Π_1, na koju se postavi jedna strana ugla. Ta se strana prikaže u pravoj veličini. Treći je brid određen vrhom V te projekcijom i kotom z jedne svoje točke.



Sl. 286.

2. Zadatak. *Zadana je strana α u ravnini Π_1, te projekcija A' i kota z točke A brida a; odredi pravu veličinu stranâ β i γ te kutova A, B, C!* (Sl. 287.).

Rješenje. Pravac je $VA' \equiv a'$. Da se dobije prava veličina strana β i γ, okrenut će se strana β oko brida c, a strana γ oko brida b u Π_1, i to tako, da se okrene točka A oko c u položaj (A) i oko b u položaj $[A]$. Spoje li se točke (A) i $[A]$ s točkom V, dobit će se preložaji (a) i $[a]$ brida a, te prava veličina stranâ β i γ.

Budući da je AC_1 priklonica strane β, a $A'C_1$ tlocrt te priklonice, ta dva pravca čine prikloni kut C strana α i β, pa je $\sphericalangle A'C_1A_0 = \sphericalangle C$. S jednakih je razloga $\sphericalangle A'B_1A^0 = \sphericalangle B$. Još treba odrediti kut A. Ako se točkom A položi ravnina $\Sigma \perp a$, ona siječe stranu β u pravcu AM, stranu γ u pravcu AN, a stranu α u pravcu MN. Budući da je AM i AN okomito na a, to je $\sphericalangle MAN = \sphericalangle A$. Kad se β i γ okrene u Π_1, dužine će AM i AN biti i u preložaju okomite na preložaju brida a. Ako se dakle povuče $(A)M \perp (a)$ i $[A]N \perp [a]$, dobiju se točke M i N, pa je pravac MN trag ravnine Σ, a jer je $\Sigma \perp a$, to je $MN \perp a'$. Ako se Σ okrene oko MN u Π_1, točka će A doći u A_1 na a', pak pravci MA_1 i NA_1 čine kut A. Budući da je $\triangle MNA_1 \cong \triangle MNA$, tad mora biti $MA_1 = M(A)$ i $NA_1 = N[A]$.

Budući da je $V(A)$ i $V[A]$ prava veličina dužine VA, tad je $V(A) = V[A]$.

3. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako su mu zadane sve tri strane α, β, γ!*

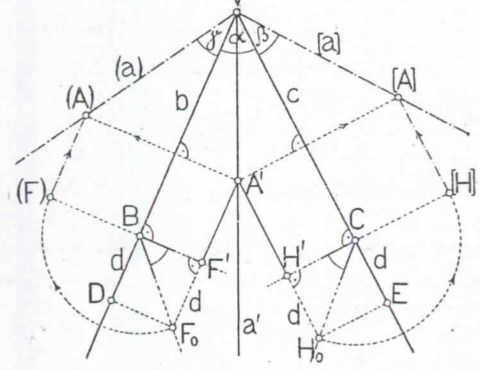
Rješenje. Sva tri zadana kuta α, β, γ nacrtaju se jedan do drugoga oko zajedničkog vrha V kao na sl. 286. Uzet će se, da strana α leži u ravnini crtnje. Okrene li se strana β oko c, a strana γ oko b iznad ravnine α, obje će se rotirane strane sastati u bridu a. Da se točke (A) i $[A]$ sastanu u istoj točki A, mora se odmjeriti $V(A) = V[A]$. Kad se točka (A) vrti oko c, ona će opisati luk, koji se projicira na pravac $(A)C_1 \perp c$. Isto tako će se luk, koji opiše točka $[A]$, projicirati u pravac $[A]B_1 \perp b$. Oba će se ta luka sjeći u prostoru u točki A, pa će se prema tome i projekcije tih lukova $(A)C_1$ i $[A]B_1$ sjeći u točki A'. Pravac je $VA' \equiv a'$. Prelaganjem kružnih lukova oko njihovih projekcija u Π_1, dobiju se kutovi C i B u pravoj veličini. Kut B se na pr. dobije ako se učini $A'A_0 \perp (A)A'$, $C_1A_0 = C_1(A)$ i spoji A_0 s C_1. Kut A se dobije kao u pređašnjem zadatku.

4. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako su mu zadane dvije strane α β te kut među njima C.*

Rješenje. Kod rješavanja ovog zadatka može se opet upotrebiti sl. 286. Oba kuta α i β smjeste se jedan do drugoga oko vrha V. Okrene li se strana β oko brida c za kut od $180^0 - C$, ona će sa stranom α činiti kut C. Uzme li se na (a) po volji točka (A), povuče $(A)C_1 \perp c$, učini $\sphericalangle (A)C_1A_0 = 180^0 - C$, zatim $C_1A_0 = C_1(A)$ i $A_0A' \perp (A)C_1$, dobije se A', pa je $a' \equiv V'A'$ i $A_0A' = z$. Prava se veličina strane γ i kutova A i B dobije kao u t. 2.

5. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako mu je zadana strana α i susjedni kutovi B i C!* (Sl. 287.)

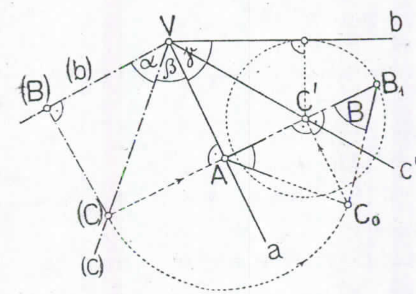
Rješenje. Postavi se strana α u ravninu crtnje, uzme se bilo gdje na bridu b vrh kuta B, a na bridu c vrh kuta C $[BF' \perp b$, $\sphericalangle F'BF_0 = B$, $CH' \perp c$, $\sphericalangle H'CH^0 = C]$. Strane se β i γ sijeku u bridu a, koji ide vrhom V. Da se dobije druga točka A brida a, postupat će se ovako: Učini se $BD = d$ i $CE = d$, povuče se $DF_0 \parallel BF'$ i $F_0F' \parallel DB$ te $EH_0 \parallel CH'$ i $H_0H' \parallel EC$. Tada je $F'F_0 = H'H_0 = d$. Točka F' leži u strani γ, a točka H u strani β. Obje te točke imadu jednake udaljenosti od ravnine α. Povuče li se točkom F' pravac $F'A' \parallel b$, a točkom H' pravac $H'A' \parallel c$, oba će se ta pravca sjeći u točki A'. Pravci su naime FA i HA u daljini d usporedni s ravninom α, pa oni leže u ravnini Γ, koja je usporedna s α i siječe strane γ i β u pravcima FA i HA, koji se opet sijeku u točki A brida a, pa je $a' \equiv VA'$.



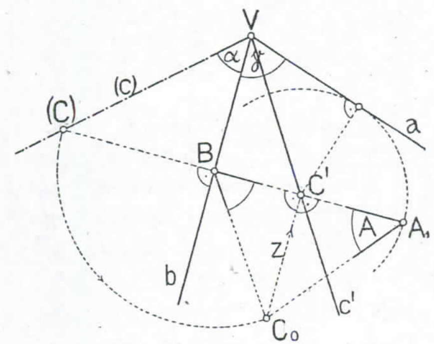
Sl. 287.

Objasni, kako su na sl. 287. određeni kutovi β i γ! Odredi kut A!

6. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako su mu zadane strane α i β, te kut A!* (Sl. 288).



Sl. 288.



Sl. 289.

Rješenje. Kutevi se α i β smjeste jedan do drugoga. Tražena strana γ bit će ravnina crtnje. Okrene li se strana β oko a za kut $180^0 - A$, t. j. učini li se $(C)A \perp a$, $\sphericalangle (C)AC_0 = 180^0 - A$, $AC_0 = A(C)$, $C_0C' \perp (C)A$, onda je $c' \equiv VC'$, a $C'C_0 = z$. Povuče li se u strani α dužina $(C)(B) \perp (b)$, ta je dužina jednaka priklonici, koja u strani α ide točkom C okomito na brid b. Konstruira li se pravokutan trokut $C'C_0B_1$, u kojemu je kateta $C'C_0 = z$ i hipotenuza $C_0B_1 = (C)(B)$, tada je kateta $C'B_1$ jednaka projekciji priklonice CB i $\sphericalangle C'B_1C_0 = \sphericalangle B$. Opiše li se oko C' kružni luk s polumjerom $C'B_1$, i s točke V povuče tangenta VA, u tu tangentu pada brid b, te je $\sphericalangle (ab) = \gamma$. Kut C bi se odredio kao kut A u t. **2.**

7. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako je zadana strana α i dva kuta A i B!* (Sl. 289.).

Rješenje. Strana se α položi u ravninu crtnje, koja se podudara sa stranom γ. Okrene li se strana α oko b za kut $180^0 - B$ kao u t. **6.** (sl. 289.) i potraži C', onda je $c' \equiv VC'$ i $C'C_0 = z$. Time je brid c potpuno određen. Tim bridom treba položiti ravninu β, koja s ravninom crtnje γ čini $\sphericalangle A$; treba dakle riješiti zadatak kao u § 60. t. **4.** (sl. 252). Ako se konstruira pravokutan trokut $C'A_1C_0$ (sl. 289.), u kojemu je $C'C_0$ jedna kateta, i kut A toj kateti nasuprot, onda je C_0A_1 prava veličina priklonice spuštene s točke C na brid a u strani β, a $C'A_1$ veličina projekcije te priklonice. Opiše li se oko C' kružnica s polumjerom $C'A_1$ i s V na nju povuče tangenta, ta je tangenta brid a, te je $\sphericalangle (ba) = \gamma$. Odredi pravu veličinu strane β i kuta C!

8. Zadatak. *Razriješi trostrani ugao, ako su zadana sva tri kuta A, B, C!*

Rješenje. Za direktno rješenje ovog zadatka potrebno je, da se znade konstruirati dirna ravnina kugle i uspravnog kružnog stošca, a jer to dolazi kasnije riješit će se ovaj zadatak indirektnim putem.

Znamo da je u polarnom uglu $\sphericalangle \alpha_1 = 180^0 - A$, $\sphericalangle \beta_1 = 180^0 - B$, $\sphericalangle \gamma_1 = 180^0 - C$ (§ 80. t. **4**). Razriješi li se polarni trostrani ugao, kojemu su poznate strane α_1, β_1, γ_1, onda je $\sphericalangle \alpha = 180^0 - A_1$, $\sphericalangle \beta = 180^0 - B_1$ i $\sphericalangle \gamma = 180^0 - C_1$. Nacrtaj sliku!

9. Zadaci za vježbu

1. Riješi trostrani ugao, ako je zadano:

a) $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 105^0$; *b)* $\alpha = 30^0$, $\beta = 90^0$, $C = 135^0$;
c) $\alpha = 75^0$, $B = 45^0$, $C = 60^0$; *d)* $\alpha = 30^0$, $\gamma = 60^0$, $C = 60^0$;
e) $\alpha = 60^0$, $A = 75^0$, $B = 45^0$; *f)* $A = 67^0 30'$, $B = 75^0$, $C = 60^0$.

2. Zadana su dva pravca $a \equiv SM\,[S(5, 3, 5), M(1, 1, 0)]$ i $b \equiv SN\,[N(7, 7, 0)]$; odredi onaj pravac c, koji ide točkom S i koji s pravcem a čini kut od 45^0, a s pravcem b kut od 30^0! Uputa: Pravci a, b, c jesu bridovi trostranog ugla, kojemu su poznati bridni kutovi. Okreni stranu (ab) oko $M'N'$ u Π_1, konstruiraj brid c a onda taj brid okreni oko $M'N'$ u prostor.

3. Zadanom točkom $V(V'V'')$ položi pravac c, koji s dva zadana mimosmjerna pravca m i n čini zadane kutove α i β! — Uputa: Točkom V povuci pravac $a \parallel m$ i $a \parallel n$, pa će pravci a, b, c, činiti trostrani ugao, kojemu su poznata sva tri bridna kuta. Dalje postupaj kao u drugom zadatku.

4. Nacrtaj projekcije trostrane kose piramide, kojoj je osnovka istostrani trokut u Π_1 i kojoj su pobočke nagnute prema osnovci za 60^0, 45^0 i 120^0!

5. Nacrtaj projekcije kose prizme, kojoj je donja osnovka četverokut $ABCD\,[A(1, 4, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(5, 3, 0)$, $D(4, 4, 0)]$, te joj je pobočka, koja ide bridom AB nagnuta prema Π_1 za 60^0, a pobočka, koja ide bridom AD, za 45^0, ako je visina prizme $= 6$

XVI. Pravilna tijela

§ 82. O pravilnim tijelima uopće

Broj i naziv pravilnih tijela. Tijelo, koje je omeđeno samim pravilnim među sobom sukladnim mnogokutima, koji čine same pravilne sukladne uglove, zove se pravilno tijelo. Prema tome na pravilnom su tijelu svi bridovi jednaki, svi bridni kutovi jednaki, svi prostorni kutovi jednaki, i u svakom se vrhu tijela sastaje jednaki broj pravilnih mnogokuta i bridova.

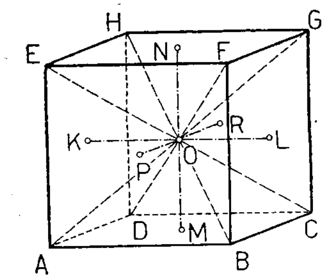
Poznato je, da zbroj svih bridnih kutova svakog ugla iznosi manje od 360^0. Prema tome jedan ugao mogu činiti 3, 4 ili 5 istostraničnih trokuta, 3 kvadrata ili 3 pravilna peterokuta, jer u tim slučajevima zbroj bridnih kutova svakog ugla iznosi manje od 360^0. Ako naime ugao tijela čine:

1) 3 istostranična trokuta,	zbroj	bridnih	kutova	iznosi	$60^0 \cdot 3 = 180^0$,
2) 4 „	„	„	„	„	„	$60^0 \cdot 4 = 240^0$,
3) 5 istostraničnih „	„	„	„	„		$60^0 \cdot 5 = 300^0$,
4) 3 kvadrata	„	„	„	„	„	$90^0 \cdot 3 = 270^0$,
5) 3 pravilna peterokuta	„	„	„	„		$108^0 \cdot 3 = 324^0$.

Jedan ugao ne mogu činiti 6 ili više istostraničnih trokuta, 4 ili više kvadrata ili pravilnih peterokuta, kao niti 3 ili više pravilnih šesterokuta, sedmerokuta i t. d., jer bi u svakom tom slučaju zbroj bridnih kutova iznosio 360 ili više stupnjeva. Prema tome ima samo 5 pravilnih tijela, a zovu se: *tetraedar* ili *četverac*, *oktaedar* ili *osmerac*, *ikosaedar* ili *dvadeseterac*, *heksaedar* ili *šesterac (kocka)* i *dodekaedar* ili *dvanaesterac*. Tetraedar, oktaedar i ikosaedar omeđeni su istostraničnim trokutima, kocka je omeđena s kvadratima, a dodekaedar s pravilnim peterokutima.

§ 83. Kocka

1. Objašnjenja. Kocka je omeđena sa 6 sukladnih kvadrata, ima 12 jednakih bridova i 8 trostranih uglova (sl. 290.). Kocka ima 3 jednake među sobom okomite osi KL, MN, PR i 4 jednake dijagonale, AG, BH, CE i DF. Osi i dijagonale sijeku se u istoj točki O, koja je jednako udaljena od svih ploha, svih vrhova i svih bridova. Ta se točka zove *središte* kocke. Kocka je četverostrana istobridna pravilna prizma.



Sl. 290.

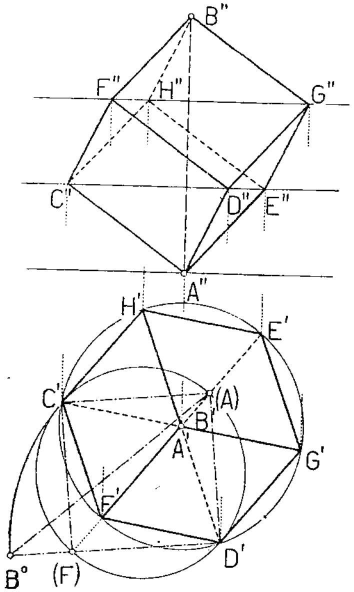
Na slici 113. i 273. nacrtane su projekcije kocke u 3 različita položaja. Riješit ćemo još neke zadatke o konstrukciji kocke.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kocke, kojoj je jedna dijagonala okomita na* Π_1!

Rješenje: Slika 291. prikazuje projekcije kocke, kojoj je dijagonala $AB \perp \Pi_1$. Tlocrt je te dijagonale točka. Budući da su bridovi AC, AD i AE, koji izlaze iz vrha A, jednako dugački i jednako nagnuti prema dijagonali AB, ti su bridovi jednako nagnuti i prema Π_1, pa su njihovi tlocrti jednake dužine, t. j.

$$A'C' = A'D' = A'E',$$

koje si odaberemo po volji. Točke C', D', E', jesu vrhovi istostraničnog trokuta, kojemu je ravnina $\| \Pi_1$. Taj trokut projicira se na Π_1 u pravoj veličini kao trokut C, D', E', u kojemu je točka A središte tome trokutu opisane kružnice. Tri kvadrata, koji se sastaju u vrhu A', projiciraju se na Π_1 kao rombi, koji kod A' imaju kutove po 120^0 i kojima četvrti vrhovi F', G', H' leže na istoj opisanoj kružnici u polovištima lukova $C'D'$, $D'E'$, $E'C'$. Za tri brida BF, BG i BH, koji izlaze iz vrha B, vrijedi ono isto što je rečeno za bridove, koji izlaze iz vrha A. Prema tome tlocrt se kocke, kojoj je jedna dijagonala okomita na Π_1, sastoji iz pravilnog šesterokuta i njegovih glavnih dijagonala.



Sl. 291.

Budući da je dijagonala kvadrata $ACFD$ usporedna s Π_1, to je $C'D' = CD$. Ako se konstruira kvadrat $(A)\,C'(F)\,D'$, kojemu je $C'D'$ dijagonala, taj je lik jednak pravoj veličini kvadrata $ACFD$. Kojagod stranica tog kvadrata naznačuje pravu veličinu bridova kocke.

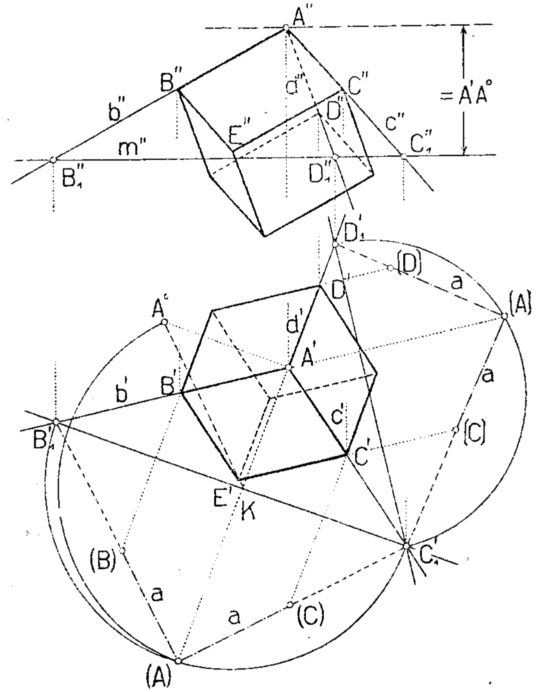
Konstruira li se pravokutan trokut $(A)D'B^0$, u kojemu su katete jednake stranici i dijagonali kvadrata $(A)\,C'(F)\,D'$, onda je hipotenuza $(A)B^0$ toga trokuta jednaka dijagonali AB kocke. Budući da je dijagonala $AB \perp \Pi_1$, to je $A''B'' = (A)B^0$.

Budući da su ravnine trokuta CDE i FGH usporedne s Π_1, dakle i okomite na dijagonali AB i budući da su svi bridovi kocke jednako nagnuti prema Π_1, ravnine CDE i FGH dijele dijagonalu AB na 3 jednaka dijela.

Te se dvije ravnine projiciraju na Π_2 kao pravci, koji su $\| x$ i koji dijele $A''B''$ na 3 jednaka dijela. Na tim pravcima leže nacrti C'', D'', E'' i F'', G'', H''.

3. Zadatak. *Zadana je dužina bridova kocke, vrh A (A', A'') i tlocrti b', c', d', triju pravaca, na kojima leže tri brida, koji izlaze iz A; neka se nacrtaju projekcije te kocke!* (Sl. 292.).

Rješenje: Budući da su tri brida, koji se sastaju u vrhu A kocke, među sobom okomiti, svaki je brid okomit na ravnini, koju određuju druga dva brida. Brid AD okomit je na ravnini ABC i zato je prvi trag B_1C_1 te



Sl. 292.

ravnine okomit na d'. Isto tako je prvi trag C_1D_1 ravnine ACD okomit na b', a prvi trag B_1D_1 ravnine ABD okomit je na pravcu c'. Trokut $B\,C_1D_1$ leži u nekoj horizontalnoj ravnini Δ, a nacrta se tako, da se jedan njegov vrh, na pr. B_1', uzme na pravcu b' po volji, a onda se povuče $B_1'C_1' \perp d'$, $C_1'D_1' \perp b'$ i $B_1'D_1' \perp c'$. Prema tome su pravci b', c' i d' visine trokuta $B_1'C_1'D_1'$.

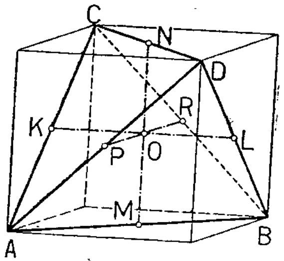
Ako trokut B_1AC_1 rotira oko traga B_1C_1 u ravninu Δ, on će doći u položaj $B_1'(A)C_1'$, gdje je $A'(A) \perp B_1'C_1'$ i $B_1'(A) \perp C_1'(A)$. Točka (A) leži na polukružnici opisanoj na $B_1'C_1'$. Prenese li se na $(A)B_1'$ i $(A)C_1'$ dužina brida kocke, t. j. ako se učini $(A)(B) = (C)(A) = a$, pa točke B i C rotiraju natrag oko B_1C_1, dobit će se na b' i c' tlocrti B' i C' dvaju vrhova kocke.

Ako pravokutan trokut C_1AD_1, rotira oko C_1D_1 u ravninu Δ, on će doći u položaj $C_1'[A]D_1$, gdje je $A'[A] \perp C_1'D_1'$ i gdje je $[A]$ na polukružnici opisanoj na $C_1'D_1'$ kao promjerom. Ako se učini $[AC] = [AD] = a$, pa točke C i D rotiraju natrag, dobit će se na c' i d' projekcije C' i D' vrhova C i D kocke. Sad se lako nacrta tlocrt kocke.

Da se odredi nacrt kocke, potražit će se najprije udaljenost točke A od ravnine Δ. Ta je udaljenost jednaka kateti $A'A^0$ u pravokutnom trokutu $KA'A^0$, u kojemu je druga kateta jednaka KA' a hipotenuza $KA^0 = K(A)$. Povuče li se pravac $m'' \parallel x$ tako, da je njegova udaljenost od točke A'' jednaka $A'A^0$, u taj se pravac projicira ravnina Δ, pa se na njemu nalaze nacrti B_1'', C_1'', D_1'' točaka B_1, C_1, D_1. Na pravcima $b''(\equiv A''B_1'')$, $c''(\equiv A''C_1'')$, $d''(\equiv A''D_1'')$, leže nacrti B'', C'', D''.

§ 84. Tetraedar

1. Objašnjenja. Tetraedar je omeđen sa četiri sukladna istostranična trokuta, ima šest jednakih bridova i četiri istostrana ugla (sl. 293.). Tetraedar je trostrana istobridna piramida. Na sl. 124. nacrtane su projekcije tetraedra, kojemu je jedna strana u Π_1.

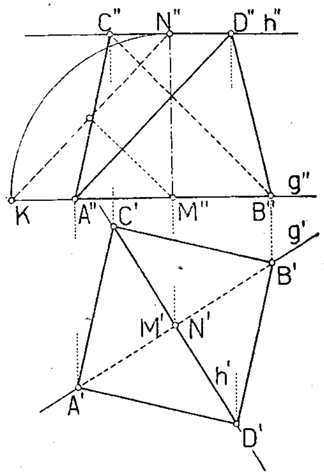


Sl. 293.

Ako se u svakom kvadratu, kojim je kocka omeđena, povuče po jedna dijagonala, kao na sl. 293, sve te dijagonale čine 4 sukladna istostranična trokuta, koji omeđuju pravilan tetraedar. Iz te se slike vidi, da su po dva brida tetraedra, koji ne leže na istoj plohi, na pr. bridovi AB i CD, među sobom okomiti. Takova se dva brida zovu suprotni bridovi tetraedra. Tetraedar ima tri para suprotnih bridova. Ako se na sl. 293. spoje središta suprotnih bridova dužinama KL, MN i PR, te se dužine zovu *osi tetraedra*. Te se osi podudaraju s osima kocke, one su dakle među sobom jednake i okomite, sijeku se u točki O i u toj se točki raspolavljaju. Ako je a brid kocke, onda je dužina osi tetraedra jednaka a, a dužina brida tetraedra $a\sqrt{2}$.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije pravilnog tetraedra, kojemu dva suprotna brida leže na pravcima g i h, koji su među sobom okomiti i usporedni s* Π_1 ($g' \perp h'$, g'' i $h'' \parallel x$). (Sl. 294.).

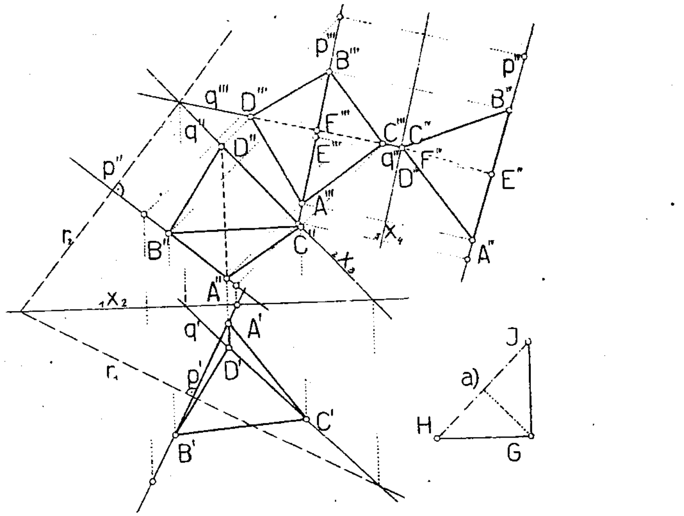
Rješenje: Budući da su pravci g i h usporedni s Π_1, njihova je os MN ($M'N'$, $M''N''$) okomita na Π_1. Bridovi tetraedra AB i CD, koji leže na pravcima g i h, usporedni su s Π_1, pa se na tu ravninu projiciraju u pravoj veličini. Os je tetraedra $MN = M''N'' = a$, pa ako se konstruira istokračan pravokutan trokut $KM''N''$, kojemu su kraci jednaki $M''N''$, hipotenuza je toga trokuta KN'' jednaka bridu tetraedra. Ako se učini $M'A' = M'B' = N'C' = N'D' = 1/2\,KN''$, onda su točke A', B', C', D' tlocrti vrhova tetraedra. Odrede li se nacrti A'', B'', C'', D'' i te točke spoje, dobit će se nacrt tetraedra.



Sl. 294.

Iz sl. 293. vidi se, da su bridovi AC, BC, AD, BD jednako nagnuti prema Π_1. Zbog toga su tlocrti tih bridova jednako dugački, te je na sl. 294. lik $A'B'C'D'$ kvadrat.

3. Zadatak. *Zadana su dva mimosmjerna, među sobom okomita pravca p i q;*



Sl. 295.

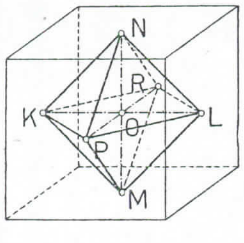
nacrtaj projekcije pravilnog tetraedra, kojemu dva suprotna brida leže u zadanim pravcima p i q (sl. 295.). *Pravci su p i q u kosom položaju prema rav-*

ninama Π_1 i Π_2. *Ako se u ravnini* $P(r_1, r_2)$ *uzme kojigod pravac* $q\,(q', q'')$, *pa se potegne pravac* $p \perp P\,(p' \perp r_1,\ p'' \perp r^2)$, *onda su pravci* p *i* q *među sobom okomiti* (§ 3. t. 10., 4)!

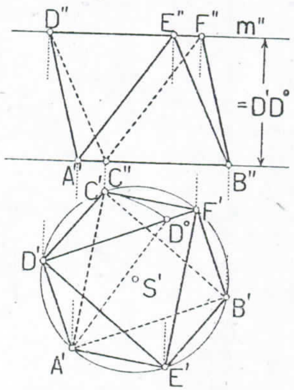
Rješenje. Gornji zadatak riješit ćemo pomoću dva stranocrta. Ravnina Π_3 položena pravcem q okomito na Π_2 (${}_2x_3 \equiv q''$), a Π_4 položena je okomito na pravac q (${}_3x_4 \perp q'''$). Kod točne crtnje mora biti $p''' \perp q'''$ (§ 43. t. 1.), q^{IV} je točka. Okomica spuštena s točke q^{IV} na p^{IV} je osovina mimosmjernih pravaca q i p u pravoj veličini (§ 55. t. 3.). Budući da dva suprotna brida tetraedra moraju ležati na pravcima p i q, osovina je tih pravaca ujedno osovina tetraedra (§ 57. t. 2.). Ako se konstruira istokračan pravokutan trokut GHI (sl. 295. a), u kojem su kraci jednaki osovini $E^{IV}F^{IV}$ ($GH = GI = E^{IV}F^{IV}$), onda je hipotenuza tog trokuta HI jednaka bridu traženog tetraedra. Pravac je p usporedan s Π_4, pa se brid tetraedra, koji je na tom pravcu, projicira na tu ravninu u pravoj veličini, $A^{IV}B^{IV} = HI$, te je E^{IV} u polovištu od $A^{IV}B^{IV}$. Četvrta je projekcija brida CD, koji je na pravcu q, točka. Pravac q je u ravnini Π_3, pa se brid CD projicira na tu ravninu u pravoj veličini ($C'''D''' = HI$). Točka je F''' središte dužine $C'''D'''$. Pomoću ordinala odrede se točke $A'''B'''$, zatim druga i prva projekcija vrhova tetraedra. Kod izvlačenja projekcija bridova tetraedra treba uzeti u obzir njihovu vidljivost.

§ 85. Oktaedar

1. Objašnjenja. Oktaedar je omeđen s 8 sukladnih istostraničnih trokuta, ima 12 jednakih bridova i 6 četverostranih uglova. Oktaedar ima 3 jednake međusobom okomite osi KL, MN, PR (sl. 296.). Bridovi oktaedra čine tri kvadrata, kojima su ravnine među sobom okomite i koje se sijeku u osima oktaedra. Po dvije osi ujedno su dijagonale spomenutih kvadrata. Sve tri osi sijeku se u točki O, koja je *središte oktaedra*.



Sl. 296.



Sl. 297.

Ako se odrede središta svih kvadrata, kojima je kocka omeđena, pa se te točke spoje kao na sl. 296., dobije se oktaedar, koji je u kocki upisan. Osi te kocke ujedno su osi oktaedra.

Ako se sa a označi dužina brida oktaedra, onda je dužina svake njegove osi jednaka $a\sqrt{2}$. Na sl. 126. nacrtane su projekcije oktaedra, kojemu je jedna os na Π_1.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije oktaedra, kojemu jedna strana leži u* Π_1! (Sl. 297.).

Rješenje. Kad je jedna strana oktaedra, na pr. ABC, u Π_1, suprotna je strana DEF usporedna s Π_1. Obje strane projiciraju se na Π_1 u pravoj veličini ($\Delta A'B'C' \cong \Delta D'E'F'$). Bridovi oktaedra, koji ne pripadaju stranama ABC i DEF, jednako su nagnuti prema Π_1, pa se na tu ravninu projiciraju kao jednake dužine tako, da čine pravilan šesterokut, kojemu su vrhovi točke A', B', C', D', E', F'. Tlocrt se oktaedra, kojemu je jedna strana u Π_1, konstruira tako, da se oko S' opiše kružnica, toj kružnici upiše pravilan šesterokut i u njemu potegnu sve sporedne dijagonale.

Nacrt trokuta ABC nalazi se u osi x, i nacrt trokuta DEF leži u pravcu m'', koji je usporedan s osi x.

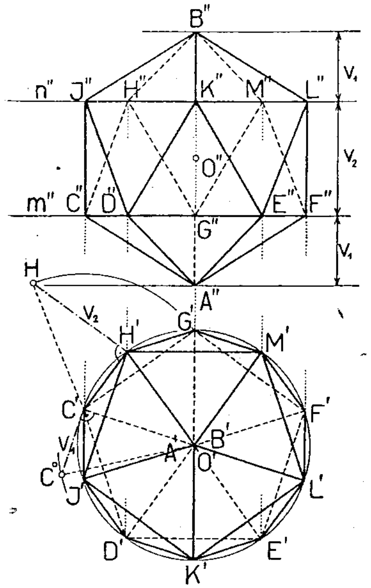
Udaljenost pravca m'' od osi x jednaka je udaljenosti točke D do Π_1. Da se odredi ta udaljenost, preložit će se pravokutan trokut $A'D'D$ oko $A'D'$ u Π_1 u položaj $A'D'D^0$. U tom je trokutu hipotenuza $A'D^0$ jednaka pravoj veličini bridova oktaedra, pa će se taj trokut dobiti, ako se učini $A'D^0 = A'C'$. Kateta $D'D^0$ naznačuje udaljenost točke D od Π_1, dakle i udaljenost točke D'' od osi x. Pravac m'' ide točkom D''.

§ 86. Ikosaedar

1. Objašnjenja. Ikosaedar je tijelo, koje je omeđeno sa 20 sukladnih istostranih trokuta, ima 30 jednakih bridova i 12 vrhova. U svakom se vrhu sastaje po 5 jednakih bridova, koji čine pravilne peterostrane uglove. Krajnje točke svakih pet bridova, koji se sastaju u vrhovima ikosaedra, jesu vrhovi pravilnih peterokuta, koji sa stranama pripadnih uglova čine istostrane peterostrane piramide. Tih peterokuta, dakle i piramida, ima 12. Svaka dva suprotna peterokuta među sobom su usporedna. Po dvije suprotne strane ikosaedra među sobom su usporedne. Ako se u središtu svake suprotne strane ikosaedra među sobom su usporedne. Ako se u središtu svake strane ikosaedra postavi okomica na tu stranu, sve te okomice idu kroz istu točku, koja je jednako udaljena od svih strana, svih vrhova i svih bridova ikosaedra. Ta se točka zove *središte ikosaedra*. Dužine, koje spajaju po dva suprotna vrha ikosaedra, zovu se osi toga tijela. Ikosaedar ima 6 jednakih osi, koje se sijeku i raspolavljaju u njegovom središtu.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije ikosaedra, kojemu je jedna os okomita na* Π_1! (Sl. 298.).

Rješenje. Neka je os $AB \perp \Pi_1$. Pravilan peterokut $CDEFG$, kojemu su vrhovi krajnje točke bridova, koji izlaze iz A, može se smatrati osnovkom peterostrane istobridne piramide, kojoj je točka A vrh. Taj je peterokut usporedan s Π_1, pa se na tu ravninu projicira u pravoj veličini ($C'D'E'F'G' \cong CDEFG$). Pravilan peterokut $HJKLM$ može se također smatrati osnovkom peterostrane istobridne piramide, kojoj je točka B vrh. Tlocrt je toga peterokuta $H'J'K'L'M' \cong HJKLM$. Vrhovi obih peterokuta $C'D'E'F'G'$ i $H'J'K'L'M'$ leže među sobom dijametralno tako, da ti vrhovi čine vrhove pravilnog deseterokuta. Taj je deseterokut kontura tlocrta ikosaedra. Tlocrt se ikosaedra sastoji od pravilnog deseterokuta, njegovih glavnih dijagonala i dvaju pravilnih peterokuta. Tlocrt se ikosaedra nacrta tako, da se najprije konstruira pravilan deseterokut $C'J'K'$....., zatim se nacrtaju oba pravilna peterokuta $C'D'E'F'G'$ i $H'J'K'L'M'$, te vrhovi deseterokuta spoje s njegovim središtem A' (ili s B').



Sl. 298.

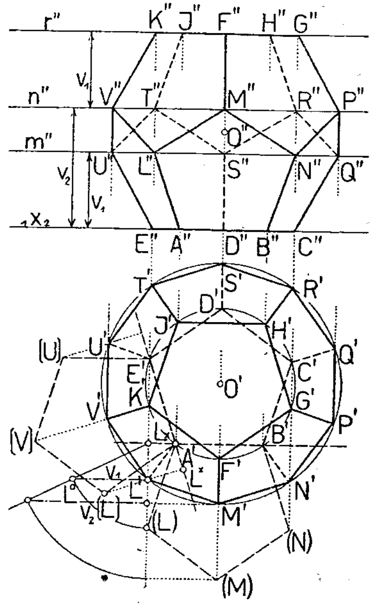
Nacrt se ikosaedra nacrta tako, da se odredi udaljenost A od ravnine Γ peterokuta $CDEFG$, udaljenost vrha B od ravnine Δ peterokuta $HJKLM$ i udaljenost obiju ravnina Γ i Δ. Ako se pravokutan trokut $A'C'C$ preloži oko katete $A'C'$ u Π_1, njegova će druga kateta $C'C^0$ biti jednaka udaljenosti v_1 točke C od Π_1, dakle i točke A od Γ te točke C'' od osi x. Pravokutan je trokut $A'C'C^0$ određen katetom $A'C'$ i hipotenuzom $A'C^0$, koja je jednaka bridu ikosaedra ($A'C^0 = C'D' = s$). Ako se točkom C'' povuče pravac $m'' \parallel x$, na tom se pravcu nalaze točke D'', E'', F'', G''.

Udaljenost v_2 obih ravnina Γ i Δ jednaka je visinskoj razlici vrhova C i H. Ta je udaljenost jednaka kateti HH' u pravokutnom trokutu $HH'C'$, uzevši da se ravnina Π_1 pomakla u ravninu Γ. Ako se taj trokut preloži oko katete $C'H'$ u ravninu Γ ($H'H^0 \perp C'H'$, $C'H^0 = C'G' = s$), onda je kateta $H'H^0 = HH' = v_2$. Povuče li se pravac n'' u daljini v_2 usporedno s m'', na pravcu n'' nalaze se nacrti H'', J'', K'', L'', M''. Napokon je

točka B'' udaljena od pravca n'' za dužinu v_1. Ako se nacrti vrhova ikosaedra spoje kao na sl. 298., imat ćemo nacrt toga tijela.

§ 87. Dodekaedar

1. Opis dodekaedra. Dodekaedar je omeđen s 12 sukladnih pravilnih peterokuta, ima 30 jednakih bridova i 20 vrhova. U svakom se vrhu sastaju po 3 pravilna peterokuta i po 3 jednaka brida, koji čine pravilne trostrane uglove. Po dvije suprotne strane dodekaedra među sobom su usporedne. Ako se u središtu svake strane postavi okomica na svaku stranu, sve te okomice idu kroz istu točku O, koja je jednako udaljena od svih strana, bridova i vrhova. Ta se točka zove *središte dodekaedra*. Dužine, koje spajaju po dva suprotna vrha, zovu se osi dodekaedra. Dodekaedar ima 10 jednakih osi, koje se sijeku u središtu O.



Sl. 299.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije dodekaedra, kojemu je jedna strana u* Π_1! (Sl. 299.).

Rješenje: Ako je pravilan peterokut $ABCDE$ u Π_1, onda je suprotni peterokut $FGHJK$ usporedan s Π_1, pa se oba lika projiciraju na tu ravninu u pravoj veličini kao dva sukladna pravilna peterokuta ($A'B'C'D'E' \cong F'G'H'J'K'$), te je drugi peterokut zakrenut prema prvom peterokutu za 180^0. Ta se dva peterokuta konstruiraju na poznati način, njihovi vrhovi leže na istoj opisanoj kružnici, kojoj je središte u točki O'.

Ostale strane jednako su nagnute prema Π_1, pa se na tu ravninu projiciraju kao 10 među sobom sukladnih peterokuta. Zbog toga što su te strane jednako nagnute prema Π_1, tlocrti $A'L'$, $B'N'$, $C'Q'$..... bridova AL, BN, CQ..., koji izlaze iz vrhova A, B, C, ... padaju u simetrale kutova peterokuta $A'B'C'D'E'$. Isto tako tlocrti $F'M'$, $G'P'$, $H'R'$,... bridova FM, GP, HR,... koji izlaze iz vrhova F, G, H,..., padaju u simetrale kutova peterokuta $F'G'H'J'K'$. Osim toga su veličine tih tlocrta jednake, t. j. $A'L' = B'N' = C'Q'... = F'M' = G'P' = H'R' = ...$

Da dobijemo točku L' postupat ćemo na slijedeći način: Rotirajmo dva susjedna peterokuta $ABNML$ i $AEUVL$ i to prvi peterokut oko $A'B'$, a drugi oko $A'E'$ u Π_1. Ta se dva peterokuta prikažu u pravoj veličini i dođu u položaj $A'B'(NML)$ i $A'E'[UVL]$. Ako ta dva peterokuta rotiramo natrag, dok se bridovi $A'(L)$ i $A'[L]$ ne sastanu u bridu AL, točka će (L) opisati kružni luk, kojemu tlocrt pada u pravac $(L)L_x$, koji je okomit na $A'B'$. Isto tako i točka $[L]$ opiše kružni luk, kojemu je tlocrt u pravcu $[L]L^x \perp A'E'$. Točka L' ležat će prema tome u sjecištu pravaca $(L)L_x$ i $[L]L^x$. Dužina je $A'L'$ tlocrt brida AL. Budući da je $A'L' = B'N' = C'Q' = \cdots = F'M' = G'P' = H'R' = \cdots$ točke $L', M', N', \ldots$ leže na kružnici, koja je opisana oko O' s polumjerom $O'L'$. Ako još spojimo točke $L', M', N', \ldots$ imamo tlocrt dodekaedra.

Budući da točke $L', M', N', \ldots V'$, dijele kružnicu na 10 jednakih dijelova, one su vrhovi pravilnog deseterokuta $L'M'N' \ldots V'$, koji je kontura tlocrta dodekaedra.

Nacrt je $A''B''C''D''E''$ u osi x. Da se dobije nacrt L'' točke L mora se odrediti udaljenost v_1 te točke od Π_1. Ta se udaljenost odredi pomoću točaka L' i (L) tako, da se povuče $L'L^0 \perp L_x(L)$ i oko L_x opiše luk $(L)L^0$ s polumjerom $L_x(L)$. Tada je $L'L^0 = v_1$. Ako se u daljini v_1 od osi x povuče pravac $m'' \parallel x$, na tom pravcu leži točka L''. Budući da su točke L, N, Q, S, U jednako udaljene od Π_1, tad na m'' leže i točke N'', G'', S'', U''.

Pomoću točaka M' i (M) može se odrediti udaljenost v_2 točke M od Π_1. Ako se povuče pravac $n'' \parallel x$, koji je od x udaljen za dužinu v_2, na tom pravcu leže nacrti M'', P'', T'', V''.

Točka M udaljena je od ravnine peterokuta $FGHJK$ za dužinu v_1, pa ako se povuče pravac $r'' \parallel x$, koji je od n'' udaljen za dužinu v_1, na tom pravcu leži nacrt $F''G''H''J''K''$.

3. Zadaci za vježbu.

1. Zadano je središte S kocke i pravac p, u kojemu leži brid kocke; konstruiraj to tijelo!

2. Nacrtaj projekcije kocke, kojoj su zadane točke A i B, dva suprotna vrha i kojoj je jedan vrh udaljen od Π_1 za dužinu m!

3. Konstruiraj kocku, kojoj je zadana dužina AB jedan brid i kojoj jedna ploha, koja je omeđena s AB, čini s Π_1 kut α!

4. Nacrtaj projekcije kocke, kojoj je zadana dijagonala $AC[A(5, 3, 0), C(2{,}5, 1, 1{,}5)]$ pobočke $ABCD$ i prikloni kut te pobočke prema Π_2 jednak 60^0!

5. Predoči kocku, kojoj je brid $AB[A(4, 4, 0), B(1, 3, 0)]$ u Π_1, a vrh C pobočke $ABCD$ u Π_2!

6. Nacrtaj projekcije kocke, kojoj je jedna dijagonala okomita na Π_2!

7. Nacrtaj projekcije kocke, kojoj je zadana dijagonala $AB[A(0, 3, 2), B(6, 6, 6)]$. — Uputa: Upotrebi dva stranocrta!

8. Zadan je brid $AB[A(1, 4, 0), B(7, 4, 0)]$ pobočke $ABCD$ kocke; konstruiraj to tijelo, ako brid $CD(\parallel AB)$ leži u Π_2!

9. Zadan je brid AB tetraedra; konstruiraj to tijelo, ako je suprotni brid CD brida AD usporedan sa zadanom ravninom!

10. Nacrtaj projekcije pravilnog tetraedra, kojemu jedna strana leži:
    a) u zadanoj kosoj ravnini,
    b) u ravnini, koja je usporedna s osi x.

11. Nacrtaj projekcije tetraedra, kojemu je zadan brid $AB[A(1, 2, 0), B(5, 3, 0)]$ u Π_1 i kojemu vrh C leži u Π_2!

12. Nacrtaj projekcije tetraedra, kojemu su dva suprotna brida usporedna s Π_2!

13. Bridovi su pravilnog tetraedra dugi 3 *cm*, jedan je brid usporedan s Π_1. Predoči to tijelo, ako je suprotni brid usporedan s Π_2!

14. Jedan brid pravilnog tetraedra leži u Π_1 i usporedan je s osi x, jedna pobočka, kojoj pripada taj brid, nagnuta je prema Π_1 za 60^0; predoči to tijelo. — Uputa: Upotrebi bokocrt.

15. Jedna je os oktaedra usporedna s osi x, a druga je os nagnuta prema Π_1 za 30^0; predoči to tijelo! — Uputa: Upotrebi bokocrt.

16. Zadana je jedna os oktaedra $AF[A(0, 6, 4), F(0, 0, 8)]$, a njegov je brid CD usporedan s Π_1; predoči to tijelo! — Uputa: Upotrebi dva stranocrta i to $\Pi_3 \parallel AF$, $\Pi_4 \perp AF$.

17. Zadana je jedna os oktaedra $AF[A(0, 2, 15), F(3, 5, 4)]$; predoči taj oktaedar, ako druga njegova os siječe os x!

18. Nacrtaj projekcije oktaedra, kojemu je zadan jedan vrh i kojemu jedna os leži u jednom pravcu!

19. Nacrtaj projekcije oktaedra, kojemu dvije dijagonale leže u zadanoj ravnini!

20. Nacrtaj projekcije oktaedra, kojemu jedna strana leži:
    a) u kosoj ravnini,
    b) u ravnini okomitoj na Π_1,
    c) u ravnini, koja je usporedna s osi x.

21. Predoči oktaedar, kojemu je zadana dijagonala $AF[A(5, 3, 1,) \; F(0, 1, 6)]$ i kojoj je zadan vrh:
    a) u Π_2,
    b) udaljen od Π_1 za dužinu $= 3$ *cm*.

22. Konstruiraj oktaedar, kojemu je jedna dijagonala okomita na Π_1, a druga okomita na Π_2 Donjim vrhom toga oktaedra položi pravac $n \perp \Pi_2$ i okreći oko toga pravca oktaedar, dok mu brid, koji je $\parallel \Pi_2$ bude usporedan i sa Π_1. Neka se nacrta tlocrt i nacrt za novi položaj oktaedra!

23. Zadano je središte S oktaedra i pravac p, u kojemu leži jedan brid oktaedra; predoči to tijelo!

24. Nacrtaj projekcije ikosaedra, kojemu je jedna os a) $\parallel x$, b) $\parallel \Pi_1$! — Uputa: a) Upotrebi bokocrt, b) Upotrebi stranocrtnu ravninu okomito na zadanu os ikosaedra.

25. Nacrtaj projekcije ikosaedra, kojemu je zadan vrh $A(7, 2, 2)$ i kojemu jedna os leži u pravcu $p = MN[M(0, 5, 10), N(11, 5, 5)]$! — Uputa: Upotrebi $\Pi_3 \perp p$.

26. Nacrtaj projekcije ikosaedra, kojemu je jedna strana u Π_1!

27. Nacrtaj projekcije ikosaedra, kojemu je jedna strana u zadanoj ravnini.

28. Nacrtaj projekcije dodekaedra, ako mu je jedna strana u Π_1 i ako je jedan brid te strane okomit na osi x!

29. Stranica je pravilnog peterokuta, koji je okomit na Π_2, $AB[A(0, 3, 5), B(3, 5, 2)]$. Konstruiraj dodekaedar, kojemu je taj peterokut jedna strana!

30. Nacrtaj projekcije dodekaedra, kojemu je vršna os (koja spaja dva suprotna vrha) okomita na Π_1 (ili na Π_2 !

31. Nacrtaj projekcije dodekaedra, kojemu je bridna os (koja spaja središta dvaju suprotnih bridova) okomita na Π_1 (ili na Π_2). Neka je brid $AB[A(0, 4, 0), B(2{,}5, 4, 0)]$!

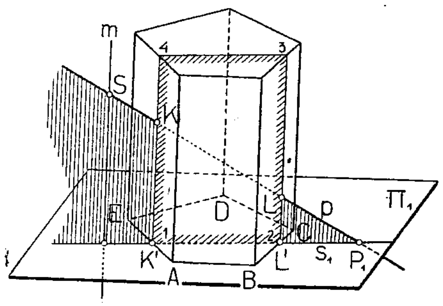
XVII. Presjek pravca s uglastim tijelima

§ 88. Objašnjenja

1. Pravac p siječe uglasto tijelo u točkama, koje se dobiju na taj način, da se pravcem p položi ravnina Σ i njom siječe tijelo u mnogokutu. Točke, u kojima pravac p siječe stranice toga mnogokuta, jesu sjecišta pravca p s tim tijelom. Najlakše će se odrediti presjek pravca s tijelom, ako se pravcem položi ravnina prometalica. Da se dobije zgodan presjek tijela s ravninom Σ, može ta ravnina imati i kakav drugi osobiti položaj.

§ 89. Presjek pravca s prizmom

1. Opće rješenje. Na sl. 300. prikazana je peterostrana prizma, kojoj je osnovka u Π_1 i pravac p, koji siječe prizmu u točkama K i L. Presjek se pravca s prizmom odredi na slijedeći način: Pravcem p položi se ravnina Σ usporedno s pobočnim bridovima prizme i njom siječe prizma u paralelogramu 1 2 3 4. Stranice toga paralelograma sijeku pravac p u točkama K i L. Ako je prizma uspravna, paralelogram je 1 2 3 4 pravokutnik, a ako je prizma kosa, taj je lik romboid.



Sl. 300.

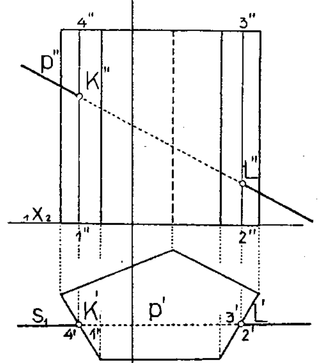
Da se odredi Σ, uzet će se na pravcu p po volji točka S i povući njom pravac m usporedno s pobočnim bridovima prizme. Pravci p i m određuju ravninu Σ. Sad se u ravnini osnovke odredi trag ravnine Σ. Ako je osnovka u Π_1, odredi se trag s_1. Taj trag siječe osnovne bridove u točkama 1 i 2. Tim točkama idu pravci 1-4 i 2-3, usporedno s pobočnim bridovima. Na taj se način dobije presječni paralelogram 1 2 3 4. Sjecište K leži na stranici 1-4, a sjecište L na stranici 2-3.

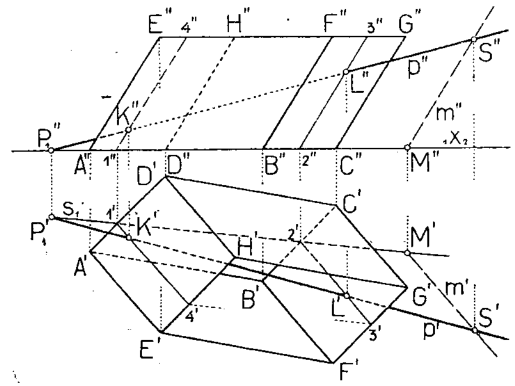
2. Zadatak. *Zadane su projekcije uspravne peterostrane prizme, kojoj je osnovka u Π_1, i projekcije pravca p; odredi projekcije sjecišta pravca s prizmom!* (Sl. 301.).

Rješenje. Budući da su pobočni bridovi zadane prizme okomiti na Π_1, to je i ravnina $\Sigma \perp \Pi_1$, pa se njezin prvi trag s_1 podudara s p'.

Točke, u kojima p' siječe tlocrt osnovnih bridova jesu točke $1'$ i $2'$. Budući da su stranice 1-4 i 2-3 također $\perp \Pi_1$, to se u $1'$ nalazi $4'$ i K', a u točki $2'$ leži $3'$ i L'. Točke K'' i L'' nalaze se u p''. Budući da točke K' i L' leže u sjecištima osnovnih bridova prizme s pravcem p', nije nam za ovakav položaj prizme ni trebalo ravnine Σ, niti presječnog pravokutnika 1 2 3 4.

Dio pravca p, koji je između sjecišta K i L, nalazi se u prizmi pa se ne vidi. Taj se dio pravca izvlači točkanom crtom. Točke K i L leže na pobočkama prizme, koje se u nacrtu vide, pa se vide i te točke.


Sl. 301.


Sl. 302.

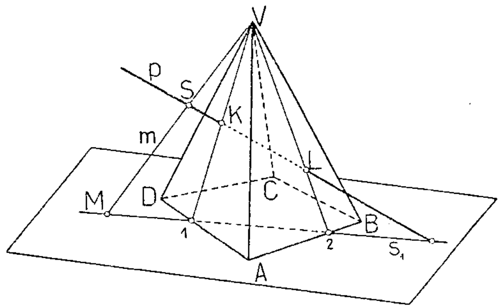
3. Zadatak. *Zadane su projekcije kose četverostrane prizme, kojoj je osnovka u Π_1, i projekcije pravca p; odredi projekcije sjecišta pravca p s kosom prizmom!* (Sl. 302.).

Rješenje. Taj je zadatak riješen na način, koji je iznesen u t. **1.** Na pravcu p (p', p'') uzeta je točka S (S'', S'') i kroz nju položen pravac m (m', m'') usporedno s pobočnim bridovima prizme. Zatim je određen trag s_1 ravnine $\Sigma \equiv (pm)$. Taj trag siječe stranice osnovke $A'B'C'D'$ u točkama $1'$ i $2'$, kroz koje se povuku pravci $1'4'$ i $2'3'$ usporedno s $A'E'$. Pravac p' siječe $1'4'$ u K', a $2'3'$ u L'. Odredi li se nacrt $1''2''3''4''$, onda p'' siječe $1''4''$ u K'', a $2''3''$ u L''. Točke $K'K''$ i $L'L''$ su projekcije sjecišta pravca p s kosom prizmom.

Na slici 302. uzelo se, da nema gornje osnovke i da je prizma šuplja. Prema tome u tlocrtu se vide obje točke K i L, pa se od pravca ne vide samo oni dijelovi, koje pokrivaju pobočke $ADHE$ i $BCGF$, te su tlocrti tih dijelova na p' izvučeni crtkano. U nacrtu se vidi točka L, jer leži na pobočki $BCGF$, koja se u nacrtu vidi. Zato se pravac p, desno od točke L, vidi. Točka se K u nacrtu ne vidi (zašto?), pa se dio pravca p, lijevo od K do brida AE, ne vidi. Taj dio pravca p nalazi se izvan prizme, pa se izvuče crtkano, dok se dio između K i L nalazi u prizmi, pa se izvuče točkano.

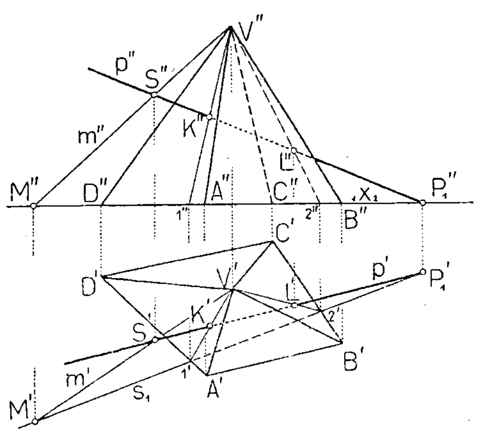
§ 90. Presjek pravca s piramidom

1. Opće rješenje. Na sl. 303. prikazana je četverostrana piramida, kojoj je osnovka u Π_1, i pravac p koji siječe piramidu u točkama K i L. Presjek pravca s piramidom odredi se na slijedeći način: Pravcem p i vrhom V položi se ravnina Σ i njom siječe piramidu u trokutu $1\,2\,V$. Stranice toga trokuta sijeku pravac p u traženim sjecištima K i L.



Sl. 303.

Pravcem p i točkom V položi se ravnina Σ kao u § 37. t. 4., sl. 165. U ravnini osnovke odredi se trag s_1 ravnine Σ; taj trag siječe osnovne bridove piramide u točkama 1 i 2, koje se spoje, pa je K u sjecištu pravca p s vrhom V. Na taj se način dobio presječni trokut $12\,V$, pa je K u sjecištu pravca p sa stranicama $1\,V$, a L u sjecištu sa stranicom $2\,V$. Na sl. 303. oba se sjecišta nalaze na pobočkama koje se vide, pa se vide i točke K i L.



Sl. 304.

2. Zadatak. *Zadane su projekcije kose četverostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_1, i projekcije pravca p; odredi projekcije sjecišta pravca p s tom piramidom!* (Sl. 304.).

R j e š e n j e. Taj je zadatak riješen na način, koji je iznesen u točki 1. Na pravcu $p\,(p', p'')$ uzeta je točka $S\,(S', S'')$, pa je točkama S i V položen pravac $m\,(m', m'')$. Zatim je određen trag s_1 ravnine $\Sigma \equiv (pm)$. Taj trag siječe stranice četverokuta $A'B'C'D'$ u točkama $1'$ i $2'$ koje se spoje

s V'. Pravac p' siječe $1'V'$ u točki K' a $2'V'$ u točki L'. Odredi li se nacrt $1''2''V''$, onda p'' siječe $1''V''$ u točki K'', a $2''V''$ u točki L''. Točke K', K'' i L', L'' su projekcije točaka K i L, u kojima pravac siječe piramidu.

U tlocrtu se vide obje pobočke na kojima leže točke K i L, pa se i te točke u tlocrtu vide. U nacrtu se točka K vidi, a točka L ne vidi. Zašto?

3. Zadaci za vježbu

1. Zadana je kvadratična prizma s osnovkom $ABCD[A\,(3, 0, 2)$, B, $C\,(7, 0, 4)$, $D]$ u Π_2 i visinom $v = 5$; odredi presjek te prizme s pravcem $MN[M\,(1{,}5{,}3)$, $N(B, 1, 3)]$!

2. Odredi presjek četverostrane kose prizme, kojoj je osnovka u Π_1, s pravcem, koji je *a)* $\parallel \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$!

3. Zadana je šesterostrana uspravna prizma, kojoj je osnovka u Π_1 [središte osnovke $M(3, 5, 0)$, jedan vrh $A(0, 4{,}5, 0)$, visina prizme $v = 8$]; odredi presjek te prizme s paralelogramom $MNPR[M(-2, 8, 1)$, $N(2, 9, 1)$, $P(7, 4, 7)]$!

4. Zadana je četverostrana kosa prizma s osnovkom $ABCD[A\,(3, 3, 0)$, $B\,(5, 1, 0)$, $C\,(8, 2{,}5, 0)$, $D\,(6.\ 6, 0)]$ u Π_1 i vrhom $A\,(9, 4{,}5, 6)$ gornje osnovke; odredi presjek te prizme s trokutom $MNP[M\,(3{,}5, 7, 1{,}5)$, $N\,(8, 2{,}5, 7)$, $P(13, 3, 1{,}5)]$!

5. Zadana je pravilna peterostrana piramida s osnovkom u Π_1 [središte osnovke $S\,(4, 4, 0)$, jedan vrh $A\,(4, 1, 0)$, visina piramide $v = 5$]; odredi presjek te piramide s pravcem $p = NN[M(1, 2, 4)$, $N(91, 5, 0{,}5)]$!

6. Odredi presjek pravca sa šupljom peterostranom piramidom, kojoj je osnovka usporedna s Π_1, a vrh u Π_1!

7. Odredi presjek četverostrane kose piramide, kojoj je osnovka u Π_2, s pravcem, koji je *a)* $\parallel \Pi_2$, *b)* $\perp \Pi_1$!

8. Odredi presjek pravca s oktaedrom! U p u t a: Položi pravcem prvu ili drugu ravninu prometalicu i njom sijeci oktaedar.

9. Odredi presjek pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovka ABC u Π_1 [osnovni brid $A\,(0, 3, 0)$, $B\,(5, 3, 0)$, visina piramide $v = 6$] s trokutom DEF $[D(-1, 4, 1)$, $E\,(7, 0, 6)$, $F(3, 8, 1)]$!

10. Zadana je kvadratična krnja piramida, kojoj je osnovka $ABC[A(0, 4, 0)$, $C\,(8, 6, 0)]$ u Π_1, visina potpune piramide $= 7$, a krnje piramide $= 4$; odredi presjek te piramide s paralelogramom $MKPR[M(0.5, 8, 0)$, $N(3.5, 10, 0)$, $P\,(7.5, 4.5, 5.5)]$!

11. Zadan je pravilan oktaedar, kojemu je središte $M(6, 4, -)$ i jedan vrh $V\,(5, 1, -)$, te mu je jedna os okomita na Π_1; odredi presjek toga oktaedra s trokutom $MNP[M\,(3.5, 7, 4)$, $N\,(5, 0{,}5, 8)$, $P\,(9, 5.5, 0)]$!

XVIII. Prodor uglastih tjelesa

§ 91. O prodorima tjelesa uopće

Ako se sijeku međašne plohe dvaju tijela, onda se kaže, da se ta dva tijela *prodiru*. Presječnice međašnih ploha čine prostorni poligon, koji se zove *prodorni poligon*. Prodorni poligon odredi se tako, da se odrede sjecišta bridova svakog tijela s međašnim plohama drugoga tijela na način, kako je rastumačeno u §§ 88.—90. Ta su sjecišta vrhovi prodornog poligona. Budući da su stranice toga poligona presječnice međašnih ploha obaju tijela, svaka se dva sjecišta mogu samo onda spojiti, ako leže na istoj međašnoj plohi jednog i drugog tijela.

Stranice su prodornog poligona u tlocrtu ili nacrtu vidljive, ako su vidljive obje plohe, koje se u toj stranici sijeku. Ako je jedna od tih ploha vidljiva, a druga nevidljiva, ili ako su obje nevidljive, onda se ne vidi niti njihova presječnica. Vidljive se stranice prodornog poligona izvlače punim, a nevidljive isprekidanim (crtkanim) crtama.

Kod prodora prizama i piramida obično se uzima, da se sijeku samo pobočke, da dakle i pobočni bridovi svakog tijela sijeku pobočke drugog tijela. Ako svi pobočni bridovi jednog tijela sijeku pobočke drugog tijela, onda se kaže da je *prodor potpun*. U tom slučaju sastoji se prodorni poligon iz dva dijela. Ako pak jedan pobočni brid ili više tih bridova jednog tijela ne sijeku pobočke drugog tijela, onda se kaže da je *prodor nepotpun*, jedno tijelo zasijeca drugo tijelo (*zasjek, zador*). U tom se slučaju prodorni poligon sastoji iz jednog dijela.

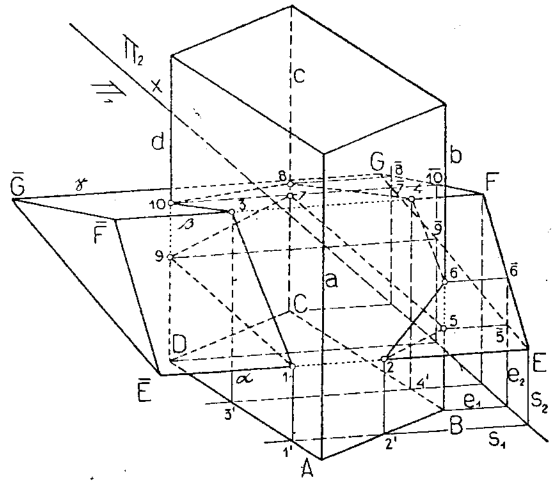
§ 92. Prodor uspravne prizme s prizmom ili piramidom

1. Prodor uspravne prizme s kosom prizmom. Na sl. 305. prikazan je prodor četverostrane uspravne prizme, kojoj je osnovka u Π_1, s trostranom kosom prizmom, kojoj je osnovka u Π_2 i kojoj su pobočni bridovi usporedni s Π_1. Pobočne bridove uspravne prizme označili smo slovima a, b, c, d a bridove kose prizme slovima α, β, γ.

Da se odrede sjecišta 1 i 2 brida α kose prizme s pobočkama uspravne prizme, položit će se tim bridom ravnina Σ usporedno s pobočnim bridovima uspravne prizme. Budući da su ti bridovi okomiti na Π_1, bit će i $\Sigma \perp \Pi_1$, pa njezin trag s_2 ide točkom E okomito na os x. Kako je pak brid $\alpha \parallel \Pi_1$, bit će $s_1 \parallel \alpha$. Ravnina Σ siječe pobočku (ad) u pravcu 1'1, a pobočku (ab) u pravcu 2'2 $\parallel a$ (§ 89. t. 2.). Ti pravci sijeku brid α u

točkama 1 i 2. Na jednak se način odrede i sjecišta 3 i 4 brida β. Brid γ ne siječe četverostranu prizmu. Čim se odrede sjecišta nekog brida, odmah se mora ustanoviti, da li se ta sjecišta vide ili ne vide, pa se prema tome izvuku bridovi, na kojima ta sjecišta leže.

Da se odrede točke 5 i 6, u kojima brid b uspravne prizme siječe kosu prizmu, položit će se tim bridom ravnina E usporedno s pobočnim bridovima kose prizme i odredit će se presječnice pobočaka ove prizme



Sl. 305.

s ravninom E. Trag e_1 ide točkom B usporedno s α, a e_2 je okomit na osi x, i siječe osnovne bridove kose prizme u točkama $\bar{5}$ i $\bar{6}$. Tim točkama idu presječnice pobočaka kose prizme s E i one sijeku brid b u točkama 5 i 6. Na jednak se način dobiju sjecišta 7 i 8 brida c i sjecišta 9 i 10 brida d. Brid a ne siječe kosu prizmu.

Pošto su se odredila sjecišta svih bridova jednoga tijela, koji sijeku pobočke drugoga tijela, treba ta sjecišta spojiti, da se dobije prodorni poligon. Da se to spajanje pravilno provede dobro će biti, da se sastavi i upotrebi slijedeća tablica, u kojoj su pregledno unesena sva sjecišta bridova i triju pobočaka, u kojima ta sjecišta leže.

Sjecišta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
POBOČKE	ad	ab	ad	bc	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	ab	ab	bc	bc	cd	cd
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\beta\gamma$	bc	bc	cd	cd	ad	ad

*

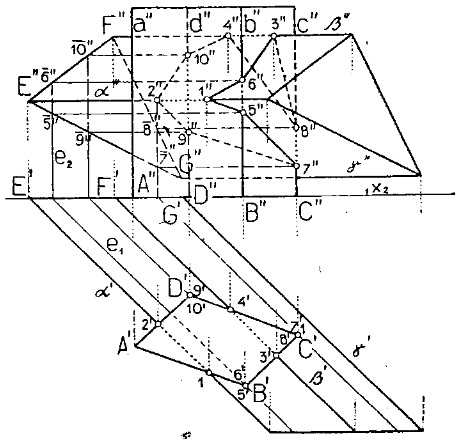
Od triju ploha, koje idu jednim sjecištem, dvije pripadaju jednom tijelu, a treća pripada drugom tijelu.

Kod spajanja sjecišta treba paziti, da svaka dva sjecišta, koja se spajaju, leže na istim plohama jednog ili drugog tijela. Da se sazna, leže li oba sjecišta na istim plohama, uzmu se dva stupca pod 1—10, na pr. stupac 1 i 3, pa se gleda nalaze li se u oba ta stupca iste plohe jednog i drugog tijela. U ta dva stupca dolaze iste plohe (ad) i $(\alpha\beta)$, pa prema tome točke 1 i 3 leže na tim plohama, te se mogu spojiti. U stupcu na pr. 1 i 4 dolazi ista ploha $(\alpha\beta)$ kose prizme, ali ne dolazi ista ploha uspravne prizme. Prema tome točke 1 i 4 leže na istoj plohi $(\alpha\beta)$ kose prizme, ali ne leže na istoj plohi uspravne prizme, pa se ne mogu spojiti. Na taj bismo način našli, da

točke 1 i 3 leže na plohama ad i $\alpha\beta$,
„ 3 i 10 „ „ „ ad i $\beta\gamma$,
„ 10 i 8 „ „ „ cd i $\beta\gamma$,
„ 8 i 4 „ „ „ bc i $\beta\gamma$,
„ 4 i 6 „ „ „ bc i $\alpha\beta$,
„ 6 i 2 „ „ „ ab i $\alpha\beta$,
„ 2 i 5 „ „ „ ab i $\alpha\gamma$,
„ 5 i 7 „ „ „ bc i $\alpha\gamma$,
„ 7 i 9 „ „ „ cd i $\alpha\gamma$,
„ 9 i 1 „ „ „ ad i $\alpha\gamma$.

Prema tome točke 1—10 imaju se spojiti ovim redom: 1 3 10 8 4 6 2 5 7 9 1. Ako se spajanje počelo s točkom 1, onda se u toj točki mora i završiti. Na sl 305. prodorni se poligon sastoji samo iz jednog dijela, pa je prema tome prodor nepotpun.

2. Zadatak. *Odredi prodor uspravne četverostrane prizme, kojoj je osnovka u* Π_1, *i kose trostrane prizme, kojoj je osnovka u* Π_2 *i kojoj su pobočni bridovi usporedni s* Π_1! (Sl. 306.).



Sl. 306.

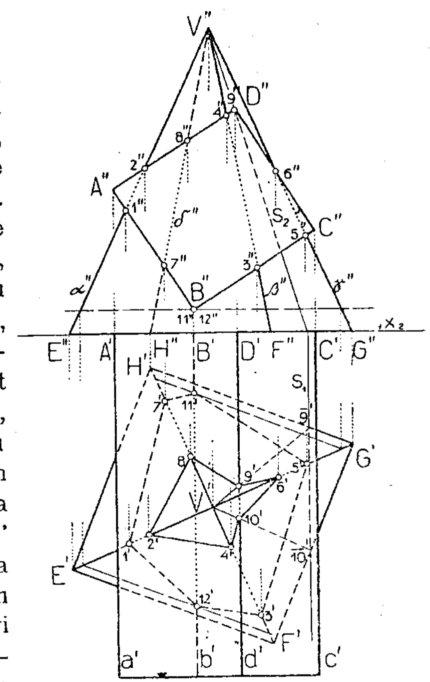
Rješenje: Uzelo se, da su na sl. 306. slični odnosi kao na sl. 305., pa se i projekcije sjecišta 1—10 određuju na jednak način. Red spajanja sjecišta može se odrediti pomoću tablice, koju niže donosimo. I ovdje smo pobočne bridove uspravne prizme označili slovima a, b, c, d, a pobočne bridove kose prizme s α, β, γ.

Na kojim pobočkama uspravne prizme leže sjecišta 1—10 jasnije se vidi u tlocrtu, nego li u nacrtu toga tijela, dok se to za kosu prizmu lakše odredi iz nacrta toga tijela.

Sjecišta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
POBOČKE	ab	ad	bc	cd	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	ab	ab	bc	bc	cd	cd
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\beta\gamma$	bc	bc	cd	cd	ad	ad

Red spajanja: 1 5 7 9 2 10 4 8 3 6 1.

3. Zadatak. *Odredi prodor kvadratne piramide, kojoj je osnovka u* Π_1, *s kvadratnom prizmom, kojoj je osnovka u* Π_2! (Sl. 307.).



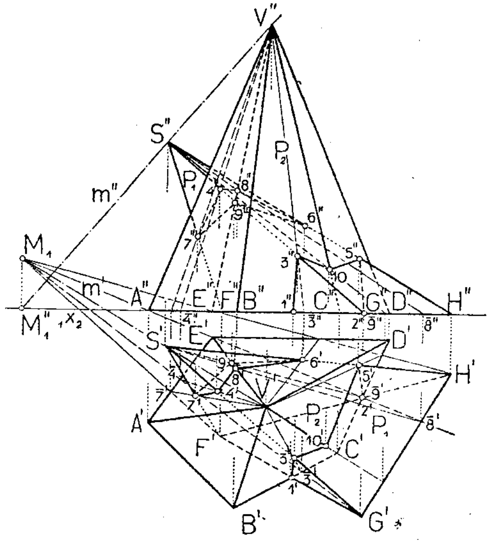
Sl. 307.

Rješenje: Sjecišta pobočnih bridova piramide s pobočkama prizme odrede se kao u § 89. t. 2., sl. 301. Pobočni bridovi b i d prizme sijeku pobočke piramide. Nacrti 9'' i 10'', sjecišta 9 i 10, u kojima brid d siječe piramidu, leže u nacrtu D'' toga brida. Da se dobije tlocrt 9' i 10' položit će se bridom d i vrhom V ravnina Σ, i njom će se sjeći piramida u trokutu $\overline{9}\ \overline{10}\ V$. Budući da je brid $d \perp \Pi_2$, to je i $\Sigma \perp \Pi_2$ pa trag s_2 ide točkama V'' i D'', a $s_1 \perp x$. Trokut $\overline{9}'\ \overline{10}'\ V'$ je tlocrt presječnog trokuta, pa stranice $\overline{9}'\ V'$ i $\overline{10}'\ V'$ sijeku d' u točkama 9' i 10'. Na jednak se način dobije tlocrt 11', 12' točaka u kojima brid b siječe piramidu. Točke 11', 12' dobiju se točnije pomoću presjeka piramide ravninom, koja ide bridom b usporedno s Π_1. Pobočni bridovi a i c prizme ne sijeku piramidu. Budući da svi pobočni bridovi piramide sijeku prizmu, prodor je potpun, pa se prodorni poligon sastoji iz dva dijela. Red je spajanja sjecišta ovaj: 2 4 10 6 9 8 2 i 1 12 3 5 11 7 1. Sastavi tablicu za spajanje sjecišta!

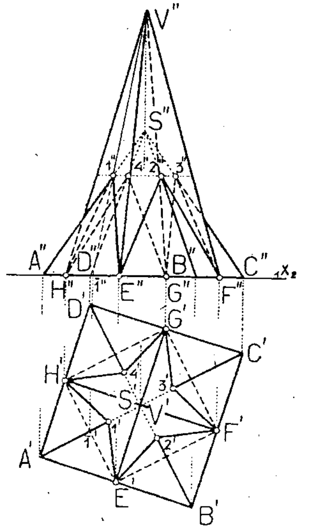
§ 93. Prodor dviju piramida

1. Zadatak. *Odredi prodor trostrane i peterostrane piramide, kojima su osnovke u* Π_1! (Sl. 308.).

Rješenje: Budući da se opsezi osnovaka sijeku u točkama 1 (1', 1'') i 2 (2', 2''), te točke također pripadaju prodornom poligonu. Da se dobiju točke 3 (3', 3'') i 4 (4', 4''), u kojima brid GS trostrane piramide (P_1) siječe peterostranu piramidu (P_2), položit će se tim bridom i vrhom V ravnina Σ i njom će se sjeći (P_2) u trokutu $\overline{3}\,\overline{4}\,V$. Isp. § 90. t. 1. Stranice toga trokuta sijeku brid GS u točkama 3 i 4. Budući da ravnina Σ ide kroz vrhove S i V obiju piramida, ona sadrži i pravac m (m', m''), koji spaja ta dva vrha, pa će trag s_1 ići prvim probodištem M_1 pravca m. Budući da je u G' prvo probodište brida GS, kojim se polaže ravnina Σ, biti će $s_1 \equiv M_1G'$. Stranice trokuta $\overline{3}'\,\overline{4}'\,V$ sijeku $G'S'$ u točkama 3' i 4', a stranice $\overline{3}''V''$ i $\overline{4}''V''$ sijeku $G''S''$ u 3'' i 4''. Na jednak se način odrede projekcije sjecišta 5 i 6 brida HS, te projekcije sjecišta 7 brida FS. Taj brid siječe i osnovku piramide (P_2) u točki F, no ta točka ne dolazi kod spajanja u obzir.



Sl. 308.



Sl. 309.

Budući da sve pomoćne ravnine idu kroz oba vrha S i V, sve one idu također pravcem m.

Da se dobiju projekcije točaka 8 i 9, u kojima brid EV piramide (P_2) siječe (P_1), položit će se tim bridom i pravcem m ravnina i njom će

se sjeći (P_1) u trokutu $\overline{8}\,\overline{9}\,S$. Stranice toga trokuta sijeku EV u točkama 8 i 9. Trag je pomoćne ravnine M_1E', i on siječe osnovne bridove piramide (P_1) u točkama $\overline{8}'$ i $\overline{9}'$, koje se spoje sa S', pa se na stranicama $\overline{8}'S'$ i $\overline{9}'S'$ dobiju točke 8' i 9', a na stranicama $\overline{8}''S''$ i $\overline{9}''S''$ točke 8'' i 9''. Na jednak se način dobije i točka 10, u kojoj brid CV siječe (P_1). Ostali pobočni bridovi piramide (P_2) ne sijeku (P_1).

Prodorni se poligon sastoji iz dva lika. Sjecišta se spajaju ovim redom: 1 3 10 5 2 i 7 4 8 6 9 7.

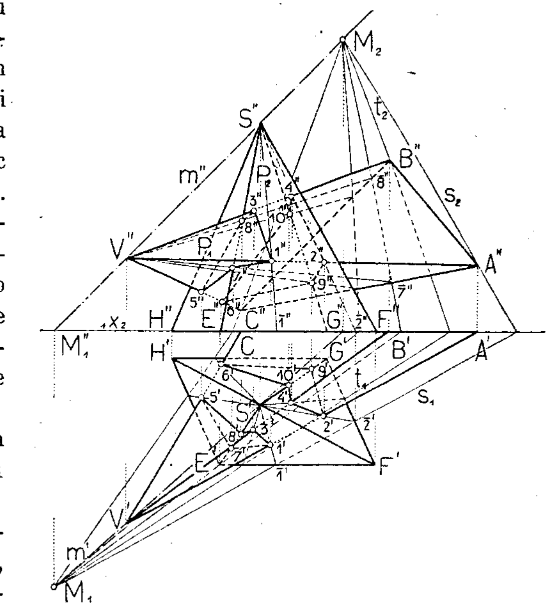
2. Zadatak. *Odredi prodor dviju kvadratičnih piramida, kojima su osnovke u* Π_1 *i koje su među sobom simetrično smještene!* (Sl. 309.).

Rješenje: Budući da pobočni bridovi više piramide imaju svoje donje krajnje točke E, F, G, H, u osnovnim bridovima niže piramide, te su točke ujedno sjecišta pobočnih bridova više piramide s pobočkama niže piramide.

Projekcije se točaka, u kojima pobočni bridovi niže piramide sijeku pobočke više piramide, odrede kao u § 90. t. 1. Da se na pr. odrede projekcije 1' i 1'' točke 1, u kojoj brid AS siječe pobočku EHV, položit će se tim bridom ravnina $\Sigma \perp \Pi_1$ i njom će se sjeći pobočka EHV u pravcu $\overline{1}\,V$. Pravac $\overline{1}''V''$ siječe $A''S''$ u 1''. Budući da su pobočni bridovi niže piramide i pobočke više piramide jednako nagnute prema Π_1, točke 2, 3 i 4, koje leže na bridovima BS, CS i DS nalaze se u istoj visini nad Π_1.

Točke se spajaju ovim redom; 1 E 2 F 3 G 4 H 1.

3. Zadatak. *Odredi prodor četverostrane piramide, kojoj je osnovka u* Π_1, *s trostranom piramidom, kojoj je osnovka u* Π_2! (Sl. 310.).



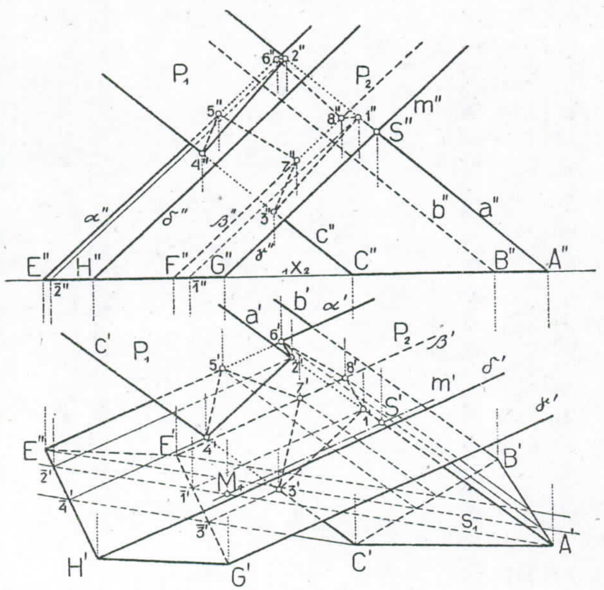
Sl. 310.

Rješenje: Pomoćne ravnine, pomoću kojih se određuju sjecišta pobočnih bridova jedne piramide s pobočkama druge piramide, idu pomoćnim pravcem m (m', m''), koji spaja vrhove S i V obih piramida. Prvi tragovi svih pomoćnih ravnina ići će probodištem M_1, a drugi tragovi probodištem M_2 pravca m. Da se na pr. odrede projekcije $1'$, $1''$ i $2'$, $2''$ točaka 1 i 2, u kojima brid AV trostrane piramide $(\mathbf{P}_1)$ siječe pobočke četverostrane piramide $(\mathbf{P}_2)$, položit će se tim bridom i pravcem m ravnina $\mathbf{\Sigma}$ i njom će se sjeći $(\mathbf{P}_2)$ u trokutu $\overline{1}\ \overline{2}\ S$. Trag je $s_2 \equiv M_2 A''$, a trag s_1 ide točkom M_1. Stranice trokuta $\overline{1}'\ \overline{2}'\ S'$ sijeku $A'V'$ u točkama $1'$ i $2'$ i t. d. Da se pak odrede projekcije sjecišta 7 i 8 brida ES s $(\mathbf{P}_1)$, položit će se tim bridom i pravcem m pomoćna ravnina $\mathrm{I}(t_1, t_2)$ i njom će se sjeći (P_1) u trokutu $\overline{7}\ \overline{8}\ V$. Trag je $t_1 \equiv M_1 E'$, a trag t_2 ide točkom M_2. Stranice $\overline{7}''V''$ i $\overline{8}''V''$ sijeku $E''S''$ u točkama $7''$ i $8''$ i t. d.

Prodorni poligon sastoji se iz dva dijela. Točke se spajaju ovim redom: 1 3 8 5 7 1 i 2 4 10 6 9 2.

§ 94. Prodor dviju kosih prizama

1. Zadatak. *Odredi prodor dviju kosih prizama, kojima su osnovke u* Π_1! (Sl. 311.).



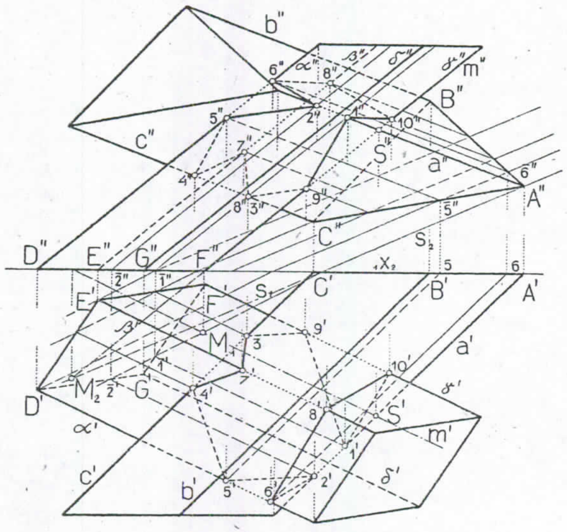
Sl. 311.

R j e š e n j e. Da se odrede projekcije sjecišta 1 i 2 brida a trostrane prizme $(\mathbf{P}_1)$ s četverostranom prizmom $(\mathbf{P}_2)$, položit će se tim bridom ravnina $\mathbf{\Sigma}$ usporedno s pobočnim bridovima prizme $(\mathbf{P}_2)$ i njom će se sjeći

pobočke te prizme u pravcu $\overline{1} - 1$ i $\overline{2} - 2$. Ti pravci sijeku brid a u traženim sjecištima 1 i 2 (Isp. § 89., 3.).

Ravnina $\mathbf{\Sigma}$ i sve pomoćne ravnine usporedne su s pobočnim bridovima obiju prizama, pa su zato te ravnine među sobom usporedne. Prema tome bit će među sobom usporedni i istoimeni tragovi tih ravnina. Budući da su osnovke prizama u Π_1, bit će za konstrukciju potrebni samo prvi tragovi tih ravnina. Da se odredi smjer tih tragova, uzet će se na bridu $a\,(a', a'')$ točka $S\,(S', S'')$ i položit će se njom pomoćni pravac $m\,(m', m'')$ usporedno s pobočnim bridovima prizme $(\mathbf{P}_2)$ i odredit će se njegovo probodište M_1. Trag je $s_1 \equiv M_1 A'$. Taj trag siječe četverokut $E'F'G'H'$ u točkama $\overline{1}'$ i $\overline{2}'$, pa se tim točkama potegnu pravci $\overline{1}'\,1'$ i $\overline{2}'\,2'$ usporedno s a'. Na taj su se način dobile točke $1'$ i $2'$. U sjecištima pravaca a'' s $\overline{1}''\,1''$ i $\overline{2}''\,2''$ leže točke $1''$ i $2''$. Na jednak se način odrede projekcije ostalih sjecišta. Red spajanja: 1 3 7 5 4 2 6 8 1.

2. Zadatak. *Odredi prodor kose četverostrane prizme, kojoj je osnovka u* Π_1 *s kosom trostranom prizmom, kojoj je osnovka u* Π_2! (Sl. 312.).



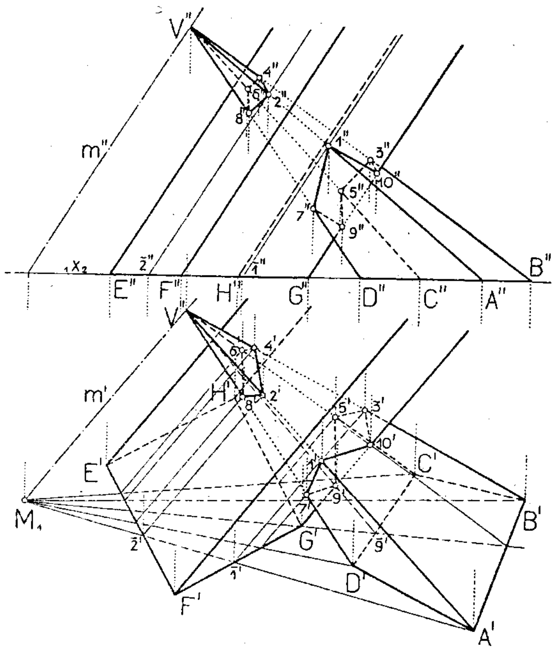
Sl. 312.

R j e š e n j e. Sve su pomoćne ravnine, pomoću kojih se određuju sjecišta pobočnih bridova jednog tijela s drugim tijelom, usporedne s pobočnim bridovima obaju tijela. Budući da su sve te ravnine među sobom usporedne, usporedni su među sobom i njihovi istoimeni tragovi. Jedna je takova ravnina $\Sigma(s_1, s_2)$ određena pravcima $a(a', a'')$ i $m(m', m'')$, koji se sijeku u točki $S(S', S'')$. Trag je $s_2 \equiv A''M_2$, a trag s_1 ide točkom M_1. Ta ravnina siječe pobočke četverostrane prizme u pravcima $\bar{1}\,1$ $(\bar{1}'\,1', \bar{1}''\,1'')$ i $\bar{2}\,2$ $(\bar{2}'\,2', \bar{2}''\,2'')$, pa projekcije tih pravaca sijeku projekcije brida a u projekcijama točaka 1 i 2. Na jednak se način odrede projekcije točaka 3 i 4.

Da se dobiju projekcije točaka 5 i 6, u kojima brid $\alpha(\alpha', \alpha'')$ siječe trostranu prizmu, položit će se tim bridom pomoćna ravnina usporedno s Σ. Prvi trag te ravnine ide točkom D' usporedno s s_1, a drugi trag usporedan sa s_2. Taj drugi trag siječe trokut $A''B''C''$ u točkama $\bar{5}''$ i $\bar{6}''$, tim se točkama potegnu pravci usporedno s α'', koji će α'' sjeći u $5''$ i $6''$ i t. d. Red spajanja: 1 10 8 6 2 5 4 7 3 9 1.

§ 95. Prodor kose prizme s piramidom

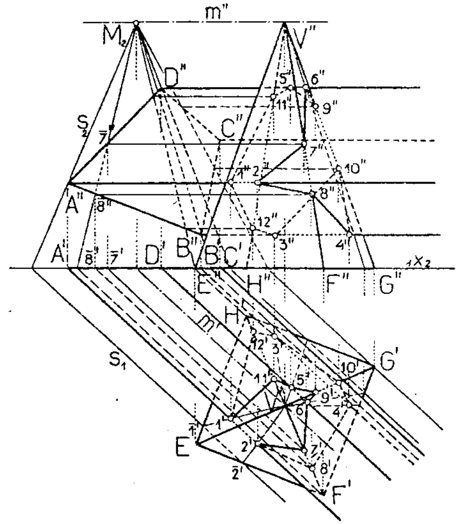
1. Zadatak. *Odredi prodor kose četverostrane prizme s kosom četverostranom piramidom, ako su osnovke obaju tijela u* Π_1! (Sl. 313.)



Sl. 313.

Rješenje. Sve ravnine pomoću kojih se određuju sjecišta pobočnih bridova jednog tijela s drugim tijelom moraju imati pomoćni pravac $m(m', m'')$,

koji ide vrhom $V(V', V'')$ piramide usporedno s pobočnim bridovima prizme. (Zašto?) Prvi tragovi svih pomoćnih ravnina idu probodištem M_1 pravca $m(m', m'')$ i osim toga prvim probodištem brida, za koji se traže sjecišta. (Drugih nam tragova ne treba. Zašto?) Da se na pr. odrede projekcije sjecišta 1 i 2 brida AV, povući će se trag $a_1 \equiv M_1A'$ ravnine Σ položene bridom AV i pravcem m i njom će se sjeći pobočke prizme u pravcima $\bar{1}\,1$ $(\bar{1}'\,1', \bar{1}''\,1'')$ i $\bar{2}\,2$ $(\bar{2}'\,2', \bar{2}''\,2'')$. Projekcije tih pravaca sijeku projekcije brida AV u točkama $1', 1''$ i $2', 2''$... Red spajanja: 1 10 3 5 9 7 1 i 2 4 6 8 2. Posljednji je lik ravan četverokut. Zašto?



Sl. 314.

2. Zadatak. *Odredi prodor kose četverostrane prizme, kojoj je osnovka u* Π_2 *i kojoj su pobočni bridovi usporedni s* Π_1, *s kvadratičnom piramidom, kojoj je osnovka u* Π_1! (Sl. 314.)

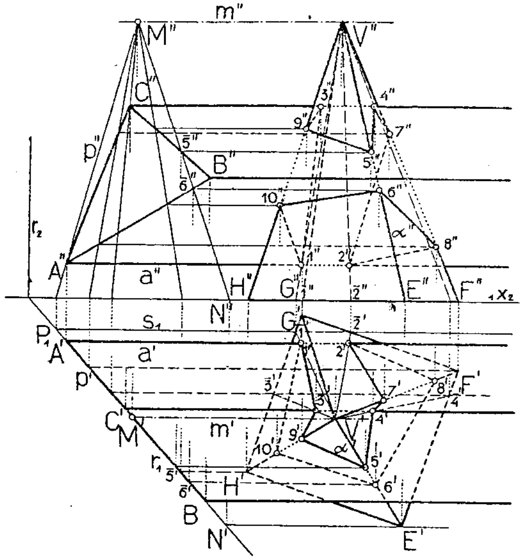
Rješenje. Vrhom $V(V', V'')$ piramide povuče se pomoćni pravac $m(m', m)$ usporedno s pobočnim bridovima prizme i odredi njegovo drugo probodište M_2. Budući da je pravac $m \parallel \Pi_1$ (zašto?), on će biti zajednička sutražnica prve skupine za sve pomoćne ravnine, pomoću kojih se određuju sjecišta pobočnih bridova jednog tijela s drugim tijelom. Iz slike se vidi, kako se određuju projekcije tih sjecišta. Red spajanja: 1 11 5 9 6 7 2 8 4 10 3 12 1.

3. Zadatak. *Odredi prodor trostrane prizme, kojoj su osnovke okomite na* Π_1 *i kojoj su pobočni bridovi usporedni s osi* x, *s četverostranom kosom piramidom, kojoj je osnovka u* Π_1! (Sl. 315.)

Rješenje. Vrhom $V(V', V'')$ piramide položi se pravac $m(m', m'')$ usporedno s pobočnim bridovima prizme i odrede projekcije M', M'' sjecišta M toga pravca s ravninom $\mathbf{P}(r_1, r_2)$ lijeve osnovke prizme. Da se odrede projekcije sjecišta brida $a(a', a'')$ prizme s piramidom, položit će se tim bridom i pravcem m ravnina Σ i odredit će se presječnica $p(p', p'')$ ravninâ $\mathbf{P}$ i Σ. Pravac je $p'' \equiv M''A''$, a $p' \equiv r_1$. Prvim probodištem P_1 pravca p ide trag s_1 ravnine Σ usporedno s osi x. (Kad bi m bio nagnut prema Π_1, onda bi bio trag $s_1 \equiv P_1M_1$). Trag s_1 siječe četverokut $E'E'G'H'$ u točkama $\bar{1}'$ i $\bar{2}'$, koje se spoje s V. Pravci $\bar{1}'V'$ i $\bar{2}'V'$ sijeku a' u $1'$ i

2′, a pravci $\overline{1}''V''$ i $\overline{2}''V''$ sijeku a'' u točkama 1″ i 2″. Na jednak bi se način odredile projekcije točaka 3 i 4.

Da se odrede projekcije točaka 5 i 6, u kojima brid $\alpha(\alpha', \alpha')$ siječe prizmu, povući će se prvi trag $E'N'$ ($\parallel m'$) pomoćne ravnine i njom će se sjeći



Sl. 315.

ravnina **P** u pravcu $NM(N'M', N''M'')$. Ta pomoćna ravnina siječe pobočke prizme u pravcima $\overline{5}5(\overline{5}'5', \overline{5}''5'')$ i $\overline{6}6(\overline{6}'6', \overline{6}''6'')$. Projekcije tih pravaca sijeku projekcije brida α u točkama 5′, 5″, i 6′, 6″. Na jednak bi se način našle projekcije ostalih sjecišta 7, 8, 9, 10. Red spajanja: 1 3 9 5 4 7 2 8 6 10 1.

4. Zadaci za vježbu

1.—3. Odredi prodor uspravne prizme s uspravnom ili kosom prizmom! Osnovke su prve prizme $ABC \ldots$ i $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \ldots$, a druge $KLM \ldots$ i $\overline{K}\overline{L}\overline{M} \ldots$

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak
	Osnovka je	Osnovka je	Osnovka je
prizma	kvadrat u Π_1	u Π_1	u Π_2
	$A(4,5,\ 1,\ 0)$	$A(3,5,\ 3,5,\ 0)$	$A(6,\ 0,\ 6,5)$
	$C(5,5,\ 7,\ 0)$	$B(11,5,\ 1,\ 0)$	$B(9,\ 0,\ 10)$
	$\overline{A}(4,5,\ 1,\ 7)$	$C(8,\ 7,5,\ 0)$	$C(10,\ 0,\ 3,5)$
		$\overline{A}(3,5,\ 3,5,\ 7,5)$	$\overline{A}(6,\ 14,\ 6,5)$

	Osnovka je	Osnovka je	Osnovka je
	u Π_3	$\perp \Pi_1$	
prizma	$K(0,\ 6,5\ 3)$	$K(6,\ —,\ 6)$	$K(0,\ 4,\ 8,5)$
	$L(0,\ 5,5)$	$L(3,\ 2,\ 5,)$	$L(1,\ 3,\ 3,5$
	$M(0,\ 2,\ 6)$	$M(0,4,\ —,\ 1,5)$	$M(3,5,\ 0,5,\ 5)$
	$N(0,\ 3,\ 1,5)$	$N(0,\ 4,5,\ 3)$	$N(2,5,\ 1,5,\ 11)$
	$\overline{K}(10,\ 6,5,\ 3)$	$\overline{K}(12,\ 7,\ 3)$	$\overline{K}(14,5,\ 13,5,\ 8,5)$

U prvom zadatku upotrebi bokocrtnu ravninu Π_3.

4.—6. Odredi prodor uspravne prizme s piramidom! Osnovka je piramide $ABC \ldots$ a vrh V, osnovke su prizme $KLM \ldots$, $\overline{K}\overline{L}\overline{M} \ldots$

	4. zadatak	5. zadatak	6. zadatak
piramida	$A(2,\ 2,\ 0)$	Osnovka je	Osnovka je
	$B(4,\ 6,\ 0)$	pravilan	piramide $\perp \Pi_2$
	$C(9,\ 4,\ 0)$	šesterokut	$A(20,\ 6,\ 13,5)$
	$D(8,\ 1,\ 0)$	$A(1,5,\ 3,5,0)$	$B(17,\ 12,\ 7.5)$
	$E(5,\ 0,5\ 0)$	$V(4,\ 3,5,\ 6,5)$	$C(15,5,\ 7,\ —)$
	$V(5,\ 3,\ 3)$		$V(1,\ 5,\ 15)$
prizma	$K(3,\ 1,5,\ 0)$	$K(0,\ 6,\ 4)$	$K(7,5,\ 0,\ 11)$
	$L(4,\ 4\ 0)$	$L(0,\ 2,5,\ 5,5)$	$L(10,5,\ 0,\ 15)$
	$M(6,\ 4,\ 0)$	$M(0,\ 1,\ 3,5)$	$M(13,4,\ 0,\ 13)$
	$N(7,\ 2,5,\ 0)$	$N(0,\ 2,\ 0,5)$	$N(15,\ 0,\ 10)$
	$\overline{K}(3,\ 1,5,\ 5)$	$\overline{K}(8,\ 6,\ 4)$	$\overline{K}(7,5,\ 12,\ 11)$

U petom zadatku upotrebi bokocrtnu ravninu Π_3.

7.—12. Odredi prodor dviju piramida! Osnovka je prve piramide $ABC \ldots$ a vrh V, osnovka je druge piramide $KLM \ldots$, a vrh S.

	7. zadatak		8. zadatak	9. zadatak
piramida	$A(1,\ 6,\ 0)$	$E(7,\ 2,5\ 0)$	$A(0,\ 6,\ 0)$	$A(2,\ 3,\ 0)$
	$B(2,\ 9,\ 0)$	$F(3,\ 4,\ 0)$	$B(6,\ 1,\ 0)$	$B(6,\ 12,\ 0)$
	$C(8,\ 11,\ 0)$	$V(4,\ 6,\ 9)$	$C(12,\ 4,\ 0)$	$C(10,\ 8,\ 0)$
	$D(11,\ 6,\ 0)$		$D(10,\ 11,\ 0)$	$D(12,\ 2,\ 0)$
			$V(10,\ 5,\ 7)$	$V(8.\ 6,5,\ 8)$
piramida	$K(13,\ 5,\ 0)$	$P(5,\ 8,\ 0)$	$K(13,\ 8,\ 0)$	$K(4,\ 5,\ 0)$
	$L(10,\ 2,\ 0)$	$Q(7,5,\ 9,\ 0)$	$L(15,\ 0,\ 0)$	$L(6,\ 10,\ 0)$
	$M(6,\ 1,\ 0)$	$R(12,\ 8,\ 0)$	$M(23,\ 12,\ 0)$	$M(10,\ 3,\ 0)$
	$N(4,\ 5,\ 0)$	$S(8,\ 5,\ 12)$	$S(0,\ 4,\ 11)$	$S(6,\ 5,5,\ 10)$

	10 zadatak	11. zadatak	12. zadatak
piramida	Osnovka je	Osnovka je	$A(1,\ 6,5,\ 0)$
	pravilan	pravilan	$B(8,5,\ 3,\ 0)$
	šesterokut	peterokut	$C(14,\ 3,5,\ 0)$
	$A(0,\ 1,\ 0)$	$A(0,\ 2,5,\ 0)$	$D(15,\ 10,5,\ 0)$
	$V(0,\ 4,5,\ 6)$	$V(0,\ 6,\ 8)$	$E(9,\ 14,\ 0)$
			$V(12,5,\ 6,\ 8,5)$
piramida	$K(0,\ 0,\ 0)$	Osnovka je	$K(5,\ 8,\ 0)$
	$L(2,\ 0,\ 6)$	kvadrat	$L(10,5,\ 3,5,\ 0)$
	$M(7,5,\ 0,\ 3)$	$K(2,\ 4,\ 0)$	$M(14,5,\ 6,5,\ 0)$
	$S(-\ 4,\ 9,\ 2)$	$S(3,\ 8,\ 5)$	$N(12,5,\ 10,\ 0)$
			$S(9,\ 8,\ 12)$

13.—16. Odredi prodor dviju kosih prizama! Osnovke su prve prizme ABC . . . i $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ . . ., a druge prizme KLM . . . $\overline{K}\overline{L}\overline{M}$ . . .

	13. zadatak	14. zadatak	15. zadatak	16. zadatak
prizma	A(0, 10,5, 0) B(0,5, 13,5 0) C(3, 15, 0) D(6, 13, 0) E(4, 9,5, 0) $\overline{A}$(5, 3, 12)	A(0, 0, 10) B(3, 0, 14,5) C(7, 0, 7,5) $\overline{A}$(10, 13, 3)	A(1, 0, 5,5) B(3, 0, 10,5) C(5, 0, 9) D(7, 0, 4) E(5, 0, 2,5) $\overline{A}$(14, 13, 5,5)	Kvadrat $ABCD$ A(12, 3, 0) B(7, 5, 0) $\overline{A}$(4, 3, 9)
prizma	K(10, 5, 9,0) L(7,5, 15, 0) M(14, 14,5, 0) $\overline{K}$(0, 0,5, 12)	K(17, 0, 7) L(14,5, 0, 12,5) M(8, 0, 14) N(11, 0, 8) $\overline{K}$(4,5 13, 2,5)	K(14, 3,5, 0) L(17,5, 6,5, 0) M(20,5, 2,5, 0) N(15, 1, 0) $\overline{K}$(2, 10,5, 12)	Kvadrat $KLMN$ K(—2, 0, 3) M(0, 0, 8) $\overline{K}$(3, 6, 3)

17—20. Odredi prodor piramide s kosom prizmom! Osnovka je piramide ABC . . . vrh V, osnovke su prizme KLM . . . i $\overline{K}\overline{L}\overline{M}$ . . .

	17. zadatak	18. zadatak	19. zadatak	20. zadatak
piramida	A(10, 14, 0) B(15, 15, 0) C(17, 6, 0) V(1, 4, 11)	A(0, 7, 0) B(1, 11, 0) C(7, 14, 0) D(5, 9, 0) V(13, 1,5, 10)	A(2, 4, 0) B(6, 2, 0) C(11, 3, 0) D(5, 8, 0) V(7, 5, 9)	Osnovka je kvadrat $ABCD$ A(5, 0, 1) V(6, 7, 3,5)
prizma	K(1, 12, 0) L(10, 16, 0) M(8, 13, 0) N(5, 9, 0) $\overline{K}$(6, 4, 9)	K(13, 8,5 0) L(13, 13, 0) M(7, 12, 0) $\overline{K}$(5,5, 0, 11,5)	K(8, 0, 3) L(11, 0, 4) M(13, 0, 2) N(10, 0, 0) K(0, 9, 8)	K(8, 1, 0) L(9,5, 4, 0) M(12, 2, 0) $\overline{K}$(2, 1, 7,5).

XIX. Konstrukcija sjena

§ 96. Objašnjenja

1. Svrha konstrukcije sjena. Kad se crtaju projekcije nekog tijela onda se ono obično tako postavlja prema ravninama projekcija, da se iz projekcije tijela mogu što lakše dobiti sve mjere, koje su potrebne, da se to tijelo napravi. Zbog toga posebnog položaja tijela, nije ono svojim projekcijama dovoljno slikovito prikazano, pa često puta nije odmah ni jasno, što te projekcije prikazuju. Da se ta slikovitost podigne i da si lakše možemo predstaviti šta projekcije prikazuju, uzimamo da su tijela osvijetljena, pa osim projekcija tijela konstruiramo i sjene, koje tu dolaze. Konstrukcijom sjena znatno se podižu predodžbe o prostoru.

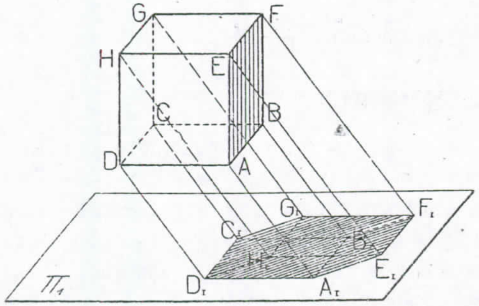
2. Izvor svijetla. Kao izvor svijetla uzima se točka, koja se može nalaziti u konačnosti ili u beskonačnosti. Zrake svijetla rasprostiru se od izvora pravocrtno na sve strane. Ako je izvor svijetla u konačnosti, onda se takva rasvjeta zove *centralna*, a ako je izvor svijetla točka u beskonačnosti, onda su zrake svijetla među sobom usporedne, pa se takva rasvjeta zove *usporedna* ili *paralelna*. Budući da je Sunce veoma daleko, može se uzeti da su zrake svijetla, koje padaju na zemlju, međusobom usporedne, pa se i sunčana rasvjeta može smatrati usporednom.

U tehničkom crtanju upotrebljava se gotovo isključivo usporedna rasvjeta, pa će i ovdje biti uglavnom govora o takvoj rasvjeti.

3. Samosjena i bačena sjena. Na sl. 316., osvijetljena je kocka usporednim zrakama svijetla. Ima zraka svijetla, koje udaraju o neke plohe, kojima je kocka omeđena, druge opet zrake dodiruju kocku u nekim bridovima, a najveći dio zraka prolazi mimo tijela. Plohe kocke, na koje zrake svijetla izravno padaju, osvijetljene su. Ostale su pak plohe neosvijetljene tamne, pa se kaže, da su te plohe u *samosjeni.* Međašni bridovi između osvijetljenih i tamnih ploha tijela zovu se *bridovi rastavnice,* te su oni bridovi, u kojima zrake svijetla dodiruju tijelo.

Na sl. 316. osvijetljene su plohe $DAEH$, $DCGH$ i $EFGH$, dok su ostale plohe u samosjeni. Rastavnici pripadaju bridovi: AE, EF, FG, GC, CD i DA, koji čine prostorni poligon $AEFGCDA$.

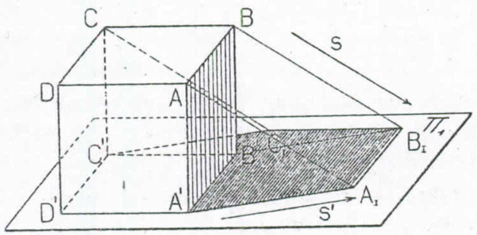
Postavimo ravninu Π_1 tako, da se tijelo nalazi između izvora svijetla i ravnine Π_1. Sve ove zrake, koje direktno udaraju o plohe tijela, ne će moći proći kroz tijelo, pa one ne mogu osvijetliti ravninu Π_1. Zato će dio te ravnine ostati taman. Kaže se **da tijelo baca sjenu** na ravninu Π_1, da je tamni dio ravnine *bačena sjena* tijela na tu ravninu. Zrake, koje sijeku



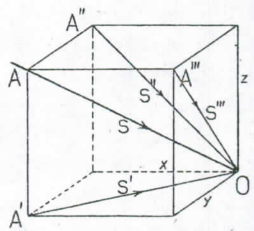
Sl. 316.

bridove rastavnice, čine dijelove ravnina, koje sijeku Π_1 u dužinama $A_I E_I$, $E_I F_I$, $F_I G_I$, $G_I C_I$, $C_I D_I$ i $D_I A_I$. Te dužine omeđuju bačenu sjenu tijela na Π_1.

Uzmimo sada, da se ravnina Π_1 podudara s donjom osnovkom kocke (sl. 317.). Pravac s naznačuje smjer usporednih zraka svijetla, a s' smjer tlocrta tih zraka na Π_1. Da se odredi sjena točke A na Π_1, položit će se tom točkom zraka $AA_I \parallel s$, a točkom A', koja je tlocrt točke A na Π_1, pravac $A'A_I \parallel s'$. Zraka AA_I siječe svoju projekciju $A'A_I$ u točki A_I, koja je bačena sjena točke A na Π_1. Na isti način odrede se bačene sjene B_I i



Sl. 317.



Sl. 318.

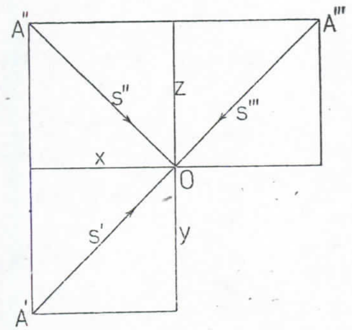
C_I vrhova kocke B i C. Bridovi $A'A$, AB, BC i CC' pripadaju rastavnici. Zrake svijetla, koje sijeku te bridove, čine dijelove ravnina, koje se sijeku u Π_1 u dužinama $A'A_I$, $A_I B_I$, $B_I C_I$ i $C'C_I$. Te su dužine bačene sjene bridova rastavnice i one omeđuju bačenu sjenu tijela na Π_1. Rastavnici pripadaju i bridovi $A'D'$ i $D'C'$; ti su bridovi sami svoje bačene sjene.

Iz sl. 317. vidi se, da su u samosjeni one međašnje kockine plohe, koje su okrenute prema bačenoj sjeni i da bačenu sjenu tijela omeđuju bačene sjene onih bridova, koji pripadaju rastavnici.

Usporedne zrake svijetla, koje dotiču kocku uzduž bridova rastavnice, čine prizmatičku plohu, pa se bačena sjena na Π_1 može smatrati presjekom te plohe s Π_1.

4. O smjeru paralelnih zraka svijetla. Smjer zraka svijetla može se uzeti po volji, no obično se odabire tako, da se dobiju što zgodnije sjene

i da se one mogu što lakše konstruirati. Opazilo se, da je osvjetljenje najpovoljnije i da se sjene mogu lako konstruirati, kad su zrake svijetla usporedne s dijagonalom AO (sl. 318.) kocke, koja je tako postavljena, da joj se tri međašna kvadrata, koji se sastaju u vrhu O, podudaraju s tri ravnine projekcija. U tom se slučaju projekcije $A'O(\equiv s')$, $A''O(\equiv s'')$ i $A'''O(\equiv s''')$ dijagonale $AO(\equiv s)$ podudaraju s jednom dijagonalom tih međašnih kvadrata kocke, pa prema tome te projekcije čine s osima x, y, z kutove od 45^0. (Sl. 319.). Ako su zrake svijetla usporedne s dijagonalom s kocke, onda su projekcije tih zraka usporedne sa s', s'', s''', te čine s osima x, y, z kutove od 45^0. Te je projekcije lako nacrtati pomoću crtaćeg istokračnog pravokutnog trokuta.



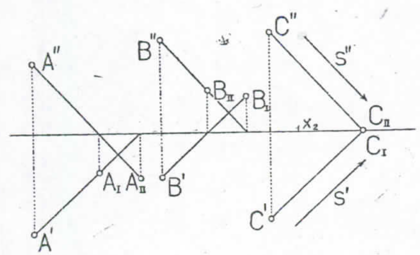
Sl. 319.

Kad su zrake svijetla usporedne s dijagonalom kocke, onda se takova rasvjeta zove *dijagonalna*.

5. Zadatak je konstrukcije sjena, da se odrede one plohe tijela, koje su u samosjeni, da se odredi bačena sjena tog tijela na ravnine projekcije i na druga tijela, i da se osjene one plohe, koje su u samosjeni tako, da ih iscrtamo usporednim pravcima (sl. 317.) ili položimo sivom bojom. Osjenjuju li se plohe usporednim pravcima, onda se plohe, koje su u bačenoj sjeni iscrtaju gustim tankim pravcima, a plohe koje su u samosjeni tankim, ali ne toliko gusto poredanim pravcima, kao kod bačene sjene. Ako se plohe osjenjuju sivom bojom, onda se bačene sjene polože dva puta tamnije, negoli plohe koje su u samosjeni.

§ 97. Bačena sjena točke

1. Vidjeli smo na sl. 317., da se bačena sjena A_I točke A na ravninu Π_1 odredi tako, da se tom točkom položi zraka svijetla i odredi probodište A_I te zrake s ravninom Π_1. Ako je točka A zadana tlocrtom A' i nacrtom A'' (sl. 320.), onda će točkom A' ići tlocrt, a točkom A'' nacrt zrake, koja je položena točkom A u prostoru usporedno sa zrakom s. Da prema tome odredimo bačenu sjenu točke A na ravnine Π_1 i Π_2, povući ćemo točkom A' usporednicu



Sl. 320.

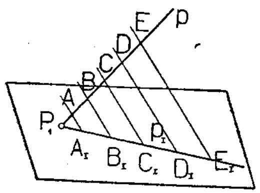
sa s', a točkom A'' usporednicu sa s'' i odredit ćemo probodišta A_I i A_{II} zrake svijetla, koja ide točkom A. Točka A_I je bačena sjena točke A na Π_1, a točka A_{II} je bačena sjena točke A na Π_2.

Uzme li se, da su ravnine projekcija neprozirne, on a točka baca sjenu na onu ravninu, koju prije siječe zraka svijetla položena tom točkom. Znamo, da pravac prije siječe ravninu Π_1 nego li Π_2, kad su oba probodišta ispod osi x. Ako su pak oba probodišta povrh osi x, onda zraka prije siječe Π_2, negoli Π_1. Na sl. 320. točka A baca sjenu na Π_1 u točku A_I, točka B baca sjenu na Π_2 u točku B_{II}, a točka C baca sjenu na os x u točku C_I ili C_{II}.

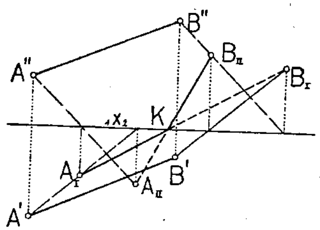
2. Oznaka. Ako su točke u prostoru označene s A, B, C... onda se sjene tih točaka na Π_1 označuju sa $A_I, B_I, C_I, \ldots$, a sjene na Π_2 označe sa $A_{II}, B_{II}, C_{II}, \ldots$

§ 98. Bačena sjena pravca i dužine

1. O bačenoj sjeni pravca. Bačena se sjena pravca na neku ravninu Π_1 odredi tako, da se odredi bačena sjena svih točaka toga pravca na



Sl. 321.



Sl. 322.

ravninu Π_1. Budući da zrake svijetla položene točkama pravca p čine ravninu, t. zv. *ravninu svijetla*, ona siječe Π_1 u pravcu p_I, na koji pada bačena sjena pravca p na Π_1. (Sl. 321.)

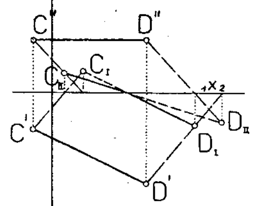
Bačena sjena pravca na ravninu opet je pravac. Ta se sjena dobije tako, da se odrede bačene sjene dviju točaka pravca na ravninu i te točke spoje pravcem.

Budući da je bačena sjena probodišta P_1 pravca p u istoj točki, bačena sjena p_I ide tim probodištem. Bačena sjena pravca na neku ravninu ide probodištem toga pravca s tom ravninom.

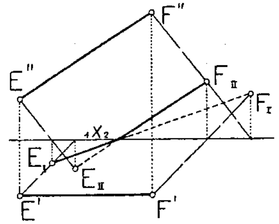
2. O bačenoj sjeni dužine. Bačena sjena dužine na ravninu opet je dužina. Ta se sjena dobije, da se odrede bačene sjene krajnjih točaka dužine na ravninu i te sjene spoje dužinom.

3. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu kose dužine AB, kojoj su zadane projekcije $A'B'$ i $A''B''$, na ravnine projekcija kod usporedne rasvjete!* (Sl. 322.).

Rješenje. Odredi bačene sjene A_I, A_{II} i B_I, B_{II} krajnjih točaka A i B dužine na Π_1 i Π_2, i spoji A_I sa B_I i A_{II} sa B_{II}. Tada je $A_I B_I$ bačena sjena dužine AB na Π_1, a $A_{II}B_{II}$ bačena sjena na Π_2. Obje se te sjene moraju sjeći u istoj točki K na osi x zbog toga, što se tri ravnine Π_1, Π_2 i ravnina svijetla dužine AB moraju sjeći u istoj točki K.



Sl. 323.



Sl. 324.

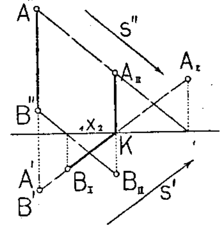
Točka A baca sjenu na Π_1, a točka B na Π_2. Zato jedan dio sjene dužine AB pada na Π_1 u dužinu $A_I K$, a drugi na ravninu Π_2 u dužinu KB_{II}. Kaže se, da se sjena lomi u osi x.

Budući da se obje sjene na Π_1 i na Π_2 moraju sjeći na osi u točki K, nije potrebno da se određuje točka A_{II}. Dužina $A_I B_I$ siječe os x u točki K, pa se K spoji sa B_{II}.

4. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu dužine CD, koja je usporedna s Π_1!* (Sl. 323.).

Rješenje. Ako se dužinom CD položi ravnina svijetla, ona siječe ravninu Π_1 u pravcu $C_I D_I$ koji mora biti usporedan s CD (§ 3., t. 4.). Budući da je lik CDD_IC_I paralelogram, to je $C_I D_I \# CD$

Kad je dužina usporedna s ravninom projekcija, njezina je bačena sjena na tu ravninu usporedna s dužinom i jednaka toj dužini.



Sl. 325.

Na sl. 323. nacrtane su projekcije dužine CD i njezine bačene sjene na Π_1 i na Π_2. Budući da je $C'D' \# CD$ i $C_I D_I \# CD$, mora biti $C_I D_I \# C'D'$.

5. Na sl. 324. nacrtane su bačene sjene dužine EF, koja je usporedna s Π_2. Tu je $E_{II}F_{II} \# E''F''$. Zašto?

6. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu dužine AB, koja je okomita na Π_1!* (Sl. 325.).

Rješenje. Budući da je dužina AB okomita na Π_1, onda je i ravnina svijetla položena tom dužinom okomita na Π_1. Te se dvije ravnine moraju sjeći u pravcu, koji je usporedan s tlocrtom s' zrake s. U tu presječnicu pada i bačena sjena dužine AB na Π_1.

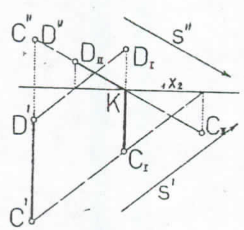
Kad je dužina okomita na ravnini projekcija, njezina je bačena sjena na tu ravninu usporedna s projekcijom zrake svijetla na tu ravninu.

Zraka svijetla položena točkom A prije siječe Π_2, negoli Π_1, i zato točka A baca sjenu na Π_2. Sjena dužine AB na Π_1 počinje u točki B_I, ide usporedno sa s' do točke K na osi x, a onda se u toj točki lomi i pada na Π_2 u dužinu KA_{II}. Budući da je $AB \parallel \Pi_2$, mora biti $KA_{II} \parallel AB$ ili $KA_{II} \perp x$.

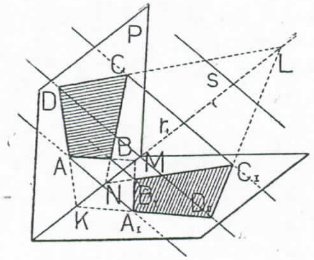
7. Na slici 326. nacrtane su projekcije dužine CD, koja je okomita na Π_2 i određene su joj sjene na Π_1 i Π_2. Sjena na Π_2 počima u točki D_{II} i pada u pravac $D_{II}K \parallel s$, a sjena na Π_1 pada u dužinu $KC_I \perp x$.

§ 99. Bačena sjena ravnog lika

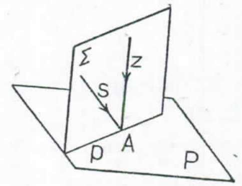
1. Objašnjenja. Bačena se sjena ravnog lika na Π_1 (ili na Π_2) odredi tako, da se odrede bačene sjene stranica tog lika na Π_1 (ili na Π_2). Na sl. 327. nacrtan je četverokut $ABCD$ i njegova bačena sjena $A_I B_I C_I D_I$ na Π_1.



Sl. 326.



Sl. 327.



Sl. 328.

Ravnine svijetla uzduž stranica mnogokuta čine prizmatičku površinu. Bačenu sjenu toga mnogokuta na ravninu možemo smatrati presjekom prizmatičke površine s tom ravninom.

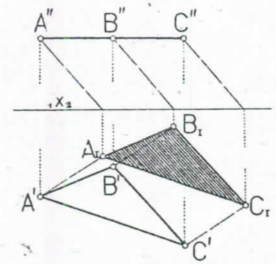
Ona strana mnogokuta, koja je okrenuta izvoru svijetla, osvijetljena je, dok je njezina druga strana u samosjeni. Na sl. 327. je vidljiva ona strana četverokuta $ABCD$, koja je u samosjeni.

Između mnogokuta u prostoru i njegove bačene sjene na Π_1 (ili na Π_2) postoji prostorna afinost. Presječnica r_1 ravnine P mnogokuta i ravnine Π_1 jest os afinosti. Zrake afinosti usporedne su sa zrakama svijetla. Da se pridružene stranice, na pr. AD i $A_I D_I$ moraju sjeći u istoj točki K osi r_1 slijedi odatle, što se tri ravnine **P**, Π_1 i ravnina svijetla stranice AD sijeku u tri pravca r_1, AD i $A_I D_I$, koji se moraju sjeći u istoj točki K.

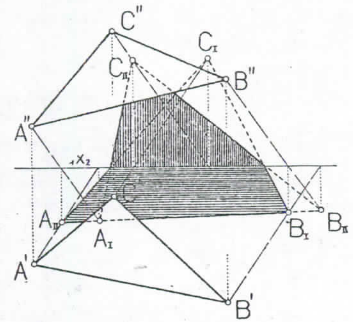
2. *Kako će se odrediti, da li je jedna ili druga stranica ravnoga lika osvijetljena ili u samosjeni?*

Na sl. 328. zadan je ravan lik P, pa treba odrediti, da li mu je gornja ili donja strana u samosjeni. Da se to odredi, postupa se ovako: Kroz kojugod točku A lika P položit će se zraka svijetla s i zraka z, koja označuje smjer gledanja. Ako obje zrake leže na istoj strani ravnog lika P, onda se, obzirom na smjer gledanja z, vidi osvijetljena strana toga lika. Ako su pak ove zrake na raznim stranama lika P, onda se vidi ona strana lika, koja je u samosjeni. Zrake s i z čine ravninu Σ, koja siječe ravninu P u pravcu p. Ako su obje zrake na istoj ravnini presječnice p, onda se u smjeru gledanja vidi osvijetljena strana, a ako su obje zrake na različitim stranama pravca p, onda se vidi osjenjena strana lika P.

3. Zadatak. *Odredi bačene sjene trokuta ABC, koji je usporedan s Π_1, na ravnine projekcija!* (Sl. 329.).



Sl. 329.



Sl. 330.

Rješenje. Čitava bačena sjena $A_I B_I C_I$ trokuta ABC pada na Π_1. Budući da su sve tri stranice trokuta ABC usporedne s Π_1, bit će i bačene sjene tih stranica usporedne s tlocrtom tih stranica i jednake tom tlocrtu t. j. $A_I B_I \# A'B'$, $B_I C_I \# B'C'$, $C_I A_I \# C'A'$. Prema tome je $\triangle A_I B_I C_I \# A'B'C' \cong ABC$.

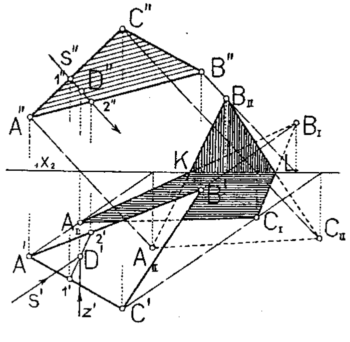
Kad je mnogokut usporedan s ravninom projekcija, njegova je bačena sjena na tu ravninu sukladna s likom u prostoru i s njegovom projekcijom.

4. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu trokuta ABC na Π_1 i na Π_2 ako je trokut nagnut prema tim ravninama!*

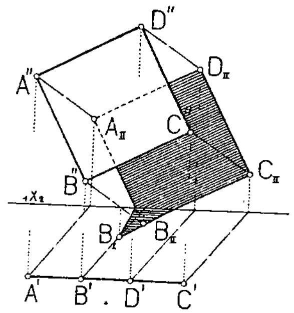
b) Prvi slučaj: U tlocrtu i nacrtu vidljiva je ista strana trokuta. Na sl. 330. određene su bačene sjene vrhova A i B na Π_1 i vrha C na Π_1 i na Π_2. Bačena sjena trokuta ABC na Π_1 pada u trokut $A_I B_I C_I$. Budući da točka C baca sjenu na Π_2, sjena se trokuta lomi u osi x, pa jedan dio sjene pada na Π_1, a drugi na Π_2. U tlocrtu i nacrtu vidljiva je rasvijetljena strana trokuta ABC.

b) Drugi slučaj: U tlocrtu i nacrtu vidljive su različite strane trokuta. Na sl. 331. određene su bačene sjene toga trokuta na Π_1 i na Π_2.

Jedan dio sjene $A_I C_I L K$ pada na Π_1, a drugi dio $L K B_{II}$ na Π_2. Budući da se u tlocrtu i nacrtu vide različite strane trokuta, vidjet će se i rasvijetljena i tamna strana trokuta. Da li se vidi osjenjena strana u tlocrtu ili nacrtu, zaključuje se po poretku slova projekcija i bačenih sjena. Poredak slova u tlocrtu $(A'B'C')$ i bačena sjena na Π_1 $(A_I B_I C_I)$ imaju isti obilazni

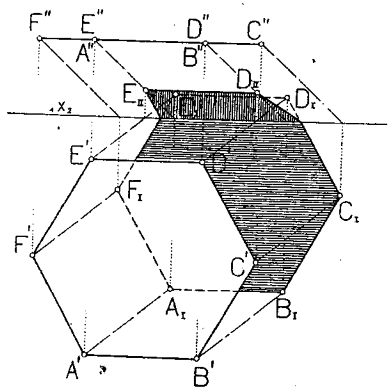


Sl. 331.



Sl. 332.

smjer, pa se zaključuje, da se u tlocrtu vidi osvijetljena strana trokuta. Slova u nacrtu $(A''B''C'')$ i slova bačene sjene na Π_2 $(A_{II} B_{II} C_{II})$ poredana su u protivnom smjeru, pa se zaključuje, da se u nacrtu vidi strana, koja je u samosjeni. Zato smo nacrt osjenili.



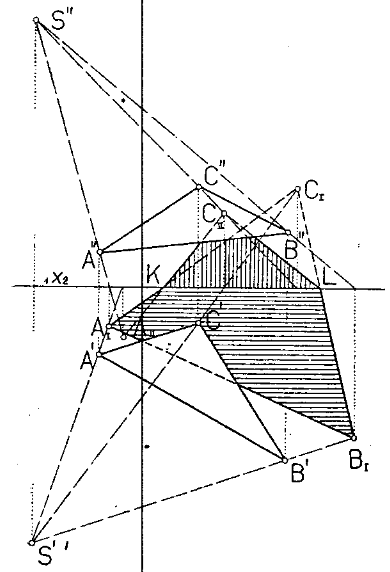
Sl 333.

Ako se u ravnini trokuta ABC uzme točka $D\,(D', D'')$ i njom položi zraka svijetla $s\,(s', s'')$, pa gledamo u smjeru $z \perp \Pi_2$, onda se vidi osjenjena strana trokuta. Budući da je $z \perp \Pi_2$, onda je i ravnina Σ položena zrakama s i $z \perp \Pi_2$, pa se njezin drugi trag podudara sa s''. Ta ravnina siječe trokut ABC u pravcu 1 2 (1′ 2′, 1″ 2″). Pravci s' i z' leže na različitim stranama tlocrta presječnice 1′ 2′, pa se prema tome u smjeru gledanja vidi osjenjena strana trokuta. Budući da gledamo u smjeru, koji je okomit na Π_2, vidi se u nacrtu osjenjena strana trokuta.

5. Zadatat. *Odredi bačenu sjenu kvadrata $ABCD$, koji je usporedan s Π_2!* (Sl. 332.).

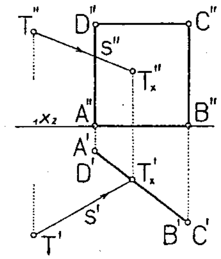
6. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu pravilnog šesterokuta $ABCDEF$, koji je usporedan s Π_1!* (Sl. 333.).

7. Zadatak. *Neka se odrede sjene trokuta ABC kod centralne rasvjete! Trokut je zadan svojim projekcijama $A'B'C'$ i $A''B''C''$, a izvor svijetla S svojim projekcijama S' i S''.* (Sl. 334.).



Sl. 334.

Rješenje. Zrake svijetla, koje izlaze iz točke S i sijeku stranice trokuta ABC čine piramidalnu površinu. Presjek te površine s Π_1 ili s Π_2 je bačena sjena trokuta na tim ravninama. Te su sjene dva trokuta $A_I B_I C_I$ i $A_{II} B_{II} C_{II}$. Točke A_I, B_I, C_I i A_{II}, B_{II}, C_{II} jesu bačene sjene vrhova trokuta ABC, a dobiju se kao probodišta zraka svijetla $SA\,(S'A', S''A'')$, $SB\,(S'B', S''B'')$,



Sl. 335.

$SC\,(S'C', S''C'')$ s Π_1 i Π_2. Jedan dio bačene sjene pada na Π_1, a drugi dio na Π_2. U tlocrtu i nacrtu vidi se osvijetljena strana trokuta.

§ 100. Bačena sjena lika na drugi lik

1. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu točke $T\,(T', T'')$ na vertikalni pravokutnik $ABCD$!* (Sl. 335.).

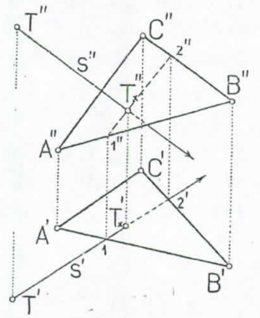
Rješenje. Tlocrt je pravokutnika $ABCD$ dužina $A'B'$ i u tu dužinu pada prvi trag ravnine pravokutnika. Položi li se točkom T zraka svijetla, ona siječe ravninu pravokutnika u točki T_x, koja je bačena sjena točke T na pravokutnik. Tlocrt T_x' mora biti u sjecištu pravaca $A'B'$ i s' (§ 40., t. 3.), a nacrt T_x'' na s''.

2. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu točke T na trokut ABC!* (Sl. 336.).

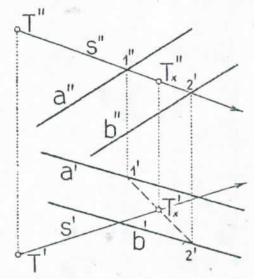
Rješenje. Točkom T položi se zraka svijetla $s\,(s', s'')$ i odredi sjecište $T_x\,(T_x', T_x'')$ te zrake s trokutom (§ 41., t. 1.). To je sjecište bačena sjena točke na trokut.

3. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu točke na ravninu, koja je zadana s dva usporedna pravca a i b!* (Sl. 337.).

Rješenje. Točkom T položi se zraka svijetla $s\,(s', s'')$ i odredi sjecište $T_x\,(T_x', T_x'')$ te zrake s ravninom (ab). (Isporedi § 41., t. 2.).



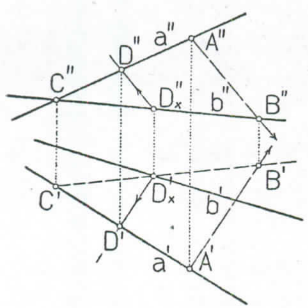
Sl. 336.



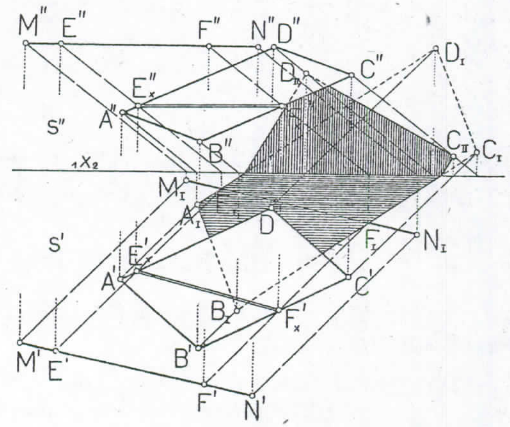
Sl. 337.

4. Zadatak. *Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b, neka se odredi bačena sjena pravca a na pravac b!* (Sl. 338.).

Rješenje. Pravcem a položi se ravnina $\mathbf{P}$ usporedno sa zrakama svijetla



Sl. 338.



Sl. 339.

i njom siječe pravac b u točki D_x. Ako se točkom D_x povuče zraka svijetla, ona siječe pravac a u točki D, koja baca sjenu na pravac b u točku D_x.

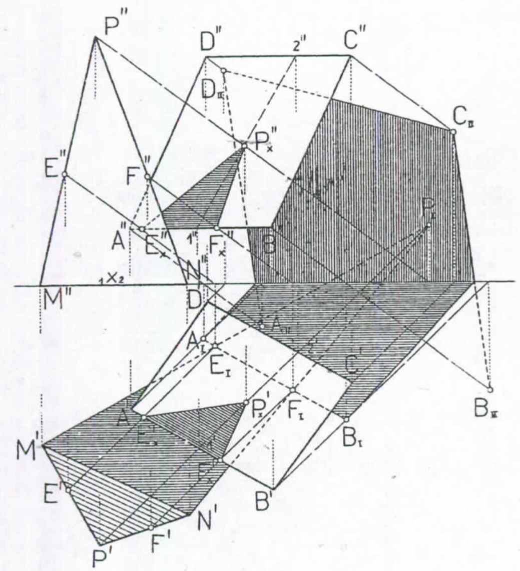
Konstrukcija: Kojomgod točkom $A\,(A', A'')$ pravca $a\,(a', a'')$ položi se zraka svijetla $s\,(s', s'')$. Pravcima a i s određena je ravnina $\mathbf{P}$. Položimo li pravcem b drugu ravninu prometalicu, ona ravninu $\mathbf{P}$ siječe u pravcu $BC\,(B'C', B''C'')$. Pravac BC siječe pravac b u točki $D_x\,(D_x', D_x''$ itd.

Na isti se način rješava i ovaj zadatak: Neka se odredi ona transverzala dvaju mimosmjernih pravaca a i b, koja je usporedna s trećim pravcem s. Ta se transverzala podudara s pravcem $DD_x\,(D'D_x', D''D_x'')$.

5. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu dužine MN na paralelogram $ABCD$!* (Sl. 339.).

Rješenje. I. Dužinom MN položi se ravnina svijetla i njom siječe paralelogram $ABCD$ u dužini E_xF_x. Ta je dužina bačena sjena dužine MN na paralelogram $ABCD$.

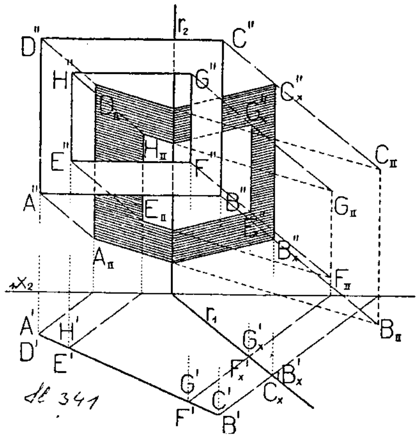
II. Na sl. 339. određena je bačena sjena $A_IB_IC_ID_I$ paralelograma $ABCD$ i bačena sjena M_IN_I dužine MN na Π_1. Dužina M_IN_I siječe međašnje stranice bačene sjene paralelograma u točkamu E_IF_I. Ako se tim točkama povuku pravci usporedno sa s' natrag, oni će stranice $A'D'$ i $B'C'$ sjeći u točkama E_x' i F_x', a dužinu $M'N'$ u točkama E' i F'. Pomoću ordinala odrede se E_x'', F_x''' E'' i F''. Te se točke mogu odrediti tako, da se točke E_I i F_I projiciraju na os x i od osi x povuku pravci usporedno sa s''. Na taj smo način odredili dio EF dužine MN, koji baca sjenu na paralelogram u dužinu E_xF_x.



Sl. 340.

6. Zadatak. *Odredi bačene sjene trokuta MNP i paralelograma $ABCD$ na Π_1 i Π_2, te bačenu sjenu trokuta na paralelogram!* (Sl. 340.).

Rješenje. Najprije se odredi bačena sjena trokuta i paralelograma na ravnine projekcija. Budući da je stranica MN trokuta u Π_1, ona je sama svoja sjena, pa je trokut $M'N'P_I$ bačena sjena trokuta MNP na Π_1. U tlocrtu je vidljiva ona strana trokuta, koja je u samosjeni. Vrh P trokuta baca sjenu na paralelogram u točku P_x (P_x', P_x''), koja se dobije kao sjecište zrake položene točkom P s ravninom paralelograma. Sjene $M'P_I$ i $N'P_I$ stranica trokuta MNP sijeku međašnje stranice bačene sjene paralelograma $ABCD$ na Π_1 u točkama E_I i F_I. Povuku li se tim točkama pravci usporedno sa s' dobit će se na $A'B'$ točke E_x' i F_x' i to na stranici $M'P'$ točka E', a na stranici $N'P'$ točka F'. Pomoću ordinala odrede se nacrti E'', F'', E_x'' i F_x''. Dužine EP i FP bacaju sjene na paralelogram u dužine E_xP_x i F_xP_x. Dio EFP trokuta MNP baca sjenu na paralelogram $ABCD$ i to u trokut $E_xF_xP_x$.



Sl. 341.

7. Zadatak. *Odredi bačenu sjenu pravokutnog okvira na ravninu* $\mathbf{P} \perp \Pi_1$ *i na* Π_2. *Okvir je okomit na* Π_1! (Sl. 341.).

Rješenje. Najprije se odredi bačena sjena okvira na Π_2 ($A_{II}B_{II}C_{II}$...), zatim bačena sjena jednog dijela okvira na ravninu $\mathbf{P}$ ($B_x'B_x''$, $C_x'C_x''$.....). Sjene okvira na Π_2 i na ravninu $\mathbf{P}$ sijeku se u tragu r_2.

8. Zadaci za vježbu

1. Odredi bačenu sjenu dužine na Π_1 i na Π_2!
a) $AB[A(2, 3, 2), B(6, 4, 5)]$, *b)* $CD[C(5, 4, 1), D(0, 3, 5)]$,
c) $EE[E(2, 2, 6), F(2, 5, 1)]$, *d)* $GH[G(0, 1, 2), H(0, 5, 6)]$,
e) $IJ[I(3, 4, 5), I(6, 1, 2)]$, *f)* $KL[K(3, 1, 0), L(1, 7, 7)]$.
Uzmi da je smjer zraka svijetla određen ovako:
a) $\sphericalangle(s'x) = \sphericalangle(s''x) = 45^0$, *b)* $\sphericalangle(s'x) = 30_0$. $\sphericalangle(s''x) = 45^0$,
c) $\sphericalangle(s'x) = 30^0$, $\sphericalangle(s''x) = 60^0$.

2. Odredi bačene sjene ovih dužina na ravnine projekcija:
a) $AB[A(1, 1, 1), B(4, 5, 5)]$, *b)* $CD[C(0, 4, 2), D(6, 2, 7)]$,
c) $EF[E(4, 4, 3), F(8, 9, 3)]$, *d)* $GH[G(3, 4, 1), H(3, 4, 5)]$.
Smjer zraka svijetla uzmi kao u prvom zadatku!

3. Odredi sjene likova, koji su prikazani na sl. 98—104!

4. Odredi sjene trokuta ABC na ravnine projekcija. Neka je: *a)* $A(0, 4, 3)$, $B(2, 8, 9)$, $C(0, 4, 8)$, *b)* $A(2, 7, 5)$, $B(4, 3, 4)$, $C(10, 5, 6)$!

5. Odredi sjene paralelograma $ABCD[A(3, 3, 6)\ B(7, 2, 1), C(10, 6, 4), D(—)]$!

6 Odredi sjene četverokuta $ABCD[A0, 2, 1), D(4, 6, 2), C(1, —, 4), C(3, —, 4)]$, koji je okomit na Π_1!

7. Odredi bačenu sjenu pravilnog peterokuta, koji je usporedan s Π_2!

8. Odredi bačene sjene likova iz vježbi 3—7 kod centralne rasvjete. (Projekcije izvora svijetla treba zgodno odabrati).

9. Odredi bačenu sjenu točke $T(T', T'')$ na ravninu, koja je zadana s dva ukrštena pravca!

10. Odredi bačenu sjenu točke $T(T', T'')$ na ravninu $\mathbf{P}$, koja je *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$, *c)* $\parallel x$, *d)* u općem položaju.

11. Zadana je dužina $MN[M(2, 2{,}5, 3), N(5, 6, 3)]$ i trokut $ABC[A(6, 0{,}5, 4), B(3{,}5, 3.5, 1{,}5), C(8, 5{,}5, 0{,}5)]$ odredi sve sjene, ako je smjer zrake svijetla zadan bačenom sjenom $M_I(6{,}5, 1{,}0)$ točke M!

12. Odredi bačenu sjenu dužine $MN[M(2, 2{,}5, 3), N(7, 5, 6)]$ na pravokutnik $ABCD[A(4, 4, 1), B(7, 4, 1), C(7, 2, 4), D(4, 2, 5)]$!

13. Odredi bačenu sjenu dužine $AB[A(3, 6, 2), B(6, 1, 7)]$, na ravninu $\mathbf{P}(5, —7{,}5, —5)$!

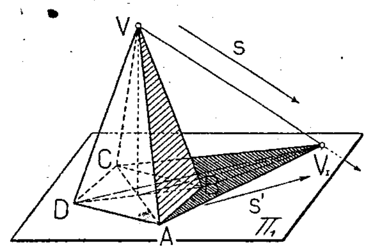
14. Odredi bačenu sjenu pravca $p[P(2)\ 0, 6)] \perp \Pi_2$ na ravninu $\mathbf{P}(—1, 1{,}5. 2{,}5)$, ako $\sphericalangle(s'x) = 45^0$, $\sphericalangle(s''x) = 30^0$!

15. Odredi sjene paralelograma $ABCD[A(B, 5, 1), B(4, 3, 4), C(7, 2, 5)]$, na ravninu $\Sigma(6, 8{,}5, —2.5)$ uz dijagonalnu rasvjetu!

16. Odredi bačenu sjenu paralelograma $ABCD[A(2, 1, 2), B(4, 5, 1), D(6, 1, 7)]$ na trokut $EFG[E(5, 0, 2), F(7, 6, 1), G(10, 4, 6)]$, na Π_1 i na Π_2 uz dijagonalnu rasvjetu!

§ 101. Sjene piramide

1. Objašnjenja. Ako je osnovka piramide u ravnini Π_1, onda su vrhovi te osnovke svoje sjene na Π_1. Preostaje još da se odredi bačena sjena V_I vrha V na Π_1. Spoji li se V_I s vrhovima osnovke, u te pravce padaju bačene sjene pobočnih bridova. Na sl. 342. dužine su AV_I, BV_I, CV_I i DV_I bačene sjene bridova AV, BV, CV i DV. Dužine AV_I i CV_I, koje dotiču osnovku, omeđuju bačenu sjenu piramide na Π_1, a jer su te dužine sjene bridova AV i CV, ti bridovi pripadaju rastavnici. Da se dakle odrede pobočni bridovi piramide, koji pripadaju rastavnici, postupa se ovako: Odredi se bačena sjena V_I vrha V piramide na ravninu osnovke i s V_I povuku pravci, koji dodiruju osnovku. Pobočni bridovi, koji idu dirnim vrhovima, jesu bridovi rastavnice.



Sl. 342.

Prema slici 342. pobočke su ABV i BVC u samosjeni, dok su ostale dvije pobočke rasvijetljene. Budući da je i osnovka u samosjeni, bridovi AD i CD također pripadaju rastavnici. Bridovi rastavnice piramide čine prostorni četverokut $VADCV$.

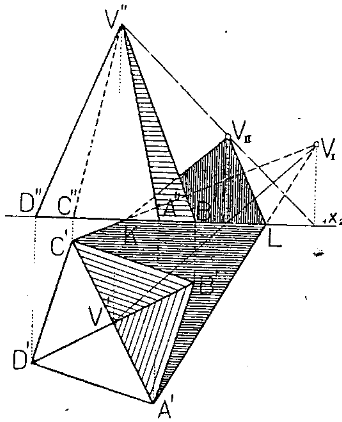
2. Zadatak. *Odredi sve sjene kvadratične piramide, kojoj je osnovka u* Π_1! (Sl. 343.).

Rješenje. Da se odredi bačena sjena piramide, povući će se vrhom V zraka svjetlosti i odredit će se oba njena probodišta V_I i V_{II}. Točkom

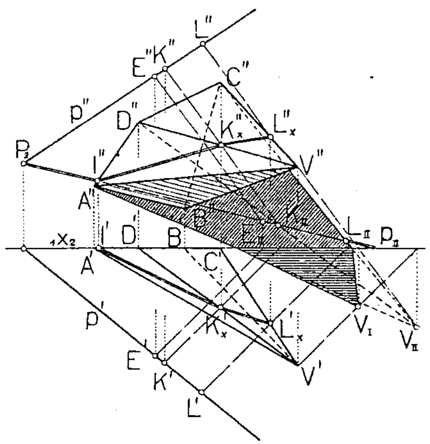
V_I povući će se pravci $V_I A'$ i $V_I C'$, koji dotiču kvadrat $A'B'C'D'$. Dio je ravnine Π_1 između dužina $A'V_I$ i $C'V_I$ u bačenoj sjeni piramide. Budući da se V_I nalazi iza Π_2, sjena na Π_1 pada samo do osi x i to do dužine KL, lomi se i dalje pada na Π_2 u trokut KLV_{II}.

Bridovi AV i CV pripadaju rastavnici, pa su pobočke ABV i BCV u samosjeni. U tlocrtu se vide obje te pobočke, a u nacrtu se vidi pobočka ABV. Budući da je i osnovka u samosjeni, to i bridovi AD i CD pripadaju rastavnici.

3. Zadatak. *Odredi samosjenu i bačenu sjenu četverostrane kose piramide, kojoj je osnovka u* Π_2, *zatim odredi bačenu sjenu pravca* $p\,(p', p'')$ *na tu piramidu!* (Sl. 344.).



Sl. 343.



Sl. 344.

Rješenje. Najprije se odredi bačena sjena vrha V na Π_1 i na Π_2 i s točke V_{II} povuku se pravci $V_{II}A''$ i $V_{II}C''$, koji dotiču četverokut $A''B''C''D''$. Prema tome pobočni bridovi AV i CV pripadaju rastavnici. U samosjeni se nalazi osnovka i pobočke ABV i BCV. Osnovni bridovi AD i DC pripadaju također rastavnici. Dio bačene sjene piramide pada na Π_1, a dio na Π_2.

Bačena se sjena pravca p na piramidu odredi na sličan način kao i bačena sjena pravca na trokut. Pravac može bacati sjenu samo na one plohe piramide, koje su u svijetlu, dakle na pobočke CBV i DAV, a ne može bacati sjenu na plohe, koje su u samosjeni. Na slici 344. odredili smo najprije bačenu sjenu p_{II} pravca p na Π_2. Ta sjena počinje u probodištu P_2 pravca p i ide bačenom sjenom E_{II} druge točke E toga pravca. Sjena p_{II} siječe osnovni brid $A''D''$ u točki I'', sjena pravca p na Π_2 pada

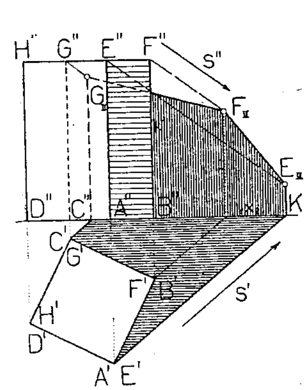
u dužinu $P_2 I''$, a onda pada na pobočke $A''D''V''$ i $D''C''V''$ u dužine $I''K_x''$ i $K_x''L_x''$. Da se dobije K_x'', povući će se točkom K_{II}, u kojoj p_{II} siječe bačenu sjenu $D''V_{II}$ brida DV, druga projekcija zrake svjetlosti natrag. Taj pravac siječe p'' u K'', a $D''V''$ u K_x''. Pomoću ordinala odredi se K' i K_x'. Točka K baca sjenu na brid DV u točku K_x. Ako se točkom L_{II}, u kojoj p_{II} siječe $C''V_{II}$, povuče zraka svijetla natrag, dobit će se na pravcu p točka L, koja baca sjenu na brid CV u točku L_x.

Bačena sjena pravca na piramidu mogla bi se odrediti i na taj način, da se tim pravcem položi ravnina usporedno sa zrakama svijetla i njom siječe piramida. Tada pravac baca sjenu na one stranice presjeka, koje su na osvijetljenim plohama piramide.

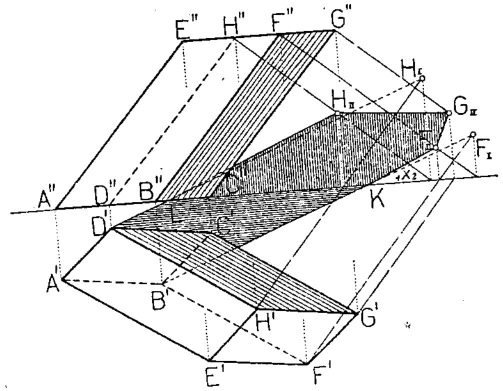
§ 102. Sjene prizme

1. Zadatak. *Odredi sve sjene uspravne kvadratične prizme, kojoj je osnovka u* Π_1! (Sl. 345.).

Rješenje. Budući da su pobočni bridovi prizme među sobom usporedni, njihove će bačene sjene na Π_1 (i na Π_2) biti među sobom usporedne.



Sl. 345.



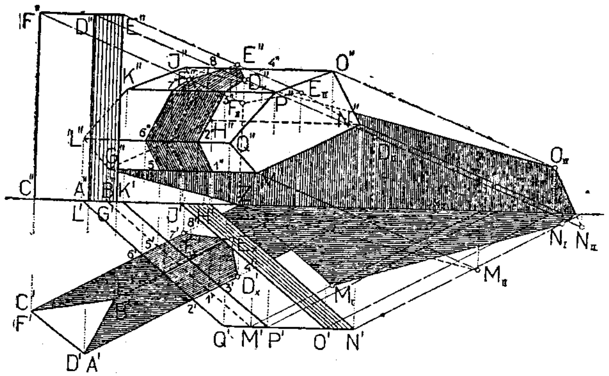
Sl. 346.

Budući da su ti bridovi okomiti na Π_1 njihove su bačene sjene na toj ravnini usporedne sa s', a počinju u točkama A', B', C' i D'. (Sl. 317.). Bačene sjene bridova AE u CG dotiču donju osnovku, pa čine među bačene sjene prizme na Π_1. Prema tome bridovi AE i CG pripadaju rastavnici. Sjene bridova BF i DF padaju unutar međa bačene sjene prizme, pa ti bridovi ne mogu pripadati rastavnici. Pobočke $ABEF$ i $BCGF$ te donja osnovka su u samosjeni, dok su ostale plohe osvijetljene. Prema tome rastavnici pripadaju osnovni bridovi AD, CD, EF i FG. Bridovi rastavnice prizme čine prostorni poligon $AEFGCDA$. Bačene sjene toga poligona na Π_1 i na Π_2 čine međe bačenih sjena prizme na tim ravninama. Bačene su sjene bridova AD i DC u samim bridovima, dok bridovi EF i FG bacaju sjenu na Π_2. Bačena sjena brida AE pada u pravac $A'K \parallel s'$ i $KE_{II} \perp x$, a sjena brida CG pada u pravac $C'L \parallel s'$ i $LG_I \perp x$. Dio bačene sjene prizme pada na Π_1, a drugi dio na Π_2. Jedan dio sjene na Π_2 pada iza prizme, pa se ne vidi.

2. Zadatak. *Odredi sjene četverostrane kose prizme, kojoj je donja osnovka u Π_1!* (Sl. 346.).

Rješenje: Vrhom $F(F', F'')$ položi se zraka svijetla i odrede probodišta F_I i F_{II} te zrake. Pravci $B'F_I$ i KF_{II} jesu tragovi ravnine svijetla položene bridom BF, odnosno ti su pravci bačene sjene brida BF na Π_1 i na Π_2. Bačene sjene bridova AE, CG i DH idu donjim vrhovima A', C', D', i usporedne su s pravcima $B'K$ i KF_{II}. Međe bačene sjene prizme na Π_1 jesu pravci $B'K$ i $D'L$, pa prema tome bridovi BF i DH pripadaju rastavnici. Toj rastavnici pripadaju i bridovi FG i GH, koji bacaju sjenu na Π_2 u pravce $F_{II}G_{II}$ i $G_{II}H_{II}$, zatim bridovi AD i AB, koji su sami bačena sjena. U samosjeni su donja osnovka i pobočke $BCGF$ i $CDHG$. Prva se pobočka vidi u nacrtu, a druga u tlocrtu.

§ 103. Bačena sjena uglastog tijela na uglasto tijelo



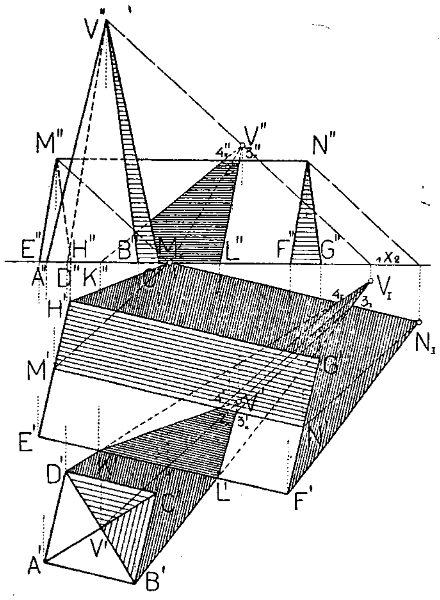
Sl. 347.

1. Zadatak. *Zadana je uspravna trostrana prizma, kojoj je osnovka u Π_1 i kosa peterostrana prizma, kojoj je osnovka u Π_2; odredi bačene sjene i samosjene tih prizama, te bačenu sjenu te uspravne prizme na kosu prizmu!* (Sl. 347.).

Rješenje: Najprije će se odrediti sjene kose prizme. Povuče li se točkom $M(M', M)''$ zraka svijetla i odrede se njena probodišta M_I i M_{II}, onda je pravac $G''M_{II}$ drugi, a ZM_I prvi trag ravnine svijetla položene bridom GM. U te tragove baca sjenu brid GM na Π_2 i na Π_1, a jer $G''M''$ dotiče osnovke kose prizme, taj je pravac međa bačene sjene prizme na Π_2, a brid GM brid rastavnice. Budući da su pobočni bridovi usporedni, usporedne su i sjene na istoj ravnini projekcija. Da se dobije drugi pobočni brid kose prizme, koji pripada rastavnici, povući će se pravac koji je usporedan s $G''M_{II}$ te dotiče osnovku prizme. Taj pravac ide točkom J'', pa prema tome brid JO pripada rastavnici. Njegova je sjena na Π_2 $J''O_{II}$. Rastavnici pripadaju još osnovni bridovi GL, LK, KJ te MN i NO. Bačene sjene ovih dvaju bridova omeđuju bačenu sjenu kose prizme na ravninama projekcija.

Sad se odrede sjene uspravne prizme na ravninama projekcija (§ 102. t. 1.), a zatim bačena sjena te prizme na kosu prizmu. Ravnine svijetla, položene bridovima AD i CF okomite su na Π_1, pa im prvi tragovi idu točkama A' i C' usporedno sa s'. Te ravnine sijeku osvijetljene pobočke kose prizme u likovima 1 2 3 4(1'2'3'4', 1''2''3''4'') i 5 6 7 8(5'6'7'8', 5''6''7''8''), kojima tlocrti leže u prvim tragovima onih ravnina svijetla. Na te likove bacaju sjenu pobočni bridovi AD i CF, te su dijelovi osvijetljenih pobočaka kose prizme, koji leže između tih likova u bačenoj sjeni uspravne prizme.

Budući da točke D_{II} i F_{II} (bačene sjene vrhova D i F na Π_2) padaju unutar međa bačene sjene kose prizme, slijedi da točke D i F bacaju sjenu na kosu prizmu i to u točke D_x i F_x, koje leže na pobočki $KJOP$. Nacrt zrake, koja ide točkom D'', siječe 3''4'' u D_x'', a nacrt zrake koja ide točkom F'' siječe 7''8'' u F_x''. Pomoću ordinala odrede se D_x' i F_x'. Dijelovi osnovnih bridova DE i EF također bacaju sjenu na pobočku $KJOP$. Da se nađu te sjene, odredit će se probodište $E_x(E_x', E_x'')$ zrake svijetla položene točkom E sa



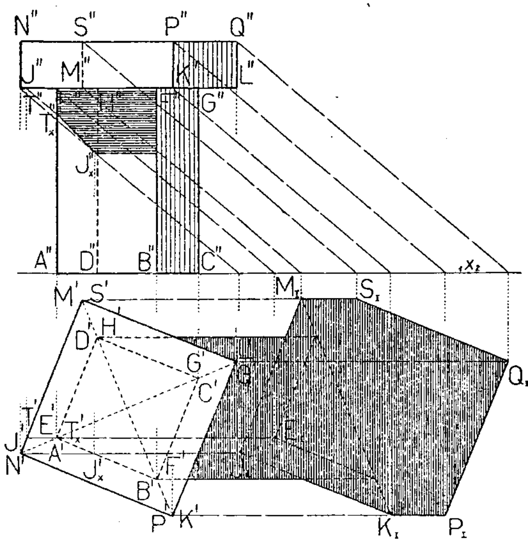
Sl. 348.

pobočkom $KJOP$, pa će se E_x' spojiti s D_x', F_x', a E_x'' s D_x'' i F_x''. Tad su dužine D_xE_x i F_xE_x bačene sjene bridova DE i FE na pobočku $KJOP$.

2. Zadatak. *Zadana je trostrana uspravna prizma, kojoj je jedna pobočka u* Π_1 *i kvadratična piramida, odredi samosjene i bačene sjene obaju tijela na ravnine projekcija, te bačenu sjenu piramide na prizmu!* (Sl. 348.).

Rješenje: Najprije se odrede bačene sjene prizme i piramide na ravnine projekcija. U samosjeni je osnovka FGN prizme, te pobočke $EFGH$ i $GHMN$, zatim osnovka piramide i pobočke BCV i CDV. Gornji je brid MN prizme usporedan s Π_1 i zato je $M_1N_1 \parallel M'N'$.

Piramida baca sjenu na Π_1 do dužine KL ($K'L'$, $K''L''$) na bridu EF($E'F'$, $E''F''$) prizme, lomi se u tom bridu i pada na prednju pobočku $EFMN$ do dužine 3_x4_x ($3_x'4_x'$, $3_x''4_x''$) na gornjem bridu MN($M'N'$, $M''N''$), a onda opet pada na Π_1. Da se odredi sjena V_x(V_x', V_x''), što je vrh V baca na prednju proširenu pobočku prizme, položit će se zrakom svijetla, koja ide vrhom V, ravnina okomito na Π_1 i tom će se ravninom sjeći



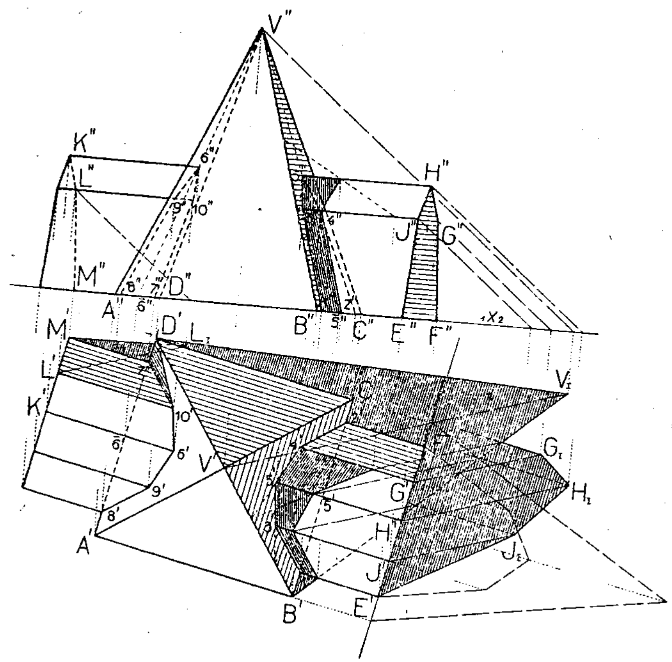
Sl. 349.

prednja pobočka u pravcu 1—2(1'2', 1''2''). Nacrt zrake svijetla položen vrhom V siječe 1''2'' u točki V_x'', dok V_x' leži na 1'2'. Spoji li se V_x s K i L, tada je dio trokuta KLV_x, koji leži na prednjoj pobočki, u bačenoj sjeni piramide.

Točke 3_x i 4_x mogle bi se dobiti i pomoću točaka 3_I i 4_I potezanjem zraka svijetla natrag.

3. Zadatak. *Kvadratična prizma, kojoj je osnovka u* Π_1, *pokrivena je kvadratičnom pločom. Odredi sve sjene, ako su zrake svijetla usporedna s* Π_2*!* (Sl. 349.).

Rješenje. Samosjena i bačena sjena prizme i prizmatičke ploče na Π_1 odredit će se na poznati način (§ 102., t. **1.**). Rastavnica je prizme prostorni poligon $BFGHDAB$, a prizmatičke ploče $KPQSMJK$. Bridovi JK i JM bacaju sjene na osvijetljene pobočke prizme. Zraka svjetla kroz točku J (J', J'') probada pobočku $ABEF$ u točki J_x (J_x', J_x''), pa je ova točka bačena sjena točke J na tu pobočku. Budući da je brid JK usporedan s pobočkom $ABEF$, njegova je bačena sjena na toj pobočki usporedna s tim bridom. Nacrt te sjene ide točkom J_x'' usporedno s $J''K''$.



Sl. 350.

Brid JM baca sjenu na obje osvijetljene pobočke prizme. Jedna točka T toga brida baca sjenu na brid AE u točku T_x, kojoj je tlocrt T_x' u A'. Povuče li se tom točkom tlocrt zrake svijetla natrag, on siječe $J'M'$ u T', a odredi li se T'' i tom točkom povuče nacrt zrake, dobit će se na bridu $A''E''$ točka T_x''. Dužina $T_x''J_x''$ je nacrt bačene sjene dužine TJ na pobočku $ABFE$. Točkom T_x'' ide nacrt sjene brida JM na pobočku $ADHE$ usporedno s $J''M''$. Zašto?

4. Zadatak. *Zadana je kvadratična piramida s osnovkom u* Π_1 *i uspravna peterostrana prizma, kojoj je jedna pobočka u* Π_1. *Odredi prodor i sve sjene tih dvaju tijela!* (Sl. 350.).

Rješenje: *a)* Prodor. Uzelo se, da je prednja donja pobočka prizme usporedna s pobočkom ABV, a stražnja donja pobočka prizme, da je usporedna s pobočkom CDV piramide. Ta se usporednost pobočaka udesi pomoću stranocrta, u kojemu se te pobočke prikažu kao usporedne dužine. Pomoću stranocrta prizme odredi se njen nacrt. Prednja i stražnja donja pobočka prizme sijeku pobočke BCV i ADV piramide u dužinama 1 3, 2 4, 7 10 i 8 9, koje su usporedne s pobočnim bridovima piramide. Odrede li se na poznati način sjecišta 5 (5′, 5″) i 6 (6′, 6″) najvišeg brida s piramidom, pa se povuku dužine (3′5′, 3″5″), (4′5′, 4″5″), (9′6′, 9″6″) i (10′6′, 10″, 6″), dobit će se projekcija prodornog poligona. Taj se poligon sastoji iz dva ravna poligona. Zašto su ti poligoni ravni?

b) Sjene. Najprije se odrede samosjene i bačene sjene obaju tijela na Π_1, a onda se odredi bačena sjena jednoga tijela na drugo. Brid BV baca sjenu na sve tri osvijetljene pobočke prizme. Sjena je toga brida na prednjoj donjoj pobočci usporedna s BV. Zašto? Bačene sjene brida BV na gornje dvije pobočke prizme odrede se iz presijecanja sjena na Π_1 brida BV i pobočnih bridova HK i GL. Sjene ovih bridova idu točkama H_I i G_I usporedno s $H'K'$ (zašto?) i sijeku sjenu $B'V_I$ brida BV u točkama, kroz koje se povuku zrake svijetla natrag. Te zrake sijeku bridove HK i GL u traženim točkama.

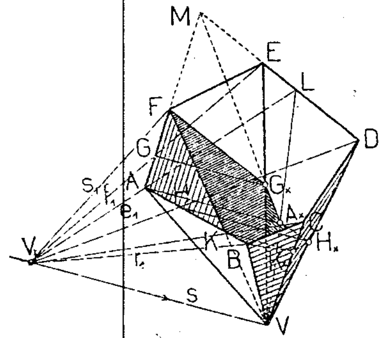
Brid $L10$ baca sjenu na pobočku ADV. Ta sjena počinje u tlocrtu u točki $10'$ i pada na pravac, koji spaja $10'$ sa sjecištem brida $A'D'$ i sjene brida GL na Π_1, koji zamislimo da je produžen preko L.

§ 104. Sjene na šupljoj piramidi i prizmi

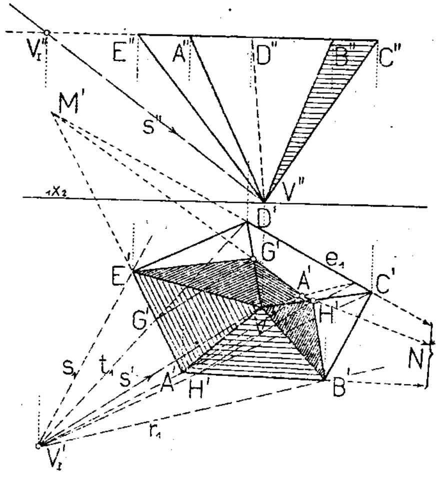
1. Sjene na šupljoj piramidi. Na sl. 351. nacrtana je skica šesterostrane šuplje piramide. Kroz vrh V položi se zraka svijetla s i odredi probodište V_I te zrake s ravninom osnovke. (U skici uzeto je V_I po volji). S točke V_I povuku se „tangente“ $V_IB \equiv r_1$ i $V_IF \equiv s_1$. Ravnina (sr_1) „dotiče“ piramidu u bridu BV, a ravnina (ss_1) u bridu VF. Ta dva brida pripadaju rastavnici. Pobočke piramide VBC, VCD, VDE i VEF izvana su u samosjeni, a s nutarnje strane su osvijetljene, dok su pobočke VBA i VAF izvana osvijetljene, a iznutra u samosjeni.

Bridovi AB i AF bacaju sjenu na one pobočke piramide, koje su s unutarnje strane osvijetljene. Ta sjena počinje u točki F, a svršava u točki

B. Da nađemo bačenu sjenu A_x točke A, položimo točkom A zraku svijetla usporedno sa s i potražimo probodište A_x te zrake s piramidom. Da se dobije to probodište, položit će se zrakom s i zrakom AA_x ravnina E. Trag je te ravnine $e \equiv V_1A$ i on siječe brid DE u točki L. Dužina je LV presjek pobočke VDE s ravninom E, a jer u toj ravnini leži zraka AA_x, ona siječe LV, dakle i pobočku VDE u točki A_x. Brid AF baca sjenu na pobočke VFE i VED, ta se sjena lomi na bridu VE u točki G_x. Da se dobije točka G_x, položit će se zrakom s i bridom VE ravnina Φ. Trag je te ravnine $f_1 \equiv V_1E$ i on siječe brid AF u točki G. Ako se tom točkom položi zraka svijetla, ona leži u ravnini Φ i siječe brid VE u točki G_x. Na sličan način odrede se sjene H_x i K_x točaka H i K brida AB na bridovima VD i VC. Međa je bačene sjene otvoreni poligon $FG_xA_xH_xK_xB$. Osnovka piramide, pobočka VDE i ravnina svijetla uzduž brida AF jesu tri ravnine, koje se sijeku u tri pravca, AF, DE i



Sl. 351.



Sl. 352.

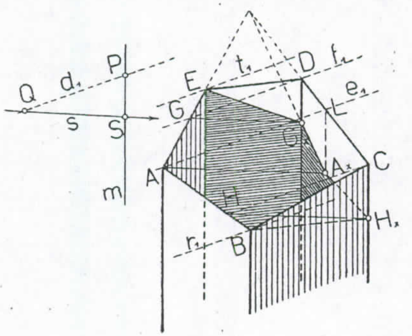
G_xA_x, koji prolaze istom točkom. Ako se prema tome produže osnovni bridovi AF i DE dok se ne sijeku u točki M, tom točkom ide bačena sjena G_xA_x brida AF na pobočku VDE, t. j. točke A_x, G_x i M moraju biti u istom pravcu. Na jednak bi se način našlo, da se pravci AB, CD i H_xK_x moraju sjeći u istoj točki. Isto tako i pravci AB, CD i H_xK_x prolaze istom točkom N.

2. Zadatak. *Neka se odrede sjene na peterostranoj šupljoj nepravilnoj piramidi, kojoj je osnovka usporedna s* Π_1! (Sl. 352.).

Rješenje. Vrhom V (V', V'') položi se zraka s (s', s'') i odredi probodište V_I (V_I', V_I'') te zrake s ravninom osnovke piramide. S točke V_I' povuku se dodirni pravci $r_1 \equiv V_I'B'$ i $s_1 \equiv V_I'E'$ na tlocrt osnovke. Bridovi

$BV(B'V', B''V'')$ i $EV(E'V', E'', V'')$ pripadaju rastavnici. Bridovi AB i AE bacaju sjene na pobočke VBC, VCD i VDE. Ta je sjena određena samo u tlocrtu na jednak način kao na sl. 351.

3. Sjene na šupljoj prizmi. Položimo li one dirne ravnine na prizmu usporedno sa zrakama svijetla, koje dodiruju prizmu u pobočnim bridovima, ti bridovi pripadaju rastavnici. Da odredimo smjer tragova d_1 tih ravnina, uzmemo bilo gdje točku S i njom položimo zraku svijetla i pravac m usporedno s pobočnim bridovima. Ta dva pravca određuju ravninu Δ, njezin trag d_1 ide probodištem pravaca m i s sa ravninom osnovke prizme. Povučemo li na osnovku prizme dva dodirna pravca r_1 i t_1 paralelno sa d_1, ti su pravci tragovi dodirnih ravnina prizme, koje su usporedne sa zrakama svijetla. Te ravnine dodiruju prizmu u pobočnim bridovima, koji idu točkom B, odnosno točkom E i oni pripadaju rastavnici. (Sl. 353.). Pobočke, kojima pripadaju pobočni bridovi AB i AE izvana su osvijetljene, a iznutra su u samosjeni, dok su ostale tri pobočke iznutra osvijetljene, a izvana u samosjeni.



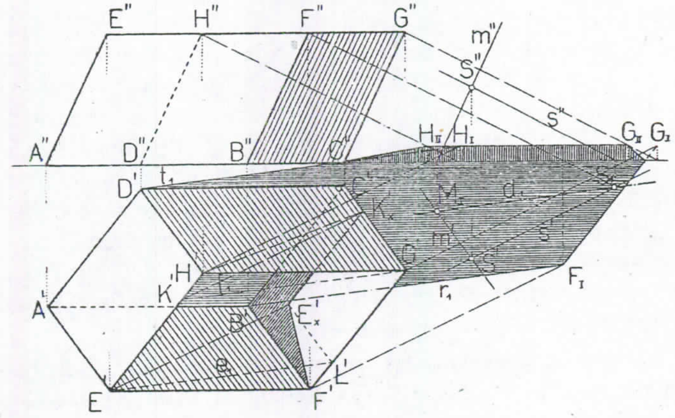
Sl. 353.

Bridovi AB i AE bacaju sjenu unutar prizme na osvijetljene pobočke. Da dobijemo točku A_x, u koju baca sjenu točka A, položimo ovom točkom zraku svijetla i njom siječemo prizmu u točki A_x. Da odredimo tu točku položimo zrakom AA_x ravninu $\mathrm{E} \parallel \Delta$. Trag e_1 te ravnine ide točkom A usporedno sa d_1 i siječe brid CD u točki L. Ravnina E siječe pobočku kojoj pripada osnovni brid CD u pravcu, koji ide točkom L usporedno s pobočnim bridovima prizme, a taj pravac siječe zraku AA_x u točki A_x.

Da dobijemo točku G brida AE, koja baca sjenu u točku G_x na pobočnom bridu, koji ide točkom D, položimo tim bridom ravninu $\Phi \parallel \Delta$. Trag f_1 te ravnine ide točkom D usporedno sa d_1 i siječe brid AE u točki G. Zraka svijetla položena točkom G leži u ravnini Φ i siječe pobočni brid kroz D u točki G_x. Na sličan način odredi se točka H brida AB, koja baca sjenu u točku H_x na pobočnom bridu kroz C. Ako spojimo redom točke E, G_x, A_x, H_x i B imamo bačenu sjenu bridova AB i AE.

4. Zadatak. *Neka se odrede sve sjene četverostrane kose šuplje prizme, kojoj je osnovka u* Π_1! (Sl. 354.).

R j e š e n j e. Na jednak način kao u t. 3. sl. 353. odredili smo sjene na četverostranoj kosoj šupljoj prizmi, kojoj je osnovka $ABCD$ u Π_1. Točkom $S(S', S'')$ položena je zraka svijetla $s(s', s'')$ i pravac $m(m', m'')$, koji je usporedan s pobočnim bridovima prizme. Pravcima s i m određena je ravnina Δ, koja je usporedna sa zrakama svijetla i s pobočnim bridovima prizme. Povuku li se pravci r_1 i t_1, koji dodiruju donju osnovku prizme



Sl. 354.

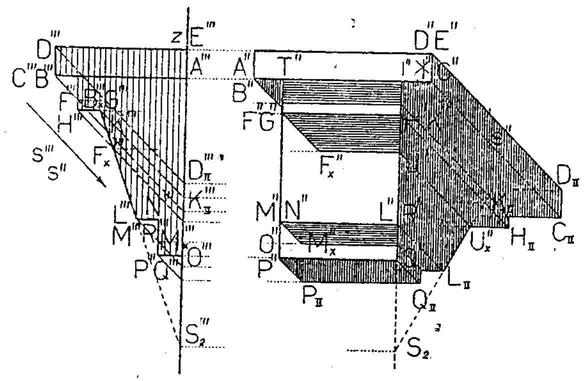
usporedno s d_1, ti su pravci prvi tragovi onih ravnina, koje su usporedne s ravninom Δ, dakle i sa zrakama svijetla i dodiruju prizmu u bridovima $BF(B'F', B''F'')$ i $DH(D'H', D''H'')$. Ti bridovi pripadaju rastavnici. Pobočke su prizme $ABEF$ i $ADHE$ osvijetljene izvana, a iznutra su u samosjeni, dok su ostale dvije pobočke iznutra osvijetljene, a izvana u samosjeni. Bridovi $EF(E'F', E''F'')$ i $EH(E'H', E''H'')$ bacaju sjenu na pobočke $BCGF$ i $CDHG$. Da se odredi tlocrt bačene sjene E_x' točke $E(E', E'')$, povuče se točkom E' pravac $E'E_x' \parallel s'$ i pravac $e_1 \parallel d_1$, gdje je e_1 trag ravnine E u ravnini gornje osnovke, koja ide točkom E usporedno s ravninom Δ. Pravac e_1 siječe $F'G'$ u točki L', a povuče li se tom točkom pravac usporedno s $B'F'$, on siječe $E'E_x'$ u točki E_x'. Dužina je $F'E_x'$ tlocrt bačene sjene brida EF na pobočku $BCGF$.

Povuče li se točkom G' pravac $f_1 \parallel d_1$, on siječe $E'H'$ u točki K', a povuče li se tom točkom pravac $K'K_x' \parallel s'$, on siječe $C'G'$ u točki K_x', koja je tlocrt bačene sjene točke K brida EH na brid CG. Tlocrt bačene sjene bridova EF i EH pada na dužine $F'E_x'$, $E_x'K_x'$, $K_x'H'$.

Na pravac r_1 pada sjena brida BF na Π_1, a na pravac t_1 pada sjena brida DH. Ako se još odredi bačena sjena bridova FG i GH na Π_1 i na Π_2, imamo bačene sjene kose prizme na ravnine projekcija.

§ 105. Konstrukcija sjena na praktičnim zadacima

1. Sjene konsole. (Sl. 355.). Konsola je zadana nacrtom i bokocrtom, a naslonjena je na zid, koji se podudara s $\prod_2$. Osim jedne prednje plohe konsole sve su ostale njene plohe usporedne ili s $\prod_1$, ili s $\prod_2$. Sjene su određene uz dijagonalnu rasvjetu, tako da je $s'' \parallel s'''$. Sve su donje horizontalne plohe, te desne vertikalne plohe konsole u samosjeni. Rastavnici pripadaju bridovi $ABCDE$, $GFHI$, $NMLR$, $OPQR$. Konsola baca sjenu na zid, a osim toga dijelovi konsole bacaju sjenu na samu konsolu. Međe bačene sjene na zid dobijemo, ako tražimo bačene sjene onih bridova, koji pripadaju rastavnici. Sjena brida ED na zid počinje u točki E'' i usporedna je sa s''. Točka D_{II} dobije se pomoću treće projekcije. Ako se točkom D''' povuče pravac usporedno sa s''', taj pravac siječe os z u točki D_{II}'''. Ordinala, koja ide tom točkom okomito na os z, siječe $D''D_{II}$ u točki D_{II}. Na taj način dobiju se točke $G_{II}, H_{II}, L_{II}, Q_{II}$ i P_{II}. Sjena brida AB počinje u A_{II} i usporedna je sa s''. Sjena brida OP počinje u O'', te $O''P_{II} \parallel s''$. Sjene su vertikalnih bridova CD, HI, QR također vertikalne i jednake tim bridovima. Sjene horizontalnih bridova BC, FH, i PQ usporedne su i jednake tim bridovima. Samo dijelovi sjena nekih vertikalnih bridova čine međe bačene sjene konsole na zidu.

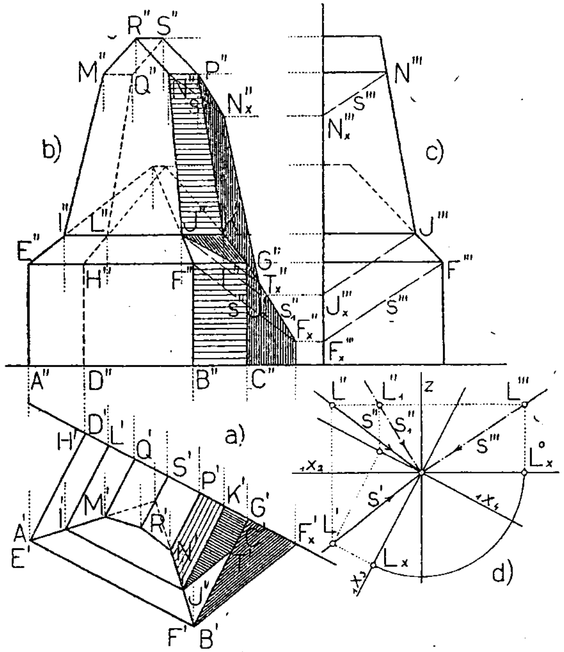


Sl. 355.

Brid BC baca sjenu djelomice na prednju plohu konsole $TFHI$, a djelomice na zid desno. Obje te sjene usporedne su s $B''C''$. Sjene na konsoli nalaze se u visini točke B_x'''.

Bridovi GH i FH bacaju sjenu na kosu plohu $MLKF$. Sjena brida ide točkom G'' i usporedna je sa s''. Sjena F_x'' točke F dobije se pomoću bokocrta. Točkom F_x'' ide sjena brida FH usporedno sa $F''H''$. Dio sjene toga brida pada desno na zid i ide točkom H_{II}. Sjena brida MN na prednju plohu donjeg dijela konsole počinje u N'' i usporedna je sa s''. Točka M_x'' dobije se pomoću bokocrta. Dio sjene brida ML pada na spomenutu prednju plohu i ide točkom M_x'' usporedno s $M''L''$, a dio sjene pada na zid i ide točkom L_{II}. Bačena sjena $L_{II}K_{II}$ kosog brida LK na zid ide probodištem S_2 toga brida zidom.

2. Konstrukcija sjena spomenika pomoću nacrta i stranocrta. Na sl. 356. nacrtan je tlocrt, nacrt i bokocrt spomenika, koji je naslonjen na vertikalnu stijenu $\prod_4$, koja sa $\prod_2$ čini $\sphericalangle \alpha = 30^0$. Spomenik je projiciran

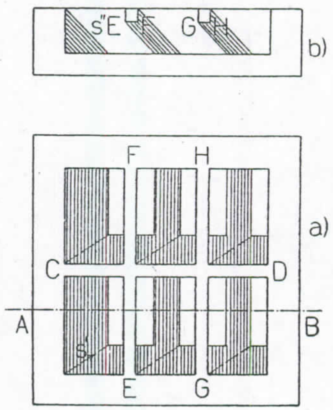


Sl. 356.

na ravninu $\prod_3$, koja je okomita na $\prod_2$ i na $\prod_4$, zatim je ravnina $\prod_3$ zaokrenuta oko nekog vertikalnog pravca za $90^0 + \alpha$. Na taj se način dobio stranocrt kako je prikazan na slici 356. c. Zraka svijetla s zadana je tlocrtom s' i nacrtom s'' (sl. 356. d), zatim je zraka projicirana na stijenu $\prod_4$ u pravac s_1''. Napokon je zraka projicirana na ravninu $\prod_3$, zatim je ta ravnina okrenuta oko osi z (sl. 356. d) za kud $90^0 + \alpha$, tako da se dobio stranocrt s''' zrake svijetla.

Za konstrukciju bačene sjene spomenika na stijenu mogao bi se upotrebiti samo nacrt (sl. 356. b), ili tlocrt i nacrt (sl. 356. a i b) ili nacrt i stranocrt (sl. 356. b i c).

Rastavnici pripadaju bridovi BF, FG, KJ, JN i NP. (sl. 356 b). Sjena brida FG na stijenu Π_4 počinje u G'' i usporedna je sa s_1'' a svršava u točki F_x''. Ova se točka dobije tako, da se točkom G'' povuče pravac paralelan sa s_1'', a točkom F'' pravac paralelan sa s'', oba se ta pravca sijeku u točki F_x''. Sjena brida BF na stijeni ide točkom F_x'' usporedno s $F''B''$. Točka F_x'' mogla bi se dobiti pomoću treće projekcije tako, da se točkom F''' povuče pravac paralelan sa s''', koji daje treću projekciju F_x''' sjene točke F na zidu. Točke F_x'' i F_x''' leže na istoj visini, pa ako se točkom F_x''' povuče pravac usporedno s osi ${}_1x_2$ on siječe pravac s'', koji je potegnut točkom F'', ili pravac s_1'', koji je potegnut točkom G'', u točki F_x''. Na jednak način mogu se odrediti druge projekcije J_x'' i N_x'' bačenih sjena točaka J i N na stijenu Π_4. Sjena brida KJ pada u pravac $K''J_x'' \parallel s_1''$, a sjena brida PN pada u pravac $P''N_x'' \parallel s_1''$. Sjena brida JN pada u pravac $J_x''N_x''$. Sjena $G''F_x''$ i $J_x''N_x''$ presijecaju se u točki T_x'', pa ako se tom točkom povuče pravac $\parallel s''$, on siječe $G''F''$ u točki T''. Spojimo li J'' sa T'' imamo među bačene sjene brida JN na kosu plohu $FGKJ$.



Sl. 357.

3. Sjene kvadratičnog ormarića. Na sl. 357. a) nacrtan je tlocrt kvadratičnog ormarića, a u sl. 357. b) nacrt uzdušnog presjeka AB tog ormarića. Ormarić ima stijene i dno, zatim jedno uzdužno rebro CD, koje seže do dna ormarića, i dva poprečna rebra EF i GH, koji imadu oblik kvadratične prizme, kako se vidi u nacrtu.

Na sl. 357., konstruirane su bačene sjene stijena i rebara ormarića, koje padaju unutar toga ormarića. U tlocrtu se uzelo, da je ormarić čitav, a u nacrtu se uzelo, da je otstranjen prednji dio ormarića do presjeka AB. Smjer zrake svijetla zadan je tlocrtom s' i nacrtom s''.

4. Zadaci za vježbu

1. Odredi sjene piramida, koje su prikazane na slikama 118, 119, 121—123!
2. Odredi sjene piramida, koje su zadane § 30. t. 2. zad. 9—14!
3. Odredi bačenu sjenu dužine $MN\,[M(3, 1, 3),\ N(8, 5, 6)]$ na pravilnu šesterostranu piramidu, kojoj je vrh $V(6, 7, 3)$ a osnovka $ABCDEE\,[A(3, 0, 5)]$ u Π_2!

4. Odredi sjene prizama prikazanih na sl. 111, 113—117!
5. Odredi sjene prizama, koje su zadane u § 30. t. 2. zad. 1—3, 5—8!
6. Odredi sjenu pravca $p\,[P_1(1, 7, 0),\ P_2(6, 0, 7)]$ na peterostranu kosu prizmu, kojoj je osnovka pravilan peterokut $ABCDE\,[A(4, 0{,}5, 0)$, središte osnovke $S(4, 3, 0)]$ u Π_1, te $A\overline{A}\,[\overline{A}(10, 2, 6)]$ pobočni brid!
7. Odredi bačenu sjenu paralelograma $MNPR\,[M(0, 5, 7),\ N(1{,}5, 7, 7),\ P(1, 9, 4)]$ na peterostranu pravilnu prizmu, kojoj je osnovka $ABCCE\,[A(5, 2, 0)$ središte osnovke $S(5, 5, 0)]$ a vrh $A(5, 2, 6)$. Smjer zraka svijetla određen je sjenom $R_I(4, 5, 0)$ točke R!
8. Zadana je četverostrana kosa prizma, kojoj je osnovka $ABCD\,[A(5, 3, 0),\ B(4, 6, 0),\ D(10, 5, 0)]$, vrh gornje osnovke $\overline{A}(9, 1, 4)$ zatim trokut $MNP\,[M(4, 10{,}5, 5{,}5),\ P(6, 6, 5)]$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svijetla određen sjenom $\overline{A}_I(14, 0, 0)$ točke $\overline{A}$!
9. Osnovka je kosog paralelepipeda pravokutnik $MNPR\,[M(6, 3, 0),\ N(9, 1, 0),\ NP = 2]$, a vrh gornje osnovke $\overline{M}(8, 8, 5)$. Vrh je kvadratične piramide $V(2, 5, 7)$, a osnovka kvadrat $ABCD\,[A(0, 6, 0)]$. Odredi sve sjene!
10. Osnovka je kosog paralelepipeda kvadrat $ABCD\,[A(2, 3, 0),\ B(3{,}5, 1, 0)]$, vrh gornje osnovke $\overline{A}(2, 7, 7)$. Osnovka je osmerostrane pravilne piramide u Π_2, vrh joj je $V(9, 8, 4)$, a vrh na osnovci $M(5{,}5, 0, 4)$. Odredi sve sjene!
11. Pobočka je peterostrane piramide $AB\overline{B}\,\overline{A}\,[A(10, 1, 0),\ O\overline{A}(16, 7, 0)]$ u Π_1, a polumjer osnovci opisane kružnice $r = 2{,}5$. Osnovka je kvadratične piramide $MNPR\,[M(5, 6, 0)]$, a vrh $V(7, 9, 10)$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svjetlosti zadan sjenom $V_I(19, 2, 0)$ vrha V!
12. Zadana je kvadratična prizma, kojoj je osnovka $ABCD\,[A(0, 5, 0),\ C(6, 7, 0)]$ u Π_1, a visina $v = 5$. Na toj prizmi leži šesterokutna pravilna ploča tako, da vertikalne osi obih prizama padaju zajedno, te je jedna vršna točka ploče $M(-0{,}5, 9, 5)$, a visina $V = 1$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svjetlosti određen bačenom sjenom $M_I(5, 1, 0)$!
13. Na šesterostranoj krnjoj piramidi leži kvadratična ploča tako, da im osi padaju u isti pravac. Veća je osnovka krnje piramide u Π_1, te joj je vrh $A(6, 1{,}5, 0)$, središte $S(7, 5, 0)$. Visina je potpune piramide $v = 8$, a krnje $v_1 = 6$. Jedan je vrh donje osnovke ploče $M(2, 2, 6)$, a visina $v_2 = 1{,}5$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svjetlosti zadan sjenom $V_I(15, -4, 0)$ vrha V potpune piramide!
14. Odredi sve sjene na slikama 301, 304, 306—315; smjer zraka svjetlosti odaberi tako, da budu sjene što zgodnije!
15. Odredi prodor i sjene na tijelima, koja su zadana u § 95., t. 4., zad. 1—20!
16. Odredi sve sjene šuplje i otvorene osmerostrane pravilne piramide, kojoj je osnovka usporedna s Π_1! Središte je osnovke $S(4, 5, 7)$, jedan vrh osnovke $A(1, 5, 7)$ vrh piramide $V(0, 6, 0)$. Zraka svijetla: $\sphericalangle(s'x) = 45^0$, $\sphericalangle(s''x) = 30^0$.
17. Zadana je šuplja i otvorena pravilna šesterostrana piramida, kojoj je osnovka usporedna s Π_2 [središte osnovke $S(0, 6, 4)$, $A(-2, 6, 3)$, vrh V u Π_2], nadalje je zadana dužina $MN\,[M(0, 2, 1),\ N(0, 7, 5)$, koja probada plašt piramide. Odredi sve sjene, ako projekcije usporednih zraka svijetla čine s osi x kutove od 30^0!
18. Zadana je peterostrana pravilna piramida, kojoj jedna pobočka leži u Π_1 tako, da joj je vrh $V(5, 2, 0)$, da je jedan osnovni brid $AB = 4\,cm$ i usporedan s osi x i da su dužine pobočnih bridova $= 8\,cm$. Odredi sve sjene uzevši da je piramida šuplja!
19. Zadana je šuplja gore otvorena piramida, kojoj je osnovka pravilan šesterokut [središte osnovke $S(1, 5, 8)$, $A(0, 8, 8)$, vrh $V(6, 8, 1)$], koji je usporedan s Π_1. Paralelogram $MNPR\,[M(5, 9, 7),\ N(0, 9, 3),\ P(-2, 1, 7)$ siječe piramidu. Odredi presjek i sve sjene!
20. Zadan je šuplji gore otvoreni paralelepiped, kojemu je donja osnovka pravokutnik $ABCD\,[A(0, 3, 0),\ B(7, 1, 0),\ BC = 2\,cm]$ i kojoj je pobočni brid $AE\,[A(5, 8, 5)]$. Odredi sve sjene!

21. Zadana je šuplja sprijeda otvorena kosa prizma, kojoj je osnovka pravilan šesterokut $ABCDEF[A(0, 0, 2)\ B(2, 0, 1)]$ u Π_2, i kojoj je pobočni brid $AG\ [G(6, 5, 4)]$. Odredi sve sjene!

22. Jedna je dijagonala kocke okomita na Π_1, oduzmi joj gornja tri kvadrata i odredi sjene na donjem dijelu te kocke!

23. Jedna je strana ikoseadra u Π_1, oduzmi tom tijelu gornju polovicu i odredi sve sjene na donjem dijelu!

24. Jedna je strana dodekaedra u Π_1, oduzmi gornju polovinu toga tijela i odredi sve sjene donje polovice!

25. Zadana je šesterostrana pravilna prizma i šesterostrana pravilna piramida. Osnovka je piramide $ABCDEF[A\ (1, 9, 2)]$ usporedna s Π_2, vrh je $V(0, 0, 6)$ te je V'' središte nacrta osnovke. Prizma stoji na Π_1, te je središte osnovke $M(0, 5, 0)$, jedan vrh te osnovke $P(2, 6, 0)$, visina je prizme $= 11 cm$. Odredi prodor i sve sjene tih dvaju tijela i kod toga uzmi da je:

a) piramida bez osnovke i šuplja, a prizma masivna,

b) prizma gore otvorena i šuplja, a piramida masivna.

26. Zakreni tijela prikazana u slikama 354. — 357., kao na pr. na sl. 356. i odredi sve sjene!

27. Isijeci na sl. 357. desnu prednju četvrtinu i odredi sve sjene!

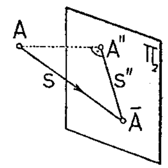
28. Zakreni tijelo prikazano na sl. 355. na način kao na sl. 356. i odredi sve sjene!

XX. Kosa projekcija

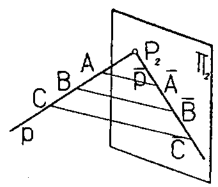
§ 106. O kosom projiciranju

1. Svrha kosog projiciranja. Razne skice, na kojima smo objašnjavali prostorne odnose između točaka, pravaca i ravnina (na pr. sl. 1, — 18., 19, 22, 25, 27, 31, 33 34, 41, 43, . . . 109, . . . 184, . . . 211, . . .), zatim razna tijela crtali smo u kosoj projekciji (isp. § 2. t. **1.**). Te smo slike crtali od oka, a nismo ni spominjali, da su crtane u kosoj projekciji, niti smo iznosili pravila, po kojima se takove slike crtaju. Ako se isporede slike kocke, koja je na sl. 364. nacrtana u kosoj projekciji, a na sl. 113 u ortogonalnoj projekciji, odmah se obzirom na zornost opaža velika razlika između tih dviju slika. Tijelo je u kosoj projekciji mnogo zornije prikazano, nego li u ortogonalnoj. Zbog te zornosti tijela se i prikazuju u kosoj projekciji i tumače geometrijski odnosi između geometrijskih tvorevina.

2. Kosa projekcija točke. Ravnina slike Π_2 obično se uzima u vertikalnom položaju (sl. 358.). Ako se s točke A spusti okomica AA'' na Π_2, onda je nožište A'' te okomice **ortogonalna projekcija** točke A na Π_2. Povuče li se točkom A zraka projiciranja s koso prema ravnini Π_2, onda se probodište $\overline{A}$ te zrake s ravninom Π_2 zove **kosa projekcija** točke A na ravninu Π_2. Kosa je projekcija točke opet točka. Ako se zraka projiciranja s smatra zrakom svijetla, onda se kosa projekcija $\overline{A}$ može smatrati bačenom sjenom točke A na Π_2.



Sl. 358.

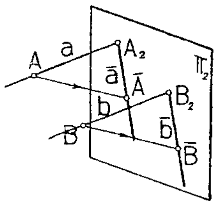


Sl. 359.

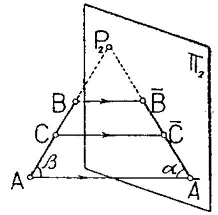
3. Kosa projekcija pravca. Na sl. 359. zadana je ravnina Π_2 i pravac p, koji siječe Π_2 u točki P_2. Ako se kroz pojedine točke $A, B, C, \ldots$ pravca p polože zrake projiciranja, koje su među sobom usporedne i kose prema Π_2, a sijeku Π_2 u točkama $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$, te su točke kose projekcije točaka $A, B, C, \ldots$ Točka P_2 ima svoju kosu projekciju u istoj točki. Linija $\overline{p}$, koja spaja točke $P_2, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$ je kosa projekcija pravca p na ravnini Π_2. Budući da pravac p i zrake projiciranja $A\overline{A}, B\overline{B}, C\overline{C}, \ldots$ leže u istoj ravnini (ravnina projiciranja), u toj ravnini leži i linija $\overline{p}$, a jer je $\overline{p}$ presječnica ravnine Π_2 s ravninom projiciranja, vidi se da je $\overline{p}$ pravac.

Kosa projekcija pravca na ravnini opet je pravac. Da se dobije kosa projekcija pravca dovoljno je da se odredi kosa projekcija dviju točaka.

4. **Kosa projekcija usporednih pravaca.** Na sl. 360. nacrtana je ravnina Π_2 i dva usporedna pravca a i b. Ako se kroz svaki taj pravac položi po jedna ravnina projiciranja tako, da su te ravnine među sobom usporedne i prema Π_2 kose, one sijeku Π_2 u dva usporedna pravca $\bar{a}$ i $\bar{b}$ (§ 3. t. 8., 4), koji su kose projekcije pravaca a i b na ravnini Π_2.



Sl. 360.



Sl. 361.

Kose su projekcije dvaju usporednih pravaca na ravnini Π_2 opet dva među sobom usporedna pravca.

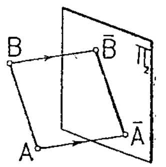
5. **Kosa projekcija dužine.** Dužina $\bar{A}\bar{B}$ (sl. 361.) je kosa projekcija dužine AB na na ravnini Π_2. *Kosa projekcija dužine opet je dužina.*

Ako točka C dijeli dužinu AB u omjeru $m:n$ tako, da je $AC : CB = m : n$, onda je također $\bar{A}\bar{C} : \bar{C}\bar{B} = m : n$. (Dokaži to.).

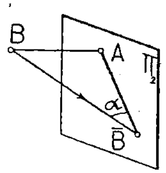
6. **Veličina kose projekcije dužine.** Lik $A\bar{A}\bar{B}B$ je trapez, u kojemu su stranice $A\bar{A}$ i $B\bar{B}$ osnovice, a AB i $\bar{A}\bar{B}$ kraci. Označimo kutove na osnovici s α i β. Ako je $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$, onda je trapez $A\bar{A}\bar{B}B$ istokračan, pa je $\bar{A}\bar{B} = AB$. Ako je $\sphericalangle\alpha < \beta$, onda je $\bar{A}\bar{B} > AB$, a ako je $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, onda je $\bar{A}\bar{B} < AB$. *Kosa projekcija dužine može biti jednaka dužini u prostoru, može biti manja od te dužine, a može biti i veća.*

Ako se na usporednim pravcima a i b (sl. 360.) uzmu dvije dužine A_2A i B_2B, onda je $\Delta A\bar{A}A_2 \backsim \Delta B\bar{B}B_2$, odakle slijedi da je $\bar{A}A_2/AA_2 = \bar{B}B_2/BB_2 = n$. *Omjeri između projekcija paralelnih dužina i prave veličine pripadne dužine imaju konstantnu vrijednost.*

7. **Kosa projekcija dužine, koja je usporedna s Π_2.** Na sl. 362. zadana je ravnina slike Π_2 i dužina AB paralelno s Π_2. Ako se kroz dužinu AB položi ravnina projiciranja, ona siječe Π_2 u pravcu $\bar{A}\bar{B}$, koji je usporedan s AB (§ 9. t. 7., 4). Budući da je $A\bar{A} \parallel B\bar{B}$ i $\bar{A}\bar{B} \parallel AB$, lik je $\bar{A}\bar{B}BA$ paralelogram, odakle slijedi da je $\bar{A}\bar{B} \,\#\, AB$.



Sl. 362.



Sl. 363.

Ako je dužina usporedna s ravninom slike, njezina je kosa projekcija na toj ravnini usporedna s dužinom u prostoru i jednaka toj dužini.

8. **Dužina je u ravnini slike.** *Ako je dužina u ravnini slike, njezina je kosa projekcija u samoj toj dužini.*

9. **Dužina je okomita na ravninu slike.** Na sl. 363. zadana je ravnina Π_2 i dužina AB, koja je okomita na Π_2, i kojoj je točka A u Π_2.

Ako se nacrta kosa projekcija $\bar{B}$ točke na Π_2, onda je dužina $A\bar{B}$ kosa projekcija dužine AB na Π_2.

Veličina projekcije dužine AB zavisi o priklonom kutu α zrake projiciranja $B\bar{B}$ prema Π_2. Trokut je $BA\bar{B}$ kod A pravokutan (isp. § 3. t. **10.**, 4). Ako je prema tome $\sphericalangle\alpha \lesseqgtr 45^0$, onda je $A\bar{B} \gtreqless AB$.

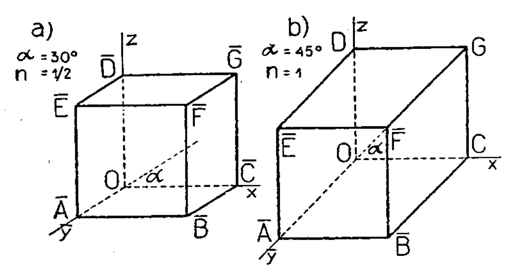
Ako je dužina okomita na ravninu slike, onda njezina kosa projekcija može biti jednaka veličini dužine u prostoru, ili veća ili manja od te dužine prema tome, da li je prikloni kut zraka projiciranja $\alpha \lesseqgtr 45^0$.

10. **Kosa projekcija kuta.** Kut se projicira koso na ravninu Π_2 u pravoj veličini, kad su mu oba kraka usporedna s tom ravninom. (Dokaži to!). U svakom je drugom slučaju kosa projekcija kuta manja ili veća od kuta u prostoru.

11. **Oznake.** Ako su točke u prostoru označene s A, B, C, ... njihove se kose projekcije označuju s $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, ... Ako su pravci u prostoru označeni sa a, b, c, ... njihove se kose projekcije označuju sa $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ...

§ 107. Pravila za crtanje kose projekcije

1. **Kosa projekcija kocke.** Na sl. 364. nacrtane su kose projekcije dviju kocaka. Uzelo se da je pobočka $OCGD$ u ravnini slike, pa se zbog toga ta pobočka projicira u pravoj veličini. Bridovi OA, CB, GF i DE usporedni su među sobom i jednaki, pa su i njihove projekcije među sobom usporedne i jednake dužine t. j. $O\bar{A} \,\#\, C\bar{B} \,\#\, G\bar{F} \,\#\, D\bar{E}$. Na sl. 364 a. uzelo se, da se ti bridovi projiciraju umanjeno na polovicu, t. j. da je $O\bar{A} = C\bar{B} = G\bar{F} = D\bar{E} = \frac{1}{2}\, O\,C$,



Sl. 364.

a na sl. 364 b.) da je $O\bar{A} = C\bar{B} = G\bar{F} = D\bar{E} = OC$. Prednja je pobočka kocke usporedna s ravninama slike, pa se projicira u pravoj veličini. Gornja i donja osnovka, te lijeva i desna pobočka kocke projiciraju se na sl. 364. a kao romboidi, a na sl. 364 b kao rombovi. Pravi kutovi tih ploha (kvadrata) projiciraju se jedni kao oštri, a drugi kao tupi kutovi

Najbrže i najlakše nacrtat će se kosa projekcija kocke tako, da se najprije nacrta prednja pobočka t. j. kvadrat $ABEF$, zatim se vrhovima toga kvadrata potegnu usporedne poluzrake $\bar{A}O$, $\bar{B}C$, $\bar{F}G$, $\bar{E}D$ i na njih prenesu jednake dužine, t. j. $\bar{A}O = \bar{B}C = \bar{F}G = \bar{E}D$, koje su $\leqq \bar{A}\bar{B}$, i nacrta stražnji kvadrat $OCGD$.

2. Osi kose projekcije. Tri brida OC, OA i OD kocke, koji izlaze iz vrha O i stoje među sobom okomito, uzimaju se kao osi kose projekcije. Te se osi označuju sa x, y, z. Nadalje se uzima da osi x i z čine ravninu slike Π_2 i da os x ima horizontalan, a z vertikalan položaj, zbog čega je i na slici $z \perp x$. Os y projicira se u pravac $\bar{y}$ koji s osi x čini kut α.

Iz sl. 364. vidi se ovo: Bridovi kocke, koji se nalaze u osi x ili z i bridovi, koji su usporedni s jednom ili drugom tom osi, projiciraju se koso na ravninu $xz \equiv \Pi_2$ usporedno s jednom ili drugom osi i u pravoj veličini. Bridovi koji su u osi y i bridovi koji su s tom osi paralelni, okomiti su na ravnini Π_2 i projiciraju se koso na ravninu Π_2 kao usporedne među sobom jednake dužine, i to ili u pravoj veličini ili umanjeno ili povećano. Veličina, kao i smjer kose projekcije tih bridova, zavisi o smjeru zrake projiciranja.

3. O veličini kuta α. Prikrata. O veličini kuta α, koga čini produžena os $\bar{y}$ sa osi x, zavisi ljepota kose projekcije tijela. Da se dobiju slike, koje će činiti ugodan dojam i koje će se lako konstruirati, uzima se da je $\alpha = 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0$ ili 150^0. Na slici 364. a uzelo se da je $\alpha = 30^0$, a na sl. 364. b da je $\alpha = 45^0$.

Ljepota slike zavisi također i o veličini kose projekcije bridova, koji su usporedni sa osi y. Na slici 364. a kose projekcije tih bridova prikraćene su na polovicu, a na sl. 364. b prikazani su ti bridovi u pravoj veličini. Ako se isporede obje te slike obzirom na njihovu ljepotu vidi se, da je prva slika ljepša nego li druga.

Veličina omjera između dužine $O\bar{A}$ i prave veličine OA označuje se sa n, te se piše $n = O\bar{A}/OA$. Obično se uzima da je $n = 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 1$. Najljepše se slike dobiju, ako je $\alpha = 30^0$, a $n = 1/2$.

Vrijednost omjera $O\bar{A}/OA$, t. j. n, zove se *prikrata za kosu projekciju*.

Nacrtaj kosu projekciju kocke, ako je $\alpha = 30^0$ i $n = 1$!

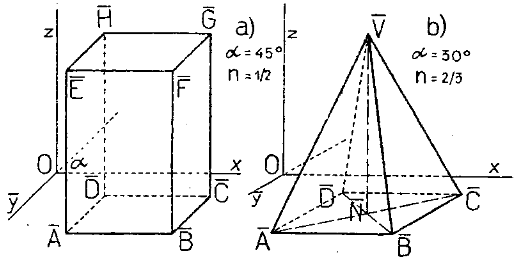
§ 108. Kosa projekcija kvadratične prizme i piramide

Na sl. 365. a prikazana je kosa projekcija kvadratiče prizme za $\alpha = 45^0$ i $n = \frac{1}{2}$, a na sl. 365. b kosa projekcija kvadratične piramide za $\alpha = 30^0$ i $n = \frac{2}{3}$. Uzelo se, da su osnovni bridovi tih tijela usporedni s osima x i y. Najprije se nacrta kosa projekcija osnovke $ABCD$, te se na prvoj slici učini $\bar{A}\,\bar{D} = \bar{B}\,\bar{C} = \frac{1}{2}\,\bar{A}\,\bar{B}$, a na drugoj $\bar{A}\,\bar{D} = \bar{B}\,\bar{C} = \frac{2}{3}\,\bar{A}\,\bar{B}$, zatim se nacrtaju pobočni bridovi prizme ($\parallel z$) i gornja osnovka, a kod piramide odredi se središte $\bar{N}$ osnovke pomoću dijagonala, u tom središtu uzdigne

visina ($\parallel z$), uzme na njoj vrh $\bar{V}$ i spoji s točkama $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ i $\bar{D}$. Kod ovih slika mogu se osi ispustiti.

§ 109. Crtanje kose projekcije na osnovi tlocrta i nacrta

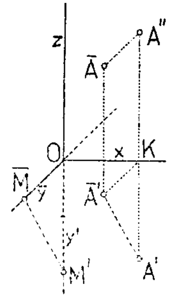
1. Kosa projekcija točke. Na sl. 366. nacrtane su kose projekcije osi x, y, z. Kose projekcije osi x i z padaju u same te osi, a os y projicira se u pravac $\bar{y}$. Ako se horizontalna ravnina $xy \equiv \Pi_1$ okrene oko osi x u ravninu $xz \equiv \Pi_2$ os y padne u produženje y' osi z. Ako se na pravcu y uzme bilo gdje točka M, njezin je tlocrt M' na y'. Kosa će projekcija točke M biti na osi $\bar{y}$ u točki $\bar{M}$. Dužina je $OM' = OM$, dok je kosa projekcija te dužine $O\bar{M} \gtreqless OM'$ prema tome, da li je $n \gtreqless 1$. Uzme li se da je $n = \frac{1}{2}$,



Sl. 365.

onda je $O\bar{M} = \frac{1}{2}\,OM$. Ako se os y podigne u prostor tako, da je okomita na ravnini crtnje i na toj osi uzme točka M' tako da je $OM = OM' = 2\,O\bar{M}$, pa se točka M spoji s $\bar{M}$, onda pravac $M\bar{M}$ naznačuje smjer kosih zraka projiciranja.

Na sl. 366. nacrtan je tlocrt A' i nacrt A'' točke A. Ordinala $A'A''$ siječe os x u točki K. Dužina KA' usporedna je s osi y, pa će kosa projekcija $K\bar{A}'$ dužine KA' biti usporedna s $\bar{y}$. Ujedno je $K\bar{A}' = \frac{1}{2}\,KA'$. Kosa projekcija $\bar{A}$ točka A nalazi se u vertikali nad $\bar{A}'$ u udaljenosti, koja je jednaka KA''. Ako se dakle točkom $\bar{A}'$ povuče pravac usporedno s osi z i na njega prenese $\bar{A}'\bar{A} = KA''$, dobit će se kosa projekcija $\bar{A}$ točke A. Točka bi se $\bar{A}$ dobila i tako, da se povuče $\bar{A}'\bar{A} \parallel KA''$ i $A''\bar{A} \parallel K\bar{A}'$. Romboid $K\bar{A}'\bar{A}A''$ nije ništa drugo nego kosa projekcija pravokutnika $KA'AA''$ iz sl. 43.

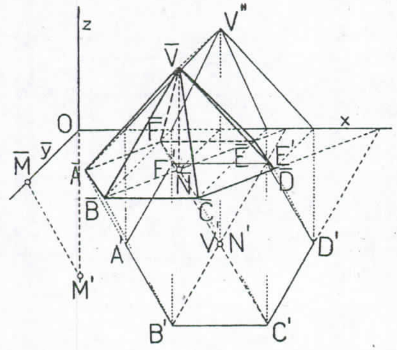


Sl. 366.

Ako se spoje točke M' i $\bar{M}$ te A' i $\bar{A}'$, onda je $\bar{A}'\bar{A} \parallel M'\bar{M}$. U trokutima je naime $OM'\bar{M}$ i $KA'\bar{A}' \sphericalangle M'O\bar{M} = \sphericalangle A'K\bar{A}'$ i $O\bar{M}$: $OM' = K\bar{A}'$: $KA' = 1 : 2$, pa su prema tome ta dva trokuta slična. Pošto je $KA' \parallel OM'$ i $K\bar{A}' \parallel O\bar{M}$, mora biti i $A'\bar{A}' \parallel M'\bar{M}$. Prema tome točka se $\bar{A}'$ može dobiti i na slijedeći način. Točkom K povuče se pravac $K\bar{A}' \parallel \bar{y}$, a točkom A' pravac $A'\bar{A}' \parallel M'\bar{M}$

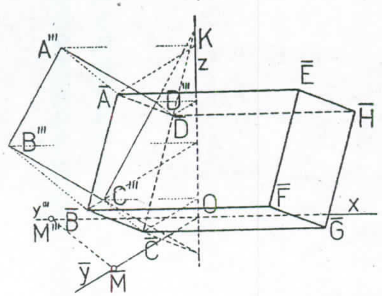
Oba se pravca sijeku u točki $\bar{A}'$. Trokut se $OM'\bar{M}$ zove *odredbeni trokut* za kosu projekciju. Točka $\bar{A}'$ dobije se pomoću tog odredbenog trokuta.

2. Kosa projekcija piramide. Na sl. 367. nacrtan je tlocrt i nacrt te kosa projekcija šesterostrane pravilne piramide, kojoj je osnovka u ravnini xy, za $\alpha = 45^0$ i $n = \frac{1}{2}$. Najprije se nacrta kosa projekcija osnovke pomoću odredbenog trokuta $OM'\bar{M}$, zatim se odredi kosa projekcija $\bar{V}$ vrha V i po-

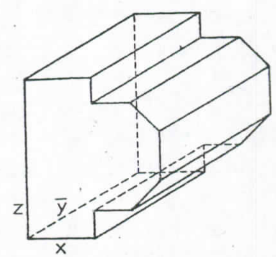


Sl. 367.

vuku pobočni bridovi piramide. Točka $\bar{V}$ mogla bi se odrediti i bez upotrebe druge projekcije piramide tako, da se u točki $\bar{N}$ povuče usporednica s osi z i na nju prenese visina piramide u pravoj veličini.



Sl. 368.



Sl. 369.

Između likova $A'B'C'D'E'F'$ i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$ postoji afina srodnost. Os x je os afinosti, a $M'\bar{M}$ je smjer zraka afinosti.

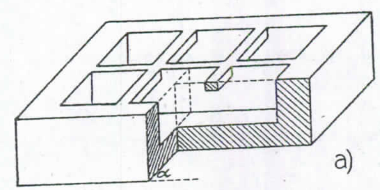
3. Kosa projekcija kvadratične prizme, kojoj je lijeva osnovka u ravnini $yz \equiv \Pi_3$. Ako se ravninu yz okrene oko osi z u ravninu $xz \equiv \Pi_2$,

os y dođe u y''', a osnovka prizme dođe u položaj $A'''B'''C'''D'''$. Uzme li se na osi y točka M, ona nakon preloženja dođe u točku M''' tako, da je $OM''' = OM$. Sl. 368. Kosa je projekcija točke M na osi $\bar{y}$ u točki $\bar{M}$. Uzelo se da je $\sphericalangle \alpha = 30^0$ i $n = \frac{2}{3}$, pa je $O\bar{M} = \frac{2}{3} OM'''$. Trokut je $OM'''\bar{M}$ odredbeni trokut za kosu projekciju. Da se dobije kosa projekcija $\bar{A}$ točke A povući će se $A''' \parallel y'''$, $K\bar{A} \parallel \bar{y}$, $A'''\bar{A} \parallel M'''\bar{N}$. Na sličan se način dobiju i točke $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Pobočni bridovi prizme idu točkama $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, usporedni su s osi x i prikažu se u pravoj veličini ($\bar{A}\bar{E} \# \bar{B}\bar{E} \# \ldots$).

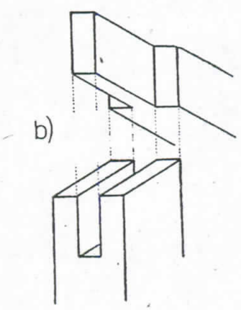
Između kvadrata $A'''B'''C'''D'''$ i njegove kose projekcije $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ postoji afina srodnost. Os z je os afinosti, a $M'''\bar{M}$ je smjer zraka afinosti. Po dvije pripadne stranice sijeku se u istim točkama u osi z.

4. Kosa projekcija prizmatičnih predmeta, kojima je osnovka u ravnini slike. Ako je osnovka prizme ili piramide u ravnini slike, onda se ta osnovka projicira u pravoj veličini. Na sl. 369. prikazan je prizmatičan predmet u kosoj projekciji. Osnovka ili normalan presjek tog predmeta leži u ravnini xz i prikaže se u pravoj veličini. Kroz vrhove toga lika potegnu se pravci usporedno s osi $\bar{y}$, koja sa osi x čini kut α. Ako se na te usporednice prenesu jednake dužine i krajnje točke spoje, dobije se kosa projekcija druge osnovke i uopće kosa projekcija prizmatičnog predmeta. Pobočni bridovi toga tijela, koji su usporedni s osi y, mogu se prenijeti u pravoj veličini ili prikraćeno.

Na sl. 370. (*a* i *b*) nacrtana je kosa projekcija još dvaju predmeta. Sl. 370 *a*) prikazuje kvadratni ormarić, o kojemu je bilo govora u § 105. t. 3. sl. 357.



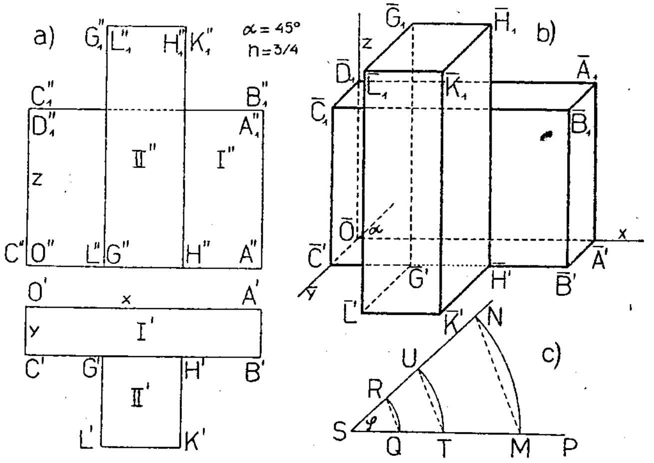
Sl. 370 *a*)



Sl. 370 *b*)

Tu je $\alpha = 45^0$, $n = \frac{1}{2}$. Na sl. 370 *b*) nacrtana je kosa projekcija drvene konstrukcije, koja se sastoji iz dva komada. Gornji je komad prikazan s pogledom odozdo. Tu je $\alpha = 30^0$, a $n = 1$.

5. Konstrukcija kose projekcije predmeta pomoću kuta proporcionalnosti. — Na sl. 371.a nacrtali smo naprije tlocrt i nacrt predmeta, koji se sastoji od dvije prizme (dva kvadra I i II), zatim smo nacrtali osni križ, gdje $\sphericalangle \alpha = 45^0$ (sl. 371. b). Da nacrtamo kosu projekciju prizama, najprije ćemo nacrtati kosu projekciju tlocrta, odnosno osnovaka tih prizama, koje leže u ravnini (xy). Jedni su bridovi tih osnovaka usporedni sa osi x, a drugi sa osi y. Bridovi, koji su usporedni sa osi x (ili koji leže u toj osi) prenose se iz tlocrta sl. 371 a.) u sl. 371 b.) u istoj veličini, u kojoj su ti



Sl. 371.

bridovi prikazani u tlocrtu; na pr. $\overline{O}\,\overline{A} = O'A'$, $\overline{C}'\,\overline{G}' = C'G', \ldots$ Bridove, koji leže u osi y i koji su usporedni s tom osi, prenosit ćemo umanjeno, uzevši, da je prikrata $n = \frac{3}{4}$. To ćemo umanjenje izvoditi pomoću kuta proporcionalnosti φ. Taj se kut konstruira na slijedeći način: Najprije ćemo nacrtati zraku SP sl. 371 c), prenijet ćemo na nju 4 jednake dužine, od kojih je svaka jednaka odabranoj dužini d, t. j. $SM = 4\,d$, zatim ćemo oko točke S kao središta opisati kružni luk s polumjerom SM i na taj ćemo luk prenijeti kao tetivu $MN = 3\,d$ i konačno ćemo povući zraku SN. Tada je kut $MSN = \varphi$.

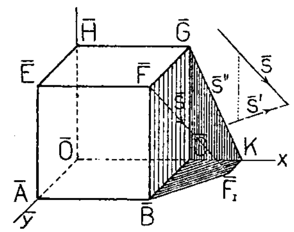
Budući da se dužina $O'C'$ nalazi u osi y s tom ćemo dužinom opisati u kutu φ luk QR. Povućemo li tetive MN i QR, tad su trokuti SMN i SQR slični, te je zbog toga $QR : SQ = MN : SM = 3 : 4$, t. j. dužina $QR = \frac{3}{4}\,O'C'$. Učinimo li $\overline{O}\,\overline{C}' = QR$, tad je dužina $\overline{O}\,\overline{C}'$ kosa projekcija dužine $O'C'$. Nacrtamo li paralelogram $\overline{O}\,\overline{A}'\overline{B}'\overline{C}'$, taj je lik kosa projekcija osnovke prizme I.

Da nacrtamo kosu projekciju osnovke prizme II, učinit ćemo $\overline{C}'\,\overline{G}' = C'G'$ i $\overline{G}\,\overline{H}' = G'H'$, povući ćemo točkama $\overline{G}'$ i $\overline{H}'$ usporednice s osi y i na njih ćemo nanijeti dužinu $G'L'$ tako, da je $\overline{G}'\overline{L}' = \overline{H}'\overline{K}' = TU$, gdje je TU umanjena dužina brida $G'L' = ST$ u omjeru $3 : 4$.

Pošto smo nacrtali kosu projekciju osnovaka obiju prizama, tad nacrtamo pobočne bridove tih prizama usporedno sa osi z i prenesemo na njih njihove duljine iz slike 371a); na pr. $\overline{C}'\overline{C}_1' = C''C_1''$, $\overline{L}'\overline{L} = L''L''_1, \ldots$ i konačno nacrtamo kosu projekciju gornjih osnovaka prizama.

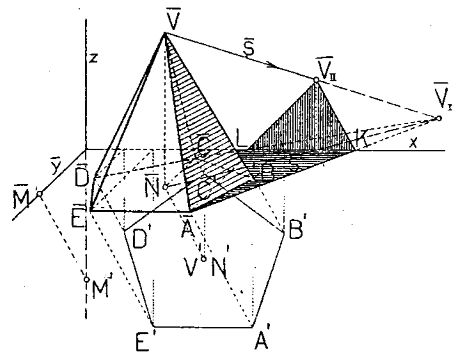
§ 110. Konstrukcija sjena u kosoj projekciji

1. Sjena kocke. Na sl. 372. prikazana je kocka u kosoj projekciji zajedno sa sjenama. Zraka svijetla s zadana je kosom projekcijom $\overline{s}$ i kosim tlocrtom $\overline{s}'$. Brid BF baca sjenu na ravninu xy; njegova sjena počinje u točki $\overline{B}$ i usporedna je s kosim tlocrtom $\overline{s}'$ zrake s. Ako se točkom $\overline{F}$ povuče pravac usporedno sa $\overline{s}$, on siječe svoj tlocrt u točki $\overline{F}_1$, koja je bačena sjena točke F na ravninu xy. Budući da je brid FG usporedan s ravninom xy, njegova je sjena na toj ravnini usporedna s $\overline{F}\,\overline{G}$ i ide točkom $\overline{F}_1$. Ta sjena siječe os x u točki K. Sjena brida FG na ravnini xz počinje u točki $\overline{G}$ i ide točkom K. Dio bačene sjene kocke pada na ravninu xy, a dio na ravninu xz. Desna je pobočka u samosjeni. U pravac $\overline{G}K$ pada kosi nacrt $\overline{s}''$ zrake svijetla $\overline{F}\,\overline{F}_1$.



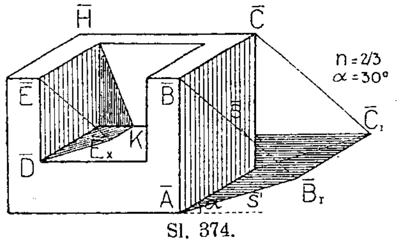
Sl. 372.

2. Sjena piramide. Na sl. 373. nacrtana je kosa projekcija peterostrane piramide za $\alpha = 45^0$ i $n = \frac{1}{2}$, zatim su konstruirane sve sjene piramide. Bačene sjene piramide odrede se na taj način, da se odredi bačena sjena $\overline{V}_1$ vrha $\overline{V}$ na ravninu baze xy i s točke $\overline{V}_1$ potegnu pravci koji dodiruju osnovku piramide u vrhovima $\overline{A}$ i $\overline{C}$. U pravce $\overline{A}\,\overline{V}_1$ i $\overline{C}\,\overline{V}_1$ padaju sjene bridova AV i CV na ravnini xy. Točka $\overline{V}_1$ dobije se tako, da se odredi bačena sjena visine VN



Sl. 373.

piramide na ravninu xy, t. j. nožištem $\overline{N}$ povuče se $\overline{s}'$, a vrhom $\overline{V}$ pravac $\overline{s}$, oba se ta pravca sijeku u točki $\overline{V}_I$, pa je $\overline{N}\overline{V}_I$ bačena sjena visine. Ako su u točki, u kojoj $\overline{N}\overline{V}_I$ siječe os x povuče okomica na os x, ona siječe $\overline{s}$ u točki $\overline{V}_{II}$. Ta je točka probodište zrake s sa ravninom xz, u tu točku pada sjena vrha V. Bačene sjene bridova AV i CV lome se u osi x u točkama K i L i idu točkom $\overline{V}_{II}$. Dio bačene sjene piramide pada u ravninu xy, a dio na ravninu xz. U samosjeni su pobočke ABV i BCV.



Sl. 374.

3. Sjene na praktičnom predmetu. Sl. 374. Predmet je postavljen na ravninu xy, pa se odredila i bačena sjena predmeta na tu ravninu. Brid AB okomit je na ravnini xy, pa je njegova sjena na toj ravnini usporedna sa $\overline{s}'$. Bridovi su BC i CH usporedni s ravninom xy, pa su sjene tih bridova usporedne s bridovima u prostoru, dakle je i $B_I C_I \parallel \overline{BC}$ i $\overline{C}_I\overline{H}_I \parallel \overline{CH}$. Sjena brida DE počinje u u točki $\overline{D}$ i usporedna je sa $\overline{s}'$ i t. d.

Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj kosu projekciju kvadratične piramide prema sl. 119., za $\alpha = 30^0$, a $n = \frac{1}{2}$!
2. Nacrtaj kosu projekciju prizama prikazanih na slikama 115. — 117., kojima su osnovke u ravnini xy, odabravši zgodno veličine za α i n!
3. Nacrtaj kosu projekciju kvadratične prikraćene piramide, kojoj je *a)* veća osnovka, *b)* manja osnovka u ravnini xy, za $\alpha = 45^0$, i $n = \frac{1}{2}$!
4. Nacrtaj kosu projekciju predmeta prikazanih u slikama 234. — 236. za zgodno odabrani α i n!
5. Nacrtaj kosu projekciju peterostrane pravilne piramide, kojoj je osnovka u ravnini yz za $\alpha = 60^0$ i $n = \frac{1}{2}$!
6. Nacrtaj kosu projekciju šesterostrane pravilne *a)* piramide, *b)* prizme, kojoj je osnovka u ravnini xz za $\alpha = 60^0$ i $n = 1$!
7. Nacrtaj kosu projekciju *a)* kocke, *b)* oktaedra, *c)* ikosaedra, kojima je jedna vršna os okomita na ravnini xy.
8. Nacrtaj kosu projekciju dodekaedra, kojemu je jedna strana u ravnini xy!
9. Nacrtaj kosu projekciju raznih manjih tehničkih predmeta, koji su omeđeni ravnim plohama.
10. Nacrtaj u kosoj projekciji prodor: *a)* kakvegod prizme i piramide, *b)* dviju piramida, *c)* dviju prizama, uzevši da su osnovke u raznim koordinatnim ravninama!
11. Nacrtaj kosu projekciju kocke ($\alpha = 67{,}5^0$, $n = \frac{1}{2}$), kojoj je brid $a = 6\ cm$, i na svakom kvadratu, kojim je kocka omeđena postavi uspravnu piramidu, kojoj je visina $= \frac{a}{2}$. Dobit ćeš poliedar, koji se zove rombski dodekaedar!
12. Nacrtaj kosu projekciju predmeta, koji su prikazani u slikama 348. — 350. i 355. — 357!

§ 111. Kosa aksonometrija

1. Objašnjenja. Kod kose projekcije, o kojoj se do sada govorilo, uzelo se, da se ravnina slike podudara s ravninom, koju čine osi x i z ili da je ravnina slike usporedna s tim osima. Dužine, koje su usporedne s osi x ili z projiciraju se u pravoj veličini, a dužine koje su usporedne sa osi y projiciraju se prikraćeno ili u pravoj veličini ili uvećano.

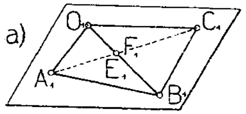
Sad će se uzeti, da je samo jedna os usporedna s ravninom slike ili nijedna os, pa će se te osi koso projicirati na tu ravninu, koja se uzima da je u vertikalnom položaju. Prenesu li se na koordinatne osi Ox, Oy, Oz jednake dužine $OA = OB = OC = d$, pa se te osi koso projiciraju na ravninu slike, dobit će se uopće tri dužine $\overline{O}\overline{A}$, $\overline{O}\overline{B}$, $\overline{O}\overline{C}$, koje idu točkom $\overline{O}$ i koje uopće nisu više među sobom okomite ni jednake. Veličina kosih projekcija osi zavisi o položaju tih osi prema ravnini slike i o smjeru zrake projiciranja. Ako se tijelo koso projicira u vezi s koordinatnim osima, onda će se dužine, koje su u vezi s tijelom, a usporedne su s osima, projicirati usporedno s osima, te će se veličina kosih projekcija tih dužina mijenjati po omjeru, u kojem stoji veličina kose projekcije dotične osi prema svojoj pravoj veličini. Kosa projekcija predmeta u vezi s koordinatnim osima zove se *kosa aksonometrija*.

Ako se želi, da vertikalni bridovi tijela budu i u slici vertikalni, morala bi se os z uzeti u vertikalnom položaju, dok bi osi x i y bile horizontalne, a prema ravnini slike koso položene. Ako os z nije usporedna s ravninom slike, njezina kosa projekcija nebi bila vertikalna, pa tako ni vertikalni bridovi tijela nebi bili u slici vertikalni. No kako se gotova slika može okrenuti tako, da vertikalni bridovi u slici budu vertikalni, vidi se, da se kosa projekcija osi z uvijek može nacrtati vertikalno. Radi se prema tome samo o tome, kako će se uzeti kose projekcije x i y prema kosoj projekciji osi z, i kolika će biti veličina kosih projekcija jediničnih dužina, koje su na osima x, y i z.

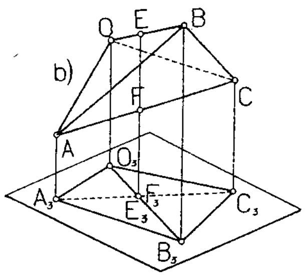
2. Pohlke-ov stavak. Za kosu aksonometriju vrijedi Pohlke-ov stavak, koji glasi ovako:

Tri dužine, koje su nacrtane u ravnini slike te izlaze iz jedne točke i imaju po volji smjer i veličinu, uvijek se mogu smatrati kosom projekcijom triju jednakih pravokutnih koordinatnih osi, uz uvjet, da te tri dužine ne padaju u jedan pravac.

Dokaz. Neka je na sl. 375. a prikazan tetraedar u kosoj projekciji. Budući da se smjer zraka projiciranja, koje idu vrhovima O_1, A_1, B_1, C_1 tetraedra može po volji uzeti, tad se vidi, da položaj, veličina i oblik tetraedra nije nikako određen tom svojom kosom projekcijom. Pita se sad, postoji li između svih tih tetraedra jedan, koji ima određen oblik ili drugim riječima, može li se zadani tetraedar $OABC$ tako postaviti prema ravnini slike, da njegova kosa projekcija na toj ravnini, za zgodno odabrani smjer zraka projiciranja, bude slična zadanom ravnom četverokutu $O_1A_1B_1C_1$? Takav tetraedar u istinu postoji, pa ćemo to sada dokazati.



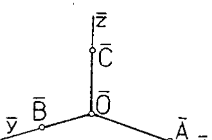
Sl. 375. a.



Sl. 375. b.

Neka je u prostoru zadan tetraedar $OABC$ (sl. 375 b.). Označimo na sl. 375 a. sjecište dužina O_1B_1 i A_1C_1 sa E_1 ili F_1 uzevši da je to sjecište na O_1B_1 ili na A_1C_1. Odaberimo sada na OB točku E, a na AC točku F tako, da te točke dijele bridove OB i AC po istom omjeru, po kojemu točke E_1 i F_1 dijele na sl. 375. a) dužine O_1B_1 i A_1C_1, da je dakle $OE:BE = O_1E_1:B_1E_1$ i $AF:CF = A_1F_1:C_1F_1$.

Budući da točke E_1 i F_1 padaju zajedno, moraju i projekcije točaka E i F pasti u istu točku $\overline{E}$ ili $\overline{F}$, pa prema tome zrake projiciranja moraju imati smjer EF. Svaka ravnina Π_2 (koja nije usporedna s EF) siječe zrake projiciranja, koje su položene točkama O, B, A, C usporedno s EF u točkama O_2, A_2, B_2, C_2, koje su vrhovi četverokuta, u kojem sjecišta dijagonala dijele te dijagonale po istom omjeru, po kojem dijeli E_1 i F_1 dijagonale četverokuta $O_1A_1B_1C_1$. No četverokut $O_2A_2B_2C_2$ još uvijek ne mora biti sličan četverokutu $O_1A_1B_1C_1$. Ako je ravnina Π_2 okomita na zraci EF, ona siječe zrake projiciranja u točkama O', A', B', C', koje su vrhovi četverokuta $O'A'B'C'$. Taj četverokut može se smatrati ortogonalnom projekcijom četverokuta, koji je sličan četverokutu $O_1A_1B_1C_1$, ako se dijagonale tih četverokuta dijele po istom omjeru. Prema tomu ima jedna ravnina Π_3, koja zrake projiciranja siječe u vrhovima četverokuta $O_3A_3B_3C_3$, koji je sličan četverokutu $O_1A_1B_1C_1$. Pošto je četverokut $O_3A_3B_3C_3$ kosa projekcija tetraedra $OABC$ na ravninu Π_3 s obzirom na smjer zraka projiciranja EF, dokazali smo da u prostoru postoji tetraedar, kojemu je kosa projekcija slična zadanom četverokutu $O_1A_1B_1C_1$.

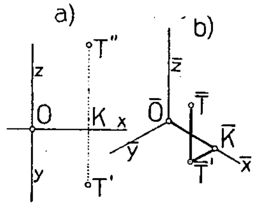


Sl. 376.

Tetraedar $OABC$ može se tako odabrati, da su tri brida OA, OB, OC, koji izlaze iz točke O, među sobom okomiti i jednake veličine. Ti bridovi čine pravokutan koordinatni osni križ. Prema gornjim izvodima tri zadane dužine $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$, $\overline{O}\,\overline{C}$, koje izlaze iz točke $\overline{O}$ (sl. 376.) mogu se smatrati kosom projekcijom pravokutnog koordinatnog križa, kojemu su osi OA, OB, OC jednake veličine. Time smo dokazali Pohlke-ov stavak.

Ako dakle nacrtamo tri pravca $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, koji izlaze iz točke $\overline{O}$ pa na te pravce prenesemo, počevši od točke $\overline{O}$, tri po volji velike dužine $\overline{O}\,\overline{A} = d_x$, $\overline{O}\,\overline{B} = d_y$, $\overline{O}\,\overline{C} = d_z$, te dužine možemo smatrati kosom projekcijom triju među sobom okomitih i jednakih dužina, t. j. $OA = OB = OC = d$. Dužine $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$, $\overline{O}\,\overline{C}$ mogu biti među sobom jednake i jednake d ($d_x = d_y = d_z = d$), ili mogu biti dvije dužine jednake na pr. $\overline{O}\,\overline{A} = \overline{O}\,\overline{C} = d$, a $\overline{O}\,\overline{B} \gtrless d$, ili mogu biti sve tri dužine različite veličine, no jedna od njih može biti jednaka d. U prvom slučaju imamo t. zv. *kosu isometrijsku projekciju*, u drugom slučaju *dimetrijsku*, a u trećem slučaju *trimetrijsku projekciju*.

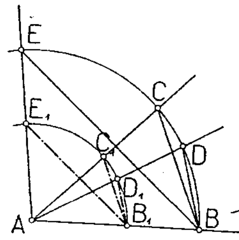
3. Aksonometrijska slika točke. Zadana je kosa aksometrija $O(xyz)$ pravokutnih koordinatnih osi (sl. 377.), neka se pomoću ortogonalnih projekcija točke $T(1, 1, 1{,}5)$ odredi aksonometrijska slika te točke, uzevši da je $d_x = d$, $d_y = \frac{1}{2} d$, $d_z = \frac{2}{3} d$.



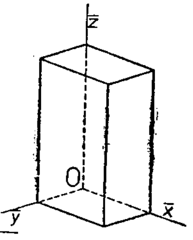
Sl. 377.

Ako na os x prenesemo $\overline{O}\,\overline{K} = OK = 1$, zatim točkom $\overline{K}$ povučemo usporednicu s osi $\overline{y}$ i na nju prenesemo dužinu $\overline{K}\,\overline{T}' = \frac{1}{2} KT'$, dobili smo aksonometrijski tlocrt $\overline{T}'$ točke T. Ako se sada točkom $\overline{T}'$ povuče usporednica sa osi $\overline{z}$ i na nju prenese dužina $\overline{T}'\,\overline{T} = \frac{2}{3} KA''$, dobit će se aksonometrijska slika $\overline{T}$ prostorne točke T.

4. Kut proporcionalnosti. (Sl. 378.). Na temelju tlocrta i nacrta predmeta možemo mi taj predmet nacrtati u kosoj aksonometriji pomoću koordinata pojedinih točaka toga tijela. Da se koordinate mogu prema zadanim omjerima mijenjati, upotrebljavaju se za pojedine osi t. zv. *kutovi proporcionalnosti*. Te ćemo kutove nacrtati za slučaj da je $d_x = \frac{3}{4} d$, $d_y = \frac{1}{2} d$ i $d_z = 1{,}5 d$. U tu svrhu nacrtamo poluzraku AB i na nju prenesemo dužinu $AB = d$ i tom dužinom opišemo oko A kružni luk. Na taj luk prenese se kao tetiva dužina $BC = d_x = \frac{3}{4} AB$, zatim dužina $BD = d_y = \frac{1}{2} AB$ i dužina $BE =$



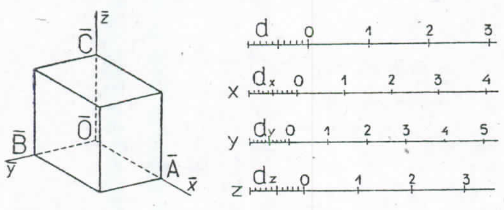
Sl. 378.



Sl. 379.

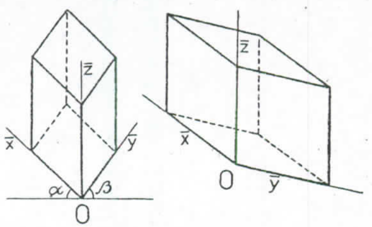
$d_z = 1{,}5\ AB$ i točke C, D i E spoje sa A. Na taj su se način dobila tri kuta α, β, γ, koji se zovu kutovi proporcionalnosti za osi x, y, z. Treba li nacrtati aksonometrijsku sliku kocke, kojoj je brid a, opisat će se oko A na sl. 378. luk, koji će krakove kutova proporcinalnosti sjeći u točkama B_1, C_1, D_1, E_1, pa su aksonometrijske slike bridova kocke, koje padaju u tri osi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ i bridova, koji su usporedni s tim osima, jednake dužinama B_1C_1, B_1D_1 i B_1E_1. Na taj način dobila se slika 379. Iz te se slike odmah vidi, da je visina kocke odviše povećana, pa se čini da slika prikazuje kvadratičnu prizmu, a ne kocku. Da slika čini dojam kocke, morao bi u prvom slučaju d_z biti jednak d ili nešto manji od d, pa bi visina kocke u slici bila jednaka a ili nešto manja od a. Nije dakle svejedno kakve su veličine dužine d_x, d_y, d_z, ako se hoće da gotova slika čini ugodan dojam.

5. Mjerila proporcionalnosti. (Sl. 380.). Za konstrukciju aksonometrijskih slika predmeta mogu se umjesto kutova proporcionalnosti upotrebiti mjerila proporcionalnosti. Nacrta li se mjerilo, kojemu je jedinica $d = 1$, zatim mjerila kojima su jedinice d_x, d_y, d_z, onda je prvo mjerilo t. zv. *originalno mjerilo*, dok su ostala tri *mjerila proporcionalnosti* za pravokutne koordinatne osi. Treba li nacrtati aksonometrijsku sliku kocke, kojoj je zadan brid a, onda se taj brid najprije izmjeri na originalnom mjerilu. Ako je recimo $a = 1{,}6$, onda se sa mjerila za os x uzme u šestilo dužina $= 1{,}6$ i prenese na os $\bar{x}$, t. j. $\bar{O}\bar{A} = 1{,}6$, zatim se sa mjerila za os $\bar{y}$ uzme 1,6 i učini $\bar{O}\bar{B} = 1{,}6$ i napokon se uzme sa mjerila za os $\bar{z}$ 1,6 i učini $\bar{O}\bar{C} = 1{,}6$. Tada su dužine $\bar{O}\bar{A}$, $\bar{O}\bar{B}$, $\bar{O}\bar{C}$ aksonometrijska slika triju bridova kocke.



Sl. 380.

Mjerila proporcionalnosti mogu se upotrebiti također, da se iz gotove slike odrede mjerni brojevi za veličine bridova tijela.



Sl. 381.

6. Izbor osnog križa i aksonometrijske jedinice. Obzirom na Pohlke-ov stavak mogu se tri osi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, zatim dužine tih osi, odnosno mjerila za te osi po volji uzeti. No ako se želi da se dobiju slike, koje će biti što manje izobličene i koje će na motrioca činiti ugodan dojam, moraju se kako kutovi, koji zatvaraju osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ sa osi $\bar{z}$, tako i mjerila za osi zgodno

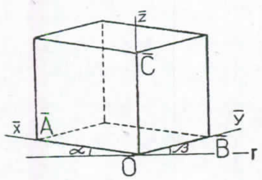
odabrati. Kad bismo uzeli osi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ kao na 381. onda bi kocke, koje su tu prikazane, bile sasvim izobličene. Da se dobiju dobre aksonometrijske slike predmeta, treba se prema Mülleru (L. der darst. Geom. Bd. II. Izd. 1912. g. str. 141—142) pridržavati ovih pravila:

1. Os $\bar{z}$ treba uvijek uzimati u vertikalnom položaju, da time vertikalni bridovi tijela budu i u slici vertikalni.

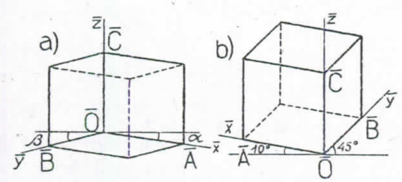
2. Povucimo točkom $\bar{O}$ pravac $r \perp \bar{z}$ i označimo sa α i β kutove, što ih osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ čine s pravcem r. Dobre će se slike dobiti ako je kut α jednak 10^0—15^0 a kut β 20^0—30^0. Ti se kutovi nacrtaju od oka.

3. Treba uzimati da je $\bar{O}\bar{A} = \bar{O}\bar{C}$ i $\bar{O}\bar{B} = \frac{3}{4}\,\bar{O}\bar{A}$. Kod toga treba paziti, da je $\frac{3}{4}\,\bar{O}\bar{A}$ na onoj osi $\bar{x}$ ili $\bar{y}$, koja sa r čini veći kut.

4. Može se uzeti, da je kut β i veći od 30^0, sve do 45^0. U tom slučaju treba uzimati $\bar{O}\bar{A} = \bar{O}\bar{C}$, $\bar{O}\bar{B} = \frac{2}{3}\,\bar{O}\bar{A}$ do $\frac{1}{2}\,\bar{O}\bar{A}$. (Sl. 382.).



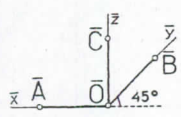
Sl. 382.



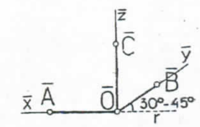
Sl. 383.

5. Slike se mogu nacrtati s pogledom odozdo ili odozgo te u oba slučaja s pogledom s desna ili lijeva. Na sl. 383 a. pogled je odozdo i slijeva, a na sl. 383 b. pogled je odozgo i sdesna. U prvom se slučaju uzima, da su kutovi, što ih osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ čine s osi $\bar{z}$ tupi ($90^0 + \alpha$ i $90^0 + \beta$) i da je os $\bar{x}$ desno, a os $\bar{y}$ lijevo. U drugom slučaju uzima se, da su kutovi što ih osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ čine s osi $\bar{z}$ oštri ($90^0 - \alpha$, $90^0 - \beta$) i da je os $\bar{x}$ lijevo, a os $\bar{y}$ desno.

7. Osobiti slučajevi kose aksonometrije. Već smo spomenuli, da sve tri osi mogu biti jednake ($\bar{O}\bar{A} = \bar{O}\bar{B} = \bar{O}\bar{C}$) i da se u tom slučaju kosa projekcija, za koju osi $\bar{x}$ i $\bar{z}$ idu usporedno s ravninom slike i za koju kosa projekcija osi $\bar{y}$ čini sa osi $\bar{z}$ kut od 45^0 (sl. 384.) zove se *kavalirska perspektiva*. Kad osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ čine pravi kut i prikažu se u pravoj veličini tako, da se i sam tlocrt predmeta prikaže u pravoj veličini, onda se i to zove *kavalirska perspektiva*. (Scheffers).



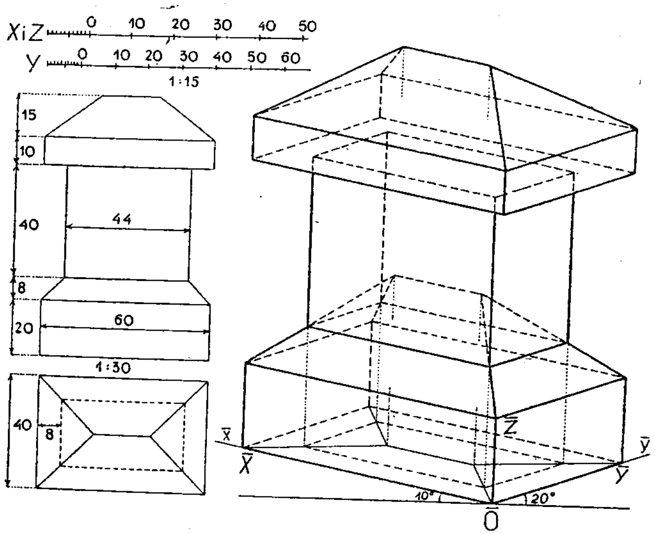
Sl. 384.



Sl. 385.

Dimetrijska projekcija, za koju osi $\bar{z}$ i $\bar{x}$ teku usporedno s ravninom slike, za koju je $\overline{OA} = \overline{OC} = d$ i $\overline{OB} < d$ i za koju os $\bar{y}$ čini s pravcem r kut od $30^0 - 45^0$, zove se *vojnička perspektiva.* (sl. 385.).

8. **Aksonometrijska slika stupa.** Nacrtat će se kosa aksonometrijska slika stupa, koji je na sl. 386. prikazan tlocrtom i nacrtom, u koji se unesu i kote. Nadalje će se uzeti da je $\overline{OA} = \overline{OC} = d$ i $\overline{OB} = \frac{3}{4}\,\overline{OA} = \frac{3}{4}\,d$, $\alpha = 10^0$, $\beta = 20^0$. Pogled odozgo. Mjerila su za osi x i z jednaka i to 1 : 15.

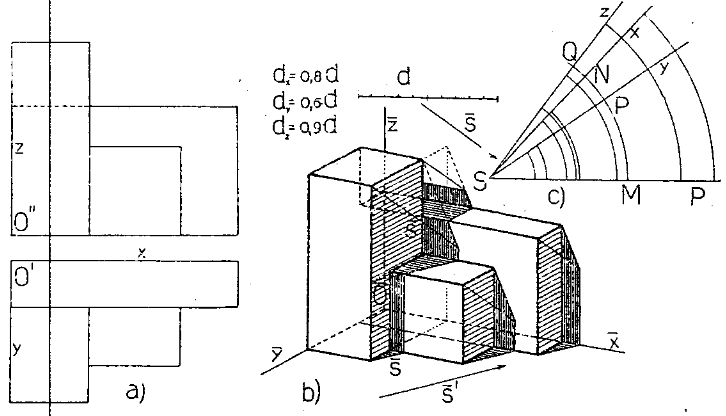


Sl. 386.

Pošto su se nacrtale osi, uzme se sa mjerila za osi x i z dužina od 60 *cm* i prenese na os $\bar{x}$, t. j. $\overline{OX} = 60\,cm$, zatim na os $\bar{z}$ prenese $\overline{OZ} = 20\,cm$. Sa mjerila za os y uzme se 40 *cm* i prenese na os $\bar{y}$ t. j. $\overline{OY} = 40\,cm$, i t. d.

9. **Aksonometrijska slika grupe sastavljene od tri prizme.** Na sl. 387. nacrtali smo pomoću kutova proporcionalnosti kosu aksonometriju triju prizama od kojih je na sl. 387 a) nacrtan tlocrt i nacrt. Na sl. 387 c) nacrtani su kutovi proporcionalnosti za osi x, y, z, a uzelo se, da je $d_x = 0{,}8\,d$, $d_y = 0{,}6\,d$, $d_z = 0{,}9\,d$. Ti su kutovi konstruirani na način kao na sl. 378. Te se osi uzmu po volji, pridržavajući se uputa iz t. 6.

Da se nacrta kosa aksonometrija prizama, najprije se nacrtaju kose aksonometrije donjih osnovaka tih prizama, zatim pobočni bridovi i gornje osnovke, upotrebivši kutove razmjernosti, te tlocrt i nacrt.



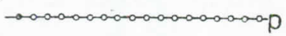
Sl. 387.

Na sl. 387b) nacrtane su sjene prizama, koje se konstruiraju na sličan način kao i u kosoj projekciji. Rastumači na toj slici, kako su se konstruirale bačene sjene!

XXI. Perspektivni i projektivni odnosi temeljnih tvorevina

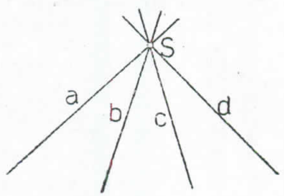
§ 112. Temeljne tvorevine

1. Elementi geometrije. Temeljne tvorevine. Elementi geometrije jesu: *točka, pravac* i *ravnina*. Neomeđeni pravac nazivamo također *zrakom*. Pravac nastane kad se točka giblje u istom smjeru. Može se dakle uzeti da se pravac sastoji od točaka, koje su nanizane na pravcu, pa se kaže, da je pravac *niz točaka*. Sam pravac je n o s i l a c toga niza. Ako je pravac označen sa p, onda se kaže: niz p (sl. 388.).



Sl. 388.

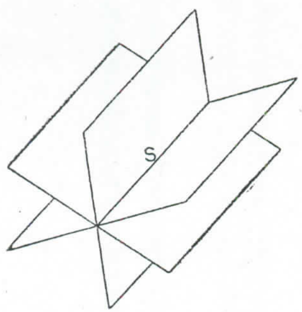
Kroz jednu točku S (sl. 389.) ravnine **P** može se u toj ravnini povući neizmjerno mnogo pravaca. Pravci, koji leže u ravnini i koji idu kroz istu točku S čine *pramen zraka*. Zajednička točka S zove se *vrh* ili *središte pramena*, a ravnina **P** zove se *nosilac pramena*.



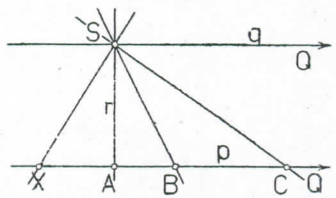
Sl. 389.

Kroz jedan pravac može se položiti neizmjerno mnogo ravnina. Ravnine, koje prolaze kroz jedan te isti pravac s, nazivljemo *pramenom ravnina*. Pravac s zove se *osovina* toga pramena (sl. 390.).

Niz točaka, pramen zraka i pramen ravnina nazivljemo *temeljnim tvorevinama geometrije*.



Sl. 390.



Sl. 391.

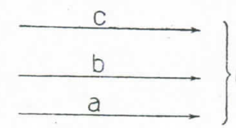
2. Neizmjerno daleki elementi. *a) Neizmjerno daleka točka pravca.* Nacrtajmo pravac p, uzmimo točku S i povucimo njom pravac r, koji siječe pravac p u točki A, zatim pravac q, koji je usporedan s pravcem p, (sl. 391.).

Okreće li se pravac r oko točke S u ravnini crtnje, sjecište će A zauzeti na pravcu p različite položaje $B, C, D, \ldots$ Ta će se sjecišta sve više odmicati od početnog položaja A. Dođe li pravac r u pravac q, odmaknut će se sjecište A neizmjerno daleko. Okreće li se pravac r oko točke S i dalje u istom smislu, pojavit će se sjecište na pravcu p s druge strane točke A. Budući da svakom položaju pravca r pripada na pravcu p samo jedna točka, tad i pravac q mora imati s pravcem p samo jednu zajedničku točku Q, koja je neizmjerno daleko.

Pravac ima jednu jedinu neizmjerno daleku točku.

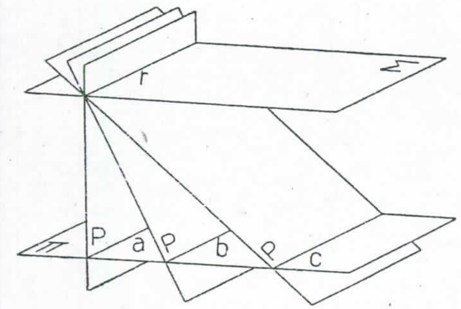
Dva usporedna pravca sijeku se u neizmjerno dalekoj točki.

Ima beskonačno mnogo pravaca, koji se u ravnini mogu povući usporedno s pravcem p. Svi ti pravci prolaze kroz jednu te istu neizmjerno daleku točku. (Sl. 392.).



Sl. 392.

b) Neizmjerno daleki pravac ravnine. Uzmimo dvije ravnine Π i **P**, koje se sijeku u pravcu a (sl. 393.), zatim uzmimo treću ravninu Σ koja je usporedna s ravninom Π i koja siječe ravninu **P** u pravcu r. Ako se ravnina **P** okreće oko pravca r, onda će presječnica a zauzeti u ravnini Π različite položaje $b, c, d, \ldots$ Ta će se presječnica sve više odmicati od početnog položaja a. Dođe li ravnina **P** u ravninu Σ, odmaknut će se presječnica neizmjerno daleko. Budući da svakom položaju ravnine **P** pripada samo jedna presječnica u ravnini Π, to i ravnine Π i Σ mogu imati samo jedan zajednički pravac, koji je neizmjerno daleko.



Sl. 393.

Ravnina ima jedan jedini neizmjerno daleki pravac.

Dvije usporedne ravnine sijeku se u neizmjerno dalekom pravcu.

Ako je zadana ravnina, onda je time zadan i neizmjerno daleki pravac te ravnine. Taj pravac nema u ravnini određenog smjera.

Ima beskonačno mnogo ravnina, koje su usporedne sa zadanom ravninom. Sve te ravnine imaju zajednički neizmjerno daleki pravac. Sve usporedne ravnine čine pramen ravnina, kojima je osovina neizmjerno daleki zajednički pravac.

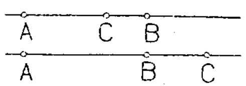
c) *Neizmjerno daleka ravnina prostora.* Svaki pravac u prostoru ima po jednu neizmjerno daleku točku, svaka ravnina u prostoru ima po jedan neizmjerno daleki pravac. Sve neizmjerno daleke točke i svi neizmjerno daleki pravci prostora leže u ravnini, koja je neizmjerno daleko. Neizmjerno daleka ravnina nema određenog položaja u prostoru.

§ 113. Dvoomjer za četiri točke

1. Parametar točke. Uzmemo li u nizu točaka dvije točke A i B kao temeljne točke, zatim treću točku C, onda imamo omjer

$$\lambda = \frac{AC}{BC}.$$

Vrijednost λ toga omjera zove se *parametar* točke C. Ako se uzme da je taj omjer zadan, pa se traži položaj točke C u nizu, našlo bi se, da on tim omjerom nije još potpuno određen. Točka naime C može ležati na dužini AB ili izvan te dužine (sl. 394.). Da se položaj točke C može stalno odrediti, mora se još ustanoviti smjerove pojedinih dužina.



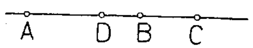
Sl. 394.

Uzet će se da je smjer od A prema B pozitivan, a smjer od B prema A negativan, t. j. da je $AB = -BA$ ili $AB + BA = 0$. Ako se dakle u gornjem omjeru uzmu u obzir predznaci dužina AC i BC, onda je tim omjerom položaj točke C s obzirom na temeljne točke niza A i B jednoznačno određen. Imadu li dužine AC i BC isti smjer, točka C leži izvan dužine AB, pa je λ pozitivan. Imadu li pak dužine AC i BC protivan smjer, onda točka C leži na dužini AB, pa je λ negativan. U prvom je slučaju dužina AB razdijeljena na dva dijela točkom C izvana, a u drugom slučaju razdijeljena je točkom C iznutra.

Točki A pripada parametar $\lambda = 0$, točki B pripada parametar $\lambda = \infty$. Ako je točka C u polovištu dužine AB, onda je $\lambda = -1$, ako je C neizmjerno daleko, onda je $\lambda = +1$,

Odredi točke kojima je parametar $\lambda = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

2. Dvoomjer za četiri točke. U nizu točaka p (sl. 395.) zadane su dvije temeljne točke A i B, zatim dvije dalnje točke C i D. Za točku C postoji omjer $\frac{AC}{BC}$, a za točku D postoji omjer $\frac{AD}{BD}$. Iz ta dva omjera može se napraviti nov omjer



Sl. 395.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Tako sastavljeni omjer zove se *dvoomjer* za četiri točke A, B, C, D. Taj je dvoomjer karakterističan za položaj tih točaka. Gornji dvoomjer izražava se jednostavnije ovako: $(ABCD)$, t. j.

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Kod toga se mora uzeti u obzir predznak svakog pojedinog omjera, tada je vrijednost $(ABCD)$ za svaki položaj točaka C i D s obzirom na temeljne točke A i B potpuno određena.

Mjesto točaka A B mogu se kao temeljne točke uzeti točke C i D. Prema tome je $(CDAB) = (ABCD)$. Može se naime pisati

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = (ABCD).$$

Lako se nađe da je

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Obično se uzima, da je vrijednost dvomjera $(ABCD) = \Delta$.

3. Harmonijske točke. Zadane su dvije temeljne točke A i B, zatim je zadana treća točka C tako, da ona dijeli dužinu AB izvana po zadanom omjeru $m : n$. Treba odrediti četvrtu točku D tako, da ona dijeli dužinu AB iznutra po istom omjeru. U tom je slučaju

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

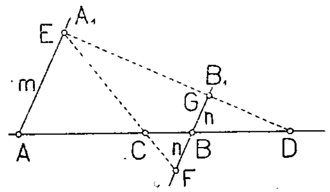
Ta se jednadžba može pisati u obliku $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, ili

$$(ABCD) = -1$$

Ako je za četiri točke niza A, B, C, D dvoomjer $(ABCD) = -1$, onda se te četiri točke zovu *četiri harmonijske točke*. Točke A i B jesu jedan par, a C i D drugi par harmonijskih točaka.

Konstrukcija harmonijskih točaka. Zadane su tri točke niza A, B, C, *neka se konstruira četvrta harmonijska točka D.*

Rješenje. Kroz točke A i B potegnu se dva usporedna pravca AA_1 i BB_1 (sl. 396.), zatim se točkom C povuče po volji pravac koji AA_1 siječe u točki E, a BB_1 u točki F. Ako se na pravac BB_1 prenese $BG = BF$ i točkama E i G povuče pravac, on siječe AB u traženoj točki D. Ima li naime dužina AE m jedinica mjere, a dužine BF i BG n jedinica, gdje su m i n pozitivni brojevi, tada je, ako se uzmu u obzir predznaci dužina:



Sl. 396.

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n} \quad \text{i} \quad \frac{AD}{BD} = +\frac{m}{n}$$

Odatle je

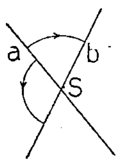
$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Ako je točka C u polovištu dužine AB, onda je $AE = BF = BG$. Pravac EG je prema tome usporedan s pravcem AB, pa je četvrta harmonijska točka D neizmjerno daleko, t. j.:

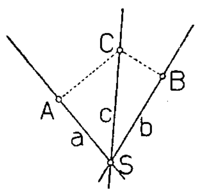
Dvije točke pravca čine sa središtem tih točaka i neizmjerno dalekom točkom pravca četiri harmonijske točke.

§ 114. Dvoomjer za četiri zrake pramena

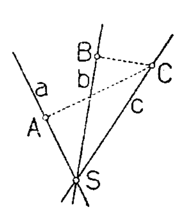
1. Kut dviju zraka pramena. Dvije zrake a i b pramena S (sl. 397.) čine četiri kuta, od kojih su dva i dva vršna. Ovdje će se uzeti u obzir samo jedan oštar i jedan tupi kut, t. j. dva sukuta. Kut koji čine zrake a i b označuje se s (ab). Tom oznakom ujedno se označuje i smisao okretanja zrake a kod opisivanja kuta. Ako naime s (ab) označimo kut dviju



Sl. 397.



Sl. 398.



Sl. 399.

zraka a i b, onda je time označeno, da se zraka a okreće oko S da opiše kut i dođe u zraku b. No smisao okretanja zrake a nije kod toga jednoznačno određen, jer se zraka a može okretati oko S tako da opiše ili oštar, ili tupi kut.

Da smisao okretanja bude jednoznačno određen, uzet će se da je smisao okretanja pozitivan ili negativan prema tome, da li se zraka okreće kod opisivanja kuta u smjeru kazaljke na satu ili u protivnom smjeru. Ako dakle kut, koji čine zrake a i b, označimo s (ab), onda se zraka a okreće oko S u smislu pozitivnom, a ako se taj kut označi s $(-ba)$, onda se zraka b okreće oko S u smislu negativnom. U jednom i drugom slučaju zrake su a i b opisale isti kut, pa se može pisati:

$$(ab) = (-ba) \quad \text{ili} \quad (ab) + (ba) = 0.$$

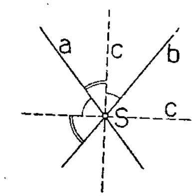
2. Parametar jedne zrake pramena. U zadanom pramenu zraka uzet će se dvije zrake a i b kao temeljne zrake, zatim će se uzeti treća zraka

c, koja s a i b čini kutove (ac) i (bc). Ako se s kojegod točke C zrake c spuste okomice na zrake a i b t. j. $CA \perp a$ i $CB \perp b$, onda je $AC = SC \cdot \sin(ac)$ i $BC = SC \cdot \sin(bc)$. Odatle je

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \lambda.$$

Ovaj kvocijent ima za sve točke zrake c istu vrijednost λ. Ta se vrijednost zove *parametar zrake c.*

Ako se uzme, da je taj omjer zadan, pa da treba u pramenu odrediti zraku c, koja pripada tom omjeru, našlo bi se, da položaj te zrake samim tim omjerom nije jednoznačno određen. Zraka naime c mogla bi dijeliti na dva kuta ili oštar ili tup kut, koji čine zrake a i b. Da se položaj zrake c može jednoznačno odrediti, moraju se u obzir uzeti predznaci okretanja zraka a i b kod opisivanja kutova (ac) i (bc). Ako okretanja (ac) i (bc) imadu isti predznak (sl. 399.), onda je parametar λ pozitivan, a ako ta okretanja imaju protivne predznake, kao na sl. 398., onda je λ negativan. Ako se dakle uzmu u obzir predznaci okretanja kod opisivanja kutova onda svakoj vrijednosti od λ pripada jedna jedina zraka pramena. Zraci a pripada vrijednost $\lambda = 0$, a zraci b vrijednost $\lambda = \infty$. Ako zraka c raspolavlja oštri kut (ab), onda je $\lambda = -1$, a ako raspolavlja tupi kut, onda je $\lambda = +1$ (sl. 400.).



Sl. 400.

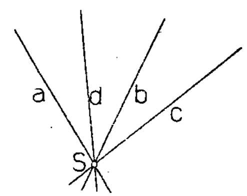
Obrnuto: Za svaki položaj zraka c u pramenu omjer je

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$$

s obzirom na temeljne zrake a i b jednoznačno određen.

3. Dvoomjer za četiri zrake pramena. U pramenu S (sl. 401.) uzet će se dvije temeljne zrake a i b i dvije daljnje zrake c i d. Za zraku c postoji omjer $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$, a za zraku d postoji omjer $\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$. Iz ta dva omjera imamo nov omjer

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$



Sl. 401.

Takav se sastavljeni omjer zove *dvoomjer* za četiri zrake a, b, c, d, a može se jednostavnije izraziti s $(abcd)$, t. j.

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Kod toga se mora uzeti u obzir predznak svakog pojedinačnog omjera. Tada je vrijednost $(abcd) = \delta$ za svaki položaj zraka c i d jednoznačno određena.

4. Harmonijske zrake. Uzmu li se dvije temeljne zrake a i b pramena, zatim treća zraka c, koja dijeli kut (ab) po danom omjeru, i potraži četvrta zraka d, tako da je

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = -\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

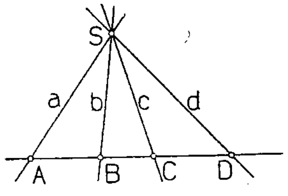
onda se kaže da su zrake a, b, c, d četiri harmonijske zrake.

Odatle je $\dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = -1$, ili $(abcd) = -1$.

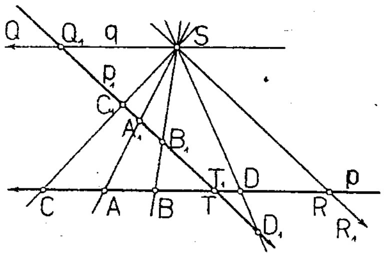
Konstrukcija harmonijskih zraka. Ako se konstruiraju četiri harmonijske točke, pa se one spoje pravcima s kojomgod točkom S, dobiju se četiri harmonijske zrake. (Isporedi § 115. t. 4).

§ 115. Perspektivnost nizova i pramenova

1. Niz točaka i pramen zraka u perspektivnom položaju. Kad se pramen zraka S siječe pravcem p, (sl. 402.), koji ne ide središtem S, na tom se pravcu dobije niz točaka $A, B, C, \ldots$ Svaka točka toga niza jest sjecište pravca p s jednom zrakom pramena S.



Sl. 402.



Sl. 403.

Ako se svaka točka zadanoga niza p spoji s kojomgod točkom S, koja je izvan toga niza, dobit će se pramen zraka S. Svakoj točki niza pripada samo jedna zraka pramena. Kaže se, da su pramen i niz *jednoznačno pridijeljeni.*

Kad su niz i pramen tako položeni, da je niz presjek pramena, onda se kaže da su taj niz i pramen perspektivni.

Točka S zove se *perspektivno središte*, a pravac p, zove se *perspektivna os.*

Kad su pramen i niz u perspektivnom položaju, onda se kaže, da zrake $a, b, c, \ldots$ pramena S *projiciraju* točke $A, B, C, \ldots$ niza p iz središta S.

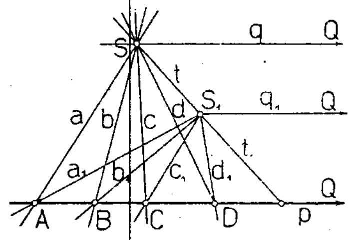
Znak je za perspektivnost $\overline{\wedge}$. Piše se $(S) \overline{\wedge} (p)$, a čita: Pramen je S u perspektivnom položaju s nizom p.

2. Perspektivni nizovi točaka. Siječe li se pramen zraka S (sl. 403.) s dva pravca p i p_1, koji ne prolaze točkom S, na svakom tom pravcu dobije se niz točaka. Zrake $a, b, c, \ldots$ sijeku p u točkama $A, B, C, \ldots$, a pravac p_1 u točkama $A_1, B_1, C_1, \ldots$ Neizmjerno dalekoj točki Q niza p pripada točka Q_1 niza p_1, a neizmjerno dalekoj točki R_1 niza p_1 pripada točka R niza p. U sjecištu obih nizova padaju obje pripadne točke T i T_1 zajedno.

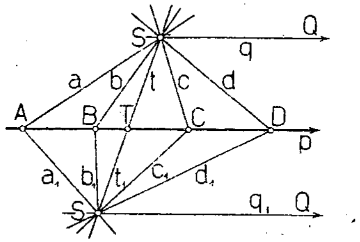
Kad su dva niza p i p_1 tako pridruženi da svakoj točki jednoga niza pripadne samo jedna točka drugoga niza, i da pripadni parovi točaka leže na istim zrakama pramena S, onda se kaže da su takva dva niza perspektivna s obzirom na točku S kao perspektivno središte tih nizova. Piše se: $(p) \overline{\wedge} (p_1)$.

Ako je zadan pramen, koji projicira dva perspektivna niza pita se, uz koje uvjete mogu dva niza biti perspektivna. Dva niza mogu biti perspektivna, kad su od svakoga niza zadane po tri točke $A, B, C, \ldots$ i $A_1, B_1, C_1, \ldots$ i kad se jedan pripadni par tih točaka, na pr. A i A_1, sjedinjuju u jednu točku. Druga dva para B i B_1, C i C_1 daju dvije zrake, koje se sijeku u perspektivnom središtu S. Četvrti i daljni parovi pripadnih točaka ne mogu se uzeti po volji, nego se dobiju spomoću zraka, koje idu središtem S. Kaže se, da se nizovi spomoću zraka iz S *nadopunjavaju.*

3. Perspektivni pramenovi zraka. Zadan je u ravnini niz točaka p i dvije točke S i S_1, koje mogu biti na istoj strani pravca p (sl. 404.) ili



Sl. 404.



Sl. 405.

na različitim stranama (sl. 405.). Spojimo li točke $A, B, C, \ldots$ niza p s točkama S i S_1 dobijemo dva pramena zraka S i S_1. Ova su dva pramena tako pridružena, da svakoj zraci jednoga pramena pripada samo jedna zraka drugoga pramena. Usporedne zrake q i q_1, koje spajaju neizmjerno daleku točku Q niza p, jesu dvije pripadne zrake. U spojnicu točaka S i S_1 padaju obje pripadne zrake t i t_1 pramenova S i S_1.

Kaže se, da oba pramena S i S_1 projiciraju isti niz točaka p. Za dva pramena, koji projiciraju isti niz točaka, kaže se da su perspektivni. Piše se: $(S) \overline{\wedge} (S_1)$.

Pita se sad, mogu li se dva pramena po volji zadati, da oni budu u perspektivnom položaju, t. j. da projiciraju isti niz točaka? Želimo li da

*

imamo dva perspektivna pramena, onda od svakoga pramena mogu po volji biti zadane samo po tri zrake, na pr. $a, b, c, \ldots$ i $a_1, b_1, c_1 \ldots$ od kojih su dvije, na pr. a i a_1 sjedinjene u jednu zraku. Druga dva pripadna para b i b_1, c i c_1 sijeku se u dvije točke B i C, kojima je određena perspektivna os p. Ostali parovi zraka ne mogu se po volji zadati, jer se svake dvije pripadne zrake moraju sjeći u istoj točki osi p.

Za svaku zraku jednoga pramena može se spomoću perspektivne osi odrediti pripadna zraka drugoga pramena. Kaže se, da se perspektivni pramenovi *nadopunjavaju*.

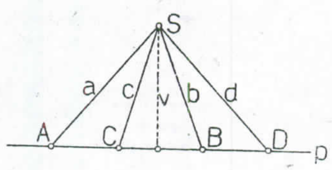
4. Nepromjenljivost dvoomjera. Uzmimo, da četiri zrake a, b, c, d, projiciraju četiri točke A, B, C, D niza p (sl. 406.), da je dakle $(S)\overline{\wedge}(p)$. Spustimo li s točke S okomicu v na pravac p, ta je okomica zajednička visina trokuta ACS, BCS, ADS i BDS. Označimo nadalje s a, b, c, d dužine AS, BS, CS, DS. Ploština je trokuta ACS, BCS, ADS i BDS redom:

$$\frac{1}{2} AC \cdot v = \frac{1}{2} ac \cdot \sin(ac) \quad \text{ili} \quad AC \cdot v = ac \cdot \sin(ac),$$

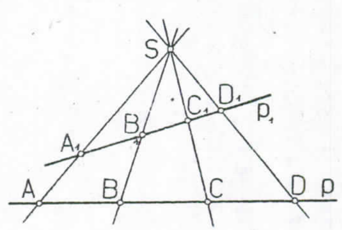
$$\frac{1}{2} BC \cdot v = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(bc) \quad \text{ili} \quad BC \cdot v = bc \cdot \sin(bc),$$

$$\frac{1}{2} AD \cdot v = \frac{1}{2} ad \cdot \sin(ad) \quad \text{ili} \quad AD \cdot v = ad \cdot \sin(ad),$$

$$\frac{1}{2} BD \cdot v = \frac{1}{2} bd \cdot \sin(bd) \quad \text{ili} \quad BD \cdot v = bd \cdot \sin(bd).$$



Sl. 406.



Sl. 407.

Iz prve i druge jednadžbe imamo

$$\frac{AC}{BC} = \frac{a \cdot \sin(ac)}{b \cdot \sin(bc)},$$

a iz treće i četvrte

$$\frac{AD}{BD} = \frac{a \cdot \sin(ad)}{b \cdot \sin(bd)}.$$

Odatle slijedi da je

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

ili

$$(ABCD) = (abcd) \tag{1}$$

Uzme li se točka S na kojem drugom mjestu, na pr. u točki S_1, pa se točke niza A, B, C, D spoje zrakama a_1, b_1, c_1, d_1 s točkom S_1, opet bi se dogodilo da je

$$(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1) \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1) \tag{3}$$

t. j.: *Kojegod četiri točke niza projiciraju se sa svake točke spomoću četiri zrake, koje imaju isti dvoomjer.*

Imamo li dva perspektivna niza p i p_1 (sl. 407.) sa po četiri točke A, B, C, D i A_1, B_1, C_1, D_1, onda je

$$(ABCD) = (abcd), \quad (A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd).$$

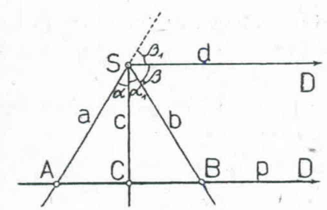
Odatle je

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1), \text{ t. j.:}$$

Kojegod četiri zrake pramena siječe svaki pravac u četiri točke, koje imaju isti dvoomjer.

5. Harmonijske točke i pramen u perspektivnom položaju. Ako je $(ABCD) = (abcd) = -1$, slijedi ovo: Spojimo li četiri harmonijske točke A, B, C, D niza s kojomgod točkom S izvan niza, dobiju sa četiri harmonijske zrake a, b, c, d (sl. 408.).

Nacrtajmo dvije zrake a i b, te konstruirajmo simetrale c i d kuta i sukuta, koji čine zrake a i b. Tada je $c \perp d$. Povucimo kojigod pravac $p \parallel d$, on siječe četiri zrake a, b, c, d u četiri točke A, B, C, D, gdje je D neizmjerno daleka točka pravca p. Budući da je $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ i $c \perp d$, tada je trokut ABS istokračan, odakle slijedi, da je $\overline{AC} = \overline{BC}$, t. j. točka C je u polovištu dužine AB. Prema tome su točke A, B, C, D četiri harmonijske točke (§ 113., t. 3). Budući da te točke projiciraju iz S zrake a, b, c, d, slijedi, da su te zrake četiri harmonijske zrake. Možemo dakle reći:



Sl. 408.

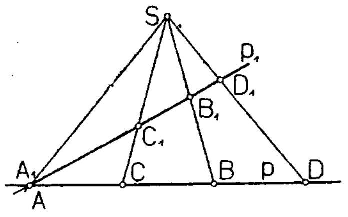
Simetrale kuta i sukuta čine s krakovima toga kuta harmonijske zrake.
Kojigod pravac siječe četiri harmonijske zrake u četiri harmonijske točke.

§ 116. Projektivna srodnost nizova i pramenova

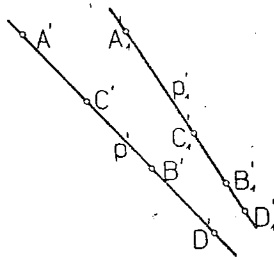
1. Pojam projektivnosti. Ako se dva perspetivna niza točaka p i p_1 (sl. 409.) rastave i postave u drugi takav položaj p' i p'_1 (sl. 410.), koji nije više perspektivan, kaže se, da su ta dva niza projektivno srodni ili da su *projektivni*.

U dva projektivna niza svakoj točki jednoga niza pripada posve određena točka drugoga niza; dvoomjer za četiri točke jednoga niza jednak je dvoomjeru za pripadne četiri točke drugoga niza.

Znak je za projektivnost $\overline{\wedge}$. Piše se: $(p') \overline{\wedge} (p'_1)$, a čita: Niz p' projektivan je sa nizom p'_1.



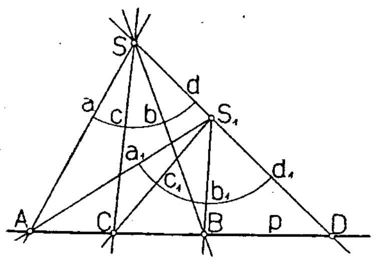
Sl. 409.



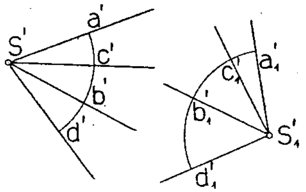
Sl. 410.

Dva su projektivna niza određena sa tri točke svakoga niza, koje se mogu po volji odabrati.

Ako se dva perspektivna pramena zraka S i S_1 (sl. 411.) rastave i dovedu u nov položaj S' i S'_1 (sl. 412.), koji nije više perspektivan, onda se za takova dva pramena kaže da su *projektivni*, t. j.:



Sl. 411.



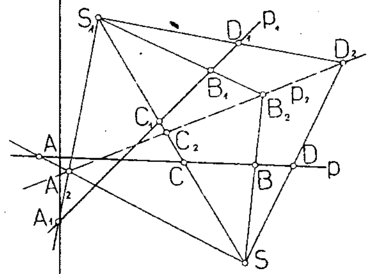
Sl. 412.

U dva projektivna pramena svakoj zraci jednoga pramena pripada samo jedna posve određena zraka drugoga pramena; dvoomjer za četiri zrake jednoga pramena jednak je dvomjeru za pripadne četiri zrake drugoga pramena.

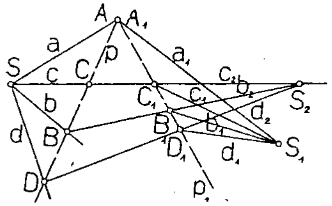
Dva su projektivna pramena zraka određena sa tri zrake svakoga pramena, koje se mogu po volji odabrati.

2. Konstrukcija projektivnih nizova. U nizu p (sl. 413.) *zadane su po volji tri točke A, B, C, a u nizu p_1 pripadne tri točke A_1, B_1, C_1, neka se ti nizovi nadopune daljnjim pripadnim točkama.*

Da se dobije četvrti pripadni par točaka D i D_1, postupat će se ovako: Spojit će se dvije pripadne točke, na pr. točke C i C_1, pravcem i na tom pravcu odabrat će se po volji dvije točke S i S_1, zatim će se povući zrake SA i S_1A_1, koje se sijeku u točki A_2, te zrake SB i S_1B_1, koje se sijeku u točki B_2, i spojit će se točke A_2 i B_2 s pravcem p_2. U nizu p uzet će se po volji četvrta točka D i potražit će se u nizu p_1 pripadna točka D_1 tako, da se povuče pravac SD i njegovo sjecište D_2 s pravcem p_2 spoji s točkom S_1. Pravac S_1D_1 siječe pravac p_1 u traženoj točki D_1.



Sl. 413.



Sl. 414.

Na isti način odredili bi se i ostali parovi pripadnih točaka u projektivnim nizovima p i p_1.

Da je gornja konstrukcija ispravna dokazat ćemo na ovaj način: Nizovi p i p_2 jesu perspektivni i zato je

$$(ABCD) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Isto su tako perspektivni nizovi p_1 i p_2, pa je

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Prema tome je i

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1), \qquad \text{t. j.:}$$

Četiri točke niza p imadu isti dvoomjer kao i pripadne četiri točke niza p_1. Prema tome su oba ta niza projektivna.

3. Konstrukcija projektivnih pramenova. *Zadane su po volji po tri zrake a, b, c i a_1, b_1, c_1 projektivnih pramenova S i S_2* (sl. 414.), *neka se odredi četvrti pripadni par zraka d i d_1!*

Sjecištem dviju pripadnih zraka a i a_1 povući će se po volji dva pravca p i p_1. Pravac p siječe zrake a, b, c u točkama A, B, C, a pravac p_1 siječe zrake a_1, b_1, c_1 u točkama A_1, B_1, C_1. Ako se spoje pripadne točke B i B_1 te C i C_1, obje se spojnice sijeku u točki S_2. Povuče li se četvrta zraka d pramena S, ona siječe pravac p u točki D. Spojnica S_2D siječe p_1 u točki D_1, te je S_1D_1 četvrta zraka d_1 pramena S_1, koja pripada zraci d.

Budući da su pramenovi S i S_2 perspektivni s obzirom na os p, to je

$$(abcd) = (a_2b_2c_2d_2).$$

Isto tako su perspektivni pramenovi S_1 i S_2 s obzirom na os p_1, pa je

$$(a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2),$$

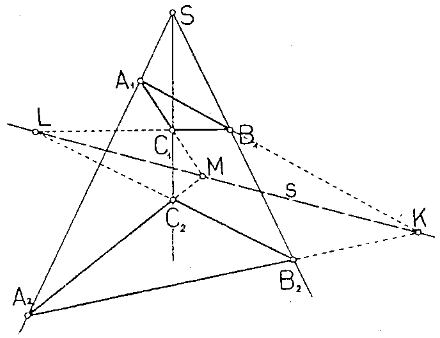
dakle je i

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1), \qquad \text{t. j.:}$$

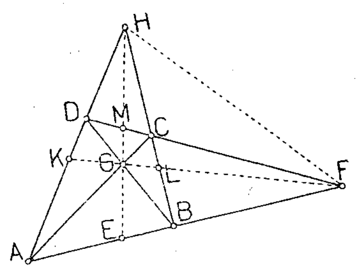
Četiri zrake pramena S imaju isti dvoomjer kao pripadne četiri zrake pramena S_1. Prema tome su oba ta pramena projektivna.

4. **Desargues-ov stavak**: *Ako su dva trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ u ravnini tako položena, da spojnice A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 idu kroz istu točku S, onda sjecišta pripadnih stranica A_1B_1 i A_2B_2, A_1C_1 i A_2C_2, B_1C_1 i B_2C_2 leže na istom pravcu* s. (Sl. 415.).

Dokaz. Da dokažemo gornji stavak, uzet ćemo u ravnini trokuta točku S, povući ćemo tom točkom tri zrake a, b, c i na svakoj zraci uzet ćemo po jedan par točaka A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2. Te ćemo točke uzeti kao vrhove trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, koji su sada tako položeni, da spojnice pripadnih vrhova idu kroz istu toču S. Zrake pramena S projiciraju na pravcima A_1B_1 i A_2B_2 nizove točaka, koji su perspektivni. Ako se iz C_1 projicira niz A_1B_1, a iz C_2 niz A_2B_2, onda su oba pramena C_1 i C_2 pro-



Sl. 415.



Sl. 416.

jektivna. No budući da je u tim pramenovima zraka C_1C_2 sama sebi pridružena, oba su ta pramena također perspektivna. Prema tome se pripadne zrake A_1C_1 i A_2C_2, B_1C_1 i B_2C_2 pramenova C_1 i C_2 sijeku u točkama, kroz koje mora ići perspektivna os s tih pramenova. Budući da kroz točke A_1B_1 i A_2B_2 idu pripadne zrake pramenova C_1 i C_2, to se i pravci A_1B_1 i A_2B_2 moraju sjeći u istoj točki na osi s.

Time je gornji stavak dokazan.

Na sličan bi se način dokazao i obrnuti stavak, koji bi glasio ovako: *Ako su dva trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ u ravnini tako položena, da sjecišta pripadnih stranica A_1B_1 i A_2B_2, A_1C_1 i A_2C_2, B_1C_1 i B_2C_2 leže na istom pravcu* s, *onda spojnice pripadnih vrhova* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *moraju ići kroz istu točku* S.

Napomena. Iz slike se 415. vidi, da su trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ kolinearno srodni: pravac s je kolinearna os, a točka S je središte kolineacije.

§ 117. Potpuni četverokut

1. **Potpuni četverokut.** Četiri točke A, B, C, D (sl. 416.) mogu se spojiti sa šest pravaca. Na taj način nastane lik, koji se zove *potpuni četverokut*. Zadane četiri točke jesu *vrhovi*, a šest spojnica jesu *stranice* toga četverokuta. Po dvije stranice, koje sadrže sva četiri vrha, zovu se *protustranice*. Potpuni četverokut ima tri para protustranica: AB i CD, AD i BC, AC i BD. Sjecište dviju pripadnih protustranica zove se *sporedni vrh*. Potpuni četverokut ima tri sporedna vrha: F, G i H. Spojnica dviju sporednih vrhova zove se *sporedna stranica*. Potpuni četverokut ima tri sporedne stranice. Tri sporedne stranice čine *sporedni trokut* (ili *polarni trokut*) potpunog četverokuta.

2. **Harmonijski nizovi i pramenovi na potpunom četverokutu.** Ispitajmo, da li su točke A, B, E, F četiri harmonijske točke. Točke A, B, E, F, projiciraju se iz točke C u točke G, H, E, M. Ove dvije grupe točaka nalaze se u perspektivnom položaju i zato je

$$(ABEF) = (GHEM) \ldots\ldots \qquad (1)$$

Točke G, H, E, M projiciraju se iz točke D u točke B, A E, F, pa je

$$(GHEM) = (BAEF) \ldots\ldots \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi da je

$$(ABEF) = (BAEF) \ldots\ldots \qquad (3)$$

Ili drugačije pisano

$$\frac{AE}{BE} : \frac{AF}{BF} = \frac{BE}{AE} : \frac{BF}{AF}$$

Odatle je

$$\left(\frac{AE}{BE} : \frac{AF}{BF}\right)^2 = 1 \qquad \text{ili} \qquad (ABEF)^2 = 1$$

Prema tome je

$$(ABEF) = \pm 1.$$

Vrijednost je $+1$ isključena, jer za taj slučaj točke E i F padaju zajedno. Prema tome je

$$(ABEF) = -1, \qquad \text{t. j.:}$$

Točke A, B, E, F jesu četiri harmonijske točke. Zrake, koje te četiri točke projiciraju iz H, jesu četiri harmonijske zrake.

Budući da četiri harmonijske zrake iz H projiciraju grupe točaka K, L, G, F i D, C, M, F to su i te grupe točaka harmonijske točke.

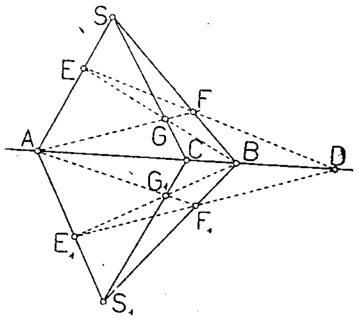
Iz (3) slijedi da su točke E, M, G, H četiri harmonijske točke. Četiri zrake, koje te točke projiciraju iz F jesu harmonijske zrake. Iste te zrake projiciraju grupe točaka A, D, K, H i B, C, L, H, i zato su i te grupe točaka harmonijske.

Po četiri zrake, koje iz G projiciraju po četiri harmonijske točke, jesu harmonijske zrake.

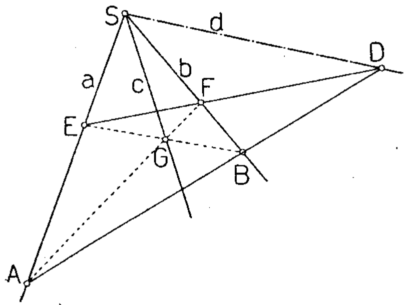
3. Konstrukcija harmonijskih točaka. *Zadane su tri točke A, B, C pravca p, neka se konstruira četvrta harmonijska točka D, koja je pridružena točki C.* (Sl. 417.).

Izvan pravca p uzme se po volji točka S i iz te točke kao središta pramena projiciraju se zadane točke s pomoću zraka SA, SB, SC, zatim se na zraci SC uzme po volji točka G i kroz nju povuku po volji dva pravca AF i BE. Ako se povuče pravac EF, on siječe pravac p u traženoj točki D.

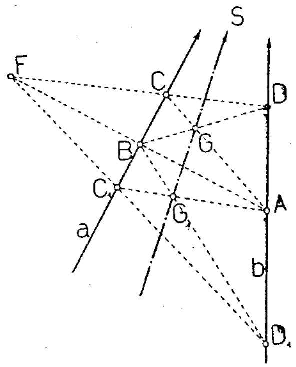
Da su točke A, B, C, D četiri harmonijske točke slijedi iz promatranja potpunog četverokuta $ABFE$. Ovdje smo zadaću riješili samo s pomoću ravnala (bez upotrebe šestila).



Sl. 417.



Sl. 418.



Sl. 419.

Točka S se može uzeti i u nekom drugom položaju, na pr. u točki S_1. Dokaži s pomoću kolinearne srodnosti četverokuta $ABFE$ i ABF_1E_1 da zraka E_1F_1 mora ići točkom D! (Vidi Desargues-ov stavak, § 116. t. 4).

4. Konstrukcija harmonijskih zraka. *Zadane su tri zrake a, b, c, neka se konstruira četvrta harmonijska zraka d, koja je pridružena zraci c.* (Sl. 418.).

Na zraci c uzme se po volji točka G i kroz nju povuku po volji dva pravca AF i BE, zatim se povuku pravci EF i AB, koji će se sjeći u točki D. Tada je spojnica SD tražena zraka d.

I ovaj je zadatak riješen samo upotrebom ravnala.

5. Zadatak. *Zadana su dva pravca a i b, koji se sijeku u nedostižnoj točki S, neka se zadanom točkom G povuče pravac, koji ide točkom S.* (Sl. 419.).

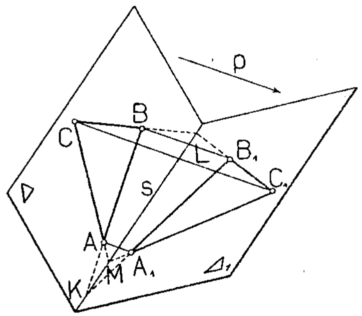
Točkom G povucimo dva pravca AC i BD, $ABCD$ smatrajmo potpunim četverokutom, zatim konstruirajmo nov četverokut ABC_1D_1 tako, da se pripadne stranice CD i C_1D_1 sijeku u istoj točki F na stranici AB. Stranice AC_1 i BD_1 sijeku se u točki G_1. Spojnica točaka G i G_1 jest traženi pravac, koji ide točkom S.

Napomena. Pravci CD_1 i DC_1 također se sijeku u istoj točki na pravcu GG_1.

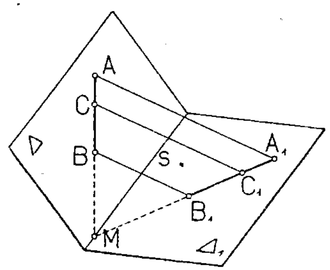
XXII. Afinost

§ 118. Afinost ravnih likova u prostoru

1. Pojam perspektivne afinosti. Zadane su dvije ravnine Δ i Δ_1, koje se sijeku u pravcu s (sl. 420.), i u ravnini Δ trokut ABC. Potegnu li se kroz točke A, B, C pravci usporedno sa zadanim smjerom p, koji nije usporedan ni s Δ ni s Δ_1, oni sijeku ravninu Δ_1 u točkame A_1, B_1, C_1, koje su vrhovi trokuta $A_1B_1C_1$. Može se uzeti, da je trokut $A_1B_1C_1$ paralelna projekcija trokuta ABC na ravnini Δ_1. No i trokut ABC može se smatrati paralelnom projekcijom trokuta $A_1B_1C_1$ na ravninu Δ.



Sl. 420.



Sl. 421.

Oba lika ABC i $A_1B_1C_1$ tako su pridružena, da svakom vrhu, svakoj stranici i svakom kutu jednoga lika pripada po jedan vrh, po jedna stranica i po jedan kut drugoga lika. Svakoj drugoj točki T ravnine Δ pripada samo jedna točka T_1 ravnine Δ_1. Ako točka T opiše pravac u ravnini Δ, onda i točka T_1 opiše pravac u ravnini Δ_1.

Oba lika $ABC\ldots$ i $A_1B_1C_1\ldots$ imadu ova svojstva:

1) Po dvije pripadne točke A i A_1, B i B_1, C i $C_1\ldots$ leže na pravcima, koji su među sobom usporedni.

2) Budući da svaka točka, koja leži na presječnici s ravnina Δ i Δ_1, pripada obim ravninama, to je svaka točka pravca s sama sebi pridružena.

3) Iz (2) slijedi, da se dva pridružena pravca ravnina Δ i Δ_1 sijeku u istoj točki na pravcu s.

4) Pravac s je sam sebi pridružen.

Ako su dva lika u prostoru tako položena, da im pridružene točke leže na pravcima, koji su usporedni sa zadanim smjerom, i ako im se pa-

rovi pridruženih pravaca sijeku u točkama, koje leže na presječnici s ravnina tih likova, onda se kaže, da su ta dva lika *perspektivno afini*.

Pravac s zove se *os afinosti*, usporedni pravci, na kojima leže parovi pridruženih točaka, zovu se *zrake afinosti*.

2. Daljna svojstva afinih likova. — *1) Omjer između dviju dužina, koje leže na jednom pravcu ravnine Δ, jednak je omjeru između dviju pripadnih dužina ravnine Δ_1.*

Dokaz. Neka su dužine AC i CB afino pridružene dužinama A_1C_1 i C_1B_1 (sl. 421.) i neka se pravci AB i A_1B_1 sijeku u točki M na osi afinosti s. Budući da pravci AB i A_1B_1 leže u istoj ravnini, imamo ove razmjere:

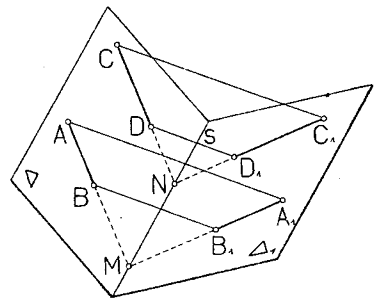
$$AC : CM = A_1C_1 : C_1M$$
$$CB : CM = C_1B_1 : C_1M$$

Odatle slijedi da
$$AC : CB = A_1C_1 : C_1B_1$$

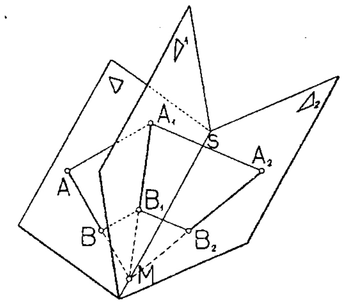
2) Usporednim pravcima jednoga lika pripadaju usporedni pravci drugoga lika.

Neka je $AB \parallel CD$, onda je $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (sl. 422.).

Dokaz. Budući da je $AB \parallel CD$ i $AA_1 \parallel CC_1$, to su i ravnine ABA_1 CDC_1 među sobom usporedne, a odatle slijedi da je $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.



Sl. 422.



Sl. 423.

3) Dvije usporedne dužine AB i CD ravnine Δ stoje u istom omjeru kao dvije pripadne usporedne dužine A_1B_1 i C_1D_1 ravnine Δ_1.

Dokaz. Neka se pripadne dužine AB i A_1B_1 sijeku u točki M, a pripadne dužine CD i C_1D_1 neka se sijeku u točki N na osi s. Iz sl. 422. slijede ovi razmjeri:

$$AM : CN = A_1M : C_1N$$
$$BM : DN = B_1M : D_1N.$$

Odatle je

$$(AM - BM) : (CN - DN) = (A_1M - B_1M) : (C_1N - D_1N)$$

ili

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$$

što smo i htjeli dokazati.

3. Perspektivna afinost kod okretanja. Neka su $ABC\ldots$ i $A_1B_1C_1\ldots$ dva afina lika u ravninama Δ i Δ_1. Ako se ravnina Δ_1 okreće oko osi s, likovi $ABC\ldots$ i $A_1B_1C_1\ldots$ ostaju persjektivno afini makar ravnina došla u bilo koji položaj, na pr. u položaj Δ_2, t. j. likovi su $ABC\ldots$ i $A_2B_2C_2\ldots$ perspektivno afini.

D o k a z. Točke, u kojima se sijeku po dva pridružena pravca, leže u osi s i one kod okretanja ravnine Δ_1 ostaju na istom mjestu. Kroz te dakle točke idu pridruženi pravci ravnina Δ i Δ_2. Sad još treba dokazati, da su spojnice pripadnih točaka AA_2, BB_2, $CD_2\ldots$ među sobom usporedne. Neka su na sl. 423. AB i A_1B_1 dvije perspektivno afine dužine, koje se u produženju sijeku u točki M na osi s. Ako se ravnina Δ_1 okrene oko s u položaj A_2B_2, tada je $MA_2 = MA_1$ i $MB_2 = MB_1$. Budući da se

$$MA : MB = MA_1 : MB_1$$

imamo, kad se MA_1 i MB_1 zamijeni s MA_2 i MB_2, razmjer

$$MA : MB = MA_2 : MB_2.$$

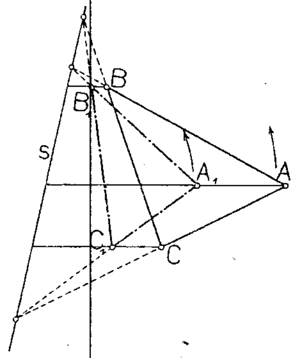
Odatle slijedi, da je $AA_2 \parallel BA_2$. Prema tome su dužine AB i A_2B_2 dvije afine dužine.

§ 119. Afinost ravnih likova, koji su u istoj ravnini

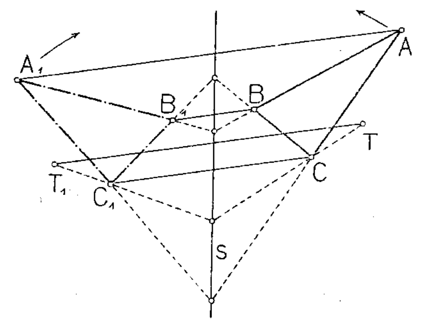
1. Afinost dvaju likova u istoj ravnini. Ako su dva lika $ABC\ldots$ i $A_1B_1C_1\ldots$ perspektivno afini, pa ravninu Δ_1 lika $A_1B_1C_1$ okrećemo oko osi afinosti s, vidjeli smo da su lik $ABC\ldots$ i lik $A_2B_2C_2\ldots$, u koji je došao lik $A_1B_1C_1\ldots$, opet dva perspektivno afina lika, makar ravninu Δ_1 okrenuli za bilo koji kut. Odatle slijedi, da će likovi $ABD\ldots$ i $A_1B_1C_1\ldots$ biti i onda perspektivno afini, kad se ravnina Δ_1 toliko okrene, da padne u ravninu Δ. U tom su dakle slučaju oba perspektivno afina lika u istoj ravnini Δ. Da su i za taj slučaj oba lika perspektivno afina slijedi iz § 118., t. 3, t. j. pridruženi se pravci sijeku u istoj točki na osi s, a zrake, koje spajaju parove pripadnih točaka, među sobom su usporedne. Zrake afinosti uopće su u kosom položaju prema osi afinosti, a mogu biti na njoj okomite ili s njom usporedne.

Na sl. 424. i 425. nacrtana su dva trokuta ABC i $A_1B_1C_1$, koji su u perspektivno afinom položaju. Ako se ravnina Δ_1 okrene za kut φ, koji čine ravnine Δ i Δ_1, onda su oba afina lika na istoj strani osi s (sl. 424.), a ako se ravnina Δ_1 okrene za kut $180^0 - \varphi$, onda su oba afina lika na različitim stranama osi s (sl. 425.). U prvom slučaju oba lika imadu isti obilazni smjer, a u drugom slučaju imaju protivan obilazni smjer.

Dva se perspektivno afina lika konstruiraju na način, koji je prikazan u § 61., sl. 255.



Sl. 424.



Sl. 425.

2. Svojstva afinih likova, koji leže u istoj ravnini.

1) Svakoj točki jednog lika pripada samo jedna točka drugog lika.

2) Pridružene točke leže na pravcima, koji su među sobom usporedni, a zovu se *zrake afinosti.* Smjer tih zraka zove se *smjer afinosti.*

3) Svaka je točka osi afinosti pridružena sama sebi.

4) Svakomu je pravcu jednoga lika pridružen samo jedan pravac drugoga lika. Pridruženi pravci sijeku se u istoj točki na osi afinosti s.

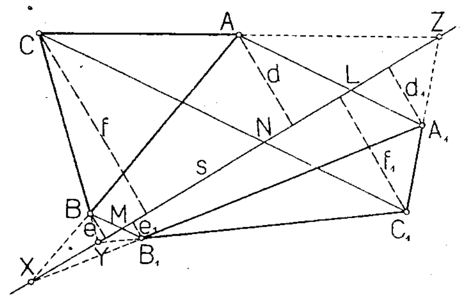
5) Os afinosti pridružena je sama sebi.

6) Pravac, koji ima smjer afinosti, pridružen je sam sebi.

7) Ako je pravac jednoga lika usporedan s osi s, onda je pridruženi pravac drugoga lika također usporedan s tom osi.

8) Paralelnim pravcima jednoga lika pridruženi su paralelni pravci drugoga lika.

9) Omjer dviju usporednih dužina jednoga lika jednak je omjeru dviju pridruženih dužina drugoga lika.



Sl. 426.

3. Karakteristika afinosti. *a)* Zadana je os afinosti s i dva afino položena trokuta ABC i $A_1B_1C_1$ (sl. 426.). Zrake afinosti sijeku os s u točkama

L, M, N, a produžene pripadne stranice trokuta sijeku os u točkama X, Y, Z. Budući da su točke L, M, N same sebi pridružene, slijedi (§ 118., t. 2) da je

$$AL : A_1L = BM : B_1M = CN : C_1N = \delta \text{ t. j.:}$$

1) Omjeri udaljenosti pridruženih točaka dvaju afinih likova do osi afinosti s u smjeru zraka afinosti imaju konstantnu vrijednost. Ta se vrijednost omjera zove *karakteristika afinosti.*

2) Ako se udaljenost točaka ravnoga lika poveća ili umanji od stalnog pravca s u određenom smjeru, tada se dobije lik, koji je sa zadanim likom u perspektivno afinom položaju.

b) Spuste li se s pridruženih točaka dvaju afinih likova okomice na os afinosti, onda je vrijednost omjera dviju pripadnih okomica jednaka vrijednosti omjera udaljenosti točaka u smjeru afinosti. Na pr.

$$d : d_1 = e : e_1 = f : f_1 = \delta,$$

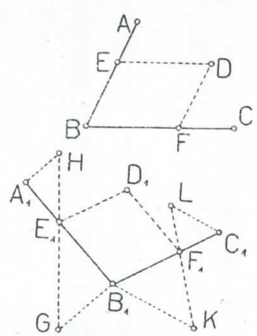
c) Može se uzeti da je

$$\triangle ABC = \triangle XYB + \triangle YZC = \triangle XZA$$
$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle XYB_1 + \triangle YZC_1 = \triangle XZA_1 \text{ (sl. 426.).}$$

Svaka dva pripadna trokuta imadu zajedničke osnovice, dok su vrijednosti omjera visina tih trokuta $= \delta$. Ploštine se svakih dvaju pripadnih trokuta odnose kao njihove pripadne visine, dakle je:

$$\Delta XYB : \Delta XYB_1 = e : e_1 = \delta$$
$$\Delta YZC : \Delta YZC_1 = f : f_1 = \delta$$
$$\Delta XZA : \Delta XZA_1 = d : d_1 = \delta. \text{ Odatle je}$$
$$(\Delta XYB : \Delta YZC - \Delta XZA) : (XYB_1 + \Delta YZC_1 - \Delta XZA_1) =$$
$$\delta + \delta - \delta \text{ ili } \Delta ABC : \Delta A_1B_1C_1 = \delta, \text{ t. j.:}$$

Ploštine se dvaju perspektivno afinih trokuta odnose kao udaljenosti dviju pripadnih točaka od osi s.



Sl. 427.

Budući da se dva perspektivno afina mnogokuta mogu rastaviti na trokute s pomoću dijagonala potegnutih s dva pripadna vrha, vidimo, da se ploštine dvaju afinih likova također odnose kao udaljenosti dviju pridruženih točaka od osi s.

4. Afini likovi u povoljnom položaju. Vidjeli smo, da je afinost potpuno određena, kad je zadana os afinosti i jedan par pridruženih točaka (§ 61., t. 3.). Ako os afinosti nije zadana, t. j. ako dva lika nisu u afinom položaju, onda je afinost određena, ako su od dva pripadna lika zadane po tri pripadne točke A,B,C i A_1,B_1,C_1 (sl. 427.).

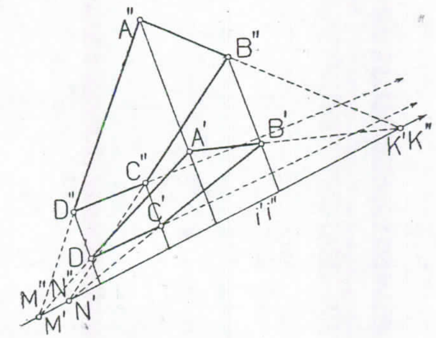
U tom se naime slučaju može svakoj četvrtoj točki D jednoga lika konstruirati četvrta pripadna točka D_1 drugoga lika, i to na temelju svojstva 2) i 3) iz § 118., t. 2. na slijedeći način: Točkom D povući će se $DE \parallel BC$ i $DF \parallel AB$, zatim će se odrediti točke E_1 i F_1 tako, da bude

$$A_1E_1 : E_1B_1 = AE : EB \text{ i } B_1F_1 : F_1C_1 = BF : FC$$

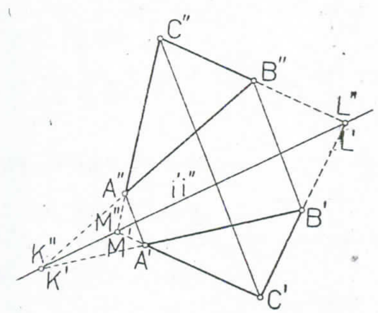
i napokon će se povući točkom E_1 pravac usporedno s B_1C_1, a točkom F_1 pravac usporedno s B_1A_1. Oba se povučena pravca sijeku u točki D_1. ($B_1G \parallel A_1H$, $B_1G = BE$, $A_1H = AE$, $B_1K \parallel C_1L$, $B_1K \parallel BF$, $C_1L = CF$, pravac GH siječe A_1B_1 u točki E_1, a pravac KL siječe B_1C_1 u točki F_1).

§ 120. Afinost između tlocrta i nacrta ravnoga lika

Zadane su projekcije $A'B'C' \ldots$ i $A''B''C'' \ldots$ ravnoga lika $ABC \ldots$ (sl. 428., 429.). Ravnina ravnoga lika $ABC \ldots$ siječe ravninu istovjetnosti u pravcu i, kojemu projekcije padaju u isti pravac $i' \equiv i''$. Pravac i zove se *os istovjetnosti.* Ako se produže stranice lika $ABC \ldots$, one sijeku ravninu istovjetnosti u točkama $K,L,M \ldots$, koje leže na pravcu i. Produžimo li prema tome pridružene projekcije stranica lika $ABC \ldots$, dakle



Sl. 428.



Sl. 429.

$A'B'$ i $A''B''$, $B'C'$ i $B''C''$, $C'D'$ i $C''D'' \ldots$, one se sijeku u točkama $K'(\equiv K'')$, $L'(\equiv L'')$, $M'(\equiv M'') \ldots$, koje leže na pravcu $i'(\equiv i'')$.

Između tlocrta i nacrta ravnoga lika postoje ova dva svojstva:

1) Pridružene točke A' i A'', B' i B'', C' i $C'' \ldots$ leže na usporednim pravcima (ordinalama).

2) Pridruženi pravci $A'B'$ i $A''B''$, $B'C'$ i $B''C''$, $C'D'$ i $C''D'' \ldots$ sijeku se u točkama, koje leže na istom pravcu $i'(\equiv i'')$.

Odatle zaključujemo:

Tlocrt i nacrt ravnoga lika jesu dva perspektivno afina lika. Ordinale su zrake afinosti, a pravac $i'(\equiv i'')$ jest os afinosti.

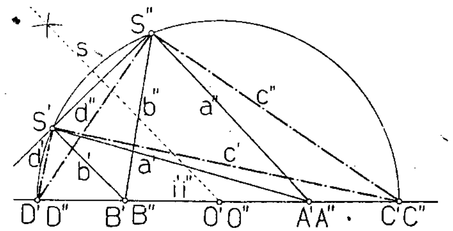
Na sl. 428. nacrtane su projekcije četverokuta, kojemu je ista strana okrenuta prema ravninama projekcija. Te projekcije leže na istoj strani osi $i'(\equiv i'')$ i imaju isti obilazni smjer. Na sl. 429. nacrtane su projekcije trokuta, kojemu su različite strane okrenute prema ravninama projekcija. Tlocrt i nacrt leže na različitim stranama osi $i'(\equiv i'')$ i imaju protivan obilazni smjer.

§ 121. Upotreba afinosti

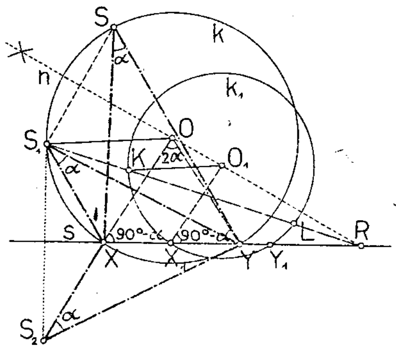
1. Afini pravi kutovi. *Zadana su dva pramena zraka S' i S''* (sl. 430.) *sa dva para pripadnih zraka a', a'' i b', b'', neka se u oba pramena nađu oni parovi pripadnih zraka, koji čine prave kutove.*

Pripadni pravci a' i a'' sijeku se u točki $A'(\equiv A'')$, a pripadni pravci b' i b'' sijeku se u točki $B'(\equiv B'')$. Ako se spoje te točke, dobije se perspektivna os $i'(\equiv i'')$. Pravac $S'S''$ može se smatrati zrakom afinosti, a pravac i' osju afinosti. Da se dobiju zrake c', c'' i d', d'', koje u pramenovima čine prave kutove, konstruirat će se simetrala s dužine $S'S''$, potražit će se njeno sjecište $O'(\equiv O'')$ s osi afinosti i' i oko toga sjecišta opisat će se polukružnica k, koja prolazi točkama S' S'' i siječe os i' u točkama $C'(\equiv C'')$ i $D'(\equiv D'')$. Spoje li se te dvije točke s točkama S' i S'', dobit će se pridruženi parovi zraka c', c'' i d', d'', te je $\sphericalangle(c'd') = 90^0$ i $\sphericalangle(c''d'') = 90^0$ (kutovi u polukrugu).

Ako su pravci a', a'' i b', b'' projekcije dvaju pravaca, koji se sijeku u točki $S(S', S'')$, onda je pravac $i'(\equiv i'')$ projekcija osi istovjetnosti i, pravci c', c'' i d', d'' jesu projekcije pravaca c i d, koji leže u ravnini, koja je određena pravcima a i b.



Sl. 430.



Sl. 431.

2. Konstrukcija jednakih afinih kutova. *Zadana je os s i par pridruženih središta S, S_1 dvaju afinih pramenova, neka se u svakom tomu pramenu odrede parovi afinih zraka, koje čine zadani kut α!*

Konstruirat će se simetrala n točaka S i S_1 (sl. 431.). Ako se uzme u toj simetrali po volji neka točka O i oko nje kao središta opiše kružnica

k, koja ide točkama S i S_1 i koja siječe os s u točkama X i Y, ako se nadalje ta sjecišta spoje s točkama S i S_1, onda je $\sphericalangle XSY = \sphericalangle XS_1Y$ (obodni kutovi).

Da se riješi gore postavljena zadaća, morala bi se konstruirati takova kružnica k, da spomenuti kutovi budu jednaki α. Kad bi se našla ta kružnica, onda bi bio središnji kut

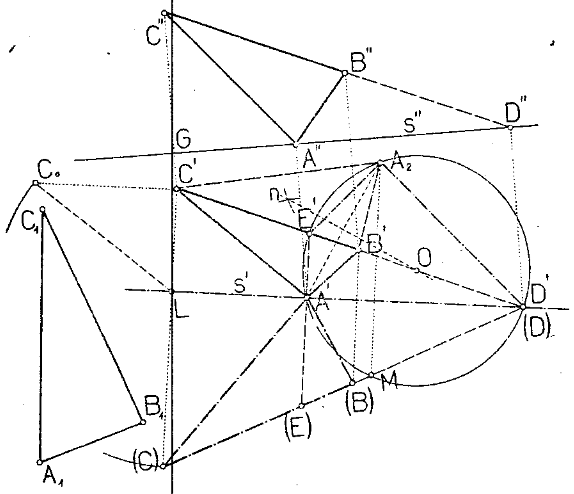
$$\sphericalangle XOY = 2\alpha, \text{ a } \sphericalangle YXO = 90^0 - \alpha.$$

Da se nađe središte O, postupat će ovako: Na osi s uzet će se po volji točka X_1 i njom će se povući pravac, koji sa s čini kut $= 90^0 - \alpha$, drugi krak toga kuta siječe simetralu n u točki O_1. Oko točke O_1 opisat će se kružnica k_1 s polumjerom O_1X_1, tad je sjecište R pravaca s i n središte sličnosti za kružnicu k_1 i traženu kružnicu k. Kružnica k_1 siječe zraku RS_1 u dvije točke K i L, pa ako se spoji jedna od tih točaka, na pr. točka K, s točkom O_1 i točkom S_1 potegne usporednica s KO_1, ona će sjeći pravac n u točki O, koja je središte kružnice k. Ta kružnica siječe os s u točkama X i Y, te je

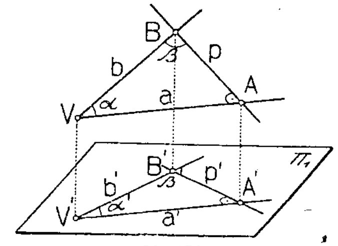
$$\sphericalangle XOY = \sphericalangle X_1O_1Y_1 = 2\alpha, \text{ prema tome je } \sphericalangle XSY = \sphericalangle XS_1Y = \alpha.$$

Budući da kružnica k siječe zraku RS_1 u dvije točke K i L, zadatak ima dva rješenja.

Ako su zadane afine točke S i S_1 na protivnim stranama osi s, tad se upotrebi točka S_1, koja je simetrična s točkom S_2 s obzirom na os s i izvede konstrukcija za točke S i S_1. Tada je $\sphericalangle XS_2Y = \sphericalangle XS_1Y = \alpha$.



Sl. 433.



Sl. 432.

3. Crtanje projekcija trokuta prema danim odredbama. *Zadan je tlocrt $A'B'C'$ trokuta ABC i nacrt A'' vrha A, konstruiraj nacrt $A''B''C''$, ako je trokut ABC sličan zadanom trokutu $A_1B_1C_1$!* (Sl. 433.)

*

Prije nego riješimo ovaj zadatak, reći ćemo nešto o projiciranju oštroga kuta. — a) Kad je jedan krak oštroga kuta α usporedan s Π_1, onda je $\sphericalangle \alpha' < \sphericalangle \alpha$. (Sl. 432.).

D o k a z. Neka su a i b kraci kuta α, V vrh i $a \parallel \Pi_1$. Tada je $a' \parallel a$ i $\alpha' = (a'b')$ tlocrt kuta α. Potegne li se u ravnini kuta α pravac $p \perp a$, tad je $p' \perp a'$ (§ 43.). Budući da je $V'A' = VA$ i $A'B' < AB$, to je $\sphericalangle \alpha' < \sphericalangle \alpha$.

b) Kad se jedan krak oštroga kuta podudara s priklonicom ravnine toga kuta, onda se taj kut projicira povećano.

D o k a z. Na sl. 442. su pravci b i p krakovi kuta β, krak p je priklonica ravnine kuta. Pošto je $\alpha + \beta = 90^0$, $\alpha' + \beta' = 90^0$ te pošto je $\alpha' < \alpha$, mora biti $\beta' > \beta$.

R j e š e n j e g o r e p o s t a v l j e n o g z a d a t k a. Na stranici $B'C'$ nacrtajmo trokut $A_2B'C'$, koji je sličan trokutu $A_1B_1C_1$ i smatrajmo trokute $A'B'C'$ i $A_2B'C'$ perspektivno afinim trokutima, gdje je $B'C'$ os afinosti, a $A'A_2$ smjer afinosti. Sad ćemo konstruirati par pridruženih pravih kutova, kojima su vrhovi u točkama A' i u A_2, t. j. nacrtat ćemo simetralu n dužine $A'A_2$ i oko točke O, u kojoj simetrala n siječe os afinosti $B'C'$, opisat ćemo kružnicu, koja ide vrhovima A' i A_2. Ta kružnica siječe os afinosti $B'C'$ u točkama D' i E'. Ako se te točke spoje s točkama A' i A_2, imamo par pridruženih pravih kutova t. j. $\sphericalangle D'A'E' = \sphericalangle D'A_2E' = 90^0$.

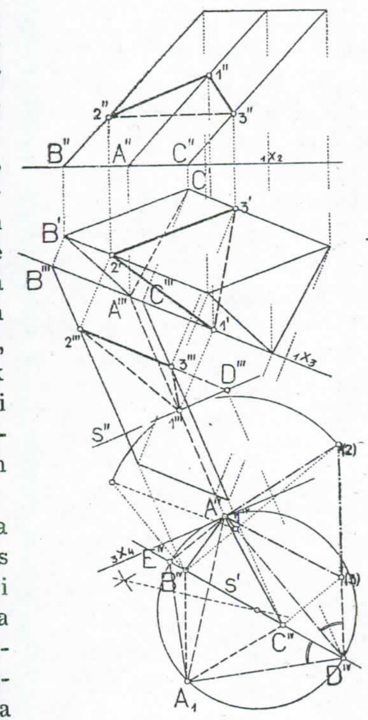
Budući da je trokut $B'C'A_2$ sličan trokutu u prostoru ABC, te jer je $\sphericalangle D'A_2E' = 90^0$, a pripada trokutu $B'C'A_2$, to je $\sphericalangle D'A'E'$ tlocrt kuta DAE, koji pripada trokutu ABC i koji je jednak 90^0. Budući da je taj kut projiciran na Π_1 opet pravi kut, slijedi da je jedan krak toga kuta usporedan s Π_1, t. j. da je taj krak sutražnica prve skupine, a drugi krak da je priklonica prve skupine ravnine trokuta ABC. Prema tome krakovi pravoga kuta $D'A'E'$, koji pripada trokutu $A'B'C'$, jesu tlocrti sutražnice i priklonice prve skupine ravnine trokuta ABC, koji idu točkom A. Radi se sad samo o tome, koji je krak tlocrt sutražnice, a koji tlocrt priklonice. Kutovi $A'D'E'$ i $A'E'D'$ jesu tlocrti onih kutova, koji leže u ravnini trokuta ABC, a jednaki su kutovima $A_2D'E'$ i $A_2E'D'$ (jer je trokut $A_2B'C'$ sličan trokutu ABC). Budući da je kut $A'D'E'$ manji od kuta $A_2D'E'$, to je pravac $A'D'$ $(= s')$ tlocrt sutražnice prve skupine. Prema tome je pravac $A'E'$ tlocrt priklonice prve skupine.

Uzmemo li da smo imali obje projekcije $A'B'C'$ i $A''B''C''$ trokuta ABC i da smo taj trokut okrenuli oko sutražnice s u horizontalan položaj t. j. u $\Delta A'(B)(C)$, onda je taj trokut jednak pravoj veličini trokuta ABC, te je sličan s trokutom $A_2B'C'$ (os $B'C'$) i s trokutom $A'(D)(C)$ (os s') i budući da je $\Delta A_2B'C' \backsim \Delta A'(B)(C)$, to je $\Delta A_2D'E' \backsim \Delta A'(B)(E)$, gdje

je $(D) \equiv D'$, pa je $\sphericalangle A_2D'E' = \sphericalangle A'(D)(E)$. Ako se dakle učini $\sphericalangle A'(D)M = \sphericalangle A_2D'E'$ $(\widehat{A'M} = \widehat{A_2E'}$ ili $A_2M \parallel E'A')$ te kroz B' i C' potegnemo okomice na pravac s', one sijeku krak $(D)M$ u točkama (B) i (C). Pošto smo dobili te točke, lako se nađe B'' i C''. Nacrt s'' sutražnice s ide točkom A'' okomito na $A'A''$. Potegne li se točkom C' usporednica sa s' i oko L opiše luk s polumjerom $L(C)$, on tu usporednicu siječe u točki C_0, pa ako se na ordinalu točke C' prenese $GC'' = C'C_0$, dobit će se točka C''. Na jednak bi se način dobila i točka B''. (Isporedi § 63.). Ta bi se točka mogla dobiti i spomoću točke D'', koja leži na s'', tako da se spoji D'' sa C''.

Zadatak ima dva rješenja, jer B'' i C'' može biti i ispod s''.

4. Presjek trostrane prizme po zadanim odredbama. *Trostranu kosu prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, treba sjeći ravninom tako, da presjek bude istostraničan trokut.* (Sl. 424.).



Sl. 434.

Kad bi trostranu uspravnu prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, trebalo sjeći ravninom tako, da presjek bude istostraničan trokut, onda bi se tlocrt $A'B'C'$ te prizme smatrao tlocrtom istostraničnog trokuta ABC, u kojemu ravnina siječe prizmu, pa bismo nacrt $A''B''C''$ potražili na način, kako je izveden u trećem zadatku. Zadatak ima dva rješenja. Svaka ravnina, koja bi bila usporedna s jednim ili drugim trokutom, sjekla bi prizmu u istostraničnom trokutu.

Ako je trostrana prizma kosa, onda se zadatak svede na pređašnji zadatak s pomoću dva stranocrta tako, da se Π_3 postavi usporedno s pobočnim bridovima prizme, a Π_4 okomito na te bridove. Četvrta je projekcija trokut, koji se može smatrati četvrtom projekcijom istostraničnog trokuta i t. d. Iz četvrte projekcije odredi se treća, zatim prva i druga projekcija.

5. Zadaci za vježbu

1. Ravnina P zadana je s dvije zrake $a(a', a'')$ i $b(b', b'')$, koje se sijeku u točki $S(S'', S')$; odredi u pramenovima S' i S'' onaj par pripadnih zraka c', d' i c'', d'', da bude $\sphericalangle(c'd') = \sphericalangle(c''d'') = 30^0$!

2. Zadan je tlocrt $A'B'C'$ trokuta ABC i nacrt A'' vrha A; konstruiraj nacrt $A''B''C''$ ako je trokut ABC: *a*) istostraničan *b*) istokračan pravokutan.

3. Trostranu uspravnu prizmu presijeci ravninom tako, da presjek bude istokračan pravokutan trokut!

4. Uspravan paralelepiped, kojemu je osnovka u Π_1, treba presjeći ravninom tako, da presjek bude kvadrat!

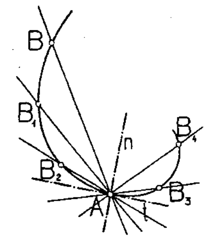
XXIII. O krivuljama u ravnini

§ 122. O ravninskim krivuljama uopće

1. Postanak krivulje. Kreće li se točka T u ravnini tako, da neprestano mijenja smjer svoga kretanja, ona opiše krivu liniju ili *krivulju*. Kad je poznato pravilo, po kojem se može konstruirati jedna točka krivulje, onda se po tom pravilu može konstruirati povoljan broj točaka te krivulje, može se nacrtati sama krivulja. Krivulja može biti u konačnosti otvorena ili zatvorena, može imati jednu granu ili više grana. Krivulja može imati točaka, koje su beskonačno daleko.

2. Luk krivulje. Postojanost i nepostojanost krivulje. Dio krivulje zove se *luk* te krivulje. Dužina, koja spaja dvije točke krivulje, zove se *tetiva* krivulje. Kaže se, da je krivulja postojana u jednoj svojoj točki T, kad se na krivulji u po volji malenoj daljini od točke T nalazi jedna točka ispred T i jedna točka iza T. Ako se krivulja sastoji iz više grana, koje se zatvaraju u konačnosti ili u beskonačnosti, takve su krivulje u svim svojim točkama postojane. (Na pr. pravac, kružnica, elipsa, parabola, hiperbola). Krivulja je nepostojana u svom slobodnom završetku.

3. Sekanta, tangenta, normala. Pravac, koji spaja dvije točke A i B krivulje (sl. 435.) zove se *sekanta* krivulje. Točke A i B zovu se *sjecišta* krivulje sa sekantom. Ako se sekanta AB okreće u ravnini krivulje oko točke A tako, da se sjecište B približava sjecištu A, sekanta može da zauzme različite položaje, na pr. AB_1, AB_2, AB_3... Približi li se sjecište B točki A beskonačno blizu, sekanta će zauzeti prema krivulji osobit položaj t, koja s krivuljom ima zajedničke dvije neizmjerno blize točke. Takav se pravac zove *tangenta* krivulje u točki A. Točka A zove se *diralište* tangente i krivulje. Obje neizmjerno blize točke A i B zovu se susjedne točke krivulje.



Sl. 435.

Pravac, koji je u diralištu okomit na tangenti, zove se *normala* krivulje u toj točki.

4. Algebarske i transcendentne krivulje. Ako pravac siječe ravničnu krivulju u konačnom broju točaka, onda se takova krivulja zove *algebarska*, a ako pravac siječe krivulju u beskonačno velikom broju točaka, takova se krivulja zove *transcendentna*.

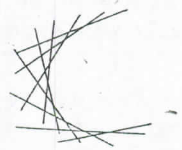
5. Red i razred krivulje. Ako pravac siječe krivulju najviše u n točaka, onda se kaže, da je ta krivulja n-toga *reda*. Pravac je jedina linija prvoga reda. Kružnica, elipsa, parabola i hiperbola jesu krivulje drugoga reda.

Ako se s jedne točke ravnine krivulje može na krivulju potegnuti najviše n tangenata, onda se kaže, da je ta krivulja n-toga *razreda*. Kružnica, elipsa, parabola i hiperbola jesu krivulje drugoga razreda.

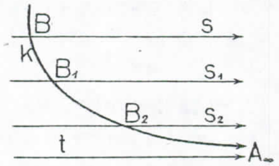
Za krivulju, koja je n-toga reda i n-toga razreda kaže se, da je n-toga *stepena*.

6. Elemenat krivulje. Neizmjerno maleni luk, koji spaja dvije susjedne točke krivulje zove se *elemenat* krivulje. (Sl. 436.) Taj se elemenat može

Sl. 436.



Sl. 437.



Sl. 438.

smatrati ravnim. Krivulju možemo sebi predstaviti, da se sastoji iz svojih elemenata. Tangenta se može smatrati produženjem jednoga elementa krivulje. Krivulja se može uzeti, da je umotana od svojih tangenata. Ako se pravac giblje po određenom zakonu, on će umatati krivulju (sl. 437.), pa se kaže, da je ta krivulja *umotaljka* pravaca (tangenata).

7. Asimptote krivulje. Spoji li se pravcem s neka krivuljina točka B, koja leži u konačnosti, s jednom krivuljinom točkom A_∞, koja je beskonačno daleko, onda se i taj pravac zove sekanta krivulje (sl. 438.). Ako se točka B kreće po krivulji k tako, da se približava točki A_∞, te zauzme položaje $B_1, B_2, \ldots$, onda sekanta s zauzme položaje $s_1, s_2, \ldots$ Budući da te sekante prolaze kroz jednu te istu beskonačno daleku točku A_∞, one imaju isti smjer, t. j. sve su te sekante među sobom usporedne. Ako se točka B primakne točki A_∞ beskonačno blizu, onda sekanta krivulje pređe u tangentu t, koja je usporedna sa s i koja krivulju dotiče u neizmjerno dalekoj točki A_∞. Takova se tangenta t zove *asimptota* krivulje.

Asimptota je krivulje tangenta, koja dotiče tu krivulju u njezinoj neizmjerno dalekoj točki.

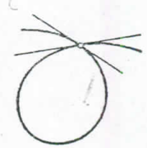
Krivulja može imati više asimptota, koje su ili sve realne, ili su neke realne, a neke imaginarne. Asimptota krivulje može pasti i u neizmjerno daleki pravac ravnine.

8. Konkavna i konveksna strana krivulje. Ako se krivulja gleda sa strane tangente u nekoj točki te krivulje, onda se u toj točki krivulje vidi

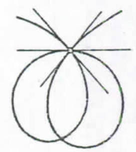
konveksna strana krivulje, a ako se gleda sa strane krivulje, onda se vidi konkavna strana krivulje.

9. Singularne točke krivulje. Ako točka, koja svojim kretanjem u ravnini opisuje krivulju, prođe kroz istu točku dva ili više puta, krivulja siječe u toj točki samu sebe, a sama točka zove se *dvostruka* (sl. 439), *trostruka* (sl. 440.), *n-terostruka točka* krivulje prema tome, da li krivulja prolazi kroz istu točku dvaput, triput,... n-puta. Višestruka točka krivulje zove se također *čvor* krivulje. Krivulja ima u blizini čvora oblik listića.

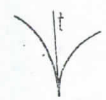
U dvostrukoj točki krivulje daju se na tu krivulju povući dvije tangente (sl. 439.), u trostrukoj točki tri tangente (sl. 440.)... U n-terostrukoj



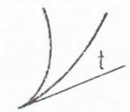
Sl. 439.



Sl. 440.



Sl. 441.



S. 442.

točki mogu dvije ili više tangenata pasti u isti pravac. Padnu li u dvostrukoj točki obje tangente zajedno, iz te dvostruke točke nastane *šiljak* ili *povratište*. Ako su obje grane krivulje na različitim stranama tangente t, imamo *šiljak prve vrste* (sl. 441.), a ako su obje grane krivulje na istoj strani tangente t, krivulja ima u toj točki *šiljak druge vrste* ili *kljun* (sl. 442.). Ima krivulja, koje u mnogostrukoj točki imaju imaginarne tangente. Takove se točke zovu *izolirane točke* krivulje.

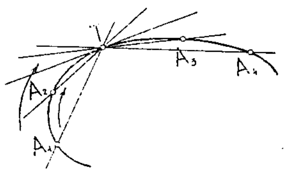
Krivulja može imati i takovih točaka, da tangenta t u jednoj takovoj točki A (sl. 443.) dijeli krivulju tako, da luk krivulje lijevo od dirališta A padne s jedne strane tangente, a luk desno od dirališta padne s druge strane tangente. Takova se točka zove *obratište* ili *infleksiona točka*, a tangenta u toj točki zove se *infleksiona tangenta*. Tangenta u obratištu dotiče i siječe krivulju u toj točki.

Sl. 443.

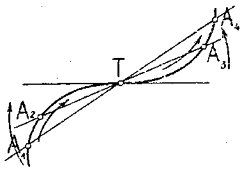
Ako se motri krivulja u obratištu u smjeru okomitom na tangentu, onda je krivulja s jedne strane te točke konkavna, a s druge strane konveksna.

Mnogostruke točke krivulje zovu se *singularne točke* te krivulje. Ostale se točke krivulje zovu *obične* ili *regularne točke* krivulje.

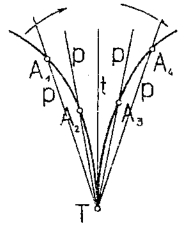
10. Ponašanje krivulje u blizini jedne njezine točke. Uzmimo da smo u promatranoj točki T krivulje nacrtali tangentu t. Nadalje će se uzeti, da dio krivulje u blizini točke T nastane tako, da se pravac p okreće u ravnini oko točke T, a jedna točka A toga pravca da se u isto doba kreće po tom pravcu. Kad pravac p zauzme položaj tangente t, onda točka A padne u dirailište T. Kod toga će se promatrati smisao kretanja pravca p



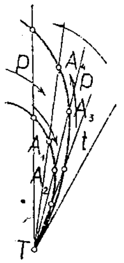
Sl. 444.



Sl. 445.



Sl. 446.



Sl. 447.

i točke A, t. j. pazit će se, da li pravac p i točka A, kad prođu kroz dirailište T, smisao kretanja zadrže ili mijenjaju. U običnoj točki T (sl. 444.) krivulje pravac p i točka A zadrži isti smisao kretanja. U obratištu T (sl. 445.) točka A zadrži isti smisao kretanja, a pravac p ga mijenja. U šiljku prve vrste (sl. 446.) točka A mijenja smisao kretanja, a pravac p zadrži isti smisao kretanja. U šiljku druge vrste (sl. 447.) i točka A i pravac p mijenjaju smisao kretanja.

§ 123. Konstrukcija tangenata i normala grafičkih krivulja

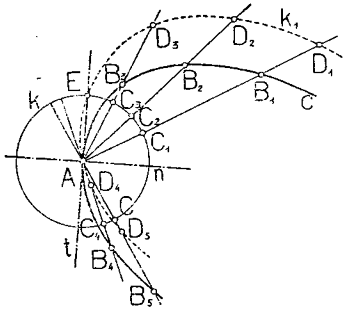
1. Objašnjenja. U tehnici i umjetnosti često se puta naiđe na krivulje, koje se ne mogu prikazati analitički. Takove se krivulje zovu *grafičke krivulje*. Kod grafičkih krivulja nije moguće točno konstatirati tangente i normale, niti dirališta tangenata. No da se i za te krivulje mogu riješiti spomenuti zadaci, našle su se metode za ta rješenja. Te se metode nazivaju *metodama krivulja pogrešaka.*

2. Zadatak. *U zadanoj točki A krivulje c konstruiraj tangentu* (sl. 448.)!

Rješenje. Oko točke A kao središta opisat će se kružnica k s povoljnim polumjerom i točkom A povući će se nekoliko sekanata AB_1, AB_2, $AB_3, \ldots$ U te sekante padaju polumjeri AC_1, AC_2, $AC_3 \ldots$ kružnice k. Na te sekante prenijet će se tetive AB_1, AB_2, $AB_3 \ldots$ u istom smislu tako, da je $C_1D_1 = AB_1$, $C_2D_2 = AB_2$, $C_3D_3 = AB_3 \ldots$ i spojit će se točke D_1, D_2, $D_3, \ldots$ krivuljom k_1. Ta krivulja siječe kružnicu k u točki E, pa će se ta točka spojiti s točkom A pravcem t. Uzme li se, da je i taj pravac jedna sekanta AB krivulje c, onda bi se točka D krivulje k_1, koja

je na toj sekanti, dobila tako, da se prenese $ED = AB$. No kako krivulja k ide točkom E to je $ED = 0$, pa je prema tome i $AB = 0$, t. j. pravac t ima s krivuljom u točki A dvije neizmjerno blize zajedničke točke, i zato je on tangenta krivulje c u točki A.

Što su manje tetive AB_1, AB_2, $AB_3 \ldots$, to su sekante, na kojima leže te tetive, bliže tangenti t pa se veličinama tih tetiva mogu označiti veličine pogrešaka s obzirom na točnost konstrukcije tangente t. Budući da se



Sl. 448.

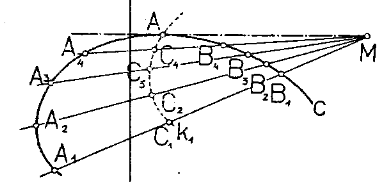
spomoću tih tetiva dobije krivulja k_1, ta se krivulja zove *krivulja pogrešaka.* Spomoću te krivulje dobila se točka E, dakle i tangenta $t = AE$.

Ako se točkom A povuče pravac $n \perp t$, pravac n je normala krivulje c u točki A.

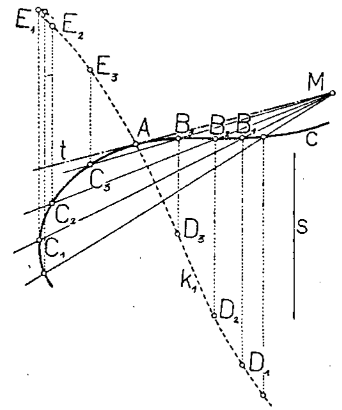
3. Zadatak. *Sa zadane točke M, koja je izvan krivulje c, neka se na tu krivulju povuče tangenta t* (sl. 449)!

Rješenje. Točkom M povući će se nekoliko sekanata krivulje c, raspolovit će se pripadne tetive A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ i ta polovišta spojit će se krivuljom pogrešaka k_1. Ta krivulja siječe krivulju c u dirailištu A tražene tangente $t (\equiv MA)$.

Budući da je luk krivulje k_1 na istoj strani tangente kao i krivulja c, nije sjecište A dovoljno točno određeno. Tu bismo točku mogli točnije odrediti na



S. 449.



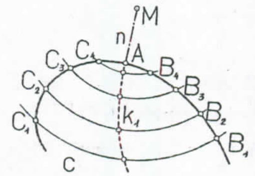
Sl. 450.

slijedeći način: Točkom M (sl. 450.) povuče se nekoliko sekanata i sjecištima B_1, B_2, $B_3, \ldots$ potegnu se paralele sa zadanim pravcem s, a sjecištima C_1, C_2, $C_3, \ldots$ povuku se paralele također usporedno s pravcem s

ali u protivnom smislu negoli u sjecištima B_n. Na te se paralele prenesu tetive, koje leže na sekantama, dakle $B_1D_1 = C_1E_1 = B_1C_1$, $B_2D_2 = C_2E_2 = B_2C_2$, $B_3D_3 = C_3E_3 = B_3C_3 \dots$ Spoje li se točke $D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3 \dots$ dobije se krivulja pogrešaka k_1, koja krivulju c siječe u točki A. Tada je $t \equiv MA$.

4. **Zadatak.** *Zadana je krivulja c i pravac p, konstruiraj tangentu, koja je usporedna s pravcem p!*

Rješenje. Ovaj je zadatak identičan sa zadatkom u t. 3, samo što se uzima, da je sada točka M beskonačno daleko, pa su sekante krivulje c usporedne s pravcem p.



Sl. 451.

5. **Zadatak.** *Konstruiraj normalu krivulje c iz jedne točke M, koja je izvan te krivulje* (sl. 451)!

Rješenje. Oko točke M opisat će se nekoliko koncentričnih kružnica, koje krivulju c sijeku u točkama $B_1, B_2, B_3, \dots, C_1, C_2, C_3, \dots,$ raspolovit će se lukovi B_1C_1, B_2C_2, $B_3C_3 \dots$ i spojit će se polovišta krivuljom k_1. Krivulja k_1 siječe krivulju c u točki A, pa je normala $n \equiv MA$.

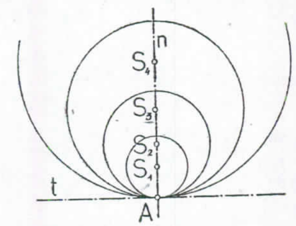
§ 124. Zakrivljenost krivulje

1. **Kružnica zakrivljenosti.** Što se krivulja brže udaljuje od tangente u nekoj svojoj točki, to je ona u toj točki jače zakrivljena. Kružnica ima u svim svojim točkama jednaku zakrivljenost. Sve ostale krivulje imaju u različitim svojim točkama različitu zakrivljenost, t. j. ta se zakrivljenost od točke do točke mijenja. Zakrivljenost u jednoj točki krivulje može se mjeriti zakrivljenošću kružnice, koja se u toj točki osobito usko priljubljuje uz tu krivulju. Takova se kružnica zove *kružnica zakrivljenosti* ili *oskulatorna kružnica* krivulje u dotičnoj točki. Središte i polumjer takove kružnice zove se *središte zakrivljenosti* i *polumjer zakrivljenosti.*

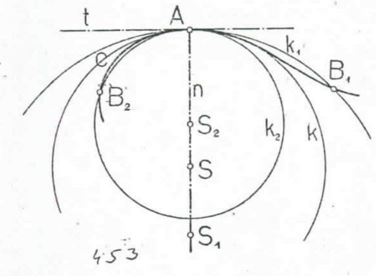
Kružnica je tim jače zakrivljena, što je njezin polumjer manji, i obrnuto, kružnica je tim slabije zakrivljena, što je njezin polumjer veći, t. j. zakrivljenost je kružnice obrnuto razmjerna sa njezinim polumjerom (sl. 452). Zakrivljenost kružnice ρ mjeri se omjerom $\frac{1}{r}$ t. j. $\rho = \frac{1}{r}$. Budući da se zakrivljenost krivulje u nekoj njezinoj točki mjeri zakrivljenošću kružnice zakrivljenosti u toj točki može se reći: *Što je manji polumjer kružnice zakrivljenosti u nekoj njezinoj točki, to je krivulja u toj točki jače zakrivljena,* i obrnuto.

2. **Određivanje zakrivljenosti krivulje.** Da se odredi zakrivljenost krivulje c u nekoj njezinoj točki A, potražit će se središte S kružnice zakrivljenosti. Tada je $SA = \rho$ polumjer zakrivljenosti. Ako se u točki A

(sl. 453.) povuče tangenta t, ona ima s krivuljom zajednički dvije neizmjerno blize točke. Potegne li se u točki A normala $n \perp t$ i opiše kružnica k_1, kojoj središte S leži u normali n i koja dotiče tangentu t u točki A, ta kružnica dotiče i krivulju u točki A. Prema tome kružnica k_1 ima i s krivuljom u točki A dvije neizmjerno blize zajedničke točke. Osim toga kružnica k_1 siječe krivulju c uopće u jednoj točki B_1. Ako se polumjer kružnice



Sl. 452.



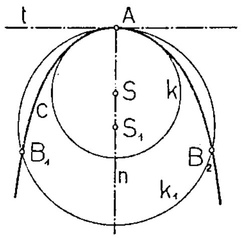
Sl. 453.

k_1 mijenja tako, da se točka B_1 neograničeno približava točki A, tada će, kad se odabere polumjer zgodne veličine, točka B_1 pasti u točku A, dok će kružnica k_1 zauzeti međašnji položaj k. Opiše li se kružnica k_2 oko središta S_2 tako, da dotiče krivulju c u točki A, ona siječe krivulju c u još jednoj točki B_2 tako, da su točke B_1 i B_2 rastavljene točkom A. Ako se polumjer kružnice k_2 mijenja tako, da se točka B_2 neograničeno približava točki A, zauzet će kružnica k_2 međašnji položaj k, kad točka B_2 padne u točku A. Kružnica k ima s krivuljom c tri neizmjerno blize zajedničke točke. Ta se kružnica uže priljubljuje krivulji u točki A, negoli ijedna druga kružnica, koja krivulju c dotiče u točki A. Kružnica k je kružnica zakrivljenosti krivulje c u točki A, ona krivulju u točki A dotiče i siječe.

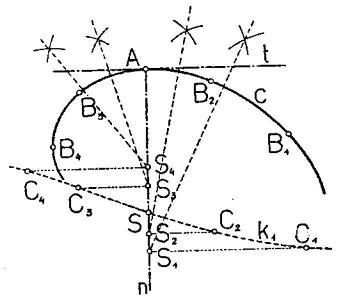
3. **Zakrivljenost u vrhovima krivulje.** Ako krivulja ima os simetrije, onda se točke, u kojima ta os siječe krivulju, a nijesu singularne, zovu *vrhovi* krivulje. Ako krivulja ima vrh ili tjeme A (sl. 454.), onda dirna kružnica k_1 u točki A krivulje, siječe krivulju u dvije točke B_1 i B_2, koje leže simetrično s obzirom na normalu n u točki A. Ako se polumjer kružnice k_1 tako mijenja, da se točke B_1 i B_2 neograničeno približe točki A, onda će kružnica k_1 prijeći u kružnicu k, koja s krivuljm c ima zajedničke četiri neizmjerno blize točke. Ta se kružnica osobito usko priljubljuje uz krivulju c u točki A, te se kaže, da se krivulja c i kružnica k u toj točki *hiperoskuliraju.*

4. **Konstrukcija središta zakrivljenosti u točki grafičke krivulje.** Konstrukcija središta zakrivljenosti u nekoj točki krivulje zavisi o pravilu, po kojemu je krivulja postala. To središte leži u sjecištu normala u dvije

neizmjerno blize točke krivulje. Budući da takve dvije normale zatvaraju neizmjerno maleni kut, ne može se to središte točno konstruirati kao sjecište takovih dviju normala. Za različite krivulje našle su se konstrukcije središta zakrivljenosti u pojedinim točkama tih krivulja. Ako se ne zna pravilo, kako bi se za neku točku krivulje moglo konstruirati središte kružnice



Sl. 454.



Sl. 455.

zakrivljenosti, onda se to središte može približno točno konstruirati pomoću krivulje pogrešaka na slijedeći način:

U točki A krivulje c (sl. 455.) povuče se normala n i na krivulji c uzme na obim stranama točke A nekoliko točaka $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$ Zatim se na normali n potraže središta $S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots$ onih kružnica, koje idu točkama A i B_1, A i B_2, A i B_3, A i $B_4 \ldots$ Ako je točka B neizmjerno blizu točki A, onda će središte kružnice, koja ide točkama A i B, zauzeti na normali n neki međašnji položaj S, i ta točka bit će središte zakrivljenosti krivulje u točki A. Da se dobije točka S, postavit će se u točkama $S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots$ okomice na normalu n i na te okomice prenijet će se tetiva AB_1, AB_2, AB_3, $AB_4 \ldots$ t. j. $S_1C_1 = AB_1$, $S_2C_2 = AB_2$, $S_3C_3 = AB_3$, $S_4C_4 = AB_4 \ldots$ Uzet će se da te tetive naznačuju veličine pogrešaka za koje se točke B_1, B_2, B_3, $B_4 \ldots$ razlikuju od tetive AB, koja je jednaka nuli. Spoje li se točke $C_1, C_2, C_3, C_4 \ldots$ krivuljom k_1 (krivuljom pogrešaka), ona siječe normalu n u točki S, koja je središte kružnice za slučaj kada je $B \equiv A$. Točka S je prema tome središte kružnice zakrivljenosti u točki A krivulje c.

§ 125. Evoluta i evolventa

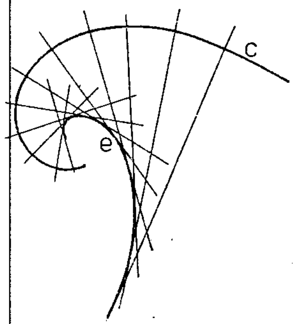
1. Evoluta. Povuku li se sve normale neke krivulje c (sl. 456), one umataju novu krivulju e, koja se zove *evoluta* krivulje c. Po dvije neizmjerno blize normale krivulje c u točki A sijeku se u točki S, koja je središte zakrivljenosti krivulje c u točki A. Prema tome je evoluta e krivulje c geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti za sve točke krivulje c. Normale

krivulje c, ujedno su tangente evolute e, gdje su dirališta u središtima zakrivljenosti.

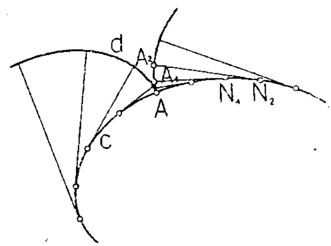
Svakoj krivulji pripada samo jedna evoluta.

Evoluta može imati šiljke prve ili druge vrste, može imati obratište i tjeme.

2. Evolventa. Ako se pravac t tako okreće, da je on sveudilj tangentom zadane krivulje c, svaka točka toga pravca opiše krivulju d, koja se zove *evolventa* krivulje c. Može se uzeti, da evolventa krivulje nastane

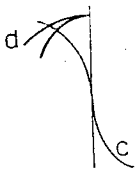


Sl. 456.

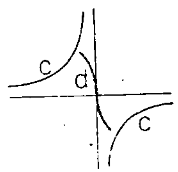


Sl. 457.

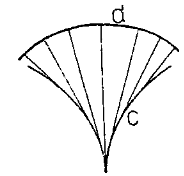
na slijedeći način: Uzme li se, da je po krivulji c savita nit, koja se u jednoj točki krivulje pričvrsti, a onda se nit odmata tako, da je vazda napeta, onda svaka točka A te niti opiše po jednu evolventu krivulje c. Odatle se vidi, da je dužina tangente krivulje c, računajući od dirališta



Sl. 458.



Sl. 459.



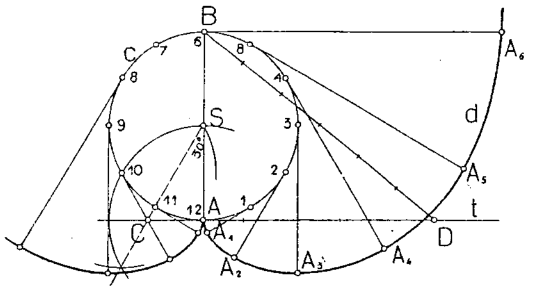
Sl. 460.

do točke evolvente, jednaka luku krivulje c, računajući od dirališta do početne točke evolvente, koja je na krivulji c. Tako je na pr. $\overline{N_2A_2} = \widehat{N_2A}$. (Sl. 457.).

Svakoj krivulji c pripada beskonačno mnogo evolvenata. Tangente krivulje c jesu normale svih evolvenata te krivulje. Prema tome je zadana krivulja evoluta svake svoje evolvente. Dirališta tangenata krivulje c jesu središta zakrivljenosti za točke evolvenata krivulje c.

Evolventa može imati šiljak prve vrste (sl. 457.), šiljak druge vrste (sl. 458.), obratište (sl. 459.) i tjeme (sl. 360.).

3. Konstrukcija evolvente kružnice. Evolventa kružnice c (sl. 461.) može se kostruirati pomoću dužine, koja je jednaka opsegu zadane kružnice. Opseg kružnice c može se dosta velikom točnošću konstruirati pomoću *Kohanskijeve* metode na slijedeći način: U kojojgod točki A promjera AB kružnice c povuče se tangenta t, zatim se pomoću trokuta učini



Sl. 461

$\sphericalangle ASC = 30^0$ i na tangentu prenese dužina $CD = 3 \cdot SA = 3r$ i konačno spoje točke D i B. Tada je dužina BD gotovo jednaka opsegu kružnice c.

Dokaz. Iz pravokutnog je trokuta BAD

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2.$$

$$AB = 2r,\ AD = CD - CA = 3r - r \cdot \operatorname{tg} 30^0 = r\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\overline{BD}^2 = 4r^2 + r^2\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9{,}869217\ldots r^2.$$

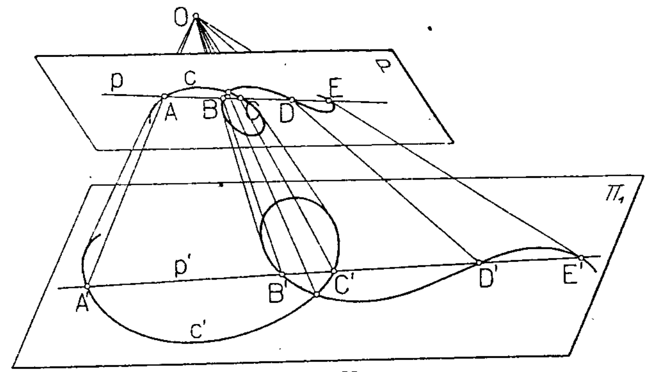
Odatle je $BD = 3{,}141533\ldots r$ ili $BD = 3{,}1415\,r = \pi r$. Prema tome je dužina BD jednaka polovici opsega kružnice c. Ta je konstrukcija točna na četiri decimale.

Da se dobije evolventa kružnice c razdijelit će se ta kružnica na 12 jednakih dijelova i u djelištima 0, 1, 2, 3... povući će se tangenta kružnice c i na te tangente prenijet će se redom $0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \ldots$ opsega kružnice c, ili $1A_1 = \frac{1}{6}BD$, $2A_2 = \frac{2}{6}BD$, $3A_3 = \frac{3}{6}BD\ldots$, i spojit će se točka A, A_1, A_2, A_3,... krivom crtom d. Krivulja d je evolventa kružnice c. Evolventa d ima s kružnicom c točku A zajedničku i ta je točka šiljak prve vrste evolvente.

Tangente su kružnice k normale evolvente d te kružnice. Točke su 1, 2, 3,... središta zakrivljenosti evolvente u točkama A_1, A_2, A_3,... Svaka evolventa kružnice ima dvije grane, a svaka grana ima neizmjerno mnogo zavoja. Svaka je evolventa kružnice transcendentna krivulja.

§ 126. Projiciranje ravničnih krivulja

1. Stožac i valjak projiciranja. Uzme li se izvan ravnine **P** krivulje c točka O kao središte projiciranja, pa se tom točkom povuku zrake projiciranja, koje idu točkama krivulje c, te zrake čine *stožac projiciranja.* Ako neka ravnina Π_1 siječe taj stožac u krivulji c', onda je c' centralna projekcija krivulje c na ravnini Π_1. (Sl. 462.).



Sl. 462.

Ako je točka O neizmjerno daleko, onda su zrake projiciranja među sobom usporedne te čine *valjak projiciranja* za krivulju c. Ravnina Π_1 siječe taj valjak u krivulji c, koja je paralelna projekcija krivulje c na ravnini Π_1.

Susjedne točke krivulje c projiciraju se kao susjedne točke krivulje c', dakle tangente krivulje c projiciraju se kao tangente krivulje c'. Svaka singularna točka krivulje c projicira se opet kao singularna točka krivulje c, iste vrste. Kod paralelne projekcije neizmjerno daleke točke krivulje c (realne i imaginarne) projiciraju se kao neizmjerno daleke točke krivulje c'.

2. Red i razred krivulje c'. Ako neki pravac p siječe krivulju c u n točaka, onda i projekcija p' toga pravca siječe krivulju c' također u n točaka, koje su projekcija sjecišta krivulje c s pravcem p. Može se dakle reći:

Ako je ravnična krivulja c n-toga reda, onda je i njezina projekcija c' ravnična krivulja n-toga reda.

Ako se s neke točke T ravnine **P** krivulje c može na tu krivulju povući m tangenata, onda se i s točke T' može na krivulju c povući m tangenata, t. j.:

Ako je krivulja c m-toga razreda, onda je i krivulja c' m-toga razreda.

3. Ako je središte projiciranja O u ravnini krivulje c (u konačnosti ili u beskonačnosti), onda je projekcija krivulje c pravac c', koji pada zajedno s presječnicom ravnine **P** i Π_1.

XXIV. Krivulje drugoga reda

§ 127. Objašnjenja

Ako pravac može krivulju sjeći najviše u dvije točke, onda je takva krivulja drugoga reda. Među krivulje drugoga reda spada, kako smo već spomenuli, kružnica, elipsa, hiperbola i parabola. Sa zadane točke, koja je u ravnini krivulje drugoga reda, mogu se na tu krivulju povući najviše dvije tangente. Krivulje drugoga reda ujedno su krivulje drugoga razreda, pa se zato kaže, da su to krivulje drugoga stepena.

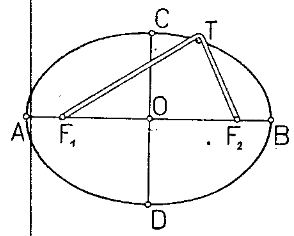
O svojstvima kružnice bilo je dovoljno raspravljano u planimetriji. Ovdje će se o kružnici govoriti samo toliko, koliko je ona u vezi s ostalim krivuljama drugoga reda, naročito u vezi sa elipsom.

A. Elipsa

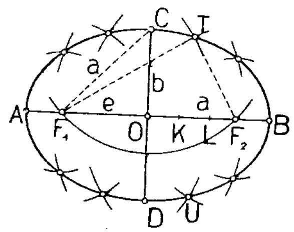
§ 128. Definicija i konstrukcija elipse

1. Definicija elipse. *Elipsa je geometrijsko mjesto točaka ravnine, za koje je zbroj daljina od dviju čvrstih točaka F_1 i F_2 stalne vrijednosti.*

Sl. 463. prikazuje elipsu. Čvrste se točke F_1 i F_2 zovu *žarišta* ili *fokusi* elipse. Pravac F_1F_2 siječe elipsu u točkama A i B, te se dužina AB zove *velika os* elipse. Simetrala velike osi siječe tu os u točki O, a elipsu u točkama C i D. Točka se O zove *središte*, a dužina CD *mala os* elipse. Točke se A, B, C i D zovu *vrhovi* ili *tjemena* elipse. Dužina $OF_1 = OF_2$ zove se *linearni ekscentricitet* elipse.



Sl. 463.



Sl. 464.

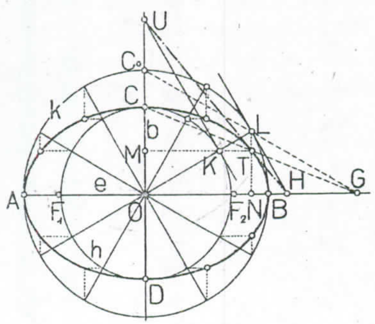
2. Mehanička crtnja elipse. U točkama F_1 i F_2 (sl. 463.) ubodi u papir dvije igle i priveži na njih konac, koji je nešto dulji od razmaka točaka F_1 i F_2. Napneš li konac šiljkom olovke i pomičeš li olovku oko točaka F_1 i F_2 vrh će T olovke opisati elipsu. Da je ova crtnja elipse ispravna vidi se odatle, što je dužina konca za svaki položaj vrha T olovke nepromijenjena, pa je zbroj udaljenosti svake točke T elipse od točaka F_1 F_2 jednak stalnoj dužini konca. Toj je dužini jednaka i velika os AB. Prema tome je $TF_1 + TF_2 = AB$. Dužine se TF_1 i TF_2 zovu *provodnice* ili *radiji vektori* točke T. Iz postanka se elipse vidi, da je ona simetrična s obzirom na svoju veliku i malu os.

Svaka tetiva elipse, koja ide njezinim središtem O, zove se *promjer* ili *dijametar* elipse. Najveći je promjer elipse velika os AB, a najmanji mala os CD.

3. Konstrukcija elipse. *Nacrtaj elipsu, kojoj je zadana velika i mala os.*

a) Prva konstrukcija. Na sl. 464. nacrtana je velika os AB i mala os CD tako, da su se povukla dva među sobom okomita pravca i na njih prenijelo $OA = OB = a$ i $OC = OD = b$. Točka O je središte elipse. Najprije treba odrediti žarišta F_1 i F_2. Provodnice su vrha C jednake i svaka je jednaka polovici velike osi, dakle $CF_1 = CF_2 = \frac{1}{2}AB$. Uzme li se prema tome u šestilo dužina a i opiše njom oko C luk, on siječe os AB u žarištima F_1 i F_2.

Uzme li se na velikoj osi između točaka O i F_2 kojagod točka K i opiše li se oko F_1 luk s polumjerom AK, a oko F_2 luk s polumjerom BK, oba se ta luka sijeku u točkama T i U, koje leže na elipsi. Zašto? Opiše li se pak oko F_2 luk s polumjerom AK, a oko F_1 luk s polumjerom BK, oba se ta luka sijeku također u dvije točke, koje leže na elipsi. Uzme li se na velikoj osi točka L, pa se oko F_1 i F_2 opišu lukovi s polumjerima AL i BL dobiju se nove četiri točke elipse.



Sl. 465.

Kad se na taj način odredio dovoljan broj točaka, onda se elipsa izvuče olovkom i to prostom rukom. Olovkom nacrtana elipsa izvlači se tušem s pomoću krivuljara.

Iz ove se konstrukcije također vidi, da je elipsa simetrična s obzirom na obje svoje osi. Iz pravokutnog se trokuta $F_1OC: e^2 = a^2 - b^2$, gdje je $OF_1 = e$ linearni ekscentricitet elipse.

b) Druga konstrukcija. (Sl. 465.) Na promjerima AB i CD opišu se koncentrične kružnice k i h, povuče se kojigod polumjer OL, koji h siječe u točki K, a k u točki L, zatim se točkom K povuče pravac $MK \parallel AB$, a točkom L pravac $LN \parallel CD$. Oba se pravca MK i NL sijeku u točki T, koja leži na elipsi. Pomoću drugih polumjera kružnice k odrede se na isti način nove točke elipse, kojoj su AB i CD osi.

Da je ova konstrukcija ispravna, dokazat ćemo analitički. Neka je točka O ishodište pravokutnog koordinatnog sustava, a OB os apscisa. Stavimo $OA = OB = OL = a$, $OC = OD = OK = b$, $ON = x$, $TN = y$ i $LN = y_0$. Budući da su ukršteni pravci LO i LN presječeni s dva usporedna pravca KT i ON imamo razmjer

$$TN : LN = KO : LO \quad \text{ili} \quad y : y_0 = b : a \ldots. \tag{1}$$

odakle je

$$ay = by_0. \tag{2}$$

Iz pravokutnog je trokuta ONL:

$$LN = \sqrt{\overline{OL}^2 - \overline{ON}^2} \quad \text{ili} \quad y_0 = \sqrt{a^2 - x^2},$$

pa obavimo li u (2) zamjenu imamo

$$ay = b\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kvadriramo li tu jednadžbu, imamo

$$a^2y^2 = b^2a^2 - b^2x^2 \quad \text{ili} \quad b^2x^2 + a^2y = a^2b^2. \tag{3}$$

Našli smo, da za svaku točku T vrijedi jednadžba (3), a jer je to središnja jednadžba elipse slijedi, da točka T leži na elipsi.

4. Odnos između kružnica k, h i elipse. Iz jednadžbe se (1) vidi, da je omjer dužina LN i TN jednak stalnoj vrijednosti $a : b$, pa se odatle, a s obzirom na § 119., t. 3., može zaključiti, da su kružnica k i elipsa dvije afine krivulje s obzirom na AB kao os afinosti. Točke su C_0 i C, L i T... pridružene točke. Pravcu C_0L pridružen je pravac CT, pa se oba ta pravca moraju sjeći u istoj točki G osi AB. Prema tome točka se T, koja je pridružena točki L može odrediti na taj način, da se povuče pravac C_0L i sjecište G toga pravca s AB spoji s točkom C. Pravac GC siječe LN ($\perp AB$) u točki T.

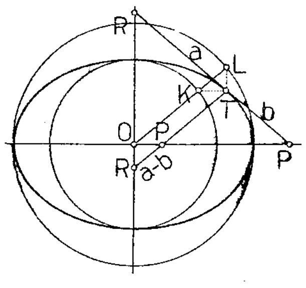
Ako se u kružnici k povuče promjer $AB = 2a$ i sa svih točaka L te kružnice spuste okomice LN na AB, pa se te okomice umanje, računajući od nožišta N, u omjeru $b : a$, onda je geometrijsko mjesto krajnjih točaka T umanjenih okomica elipsa.

Povuče li se tangenta u točki L (sl. 465.) na kružnicu k i tangenta u točki T na elipsu, obje se te tangente moraju sjeći u istoj točki H osi AB. Da se prema tome konstruira tangenta u točki T elipse, povuče se tangenta u točki L kružnice k, i njezino sjecište H s AB spoji s točkom T. Tada je TH tražena tangenta.

Budući da se pravci MT i OL (sl. 465.) sijeku u točki K i budući da su ta dva pravca presječena s usporednim pravcima OM i LT, može se pisati primjer:

$$MT : MK = OL : OK \quad \text{ili} \quad MT : MK = a : b$$

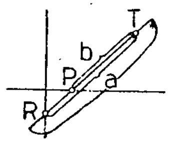
t. j. omjer je udaljenosti točaka T i K od osi CD stalne vrijednosti i jednak $a : b$. Odatle se može zaključiti, da su elipsa i kružnica h također dvije perspektivno afine krivulje s obzirom na CD kao os afinosti. Tangenta u točki K kružnice h i tangenta HT elipse u točki T moraju se sjeći u istoj točki U osi CD.



Sl. 466.

Ako se u kružnici h povuče promjer $CD = 2b$, i s točaka K te kružnice spuste okomice KM na CD, pa se tu okomice povećaju, računajući od nožišta M, u stalnom omjeru $a : b$, onda je geometrijsko mjesto krajnjih točaka T povećanih okomica elipsa.

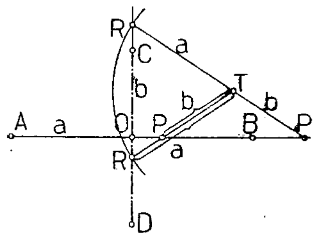
5. Crtanje elipse s pomoću odreska papira. Povuče li se točkom T (sl. 466.) pravac usporedno s polumjerom OL, on siječe osi AB i CD u točkama P i R. Budući da su likovi $ORTL$ i $OPTK$ paralelogrami, to je $RT = OL = a$ $PT = OK = b$, dakle je $PR = RT - PT = a - b$.



Sl. 467.

Označimo li na odresku papira tri točke R, P i T (sl. 467.), pa se taj odrezak položi na dva među sobom okomita pravca tako, da točka P padne na jedan, a R na drugi pravac, i onda se odrezak papira u ravnini tako pomiče, da se P pomiče po jednom, a R po drugom pravcu, točka T opiše elipsu. Na temelju te crtnje elipse osniva se sprava za crtanje elipsi (elipsograf).

Ako se točkom T povuče pravac $P'R'$, koji s velikom osi elipse čini jednaki kut kao i pravac OKL, onda je $TR' = TR = a$ i $TP' = KO = b$. (Zašto?).



Sl. 468.

Ako se dužina $P'R'$ tako giblje, da točke P' i R' kližu po dva okomita pravca, svaka točka T te dužine opiše elipsu.

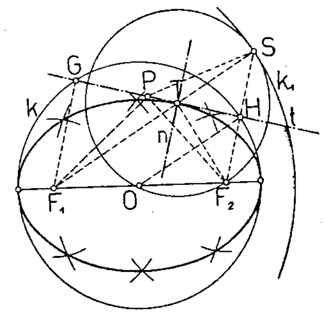
6. Zadatak. *Zadana je velika os $AB = 2a$ i jedna točka T elipse; konstruiraj malu os!* (Sl. 468.).

Rješenje. Mala os CD pada u simetralu osi AB, a veličina poluosi b dobije se prema t. 5 na slijedeći način: Uzme se u šestilo $OB = a$ i oko točke T opiše luk tako, da siječe pravac CD u točki R. Pravac RT siječe AB u točki P, pa je $PT = b$. Odmjeri li se $OC = OD = PT = b$, dobit će se mala os CD.

§ 129. Konstrukcija tangenata elipse

1. Zadatak. *U zadanoj točki T elipse konstruiraj tangentu na tu elipsu!*

Rješenje. Tangenta elipse u točki T (sl. 469.) raspolavlja sukut kuta, koga čine obje provodnice točke T. Da se konstruira tangenta t, produžit će se provodnica F_1T i prenijeti na nju $TS = TF_2$, a onda će se konstruirati simetrala kuta F_2TS. Ta je simetrala tangenta t elipse u točki T.



Sl. 469.

Dokaz. Budući da je $TS = TF_2$, to je $F_1S = F_1T + F_2T = AB$. Ako pravac t ne dotiče elipsu u točki T, onda je siječe u T i još u nekoj točki P, koja leži na t. Budući da je točka P na simetrali točaka F_2 i S, ona je jednako udaljena od tih točaka, pa je $PF_2 = PS$. Kad bi točka P bila na elipsi, onda bi moralo biti $PF_1 + PF_2$, dakle i $PF_1 + PS$, jednako AB. No kako je u trokutu F_1PS stranica $F_1S = AB$, a $PF_1 + PS > F_1S$, to je i $PF_1 + PF_2 > AB$, pa prema tome točka P ne može ležati na elipsi, ma koliko blizu bila točka T. Pravac t ima dakle s elipsom samo točku T zajednički, pa je on tangenta elipse u toj točki. Točka T je dirališe.

2. Suprotište; provodna kružnica. Točka S zove se *suprotište* žarišta F_2 s obzirom na tangentu t. Budući da je $F_1S = AB$, sva suprotišta leže na kružnici k_1, kojoj je središte F_1, a polumjer jednak AB. Kružnica k_1 zove se *provodna kružnica* elipse za žarište F_2. Žarište F_1 ima također svoju provodnu kružnicu, središte joj je F_2, a polumjer jednak AB.

Tangenta je t simetrala dužine F_2S, pa ona raspolavlja dužinu F_2S u točki H i stoji na njoj okomito. Dirališe T tangente t leži u pravcu F_1S. Prema tome su suprotišta i provodne kružnice veoma važne točke za konstrukciju tangenata elipse.

Ako se oko točke T elipse opiše kružnica s polumjerom TF_2, ona ide točkom F_2 i dotiče kružnicu k_1 u točki S. Može se dakle reći:

Elipsa je geometrijsko mjesto središta svih kružnica, koje dotiču zadanu kružnicu k_1 i idu zadanom točkom F_2, koja je unutar te kružnice.

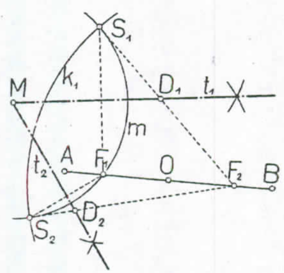
3. Glavna kružnica elipse. Povuče li se točkom O (sl. 469.) dužina $OH \parallel F_1S$, tada je $OH = \frac{1}{2} F_1S = a$ (zašto?), pa imamo poučak:

Nožišta okomica spuštenih sa žarišta na tangente elipse leže na kružnici k, koja je opisana nad velikom osi elipse kao promjerom. Ta se kružnica zove *glavna elipsina kružnica.*

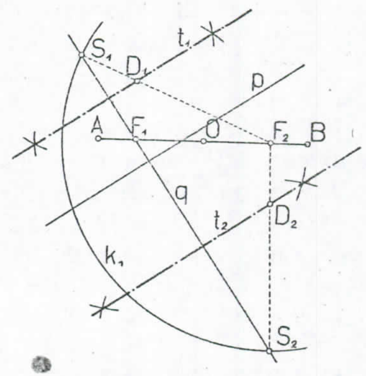
4. Normala. Pravac n, koji je u diralištu T (sl. 469.) okomit na tangenti t, zove se *normala* elipse u točki T. Ta normala raspolavlja kut provodnica točke T. Zrake su TF_1, TF_2, n, t četiri harmoničke zrake.

5. Zadatak. *Sa zadane točke M, koja je izvan elipse, konstruiraj tangente na elipsu i odredi dirališta!* (Sl. 470.).

Rješenje. Tangente se elipse i dirališta odrede pomoću suprotištâ, koja leže na provodnoj



Sl. 470.



Sl. 471.

kružnici k_1 žarišta F_1 i simetrično s tim žarištem prema traženim tangentama. Ako se dakle oko F_2 opiše kružnica k_1 s polumjerom AB, a oko M kružnica m s polumjerom MF_1, obje se te kružnice sijeku u suprotištima S_1 i S_2 žarišta F_1. Simetrale dužinâ F_1S_1 i F_1S_2 jesu tražene tangente t_1 i t_2. Pravac S_1F_2 siječe tangentu t_1 u diralištu D_1, a pravac S_2F_2 siječe tangentu t_2 u diralištu D_2.

Iz ove se konstrukcije vidi, da se zadatak može riješiti i onda, ako elipsa nije nacrtana, a zadana je samo os AB i oba žarišta.

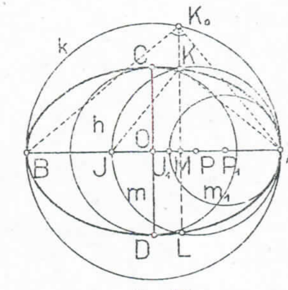
6. Zadatak. *Konstruiraj tangente elipse, koje su usporedne sa zadanim pravcem p i odredi dirališta!* (Sl. 471.).

Rješenje. I ovdje se tangente elipse i dirališta odrede pomoću suprotišta S_1 i S_2 žarišta F_1. Ta suprotišta leže na provodnoj kružnici k_1 žarišta F_1 i na pravcu q, koji ide žarištem F_1 okomito na tražene tangente. Budući da su te tangente usporedne s pravcem p, bit će pravac $q \perp p$, i on siječe kružnicu k_1 u točkama S_1 i S_2. Simetrala je dužine F_1S_1 tangenta t_1, a simetrala dužine F_1S_2 tangenta t_2. Kako se odrede dirališta D_1 i D_2? Za ovu konstrukciju tangenata i dirališta također nije potrebno da je nacrtana elipsa, pa je na sl. 471. zadana samo velika os AB i žarišta F_1 i F_2.

§ 130. Zakrivljenost elipse

1. Zakrivljenost elipse u njenim vrhovima. Vidjeli smo (§ 124., t. 1 i 2) da se zakrivljenost krivulje u nekoj njezinoj točki mjeri zakrivljenošću kružnice, koja se u toj točki usko priljubljuje uz krivulju i da središte te kružnice leži u normali krivulje u promatranoj točki.

Velika je os elipse normala te krivulje u vrhovima A i B, a mala os normala je elipse u vrhovima C i D. Prema tome se središta kružnica zakrivljenosti u vrhovima elipse nalaze u osima te krivulje.



Sl. 472.

Opišimo oko kojegod točke P osi AB kružnicu m, koja dotiče elipsu u vrhu A i siječe još u dvije točke K i L (sl. 472.). Pomiče li se središte P po osi AB tako, da se točke K i L kreću po elipsi prema točki A, mijenjat će se i veličina polumjera kružnice m. Kad točke K i L padnu u točku A zauzet će kružnica m položaj m_1. Budući da kružnica m dotiče elipsu u točki A, obje krivulje imadu u toj točki dvije susjedne neizmjerno blize točke zajednički. Kad su točke K i L došle u točku A, zauzela je kružnica m položaj m_1, pa ona ima s elipsom u točki A četiri susjedne neizmjerno blize točke zajednički. Kružnica se m_1 usko priljubljuje uz elipsu u blizini točke A, pa je ona kružnica zakrivljenosti elipse u vrhu A (Isp. § 124., t. 3).

Opišemo li nad velikom osi AB elipse (sl. 472.) kružnicu k i povučemo li točkom K zraku afinosti KM, ona siječe k u točki K_0, koja je pridružena točki K elipse. Spojimo li K s A i J, a K_0 s A i B, onda su trokuti AKJ i AK_0B pravokutni. Visina KM u trokutu AKJ odsijeca na hipotenuzi odsječke JM i MA, a visina K_0M trokuta AK_0B odsijeca na hipotenuzi AB odsječke BM i AM. Iz prvoga je trokuta $JM \times AM = \overline{KM}^2$, a iz drugoga $BM \times AM = \overline{K_0M}^2$. Stavimo li te dvije jednadžbe u omjer imamo:

$$JM \times AM : BM \times AM = \overline{KM}^2 : \overline{K_0M}^2.$$

Ako je AM različito od 0 može se taj razmjer s AM skratiti, pa imamo:

$$JM : BM = \overline{KM}^2 : \overline{K_0M}^2.$$

Budući da se odnosi $KM : K_0M = b : a$ (§ 128., t. 4), to je

$$JM : BM = b^2 : a^2 \tag{1}$$

t. j.: Za svaku je kružnicu m, koja dotiče elipsu u vrhu A, omjer $JM : BM$ stalan i jednak $b^2 : a^2$. Može se prema tome zaključiti, da će taj omjer biti stalan i za kružnicu zakrivljenosti m_1 u vrhu A. Kada se točke K i L

kreću prema A, onda se i točka M pomiče prema A. Kad K i L padnu u A, u tu točku padne i M, pa kružnica m zauzme položaj m_1. Pošto za tu kružnicu M padne u A, a J u J_1, razmjer (1) glasi sad

$$J_1A : BA = b^2 : a^2. \tag{2}$$

Označimo li polumjer zakrivljenosti u točki A s r_1, tada je $J_1A = 2r_1$, a stavimo li $AB = 2a$, imamo iz (2)

$$2r_1 : 2a = b^2 : a^2.$$

Odatle je

$$r_1 = \frac{b^2}{a} \tag{3}$$

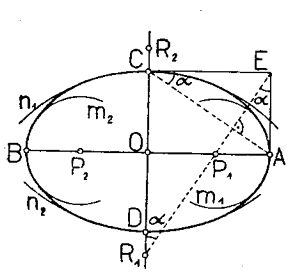
veličina polumjera r_1 kružnice zakrivljenosti elipse u vrhovima A i B.

Na sličan bismo način odredili polumjer r_2 kružnice zakrivljenosti elipse u vrhovima C i D, naime

$$r_2 = \frac{a^2}{b}. \tag{4}$$

Kod toga se određivanja mora upotrebiti afinost između elipse i kružnice h.

2. Konstrukcija središta zakrivljenosti u vrhovima elipse. Na osnovi vrijednosti r_1 i r_2 (t. 1) konstruiraju se središta zakrivljenosti P_1 i R_1 za vrhove A i C na slijedeći način (sl. 473.):



Sl. 473.

Nacrta se pravokutnik $OAEC$, povuče dijagonala AC i s točke E spusti okomica na AC. Ta okomica siječe AB u točki P_1, a CD u točki R_1, te je $P_1A = r_1$, a $R_1C = r_2$.

D o k a z. Budući da se pravokutni trokuti P_1AE i AOC podudaraju u dva kuta (koja?), oni su slični, pa imamo razmjer $P_1A : AE = OC : OA$ ili $P_1A : b = b : a$

odatle je $\quad P_1A = \frac{b^2}{a} = r_1$.

Iz sličnih pravokutnih trokuta R_1CE i OAC imamo razmjer

$$R_1C : CE = OA : OC \quad \text{ili} \quad R_1C : a = a : b,$$

odakle je

$$R_1C = \frac{a^2}{b} = r_2.$$

Točke su dakle P_1 i R_1 u istinu središta zakrivljenosti u vrhovima A i C.

3 Konstrukcija elipse spomoću kružnica zakrivljenosti u vrhovima. Zadana je velika i mala os AB i CD elipse; konstruirajmo središta zakrivljenosti P_1, P_2, R_1 i R_2 (sl. 473.) u vrhovima elipse i oko tih središta opišemo kružne lukove m_1, m_2, n_1 i n_2 s polumjerima $r_1 = P_1A = P_2B$

i $r_2 = R_1C = R_2D$. Ti se lukovi usko priljubljuju uz elipsu u njezinim vrhovima. Spojimo li te lukove krivuljom tako, da se krivulja pomalo odalečuje od lukova n_1 i n_2 i primiče lukovima m_1, m_2 te napokon prijeđe u te lukove, ta je krivulja elipsa.

Ova se konstrukcija elipse može upotrebiti onda, kad se ne radi o velikoj točnosti. Kad se elipsa izvlači tušem, mogu se njezini lukovi u blizini vrhova izvući šestilom.

§ 131. Elipsa kao ortogonalna projekcija kružnice

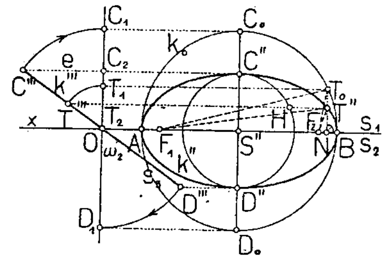
1. Paralelna projekcija kružnice. S obzirom na § 126., t. 2. kružnica se kao krivulja drugoga reda projicira opet kao krivulja drugoga reda. Svaka paralelna projekcija kružnice može biti samo elipsa ili kružnica. Budući da kružnica nema neizmjerno dalekih točaka, moraju i paralelne projekcije svih točaka elipse biti u konačnosti. Jedino ako su zrake projiciranja usporedne s ravninom projiciranja, onda se sve točke kružnice projiciraju neizmjerno daleko, što ovdje ne dolazi u obzir. Pošto dakle paralelna projekcija kružnice nema neizmjerno dalekih točaka, možemo reći:

Paralelna projekcija kružnice može biti samo elipsa ili kružnica.

Ortogonalna je projekcija kružnice elipsa ili kružnica,

Kad se kružnica ortogonalno projicira *a)* kao kružnica' *b)* kao dužina? S obzirom na § 118., t. 1.—3. možemo reći:

Kružnica i njezina ortogonalna projekcija jesu dvije perspektivno afine krivulje. Os afinosti leži u presječnici ravnine projekcija s ravninom kružnice, zrake afinosti podudaraju se sa zrakama projiciranja.



Sl. 474.

2. Projiciranje kružnice. Na sl. 474. uzeli smo da ravnina Σ ide osju x i da s Π_2 zatvara kut ω_2. Tragovi su s_1, s_2 te ravnine u osi x, a treći (bokocrtni) trag s_3 čini s osi kut ω_2. U ravnini Σ uzeli smo kružnicu k tako, da joj je središte S i jedan promjer AB u osi x, koji se na Π_2 projicira u pravoj veličini. Budući da je ravnina Σ kružnice k okomita na bokocrtnoj ravnini Π_3, njezin je bokocrt dužina $C'''D'''$ u tragu s_3, te je $C'''D''' = AB$.

Odredit ćemo nacrt k'' kružnice k. Okrenemo li kružnicu k oko osi x za kut ω_2, ona će doći u Π_2 u položaj k_0. Svaka točka kružnice k opiše kružni luk, koji je usporedan s Π_3, te se na tu ravninu projicira u pravoj veličini sa središtem u O, a na Π_2 kao dužina usporedna s osi z. Na pr.

točka C opiše luk kojemu je bokocrt luk $C'''C_1$, a nacrt dužina $C''C_0 \parallel z$, gdje je $C_1C \perp z$ i $C'''C' \perp z$. Točka C je najviša točka kružnice k, a C'' najviša točka projekcije k''. Na jednak bi način našli najnižu točku D'' krivulje k''.

Uzme li se na kružnici k neka točka T, njezin će bokocrt T''' biti u tragu s_3, a nacrt T'' u ordinali točke T''' okomitoj na os z. Točka će se T'' dobiti ovako: Točka T doći će nakon okretanja u točku T_0 na k_0 ($OT_1 = OT'''$, $T_1T_0 \perp z$), a povuče li se tom točkom pravac $T_0N \parallel z$, on siječe ordinalu točke T''' u točki T''. Na jednak bi način dobili povoljan broj točaka projekcije k''.

Budući da središte S raspolavlja sve promjere kružnice k, nacrt $S'' \equiv S$ te točke raspolavlja i nacrte svih tih promjera, pa je ona također središte projekcije k''. Svaki se promjer kružnice k projicira kao promjer projekcije k''. Promjer AB leži u osi x, pa se on na Π_2 projicira u pravoj veličini. Svi su ostali promjeri nagnuti prema Π_2, pa se oni na tu ravninu projiciraju prikraćeno. Što je veći prikloni kut promjera prema Π_2, to je njegov nacrt kraći. Najveći prikloni kut, i to ω_2, ima promjer CD, koji je okomit na AB, pa će njegova projekcija $C''D''$ biti najkraća. Prema tome je AB najduži, a $C''D''$ najkraći promjer projekcije k''. Krivulja je k'' simetrična prema obim promjerima AB i $C''D''$.

3. *Krivulja je k'' elipsa.*

Dokaz. Iako iz t. 1. slijedi, da je ortogonalna projekcija kružnice elipsa, mi ćemo tu tvrdnju na drugi način dokazati. Iz sličnosti pravokutnog trokuta $OT'''T_2$ i $OC'''C_2$ slijedi razmjer

$$OT''' : OT_2 = OC''' : OC_2.$$

Budući da je $OT''' = OT_1 = NT_0$, $OT_2 = NT''$, $OC''' = OC_1 = SC_0 = a$, $OC_2 = SC'' = b$, gornji razmjer prelazi u razmjer

$$NT_0 : NT'' = SC_0 : SC'' = a : b.$$

Iz tog razmjera zaključujemo, da između kružnice k_0 i projekcije k'' postoji afina srodnost, gdje je AB os afinosti, a T_0T'' ($\perp AB$) smjer zraka afinosti. Budući da je odnos između dužine NT_0 i NT'' svakih dviju pridruženih točaka T_0 i T'' stalan i jednak $a : b$, zaključujemo da je krivulja k'' elipsa (§ 128., t. 4), kojoj je AB velika, a $C''D''$ mala os.

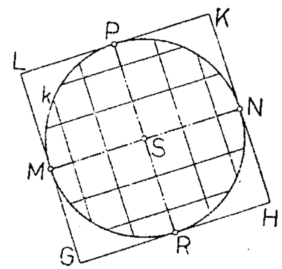
Ako se kružnica k pomakne usporedno u ravnini Σ u nov položaj, pomaknut će se usporedno i projekcija k'', pa vidimo, da je ortogonalna projekcija kružnice na neku ravninu uvijek elipsa.

Kad se kružnica k projicira kao elipsa, onda je njezina velika os jednaka promjeru te kružnice. Kao velika os elipse projicirat će se prema tome onaj promjer AB kružnice k, koji je usporedan s tragom ravnine Σ

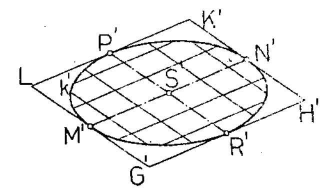
te kružnice, dakle onaj promjer koji se podudara sa sutražnicom ravnine Σ. Kao mala os projicirat će se onaj promjer CD kružnice, koji se podudara s priklonicom te ravnine. Ako je $AB \parallel s_1$ i $CD \perp AB$, onda je $A'B' \parallel s_1$ i $C'D' \perp A'B'$.

§ 132. Konjugirani promjeri elipse

1. O konjugiranim promjerima kružnice i elipse. Ako se u kružnici k (sl. 475.) povuku dva među sobom okomita promjera MN i PR, onda se kaže, da je jednom od tih promjera pridružen drugi promjer ili da su oba ta promjera konjugirani promjeri kružnice k. (Isp. § 136., t. 3). U svakoj kružnici ima neizmjerno mnogo parova konjugiranih promjera.



Sl. 475.



Sl. 476.

Ako se kružnica k ortogonalno projicira kao elipsa k', onda se konjugirani promjeri MN i PR kružnice k projiciraju kao dva konjugirana promjera $M'N'$ i $P'R'$ elipse k' (sl. 476.). Ti promjeri uopće nijesu među sobom okomiti niti jednaki.

Povuku li se u kružnici k tetive, koje su usporedne s MN i PR, onda promjer PR raspolavlja tetive, koje su usporedne s MN, a promjer MN raspolavlja tetive, koje su usporedne s PR. Tetive, koje su usporedne s MN projiciraju se kao tetive elipse k' usporedne s $M'N'$ i te tetive raspolavlja promjer $P'R'$ (§ 8., t. 5.). Isto se tako tetive, koje su usporedne s PR projiciraju kao tetive elipse usporedno s $P'R'$, te ih raspolavlja promjer $M'N'$. Možemo dakle reći:

Dva konjugirana promjera elipse imaju svojstvo, da svaki od njih raspolavlja tetive, koje su usporedne s drugim promjerom.

Tangente u krajnjim točkama promjera MN kružnice k usporedne su s promjerom PR, a tangente u krajnjim točkama promjera PR usporedne su s promjerom MN. Te četiri tangente čine dirni kvadrat $GHKL$ (sl. 475.) kružnice k, te se dirališta nalaze u središtu stranica kvadrata.

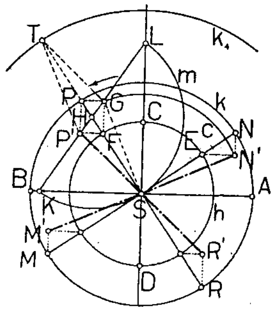
Projekcija kvadrata $GHKL$ bit će paralelogram $G'H'K'L'$, koji dotiče elipsu k' u krajnjim točkama konjugiranih promjera $M'N'$ i $P'R'$, koje su u središtima stranica toga paralelograma. Promjeri su $M'N'$ i $P'R'$ srednjice paralelograma $G'H'K'L'$ (sl. 476.).

Ako su dva promjera elipse konjugirana, pa se krajnjim točkama svakog tog promjera povuku usporednice s drugim promjerom, one čine paralelogram, koji dotiče elipsu u krajnjim točkama konjugiranih promjera, koji leže u središtima stranica paralelograma. Konjugirani su promjeri srednjice dirnog paralelograma. (Isp. § 136., t. 4.).

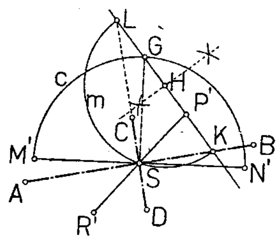
Svakoj se elipsi može opisati neizmjerno mnogo dirnih paralelograma, ali samo oni paralelogrami, koji dotiču elipsu u središtima njihovih stranica, imaju kao srednjice dva konjugirana promjera elipse.

2. Normalni konjugirani promjeri elipse. U svakoj elipsi ima samo jedan par konjugiranih promjera, koji su međusobom normalni, a to su velika i mala os.

3. Konstrukcija konjugiranih promjera elipse. Da se dobiju dva konjugirana promjera elipse, postupa se ovako: Povuku se u elipsi dvije usporedne tetive, raspolove se i polovištima povuče pravac. U taj pravac



Sl. 477.



Sl. 478.

pada jedan promjer elipse. Raspolovi li se taj promjer, dobit će se središte elipse, a potegne li se tim središtem promjer usporedno s onim tetivama, taj je promjer konjugiran s prvim promjerom.

Ako su zadane velika i mala os elipse AB i CD (sl. 477.), onda se dva konjugirana promjera $M'N'$ i $P'R'$ elipse mogu dobiti s pomoću koncentričnih kružnica k i h iz dvaju konjugiranih promjera MN i PR kružnice k, gdje je $MN \perp PR$.

4. Konstrukcija osi elipse iz njezina dva konjugirana promjera. Na sl. 477. nacrtane su osi AB i CD elipse i dva konjugirana promjera $M'N'$ i $P'R'$. Ako se promjeri MN i $M'N'$ okrenu u ravnini crtnje oko središta S za 90^0 put lijeve strane, točka će N doći u P, E u F, N' u G, SN pokrit će SP, a SN' doći će u položaj $SG \perp SN'$. Pravokutni trokut $EN'N$ doći će u položaj FGP, pa će s trokutom $P'PF$ činiti pravokutnik $P'FGP$, u kojemu su dužine PF i $P'G$ dijagonale. Te se dijagonale raspolavljaju u točki H. Produžena dijagonala $P'G$ siječe os AB u K, a os CD u L.

Budući da je $\triangle P'FH$ istokračan, i budući da je $KS \parallel P'F$, to je četverokut $KSFP'$ istokračan trapez. Prema tome je $KP' = SF = b$. Isto tako je $LG = SF = b$. Budući da su trokuti KSH i SLH istokračni, to je $HK = HS$ i $HL = HS$. Prema tome je $HK = HS = HL$; t. j. točka je H središte hipotenuze KL pravokutnog trokuta KSL, te središte tomu trokutu opisane kružnice m. Pošto je $KH = SH$ i $HG = HP$, to je $KH + HG = SH + HP = a$, i prema tome $KG = LP' = a$.

Na temelju ovih izvoda konstruirane su na sl. 478. osi elipse iz zadanih konjugiranih promjera $M'N'$ i $P'R'$. U toj smo elipsi zadržali iste oznake kao na slici 477. Osi elipse konstruiraju se na slijedeći način:

Nad promjerom $M'N'$ opiše se kružnica c, povuče se polumjer $SG \perp M'N'$ i pravac GP', zatim se odredi polovište H dužine GP' i oko te točke opiše polukružnica m s polumjerom HS. Polukružnica m siječe pravac $P'G$ u točkama K i L, pa se tim točkama povuku pravci KS i LS, koji su među sobom okomiti (kut u polukrugu). U te pravce padaju osi elipse, i to velika os pada u oštre, a mala u tupe kutove, što ih čine promjeri $M'N'$ i $P'R'$. Budući da je $KG = a$ i $GL = b$, prenijet će se $SA = SB = KG$ i $SC = SD = GL$, pa je AB velika, a CD mala os elipse za zadane konjugirane promjere $M'N'$ i $P'R'$.

Iz te konstrukcije slijedi, da je elipsa sa svoja dva konjugirana promjera potpuno određena.

5. Konstrukcija normala elipse. Povucimo točkom P' (sl. 477.) pravac usporedno sa SG i točkom G pravac usporedno sa SP', oba se ta pravca sijeku u točki T. Lik je $SGTP'$ paralelogram, u kojemu je $P'G$ dijagonala, a H središte. Pravac SH je druga dijagonala, te na njoj leži točka T. Iz slike je

$$HS = HT, \quad HF = HP, \quad \text{a odatle}$$

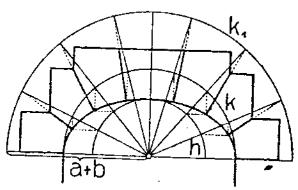
$$HS - HF = HT - HP \quad \text{ili} \quad SF = PT = b$$

Prema tome je $\quad ST = SP + PT \quad$ ili $\quad ST = a + b.$

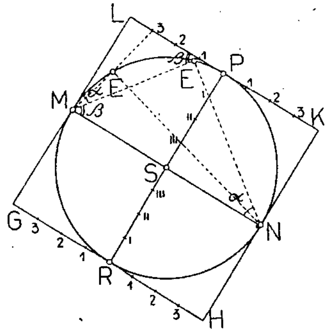
Točka T leži na kružnici k_1 opisanoj oko S s polumjerom $a + b$.

Tangenta u točki P' usporedna je s promjerom $M'N'$, a jer je $SG \perp M'N'$; $P'T \parallel SG$, dakle $P'T' \perp M'N'$, to je $P'T$ okomito na tangenti u točki P'. Prema tome je $P'T$ normala elipse u točki P'.

Ova se konstrukcija normala elipse može primijeniti kod crtanja eliptičnog svoda iz tesanog kamena, gdje sljubnice moraju biti okomite na luk svoda (sl. 479.), te se u projekciji podudaraju s normalama elipse.



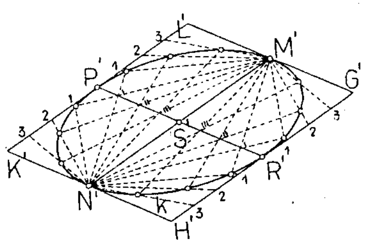
Sl. 479.



Sl. 480.

6. Konstrukcija elipse, ako su zadana dva konjugirana promjera. Nacrtajmo opet kružnicu k i u njoj dva među sobom okomita promjera MN i PR (sl. 480.), te dirni kvadrat $GHKL$, kojemu su stranice usporedne s MN i PR. Razdijelimo dužine SP, SR, PK, PL, RG i RH na jednake dijelove, na pr. na četiri dijela. Spojimo li točku M s 1 i točku N s I, oba se ta pravca sijeku u točki E kružnice k.

Dokaz. Budući da je pravokutan trokut $\triangle SNI \cong \triangle MLI$ (po II. poučku), to je $\sphericalangle LMI = \sphericalangle SNI = \alpha$. Kako je nadalje $\sphericalangle MIL = \sphericalangle SMI$ (izmjenični kutovi), to se trokuti MNE i MLI podudaraju u dva kuta, a jer je trokut MLI pravokutan, takav je i trokut MNE. Prema tome je $\sphericalangle MEN = 90^0$, pa odatle slijedi, da je točka E na kružnici k.



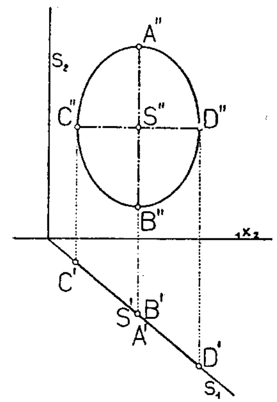
Sl. 481.

Kad bi projicirali promjere MN i PR te kvadrat $GHKL$, dobili bi konjugirane promjere $M'N'$ i $P'R'$ elipse te dirni paralelogram $G'H'K'L'$ (sl. 481.), kojemu su stranice usporedne s $M'N'$ i $P'R'$. Ako se svaka dužina $S'P'$, $S'R'$, $P'K'$, $P'L'$, $R'G'$ i $R'H'$ razdijeli na četiri jednaka dijela, pa se spoji M' s 1 i N' s I, dobit će se u sjecištu tih pravaca točka E', koja je na elipsi. Iz slike se 481. vidi kako su određene ostale točke elipse.

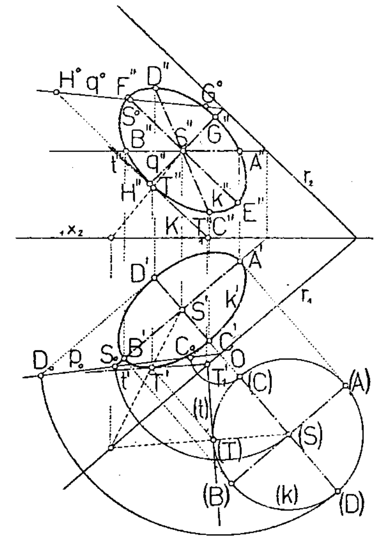
§ 133. Ortogonalno projiciranje kružnice

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kružnice, koja leži u ravnini* $\Sigma \perp \Pi_1$! (Sl. 482.).

Rješenje. Tlocrt je kružnice dužina $C'D'$, koja leži u tragu s_1. Ta je dužina jednaka promjeru zadane kružnice. Nacrt je kružnice elipsa. Dužina je $C'D'$ tlocrt onoga promjera CD, koji je usporedan s Π_1, pa je zato njegov nacrt $C''D'' \parallel x$. Promjer AB, koji je okomit na CD, okomit je i na Π_1, pa je njegov tlocrt točka u S', dok se nacrt $A''B''$ prikaže u pravoj veličini, te je $A''B'' = C'D'$ i $A''B'' \perp C''D''$. Prema tome je $A''B''$ velika os, a $C''D''$ mala os elipse, pa se krivulja može lako konstruirati.



Sl. 482.



Sl. 483.

2. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kružnice, koja leži u općoj ravnini* $\mathbf{P}(r_1, r_2)$, *i kojoj je zadano središte* $S(S', S'')$ *i polumjer* r! (Sl. 483.).

Rješenje. Okrenemo li ravninu $\mathbf{P}$ oko traga r_1 u Π_1, točka će S doći u položaj (S) $[S'O \perp r_1,\ S'S_0 \perp S'O,\ S'S_0 = S''K,\ O(S) = OS_0]$. Opišemo li oko (S) kružnicu (k) s polumjerom r, imamo preložaj kružnice k. U kružnici (k) povucimo dva među sobom okomita promjera $(A)(B)$ i $(C)(D)$, od kojih je $(A)(B) \parallel r_1$, a $(C)(D) \perp r_1$. Potražimo li tlocrte tih promjera, bit će $A'B' \parallel r_1$ i $B'D' \perp r_1$, te $A'B' = (A)(B) = 2r$, pa je $A'B'$ velika, a $C'D'$ mala os elipse k_1.

No, da se odredi velika i mala os elipse k', nije uopće potrebno, da se kružnica k okrene u Π_1. Promjer AB podudara se sa sutražnicom.

a CD s priklonicom prve skupine ravnine **P**, pa ako se točkom S' povuče pravac $A'B' \parallel r_1$ i učini $S'A' = S'B' = r$, dobit će se velika os $A'B'$, a prenese li se na preložaj p_0 priklonice $S_0C_0 = S_0D_0 = r$, te povuče C_0C' i $D_0D' \perp OS'$, dobit će se mala os $C'D'$.

Odrede li se nacrti točaka A, B, C, D, bit će dužine $A''B''$ i $C''D''$ dva konjugirana promjera elipse k''. No ta elipsa ima svoju veliku i malu os. Kao velika os projicira se onaj promjer EF kružnice k, koji se podudara sa sutražnicom druge skupine, a kao mala os projicira se promjer GH, koji se podudara s priklonicom q druge skupine. Povuku li se dakle točkom S'' projekcije te sutražnice i priklonice, te osim toga priklonica preloži oko svoje projekcije u Π_2, i učini $S''E'' = S''F'' = r$, $S^0G^0 = S^0H^0 = r$, G^0G'' i $H_0H'' \perp q''$, dobit će se velika os $E''F''$ i mala os $G''H''$ elipse k''.

Kad bi se u kružnici (k) povukla koja druga dva među sobom okomita promjera, pa potražile njihove projekcije, dobila bi se dva konjugirana promjera elipse k' i k''. Ti se promjeri lako konstruiraju, ako se uzme u obzir, da su kružnica (k) i elipsa k' dvije perspektivno afine krivulje. Isto tako su dvije perspektivno afine krivulje obje elipse k' i k'', za koje je pravac istovjetnosti afinitetna os.

Povuče li se u kojojgod točki (T) kružnice (k) tangenta (t), pa njezino sjecište T_1 s r_1 spoji s T', dobit će se tangenta t' elipse k' u točki T'. Pravac je $T_1''T''$ tangenta elipse k'' u točki T''.

§ 134. Kosa projekcija kružnice

1. Objašnjenja. S obzirom na § 131., t. 1, može se reći:

Kosa je projekcija kružnice elipsa ili kružnica.

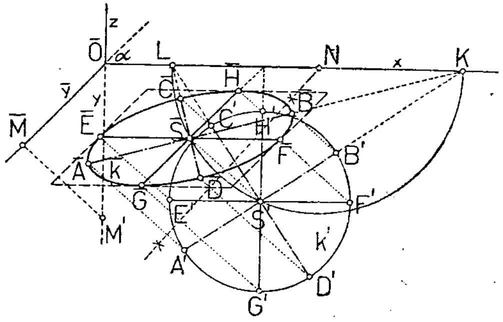
Kružnica i njezina kosa projekcija su dvije perspektivno afine krivulje. Os afinosti leži u presječnici ravnine projekcija s ravninom kružnice, a zrake afinosti podudaraju se sa zrakama projiciranja.

Kružnica se koso projicira opet kao kružnica: 1) Kad je ravnina kružnice usporedna s ravninom projekcija, 2) kad su zrake projiciranja okomite na simetralnoj ravnini prostornog kuta, koga čine ravnina kružnice s ravninom projekcija. Ako zraka projiciranja leži u ravnini kružnice, njezina je kosa projekcija dužina.

2. Elipsa kao kosa projekcija kružnice. *Neka se nacrta kosa projekcija kružnice, koja leži u ravnini (xy), ako je* $\alpha = 40^0$, $n = \frac{3}{4}$ (Sl. 484.)!

Kružnicu k, koja leži u ravnini (xy), okrenuli smo oko osi x u ravninu slike u položaj k'. Tražena kosa projekcija kružnice k, t. j. elipsa $\bar{k}$ i kružnica k' jesu dvije perspektivno afine krivulje, gdje je os x os afinosti, a

$M'\overline{M}$ smjer zraka afinosti. Uzmu li se u kružnici k' dva među sobom okomita promjera $E'F'$ i $G'H'$ i na poznati način odrede pripadne dužine $\overline{E}\,\overline{F}$ i $\overline{G}\,\overline{H}$, te su dužine dva konjugirana promjera elipse $\bar{k}$. Ako se u pramenu S' odrede ona dva okomita promjera, kojima će u pramenu $\overline{S}$ pripadati također dva okomita promjera, oni će biti mala i velika os elipse $\bar{k}$. Ti se parovi konjugiranih promjera konstruiraju na poznati način (§ 121., t. 1. sl. 430.). Na sl. 484. je $A'B' \perp C'D'$ i $\overline{A}\,\overline{B} \perp \overline{C}\,\overline{D}$.



Sl. 484.

3. Daljnja konstrukcija elipse iz dva konjugirana promjera. *Na sl. 485. zadana su dva konjugirana promjera MN i PR elipse, treba konstruirati tu elipsu.*

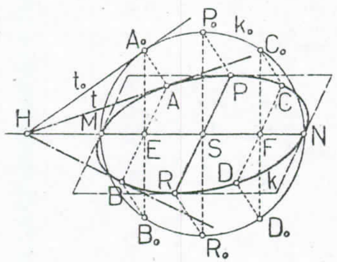
Nad promjerom MN opisana je kružnica k^0, koja će se uzeti da je perspektivno afina s elipsom $\bar{k}$. Budući da su točke M i N same sebi pridružene, slijedi da je pravac MN os afinosti kružnice i elipse. Promjer PR elipse pridružen je promjeru P_0R_0 kružnice k_0, koji je okomit na MN. Pravci P_0P i R_0R jesu zrake afinosti. Povuče li se tetiva $A_0B_0 \parallel P_0R_0$, onda je pripadna tetiva elipse $AB \parallel PR$, gdje je $A_0A \parallel B_0B \parallel P_0P$. Isto tako je $C_0D_0 \parallel P_0R_0$ i $CD \parallel PR$. Spomoću afinosti mogu se odrediti pojedine točke elipse.

Kružnicu k_0 možemo smatrati preložajem kružnice k, koja leži u ravnini (xy) i kojoj je središte S u osi x, u ravnini slike. Prema tome elipsa $\bar{k}$ može se smatrati kosom projekcijom kružnice k, gdje je os $\bar{y} \parallel PR$. Prikrata $n = \dfrac{SP}{SP_0}$.

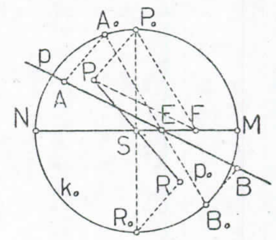
Imamo poučak:

Svaka kružnica, koja je opisana nad kojimgod promjerom elipse, jest perspektivno afina s tom elipsom, gdje je osju afinosti zajednički promjer i gdje je smjerom afinosti spojnica dviju pripadnih krajnjih točaka onih pripadnih promjera, koji su konjugirani sa zajedničkim promjerom u kružnici i elipsi.

Budući da su kružnica k_0 i elipsa $\overline{k}$ dvije perspektivno afine krivulje, mogu se lako crtati tangente elipse. Da se na pr. nacrta tangenta t elipse u točki A, povući će se tangenta t_0 u pripadnoj točki A_0 kružnice k_0 i spojit će se sjecište H pravaca MN i t_0 s točkom A. Tada je $HA \equiv t$ (sl. 485.). Pravac HB je tangenta elipse u točki B.



Sl. 485.



Sl. 486.

4. Zadatak. *Zadana je elipsa sa dva konjugirana promjera MN i PR i pravac p; odredi sjecišta toga pravca s elipsom!* (Sl. 486.).

Rješenje. Nad promjerom MN opiše se kružnica k_0, koja je perspektivno afina s elipsom, i koja se ne će crtati. Pravcu p, koji pripada sistemu elipse, potražit će se pravac p_0, koji pripada sistemu kružnice k_0. U tu svrhu povući će se pravac $PF \parallel p$ i spojit će se točka P_0 sa F. Pravci su PF i P_0F dva pripadna pravca. Budući da je $p \parallel PF$, tad mora biti $p_0 \parallel P^0F$, gdje p_0 ide točkom E osi afinosti MN. Pravac p_0 siječe k_0 u točkama A_0 i B_0, pa povuku li se točkama A_0 i B_0 pravci usporedno sa zrakom afinosti P_0P, dobit će se na pravcu p pripadna sjecišta A i B toga pravca s elipsom.

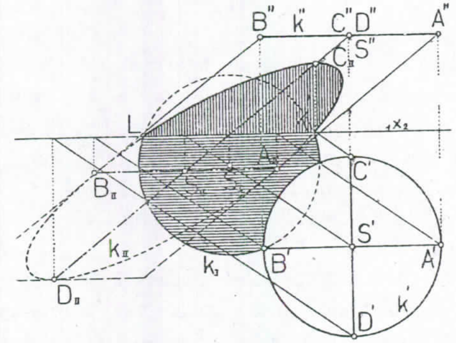
§ 135. Bačena sjena kruga

1. Objašnjenja. Bačena sjena kruga na neku ravninu kod usporedne rasvjete može se smatrati kosom projekcijom toga kruga na tu ravninu. S obzirom na § 118., t. 1. krug i njegova bačena sjena su dva afina lika, gdje je os afinosti u presječnici ravnine kruga s ravninom bačene sjene i gdje su zrake afinosti usporedne sa smjerom zraka svijetla.

2. Zadatak. *Odredi bačene sjene kruga, koji je usporedan s Π_1, na ravnine projekcija!* (Sl. 487.).

Rješenje. Bačena je sjena k_1 zadanog kruga na Π_1 sukladna s tim krugom. Ta se sjena odredi tako, da se odredi sjena S_1 središta S na Π_1 i oko S_1 opiše kružnica k_1 s polumjerom zadanoga kruga. Na Π_1 pada samo jedan dio bačene sjene kruga, a drugi dio pada na Π_2.

Bačena je sjena kruga na Π_2 elipsa k_{II}, koja se dobije tako, da se odrede bačene sjene dovoljnog broja točaka kruga na Π_2 i te točke spoje elipsom. Uzmu li se u krugu dva među sobom okomita promjera, na pr.

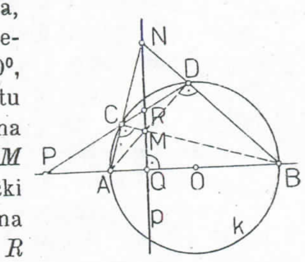


Sl. 487.

AB ($A'B'$, $A''B''$) i CD ($C'D'$, $C''D''$), i odrede njihove bačene sjene $A_{II}B_{II}$ i $C_{II}D_{II}$, te su dužine dva konjugirana promjera elipse k_{II}, pa se ta elipsa može konstruirati.

§ 136. Pol i polara kružnice i elipse

1. Harmonijske točke s obzirom na kružnicu. Nacrtajmo kružnicu k (sl. 488. i 489.), povucimo središtem O sekantu AB, uzmimo na toj sekanti po volji točku P i povucimo njom drugu sekantu CD. Smatramo li točke A, B, C, D vrhovima potpunog četverokuta, onda su točke P, M, N sporedni vrhovi toga četverokuta. Budući da je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^0$, to je točka M sjecište visina BC i AD u trokutu ABN. Treća visina NM mora biti okomita na trećoj stranici AB, t. j. $NM \perp AB$. Pravac NM siječe stranicu AB četverokuta $ABCD$ u točki Q, a stranicu CD u točki R. S obzirom na § 11., t. 2 grupe su točaka A, B, P, Q i C, D, P, R četiri harmonijske točke. Označimo sporednu stranicu NM potpunog četverokuta sa p. Budući da



Sl. 488.

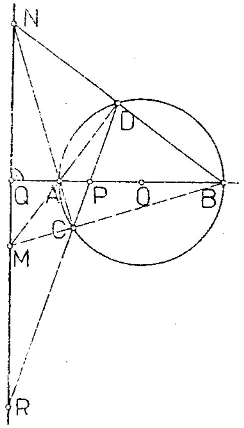
točka Q leži na pravcu PO tako da su točke P, Q i A, B parovi harmonijskih točaka i budući da pravac p ide točkom Q okomito na PO slijedi, da položaj pravca p ne zavisi o položaju sekante CD, koja ide točkom P.

Možemo dakle reći:

Svakoj točki P ravnine kružnice pripada pravac p tako, da svaka sekanta CD potegnuta točkom P siječe pravac p u točki R, koja s točkom P čini par harmonijski pridruženih točaka s obzirom na točke C i D kružnice. Pravac p, koji pripada točki P, okomit je na spojnici točke P sa središtem kružnice.

2. Pol i polara kružnice. Točka P i pravac p (sl. 488. i 489.) zovu se *pridruženi elementi*. Točka P zove se *pol* pravca p, a pravac p zove se *polara* točke Q s obzirom na kružnicu k

Pol P i polara p dijele promjer AB i svaku tetivu CD kružnice k, koja ide točkom P, harmonijski.



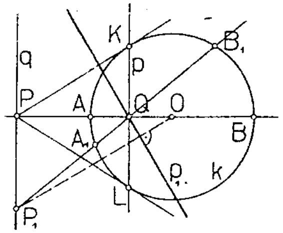
Sl. 489.

Polara p točke P ide točkom Q, koja je harmonijski pridružena točki P, okomito na spojnicu točke P sa središtem O kružnice k.

Odatle slijedi:

Ako se pol nalazi u točki Q, koja je unutar kružnice k na polari p, onda polara q te točke ide točkom P okomito na PO (sl. 490.).

Ako je pol P izvan kružnice k, pa se sekanta, koja ide točkom P, okreće oko te točke, onda se sjecišta A i B s kružnicom k primiču među sobom, te će pasti zajedno, kad sekanta pređe u jednu ili drugu tangentu kružnice. Oba dirališta leže u sjecištima polare p i kružnice k. Možemo dakle reći:



Sl. 490.

Ako se s točke P, koja je izvan kružnice k, povuku na tu kružnicu obje tangente, onda je spojnica obih dirališta K i L polara p točke P s obzirom na kružnicu k (sl. 490.).

Ako je pol P neizmjerno daleko, onda polara p ide središtem O i okomita je na smjeru PO. Ako pol P leži na kružnici, na pr. u točki A (sl. 490.), onda i oba dirališta K i L padnu u točku A, pa polara prelazi u tangentu kružnice u toj točki. Prema tome je polara jedne točke kružnice tangenta u toj točki, pol tangente kružnice je u njezinom diralištu. Ako pol padne u središte kružnice, onda polara padne u neizmjerno daleki pravac ravnine kružnice.

Ako je pol u točki M (sl. 488. i 489.), onda s obzirom na t. 1, polara te točke pada u pravac PN. Polara točke N pada u pravac PM. Zato se trokut PMN zove ***polarni trokut*** potpunog četverokuta (§ 117., t. 1.).

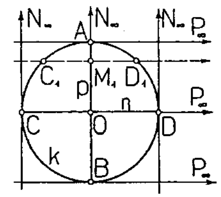
3. Konjugirane točke; konjugirani pravci. Ako se kroz pol Q (sl. 490.) povuče sekanta A_1B_1, ona siječe polaru q u točki P_1 tako da su točke P_1, Q, A_1, B_1 četiri harmonijske točke. Budući da je točka Q harmonijski pridružena svakoj točki P_1 pravca q s obzirom na sjecišta A_1 i B_1, imamo poučak:

Ako točka P_1 leži na pravcu q, onda polara p_1 te točke ide polom Q pravca q okomito na spojnicu P_1O.

Ako se točka $P(Q)$ giblje po pravcu $q(q)$, onda se njezina polara $p(q)$ okreće oko pola $Q(P)$, i obrnuto.

Dvije točke P_1 i Q, od kojih svaka leži na polari druge točke, zovu se *konjugirane (pridružene) točke*. Dva pravca p_1 i q, od kojih svaki ide polom drugoga pravca, zovu se *konjugirani (pridruženi) pravci*.

Ako dva usporedna vrha potpunog četverokuta, na pr. vrhovi P i N (sl. 488.), padnu neizmjerno daleko, onda treći sporedni vrh M padne u središte O, sporedna stranica PN padne u neizmjerno daleki pravac, sporedne stranice PM i NM idu središtem O i među sobom su okomite. Neizmjerno dalekoj točki P_∞ (sl. 491.) pripada polara $ON_\infty = p$, a neizmjerno dalekoj točki N_∞ pripada polara $OP_\infty = n$, tako da je $p \perp n$. U ta dva pravca padaju promjeri AB i CD kružnice, koji su među sobom *konjugirani*.



Sl. 491.

Dva su konjugirana promjera kružnice među sobom okomita.

Tangente povučene točkom P_∞ na kružnicu k usporedne su s pravcem n i dotiču k u točkama A i B; tangente povučene točkom N_∞ usporedne su s pravcem p i dotiču p u točkama C i D. Sve četiri tangente čine kvadrat, koji je kružnici k opisan. Promjeri AB i CD jesu srednjice toga kvadrata.

Grupe točaka A, B, O, N_∞ i C, D, O, P_∞ jesu harmonijske točke. Sekante povučene usporedno s pravcem $p(n)$ sijeku kružnicu k i pravac $n(p)$ u tri točke, koje s neizmjerno dalekom točkom $P_\infty(N_\infty)$ čine četiri harmonijske točke.

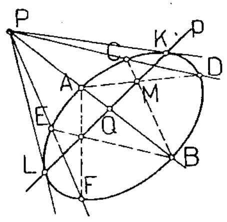
4. Pol i polara elipse. Vidjeli smo, da je elipsa paralelna projekcija kružnice, da se četiri harmonijske točke projiciraju opet kao četiri harmonijske točke i da se tangente kružnice projiciraju kao tangente elipse. Prema tome pol i polara kružnice projiciraju se kao pol i polara elipse. Za pol i polaru elipse vrijede prema tome slijedeći poučci:

1. Svakoj točki, P koja leži u ravnini elipse, pripada s obzirom na tu elipsu samo jedna polara p tako, da svaka sekanta potegnuta točkom P siječe elipsu u dvije točke A i B, a polaru p u točki Q, te su točke A, B, P, Q četiri harmonijske točke (sl. 492.)

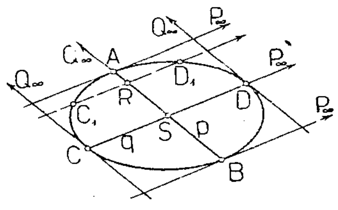
2) Ako je pol na elipsi, polara je tangenta elipse u toj točki.

3) Ako je pol u središtu elipse, onda je polara neizmjerno daleki pravac.

4) Ako je pol neizmjerno daleko, onda polara ide središtem elipse. U tu polaru pada jedan promjer elipse. Ako se u smjeru toga promjera uzme drugi pol neizmjerno daleko, njegova je polara drugi promjer, koji je s prvim promjerom *konjugiran* (sl. 493.). Tangente elipse povučene točkom



Sl. 492.



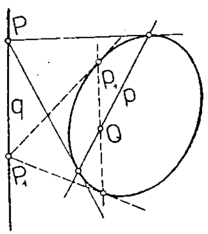
Sl. 493.

P_∞ usporedne su s promjerom q i dotiču elipsu u krajnjim točkama promjera AB. Tangente povučene točkom Q_∞ usporedne su s promjerom p i dotiču elipsu u krajnjim točkama promjera CD. Te četiri tangente čine dirni paralelogram elipse, kojima su konjugirani promjeri srednjicama. Ako se točkom P_∞ povuče sekanta, ona siječe elipsu u točkama $C_1 D_1$, a promjer p u točki R. Točke su C_1, D_1, R, P_∞ četiri harmonijske točke, odakle slijedi da je $RC_1 = RD_1$.

5) Ako je pol izvan elipse, onda polara ide diralištima tangenata potegnutih s pola na elipsu.

6) Ako pol Q leži na polari p točke P, onda polara q točke Q ide točkom P.

Ako je pol P izvan elipse (sl. 492.), onda se polara može konstruirati samo spomoću ravnala na slijedeći način: Točkom P povuku se tri sekante AB, CD i EF i sjecišta unakrst spoje. Kroz sjecišta M i N tih spojnica ide polara p. Polara p siječe elipsu u točkama, u kojima tangente potegnute s pola P dotiču elipsu.



Sl. 494.

Stranice AC i BD potpunog četverokuta $ABCD$ sijeku se u istoj točki na polari p. To vrijedi i za stranice AE i BF potpunog četverokuta $ABEF$.

Ako je pol Q unutar elipse (sl. 494.), onda se polara q konstruira tako, da se točkom Q povuku dva pravca p i p_1 i potraže polovi P i P_1 tih pravaca; tada je PP_1 polara q točke Q.

5. Zadaci za vježbu

1. Zadana je velika i mala os elipse ($AB = 10\,cm$, $CD = 6\,cm$) konstruiraj elipsu!

2. Konstruiraj elipsu, kojoj su zadana oba žarišta ($F_1F_2 = 8$) te jedna točka elipse!

3. Zadano je jedno žarište, dvije točke i dužina velike osi elipse; konstruiraj elipsu!

4. Nacrtaj tri elipse, koje imaju
   a) zajedničku veliku os $AB = 8\,cm$ i ekscentricitet $OF_1 = 1, 2, 3\,cm$,
   b) zajedničku malu os $CD = 3\,cm$ i ekscentricitet $e = 1, 2, 3\,cm$,
   c) isti ekscentricitet $e = 1\,cm$ i veliku os $AB = 4, 5, 6\,cm$.

Izračunaj svaki put dužine a, b i e!

5. Zadana je mala os $CD = 2b$ i jedna točka elipse; konstruiraj veliku os AB! (Isp. sl. 468.).

6. Konstruiraj elipsu, kojoj je zadana velika os i jedna tangenta!

7. Zadana je mala os i jedna točka elipse; konstruiraj tangentu u toj točki!

8. Konstruiraj elipsu, kojoj je zadana jedna tangenta sa diralištem, jedno žarište i smjer velike osi!

9. Zadane su tri tangente t_1, t_2, t_3 i jedno žarište F_1 elipse, odredi drugo žarište, veliku os i dirališta tangenata. — Uputa: Tri kružnice opisane oko sjecišta tangenata preko žarišta F_1 sijeku se u tri suprotišta S_1, S_2, S_3. Središte je kružnice, koja ide tima trima točkama, drugo žarište F_2!

10. Konstruiraj elipsu, kojoj je zadano:
    a) dvije tangente, jedno žarište i smjer velike osi,
    b) jedan vrh, jedno žarište i jedna tangenta,
    c) jedno žarište, jedna tangenta i još jedna tangenta s diralištem.

11. Konstruiraj osi elipse ako je zadano:
    a) jedno žarište, jedna tangenta s diralištem i smjer velike osi,
    b) oba žarišta i jedna tangenta,
    c) jedno žarište, jedna tangenta te smjer i dužina velike osi.

12. Nacrtaj projekcije kruga, koji leži u ravnini **P**, te mu je zadano središte S i jedna točka T obodnice! Neka je:

a) **P** (6, 8, 7),	S (2, 3, ?),	T (3, ?, 3),
b) **P** (— 3, ∞, 3),	S (— 0, 5, 3, ?),	T (0, 5, 1, 5, ?),
c) **P** (4, — 5, 5),	S (4, ?, 4),	T (6. ?, 3).
d) **P** (∞, 6, 5,)	S (6, 3, ?),	T (7, 5, ?, 2).

13. Nacrtaj projekcije kružnice, koja ide točkom A (4, 2, 4), kojoj je polumjer $r = 3$ i koja dotiče pravac $p\,[P_1\,(1, 5, 0), P_2\,(4, 0, 5)]$!

14. Nacrtaj projekcije kružnice, koja dotiče pravac $p\,[P_1\,(0, 2, 0), A\,(4, 6, 5)]$ u točki A i ide točkom B (1, 5, 4)!

15. Nacrtaj projekcije kružnice, koja ide točkom A (5, 5, 2). kojoj je ravnina okomita na dužini $MN\,[M\,(2, 5, 2), N\,(6, 1, 5)]$ i kojoj je središte na toj dužini.

16. Nacrtaj projekcije kružnice, koja je opisana oko trokuta $ABC\,[A\,(1, 4, 1), B\,(5, 2, 1), C\,(4, 1, 3)]$!

17. Nacrtaj projekcije kružnice, koja je upisana trokutu $EFG\,[E\,(3, 4, 3), F\,(8, 5, 1), G\,(7, 1, 6)]$!

18. Nacrtaj projekcije kružnice, koja leži u ravnini **P** (8, 10, 6), kojoj je polumjer $r = 3$ i koja dotiče oba traga r_1 i r_2!

19. Nacrtaj kosu projekciju kružnice, kojoj je ravnina usporedna s ravninom (xy) i kojoj je zadano središte S i polumjer r. Na pr.: *a)* S (5, 3, 5), $r = 2\,5$, *b)* S (0, 4, 2), $r = 3$.

20. Nacrtaj kosu projekciju kružnice, koja leži: *a)* u ravnini (xy), *b)* u ravnini (yz)!

21. Nacrtaj kosu projekciju kružnice, koja leži u ravnini usporednoj s Π_2, ako je zadano središte S i polumjer r! Na pr.: *a)* $S(5, 4, 5)$, $r = 3$, *b)* $S(5, 4, 0)$, $r = 2{,}5$.

22. Sa zadane točke neka se konstruiraju tangente i dirališta elipse, koja je zadana s dva konjugirana promjera!

23. Konstruiraj tangente i dirališta elipse, koja je zadana s dva konjugirana promjera ako su tangente usporedne sa zadanim pravcem!

24. Nacrtaj kosu aksonometriju kružnice, koja leži *a)* u ravnini (xy), *b)* u ravnini (xz), *c)* u ravnini (yz). Kosu aksonometriju osnoga križa uzmi po volji! (Isp. § 111.).

25. Nacrtaj kosu aksonometriju kocke i kružnica, koje su upisane vidljivim plohama kocke!

26. Zadana je kružnica k, os afinosti, s i točka S_1, koja je pridružena središtu S kružnice k; odredi krivulju k_1, koja je s kružnicom k u perspektivno afinom položaju.

27. Odredi sjenu kruga, koji je usporedan s Π_2, te mu je središte $S(0, 2, 3)$, a polumjer $r = 2{,}5$!

28. Odredi bačenu sjenu kruga na Π_1 i Π_2, koji leži u Π_3, te mu je središte $S(0, 5, 6)$, a polumjer $r = 3$!

29. Odredi bačenu sjenu kružnog vijenca, koji je usporedan s Π_1, te mu je središte $S(5, 3, 5)$, a polumjeri koncentričnih kružnica $r_1 = 3$, $r_2 = 1{,}5$. Smjer zraka svjetlosti određen je sjenom $S_{II}(7. 0, 1)$ središta S.

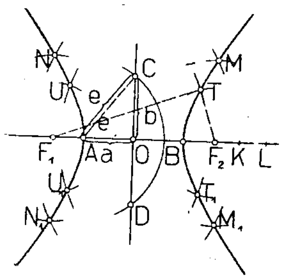
30. Zadana je kružnica usporedna s Π_2, te joj je središte $S(3, 4, 2{,}5)$ a polumjer $r = 2{,}5$; odredi bačenu sjenu te kružnice na Π_1 i na ravninu $E(\infty, 2, 3)$, ako je smjer zraka svjetlosti određen sjenom $S_I(6, 5{,}0, 5{,}0)$ središta S!

31. U ravnini $\mathbf{P}(-2, 3, 3{,}5)$ leži kružnica $k[S(5, 3, -), r = 1{,}5]$; odredi bačenu sjenu te kružnice kod usporedne rasvjete, ako je $\sphericalangle(s'x) = 45^0$ i $\sphericalangle(s''x) = 30^0$!

B. Hiperbola

§ 137. Definicija i konstrukcija hiperbole

1. **Definicija hiperbole.** *Hiperbola je geometrijsko mjesto točaka ravnine, za koje je razlika daljina od dviju stalnih točaka F_1 i F_2 konstantna i jednaka zadanoj dužini $2a$.*



Sl. 495.

Sl. 495. prikazuje hiperbolu. Hiperbola ima dvije grane. Točke se F_1 i F_2 zovu *žarišta (fokusi)* hiperbole. Pravac F_1F_2 siječe hiperbolu u dvije točke A i B, koje se zovu *vrhovi (tjemena)* hiperbole. Dužina AB zove se *glavna* ili *realna os*, a simetrala CD osi AB zove se *sporedna* ili *imaginarna os* hiperbole. Obje se osi sijeku u hiperbolinom središtu O. Dužine se TF_1 i TF_2 zovu *provodnice (radiji vektori)* točke T.

$\sphericalangle \alpha$ i prikratu u zad. 21., 22., 23. uzmi po volji.

2. **Konstrukcija hiperbole.** Povucimo pravac AB (sl. 495.) i pravac $CD \perp AB$, te učinimo $OA = OB = a$ i $OF_1 = OF_2 = e\,(e > a)$. Uzmimo na pravcu AB, desno od F_2, točku K, uzmimo u šestilo dužinu AK i opišimo tom dužinom lukove oko F_1 i F_2 kao središta. Zatim uzmimo u šestilo dužinu BK i oko F_2 i F_1 opišimo njom lukove, koji neka prva dva luka sijeku u četiri točke T, U, T_1, V_1. Te točke leže na hiperboli, jer je za svaku tu točku, na pr. za točku T, $TF_1 - TF_2 = AK - BK = AB = 2a$. Opišemo li oko žarišta F_1 i F_2 nove lukove s polumjerima AL i BL dobit ćemo nove četiri točke hiperbole. Kad bi oko žarišta opisali lukove s polumjerima AF_2 i BF_2, dobili bi točke A i B, koje također leže na hiperboli.

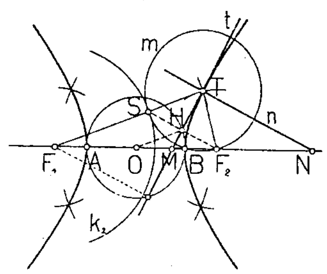
Iz konstrukcije se vidi, da je hiperbola simetrična prema obim svojim osima.

Dužina se $OF_1 = OF_2 = e$ zove *linearni ekscentricitet* hiperbole. Opiše li se oko vrha A i B luk s polumjerom e, on siječe imaginarnu os u točkama C i D, pa se uzima, da je dužina CD veličina te osi. Iz pravokutnog je trokuta AOC: $\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$ ili $e^2 = a^2 + b^2$, gdje je $OC = OD = b$.

§ 138. Konstrukcija tangenata hiperbole

1. **Zadatak.** *U zadanoj točki T hiperbole konstruiraj tangentu na tu hiperbolu!* (Sl. 496.).

Rješenje. Tangenta se t hiperbole u točki T podudara sa simetralom kuta F_1TF_2, što ga čine obje provodnice te točke. Da je pravac t uistinu tangenta hiperbole moglo bi se dokazati na sličan način, kao i za tangentu elipse (§ 129., t. 1.). Obično se tangenta t konstruira na taj način, da se učini $TS = TF_2$ i konstruira simetrala dužine F_2S. Ta je simetrala tangenta t u točki T. Tangenta t raspolavlja dakle dužinu F_2S u točki H i stoji na njoj okomito. Diralište leži na pravcu F_1S.



Sl. 496.

Točka se S zove *suprotište* žarišta F_2. Suprotišta se upotrebljavaju za konstrukciju tangenata i dirališta hiperbole na jednak način kao i kod elipse. Budući da je $F_1S = F_1T - TS = F_1T - F_2T = AB = 2a$, sva suprotišta leže na kružnici k_2, kojoj je središte F_1, a polumjer $= AB$. Ta se kružnica zove *provodna kružnica* žarišta F_2. I žarište F_1 ima svoju provodnu kružnicu k_1; središte joj je F_2, a polumjer $= AB$.

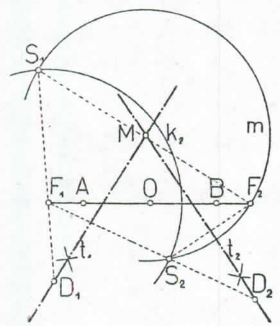
2. Ako se oko točke T opiše kružnica m s polumjerom TF_2, ona dotiče kružnicu k_2 u točki S i ide točkom F_2, koja je izvan kružnice k_2. Može se dakle reći:

Hiperbola je geometrijsko mjesto središta onih kružnica, koje dotiču zadanu kružnicu k_2 i idu zadanom točkom F_2, koja je izvan te kružnice.

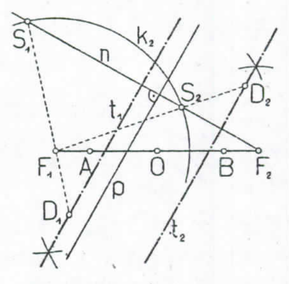
3. **Glavna kružnica hiperbole.** Spoje li se točke O i H, onda je $OH \parallel F_1T$ i $OH = \frac{1}{2} \cdot F_1S = a$. (Zašto?). Budući da je točka H nožište okomice spuštene sa žarišta F_2 na tangentu t, može se reći:

Nožišta okomica spuštenih sa žarišta hiperbole na njezine tangente leže na kružnici k, kojoj je glavna os AB promjerom. Ta se kružnica zove glavna kružnica hiperbole

4. **Zadatak.** *Sa zadane točke M povuci tangente na hiperbolu i odredi njihova dirališta!*



Sl 497.



Sl 498.

Rješenje. Ovaj se zadatak može riješiti, a da se hiperbola i ne nacrta. Na sl. 497. zadana je glavna os AB i žarišta F_1F_2 hiperbole, te točka M. Postupak je isti kao i kod elipse (§ 129., t. 5.). Oko F_1 opiše se kružnica k_2 s polumjerom AB, a oko točke M kružnica m s polumjerom MF_2. Obje se te kružnice sijeku u točkama S_1 i S_2, koje su suprotišta žarišta F_2 s obzirom na tražene tangente t_1 i t_2. Tangenta t_1 pada u simetralu dužine S_1F_2, a tangenta t_2 u simetralu dužine S_2F_2. Diralište D_1 leži na pravcu S_1F_1, a diralište D_2 na pravcu S_2F_1.

Hiperbola je krivulja drugoga reda. (Isp. § 122. t. 5.).

5. **Zadatak.** *Konstruiraj tangente hiperbole, koje su usporedne sa zadanim pravcem p, i odredi dirališta!* (Sl. 498.).

Rješenje. Ovaj se zadatak riješi na isti način, kao i jednaki zadatak za elipsu. (Gledaj § 129. t. 6., sl. 471.).

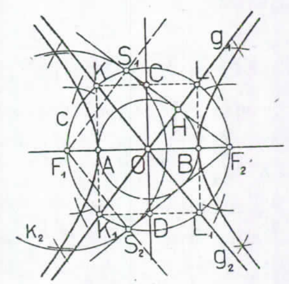
6. **Normala.** Pravac n (sl. 496.) potegnut diralištem T okomito na tangentu t, zove se *normala* hiperbole u točki T. Budući da tangenta i normala hiperbole u točki T raspolavljaju kutove provodnica te točke, slijedi da tangenta i normala hiperbole u točki T harmonijski rastavljaju obje provodnice te točke. Ako tangenta t i normala n sijeku glavnu os AB u točkama M i N, onda te točke harmonijski rastavljaju žarišta F_1 i F_2.

§ 139. Asimptote hiperbole

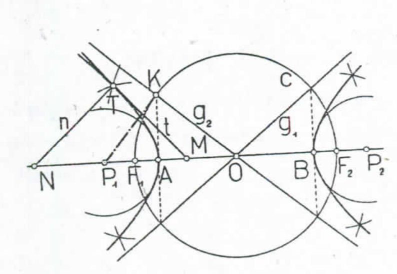
1. **Objašnjenja.** Neizmjerno daleki pravac ravnine hiperbole siječe hiperbolu u dvije neizmjerno daleke realne točke G_1 i G_2. Tangenta, koja dotiče krivulju u njezinoj neizmjerno dalekoj točki, zove se *asimptota* krivulje. Hiperbola ima dvije asimptote g_1 i g_2.

2. **Konstrukcija asimptota hiperbole.** Ako se pomisli, da je točka T na sl. 499. odmakla po krivulji neizmjerno daleko, suprotište će S doći u položaj S_1, pa će u istokračnom trokutu F_2TS_1 biti kut $F_2TS_1 = 0^0$, a $\sphericalangle S_1F_2T = \sphericalangle F_2S_1T = 90^0$, dakle će biti i $\sphericalangle F_2S_1F_1 = 90^0$. Prema tome će biti F_2S_1 tangenta, a F_1S_1 polumjer provodne kružnice k_2. Simetrala dužine F_2S_1 bit će asimptota g_1 hiperbole u njezinoj neizmjerno dalekoj točki. Ta asimptota ide središtem O.

Budući da se s točke F_2 mogu povući dvije tangente F_2S_1 i F_2S_2 na kružnicu k_2, simetrala će dužine F_2S_2 biti druga asimptota g_2 hiperbole. Obje su asimptote hiperbole simetrične prema njezinim osima.



Sl. 499.



Sl. 500.

Budući da su trokuti $F_1S_1F_2$ i $F_1S_2F_2$ pravokutni, točke S_1 i S_2 leže na kružnici c, kojoj je Q središte, a $OF_1 = e$ polumjer. Ako se dakle opišu kružnice c i k_2, one se sijeku u točkama S_1 i S_2. Simetrale dužina F_2S_1 i F_2S_2 jesu asimptote g_1 i g_2 hiperbole.

Ako se u vrhovima A i B hiperbole povuku okomice na AB, one sijeku asimptote u točkama K, K_1, L, L_1, pa je $\triangle OAK \cong \triangle OBL \cong \triangle OF_2H$. Odatle slijedi, da je $OK = OL = OF_2 = e$ i $AK = BL = t$. Prema tome asimptote hiperbole padaju u dijagonale pravokutnika K_1L_1LK, kojemu su osi AB i CD srednjicama.

3. Istostrana hiperbola. Hiperbola, kojoj su asimptote među sobom okomite, zove se *istostrana hiperbola.* U tom je slučaju $a = b$ i $e = a\sqrt{2}$.

4. Kružnica zakrivljenosti u vrhovima hiperbole. Ako se u točki T hiperbole potegne tangenta t i normala n (sl. 500), one sijeku glavnu os u točkama M i N, koje harmonijski rastavljaju točke F_1 i F_2 (§ 138., t. 6.). Ako se nad F_1F_2 opiše kružnica c, onda točka M leži na polari točke N s obzirom na kružnicu c (§ 136., t. 1. i 2.). Ako se točka T primiče vrhu A, onda će se i točka M primicati točki A. Kad točka T padne u točku A, u tu točku padne i M, tangenta t postane vršnom tangentom u točki A, dok točka N zauzme na glavnoj osi određeni položaj P_1. Pošto je vršna tangenta u točki A polara kružnice c za točku P_1, ta će se točka dobiti na taj način, da se u sjecištu K kružnice c s vršnom tangentom povuče tangenta na tu kružnicu. Budući da točka K leži i u sjecištu asimptote g_2 s vršnom tangentom, točka će se P_1 dobiti tako, da se u točki K postavi okomica na asimptotu g_2 i njome siječe pravac AB. Točka P_1 je *središte kružnice zakrivljenosti* u vrhu A. Ako se naime oko točke N opiše kružnica s polumjerom NT, ona dotiče hiperbolu u točki T i simetričnoj točki T_1, ima dakle s hiperbolom zajednički četiri točke. Ako točka T padne u točku A, N padne u P_1, pa kružnica opisana oko P_1 s polumjerom P_1A ima s hiperbolom u točki A četiri neizmjerno blize zajedničke točke. Prema tome ta je kružnica *oskulatorna kružnica* hiperbole u vrhu A. Ako se učini $BP_2 = AP_1$, onda je točka P_2 središte zakrivljenosti u vrhu B.

Budući da je vršna tangenta u točki A polara kružnice c za pol P_1, slijedi da su F_1, F_2, P_1, A četiri harmonijske točke.

§ 140. Tetive i promjeri. Asimptotična svojstva hiperbole

1. Tetive hiperbole. Dužina KL (sl. 501.), koja spaja dvije točke iste grane hiperbole, zove se *unutarnja tetiva.* Takva tetiva leži potpuno između asimptota g_1 i g_2. Dužina LM, koja spaja dvije točke različitih grana hiperbole zove se *izvanja tetiva.* Obje asimptote prolaze između krajnjih točaka izvanje tetive.

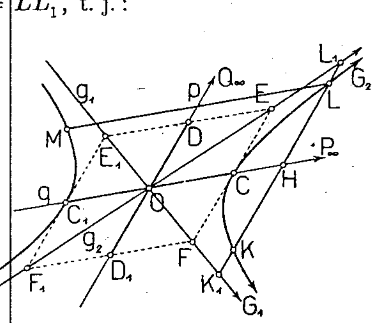
2. Promjeri hiperbole. Tetive, koje idu središtem O hiperbole, zovu se *promjeri* te krivulje. Svi promjeri, koji leže između asimptota, zovu se *realni promjeri*, dok se svi ostali zovu *imaginarni promjeri.* Na sl. 501. je q realan, a p imaginaran promjer. Ako su dva promjera hiperbole tako pridružena, da svaki od njih raspolavlja tetive, koje su usporedne s drugim promjerom, onda se oni zovu *konjugirani promjeri.* Pravci p i q jesu dva konjugirana promjera hiperbole, te je $q \equiv OH$, gdje je H polovište tetiva

KL, a $p \parallel KL$. Budući da asimptote rastavljaju dva konjugirana promjera slijedi da je jedan promjer realan, a drugi imaginaran.

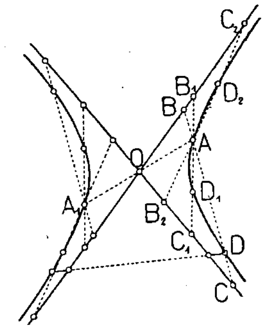
Promjer p je polara neizmjerno daleke točke P_∞ promjera q, a promjer q je polara neizmjerno daleke točke O_∞ promjera p. Budući da tetiva KL ide neizmjerno dalekom točkom Q_∞ slijedi, da su točke L, K, H, Q_∞ četiri harmonijske točke. Pomakne li se tetiva KL u neizmjerno daleki pravac g, točke K i L padnu u neizmjerno daleke točke G_1 i G_2 hiperbole. Odatle slijedi, da su neizmjerno daleke točke $G_2, G_1, P_\infty, Q_\infty$ četiri harmonijske točke. Iz toga opet slijedi poučak:

Svaka dva konjugirana promjera hiperbole i obje asimptote jesu četiri harmonijske zrake.

Ako se produži tetiva KL, ona siječe asimptote g_1, g_2 u točkama K_1, L_1 te su točke L_1, H, K_1, Q_∞ prema gornjem poučku četiri harmonijske točke Iz toga dakle izlazi, da je točka H polovište dužine K_1L_1 i da je $\overline{KK_1} = \overline{LL_1}$, t. j.:



Sl. 501.



Sl. 502.

Dijelovi sekante, koji leže između hiperbole i obih asimptota, među sobom su jednaki.

To svojstvo asimptota može se upotrebiti za konstrukciju hiperbole. (Vidi t. 3.)

Ako se točkom Q_∞ povuku obje tangente EF i E_1F_1 na hiperbolu, one su usporedne s promjerom p i dotiču hiperbolu u točkama C i C_1, koje leže na promjeru q, te se CC_1 zove *dužina realnog promjera.* Budući da su točke F, E, C, Q_∞ četiri harmonijske točke, slijedi da je $CE = CF$. Isto tako je i $C_1E_1 = C_1F_1$, t. j.:

Diralište tangente hiperbole raspolavlja dio te tangente, koji leži između asimptota.

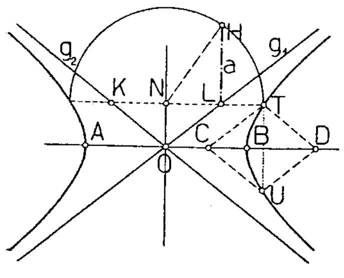
Budući da je $EF \# E_1F_1$, lik je EE_1F_1F paralelogram, kojemu su stranice usporedne s konjugiranim promjerima p i q. Stranice EE_1 i FF_1 sijeku promjer p u točkama D i D_1, te se DD_1 zove *dužina imaginarnog promjera.*

Hiperbola je sa položajem i dužinom konjugiranih promjera potpuno određena.

3. Konstrukcija hiperbole. *Neka se konstruira hiperbola, kojoj su zadane obje asimptote g_1, g_2 i jedna točka A!* (Sl. 502.).

Rješenje. Točkom A potegne se povoljan broj sekanata i na svaku tu sekantu prenese se udaljenost zadane točke A od jedne asimptote na drugi kraj sekante; na pr. $CD = AB$, $C_1D_1 = AB_1$, $C_2D_2 = AB_2$. Umjesto točke A može se upotrebiti i koja druga konstruirana točka hiperbole.

4. Zadatak. *Zadane su asimptote g_1, g_2 i jedna točka T hiperbole; konstruiraj dužinu glavne osi te krivulje!* (Sl. 503.).



Sl. 503.

Rješenje. Odredimo točku U, koja je s obzirom na glavnu os simetrična s točkom T i povucimo točkama T i U usporednice s asimptotama g_1 i g_2. Te usporednice idu neizmjerno dalekim točkama G_1, G_2 hiperbole i sijeku glavnu os u točkama C i D. Lik G_1G_2TU jest potpuni četverokut, koji je upisan hiperboli, u kojem su točke C i D dva usporedna vrha, koji s vrhovima A i B hiperbole čine četiri harmonijske točke (§ 118., t. 2.). Imamo dvoomjer

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$$

Odatle je $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = 0$. Ako se te četiri dužine rastave središtem O dužine AB, može se pisati:

$$(AO + OC)\,(BO + OD) + (BO + OC)\,(AO + OD) = 0.$$

Izvrši li se u toj jednadžbi množidba i stavi $BO = -AO$ i $AO = a$, dobije se jednadžba

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD} = a^2.$$

Povučemo li točkom T pravac usporedno s AB, on siječe asimptote u točkama K i L, a imaginarnu os u točki N. Tada je $OC = LT$ i $OD = KT$, dakle

$$\overline{LT} \cdot \overline{KT} = a^2, \quad \text{ili} \quad \overline{NT}^2 - \overline{NL}^2 = a^2.$$

Opiše li se oko N kružnica s polumjerom NT, ona siječe pravac potegnut točkom L usporedno s imaginarnom osi u točki H, pa je $LH = a$, dakle $OA = OB = LH$.

5. Zadaci za vježbu

1. Konstruiraj hiperbolu, kojoj je zadana *a)* glavna os $AB = 4\ cm$ i ekscentricitet $e = 3\ cm$, *b)* žarišta F_1 i F_2 i jedna točka hiperbole!

2. Nacrtaj tri hiperbole, koje imaju *a)* zajedničku glavnu os $AB = 3\ cm$, a ekscentricitet $e = 2, 3, 4\ cm$, *b)* zajednički ekscentricitet $e = 2\ cm$, a glavnu os $AB = 1, 2, 3\ cm$!

3. Konstruiraj hiperbolu, kojoj je zadano jedno žarište, dvije točke i veličina glavne osi!

4. Konstruiraj tangentu hiperbole (poluosi $a = 4$, $b = 3$), koje s glavnom osi čine kutove od 60^0!

5. Konstruiraj hiperbolu, kojoj je zadano: *a)* oba žarišta i jedna tangenta, *b)* jedno žarište, smjer glavne osi i dvije tangente, *c)* jedno žarište, smjer glavne osi i jedna tangenta s diralištem, *d)* jedno žarište, jedna tangenta i jedna druga tangenta s diralištem, *e)* jedno žarište i tri tangente!

6. Zadana je realna os i asimptota hiperbole; konstruiraj žarišta te hiperbole!

7. Konstruiraj hiperbolu, kojoj je zadano: *a)* jedno žarište, središte i jedna asimptota, *b)* jedno žarište, jedna tangenta i jedna asimptota!

8. Konstruiraj osi i asimptote hiperbole, kojoj je zadan vrh A, kružnica zakrivljenosti u tom vrhu i veličina imaginarne osi!

9. Konstruiraj istostraničnu hiperbolu, kojoj su zadane asimptote i realna os!

10. Zadana su dva konjugirana promjera hiperbole; konstruiraj: *a)* asimptote, *b)* hiperbolu, *c)* osi hiperbole!

11. Zadane su dvije točke hiperbole, jedna asimptota i smjer glavne osi; odredi drugu asimptotu, glavnu os i žarišta! (Gledaj sl. 502., zatim sl. 503).

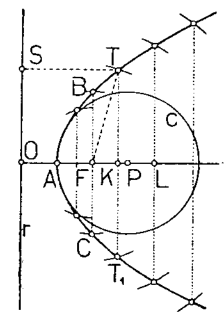
12. Zadane su obje asimptote hiperbole i jedna tangenta; odredi glavnu os i žarišta!

C. Parabola

§ 141. Definicija i konstrukcija hiperbole

1. Definicija parabole. *Parabola je geometrijsko mjesto točaka ravnine, koje su jednako udaljene od stalne točke F i stalnog pravca r.*

Točka se F zove *žarište*, a pravac r *ravnalica* parabole. Sl. 504. prikazuje parabolu. Ako se koja god točka T parabole spoji sa F i spusti s nje okomica TS na r, onda je $TF = TS$. Dužine se TF i TS zovu *provodnice* točke T. Ako se točkom F povuče okomica FO na pravac r, ona siječe parabolu u točki A, koja se zove *vrh* ili *tjeme* parabole. Pravac je OF *os* parabole.



Sl. 504.

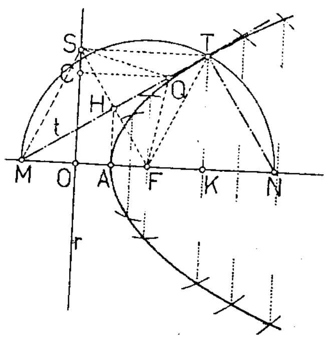
2. Konstrukcija parabole. Zadana je ravnalica r i žarište F parabole (sl. 504.). Točkom F povuci pravac $FO \perp r$, odaberi na pravcu OF po volji točku K, povuci kroz nju okomicu na OF, uzmi u šestilo dužinu OK i oko F opiši luk, koji okomicu u K siječe u točkama T i T_1. Te točke leže na paraboli. Jer povuče li se $TS \perp r$, onda je lik $OKTS$ pravokutnik, pa je $TS = OK$, a jer i $TF = OK$, to je i $TS = TF$; t. j. točka je T jednako udaljena od stalne točke F i stalnog pravca r, pa prema tome leži na paraboli. Druge ćeš točke parabole dobiti na pravcima, koji su u točkama $L, F, \dots$ okomiti na OF, ako te pravce presiječeš lukovima iz F, kojima su polumjeri $OL, OF\dots$ Vrh A leži u polovištu dužine OF. Iz konstrukcije se parabole vidi, da je krivulja simetrična prema pravcu OF. Zato se taj pravac zove os parabole. Parabola ima jednu granu.

§ 142. Konstrukcija tangenata i normala parabole

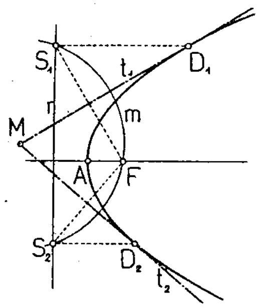
1. Tangenta. *U zadanoj točki T parabole konstruiraj tangentu.* (Sl. 505.) *Tangenta t parabole raspolavlja kut FTS obih provodnica TF i TS točke T.*

Dokaz. Ako pravac t nije tangenta parabole u točki T, onda t siječe parabolu još u jednoj točki, na pr. Q. Spojimo točku Q s točkama F i S i povucimo $QC \perp r$. Budući da je $\triangle FST$ istokračan, pravac t je simetrala dužine FS. Budući da je tọčka Q na toj simetrali, to je $QF = QS$, a jer je $QC < QS$, to je $QC < QF$, t. j. točka Q nije jednako udaljena od žarišta F i od ravnalice r, ona dakle ne leži na paraboli makar koliko bila blizu točki T. Pravac t ima s parabolom zajednički samo točku T, on je dakle tangenta parabole u toj točki.

Budući da je tangenta t simetrala dužine FS, ona tu dužinu raspolavlja u točki H i stoji na njoj okomito. Točka S je suprotište žarišta F



Sl. 505.



Sl. 506.

s obzirom na tangentu t. Suprotišta za sve tangente leže na ravnalici r. Budući da je vrh A središte dužine OF, a H središte dužine SF, to je $HA \parallel r$. Pravac HA je *vršna tangenta parabole.*

Nožišta okomica spuštenih sa žarišta na tangente parabole leže na njezinoj vršnoj tangenti.

Budući da je $\sphericalangle FTH = \sphericalangle STH$ i $\sphericalangle FMH = \sphericalangle STH$, to je i $\sphericalangle FTH = \sphericalangle FMH$, t. j. trokut TMF je istokračan, odakle slijedi, da je

$FM = FT$. Lik je $MFTS$ romb, u kojemu su dužine FS i TM dijagonale. Prema tome je $HM = HT$ i $AM = AK$.

2. Normala. Pravac n, koji je u diralištu T okomit na tangenti t, jest normala parabole u točki T. Budući da je lik $FNTS$ (sl. 505.) paralelogram, to je $FN = ST = FT = FM$ t. j.:

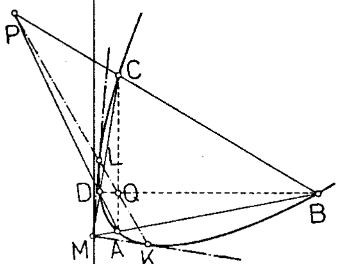
Ako se oko točke F opiše polukružnica s polumjerom FT, ona siječe os parabole u točkama M i N, te je MT tangenta, a NT normala parabole.

Budući da tangenta t i normala n raspolavljaju kutove provodnica točke T slijedi, da su obje provodnice, tangenta i normala četiri harmonijske zrake. Prema tome su točke M, N, F, G (gdje je G neizmjerno daleka točka osi OF) četiri harmonijske točke.

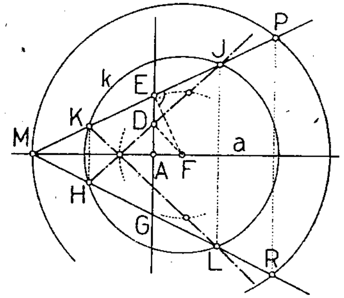
3. Zadatak. *Sa zadane točke M, koja je izvan parabole, povuci tangente na parabolu i odredi dirališta!* (Sl. 506.).

Rješenje. Tangente se parabole i dirališta odrede spomoću suprotišta, koja leže na ravnalici r simetrično sa žarištem F prema traženim tangentama. Da se dobiju suprotišta opisat će se oko točke M kružnica m s polumjerom MF; ta kružnica siječe ravnalicu r u suprotištima S_1 i S_2. Simetrale dužina FS_1 i FS_2 jesu tražene tangente t_1 i t_2. Dirališta D_1 i D_2 leže na pravcima, potegnutima suprotištima S_1 i S_2 usporedno s osju parabole.

Ovaj se zadatak može riješiti i onda, ako je zadana ravnalica r i žarište F, a da nije nacrtana sama parabola.



Sl. 507.



Sl. 508.

4. Zadatak. *Konstruiraj tangente nacrtane parabole, koje idu zadanom točkom M!* (Sl. 507.).

Rješenje. Točkom M povuci dvije sekante, koje parabolu sijeku u četiri točke A, B, C, D, koje će se uzeti kao vrhovi potpunog četverokuta. Stranice AD i BC sijeku se u točki P, a dijagonale AC i BD u točki Q, spojnica PQ je polara točke M i ona siječe parabolu u diralištima K i L tangenata povučenih s točke M na parabolu.

5. **Zadatak.** *Konstruiraj tangentu parabole, koja je usporedna sa zadanim pravcem p, i odredi diralište!*

Rješenje. Ako se žarištem F povuče pravac $q \perp p$, on siječe ravnalicu r u suprotištu S. Simetrala je dužine FS tražena tangenta t, koja je usporedna s p. Kako ćeš odrediti diralište D? Nacrtaj sliku!

6. *Zadana je os a parabole, vršna tangenta GE i dvije tangente MP i MR, koje se sijeku u točki M na osi parabole.* (Sl. 508.). Ako se u sjecištu E vršne tangente s tangentom MP povuče okomica EF na ovu tangentu, dobit će se na osi žarište F. Ako se oko točke F opiše kružnica s polumjerom FM, ona siječe tangente MP i MR u njihovim diralištima P i R.

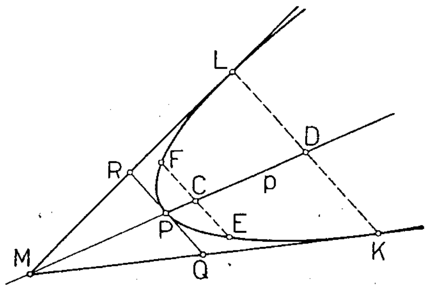
Opiše li se oko točke F kružnica k, koja siječe tangente MP i MR u točkama J, K, L, H, pa se te točke unakrst spoje, onda su pravci HJ i KL tangente parabole.

Dokaz. Zbog simetričnosti točaka K i H prema osi parabole, njihova je spojnica okomita na toj osi. Budući da je točka E središte tetive KJ i $EA \parallel KH$, tad vršna tangenta siječe tetivu HJ u točki D. koja je središte te tetive. Odatle slijedi, da je $FD \perp HJ$, t. j. tetiva HJ je tangenta parabole.

§ 143. Tetive i promjeri parabole

1. **Tetive.** Dužina, koja spaja dvije točke parabole zove se *tetiva.* Tetiva BC (sl. 504.), koja ide žarištem F okomito na OF, zove se *parametar parabole*, te je $FB = FC = FO$.

2. **Promjeri parabole.** Parabola dotiče neizmjerno daleki pravac g, koji leži u ravnini parabole, u točki G, koja je također neizmjerno daleko. Parabola ima samo jednu neizmjerno daleku točku, koja leži u smjeru osi parabole. Smatra li se točka G kao pol neizmjerno dalekog pravca g, onda je u toj točki ujedno središte O parabole. Budući da polare sviju točaka pravca g idu središtem O slijedi, da su svi promjeri parabole među sobom usporedni.



Sl. 509.

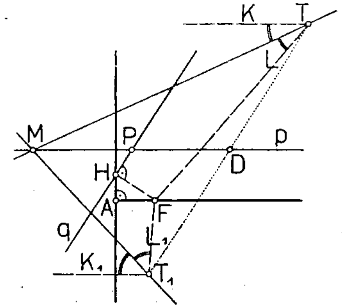
Svaki promjer siječe parabolu samo u jednoj točki, koja je u konačnosti. Svakom promjeru parabole pridružen je neizmjerno daleki pravac g.

Kojigod promjer parabole dobit će se, ako se povuku dvije usporedne tetive EF i KL (sl. 509.), i odrede njihova polovišta C i D; tada je spojnica CD promjer parabole. Kaže se, da su sve usporedne tetive, koje promjer parabole raspolavlja, konjugirane tome promjeru. Tangenta u krajnjoj točki P promjera $CD (= p)$ usporedna je s tetivom EF i kaže se, da je tomu promjeru konjugirana. Os je parabole također jedan promjer, a konjugirane tetive osi okomite su na toj osi.

Povuku li se krajnjim točkama tetive KL tangente parabole, one se sijeku u točki M, koja leži na promjeru p. Budući da je tetiva KL polara točke M, slijedi da su točke M, D, P, G četiri harmonijske točke. Zbog toga je $MP = PD$. Budući da je tangenta QR u krajnjoj točki P promjera p usporedna s tetivom KL, to je $PQ = PR$. Isto tako je $MQ = KQ$ i $MR = LR$.

3. **Kružnica zakrivljenosti u vrhu parabole.** Sličnim razmatranjem kao kod hiperbole (§ 139., t. 4.) može se odrediti središte zakrivljenosti P parabole u vrhu A (sl. 504.). Budući da je drugo žarište parabole u neizmjerno dalekoj točki G i budući da točke A, P, F, G moraju biti četiri harmonijske točke, slijedi da je $FP = FA$ ili $AP = 2\,AF$. Kružnica opisana oko točke P s polumjerom AP jest kružnica zakrivljenosti u vrhu parabole.

4. **Zadatak.** *Zadan je promjer p parabole i njegova konjugirana tangenta q u krajnjoj točki P te još jedna točka T parabole; neka se konstruira vrh i žarište parabole!* (Sl. 510.).



Sl. 510.

Rješenje. Točkom T povucimo konjugiranu tetivu $TT_1 \parallel q$, gdje je $DT_1 = DT$, učinimo $PM = PD$ i spojimo točku M s točkama T i T_1. Tada su spojnica MT i MT_1 tangente u točkama T i T_1. Ako se točkom $T(T_1)$ povuče pravac $TK\,(T_1K_1)$ usporedno s p, u taj pravac pada jedna provodnica točke $T\,(T_1)$. Ako se kut KTM ($\sphericalangle K_1T_1M_1$) prenese na drugu stranu tangente $MT\,(MT_1)$, onda krak toga kuta $TL\,(T_1L_1)$ mora ići žarištem F; t. j. pravci se TL i T_1L_1 sijeku u žarištu F. Točkom F ide os parabole usporedno s promjerom p. Spustimo li s točke F okomicu na tangentu q, nožištem H ide vršna tangenta parabole, koja os parabole siječe u vrhu A.

5. Zadaci za vježbu

1. Konstruiraj parabolu ako je zadano: *a)* žarište i ravnalica, *b)* žarište i vrh, *c)* ravnalica i vrh!

2. Konstruiraj parabolu, kojoj je zadano: *a)* os, žarište i jedna točka, *b)* os, ravnalica i jedna točka!

3. Konstruiraj parabolu, kojoj je zadano: *a)* žarište i dvije točke, *b)* ravnalica i dvije točke!

4. Nacrtaj tri parabole, koje imadu zajedničku os, a parametri im iznose 2, 3, 4 cm!

5. Na osi parabole uzmi točku M, koja je 6 cm udaljena od vrha (parametra = 4 cm); konstruiraj tangente, koje idu točkom M!

6. Na zadanu parabolu (parametar = 3 cm) povuci one tangente, koje s osi čine kutove od 60°!

7. Zadana je os, vrh i jedna tangente parabole; odredi žarište! (Gledaj sl. 505.).

8. Konstruiraj parabolu, kojoj je zadano:

a) žarište, smjer osi i jedna tangenta,

b) žarište i dvije tangente,

c) žarište i jedna tangenta s diralištem,

d) ravnalica i jedna tangenta s diralištem,

e) vršna tangenta i druge dvije tangente,

f) vrh, smjer osi i jedna tangenta!

9. Zadana je os parabole, dvije tangente; odredi vrh i žarište parabole. (S obzirom na sl. 508. uzmi da je zadana os a i tangente HR i HJ. Produžit će se tangenta HR do M na osi a, točkom M povući će se druga tangenta MP, koja je s tangentom MR simetrična s obzirom na a, raspolovit će se GJ i t. d.).

10. Zadana je parabola i unutar parabole točka D, točkom D povuci tetivu, koju točka D raspolavlja!

11 Zadana je parabola; odredi njezinu os i žarište!

12. Zadanom točkom M, koja je izvan nacrtane parabole, povuci promjer te parabole! (Gledaj sl. 507.).

13. Zadane su dvije tangente parabole s diralištima; odredi os i žarište! (Gledaj (sl. 510.).

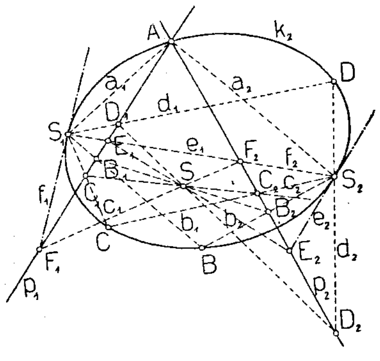
14. Konstruiraj parabolu, kojoj je zadan jedan promjer i jedna konjugirana tetiva (Gledaj sl. 510.).

§ 144. Projektivno izvođenje krivulja drugoga reda

1. Proizvod dvaju projektivnih pramenova. Imamo li u ravnini dva projektivna pramena S i S_1, onda svaka zraka jednoga pramena siječe pripadnu zraku drugoga pramena u jednoj točki. Sve te točke leže na nekoj krivulji, i to, kako ćemo odmah vidjeti, na krivulji drugoga reda.

Znamo (§ 116., t. 1.), da su dva projektivna pramena S_1 i S_2 određena sa tri para pripadnih zraka a_1a_2, b_1b_2 i c_1c_2 pa su takva tri para zadana na sl. 511. Pripadni parovi tih zraka sijeku se u točkama A, B, C. Da se dobiju ostali parovi pripadnih zraka, a po tome i sjecišta tih zraka, nadopunjavat će se pramenovi na način, kako je to pokazano na sl. 414. (§ 116., t. 3.). U tu svrhu povući će se točkom A po volji dva pravca p_1 i p_2; pravac p_1 neka siječe zrake a_1, b_1, c_1 u točkama A_1, B_1, C_1, a pravac p_2 zrake a_2, b_2, c_2 u točkama A_2, B_2 C_2, gdje A_1 i A_2 padaju u točku A. Spojnice B_1B_2 i C_1C_2 sijeku se u točki S, koja je perspektivno središte za perspektivne nizove p_1 i p_2. Da se dobije točka D krivulje, točkom S_1 povući će se kojagod zraka d_1, koja siječe p_1 u D_1, i spojit će se točke D_1 i S pravcem, koji će sjeći p_2 u D_2. Tada je $d_2 \equiv S_2D_2$. Zrake d_1 i d_2 sjeći će se u točki D. Na isti način može se dobiti povoljan broj točaka krivulje.

U pravac S_1S_2 ne padaju pripadne zrake pramenova, jer bi u tom slučaju oba pramena bila u perspektivnom položaju. Spojnicu S_1S_2 treba smatrati zrakom e_1 pramena S_1 i zrakom f_2 pramena S_2. Zraci e_1 pripada zraka e_2 pramena S_2, a zraci f_2 pripada zraka f_1 pramena S_1. Zrake se e_1 i e_2 sijeku u točki S_2, a zrake f_1 i f_2 sijeku se u točki S_1. Prema tome točke S_1 i S_2 pripadaju također krivulji, koja je proizvod obih projektivnih pramenova.



Sl. 511.

Na svakoj zraci x_1 pramena S_1 mogu biti samo dvije točke krivulje, i to točka S_1 i još jedna točka X_1 u kojoj zraka x_1 siječe pripadnu zraku x_2 pramena S_2. Budući da se točke S_1 i S_2 mogu premjestiti u koje god druge točke krivulje, vidi se, da svaki pravac može tu krivulju sjeći samo u dvije točke. Odatle izlazi:

Proizvod je dvaju projektivnih pramenova krivulja drugoga reda k_2.

Na sl. 511. također su pramenovi projektivni, pa je njihov proizvod elipsa.

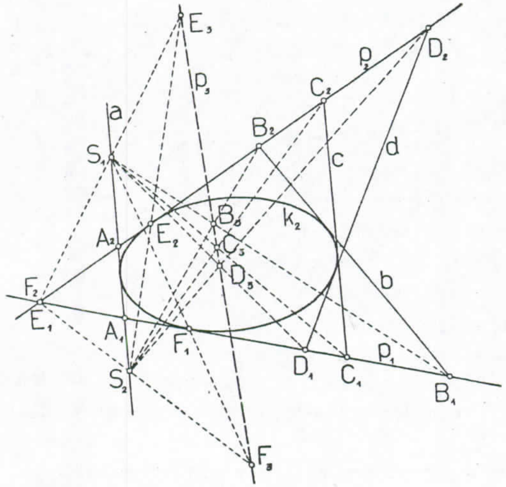
Kojagod zraka pramena S_1 siječe pripadnu zraku pramena S_2 u točki, koja je različita od točke S_1. Zraka f_1 pramena S_1 siječe pripadnu zraku f_2 pramena S_2 u točki, koja pada u točku S_1. Prema tome za zraku f_1 oba sjecišta s krivuljom k_2 padaju zajedno u točku S_1, odakle slijedi, da je zraka f_1 tangenta krivulje k_2 u točki S_1. Isto tako i zraka e_2 dotiče krivulju k_2 u točki S_2.

2. Određenost krivulje drugoga reda. Dva su projektivna pramena određena s tri para pripadnih zraka. Ta tri para zraka sijeku se u tri točke A, B, C, koje leže na krivulji k_2. Budući da na krivulji k_2 leže i središta S_1 i S_2 pramenova i budući da se krivulja k_2 može konstruirati nadopunjavanjem obih projektivnih pramenova slijedi poučak:

Krivulja drugoga reda određena je sa pet svojih točaka, od kojih tri ne smiju ležati na istom pravcu.

3. Proizvod dvaju projektivnih nizova. Imamo li u ravnini dva projektivna niza točaka p_1 i p_2 (sl. 512.), pa spojimo sve parove pripadnih točaka, onda su ti pravci tangente krivulje drugoga razreda.

Dva su projektivna niza p_1 i p_2 određena sa tri para pripadnih točaka A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2. Ostali parovi pripadnih točaka određuju se na način kako je prikazano na sl. 413. (§ 116., t. 2.). U tu svrhu uzet će se na pravcu a ($\equiv A_1 A_2$) po volji dvije točke S_1 i S_2, te se S_1 spoji sa B_1 i C_1, a S_2 sa B_2 i C_2. Pripadne zrake sijeku se u točkama B_3 i C_3; spojnica p_3 tih točaka jest perspektivna os pramenova S_1 i S_2. Uzme li se na toj osi po volji točka D_3, onda zraka $S_1 D_3$ siječe p_1 u točki D_1 a zraka $S_2 D_3$ siječe p_2 u točki D_2. Tada je $D_1 D_2$ jedna tangenta krivulje drugoga razreda. Na isti se način može dobiti povoljan broj tangenata te krivulje.



Sl. 512.

U sjecištu nizova p_1 i p_2 ne leže dvije pripadne točke tih nizova, jer kad bi to bilo, onda bi oba pramena bila u perspektivnom položaju. Tu točku treba smatrati točkom E_1 niza p_1 i točkom F_2 niza p_2. Da se dobije točka E_2 niza p_2, spojit će se točka E_1 sa S_2 i spojit će se sjecište F_3 pravca p_3 i $E_1 S_2$ s točkom S_1. Pravac $S_1 F_3$ siječe p_2 u točki E_2. Na sličan se način odredi točka F_1 niza p_1. Budući da spojnice $F_1 F_2$ i $E_1 E_2$ padaju u pravce p_1 i p_2 slijedi, da su i ti pravci tangente krivulje.

Svakom točkom X_1 niza p_1 mogu ići samo dvije tangente na krivulju i to sam pravac p_1 i još jedan pravac, koji spaja točku X_1 s pripadnom točkom X_2 niza p_2. Budući da se pravci p_1 i p_2 mogu zamijeniti s kojegod druge dvije tangente izlazi, da se sa svake točke mogu na krivulju povući samo dvije tangente. Možemo dakle reći:

Proizvod je dvaju projektivnih nizova krivulja drugoga razreda.

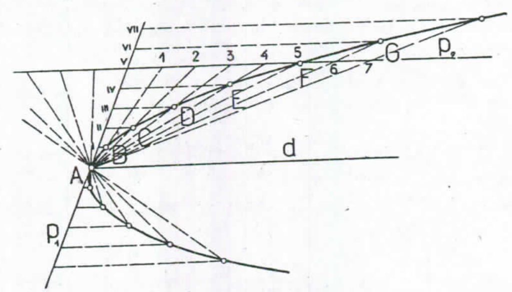
Tangente, koje se s kojegod točke niza p_1 mogu konstruirati, uvijek su dva različita pravca. Samo za točku F_1 padnu obje tangente zajedno u pravac p_1. Može se prema tome reći, da točkom F_1 idu dvije neizmjerno

blize tangente krivulje k_2, odatle slijedi, da je točka F_1 dirالište pravca p_1 s krivuljom k_2. S jednakih je razloga točka E_2 dirалište pravca p_2 s k_2.

4. Određenost krivulje drugoga razreda. Dva su projektivna niza određena s tri para pripadnih točaka. Spoje li se po dvije pripadne točke dobiju se tri tangente krivulje k_2. Nosioci projektivnih nizova također su dvije tangente krivulje. Nadopunjavanjem projektivnih nizova može se dobiti šesta i svaka daljnja tangenta krivulje k_2 na način prikazan u t. 3. Prema tome imademo poučak:

Krivulja drugoga razreda određena je s pet svojih tangenata, koje se mogu po volji zadati.

Ako je krivulja drugoga razreda zadana s pet tangenata, onda se kojegod dvije mogu uzeti za nosioce projektivnih nizova, ostale tri tangente sijeku nosioce u tri para projektivno pridruženih točaka. Ostali se parovi pripadnih točaka mogu dobiti kao u t. 3.



Sl. 513.

5. Zadatak. *Zadan je promjer d parabole, konjugirana tangenta p_1 i jedna točka F; neka se konstruira parabola!* (Sl. 513.).

Rješenje. Točkom F povući će se pravac $p_2 \parallel d$, pa će se pravci p_1 i p_2 uzeti za nosioce dvaju sličnih nizova I, II, III, IV, ... i 1, 2, 3, 4, ... gdje su parovi pripadnih točaka I i 1, II i 2, III i 3, ... Te se točke dobiju tako, da se dužine $A\bar{V}$ i $F\bar{V}$ na pravcima p_1 i p_2 razdijele na jednaki broj dijelova, na pr. pet, i ti dijelovi i dalje prenesu na pravcima p_1 i p_2. Točka A i neizmjerno daleka točka parabole G uzet će se za vrhove pramenova, te će se iz A projicirati niz p_2, a iz G niz p_1. Zrake su pramena G usporedne s promjerom d i idu točkama A, I, II, III, ... Pripadne zrake sijeku se u točkama $A, B, C, \ldots$, koje leže na paraboli.

6. Zadaci za vježbu

1. Zadano je pet točaka: *a)* elipse, *b)* hiperbole; odredi još i druge točke krivulje!
2. Zadano je pet tangenata: *a)* elipse, *b)* hiperbole; odredi još i druge tangente krivulje!

3. Odkrivulje drugoga reda zadane su četiri točke S_1, S_2, A i B i tangenta f_1 u točki S_1; odredi druge točke krivulje! (Gledaj sl. 511.).

4. Od krivulje drugoga reda zadane su tri točke S_1, S_2, A i dvije tangente f_1 i e_2 u točkama S_1 i S_2; odredi druge točke krivulje! (Gledaj sl. 511.).

5. Zadane su četiri tangente p_1, p_2, a, b i na tangenti p_1 diralište F_1; odredi druge tangente krivulje drugoga razreda, ako je ta krivulja: *a)* elipsa, *b)* hiperbola! (Gledaj sl 512.).

6. Zadane su tri tangente p_1, p_2, a i na tangentama p_1, p_2 dirališta F_1, E_2 (gledaj sl. 512.), odredi druge tangente krivulje drugoga razreda, ako je ta krivulja: *a)* elipsa, *b)* hiperbola!

7. Zadana je os parabole s tjemenom i još jedna točka krivulje, konstruiraj parabolu na način kao na sl. 513!

§ 145. Projiciranje krivulja drugoga reda

1. Projiciranje elipse. Kod paralelnog projiciranja središte elipse k projicira se kao središte projekcije k', svaki se promjer elipse k projicira kao promjer krivulje k', svaka dva konjugirana promjera elipse k projiciraju se kao dva konjugirana promjera krivulje k'. Odatle izlazi:

Svaka je paralelna projekcija elipse opet elipsa. Afina krivulja elipse opet je elipsa.

Osi elipse k ne projiciraju se kao osi elipse k' niti pod pravim kutem, osim ako je jedna os usporedna s ravninom projekcija. Naročito žarišta elipse k ne projiciraju se kao žarišta elipse k'.

2. Projiciranje hiperbole. Paralelna je projekcija k' hiperbole k na ravnini opet hiperbola. Asimptote g_1 i g_2 hiperbole k projiciraju se kao asimptote hiperbole k'. Svaka dva konjugirana promjera hiperbole k projiciraju se kao dva konjugirana promjera hiperbole k'. Osi hiperbole k ne projiciraju se kao osi hiperbole k', no mogu se projicirati pod pravim kutom, ako je jedna os usporedna s ravninom projekcija. Žarišta hiperbole k ne projiciraju se u žarišta hiperbole k'. Svaka krivulja, koja je perspektivno afina sa zadanom hiperbolom jest hiperbola.

3. Projiciranje parabole. Paralelna je projekcija parabole k opet parabola k'. Svaki promjer i konjugirana tangenta parabole k projicira se kao promjer i konjugirana tangenta parabole k'. Os, žarište i ravnalica parabole k uopće se ne projicira kao os, žarište i ravnalica parabole k'. Perspektivno afina krivulja parabole opet je parabola.

4. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije elipse, koja leži u zadanoj ravnini, kojoj je zadano središte i veličina osiju!

2. U ravnini P (3, —3, 2) leži istostranična hiperbola, kojoj je zadan tlocrt $A'(x=4, y=7)$ i $B'(5,5)$ vrhova A i B; odredi tlocrt i nacrt te hiperbole!

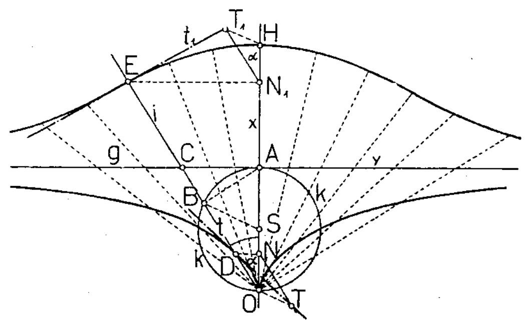
3. U prostoru je zadana parabola sa tri točke $A(0, 1, 2)$, $B(3, 1, 4)$, $C(4, 4, 2)$ i s tangentom u točki C, koja je usporedna s tetivom AB; odredi tlocrt i nacrt te pravu veličinu parabole!

XXV. Primjeri ravničnih krivulja višega reda

§ 146. Krivulje 3. i 4. reda

a) Dioklova kisoida i njezina pratilica

1. Konstrukcija krivulja. Nacrtajmo kružnicu k $(= S, a)$, povucimo u njoj promjer OA i u točki A tangentu g, povucimo zatim točkom O pravac i, koji po drugi put siječe kružnicu k u točki B, a pravac g u



Sl. 514.

točki C (sl. 514). Prenesemo li na pravac i $CD = CE = OB$, tad je točka D svaki put jedna točka Dioklove kisoide, a E jedna točka pratilice te kisoide.

2. Jednadžbe krivulja. Neka je točka O ishodište, OA os apscisa, stavimo $\sphericalangle AOC = \alpha$, OD ili $OE = r$, $OB = p$ i označimo sa x, y koordinate točke D (E). Tada je

$$r = OC \mp OB.$$

Iz pravokutnog je trokuta OAC: $OC = \dfrac{2a}{\cos\alpha}$,

a iz pravokutnog trokuta OBA: $OB = 2a \cdot \cos\alpha$.

Prema tome je

$$r = \frac{2a}{\cos\alpha} \mp 2a\cos\alpha, \quad \text{ili} \quad r = \frac{2a}{\cos\alpha}(1 \mp \cos^2\alpha)\ldots \tag{1}$$

polarna jednadžba Dioklove kisoide (predznak —) i njezine pratilice (predznak +).

Budući da je

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,\quad \text{tad su}$$

$$x = 2a(1 \mp \cos^2\alpha,\quad y = 2a\,tg\,\alpha(1 \mp \cos^2\alpha)\ldots \tag{2}$$

parametričke jednadžbe obih krivulja, gdje je α parametar.

Ako se iz (2) eliminira α, dobiju se

$$(x - 2a)(x^2 + y^2) = \mp 2ax^2,\ldots \tag{3}$$

kao jednadžbe krivulja u kartezijevim koordinatama. Te se jednadžbe mogu pisati u obliku:

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2 \quad \text{(kisoida)},$$

$$x(x^2 + y^2) = 2a(2x^2 + y^2) \quad \text{(pratilica kisoide)}.$$

Iz tih se jednadžbi vidi, da su kisoida i njezina pratilica dvije različite krivulje, da je svaka trećega reda i da su simetrične s obzirom na os apscisa OA. Svaka se od tih krivulja asimptotički približava pravcu g, pa je taj pravac njihova zajednička asimptota. Neizmjerno daleka točka je realno obratište. Kisoida ima u točki O šiljak prve vrste, a pratilica kisoide ima u toj točki svoju dvostruku realnu izoliranu točku. Pratilica kisoide ima u točki H tjeme.

3. Konstrukcija tangente u točki D. Povuče se $DN \perp OA$ (sl. 514.), točkom N pravac $NT \parallel OD$, a točkom O pravac $OT \parallel SB$. Oba se ta pravca sijeku u točki T, pa je TD tangenta u točki D kisoide [1] Na jednak se način kao za kisoidu dobije tangenta T_1E u točki E pratilice kisoide ($EN_1 \perp OH$, $N_1T_1 \parallel OE$, $HT_1 \parallel SB$).

b) Uspravna strofoida i njezina pratilica

1. Konstrukcija krivulja. Uspravna strofoida i njezina pratilica (sl. 515.) konstruiraju se na jednak način kao i Dioklova kisoida i njezina pratilica, samo što ovdje pravac g ide središtem S kružnice k. ($OB = CD = CE$). Geometrijsko je mjesto točke D uspravna strofoida, a točke E njezine pratilice.

2. Jednadžbe krivulja. Ako je točka O ishodište, OA os apscisa, $\sphericalangle SOB = \alpha$, $SO = a$, onda je

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}(1 \mp 2\cos^2\alpha)$$

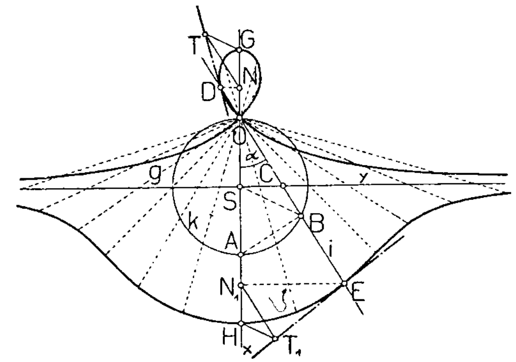
$$x = a(1 \mp 2\cos^2\alpha),\quad y = a\,tg\,\alpha(1 \mp 2\cos^2\alpha)$$

$$(x - a)(x^2 + y^2) = \mp 2ax^2.$$

Iz posljednje se jednadžbe vidi, da obje grane ne pripadaju jednoj te istoj krivulji, nego da su to dvije različite krivulje od kojih je svaka trećega reda. Obje su krivulje simetrične prema osi apscisa i asimptotički se primiču pravcu g, koji je zajednička asimptota obih krivulja. Neizmjerno

[1] Božičević: Nožišne krivulje parabole . . . „Godišnjak sveučilišta u Zagrebu". Zagreb 1929.

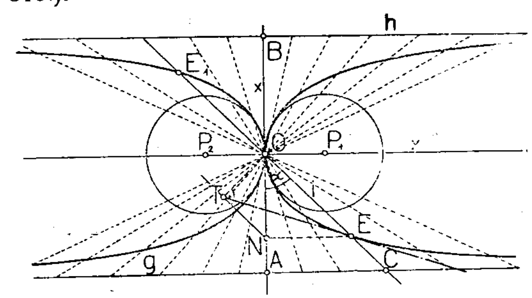
daleka točka je realno obratište za obje krivulje. Strofoida ima u točki O dvostruku točku sa dvije realne tangente, dok je ta točka za pratilicu



Sl. 515.

strofoide dvostruka realna izolirana točka, u kojoj su obje tangente imaginarne. Strofoida ima tjeme u točki G, a njezina pratilica u točki H. Strofoida ima listić između točaka O i G.

3. Konstrukcija tangente u točki D. Na sličan način kao za pratilicu kisoide, konstruira se tangenta u točki D strofoide i u točki E pratilice te krivulje [1]. ($DN \perp GS$, $NT \parallel OD$, $GT \parallel SB$; $EN_1 \perp SH$, $N_1T_1 \parallel OE$, $HT_1 \parallel SB$, sl. 515.).



Sl. 516.

c) Kapa — krivulja

1. Konstrukcija krivulje. Zadana su dva među sobom okomita pravca OX i OY (sl. 516.), zatim stalan pravac g, koji je usporedan s

[1] Božičević: Nožišne krivulje parabole . . . „Godišnjak sveučilišta u Zagrebu" Zagreb 1929.

pravcem OY i siječe OX u točki A. Točkom O povuče se pravac i, koji g siječe u točki C, i na nj se prenese $OE = OE_1 = AC$. Geometrijsko je mjesto točaka $E(E_1)$ kapa-krivulja.

2. Jednadžba krivulje. Neka je O ishodište OX i OY osi pravokutnog koordinatnog sustava, stavimo $OA = a$, $\sphericalangle AOC = \alpha$ i $OE = r$ i označimo sa x, y koordinate točke E. Tada je

$$r = a\, tg\, \alpha,$$

$$x = a \sin \alpha, \quad y = a \sin \alpha\, tg\, \alpha$$

$$x^2 (x^2 + y^2) = a^2 y^2.$$

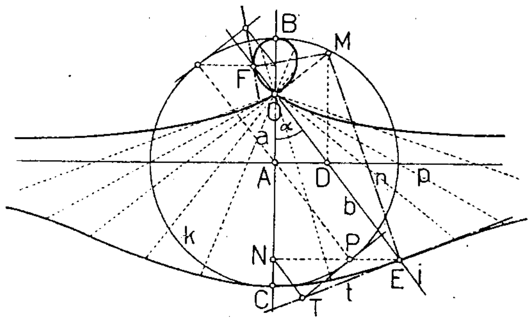
Krivulja je četvrtog reda, simetrična je s obzirom na osi OX i OY, sastoji se iz dvije kongruentne grane, koje se u točki O dodiruju. Ta je točka tjeme za obje grane. Krivulja ima dvije usporedne asimptote g i h koje idu točkama A i B $(OA = OB = a)$ usporedno sa osi OY.

3. Konstrukcija tangenata. S točke E (sl. 516.) spusti se okomica EN na os OX, točkom N povuče se pravac $NT \parallel OE$ i s točke O spusti okomica OT na NT. Pravac TE je tangenta u točki E krivulje[1].

4. Kružnica zakrivljenosti u tjemenu O. Središta zakrivljenosti P_1 i P_2 za obje grane krivulje leže u osi OY. Polumjer je kružnica zakrivljenosti $\rho = \frac{a}{2}$[2].

d) Nikomedova konhoida

1. Konstrukcija krivulje. Zadan je pravac p i izvan toga pravca stalna točka O (sl. 517 — 519), te dužina b. Povuče li se točkom O pravac i,

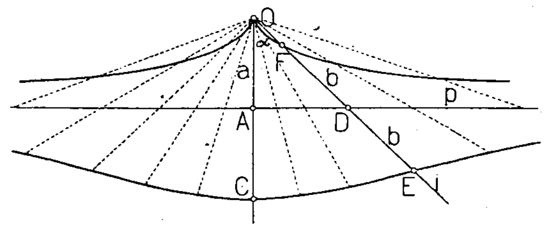


Sl. 517.

koji p siječe u točki D, pa se na pravac i prenese na obje strane sjecišta D dužina b, t. j. $DE = DF = b$, onda je geometrijsko mjesto točaka E i F krivulja, koja se zove *konhoida pravca p* ili *Nikomedova konhoida.*

[1] [2] Rohn — Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie I. sv. IV. izd., Leipzig 1913., str. 446 i 447.

2. Jednadžba krivulje. Neka je točka O ishodište, pravac $OA \perp p$ os apscisa, stavimo $OA = a$, $\sphericalangle AOE = \alpha$, $OE = r$ i označimo sa x, y



Sl. 518

koordinate točke E. Tada je polarna jednadžba krivulje

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} + b \ldots \qquad (1)$$

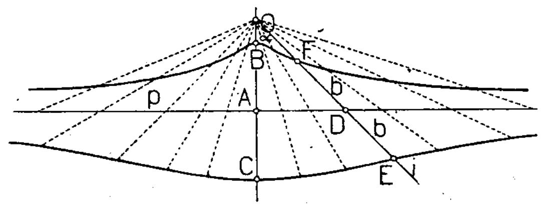
parametričke su jednadžbe

$$x = a + b \cos \alpha, \quad y = a\, tg\, \alpha + b \sin \alpha \ldots \qquad (2)$$

a jednadžba u kartezijevim koordinatama

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2 \ldots \qquad (3)$$

Krivulja je četvrtoga reda, ima dvije grane i simetrična je s obzirom na os OA. Točka je O dvostruka točka konhoide, i to čvor za $b > a$ (sl. 517.), šiljak za $b = a$ (sl. 518.) i dvostruka izolirana točka za $b < a$ (sl. 519.). Točke B i C su tjemena. Obje grane konhoide dotiču se u ne-



Sl. 519.

izmjerno dalekoj točki, koja leži u pravcu p. Taj je pravac asimptota krivulje.

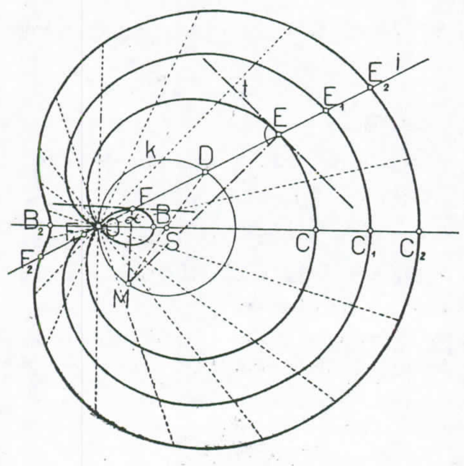
3. Konstrukcija tangente. Ordinata EN točke E (sl. 517.) siječe kružnicu k, opisanu oko A s polumjerom b u točki P, točkom N povuče se pravac NT usporedno s OE, a u točki P tangenta PT kružnice k, koja NT siječe u točki T. Tada je pravac $TE \equiv t$ tangenta konhoide u točki E. Ispravnost te konstrukcije može se dokazati na taj način, da se potraži jednadžba pravca t kao sastavnice točaka T i E, a onda s pomoću (1) odredi jednadžba tangente u točki E, pa bi se našlo da su te dvije jednadžbe identične.

Geometrijsko je mjesto točke T kofeida[1].

Povucimo točkom D pravac $DM \perp p$, a točkom O pravac $OM \perp OE$, oba se ta pravca sijeku u točki M. Spojnice ME i MF jesu normale u točkama E i F[2].

e) Paskalov puž

1. Konstrukcija krivulje. (Sl. 520.). Opišimo kružnicu k ($= S, a$), uzmimo na njoj stalnu točku O i povucimo njom sekantu i, koja k po



Sl. 520.

drugi put siječe u točki D i prenesimo na i $DE = DF = b$, gdje je b stalna dužina. Geometrijsko je mjesto točke E (ili F) krivulja, koja se zove *Paskalov puž* ili *konhoida kružnice k*.

2. Jednadžba krivulje. Neka je O ishodište, OS os apscisa, $SO = a$, $\sphericalangle SOE = \alpha$, $OE = r$, tada je

$$r = 2a \cos\alpha + b \ldots \quad (1)$$

$$x = (2a \cos\alpha + b) \cos\alpha, \quad y = (2a \cos\alpha + b) \sin\alpha \ldots \quad (2)$$

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) \ldots \quad (3)$$

Krivulja je četvrtoga reda i simetrična je s obzirom na os OS. Krivulja ima u točki O za $b < 2a$ čvor, za $b = 2a$ šiljak, za $b > 2a$ dvostruku

[1]) Schmid: Darstellende Geometrie, Leipzig 1921. II. sv., str. 278.
[2]) Schmid: Darstellende Geometrie, Leipzig 1919. I. sv., str. 153.—157.

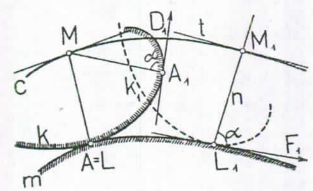
izoliranu točku. U drugom slučaju krivulja se zove *kardioida*. U točkama B i C krivulja ima tjemena.

3. Konstrukcija normale. Povuče se promjer DM; tada su spojnice ME i MF normale krivulje u točkama E i F[1].

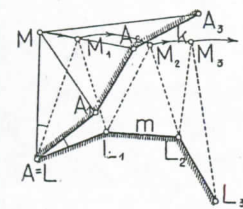
§ 147. Krivulje, koje nastanu valjanjem jedne krivulje po drugoj krivulji

1. Postanak krivulje. Na sl. 521. zadana je stalna krivulja m i još jedna krivulja k, koja se valja po krivulji m, zatim je zadana točka M, koja je u čvrstoj vezi s krivuljom k. Ako se krivulja k valja po krivulji m, onda točka M opiše treću krivulju c. Krivulja k valja se po krivulji m tako, da se obje krivulje uvijek dotiču i da su lukovi između jedne i druge krivulje među sobom jednaki. Ako se krivulje k i m dotiču za jedan položaj u točki $A = L$, pa se krivulja k okrene u novi položaj k_1 tako, da njezina točka A_1 padne u točku L_1 krivulje m, u kojoj se obje krivulje dotiču, onda je luk LL_1 = luku AA_1.

Da se za položaj k_1 dobije položaj M_1 točke M, postupa se ovako: Točka A_1 spoji se sa M i u točki A_1 povuče tangenta A_1D_1 krivulje k_1,



Sl. 521.



Sl. 522.

zatim se u točki L_1 povuče tangenta L_1F_1 na m, dakle i na k_1, učini se $\sphericalangle F_1L_1M_1 = \sphericalangle D_1A_1M$ i prenese $L_1M_1 = A_1M$.

Krivulja m zove se *ravnalica*, a krivulja k *izvodnica*.

2. Normala i tangenta u točki krivulje c. Umjesto krivulja m i k uzmimo poligone m i k (sl. 522.) s vrlo malenim stranicama, tako da je $LL_1 = AA_1$, $L_1L_2 = A_1A_2$, $L_2L_3 = A_2A_3$, ... ako se poligon k kreće, onda će točka M, koja je čvrstoj vezi s poligonom k, opisati kružni luk MM_1 kojemu je središte u točki $A = L$, a polumjer AM. Ako točka A_1 dođe u točku L_1, onda je $\sphericalangle MAM_1 = \sphericalangle A_1AL_1$. Dođe li točka A_2 u točku L_2, onda točka M_1 opiše kružni luk M_1M_2, kojemu je središte u točki L_1, a polumjer $LM_1 = A_1M$. Ako tako dalje nastavimo, onda će se krivulja c sastojati od samih kružnih lukova MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., kojemu su sre-

[1]) Vonderlinn: Lehrbuch des Projektionszeichnens, Bremerhaven 1903., IV. dio, str. 39.

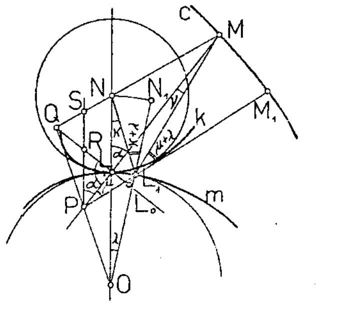
dišta u točkama $L, L_1, L_2, L_3, \dots$ Uzmemo li da su stranice poligona m i k neizmjerno malene, onda će oni prijeći u krivulje, pa će točke L i L_1 biti dvije susjedne točke krivulje m, A i A_1 dvije susjedne točke krivulje k, a M i M_1 dvije susjedne točke krivulje c.

Ako krivulja k dođe u susjedni položaj, onda će luk MM_1 biti neizmjerno malen, pa se kaže, da se točka M kreće momentano okomito na polumjer LM. Odatle se vidi, da je pravac LM normala krivulje c u točki M. Imamo poučak:

Normala krivulje c u točki M ide momentanim diralištem krivulja k i m.

Na sl. 522. je L_1M_1 normala, a $t \perp L_1M_1$ tangenta krivulje c u točki M_1.

3. Konstrukcija središta zakrivljenosti u točkama krivulje c[1]. Na sl. 523. uzelo se da je krivulja m ravnalica, krivulja k izvodnica, a c valjanjem nastala krivulja. Nadalje se uzelo, da se krivulje k i m u času promatranja dotiču u točki L, da je M pripadna točka krivulje c, da je točka N središte zakrivljenosti krivulje k, a O središte zakrivljenosti krivulje m u zajedničkoj točki L, da je napokon LM normala krivulje c u točki M, a LO normala krivulje m u točki L. Uzme li se, da je LL_1 neizmjerno mali zajednički elemenat krivulja k i m, i stavi li se da je $\sphericalangle LNL_1 = \varkappa$ i $\sphericalangle LOL_1 = \lambda$, onda je



Sl. 523.

$$LL_1 = NL \cdot \varkappa = OL \cdot \lambda \tag{1}$$

Ako se krivulja k okrene za neizmjerno maleni elemenat LL_1, onda točka N opiše neizmjerno maleni elemenat NN_1, a točka M neizmjerno maleni elemenat MM_1. Točka N_1 leži na normali L_1O, koja je neizmjerno blizu normali LO a točka M_1 leži na normali L_1M_1, koja je neizmjerno blizu normali LM. Obje se normale LM i L_1M_1 sijeku u točki P, koja je središte zakrivljenosti krivulje c u točki M. Stavimo još da je $\sphericalangle MPM_1 = \mu$ i $\sphericalangle LML_1 = \nu$.

Kad se krivulja k okrene za neizmjerno maleni elemenat LL_1, onda se okretanje izvršilo za kut

$$\varkappa + \lambda = \sphericalangle NL_1N_1 = \sphericalangle ML_1M_1.$$

No kako je $\sphericalangle ML_1M_1 = \mu + \nu$, slijedi da je

$$\varkappa + \lambda = \mu + \nu. \tag{2}$$

[1]) Rohn — Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie I. sv. IV. izd. str. 375.

Uzmimo sada da je L_0 ortogonalna projekcija točke L_1 na pravac potegnut točkom L okomito na LM, onda se točka L_0 može uzeti da leži na pravcima PL_1 i ML_1, pa se može uzeti da je pogreška, koja kod toga nastane neizmjerno malena drugoga reda. Tada je

$$LL_0 = PL \cdot \mu = LM \cdot \nu = LL_1 \cdot \cos\alpha \tag{3}$$

gdje je $\alpha = \sphericalangle L_0LL_1 = \sphericalangle MLN$. Ako se u jednadžbi (2) zamijeni $\varkappa$ i λ vrijednošću iz (1) i μ, ν vrijednošću iz (3) dobije se

$$\frac{1}{PL} + \frac{1}{LM} = \left(\frac{1}{OL} + \frac{1}{LN}\right) \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \tag{4}$$

Ako pravac LL_0 siječe pravac MN u točki Q, onda OQ siječe pravac ML u točki P. Povuče li se naime točkom P pravac usporedno s LN, on siječe LQ u R, a NQ u S. Iz pravokutnog je trokuta PLR

$$\frac{PR}{PL} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

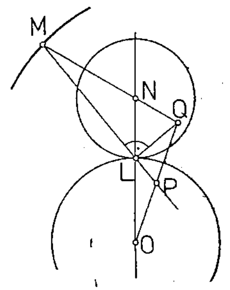
a iz sličnih trokuta PSQ i ONQ

$$\frac{PS}{PR} = \frac{OL + LN}{OL} \quad \text{i} \quad \frac{PL + LM}{LM} = \frac{PS}{LN}.$$

Množenjem posljednjih triju jednadžbi dobije se jednadžba (4). Prema tome središte zakrivljenosti P dobije se na slijedeći način:

Ako su N i O (sl. 523) središta zakrivljenosti krivulja k i m u zajedničkom diralištu L, onda se središte zakrivljenosti P u pripadnoj točki M krivulje c dobije tako, da se pravac MN siječe u točki Q pravcem potegnutim točkom L okomito na LM, a pravac LM siječe pravcem OQ u točki P.

4. Cikličke krivulje. Ako se umjesto krivulja k i m uzmu dvije kružnice m i k (sl. 524.), ili ako se jedna kružnica zamijeni pravcem, onda se valjanjem izvedene krivulje c zovu *cikličke krivulje.* Takove se krivulje sastoje iz više kongruentnih grana. Kad kružnica k izvrši potpuni okretaj, onda svaka točka, koja je u čvrstoj vezi s kružnicom k opiše jednu granu krivulje c.



Sl. 524.

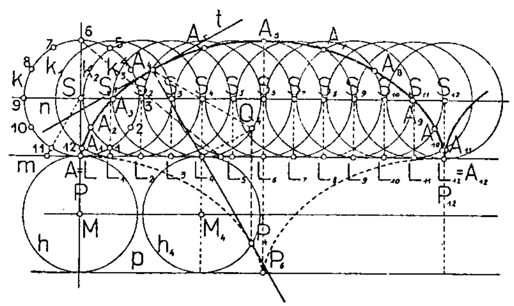
5. Konstrukcija središta zakrivljenosti u točki M cikličke krivulje c. S obzirom na pravilo za konstrukciju točke P (t. 3), konstruirana je ta točka u sl. 524., t. j. povuče se pravac MN, u točki L postavi okomica na ML, koja MN siječe u Q, i napokon povuče pravac OQ, koji ML siječe u točki P.

*

§ 148. Cikloida

a) Obična cikloida

1. Konstrukcija cikloide. Ako se kružnica k valja po pravcu m (sl. 525.), onda svaka točka kružnice k opiše krivulju c, koja se zove *obična cikloida.* Uzet će se, da stalna točka A kružnice k opisuje cikloidu c. Središte S kružnice k opisuje pravac n, koji je u daljini SA usporedan s pravcem m. Kad se kružnica k jedamput okrene, točka A dođe u točku A_{12}, pa je dužina AA_{12} jednaka opsegu kružnice k. Dužina SS_{12}, koju opiše središte S, također je jednaka opsegu kružnice k Da se nacrta cikloida



Sl. 525

konstruirat će se opseg o kružnice k po Kochanskyjevoj metodi (§ 125. t. 3.), prenijet će se $SS_{12} = AA_{12} = o$ i te će se dužine razdijeliti na 12 jednakih dijelova $\left(SS_1 = S_1S_2 = S_2S_3 = \ldots = \frac{o}{12},\ AL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = \ldots = \frac{o}{12}\right)$. I kružnica k razdijelit će se na 12 jednakih dijelova (djelišta $A, 1, 2, 3, \ldots$). Kad se kružnica k valja po pravcu m te se okrene za $\frac{2\pi}{12}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{12}$, $3 \cdot \frac{2\pi}{12}$, $\ldots$ onda točke $1, 2, 3, \ldots$ kružnice k dođu u točku $L_1, L_2, L_3, \ldots$ pravca m, središte S padne u točke $S_1, S_2, S_3, \ldots$, kružnica k zauzme položaje $k_1, k_2, k_3, \ldots$ a točka A opiše cikloidu i zauzme postepeno položaje $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Te se točke mogu dobiti, da se središtima $S_1, S_2, S_3, \ldots$ potegnu polumjeri $S_1A_1 \parallel S11$, $S_2A_2 \parallel S10$, $S_3A_3 \parallel S9, \ldots$. Kad se kružnica k jedamput potpuno okrene, onda točka A opiše jednu granu cikloide. Ako se kružnica k dalje valja po pravcu m, onda točka A kod svakog punog okretaja kružnice k opiše po jednu granu cikloide. Sve su te grane među sobom sukladne. Cikloida je transcendentna krivulja. Krivulja ima u točkama koje leže na pravcu m šiljke. Točka A_6 cikloide udaljena je od pravca m za promjer kružnice k, ona je najviša točka krivulje. Ta je točka tjeme prve grane cikloide.

2. Normala i središte zakrivljenosti. Budući da je L_4 momentano središte okretanja za točku A_4, to je pravac A_4L_4 normala cikloide u točki A_4 (sl. 525.). Središte zakrivljenosti P_4 u točki A_4 dobije se tako (§ 147. t. 5), da se povuče pravac A_4S_4, u točki L_4 povuče okomica na A_1L_4 i njom siječe pravac A_4S_4 u točki Q_4; pravac potegnut točkom Q_4 okomito na m siječe A_4L_4 u točki P_4. Tu se uzelo, da je središte zakrivljenosti O pravca m neizmjerno daleko u smjeru okomitom na m.

3. Evoluta obične cikloide. Budući da je $\sphericalangle A_4L_4P_4$ pravi kut, gdje su vrhovi A_4 i L_4 na kružnici k_4, to je i točka P_4 na toj kružnici, kojoj je A_4Q_4 promjer. U trokutu je $A_4P_4Q_4$ točka S_4 središte stranice A_4Q_4 i $S_4L_4 \parallel P_4Q_4$, zato je $L_4P_4 = L_4A_4$. Ako se opiše kružnica h_4, koja s druge strane dotiče pravac m u točki L_4 i kojoj je polumjer $M_4L_4 = S_4L_4$, ta kružnica ide i točkom P_4. Budući da je $\overline{A_4L_4} = \overline{P_4L_4}$, to je i $\widehat{A_4L_4} = \widehat{P_4L_4}$. Isto tako je $\overline{LL_4} = \widehat{P_4L_4}$. Ako se prema tome kružnica h, koja dotiče pravac m u točki A $(= P)$, valja po pravcu p, koji dotiče kružnicu h i usporedan je sa m, onda će, kad kružnica h dođe u položaj h_4, točka P doći u položaj P_4.

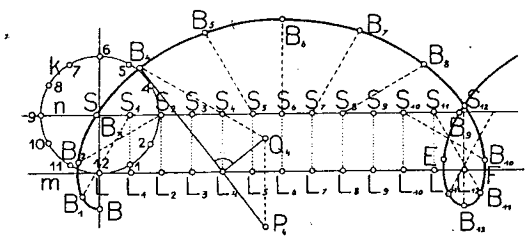
Imamo poučak:

Evoluta je obične cikloide opet obična cikloida, koja je sukladna s prvom cikloidom.

Vrhu A_6 cikloide pripada šiljak P_6 evolute, a šiljcima A i A_{12} cikloide pripadaju vrhovi P i P_{12} evolute.

b) Produžena cikloida

Ako se kružnica k valja po pravcu m (sl. 526.), onda svaka točka B, koja je izvan kružnice i koja je čvrsto spojena sa središtem S, opiše pro-



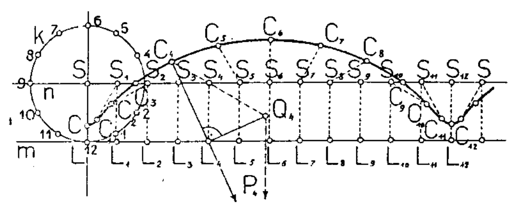
Sl. 526.

duženu cikloidu. Pojedine točke te krivulje dobiju se tako, da se točkama $S_1, S_2, S_3, \ldots$ povuku usporednice s polumjerima $S11, S10, S9, \ldots$ i na njih prenese dužina SB, t. j. $S_1B_1 = S_2B_2 = S_3B_3 = \ldots = SB$.

Svaka grana ove cikloide siječe ravnalicu m u dvije točke, na pr. E i F. Po dvije susjedne grane sijeku se u točkama, koje su dvostruke točke ili čvorovi cikloide. Zato se ova cikloida također zove *čvorasta cikloida*. Točke $B, B_{12}, \ldots$ jesu najniže točke, a B_6 najviša točka krivulje. Te su točke tjemena cikloide. Središte zakrivljenosti P_4 u točki B_4 dobije se na poznati način. Točka P_4 leži na evoluti cikloide.

c) Prikraćena cikloida

Ako se kružnica k valja po pravcu m (sl. 527.), onda svaka točka C, koja je unutar kružnice i koja je u čvrstoj vezi sa središtem S, opiše



Sl. 527.

prikraćenu ili *ispruženu cikloidu*. Ta cikloida nema s ravnalicom m nijedne zajedničke točke. U točkama $C, C_6, C_{12}, \ldots$ krivulja ima tjemena. Budući da je u točki C okrenuta prema ravnalici m konveksna strana krivulje, a u točki C konkavna strana, tada slijedi da cikloida ima između točaka C i C obratište. S istih razloga krivulja ima jedno obratište između točaka C_6 i C_{12}. Središte zakrivljenosti P_4 u točki krivulje C_4 dobije se na poznati način. Točka P_4 leži na evoluti krivulje. Normale u obratištima jesu asimptote evolute.

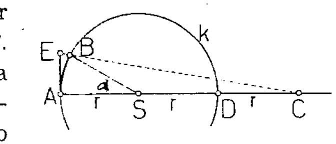
§ 149. Epicikloida

1. Postanak epicikloide. Kad se kružnica k $(= S, r)$, valja po kružnici m $(= O, r)$ tako, da se obje kružnice dotiču izvana, onda svaka točka A koja je u ravnini kružnice k i koja je u čvrstoj vezi sa središtem S te kružnice, opiše krivulju, koja se zove *epicikloida* (sl. 530.). Ako je točka A na kružnici k, onda ona opiše *običnu epicikloidu*, ako je ta točka izvan kružnice $(SA > r)$, ona opiše *produženu epicikloidu*, a ako je A unutar kružnice k $(SA < r)$, ona opiše *prikraćenu epicikloidu*.

Ako je $\frac{r_1}{r}$ racionalan broj, onda epicikloida ima konačan broj grana, pa je krivulja algebarska, a ako je $\frac{r_1}{r}$ iracionalan broj, epicikloida ima neizmjerno mnogo grana, te je krivulja transcendentna.

Kod konstrukcije epicikloida potrebno je da se znade, kako se luk jedne kružnice prenosi kao luk na drugu kružnicu, pa će se najprije riješiti takva zadaća.

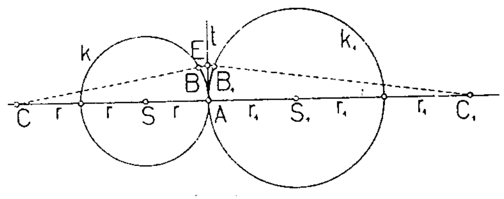
2. Rektifikacija luka[1]. Treba li rektificirati luk AB (sl. 528.), koji je na zadanoj kružnici k $(= S, r)$, onda se povuče promjer AD i u točki A tangenta, zatim se na produženi promjer AD prenese $DC = SA$ i točka C spoji sa B. Pravac BC siječe tangentu AE u točki E, pa je dužina AE jednaka luku AB. Ta je konstrukcija samo približno točna, a vrijedi samo za manje lukove (60°). Ako je luk $AB = 30°$, onda bi se lako našlo da je luk $AB = 0{,}523\,59 \ldots r$, a dužina $AE = 0{,}523\,59 \ldots r$. Prema tome je konstrukcija za luk od 30° točna na tri decimale. Treba li rektificirati veće lukove, onda se rektificira polovina ili četvrtina luka i dobivena dužina podvostruči ili početverostruči.



Sl. 528.

Treba li na zadanoj kružnici odrediti luk AB, koji je jednak zadanoj dužini d, onda se povuče promjer AD (sl. 528.), u točki A postavi tangenta i na nju prenese dužina d, t. j. $AE = d$, zatim se na produženi promjer AD prenese $DC = SA$ i povuče pravac EC. Taj pravac siječe kružnicu u točki B, pa je luk $AB = \overline{AE} = d$.

Imamo li dvije nejednake kružnice, pa treba luk jedne kružnice prenijeti kao luk na drugu kružnicu, tako da oba luka budu jednaka, onda se postupa na slijedeći način: Obje se kružnice k $(= S, r)$ i k_1 $(= S_1, r_1)$ nacrtaju tako, da se dotiču u točki A (sl. 529.), zatim se na centrali SS_1



Sl. 529.

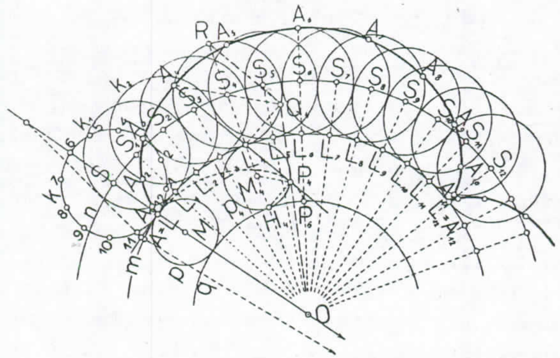
odmjeri $AC = 3r$ i $A_1C_1 = 3r_1$, u točki A postavi zajednička tangenta t, povuče se pravac BC, koji t siječe u točki E, i napokon povuče pravac EC_1 koji siječe kružnicu k_1 u točki B_1. Tada je arc $AB_1 =$ arc AB.

a) Obična epicikloida

3. Konstrukcija krivulje. Na sl. 530. zadana je kružnica m kao ravnalica i kružnica k kao izvodnica. Obje se te kružnice dotiču u točki $A = L$.

[1]) Huygens: De circuli magnitudine. 1654.

Kad se kružnica k valja po kružnici m, onda točka A opiše običnu epicikloidu. Kad kružnica k učini potpuni okretaj, onda točka A opiše jednu granu krivulje i opet padne na kružnicu m u točku $A_{12} - L_{12}$, tako da je luk LL_{12} jednak opsegu kružnice k. Da se dobiju pojedine točke krivulje c postupat će se ovako: Razdijelit će se kružnica k na 12 jednakih dijelova (1 — 12), rektificirat će se luk $A1$ i prenijet će se kao luk na kružnicu m, t. j. učinit će se $LL_1 = A1$, zatim će se prenijeti $LL_1 = L_2L_3 = \dots$ Kad se kružnica k valja po kružnici m, onda točke $1, 2, 3, \dots$ kružnice k redom padnu na točke $L_1, L_2, L_3, \dots$ kružnice m. Središte S opiše kružnicu n, kojoj je središte O, a polumjer $= OS$. Da se dobiju središta kružnice k u



Sl. 530.

novim položajima, povući će se pravci $OL_1, OL_2, OL_3, \dots$, koji sijeku kružnicu n u točkama $S_1, S_2, S_3, \dots$. Kad kružnica k dođe u položaj $k_1, k_2, k_3, \dots$ točka A dođe u točku $A_1, A_2, A_3, \dots$ te je $arc\, A_1L_1 = arc\, A_1$, $arc\, A_2L_2 = arc\, A2$, $arc\, A_2L_3 = arc\, A3, \dots$

Krivulja ima u točkama $A, A_{12}, \dots$ koje leže na kružnici m šiljke, a u točki A_6 je tjeme.

4. Normala i središte zakrivljenosti. S obzirom na § 147. t. 5 pravac je A_4L_4 normala epicikloide, a P_4 središte zakrivljenosti u točki A_4.

Ako se produži pravac OL_4 dobije se promjer L_4R izvodne kružnice k_4. Povucimo $P_4H_4 \parallel L_4Q_4$ i $Q_4R \parallel L_4A_4$, opišimo nad promjerom H_4L_4 kružnicu p_4 i oko O kružnicu q s polumjerom OH_4. Imamo omjere

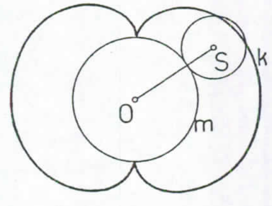
$$OH_4 : H_4L_4 = OP_4 : P_4Q_4 = OL_4 : L_4R,$$

odakle se vidi, da obje kružnice p_4 i q čine sa k i m slične i slično položene likove, gdje je O središte sličnosti. Na kružnicama $p, p_1, p_2, p_3, \dots$ leže središta zakrivljenosti $P, P_1, P_2, P_3, \dots$ u točkama epicikloide, t. j. ako se kružnica p valja po kružnici q, njezina točka $P (= L)$ opiše običnu epicikloidu, na kojoj leže središta zakrivljenosti za točke epicikloide c. Imamo poučak:

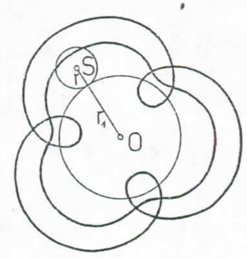
Evoluta obične epicikloide je slična epicikloida.

Šiljcima epicikloide pripadaju tjemena evolute, a tjemenima epicikloide pripadaju šiljci evolute.

5. Vrste običnih epicikloida. Ako kružnice k i m imadu jednake polumjere, onda krivulja ima samo jednu granu, a zove se kardioida. (Vidi



Sl. 531.



Sl. 532.

§ 146. e) Ako je polumjer kružnice k dvaput manji, negoli je polumjer kružnice m, krivulja ima dvije grane (sl. 531.).

7. b) Produžene i prikraćene epicikloide

6. Na sl. 532. nacrtana je produžena i prikraćena epicikloida, koja ima tri sukladne grane ($r_1 = 3r$).

Zadaci za vježbu

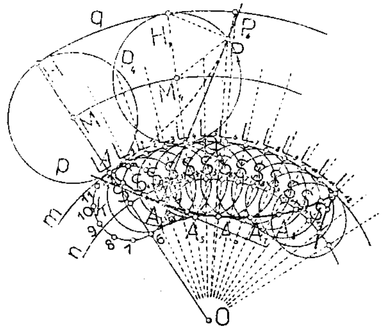
1. Nacrtaj *a)* produženu, *b)* prikraćenu epicikloidu, ako je $r_1 = 2r$ (ili $r_1 = 4r$)!
2. Nacrtaj običnu epicikloidu, ako je *a)* $r_1 = 3r$, *b)* $r_1 = 4r$!
3. Nacrtaj produženu epicikloidu, ako je $r_2 = r$.! (Paskalov puž).

§ 150. Hipocikloide

1. Postanak hipocikloide. Ako se kružnica k valja po kružnici m s unutarnje strane, onda svaka točka A kružnice k opiše krivulju, koja se zove *obična hipocikloida* (sl. 533). Ako je točka A izvan opsega kruga k, ona opiše *produženu hipocikloidu*, a ako se točka A nalazi unutar opsega kruga k, ona opiše *prikraćenu hipocikloidu*.

Ako su r i r_1 polumjeri kružnica k i m, te je $\frac{r_1}{r}$ racionalan broj, krivulja ima konačan broj grana te je algebarska, a ako je $\frac{r_1}{r}$ iracionalan broj, krivulja ima neizmjerno mnogo grana te je transcendentna.

Transcendentna obična hipocikloida ima neizmjerno mnogo šiljaka, koji leže na kružnici m, produžena hipocikloida ima neizmjerno mnogo čvorova, a prikraćena ima neizmjerno mnogo obratišta. Algebarske hipocikloide imadu konačan broj tih singularnih točaka.



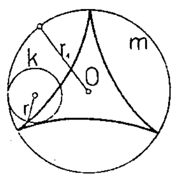
Sl. 533.

2. Obična hipocikloida. Obična hipocikloida (sl. 533.) konstruira se na sličan način kao i obična epicikloida (§ 149., sl. 530.). Isto tako normala i središte zakrivljenosti u točki A_4. Na sličan način kao na sl. 530. dokazali bismo poučak:

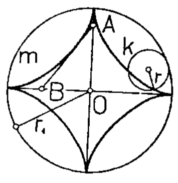
Evoluta obične hipocikloide jest slična hipocikloida.

Evolutu bi opisala točka $P = A$ kružnice p, kad bi se ta kružnica valjala iznutra po kružnici q.

3. Vrste hipocikloida. Na sl. 534. nacrtana je obična hipocikloida za slučaj da je $r_1 = 3r$, a na sl. 535. nacrtana je obična hipocikloida za slučaj da je $r_1 = 4r$. Prva se krivulja zove *Steinerova krivulja;* ona ima tri grane, tri šiljka i tri tjemena. Druga se krivulja zove *asteroida;* ona ima četiri grane, četiri šiljka i četiri tjemena. Ta krivulja može nastati i na slijeći način: Ako se dužina AB tako kreće, da se njezine krajnje točke kližu na dva okomita pravca, onda ta dužina umata asteroidu.



Sl. 534.



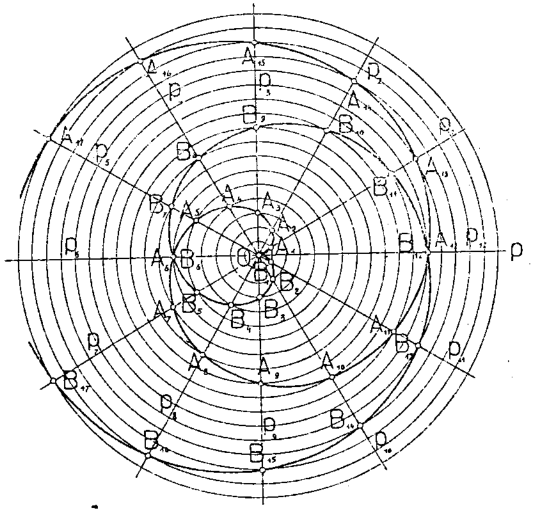
Sl. 535.

4. Zadaci za vježbu

Nacrtaj *a)* produženu, *b)* prikraćenu hipocikloidu, ako je $r_1 = 3r$ (ili $r_1 = 4r$)!

§ 151. Arhimedova spirala

1. Postanak krivulje. Ako se pravac p okreće u ravnini oko jedne svoje točke O, onda neka druga točka A, koja se jednolično giblje po tom pravcu, opiše krivulju, koja se zove *Arhimedova spirala* (sl. 536.). Ta spirala ima neizmjerno mnogo zavoja, ona je dakle transcendentna krivulja. Arhimedova spirala ima dvije grane. Sjecišta obih grana leže na istom pravcu OX, te su obje grane s obzirom na taj pravac simetrično smještene.



Sl. 536.

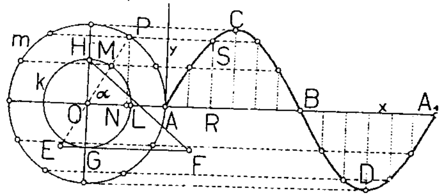
2. Konstrukcija krivulje. Kad se pravac p okrene oko točke O jedamput, onda točka A dođe iz svog početnog položaja $O = A$ u točku A_{12} početnog položaja pravca p. Dužina $OA_{12} = a$, koja se može po volji zadati, razdijeli se na 12 jednakih dijelova, pa se kroz svako to dijelište opiše kružnica, kojoj je središte u točki O (sl. 536.). Isto tako se pun kut oko O razdijeli pravcima $p, p_1, p_2, p_3 \dots$ na 12 jednakih dijelova. Ako pravac p opiše kutove od 30°, 60°, 90°,... pravac p dođe u položaj $p_1, p_2, p_3, \dots$. Kod toga okretanja pravca p točka A dođe na kružnicu $k_1, k_2, k_3, \dots$ i to u sjecišta $A_1, A_2, A_3, \dots$ tih kružnica s pravcima $p_1, p_2, p_3, \dots$ Spoje li se točke A $(= O)$, $A_1, A_2, A_3, \dots$ krivom linijom, ta je linija Arhimedova spirala. Točke B $(= O)$, $B_1, B_2, B_3, \dots$ leže na drugoj grani spirale. Kad se pravac p okrene za 360°, $2 \cdot 360°$, $3 \cdot 360°$,... točka A (i B) opiše jedan zavoj, dva zavoja, tri zavoja,... Što je a manji, to su zavoji gušći.

Jednadžba je Arhimedove spirale $r = a\omega$.

§ 152. Sinusoida

1. Konstrukcija opće sinusoide. Opišu se dvije koncentrične kružnice k i m s polumjerima a i b (sl. 537.), zatim se rektificira kružnica k $(FH = r\pi)$

i na pravac OX prenese $AB = BA_1 = FH$, te dužina AA_1 razdijeli na 12 jednakih dijelova. I obje kružnice k i m razdijele se na 12 jednakih dijelova. Potegne li se kojigod polumjer OP, koji sa osi OX čini kut α i koji k siječe u M, te se s točke P spusti okomica PN na pravac OX, onda je



Sl. 537.

$$arc\, LM = x = a \cdot \alpha,$$

$$NP = y = b \cdot \sin \alpha,$$

a odatle izlazi

$$y = b \sin \frac{x}{a}$$

kao jednadžba opće sinusoide.

Ako se na os OX prenese $\overline{AR} = arc\, LM$, u točki R postavi okomica na OX i na nju prenese $RS = NP$, tada je točka S jedna točka opće sinusoide. Na sličan način se dobiju ostale točke sinusoide.

Sinusoida imade valovit oblik, ima neizmjerno mnogo grana, pa je ona transcendentna krivulja. U točkama A, B, A_1,... u kojima os OX siječe krivulju nalaze se obratišta, a u najvišim i najnižim točkama C, D,... krivulja ima tjemena.

2 Obična sinusoida. Ako je $a = b = 1$, onda se takva sinusoida zove obična sinusoida. Jednadžba je te sinusoide

$$y = \sin x.$$

Konstruiraj tu krivulju!

XXVI. Prostorne krivulje

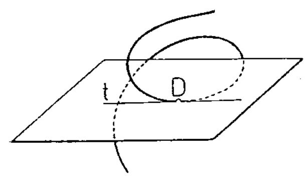
§ 153. O prostornim krivuljama uopće

1. Postanak prostorne krivulje. Krivulja, koja ne leži u ravnini, zove se prostorna krivulja. Prostorna krivulja nastane, kad se točka giblje u prostoru po određenom zakonu tako, da uopće četiri točke, koje uzastopce slijede jedna za drugom, ne leže u istoj ravnini.

2. Sekanta, tangenta. Pravac, koji spaja dvije točke prostorne krivulje, zove se sekanta te krivulje. Okreće li se sekanta oko jednog svog sjecišta s krivuljom tako, da se drugo sjecište sve više primiče prvom sjecištu, onda će sekanta, kad oba sjecišta padnu neizmjerno blizu, prijeći u tangentu prostorne krivulje. Zajednička točka krivulje i tangente zove se diralište.

3. Tangencijalna ravnina. Oskulatorna ravnina. Svaka ravnina, koja je položena tangentom prostorne krivulje, zove se *tangencijalna* ili *dirna ravnina* te krivulje. Dirafište tangente ujedno je dirafište tangencijalne ravnine. U svakoj točki prostorne krivulje ima neizmjerno mnogo dirnih ravnina.

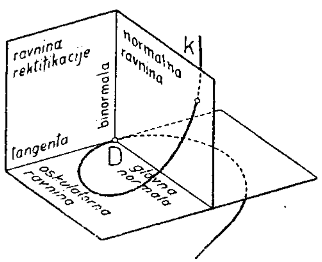
Svaka dirna ravnina prostorne krivulje siječe tu krivulju uopće još u jednoj točki S Ako se dirna ravnina okreće oko tangente tako, da se sjecište S primiče diralištu D, onda će dirna ravnina, kad se točka S primakne neizmjerno blizu točki D, zauzeti prema krivulji osobit položaj. Takova ravnina ima s krivuljom zajednički tri neizmjerno blize točke i zove se *oskulatorna ravnina* krivulje u točki D. (Sl. 538.). Okrećemo li dirnu ravninu oko tangente t dalje, onda će sjecište S proći kroz dirališe D s jedne strane ravnine na drugu stranu, odakle slijedi, da oskulatorna ravnina krivulje u točki D krivulju u toj točki dotiče i siječe, t. j. krivulja prolazi kroz dirališe s jedne strane oskulatorne ravnine na drugu stranu. Oskulatornu ravninu možemo smatrati kao ravninu, koja je određena s dvije neizmjerno blize susjedne tangente krivulje.



Sl. 538.

Oskulatorne su ravnine veoma važne za prostorne krivulje isto tako, kako su tangente važne za ravnične krivulje.

4. Normala. Normalna ravnina. Svaki pravac, koji u diralištu tangente prostorne krivulje stoji na toj tangenti okomito, zove se *normala* krivulje u toj točki. Prostorna krivulja ima u svakoj svojoj točki neizmjerno mnogo normala. Sve te normale leže u jednoj ravnini, koja je u diralištu okomita na tangenti, a zove se *normalna ravnina*. Normala, koja leži u oskulatornoj ravnini, zove se *glavna normala* (sl. 539.), ona je presječnica oskulatorne ravnine s normalnom ravninom.



Sl. 539.

5. Ravnina rektifikacije. Binormala. Tangencijalna ravnina, koja je okomita na oskulatornoj ravnini zove se *ravnina rektifikacije*. (Sl. 539.). Ta ravnina siječe normalnu ravninu u pravcu, koji se zove *binormala* krivulje u točki *D*.

6. Zakrivljenost prostorne krivulje. Dvije neizmjerno blize susjedne tangente čine neizmjerno maleni kut δ, koji se zove *kut kontingencije*. Dvije neizmjerno blize susjedne oskulatorne ravnine čine neizmjerno maleni prostorni kut ε, koji se zove *kut torzije*. Zakrivljenost krivulje mjeri se kutom kontingencije. Ta se zakrivljenost ispoređuje s kružnicom zakrivljenosti t j. s onom kružnicom, koja ima s prostornom krivuljom zajednički tri neizmjerno blize točke. Odatle zaključujemo, da kružnica zakrivljenosti leži u oskulatornoj ravnini, a središte zakrivljenosti u glavnoj normali. Kružnica zakrivljenosti prolazi kroz promatranu točku s jedne strane prostorne krivulje na drugu stranu.

Kako se ide od točke do točke krivulje, tangenta mijenja svoj položaj za kut kontingencije, a oskulatorna ravnina mijenja svoj položaj za kut torzije. Zato se kaže, da su prostorne krivulje *dvostruko zakrivljene*. Prostorna je krivulja određena, kad je poznat zakon, po kojemu se mijenja kut kontingencije i kut torzije.

7. Algebarske i transcendentne prostorne krivulje. Ako ravnina siječe prostornu krivulju u konačnom broju točaka, krivulja je *algebarska*, a ako je siječe u neizmjerno mnogo točaka, krivulja je *transcendentna*.

8. Red i razred prostornih krivulja. Stalan broj točaka, u kojemu ravnina siječe algebarsku prostornu krivulju, zove se red krivulje. Ta sjecišta mogu biti realna ili imaginarna, ili neka realna a neka imaginarna, a mogu neka pasti i zajedno. *Najniži je red prostorne krivulje treći.*

Ako neka ravnina ima s prostornom krivuljom *n*-toga reda zajednički više od *n* točaka, onda jedan dio te krivulje leži u ravnini.

Ako se sa svake točke prostora može na algebarsku prostornu krivulju postaviti *m* oskulatornih ravnina, onda je ta krivulja *m*-toga razreda. *Najniži je razred prostornih krivulja treći.*

9. Singularne točke prostorne krivulje. Prostorna krivulja može imati višestruke točke, šiljke i obratišta. Ako je prostorna krivulja simetrična prema nekoj ravnini, onda krivulja ima u sjecištima s tom ravninom tjemena. Oskulatorna ravnina ima s krivuljom u tim točkama četiri neizmjerno blize zajedničke točke. Takva se ravnina zove *hiperoskulatorna ravnina* krivulje. U tom slučaju oskulatorna ravnina ne siječe krivulju u diralištu, nego krivulja u blizini dirališta leži na istoj strani oskulatorne ravnine. Na nesimetričnim prostornim krivuljama mogu također postojati takova tjemena.

§ 154. Projiciranje prostornih krivulja

1. Centralna i paralelna projekcija prostorne krivulje. Ako zrake projiciranja prostorne krivulje *k* idu kroz istu točku *O* (središte projiciranja), one čine *stožac projiciranja*. Ravnina projekcija siječe taj stožac u ravničnoj krivulji *k'*, koja je centralna projekcija prostorne krivulje na toj ravnini.

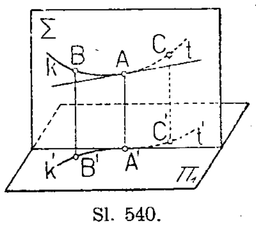
Ako su zrake projiciranja prostorne krivulje među sobom usporedne, one čine *valjak projiciranja*. Ravnina projekcija siječe taj valjak u ravničnoj krivulji *k'*, koja je paralelna projekcija prostorne krivulje na toj ravnini.

Bačena sjena prostorne krivulje na ravnini jest ravnična krivulja.

Svaka tangenta *t* prostorne krivulje *k* u točki *A* projicira se kao tangenta *t'* projekcije *k'* u točki *A'*.

Ako prostorna krivulja ima singularnih točaka, onda se te točke projiciraju kao singularne točke iste vrste. No i obične točke krivulje *k* mogu se projicirati kao singularne točke krivulje *k* (t. 2.).

2. Singularne točke projekcije prostorne krivulje. *a) Obratište.* Uzet će se, da je oskulatorna ravnina Σ u običnoj točki *A* krivulje *k* (sl. 540.) paralelna sa zrakama projiciranja, dok tangenta *t* u toj točki nije usporedna s tim zrakama. Tangenta *t* projicira se kao pravac *t'*, koji leži u presječnici ravnina Σ i Π_1. Budući da su neizmjerno maleni lukovi *AB* i *AC* krivulje *k* na različitim stranama ravnine Σ, to su i projekcije *A'B'* i *A'C'* lukovi krivulje *k'*, koji leže na različitim stranama pravca *t'*. Prema tome krivulja *k'* ima u točki *A'* obratište.



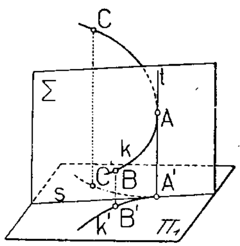
Sl. 540.

Oskulatorna ravnina Σ ima s krivuljom *k* u točki *A* zajedničke tri neizmjerno blize točke. Te će se točke projicirati u pravac *t'* kao tri neizmjerno blize susjedne točke krivulje *k'*, odakle slijedi, da je pravac *t'* obratišna (infleksiona) tangenta krivulje *k'* u točki *A'*.

Imamo poučak:

Ako je oskulatorna ravnina Σ prostorne krivulje k usporedna sa zrakama projiciranja, a tangenta t u točki A nije usporedna sa zrakama projiciranja, projekcija k' krivulje k ima u točki A' obratište. Tangenta t krivulje k projicira se kao obratišna tangenta krivulje k'.

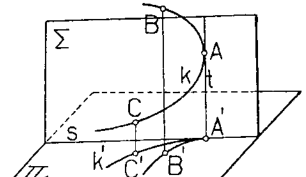
b) Šiljak prve vrste. Uzet će se, da je oskulatorna ravnina Σ u točki A prostorne krivulje k (sl. 541.) i tangenta t u toj točki usporedna sa zrakama projiciranja. Ravnina Σ siječe ravninu Π_1 u pravcu s. Tangenta t projicira se kao točka, koja leži na pravcu s i to u točki A'. Dva neizmjerno malena luka AB i AC krivulje k leže na različitim stranama oskulatorne ravnine Σ i oni se projiciraju kao dva neizmjerno malena luka $A'B'$ i $A'C'$ krivulje k', koji leže na različitim stranama pravca s. Pravac s dotiče oba luka u točki A'. Točka A je *šiljak prve vrste* krivulje k'.



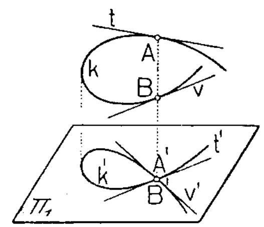
Sl. 541.

Ako je oskulatorna ravnina i tangenta prostorne krivulje u točki A usporedna sa zrakama projiciranja, onda se točka A projicira kao šiljak prve vrste krivulje k'.

c) Šiljak druge vrste. Ako oskulatorna ravnina Σ prostorne krivulje u točki A ima s krivuljom četiri neizmjerno blize zajedničke točke, pa je ta ravnina i tangenta t u točki A usporedna sa zrakama projiciranja, onda se diralište A, pošto je krivulja k u blizini te točke na istoj strani ravnine Σ, projicira kao šiljak druge vrste krivulje k'. Pravac s je tangenta za obje grane krivulje k' u točki A' (sl. 542.).



Sl. 542.



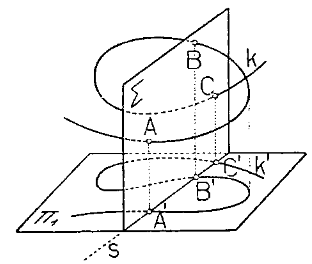
Sl. 543.

d) Dvostruka točka. Ako zraka projiciranja, koja ide točkom A (sl. 543.) po drugi put siječe krivulju k u točki B (bisekanta AB), onda obje te točke imadu zajedničku projekciju na ravnini Π_1 u točki A' (ili B'). Prema tome krivulja k' ima u točki A' dvostruku točku. Tangente t i v u točkama A i B projiciraju se kao tangente t' i v' krivulje k' u dvostrukoj točki A'.

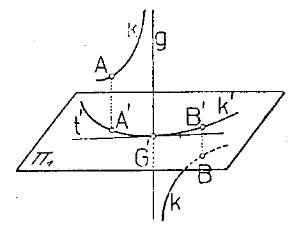
Ako su točke A i B dvije konjugirano imaginarne točke krivulje k, onda je točka A' izolirana dvostruka točka krivulje k. Ako krivulja k ima 2,3, . . . bisekanata, koje se podudaraju sa zrakama projiciranja, onda projekcija k' ima 2,3, . . . dvostrukih točaka.

Napomena. Iz razmatranja u ovoj točki zaključujemo ovo: Ima li projekcija prostorne krivulje singularnih točaka, iz toga ne slijedi, da i prostorna krivulja ima takvih točaka. Samo onda ako je krivulja prikazana s dvije projekcije, može se donekle zaključiti oblik krivulje.

3. Red projekcije algebarske prostorne krivulje. Centralna ili paralelna projekcija prostorne krivulje k na ravnini jest ravnična krivulja k', koja je istoga reda kao i prostorna krivulja. Jer ako ravnina Σ (sl. 544.)



Sl. 544.



Sl. 545.

položena središtem projiciranja ili usporedno sa zrakama projiciranja (kod paralelnog projiciranja), siječe krivulju k u n točaka, onda svakom sjecištu pripada na projekciji k' po jedna točka, a sve te točke leže na istom pravcu s, u kojem ravnina Σ siječe ravninu projekcije Π_1.

Ako se prostorna krivulja n-toga reda projicira centralno iz jedne jednostavne točke te krivulje na ravninu, projekcija je $(n-1)$ reda, a projicira li se iz svoje dvostruke točke, projekcija je krivulje $(n-2)$ reda.

Ako prostorna krivulja k n-toga reda (sl. 545.) ima asimptotu g, pa su zrake projiciranja usporedne s tom asimptotom, onda je krivulja k' $(n-1)$ reda, koja ide nožištem G' asimptote i kojoj se tangenta t' u toj točki podudara s presječnicom ravnine Π_1 s oskulatornom ravninom krivulje k u njezinoj neizmjerno dalekoj točki.

XXVII. O krivim plohama

§ 155. O krivim plohama uopće

1. Postanak krivih ploha. Ako se ravna ili kriva linija giblje u prostoru po određenom zakonu, ona opiše *krivu plohu*. Linija, koja opisuje plohu, zove se *izvodnica*. Ako je izvodnica pravac, onda se ploha, koju taj pravac opiše, zove *pravčasta ploha*. Ima *razgrnjivih* i *vitoperih* pravčastih ploha. Ako se pravčasta ploha dade razgrnuti u ravninu tako, da je ne treba rastezati ili trgati i da bude bez nabora, onda se takva ploha zove razgrnjiva (developabla) pravčasta ploha. Ako se pak pravčasta ploha ne da razgrnuti u ravninu, onda se ona zove vitopera pravčasta ploha.

2. Red ploha. Ako pravac siječe plohu u konačnom broju točaka, onda se takova ploha zove *algebarska*, a ako je siječe u beskonačnom broju točaka, onda se ploha zove *transcendentna*. Najviši broj točaka, u kojem svaki pravac siječe algebarsku plohu, naznačuje *red* te plohe. Ako svaki pravac siječe algebarsku plohu u n točaka, onda je takova ploha n-toga reda. Svaka ravnina siječe plohu n-toga reda u ravničnoj krivulji, koja je n-toga reda. Svaki naime pravac, koji je u toj ravnini, siječe plohu kao i presječnu krivulju u n točaka.

Ako pravac ima s plohom n-toga reda više od n zajedničkih točaka, čitav taj pravac leži na plohi.

Dvije algebarske plohe m-toga i n-toga reda prodiru se u algebarskoj prostornoj krivulji, koja je $(m \cdot n)$-toga reda. Svaka naime ravnina siječe jednu plohu u krivulji m-toga, a drugu plohu u krivulji n-toga reda, a te krivulje imaju $(m \cdot n)$ zajedničkih točaka, koje ujedno leže na prodornoj krivulji, koju ravnina siječe u $m \cdot n$ točaka.

Ploha n-toga reda i prostorna krivulja m-toga reda imaju $(m \cdot n)$ zajedničkih točaka.

Ako ploha n-toga reda i krivulja m-toga reda imaju više nego $(m \cdot n)$ zajedničkih točaka, onda dio te krivulje ili čitava krivulja leži na plohi.

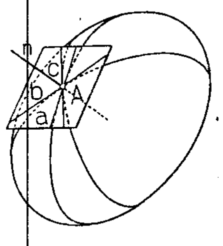
3. Tangenta i dirna ravnina plohe. Pravac, koji siječe plohu, zove se *sekanta*. Ako dva sjecišta A i B sekante padnu neizmjerno blizu, na pr. u točki A, onda taj pravac dotiče plohu u točki A, pa se zove *tangenta* plohe u toj točki. Jednom regularnom točkom A (sl. 546.) plohe može se položiti neizmjerno mnogo tangenata i sve te tangente leže u ravnini, koja dotiče plohu u toj točki. Zato se ta ravnina zove *dirna* ili *tangencijalna ravnina plohe*. Točka A zove se *diralište*.

Svakom tangentom može se položiti neizmjerno mnogo ravnina, i svaka ta ravnina siječe plohu u krivulji, koju tangenta dotiče u diralištu A. Dirna ravnina plohe u točki A određena je s dvije tangente, koje dotiču dvije presječne krivulje u točki A. Ako na plohi leži pravac, koji ide diralištem A, onda dirna ravnina sadrži taj pravac.

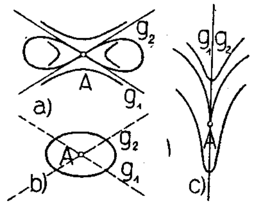
Tangenta u točki presječne krivulje podudara se s presječnicom presječne i dirne ravnine u toj točki.

Tangenta u točki prodorne krivulje dviju ploha podudara se s presječnicom dirnih ravnina obih ploha u toj točki.

4. Asimptotička ravnina plohe. Dirna ravnina u neizmjerno dalekoj točki plohe zove se *asimptotička ravnina* plohe.



Sl. 546.



Sl. 547.

5. Glavne tangente. Vrste točaka plohe. Dirna ravnina **T** u točki A siječe plohu u realnoj ili imaginarnoj krivulji, koja u diralištu A ima dvostruku realnu točku. Tangente na obje grane presječne krivulje u točki A ujedno su tangente plohe u toj točki. Svaka od tih tangenata ima s krivuljom i s plohom tri neizmjerno blize točke i zato se one zovu *glavne tangente* plohe u točki A. Obje glavne tangente mogu biti različite i realne (sl. 547. a), ili konjugirano imaginarne (sl. 547. b), ili padaju zajedno (sl. 547. c). Ako su obje glavne tangente različite i realne, pa se dirna ravnina usporedno pomakne za neizmjerno malo, onda ona siječe plohu u krivulji, koja u blizini dirališta ima oblik hiperbole (sl. 547. a). Zato se kaže, da je točka A *hiperbolička točka* plohe.

Ako su obje tangente konjugirano imaginarne, pa se dirna ravnina usporedno pomakne za neizmjerno malenu dužinu, ona siječe plohu u krivulji, koja ima oblik elipse (sl. 547. b). Zato se takova točka zove *eliptička točka* plohe.

Ako obje glavne tangente u točki A padnu u isti pravac, onda ravnina, koja je neizmjerno blizu dirnoj ravnini u točki A, siječe plohu u krivulji, koja u blizini točke A ima oblik parabole (sl. 547 c). U tom se slučaju točka A zove *parabolička točka* plohe.

*

Ako na nekoj plohi ima eliptičkih i hiperboličkih točaka, onda su oba područja takovih točaka odijeljena krivuljom i na toj krivulji leže *paraboličke točke* plohe.

6. **Normala plohe.** Pravac n (sl. 546.), koji je okomit na dirnoj ravnini plohe u njenom diralištu, zove se *normala* plohe u toj točki.

7. **Asimptotičke linije plohe.** Ako se u smjeru jedne glavne tangente plohe u točki A pođe do susjedne točke A_1 i u smjeru glavne tangente u točki A_1 pođe opet do susjedne točke A_2 i t. d., tad točke A, A_1, A_2, leže na krivulji, koja se zove *asimptotička linija* plohe. Na plohi s hiperboličkim točkama ima dvije skupine asimptotičkih krivulja. Na krivulji plohe s paraboličkim točkama, asimptotičke linije imadu šiljke ili umataju krivulju s paraboličkim točkama.

8. **Geodetske linije plohe.** Dvije točke plohe mogu se spojiti krivuljama na neizmjerno mnogo načina. Najkraća linija, kojom se mogu spojiti dvije točke plohe, zove se *geodetska linija* te plohe. Oskulatorne ravnine u točkama te krivulje sadrže normale plohe u tim točkama, t. j. te ravnine stoje na plohi okomito.

9. **Razred krive plohe.** Ako se pravcem može položiti na algebarsku plohu najviše m dirnih ravnina, onda se kaže, da je ta ploha m-toga razreda.

10. **Predočivanje krivih ploha projekcijama.** Kriva ploha predočuje se projekcijama na taj način, da se nacrta tlocrt i nacrt takovih linija plohe, koje su za tu plohu karakteristične. Karakteristične su linije plohe prije svega izvodnice, pa se nacrta tlocrt i nacrt nekoliko tih izvodnica. Osim projekcija izvodnica, dobro je da se nacrta presjek plohe s horizontalnom i vertikalnom ravninom.

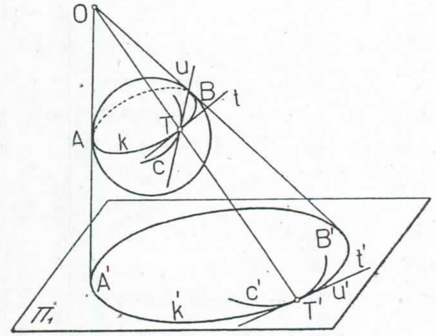
Kod predočivanja ploha projekcijama, osobito su važne linije, koje čine *konturu* projekcija. Takova se kontura dobije na slijedeći način: Ako se iz središta O projiciranja polože sve zrake, koje dotiču zadanu plohu (sl. 548.), one čine stožac, koji je toj plohi opisan. Taj stožac dotiče plohu u krivulji k, koja se zove *prava kontura* plohe s obzirom na središte projiciranja O. Ravnina projekcija Π_1 siječe opisani stožac u krivulji k', koja se zove *prividna kontura* plohe na ravnini Π_1 s obzirom na točku O.

Ako se točka O odmakne u nekom smjeru s neizmjerno daleko, onda opisani stožac prijeđe u *opisani valjak*, pa je dirna krivulja k prava kontura, a k' prividna kontura plohe s obzirom na smjer s. Prividnom konturom k' omeđena je projekcija plohe na ravnini Π_1.

Ako se ploha projicira ortogonalno na Π_1 i na Π_2, onda na toj plohi ima dvije prave i dvije prividne konture s obzirom na smjer zraka projiciranja, koje su okomite na Π_1 odnosno na Π_2.

Projekcija svake krivulje, koja leži na plohi i siječe pravu konturu, dotiče prividnu konturu.

Dokaz. Na sl. 548. uzela se na plohi krivulja c, koja siječe pravu konturu k u točki T. Krivulja c' je projekcija krivulje c, a T' projekcija točke T na ravnini Π_1 iz točke O. Nadalje su pravci t i u tangente krivulja k i c u točki T. Te dvije tangente određuju dirnu ravninu plohe u točki T. Ta ravnina sadrži i zraku projiciranja OT, ona je dakle ravnina projiciranja i zato u njezin trag na ravnini Π_1 padaju projekcije t' i u', t. j. tangente t' i u' krivulja k' i c' padaju u isti pravac. Odatle slijedi, da se te dvije krivulje dotiču u točki T'.



Sl. 548.

11. **Glavni zadaci o krivim plohama.** Glavni zadaci u deskriptivnoj geometriji u vezi s krivim plohama jesu slijedeći:

1. Odrediti projekcije koje god izvodnice ploha;
2. Odrediti projekcije točke, koja je na plohi;
3. Položiti dirnu ravninu u zadanoj točki plohe;
4. Konstruirati tangentu zadanoga smjera;
5. Konstruirati prividnu konturu;

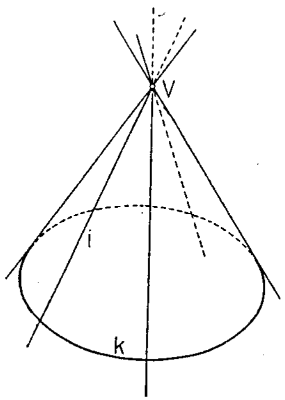
Daljnji su zadaci:

6. Odrediti presjek plohe ravninom;
7. Odrediti presjek pravca s plohom;
8. Odrediti rastavnicu i bačenu sjenu plohe;
9. Odrediti prodor dviju ploha.

§ 156. O stošcu

1. **Postanak stošca.** Ako se pravac i okreće oko jedne svoje točke V (sl. 549.) i uzato siječe zadanu krivulju k, onda on opiše krivu plohu, koja se zove *stožasta ploha*. Točka V zove se *vrh* ili *tjeme* plohe, pravac u svakom svom položaju zove se *izvodnica* plohe, a krivulja k *ravnalica*. Svaka ravnična ili prostorna krivulja, koja leži na stožastoj plohi tako, da e sijeku sve izvodnice, može se uzeti za ravnalicu. Ako je ravnalica ravnična krivulja, onda se dio prostora, koji omeđuje stožasta ploha te leži između vrha i ravnine ravnalice, zove *stožac*. Ravnalica se zove *osnovka* ili

baza stošca. Stožasta ploha nazivlje se također *plaštem* stošca. Ako se izvodnice stošca produže preko vrha V, onda se dobije drugi plašt stošca. Oba plašta čine potpunu plohu stošca.



Sl. 549.

Pod imenom „s t o ž a c" razumijeva se i tijelo i stožasta ploha.

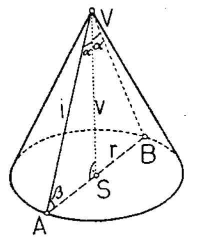
Stožasta je ploha pravčasta ploha. Stožasta se ploha sastoji samo od paraboličkih točaka.

2. Glavni presjeci stošca. Smatramo li vrh stošca središtem, a izvodnice zrakama projiciranja, onda se svaki ravni presjek stošca može smatrati centralnom projekcijom svake ravnične ili prostorne krivulje, koja potpuno leži na stožastoj plohi.

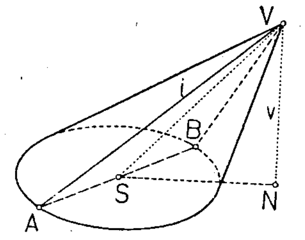
Koje god dvije ravnine Σ_1 i Σ_2 sijeku stožac u dvije krivulje k_1 i k_2, koje su perspektivno kolinearne, gdje je vrh stošca središte kolineacije, a presječnica s obih presječnih ravnina os kolineacije.

Usporedne ravnine sijeku stožac u sličnim i slično položenim krivuljama, te je vrh stošca središte sličnosti.

3. Stožac drugoga reda. Ako je ravnalica k ravnična krivulja n-toga reda, onda je i stožac istoga reda. Ako je ravnalica krivulja 2. reda, onda je i stožac 2. reda. *Stožac 2. reda može biti samo kružan* i *eliptičan.* Vidjeti



Sl. 550.



Sl. 551.

ćemo poslije, da ravnina može sjeći stožac 2. reda u elipsi, hiperboli i paraboli, prema tome je svaki stožac 2. reda ujedno eliptičan, paraboličan i hiperboličan.

Pravac SV, koji spaja središte S kružne osnovke stošca s vrhom V, zove se *os* stošca, ako je ta spojnica okomita na toj osnovci. Takav stožac je *uspravan* (rotacioni) (sl. 550.), a ako je spojnica SV kosa prema osnovci,

stožac je *kos* (sl. 551.). *Kosi kružni stožac predstavlja najopćenitiji oblik stošca 2. reda.* Izvodnice ili stranice uspravnog stošca među sobom su jednake, stranice kosog stošca uopće su nejednake.

Presjek stošca ravninom, koja je položena kroz os toga stošca, zove se *osni presjek* stošca. Osni su presjeci rotacionog stošca među sobom sukladni istokračni trokuti, a kosoga stošca raznostrani trokuti. Osni presjek, koji kosi stožac dijeli na dvije simetrične polovice, zove se *karakterističan presjek* toga stošca. Taj presjek sadrži najdulju i najkraću izvodnicu stošca.

Udaljenost vrha V stošca od ravnine osnovke zove se *visina* stošca (*v*. sl. 550. i 551.). Visina uspravnog stošca podudara se s njegovom osovinom.

Za polumjer r osnovke kružnog stošca kaže se, da je ujedno *polumjer stošca.*

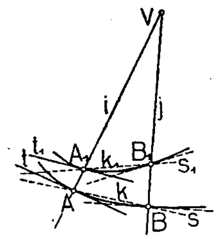
4. Postanak rotacionog stošca. Rotacioni stožac nastane, kad se pravac i okreće ili rotira oko pravca v, koji pravac i siječe u stalnoj točki V. Izvodnica i u svakom svom položaju zatvara s pravcem v konstantni kut α. Svaka ravnina, koja ide osju v (osni presjek), sadrži dvije izvodnice VA i VB (sl. 550.) i promjer AB osnovke. Trokut je ABV istokračan ($VA = VB$); kut $AVB = 2\alpha$ zove se *kut na vrhu stošca.* Budući da je kut α konstantan, to je konstantan i kut β, koga čine izvodnice sa osnovkom.

Geometrijsko mjesto sviju pravaca, koji idu stalnom točkom V i koji sa zadanim smjerom čine jednake kutove, jest rotacioni stožac.

Geometrijsko mjesto sviju pravaca, koji idu stalnom točkom i koji sa zadanom ravninom čine jednake kutove, jest rotacioni stožac.

Rotacioni stožac, kojemu su izvodnice jednake promjeru osnovke, zove se *istostrani stožac.* Osni je presjek toga stošca istostrani trokut.

5. Dirne ravnine stošca. Položimo li vrhom V stošca ravninu Δ tako, da ona siječe ravnalicu k u dvije točke A i B (sl. 552), onda su spojnice tih sjecišta s vrhom V dvije izvodnice i i j stošca. Spoje li se točke A i B s pravcem s, taj je pravac sekanta stošca, koja leži u ravnini Δ. Uzme li se na stošcu koja god druga krivulja k_1, izvodnice i i j sijeku tu krivulju u točkama A_1 i B_1, pa je spojnica s tih točaka također sekanta stošca, koja leži u ravnini Δ. Ako se točka B primakne točki A neizmjerno blizu, onda se i izvodnice i i j primaknu neizmjerno blizu, pa sekante s i s_1 prijeđu u tangente t i t_1, koje dotiču krivulje k i k_1, dakle i stožac u točkama A i A_1. Ravnina Δ prijeđe u ravninu, koja sadrži izvodnicu i i tangente t i t_1. Budući da ravnina (i, t) sadrži sve tangente, koje dotiču stožac u točkama, koje leže na izvodnici



Sl. 552.

i, tad je ravnina (it) dirna ravnina stošca duž izvodnice i. Ta se izvodnica zove *dirna izvodnica.*

Svaka dirna ravnina stošca dotiče stožac u svim točkama jedne te iste izvodnice. Sve dirne ravnine stošca idu vrhom toga stošca.

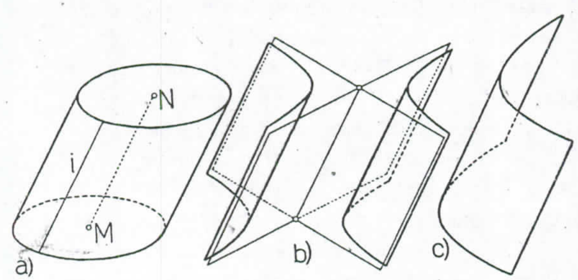
§ 157. O valjku

1. Postanak valjka. Ako se vrh V stošca odmakne neizmjerno daleko, onda stožasta ploha prijeđe u *valjkastu plohu.* Izvodnice su valjkaste plohe među sobom usporedne. Valjkasta ploha nastane, kad se pravac i tako kreće, da je uvijek usporedan prema zadanom smjeru i da siječe zadanu krivulju k. Valjkasta je ploha pravčasta ploha.

Svaka ravnična ili prostorna krivulja, koja leži na valjkastoj plohi, može se uzeti za ravnalicu k.

Usporedne ravnine, koje nijesu usporedne s izvodnicama, sijeku valjkastu plohu u sukladnim krivuljama. Usporednim pomicanjem može se jedna presječna krivulja dovesti u drugu krivulju. Ako valjkastu plohu siječemo s dvije usporedne ravnine, onda se dio valjkastog prostora, koji se nalazi između tih dviju ravnina, zove *valjak.* Valjkasta ploha, koja omeđuje valjak, zove se *plašt valjka.* Oba usporedna i sukladna presjeka zovu se *osnovke* ili *baze* valjka. Izvodnice ili stranice valjka među sobom su usporedne i jednake. Pod imenom valjak razumijeva se i tijelo i valjkasta ploha.

2. Valjak drugoga reda. Ako je ravnalica ravnična krivulja n-toga reda, onda je i valjak istoga reda. Ako je ravnalica krivulja 2. reda, onda je i valjak 2. reda. Valjak može biti *eliptičan* (sl. 553. a), *hiperboličan* (sl.



Sl. 553.

553. b) i *paraboličan* (sl. 553. c), prema tome, da li je osnovka elipsa, hiperbola ili parabola. Eliptičan valjak može se s sjeći ravninom tako, da presjek bude krug. Prema tome je eliptičan valjak identičan s kružnim kosim valjkom.

Hiperboličan valjak ima u beskonačnosti dvije realne različite izvodnice, a paraboličan valjak ima u beskonačnosti dvije realne izvodnice, koje padaju zajedno. Hiperboličan valjak ima dvije asimptotične ravnine, koje dotiču valjak uzduž neizmjerno dalekih izvodnica.

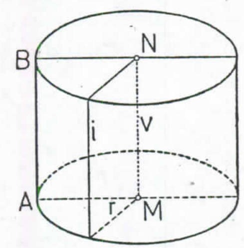
3. Kružni valjak. Mi ćemo se baviti kružnim valjcima. Dužina, koja spaja središta osnovaka, zove se *os* valjka. Ako je os valjka okomita na osnovkama valjak je *uspravan,* a ako je os kosa prema osnovkama valjak je *kos.* Stranice su valjka usporedne sa osi i jednake toj osi.

Uspravni kružni valjak zove se također *rotacioni* valjak. Rotacioni valjak nastane kad se pravokutnik $MNBA$ zavrti oko stranice MN (sl. 554.). Polumjer osnovke ujedno je polumjer valjka.

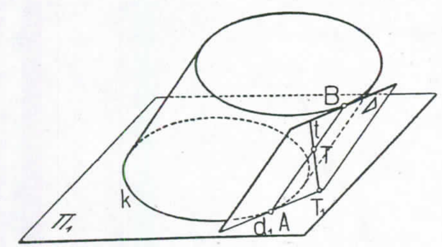
Rotacioni valjak, kojemu su izvodnice jednake promjeru osnovke, zove se *istostrani* valjak.

Svaka ravnina, položena osju valjka, siječe rotacioni valjak u pravokutniku, a kosi valjak u paralelogramu. Takovi se presjeci zovu *osni presjeci* valjka. Osni su presjeci istostranog valjka sukladni kvadrati. Osni presjek kosog valjka, koji taj valjak dijeli na dvije simetrične polovice, zove se *karakterističan presjek* kosoga valjka.

4. Dirne ravnine valjka. Na sličan način kao i za stožac (§ 156., t. 5.) dokazalo bi se, da svaka dirna ravnina Δ valjka dotiče valjak u svim točkama jedne te iste izvodnice AB (sl. 555.). Ta se izvodnica zove *dirna*



Sl. 554.



Sl. 555.

izvodnica. Svaka je dirna ravnina valjka usporedna sa izvodnicama toga valjka. Svaki pravac, koji leži u dirnoj ravnini valjka, dotiče valjak u točki, koja leži na dirnoj izvodnici. Na pr. pravac t dotiče valjak u točki T izvodnice AB.

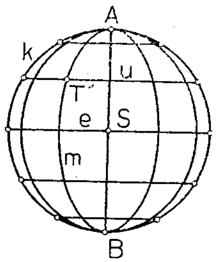
Svaka dirna ravnina valjka ima u ravnini osnovke trag, koji ide probodištem dirne izvodnice s ravninom te osnovke i dotiče osnovnu krivulju. Ako je donja osnovka valjka u Π_1 (sl. 555.), onda trag d_1 dirne ravnine Δ uzduž izvodnice AB ide točkom A i dotiče osnovnu krivulju k u toj točki.

§ 158. O kugli

1. Postanak kugle. Kad se kružnica k (sl. 556.) zavrti oko kojegagod svoga promjera AB, onda opiše *kuglastu* ili *kuglinu plohu*. Dio prostora, koji je omeđen kuglastom plohom, zove se *kugla*. Pod imenom kugla razumijeva se i tijelo i kuglina ploha. Središte kružnice k ujedno je središte kugle i kugline plohe. Dužina, koja spaja koju god točku kugline plohe sa središtem, zove se *polumjer* kugline plohe i kugle. Kugla ima neizmjerno mnogo polumjera i svi su među sobom jednaki. Prema tome sve su točke kugline plohe jednako udaljene od središta kugle, pa se može reći:

Kugla je geometrijsko mjesto točaka prostora, koje su jednako udaljene od jedne stalne točke.

Dužina, koja spaja dvije točke kugline plohe, zove se *tetiva* kugle. Najveće tetive idu središtem kugle i zovu se *promjeri*. Svaki je promjer jednak dvostrukom polumjeru kugle, i zato su svi ti promjeri među sobom jednaki. Promjer AB zove se *os* kugle, a krajnje točke A i B toga promjera zovu se *polovi*. Svaki se promjer kugle može smatrati njezinom osi.



Sl. 556.

Svaka točka kružnice k (sl. 557.) opiše kružnicu, kojoj je središte u osi AB i kojoj je ravnina okomita na AB. Budući da su ravnine sviju tih kružnica među sobom usporedne, zovu se te kružnice *usporednici*. Najveći se usporednik zove *ekvator* kugle (e, sl 557.). Svaki položaj, kojega zauzme kružnica k vrtnjom oko AB, zove se *meridijan* kugle (m, sl. 557.). Svi su meridijani kugle među sobom jednaki i svi idu kroz oba pola. Središta su ekvatora i svih meridijana u središtu kugle, a polumjeri su im jednaki polumjeru kugle. Sve meridijanske ravnine idu osju kugle.

Kugla je određena, kad joj je zadano središte i polumjer.

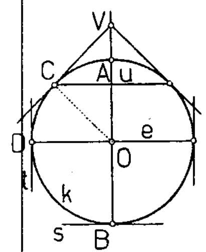
2. Dirni valjci i stošci kugle. Ako se u ravnini kružnice k (sl. 557.) u njezinoj točki C povuče tangenta na tu kružnicu, ona će sjeći produljeni promjer AB u točki V. Kad se kružnica k zavrti oko promjera AB zajedno s tangentom VC, onda k opiše kuglinu plohu, a VC plašt rotacionog stošca, koji dotiče kuglinu plohu uzduž kružnice u, koju opiše točka C. Taj se stožac zove *dirni stožac* kugle, a kružnica u *dirna kružnica*. Tangenta VC je u svakom svom položaju i tangenta kugle, a jer se veličina dužine VC okretanjem oko AB ne mijenja, možemo reći: *Dužine su tangenata, koje se mogu povući na kuglu s jedne točke izvan kugle, među sobom jednake.*

Svakom se rotacionom stošcu dade upisati kugla, kojoj je središte u osi stošca, a polumjer joj je jednak okomici spuštenoj sa središta na koju god izvodnicu stošca. Nožištem te okomice ide dirna kružnica, kojoj je ravnina okomita na osi stošca.

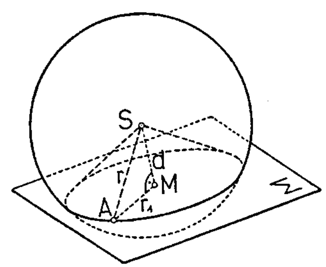
Povuče li se na kružnicu k tangenta t usporedno s promjerom AB, pa se s kružnicom zavrti oko AB, ona će opisati plašt rotacionog valjka, koji dotiče kuglu uzduž kružnice e, koju opiše diralište D. Taj se valjak zove dirni valjak kugle, a kružnica e dirna kružnica. Polumjer valjka jednak je polumjeru kugle. Tangenta t dotiče kružnicu e u svakom njezinom položaju, u koji dođe rotacijom. Svakom se rotacionom valjku može upisati kugla, koja dotiče njegov plašt. Središte je kugle u osi valjka, a njezin polumjer jednak je polumjeru valjka. Dirna kružnica leži u ravnini položenoj središtem kugle okomito na os valjka.

3. Dirna ravnina kugle. Ako se u točki B (sl. 557.) kružnice k povuče tangenta s, onda će ona vrtnjom oko promjera AB opisati ravninu Σ, koja ima s kuglom zajedničko samo dirालište B. Ravnina Σ zove se *dirna ravnina* kugle u točki B. Ta je ravnina okomita na polumjeru OB. U svakoj se točki kugline plohe može položiti dirna ravnina te plohe. Dirna ravnina ima s kuglom zajedničku samo jednu točku (dirалište). *Dirna je ravnina kugle okomita na polumjeru u diralištu.*

Svaka ravnina, koja dotiče koji god dirni stožac ili valjak kugle, dotiče kuglu u točki, u kojoj dirna izvodnica siječe dirnu kružnicu.



Sl. 557.



Sl. 558.

4. Presjek kugle ravninom. *Presjek kugle ravninom jest kružnica.* Budući da su točke presječne krivulje na kuglinoj plohi, one su jednako udaljene od središta kugle (sl. 558.). Prema tome točke presjeka leže u presječnoj ravnini i jednako su udaljene od jedne točke S, koja je izvan te ravnine, pa prema jednom stereometrijskom poučku te točke leže na kružnici. Središte je M te kružnice u nožištu okomice spuštene sa središta S kugle na presječnu ravninu Σ. Polumjer presjeka r_1 zavisi o daljini d presječne ravnine od središta kugle. Iz pravokutnog je trokuta SMA: $r_1 = \sqrt{r^2 - d^2}$. Ako je $d = O$, onda presječna ravnina ide središtem kugle, a presjek je *glavni kuglin krug*, kojemu je središte u središtu kugle, a polumjer mu je jednak polumjeru kugle. Svaka ravnina položena središtem kugle, dijeli kuglu na dvije sukladne polovice, koje se zovu *polukugle*. Što je presječna ravnina udaljenija od središta kugle, to je polumjer presjeka manji. Ako je $d = r$, onda ravnina dotiče kuglu u jednoj točki.

XXVIII. Predočivanje stošca i valjka projekcijama

A. Predočivanje stošca projekcijama Dirne ravnine i sjene stošca

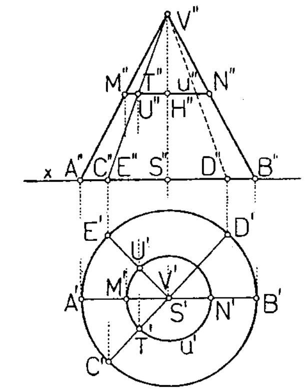
§ 159. Projiciranje uspravnog stošca

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1! (Sl. 559.).

Rješenje. Najprije će se nacrtati projekcije osnovke i vrha. Osnovka se projicira na Π_1 u pravoj veličini, a nacrt joj je dužina $A''B''$ u osi x, pa je jednaka promjeru osnovke.

Os je stošca SV okomita na Π_1, te je njezin tlocrt točka S' ili V', a nacrt dužina $S''V''$, koja je okomita na osi x i jednaka pravoj veličini visine.

Stranice stošca projiciraju se na Π_1 kao polumjeri osnovke, a na Π_2 kao dužine, koje idu točkom V''. Tlocrt je stranice CV dužina $C'V'$, a nacrt dužina $C''V''$. Stranice AV i BV projiciraju se na Π_2 u pravoj veličini (zašto?). Ostale stranice projiciraju se na Π_1 i na Π_2 prikraćeno. Nacrti $A''V''$ i $B''V''$ izvodnicâ AV i BV čine konturu nacrta stošca. Nacrt je stošca istokračan trokut $A''B''V''$.



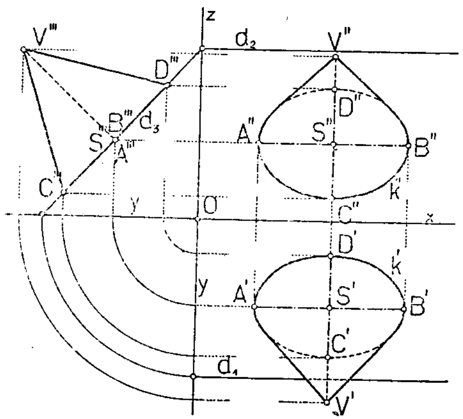
Sl. 559.

Budući da sve stranice stošca čine plašt toga stošca, to je tlocrt plašta krug, a nacrt istokračan trokut.

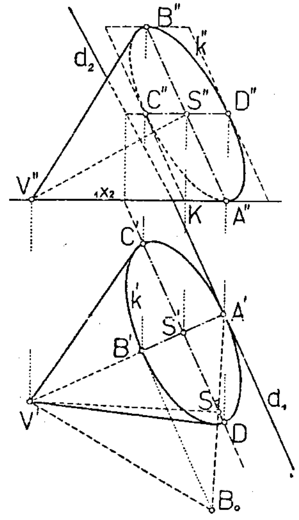
2. Vidljivost. Kad gledamo u smjeru, koji je okomit na Π_1, onda vidimo čitav plašt stošca, dakle i sve njegove stranice. Gledamo li u smjeru, koji je okomit na Π_2, onda se vidi prednja polovica plašta. Tlocrt je te polovice polukrug $A'C'B'$. Nacrt prednje i stražnje polovice pada zajedno u istokračan trokut $A''B''V''$.

3. Točka na plaštu stošca. Točka je na plaštu stošca, kad se nalazi na jednoj izvodnici stošca. Točka je $T(T', T'')$ na izvodnici CV (sl. 559.). Ako je zadan tlocrt T', onda je nacrt T'' posve određen. Ako je pak zadan nacrt T'', onda se njim položi nacrt $C''V''$ izvodnice CV i potraži tlocrt $C'V'$, u kojemu će tad ležati T'. No u točki T'' leži nacrt U'' još jedne točke U, koja leži na izvodnici EV, kojoj nacrt pada zajedno s $C''V''$, dok joj je tlocrt $E'V'$. Izvodnica je CV na prednjoj, a EV na stražnjoj polovici stošca. Prema tome je i točka T na prednjoj, a U na stražnjoj polovici stošca. Ako je dakle zadan nacrt jedne točke na plaštu stošca, onda je njezin tlocrt samo onda određen, ako se još postavi uvjet, da je točka na prednjoj ili stražnjoj polovici plašta.

4. Kružni presjek uspravnog stošca. Svaka ravnina, koja je položena usporedno s osnovkom stošca, siječe taj stožac u kružnici u, kojoj je središte $H(H' \equiv S', H'')$ na osi SV, kojoj je nacrt dužina $u'' \equiv M''N'' \parallel x$, a tlocrt kružnica u', kojoj je polumjer $= H''M''$. U sl. 559. kružnica u ide točkama T i U. Projekcije točaka T i U mogu se odrediti i spomoću kružnog presjeka u.



Sl. 560.



Sl. 561.

5. Zadatak. *Nacrtaj projekcije istostranog stošca, kojemu je osnovka u ravnini $\Delta(d_1, d_2)$ usporednoj sa osi x!* (Sl. 560.).

Rješenje. Nacrta se treći trag d_3 ravnine Δ, koja je također okomita na Π_3, zatim se nacrtaju sve tri projekcije središta S osnovke stošca. Bokocrt je osnovke dužina $C'''D'''$ u tragu d_3. Tlocrt i nacrt osnovke jesu elipse k' i k'', kojima su velike osi $A'B' = A''B'' = C'''D'''$. Te su osi usporedne sa osi x. Mala je os elipse k' dužina $C'D'$, a mala os elipse k'' dužina $C''D''$. Obje su te dužine okomite na osi x.

Os je stošca SV okomita na ravnini Δ, pa je $S'''V''' \perp d_3$, $S'V' \perp d_1$ i $S''V'' \perp d_2$. Budući da je stožac istostran, to je trokut $C'''D'''V'''$ istostran. Iz V''' odredi V'' i V'. Povuku li se s V' tangente na k', a s V''

tangente na k'', dobit će se tlocrt i nacrt stošca. Konstruiraj dirališta tih tangenata.

6. Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka u općoj ravnini* $\Gamma(c_1, c_2)$!

Rješenje. Nacrtaj prema sl. 483. tlocrt k' i nacrt k'' osnovke stošca, odredi projekcije V' i V'' vrha, te povuci s V' tangente na k', a s V'' tangente na k'', pa imaš tlocrt i nacrt traženog stošca.

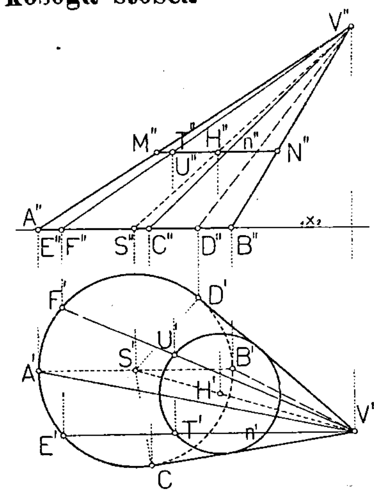
7. Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu plašt dotiče ravninu* Π_1! (Sl. 561.).

Rješenje. Neka stožac dotiče ravninu Π_1 u izvodnici AV; tlocrt je $A'V' = AV$, a nacrt je $A''V''$ u osi x. Ako se osi stošca i izvodnicom AV položi ravnina, ona je okomita na Π_1 i siječe stožac u istokračnom trokutu ABV, kojemu je tlocrt u $A'V'$. Preloži li se taj trokut oko $A'V'$ u Π_1, dobit će se u pravoj veličini kao trokut $A'B_0V'$, u kojemu je $A'B_0 =$ promjeru osnovke stošca. Povuče li se $B_0B' \perp A'V'$, dobit će se mala os elipse k', u koju se projicira periferija osnovke stošca. Velika os $C'D'$ ide središtem S' okomito na $A'B'$, te je $C'D' = A'B_0$. Nacrt S'' dobije se u ordinali točke S' tako, da se učini $S''K = S'S_0$. Spoji li se A'' s S'' i učini $S''B'' = S''A''$ dobit će se nacrt $A''B''$ promjera AB. Budući da je $CD \parallel \Pi_1$ bit će $C''D'' \parallel x$. Dužine su $A''B''$ i $C''D''$ konjugirani promjeri elipse k''. Ako se s točke V' postave tangente na k', a s V'' tangente na k'', dobiju se projekcije traženoga stošca.

§ 160. Projiciranje kosoga stošca

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kosog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1! (Sl. 562.).

Rješenje. Tlocrt je osnovke krug u pravoj veličini, a nacrt dužina $A''B''$ u osi x. Nacrtaju li se projekcije V', V'' vrha V, pa se s V' povuku tangente na krug, a V'' spoji s A'' i B'', dobije se tlocrt i nacrt kosog stošca. Krajnje izvodnice $V'C'$ i $V'D'$ jesu konturne izvodnice tlocrta. Toj konturi pripada još kružni luk $C'A'D'$. Ako V' pada unutar opsega osnovke, onda taj opseg čini konturu tlocrta. Krajnje izvodnice $A''V''$ i $B''V''$ pri-



Sl. 562.

padaju konturi nacrta. Na sl. 562. nacrtan je tlocrt izvodnica AV i BV, te nacrt izvodnica CV i DV.

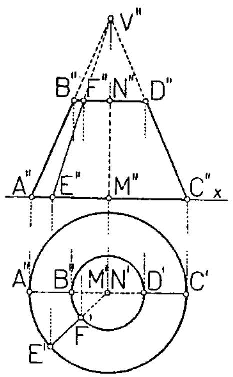
2. Vidljivost. Konturne izvodnice dijele vidljivi dio od nevidljivog dijela površine stošca. U tlocrtu se vidi gornji dio plašta stošca, koji je omeđen izvodnicama CV i DV te lukom CAD. U nacrtu se vidi prednji dio plašta, koji je omeđen izvodnicama AV i BV te lukom ACB.

3. Zadatak. *Zadan je nacrt T'' točke T, koja leži na plaštu kosog stošca; odredi tlocrt T'!*

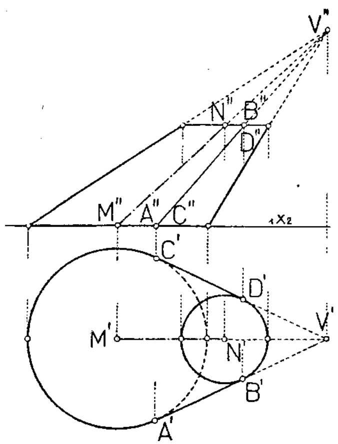
Rješenje. Tlocrt se T' odredi pomoću izvodnice EV, koja se položi točkom T. U slici se 562. uzelo, da točka T leži na prednjem dijelu stošca, koji je u tlocrtu vidljiv. Što znadeš reći o položaju točke U?

4. Kružni presjek kosoga stošca. Svaka ravnina, koja je položena usporedno s osnovkom kosoga stošca, siječe taj stožac u kružnici n, kojoj je središte $H(H', H'')$ na spojnici SV, kojoj je nacrt dužina $n'' \equiv M''N'' \parallel x$, a tlocrt kružnica n', kojoj je središte H' a polumjer $= H''M''$. Kružnica n' dotiče konturne izvodnice $V'C'$ i $V'D'$. Na sl. 562. kružni je presjek položen točkom T. Projekcije se točke T mogu odrediti pomoću kružnog presjeka.

§ 161. Projiciranje krnjega stošca



Sl. 563.



Sl. 564.

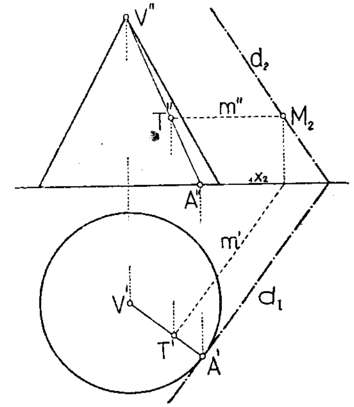
1. Uspravni i kosi krnji stožac. Ako se stožac siječe ravninom, koja je usporedna s njegovom osnovkom, onda se dobiju dva dijela, od kojih je jedan dio opet stožac, a drugi dio *krnji stožac*. Odsječeni dio stošca zove se *dopunjak krnjeg stošca*. Ima uspravnih i kosih krnjih stožaca.

2. Projiciranje krnjeg stošca. Sl. 563. prikazuje projekcije uspravnog, a sl. 564. projekcije kosog krnjeg stošca. Veće su osnovke tih stožaca u Π_1. Koje se plohe tih stožaca vide u tlocrtu, a koje u nacrtu?

§ 162. O dirnim ravninama stošca

1. Zadatak. *Zadanom točkom $T(T', T'')$, koja je na plaštu stošca, treba položiti dirnu ravninu na taj plašt!* (Sl. 565.).

Rješenje. Uzet će se, da je stožac rotacioni i da mu je osnovka u Π_1. Dirna ravnina Δ, koja dotiče plašt stošca u točki T, sadrži izvodnicu AV ($A'V'$, $A''V''$), na kojoj leži ta točka (§ 156, t. 5.). Prvi trag d_1 dirne ravnine ide točkom A' i dotiče osnovni krug u toj točki, dakle je $d_1 \perp V'A'$. Drugi trag d_2 odredi pomoću sutražnice m ($m' \parallel d_1$, $m'' \parallel x$), koja ide točkom T.



Sl. 565

Dirna izvodnica VA jest priklonica prve skupine dirne ravnine Δ. Prema tome je prvi prikloni kut te ravnine jednak prvom priklonom kutu izvodnice VA. Budući da su sve izvodnice rotacionog stošca jednako priklonjene prema ravnini osnovke Π_1, to su i prikloni kutovi sviju dirnih ravnina toga stošca prema Π_1 među sobom jednaki.

Imamo poučak:

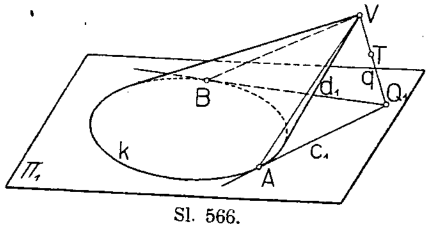
Sve ravnine, koje idu stalnom točkom V, i koje sa zadanom ravninom Σ čine jednake kutove, umataju rotacioni stožac, kojemu je točka V vrh i kojemu je nožište S okomice, spuštene s točke V na ravninu Σ, središte osnovke, a VS visina (ili os).

Može se i ovako reći: *Ako se ravnina okreće oko stalne točke V tako, da sa zadanom ravninom Σ čini jednake priklone kutove, ona umata rotacioni stožac i t. d.*

Sve su dirne ravnine rotacionog stošca jednako priklonjene prema osi toga stošca. Može se prema tome reći: *Ako se ravnina okreće oko točke V pravca p tako, da je prema tome pravcu jednako priklonjena, ona umata plašt rotacionog stošca.*

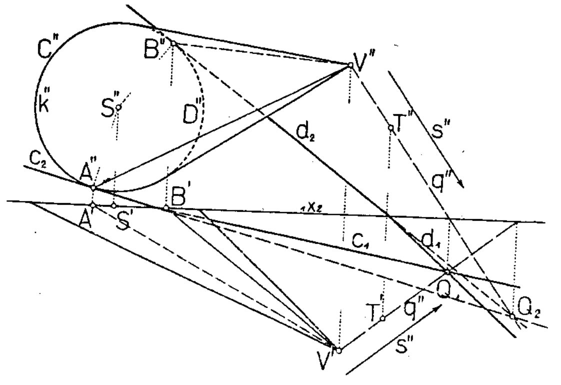
2. Zadatak. *Zadanom točkom $T(T', T'')$, koja je izvan stošca, neka se na taj stožac položi dirna ravnina!*

Rješenje. Uzmimo, da je osnovka stošca u Π_1 (sl 566.). Budući da dirna ravnina mora ići točkom T i vrhom V, ona sadrži i pravac q, koji spaja te dvije točke. Tragovi c_1 i d_1 obih dirnih ravnina idu probodištem Q_1 pravca q i dotiču osnovnu kružnicu k u točkama A i B. Pravci su VA i VB dirne izvodnice.



Sl. 566.

U sl. 567. uzelo se je, da je stožac kos i da mu je osnovka u Π_2 Točka T spojit će se s vrhom V pravcem $q\,(q' \equiv V'T'$, $q'' \equiv V''T'')$ i odredit će se probodišta Q_1 i Q_2 toga pravca. Drugi trag c_2 dirne ravnine Γ mora prema tome ići drugim probodištem Q_2 pravca q, i mora doticati obodnicu k'' osnovke. Kako ćeš odrediti prvi trag c_1? Budući da se s točke Q_2 mogu povući dvije tangente c_2 i d_2 na kružnicu k'', to se pravcem q, dakle i točkom T, mogu položiti dvije dirne ravnine na stožac.



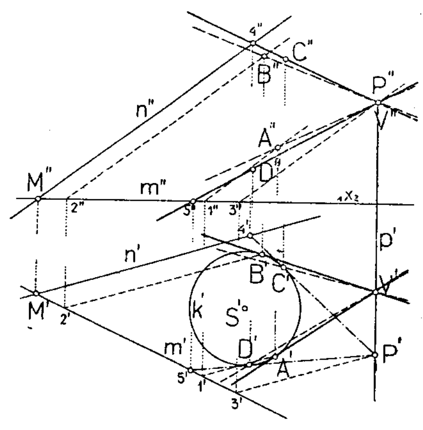
Sl. 567.

3. Zadatak. *Na zadani stožac položi one dirne ravnine, koje su usporedne sa zadanim pravcem $s\,(s', s'')$!*

Rješenje. Vrhom V (sl. 567.) položi pomoćni pravac q usporedno s pravcem $s\,(q' \parallel s'$, $q'' \parallel s'')$, a onda pravcem q položi dirne ravnine na stožac (t. 2). Zašto su te dirne ravnine usporedne s pravcem s?

4. Prividne konture stošca. *Zadana je ravnina osnovke stošca s ukrštenim pravcima $m(m', m'')$ i $n(n', n'')$ i kružnica k', koja je tlocrt osnovke stošca, nadalje je zadan vrh $V(V', V'')$ stošca; neka se odrede konturne izvodnice u tlocrtu i nacrtu!* (Sl. 568.).

Rješenje. Povuku li se s točke V' tangente $V'A'$ i $V'B'$ na kružnicu k', te su tangente konturne izvodnice za tlocrt stošca. Odredi li se nacrt A'' i B'', onda su pravci $V''A''$ i $V''B''$ nacrti izvodnica VA i VB $[A'1' \parallel n'$, $1''A'' \parallel n''$; $B'2' \parallel n'$, $2''B'' \parallel n'']$.



Sl 568.

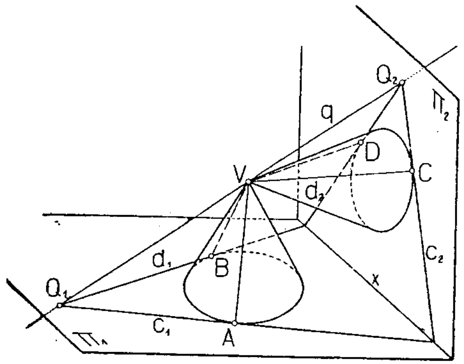
Ako se na stožac polože dirne ravnine okomito na Π_2, one dotiču stožac u one dvije izvodnice VC i VD, koje se projiciraju na Π_2 kao konturne izvodnice nacrta stošca. Obje te dirne ravnine sijeku se u pravcu p, kojemu je nacrt u točki V'', dok mu je tlocrt pravac $p' \perp x$. Pravac p siječe ravninu osnovke stošca u točki $P\,(P'' \equiv V''$, $P''3'' \parallel n''$, $3'P' \parallel n')$. Ako se s točke P' povuku tangente $P'C'$ i $P'D'$ na kružnicu k', te su tangente tlocrti onih pravaca, u kojima dirne ravnine sijeku ravninu osnovke. Nacrti tih pravaca idu točkom P'', dakle i točkom V'', u te pravce padaju drugi tragovi dirnih ravnina, dakle i nacrti $V''C''$ i $V''D''$ onih izvodnica VC i VD stošca, koji su prava kontura za nacrt. Pravci su $V''C''$ i $V''D''$ kontura nacrta. $V'C'$ i $V'D'$ jesu tlocrti izvodnica VC i VD.

Nacrt je osnovke elipsa, koja bi išla točkama A'', C'', B'', D'' i koja bi doticala konturne izvodnice $V''C''$ i $V''D''$ u točkama C'' i D'' kada bismo tu elipsu nacrtali. U tlocrtu vidio bi se luk $A'C'B'$, a u nacrtu luk $C''A''D''$.

5. Zajedničke dirne ravnine dvaju stožaca. *a) Oba stošca imaju različite vrhove i različite osnovke.* Dirne ravnine moraju sadržavati pravac, koji spaja oba vrha stožaca. No ako se tim pravcem položi dirna ravnina na jedan stožac, ona ne mora doticati i drugi stožac, t. j. na takova dva stošca uopće se ne mogu postaviti zajedničke dirne ravnine.

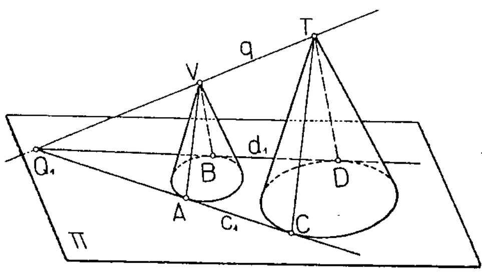
b) Oba stošca imaju zajednički vrh i različite osnovke. Na ovakva dva stošca dadu se položiti uopće četiri zajedničke dirne ravnine. Ako su osnovke u istoj ravnini, onda su zajedničke tangente tih osnovaka tragovi zajedničkih dirnih ravnina obih stožaca na toj ravnini. U sl. 569. osnovke su u različitim ravninama. Vrhom V položi se pravac q po volji. Tragovi su dviju dirnih ravnina c_1, c_2 i d_1, d_2.

c) Oba stošca imaju zajedničku ravnalicu (ili osnovku), a različite vrhove. Na takova dva stošca mogu se položiti dvije zajedničke dirne ravnine.



Sl. 569.

d) Oba su stošca slična i slično položena. (Sl. 570.). Dvije i dvije izvodnice takovih dvaju stožaca među sobom su usporedne. Presjeci (osnovke) tih stožaca s istom ravninom Π_1, jesu slične krivulje. Središte sličnosti tih krivulja leži u probodištu Q_1 pravca q, koji spaja oba vrha, s ravninom Π_1. Tangenta c_1 povučena s točke Q_1 na jedan presjek mora doticati i drugi presjek. Ta je tangenta trag u ravnini Π_1 zajedničke dirne ravnine obih stožaca.



Sl. 570.

Na dva slična stošca, kojima su osnovke u istoj ravnini, mogu se položiti zajedničke dirne ravnine.

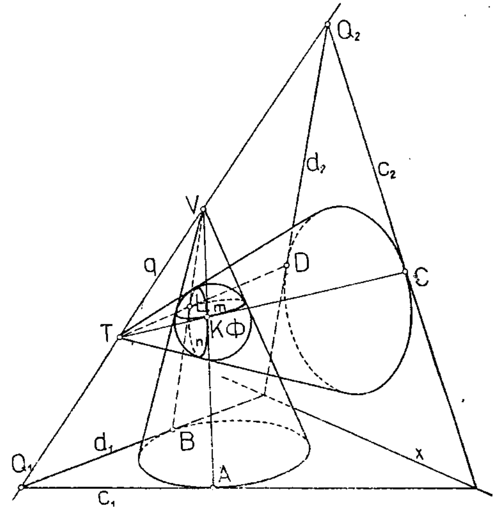
e) Oba stošca opisana su istoj površini Φ (sl. 571.). Oba stošca dotiču plohu Φ, na pr. kuglu, u krivuljama m i n, koje se sijeku u točkama K i L. Ako se u tim točkama polože dirne ravnine na plohu Φ, one dotiču i oba stošca u izvodnicama VA, VB i TC, TD. Te dirne ravnine sadrže pravac q, koji spaja oba vrha V i T stožaca. Tragovi dirnih ravnina idu probodištima Q_1 i Q_2 na ravninama osnovaka i dotiču te osnovke.

Ako dva stošca dotiču istu plohu, onda se na takova dva stošca mogu položiti zajedničke dirne ravnine.

§ 163. Sjene stošca

1. Zadatak. *Odredi sve sjene uspravnog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *ako je pravcem* s (s', s'') *zadan smjer usporednih zraka svijetla!*

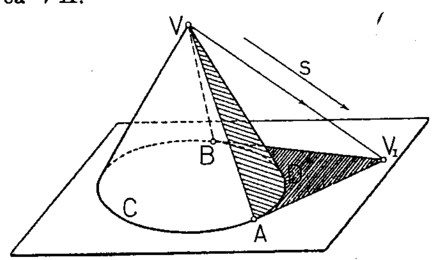
Rješenje. Ako se polože obje dirne ravnine na stožac, koje su usporedne sa zrakama svijetla, dobit će se dvije dirne izvodnice VA i VB (sl. 572.). Te dvije izvodnice dijele plašt stošca na dva dijela i to jedan je dio okrenut prema smjeru zraka svijetla i taj je osvjetljen i drugi dio, koji ne zgađaju zrake svijetla, pa je u samosjeni. Obje izvodnice VA i VB jesu *rastavnice*, koje dijele osvjetljeni dio plašta od onoga dijela, koji je u samosjeni. Dio ravnine Π_1, koji je između oba traga $V_I A$ i $V_I B$, nalazi se u bačenoj sjeni stošca. Dužine AV_I i BV_I jesu bačene sjene izvodnica AV i BV.



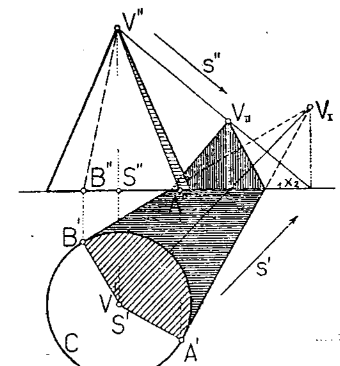
Sl. 571.

U sl. 573. položena je vrhom V zraka svijetla, određena su probodišta V_I i V_{II} te zrake, i s točke V_I povučene su tangente $V_I A'$ i $V_I B'$ na tlocrt osnovke. Dužine su $V'A$ i $V'B'$ tlocrti izvodnica VA VB, koje pripadaju rastavnici, a $V''A''$ i $V''B''$ nacrti tih izvodnica. Dio bačene sjene stošca pada u Π_1, a dio u Π_2. Dio plašta, koji je između izvodnica AV i BV, a okrenut je bačenoj sjeni, nalazi se u samosjeni. U samosjeni je i osnovka stošca, pa luk ABC osnovne kružnice također pripada rastavnici.

U tlocrtu se vide obje izvodnice VA i VB, a u nacrtu samo izvodnica VA.



Sl. 572.

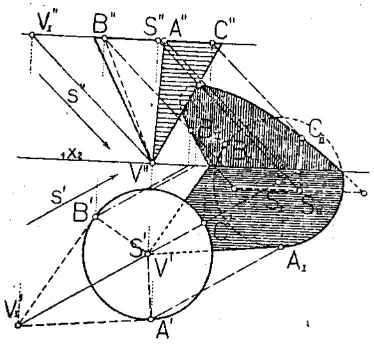


Sl. 573.

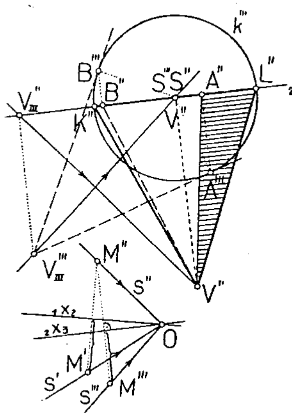
2. Zadatak. *Odredi sve sjene na kosom stošcu, kojemu je osnovka u Π_2, kod usporedne rasvjete!*

Rješenje. Ako se u sl. 567. uzme da pravac s naznačuje smjer usporednih zraka svijetla, onda dirne izvodnice AV i BV pripadaju rastavnici na stošcu. Dio je $VACBV$ osvjetljen, a dio je $VADBV$ u samosjeni. U samosjeni je i osnovka. Rastavnicu čini prostorni lik $VACBV$. Tragovi c_2, d_2 i c_1, d_1 dirnih ravnina Γ i Δ omeđuju na Π_2 i Π_1 bačenu sjenu stošca. U te tragove padaju sjene izvodnica AV i BV.

3. Zadatak. *Odredi sjene uspravnog stošca, kojemu je osnovka usporedna s Π_1, a vrh u Π_1!* (Sl. 574.).



Sl. 574.



Sl. 575.

Rješenje. I ovdje se vrhom V povuče zraka svijetla usporedno sa zadanom zrakom s, odredi se probodište V_I (V_I', V_I'') ove zrake s osnovnom ravninom, i s točke V_I' povuku tangente na tlocrt osnovke. Te tangente možemo smatrati tragovima dirnih ravnina položenih na stožac usporedno sa zrakama svijetla. Dirne izvodnice VA i VB ($V'A' \perp V_I'A'$, $V'B' \perp V_I'B'$) jesu rastavnice na stoščevu plaštu, te je u nacrtu izvodnica VA vidljiva, a BV nevidljiva. Rastavnici pripada i kružni luk ACD. Bačena će se sjena stošca dobiti, ako se odredi bačena sjena rastavnice $VACBV$.

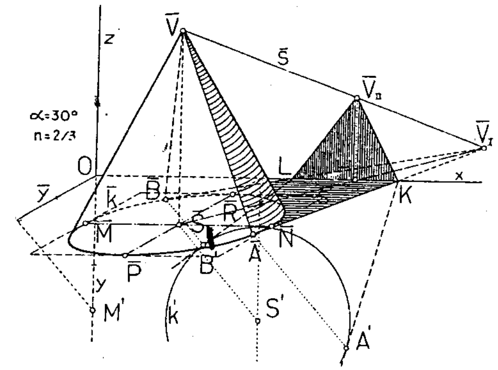
4. Zadatak. *Zadan je nacrt rotacionog stošca, kojemu je osnovka okomita na Π_2 i smjer usporednih zraka svijetla s (s', s''), odredi nacrt izvodnica toga stošca, koje pripadaju rastavnici!* (Sl. 575.).

Rješenje. Ova će se zadaća riješiti upotrebom stranocrta. Nacrt je stošca istokračan trokut $K''L''V''$, a stranocrt krug k''', gdje je os ${}_2x_3 \equiv K''L''$. Uzet će se gdjegod smjer osi ${}_1x_2$ (sl. 575. a) i na toj osi točka O, pa će se tom točkom povući projekcije s', s'' smjera zraka svijetla i os ${}_2x_3 \parallel K''L''$ i odredit će se stranocrt s''' zrake s. [$M''M''' \perp {}_2x_3$, M''' do osi ${}_2x_3 = M'$ do osi ${}_1x_2$]. Sad će se točkom V položiti zraka svijetla i potražit će se njezino probodište V_{III} s osnovnom ravninom. Tragovi dirnih ravnina stošca, koje su usporedne sa zrakama svijetla, idu točkom V_{III} i dotiču osnovnu kružnicu k u točkama A i B. Stranocrti su tih tragova tangente $V_{III}A'''$ i $V_{III}B'''$ potegnute s točke V_{III} na kružnicu k''' (sl. 575.). Nacrti su A'', B'' na pravcu $K''L''$, pa spoje li se te točke sa V'', tada su $V''A''$ i $V''B''$ nacrti dirnih izvodnica, koje pripadaju rastavnici stošca. Budući da se prednja polovica osnovke preložila oko $K''L''$ prema dolje i budući da na toj polovici leži točka A, slijedi da je izvodnica VA u nacrtu vidljiva, dok je izvodnica VB nevidljiva. Dio samosjene plašta, koji se u nacrtu vidi, leži između izvodnica $V''A''$ i $V''L''$.

§ 164. Kosa projekcija stošca

1. Kosa projekcija stošca, kojemu je osnovka u ravnini xy. Uzet će se, da je $\sphericalangle \alpha = 30^\circ$, a prikrata $n = \frac{2}{3}$ (sl. 576.), pa će se nacrtati kosa projekcija kružnice k. Ta je kosa projekcija elipsa $\bar{k}$, kojoj su dva konjugirana promjera $\bar{M}\bar{N}$ i $\bar{P}\bar{R}$ usporedna s osi $\bar{x}$ odnosno $\bar{y}$ te je $\bar{M}\bar{N} = 2r$ i $\bar{P}\bar{R} = \frac{2}{3}\bar{M}\bar{N} = \frac{4}{3}r$. Elipsa $\bar{k}$ može se konstruirati spomoću tlocrta k' kružnice k i konstrukcionog trokuta $OM'\bar{M}$ (§ 134., t. 2.).

Ako je kružnica k osnovna kružnica rotacionog stošca, onda kosa projekcija $\bar{V}\bar{S}$ osi VS toga stošca ide središtem $\bar{S}$ elipse $\bar{k}$, usporedna je sa osi z i projicira se u pravoj veličini. Tangente povučene s vrha $\bar{V}$ na elipsu $\bar{k}$ jesu konturne izvodnice za kosu projekciju stošca.



Sl. 576.

2. Sjene stošca u kosoj projekciji. Vrhom $\bar{V}$ povuče se kosa projekcija $\bar{s}$ zrake svijetla s: tlocrt $\bar{s}'$ te zrake ide točkom $\bar{S}$. Pravci $\bar{s}$ i $\bar{s}'$ mogu se po volji povući. Ti se pravci sijeku u točki $\bar{V}_I$ i ta je točka probodište zrake s sa ravninom osnovke xy. U pravac $\bar{S}\bar{V}_I$ pada sjena osi stošca na osnovnu ravninu. Ta se sjena lomi u osi x u točki H i pada u pravac $H\bar{V}_{II}$, koji je okomit na osi x. (Zašto?). Ako se s točke $\bar{V}_I$ povuku tangente na elipsu $\overline{k}$, onda dio osnovne ravnine, koji se nalazi između tih tangenata, leži u bačenoj sjeni stošca na tu ravninu. No ta je sjena realna samo do osi x, tu se lomi i svršava u točki $\overline{V}_{II}$. Ako se dirališta $\overline{A}$ i $\overline{B}$ tangenata potegnutih s točke $\overline{V}_I$ na elipsu $\overline{k}$ spoje s vrhom V, dobit će se izvodnice, koje pripadaju rastavnici. Dirališta se $\overline{A}$ i $\overline{B}$ dobiju pomoću afine srodnosti, koja postoji između kružnice k' i elipse k s obzirom na os afinosti x.

3. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka *a)* u Π_2, *b)* u Π_3, $r = 2{,}5$, $v = 5$.

2. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka u ravnini Σ, polumjer $r = 2.5$, visina $v = 6$. Na pr.: *a)* $\Sigma \perp \Pi_1$, *b)* $\Sigma \perp \Pi_2$, *c)* Σ (7 5 7), S (2 2 —); *d)* Σ (4 —2 3), S (4 — 3).

3. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu su A (3 1 3), B (6 2 3), C (4 4 5) tri točke obodnice osnovke i kojemu vrh leži u ravnini $\mathbf{A}$ (∞, ∞, 6) $\parallel \Pi_1$.

4. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je polumjer $r = 2{,}5$, i koji svojim plaštem dotiče Π_2 u izvodnici AV [A (3 0 2), V (7 0 5)].

5. Nacrtaj projekcije stošca, kojemu je vrh u zadanoj točki A i kojemu izvodnice čine: *a)* s Π_1, *b)* s Π_2, *c)* s kosom ravninom kut $\alpha = 30^0$ (45^0, 60^0).

6. Nacrtaj projekcije rotacionog stošca, kojemu je zadan vrh V, kojemu osnovka leži u zadanoj kosoj ravnini i kojemu je polumjer $r = 3$ cm.

7. Nacrtaj projekcije rotacionog stošca, kojemu je jedna stranica AV [A (6 6 0), V (4 0 8)] i kojemu je polumjer $r = 3$.

8. Nacrtaj projekcije uspravnoga stošca, kojemu vrh leži u Π_2 i kojemu osnovna kružnica dotiče Π_1. (Upotrebi bokocrt!).

9. Zadana su dva ukrštena pravca a i b, od kojih je $a \perp \Pi_1$ (ili $\perp \Pi_2$); odredi projekcije rotacionog stošca, kojemu je a os, a b izvodnica.

10. Zadana su dva ukrštena pravca a i b tako, da je ravnina tih pravaca okomita na Π_1 (ili $\perp \Pi_2$); odredi projekcije rotacionog stošca, kojemu je a os, a b izvodnica.

11. Nacrtaj projekcije rotacionog stošca, kojemu je zadan vrh V i središte osnovke S.

12. Zadana su tri pravca a, b, c, od kojih je $a \perp \Pi_1$, $b \parallel x$, $\sphericalangle (c'x) = \sphericalangle (c''x) = 45^0$; konstruiraj rotacioni stožac, kojemu su tri izvodnice jednake po 4,5 cm i koje leže u pravcima a, b, c.

13. Nacrtaj projekcije istostranog stošca, kojemu su zadane tri točke osnovnoga kruga.

14. Nacrtaj projekcije kosoga stošca, kojemu je osnovka: *a)* u Π_2, *b)* u Π_3.

15. Nacrtaj projekcije kosoga stošca kojemu je osnovka elipsa u Π_1.

16. Zadane su tri izvodnice kosoga kružnoga stošca, kojemu osnovka leži u zadanoj ravnini $\mathbf{P}$ (r_1, r_2); odredi projekcije toga stošca.

17. Osnovka je stošca elipsa, kojoj je tlocrt krug, a nacrt dužina, koja je nagnuta prema osi x; nacrtaj projekcije toga stošca i pravu veličinu osnovke.

18. Zadane su četiri točke A (6 2 3), B (4 4 5), C (3 1 3), V (4 1 7); nacrtaj projekcije stošca, kojemu osnovna kružnica ide točkama A, B, C i kojemu je točka V vrh.

19. Zadana je os kosoga stošca SV [S (5 5 0), V (7 4 5)] i njegova najduža izvodnica $VA = 7$; nacrtaj projekcije toga stošca.

20. Nacrtaj projekcije uspravnog krnjeg stošca, kojemu je manja osnovka u Π_1.

21. Nacrtaj projekcije uspravnog krnjeg stošca, kojemu je *a)* veća, *b)* manja osnovka u Π_2.

22. Nacrtaj projekcije uspravnog krnjeg stošca, kojemu su polumjeri osnovaka $r = 3$ *cm*, $r_1 = 1{,}6$ *cm*, a stranica $s = 4{,}7$ *cm*.

23. Nacrtaj u umanjenom mjerilu projekcije nekih predmeta, koji imadu oblik uspravnog krnjeg stošca.

24. Nacrtaj projekcije kosog krnjeg stošca, kojemu je osnovka u Π_2.

25. Na uspravni stožac, kojemu je osnovka u Π_1 [vrh V (4 5 3), $r = 2$] položi dirne ravnine, i to: *a)* točkom A (3 — 4), koja je na plaštu; *b)* koje idu točkom B (7 2 0,5); *c)* usporedno s pravcem CD [C (0 2 3), D (3 5 6)].

26. Osnovka je uspravnog stošca u ravnini Σ (∞ 4 5), središte joj je M (5 2 —), $r = 2{,}5$, $v = 6$; položi na taj stožac dirne ravnine *a)* koje idu točkom A (7 5 4,5); *b)* koje su usporedne s pravcem AB [A (0 2 3), B (3 6 6)].

27. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka u Π_1 ($r = 2$, $v = 3$) i koji dotiče dvije ravnine Γ (—2 2 1,5) i Δ (3 2 —4).

28. Konstruiraj stožac, kojemu je vrh V (6 4 6), a osnovka u Π_1 i koji dotiče pravac AB [A (3 2 3,5), B (5,5 6 3)]. — Uputa: Ravnina je, položena vrhom V i pravcem AB, dirna ravnina traženog stošca.

29. Zadanim pravcem p položi one ravnine, koje sa osju x čine kutove od 60^0.

30. Zadanim pravcem položi ravnine, koje sa ravninom istovjetnosti čine kutove od 45^0.

31. Zadan je stožac s bazom na Π_1 i na njegovom plaštu točka T; položi tom točkom onu tangentu plašta, koja je usporedna s Π_2.

32. Zadan je stožac s osnovkom u Π_2 i na plaštu toga stošca točka T; položi tom točkom onu tangentu plašta, koja s Π_2 čini 45^0.

33. Zadana je ravnina $\mathbf{P}$ (7 8 5) i točka T (9 6 7); odredi tragove onih ravnina, koje idu točkom T, koje su okomite na ravnini $\mathbf{P}$ i koje s Π_2 čine kut od 60^0.

34. Zadana je točka T (1 4 5) i pravac p [A (0 6 5), B (5 3 2)]; točkom T položi one ravnine, koje su usporedne s pravcem p i koje s Π_1 čine kut od 60^0.

35. Zadana je točka T (6 8 9) i ravnina Σ (6 —9 —8); točkom T položi ravnine, koje sa Σ čine 60^0 i koje su okomite na Π_2.

36. Točkom T položi one ravnine, koje s ravninama $\mathbf{P}$ i Π_1 čine jednake kutove α. Neka je: T (7 7 7), $\mathbf{P}$ (11 10 10), $\alpha = 60^0$.

37. Zadan je rotacioni stožac, kojemu je osnovka u općoj ravnini i izvan stošca točka T; točkom T položi one tangente stošca, koje su usporedne s Π_1.

38. Zadana je os istostranog valjka SV [S (5 5 18), V (5 3 11)], točka A (4 9 15) i ravnina $\mathbf{P}$ (—3 5 4); točkom A položi na stožac one tangente, koje su usporedne s ravninom $\mathbf{P}$.

39. Na zadani stožac treba položiti one dirne ravnine, koje su okomite na zadanoj općoj ravnini.

40. Nacrtaj projekcije uspravnog stošca, kojemu je osnovka u kosoj ravnini (polumjer $r = 2$, visina $v = 5$); zadanom točkom T položi na taj stožac dirne ravnine i odredi dirne izvodnice.

41. Vrh je stošca V (4 5 2), osnovna kružnica ide točkama A (3 11 4), B (3 7 8) i C (7 9 6). Kroz izvodnice VA i VB položi dirne ravnine i odredi kut, kojega čine te dvije dirne ravnine.

42. Osnovka je rotacionog stošca u Π_3 [S (0 3 3), $r = 2$, $v = 5$]; položi na taj stožac dirne ravnine i to:
a) točkom A (1,5 — 2), koja leži na plaštu te se u tlocrtu i u nacrtu ne vidi;
b) točkom B (1 2,5 5,5), koja ne leži na stošcu;
c) usporedno s pravcem p [C (1 5 0), D (4 5 1,5)].

43. Dva rotaciona stošca imadu zajednički vrh u točki V (7 1 5), središte je osnovke prvoga stošca M (3 2 0) i polumjer $r = 1{,}5$, središte je osnovke drugoga stošca N (6 5 0), a polumjer $r = 2{,}5$, odredi zajedničke dirne ravnine.

44. Uspravan stožac ima vrh u točki V (6 3 6), osnovka mu je u Π_1, a polumjer te osnovke $r = 2{,}5$. Drugi uspravni stožac imade vrh u točki T (6 5 3), osnovka mu je u Π_2, te je njezina veličina vezana na uvjet, da oba stošca imadu zajedničke dirne ravnine. Konstruiraj ta dva stošca i zajedničke dirne ravnine.

45. Dva istostrana stošca imadu svoje vrhove u točkama V (4 4 5) i T (9 5 2), a osnovke u Π_1; položi na oba tijela zajedničke dirne ravnine.

46. Odredi sjene uspravnog stošca, kojemu je osnovka u Π_2.

47. Odredi sjene kosoga stošca, kojemu je osnovka u Π_1 [središte M (5 3 0), vrh V (6 0 5), $r = 2$]. Zrake svijetla usporedne su s pravcem AB [A (5 6 6), B (2 5 4)].

48. Odredi sjene uspravnog krnjeg stošca, kojemu je veća osnovka u Π_1 [M (4 5 0), $r = 2{,}5$], visina potpunog stošca $v = 5$, a krnjeg $v_1 = 3$.

49. Odredi samosjenu i bačenu sjenu uspravnog stošca [središte osnovke S (6 3 0), polumjer $r = 2{,}5$, $v = 6$] na Π_1, Π_2 i na ravninu **P** (4 4 3), ako sjena vrha V pada u točku V_I (−2 −3 0).

50. Osnovka uspravnog stošca leži u ravnini **P** (6 3 ∞) [središte S (3 — 4), $r = 2{,}5$, $v = 6$], sjena je vrha V_I (10 1 0); odredi bačenu sjenu stošca na **P**, Π_1 i Π_2.

51. Osnovka je uspravnog stošca u kosoj ravnini **P** (6 5 4), središte joj je S (1 — 2), polumjer $r = 2$, visina stošca $v = 5$, a sjena vrha V_I (7 3 0); odredi sve sjene.

52. Osnovka je kosoga stošca usporedna s Π_2, os je stošca dužina SV [S (4 1 4), V (6 6 3)], a polumjer osnovke $r = 2{,}5$; odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

53. Odredi u sl. 561. sve sjene, ako tlocrt i nacrt usporednih zraka svijetla čine sa osi x kutove od 30°.

54. Uspravan stožac naslonjen je svojom izvodnicom VA [V (3 0 8), A (5 6 0)] na Π_2 i na Π_1, polumjer je osnovke $r = 3$; nacrtaj projekcije toga stošca i sve sjene uz dijagonalnu rasvjetu.

55. Osnovka je istostranog stošca u ravnini $\Delta \perp \Pi_1$; odredi sve sjene.

56. Osnovna kružnica uspravnog stošca dotiče dva ukrštena pravca a i b i ravninu Π_1; odredi sve sjene toga stošca

57. Zadane su tri točke osnovne kružnice A (0 3 6), B (2 5 2), C (5 3 3) istostranog stošca; odredi sve sjene.

58. Osnovka uspravnog stošca ($r = 2{,}5$, $v = 7$) leži u ravnini **P** (∞ 5 4), te je središte osnovke M (3 — 2); odredi sjene toga stošca na ravninu **P** i Π_1, ako su zrake svijetla usporedne s Π_2 i prema Π_1 nagnute za 45°.

59. Nacrtaj kosu projekciju rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini (yz) i odredi sve sjene, ako je $\alpha = 45^0$, $n = \frac{1}{2}$.

60. Nacrtaj kosu projekciju rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini (xz) i odredi sve sjene, ako je $\alpha = 60^0$, $n = \frac{1}{2}$.

61. Os je rotacionog stošca SV [S (7 4 0), V (7 4 6)], a polumjer $r = 2{,}5$; odredi kosu projekciju toga stošca i sve sjene uz dijagonalnu rasvjetu.

62. Os je istostranog stošca SV [S (6 2 4), V (6 6 4)]; odredi kosu projekciju toga stošca i sjene uz dijagonalnu rasvjetu.

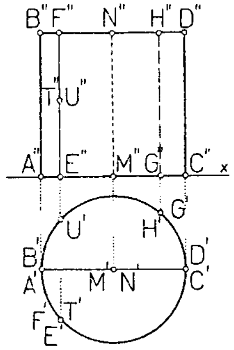
63. Os je rotacionog stošca SV [S (0 3 5), V (6 3 5)], a polumjer $r = 2$; odredi njegovu kosu projekciju i sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

B. Predočivanje valjka projekcijama
Dirne ravnine valjka i sjene

§ 165. Projiciranje uspravnog valjka

Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu je donja osnovka u* Π_1! (Sl. 577.).

Rješenje. Mi ćemo se u glavnom baviti samo takovim valjcima, kojima su osnovke krugovi. Ako je donja osnovka uspravnog valjka u Π_1, onda je ona sama svoj tlocrt. U taj se krug projicira i gornja osnovka. Nacrt je donje osnovke dužina $A''C''$ u osi x, a nacrt gornje osnovke dužina $D''B''$, koja je usporedna s osi x. Obje su te dužine jednake promjeru osnovaka.



Sl. 577.

Plašt se valjka projicira na Π_1 kao kružnica, a na Π_2 kao pravokutnik $A''B''D''C''$.

Stranice su valjka okomite na Π_1 i zato su njihovi tlocrti točke, koje leže na kružnici k', t. j. na obodnici donje osnovke. Nacrti su stranica uspravnog valjka dužine, koje su okomite na osi x i jednake stranicama u prostoru. Na pr. tlocrt je izvodnice EF točka E' ili F', a nacrt dužina $E''F''$, dok nam se plašt prikaže kao kružnica. Nacrti $A''B''$ i $C''D''$ izvodnica AB i CD čine konturu nacrta valjka.

2. **Vidljivost.** Gledamo li u smjeru, koji je okomit na Π_1, vidimo gornju osnovku, dok nam se plašt prikaže kao kružnica. Gledamo li pak u smjeru, koji je okomit na Π_2, onda vidimo prednju polovicu plašta, dok nam se osnovke prikažu kao dužine. Ta se prednja polovica plašta projicira na Π_1 kao polukružnica $A'E'C'$, a stražnja polovica projicira se kao polukružnica $C'G'A'$. Nacrti obih polovica plašta padaju zajedno u pravokutnik $A''C''D''B''$. Izvodnica EF leži na vidljivoj polovici, a izvodnica GH leži na nevidljivoj polovici plašta.

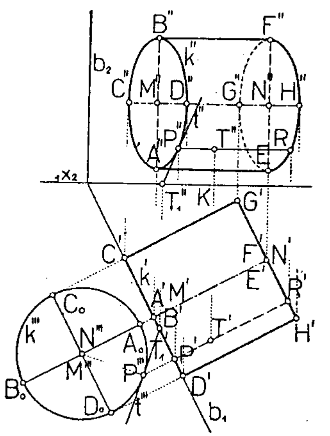
3. **Točka na plaštu valjka.** Točka je na plaštu valjka, kad se nalazi na jednoj izvodnici valjka. Ako je točka T na izvodnici EF (sl. 577.), njezin je tlocrt T' u točki E' a nacrt T'' gdjegod na pravcu $E''F''$. Taj nacrt nije dakle određen tlocrtom T'.

Ako je zadan nacrt T'' točke T, tlocrt će T' biti u sjecištu kružnice k' s ordinalom točke T''. No ta ordinala siječe k' u dvije točke T' i U', pa se prema tome u točki T'' nalazi nacrt U'' još jedne točke U plašta valjka.

Točka T je na prednjoj, a U na stražnjoj polovici plašta valjka. Ako je dakle zadan nacrt jedne točke valjkovog plašta, onda je njezin tlocrt određen, ako se još postavi uvjet, da je točka na prednjoj ili stražnjoj polovici plašta.

4. Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu su osnovke okomite na* Π_1! (Sl. 578.).

Rješenje. Uzet će se, da je lijeva osnovka valjka u ravnini $\mathbf{B} \perp \Pi_1$. Tlocrt je te osnovke dužina $C'D'$ u tragu b_1, koja je jednaka promjeru osnovke. Nacrt je te osnovke elipsa k'', kojoj je velika os $A''B'' = C'D'$, a mala os $C''D'' \parallel x$. (Isp. § 133., t. 1, sl. 482.). Os je valjka $MN \parallel \Pi_1$, pa je $M'N' = MN$, a jer je $MN \perp \mathbf{B}$, to je $M'N' \perp b_1$, $M''N'' \perp b_2$, dakle $M''N'' \parallel x$. Tlocrt je dakle osnovke dužina $G'H' \# C'D'$, a nacrt elipsa, koja je sukladna s k'', i kojoj je središte u N''.



Sl. 578.

Dužine $C'G'$ i $D'H'$ jesu tlocrti krajnjih izvodnica valjka, koje pripadaju konturi tlocrta. Tlocrt je valjka pravokutnik $C'D'H'G'$. Nacrti su najviše i najniže izvodnice valjka dužine $B''F''$ i $A''E''$, koje dotiču obje elipse, te one pripadaju konturi nacrta.

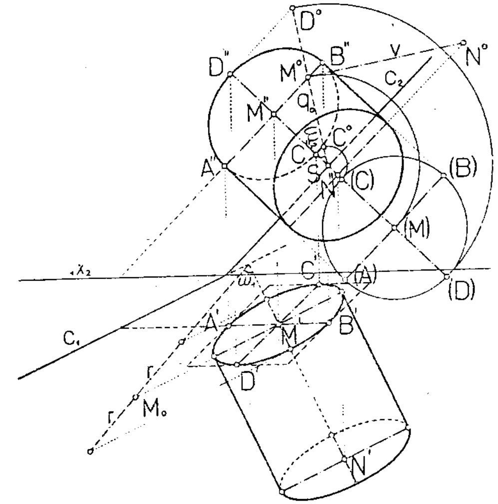
Smatra li se ravnina $\mathbf{B}$ stranocrtnom ravninom, onda je ${}_1x_3 = b_1$. Stranocrt je valjka krug.

Ako je zadan tlocrt T' jedne točke na plaštu valjka, onda će se nacrt T'' odrediti s pomoću izvodnice PR. Ako se odredi T''', onda mora biti $T''K = T''P'$.

Ako se u točki P povuče tangenta t na osnovku, onda će t''' doticati k''' u P'''. Točka T_1, u kojoj t''' siječe b_1, je probodište tangente t; prema tome je $t'' \equiv T_1''P'' \cdot t''$ dotiče elipsu k'' u točki P''. Objasni vidljivost valjka u tlocrtu i nacrtu!

5. Zadatak. *Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu jedna osnovka leži u općoj ravnini* Γ (c_1, c_2)! (Sl. 579.).

Rješenje. Uzelo se, da su različite strane ravnine Γ okrenute prema Π_1 i Π_2. Najprije se nacrtaju projekcije osnovke, koja je u ravnini Γ. Te su projekcije elipse k', k'', a odrede se na način, koji je prikazan u § 133., t. 2, sl. 483. Os je MN valjka okomita na ravnini Γ, pa je njegova projekcija $M'N' \perp c_1$ i $M''N'' \perp c_2$. Ta se os prikaže u preloženju u pravoj veličini kao dužina $M^0N^0 \perp q^0$, gdje je q^0 preložaj priklonice druge skupine q, koja je potegnuta u ravnini Γ točkom M. Povuče li se $N^0N'' \perp M''N''$, dobit će se nacrt N'' središta druge valjkove osnovke. S pomoću ordinale

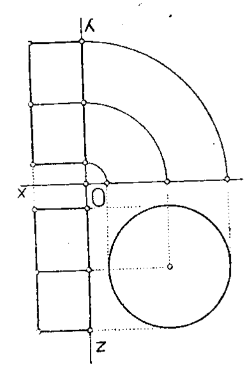


Sl. 579.

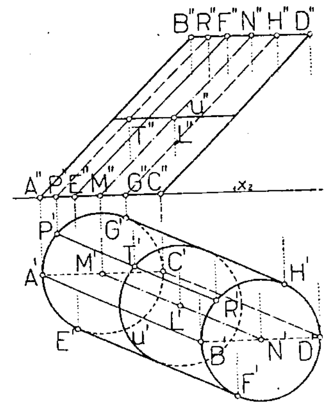
dobije se tlocrt N'. Projekcije su druge osnovke valjka elipse, koje su sukladne s k' i k'', zajedničke izvanje tangente elipsâ u tlocrtu i elipsâ u nacrtu jesu dijelovi kontura tlocrta i nacrta valjka.

Objasni vidljivost valjka u tlocrtu i nacrtu!

6. Zadatak. *Nacrtaj projekcije valjkaste ploče, kojoj je osnovka u bokocrtnoj ravnini!*



Sl. 580.



Sl. 581.

Rješenje. U sl. 580. nacrtane su sve tri projekcije valjkaste ploče. Najprije se nacrta bokocrt, zatim nacrt i konačno tlocrt. Pokaži na sl. 580. sve tri projekcije izvodnica, koje čine konturu tlocrta i konturu nacrta.

§ 166. Projiciranje kosoga valjka

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kosoga valjka, kojemu je osnovka u* Π_1! (Sl. 581.).

Rješenje. Smjer izvodnica kosoga valjka zadan je osju MN toga valjka. Osnovke se projiciraju na Π_1 u pravoj veličini, t. j. kao dva sukladna kruga sa središtima u M' i N'. Nacrt je donje osnovke dužina $A''C''$ u osi x, a nacrt gornje osnovke $B''D'' \# A''C''$. Zajedničke tangente $E'F'$ $G'H'$ tlocrta osnovaka jesu projekcije krajnjih izvodnica valjka, pa te tangente čine dio konture tlocrta toga tijela. Toj konturi pripadaju polukružnice $E'A'G'$ i $F'B'H'$. Konturu nacrta valjka čine nacrti $A''B''$ i $C''D''$ krajnjih izvodnica AB i CD. Nacrt je valjka paralelogram $A''C''D''B''$. U sl. 581. nacrtan je tlocrt $A'B'$ i $C'D'$ izvodnica AB i CD, te nacrt $E''F''$ $G''H''$ izvodnica EF i GH.

2. Vidljivost. U tlocrtu se vidi gornja osnovka te polovica plašta, koja je omeđena izvodnicama EF i GH, te polukružnicama EAG i FBH. U nacrtu se vidi prednja polovica plašta, koja je omeđena izvodnicama AB i CD, te polukružnice AEC i BFD.

3. Zadatak. *Zadan je tlocrt T' točke T plašta kosoga valjka: odredi nacrt T''!* (Sl. 581.).

Rješenje. Točkom T povuče se izvodnica PR [$P'R'$ ide točkom T' usporedno s $M'N'$] i odredi nacrt $P''R''$, u kojemu će ležati nacrt T''. Uzeto se, da je točka T na gornjoj polovici valjka, i to na onom dijelu, koji je u nacrtu nevidljiv. Kako ćeš odrediti tlocrt T', ako je zadan nacrt T''?

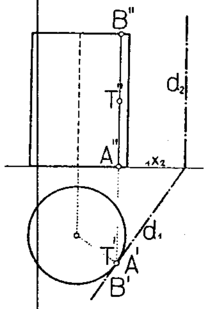
§ 167. O dirnim ravninama valjka

1. Zadatak. *Zadanom točkom $T(T', T'')$, koja je na valjkovom plaštu, položi dirnu ravninu na taj plašt!* (Vidi § 157, t. 4., sl. 555.).

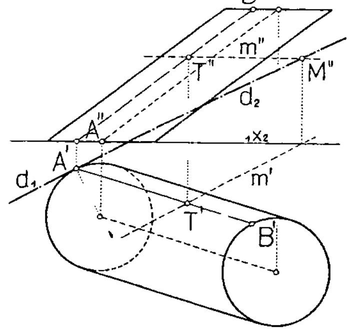
Rješenje. Točkom T položi se izvodnica AB ($A'B'$, $A''B''$; sl 582. i 583.) i tom izvodnicom položi dirna ravnina Δ. Prvi trag d_1 ide prvim probodištem A' izvodnice AB i dotiče kružnu osnovku u toj točki. Drugi se trag d_2 (sl 583.) može odrediti pomoću sutražnice prve skupine točke T. U sl. 582. položena je dirna ravnina na uspravan, a u sl. 583. na kosi valjak. U sl. 582. je ravnina $\Delta \perp \Pi_1$. Zasto?

2. Zadatak. *Zadanom točkom $T(T', T'')$, koja je izvan valjkova plašta položi dirnu ravninu na taj plašt, ako je osnovka valjka u* Π_2! (Sl. 584.).

Rješenje. Budući da je tražena dirna ravnina usporedna s izvodnicama valjka, ona mora sadržavati pravac p, koji ide točkom T usporedno s tima izvodnicama ili s osju MN [$p' \parallel M'N'$, $p'' \parallel M''N''$]. Drugi trag c_2

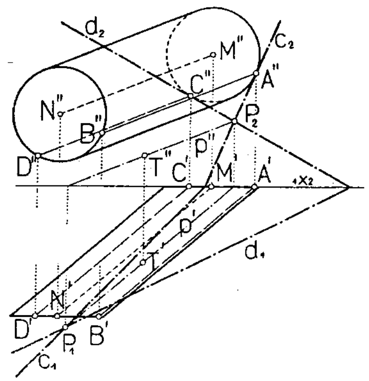


Sl. 582.



Sl. 583.

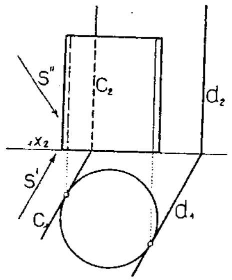
dirne ravnine Γ ide drugim probodištem P_2 pravca p i dotiče obodnicu k'' stražnje osnovke valjka u točki A'', dok prvi trag c_1 ide probodištem P_1 pravca p. Budući da se s točke P_2 može povući još jedna tangenta d_2 na kružnicu k'', taj je pravac drugi trag druge dirne ravnine Δ. Prvi trag d_1 ide točkom P_1. Jednom točkom izvan valjka mogu se na taj valjak položiti dvije dirne ravnine.



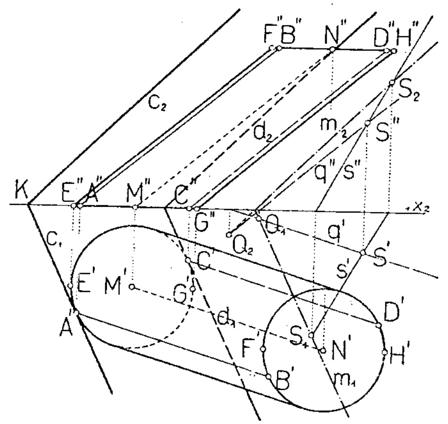
Sl. 584.

3. Zadatak. *Na zadani valjak položi one dirne ravnine, koje su usporedne sa zadanim pravcem $s(s', s'')$!* (Sl. 585. i 586.).

Rješenje. Na zadani valjak mogu se položiti dvije dirne ravnine Γ i Δ usporedno sa zadanim pravcem s. Budući da te ravnine moraju biti usporedne s pravcem s i moraju sadržavati dirne izvodnice, one će biti usporedne s pomoćnom ravninom $\mathbf{M}$, koja sadrži pravac s i pomoćni pravac q, koji je usporedan s izvodnicama valjka. Uzme li se prema tome na pravcu s točka $S(S', S'')$, i njom položi pravac q usporedno s izvodnicama ili s osju valjka ($q' \parallel M'N'$, $q'' \parallel M''N''$), onda je s pravcima s i q određena pomoćna ravnina $\mathbf{M}$ ($m_1 \equiv Q_1 S_1$, $m_2 \equiv Q_2 S_2$). Budući da su dirne ravnine Γ i Δ usporedne s $\mathbf{M}$, bit će prvi tragovi c_1 i d_1 usporedni s m_1, a drugi tragovi c_2 i d_2 usporedni s m_2. Prvi tragovi moraju osim toga doticati obodnicu donje osnovke valjka.



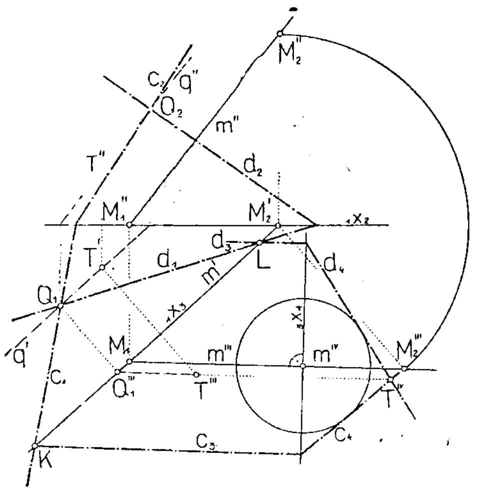
Sl. 585.



Sl. 586.

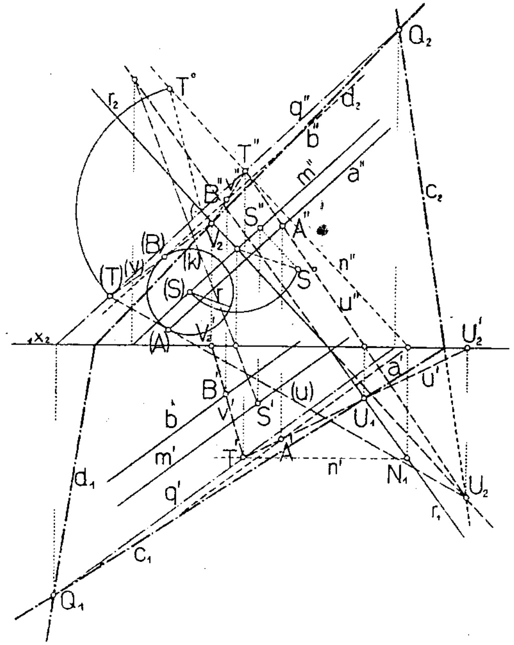
Ako je osnovka uspravnog valjka u Π_1 (sl. 585.), onda su dirne ravnine $\perp \Pi_1$, pa je $c_1 \parallel d_1 \parallel s'$.

4. Zadatak. *Zadano je: Os m (m', m'') rotacionog valjka, polumjer osnovke r i izvan valjka točka T (T', T''); odredi tragove onih dirnih ravnina valjka, koje idu točkom T!*



Sl. 587.

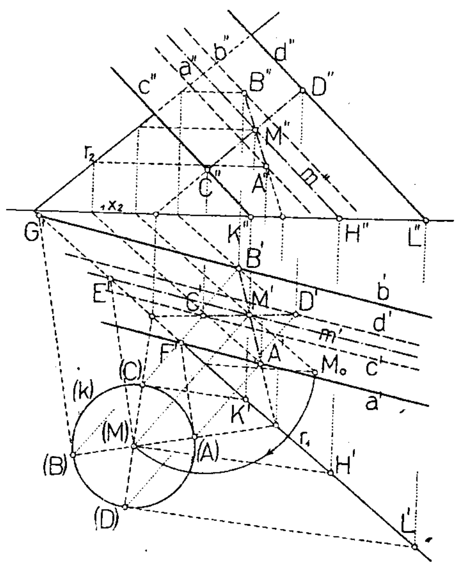
Prvo rješenje. (Sl. 587.). Dirne ravnine valjka sadrže pravac q (q', q''), koji ide točkom T i usporedan je s pravcem m ($q' \parallel m'$, $q'' \parallel m''$), pa će prvi tragovi dirnih ravnina ići prvim probodištem Q_1, a drugi tragovi drugim probodištem Q_2 pravca q. Da se odrede tragovi tih ravnina, upotrebit će se dva stranocrta. Prva stranocrtna ravnina Π_3 položit će se pravcem m_1 okomito na Π_1 (os ${}_1x_3 \equiv m'$) i odredit će se treće projekcije m''' i q''' usporednih pravaca m i q. Druga stranocrtna ravnina Π_4 postavit će se okomito na pravac m (os ${}_3x_4 \perp m'''$) i odredit će se četvrta projekcija m^{IV} i q^{IV} pravca m i q. Te su četvrte projekcije točke. (q''' ide točkom T''', a $q^{IV} \equiv T^{IV}$). Osnovna kružnica k projicirat će se na Π_4 u pravoj veličini kao kružnica k^{IV}, kojoj je središte u točki m^{IV}. Dirne ravnine valjka okomite su na Π_4. Četvrti tragovi c_4 i d_4 tih ravnina idu točkom T^{IV} i dotiču kružnicu k^{IV}, treći tragovi c_3 i d_3 okomiti su na osi ${}_3x_4$ i sijeku os ${}_1x_3$ u točkama K i L. Prvi trag c_1 ide točkama K i Q_1, a trag d_1 ide točkama L i Q_1. Drugi tragovi c_2 i d_2 idu točkom Q_2.



Sl. 588.

Drugo rješenje. (Sl. 588.). Točkom T položi se ravnina **P** okomito na pravac m (§ 44., t. 5., sl. 200.). Ta ravnina siječe valjak u kružnici, kojoj je središte S na pravcu m, a polumjer $= r$. Ako se s točke T povuku tangente u i v na tu kružnicu, onda svaka dirna ravnina, koja je položena točkom T na zadani valjak sadržava po jednu tangentu u, odnosno v. Budući da obje dirne ravnine moraju sadržavati i pravac q, koji je položen točkom T usporedno s pravcem m, to je jedna dirna ravnina određena pravcima q i u, a druga pravcima q i v.

Konstrukcija. Odredi se sjecište $S(S', S'')$ osi valjka m s ravninom **P**, pa se točke S i T rotiraju oko traga r_2 u ravninu Π_2. Zatim se oko točke (S) opiše kružnica (k) i s točke (T) povuku obje tangente (u) i (v) na kružnicu (k). Kružnica (k) je preložaj kružnog presjeka k valjka s ravninom **P**, a pravci (u) i (v) jesu preložaji tangenata potegnutih s točke T na kružnicu k. Budući da između preložaja i nacrta postoji afina srodnost, gdje je trag r_2 os afinosti, to se preložaji tangenata (u) i (v) i nacrti u'' i v'' sijeku u točkama U_2 i V_2, koje leže na tragu r_2, t. j. $u'' \equiv T''U_2$, $v'' = T''V_2$. Tlocrti su U_2' i V_2' probodišta U_2 i V_2 tangenata u i v u osi x, pa je $u' \equiv T'U_2'$, $v' = T'V_2'$. Sad se još točkom T povuče pravac $q \parallel m$ ($q' \parallel m'$, $q'' \parallel m''$). Dirna je ravnina **Γ** određena pravcima q i u ($c_1 \equiv Q_1U_1$, $c_2 = Q_2U_2$), a dirna ravnina Δ pravcima q i v ($d_1 \equiv Q_1V_1$, $d_2 = Q_2V_2$). Tangente u i v dotiču valjak u točkama $A(A', A'')$ i $B(B', B'')$ pa tima diralištima idu dirne izvodnice a i b ($a'' \parallel b'' \parallel m''$, $a' \parallel b' \parallel m'$).



Sl. 589.

5. **Konstrukcija prividne konture kosog kružnog valjka.** Neka je osnovka valjka krug, koji leži u ravnini $\mathbf{P}(r_1, r_2)$ i kojemu je središte točka $M(M', M'')$, nadalje neka su zadane projekcije m', m'' valjkove osi m; odredi konturne izvodnice u tlocrtu i nacrtu. (Sl. 589.).

Rješenje. Zadaća će se riješiti bez upotrebe projekcija osnovke, koja leži u ravnini **P**, nego će se ta osnovka rotirati oko traga r_1 u Π_1 u položaj (k) i ta će se kružnica upotrebiti za određivanje onih izvodnica, koje pripadaju konturi valjka u tlocrtu i nacrtu.

Da se dobiju izvodnice, koje pripadaju konturi tlocrta valjka, položit će se na valjak obje dirne ravnine, koje su okomite na Π_1. Te su ravnine usporedne s ravninom položenom osju valjka m okomito na Π_1. Ova ravnina siječe ravninu **P** u pravcu ME, kojemu je tlocrt $M'E'$. Ako se na osnovku valjka povuku tangente usporedno s pravcem ME, u tlocrt tih tangenata pada tlocrt tragova dirnih ravnina na ravnini **P** i tlocrti a', b' konturnih izvodnica a, b. Kad se kružnica k okrene oko traga r_1 u Π_1,

onda pravac ME dođe u položaj $(M)E'$, a spomenuti tragovi dirnih ravnina padaju u tangente $(A)F'$ i $(B)G'$ kružnice (k), koje su usporedne s pravcem $(M)E'$. Ako se točkama F' i G' povuku usporednice s $E'M'$, te su usporednice konturne izvodnice a', b' za tlocrt valjka. Ako se s pomoću dirališta (A), (B) odredi tlocrt A', B' i nacrt A'', B'', onda tlocrt osnovke dotiče pravce a', b' u točkama A', B', dok kroz točke A'', B'' idu nacrti a'', b'' izvodnica a, b usporedno s pravcem m''. U nacrtu je izvodnica a vidljiva, a b nevidljiva.

Da se dobiju oni pravci, koji pripadaju konturi nacrta valjka, postavit će se na valjak dirne ravnine, koje su okomite na Π_2. Te su ravnine usporedne s ravninom položenom pravcem m okomito na Π_2. Ova ravnina siječe ravninu **P** u pravcu MH, kojemu je nacrt $M''H''$. Ako se na osnovku povuku tangente usporedno s pravcem MH, u nacrt tih tangenata pada nacrt tragova dirnih ravnina na ravninu **P** i nacrti c'', d'' konturnih izvodnica c, d. Odredi li se tlocrt H' točke H i povuče pravac $H'(M)$, u taj pravac pada preložaj pravca HM. Povuku li se međutim na kružnicu (k) tangente $K'(C)$ i $L'(D)$ usporedno s $H'(M)$, u te tangente padaju rotirani tragovi spomenutih dirnih ravnina, koje su okomite na Π_2. Nacrti K'', L'' točaka K, L leže na osi x. Pravci c'', d'', koji pripadaju konturi nacrta valjka idu točkama K'' i L'' usporedno s pravcem $H''M''$. Pomoću točaka (C) i (D) odrede se projekcije C', D' i C'', D'' točaka C i D, u kojima tragovi onih dirnih ravnina dotiču osnovnu kružnicu. Nacrt te kružnice dotiče konturne pravce c'' i d'' u točkama C'' i D''. Kroz točke C' i D' idu tlocrti c' i d' izvodnica c i d. U tlocrtu je izvodnica d vidljiva, a c nevidljiva. Kad bismo nacrtali projekcije osnovke, onda bi se u tlocrtu vidio luk $A'D'B'$, a u nacrtu luk $C''A''D''$. Dužine $A'B'$ i $C'D'$, te $A''B''$ i $C''D''$ jesu promjeri tlocrta, odnosno nacrta osnovne kružnice, ali to nisu konjugirani promjeri, jer $(A)(B)$ i $(C)(D)$ nisu među sobom okomiti promjeri kružnice (k).

6. **Zajedničke dirne ravnine stošca i valjka.** Stožac i valjak mogu imati zajedničke dirne ravnine: 1.) ako imaju zajedničku ravnalicu, 2.) ako su opisani istoj površini **Φ**. Budući da zajednička dirna ravnina mora ići vrhom stošca i mora biti usporedna s izvodnicama valjka, ona prolazi pravcem q, koji ide vrhom stošca usporedno s izvodnicama valjka.

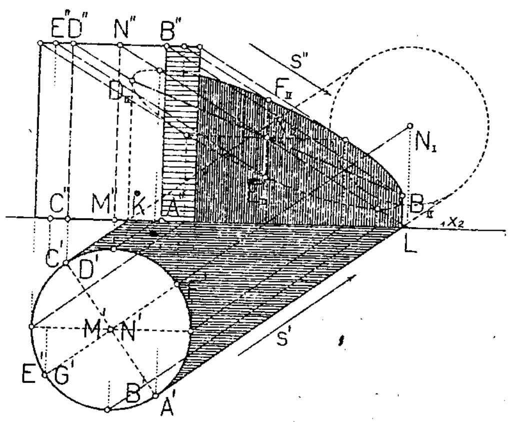
7. **Zajedničke dirne ravnine dvaju valjaka.** Dva valjka mogu imati zajedničkih dirnih ravnina uz ove uvjete: 1.) Ako su izvodnice obih valjaka među sobom usporedne, 2.) ako imaju zajedničku ravnalicu, 3.) ako su opisani istoj plohi **Φ**. Svaka je zajednička dirna ravnina dvaju valjaka usporedna s izvodnicama jedne i druge plohe.

*

§ 168. Sjene valjka

1. Zadatak. *Odredi sve sjene uspravnog valjka, kojemu je donja osnovka u* Π_1. *Smjer zraka svijetla određen je tlocrtom s' i nacrtom s''*! (Sl. 590).

Rješenje. Zrake svijetla, koje su usporedne s pravcem s, a dotiču plašt valjka, čine dvije dirne ravnine, koje dotiču valjak u izvodnicama AB i CD. Te su izvodnice rastavnice na valjkovom plaštu. Budući da su te izvodnice okomite na Π_1, a one dirne ravnine usporedne su sa zrakom svijetla s, njihovi će prvi tragovi biti usporedni sa s' i doticat će donju osnovku u točkama A' i C'. Te su točke tlocrti dirnih izvodnica, dakle i rastavnica AB i CD. Nacrti su tih rastavnica dužine $A''B''$ i $C''D''$, koje su



Sl 5°0.

okomite na osi x. Da se odrede izvodnice uspravnog valjka, koje pripadaju rastavnici, projicirat će se zraka svijetla na ravninu osnovke, povući će se na tu osnovku tangente usporedne s tom projekcijom zrake i odredit će se dirališta. Izvodnice valjka, koje idu tima diralištima pripadaju rastavnici.

Tangente $A'L$ i $C'K$ osnovne kružnice čine među bačene sjene valjka na Π_1. Te su tangente bačene sjene izvodnica AB i CD na Π_1. Dijelovi tih izvodnica bacaju sjenu na Π_2 u dužine $B_{II}L$ i $D_{II}K$.

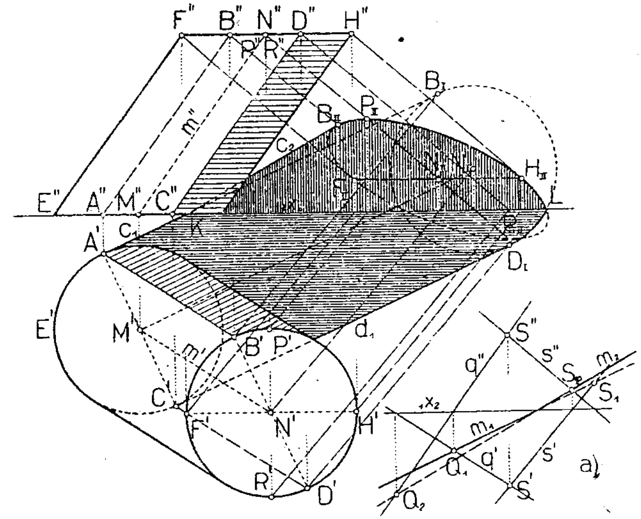
Dio plašta, koji je između rastavnica AB i CD, a okrenut je bačenoj sjeni, nalazi se u samosjeni, dok je onaj drugi dio plašta osvijetljen. Budući da je gornja osnovka osvijetljena, onda polukružnica BFD također pripada rastavnici. Bačena je sjena te polukružnice na Π_2 poluelipsa $B_{II}F_{II}D_{II}$; ona omeđuje bačenu sjenu valjka na Π_2. Budući da je donja osnovka u samosjeni, onda polukružnica AGC pripada rastavnici. Bačena

je sjena gornje osnovke na Π_1 krug, kojemu je središte u N_I i koji je sukladan s osnovkom. Ta sjena pada iza Π_2.

2. Zadatak. *Odredi sve sjene kosog valjka, kojemu je donja osnovka u* Π_1, *ako je smjer usporednih zraka svijetla zadan pravcem s (s', s'')*! (Sl. 591.).

Rješenje. Ako je pravcem s u sl. 586. zadan smjer zraka svijetla, onda su dirne izvodnice AB i CD rastavnice na plaštu valjka. Budući da zrake svijetla dolaze odozgo, gornja je osnovka osvijetljena, a donja je u samosjeni, pak rastavnici pripadaju i polukružnice AEC i BHD. Prema tome je rastavnica zatvoren prostorni lik $ABHDCEA$.

Izvodnice se na kosom valjku, koje pripadaju rastavnici, konstruiraju na taj način, da se konstruira ravnina **M** (sl. 591.a), koja je usporedna sa zrakama svijetla s (s', s'') i s osju valjka m ($q' \parallel m'$, $q'' \parallel m''$), i odredi trag te

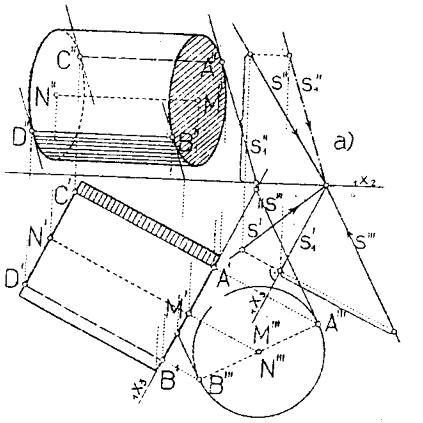


Sl. 591.

ravnine u ravnini osnovke, a onda se polože na tu osnovku one tangente, koje su usporedne s tim tragom ($c_1 \parallel d_1 \parallel m_1$). Izvodnice, koje idu diralištima tih tangenata, jesu rastavnice na plaštu valjka.

Granicu bačene sjene valjka na Π_1 i na Π_2 čine bačene sjene rastavnice na te ravnine. Bačene sjene izvodnica AB i CD padaju u tragove dirnih ravnina. Bačena je sjena gornje osnovke na Π_1 krug, koji je sukladan s tom osnovkom (zašto?), a na Π_2 elipsa. Taj krug dotiču tragovi c_1 i d_1 u točkama B_I, D_I, a elipsu dotiču tragovi c_2 i d_2 u točkama B_{II}, D_{II}. Tu smo elipsu konstruirali iz konjugiranih promjera $F_{II}H_{II}$ i $P_{II}R_{II}$, koji su bačene sjene na Π_2 okomitih promjera FH i PR gornje osnovke. Dio gornje osnovke baca sjenu na Π_1, a dio na Π_2. Obje se te sjene presijecaju u osi x. Pravac $M'N_I$ je sjena osi MN na Π_1, a $C'D_I$ sjena rastavnice CD. Budući da je $CD \# MN$, mora biti i $C'D_I \# M'N_I$. Isto tako mora biti $A'B_I \# M'N_I$. Prema tome tragovi su c_1 i d_1 dirnih ravnina valjka usporedni s bačenom sjenom osi valjka na Π_1.

3. Zadatak. *Neka se odredi rastavnica rotacionog valjka, kojemu je os $MN \parallel \Pi_1$!* (Sl. 592.).



Sl. 592.

R j e š e n j e. Najprije će se nacrtati projekcije valjka kao u sl. 578. Ravnina će se desne osnovke valjka smatrati stranocrtnom ravninom $\Pi_3 \perp \Pi_1$, pa će se nacrtati treća projekcija valjka. Ta je projekcija krug. Polože li se na valjak dirne ravnine usporedno sa zrakama svijetla, te će ravnine biti okomite na Π_3, pa će treći tragovi biti usporedni sa s''' (sl. 592. a) i doticat će treću projekciju valjka u točkama A''' i B'''. Te su točke treće projekcije dirnih izvodnica, koje pripadaju rastavnici na valjkovoj površini. Iz treće projekcije dobiju se prve projekcije $A'C'$ i $B'D'$, te druge projekcije $A''B''$ i $C''D''$. — Nacrtaj bačenu sjenu valjka na Π_1 i na Π_2.

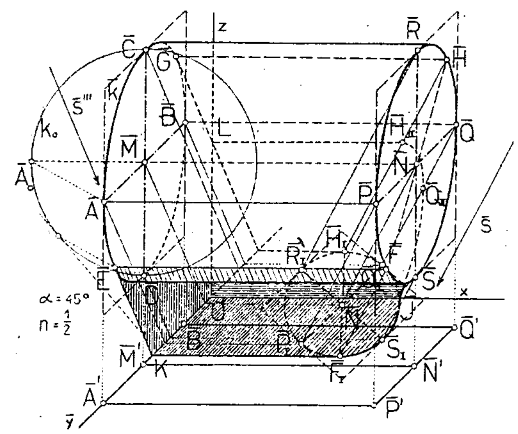
N a p o m e n a. Projicira li se zraka svijetla s (sl. 592. a) na ravninu osnovke valjka, dobit će se pravci $s_1' \equiv {}_1x_3$ i s_1''. Tangente elipse u točkama A'', B'', C'', D'' usporedne su sa s_1''; te su tangente nacrti tragova dirnih ravnina valjka, koje leže u ravninama osnovaka.

§ 169. Kosa projekcija valjka

1. Kosa projekcija uspravnog valjka, kojemu je osnovka u ravnini *xy*). U sl. 593. uzelo se da je $\alpha = 45^0$ i $n = \frac{1}{2}$, $\overline{C}\,\overline{D} \parallel z$, $\overline{A}\,\overline{B} \parallel \overline{y}$, $\overline{M}\overline{C} = \overline{M}\,\overline{D} = r$, $\overline{M}\,\overline{A} = \overline{M}\,\overline{B} = \frac{r}{2}$. $\overline{M}\,\overline{N} \parallel x$ je kosa projekcija osi valjka. Osnovke se projiciraju kao elipse, te dužine $\overline{A}\,\overline{B}$ i $\overline{C}\,\overline{D}$ dva konjugirana promjera za lijevu osnovku, pa se elipsa $\overline{k}$ može konstruirati. Kosa projekcija desne osnovke sukladna je s elipsom $\overline{k}$. Ako se povuku zajedničke

izvanje tangente na obje elipse, dobit će se prividna kontura za kosu projekciju valjka. Desna je osnovka valjka vidljiva, a lijeva nevidljiva. Paralelogram $\overline{A}'\overline{B}'\overline{Q}'\overline{P}'$ jest tlocrt valjka na ravnini (xy).

2. Sjene valjka uz paralelnu rasvjetu. U sl. 593. uzelo se, da je pravac $\overline{s}$ kosa projekcija zrake svijetla, a $\overline{s}'''$ projekcije zrake na ravnini (yz). Tragovi dirnih ravnina na toj ravnini, koje su usporedne sa zrakama svijetla, usporedni su s pravcem $\overline{s}'''$ i dotiču elipsu $\overline{k}$ u točkama $\overline{E}, \overline{G}$. Izvodnice $\overline{E}\,\overline{F}$ i $\overline{G}\,\overline{H}$ jesu dirne izvodnice i ujedno rastavnice na plaštu valjka. (Dirališta $\overline{E}$ i $\overline{G}$ određena su pomoću afine srodnosti, koja postoji između kružnice k_0 i elipse $\overline{k}$). Izvodnica je $\overline{E}\,\overline{F}$ vidljiva, a $\overline{G}\,\overline{H}$ nevidljiva. Dijelovi tangenata $\overline{E}\overline{K}$ i $\overline{G}\overline{L}$ te dio osi $\overline{y}$ $\overline{K}\overline{O}$ i dio $\overline{L}\overline{O}$ osi z omeđuju bačenu sjenu valjka na ravnini (yz). Dio plašta valjka, koji je okrenut prema toj bačenoj sjeni, nalazi se u samosjeni tako, da je od



Sl. 593.

vidljive polovine plašta manji donji dio u samosjeni. Budući da je desna osnovka rasvijetljena, to polovica osnovne kružnice, koja se projicira kao poluelipsa $\overline{H}\,\overline{Q}\,\overline{S}\,\overline{F}$, pripada rastavnici. Izvodnica $\overline{E}\,\overline{F}$ baca sjenu na (yz), koja se u osi $\overline{y}$ u točki $\overline{K}$ lomi i pada na ravninu (xy) u pravac $\overline{K}\overline{F}_I \parallel x$, gdje je $\overline{F}_I$ bačena sjena točke $\overline{F}$ na ravnini (xy). Izvodnica $\overline{G}\,\overline{H}$ baca sjenu na (yz) u dužinu $\overline{G}\overline{L}$, lomi se u točki L na osi z i pada na ravninu (xz) u pravac $\overline{L}\overline{H}_{II}$, gdje je $\overline{H}_{II}$ bačena sjena točke $\overline{H}$. Prema tome po jedan dio sjene valjka pada na sve tri koordinatne ravnine. Bačena je sjena desne osnovke na ravnini (xy) elipsa, a na ravnini (xz) također elipsa. Obje se te elipse sijeku u osi x. Granicu bačene sjene na ravnini (xy) čini luk $\overline{F}_I\overline{S}_I J$, a na ravninu (xz) luk $J\bar{Q}_{II}\bar{H}_{II}$. Jedan je dio bačene sjene zaklonjen valjkom, pa se ne vidi.

3. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije uspravnog kružnog valjka, kojemu je jedna osnovka u ravnini $\Sigma(8\ 8\ 6)$, središte te osnovke $M(2\ 3\ -)$, polumjer $r=2{,}5$, visina $v=4$.

2. Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu je zadana os MN i polumjer $r=2{,}5$. Na pr.:

a) $M(0\ 3\ 3)$, $N(4\ 3\ 5)$; *b)* $M(4\ 2{,}5\ 3)$, $N(7\ 5\ 5)$;
c) $M(0\ 2{,}5\ 3)$ $N(4\ 5\ 3)$; *d)* $M(4\ 3\ 5)$, $N(8\ 5\ 3)$.

3. Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu je zadana točka $A(1\ 1\ 3)$ obodnice donje osnovke, dvije točke $B(2\ 4\ 1)$ i $C(0\ 6\ 3)$ plašta; smjer izvodnica zadan je pravcem $PR\,[P\ 0\ 4\ 0)$, $R(5\ 9\ 5)]$, visina je valjka $v=5$. — Uputa. Ravnina donje osnovke ide točkom A okomito na PR i siječe izvodnice, koje idu točkama B i C u dvije točke, koje leže na obodnici osnovke....

4. Valjkasta ploča, kojoj je visina $v=2$, upire se donjom osnovkom na Π_1 u točki $A(5\ 3\ 0)$, a na Π_2 u točki $B(5\ 0\ 4)$; nacrtaj projekcije te ploče.

5. Zadane su tri izvodnice uspravnog valjka; konstruiraj os toga valjka.

6. Četiri točke $A(8\ 5\ 8)$, $B(5\ 9\ 9)$, $C(1\ 5\ 5{,}5)$, $D(4{,}5\ 7\ 2)$ leže na plaštu istostranog valjka, kojemu je jedna izvodnica u pravcu CD, i kojemu točka A raspolavlja izvodnicu, koja ide tom točkom; nacrtaj projekcije toga valjka.

7. Osnovka istostranog valjka leži u ravnini, koja je položena točkama $A(2\ 4\ 1)$ i $B(8\ 7\ 7)$ i koja s Π_1 čini kut 60^0, nacrtaj projekcije toga valjka, ako osnovna kružnica ide točkama A i B i ako dotiče Π_1.

8. Rotacioni valjak ($r=2{,}5$, $v=6$) naslonjen je s donjom osnovkom u točki $A(3\ 3{,}5\ 0)$ na Π_1, dok gornja točka B izvodnice AB, koja je $\parallel \Pi_3$ leži u Π_2. Nacrtaj projekcije toga valjka.

9. Nacrtaj sve tri projekcije uspravnog valjka ($v=4$), kojemu je osnovka u ravnini $\mathbf{P}(7\ 5\ 4)$ i koja dotiče sve tri ravnine projekcija.

10. Nacrtaj projekcije istostranog valjka, kojemu je polumjer $r=2{,}5$, kojemu je središte donje osnovke $M(3\ 3\ 3)$, ako ravnina te osnovke čini s Π_1 kut $\omega_1=75^0$, a s Π_2 kut $\omega_2=45^0$.

11. Nacrtaj projekcije kosoga valjka, kojemu je osnovka
a) u Π_2, *b)* u Π_3; $r=2\ 5$, $v=4$.

12. Zadana su tri usporedna pravca a, b, c kao izvodnice kosoga valjka i kosa ravnina $\mathbf{P}$; konstruiraj *a)* osnovku valjka, koja leži u ravnini $\mathbf{P}$, *b)* konturne izvodnice tlocrta i nacrta, *c)* os valjka.

13. Konstruiraj uspravan valjak, kojemu je osnovka u Π_2 (središte $M(3,\ 0\ 3)$, polumjer $r=2$, visina $v=5$), zatim položi dirne ravnine, i to:
a) Točkom A, koja je na drugoj polovici plašta $(x=4{,}5)$;
b) točkom $B(0\ 3\ 2)$, koja je izvan plašta;
c) koje su usporedne s pravcem $CD\,[C(5\ 4\ 1)$, $D(7\ 0{,}5\ 3)]$.

14. Konstruiraj kosi valjak, kojemu je osnovka u Π_2 (os MN: $M(3\ 0\ 3)$, $N(6\ 4\ 4)$, $r=2$), zatim položi na taj valjak dirne ravnine, i to:
a) Točkom $A\ (2-4)$, koja je na valjkovom plaštu;
b) točkom $B(2\ 3\ 3)$, koja je izvan plašta;
c) usporedno s pravcem $CD\,[C(8\ 5\ 6)$, $D(7\ 0\ 8)]$.

15. U ravnini $\mathbf{P}(8\ 6\ 7)$ leži osnovka uspravnog valjka (središte $M(3-2)$, $r=2$, $v=5$): položi na taj valjak dirne ravnine: *a)* koje idu točkom $A\ (8\ 3\ 3)$; *b)* koje su usporedne sa osi x.

16. Os je valjka $MN\,[M(7\ 0\ 4)$, $N(1\ 6\ 4)]$, polumjer je osnovke, koja je u Π_2, $r=1{,}5$; položi na taj valjak one tangente valjka, koje su usporedne s pravcem $p\,[P(12\ 0\ 0)$, $A\ (15\ 4\ 6)]$ i sijeku pravac $q\,[B(9\ 3\ 1)$, $C(1\ 4\ 7)]$. Uputa: Položi na valjak dirne ravnine usporedne s pravcem p, odredi probodišta pravca q s dirnim ravninama i svakim tim probodištem položi pravac usporedno s p.

17. Zadan je kosi valjak, kojemu je osnovka u Π_1; konstruiraj u jednoj točki njegova plašta onu tangentu, koja s Π_2 čini kut od 45^0.

18. Os je kosoga valjka $MN\,[M(4,\ 4,\ 0)$, $N(8,\ 6,\ 6)]$, a polumjer osnovke $r=2{,}5$. Drugi valjak ima osnovku u Π_1, kojoj je središte u točki $P(9,\ 15,\ 0)$, polumjer $r=1$, visina mu je $r_1=5$, dok su mu izvodnice usporedne s izvodnicama prvog valjka. Odredi tragove zajedničkih dirnih ravnina obih valjaka.

19. Točkom T položi one pravce, koji su od pravca m udaljeni za dužinu a, a od pravca n za dužinu b. Neka je: $m\,[M_1(0,\ 12,\ 0)$, $M_2\ (14.\ 0,\ 6)]$, $n \parallel \Pi_1\,[N_2(-4,\ 0,\ 9)$, $\sphericalangle v_2=60^0]$, $a=3$, $b=2$. — Uputa: Točkom T položi dirne ravnine na valjak, kojemu je m os, a polumjer, i dirne ravnine na valjak, kojemu je n os, b polumjer. Presječnice dirnih ravnina jednoga valjka s dirnim ravninama drugoga valjka jesu traženi pravci. Koliko ima tih pravaca?

20. Točkom T položi one pravce, koji su od pravca p udaljeni za dužinu r i koji su usporedni s ravninom $\mathbf{P}$. Neka je: $T(10,\ 1,\ 7)$, $p \parallel \Pi_1\,[P_2(0,\ 0,\ 3)$, $\alpha_2=30^0]$. $\mathbf{P}(\infty,\ 6,\ 4)$, $r=2$. — Uputa: Točkom T položi dirne ravnine na valjak, kojemu je p os, a r polumjer, zatim tom točkom položi ravninu $\Sigma \parallel \mathbf{P}$ itd.

21. Položi na uspravan valjak dirne ravnine usporedne sa osi x, ako je osnovka valjka elipsa, kojoj je tlocrt krug, i ako osnovka leži u ravnini, koja je zadana sa dva ukrštena pravca.

22. Zadanom točkom položi na zadani valjak onu tangentu, kojoj su projekcije među sobom usporedne.

23. Odredi prividne konture valjka, kojemu je osnovka elipsa, koja ide trima zadanim točkama, te joj je tlocrt kružnica.

24. Zadan je uspravan eliptičan valjak, kojemu je osnovka elipsa u Π_1, nadalje je zadana točka A izvan toga valjka; točkom A položi tangentu na valjak, koja s Π_1 čini kut od 60^0.

25. Od uspravnog valjka zadan je smjer osi m, točka A donje i točka B gornje osnovke, zatim točka C plašta valjka; nacrtaj projekcije toga valjka i odredi one dirne ravnine, koje su usporedne s pravcem $p \parallel \Pi_2$.

26. Kosi valjak ima osnovku u Π_1, os mu je usporedna s Π_2, nagnuta je prema Π_1 za 60^0 i ide točkom $N(8\ 3{,}5\ 7)$, nadalje jedna izvodnica valjka ide točkom $A\ (6\ 5\ 5)$. Točkom B, koja je izvan valjka položi dirne ravnine na taj valjak.

27. Osnovka kosoga valjka, kojoj je polumjer $r=5$, leži u Π_1 i dotiče osi x i y. Projekcije izvodnica toga valjka čine sa osi x kutove $\alpha=30^0$ i $\beta=60^0$. Položi na taj valjak one dirne ravnine, koje s bokocrtnom ravninom čine kut $\gamma=60^0$.

28. Osnovka kosoga valjka leži u Π_1, izvodnice su mu usporedne s bokocrtnom ravninom i čine sa Π_1 kut od 60^0. Odredi one dirne ravnine toga valjka, koje sa Π_2 čine kut od 60^0.

29. Odredi sjene uspravnog valjka, kojemu je osnovka u Π_2 (središte $M(3\ 0\ 4)$, $r=2$, $v=3$), ako je $\sphericalangle(s'x)=30^0$, $\sphericalangle(s''x)=45^0$.

30. Os je kosoga valjka, kojemu je osnovka u Π_2, $MN\,[M\,(3\ 0\ 3),\ N\,(6\ 4\ 6)]$, $r=2$; odredi sjene toga valjka, ako je smjer zraka svijetla zadan sjenom $N_{II}\,(9\ 0\ 0{,}5)$.

31. Valjkasta ploča, kojoj je polumjer $r=2{,}5$, dotiče Π_1 u izvodnici $A\bar{A}\,[A\,(4\ 4\ 0),\ \bar{A}\,(5\ 3\ 0)]$; odredi sjene te ploče, ako je smjer zraka svijetla zadan sjenom $N_I\,(8\ 1{,}5\ 0)$ središta N.

32. Os je kosoga valjka $MN\,[M\,(3\ 2\ 3),\ N\,(8\ 6\ 5)]$, a polumjer osnovke, koja je usporedna s Π_2, je $r=2$; odredi samosjenu i bačenu sjenu kod dijagonalne rasvjete.

33. Rotacioni je valjak tako postavljen, da su mu izvodnice okomite na osi x i da mu donja osnovna kružnica dotiče Π_1, a gornja da dotiče Π_2. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

34. Odredi sve sjene uspravnog valjka, kojemu je os $MN \parallel \Pi_2$, kod usporedne rasvjete. Neka je jedna osnovka valjka u ravnini $\Sigma\,(6 \sim 1{,}5)$, središte $M\,(3\ 4\ —)$, polumjer $r=3$, visina $v=8$.

35. Nacrtaj projekcije uspravnog valjka, kojemu je donja osnovka u ravnini $\Sigma \parallel x$ i odredi sve sjene kod usporedne rasvjete.

36. Odredi sve sjene rotacionog valjka, kojemu je os usporedna sa osi x.

37. Zadana je ravnina $\mathbf{P} = ABC\,[A\,(0\ 0\ 5),\ B\,(0\ 6{,}5\ 8{,}5),\ C\,(6\ 0\ 10{,}5)]$ i točka $M\,(4\ 5{,}5\ 6)$. Točka M je središte osnovke istostranog valjka, kojemu je druga osnovka u ravnini $\mathbf{P}$. Nacrtaj projekcije i sve sjene toga valjka.

38. Projekcije osi MN kosoga valjka čine sa osi x kutove od 45^0, dužina je te osi $= 7\ cm$, a polumjer osnovke, koja je u Π_1, $r = 2\ cm$. Odredi sjene toga valjka, ako su zrake svijetla usporedne s Π_2.

39. Osnovka je istostranog valjka u ravnini $\mathbf{P}\,(\infty\ 3\ 4)$, središte je te osnovke $M\,(4\ —\ 2)$, polumjer $r=2$; odredi sjene toga valjka na ravninama $\mathbf{P}$ i Π_1 ako su zrake svijetla usporedne sa Π_2, te su prema Π_1 nagnute za 45^0.

40. Nacrtaj kosu projekciju rotacionog valjka, kojemu je donja osnovka u ravnini (xy) i odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete. Neka je os valjka $MN\,[M\,(6\ 4\ 0),\ N\,(6\ 4\ 6)]$, a polumjer osnovke $r=2$.

41. Nacrtaj kosu projekciju istostranog valjka, kojemu je stražnja osnovka u ravnini (xz) i odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete. Neka je os valjka $MN\,[M\,(5\ 0\ 3),\ N\,(5\ 5\ 3)]$, $\alpha = 45^0$, $n=1$.

42. Nacrtaj kosu projekciju uspravnog valjka, kojemu je os $MN\,[M\,(0\ 6\ 4),\ N\,(7\ 6\ 4)]$, a polumjer osnovke $r=2{,}5$, i odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

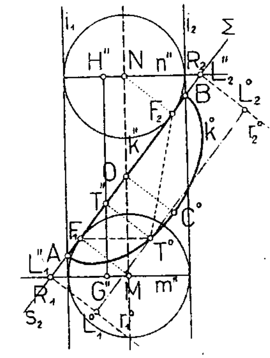
XXIX. Presjek valjka i stošca ravninom

§ 170. O presjeku valjka uopće

1. Razni presjeci valjka 2. reda. *a*) Ako je presječna ravnina Σ usporedna s izvodnicama valjka, ona siječe valjak u paralelogramu.

b) Ako je ravnina usporedna s osnovkom valjka, presjek je sukladan s tom osnovkom.

c) Ako je presječna ravnina Σ nagnuta prema osnovci rotacionog valjka, presjek je elipsa.



Sl. 594.

D o k a z: Ako se kroz os MN (sl. 594.) valjka položi ravnina $\Gamma \perp \Sigma$, onda je ravnina Γ ravnina simetrije i valjka i ravnine Σ, ona je prema tome ravnina simetrije i presječne krivulje k. Uzet će se, da je $\Gamma \equiv \Pi_2$ ravnina projekcija. Izvodnice i_1, i_2, koje leže u ravnini Γ, čine konturu valjka. Budući da je ravnina $\Sigma \perp \Gamma$, presjek valjka k projicirat će se u trag s_2 ravnine Σ tako, da će projekcija presjeka k'' pasti u dužinu AB, koja se ima uzimati dvostruko.

Zadanom valjku upišemo dvije kugle K_1 i K_2, koje dotiču plašt valjka u kružnicama m i n, a presječnu ravninu Σ u točkama F_1 i F_2. Za dani položaj ravnine Σ, točke su F_1 i F_2 stalne. Uzmimo na presječnoj krivulji k plašta valjka točku $T\,(T'')$ i spojimo tu točku sa stalnim točkama F_1 i F_2. Budući da je ravnina Σ dirna ravnina obih kugala, bit će pravac TF_1 tangenta donje, a pravac TF_2 tangenta gornje kugle (§ 158., t. 2). Povuče li se točkom T izvodnica GH $(G''H'')$ valjka, ona će doticati donju kuglu u točki $G\,(G'')$, a gornju u točki $H\,(H'')$. Budući da su pravci TF_1 i TG tangente donje kugle, to je $TF_1 = TG$ (§ 158., t. 2). S jednakih je razloga i $TF_2 = TH$. Prema tome je

$$TF_1 + TF_2 = TG + TH = GH = MN.$$

Budući da su ravnine dirnih kružnica m i n među sobom usporedne, njihova je udaljenost na svim mjestima stalna i jednaka GH ili MN. Iz gornje se jednadžbe vidi, da je zbroj udaljenosti točke T presječne krivulje k od stalnih točaka F_1 i F_2 stalne vrijednosti i jednak dužini MN. Prema tome je krivulja k elipsa, kojoj su točke F_1 i F_2 žarišta (§ 128., t. 1).

Imamo *Dandelinov poučak*:

Žarišta ravnog presjeka rotacionog valjka padaju u dirališta presječne ravnine s onim kuglama, koje dotiču tu ravninu i koje su upisane valjku.

U presječnici s_2 ravnina Γ i Σ leži velika os AB elipse, te vrhovi A i B leže na izvodnicama i_1, i_2. Mala os CD elipse k okomita je na ravnini Γ, jednaka je promjeru valjka i projicira se u točku O. Točka O je središte elipse i ona leži na osi MN valjka. U sl. 594. prednja je polovica elipse k preložena oko traga s_2 u ravninu Γ, pa je $T^0F_1 = TF_1'$ i $T^0F_2 = TF_2$, dakle $T^0F_1 + T^0F_2 = MN = AB$.

2. Ravnalice elipse. Ravnine dirnih kružnica m i n sijeku ravninu Σ u pravcima r_1 i r_2, koji su okomiti na ravnini Γ, te su im probodišta u točkama R_1 i R_2. Preložaji tih pravaca jesu pravci r^0_1 i r^0_2, koji idu točkama R_1 i R_2 okomito na trag s_2. Spustimo s točke T okomicu TL_1 na pravac r_1 i TL_2 okomito na pravac r_2. Budući da su pravci r_1 i r_2 u točkama R_1 i R_2 okomiti na ravnini Γ, to su dužine TL_1 i TL_2 usporedne s ravninom Γ, pa je $TL_1 = T''R_1$ i $TL_2 = T''R_2$. U preložaju je $T^0L^0_1 \perp r^0_1$, $T^0L^0_2 \perp r^0_2$.

Iz sl. 594. je $\Delta T''G''R_1 \sim \Delta OF_1M$ i $\Delta T''G''R_2 \sim \Delta OF_2N$. Iz sličnosti tih trokuta slijede razmjeri

$$T''G'' : T''R_1 = OF_1 : OM,$$
$$T''H'' : T''R_2 = OF_2 : ON,$$

ili

$$\left.\begin{aligned} T^0F_1 : T^0L^0_1 &= OF_1 : OM = e : a\\ T^0F_2 : T^0L^0_2 &= OF_2 : ON = e : a\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

gdje je $OA = OB = a$ i $OF_1 = OF_2 = e$.

Budući da je $OF_1 = OF_2$ i $OM = ON = OA = OB$, to su u ta dva razmjera desne strane jednake, pa se može pisati;

$$T^0F_1 : T^0L^0_1 = T^0F_2 : T^0L^0_2, \qquad (2)$$

t. j.

Omjer udaljenosti svake točke T elipse od žarišta F_1 i od pravca r_1 jednak je omjeru udaljenosti točke T od žarišta F_2 i pravca r_2. Iz (1) slijedi da je vrijednost tih omjera konstantna i manja od 1 (jer je $e > a$).

Pravci se r_1 i r_2 zovu *ravnalice* elipse, te se kaže da ravnalica r_1 pripada žarištu F_1, a ravnalica r_2 da pripada žarištu F_2, i obrnuto.

3. Konstrukcija ravnalice elipse. Budući da je iz sl. 594. $AB = MN = 2a$ i $OM = ON = OA = OB = a$, $OF_1 = OE_2 = e$ i stavi li se $OR_1 = OR_2 = d$, tada je iz pravokutnog trokuta OMR_1, u kojemu je MF_1 visina:

$$OF_1 : OM = OM : OR_1$$

ili

$$e : a = a : d,$$

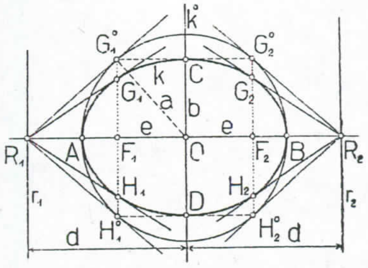
dakle

$$a^2 = ed. \qquad (3)$$

Odatle je

$$d = \frac{a^2}{e}. \qquad (4)$$

Konstruirajmo elipsu (sl. 595.), kojoj su osi AB, CD i žarišta F_1, F_2 i opišimo nad velikom osi AB kružnicu k^0, povucimo žarišem F_1 tetivu $G^0_1H^0_1$ okomito na AB i u točki G^0_1 povucimo tangentu na kružnicu k^0. Ta tangenta siječe pravac AB u točki R_1, tom točkom ide ravnalica r_1 elipse, koja pripada žarištu F_1. Na jednak se način dobije ravnalica r_2, koja pripada žarištu F_2.



Sl. 595.

Dokaz. Iz pravokutnog je trokuta $OG^0_1R_1$:

$$\overline{OG^0_1}^2 = OF_1 \cdot OR_1,$$

a jer je $OG^0_1 = a$ i $OF_1 = e$, to je

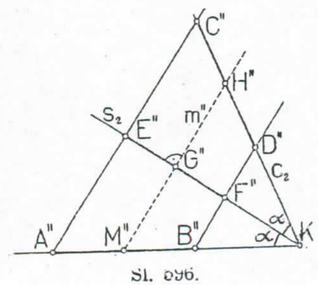
$$a^2 = e \cdot OR_1. \qquad (5)$$

Iz jednadžbi (3) i (5) slijedi da je $OR_1 = d$; t. j. točkom R_1 ide ravnalica r_1.

Budući da su elipsa k i kružnica k^0 dvije perspektivno afine krivulje s obzirom na AB kao os afinosti i na CO kao smjer afinosti, točke su G_1 i G_1^0 dvije afine točke, a pravci $R_1G^0_1$ i R_1G_1 dvije afine tangente. Iz § 136., t. 4. slijedi, da je točka R_1 pol, kojemu pripada polara G_1H_1, a ravnalica r_1 da je polara za žarište F_1 kao pol. Isto tako je R_2 pol za polaru G_2H_2, a r_2 polara za žarište F_2 kao pol.

4. Presjek kosog kružnog valjka ravninom. *a) Normalni presjek.* Svaka ravnina, koja je okomita na izvodnicama kosog kružnog valjka siječe valjak u elipsi. Takovi se presjeci zovu *normalni presjeci* kosoga valjka.

b) Kružni presjeci. Svaka ravnina, koja je usporedna sa osnovkom kosog kružnog valjka siječe valjak u kružnici, koja je sukladna s osnovkom. Svi ti kružni presjeci čine jedan sistem krugova. Na kosom valjku ima još jedan sistem kružnih presjeka, koji nijesu usporedni s ravninom osnovke. U sl. 596. nacrtana je druga projekcija kosoga valjka, kojemu je donja osnovka u Π_1 i kojemu je os m usporedna s Π_2 tako, da se karakterističan presjek toga valjka projicira na Π_2 u pravoj veličini. Nacrt je osnovke dužina $A''B''$ u osi x, prividnu konturu čine nacrti $A''C''$ i $B''D''$ izvodnica AC i BD.



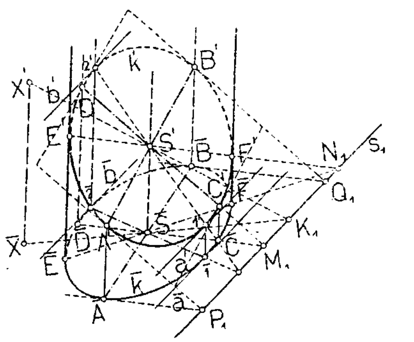
Sl. 596.

Ako se kojomgod točkom G (G'') položi ravnina Σ okomito na os m valjka, ta je ravnina okomita na Π_2, pa joj drugi trag s_2 ide točkom G'' okomito na m''. Ravnine Π_1 i Σ zatvaraju među sobom kut α. Položimo ravninu Γ okomito na Π_2 tako, da je ona simetrična s ravninom Π_1 s obzirom na ravninu Σ kao ravninu simetrije. Trag c_2 ravnine Γ ide točkom

H i čini s tragom s_2 kut α. Ravnina Γ siječe valjak u krivulji h, koja se projicira kao dužina $C''D''$ u tragu c_2. Budući da su dijelovi valjka, koji leže između ravnina Π_1 i Σ te ravnina Γ i Σ poradi simetrije prema Σ sukladni, bit će sukladni i presjeci valjka s ravninama Π_1 i Γ. Prema tome je presjek h valjka s ravninom Γ kružnica, te je $C''D'' = A''B''$. Svaka ravnina, koja je usporedna s ravninom Γ siječe kosi valjak u kružnici. Svi ti presjeci pripadaju drugom sistemu kružnih presjeka kosoga valjka.

c) Eliptični presjeci. Ako je presječna ravnina tako položena, da siječe sve izvodnice kosoga valjka, taj je presjek elipsa (osim u slučajevima, kad su presjeci kružnice).

D o k a z. Iz § 131., t. 1. slijedi, da paralelna projekcija kružnice može biti samo elipsa (ili kružnica). Imamo li kosi kružni valjak, pa njegove izvodnice smatramo zrakama projiciranja, onda se presjek valjka s nekom ravninom može smatrati paralelnom projekcijom kružne osnovke na presječnoj ravnini. Budući da je ta projekcija elipsa (ili kružnica), slijedi, da ravnina siječe kosi kružni valjak u elipsi (ili kružnici).



Sl. 597.

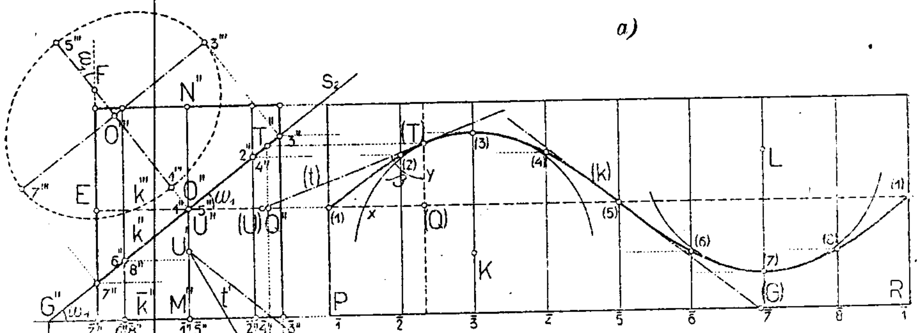
d) Afina srodnost. Između osnovne krivulje $\bar{k}$ valjka i presječne krivulje k' (sl. 597.) postoji afina srodnost. Pravac s_1 u kojemu presječna ravnina siječe osnovnu ravninu, jest os afinosti, a smjer izvodnica ujedno je smjer afinosti. U sl. 597. prikazan je eliptičan valjak i presjek u tlocrtu, gdje je $\bar{k}$ osnovna elipsa, s_1 prvi trag presječne ravnine Σ. Na zraci, koja je usporedna s izvodnicama, uzete su dvije afine točke $\bar{X}$ i X', gdje $\bar{X}$ leži u osnovnoj, a X' u presječnoj ravnini. Te dvije točke i pravac s_1 mogu se po volji uzeti, pa je osnovna ravnina određena točkom $\bar{X}$ i pravcem s_1, a presječna ravnina točkom X' i pravcem s_1. Točkama $\bar{X}, X'$ i pravcem s_1 određena je također afinost između osnovne i presječne elipse. Središtu $\bar{S}$ elipse $\bar{k}$ pripada središte S' elipse k'. Da se dobije točka S', povući će se pravac $\bar{X}\bar{S}$, spojit će se sjecište K_1 pravaca $\bar{X}\bar{S}$ i s_1 s točkom X' pa će ta spojnica sjeći zraku afinosti, koja ide točkom $\bar{S}$ (os valjka), u točki S'. Ako se u osnovnoj elipsi $\bar{k}$ povuku koja god dva konjugirana promjera $\bar{A}\bar{B}$ i $\bar{C}\bar{D}$, pa se potraže afine dužine $A'B'$ i $C'D'$, te će dužine biti dva konjugirana promjera presječne elipse k'.

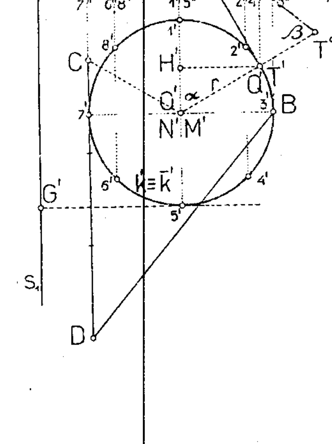
Kad se određuje presjek neke plohe ravninom, onda se moraju odrediti neke osobite točke presjeka. U prvom redu moraju se odrediti one točke presjeka, koje leže na prividnoj konturi. Prividnu konturu valjka čine projekcije dviju izvodnica, koje idu točkama $\bar{E}$ i $\bar{F}$. Točke će se E' i F' krivulje k' dobiti tako, da se povuče pravac $\bar{E}\bar{F}(\bar{S}N_1)$ i spoje točke N_1, S'. Ta spojnica siječe konturne pravce u točkama E' i F'. Elipsa k' dotiče prividnu konturu u točkama E' i F'. U drugom redu moraju se odrediti one točke presjeka, u kojima su tangente horizontalne. Te će se točke dobiti na taj način, da se na osnovnu elipsu povuku tangente a, b usporedno s tragom s_1 i dirnim točkama $\bar{1}, \bar{2}$ odrede pripadne afine točke $1', 2'$. Tangente će a', b' u tim točkama također biti usporedne sa s_1; one su prema tome u prostoru horizontalne. Jedna je od tih točaka najniža, a druga najviša točka presjeka.

§ 171. Presjek rotacionog valjka ravninom

1. Zadatak. *Odredi presjek rotacionog valjka, kojemu je osnovka u Π_1, ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$!* (Sl. 598.).

R j e š e n j e. Ravnina Σ siječe valjak u elipsi e, kojoj je tlocrt kružnica $k' = \bar{k}$, a nacrt dužina $k'' = 7''3''$ u tragu s_2. Ako se ravnina Σ preloži oko s_2 u Π_2, dobit će se presječna elipsa u pravoj veličini kao elipsa $k'''(O''O''' = M''O'$, $1''1''' = M''1'$, $5''5''' = M''5' \ldots)$. Velika je os elipse k''' dužina $7'''3''' \# 7''3''$, a mala os dužina $1'''5''' = 1'5'$.





a)

Sl. 598.

Mreža valjka. Plašt valjka spada među one plohe, koje se dadu razgrnuti u ravninu. Dvije neizmjerno blize izvodnice omeđuju neizmjerno uski dio plašta, koji se zove *plošni elemenat* toga plašta. Takav plošni elemenat leži u dirnoj ravnini valjka. Svaka dva susjedna plošna elementa imadu jednu izvodnicu zajednički, t. j. onu izvodnicu, u kojoj se sijeku ravnine dvaju susjednih elemenata. Odatle se vidi, da se jedan plošni elemenat može okretanjem oko zajedničke izvodnice dovesti u ravninu drugog elementa. Prema tome se čitav plašt valjka može razgrnuti ili razmotati u ravninu. Zato se kaže, da je valjkasta ploha razgrnjiva (developabla).

Svaki se normalni presjek valjka u razgrnutom plaštu prikaže kao pravac. Osnovke su rotacionog valjka normalni presjeci, i to kružnice. U razgrnutom plaštu te će se kružnice prikazati kao dužine, koje su jednake opsegu osnovaka. Razgrnuti plašt rotacionog valjka ima oblik pravokutnika (sl. 598.a), kojemu je osnovica $PR = 2 \cdot BD$, a visina jednaka visini valjka. Ako se tomu pravokutniku nadodaju obje osnovke, dobije se potpuna mreža rotacionog valjka.

Da se dobije presječna krivulja k u razgrnutom plaštu, razdijelit će se dužina PR na 8 jednakih dijelova. Svaki je taj dio jednak osmom dijelu kružnice k', koja će se također razdijeliti na 8 jednakih dijelova. Dijelištima dužine PR potegnut će se pravci okomito na PR. U te pravce padnu one izvodnice valjka, koje pripadaju točkama $1, 2, 3, \ldots$ Da se dobiju pojedine točke $(1), (2), (3)$, krivulje (k) u razgrnutom plaštu, prenijet će se na izvodnice udaljenosti točaka $1, 2, 3, \ldots$ (sl. 598.) od osnovne ravnine. Te se dužine prikažu u nacrtu u pravoj veličini, i to između osi x i traga s_2; na pr. $\overline{1}(1) = \overline{1}''1''$, $\overline{2}(2) = \overline{4}(4) = \overline{2}''2'' \ldots$ Iz sl. 598.a vidi se, da je točka (3) najviša, a (7) najniža točka razgrnute presječne krivulje. Tangente su u tim točkama usporedne s pravcem PR.

Krivulja (k) sastoji se iz dva sukladna dijela, naime $(1)(3)(5)$ i $(5)(7)(1)$. Ti su dijelovi krivulje simetrični, i to prvi dio s obzirom na izvodnicu $\overline{3}(3)$, a drugi s obzirom na izvodnicu $\overline{7}(7)$. Točke su (3) i (7) tjemena krivulje.

3. Jednadžba krivulje *k*. Neka je u sl. 598. a) točka (1) ishodište, pravac $(1)(1)$ os apscisa, a x, y koordinate koje god točke (T) krivulje (k), neka je nadalje u sl. 598. r polumjer kružnice k', $\sphericalangle 1'M'T' = \alpha$. Tada je

$$x = (1)(Q) = arc\, 1'T' = r\alpha, \quad y = (Q)(T) = Q''T'' = 1''Q''\, tg\,\omega_1,$$ gdje

je ω_1 jednak prvom priklonom kutu presječne ravnine Σ. Budući da je taj kut za dani položaj ravnine Σ konstantan, može se staviti $tg\,\omega_1 = \lambda =$ konst. Budući da je $1''Q'' = HT' = r\,sin\,\alpha$ i $\alpha = \frac{x}{r}$, tad je

$$y = \lambda r\, sin\,\alpha \qquad \text{ili} \qquad y = \lambda r\, sin\,\frac{x}{r}$$

jednadžba krivulje (k). Za $\omega_1 = 45^0$ je $\lambda = 1$, pa ako se još uzme da je $r = 1$, onda se dobije jednadžba sinusoide, naime $y = sin\,x$.

Svaki eliptični presjek rotacionog valjka prelazi u razgrnutom plaštu u opću sinusoidu (isp. § 152.). Ako se uzme da je plašt valjka više puta zavijen oko valjka, pa se razgrne u ravninu, dobiju se daljnje grane sinusoide.

4. Konstrukcija tangenata krivulje (k). Ako se u točki $T(T', T'')$ povuče tangenta t na elipsu $k(k', k'')$, njezin je tlocrt tangenta $U'T'$ kružnice k' u točki T'. Nacrt te tangente pada u trag s_2. Ta tangenta siječe horizontalnu ravninu Δ, položenu središtem S presječne elipse, u točki $U(U', U'')$. Kad se plašt valjka razgrne u ravninu, onda se dužina tangente UT kao i tlocrt $U'Q'$ na ravnini Δ prikaže u pravoj veličini. Ako se prema tome na pravcu $(1)(1)$ učini $(Q)(U) = U'Q' = U'T'$, onda je spojnica $(U)(T)$ tangenta krivulje (k) u točki (T). Tangenta $(T)(U)$ čini sa $(T)(Q)$ kut β, koji je jednak kutu, kojega tangenta elipse u točki T čini sa izvodnicom TQ. To će biti odmah jasno, ako se uzme, da se plašt razgrne u dirnu ravninu UQT. Povuče li se $Q'T^0 \perp U'T'$ i učini $Q'T^0 = Q''T'''$ i spoje točke U' i T^0, tada je $\sphericalangle Q'T^0U' = \beta$. Ako se učini $\sphericalangle (Q)(T)(U) = \beta$, onda je $(T)(U)$ tangenta u točki (T).

Krivulja (k) ima u točkama (1) i (5) obratišta. Točke presjeka valjka ravninom Σ, u kojima su dirne ravnine plohe okomite na presječnoj ravnini Σ prelaze u mrežama valjka u obratišta krivulje (k). U točkama 1 i 5 presjeka dirne su ravnine uistinu okomite na ravnini Σ. Da se točki (5) konstruira tangenta, postupat će se ovako: Tlocrt je tangente u točki 5 pravac $5'G'$, gdje je G' prvo probodište tangente, te se nalazi u tragu s_1. Ako se prenese $5(G) = 5'G'$, onda je spojnica $(5)(G)$ tangenta krivulje (k) u obratištu (5). Budući da je ta tangenta usporedna s Π_2, to je dio tangente $G5 = G''5''$. Taj se dio u razgrnutom plaštu prikaže u pravoj veličini, pa je $(5)(G) = 5''G''$. Tangenta u svakom obratištu čini s pripadnom izvodnicom najmanji kut.

5. Zakrivljenost u tjemenu krivulje (k). *Ako se presječna elipsa k razgrne u dirnu ravninu valjka u nekoj točki T elipse, onda je polumjer zakrivljenosti razgrnute elipse u točki T jednak polumjeru zakrivljenosti ortogonalne projekcije presječne elipse na dirnu ravninu u točki T*[1]. Ako se elipsa ortogonalno projicira na dirnu ravninu valjka u točki 3. (sl. 598.), ta je projekcija elipsa, kojoj je jedna poluos $a = r$, a druga poluos $b = 03 \cdot sin\,\omega_1 = 0''3'' \cdot sin\,\omega_1 = \frac{r}{cos\,\omega_1} \cdot sin\,\omega_1 = r \cdot tg\,\omega_1$. Polumjer je zakrivljenosti te elipse u točki 3, dakle i u točki (3) sinusoide (k)

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{r^2}{r \cdot \mathrm{tg}\,\omega_1} = r \cdot \mathrm{cotg}\,\omega_1.$$

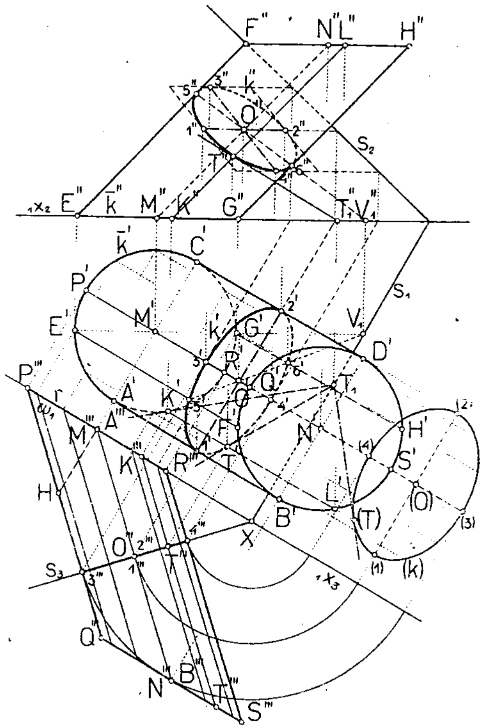
[1]) E. Catalan: Comptes rendus, 18. sv. g. 1843.

U pravokutnom je trokutu $O''EF$ (sl. 598): $O''E = r$, $\sphericalangle EFO'' = \omega_1$, $EF = r \cdot \operatorname{cotg} \omega_1 = \rho$. Ako se na izvodnicu (3)3 prenese (3)$K = EF$, onda je točka K središte zakrivljenosti sinusoide u točki (3). Kružnica opisana oko točke K s polumjerom K(3) jest kružnica zakrivljenosti u točki (3). Točka L [(7)$L = EF$] je središte zakrivljenosti u točki (7).

Budući da je ortogonalna projekcija elipse k na dirnu ravninu u točki 5 dužina, slijedi da je polumjer zakrivljenosti sinusoide (k) u točki (5) $\rho = \infty$, t. j. točka (5) je obratište krivulje (k).

§ 172. Presjek kosoga valjka ravninom

1. Zadatak. *Odredi projekcije normalnog presjeka kosoga valjka, kojemu je donja osnovka u* Π_1! (Sl. 599.).



Sl. 599.

Rješenje. Presječna je ravnina Σ okomita na osi MN valjka, pa je trag $s_1 \perp M'N'$ i $s_2 \perp M''N''$. Presjek se valjka s ravninom Σ može odrediti na taj način, da se potraže sjecišta pojedinih valjkovih izvodnica s tom ravninom, a onda se ta sjecišta spoje u tlocrtu i u nacrtu elipsama. Svakako valja odrediti točke, u kojima ravnina Σ siječe konturne izvodnice tlocrta i nacrta, t. j. izvodnice AB, CD i EF, GH. Dobro će biti, da se najprije odredi sjecište $O(O', O'')$ osi MN s ravninom Σ, jer je O' središte elipse k', a O'' središte elipse k''. Između donje osnovke i presječne elipse k postoji afini srodnost, gdje je s_1 os afinosti, a MO smjer zraka afinosti. Ta afinost postoji također između donje osnovke i tlocrta k' elipse k, te je s_1 os afinosti, a $M'O'$ smjer afinosti. Upotrebom afinosti mogu se odrediti pojedine točke presjeka. Da se na pr. dobiju točke 5' i 6', produžit će se promjer $E'G'$ do točke V_1 na tragu s_1 i spojit će se V_1 s O', pa će pravac $V_1 O'$ sjeći

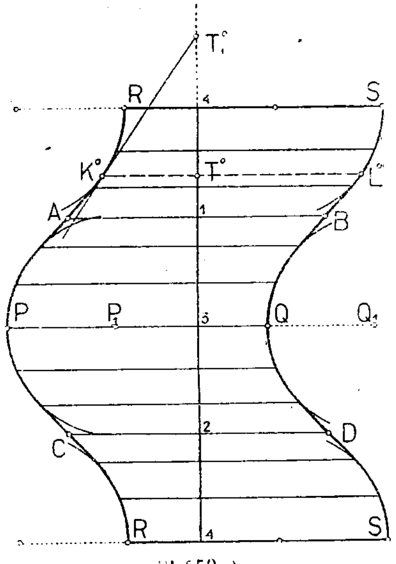
$E'F'$ u točki 5', a $G'H'$ u točki 6'. Ako se V_1'' spoji s O'', dobit će se nacrt 5'' i 6''. Ako je promjer $A'C' \parallel s_1$, bit će i pridruženi promjer 1'2' $\parallel s_1$, dakle 1''2'' $\parallel x$. Ako je pravac $K'T'$ tangenta osnovne kružnice u točki K', onda je pravac T_1T' tangenta elipse k' u točki T', koja je pridružena točki K. Točka je 3(3', 3'') najviša, a točka 4(4', 4'') najniža točka presjeka. (Zašto?).

Presjek se valjka može odrediti i upotrebom stranocrta (transformacijom). U sl. 599. uzelo se da je $\Pi_3 \perp s_1$, dakle ${}_1x_3 \perp s_1$. Treći je trag $s_3 \perp M'''N'''$. Treća je projekcija presjeka dužina 3'''4''' u tragu s_3. S pomoću te treće projekcije i izvodnica valjka odredi se tlocrt k' i nacrt k''.

Budući da su izvodnice valjka okomite na ravnini Σ, može se elipsa k smatrati ortogonalnom projekcijom donje osnovke kružnice na tu ravninu. Prema tome bit će ovdje velika os elipse k' usporedna sa s_1, a mala os okomita na s_1 (§ 133., sl. 483), t. j. 1'2' je velika, a 3'4' mala os te elipse. Dužine pak 1''2'' i 3''4'' bit će dva konjugirana promjera elipse k''.

2. Prava veličina presjeka. Ako se u sl. 599. okrene elipsa k oko traga s_1 u Π_1, ona će doći u položaj (k). Točke će elipse k opisati lukove, koji se na Π_3 prikažu u pravoj veličini kao koncentrični lukovi sa središtem u točki X, a u tlocrtu kao dužine usporedne sa osi ${}_1x_3$. U sl. 599. rotirane su samo točke 1, 2, 3, 4, pa je dužina (1)(2) velika, a (3)(4) mala os elipse (k). Budući da su elipse k' i (k) također dvije afine krivulje, bit će pravac $T_1(T)$ tangenta elipse (k) u točki (7).

Mreža. Kad se plašt kosoga valjka razgrne u ravninu, ne će se dobiti pravokutnik kao kod uspravnog valjka, nego lik prikazan u sl. 599 a). Obodnice osnovaka ne će se prikazati kao dužine, nego kao krivulje. To je zbog toga, što tangente u točkama tih obodnica ne čine s pripadnim izvodnicama jednake kutove. Tangente u točkama normalnoga presjeka okomite su na pripadnim izvodnicama valjka, pa se zato elipsa k prikaže u razgrnutom položaju kao dužina 4,4 (sl. 599. a). Da se dobije veličina te dužine, razdijelit će se elipsa (k) na malene lukove, pa će se umjesto rektificionih lukova prenijeti pripadne tetive na pravac 4.4. Ako se dužina 4.4 raz-



Sl. 599 a).

dijeli na četiri jednaka dijela, dobit će se točke 1,3 i 2. Kroz točke 4,1,3 2,4 idu izvodnice valjka okomito na dužinu 4.4. Budući da su izvodnice valjka $\parallel \Pi_3$, one se na tu ravninu projiciraju u pravoj veličini, a projiciraju se u pravoj veličini i dijelovi tih izvodnica, koji se nalaze na različitim stranama ravnine Σ. Zato se u sl. 599. a) učinilo $4R = 4'''R'''$, $4S = 4'''S'''$, $1A = 2C = 1'''A'''$, $1B = 2D = 1'''B'''$, $3P = 3'''P'''$, $3Q = 3'''Q'''$. Naravno da mora biti $RS = AB = PQ = \ldots$ Na plaštu valjka uzme se još nekoliko izvodnica, odredi se njihov položaj u razgrnutom plaštu i napokon odrede krajnje točke pomoću stranocrta. Ako se tad spoje krajnje točke izvodnica u sl. 599. a), dobit će se dvije sukladne krivulje, koje prikazuju obodnice osnovaka razgrnutih u ravninu. Ako se tomu plaštu nadodaju osnovke, dobit će se mreža kosoga valjka.

Krivulje $(\bar{k})$, u koje su prešle osnovne kružnice $\bar{k}$ u razgrnutom plaštu, također su opće sinusoide. Ako se sad donja osnovka smatra presjekom valjka s ravninom Π_1, pa se potraže one točke osnovne kružnice, u kojima su dirne ravnine valjka okomite na Π_1, onda će se te točke u razgrnutom položaju prikazati kao obratišta. Te dirne ravnine sadrže upravo izvodnice AB i CD, koje se projiciraju na Π_1 kao prividna kontura. U razgrnutom položaju točke su A i C, B i D obratišta razgrnutih osnovnih kružnica. Točke P, R i Q, S su tjemena tih krivulja.

Da se u razgrnutom plaštu odredi tangenta točke K na osnovnu kružnicu, projicirat će se tangenta $KT_1 (K'T_1', K''T_1''$, sl 599.) ortogonalno na ravninu Σ u pravac $TT_1 (T'T_1, T''T_1'')$ i odredit će se prava veličina $(T)T_1$ tangente TT_1. Kad se plašt razgrne u ravninu, onda dužina TT_1 padne u pravac 4 4 i prikaže se u pravoj veličini. Ako se u razgrnutom plaštu odredi izvodnica K^0L^0, na kojoj leži točka T^0, pa se učini $T^0T^0_1 = (T)T_1$, onda je $T^0_1K^0$ tangenta u točki K^0 na razgrnutu osnovnu kružnicu. Ako se točno crta, onda je $K^0T^0_1 = K'T_1$.

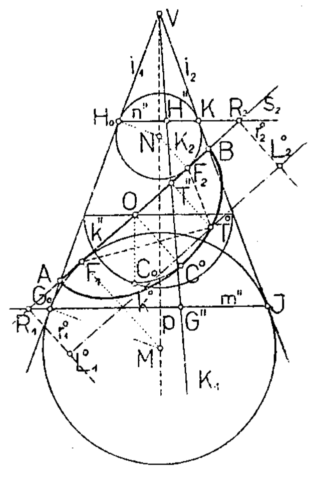
Prema Catalanovom poučku (§ 171., t. 5) polumjer je zakrivljenosti u vrhovima P, Q, R, S razastrtih osnovnih kružnica $\rho = \frac{r^2}{r\cos\omega_1} = \frac{r}{\cos\omega_1} = P'''H$, dakle $PP_1 = QQ_1 = \cdots = P'''H$ (sl. 599 a.)

§ 173. O presjeku stošca ravninom uopće

1. Presječna je ravnina položena vrhom stošca. Ako je ravnina Γ položena vrhom stošca, onda ona može imati sa stošcem zajednički: 1.) samo taj vrh, 2.) jednu izvodnicu, 3.) dvije izvodnice. U prvom slučaju ravnina Γ siječe sve izvodnice stošca u vrhu, u drugom slučaju ravnina dotiče stožac u onoj izvodnici, a ostale izvodnice siječe u vrhu, a u trećem slučaju ravnina siječe stožac u one dvije izvodnice, a ostale izvodnice siječe u vrhu.

2. Presječna ravnina ne prolazi vrhom stošca. Ako presječna ravnina ne ide vrhom stošca, ona taj stožac siječe u krivulji 2. reda. Ako se naime u presječnoj ravnini povuče koji god pravac, on može stožac 2. reda sjeći najviše u dvije realne točke. Budući da taj pravac leži u presječnoj ravnini, onda ona dva sjecišta moraju ležati i na presječnoj krivulji. Prema tome koji god pravac presječne ravnine može s presječnom krivuljom imati najviše dvije realne točke zajednički, odakle slijedi, da presječna krivulja stošca mora biti 2. reda.

Ako se ravnina Γ, koja ide vrhom stošca, pomakne usporedno u položaj Σ, onda ona siječe stožac: 1. u elipsi, 2. u paraboli, 3. u hiperboli. U prvom slučaju ravnina Σ siječe sve izvodnice stošca, u drugom je slučaju usporedna s jednom izvodnicom stošca, a u trećem je slučaju usporedna sa dvije izvodnice stošca.



Sl. 600.

Ako je ravnina usporedna sa jednom izvodnicom stošca, ona ima s tom izvodnicom zajednički jednu neizmjerno daleku točku. Ta točka pripada presječnoj krivulji, koja prema tome ima jednu neizmjerno daleku točku. Ta je dakle krivulja parabola.

Ako je ravnina usporedna s dvije izvodnice, ona ima sa svakom tom izvodnicom po jednu neizmjerno daleku točku zajednički. Te dvije točke pripadaju presječnoj krivulji. Pošto ta krivulja ima dvije neizmjerno daleke točke, ona je hiperbola.

Elipsa, parabola i hiperbola zovu se jednim imenom *sjekotine stošca* ili *krivulje 2. reda*.

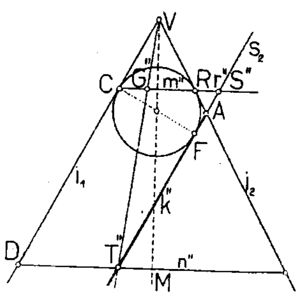
3. Eliptički presjek rotacionog stošca. Uzet će se, da je os p stošca u Π_2 (sl. 600.). U tom su slučaju u Π_2 dvije konturne izvodnice i_1, i_2 stošca, koje sa p čine jednake kutove. Presječna ravnina Σ postavit će se tako, da siječe sve izvodnice i da je okomita na Π_2. Trag je te ravnine s_2. Taj trag siječe konturne izvodnice i_1, i_2 u točkama A, B. Presjek je stošca s ravninom Σ elipsa k, kojoj nacrt $k'' \equiv AB$ pada u trag s_2.

Dokaz. Opisat će se one dvije kugle K_1 i K_2, koje dotiču stožac u kružnicama m i n i presječnu ravninu Σ u točkama F_1 i F_2. ($G^0M \perp i_1$, $H_0N \perp i_1$, MF_1 i $NF_2 \perp s_2$). Za dani položaj ravnine Σ točke su F_1 i F_2 stalne. Dio plašta stošca, koji se nalazi između dirnih kružnica m i n jest plašt uspravnog krnjeg stošca.

Na presječnoj krivulji k uzet će se koja god točka $T(T'')$, spojit će se sa stalnim točkama F_1 i F_2 i povući će se njom izvodnica VT. Ta izvodnica dotiče donju kuglu u točki $G(G'')$, a gornju kuglu u točki $H(H'')$. Budući da su pravci TF_1 i TG tangente donje kugle, to je $TF_1 = TG$. S jednakih je razloga i $TF_2 = TH$ Prema tome je

$$TF_1 + TF_2 = TG + TH = GH.$$

Budući da je GH izvodnica rotacionog krnjeg stošca i budući da su sve izvodnice toga stošca jednake izvodnici JK slijedi, da je zbroj udaljenosti točke T od stalnih točaka F_1 i F_2 stalne veličine i jednak JK, t. j. točka T leži na elipsi. Ravnina Σ siječe dakle stožac u elipsi, kojoj su točke F_1 i F_2 žarišta, a AB velika os. Ako se dužina AB raspolovi, dobit će se središte O elipse k. Središte elipse ne leži na osi stošca. Budući da velika os AB leži u ravnini Π_2, mala će os CD biti okomita na Π_2 i projicirat će se u točki O. Krajnje točke C i D leže na plaštu stošca, pa je os CD tetiva toga plašta. Ta je dužina ujedno tetiva kružnog presjeka stošca ravninom, koja ide točkom O okomito na os p, te joj promjer leži između konturnih izvodnica i_1, i_2. Ako se prednji dio kružnog presjeka preloži u ravninu Π_2, dobit će se dužina OC_0, koja je jednaka maloj poluosi presječne elipse k.



Sl. 601.

U sl. 600. preložena je prednja polovica presječne elipse oko AB u Π_2. Mala je poluos $OC^0 = OC_0$. Točka T došla je u točku T^0. Budući da je $T^0F_1 = TF_1$ i $T^0F_2 = TF_2$, to je

$$T^0F_1 + T^0F_2 = TF_1 + TF_2 = JK = AB.$$

Ravnina Σ siječe ravnine dirnih kružnica m i n u pravcima r_1 i r_2, koji su okomiti na Π_2 te su im projekcije u točkama R_1 i R_2. Preložaji su tih pravaca r^0_1 i r^0_2. Lako bi se dokazalo, da su pravci r_1 i r_2 ravnalice presječne elipse k. (Isp. § 170., t. 2.).

4. Paraboličan presjek rotacionog stošca. U sl. 601. prikazan je plašt rotacionog stošca, kojemu je os VM i dvije izvodnice i_1, i_2 u ravnini Π_2. Taj je stožac presječen ravninom Σ, koja je usporedna s izvodnicom i_1 i okomita na Π_2, te joj je trag $s_2 \parallel i_1$. Ta ravnina siječe stožac u paraboli.

Dokaz. Opisat će se ona dirna kugla, koja dotiče stožac u kružnici m i presječnu ravninu u točki F. Za dani položaj ravnine Σ točka F je stalna. Ravnina Σ siječe ravninu dirne kružnice m u pravcu r, koji je okomit na ravnini Π_2 te mu je projekcija u točki R.

Ako se koja god točka $T(T'')$ presječne krivulje spoji s vrhom V i s točkom F, onda pravac VT dotiče kuglu u točki $G(G'')$, koja leži na dirnoj kružnici m, a pravac TF dotiče kuglu u točki F. Prema tome je $TF = TG$. Ako se točkom T položi ravnina okomito na os VM, ona siječe

stožac u kružnici n, pa je dio stošca između ravnina kružnica n i m rotacioni krnji stožac. Zbog toga je $TG = DC$.

Ako se s točke T spusti okomica TS na pravac r, onda je lik $TSCD$ paralelogram, pa je $TS = DC$. Budući da je $TF = TG = DC$, to je

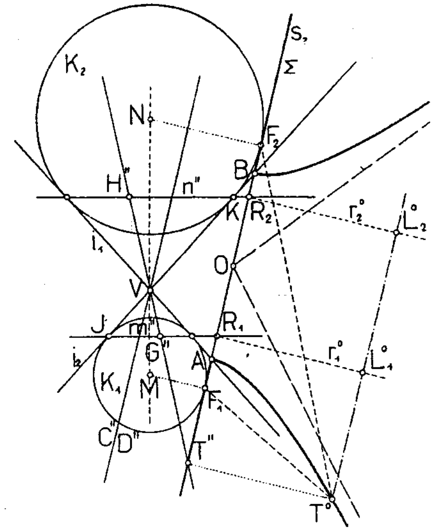
$$TF = TS,$$

t. j. točka T presječne krivulje jednako je udaljena od stalne točke F i od stalnoga pravca r. To svojstvo ima svaka točka presječne krivulje, pa s obzirom na § 141. t. 1. slijedi, da je ta krivulja parabola.

Ako je presječna ravnina usporedna s jednom izvodnicom stošca, presjek je parabola. Točka F je žarište, a pravac r ravnalica. Točka A, u kojoj ravnina Σ siječe izvodnicu i_2, jest tjeme parabole. Os parabole ima smjer izvodnice i_1.

5. Hiperbolički presjek rotacionog stošca. U sl. 602. prikazan je plašt dvostrukog stošca, kojemu je vrh V, a os MN. Uzelo se da je os MN u Π_2; u toj ravnini leže i dvije konturne izvodnice i_1, i_2. Presječna ravnina Σ postavljena je okomito na ravninu crtnje, a usporedno s dvije izvodnice CV i DV, te joj je trag u pravcu $s_2 \parallel C''V$. Ravnina Σ siječe plašt stošca u hiperboli.

Dokaz. Opišimo dvije kugle, koje dotiču stožac u dvije usporedne kružnice m i n, a ravninu Σ u dvije točke F_1 i F_2. Za dani položaj ravnine Σ te su točke stalne.



Sl. 602.

Uzmimo na presječnoj krivulji kojugod točku $T(T'')$ i spojimo je s točkama F_1 i F_2, te povucimo njom izvodnicu TV, koja donju kuglu dotiče u točki $G(G'')$, a gornju u točki $H(H'')$. Budući da su pravci TF_1 i TG tangente donje kugle, to je $TF_1 = TG$. Pravci su TF_2 i TH tangente gornje kugle, pa je $TF_2 = TH$. Odbijemo li udaljenosti točke T od stalnih točaka F_1 i F_2, imamo

$$TF_1 - TF_2 = TH - TG = GH.$$

Budući da su dijelovi izvodnica, koji leže između usporednih ravnina položenih dirnim kružnicama m i n jednaki, i to jednaki dužini KG, slijedi da je $GH = JK$. Svaka točka presječne krivulje ima svojstvo, da je razlika udaljenosti te točke od ostalih točaka F_1 i F_2 konstantna i jednaka dužini JK. Odatle slijedi, da je presječna krivulja hiperbola (§ 140, t. 1.). Hiperbola ima dvije grane te jedna grana leži na donjem, a druga grana na gornjem plaštu. Točke su F_1 i F_2 žarišta hiperbole, a točke A i B u kojima ravnina Σ siječe izvodnice i_1, i_2, su tjemena hiperbole. Središte O hiperbole leži u polovištu dužine AB. Budući da hiperbola ima u smjeru izvodnica VC i VD po jednu neizmjerno daleku točku, asimptote hiperbole idu točkom O usporedno s izvodnicama VC i VD.

Ravnine dirnih kružnica m i n sijeku presječnu ravninu Σ u pravcima r_1, r_2, koji se zovu *ravnalice* hiperbole. Te su ravnalice u točkama R_1 i R_2 okomite na Π_2, a jer u Π_2 leži os AB, one su okomite i na osi hiperbole.

Ako se prednji dio hiperbole preloži oko traga s_2 u Π_2, točka T dođe u T^0, a ravnalice padnu u pravce $r_1^0, r_2^0 \perp s_2$. Ako se s točke T^0 spuste okomice $T^0L_1^0$ i $T^0L_2^0$ na preložene ravnalice, tada se slično kao i za elipsu (§ 170., t. 2) dobije razmjer

$$T^0F_1 : T^0L_1^0 = OF_1 : OA = e : a,$$
$$T_0F_2 : T^0L_2^0 = OF_2 : OB = e : a. \qquad \text{t. j.:}$$

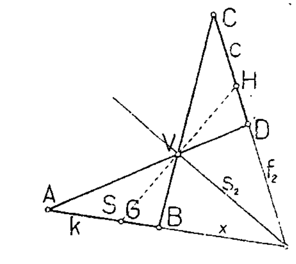
Omjer udaljenosti svake točke T hiperbole od žarišta F_1 i od pravca r_1 jednak je omjeru udaljenosti točke T od žarišta F_2 i pravca r_2. Vrijednost je tih omjera konstantna i veća od 1 (jer je $e > a$). Za elipsu je ta vrijednost manja od 1, a za parabolu jednaka je 1.

Za svaku točku krivulje 2. reda omjer je između udaljenosti te točke od žarišta i udaljenosti od pripadne ravnalice konstantan, i to za elipsu je manje od 1, za parabolu je jednak 1, a za hiperbolu je veći od 1.

Svaka je ravnalica polara pripadnog žarišta krivulje 2. reda.

2. Krivulje 2. reda kao centralna projekcija kružnice. Ako se vrh V stošca smatra središtem projiciranja, izvodnice zrakama projiciranja, a ravnina Σ ravninom projekcija, onda se presječna krivulja stošca ravninom Σ može smatrati centralnom projekcijom dirne kružnice m ili n na ravninu Σ iz točke V (sl. 600., 601. i 602.). Jer svaka zraka, koja spaja kojugod točku G kružnice m s točkom V, siječe ravninu Σ u točki T, koja leži na krivulji 2. reda, ta je krivulja elipsa, parabola ili hiperbola prema tome, da li ravnina siječe sve zrake projiciranja kružnice m (ili n) iz točke V, ili je usporedna s jednom zrakom, ili s dvije zrake projiciranja. U sl. 600. — 602. zrake projiciranja čine rotacioni stožac. No ako se točka V odabere po volji tako, da pravac VM nije okomit na ravnini kružnice m, zrake će projiciranja činiti kosi kružni stožac, koji će ravnina Σ sjeći u elipsi, paraboli ili hiperboli prema tome, da li ravnina Σ siječe sve izvodnice, ili je usporedna s jednom ili s dvije izvodnice kosoga stošca.

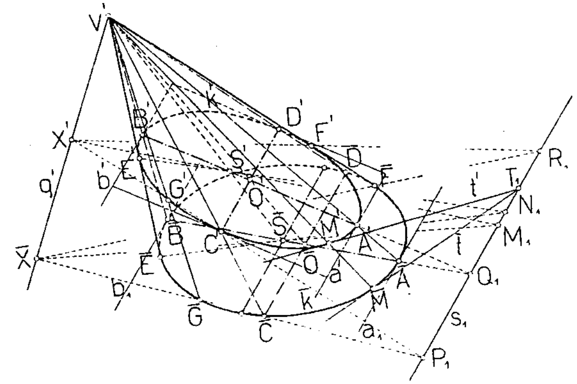
7. Kružni presjeci kosoga stošca. (Sl. 603). Uzet će se, da je karakterističan presjek VAB kosog kružnog stošca u ravnini Π_2. Dužina AB je promjer kružne osnovke k i ujedno nacrt te osnovke. Izvodnice VA i VB čine prividnu konturu nacrta stošca. Raspolovimo kut AVB i vrhom V položimo na simetralu GH, koja je u Π_2, ravninu $\Sigma \perp \Pi_2$. Trag je ravnine Σ $s_2 \perp GH$. Sad položimo ravninu Φ okomito na Π_2 i simetrično s ravninom Π_1 s obzirom na ravninu Σ kao ravninu simetrije. Trag je te ravnine f_2, te je $\sphericalangle (xs_2) = \sphericalangle (f_2 s_2)$. Ravnina Φ siječe stožac u krivulji c kojoj je nacrt dužina CD, a koja leži u tragu f_2. Zbog simetrije oba su dijela VAB i VCD stošca sukladna, odakle slijedi, da je krivulja c kružnica. Svaka ravnina, koja je usporedna s ravninom osnovke k siječe stožac u kružnici. Svaka ravnina, koja je usporedna s ravninom kružnice c siječe stožac također u kružnici. Prema tome na kosom kružnom stošcu imamo dva sistema kružnih presjeka.



Sl. 603.

§ 174. Kolineacija i polarnost

1. Kolineacija. (Sl. 604.). Između osnovke i presjeka piramide postoji kolinearna srodnost. (§ 77). Stožac se može smatrati piramidom, kojoj osnovka ima neizmjerno mnogo stranica. Prema tome osnovna i presječna



Sl. 604.

krivulja stošca jesu dvije perspektivno — kolinearne krivulje. Vrh V stošca jest središte kolineacije, a pravac s_1, u kojemu se sijeku osnovna i presječna ravnina, je os kolineacije. Svakoj točki osnovne krivulje pripada jedna jedina točka presječne krivulje. Po dvije pripadne točke leže na pravcu, koji ide stalnom točkom V. Svakom pravcu osnovne ravnine pripada jedan jedini pravac presječne ravnine. Po dva pripadna pravca sijeku se u istoj točki u osi kolineacije. Takova svojstva imadu i projekcije osnovne i presječne krivulje na istoj ravnini. U sl. 604. nacrtan je tlocrt eliptičnog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, i tlocrt k' presječne elipse ravninom , kojoj je prvi trag pravac s_1. Osnovna elipsa k i elipsa k' jesu dvije perspektivno-kolinearne krivulje; točka V' je središte, a pravac s_1 os kolineacije. Vrhom V povučena je zraka q i određena su njezina probodišta s ravninom Π_1 i . Projekcije su tih točaka $\overline{X}, X'$ i to su dvije pripadne kolinearne točke.

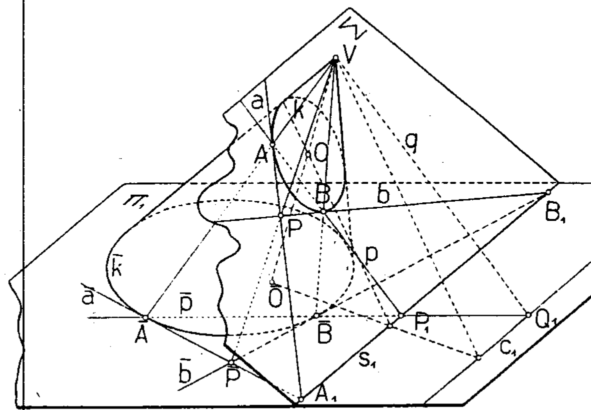
Ako se točkom $\overline{X}$ povuče u ravnini Π_1 kojigod pravac $\overline{X}P_1$, onda pravci $\overline{X}X' \equiv q$ i $\overline{X}P_1$ čine ravninu, koja siječe stožac u izvodnicama $\overline{C}V$ i $\overline{G}V$, kojima je tlocrt $\overline{C}V'$ i $\overline{G}V'$, a ravninu Σ u pravcu XP_1, kojemu je tlocrt $X'P_1$. Pravac XP_1 siječe prema tome izvodnice $\overline{C}V$ i $\overline{G}V$ u točkama C i G kojima je tlocrt C' i G'. Pravci su $\overline{X}P_1$ i $X'P_1$ dva pripadna kolinearna pravca, a parovi točaka $\overline{C}$ i C', $\overline{G}$ i G' jesu pripadne kolinearne točke.

Da se dobije najviša i najniža točka presječne elipse, povući će se na osnovnu elipsu $\overline{k}$ tangente a_1 i b_1 usporedno s osi kolineacije s_1, odredit će se dirališta $\overline{A}$ i $\overline{B}$ i spojiti s vrhom V. Dužina je $\overline{A}\,\overline{B}$ promjer elipse $\overline{k}$. Da se dobije pripadni pravac $A'B'$ u elipsi k', odredit će se na pravcu $\overline{S}V'$ točka S', koja pripada točki $\overline{S}$, t. j. povući će se pravci $\overline{X}\,\overline{S}\,M_1$ i M_1X'. Pravac M_1X' siječe $\overline{S}V'$ u točki S' Ako se produži promjer $\overline{A}\,\overline{B}$ do točke Q_1 na tragu s_1, pa se Q_1 spoji s točkom S', ta spojnica siječe izvodnice $\overline{A}V'$ i $\overline{B}V'$ u točkama A', B'. Točka A je najniža, a točka B najviša točka presječne elipse.

Pravci a_1 i b_1 jesu tragovi dirnih ravnina stošca uzduž izvodnica $\overline{A}V$ i $\overline{B}V$. Budući da su tragovi dirnih ravnina i ravnine Σ među sobom usporedni (a_1 i $b_1 \parallel s_1$), tad i presječnice a i b dirnih ravnina s ravninom Σ moraju biti usporedne s tragom s_1, odakle slijedi da je $a \parallel b$ i $a' \parallel b'$. Budući da su pravci a i b tangente presječne elipse i budući da je $a \parallel b$, slijedi da je dužina AB promjer presječne elipse. Prema tome je $A'B'$ promjer elipse k'.

Polovište O dužine AB jest središte presječne elipse k. To središte ne leži na pravcu $\overline{S}V$, tako da točke $\overline{S}$ i O nijesu dvije pripadne kolinearne točke. Da se dobije točka $\overline{O}$ osnovke, koja je kolinearna s točkom O, povući će se pravac VO, pa će taj pravac, pošto leži u ravnini $\overline{A}\,\overline{B}\,V$, sjeći promjer $\overline{A}\,\overline{B}$ u točki $\overline{O}$. Polovište O' dužine $A'B'$ je središte elipse k'. Spojnica $V'O'$ siječe $\overline{A}\,\overline{B}$ u točki $\overline{O}$.

Ako se točkom $\overline{O}$ povuče tetiva $\overline{C}\,\overline{D}$ elipse $\overline{k}$ usporedno s tangentom a_1 ili b_1, onda je $\overline{C}\,\overline{D}$ prema promjeru $\overline{A}\,\overline{B}$ konjugirana tetiva. Ako se točkom O povuče usporednica s tangentama u točkama A i B ili s tragom s_1, u tu će usporednicu pasti promjer CD presječne elipse. Ako su dva lika kolinearna, onda konjugiranim pravcima jednoga lika pripadaju konjugirani pravci drugoga lika. Budući da su pravci AB i $\overline{A}\,\overline{B}$ kolinearni, a CD i AB konjugirani pravci, slijedi da su pravci CD i $\overline{C}\,\overline{D}$ kolinearno srodni. Prema tome točke $\overline{C}, C$ i $\overline{D}, D$ moraju biti na istim zrakama (izvodnicama), koje idu točkom V. Ako se dakle povuku zrake $\overline{C}V'$ i $\overline{D}V'$, onda pravac potegnut točkom O' usporedno sa s_1 siječe te zrake u točkama C' i D'. Dužine su $A'B'$ i $C'D'$ konjugirani promjeri elipse k', pa se ta elipsa može konstruirati.



Sl. 605.

Da se dobiju točke E' i F' elipse k', koje leže na prividnoj konturi $V'\overline{E}$ i $V'\overline{F}$, spojit će se dirališta $\overline{E}$ i $\overline{F}$ s točkom $\overline{S}$ odnosno $\overline{X}$, a onda će se sjecišta N_1 i R_1 tih spojnica sa s_1, spojiti s točkom S' odnosno X'. Ovi će posljednji pravci sjeći pravce $V'\overline{E}$ i $V'\overline{F}$ u točkama E' i F'. Elipsa k' dotiče prividnu konturu u točkama E' i F'. Prednji se dio $E'C'F'$ te elipse vidi, a ostali se dio ne vidi.

Ako su točke $\overline{M}$ i M' dvije pripadne točke, te se u točki $\overline{M}$ povuče tangenta t_1 na elipsu $\overline{k}$, a u točki M' tangenta t' na elipsu k', obje su te tangente kolinearni pravci, pa se moraju sjeći u istoj točki T_1 u osi kolineacije s_1. Ako se prema tome povuče tangenta t_1 na elipsu $\overline{k}$ u točki $\overline{M}$, pa se sjecište T_1 pravaca $\overline{t}$ i s_1 spoji sa M', onda je spojnica $T_1M' \equiv t'$ tangenta elipse k' u točki M'.

2. Polarnost. Ako su dvije krivulje $\bar{k}$ i k drugoga reda perspektivno-kolinearne, onda pol $\bar{P}$ i polara $\bar{p}$ krivulje $\bar{k}$ i pol P i polara p krivulje k jesu pripadni perspektivno-kolinearni elementi.

Dokaz. U sl. 605. prikazan je stožac, kojemu je osnovka krivulja $\bar{k}$ u Π_1, a V vrh. Taj stožac presječen je ravninom Σ u krivulji k. Obje su te krivulje perspektivno-kolinearne s obzirom na točku V kao središte i pravac s_1, u kojemu se sijeku ravnine Π_1 i Σ, kao os kolineacije.

Kojigod pravac $\bar{p}$ ravnine Π_1 siječe $\bar{k}$ u točkama $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Tangente a i c u tim točkama sijeku se u točki $\bar{P}$. Točka je $\bar{P}$ pol, a pravac $\bar{p}$ pripadna polara krivulje $\bar{k}$. Zrake kolineacije $V\bar{A}$ i $V\bar{B}$ sijeku krivulju k u pripadnim točkama A i B. Spojnica $AB \equiv p$ je pravac, koji je s pravcem $\bar{p}$ kolinearno srodan. Dirna ravnina stošca, koja je određena vrhom V i pravcem $\bar{a}$, siječe ravninu Σ u pravcu a, koji je tangenta krivulje k u točki A. Isto tako dirna ravnina, koja je određena vrhom V i pravcem $\bar{b}$, siječe ravninu Σ u pravcu b, koji također mora biti tangenta krivulje k u točki B. Tangente a i b sijeku se u točki P, koja je pol pravca p. Budući da su $\bar{a}$ i a, $\bar{b}$ i b parovi kolinearno srodnih pravaca, tad su i sjecišta $\bar{P}$ i P tangenata $\bar{a}$ i $\bar{b}$, odnosno a i b, dvije pripadne kolinearno srodne točke. Prema tome su polovi $\bar{P}$ i P kolinearno srodnih pravaca $\bar{p}$ i p kolinearno srodne točke.

Ravnina Γ, koja je položena vrhom stošca usporedno s presječnom ravninom Σ, siječe osnovnu ravninu Π_1 u pravcu c_1, koji je usporedan sa s_1. Ravnina Γ zove se ubježna ravnina, a pravac c_1 protuos. Središtu O elipse k kao polu pripada neizmjerno daleki pravac ravnine Σ kao polara. Središtu O kolinearno je pridružena točka $\bar{O}$ osnovne ravnine Π_1. Točki $\bar{O}$ kao polu krivulje $\bar{k}$ mora pripadati kao polara neki pravac ravnine Π_1, koji je kolinearno srodan s neizmjerno dalekim pravcem ravnine Σ. Zrake kolineacije toga pravca usporedne su s ravninom Σ i čine ravninu $\Gamma \parallel \Sigma$ koja siječe Π_1 u pravcu c_1, koji je kolinearno srodan s neizmjerno dalekim pravcem ravnine Σ. Prema tome je pravac c_1 polara točke $\bar{O}$ s obzirom na krivulju $\bar{k}$.

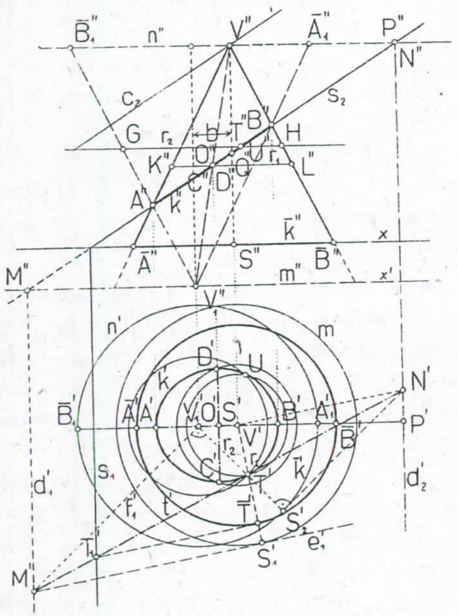
Svakom konjugiranom paru tetiva krivulje $\bar{k}$, koje idu točkom $\bar{O}$, pripadaju dva konjugirana promjera krivulje k, koji idu točkom O.

§ 175. Presjek stošca ravninom projiciranja

1. Presjek rotacionog stošca u elipsi ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$. U sl. 606. nacrtane su projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, i tragovi s_1, s_2 ravnine Σ. Ravnina Σ usporedna je s ravninom Γ, koja ima sa stošcem zajednički samo vrh V. Trag je $s_2 \parallel c_2$ i $s_1 \parallel c_1$. Trag c_1 (protuos) ne siječe osnovke stošca i ne dotiče je. Ravnina Σ siječe stožac u elipsi,

kojoj je nacrt dužina $A''B''$ u tragu s_2. Ravnina simetrije presječne krivulje k usporedna je s Π_2, sadrži izvodnice $V\bar{A}$ i $V\bar{B}$ i siječe Σ u pravcu AB. Dužina AB je velika os elipse k, te se na Π_2 projicira u pravoj veličini.

Tlocrt je presjeka elipsa k', kojoj je dužina $A'B' \parallel x$ jedna os. Druga os $C'D'$ pada u simetralu osi $A'B'$. Nacrt je osi CD točka u središtu O'' dužine $A''B''$. Točke C i D leže u prostoru na kružnici, u kojoj horizontalna ravnina položena tima točkama siječe stožac. Nacrt je te kružnice dužina $K''L'' \parallel x$, a tlocrt kružnica, kojoj je središte u V', a polumjer $=\frac{1}{2} \cdot K''L''$. Ta kružnica siječe simetralu osi $A'B'$ u točkama C' i D'.



Sl. 606.

Ako se ravan presjek rotacionog stošca ortogonalno projicira na ravninu, koja je okomita na osi stošca, onda je projekcija vrha stošca jedno žarište projekcije presjeka. U sl. 606. je V' žarište elipse k'.

Dokaz: Ako se točkom B'' povuče usporednica s $V''\bar{A}''$, a točkom A'' usporednica s $V''\bar{B}''$, onda se ta dva pravca mogu smatrati prividnom konturom drugog rotacionog stošca, kojemu je vrh $V_1(V_1', V_1'')$, kojemu je os okomita na Π_1 i koji je centralnosimetričan sa zadanim stošcem s obzirom na točku O kao središte simetrije. Svakoj kružnici jednoga stošca pripada centralnosimetrična kružnica drugoga stošca. Budući da je točka O središte elipse k, ta je krivulja u toj centralnoj simetriji sama sebi pridružena, odakle slijedi, da ona leži i na drugom stošcu. Prema tome ravnina Σ siječe drugi stožac u istoj elipsi k kao i prvi stožac.

Ako se između točaka A i B položi koja god ravnina Δ okomito na osi stožaca, ona siječe te stošce u kružnicama c i d, kojima su polumjeri r_1 i r_2, a usporedne izvodnice $V\bar{B}$ i $V_1\bar{B}_1$ sijeku u točkama G i H. Obje kružnice c i d sijeku se u dvije točke $T(T', T'')$ i $U(U', U'')$, koje pripadaju elipsi k. Kružnice se c i d projiciraju na Π_1 u pravoj veličini sa središtima u V' i V_1', pa je $r_1 = V'T'$, $r_2 = V_1'T'$. Stavi li se da je $GH = a$ i da je normalni razmak osi stožaca $= b$, onda je

$$a = r_1 + r_2 + b,$$

odakle je

$$r_1 + r_2 = a - b$$

ili

$$V'T' + V_1'T' = a - b$$

Budući da su dužine a i b stalne veličine, to su r_1 i r_2 radiji vektori elipse k'. Odatle slijedi da su točke V' i V_1' žarišta elipse k'. Nadalje je $a - b = A'B'$.

Ako se ravnina $\Delta_1 \parallel \Delta$ položi vrhom V_1, onda zadani stožac siječe u kružnici $m(m', m'')$. Budući da je $r_1 + r_2 = a - b$, a $r_2 = O$, slijedi da je $r_1 = a - b = A'B'$, t. j. kružnica je m', kojoj je središte V', a polumjer $r_1 = A'B'$ provodna kružnica elipse k' za žarište V_1'.

Ako se uzduž izvodnice VT položi dirna ravnina E na zadani stožac, a uzduž izvodnice V_1T dirna ravnina Φ na drugi stožac, obje se te ravnine sijeku u pravcu t, koji je tangenta presječne elipse k u točki T. Uzme li se da je $\Pi_1 \equiv \Delta_1$, onda tlocrtni trag e_1' ravnine E, koji je okomit na $V'T'$, dotiče kružnicu m' u točki S_1'. Trag f_1' dirne ravnine Φ ide točkom V_1' okomito na $V_1'T'$. Tragovi se e_1' i f_1' sijeku u točki M', pa je pravac $M'T'$ tangenta elipse k' u točki T'. Točka je S_1' suprotište žarišta V_1' s obzirom na tangentu t'. Točka M' leži u tragu s_1' ravnine Σ na ravnini Δ_1.

Ako se ravnina $\Delta_2 \parallel \Delta$ položi vrhom V, ona siječe drugi stožac u kružnici $n(n', n'')$, kojoj je polumjer $r_2 = a - b = A'B'$. Kružnica je n' provodna kružnica elipse k' za žarište V'. Dirna ravnina E siječe Δ_2 u pravcu $VN(V'N' \perp V'T')$, a dirna ravnina Φ siječe Δ_2 u pravcu $S_2N(S_2'N' \perp V_1'T')$. Pravac $N'T'$ je tangenta elipse k' u točki T'. Prema tome točke M', T', N' leže u istom pravcu t'. Točka N leži na pravcu $d_2(d_2', d_2'')$, u kojemu ravnina Σ siječe Δ_2. Pravci su d_1 i d_2 centralno-simetrični s obzirom na točku O, pa su d_1' i d_2' usporedni i jednako udaljeni od točke O'.

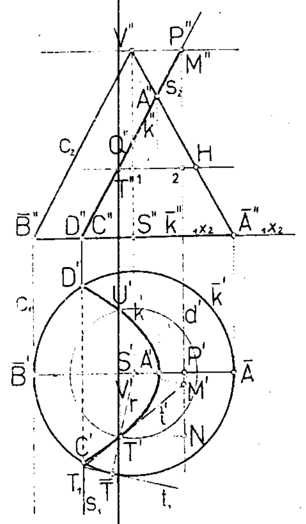
Obje konturne izvodnice, os stošca i pravac, koji ide točkom V usporedno sa x, jesu četiri harmoničke zrake. Te zrake sijeku ravninu Σ u četiri harmoničke točke: A, B, Q i P. Tlocrti su tih točaka A', B', $Q'(\equiv V')$ i P', gdje je P' u pravcu d_2', također četiri harmoničke točke. Odatle slijedi, da je pravac d_2' polara točke V' s obzirom na elipsu k', t. j. pravac je d_2' ravnalica elipse k', koja pripada žarištu V'. S istih je razloga pravac d_1' ravnalica elipse k', koja pripada žarištu V_1'.

Ako se prema tome točkom V' potegne okomica na radiusvektor $V'T'$ točke T', a točkom V_1' potegne okomica na drugi radiusvektor $V_1'T'$, onda je pravac $N'M'$, gdje su N' i M' sjecišta ravnalica d_2' i d_1' s onim okomicama, tangenta elipse k' u točki T'.

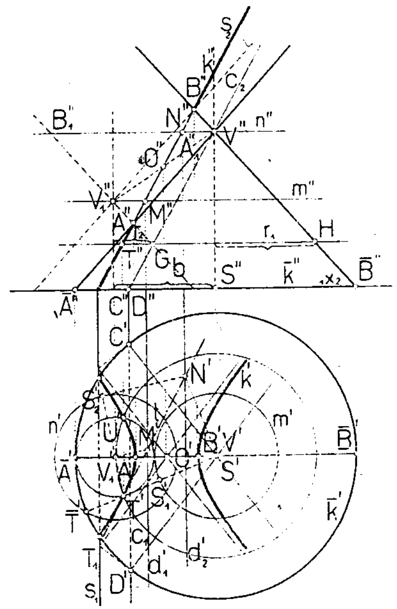
Budući da su osnovna kružnica $\bar{k}'$ i elipsa k' perspektivno-kolinearne krivulje, onda su tangenta kružnice $\bar{k}'$ u točki $\bar{T}'$ i tangenta t' elipse k' u točki

T' dvije kolinearno srodne tangente, pa se sijeku u točki T_1 na osi kolineacije s_1.

2. Presjek rotacionog stošca u paraboli ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$ U sl. 607. nacrtane su projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1. Uzduž izvodnice $\bar{B}V$ položena je dirna ravnina $\Gamma(c_1, c_2)$, zatim je položena presječna ravnina $\Sigma \parallel \Gamma (s_1 \parallel c_1, s_2 \parallel c_2)$. Ravnina Σ siječe stožac u paraboli k, kojoj je nacrt u tragu s_2, dok je tlocrt parabola k', koja se dobije na jednak način kao i tlocrt presjeka u t. 1. Točka je $A(A', A'')$, u kojoj ravnina Σ siječe izvodnicu $\bar{A}V$, vrh parabole. U pravac $A'\bar{B}'$ pada os parabole k'. Trag s_1 siječe osnovnu kružnicu $\bar{k}$ u točkama $C \equiv C'$ i $D \equiv D'$, koje također pripadaju paraboli.



Sl. 607.



Sl. 608.

Osnovna kružnica $\bar{k}$ i parabola k jesu dvije perspektivno-kolinearne krivulje. Isto tako su kolinearno srodne i krivulje $\bar{k}'$ i k', te je V' središte, a s_1 os kolineacije. Pomoću kolineacije mogle bi se odrediti pojedine točke parabole k', kao i tangente te krivulje. Tangenta t_1 u točki $\bar{T}'$ kružnice $\bar{k}'$ i tangenta t' u točki T' parabole k' sijeku se u istoj točki T_1 na osi s_1.

Budući da je ravnina projekcija Π_1 okomita na osi stošca točka je V' žarište parabole k'.

Dokaz. Ako se u ravnini $V\bar{A}\bar{B}$ povuče vrhom V pravac VP usporedno sa osi x, onda su pravci $V\bar{A}$, $V\bar{B}$, VP i VS četiri harmoničke zrake.

Te zrake sijeku ravninu Σ u četiri harmonične točke A, B_∞, P, Q. Tlocrti su tih točaka također četiri harmoničke točke $A'B'_\infty, P', Q' \equiv V'$. Prema tome pravac je d', koji ide točkom P' okomito na $A'V'$, polara točke V'. Budući da je točka B_∞, koja je točki A harmonički pridružena, neizmjerno daleko, točka je A u polovištu dužine PQ. Prema tome je i točka A' u polovištu dužine $P'Q'$. Ako je pravac d', analogno kao kod elipse, ravnalica parabole k', onda je $Q' \equiv V'$, žarište te parabole. Da je V' žarište, a r' ravnalica parabole k', može se to i ovako dokazati: Budući da je točka A'' u polovištu točaka Q'' i P'', to je ordinala $A'A''$ simetrala usporednih ordinala $V'V''$ i $P'P''$, dakle i točaka 1 i 2 (sl. 607). No ordinala $A'A''$ također je simetrala dužine $T''H$, odakle slijedi da je $T''2 = 1H = r$. Budući da je vrh $V'T' = r$ i $T''2 = T'N = r$, budući dakle da je točka T' jednako udaljena od stalne točke V' i stalnog pravca d' slijedi da je točka V' žarište, a pravac d' ravnalica parabole k'.

Horizontalna ravnina Δ_1 položena vrhom V siječe Σ u pravcu d, kojemu je nacrt točka u P'', a tlocrt pravac d'. Dirna ravnina uzduž izvodnice $V\overline{T}$ kojoj je pravac t_1 trag u Π_1, siječe ravninu Δ_1 u pravcu $VM(V'M', V''M'')$, koji je usporedan s t_1 i siječe Σ u točki $M(M', M'')$, koja je na pravcu d. Prema tome tangenta parabole k' u točki T' ide točkom M'. Budući da je $t_1 \perp V'\overline{T}'$, a $V'M' \parallel t_1$, to je i $V'M' \perp V'\overline{T}'$. Ako se dakle točkom V' povuče okomica na $V'\overline{T}'$, ona siječe ravnalicu d' u točki M', a spoje li se točke M' i T', ta je spojnica tangenta parabole k' u točki T'.

3. Presjek rotacionog stošca u hiperboli ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$. U sl. 608. položena je vrhom V rotacionog dvostrukog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, ravnina $\Gamma(c_1, c_2)$, koja siječe stožac u dvije izvodnice VC i VD, zatim je položena presječna ravnina $\Sigma(s_1, s_2)$ usporedno s Γ, te je određen tlocrt k' hiperbole k, u kojoj Σ siječe stožac. Dužina je AB glavna os hiperbole k, a $A'B'$ glavna os hiperbole k'. Neizmjerno daleke točke hiperbole nalaze se u smjeru izvodnica VC i VD. Središtem O hiperbole idu asimptote usporedno s VC i VD.

Na jednak način kao za elipsu k' u t. 1, može se dokazati da je točka V' jedno žarište hiperbole k' u sl. 608. Ako se točkom A'' povuče $V_1''B_1'' \parallel V''\overline{B}''$, a točkom B'' pravac $V_1''A_1'' \parallel V''A''$, onda su pravci $V_1''B_1''$ i $V_1''A_1''$ prividna kontura nacrta drugoga stošca, kojemu je vrh V_1, a os usporedna sa VS i kojega ravnina Σ siječe u istoj hiperboli k kao i zadani stožac. Ako se točkom T hiperbole k položi horizontalna ravnina Δ, ona siječe zadani stožac u kružnici, kojoj je polumjer r_1, a drugi stožac u kružnici, kojoj je polumjer r_2. Obje se te kružnice sijeku u dvije točke T i U, koje leže na hiperboli k i koje se na Π_1 projiciraju u pravoj veličini, te je prvoj središte

V', a drugoj V_1', i sijeku se u dvije točke T' i U' koje leže na krivulji k'. Ravnina Δ siječe pravce $V_1''B''$ i $V''\overline{B}''$ u točkama G i H (sl. 608). Ako se stavi da je $GH = a$, a razmak osi obaju stožaca da se označi sa b, onda je

$$GH + r_2 = b + r_1 \quad \text{ili} \quad r_1 - r_2 = a - b,$$

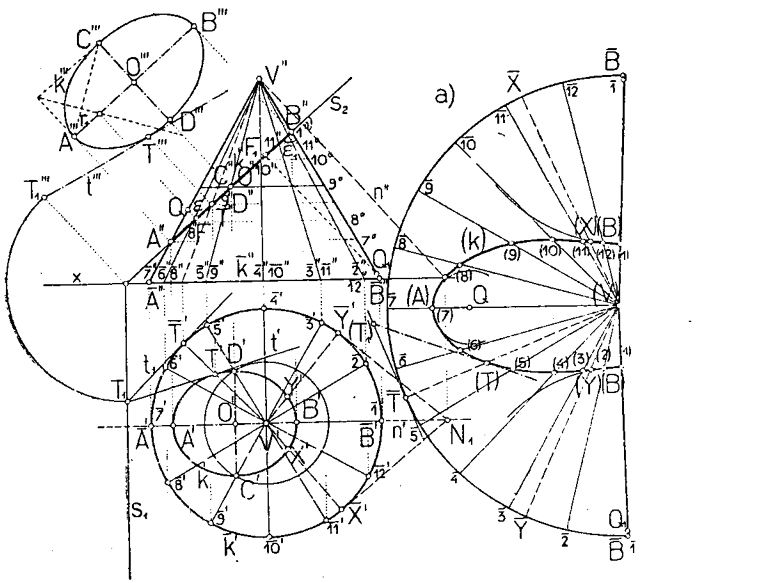
ili također
$$V'T' - V_1'T' = a - b.$$

Budući da je krivulja k' hiperbola, budući da su točke V' i V_1' stalne i budući da je razlika udaljenosti točke T' od točaka V' i V_1' stalna i jednaka $(a - b)$, slijedi da su točke V' i V_1' žarišta hiperbole k'.

Na jednak način kao u t. 1 mogu se dobiti provodne kružnice m' i n' i ravnalice d_1' i d_2', a može se konstruirati i tangenta t' u točki T' hiperbole k', gdje je $t' \equiv M'N'$.

§ 176. Mreža stošca

1. Mreža rotacionog stošca. U sl. 609. nacrtane su projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, zatim je određen eliptičan presjek



Sl. 609.

$k(k', k'')$ toga stošca ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$, te prava veličina k''' toga presjeka. Osim toga konstruirana je tangenta $t(t', t'')$ presječne elipse u točki $T(T', T'')$.

Na jednak način kao za valjak (§ 171., t. 2.), dokazalo bi se da plašt stošca spada među one plohe, koje se dadu razgrnuti u ravninu. Da se dobije mreža rotacionog stošca, razrezat će se njegov plašt po izvodnici $V\overline{B}$ (sl. 609.), pa će se razgrnuti u dirnu ravninu uzduž izvodnice $V\overline{A}$. Razgrnuti plašt stošca imat će oblik kružnog isječka (sl. 609.) *a)*, kojemu je središte (V) i kojemu je polumjer jednak pravoj veličini izvodnice stošca, dakle dužini $V''\overline{B}''$. Dužina kružnog luka $\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}$ toga isječka jednaka je opsegu osnovne kružnice $\overline{k}$. Da se dobije dužina toga luka razdijelit će se kružnica $\overline{k}'$ u sl. 609. na veći broj manjih lukova, na pr. na 12 jednakih lukova, pa će se tetive tih lukova prenijeti kao tetive luka $\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}$ u sl. 609. *a)* u istom broju $(\overline{1}\,\overline{2} = \overline{2}\,\overline{3} = \overline{3}\,\overline{4} = \cdots = \overline{1}'\overline{2}')$. Ako se spoje djelišta $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots$ luka $\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}$ s (V) dobit će se izvodnice $V\overline{1}, V\overline{2}, V\overline{3}, \ldots$ plašta u razgrnutom položaju. Ako se na te izvodnice prenesu iz sl. 609. udaljenosti vrha V od točaka presjeka $1\,(\equiv B)$, $2, 3, \ldots$, koje leže na izvodnicama $V\overline{1}$, $V\overline{2}$, $V\overline{3}, \ldots$ i dobivene točke (1), (2), (3),... spoje, dobit će se u plaštu razastrta presječna krivulja (k). Budući da je $VA = V''A''$ i $VB = V''B''$ prenijet će se u sl. 609.; *a)* $(V)\,(A) = V''A''$ i $(V)\,(B) = V''B''$. Da se dobije koja druga točka krivulje (k), na pr. točka (8), uzet će se da je točkom 8 položen kružni presjek stošca $(8''8^0 \parallel x)$, pa će se na $V''B''$ dobiti prava veličina dužine $V8$, t. j. $V8 = V''8^0$. Ta se dužina prenese u razgrnuti plašt, dakle $(V)\,(8) = V''8^0$. Na jednak će se način dobiti ostale točke krivulje (k).

Da se u točki (T) povuče tangenta na razastrtu krivulju (k), povući će se na kružni luk (sl. 609.) u točki $\overline{T}'$ tangenta, prenijet će se na nju dužina $\overline{T}'T_1$ tako da je $(\overline{T})\,(T_1) = \overline{T}'T_1$ i spojit će se (T_1) sa (T). Tada je $(T_1)\,(T)$ tangenta krivulje (k) u točki (T). Da je taj postupak ispravan slijedi odatle, što se veličina trokuta $T\overline{T}T_1$ ne mijenja, kad se presječna krivulja k razgrne u ravninu, t. j. $\triangle\,(T)\,\overline{T}\,(T_1) = \triangle\,T\overline{T}T_1$. Zbog toga je $(T)\,(T_1) = T'''\,T_1'''$.

Polumjer zakrivljenosti u tjemenima krivulje (k). Razastrta elipsa u ravninu ima u točkama (A) i (B) tjemena (sl. 609. *a*). Polumjer zakrivljenosti u tim točkama dobije se po Catalanovom poučku, koji vrijedi i za stožac (isp. § 171., t. 5). Ako se presječna elipsa projicira na ravninu, koja dotiče stožac uzduž izvodnice $V\overline{A}$, os $CD = 2b$ projicirat će se na tu ravninu u pravoj veličini (zašto?), dok će se os $AB = 2a$ projicirati kao dužina, koja je $= 2a \cdot \cos\varepsilon$, gdje je ε kut kojega dirna ravnina zatvara s presječnom ravninom. U sl. 609. je $\sphericalangle\varepsilon = \sphericalangle B''A''V''$. Polumjer je zakrivljenosti u točki (A)

$$\rho_1 = \frac{b^2}{a \cdot \cos\varepsilon} = \frac{r_1}{\cos\varepsilon},$$

gdje je r_1 polumjer zakrivljenosti presječne elipse k u vrhu A velike osi. Budući da je k''' u sl. 609. prava veličina presječne elipse, onda je polumjer zakrivljenosti u vrhu A''' te elipse jednak r_1. Ako se na trag s_2 prenese r_1 tako da je $A''F = r_1$ i u točki F postavi okomica na s_2, ona siječe $A''V''$

u točki Q, pa je $A''Q = \rho_1$. Ako se u sl. 609. *a)* učini $(A)\,Q = \rho_1$, onda je Q središte zakrivljenosti krivulje (k) u vrhu (A).

Ako se presječna elipsa projicira na dirnu ravninu stošca uzduž izvodnice $V\overline{B}$, onda bi se jednakim razmatranjem našlo, da je polumjer zakrivljenosti u točki (B) krivulje (k)

$$\rho_2 = \frac{r_1}{\cos\varepsilon_1},$$

gdje je ε_1 kut, kojega presječna ravnina zatvara s dirnom ravninom. U sl. 609. je $\sphericalangle\varepsilon_1 = \sphericalangle A''B''\overline{B}''$. Ako se na trag s_2 prenese r_1 tako, da je $B''F_1 = r_1$ i u točki F_1 postavi okomica na s_2, ona siječe $V''\overline{B}''$ u točki Q_1, pa je $B''Q_1 = \rho_2$. Ako se u sl. 609. *a)* učini $(B)Q_1 = \rho_2$, onda je Q_1 središte zakrivljenosti krivulje (k) u vrhu (B).

Ako se stožac presiječe općom ravninom, onda se za konstrukciju polumjera zakrivljenosti ρ_1 i ρ_2 upotrebi stranocrt.

Obratišta krivulje (k). Između vrhova (A) i (B) krivulje (k) ima dva obratišta (X) i (Y). Po Catalanovom poučku polumjer je zakrivljenosti u kojoj god točki krivulje (k)

$$\rho = \frac{r}{\cos\varepsilon},$$

gdje je r polumjer zakrivljenosti presječne krivulje k u pripadnoj točki, a ε kut priklona presječne ravnine i dirne ravnine u toj točki. Budući da je polumjer zakrivljenosti u obratištu neizmjerno velik, bit će $\rho = \infty$ za $\varepsilon = 90^0$; t. j. točke presječne elipse k, u kojima je dirna ravnina okomita na presječnoj ravnini, dat će obratišta krivulje (k). Ako se vrhom V (sl. 609.) postavi okomica n na ravninu Σ $(n' \perp s_1,\ n'' \perp s_2)$, pa se tom okomicom polože dirne ravnine na stožac, onda će točke X, Y, u kojima dirne izvodnice sijeku k, biti one točke, koje u krivulji (k) pređu u obratišta $(X), (Y)$. Prvi su tragovi spomenutih dirnih ravnina $N_1\overline{X}'$ i $N_1\overline{Y}'$, a tlocrti dirnih izvodnica $V'\overline{X}'$ i $V'\overline{Y}'$. Ako se na luku razgrnutog plašta odrede točke $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ (arc $\overline{1}\overline{2}\,\overline{X}$ = arc $\overline{2}\,\overline{Y}$ = arc $\overline{2}'\,\overline{Y}'$), pa se te točke spoje s (V), dobit će se na krivulji (k) točke (X) i (Y).

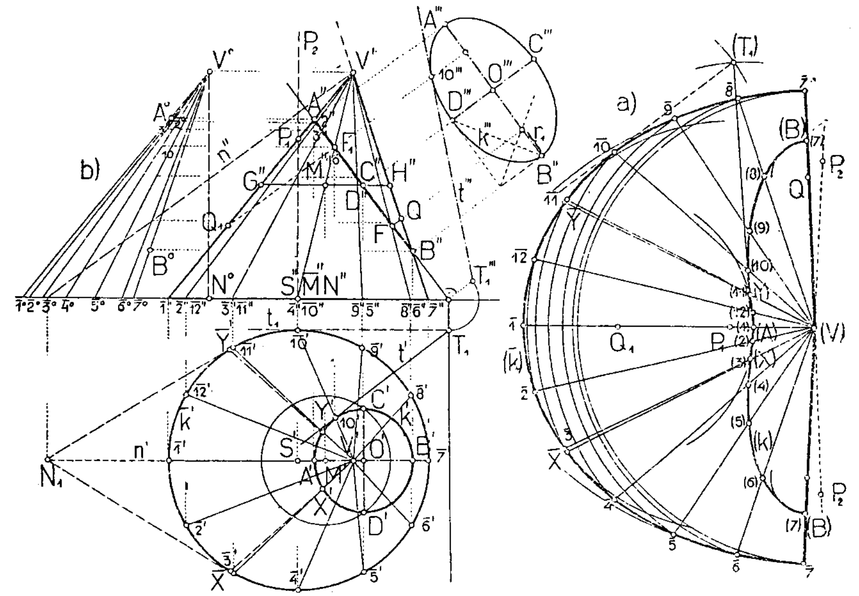
2. Presjek i mreža kosoga stošca. *a) Eliptičan presjek kosoga stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *ravninom* $\Sigma \perp \Pi_2$. U sl. 610. nacrtane su projekcije kosoga stošca, kojemu je osnovka u Π_1. Taj je stožac presječen ravninom $\Sigma\,(s_1, s_2)$, koja je okomita na Π_2, u elipsi $k\,(k', k'')$. Stožac je tako namješten, da mu je simetralna ravnina okomita na Σ. Zbog toga je dužina AB, koja pada u presječnicu presječne ravnine sa simetralnom ravninom, jedna os presječne elipse k. Druga je os CD te elipse okomita na Π_2, te joj je nacrt $C''D''$ točka u središtu O'' dužine $A''B''$. Prema tome će se osi AB i CD projicirati na Π_1 opet kao osi elipse k'. Os je

*

$A'B' \parallel x$. Druga os $C'D'$ leži u simetrali osi $A'B'$, njezine se krajnje točke C' i D' dobiju spomoću kružnoga presjeka stošca. Prema tome elipsa se k' može konstruirati.

b) Prava veličina presjeka. Ako se ravnina Σ preloži oko traga s_2 u Π_2, dobit će se presječna elipsa u pravoj veličini. Velika je os te elipse $A'''B''' \# A''B''$, a mala $C'''D''' = C'D'$.

c) Konstrukcija tangente. Budući da su osnovna kružnica $\bar{k}$ i presječna elipsa k dvije perspektivno-kolinearne krivulje, mogu se pomoću kolineacije konstruirati pojedine točke elipse k' kao i tangente te krivulje. Da se konstruira tangenta t_1 u točki $10'$ povući će se u pripadnoj točki $\overline{10}'$ tangenta t_1 na kružnicu $\bar{k}'$ i spojit će se sjecište T_1 pravaca t_1 i s_1 s točkom $10'$. Tada je spojnica $T_1 10' \equiv t'$. U sl. 610. nacrtan je preložaj t''' tangente t.



Sl. 610.

Tangete su u točkama $\bar{1}'$ i A', $\bar{2}'$ i B' usporedne sa osi kolineacije s_1.

d) Mreža. Uzet će se, da je plašt stošca razrezan uzduž izvodnice $V\bar{7}$ i da je razgrnut u dirnu ravninu uzduž izvodnice $V\bar{1}$. Razgrnuti plašt prikazan je u sl. 610. *a*). Da se dobije razgrnuti plašt, razdijelit će se kružnica $\bar{k}'$ na 12 jednakih dijelova, nacrtat će se projekcije izvodnica, koje idu tima djelištima i odredit će se prava veličina tih izvodnica. Ako se gdjegod na strani nacrta dužina $N^0V^0 \perp x$ i $N^0V^0 = N''V''$, pa se na osi x odmjeri $N^0\bar{1}^0 = V'\bar{1}'$, $N^0\bar{2}^0 = V'\bar{2}'$, $N^0\bar{3}^0 = V'\bar{3}'$, . . . , onda su dužine

$V^0\bar{1}^0$, $V^0\bar{2}^0$, $V^0\bar{3}^0$,.... jednake pravoj veličini izvodnica $V\bar{1}$, $V\bar{2}$, $V\bar{3}$,... (Vidi § 78. sl. 281.). Zbog simetričnosti stošca po dvije su izvodnice jednake, na pr. $V\bar{2} = V\overline{12}$, $V\bar{3} = V\overline{11}$,... Najveća je izvodnica $V\bar{1}$, a najmanja $V\bar{7}$. U sl. 610. *a*) uzela se točka (V) i nacrtala dužina $(V)\bar{1} = V^0\bar{1}^0$, zatim se oko (V) opisao kružni luk s polumjerom $V^0\bar{2}^0$. Na tom kružnom luku mora ležati točka $\bar{2}$ tako, da je luk $\bar{1}\,\bar{2}$ jednak luku $\bar{1}'\bar{2}'$. Ako se uzme u šestilo tetiva $\bar{1}'\bar{2}'$ i iz $\bar{1}$ u sl. 610. *a*) presiječe opisani luk u točkama $\bar{2}$ i $\overline{12}$, onda je luk $\bar{1}\,\bar{2}$ i $\bar{1}\,\overline{12}$ približno jednak luku $\bar{1}'\bar{2}'$ i $\bar{1}'\overline{12}'$. Sad se oko (V) opiše luk s polumjerom $V^0\bar{3}^0$ i taj luk siječe iz točaka $\bar{2}$ i $\overline{12}$ lukom, kojemu je polumjer $= \bar{2}'\bar{3}'$, pa će se dobiti točke $\bar{3}$ i $\overline{11}$, i t. d. Ako se spoje točke $\bar{7}, \bar{8}, \bar{9},\ldots$ krivuljom $(\bar{k})$, ta je krivulja razgrnuta osnovna kružnica $\bar{k}$. Dio ravnine između krivulje $(\bar{k})$ i izvodnicâ $(V)\bar{7}$, jest razgrnuti plašt stošca. Dodamo li tome plaštu osnovku, imamo mrežu stošca.

U razgrnutom plaštu nacrtana je i razgrnuta presječna elipsa (k). Pojedine se točke te krivulje dobiju tako, da se na razastrte izvodnice prenesu dužine, koje su jednake udaljenosti vrha V od pojedinih točaka presječne elipse k. Prava se veličina tih dužina dobije u sl. 610. *b*) na izvodnicama $V^0\bar{1}^0$, $V^0\bar{2}^0$, $V^0\bar{3}^0$,... ako se točkama A'', $2''$, $3''$,... povuku usporednice sa osi x. Tada je $V^0A^0 = VA$, $V^02^0 = V2$, ... Ako se prema tome u sliku 610. *a*) prenesu na pripadne izvodnice dužine $(V)(A) = V^0A^0$, $(V)(2) = (V)(12) = V^02^0$, $(V)(3) = (V)(11) = V^03^0$,... pa se dobivene točke spoje, dobije se krivulja (k). Sl. 610. *a*) je simetrična s obzirom na izvodnicu $(V)\bar{1}$.

Tangenta u točki (10) krivulje (k) u sl. 610. *a*) konstruirat će se na temelju slijedećeg razmatranja. Tangenta t_1 u točki $\overline{10}$ kružnice $\bar{k}$ prikazat će se kao tangenta krivulje $(\bar{k})$ u točki $\overline{10}$, a tangenta t elipse k u točki 10 prikazat će se kao tangenta krivulje (k) u točki (10). Osim toga dužine će se tih tangenata između dirališta $\overline{10}$ i T_1, te 10 i T_1 prikazati u sl. 610. *a*) u pravoj veličini. U sl. 610. je $\overline{10}\,T_1 = \overline{10}'T_1$, $10\,T_1 = 10'''T_1'''$. Ako se prema tome u sl. 610. *a*) oko točke $\overline{10}$ opiše luk s polumjerom $= \overline{10}'T_1$, a oko točke (10) luk s polumjerom $= 10'''T_1'''$, oba se ta luka sijeku u točki (T_1), pa je pravac $(T_1)\overline{10}$ tangenta krivulje $(\bar{k})$ u točki $\overline{10}$, a pravac $(T_1)(10)$ tangenta krivulje (k) u točki (10).

Krivulja (k) ima dva obratišta (X) i (Y). Da se dobiju ta dva obratišta, položit će se one dirne ravnine stošca, koje su okomite na presječnoj ravnini Σ. Te ravnine idu pravcem n (n', n''), koji ide vrhom V okomito na ravninu Σ. Prvi tragovi dirnih ravnina idu probodištem N_1 i dotiču kružnicu $\bar{k}'$. Ako se povuku tlocrti $\bar{X}'V'$ i $\bar{Y}'V'$ dirnih izvodnica, ti pravci sijeku elipsu k' u točkama X' i Y', koje će se u razgrnutom plaštu prikazati kao obratišta (X), (Y) krivulje (k). Te točke leže na pripadnim izvodnicama $(V)\bar{X}$, $(V)\bar{Y}$ $(\bar{2}\bar{X} = \overline{12}\,\bar{Y} = \bar{2}'\bar{X}')$.

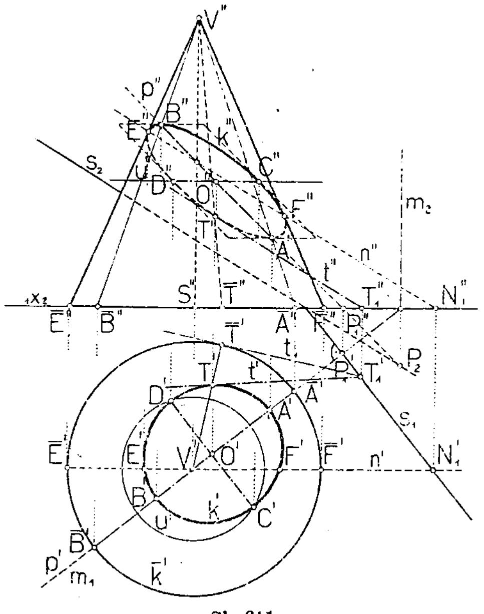
Polumjeri se zakrivljenosti u točkama (B) i (A) krivulje (k) dobiju na jednak način kao u sl. 609. *a*) $[(B)\,Q = B''Q,\ (A)\,Q_1 = A''Q_1]$.

Po Catalanovom poučku može se konstruirati i polumjer zakrivljenosti u točkama $\overline{1}$ i $\overline{7}$ krivulje $(\overline{k})$ razgrnutog plašta. Potegne li se u točki S'' okomica na osi x, ona siječe $V''\overline{1}''$ u točki P_1, a $V''\overline{7}''$ u točki P_2, pa je $\overline{1}''P_1$ polumjer zakrivljenosti u točki $\overline{1}$, a $\overline{7}''P_2$ polumjer zakrivljenosti u točki $\overline{7}$ krivulja $(\overline{k})$.

§ 177. Presjek stošca općom ravninom u elipsi

1. Zadatak. *Odredi eliptičan presjek rotacionog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *općom ravninom* $\Sigma\,(s_1, s_2)$! (Sl. 611.).

Rješenje: Ako se osju VS stošca položi ravnina $\mathbf{M} \perp \Sigma\,(m_1 \perp s_1, m_2 \perp x)$, obje se ravnine sijeku u pravcu $p\,(p' \equiv m_1, p'')$, u koji pada velika os presječne elipse $k\,(k', k'')$. Presječna je elipsa k simetrična s obzirom na ravninu $\mathbf{M}$, dakle i s obzirom na pravac p, a jer je taj pravac priklonica prve skupine ravnine Σ, u njemu se nalazi najniža i najviša točka elipse k. Tlocrt k' elipse k simetričan je prema pravcu p'. Ravnina $\mathbf{M}$ siječe stožac u dvije izvodnice $V\overline{A}$ i $V\overline{B}$. Te izvodnice siječe pravac p u točkama $A\,(A', A'')$ i $B\,(B', B'')$, koje su tjemena velike osi elipse k, te je A najniža, a B najviša točka te elipse. Tangente su elipse k u tim točkama horizontalne.

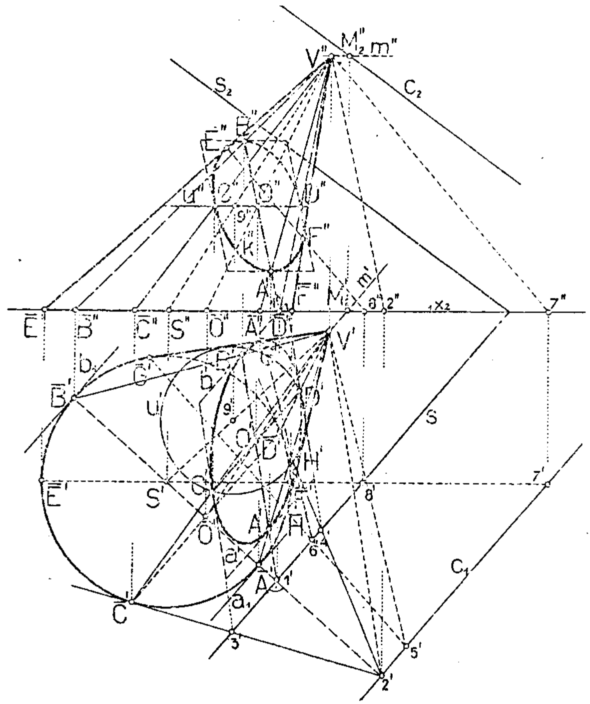


Sl. 611.

Tlocrt $A'B'$ bit će jedna os elipse k', a nacrt $A''B''$ jedan promjer elipse k''. U polovištu $O\,(O', O'')$ dužine AB nalazi se središte elipse k. Druga os $C'D'$ elipse k' nalazi se u simetrali dužine $A'B'$, koja ide točkom O' usporedno sa s_1. Ta je simetrala sutražnica prve skupine ravnine Σ, pa njezin nacrt ide točkom O'' usporedno sa osi x. Ako se tom sutražnicom položi ravnina usporedno sa Π_1, ona siječe stožac u kružnici $u\,(u', u'')$, koja onu sutražnicu siječe u točkama C i D. Tlocrt u' je kružnica i ona siječe simetralu dužine

$A'B'$ u točkama C' i D'. Nacrt se C'' i D'' dobije spomoću ordinala točaka C' i D'. Dužine su $A''B''$ i $C''D''$ konjugirani promjeri elipse k'', pa se ta elipsa može konstruirati.

Elipsa k'' mora doticati konturne pravce $V''\overline{E}''$ i $V''\overline{F}''$ u točkama E'' i F''. Da se te točke dobiju, položit će se izvodnicama $V\overline{E}$ i $V\overline{F}$ ravnina i njom će se sjeći ravnina Σ u pravcu $n\,(n' \equiv \overline{E}'\overline{F}',\ n'' \parallel s_2)$, koji je sutražnica druge skupine ravnine Σ. Pravac n'' siječe $V''\overline{E}''$ u točki E'', a pravac $V''\overline{F}''$ u točki F''.



Sl. 612.

Dio $ABCE$ elipse k leži na prednjoj polovici stošca, pa se u nacrtu vidi, dok se drugi dio te elipse ne vidi. U tlocrtu se vidi čitava elipsa. Točka V' je jedno žarište elipse k' (§ 175., t. 1).

Budući da između osnovne kružnice $\overline{k}$ i elipse k postoji kolinearna srodnost, mogu se pojedine točke kao i tangente elipse k lako konstruirati. U sl. 611. konstruirana je tangenta $t\,(t', t'')$ u točki $T\,(T', T'')$ elipse k.

Ako se vrhom V položi horizontalna ravnina usporedno s Π_1, ona siječe Σ u sutražnici prve skupine, pa je tlocrt te sutražnice jedna ravnalica elipse k'.

Presjek stošca mogao bi se odrediti i spomoću stranocrta. Ravnina Π_3 morala bi se postaviti okomito na trag s_1.

2. Zadatak. *Odredi eliptičan presjek kosoga kružnoga stošca, kojemu je osnovka u Π_1, općom ravninom Σ (s_1, s_2)!* (Sl. 612.).

Rješenje. Vrhom V stošca položit će se ravnina $\Gamma \parallel \Sigma$. Tragovi c_1 i c_2 ravnine Γ odreditit će se s pomoću sutražnice prve skupine m $(m' \parallel s_1, m'' \parallel x)$ koja ide vrhom V. Budući da trag c_1 ne siječe i ne dotiče osnovne kružnice $\bar{k} \equiv \bar{k}'$, ravnina Σ nije usporedna s nijednom izvodnicom stošca, pa ona taj stožac siječe u elipsi k.

Da se nacrtaju projekcije elipse k, potražit će se dva konjugirana promjera te elipse na način kako je pokazano u § 174., t. 1, sl. 604. Na osnovnu kružnicu $\bar{k} \equiv \bar{k}'$ povući će se dvije tangente a_1 i b_1 usporedno sa s_1, pa će se te tangente smatrati prvim tragovima dirnih ravnina **A** i **B** uzduž izvodnica $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$. Te će se izvodnice sjeći ravninom Σ u točkama A i B, koje će pripadati elipsi k. Sjecišta A i B mogu se odrediti na običan način, no ovdje će se odrediti pomoću ravnine Γ. Izvodnice $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$ određuju ravninu, kojoj je prvi trag pravac $\bar{A}'\bar{B}'$. Tu će ravninu sjeći usporedne ravnine Σ i Γ u usporednim pravcima. Budući da ravnine $\bar{A}\bar{B}V$ i Γ sadrže vrh V stošca, presječnica tih ravnina mora ići vrhom V. Osim toga ta će presječnica ići točkom 2, u kojoj se sijeku prvi tragovi $\bar{A}\bar{B}$ i c_1 tih ravnina. Prema tome su pravci $2'V'$ i $2''V''$ projekcije presječnice $2V$. Ravnine $\bar{A}\bar{B}V$ i Σ sijeku se u pravcu, koji ide sjecištem 1 prvih tragova $\bar{A}\bar{B}$ i s_1 usporedno s pravcem $2V$. Ako se dakle točkom 1 povuče usporednica s pravcem $2V$, ona siječe izvodnicu $\bar{A}V$ u točki $A(A', A'')$, a izvodnicu $\bar{B}V$ u točki $B(B', B'')$. Budući da točke A i B leže na pravcu, koji leži u Σ i na izvodnicama $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$, ravnina Σ siječe te izvodnice u točkama A i B. Prema tome točke A i B pripadaju presječnoj elipsi k.

Dužina AB je promjer presječne elipse. Prvi tragovi a_1 i b_1 dirnih ravnina stošca uzduž izvodnica $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$ usporedne su s tragom s_1. Te dirne ravnine sijeku presječnu ravninu u pravcima a, b, od kojih $a(a', a'')$ ide točkom A, a $b(b', b'')$ ide točkom B, te su oba ta pravca usporedna s tragom s_1. Ti su pravci tangente presječne elipse u točkama A i B, a jer su usporedni s tragom s_1, oni su usporedni i među sobom. Odatle slijedi da je dužina $AB(A'B', A''B'')$ promjer elipse $k(k', k'')$.

Središte $O(O', O'')$ dužine AB je središte elipse k. Ako se tom točkom povuče usporednica s tangentama u točkama A i B, ili s tragom s_1, u tu usporednicu pada promjer CD, koji je konjugiran s promjerom AB.

Budući da je $CD \parallel \Pi_1$, tim se pravcem može položiti ravnina, koja je usporedna s Π_1. Ta je dakle ravnina usporedna s osnovkom stošca i siječe stožac u kružnici, kojoj je nacrt dužin[illegible] ide točkom O'' usporedno sa osi x. Tlocrt je te kružnice opet kružnica u pravoj veličini, kojoj je središte u točki 9' na pravcu $S'V'$. Ta kružnica dotiče konturne izvodnice i siječe pravac, potegnut točkom O' usporedno s tragom s_1, u točkama C' i D'. Pomoću ordinala odredi se nacrt C'' i D''. Dužine su $A'B'$ i $C'D'$ konjugirani promjeri elipse k', a dužine $A''B''$ i $C''D''$ jesu konjugirani promjeri elipse k''. Jedna i druga elipsa može se prema tome konstruirati.

No iako se elipse k' i k'' mogu konstruirati s pomoću konjugiranih promjera, ipak treba točno odrediti one točke presjeka, koje leže na prividnim konturama za tlocrt i nacrt. I te bi se točke mogle odrediti tako, da se na običan način sijeku konturne izvodnice ravninom Σ. No te će se točke i opet odrediti s pomoću ravnine Γ. Tangente povučene s točke V' na kružnicu $\bar{k}'$ dotiču tu kružnicu u točkama $\bar{G}'$ i $\bar{H}'$. Spojnica je tih točaka prvi trag ravnine $\bar{G}\bar{H}V$. Taj trag siječe trag c_1 u točki 5', a trag s_1 u točki 6'. Pravac $5'V'$ je tlocrt presječnice ravnina $\bar{G}\bar{H}V$ i Γ, a pravac potegnut točkom 6' usporedno s $5'V'$ je tlocrt presječnice ravnina $\bar{G}\bar{H}V$ i Σ. Taj pravac siječe prividnu konturu $\bar{G}V'$ i $\bar{H}V'$ u točkama G' i H', koje leže na elipsi k'. Ta elipsa dotiče prividnu konturu u točkama G' i H'.

Pravci $V''\bar{E}''$ i $V''\bar{F}''$ pripadaju prividnoj konturi nacrta. Da se dobiju točke E'' i F'', koje leže na tim pravcima i pripadaju elipsi k'', sjeći će se ravnina $\bar{E}\bar{F}V$ s ravninama Γ i Σ. Prvi trag $\bar{E}'\bar{F}'$ ravnine $\bar{E}\bar{F}V$ siječe c_1 u točki 7', a s_1 u točki 8'. Nacrti su 7'' i 8'' u osi x. Pravac je $7''V''$ nacrt presječnice ravnina $\bar{E}\bar{F}V$ i Γ, a pravac potegnut točkom 8'' usporedno sa $7''V''$ je nacrt presječnice ravnina $\bar{E}\bar{F}V$ i Σ. Taj pravac siječe $\bar{E}''V''$ i $\bar{F}''V''$ u točkama E'' i F''. Elipsa k'' dotiče prividnu konturu nacrta u točkama E'' i F''.

U tlocrtu se vidi luk $GBCAH$, a u nacrtu luk $ECAF$ elipse k.

3. Kolineacija. Budući da su osnovna kružnica $\bar{k}$ i presječna elipsa k perspektivno-kolinearne krivulje (V središte, s_1 os kolineacije) može se spomoću kolineacije odrediti povoljan broj točaka elipse k. U sl. 612. jesu pravci $\bar{A}'\bar{B}'$ i $A'B'$, $\bar{G}'\bar{H}'$ i $G'H'$, $\bar{E}'\bar{F}'$ i $E'F'$ parovi pripadnih kolinearno srodnih pravaca.

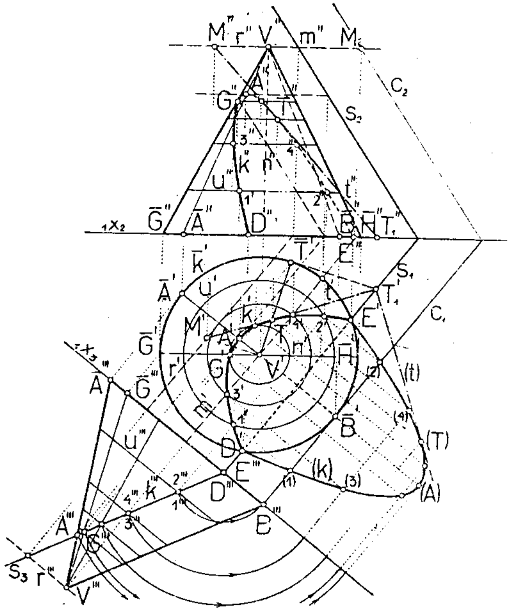
Da se dobije točka $\bar{O}$, koja je kolinearno srodna s točkom O, povući će se pravac VO i potražit će se njegovo probodište s Π_1. To je probodište točka $\bar{O}$; ona leži u tragu $\bar{A}\bar{B}$ ravnine $\bar{A}\bar{B}V$. Ako se točkom $\bar{O}$ povuče tetiva $\bar{C}\bar{D}$ kružnice $\bar{k}$ usporedno sa a_1 ili b_1, onda je $\bar{C}\bar{D}$ prema promjeru $\bar{A}\bar{B}$ konjugirana tetiva. (Isp. § 174. t. 1.). Prema tome su pravci

$\bar{C}\bar{D}'$ i $C'D'$ kolinearno srodni pravci, pa točke $\bar{C}'$, C' i $\bar{D}'$, D' leže na pravcima, koji idu točkom V'.

Budući da točki $\bar{O} \equiv \bar{O}'$ kao polu kružnice $\bar{k} \equiv \bar{k}'$ pripada pravac c, kao polara (isp. § 174., t. 2.), slijedi da se tangente kružnice $\bar{k}$ u točkama $\bar{C}$ i $\bar{D}$ moraju sjeći u pravcu c_1, i to u točki $2 \equiv 2'$. Tangente $\bar{C}2$ i $\bar{D}2$ jesu tragovi dirnih ravnina stošca uzduž izvodnica $\bar{C}V$ i $\bar{D}V$, pa one sijeku ravninu Σ u pravcima $3C$ i $4D$, koji su usporedni s $2V$ i koji su tangente elipse u točkama C i D. Prema tome su $3'C'$ i $4'D'$ tangente elipse k' u točkama C' i D'. Te su tangente usporedne s promjerom $A'B'$.

§ 178. Presjek stošca općom ravninom u paraboli

1. Zadatak. *Odredi presjek rotacionog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *ravninom* $\Sigma(s_1, s_2)$ *u paraboli!* (Sl. 613.).



Sl. 613.

Rješenje. Uzelo se, da je ravnina Σ usporedna s izvodnicom $\bar{B}V$. Najprije se tom izvodnicom položi dirna ravnina Γ (c_1, c_2) na zadani stožac, a onda se položi ravnina $\Sigma \parallel \Gamma$. Tada je $\Sigma \parallel BV$, pa će presječna krivulja k biti parabola. Projekcije te parabole određene su pomoću stranocrta. Uzet će se, da je ravnina $\Pi_3 \perp s_1$; ona je dakle okomita na Π_1 i na Σ,

Os je $_1x_3 \perp s_1$. Trag s_3 usporedan je s $\bar{B}'''V'''$. U taj trag pada treća projekcija presječne parabole. Tlocrt i nacrt te krivulje odredi se spomoću kružnih presjeka stošca. Treća i druga projekcija tih presjeka jesu dužine, koje su u jednakim daljinama usporedne s osi $_1x_3$ odnosno sa $_1x_2$. Na pr. točke 1 i 2 leže na kružnom presjeku u ($u''' \parallel {}_1x_3$, $u'' \parallel {}_1x_2$, u' kružnica sa središtem V' i polumjerom $= \frac{1}{2} \cdot u'''$).

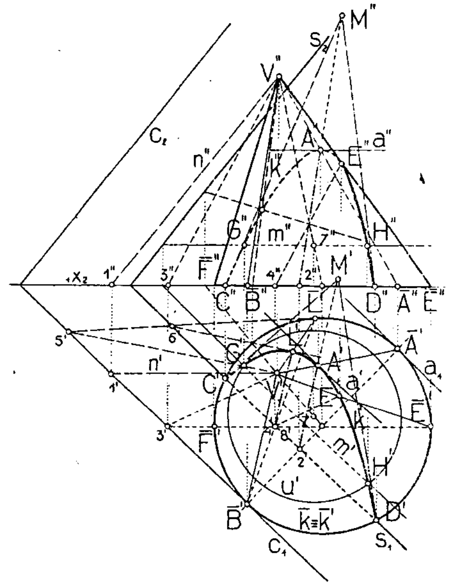
Točke $D \equiv D'$ i $E \equiv E'$, u kojima prvi trag s_1 siječe obodnicu osnovke, pripadaju presječnoj paraboli. Budući da je presjek simetričan prema ravnini $\bar{A}\bar{B}V$, koja je okomita na Σ, bit će u toj ravnini najviša točka presjeka, i to točka A na izvodnici $\bar{A}V$. Tlocrt se A' odredi iz A''', a nacrt A'' pomoću sutražnice.

Na konturnoj izvodnici $\bar{G}V$ nalazi se točka G parabole. Projekcije se te točke mogu odrediti pomoću sutražnice druge skupine n ($n' \parallel x$, $n'' \parallel s_2$).

S obzirom na § 175., t. 2. točka V' je žarište parabole k'. Ravnalica se r' te parabole dobije kao tlocrt presječnice ravnine Σ s horizontalnom ravninom, položenom vrhom V.

2. Kolineacija. Između tlocrta k' presječne parabole k i između osnovne kružnice $\bar{k} \equiv \bar{k}'$ stošca postoji i ovdje kolinearna srodnost, te je s_1 os, a V' središte kolineacije. To je svojstvo obih krivulja upotrebljeno za crtanje tangenata na parabolu. Na zraci $\bar{T}'V'$ uzete su dvije pridružene točke $\bar{T}'$ i T', i nacrtane su obje pridružene tangente $T_1\bar{T}'$ i $T_1T' \equiv t'$. Pravac je $T_1''T'' \equiv t''$ tangenta u točki T'' na nacrt parabole. Okomica $V'M'$ povučena točkom V' na $V'T'$ siječe r' u M', pa je $M'T' \equiv t'$. Ako se odredi M'' na r'', onda je $M''T'' \equiv t''$.

3. Prava veličina presjeka. Ako se parabola okrene oko traga s_1 u Π_1, dobit će se njezina prava veličina (k). Ta se prava veličina odredila upotrebom stranocrta. Krivulje su k' i (k) perspektivno-afine (s_1 je os afinosti, $A'V' \perp s_1$ je smjer afinosti).



Sl. 614.

4. Zadatak. *Odredi paraboličan presjek kosoga stošca, kojemu je osnovka u Π_1, općom ravninom Σ (s_1, s_2)!* (Sl. 614.).

Rješenje. Uzduž izvodnice $\overline{B}V$ kosoga stošca položena je dirna ravnina $\Gamma(c_1, c_2)$, nadalje je položena presječna ravnina $\Sigma \parallel \Gamma (s_1 \parallel c_1, s_1 \parallel c_2)$. Točke $C(C', C'')$ i $D(D', D'')$, u kojima trag s_1 siječe osnovnu kružnicu $\overline{k} \equiv \overline{k}'$, pripadaju presječnoj paraboli $k(k', k'')$.

Da se dobije najviša točka parabole k, povući će se na kružnicu $\overline{k}$ tangenta $a_1 \parallel s_1$, koja tu kružnicu dotiče u točki $\overline{A}$, pa će se potražiti sjecište A izvodnice $\overline{A}V$ s ravninom Σ. Da se dobiju projekcije točke A postupat će se ovako: Izvodnica AV leži u ravnini $\overline{A}\,\overline{B}\,V$, kojoj je prvi trag pravac $\overline{A}'\overline{B}' \perp c_1$. Ravnina $\overline{A}\,\overline{B}\,V$ sjeći će usporedne ravnine Γ i Σ u usporednim pravcima, i to ravninu Γ siječe u pravcu $\overline{B}\,V$, a ravninu Σ u pravcu $2A \parallel \overline{B}\,V$. Pravac $2A$ siječe izvodnicu AV u točki A. Ako se dakle točkom $2'$ povuče usporednica s $\overline{B}'V'$, ona siječe $\overline{A}'V'$ u točki A'. Ako se pak točkom $2''$ povuče usporednica s $\overline{B}''V''$, ona siječe $\overline{A}''V''$ u točki A''. Tangenta je a u točki A horizontalna ($a' \parallel s_1, a'' \parallel x$, zašto?), pa je prema tome ta točka najviša točka parabole k.

Budući da se neizmjerno daleka točka B parabole nalazi neizmjerno daleko u smjeru izvodnice $V\overline{B}$, tad je pravac $A2$, koji je usporedan s $V\overline{B}$, jedan promjer parabole k. Pravac a' je tome promjeru konjugirana tangenta.

Na sličan će se način dobiti točka E, koja leži na konturnoj izvodnici za nacrt $(4'E' \parallel 3'V', 4'E'' \parallel 3''V'')$.

Da se dobiju kojegod druge točke presjeka, na pr. G i H, položit će se kojagod horizontalna ravnina Δ i njome će se sjeći stožac u kružnici $u(u', u'')$, a ravnina Σ u sutražnici prve skupine m $(m' \parallel s_1, m'')$. Pravac m' siječe kružnicu u' u točkama G' i H', koje leže na paraboli k'. Pomoću ordinala odrede se na u'' točke G'' i H'', koje leže na paraboli k''.

Tjeme i os parabole k' odredit će se na slijedeći način: Os parabole k' mora biti usporedna s promjerom $A'2'$, dakle i s izvodnicom $V'\overline{B}'$. Tjemena (vršna) tangenta parabole mora biti okomita na promjeru $A'2'$. Dirna ravnina $\mathbf{E}$, koja sadrži tu tangentu u prostoru, sjeći će ravninu Γ u pravcu $V5$, koji je s tom tangentom usporedan i koji će u tlocrtu biti okomit na izvodnici $V'B'$. Ako se dakle točkom V' povuče pravac $V'5' \perp V'\overline{B}'$, trag e_1 dirne ravnine $\mathbf{E}$ ide točkom $5'$, dotiče $\overline{k}$ u točki $\overline{L}'$ i siječe trag s_1 u točki $6'$. Pravac potegnut točkom $6'$ usporedno s $5'V'$ siječe pravac $\overline{L}'V'$ u točki L', koja je vrh parabole k'. Os parabole ide točkom L' usporedno s $A'2'$.

Dužina $C'D'$ je promjeru $A'2'$ konjugirana tetiva. Ako se na taj promjer prenese dužina $A'M'$ tako, da je $A'M' = A'2'$, onda su spojnice $M'C'$ i $M'D'$ tangente parabole k' u točkama C' i D'. Ako se na promjer

$A''2''$ parabole k'' prenese dužina $A''M''$ tako, da je $A''M'' = A''2''$, onda su pravci $M''C''$ i $M''D''$ tangente te parabole u točkama C'' i D''.

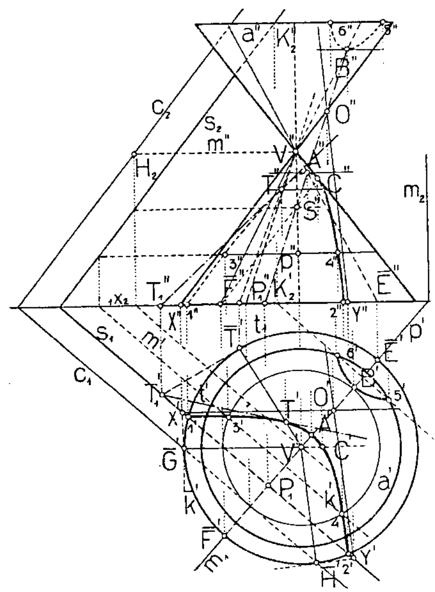
Parabola k'' dotiče prividnu konturu $V''\overline{E}''$ u točki E''. U tlocrtu se vidi čitav luk parabole, a u nacrtu vidi se dio $D''H''E''$.

§ 179. Presjek stošca u hiperboli općom ravninom

1. Zadatak. *Odredi presjek rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, ravninom $\Sigma(s_1, s_2)$ u hiperboli!* (Sl. 615.).

Rješenje. Na dvostrukom stošcu uzeli smo dvije izvodnice $\overline{G}V$ i $\overline{H}V$, pa smo njima položili ravninu $\Gamma = (c_1, c_2)$, a onda smo položili ravninu $\Sigma \parallel \Gamma$. Tada je ravnina Σ usporedna s obje izvodnice $\overline{G}V$ i $\overline{H}V$, pa će sjeći stožac u hiperboli.

Trag s_1 siječe donju osnovnu kružnicu u točkama 1 i 2, pa te točke pripadaju jednoj grani hiperbole. Položimo li gornjom osnovnom kružnicom $a(a', a'')$ ravninu, ona siječe ravninu Σ u sutražnici prve skupine, koja opet siječe kružnicu a u dvije točke 5 i 6. Te točke pripadaju gornjoj grani hiperbole.



Sl. 615.

Da se dobiju vrhovi A i B presječne hiperbole, položit će se osju stošca ravnina $\mathbf{M} \perp \Sigma (m_1 \perp s_1, m_2 \perp x)$ i njom će se sjeći stožac u izvodnicama $\overline{E}V$ i $\overline{F}V$, a ravnina Σ u pravcu p. Pravac p siječe izvodnicu $\overline{E}V$ u točki A, a izvodnicu $\overline{F}V$ u točki B. Ravnina Σ siječe os stošca u točki S. Budući da je $S' \equiv V'$, S'' dobije se pomoću sutražnice ravnine Σ. Pravac p ima svoje prvo probodište P_1 u tragu s_1 i ide točkom S; prema tome p'' ide točkama P_1'', S'' i siječe $\overline{E}''V''$ u A'', a $\overline{F}''V''$ u B''. Tangente su u točkama A i B horizontalne. Dužina AB je glavna os presječne hiperbole (zašto?).

Točka $C(C', C'')$ na konturnoj izvodnici dobije se pomoću sutražnice druge skupine, koja također ide točkom S. Točke 3 i 4 presječne krivulje odrede se na taj način, da se položi ravnina usporedno s Π_1 i njom siječe plašt stošca u kružnici, a ravnina Σ u sutražnici prve skupine; ta sutražnica i kružnica sijeku se u točkama 3 i 4.

U polovištu $O(O', O'')$ osi AB leži središte hiperbole. Točka V' je jedno žarište hiperbole k' (Isp. § 175., t. 3.).

Ravnina Σ siječe sve izvodnice stošca u točkama, koje leže u konačnoj udaljenosti, samo dvije izvodnice, i to izvodnice $\bar{G}V$ i $\bar{H}V$, siječe u točkama, koje su neizmjerno daleko. Hiperbola će dakle imati u smjeru tih izvodnica svoje dvije neizmjerno daleke točke. Tangente na hiperbolu u tim točkama jesu asimptote hiperbole, one moraju ići središtem O usporedno s izvodnicama $\bar{G}V$ i $\bar{H}V$, t. j. $XO \parallel \bar{G}V$ i $YO \parallel \bar{H}V$. Te se asimptote mogu dobiti i kao presječnice ravnine Σ s dirnim ravninama stošca u izvodnicama $\bar{G}V$ i $\bar{H}V$. Prvi tragovi tih dirnih ravnina dotiču donju osnovnu kružnicu u točkama $\bar{G}'$ i $\bar{H}'$ i sijeku s_1 u točkama X' i Y', pa tlocrt jedne asimptote ide točkom X' usporedno s $\bar{G}'V'$, a druge točkom Y' usporedno s $\bar{H}'V'$.

Između osnovne kružnice i presječne hiperbole postoji kolinearna srodnost, pa se to njihovo svojstvo može upotrebiti za određivanje presjeka i tangenata na taj presjek.

Odredi hiperboličan presjek pomoću stranocrta (transformacijom), a onda pravu veličinu presjeka kao u sl. 613.

2. Zadaci za vježbu

1. Središte je stražnje osnovke rotacionog valjka M (5 0 4,5) a polumjer $r = 3{,}5$, dok je visina valjka $v = 10$. Odredi presjek toga valjka s ravninom Σ (9,5 3 ∞), nadalje odredi pravu veličinu presjeka i mrežu dijela valjka između osnovke i presjeka.

2. Odredi presjek rotacionog valjka, kojemu je osnovka u Π_1, s općom ravninom, te mrežu toga valjka. Neka je središte osnovke M (3 0 3), $r = 2{,}5$, $v = 6$, Σ (10 7 10).

3. Uspravni valjak, kojemu je polumjer $r = 2$, dotiče ravninu Π_1 u izvodnici AB [A (2 6 0), B (6 3 0)]; odredi presjek toga valjka s ravninom Σ (—5 4 3).

4 Osnovka uspravnog valjka, leži u ravnini Δ (—5 5 5,5), središte je te osnovke M (0 — 2,5), polumjer $r = 2{,}5$ i visina $v = 7$, odredi presjek toga valjka s ravninom Σ (—14 7 7).

5. Odredi geometrijsko mjesto onih točaka, koje su od ravnine $\mathbf{P}$ (∞ 8 9) udaljene za dužinu $a = 1{,}5$, a od pravca p [T (0 7 10), P_1 (10 2 0)] za dužinu $r = 2$.

6. Odredi presjek uspravnog valjka s ravninom, koja ide središtem MN osi valjka i koja dotiče jednu osnovnu kružnicu u najvišoj, a drugu u najnižoj točki. Neka je MN [M (4 4 2), N (8 6 2)], $r = 2$.

7. Osnovka je istostranog valjka u ravnini Δ (∞ 4 5), polumjer je osnovke $r = 2$, a središte osnovke M (5 2 —); odredi presjek toga valjka s drugom ravninom projiciranja, koja je položena središtem osi valjka i kojoj drugi trag čini sa osi x kut od 60^0.

8. Os je uspravnog valjka MN [M (0 10,2 5), N (11,2 3,7 5)], a polumjer $r = 4$; odredi presjek i pravu veličinu toga presjeka ravninom, koja je zadana točkama A (11,8 6 0), B (2,8 0 0) i C (—3,2 0 8,2).

9. Odredi presjek kosoga valjka, kojemu je os MN [M (3 0 3), N (0 5 5)], a polumjer $r = 2{,}5$, s ravninom Σ (—6 5 4,5).

10. Os je kosoga valjka MN [M (4 3 0), N (8 5 6)], a polumjer $r = 2{,}5$; odredi presjek toga valjka s ravninom Σ (∞ 6 5).

11 Os je kosoga valjka MN [M (3 0 3), N (6 4 5)], a polumjer $r = 2$; odredi normalni presjek i mrežu toga valjka.

12 Os je kosoga valjka MN [M (5 4 0), N (0 6 6)], polumjer je osnovke, koja je u Π_1, $r = 3$; odredi presjek toga valjka s ravninom, koja je položena kroz os x i kojoj je prvi priklonı kut $\omega_1 = 30^0$. (Upotrebi bokocrt!)

13 Osnovka je uspravnog valjka parabola, koja leži u Π_1; odredi presjek toga valjka s ravninom simetrije.

14. Os je kosoga valjka $MN \parallel x$ i jednaka 8 *cm* Osnovka je toga valjka okomita na Π_2 i prema Π_1 nagnuta za 60^0. Na najgornjoj, najdonjoj i na prednjoj izvodnici leže tri točke A, B, C, koje su od osnovke u smjeru izvodnica udaljene 2, 4, 6 *cm*. Odredi presjek toga valjka ravninom ABC i mrežu plašta sa razastrtom presječnicom.

15. Nacrtaj projekcije kosoga valjka, kojemu je osnovka u Π_1, odredi presjek toga valjka općom kosom ravninom Σ i bačenu sjenu gornjega dijela valjka na presječnu ravninu. Neka je os valjka MN [M (0 5,5 0), N (9,5 10 12)], $r = 4$, P (16 14 9).

16. Osnovka je kosoga valjka u Π_1 [M (2 3 0), $r = 2$], jedna je točka osi valjka T (4 3 3), tom točkom položi onu ravninu, koja je kosa prema Π_1 i koja valjak siječe u kružnici druge skupine, kojoj ne pripada osnovka.

17. Odredi u slikama 606, 607 i 608 pravu veličinu presjeka stošca rotacijom oko prvoga traga s_1 u Π_1.

18. Odredi presjek uspravnog stošca, kojemu je središte osnovke S (3 0 4), vrh V (3 6 4), polumjer $r = 2{,}5$ ravninom Σ (6 6 $\bar{\infty}$). Odredi pravu veličinu presjeka *a)* prelaganjem oko traga s_1, *b)* rotacijom oko traga s_3.

19 Središta su osnovaka dvostrukog uspravnog stošca M (4 4 0) i N (4 4 8), a polumjer $r = 3$; odredi hiperboličan presjek toga stošca *a)* ravninom Σ (∞ 5 $\bar{\infty}$), *b)* Σ (9 10 ∞).

20. Osnovka je uspravnog stošca u Π_1 ($r = 3$), vrh je stošca V (4 4 5). Odredi presjek toga stošca ravninom Σ (9 9 ∞) u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu.

21. Osnovka je rotacionog stošca u ravnini $\mathbf{P}$ (3 4 ∞), središte je te osnovke S (1 — 3), polumjer $r = 2{,}5$, visina je stošca $v = 6$; odredi presjek toga stošca ravninom Σ: *a)* Σ (8 5 ∞), *b)* Σ (6 ∞ 8).

22. Osnovka rotacionog stošca leži u ravnini $\mathbf{P}$ (7 6 6), središte joj je S (2 — 2), polumjer $r = 2$, visina stošca $v = 6$; odredi presjek toga stošca ravninom Σ (6 ∞ 7).

23. Stožac, koji je zadan pod br. 18 treba presjeći u paraboli ravninom $\Sigma \perp \Pi_1$.

24. U sl. 607. razgrnite plašt i presječnu parabolu stošca u ravninu i konstruirajte tangentu u točki (T) razastrte parabole (k).

25. U sl. 608. razgrnite u ravninu plašt donjega stošca s pripadnom granom hiperbole.

26. Odredite mrežu stošca prema zadatku br. 18 i nacrtajte u njoj razastrtu presječnu krivulju.

27. Kosi stožac, kojemu je os SV [S (3 4 0), V (7 5 6)] i polumjer $r = 2{,}5$ treba sjeći ravninom Σ: *a)* Σ (6,5 ∞ 5), *b)* Σ (6 ∞ 8), odredi taj presjek i mrežu.

28. Kosi stožac, kojemu je os SV [S (0 4 0), V (1 5 6)] i polumjer $r = 3$, treba sjeći ravninom Σ, koja je okomita na Π_2 i koja je usporedna s izvodnicom BV [B (—3 4 0), V]. Neka se odredi mreža sa razgrnutom presječnom parabolom.

29. Osnovka je istostranog stošca u Π_1, središte joj je S (5 5 0), polumjer $r = 3$. Odredi: *a)* paraboličan presjek toga stošca ravninom $\Sigma \perp \Pi_2$, *b)* pravu veličinu presjeka, *c)* mreža.

30. Osnovka je kosoga stošca u Π_1 te joj je polumjer $r = 3$, središte joj je S (0 4 0), vrh je stošca V (2 4 5); odredi presjek toga stošca u hiperboli ravninom $\Sigma \parallel \Pi_2$.

31. Odredi presjek uspravnog stošca, kojemu je središte osnovke S (4 2,7 0), vrh V (4 2,7 5), polumjer $r = 2{,}5$, s ravninom Σ (11 10 7).

32. Odredi presjek uspravnog stošca [S (6 4 0), V (4 4 7), $r = 3$] s ravninom Σ (8 —16 6) i pravu veličinu presjeka.

33. Odredi presjek kosoga stošca [S (4 5,5 0), V (5 3,5 8), $r = 4$] s ravninom Σ (2,2 3 —2,5) i pravu veličinu presjeka.

34. Odredi presjek kosoga stošca [S (3 0 4), V (7 6 5), $r = 2{,}5$] s ravninom *a)* Σ (—4 2,5 5), *b)* Σ (3 —1 2).

35. Odredi presjek rotacionog stošca, kojemu je središte osnovke S (3 0 4), vrh V (3 6 4), polumjer $r = 2{,}5$, ravninom Σ: *a)* Σ (∞ 7 7), *b)* Σ (13 8 10), *c)* Σ (4 2 —3).

36. Odredi presjek kosoga stošca [S (3 4 0), V (7 5 6), $r = 2{,}5$] ravninom Σ: *a)* Σ (∞ 7 8), *b)* Σ (—4 5 2,5).

37. Osnovka je istostranog stošca u Π_2 [S (3 0 3), $r = 2{,}5$]; odredi presjek i mrežu toga stošca ravninom Σ: *a)* Σ (∞ 5 5), *b)* Σ (10 6 8), *c)* Σ (3,5 —2 3).

38. Osnovka je rotacionog stošca u ravnini **P** (3 4 ∞), središte joj je S (1 — 3), $r = 2{,}5$, visina je stošca $v = 6$; odredi eliptičan presjek toga stošca ravninom Σ: *a)* Σ (10 7 11), *b)* Σ (6 4 5,5). — Uputa: Upotrebi stranocrt.

39. Osnovka je rotacionog stošca u kosoj ravnini **P** (7 6 6), središte joj je S (2 — 2), polumjer $r = 2$, visina je stošca $v = 6$; odredi presjek toga stošca ravninom Σ: *a)* $\Sigma \equiv \Pi_1$, *b)* $\Sigma \equiv \Pi_2$, *c)* Σ (14 5,5 8).

40. Osnovka rotacionog stošca leži u ravnini simetrije, središte joj je S (3 2 2), a polumjer $r = 2$, vrh stošca uzmi tako, da Π_1 raspolavlja os stošca. Odredi presjek toga stošca ravninom Π_1 i mrežu dijela krnjega stošca, koji leži između osnovke i presjeka.

41. Zadan je eliptičan stožac, kojemu je eliptična osnovka u Π_1, točka je A (1 4 0) vrh velike osi, mala je os $= 2$, središte je osnovke S (4 3 0), visina je stošca $v = 6$; odredi presjek toga stošca ravninom Σ: *a)* Σ (∞ 7 8), *b)* Σ (10 13 8).

42. Osnovka je rotacionog stošca u Π_1, te mu je VA [V (1 4 6), A (0 1 0)] jedna izvodnica; položi tom izvodnicom dirnu ravninu i sijeci stožac ravninom, koja raspolavlja prvi prikloni kut dirne ravnine.

43. Osnovka je kosoga stošca u ravnini **P** (7 ∞ 4), središte joj je S (3 5 ?), polumjer $r = 2{,}5$, vrh je stošca V (9 7 9). Odredi presjek toga stošca ravninom Σ (∞ 13 9).

44. Osnovka je kosoga stošca u Π_1, vrh mu je V (6 0 8), dvije su točke plašta A (0 2 3) i B (2 4 4) i tangenta BC u točki C (6 12 0). Nacrtaj projekcije toga stošca i odredi presjek s ravninom ABC.

45. Rotacioni stožac dotiče svojim plaštem Π_1. Odredi eliptičan presjek toga stošca ravninom, kojoj je zadan prvi trag i koja prolazi jednom točkom osi stošca.

46. Osnovka je rotacionog stošca u Π_1 [S (4 4 0), $r = 3$, V (4 4 7)]. Taj stožac treba sjeći u paraboli ravninom Σ, koja ide pravcem p [M (1 2 6), N (6 8 1)]. — Uputa: Vrhom V položi dirne ravnine Γ i Δ stošca usporedno s p, a onda pravcem p ravninu $\parallel \Gamma$ ili s Δ.

47. Vrh je kosoga stošca V (2 1 6), središte osnovke S (6 4 0), jedna točka A (8 1,5 0) obodnice. Točkom T (8 4 0) položi onu ravninu Δ, koja je usporedna s dirnom ravninom stošca uzduž izvodnice AV, a onda odredi presjek stošca s ravninom Δ.

48. Zadan je kosi stožac [S (4 0 6,5), V (9 8 0,5), $r = 4$] i drugi trag s_2 ravnine Δ (9 ? 9), koja stožac siječe u paraboli; odredi prvi trag s_1 i presjek.

49. Kosi stožac, kojemu je os SV [S (6 4 0), V (9 1 6)], a polumjer $r = 3$, sijeci ravninom Δ u paraboli, te uzmi da Δ ide pravcem p [P_1 (3 7 0), P_2 (9 0 5)].

50. Kosi stožac, kojemu je os SV [S (12 5 0), V (5 1 9)], a polumjer $r = 4$, treba sjeći u paraboli ravninom Δ, koja ide točkom T (5 7 4) usporedno s pravcem p [P_1 (7 3,5 0), P_2 (1 0 4)].

51. Osnovka je kosoga stošca u Π_1 [S (4 5 0), V (8 0 9), $r = 4$]; točkom T (4 6 0) položi usporedno sa osi x onu ravninu, koja stožac siječe u paraboli. Koliko ima rješenja?

52. Rotacioni stožac iz zad. br. 46 sijeci u paraboli ravninom Δ, koja ide točkom (4 0 0) te joj prvi trag s_1 čini sa osi x kut od 60°.

53. Zadan je kosi stožac, kojemu je osnovka u Π_1 [S (4 4 0), V (5 5 0), $r = 3$], uzmi na tom stošcu dvije točke A (3 5 ?) i B (6 3 ?) i odredi onaj presjek toga stošca, koji ide točkama A i B. — Uputa: Vrhom V položi na stožac dirnu ravninu Γ usporedno s pravcem AB, zatim položi pravcem AB ravninu $\Delta \parallel \Gamma$. Koliko ima rješenja?

54. Osnovka je kosoga stošca u Π_2 [S (3 0 3), V (6 6 0), $r = 2{,}5$]; taj stožac sijeci u paraboli ravninom Δ (—2 ? 1,5), zatim odredi sjene prikraćenog stošca, ako je zraka svijetla $s \parallel \Pi_1$ i prema Π_2 nagnuta za 45°.

55. Zadan je uspravan eliptičan stožac, kojemu je osnovka u Π_1. Velika je os elipse AB [A (2 3 0), B (8 5 0)], mala je os $= \frac{2}{3} \cdot AB$, a visina je stošca $v = 6$. Taj stožac sijeci ravninom Δ (—2 1,5 ?) u paraboli i odredi pravu veličinu presjeka.

56. Zadane su tri točke osnovne kružnice stošca, i to: A (4 7 2), B (2 2 8), C (7 2 3), vrh je stošca u točki V (12 9 12); sijeci taj stožac u paraboli, koja ide točkama A i B.

57. Osnovka je kosoga stošca u Π_1 [S (0 4,5 0), V (1 1,2 4,5), $r = 3{,}5$], sijeci taj stožac u paraboli ravninom Δ, kojoj prvi trag s_1 ide točkama A (0 2,5 0) i B (3 0 0).

58. Osnovka je rotacionog valjka u Π_1 [S (0 6 0), $v = 10$, $r = 5$]; sijeci taj stožac u paraboli ravninom, kojoj prvi trag s_1 ide točkama A (0,8 ? 0) i B (—4,5 ? 0), koje leže na osnovnoj kružnici k, te se A u nacrtu vidi, a B ne vidi.

59. Osnovka je kosoga stošca krug u Π_1. Položi promjerom toga kruga, koji je usporedan sa osi x, ravninu Δ, koja siječe stožac u paraboli. Odredi presjek.

60. Središte je jedne osnovke rotacionog dvostrukog stošca M (0 0 5), vrh V (0 5 5), $r = 3{,}5$; odredi presjek toga stošca ravninom Δ (7 13 6,5) u hiperboli.

61. Središta su osnovaka dvostrukog kosoga stošca M (3 6 0) i N (7 4 8), a polumjer $r = 3$; odredi presjek toga stošca ravninom Δ (—5 5 6) i pravu veličinu presjeka.

62. Osnovka je kosog dvostrukog stošca u Π_1 [S (3,5 6 0), V (4,8 5 4), $r = 3$]; odredi presjek toga stošca ravninom Δ (—3,5 4,5 4.5).

63. Kosi stožac [S (7 5 0), V (9 7 6), $r = 3$, $\bar{k}$ u Π_1] sijeci ravninom Δ (3 —4 —4,5).

64. Stožac [S (7 0 4), V (10 3,5 7), $r = 3$, $\bar{k}$ u Π_2] sijeci ravninom Δ (11 —5 7).

65. Stožac [S (7 8 0), V (7 6 5), $r = 4$, $\bar{k}$ u Π_2] sijeci ravninom $\Delta \perp \Pi_3$ u hiperboli.

66. Dvostruki rotacioni stožac [S (0 5 0), V (0 5 5), $r = 3{,}5$, $\bar{k}$ leži u Π_1] sijeci ravninom Δ (7 6,5 13).

67. Dvostruki kosi stožac [S (3 6 0), V (3,5 2 4), $r = 3$, $\bar{k}$ leži u Π_1] sijeci ravninom Δ (−4 5 5). Odredi pravu veličinu presjeka.

68. Osnovka je dvostrukog istostranog stošca u Π_3 [S (0 4 3), $r = 3$]; odredi presjek toga stošca ravninom Δ (∞ 9 8).

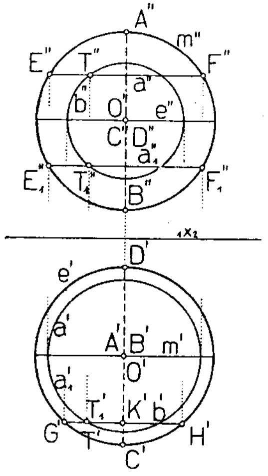
69. Osnovka je kosoga stošca u Π_1 [S (0 5 0), V (2 4 7), $r = 3{,}5$, $\bar{k}$ u Π_1]; sijeci taj stožac ravninom Δ, kojoj prvi trag s_1 ide točkom R (—6 0 0) te sa osi x čini 45°, i koja je usporedna sa osi SV.

XXX. Kugla

§ 180. Projiciranje kugle

1. Zadatak. *Nacrtaj projekcije kugle, kojoj je zadano središte $O(O', O'')$ i polumjer r!* (Sl. 616.).

Rješenje: Dirni valjak kugle, kojemu su izvodnice usporedne sa zrakama projiciranja, dotiče kuglu u najvećoj kružnici, koja se projicira u pravoj veličini i čini prividnu konturu projekcije na dotičnoj ravnini. Možemo dakle reći: *Kugla se na svaku ravninu projicira kao krug*, kojemu je polumjer jednak polumjeru kugle. Kad se crtaju projekcije kugle, onda se najprije nacrtaju projekcije O' i O'' središta kugle, a zatim se oko O' i O'' opišu kružnice e' i m'' s polumjerom r.



Sl. 616.

Promjer kugle, koji je okomit na Π_1, uzima se da je njezina os AB. Tlocrt je te osi točka u O', a nacrt dužina $A''B''$, koja je okomita na osi x i jednaka promjeru kugle. Budući da su ravnine usporednika usporedne s Π_1, ti se usporednici projiciraju na tu ravninu u pravoj veličini kao koncentrične kružnice sa središtem u O'. Nacrti su tih kružnica tetive kružnice m'', koje su usporedne s osi x i jednake promjerima usporednika. Kružnica e' je tlocrt ekvatora, a jer je on najveći usporednik, on čini konturu za tlocrt kugle. Promjer e'' kružnice m'' je nacrt ekvatora.

Ravnina meridijana m usporedna je s Π_2, pa se taj meridijan projicira na Π_2 u pravoj veličini u kružnicu m''. Taj se meridijan zove *glavni meridijan* kugle. Tlocrt je m' toga meridijana promjer kružnice e', koji je usporedan sa osi x. Kružnica je m'' kontura nacrta kugle.

2. Vidljivost. Ravnina ekvatora dijeli kuglu na gornju i na donju polukuglu. U tlocrtu se vidi gornja polovica kugline plohe. Glavni meridijan dijeli kuglu na prednju i stražnju polukuglu. U nacrtu se vidi prednja polovica kugline plohe. Pokaži tlocrt i nacrt *a)* vidljive, *b)* nevidljive polovice kugline plohe!

3. Zadatak. *Zadan je tlocrt T' točke T kugline plohe; odredi nacrt T''!* (Sl. 616.).

Rješenje: Točka je na kuglinoj plohi, kad se nalazi na jednom usporedniku te plohe. Tlocrt je usporednika a, koji ide točkom T, kružnica a'', kojoj je središte O', a $O'T'$ polumjer. Nacrt je toga usporednika dužina a', i u toj dužini leži točka T''.

Dužina se a'' dobije na slijedeći način: Svaki usporednik siječe glavni meridijan u dvije točke. Usporednik a siječe glavni meridijan u točkama E i F, od kojih su tlocrti E' i F' u sjecištima dužine m' s kružnicom a', a nacrti E'' i F'' na kružnici m'', pa je $a'' = E''F''$.

Budući da ordinale $E'E''$ i $F'F''$ sijeku m'' i u točkama E_1'', F_1'', to je dužina $E_1''F_1''(\parallel x)$ nacrt onoga usporednika a_1, koji leži na donjoj polukugli, a jednak je usporedniku a. Prema tome nacrt točke T može biti i na pravcu $E_1''F_1''$ u točki T_1''. Ako je dakle zadan tlocrt jedne točke kugline plohe, onda je nacrt te točke određen, ako se još zada, na kojoj polovici kugline plohe leži ta točka.

Ako se promjer CD kugle, koji je okomit na Π_2, smatra osju kugle, onda su usporednici kugle usporedni s Π_2, pa su im nacrti kružnice, kojima su središta u O'', a tlocrti tetive kružnice e', koje su usporedne sa osi x. Ako se točkom T položi jedna takova kružnica b, tlocrt joj je $b' \equiv G'H'$, a nacrt kružnica b'', kojoj je polumjer $= K'G' = K'H'$. Kružnica b'' mora ići točkom T''.

Ako je zadan nacrt T'' točke T, kako ćeš odrediti tlocrt T'? Jeli je T' potpuno određen?

§ 181. Presjek kugle ravninom

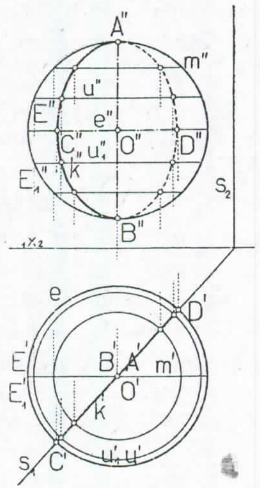
1. Zadatak. *Odredi presjek kugle ravninom $\Sigma (s_1, s_2)$, koja ide središtem kugle okomito na Π_1!* (Sl. 617.).

Rješenje: Ravnina Σ siječe kuglu u najvećoj kružnici, pa je njezino središte u središtu kugle, a polumjer je jednak polumjeru kugle. Tlocrt je presječne kružnice k dužina $C'D'$, koja leži u tragu s_1 i koja je promjer kružnice e'. Nacrt je k'' elipsa, kojoj je $A''B''$ velika, a $C''D''$ mala os. Budući da su poznate osi te elipse, ona se može konstruirati, a može se također odrediti nacrt nekoliko točaka presjeka k pomoću usporednika (§ 180. t. 3.).

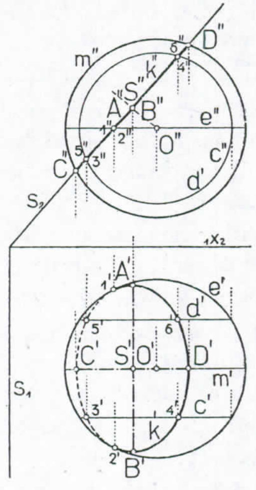
Ako je AB os kugle, onda je presječna kružnica k meridijan kugle, kojemu su k', k'' projekcije.

2. Zadatak. *Odredi presjek kugle ravninom $\Sigma (s_1, s_2)$, koja je okomita na Π_2!* (Sl. 618.).

Rješenje. Ravnina Σ siječe kuglu u sporednoj kružnici, kojoj je nacrt dužina $C''D''$ u tragu s_2. Ta je dužina jednaka promjeru presječne kružnice k. Središte se S presječne kružnice dobije kao nožište okomice spuštene sa kuglinog središta O na ravninu Σ ($O''S'' \perp s_2$, $O'S' \perp s_1$). Tlocrt je kružnice k elipsa k', kojoj je $C'D'$ mala, a $A'B' = C''D''$ velika os. Ravnina Σ siječe ekvator u točkama $1(1', 1'')$ i $2(2', 2'')$. Ako se kugla siječe ravninom, koja je usporedna s Π_2, ona siječe kuglu u kružnici c, ko-



Sl. 617.



Sl. 618.

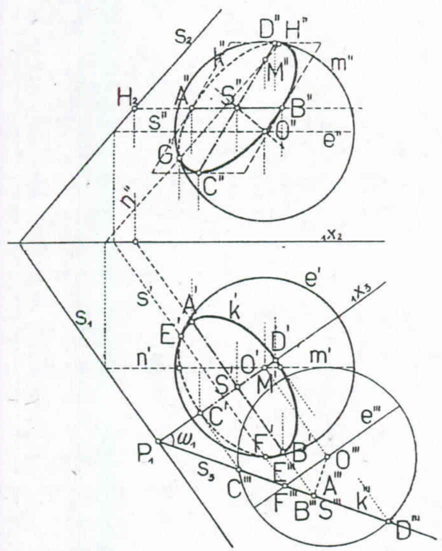
joj je tlocrt c' tetiva kružnice e', a nacrt kružnica c''. Kružnica c siječe kružnicu k u dvije točke $3(3', 3'')$ i $4(4', 4'')$. U kružnicu c'' projicira se i kružnica d, koja je na stražnjoj polovici kugle i koja kružnicu k siječe u točkama $5(5', 5'')$ i $6(6', 6'')$. Točke $1' - 6'$ leže na elipsi k'. Objasni vidljivost presjeka u tlocrtu.

3. Zadatak. *Odredi presjek kugle s ravninom Σ (s_1, s_2), koja je nagnuta prema Π_1 i Π_2!* (Sl. 619.).

Rješenje: Budući da ravnina Σ siječe kuglu u kružnici k, bit će njezin tlocrt i nacrt elipse k' i k''. Te će se elipse moći konstruirati, ako se odrede u svakoj toj elipsi po dva konjugirana promjera. Ti će se promjeri dobiti projekcijom dvaju među sobom okomitih promjera AB i CD presječne kružnice. Da se ta dva promjera dobiju, upotrebit će se stranocrt. Ravnina Π_3 položit će se okomito na s_1 (${}_1x_3 \perp s_1$), pa će se na tu ravninu projicirati kugla kao kružnica i ravnina Σ kao trag s_3. Budući da je ravnina $\Sigma \perp \Pi_3$, bit će stranocrt presjeka dužina $C'''D'''$ u tragu s_3. Ta je dužina jednaka promjeru presjeka.

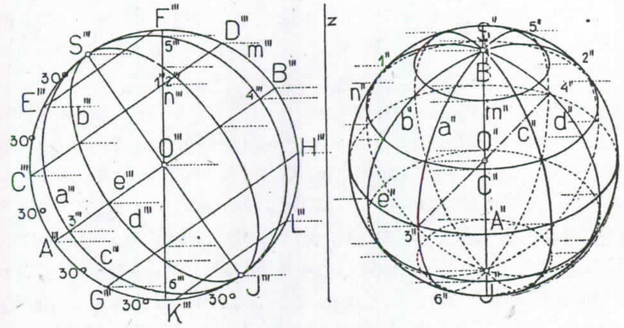
Ako se u središtu O kugle postavi okomica na ravninu Σ, ona tu ravninu siječe u središtu S presječne kružnice ($O'''S''' \perp s_3$, $O'S' \perp s_1$ i

$O''S'' \perp s_2$). Točka S''' leži u središtu dužine $C'''D'''$; pomoću te točke odredi se tlocrt S' i nacrt S''. U točku S''' projicira se promjer AB, koji je usporedan s Π_1, pa je njegov tlocrt $A'B' \parallel s_1$ i $A'B' = C'''D'''$. Dužina $C'D'$ okomita je na $A'B'$, a jer je $AB \perp CD$, to je $A'B'$ velika, a $C'D'$ mala os tlocrta presjeka. Ujedno je točka C najniža, a D najviša točka presjeka. Dužine su $A''B''$ i $C''D''$ dva konjugirana promjera nacrta presječne kružnice. Prema tome se elipse u tlocrtu i nacrtu mogu konstruirati.



Sl. 619.

Osim konjugiranih promjera treba još konstruirati i one točke presjeka, koje leže na konturi u tlocrtu i nacrtu, dakle točke na ekvatoru i na glavnom meridijanu. Da se odrede točke na ekvatoru, položit će se njim ravnina i njom sjeći ravnina Σ u pravcu s($s' \parallel s_1$). Pravac s' siječe tlocrt e' ekvatora u točkama E' i F'. Te se točke mogu odrediti i iz treće projekcije gdje je $e''' \parallel {}_1x_3$. Da se odrede točke na glavnom meridijanu, položit će se njim ravnina i njom će se sjeći Σ u pravcu n ($n'' \parallel s_2$). Pravac n sjeći će nacrt m'' glavnoga meridijana u točkama G'' i H''.



Sl. 620.

Elipsa k' dotiče kružnicu e' u točkama E' i F', a elipsa k'' dotiče kružnicu m'' u točkama G'' i H''.

Konturne točke dijele vidljivi dio presječne kružnice od nevidljivoga. Objasni tu vidljivost u tlocrtu i nacrtu.

4. **Zadatak.** *Nacrtaj bokocrt i nacrt sviju usporednika i meridijana, koji su među sobom udaljeni po* 30^0! (Sl. 620.).

Rješenje. Uzet će, se da je kuglina os $SJ \parallel \Pi_3$ i nagnuta prema Π_2. Obje su projekcije kugle krugovi m''' i n''. Najprije će se nacrtati bokocrt usporednika i meridijana. Bokocrti su usporednika usporedne tetive $A'''B'''$, $C'''D'''$, $E'''F'''$ . . . prividne konture m''', koje su okomite na $S'''J'''$ (bokocrt polova). Bokocrti dviju i dviju meridijana padaju zajedno.

Nacrti paralela jesu elipse, koje se dobiju na jednak način kao u sl. 618., t. j. odrede se male i velike osi tih elipsa i točke na prividnoj konturi n'', pa se elipse konstruiraju. Elipsa e'' je nacrt ekvatora.

Nacrti meridijana jesu elipse, koje prolaze točkama S'' i J''. Točka je O'' središte tih elipsa, a dužina $S''J''$ zajednički promjer. Ako se odrede nacrti onih točaka, u kojima meridijan siječe ekvator, dobit će se drugi promjer nacrta toga meridijana, koji je konjugiran s promjerom $S''J''$, pa se elipsa može konstruirati. Na pr. dužine $S''J''$ i $3''4''$ jesu konjugirani promjeri elipse a''. Ta elipsa dotiče konturnu kružnicu n'' u točkama $5''$ i $6''$, koje se dobiju iz bokocrta. Budući da su meridijani glavne kružnice kugle, velike su osi elipsa, u koje se ti meridijani projiciraju, jednake promjeru kugle, pa njihove krajnje točke leže na prividnoj konturi. Prema tome je dužina $5''6''$ velika os elipse a''. Za kontrolu točnosti konstrukcije nacrta meridijana može poslužiti okolnost, da druge i treće projekcije sjecišta usporednika i meridijana moraju biti u ordinalama, koje su okomite na osi z.

Objasni vidljivost usporednika i meridijana u nacrtu.

§ 182. Presjek kugle pravcem

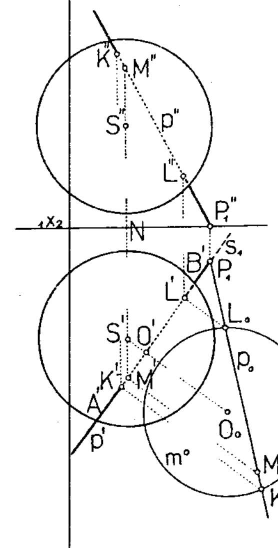
Zadatak: *Odredi presjek kugle pravcem* p (p', p'')! (Sl. 621.).

Prva metoda rješenja. Pravcem p položi se ravnina Σ i njom siječe kugla u kružnici m. Ta kružnica siječe pravac p u traženim sjecištima K i L. Najzgodnije će biti da se ravnina Σ položi okomito na Π_1 ili na Π_2. U sl. 621. uzelo se, da je $\Sigma \perp \Pi_1$. Trag je $s_1 \equiv p'$, tlocrt je kružnice m dužina $A'B'$ u tragu s_1, a polumjer $O'A'$.

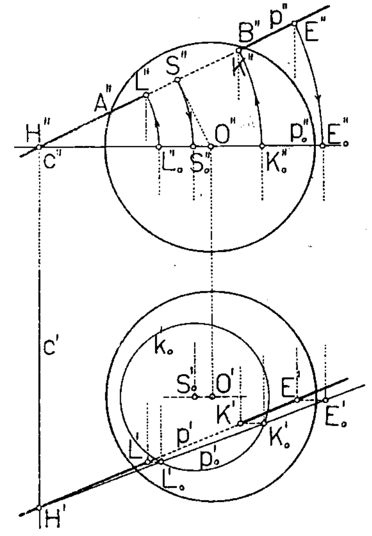
Ako se preloži ravnina Σ oko s_1 u Π_1, kružnica će m doći u m_0, a pravac p u p_0 $(O'O_0 = S'N$, polumjer kružnice m_0 jednak je $O'A'$, $M'M_0 = M''N$, $p_0 \equiv P_1M_0)$. Pravac p_0 siječe m_0 u točkama K_0 i L_0, pomoću kojih se dobiju točke K', L' i K'' i L''.

Objasni vidljivost točaka K i L, te pravca p u tlocrtu i nacrtu.

Druga metoda rješenja. (Sl. 622.). Pravcem p položi se ravnina $\Gamma \perp \Pi_2$. Ta ravnina siječe kuglu u kružnici k, kojoj je nacrt k'' dužina $A''B''$ na pravcu p''. Središte je kružnice k u točki S (S', S''), gdje je



Sl. 621.



Sl. 622.

$O''S'' \perp A''B''$. Pravac p siječe ravninu ekvatora u točki H (H', H''), a ravnina Γ siječe ravninu ekvatora u pravcu c, koji je $\perp \Pi_2$ $(c'' \equiv H''$, $c' \perp x)$. Okrenemo li presječnu kružnicu i pravac p oko pravca c u ravninu ekvatora, onda će središte S opisati luk, kojemu je središte u točki c'', doći će u položaj S_0 (S_0', S_0''). Kružnica k_0' opisana oko S_0' s polumjerom $= S''A''$ jest rotirana presječna kružnica k.

Sad se pravac p rotira oko pravca c u ravninu ekvatora. Točka H pravca p, koja leži na pravcu c, ostane kod rotacije na istom mjestu. Druga točka E pravca p dođe rotacijom u položaj E_0 (E_0', E_0''). Prema tome pravac p dođe u položaj p_0 $(p_0' \equiv H'E_0'$, $p_0'' \equiv H''E_0'')$. Kružnica k_0' i pravac p_0' sijeku se u točkama K_0' i L_0'. Nacrt je tih točaka u pravcu p_0''. Ako se oko c'' opišu lukovi kroz točke K_0'' i L_0'', oni sijeku p'' u točkama K'' i L''. Tlocrti su tih točaka na pravcu p'. Ujedno je $K_0'K'$ i $L_0'L'$ usporedno sa osi x. Točke su K i L sjecišta kugle pravcem p. Obje se točke vide u tlocrtu i nacrtu.

§ 183. O dirnim ravninama kugle

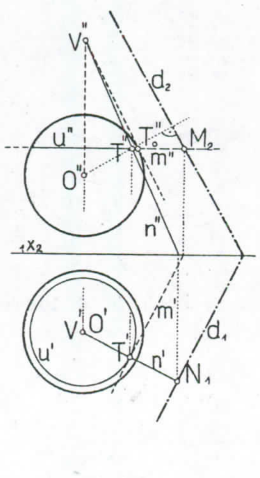
1. Zadatak: *Zadan je tlocrt i nacrt kugle i jedne točke T (T', T'') njezine plohe; točkom T položi dirnu ravninu na kuglu i odredi tragove te ravnine!* (Sl. 623.).

Rješenje. — *I.* Točkom T položi ravninu Δ okomito na polumjer OT kugle i odredi njezine tragove d_1 i d_2. Ravnina Δ je dirna ravnina kugle u točki T.

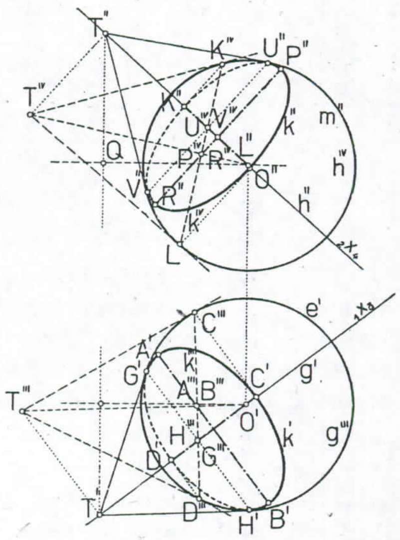
II. U točki T položi dvije tangente na kuglu, i to jednu na usporednik u, a drugu na meridijan, koji ide točkom T. Te dvije tangente određuju dirnu ravninu Δ kugle u točki T.

Tangenta m na usporednik u usporedna je s Π_1 ($m' \perp O'T'$, $m'' \parallel x$), pa će ona biti sutražnica prve skupine ravnine Δ. Tangenta n na meridijan u točki T dobije se s pomoću dirnog stošca kugle uzduž usporednika u, kojemu je vrh V, pa je $VT \equiv n$ ($V'T' \equiv n'$, $T_0''V'' \perp O''T_0''$, $V''T'' \equiv n''$).

Tangenta kugle. Svaki pravac t, koji se povuče u dirnoj ravnini Δ kugle kroz diralište T, jest tangenta kugle u toj točki.



Sl. 623.



Sl. 624.

2. Zadatak: *Zadana je kugla i točka T (T', T'') izvan kugle; točkom T položi dirnu ravninu na kuglu!* (Sl. 624.).

Rješenje. Ima neizmjerno mnogo ravnina, koje idu točkom T i dotiču zadanu kuglu. Sve te ravnine omataju plašt rotacionog stošca, ko-

jemu je točka T vrh i koji dotiče kuglu u kružnici k. (Dirni stožac). Da se odredi koja god dirna ravnina kugle, koja ide točkom T, konstruirat će se najprije dirni stožac, a onda će se položiti dirna ravnina na taj stožac. Ta će ravnina ići točkom T i doticat će kuglu u jednoj točki. Os dirnog stošca podudara se s pravcem TO ($T'O'$, $T''O''$). Ravnina je dirne kružnice k okomita na pravcu TO. Projekcije su te kružnice elipse k', k''. Konstruirat će se osi tih elipsa.

Osi elipse k'. Uzet će se, da je ravnina Π_1 usporedno podignuta u središte O. Ako se pravcem TO položi ravnina $\Pi_3 \perp \Pi_1$, ona ravninu ekvatora siječe u pravcu ${}_1x_3 \equiv T'O'$, a kuglu u najvećem krugu g, kojemu je tlocrt g' u pravcu ${}_1x_3$. Ako se ravnina Π_3 okrene oko ${}_1x_3$ u ravninu ekvatora, onda će krug g doći u ekvator ($g''' \equiv e'$), točka T u T''' ($T'T''' \perp T'O'$, $T'T''' \equiv T''Q$), a os stošca doći će u pravac $T'''O'$. Povuku li se s točke T''' tangente $T'''C'''$ i $T'''D'''$ na kružnicu g''', odnosno e', te su tangente prividna kontura za treću projekciju dirnoga stošca, dok je dužina $C'''D'''$ treća projekcija dirne kružnice k. Iz treće projekcije dati će normalni promjeri AB i CD osi $A'B'$ i $C'D'$ elipse k', gdje je $A'B' = C'''D'''$.

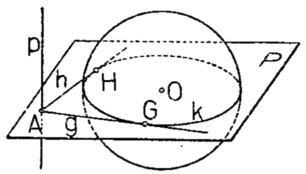
Treća projekcija ekvatora nalazi se u pravcu ${}_1x_3$. Ravnina ekvatora i ravnina dirne kružnice k sijeku se u pravcu GH, kojemu je treća projekcija točka, a prva projekcija dužina $G'H' \perp {}_1x_3$, gdje su točke G', H' na kružnici e', te pripadaju elipsi k' kao točke, koje leže na konturi tlocrta kugle. Točke bi se G', H' mogle dobiti i kao dirališta tangenata potegnutih s točke T' na kružnicu k'.

Osi elipse k''. Na jednak način, kao u tlocrtu, našle bi se osi elipse k''. Ovdje će se uzeti, da se ravnina Π_2 podudara s ravninom glavnog meridijana. Pravcem TO položit će se ravnina $\Pi_4 \perp \Pi_2$. Ta ravnina siječe Π_2 u pravcu ${}_2x_4$, a kuglu u najvećoj kružnici h, kojoj je nacrt h'' u pravcu ${}_2x_4$. Ako se ravnina Π_4 preloži oko ${}_2x_4$ u ravninu glavnoga meridijana, točka će T doći u T^{IV}, pravac TO u $T^{IV}O''$, a kružnicu $h^{IV} \equiv m''$. S točke T^{IV} povući će se tangente na h^{IV} i spojit će se dirališta dužinom $K^{IV}L^{IV}$. Ta je dužina četvrta projekcija dirne kružnice k. Iz četvrte projekcije dobiju se osi $K''L''$ i $P''R'' = K^{IV}L^{IV}$ elipse k''. Točke su U'', V'' konturne točke. Te se točke mogu dobiti iz četvrte projekcije, ili kao dirališta tangenata potegnutih iz točke T'' na kružnicu m''.

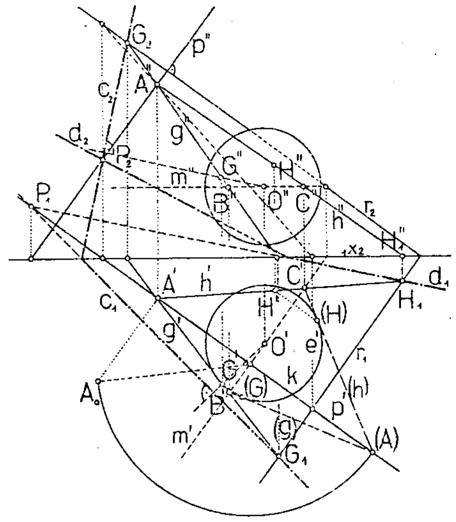
Pošto su se našle osi elipsa k' i k'', mogu se te elipse konstruirati. Elipsa k' dotiče e' u točkama G' i H', a elipsa k'' dotiče m'' u točkama U'' i V''.

3. Zadatak. *Zadanim pravcem p (p', p'') položi dirne ravnine na zadanu kuglu* (O', O'', r)! (Sl. 625. i 626.).

P r v a m e t o d a r j e š e n j a. Ako se na kuglu položi dirni valjak, kojemu su izvodnice usporedne s pravcem p, pa se tim pravcem polože dirne ravnine na valjak, one će doticati i kuglu. Ako se središtem O kugle položi ravnina **P** okomito na pravac p, ona će sjeći kuglu u dirnoj kružnici k, a pravac p u točki A (sl. 625.). Ako se točkom A povuku tangente g i h na kružnicu k, one dotiču valjak i kuglu u točkama G i H. Pravci p i g određuju dirnu ravninu Γ, a pravci p i h dirnu ravninu Δ.



Sl. 625.



Sl. 626.

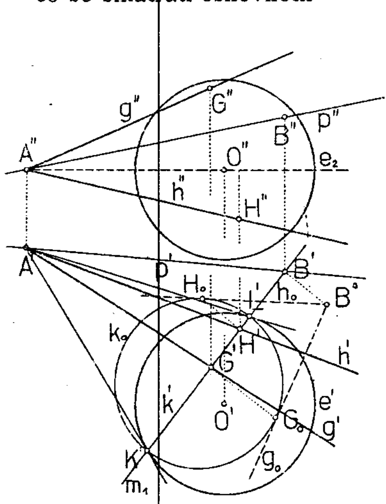
U sl. 626. zadane su projekcije kugle i projekcije p',p'' pravca p. Središtem O kugle položena je ravnina **P** okomito na pravac $p(r_1 \perp p', r_2 \perp p'')$, i određene su projekcije A',A'' sjecišta pravca p s ravninom **P**. Ravnina **P** siječe kuglu u kružnici k. Ako se točka A rotira oko sutražnice prve skupine $m(m',m'')$ ravnine **P**, koja ide središtem O, u ravninu ekvatora, ta će točka doći u položaj (A), a kružnica k pasti će u ekvator tako, da je $k \equiv e'$. Tangente povučene s točke (A) na (k) jesu rotirane tangente g i h, koje m sijeku u točkama B',C'. Pravac je $g' \equiv A',B'$, a $h' \equiv A'C'$. Iz tlocrta se odredi nacrt pravaca g i h, t. j. $g'' \equiv A''B''$ i $h'' = A''C''$. Budući da su pravci g i h u ravnini **P**, probodišta su tih pravaca u tragovima r_1,r_2 te ravnine. Tragovi traženih dirnih ravnina idu istoimenim probodištima pravaca p i g, te p i h, t. j. $c_1 \equiv P_1G_1$, $c_2 \equiv P_2G_2$, $d_1 \equiv P_1H_1$, d_2 ide točkom P_2 i onom točkom u kojoj d_1 siječe os x.

Pravci (g) i (h) dotiču (k) u točkama (G) i (H). Te su točke rotirana dirališta G i H kugle s dirnim ravninama Γ i Δ. Tlocrti se G' i H' nalaze na g' i h', a nacrti G'' i H'' na g'' i h''. Budući da su dirne ravnine okomite na polumjeru u diralištu, tad mora biti $O'G' \perp c_1$, $O''G'' \perp c_2$ $O'H' \perp d_1$, $O''H'' \perp d_2$.

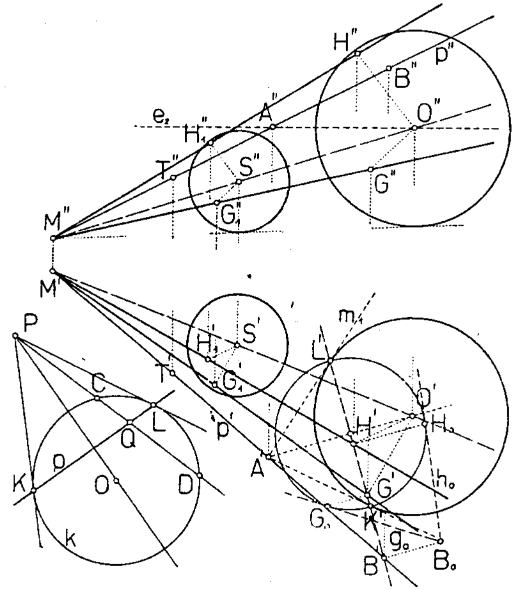
D r u g a m e t o d a r j e š e n j a (sl. 627.). Ako se na pravcu p uzme kojagod točka A, pa se iz te točke položi na kuglu dirni stožac, onda su dirne ravnine položene pravcem p na taj stožac ujedno i dirne ravnine kugle.

Da se zadatak može jednostavnije riješiti, uzet će se, da se točka $A(A',A'')$ nalazi u sjecištu pravca p s ravninom ekvatora $E(e_2 \parallel x)$. Ako se s točke A' povuku tangente $A'K'$ i $A'L'$ na konturu e' tlocrta kugle, te su tangente prividna kontura za tlocrt dirnoga stošca kugle, kojemu je vrh u točki A. Tlocrt je osi AO stošca spojnica $A'O'$, a nacrt $A''O''$. Budući da je os AO horizontalna, ravnina će dirne kružnice k biti okomita na Π_1, te joj je prvi trag $m_1 \equiv K'L'$. Dužina $K'L'$ je tlocrt k' dirne kružnice k.

Pravac p siječe ravninu dirne kružnice, koja će se smatrati osnovnom



Sl. 627.



Sl. 628. i 629.

kružnicom dirnoga stošca, u točki $B(B'.B'')$. Ako se s točke B povuku tangente g i h na kružnicu k, svaka od tih tangenata čini s pravcem p po jednu traženu dirnu ravninu kugle. Ako se ravnina kružnice k preloži oko tetive KL u ravninu ekvatora, kružnica će se k prikazati kao kružnica k_0, kojoj je $K'L'$ promjerom, a točka B pasti će u točku B_0. Ako se s točke B_0 povuku tangente g_0 i h_0 na k_0, ti su pravci preložene tangente g i h. Dirališta G_0 i H_0 jesu preložaji onih točaka kugle, u kojima tražene dirne ravnine položene pravcem p dotiču kuglu. Projekcije su tih točaka $G'.G''$ i H',H'' ($G_0G' \perp K'L'$, $H_0H' \perp K'L'$, $G'G_0 \dashv e_2 = G''$, $H'H_0 \dashv e_2 = H''$. [$G'' \dashv e_2$ označuje udaljenost točke G'' od pravca e_2].

4. Zadatak. *Zadanom točkom T položi dirnu ravninu na dvije zadane kugle!* (Sl. 628.).

Rješenje. Na dvije kugle mogu se položiti dva zajednička dirna rotaciona stošca. Oba ta stošca imadu zajedničku os, koja leži u centrali OS obih kugala, te je vrh jednoga stošca u izvanjem (M), a drugoga u unutarnjem (N) središtu sličnosti tih kugala. Za osnovku se jednoga dirnoga stošca može uzeti dirna kružnica, u kojoj jedan stožac dotiče jednu ili drugu kuglu. Ravnina je te dirne kružnice okomita na centrali OS.

Dirna ravnina položena točkom T na jedan ili drugi zajednički dirni stožac obih zadanih kugala, ujedno je i dirna ravnina tih kugala. Ako je točka M vrh jednoga stošca, onda dirna ravnina toga stošca sadrži pravac TM. Budući da ta dirna ravnina dotiče i obje kugle, onda će dirna ravnina položena pravcem TM na jednu kuglu doticati i drugu kuglu. Prema tome se postavljena zadaća svodi na zadaću: Pravcem TM treba položiti dirne ravnine na kuglu. Taj se pak zadatak riješi kao u t. 3., sl. 627. (druga metoda rješenja).

Zadanom točkom mogu se na dvije kugle položiti četiri zajedničke dirne ravnine. (Zašto?)

Konstrukcija. Zadane su projekcije dviju kugala, kojima su središta O (O', O'') i S (S', S'') i projekcije T', T'' točke T. Pravci $O'S'$ i $O''S''$ jesu projekcije centrale kugala. Ako se na prividne konture kugala povuku zajedničke izvanje tangente, one se sijeku u tlocrtu na pravcu $O'S'$ u točki M', a u nacrtu na pravcu $O''S''$ u točki M''. Te su točke projekcije izvanjeg središta sličnosti obih kugala. Sad se povuku pravci $M'T' \equiv p'$ i $M''T'' \equiv p''$, pa se pravcem p polože dirne ravnine na veću kuglu i odrede dirališta $G\,(G', G'')$ i $H\,(H', H'')$ na način kao u sl. 627. Dirališta G_1 (G_1', G_1'') i H_1 (H_1', H_1'') na maloj kugli leže na zrakama MG i MH, te je $SG_1 \parallel OG$ i $SH_1 \parallel OH$.

5. Pol i polarna ravnina kugle. Ako se s točke P (sl 629.) povuku tangente na kružnicu k, onda je pravac p, koji spaja dirališta K i L, polara kružnice k za točku P kao pol. (§ 136., t. 2). Ako se točkom P povuče koja god sekanta CD kružnice k, onda pol P i polara p dijele tetivu CD harmonički.

Ako se slika 629. rotira oko pravca OP, kružnica k opiše kuglu, tangente PK i PL opišu dirni stožac kugle sa vrhom P, točke K i L opišu dirnu kružnicu, a polara p opiše ravninu Π, koja je okomita na OP i u kojoj leži dirna kružnica. Točka P zove se *pol*, a ravnina Π *polarna ravnina* točke P s obzirom na kuglu.

Ako je točka P neizmjerno daleko, dirni stožac prelazi u dirni valjak, a polarna ravnina ide središtem kugle okomito na smjer OP. Ako je točka P na površini kugle, dirni stožac prelazi u dirnu ravninu, koja je polarna ravnina dirališta. Ako je točka P unutar površine kugle, polarna je ravnina izvan kugle, a ako je točka P u središtu kugle, pripadna je polarna ravnina neizmjerno daleko.

Svaki pravac položen točkom P siječe kuglu u dvije točke G i H, a ravninu Π u točki R, tako da su točke P, R, G, H četiri harmoničke točke.

§ 184. Konstrukcija kugle prema zadanim odredbama

1. Zadatak: *Konstruiraj kuglu, kojoj su zadane dvije točke A i B površine, i kojoj je središte na zadanom pravcu p!*

Rješenje. Simetralna ravnina dužine AB siječe pravac p u točki O, koja je središte kugle. Dužina je OA ili OB polumjer kugle. Izvedi konstrukciju!

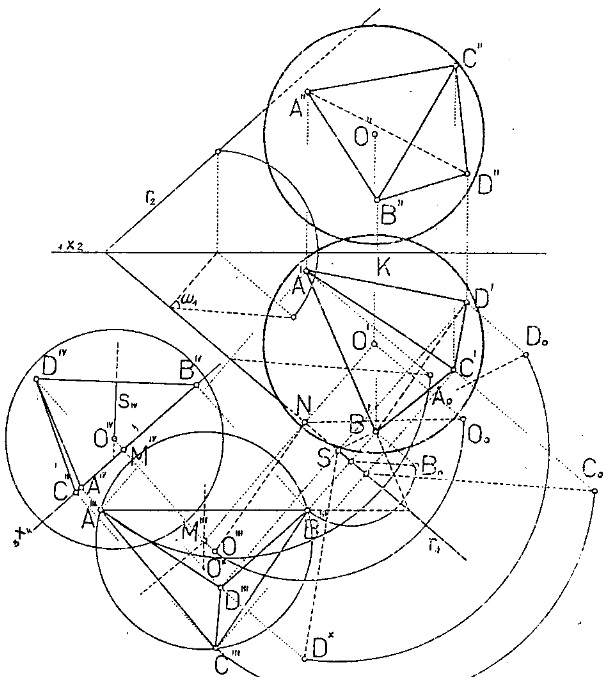
2. Zadatak: *Konstruiraj kuglu, kojoj su zadane tri točke A, B i C površine, a središte joj je u zadanoj ravnini* **P**!

Rješenje. Simetralne ravnine dviju tetiva kugle, na pr. tetiva AB i AC, sijeku se u pravcu p. U tom pravcu leže sve točke prostora, koje su jednako udaljene od zadanih točaka, pa prema tome u njemu leži i središte O kugle. To središte leži u sjecištu pravca p s ravninom **P**. Dužine su $OA = OB = OC$ polumjeri kugle. Izvedi konstrukciju.

3. Zadatak: *Konstruiraj kuglu, kojoj su zadane četiri točke A, B, C i D površine!*

Prvo rješenje. Simetralne ravnine triju tetiva kugle, koje ne leže u istoj ravnini, sijeku se u točki, koja je u središtu kugle. Ako se na pr. polože simetralne ravnine tetiva AB i AC, te odredi njihova presječnica p, ona će sjeći simetralnu ravninu treće tetive, na pr. AD, u traženom središtu O kugle. Dužine su $OA = OB = OC = OD$ polumjeri kugle. Izvedi konstrukciju.

Drugo rješenje. (Sl. 630.). Zadane točke A,B,C,D mogu se smatrati vrhovima tetraedra. Ako se kojem god trokutu, na pr. ABC opiše kružnica, ona leži na površini tražene kugle. Ako se pak u središte M te kružnice postavi okomica na ravninu tog trokuta, u toj okomici leži središte O kugle. Simetralna ravnina dužine AB siječe tu okomicu u točki O. Da se zadaća riješi, odredit će se tragovi r_1, r_2 ravnine trokuta ABC, taj će se trokut rotirati oko r_1 u Π_1 da se dobije njegova prava veličina $A'''B'''C'''$ (sl. 630.) i potražit će se središte M''' toga trokuta. Ako se u točki M''' postavi okomica na Π_1, u toj okomici leži središte O, te je $O''' \equiv M'''$. Zatim će se okrenuti točka D za kut $(180^0 - \omega_1)$, pa će se dobiti njezina projekcija $D'''[D'D''' \perp r_1$, $D'D_0 \parallel r_1$, $\sphericalangle D_0SD^x = 180^0 - \omega_1$, $D^xD''' \perp D'S]$. Spoji li se D'' s A''', B''', C''' dobit će se treća projekcija tetraedra. Položit će se stranocrtna ravnina $\Pi_4 \perp \Pi_1$ usporedno s bridom



Sl. 630.

BD, dakle ${}_1x_4 \parallel B'''D'''$, i potražit će se četvrta projekcija tetraedra $ABCD$. Četvrta projekcija $M^{IV}O^{IV}$ pravca, u koj mu leži središte O, okomita je na osi ${}_1x_4$. Budući da je brid $BD \parallel \Pi_4$, onda četvrti trag s_4 simetralne ravnine toga brida ide središtem dužine $B^{IV}D^{VI}$ okomito na tu dužinu i u tom tragu leži O^V. Da se dobije tlocrt O' rotirat će se točka O, gdje je $M'''O = M^{IV}O^{IV}$, oko traga r_1 natrag za $(180^0-\omega_1)$, t. j. povući će se $M'''O^x \parallel r_1$, prenijet će se $O'''O^x = M^{IV}O^{IV}$, zatim će se povući $M'''N \perp r_1$, učinit će se $\sphericalangle O^xNO_0 = 180^0 - \omega_1$, i $NO_0 = NO^x$ i potegnuti $O_0O' \perp O'''N$. Nacrt O'' leži u ordinali točke O' te je $KO'' = O'O_0$. Ako se točka O spoji s kojomgod zadanom točkom i odredi prava veličina te dužine, dobit će se polumjer kugle.

4. Zadatak: *Konstruiraj kuglu, ako je zadana dirna ravnina* Δ (d_1, d_2) *kugle sa diralištem* A (A', A'') *i još jednom točkom* B (B', B'') *kugline površine!*

Rješenje. U točki A postavi okomicu n na ravninu Δ $(n' \perp d_1$, $n'' \perp d_2)$, jer u toj okomici mora ležati središte kugle O. Zatim položi simetralnu ravninu Σ točaka A i B, jer i u toj ravnini mora ležati točka O. Prema tome točka O leži u sjecištu pravca n s ravninom Σ. Dužine $OA = OB$ jesu polumjeri kugle. Nacrtaj sliku!

5. Zadatak: *Konstruiraj kuglu, kojoj su zadane tri točke površine A, B, C i koja dotiče zadanu ravninu* Δ (d_1, d_2)!

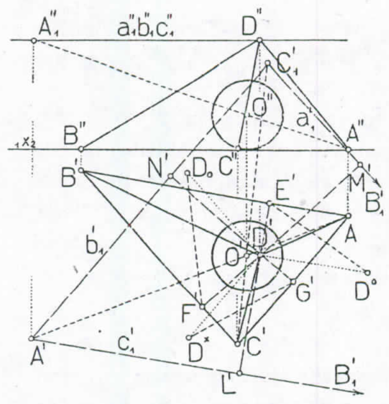
Rješenje. Kružnica a, koja ide točkama A, B, C, leži na traženoj kugli. Ako se središtem S te kružnice položi pravac p okomito na ravninu ABC, u tom pravcu leži središte O tražene kugle. Ravnina Σ, položena pravcem p okomito na dirnu ravninu Δ, sadrži sve okomice, koje se s točaka pravca p spuste na ravninu Δ. u ravnini Σ leži dakle i ona okomica, koja će ići diralištem D kugle, u kojoj Δ dotiče tu kuglu. Pravac t, u kojemu se sijeku ravnine Δ i Σ, bit će tangenta kugle u točki D i one najveće kružnice m kugle, koja leži u Σ. Ta najveća kružnica određena je tangentom t i točkama E i F, u kojima Σ siječe kružnicu a. Središte O kružnice m ujedno je središte tražene kugle. Dužine $OA = OE = OF$ jesu polumjeri kugle. Normala n spuštena s O na ravninu Δ siječe Δ u diralištu D.

Konstrukcija. Točkama A, B, C položit će se ravnina Γ (c_1, c_2), rotirat će se oko traga c_1 u Π_1 i opisat će se kružnica (a), koja ide točkama (A), (B), (C). Zatim će se potražiti projekcije S', S'' središta kružnice a, i tom točkom povući će se pravac $p \perp \Gamma$ $(p' \perp c_1$, $p'' \perp c_2)$. Sad će se pravcem p položiti ravnina Σ (s_1, s_2) okomito na Δ i tom će se ravninom sjeći ravnina Δ u pravcu t (t', t'') i ravnina Γ u pravcu q (q', q''). Rotira li se pravac q oko c_1 u Π_1, pravac (q) sjeći će kružnicu (a) u točkama (E) i (F). Odredit će se projekcije točaka E i F (E' i F' leži na q', a E'' i F'' na q'') i onda će se te točke i pravac t rotirati oko s_1 u Π_1, pa će se konstruirati kružnica (m), koja ide točkama (E) i (F) i koja dotiče pravac (t). Taj planimetrijski zadatak ima dva rješenja, pa prema tome postoje i dvije kugle koje zadovoljavaju postavljeni zadatak.

Središte (O) kružnice (m) je rotirano središte O kugle, pa će se potražiti projekcije O' i O'' toga središta. Oko tih točaka opisat će se kružnica s polumjerom $= (O)\,(E)$. Izvedi konstrukciju.

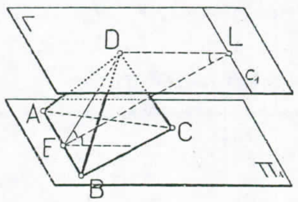
6. Zadatak: *Zadanom tetraedru $ABCD$ upiši kuglu!* (Sl. 631.).

Rješenje. Središte O kugle mora biti jednako udaljeno od četiri strane tetraedra. Konstruiraju li se tri ravnine, koje raspolavljaju prostorne



Sl. 631.

kutove, koje čine po dvije strane tetraedra, na pr. kutova, kojima su bridovi AB, BC, CA, te se tri ravnine sijeku u točki O, koja je središte tražene kugle. Kroz tu točku idu simetralne ravnine ostalih prostornih kutova tetraedra.



Sl 631a.

Ako se uzme da su strane tetraedra produžene preko međašnih bridova, onda bi se moglo konstruirati osam kugala, koje te četiri strane dotiču. Središta bi se tih kugala dobila, kad bi se položile simetralne ravnine i izvanjih prostornih kutova, koji čine po dvije strane tetraedra. Ovdje će se konstruirati samo ona dirna kugla, koja čitava leži unutar tetraedra.

Konstrukcija. U sl. 631. uzet će se, da je osnovka ABC tetraedra u Π_1. Simetralna ravnina kuta, kojega čini osnovka ABC s pobočkom ABD, zatvara jednake kutove s tima plohama, ali i sa svakom horizontalnom ravninom, na pr. s ravninom Γ, koja ide vrhom D. Simetralna ravnina. koja ide bridom AB, siječe ravninu Γ u pravcu c_1, koji je usporedan s AB. (Zašto?). Spusti li se s točke D okomica DE na brid AB i okomica DL na pravac c_1, onda je trokut DEL (sl. 631. a), zbog jednakosti kutova kod E i L, istokračan, pa je $DE = DL$, t. j. točka D je jednako udaljena od AB i od c_1.

Odredi li se prava veličina dužine DE ($D'E' \perp A'B'$, $D'D_0 \perp D'E'$, $D'D_0 = D'' \dashv x$, $E'D_0 = ED$), pa se na pravcu $D'E'$ učini $D'L' = DL = DE = D_0E'$, točkom L' ide pravac $c_1' \parallel A'B'$. Na sličan se način dobiju tlocrti a_1', b_1' pomoćnih tragova a_1, b_1 u kojima simetralne ravnine položene bridovima BC i CA sijeku ravninu Γ ($D'M' = F'L^0$, $a_1' \parallel B'C'$; $D'N' = G'D^*$, $b_1' \parallel C'A'$).

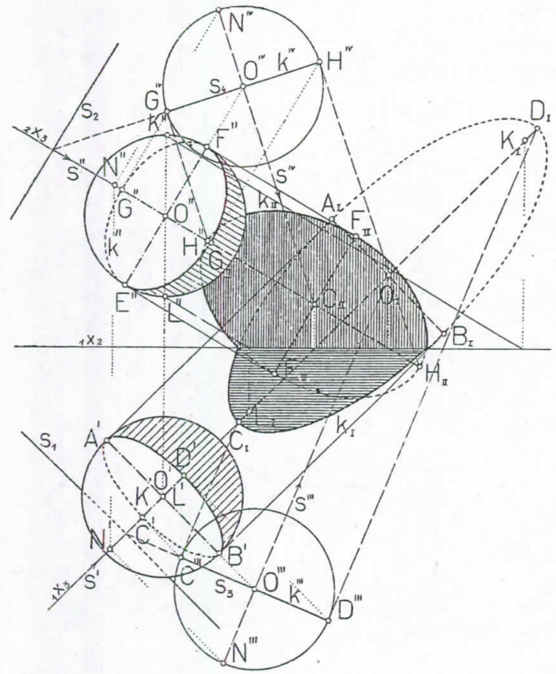
Pomoćni tragovi a_1, b_1, c_1 sijeku se u točkama A_1, B_1, C_1, pa su pravci AA_1, BB_1, CC_1 presječnice onih triju simetralnih ravnina. Te se tri presječnice sijeku u središtu O upisane kugle. Pravci $A'A_1'$ i $C'C_1'$ sijeku se u točki O'. Točka O'' leži na pravcu $A''A_1''$. Polumjer r kugle jednak je udaljenosti točke O od osnovke ABC, dakle je jednak udaljenosti točke O'' od osi x.

Ako osnovka tetraedra nije u Π_1 (ili Π_2), onda se upotrebi stranocrt.

§ 185. Sjene kugle

1. Zadatak: *Odredi rastavnicu i bačenu sjenu kugle kod usporedne rasvjete!* (Sl. 632.).

Rješenje. U sl. 632. zadane su projekcije kugle i zrake svijetla s, koja je položena središtem O kugle tako, da s' čini sa osi x kut od 45^0, a s'' 30^0.

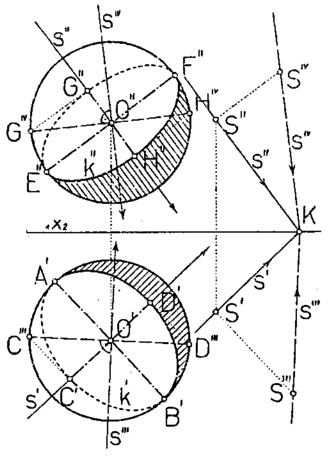


Sl. 632.

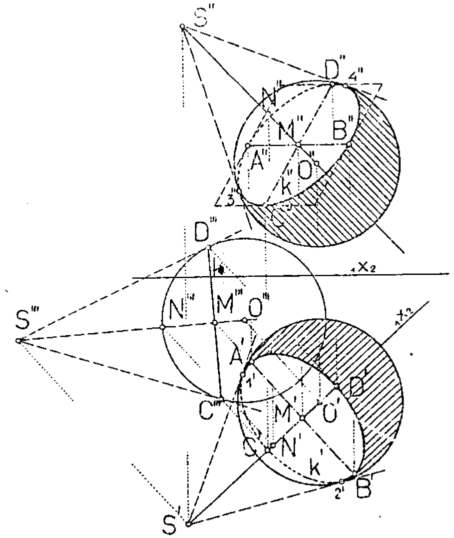
Ako se pomisli, da su na kuglu položene dirne zrake svijetla usporedno sa s, one čine rotacioni valjak, koji dotiče kuglu u glavnoj kružnici k. Zraka je svijetla s os toga valjka, a dirna kružnica k leži u ravnini Σ, koja ide središtem kugle okomito na zraku s. Kružnica k je rastavnica između rasvijetljenog i tamnog dijela kugle. Da se dobije rastavnica kugle, položit će se prema tome središtem O ravnina Σ okomito na smjer zrake svijetla i njom će se sjeći površina kugle u glavnoj kružnici k, koja je rastavnica na kuglinoj površini.

Kružnica k projicira se na Π_1 i na Π_2 kao elipsa. Elipsa se k' odredi spomoću stranocrta na jednak način kao u sl. 619. U sl. 632. uzelo se, da je os ${}_1x_3 \equiv s'$, odredila se treća projekcija kugle i zrake svjetla s. Pravac $s''' \equiv O'''O_I$, gdje je O_I prvo probodište zrake s. Treći trag s_3 ide središtem O''' okomito na s'''. U taj trag pada treća projekcija k''' kružnice k. Budući da je središte kugle ujedno i središte kružnice k, velika će os $A'B'$ elipse k' ići točkom O', bit će okomita na s' i jednaka promjeru kugle. Mala os $C'D'$ leži u s', a dobije se iz treće projekcije.

Velika os $E''F''$ elipse k'' ide točkom O'', okomita je na s'' i jednaka promjeru kugle. Mala os $G''H''$ leži u s'', a njezina dužina dobije se pomoću stranocrta $G^{IV}H^{IV}$, gdje se Π_4 položila zrakom s okomito na Π_2, pa je $O^{IV}O_{II} \equiv s^{IV}$, a $s_4 \perp s^{IV}$.



Sl. 633.



Sl. 634.

Bačena sjena kugle na Π_1 i na Π_2 omeđena je bačenom sjenom rastavnice k na te ravnine. Bačene su sjene rastavnice k dvije elipse k_I i k_{II}. Te se elipse mogu smatrati presjekom dirnog valjka kugle s Π_1 i Π_2. Sjene A_IB_I i C_ID_I dvaju okomitih promjera AB i CD kružnice k na Π_1, jesu mala i velika os elipse k_I. Jer C_ID_I pada u s', AB je $\parallel \Pi_1$ i $\perp s'$, pa je $A_IB_I \parallel A'B'$ i $A_IB_I \perp s'$, dakle $A_IB_I \perp C_ID_I$. Točke smo C_I i D_I odredili pomoću stranocrta, a A_IB_I ide točkom O_I okomito na C_ID_I, a osim toga je $A_IB_I \# A'B'$. Sjene $E_{II}F_{II}$ i $G_{II}H_{II}$ dvaju okomitih promjera EF i GH kružnice k na Π_2, jesu mala i velika os elipse k_{II}. (Zašto?). Obje se elipse k_I i k_{II} moraju sjeći u osi x. Jedan dio sjene kugle pada na Π_1, a drugi dio na Π_2.

Bačena sjena kugle na kojugod ravninu Σ kod usporedne rasvjete također je elipsa. Žarišta te elipse leže u onim točkama, u kojima dotiču ravninu Σ one kugle, koje su ujedno upisane dirnome valjku, koga čine zrake svjetla. Budući da svaka kugla, koja je upisana dirnomu valjku, ima na Σ istu elipsu kao granicu bačene sjene, mogu se i na zadanoj kugli odrediti one točke, koje će bacati sjenu u žarišta te elipse. Te će se točke na kugli dobiti kao probodišta kugle s pravcem potegnutim središtem kugle okomito na ravninu Σ. Jedna je od tih točaka najbliža, a druga najudalje-

nija točka kugle od ravnine Σ. Prema tome, ako se u sl. 632. povuče središtem O kugle okomica na Π_1, dobit će se najniža točka L i najviša točka K kugle, pa će bačene sjene K_I i L_I tih točaka biti žarišta elipse k_I.

Koje će točke kugle bacati sjenu u žarišta elipse k_{II}.

Najsvjetlija točka kugle. Točka $N(N''', N', N'')$, u kojoj zraka svjetla položena središtem kugle siječe kuglu, jest najsvjetlija točka te kugle. Zraka je svjetla u točki N okomita na dirnoj ravnini kugle u toj točki.

2. Skraćeni postupak kod konstrukcije rastavnice kugle. (Sl. 633.). Kroz kojugod točku K osi x povuče se tlocrt i nacrt zrake svjetla s i odredi se treća projekcija s''' i četvrta s^{IV}, uzevši da je os ${}_1x_3 \equiv s'$, a os ${}_2x_4 \equiv s''$. Tlocrt kugle uzme se da je ujedno i treća projekcija te kugle, pa se kroz O' povuče s' i s''' te promjer $C'''D''' \perp s'''$. $C'''D'''$ je treća projekcija rastavnice k. Velika os $A'B'$ elipse k' okomita je na s', a mala os $C'D'$ dobije se kao projekcija promjera $C'''D'''$ na pravcu s'.

Na sličan način dobiju se osi $E''F''$ i $G''H''$ elipse k'', pa se elipse k' i k'' mogu konstruirati. [$E''F'' \perp s$, i $G^{IV}H^{IV} \perp s^{IV}$].

3. Zadaća. *Odredi rastavnicu i bačenu sjenu kugle kod centralne rasvjete!* (Sl. 634.).

Rješenje. U sl. 634. zadane su projekcije kugle i projekcije izvora svjetla S, koji je točka u konačnosti. Ako se s točke S povuku sve zrake svjetla, koje dotiču kuglu, one čine dirni stožac, koji dotiče kuglu u dirnoj kružnici k. Ta je kružnica rastavnica kugle Projekcije se te kružnice mogu dobiti pomoću stranocrta kao u sl. 624. Ovdje se uzelo da je os ${}_1x_3$ u ravnini Π_1. Dužina $A'B'$ ($= C'''D'''$) je velika os elipse k', a $C'D'$ mala os. Nacrti su $A''B''$ i $C''D''$ konjugirani promjeri elipse k'', pa se i ta elipsa može konstruirati. Spomoću stanocrta mogu se odrediti i osi elipse k''. Važno je da se odrede konturne točke u tlocrtu (1',2') i nacrtu (3'',4''). Kako se odrede te točke?

Zraka SO siječe kuglu u točki $N(N''', N', N'')$. Ta je zraka okomita na dirnoj ravnini kugle u točki N, pa je ta točka najsvjetlija točka kugline površine.

Bačena sjena kugle kod centralne rasvjete dobije se ako se dirni stožac kugle iz S siječe ravninom Π_1 i Π_2. Ti presjeci mogu biti elipse, parabole i hiperbole. Ako ravnina Σ, na koju kugla baca sjenu, siječe sve izvodnice dirnoga stošca, granica je bačene sjene na toj ravnini elipsa. Ako je ta ravnina usporedna s jednom izvodnicom dirnoga stošca, granica je bačene sjene parabola, a ako je ravnina usporedna s dvije izvodnice dirnoga stošca, granica je bačene sjene hiperbola.

Budući da je dirni stožac kugle rotacioni stožac, žarišta će bačene sjene na ravnini Σ biti u onim točkama, u kojima ta ravnina dotiče one

*

kugle, koje ujedno dotiču i dirni stožac. Budući da svaka kugla, koja je upisana dirnom stošcu, daje na ravnini Σ istu granicu bačene sjene kao i zadana kugla, to se i na zadanoj kugli mogu odrediti one točke, koje će bacati sjenu u žarište granice bačene sjene. Te će točke biti sjecišta kugle s onim pravcem, koji ide središtem kugle okomito na ravninu Σ.

U sl. 634. bit će granice bačene sjene na Π_1 i Π_2 elipse. Odredi te sjene, te žarišta tih elipsi.

§ 186. Kosa projekcija kugle

Zadatak. *Neka se nacrta kosa projekcija kugle, kojoj je glavni meridijan m u ravnini xz, ako je kut $\alpha = 45^0$, a $n = 2/3$!* (Sl. 635.).

Rješenje. Sve zrake projiciranja za kosu projekciju, koje dotiču kuglu, čine dirni rotacioni valjak. Budući da su zrake projiciranja u kosom položaju prema ravnini slike xz, sjeći će ta ravnina dirni valjak u elipsi $\overline{k}$. Ta će elipsa biti prividna kontura za kosu projekciju kugle na ravnini xz.

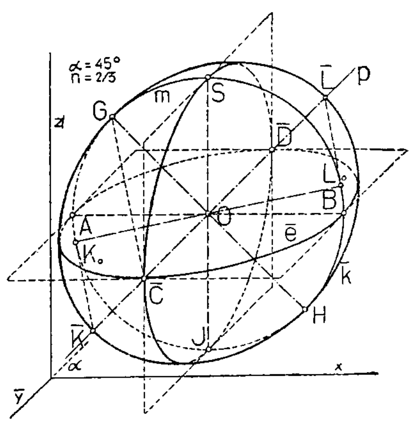
Budući da glavni meridijan m leži u ravnini slike xz, njegova je kosa projekcija sama kružnica m. Ekvator e usporedan je s ravninom xy, pa će njegova kosa projekcija biti elipsa. Povuče li se središtem O promjer $AB \parallel x$, i pravac usporedno sa $\overline{y}$, pa se na tom pravcu učini $\overline{O}\overline{C} = O\overline{D} = \frac{2}{3} \cdot OA$, onda su AB i $\overline{C}\overline{D}$ dva konjugirana promjera za kosu projekciju ekvatora.

Meridijan, koji je usporedan s ravninom yz, projicirat će se na ravninu xz kao elipsa, kojoj su dužine $SJ(\parallel z)$ i $\overline{C}\overline{D}$ dva konjugirana promjera.

Kad bi se nacrtale kose projekcije usporednika i drugih meridijana, te bi projekcije bile uopće elipse. Ako se nacrta krivulja, koja dotiče sve te elipse, ta će krivulja biti kontura kugle u kosoj projekciji, t. j. ta će krivulja biti elipsa $\overline{k}$.

Osi elipse $\overline{k}$ mogu se konstruirati na slijedeći način: Središtem O kugle povući ćemo u ravnini xz pravac $p \parallel \overline{y}$. Ravnina položena pravcem p okomito na xz siječe kuglu u najvećoj kružnici g. Na toj kružnici nalaze se točke C i D, i to točka C nalazi se ispred ravnine xz, a D iza te ravnine. Tangente položene na kružnicu k usporedno sa zrakama projiciranja dotiču kružnicu g u točkama K i L i sijeku ravninu xz u točkama $\overline{K}$ i $\overline{L}$, koje leže na pravcu p, te je dužina $\overline{K}\overline{L}$ velika os elipse $\overline{k}$. Da se dobiju točke K i L, preložit će se kružnica g oko pravca p u ravninu xz. Kružnica g doći će u kružnicu m. Budući da je promjer $CD \perp xz$, dakle i $CD \perp p$, preložaj toga promjera bit će okomit na p i podudarat će se s promjerom GH kružnice m. Pravac $G\overline{C}$ je preložena zraka projiciranja

točke C. Preložene zrake točaka K i L bit će usporedne s $G\overline{C}$ i doticat će kružnicu m u preloženim točkama K_0 i L_0. Te zrake sijeku pravac p u točkama $\overline{K}$ i $\overline{L}$, koje su kod prelaganja ostale na istome mjestu. Budući da se trokuti $GO\overline{C}$ i $OK_0\overline{K}$ podudaraju u jednoj stranici ($OG = OK_0 = r$) i u dva kuta (koja?), oni su sukladni. odakle slijedi, da je $O\overline{K} = G\overline{C} = O\overline{L}$.



Sl. 635.

Zrake projiciranja u točkama G i H doticat će i glavni meridijan u tim točkama, pa će i elipsa $\overline{k}$ imati u tim točkama iste tangente, a jer je $GH \perp K_1L_1$, to je GH mala os elipse $\overline{k}$. Budući da je $G\overline{C} = O\overline{K}$, slijedi da je $\overline{C}$ jedno žarište elipse $\overline{k}$. Poradi simetrije $\overline{D}$ je drugo žarište te elipse. Elipsa $\overline{k}$ može se prema tome lako konstruirati.

Zadaci za vježbu

1. Na kugli [središte S (0 4,5 4), polumjer $r = 3$] leže točke A (—1 2,5 —), B (0 — 6), C (—2 — 4); odredi projekcije tih točaka i istraži njihovu vidljivost u tlocrtu i nacrtu.

2. Odredi presjek kugle K [O (0 4 3,5), $r = 3$] s ravninom Σ (—6 12 9).

3. Odredi presjek kugle K [O (5 2,5 3), $r = 2{,}5$] s ravninom Σ (∞ 6 8).

4. Odredi presjek kugle K [O (3 2,5 3), $r = 2{,}5$] s ravninom Σ: *a)* Σ (7 ∞ 7), *b)* Σ (8 6 ∞).

5. Na zadanoj kugli K [O (5 3 2,5), $r = 2{,}5$] uzmi dvije točke A (4 4,5 —) i B (7 3 —) i odredi na kugli glavni krug, koji ide tima točkama. — Uputa: Sijeci kuglu ravninom ABS.

6. Nacrtaj projekcije kugle, kojoj je polumjer = 15 *cm*, pa na način kao u sl. 620. nacrtaj bokocrt i nacrt sviju usporednika koji su među sobom udaljeni po 10°.

7. Zadanu kuglu [O (8 5 5), $r = 4$] sijeci ravninom , kojoj je drugi trag $s_2 \equiv MN$ [M (0 0 8), N (3 0 4)], u najvećoj kružnici.

8. Kuglu K [O (5,5 4,5), $r = 4{,}5$] sijeci s paralelogramom $ABCD$ [A (1,3 0 2,7), B (—7,3 0 0), C (—3 9,5 7), D(?)].

9. Zadanu kuglu [O (5 4,5 3,5), $r = 3$] sijeci ravninom simetrije.

10. Odredi one točke ravnine $\mathbf{P}$ (7 8 6), koje su od točke A (3 4 3) udaljene za dužinu $a = 3$.

11. Odredi geometrijsko mjesto onih točaka prostora, koje su od točke A (4 3 4) udaljene za dužinu $a = 3$, a od ravnine $\mathbf{P}$ (4 5 6) za dužinu $d = 1{,}5$.

12. Odredi presjek kugle s pravcem, koji je: *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* $\perp \Pi_2$, *c)* $\parallel \Pi_1$, *d)* $\parallel \Pi_2$.

13. Odredi presjek kugle K [O (4 3 2), $r = 2$] s pravcem $p \equiv AB$ [A (2 6 5), B 7 1 1)].

14. Odredi na kugli [O (4 4 3), $r = 2$] onu točku, koja je najbliža ravnini Γ (4 4 3) i točku, koja je od te ravnine najudaljenija.

15. Pravcem $p \equiv MN$ [M (6 3 7), N (8 7 1)] položi dirne ravnine na kuglu K [O (3 5 4), $r = 2{,}5$].

16. Zadane su dvije koncentrične kugle [O (5 6 12), $r = 5$, $r_1 = 3$]; položi na manju kuglu jednu dirnu ravninu i njom sijeci veću kuglu.

17. Sa zadane točke položi na kuglu dirni stožac, odredi projekcije dirne kružnice i taj stožac sijeci ravninom Π_1 (ili Π_2).

18. Zadanoj kugli opiši rotacioni valjak, kojemu su izvodnice usporedne sa zadanim pravcem p i odredi presjek toga valjka s Π_1 (Π_2).

19. Na zadanoj kugli [O (5 5 5), $r = 4{,}5$] uzmi dvije točke A i B [A (3 8 ?), B (8 6,2 ?)], koje leže na gornjoj polukugli, u tim točkama položi dirne ravnine na kuglu i odredi kut koga čine te dvije ravnine.

20. Na kugli [O (4,5 4 4), $r = 3$] leži točka A (4 5 ?). Točkom A položi na tu kuglu dirnu ravninu.

21. Zadana je kugla [O (6 3 4), $r = 2$] i ravnina $\mathbf{P}$ (2 1 —4); položi na kuglu one dirne ravnine, koje su usporedne s ravninom $\mathbf{P}$.

22. Zadana je kugla [O (4 6 4), $r = 2$] i dva mimosmjerna pravca a [A_1 (1 8 0), A_2 (4 0 6)] i b [B_1 (7 5 0), B_2 (8 0 —2)]; položi na kuglu one dirne ravnine koje su usporedne s pravcima a i b.

23. Na zadanu kuglu položi one dirne ravnine, koje su okomite na zadanom pravcu p.

24. Na zadane dvije kugle položi dirne ravnine usporedno sa zadanim pravcem a. Na pr. [O (6 8 2), $r = 2$, S (9 4 3), $r_1 = 5$, $a \equiv PQ$ [P (1 7 2,5), Q (4 0 5)]. — Uputa: Položi na obje kugle zajednički dirni stožac, zatim na taj stožac položi dirne ravnine usporedno s pravcem a.

25. Na zadanu kuglu [O (7 3 2), $r = 2$] i zadani rotacioni stožac [S (12 5 0), $r_1 = 2{,}5$, $v = 8$] položi zajedničke dirne ravnine. — Uputa: S vrha zadanog stošca položi na kuglu dirni stožac i na oba ta stošca položi dirne ravnine.

26. Na zadanu kuglu [O (7 4 2), $r = 2$] i zadani kosi valjak, kojemu je os MN [M (4 2 0), N (1 4 3,5)] i polumjer $r_1 = 1{,}5$, položi zajedničke dirne ravnine. — Uputa: Na zadanu kuglu položi dirni valjak, kojemu su izvodnice usporedne s MN, a onda na oba valjka položi zajedničke dirne ravnine.

27. Zadanom točkom T položi zajedničke tangente na zadanu kuglu i na zadani rotacioni stožac. — Uputa: Točkom T položi dirne ravnine na stožac i njima sijeci kuglu u kružnicama k i l, zatim točkom T povuci tangente na k i l.

28. Zadano je središte S (5 3 3) kugle i točka A (6 2 5) njezine plohe; nacrtaj projekcije te kugle te projekcije usporednika i meridijana, koji idu točkom A.

29. Nacrtaj projekcije kugle, kojoj je zadan promjer AB [A (5 1 6), B (3 5 2)] zatim nacrtaj projekcije usporednika i meridijana, koji idu točkama A i B.

30. Nacrtaj projekcije kugle, kojoj su zadane dvije točke površine A (3 3 2), B (5 4 4), i kojoj središte leži u pravcu $p = MN$ [M (3 4 1), N (6 5 3)].

31. Nacrtaj projekcije kugle, kojoj su zadane tri točke površine A (3 3 2), B (1,5 1 4), C (3 1 2,5) i kojoj je polumjer $r = 2$.

32. Nacrtaj projekcije kugle, kojoj su zadane tri točke A (1 3 2), B (3 5 2), C (4 2 4) plohe, a središte joj leži u ravnini Σ (—4 5 4).

33. Konstruiraj kuglu, koja je opisana tetraedru, te su mu vrsi A (2 2 3), B (4 2 5), C (7 5 5), D (5 1 1). [A (0 3 6), B (1 7 2), C (6 9 8), D (9 2 4)].

34. Konstruiraj kuglu, koja je opisana trostranoj piramidi $ABCV$, ako su osnovni bridovi $AB = BC = CA = 6$, pobočni bridovi $AV = 6{,}5$, $BV = 7$ i visina piramide $v = 5{,}5$.

35. Opiši kuglu zadanom stošcu.

36. Konstruiraj kuglu, kojoj je polumjer $r = 3{,}5$, koja dotiče Π_1 i pravac AB [A (2 3 3), B (6 7 5)] u točki B. — Uputa: Središte O tražene kugle leži u ravnini Γ, koja je od Π_1 udaljena 3,5 *cm*, i u ravnini Δ položenoj točkom B okomito na AB. Nadalje O leži na pravcu a, u kojemu se sijeku ravnine Γ i Δ. U ravnini Δ opiši kružnicu k, koja dotiče AB u B i kojoj je polumjer r. Kružnica k siječe pravac a u O. Koliko ima rješenja?

37. Zadana je kosa ravnina $\mathbf{P}$ (r_1, r_2) i pravac p (p', p''), koji je okomit na Π_1 i koji $\mathbf{P}$ siječe u točki, koja je u prvom kvadrantu. Konstruiraj kuglu, kojoj je središte u pravcu p i koja dotiče Π_1 i $\mathbf{P}$.

38. Konstruiraj najmanju kuglu, koja dotiče dva mimosmjerna pravca AB i CD. [A (2 1 2), B (10 1 7); C (2 7 1), D (10 3 1)].

39. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer r, koja dotiče ravninu Δ i kojoj je središte na pravcu p.

40. Konstruiraj kuglu kojoj je zadano središte S (4 3 3) i dirna ravnina Δ (5 6 5).

41. Konstruiraj kuglu kojoj je zadana: *a)* dirna ravnina Δ (4 5 4), diralište A (2 2 ?) i polumjer $r = 3$, *b)* dirna ravnina Δ (3 5 6) sa diralištem A (1,5 1,5 —) i točka T (5 6 4) plohe.

42. Konstruiraj kuglu kojoj su zadane dvije dirne ravnine Γ (—2 ∞ 3) i Δ (11 ∞ 6) i kojoj središte leži u pravcu MN [M (1 6 3), N (6 3 1)].

43. Konstruiraj kuglu koja dotiče Π_1 i ravninu trokuta ABC [A (0 2,5 1,5), B (4 2,5 5,4), C (3,5 6,7 2,5)] u središtu tome trokutu opisane kružnice.

44. Konstruiraj kuglu koja dotiče Π_1, opću ravninu $\mathbf{P}$, koja ide zadanom točkom A i kojoj je polumjer r. [Na pr.: $r = 3$, A (0 3,5 2), $\mathbf{P}$ (10 8 9)]. — Uputa: Položi ravnine Γ i Δ usporedno s Π_1 i $\mathbf{P}$ u daljini r, odredi presječnicu s ravnina Γ i Δ i taj pravac sijeci kuglom opisanom oko A s polumjerom r. Ta su sjecišta središta traženih kugala. Koliko rješenja?

45. Konstruiraj kuglu koja ide točkom A, kojoj je polumjer $r = 2$ i kojoj je središte u pravcu p. — Uputa: Pravac p sijeci kuglom opisanom oko A s polumjerom r.

46. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer $r = 2{,}5$, koja dotiče zadanu kuglu [S (2 5 5), $r_1 = 2$] i kojoj središte O leži na zadanom pravcu $p \equiv MN$ [M (3 2 7), N (0 5 10)]. — Uputa: Oko S opiši kuglu s polumjerom $r + r_1$ i njom sijeci pravac p.

47. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer $r = 2$, koja dotiče kuglu K [S (6 5 3), $r_1 = 1{,}5$] i dvije ravnine $\mathbf{P}$ (2 —4 ∞) i Σ (11 8 ∞). — Uputa: Položi ravnine Γ i Δ u daljini r usporedno s $\mathbf{P}$ i Σ, odredi presječnicu s ravnina Γ i Δ i sijeci je kuglom opisanom oko S s polumjerom $= r + r_1$. Koliko ima rješenja?

48. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer $r = 3$, koja dotiče dvije kugle K_1 [S_1 (6 5 3), $r_1 = 1{,}5$] i K_2 [S_2 (9 4 4), $r_2 = 1{,}5$] izvana i ravninu $\mathbf{P}$ (—1 ∞ 1,5). — Uputa: Oko S_1 opiši kuglu K_3 s polumjerom ($r + r_1$), a oko S_2 kuglu K_4 s polumjerom ($r + r_2$) i te kugle sijeci ravninom Γ, koja je u daljini r usporedna s $\mathbf{P}$; presječne kružnice sijeku se u središtima traženih kugala. Ta sjecišta odredi prelaganjem ravnine Γ.

49. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer r, koja ide kroz dvije točke A i B i koja dotiče *a)* zadanu ravninu Δ, *b)* zadanu kuglu K.

50. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer r i koja dotiče ravnine Π_1, Π_2 i Δ.

51. Konstruiraj kuglu kojoj je polumjer r, koja dotiče kuglu K (S, r_1) i tangentu t u točki T. — Uputa: Oko središta S kugle K opiši koncentričnu kuglu K_1 s polumjerom $r_1 + r$ ili ($r_1 - r$), položi točkom T ravninu Σ okomito na t, opiši u toj ravnini oko T

kružnicu k s polumjerom r i odredi sjecišta te kružnice s kuglom K_1. Ta su sjecišta središta traženih kugala.

52. Konstruiraj kuglu koja dotiče dvije usporedne ravnine Γ i Δ i koja ide kroz dvije zadane točke A i B. — Uputa: Odredi simetralnu ravninu Σ dirnih ravnina Γ i Δ, jer u njoj leži središte tražene kugle. Polumjer kugle r jednak je normalnom razmaku ravnina Σ i Γ. Oko točaka A i B opiši kugle s polumjerom r i sijeci ih ravninom Σ u kružnicama c i d. Sjecišta su tih kružnica središta traženih kugala.

53. Konstruiraj kuglu koja ide zadanom točkom A, koja dotiče zadanu kuglu $K(S, r_1)$ i dvije usporedne ravnine Γ i Δ.

54. Konstruiraj kuglu kojoj je zadana tangenta t i jedna sporedna kružnica k. — Uputa: Tangentu t sijeci ravninom $\mathbf{P}$ kružnice k u točki A, s točke A povuci na k tangentu AB, prenesi na t $AT = AB$; tada je T dirališe tražene kugle s tangentom t. Ravnina Σ položena točkom $T \perp t$ siječe pravac n, postavljen u središtu kružnice k okomito na $\mathbf{P}$, u središtu O tražene kružnice.

55. Konstruiraj kuglu kojoj su zadane tri točke plohe A (4 4 6), B (6 7 7), C (7 5 4) i tangenta t koja ide ishodištem i koja dotiče kuglu u točki C.

56. Konstruiraj kuglu kojoj su zadane tri točke plohe A (6 3 0), B (9 4 0), C (9 2 3) i koja dotiče Π_2.

57. Konstruiraj kuglu kojoj su zadane tri točke plohe A (3,5 4,5 1), B (6 6 1,5), C (7 4 3,5) i tangenta t [T_2 (9 0 3), M (8 2,5 5)]. — Uputa: Odredi probodište P tangente t s ravninom $\Sigma \equiv (ABC)$, potegni s točke P tangentu PD na kružnicu k koja ide točkama A, B, C i prenesi na t $PT = PD$. Tada je T dirališe tangente t.

58 Konstruiraj kuglu koja ide kroz točku A (13 6 8), koja dotiče pravac t [T_1 (5 4 0), B (11 8 7)] u točki B i ravninu Π_1. — Uputa: Središte O kugle leži na simetralnoj ravnini Σ točaka A i B i u ravnini Γ, koja je položena točkom B okomito na t. Središte O leži prema tome u presječnici s tih dviju ravnina. Dirališe T kugle s ravninom Π_1 leži na pravcu s'. Tangenta t siječe Π_1 u T_1. Sve tangente položene s T_1 na kuglu jednake su dužine. Ako se prema tome prenese na s' $T_1T = T_1B$ dobije se dirališe T ravnine Π_1. Okomica postavljena u T na Π_1 siječe s u O.

59. Konstruiraj kuglu koja ide točkom A, koja dotiče tangentu t u točki B i kosu ravninu Δ. (Rješenje kao u 58. zadatku)

60. Konstruiraj kuglu kojoj su zadane dvije točke A i B plohe i dvije dirne ravnine Γ i Δ. Na pr. *a)* A (4 2 5), B (6 5 3), $\Gamma \equiv \Pi_1$, $\Delta \equiv \Pi_2$, *b)* A (1 2 3), B (4 1 5), $\Gamma \equiv \Pi_1$, Δ (8 12 ∞), *c)* A (13 2 3), B (15 6 7), Γ (∞ 8 3), Δ (3 10 —3).

Rješenje: Središte O tražene kugle leži na presječnici s ravnine simetrije $\mathbf{E}$ točaka A i B i simetralne ravnine Φ ravnina Γ i Δ. Pravac $p \equiv AB$ siječe dirnu ravninu Γ (ili Δ) u točki P. Ako se točkom P položi tangenta c, koja leži u ravnini Γ, ona dotiče kuglu u točki C koja je dirališe i ravnine Γ. Poznato je iz stereometrije, da je $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (potencija točke P s obzirom na kuglu). Veličina dužine PC može se konstruirati kao srednja geometrijska proporcionala dužina PA i PB. Ako se u ravnini Γ opiše kružnica k oko točke P s polumjerom jednakim PC, na njoj leži dirališe C. Ako se s projicira ortogonalno na Γ u pravac g i u tom pravcu mora ležati C. Premu tome točka je C u jednom ili drugom sjecištu kružnice k i pravca g. Postavi li se u C okomica n na Γ, ona siječe S u točki O.

61. Odredi samosjenu i bačenu sjenu kugle K [S (4 4 2,5), $r = 2{,}5$] ako je *a)* $s' \parallel x$, $\sphericalangle (s'' x) = 45^0$, *b)* $s'' \parallel x$, $\sphericalangle (s' x) = 60^0$.

62. Odredi samosjenu i bačenu sjenu kugle K [S (3 4 5), $r = 3$], ako je $\sphericalangle (s' x) = \sphericalangle (s'' x) = 45^0$.

63. Odredi samosjenu i bačenu sjenu polukugle [S (5 4 0), $r = 3{,}5$], kojoj je glavni krug u Π_1, ako je $\sphericalangle (s' x) = 30^0$, $\sphericalangle (s'' x) = 45^0$.

64. Odredi samosjenu i bačenu sjenu kugle, ako je $s' \parallel x$, $\sphericalangle (s'' x) = 45^0$.

65. Zadano je središte i dirna ravnina kugle; odredi rastavnicu te kugle i bačenu sjenu na dirnu ravninu.

66. Odredi sjene polukugle kojoj najveći krug leži u Π_1 [O (4 4 0), $r = 3{,}5$, $\sphericalangle (s' x) = 30^0$, $\sphericalangle (s'' x) = 45^0$].

67. Odredi sjene kugle [O (4 4 2), $r = 2$] kod centralne rasvjete, ako se izvor svijetla S nalazi u ravnini ekvatora ili u ravnini glavnog meridijana. Neka je: *a)* S (0 4 7), *b)* S (1 8 2), *c)* S (1 4 4), *d)* S (1 4 2). Kakve su krivulje granice bačene sjene na Π_1 i na Π_2?

68. Odredi sjene kugle [O (4 2 4), $r = 2$] kod centralne rasvjete, ako je zadan izvor svijetla S. Na pr. *a)* S (2 7 7), *b)* S (2,5 4 6,5), *c)* S (3 2 7). Kakve su krivulje granice bačene sjene na Π_1 i na Π_2?

69. Odredi sjene kugle kod centralne rasvjete. Na pr. *a)* O (4 3 4), $r = 2{,}5$, S (0 9 9); *b)* O (4 4 3), $r = 2$, S (1 5 10); *c)* O (4 4 4), $r = 2$, S (2 8 5); *d)* O (5 4,5 4), $r = 2{,}5$, S (2 7 9); *e)* O (3 4 4), $r = 3$, S (0 7 7); *f)* O (5 4 3), $r = 3$, S (0 7 3); *g)* O (2 5 3,5), $r = 3{,}5$, S (0 8,5 3,5).

70. Na sl. 635. nacrtaj kosu projekciju usporednika, koji su na gornjoj i donjoj polukugli udaljeni od ekvatora za 45^0, te kosu projekciju meridijana, koji su od meridijana m udaljeni za 45^0.

XXXI. Prodor valjaka, stožaca i kugala

§ 187. O prodoru kugala, valjaka i stožaca uopće

1. Objašnjenja. Ako dva tijela imadu dio prostora zajednički, onda se kaže, da se ta dva tijela sijeku ili prodiru. U primjerima prodora dvaju tijela, koji će se ovdje obraditi, uzet će se, da se osnovke tih tijela nalaze izvan zajedničkog prostora, t. j. uzet će se, da se sijeku samo plaštevi tijela.

Prodirati se mogu: *a)* po dva istovrsna tijela, dakle po dvije kugle, po dva valjka ili po dva stošca, *b)* po dva raznovrsna tijela, i to: kugla s valjkom ili sa stošcem, valjak sa stošcem, nadalje jedno od tih okruglih tijela s prizmom i piramidom.

2. O prodoru kugala, valjaka i stožaca s prizmama i piramidama. Budući da su prizme i piramide omeđene ravnim plohama, prodorne linije tih tijela s kuglom bit će kružni lukovi, prodorne linije s valjkom bit će eliptični lukovi, a prodorne linije sa stošcem mogu biti eliptični, parabolični ili hiperbolični lukovi, prema tome u kakvom su položaju pobočke prizme ili priramide prema izvodnicama stošca.

3. Red prodorne krivulje dvaju okruglih tijela. Kugla, kao ploha 2. reda, siječe valjak ili stožac 2. reda u prostornoj krivulji 4. reda. Po dva valjka ili stošca, ili valjak i stožac 2. reda prodiru se također u prostornoj krivulji 4. reda (§ 155., t. 2.).

4. Određivanje točaka prodorne krivulje k. Pojedine točke prodorne krivulje k dvaju okruglih tijela odrede se na taj način, da se odrede sjecišta izvodnica jednoga tijela s plaštem drugoga tijela. Ta se sjecišta odrede tako, da se jedno i drugo tijelo siječe ravninama u izvodnicama tih tijela. Svaka takova pomoćna ravnina sadrži uopće po dvije izvodnice svakoga tijela, i one se sijeku u četiri točke koje pripadaju krivulji k. Za određivanje točaka krivulje k mogu se upotrebiti i takove ravnine, koje jedno i drugo tijelo sijeku u kružnicama, jer se takove kružnice sijeku u točkama, koje pripadaju krivulji k.

Kod određivanja prodora dvaju okruglih tijela u prvom redu treba odrediti one točke krivulje k, koje leže na konturnim linijama za tlocrt i nacrt jednoga i drugoga tijela, zatim dvostruke točke, ako ih ima, te druge osobite točke.

5. Oblik krivulje k zavisi o izboru i položaju među sobom dvaju tijela, koja se prodiru. Ako sve izvodnice jednoga tijela sijeku plašt drugoga

tijela, a izvodnice drugoga tijela ne sijeku sve plašt prvoga tijela, onda se kaže, da je prodor potpun. U tom slučaju prodorna se krivulja k sastoji iz dva zasebna dijela. (Vidi sl. 672.).

Ako oba tijela imaju jednu zajedničku dirnu ravninu, onda se obje dirne izvodnice sijeku u jednoj točki, koja pripada prodornoj krivulji k. Ta je točka dvostruka točka krivulje k. (Vidi sl. 670.).

Ako oba tijela imaju dvije zajedničke dirne ravnine, onda krivulja k ima dvije dvostruke točke K i L, u kojima se sijeku dirne izvodnice u svakoj dirnoj ravnini. (Vidi sl. 660.). Svako tijelo potpuno prodire drugo tijelo. Sve izvodnice jednoga tijela sijeku plašt drugoga tijela. Jedino dirne izvodnice svakoga tijela dotiču plašt drugoga tijela.

Ako se dvostrukim točkama K i L krivulje k položi ravnina Σ, ona s tom krivuljom ima četiri točke zajednički. Ako se ravnina Σ okreće oko pravca KL, ona može krivulju k sjeći još u jednoj točki M. Prema tome ravnina Σ ima s krivuljom 4. reda k pet zajedničkih točaka, dakle više negoli četiri točke, odakle slijedi, da je čitava jedna grana krivulje k u ravnini Σ_1. Budući da ta grana prodorne krivulje leži koliko na jednom, toliko na drugom tijelu, slijedi da je ta grana krivulja 2. reda. Osim te krivulje oba tijela imadu još jednu granu krivulje k zajedničku. I ta druga grana leži u Σ_2, a jer leži i na obim tijelima, ona je krivulja 2. reda.

Ako se dvije plohe 2. reda dotiču u dvije točke, onda se njihova prodorna krivulja 4. reda raspada na dvije krivulje 2. reda.

Ako dvije plohe 2. reda imadu jednu krivulju 2. reda zajedničku, onda se one prodiru u još jednoj krivulji 2. reda.

6. Izvlačenje tlocrta i nacrta krivulje k. Kod izvlačenja krivulja k' i k'' treba u prvom redu paziti da se točke spajaju redom kako dolaze na jednom i drugom tijelu, zatim treba paziti na vidljivost krivulje u tlocrtu i nacrtu. Krivulja k dotiče prvu prividnu konturu, a k'' drugu prividnu konturu jednoga i drugoga tijela, ako na tim konturama uopće ima točaka koje leže na tim krivuljama. (§ 155., t. 10.). Krivulje k' i k'' mogu imati dvostrukih točaka, šiljaka i obratišta iako sama krivulja k nema takovih točaka.

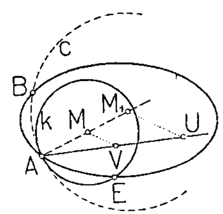
7. Konstrukcija tangenata krivulje k. Tangente se u kojojgod točki T krivulje k konstruiraju na taj način, da se u toj točki položi dirna ravnina na jedno tijelo i dirna ravnina na drugo tijelo, te odredi presječnica t tih dviju ravnina. Ta je presječnica tangenta krivulje k u točki T.

8. Prostorne krivulje 3. reda. Dvije pravčaste plohe 2. reda mogu imati jednu zajedničku izvodnicu. Ako vrhovi tih ploha ne padaju zajedno, onda se prodorna krivulja k raspada na zajedničku izvodnicu i na prostornu krivulju 3. reda.

Prostorne krivulje 3. reda zovu se također *kubične sjekotine stošca.* U svemu ima četiri vrste prostornih krivulja 3. reda, a zovu se: *kubična elipsa, kubična hiperbola, kubična hiperbolična parabola* i *kubična parabola.*

Sve te krivulje imadu neizmjerno duge grane i prema tome imadu i neizmjerno dalekih točaka. Prema broju i naravi tih neizmjerno dalekih točaka kubične se prostorne krivulje i dijele na četiri skupine.

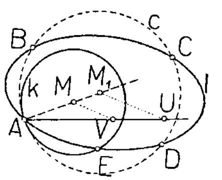
Prostorne krivulje 3. reda mogu se dobiti kao prodorne krivulje dvaju stožaca 2. reda, koji imaju jednu zajedničku izvodnicu. Neizmjerno daleke točke prodorne krivulje leže u smjeru usporednih izvodnica obih stožaca. Da se istraži broj i narav tih neizmjerno dalekih točaka, uzet će se, da je osnovka jednoga stošca kružnica k a vrh V, a osnovka drugoga stošca da je elipsa l a vrh U. Obje osnovke neka su u Π_1. Oba stošca imaju zajedničku izvodnicu AVU. Ako se prvi stožac usporedno pomakne tako, da njegov vrh V dođe u vrh U drugoga stošca, onda ravnina Π_1 siječe prvi stožac u kružnici c, koja prema elipsi l može imati različite položaje, i to:



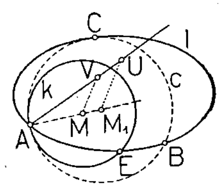
Sl. 636.

a) Kružnica c ima s elipsom l osim točke A još jednu točku B zajedničku (sl. 636.). Prema tome oba stošca (Vk) i (Ul) imadu jedan par usporednih izvodnica. Prodorna krivulja ima jednu neizmjernu granu, jednu neizmjerno daleku realnu točku i jednu realnu asimptotu u smjeru usporednih izvodnica. Ta se krivulja može dobiti i kao prodorna krivulja eliptičnoga valjka i stošca drugoga reda, koji imadu jednu zajedničku izvodnicu. Krivulja se zove *kubična elipsa* Kubičnoj elipsi pripada eliptičan valjak.

b) Kružnica c siječe elipsu l, osim u točki A, još u tri druge točke B, C i D (sl. 637.). Oba stošca (Vk) i (Ul) imadu tri para usporednih izvodnica. Prodorna se krivulja sastoji iz tri neizmjerne grane, ima tri neizmjermo daleke realne zasebne točke i tri asimptote u smjeru usporednih izvodnica. Prodorna se krivulja u ovom slučaju zove *kubična hiperbola.* Ta se krivulja može dobiti i kao prodorna krivulja hiperboličnog valjka i stošca 2. reda, koji imadu jednu zajedničku izvodnicu. Kaže se, da kubičnoj hiperboli pripada hiperboličan valjak.



Sl. 637.

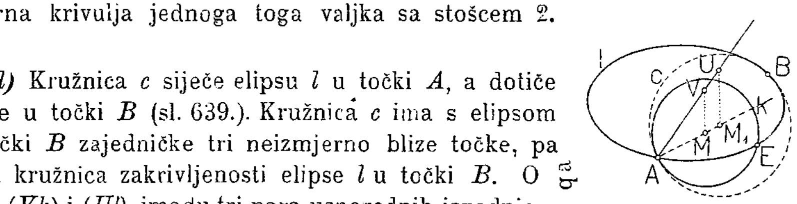


Sl. 638.

c) Kružnica c siječe elipsu l, osim u točki B, još u jednoj točki B i dotiče u točki C (sl. 638.). Oba stošca (Vk) i (Ul) imadu tri para usporednih izvodnica, od kojih dva para padaju zajedno. Prodorna krivulja ima

dvije neizmjerne grane, tri realne neizmjerno daleke točke, od kojih dvije padaju zajedno, i jednu asimptotu. Prodorna se krivulja u ovom slučaju zove *kubična hiperbolična parabola.* Ta se krivulja može dobiti i kao prodorna krivulja hiperboličnog i paraboličnog valjka, a može se dobiti i kao prodorna krivulja jednoga toga valjka sa stošcem 2. reda.

d) Kružnica c siječe elipsu l u točki A, a dotiče i siječe u točki B (sl. 639.). Kružnica c ima s elipsom l u točki B zajedničke tri neizmjerno blize točke, pa je ona kružnica zakrivljenosti elipse l u točki B. Oba stošca (Vk) i (Ul) imadu tri para usporednih izvodnica, koji padaju zajedno. Prodorna krivulja ima jednu neizmjernu granu i tri neizmjerno daleke realne točke, koje padaju zajedno. Neizmjerno daleka ravnina je oskulatorna ravnina krivulje. Krivulja se zove *kubična parabola.* Toj krivulji pripada paraboličan valjak, pa se ona može dobiti i kao prodorna krivulja takovoga valjka i stošca 2. reda.



Sl. 639.

9. Ako se dva stošca s različitim vrhovima u jednoj izvodnici sijeku i dotiču, onda se prodorna krivulja raspada na ovu zajedničku izvodnicu, koja se uzimlje kao dvostruki pravac, i na krivulju 2. reda.

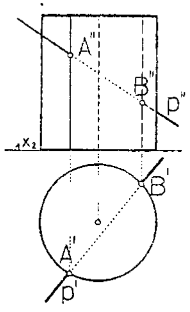
Ako dva stošca 2. reda imaju zajedničke vrhove, prodorna se krivulja raspada na četiri zajedničke izvodnice, od kojih neke mogu pasti zajedno.

§ 188. Presjek pravca s valjkom

1. Zadatak. *Odredi presjek pravca $p\,(p', p'')$ uspravnim valjkom, kojemu je osnovka u Π_1!* (Sl. 640.).

Rješenje. Budući da sjecišta A i B pravca p s valjkom moraju ležati na valjkovom plaštu i na pravcu p, tlocrt će A' i B' točaka A i B biti u sjecištima osnovne kružnice s p'. Nacrt A'' i B'' leži na p''.

Dio pravca p između točaka A i B leži u valjku, pa se ne vidi. Točka A leži na prednjoj polovici valjka, pa se u nacrtu vidi, dok točka B leži na stražnjoj polovici, pa se u nacrtu ne vidi.



Sl. 640.

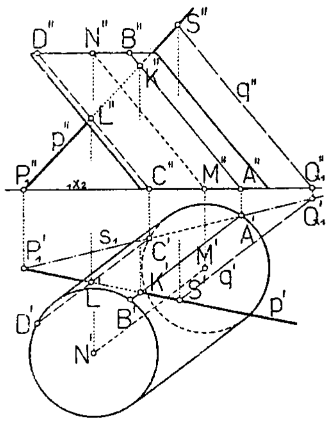
2. Zadatak. *Odredi presjek pravca $p\,(p', p'')$ s kosim valjkom, kojemu je donja osnovka u Π_1!* (Sl. 641.).

Rješenje. Pravcem p položi se ravnina Σ usporedno s osi MN valjka i tom ravninom siječe valjak u izvodnicama AB i CD. Te izvodnice sijeku pravac p u traženim sjecištima K i L. Da se odredi ravnina Σ, uzet će se na pravcu p kojagod točka S i kroz nju će se povući pravac $q \parallel MN$ ($q' \parallel M'N'$, $q''=M''N''$). Pravcima p i q određena je ravnina Σ. Odredi li se trag ravnine Σ u ravnini osnovke, dakle prvi trag s_1 ($\equiv P_1 Q_1$), taj trag siječe obodnicu donje osnovke u točkama A i C, pa se kroz te točke povuku izvodnice AB i CD usporedno s MN. $A'B'$ siječe p' u K', a $C'D'$ u L'.

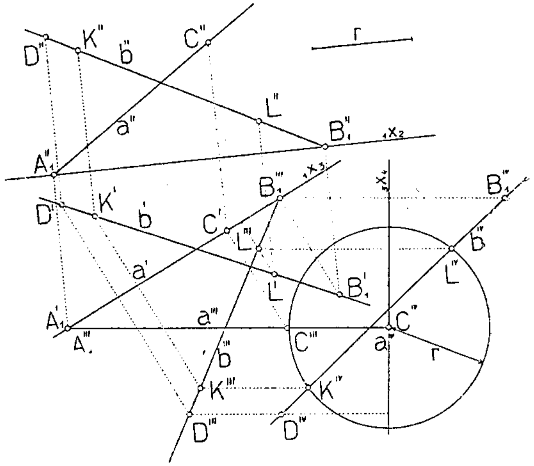
Objasni vidljivost pravca p u tlocrtu i nacrtu!

3. Zadatak. *Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b. Odredi one točke pravca b, koje su od pravca a udaljene za dužinu r!* (Sl. 642.)

Rješenje. Geometrijsko mjesto svih točaka prostora, koje su od pravca a udaljene za dužinu r, je rotacioni valjak, kojemu je pravac a os, a r polumjer. Taj valjak siječe pravac b u traženim točkama K i L.



Sl. 641.



Sl. 642.

Da se odrede projekcije točaka K i L upotrebit će se dva stranocrta. Ravnina Π_3 položit će se pravcem a ($_1x_3 \equiv a'$) okomito na Π_1, pa će se odrediti treća projekcija a''' i b''' pravaca a i b. Ravnina Π_4 položit će se okomito na pravac a ($_3x_4 \perp a'''$) i odredit će se četvrta projekcija a^{IV} i b^{IV} pravaca a i b. Četvrta je projekcija pravca a točka a^{IV}. Ako se oko te točke opiše kružnica k^{IV} s polumjerom r, ta je kružnica četvrta projekcija rotacionog valjka, kojemu je pravac a os, a r polumjer. Pravac b^{IV} siječe kružnicu k^{IV} u točkama K^{IV} i L^{IV}, koje su četvrte projekcije traženih točaka K i L. Iz četvrte projekcije odrede se pomoću ordinala treće, prve i druge projekcije tih točaka.

Zadaća ima dva realna rješenja, jedno realno rješenje ili nijedno, prema tome, da li je r veće, jednako ili manje od najkraće udaljenosti pravaca a i b.

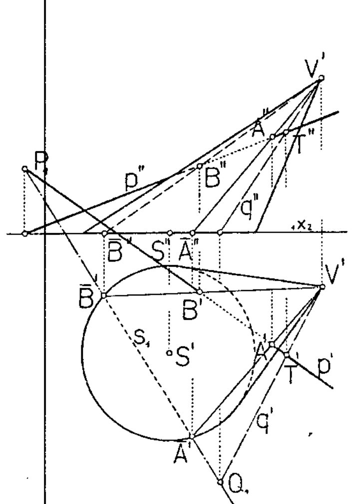
§ 189. Presjek pravca sa stošcem

1. Zadatak. *Odredi presjek pravca p (p', p'') s kosim stošcem, kojemu je osnovka u Π_1!* (Sl. 643.)

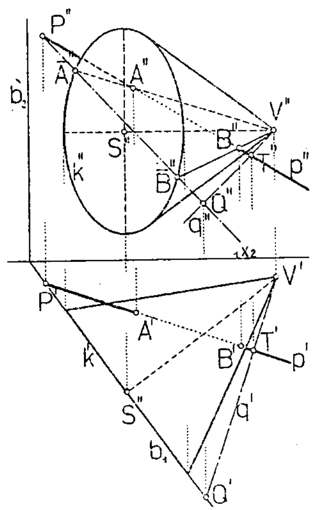
Rješenje. Pravcem p i vrhom V položi se ravnina Σ i njom siječe stožac u izvodnicama $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$. Te izvodnice sijeku pravac p u traženim sjecištima A i B.

Da se odredi ravnina Σ, uzet će se na pravcu p kojagod točka T (T', T'') i položit će se točkama T i V pravac q ($q' \equiv T'V'$, $q'' \equiv T''V''$). Pravcima p i q određena je ravnina Σ. Sad se u ravnini osnovke odredi trag ravnine Σ, dakle trag s_1 u Π_1 ($s_1 \equiv P_1 Q_1$); taj trag siječe obodnicu osnovke u točkama $\bar{A}$ i $\bar{B}$, kroz koje idu izvodnice $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$. $\bar{A}''V''$ i $\bar{B}''V''$ sijeku p'' u točkama A'' i B''.

Objasni vidljivost pravca u tlocrtu i nacrtu!



Sl. 643.



Sl. 644.

2. Zadatak. *Odredi presjek pravca p (p', p'') s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u ravnini* **B** $\perp \Pi_1$! (Sl. 644.)

Rješenje. Postupak je jednak kao u sl. 643. Na pravcu p uzme se po volji točka T (T', T'') i spoji se vrhom V pravcem q ($q' \equiv T'V'$, $q'' \equiv T''V''$), te se odrede probodišta P (P', P'') i Q (Q', Q'') pravaca p i q s ravninom **B** osnovke stošca. Pravac $P''Q''$ je nacrt pravca PQ u kojemu ravnina (pq) siječe ravninu **B**. Pravac $P''Q''$ siječe elipsu k'' u točkama $\bar{A}''$, $\bar{B}''$. Spojnice $\bar{A}''V''$ i $\bar{B}''V''$ jesu nacrti onih izvodnica $\bar{A}V$ i $\bar{B}V$, u kojima ravnina (pq) siječe stožac. Te spojnice sijeku p'' u točkama A'' i B'', koje su nacrti točaka A i B, u kojima pravac p siječe plašt stošca. Tlocrti se A' i B' dobiju spomoću ordinala.

Objasni vidljivost u tlocrtu i nacrtu.

3. Zadaci za vježbu

1. Odredi sjecišta uspravnog valjka [M(5, 0, 3), $r = 2$, $v = 5$], kojemu je osnovka u Π_2, s pravcem $p \equiv AB$ [A (2, 0, 6), B (8, 7, 1)].

2. Odredi sjecište pravca $p \equiv AB$ [A (2, 0, 6), B (3,5, 0,5, 1,5)] s kosim valjkom, kojemu je osnovka u Π_2, a os MN [M (0, 0, 3), N (3, 4, 4)] i polumjer $r = 2$.

3. Odredi sjecišta pravca $p \equiv AB$ [A (5, 1, 6), B (11, 6, 1)] s uspravnim valjkom, kojemu je osnovka u ravnini **P** (4, —6, ∞), [središte M (7, —, 3,), $r = 2$, $v = 3$].

4. Zadana su dva mimosmjerna pravca p [M(3, 1, 7), N(8. 4,5, 3)] i q [P (1, 7, 5)] $\parallel x$; između ta dva pravca umetni dužinu $r = 7$ tako, da bude okomita na jednom od tih pravaca. — Uputa: Konstruiraj rotacioni valjak, kojemu je q (ili p) os, polumjer r, taj valjak sijeci pravcem p (ili q) i sa sjecišta spusti okomice na os valjka.

5. Odredi presjek pravca $p \equiv AB$ [A (2, 5, 4), B (6, 2, 1)] s uspravnim stošcem, kojemu je osnovka u Π_1 [središte S (4, 3, 0), $r = 2$, $v = 5$].

6. Odredi presjek pravca $p \equiv CD$ [C (0, 4, 4), D (6, 1, 3)] sa šupljim uspravnim stošcem, kojemu je osnovka usporedna s Π_2, a vrh u Π_2 [S (3, 5, 3), $r = 2,5$].

7. Odredi presjek pravca $p \equiv EF$ [E (1, 6, 6), F (12, 0, 3)] s kosim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2 [S (8, 0, 5), V (3, 7, 1), $r = 3$].

8. Osnovka je kosog stošca u Π_1 [S (3, 3, 0), V (7, 3, 5), $r = 2,5$]; odredi presjek toga stošca s pravcem MN [M (2, 4,5, 4), N (7, 3, 0)].

9. Osnovka je istostranog stošca u ravnini **B** (—2, 2, ∞), središte joj je S (1, ?, 3), a polumjer $r = 3$. Odredi presjek toga stošca pravcem MN [M (2, 0, 5,5), N (4, 5, 1)].

10. Konstruiraj one pravce, koji idu točkom T (7, 4, 3), koji s Π_1 čine kut od 30° i koji su s ravninom Σ (6, —5, 6) usporedni.

11. Konstruiraj one pravce, koji idu točkom T (6, 5, 3), koji s Π_2 čine kut od 60° i koji sijeku pravac p [P_1 (1, 5, 0), P_2 (1, 0, 7)].

12. Osnovka je kosoga stošca u Π_1 [S (7, 5, 0), V (2, 1, 7), $r = 3$]; odredi sjecište toga stošca s pravcem p [A (0, 6, 0), B (11, 3, 0)], zatim sijeci taj stožac u parabolama, koje idu tim sjecištima.

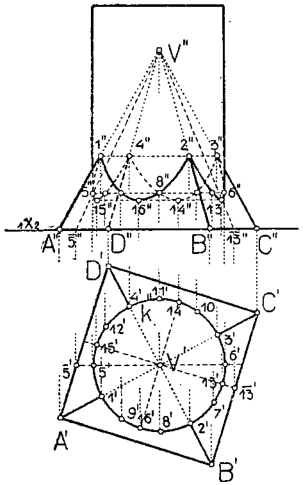
§ 190. Prodor valjaka i stožaca s prizmama i piramidama

1. Zadatak. *Odredi prodor kvadratične piramide s rotacionim valjkom, ako su osnovke tih tijela u* Π_1 *i ako im osi padaju zajedno!* (Sl. 645.).

Rješenje. Pobočke piramide sjeći će valjak u lukovima elipse, kojima je prva projekcija u prvoj projekciji plašta valjka, t. j. na kružnici k'. Da se odrede nacrti lukova prodornih elipsa, odredit će se ponajprije pomoću ordinala nacrti $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ točaka 1, 2, 3, 4, u kojima pobočni bridovi piramide sijeku plašt valjka. Budući da su oba tijela jedno prema drugomu simetrično namještena, točke su 1 — 4 jednako udaljene od Π_1, dakle slijedi, da točke $1''$—$4''$ leže na pravcu, koji je usporedan s ${}_1x_2$. Ako

se prema tome pomoću ordinale točke $1'$ odredi na $A''V''$ točka $1''$, pa se tom točkom povuče usporednica sa osi x, ona siječe pravce $B''V''$, $C''V''$, $D''V''$ u točkama $2''$, $3''$, $4''$. Točke se 1 i 2 u nacrtu vide.

Izvodnice valjka, koje se na Π_2 projiciraju kao prividna kontura nacrta toga tijela, sijeku pobočke piramide u točkama 5 i 6, te se tlocrt $5'$ i $6'$ nalazi u tlocrtu tih izvodnica. Točka 5 leži na pobočci ADV, a 6 na pobočci BCV. Ako se vrh V piramide spoji s točkom 5, ta spojnica leži na pobočci ADV i siječe osnovni brid u točki $\bar{5}$. Tlocrt je te spojnice dužina $\bar{5}'V'$, a nacrt dužina $\bar{5}''V''$. Ova dužina siječe nacrt lijeve konturne izvodnice u točki $5''$. Ako se točkom $5''$ povuče usporednica sa x, ona siječe nacrt desne konturne izvodnice u točki $6''$. Točka se 6 u nacrtu vidi, a 5 ne vidi. U istoj visini s točkama 5 i 6 leže točke prodora 7 — 12. Tlocrti se $7'$—$12'$ dobiju tako, da se učini $1'5' = 1'7' = 2'8' = 2'9' = \ldots$ Nacrti se $7''$—$12''$ odrede s pomoću ordinala točaka $7'$—$12'$.



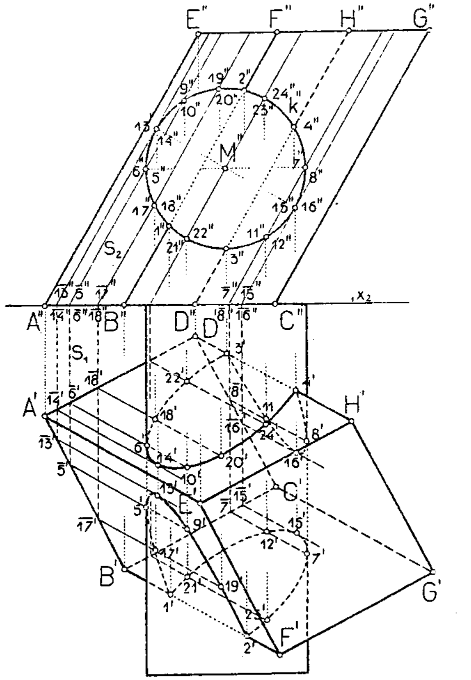
Sl. 645.

Da se dobiju najniže točke 13 — 16 prodornih elipsa, položit će se osju valjka ravnine okomito na osnovne bridove piramide, koji su tlocrtni tragovi pobočaka. Te ravnine sijeku pobočke u njihovim visinama, a valjak u izvodnicama, koje sijeku te visine u najnižim točkama prodornih elipsa. Ako se točkom V' povuče pravac $V'\overline{13}' \perp B'C'$, u taj pravac pada trag ravnine položene osju valjka okomito na brid BC, tlocrt visine pobočke BCV i tlocrt $13'$ najniže točke eliptičnog luka, koji leži na toj pobočci. Ako se odredi nacrt $\overline{13}''V''$ i točkom $13'$ povuče ordinala, ona siječe $\overline{13}''V''$ u točki $13''$. Na jednak se način odrede točke $14''$, $15''$, $16''$, no one leže na pravcu, koji ide točkom $13''$ usporedno sa x. U taj pravac padaju tangente nacrta eliptičnih lukova u točkama $13''$— $16''$. Ako se u nacrtu spoje točke, koje leže na istim pobočkama eliptičnim lukovima, dobit će se nacrti lukova prodornih elipsa. U nacrtu će se vidjeti lukovi, koji u isto doba leže na vidljivim pobočkama piramide i na vidljivoj polovici valjka kod pogleda prema Π_2.

2. Zadatak. *Prodor četverostrane kose prizme, kojoj je osnovka kvadrat u* Π_1, *s rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_2! (Sl. 646.).

Rješenje. Pobočke prizme sijeku valjak u eliptičnim lukovima. Nacrt je tih lukova u nacrtu plašta valjka, t. j. na kružnici k''. Iz nacrta se vidi da valjak potpuno prodire prizmu.

Tlocrt se prodora odredi tako, da se prizma i valjak sijeku ravninama, koje su usporedne s pobočnim bridovima prizme i s izvodnicama valjka. Te su ravnine okomite na Π_2, te su im drugi tragovi usporedni s $A''E''$. Svaka takova ravnina siječe valjak u dvije izvodnice, a prizmu (ako se osnovke ne uzimlju u obzir) u dva pravca, koji su usporedni s AE. Ta dva pravca sijeku one izvodnice valjka u četiri točke, koje leže na prodornim krivuljama.



Sl. 646.

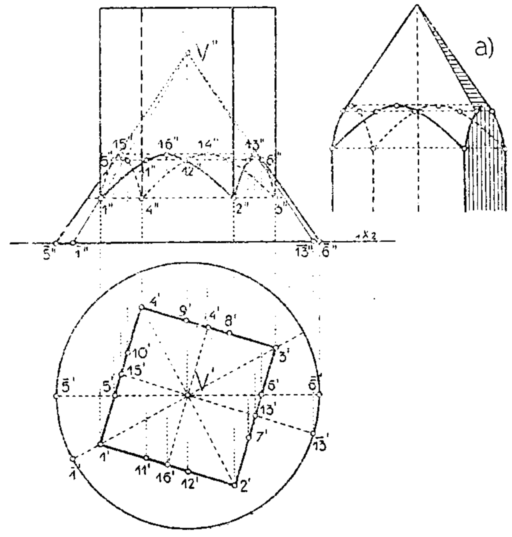
Najprije se odrede točke u kojima pobočni bridovi prizme sijeku valjak. Valjak sijeku bridovi BF i DH u točkama 1, 2 i 3, 4, kojima su nacrti u sjecištima kružnice k'' s pravcima $B''F''$ i $D''H''$. Tlocrti se odrede spomoću ordinala. U tlocrtu se vide samo točke 2 i 4.

Zatim se odrede točke na konturnim izvodnicama valjka za tlocrt. Nacrti su tih točaka 5″, 6″ i 7″, 8″. Da se dobiju tlocrti 5′ i 6′, položit će se izvodnicom, na kojoj leže te točke, ravnina Σ_1 usporedno s pobočnim bridovima prizme i tom će se ravninom sjeći prizma u pravcima $\overline{5}5$ i $\overline{6}6$. Drugi trag s_2 te ravnine ide točkama $5'' \equiv 6''$ usporedno s $A''B''$, a prvi trag s_1 je okomit na osi x i siječe tlocrt donje osnovke u točkama $\overline{5}'$ i $\overline{6}'$. Ako se tim točkama povuku pravci usporedno s $A'E'$, dobit će se tlocrti pravaca $\overline{5}5$ i $\overline{6}6$, koji sijeku lijevu konturnu izvodnicu u točkama 5′ i 6′. Ravnina Σ_1 siječe valjak još u jednoj izvodnici, koja prizmu siječe u točkama 9 i 10. Nacrt je tih točaka u sjecištu kružnice k'' s tragom s_2, a tlocrt je na pravcima $\overline{5}'5$ i $\overline{6}'6$. Na jednak se način odrede ostale točke prodornih krivulja. Ako se na valjak polože dirne ravnine usporedno sa Σ_1, one dotiču valjak u dvije izvodnice, te jedna siječe prizmu u točkama 12 i 14, a druga u točkama 15 i 16. Pravci $\overline{13}'13'$, $\overline{14}'14'$, $\overline{15}'15'$ i $\overline{16}'16'$ dotiču tlocrt eliptičnih lukova u točkama 13′, 14′, 15′ i 16′. Ako se osju valjka položi ravnina usporedno sa Σ_1, dobit će se točke prodora 21 — 24, pa su dužine

21′23′ i 22′24′ promjeri dotičnih eliptičnih lukova u tlocrtu. Objasni vidljivost u tlocrtu.

3. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca sa četverostranom pravilnom prizmom, ako su osnovke obih tijela u* Π_1 *i ako im osi padaju zajedno!* (Sl. 647.).

Rješenje. Pobočke prizme sijeku plašt stošca. Te su pobočke usporedne sa osi stošca, dakle je svaka usporedna s dvije izvodnice i siječe plašt stošca u hiperboličnim lukovima. Tlocrti tih lukova padaju u stranice kvadrata 1′ 2′ 3′ 4′, a nacrti će im biti hiperbolični lukovi.



Sl. 647.

Najprije se odrede projekcije točaka, u kojima pobočni bridovi prizme sijeku plašt stošca. Tlocrti su tih točaka 1′, 2′, 3′, 4′, a njihovi se nacrti 1″, 2″, 3″, 4″ odrede pomoću izvodnica stošca. Na pr. točka 1′ leži na pravcu $\overline{1}'V'$, a nacrt 1″ leži na pravcu $\overline{1}''V''$. Točke 1, 2, 3, 4 leže u istoj visini nad Π_1, pa zato njihovi nacrti leže na pravcu, koji je usporedan sa osi x.

Točke prodora 5 i 6, koje leže na konturnim izvodnicama za nacrt, dobiju se iz tlocrta pomoću ordinala. Te su točke jednako udaljene od Π_1, zbog čega je $5''6'' \parallel x$. U istoj visini leže i točke 7″— 12″, gdje je $1'5' = 1'11' = 2'12' = 2'7' = \ldots$

Ako se s točke V' spuste okomice na stranice kvadrata 1′2′3′4′, dobit će se tlocrti 13′— 16′ najviših točaka hiperboličnih lukova. 13″ dobije se na drugoj projekciji $\overline{13}''V''$ izvodnice $\overline{13}V$, koja ide točkom 13. Točke 14″, 15″, 16″ leže na pravcu, koji ide točkom 13″ usporedno sa x. Sad se nacrt prodornih krivulja može izvući.

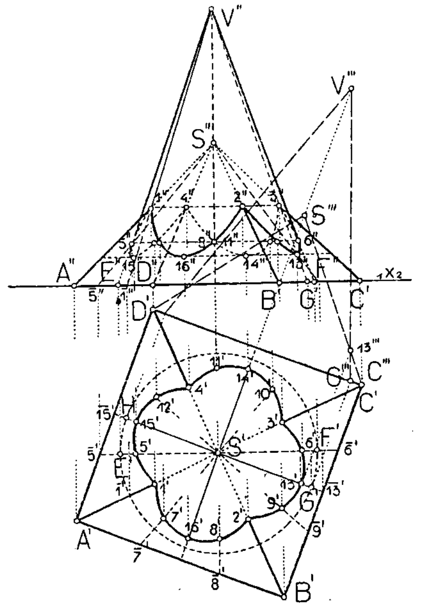
*

Objasni vidljivost u nacrtu!

Ako se odstrani gornji dio prizme i donji dio stošca, dobije se predmet prikazan na sl. 647. a.

4. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca s kvadratičnom piramidom, ako oba tijela imadu osnovke u Π_1 i zajedničku os i ako je osnovka piramide veća od osnovke stošca!* (Sl. 648.).

Rješenje. Pobočke piramide sijeku stožac u eliptičnim lukovima, koji se na Π_1 i na Π_2 projiciraju kao eliptični lukovi. Najprije se odrede točke 1 — 4, u kojima pobočni bridovi piramide sijeku stožac. Te točke leže u istoj visini. Da se dobije točka 1, u kojoj brid AV siječe stožac, položit će se tim bridom ravnina okomito na Π_1 i njom će se sjeći stožac u izvodnici $\overline{1}\,V$ ($\overline{1}'V'$, $\overline{1}''V''$). Pravac se $\overline{1}''V''$ siječe s $A''S''$ u točki 1''. Pomoću ordinale odredi se 1' na $A'S'$. Budući da su točke 1 — 4 jednako udaljene od Π_1, tlocrti su tih točaka jednako udaljeni od S', dakle je $S'1' = S'2' = S'3' = S'4'$. Nacrti 1'' — 4'' leže na pravcu, koji ide točkom 1'' usporedno sa x.



Sl. 648.

Da se dobiju točke 5 i 6 na konturnim izvodnicama stošca za nacrt, položit će se tim izvodnicama ravnina, i njom će se sjeći piramida u trokutu $\overline{5}\,\overline{6}\,S$. Nacrt $\overline{5}''S''$ siječe $E''V''$ u točki 5''. Ako se točkom 4'' potegne pravac usporedno sa x, on će sjeći $F''V''$ u točki 6''. Iz nacrta se dobiju tlocrti 5' i 6' na $E'V'$ i $F'V'$. U istoj horizontalnoj ravnini s točkama 5 i 6 nalaze se točke prodora 7 — 12. Najprije se odrede tlocrti 7' — 12' [$A'\overline{5}' = A'\overline{7}' = B'\overline{8}' = B'\overline{9}' = \ldots$; $S'5' = S'7' = S'8' = S'9' = \ldots$], a iz tlocrta nacrti 7'' — 12''.

Najniže točke 13 — 16 leže na visinama pobočaka. Te se točke mogu odrediti tako, da se pravcem VS polože ravnine okomito na osnovne bridove piramide i njima sijeku piramida i stožac. Jedna takova ravnina siječe piramidu u trokutu $\overline{13}\,\overline{15}\,S$, a stožac u trokutu GHV. Pravci se $\overline{13}\,S$ i GV sijeku u točki 13, a pravci $\overline{15}\,S$ i HV u točki 15. Prema tome nacrti se $\overline{13}''S''$ i $G''V''$ sijeku u točki 13''. Iz nacrta se odredi tlocrt 13'. No projekcije će se točke 13 točnije dobiti pomoću stranocrta. U sl. 648. uzelo

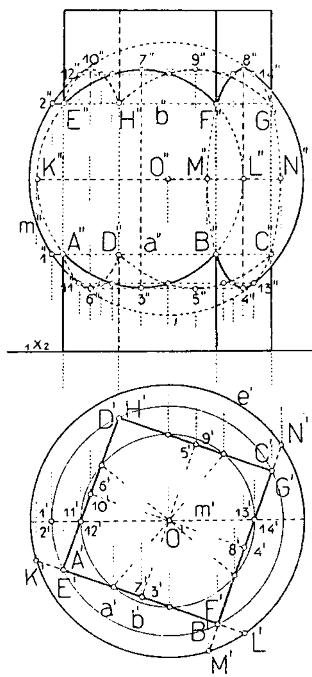
se da je os $_1x_3 \equiv C'D'$. Pobočka je BCS okomita na Π_3, pa je njezin stranocrt dužina $C'''S'''$. U tu se dužinu projicira i onaj luk elipse u kojemu pobočka BCS siječe stožac. Točka u kojoj se sijeku pravci $C'''S'''$ i $G'''V'''$ je treća projekcija 13''' točke 13. Pomoću ordinale točke 13''' dobije se tlocrt 13'. Točka 13'' udaljena je od osi $_1x_2$ toliko koliko je 13''' udaljeno od osi $_1x_3$. Točke su 13' — 16' jednako udaljene od S', a nacrti 13'' — 16'' leže na pravcu, koji ide točkom 13'' usporedno sa osi x.

Objasni vidljivost u tlocrtu i nacrtu!

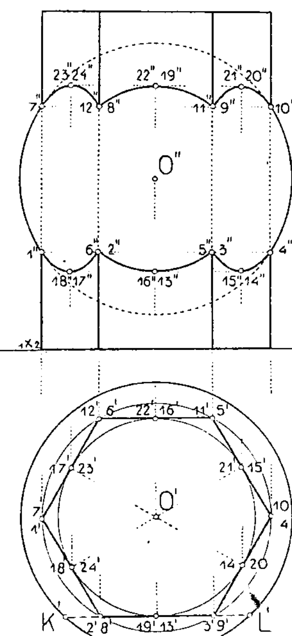
§ 191. Prodor kugle s prizmom i piramidom

1. Zadatak. *Odredi prodor kugle s kvadratičnom prizmom, kojoj os prolazi središtem kugle!* (Sl. 649.).

Rješenje. Pobočke prizme sijeku kuglu u kružnim lukovima, kojima je tlocrt u stranicama kvadrata $A'B'C'D'$, i kojima su nacrti eliptični lukovi.



Sl. 649.



Sl. 650.

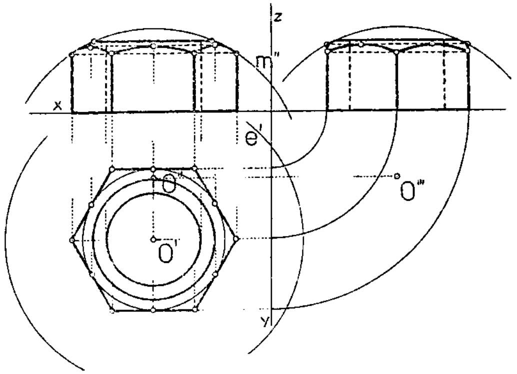
Najprije će se odrediti nacrt onih točaka, u kojima pobočni bridovi prizme sijeku kuglu, t. j. odredit će se nacrt A'' — H'' točaka A — H kugle, kojima je poznat tlocrt A' — H', pomoću usporednika a (a', a'') i b (b', b''). Nadalje će se odrediti projekcije najnižih i najviših točaka kružnih presjeka. Te su točke označene brojevima 3 — 10. Tlocrt je tih točaka u središtu stranica kvadrata $A'B'C'D'$, a nacrt im se odredi pomoću usporednika, koji idu tim točkama. Točke 11'— 14', u kojima tlocrt m' glavnog meridijana siječe stranice kvadrata $A'B'C'D'$, su tlocrti onih točaka, u kojima lijeva i desna pobočka prizme sijeku glavni meridijan. Nacrti 11"— 14" odrede se direktno pomoću ordinala. Pomoću usporednika odrede se i ostale točke presjeka, koje leže u istoj visini s točkama 11 — 13 i 12 — 14.

Da se u nacrtu što točnije nacrtaju eliptični lukovi, mogu se odrediti i osi pojedinih elipsi. Na pr. osi su jedne elipse 3"7" i $K''L''$.

Objasni vidljivost u nacrtu!

2. **Zadatak.** *Odredi prodor kugle sa šesterostranom pravilnom prizmom, kojoj os ide središtem kugle!* (Sl. 650.).

Rješenje. Pobočke prizme sijeku kuglu u kružnim lukovima. Lukovi koji leže na prednjoj i stražnjoj pobočki projiciraju se u nacrtu u pravoj



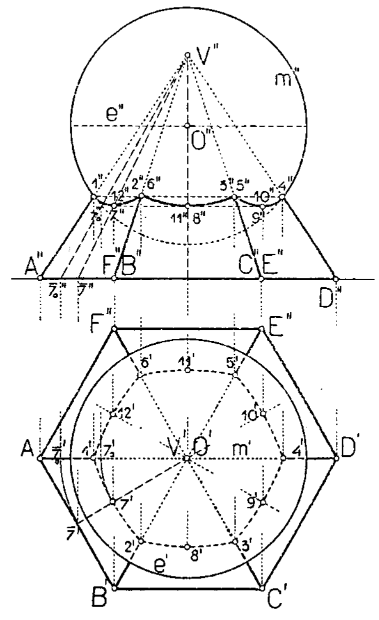
Sl. 651.

veličini. Središte se tih lukova podudara s O'', a promjer im je jednak dužini $K'L'$. Ostali se kružni lukovi projiciraju u nacrtu kao eliptični lukovi, koji se mogu odrediti kao u zad. 1.

3. **Matica vijka.** Ako se u sl. 650. izbriše gornji i donji dio prizme, koji je izvan kugle, te srednji i donji dio kugle, pa se prizma presiječe jednom horizontalnom ravninom, a drugom horizontalnom ravninom odsiječe dio gornjeg dijela kugle, dobit će se sl. 651. Ako se još u tom tijelu izvrta valjak, koji s prizmom ima zajedničku os, dobit će se slika matice vijka (šarafa). U sl. 651. nacrtan je tlocrt, nacrt i bokocrt matice.

4. **Zadatak.** *Odredi prodor kugle sa šesterostranom pravilnom piramidom, kojoj je osnovka u* Π_1 *i kojoj vrh leži u vertikalnoj osi kugle!* (Sl. 652.).

Rješenje. Najprije se odrede sjecišta pobočnih bridova piramide s kuglom. Budući da bridovi AV i DV leže u ravnini glavnog meridijana, oni sijeku taj meridijan u točkama 1 i 4, kojima je nacrt 1" i 4" u sjecištima kružnice m'' s pravcima $A''V''$ i $D''V''$. U istoj visini s točkama 1 i 4 leže sjecišta 2, 3, 5 i 6 ostalih pobočnih bridova piramide s kuglom. Ako se dakle povuče $1''4'' \parallel x$, na tom pravcu leže točke 2", 3", 5" i 6". Pomoću ordinale točke 1" dobije se na $A'V'$ točka 1'. Točke 1'— 6' jednako su udaljene od V'.



Sl. 652.

Najniže točke 7 — 12 leže na visinama pobočaka piramide. Da se dobiju projekcije točke 7, okrenut će se visina $V\overline{7}$ pobočke ABV oko osi OV u ravninu glavnog meridijana. $[O'\overline{7}_0' = O'\overline{7}']$. Nacrt $V''\overline{7}_0''$ siječe m'' u točki $7_0''$. Ako se sad visina $V\overline{7}$ rotira natrag u svoj prvobitni položaj, točka će $7_0''$ doći u nacrtu u točku 7" na pravcu $V''\overline{7}''$, a u tlocrtu u točku $\overline{7}'$ na $V'\overline{7}'$. Točke 7'— 12' leže na kružnici, kojoj je polumjer = $O'7'$, a nacrti 7"— 12" leže na pravcu potegnutom točkom $7_0''$ usporedno sa osi x.

Ako se u tlocrtu i nacrtu spoje po tri točke, koje leže na istoj pobočki, na pr. 1'7'2', 1"7"2"; 2'8'3', 2"8"3";... dobit će se eliptični lukovi, koji su projekcije prodornih kružnih lukova. U tlocrtu se ti lukovi ne vide, a u nacrtu se vide prednja tri luka.

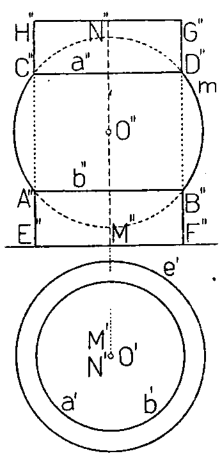
§ 192. Prodor kugle s valjkom

1. **Zadatak.** *Odredi prodor kugle s rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_1 *i kojemu os ide središtem kugle!* (Sl. 653.).

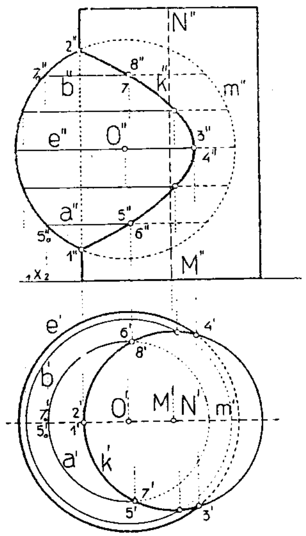
Rješenje. Kugla i valjak prodiru se u ovom slučaju u dvije sukladne kružnice a (a', a'') i b (b', b''). Jer ako se kružnica m i pravokutnik $EFGH$, kojemu stranice sijeku kružnicu u točkama A, B, C, D, zavrti oko osi MN za 180°, kružnica će m opisati kuglu, pravokutnik $EFGH$ valjak, a točke A, B i C, D dvije kružnice a i b, koje leže na kugli i na valjku, pa su one prodorne krivulje tih dvaju tijela.

2. Zadatak. *Odredi prodor kugle s rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_1 *i kojemu os ne prolazi središtem kugle!* (Sl. 654.).

Rješenje. Uzelo se, da os valjka i središte kugle leže u ravnini glavnoga meridijana. Prodorna je krivulja k četvrtog reda i simetrična je s obzirom na ravninu glavnoga meridijana. Tlocrt je k' krivulje k kružni luk $3'\,1'\,4'$. Nacrt se k'' dobije pomoću usporednika kugle. Točke 1 i 2 leže na glavnom meridijanu, a 3 i 4 na ekvatoru. Na usporedniku $a\,(a', a'')$ leže



Sl. 653.



Sl. 654.

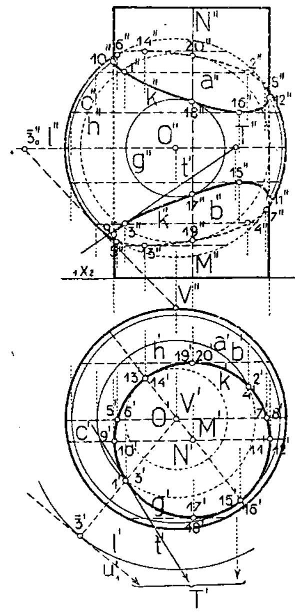
točke $5\,(5', 5'')$ i $6\,(6', 6'')$, a na usporedniku $b\,(b', b'')$ leže točke $7\,(7', 7'')$ i $8\,(8', 8'')$. Zbog simetričnosti prodorne krivulje prema ravnini glavnog meridijana, točke $5''$ i $6''$ te $7''$ i $8''$ padaju zajedno, tako da prednja polovica prodorne krivulje pokriva u nacrtu stražnju polovicu. Odatle slijedi, da je krivulja k'' drugoga reda, i to u ovom slučaju parabola. Prodor je nepotpun.

3. Zadatak. *Odredi prodor kugle s rotacionim valjkom, kojemu je os okomita na* Π_1! (Sl. 655.).

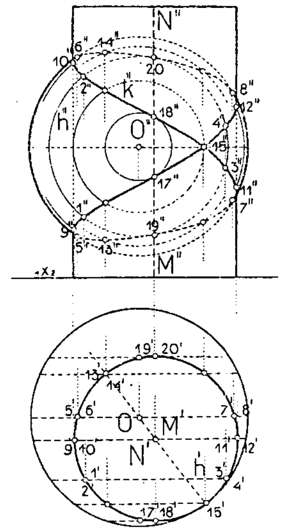
Rješenje. U sl. 655. uzelo se, da je prodor potpun i da se os valjka ne nalazi u ravnini glavnog meridijana. Prodorna je krivulja k četvrtog reda i sastoji se iz dvije zatvorene grane. Tlocrt je prodorne krivulje kružnica k'. Nacrt se k'' može dobiti pomoću horizontalnih kružnih presjeka kugle. Na pr. na kružnici $a\,(a', a'')$ nalaze se točke $1\,(1', 1'')$ i $2\,(2', 2'')$, a na kružnici $b\,(b', b'')$ točke $3\,(3', 3'')$ i $4\,(4', 4'')$. Na jednak način može se dobiti povoljan broj točaka krivulje k''.

Osobite točke prodorne krivulje. Projekcije $5''$—$8''$ točaka 5—8, koje leže na glavnom meridijanu, mogu sa dobiti iz tlocrta pomoću ordinala. Te se točke u nacrtu ne vide. Ekvator ne siječe valjak. Ako se kroz os valjka položi ravnina usporedno s Π_2, ona siječe kuglu u kružnici $c\,(c', c'')$ koja siječe konturne izvodnice za nacrt u točkama 9—12. Te se točke u nacrtu vide.

Ravnina položena osi valjka i središtem kugle je ravnina simetrije za oba ta tijela kao i za prodornu krivulju k. U toj ravnini leže najviše i najniže točke krivulje k. Te su točke označene brojkama 13—16. Nacrt se tih točaka odredi pomoću horizontalnih kružnih presjeka kugle.



Sl. 655.

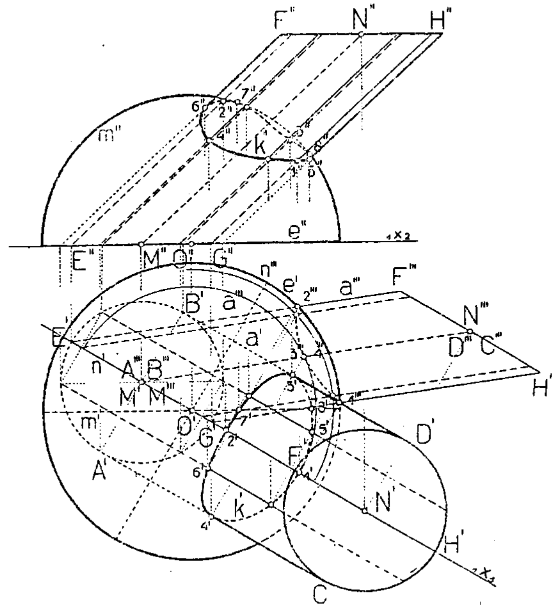


Sl. 656.

Kod pogleda prema Π_2 najbliže su točke 17 i 18, a najdalje 19 i 20. Nacrti su tih točaka određeni pomoću kružnih presjeka kugle, koji su usporedni s Π_2 (frontalne kružnice kugle). Dirne ravnine valjka u tim točkama usporedne su s Π_2. Svaka ta ravnina dotiče valjak u dvije neizmjerno blize izvodnice, a kuglu siječe u kružnici, koju te dvije izvodnice sijeku u dvije neizmjerno blize točke. Kroz te dvije točke ide i prodorna krivulja k, pa odatle zaključujemo, da će k doticati spomenutu presječnu kružnicu u dotičnoj točki. Prema tome k'' dotiče nacrt g'' prednje kružnice g u točkama $17''$ i $18''$, a nacrt h'' stražnje kružnice h dotiče u točkama $19''$ i $20''$.

Krivulja k'' dotiče u nacrtu prividnu konturu kugle i valjka.

Tangenta krivulje k. U sl. 655. konstruirane su projekcije tangente t krivulje k u točki 3. Tlocrt t' te tangente dotiče kružnicu k' u točki 3'. U pravac t' pada i prvi trag t_1 dirne ravnine Γ valjka u točki 3. Ako se u točki 3 položi dirna ravnina Δ na kuglu, ona siječe ravninu Γ u pravcu t. Za konstrukciju tangente t upotrebit će se dirni stožac kugle uzduž usporednika b na kojemu leži točka 3. Taj stožac sjeći će se ravninom ekvatora u kružnici $l\,(l', l'')$, kojoj je polumjer $= O''\overline{3}_0''$. Ako se uzduž izvodnice $V3$ dirnog stošca položi dirna ravnina na taj stožac, njezin trag u_1, koji je u ravnini ekvatora, dotiče kružnicu l u pravcu u_1, dakle u_1' dotiče l' u točki $\overline{3}'$. Dirna ravnina Γ valjka siječe ravninu ekvatora u pravcu, kojemu je tlocrt u t'. Prema tome točka T', u kojoj se sijeku pravci u_1' i t', je tlocrt one točke, u kojoj pravac t siječe ravninu ekvatora. Pravac $T''3'' \equiv t''$.



Sl. 657.

4. Zadatak. *Prodor kugle s rotacionim valjkom, kojemu je os okomita na* Π_1 *i koji dotiče kuglu!* (Sl. 656.).

Rješenje. Prodor se kugle s valjkom i u ovom slučaju odredi na jednak način kao u sl. 655., samo što su se ovdje upotrebljavali frontalni kružni presjeci kugle. Valjak i kugla dotiču se u točki 15 (15', 15''). Krivulja k ima u točki 15 dvostruku točku. Svaka naime ravnina, koja je položena točkom 15, siječe kuglu i valjak u dvije krivulje, koje se u točki 15 dotiču, pa u svakoj takvoj ravnini točka se 15 broji kao dva sjecišta prodorne krivulje k s takvom ravninom.

5. Zadatak. *Odredi prodor polukugle, kojoj je ekvator u* Π_1, *s kosim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_1 ! (Sl. 657.).

Rješenje. Svaka horizontalna ravnina siječe polukuglu i valjak u kružnicama. Te kružnice sijeku se u točkama, koje leže na prodornoj krivulji k. Kod rješavanja ove zadaće upotrebit će se stranocrt. Valjak je prema polukugli tako namješten, da je ravnina simetrije valjka ujedno i ravnina simetrije polukugle. Ta je ravnina okomita na Π_1 i uzet će se da je ona stranocrtna ravnina Π_3. Os je ${}_1x_3 \equiv M'N'$. Nacrtat će se treća projekcija valjka i polukugle. Kontura treće projekcije polukugle je $n''' \equiv e'$. Izvodnice EF i GH te meridijan n leže u ravnini Π_3, pa se sijeku u točkama 1 (1', 1'', 1''') i 2 (2', 2'', 2'''). Točka 1 je najniža, a točka 2 najviša točka prodorne krivulje.

Da se dobije točka 3, u kojoj izvodnica BD siječe polukuglu, položit će se tom izvodnicom ravnina okomito na Π_1 i njom će se sjeći polukugla u polukružnici $a\,(a', a''')$, a''' siječe $B'''D'''$ u točki 3'''. U istoj je točki i treća projekcija 4''' točke 4, u kojoj izvodnica AC siječe polukuglu. Iz treće projekcije 3''', 4''' odredi se prva projekcija 3', 4', a iz prve projekcije druga projekcija 3'', 4''. Na jednak način odrede se i ostale točke prodorne krivulje. Točke 3' i 4' leže na prividnoj konturi tlocrta valjka, a točke 5'' i 6'' na prividnoj konturi nacrta valjka. Točke 7'' i 8'' na prividnoj konturi m'' polukugle dobiju se iz tlocrta pomoću točaka 7' i 8', u kojima k' siječe m'. Krivulje k' i k'' dotiču prividnu konturu valjka, a k'' dotiče i m'' u točkama 7'', 8''.

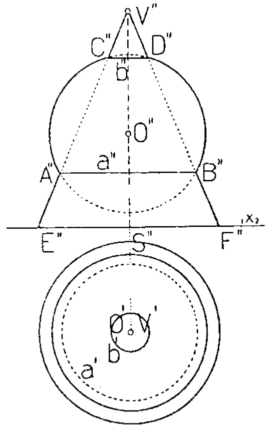
Valjak prodire kuglu u prostornoj krivulji 4. reda, koja se u ovom slučaju sastoji iz dvije zatvorene grane. Pošto se u sl. 657. uzela samo polovica kugle, dobila se samo jedna grana prodorne krivulje.

§ 193. Prodor kugle sa stošcem

1. Zadatak. *Odredi prodor kugle s rotacionim stošcem, kojemu os ide središtem kugle okomito na* Π_1 ! (Sl. 658.).

Rješenje. U ravnini glavnog meridijana kugle leže i dvije izvodnice EV i FV stošca, koje glavni meridijan m sijeku u točkama A, B i C, D, koje simetrično leže prema osi VS stošca. Ako se kružnica m i izvodnice EV i FV okrenu oko osi VS za 180°, onda kružnica m opiše kuglu, izvodnice EV i FV opišu plašt stošca, a točke A, B i C, D opišu dvije kružnice a i b, koje leže i na kugli i na stošcu, one dakle pripadaju prodornoj krivulji kugle i stošca.

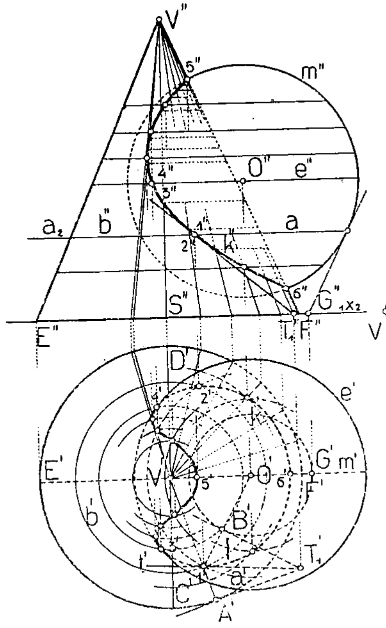
Ako se središte kugle nalazi na osi rotacionog stošca, onda se ta dva tijela prodiru u dvije nejednake kružnice a i b, kojima su ravnine okomite na osi stošca.



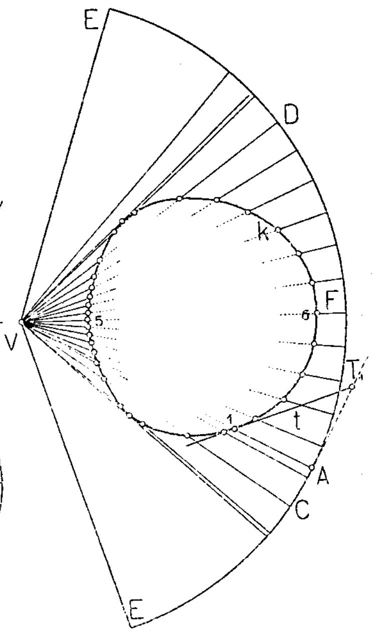
Sl. 658.

2. Zadatak. *Odredi prodor kugle s rotacionim stošcem, kojemu je os okomita na* Π_1 *i koja leži u ravnini glavnog meridijana kugle!* (Sl. 659.).

R j e š e n j e. Prodorna je krivulja k četvrtoga reda. Da se dobiju pojedine točke te krivulje, sjeći će se kugla i stožac horizontalnim ravninama u kružnicama, koje se sijeku u točkama, koje leže na krivulji k. Na pr. horizontalna ravnina A $(a_2 \parallel x)$ siječe kuglu u kružnici a (a', a''), a stožac u kružnici b (b', b''), kružnice se a' i b' sijeku u točkama $1'$ i $2'$, koje leže na krivulji k'. Nacrti $1''$ i $2''$ leže na tragu a_2. Budući da je prodorna krivulja k simetrična prema ravnini glavnog meridijana, točke $1''$ i $2''$ padaju zajedno. Na jednak se način mogu odrediti ostale točke prodorne krivulje k.



Sl. 659.



Sl. 660.

O s o b i t e t o č k e p r o d o r n e k r i v u l j e k. Dvije osobite točke 3 (3', 3'') i 4 (4', 4'') krivulje k leže na ekvatoru kugle; one u tlocrtu dijele vidljivi dio krivulje k od nevidljivog dijela. Daljnje su dvije osobite točke 5 (5', 5'') i 6 (6', 6''), u kojima izvodnica FV siječe glavni meridijan m.

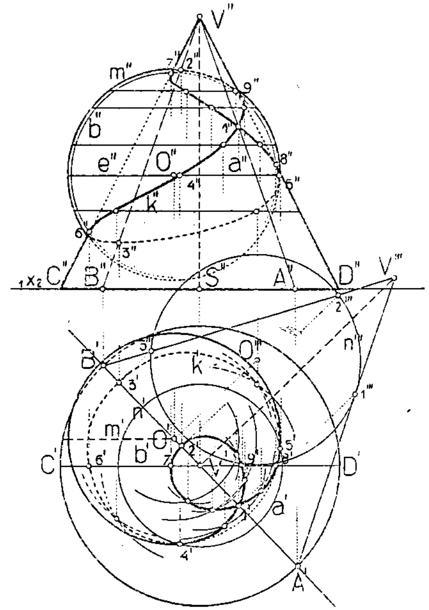
Tlocrt je k' krivulja 4. reda, koja ima dva tjemena u točkama 5' i 6'. Nacrt je k'' krivulja 2. reda, i to parabola.

K o n s t r u k c i j a t a n g e n t e k r i v u l j e k. U sl. 659. konstruirane su projekcije t' i t'' tangente t u točki 1 krivulje k. Pravac $A'T_1$ je prvi trag dirne ravnine stošca u točki 1, a pravac $B'T_1$ je prvi trag dirne ravnine kugle u točki 1. Pravac je $1'T_1 \equiv t'$ tangenta krivulje k' u točki 1', a pravac $1''T_1'' \equiv t''$ tangenta krivulje k'' u točki 1''.

M r e ž a s t o š c a s p r o d o r n o m k r i v u l j o m k. U sl. 660. razgrnut je plašt stošca iz sl. 659. u ravninu i u njemu je nacrtana razgrnuta krivulja k. Ta se konstrukcija izvela na jednak način kao u sl. 609. (§ 176.). U točki 1 razgrnute krivulje k nacrtana je tangenta t na tu krivulju. [$AT_1 = A'T_1$, $1T_1 = t$].

3. Zadatak. *Odredi prodor kugle s rotacionim stošcem, kojemu je os okomita na* Π_1 *i koji dotiče kuglu u jednoj točki!* (Sl. 661.).

R j e š e n j e. U sl. 661. uzelo se, da os stošca leži u ravnini ABV u kojoj leži i meridijan n. Ta je ravnina preložena oko AB u Π_1, pa je trokut ABV došao u položaj $A'B'V'''$, a meridijan n prikazao se kao kružnica n''', koja dotiče preloženu izvodnicu $A'V'''$, u točki 1'''. Iz preložaja se odrede projekcije O' i O'' središta kugle, kojoj je polumjer $= O'''1'''$. Kugla dotiče stožac u točki 1 (1', 1'', 1'''), koja leži na izvodnici AV. Kugla siječe izvodnicu BV u točkama 2 i 3. Točka je 2 najviša, a 3 najniža točka prodorne krivulje k.

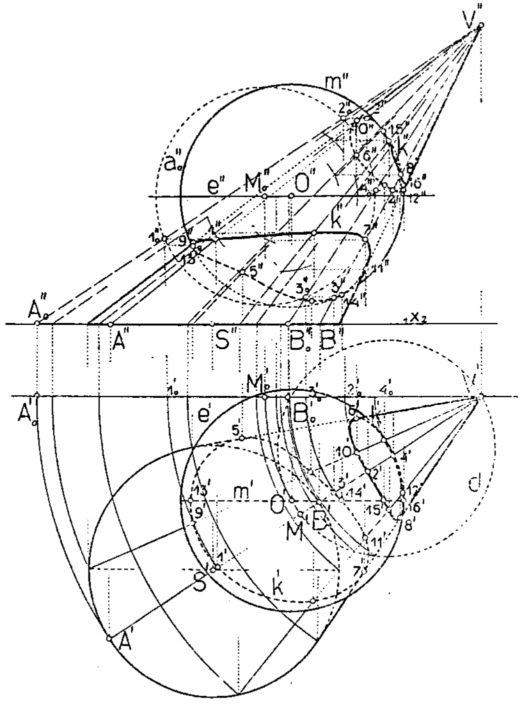


Sl. 661.

Da se dobiju točke 4 i 5 na ekvatoru e, sjeći će se stožac ravninom ekvatora u kružnici a (a', a''), pa će se kružnice e' i a' sjeći u točkama 4' i 5'. Da se dobiju točke 6 — 9, koje leže na konturnim izvodnicama CV i DV za nacrt, položit će se tim izvodnicama ravnina ($\parallel \Pi_2$), koja će sjeći kuglu u kružnici b (b', b''), pa će kružnica b'' sjeći prividnu konturu stošca $C''V''$ i $D''V''$ u točkama 6''— 9''. Točke se 6 — 9 u nacrtu vide, a u tlocrtu se vide točke 7, 8 i 9. Ostale točke krivulje k mogu se dobiti pomoću kružnih presjeka kugle i stošca kao u sl. 649. (t. 2.). Ako se položi ravnina kao glavni meridijan m kugle, ona bi sjekla stožac u hiperboli, a hiperbola bi sjekla glavni meridijan u točkama, koje pripadaju krivulji k. Projekcije se tih točaka jednostavnije odrede tako, da se izvuče krivulja k'. Tlocrti traženih točaka leže u sjecištima krivulje k' s pravcem m'. Pomoću ordinala odrede se nacrti točaka na m''.

Točka 1 je dvostruka točka krivulje k. Ta je krivulja 4. reda. Tlocrti i nacrti tih točaka također su krivulje 4. reda s dvostrukim točkama u 1' i u 1''.

4. Zadatak. *Odredi prodor kugle s kosim stošcem, kojemu je osnovka u* Π_1 ! (Sl. 642.).



Sl. 662.

Rješenje. Pojedine točke prodorne krivulje k mogle bi se odrediti pomoću horizontalnih kružnih presjeka kugle i stošca ili na način, da se potraže sjecišta kugle s pojedinim izvodnicama stošca. U sl. 662. upotrebljena je ona druga metoda. Sjecišta pojedinih izvodnica s kuglom određena su na jednak način kao u sl. 622. (§ 182.).

Da se na pr. odrede sjecišta 1 i 2 izvodnice AV s kuglom, položit će se tom izvodnicom ravnina Σ okomito na Π_1 i njom će se sjeći kugla u kružnici a, kojoj tlocrt a' leži na $A'V'$ i podudara se s tetivom kružnice e'. Kružnica a siječe izvodnicu AV u točkama 1 i 2. Da se dobiju projekcije tih točaka, okrenut će se izvodnica AV i kružnica a oko pravca, koji ide točkom V okomito na Π_1, dok ne budu usporedni s Π_2. Tlocrt će rotirane izvodnice AV i kružnice a biti pravac, koji ide točkom V' usporedno sa osi x. Svaka točka izvodnice AV i kružnice a opiše kružni luk, koji se na Π_1 projicira u pravoj veličini sa središtem u V'. Projekcije su rotirane izvodnice AV pravci $A^0V' = A'V'$ i $A_0''V''$. Ako se s točke O' spusti okomica na a', dobit će se tlocrt M' središta kružnice a. Nacrt M'' leži u pravcu e'', koji ide točkom O'' usporedno sa x. Projekcije su rotiranog središta M_0' na pravcu $A_0'V'$, i M_0'' na pravcu e''. Rotirana kružnica a projicira se na Π_2 u pravoj veličini kao kružnica a_0''. Ta kružnica siječe pravac $A_0''V''$ u točkama $1_0''$ i $2_0''$. Te su točke rotirana sjecišta 1 i 2. Ako se odrede tlocrti $1_0'$ i $2_0'$, pa se oko V' opišu lukovi preko $1_0'$ i $2_0'$, oni će sjeći pravac $A'V'$ u točkama 1' i 2'. Ako se točkama $1_0''$ i $2_0''$ potegnu usporednice sa osi x, one sijeku $A''V''$ u točkama 1'' i 2''.

Na posve jednak način odrede se ostale točke prodorne krivulje k. Naročito valja odrediti one točke krivulje k, koje leže na konturnim izvodnicama za tlocrt i nacrt.

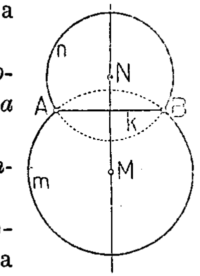
Stožac potpuno prodire kuglu, pa se prodorna krivulja sastoji iz dvije zatvorene grane. Ekvator kugle ne siječe stožac. Glavni meridijan m siječe stožac u četiri točke 13 — 16. Nacrt se tih točaka na m'' odredi iz tlocrta pomoću točaka u kojima k' siječe m'.

Krivulja k' dotiče prividnu konturu stošca u točkama 5' — 8'. Krivulja k'' dotiče drugu prividnu konturu stošca u točkama 9''— 12'', a prividnu konturu m'' kugle u točkama 13''— 16''.

Napomena: Središta M' sviju kružnica a, leže na kružnici d, kojoj je promjer dužina $O'V'$. (Zašto?)

§ 194. Prodor dviju kugala

1. Prodorna krivulja dviju kugala. Ako se dvije kružnice m i n (sl. 663.), koje se sijeku u dvije točke A i B, zavrte oko svoje centrale MN za 180°, onda će svaka ta kružnica opisati po jednu kuglu, dok će točke A i B opisati kružnicu, koja je prodorna linija obih kugala.



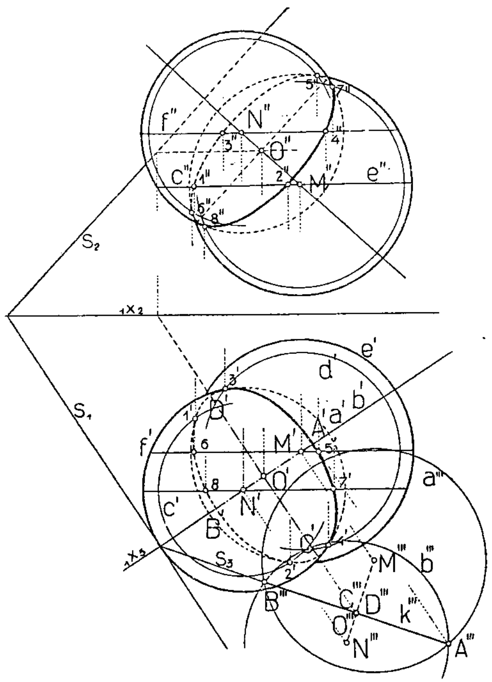
Sl. 663.

Dvije kugle prodiru se u kružnici, kojoj je ravnina okomita na centrali tih kugala. Ta se ravnina zove *kordalna ravnina* obih kugala.

2. Zadatak. *Odredi prodor dviju kugala, kojima je centrala MN nagnuta prema* Π_1 *i* Π_2 ! (Sl. 664.).

Rješenje. Već smo dokazali, da se dvije kugle prodiru u kružnici k. Ravnina Σ te kružnice okomita je na centrali MN. Ako je poznata jedna točka te ravnine, onda se mogu nacrtati njezini tragovi.

Kroz centralu MN položit će se ravnina $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Ravnina Π_3 sjeći će kugle u dvije glavne kružnice a i b. Ako se Π_3 preloži oko $M'N'$ u Π_1, kružnice će se a i b prikazati u pravoj veličini kao kružnice a''' i b''', koje se mogu smatrati konturama stranocrta kugala. U sjecištima A''' i B''' tih kružnica jesu preložaji dviju točaka kružnice k. Pravac $M'''N'''$ raspolavlja $A'''B'''$ u točki O''', koja je preložaj središta kružnice k. Budući da je ravnina Σ okomita na Π_3, njezin treći trag $s_3 \equiv A'''B'''$, prvi trag $s_1 \perp M'N'$, a drugi trag $s_2 \perp M''N''$. Treća projekcija kružnice k podudara se dužinom $A'''B'''$. Dužina $A'B'$ je mala os, a dužina $C'D' = A'''B'''$ je velika os elipse k'.



Sl. 664.

Mala i velika os elipse k'' mogla bi se na sličan način odrediti pomoću presjeka kugala ravninom Π_4 položenom pravcem MN okomito na Π_2.

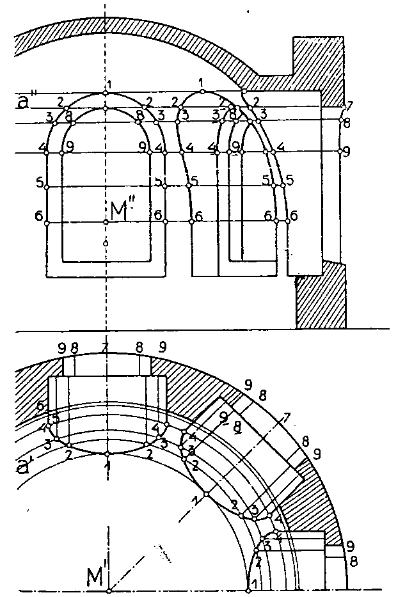
Pojedine točke presjeka k mogle bi se dobiti pomoću kružnih presjeka obih kugala ravninama, koje su usporedne s Π_1 ili Π_2. Na taj su se način odredile točke 1 — 4, koje leže na ekvatorima i točke 5 — 8, koje leže na glavnim meridijanima kugala. Ako se na pr. položi ravnina kroz ekvator e veće kugle, ona siječe manju kuglu u kružnici c. Kružnice e' i c' sijeku se u točkama 1' i 2' krivulje k'. Pomoću ordinala odrede se nacrti 1'' i 2''. Na sličan način odredili su se tlocrti i nacrti točaka 3 — 8. U tlocrtu se točke 1 i 2 ne vide, a točke 3 i 4 vide. U nacrtu se ne vide točke 5 i 6, a vide točke 7 i 8.

Elipsa k' dotiče konturne kružnice tlocrta u točkama 1' — 4', a elipsa k'' dotiče konturne kružnice nacrta u točkama 5'' — 8''.

§ 195. Praktične primjene prodora kugle s valjkom i stošcem

1. Kuglasti svod s valjkastim prozorima. Sl. 665. prikazuje dio kuglastog svoda s prozorima, koji su nadsvođeni rotacionim poluvaljcima. Strane prozora omeđene su vertikalnim ravninama, koje su opet s donje strane omeđene dijelovima horizontalnih ravnina. Simetralne ravnine prozora idu središtem kugle. Izvanji dio i unutarnji donji dio svoda je valjkast. Uzelo se, da je svod prerezan za nacrt ravninom glavnog meridijana kugle, a za tlocrt ravninom ekvatora. Ujedno je tlocrt prikazan s pogledom odozdo.

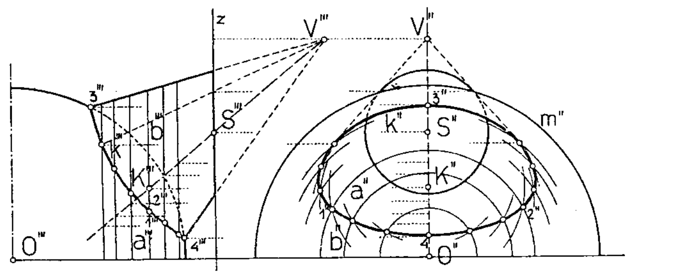
Prodorne linije, koje ovdje dolaze, određene su pomoću horizotalnih presjeka kugle i ploha, kojima su omeđeni prozori. Na primjer horizontalna ravnina **A** siječe unutarnju kuglinu površinu u kružnici a (a', a''), a gornje poluvaljke u izvodnicama, koje kružnicu a sijeku u točkama 2 2, 2 ... Pomoću drugih horizontalnih presjeka dobiju se točke prodora 1, 3 i 4, u kojima poluvaljci sijeku kuglu. Vertikalne strane prozora sijeku kuglu u kružnim lukovima, kojima su tlocrti dužine 4 — 6. Iz tlocrta se odredi nacrt točaka 4 — 6.



Sl. 665.

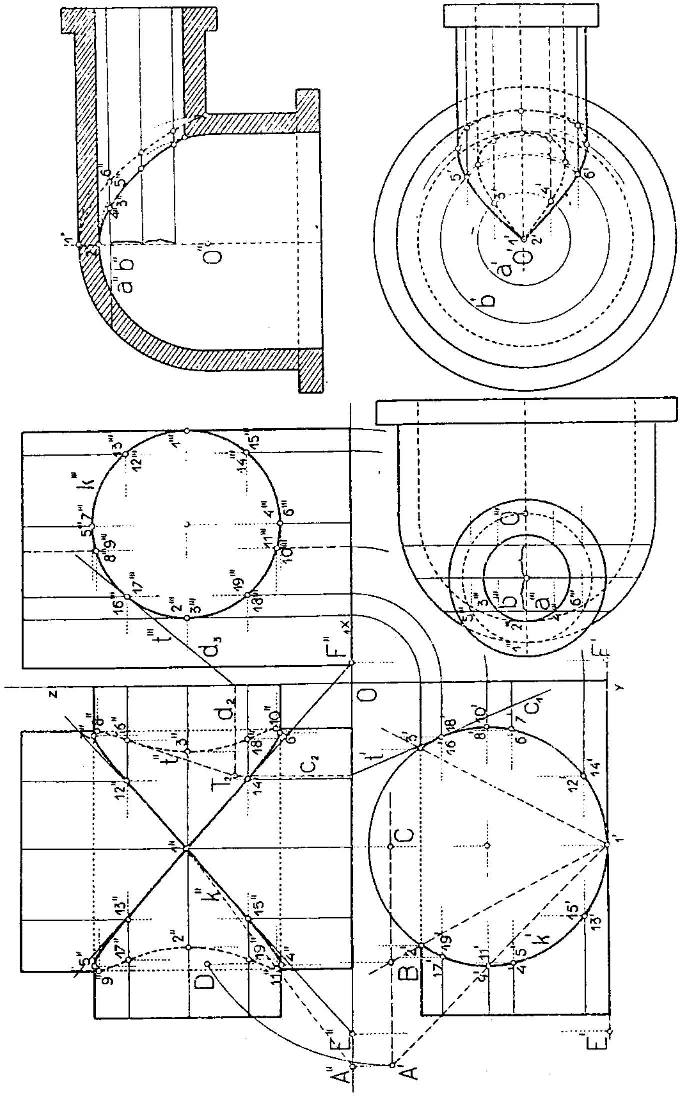
Unutarnji poluvaljak siječe izvanju valjkastu stijenu u točkama 7, 8 i 9.

2. Kuglasti svod sa stožastim prozorom. U sl. 666. prikazana je u nacrtu i bokocrtu četvrtina šuplje kugle, koja prikazuje omeđenje kuglastog svoda, zatim kosi stožac, kojemu je vrh V (V'', V''') i kojemu su kružni presjeci usporedni s Π_2, na pr. presjek a (a'', a'''). Stožac je određen tom kružnicom i vrhom V. Da se odredi prodorna krivulja k (k'', k''') kugle i stošca, sjeći će se obje



Sl. 666.

plohe ravninama, koje su usporedne s Π_2 u kružnicama. Jedna takova ravnina siječe kuglu u kružnici a (a'', a'''), a stožac u kružnici b (b'', b'''). Kružnice a'', b'' sijeku se u točkama 1'', 2'' krivulje k''. Iz nacrta se dobiju točke 1''', 2''' krivulje k''', koje leže na a''' i padaju u istu točku. Pomoću drugih kružnih presjeka odrede se druge točke krivulje k'' i k'''. Krivulja k''



Sl. 668.

Sl. 667.

je jedna grana krivulje 4. reda, a k''' je luk parabole, k'' dotiče drugu prividnu konturu stošca.

3. Ormarić za vodu turbine za visoki pritisak s horizontalnom dovodnom cijevi. U sl. 667. prikazan je taj predmet u tri projekcije. Ormarić i cijev imaju dva plašta: izvanji i unutarnji. Izvanji plaštevi kugle i valjka dotiču se u točki 1, a unutarnji plaštevi dotiču se u točki 2. Izvanji plaštevi sijeku se u jednoj grani jedne prostorne krivulje 4. reda, a unutarnji plaštevi prodiru se u jednoj grani druge prodorne krivulje 4. reda. Pojedine točke obih grana prodornih krivulja dobiju se pomoću horizontalnih presjeka. Na pr. horizontalna ravnina **A** siječe unutarnji plašt kugle u kružnici a (a', a'', a'''), a unutarnji plašt valjka u dvije izvodnice, koje kružnicu a sijeku u dvije točke 3 (3', 3'', 3''') i 4 (4', 4'', 4'''), koje leže na prodornoj krivulji unutarnjih plašteva. Ravnina **A** siječe izvanji plašt kugle u kružnici b (b', b'', b'''), a izvanji plašt cijevi u dvije izvodnice, koje sijeku kružnicu b u dvije točke 5 (5', 5'', 5''') i 6 (6', 6'', 6''') prodorne krivulje izvanjih plašteva. S pomoću drugih horizontalnih presjeka dobiju se druge točke jedne i druge prodorne krivulje.

U nacrtu je prikazana samo stražnja polovica ormarića i cijevi.

§ 196. Prodor dvaju valjaka

1. Zadatak. *Zadana su dva rotaciona valjka; jednome je osnovka u $\prod_1$, a drugome u $\prod_3$. Oba se valjka dotiču u jednoj točki. Odredi prodor tih dvaju valjaka!* (Sl. 668.).

Rješenje. Oba se valjka sijeku u krivulji 4. reda, kojoj je tlocrt u kružnici k', a bokocrt u kružnici k'''. Pomoću prve i treće projekcije odrede se druge projekcije pojedinih točaka prodorne krivulje. Oba se valjka dotiču u točki 1 (1', 1''). Na konturnim izvodnicama horizontalnog valjka leže točke prodorne krivulje 1 — 7. U nacrtu se ne vide samo točke 2 i 3. Na konturnim izvodnicama vertikalnog valjka leže točke 8 — 11. Te se točke u nacrtu ne vide.

Ako se položi ravnina usporedno s $\prod_2$, ona siječe svaki valjak u dvije izvodnice, koje se sijeku u četiri točke. Pomoću takovih presjeka određene su točke 12 — 15 i 16 — 19.

Spoje li se točke 1'' — 19'' dobije se nacrt k'' prodorne krivulje k. Krivulja ima u točki 1'' dvostruku točku i to obratište.

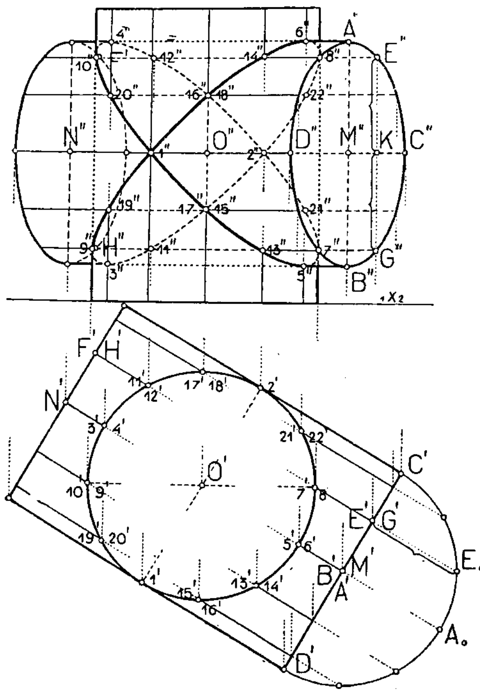
U točki 16 konstruirana je tangenta t na krivulju k. Ako se u točki 16 polože dirne ravnine Γ (c_1, c_2) i Δ (d_1, d_2), one se sijeku u pravcu t. Trag c_1 dotiče k' u točki 16', $c_2 \perp x$. Trag d_3 dotiče k''' u točki 16''', $d_2 \perp z$. $t' \equiv c_1$, $t''' \equiv d_3$, $t'' \equiv T_2 16''$, gdje je T_2 u sjecištu tragova c_2 i d_2.

Dirne ravnine u točki 1 padaju zajedno i usporedne su sa $\prod_2$. Da se dobiju tangente u točki 1'' krivulje k'' upotrebit će se stožac, kojemu

*

je vrh u točki 1 i kojemu je ravnalica prodorna krivulja k. Budući da svaka izvodnica toga stošca siječe krivulju k osim u točki 1 još u jednoj točki, stožac je drugoga reda. Dirna ravnina u točki 1 siječe taj stožac u dvije izvodnice, koje su tangente krivulje k u točki 1.

Da se dobiju te izvodnice, sjeći će se stožac kojomgod horizontalnom ravninom, na pr. s Π_1, u hiperboli. Asimptote su te hiperbole, pravci $1'2'$ i $1'3'$, središte joj je u točki $1'$, a glavna os $E'F'$ u prvom tragu dirne ravnine valjka u točki 1. Prema tome će pravci $1E$ i $1F$ biti tangente krivulje k u točki 1. Točke će se E' i F' dobiti na slijedeći način: Ravnina Π_1 siječe kojugod izvodnicu stošca, na pr. izvodnicu $1 \cdot 11$ u točki $A(A', A'')$, pa je A' jedna točka hiperbole. Budući da su poznate asimptote i jedna točka hiperbole, glavna se os može konstruirati. Točkom A' povuče se pravac usporedno s glavnom osi, koji asimptotu $1'2'$ siječe u točki B, a imaginarnu os u točki C. Opiše li se iz C luk s polumjerom CA' i njim siječe u točki D okomica potegnuta točkom B na $A'C$, onda je dužina BD jednaka glavnoj osi hiperbole. (Isporedi § 140., t. 4.). Učini li se $1'E' = 1'F' = BD$ i odrede nacrti E'', F'', onda su pravci $1''E''$ i $1''F''$ tangente krivulje k'' u točki $1''$.

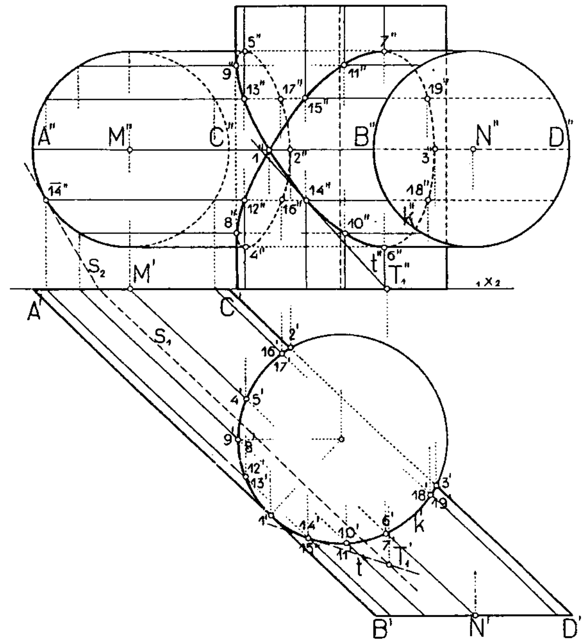


Sl. 669.

2. Zadatak. *Zadana su dva rotaciona valjka, koji imadu jednake polumjere te se dotiču u dvije točke. Osnovka je jednoga valjka u* Π_1, *dok su osnovke drugoga valjka okomite na* Π_1. *Odredi prodor tih valjaka!* (Sl. 669.).

Rješenje. Prodorna se krivulja raspada na dvije elipse, koje se sijeku u zajedničkim dirnim točkama 1 ($1'$, $1''$) i 2 ($2'$, $2''$). Tlocrt je tih elipsi kružnica k'. Točke 3 — 6 leže na izvodnicama horizontalnog valjka, koje se projiciraju kao prividne konture nacrta. Nacrt se $3''$ — $6''$ dobije iz tlocrta pomoću ordinala.

Da se dobiju točke 7 i 8, u kojima desna konturna izvodnica vertikalnog valjka siječe plašt horizontalnog valjka, položit će se tom izvodnicom ravnina usporedno s izvodnicama horizontalnog valjka, pa će se na svakom od tih valjaka dobiti po dvije izvodnice, koje se sijeku u četiri točke 7, 8, 11, 12 prodorne krivulje. Da se dobije nacrt izvodnica horizontalnoga valjka, preložit će se gornja polovica desne baze toga valjka oko promjera CD u horizontalan položaj, pa će se dobiti dužina E', E_0, koja



Sl. 670.

naznačuje udaljenost točke E od promjera CD. Ako se dakle učini $KE'' = E'E_0$, točkom E'' ide nacrt $E''F''$ izvodnice EF, na kojemu leže točke $8''$ i $12''$. Ako se učini $KG'' = KE''$, dobit će se nacrt $G''H''$ izvodnice GH, na kojoj leže nacrti $7''$ i $11''$ točaka 7 i 11.

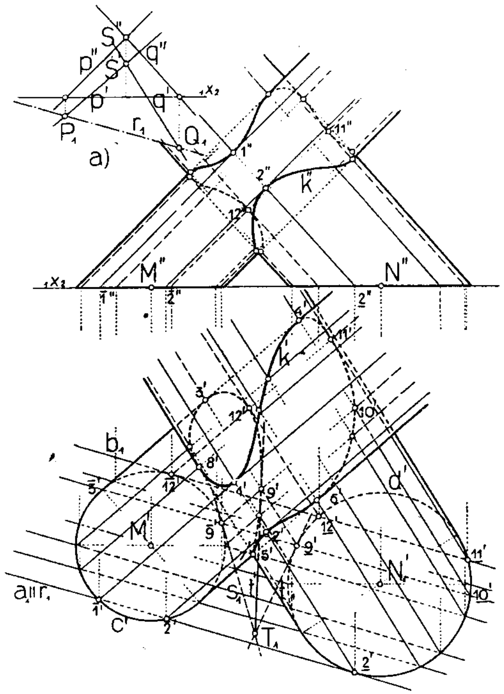
Na jednak se način dobiju nacrti točaka 9, 10, 13 — 22.

Ako se u nacrtu spoje točke $1''$ — $22''$, i to po redu kako su te točke poredane u tlocrtu, dobit će se dvije elipse, koje se sijeku u točkama $1''$ i $2''$. Svaka dva konjugirana promjera kružnice k' daju u nacrtu dva konjugirana promjera jedne ili druge elipse. Na pr. konjugirani su promjeri $1''2''$ i $4''5''$, $1''2''$ i $3''6''$ i t. d. Prema tome su tangente u točkama $1''$ i $2''$ usporedne s promjerima $4''5''$ i $3''6''$.

Točke A'', E'', C'', G''... leže na elipsi, koja je nacrt desne osnovke horizontalnog valjka.

3. Zadatak. *Odredi prodor kosog valjka, kojemu je osnovka u Π_2, s rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u Π_1, ako se oba valjka dotiču u jednoj točki!* (Sl. 670.).

Rješenje. Prodorna je krivulja k četvrtoga reda. te joj je tlocrt k' kružni luk 2' 1' 3', a nacrt k'' ravnična krivulja 4. reda. Pojedine točke krivulje k'' odrede se pomoću izvodnica kosoga valjka. Najprije se odrede



Sl. 671.

točke na konturnim izvodnicama. Točka 1 leži na izvodnici AB, a točke 3 i 2 na izvodnici CD. Oba se tijela dotiču u točki 1, pa je ta točka dvostruka točka krivulje k, a 1'' dvostruka točka krivulje k''. Točke su 4 — 7 na konturnim izvodnicama za nacrt kosoga valjka, a točke 8 i 9 na konturnoj izvodnici za nacrt uspravnoga valjka. Još su određeni nacrti točaka 10 — 19.

Krivulja je k'' simetrična s obzirom na pravac $M''N''$, u točkama 2'' i 3'' ima tjemena, te dotiče drugu prividnu konturu valjka u točkama 4'' — 9''.

U točki 14 konstruirana je tangenta $t\,(t', t'')$ krivulje k. U toj točki postavljene su dirne ravnine na jedan i drugi valjak, a presječnica je tih ravnina tangenta t.

4. Zadatak. *Odredi prodor dvaju kosih valjaka, kojima su osnovke u Π_1!* (Sl. 671.).

Rješenje. Budući da se kosi valjak može smatrati kosom prizmom, kojoj osnovka ima neizmjerno mnogo stranica, prodor se dvaju kosih valjaka odredi na sličan način kao i prodor dviju kosih prizama. (Isp. § 94., sl. 313.). Da se odrede pojedine točke prodorne krivulje k, položit će se ravnine usporedno s izvodnicama jednoga i drugoga valjka. Svaka takova ravnina siječe svaki valjak u dvije izvodnice, koje se opet sijeku u četiri točke prodorne krivulje. Budući da su sve te ravnine među sobom usporedne, tad su im i istoimeni tragovi među sobom usporedni Budući da su osnovke obih valjaka u Π_1, dovoljno će biti da se odredi smjer samo prvih tragova pomoćnih ravnina. U sl. 671. *a*) položena su točkom S dva pravca p i q, koji su usporedni s izvodnicama obih valjaka i tima pravcima položena je ravnina **P**. Pravac r_1 je njezin prvi trag. Prvi tragovi ravnina, s kojima će se sjeći valjci, bit će usporedni sa r_1.

Na desni valjak položit će se dirna ravnina **A** ‖ **P** ($a_1 \parallel r_1$). Ta ravnina dotiče desni valjak u izvodnici, koja ide diralištem 2, a lijevi valjak siječe u dvije izvodnice, koje idu točkama $\overline{1}$ i $\overline{2}$. Te tri izvodnice sijeku se u točkama 1 (1', 1'') i 2 (2', 2'') krivulje k.

Sad će se položiti dirna ravnina **B** na lijevi valjak usporedno sa **P** ($b_1 \parallel r_1$). Ta ravnina dotiče lijevi valjak u izvodnici, koja ide točkom $\overline{12}$, a siječe desni valjak u dvije izvodnice, koje idu točkama $\underline{11}$ i $\underline{12}$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 11 i 12 krivulje k.

Zatim treba odrediti točke prodorne krivulje, koje leže na konturnim izvodnicama za tlocrt i nacrt obih valjaka. Da se na pr. odrede točke 3 i 4, položit će se izvodnicom $\overline{3}3$ ravnina Γ ($c_1 \parallel r_1$) i njom će se sjeći lijevi valjak u drugoj izvodnici $\overline{9}9$, a desni valjak u dvije izvodnice 99 i 1010. Te četiri izvodnice sijeku se u točkama 3, 4, 9 i 10. Na jednak se način odrede druge točke prodorne krivulje k.

Konturne točke 5 i 7 padaju u tlocrtu skupa, tako da krivulja k' ima u toj točki šiljak.

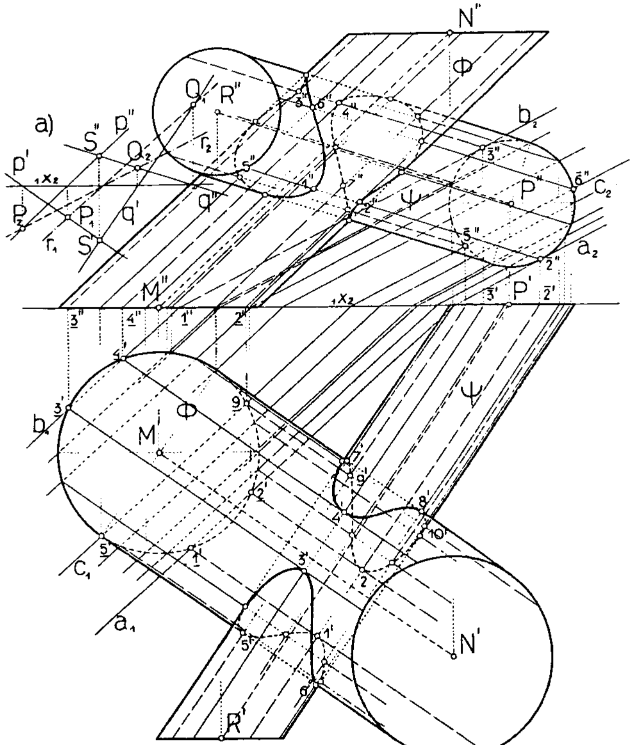
Prodor je nepotpun, pa se prodorna krivulja sastoji iz jedne zatvorene grane.

Objasni vidljivost krivulje k u tlocrtu i nacrtu.

U točki 9' krivulje k' konstruirana je tangenta t' na tu krivulju. Pravac t_1 je prvi trag dirne ravnine desnoga valjka, a s_1 prvi trag dirne ravnine lijevoga valjka u točki 9. Pravac $T_1 9' \equiv t'$.

5. Zadatak. *Odredi prodor dvaju kosih valjaka, kojima su osnovke u različitim ravninama!* (Sl. 672.).

R j e š e n j e. Prodor ovih dvaju valjaka odredi se na sličan način kao u sl. 671., samo što se ovdje moraju upotrebiti i drugi tragovi pomoćnih ravnina, koje su usporedne s izvodnicama jednoga i drugoga valjka. Smjer tragova tih ravnina određen je u sl. 672. *a*).



Sl. 672.

Najprije se položi ravnina **A** ‖ **P** (a_1 ‖ r_1, a_2 ‖ r_2) koja dotiče valjak Ψ u izvodnici $\overline{22}$, a siječe valjak Φ u izvodnicama $\overline{11}$ i $\overline{22}$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 1 i 2 prodorne krivulje k.

Ako se položi na valjak Ψ druga dirna ravnina **B** ‖ **P** (b_1 ‖ r_1, b_2 ‖ r_2), ona dotiče taj valjak u izvodnici $\overline{33}$, a siječe valjak Φ u izvodnicama $\overline{33}$ i $\overline{44}$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 3 i 4.

Ravnina Γ (c_1 ‖ r_1, c_2 ‖ r_2) položena konturnom izvodnicom $\overline{55}$ valjka Φ siječe taj valjak u drugoj izvodnici 99, a valjak Ψ siječe u dvije izvodnice $\overline{55}$ i $\overline{66}$. Te četiri izvodnice sijeku se u četiri točke 5, 6, 9 i 10.

Na jednak način odrede se točke prodorne krivulje, koje leže na ostalim konturnim izvodnicama jednoga i drugoga valjka. Osim tih točaka odrede se i druge točke krivulje k.

Valjci su tako zadani, da je prodor potpun. Prodorna se krivulja k sastoji iz dvije zatvorene grane, k' dotiče prividnu konturu u tlocrtu jednoga i drugoga valjka, a k'' isto tako prividnu konturu jednog i drugog valjka u nacrtu.

Objasni vidljivost pojedinih točaka krivulje k kao i same te krivulje u tlocrtu i nacrtu.

Konstruiraj tangentu u zgodno odabranoj točki k.

§ 197. Praktične primjene prodora dvaju valjaka

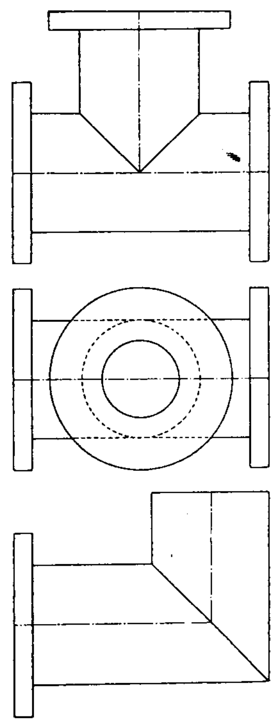
1. **Spoj cijevi.** *a)* Sl. 673. prikazuje u tlocrtu i nacrtu spoj dviju cijevi, koje imaju jednake polumjere i kojima se osi sijeku pod pravim kutom. Ta dva valjka sijeku se u dvije poluelipse.

b) Sl. 674. također prikazuje spoj dviju cijevi u obliku koljena, ali samo u jednoj projekcij Polumjeri su tih cijevi jednaki, a osi im se sijeku pod pravim kutom. Oba se valjka prodiru u jednoj elipsi.

c) U sl. 675. prikazan je u tlocrtu i nacrtu prodor dviju valjkastih cijevi, kojima se osi sijeku pod šiljastim kutem u točki O (O', O''). Oba su valjka rotaciona, a polumjeri su im različite veličine. Nacrt je osnovke užega valjka dužina $C''D''$, a tlocrt elipsa, kojoj je $A'B'$ ($= C''D''$) velika, a $C'D'$ mala os.

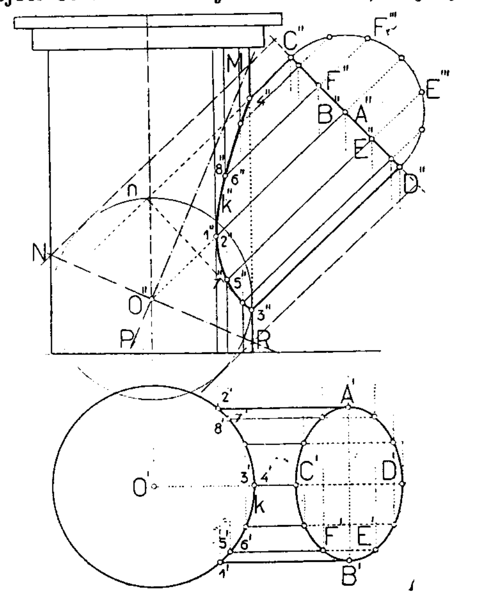
Tlocrt je prodorne krivulje kružni luk 1' 3' 2 Ravnina Σ, koju čine obje osi valjka, je ravnina simetrije za oba valjka, kao za prodornu krivulju k. Budući da je ta ravnina usporedna s Π_2, nacrt će se prednje i stražnje polovice projicirati u istu krivulju. Ta će krivulja 3'' 1'' 4'' biti luk hiperbole. Druga bi se grana hiperbole dobila kao nacrt prodorne krivulje donjih dijelova valjaka (koje bi trebalo produžiti, vidi sl. 676.). Točka O'' je središte hiperbole.

Točke 1' i 2' leže na prividnoj konturi tlocrta užega valjka. Nacrt 1'', 2'' leži na drugoj projekciji izvodnica, koje idu točkama A i B.



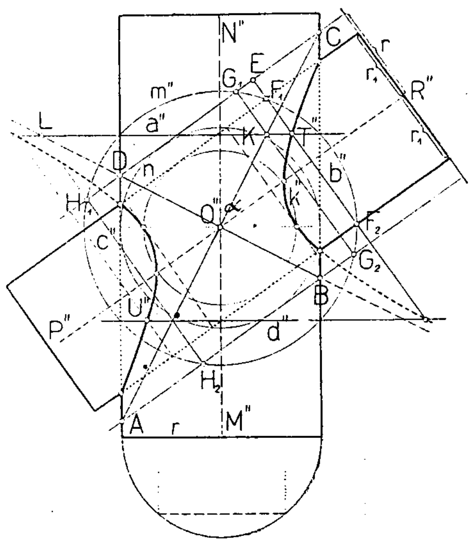
Sl. 673. i sl. 674.

Izvodnice koje se projiciraju na Π_2 kao kontura nacrta, leže u ravnini Σ, pa se sijeku u točkama 3 (3', 3'') i 4 (4', 4''). Da se dobiju točke 5 i 6 sjeći će se oba valjka ravninom, koja je usporedna s Π_2. Takova ravnina siječe uži valjak u dvije izvodnice, koje se na Π_2 projiciraju kao usporedni pravci, koji idu točkama E'' i F'' i simetrično su namješteni prema $A''O''$. Ako se osnovku desnog valjka preloži oko CD u ravninu Σ, dobit će se na kružnici treća projekcija E''' i F''' tih izvodnica. Ako se na ordinale točaka E'' i F'' prenesu dužine $E''E'''$ i $F''F'''$ ispod $C'D'$ dobit će se točke E' i F', kojima ide tlocrt izvodnica $E5$ i $F6$. Tlocrti $E'5'$ i $F'6'$ padaju zajedno. Pomoću ordinala točaka 5' i 6' odrede se točke 5'' i 6''. Dobiju se zatim točke 7 i 8, koje su s obzirom na ravninu Σ simetrične s točkama 5 i 6.



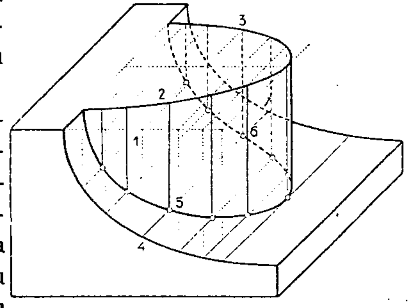
Sl. 675.

Točke se krivulje k'' mogu dobiti i neovisno od tlocrta i to pomoću koncentričnih kugala. Ako se oko točke O'' (sl. 676.) opiše kojagod kružnica m'', ona se može smatrati nacrtom glavnog meridijana pomoćne kugle. Budući da se središte kugle nalazi na osi jednog i drugog valjka, kugla siječe jedan valjak u kružnicama a i d, a drugi valjak u kružnicama b i c, kojima su nacrti dužine $a'' \parallel d''$ i $b'' \parallel c''$. (Isp. § 192., t. 1., sl. 653.). Kružnice a i b sijeku se u dvije točke T i T_1, a kružnice c i $d$također u dvije točke U i U_1, koje leže na prodornoj krivulji k. Prema tome se a'' i b'' sijeku u točki T'' u kojoj se nalazi i T_1'', a dužine c'' i d'' sijeku se u točki U'' u koju pada i U_1''. Pomoću novih pomoćnih kugala dobiju se nove točke krivulje k''.



Sl. 676.

Asimptote hiperbole k'' konstruiraju se na temelju slijedećeg razmatranja. Ako su dva rotaciona valjka jednakih polumjera tako položena, da im se osi sijeku u točki O, onda se takova dva valjka dotiču u dvije točke, pa se prodorna krivulja k sastoji iz dvije elipse, koje prolaze kroz zajednička dirališta. Ako se takova dva valjka projiciraju na ravninu Π_2, koja je usporedna sa osima MN i PR valjaka, onda se obje elipse projiciraju kao dužine AC i BD, koje se sijeku u točki O'' (sl. 676.).



Sl. 677.

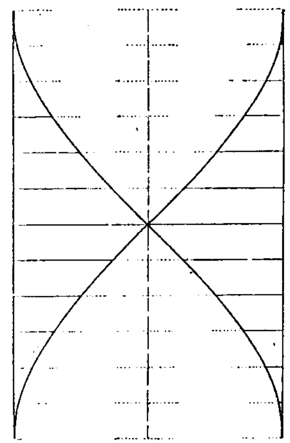
Ako su polumjeri obih valjaka nejednaki ($r > r_1$), onda je prodorna krivulja 4. reda te se projicira kao hiperbola k''. U sl. 676. ta je hiperbola konstruirana pomoću kugala. Ako se dužina $b'' \equiv F_1F_2$ produži do točke E na pravcu CD i ako se sa G_1, H_1 označe točke u kojima CD siječe kružnicu m'', onda je potencija točke E s obzirom na tu kružnicu jednaka $EF_1 \cdot EF_2$ i $EG_1 \cdot EH_1$, dakle je

$$EF_1 \cdot EF_2 = EG_1 \cdot EH_1 \;\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pomoćna kugla siječe jednake valjke u kružnicama, kojima su projekcije a'', d'' i G_1G_2, H_1H_2. Pravac a'' siječe G_1G_2 u točki K, a pravac H_1H_2 u točki L. Točka K leži na pravcu AC, a točka L na pravcu BD.

Ako se sa α označi kut koga čine osi valjka, onda je i $\sphericalangle KT''E = \alpha$ (zašto?). Iz slike je

$$EG_1 = T''K \cdot \sin\alpha \quad \text{i}$$
$$EH_1 = T''L \cdot \sin\alpha \;\ldots\ldots \quad (2)$$



b)

Sl. 678. b)

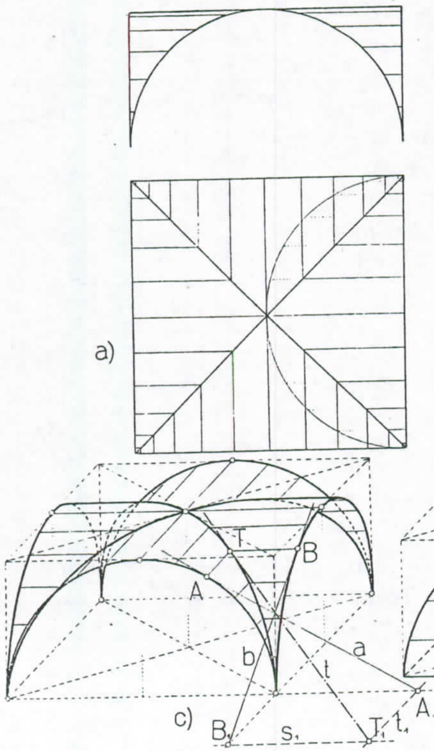
Iz jednadžbi (1) i (2) slijedi da je

$$EF_1 \cdot EF_2 = T''K \cdot T''L \sin^2\alpha \quad \text{ili} \quad T''K \cdot T''L = \frac{EF_1 \cdot EF_2}{\sin^2\alpha} \;\ldots \quad (3)$$

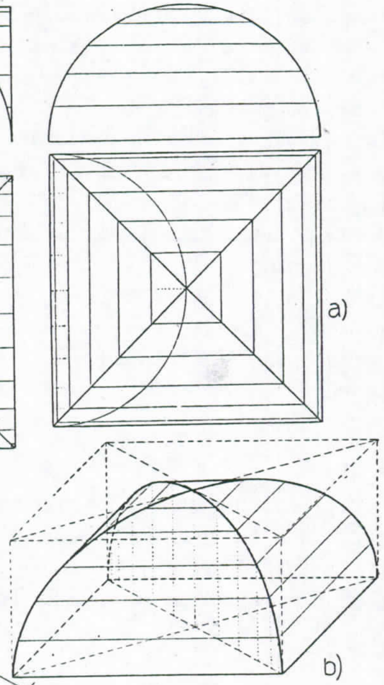
Budući da je $EF_1 = r - r_1$, a $EF_2 = r + r_1$ to je desna strana u jednažbi (3) konstantna. S obzirom na § 140., t. 4. točka T'' leži na hiperboli, kojoj su AC i BD asimptote.

Asimptote hiperbole u sl. 675. konstruirat će se prema tome na slijedeći način: Oko točke O'' opiše se kružnica n, koja dotiče konturne izvodnice širega valjka, na tu kružnicu povuku se tangente usporedno sa osi užega valjka i u dirnom četverokutu $MNPR$ povuku obje dijagonale MP i NR. Te su dijagonale asimptote hiperbole k''.

Budući da je lik $MNPR$ romb (zašto?), asimptote su MP i NR među sobom okomite, pa je hiperbola istostrana.



Sl. 678.



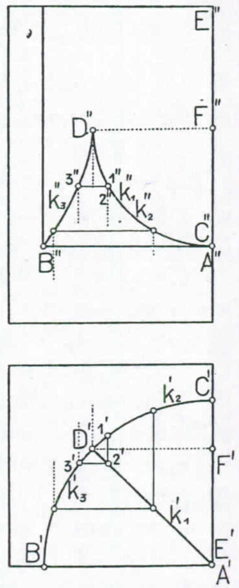
Sl. 679.

d) Slika 677. prikazuje praktičan primjer iz strojarstva, u kojemu dolazi prodor dvaju valjaka. Uzelo se, da je horizontalan valjak eliptičan, a vertikalan da je rotacioni. Osim toga ima na predmetu i prizmatičkih dijelova. Sve je to prikazano u kosoj projekciji.

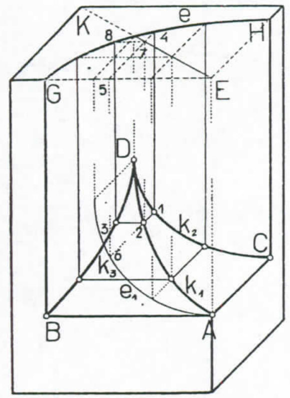
Prodorna se krivulja k odredi pomoću presjeka valjaka ravninama, koje su usporedne s izvodnicama tih valjaka. Jedan je trag (2—3) takove ravnine u gornjoj osnovci eliptičnog valjka, a drugi trag (1—4) nalazi se u prednjoj osnovci eliptičnog valjka. Oba se traga sijeku u točki 1, koja je

u presječnici spomenutih osnovaka. Ta ravnina siječe vertikalan valjak u dvije izvodnice 2—5 i 3—6, a horizontalan valjak u izvodnici 4—7, koja prve dvije izvodnice siječe u točkama 5 i 6. Te točke leže na prodornoj krivulji k.

2. Nakrsni i samostanski svod. Sl. 678. prikazuje nakrsni svod, a sl. 679. samostanski svod. U sl. 678. a) nacrtan je tlocrt i nacrt nakrsnog svoda, u sl. 678. b) nacrtana je mreža jednog poluvaljka, a u sl. 678. c) prikazan je nakrsni svod u kosoj projekciji. U toj slici konstruirana je tangenta t na prodornu krivulju u točki T. U točki T postavljene su dirne ravnine na oba valjka; prvi su im tragovi t_1 ($\parallel AT$) i s_1 ($\parallel BT$). Ti se tragovi sijeku u točki T_1, pa je TT_1 tražena tangenta t.



Sl. 680.



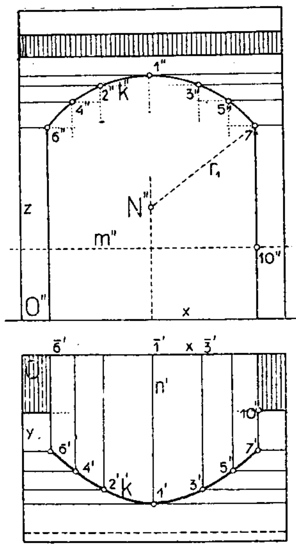
Sl. 681.

U sl. 679. a nacrtan je tlocrt i nacrt samostanskog svoda, a u sl. 679. b) kosa projekcija tog svoda.

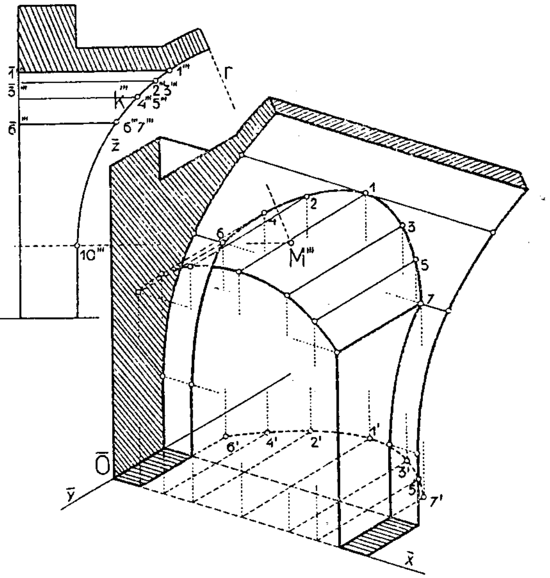
3 Tesani kamen. U sl. 680. prikazan je tlocrt i nacrt tesanog uresnog kamena, a u sl. 681. prikazan je taj kamen u kosoj projekciji. U tim slikama prikazan je prodor triju rotacionih valjaka. Od svakog valjka dolazi u obzir samo četvrtina. Prvi je valjak vertikalan, tlocrt mu je kružni luk $B'D'C'$, polumjer mu je $= A'B'$, a os mu je AE vertikalna. Drugi je valjak okomit na Π_2, a treći je usporedan sa osi x, te je sukladan s drugim valjkom. Ova dva valjka prodiru se u eliptičnom luku k_1, kojemu je tlocrt dužina $A'D'$. Polumjer je drugog i trećeg valjka $= D'F'$. Drugi se valjak projicira na Π_2 kao kružni luk $A''2''D''$ sa središtem u F'' (gdje je $A''F''= = D'F'$); u tom je luku nacrt prodorne elipse k_1 i prodorne krivulje k_2 u kojoj se prodiru prvi i drugi valjak. $k_2' = arc\ D'C'$. Treći valjak prodire prvi valjak u krivulji k_3, kojoj je tlocrt $k_3' = arc\ B'D'$. Spomoću krivulja k_1 (k_1', k_1'') i k_3' te izvodnica trećega valjka odredi se nacrt k_3''.

U kosoj projekciji (sl. 681.) najprije se nacrta projekcija prizmatičnog kamena, zatim se u gornjoj osnovci nacrta projekcija *e* osnovne kružnice vertikalnog valjka. Ta je projekcija luk elipse kojoj je središte *E*, a *EG* i *EH* dva konjugirana polumjera. U prednjoj pobočci prizme nacrta se osnovna kružnica e_1 drugoga valjka.

Ako se sad položi ravnina Σ usporedno sa izvodnicama prvoga i drugoga valjka, njezin je trag u gornjoj osnovci prvoga valjka pravac $4 . 5 \parallel EH$, a trag u prednjoj osnovci drugoga valjka pravac $5 \cdot 6$. Oba se ta traga



Sl. 682.



Sl. 683.

sijeku u pravcu *GE*. Ravnina Σ siječe prvi valjak u izvodnici $4 \cdot 1$, a drugi valjak u izvodnici $6 \cdot 1$. Obje se te izvodnice sijeku u točki 1, koja leži na prodornoj krivulji k_2.

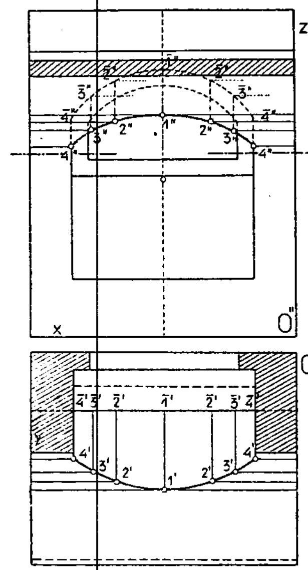
Prodorna krivulja k_1 leži u vertikalnoj dijagonalnoj ravnini prizme, kojoj je trag *EK*. Trag $4 \cdot 5$ ravnine Σ siječe trag *EK* u točki 7, pa povuče li se tom točkom pravac usporedno s $4 \cdot 1$, on siječe izvodnicu $6 \cdot 1$ u točki 2, koja leži na prodornoj krivulji k_1.

Ako se točkom 7 položi ravnina usporedno sa izvodnicama prvoga i trećega valjka, njezin je trag $7 \cdot 8$. Ta ravnina siječe prvi valjak u izvodnici,

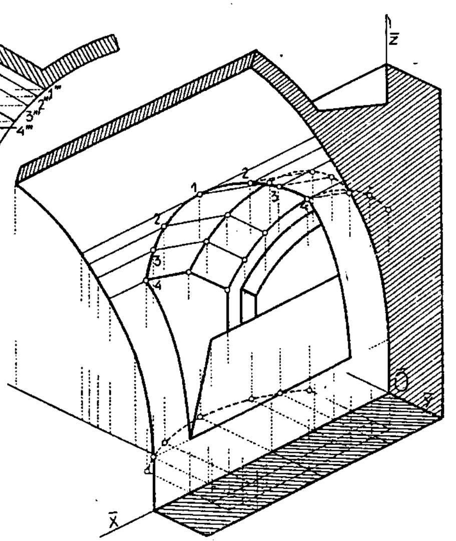
koja ide točkom 8, a treći valjak u izvodnici, koja ide točkom 2. Obje se te izvodnice sijeku u točki 3, koja leži na krivulji k_3.

4. Valjkasti svod s valjkastim prozorom. a) U sl. 682. prikazan je u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu dio valjkastog svoda s dijelom prozora, koji je gore završen dijelom rotacionog valjka, nadalje su određene projekcije k', k'', k''' prodorne krivulje tih dvaju valjaka. Osi se *m* i *n* tih valjaka pravokutno križaju, polumjeri su im *r* i r_1. Tlocrt je prikazan s pogledom odozdo.

U sl. 683. prikazan je predmet u kosoj izometrijskoj aksonometriji. Iz sl. 682. prenošene su pripadne dužine u istoj veličini u smjeru svih triju osi.



Sl. 684.



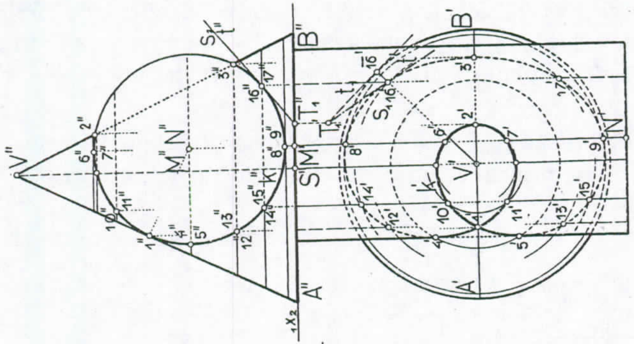
Sl. 685.

b) U sl. 684. prikazan je u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu dio valjkastog svoda s prozorom, koji je gore završen djelomice rotacionim, a djelomice kosim valjkom, koji prodire svod u krivulji 414. U sl. 685. prikazan je taj isti predmet u kosoj izometrijskoj aksonometriji.

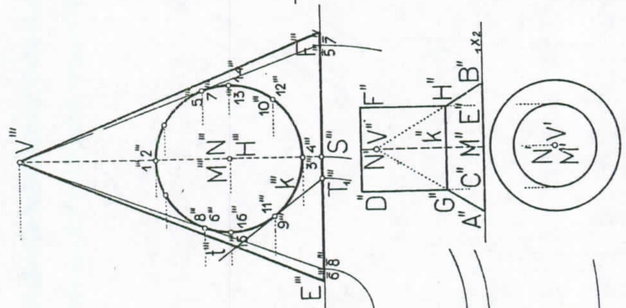
§ 198. Prodor valjka sa stošcem

1. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog valjka sa rotacionim stošcem, ako imadu zajedničku os, koja je okomita na* Π_1 ! (Sl. 686.)

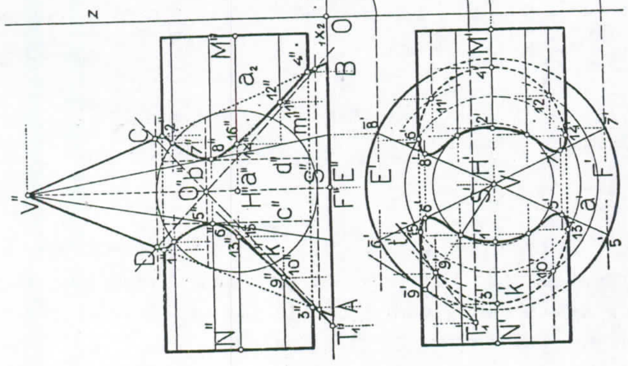
Rješenje. Oba se tijela prodiru u kružnici k. Izvodnice stošca AV, BV i izvodnice valjka CD i EF leže u istoj ravnini te se sijeku u točkama G i H. Ako se te izvodnice okrenu za 180^0 oko osi MN, AV i BV, opisat će rotacioni stožac, a CD i EF rotacioni valjak, dok će točke G i H



Sl. 687.



Sl. 686.



Sl. 688.

opisati kružnicu k, koja leži na stošcu i na valjku, pa je ona prodorna krivulja tih dvaju tijela.

Drugi bi se dio prodorne krivulje dobio na drugom plaštu potpunog stošca. I ta bi krivulja bila kružnica, koja je sukladna sa k.

2. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca s rotacionim valjkom, kojima su osnovke u različitim ravninama i koji se dotiču u jednoj točki!* (Sl. 687.).

Rješenje. Osnovka je stošca u Π_1, a osnovka valjka u Π_2. Oba se tijela dotiču u točki 1, koja leži na izvodnici AV stošca. Druga konturna izvodnica BV stošca siječe valjak u dvije točke 2 i 3.

Nacrt je k'' prodorne krivulje k kružni luk 2'' 1'' 3'', a tlocrt k' krivulja 4. reda.

Pojedine točke krivulje k' određene su pomoću kružnih presjeka stošca. Krivulja k' simetrična je s obzirom na pravac $A'B'$, u točki 1' ima dvostruku točku, a u točkama 2' i 3' tjemena. U točkama 4' i 5' dotiče k' prividnu konturu valjka.

U točki 16 (16', 16'') konstruirana je tangenta t (t', t'') krivulje k (k', k''). Objasni konstrukciju te tangente.

3. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *sa rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_3. *Osi se tih tijela sijeku u točki* H! (Sl. 688.).

Rješenje. Treća je projekcija prodorne krivulje k kružnica k'''. Budući da ta kružnica ne siječe treću prividnu konturu stošca, prodor je potpun, pa se krivulja k sastoji iz dvije grane. Nacrt je te krivulje hiperbola, što bi se moglo dokazati na jednak način kao u § 197., t. 1. c), sl. 676. Tlocrt k' je krivulja 4. reda, koja se sastoji iz dvije simetrične zatvorene grane. Pojedine točke krivulja k' i k'' odrede se pomoću kružnih presjeka stošca. Ako se na pr. položi ravnina A (a_3, a_2) usporedno sa Π_1, ona siječe stožac u kružnici a (a''', a'', a'), a valjak u dvije izvodnice, koje se na Π_1 projiciraju kao prividna kontura. Tu konturu siječe kružnica a' u četiri točke 13' — 16'. Na a'' leži nacrt 13'' — 16''. Na jednak se način odrede druge točke u tlocrtu i nacrtu. Budući da konturne izvodnice stošca i valjka za nacrt leže u istoj ravnini, koja je usporedna s Π_2, one se sijeku u četiri točke 1 — 4 (1'' — 4'', 1' — 4'), koje leže na krivulji k.

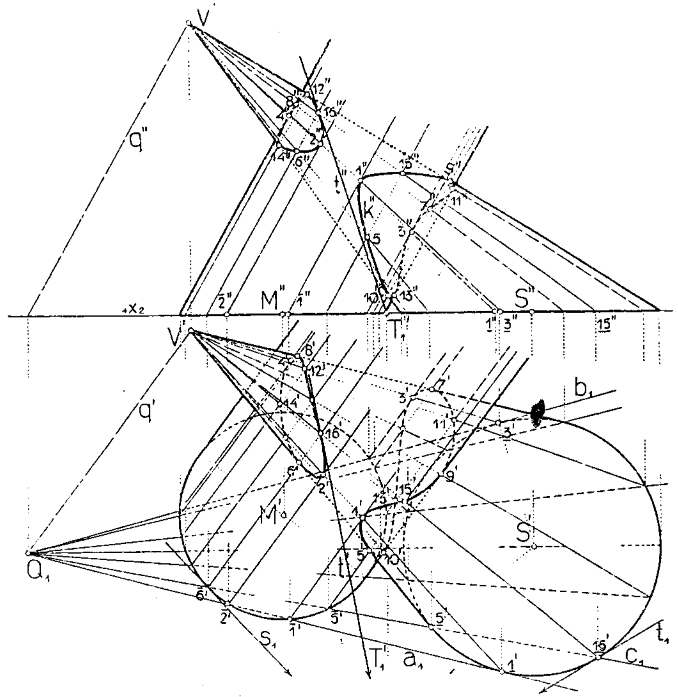
Ako se vrhom V polože obje dirne ravnine na valjak, one dotiču taj valjak u dvije izvodnice i sijeku stožac u četiri izvodnice $\overline{5}V$ — $\overline{8}V$, koje sijeku dirne izvodnice valjka u četiri točke 5 — 8. Izvodnice stošca $\overline{5}V$—$\overline{8}V$ dotiču krivulju k u točkama 5 — 8.

Ako se stošcu upiše kugla oko točke H, u kojoj se sijeku osi stošca i valjka (glavni meridijan m), ona dotiče stožac u kružnici b ($b'' \parallel x$) i siječe valjak u dvije kružnice c i d ($c'' \parallel d'' \parallel z$). Te se tri kružnice sijeku u četiri točke, kojima su nacrti u tjemenima hiperbole k''. Sjecište O'' pravaca $S''V''$ i b'' je središte te hiperbole. Ako se povuku tangente na kružnicu m'' usporedno sa $M''N''$, one sijeku drugu prividnu konturu stošca u točkama A — D, pa su pravci AC i BD asimptote hiperbole k''. (Isp. § 197., t. 1. c).

U točki 9 krivulje k konstruirana je tangenta $t\,(t', t'', t''')$ na tu krivulju. Objasni tu konstrukciju.

4. Zadatak. *Odredi prodor kosoga valjka i kosoga stošca, kojima su osnovke u* Π_1! (Sl. 689.).

Rješenje. Prodor se ovih dvaju tijela odredi na sličan način kako se odredio prodor kose prizme s kosom piramidom, kojima su osnovke u Π_1. (Isp. § 95., sl. 313.). Vrhom V stošca položi se pravac q usporedno sa izvodnicama valjka i odredi njegovo probodište Q_1 sa Π_1. Ako se pravcem q



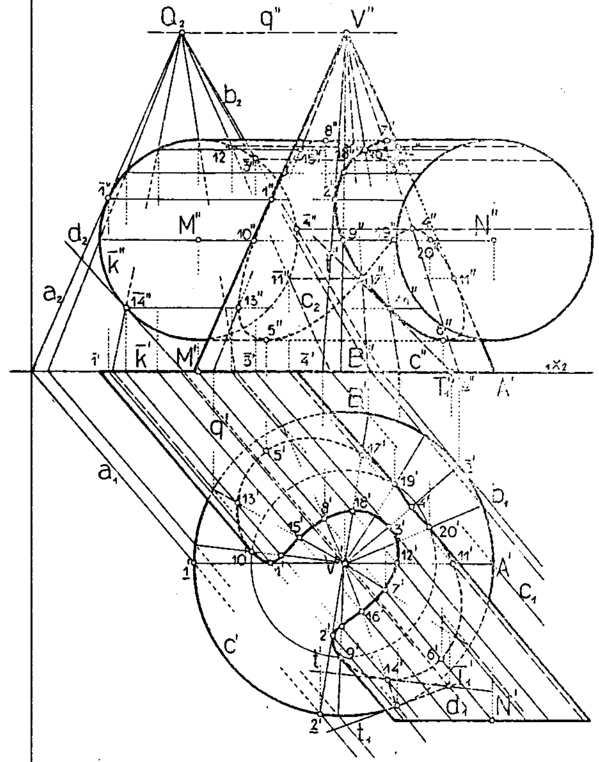
Sl. 689.

položi ravnina **A**, koja dotiče stožac, njezin prvi trag a_1 ide točkom Q_1 i dotiče osnovku stošca. Ta ravnina dotiče stožac u izvodnici $1V$, a siječe valjak u dvije izvodnice, koje idu točkama $\overline{1}$ i $\overline{2}$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 1 i 2. Pomoću druge dirne ravnine **B** $(b_1 \equiv Q_1\,\underline{3}')$, dobiju se daljnje dvije točke 3 i 4 krivulje k.

Da se dobiju točke na konturnoj izvodnici $5V$ za tlocrt stošca, položit će se tom izvodnicom i pravcem q ravnina $\Gamma\,(c_1 \equiv Q_1\,\underline{5}')$ i njom će se sjeći stožac u drugoj izvodnici $\underline{15}\,V$, a valjak u dvije izvodnice, koje idu

točkama $\overline{5}$ i $\overline{6}$. Te četiri izvodnice sijeku se u točkama 5, 6, 15, 16. Na jednak se način dobiju druge točke prodorne krivulje k, naročito one točke, koje leže na prvoj i drugoj prividnoj konturi stošca i valjka.

Budući da obje dirne ravnine **A** i **B** stošca sijeku valjak, tad sve izvodnice stošca sijeku plašt valjka, pa je prodor potpun. Prodorna krivulja k sastoji se iz dvije zatvorene grane. Krivulja k' dotiče prvu prividnu konturu, a k'' drugu prividnu konturu stošca i valjka.



Sl. 690.

U točki 16 (16', 16'') konstruirana je tangenta $t\,(t', t'')$ na krivulju $k\,(k', k'')$. Objasni tu konstrukciju!

5. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *s kosim valjkom, kojemu je osnovka u* Π_2. *Neka je os* MN *valjka usporedna s* Π_1! (Sl. 690.).

Rješenje. Prodor se ovih dvaju tijela odredi na jednak način kao i prodor kose prizme i piramide, kojima su osnovke u različitim ravninama.

*

Vrhom V stošca položi se pravac $q \parallel MN$ i odredi se njegovo drugo probodište Q_2. Pravac q je usporedan s Π_1, pa će on biti zajednička sutražnica pomoćnih ravnina s kojima će se sjeći stožac i valjak.

Ako se pravcem q položi dirna ravnina $\mathbf{A}$ ($a_2 \equiv Q_1\overline{1}''$, $a_1 \parallel q'$), ona dotiče valjak u izvodnici $\overline{1}1$, i siječe stožac u dvije izvodnice $1\,V$ i $2\,V$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 1 i 2 prodorne krivulje k.

Ako se pravcem q položi druga dirna ravnina na valjak, ona ne siječe i ne dotiče stošca, pa u toj ravnini nema točaka prodora.

Dirna ravnina $\mathbf{B}$ stošca uzduž izvodnice $3\,V$ sadrži i pravac q. Prvi trag b_1 dotiče osnovku stošca u točki $3'$, a drugi trag b_2 ide točkom Q_2. Ta ravnina siječe valjak u dvije izvodnice, koje idu točkama $\overline{3}$ i $\overline{4}$. Te izvodnice sijeku dirnu izvodnicu $3\,V$ stošca u točkama 3 i 4.

Ako se pravcem q i izvodnicom AV stošca položi ravnina $\mathbf{\Gamma}$, njezin prvi trag c_1 ide točkom A', a drugi trag c_2 ide točkom Q_2. Ta ravnina siječe stožac u drugoj izvodnici BV, a valjak siječe u dvije izvodnice, koje idu točkama $\overline{11}$ i $\overline{12}$. Te četiri izvodnice sijeku se u četiri točke 11, 12, 17 i 18.

Pomoću drugih ravnina, koje se polažu pravcem q i konturnim izvodnicama stošca i valjka, dobit će se na svakoj toj izvodnici (ako siječe) po dvije konturne točke prodorne krivulje k i još po dvije druge točke prodorne krivulje, u kojima se sijeku izvodnice, koje leže u dotičnoj pomoćnoj ravnini.

Budući da dirna ravnina $\mathbf{A}$ valjka siječe stožac, a dirna ravnina $\mathbf{B}$ stošca siječe valjak, slijedi da je prodor nepotpun, pa se prodorna krivulja sastoji iz jedne zatvorene grane. Krivulja k' dotiče prividnu konturu valjka u točkama 9', 10', 19', 20', a krivulja k'' dotiče drugu prividnu konturu u točkama 5"— 8" i 11", 12".

Točke 5—8, 9, 10, 19, 20 dobivaju se nešto točnije pomoću paralelnih presjeka stošca s ravninom Π_1.

Prodorna je krivulja simetrična s obzirom na normalnu ravninu valjka, koja ide vrhom V. Prema tome k' je simetrična s obzirom na pravac $V'3'$.

U točki 14(14', 14") konstruirana je tangenta $t(t', t'')$ krivulje $k(k', k'')$. Objasni tu konstrukciju.

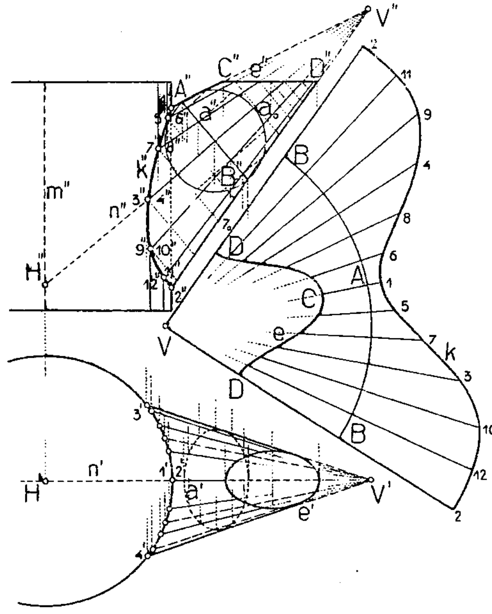
§ 199. Praktične primjene prodora valjka i stošca

1. Valjkasta posuda. U sl. 691. prikazan je tlocrt i nacrt valjkaste posude sa stožastim lijevkom. Obje su plohe rotacione i osi im se sijeku u točki $H(H', H'')$ pod kosim kutom. U ravnini $\mathbf{B} \perp \Pi_2$ uzet je kružni presjek stošca, kojemu je nacrt dužina a'', tlocrt elipsa a', a preložaj a_0. Ta je kružnica razdijeljena na 12 jednakih dijelova, te su kroz djelišta i vrhom

V položene izvodnice stošca. Te izvodnice sijeku valjak u točkama prodorne krivulje k. Tlocrt je k' kružni luk, a nacrt k'' luk hiperbole, koji bi se mogao odrediti i pomoću kugala, kojima je središte u točki H i koje sijeku jedno i drugo tijelo.

Stožac je gore omeđen horizontalnim eliptičnim presjekom $e(e', e'')$.

U sl. 692. prikazan je plašt stošca iz sl. 691., i to dijela između elipse e i krivulje k. Kod konstrukcije te mreže upotrebljena je kugla, kojoj je središte u vrhu V stošca i koja taj stožac siječe u kružnici a. Ako se dio plašta stošca, koji leži između vrha V i kružnice a, razgrne u ravninu, dobije se kružni isječak $VBAB$ (sl. 692.). Ako se sad odrede prave veličine dijelova izvodnica između vrha V i elipse e, te vrha i krivulje k, pa se te dužine prenesu na pripadne izvodnice u sl. 692. i točke spoje, dobit će se s jedne strane razastrta krivulja e, a s druge strane krivulja k. Prave se veličine dijelova izvodnica dobiju na pravcu $V''B''$, ako se s dotičnih točaka potegnu pravci okomito na $V''H''$. Na pr. $7''7_0 \perp V''H''$; $V''7_0 = V7$ i t. d.



Sl. 691. i 692.

2. Valjkasti svod sa stožastim prozorima. U sl. 693. prikazan je tlocrt, nacrt i bokocrt valjkastog svoda sa prozorom, koji je s gornje strane omeđen dijelovima rotacionog valjka i dijelom kosoga stošca, koji prodire svod u krivulji 414. Stožac je kos, vrh mu je $V(V', V'', V''')$, a jedan mu je kružni presjek u ravnini $\overline{4}\,\overline{1}\,\overline{4}$, koja je usporedna s Π_2. Strane su prozora omeđene dijelovima vertikalnih ravnina, kojima su tlocrti dužine $\overline{44}$.

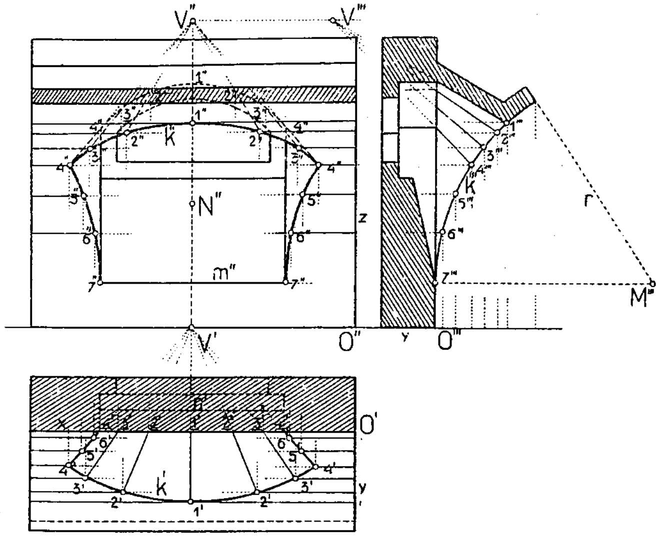
U sl. 694. prikazan je isti predmet u izometrijskoj projekciji.

§ 200. Prodor dvaju stožaca

1. Zadatak. *Odredi prodor dvaju kosih stožaca, kojima su osnovke u* Π_1! (Sl. 695.).

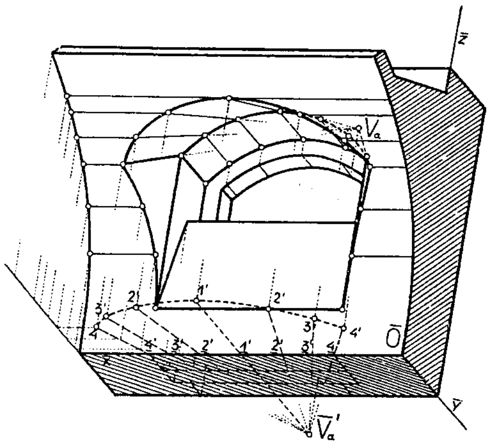
Rješenje. Prodor se ovih dvaju stožaca odredi na isti način kao što i prodor dviju piramida, kojima su osnovke u Π_1 ili Π_2. (Isp. § 93., sl. 310.).

Vrhovima U i V stožaca položi se pravac q i odredi njegovo prvo probodište Q_1. Ako se pravcem q položi ravnina, ona siječe svaki stožac u dvije izvodnice, a te izvodnice sijeku se u četiri točke, koje leže na pro-



Sl. 693.

dornoj krivulji k. Budući da su osnovke obaju stožaca u Π_1, crtat će se samo prvi tragovi pomoćnih ravnina. Svi ti tragovi idu točkom Q_1.



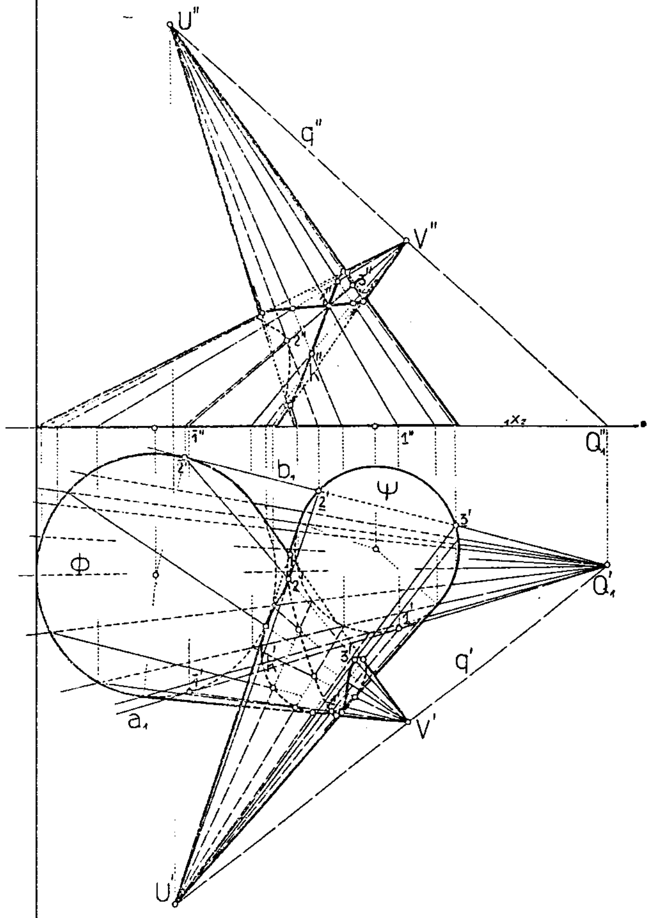
Sl. 694.

Stošci su tako zadani, da dirna ravnina **A** (trag a_1) dotiče oba stošca u izvodnicama $\overline{1}V$ i $\overline{1}U$. Te dvije izvodnice sijeku se u točki 1 u kojoj se dotiču oba stošca. Točka 1 je dvostruka točka krivulje k.

Ako se na stožac Φ položi dirna ravnina $\mathbf{B}$ $(b_1 \equiv Q_1\overline{2}')$, ona siječe stožac Ψ u dvije izvodnice $\overline{2}U$ i $\overline{3}U$. Te dvije izvodnice sijeku dirnu izvodnicu $\overline{2}V$ u točkama 2 i 3.

Polaganjem ravnina kroz pravac q i jednu konturnu izvodnicu dobit će se na svakoj konturnoj izvodnici po dvije točke, i još dvije točke u kojima se uopće sijeku po četiri izvodnice, koje leže u pomoćnoj ravnini.

Krivulja k' ima u točki 1' dvostruku točku. Ta krivulja dotiče prvu prividnu konturu obih stožaca. Krivulja k'' ima dvostruku točku u točki 1''.



Sl. 695.

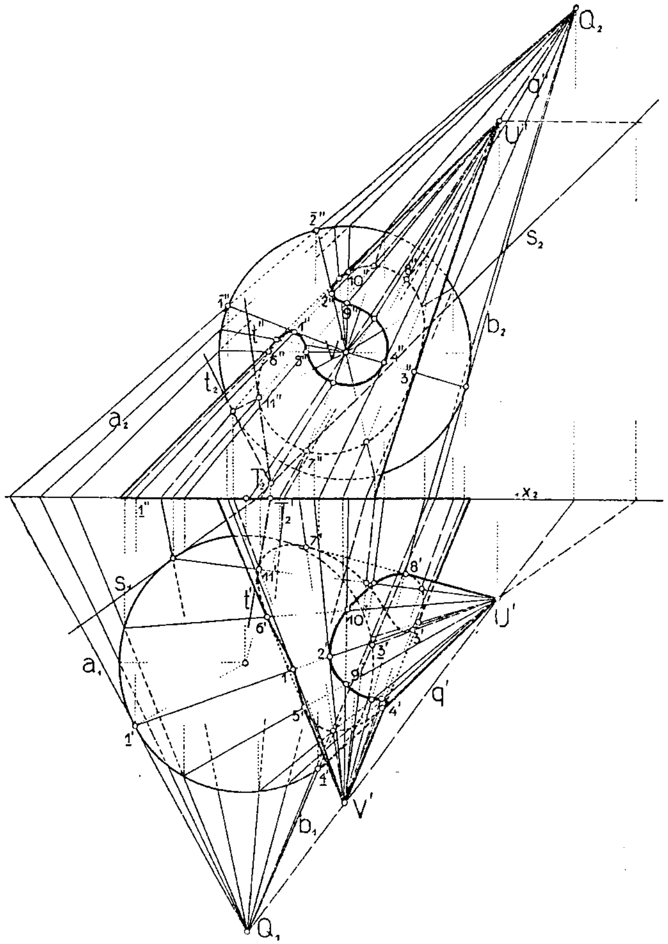
Ta krivulja dotiče drugu prividnu konturu jednoga i drugoga tijela.

Objasni vidljivost krivulje k u tlocrtu i nacrtu.

Konstruiraj u zgodno odabranoj točki krivulje k tangentu te krivulje.

2. Zadatak. *Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u* Π_1, *sa kosim stošcem, kojemu je osnovka u* Π_2! (Sl. 696.).

Rješenje. Ova će se zadaća riješiti na jednak način kako se određuje prodor dviju piramida, kojima su osnovke u različitim ravninama.



Sl. 696.

(Isp. § 93., sl. 310.). Pomoćne ravnine sadrže pravac q, koji spaja oba vrha U i V. Prvi tragovi idu kroz prvo probodište Q_1, a drugi tragovi idu kroz drugo probodište Q_2. U prvom redu treba odrediti one točke prodorne krivulje, koje leže na konturnim izvodnicama za tlocrt i nacrt. Zatim treba

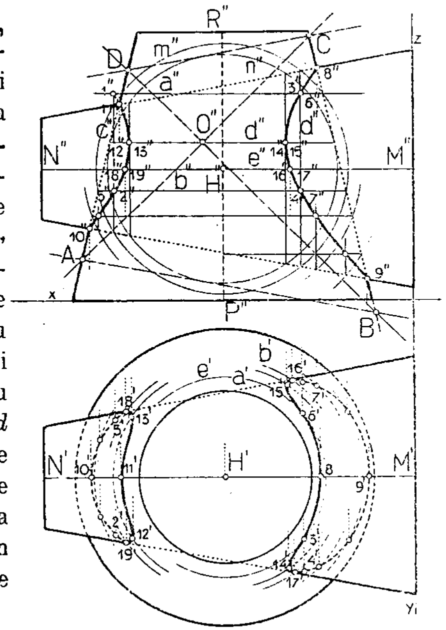
položiti dirne ravnine, koje dotiču jedan stožac, a sijeku drugi stožac. Na pr. dirna ravnina $A(a_1, a_2)$ kosoga stošca dotiče taj stožac i izvodnici $\overline{1U}$, a siječe rotacioni stožac u dvije izvodnice $\overline{1V}$ i $\overline{2V}$. Te tri izvodnice sijeku se u dvije točke 1 (1', 1'') i 2 (2', 2'') prodorne krivulje k.

Prodor je nepotpun, pa se prodorna krivulja sastoji iz jedne zatvorene grane, k' dotiče prvu prividnu konturu obih stožaca, a k'' dotiče drugu prividnu konturu kosoga stošca.

U točki 11 (11', 11'') konstruirana je tangenta $t(t', t'')$ prodorne krivulje $k(k', k'')$. Objasni tu konstrukciju.

3. Zadatak. *Zadana su dva usporedna krnja stošca, kojima se osi sijeku u točki* $H(H', H'')$ *pod pravim kutom. Osnovka je jednoga stošca u* Π_1, *a drugoga u* Π_3. *Neka se odredi prodor tih stožaca!* (Sl. 697.).

Rješenje. Ova će se zadaća riješiti pomoću kugala, koje jedan i drugi stožac sijeku u kružnicama. Središte tih kugala mora biti na osi jednoga i drugoga stošca, dakle u njihovom sjecištu H. (Isp. § 197., t. 1. c), sl. 676.). Ako se oko H'' opiše kružnica m'', ta se kružnica može smatrati nacrtom glavnog meridijana kugle. Ta kugla siječe svaki stožac u dvije kružnice a, b i c, d, kojima su nacrti dužine $a'' \parallel b'' \parallel x$ i $c'' \parallel d'' \perp x$. Te se dužine sijeku u četiri točke 1''—4'', koje leže na drugoj projekciji k'' prodorne krivulje k, ukoliko te točke ne padnu izvan zajedničkog prostora obaju stožaca (kao na pr. točka 1). Tlocrti kružnica a i b jesu kružnice a' i b' u pravoj veličini, a tlocrti kružnica c i d jesu dužine c', d' koje su usporedne sa osi y. Te dužine sijeku kružnice a', b' u točkama 2'—7', koje leže na krivulji k'. Pomoću drugih pomoćnih kugala mogu se odrediti nove točke krivulje k.



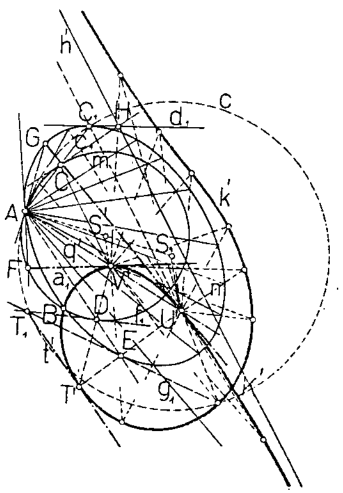
Sl. 697.

Budući da su oba tijela simetrična s obzirom na ravninu Σ, koja ide osi MN usporedno sa Π_2, simetrična je i krivulja k prema toj ravnini, pa prednja polovica prodorne krivulje pokriva u nacrtu stražnju polovicu. Zato se u točki 2'' nalazi i točka 5'', u točki 3'' nalazi se točka 6'', a u 4'' točka 7''. Krivulja k'' je luk hiperbole. U tlocrtu je k' simetrična prema pravcu $M'N'$

U ravnini Σ leže po dvije izvodnice svakoga stošca, pa se one sijeku u četiri točke 8—11, koje leže na k. Točke 16—19, koje leže na horizontalnim izvodnicama stošca, kojemu je os MN, odrede se pomoću kružnog presjeka e vertikalnog stošca.

Pomoću kugle, koja dotiče vertikalan stožac, dobiju se točke 12—15. U nacrtima 12''—15'' tih točaka tangente su na k'' među sobom usporedne, pa su te točke tjemena hiperbole k''. Polovište O'' dužine $12''14''$ je središte hiperbole. Ako se na kružnicu n'', koja dotiče drugu prividnu konturu vertikalnog stošca, povuku tangente usporedno s drugom prividnom konturom horizontalnoga stošca, te četiri tangente kružnice n'' sijeku se u četiri točke A, B, C, D, pa su pravci AC i BD asimptote hiperbole k''.

4. Zadatak. *Odredi prodor dvaju stožaca 2. reda, kojima su osnovke u* Π_1 *i koji imadu jednu zajedničku izvodnicu. Osnovka je jednoga stošca kružnica* m, *a vrh* V, *osnovka je drugoga stošca elipsa* n, *a vrh* U. (Sl. 698.).



Sl. 698.

Rješenje. Oba su stošca tako položena, da je prodorna krivulja k kubična elipsa. (Isp. § 187., t. 8. a). Osnovne krivulje m i n sijeku se u dvije točke A i B, te je točka A ujedno probodište zajedničke izvodnice $q \equiv UV$, koja je dio prodorne linije. Točke B, V, U jesu točke krivulje k. Ako se točkom A povuče kojigod pravac a_1, taj se pravac može smatrati tragom ravnine A, koja sadrži zajedničku izvodnicu q i još po jednu izvodnicu DV i EU svakoga stošca. Ove dvije izvodnice sijeku se u točki T krivulje k. Pomoću drugih ravnina, koje su položene pravcem q, dobit će se nove točke krivulje k, kojoj je tlocrt ravnična krivulja k'. Krivulja k' ima jednu dvostruku točku K' i jednu realnu asimptotu h'.

Da se dobije asimptota h' krivulje k', pomaknut će se stožac (Vm) usporedno tako, da mu vrh V padne u vrh U drugoga stošca. Ravnina Π_1 siječe pomaknuti stožac u kružnici c, kojoj je središte S_1 $(U'S_1 \parallel V'S')$, a polumjer S_1A. Kružnica c siječe elipsu n u točki C_1, pa je pravac UC_1 zajednička izvodnica stožaca (Un) i (Uc). Asimptota h krivulje k ima smjer izvodnice UC_1, a asimptota h' krivulje k' ima smjer pravca $U'C_1$. Ako se točkom V' povuče pravac $V'C \parallel U'C_2$, ta su dva pravca tlocrti jednoga

para usporednih izvodnica zadanih stožaca. Dirne ravnine na zadane stošce uzduž tih izvodnica sijeku se u asimptoti h. Tragovi se dirnih ravnina c_1 i d_1 sijeku u točki H, koja je probodište asimptote h. Točkom H ide asimptota h' krivulje k' usporedno s pravcem $U'C_2$.

Dirna ravnina stošca (Un) uzduž izvodnice Ua siječe stožac (Vm) u izvodnici FV, pa je pravac FV' tangenta krivulje k' u točki V'. Na sličan se način dobije tangenta GU' krivulje k' u točki U'.

Da se konstruira tangenta t' u točki T' krivujle k', povući će se tragovi f_1 i g_1 dirnih ravnina stožaca uzduž izvodnica DV i EU, pa će se njihovo sjecište T_1 spojiti s točkom T'. Tada je $t' \equiv T_1T'$.

5. Zadaci za vježbu

1. Precrtaj sl. 645., a onda izbriši donji dio piramide i gornji dio valjka počam od presjeka, te donji dio valjka produži.

2. Odredi prodor šesterostrane pravilne piramide s uspravnim valjkom, ako su osnovke obih tijela u Π_1 i ako im osi padaju zajedno. Uzmi, da su dva osnovna brida piramide usporedna sa osi x.

3. Odredi prodor peterostrane pravilne piramide, kojoj je osnovka u Π_1, sa rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u Π_3. Jedan je osnovni brid piramide AB [A (5,5 11,8 0), B (10,5 8 0)] a visina piramide $v = 10$. Os je valjka MN [M (11 5,5 4), N (0 5,5 4)], a polumjer $r = 3$. — Uputa: Upotrebi bokocrt.

4. Uzmi u sl. 646. da valjak *a)* dotiče brid AE, *b)* siječe brid AB i odredi prodor. Odredi mrežu prizme i valjka sa razastrtom prodornom krivuljom.

5. Odredi prodor kvadratične prizme, kojoj je osnovka u Π_3, sa rotacionim valjkom, kojemu je osnovka u Π_1.

6. Odredi prodor rotacionog valjka, kojemu je osnovka u Π_3, sa šesterostranom pravilnom prizmom, kojoj je osnovka u Π_1. Neka se osi obaju tijela sijeku.

7. Odredi prodor rotacionog stošca sa šesterostranom pravilnom prizmom, ako im osi padaju zajedno i okomito na Π_1. Neka je polumjer stošca $r = 4$, a polumjer šesterokutu opisane kružnice $r = 3$. Neka su nadalje dva osnovna brida prizme usporedna sa osi x.

ka se odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1, sa kvadratičnom prizmom, kojoj je osnovka u Π_1, ako se osi tih tijela sijeku.

9. Odredi prodor šesterostrane pravilne piramide, kojoj je osnovka u Π_1 i kojoj su dva osnovna brida usporedna sa osi x, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_1, te je manja od osnovke piramide. Osi obaju tijela padaju zajedno te je visina stošca veća od visine piramide.

10. Odredi prema sl. 648. prodor rotacionog stošca s kvadratičnom piramidom, ako je osnovka stošca veća od osnovke piramide i ako je visina piramide veća od visine stošca

11. Riješi istu zadaću kao pod br. 10. samo umjesto kvadratične piramide uzmi šesterostranu piramidu, kojoj su dva osnovna brida usporedna sa osi x.

12. Odredi prema sl. 649. prodor gornje polukugle s kvadratičnom prizmom, kojoj je osnovka upisana ekvatoru, zatim ispusti gornji dio prizme i donje dijelove polukugle. (Kuglasti svod).

13. Nacrtaj prema sl. 651. maticu vijka, koja je i s donje strane omeđena dijelom kugle.

14. Zadanu kuglu [O (6 5 4), $r = 4$] sijeci s kockom, kojoj je osnovka u Π_1, te joj je jedan brid AB [A (1,2 0,9 0). B (7 5 0)].

15. Zadana je četverostrana pravilna prizma, kojoj su pobočni bridovi 8 *cm* dugi, usporedni su s Π_1 i prema Π_2 nagnuti za 30°. Osnovni joj je brid = 3 *cm*. Nadalje je zadana kugla, kojoj je središte u polovištu osi prizme, a polumjer $r = 2{,}5$. Odredi prodor tih dvaju tijela. — Uputa: Upotrebi stranocrtnu ravninu Π_3, okomito na os prizme.

16. Uzmi prema sl. 652. da je piramida osmerostrana i pravilna, i da su joj dva brida okomita na osi x, pa odredi prodor toga tijela s kuglom.

17. Zadana je kugla [O (4,5 4,5 3), $r = 3$] i kvadratična piramida, kojoj je vrh V (4,5 4,5 0), dok joj je osnovka usporedna s Π_1 te joj je tlocrt tetivni kvadrat prividne konture kugle, a jedna mu je dijagonala priklonjena prema osi x za 25°.

18. Postavi prema sl. 654. valjak tako, da dotiče kuglu u jednoj točki i odredi prodor.

19. Postavi prema sl. 655. valjak tako, da siječe ekvator kugle u dvije točke i odredi prodor tih dvaju tijela. Odredi mrežu valjka s prodornom krivuljom.

20. Odredi prodor kugle s valjkom, kojemu je os okomita na Π_1, koji dotiče kuglu u točki ekvatora koja je posve sprijeda i kojemu je promjer jednak polumjeru kugle. (Vivianijev prozor).

21. Odredi prema sl. 657. prodor čitave kugle s kosim valjkom.

22. Zadan je rotacioni valjak, kojemu je os MN usporedna sa osi x i jednaka 8, a polumjer $r = 2{,}5$, nadalje je zadana kugla kojoj je polumjer $r = 3$ i koja dotiče valjak u točki koja leži na prednjoj izvodnici valjka. Odredi prodor tih dvaju tijela.

23. Rotacioni poluvaljak leži sa svojim osnim presjekom u Π_1, os mu je usporedna sa x, a polumjer mu je $r = 4{,}5$. Kugla dotiče Π_1, a središte joj je u polovištu najgornje izvodnice valjka. Odredi prodor tih dvaju tijela.

24. Odredi prodor kugle [O (4 4 4), $r = 3$] s rotacionim valjkom, kojemu je os MN [M (4,5 0 4,5), N (4,5 8 4,5)], $r_1 = 2{,}5$.

25. Zadan je kosi valjak kojemu je donja osnovka u Π_1, os mu je MN [M (3 3 0), N (8 6 7)], a polumjer $r = 2{,}5$; nadalje je zadana kugla kojoj je središte O u polovištu osi MN, a polumjer $r_1 = 3$. Odredi prodor tih dvaju tijela.

26. Uzmi prema sl. 659. da kugla dotiče stožac u izvodnici EV i odredi prodor tih dvaju tijela. Na pr. O (4 4 3), $r = 3$; SV [S (5 4 0), V(?), $r_1 = 4$].

27. Uzmi prema sl. 659. da kugla siječe obje izvodnice EV i FV stošca, ali da se središte kugle ne nalazi u osi stošca. Odredi prodor i konstruiraj tangentu u jednoj točki krivulje k.

28. Uzmi prema sl. 661. da kugla ne dotiče i ne siječe izvodnicu AV stošca i odredi prodor tih dvaju tijela.

29. Uzmi prema sl. 661. da kugla siječe obje izvodnice AV i BV, ali da se središte ne nalazi u osi stošca, pa odredi prodor tih dvaju tijela. Odredi mrežu stošca s prodornom krivuljom.

30. Odredi prema sl. 662. prodor kugle s kosim stošcem, ako stožac dotiče kuglu *a)* u jednoj točki, *b)* u dvije točke.

31. Namjesti prema sl. 662. kuglu i kosi stožac tako, da prodor bude nepotpun i odredi taj prodor.

32. Odredi prodor kugle [O (4 4,5 4), $r = 4$] s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2 [S (9 0 7), $r_1 = 3$] i visina $v = 10$.

33. Odredi prodor kugle [O (7,5 2,5 5), $r = 2{,}5$] s uspravnim stošcem, kojemu je os SV [S (6 0 4), V (6 6 4)] a polumjer $r_1 = 3$.

34. Odredi prodor kugle [O (5 4 5), $r = 3$] s kosim stošcem [S (6 0 4), V (0 6 4), $r_1 = 3$], kojemu je osnovka u Π_2.

35. Odredi prodor kugle sa uspravnim stošcem, kojemu je osnovka *a)* $\perp \Pi_1$, *b)* u Π_3.

36. Odredi prodor dvostrukog kosog šupljeg stošca, kojemu je jedna osnovka u Π_1 [S (7 2 0), $r = 2$, V (5 4 3)], s kuglom kojoj je središte u točki V, a polumjer $r_1 = 2{,}5$.

37. Odredi prodor kugle [O (5 3 4), $r = 2{,}5$] s kosim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2 [S (8 0 3), V (1 6 6), $r_1 = 3$].

38. Odredi prodor kugle [O (6 7 4,5), $r = 4$] s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_1 [S (6 7,5 0), V (6 7,5 11), $r_1 = 4{,}5$].

39. Odredi prodor dviju kugala kojima su središta M i N, a polumjeri r i r_1. Na pr.: *a)* M (4 4 3), $r = 3$, N (2 4 4), $r_1 = 2$; *b)* M (6 4 3), $r = 3$, N (4,5 5,5 4), $r_1 = 2{,}5$.

40. Odredi prodor kugle M (4 5 2,5), $r = 2{,}5$ sa šupljom polukuglom, koja dotiče Π_1, kojoj je središte N (5 4 4) a polumjer $r_1 = 4$.

41. Uzmi prema sl. 668. da vertikalan valjak ne siječe i ne dotiče prednju izvodnicu horizontalnoga valjka i odredi prodor tih valjaka te njihove mreže s prodornom krivuljom.

42. Uzmi prema sl. 668. da vertikalan valjak siječe prednju i stražnju izvodnicu horizontalnog valjka i odredi prodor i mrežu.

43. Uzmi prema sl. 668. da osi obih valjaka sijeku, da je polumjer vertikalnoga valjka manji od polumjera horizontalnoga valjka i odredi prodor.

44. Uzmi prema 43. zadatku da su polumjeri obih valjaka jednaki i odredi prodor.

45. Postavi dva valjka prema sl. 669. i uzmi *a)* da se oba valjka dotiču samo u točki 1., *b)* da je polumjer vertikalnoga valjka manji od horizontalnoga i da se osi valjaka sijeku, *c)* da je polumjer vertikalnoga valjka veći od polumjera horizontalnog valjka i da siječe *α*) samo prednju izvodnicu horizontalnoga valjka, *β*) samo stražnju izvodnicu, *γ*) i prednju i stražnju izvodnicu.

46. Odredi prodor dvaju rotacionih valjaka kojima se osi sijeku pod kutem od 60°, te je os jednoga valjka okomita na Π_1, a os drugoga valjka usporedna s Π_2. Neka su polumjeri valjaka *a)* jednaki *b)* nejednaki.

47. Odredi prodor dvaju rotacionih valjaka, ako je os jednoga valjka MN [M (6 3,5 0), N (6 3,5 5)], polumjer $r = 2$. Os drugoga valjka pada u pravac PQ [P (3,5 5 2,5), Q (6 3,5 2,5)], te joj je dužina $v = 6$. Polumjer je drugoga valjka $r_1 = 1{,}8$.

48. Rotacioni valjak [M (1 7 5), N (9 2,5 5), $r = 2$] prodire rotacioni valjak [P (5 5,5 0), Q (5 5,5 1)] tako, da se oba valjka dotiču u jednoj točki. Konstruiraj drugi valjak i odredi prodor.

49. Odredi prodor dvaju rotacionih valjaka, koji leže na Π_1 duž izvodnica AB [A (2 4 0), B (9 8 0)], $r = 2$ i CD [C (8 5 0), D (0 9 0)], $r_1 = 2$.

50. Uzmi prema sl. 670. da je rotacioni valjak tako postavljen prema kosom valjku: *a)* da siječe obje izvodnice AB i CD, *b)* da siječe izvodnicu CD, a da izvodnicu AB ne siječe i ne dotiče, *c)* da dotiče obje izvodnice AB i CD, *d)* da je polumjer rotacionog valjka manji od polumjera kosoga valjka i da im se osi sijeku, *e)* da dotiče izvodnicu CD i da siječe izvodnicu AB. Odredi svaki put prodor i mrežu rotacionog valjka s prodornom krivuljom.

51. Postavi u sl. 671. lijevi valjak tako *a)* da trag a_1 dotiče njegovu osnovku, *b)* da tragovi a_1 i b_1 dotiču njegovu osnovku, *c)* da trag a_1 ne siječe i ne dotiče njegovu osnovku, *d)* da trag b_1 dotiče osnovke obih valjaka. Odredi prodor.

52. Postavi prema sl. 672. valjak Ψ prema valjku Φ tako: da trag b_1 dotiče osnovku valjka Φ, a trag b_2 osnovku valjka Ψ, *b)* da tragovi a_1 i b_1 dotiču osnovku valjka Φ, a tragovi a_2 i b_2 osnovku valjka Ψ, *c)* da trag b_1 ne siječe i ne dotiče osnovke valjka Φ, *d)* da trag a_1 dotiče osnovku valjka Φ, a trag a_2 osnovku valjka Ψ. Odredi prodor.

53. Odredi prodor dvaju kosih valjaka, kojima osnovke leže u Π_2, ako je os jednoga valjka MN [M (3 0 3), N (3 6 8)] i polumjer $r = 3$, a os drugoga valjka PR [P (9 0 3), R (2 6 7,5)] i polumjer $r_1 = 2{,}5$.

54. Odredi prodor dvaju kosih valjaka, kojima su osnovke u različitim ravninama, ako je os jednoga valjka MN [M (9 0 2), N (3 6 5)] i polumjer $r = 2$, a os drugoga valjka PR [P (2 2 0), R (8 5 8)] i polumjer $r_1 = 1{,}5$.

55. Osnovka je rotacionog valjka u ravnini Σ (3 7 ∞), središte joj je M (1 ? 3), polumjer $r = 2{,}5$, a visina $v = 10$. Smjer je izvodnica kosoga valjka AB [A (11 5 4), B (13,5 2 0)], njegova je osnovka u Π_1, a polumjer mu je r_1. Osnovku kosoga valjka treba tako odabrati, *a)* da bude prodor potpun ($r_1 = 2{,}5$), *b)* da prodor bude nepotpun ($r_1 = 2{,}5$), *c)* da se oba valjka dotiču u jednoj točki ($r_1 = 3$), *d)* da se oba valjka dotiču u dvije točke. Odredi prodor.

56. Osnovka je rotacionog valjka u Π_2, središte joj je M (9 0 4) a polumjer $r = 3$, visina je valjka $v = 10$. Osnovka je kosoga valjka u Π_1, a središte joj je P (13 5 0). Izvodnice su kosoga valjka usporedne s Π_2 i prema Π_1 nagnute za 45°, te jedna njegova konturna izvodnica dotiče rotacioni valjak. Visina je kosoga valjka $v_1 = 8$. Odredi prodor tih dvaju valjaka.

57. Odredi prodor dvaju kosih valjaka, kojima su osnovke u Π_2, osi su im dužine MN i PR, a polumjeri r i r_1. Na pr. MN [M (3 0 3), N (11 6 8)], $r = 2$; PR [P (9 0 4), R (4 7 6)], r treba tako odabrati, da prodorna krivulja ima *a)* jednu dvostruku točku, *b)* da nema nijedne dvostruke točke. Odredi prodor.

58. Uzmi prema slici 687. da je rotacioni valjak prema rotacionom stošcu tako položen *a)* da siječe izvodnice AV i BA, *b)* da siječe izvodnicu BV, a izvodnicu AV da ne siječe i ne dotiče, *c)* da dotiče obje izvodnice AV i BV, *d)* da središte kružnice k'' na pravcu $S''V''$ i da ta kružnica ne siječe $A''V''$ i $B''V''$. Odredi prodor.

59. Uzmi prema slici 688. da kružnica k''' dotiče *a)* oba pravca $E'''V'''$ i $F'''V'''$ *b)* da dotiče pravac $F'''V'''$, a pravac $E'''V'''$ ne dotiče i ne siječe, *c)* da dotiče pravac $F'''V'''$, a pravac $E'''V'''$ da siječe, *d)* da oba pravca $E'''V'''$ i $F''V'''$ siječe, *e)* da pravac $F'''V'''$ siječe, a pravac $E'''V'''$ ne siječe i ne dotiče. Odredi prodor i mrežu stošca i valjka s prodornom krivuljom.

60. Riješi zadatke pod br. 58., ako se osnovka rotacionog stošca nalazi u Π_2, a osnovka rotacionog valjka u Π_1.

61. Uzmi u sl. 688. da je os rotacionog stošca $\perp \Pi_1$, a os MN valjka da je $\parallel \Pi_1$ i prema Π_2 nagnuta za 30° i odredi prodor. — Uputa: Upotrebi ravninu $\Pi_3 \perp MN$.

62. Uzmi prema sl. 689. da su valjak i stožac tako namješteni *a)* da trag a_1 dotiče osnovku valjka i stošca, *b)* da trag a_1 dotiče osnovku valjka, a siječe osnovku stošca. *c)* da trag b_1 dotiče osnovke stošca i valjka. Odredi prodor.

63. Uzmi prema sl. 690. da su valjak i stožac među sobom tako namješteni *a)* da trag a_2 dotiče osnovku valjka, a trag a_1 da dotiče osnovku stošca, *b)* da tragovi a_2 i b_2 dotiču osnovku valjka, a tragovi a_1 i b_1 da dotiču osnovku stošca, *c)* da trag a_1 dotiče osnovku stošca, a trag a_2 da siječe osnovku valjka. Odredi prodor i mrežu stošca s prodornom krivuljom.

64. Odredi prodor kosoga valjka s kosim stošcem, kojima su osnovke u Π_2. Os je valjka MN [M (3 0 3,5), N (6 5 5,5)] i polumjer $r = 1{,}5$; os je stošca SV [S (7,5 0 2,5), V (1,5 6 5,5)] i polumjer $r_1 = 2{,}5$.

65. Odredi prodor dvostrukog rotacionog stošca s rotacionim valjkom, kojima su osnovke u Π_1. Središte je donje osnovke stošca S (4 3 0), polumjer $r = 3$, visina $SV = 3{,}5$. Središte je donje osnovke valjka M (4,5 3,5 0), $v_1 = 2$, $v_1 = 8$.

66. Odredi prodor kosoga valjka, kojemu je osnovka u Π_1, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2. Os je valjka MN [M (10 3 0), N (0 3 7)], $r = 2{,}5$. Os je stošca SV [S (5 0 4), V (5 7 4)], $r_1 = 3$.

67. Odredi prodor rotacionog valjka, kojemu je osnovka u Π_2, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u ravnini Σ (4 ∞ 6). Središte je osnovke valjka M (—1 0 3), $r = 2$; središte je osnovke stošca S (1 3 ?), $r_1 = 2{,}5$, $v_1 = 7$.

68. Zadan je rotacioni stožac koji dotiče Π_1 u izvodnici AV [A (8 8 0), V (1 1 0)], $r = 4$, zatim kosi valjak kojemu je osnovka u Π_1, te mu je os MN [M (6,5 6 0), N (0 2 5)], $r_1 = 2$. Odredi prodor.

69. Zadan je kosi valjak kojemu je osnovka u Π_1, te mu je os MN [M (2 3 0), N (7 3 5)], $r = 2$, nadalje je zadan rotacioni stožac kojemu je osnovka u Π_2 [središte S (4,5 0 2,5), vrh V (4,5 7 2,5), polumjer r_1]. Osnovku stošca treba tako položiti *a)* da prodor bude potpun ($r_1 = 2{,}5$); *b)* da prodor bude nepotpun ($r_1 = 3$); *c)* da se oba tijela dotiču u jednoj točki ($r_1 = 3$).

70. Odredi prodor rotacionog stošca |SV [S (6 4 0), V (6 4 7)], $r = 3$|, s kosim valjkom |MN [M (11 0 3), N (1 7 3)], $r_1 = 2{,}5$|.

71. Odredi prodor kosoga stošca |SV [S (3 0 5), V (10 10 7,5)], $r = 4$, osnovka u Π_2| sa kosim valjkom |MN [M (0 3 0), N (3 3 9)], $r = 2{,}5$, osnovka u Π_1|.

72. Odredi prodor rotacionog stošca |SV [S (4 5 5,5), V (13 5 0)], $r = 3$|, s rotacionim valjkom kojemu je izvodnica AB [A (7,5 1 0), B (10 6,5 0)] u Π_1, a polumjer osnovke $r_1 = 2$.

73. Namjesti oba stošca u sl. 695. tako *a)* da trag a_1 dotiče osnovku stošca Φ, a siječe osnovku stošca Ψ, *b)* da trag b_1 dotiče obje osnovke a trag a_1 da dotiče osnovku stošca Φ, a siječe osnovku stošca Ψ, *c)* da trag a_1 dotiče osnovku stošca Ψ, a siječe osnovku stošca Φ. Odredi prodor.

74. Namjesti oba stošca u sl. 696. tako, *a)* da trag b_1 dotiče osnovku kosoga stošca, a trag b_2 da dotiče osnovku rotacionog stošca, *b)* da trag a_2 dotiče osnovku rotacionog stošca, a trag a_1 da siječe osnovku kosoga stošca, *c)* da trag a_1 dotiče osnovku kosoga stošca, a trag a_2 osnovku rotacionog stošca. Odredi prodor.

75. Uzmi u sl. 697. da je vertikalni stožac uži, a horizontalni da je deblji i odredi prodor.

76. Uzmi prema sl. 697. da su oba stošca potpuna i da se dotiču u dvije točke (dotiču istu kuglu), pa odredi prodor.

77. Odredi prodor dvaju kosih stožaca kojima su osnovke u Π_2. Os je prvoga stošca SV [S (7 0 4), V (6 3 4)], $r = 3$, a os drugoga stošca MU [M (7 0 4), U (9 0 4)], $r_1 = 2$.

78. Odredi prodor rotacionog stošca |SV [S (9 7 0), V (9 7 7)], $r = 3$| s kosim stošcem |MU [M (11 4 0), U (5 8 7)], $r_1 = 4$|. Osnovke su u Π_1.

79. Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1 |SV [S (10 5 0), V (10 5 12)], $r = 3{,}5$|, s kosim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2 |MU [M (9 0 6), U (12 12 0)], $r_1 = 3{,}5$|.

80. Odredi prodor dvaju kosih stožaca, kojima su osnovke u Π_1. |SV [S (4,5 3 0), V (10 6 7,5)], $r = 2{,}5$; MU [M (9 7 0), U (5 3 5)], $r_1 = 3$|.

81. Odredi prodor kosoga stošca, kojemu je osnovka u Π_1. |SV [S (4,5 3 0), V (12 2 7)], $r = 3$|, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_2. |MU [M (7,5 0 2,5), U (7,5 7 2,5)], $r_1 = 2{,}5$|.

82. Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_2. |S (3 0 3), $r = 3$, $v = 8$|, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u Π_3. |MU [M (0 3 3), U (7 3 3,5)], $r_1 = 2{,}5$|

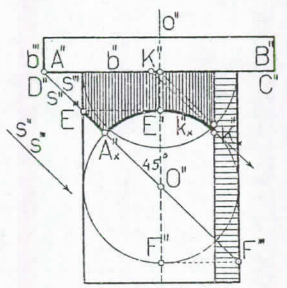
83. Odredi prodor rotacionog stošca, kojemu je osnovka u Π_1. | SV [S (5 3,5 0), V (5 3,5 7)], $r = 3$ |, s rotacionim stošcem, kojemu je osnovka u ravnini **A** (6 9 ∞), te joj je središte M (2 — 3), $r_1 = 3$, $v_1 = 6$.

84. Zadan je dvostruki kosi stožac, kojemu su središta osnovaka M (6 4 0) i N (3 2,5 7), polumjeri $r = 2,5$, a vrh U leži u središtu osi MN; nadalje je zadan rotacioni stožac, kojemu je osnovka u Π_1 | SV [S (4,5 3,5 0), V (4,5 3,5 8)], $r_1 = 1$. Odred prodor. Uzmi da je dvostruki stožac šupalj.

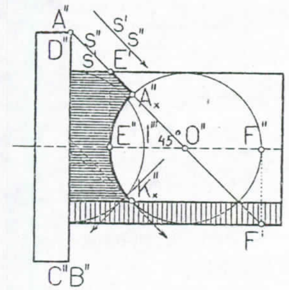
XXXII. Konstrukcija sjena. Kombinirani zadaci u vezi sa valjcima, stošcima i kuglama

§ 201. Bačena sjena predmeta na valjak, stožac ili kuglu

1. Bačena sjena kvadratične ploče na rotacioni valjak. U sl. 699. prikazan je u nacrtu rotacioni valjak, kojemu je os $\perp \Pi_1$, i koaksijalna kvadratična ploča, kojoj je prednja pobočka usporedna s Π_2. U toj slici konstruirane su sjene u nacrtu kod dijagonalne rasvjete i to samo na prednjoj polovici predmeta. Na valjku dolazi rastavnica i bačena sjena ploče. Sjenu bacaju na valjak donji bridovi AB i AD ploče. Ravnine položene tim bridovima usporedno sa zrakama svijetla s sijeku valjak u elipsama, koje su bačene sjene tih bridova na valjak. Budući da bačena sjena pada samo na osvijetljeni dio plašta, dovoljno je da se konstruira samo taj dio sjene. Brid AD okomit je na Π_2, pa je ravnina položena tim bridom usporedno sa zrakama svijetla okomita na Π_2, te siječe valjak u elipsi, kojoj



Sl. 699.



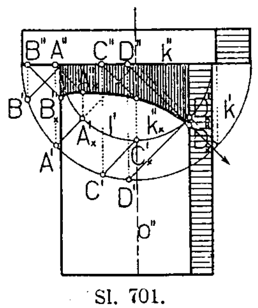
Sl. 700.

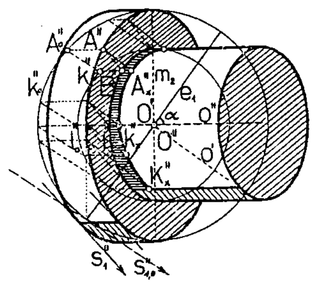
je nacrt u pravcu, koji ide točkom A'' usporedno sa s''. Zraka položena točkom A siječe valjak u točki A_x (A''_x), koja je bačena sjena točke A na valjak.

Ravnina Σ položena bridom AB usporedno sa zrakama svijetla siječe valjak u elipsi, kojoj je nacrt kružnica k''_x. Slika 699. može se smatrati i bokocrtom predmeta. Može se uzeti da je bokocrt brida AB u točki A''. Ravnina Σ okomita je na Π_3, pa je bokocrt presječne elipse dužina $E'''F''' \parallel s'''$. Nacrt $E''F''$ je jedna os krivulje k''_x. Budući da je $\triangle\ O''E''E'''$ istokračan pravokutan, slijedi da je $O''E'' = E''E''' = r$, gdje je r polumjer valjka. Budući da su obje osi krivulje k''_x jednake slijedi, da je ta krivulja kružnica. Na toj kružnici leži točka A''_x. Ta kružnica siječe nacrt rastavnice u točki K_x''. Tangenta u toj točki na kružnicu k''_x usporedna je s pravcem s''. Dirna je naime ravnina valjka uzduž rastavnice usporedna sa zrakama svijetla, a jer je i ravnina Σ usporedna s tim zrakama, obje se te ravnine sijeku u pravcu, koji također mora biti usporedan sa zrakama svijetla. Budući da je točka K_x zajednička točka tih dviju ravnina, presječnica ide tom točkom, usporedna je sa s i dotiče k_x.

2. U slici 700. riješen je isti zadatak kao u t. 1., samo što je ovdje os valjka usporedna sa osi x. Postupak je isti, samo što sada ista projekcija vrijedi kao tlocrt i nacrt predmeta.

3. **Bačena sjena valjkaste ploče na rotacioni valjak.** U sl. 701. prikazan je u nacrtu rotacioni valjak kojemu je os $\perp \Pi_1$. Na tom valjku leži koaksijalno valjkasta ploča, kojoj je polumjer veći od polumjera donjega valjka. Najprije je određena rastavnica na jednom i na drugom valjku, zatim bačena sjena k_x donje osnovne kružnice k ploče na valjak. Zrake


Sl. 701.

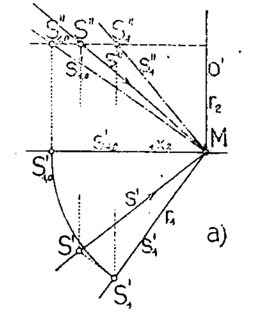

Sl. 702.

svijetla uzduž kružnice k čine kosi valjak, koji prodire donji rotacioni valjak u krivulji 4. reda. Jedan je dio te krivulje k_x. Zajednička ravnina gornje osnovke valjka i donje osnovke ploče neka je prva ravnina projekcija Π_1. Polukružnice l' i k' jesu tlocrti prednjih polovica osnovnih kružnica k i l. Tlocrt je k'_x bačene sjene kružnice k na donji valjak identičan s kružnicom l'. Iz tlocrta odredi se nacrt k''_x. Najviša je točka bačene sjene u $A_x(A'_x, A''_x)$. Tangenta je u toj točki na krivulju k_x horizontalna. Točka B baca sjenu na lijevu konturnu izvodnicu valjka. Točka D baca sjenu na rastavnicu valjka u točku $D_x(D'_x, D''_x)$. Tangenta je u točki D_x na krivulju k_x usporedna sa zrakom svijetla. (Isp. t. 1.).

Uopće: *Ako bačena sjena krivulje na krivu plohu siječe rastavnicu te plohe, onda je tangenta u toj točki na bačenu sjenu usporedna sa zrakom svijetla.*

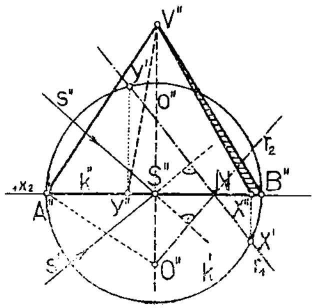
4. **Bačena sjena valjkaste ploče na valjak.** U sl. 702. prikazan je isti predmet kao u sl. 701. (t. 3.), samo što je ovdje zajednička os valjka

i ploče usporedna s Π_1. Nacrti su osnovaka elipse. U sl. 702. a) uzela se pomoćna os x, na njoj se uzela točka M i kroz nju se položila zraka svijetla $s(s', s'')$. Nadalje se kroz točku M položila ravnina $\mathbf{P}(r_1, r_2)$ usporedno s ravninama osnovaka valjaka ($\mathbf{P} \perp \Pi_1$). Na tu se ravninu ortogonalno projicira zraka s. Te su projekcije pravci s'_1 i s''_1. ($S'S'_1 \perp r_1$, $S''S''_1 \perp r_2$). Zatim se ravnina **P** zajedno sa zrakom s_1 rotirala oko traga r_2 u ravninu Π_2. Projekcije su rotirane zrake pravci $s'_{1,0}$ i $s''_{1,0}$ · ($MS'_{1,0} = MS_1'$, i t. d). Ako se i osnovke valjaka rotiraju oko traga m_2 u istom smislu, one će se prikazati kao kružnice l''_0 i k''_0. Ako se na te kružnice povuku tangente usporedno s pravcem $s''_{1,0}$, pa se dirališta rotiraju natrag, dobit će se nacrti točaka kroz koje idu nacrti rastavnica valjaka. Te točke leže na elipsama l'' i k'', a mogu se dobiti kao dirališta tangenata povučenih na te elipse usporedno s pravcem s''_1.


Sl. 702 a)

Kružnica k baca sjenu na valjak u krivulju k_x. Da se dobije kojagod točka A''_x, uzet će se na elipsi k'' po volji točka A'' i tom točkom povući će se pravci usporedno s pravcima s''_1 i s''. Ti pravci čine ravninu koja siječe valjak u izvodnici BA_x (B'' na l'', $B''A''_x \| o''$). Za konstrukciju točke A''_x može se upotrebiti i rotirana točka A_0 ($A''_0B''_0 \| s''_{1,0}\ldots$). Na jednak se način odredi povoljan broj točaka krivulje k''_x

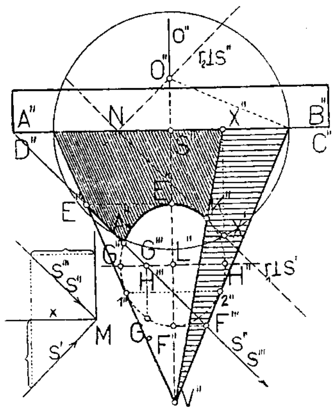
5. **Određivanje rastavnice rotacionog stošca pomoću dirne kugle.** U sl. 703. nacrtana je druga projekcija rotacionog stošca. Ako se u točki A'' postavi okomica na $A''V''$, ona siječe nacrt o'' osi stošca u točki O''. Ta je točka nacrt središta O kugle, koja je upisana stošcu uzduž osnovne kružnice k. Uzet će se da je ravnina $\Pi_2 \equiv \triangle ABV$. U tom je slučaju točka O u ravnini Π_2. Ako se tom točkom položi ravnina **P** okomito na zraku svijetla s, u toj ravnini leži rastavnica kugle. Drugi trag r_2 ravnine **P** ide točkom $O \equiv O''$ okomito na s'' i siječe os x u točki N. Tom točkom ide prvi trag $r_1 \perp s'$. Trag r_1 leži u ravnini osnovke stošca i siječe osnovnu kružnicu u točkama X i Y, koje pripadaju rastavnici kugle. Dirna ravnina kugle u točki X (ili Y) ujedno je i dirna ravnina stošca uzduž izvodnice XV (ili YV). Budući da je ta ravnina usporedna sa zrakama svijetla, slijedi da je izvodnica XV (YV) rastavnica stošca. Trag


Sl. 703.

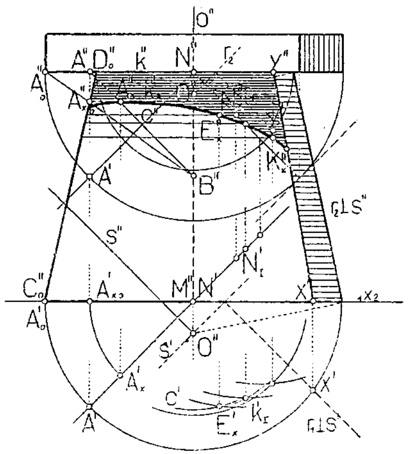
r_1 siječe preloženu osnovnu kružnicu k' u točkama X' i Y'. Nacrt je X'' i Y'' točaka X i Y u osi x, i t. d.

6. Bačena sjena prizmatične ploče na rotacioni stožac. U sl. 704. prikazan je rotacioni stožac u nacrtu, os mu je o vertikalna, a vrh ispod osnovke. Na osnovci leži kvadratična ploča, kojoj je prednja pobočka $\parallel \Pi_2$.

Rastavnica na stošcu određena je pomoću dirne kugle, kojoj je središte $O \equiv O''$. Na stožac baca sjenu brid $AD \perp \Pi_2$ i $AB \perp \Pi_3$. Ravnina položena bridom AD usporedno sa zrakama svjetla siječe stožac u elipsi, koja se na Π_2 projicira u pravac, koji ide točkom A'' usporedno sa s''. Točka A_x je bačena sjena točke A na stožac. Ravnina Σ položena bridom AB usporedno sa s također siječe stožac u elipsi k_x, kojoj je treća projekcija dužina $E'''F'''$ (isp. t. 1). U tu elipsu pada bačena sjena brida AB na stožac. Potražit će se druga projekcija k_x'' elipse k_x. Nacrti su E'' i F'' točaka E i F u pravcu o'', te je $E''F''$ velika os elipse k''_x. U središtu dužine $E'''F'''$ nalazi se treća projekcija druge osi GH elipse k_x. Ta je



Sl. 704.



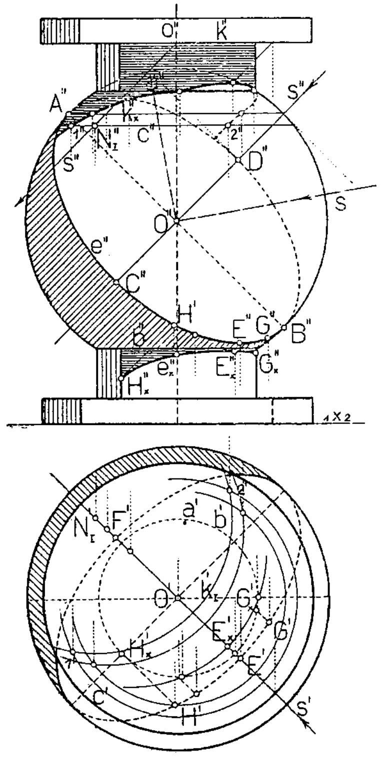
Sl. 705.

os jednaka tetivi kružnoga presjeka stošca, koja je u središtu $E'''F'''$ okomita na Π_3. Ako se kružni presjek preloži u Π_2, dobit će se $G'''G_0 = 1/2\, GH$. Budući da je tetiva GH usporedna s Π_2, ona se na tu ravninu projicira u pravoj veličini. Ako se prema tome učini $L''G'' = L''H'' = G'''G_0$, onda je $G''H''$ druga os elipse k''_x. Kao granica bačene sjene dolazi u obzir samo luk $A''_x E'' K''_x$.

Elipsa k''_x dotiču drugu prividnu konturu stošca u točkama 1'' i 2''. Treća je projekcija tih točaka u sjecištu pravaca o'' i $E'''F'''$.

7. Bačena sjena valjkaste ploče na krnji stožac. U sl. 705. prikazan je u nacrtu rotacioni krnji stožac, kojemu je os $o \perp \Pi_1$. Na gornjoj osnovci namještena je valjkasta ploča, kojoj je pravac o također os. Na tim tijelima određene su rastavnice. Rastavnica na stošcu određena je pomoću dirnih kugala uzduž donje i gornje osnovne kružnice.

Donja osnovna kružnica k valjkaste ploče baca sjenu na stožac. Zrake svijetla uzduž te kružnice čine kosi valjak, koji prodire krnji stožac u krivulji 4. reda. U jednu granu te krivulje pada sjena k_x kružnice k. Ako se kroz os o položi ravnina Δ usporedno sa zrakama svijetla, ona siječe kružnicu k u točki $A(A', A'')$, a stožac u izvodnici CD. Zraka položena točkom A siječe tu izvodnicu u točki A_x, koja je bačena sjena točke A na stožac. Da se dobiju projekcije točke A_x može se postupati ovako: Ravnina Δ okrenut će se oko osi o u ravninu Π_2, koja je položena osi o. Točka A doći će u točku $A_0(A'_0, A''_0)$, izvodnica CD doći će u konturnu izvodnicu $C_0D_0\,(C'_0D'_0,\ C''_0D''_0)$. Zraka svijetla, koja ide točkom A, siječe os o u točki B i ta točka ostane kod rotacije na istom mjestu. Prema tome u pravcu A''_0B'' nalazi se nacrt rotirane zrake. Pravac A''_0B'' siječe $C''_0D''_0$ u točki A''_{x0}, koja je nacrt rotirane bačene sjene. Ako se ta točka okrene natrag u svoj položaj, dobit će se projekcije A'_x, A''_x točke A_x. Krivulja k_x simetrična je s obzirom na ravninu Δ, pa je točka A_x najviša točka te krivulje.



Sl. 706.

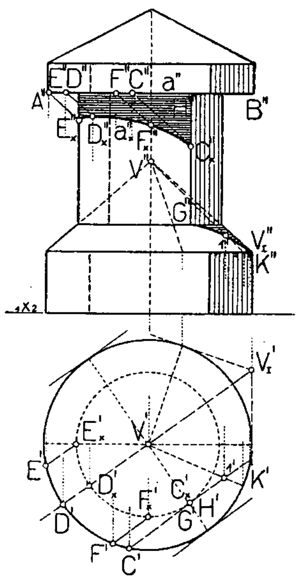
Da se dobije druga koja točka E_x krivulje k_x položit će se niže od točke A_x horizontalna ravnina Γ, pa će se njom sjeći stožac u kružnici $c(c', c'')$ i odredit će se bačena sjena kružnica c i k na ravninu Γ. Kružnica c je sama svoja sjena, a sjena kružnice k bit će kružnica $k_1 \cong k$ kojoj je središte $N_1\,(N'_1, N''_1)$. Kružnice c i k_1 sijeku se u točkama $E_x(E'_x, E''_x)$ i F_x, i te su točke bačene sjene dviju točaka E i F kružnice k na stožac. (Točka F_x je na stražnjoj polovici pa u slici nije konstruirana). Na jednak način može se dobiti povoljan broj točaka krivulje k_x. Ta krivulja siječe rastavnicu stošca u točki K_x. Tangenta na k_x u toj točki usporedna je sa zrakom s. Točka K_x može se točno dobiti tako, da se odrede bačene sjene rastavnice XY stošca i kružnice k na Π_1, pa se sjecištem tih sjena povuče zraka svijetla natrag.

8. **Bačena sjena valjkaste ploče na kuglu.** U sl. 706. nacrtane su projekcije kugle, koju prodire rotacioni valjak, a čija os o ide središtem kugle okomito na Π_1. Taj valjak omeđen je s gornje i donje strane širokom valjkastom pločom. Srednji valjak i kugla prodiru se u dvije kružnice a i b. Na kugli i na valjcima određene su rastavnice na poznati način.

Kugla baca sjenu na donji dio valjka. Granicu e_x te sjene čini bačena sjena rastavnice e kugle na valjak. Najniža točka E rastavnice e baca sjenu u najvišu točku E_x krivulje e_x. Točka G baca sjenu na konturnu izvodnicu, a točka H baca sjenu na rastavnicu valjka.

Donja osnovna kružnica k gornje ploče baca sjenu na gornji dio valjka i na kuglu. Dio sjene, koji pada na valjak odredi se kao u t. 3., a dio sjene, koji pada na kuglu odredi se kao u t. 7.

9. **Sjene složenoga tijela.** U sl. 707. prikazane su projekcije okruglog stupa, koji je složen iz tri valjka, jednog krnjeg i jednog potpunog stošca.



Sl. 707.

Rastavnice se na valjku odrede na poznati način. Rastavnice se na krnjem stošcu odrede tako, da se taj stožac nadopuni na potpuni stožac. Plašt je gornjega stošca rasvijetljen, pa na njemu nema rastavnica.

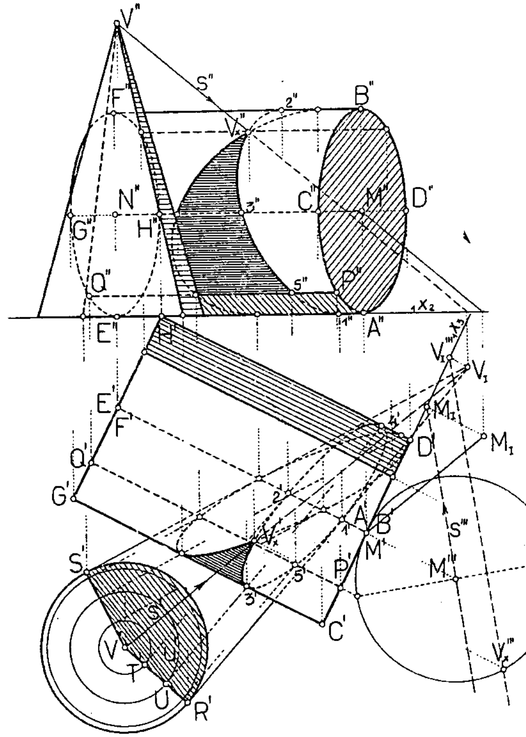
Obodnica a donje osnovke, kojoj je nacrt dužina $A''B'' \equiv a''$, gornje valjkove ploče, baca sjenu na srednji valjak. Ta se bačena sjena odredi kao u t. 3. Najviša je točka te sjene u D_x (D'_x, D''_x). Točka C (C', C'') baca sjenu na rastavnicu u točku C_x($C'_x C''_x$), a točka$E$(E', E'') baca sjenu na lijevu konturnu izvodnicu u točku E_x (E'_x, E_x'').

Rastavnica GH srednjeg valjka baca sjenu na krnji stožac. Ta sjena pada u presječnicu toga stošca s dirnom ravninom valjka duž izvodnice GH. Taj je presjek luk hiperbole, koji se na Π_1 projicira kao dužina $G'K'$, a na Π_2 kao luk hiperbole. Taj luk počima u G'', a svršava u K''. Da se odredi treća točka 1'' toga luka uzet će se 1' na $G'K'$, pa će se pomoću stoščeve izvodnice, koja ide točkom 1, odrediti 1''.

I druga rastavnica srednjega valjka baca sjenu na krnji stožac. Odredi tu sjenu.

10. **Bačena sjena okruglog tijela na okruglo tijelo.** U sl. 708. zadan je uspravan stožac s osnovkom u Π_1 i uspravan valjak, koji svojim plaštem dotiče Π_1 u izvodnici AE. U toj slici određene su rastavnice obih tijela te bačena sjena stošca na valjak.

Rastavnica stošca odredi se na poznati način. Rastavnica na valjku odredi se spomoću stranocrta. Stranocrt je valjka kružnica (Vidi § 168., t. 3., sl. 592.).



Sl. 708.

Bačena se sjena stošca odredi na valjak tako, da se odredi bačena sjena stoščevih rastavnica RV i SV na osvijetljeni dio valjka. Ta će se sjena dobiti kao presječnica valjka s dirnim ravninama RVV_1 i SVV_1 stošca uzduž izvodnica RV i SV. Svaka ta ravnina siječe valjak u elipsi, pa će dijelovi tih elipsi omeđivati bačenu sjenu stošca na valjak.

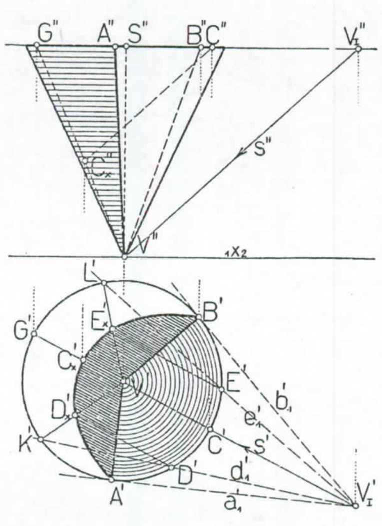
Prvi trag $R'V_1$ dirne ravnine RVV_1 siječe najnižu izvodnicu AE u točki 1'. Da se dobiju projekcije točke 2, u kojoj dirna ravnina siječe najvišu izvodnicu BF, položit će se tom izvodnicom horizontalna ravnina i njom će se sjeći izvodnica RV u točki $T(T', T'')$. Položi li se točkom T sutražnica usporedno s prvim tragom $R' V_{\mathrm{I}}$, ona siječe izvodnicu BF u točki $2\,(2', 2'')$. Budući da su tangente u točkama 1 i 2 presječne elipse usporedne, dužina je 12 promjer te elipse. Da se dobiju točke 3 i 4 elipse, koje leže na izvodnicama CG i DH, položit će se tim izvodnicama horizontalna ravnina i njom će se sjeći rastavnica RV u točki $U(U', U'')$. Povuče li se tom točkom sutražnica usporedno s $R' V_{\mathrm{I}}$, ona siječe izvodnice CG i DH u točkama $3\,(3', 3'')$ i $4\,(4', 4'')$. Dužina je 34 drugi promjer elipse, koji s 12 čini par konjugiranih promjera te elipse. Odredi projekcije točke 5 na rastavnici PQ.

Na jednak bi se način odredile projekcije druge presječne elipse, u kojoj ravnina SVV_{I} siječe valjak. Obje se elipse sijeku u točki $V_x\,(V'_x V''_x)$. U tu točku na valjku baca sjenu vrh V. Projekcije se točke V_x odrede pomoću stranocrta. Povuče li se točkom V_{I}''' zraka usporedno sa s''', ona siječe treću projekciju valjka u točki V'''_x. Pomoću te točke odredi se V_x' i V_x''.

§ 202. Sjene na šupljim stošcima, valjcima i kuglama

1. Odredi sjene na šupljem stošcu

Rješenje. U sl. 709. uzelo se da je stožac šupalj, da nema osnovke i da mu je osnovna kružnica $\parallel \Pi_1$. Najprije su se odredile rastavnice VA i VB toga stošca na način kao u sl. 574. (§ 163.). U tlocrtu se vide obje te rastavnice, a u nacrtu se vidi VA. U tlocrtu je u samosjeni unutarnja strana dijela plašta $VACB$, dok je taj dio izvana osvijetljen. Ostali dio plašta iznutra je osvijetljen, a izvana je u samosjeni. Luk ACB kružne osnovke baca sjenu na osvijetljenu unutarnju stranu plašta. Ta sjena počima u točkama A i B. Točka D luka ABC baca sjenu u točku D_x. Ta se točka dobije tako, da se točkom D položi zraka svjetla i odredi njezino sjecište sa stošcem. To je sjecište u točki D_x. Sjecište se D_x odredi na način kao u sl. 643. (§ 189.). Zraka svjetla s koja ide vrhom V i zraka DD_x leže u ravnini Δ kojoj je tlocrt traga $d'_1 \equiv V'_{\mathrm{I}} D'$. Pravac d'_1 siječe tlocrt osnovne kružnice u točki K', pa je $V'K'$ tlocrt



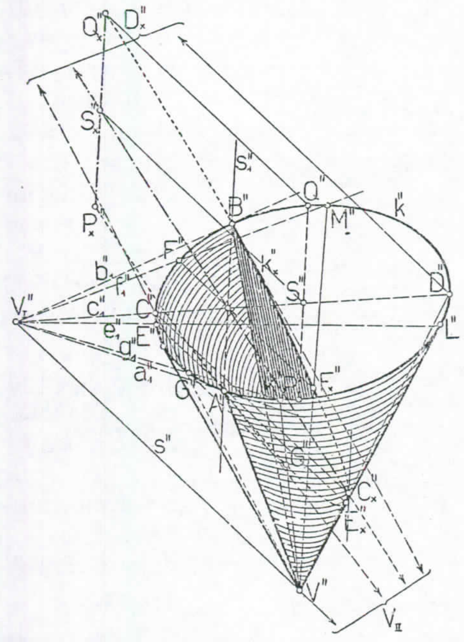
Sl. 709.

izvodnice u kojoj ravnina Δ siječe stožac. Točka D'_x leži na pravcu $V'K'$. Na jednak je način određena točka E'_x. Zraka svjetla s i zraka CC_x leže u ravnini $\Gamma \perp \Pi_1$. Ta ravnina siječe stožac u izvodnici VG, a tu izvodnicu siječe zraka kroz C u točki C_x. Nacrt zrake koja ide točkom C siječe $V''G''$ u točki C_x''. Iz nacrta se odredi C_x'.

Bačena sjena luka ABC pada u tlocrtu u luk $A' D_x' C_x' E_x' B'$. Taj je luk eliptičan. Zrake svjetla, koje idu točkama osnovne kružnice, čine kosi kružni valjak, dakle plohu 2. reda, koji dotiče stožac u točkama A i B i koji prodire stožac u osnovnoj kružnici i u drugoj krivulji, kojoj pripada luk AC_xB. Ta druga krivulja mora biti 2. reda (§ 187., t. 5.), i to samo elipsa. Elipsa je zato, jer ona leži i na kosom kružnom valjku, a na tom valjku nema parabola ni hiperbola.

2. Odredi sjene na šupljem stošcu 2. reda! (Sl. 710.).

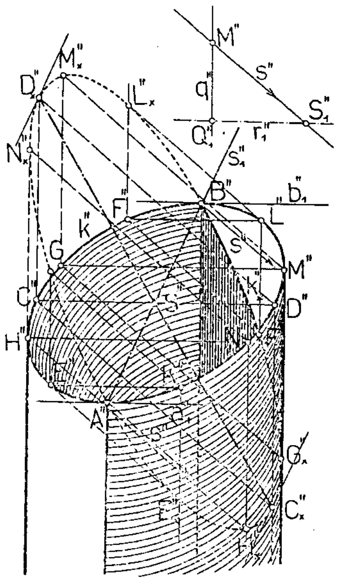
Rješenje. Uzelo se da je šuplji stožac u općem položaju u prostoru i da je u sl. 710. njegova druga projekcija. Sjene se na tom stošcu mogu odrediti bez upotrebe još jedne njegove projekcije. Vrhom V položi se zraka svjetla i odredi se probodište te zrake s ravninom osnovke. Nacrt je toga probodišta V_{I}''. Ta se točka uzme po volji. Dalje se postupa kao u sl. 709. Ako se s točke V_{I}'' povuku tangente na elipsu k'' i dirališta A'' i B'' spoje s V'', te su spojnice nacrti rastavnica stošca. Luk ACB osnovne krivulje k baca sjenu na unutarnju stranu osvijetljenog dijela plašta stošca. Granica je nacrta te sjene eliptičan luk k_x''. Da se dobije kojagod točka te krivulje položit će se zrakom s kojagod ravnina Φ. Ona siječe stožac u izvodnicama VF i VM. Zraka svjetla položena točkom F siječe izvodnicu VM u točki F_x, koja leži na krivulji k_x. Ako se konturnom izvodnicom VL položi ravnina E, ona siječa krivulju k u točki E, a položi li se tom točkom zraka svjetla, ona siječe izvodnicu VL u točki E_x''. U točki E_x'' dotiče krivulja k_x'' prividnu konturu $V''L''$.



Sl. 710.

Konjugirani promjeri elipse k_x. Smatra li se krivulja k_x presjekom eliptičnog valjka, koga čine zrake svijetla uzduž krivulje k, ravninom Σ kojoj je trag pravac $s_1 \equiv AB$, onda će se dobiti dva konjugirana promjera $C_x D_x$ i $P_x Q_x$ elipse k_x ako se uzmu kojagod dva konjugirana promjera CD i PQ elipse k, pa se u krajnjim točkama tih promjera polože zrake svijetla i odrede točke u kojima ravnina Σ siječe te zrake. Te su točke C_x, D_x, P_x i Q_x. Budući da su krivulje k i k_x dva presjeka spomenutog eliptičnog valjka, te su krivulje afine. Isto tako su afine krivulje k'' i k''_x. Os je afinosti pravac s''_1, a smjer je afinosti s''. Pojedine točke krivulje k''_x mogu se odrediti i upotrebom afinosti tih krivulja.

Promjer CD elipse k, koji ide točkom V_I, i promjer $C_x L_x$ elipse k_x jesu dva afina pravca s obzirom na trag s_1 kao os afinosti i pravac s kao smjer afinosti. Pravci se s i $C_x D_x$ sijeku u točki V_{II}, pa su V_I i V_{II} dvije pripadne afine točke. Dužina $V_I V$ može se smatrati projekcijom dužine CC_x iz točke D na pravcu s, a dužina VV_{II} može se smatrati projekcijom iste dužine CC_x iz točke D_x na pravcu s. Budući da su pravci s, CC_x i DD_x usporedni, slijedi da je $VV_I = VV_{II}$. Prema tome točke su V_I, V_{II}, V i neizmjerno daleka točka P_∞ pravca s četiri harmoničke točke (§ 115., t. 5.). Ako se te četiri točke spoje s točkom A, ti su pravci četiri harmoničke zrake. Jedna je od tih zraka tangenta AV_I u točki A krivulje k, druga je zraka tangenta $V_{II} A$ krivulje k_x u točki A, treća je zraka izvodnica AV, a četvrta je zraka zraka svijetla, koja ide točkom A. Imamo poučak:



Sl. 711.

Osnovna krivulja k stošca drugoga reda baca sjenu na taj stožac u krivulju k_x, koja izlazi iz točaka u kojima rastavnice sijeku krivulju k. Tangente na krivulju k i na krivulju k_x u svakoj toj točki harmonički rastavljaju rastavnicu i zraku svijetla, koja ide tom točkom.

Taj poučak vrijedi i za šuplji valjak 2 reda. (Vidi sl. 711.).

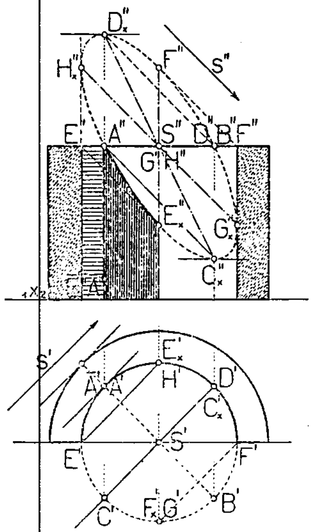
3. Odredi sjene na šupljem valjku 2. reda! (Sl. 711.).

R j e š e n j e. U sl. 711. prikazan je u nacrtu eliptičan šuplji valjak, koji je u prostoru u općenitom položaju. Nacrt je osnovne krivulje elipsa k''. Nadalje je zadan nacrt s'' zrake svijetla s.

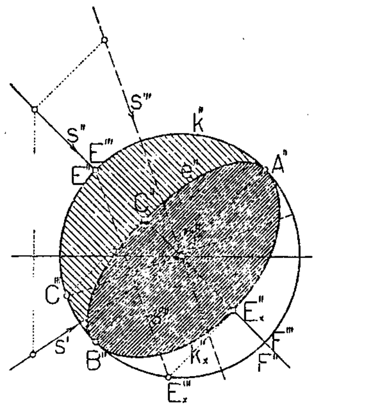
Dirne ravnine valjka, koje su usporedne sa zrakama svijetla, dotiču valjak u izvodnicama koje, pripadaju rastavnici. Da se dobije smjer tragova dirnih ravnina, uzet će se na zraci s točka M, povući će se tom točkom pravac q usporedno sa izvodnicama valjka i odredit će se probodišta Q_1 i S_1 pravaca q i s ravninom osnovke. Spojnica r_1 točaka Q_1 i S_1 jest trag ravnine, koja je usporedna sa izvodnicama valjka i sa zrakama svijetla. U sl. 711. uzele su se točke Q_1'' i S_1'' po volji, te je $r_1'' \equiv Q_1''S_1''$. Ako se na elipsu k'' povuku tangente a_1'' i b_1'' usporedno sa r_1'', onda diralištima A'' i B'' idu nacrti izvodnica, koje pripadaju rastavnici.

Bačena se sjena k_x elipse k na valjak dobije na isti način kao i na stošcu u sl. 610., samo što su ovdje tragovi pomoćnih ravnina usporedni sa r_1. Krivulja je k_x elipsa, koja je afina sa elipsom k s obzirom na trag s_1 ravnine Σ elipse k_x. U toj su elipsi dužine AB i $C_x D_x$ dva konjugirana promjera, koji su afini s promjerima AB i CD elipse k.

4. Sjene na šupljem poluvaljku. U sl. 712. nacrtane su projekcije polovice valjkaste cijevi, kojoj je os okomita na Π_1. Određena je rastavnica $\overline{A}A$ na unutarnjem plaštu cijevi, zatim bačena sjena kružnog luka AE i rubne izvodnice $E\overline{E}$ na unutarnjem plaštu. Bačena sjena luka AE je eliptičan luk AE_x.



Sl. 712.



Sl. 713.

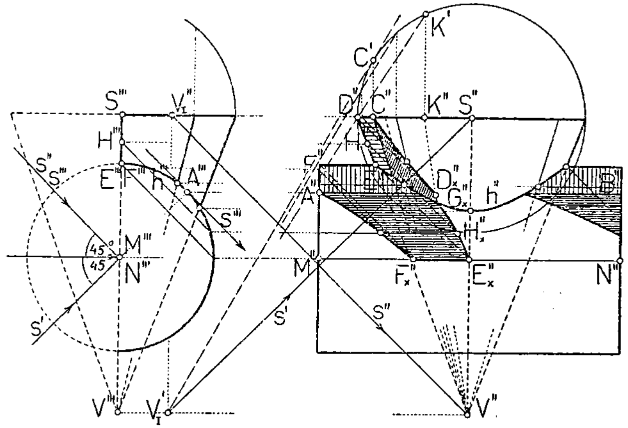
U sl. 712. nacrtana je druga projekcija čitave elipse u kojoj bi gornja unutarnja osnovna kružnica bacala sjenu na zadani valjak. Ravnina položena rubnom izvodnicom $\overline{E}E$, usporedno sa zrakama svijetla, siječe valjak u izvodnici koja ide točkom E_x. U tu izvodnicu pada sjena izvodnice $\overline{E}E$ na unutarnji plašt polucijevi.

5. Sjene na šupljoj polukugli. U sl. 713. prikazana je u nacrtu šuplja polukugla, kojoj je konveksna strana okrenuta prema Π_2. Na toj polukugli određena je rastavnica e, t. j. polukružnica, kojoj je nacrt poluelipsa e''. Velika je os $A''B''$ te elipse okomita na s'', a mala poluos $O''C''$ odredi se kao u sl. 633. (§ 185.) pomoću stranocrta za koji se uzelo da se podudara s polukrugom $E'''C''F'''$. Polukružnica $AEB \equiv k$ baca sjenu na unutarnju, konkavnu stranu polukugle u krivulju k_x. Ta je krivulja u prostoru kružnica, a u nacrtu poluelipsa k''_x. Velika je os te poluelipse $A''B''$, a mala poluos $O''E_x''$. Točka E_x'' je nacrt bačene sjene točke E na polukuglu. Ako se točkom E položi zraka svijetla i tom zrakom ravnina okomito na Π_2, ona siječe polukuglu u polukružnici, kojoj je nacrt dužina $E''F''$, a bokocrt polukružnica $E'''C'''F'''$. Zraka položena točkom E siječe presječnu polukružnicu u točki E_x. Ako se točkom $E''' \equiv E''$ položi treća projekcija s''' zrake svijetla, ona siječe polukružnicu $E'''C'''F'''$ u točki E_x'''. Pomoću te točke odredi se E_x''.

Da je krivulja k_x kružnica slijedi odatle, što zrake svijetla uzduž kružnice k čine kosi valjak, koji prodire kuglu u kružnici k i u krivulji k_x, koja mora biti 2. reda. Pošto k_x leži na kugli, ta krivulja može biti samo kružnica.

§ 203. Kombinirani zadaci za konstrukciju sjena na šupljim valjcima, stošcima i kuglama

1. Prodor šupljeg poluvaljka i šupljeg polustošca sa sjenama

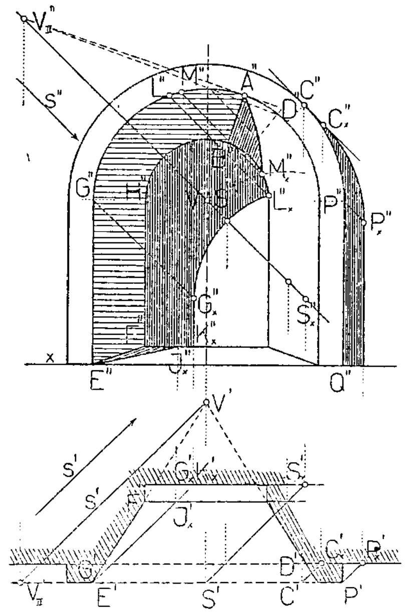


Sl. 714.

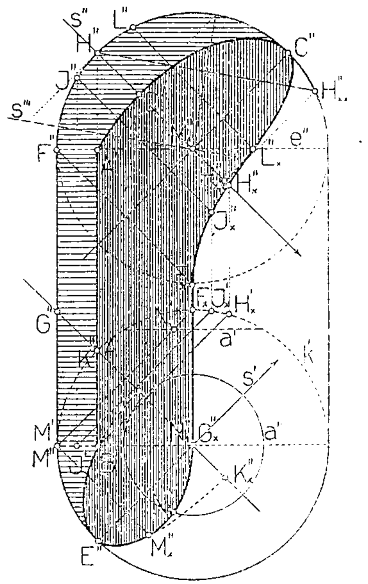
U sl. 714. nacrtana je druga i treća projekcija šupljeg rotacionog poluvaljka, kojemu je os $\perp \Pi_3$ i šupljeg rotacionog polustošca, kojemu je

os $\perp \Pi_1$. Osi se tih dvaju tijela sijeku pod pravim kutem. U toj slici najprije je određena prodorna krivulja h (h'', h''') tih tijela, gdje je h'' hiperbolični luk. Uzelo se da ne postoji dio stošca između vrha V i prodorne krivulje h.

U sl. 714. zadane su nadalje sve tri projekcije s', s'', s''' zrake s, koja je položena središtem M jedne osnovke valjka, pa su određene rastavnice AB i VC. Luk AF osnovne kružnice valjka baca sjenu na valjak u eliptični luk, kojemu je nacrt $A''F_x''$. Dio EF rubne izvodnice valjka baca sjenu na valjak, te je dužina $F_x''E_x''$ nacrt te sjene. Dio DE rubne izvodnice stošca baca sjenu djelomice na stožac, a djelomice na valjak. Sjena



Sl. 715.



Sl. 716.

na stožac pada u izvodnicu D_xV gdje je D_x probodište zrake, koja ide točkom D, sa stošcem. Sjena na valjak je eliptičan luk, kojemu je nacrt $G_x''H_x''E_x''$, gdje je G_x'' u sjecištu hiperbole h'' i izvodnice $D_x''V''$. Luk CD osnovne kružnice stošca baca sjenu na sam stožac. Ta je sjena eliptičan luk, kojemu je nacrt luk $C''D_x''$.

2. Konstrukcija sjena na prozoru. U sl. 715. nacrtan je tlocrt i nacrt prozora, kojemu je okvir omeđen djelomice ravnim, valjkastim i stožastim plohama. Na tom predmetu određene su sve sjene za smjer zraka s (s', s''). Najprije je određen nacrt $A''B''$ rastavnice AB na stošcu i nacrt

C'' rastavnice CD na gornjem izvanjem poluvaljku. Dio samosjene, koji se vidi u nacrtu omeđen je linijama $E''F''H''B''A''G''E''$. Sjenu baca vertikalna dužina EG, i to djelomice na donju kosu i horizontalnu ravninu i na stražnju vertikalnu ravninu. Dio sjene kružnoga luka GA baca sjenu na stražnju vertikalnu ravninu. Ta je sjena kružnica u pravoj veličini, kojoj je središte S_x (S_x', S_x''), a polumjer $S_x''\,G_x'' = S''G''$. Ta kružnica siječe stražnju osnovnu kružnicu donjega poluvaljka u točki L_x, u koju baca sjenu točka L luka GA. Ako se odredi bačena sjena luka GA na vertikalnu ravninu, koja ide točkom F, ta sjena siječe prednju osnovnu kružnicu donjega poluvaljka u točki M_x, u koju baca sjenu točka M Luk AM baca sjenu na polustožac. Ta je sjena eliptičan luk AM_x.

Rastavnica CD baca sjenu na prednji vertikalan zid. Nacrt je te sjene dužina $D''\,C_x''$. Sjena je kružnoga luka CP na taj zid opet kružni luk iste veličine, kojemu je nacrt $C_x''\,P_x''$. Dio vertikalnoga brida PQ baca sjenu u vertikalan pravac, kojemu nacrt ide točkom P_x''.

3. Sjena na predmetu, koji se sastoji iz šupljega poluvaljka i dijelova šupljih kugala. Nacrt toga predmeta prikazuje sl. 716. Srednji je dio šuplji poluvaljak, a gornji i donji dio sastoji se iz četvrtina šupljih kugala. Sjene su određene samo u nacrtu kod dijagonalne rasvjete. Najprije je određen nacrt rastavnice. Nacrt je rastavnice na valjku dužina $A''B''$, na gornjoj kugli eliptičan luk $A''D''C''$, a na donjoj kugli eliptičan luk $E''B''$

Sjenu bacaju: kružni luk CHF, izvodnica FM i luk ME. Sjena pada na sva tri dijela predmeta, počima u točki C, a svršava u točki E. Sjena luka CHF pada djelomice na gornju kuglu, djelomice na valjak. Zraka položena točkom H sjekla bi gornji dio kugle, ako se proširi na polukuglu, u točki H_{xx}, pa je $M''C''$ velika, a $M''H''_{xx}$ mala poluos eliptičnog nacrta bačene sjene luka CH na polukuglu. Ta sjena siječe nacrt e'' poluekvatora u točki L_x'', pa je luk $C''L_x''$ nacrt bačene sjene luka CL na dio kugle. Luk LHF baca sjenu na poluvaljak u luk, kojemu je nacrt $L_x''\,H_x''\,J_x''\,F_x''$. Pojedine točke toga luka odrede se iz tlocrta k' poluvaljka.

Dio FG izvodnice FM baca sjenu na poluvaljak u dužinu, kojoj je nacrt $F_x''\,G_x''$, a dio GM baca sjenu na donju kuglu. Ta je sjena kružni luk u kojemu ravnina položena izvodnicom FM siječe donji dio kugle. Tlocrt te sjene pada u dužinu $M'F_x'$, a nacrt je eliptičan luk $G_x''\,M_x''$. Napokon je bačena sjena luka ME kružni luk, kojemu je nacrt eliptičan luk $E''M_x''$.

4. Zadaci za vježbu

1. Na uspravnom valjku, kojemu je os MN [M (3 4 0), N (3 4 7)] a polumjer $r = 2$, leži koncentrično: *a)* kvadrat $ABCD$ [A (0 7 7), $AB \parallel \Pi_2$, $BC \perp \Pi_2$]; *b)* krug kojemu je polumjer $r = 3$; odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

2. Na uspravnom krnjem stošcu, kojemu je os MN [M (7 4 0), N (7 4 5)], a polumjeri osnovaka $r = 3$, $r_1 = 2$, leži koncentrično: *a)* kvadrat $ABCD$ [$AB = 6$, $AB \parallel \Pi_2$]; *b)* krug kojemu je polumjer $r_2 = 2{,}5$; odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

3. Zadana je pravilna šesterostrana prizma, kojoj je donja osnovka u Π_1 [središte M (4 4 0), ugao A (2 4 0), visina $v = 6$]. Na toj prizmi leži koncentrično valjkasta ploča kojoj je polumjer $r = 3$, a visina $v_1 = 1$. Odredi sve sjene ako je smjer usporednih zraka svijetla određen sjenom A_1 (8 2 0) točke A.

4. Zadan je krnji stožac kojemu je os MN [M (3 4 0), N (3 4 3)], a polumjeri osnovaka $r = 2{,}5$, $r_1 = 1$. Na gornjoj osnovci leži koncentrično valjkasta ploča, kojoj je polumjer $r_2 = 2$, a visina $v_2 = 2$. Odredi sve sjene ako s' čini sa osi x 30°, a s'' 45°.

5. Zadan je uspravan stožac, kojemu je os SV [S (4 6,5 0), V (4 6,5 7)], a polumjer $r = 2{,}5$, zatim je zadan kosi valjak, kojemu je donja osnovka u Π_1, a os MN [M (7 2 0), N (9 6 5)] i polumjer $r_1 = 2$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svijetla određen sjenom V_1 (14 1,5 0) vrha V na Π_1.

6. Zadana je pravilna trostrana prizma kojoj je jedna pobočka u Π_1, te je prednji pobočni brid $A\overline{A}$ [A (7 6 0), $\overline{A}$ (3 2 0)], a dužina osnovnih bridova $= 2{,}5$, zatim je zadan uspravan stožac, kojemu je os SV [S (3 5 0), V (3 5 6)], a polumjer $r = 2$. Odredi sve sjene, ako je sjena vrha stošca V_1 (11 1 0).

7. Zadan je kosi valjak, kojemu je os MN [M (4 3 0), N (7 6 5)] i polumjer $r = 2$. Odredi bačenu sjenu dužine AB [A (1 5 4), B (4 10 7)] na taj valjak, ako je N_1 (12 2 0) sjena točke N.

8. Zadan je rotacioni stožac [SV [S (6 3 0), V (6 3 6)], $r = 2{,}5$] i paralelogram $ABCD$ [A (2 5,5 5), B (0 2,5 6), C (3 2,5 6,5), D]. Odredi sve sjene, ako je A_I (8 3,6 0) bačena sjena točke A na Π_1.

9. Rotacioni valjak, kojemu je polumjer $r = 2$, dotiče Π_1 u izvodnici AB [A (10 7 0), B (5 2 0)]. Na taj valjak naslonjen je rotacioni stožac kojemu je polumjer $r_1 = 3$, kojemu osnovna kružnica dotiče Π_1 u točki C (4 7 0) i kojemu je izvodnica $CV = 8$. Osi su obaju tijela mimosmjerne i čine pravi kut. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svijetla zadan bačenom sjenom V_I (13 3 0) vrha V na Π_1.

10. Polukugla kojoj je polumjer $r = 3$ dotiče Π_1. Na toj polukugli nalazi se istostrani stožac, kojemu se osnovka podudara s kuglinim krugom. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

11. Na kuglu [O (6 3 2,5), $r = 2{,}5$] baca sjenu dužina AB [A (1 3 4), B (4 6 6)]. Odredi sve sjene, ako je smjer usporednih zraka svijetla određen sjenom O_I (9 1 0).

12. Na kuglu [O (6 3 4), $r = 3$] baca sjenu pravokutnik $ABCD$ [A (1 7 0), B (3 8 0), C (3 8 8), D], koji je $\perp \Pi_1$. Odredi sve sjene, ako je smjer zraka svijetla određen sjenom O_I (11 2 0).

13. Na kuglu [O (7 4 2,5), $r = 2{,}5$] baca sjenu rotacioni stožac, kojemu je osnovka u Π_1 te joj je središte S (3 7 0), polumjer $r_1 = 2$, a visina stošca $v = 7$. Odredi sve sjene, ako je smjer usporednih zraka svijetla određen sjenom O_I (11 2 0).

14. Na kuglu [O (8 4 2,5), $r = 2{,}5$] baca sjenu rotacioni valjak, kojemu je osnovka u Π_1, središte joj je S (4 4,5 0), polumjer $r_1 = 1{,}5$, a visina je valjka $v = 7$. Odredi sve sjene, ako je smjer usporednih zraka svijetla određen sjenom O_I (11 4 0).

15. Na uspravnom valjku, kojemu je osnovka u Π_1 (polumjer $r = 2$, visina $v = 5$) leži koncentrično polukugla, kojoj je polumjer $r_1 = 3$, sa svojim najvećim krugom na gornjoj osnovci valjka. Odredi sve sjene.

16. Kuglu kojoj je središte O (4 4 4) i polumjer $r = 2{,}5$ prodire rotacioni valjak, kojemu os ide središtem kugle okomito na Π_1, polumjer mu je $r_1 = 1{,}5$, a visina $v = 8$. Odredi sve sjene kod usporedne rasvjete, ako s' čini sa osi x 30°, a s'' 60°.

17. Zadan je rotacioni stožac, kojemu je osnovka $\parallel \Pi_1$ te joj je središte S (4 7 4,5), polumjer $r = 2,5$, vrh V (4 7 1), nadalje je zadan kosi stožac, kojemu je osnovka u Π_1, središte joj je M (9 4 0), polumjer $r_1 = 2$, dok je vrh stošca U (4 2 6). Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

18. Zadana je kugla [O (7 6 3,5), $r = 3,5$], na toj kugli leži aksijalno pravilna šesterostrana prizmatična ploča. Jedan je ugao na donjoj osnovci ploče A (2,5 5 7), visina je ploče $v = 1,5$. Odredi sve sjene ako s' čini sa osi x 30⁰, a s'' 45⁰.

19. Zadan je rotacioni stožac, koji sa svojom izvodnicom AV [A (5 4 0), V (10 12 0)] dotiče Π_1, polumjer je osnovke $r = 3,5$. Desno od stošca nalazi se kugla [O (14 9 4), $r_1 = 4$]. Odredi sve sjene, ako su zrake svijetla usporedne s Π_2 te s Π_1 čine 30⁰.

20. Os je šupljeg rotacionog gore otvorenog stošca SV [S (6 4 6), V (6 4 0)], polumjer $r = 2$. Odredi sjene kod dijagonalne rasvjete.

21. Os je šupljeg gore otvorenog kosog stošca SV [S (6 5 7), V (1 1 1)], a polumjer $r = 3$. Odredi sjene ako s' i s'' čine sa x po 30⁰.

22. Os je šupljeg sprijeda otvorenog stošca SV [S (4 7 5). V (8 1 1,5)], a polumjer $r = 3$. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

23. Odredi sve sjene na uspravnom krnjem šupljem stošcu, kojemu je manja osnovka u Π_1. Središte je donje osnovke M (4 3 0) i polumjer $r = 1$. Polumjer je gornje osnovke $r_1 = 2,5$, a visina stošca $v = 4$. Usporedne zrake svijetla zadane su sjenom N_l (6,5 1,5 0) središta gornje osnovke.

24. Šuplji istostrani stožac dotiče Π_1 u izvodnici $AS = 5$ koja je okomita na osi x, te vrh V leži na osi x. Odredi sve sjene ako s' čini sa osi x 15⁰, a s'' 45⁰.

25. Os je kosoga gore otvorenoga valjka MN [M (4 6 0), N (9 3 6), polumjer mu je $r = 2,5$. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

26. Zadan je kosi šuplji valjak kojemu je osnovka $\parallel \Pi_2$. Os je toga valjka MN [M (2 1 4), N (10 6 6)], a polumjer $r = 3$. Odredi sjene kod dijagonalne rasvjete.

27. Zadana je polovica šupljeg valjka, kojemu donja osnovna kružnica ide točkama A (2 5 0), B (5 3 0), C (7 5 0) i kojemu je jedna izvodnica $A\bar{A}$ [$\bar{A}$ (2 3 4)]. Smjer zraka svijetla određen je sjenom $\bar{A}_l$ (7,5 2 0).

28. Polovica rotacionog šupljeg valjka ($r = 2$) dotiče u izvodnici AB [A (3 2 0), B (6 5 0)] ravninu Π_1; odredi sve sjene ako su zrake svijetla usporedne sa Π_2 i s Π_1 čine 45⁰.

29. Odredi sjene šuplje polukugle [O (4 4 2,5), $r = 2,5$], kojoj je najveći krug $\parallel \Pi_1$. Smjer usporednih zraka svijetla zadan je sjenom O_l (8 4 0).

30. Riješi 29. zad. kod centralne rasvjete, ako je izvor svijetla točka S (8 3 4).

31. Odredi sjene šuplje polukugle [O (4 3 4), $r = 2,5$], ako je najveći krug $\parallel \Pi_2$. $\sphericalangle (s'x) = 30⁰$, $\sphericalangle (s''x) = 0$.

32. Zadana je šuplja polukugla [O (6 4 3,5), $r = 3$], kojoj rubna kružnica leži u ravnini **B** (∞ — 6,5). Odredi sve sjene kod centralne rasvjete, ako je izvor svijetla točka S (0 6 6,5).

33. U sl. 714. uzmi mjesto stošca šuplji rotacioni poluvaljak i odredi sve sjene.

34. Os je rotacionog valjka MN [M (4 5 3), N (4 5 8)], a polumjer $r = 2,5$. Os je drugog rotacionog valjka PQ [P (10 0 3), Q (10 8 3)], a polumjer $r_1 = 3$. Oba su valjka šuplja i otvorena. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

35. Zadan je kosi kružni valjak, koji je sprijeda otvoren te mu je os MN [M (3 0 3), N (9 8 5)], a polumjer $r = 2$. Ispred toga valjka nalazi se kvadrat $ABCD$ [A (1 7 2), B (5 7 2). C (5 7 —), D]. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

36. Zadan je gore otvoreni rotacioni stožac, kojemu je os SV [S (6 7,5 5), V (6 7,5 0)] i polumjer $r = 2,5$, nadalje je zadana peterostrana pravilna prizma, kojoj je jedna pobočka u Π_1. Dva su ugla stražnje osnovke A (8 4 0) i B (8 1 0), visina je prizme $v = 7$. Odredi sve sjene ako s' i s'' čini sa x 30⁰.

37. Zadana su dva sukladna rotaciona stošca ($r = 2,5$, $v = 6$), kojima je zajednička os $o \perp \Pi_1$ te vrh jednoga leži u središtu osnovke drugoga stošca. Od tih stožaca uzmi samo stražnju polovicu, polustošci neka su šuplji, pa odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

38. Zadan je rotacioni valjak, kojemu je os MN [M (4 3,5 0), N (4 3,5 8)], a polumjer $r = 2,5$. Nadalje je zadan rotacioni stožac, kojemu je vrh V u Π_2 a osnovka $\parallel \Pi_2$. Polumjer je toga stošca $r_1 = 3,5$, a visina $v_1 = 7$. Os stošca ide središtem osi valjka, te su osi među sobom okomite. Uzmi da je stožac šupalj i bez osnovke, pa odredi prodor i sve sjene ako je $\sphericalangle (s'x) = 45⁰$ i $\sphericalangle (s''x) = 30⁰$.

39. Zadana je šuplja polukugla [O (5 5 4), $r = 4$], kojoj je rubna kružnica $\parallel \Pi_1$. U toj polukugli nalazi se puna kugla, kojoj je središte S (5 5 2), a polumjer $r_1 = 2$. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

40. Šuplji valjak, kojemu je os MN [M (5 5 0), N (5 5 7)], a polumjer $r = 1,5$, prodire šuplju polukuglu [O (5 5 6), $r_1 = 4$] kojoj je rubna kružnica $\parallel \Pi_1$. Odredi prodor i sve sjene ako je $\sphericalangle (s'x) = 30⁰$, $\sphericalangle (s''x) = 45⁰$.

41. Zadan je rotacioni valjak, kojemu je os MN [M (10 7 0), N (10 7 10)] i polumjer $r = 3$. Nadalje je zadana šuplja polukugla [O (10 7 6), $r_1 = 5$], kojoj je rubna kružnica $\parallel \Pi_1$, kojoj je konveksna strana okrenuta prema Π_1 i koja prodire valjak. Na gornjoj osnovci valjka leži aksijalno šuplji krnji stožac, kojemu je os PQ [P (10 7 10), Q (10 7 13)], a polumjeri su osnovaka $r_2 = 3$, $r_3 = 5$. Odredi sve sjene, ako je $\sphericalangle (s'x) = 30⁰$ i $\sphericalangle (s''x) = 45⁰$.

42. Zadana je šuplja polukugla [O (7 6 5), $r = 4$] koja je prema gore otvorena, nadalje je zadan rotacioni stožac kojemu je os SV [S (7 6 0), V (7 6 7)], a polumjer $r_1 = 3$. Odredi prodor i sjene ako je $\sphericalangle (s'x) = 30⁰$ i $\sphericalangle (s''x) = 45⁰$.

43. Izvodnice su šupljeg poluvaljka usporedne s Π_1 ($r = 2$, $v = 6$), te poluvaljak dotiče Π_1. Poluvaljak je s obiju strana zatvoren sa četvrtinama šupljih kugala. Odredi sve sjene kod dijagonalne rasvjete.

44. Kuglasta zdjelica kojoj je središte O (4 4 4), a debljina stijene $d = 1$, dotiče s izvanjom površinom Π_1, dok joj je najveći krug $\parallel \Pi_1$. Tu zdjelicu prodire rotacioni stožac, kojem je osnovka u Π_1 ($r = 2,5$) i kojemu os ($v = 7$) ide središtem O. Odredi sve sjene, ako je smjer usporednih zraka svijetla zadan sjenom O_l (10 2 0).

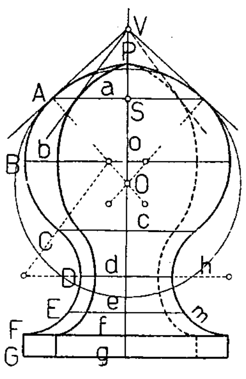
XXXIII. Rotacione plohe

§ 204. Postanak rotacionih ploha

1. Postanak rotacionih ploha. Ako se kakvagod krivulja m, ravnična ili prostorna, okreće oko stalnog pravca o, ona opiše krivu plohu, koja se zove *rotaciona ploha* (sl. 717.).

Pravac o zove se *os rotacione plohe*, a krivulja m zove se *izvodnica* te plohe. Ako os o siječe izvodnicu m, onda se ta točka zove *pol* plohe. U sl. 717. točka P je pol rotacione plohe.

2. Usporednici. Kad krivulja m opisuje rotacionu plohu, onda svaka njezina točka A, B, C . . . opiše kružnicu a, b, c . . . koja se zove *usporednik* ili *paralela* rotacione plohe. Ravnina je svakog usporednika okomita na osi o i ona siječe tu os u točki, koja je središte toga usporednika. Na pr. točka S je središte, a dužina SA polumjer usporednika a. Usporednici su uopće različite veličine.



Sl. 717.

Ako se rotaciona ploha okreće oko osi o, svaka se točka te površine kreće u svom usporedniku. Prema tome svaka krivulja, koja je na rotacionoj plohi i koja siječe sve usporednike u realnim točkama, opisat će tu plohu kad se okreće oko osi o.

3. Meridijani. Svaka ravnina položena osi o siječe rotacionu plohu u krivulji, koja se zove *meridijan* plohe, a njegova ravnina zove se *meridijanska ravnina*. Ako se koji god meridijan okreće oko osi o, on opiše rotacionu plohu.

Obično se uzimlje, da rotaciona ploha nastane okretanjem meridijana oko osi o. Izvodnica m u sl. 699. jest meridijan rotacione plohe.

Svi su meridijani iste rotacione plohe među sobom sukladni.

Kroz svaku točku rotacione plohe, na pr. kroz A u sl. 717., ide jedan usporednik a i jedan meridijan m.

Svaka meridijanska ravnina **M** okomita je na ravnini svakog usporednika i u njoj leži jedan promjer toga usporednika. Prema tome ravnina **M** je ravnina simetrije svakog usporednika; ona je dakle ravnina simetrije čitave rotacione plohe. Meridijanska ravnina $\mathbf{M}_1$, koja je okomita na ravnini **M**, jest ravnina simetrije ravnine **M**, dakle i meridijana koji je u toj ravnini.

Prema tome pravac o je simetrala svakoga meridijana. Pravac o dijeli svaki meridijan na dva sukladna polumeridijana.

Budući da svaka meridijanska ravnina siječe sve usporednike pod pravim kutovima, tad se usporednici i meridijani sijeku pod pravim kutovima.

4. Vrste točaka. Na rotacionoj plohi može biti eliptičnih, hiperboličnih i paraboličnih točaka. Dio meridijana, kojemu je konkavna strana okrenuta prema osi o, opiše eliptične točke površine, a dio krivulje, kojemu je konveksna strana okrenuta prema osi o, opiše hiperbolične točke. Na usporedniku koga opiše obratište meridijana leže parabolične točke rotacione plohe.

Dio plohe u sl. 717., koji leži između pola P i usporednika c, ima eliptične točke, dio plohe između usporednika c i f ima hiperbolične točke, a točke, koje leže na usporedniku c, jesu parabolične točke plohe.

5. Dirne ravnine, dirni stošci i valjci, dirne kugle rotacione plohe. Tangente u točki T rotacione plohe na usporednik i meridijan, koji prolaze tom točkom, određuju dirnu ravninu plohe u toj točki.

Dirne ravnine u točkama jednog te istog meridijana umataju valjak, komu su izvodnice okomite na toj meridijanskoj ravnini. Prema tome tangente svih usporednika rotacione plohe u točkama jednog te istog meridijana čine valjkastu plohu. Svi su takovi valjci jedne te iste plohe među sobom sukladni.

Dirne ravnine rotacione plohe u točkama jednog te istog usporednika umataju rotacioni stožac. Izvodnice su toga stošca tangente svih meridijana u točkama u kojima usporednik siječe meridijane. Vrh je toga stošca u osi o, koja je također os stošca. Takav se stožac zove *dirni stožac* rotacione plohe. Zajednički usporednik zove se dirna kružnica.

Ako se u točki A (sl. 717.) povuče tangenta AV na meridijan m, ta tangenta opiše, kad zajedno sa m rotira oko osi o, dirni stožac. Točka A opiše dirnu kružnicu a.

Ako se na meridijan m povuku tangente usporedno s pravcem o, one će rotacijom oko toga pravca opisati *dirne rotacione valjke*. Jedan takav valjak dotiče rotacionu plohu u kružnici b, a drugi u kružnici d. Prvi valjak leži izvan rotacione plohe, a drugi leži unutar te plohe. U prvom se slučaju dirna kružnica zove *ekvator*, a u drugom slučaju *grlena kružnica*. Prema tome kružnica b je ekvator, a d grlena kružnica.

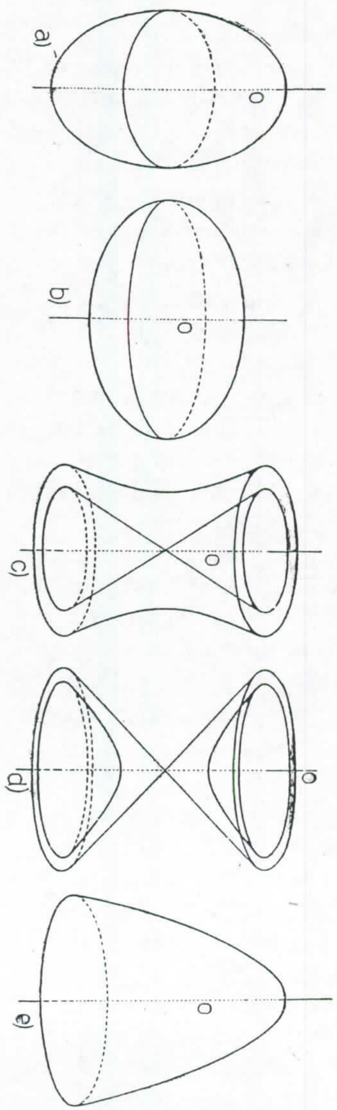
Ista rotaciona ploha može imati više ekvatora i više grlenih kružnica.

Ako se u točki A postavi okomica na tangentu AV meridijana m, ona siječe os u točki O. Ako se s te točke opiše kružnica h s polumjerom OA, ona dotiče m u točki A. Ako kružnica h rotira oko o zajedno sa m, onda će ona opisati kuglu, koja s rotacionom plohom ima kružnicu a za-

*

jedničku. Ta se kugla zove *dirna kugla* rotacione plohe, a kružnica a zove se dirna kružnica.

Uzduž svakog usporednika rotacione plohe može se na tu plohu položiti dirni stožac i dirna kugla. Dirni stožac prelazi za neke usporednike u dirni valjak.



Sl. 718.

§ 205. Vrste rotacionih ploha

1. Opća rotaciona ploha. Ako je izvodnica rotacione plohe kakvagod krivulja, koja nije nastala po nekom pravilu, ili se ta izvodnica sastoji iz dijelova pravilnih i nepravilnih krivulja, onda se nastala ploha zove *opća rotaciona ploha.*

2. Anuloid. Ako kružnica rotira oko pravca o, koji leži u ravnini kružnice, a ne prolazi središtem te kružnice, ona opiše rotacionu plohu, koja ima oblik prstena, te se zove *anuloid* ili *torus.*

3. Rotacione plohe 2. reda. Među rotacione plohe 2. reda spada rotacioni stožac, valjak i kugla. Opće plohe imaju katkada dijelova stožaca, valjaka i kugala. Donji dio rotacione plohe u sl. 717. je valjak.

Ako se elipsa zavrti oko svoje velike osi, ona opiše rotacionu plohu, koja se zove *dugoljasti* ili *jajoliki elipsoid* (sl. 718.a).

Ako se elipsa zavrti oko svoje male osi, ona opiše *splošteni* ili *lećasti elipsoid* (sl. 718.b).

Dirni je valjak uzduž kojegagod meridijana dugoljastog ili sploštenog elipsoida eliptičan valjak.

Ako se hiperbola zavrti oko svoje imaginarne osi, ona opiše rotacionu plohu, koja se zove *jednoplošni hiperboloid* (sl. 718. c). Asimptote hiperbole opišu rotacioni dvostruki stožac, koji se zove *asimptotični stožac* toga hiperboloida.

Ako se hiperbola zavrti oko svoje realne osi, ona opiše *dvoplošni rotacioni hiperboloid* (sl. 718. d). Njegova se ploha sastoji iz dva potpuno rastavljena dijela. I ovom hiperboloidu pripada *asimptotični stožac.*

Dirni je valjak uzduž kojegagod meridijana jednoplošnog ili dvoplošnog hiperboloida hiperboličan valjak.

Ako se parabola zavrti oko svoje osi, ona opiše rotacionu plohu, koja se zove paraboloid (sl. 718. e).

Dirna ravnina uzduž kojegagod meridijana rotacionog paraboloida jest paraboličan valjak.

Plohe, koje nastaju rotacijom krivulje 2. reda oko njezine osi, zovu se rotacione plohe 2. reda. Rotacioni elipsoidi, hiperboloidi i paraboloidi jesu rotacione plohe 2. reda.

4. Između sviju krivih ploha rotacione plohe najčešće dolaze na različitim tehničkim i obrtnim predmetima. Naročito tokarski, lončarski i staklarski predmeti jesu rotacione plohe. Takova su tijela razni drveni, kameni ili željezni stupovi i t. d.

Napomena. Gradivo o rotacionim plohama, a naročito o plohama 2. reda, veoma je opširno, pa će se u opsegu ove knjige donijeti samo ono što je najnužnije, a ne će se dokazivati ni sve tvrdnje, koje će se postaviti.

§ 206. Predočivanje rotacionih ploha projekcijama

Temeljni zadaci

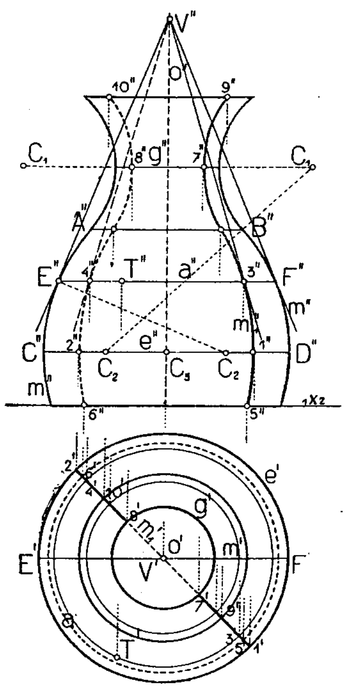
1. Projiciranje rotacionih ploha. (Sl. 719.). Za predočivanje rotacionih ploha i za rješavanje raznih zadataka u vezi s tim plohama izvrsno nam služe usporednici i meridijani. Rotacione se plohe najjednostavnije prikazuju u ortogonalnoj projekciji tako, da se kojagod ravnina projekcija postavi okomito na os rotacije. Ako je os $o \perp \Pi_1$, tad je tlocrt te osi točka O', a nacrt $o'' \perp x$. Budući da su ravnine usporednika usporedne s Π_1, a središta su im u osi o, oni se projiciraju na Π_1 u pravoj veličini kao koncentrične kružnice sa središtem u O'. Nacrti su usporednika dužine usporedne sa osi x. Tlocrti ekvatora i grlene kružnice, ako ih uopće ima na rotacionoj plohi, jesu prva prividna kontura plohe.

Budući da meridijanske ravnine idu kroz os o, one su okomite na Π_1, pa su tlocrti meridijana pravci, koji idu točkom O'. Meridijan m, kojemu je ravnina usporedna sa Π_2, zove se *glavni meridijan* plohe. Taj se meridijan projicira na Π_2 kao krivulja m'', koja je sukladna s krivuljom m, te čini drugu prividnu konturu plohe. Tlocrt je m' meridijana m pravac, koji ide točkom O' usporedno sa osi x.

Meridijan n, kojemu je ravnina okomita na Π_2, nazvat ćemo *srednjim meridijanom*. Njegov je tlocrt i nacrt u pravcu, koji je okomit na osi x, te se n'' podudara s pravcem o''.

Nacrti su ostalih meridijana krivulje, koje su afine s krivuljom m''; pravac o'' je os afinosti, a smjer afinosti je okomit na toj osi.

Kod prikazivanja rotacionih ploha projekcijama najprije se nacrta, ako je $o \perp \Pi_1$, nacrt plohe. Da se m'' što lakše nacrta obično se uzimlje da se ta krivulja sastoji iz kružnih lukova. U sl. 719. m'' sastoji se iz lukova, kojima su središta u točkama C_1, C_2, C_3 i koji se dodiruju u točkama A'', B'' C'', D''. Donji je dio plohe kuglina zona, a ostali su dijelovi dijelovi anuloida.



Sl. 719.

2. Zadatak. *Zadan je tlocrt T' točke T rotacione plohe, odredi nacrt T'' te točke!* (Sl. 719.).

Rješenje. Ovaj će se zadatak riješiti na jednak način, kako se isti zadatak riješio za kuglu (isp. § 180., t. 3. sl. 616.). Kroz točku T položi se usporednik a i nacrtaju njegove projekcije a', a''. Tlocrt a' je kružnica, kojoj je središte u O', a polumjer $O'T'$, a nacrt a'' je dužina $E''F'' \parallel x$. Ordinala točke T' siječe a'' u točki T''.

Ako ordinala $E'E''$ siječe drugu prividnu konturu m'' u više točaka, onda ima toliko usporednika koliko ima tih sjecišta, koji su sukladni s usporednikom a, te imadu zajednički tlocrt u a''. Točka T može biti na svakom tom usporedniku, no mi uzmemo onaj usporednik i na njemu točku T, koji nam kod konstrukcije upravo treba.

U sl. 719. točka je T na prednjoj polovici rotacione plohe.

Ako je zadan nacrt T'' točke T, kako ćeš odrediti tlocrt T'? Je li točka T' potpuno određena?

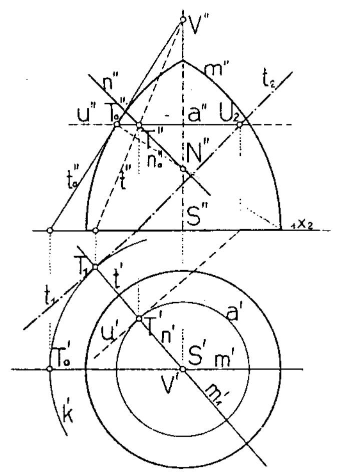
3. Zadatak. *Zadan je tlocrt m_1' meridijana m_1 rotacione plohe, odredi nacrt m_1'' toga meridijana!* (Sl. 719.).

Rješenje. Tlocrt je m_1' meridijana m_1 promjer $1'2'$ tlocrta e' ekvatora e. Pomoću usporednika odredi se nacrt pojedinih točaka krivulje m_1''.

Desna polovica meridijana m_1 leži na prednjoj polovici rotacione plohe, pa se u nacrtu vidi, dok lijeva polovica toga meridijana leži na stražnjoj polovici, pa se u nacrtu ne vidi.

4. Zadatak. *U zadanoj točki $T(T', T'')$ rotacione plohe konstruiraj tangentu na usporednik i na meridijan koji ide tom točkom. Dirna ravnina.* (Sl. 720.).

Rješenje. Na usporedniku $a(a', a'')$ rotacione plohe uzela se točka $T(T', T'')$ i u toj točki nacrtana je tangenta $u(u', u'')$ na taj usporednik. Pravac u' dotiče a' u T', dok u'' pada u pravac a''.



Sl. 720.

Tlocrt meridijana m_1, na kojemu leži točka T' pada u pravac $S'T'$, a u taj pravac pada i tlocrt t' tangente t toga meridijana. Nacrt t'' tangente t odredit će se pomoću dirnog stošca uzduž usporednika a. Ako se u točki T_0'' potegne tangenta t_0'' na krivulju m'', ona siječe o'' u točki V''. Točka V'' je nacrt vrha V spomenutog dirnog stošca. Meridijan m_1 sadrži izvodnicu dirnoga stošca u točki T. Prema tome će nacrt t'' tangente t biti identičan s pravcem $V''T''$. Pravac t_0'' može se smatrati rotiranom projekcijom tangente t oko osi o u ravninu glavnoga meridijana.

Budući da se usporednik a i meridijan m_1 sijeku pod ravnim kutom, to su i tangente u i t među sobom okomite, a jer je tangenta $u \parallel \Pi_1$, to je $t' \perp u'$.

Dirna ravnina u točki T sadrži obje tangente u i t, pa se tragovi t_1 i t_2 te ravnine mogu lako odrediti. Tangenta u je sutražnica prve skupine dirne ravnine, pa je $t_1 \parallel u'$, a jer je $u' \perp t'$, to je i $t_1 \perp t'$, t. j. tangenta t je priklonica prve skupine dirne ravnine.

Tragovi se dirne ravnine u točki T mogu odrediti i pomoću dirnog stošca uzduž usporednika a. Ako se potraži osnovna kružnica k toga stošca u Π_1, njezin je polumjer $= S'', T_0''$, a tlocrt joj je kružnica k'. Tražena dirna ravnina dotiče stožac u izvodnici VT, pa prvi trag t_1 ide prvim probodištem T_1 te izvodnice i dotiče kružnicu k', i t. d.

5. Normala rotacione plohe. Ako se u točki T (sl. 720.) postavi normala n na dirnu ravninu u toj točki, onda je taj pravac ujedno normala rotacione plohe u točki T. Projekcije su normale $n' \perp t_1 (n' \equiv t')$ i $n'' \perp t_2$.

Ako se meridijan m_1 zajedno s normalom n i tangentom t okrene oko osi o u ravninu glavnoga meridijana, onda je zaokrenuta normala $n_0 \perp t_0$, dakle i $n_0'' \perp t_0''$. Pravac n_0'' siječe o'' u točki N'', a jer točka N ostaje kod okretanja na istom mjestu slijedi da je $N''T'' \equiv n''$.

Sve normale rotacione plohe u točkama istoga usporednika a čine rotacioni stožac, kojemu je N vrh, o os, a osnovka usporednik a.

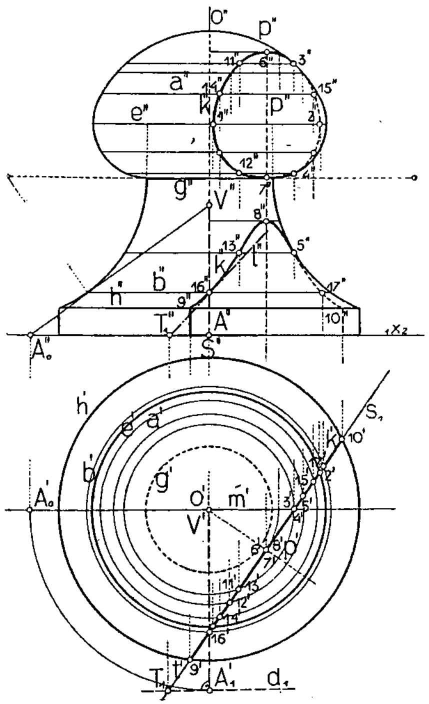
Točka N ujedno je središte dirne kugle rotacione plohe uzduž usporednika a, te joj je polumjer $= NT = N''T_0''$.

Normale rotacione plohe u točkama jednog te istog meridijana leže u ravnini toga meridijana.

§ 207. Presjek rotacione plohe ravninom

1. Zadatak. *Odredi presjek opće rotacione plohe, kojoj je os* $o \perp \Pi_1$, *s ravninom* $\Sigma \perp \Pi_1$! (Sl. 721.).

Rješenje. U sl. 721. rotaciona je ploha tako sastavljena, da je gornji dio do nešto iznad ekvatora e dio plohe kugle, odavle do grlene kružnice g je dio jednoga, a između grlene kružnice g i usporednika h je dio drugoga anuloida. Donji dio je valjak.



Sl. 721.

Presječna ravnina Σ tako je postavljena, da ne siječe grlene kružnice g. Prvi trag je te ravnine s_1. U tom tragu nalazi se tlocrt k' presječne krivulje k. Nacrt se k'' odredi pomoću projekcije usporednika, koji idu kroz pojedine točke krivulje k. Najprije će se odrediti glavne točke presjeka, t. j. točke, koje leže na ekvatoru, na glavnom meridijanu, zatim najniže i najviše točke, te točke na osobitim usporednicima. Napokon se odrede točke na zgodno odabranim usporednicima.

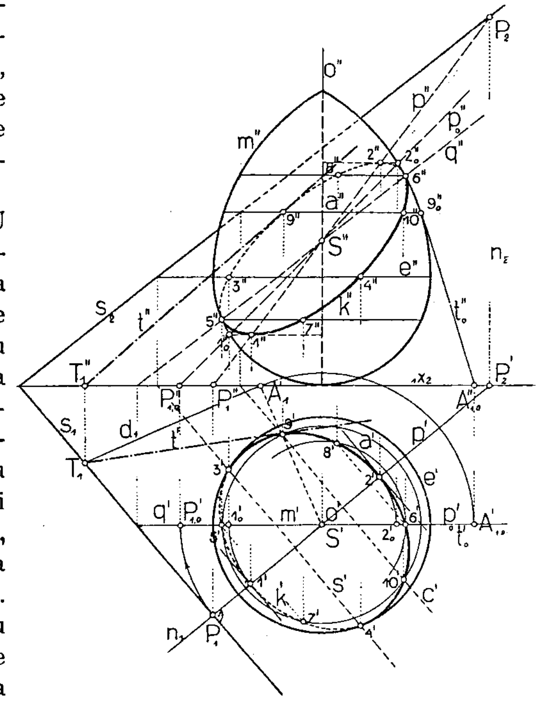
Na ekvatoru leže točke $1(1',1'')$ i $2(2',2'')$. Na glavnom meridijanu leže tri točke, i to $3(3',3'')$ i $4(4',4'')$ na gornjem dijelu plohe (povrh grlene kružnice) i točka $5(5',5'')$ na donjem dijelu. Točke se $1''$—$5''$ dobiju iz tlocrta pomoću ordinala.

Ravnina **M** položena osi o okomito na Σ je ravnina simetrije rotacione plohe i ravnine Σ, kao i presječne krivulje k. Pravac p u kojemu se sijeku ravnine **M** i Σ je os simetrije krivulje k, a nacrt p'' je os simetrije krivulje k''. Na pravcu p'', koji je okomit na Π_1, leže najviše i najniže točke krivulje k''. Tlocrt se tih točaka dobije u sjecištu pravca s_1 s okomicom spuštenom s O' na s_1, dok se nacrt dobije pomoću usporednika. Na gornjem dijelu plohe najviša je točka $6''$, a najniža $7''$, a na donjem dijelu najviša je točka $8''$. Na međašnjem usporedniku h leže točke 9 i 10.

U istoj visini s točkama $3''$,$4''$ i $5''$ određene su simetrične točke $11''$,$12''$ i $13''$. Na usporedniku a određene su točke 14 i 15, na usporedniku b točke 16 i 17, i t. d.

Budući da ravnina Σ ne siječe grlene kružnice g, krivulja se k sastoji iz dva zasebna dijela. Osim toga ravnina Σ siječe valjak u dvije izvodnice, koje idu točkama 9 i 10. Budući da se zadana ploha sastoji iz dijelova raznih ploha, to presječna krivulja k nije jedinstvena krivulja, nego se sastoji iz dijelova raznih krivulja.

Konstrukcija tangente. U točki 16 konstruirana je tangenta t na krivulju k. Dirna ravnina Δ u točki 16 rotacione plohe siječe presječnu ravninu Σ u traženoj tangenti t. Dirna ravnina Δ položit će se pomoću dirnoga stošca plohe uzduž usporednika b, na kojemu leži točka 16. Ako se u točki $16_0''$ povuče tangenta na m'', ona siječe o'' u točki V'', koja je nacrt vrha dirnoga stošca. Pravci $V'16'$ i $V''16''$ jesu projekcije izvodnice, koja ide točkom 16. Polumjer je stošca u ravnini $\Pi_1 = S''A_0''$. Ako se s tim polumjerom opiše oko O' kružnica, ona siječe $V'16'$ u točki A_1. Tom točkom ide trag $d_1(\perp V'A_1)$ ravnine Δ. Tragovi se s_1 i d_1 sijeku u točki T_1, pa je $T_1 16' \equiv t'$, a $T_1''16' \equiv t''$.



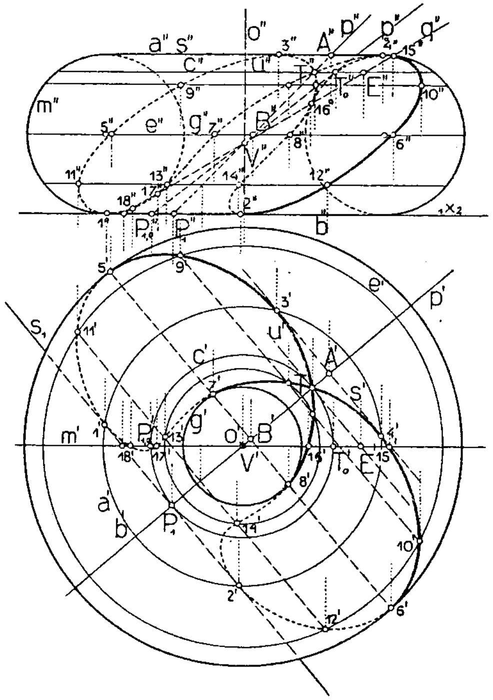
Sl 722.

2. Zadatak. *Odredi presjek opće rotacione plohe s općom ravninom* Σ! (Sl. 722.).

Rješenje. U sl. 722. zadane su projekcije opće rotacione plohe, kojoj je os okomita na Π_1. Donji je dio plohe polukugla, a gornji dio pripada anuloidu. Ravnina Σ zadana je tragovima s_1, s_2.

Najprije će se odrediti najviša i najniža točka presječne krivulje k. Te točke leže u meridijanskoj ravnini $N(n_1,n_2) \perp \Pi_1$, koja je okomita na ravnini Σ. Obje te ravnine sijeku se u pravcu $p(p',p'')$, koji je os simetrije krivulje k. Na pravcu p nalazi se najniža točka 1 i najviša točka 2. Te točke leže u sjecištima pravca p s meridijanom n, koji leži u ravnini **N**. Da se odrede točke 1 i 2, rotirat će se ravnina **N** oko osi o u ravninu glavnoga meridijana. Meridijan n doći će u glavni meridijan m, a pravac p doći će u položaj $p_0(p_0' \equiv m', p_0'')$. Točka S, u kojoj ravnina Σ siječe os o, ostane kod te rotacije na istom mjestu, pa pravac p_0'' ide točkom S'' i nacrtom $P_{1,0}''$ rotiranog probodišta P_1 pravca p. Pravac p_0 siječe glavni meridijan u točkama $1_0(1_0', 1_0'')$ i $2_0(2_0', 2_0'')$. Ako se te točke rotiraju natrag, dobit će se točke $1(1', 1'')$ i $2(2', 2'')$.

Da se dobiju točke 3 i 4, u kojima ravnina Σ siječe ekvator e, sjeći će se ravnina Σ s ravninom ekvatora u sutražnici prve skupine s, koja će opet sjeći ekvator u točkama $3(3',3'')$ i $4(4',4'')$.



Sl. 723.

Točke 5 i 6. u kojima ravnina Σ siječe glavni meridijan, dobit će se na taj način, da se ravnina Σ siječe s ravninom glavnog meridijana u sutražnici druge skupine q. Ta će sutražnica sjeći glavni meridijan u točkama $5(5',5'')$ i $6(6',6'')$. Nacrt q'' mora ići točkom S'' i on siječe m'' u $5''$ i $6''$.

Ako se između najviše i najniže točke položi kojagod horizontalna ravnina **A**, ona će sjeći rotacionu plohu u kružnici $a(a',a'')$, a ravninu Σ u sutražnici prve skupine $c(c',c'')$. Pravac c siječe kružnicu a u točkama $9(9',9'')$ i $10(10', 10'')$ krivulje k. Na taj se način može odrediti više točaka krivulje k.

Krivulja k' dotiče prvu prividnu konturu e', u točkama $3'$ i $4'$, a krivulja k'' dotiče drugu prividnu konturu u točkama $5''$ i $6''$. U tlocrtu se vidi luk 3 2 4, a u nacrtu luk 5 4 6.

Tangenta. Na jednak način kao u sl. 711. konstruirana je u sl. 722. tangenta $t(t',t'')$ u točki $9(9',9'')$ krivulje $k(k',k'')$.

3. Zadatak. *Odredi presjek rotacione plohe općom ravninom Σ, koja dotiče plohu u jednoj hiperboličnoj točki!* (Sl. 723.).

Opis plohe. U sl. 723. nacrtane su projekcije anuloida kojemu je os okomita na Π_1. Već smo rekli, da anuloid nastane kad se kružnica m zavrti oko pravca o, koji leži u ravnini te kružnice, a ne prolazi njezinim središtem. Prvu prividnu konturu čine kružnice e' i g' te je e' tlocrt ekvatora e, a g' tlocrt grlene kružnice g. Ekvator i grlena kružnica leže u istoj horizontalnoj ravnini **E**, koja je ravnina simetrije anuloida. Drugu prividnu konturu čine dvije sukladne i prema o'' simetrične kružnice m'', koje su nacrt glavnog meridijana anuloida.

Najviši i najniži usporednik a i b jesu dvije sukladne kružnice. Ravnine tih kružnica ujedno su stalne dirne ravnine anuloida. Nacrti su a'' i b'' dužine, koje također pripadaju drugoj prividnoj konturi.

Najviši i najniži usporednik dijeli plohu anuloida na dva dijela: na izvanji i unutarnji dio. Na izvanjem su dijelu samo eliptičke točke, a na unutarnjem su dijelu samo hiperbolične točke. U točkama usporednika a i b jesu parabolične točke.

Svaka horizontalna ravnina, koja leži između usporednika a i b, siječe anuloid u dva usporednika, od kojih je jedan na izvanjem, a drugi na unutarnjem dijelu plohe.

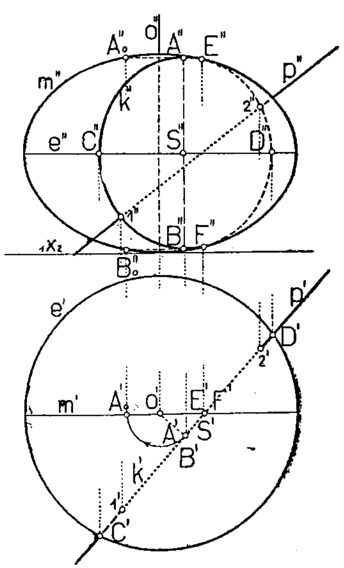
Upotreba je anuloida i njegovih dijelova u obrtu i tehnici vrlo velika. Na raznim predmetima dolaze ili samo izvanje ili samo unutarnje površine, odnosno dijelovi tih ploha.

Dirna ravnina u jednoj točki anuloida. Ako se na anuloid postavi dirna ravnina u jednoj eliptičnoj točki, onda ta ravnina ima s anuloidom zajedničko samo diralište. Ako se pak postavi na anuloid dirna ravnina u jednoj hiperboličnoj točki T, ta ravnina siječe anuloid u krivulji k, koja u diralištu ima dvostruku točku. Točku $T(T', T'')$ uzet će se na usporedniku $c(c', c'')$. Ako se u točki T_0'' povuče tangenta p_0'' na m'', ona siječe o'' u točki V'', koja je nacrt vrha V dirnog stošca uzduž usporednika c. Ako se točka V spoji s točkom T pravcem $p(p' \equiv V'T', p'' \equiv V''T'')$, taj je pravac tangenta plohe u točki T. Dirna ravnina Σ plohe u točki T sadrži pravac p i tagentu u usporednika c u toj točki. Budući da je pravac u sutražnica prve skupine dirne ravnine Σ, prvi trag s_1 te ravnine ide prvim probodištem P_1 pravca p usporedno sa u' (ili $s_1 \perp p'$). Drugi trag s_2 išao bi kroz druga probodišta pravaca p i u, no kako za rješenje postavljene zadaće nije potreban, neće se ni konstruirati.

Presjek anuloida ravninom Σ. Ravnina Σ siječe najniži usporednik b u točkama $1(1',1'')$ i $2(2',2'')$ koje leže, pošto je taj usporednik u Π_1, u sjecištima kružnice b s tragom s_2. Da se dobiju točke presjeka 3 i 4 na najvišem usporedniku a, sjeći će se ravnina Σ s ravninom toga usporednika u sutražnici s prve skupine ravnine Σ. Sutražnica s siječe pravac p u točki $A(A',A'')$, pa kroz točku A' ide tlocrt $s'(\parallel s_1)$ sutražnice s. Pravac s' siječe a' u točkama 3' i 4'. Nacrti 3'' i 4'' leže na $a''\equiv s''$. Na jednak način kao točke 3 i 4 odrede se točke 5—8, koje leže na ekvatoru e i na grlenoj kružnici g, zatim točke na kojemgod izvanjem ili unutarnjem usporedniku.

Da se dobiju točke presjeka na glavnom meridijanu m, konstruirat će se pravac q, u kojemu ravnina Σ siječe ravninu glavnoga meridijana. Pravac u, koji leži u ravnini Σ, siječe ravninu glavnoga meridijana u točki $E(E',E'')$, pa tom točkom ide pravac q. Pošto Σ siječe pravac o u točki V i pošto V leži i u ravnini glavnoga meridijana, to je $q\equiv EV$, dakle $q'\equiv E'V'=m'$, i $q''\equiv E''V''$. Pravac p'' siječe kružnicu m'' u točkama 15''—18'' koje leže na krivulji k''. Točke 15'—18' leže na pravcu m'.

Pošto se odredio dovoljan broj točaka presjeka, mogu se izvući krivulje k' i k''. Krivulja k' ima u točki T' dvostruku točku, ona dotiče kružnicu e' u točkama 5' i 6', kružnicu g' u točkama 7' i 8', a pravac s_1 i s' u točkama 1',2' i 3',4'. Krivulja k'' ima u točki T'' dvostruku točku, ona dotiče pravce a'' i b'' u točkama 3'',4'' i 1'',2'', a kružnicu m'' u točkama 15''—18''.



Sl. 724.

§ 208. Presjek pravca s rotacionom plohom

Zadatak. *Odredi presjek pravca s rotacionom plohom!* (Sl. 724.).

Rješenje. U sl. 724. nacrtane su projekcije sploštenog rotacionog elipsoida, kojemu je os okomita na Π_1, i projekcije pravca p. Da se odrede sjecišta pravca p s tim elipsoidom, položit će se pravcem p pomoćna ravnina $\Sigma\perp\Pi_1$ (ili $\Sigma\perp\Pi_2$) i njom će se sjeći elipsoid u krivulji k. Ta krivulja siječe pravac p u traženim sjecištima 1 i 2. Ravnina siječe elipsoid uopće u elipsi. U sl. 724. tlocrt je presječne elipse dužina $C'D'$ u pravcu p', a nacrt elipsa k'', koja siječe p'' u točkama 1'' i 2''. Pomoću ordinala odrede se na p' točke 1' i 2'.

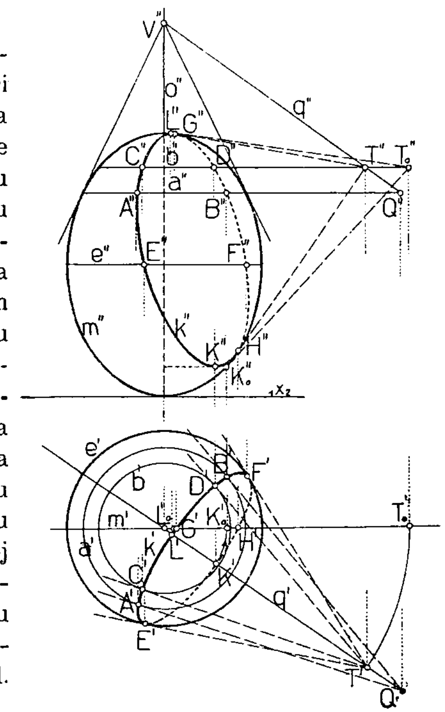
Mala je os elipse k'' dužina $C''D''$, a velika os dužina $A''B''$. Točke se A'',B'' dobiju pomoću usporednika koji idu točkama A i B. Elipsa k'' dotiče prividnu konturu m'' u točkama E'' i F''.

§ 209. Dirni stošci i valjci rotacionih ploha

1. Zadatak. *Zadana je rotaciona ploha i izvan nje točka T, položi tom točkom dirne ravnine na plohu i konstruiraj dirnu krivulju k!* (Sl. 725.).

Rješenje. U sl. 725. nacrtane su projekcije dugoljastog rotacionog elipsoida, kojemu je os $o\perp\Pi_1$, i projekcije neke točke T. Jednom točkom T, koja je izvan rotacione plohe, može se na tu plohu položiti neizmjerno mnogo dirnih ravnina. Sve te ravnine umataju dirni stožac, kojemu je vrh u točki T i koji dotiče rotacionu plohu u krivulji k.

Da se dobiju pojedine točke krivulje k postupat će se na slijedeći način: Uzduž kojega god usporednika $a(a',a'')$ položit će se dirni stožac. Sve dirne ravnine toga stošca ujedno su dirne ravnine rotacione plohe. Između tih ravnina bit će dvije, koje će ići točkom T, te će doticati plohu u točkama krivulje k. Ako se točka T spoji s vrhom V pravcem q, taj pravac siječe ravninu usporednika a u točki $Q(Q',Q'')$. Tangente povučene s točke Q na usporednik a dotiču tu kružnicu u točkama $A(A',A'')$ i $B(B',B'')$. Svaka tangenta TA i TB određuje s pravcem q dirnu ravninu plohe. Te ravnine dotiču plohu u točkama A i B, pa one leže na dirnoj krivulji k. Projekcije točaka A i B dobiju se tako, da se s točke Q' povuku tangente na kružnicu a' i odrede dirališta. Ta su dirališta točke A' i B' i t. d.



Sl. 725.

Ako se s točke T' potegnu tangente na prvu prividnu konturu e', dobit će se dvije točke E' i F' krivulje k'. Ako se nadalje s točke T'' povuku tangente na drugu prividnu konturu m'', dobit će se dirališta G'' i H'' koja leže na krivulji k''.

Najniža i najviša točka krivulje k leži na meridijanu n, kojemu ravnina N prolazi točkom T. Ako se s točke T povuku tangente na taj meridijan, onda će diralište K biti najniža, a diralište L najviša točka krivulje k. Da se dobiju projekcije tih točaka, okrenut će se meridijanska ravnina N oko osi o u ravninu glavnoga meridijana m. Točka T doći će u položaj $T_0(T_0', T_0'')$, a meridijan n padne u meridijan m. Ako se s točke T_0'' povuku tangente na meridijan m, dirališta će K_0'' i L_0' biti nacrti rotiranih točaka K i L. Te točke leže na usporednicima koji idu točkama K_0 i L_0. Ako se nacrtaju tlocrti tih usporednika, oni sijeku pravac $T'O'$ u točkama K' i L'. Spomoću ordinala odrede se točke K'' i L''. Tangente su u točkama K i L horizontalne. Prema obliku rotacione plohe može na toj plohi biti više nego li dvije točke krivulje k u kojima su tangente horizontalne.

Meridijanska ravnina N je ravnina simetrije za krivulju k. Prema tome pravac je $O'T'$ simetrala krivulje k'.

Napomene: I. Ako se točka T odmakne u danom smjeru s neizmjerno daleko, onda dirni stožac prеđe u dirni valjak.

II. Ako se točka T smatra izvorom svjetla, onda je krivulja k rastavnica na rotacionoj plohi. Ako dirni stožac, kojemu je vrh T, siječe rotacionu plohu u krivulji k_x, ta je krivulja granica bačene sjene plohe na samu tu plohu.

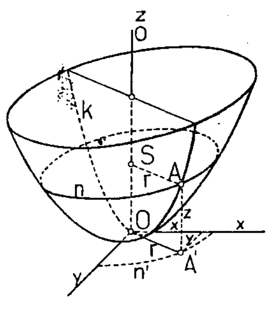
III. Ako je rotaciona ploha elipsoid (sl. 725.), onda je krivulja k elipsa. Dužina je KL jedan promjer te elipse. Kako se odredi tomu promjeru konjugirani promjer?

IV. Ako je rotaciona ploha elipsoid (sl. 725.), onda je točka T pol, a ravnina krivulje k je polarna ravnina s obzirom na tu plohu.

§ 210. Rotacioni paraboloid

1. Postanak i jednadžba rotacionog paraboloida. Ako se parabola k zavrti oko svoje osi o, ona opiše plohu koja se zove *paraboloid*. Tjeme parabole ujedno je tjeme paraboloida. U sl. 726. uzelo se, da je os o paraboloida ujedno os z prostornog pravokutnog koordinatnog sistema $Oxyz$, i da ravnina xy dotiče paraboloid u njegovom tjemenu O. Kojagod točka parabole k opiše usporednik n, koji je usporedan s ravninom xy. Ako su x, y, z koordinate točke A, a r polumjer kružnice n, onda su jednadžbe te kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{i} \quad z = d. \qquad (1)$$



Sl. 726.

Jednadžba je glavnog meridijana, koji leži u ravnini yz.

$$y^2 = 2pz.$$

Budući da je $r = y$, ili $r^2 = y^2 = 2pz$, tad je ako se u (1) obavi supstitucija za r^2

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0 \qquad (2)$$

jednadžba rotacionog paraboloida.

2. Presjek rotacionog paraboloida ravninom usporednom sa osi z jest parabola, koja je sukladna s glavnim meridijanom.

Dokaz. Ako se paraboloid $x^2 + y^2 - 2pz = 0$ siječe ravninom $x = c$, koja je usporedna s ravninom glavnoga meridijana, jednadžba je projekcije presjeka na ravninu yz

$$y^2 - 2pz + c^2 = 0 \qquad \text{ili} \qquad y^2 - 2p\left(z - \frac{c^2}{2p}\right) = 0.$$

Iz te se jednadžbe vidi, da je presjek parabola. Ako se u toj jednadžbi piše z, mjesto $z + \frac{c^2}{2p}$ dobit će se jednadžba $y^2 - 2pz = 0$ koja je identična s jednadžbom glavnoga meridijana, odakle slijedi, da je presjek parabola, koja je sukladna s glavnim (ili kojimgod drugim) meridijanom.

3. Presjek paraboloida kakvom god ravninom jest elipsa, koja se projicira na ravninu okomitu na osi plohe kao kružnica.

Dokaz. Neka je jednadžba presječne ravnine Σ

$$z = ax + by + c. \qquad (4)$$

Ako se iz jednadžbi (1) i (2) eliminira z, dobit će se jednadžba projekcije presjeka paraboloida s ravninom Σ, naime

$$x^2 + y^2 - 2p(ax + by + c) = 0. \qquad (4)$$

Ta jednadžba predstavlja kružnicu. Prema tome je projekcija presjeka kružnica.

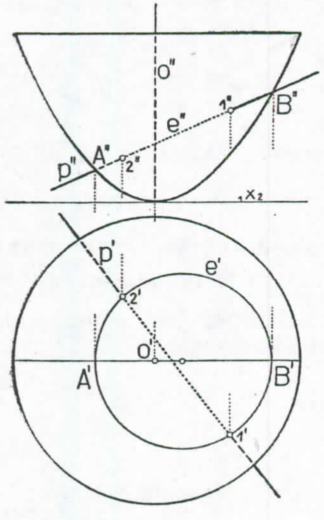
4. Presjek pravca s rotacionim paraboloidom. (Sl. 727.) Ako se pravcem p položi bilo koja ravnina, na pr. $\Sigma \perp \Pi_2$, ona siječe paraboloid u elipsi e, koja siječe pravac p u traženim sjecištima 1 i 2. Budući da je tlocrt e' elipse e kružnica, ona siječe p' u točkama 1' i 2' i t. d.

5. Zadatak. *Sa zadane točke V, koja je izvan površine rotacionog paraboloida, neka se tomu paraboloidu opiše dirni stožac.*

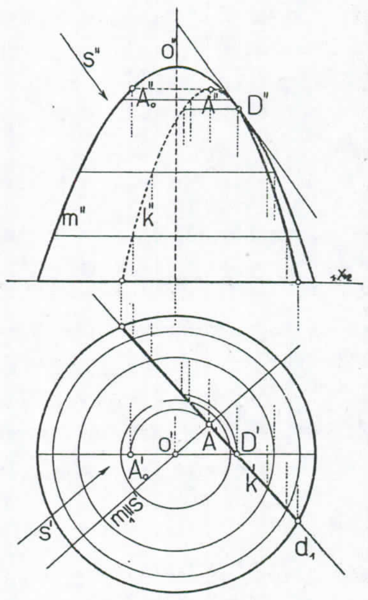
Rješenje. Dirna je krivulja k elipsa, kojoj je projekcija na ravnini, koja je okomita na osi paraboloida, kružnica k'. Inače se projekcije elipse k mogu odrediti na jednak način kao kod elipsoida (§ 209., t. 1., sl. 725.). Nacrtaj sliku.

6. Zadatak. *Zadanom rotacionom paraboloidu opiši valjak, kojemu su izvodnice usporedne sa zadanim pravcem s!* (Sl. 728.).

Rješenje. U sl. 728. nacrtane su projekcije rotacionog paraboloida kojemu je os $o \perp \Pi_1$, kojemu je jedan usporednik u Π_1 i kojemu je tjeme povrh ravnine Π_1. Nadalje su nacrtane projekcije s', s'' pravca s.



Sl. 727.



Sl. 728.

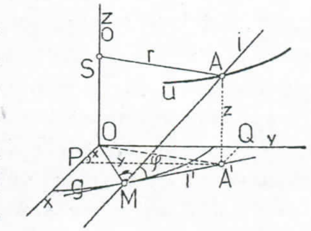
Ako se točka V (t. 5) nalazi u smjeru pravca s neizmjerno daleko, onda je samo jedan vrh A dirne krivulje k u konačnosti, dok je drugi vrh beskonačno daleko. Oba se ta vrha nalaze u meridijanskoj ravnini **M**, koja je usporedna s pravcem s. Odatle slijedi, da se dirna krivulja nalazi u vertikalnoj ravnini Δ, koja je okomita na ravnini **M** i koja ide vrhom A. Nadalje zaključujemo, da će dirna krivulja k biti parabola i prema tome da će dirni valjak biti paraboličan, a ravnina $\Delta \perp \Pi_1$. Budući da je $\Delta \perp \mathbf{M}$, bit će prvi trag $d_1 \perp m_1$. Ako se na glavni meridijan povuče tangenta usporedno sa s'', ona dotiče taj meridijan u točki $D(D', D'')$. Trag d_1 ide točkom D' okomito na m_1. U tragu d_1 nalazi se tlocrt k' dirne krivulje k. Pomoću usporednika odredi se nacrt k''.

Napomena. Ako je pravcem s zadan smjer usporednih zraka svijetla, onda je krivulja k rastavnica, kojoj je tlocrt pravac k'.

§ 211. Rotacioni hiperboloid

1. Postanak jednoplošnog rotacionog hiperboloida. Ako pravac i, koji je prema horizontalnoj ravnini (xy) nagnut za kut $\varphi\,(0^0 < \varphi < 90^0)$ i ne siječe os z, rotira oko osi $o \equiv z$, on opiše jednoplošni hiperboloid.

Dokaz. U sl. 729. zadan je prostorni koordinatni sustav $O(xyz)$, zatim pravac i i njegova ortogonalna projekcija i' na ravnini (xy). Svaka točka A pravca i opiše kružnicu, kojoj je središte S u osi z, a polumjer $SA = r$. Ta je kružnica usporedna s ravninom (xy), te se na nju projicira u pravoj veličini kao kružnica u', kojoj je točka O središte, a $OA' \# OA$ polumjer. Krajnja točka M najkraće udaljenosti OM osi o i izvodnice i opiše najmanju kružnicu g, koja neka je u ravnini (xy). Ako se sa x, y, z označe koordinate točke A, onda je jednadžba kružnice u



Sl. 729.

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = p. \tag{1}$$

Iz pravokutnog je trokuta $AA'M$

$$MA' = AA' \cdot \operatorname{cotg} \varphi, \quad \text{ili} \quad \overline{MA'} = p \cdot \operatorname{cotg} \varphi,$$

a iz pravokutnog trokuta OMA'

$$\overline{OA'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA'}^2 \quad \text{ili} \quad r^2 = a^2 + p^2 \operatorname{cotg} \varphi. \tag{2}$$

Ako se iz jednadžbe (1) i (2) eliminira r i p dobit će se jednadžba

$$x^2 + y^2 - z \operatorname{cotg}^2 \varphi = a^2.$$

Ta se jednadžba može pisati u obliku

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2\, tg^2 \varphi} = 1. \tag{3}$$

Ta jednadžba predstavlja geometrijsko mjesto kružnica u, dakle plohu, koju opiše pravac i kada se vrti oko osi z. Iz analitičke je geometrije poznato, da jednadžba (3), pošto su veličine a^2 i $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ konstante, predstavlja jednoplošni rotacioni hiperboloid. Ako se u jednadžbi (3) stavi za $x = 0$ dobit će se jednadžba

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2\, tg^2 \varphi} = 1,$$

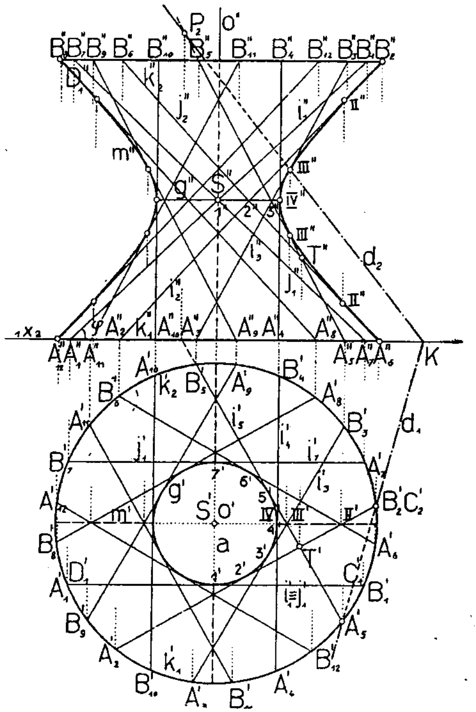
koja predstavlja glavni meridijan rotacione plohe. Taj je meridijan hiperbola, kojoj je realna poluos $= a$, a imaginarna poluos $= a \operatorname{tg} \varphi$.

Budući da u jednadžbi (3) tg dolazi u kvadratu, ta se jednadžba mijenja ako φ zamijenimo sa $(180^0 - \varphi)$; t. j. pravac j koji je od ishodišta O

udaljen za dužinu a, te je prema ravnini (xy) nagnut za $(180^0 - \varphi)$ također opiše isti rotacioni hiperboloid, koji opiše i paravac i. Odatle slijedi:

Svakom točkom jednoplošnog rotacionog hiperboloida idu dva pravca, dvije izvodnice, koje potpuno leže u plohi hiperboloida.

Pravci $i_1, i_2, i_3, \ldots$ čine jedan sistem, a pravci $j_1, j_2, j_3, \ldots$ čine drugi sistem izvodnica rotacionog hiperboloida. Kojegod dvije izvodnice iste skupine ne sijeku se, nego su mimosmjerni pravci, jer svaka izvodnica i ili j ima sa svakim usporednikom plohe samo jednu zajedničku točku. Svaka izvodnica jednoga sistema siječe sve izvodnice drugoga sistema.



Sl. 730.

Iz postanka se jednoplošnog rotacionog hiperboloida vidi, da je ta ploha simetrična s obzirom na ravninu najmanjeg usporednika g. Središte te kružnice ujedno je središte hiperboloida.

2. Predočivanje jednoplošnog rotacionog hiperboloida projekcijama. (Sl. 730.). Uzet će se da je os $o \perp \Pi_1$ i da je početni položaj izvodnice $i_1 \equiv A_1B_1$ ($i_1' \equiv A_1'B_1'$, $i_1'' = A_1''B_1''$). Pravac $A_1''B_1''$ čini sa osi x kut φ u pravoj veličini. (Zašto?). Najkraća udaljenost a pravaca o i i vidi se u Π_1 u pravoj veličini kao okomica spuštena s točke S' na i_1', t. j. $S'1' = a$. Kad se pravac i_1 okreće oko o, točka će 1 opisati najmanji usporednik, t. j. grlenu kružnicu $g(g', g'')$, te će tlocrt $i_1', i_2', i_3', \ldots$ doticati kružnicu g' kojoj je središte S', a polumjer a.

Točka A_1 je prvo probodište pravca i_1 s Π_1. Ta točka opiše kružnicu $k_1(k_1', k_2')$, koja leži u Π_1. Točka B_1 opiše također kružnicu k_2 ($k_2' \equiv k_1', k_2''$), koja je simetrično položena s kružnicom k_1 prema ravnini grlene kružnice g.

Ako je i_2 drugi položaj izvodnice i, tad $i_2' = A_2'B_2'$ dotiče kružnicu g' u točki $2'$, dok krajnje točke A_2' i B_2' leže na kružnicama k_1' i k_2'. Ako se potraže nacrti A_2'' na k_1'' i B_2'' na k_2'', onda je $i_2'' \equiv A_2''B_2''$. Pravac i_2''

ide točkom $2''$ koja leži na g''. Na jednak način mogu se odrediti projekcije izvodnica i u povoljnom broju.

U istom pravcu i_1' može se uzeti da se nalazi tlocrt j_1' izvodnice j_1, koja pripada drugoj skupini izvodnica j. Krajnje su točke C_1' i D_1' pravca j_1' na kružnicama k_1' i k_2' t. j. C_1' je na k_1', a D_1' na k_2'. Potraži li se nacrt C_1'' na k_1'' i D_1'' na k_2'', onda je $C_1''D_1'' \equiv j_1''$. Može se uzeti da je u pravcu i_2' tlocrt j_2' za drugi položaj izvodnice j. Krajnje točke C_2' i D_2' dužine j_2' leže na kružnicama k_1' i k_2', pa ako se odrede nacrti C_2'' na k_1'' i D_2'' na k_2'', onda je $j_2'' \equiv C_2''D_2''$. Na jednak način odrede se projekcije izvodnica j u povoljnom broju.

Svaka je izvodnica sistema i usporedna s jednom izvodnicom sistema j. Na pr. izvodnica i_1 usporedna je s izvodnicom j_7, izvodnica $i_2 \parallel j$ i t. d.

3. Glavni meridijan hiperboloida. Ako se osju o položi ravnina $\mathbf{M} \parallel \Pi_2$, ona siječe hiperboloid u hiperboli $m(m', m'')$, koja je glavni meridijan plohe. Hiperbolu m umataju nacrti izvodnica jedne i druge skupine, t. j. ti su nacrti tangente hiperbole m''. Da se dobiju dirališta, sjeći će se pojedine izvodnice ravninom $\mathbf{M}$ u točkama I, II, III, . . . pa će točke I'', II'', III'', . . . koje leže na tangentama $i_1', i_2', i_3', \ldots$, odnosno na $j_1', j_2', j_3', \ldots$ biti spomenuta dirališta. Krivulja koja spaja te točke jest hiperbola m''. Ako se hiperbola m okreće oko osi o, ona će opisati isti rotacioni hiperboloid, koji opiše izvodnica i ili j.

Izvodnice i_1 i j_1 usporedne su s ravninom $\mathbf{M}$, pa u smjeru tih izvodnica leže neizmjerno daleke točke hiperbole m. Prema tomu u pravce i_1'' i j_1'' padaju asimptote hiperbole m''.

4. Vidljivost izvodnica. U tlocrtu se vide gornji dijelovi izvodnica jednoga i drugoga sistema, t. j. vide se oni dijelovi, koji leže između ravnine grlene kružnice i ravnine usporednika k_2. Na pr. u tlocrtu se vidi dio $1B_1$ izvodnice i_1 i dio $1D_1$ izvodnice j_1 itd. U nacrtu se vide oni dijelovi izvodnica, koji leže na prednjoj polovici plohe.

Izvodnice koje leže simetrično prema ravnini glavnog meridijana imadu zajednički nacrt. Na pr. $i_6'' = i_2''$.

5. Dirna ravnina rotacionog hiperboloida. Ako se kroz dvije izvodnice, na pr. kroz izvodnice i i j (sl. 730.), koje se sijeku u točki T, položi ravnina Δ, ona siječe hiperboloid u tim izvodnicama. Te dvije izvodnice smatraju se krivuljom 2. reda, i to degeneriranom hiperbolom, pa ravnina Δ ne može imati s hiperboloidom inih zajedničkih točaka osim pravce i i j. Ako se prema tome točkom T povuče u ravnini Δ kojigod pravac, on osim točke T ne može imati s hiperboloidom nijedne druge točke zajedničke. Svaki je dakle pravac potegnut točkom T u ravnini Δ tangenta hiperboloida u toj točki. Odatle slijedi, da je ravnina Δ dirna ravnina hiperboloida

*

u točki T. Tragovi su te ravnine u sl. 730. $d_1 \equiv A_5'C_2'$, $d_2 \equiv KP_2$, gdje je P_2 drugo probodište izvodnice A_5B_5.

Ako se dirаlište T giblje po izvodnici A_5B_5, onda se dirna ravnina Δ okreće oko te izvodnice. Nema na toj izvodnici točaka, koje bi imale istu dirnu ravninu, dok kod razmotljivih pravčastih ploha (§ 171., t. 2.) sve točke jedne izvodnice imadu zajedničku dirnu ravninu. Plašt jednoplošnog hiperboloida ne da se rastegnuti u ravninu, pa se kaže da je ta ploha *vitopera*.

Jednoplošni je hiperboloid vitopera pravčasta ploha 2. reda.

6. Asimptotički stožac. Budući da izvodnice rotacionog hiperboloida čine sa ravninom grlene kružnice g jednake priklone kutove, tad pravci potegnuti središtem S te kružnice usporedno s tima izvodnicama čine rotacioni stožac, kojemu je točka S vrh. Taj je stožac asimptotički stožac rotacionog hiperboloida. Pravci i_1'' i j_1'' čine drugu prividnu konturu toga stošca. Po dvije izvodnice hiperboloida usporedne su s jednom izvodnicom stošca. Ta tri pravca leže u istoj ravnini, koja dotiče stožac u dotičnoj izvodnici. Ta ravnina dotiče hiperboloid u neizmjerno dalekoj točki, pa se zove *asimptotička ravnina* hiperboloida. Budući da tom točkom idu dvije izvodnice hiperboloida, koje pripadaju različitim sistemima, slijedi da su te dvije izvodnice među sobom usporedne, t. j. svaka asimptotična ravnina hiperboloida siječe taj hiperboloid u dvije usporedne izvodnice.

7. Presjek hiperboloida ravninom. Presjeci hiperboloida i njegovog asimptotičkog stošca ravninom jesu koncentrične krivulje 2. reda, koje su slične i slično položene. Središta usporednih tetiva presjeka stošca ujedno su središta tetiva presjeka hiperboloida, a jer su presjeci stošca krivulje 2. reda, to dvjema konjugiranim promjerima jedne te krivulje pripadaju u presjeku hiperboloida dva konjugirana promjera, t. j. presjek je hiperboloida također krivulja 2. reda. Ravnina Σ siječe hiperboloid u hiperboli, paraboli ili elipsi prema tome, da li ravnina **P**, koja ide usporedno s ravninom Σ vrhom asimptotičkog stošca, sadrži dvije izvodnice, jednu izvodnicu ili nijednu izvodnicu toga stošca.

Pojedine točke presjeka hiperboloida ravninom Σ mogu se odrediti kao u § 207., t. 2., a mogu se odrediti i tako, da se traže točke u kojima pojedine izvodnice sijeku ravninu Σ. Ta se metoda upotrebljava naročito onda, kad je ravnina Σ okomita na Π_1 ili na Π_2. Ako je pak ravnina Σ u općenitom položaju, onda se pojedine točke presjeka mogu dobiti na taj način, da se pomoćne ravnine polažu jednom stalnom izvodnicom jednoga sistema i jednom promjenljivom izvodnicom drugoga sistema, pa se traže presjeci ravnine Σ s tima pomoćnim ravninama. Tada će presječnica svaki put sjeći onu promjenljivu izvodnicu u točki, koja pripada presječnoj krivulji.

8. Dirni stošci i valjci rotacionog hiperboloida. Ako se sa zadane točke V opiše rotacionom hiperboloidu dirni stožac, onda dirna krivulja k može biti elipsa, parabola ili hiperbola prema tome, da li se točka V nalazi unutar plašta asimptotičkog stošca, na plaštu, ili izvan plašta.

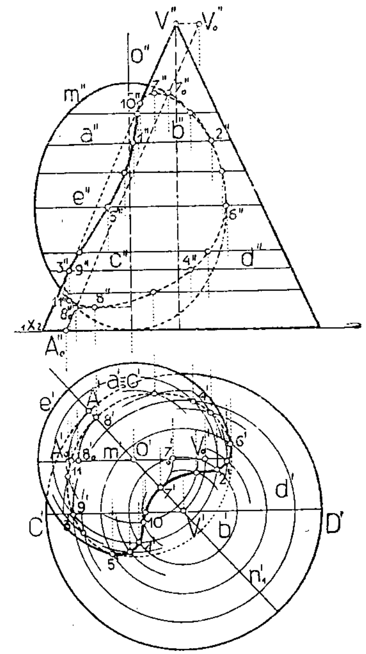
Treba li na rotacioni hiperboloid položiti dirni valjak, kojemu su izvodnice usporedne s pravcem s, onda dirna krivulja k može biti elipsa ili hiperbola prema tome, da li je pravac d, potegnut vrhom asimptotičnog stošca usporedno s pravcem s, unutar ili izvan toga stošca. Ako se pravac d podudara s jednom izvodnicom asimptotičkog stošca, onda je krivulja k parabolična i reducira se na one dvije izvodnice hiperboloida, koje su usporedne sa s.

Napomena. I. Dokazivanjem gore izvedenih tvrdnja, kao i izvođenjem konstrukcija, ne možemo se baviti u opsegu ove knjige.

II. Ako se točka V smatra izvorom svjetla, onda je krivulja k rastavnica na hiperboloidu kod centralne ili usporedne rasvjete prema tome, da li je točka V u konačnosti ili u beskonačnosti.

§ 212. Prodor rotacionih ploha

1. O prodoru rotacionih ploha. Prodor rotacionih ploha s drugim tijelima nije uvijek jednostavan. Određivanje prodora rotacione plohe s uspravnom prizmom ili uspravnim valjkom ne zadaje nikakovih poteškoća, ako su osi obaju tijela među sobom usporedne i okomite na kojugod ravninu projekcija, jer u toj ravnini imamo već jednu projekciju prodorne krivulje k. Ako su nadalje osi dviju rotacionih ploha među sobom usporedne ili ako se te dvije osi sijeku, određivanje je prodora dosta jednostavno. No ako su osi dviju rotacionih ploha u kakvom god položaju, onda određivanje prodora nije više jednostavno, niti se pojedine točke toga prodora mogu točno odrediti.

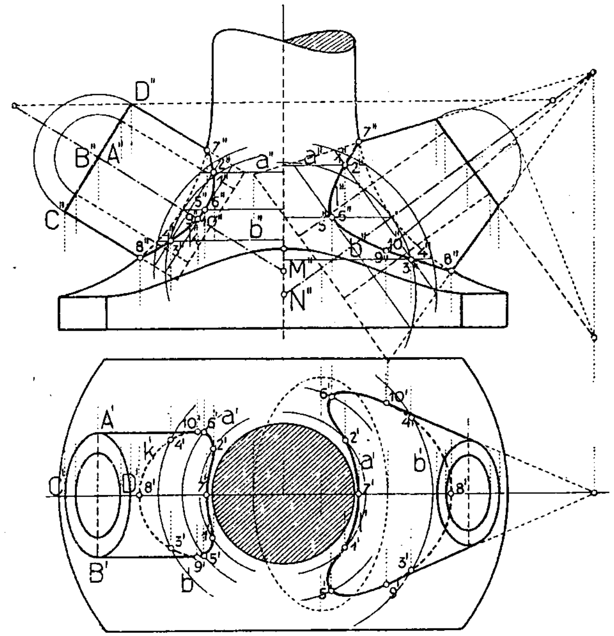


Sl. 731.

2. Zadatak: *Odredi prodor dviju rotacionih ploha, kojima su osi među sobom usporedne!* (Sl. 731.).

Rješenje: U sl. 731. zadane su projekcije rotacionog jajolikog elipsoida i rotacionog stošca, kojima su osi okomite na Π_1. Pojedine točke prodorne krivulje k odrede se pomoću horizontalnih presjeka jednoga i drugoga tijela. Horizontalna ravnina A siječe elipsoid u kružnici $a(a',a'')$, a stožac u kružnici $b(b',b'')$. Obje te kružnice sijeku se u točkama $1(1',1'')$ i $2(2',2'')$, koje pripadaju krivulji k. Na jednak se način dobiju druge točke krivulje k. U točkama $5(5',5'')$ i $6(6',6'')$ siječe ekvator e elipsoida stožac.

Najviša i najniža točka 7 i 8 krivulje k leži u meridijanskoj ravnini N, koja sadrži osi jednoga i drugoga tijela. Prvi je trag te ravnine $n \equiv O'V'$. Ta ravnina siječe elipsoid u meridijanu n, a stožac u dvije izvodnice VA



Sl. 732.

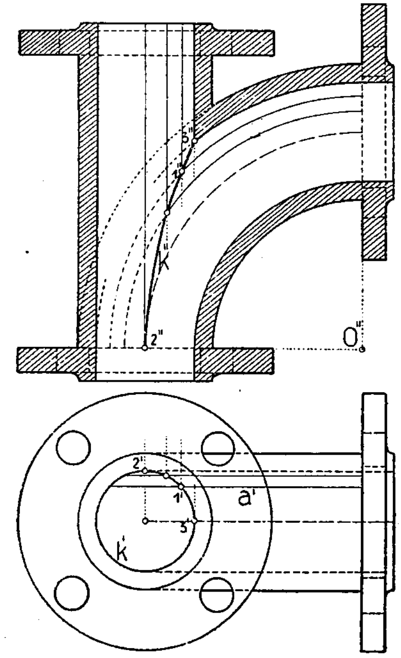
i VB. Izvodnica VA siječe meridijan n u točkama 7 i 8. Da se dobiju projekcije tih točaka, okrenut će se ravnina N oko osi o elipsoida u ravninu glavnoga meridijana m. Meridijan n doći će u meridijan m, a izvodnica VA doći će u položaj $V_0A_0(V_0'A_0' \parallel x,\ V_0''A_0'')$. Pravac $V_0''A_0''$ siječe m'' u točkama $7_0''$ i $8_0''$. Ako se na m' odredi $7_0'$ i $8_0'$, pa se oko O' opišu lukovi s polumjerima $O'\,7_0'$ i $O'\,8_0'$, dobit će se na pravcu n_1 tlocrti $7'$ i $8'$. U visini točaka $7_0''$ i $8_0''$ leže nacrti $7''$ i $8''$.

Točke koje leže na drugoj prividnoj konturi m'' i $C''V''$ odrede se približnom točnošću iz tlocrta, pošto se već nacrtala krivulja k.

3. Zadatak. *Odredi prodor rotacione plohe s rotacionim valjkom, ako im se osi sijeku pod šiljastim kutom. (Praktična primjena)!* (Sl. 732.).

Rješenje. U sl. 732. nacrtane su projekcije rotacione plohe (dijela anuloida), kojoj je os $o \perp \Pi_1$, i projekcije rotacionog valjka, kojemu os siječe os o u točki M i usporedna je s Π_2. Nadalje su nacrtane projekcije rotacionog krnjeg stošca, kojemu os siječe os o u točki N i koja je usporedna s Π_2. Valjak i stožac prodiru rotacionu plohu u krivuljama k i l. Te su krivulje određene pomoću kugala, kojima su središta u točki M, odnosno u točki N. Ako se na pr. oko točke M opiše pomoćna kugla, ona rotacionu plohu siječe u kružnicama a i b, kojima su nacrti dužine a'' i b'' usporedne sa osi x, a valjak siječe u kružnici c, koja je usporedna sa osnovkama valjka. Kružnica c siječe kružnicu a u točkama $1\,(1', 1'')$ i $2\,(2', 2'')$, a kružnicu b u točkama $3\,(3', 3'')$ i $4\,(4', 4'')$. Pomoću kugle, koja dotiče anuloid, određene su točke 5 i 6 krivulje k. Druga prividna kontura anuloida i valjka sijeku se u točkama 7 i 8. Točke $9'$ i $10'$, koje leže na prvoj prividnoj konturi valjka, odrede se iz nacrta pomoću točaka $9''$ i $10''$, u kojima k'' siječe nacrt izvodnica na kojima leže točke 9 i 10.

Na jednak se način odrede projekcije l' i l'' prodorne krivulje l anuloida i stošca. Tu je upotrebljena ista oznaka kao i lijevo kod valjka.



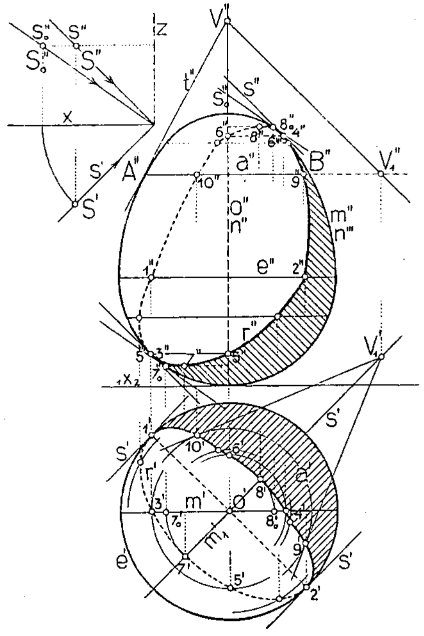
Sl. 733.

4. Zadatak: *Prodor anuloida s rotacionim valjkom. Sastav cijevi.* (Sl. 733.).

U sl. 733. nacrtane su projekcije dviju cijevi s porubnicima. Jedna cijev ima oblik anuloida, kojemu je os okomita na Π_2, a druga ima oblik rotacionog valjka, kojemu je os okomita na Π_1. Obje cijevi imadu jednake polumjere. U nacrtu prikazana je samo stražnja polovica s prodornom krivuljom unutarnjih plašteva. Tlocrt je te krivulje kružnica k', a nacrt se pojedinih točaka krivulje k'' odredi pomoću usporednika anuloida. Na pr. točka $1\,(1', 1'')$ leži na usporedniku $a\,(a', a_1')$.

§ 213. Konstrukcija sjena na rotacionim plohama

1. Rastavnica na općoj rotacionoj plohi. U sl. 734. nacrtane su projekcije opće rotacione plohe, kojoj je os o okomita na Π_1. Donji je dio te plohe polukugla, srednji dio je dio anuloida, a gornji dio je dio kugle. U toj slici konstruirane su projekcije rastavnice r kod dijagonalne rasvjete. Sve dirne ravnine rotacione plohe, koje su usporedne sa smjerom zraka svijetla, dotiču tu plohu u točkama, koje leže na rastavnici. Između sviju tih točaka ima 8 glavnih točaka rastavnice. Glavne su točke rastavnice: *a)* točke na ekvatoru, *b)* točke na glavnom meridijanu, *c)* točke na srednjem meridijanu, *d)* najviša i najniža točka.



Sl. 734.

a) Točke rastavnice r *na ekvatoru.* Uzduž ekvatora e može se na rotacionu plohu položiti dirni rotacioni valjak kojemu je os o. Ako se na taj valjak polože dirne ravnine usporedno sa smjerom s, one dotiču valjak u dvije izvodnice, koje su rastavnice toga valjka. Te rastavnice sijeku ekvator e u točkama 1 i 2, koje leže na rastavnici r. Ako se prema tome na kružnici e' povuku tangente usporedno sa s', dirališta su tih tangenata točke $1'$ i $2'$.

b) Točke rastavnice r *na glavnom meridijanu.* Uzduž glavnog meridijana m može se položiti na rotacionu plohu dirni valjak, kojemu su izvodnice okomite na Π_2. Dirne ravnine toga valjka, koje su usporedne sa smjerom s, dotiču valjak u dvije izvodnice, koje su rastavnice dirnoga valjka. Te izvodnice sijeku glavni meridijan m u točkama 3 i 4. Budući da su dirne ravnine rotacione plohe u tim točkama usporedne sa zrakama svijetla, one pripadaju rastavnici r. Pošto su te dirne ravnine okomite na Π_2, drugi su tragovi tih ravnina usporedni sa s'' i dotiču nacrt m'' glavnog meridijana m u točkama $3''$ i $4''$. Prema tome točke se $3''$ i $4''$ dobiju kao dirališta krivulje m'' s tangentama koje su usporedne sa s''.

c) Točke rastavnice na srednjem meridijanu. Srednji se meridijan n projicira na bokocrtnu ravninu u pravoj veličini. Može se uzeti da je $n''' \equiv m''$.

Povuku li se na m'' tangente usporedno sa s'', onda su dirališta $5'''$ i $6'''$ bokocrti traženih točaka 5 i 6 krivulje r. Kod dijagonalne je rasvjete $s''' \equiv s''$, pa je točka $5'''$ u $3'''$ i $6'''$ u $4'''$. Budući da n'' pada u O'', u tom su pravcu točke $5''$ i $6''$.

d) Najniža i najviša točka rastavnice r. Najniža i najviša točka rastavnice r leži u onoj meridijanskoj ravnini Σ, koja je usporedna sa smjerom s (meridijanska ravnina svijetla). Rastavnica r simetrična je s obzirom na ravninu Σ. Budući da je ta ravnina okomita na Π_1, to su tangente u točkama rastavnice, koje leže u toj ravnini, horizontalne, pa je prema tome jedna ta točka najviša, a druga najniža. Te se dvije točke dobiju na taj način, da se na meridijan svijetla m_1 povuku tangente usporedno sa s i odrede dirališta 7 i 8. Da se dobiju projekcije tih točaka okrenut će se meridijan m_1 oko osi o u glavni meridijan m. Zrake svijetla, koje dotiču meridijan m_1, imat će smjer s_0'', pa potegnu li se na m'' tangente usporedno sa s_0'', padaju u dirališta tih tangenata točke $7_0''$ i $8_0''$. To su rotirane projekcije najniže i najviše točke. Okrene li se meridijan m_1 oko o natrag u svoj položaj, točke će 7_0 i 8_0 opisati kružne lukove, koji se na Π_1 projiciraju u pravoj veličini. Ako se prema tome oko O' opišu lukovi s polumjerima $O'7_0'$ i $O'8_0'$, dobit će se na m_1' točke $7'$ i $8'$. U visini točaka $7_0''$ i $8_0''$ leže nacrti $7''$ i $8''$.

e) **Točke rastavnice** r **na kojemgod usporedniku.** Obično dostaje osam glavnih točaka da se izvuku projekcije rastavnice. No često puta treba konstruirati još koju točku rastavnice, pa će se ovdje pokazati, kako se te točke odrede na pojedinim usporednicima pomoću dirnih stožaca ili dirnih kugala uzduž te usporednice. U sl. 734. uzet će se usporednica $a\,(a', a'')$, pa će se uzduž te usporednice položiti dirni stožac. Vrh je toga stošca V u osi o. Odrede li se rastavnice toga stošca, one sijeku usporednicu a u u točkama 9 i 10. Dirne su ravnine rotacione plohe u tim točkama usporedne sa zrakama svijetla, pa prema tome one pripadaju rastavnici r. Ako se uzduž usporednika a položi dirna kugla rotacione plohe, ta kugla dotiče i dirni stožac uzduž toga usporednika. Pomoću te dirne kugle mogu se odrediti točke 9 i 10 na način kako je pokazano u § 201., t. 5., sl. 703.

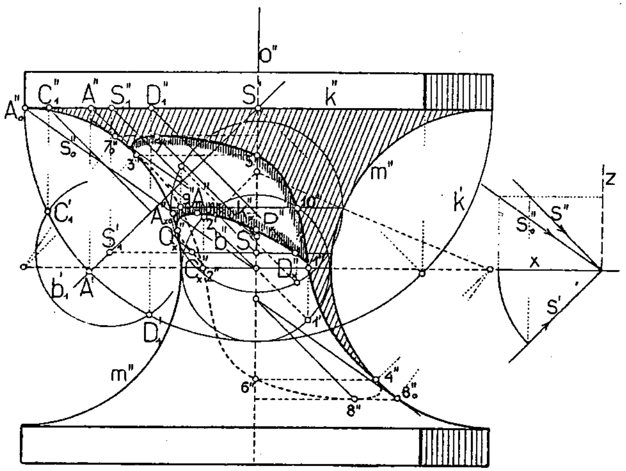
Budući da prikazana rotaciona ploha nije jedna jedinstvena ploha, to ni rastavnica r nije jedinstvena krivulja, nego se kao i ploha sastoji iz tri dijela. Dio rastavnice, koji leži na polukugli, jest polukružnica, a dio rastavnice, koji je na gornjem kuglastom dijelu, također je dio kružnice. Na srednjem je dijelu treći dio rastavnice i taj dio je krivulja višega reda.

Krivulja r' dotiče e' u točkama $1'$ i $2'$, a krivulja r'' dotiče m'' u točkama $3''$ i $4''$.

N a p o m e n a. Na ovdje izloženi način odredi se rastavnica na bilo kakvoj rotacionoj plohi. Ako rotaciona ploha ima grlenu kružnicu, onda se točke rastavnice, koje leže na toj kružnici, odrede kao i na ekvatoru. Ima rotacionih ploha na kojima rastavnica ima više nego dvije točke u kojima su tangente horizontalne.

2. Bačena sjena kružnice na rotacionu plohu. U slici 735. prikazan je unutarnji dio anuloida u nacrtu. Gornji i donji usporednik ujedno su osnovne kružnice dviju valjkastih ploča.

Rastavnice na valjkastim pločama i na anuloidu određene su samo u nacrtu. Linije koje su nam u nacrtu potrebne za konstrukciju pojedinih točaka rastavnice odrede se tako, da se ravnina glavnoga meridijana smatra ravninom Π_2, a ravnina usporednika, koji je za konstrukciju potreban, uzme se svaki put za ravninu Π_1. Točke 1 i 2, koje leže na grlenoj kružnici, odrede se pomoću preložaja te kružnice na koji se povuku tangente uspo-

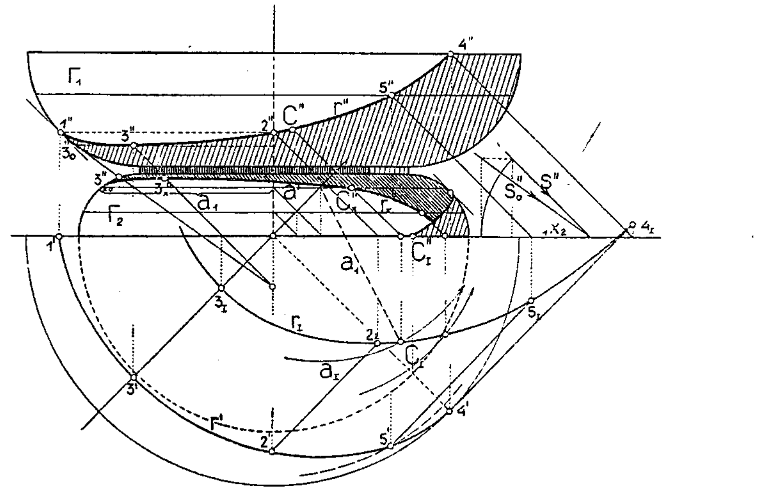


Sl. 735.

redno sa s'. Dirališta su 1' i 2'. Točke 3" i 4" na m'' dobiju se kao dirališta krivulje m'' s tangentama usporednima sa s''. Točke na srednjem meridijanu m_1 odrede se kao u t. 1. Najviša i najniža točka odrede se pomoću rotirane zrake s_0''. Ako se na m'' povuku tangente usporedno sa s_0'', one dotiču m'' u točkama $7_0''$ i $8_0''$. Ako se te tangente produže do o'', ta sjecišta ostanu kod rotacije na istom mjestu. Povuku li se kroz te točke pravci usporedno sa s'', na jednom od njih leži točka 7", a na drugom 8" i to u istoj visini s točkom $7_0''$, odnosno $8_0''$.

Kružnica k baca sjenu na anuloid. Nacrt je te sjene krivulja k_x''. Ta se sjena može odrediti na jednak način kao bačena sjena kruga na krnji stožac (isp. § 201., t. 7., sl. 705.). Točka A kružnice k leži u meridijanskoj

ravnini svijetla i ona baca sjenu u točku A_x, koja je najviša točka krivulje k_x. Nacrt se A_x'' odredi na jednak način kao u sl. 705. Ostale točke krivulje k_x leže na usporednicima, koji leže niže negoli je točka A_x. Zrake svijetla, koje idu točkama kružnice k, čine kosi valjak. Kojagod horizontalna ravnina siječe taj valjak u kružnici a, a anuloid u kružnici b. Obje te kružnice sijeku se u dvije točke C_x i D_x, koje leže na krivulji k_x. Ako se kružnice a i b pomaknu u smjeru zraka svijetla s u ravninu kružnice k, kružnica će a pokriti kružnicu k, a kružnica b doći će u položaj b_1, te će sjeći kružnicu k u točkama C_1 i D_1, u koje su se pomaknule točke C_x i D_x. Ako se kroz točke C_1 i D_1 povuku zrake svijetla, one će sjeći kružnicu b u točkama C_x i D_x. Od pomaknute kružnice b_1 dovoljno je da se odredi središte



Sl. 736.

S_1, t. j. središtem S kružnice b povuče se zraka svijetla i odredi se probodište $S_1(S_1', S_1'')$ s ravninom kružnice k i oko S_1' opiše se kružnica b_1', kojoj je polumjer jednak polumjeru kružnice b. Kružnica b_1' siječe kružnicu k' u točkama C_1' i D_1'. Odrede li se na k'' točke C_1'' i D_1'', pa se kroz te točke potegnu pravci usporedno sa s'', oni sijeku b'' u točkama C_x'' i D_x''. Na jednak se način mogu odrediti točke na drugim usporednicima. Krivulja k_x'' siječe o'' u točki P_x''. Kod dijagonalne rasvjete u istoj visini s točkom P_x' leži na m'' točka Q_x'' u kojoj krivulja k_x'' dotiče m''.

3. Bačena sjena rotacione plohe na rotacionu plohu. U slici 736. prikazan je dio stupića, i to samo u nacrtu. Taj stupić sastoji se iz dva anuloida Γ_1 i Γ_2, koji su među sobom vezani niskim rotacionim valjkom.

Najprije su na svim trima plohama određene rastavnice, zatim bačena sjena. Sjenu baca gornji anuloid Γ_1 na rotacioni valjak i na donji anuloid Γ_2. Granicu r_x bačene sjene čini bačena sjena rastavnice r anuloida Γ_1. Zrake svijetla uzduž rastavnice r čine valjak višega reda, koji prodire anuloid Γ_2 u krivulji r_x. Da se što brže i što točnije dobiju pojedine točke krivulje r_x upotrebit će se t. zv. metoda projiciranja natrag ili metoda vraćanja. Ravnina najdonjeg usporednika smatrat će se tlocrtnom ravninom Π_1, konstruirat će se tlocrt r' rastavnice r i bačena sjena r_1 te rastavnice na Π_1. Ako se nacrta bačena sjena a_1 na Π_1 kojega god usporednika a anuloida Γ_2, ta sjena siječe sjenu r_1 u točkama, koje su bačene sjene po jedne točke rastavnice r i po jedne točke usporednika a. Te će se točke dobiti ako se kroz ta sjecišta povuku zrake svijetla natrag. Takova je konstrukcija provedena u sl. 736. za točku C_x. Bačena je sjena svakoga usporednika anuloida Γ_2 na Π_1 kružnica iste veličine. Odredi li se bačena sjena središta usporednika a na Π_1, pa se oko te točke opiše kružni luk a_1 s polumjerom kružnice a, taj luk siječe r_1 u točki C_1'. Nacrt je C_1'' u osi x. Tom točkom povuče se pravac usporedno sa s'', i on siječe r'' u C'', a a'' u C_x''. Točka C rastavnice r baca sjenu u točku C_x, koja je na usporedniku a.

Točka 3_x je najviša točka krivulje r_x. Ta točka leži u meridijanskoj ravnini svijetla i ona je bačena sjena najniže točke 3 rastavnice r. Ako se okrene meridijanska ravnina svijetla u ravninu glavnoga meridijana m, točka 3 dođe u 3_0, a rotirana zraka imat će položaj s_0. Položi li se točkom $3_0''$ pravac usporedno sa s_0'', on siječe glavni meridijan anuloida Γ_2 u točki $3_{x_0}''$. Kroz tu točku ide nacrt usporednika na kojemu leži točka $3_x''$.

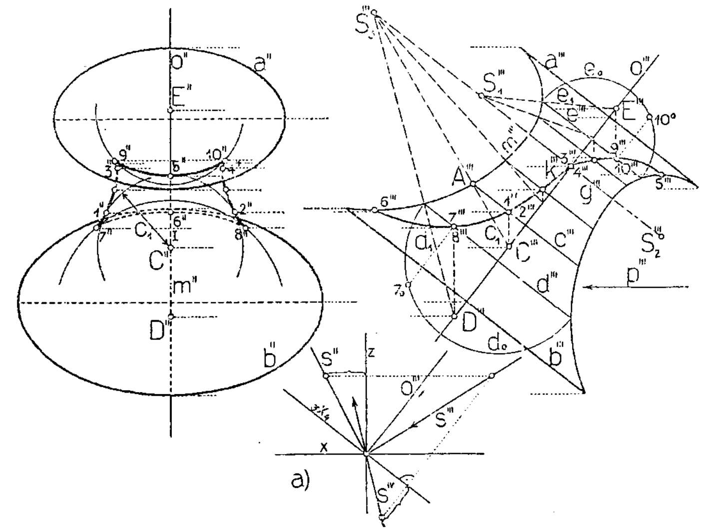
§ 214. Konstrukcija konture rotacione plohe kojoj je os nagnuta prema ravnini projekcija

1. Uzet će se, da je os o rotacione plohe usporedna s bokocrtnom ravninom Π_3, da je dakle nagnuta prema Π_2, pa će se nacrtati bokocrt i nacrt plohe (sl. 737.). Ploha se sastoji iz dijelova dvaju anuloida sa hiperboličkim točkama, koji imaju zajedničku grlenu kružnicu g. Konturu u trećoj projekciji čini treća projekcija m''' meridijana m, kojemu je ravnina usporedna s Π_3. Ploha je još omeđena s dvije granične kružnice a i b kojima je treća projekcija dužine a''' i b''', a druga projekcija elipse a'' i b''.

Da se dobije prava kontura za nacrt plohe, zrake će se projiciranja, koje su okomite na Π_2, smatrati zrakama svijetla, pa će se na plohi potražiti rastavnica k. Treća je projekcija smjera zraka svijetla $p''' \perp o''$. Treća projekcija k''' rastavnice k određena je pomoću dirnih kugala uzduž pojedinih usporednika plohe. Ako se na pr. uzduž usporednika c položi dirna kugla, treća je projekcija njezinog središta u točki C''' na o''', a polumjer

joj je $c_1 = C'''A'''$. Ravnina rastavnice te kugle ide točkom C okomito na smjer s, t. j. ta je ravnina okomita na Π_3, pa njezin treći trag ide točkom C''' okomito na p''', t. j. $C'''\,1''' \perp p'''$. U taj treći trag pada i treća projekcija rastavnice kugle, pa će prema tome u sjecištu dužine c''' s tim tragom biti treća projekcija $1'''$ i $2'''$ točaka 1 i 2, koje leže na usporedniku c i pripadaju rastavnici k. Na jednak način odrede se točke krivulje k''' na drugim usporednicima. Ako se povuku tangente na m''' usporedno sa p''' dobit će se točke $5'''$ i $6'''$ krivulje k'''. Prednja polovica krivulje k pokriva s obzirom na Π_3 stražnju polovicu.

Nacrt k'' krivulje k odredi se na taj način, da se odredi nacrt pojedinih točaka te krivulje i dobivene točke spoje krivuljom k''. Na pr.: točke



Sl. 737.

$1''$ i $2''$ bit će u ordinali točaka $1'''$ i $2'''$. Točke 1 i 2 leže na onom meridijanu dirne kugle, koji je usporedan s Π_2. Nacrt je toga meridijana kružnica, kojoj je središte C'', a polumjer c_1. Ta kružnica siječe ordinalu točaka $1'''$ i $2'''$ u točkama $1''$ i $2''$. Na jednak se način odrede i druge točke krivulje k''. Nacrt m'' meridijana m pada u pravac o'', pa se u tom pravcu nalaze i točke $5''$ i $6''$. Ako se na krivulju k''' potegnu tangente usporedno sa p''', dobit će se dirališta $7''', 8'''$ i $9''', 10'''$. Kroz točke 7, 8 i 9, 10 položit će se usporednici d i e, i uzduž tih usporednika dirne kugle, kojima su središta D i E, a polumjeri d_1 i e_1. Ako se oko točke D'' opiše kružnica s polumjerom d_1, ona siječe ordinalu točaka $7'''$ i $8'''$ u točkama

7'' i 8''. Te su točke šiljci krivulje k''. Ako se nadalje oko E'' opiše kružnica s polumjerom e_1, ona siječe ordinalu točaka 9''', 10''' u točkama 9'' i 10'', koje su također šiljci krivulje k''. (Isp. § 154., t. 2. b),

Dužina 7'' i 8'' jednaka je tetivi 7 · 8 kružnice d. Ako se ta kružnica preloži oko d''' u ravninu, koja je usporedna s $\prod_3$, dobit će se tetiva 7 · 8 u pravoj veličini. Kod točne crtnje mora biti $\overline{17''} = \overline{18''} = \overline{7'''7_0}$. Isto tako mora biti $\overline{9'' \cdot 10''} = \overline{9 \cdot 10}$, $\overline{1'', 2''} = \overline{1 \cdot 2}$ itd.

2. Treba li u nacrtu konstruirati rastavnicu rotacione plohe za smjer zraka svijetla $s\,(s'', s''')$, onda se zraka projicira na ravninu $\prod_4$, koja je okomita na osi, pa se u trećoj projekciji odredi rastavnica upotrebom s''' i s^{IV}, a onda se iz treće projekcije odredi nacrt te rastavnice kao i bačenih sjena, ako ih ima na predmetu. Projekcije su zraka svijetla nacrtane u sl. 737. a).

Konstruiraj sjene u sl. 737.

3. Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj projekcije dugoljastog elipsoida koji dotiče $\prod_1$ u točki O' (2 3 0), ako su poluosi glavnoga meridijana jednake 2 i 3. Na tom elipsoidu nalaze se dvije točke A (1 4 ?) i B (3 ? 1). Nacrtaj projekcije meridijana koji idu tima točkama, zatim u točki B položi dirnu ravninu.

2 Nacrtaj projekcije dugoljastog elipsoida, kojemu je os $o \parallel x$ i kojemu su poluosi meridijana 2 i 3.

3. Nacrtaj projekcije splоštenog elipsoida kojemu je središte O (4 3,5 2), a poluosi meridijana 2 i 3. Nacrtaj projekcije točaka A (3 — 3) i B (6 2 —) koje leže na tom elipsoidu. Nacrtaj projekcije meridijana koji ide točkom B i položi dirnu ravninu u toj točki.

4. Nacrtaj projekcije rotacionog paraboloida kojemu je najviša točka (tjeme) A (4 3 5) i kojemu usporednik, koji leži u $\prod_1$, ima polumjer $r = 2{,}5$. Na tom paraboloidu uzmi dvije točke B (3 — 2) i C (5 4 —). U točki C položi dirnu ravninu.

5. Nacrtaj projekcije rotacionog paraboloida kojemu je os $o \perp \prod_2$, kojemu je tjeme u točki A (4 6 5) a jedna točka plohe B (2 2 7). Nacrtaj projekcije meridijana kojemu je ravnina nagnuta prema $\prod_2$ za 60°.

6. Nacrtaj projekcije jednoplošnog rotacionog hiperboloida, koji nastane rotacijom hiperbole, kojoj je realna poluos = 1, a imaginarna poluos = 1,5 i kojoj je središte O (3 3 3,5), oko osi $o \perp \prod_1$. S gornje strane omeđi hiperboloid s usporednikom, koji je jednak onome usporedniku, koji je u $\prod_1$. Nadalje nacrtaj projekcije jednoga meridijana kojemu je ravnina nagnuta prema $\prod_2$ za 45°.

7 Nacrtaj projekcije dvoplošnog rotacionog hiperboloida, koji nastane rotacijom istostrane hiperbole oko njezine realne osi $o \perp \prod_1$. Središte je hiperbole O (3 4 3), a realna os 2. Na tom hiperboloidu nacrtaj meridijan kojemu je ravnina nagnuta prema $\prod_2$ za 30°.

8. Uzmi da je ravnina Σ u sl. 721. sprijeda i usporedna sa $\prod_2$, pa odredi presjek.

9. Odredi presjek anuloida u sl. 723. ravninom Σ koja je okomita na $\prod_2$ i dotiče anuloid u točki T_0.

10. Odredi presjek anuloida ravninom Σ koja je okomita na $\prod_2$ i koja anuloid (glavni meridijan) dotiče u dvije točke. (Presjek se raspada u dvije kružnice).

11. Odredi presjek anuloida ravninom Σ koja je usporedna s $\prod_2$ i koja *a)* dotiče najgornji i najdonji usporednik, *b)* ravninom E koja je ispred Σ usporedna s $\prod_2$, *c)* ravninom Φ koja je iza Σ i usporedna s $\prod_2$, *d)* s ravninom Γ koja je usporedna s $\prod_2$ i dotiče grlenu kružnicu, *e)* s ravninom $\Delta \parallel \prod_2$ koja siječe grlenu kružnicu.

12. Predmet prikazan u sl. 721. sijeci općom ravninom Σ tako, da ta ravnina siječe grlenu kružnicu g.

13. Dugoljasti elipsoid, kojemu je os $o \perp \prod_1$ te mu je središte O (2 3 3), a poluosi meridijana 3 i 2, sijeci ovim ravninama:

a) A (6 ∞ 6), *b)* B (6 6 ∞), *c)* Γ (9 7 3), *d)* Δ (3 3 —4).

Uputa: Ravnina siječe dugoljasti elipsoid u elipsi.

14. Spljošteni elipsoid, kojemu je os $o \perp \prod_1$, te mu je središte O (3 3 2), a poluosi meridijana 2 i 3, sijeci ovim ravninama:

a) A (7 ∞ 5). *b)* B (8 6 ∞), *c)* Γ (10 8 7), *d)* Δ (2 —2 2).

Uputa: Ravnina siječe spljošteni elipsoid u elipsi. (Vidi sl. 724.).

15. Rotacioni paraboloid, kojemu je tjeme u točki A (0 3 1) i koji je prema $\prod_1$ okrenut konveksnom stranom, treba sjeći ovim ravninama:

a) A (7 7 5), *b)* B (3 4 ∞), *c)* Γ (3 ∞ 4).

16. Zadani rotacioni paraboloid, kojemu je tjeme A (0 4 6) i žarište F (0 4 4), treba sjeći ravninom koja ide točkom T (0 4 3) i kojoj je prvi prikloni kut $\omega_1 = 30°$, a drugi prikloni kut $\omega_2 = 60°$. (Isp. § 69., t. 1.).

17. Hiperboloid koji je prikazan u sl. 730. sijeci općom ravninom tako, da presjek bude: *a)* elipsa, *b)* parabola, *c)* hiperbola.

18. Jednoplošni rotacioni hiperboloid sijeci ravninom Σ koja je usporedna s $\prod_2$. *a)* Neka je Σ ispred grlene kružnice g, *b)* neka Σ siječe grlenu kružnicu.

19. Središte je jednoplošnog rotacionog hiperboloida O (3 3 3,5), realna je poluos meridijana = 1, a imaginarna poluos = 1,5. Sijeci taj hiperboloid ravninom: *a)* A (—4,5 ∞ 3), *b)* B (6,5 ∞ 7), *c)* Γ (11 10 7,5), *d)* Δ (—5 —4 2). Što su presjeci?

20. Središte je jednoplošnog rotacionog hiperboloida O (4 4 3), poluosi su meridijana = 1. Sijeci taj hiperboloid u paraboli ravninom *a)* A (9 ∞ 9), *b)* B (5 ∞ 5).

21. Odredi prodor dugoljastog elipsoida [os $o \perp \prod_1$, središte O (0 4,5 5,5), poluosi = 5 i 3,5] i rotacionog stošca [os SV [S (1,5 6 0), V (1,5 6 12,5)], $r = 4$].

22. Odredi prodor anuloida [os o ($x = o$, $y = 5{,}5$) $\perp \prod_1$, središte izvodne kružnice O (—3,5 5,5 5,5), polumjer $r = 2$] i rotacionog stošca [os SV [S (3,5 9 0), V (3,5 9 10)], polumjer $r_1 = 3{,}5$].

23. Odredi prodor anuloida koji je zadan u 22. zad. i rotacionog valjka kojemu je osnovka u $\prod_1$ [središte M (—3,5 7 0), polumjer $r = 1{,}5$, visina $c = 10$]

24. Odredi prodor rotacionog paraboloida kojemu je os $o \perp \prod_1$ i rotacionog valjka kojemu je osnovka u $\prod_1$.

25. Odredi prodor dugoljasta elipsoida kojemu je os $o \parallel x$ i rotacionog valjka kojemu je osnovka u $\prod_2$.

26 Odredi prodor rotacionog paraboloida i kugle.

27 Odredi prodor jednoplošnog rotacionog hiperboloida i kugle.

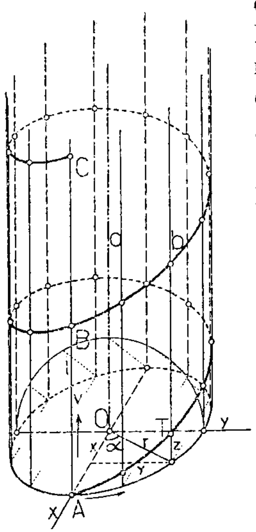
28. Odredi prodor jednoplošnog rotacionog hiperboloida i rotacionog stošca kojima su osi $\perp \prod_1$.

29. Odredi prodor rotacionog paraboloida sa rotacionim stošcem ako su im osi $\perp \prod_1$.

XXXIV. Zavojnica i zavojne plohe

§ 215. Zavojnica

1. Postanak zavojnice. (Sl. 738.). Ako se pravac i jednomjerno okreće oko usporednog pravca o i ako se u pravcu i jednomjerno giblje točka A, ona opiše prostornu krivulju, koja se zove *zavojnica.* Kad se točka giblje oko pravca o tako da ona opiše zavojnicu, onda se kaže, da se ta točka *zavojito* giblje. Pravac i opiše rotacioni valjak. Na tom valjku leži zavojnica, koju opiše točka A. Pravac o je os toga valjka i zavojnice. *Svakoj zavojnici pripada rotacioni valjak.*



Sl. 738.

Omjer v_0 između dužine z za koju se točka A pomakne u smjeru osi, i kuta α za koji se ta točka okrene, dakle $v_0 = \frac{z}{\alpha}$, konstantan je. Vrijednost toga omjera zove se *parametar* zavojnice. Opiše li pravac i čitavi okretaj od 2π, onda točka A opiše jedan zavoj zavojnice i dođe u položaj B, koji je povrh točke A. Udaljenost točaka A i B označuje se sa v i zove se visina jednoga zavoja. Također je $v_0 = \frac{v}{2\pi}$.

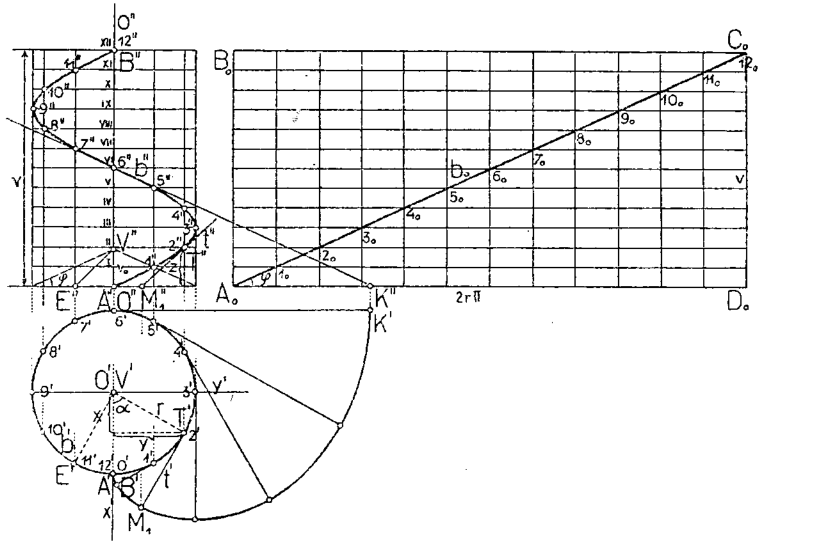
Zavojnica ima neizmjerno mnogo sukladnih zavoja. Zavojnica je transcendentna prostorna krivulja.

Ima desnovitih i lijevovitih zavojnica. Ako se gleda u smjeru koji je okomit na osi o, pa se dijelovi zavojnice, koji su na prednjoj polovici pripadnog valjka, uspinju od lijeva nadesno, zavojnica je desnovita, a uspinju li se ti dijelovi od desna nalijevo, zavojnica je lijevovita.

Zavojnica je potpuno određena polumjerom r valjka, koji pripada zavojnici, visinom v i smjerom zavijanja.

Sl. 738. prikazuje dva zavoja desnovite zavojnice.

2. Predočivanje zavojnice projekcijama. Treba li zavojnicu prikazati u tlocrtu i nacrtu, onda je najzgodnije da se horizontalna ravnina Π_1 položi okomito na os o zavojnice. U tom je slučaju tlocrt osi točka O', a tlocrt zavojnice b kružnica b', kojoj je središte O', a polumjer r (sl. 739.). Da se dobije nacrt b'' zavojnice, razdijelit će se kružnica b', počevši od A' na nekoliko jednakih dijelova, na pr. na 12, i djelišta će se označiti brojevima O'—$12'$. Zatim će se razdijeliti odabrana visina v također na 12 jednakih dijelova i djelištima će se povući pravci usporedno sa osi x. Te će se usporednice označiti brojevima I—XII. Na tim usporednicama i u ordinalama točaka $0'$—$12'$ leže nacrti $0''$—$12''$ točaka zavojnice b. Točka $0''$ je u osi x, $1''$ leži na usporednici I, $2''$ je na usporednici II, i t. d., jer kad se točka A okrene oko osi o za $\frac{1}{12}\cdot 2\pi$, $\frac{2}{12}\cdot 2\pi$, $\frac{3}{12}\cdot 2\pi$... ona se u isto doba podigne u smjeru te osi za $\frac{1}{12}\cdot v$, $\frac{2}{12}\cdot v$, $\frac{3}{12}\cdot v$, ... U sl. 739. nacrtane su projekcije jednoga zavoja desnovite zavojnice. Kad bi se na o''



Sl. 739.

prenijele ispod A'' ili povrh B'' dužine, koje su jednake $\frac{v}{12}$, onda bi se na pravcima, koji bi se potegnuli novim djelištima usporedno sa osi x, dobili nacrti točaka novih zavoja zavojnice b.

Nacrt je zavojnice ravnična transcendentna krivulja, i to opća sinusoida. Ako se uzme, da je točka O u kojoj Π_1 siječe os o ishodište, a pravci OX, OY, OZ (sl. 739.) da su osi prostornog pravokutnog koordinatnog sustava, a x, y, z koordinate kojegod točke T zavojnice b, onda su

$$x = r\cdot\cos\alpha,\qquad y = r\cdot\sin\alpha,\qquad z = v_0\cdot\alpha \tag{1}$$

jednadžbe zavojnice u parametričkom obliku. Iz druge i treće jednadžbe slijedi jednadžba nacrta b'' zavojnice b, naime

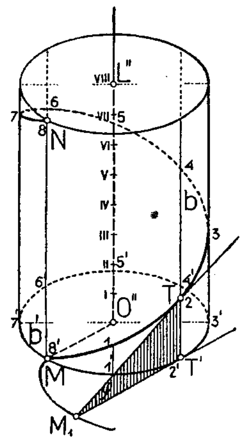
$$y = r \cdot \sin \frac{z}{v_0} \qquad (2)$$

t. j.: Nacrt je zavojnice opća sinusoida.

3. Razastiranje zavojnice u ravninu. Ako se razreže plašt valjka, koji pripada zavojnici b, uzduž prednje izvodnice AB (sl. 739.) i razgrne se u ravninu zajedno sa zavojnicom, dobit će se pravokutnik kojemu su stranice jednake $2\pi r$ i v. U tom pravokutniku dobit će se razastrta zavojnica b_0. Osnovica $A_0 D_0$ toga pravokutnika razdijeli se na 12 jednakih dijelova i djelištima povuku usporednice sa stranicom $A_0 B_0$. Te su usporednice razastrte izvodnice valjka na kojima leže točke 0 — 12 zavojnice. Nadalje se visina $A_0 B_0 = v$ također razdijeli na 12 jednakih dijelova i djelištima se potegnu usporednice sa osnovicom $A_0 D_0$. Te su usporednice razastrti kružni presjeci valjka horizotalnim ravninama, koje idu točkama 0 — 12 zavojnice b. U sjecištima razastrtih izvodnica i razastrtih kružnih presjeka leže razastrte točke 0_0 — 12_0 zavojnice b. Spojnica tih točaka leži na dijagonali $A_0 C_0$ pravokutnika $A_0 B_0 C_0 D_0$. U tu dijagonalu pada razastrti prvi zavoj zavojnice b. Ostali bi se zavoji prikazali kao dijagonale drugih pravokutnika, koji su sukladni s $A_0 B_0 C_0 D_0$, i nalaze se jedan povrh drugoga.

Razastrta zavojnica sastoji se iz usporednih dužina, koje su u smjeru izvodnica među sobom udaljene za dužinu v.

Odatle slijedi, da se najkraća udaljenost dviju točaka na plaštu valjka podudara sa zavojnicom, koja ide tima dvjema točkama.



Sl. 740.

Najkraća linija, kojom se mogu spojiti dvije točke na krivoj plohi, zove se *geodetska linija*. Zavojnica je geodetska linija rotacionog valjka.

4. Kut uspona. Tangenta zavojnice. Sl. 740. predočuje rotacioni valjak i na njemu jedan zavoj zavojnice. Razrežemo li taj valjak uzduž izvodnice MN, pa dio plašta do izvodnice $22' \equiv TT$ razgrnemo u ravninu, onda dio plašta MTT' dođe u položaj M_1TT' i prikaže se kao pravokutan trokut u kojemu je TT' jedna kateta, a M_1T jednaka je luku MT zavojnice. Ravnina M_1TT' dotiče valjak, pa ima s njim zajedničke dvije neizmjerno blize izvodnice. Neizmjerno blize točke zavojnice, koje leže na tim izvodnicama, ne mijenjaju svog položaja, pošto smo dio plašta do tih izvodnica razgrnuli u ravninu, i zbog toga možemo pravac M_1T smatrati produženom sastavnicom neizmjerno blizih točaka ili produženjem posljednjega elementa krivulje. Odatle slijedi, da je pravac M_1T tangenta zavojnice u točki

T. Ta tangenta čini s Π_1 kut φ, koji se zove ***kut uspona*** zavojnice u točki T.

Odmatamo li plašt valjka dalje, onda je pravac $M_1 T$ tangenta za svaku točku T zavojnice, a odavle vidimo, da je kut uspona φ za sve tangente jednak.

Kut je uspona u svim točkama zavojnice konstantan.

Iz razgrnutog plašta valjka (sl. 739.) slijedi, da je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{2r\pi} = \frac{v_0}{r}.$$

Kad je $\varphi = 0^0$, točka T opiše kružnicu, kad je $\varphi = 90^0$, ona opiše pravac.

Pravac i kružnica međašnji su oblici zavojnice.

5. Konstrukcija tangente zavojnice u točki T. Uzmemo li, da se u sl. 740. ravnina Π_1 podudara s ravninom osnovne kružnice valjka, onda je $M_1 T'$ tlocrt tangente u točki T, a M_1 je prvo probodište te tangente. Tlocrt t' tangente t dotiče tlocrt b' zavojnice u točki T' (sl. 739.). Pravac $M_1''T''$ jest tangenta t'' krivulje b'' u točki T''. Dužina je $T'M_1$ jednaka luku $M'T'$ kružnice b'. Prema tome je geometrijsko mjesto točke M_1 evolventa kružnice b'.

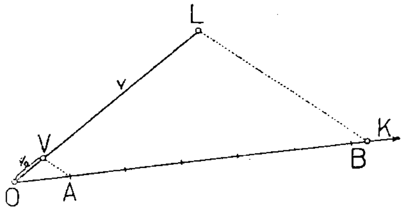
Da se dobije tangenta krivulje b'' u obratištu 6'' (sl. 739), prenijet će se na os x dužina $A''K'' = r\pi$ i povući će se pravac $6''K''$ Taj je pravac tangenta u točki 6''. Budući da je tangenta $6K$ usporedna s Π_2, to pravac $6''K''$ čini sa osi x kut φ.

6. Direkcioni stožac zavojnice. Sve tangente iste zavojnice čine s Π_1 ($\perp o$) jednake priklone kutove φ. Uzme li se gdjegod u prostoru točka V i njom polože pravci, koji su usporedni s tangentama zavojnice, oni čine rotacioni stožac, kojemu je vrh V i kojemu je os usporedna sa osi o. Taj se stožac zove *direkcioni stožac* dane zavojnice. Obično se vrh V toga stošca uzima u osi o zavojnice, i to tako, da je osnovna kružnica valjka ujedno osnovna kružnica stošca. Polumjer je te kružnice r, a budući da je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{2r\pi} = \frac{v}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = \frac{v_0}{r}$ slijedi, da je visina stošca jednaka parametru v_0. Dužina se v_0 također zove *reducirana visina* zavoja.

Budući da je $v_0 = \frac{v}{2\pi}$ ili $v_0 : v = 1 : 2\pi$, može se na temelju toga razmjera konstruirati v_0, ako je v zadano, na slijedeći način: Neka je $OL = v$ (sl. 741.) visina jednog zavoja. Točkom O potegnimo kojigod pravac OK i prenesimo na nj, počevši od O, dužine $= 1$ i $OB = 2\pi = 6{,}283 \ldots$, spojimo B sa L i točkom A potegnimo $AV \parallel BL$. Tada je $OV = v_0$. Smatramo li OA polumjerom osnovne kružnice valjka, koji pripada zavojnici, onda je OB opseg te kružnice.

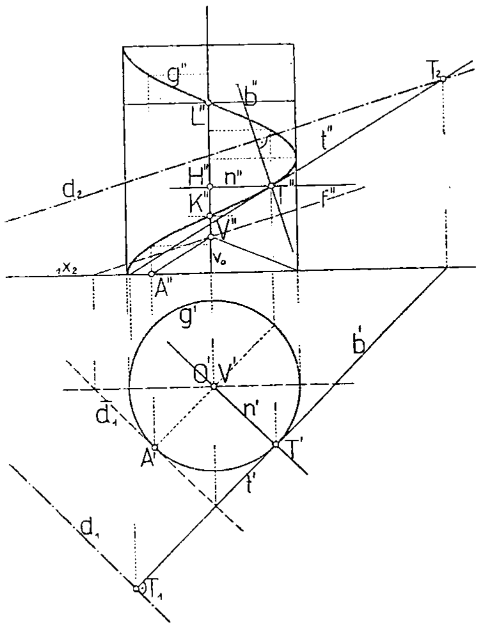
*

7. Upotreba direkcionog stošca za konstrukciju tangenata zavojnice. Budući da su izvodnice direkcionog stošca usporedne s tangentama zavojnice, to su obrnuto i tangente zavojnice usporedne sa izvodnicama pripadnog direkcionog stošca. Ako su nacrtane projekcije zavojnice i direkcionog stošca, onda se lako nacrtaju projekcije tangente u kojojgod točki zavojnice. Neka su T' i T'' (sl. 739.) projekcije točke T zavojnice b i V', V'' projekcije vrha direkcionog stošca.



Sl. 741.

Tangenta kružnice b' u točki T' je tlocrt tangente t u točki T zavojnice. Ako se kroz V' povuče usporednica s t' dobit će se tlocrt $V'E'$ izvodnice direkcionog stošca, koja je usporedna s tangentom t. Nacrt je te izvodnice $V''E''$. Tangente t'' krivulje b'' u točki T'' usporedna je s pravcem $V''E''$. Tangente u obratištima krivulje b'' usporedne su s drugom prividnom konturom direkcionog stošca.


Sl. 742.

8. Oskulatorna ravnina zavojnice. U sl. 742. nacrtane su projekcije g', g'' zavojnice g i projekcije t', t'' tangente t u točki T zavojnice pomoću direkcionog stošca. Tangentom t položit će se oskulatorna ravnina zavojnice u točki T.

Znamo, da oskulatorna ravnina Δ krivulje g u točki T sadrži dva neizmjerno bliza elementa T_1T i TT_2, koji se sastaju u promatranoj točki T, odnosno ta ravnina sadrži dvije neizmjerno blize tangente t i t_1 za koje pomišljamo da su produženi elementi T_1T i TT_2. Tima dvjema tangentama pridružene su dvije neizmjerno blize izvodnice VA i VA_1 direkcionog stošca, koje su usporedne s tangentama t i t_1 i koje određuju dirnu ravninu $\bar{\Delta}$ uzduž izvodnica VA. S tom je ravninom usporedna oskulatorna ravnina Δ zavojnice u točki T. Pravac $\bar{d}_1$, koji dotiče osnovnu kružnicu u točki A, je trag ravnine $\bar{\Delta}$, te je $\bar{d}_1 \parallel O'T'$. Prema

tome trag d_1 oskulatorne ravnine Δ ide probodištem T_1 tangente t usporedno s $\bar{d}_1$ ili okomito na $T'T_1$. Drugi trag d_2 ide drugim probodištem T_2 tangente t. Budući da je t' tlocrt tangente t i budući da je $t' \perp d_1$ slijedi, da je tangenta t okomita na tragu d_1, pa je ona priklonica prve skupine ravnine Δ. Prvi prikloni kut oskulatorne ravnine jednak je kutu uspona φ.

Oskulatorne ravnine zavojnice imadu konstantan prikloni kut prema ravnini, koja je okomita na osi o, te je jednak kutu uspona φ.

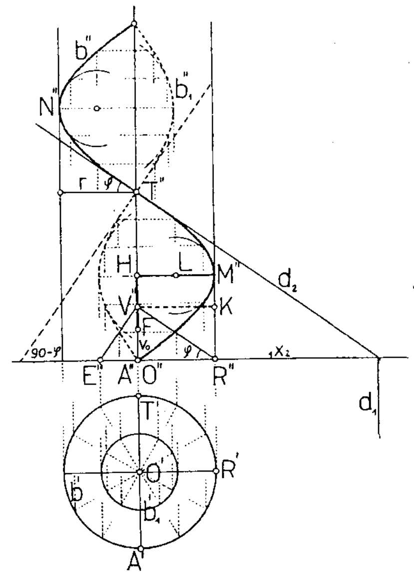
Oskulatorne su ravnine u točkama $K, L, M \ldots$ okomite na Π_2.

9. Glavna normala. Binormala. Budući da glavna normala leži u oskulatornoj ravnini, a okomita je na tangenti t, ta je normala sutražnica prve skupine oskulatorne ravnine, usporedna je s tragom d_1, siječe os o u točki H i okomita je na toj osi.

Okomica, koja je spuštena s točke T zavojnice na njezinu os o, jest glavna normala te zavojnice u točki T.

U sl. 742. su n', n'' projekcije glavne normale n, te je $n' \perp t', n'' \parallel x$.

Binormala b okomita je na oskulatornoj ravnini u točki T, pa su joj projekcije okomite na tragovima d_1, d_2 te ravnine ($b' \perp d_1, b'' \perp d_2$).


Sl. 743.

10. Zakrivljenost zavojnice. Središte zakrivljenosti u točki T zavojnice leži u oskulatornoj ravnini Δ te točke i to u glavnoj normali n. Uzmimo da se točka T (sl. 743.) projicira na Π_2 kao obratište krivulje b''. Oskulatorna je ravnina u toj točki okomita na Π_2, te su joj tragovi d_1, d_2. Ta ravnina siječe valjak u elipsi, koja sa zavojnicom b ima tri neizmjerno blize točke T_1, T, T_2 zajedničke. Prema tome je ta elipsa oskulatorna elipsa u točki T zavojnice, te obje krivulje imadu u točki T jednaku zakrivljenost, dakle i zajedničku kružnicu zakrivljenosti. Poluosi su elipse

$$a = \frac{r}{\cos\varphi} = V''R'' \qquad \text{i} \qquad b = r.$$

Budući da je točka T vrh male osi, polumjer je zakrivljenosti u toj točki za elipsu i zavojnicu

$$\rho = \frac{a^2}{b} \quad \text{ili} \quad \rho = \frac{r}{\cos^2 \varphi}.$$

Budući da su za jednu te istu zavojnicu r i φ konstantne veličine, slijedi da je i ρ konstantan, t. j.:

Polumjer je zakrivljenosti u svim točkama dane zavojnice konstantan. Zavojnica ima u svim svojim točkama konstantnu zakrivljenost.

Odatle zaključujemo dalje svojstvo zavojnice.

Zavojnica ima svojstvo, da se zavojitim gibanjem oko svoje osi sama u sebi pomiče.

Polumjer se zakrivljenosti ρ dade vrlo jednostavno konstruirati. Potegnemo li točkom R'' (sl. 743.) usporednicu s d_2, ona siječe o'' u točki V'', te je $O''V'' = v_0$ visina direkcionog stošca. Polumjer je toga stošca $O''R'' = r$. Potegnemo li $V''E'' \perp V''R''$, onda je $\rho = E''R''$.

$$\left(E''R'' = \frac{V''R''}{\cos \varphi},\ V''R'' = \frac{r}{\cos \varphi},\ E''R'' = \frac{r}{\cos^2 \varphi} = \rho\right).$$

Budući da polumjeri zakrivljenosti leže u glavnim normalama i budući da su te normale okomite na osi o zavojnice, to je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti zavojnice b, nova zavojnica b_1, koja sa zavojnicom b ima zajedničku os i jednaku visinu zavoja, istog je smjera i početna joj je točka u istoj visini kao i zavojnica b. Tlocrt je zavojnice b_1 kružnica b_1', kojoj je polumjer $r_1 = \rho - r = r \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = O''E''$. Tangente zavojnice b_1 čine s ravninom Π_1 kut $\varphi' = 90^0 - \varphi$.

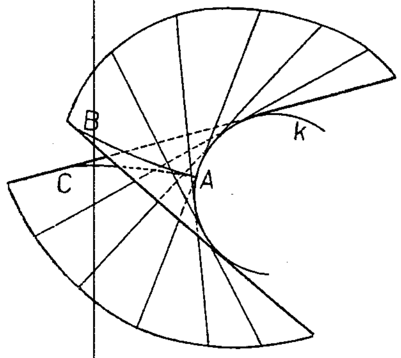
11. Konstrukcija središta zakrivljenosti u vrhovima nacrta b'' zavojnice b (sl. 743.). Konstrukcija se središta zakrivljenosti u vrhu M'' (ili N'') krivulje b'' izvede pomoću nacrta oskulatorne elipse u točki M. Tlocrt je te elipse kružnica b', pa je prema tome jedna njezina poluos $HM'' = r$. Ravnina, koja je položena vrhom V stošca usporedno s oskulatornom ravninom u točki M, siječe valjak u elipsi, koja je sukladna s oskulatornom elipsom zavojnice u točki M, pa su njezine poluosi VA i $VK = r$. Tlocrti su tih poluosi $O'A'$ i $O'R'$, a nacrti $V''A''$ i $V''K$. Budući da je $V''A'' \perp V''K$, to je $V''A''$ druga poluos nacrta te elipse. Prema tome je druga poluos HF nacrta oskulatorne elipse u točki M jednaka $V''A'' = v_0$. Pošto je $HM'' > HF$, to je HM'' velika, a HF mala poluos elipse. Konstruiramo li na poznati način (§ 130., t. 1., sl. 473.) središte L zakrivljenosti elipse u vrhu M'' velike osi, ta je točka ujedno središte zakrivljenosti nacrta zavojnice u vrhu M''. Polumjer je zakrivljenosti LM'' u vrhu M''

$$\rho_1 = \frac{v_0^2}{r} = r \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = r_1 = O''E''.$$

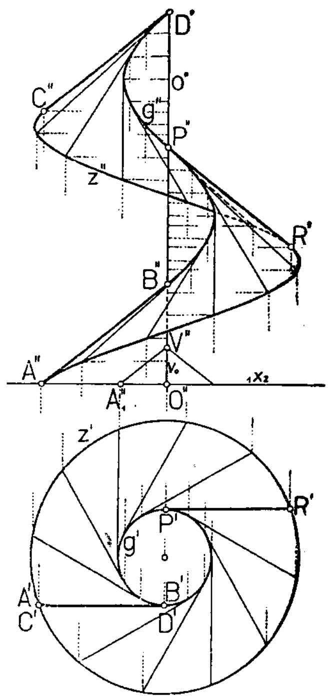
§ 216. Razmotljiva zavojna ploha

1. Razmotljiva ploha prostorne krivulje. Sve tangente zadane prostorne krivulje k (sl. 744.) čine krivu plohu, koja se dade razastrti ili razmotati u ravninu. Tangente prostorne krivulje nazivljemo izvodnicama razmotljive plohe. Dijelovi tangenata, koji su s jedne strane dirališta, čine jedan plašt, a dijelovi tangenata s druge strane dirališta čine drugi plašt razmotljive plohe. Oba se ta plašta dodiruju uzduž krivulje k.

Svake dvije neizmjerno blize susjedne tangente imadu jednu zajedničku točku. Odatle slijedi, da dvije takove tangente leže u istoj ravnini i omeđuju neizmjerno uski dio plohe, koji se zove plošni elemenat razmotljive plohe. Svaka dva susjedna plošna elementa imaju jednu tangentu zajednički, t. j. onu tangentu u kojoj se ravnine dvaju susjednih plošnih elemenata sijeku. Odatle se vidi, da se jedan plošni elemenat može



Sl. 744.



Sl. 745.

okretanjem oko zajedničkog pravca dovesti u ravninu drugoga elementa. Prema tome čitava se razmotljiva ploha može dovesti u jednu te istu ravninu, ona se može razastrti ili razmotati u ravninu.

Siječemo li razmotljivu plohu ravninom tako, da ona siječe prostornu krivulju k u točki A, onda ta ravnina siječe izvodnice jednoga plašta plohe u točkama, koje leže na luku AB, a izvodnice drugoga plašta u točkama, koje leže na luku AC. Točka A je šiljak presječne krivulje. Svaka ravnina siječe razmotljivu plohu u krivulji, koja ima na prostornoj krivulji šiljak ili povratište. Zato se prostorna krivulja zove *povratišni brid* ili *greben* razmotljive plohe.

2. Postanak razmotljive zavojne plohe. Sve tangente zadane zavojnice g čine razmotljivu zavojnu plohu, kojoj je ta zavojnica povratišnim bridom. Giblje li se pravac i, koji sveudilj dotiče zavojnicu g, zavojito oko osi o, on opiše razmotljivu zavojnu plohu. Pravac je o os plohe. Svaka točka pravca i opiše po jednu zavojnicu. Sve te zavojnice imaju zajedničku os o i jednaku visinu v, dok su im polumjeri i kutovi uspona različiti. Točka pravca i, koja je najbliža osi o, opiše zavojnicu g, koja ima najmanji polumjer i najveći kut uspona. Ta se zavojnica zove *grlena zavojnica.*

Svakom zavoju zavojnice g pripada po jedan zavoj plohe, a jer su izvodnice i neomeđene, to je i svaki zavoj plohe neomeđen. Kod predočivanja zavojne plohe projekcijama moraju se zavoji omeđiti. U sl. 745. prikazan je jedan zavoj donjeg dijela plašta razmotljive zavojne plohe. Taj je dio omeđen grlenom zavojnicom $g(g', g'')$ i koaksijalnom zavojnicom $z(z', z'')$, te dvjema izvodnicama $AB\,(A'B', A''B'')$ i $CD\,(C'D', C''D'')$. Os je $o \perp \Pi_1$. Konturu tlocrta čine koncentrične kružnice g' i z', a konturu nacrta sinusoide g'', z'' i nacrti $A''B''$, $C''D''$ i $P''R''$ izvodnica koje su usporedne s Π_2. Točka je $V(V', V'')$ u osi o vrh direkcionog stošca zavojnice g i razmotljive zavojne plohe. Uzelo se, da je visina toga stošca v_0, pa je polumjer osnovne kružnice jednak polumjeru r kružnice g'. Pomoću direkcionog stošca konstruirane su izvodnice plohe. Te su naime izvodnice usporedne s izvodnicama direkcionog stošca. Na pr. $A''B'' \parallel A_1''V''$...

Svaka horizontalna ravnina siječe razmotljivu zavojnu plohu u evolventi jedne kružnice, kojoj je polumjer jednak polumjeru r kružnice g'. (Ispor. § 125., t. 3.). Svaka ta evolventa ima na grlenoj zavojnici g šiljak.

§ 217. Vitopere pravčaste zavojne plohe

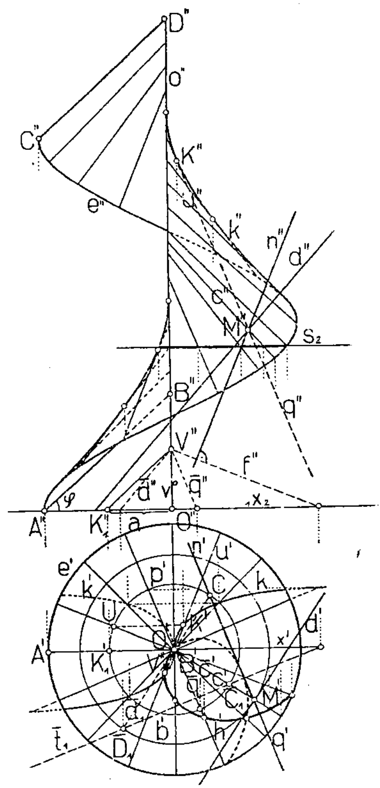
1. Postanak plohe. Kad se pravac i zavojito okreće oko pravca o, on opiše vitoperu pravčastu zavojnu plohu. Svaka točka izvodnice i opiše zavojnicu, kojoj je os o, a visina v. Pravčasta zavojna ploha može biti uspravna ili kosa, prema tome, da li je pravac i okomit ili kos prema osi o. Ako pravac i siječe os o, onda je ploha zatvorena, a ako se ta dva pravca ne sijeku, onda je ploha otvorena. Prema tome imamo četiri skupine pravčastih zavojnih ploha, i to: 1) zatvorenih kosih, 2) zatvorenih uspravnih, 3) otvorenih kosih, 4) otvorenih uspravnih.

Pravčasta zavojna ploha ima neizmjerno mnogo zavoja, a jer je izvodnica neomeđena, svaki je zavoj neizmjerno dug. Dvije susjedne izvodnice uopće ne leže u istoj ravnini, nego su mimosmjerne, pa su prema tome zavojne pravčaste plohe vitopere ili nerazmotljive.

2. Predočivanje ploha projekcijama. Nacrtat će se projekcije donjeg dijela zatvorene kose pravčaste zavojne plohe. Uzet će se, da je os $o \perp \Pi_1$, da je smjer zavojitog gibanja nadesno i uzgor. Početni je položaj izvodnice i $AB\,(A'B', A''B'')$, gdje je točka A u Π_1, a B u osi o. Ako se dužina AB zavojito giblje oko osi o, onda točka A opiše zavojnicu $e\,(e', e'')$, a točka B kliže po pravcu o. Uzet će se, da je ploha omeđena pravcem o, zavojnicom e i sa izvodnicama AB i CD, koje su usporedne s Π_2. U sl. 746. nacrtane su projekcije jednoga zavoja zavojnice e, kojoj je visina $v = A''C''$. Isto tako je i $B''D'' = v$. Kružnica e' razdijeljena je na 16 jednakih dijelova. Isto tako su i dužine $A''C''$ i $B''D''$ razdijeljene na 16 jednakih dijelova. Tlocrti izvodnica idu tlocrtom O' osi o i djelištima kružnice e'. Nacrti izvodnica jesu spojnice točaka sinusoide e'' s pripadnim točkama na pravcu o''. Nacrti tih izvodnica umataju krivulju k'', koja pripada drugoj prividnoj konturi zavojne plohe.

Izvodnice pravčastih zavojnih ploha čine s Π_1 jednake priklone kutove φ. Budući da je izvodnica $AB \parallel \Pi_2$, to $A''B''$ čini sa osi x kut φ.

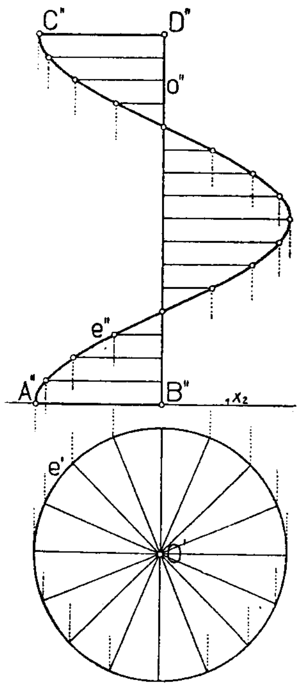
3. Direkcioni stožac pravčaste zavojne plohe. Prenesimo na os o reduciranu visinu $v_0 = OV = O''V''$. Položimo li točkom V usporednice sa svima izvodnicama kose plohe, dobit ćemo rotacioni stožac, koji se zove direkcioni stožac te plohe. Ravnina Π_1 siječe taj stožac u kružnici p, koja se zove *parametrička kružnica.* Polumjer je te kružnice $O'K_1' = O''K_1''$ ili $a = v_0 \cot \varphi$.



Sl. 746.

4. Normalni presjek pravčaste zavojne plohe. Ako se pravčasta zavojna ploha siječe ravninom Σ, koja je okomita na osi o, onda se takav presjek zove *normalni presjek* plohe. Normalni je presjek zatvorene kose zavojne plohe Arhimedova spirala h (isp. § 151., sl. 536.). Ta se spirala u tlocrtu prikaže u pravoj veličini, dok joj je nacrt u tragu $s_2 \parallel x$. Pojedine točke normalnog presjeka dobiju se kao sjecišta izvodnica s ravninom Σ.

5. **Dirna ravnina u točki M zavojne plohe.** Uzmimo, da je točka $M (M', M'')$ na izvodnici $c (c', c'')$ plohe. Dirna je ravnina $\mathbf{T}$ u toj točki određena izvodnicom c i tangentom d zavojnice, koja ide točkom M. Tu zavojnicu dobijemo kao prodornu krivulju $b (b', b'')$ plohe s koaksijalnim valjkom, koji ide točkom M. Tangenta je na tu zavojnicu u točki M pravac $d (d', d'')$. Ako se vrhom V direkcionog stošca povuku pravci $\overline{c} \parallel c$ i $\overline{d} \parallel d$, pa se pravcima $\overline{c}$ i $\overline{d}$ položi ravnina $\overline{\mathbf{T}}$, ta je ravnina usporedna s ravninom $\mathbf{T}$. Pravac $\overline{t}_1 = \overline{C}_1'\overline{D}_1'$ je prvi trag ravnine $\overline{\mathbf{T}}$. Prvi trag t_1 dirne ravnine $\mathbf{T}$ ide prvim probodištima pravaca c i d i usporedan je s $\overline{t}_1$.



Sl. 747.

6. **Priklonička tangenta.** Ako se točkom M povuče u ravnini $\mathbf{T}$ pravac q okomito na trag t_1, onda je taj pravac najstrmija tangenta zavojne plohe u točki M. Taj je pravac ujedno priklonica prve skupine ravnine $\mathbf{T}$, pa se zato zove priklonička tangenta plohe u točki M. Tlocrt q' pravca q ide točkom M' okomito na $\overline{t}_1$. Ako se vrhom V direkcionog stošca povuče pravac $\overline{q} = q$, taj pravac leži u ravnini $\overline{\mathbf{T}}$. Odredi li se nacrt $\overline{q}''$ pravca $\overline{q}$, onda q'' ide točkom M'' usporedno s $\overline{q}''$.

7. **Normala plohe.** Povuče li se točkom M pravac n okomito na dirnu ravninu $\mathbf{T}$, taj je pravac normala plohe u točki M. Tlocrt n' ide točkom M' okomito na $\overline{t}_1$, t. j. $n' \equiv q'$. Ako se vrhom V položi u ravnini $\overline{\mathbf{T}}$ frontalna sutražnica f, onda pravac n'' ide točkom M'' okomito na f''.

8. **Pol zavojne plohe.** Ako se ravnina $\overline{\mathbf{T}}$ okrene oko osi o u smjeru zavojitog gibanja za 90^0, onda trokut $V' \overline{C}_1 \overline{D}_1$ dođe u položaj $V'M'C$, t. j. točka $\overline{D}_1$ dođe u točku M', $\overline{C}_1$ dođe u točku C, a trag $\overline{t}_1$ dođe u pravac $M'C$, te se podudara s pravcem q', odnosno n'.

Točka C zove se pol izvodnice c. Tlocrt q' prikloničke tangente q ide vrhom C. Pol C je za sve točke izvodnice c stalna točka tako, da tlocrt prikloničke tangente u svakoj točki izvodnice c ide polom C. Pol svake izvodnice pravčaste zavojne plohe leži na parametričkoj kružnici p, a dobije se kao sjecište kružnice p s pravcem potegnutim točkom V' okomito na tlocrt izvodnice, uzevši kod toga u obzir smjer zavojitog gibanja. Pol se za kojigod drugi pravac u odredi tako, da se točkom V položi pravac $\overline{u}$, odredi njegovo

prvo probodište $\overline{U}_1$ i to probodište okrene za 90^0 u točku U u smjeru zavojitog gibanja. Tada je točka U pol pravca u.

Ako se polom U potegne pravac (tlocrt prikloničke tangente) okomito na prvi trag kojegod dirne ravnine, koja sadrži izvodnicu u, taj pravac siječe u' u diralištu.

9. **Konstrukcija prave konture k za nacrt.** Druge projekcije izvodnica kose zavojne plohe umataju krivulju k'', koja pripada prividnoj konturi te plohe. Ta se krivulja sastoji iz neizmjerno mnogo sukladnih hiperboli sličnih grana, koje naizmjence dotiču s jedne i druge strane pravac o''.

Pojedine točke krivulje k konstruiraju se na slijedeći način: Ako se uzduž kojegod izvodnice $u (u', u'')$, (sl. 746.), položi dirna ravnina $\Phi \perp \Pi_2$, onda diralište K leži na krivulji k. Drugi se trag f_2 te ravnine podudara s pravcem u'', a prvi je trag $f_1 \perp x$. Odredi li se pol U izvodnice u, pa se tim polom povuče tlocrt $1'$ prikloničke tangente 1 ravnine Φ, taj pravac siječe u' u točki K'. Točka K' je tlocrt dirališta K zavojne plohe s ravninom Φ, i ona leži na tlocrtu k' krivulje k. Pomoću ordinale odredi se na n'' nacrt K''. Ta točka leži na krivulji k'', i ona je diralište krivulje k'' i pravca n''. Na jednak se način odrede ostale točke krivulje k.

Uzme li se, da je točka O' ishodište pravokutnog koordinatnog sustava, a $O'X$ os apscisa, onda je $O'K'$ radiusvektor točke K' krivulje k'. Stavi li se $O'K' = \rho$, $\sphericalangle x'o'K' = \omega = O'K'U$, $O'U = a$, onda se iz pravokutnog trokuta $UO'K'$ dobije

$$\rho = a \operatorname{cotg} \omega$$

kao polarna jednadžba krivulje k'. Ako se polarne koordinate zamijene pravokutnim koordinatama dobije se jednadžba

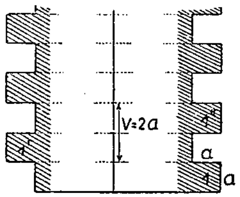
$$y^2(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0.$$

Iz te jednadžbe zaključujemo, da je krivulja k' 4. reda i to kapa-krivulja.

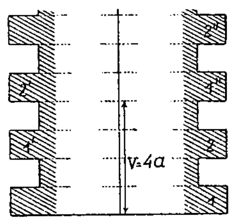
10. **Predočivanje uspravne zatvorene zavojne plohe.** U sl. 747. nacrtane su projekcije jednoga dijela uspravne zatvorene zavojne plohe, koja je omeđena osi o i zavojnicom e. Izvodnice su te plohe horizontalne i sijeku os o pod pravim kutovima. Direkcioni stožac prelazi kod ove plohe u direkcionu ravninu. Normalni su presjeci te plohe izvodnice. Dirna se ravnina u kojegod točki M ove plohe konstruira na jednak način kao i kod zatvorenih kosih ploha. Prvi je trag dirne ravnine usporedan s tlocrtom izvodnice c na kojoj leži diralište. Budući da je izvodnica c glavna normala zavojnice b, koja ide točkom M, to je dirna ravnina oskulatorna ravnina zavojnice b za točku M.

§ 218. Vijci

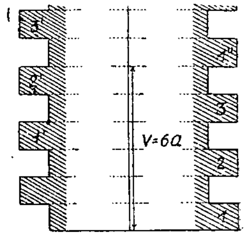
1. Postanak i vrsta vijaka. Vijak je kruto tijelo za koje pomišljamo da nastane, kad se ravan, sa svih strana omeđen lik, zavojito okreće oko osi o. Svaki se vijak sastoji iz masivnog rotacionog valjka, koji se zove *vreteno* ili *svora*, i brazdama sličnih zavoja, koji su na vretenu te se zovu *narez* vijka. Svakom vijku pripada matica. To je kruto šuplje tijelo, koje je iznutra omeđeno plaštom rotacionog valjka, kojemu je promjer jednak promjeru vretena, i u koji su urezani zavoji tako, da izbočenim dijelovima vijka odgovaraju udubljeni dijelovi matice i obratno. Vijak potpuno ispunja šupljinu matice i može se u njoj zavojito okretati.



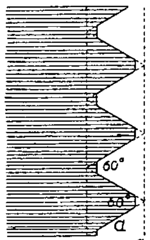
Sl. 748.



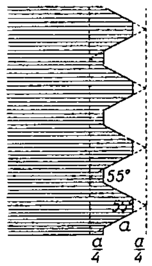
Sl. 749.



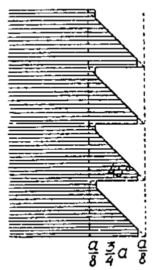
Sl. 750.



Sl. 751.



Sl. 752.



Sl. 753.

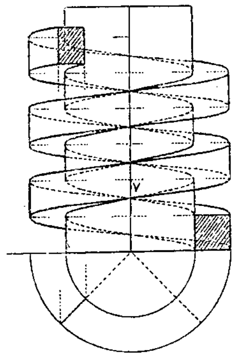
Dubina je nareza dosta malena prema promjeru vretena, no da konstrukcije budu jasnije, u slikama koje su ovdje donesene, uzela se ta dubina većom negoli bi odgovarala promjeru vretena.

Vijci se dijele prema obliku profila nareza (sl. 748.—753.). Obično se upotrebljavaju vijci *pravokutnog* i *oštrog nareza*. Profili su vijaka prve vrste pravokutnici ili kvadrati, a vijaka druge vrste istokračni ili istostrani trokuti. Nadalje profili vijaka imadu i trapezaste oblike.

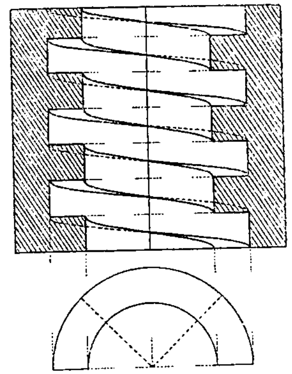
Vijci se dijele na jednovojne, dvovojne i mnogovojne, prema tome, da li se narez sastoji iz jednog zavoja (brazde), iz dvaju ili više zavoja (brazda).

Svi su vijci obično desnoviti.

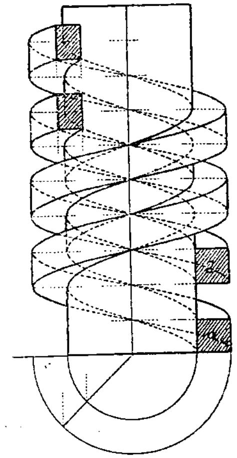
2. Vijci pravokutnog nareza. Sl. 748.—750. predočuju profile jednovojnog, dvovojnog i trovojnog vijka pravokutnog nareza. Taj je profil sličan pili, koja je nazupčana na obje strane. Zupci i krnje među njima imadu oblik kvadrata, kojima su stranice jednake a. Okreće li se kvadrat 1 zavojito oko osi o, on opiše narez vijka. Vrhovi kvadrata opišu zavojnice (sl. 754.). Horizontalne stranice opišu sukladne dijelove uspravne zatvorene pravčaste zavojne plohe. Unutarnja vertikalna stranica kvadrata opiše dijelove valjkaste plohe vretena, kojemu je promjer d, a izvanja vertikalna stranica kvadrata opiše dijelove plašta valjka, kojemu je promjer $d_1 = d + 2a$. Da jednovojni vijak bude uporabljiv, visina zavoja mora biti barem dvaput veća od stranice kvadrata, tako da zub i krnja profila čine visinu jednog zavoja, t. j. $v = 2a$. Kad kvakrat 1 izvede polovicu vrtnje, on dođe u položaj 1', a kad izvrši čitavu vrtnju, on dođe u položaj 1'' (sl. 748.—750.).



Sl. 754.



Sl. 755.



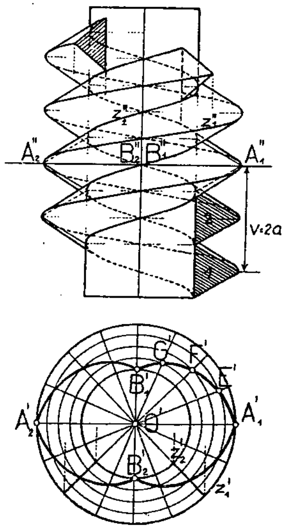
Sl. 756.

Podigne li se kvadrat 1 zavojitim gibanjem nakon potpunog okreta za dvostruku visinu ($v = 4a$), onda i kvadrat 2 (sl. 749. i 756.), koji je u visini $\frac{v}{2}$, te je sukladan s prvim kvadratom, opiše drugi zavoj. Takav se vijak zove dvovojni vijak (sl. 756.). Mogu se napraviti trovojni i mnogovojni vijci.

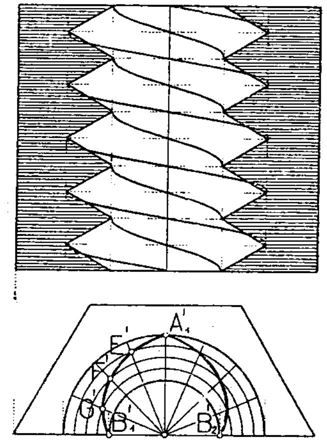
Na profilu jednovojnih i trovojnih vijaka svakom zubu na jednoj stran osi odgovara krnja na drugoj strani, i obrnuto. Na profilu dvovojnih četverovojnih vijaka nalaze se u istoj visini s obje strane osi ili zupci il praznine.

Vijak pravokutnog nareza predočujemo u tlocrtu i nacrtu tako, da konstruiramo projekcije zavojnica, koje opisuju vrhovi izvodnih kvadrata. Po dvije zavojnice sukladne su i pomaknute u smjeru osi vijka za $\frac{1}{2}v$. Inače sve četiri zavojnice imadu jednaku visinu v. U nacrtu treba još nacrtati konturu obih koaksijalnih valjaka i to samo one dijelove, koji omeđuju zavoje.

Sl. 754. prikazuje jednovojni, a sl. 756. dvovojni vijak pravokutnog nareza. Sl. 755. prikazuje polovicu matice jednovojnog vijka. Dijelovi sinusoida u nacrtu matice identični su sa dijelovima sinusoida vijka, koji su na stražnjoj polovici. Kod konstrukcija sinusoida dobro je, da se najprije nacrtaju tangente u obratištima tih sinusoida.



Sl. 757.



Sl. 758.

3. Vijci oštrog nareza. Uzeli smo, da su izvodni trokuti (meridijani) tih vijaka istostrani trokuti, kojima su osnovice vertikalne i koje leže u izvodnicama vretena (sl. 757.). Giblje li se jedan od tih trokuta zavojito oko osi o, on opiše vijak oštroga nareza. I ovdje visina zavoja mora biti barem tolika, kolika je osnovica trokuta, t. j. $v = a$, ili mora biti jednaka mnogokratniku osnovice. Ima jednovojnih i više vojnih vijaka oštroga nareza. Sl. 757. prikazuje dvovojni vijak oštroga nareza.

Vrhovi trokuta 1 opišu zavojnice z_1 (z_1', z_1'') i z_2 (z_2', z_2''), a kraci dijelove zatvorenih kosih pravčastih zavojnih ploha, koje se sijeku u izvanjoj zavojnici z_1. Vijci ove vrsti imaju u nacrtu prividnu konturu k''. Ta se kontura

sastoji iz dijelova krivulje k'', koji su izbočeni prema osi o, i veoma su slabe zakrivljenosti tako, da se mogu nadomjestiti pravcima, koji dotiču izvanje i unutarnje sinusoide z_1'' i z_2''. Izvanji uglovi konture nijesu dakle oštri, nego su zaobljeni malim lukovima sinusoida z_1''.

Sl. 758. prikazuje tlocrt i nacrt stražnje polovice matice dvovojnog vijka oštroga nareza. Kontura se matice sastoji iz dvaju nizova istostranih trokuta, koji leže u ravnini položenoj osju o usporedno s Π_2.

U obim su slikama 757. i 758. konstruirani tlocrti normalnog presjeka vijka i matice s ravninom Σ (trag $s_2 = x$). Presjeci su lukovi Arhimedovih spirala. Budući da je vijak dvovojan, presjeci imaju dva sukladna zuba. Vrhova A_1' i A_2' zuba leže u vrhovima istoga promjera kružnice z_1'. Točke B_1' i B_2', u kojima se oba zuba dotiču, leže u vrhovima promjera kružnice z_2' koji je okomit na $A_1'A_2'$. Lukove Arhimedovih spirala konstruiramo na taj način, da između kružnice z_2' i z_1' umetnemo tri nove koncentrične kružnice tako, da su četiri kružna vijenca jednako široka. Isto tako razdijelimo kružne kvadrante polumjerima na četiri jednaka dijela i tima polumjerima siječemo pripadne kružnice u točkama A_1', E', F', G', B_1' i t. d.

4. Vijci trapeznog nareza. Sl. 751.—753. prikazuje profile vijaka trapeznog nareza. Kod Sellersovog nareza (sl. 751.) izvodni je trapez istokračan, te mu kraci čine kut od 60°. Kod Whitworthovog nareza ti kraci zatvaraju kut od 55° (sl. 752.). Sl. 753. prikazuje profil još jedne vrste vijaka trapezastog nareza. Osnovni je lik istokračan pravokutan trokut.

XXXV. Ortogonalna aksonometrija

§ 219. Svrha aksonometrijskog projiciranja

Već smo spomenuli kod kosog projiciranja na jednu ravninu, da se tijelo kosim projiciranjem mnogo zornije prikaže, negoli ortogonalnim projiciranjem na Π_1, Π_2 ili Π_3. Kod toga projiciranja tijelo se dovede u vezu sa tri osi x, y, z koje izlaze iz jedne točke O i koje su među sobom okomite. Kao ravnina slike uzima se za kosu aksonometriju vertikalna ravnina Π, a osi x, y, z tako su postavljene, da nijedna od njih nije usporedna s Π. Te se osi projiciraju koso na Π.

Sad će se prikazati nova metoda aksonometrijskog projiciranja predmeta. I ovdje će se uzeti da je ravnina slike Π u vertikalnom položaju i da su osi Ox, Oy, Oz u kosom položaju prema toj ravnini. Te će se koordinatne osi, zajedno sa predmetima, koji su u vezi s tima osima, projicirati na ravninu Π ortogonalno. Na taj će se način također dobiti vrlo zorne slike predmeta. Ta se metoda projiciranja zove *ortogonalna aksonometrija*.

U ortogonalnoj se aksonometriji uči kako se konstruiraju zorne slike predmeta, koji su u vezi sa pravokutnim koordinatnim sistemom.

§ 220. O koordinatnim osima

1. Projiciranje osnog križa. Uzet će se tri među sobom okomite osi x, y, z koje izlaze iz ishodišta O, pa će se te osi ortogonalno projicirati na vertikalnu ravninu Π. Osni križ se postavi tako, da su sve tri osi u kosom položaju prema Π. Osim toga os z postavlja se u takav položaj, da je njezina ortogonalna projekcija vertikalan pravac $\bar{z}$. Na taj će način bridovi tijela, koji su usporedni sa osi z u slici, biti prikazani kao da su vertikalni. Na pravcu $\bar{z}$ uzme se gdjegod točka $\bar{O}$ i ona se smatra ortogonalnom projekcijom ishodišta O na ravninu Π (sl. 759.).

Ravnina (xy) siječe ravninu Π u pravcu XY, pa je prema tome taj pravac trag ravnine (xy) na ravnini Π. Budući da je os z okomita na ravninu (xy), tada ortogonalna projekcija $\bar{z}$ osi z mora biti okomita na tragu XY, i obrnuto: trag XY ravnine (xy) mora biti okomit na projekciji $\bar{z}$ osi z. Budući da je ravnina (xz) okomita na osi y, tada trag XZ te ravnine mora biti okomit na ortogonalnoj projekciji $\bar{y}$ osi y. S jednakih razloga trag YZ ravnine (yz) mora biti okomit na pravcu $\bar{x}$. Tri traga XY, XZ i YZ

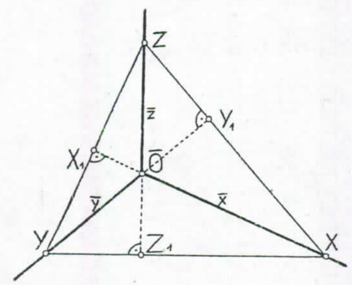
čine trokut, koji leži u ravnini slike Π, pa je tim trokutom fiksirana ravnina Π, a time je određen i položaj osi x, y, z u prostoru. Trokut XYZ zove se *tračni trokut* ravnine slike. Taj se trokut može po volji uzeti, ali uvijek tako, da su mu stranice okomite na pravcima $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Pravci $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ padaju u visine trokuta XYZ.

Spuste li se s točke O okomice na stranice tračnog trokuta, te su okomice priklonice koordinatnih ravnina (xy), (xz), (yz). Projekcije su tih priklonica okomite na stranicama tračnog trokuta, t. j. $\bar{O}X_1 \perp YZ$, $\bar{O}Y_1 \perp XZ$, $\bar{O}Z_1 \perp XY$.

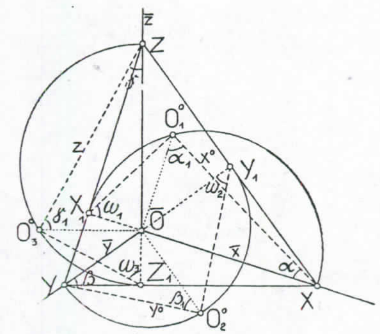
Budući da je trokut XOY kod O pravokutan, to je OZ_1 visina toga trokuta, koja pripada hipotenuzi XY. Prema tome nožište Z_1 te visine mora ležati između točaka Y i X, a točka Y_1 mora ležati između točaka X i Z. Odatle slijedi, da točka $\bar{O}$ mora ležati unutar periferije trokuta XYZ, a jer je točka $\bar{O}$ u sjecištu visina trokuta XYZ, taj je trokut uvijek oštrokutan.

Budući da su kutovi $X\bar{O}Z_1$, $Y\bar{O}X_1$ i $Z\bar{O}Y_1$ oštri, slijedi da su sukuti tih kutova $X\bar{O}Z$, $X\bar{O}Y$, i $Y\bar{O}Z$ tupi, t. j.:

Ortogonalne projekcije koordinatnih osi čine među sobom tupe kutove. Ti će se kutovi označiti sa ξ, η i ζ.



Sl. 759.

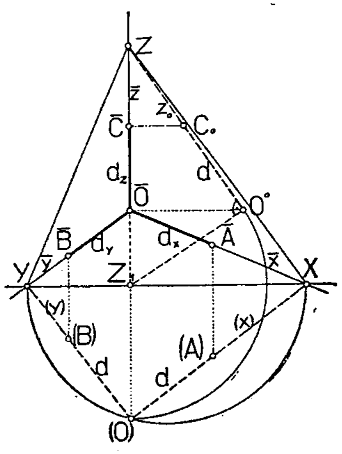


Sl. 760.

2. Distancija ishodišta. Prikloni kutovi osi. Os x okomita je na ravninu (yz), a budući da u toj ravnini leži pravac OX_1, slijedi da je $x \perp OX_1$. Prema tome trokut je XOX_1 pravokutan (sl. 760.). Hipotenuza je toga trokuta XX_1 u ravnini Π, a O je vrh pravoga kuta. Ravnina je toga trokuta okomita na Π. Preloži li se taj trokut oko hipotenuze XX_1 u ravninu Π, dobit će se njegova prava veličina $XO_1{}^0X_1$. Taj se trokut konstruira tako, da se nad hipotenuzom XX_1 opiše polukružnica i u točki $\bar{O}$ postavi okomica na XX_1, koja polukružnicu siječe u točki $O_1{}^0$. Ta se točka spoji sa X i X_1. Dužina $\bar{O}O_1^0$ jest distancija ishodišta O od ravnine Π. Pravac $XO_1^0 = x^0$ je preložaj osi x, a $X_1O_1^0$ je preložaj priklonice OX_1 ravnine (yz). Prema tome je $\sphericalangle \omega_1$ prikloni kut ravnine (yz) prema ravnini Π. Na jednak se način dobije prikloni kut β osi y i prikloni kut γ osi z, te prikloni kutovi ω_2 i ω_3 ravnina (xz) i (xy) prema Π. Kod točne crtnje mora biti $\bar{O}O_1^0 = \bar{O}O_2^0 = \bar{O}O_3^0$.

Ishodište O može biti ispred ravnine slike Π ili iza te ravnine u daljini $\bar{O}O = \bar{O}O_1^0$. U prvom slučaju vidi se ravnina (xy) odozdo, pa se prema tome vide odozdo i predmeti, koji se prikazuju aksonometrijskom projekcijom. U drugom slučaju, t. j. kad je ishodište iza ravnine Π, predmeti nacrtani u aksonometrijskoj projekciji prikazani su s pogledom odozgo.

3. Veličina koordinatnih osi. Prenesimo na osi, počevši od ishodišta, jednake jedinične dužine $OA = OB = OC = d$, te ih projicirajmo ortogonalno na ravninu Π. Neka su projekcije tih dužina $\bar{O}\bar{A} = d_x$, $\bar{O}\bar{B} = d_y$, $\bar{O}\bar{C} = d_z$ (sl. 761.) Te dužine dobijemo na slijedeći način. Pravokutan trokut XOY rotiramo oko hipotenuze XY u ravninu Π, pa ćemo dobiti pravu veličinu $X(O)Y$ toga trokuta. T. j. se trokut konstruira tako, da se nad hipotenuzom XY opiše polukružnica i ta polukružnica siječe u točki (O) pravcem potegnutim s točke $\bar{O}$ okomito na XY. Točka (O) je rotirano ishodište, $(O)X \equiv (x)$ i $(O)Y \equiv (y)$ jesu rotirane osi x i y. Prenese li se na (x) dužina $(O)(A) = d$ i na (y) dužina $(O)(B) = d$, pa se te dužine rotiraju natrag, dobit će se na $\bar{x}$ i $\bar{y}$ projekcije $\bar{O}\bar{A} = d_x$ i $\bar{O}\bar{B} = d_y$ dužina OA i OB.



Sl. 761.

Preloži li se pravokutan trokut ZOZ_1 oko hipotenuze ZZ_1 u Π, on će doći u položaj $ZO''Z_1$. Taj se trokut dobije kao u sl. 760. Budući da je priklonica $\bar{O}Z_1$ ravnine (xy) došla rotacijom trokuta XOY u položaj $(O)Z_1$, a drugi put prelaganjem trokuta ZOZ_1 u položaj O^0Z_1, slijedi, da je $O^0Z_1 = (O)Z_1$. Ako se prema tome u točki $\bar{O}$ postavi okomica na ZZ_1, pa se oko Z_1 opiše kružnica s polumjerom $Z_1(O)$, ona će sjeći tu okomicu u točki O^0. Povuče li se točkom O^0 okomica z^0 na Z_1O^0 u tu okomicu pada preložena os. Prenese li se na z^0 dužina $O^0C^0 = d$, pa se C^0 projicira u os $\bar{z}$, dobit će se projekcija $\bar{O}\bar{C} = d_z$ dužine OC.

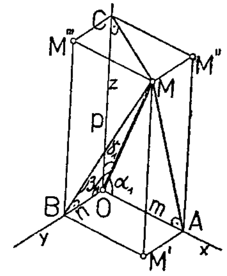
Kaže se, da dužine $\bar{O}\bar{A}$, $\bar{O}\bar{B}$, $\bar{O}\bar{C}$ naznačuju veličine koordinatnih osi. Veličina tih dužina zavisi o veličini priklonih kutova α, β, γ tih osi.

Što je veći prikloni kut, to je projekcija jedinične dužine d kraća. Ako su sva tri kuta α, β, γ nejednaka, onda su i dužine d_x, d_y, d_z različitih veličina. U tom je slučaju tračni trokut XYZ raznostran trokut. Ako su dva kuta jednaka, na pr. $\alpha = \gamma$, onda je $d_x = d_z$, a tračni trokut XYZ je istokračan. Ako su sva tri kuta jednaka, onda su među sobom jednake sve tri dužine d_x, d_y, d_z, a trokut XYZ je istostran.

Omjeri su prikrate triju osi

$$\frac{d_x}{d} = \cos\alpha, \quad \frac{d_y}{d} = \cos\beta, \quad \frac{d_x}{d} = \cos\gamma.$$

Tri omjera $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nijesu među sobom nezavisne veličine, nego dva ta omjera određuju treći. Ako se s točke O postavi okomica na Π ona s osima x, y z čini kutove α_1, β_1, γ_1 koji su komplementni kutova α, β, γ. Recimo, da je ta okomica OM (sl. 762.). Projicira li se točka M na koordinatne ravnine, dobit će se dužine $\bar{O}A = m$, $\bar{O}B = n$ i $\bar{O}C = p$ kao koordinate točke M. Dužina je OM dijagonala pravokutnog paralelepipeda, kojemu su bridovi jednaki m, n, p. Prema tome je



Sl. 762.

$$m^2 + n^2 + p^2 = \overline{OM}^2.$$

Budući da je iz pravokutnog trokuta

$$\overline{O}AM : m = \overline{O}M \cdot \cos\alpha_1,$$

iz trokuta $\overline{O}BM : n = \overline{O}M \cdot \cos\beta_1$, a iz trokuta $\overline{O}CM : p = \overline{O}M \cdot \cos\gamma_1$, to je

$$m^2 + n^2 + p^2 = \overline{OM}^2 (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1).$$

Budući da je $m^2 + n^2 + p^2 = \overline{OM}^2$, slijedi da je

$$\overline{OM}^2 (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) = \overline{OM}^2$$

ili

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1. \tag{1}$$

Stavi li se u (1) $\alpha_1 = 90^0 - \alpha$, $\beta_1 = 90^0 - \beta$, $\gamma_1 = 90^0 - \gamma$

ili $\cos\alpha_1 = \sin\alpha$, $\cos\beta_1 = \sin\beta$, $\cos\gamma_1 = \sin\gamma$

dobit će se

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1, \tag{2}$$

a zamijene li se sinusi kutova s cosinusima dobit će se konačno

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2. \tag{3}$$

Ako se na osi x, y, z prenese kakvagod dužina k, pa se sa m, n i p označi veličina projekcija dužine k, onda je $m = k \cdot \cos\alpha$, $n = k \cdot \cos\beta$, $p = k \cdot \cos\gamma$. Ako se te tri jednadžbe kvadriraju i zbroje, dobije se

$$m^2 + n^2 + p^2 = k^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

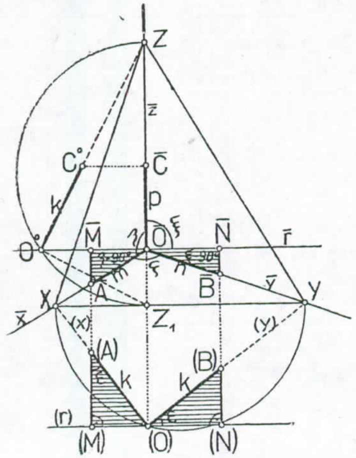
ili

$$m^2 + n^2 + p^2 = 2k^2.$$

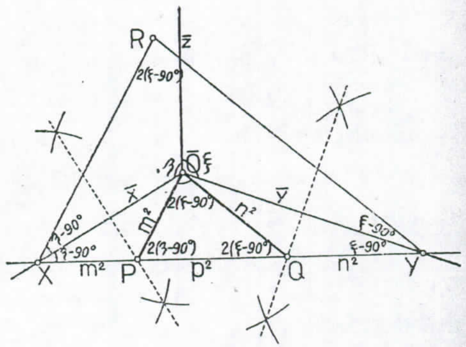
*

4. Odnosi između kutova ξ, η, ζ i dužina m, n, p. U sl. 763. zadana je projekcija osnoga križa $\overline{O}(xyz)$ i tračni trokut XYZ ravnine slike. Projekcije osi čine među sobom kutove, koji su označeni sa ξ, η, ζ. U ravnini (xy) povučen je ishodištem O pravac $r \perp XY$. Projekcija je toga pravca $\overline{r} \parallel XY$. Rotira li se ravnina (xy) oko XY u ravninu Π, osi x, y dođu u položaj (x), (y), a pravac r u položaj $(r) \parallel XY$. Na osi (x), (y) prenesena je dužina k $[(O)(A) = (O)(B) = k]$ i točkama (A), (B) povučeni su pravci okomito na XY. Ti pravci sijeku osi $\overline{x}$ i $\overline{y}$ u točkama $\overline{A}$, $\overline{B}$, pravac (r) u točkama (M), (N), a pravac $\overline{r}$ u točkama $\overline{M}$, $\overline{N}$. Tada je $\overline{OA} = m$, $\overline{OB} = n$, trokuti su $\overline{OMA}$ i $\overline{ONB}$ projekcije, a $(O)(M)(A)$ i $(O)(N)(B)$ prave veličine trokuta OMA i ONB.

Budući da su pravokutni trokuti $(O)(M)(A)$ i $(O)(N)(B)$ među sobom sukladni (zašto?), to su i projekcije tih trokuta među sobom jednaki pravokutni trokuti, t. j. $\triangle\, \overline{OMA} = \triangle\, \overline{ONB}$. U prvom je trokutu hipotenuza $\overline{OA} = m$ i jedan kut $= \eta - 90^0$, a drugom je hipotenuza $\overline{OB} = n$, a jedan kut $= \xi - 90^0$.



Sl. 763.



Sl. 764.

Ploština je $\Delta\, \overline{OMA} = \frac{1}{2}\, m \sin(\eta - 90^0) \cdot m \cos(\eta - 90^0) = \frac{1}{4} m^2 \cdot \sin 2(\eta - 90^0)$, a ploština $\triangle\, \overline{ONB} = \frac{1}{2}\, n \cdot \sin(\xi - 90^0) \cdot n \cos(\xi - 90^0) = \frac{1}{4} n^2 \sin 2(\xi - 90^0)$. Budući da su ti trokuti jednaki, tad je

$$m^2 \sin 2(\eta - 90^0) = n^2 \sin 2(\xi - 90^0) \text{ ili } \frac{m^2}{\sin 2(\xi - 90^0)} = \frac{n^2}{\sin 2(\eta - 90^0)}.$$

Na sličan način dobije se jednadžba

$$n^2 \sin 2\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right) = p^2 \sin 2(\eta - 90^0) \text{ ili } \frac{n^2}{\sin 2(\eta - 20^0)} = \frac{p^2}{\sin 2(\zeta - 90^0)}.$$

Prema tome imamo

$$\frac{m^2}{\sin 2(\xi - 90^0)} = \frac{n^2}{\sin 2(\eta - 90^0)} = \frac{p^2}{\sin 2(\xi - 90^0)}.$$

Budući da je zbroj kutova

$2(\zeta - 90^0) + 2(\eta - 90^0) + 2(\zeta - 90^0) = 2(\xi + \eta + \zeta) - 6 \cdot 90^0 = 180^0$, tad je posljednjom jednadžbom izražen sinusov poučak trokuta, u kojemu su stranice m^2, n^2, p^2, a suprotni kutovi $2(\xi - 90^0)$, $2(\eta - 90^0)$, $2(\zeta - 90^0)$. Taj se trokut zove *trokut prikrate*.

Budući da je u svakom trokutu svaka stranica veća od diferencije, a manja od sume drugih dviju stranica, tad je i u gore spomenutom trokutu $(p^2 - n^2) < m^2 < (p^2 + n^2)$, $(p^2 - m^2) < n^2 < (p^3 + m^2)$, $(m^2 - n^2) < p^2 < (m^2 + n^2)$.

Nadalje u svakom trokutu većoj stranici leži nasuprot veći kut. Ako je prema tome

$$n < m < p, \quad \text{tad je} \quad \eta < \xi < \zeta.$$

U trokutu $XY\overline{O}$ kutovi su na stranici XY jednaki $(\eta - 90^0)$ i $(\xi - 90^0)$. Simetrala stranice $X\overline{O}$ (sl. 764.) siječe XY u točki P, a simetrala stranice $Y\overline{O}$ siječe XY u točki Q. Spoje li se te točke s $\overline{O}$, tad je u trokutu $PQ\overline{O}$ $\sphericalangle PQ\overline{O} = 2(\xi - 90^0)$ i $\sphericalangle QP\overline{O} = 2(\eta - 90^0)$. Budući da $\sphericalangle P\overline{O}Q = = 2(\zeta - 90^0)$, slijedi da je trokut $PQ\overline{O}$ trokut prikrate. Prema tome stranice su toga trokuta $PQ = p^2$, $P\overline{O} = m^2$, $Q\overline{O} = n^2$. Budući da je nadalje $P\overline{O} = PX$ i $Q\overline{O} = QY$, tad je

$$XP : PQ : QY = m^2 : p^2 : n^2.$$

Ako se trokutu $XY\overline{O}$ podvostruče kutovi na vrsima X i Y, dobit će se trokut XYR, u kojima su kutovi jednaki $2(\xi - 90^0)$, $2(\eta - 90^0)$, $2(\zeta - 90^0)$. Prema tome i taj je trokut trokut prikrate, te mu se stranice odnose kao:

$$XR : RY : YX = m^2 : n^2 : p^2.$$

Simetrale kutova u trokutu XYR sijeku se u točki $\overline{O}$.

5. Konstrukcija aksonometrijske slike osnoga križa, ako su zadane omjerne dužine m, n, p.

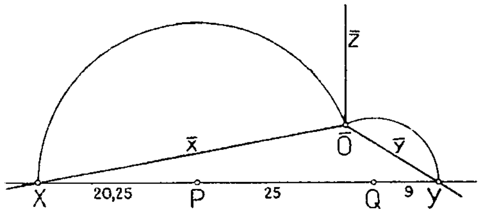
Prvi način. Nacrtat će se pravac XY i na nj će se prenijeti dužine $XP = m^2$, $PQ = p^2$, $QY = n^2$, zatim će se oko P opisati luk s polumjerom PX, a oko Q luk s polumjerom QY. Oba će se ta luka sjeći u točki $\overline{O}$. Tada je $\overline{O}X \equiv \overline{x}$, $\overline{O}Y \equiv \overline{y}$, $\overline{z} \perp XY$.

Ako se $m : n : p = 9 : 6 : 10$, onda se $m : n : p = 81 : 36 : 100$. Ti se brojevi mogu u kojoj god jedinici prenijeti na pravac XY, pa će se dobiti točke X, P, Q, Y. Uzme li se, da je 1 mm jedinica mjere, onda su omjerni brojevi preveliki, pa će se zato gornji omjer skratiti sa 4, te će se dobiti

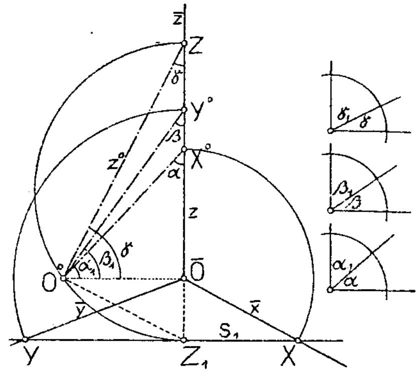
81 : 36 : 100 = 20,25 mm : 9 mm : 25 mm. Na pravac XY (sl. 765.) prenijet će se: $XP = 20{,}25$ mm, $PQ = 25$ mm, $QY = 9$ mm. Dalje se postupa kako je gore protumačeno.

Drugi način. Konstruirat će se trokut XYR (sl. 764.) u kojemu su stranice $XR : XY : YR = m^2 : p^2 : n^2$, zatim će se konstruirati simetrale kutova na vrhovima X i Y. U te simetrale padaju projekcije $\bar{x}$ i $\bar{y}$ osi x i y. Te se simetrale sijeku u točki $\bar{O}$ i tom točkom ide pravac $\bar{z} \perp XY$.

6. Konstrukcija aksonometrijske slike osnoga križa, ako su zadani prikloni kutovi osi α, β, γ. Iz slike 760. je $\bar{O}X = \bar{O}O_1^0 \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ ili $\bar{O}X = O\bar{O} \cdot \operatorname{cotg}\alpha$, $\bar{O}Y = O\bar{O} \cdot \operatorname{cotg}\beta$ i $\bar{O}Z = O\bar{O} \cdot \operatorname{cotg}\gamma$. Na temelju tih odnosa konstruirat će se projekcije osnog križa za slučaj, kad su zadani prikloni kutovi α, β, γ osi x, y, z prema ravnini slike Π.



Sl. 765.



Sl. 766.

Najprije se nacrta projekcija $\bar{z}$ osi z (sl. 766.) i na njoj se po volji uzmu točke $\bar{O}$ i Z. Ako se os z preloži oko $\bar{z}$ u Π, onda će preložaj z^0 osi z činiti sa $\bar{z}$ kut γ. Ako se dakle na pravac $\bar{z}$ sa vrhom Z prenese kut γ, drugi je krak toga kuta z^0. Taj pravac siječe okomicu postavljenu u točki $\bar{O}$ na $\bar{z}$ u preloženom ishodištu O^0, pa je $\bar{O}O^0$ distancija točke O. Ako se u točki O^0 povuče pravac okomito na z^0, on siječe pravac $\bar{z}$ u točki Z_1. Tom se točkom povuče pravac s_1 okomito na $\bar{z}$, pa će na tom pravcu biti točke X i Y. Da se dobiju te točke postupat će se ovako: Na pravac $O^0\bar{O}$ sa vrhom O^0 prenijet će se komplementi α_1 i β_1 kutova α i β, pa će drugi kraci tih kutova sjeći pravac $\bar{z}$ u točkama X^0 i Y^0. Tada je $\sphericalangle \bar{O}X^0O^0 = \alpha$ i $\sphericalangle \bar{O}Y^0O^0 = \beta$. Iz pravokutnih je trokuta $O^0\bar{O}X^0$ i $O^0\bar{O}Y^0$: $\bar{O}X^0 = \bar{O}O^0 \cdot \operatorname{cotg}\alpha = O\bar{O} \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ i $\bar{O}Y^0 = \bar{O}O^0 \cdot \operatorname{cotg}\beta = O\bar{O} \cdot \operatorname{cotg}\beta$. Ako se dakle oko $\bar{O}$ opišu lukovi s polumjerima $\bar{O}X^0$ i $\bar{O}Y^0$ u protivnom smislu, oni će pravac s_1 sjeći u točkama X i Y, pa je $\bar{O}X \equiv \bar{x}$ i $\bar{O}Y \equiv \bar{y}$.

§ 221. Vrste aksonometrijskog projiciranja

1. Izometrička, dimetrička i trimetrička projekcija. Budući da trima omjernim brojevima (ili dužinama) m, n, p pripada posve određena aksonometrijska slika osnoga križa, tad se vidi da ima neizmjerno mnogo načina aksonometrijskog projiciranja, koji se mogu razdijeliti u tri skupine. Isporede li se među sobom sva tri omjerna broja, tad mogu nastupiti slijedeća tri slučaja:

a) sva su tri broja među sobom jednaka, na pr. ($m = n = p$),

b) dva su broja među sobom jednaka, na pr. $m = p$,

c) sva su tri broja različite veličine.

U prvom slučaju projekcija se zove *izometrička*, u drugom se slučaju zove *dimetrička*, a u trećem slučaju *trimetrička* projekcija.

Kod izometričke je projekcije $\sphericalangle \alpha = \beta = \gamma = 35^0\,15'\,24''$ i $\sphericalangle \xi = \eta = \zeta = 120^0$, kod dimetričke je projekcije $\sphericalangle \alpha = \gamma$ i $\sphericalangle \xi = \zeta$, a kod trimetričke su projekcije koliko kutovi α, β, γ, toliko kutovi ξ, η, ζ različite veličine.

Ako se omjerni brojevi za dimetričku i trimetričku projekciju uzmu po volji, ne će se uvijek dobiti lijepe slike predmeta. Našlo se, da će se u dimetričkoj projekciji dobiti dobre slike, ako je $m : n : p = 2 : 1 : 2$. Mogu se još upotrebiti omjerni brojevi $3 : 1 : 3$ i $4 : 1 : 4$.

Za trimetričku projekciju obično se uzimlju omjerni brojevi

$$m : n : p = 5 : 4 : 6 \qquad m : n : p = 9 : 5 : 10$$
$$= 7 : 6 : 8 \qquad = 9 : 6 : 10$$
$$= 8 : 5 : 9$$

Najljepše se slike dobiju za slučaj, kad je $m : n : p = 9 : 5 : 10$.

2. Pravila za aksonometrijsko projiciranje. Da po mogućnosti što slabije izbiju mane aksonometrijskog projiciranja, treba se pridržavati slijedećih pravila:

1. Projekcija $\bar{z}$ osi z mora se uzeti u vertikalnom položaju, da tako bridovi tijela, koji su usporedni sa osi z, budu u slici prikazani kao da su vertikalni.

2. Treba nastojati, da dijagonalne ravnine tijela ne budu okomite na ravnini slike, jer se onda ne će dogoditi da se bridovi, koji leže u toj ravnini, projiciraju u jedan te isti pravac. Treba paziti da $\bar{z}$ ne čini sa $\bar{x}$ i $\bar{y}$ jednake tupe kutove ξ i η.

3. Kod pogleda odozgo treba da os x bude manje prikraćena, nego li os y, a kod pogleda odozdo treba da bude obrnuto.

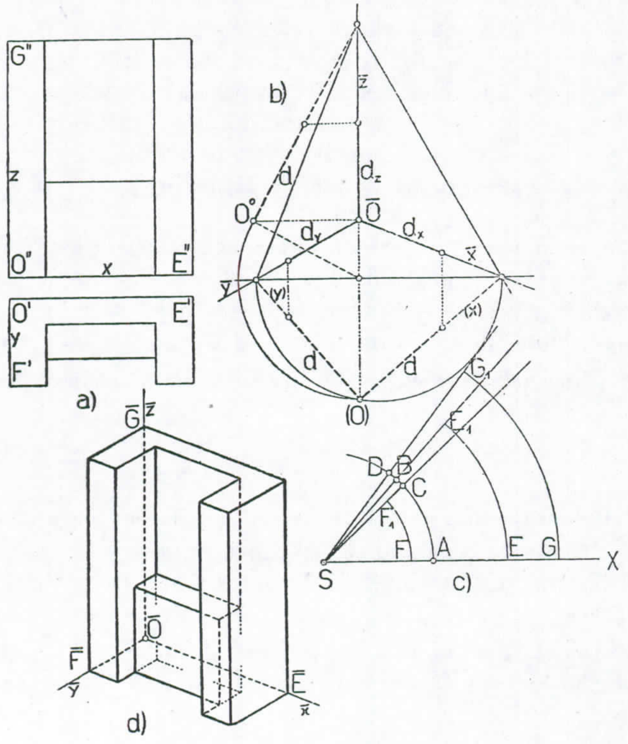
4. Os z ne smije u slici biti odviše prikraćena, t. j. prikloni kut γ te osi mora biti što manji (oko 15^0). Ako je taj kut prevelik, onda je tijelo

odviše pomaknuto iz svoga prirodnog položaja, pa slika čini neprirodan dojam.

§ 222. Konstrukcija aksonometrijskih slika

1. Zadatak: *Konstruiraj trimetričku aksonometrijsku sliku predmeta, koji je u sl. 767. a) prikazan tlocrtom i nacrtom. Pogled odozgo s desna.*

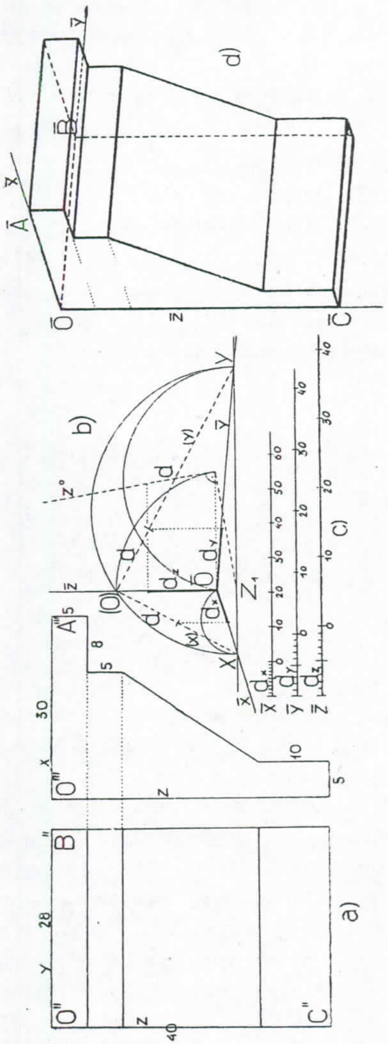
Rješenje. Najprije se nacrta osni križ po volji ili prema zadanim podacima (sl. 767. b) i odrede dužine d_x, d_y, d_z osi s obzirom na jediničnu



Sl. 767.

dužinu d. Aksonometrijska će se slika konstruirati spomoću kutova razmjernosti. Ti će se kutovi dobiti, ako se točkom S povuče pravac SA (sl. 767. c), oko S opiše se luk s polumjerom d i na taj luk nanesu tetive $AB = d_x$, $AC = d_y$ i $AD = d_z$, pa se točke B, C i D spoje sa S. Tada su kutovi ASB, ASC i ASD kutovi razmjernosti za dužine, koje su usporedne s osima x, y i z.

U sl. 767. a) označi se točka O, koja će se smatrati ishodištem, te smjerovi za osi x, y i z. U sl. 767. d) konstruirana je aksonometrijska slika predmeta. Za tu sliku uzme se točka $\overline{O}$, pa se kroz nju povuku tri osi usporedno sa $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$. Iz sl. 767. a) uzme se u šestilo dužina $O'E'$ i oko S u sl. 767. c) opiše se luk EE_1 u kutu ASB, uzme u šestilo tetiva EE_1 i prenese na os $\overline{x}$ u sl. 767. d), t. j. $\overline{OE} = EE_1$. Sad se uzme u šestilo dužina $O'F'$, opiše njom oko S luk FF_1 u kutu ASC i tetiva FF_1 prenese na os $\overline{y}$, t. j. $\overline{OF} = FF_1$. Da se u sl. 767. d) dobije visina $\overline{OG}$ uzet će se u šestilo iz sl. 767. a) dužina $O''G''$, pa će se oko S opisati luk GG_1 u kutu ASD i na os $\overline{z}$ prenijet će se tetiva GG_1, t. j. $\overline{OG} = GG_1$. Sad se može nacrtati aksonometrijska slika punog paralelepipeda. Pomoću kutova razmjernosti prenesu se ostali bridovi predmeta iz sl. 767. a) u sliku 767. d).



Sl. 768.

2. Zadatak: *Zadan je nacrt i bokocrt konsole, konstruiraj aksonometrijsku sliku te konsole s pogledom odozdo i slijeva! Neka je $m : n : p = 5 : 9 : 10$.*

Rješenje. Nacrt i bokocrt konsole kao i aksonometrijska slika nacrtani su u mjerilu 1 : 10. U tom mjerilu bit će 10 cm prikazano u veličini od 1 cm. Ta će se dužina uzeti kao jedinična dužina za aksonometrijsku sliku.

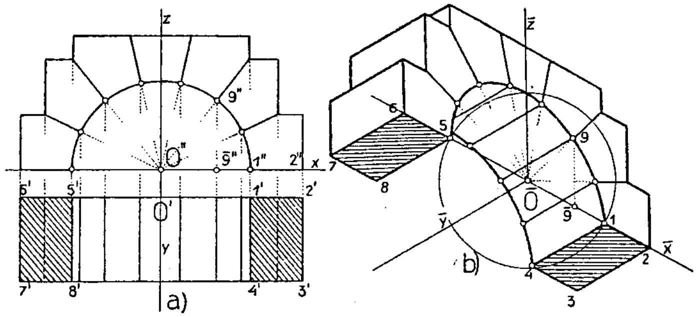
Najprije se nacrta aksonometrijska slika osnoga križa prema omjernim brojevima $m : n : p = 5 : 9 : 10$ (sl. 768. b), a onda se odredi dužina osi d_x, d_y, d_z s obzirom na jediničnu dužinu $d = 1$ cm. Aksonometrijska slika konstruirat će se pomoću mjerila umanjenja za sve tri osi. Jedinice su tih mjerila d_x, d_y, d_z.

Za aksonometrijsku sliku (sl. 768. d) potegnut će se točkom $\bar{O}$ osi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ usporedno sa osima iz slike 768. b), pa se na te osi i na pravce usporedne s tima osima prenose s mjerila umanjenja kote naznačene u sl. 768. a). Na pr. $\overline{OA} = 30$ uzeto s mjerila za os $\bar{x}$, $\overline{OB} = 28$ uzeto s mjerila za os $\bar{y}$, $\overline{OC} = 40$ uzeto s mjerila za os $\bar{z}$, i t. d.

3. Zadatak: *Zadan je tlocrt i nacrt valjkastog svoda; konstruiraj njegovu aksonometrijsku izometrijsku sliku!* (Sl. 769.).

Rješenje. Projekcije osi čine među sobom jednake kutove, i to po 120°. Iz sl. 769. a) prenošene su dužine u aksonometrijsku sliku u istoj veličini, tako da je aksonometrijska slika slično povećana prema pravoj aksonometrijskoj slici. Za konstrukciju povećane slike ne treba nikakovog mjerila.

Izometrička projekcija daje dosta razvučene slike, ali se uza sve to u praksi dosta upotrebljava, na pr. kod predočivanja pojedinih komada tesanog kamena, svodova, drvenih konstrukcija, konstrukcije krovova, dijelova strojeva i t. d. Ta česta upotreba izometričkog projiciranja osniva se na činjenici, da je te slike lako konstruirati, a opet iz slike mogu se lako odrediti dimenzije tijela.



Sl. 769.

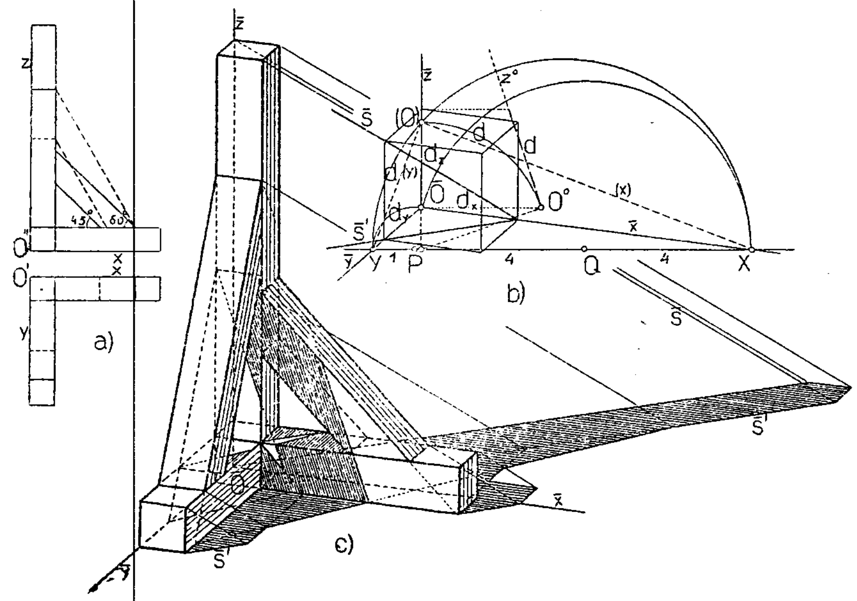
4. Zadatak: *Zadan je tlocrt i nacrt drvne konstrukcije, odredi aksonometrijsku dimetričku projekciju toga predmeta, ako se* $m : n : p = 2 : 1 : 2$! (Sl. 770.).

Rješenje. Tri grede sastavljene su tako, da su im bridovi među sobom okomiti. Jedna je od tih greda u vertikalnom, a dvije u horizontalnom položaju. Po jedna horizontalna i vertikalna greda spojene su trećom gredom, i to tako, da su bridovi jedne spojne grede (potpornja) nagnuti prema Π_1 za 45°, a druge grede za 60°. Sve su grede jednake debljine.

U sl. 770. b) konstruirana je aksonometrijska slika osnoga križa, te dužine d_x i d_y osi x i y. Dužina je $d_z = d_x = 2d_y$ i $\sphericalangle \xi = \sphericalangle \zeta$.

U sl. 770. c) konstruirana je aksonometrijska slika predmeta prema zadanim prikratama i to prema tlocrtu i nacrtu povećana na dvostruko. Dimenzije bridova, koji su usporedni sa osima x i z, mogle bi se prenositi u aksonometrijsku sliku i u nepromijenjenoj veličini, a bridovi, koji su usporedni sa osi y, prenosili bi se u polovici prave veličine, tako da bi aksonometrijska slika bila slično povećana prema pravoj aksonometrijskoj slici.

Nadalje su u sl. 770. c) konstruirane sjene uz dijagonalnu rasvjetu. U sl. 770. b) konstruirana je aksonometrijska slika kocke, kojoj su bridovi

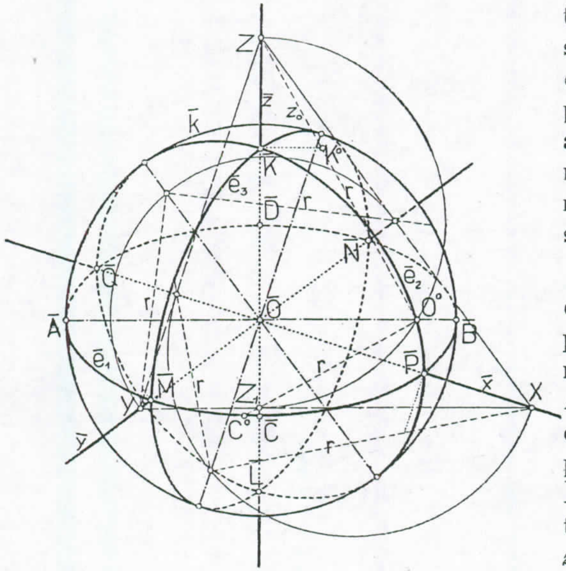


Sl. 770.

usporedni s osima. Dijagonala $\bar{s}$ u toj slici prikazuje aksonometrijsku projekciju smjera zraka svijetla, pravac $\bar{s}'$ je tlocrt zrake s. Sjene se konstruiraju na jednak način kao u kosoj projekciji ili u kosoj aksonometriji.

5. Aksonometrijska slika kugle. Normalna je projekcija kugle kružnica. Budući da je ova metoda aksonometrijskog projiciranja također normalno ili ortogonalno projiciranje, to je aksonometrijska slika kugle kružnica $\bar{k}$ (sl. 771.). Uzelo se, da je središte kugle u ishodištu O i da joj je polumjer r. Prema tome središte je kružnice $\bar{k}$ u točki $\bar{O}$, a polumjer joj je r. Kružnica $\bar{k}$ je prividna kontura kugle, dok je prava kontura glavna kružnica k kugle, koja leži u ravnini, koja ide središtem O usporedno s ravninom slike.

U sl. 771. određena su tri presjeka kugle s koordinatnim ravninama. Ti su presjeci glavne kružnice kugle, a aksonometrijske su im projekcije elipse $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Ravnina (xy) siječe kuglu u kružnici e_1, kojoj je projekcija $\bar{e}_1$. Velika je os te elipse promjer $\overline{AB}$ kružnice $\bar{k}$, koji je usporedan s tragom XY ravnine slike ili okomit na pravcu $\bar{z}$. Promjer CD kružnice e_1, koji pada u priklonicu OZ_1 ravnine (xy), projicira se kao mala os $\overline{CD}$ elipse $\bar{e}_1$. Ako se na pr. na preloženu priklonicu O^0Z_1 prenese $O^0C^0 = r$, pa se s točke C^0 spusti okomica na $\overline{O}Z_1$, dobije se točka $\bar{C}$. Pošto se konstruira velika i mala os elipse $\bar{e}_1$, može se ta krivulja konstruirati. Na sličan način konstruiraju se elipse $\bar{e}_2$ i $\bar{e}_3$. Time je ujedno pokazano kako se nacrtaju aksonometrijske slike kružnica, koje su u koordinatnim ravninama ili su usporedne s tima ravninama.



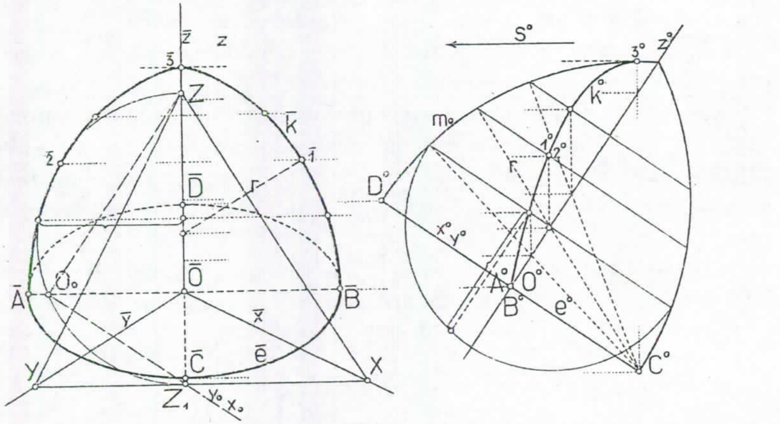
Sl. 771.

Ako se na preloženu os z^0 prenese $O^0K^0 = r$, pa se s K^0 spusti okomica na $\bar{z}$, dobije se točka $\bar{K}$. Ako se prenese $\overline{OL} = \overline{OK}$, dobije se na produženom pravcu $\bar{z}$ točka $\bar{L}$. Točke $\bar{K}$ i $\bar{L}$ jesu projekcije onih točaka K i L, u kojima os z siječe kuglu. Na sličan način dobiju projekcije $\bar{M}$ $\bar{N}$ točaka M i N, u kojima os y siječe kuglu, te projekcije $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ točaka P i Q, u kojima os x siječe kuglu. Kroz svaku tu točku prolaze po dvije elipse $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

6. Aksonometrijska slika rotacione plohe. U sl. 772. nacrtana je aksonometrijska slika osnoga križa i tračni trokut ravnine slike XYZ. Uzet će se, da se os rotacione plohe podudara s osi z. Ravnina Π_4 položena osi z okomito na ravninu slike Π siječe rotacionu plohu u meridijanu m, a ravninu slike u pravcu ZZ_1. Ako se ravnina Π_4 preloži oko ZZ_1 u ravninu Π, onda će se meridijan m prikazati u preložaju u pravoj veličini. Pravac O_0Z je preložaj osi z, a u pravac O_0Z_1 projicira se ravnina (xy) na ravninu Π_4. Preloženu os z pomaknuli smo usporedno ($O_0O^0 \perp \bar{z}$, $z^0 \parallel O_0Z$, $O^0C^0 \parallel O_0Z_1$ ili $O^0C^0 \perp z^0$). Nadalje je nacrtan preložaj m^0 meridijana m.

Ekvator e te plohe leži u ravnini (xy). Aksonometrijska je slika ekvatora elipsa $\bar{e}$, $\overline{AB}$ ($= C^0D^0$) je velika, a $\overline{CD}$ mala os.

Zrake projiciranja s okomite su na ravninu Π. Ako se spoje dirališta, u kojima zrake projiciranja dotiču rotacionu plohu, dobit će se kri-



Sl. 772.

vulja k, koja je prava kontura plohe. Prividna kontura $\bar{k}$ dobit će se iz preložaja. Smjer s^0 zraka projiciranja u preložaju okomit je na pravcu $\bar{z}$. Za taj smjer odredit će se u preložaju spomoću dirnih kugala rastavnica k^0 na jednak način, kao što se je u sl. 737. § 214. odredila treća projekcija k''' rastavnice za smjer s'''. Na jednak način odrede se pojedine točke prividne konture $\bar{k}$, kao što su se u sl. 737. odredile pojedine točke prividne konture k''. Prividnoj konturi pripadaju i točke $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

7. Zadaci za vježbu.

1. Nacrtaj aksonometrijsku sliku *a)* stošca, *b)* valjka, kojemu osnovka leži u kojoj god koordinatnoj ravnini. Neka je $m : n : p = 6 : 5 : 7$.

2. Nacrtaj aksonometrijsku izometrijsku projekciju kugle i odredi sva tri presjeka s koordinatnim ravninama.

3. Nacrtaj aksonometrijsku sliku raznih složenih predmeta na kojima ima stožaca, valjaka i kugala.

XXXVI. Kotirana projekcija i krovni presjeci

§ 223. O kotiranoj projekciji uopće

1. Kote. Neki je lik u prostoru potpuno određen, kad je poznata njegova ortogonalna projekcija na kojugod horizontalnu ravninu i udaljenost dovoljnog broja točaka toga lika od ravnine

Broj, koji naznačuje daljinu neke točke T od zadane horizontalne ravnine, zove se *kota* te točke, a prema tome i metoda projiciranja *kotirana projekcija.*

Možemo dakle reći:

Ortogonalna projekcija nekog lika u prostoru na jednu horizontalnu ravninu, u zajednici s kotama pojedinih točaka lika, zove se *kotirana projekcija toga lika.*

Lik je u prostoru potpuno određen svojom kotiranom projekcijom na zadanoj horizontalnoj ravnini.

Kod konstrukcije se obično uzimaju kote u cijelim brojevima (1, 2, 3, ..), ili se uzimlju mnogokratnici jedinice (na pr. 3, 6, 9, . . .) ili mnogokratnici dijelova jedinice (na pr. 0,25. 0,50, 0,75, ... 5, 5,1, 5,2, 5,3 . . . .).

Kote se uzimaju u metrima.

2. O ravnini projekcija. Visinske ravnine. Ravnina se projekcija obično uzima u horizontalnom položaju. Točkama, koje su u toj ravnini, pripada kota O, pa se zato ta ravnina zove nulta ili glavna horizontalna ravnina. Računaju li se kote od površine morske, tad nam kote naznačuju apsolutne visine.

Podignemo li ili spustimo li nultu ravninu u vertikalnom smjeru, a predmet koji projiciramo ostavimo na miru, tad se ortogonalna projekcija predmeta time ne mijenja. Odatle je jasno, da se svaka horizontalna ravnina može uzeti kao ravnina projekcija Kod dizanja ili spuštanja nulte ravnine mijenja se samo daljina pojedinih točaka predmeta od nove horizontalne ravnine, no kote se broje uvijek od nulte ravnine.

Ravnine, koje su usporedne sa nultom ravninom, zovu se *visinske* ili *slojnične* ili *nivo-ravnine.*

Slojnične su ravnine određene svojim kotama. Kod konstruiranja se obično uzimaju horizontalne ravnine s cijelim kotama. To su glavne slojnične ravnine.

3. Upotreba kotirane projekcije. Kotirana se projekcija upotrebljava u kartografiji, kod gradnje cesta, željeznica, kanala, kod raznih naprava, kod

utvrda i uopće kod svih gradnja, gdje treba zemlju presjeći, prokopati, otkopati ili nasuti. Prema tome je kotirana projekcija veoma važna za građevnog, rudarskog i vojnog inžinira.

Pomoću metode kotirane projekcije mogu se riješiti sve elementarne zadaće, koje spadaju u deskriptivnu geometriju.

4. Krovni presjeci. Budući da se krovni presjeci najviše predočuju tlocrtom, to su i oni uvršteni u kotiranu projekciju.

§ 224. Mjerila

1. Mjerila slike. Predmeti koji se predočuju kotiranom projekcijom obično su preveliki, a da bi ih mogli crtnjom predočiti u pravoj veličini. Zato predmete crtamo u umanjenom mjerilu, pa to mjerilo mora biti nadodano svakoj slici. To se mjerilo zove mjerilo slike.

2. Numeričko mjerilo. Budući da je umanjena slika slična slici, koja je crtana u pravoj veličini, tad omjeri između horizontalnih daljina svakih dviju pridruženih točaka jedne i druge slike imadu konstantnu vrijednost M. Ako je umanjena slika crtana u omjeru ili mjerilu $M = 1 : \alpha$ ili $M = 1/\alpha$, onda to znači, da horizontalnom razmaku od jednog centimetra te slike odgovara u naravi α centimetara.

Mjerilo $M = 1 : \alpha$, koje je zadano u obliku kvocijenta, zove se numeričko mjerilo. Odgovara li horizontalnom razmaku a slike dužina b u naravi, tad je:

$$1 : \alpha = a : b \qquad (1)$$

ili

$$M = a/b \qquad (2)$$

U toj jednadžbi imamo tri veličine M, a i b, pa prema tome imamo i tri različite zadaće: treba naime naći jednu od tih veličina, ako su zadane druge dvije.

3. Zadatak. *U kojem je mjerilu crtana slika, ako pravoj veličini dužine* b *odgovara u slici dužina* a?

Rješenje: Ako je $a = 25$ milimetra, $b = 300$ metara, tad je prema jednadžbi (2) $M = a/b = 25/300000 = 1/12000$; dakle je slika crtana u mjerilu 1 : 12000, te svakom horizontalnom razmaku slike od 1 centimetra odgovara dužina od 12000 centimetara u naravi.

4. Zadatak. *Poznato je mjerilo M i horizontalna daljina* a *dviju točaka slike; kolika je daljina* b *tih točaka u naravi?*

Rješenje: Iz jednadžbe je (2) $b = a/M$. Razdijelimo li dakle daljinu točaka slike s mjerilom slike, tad se dobije prava daljina horizontalnog razmaka dviju produženih točaka u naravi.

Na pr. $M = 1 . 100$, $a = 5.5$ m.

$b = 5{,}5$ cm : $1/100 = 550$ cm ili 5,5 m.

1 cm toga mjerila predočuje 100 cm ili 1 m; 1 mm mjerila predočuje 1 dm.

5. Zadatak. *Poznato je mjerilo slike M i horizontalna udaljenost b dviju točaka u naravi, kolika je horizontalna udaljenost a tih točaka u slici?*

Iz jednadžbe (2) imamo $a = b \times M$

Pomnožimo li horizontalnu daljinu dviju točaka u naravi s mjerilom slike, dobit ćemo horizontalnu udaljenost tih točaka u umanjenoj slici.

Na pr. $M = 1:2500$, $b = 358$ cm;

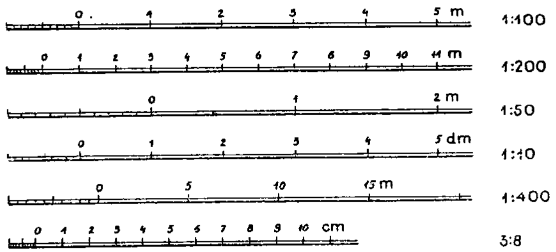
$a = 258/2500$ m $= 358000/2500$ mm $= 143{,}2$ mm $= 14{,}32$ cm.

5 metara predočeno je na t m mjerilu kao dužina od 2 cm. 1 metar na mjerilu 1 : 100, predočen je kao 1 cm.

6. Konstrukcija mjerila (grafička mjerila). *a) Konstrukcija mjerila 1 : 100.* (Slika 773.).

Prema gore izvedenome 1 centimetar mjerila 1 : 100 predočuje 1 metar u naravi, pa je 1 centimetar jedinica mjerila.

Mjerilo 1 : 100 konstruiramo ovako: Potegnemo pravac, i na njemu odaberemo točku, koju označimo znamenkom 0. Od te točke prenesemo



Sl. 773.

lijevo 1 centimetar, a desno povoljan broj puta po jedan centimetar (sl. 773.). Prvi dio, (lijevo od 0) razdijelimo na deset jednakih dijelova, to jest na milimetre, te svaki taj podrazdio, jedan milimetar, predočuje deseti dio jednoga metra ili jedan decimetar. U svim dijelištima potegnemo crtice, koje su okomite na pravcu: crtice su podrazdjela najkraće, samo je srednja nešto duža, da se jače istakne polovište.

b) Konstrukcija mjerila 1 : 200. Obzirom na točke 3, 4 i 5, jedan metar predočen je u mjerilu 1 : 200 kao 0,5 cm, te je ta dužina jedinica mjerila. Konstrukcija je mjerila ista kao pod a). Dijelovi podrazdjela dugi su po 0,5 mm, te svaki taj dio predočuje 1 dm (sl. 773.).

c) Konstrukcija mjerila 1 : 10. Prema točki 3, 4 i 5 jedan metar je predočen na mjerilu 1 : 10 kao dužina od 1 dm. Ta bi dužina bila prevelika za jedinicu mjerila, pa za tu jedinicu uzimamo dužinu, koja predočuje 10 cm, to jest dužinu od 1 cm. Deseti dio prvog dijela predočuje 1 centimetar.

U slici 773. prikazana su još mjerila 1 : 50, 1 : 400 i 3 : 8. Mjerila kakova su prikazana u slici 773. zovu se *linearna mjerila.*

O p a s k a. — Ima gotovih umanjenih mjerila u trgovini, koja su natiskana na vrpcama tanjeg kartona (lepezasto mjerilo) ili urezano u drvo (trobridno mjerilo) i t. d.

7. Upotreba mjerila. Treba li sa mjerila 1 : 100 prenijeti dužinu 4,7 m, tad se jedan vrh šestila ubode na mjerilu u djelište 4 m, te se šestilo otvori, dok igla lijevog kraka šestila ne dođe do sedmog djelišta podrazdjela. Tad smo u šestilo uzeli 4,7 cm, čemu u prirodi odgovara 4,7 m.

Treba li se sa mjerila 1 : 10 uzeti 53 cm, tad se igla desnog kraka šestila ubode na mjerilu u djelište, kojemu odgovara 5 dm, te se šestilo otvori, dok igla lijevog kraka padne u treće djelište lijevo od 0. Razmak vrhova igala šestila predočuje 53 cm.

Da saznamo koliku dužinu u prirodi predočuje neka dužina slike, uzmemo ovu dužinu u šestilo, pa desni vrh ubodemo u jedno djelište mjerila desno od 0 tako, da lijevi vrh presegne lijevo od 0, do jednog djelišta podrazdjela. Ako je desni vrh u djelištu, koji odgovara dužini od 5 m, a lijevi u četvrtom djelištu podrazdjela, tada dotična dužina u slici predočuje 5,4 m u naravi.

8. Zadatak. *Zadana je slika, koja je nacrtana u mjerilu 1 : 25, treba tu sliku povećati i nacrtati u mjerilu 1 : 15.*

Najprije konstruiramo mjerilo 1 : 15, a onda pomoću mjerila 1 : 15 izmjerimo dimenzije predmeta prema prvoj slici, pa te dužine, kad saznamo kolike su, uzimamo s mjerila 1 : 15 i unosimo u novu sliku.

9. Zadatak. *Zadana je slika nacrtana u mjerilu 1 : α te joj je visina a cm, neka se konstruira mjerilo 1 : β za novu sliku, kojoj je visina c cm.*

Ako visinama slike a i c odgovara prava veličina b, onda imamo razmjere:

Za prvu sliku	$1 : \alpha = a : b$
za drugu sliku:	$1 : \beta = c : b$. Dijeljenjem tih dvaju razmjera
dobije se:	$1 : \beta/\alpha = c/a : 1$
odatle je:	$\beta = a/c \cdot \alpha$

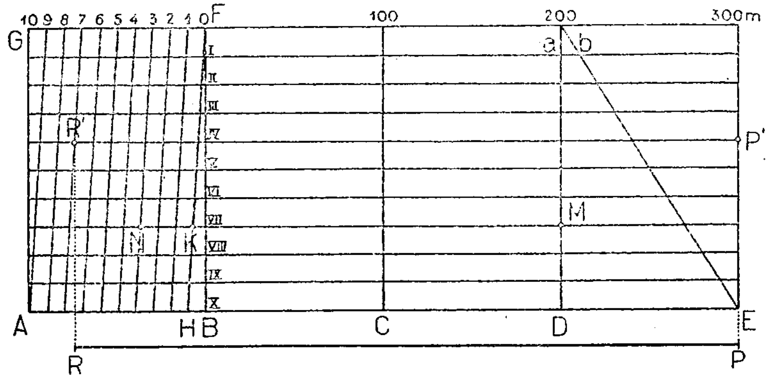
P r i m j e r: Ako je zadana slika crtana u mjerilu 1 : 40 te joj je visina 12,5 cm, pa je treba nacrtati tako, da joj visina bude 20 cm, tad je:

$$\beta = 12{,}5/20 \cdot 40 = 25.$$

10. Transverzalna mjerila. Osim linearnih mjerila ima također transverzalnih, koja su mnogo točnija od linearnih. Konstruirat ćemo transverzalno mjerilo za slučaj $M = 1:4000$.

100 metara prikaže se u mjerilu 1 : 4000 kao dužina od 25 mm. Nacrtajmo pravi kut GAE (slika 774.). Prenesimo na krak AG 10 povoljnih,

ali međusobno jednakih dužina, i djelištima povucimo usporednice s pravcem AE. Na pravac AE prenesimo pak dužine $AB = BC = CD = DE = \cdots = 25$ mm i točkama B, C, D, E potegnimo okomite transverzale. Druge krajnje točke tih transverzala označimo sa 0, 100, 200, 300, ... m, a usporednice označimo na transverzali BF s 0, I, II, III, ... X. Dužinu FG razdijelimo sada na deset jednakih dijelova i djelišta označimo s 0, 1, 2, 3, ... 10 (1/10 od FG dobijemo, ako nacrtamo transverzalu E — 200; tada je dužina (ab) na usporednici I jednaka 1/10 od DE, dakle $(ab) = 1/10\ FG$). Tim djelištima povucimo sada kose, međusobno usporedne transverzale tako, da je prva transverzala FH.



Sl. 774.

Ovako konstruirano mjerilo zove se *transverzalno mjerilo*. Transverzalna su mjerila obično urezana u ravnalo od mjedi.

Dužine AB, BC, CD.. mjerila predočuju dužine od 100 metara. Deseti dio dužine FG ili BA predočuje prema tome 10 metara. Dužine pak na usporednicama I, II, III, ... X između okomite transverzale FB i kose transverzale FH jednake su 1/100, 2/100, 3/100... dužine FG; one dakle predočuju dužine od 1, 2, 3.... 10 metara.

Želimo li imati mjerilo, pomoću kojega bismo htjeli mjeriti i polovine metra, onda bi morali na pravac AG prenijeti 20 jednakih dijelova, pa bi na usporednicama između transverzala FB i FH dobili dužine, koje predočuju 0,5, 1, 1,5, 2, ... m.

II. Upotreba transverzalnog mjerila.

a) **Zadatak.** *Neka se pomoću transverzalnog mjerila 1 : 4000 prenese u sliku dužina od 237 m.*

Umanjena dužina od 237 m nalazi se na mjerilu na usporednici 7. Krajnje su točke te dužine: M na okomitoj transverzali 3. Dužina naime M — VII predočuje 200 m, dužina KN 30 metara a dužina VII — K predočuje 7 metara. Prema tome MN predočuje dužinu od 237 metara.

b) **Zadatak.** *Neka se pomoću transverzalnog mjerila 1 : 4000 izmjeri daljina dviju točaka, koja je nacrtana u tom mjerilu.*

Uzmimo dužinu PR u šestar i prislonimo igle krakova šestara na krajnju usporednicu E — 300 mjerila, tako da desna igla padne u jednu okomitu transverzalu, i lijeva igla da se prenese preko transverzale FB između F i G. Pomičemo li sad šestar od usporednice do usporednice tako, da se desna igla skliže po okomitoj transverzali, dok lijeva igla ne padne u sjecište usporednice s nekom kosom transverzalom, na pr. u sjecište usporednice IV. s kosom transverzalom 7, onda na toj usporednici možemo pročitati daljinu točaka P i R, t. j. $PR = P'R' = 374$ m.

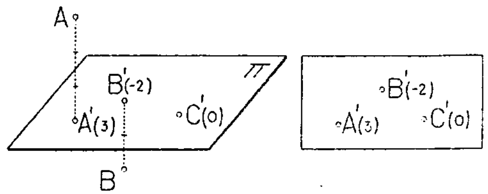
§ 225. Kotirana projekcija točke

1. Projiciranje točke. Već smo u uvodu rekli, da je položaj točke T u prostoru potpuno određen, kad je poznata njezina ortogonalna projekcija T' na ravnini Π i njezina daljina od te ravnine.

Projekcija točke, kojoj je zadana kota, zove se *kotirana projekcija točke*.

Kota točke može biti pozitivna ili negativna prema tome, da li se nalazi povrh (točka A na sl. 775.) ili ispod (točke B na sl. 775.) ravnine Π.

Negativnim kotama dodaje se predznak —, dok se za pozitivne kote predznak + izostavlja. Točka C leži u ravnini Π te joj je kota 0.



Sl. 775.

Kad je čitav objekat, koji se slikom predočuje, ispod ravnine Π, onda se sve kote označuje kao pozitivne (ispušta se predznak —), no u tome slučaju veći broj označuje veću dubinu (na pr. morske dubine).

Leži li u istoj okomici s obzirom na ravninu Π više točaka, tad se kraj zajedničke projekcije mora za svaku tu točku napisati kota.

§ 226. Kotirana projekcija pravca

1. Određenost pravca. Pravac je u prostoru određen s dvije točke A i B. Prema tome pravac je potpuno određen, kad su mu zadane projekcije i kote dviju njegovih točaka A i B (slika 776.).

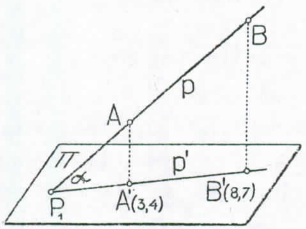
Daljina $h = A'B'$ horizontalnih projekcija dviju točaka zove se horizontalni razmak tih točaka, a razlika $v = BB' - AA'$ između kota zove se *vertikalni razmak* ili *visinska razlika* tih točaka.

*

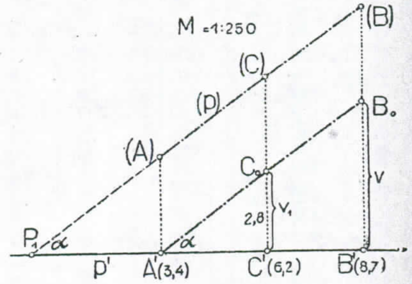
2. Prava veličina dužine AB. [A (3,4), B (8,7)].

a) Grafičko rješenje. Lik $ABB'A'$ (sl. 776.) jest trapez, u kojemu su kod A' i B' pravi kutovi. Prevalimo li taj trapez oko projekcije $A'B'$ u ravninu Π u položaj $A'B'$ $(B)(A)$ (sl. 777.), prenesavši s mjerila slike $A'(A) = 3{,}4$ i $B'(B) = 8{,}7$, onda se prava veličina AB dobije, kad se na mjerilu izmjeri dužina $(A)(B)$. Tako smo našli, da je $AB = 8{,}94$ m. (M = 1 : 250).

Ako su kote točaka A i B preveliki brojevi, pao bi (A) i (B) nakon prevaljivanja trapeza predaleko, eventualno i izvan crtežne plohe, pa možemo pravu veličinu dobiti i na slijedeći način: Položimo li točkom A



Sl. 776.



Sl. 777.

$\Pi_1 \parallel \Pi$ pa tu ravninu smatramo ravninom projekcija, onda je A' u A, pa je lik $A'B'B$ pravokutan trokut, u kojemu je kateta BB' jednaka visinskoj razlici točaka A i B, dakle 8,7 m — 3,4 m = 5,3 m. Prevalimo li spomenuti trokut u ravninu Π_1 prenesavši s mjerila $B^0B' = 5{,}3$ m, tad je $A'B_0 = (A)(B)$, dakle $A'B^0$ mjereno na mjerilu daje pravu veličinu dužine AB.

b) Numeričko rješenje. Iz posljednjeg je pravokutnog trokuta $A'B'B$:

$$\overline{AB}^2 = h^2 + v^2,$$

gdje je h horizontalni, a v vertikalni razmak točaka A i B. Budući da je

$$h = A'B' = 7{,}2 \text{ m}, \text{ a } v = 8{,}7 \text{ m} - 3{,}4 \text{ m} = 5{,}3 \text{ m, to je:}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{7{,}2}^2 + \overline{5{,}3}^2 = 51{,}84 + 28{,}09 = 79{,}93, \text{ a odatle je:}$$

$$AB = 8{,}94 \text{ m}.$$

3. Prava veličina priklonog kuta pravca. Kut α koga pravac (p) čini s p', jednak je priklonom kutu pravca p prema ravnini Π. Taj se kut može odrediti prevaljivanjem grafički, a može se izračunati iz pravokutnog trokuta $A'B'B^0$ pomoću formule: $tg\,\alpha = v/h = 53/72$. Odatle je: $\alpha = 36^0 21'27{,}9''$.

4. Umetanje točaka. 1. Zadatak. *Zadan je pravac s kotiranim projekcijama dviju točaka* A(3,4) *i* B(8,7) *i projekcija* C' *točke* C, *koja je na tom pravcu, neka se odredi kota točke* C!

a) Grafičko rješenje. Preložimo li trapez prometač $ABB'A'$ oko $A'B'$ u ravninu Π, pa u C' postavimo okomicu na $A'B'$, dobit ćemo na $(A)(B)$ preloženu točku (C). Izmjerimo li na mjerilu $C'(C)$, pa nađemo da je ta dužina jednaka 6,2 m, taj je broj kota točke C.

Položimo li pak ravninu projekcija Π_1 točkom A, tad trokut prometač dođe nakon prevaljivanja u položaj $A'B'B_0$, dok C dođe u C_0 (sl. 777.). $C'C_0$ je visinska razlika točaka C i A, pa ćemo kotu točke C dobiti, ako koti točke A pribrojimo visinsku razliku $C'C_0$. Označimo li sa a kotu točke A, sa c kotu točke C, a sa v_1 visinsku razliku točaka A i C, to je:

$$c = a + v_1.$$

Izmjerimo li $C'C_0 = v_1$ na mjerilu slike te je $v_1 = 2{,}8$ m, onda je kota točke C: $c = 3{,}4 \text{ m} + 2{,}8 \text{ m} = 6{,}2$ m.

b) Numeričko rješenje. Budući da su trokuti $A'B'B_0$ i $A'C'C_0$ slični, imamo razmjer:

$$A'B' : A'C' = B'B_0 : C'C_0$$

odakle je

$$C'C_0 = \frac{A'C'}{A'B'} \cdot B'B_0$$

Budući da je: $C'C_0 = c - a$, $B'B_0 = b - a$, to je

$$c = a + \frac{A'C'}{A'B'} \cdot (b - a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

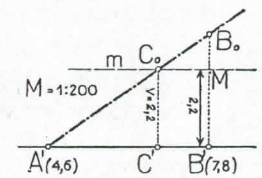
Pošto je $A'B' = 7{,}2$, $A'C' = 4$, $b - a = 8{,}7 - 3{,}4 = 4{,}3$, to je:

$$c = 3{,}4 + \frac{4}{7{,}2} = 3{,}4 + 2{,}8 = 6{,}2.$$

Iz jednadžbe (1) vidimo, da je $\frac{A'C'}{A'B'} \cdot (b - a)$ jednako visinskoj razlici između točaka C i A.

2. Zadatak. *Zadan je pravac kotiranim točkama A i B, odredi projekciju točke C, koja leži u tom pravcu, te joj je zadana kota $c = 6{,}8$!* (Sl. 778.).

a) Grafičko rješenje. Ravninu projekcija položimo točkom A i prevalimo pravokutan trokut $A'B'B$ u ravninu slike u položaj $A'B'B_0$ (sl. 778.). Budući da je visinska razlika između točaka B i A jednaka 3,2, to je $B'B = 3{,}2$ m mjereno na mjerilu crtnje 1 : 200.



Sl. 778.

Distancija kote C od ravnine slike jednaka je visinskoj razlici v_1 između točaka C i A, dakle

$$v_1 = 6{,}8 - 4{,}6 = 2{,}2.$$

Da odredimo C', moramo najprije na $A'B_0$ naći C_0 tako, da njegova daljina od $A'B'$ bude jednaka $v_1 = 2{,}2$ m: moramo dakle između krakova kuta $B'A'B_0$ umetnuti dužinu C_0C', koja je jednaka 2,2 ili općenito $(c-a)$ i okomita na kraku $A'B'$. U tu svrhu prenijet ćemo na $B'B_0$ dužinu $B'M = v_1 = c - a = 2{,}2$, potegnut ćemo točkom M usporednicu m sa $A'B'$, pa će ona sjeći $A'B_0$ u točki C_0. Spustimo li s C_0 okomicu na $A'B'$, dobijemo traženu projekciju C'.

b) Numeričko rješenje. Iz sličnosti trokuta $A'B'B_0$ i $A'C'C_0$ imamo:

$$A'C' : A'B' = C'C_0 : B'B_0, \text{ odakle je}$$

$$A'C' = \frac{C'C_0}{B'B_0} \cdot A'B'.$$

Budući da je: $C'C_0 = c - a$, $B'B_0 = b - a$, to je:

$$A'C' = \frac{c-a}{b-a} \cdot A'B'.$$

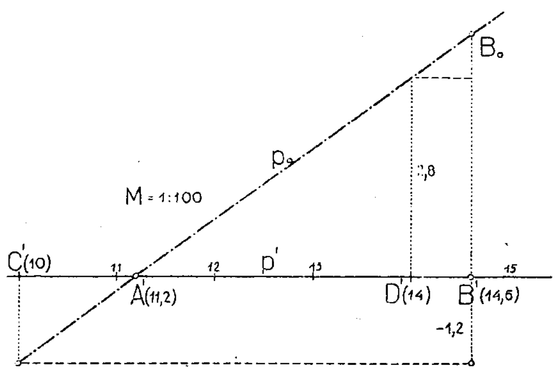
Za naš slučaj $c - a = 2{,}2$, $b - a = 3{,}2$, $AB = 4{,}6$, pa je:

$$A'C' = \frac{2{,}2}{3{,}2} \cdot 4{,}58 = 3{,}1.$$

Uzmemo li prema tome s mjerila dužinu 3,1 te je od A' prenesemo na $A'B'$, dobijemo traženu točku C'.

Opaska. Za $c \gtrless a$ je $c - a \gtrless 0$, pa je točka u prvom slučaju povrh, a u drugom ispod ravnine slike.

5. Graduiranje pravca. Odredimo li projekcije onih točaka zadanoga pravca, kojima su kote cijeli brojevi, onda kažemo, da smo pravac graduirali (graduirani pravac).



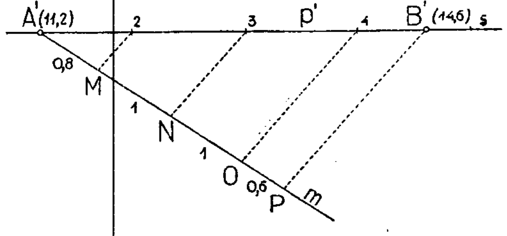
Sl. 779.

Ako je pravac zadan s dvije točke $A(11{,}2)$ i $B(14{,}6)$ projicirajmo ga na ravninu Π_1, koja ide točkom A, te ga oko projekcije prevalimo u Π_1 $(B'B_0 = 14{,}6 - 11{,}2 = 3{,}4)$. (Sl. 779.). (M = 1 : 100).

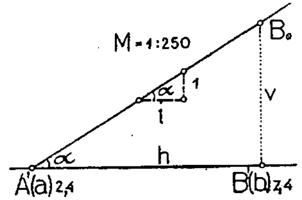
Da nađemo projekcije točaka, koje imaju cijele kote, postupamo kao u sl. 778. kad smo tražili projekciju točke C.

Nađemo li na taj način tlocrte točaka C i D, kojima su kote na pr. 10 i 14, pa $C'D'$ razdijelimo na četiri jednaka dijela, dobili smo time tlocrte točaka, kojima su kote 11, 12, 13. Točke naime, kojima su cijele kote, dijele pravac na jednake dijelove, pa su i projekcije tih dijelova jednake.

Pravac možemo graduirati i na slijedeći način:



Sl. 780.

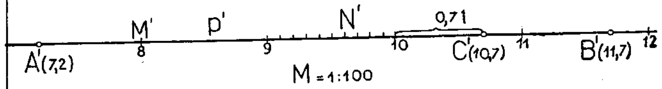


Sl. 781.

Točkom A' (sl. 780) potegnimo pravac m u kojem god smjeru i prenesimo na nj s bilo kojega mjerila broj, koji naznačuju visinsku razliku između svakih dviju susjednih točaka, kojima su kote 11,2, 12, 13, 14, 14,6 dakle 0,8, 1, 1, 0,6. Na taj smo način dobili na pravcu m točke M, N, O, P. Spojimo li P sa B' i ostalim točkama M, N, O potegnemo usporednice prema pravcu PB', one nam na $A'B'$ daju točke, kojima su kote 12, 13, 14.

6. Mjerilo nagiba pravca. Interval. Graduirani pravac nazivamo *mjerilom nagiba* toga pravca. Jedinica se toga mjerila zove *interval* i označuje se slovom i. Interval je jednak horizontalnom razmaku dviju točaka pravca, kojima visinska razlika iznosi jedinicu mjerila (sl. 781.).

Što je veći prikloni kut pravca prema ravnini slike Π, to je manji interval. Za okomite je pravce $i = 0$, za horizontalne je $i = \infty$, a za pravce je, koji su prema Π nagnuti za 45^0, $i = 1$. Svi pravci, koji imaju jednake



Sl. 782.

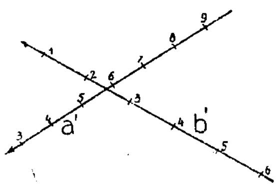
priklone, imaju jednake intervale. Uopće je $i \gtreqless 1$ za prikloni kut $\alpha \lesseqgtr 45^0$. Razdijelimo li jedinicu mjerila nagiba pravca na 10 jednakih dijelova (slika 782), tad pomoću toga mjerila možemo odmah saznati kotu svake točke, kojoj je poznata projekcija, ili projekciju, kojoj je poznata kota.

Jednaki dijelovi usporednih pravaca imaju jednake visinske razlike, pa će točka P biti za 4,7 viša od točke T, te je prema tome kota točke P jednaka $11{,}8 + 4{,}7 = 16.5$.

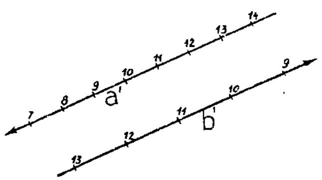
2. Ukršteni pravci. I. — Ukršteni se pravci sijeku u jednoj točki S. Projekcije tih pravaca jesu uopće ukršteni pravci, koji idu projekcijom S' sjecišta S. Da odredimo, da li se dva zadana pravca sijeku, tražimo kotu sjecišta obzirom na jedan i drugi pravac, pa ako dobijemo istu kotu, ti se pravci sijeku. Dobijemo li različite kote, pravci su u prostoru mimosmjerni.

II. — Da li se dva zadana pravca sijeku možemo odrediti na slijedeći način: Spojimo li pravcima dva para jednako kotiranih točaka A, C i B, D (sl. 785.). pravaca a i b, pa su ta dva pravca među sobom usporedna, dakle i $A'C' \parallel B'D'$, tada ta dva pravca, a po tome i zadani pravci leže u istoj ravnini, pa se dakle sijeku.

3. Mimosmjerni pravci. Projekcije su dvaju mimosmjernih pravaca ili dva ukrštena pravca ili dva usporedna pravca (sl. 786. i 787.). Spojimo li dva para jednako kotiranih točaka A. B i C, D dvaju pravaca a i b, pa su pravci AB i CD mimosmjerni, onda su i pravci a i b mimosmjerni.



Sl. 786.



Sl. 787.

§ 228. Ravnina u kotiranoj projekciji

1. Predočivanje ravnine. Budući da je ravnina određena:

1. s dva ukrštena pravca,
2. s dva usporedna pravca,
3. pravcem i točkom izvan toga pravca,
4. s tri točke, koje nisu u istom pravcu,

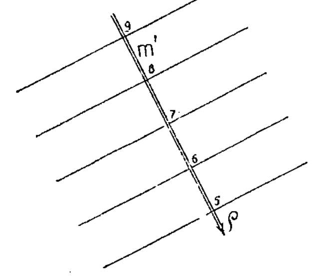
to se ravnina može predočiti tim elementima. No u kotiranoj projekciji ravninu ne predočujemo obično ni jednim od gornja četiri načina, već je predočujemo drugim karakterističnim elementima te ravnine.

2. Slojnice. Horizontalne ravnine (slojnične ili visinske ravnine) sijeku zadanu ravninu ρ u pravcima, koji su među sobom usporedni, pa su im i projekcije međusobno usporedni pravci. Ti su pravci horizontalni, pa se zovu *horizontale* ili *slojnice* ili *nivo-linije* ravnine ρ. Slojnice, kojima pripadaju cijele kote, zovu se *glavne slojnice*. (Sl. 788.).

Budući da su pruge između svakih dviju susjednih glavnih slojnica jednake širine, to je i razmak projekcija tih slojnica za istu ravninu konstantan.

Ravnina je potpuno određena s dvije kotirane slojnice.

3. Priklonice. Priklonice ravnine ρ okomite su na slojnicama te su im projekcije okomite na projekcijama slojnica. Glavne slojnice sijeku priklonice u točkama, kojima pripadaju cijele kote, pa te slojnice graduiraju priklonice.



Sl. 788.

Graduiranom je priklonicom ravnina potpuno određena, jer ona daje kote svih slojnica ravnine, koje su okomite na priklonici. Graduirana slika m' priklonice zove se *mjerilo nagiba* ravnine.

Takova se mjerila označuju sa dva bliza međusobom usporedna pravca, te se strelicom na jednom od tih pravaca označuje smjer pada ravnine, pa se taj pravac smatra pravom priklonicom.

4. Horizontalna ravnina je određena svojom kotom.

Vertikalna je ravnina određena svojim tragom na kojoj god horizontalnoj ravnini. Slojnice se vertikalne ravnine projiciraju na isti pravac (u trag ravnine), pa se mjerilo nagiba reducira na točku.

5. Prikloni kut i nagib ravnine. Prikloni kut ω priklonice ravnine ujedno je prikloni kut te ravnine. Trigonometrijska tangenta priklonog kuta zadane ravnine zove se nagib te ravnine. Nagib je ravnine jednak nagibu priklonice.

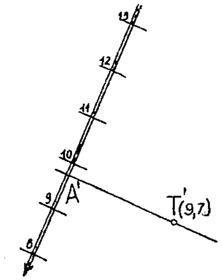
Nagib se ravnine obično izražava razlomkom; na pr.: n — 2/3, 3/4, 4/5, 1/2,..... ili oblikom 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5, 1 : 2,..... ili 1 : 3/2, 1 : 4/3, 1 : 5/4.....

Ako je i jedinica mjerila nagiba ravnine, tad je $n = 1/i$ nagib ravnine.

§ 229. Točka i ravnina

1. Zadatak. *Zadana je ravnina* ρ *mjerilom nagiba, zatim projekcija* T' *točke* T, *koja je u ravnini* ρ; *neka se odredi kota točke* T! (Sl. 789.).

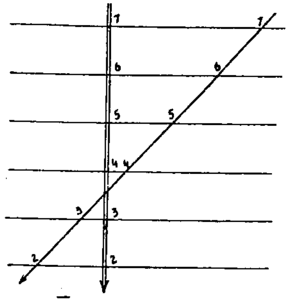
Točka je u ravnini, kad se nalazi u jednoj slojnici te ravnine. Budući da su projekcije slojnica okomite na mjerilu nagiba m', povući ćemo točkom T' okomicu na m', to jest projekciju slojnice, koja ide točkom T. Taj pravac siječe mjerilo nagiba u točki A';



Sl. 789.

kota, koja pripada točki A, pripada i točki T. Tu je kotu lako naći, jer je poznat interval mjerila.

2. Ako je zadana kota točke T, pa treba istražiti leži li ta točka u zadanoj ravnini, onda se projekcija te točke smatra projekcijom one točke A slojnice, koja je u ravnini, te se traži kota te točke. Podudara li se nađena kota sa kotom zadane točke, tad je ta točka u ravnini, dok je u protivnom slučaju izvan ravnine. Točka je T povrh ili ispod ravnine prema tome, da li je kota točke T veća ili manja od kote točke A.



Sl. 790.

§ 230. Pravac i ravnina

1. U ravnini imademo tri vrste pravca, i to:
1. pravce koji su horizontalni, to jest slojnice,
2. pravce koji su okomiti na slojnicama, to jest priklonice i
3. pravce koji su nagnuti prema slojnicama.

Kad je pravac p u ravnini, tad glavne slojnice te ravnine sijeku taj pravac u točkama, kojima pripadaju cijele kote, pa prema tome glavne slojnice ravnine graduiraju pravac p. Tim graduiranjem već je pravac p određen (sl. 790.).

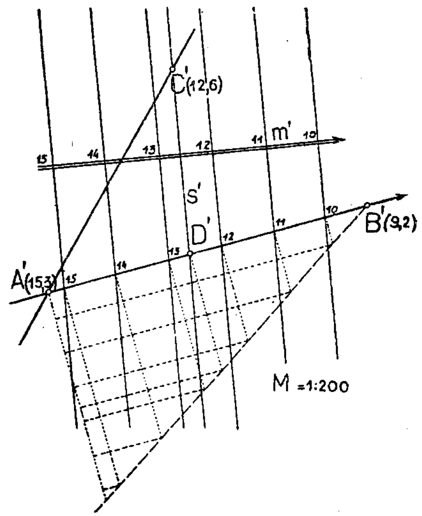
§ 231. Zadaci

1. *Zadanim pravcem neka se položi ravnina i konstruira mjerilo nagiba te ravnine!*

Ako je pravac zadan sa dvije točke, tad treba graduirati, te točkama, kojima pripadaju cijele kote, povući usporedno pravce u kojem god smjeru. Smatramo li te pravce slojnicama ravnine, tad je njima jedna ravnina predočena i određena.

Mjerilo je nagiba te ravnine okomito na slojnicama, te je ono s glavnim slojnicama graduirano.

2. *Zadana su dva ukrštena pravca; neka se tim pravcima položi ravnina i konstruira mjerilo nagiba!*



Sl. 791.

Kad su dva pravca u ravnini, onda ih glavne slojnice te ravnine graduiraju. Spojimo li prema tome jednako kotirane točke obih zadanih pra-

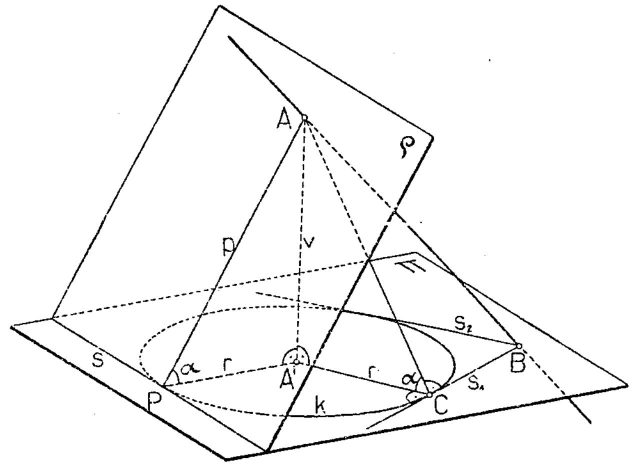
vaca, to su ti pravci među sobom usporedni, te su oni glavne slojnice tražene ravnine.

Mjerilo je nagiba na slojnici okomito i njima graduirano.

3. *Trima zadanim točkama* $A\,(15{,}3)$, $B\,(9{,}2)$, $C\,(12{,}6)$ *neka se položi ravnina i konstruira mjerilo nagiba!* (Sl. 791.).

Spojimo pravcima točke A', B', C', te graduiramo pravac $A'B'$ i na pravcu $A'B'$ neka se nađe točka D', kojoj je kota 12,6. Spojimo li točke C' i D' imamo jednu slojnicu s ravnine; mjerilo je nagiba m' na tu slojnicu okomito.

Pravci potegnuti točkama spojnice $A'B'$, koje imaju cijele kote, usporedno sa s, jesu glavne slojnice ravnine trokuta ABC te one graduiraju mjerilo m'.



Sl. 792.

4. *Kroz dvije točke* $A(9{,}4)$ i $B\,(3{,}7)$ *položi ravninu, kojoj je nagib* $n = 1{,}8!$ (Sl. 792. i 793.). (M = 1 : 200).

Točkom B položimo slojničnu ravninu Π, a točkom A položimo koju god ravninu ρ, koja s ravninom Π čini kut α. Presječnica s tih dviju ravnina jest slojnica ravnine ρ. Povucimo u toj ravnini priklonicu $AP \equiv p$ i nacrtajmo njezinu projekciju $A'P$. Ako se ravnina ρ okreće oko pravca AA', tako da s ravninom Π sveudilj čini kut α, priklonica p ostat će priklonicom, a slojnica s slojnicom ravnine za svaki položaj, u koji dođe ravnina ρ okretanjem oko pravca AA'. Točka P opiše kružnicu k, koja je u ravnini Π, te kojoj je središte točka A', a polumjer $A'P$. Taj polumjer ostaje okomit na slojnici s i za vrijeme okretanja, odakle zaključujemo, da će slojnica s doticati kružnicu k za svaki položaj ravnine ρ, u koji dođe okretanjem oko AA'.

Okrećemo li ravninu ρ oko AA', dok ne dođe u točku B, onda slojnica s mora ići točkom B i mora doticati kružnicu k. Prema tome tražena je ravnina određena točkom A (ili pravcem AB) i pravcem, koji ide točkom B i koji dotiče kružnicu k. Budući da se s točke B mogu na kružnicu k povući dvije tangente s_1 i s_2, zadatak ima dva rješenja, t. j. pravcem AB mogu se položiti dvije ravnine, kojima je zadan nagib n ili prikloni kut α.

Sada se radi o tome, da se nacrta kružnica k. Polumjer te kružnice može se izračunati iz pravokutnog trokuta $AA'P$ (sl. 792.). Stavimo li da je $A'P = r$, $AA' = v$, $\sphericalangle A'PA = \alpha$, onda je:

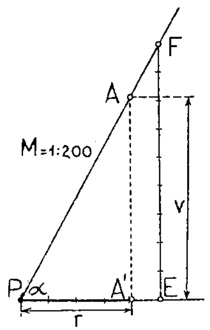
$$r = v \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{v}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \text{ili} \quad r = \frac{v}{n}.$$

U našem je zadatku $v = 9{,}4 - 3{,}7$, $n = 1{,}8 = 9/5$, pa je prema tome

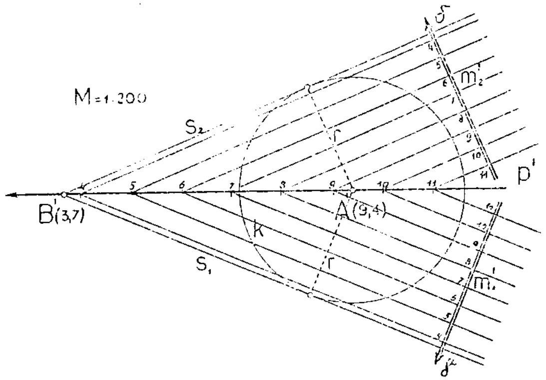
$$r = 5{,}7 : \frac{9}{5} = 3{,}17.$$

Polumjer r može se i konstruirati. Budući da je $\operatorname{tg} \alpha = 9/5$, tad se kut α može konstruirati. Iz sl. 792.a) vidi se, kako se konstruira taj kut i polumjer $A'P = r$.

Pošto smo našli polumjer r, opišemo njim oko A' kružnicu k (sl 793.), te s točke B povučemo tangente s_1 i s_2 na tu kružnicu. Te su tangente



Sl. 792.a)



Sl. 793.

slojnice traženih ravnina γ i δ. Mjerila su nagiba m'_1 i m'_2 tih ravnina okomita na tim slojnicama. Graduiramo li pravac AB, i točkama koje imaju cijele kote povučemo usporednice sa s_1 odnosno s_2, one su slojnice ravnina γ i δ, te graduiraju mjerila m'_1 i m'_2.

Horizontalni je razmak točaka A i B $h = 8{,}2$, a vertikalni razmak $v = 5{,}7$, pa je interval pravca AB:

$$i = h/v = 8{,}2/5 = 1{,}44.$$

Interval je mjerila nagiba m'_1 i m'_2:

$$i = 1/n = 1/1{,}8 = 5/9.$$

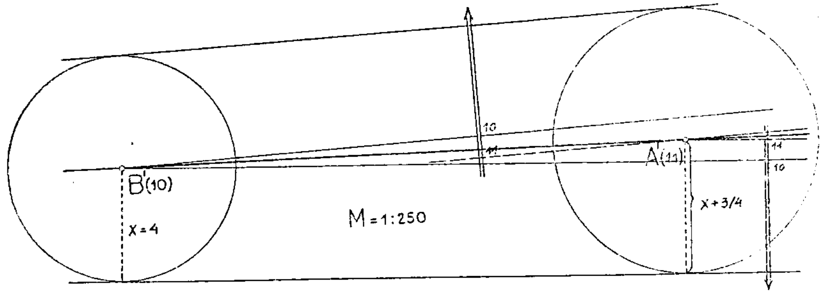
Kad je točka B izvan kružnice k, tad imamo dva realna rješenja, kad je B na kružnici k imamo jedno realno rješenje, a kad je B unutar kružnice, tad nema nikakovog rješenja (dva konjugirano-imaginarna rješenja).

U prvom je slučaju nagib n ravnine veći od nagiba pravca AB, u drugom slučaju su ti nagibi jednaki, a u trećem slučaju je nagib ravnine manji od nagiba pravca AB.

Umjesto točke A' može se uzeti i koja druga točka pravca $A'B'$ kao središte kružnice k, a i za ravninu Π može se uzeti kojagod slojnična ravnina. Visina v i polumjer r neće biti jednake veličine kao prije.

Bilješka. I. — Ovaj se zadatak kod praktičnih zadataka često upotrebljava. II. Kad se ravnina ρ okreće oko pravca AA', pravokutan trokut $AA'P$ opiše rotacioni stožac, i to kateta $A'P$ opiše osnovku, a hipotenuza AP plašt stošca. Točka A je vrh stošca, a ravnine ρ, γ i δ dotiču taj stožac.

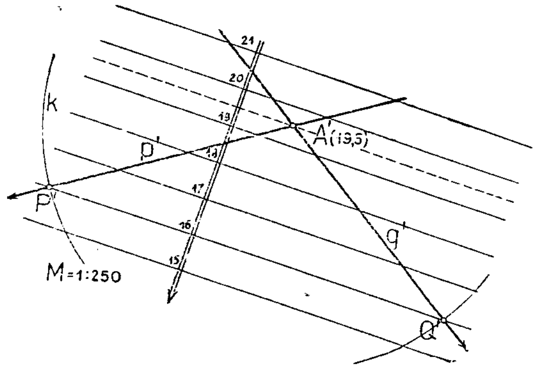
5. Treba li ravninu položiti pravcem p, koji ima malen nagib, na pr. $1 : 20$, i to ravninu, kojoj je nagib $n = 4 : 3$, onda je polumjer k



Sl. 794.

malen, pa se postupa na sljedeći način: Interval je zadanog pravca $i = 20$. Ako je slika crtana u mjerilu $1 : 250$, to je jedinica mjerila nagiba pravca jednaka 8 cm. Horizontalni je dakle razmak dviju susjednih točaka A i B pravca p jednak 8 cm, dakle dosta velika dužina. Uzmemo li, da je visina $v = 1$, tada je polumjer $r = 1 \cdot 3/4 = 3/4$. U mjerilu $1 : 250$ taj je polumjer jednak 3 milimetra, dakle dosta malen, pa se konstrukcija ne može izvesti dovoljnom točnošću. Da crtnja bude točnija, opišemo oko točke B' kružnicu s polumjerom $x = 4$, a oko A' kružnicu s polumjerom $x + v/n = 4 + 3/4$. (Sl. 794.). Potegnemo li na te kružnice zajedničke izvanje tangente, a onda točkom B pravce usporedno s tim tangentama, ti su pravci slojnice dviju traženih ravnina.

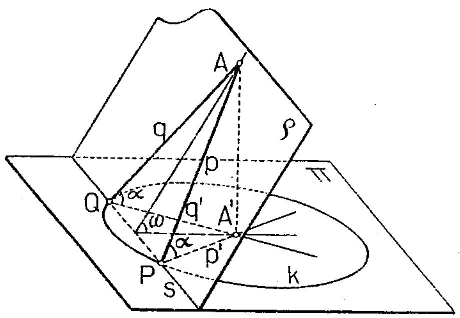
6. U zadanoj ravnini ρ uzmi točku A i kroz nju položi pravac zadanog nagiba n. U sl. 795. a) zadana je ravnina Π i ravnina ρ i u toj ravnini točka A. U ravnini ρ povučen je točkom A pravac $p \equiv AP$, čiji je nagib n ($= \operatorname{tg}\alpha$). Radi se o tom, da se na slojnici s odredi točku P. Dužina $A'P$ naznačuje udaljenost točke P od točke A'. Budući da je trokut



Sl. 795.

$AA'P$ pravokutan, iz tog trokuta $A'P = AA' \cdot \operatorname{ctg}\alpha = AA'/\operatorname{tg}\alpha$, ili $r = v/n$, gdje je $A'P = r$, $AA' = v$, $\operatorname{tg}\alpha = n$.

Izračunamo li, ili konstruiramo li, dužinu r i njom opišemo oko točke A' kružnicu k, ona siječe slojnicu s u točkama P i Q, pa su $AP \equiv p$ i $AQ \equiv q$ traženi pravci.



Sl. 795. *a)*

Zadatak ima dva realna rješenja ili dva realna rješenja, koja padaju zajedno, ili dva konjugirano-imaginarna rješenja prema tome, da li je nagib traženog pravca manji od nagiba ravnine ρ, da li je jednak tome nagibu

ili je od njega veći (to jest siječe li kružnica k slojnicu s, ili je dotiče, ili je ne siječe i ne dotiče).

U sl. 795. ravnina je ρ zadana mjerilom nagiba, točka A svojom projekcijom A' i kotom, dok je $n = 2/5$.

Uzmemo li da je točka A na slojnici, čija je kota 19,5 i da slojnična ravnina Π ima kotu 16. Tada je $v = 19{,}5 - 16 = 3{,}5$, $r = v/n = 3{,}5 : 2/5 = 8{,}75$. Opišemo li oko A' kružnicu k s polumjerom 8,75 (u mjerilu 1 : 250) ona siječe slojnicu 16 u točkama P' i Q', pa su $A'P'$ i $A'Q'$ projekcije traženih pravaca p i q.

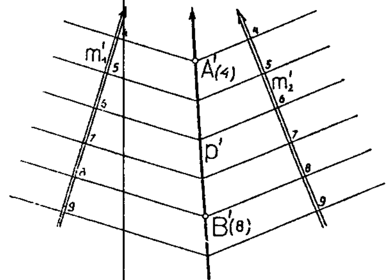
Kad se točno nacrta, interval je obaju pravaca $i = 5/2 = 2{,}5$.

§ 232. Dvije ravnine

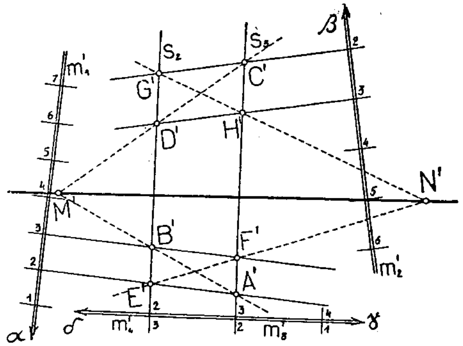
1. Usporedne ravnine. Dvije usporedne ravnine sijeku svaku horizontalnu ravninu u dva usporedna pravca, pa su prema tome slojnice dviju usporednih ravnina među sobom usporedne. Budući da usporedne ravnine imaju jednake priklone kutove, to su im i priklonice usporedne, dakle su usporedna i mjerila nagiba tih ravnina, koja prema tome imaju jednake intervale, te su graduirana u istom smislu (sl. 796.).

Sl. 796.

2. Presjek dviju ravnina. Obje su ravnine zadane mjerilima nagiba m_1 i m_2 (sl. 797.). Svaka horizontalna ravnina siječe svaku od zadanih ravnina u jednoj slojnici te ravnine. Obje se te slojnice sijeku u jednoj točki A koja pripada presječnici zadanih dviju ravnina.



Sl. 797.



Sl. 798.

Prema tome točke, u kojima se sijeku jednako kotirane slojnice zadanih ravnina, pripadaju presječnici p tih ravnina. Dosta je da nađemo dvije točke presječnice. Na pr. slojnice 4 sijeku se u A', a slojnice 8 u točki

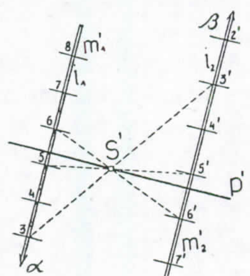
B', pravac $A'B'$ je projekcija tražene presječnice. Ostale slojnice jedne ili druge ravnine graduiraju presječnicu.

3. Sijeku li se jednako kotirane slojnice predaleko ili su ta sjecišta, zbog toga, što se te slojnice sijeku pod malenim kutem, nepouzdana, tad se obje zadane ravnine sijeku sa zgodno odabranim pomoćnim ravninama, da dobijemo točke presječnice zadanih ravnina (sl. 798).

Ravnine α i γ sijeku se u pravcu AB, a ravnine β i γ u pravcu CD. Ravnine se α i δ sijeku u pravcu EF, a ravnine β i δ u pravcu GH. Pravci se AB i CD sijeku u točki M, a pravci EF i GH u točki N; pravac $M'N'$ je projekcija presječnice zadanih ravnina α i β.

Opaska. — Mjerilo nagiba m'_3 i m'_4 pomoćnih ravnina γ i δ ne treba ni crtati, dosta je da se nacrta par usporednih pravaca s_1, s_2, koje smatramo slojnicama pomoćnih ravnina γ i δ. Ti se pravci mogu potegnuti u kojem god smjeru.

4. Neka se odredi presjek dviju ravnina, kojima su mjerila nagiba usporedna, dakle su i slojnice tih ravnina među sobom usporedne. Jednako kotirane slojnice tih ravnina sijeku se neizmjerno daleko. Odatle slijedi, da će presječnica zadanih ravnina biti usporedna sa slojnicama, dakle okomita na mjerilu, te je ona zajednička slojnica ravnina α i β.


Sl. 779.

Budući da je poznat smjer presječnice, ona će biti posve određena, ako joj je poznata još jedna točka. Tu ćemo točku dobiti, ako siječemo obje zadane ravnine pomoćnom ravninom, koja nije ni horizontalna ni vertikalna, kao u t. 3. Presječnice zadanih ravnina s pomoćnom ravninom sijeku se u istoj točki, kojom ide tražena presječnica okomito na mjerilo nagiba.

Odredimo li kotu točke, u kojoj presječnica siječe jedno ili drugo mjerilo nagiba, taj je broj ujedno i kota presječnice.

5. Isti ćemo zadatak brže riješiti na slijedeći način: (sl. 799.). Spojimo li jednako kotirane točke jednog i drugog mjerila, na pr. 3,3' i 6.6', oba se pravca sijeku u točki S'. Zbog sličnosti trokuta $S'36$ i $S'3'6'$ imamo razmjer:

$$3S' : 3'S' = 6S' : 6'S' = 36 : 3'6' = 3\,i_1 : 3\,i_2 = i_1 : i_2,$$

to jest točka S' dijeli sastavnice 3-3' i 6-6' u omjeru $i_1 : i_2$.

Siječe li pravac 5-5' pravac 3-3' u točki S_1', to su trokuti $S_1'33'$ i $S_1'55'$ slični, pa dobijemo da se:

$$3\,S_1' : 3'S_1' = 4\,S_1' : 4'S_1' = i_1 : i_2.$$

Vidimo dakle, da se točke S' i S_1' podudaraju, to jest sve sastavnice jednako kotiranih točaka mjerila idu istom točkom S'. Kroz tu točku mora

dakle ići i projekcija presječnice zadanih ravnina. Kad mjerila nagiba imadu isti smjer, točka S' padne izvan pruge, koju čine oba mjerila m_1' i m_2'.

Bilješka. Horizontalni pravci 33', 44', 55', ... jesu mimosmjerni te imadu zajedničku transverzalu, koja je okomita na ravnini slike, te joj je projekcija točka S'. Spomenuti su horizontalni pravci izvodnice plohe, koja se zove *hiperbolički paraboloid.*

6. Presjek ravnine α slojničnom ravninom jest slojnica ravnine α. Projekcija presjeka ravnine α s ravninom prometalicom, to jest s vertikalnom ravninom, jest u tragu te ravnine, jer se i sve slojnice te ravnine projiciraju u njen trag. Slojnice ravnine α graduiraju presječnicu.

§ 233. Presjek pravca ravninom

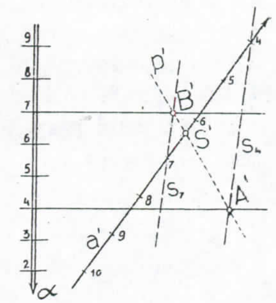
1. Zadatak. *Ravnina i pravac zadani su mjerilom nagiba; neka se odredi presjek pravca s ravninom!* (Sl. 800.).

Rješenje: Ravnina α siječe pravac a u točki S. Da dobijemo to sjecište, položit ćemo pravcem a pomoćnu ravninu i presjeći ćemo njome zadanu ravninu u pravcu p. Presječnica p siječe zadani pravac a u traženom sjecištu S (Usporedi § 40., sl. 183.).

Od pomoćne ravnine potegnuli smo slojnice s_4 i s_7 (sl. 800.); one sijeku istoimene slojnice $r4$ i $r7$ zadane ravnine u točkama A' i B'. Pravac $A'B'$ je projekcija presječnice p'. Sjecište pravaca p' i a' jest projekcija S' traženog sjecišta S pravca a s ravninom α.

Odredi kotu sjecišta! Odredi vidljivi i nevidljivi dio pravca!

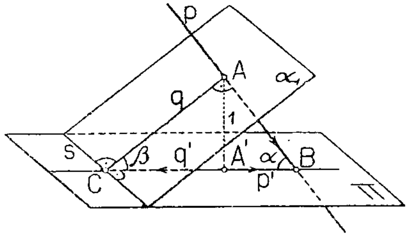
Dodatak. Položimo li pravcem a ravninu projiciranja, ona siječe zadanu ravninu u pravcu p tako, da se p podudara s a. Prevalimo li pomoćnu ravninu zajedno sa pravcima a i p u jednu slojničnu ravninu, onda je S_0 u sjecištu pravaca a_0 i p_0.


Sl. 800.

§ 234. Normalni položaj pravca i ravnine

1. Pravac i ravnina u normalnom položaju. (Sl. 801.). Zadana je ravnina α_1 i pravac p, koji je okomit na α_1. Ravnina α_1 siječe ravninu slike Π u pravcu s. Pravac p siječe ravninu α_1 u točki A, a ravninu Π u točki B. A' je ortogonalna projekcija točke A na Π. Ravnina $AA'B$ okomita je na obje ravnine α_1 i Π, dakle i na njihovu presječnicu s, te prvu siječe u pravcu AC, a drugu u pravcu $BA'C$. Oba su ta pravca okomita na tragu, odnosno slojnici s. Prema tome je AC priklonica ravnine α_1. U pravac BC pada projekcija priklonice i pravca p.

Pravac p i priklonica AC leže u istoj vertikalnoj ravnini, koja je okomita na slojnici s, dakle okomita na svim slojnicama ravnine α_1.

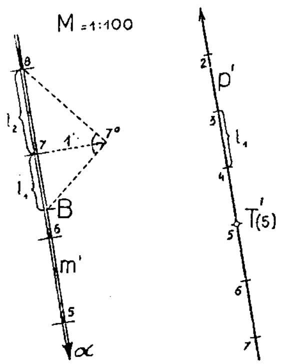


Sl. 801.

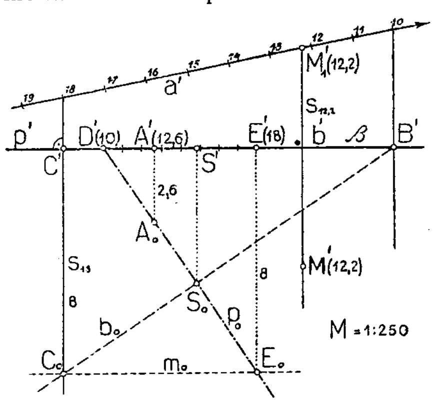
Projekcija BC pravca p okomita je na slojnici s, ona je dakle okomita na projekcijama sviju slojnica, odnosno ona je usporedna s mjerilom nagiba ravnine α.

Točka A leži na hipotenuzi BC pravokutnog trokuta ABC i to unutar krajnjih točaka hipotenuze, pa vidimo, da graduiranje projekcija $A'C$ i $A'B$ priklonice AC i pravca p ima protivan smjer, dakle mjerila nagiba α_1 i pravca p imadu protivan smjer.

Kut $CBA = \alpha$ je prikloni kut pravca p, a kut $BCA = \beta$ je prikloni kut ravnine α_1. Budući da je $\alpha + \beta = 90^0$, to je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, ili $n_1 \cdot n_2 = 1$, ili $i_1 \cdot i_2 = 1$, gdje su n_1 i n_2 nagbi pravca p i priklonice AC, a i_1 i i_2 intervali tih pravaca. Ti su intervali među sobom recipročni.



Sl. 802.



Sl. 803.

Kad je dakle pravac okomit na ravnini α, tad je:

1. projekcija okomice usporedna s mjerilom nagiba ravnine,
2. mjerila nagiba ravnine i okomice imaju protivan smjer,
3. intervali su tih mjerila među sobom recipročni.

2. Zadanom točkom T (5) položi pravac (p) okomito na zadanu ravninu α. (Sl. 802.). (M = 1 : 100).

Rješenje: Ravnina α zadana je s mjerilom nagiba m'. Projekcija p' traženog pravca p ide točkom T' usporedno s mjerilom nagiba m' ravnine α.

Interval i_1 pravaca p' konstruiramo tako, da u kojoj god točki mjerila m', na pr. u točki 7, povučemo okomicu $77^0 = 1$ m, spojimo 8 sa 7_0 i povučemo pravac $7^0B \perp 87^0$. Tada je $7B = i_1$, t. j. interval pravca p. Iz pravokutnog je trokuta: $87^0B = 78 : 77^0 = 77^0 : 7B$ ili $i_2 : 1 = 1 : i_1$.

3. Zadanom točkom A (12,6), postavi okomicu na ravninu α, koja je zadana pravcem a (i = 1,5) i kotiranom točkom M(12,2) (M. 1 : 250).

Prvo rješenje. Mi bi mogli konstruirati mjerilo nagiba ravnine α, pa postupati dalje kao u t. 2.

Drugo rješenje. Najprije konstruiramo slojnicu s ravnine α (sl. 803.), koja ide točkom M, zatim položimo točkom A ravninu projiciranja β okomito na slojnicu s (dakle $\beta \perp s$) i njom siječemo ravninu α u pravcu b. Postavimo li točkom A pravac $p \perp b$, taj je pravac tražena okomica. Projekcije p' i b' pravaca p i b padaju u trag pomoćne ravnine, koji je okomit na slojnici s. Treba još pravac p graduirati.

U tu svrhu prevalimo ravninu β zajedno s pravcima p i b u horizontalnu ravninu, kojoj je na pr. kota 10. Točka B slojnice s_{10} ravnine α ostane na miru, dok točka C slojnice s_{15} dođe u C_0 tako, da je $C'C_0 = 18 - 10 = 8$. Pravac $B'C_0 \equiv b_0$.

Prevalimo li točku A ($A'A_0 = 12{,}6 - 10 = 2{,}6$) te preloženom točkom A_0 povučemo $p_0 \perp b_0$ imamo preložen pravac p, koji je okomit na ravnini α. Pravci p' i p_0 sijeku se u točki D'. Kota je točke D(10).

Potegnemo li točkom C_0 usporednicu m^0 sa p', ona siječe p_0 u točki E_0; okomica spuštena s E_0 na p' siječe p' u točki E'. Kota je točke E(18). Budući da imamo dvije točke D' i E' pravca p', koje imaju cijele kote, lako je taj pravac graduirati.

Točka S_0, u kojoj se sijeku pravci b_0 i p_0, je preloženo sjecište pravaca b i p, odnosno prevaljeno sjecište pravca p s ravninom α. Točka $S'(S_0S' \perp p')$ je projekcija toga sjecišta.

A_0S_0 jednako je udaljenosti točke A od ravnine α.

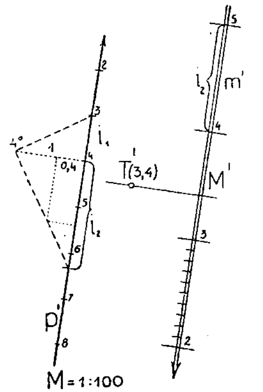
4. Zadanom točkom T(3,4) položi ravninu okomito na zadani pravac p, koji je zadan mjerilom nagiba! (Sl. 804.). (M = 1 : 100).

Rješenje: Mjerilo je nagiba m' tražene ravnine usporedno s mjerilom nagiba p' zadanog pravca, dok su intervali tih mjerila među sobom recipročni. Interval i_2 mjerila nagiba ravnine možemo konstruirati. Horizontala, koja ide točkom T' okomito na m' daje na mjerilu točku M' kote 3,4. Razdijelimo li interval i_2 na deset jednakih dijelova te na m' prenesemo $4/10\, i_2$ u smjeru pada, dobijemo točku mjerila m', kojoj je kota 3. Prenoseći na m' na obje strane te točke interval, dobijemo točke mjerila, kojima pripadaju cijele kote.

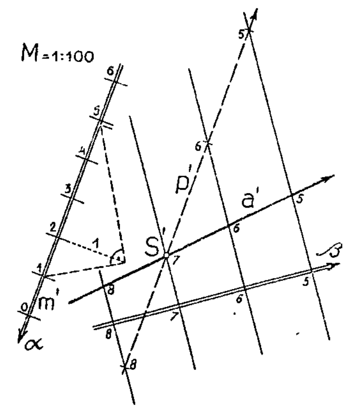
5. Zadanim pravcem a položi ravninu okomito na zadanu ravninu α.

Rješenje: Pretpostavlja se, da ravnina α nije u horizontalnom ni u vertikalnom položaju i da pravac a nije okomit na zadanoj ravnini.

Da riješimo zadatak, odaberimo na pravcu a točku S (sl. 805.) i spustimo s nje okomicu p na ravninu α. Tražena ravnina β određena je pravcima a i p.



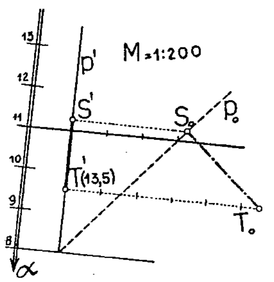
Sl. 804.



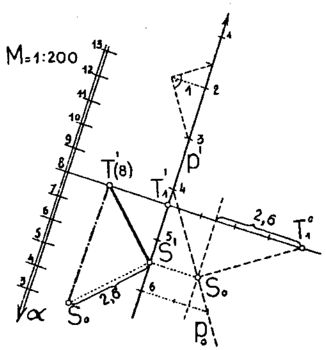
Sl. 805.

Ako je pravac a okomit na ravninu α, tad je svaka ravnina položena na tom pravcu okomita na α.

§ 235. Razne metričke zadaće



Sl. 806.



Sl. 807.

1. Odredi daljinu točke T od ravnine α.

Prvo rješenje: S točke T spusti se okomica na ravninu α i odredi sjecište S te okomice s ravninom. TS je daljina točke T od ravnine α.

Drugo rješenje. (Sl. 806.). Točkom T položimo vertikalnu ravninu γ okomito na slojnice, dakle i na ravninu α. Ravnina γ siječe α u priklonici p i u njoj leži okomica TS, koja je spuštena s T na α. Ujedno je $TS \perp p$. Ako prevalimo γ oko p' zajedno sa priklonicom p i točkom T u dotičnu slojničnu ravninu (ovdje 8), onda je priklonica p došla u p_0, T u T_0; okomica T_0S_0, spuštena s točke T_0 na pravac p_0, je tražena daljina točke T od ravnine α.

2. Odredi udaljenost točke T od pravca p. (Sl. 807.). (M = 1 : 200).

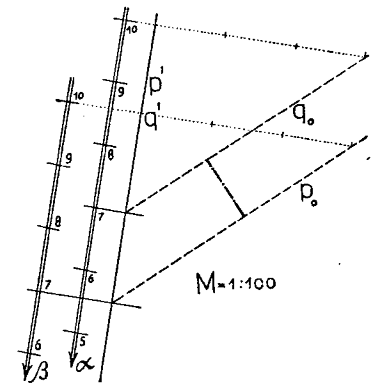
Rješenje: Pravac p je graduiran. Točkom T položi ravninu α okomito na pravac p, odredi sjecište S pravca i ravnine i spoji S sa T. Tada je TS tražena udaljenost. Probodište S odredimo tako, da pravcem p položimo vertikalnu ravninu γ, a ona siječe ravninu α u pravcu T_1S. Preloženjem ravnine γ dobivamo visinsku razliku točaka T i S, kao i samo probodište $S(T_1{}^0 S^0 \perp p_0)$.

3. Odredi udaljenost dvaju usporednih pravaca.

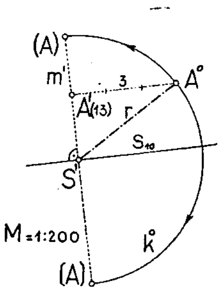
Rješenje: Na jednom od tih pravaca uzmi točku i odredi njezinu udaljenost od drugoga pravca.

4. Odredi udaljenost dviju usporednih ravnina α i β. (Sl. 808.). (M = 1 : 100).

Rješenje: Položi vertikalnu ravninu γ, koja je okomita na ravninama α i β i prevali je oko njezina traga zajedno s presječnicama p i q u dotičnu slojničnu ravninu, na pr. u ravninu 7. Okomit razmak usporednih pravaca p^0 i q^0, koji su preložene priklonice obih ravnina, je traženi razmak usporednih ravnina α i β.



Sl. 808.



Sl. 809.

5. Zadanu točku A treba okretati oko horizontalnog pravca s, dok ne padne u horizontalnu ravninu Π, koja ide pravcem s (sl. 809.). (M = 1 : 200).

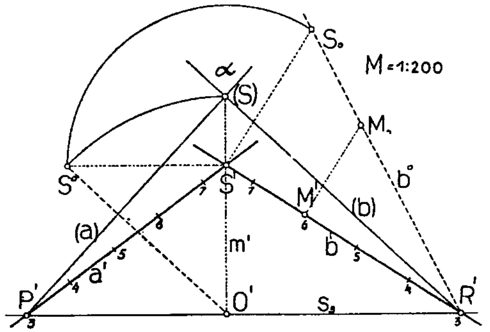
Rješenje: Točka A opisuje kružnicu, kojoj je ravnina okomita na horizontalnoj ravnini, te se projicira u trag m' ravnine kružnice, gdje je m' okomit na s_{10}. Točka S', u kojoj m' siječe s jest središte te kružnice, dok je polumjer hipotenuza pravokutnog trokuta $AA'S'$. Taj trokut prevalimo oko katete $A'S'$ u ravninu Π, u položaj $A^0A'S'$. Kateta A^0A' jednaka je visinskoj razlici točke A i pravca s_{10}, dakle je $A^0A' = 13 - 10 = 3$.

Kad točka A dođe rotacijom u ravninu Π, ona padne u trag m' i udaljena je od s_{10}' za polumjer rotacije $r = A^0S'$. Opišemo li dakle u preložen u kružnicu k^0 sa središtem u S' i polumjerom r, ona siječe m' u traženim točkama (A) i $[A]$. (Usporedi § 57., sl. 243. i § 63., sl. 257.).

Zadatak ima dva rješenja.

6. Odredi kut dvaju ukrštenih pravaca *a* i *b*. (Sl. 810.). (M = 1:200).

Rješenje. Zadanim pravcima a i b položimo ravninu ρ, te je oko edne slojnice okrenemo u horizontalnu ravninu te slojnice Time su i pravci a i b došli u tu ravninu, pa se njihov kut pokaže u pravoj veličini.



Sl. 810.

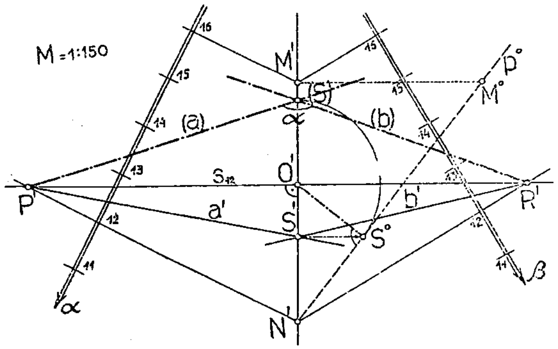
Ako su pravci graduirani, spojimo istoimene kote, pa imamo slojnice ravnine ρ. Da dobijemo kotu sjecišta S zadanih pravaca, prevalit ćemo pravac b oko $S'R'$ u horizontalnu ravninu Π_3. (Prevalimo dužinu RM).

Postavimo li u S' okomicu $S'S^0$ na b', ona preloženi pravac b^0 siječe u točki S_0, pa je $S'S_0$ daljina točke S od ravnine Π_3. Kad nam je ta daljina poznata, možemo konstruirati polumjer r rotacije za točku S oko slojnice s_3. Taj polumjer odredimo kao u t. 6. Rotiramo li točku S oko slojnice s_3 u ravninu Π_3 ($S'O' = m' \perp s_3$, $S'S^0 \perp m'$ i $SS^0 = S'S_0$: $O(S) = O'S^0$) pa spojimo (S) s nepomičnim točkama P i R, tad je $(S)P' = (a)$, $(S)R' = (b)$. Pravci (a) i (b) jesu oba rotirana pravca a i b, te čine traženi kut α.

7. Odredi prikloni kut dviju ravnina α i β. (Sl. 811.). (M = 1:150).

Rješenje. Odredimo presječnicu p obih ravnina i jednom njezinom točkom S položimo treću ravninu γ okomito na presječnicu p. S ravninom γ siječemo obje zadane ravnine u pravcima a i b i odredimo kut tih dvaju pravaca. Taj je kut jednak kutu, što ga čine ravnine α i β.

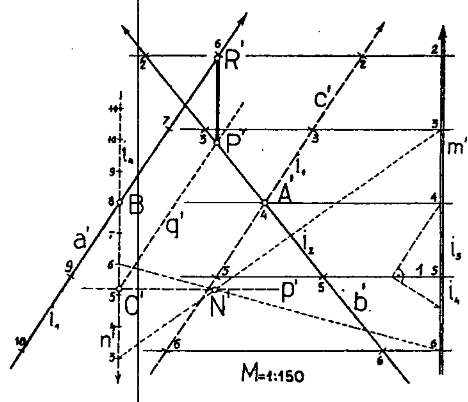
Možemo postupati i ovako: Odredimo projekciju p' presječnice p ravnina α i β te povucimo koji god pravac $s_{12} \perp p'$. Pravac s_{12} neka je slojnica ravnine γ u horizontalnoj ravnini Π_{12}. Prevalimo li presječnicu oko p' u ravninu Π_{12} u p^0, te sa sjecišta O' slojnice s_{12} i projekcije presječnice p' spustimo okomicu na p^0, dobivamo točku S^0, t. j. preloženo sjecište ravnine γ i presječnice p. Spustimo li s S^0 okomicu na p', dobijemo S'. Spojimo



Sl. 811.

li točke P' i R', u kojima slojnica s_{12} siječe slojnice 12 zadanih ravnina, onda su $P'S'$ i $R'S'$ projekcije pravaca a i b. Rotiramo li ta dva pravca oko s_{12} u Π_{12}, dobijemo pravu veličinu kuta tih pravaca, a po tome i kuta ravnina α i β. Točka O' je središte, a $O'S^0$ polumjer rotacije. Točka S^0 dolazi nakon rotacije u točku (S), a pravci a i b u (a) i (b).

8. Neka se odredi najkraća udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca *a* i *b*. (Sl. 812.). (M = 1:150).



Sl. 812.

Rješenje. Kojom god točkom A pravca b položimo pravac $c \parallel a$ ($c' \parallel a'$). Pravci b, c određuju ravninu α, koja je usporedna s pravcem a.

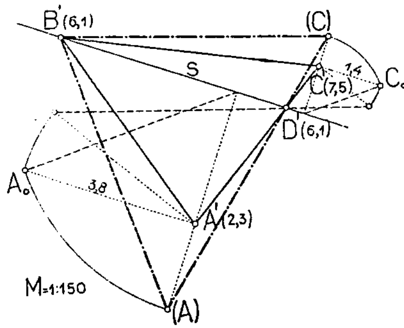
S koje god točke $B'(6)$ pravca a spustimo okomicu n na ravninu α ($n' \parallel m'$) i odredimo njeno probodište C s ravninom α (n' uzeto je za mjerilo nagiba pomoćne ravnine, koja ravninu α siječe u pravcu p, $p' \perp n'$ ide točkom N'). Potegnemo li točkom C pravac $q \parallel a$ ($q' \parallel a'$), on siječe b u točki p. (Usporedi § 48., sl. 209.).

Pravac je q presječnica ravnine (a, n) s ravninom α, i ona nam daje na pravcu b točku P, koja je jedna točka tražene daljine. Drugu točku R na pravcu a' dobijemo, ako potegnemo $P'R' \parallel C'B'$. $P'R'$ je projekcija najkraće udaljenosti pravaca a i b. Njezinu pravu veličinu dobijemo prevaljivanjem u koju horizontalnu ravninu.

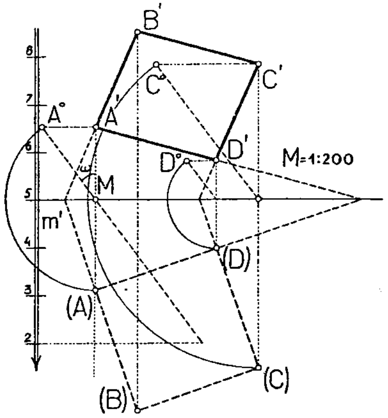
Taj se zadatak može riješiti i na slijedeći način: Svakim od zadanih pravaca položimo ravninu usporednu s drugim pravcem i tražimo daljinu tih paralelnih ravnina.

9. Neka se odredi prava veličina trokuta ABC [A(2, 3), B(6, 1), C(7, 5)]. (Sl. 813.). (M = 1 : 150).

Rješenje: Na stranici AC odredimo točku D, kojoj je kota 6,1 (kota točke B). Pravac $BD = s$ je slojnica ravnine trokuta. Okrenemo li trokut ABC oko slojnice s u horizontalan položaj, dobit ćemo trokut $(A)(B)(C)$, koji je jednak pravoj veličini zadanog trokuta.



Sl. 813.



Sl. 814.

Budući da su točke B i D u osi rotacije, to one ostaju na miru, pa je (B) u B', te $(A)(C)$ ide točkom D'.

Horizontalni razmak točaka A i D dobijemo iz razmjera:

$$A'D' : A'C' = (DD' - AA') : (CC' - AA'), \text{ t. j.}$$

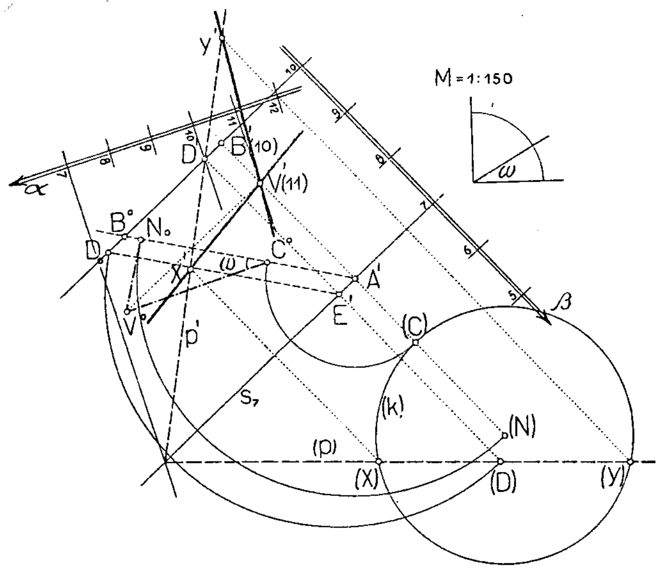
$$A'D' = \frac{A'C' \cdot (DD' - AA')}{CC' - AA'} = \frac{4{,}2\,(6{,}1 - 2{,}3)}{7{,}5 - 2{,}3} = 3{,}07.$$

10. Nacrtaj projekcije kvadrata, koji je u zadanoj kosoj ravnini. (Sl. 814.). (M = 1 : 200).

Rješenje: Uzmimo da smo kvadrat $ABCD$, koji leži u ravnini ρ, okrenuli oko slojnice 5 te ravnine u horizontalnu ravninu Π_5. Taj kvadrat

recimo da je došao u položaj $(A)(B)(C)(D)$. Sada se taj kvadrat okrene oko slojnice 5 natrag u ravninu ρ. To će se okretanje izvršiti za $180^0 - \omega$. Ako se točkom A položi priklonica i prevali oko svoje projekcije u ravninu Π_5, dobit će se kut ω.

U preloženoj priklonici nalazi se preložena točka A^0, koja se dobije ako se oko točke M opiše luk s polumjerom $M(A)$. Spusti li se s točke A^0 okomica na pravac $(A)M$, dobit će se točka A' [$A^0A' \perp (A)M$]. Na jednak se način dobiju i ostale točke B', C' i D'. Lik je $A'B'C'D'$ projekcija kvadrata, koji leži u ravnini ρ. Taj je lik paralelogram. Između likova $(A)(B)(B)(C)$ i $A'B'C'D'$ postoji afina srodnost, gdje je slojnica 5 os afinosti a $(A)A'$ smjer zraka afinosti.

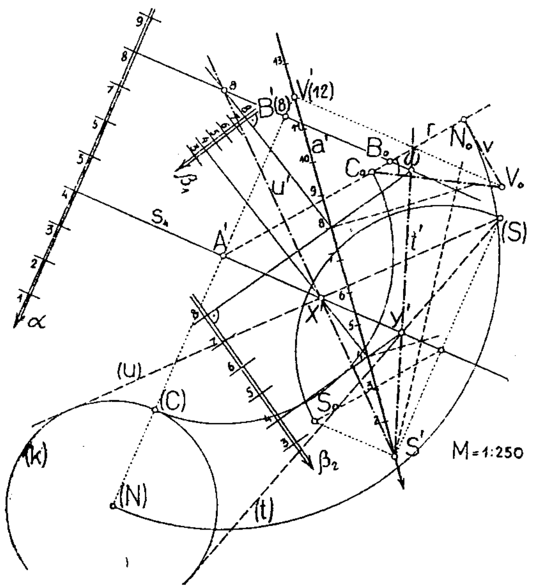


Sl. 815.

11. Zadanom točkom V, koja je u zadanoj ravnini α, treba položiti pravac, koji s drugom ravninom β čini zadani kut ω. (Sl. 815.). (M = 1 : 150).

Rješenje: Traženi je pravac izvodnica rotacionog stošca, kojemu je V vrh, te mu je os okomita na ravnini β. Ta ravnina siječe ovaj stožac u kružnici k, kojoj je polumjer kateta NC pravokutnog trokuta, kojemu je druga kateta VN, jednaka daljini v točke V od ravnine β, a kojoj je suprotni kut ω. Budući da traženi pravac mora ležati u ravnini α, taj će pravac biti presječnica stošca s tom ravninom.

Točka V nalazi se na 11 slojnici ravnine α. Položimo li tom točkom projicirajuću ravninu γ. koja je ujedno okomita na ravnini β, ona siječe tu ravninu u priklonici AB. Prevalimo li ravninu γ zajedno s priklonicom i točkom V oko traga $A'B'$ u slojničnu ravninu Π_7 ($B'B^0 \perp A'B'$, $B'B^0 = 10 - 7 = 3$, $V'V^0 \perp A'B'$, $V'V^0 = 11 - 7 = 4$), te s preložene točke V^0 spustimo okomicu V^0N^0 na preloženu priklonicu $A'B^0$, to je V^0N^0 daljina točke V od ravnine β i ujedno visina spomenutog stošca. Konstruiramo li supravokutan trokut $V^0N^0C^0$, u kojem je V^0N^0 jedna kateta, te joj je suprotni kut ω to je druga kateta N^0C^0 polumjer stošca odnosno kružnice k.



Sl. 816.

Prevalimo li sad ravninu β oko slojnice s_7 u slojničnu ravninu Π_7, točka N dođe u (N), C u (C), dok se kružnica k prikaže u pravoj veličini (k). Njezino je središte (N), a polumjer $(N)(C) = r$.

Sad još treba odrediti presjek stošca s ravninom α. Budući da ta ravnina ide vrhom stošca, ona ga siječe u istokračnom trokutu XYV, kojemu osnovica XY pada u presječnicu p ravnina α i β. Odredimo li dakle tu presječnicu, pa je prevalimo oko s_7 u Π_7, ona dođe u položaj (p) te siječe kružnicu (k) u točkama (X) i (Y). Tetiva $(X)(Y)$ je preložena osnovica istokračnog trokuta XYV. Nađemo li projekcije X', Y', pa te točke spojimo s V' imamo projekcije x' i y' traženih pravaca.

Zadatak ima dva, jedno ili nijedno realno rješenje, prema tome, da li pravac p siječe kružnicu k, dotiče, ili ne siječe i ne dotiče, odnosno da li je zadani kut ω manji od kuta što ga čini ravnina α i β, jednak tome kutu ili od njega veći.

12. Zadanim pravcem a neka se položi ravnina β, koja sa zadanom ravninom α čini kut ω. (Sl. 816.). ($M = 1 : 250$).

Rješenje: Na zadanom pravcu a uzmemo točku V i smatramo je vrhom rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini α i kojemu izvodnice s ravninom α čine kut ω. Dirne ravnine položene pravcem a na taj stožac jesu tražene ravnine.

Polumjer osnovke stošca dobije se na isti način kao u t. 11. Pravac s_4 je slojnica oko koje izvodimo okretanje u ravninu Π_4.

Odredimo sjecište S pravca a s ravninom α, pa ga oko slojnice s_4 ravnine α okrenimo u ravninu Π_4 u položaj (S). Tangente (t) i (u) potegnute iz točke (S) na (k) jesu preložeui tragovi traženih ravnina u ravnini α. Ti tragovi sijeku s_4 u točkama X' i Y', pa tim točkama i sjecištem S' idu projekcije tragova t' i u'. Pravcima at i au određene su tražene ravnine. Pravci t' i u' graduirani su slojnicama ravnine α, pa spojimo li jednako kotirane točke pravaca a, t i a, u imamo slojnice traženih ravnina.

Kad ćemo dobiti jedno, a kad ni jedno rješenje? O čemu zavisi broj rješenja?

13. Zadaci za vježbu

1. Zadan je pravac AB i daljina točke C toga pravca od točke A; neka se odredi projekcija i kota točke C.

2. Zadana je dužina AB; neka se odredi kota i projekcija točke C, koja dužinu AB dijeli u omjeru 2 : 3.

3. Neka se graduira pravac, kojemu je nagib $n = 2/3$ i kojemu točka A ima kotu 9,6.

4. Odredi interval pravca, kojemu je prikloni kut $\alpha = 30^0$ (60^0).

5 Zadanom točkom V (15,4) neka se položi pravac kojemu je prikloni kut 60^0.

6. Zadan je pravac dvjema točkama A (1,6) i B (5,7); neka se odrede kote i projekcije točke, koja dužinu AB dijeli u omjeru 3 : 4.

7. Zadana je projekcija $A'B'C'$ istostraničnog trokuta te kota točke A i prava veličina stranica trokuta; neka se odrede kote točaka B i C, prikloni kutevi i intervali stranica.

8. Zadana su dva mimosmjerna pravca i projekcija jedne transverzale; neka se odrede kote sjecišta transverzale i pravca.

9 Sjecište S dvaju zadanih pravaca a i b leži izvan crtežne ravnine; neka se zadanom točkom T položi pravac, koji ide sjecištem S.

10 Zadane su četiri točke A, B, C i D; neka se točkom A polože i graduiraju pravci a i b koji su usporedni s pravcima BC i BD.

A (15, 24), B (8, 30), C (13, 45), D (18, 90).

11. Zadanom točkom T položi pravac, kojemu je nagib n usporedan sa zadanom ravninom.

12. Zadanom točkom T položi ravninu usporedno sa dva zadana pravca p i r.

13. Zadanim pravcem p položi ravninu usporedno s drugim zadanim pravcem r.

14 Pravcem p i točkom T, koja je izvan toga pravca, neka se položi ravnina.

15. Dvima usporednim pravcima neka se položi ravnina.

16. Zadanom točkom T položi ravninu, koja je usporedna sa zadanim pravcem, te joj je zadan nagib n.

17. Zadanom točkom T položi ravninu usporedno sa zadanom ravninom.

18. Zadanom točkom T položi transverzalu dvaju mimosmjernih pravaca a i b. — Naputak! Tražena je transverzala presječnica ravnina (Ta) (Tb).

19. Neka se konstruira transverzala dvaju mimosmjernih pravaca a i b, koja je usporedna s pravcem c. — Naputak: Pravcem a položi se ravnina α usporedno s pravcem c,

a pravcem b ravnina β usporedno s pravcem c. Presječnica je ravnina α i β tražena transverzala.

20. Neka se konstruira transverzala triju mimosmjernih pravaca a, b i c, — Naputak! Na jednom od zadanih pravaca uzmi točku T, pa njom položi pravac, koji siječe druga dva pravca kao u zad. 18.

21. Zadane su tri ravnine α, β i γ; neka se odredi presječnica svakih dviju ravnina.

22. Zadana su dva mimosmjerna graduirana pravca; položi svakim od njih ravninu usporedno s drugim pravcem i konstruiraj mjerilo nagiba tih ravnina.

23. Neka se odredi presječnica dviju ravnina, koje imadu jednaki nagib. (Projekcija je presječnice simetrala jednako kotiranih slojnica).

24. Neka se odredi presječnica dviju ravnina, koje imadu jednaki nagib, ako mjerila nagiba čine spružen kut. — Naputak: Presječnica je slojnica, koja ide sjecištem priklonica tih ravnina, koje padaju u istu vertikalnu ravninu.

25. Zadanom točkom T položi pravac, koji je usporedan s dvije zadane ravnine.

26. Zadane su dvije ravnine α i β i dvije točke A i B. Odredi presjek ravnine γ, koja je položena točkom A usporedno s ravninom α (ili $\parallel \beta$), s ravninom δ, koja je položena točkom B usporedno s ravninom β (ili $\parallel \alpha$).

27. Zadana je ravnina α: *a)* s tri kotirane točke, *b)* s dva skrštena pravca, *c)* mjerilom nagiba te pravac a s dvije kotirane točke; neka se odredi presjek ravnine s pravcem a.

28. Mjerila su nagiba zadane ravnine i pravca među sobom usporedna; odredi sjecište pravca s ravninom — Naputak: Mjerilo pravca smatraj mjerilom nagiba pomoćne ravnine, te odredi presjek.

29. Odredi presjek trokuta s ravninom.

30. Odredi presjek: *a)* dvaju trokuta, *b)* dvaju paralelograma, *c)* trokuta i paralelograma.

31. Konstruiraj transverzalu dvaju mimosmjernih pravaca, koja je usporedna sa zadanom ravninom. — Naputak: Oba pravca sijeci s kojom god ravninom, koja je usporedna sa zadanom ravninom.

32. Zadanom točkom T položi transverzalu dvaju mimosmjernih pravaca a i b. — Naputak: Točkom T i jednim od zadanih pravaca položi ravninu i njome sijeci drugi pravac u točki S. Pravac ST je tražena transverzala. (Isporedi zad. 18.).

33. Konstruiraj jednu transverzalu triju mimosmjernih pravaca. — Naputak: Jednim od zadanih pravaca položi ravninu i sijeci druga dva pravca u točkama S i R; pravac SR je jedna transverzala.

34. Odredi sjecište triju ravnina α, β, γ. — Naputak: Odredi presječnicu p dviju ravnina i traži njezino sjecište s trećom ravninom.

35. Ista zadaća kao pod br. 34. samo što su slojnice dviju zadanih ravnina među sobom usporedne.

36. Zadano je pet točaka A, B, C, D, E. Odredi sjecište pravca DE s ravninom ABC.

37. U zadanoj ravnini povuci pravac, koji siječe dva zadana pravca.

38. Zadanom točkom T položi pravac m, koji siječe zadani pravac p, te je usporedan sa zadanom ravninom α.

39. Neka se odredi presjek pravca p s trokutom ABC.

40. Odredi presjek *a)* horizontalnog, *b)* vertikalnog pravca s općom ravninom.

41. Odredi bačenu sjenu trostrane piramide ABC na ravninu osnovke ABC.

42. Odredi presjek trostrane piramide (prizme) s općom ravninom.

43. Zadanom točkom T položi okomicu na zadani pravac p. — Naputak: Točkom T položi ravninu α okomito na pravac p, te sjecište S toga pravca s α spoji s T.

44. Odredi udaljenost točke T od ravnine α.

45. Odredi ortogonalnu projekciju pravca na ravnini α.

46. U zadanoj ravnini α nalazi se pravac p; položi tim pravcem ravninu $\beta \perp \alpha$. — Naputak: Ravnina β ide pravcem p usporedno s kojim god pravcem koji je okomit na α.

47. Zadanom točkom O položi tri pravca a, b i c koji su među sobom okomiti. — Naputak: Točkom O povuci pravac a u kojem god smjeru, zatim točkom O položi ravninu α okomito na a i u njoj točkom O povuci pravac b po volji; pravac c je okomit na ravnini (ab).

48. Točkom T položi pravac p koji siječe pravac a, te je okomit na pravcu b. — Naputak: Zadanom točkom položi ravninu α okomito na pravac b i spoji sjecište pravca a i ravnine α s točkom T.

49. Točkom T položi pravac p, koji je okomit na dva mimosmjerna pravca a i b. — Naputak: Traženi je pravac p okomit na ravnini α, koja je položena pravcem a (ili b) usporedno s pravcem b (ili a).

50. Točkom T položi pravac p, koji je usporedan s ravninom α, te je okomit na pravcu a. — Naputak: Traženi je pravac p usporedan s presječnicom ravnine α s ravninom β, koja ide točkom T okomito na a.

51. Zadana su tri mimosmjerna pravca a, b i c; neka se nacrta onaj pravac, koji siječe pravce a i b, te je okomit na pravcu c. — Naputak: Traženi pravac leži u ravnini, koja je okomita na pravcu c.

52. Na zadanom pravcu p odredi točku, koja je jednako udaljena od dviju susjednih točaka A i B.

53. U zadanoj ravnini α nacrtaj pravac p, koji je okomit na zadanom pravcu a. — Naputak: Sjecištem pravca a i ravnine α položi ravninu β okomito na a i odredi presječnicu ravnina α i β. Ta je presječnica traženi pravac p.

54. Odredi daljinu točke T od pravca p. — Naputak: Oko slojnice s, koja ide točkom T ravnine (Tp) okreni pravac p u horizontalnu ravninu slojnice s i spusti okomicu s točke T' na p'.

55. Položi ravninu β, koja je usporedna s ravninom α, te je od nje udaljena za dužinu d.

56. Zadanom točkom T položi ravninu, koja je okomita na ravninu α, te s ravninom β čini kut ω.

57. Točkom T položi ravninu, koja s ravninom projiciranja α čini kut ω_1, a s općom ravninom β kut ω_2. — Naputak: Točkom T položi pravac, koji s zadanim ravninama čini kutove $90^0 - \omega_1$ i $90^0 - \omega_2$, tražena je ravnina okomita na tom pravcu.

58. Zadana je kotirana projekcija stranice AB istostraničnog trokuta ABC i kota točke C Konstruiraj projekciju tog trokuta. — Naputak: Točkom C položi ravninu projekcija i konstruiraj pravokutne trokute $AA'C$ i $BB'C$, tada su katete $A'C$ i $B'C$ projekcije stranica AC i BC.

59. Zadana je kotirana projekcija trokuta, kojemu odredi projekciju i kotu

a) središta opisane kružnice,
b) središta upisane kružnice,
c) sjecišta triju visina i
d) težišta.

60. Na zadanom pravcu p odredi točku B, koja je od zadane točke A udaljena za dužinu d.

61. Zadanom točkom T položi pravac p, koji sa zadanim pravcem q čini zadani kut — Naputak: Točkom T i pravcem q položi ravninu, pa je oko jedne slojnice (koja recimo ide točkom T) prevali u ravninu te slojnice i t. d.

62. Odredi kut što ga pravac p čini s ravninom α. — Naputak: S jedne točke S pravca p spusti okomicu q na ravninu α i odredi kut pravaca p i q. Taj je kut komplemenat traženog kuta.

63. Odredi kut dvaju mimosmjernih pravaca a i b. — Naputak: Na pravcu a uzm točku i njom povuci pravac $c \parallel b$. — Kut (ac) je traženi kut.

64. Konstruiraj kvadrat, kojemu je zadana kotirana projekcija jedne dijagonale.

65. Konstruiraj romb, kojemu je zadana kotirana projekcija jedne dijagonale AC, te mu vrh B leži na zadanom pravcu p.

66. Zadana je kotirana projekcija jednog brida kocke, konstruiraj projekciju kocke, ako jedna pobočna ravnina kocke, u kojoj leži taj brid čini s horizontalnom ravninom kut od 45^0.

67. Točka S je središte, a A jedan ugao pravilnog šesterokuta, koji je osnovka uspravne piramide. Konstruiraj tu piramidu, ako joj je visina dva puta veća od osnovnog brida.

68. Zadana je projekcija $A'B'C'$ trokuta ABC i kota točke A. Odredi kote točaka B i C, ako su poznate prave veličine stranica AB i AC.

69. Pravac je zadan projekcijom i kotom jedne točke A. Druga točka B toga pravca leži u zadanom pravcu, te je od točke A udaljena za daljinu d.

70. Od četverokuta $ABCD$ zadana je projekcija $A'B'C'D'$, kote točaka A i B i sjecište S dijagonala. Odredi pravu veličinu četverokuta te kote vrhova C i D.

71. Zadan je pravac a projekcijom i nagibom i pravac b samo s projekcijom, zatim projekcija najkraće udaljenosti AB obih pravaca. Neka se graduira pravac b i odredi prava veličina od AB.

72. Konstruiraj projekciju simetrale kuta dvaju pravaca.

73. Konstruiraj mjerilo nagiba ravnine, koja dijeli kut dviju zadanih ravnina α i β na dva jednaka dijela.

74. Pravcem u zadanoj ravnini α položi ravninu β, koja s ravninom α zatvara kut ω.

§ 236. Praktične primjene

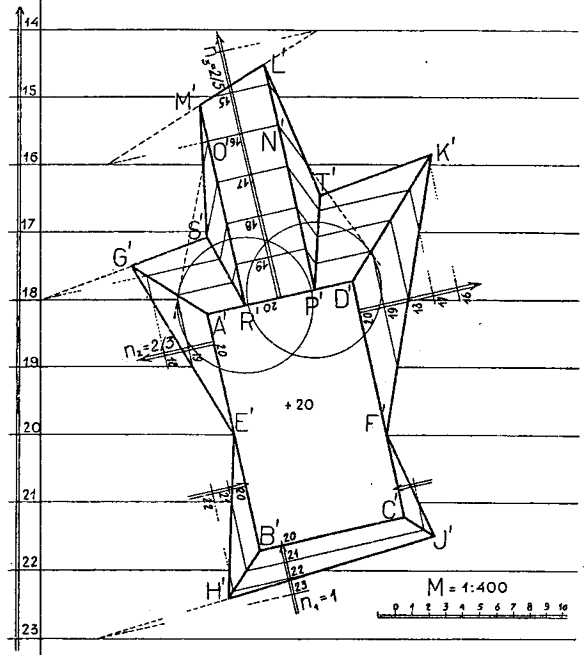
1. Obronci (nasipi i usjeci). Lice zemlje nije ravno nego je oblo i nepravilnog oblika. Manji ili veći dijelovi tla mogu biti i ravnine, horizontalne ili kose. Riješit ćemo neke zadaće, koje su u vezi s takvim tlom, a dolaze kod gradnja cesta, željeznica, kanala i t. d., gdje treba zemlju nasuti ili otkopati. Nasipi i usjeci omeđeni su kosim ravninama, koje nazivamo nasipima ili usječnim obroncima. Nasipi obično završavaju stožastim obroncima. Takovi obronci dolaze i onda, kad se imaju spojiti dva obronka, koji su omeđeni kosim ravninama.

Obronci su prema horizontalnoj ravnini nagnuti pod stanovitim kutem. Ti kutovi ne smiju promašiti t. zv. prirodni kut nagiba, jer bi se inače nasipi ili usjeci urušili. Veličina tih kutova ravna se prema vrsti zemlje ili materijalu, a iznose između 20^0 do 50^0 stupnjeva. Kod usjeka mogu ti nagibi biti i veći, nego li su uz iste prilike kod nasipa.

Kod predočivanja nasipa i usjeka crtnjom radi se o rješavanju zadaće: Položiti zadanim pravcem ravnine zadanog nagiba, sjeći te ravnine među sobom i s ravninom, koja predočuje tlo.

2. Zadatak. *Zadana je kosa ravnina, koja predočuje koso nagnuto tlo s mjerilom nagiba, kojemu je interval $i = 4$. Neka se konstruira horizontalan plato, koji je djelomice nasut, a djelomice usječen u koso nagnuto tlo. S tla vodi na plato prilaz 2 m širok. Plato ima kotu 20. Nagib nasipa neka je $n_2 = 2/3$, usjeka i nasipa uz prilaz $n_1 = 1$, prilaza $n_3 = 2/5$.* Mjerilo slike 1 : 400. (Sl. 817.).

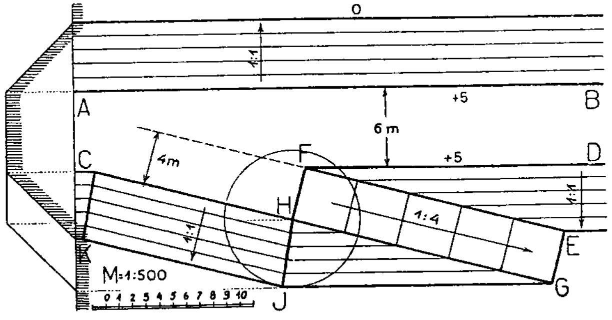
Riješenje: Intervali su mjerila nagiba nasipnih obronaka $i_2 = 3/2 = 1{,}5$, usječnih obronaka $i_1 = 1$, a interval nagiba prilaza $i_3 = 2{,}5$. Ta mjerila možemo lagano konstruirati pogotovu, kad se uzme u obzir, da su bridovi



Sl. 817.

pravokutnika $ABCD$ horizontalni te imaju cijelu kotu, te su prema tome glavne slojnice za dotične kose ravnine. Pošto smo nacrtali mjerila nagiba i slojnice, onda odredimo sve presjeke, t. j. presjeke AG i DK nasipnih obronaka među sobom i tlom te presjeke BH i CJ usječnih obronaka među sobom i tlom. Točke E i F, u kojima slojnica tla 20 siječe stranice plato-a, jesu točke u kojima stranice AB i CD sijeku tlo; one su međašne točke između nasipa i usjeka. Tako su EG, GK i KF presječnice između nasipnih obronaka i tla, a EH, HJ i JF presječnice usječnih obronaka i tla. Prilaz siječe ravninu tla u pravcu LM.

Strane prilaza nijesu vertikalni zidovi, već su nasipi, kojima je nagib $n_1 = 1$, pa treba odrediti presjek tih nasipa s tlom i s nasipom $ADKG$. Ponajprije moramo pravcima LP i MR položiti ravnine, koje s horizontalnom ravninom čine nagib $n_1 = 1$; imamo dakle riješiti već poznatu zadaću. Pravci su PL i MR već graduirani slojnicama prilaza. Uzmemo li na pravcu PL točku $P(20)$ kao vrh rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini 16. slojnice, onda je polumjer toga stošca, pošto je nagib tražene ravnine $n_1 = 1$, jednak visini stošca, t. j. $20 - 16 = 4$ m. Opišemo li dakle oko P' kružnicu s polumjerom $r = 4$ m i s točke N', koja je projekcija probodišta pravca PL s horizontalnom ravninom, povučemo tangentu na tu kružnicu, onda je trag tražene ravnine ujedno i jedna slojnica. Ostale je slojnice lako nacrtati, a po tome i presjek nasipa s tlom (T) i s nasipom



Sl. 818.

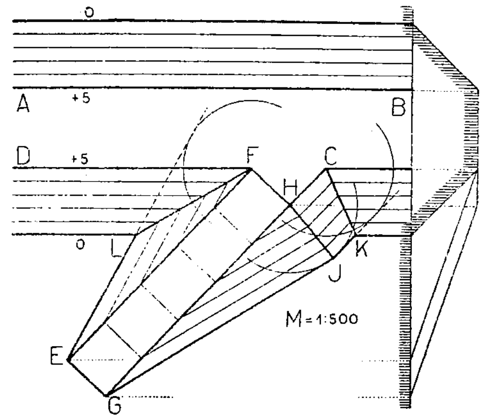
$ADKG$ (TP). Na jednak način položimo ravninu uzduž pravca MR. Vrh je stošca točka R, polumjer je $r = 4$ m, tangenta s O' na tu kružnicu jest jedna slojnica nasipa. Presječnica je nasipa s tlom MS, a s nasipom $ADKG$(SR).

3. Zadatak. *Na horizontalnom tlu, kojemu je kota O, vodi horizontalna cesta, kojoj je kota* 5, *a širina* 6 *m. Nagibi su nasipnih obronaka s jedne i druge strane ceste* 1 : 1. *S tla vodi na cestu prilaz, kojemu je nagib* 1 : 4, *a širina* 4 *m. Nagib obronaka sa strane prilaza iznosi* 1 : 1. Mjerilo slike 1 : 500. *Neka se odrede svi presjeci.* (Sl. 818.).

I. Prilaz je položen uz sam nasip ceste. Ponajprije uz slojnice AB i CD, kojima je kota 5, i koje omeđuju cestu, položimo ravnine, kojima je nagib 1 : 1. Te ravnine sijeku tlo u slojnicama, kojima je kota 0, te horizontalni razmak slojnica 0 i 5 iznosi 5 m. Uz nasip $CDEK$ položit ćemo prilaz. U slojnici 0 uzmemo točku E i njom položimo u nasipnom obronku

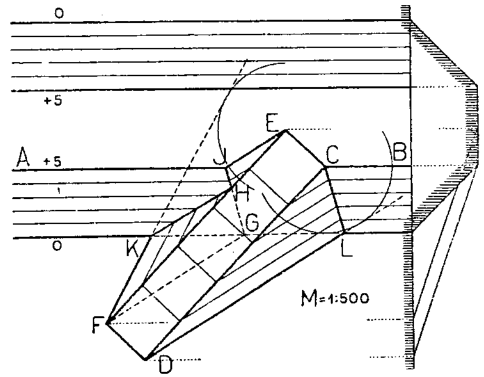
pravac EF, kojemu je nagib 1 : 4. Horizontalni je razmak točaka E i F jednak 20 m. Pravac EF je brid priklonica ravnine prilaza. U točkama E i F dovucimo horizontale EG i FH, koje omeđuju prilaz s donje i gornje strane. $EG = FH = 4$ m. GH je drugi rub prilaza. U točki H povucimo pravac $HC \perp FH$, koji je horizontalan i siječe CD u točki C. Cesta se horizontalno proširi za trokut FHC, kojemu je kota 5.

Sada još treba uz kosi pravac GH i horizontalni HC položiti ravnine, kojima su nagibi 1 : 1 i njima sjeći tlo u pravcima GJ i JK. Budući da su ravnine položene pravcima CD i GH među sobom usporedne, to i njihove presječnice s tlom moraju biti među sobom usporedne; dakle je $GJ \parallel EK$. Kako je $JK \parallel HC$ i jer je horizontalni razmak pravaca HC i JK jednak horizontalnom razmaku pravaca CD i KE, to je položaj pravca JK određen. Nasip GHJ siječe nasip $HCKJ$ u pravcu HJ, a nasipi $HCKJ$ i $CDEK$ u pravcu CK.



Sl. 819.

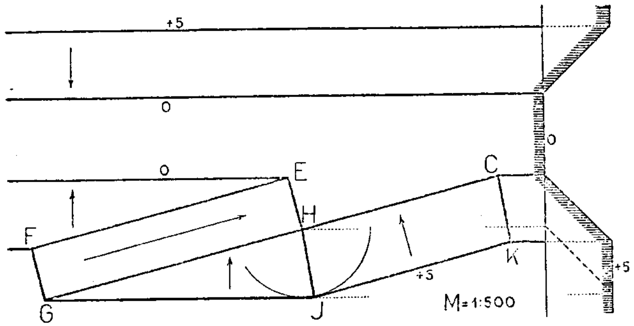
II. U sl. 819. prilaz nije položen uz nasip ceste, nego se uspinje s horizontalnog tla na cestu pod oštrim kutom. Na CD uzmimo točku F i njome položimo FE, kojemu je nagib 1 : 4, tako da s CD čini oštar kut. FE je rub prilaza te priklonica ravnine prilaza. Gornja i donja horizontala FH i EG te ravnine okomite su na EF i dugačke 4 m.



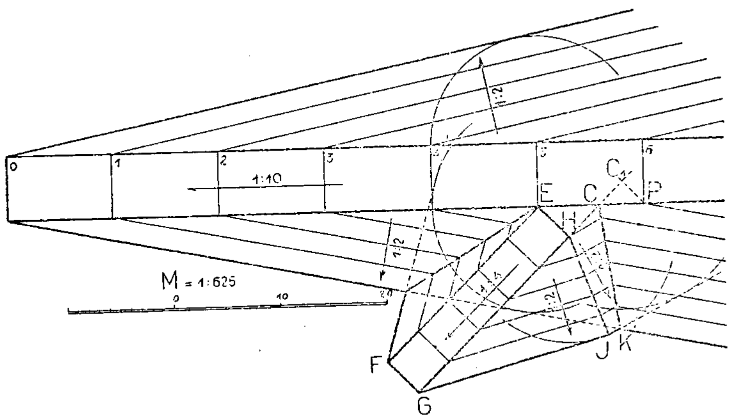
Sl. 820.

GH je rub prilaza. Uzduž rubova EF i GH položimo ravnine, kojima su nagibi 1 : 1; one tlo sijeku u pravcima EL i GI, koji su ujedno horizontale tih ravnina. LF je presjek ravnine položene duž EF s nasipom ceste. Rub $HC \perp FN$, te je cesta proširena za trokut CFH. Ravnina uz CH, kojoj je nagib 1 : 1, siječe tlo u pravcu $JK \parallel HC$. JH i KC jesu presječnice te ravnine s ravninom uz GH i nasipom ceste.

III. Prilaz je djelomice usječen u nasip (Sl. 820.). Točkom C ruba AB položimo pravac CD, kojemu je nagib 1 : 4 tako, da je $\sphericalangle BCD$ tup. Zatim potegnimo CE i DF okomito na CD i jednako 4 m. EF je drugi rub prilaza i priklonica ravnine prilaza. Nasip uz CD siječe tlo u pravcu DL, a nasip ce-



Sl. 821.



Sl. 822.

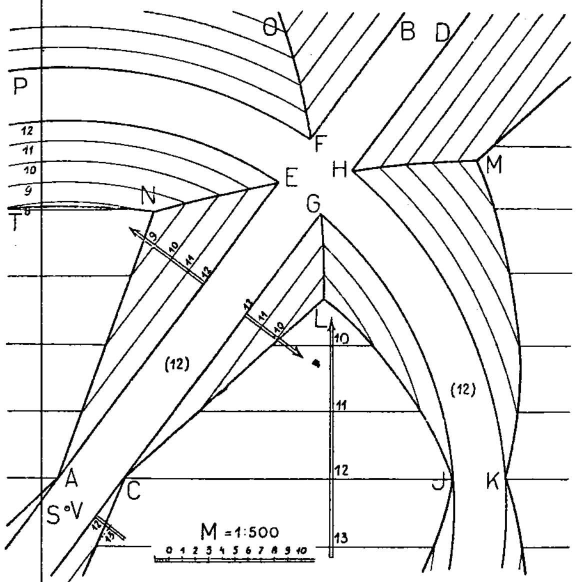
ste u pravcu GL. Nasip uz EF siječe tlo u pravcu FK, a nasip ceste u KH. Uzduž HE prilaz je usječen uz nasip ceste tako, da je usječeni obronak usporedan s nasipnim obronkom uz CD. Trag je usječnog obronka $FG \parallel DL$, a jer je taj obronak usporedan s nasipnim obronkom uzduž CD, oba obronka sijeku nasipni obronak ceste u usporednim pravcima,

tako da je $GHJ \parallel LC$, gdje je H na EF, a J na AB. Pravac je $EJ \parallel LD$ i on je presjek usječnog obronka s cestom. Cesta je za trokut CJE sužena.

4. Zadatak. *Neka se riješi ista zadaća kao u t. 3., I., samo neka je sada kota tla 5, a ceste 0, t. j. cesta je usječena u horizontalno tlo.* (Sl. 821.). (M = 1 : 500).

Konstrukcija ostaje ista kao u t. 9. (sl. 818.), tlocrt je također jednak, samo je poprečni presjek drugčiji.

5. Zadatak. *Na horizontalnom je tlu položena kosa cesta, koja je široka 6 m, a nagib joj je 1 : 10. S tla vodi na cestu 4 m širok prilaz, kojemu je*



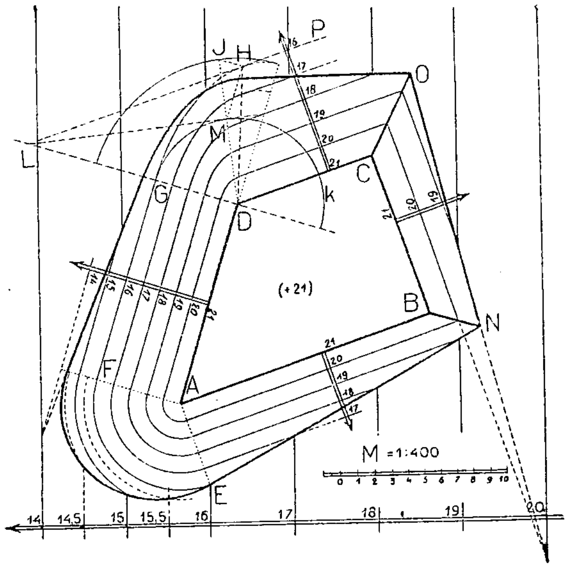
Sl. 823.

brid EF. Nagib je prilaza 1 : 4. *Konstruiraj sve nasipe s nagibom* 1 : 2 *i odredi njihove presjeke među sobom i s tlom.* Mjerilo slike 1 : 625 (sl. 822.).

Rješenje: Interval je ceste $i = 10$ ili u našem mjerilu 1.6 cm. Interval je nasipa jednak 2 ili u našem mjerilu 0,32 cm. Trokut EHC nije ovdje horizontalan, nego je nagnut tako, da je kota točke H 5, a točke C nepoznata. CE je presječnica između toga trokuta i ceste. Polumjer je stošca nagiba, kojemu je visina 5, jednak 10 m, ili u mjerilu 1 : 625, 1,6 cm. Polumjer stošca, kojemu je vrh C_1, iznosi 12 m ili u našem mjerilu 1,92 cm, jer točka C_1 imade kotu 6. Pravac PC_1 je slojnica 6 ravnine trokuta EHC. Trag JK uz brid HC_1 je zajednička izvanja tangenta osnovaka stožaca nagiba, kojima su vrhovi H i C_1. Sve ostalo je jasno iz slike.

6. Zadatak. *Tlo je predočeno kosom ravninom, kojoj je nagib 1 : 5. Preko tla vode dvije horizontalne ceste, koje se križaju, te je jedna ravna, a druga se savija u kružnom luku. Kota je obih cesta (12), a širina 4 m. Nagib je nasipnih obronaka 2 : 3, a usječnih 4 : 5.* Mjerilo slike 1 : 500. (Sl. 823.).

Rješenje: Nasipi uzduž ceste sijeku tlo u pravcima CLM i ANO. Stožasti nasip uzduž luka JGR, kojemu je vrh V okrenut prema dolje, siječe tlo u luku $JLNT$. Stožasti nasip uzduž luka KHP, kojemu je vrh S gore, siječe tlo u luku KMO. Stožasti nasipi sijeku ravne nasipe u lu-



Sl. 824.

kovima GL, EN, HM i FO. Slojnica (12) tla je usječna linija. U toj slojnici, a na mjestima AC i JK, sijeku ceste tlo, tako da su one prema dolje usječene u tlo.

7. Zadatak. *Konstrukcija završnih i spojnih stožastih obronaka. Zadana kosa ravnina, kojoj je nagib 1 : 5, predočuje koso tlo. Na tom tlu treba nasuti horizontalan plato, koji ima oblik trapeza, te mu je kota (21). Nasipe uzduž stranica* AB *i* AD *nagiba 1 : 1 treba spojiti sa stožastim nasipom, kojega prva dva nasipa dotiču u izvodnicama stošca. Nasipe uzduž stranica* DA *i* DC *treba također spojiti stožastim nasipom. Nagib je ravnina uzduž* BC *i* CD *2 : 3.* Mjerilo slike 1 : 400. (Sl. 824.).

Rješenje: Presjeke ravnina, položenih uzduž stranica trapeza $ABCD$ pod zadanim nagibom s tlom, odredimo na poznati način. Ravnine uzduž AB i BC sijeku se u pravcu EN, a ravnine uzduž BC i CD sijeku se u pravcu CO.

Ravnine uzduž AB i AC spojit ćemo sa stožastim nasipom. Te ravnine dotiču stožac u priklonicama AE i AF tih ravnina, a jer su te dvije ravnine jednakih nagiba, to su te priklonice, koje su ujedno izvodnice stošca, među sobom jednake, pa je stožac rotacioni s vrhom A. Tlocrti su slojnica stošca koncentrične kružnice. Ravnina, koja predočuje tlo, siječe stožac u elipsi. Pojedine točke te elipse dobijemo kao sjecišta jednako kotiranih slojnica stošca i tla.

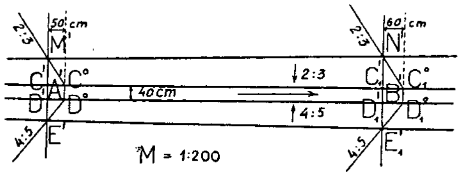
Ravnine uzduž DA i DC također spojimo stošcem. Budući da obje te ravnine imaju različiti nagib, a jer obje dotiču stožac, to je taj stožac eliptičan i uspravan. Vrh mu je u točki D. Ravnina uzduž DA neka dotiče stožac uzduž priklonice DG. Horizontalne ravnine sijeku stožac u elipsama, koje su koncentrične (središte D), slične i slično položene. Budući da ravnina uzduž DA ima veći nagib negoli ravnina uzduž DC, to male osi spomenutih elipsa padaju u tlocrt priklonice DG. Horizontalna ravnina Π_{16} siječe stožac u elipsi, kojoj je mala poluos DG. Jedna tangenta te elipse je slojnica HP. Diralište H te tangente dobijemo na slijedeći način: Malu os DG smatrajmo afinitetnom osi za elipsu i za kružnicu k opisanu oko D s polumjerom DG. Afinitetne su zrake usporedne s velikom osi elipse. Tangenta HP elipse siječe afinitetnu os u točki L. Tangenta LM potegnuta točkom L na kružnicu k je pridružena tangenta. Dirališta M i H jesu pridružene točke, koje leže u istoj afinitetnoj zraci. Okomica dakle potegnuta točkom M na DG siječe tangentu LP u točki H, koja je traženo diralište. Okomica u H na MH siječe DM u točki J, pa je DJ jednako velikoj poluosi elipse. Pošto imamo malu i veliku os elipse možemo je lako konstruirati. Ta je elipsa slojnica stošca.

DH je jedna izvodnica stošca. Uzduž te izvodnice ravnina γ dotiče stožac. Izvodnica DH siječe slojnice ravnine γ u točkama, koje su dirališta tih slojnica, te slojnica stošca. Budući da su te slojnice koncentrične te slične i slično položene elipse, lako ih je konstruirati, pošto smo već jednu konstruirali.

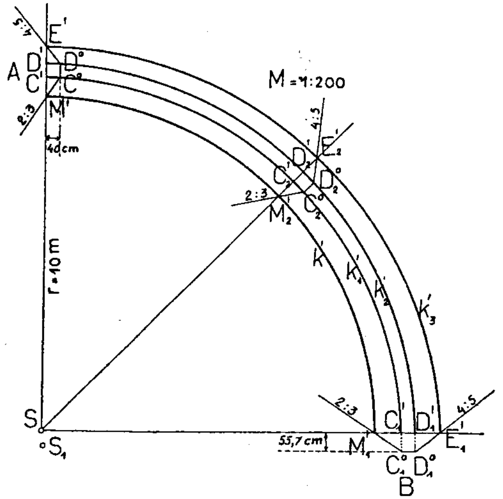
Ravnina ρ siječe taj stožac u elipsi. Pojedine točke te elipse dobijemo kao sjecišta slojnica stošca i jednako kotiranih slojnica ravnine ρ.

8. Odvodni jarci. Voda koja teče niz usječne obronke poplavila bi plato-e i ceste, a voda koja se s tla slijeva prema nasipnim obroncima podrovala bi ih, te bi se rušili. Da se to ne dogodi iskopaju se podno usječnih i nasipnih obronaka odvodni jarci, koji vodu skupljaju i odvode dalje. Tako bi na pr. u sl. br. 817 trebalo iskopati jarke oko plato-a u usjeku i uz obronke AGE i DKF, jer je tlo tako nagnuto, da se voda slijeva prema tim obroncima i to u smjeru priklonica od slojnica, koje imaju veću kotu, prema slojnicama, koje imaju manju kotu.

U sl br. 823. trebalo bi iskopati jarke u usjecima, zatim uz nasipe IGL, CGL. $NERT$, HDM i KHM. U sl. br. 824. trebalo bi iskopati jarke uz EN i NO, te eventualno i uz OH.



Sl. 825.



Sl. 826.

Odvodni jarci ne smiju biti horizontalni, već nešto nagnuti, da voda može otjecati. Kada je cesta nagnuta, onda su i jarci, koji teku usporedno s cestom, nagnuti. Ako je cesta horizontalna, onda bi i jarci, kad bi bili svuda jednake dubine, bili horizontalni, pa se u tom slučaju jarcima dade laki nagib Kad je tlo nagnuto, onda su jarci uz nasipne obronke obično nagnuti.

9. Konstrukcija jarka uz horizontalnu cestu. (Sl. 825). ($M = 1:200$). Neka je pad jarka 1 : 100, dubina kod A 50 cm, a širina dna svuda 40 cm. Nagib strane jarka do ceste neka je 2 : 3, a druge strane 4 : 5. Napravimo profil A sa dubinom od 40 cm, pa ćemo dobiti točke C^0, D^0 i E', koje projicirane natrag daju točke C', D' i E'. Tima točkama prolaze bridovi jarka. U daljini 10 m od M dubina jarka iznosi 60 cm, pa konstruiramo li profil s dubinom od 60 cm, dobit ćemo točke C^0_1, D^0_1 i E'_1, kojima je tlocrt C'_1, D'_1, i E_1' i kroz koje prolaze također bridovi jarka. Bridovi su jarka $M'N'$, $C'C'_1$, $D'D'_1$ i $E'E'_1$. Jarak je kod B gore širi nego kod A. Točke C', D', E' i C'_1, D'_1, E'_1 možemo također naći tako, da tražimo horizontalan razmak točaka C. D, E i C_1, D_1 i E_1 od brida MN. Ako je x horizontalan razmak točke C od MN, onda je:

$$x : 0{,}50 = 3 : 2, \text{ a odatle } x = 0{,}50 \cdot 3/2 = 0{,}75 \text{ m}.$$

Za horizontalan je razmak x_1 točke C_1

$$x_1 : 0{,}60 = 3 : 2, \quad x_1 = 0{,}60 \cdot 3/2 = 0{,}90 \text{ m}.$$

Nadalje je $C'D' = C'_1 D'_1 = 40$ cm.

Horizontalan je razmak točaka E i D $y = 0{,}50 \cdot 5/4 = 0{,}625$ m, a točaka E_1 i D_1 $y = 0{,}60 \cdot 5/4 = 0{,}75$ m.

10. Konstrukcija jaraka uz horizontalnu cestu, kojoj su bridovi kružni lukovi (sl. 826). ($M = 1:200$).

Neka je nagib jaraka 1 : 100, dubina kod A 40 cm, širina dna 40 cm. Nagib je strane jarka od ceste 2 : 3, a druge strane 4 : 5. Kod A postavimo profilnu ravninu okomito na brid ceste i konstruiramo profil A s dubinom 0,40 m, širinom dna 0.40 m i nagibom strane 2 : 3 i 4 : 5. Kroz točke M', C', D' i E' idu bridovi jarka. Sad konstruiramo profil B, koji je od profila A udaljen za 90°. Da možemo taj profil konstruirati, morali bismo znati dubinu jarka na tom mjestu. Tu ćemo pak dubinu naći, ako znamo dužinu kružnog kvadranta. Ta je dužina za $r = 10$ m.

$$l = \frac{r\pi\, 90}{180} = 15{,}71 \text{ m}.$$

Budući da jarak ima nagib 1 : 100, to je jarak kod B dublji za 0,1571 m negoli kod A, dakle će jarak biti kod B dubok 0,5571 metara. Kad to znamo možemo konstruirati profil B. Spustimo li s točaka C^0_1 i D^0_1 okomicu na SM_1 imamo točke C'_1 i D'_1; kroz te točke i kroz E'_1 idu bridovi jarka. Znog kontrole možemo izračunati kolike su dužine $M'_1C'_1$ i $D'_1E'_1$. Tako je $M'_1C'_1 = 0{,}5571 \cdot 3/2 = 0{,}8356$ m, $D'_1E'_1 = 0{,}5571 \cdot 5/4 = 0{,}6964$ m, $C'_1D'_1 = 0{,}40$ m.

Da nađemo točke C'_2, D'_2 i E'_2 kroz koje idu projekcije k'_1, k'_2 i k'_3 bridova jaraka nakon puta od 45° računajući od M, tražit ćemo aritmetičke sredine između dužina $M'C'$ i $M'_1C'_1$, te dužina $D'E'$ i $D'_1E'_1$, pa ćemo dobiti:

$$M'_2C'_2 = 1/2\,(M'C' + M'_1C'_1),\ C'_2D'_2 = 0.40 \text{ m},\ D'_2E'_2 = 1/2\,(D'E' + D'_1E'_1).$$

Krivulja je k'_1 zavojnica rotacionog stošca, kojemu je k jedna slojnica, a nagib njegovih izvodnica 2 : 3, k je također zavojnica rotacionog stošca, kojemu je baza (k_3) okrenuta prema gore, te mu je nagib izvodnica 4 : 5. Krivulje su k_1 i k_2 t. zv. konične spirale, koje se projiciraju kao Arhimedove spirale ($\rho = a\omega$). Za praktične svrhe mi možemo te projekcije smatrati lukovima, koji idu kroz tri točke, na pr. C', C'_1 i C'_2,....

Ako je dno jarka horizontalno, onda su kružnice k', k'_1, k'_2 i k'_3 koncentrične sa središtem u S.

Krivulja je k'_3 kružnica, koja leži u istoj horizontalnoj ravnini kao i k. Središte te kružnice je točka S_1.

11. Zadatak. *Zadano je tlo kosom ravninom ρ nagiba 1 : 4, zatim tlocrt $A'B'C'D'E'F'G'H'$ ceste, koja je na jednom mjestu proširena. Nagib je ceste 1 : 20, a širina 6 m. Cesta je djelomice nasuta, a djelomice usječena u tlo. Nagib je nasipnih obronaka 2 : 3, a usječnih 4 : 5. Prema potrebi treba smjestiti odvodne jarke. Nagib strane jarka do ceste neka je 1 : 2, a druge strane 4 : 5. Dubina je jarka svuda 40 cm, a širina dna 45 cm. Mjerilo slike 1 : 250. Neka se konstruiraju svi presjeci.* (Sl. 827.).

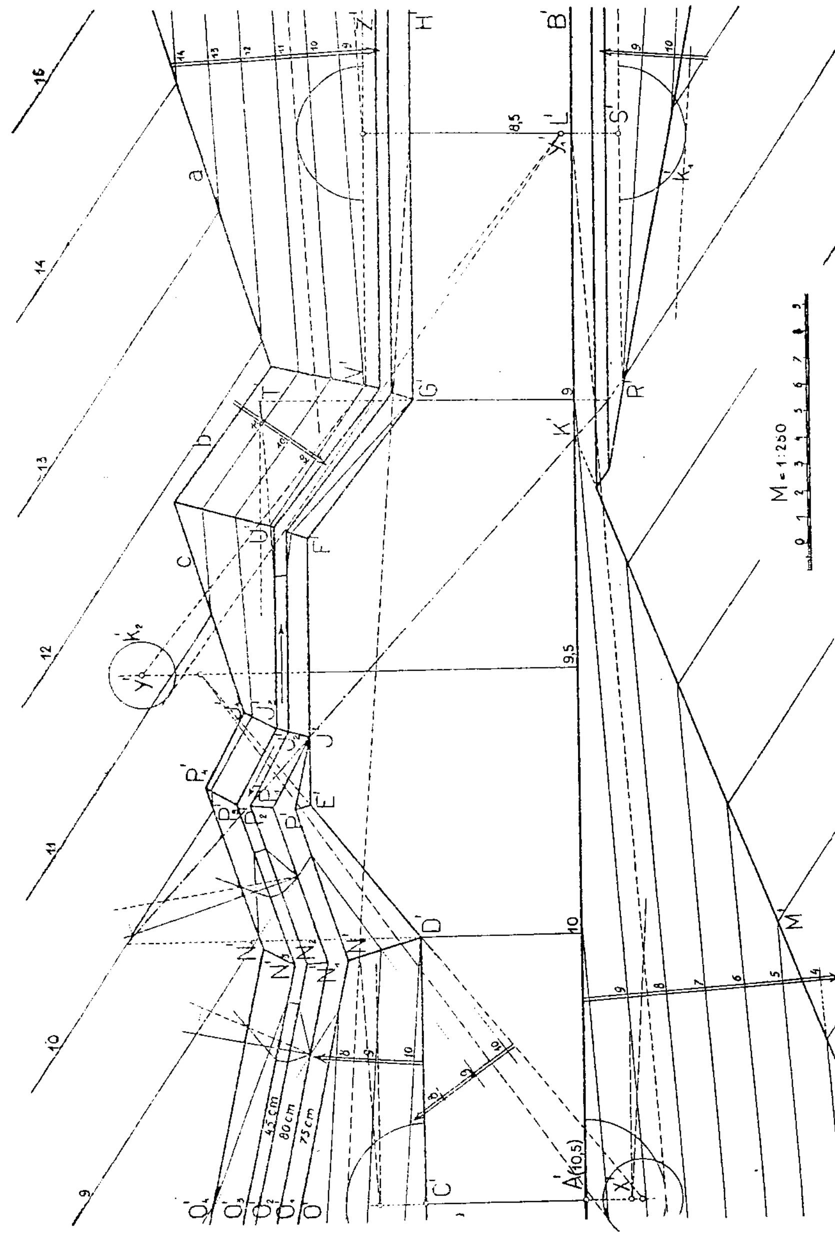
Rješenje: Najprije nacrtamo slojnice ravnine ceste. AB je jedna priklonica te ravnine. Slojnica, kojoj je kota (10), ide točkom D'. Budući da je nagib ceste 1 : 20, interval je mjerila nagiba 20, pa se to mjerilo može konstruirati i nacrtati slojnice. Nacrtali smo također slojnice 8,5, 9,5, 10,5. Sad odredimo presječnicu JK ravnine ceste s ravninom tla. Lijevo od te presječnice ili usječne linije cesta je nasuta, a desno od te linije cesta je usječena u tlo.

Uzduž AK, zatim uzduž $C'D'$, $D'E'$ i $E'J'$ položit ćemo nasipne obronke pod nagibom 2 : 3. Interval je mjerila nagiba tih obronaka 1,5. Da uzduž pravca AB položimo ravninu pod nagibom 2 : 3, uzet ćemo na tom pravcu točku A, kojoj je kota 10,5, kao vrh rotacionog stošca, kojemu je nagib izvodnica 2 : 3. Taj ćemo stožac sjeći ravninom, kojoj je kota 8,5. Visina je dakle stošca jednaka 2 m, a polumjer baze 3 m. S točke L'(8.5) povucimo na tu kružnicu onu tangentu, koja padne izvan ceste. Ta je tangenta slojnica nasipnog obronka. Njezina je kota 8,5. Mjerilo nagiba tražene ravnine nasipnog obronka lako je sada konstruirati. Presječnicu $K'M'$ nasipnog obronka i tla dobijemo na poznati način.

Na sličan način konstruiramo nasipne obronke uzduž CD, DE i EJ, te njihove presjeke među sobom i tlom. Budući da su ravnine uzduž CD i EJ među sobom usporedne, one sijeku tlo u usporednim pravcima; dakle je $J'P' \parallel N'O'$.

Uzduž ceste u usjeku moraju se iskopati odvodni jarci, pa se usječni obronci moraju za gornju širinu jaraka usporedno odmaknuti od ceste. Tu širinu izračunamo kao u t. 9; ona iznosi $0{,}80 + 0{,}45 + 0{,}50 = 1{,}75$ m. Tako dobijemo pravce $R'S'$, $T'U'$, $U'V'$ i $V'Z'$, koji su u istoj visini i usporedni s cestom i uz koje treba položiti usječne obronke, odnosno usječne ravnine pod nagibom 4 : 5.

Da položimo ravninu uz RS, uzet ćemo na slojnici 8,5 ceste točku S' kao vrh rotacionog stošca, čije izvodnice imaju nagib 4 : 5. Taj ćemo sto-



Sl. 827.

žac sjeći ravninom, kojoj je kota 10,5, u kružnici k'_1. Pošto je visina stošca jednaka 2 m, polumjer je kružnice k_1 2 : 4/5 = 2,5 m. Produžimo li $S'R'$ do X' na slojnici 10,5, te s te točke položimo na k'_1 onu tangentu, koja padne dalje od ceste, to je ta tangenta slojnica 10,5 usječne ravnine uzduž RS. Mjerilo je nagiba okomito na tu slojnicu, a interval mu je 1,25. Pošto smo konstruirali glavne slojnice te ravnine, lako je odrediti njezin presjek s tlom.

Na sličan način položimo usječne ravnine uzduž TU, UV, i VZ i odredimo presjeke tih ravnina među sobom i s tlom. Kod toga imademo olakšicu, da je presječnica c usporedna s presječnicom a. Spomenut ćemo još, da je točka Y', koja je tlocrt vrha rotacionog stošca, u sjecištu slojnice 9,5 ceste i pravca $U'V'$. Visina je toga stošca 1, a polumjer osnovke k'_2 1,25. Na tu kružnicu položimo s točke Y'_1, u kojoj $U'V'$ siječe slojnicu 8,5, tangentu, koja je bliža cesti. Ta je tangenta slojnica 8,5 usječne ravnine uzduž UV.

Jarak uzduž $K'B'$ konstruiramo tako, da potegnemo dva usporedna pravca s $K'B'$, a u daljini od 0,80 *m* i 1,25 *m*. Ta dva pravca označuju bridove dna jarka, koje je široko 0,45 *m*. Jarak produžimo sve do nasipa MKA i završimo sa pravcem, koji je usporedan s pravcem $K'J'$. U tom se pravcu siječe dno i tlo.

Kako voda na tlu teče u smjeru priklonica, to se ona ne slijeva prema nasipu MKA, pa uz njega ne treba polagati jarak.

U usjeku s druge strane ceste nacrtamo bridove dna jarka. Usječne su ravnine produžene sve do dna jarka.

Kako se voda s tla slijeva prema nasipnim obroncima uzduž JE, ED i DC, treba podno tih obronaka iskopati jarke, da se voda dalje odvede.

Od točke J prema točki H odvodni jarci usporedni su s cestom, a kako je cesta nagnuta prema desnoj strani, teći će i voda u jarcima u tom smjeru. Lijevo od točke J jarci su usječeni u tlo 40 *cm* duboko, a kako ti jarci teku od J prema slojnicama tla koje imadu manje kote, to se i jarci od točke J spuštaju na lijevu stranu, pa će u tom smjeru i voda teći u tim jarcima.

Usječni obronak jarka, koji je do nasipa, ne počinje odmah uz nasip, nego se između jarka i nasipa ostavi slobodnog tla u širini od 0,50 *m* do 1 *m*, ili se tome tlu dade nagib 1 : 10. Mi smo uzeli slobodno tlo u širini od 0,75 *m*. To se slobodno tlo ostavi zato, da voda, koja teče jarkom ne podruje nasip, i da se na njemu zaustavi zemlja, koja se eventualno odroni od nasipa. Jarak uz nasip ima isti nagib kao i tlo između jarka i nasipa.

Najprije nacrtamo pravce $O_1'N_1'$, $O_2'N_2'$ i $O_3'N_3'$ usporedno sa $O'N'$ te $N_1'P_1'$, $N_2'P_2'$ i $N_3'P_3'$ usporedno s $N'P'$, koji su redom među sobom udaljeni, kako je na slici naznačeno: t. j. 75 *cm*, 80 *cm* i 45 *cm*. Točke P_1', P_2' i P_3' nalaze se u simetrali kuta $N_1'P_1'J_1'$, a točke J_2' i J_3' u simetrali kuta $P_1'J'F'$. Sada potegnemo u daljini od 80 *cm* $J_2'P_2'$ i $J'P_1'$, te u daljini od 45 *cm* $J_3'P_3' \| J'P_1'$. Točku P_1' dobijemo kao presjek pravca $N_1'P_1'$ i $P_1'J'$ a pravac $P_1'J'$ tako, da bude udaljen od točke P' za 0,75 *cm*.

Sada još treba uzduž bridova J_3P_3, P_3N_3 i N_3O_3 položiti usječne ravnine pod nagibom 4 : 5, te ih sjeći među sobom i tlom. Presječnice s tlom $J_4'P_4'$, $P_4'N_4'$ i $N_4'O_4'$ možemo odrediti pomoću profila, koje postavimo okomito na osi jarka. Profil jarka i tla sijeku se u točki kroz koju ide dotična presječnica. Na sličan način dobijemo presječnice $O_4'N_4'$ i $P_4'J_4'$.

Jarak je najviši na mjestu $J_2'J_3'$.

U slici smo nacrtali i slojnice u jarcima. Slojnice usječnih ravnina jaraka sijeku bridove dna u točkama, kroz koje idu slojnice dna. Intervali su tih slojnica jednaki intervalima pravaca $J'P_1'$, $P_1'N_1'$ i $N_1'O_1'$, koji su u ravnini tla, odnosno u usjeku ceste.

§ 237. Topografske plohe

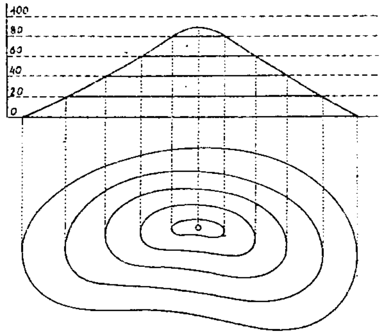
1. O predočivanju topografskih ploha projekcijom.

Svaki se omeđeni dio zemljine površine zove topografska ploha, tlo ili teren. Za projektiranje i gradnju cesta, željeznica, kanala i inih drugih radnja, kod kojih se moraju izvesti nasipi ili prosjeci prirodnog terena, potrebno je potanje poznavanje toga terena, te što točnija predodžba slikom.

Površinu bismo Zemlje predočili slikom (grafički), kad bi je ortogonalno projicirali na srednji Zemljin elipsoid, t. j. na površinu morsku, za koju pomišljamo da se proteže ispod kopna. (Idealna površina Zemlje). U tom se slučaju smjer zraka projiciranja podudara sa smjerom sile teže, one dakle prolaze središtem Zemlje, pa bi prema tome projekcija Zemlje na srednji elipsoid zapravo bila centralna projekcija. No projiciramo li manji dio terena, onda možemo dio plohe srednjeg elipsoida, na koji se ima da projicira taj teren, smatrati ravnim, a zrake projiciranja možemo uzeti da su među sobom usporedne, pa se tako projiciranje manjeg dijela terena može smatrati ortogonalnim. Teren dakle projiciramo ortogonalno na horizontalnu ravninu, koja se podudara sa dijelom površine morske, za koju se pomišlja da se proteže ispod terena. Uz projekcije pojedinih točaka površine terena dodajemo brojeve (kote), koji naznačuju udaljenosti tih točaka od ravnine projekcija. Topografske se plohe predočuju kotiranom projekcijom. Površina morska ima kotu 0, te se zove nulta ili glavna horizontalna ravnina.

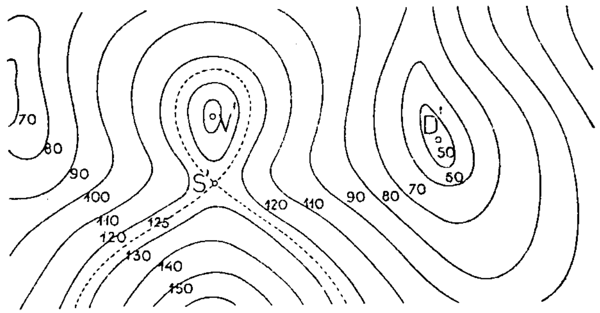
2. Slojnice. (Sl. 828.). Siječemo li teren horizontalnim ravninama, koje su među sobom jednako udaljene, dobivamo nepravilne zatvorene krivulje, koje se zovu *slojnice* ili *nivo-linije*. Slojnice, koje su povrh glavne horizontalne ravnine, zovu se *izohipse* ili *visinske slojnice*, a slojnice, koje su ispod te ravnine zovu se *izobate* ili *dubinske slojnice*. Horizontalne ravnine, kojima teren siječemo, zovu se *slojnične ravnine*. Međusobna udaljenost slojničnih ravnina iznosi 1 metar ili mnogokratnik metra. U sl. 828. iznosi ta udaljenost 20 *m*.

Slojnice projiciramo u umanjenom mjerilu. Projekcije su slojnica krivulje, koje su slične slojnicama u prostoru. Uz projekcije slojnica napišemo kote, koje naznačuju koliko su metara te slojnice udaljene od glavne horizontalne ravnine.



Sl. 828.

Teren se obično prikazuje slojnicama, koje imaju cijele kote. Takove se slojnice zovu *glavne slojnice*. Da se nacrtaju te slojnice, moraju se u samom terenu odrediti visine (kote) dovoljnog broja točaka toga terena obzirom na glavnu ili koju drugu horizontalnu ravninu. Kote su tih točaka uopće decimalni brojevi, pa se poslije u slici odrede interpolacijom projekcije onih točaka, koje imaju cijele kote. Spojimo li tada sve točke, koje imaju cijele i jednake kote, krivuljama, imamo slojnice terena. Naravno da te krivulje samo približno odgovaraju krivuljama, u kojima bi horizontalne ravnine uistinu sjekle teren.



Sl. 829.

Ako razmak slojničnih ravnina uzmemo dovoljno malenim, tako da između dviju i dviju susjednih slojnica nema jače promjene oblika terena, ako nadalje odredimo najviše i najniže točke terena i nadodamo im kote,

onda smo projekcijom slojnica i tih osobitih točaka terena dobili prilično jasnu sliku toga terena.

Određivanje visina (kota) točaka u terenu zadatak je geodezije.

3. Vrhunci, dolinske točke i sedla terena. (Sl. 829.).

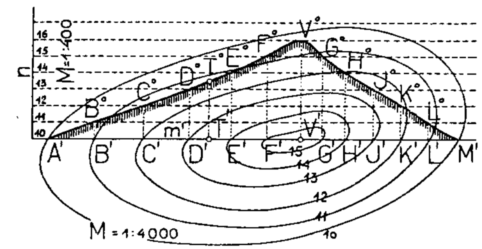
Točke terena, koje su više nego okolne točke terena, zovu se vrhunci, a točke koje leže niže nego okolne točke, zovu se dolinske točke terena. Točke u kojima se sijeku slojnice iste visine zovu se sedla, jer teren ima na takovim mjestima oblik sedla. Na sl. 829. točka je V' projekcija vrha, a točka D' projekcija dolinske točke. Slojnica 125 siječe sama sebe u točki S', pa je ta točka sedlo terena. Horizontalne ravnine u vrhu, u dolinskoj točki i u sedlu dotiču teren u tim točkama.

Topografska ploha može imati više vrhunaca jednakih ili različitih visina. Isto tako može ta ploha imati više dolinskih točaka iste ili različite dubine. Na nekom dijelu terena može biti dolinskih točaka, koje leže više nego li neki vrhunci.

4. Presjek topografske plohe vertikalnom ravninom.

Na sl. 830. prikazan je teren s kotiranim slojnicama. Vertikalna je ravnina položena vrhom V i ona siječe horizontalnu ravninu, kojoj je kota 10 (Π_{10}), u pravcu m'. U taj pravac projicira se i presjek terena s vertikalnom ravninom. Prevalimo li tu vertikalnu ravninu oko pravca m' u ravninu Π_{10}, dobit ćemo pravi oblik presjeka. Takav se presjek zove *profil*.

Humak, koji je na sl. 830. predočen slojnicama, crtan je u mjerilu 1 : 4000. Vrh se toga humka izdiže nad Π_{10} 6 *m*. Kad bismo visinu toga humka htjeli reducirati prema mjerilu 1 : 4000, ta bi visina iznosila samo 1,5 *mm*. Ta je dužina premalena, a da bi mogli nacrtati profil humka.



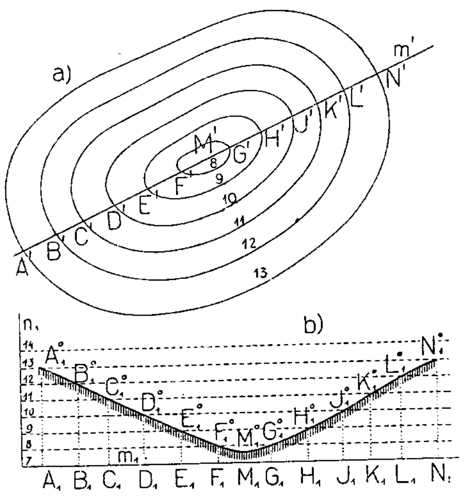
Sl. 830.

Zato kod crtanja profila uzimamo visine 5, 10, 20, . . . puta veće, negoli bi ih prema mjerilu slike morali uzeti. U našoj slici uzete su visine 10 puta veće. Na taj se način dobije krivulja, koja je afina s pravom krivuljom profila.

Krivulja profila dobije se na taj način, da se gdje god povuče pravac $n \perp m'$ i na taj pravac prenesu počevši od m', jedinice sa mjerila za visine, u našem slučaju sa mjerila 1 : 400. Dijelištima pravca n povučemo paralele 11, 12, 13, . . . s pravcem m'. Ako sad u točkama B', C', D' . . . u kojima pravac m' siječe slojnice, povučemo okomice na pravac m', one sijeku spomenute paralele u točkama B^0, C^0, D^0 . . . Spojimo li točke A', B^0, C^0, D^0 . . . krivom linijom, ta nam linija prikazuje profil terena, gdje su visine 10 puta povećane.

Iz profila možemo zaključivati o položitosti terena, gdje su slojnice najbliže, tu je teren najstrmiji, a gdje su slojnice udaljenije jedna od druge, tu je teren položitiji.

Ako je zadana projekcija T' neke točke T, koja leži u profilnoj ravnini, njezin položaj T^0 leži na profilnoj krivulji (sl. 830.).



Sl. 831.

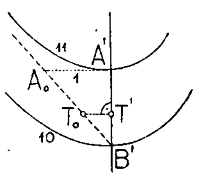
Na sl. 831. a) nacrtane su slojnice jedne drage, pa je kroz najnižu točku M (dolinska točka) položena vertikalna ravnina i njom sječen teren. Ta ravnina siječe horizontalnu ravninu Π_7 u pravcu m', u koji se projicira profilna ravnina. Mi smo profilnu krivulju nacrtali na strani u sl. 831. b). Povukli smo pravac m_1 i na nj smo nanijeli dužine $A_1B_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, . . . , zatim smo povukli pravac $n_1 \perp m_1$, i na nj smo prenijeli, počevši od pravca m_1 koji ima kotu 7, jedinice sa mjerila za visine, nadalje smo dijelištima 8, 9, 10, . . . povukli paralele s pravcem m_1. Napokon smo u točkama A_1, B_1, C_1, . . . postavili okomice na m_1, odredili na paralelama točke A^0_1, B^0_1, C^0_1, . . . i spojili te točke krivom linijom. Ta je linija profilna krivulja terena.

5. Umetanje točaka i slojnica. (Sl. 832.).

Prvi zadatak. *Zadana je projekcija T' točke T terena, neka se odredi kota te točke!*

Rješenje. Zadanom točkom T položi se koja god vertikalna ravnina, odredi profil i u njemu točka T^0 (sl. 830.). Ako se izmjeri na mjerilu za visine dužina $T'T^0 = 3{,}4$, onda je kota točke T jednaka koti točke A više $T'T^0$, dakle

$$TT' = 10 + 3{,}4 = 13{,}4 \text{ m}.$$



Sl. 832.

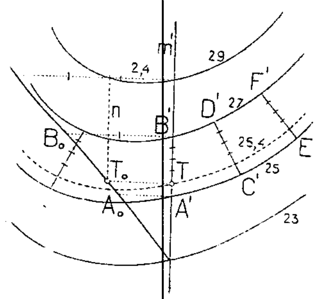
Da se dobije kota točke T, kojoj je zadana projekcija T' (sl. 832.) može se i ovako postupati: Točkom T položimo profilnu ravninu tako, da je po mogućnosti okomita na dvije susjedne slojnice, tražimo presjek tih

slojnica s profilnom ravninom i sjecišta A i B spojimo ravnom crtom. Dužinu AB smatramo presjekom terena između susjednih slojnica, pa možemo uzeti, da točka T leži na toj dužini. Prevalimo li profil u ravninu niže slojnice oko $A'B'$, dobijemo pravokutan trokut, u kojemu je jedna kateta $A'B'$, a druga $A'A^0$ mjerena na mjerilu za visine. Točka T padne u točku T^0 na hipotenuzi A^0B'. Ako je $T'T^0 = 0{,}4$ (mjereno na mjerilu za visine), tada je kota točke T jednaka $10 + 0{,}4 = 10{,}4$ m.

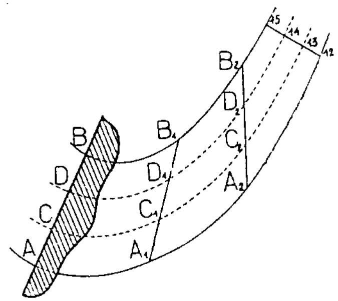
Ovaj postupak nije dovoljno točan, no često puta kod praktičnih zadataka zadovoljava posvema.

Drugi zadatak. *Neka se odredi projekcija točke zadanog terena, kojoj je zadana kota* (25,4)!

Rješenje. Ima mnogo točaka, koje imaju kotu 25,4, a sve leže na jednoj slojnici terena, koja ima istu kotu. Da dobijemo projekciju jedne takove točke, postupamo ovako: Na mjestu gdje ima da leži točka, postavimo profilnu ravninu i prevalimo profil u ravninu slojnice 23 (sl. 833.).



Sl. 833.



Sl. 834.

Na profilnoj krivulji leži točka T_0, a udaljena je od pravca m' za dužinu $25{,}4 - 23 = 2{,}4$. Povučemo li prema tome pravac $n \parallel m'$ u daljini 2,4, pravac n siječe profilnu krivulju u točki T_0. Spusti li se s točke T_0 okomica T_0T' na pravac m', imamo tlocrt T' točke T, kojoj je kota 25,4.

Kad se ne radi o velikoj točnosti, može se kod praktičkih zadataka dio profila između slojnica 25 i 27 smatrati ravnim, pa imamo razmjer:

$$A_0T_0 : T_0B_0 = (T_0T' - A_0A') : (B_0B' - T_0T') = (25{,}4 - 25) : (27 - 25{,}4) = 0{,}4 : 1{,}6 = 1 : 4.$$

t. j. razdijelimo li dužinu A_0B_0 na pet jednakih dijelova, u prvom djelištu A_0 leži točka T_0.

Budući da je i $A'T' : T'B' = 1 : 4$, može se točka T' odrediti na slijedeći način: Povuče se dužina $A'B'$, po mogućnosti okomito na susjedne slojnice 25 i 27, i ta dužina razdijeli u omjeru 1 : 4, t. j. na pet jednakih dijelova, pa je u prvom dijelištu do A' točka T'.

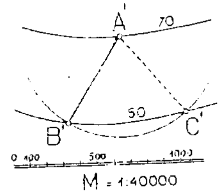
Treći zadatak. *Neka se između slojnica 25 i 27 zadanog terena umetne slojnica, kojoj je kota 25,4* (sl. 833.).

Rješenje: Ako se na način prikazan u slici 832. odrede projekcije više točaka kojima je kota 25,4, pa se te točke spoje krivuljom, koja se vijuga poput slojnice 25, ta je krivulja umetnuta (interpolirana) slojnica 25,4. Najlakše i najbrže odrede se točke slojnice 25,4 tako, da se na više mjesta povuku između slojnica 25 i 27 dužine $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$...., koje su na slojnicama okomite i te dužine razdijele u omjeru 1 : 4.

Ako se ne radi o velikoj točnosti i ako slojnice nisu odviše zakrivljene mogu se slojnice umetati na slijedeći način: Na sl. 834. zadane su dvije slojnice 12 i 15, pa između tih slojnica treba umetnuti slojnice 13 i 14. Na najširem mjestu između slojnica prislonimo odrezak papira kao na sl. 834., označimo na tom odresku točke A i B, koje leže na slojnicama, i dužinu između tih točaka razdijelimo na tri jednaka dijela. Uz ta djelišta označimo na slici točke C i D. Sad odrezak papira prislonimo na slici na različitim mjestima A_1B_1, A_2B_2,... tako, da krajnje točke A i B padnu na slojnice 12 i 15 i svaki put uz oba djelišta C i D označimo na slici točke. Ako te točke spojimo krivuljama, imamo umetnute slojnice 13 i 14. Na mjestima, gdje su slojnice dosta blizu i gdje su jako zakrivljene, treba umetnuti dužine okomito na te slojnice i razdijeliti ih na tri jednaka dijela. Na taj se način dobiju na tim mjestima točnije točke umetnutih slojnica.

Bilješke. Slojnice se umeću onda, kada su zadane slojnice dosta razdaleko, a radi se o tome, da se konstrukcije, koje se u zadatku traže, što točnije izvedu.

6. Zadatak. *Dvije zadane slojnice 50 i 70 treba spojiti ravnom linijom, kojoj je nagib* $n = 1 : 30$. Mjerilo slike M = 1 : 40000. (Sl. 835.).



Sl. 835.

Neka je na slojnici 70 zadana točka $A[A'(70)]$. Tu točku treba spojiti s točkom $B[B'(50)]$, koja je na slojnici 50 tako, da dužina AB ima nagib 1 : 30.

Znamo, da se horizontalni razmak $h = A'B'$ točaka A i B odnosi prema visinskoj razlici tih točaka kao $1/n : 1$, ili $h \cdot v = i : 1$, odakle je

$$n = A'B' = v \cdot i = 20 \cdot 30 = 600 \text{ m}.$$

Ako se dakle oko A' opiše kružnica s polumjerom od 600 m, ona siječe slojnicu 50 u točkama B' i C'. Slojnica $A'B'$ ili $A'C'$ je projekcija tražene dužine.

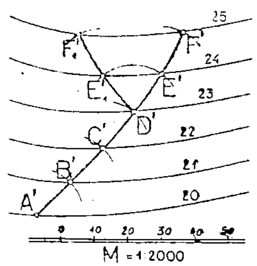
Zadatak ima dva rješenja, jedno rješenje ili nijedno rješenje prema tome, da li kružnica opisana oko A' siječe slojnicu 50 u dvije realne točke,

dotiče u jednoj točki ili ne siječe i ne dotiče. Naša zadaća ima dva realna rješenja.

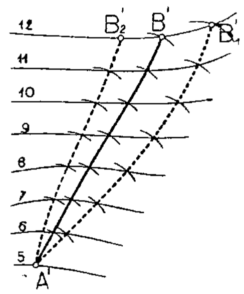
7. Zadatak. *Na zadanom terenu neka se odredi linija, koja počinje u točki $A[A'(20)]$ i ima konstantan nagib $n = 1 : 14$ (linija konstantnog nagiba).* Mjerilo slike M = 1 : 2000. (Sl. 836.).

Rješenje: Ovdje se po više puta rješava zadatak iz t. 6. Budući da je visinska razlika slojnica jednaka 1 m, to je $h = i = 14$ m. Opiše li se oko točke A' luk s polumjerom od 14 m, on siječe slojnicu 21 u točki B', a opiše li se oko točke B' luk s istim polumjerom, on siječe slojnicu 22 u točki C' i t. d. Spojimo li točke A', B', C',.... krivom linijom, imamo projekciju linije konstantnog nagiba 1 : 14.

Budući da lukovi, opisani oko točaka A', B', C',... sijeku slijedeću višu slojnicu u dvije točke, tad se vidi, da svakom točkom terena idu na tom terenu po dvije linije konstantnog nagiba. Mi smo mogli od točke D' okrenuti nalijevo, pa bi krivulja $A'B'C'D'E_1'F_1'$ također bila projekcija jedne linije konstantnog nagiba 1 : 14. Ta bi linija imala kod točke D zaokret (serpentinu).



Sl. 836.



Sl. 837.

8. Zadatak. *Zadan je teren s kotiranim slojnicama i u tom terenu dvije točke $A[A'(5)]$ i $B[B'(12)]$, neka se na terenu odredi linija konstantnog nagiba, koja spaja točke A i B.*

I. Nagib linije nije zadan. (Sl. 837.).

Budući da nije poznat nagib linije, nije poznat ni interval i te linije. Da se odredi projekcija linije konstantnog nagiba, uzme se u šestilo povoljan interval, i pomoću njega odredi projekcija linije konstantnog nagiba, koja počinje u točki A'. Ako smo interval dobro odabrali, ta će linija završiti u točki B'. Ako je odabrani interval bio prevelik, linija je završila recimo u točki B'_1, a ako je taj interval uzet premalen, linija je završila u točki B'_2. Mi dakle određujemo interval pokusom, dok napokon ne nađemo takav interval, za koji će projekcija tražene linije ići točkama A' i B'.

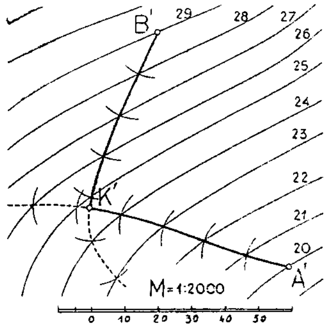
*

II. Zadan je nagib linije $n = 1 : 13$. (Sl. 838). (M = 1 : 2000).

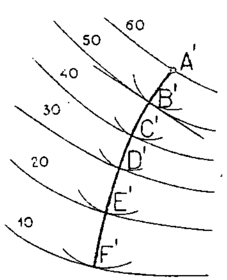
Da se odredi linija konstantnog nagiba, koja ide točkama A i B te joj je nagib 1 : 13, uzet će se u šestilo interval 13 m i pomoću njega konstruirat će se projekcija jedne linije, koja izlazi iz A' i ide prema gore, te projekcija druge linije, koja izlazi iz B' i ide prema dolje. Obje se te linije sijeku u točki K', pa je $A'K'B'$ projekcija tražene linije. Ta linija ima u točki K' zaokret.

9. Linije najvećeg nagiba (padnice ili prikloničNe linije). (Sl. 839.).

Znamo, da je nagib dužine $n = v/h$, gdje je h horizontalni, a v vertikalni razmak krajnih točaka te dužine. Budući da je vertikalni razmak, odnosno visinska razlika v između dviju i dviju slojnica zadanog terena konstantna, vidi se, da nagib dužine AB zavisi o horizontalnom razmaku



Sl. 838.



Sl. 839.

h. Što je manja dužina h, to je veći nagib. Uzme li se na nekoj slojnici terena točka A'[A' 60)], pa tu točku spojimo s onom točkom B slojnice 50, koja je nabliža točki A, onda dužina AB ima veći nagib negoli ijedna druga dužina, kojom bi se točka A mogla spojiti s bilo kojom drugom točkom slojnice 50. Točka B može se dobiti tako, da se oko točke A' opiše kružni luk, koji dotiče slojnicu 50; točka B' nalazi se u diralištu. Ako se u točki B' povuče tangenta na kružni luk, ona dotiče i slojnicu 50 u toj točki. Budući da je $A'B'$ okomito na toj tangenti, kaže se, da je $A'B'$ okomito na slojnici 50. Dužina $A'B'$ zove se priklonica ili padnica.

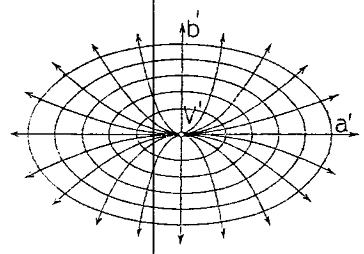
Ako se oko točke B' opiše luk, koji dotiče slojnicu 40 u točki C', zatim oko točke C' opiše luk, koji dotiče slojnicu 30 i t. d., pa se spoje točke A', B', C', . . . krivom linijom, ta se linija zove linija najvećeg nagiba, padnica ili priklonična linija. U smjeru tih linija teče voda po terenu.

Kroz vrh ili dolinsku točku terena ide neizmjerno mnogo padnica. Padnica, koja izlazi iz vrha svršava u dolinskoj točki.

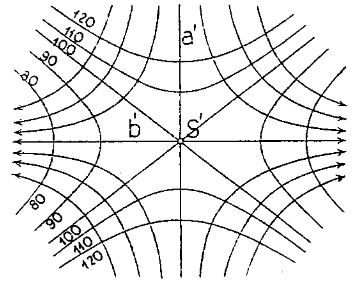
U blizini vrhova i dolinskih točaka slojnice imadu oblik elipse. Između svih padnica, koje idu vrhom V (sl. 840.), ima dvije osobite padnice. Jedna a' ide u smjeru velike osi elipse, a druga b' ide u smjeru male osi. Sve padnice, koje izlaze iz vrha, idu smjerom velike osi, a odalečuju se na obim stranama od padnice a. Projekcije tih padnica imaju oblik parabole. Padnica a zove se greben ili razvodnica (vododelnica).

U blizini sedala imaju slojnice oblik hiperbole (sl. 841.). U smjeru osi tih hiperbola idu dvije padnice a i b. Tlocrti padnica imaju oblik hiperbola, te se asimptotički približuju linijama a' i b'. Što su slojnice terena niže, to se padnice više približuju padnici b. Voda s terena teče prema padnici b i u smjeru te padnice nalaze se prirodna korita potoka i rijeka. Padnica b zove se dolinska padnica (dolinski put). Padnica a je razvodnica (vododelnica).

10. Šrafiranje. Mi već znamo, da je teren strmiji tamo gdje su slojnice bliže, a položitiji tamo gdje su slojnice udaljenije jedna od druge.



Sl. 840.



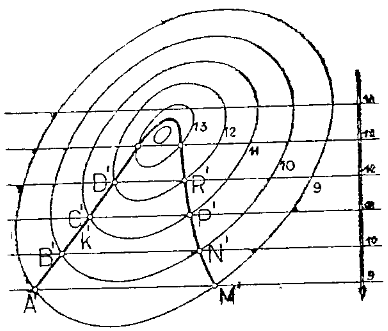
Sl. 841.

Da se oblik terena još zornije prikaže, slika se terena šrafira t. j. iscrta se potezima, koji idu u smjeru priklonica i koji su deblji ili tanji, kraći ili duži prema skali, koja je u tu svrhu složena. Gdje su potezi kraći i deblji, tamo je teren strmiji, a gdje su ti potezi duži i tanji, tu je teren položitiji.

11. Presjek topografske plohe kosom ravninom. Topografska je ploha zadana s kotiranim slojnicama, a kosa ravnina sa svojim mjerilom nagiba (sl. 842.). Potegnemo li slojnice ravnine, one sijeku slojnice terena, koje imaju iste kote u traženim točkama terena. Spojimo li te točke krivom linijom k', imamo projekciju presjeka.

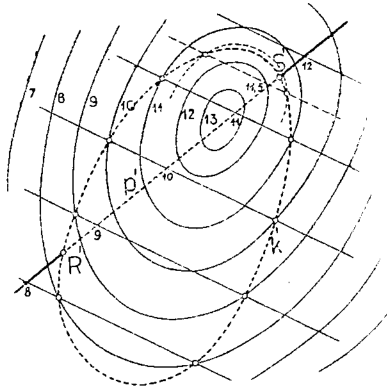
12. Presjek pravca i topografske plohe. Topografska je ploha zadana s kotiranim slojnicama, a pravac p svojom projekcijom p' i intervalom (sl. 843.). Da odredimo presjek pravca i topografske plohe, položimo tim pravcem kakvu god ravninu i njom siječemo topografsku plohu u krivulji k. Točke R i S, u kojima presječna krivulja k siječe pravac p, jesu tražene točke presjeka (k' siječe p' u točkama R' i S'). Vidljivi dio pravca treba izvući punom crtom, a nevidljivi dio, koji je ispod terena, crtkano.

13. Presjek krivulje i topografske plohe. Topografska je ploha zadana s kotiranim slojnicama, a krivulja svojom projekcijom k' i kotama nekoliko svojih točaka (sl. 844.). Ako se na krivulju k prisloni horizontalan pravac, pa se taj pravac skliže po krivulji, tako da ostane usporedan sa svojim položajem, tada on opiše valjkastu plohu, kojoj su izvodnice horizontalne i koje imaju iste kote kao i točke krivulje k, kroz koje te izvodnice prolaze. Izvodnice valjkaste plohe sijeku slojnice terena, koje imaju jednake kote kao i izvodnice, pa ako spojimo ta sjecišta krivom linijom, imamo presječnu krivulju terena i valjkaste plohe. Presječna krivulja s siječe zadanu krivulju k u traženoj točki S.

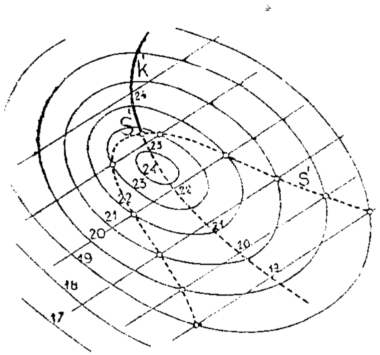


Sl. 842.

Budući da su izvodnice valjkaste plohe među sobom usporedne, one se projiciraju kao usporedni pravci, a jer su horizontalne, možemo ih smatrati slojnicama valjkaste plohe. Točke u kojima projekcije izvodnica sijeku



Sl. 843.



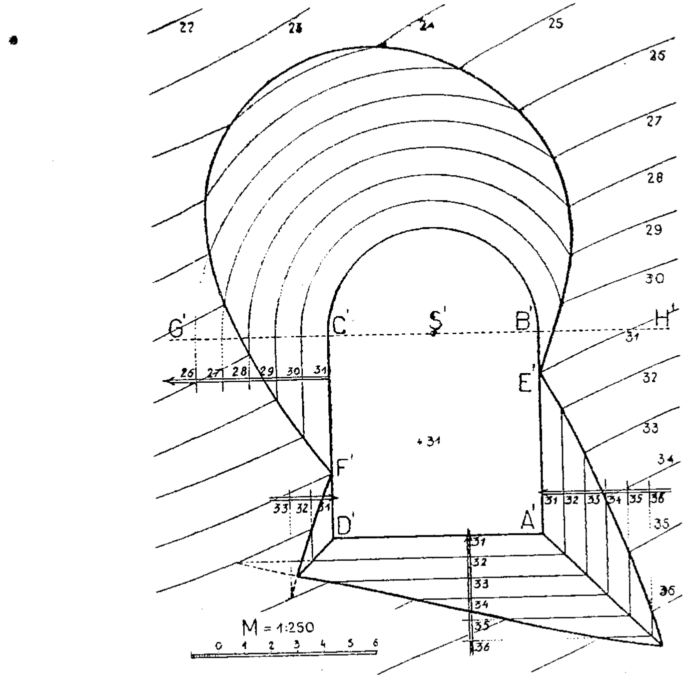
Sl. 844.

projekcije jednako kotiranih slojnica terena, jesu točke krivulje s'. Krivulja s' siječe krivulju k' u točki S'.

14. Konstrukcija plato-a na zadanom terenu. *Zadan je teren kotiranim slojnicama, neka se na tom terenu sagradi horizontalan plato, koji se sastoji iz pravokutnika* ABCD (A'B'C'D') *i polukruga, kojemu je središte točka*

S(S') *i kojemu je promjer* BC(B'C'). *Kota je platoa* + *31.* (Sl. 845.). *Slojnica 31 terena siječe bridove plato-a u točkama* E *i* F (E'F'). *Plato je s jedne strane te slojnice nasut, a s druge strane usječen u teren. Nagib je nasipa* $n = 1$, *a nagib usjeka je* $n_1 = 5 : 4$. Mjerilo je slike M = 1 : 250.

Budući da su ravni bridovi plato-a horizontalni, oni su ujedno slojnice 31 nasipnih i usječnih ravnina. Mjerila su nagiba tih ravnina okomita na ravnim bridovima plato-a. Intervali su mjerila nagiba nasipnih ravnina uzduž bridova EB i FC jednaki $i = 1$, a interval usječnih ravnina uzduž



Sl. 845.

bridova AE, AD i DF je $i_1 = 4/5$. Pošto se konstruiraju mjerila i povuku slojnice ravnina, odrede se svi presjeci terena s tim ravninama i presjeci usječnih ravnina među sobom.

Nasip uzduž polukruga imat će oblik rotacionog stošca. Slojnice su tog stošca koncentrične kružnice (središte S'), kojima je razmak $i = 1$. Nasipna ravnina uzduž brida FC dotiče stožac duž izvodnice CG ($C'G' \perp F'C'$), a nasipna ravnina uzduž brida EB dotiče stožac duž izvodnice BH ($B'H' \perp E'B'$). Slojnice tih ravnina dotiču polukružne slojnice stošca u točkama, koje leže na dirnim izvodnicama VG i BH. Sad se još treba odrediti presjek stošca s terenom. Slojnice stošca i terena, koje imaju iste kote, leže u istim horizontalnim ravninama, pa se sijeku u točkama, koje spojene daju presječnu krivulju stošca i terena.

15. Zadatak. *Zadan je teren s kotiranim slojnicama, neka se na tom terenu projektira cesta, koja je 8 m široka i kojoj je uspon 5%!* (M = 1 : 500).

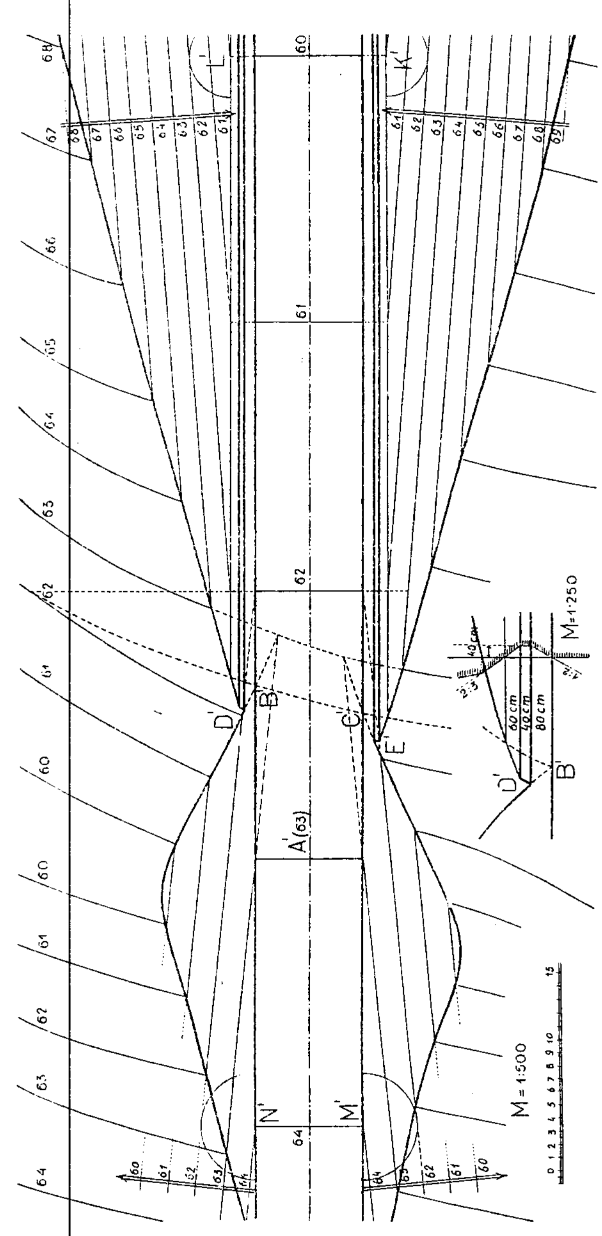
Rješenje. Zadana je osovina ceste, te projekcija i kota jedne točke $A[A'(63)]$ te osovine. Nagib je nasipa $n = 1:2$, a usjeka $n_1 = 2:3$. U usjecima treba konstruirati jarke. Mjerilo je slike M = 1 : 500. (Sl. 846.).

Budući da je cesta 8 m široka, povuku se bridovi ceste u daljini od 4 m s jedne i s druge strane osovine, a zatim se cesta graduira. Nagib je ceste 5% ili 1 : 20. Interval je ravnine ceste 20. Pošto smo nacrtali slojnice ravnine ceste, odredimo presjek terena s tom ravninom. Presječna krivulja siječe bridove ceste u točkama B i C (B', C'). Cesta je dolje od te krivulje nasuta, a gore usječena u teren.

Uzduž bridova ceste MC i NB postavimo nasipne ravnine, kojima je nagib $n = 1:2$. Budući da su ti bridovi kosi, te se ravnine polažu pomoću rotacionog stošca (isp. § 231., t. 4.). Vrhove tih stožaca uzmemo u točkama M i N, koje imaju kotu 64, a osnovke uzmemo u horizontalnoj ravnini, kojoj je kota 62. Središta su osnovaka tih stožaca u točkama M' i N', a polumjeri su tih osnovaka $r = v : n = 2 : 1/2 = 4$. Pošto nacrtamo slojnice nasipnih ravnina, odredimo njihov presjek s terenom. Projekcije presječnih krivulja idu točkama B' i C'.

Prije nego se polože usječne ravnine, konstruiraju se jarci uzduž bridova ceste CK i BL (Isp. § 236., t. 11.). Jarci idu paralelno s cestom, pa imaju isti nagib kao i cesta. Bridovi na dnu jarka i u ravnini ceste usporedni su s bridovima ceste. Projekcije tih bridova možemo konstruirati pomoću profila, a možemo razmak tih pravaca odrediti i računom. Mi smo upotrebili ovaj drugi način. Nagib strane jaraka do ceste neka je $n = 1:2$, a nagib drugih dviju strana neka je $n_3 = 2:3$. Dubina je jarka 0,40, a širina dna također 0,40 m. Horizontalni je razmak brida ceste i brida na dnu jarka $h = v : n = v \cdot i$. gdje je $v = 0{,}40$ (dubina jarka), a $i = 2$. Prema tome je $h = 0{,}40 \cdot 2 = 0{,}80$ m. Horizontalni je razmak drugog brida jarka, koji je u ravnini ceste i brida na dnu jarka, $h = v : n = v \cdot i = 0{,}40 \cdot 3/2 = 0{,}60$ m. Ako se dakle nacrtaju sa svake strane ceste po tri pravca, koji su usporedni s bridovima ceste i koji su, računajući od tih bridova, udaljeni 0,80 m 0,40 m i 0,60 m, imamo projekcije jaraka.

Jedna se usječna ravnina položi uzduž brida jarka $EK(E'K')$, a druga uzduž brida $DL(D'L')$. Slojnice ceste graduiraju i te bridove. Pošto su ti bridovi nagnuti, polažu se uz njih usječne ravnine pomoću rotacionih sto-



Sl. 816. i 817.

žaca. Točke $K [K'(60)]$ i $L [L'(60)]$ uzmu se kao vrhovi tih stožaca, a osnovke uzmu se da leže u horizontalnoj ravnini, kojoj je kota 62. Središta su osnovaka u točkama K' i L', a polumjeri $r = v : n = 2 : 2/3 = 3$ m. Pošto se nacrtaju slojnice tih ravnina, odrede se još njihovi presjeci s terenom. Projekcije presječnih krivulja idu točkama D' i E'. Sad se još jarci produže do nasipa i završe kako je prikazano u pomoćnoj povećanoj sl. 847. Dno jarka svršava crticom, koja je usporedna s crtom $B'C'$ ili s obližnjom slojnicom terena.

Obično se jarci još polažu uz nasipe i to samo na onim mjestima, gdje bi se s terena slijevala voda na nasipe. (Isp. § 236., t. 11. sl. 827.). O takovim će jarcima biti govora u slijedećem zadatku.

16. Zadatak. *Zadan je teren s kotiranim slojnicama i projekcijama osovine željezničke pruge na zupce, koja je 4 m široka, te joj je uspon* 5%. *Dio je pruge nasut, a dio usječen u teren. Nasipi imaju nagib* $n = 2 : 3$, *a usjeci* $n_1 = 1 : 1$. *Odvodni su jarci namješteni prema potrebi, te su 50 cm duboki i na dnu 50 cm široki. Neka se konstruiraju svi presjeci pomoću profila!* Mjerilo je slike M = 1 : 250. (Sl. 848.).

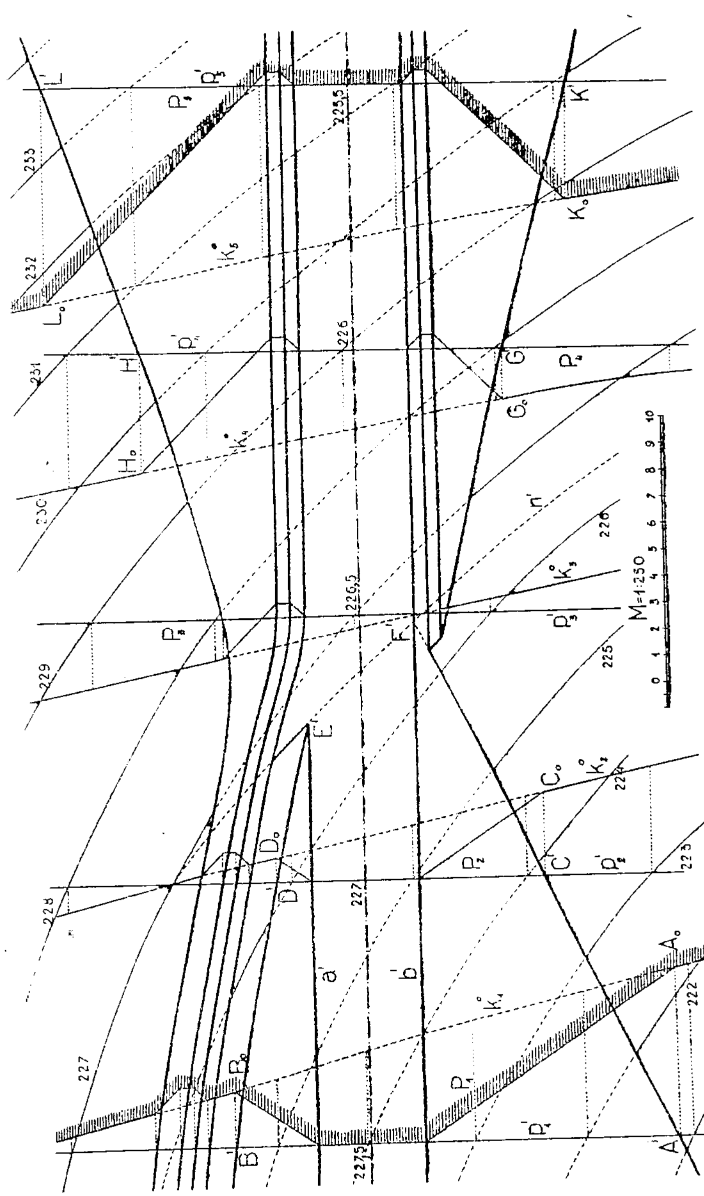
Rješenje. Najprije nacrtamo projekcije bridova a i b željezničke pruge, koji su na obim stranama usporedni s osovinom u daljini od 2 m. Zatim graduiramo osovinu i povučemo slojnice pruge. Interval je pruge $i = 20$ m. Na osovinu prenosimo po polovicu intervala, t. j. po 10 m, tako da dobijemo točke, kojima su kote 225,50 226, 226,50, 227, 227,50.

Pošto smo graduirali prugu, odredimo presjek terena s ravninom pruge. Projekcija presječne krivulje n' siječe a' u E' a b' u F'. Lijevo od tih točaka pruga je nasuta, a desno usječena u teren.

Kotiranim točkama osovine pruge položimo profilne ravnine P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5, okomito na projekciju osovine i odredimo u preložaju presječne krivulje k_1, k_2, k_3, k_4 i k_5 s terenom, gdje se svaki put presječi prevale u horizontalnu ravninu one kotirane točke osovine, kroz koju se položila profilna ravnina.

Kod profila P_1 i P_2 imamo s obje strane nasipe, a kod profila P_4 i P_5 imamo s obje strane usjeke. Između točaka E i F imamo s jedne strane nasip, a s druge strane usjek. U preloženim profilima P_1 i P_2 konstruiraju se profili nasipa s nagibom 2 : 3. Profili nasipa sijeku profile terena u točkama A, B, C, D (u preložaju A_0, B_0, C_0, D_0). Ako se povuče $A^0A' \perp p'_1$, $B_0B' \perp p'_1$, $C_0C' \perp p'_2$, $D_0D' \perp p'_2$ imamo projekcije točaka A, B, C, D. Spojimo li s jedne strane točke A', C' i F', a s druge strane B', D' i E', imamo projekcije presječnih krivulja nasipa s terenom.

U preloženim profilima P_4 i P_5 nacrtaju se najprije profili jaraka (nagibi strana jaraka 1 : 1, dubina 50 cm, širina dna 50 cm.). U strane jaraka,

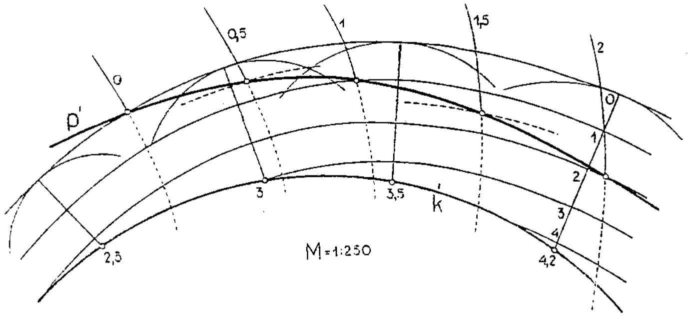


Sl. 848.

koje nisu do pruge, padaju i usječne ravnine. Profili usjeka P_4 i P_5 sijeku profile terena u točkama G, H, K i L. (U preloženju G_0, H_0, K_0 i L_0). Odredimo li projekcije G', H', K' i L', onda točkama G' i K' s jedne strane i točkama H' i L' s druge strane pruge idu projekcije presječnih krivulja terena s usječnim ravninama. Odredimo li profil P_3, imamo s jedne strane (do F') nasip, a s druge strane jarak i usjek. U usjecima se još potegnu projekcije bridova jaraka nad njima.

Voda teče po terenu od slojnica viših kota prema slojnicama nižih kota. Ako se razgleda slika 848. onda se vidi, da bi se voda s terena slijevala uz nasip do a. Zato se uz taj nasip mora položiti jarak, koji će tu vodu sakupljati i odvoditi dalje. Jarak se uz nasip polaže usporedno s presječnom linijom i u daljini od 80—100 *cm*. Pruga se kod E nešto proširi, te jarak iz usjeka spoji s jarkom uz nasip.

17. Zadatak. *Zadana je topografska ploha s kotiranim slojnicama, te prostorna krivulja k s projekcijom k' i kotama nekoliko točaka. Neka se uzduž te krivulje postavi nasip, kojemu je nagib $n = 2:3$, te odredi presjek toga nasipa s terenom.* Mjerilo slike M = 1 : 250 (Sl. 849.).



Sl. 849.

Rješenje: Uzeli smo, da se prostorna krivulja k projicira kao kružni luk k'. Nasip uz tu krivulju mogao bi se konstruirati pomoću profila, no mi ćemo taj zadatak riješiti pomoću rotacionih stožaca. Pomislimo, da su točke krivulje k 2,3, 3, 3,5, 4,2 vrhovi rotacionih stožaca, kojima su osnovke u horizontalnoj ravnini sa kotom 0, i kojima izvodnice imaju nagib 2 : 3. Ploha koja bi doticala sve te stošce, išla bi krivuljom k i imala bi nagib 2 : 3. Prema tome ta bi ploha bila tražena ploha nasipa uzduž krivulje k.

Središta su osnovaka stožaca u točkama 2,3, 3, 3,5, 4,2, a polumjeri su tih osnovaka u horizontalnoj ravnini 0 redom $r_1 = 2{,}3 \cdot 3/2 = 3{,}45$ m, $r_2 = 3 \cdot 3/2 = 4{,}5$ m, $r_3 = 3{,}5 \cdot 3/2 = 5{,}25$ m, $r_4 = 4{,}2 \cdot 3/2 = 6{,}3$ m.

S tim polumjerima opišu se kružni lukovi oko kotiranih točaka krivulje k. Ako sad nacrtamo krivulju, koja dotiče sve te kružne lukove, imamo nultu slojnicu nasipa. Ako se dirališta kružnih lukova i te slojnice spoje s pripadnim vrhovima stožaca, te bi dužine bile projekcije dirnih izvodnica stožaca s plohom nasipa. Graduiramo li te izvodnice i spojimo li točke jednakih kota krivim linijama, imamo slojnice 1, 2 i 3 nasipa. Ako se sad spoje točke, u kojima se sijeku slojnice nasipa i slojnice terena, koje imaju jednake kote, dobijemo projekciju p' presječne krivulje nasipa s terenom.

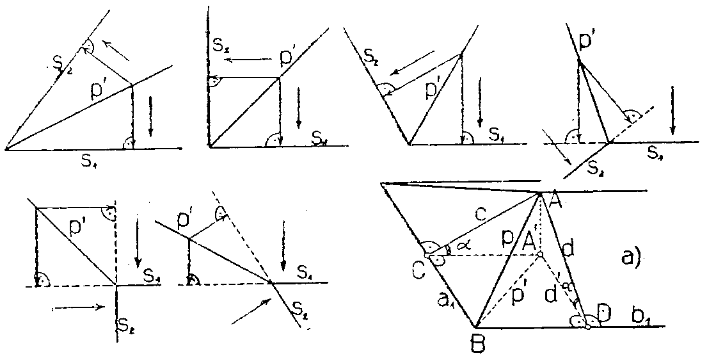
§ 238. Krovni presjeci

I. Objašnjenja

1. Pod krovnim se presjecima u deskriptivnoj geometriji razumijeva konstrukcija tlocrta presječnica ravnih (ili oblih) krovnih ploha, koje pokrivaju neku zgradu. U graditeljstvu se pazi, da krovne plohe budu za dani tlocrt zgrade zgodno smještene i raspoređene, a pazi se kod toga i na estetske zahtjeve. Na sve to mi se u deskriptivnoj geometriji ne možemo osvrtati, nego ćemo samo iznijeti razne jednostavne slučajeve krovnih presjeka, koji se kod svih praktičnih konstrukcija ponavljaju.

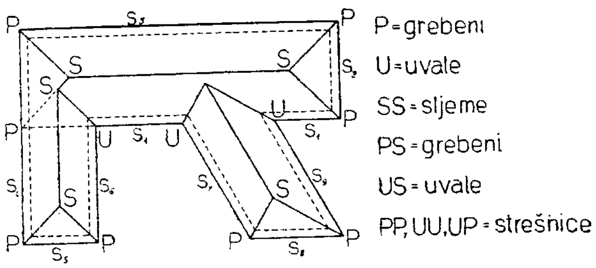
2. Najdonji, obično horizontalni bridovi krova zovu se *strešnice* ili *okapi*. Ti su bridovi odmaknuti od zidova zgrade za stanoviti razmak. Donji dio krova, koji strši izvan zidova, zove se *streha*. Strešnice smatramo tragovima krovnih ravnina, obzirom na horizontalnu ravninu. One su temelj za horizontalnu projekciju krova. Obično imaju sve krovne ravnine jednog te istog krova jednake priklone prema horizontalnoj ravnini. Veličina se tog priklona ravna prema materijalu, kojim je krov pokriven te vrsti i množini oborina u području gdje se krov gradi. No bili ti prikloni veliki ili maleni, tlocrt se p' presječnica p svakih dviju krovnih ravnina podudara sa simetralom kuta, što ga čine strešnice tih dviju ravnina. Uzmimo na presječnici p točku A i odredimo njezinu projekciju A' na pravcu p', zatim nacrtajmo priklonice c i d ($c \perp a_1$, $d \perp b_1$) na krovnim ravninama, koje idu točkom A, te odredimo njihove projekcije c' i d' ($c' \perp a_1$, $d' \perp b_1$). Sada su pravokutni trokuti $AA'C$ i $AA'D$ sukladni (zašto?). Odatle slijedi, da je $A'C = A'D$, t. j. točka A' jednako je udaljena od strešnica a_1 i b_1. Točka A' leži prema tome na simetrali kuta, što ga čine strešnice a_1 i b_1. Ta je simetrala pravac p', pa vidimo, da projekcija p' presječnice p raspolavlja kut, što ga čine strešnice a_1 i b_1.

U sl. 850. a) nacrtan je dio krova sa tragovima a_1 i b_1, zatim je nacrtana presječnica p i njezina projekcija p'. Kut što ga čine dvije strešnice, koje izlaze iz iste točke, može biti oštar, prav ili tup. (Sl. 850.). Presječnice dviju krovnih ravnina zovu se *grebeni* ili *uvale* prema tome, da li strešnice čine među sobom konkavne ili konveksne kutove. Dio prostora, što ga omeđuju po dvje krovne ravnine, zove se u prvom slučaju opet *greben*, a u drugom *uvala*. (Sl. 851.). Budući da je vertikalna ravnina projiciranja, koja ide grebenom ili uvalom, simetralna ravnina kuta, što ga čine dvije krovne



Sl. 850.

ravnine, slijedi, da je svaka točka presječnice tih dviju ravnina jednako udaljena od strešnica. (Sl 850.). Kad su strešnice dviju krovnih ravnina jednakih priklona u istoj horizontalnoj ravnini, i među sobom usporedne, onda



Sl. 851.

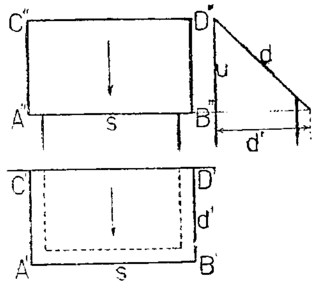
je i njihova presječnica usporedna s obim strešnicama, dakle horizontalna, te je njezin tlocrt jednako udaljen od tih strešnica. (Sl. 851.). Ta se horizontalna presječnica zove *sljeme* krova.

II. Vrste krovova

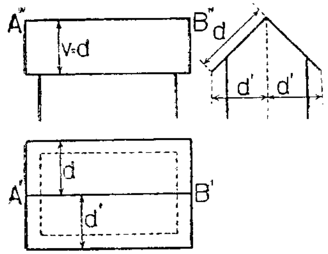
A) Jednostavni krovovi

3. *a*) *Jednostrešni krovovi.* Jednostrešni se krovovi sastoje iz jedne krovne ravnine (sl. 852.), a upotrebljavaju se, kad je zgrada naslonjena na

drugu zgradu i kad je širina zgrade malena, ili kad oborine s krova ne smiju padati na susjedno zemljište. Slika 852. predočuje tlocrt, nacrt i bokocrt toga krova. Dužina je krovne plohe *s*, a širina *d*. $AB(A'B', A''B'')$ je strešnica, a $CD(C'D', C'', D'')$ sljeme. Crtkane linije u tlocrtu predočuju položaj zidova zgrade.

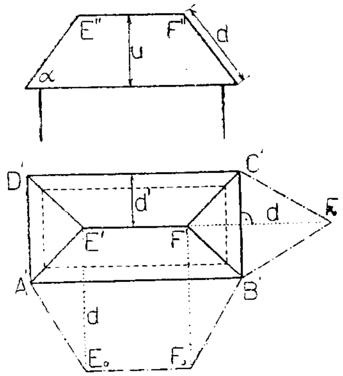


Sl. 852.

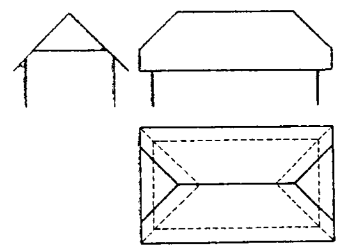


Sl. 853.

3. *b*) *Dvostrešni krovovi.* Dvostrešni se krov sastoji iz dvije krovne ravnine, koje se sijeku u horizontalnom sljemenu AB $(A'B', A''B'')$. (Sl. 853.). Zidovi desne i lijeve strane zgrade produžuju se vertikalno iznad strešnice sve do krova, a imaju oblik trokuta, koji se zovu zabati. Obje krovne ravnine ili svršavaju točno na izvanjim stranama zabata, ili su produžene preko zabatnih stijena. Slika 853. predočuje dvostrešni krov u tri projekcije. U bokocrtu imamo priklonì kut i širinu krovnih ravnina. Zbog jednostavnosti konstrukcija uzima se, da je $\sphericalangle \alpha = 45^0$. U tom je slučaju visina



Sl. 854.

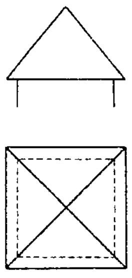


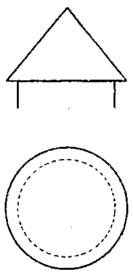
Sl. 855.

neke točke krova nad horizontalnom ravninom strešnice jednaka udaljenosti tlocrta te točke od strešnice t. j. $v = d$.

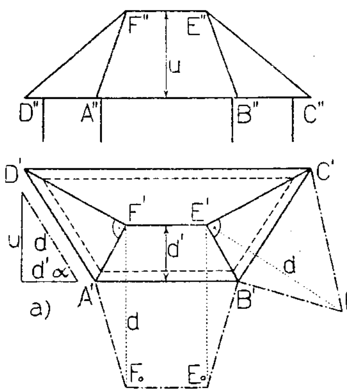
3. c) *Skošeni i poluskošeni krovovi.* Tlocrt je zgrade pravokutnik i zgrada je bez zabata, a krov se sastoji iz četiri krovne ravnine. Simetrale $A'E'$, $D'E'$, $B'F'$ i $C'F'$ pravih kutova, što ih čine strešnice, jesu tlocrti grebena četiriju krovnih ravnina. Obje krovne ravnine $ABEF$ i $CDEF$ koje imaju duže usporedne strešnice, sijeku se u sljemenu EF ($E'F'$, $E''F''$). U sl. 854. predočen je tlocrt i nacrt krova te prava veličina krovnih ploha i njihovih priklona α prema horizontalnoj ravnini. Prave veličine krovnih ploha nađemo tako, da te ravnine okrenemo oko njihovih strešnica u horizontalan položaj. Kad su obje usporedne kraće strešnice BC i AD više od dužih strešnica AB i CD, imamo poluskošeni krov. Sl. 855. predočuje taj krov u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu.

4. *Kad je tlocrt zgrade kvadrat,* krov ima oblik kvadratične piramide. (Sl. 856.). To su šatorasti krovovi. Šatorasti krovovi mogu imati za tlocrt kakav god pravilan mnogokut. Kad je tlocrt krova kružnica, krov ima oblik uspravnog stošca. (Sl. 857.).


Sl. 856.


Sl. 857.

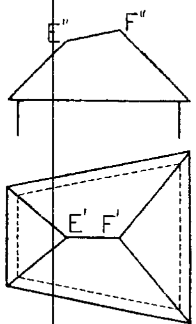
5. *Tlocrt je zgrade trapez.* Kad su usporedne stranice trapeza duže od njihovog normalnog razmaka, krovni se presjeci konstruiraju za bilo kakav priklon α krovnih ravnina, kao kad je tlocrt pravokutnik. (Sl. 858.). Tlocrti su grebena simetrale kutova, što ih čine strešnice, a tlocrt $E'F'$ sljemena usporedan je s $A'B'$ i $C'D'$, te se podudara sa simetralom normalnog razmaka tih strešnica. Budući da se po tri ravnine sijeku u jednoj točki, kroz njih idu sve tri presječnice tih triju ravnina, to sljeme mora ići točkama E i F, u kojima se sijeku po dva grebena AF i DF te BE i CE. Budući da su kutovi B' i C' te A' i D', što ih čine strešnice, kao prikuti suplementarni kutovi, to su simetrale svakih takovih kutova među sobom okomite ($A'F' \perp D'F'$, $B'E' \perp C'E'$). Ako je zadan priklon krovnih ravnina α, tad je visina v krova jednaka kateti pravokutnog trokuta, u kojem je druga kateta jednaka d', a toj kateti priležeći je kut α. (Sl. 858. *a*). Hipotenuza toga trokuta jednaka je širini d krovnih

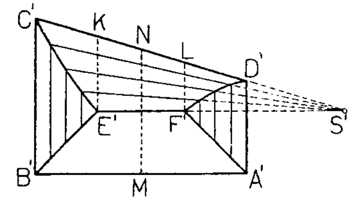


Sl. 858.

ravnina. Pošto imamo d, lako se konstruira prava veličina krovnih ploha.

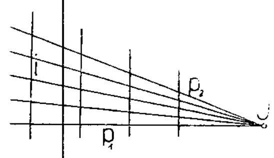
6. *Kad su usporedne stranice trapeza kraće od njihovog normalnog razmaka,* mi bismo na jednaki način kao u t. 5. mogli konstruirati krovne presjeke, no u tom slučaju ne bismo imali horizontalno sljeme EF, pa takav krov ne bi bio lijep. (Sl. 859.). Tom nedostatku može se doskočiti na više načina. Uzduž strešnica AB, BC i AD položimo krovne ravnine jednakog nagiba i konstruiramo grebene AF i BE. (Sl. 860.).

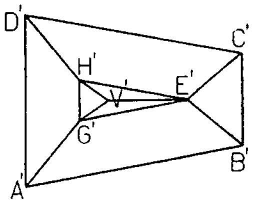

Sl. 859.



Sl. 860.

U ravnini kojoj pripada strešnica AB položimo sljeme $EF \parallel AB$ ($E'F' \parallel A'B'$) tako, da njezin tlocrt $E'F'$ raspolavlja srednju udaljenost MN obih strešnica $A'B'$ i $C'D'$. Budući da su pravci CD i EF mimosmjerni, to se između njih ne može položiti ravnina, nego kakva obla ploha. Obično se uzima t. zv. pravčasta (vitopera) ploha, koja nastane kad se giba pravac u prostoru po kakovom unaprijed određenom zakonu. Kao krovna ploha između pravaca CD i EF obično se uzima hiperbolički paraboloid. Ta ploha nastane kad se pravac i (izvodnica) skliže po dva mimosmjerna pravca p_1 i p_2 (provodnice) tako, da je i uvijek usporedan s jednom ravninom (provodna ravnina).


Sl. 861.



Sl. 862.

(Sl. 861.). Kod našeg krova uzet ćemo, da su provodnice hiperboličkog paraboloida pravci EK i FL, koji su okomiti na sljeme EF i sijeku strešnicu CD u točkama K i L. Horizontalna je ravnina provodna ravnina, dakle su pravci EF i CD dvije izvodnice plohe. Nekoliko drugih izvodnica dobijemo, ako EK i FL razdijelimo na jednake dijelove, n. pr. 4 jednaka dijela i pripadna dijelišta spojimo pravcima. Tlocrti tih izvodnica idu sjecištem S'

pravaca $E'F'$ i $C'D'$. Hiperbolički paraboloid ima još jednu skupinu izvodnica. Te su izvodnice okomite na sljemenu EF. One naznačuju položaj za roženice vitopere krovne plohe.

Izvodnice prve skupine leže u ekvidistantnim horizontalnim ravninama, koje sijeku svaku krovnu ravninu u usporednim ekvidistantnim pravcima. Pravci dviju susjednih krovnih ploha, koji leže u istoj visini, sijeku se u grebenima AF, BE, CE i DF ($A'F'$, $B'E'$, $C'E'$, $D'F'$). Posljednja su dva grebena lukovi parabola.

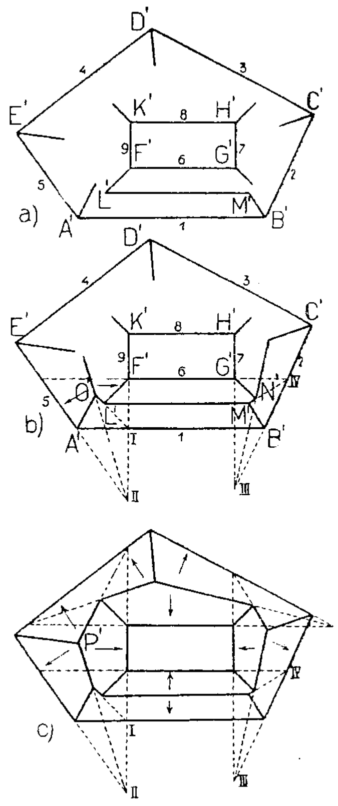
Budući da vitopere krovne plohe nisu lijepe i jer ih je teško izvesti, ne upotrebljavaju se više. Najjednostavnije je rješenje, da se polože sve četiri krovne ravnine i konstruiraju sve presječnice. Zatim se najnižom točkom E (E') kosog sljemena položi horizontalna ravnina i njom sijeku tri krovne ravnine u pravcima EG, GH i HE ($E'G'$, $G'H'$) (sl. 862), koji su usporedni sa strešnicama tih ravnina. Preostali trokutni otvor pokrije se jednom posve niskom trostranom piramidom, koja se odozdo i ne vidi. Na jednak se način može postupiti i onda, kad je tlocrt zgrade trapezoid.

B) Složeni krovovi

7. Pod složenim se krovovima obično razumijevaju krovovi, kod kojih dolaze osim grebena i uvale. Sl. 851. predočuje složeni krov u tlocrtu. Taj se krov sastoji iz 10 (1 — 10) krovnih ravnina, ima 8 grebena, 3 uvale i tri sljemena. Tlocrti su grebena i uvala simetrale kutova, što ih čine strešnice. Tlocrti su sljemena simetrale normalnog razmaka usporednih strešnica.

Sl. 863. predočuje tlocrt peterokutne zgrade s četverokutnim ne nadkritim dvorištem. Teško da u praksi dolazi takav slučaj, no primjer je zgodan za uvježbavanje u konstrukciji krovnih presjeka. Tu ima 9 strešnica, koje su u istoj horizontalnoj ravnini i svakom je položena po jedna krovna ravnina. Sve te ravnine, kojih ima 9, imaju jednak horizontalan nagib. Kad su sve strešnice u istoj horizontalnoj ravnini i kad sve krovne ravnine imaju jednak horizontalan nagib, i kad je svakom strešnicom položena samo jedna krovna ravnina, zadaća je jednoznačna. U svim drugim slučajevima može biti više rješenja. Naša je zadaća jednoznačna. Sl. 863. *a*) predočuje tlocrt strešnica i početak rješenja zadaće; sl. 863. *b*) predočuje nastavak rješenja, a sl. 863. *c*) potpuno riješenu zadaću. Najprije konstruiramo tlocrte svih grebena i uvala, t. j. konstruiramo simetrale svih kutova. Budući da su strešnice AB i FG ravnina 1 i 6 među sobom usporedne, to se te ravnine sijeku u horizontalnom sljemenu LM, pa konstruiramo tlocrt $L'M'$ tog sljemena. Sljeme LM siječe uvalu FL u točki L, a greben BM u točki M. Budući da se tri ravnine sijeku u tri pravca, koji idu jednom te istom točkom, tad svakom točkom, u kojoj se sijeku dvije presječnice triju krovnih ravnina,

mora ići i treća presječnica. Točkom L (L') ide presječnica ML ravnina 1 i 6 i presječnica FL ravnina 6 i 9. Tom točkom mora dakle ići i treća presječnica LO, u kojoj se sijeku ravnine 1 i 9. Tlocrt $L'O'$ te presječnice je u simetrali kuta tragova ravnina 1 i 9. Produžimo li dakle trag $K'F'$ do sjecišta I s tragom $A'B'$, pravac je IL' tlocrt presječnice spomenutih ravnina. Ta presječnica ide od L do sjecišta s prvim grebenom ili uvalom, ovdje dakle do sjecišta O na grebenu AO.



Sl. 863.

Točkom O' mora ići tlocrt $O'P'$ treće presječnice OP. Budući da je AO presječnica između ravnina 1 i 5, a LO presječnica između ravnina 1 i 9, to će točkom O ići presječnica između ravnina 5 i 9. Vršci strelica oko O' naznačuju tragove $F'K'$ i $A'E'$ onih ravnina, koje se sijeku u trećoj presječnici, koja ide točkom O. Produžimo li dakle te tragove do njihovog sjecišta II, konstruiramo simetralu kuta tih tragova ili povucimo točkama II i O pravac, pa imamo tlocrt treće presječnice. Ta se presječnica pokaže između O i P (sl. 863. *c*), gdje je tlocrt P' u simetrali kuta E'. Tako nastavljamo naprijed, dok ne konstruiramo tlocrte svih presječnica. Možemo poći i obratnim smjerom. Sljeme LM siječe greben BM u točki M. Tom točkom ide treća presječnica MN krovnih ravnina 2 i 6. Tlocrt te presječnice ide sjecištem IV tragova $F'G'$ i $B'C'$ ravnina 2 i 6 i točkom M'. Presječnica se pokaže samo između točaka M i N. Točkom N' i sjecištem III tragova $B'C'$ i $G'H'$ ravnina 2 i 7 ide tlocrt presječnice tih ravnina i t. d. Može se dogoditi, da treća presječnica siječe prije sljeme nego slijedeći greben ili uvalu, pa se prije konstruira to sljeme. Strelice u krovnim ravninama okomite su na strešnicama i naznačuju smjer priklonica, odnosno smjer, u kojem oborine silaze s krova.

8. Na isti način kao u t. 7. na slici 863. konstruiraju se krovni presjeci u sl. 864 — 867. U prvoj i drugoj slici predočen je krov iste zgrade u dvije varijacije. U prvoj slici sve su strešnice u istoj horizontalnoj ravnini, dok je u drugoj slici strešnica AB viša od strešnice ostalih krovnih ravnina.

*

pravaca $E'F'$ i $C'D'$. Hiperbolički paraboloid ima još jednu skupinu izvodnica. Te su izvodnice okomite na sljemenu EF. One naznačuju položaj za roženice vitopere krovne plohe.

Izvodnice prve skupine leže u ekvidistantnim horizontalnim ravninama, koje sijeku svaku krovnu ravninu u usporednim ekvidistantnim pravcima. Pravci dviju susjednih krovnih ploha, koji leže u istoj visini, sijeku se u grebenima AF, BE, CE i DF ($A'F'$, $B'E'$, $C'E'$, $D'F'$). Posljednja su dva grebena lukovi parabola.

Budući da vitopere krovne plohe nisu lijepe i jer ih je teško izvesti, ne upotrebljavaju se više. Najjednostavnije je rješenje, da se polože sve četiri krovne ravnine i konstruiraju sve presječnice. Zatim se najnižom točkom E (E') kosog sljemena položi horizontalna ravnina i njom sijeku tri krovne ravnine u pravcima EG, GH i HE ($E'G'$, $G'H'$) (sl. 862), koji su usporedni sa strešnicama tih ravnina. Preostali trokutni otvor pokrije se jednom posve niskom trostranom piramidom, koja se odozdo i ne vidi. Na jednak se način može postupiti i onda, kad je tlocrt zgrade trapezoid.

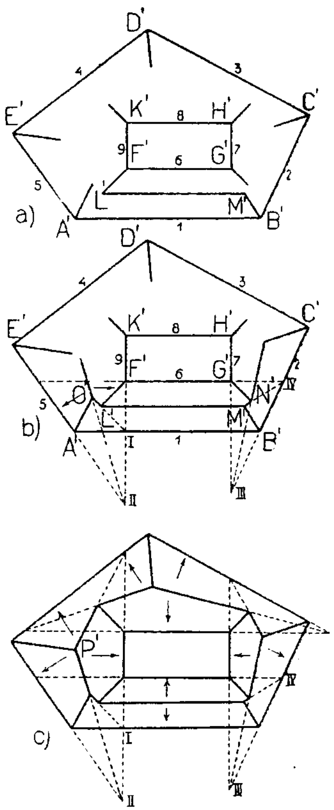
B) Složeni krovovi

7. Pod složenim se krovovima obično razumijevaju krovovi, kod kojih dolaze osim grebena i uvale. Sl. 851. predočuje složeni krov u tlocrtu. Taj se krov sastoji iz 10 (1 — 10) krovnih ravnina, ima 8 grebena, 3 uvale i tri sljemena. Tlocrti su grebena i uvala simetrale kutova, što ih čine strešnice. Tlocrti su sljemena simetrale normalnog razmaka usporednih strešnica.

Sl. 863. predočuje tlocrt peterokutne zgrade s četverokutnim ne nadkritim dvorištem. Teško da u praksi dolazi takav slučaj, no primjer je zgodan za uvježbavanje u konstrukciji krovnih presjeka. Tu ima 9 strešnica, koje su u istoj horizontalnoj ravnini i svakom je položena po jedna krovna ravnina. Sve te ravnine, kojih ima 9, imaju jednak horizontalan nagib. Kad su sve strešnice u istoj horizontalnoj ravnini i kad sve krovne ravnine imaju jednak horizontalan nagib, i kad je svakom strešnicom položena samo jedna krovna ravnina, zadaća je jednoznačna. U svim drugim slučajevima može biti više rješenja. Naša je zadaća jednoznačna. Sl. 863. a) predočuje tlocrt strešnica i početak rješenja zadaće; sl. 863. b) predočuje nastavak rješenja, a sl. 863. c) potpuno rješenu zadaću. Najprije konstruiramo tlocrte svih grebena i uvala, t. j. konstruiramo simetrale svih kutova. Budući da su strešnice AB i FG ravnina 1 i 6 među sobom usporedne, to se te ravnine sijeku u horizontalnom sljemenu LM, pa konstruiramo tlocrt $L'M'$ tog sljemena. Sljeme LM siječe uvalu FL u točki L, a greben BM u točki M. Budući da se tri ravnine sijeku u tri pravca, koji idu jednom te istom točkom, tad svakom točkom, u kojoj se sijeku dvije presječnice triju krovnih ravnina,

mora ići i treća presječnica. Točkom L (L') ide presječnica ML ravnina 1 i 6 i presječnica FL ravnina 6 i 9. Tom točkom mora dakle ići i treća presječnica LO, u kojoj se sijeku ravnine 1 i 9. Tlocrt $L'O'$ te presječnice je u simetrali kuta tragova ravnina 1 i 9. Produžimo li dakle trag $K'F'$ do sjecišta I s tragom $A'B'$, pravac je IL' tlocrt presječnice spomenutih ravnina. Ta presječnica ide od L do sjecišta s prvim grebenom ili uvalom, ovdje dakle do sjecišta O na grebenu AO.

Točkom O' mora ići tlocrt $O'P'$ treće presječnice OP. Budući da je AO presječnica između ravnina 1 i 5, a LO presječnica između ravnina 1 i 9, to će točkom O ići presječnica između ravnina 5 i 9. Vršci strelica oko O' naznačuju tragove $F'K'$ i $A'E'$ onih ravnina, koje se sijeku u trećoj presječnici, koja ide točkom O. Produžimo li dakle te tragove do njihovog sjecišta II, konstruiramo simetralu kuta tih tragova ili povucimo točkama II i O pravac, pa imamo tlocrt treće presječnice. Ta se presječnica pokaže između O i P (sl. 863. c), gdje je tlocrt P' u simetrali kuta E'. Tako nastavljamo naprijed, dok ne konstruiramo tlocrte svih presječnica. Možemo poći i obratnim smjerom. Sljeme LM siječe greben BM u točki M. Tom točkom ide treća presječnica MN krovnih ravnina 2 i 6. Tlocrt te presječnice ide sjecištem IV tragova $F'G'$ i $B'C'$ ravnina 2 i 6 i točkom M'. Presječnica se pokaže samo između točaka M i N. Točkom N' i sjecištem III tragova $B'C'$ i $G'H'$ ravnina 2 i 7 ide tlocrt presječnice tih ravnina i t. d. Može se dogoditi, da treća presječnica siječe prije sljeme nego slijedeći greben ili uvalu, pa se prije konstruira to sljeme. Strelice u krovnim ravninama okomite su na strešnicama i naznačuju smjer priklonica, odnosno smjer, u kojem oborine silaze s krova.



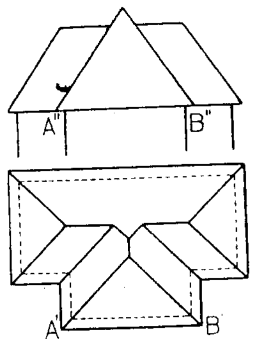
Sl. 863.

8. Na isti način kao u t. 7. na slici 863. konstruiraju se krovni presjeci u sl. 864 — 867. U prvoj i drugoj slici predočen je krov iste zgrade u dvije varijacije. U prvoj slici sve su strešnice u istoj horizontalnoj ravnini, dok je u drugoj slici strešnica AB viša od strešnice ostalih krovnih ravnina.

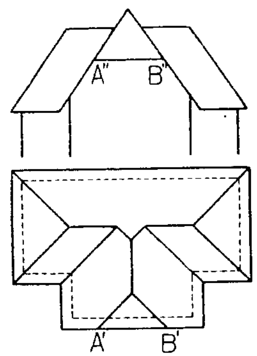
*

C) Umetnute krovne ravnine. Konstrukcija krovova sa zaprekama

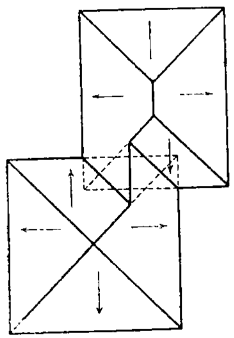
9. Kod konstrukcije krovova mora se paziti na to, da voda i uopće atmosferske oborine ne padaju s krova na tuđe zemljište i ne udaraju o zidove iste ili susjedne zgrade. Krovovi moraju biti tako položeni, da se oborine na njima pomiču od susjednih zidova ili međe tuđeg zemljišta ili najviše usporedno s tim zidovima odnosno međama.

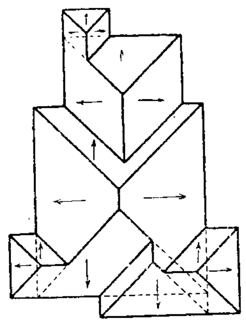


Sl. 864.



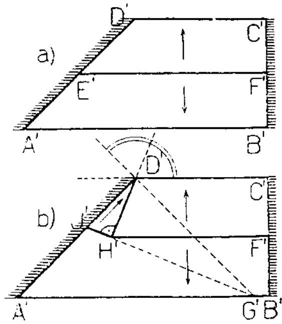
Sl. 865.


Sl. 866.


Sl. 867.

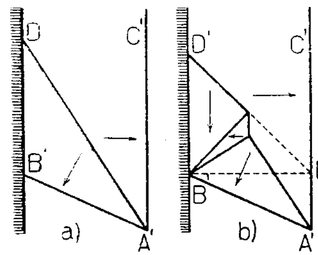
Jednostavni slučajevi mogu se riješiti postavljanjem jednostrešnih ili dvostrešnih krovova. Imamo li na pr. tlocrt zgrade $A'B'C'D'$ (sl. 868. a i b) te su lijevo i desno susjedne zgrade, onda se namjesti dvostrešni krov. Tlocrt $E'F'$ sljemena EF ide po sredini između tlocrta $A'B'$ i $C'D'$ strešnica. No voda, koja teče po jednom dijelu krovne ravnine $CDEF$ (sl. 868. a), udarala bi u zid susjedne zgrade uzduž ED, pa to valja zapriječiti. U tu svrhu umetnemo krovnu ravninu, za koju pomišljamo, da joj je strešnica DG

okomita na AD (sl. 868. b) i koja ima jednak nagib kao i obje krovne ravnine. Tom ravninom siječemo obje prijašnje krovne ravnine pravcima DH i $JH (D'H'$ i $J'H')$. Po umetnutoj krovnoj ravnini voda teče usporedno sa zidom JD. Točka J je najviša točka krova.

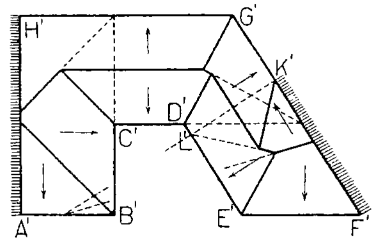


Sl. 868.

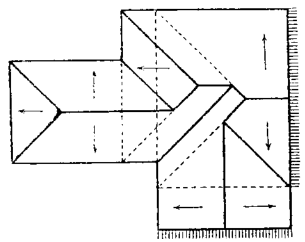
Imamo li slučaj kao u sl. 869. *a*), pa položimo obje krovne ravnine, kojima su strešnice AB i AC, voda bi, koja teče niz krovnu ravninu ABD, udarala o zid BD. Da se to zapriječi umetne se treća krovna ravnina, koja je u točki B okomita na zid BD, te joj je umišljena strešnica $B'E' \perp B'D'$, zatim četvrta ravnina, kojoj je umetnuta strešnica BD. Tlocrt presjeka tih četiriju krovnih ravnina izveden je u sl. 869. *b*). U sl. 870. imamo tlocrt zgrade $A'B'\ldots H'$. Uzduž

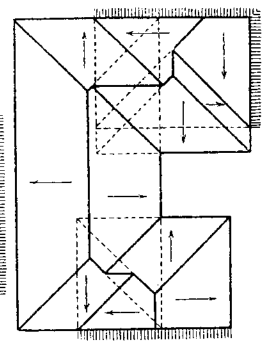


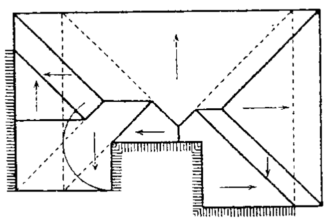
Sl. 869



Sl. 870.


Sl. 873.

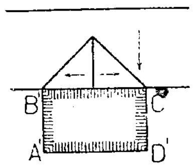

Sl. 872.


Sl. 871.

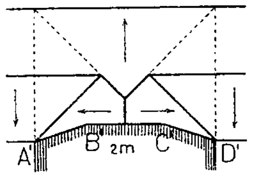
AH i FK zgrada međaši s tuđim zemljištem. Tu treba umetnuti samo jednu krovnu ravninu, kojoj je umišljena strešnica KL okomita na FK.

Slike 871. — 873. predočuju tlocrte krovova, kod kojih dolaze različiti slučajevi zapreka.

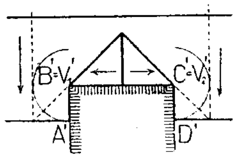
10. U sl. 874. predočeni su slučajevi, gdje su namješteni dvostrešni krovovi, da voda ne udara o zid BC susjedne zgrade $ABCD$. Strešnice su umetnutih krovnih ravnina među sobom usporedne, te jedna ide točkom B, a druga točkom C, okomito na BC.



Sl. 874.



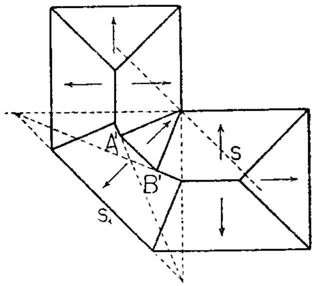
Sl. 875.



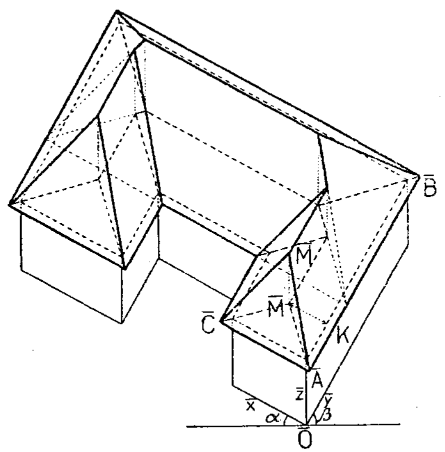
Sl. 876.

U sl. 875. je $AD = 2$ m, $B'C' \parallel A'D'$, te $A'B'$ i $C'D'$ čini s $A'D'$ kut, koji je manji od 45°.

U sl. 876. je zadana krovna ravnina umetnuta točkom V_1, a druga točkom V_2. Točke su V_1 i V_2 vrhovi rotacionih stožaca, koji dotiču glavne krovne ravnine te po jednu od umetnutih ravnina. Tlocrt je osnovke tog stošca kružnica, koja dotiče strešnicu glavnog krova. Trag umetnute ravnine dotiče tu kružnicu i okomit je na BC. Drugu umetnutu ravninu dotiče rotacioni stožac, kojemu je vrh V_2.



Sl. 877.



Sl. 878.

11 Često se puta umeću nove krovne ravnine zbog toga, da krovovi budu zgodniji ili ljepši. U sl. 877. je s umišljena strešnica umetnute ravnine. Ta je strešnica usporedna sa s_1. Na taj smo način postigli horizontalno sljeme AB ($A'B'$).

D) Prikazivanje krova u kavalirnoj perspektivi

Za ovu sliku uzet će se, da su osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ među sobom okomite, i da se prikažu u pravoj veličini. U tom je slučaju ravnina slike usporedna s osima x i y. (Vidi § 111., t. 7.). Ako se uzme, da je $\sphericalangle \alpha = 30^0$, onda je $\sphericalangle \beta = 60^0$, kako je uzeto u sl. 878. Os $\bar{z}$ uzima se vertikalno i u pravoj veličini. Kod ovakovog načina projiciranja tlocrt se krova prikaže u pravoj veličini. Taj smo tlocrt uzeli u ravnini, koja je u visini strešnica. Na osnovu toga tlocrta i nacrta se kosa aksonometrija krova, koji je na slici 879. prikazan u tlocrtu i nacrtu. Kod toga se uzelo, da su krovne ravnine nagnute prema ravnini (xy) za 45°. Da se na pr. dobije točka $\bar{M}$, povuče se tlocrtom $\bar{M}'$ pravac usporedo sa osi $\bar{z}$ i na njega prenese udaljenost točke $\bar{M}'$ od strešnice $\bar{A}\bar{B}$ odnosno $\bar{A}\bar{C}$ t. j. $\bar{M}'\bar{M} = \bar{M}'\bar{K}$ i t. d.

E) Sjene krova

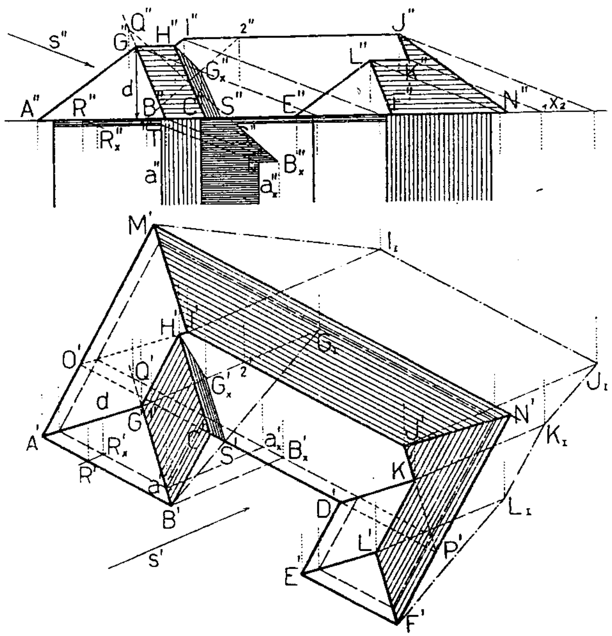
Na sl. 879. nacrtan je tlocrt i nacrt krova i sve sjene kod usporedne rasvjete. Krov se sastoji iz jednog glavnog dijela i iz dva krila. Krovne su ravnine nagnute prema horizontalnoj ravnini za kut od 45°. Presjeci krovnih ravnina odrede se na poznati način.

Smjer zraka svijetla zadan je tlocrtom s' i nacrtom s''. Da se odrede one krovne ravnine, koje su u samosjeni, uzet će se da je ravnina Π_1 u visini strešnice, pa se na toj ravnini odrede bačene sjene krova, odnosno nekih krovnih presječnica. Pravac I_1J_1 je bačena sjena sljemena IJ, a L_1K_1 je bačena sjena sljemena LK, te je $I_1J_1 \parallel I'J'$ i $L_1K_1 \parallel L'K'$. (Zašto?). Dužine $M'I_1$, K_1J_1, $F'L_1$ i $B'G_1$ jesu bačene sjene presječnica MI, KJ, FL i BG na Π_1, te je $B'G_1 \parallel F'L_1 \parallel PK_1J_1$. (Zašto?). Budući da točke I_1 i J_1 padaju izvan projekcije krovne ravnine $MNJI$, ta je ravnina u samosjeni. S istih je razloga u samosjeni krovna ravnina $FNJKL$ i $BCHG$. Ostale su krovne ravnine osvijetljene. Rastavnici pripadaju bridovi, koji spajaju točke $M, A, B, G, H, C, D, E, F, L, K, J, I, M$.

Vertikalne zidove možemo smatrati uspravnim prizmama, pa se rastavnica odredi na jednak način kao i na uspravnoj prizmi. U samosjeni su desne izvanje stijene krila, i stražnja stijena glavnog dijela zgrade.

Strešnice MA, AB, CD, DE, i EF bacaju sjene na osvijetljene stijene zidova. Da se odredi bačena sjena točke $R(R', R'')$, položit će se tom točkom zraka svijetla i odredit će se probodište $R_x(R_x', R_x'')$ te zrake sa zidom. To je pobodište bačena sjena točke R na zid. Budući da je strešnica AB usporedna s tim zidom, njezina bačena sjena u nacrtu ide točkom R_x'' usporedno s $A''B''$. Budući da su prednje stijene krila i prednja stijena glavnog dijela zgrade usporedne među sobom, i budući da su strešnice AB, EF i CD jednako udaljene od dotičnih stijena, bačene sjene tih strešnica leže u istoj visini, te njihov nacrt leži u visini točke R_x''. Točka A baca sjenu na lijevu stijenu lijevog krila, pa se ta stijena ne vidi. (Kuda baca sjenu točka E?). Točka B baca sjenu na prednju stijenu glavnog dijela zgrade u točku $B_x(B_x', B_x'')$. Na tu stijenu pada sjena jednog dijela brida AB; ta sjena ide u nacrtu točkom B_x'' usporedno s $A''B''$. (Zašto?).

Vertikalni brid $a(a', a'')$ lijevog krila baca sjenu na prednju stijenu glavnog dijela zgrade u pravac $a_x(a_x', a_x'')$. Ta sjena i sjena brida AB sijeku se u nacrtu u točki T_x'', te mora biti $T''T_x'' \parallel s''$.



Sl. 879.

Brid BG baca sjenu na prednju stijenu i na prednju krovnu ravninu glavnog dijela zgrade. Brid BG siječe prednji zid glavnog dijela zgrade u točki $Q(Q', Q'')$, pa tom točkom ide sjena brida BG na taj zid. Nacrt je te sjene u pravcu $B_x''Q''$. Na zidu dolazi u obzir samo dio sjene, i to dužina $B_x S_x(B_x'' S_x'')$.

Bačena je sjena brida BG na Π_1 u pravcu $B'G_1$. Taj pravac siječe strešnicu CD u točki $S(S', S'')$ i u tu točku pada sjena jedne točke brida BG. Sjena je tog brida na prednjoj krovnoj ravnini glavnoga dijela krova uspo-

redna s BG i pada u pravac, koji ide točkom $S(S', S'')$ tako, da je $S'G_x' \parallel B'G'$ i $S''G_x'' \parallel B''G''$, gdje je G_x bačena sjena točke G. (G_x' leži na pravcu $G'G_1 \parallel s'$, a G_x'' na pravcu $G''G_x'' \parallel s''$). Točka G_x mogla bi se odredili i kao sjecište krovne ravnine $CDIJ$ sa zrakom svijetla, koja ide točkom G, na način kao u § 100., sl. 337. Kod točne crtnje mora biti $S''S_x'' \parallel s''$. Dužina je $HG_x(H'G_x', H''G_x'')$ bačena sjena sljemena GH na krovnu ravninu $CDIJ$.

Literatura

Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I—II. Leipzig, 1884.
Rohn u. Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, IV Aufl. Leipzig 1913.
Müller: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. I, Leipzig 1918. Bd. II, Leipzig 1912.
Loria: Vorlesungen über darstellende Geometrie. Leipzig, I Bd. 1907, II Bd. 1912.
Dalwigk: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I Leipzig 1911.
Hauck: Vorlesungen über darstellende Geometrie Bd. I Leipzig 1912.
Schmid: Darstellende Geometrie, Berlin, I Bd. 1919, II Bd. 1921.
Grossmann: Darstellende Geometrie für Maschineningenieure, Berlin, 1927.
Ludwig: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Berlin I. T. 1919. II. T. 1922, III. T. 1924.
Vonderlinn: Lehrbuch des Projekcionszeichnens, IV. T. Bremerhaven 1903.
Bartel: Geometrya wykreślna, Lwow 1919.
Scheffers: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Berlin I Bd. 1919, II Bd. 1920.
Scholtke: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I., II. u. IV. Z. Leipzig.
Hessenberg-Salkowski: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Leipzig 1929.
Roubaudi: Traité de géométrie descriptive, Paris 1920.
F. G. M.: Exercices de géométrie descriptive, VI. ed. Paris.
Boucher: Cours de géométrie descriptive, L. II. Paris 1924.
Hjemslev: Darstellende Geometrie, Leipzig 1914.
Bernhard: Darstellende Geometrie, Stuttgart 1923.
Schwefl A.: Lehr — und Aufgabenbuch der darst. Geometrie, I—IV. T. Prag 1923.
Majcen: Opisno mjerstvo, Zagreb 1919.
Krieger: Angewandte darstellende Geometrie, Strelitz 1926.
Keiser: Angewandte darstellende Geometrie, Berlin 1925.
Segen: Uputa u deskriptivnu geometriju, Zagreb 1922.
Heller: Aufgaben und Beispielen aus der darst. Geometrie, II Wien 1911.
Göller: Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde, Stuttgart 1895.
Peschka: Kotierte Projektionsmethode, Brünn 1882.
Rothe: Darstellende Geometrie des Geländes 1919.
Chomé: Cours de géométrie descriptive de l' école militaire (Plans cotes) II.
Opderbeck: Dachausmittelungen, Leipzig 1902.
Geyer: Die angewandte darstellende Geometrie.
Bartel: Kotierte Projektion, Leipzig, 1933.

Izdanje i tisak *Nakladnog zavoda Hrvatske*, Zagreb, Frankopanska 26. — Za izdavača *dr. E. Musić* — Tehnička redakcija *Zlatko Orban* — Naklada 5000 primjeraka.