Dr. JOVAN KARAMATA
profesor Univerziteta

ALGEBRA II

Izdanje Izdavačke sekcije Akcionog Odbora studenata
Beogradskog Univerziteta
Beograd, 1947

TEORIJA POLINOMA

(Prvi deo)

G l a v a I

§ 1) Svaka algebarska jednačina sa jednom nepoznatom količinom, može se uvek pisati u obliku

(1) $A_o x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1} x + A_m = o$

Leva strana te jednačine je dakle ceo polinom uredjen po stepenima od x koga ćemo kratkoće radi označiti sa $F(x)$ ili $\varphi(x)$ Jednačina (1) ima dakle oblik:

$F(x) = 0$ ili $\varphi(x) = 0$

gde je x nepoznata količima a n ceo i pozitivan broj koji se naziva stepenom jednačine. Za jednu algebarsku jednačinu kaže se da je prvog, drugog, trećeg .... n-tog stepena, prema tome koliki je broj n tj. prema tome koliki je najviši stepen nepoznate količine. Tako na pr. opšta jednačina prvog stepena ima oblik:

$$A_o x + A_1 = 0$$

drugog stepena

$$A_o x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$

$A_o, A_1, A_2 \ldots\ldots\ldots A_n$ su koeficijenti date jednačine, ali nezavise od x i prestavljaju realne ili kompleksne količine.

Ako su koeficijenti dati slovima jednačina se naziva opštom jednačinom; ako su ti koeficijenti brojevi, takva jednačina se naziva brojnom jednačinom.

U pogledu rešavanja algebarskih jednačina valja razlikovati, dali je ta jednačina opšta ili brojna algebarska jednačina.

Rešiti opštu algebarsku jednačinu znači naći sve izraze obrazovane algebarskim operacija t.j. +, - , x, : i $\sqrt{}$ ..... iz koeficijenata A_0, ...A_n koje kad zamenimo mesto x u datoj jednačini njena leva strana postane jednaka nuli. Ti se izrazi zovu korenima date algebarske jednačine, ili nule datog polinoma.

Poznato nam je rešavanje algebarskih jednačina prvog i drugog, trećeg i četvrtog stepena. Opštu jednačinu, čiji je stepen viši od četvrtog, nemoguće je rešiti kao što su dokazali Abel i pre njega ali ne dovoljno tačno Wanstel. Što se tiče brojnih jednačina one se mogu uvek rešiti. Njihovo rešavanje sastoji se u tome da se nadju približne vrednosti korena, koje kad smenimo u datoj jednačini, njena leva strana postaje približno jednaka nuli.

Metode za rešavanje brojnih jednači-

na su iste ma kog stepena one bile, samo što račun postaje duži, što je stepen veći.

§ 2 D'ALAMBERT-ov stav

Ispitivanje polinoma trećeg i četvrtog stepena počelo je u XVI veku. Od tog doba pa do danas pokušaji da se nadju nule polinoma višeg stepena, ostali su bez uspeha. Usled toga su se pojavila dva pitanja.

1) Znamo da specijalni polinomi višega stepena imaju nule na pr x^n-1. Pita se da li moraju uopšte svi polinomi višega stepena da imaju nule?

2) Ako se kaže da svaki polinom ima nule, nastaje pitanje da li se one mogu naći?

Prvo pitanje je prvi postavio i odgovorio D'Alambert 1746 god. On je dokazao da svaki polinom mora imati najmanje jednu nulu, i kao neposredna posledica da polinom n-tog stepena mora imati tačno n-nula.

Kako D'Alambert-ov dokaz nije bio dovoljno precizan, to ga je 1797 god. Gaus, u svojoj doktorskoj tezi ponovo dokazao, a docnije dao još nekoliko sličnih dokaza.

I pored dokaza da nule postoje, pokušaji da se nadju nule polinoma višeg od 4-og stepena, ostali su bez uspeha; otuda se pojavilo to drugo pitanje. Na ovo pitanje pokušao je da odgovori prvi, italijanski matematičar Ruffini 1799 g. On je precizno definisao šta podrazumeva pod "algebarskim rešavanjem" jednačine

$$a_0 + a_1x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots a_n x^n = 0$$

Algebarski rešiti ovu jednačinu znači naći onaj algebarski izraz ili funkciju od koeficijenata R $(a_0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$ koji zamenjen umesto x - a, jednačinu identički zadovoljava. Kod jednačine drugog stepena na primer taj izraz je

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a^2 - 4a_0 a_3}}{2 a_2}$$

a kod jednačine trećeg stepena to je Cardanov obrazac. Šta znači ne moći rešiti algebarsku jednačinu ili ne moći naći nule polinoma? To znači da ne postoji ni jedna funkcija R u kojoj su koeficijenti vezani algebarskim operacijama, a koje svodi polinom identično na nulu, Ruffini-evi dokazi bili su nepotpuni a prvi strogi odgovor na drugo pitanje dao je mladi matematičar Abel. On je dokazao da se jednačina višeg stepena od 4-tog ne može algebarski rešiti. Vratimo se na prvo pitanje i dokažimo D'Alambertov stav. Iako se nule polinoma višeg stepena od četvrtog ne mogu algebarski izraziti možemo pokazati prvo da svaki polinom ima najmanje jednu nulu, a zatim da polinom

n - tog stepena ima tačno n-nula.

Uočimo polinom n-tog stepena

$$P_n (x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_nx^n$$

D'Alambert-ov stav kaže da postoji najmanje jedna vrednost $x=x_0$ takva da je $P_n(x_0)=0$, pri tome x_0 može biti realan ili kompleksan broj. Koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ mogu biti takodje i realni i kompleksni, šta više mi ćemo ih uvek smatrati za kompleksne, jer znamo da je realan broj samo specijalan slučaj kompleksnog. Da bismo izveli D'Alambert-ov stav dokazaćemo prethodno neke osobine polinoma n-tog stepena, koje su nam za njegovo izvodjenje potrebne.

1°) U polinomu n-tog stepena $P_n(x)$ kad (x) uzima velike vrednosti, član sa najvišim stepenom x preovladjuje tj. ceo polinom ponaša se kao član sa najvišim stepenom. Drugim rečima

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n}{a_n x^n} \to 1$$

Zaista ako svaki član polinoma podelimo sa $a_n x^n$ i pustimo da x teži beskonačnosti, svi članovi teže nuli, a poslednji jedinici.

To se može i ovako napisati:

$$a_0+a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_nx^n \sim a_nx^n \text{ kad } \lim x \to \infty$$

Ako taj isti stav formulišemo ovako: Moduo člana sa najvišim stepenom x-a može da bude koliko puta želimo veći od modula zbira ostalih članova ako je $|x|$ dovoljno veliko, tj.

$$|a_n x^n| > k\,|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots a_{n-1} x^{n-1}| \qquad (A)$$

Kako je $\underline{k}$ dat broj potražimo od koje će početne vrednosti x-a biti zadovoljena ova nejednačina. Kako je zbir modula uvek veći od modula zbira to će nejednačina (A) biti zadovoljena ako je

$$|a_n x^n| > k\{|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots |a_{n-1} x^{n-1}|\} >$$
$$> k\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right| \qquad (B)$$

Znači ako $\underline{x}$ izaberemo tako da je nejednačina (B) ispunjena, (A) će biti à fortiori ispunjena. Ostavimo kratkoće radi:

$r = |x|$, $A_i = |a_i|$; nejednačina (B) se svodi na nejednačine

$$A_n r^n > K\{A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots + A_{n-1} r^{n-1}\} \qquad (C)$$

Ako označimo sa A najveći od brojeva Ai, A = na x (Ai), i = 0,1,2, ... n-1 tada je očevidno

$$A\{1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots r^{n-1}\} > A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots A_{n-1} r^{n-1}$$

tako da će (c) biti zadovoljeno ako je

$$A_n r^n > K A \underbrace{\{1 + r + r^2 + \ldots\ldots r^{n-1}\}}_{\frac{r^n-1}{r-1}} = K A \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Ako r izaberemo tako da ova poslednja nejednačina bude zadovoljena, biće à fortiori i

sve prethodne tj. (c), (B), i (A). Kako je dalje

$$K\frac{A r^n}{r-1} > K A \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{A K r^n}{r-1} - \frac{A K}{r-1}$$

(ako je r > 1).

Ako r izaberemo tako da bude zadovoljena nejednačina $A_n r^n > \frac{A K r^n}{r-1}$ biće tim pre zadovoljena i predhodna. Uz poslednje, pak, sledi

$$A_n > \frac{A K}{r-1} \quad \therefore \quad r - 1 > \frac{A K}{A_n} \quad \therefore \quad \boxed{r > 1 + K\frac{A}{A_n}}$$

Dakle ako $\underline{r}$ tj. $|x|$ izaberemo tako da bude $|x| > 1 + k\,\frac{A}{|a_n|} = P$, biće

$$|a_n x^n| > k\,|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}|;$$

inače smo dokazali činjenicu da član sa največim stepenom preovladjuje nad ostalima, kad $|x|$ izaberemo dovoljno veliko.

Kako pak izraz $|a_n x^n|$ neprestano raste kad se $\underline{x}$ udaljuje od početka to na makakvoj krivoj liniji, to će ovaj izraz težiti $\to \infty$ kad $|x| \to \infty$; a kako taj član preovladjuje nad ostalima članovima, to će i ceo polinom $|P_n(x)| \to \infty$ kad $x \to \infty$ i to u makom pravcu $\underline{x}$ težio beskonačnosti. Ovaj je stav za realne brojeve očevidan, ovim je on dokazan i za kompleksne.

2°) Kako se ponaša polinom n-tog stepena za male vrednosti x - a?

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \to 0$ kad $x \to 0$ tj. polinom se svodi na a_0. Ako su izvesni članovi sami po sebi ravni nuli tj. ako polinom ne počinje od nultog stepena, već od q-tog, tj:

$$P_n(x) = \sum_{i=q} a_i x^i = a_q x^q + a_{q+1} x^{q+1} + \dots + a_n x^n$$

tada će ceo polinom težiti nuli, kad $x \to 0$. Pitanje je kako će se odnositi član sa najnižim stepenom od x - a prema ostalim članovima. Dokazaćemo da zbir ostalih članova može biti počev od jedne male vrednosti x - a koliko hoćemo puta manji od člana sa najnižim stepenom x - a.

Drugim rečima, pokazaćemo da možemo uvek izabrati x tako kako da bude

$$|a_q x^q| > k\,|a_{q+1} x^{q+1} + a_{q+2} x^{q+2} + \dots a_n x^n| \qquad (a)$$

Nastojaćemo kao i ranije da desnu stranu ove nejednačine, neprestano majoriramo, dok ne dodjemo do izraza iz koga možemo lako odrediti jednu gornju granicu γ za x tako da nejednačina (a) bude zadovoljena kad je $|x| < \gamma$.

Kako je zbir modula veći od modula zbira to je $k\sum_{q+1}^{n} |a_i x^i| > k\,|\sum_{q+1}^{n} a_i x^i|$

Dakle, da bi nejednačina (a) bila ispunjena treba samo izabrati x tako da bude ispunjena nejednačina $|a_q x^q| > k \sum_{i=q+1}^{n} |a_i x^i|$,

tj. $A_q r^q > k \sum_{i=q+1}^{n} A_i r^i$,

gde smo kratkoće radi stavili

$r = |x|$, $A_i = |a_i|$, $A = \max(A_i)$, $i = q+1, q+2, \dots n$.

Kako je A najveći medju koeficijentima Ai to je $A\sum_{i=q+1}^{n} r^i > \sum_{i=q+1}^{n} A_i r^i$

dakle ako izaberemo r takvo da je ispunjena nejednačina $A_q r^q > kA\sum_{i=q+1}^{n} r^i$ tj $A_q r^q > Ak\frac{r^{q+1}(1-r^{n-q})}{1-r}$ biće utoliko pre ispunjena i prethodna nejednačina.

Kako su u ovom slučaju vrednosti za r male to možemo pretpostaviti da su one manje od 1 tj. $r < 1$, onda su gornji članovi svi pozitivni. Poslednju nejednačinu možemo i ovako napisati $A_q r^q > \frac{Akr^{q+1}}{1-r} - \frac{Akr^{n+1}}{1-r}$

i ako r izaberemo tako da je ispunjena nejednačina $A_q r^q > Ak\frac{r^{q+1}}{1-r}$

biće tim pre ispunjena i prethodna. Odavde je

$$(1-r)A_q > Akr \quad \therefore A_q > (Ak + A_q)r \quad \therefore r < \frac{A_q}{Ak + A_q} \quad \therefore r < \frac{1}{1 + k\frac{A}{A_q}} = \gamma < 1.$$

Ako r izaberemo tako malo da bude manje od γ sve prethodne nejednačine će biti ispunjene pa i početna. Znači počev od izvesne vrednosti $|x|$ - a moduo člana sa najnižim stepenom biće proizvoljno puta veći od modula zbira svih ostalih članova.

Pomoću ova dva stava možemo preći na

sam dokaz D'Alambert-ovog stava.

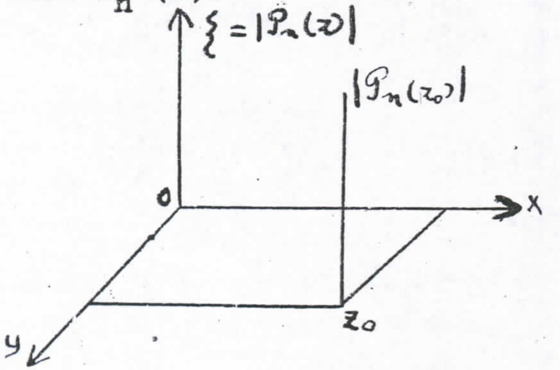
Uočimo polinom n-tog stepena $P_n(z)$, da bi on imao jednu nulu, mora postojati jedna vrednost $z = z_o$ takva da

$$P_n(z_o) = 0$$

Kad je $P_n(z_o) = 0$, mora i $|P_n(z_o)| = 0$

Ako jedna vrednost $z = z_o$ svodi polinom na nulu, onda mora svoditi i njegov moduo, i obratno.

Za svaku realnu ili kompleksnu vrednpst z, tj. $z = x + iy$, kompleksne ravni z, postoji odredjena vrednost za $|P_n(z)|$. Kako je $|P_n(z)|$ realan i pozitivan broj, možemo ga pretstaviti iznad kompleksne ravni u prostor. Tada će funkcija $\xi = |P_n(z)| = F(x_1y)$ pretstavljati za razne vrednosti z jednu površinu koju nazivamo <u>modularna površina</u> polinoma $P_n(z)$.



Polinom postaje jednak nuli na onim mestima gde modularna površina dodiruje z- ravan tj. $P_n(z)=0$ u onim tačkama ravni z u kojom modu-

larna površina polinoma $Pn(z)$ dodiruje ravan z.

D'Alamber-ov stav se dakle svodi na to da pokažemo da će modularna površina efektivno dodirivati ravan z najmanje u jednoj tački. S druge smo strane pod 1^o dokazali da za svaki polinom $Pn(z)$ postoji jedan krug, čiji poluprečnik možemo odrediti, tako da je za sve vrednosti van tog kruga $|Pn(z)|$ veće od ma kakvog unapred datog broja. Prema tome izvan tog kruga ne može $P_n(z) = o$. Znači da modularna površina može dodirivati ravan samo u tom krugu.

a) Kako za velike vrednosti $|z|$ - a polinom $|P_n(z)| \to \infty$ to on negde u krugu mora imati svoju najmanju vrednost

$$|P_n(zi)| \leq |P_n(z)| \text{ za makakvo } z.$$

b) Ma koju tačku z uzeli u krugu, ako je za nju $|P_n(z)|>0$ u njenoj blizini mora postojati tačka z' takvo da je $|P_n(z')|<|P_n(z)|$

Otuda sledi da minimum $|P_n(z_i)|$ mora biti tačka za koju je $|P_n(z)|= 0$ jer bi u protivnom u blizini tačke z_i postojala tačka z'_i za koju bi bilo $|P_n(z'_i)|<|P_n(z_i)|$

Treba dakle na taj način dokazati sledeći stav: ako je $|P_n(z_1)|>0$ u blizini tačke z_1 postoji tačka z_2 tako da je $|P_n(z_2)|<|P_n(z_1)|$

Neka je $z_2 = z_1 + h$, tada je $P_n(z_2) =$

$$P_n(z_1+h)=P_n(z_1)+\frac{h}{1!}P'_n(z_1)+\frac{h^2}{2!}P''_n(z_1)+\dots\frac{h^n}{n!}P_n^{(n)}(z_1)$$

U dobivenom se izrazu može desiti da je neki od izvoda $P_n^{(k)}(z_1)$ jednak nuli; poslednji neće biti jednak nuli jer je $P_n^{(n)}(z_1)=n!a_n$.

Da bismo ostali u opštem problemu pretpostavimo da su izvodi, tek počev od K-tog različiti od nule. K-ti izvod može biti i prvi i drugi samo mora biti manji od n-tog. Tada $P_n(z_2)$ uzima oblik

$$P_n(z_2)=P_n(z_1+h)=P_n(z_1)+\frac{h^k}{k!}P_n^{(k)}(z_1)+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}P^{(k+1)}(z_1)+\dots+\frac{h^n}{n!}P_n^{(n)}(z_1)$$

Kako po pretpostavci $P_n(z_1) \neq 0$ to možemo $P(z_1)$ podeliti sa $P_n(z_1)$, otuda

$$\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)} = 1+\frac{h^k}{k!}\frac{P_n^{(k)}(z_1)}{P_n(z_1)}+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\frac{P_n^{(k+1)}(z_1)}{P_n(z_1)}+\dots+\frac{h^n}{n!}\frac{P_n^{(n)}(z_1)}{P_n(z_1)}$$

Ostaje da pokažemo da možemo izabrati jedno takvo h da apsolutna vrednost desne strane bude manja od 1.

Stavimo $h=\rho e^{\theta i}$ gde je ρ rastojanje z_2 od z_1.

Kako su i brojevi $P_n(z_1)$ kompleksni to je

$$\frac{1}{s!}\frac{P_n^{(s)}(z_1)}{P_n(z_1)}=R_s e^{\alpha_s i} \qquad s=k,\ k+1,\ k+2,\dots\dots,n.$$

Ako ove vrednosti smenimo u poslednjem izrazu

dobićemo

$$\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)}=1+R_k\rho^k e^{(k\theta+\alpha_k)i}+R_{k+1}\rho^{k+1}e^{[(k+1)\theta+\alpha_{k+1}]i}+R_n\rho^n e^{(n\theta+\alpha_n)i}.$$

Nama je potrebno da desna strana bude po apsolutnoj vrednosti manja od 1, a ona će to biti ako je zbir svih članova, osim 1, negativan. S druge strane znamo da ρ možemo izabrati tako malo da član na najnižem stepenu preovladjuje. U ovom slučaju je član sa najnižim stepenom od ρ drugi član i njega možemo tako da udesimo da on bude negativan. Znamo da je $e^{\pi i}=-1$, drugi će član biti negativan ako θ izaberemo tako da bude $k\theta+\alpha_k=\pi$, $\therefore\ \theta=\frac{\pi-\alpha_k}{k}$

Izraz za θ daje smer u kome treba počev od tačke z_1 birati tačku z_2. To je smer u kome će modularna površina najbrže opadati. Izaberemo li tu vrednost za θ dobićemo:

$$\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)}=1-R_k\rho^k+R_{k+1}\rho^{k+1}e^{\beta_{k+1}i}+\dots R_n\rho^n e^{\beta_n i},$$

gde β zamenjuje odgovarajuće argumente. Otuda sledi nejednačina:

$$\left|\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)}\right|<|1-R_k\rho^k|+|R_{k+1}\rho^{k+1}+\dots+R_n\rho^n|\leq 1-R_k\rho^k+R_{k+1}\rho^{k+1}+\dots+R_n\rho^n,$$

jer je

$$|1-R_k\rho^k|=1-R_k\rho^k \qquad \text{za} \quad \rho^k<\frac{1}{R_k}$$

Iz osobine izvedene pod 2° znamo da u polinomu $-R_k \rho^k + R_{k+1}\rho^{k+1} + \dots + R_n \rho^n$ možemo izabrati ρ tako malo da član sa najmanjim stepenom preovlada. Kako je ovde taj član negativan to će ceo izraz na desnoj strani biti manji od 1 otuda:

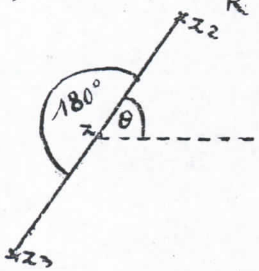
$$\left|\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)}\right| = \left|\frac{P_n(z_2)}{P_n(z_1)}\right| < 1 \quad tj \quad |P_n(z_2)| < |P_n(z_1)|,$$

što je potrebno dokazati.

Dakle, modularna površina $|P_n(z)|$ mora negde dodirivati ravan z, a u tim tačkama dodira vrednost polinoma se svodi na nulu.

Dakle: I. svaki polinom mora imati jednu nulu.

Iz ovog posmatranja vidimo da modularne površine imaju i sledeće osobine. One ne mogu imati stvaran minimum, i da je on različiti od nule: jer su u svakoj tački različitoj od nule tangente nagnute, a ne horizontalne, kao što smo pokazali na smeru θ. Na sličan način možemo dokazati da modularne površine nemaju stvaran maksimum no da rastu do beskonačnosti što ćemo dokazati, ako za h izaberemo vrednost, čiji je argumenat $\theta = \frac{2\pi - \alpha_k}{k}$



Tada je naime

$$\frac{P_n(z_1+h)}{P_n(z_1)} = 1 + R_k\rho^k + R_{k+1}\rho^{k+1} e^{\beta_{k+1} i} + \dots + R_n \rho^n e^{\beta_n i}$$

i ako ρ izaberemo tako da drugi član preovlada desna će strana po apsolutnoj vrednosti biti veća od 1. tj.

$$|P_n(z+h)| > |P_n(z_1)|.$$

Prema tome ne može postojati jedan stvaran maksimum, jer ma gde izabrali tačku uvek postoji jedan pravac u kome $|P_n(z)|$ uzima veću vrednost.

§ 3) Na osnovu D'Alambert-ovog stava mi možemo sad dokazati sledeći opštiji stav:

II Svaki polinom n-tog stepena ima tačno n nula.

Neka je dat polinom

$$F(x)$$

n- tog stepena, sa realnim ili imaginarnim koeficijentima. Prema D'Alambert-ovoj teoremi znamo da taj polinom ima najmanje jednu nulu. Označimo tu nulu sa α_1 tada je

$$F(\alpha_1) = 0$$

Podelimo polinom F (x) sa $(x - \alpha)$ i izvršimo deobu sve dogod ne dodjemo do ostatka, koji ne zavisi više od x; ovo je uvek moguće jer dogod ostatak sadrži x mi možemo deobu produžiti. Ako označimo sa $F_1(x)$ količnik ili rezultat deobe, koji pretstavlja jedan polinom (n-1) stepena, (što sledi iz samog načina izvadjanja), i sa R ostatak dobijamo:

1) $\frac{F(x)}{x-\alpha_1} = F_1(x) + \frac{R}{x-\alpha_1}$ ili

2) $F(x) = (x-\alpha_1)\cdot F_1(x) + R$

Ova formula važi za sve vrednosti x-a; Ako stavimo u njoj $x = \alpha_1$ dobijamo

(3) $F(\alpha_1) = R$.

Odavde sledi: Ako podelimo jedan polinom izrazom ($x - \alpha_1$), ostatak deobe dobijamo kad u polinomu smenimo x sa α_1.

Kako je u našem slučaju α_1 nula datog polinoma t.j. $F(\alpha_1) = 0$, to je prema (3)

$R = 0$,

a iz (2) dobijamo

(4) $F(x) = (x - \alpha_1)\, F_1(x)$

Ova jednačina kazuje ovo pravilo:

III. Ako je α_1 nula polinoma $F(x)$ on mora biti deljiv sa ($x - \alpha_1$).

Kako je u jednačini (4) $F_1(x)$ jedan polinom (n-i)-og stepena to će i on po D'Alambert-ovom stavu imati najmanje jednu nulu; označimo tu nulu sa α_2 t.j. $F_1(\alpha_2) = 0$. Prema prethodnom pravilu biće $F_1(x)$ deljiv sa ($x - \alpha_2$) i količnik te deobe biće izvestan polinom (n-2)-og stepena i ako ga označimo sa $F_2(x)$, možemo staviti

(5) $F_1(x) = (x-\alpha_2)\cdot F_2(x)$.

(5). $F_1(x) = (X - \alpha_2)\cdot F_2(x)$.

Na isti način i $F_2(x)$ je jedan polinom (n-2)-og stepena i on mora imati najmanje jednu nulu; neka je ta nula α_3 tada je polinom $F_2(x)$ deljiv sa ($X-\alpha_3$) i ako označimo ostatak te deobe sa $F_3(x)$ možemo staviti

(6). $F_2(x) = (X-\alpha_3)\cdot F_3(x)$.

gde je $F_3(x)$ jedan polinom (n-3)-ćeg stepena.

Kako stepen x-a u tako dobivenim količinama opada uvek za jedinicu, to ako produžimo to rezonovanje dovoljan broj puta, dobićemo jedan izvestan količnik $F_{n-i}(x)$ prvog stepena, oblika $H_{n-i}(x)$. Kako polinom

(7) $F_{n-i}(x) \equiv Hx + R$

ima jednu nulu $= -\frac{R}{H}$ koju ćemo označiti sa $\alpha_n = -\frac{R}{H}$ to je $F_{n-i}(x)$ deljivo sa ($X-\alpha_n$) i dobiveni količnik biće H t.j. jedna konstanta (nezavisna od X) tako dobijamo

$F_{n-i}(x) = H(X-\alpha_n)$

Niz tako izvršenih operacija možemo dakle napisati u sledećim jednačinama

$$F(x) = (X-\alpha_1)\, F_1(x)$$
$$F_1(x) = (X-\alpha_2)\, F_2(x)$$
$$F_2(x) = (X-\alpha_3)\, F_3(x)$$

$$F_{n-2}(x) = (X-\alpha_{n-i})\, F_{n-i}(x)$$
$$F_{n-i}(x) = (X-\alpha_n)\, F_n(x)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ nule pojedinih polinoma $F(x)$, $F_1(x)$ $F_3(x)$, ...a H jedna još nepoznata konstante. Ako ove jednačine izmnožimo medju sobom to ćemo dobiti kao konačni rezultat

(9) $F(x) = H(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2) \ldots (X-\alpha_{n-1})\cdot(X-\alpha_n)$

Da bi odredili konstantu H primetimo da koeficijenti od obe strane jednačine (9) moraju biti medju sobom jednaki, a kako je na levoj strani koeficijenat od x^n ravan A_o pošto je

$$F(x) = A_o X^n + A_1 X^{n-1} + \ldots A_{n-1} X + A_n$$

a koeficijenat od X^n na desnoj strani je ravan H to je dakle

$$H = A_o$$

i tako dobijamo identitet

(10) $F(x) = A_o(X-\alpha_1)\cdot(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_{n-1})\cdot(X-\alpha_n)$.

Da bi dobili nule polinoma $F(x) = o$ možemo staviti da je desna strana jednačine (10) ravna nuli; no pošto znamo da je jedan produkat ravan nuli, kad je ma koji od njegovih faktora ravan nuli, to vidimo da su jedine vrednosti X-a za koje je $F(x) = o$ baš količine $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ pošto ni za jednu drugu vrednost X-a ni jedan faktor na desnoj strani jednačine (10) ne može biti ravan nuli.

Iz ovoga vidimo da jedan polinom

n-tog stepena ima tačno n nula; i time je gornja teorema dokazana.

Izrazi $(X-\alpha_1)$, $(X-\alpha_2)$, ...$(X-\alpha_n)$ zovu se <u>korenim činiocima ili linearnim faktorima</u> datog polinoma $F(x)$. Iz ovog dokaza možemo izvesti sledeće posledice

§ 4) IV <u>Svaki polinom $F(x)$ n-tog stepena može se rastaviti u jedan proizvod od n linearnih faktora pomnožen koeficijentom najvišeg stepena od x.</u> Zato je potrebno da se <u>nadju</u> sve nule polinoma

$F(x)$.

Obratno možemo uvek obrazovati jedan polinom čije su nule date unapred, a jedino koeficijenat A_o ostaje proizvoljan.

Iz ovog sleduje da se dva polinoma koji imaju iste nule mogu razlikovati samo jednim konstantnim faktorom.

Gornje pravilo obuhvata kao specijalan slučaj poznato pravilo o kvadratnim trinomima koje glasi: ako su α_1 i α_2 nule kvadratnog trinoma

$$x^2 + px + q$$

on se može staviti u oblik

$$x^2 + px + q = (x-\alpha_1)\cdot(X-\alpha_2)$$

Iz gornje teoreme vidimo još i ovo: ako je poznat jedan koren α algebarske jednačine $F(x) = o$ n-tog stepena, možemo uvek stepen te jednačine smanjiti za jedinicu. Jer ako datu jednačinu $F_1(x) = o$ podelimo sa korenim činiocem, ona se svodi na jednačinu $F_1(x) = o$ čiji je stepen za jedinicu manji jer je

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

Na pr. ako je data jednačina

$$x^3 + x^2 + x - 1 = o$$

za koju znamo da ima koren $X = 1$, deljenjem korenim činiocem $(X-1)$ imamo:

$$(x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1) = X^2 + 1$$

Dobijamo dakle jednačinu

$$x^2 + 1 = o$$

koja je drugog stepena.

Isto tako ako su poznati R korena $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_R$ jedne algebarske jednačine, deobom sa korenim činiocima $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots$ $\ldots(x-\alpha_R)$ njen stepen možemo smanjiti za R.

Ovo pravilo mnogo olakšava rešavanje algebarskih jednačina, kada se unapred zna jedan izvestan broj njezinih korena. Tako na pr. kao što smo gore naveli, jednačina petog stepena nemože se rešiti; ali iako znamo jedan njen koren, možemo je svesti na jednačinu četvrtog stepena koja se može rešiti.

§ 5. Višestruke nule U § 3, § 4 pretpostavljali smo da su svih n nula $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ polinoma n-og stepena medju-

sobom različite; to ne mora uvek biti slučaj.

Može se desiti da jedan polinom ima dve ili više nule medjusobom jednake, u tom slučaju kažemo da dotični polinom ima <u>višestrukih nula</u>.

Neka je na pr. $\alpha_1 = \alpha_2$ t.j. neka polinom ima dve jednake nule. Tada će i odgovarajući koreni činioci $(x-\alpha_1)$ biti medjusobom jednaki, i na desnoj strani jednačine (16) § 3, javiće se faktor $(x-\alpha_1)^2$; za takvu nulu kažemo da je dvostruka nula ili nula drugog reda.

Ako pak dotični polinom ima tri jednake nule $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ odgovarajući koreni činioci biće takodje medjusobom jednaki i polinom će sadržati faktor $(x-\alpha)^3$; za takvu nulu kaže se da je trostruka nula ili nula trećeg reda.

Uopšte ako dati polinom ima 1 nula jednakih medjusobom, odgovarajući koreni činioci biće jednaki i taj će polinom sadržati faktor $(x-\alpha)^1$; za takvu se nulu kaže da je 1-tog reda.

No dotični polinom može pored nule α_1 1-tog reda, imati i nulu α_2 1_2 reda; α_3 1_3- ćeg reda itd. α_k, 1_k - tog reda, tada će se u dotičnom polinomu javiti koreni činioci oblika

$$(x-\alpha_1)^1, (x-\alpha_2)^1, (x-\alpha_3)^1 \ldots\ldots (x-\alpha_k)^{1k}$$

U opšte, ako polinom n-tog stepena ima samo R (gde je $R < n$) medjusobom različitih nula $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_k$ čiji su odgovarajući redovi $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_k$ tad se prema jednačini (10) on može napisati u obliku

$$F(x) = A_0 (x-\alpha_1)^{l_1} (x-\alpha_2)^{l_2} \ldots\ldots (x-\alpha_k)^{l_k}$$

gde je naravno

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots + l_k = n$$

Pojedine od količina $l_1, l_2 \ldots l_k$ mogu biti jednake jedinici, u tom se slučaju kaže da je odgovarajuća nula <u>jednostavna nula</u> ili nula <u>prvoga reda</u> .

§ 6. Zajednički delitelji dva polinoma

Neka su data dva polinoma $f(x)$ i $f_1(x)$ stepena m i n

$$f(x) = A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + A_2 X^{m-2} + \ldots\ldots A_{m-1} X + A_m = 0$$

$$f_1(x) = B_0 X^n + B_1 X^{n-1} + \ldots B_{n-1} X + B_n = 0$$

Videli smo da se svaki od tih polinoma da rastaviti u primarne faktore oblika

$$f(x) = A_0 (X-\alpha_1)^{l_1} \cdot (X-\alpha_2)^{l_2} \ldots\ldots (X-\alpha_k)^{l_k}$$

$$f_1(x) = B_0 (X-\alpha_1)^{h_1} \cdot (X-\alpha_2)^{h_2} \ldots\ldots (X-\alpha_i)^{h_i}$$

gde je

$$l_1 + l_2 + \ldots\ldots + l_k = m, \qquad h_1 + h_2 + \ldots\ldots h_i = n$$

Može se desiti u specijalnim slučajevima da oba polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$ imaju jedan ili više zajedničkih linearnih faktora.

Produkat svih tih zajedničkih linarnih faktora polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$ zove se njihov najveći zajednički delitelj.

Konstantni faktori A_0 i B_0 ne ulaze u obzir. Često je potrebno znati, da li dva polinoma imaju zajednički delitelj i ako ga imaju kako se dobija njihov najveći zajednički delitelj.

Neka je $m > n$; Podelimo $F(x)$ sa $F_1(x)$; Ako je $F(x)$ tačno deljiva sa $F_1(x)$, onda je naravno $F_1(x)$ njihov najveći delitelj. Ako to nije slučaj i ako označimo sa $Q(x)$, a sa $F_2(x)$ ostatak deobe biće

$$F(a) = Q(x) \cdot F_1(x) + F_2(x).$$

Dokažimo da je najveći zajednički delitelj polinom $F(x)$ i $F_1(x)$ isti kao i polinoma $F_1(x)$ i $F_2(x)$. Zaista, neka polinomi $F(x)$ i $F_1(x)$ imaju jedan zajednički faktor oblika $(x-\alpha)^l$ t. j. mogu se pisati u obliku

$$F(x) = (x-\alpha)^l \varphi(x) \text{ i } F_1(x) = (x-\alpha)^l \varphi_1(x)$$

Tada iz gornje jednačine imamo

$$(x-\alpha)^l \varphi(x) = (x-\alpha)^l \varphi_1(x) Q(x) + F_2(x)$$

tj.

$$f_2(x) = (x-\alpha)^l \{\varphi(x) - \varphi_1(x) Q(x)\}.$$

Dakle ako $F(x)$ i $F_1(x)$ sadrže faktor $(x-\alpha)^l$; ostatak $F_2(x)$ će takodje sadržati taj faktor. Obratno, ako $F_1(x)$ i $F_2(x)$ sadrže isti faktor $(x-\alpha)^l$ tj. ako je

$$f_2(x)=(x-\alpha)^l\varphi_2(x) \quad i \quad f_1(x)=(x-\alpha)^l\varphi_1(x)$$

tada će i polinom $F(x)$ sadržati taj faktor; jer iz jednačina I. imamo

$$f(x)=(x-\alpha)^l\varphi_1(x)Q(x)+(x-\alpha)^l\varphi_2(x)=(x-\alpha)^l\{\varphi_1 Q+\varphi_2\}$$

Dakle, svaki zajednički faktor polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$ je u isto vreme zajednički faktor polinoma $F_1(x)$ i $F_2(x)$ i obratno.

Prema tome je i produkat svih takvih zajedničkih faktora tj. najveći zajednički delitelj polinoma $F(x)$ i $F\ (x)$ takodje najveći zajednički delitelj polinoma $F_1(x)$ i $F_2(x)$.

Istraživanje najvećeg zajedničkog delitelja polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$ svodi se dakle na istraživanje najvećeg zajedničkog delitelja polinoma $F_1(x)$ i $F_2(x)$ koji su nižeg stepena. Deoba polinoma $F_1(x)$ i $F_2(x)$ može biti bez ostataka i tom je slučaju $F_2(x)$ najveći zajednički delitelj izmedju $F_1(x)$ i $F_2(x)$ pa je dakle najveći zajednički delitelj polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$.

Ako $F(x)$ nije tačno deljiv sa $F_2(x)$ i ako dobijamo jedan ostatak $F_3(x)$ tada se istraživanja najvećeg zajedničkog delitelja polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$ svodi na istraživanje najvećeg zajedničkog delitelja polinoma $F_2(x)$ i $F_3(x)$ itd.

Taj niz operacija treba produžiti sve dotle dogod ne dodjemo do jednog ostatka F_k koji će tačno deliti predjašnji ostatak F_{k-i}. Tada je F_k najveći zajednički delitelj polinoma F_{k-i} i F_k pa je dakle najveći zajednički delitelj i polinoma $F(x)$ i $F_1(x)$.

Primetimo još da će u gore pomenutom nizu operacija uvek biti kraja pošto stepeni polinoma $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,..... stalno opadaju.

Prema tome ćemo doći ili do jednog ostatka koji tačno deli predjašnji ostatak, ili do jednog ostatka nultog stepena t. j. do jedne konstante. U ovom poslednjem slučaju polinomi $F(x)$ i $F_1(x)$ nemaju ni jednog zajedničkog faktora.

§ 7. ZAJEDNIČKE NULE DVA POLINOMA

Istraživanja zajedničkih nula dva polinoma svode se na istraživanje najvećeg zajedničkog delitelja tih polinoma t.j.

$$f(x) \quad i \quad f_1(x) .$$

Neka dva polinoma imaju k zajedničkih nula (istih ili različitih medjusobom) tada će oni imati k zajedničkih korenih činioca oblika $(x-\alpha)$, tj njihovi polinomi će imati k zajedničkih faktora i produkat tih linearnih faktora biće jedan polinom P (x), k-tog stapena koji je najveći zajednički delitelj polinoma $f(x)$ i $f_1(x)$.

Pravilo. Da bi dobili zajedničke nule dotičnih polinoma, treba prema gore pomenutom načinu, naći najveći zajednički delitelj tih polinoma. Tada su nule polinoma P (x) zajedničke nule polinoma

$$f(x) \text{ i } f_1(x)$$

Ako polinomi $f(x)$ i $f_1(x)$ nemaju zajedničkih faktora, tada oni nemaju ni jednu zajedničku nulu. Količnik

$$\frac{f(x)}{P(x)} = Q(x) = o$$

daje ostale nule polinoma $f(x)$, koje nisu nule polinoma $f_1(x)$.

§ 8. PRAKTIČNO UPUSTVO

Pri istraživanju najvećeg zajedničkog delitelja dvaju polinoma $f(x)$ i $f_1(x)$ videli smo da imamo da izvršimo jedan niz delenja. Da bi pri tom delenju izbegli razlomke i tako olakšali račun, možemo ma koji polinom, koji se javlja u dotičnoj deobi, pomnožiti jednom stalnom količinom. Ovim se oblik najvećeg zajedničkog delitelja neće promenuti.

PRIMERI:

1°) Naći zajedničke nule polinoma

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$

Treba da nadjemo najveći zajednički delitelj polinoma $f(x)$ i $f_1(x)$. Zato ćemo najpre podeliti polinom $f(x)$ sa $f_1(x)$; da se pri toj deobi nebi javio razlomak $\frac{1}{2}$ možemo prema gornjoj primedbi pomnožiti sve članove polinoma $f(x)$ sa 2; tada ćemo umesto

$$(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (2x^3 - 5x^2 + x + 2)$$

imati:

$$(2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 4) : (2x^3 - 5x^2 + x + 2) = x - 1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x} \\
-x^3 + 5x^2 - 8x + 4 \\
-2x^3 + 10x^2 - 16x + 8 \\
\underline{-2x^3 + 5x^2 - x - 2} \\
5x^2 - 15x + 10
\end{array}$$

Dakle je ostatak

$$f_2(x) = 5(x^2 - 3x + 2).$$

Dalje je pošto smo ostatak $f_2(x)$ podelili sa 5,

$$(2x^3 - 5x^2 + x + 2) : (x^2 - 3x + 2) = 2x + 1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{2x^3 - 6x^2 + 4x} \\
x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^2 - 3x + 2} \\
= \quad 0 \quad =
\end{array}$$

kako je $f_1(x)$ deljivo sa $f_2(x)$ to je

$$f_2(x) = P(x) = x^2 - 3x + 2$$

najveći zajednički delitelj i zajedničke nule polinom $f(x)$ i $f_1(x)$ dobijamo iz

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = o$$

Ostale nule polinoma $f(x)$ dobijamo iz

$$\frac{f(x)}{P(x)} = x^2 + 1 = o$$

a polinoma $f_1(x)$ iz

$$\frac{f(x)}{P(x)} = 2x + 1 = o$$

2^o). Naći zajedničke nule polinoma

$x^3 + 2x^2 - x - 2$

a) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

odgovor: $P(x) = 5(x^2 - 1) = o$

$x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

b) $x^3 - 7x + 6$

odgovor: $P(x) = 5(x^2 + x - 6) = o$

$x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x$

c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

odgovor: $P(x) = 2(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = o$

3^o) Rešiti jednačime

$$x^3 - 7x^2 + 36 = o$$

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = o$$

znajući da je jedan koren prve jednačine tri puta veći od jednog korena druge jednačine.

4^o) Rešiti jednačinu

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = o$$

znajući da ima dva jednaka korena ali suprotnog znaka. Koji uslov mora postojati izmedju koeficijenata?

§ 9. Odredjivanje višestrukih nula

Višestruke nule mogu se odrediti na osnovu sledećeg pravila:

I. Višestruka nula l-tog reda polinoma

F (x) je višestruka nula (l-1)-og reda izvodnog polinoma F' (x).

Neka je α_1 višestruka nula l_1-tog reda polinoma F (x), tj.

$$(1) \quad F(x) = (x - \alpha_1)^{l_1}\varphi(x)$$

gde je $\varphi(x)$ polinom koji više ne sadrži faktor $(x - \alpha_1)$ t.j. $\varphi(\alpha_1) \neq o$. Diferenciranjem ove jednačine dobijamo

$$F'(x) = l_1(x-\alpha_1)^{l_1-1}\varphi(x) + (x-\alpha_1)^{l_1}\varphi'(x)$$

$$(2) \quad \therefore F'(x) = (x-\alpha_1)^{l_1-1}\left[(x-\alpha_1)\varphi'(x) + l_1\varphi(x)\right]$$

Jednačina (2) kazuje da je α_1 jedna nula izvodnog polinoma $F'(x)$ i to $(l-1)^{-og}$ reda, jer izraz u zagradi ne može biti jednak nuli za $x = \alpha_1$ pošto je $\varphi(\alpha_1) \neq o$. Time je gornje pravilo dokazano.

Kako gornje pravilo važi za nulu α_1 l_1- tog reda, to će ono važiti i za nule α_2 l_2-tog reda, α_3, l_3- toga reda ....α_K K-tog reda; tako da kad polinom F (x) sadrži faktore $(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}(x-\alpha_3)^{l_3}\ldots(x-\alpha_K)$ izvodni polinom $F'(x)$ će sadržati faktore

$$(x-\alpha_1)^{l_1-1}(x-\alpha_2)^{l_2-1}\ldots\ldots\ldots(x-\alpha_K)^{l_K-1}$$

zato će ovi poslednji faktori biti zajednički izmedju F(x) i F'(x).

Ako dakle polinom F(x) ima oblik

$$F(x) = A_0 (x-\alpha_1)^{l_1} (x-\alpha_2)^{l_2} \dots (x-\alpha_k)^{l_k}$$

gde pojedine od količina $l_1, l_2, \dots\dots l_k$, mogu biti jednaki jedinici, najveći zajednički delitelj izmedju tog polinoma i njegovog izvoda je

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{l_1-1} (x-\alpha_2)^{l_2-1} \dots\dots (x-\alpha_k)^{l_k-1}.$$

U slučaju ako je jedna od količina l, na pr. $l_\gamma = 1$, odgovarajući faktor $(x-\alpha_\gamma)$ u polinomu P (x) iščezava, što je jasno jer je u tome slučaju α_γ jednostavna nula datog polinoma. Možemo dakle izraziti sledeće pravilo:

II. Najveći zajednički delitelj izmedju polinoma i njegovog izvoda je proizvod svih linearnih korenih činioca čiji su redovi smanjeni za jedinicu.

Pravilo II kazuje na koji način možemo uvideti da li polinom ima višestrukih nula. Zadatak se svodi na istraživanje najvećeg zajedničkog delitelja izmedju polinoma i njegovog izvoda.

Ako F (x) i F'(x) nemaju zajedničkih faktora, oni neće imati ni višestrukih nula. Ako je medjutim P(x) najveći zajednički delitelj polinoma F (x) i F'(x) tada jednačina P(x) = o daje višestruke nule polinoma F (x). Red nula α odredjen je i sledećim pravilom

III. Ako je α nula l-tog reda polinoma F(x) tada je ona u isto vreme nula svih polinoma

$$F'(x),\ F''(x) \dots F^{(l-i)}(x);$$

obratno ako su F (x) i njeni (l-i)-vi prvi izvodi jednaki nuli za $x=\alpha$, tada je α nula l- tog reda polinoma F (x). U oba slučaja je $F^{(l)}(\alpha) \neq 0$

Ovo pravilo sleduje direktno iz pravila I. ako ga primenimo uzastopce na polinome $F(x),\ F'(x),\ F''(x) \dots F^{(l-i)}(x)$

Gornje pravilo možemo primeniti na izračunavanje reda nule samo ako je dotična nula poznata.

§ 10. Lagrange-ova Metoda

Da bismo dobili red pojedinih nula i rastavili dati polinom na polinome sa samo jednostavnim nulama, primenićemo Lagrangovu metodu:

Neka je dat polinom

$$F(x) = A_0 (x-\alpha_1)^{l_1} (x-\alpha_2)^{l_2} \dots\dots (x-\alpha_k)^{k},$$

koji može uopšte imati nule prvog, drugog .... l-tog reda. Grupišimo sve korene činioce, koji odgovaraju nulama prvog reda. Neka su oni

$$X_1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_k),$$

Grupišemo korene činioce, koji odgovaraju nulama drugog reda; Neka su to:

$$X_2=(x-\alpha_{12})(x-\alpha_{22})\ldots\ldots(x-\alpha_{k2})$$

produžimo taj način dalje da grupišemo korene činioce trećeg, četvrtog , ...l-tog reda, i neka su njihovi odgovarajući proizvodi

$$X_3\ ,\ X_4,\ \ldots\ldots\ X_k$$

Na taj način možemo dati polinom napisati u obliku

$$(1)\qquad f(x) = A_0\, X\ .\ X^2\ .\ X^3\ \ldots\ldots\ X_1^1$$

Jedan polinom, napisan u obliku (1), daje sve potrebne podatke o višestrukim nulama tog polinoma; iz njega vidimo da su polinom X_1 odredjene sve nule prvog reda; polinoma X_2 sve nule drugog reda i u opšte polinomom X_1 sve nule l- tog reda.

Da bismo prema tome potpuno rešili zadatak odredjivanja višestrukih nula treba dati polinom napisati u obliku (1).Taj se zadatak uvek može rešiti. Postupak, kako se dolazi do polinoma X_1, X_2 .... X_1 pokazaćemo kratkoće radi na specijalnom slučaju

$$F\ (x) = X_1 .\ X_2^2\ .\ X_3^3\ .\ X_4^4 \qquad (2)$$

Neka je dat polinom (2) na osnovu pravila (II) naj. zaj. del. D (x) polinoma F(x) i F' (x) je

$$D\ (x) = X_2\ .\ X_3^2\ .\ X_4^3$$

Zatim najveći zajednički delitelj D_1 (x) polinoma D (x) i D' (x), je

$$D_1'\ (x) = X_3\ .\ X_4^2$$

Naposletku naj. zaj. del. D_2 (x) polinoma D_1 (x) i D_1' (x) je

$$D_2\ (x) = X_4$$

Kad bismo dalje tražili naj. zaj. del. polinoma D_2 (x) i D_2^1 (x), videli bismo da oni nemaju više zajedničkih faktora, jer X_4 nema višestrukih nula. Kako pojedine polinome D, D_1 i D_2 možemo uvek dobiti, to dobijamo dalje delenjem

$$\frac{F\ (x)}{D\ (x)} = Q\ (x) = X_1.X_2.X_3.X_4,$$

$$\frac{D\ (x)}{D_1(x)} = Q_1(x) = X_2.X_3.X_4$$

$$\frac{D_1(x)}{D_2(x)} = Q_2(x) = X_3.X_4$$

$$D_2(x) = X_4$$

a odavde

$$X_1= \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$$

$$X_2= \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$$

$$X_3= \frac{Q_2\ (x)}{D_2(x)}$$

$$X_4= D_2^2\ (x).$$

Na taj način dolazimo do polinoma X_1, X_2, X_3,..

koji odredjuju nule prvog, drugog, ... R-tog reda datog polinoma.

Primer. Neka je dat polinom:

$$F(x) = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1;$$

Odrediti njegove višestruke nule.

Naj. zaj. del. polinoma $F(x)$ i $F'(x)$ je

$$D(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Naj. zaj. del. polinoma $D(x)$ i $D'(x)$ je

$$D_1 = x - 1.$$

Kako ovaj polinom nema višestrukih nula to vidimo, da su višestruke nule datog polinoma najviše trećeg reda i da ga možemo pisati u obliku

$$F(x) = X_1 \cdot X_2^2 \cdot X^3$$

Deleći polinome $F(x)$, $D(x)$ i $D_1(x)$ jedan s drugim dobijamo

$$Q(x) = \frac{F(x)}{D(x)} = x^4 + x^3 - x - 1$$

$$Q_1(x) = \frac{D(x)}{D_1(x)} = x^2 - 1$$

$$D_1(x) = x - 1$$

Naposletku deleći tako dobijene polinome medjusobom, dobijamo:

$$\frac{Q(x)}{Q_1(x)} = X_1 = x^2 + x + 1$$

$$\frac{Q_1(x)}{D_1(x)} = X_2 = x + 1,$$

$$D_1(x) = X_3 = x - 1,$$

t.j. $F(x) = (x^2 + x + 1)\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^3$

§ 11. Primena Homogenih Funkcija.-

Euler-ova Metoda

Videli smo u § 9 da je potreban i dovoljan uslov, da bi jedan polinom imao duplih nula, da su te nule istovremeno i nule polinoma $F'(x)$.

Da bi polinom $F(x)$ imao trostruke nule, te su nule istovremeno i nule polinoma $F'(x)$ i $F''(x)$

Primenom homogenih funkcija ti uslovi postaju jednostavniji. Neka je dat polinom:

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

Zamenimo u njemu x sa $\frac{x}{y}$ i pomnožimo sa y^n, tada dobijemo

(2) $y^n F(\frac{x}{y}) = \varphi(x,y) = A_0x^n + A_1x^{n-1}y + A_2x^{n-2}y^2 + \dots + A_{n-1}xy^{n-1} + A_ny^n$

gde je $\varphi(x,y)$ homogena funkcija n-tog stepena po promenljivima x i y, a

(3) $\varphi(x, 1) = F(x)$

Prema Euler-ovom obrascu koji važi za homogene funkcije je

(4) $x\varphi'_x(x,y) + y\varphi'_y(x,y) = n\cdot\varphi(x,y)$,

Ako polinom $F(x)$ ima jednu nulu α, tada je $F(\alpha) = 0$ i $F'(\alpha) = 0$.

t. j. $\varphi(\alpha,1)=0$ i $\varphi'(\alpha,1)=0$.

Stavimo li dakle u jednačinu (4) $x=\alpha$ i $y=1$, to dobijamo da je i

$$\varphi'_y(\alpha,1)=0$$

t. j. svaka dupla nula polinoma F (x) je zajednička nula polinoma

$$(5)\quad \varphi'_x(x,y) \text{ i } \varphi'_y(x,y)$$

kad u njima stavimo $y=1$

Obratno, prema (4) je i svaka zajednička nula polinoma (5) nula polinoma F (x) a kako je ona nula polinoma $\varphi'_x(x,1)=F'(x)$ to je ona dupla nula datog polinoma.

Potreban i dovoljan uslov da bi polinom F (x) imao duplih nula da polinomi (5) imaju zajedničkih nula.

U slučaju da polinom F (x) ima jednu trostruku nulu, ta nula mora zadovoljavati sve tri jednačine:

$$F(x)=0,\quad F'(x)=0,\quad F''(x)=0$$

Analogo polinomima (5) možemo naći druga tri jednostavnija polinoma, koja izražavaju isti uslov. Kako su sve tri funkcije $\varphi(x,y)$, $\varphi'_x(x,y)$ i $\varphi'_y(x,y)$ homogene, i to prva n-tog, a druge dve (n-1)-vog stepena, to možemo na njih primeniti jednačinu Euler-ovu i dobijamo:

$$(6)\quad \begin{cases} x\varphi'_x(x,y)+y\varphi'_y(x,y)=n\,\varphi(x,y). \\ x\varphi''_{x^2}(x,y)+y\varphi''_{yx}(x,y)=(n-1)\varphi'_x(x,y). \\ x\varphi''_{xy}(x,y)+y\varphi''_{y^2}(x,y)=(n-1)\varphi'_y(x,y). \end{cases}$$

Gde je $\varphi(x,1)=F(x)$, $\varphi'_x(x,1)=F'(x)$ i $\varphi''_{x^2}(x,1)=F''(x)$.

Ako polinom F (x) ima trostruku nulu α, stavimo u jednačinama (6) $x=\alpha$ i $y=1$, prva jednačina daje $\varphi'_y(\alpha,1)=0$, druga $\varphi''_{x,y}(\alpha,1)=0$ a treća $\varphi''_{y^2}=0$. Znači, trostruka nula polinoma F (x) mora biti nula polinoma

$$(7)\quad \varphi''_{x^2}(x,y)\quad \varphi''_{xy}(x,y),\ \varphi''_{y^2}(x,y)$$

kad u njima stavimo $y=1$.

Obratno, ako je α nula sva tri polinoma (7), u kojima je $y=1$, tada je α trostruka nula polinoma

F (x)

Zaista iz sistema (6) stavljajući $x=\alpha$ i $y=1$ dobijamo

$$\varphi'_x(\alpha,1)=0 \qquad \varphi''_y(\alpha,1)=0 \qquad \text{i} \qquad \varphi'(\alpha,1)=0$$

a kako je $\varphi'(x,1)=F(x)$ a $\varphi'(x,1)=F'(x)$ i $\varphi''_{x^2}(x,1)=F''(x)$

to je zaista α trostruka nula polinoma F(x).

Dakle potreban i dovoljan uslov da polinom F (x) ima trostruke je da nule dotične nule budu istovremeno i nule polinoma (7), u kojima je y = 1.

Produžujući na taj način dalje, dobijamo sledeće pravilo:

IV. <u>Potreban i dovoljan uslov da polinom</u> F(x) ima nulu (1-1)og reda je, da ta nula bude zajednička nula polinoma:

$$\varphi^{l}_{x^{l}}(x,y)\,;\ \varphi^{l}_{x^{l-1}y}(x,y)\,;\ \varphi^{l}_{x^{l-2}y^{2}}(x,y),\ldots..$$

$$\text{(9)}\quad \varphi^{l}_{xy^{l-1}}(x,y)\,;\ \varphi^{l}_{y^{l}}(x,y)\,,$$

u kojima je y=1.

<u>Primeri.</u>

1°) Odrediti višestruke nula polinoma:

a) $F(x) = x^6-4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9$

b) $F_1(x)= x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$

c) $F_2(x)= x^7-11x^6+42x^5-50x^4-59x^3+153x^2-108$

Odgovar :

a) $F(x) = (x+1)\cdot(x+3)^2\cdot(x-1)^3,$

b) $F_1(x)= (x-2)^2\cdot(x+1)^4,$

c) $F_2(x)= (x-1)^2\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)^3$

<u>2°)</u> Naći uslov, koji treba da zadovoljavaju koeficijenti p i q da bi polinom

$$F(x) = x^5 + px + q$$

imao jednu duplu nulu.

Odgovarajuća homogena funkcija je:

$$\varphi(x,y) = y^5 F\left(\frac{x}{y}\right) = x^5 + pxy^4 + qy^5,$$

$$\therefore\ \varphi'_x = 5x^4 + py^4$$

$$\varphi'_y = 4pxy^3 + 5qy^4;$$

dakle jednačine (za y = 1)

$$\varphi'_x = 5x^4 + p = 0$$

$$\varphi'_y = 4px + 5q = 0$$

moraju imati jedan zajednički koren. Taj koren dobijamo iz druge jednačine

$$x = -\frac{5q}{4p},$$

a kad tu vrednost uvrstimo u prvu jednačinu dobijamo traženi uslov:

$$5^5 q^4 + 4^4 p^5 = 0$$

ili

$$\left(\frac{p}{5}\right)^5 + \left(\frac{q}{4}\right)^4 = 0$$

Da bi našli još jednačinu trećeg stepena, koja nam daje ostala tri korena, možemo postupiti na sledeći način. Neka ta jednačina ima oblik: $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$

gde su nam α, β, γ još nepoznate količine; označimo kratkoće radi:

$$\frac{5q}{4p} = k$$

Tada možemo datu jednačinu pisati u obliku:

$$x^5+px+q=(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+k)^2,$$

ili kad faktore desne strane izmnožimo:

$$x^5+px+q=x^5+(\alpha+2k)x^4+(\beta+2\alpha k+k^2)x^3+(\gamma+2k\beta+\alpha k^2+k^3)x^2+(2k\gamma+k^2\beta)x+\gamma k^2$$

Kad uporedimo koeficijente desne i leve strane dobijamo

$$\alpha+2k=0$$
$$\beta+2\alpha k+k^2=0$$
$$\gamma+2\beta k+\alpha k^2=0$$
$$2k\gamma+k^2\beta=p$$
$$\gamma+k^2=q$$

Prve tri jednačine daju:

$\alpha=-2k$, $\beta=3k^2$ i $\gamma=-4k^3$

Iz druge dve jednačine, eliminisanjem k dobili bismo gore nadjeni uslov.

Tražena jednačina trećeg stepena ima dakle oblik:

$$x^3-2kx^2+3k^2x-4k^3=0$$

Ako stavimo u njoj

$$x=ky$$

i skratimo sa k^3 dobijamo:

$$y^3-2y^2+3y-4=0.$$

Ova jednačina ima jedan realan i dva imaginarna korena, neka su njeni koreni:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,$$

tada su nule datog polinoma petog stepena:

$$-\frac{5q}{4p},\ -\frac{5q}{4p},\ \varepsilon_1\cdot\frac{5q}{4p},\ \varepsilon_2\cdot\frac{5q}{4p},\ \varepsilon_3\frac{5q}{4p}:$$

3°) Dokazati, a) da je

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n+(-1)^{n-1}\left(\frac{q}{n-1}\right)^{n-1}=0$$

potrebni uslov, da bi polinom

$$x^n+px+q$$

imao jednu duplu nulu: b) da je ta nula:

$$x=-\frac{nq}{(n-1)p}=-k$$

c) da polinom, koji daje ostale (n-2) nule, postaje posle supstitucije $x=-ky$

(1) $y^{n-2}+2y^{n-3}+3y^{n-4}+4y^{n-5}+\ldots\ldots+$

$+(n-2)y+(n-1)$

4° Odrediti racionalne količine α, $\beta, \lambda, i\ \mu$ tako, da polinom:

$$F(x)=x^4-4x^3-4\lambda x+4\mu$$

ima jednu duplu nulu oblika $\alpha+\beta\sqrt{3}$.

Dati polinom mora imati još jednu duplu nulu oblika

$$\alpha-\beta\sqrt{3}.$$

Ako stavimo $F(x)=\left[(x-\alpha)^2-3\beta^2\right]$,

i izjednačimo koeficijente ovih polinoma dobijamo $\alpha=-1$ $\beta=\pm1$ $\lambda=2$ $\mu=1$

5° Naći uslov da polinom

$$x^5+px^3+q$$

ima jednu duplu nulu

Uslov je:

$$108p^3+3125q^2=0,$$ a odgovarajuća dupla nula je $\frac{256}{6a^2}$

6°) Naći red z nula $\underline{a}$ polinoma

$$F(x) = \frac{x-a}{2}\left[f'(x) - f'(a)\right] - \left[f(x) - f(a)\right]$$

gde je $f(x)$ jedan proizvoljan polinom. Videti, koja je prva količina $F(a)$, $F'(a)$ $F''(a)$,.. različita od nule.

Odgovor: $z = 3$

7°) Naći uslov izmedju p i q, da bi polinom $x^n + px^r + q$ imao jednu duplu nulu.

Traženi uslov je:

$$(n-z)^{n-z}\left(\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{q}{z}\right)^z$$

8°) Naći uslove, kojima moraju zadovoljavati količine p, q, z, da bi polinom

$$F(x) = x^4 + 6px^2 + 4qx + z$$

imao jednu nulu trećeg reda.

Odgovarajuća homogena funkcija ima oblik

$$y^4 F\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(x,y) = x^4 + 6px^2y^2 + 4qxy^3 + zy^4$$

Njeni parcijalni drugi izvodi su:

$$\varphi''_{x^2} = 12\,(x^2 + py^2),$$

$$\varphi''_{xy} = 12\,(2pxy + qy^2),$$

$$\varphi''_{y^2} = 12\,(px^2 + 2qxy + zy^2),$$

koji moraju imati jednu zajedničku nulu. Ta je nula očevidno data drugim polinomom pošto on ima samo jednu nulu, koja je $-\frac{q}{2p}$

Stavimo, da ta nula zadovoljava prvu i treću jednačinu, to dobijamo dva tražena

uslova:

$$q^2 + 4p^3 = 0 \text{ i } 3q^2 - 4pz = 0.$$

9°) Naći uslove, koje moraju ispunjavati količine p, q i z, da bi polinom

$$F(x) = x^4 + 6px^2 + 4qx + z$$

imao samo dve različite nule.

Neka je $D(x)$ naj. zaj. del. polinoma $F(x)$ i $F'(x)$, tada

$$\frac{F(x)}{D(x)}$$

sadrži sve različite nule polinoma $F(x)$ i sve su te nule prvoga reda. Kako u našem primeru polinom $F(x)$ treba da ima samo dve različite nule, to mora polinom $\frac{F(x)}{D(x)}$ biti drugog stepena. Pošto je $F(x)$ četvrtog stepena, to moraju polinomi $F(x)$ i $F'(x)$ imati jedan naj. zajž del. $D(x)$ drugog stepena.

Iz $F'(x) = 4\,(x^3 + 3px + q)$,

i

$$x^4 + 6px^2 + 4qx + z : x^3 + 3px + q \,/\, x$$

$$\underline{x^4 + 3px^2 + qx}$$

$$3px^2 + 3qx + z$$

$$x^3 + 3px + q :$$

$$3px^3 + 9p^2x + 3pq = 3px^2 + 3qx + z \,/\, x - \frac{q}{p}$$

$$\underline{3px^3 + 3qx^2 + zx}$$

$$-3qx^2 + (9p^2 - z)\,x + 3pq$$

$$\underline{-3qx^2 - \frac{3q^2}{p}x - \frac{qz}{p}}$$

$$\left(9p^2 - z + \frac{3q^2}{p}\right)x + 3pq + \frac{qz}{p}$$

sledi da će naj. zaj. del. biti drugog stepena, i to $D(x) = 3px^2 + 3qx + z$, ako je ostatak druge deobe jednak nuli tj. moraju postojati uslovi

$$9p^2 - z + \frac{3q^2}{p} = 0 \quad i \quad 3pq + q\frac{z}{p} = 0,$$

ili $9p^3 - zp + 3q^2 = 0$ i $q(3p^2 + z) = 0$

Drugi uslov daje dva slučaja

1) $q = 0$, tada je $z = gp^2$ i polinom $F(x)$ postaje

$$F(x) = x^4 + 6px^2 + 9p^2 = (x^2 + 3p)^2,$$

tj. ima dve duple nule

2) $3p^2 + z = 0$; gornje uslove možemo pisati u obliku

$$4p^3 + q^2 = 0, \quad 3q^2 - 4zp = 0,$$

a to su potrebni uslovi, da bi polinom $F(x)$ imao nulu trećeg reda (vidi primer 8^0).

10^0) naći uslov, da bi polinom

$$x^5 - 10ax^3 + 8bx + C$$

imao jednu nulu trećeg reda

Uslovi su: $3c^2 + 64ab^2 = 0$, $b = 9a^2$

Odgovarajuća nula je $-\frac{3c}{8b}$

11^0) Dokazati, ako polinom:

$$x^5 + qx^3 + zx^2 + t$$

ima duplu nulu, ta nula pripada polinomu:

$$x^2 - \frac{2q^2}{5z}x + \frac{5t}{3z} - \frac{4q}{15}$$

12^0 Vidi, dali polinom:

$$x^7 - qx + 1$$

ima višestrukih nula?

GLAVA II

§ 1. VEZE IZMEDJU NULA I KOEFICIJENATA

Neka je dat polinom

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

sa realnim ili imaginarnim koeficijentima i neka su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ njegove nule. Videli smo da gornji polinom možemo napisati u obliku

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots Am = A_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

Ako izmnožimo sve činioce na desnoj strani dobijamo izraz oblika

$$A_0 x^m - A_0 S_1 x^{m-1} + A_0 S_2 x^{m-2} - A_0 S_3 x^{m-3} + \ldots + (-1)^m A_0 S_n$$

gde su količine $S_1, S_2 \ldots S_n$ date izrazima:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

$$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$S_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$S_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n$$

t.j. S_1 je zbir kombinacija prve klase količina $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$; S_2 zbir kombinacija druge klase tih količina, S_3 zbir kombinacija treće klase i S_n je proizvod svih tih količina. Uporedimo li sad obe strane tako dobivene jednačine

$$A_0 x^{K} + A_1 x^{K-1} + A_2 x^{K-2} + \ldots\ldots A_m = A_0 x^{m} - A_0 S_1 x^{m-1} + A_0 S_2 x^{m-2} + \ldots (-1)^n S_n A_0$$

dobijamo, pošto koeficijenti istog stepena od x moraju biti jednaki medjusobom, sledeći niz jednačina

$$A_1 \ldots\ldots A_0 S_1 \text{ ili } \frac{A_1}{A_0} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n) = -\sum \alpha_i$$

$$A_2 \ldots\ldots A_0 S_2 \text{ " } \frac{A_2}{A_0} = -(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n) = -\sum \alpha_{ik}$$

$$A_n - (-1)^n S_n \text{ ili } \frac{A_n}{A_0} = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$$

Koeficijenat najvišeg stepena polinoma možemo uvek svesti na jedinicu, kad podelimo dati polinom tim koeficijentom; tj. svaki polinom može uzeti oblik

$x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x + B_n = 0$

dakle u gornjim jednačinama možemo staviti

$A_0 = 1.$

Na osnovu toga možemo izreći ovaj rezultat:

U polinomu u kome je koeficijenat najvišeg stepena od x jednak jedinici, postoji ova veza izmedju njegovih koeficijenata i nula:

Koeficijenat drugog člana pomnožen sa (-1) jednak je zbiru nula.

Koeficijenat trećeg člana pomnožen sa $(-1)^2$ jednak je zbiru kombinacija druge klase tih nula.

Koeficijenat četvrtog člana pomnožen

sa $(-1)^3$ jednak je zbiru kombinacija treće klase tih nula.

Koeficijenat (i+ 1) člana pomnožen sa $(-1)^i$ jednak je zbiru kombinacija i - te klase tih nula.

Koeficijenat (n+1) člana tj. nezavisni član pomnožen sa $(-1)^n$ jednak je proizvodu svih nula.

α

Dakle kod polinoma F (x) n- stepena imamo n jednačina koje vezuju n nula datog polinoma sa njegovim koeficijentima.

Potrebno je naglasiti da rešavanja tih n jednačina sa n nepoznatih količina $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ ne dovode ni do kakvih novih rezultata, jer kad bi iz tih jednačina eliminisali n- 1 nepoznate $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ došli bismo do jednačine F $(\alpha_1) = 0$ t. j. do prvobitne jednačine od koje smo pošli, u kojoj je samo x smenjeno sa α_1.

Primer: 1) Odredi zbir kvadrata nula tj. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots\ldots + \alpha_n^2$.

Iz prve jednačine imamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots \alpha_n = A_1$$

$$\therefore (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n)^2 = A_1^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots\ldots + \alpha_n^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \ldots)$$

kako je $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n = A_2$,

$\therefore \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots\dots\alpha_n^2 = A_1^2-2A_2.$

2.) Naći uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti polinoma

$$x^3 + px + q$$

da taj polinom ima jednu duplu nulu. Neka je α_1 jednostavna, a α_2 dupla nula; uslov zadatka je $\alpha_2 = \alpha_3$ pa iz jednačine (1) sleduje

$$\alpha_1+2\alpha_2=0 \qquad (1)$$

$$2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2=p \qquad (2)$$

$$\alpha_1\alpha_2^2=-q \qquad (3)$$

Kako imamo tri jednačine sa dve nepoznate to mora postojati izvesna veza izmedju p i q. Iz (1) dobijamo

$$\alpha_1 = -2\alpha_2$$

i kad uvrstimo tu vrednost u (2) i (3)

$$p=-3\alpha_2^2 \quad i \quad q=2\alpha_2^3 \qquad (4)$$

t.j. $\alpha_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Veza koja mora postojati izmedju koeficijenata je

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

t.j. $\quad 4p^3+27q^2=0;$

to je dakle traženi uslov. Podelimo jednačine (4) medjusobom to dobijamo za α_2:

$$\frac{q}{p} = -\frac{2}{3}\alpha_2$$

ili $\quad \alpha_2 = -\frac{3q}{2p}$

a α_1 dobijamo iz jedn. (1)

$$\alpha_1 = 3\frac{q}{p}$$

3) Obrazovati polinom čije su nule 0, 1, -1, 2, -2. Postoje dva načina. Prvo, ako pomnožimo sve korene činioce

$$F(x) = A_o\,(x-o)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2) =$$
$$= A_o\,(x^5-5x^3+4x^2)$$

gde je A_o proizvoljna količina za koju možemo staviti da je jednaka jedinici.

Drugo: možemo na osnovu jednačina (I) tražiti odmah koeficijente; tako dobijamo:

$A_1 = A_o\,(o+1-1+2-2)= o$

$A_2 = A_o\,(o+o+o-1+2-2-2+2-4)=-5A_o$

$A_3 = A_o\,(o+o+o+o+o+o+2-2-4+4)= o$

$A_4 = A_o\,(o+o+o+o+4) = 4A_o$

$A_5 = -A_o\cdot o\cdot o = o$

t.j. $F(x) = A_o x^5 - 5A_o x^3 + 4A_o x =$

$$= A_o(x^5-5x^3+4x)$$

i kad stavimo $A_o = 1$ dobijamo predjašnji polinom t.j.

$$x^5-5x^3+4x$$

4) Obrazovati polinome čije su nule

a) 1 + i, i 1

b) 1 + i, 1 + 2 i, 1- 6 i

c) 3, 1, - 4

d) 1, 2, 1 - i

5) Naći uslov koji mora postojati

izmedju koeficijenata polinoma

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3 x + A_4$$

da bi zbir dve nule bio jednak zbiru ostale dve nule, i naći te nule.

Ako su α_1, α_2, α_3 i α_4 nule datog polinoma po pretpostavci je

$$\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4 \qquad (1)$$

Primenimo li jednačine (I) na gornji polinom dobijamo četiri sledeće veze izmedju nula i koeficijenata.

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -A_1$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4 = A_2$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -A_3$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = A_4$$

koje možemo pisati u obliku:

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4) = -A_1$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4) = A_2$$
$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_3\alpha_4)+\alpha_3\alpha_4(\alpha_1\alpha_2) = -A_3$$
$$\alpha_1\alpha_2\cdot\alpha_3\alpha_4 = A_4$$

Stavimo kratkoće radi

$$\alpha_1+\alpha_2 = s,\quad \alpha_3+\alpha_4 = s',\quad \alpha_1\alpha_2 = p,\quad \alpha_3\alpha_4 = p'$$

tada je

$$(2)\quad \begin{cases} s + s' = -A_1 \\ p + p' + ss' = A_2 \\ ps' + sp' = A_3 \\ pp' = A_4 \end{cases}$$

Kako je prema (1) $s = s'$ to jednačine (2) postaju:

$$(3)\quad \begin{cases} 2s = -A_1 \\ p + p' + s^2 = A_2 \\ s(p' + p) = -A_3 \\ pp' = A_4 \end{cases}$$

Ako iz jednačina (3) eliminišemo tri nepoznate količine s, p i p' dobićemo traženi uslov izmedju koeficijenata A_1, A_2, A_3 A_4.

Iz prve i druge jednačine dobivamo

$$p + p' = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$$

a iz prve i treće

$$p + p' = -\frac{2A_3}{A_1}$$

dakle: $A_1^3 - 4A_1A_2 + 8A_3 = 0 \quad (4)$

Ako je ispunjen uslov (4) nule datog polinoma dobijamo sledeći način. Pošto je

$$(5)\ \begin{matrix}\alpha_1+\alpha_2 = s\\ \alpha_1\alpha_2 = p\end{matrix} \qquad i \qquad (6)\ \begin{matrix}\alpha_3+\alpha_4 = s'\\ \alpha_3\alpha_4 = p'\end{matrix}$$

to će kvadratne jednačine, dobivene iz sistema 5) i 6)

$$(7)\quad z^2 - sz + p = 0$$
$$(8)\quad z^2 - sz + p' = 0$$

dati sve četiri nule α_1, α_2, α_3, α_4. Valja samo izračunati s, p i p'.

Iz prve jednačine sistema (3) imamo

$$s = -\frac{A_1}{2}$$

Iz treće i četvrte jednačine sistema (3) dobijamo

$$p + p' = -\frac{A_3}{s} = -\frac{A_3}{-\frac{A_1}{2}} = \frac{2A_3}{A_1}$$

i

$$pp' = A_4$$

Prema tome p i p' su koreni kvadratne jednačine $x^2 - 2\frac{A_3}{A_1}x + A_4 = 0$

tj. $p = \frac{A_3 + \sqrt{A_3^2 - A_1A_4}}{A_1}$ $\quad p' = \frac{A_3 - \sqrt{A_3^2 - A_1A_4}}{A_1}$

Kad ove vrednosti uvrstimo u (7) i (8) dobijamo

$$z^2 + \frac{A_1}{2}z + \frac{A_3 + \sqrt{A_3^2 - A_1A_4}}{A_1} = 0$$

$$z^2 + \frac{A_1}{2}z + \frac{A_3 + \sqrt{A_3^2 - A_1A_4}}{A_1} = 0$$

koje daju sve četiri nule datog polinoma.

6) Naći uslov koji postoji izmedju koeficijenta polinoma

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4$$

ako je produkat dve nule jednak proizvodu ostale dve nule i pod pretpostavkom da je taj uslov ispunjen, naći te nule.

7) Dat je polinom:

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 10x + m$$

Odrediti m tako, da zbir kvadrata dve nule bude jednak zbiru kvadrata ostale dve nule i naći te nule.

Ako stavimo

$s = \alpha_1 + \alpha_2 \quad s' = \alpha_3 + \alpha_4 \quad p = \alpha_1\alpha_2 \quad p' = \alpha_3\alpha_4$

i prve dve jednačine kvadriramo dobijamo:

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = s^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \quad \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = s'^2 - 2\alpha_3\alpha_4$

Kako je po predpostavci

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_3^2 + \alpha_4^2$

to je

$$s^2 - 2p = s'^2 - 2p'$$

Jednačine (2) iz primera 5 postaju

$s + s' = -2$

$p + p' + ss' = -5$

$ps' + sp' = 10$

$pp' = m$

Iz ovih pet jednačina treba eliminisati četiri količine s, s', p, p' i iz dobivene jednačine naći vrednost od m. Iz prve dve jednačine dobivamo

$$s - s' = -(p + p')$$

tj. $s = -1 - \frac{p-p'}{2}$ i $s' = -1 + \frac{p+p'}{2}$ (1)

Uvrstimo te vrednosti u treću i četvrtu jednačinu

$(p - p')^2 - 4(p + p') = 24,$

$(p + p')^2 - 2(p + p') = 20.$

Odavde dobijamo

$p + p' = 2$

$(p - p')^2 = 16$

t.j. $p = -i \pm 2 = <^{1}_{-3} \quad p' = -i + 2 = <^{-3}_{1}$

t.j. $p = 1 \quad p' = -3;$

tako da iz poslednje jednačine

$$pp' = m,$$

dobijamo $$m = -3.$$

Da bismo rešili jednačinu

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 10x - 3 = 0$$

uvrstimo vrednosti od p i p' u jednačine (1). Otuda

$$s = -3 \quad \text{i} \quad s' = 1,$$

dakle koreni gornje jednačine dati su kvadratnim jednačinama

$$z^2 + 3z + 1 = 0 \quad \text{i} \quad z^2 - z - 3 = 0$$

t.j.

$$\alpha_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \quad \alpha_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \quad \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Kao kontrola možemo se uveriti da je zaista

$$(z^2 + 3z + 1)\cdot(z^2 - z - 3) = z^4 + 2z^3 - 5z^4 - 10 \quad -3$$

8. Kakav uslov treba da zadovoljavaju koeficijenti polinoma

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

da mu nule budu članovi aritmetične progresije. Stavimo simetrije radi da su nule date izrazima. $\alpha_1 = \alpha - \delta \quad \alpha_2 = \alpha \quad \alpha_3 = \alpha + \delta$

Tada jednačine (I) postaju

$$-A_1 = (\alpha - \delta) + \alpha + (\alpha + \delta) = 3\alpha$$

$$A_2 = (\alpha - \delta)\alpha + (\alpha + \delta)(\alpha - \delta) + (\alpha + \delta)\alpha = 3\alpha^2 - \delta^2$$

$$-A_3 = (\alpha - \delta)\alpha(\alpha + \delta) = \alpha^3 - \delta^2$$

Iz prve dobijamo

$$\alpha = -\frac{A_1}{3}$$

Iz druge $\delta^2 = 3\alpha^2 - A_2 = \frac{A_1^2}{3} - A_2$

Zamenom ovih vrednosti od δ i α u treću jednačinu dobijamo traženi uslov

$$2A_1^3 - 9A_1A_2 + 27A_3 = 0 .$$

Pod predpostavkom da je taj uslov ispunjen nule datog polinoma su

$$\alpha_1 = -\frac{A_1}{3}\sqrt{\frac{A_1^2}{3} - A_2}; \quad \alpha_2 = -\frac{A_1}{3}; \quad \alpha_3 = -\frac{A_1}{3} + \sqrt{\frac{A_1^2}{3} - A_2}$$

9. Dat je polinom

$$x^3 + 3x^2 + 3x + z$$

Odrediti z tako da mu nule budu članovi aritmetičke progresije.

10.) Kakav uslov treba da zadovoljavaju koeficijenti polinoma

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$$

da mu nule budu članovi geometrijske progresije. U tome slučaju naći te nule.

Primeniti na polinom

$$8x^3 - 42x^2 + 63x - 27.$$

Uslov glasi

$$A_1^3 A_2 - A_2^3 = 0$$

11.) Naći uslov izmedju koeficijenata polinoma

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$$

da jedna nula bude jednaka zbiru druge dve.

Naći u tom slučaju te nule. Primeniti na polinom

$$36\,x^3 - 12\,x^2 - 5\,x + 1$$

Traženi uslov je:

$$A_1^3 - 4\,A_1\,A_2 + s\,A_3 = 0$$

i tada je

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = \left(x - \frac{A_1}{2}\right)\cdot\left(x^2 + \frac{A_1}{4}x + A_2 - \frac{A_1^2}{4}\right)$$

12.) Naći uslov izmedju koeficijenata polinoma

$$x^3 + A_1x^2 + A_1x + A_3$$

d zbir dve nule bude jednak datom broju <u>s</u> . Primeniti na polinom

$$2\,x^3 - x^2 - 7x - 3$$

gde je

$$s = 1$$

Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ nule datog polinoma to postoje veze

$$\alpha_1 + \alpha_2 = s \quad i \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -A_1$$

t.j. $\alpha_3 = -(s + A_1)$

Ako u jednačinu stavimo $x = \alpha_3$, dobijamo traženi uslov. Kako je poznata jedna nula α_3 to možemo lako naći ostale dve.

13) Naći uslov koji treba da ispune koeficijenti polinoma

$$x^3 + px + q$$

da jedna nula bude jednaka zbiru inverznih vrednosti druge dve, t.j. da $\alpha_1 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

Naći te nule. Primeniti na polinom

$$x^3 + 5\,x + 2$$

Traženi uslov je

$$q^2 + p + 1 = 0;$$

ako je on ispunjen postoji identitet

$$x^3 + px + q = (x - q)\cdot(x^2 + q + 1).$$

14.) Dat je polinom

$$x^3 - 7\,x + \lambda$$

Odrediti λ tako da jedna nula bude dva puta veća od druge. Naći te nule.

Odgovor: ima dva rezultata; prvo $\lambda = +6$ tada su nule 1, 2, -3 drugo: $\lambda = -6$, nule su - 1, -2, +3.

15.) Koja veza mora postojati izmedju koeficijenata polinoma

$$x^3 + px^2 + q = 0$$

da razlika dve nule bude jednaka datom broju <u>a</u>; naći u tom slučaju te nule.

Uslov je: $a^2(a^2 - p^2) + q(27q + 4p^3) = 0$

a nule su

$$\alpha_1 = \frac{9q - p(a^2 - p^2)}{2p^3 + 3(a^2 - p^2)}\,;\quad \alpha_2 = -\frac{\alpha_1 + p - a}{2}\,;\quad \alpha_3 = -\frac{\alpha_1 + p + a}{2}$$

16.) Odrediti a i b tako da koreni jednačine

$$x^4 - 4x^3 - 36x^2 + ax + b = 0$$

budu članovi aritmétičke progresije; rešiti jednačinu.

Odgovor:

$a = 78$, $b = 105$,

$\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 7$.

§ 2 SIMETRIČNE FUNKCIJE

A. Opšti pregledi i definicija

Simetrična funkcija $\underline{k}$ količina a, b, c, ...l je ona funkcija, koja se ne menja ma kako permutovali količine $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ... $\underline{l}$.

Takve su na pr.

1) $a+b$, $a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2$; $\dfrac{f(a)-f(b)}{f(a)-f(b)}$, ab

2) $ab+ac+bc$; $a^2+b^2+c^2$; abc; $\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ac}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$

3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$; $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$; $\sqrt{abc}$

4) $e^a+e^b+e^c$; $ae^b+be^c+cl^a+be^a+ce^b+ae^c$

5) $\dfrac{\sin a}{\sin b}+\dfrac{\sin b}{\sin c}+\dfrac{\sin c}{\sin a}+\dfrac{\sin b}{\sin a}+\dfrac{\sin c}{\sin b}+\dfrac{\sin a}{\sin c}$

U nizovima 1) i 2) imamo algebarske racionalne sim. f-je. U nizu 3) imamo algebarske iracionalne sim. f-je u nizovima 4) i 5)imamo transcendetne simetrične f -je.

I. PRIMEDBA.- Algebarske iracionalne i transcedentne sim. f-je nećemo rasmatrati. Proučićemo samo algebarske racionalne sim. f-je.

II. PRIMEDBA.- Algebarske racionalne simetrične funkcije dele se na cele i razlomljene.

U nizu 2) poslednja simetrična funkcija

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$$

je razlomljena. Svodjenjemna zajednički imenitelj ona dobija oblik:

$$\frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{a^2b^2c^2}$$

U ovakvom obliku pomenuta razlomljena simetrična funkcija predstavljena je kao količnik dveju celih simetričnih funkcija oblika

$b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3$ i $a^2b^2c^2$

III. PRIMEDBA.- Cele sim. f.-je mogu biti homogene kao $ab+ac+bc$ i nehomogene t.j. sastavljene od više homogenih sim. f-ja, kao $ab+ac+bc-abc$

Cele nehomogene simetrične f-je dobijamo kada ponaosob izračunamo sve njene cele homogene sim. f-je. Prema tome rasmatraćemo samo cele i homogene sim. f-je.

B.- OSOBINE SIMETRIČNIH FUNKCIJA.

Osobina I. Ako je sim. f-ja jednočlana svi njeni činioci neuzimajući pri tom u račun stalne koeficijente, moraju imati jednake izložioce, na pr.

$a\,x^3y^3z^3$

Osobina II. Ako je sim. f-ja više-člana i ako je u jedan njen član, koji se posle permutovanja ma koliko promenljivih pretvara u V, i pre permutacije medju članovima sim. f-je morao se nalaziti član V.

Osobina III. Svi članovi sim. f-je moraju imati isti broj faktora i u svima se moraju javljati isti izložioci.

Osobine IV. Prema ovome sim. f-ja može se smatrati kao poznata, ako je poznat jedan ma koji njen član a taj član je poznat ako su poznati izložioci njegovih faktora.

C - OZNAKA SIMETRIČNIH FUNKCIJA

Iz četvrte osobine odeljka pod B. sledi da se sim. f-je mogu označavati na jednostavan način, i to:

Kazaljke odvojene zapetama uz slovo S Označavaju izložioce osnovaka. Broj kazaljaka pokazuje broj činioca koji se javljaju u svakom članu sim. f-je.

Na primer:

$S_1 = a+b+c,\quad S_2 = a^2+b^2+c^2,\quad S_3 = a^3+b^3+c^3,$

$S_{1,2} = ab+ac+bc,\quad S_{2,1} = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$

$S_{1,1,1} = abc,\quad S_{2,1,1} = a^2bc+ab^2c+abc^2$

Pored ove oznake postoji još i sledeća:

$\sum a = S_1,\quad \sum a^2 = S_2,\quad \sum a^3 = S_3\quad \sum ab = S_{1,1}$

$\sum a^2b = S_{2,1};\quad \sum abc = S_{1,1,1},\quad \sum a^2bc = S_{e,1,1}$

$\sum \alpha_1^p \alpha_2^q = S_{pq}$ za $p-q \neq 0$

D. IZNALAŽENJE ČLANOVA SIM.F.JE.

Praktično upustvo: Da bismo našli sim. f-ju količina a,b,c, ... h.... l oblika

$S_{p,q \ldots s} = \sum a^p b^q \ldots\ldots h^s$

treba od količina a,b,c, ...h.....l obrazovati sve kombinacije z klase bez ponavljanja gde $\underline{z}$ označava broj faktora pojedinog, svaku od ovako dobivenih kombinacija treba staviti u zaseban red i ispitati onoliko puta koliko ima permutacija količina

p, q, ...s.

Svaku kombinaciju pojedinih redova treba zatim stepenovati sa svakom permutacijom eksponenata p, q, ...s. Ovako dobivene članove treba sabrati i dobiveni zbir biće tražena sim.f-ja.

Primer:

Date su količine: a, b, c i d; sastaviti sim. f-ju

$S_{3,2,1} = \sum a^3 b^2 c$

Svaki član je sastavljen iz 3 faktora; kombinacije treće klase, bez ponavljanja iz osnovaka: a, b, c, d su: abc, abd, acd, bcd, a permutacije izložilaca 1, 2, 3, su: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Dakle je:

$$S_{3,2,1} = a^3b^2c = ab^2c^3+ab^3c^2+a^2bc^3+a^2b^3c+a^3bc^2+a^3b^2c$$

$$ab^2d^3+ab^3d^2+a^2bd^3+a^2b^3d+a^3bd^2+a^3b^2d$$

$$ac^2d^3+ac^3d^2+a^2cd^3+a^2cd^3+a^3cd^2+a^3c^2d$$

$$bc^2d^3+bc^3d^2+b^2cd^3+b^2cd^3+b^3cd^2+b^3c^2d$$

E. PROSTE I SLOŽENE SIMETRIČKE FUNKCIJE.

Prosta sim. f-ja ili sim. f-ja prvoga reda je ona sim f-ja čiji svaki član sadrži samo jednu količinu, a izložitelj može biti ceo pozitivan ili negativan broj na pr.

$$S_1 = \sum a = a + b + c + \dots\dots\dots + l,$$

$$S_p = \sum a^p = a^p + b^p + c^p + \dots\dots\dots\dots + l^p,$$

$$S_{-p} = \sum a^{-p} = \frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p} \dots\dots\dots + \frac{1}{l^p}$$

Sim. f-je koje nisu proste nazivamo složenim sim. f-jama; na pr.

$$S_{2,1} = \sum a^2b = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

Složena sim. f-ja kod koje svaki član sadrži po dve količine se zove sim. f-ja drugog reda.

Na pr. $\sum a^{\alpha} b^{\beta}$

Ako svaki član sim- f-je sadrži tri količine kažemo da je trećeg reda.

Na pr. $\sum a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$

U opšte sim. f-ja je n-tog reda ako sadrži n količina u svakom članu.

§ 3 PROSTE SIMETRIĆNE FUNKCIJE NULA POLINOMA.

Newton-ovi obrasci.

A. Neka je dat polinom m-tog stepena (1) $U = z^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m$

i neka su njegove nule $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m$. Treba sim. f-ja nula da se izrazi koeficijentima $A_1, A_2, A_3, \dots A_m$.

Ako (1) diferenciramo po x dobijamo:

(2) $U' = mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \dots + A_{m-1}$.

(1) možemo napisati u obliku:

$$U = (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots\dots(x-\alpha_m), \quad (3)$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$U' = \sum (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\dots\dots(x-\alpha_m) \quad (4)$$

Iz (3) i (4) sledi

$$\frac{U'}{U} = \sum \frac{1}{x-\alpha_1} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \dots\dots \frac{1}{x-\alpha_m} \quad (5)$$

ili

$$U' = \sum \frac{U}{x-\alpha_1}$$

Ako (1) podelimo sa

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2), \ldots\ldots (x-\alpha_m)$ DOBIJAMO:

$$\frac{U}{x-\alpha_1} = x^{m-1} + (\alpha_1 + A_1)x^{m-2} + (\alpha_1^2 + \alpha_1 A_1 + A_2)x^{m-3} + \ldots\ldots + (\alpha^{m-1} + A_1\alpha^{m-2} + A_{m-1}) \quad (6)$$

i odgovarajuće slične obrasce za:

$$\frac{U}{x-\alpha_2}, \frac{U}{x-\alpha_3}, \ldots\ldots \frac{U}{x-\alpha_m}.$$

Sabiranjem ovih izraza dobijamo:

$$\sum \frac{U}{x-\alpha_i} = mx^{m-1} + (S_1 + mA_1)x^{m-2} + (S_2 + A_1S_1 + mA_2)x^{m-3} + \ldots + (S_{m-1} + A_1S_{m-2} + A_2S_{m-3} + \ldots + mA_{m-1}) \quad (7)$$

gde smo stavili

$$S_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + \ldots\ldots \alpha_m^m = \sum \alpha_i^m$$

Iz jednačina (2), (5) i (7) sleduje:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 + A_1 &= 0 \\
S_2 + A_1S_1 + 2A_2 &= 0 \\
S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + 3A_3 &= 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{m-1} + A_1S_{m-2} + \ldots + (m-1)A_{m-1} &= 0
\end{aligned}\right\} (N)$$

Iz ovih obrazaca (N) možemo postepeno izračunati sim. f-je S_1, S_2, S_3, .. S_{m-1}; tako dobijamo:

$$S_1 = -A_1$$
$$S_2 = A_1^2 - 2A_2$$
$$S_3 = A_1^3 + 3A_1A_2 - 3A_3$$
$$S_4 = A_1^4 - 4A_1A_2 + 4A_1A_3 - 2A_2^2 - 4A_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jednačine (N) daju samo sim. f-je od S_1 do S_{m-1} ostale sim. f-je: S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, itd. dobijamo na sledeći način:

B.- IZNALAŽENJE: S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, itd.

Kako je

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1^m + A_1\alpha_1^{m-1} + A_2\alpha_1^{m-2} + \ldots\ldots + A_m &= 0 \\
\alpha_2^m + A_1\alpha_2^{m-1} + A_2\alpha_2^{m-2} + \ldots\ldots + A_m &= 0 \\
&\ldots\ldots \\
\alpha_m^m + A_1\alpha_m^{m-1} + A_2\alpha_m^{m-2} + \ldots\ldots + A_m &= 0
\end{aligned}\right\} (1)$$

to sabiranjem ovih jednačina dobijamo:

$$S_m + A_1S_{m-1} + A_2S_{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}S_1 + mA_m = 0 \quad (N')$$

Jednačina (N') daje sim. f-ju S_m ako znamo sim. f-je S_1, S_2, S_3, ... S_{m-1}.

Pomnožimo ponaosob svaku od jednačina (1) sa: α_1^k, α_2^k, α_3^k, ... α_m^k i saberimo tako dobijene rezultate, dobijamo jednačinu:

$$S_{m+k} + A_1S_{m+k-1} + A_2S_{m+k-2} + \ldots + A_mS_k = 0 \quad (N'')$$

Ako u ovoj jednačini damo broju k vrednosti 1, 2, 3, dobiće se sistem jednačina, koji sa sistemom (N) i jednačinom (N') omogućava izračunavanje svake sim. f-je S_v.

3.- IZNALAŽENJE SIMETRIČNIH FUNKCIJA:

$S_{-1}, S_{-2} \dots S_{m-1}$

Proste sim. f-je S_{-z}, gde je z negativan ceo broj, izračunavaju se postepeno na sledeći način.

Neka je $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_n$

dati polinom stavimo

$$\varphi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots$$

$$\dots + A_1 x + 1 . \qquad (1)$$

Kako je: $f\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = 0$

jer je α_1 nula polinoma f (x), to je

$$\varphi\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = 0.$$

Ako sa polinomom $^{(1)}$ primenimo obrasce (N) (N') i (N") dobijamo sledeće veze:

$$\left.\begin{array}{l} A_m S_{-1} + A_{m-1} = 0 \\ A_m S_{-2} + A_{m-1} S_{-1} + 2 A_{m-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m S_{-m} + A_{m-1} S_{-m+1} \dots + m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m S_{-m-k} + A_{m-1} S_{-m-k+1} + \dots + S_{-k} = 0 \end{array}\right\} (N''')$$

Obrasci (N), (N'), (N") i (N"') nazivaju se Newton-ovi obrasci.

Pomoću ovih obrazaca mogu se uvek odrediti proste sim. f-je nula pomoću koeficijenata polinoma ili koeficijente polinoma pomoću sim. f-ja nula kad su poznate sim. f-je S_1 do S_m.

De bi smo došli do istih rezultata, tj. do iznalaženja sim. f-ja korena jedne alg. jedn. pomoću njenih koeficijenata i obratno, postoje i druge metode. Takve su na pr. metode upotrebe redova i Cauchy-eva metoda.

§ 4.- SLOŽENE SIMETRIČNE FUNKCIJE

NULA POLINOMA.

A - TEOREMA: Svaka sim. f-ja višega reda može se izraziti pomoću prostih sim. f-ja.

Da bi smo dokazali ovu teoremu počećemo postepeno od dvojnih sim. f-ja pa dalje.

Neka su: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots \alpha_m$

nule polinoma

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A^2 x^{m-2} + \dots\dots + A_{m-1} x + A_m .$$

Slučaj 1) Izraziti sim. f-ju nula $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$

$$S_{p,q} = \sum \alpha_1^p \alpha_2^q \qquad za\ p-q \neq 0$$

koeficijentima $A_1, A_2 \dots\dots A_n$.

Podjimo od izraza:

$$\left.\begin{array}{l} S_p = \sum \alpha_1^p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \dots\dots \alpha_m^p \\ S_q = \sum \alpha_1^q = \alpha_1^q + \alpha_2^q + \alpha_3^q + \dots\dots \alpha_m^q \end{array}\right\} (1)$$

i izmnožimo leve i desne strane

$$\sum \alpha_1^p \sum \alpha_1^q = \sum \alpha_1^{p+q} + \sum \alpha_1^p \alpha_1^q \qquad (2)$$

tada prvi član desne strane, naime $\sum \alpha_1^{p+q}$ pretstavlja zbir proizvoda prvog i prvog člana, drugog i drugog člana itd. članova desne strane jednačina (1) t.j.

$$\sum \alpha_1^{p+q} = \alpha_1^p \cdot \alpha_1^q + \alpha_2^p \cdot \alpha_2^q + \alpha_3^p \cdot \alpha_3^q + \dots\dots \alpha_n^p \cdot \alpha_n^q,$$

ili

$$\sum \alpha_1^{p+q} = \alpha_1^{p+q} + \alpha_2^{p+q} + \alpha_3^{p+q} + \dots\dots\dots \alpha_n^{p+q}$$

Drugi član jednačine (2)

$$\sum \alpha_1^p \alpha_2^q$$

predstavlja zbir produkata prvog člana desne strane prve jednačine sistema (1) sa svima članovima, izuzev prvog, desne strane druge jednačine istog sistema, drugog člana prve jednačine sistema (1) sa svima članovima, izuzev drugog, druge jednačine istog sistema, itd. .... dok se ne dodje na posletku do proizvoda m-tog člana desne strane prve jednačine sistema (1) sa svima članovima desne strane druge jednačine (1) izuzev m-tog, tj.

$$\sum \alpha_1^p \alpha_2^q = \alpha_1^p \alpha_2^q + \alpha_1^q \alpha_3^p + \alpha_1^q \alpha_4^p + \dots\dots\dots + \alpha_1^q \alpha_m^p +$$
$$+ \alpha_2^q \alpha_1^p + \alpha_2^q \alpha_3^p + \alpha_2^q \alpha_4^p + \dots\dots\dots + \alpha_2^q \alpha_m^p +$$

--+

--+

$$+ \alpha_m^q \alpha_1^p + \alpha_m^q \alpha_2^p + \alpha_m^q \alpha_3^p + \dots\dots\dots + \alpha_m^q \alpha_{m-1}^p .$$

Iz jednačine (2) dobijamo dakle:

$$\underline{\sum \alpha_1^p \alpha_2^q \equiv \sum \alpha_1^p \sum \alpha_1^q - \sum \alpha_1^{p+q}} \dots\dots \quad (3)$$

Ako je p-q = o t.j. p=q, onda je $\alpha_1^p \alpha_2^q = \alpha_1^q \alpha_2^p$ otuda je

$$\sum \alpha_1^p \alpha_2^q = 2 \sum \alpha_1^p \alpha_2^p \qquad (4)$$

Isto tako imamo

$$\sum \alpha_1^p \sum \alpha_1^q = \sum \alpha_1^p = \left(\sum \alpha_1^p\right)^2$$

$$\sum \alpha_1^{p+q} = \sum \alpha_1^{2p} \qquad (6)$$

Smenom (4),(5) i (6) u (3) dobijamo:

$$\underline{\sum \alpha_1^p \alpha_2^p = \frac{1}{2}\left[\left(\sum \alpha_1^p\right)^2 - \sum \alpha_1^{2p}\right]} \qquad (7)$$

<u>Slučaj 2)</u> Potražimo simetričnu funkciju trećeg reda

$$\sum \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r$$

Ako podjemo od sim. f-je

$$\left.\begin{aligned} \sum \alpha_1^p &= \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \dots\dots\dots + \alpha_m^p \\ \sum \alpha_1^q &= \alpha_1^q + \alpha_2^q + \alpha_3^q + \dots\dots\dots + \alpha_m^q \\ \sum \alpha_1^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^r + \alpha_3^r + \dots\dots\dots + \alpha_m^r \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

i izmnožimo ih medjusobno, dobićemo:

$$\sum\alpha_1^p\sum\alpha_1^q\sum\alpha_1^r=\sum\alpha_1^{p+q+r}+\sum\alpha_1^{p+q}\alpha_2^r+\sum\alpha_1^{p+r}\alpha_2^q+$$
$$+\sum\alpha_1^{q+r}\alpha_2^p+\sum\alpha_1^p\alpha_2^q+\alpha_3^r \qquad (9)$$

prema jednačini (3) je

$$\left.\begin{aligned}\sum\alpha_1^{p+q}\alpha_2^r&=\sum\alpha_1^{p+q}\sum\alpha_1^r-\sum\alpha_1^{p+q+r}\\ \sum\alpha_1^{p+r}\alpha_2^q&=\sum\alpha_1^{p+r}\sum\alpha_1^q-\sum\alpha_1^{p+q+r}\\ \sum\alpha_1^{q+r}\alpha_2^p&=\sum\alpha_1^{q+r}\sum\alpha_1^p-\sum\alpha_1^{p+q+r}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Smenom izraza (10) u (9) dobijamo:

$$\sum\alpha_1^p\sum\alpha_1^q\sum\alpha_1^r=\sum\alpha_1^{p+q}\sum\alpha_1^r+\sum\alpha_1^{p+r}\sum\alpha_1^q+\sum\alpha_1^{q+r}\sum\alpha_1^p+$$
$$+\sum\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r-2\sum\alpha_1^{p+q+r} \qquad (11).$$

Otuda, konačno

$$\sum\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r=\sum\alpha_1^p\sum\alpha_1^q\sum\alpha_1^r-\sum\alpha_1^{p+q}\sum\alpha_1^r-\sum\alpha_1^{p+r}\sum\alpha_1^q-$$
$$-\sum\alpha_1^{q+r}\sum\alpha_1^p+2\sum\alpha_1^{p+q+r} \qquad (12)$$

Ako sw izložitelji p i q jednaki, onda je

$$\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r=\alpha_1^q\alpha_2^p\alpha_3^r$$

prema tome je

$$\sum\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r=2\sum\alpha_1^q\alpha_2^p\alpha_3^r$$

pa je prema (12)

$$\sum\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r=\frac{1}{2}\left[(\sum\alpha_1^p)^2\sum\alpha_1^r-\sum\alpha_1^{2p}\sum\alpha_1^r-q\sum\alpha_1^{p+r}\sum\alpha_1^p-2\sum\alpha_1^{2p+r}\right]$$

Ako su sva tri izložioca jednaka t.j ako je $p=q=r$, jednačina (12) postaje

$$\sum\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r=\frac{1}{6}\left[(\sum\alpha_1^p)^3-3\sum\alpha_1^{2p}\sum\alpha_1^p+q\sum\alpha_1^{3p}\right].$$

Iz jednačina (3) i (12) vidimo da se simetrične funkcije višega reda t.j. složene sim. f-je. mogu izraziti sim. f-jama prvoga reda. Ovim se postupkom dolazi do teoreme A.

B - TEOREMA - <u>Svaka racionalna sim. f-ja nula polinoma može se uvek racionalno izraziti pomoću koeficijenata polinoma.</u>

Newton-ovi obrasci dokazuju da se svaka prosta sim. f-ja može izraziti pomoću koeficijenata. Teorema A. dokazuje da je svaku složenu sim. f-ju moguće svesti na zbir prostih sim . f-ja. Odatle sledi teorema B.

<u>Primeri.</u> 1.) Naći polinom trećeg stepena:

$$x^3+px^2+qx+r$$

poznavajući proste sim. f-je nula $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$$\sum\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$
$$\sum\alpha_1^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$$
$$\sum\alpha_1^3=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$$

<u>Odgovor:</u> Znamo da je $\sum\alpha_1=-p$

i $\frac{1}{2}\left[(\sum\alpha_1)^2-\sum\alpha_1^2\right]=q$

Pored toga postoji veza

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3)$$

iz koje dobijamo

$$r=-\frac{1}{6}\left[(\sum\alpha_1)^3-3\sum\alpha_1\sum\alpha_1^2+2\sum\alpha_1^3\right]$$

2) Izraziti

$$\sum\alpha_1^4=\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4$$

pomoću

$$\sum\alpha_1,\ \sum\alpha_1^2,\ \sum\alpha_1^3$$

prošlog zadatka.

3) Neka je f (a,b) cela sim. f-ja količina a,b. Dokažimo da f (a,b) ne može biti deljivo sa (a-b) dok nije deljivo sa $(a-b)^2$

Stavimo

$f\ (a,b) = (a-b)\,\varphi(a,b);$

Tada je

$f\ (b,a) = (b-a)\,\varphi(b,a)$

ali pošto je

$f\ (a,b) = f\ (b,a)$

to je

$(a-b)\,\varphi(a,b) = (b-a)\,\varphi(b,a)$

ili:

$(a-b)\{\varphi(a,b)+\varphi(b,a)\} = o$

kako su a i b različiti to sleduje:

$\varphi(a,b,)+\varphi(b,a) = o$

Ako stavimo a = b biće

$2\varphi(a,a) = o$

Iz ove jednačine sledi da je $\varphi(ab)$ deljivo sa (a-b), prema tome je f (ab) delji-

vo sa $(a-b)^2$ što je trebalo dokazati.

4) Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nule polinoma $x^3 + px + q$

traži se vrednost sim. f-je

$$V=(-\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3)(\alpha_1^3-\alpha_2^3+\alpha_3^3)(\alpha_3^3+\alpha_2^3-\alpha_1^3)$$

Odgovor:

$$V = -q\,(q^2 + 2p^3)$$

5) Ako su: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nule polinoma $x^3 + px + q$

Naći sim. f-ju

$$\sum\alpha_1^6\alpha_2^6=\alpha_1^6\alpha_2^6+\alpha_1^6\alpha_3^6+\alpha_2^6\alpha_3^6.$$

Ako primetimo da je:

$$\alpha_1^6=p^2\alpha_1^2+2pq\alpha_1+q^2,$$

dobijamo

$$\sum\alpha_1^6\alpha_2^6=p^6+6p^3q^3+3q^4.$$

G L A V A III

Transformacija algebarskih jednačina

§ 1 Transformisati algebarsku jednačinu

$$f(x) = o \qquad \text{I.}$$

znači obrazovati novu, transformovanu algebarsku jednačinu

$$F(y) = o \qquad \text{II.}$$

takvu, da izmedju korena obeju jednačina postoji unapred dat odnos. Taj odnos možemo na taj način izraziti, ostavivši da je svaki koren jedn. II izražen datom algebarskom funkcijom korena jednačine I.

U specijalnom slučaju, ako je ta funkcija, koju možemo pisati u obliku $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ racionalna gde su φ i ψ polinomi, tada je svaki koren β_v, ($v = 1, 2, \ldots n$) transformovane jednačine $F(y) = 0$ vezan korenima: α_v ($v=1, 2, 3, \ldots n$) date jednačine $f(x)=o$ izrazima

$$\beta_v = \frac{\varphi(\alpha_v)}{\psi(\alpha_v)} \qquad v = 1, 2, 3, \ldots n \quad \text{III.}$$

t.j. izmedju nepoznatih x i y postoji veza

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \qquad \text{IV}$$

Dakle, da bismo našli transformiranu jednačinu jednačine $f(x) = o$, kad izmedju korena postoji veza III, treba iz jednačine

IV. rešiti x i uvrstiti tako dobivenu vrednost u datu jednačinu $f(x) = o$. Dobivena jednačina po y biće istog stepena kao i data jednačina. Pošto svakom korenu odgovara samo po jedan koren β_v. Ovde ćemo detaljnije ispitati samo jedan specijalan slučaj opšte transformacije IV, i to kada su polinomi $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ prvog stepena.

Opšti oblik takve transformacije je

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \qquad \text{V}$$

gde su a, a', b, b' date konstante. Ta se transformacija naziva linearnom transformacijom pošto se nepoznate X i Y javljaju na prvom stepenu.

Iz jednačine V kad je rešimo po X dobijamo

$$x = \frac{b'y - b}{a - a'y},$$

i kad tu vrednost stavimo u datu jednačinu $f(x) = o$ dobijamo transformacionu jednačinu:

$$f\left(\frac{b'y - b}{a - a'y}\right) = o;$$

ova jednačina oslobodjena imenitelja i uredjena po stepenima od y uzima oblik

$$(a - a'y)^n \, f\left(\frac{b'y - b}{a - a'y}\right) = F(y) = 0$$

Na taj smo način dobili transformisanu jednačinu čiji su koreni

$$\beta_v = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

vezani korenima date jednačine

$$\alpha_\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

i vezom:
$$\beta_\nu = \frac{a\alpha_\nu + b}{a'\alpha_\nu + b'} \qquad \nu = 1,2,3,\ldots.. n.$$

Opštu linearnu transformaciju V. možemo rastaviti u niz jednostavnijih transformacija; i to na sledeći način.

1) Ako je $a' \neq 0$ mi možemo pisati, delenjem imenitelja i brojitelja sa a'

$$y = \frac{\frac{a}{a'} x + \frac{b}{a'}}{x + \frac{b'}{a'}}$$

i ako izvršimo deobu

: (V)
$$y = \frac{a}{a_1} + \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{x + \frac{b'}{a'}}$$

konačno možemo staviti

$$y = y + \frac{a}{a_1}; \qquad y_1 = \frac{ba' - ab'}{a'^2} y_2$$

$$y_2 = \frac{1}{y_3}; \qquad y_3 = x + \frac{b'}{a'}$$

jer ako iz ovih jednačina eliminišemo Y_1, Y_2, Y_3, dobićemo vezu V.

2) Ako je a' = o, tada jednačina V postaje

$$y = \frac{ax + b}{b'} = \frac{a}{b'} x + \frac{b}{b'}$$

t.j. mi možemo staviti

$$y = y_1 + \frac{b}{b'}; \qquad y_1 = \frac{a}{b'} x$$

Vidimo u glavnom da se svaka linearna transformacija može svesti na jedan niz jednostavnijih transformacija, koje imaju oblik

$$y = kx; \; y = x + h; \; y = \frac{1}{x}$$

Ispitati svaku pojedinu od ovih transformacija, jer je njihova primena vrlo važna.

§ 2 MNOŽENJE KORENA JEDNE ALGEBARSKE JEDNAČINE SA JEDNOM KONSTANTNOM KOLIČINOM.

Neka je data jednačina n-tog stepena $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots. + A_{n-1} x + An = 0$

gde je $A_o = 1$, što možemo u svakoj jednačini učiniti jednostavnim delenjem tim koeficijentom.

Ako hoćemo da transformišemo datu jednačinu tako da svaki od njenih korena bude K puta veći treba staviti

$$y = kx \quad \text{i} \quad x = \frac{y}{k},$$

tako da transformirana jednačina glasi

$$f\left(\frac{y}{k}\right) = o$$

ili ako zadržimo istu oznaku

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = o$$

Kako množenje jednačine stalnom količinom ne utiče na oblik njenih korena, gornju jednačinu možemo pisati u obliku

$$k^n f\left(\frac{x}{k}\right) = x^n + A_1 k x^{n-1} + A_2 k^2 x^{n-2} + \ldots + A_n k^n = o; \quad \text{VI.}$$

to je tražena transformovana jednačina.

Kad je $k = -1$,

tada koreni transformisane jednačine imaju istu apsolutnu vrednost, ali su suprotnog znaka. Tako transformisanu jednačinu dobijamo kad u VI stavimo K = - 1 t.j.

$$(-1)^n f(-x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots (-1)^n A_n = 0$$

Supstitucija Y=K. X se često upotrebljava u slučaju kad želimo transformisati koeficijente jednačine tako da oni budu celi brojevi, a da pri tome koeficijent najvišeg stepena od X ostane jedinica.

Neka su $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ koeficijenti date jednačine, tada su koeficijenti transformirane jednačine

$$Ka_1,\ k^2A_2,\ k^3A_3, \ldots\ldots\ k^n A_n$$

Ako su koeficijenti A_r, $r = 1,2,3,4, \ldots\ n$ racionalni brojevi, možemo uvek izabrati takav broj k da količine

$$k^r A_r, \quad r = 1,2,3,4, \ldots\ldots\ n$$

budu celi brojevi. Najmanji broj K koji ispunjava ove uslove rešava zadatak.

Neka je na pr. data jednačina

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{2} x^2 + \frac{3}{7} x - \frac{5}{4} = 0;$$

transformisana jednačina je

$$k^n f\left(\frac{x}{k}\right) = x^3 - \frac{7}{2} kx^2 + \frac{3}{7} k^2 x - \frac{5k^3}{4} = 0$$

Najmanji broj K je ovde 14 pošto su 2 i 7 prosti brojevi, a K^3 sadrži 2^3 dakle i četiri. Transformisana jednačina postaje

$$x^3 - 49 x^2 + 84 x - 3430 = 0;$$

korene ove jednačine treba podeliti sa 14 da bismo dobili korene prvobitne jednačine.

§ 3. TRANSFORMACIJA $y = x - h$

Neka je data jednačina n-tog stepena

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0;$$

ako želimo da obrazujemo jednačinu čiji će koreni biti manji za stalnu količinu h od korena date jednačine, treba izvršiti transformaciju: $y = x - h$, $\quad x = y + h$,

Transformirana jednačina

$$f(x+h) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n = 0$$

gde treba odrediti koeficijente B_r, $r = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots n$.

Primenimo Taylor-ov obrazac

$$f(x+h) = f(h) + \frac{f(h)}{1!} x + \frac{f''(h)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^n(h)}{n!} x^n$$

otuda sledi da koeficijenti B_r, $r = 0,1,2,3, \ldots\ n$ imaju oblik:

$$B_0 = \frac{f^n(h)}{n!} = \binom{n}{n} = 1$$

$$B_1 = \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!} = \binom{n}{n-1} h + \binom{n-1}{n-1} A_1 = nh + A_1$$

$$B_2 = \frac{f^{(n-2)}(h)}{(n-2)!} = \binom{n}{n-2} \cdot h^2 + \binom{n-1}{n-2} A_1 h + \binom{n-2}{n-2} A_2$$

$$B_r = \frac{f^{(n-r)}(h)}{(n-r)!}h^r + \binom{n-1}{n-r}h^{r-1} + \binom{n-2}{n-r}A_1 h^{r-2} + \cdots \binom{n-r+1}{n-r}A_{r-1}h + \binom{n-r}{n-r}A_r$$

$$B_n = \frac{f(h)}{0!} = \binom{n}{0}h^n + \binom{n-1}{0}A_1 h^{n-1} + \cdots + \binom{1}{0}A_{n-1}h + \binom{0}{0}A_n = h^n + A_1 h^{n-1} + \cdots + A_{n-1}h + A_n$$

gde izrazi

$$\binom{h}{r} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ldots r} = \frac{h(h-1)\ldots\ldots(h-r+1)}{r!}$$

prestavljaju binomne koeficijente.

Gornju transformaciju možemo primeniti ako želimo, da jedan od koeficijenata B_r, $r = 1, 2 \ldots n$ transformisane jednačine postane jednak nuli. Kako su koeficijenti

$$B_r = \frac{f^{(n-r)}(h)}{(n-r)!}\binom{n}{n-r}h^r + \binom{n-1}{n-r}A_1 h^{r-1} + \cdots + \binom{n-r}{n-r}A_r$$

$$r = 1, 2, \ldots\ldots n$$

polinomi po <u>h</u> možemo uvek izabrati h tako da jedan od tih koeficijenata postane jednak nuli. Dakle da bi B_r bio jednak nuli, treba da rešimo jednačinu

$$f^{(n-r)}(h) = \binom{n}{n-r}h^r + \binom{n-1}{n-r}A_1 h^{r-1} + \binom{n-2}{n-r}A_2 h^{r-2} + \ldots + \binom{n-r}{n-r}A_r = 0$$

gde je nepoznata količina h. Ta je jednačina r- tog stepena i u opštem slučaju se ne može rešiti. Kad bismo hteli izbaciti koeficijenat B_1 ili B_2 dolazimo do rešavanja jednačine prvog i drugog stepena.

Tako na pr. ako želimo da bude $B_1 = 0$ treba odrediti <u>h</u> tako da bude

$$f^{(n-1)}(h) = nh + A_1 = 0,$$

$$\therefore \quad h = -\frac{A_1}{n}$$

Stavimo li dakle ovu vrednost za h u transformisanu jednačinu, nestaće člana od x^{n-1}.

Na isti način ako želimo da bude $B_2 = 0$ treba odrediti h tako da bude

$$f^{(n-2)}(h) = \frac{n(n-1)}{2}h^2 + (n-1)A_1 h + A_2 = 0;$$

gornja jednačina daje dve vrednosti za h, t. j. možemo na dva načina transformirati datu jednačinu, pa da u dobivenoj jednačini nestane član sa x^{n-2}.

Gornju transformaciju ne možemo upotrebiti da nestane dva ili više koeficijenata B_r; u tom slučaju koeficijenti date jednačine moraju zadovoljavati izvesne uslove. Tako na pr. kad bismo hteli, da u isto vreme nestanu koeficijenti B_1 i B_2 treba da odredimo h tako da obe jednačine

$$nh + A_1 = 0 \quad i \quad \frac{n(n-1)}{2}h^2 + (n-1)A_1 h + A_2 = 0$$

budu zadovoljene a to je moguće samo ako izmedju koeficijenata A_1 i A_2 postoji uslov

$$2nA_2 = (n-1)A_1^2.$$

§ 4. TRANSFORMACIJA $y = \frac{1}{x}$

Neka je data jednačina

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0 \quad \text{I.}$$

ako želimo da obrazujemo jednačinu čiji će koreni biti recipročne vrednosti korena date jednačine, treba izvršiti transformaciju

$$y = \frac{1}{x}, \qquad x = \frac{1}{y}.$$

Transformisana jednačina ima oblik

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

ili ako zadržimo istu oznaku

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

tj.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \frac{A_2}{x^{n-2}} + \dots\dots + \frac{A_{n-1}}{x} + A_n = 0$$

Gornju jednačinu možemo pomnožiti sa x^n i kad izmenimo red članova dobijamo

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots\dots + A_1x + A_0 = 0, \qquad \text{II.}$$

Na osnovu ove transformacije možemo pokazati sledeće. Ako u jednačini I prvi k koeficijenti $A_0, A_1, \dots\dots A_{k-1}$, postanu jednaki nuli tada ona postaje ($n-k$) tog stepena oblika

$$A_kx^{n-k} + A_{k+1}x^{n-k-1} + \dots\dots + A_{n-1}x + A_n = 0. \qquad \text{III.}$$

Izgleda kao da je prvobitna jednačina izgubila k od njezinih korena. Medjutim jednačina II postaje

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_{k+1}x^{k+1} + A_kx^k = 0;$$

ona ostaje n-tog stepena, ali se može izvaditi x^k kao zajednički faktor . Znači da transformisana jednačina ima k korena koji su jednaki nuli, tako da su njima odgovarajući koreni date jednačine $\frac{1}{0}$, t.j. ∞ .

Odavde vidimo, kad u algebarskoj jednačini k od koeficijenata najviših stepena od x postanu jednaki nuli, tada k korena date jednačine postaju bezkonačno veliki.

PRIMERI:

1). Transformisati sledeće jednačine tako, da koeficijenti budu celi brojevi; a da pri tom koeficijenat najvišeg stepena od x bude jednak jedinici

a) $12x^4 + 16x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

b) $8x^3 + 4x^2 + 2x + 1 + 0$

c) $16x^4 + 8x^2 + 6x + 3 = 0$

2) Transformisati jednačinu

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{k-1}x + A_k = 0$$

tako da bi prva dva koeficijenta budu jedinica.

3) Transformisati jednačinu

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

tako, da nestane člana sa x.

4). Naći uslov koji mora postojati izmedju koeficijenata jednačine:

$$f(x) = A_0x^4 + a_1x^3 + A_2x^3 + A_3x + A_4 = 0$$

da transformacijom $y = x - h$ nestanu članovi sa x i x^3.

Rešiti u tom slučaju jednačinu. Transformisana jednačina ima oblik

$$f(x+h) = B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4 = 0$$

sa $B_0 = A_0$

$$B_1 = 4A_0h + A_1$$

$$B_2 = 6A_0h^2 + 3A_1h + A_2$$

$$B_3 = 4A_0h^3 + 3A_1h^2 + 2A_2h + A_3$$

$$B_4 = A_0h^4 + A_1h^3 + A_2h^2 + A_3h + A_4$$

Da bi nestali članovi sa X i X^3 mora $B_1 = 0$ i $B_3 = 0$ t.j.

$$4A_0h + A_1 = 0; \quad 4A_0h^2 + 3A_1h^2 + 2A_2h + A_3 = 0$$

prva jednačina daje

$$h = \frac{A_1}{4A_0}$$

i kad tu vrednost uvrstimo u drugu jednačinu dobijamo traženi uslov

$$A^3 - 4A_0A_1A_2 + 8A_0^2A_3 = 0 \qquad \mathrm{I}$$

Kada je gornji uslov ispunjen transformirana jednačina ima oblik

$$B_0x^4 + B_2x^2 + B_4 = 0$$

gde je: $B_0 = A_0$

$$B_2 = \frac{1}{8A_0}(8A_0A_2 - 3A_1^2)$$

$$B_4 = \frac{1}{4^4A_0^3}(-3A_1^4 + 16A_0A_1^2A_2 - 4^3A_0^2A_1A_3 + 4^4A_0^3A_4)$$

i njeni koreni su $x = \pm\sqrt{\dfrac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_0B_4}}{2B_0}}$

Ako te korene označimo sa α_1, α_2, α_3, α_4 koreni date jednačine su

$$\alpha_1 + \frac{A_1}{4A_0} \quad \alpha_2 + \frac{A_1}{4A_0} \quad \alpha_3 + \frac{A_1}{4A_0} \quad \alpha_4 + \frac{A_1}{4A_0}$$

5). Ako je uslov I u primeru 4) ispunjen, jednačina

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

se može pisati u obliku:

$$(x^2 + \alpha x)^2 + p(x^2 + \alpha x) + q = 0;$$

odrediti α, p i q.

6). Obrazovati jednačinu čiji su koreni kvadrati korena date jednačine. Treba upotrebiti transformaciju

$$y = x^2$$

$$\text{t.j. } x = \sqrt{y}$$

Transformisana jednačina je

$$F(\sqrt{y}) = 0$$

ili ako za korene zadržimo istu oznaku

$$F(\sqrt{x}) = A_n + A_{n-1}\sqrt{x} + A_{n-2}x + A_{n-3}x\sqrt{x} + \ldots = 0.$$

Otuda

$$(A_n + A_{n-2}x + A_{n-4}x^2 + \ldots) + \sqrt{x}\,(A_{n-1} + A_{n-3}x + A_{n-6}x^2 + \ldots\ldots) = 0$$

ili $\sqrt{x}\,(A_{n-1}+A_{n-3}x+\ldots)=-(A_n+A_{n-2}x+A_{n-4}x^2+\ldots)$

ako podignemo obe strane na kvadrat

$x\,(A_{n-1}+A_{n-3}x+\ldots)^2=(A_n+A_{n-2}x+A_{n-4}x^2+\ldots)^2$

razvijemo i sredimo po stepenima od X, dobijamo traženu jednačinu.

7) Naći zbir kvadrata korena jednačina:

$$x^3+px+q=o$$

Ako obrazujemo jednačinu čiji su koreni kvadrati korena date jednačine, koeficijenat od y^2 sa promenjenim znakom daje traženi zbir.

Odogovor: $\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_\nu^2=-2p$

8). Naći zbir inverznih vrednosti korena jednačine

$$x^3+px+q=o$$

Transformacijom $y=\frac{1}{x}$ dolazimo do jednačine čiji zbir korena daje traženi zbir.

Odogovor:

9). Naći zbir kvadrata inverznih vrednosti jednačine: $x^3+px+q=o$

Transformacijom $y=\frac{1}{x}2$ ili $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ dolazimo do jednačine, čiji su koreni inverzne vrednosti kvadrata korena date jednačine. Ona

glasi

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{y}+p\right)+q=o,$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{y}+p\right)^2=q^2y,$$

$$\therefore\ q^2y^3-p^2y^2-2py-1=o.$$

kako izraz $\frac{p^2}{q^2}$ daje zbir njezinih korena to je $\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{\alpha_\nu^2}=\frac{p^2}{q^2}$.

10). Neka je data jednačina

$$x^3+px+q=o$$

čiji su koreni $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Izračunati zbir $\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{1+\alpha_\nu}$

Ako u gornjoj jednačini izvršimo transformaciju $y=\frac{1}{1+x}$, zbir korena tako transformirane jednačine je tražen zbir

Odogovor: $\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{1-\alpha_\nu}=\frac{3+p}{1+p-q}$

11). Neka je data algebarska jednačina n-tog stepena $f(x)=o$, čiji su koreni $\alpha_\nu=1,2,3,\ldots n$. izračunati zbir $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha_\nu}$.

Transformacijom $y=\frac{1}{1+x}$ i $x=\frac{1-y}{y}$

dobijamo jednačinu

$$f\left(\frac{1-y}{y}\right)=f\left(-1+\frac{1}{y}\right)=f(-1)+\frac{1}{y}f'(-1)+\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n.\, y^r} f^{(n)}(-1) = 0,$$

$$\therefore\ y^n f\left(-1+\frac{1}{y}\right) = f(-1)\, y^n + f'\,\frac{(-1)}{1}\, y^{n-1} + \ldots + \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} = 0.$$

Zbir korena transformirane jednačine daje traženi zbir, t.j.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1+\alpha_\nu} = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

18.) Data je jednačina

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$$

čiji su koreni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; obrazovati jednačinu čiji su koreni $(\alpha_1 - 2)^2$, $(\alpha_2 - 2)^2$, $(\alpha_3 - 2)^2$.

13.) Data je jednačina

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

čiji su koreni α_r, $r = 1,2,3,4$.
obrazovati jednačinu čiji će biti koren:

$$(2 - \alpha_r)^2, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

U primerima 12) i 13) i transformisane jednačine će imati isti oblik kao i date jednačine.

14). Obrazovati jednačinu čiji će koreni β_1, β_2, β_3, biti kvadrati razlika dva po dva korena date jednačine

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ako su koreni date jednačine α_1, α_2, α_3, treba da obrazujemo jednačinu čiji su koreni

$$\beta_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \qquad \beta_2 = (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \qquad \beta_3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

Ovde treba izvršiti transformaciju, koja sadrži dva različita korena. Tu transformaciju možemo svesti na takvu koja će sadržati samo jedan koren. Kako je

$$\beta_3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2$$

i $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = 0$, $\quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) = p$

to iz zadnje dve jednačine dobijamo

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = -\alpha_3 \quad \text{i} \quad \alpha_1\alpha_2 = p + \alpha_3^2$$

i kad stavimo te vrednosti u prvu jednačinu dobijamo $\beta_3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = -3\alpha_3^2 - 4p$,
za ostala dva korena dobijamo slično

$$\beta_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = -3\alpha_1^2 - 4p$$

$$\beta_2 = (\alpha_3 - \alpha_1)^2 = -3\alpha_2^2 - 4p \qquad r = 1, 2, 3,;$$

dakle je $\beta_r = -3\alpha_r^2 - 4p$.
Znači treba da izvršimo transformaciju

$$y = -3x^2 - 4p$$

t.j. treba iz jednačina

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{i} \quad y + 3x^2 + 4p = 0$$

eliminisati X; prvu jednačinu možemo napisati u obliku

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2$$

i kad u njoj stavimo $-\frac{y+4p}{3}$ mesto X^2 dobijamo konačno

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0. \qquad \text{I.}$$

Vidimo da je proizvod korena transformirane jednačine dat izrazom

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2=-(4p^3+27q^2) \qquad \text{II.}$$

Odavde zaključujemo 1). Ako data jednačina $x^3 + px + q = o$ ima višestrukih korena izraz II postaje jednak nuli z.j. mora

$$4\,p^3 + 27\,q^2 = o.$$

2) Ako su koreni α_1, α_2, α_3 realni, izraz II je uvek pozitivan, a ako su dva od njih imaginarna t.j.

$\alpha_2 = a + bi$; $\alpha_3 = a - bi$ tada je

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2=-4b^2\left[(a-\alpha_1)^2+b^2\right]$$

i izraz II je negativan. Dakle jednačina

$$x^3 + px + q = o$$

ima sva tri korena realna ako je

$$4\,p^3 + 27\,q^2 < o,$$

u suprotnom slučaju ona ima samo jedan realan koren.

Dokazati da se do jednačine I dolazi i transformacijom

$$y = -\frac{px + 3q}{x}.$$

15). Obrazovati jednačinu čiji su koreni:

$$\beta_1=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \quad \beta_2=(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1) \quad \beta_3=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2).$$

gde su α_1, α_2, α_3 koreni jednačine

$$x^3 + px + q = o$$

Pokazati da se do nje dolazi jednom od sledećih transformacija

$$y = 3\,x^2 + p \quad \text{ili} \quad y = -\frac{2px + 3\,q}{x}.$$

16) Ako su α_γ, $\gamma = 1,2,3, \ldots\ n$ koreni jednačine n-tog stepena $f(x) = o$ izračunati zbirove

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_\gamma} \quad \text{i} \quad \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{(x-\alpha_\gamma)^2}.$$

Otuda dokazati: ako su svi koreni jednačine $f(x) = o$ realni, jednačina

$$F(x) = f(x) \cdot f''(x) - f'^2(x) = o$$

ima sve korene imaginarne.

Kako je

$$F(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n) = \prod_{\gamma=1}^{n}(x-\alpha_\gamma),$$

logaritmiranjem dobijamo

$$\log f(x) = \log(x-\alpha_1) + \log(x-\alpha_2) + \log(x-\alpha_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{n} \log(x-\alpha_\gamma)$$

Diferenciranjem ove jednačine po X dobijamo traženi izraz

$$\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{x-\alpha_\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_\gamma} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ponovnim diferenciranjem dobijamo:

$$-\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{(x-\alpha_\gamma)^2} = \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$$

tj.

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{(x-\alpha_\gamma)^2} = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f^2(x)}$$

Iz ove jednačine sledi neposredno tvrdjenje.

ДРУГИ ДЕО

ПОЛИНОМИ СА РЕАЛНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

ГЛАВА ПРВА

Ispitivanje realnosti nula polinoma.

Dosadašnja pravila važe uopšte bilo da su koeficijenti A_o A_1, ... A_n datog polinoma realni ili imaginarni brojevi. Sada ćemo izvesti neka pravila, koja važe samo kada su koeficijenti realni.

§ 1. Teorema: Svaki polinom F (x) sa realnim koeficijentima koji ima jednu kompleksnu nulu oblika a + bi mora imati za nulu i njenu konjugovanu vrednost tj. a - bi.

Ako je z = a + bi nula polinoma F(x) onda je prema pretpostavci da su koeficijenti polinoma F(x) realni,

$$F(z) = o \quad \therefore \quad \overline{\{F(z)\}} = o$$

a kako je $\overline{\{F(z)\}} = F(\bar{z})$ to odavde izlazi da je i $\bar{z} = a - bi$ nula polinoma F (x).

Treba imati na umu da ova osobina imaginarnih nula važi samo ako su svi koeficijenti datog polinoma realni.

Pr. polinom sa imaginarnim koeficijentima

$$x^2 - ix - 1 - i$$

čije su nule $x_1 = 1+i$ i $x_2 = -1$ nema konjugovanu nulu (1-i).

Iz gornjeg pravila mi možemo zaključiti sledeće:

Svaki polinom sa realnim koeficijentima ima uvek jedan paran broj (ili nula) imaginarnih nula. To je očigledno iz predjašnjeg pravila, jer svakoj imaginarnoj nuli oblika a + ib odgovara nula a-bi.

Iz gornjeg pravila dalje sleduje: Svaki polinom sa realnim koeficijentima ima paran broj realnih nula, ako je stepen tog polinoma paran, a neparan broj realnih nula ako je njegov stepen neparan.

Odavde vidimo, još da svaki polinom sa realnim koeficijentima, čiji je stepen neparan broj ima najmanje jednu realnu nulu.

§ 2 Neka je $\alpha = a + bi$ i $\bar{\alpha} = a - bi$ par konjugovanih nula polinoma F (x). Njihovi koreni činioci

$$x - \alpha = (x-a) - bi \text{ i } x - \bar{\alpha} = (x-a) + bi$$

biće takodje konjugovane količine, tako da je proizvod realan faktor drugog stepena:

$$|x - \alpha|^2 = (x-a)^2 + b^2$$

Kako se polinom F(x) može napisati u obliku proizvoda njegovih korenih činilaca, u tom proizvodu možemo izmnožiti dva po dva korena činioca koji odgovaraju konjugovano imaginarnim nulama. Na taj dobijamo kvadratne faktore sa realnim koeficijentima.

Svaki polinom sa realnim koeficijentima možemo dakle da rastavimo u proizvod realnih faktora prvog ili drugog stepena. Linearni faktori odgovaraju realnim nulama a kvadratni faktori odgovaraju konjugovano-kompleksnim nulama.

<u>Ako polinom sa realnim koeficijentima ima višestruku imaginarnu nulu i konjugovana nula će biti višestruka nula istoga reda.</u>

Ako je $a + bi$ nula drugog reda $a-bi$ će svakako biti nula. Deobom polinoma sa

$$(x-a-bi)\,(x-a+bi) = (x-a)^2 + b^2$$

dobićemo polinom s realnim koeficijentima, koji ima nulu $a + bi$. Prema tome moraće imati kao nulu i količinu vrednosti $a - bi$. Dakle je $a - bi$ takodje druga nula. Polinom $F(x)$ sadrži faktor oblika:

$$\left[(x-a)^2 + b^2\right]^2$$

Na isti način možemo uopšte dokazati: ako je $a+bi$ nula l-tog reda polinoma $F(x)$ onda je i $a-bi$ nula l-tog reda.

Polinom $F(x)$ je prema tome deljiv sa

$$\left[(x-a)^2 + b^2\right]^l .$$

U opšte ako polinom n-tog stepena $F(x)$ sa realnim koeficijentima ima R različitih nula tj. višestrukih različitih nula $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sa odgovarajućim redovima $l_1, l_2 \ldots l_k$ i ako

ima R_2 različitih imaginarnih nula $(a_1+ib_1), (a_1-ib_1), (a_2+b_2i) \ldots (a_k+ib_k), (a_k-ib_k)$ gde se (a_1+b_1i) javlja $\mathcal{L}_1$ puta, (a_2+ib_2) $\mathcal{L}_2$ puta (a_k+ib_k) $\mathcal{L}_k$ puta, polinom $F(x)$ možemo napisati u obliku produkta

$$F(x) = A_0 (x-\alpha_1)^{l_1} (x-\alpha_2)^{l_2} \ldots\ldots (x-\alpha_k)^{l_k} \left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^{\mathcal{L}_1} \ldots \left[(x-a_2)^2+b_2^2\right]^{\mathcal{L}_2} \ldots\ldots \left[(x-a_{k_2})^2+b_{k_2}^2\right]^{\mathcal{L}_{k_2}}$$

gde je naravno

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_k + 2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 + \ldots 2\mathcal{L}_{k_2} = n$$

a pojedini od brojeva l i $\mathcal{L}$ mogu biti jednaki jedinici; pri tome su brojevi α, a, b realni.

<u>PRIMERI:</u>

1) Naći nule polinoma

$$F(x) = x^3 + a^2x + 10\,a^3$$

ako znamo je jedna nula oblika $a + 2ia$, gde je a realan.

Pošto gornji polinom sa realnim koeficijentima ima imaginarnu nulu $a + 2\,ia$ to je $a - 2\,ia$ takodje nula datog polinoma, pa je taj polinom deljiv sa

$$(x-a-2ia)\,(x-a+2ia) = x^2 - 2ax + 5a^2.$$

Delenjem dobijamo

$$(x^3 + a^2x + 10a^3) : (x^2 - 2ax + 5a^2) = x + 2a,$$

otuda $F(x) = (x-a-2ia)\,(x-a+2ia)(x+2a)$.

2) Naći nule polinoma

$$F(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8$$

čija je jedna nula $1 + i\sqrt{3}$

3) Naći nule polinoma

$$F(x) = x^4 + x^3 - 25x^2 + 41x + 66$$

kad znamo da je jedna nula $3 + i\sqrt{2}$.

4) Dokazati: ako polinom

$$F(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots A_{n-1}x + A_n$$

sa racionalnim koeficijentima ima iracionalnu nulu oblika $a + \sqrt{b}$ gde su a i b racionalne količine, on mora imati i nulu oblika $a - \sqrt{b}$.

Prema pretpostavci je

$$F(a+\sqrt{b}) = A_0(a+\sqrt{b})^n + A_1(a+\sqrt{b})^{n-1} + \ldots A_{n-1}(a+\sqrt{b})$$

$+ A_n = o$; ako razvijemo sve članove $(a+\sqrt{b})^k$, $k = 1, 2, \ldots n$ i grupišemo posebno članove, koji ne sadrže $\sqrt{b}$ i članove koji ga sadrže dobijamo

$$F(a+\sqrt{b}) = P + \sqrt{b}\,Q = o,$$

gde je P skup članova koji ne sadrže $\sqrt{b}$ a $Q\sqrt{b}$ skup članova koji ga sadrže. Pošto su koeficijenti $A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, a i b racionalni to su P i Q takodje racionalni. Dakle jednačina

$$P + \sqrt{b}Q = 0$$

može postojati samo ako je i

$$P = o \quad i \quad Q = o$$

jer iracionalni broj $\sqrt{b}$ ne može biti jednak racionalnom broju $- P/Q$.

Stavimo sad $x = a - \sqrt{b}$ to se $F(a-\sqrt{b})$ razlikuje samo promenom znaka od $\sqrt{b}$ tj.

$$F(a-\sqrt{b}) = P - \sqrt{b}\,Q;$$

kako je $P = o$ i $Q = o$ ∴ $F(a-\sqrt{b}) = o$ tj. $a - \sqrt{b}$ je takodje nula datog polinoma.

5.) Naći nule polinoma

$$x^4 - 12x - 5$$

ako on ima nulu $1 + \sqrt{2}$.

6.) Naći nule polinoma

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 9x - 54$$

ako poznajemo nulu $\sqrt{2} + i$.

7.) Naći nule polinoma

$$x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 30x^3 + 21x^2 + 3x - 2$$

znajući da ima nulu oblika $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

GLAVA II

REŠAVANJE BROJNIH JEDNAČINA

Brojna jednačina je ona jednačina čiji su koeficijenti dati brojevima tj. numeričkim vrednostima za razliku od opštih jednačina, čiji su koeficijenti dati opštim brojevima tj. slovima.

Dok smo kod opštih algebarskih jednačina tražili da izrazimo korene kao funkcije koeficijenata, dotle se rešavanje brojnih jednačina sastoji u neposrednom iznalaženju tačnih ili približnih brojeva ali sa u napred datim otstupanjem koji zadovoljavaju datu jednačinu. Opšte algebarske jednačine višeg od četvrtog stepena ne mogu rešiti; to nije slučaj kod brojnih jednačina, jer se svaka brojna jednačina može rešiti tačno ili približno, ali sa unapred datom tačnošću.

Rešavanje brojnih jednačina vrši se sledećim putem.

1) Najpre se jednačina oslobadja višestrukih korena i svodi na jednačinu čiji su svi koreni prosti. Kako je to uvek moguće, te ćemo od sad predpostaviti da imamo posla sa jednačinama čiji su koreni prosti.

2) Zatim se traži da li jednačina ima celih racionalnih korena. Zato treba najpre odrediti granice izmedju kojih se nalaze pozitivni i negativni koreni i videti da li u tim granicama jednačina ima racionalnih korena. Kad smo našli racionalne korene, delenjem odgovarajućim korenim činiocima oslobadjamo jednačinu tih korena i tada prelazimo na

3). Izračunavanje iracionalnih korena.- Ovo vršimo na taj način, što najpre tražimo granice izmedju kojih se nalazi svaki pojedini koren, a zatim izračunavamo približno njegovu vrednost.

4.) Naposledku kad oslobodimo jednačinu iracionalnih korena, prelazimo na izračunavanje imaginarnih korena.

§ 1 Dokažimo najpre sledeća pravila

Neka je data jednačina

$F(x) = 0$ i brojevi $\alpha < \beta$

Pravilo I: Ako su $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ različitog znaka izmedju brojeva α i β nalazi se najmanje jedan koren date jednačine; ako ih ima više broj korena je neparan. Ovo pravilo je očigledno, ako primetimo da funkcija

$$Y = F(x)$$

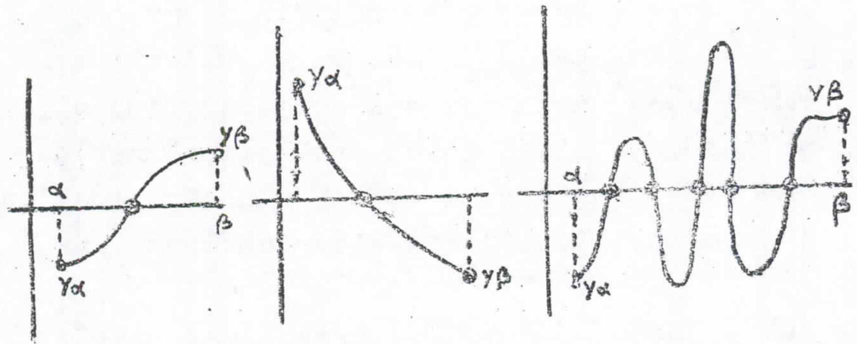
dok X raste od α do β, prelazi iz negativne vrednosti $F(\alpha)$ u pozitivnu vrednost $F(\beta)$ ili iz pozitivne vrednosti $F(\alpha)$ u negativnu vrednost $F(\beta)$. Kako je ta funkcija neprekidna, pri prelazu iz negativne u pozitivnu vrednost ili obratno, ona mora najmanje jedanput uzeti vrednost nulu. Znači da se izmedju α i β mora nalaziti najmanje jedna takva vrednost x_0 od x za koju je

$$F(x_0) = 0.$$

Takvih vrednosti može biti i više: da je njihov broj neparan lako uvidjamo geometrijski. Diagram funkcije $Y = F(x)$ prestavlja krivu liniju, za koju je $Y_\alpha = F(\alpha) < 0$ i $Y_\beta = F(\beta) > 0$

ili $Y_\alpha = F(\alpha) > 0$ i $Y_\beta = F(\beta) < 0$

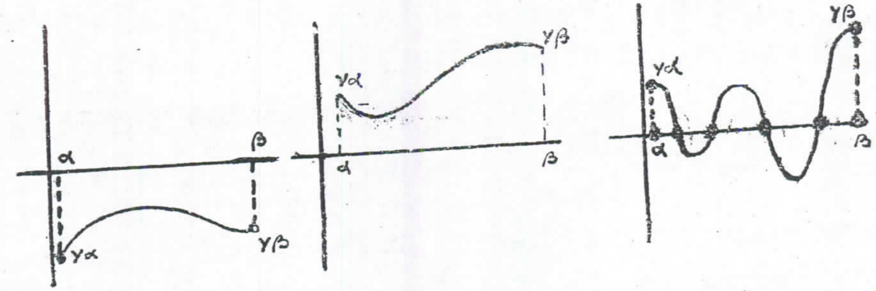
Tačke (α, Y_α) i (β, Y_β) možemo spojiti sa beskrajno mnogo neprekidnih linija, ali svaka od njih mora najmanje jedan put seći X-osu, ili neparan broj puta, kao što to pokazuju slike:



Pravilo II.- Ako su

$$F(\alpha) \text{ i } F(\beta)$$

istpga znaka, jednačina $F(x) = 0$ ili nema ni jedan koren u razmaku $[\alpha, \beta]$ ili ako ih ima, njihov broj mora biti paran.
Ovo pravilo se dokazuje istim rezonovanjem, kao i predjašnje (v. slike)



III. - Ako je koeficijenat najvišeg stepena od X algebarske jednačine $F(x) = 0$ pozitivan, a zadnji koeficijenat negativan, ona ima najmanje jedan pozitivan koren.

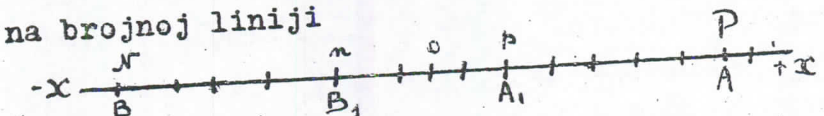
Ako u datu jednačinu $F(x) = 0$ stavimo $x = 0$ i $x=\infty$ biće $F(0)<0$ i $F(x) \to +\infty$ kad $x \to \infty$

Dakle se izmedju o i ∞ mora nalaziti najmanje jedan koren.

§ 2 ODREDJIVANJE GRANICA KORENA.

Pod granicama korena podrazumevamo one brojeve, izmedju kojih se nalaze svi realni koreni date jednačine.

Svakom korenu odgovara jedna tačka na brojnoj liniji



Odrediti granice korena znači naći tačke A_1 A i B_1, B, čije su apcise p, P, i N, tako, da se svi pozitivni koreni nalaze u intervalu $[A, A]$ a svi negativni koreni u intervalu $[B, B]$. Takvi brojevi P, N, p, n se nazivaju granicama korena i to: P je gornja granica pozitivnih a N donja granica negativnih korena, p donja granica pozitivnih, a n gornja granica negativnih korena.

Način odredjivanja ovih granica je isti i svodi se samo na izračunavanje gornje granice pozitivnih korena. Zaista ako znamo izračunati gornju granicu pozitivnih korena ostale granice dobijamo na sledeći način. Izvršimo supstituciju $x = -Y$ tada su svi negativni koreni date jednačine pozitivni koreni transformirane jednačine; ako je gornja granica pozitivnih korena transformisane jednačine P' donja granica negativnih korena transformisane jednačine je $N = -P'$. Izvršimo supstituciju $x = \frac{1}{y}$ tada će najmanji pozitivan koren date jednačine biti najvećem korenu transformirane jednačine; znači da je gornja granica P'' pozitivnih korena transformisane jednačine, donja granica pozitivnih korena date jednačine

$$p = \frac{1}{P''}$$

Naposledku, ako izvršimo supstituciju $x = -\frac{1}{y}$, i ako je P''' gornja granica pozitivnih korena transformisane jednačine, $n = -\frac{1}{P'''}$

Zadatak iznalaženja granica korena svodi se dakle samo na iznalaženje gornje granice pozitivnih korena. Evo nekoliko načina, kako se ta granica dobija.

1-vi način:- Mac-Laurinova metoda.

Neka je data algebarska jednačina

$$F(x) = 0$$

u kojoj je koeficijenat najvišeg stepena od X pozitivan. Ako nadjemo takav broj P_1, da F (x) za sve vrednosti od X koje su veće od P, ostaje pozitivno, i ne postoje jednako nuli (ovaj drugi uslov nije potreban ako predpostavimo da data jednačina F (x) = o nema višestrukih korena parnoga reda), tada će taj broj P, biti gornja granica pozitivnih korena. Napišimo datu jednačinu u obliku.

$$F(x) = A_0X^n + A_1X^{n-1} + A_2X^{n-2} + \dots A_{n-1}X + A_n = 0$$

Primetimo najpre da, ako su svi koeficijenti date jednačine pozitivni, F (x) će uvek biti pozitivno, ma koju pozitivnu vrednost mi dali x. Dakle gornje će granice pozitivnih korena biti nula, t.j. P = o; drugim rečima, data jednačina nema ni jednog pozitivnog korena. Ako data jednačina ima i negativnih koeficijenata, označimo sa - Ak (Ak >0) onaj negativni koeficijenat čija je apsolutna vrednost najveća; tada će polinom F (x) za $x > 0$

biti veća od

$$A_0x^n - A_k(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots x+1) = A_0X^n - A_k \frac{x^{n-1}}{x-1},$$

tj. $$F(x) > A_0X^n - Ak\frac{x^{n-1}}{x-1} \quad \text{za } x>0 \quad . \text{(I)}.$$

Ako nadjemo takvu vrednost P da za sve vrednosti $x \geqslant P$ desna strana ove nejednačine bude pozitivna tada će za te vrednosti i $F(x)$ biti pozitivno, i taj broj P možemo uzeti za gornju granicu pozitivnih korena

Iz $$A_0X^n - AK\frac{X^n - 1}{X-1} > 0 \quad \therefore \quad A_0X^n > AK\frac{X^n - 1}{X-1};$$

ako predpostavimo, da je $x > 1$ tada je

$$A_K\frac{x^{n-1}}{x-1} > A_r\frac{x^n}{x-1};$$

dakle će gornja jednačina postajati ako je:

$$A_0x^n \geqslant \frac{A_Kx^n}{x-1} \quad \text{tj:} \quad x-1 \geqslant \frac{A_K}{A_0} \quad \text{ili} \quad x \geqslant 1+\frac{A_K}{A_0} > 1$$

Dakle je gornja granica P pozitivnih korena data izrazom

$$P = 1 + \frac{Ak}{Ao}.$$

NEWTON-ova metoda.

Ova se metoda sastoji u tome da se odredi takav broj $h > 0$ da data jednačina, transformacijom $x = y + h$ predje u jednačinu čiji će svi koeficijenti biti pozitivni. Za takve jednačine smo videli da je njihova gornja granica pozitivnih korena <u>nula</u> t.j. transformisani polinom $T(Y+h)$ je pozitivan za sve $Y>0$. Kako je $y = x - h$ to će polinom $F(x)$ biti pozitivan za sve vrednosti x za koje je

$$Y = X - h \geqslant 0, \text{ t.j. za } x \geqslant h.$$

Znači taj broj h daje gornju granicu pozitivnih korena jednačine $F(x) = 0$; t.j. $h = P$.

Koeficijenti transformisane jednačine

$$F(y+h) = F(h) + \frac{F'(h)}{1!}y + \frac{F''(h)}{2!}y^2 + \dots \frac{F^{(n+1)}(h)}{(n-1)!}y^{n-1} + \frac{F^{(n)}(h)}{n!}y^n = 0$$

su $\frac{F^{(n)}(h)}{n!}$, $\frac{F^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}, \dots \dots \frac{F'(h)}{1!}$, $F(h)$;

Newton-ovo pravilo možemo dakle i ovako formulisati:

<u>Gornja granica pozitivnih korena jednačine $F(x) = 0$ je onaj najmanji broj h za koji su polinom $F(x)$ i svi njegovi izvodi pozitivni.</u>

Odredjivanje broja h vrši se na sledeći način: Polazi se od izvoda najnižeg stepena, t.j. od $F^{(n-1)}(x)$, to je polinom prvog stepena i odredi se broj h_1 tako da za sve $x \geqslant h$ bude $F^{(n-1)}(x) \geqslant 0$; tada se u prethodnom izvodu, koji je polinom drugog stepena, supstituišu svi celi brojevi veći od h_1 do god se ne dodje do jednog broja h_2, za koji je $F^{(n-1)}(h_2) \geqslant 0$, zatim se u $F^{(n-3)}(x)$ supstituišu svi celi brojevi veći od h_2, do god se ne dodje do broja $F^{(n-3)}(h_3) \geqslant 0$. Taj se naja h_3 tako da bude $F^{(n-3)}(h_3) \geqslant 0$. Taj se način produžuje sve dok se ne dodje do broja h_n, za koji je $F(h_n) \geqslant 0$, taj broj h_n predstavlja traženu gornju granicu P pozitivnih korena jednačine $F(x) = 0$.

3-ći način: Metoda grupisanja članova.

Ovaj način, koji se u primeni najčešće upotrebljava, sastoji se u tome da se na podesan način grupišu članovi date jednačine tako, da prvi član svake grupe bude pozitivan. Zatim se odredjuju brojevi K_1, K_2 .... za pojedine grupe tako, da za $X \geq K_1$ prva grupa ostaje pozitivna; za $X \geq K_2$ druga ostaje pozitivna itd. tada je očevidno, da će nam najveći broj K_r brojeva K_1, K_2 .... dati traženu gornju granicu, pozitivnih korena.

§ 3 ODREDJIVANJE RACIONALNIH KORENA.

Predpostavimo da su svi koeficijenti date jednačine $F(x) = 0$ racionalni brojevi.

Množenjem date jednačine podesnim brojem, najmanjim sadržiteljem imenitelja koeficijenata, možemo koeficijente svesti na cele brojeve, tako da od sad možemo predpostaviti, da su svi koeficijenti date jednačine celi brojevi. Pokazati najpre kako se nalaze koreni koji su celi brojevi.

Neka je data jednačina

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots A_{n-1} x + A_n = 0$$

u kojoj su svi koeficijenti celi brojevi, i neka je a koren koji ceo broj. Polinom $F(x)$ je deljiv korenim činiocem $(x-a)$ i rezultat deljenja je polinom oblika

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{x-a} = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \dots + B_{n-2} x + B_{n-1},$$

gde su koeficijenti $B_0, B_1, B_2, \dots B_{n-1}$ dati izrazima

$$B_0 = A_0$$

$$B_1 = A_0 a + A_1 = B_0 a + A_1$$

$$B_2 = A_0 a^2 + A_1 a + A_2 = B_1 a + A_2$$

$$B_3 = A_0 a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3 = B_2 a + A_3$$

$$B_{n-1} = B_{n-2}\, a + A_{n-1}$$

Kako se u tim izrazima ne javlja deljenje, i kako su a i A_r, $r = 1, 2, \dots n$, po predpostavci celi brojevi, to su i brojevi B_r, $r = 1, 2, \dots (n-1)$, celi brojevi. Iz ovog zaključujemo ovo pravilo:

I. Ako je a ceo koren jednačine $F(x) = 0$ tada su svi koeficijenti polinoma

$$\frac{F(x)}{X - a} = F_1(x) \qquad \text{(I)}$$

celi brojevi.

Iz ovog pravila neposredno sledi

sledeće

II. Ako je E ceo broj i a ceo koren jednačine $F(x) = 0$, broj $F(E)$ mora biti deljiv brojem $(E-a)$.

Ako u jednačini (I) stavimo $x=E$, to je $F_1(E)$ ceo broj, jer su svi koeficijenti polinoma $F_1(x)$ celi brojevi. Dakle je broj $F(E)$ deljiv brojem $(E-a)$. Ako stavimo da je $E=0$ biće $F(E) = F(0) = A_n$;

Dakle, iz pravila II dobijamo

Ako je a ceo koren jednačine $F(x)=0$ njen poslednji koeficijenat (nezavisan član) A_n mora biti deljiv sa a.

Na osnovu ovog pravila dobijamo postupak za iznalaženje celih korena jednačine $F(x) = 0$, koji se sastoji u sledećem:

Treba potražiti sve delitelje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_k$ poslednjeg koeficijenta jednačine $F(x)=0$, podrazumevajući medju njima i broj 1; uzeti svaki takav broj jedan put sa znakom +, jedan put sa znakom −, i tako obrazovati niz:

$$-\lambda_k, -\lambda_{k-1}, \ldots -\lambda_2, -\lambda_1, -1, +1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_{k-1}, \lambda_k \qquad (II)$$

Prema pravilu III, treba cele korene tražiti samo medju brojevima (II). Da bi olakšali račun, treba iz niza (II) izbaciti sve one brojeve koji leže izvan granica pozitivnih i negativnih korena. Ostale brojeve $\pm\lambda_i$, koji leže u tim granicama, treba redom uvrstiti u

jednačinu $F(x) = 0$ i videti, koji je od njih zadovoljavaju.

Iz pravila II možemo izvesti i ovo pravilo, koje često može skratiti račun:

IV Ako ni jedan od brojeva:

$$F(1), \quad F(0) = A_n, \quad F(-1) \qquad (III)$$

nije deljiv sa 3, jednačina $F(x) = 0$ nema ni jednog celog korena. Ovo možemo uvideti na sledeći način. Stavimo $E = 1, 0, -1$ tad dobijamo jednačine

$$F(1) = -(a-1)\,F_1(1),$$

$$A_n = F(0) = -a\,F_1(0),$$

$$F(-1) = -(a+1)\,F_1(-1).$$

Jedan od brojeva $(a+1)$, a, $(a-1)$ je svakako deljiv sa 3; ako jednačina ima celih korena, mora i jedan od brojeva $F(1)$, $F(0)$ i $F(-1)$ biti deljiv sa 3.

Obratno pravilo ne važi, t.j. ako je jedan od brojeva (III) deljiv sa 3, jednačina ne mora imati celih korena.

Da bismo ispitali da li jednačina $F(x) = 0$ ima razlomljenih korena, t.j. korena oblika $\frac{p}{q}$, postupamo ovako:

Možemo, bez ograničenja pretpostaviti da su p i q celi brojevi koji nemaju zajedničkih delitelja; jer, ako bi ga imali, delenjem sa tim zajedničkim deliteljom, p/q se svodi na $\frac{p_1}{q_1}$, gde p_1 i q_1 više nemaju zajedničkih delitelja. Neka je $\frac{p}{q}$ koren jednačine $F(x) = 0$ tj.

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = A_o\frac{p^n}{q^n} + A_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots\ldots A_{n-1}\frac{p}{q} + A_n = 0.$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa q^n

$$A_o p^n + A_o p^{n-1}q + \ldots + A_{n-1}pq^{n-1} + A_n q^n = 0,$$

sve članove, osim prvog, prenesemo na desnu stranu i podelimo celu jednačinu sa q, dobijamo:

$$\frac{A_o\, p^n}{q} = -(A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} q^{n-2} + A_n\, q^{n-1}).$$

Desna strana poslednje jednačine je ceo broj, jer su p, q i A_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, po predpostavci celi brojevi. Dakle mora i $\frac{A_o\, p^r}{q}$ biti ceo broj; zmači da $A_o\, p^n$ mora biti deljivo sa q. Kako po predpostavci p i q nemaju zajedničkih delitelja, to p^n ne može biti deljivo sa q; znači da A_o mora biti deljivo sa q. Iz ovog zaključujemo

<u>Ako jednačina $F(x) = 0$ ima razlomljene korene, koeficijenat najvišeg stepena od x mora biti deljiv sa imeniteljem tog korena.</u>

Primenom ovog pravila možete jednačinu $F(x)=0$

transformisati u drugu tako, da razlomljenim korenima date jednačine odgovaraju celi koreni transformisane jednačine.

Zaista, ako izvršimo supstanciju:

$$y = A_o\, x, \quad x = \frac{y}{A_o}$$

koeficijenat najvišeg stepena od y transformisane jednačine $A_o^{n-1}F\left(\frac{y}{A_o}\right)=0$ jednak je jedinici.

Prema pravilu V imenitelji razlomljenih korena moraju deliti taj koeficijenat, t.j. jedinicu, to oni mogu biti samo jednaki jedinici, dakle racionalni koreni ako ih ima mogu biti samo celi brojevi.

Ovo možemo zaključiti i otuda, što transformacijom $y = A_o x$ razlomljene korene $\left(\frac{p}{q}\right)$ množimo brojem A_o, koji sadrži njihove imenitelje. Dakle izraz $\frac{A_o\, p}{q}$ možemo skratiti sa q, dakle koren transformisane jednačine mora biti ceo broj.

Na ovaj način se iznalaženje razlomljenih korena svodi na iznalaženje celih korena. To vršimo na taj način: u jednačini $F(x) = 0$ izvršimo smenu $x = \frac{y}{A_o}$ i tražimo cele korene jednačine:

$$A_o^{n-1}\, F\left(\frac{y}{A_o}\right) = 0$$

Ako su $m_1, m_2, \ldots\ldots m_k$, ti koreni tada su $\frac{m_1}{A_o}, \frac{m_2}{A_o}, \ldots\ldots \frac{m_k}{A_o}$

razlomljeni koreni jednačine $F(x) = 0$.

Iz pravila V zaključujemo: Ako je koeficijenat najvišeg stepena od x jednak jedinici, koreni te jednačine, ako ima racionalnih korena, mogu biti samo celi brojevi.

Primetimo još da pri svodjenju koeficijenata najvišeg stepena od x na jedinicu, nije uvek potrebno izvršiti supstituciju $x = \frac{y}{A_o}$; često se dešava, da postoji broj $A < A_o$, takav da je A_n^n deljivo sa A_o; u tome je slučaju dovoljno da izvršimo supstituciju $x = \frac{y}{A}$.

Primeri:

1) Primeniti sve tri metode za izračunavanje granica korena; zatim izračunati racionalne korene jednačina:

a) $16x^6 + 24x^5 - 144x^4 - 90x^3 + 93x^2 + 66x + 35 = 0$,

b) $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$,

c) $2x^6 + 3x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 12x^2 + x - 4 = 0$,

d) $x^8 - 2x^7 + 10x^6 - 2x^5 - 12x^4 + 3x^2 - 100x + 1000 = 0$,

e) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$,

f) $8x^4 + 4x^3 - 14x^2 - x + 3 = 0$,

g) $x^3 - 3x^2 - 14x + 12 = 0$,

h) $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$,

i) $48x^3 + 20x^2 - 16x - 3 = 0$

k) $90x^3 - 19x + 9 = 0$.

Rešimo prvi zadatak, t.j. jednačinu:

$16x^6 + 24x^5 - 144x^4 - 90x^3 + 93x^2 + 66x + 35 = 0$.

1. Odredjivanje gornje granice pozitivnih korena.

a) Maclauarin-ovo pravilo daje:

$$P = 1 + \frac{A_k}{A_o} = 1 + \frac{144}{16} = 10.$$

b) Po Newton-ovom pravilu imamo:

$f(x) = 16x^6 + 24x^5 - 144x^4 - 90x^3 + 93x^2 + 66x + 35$,

$f'(x) = 6(16x^5 + 30x^4 - 96x^3 - 45x^2 + 31x + 11)$,

$f''(x) = 6(80x^4 + 120x^3 - 288x^2 - 90x + 31)$,

$f'''(x) = 12(160x^3 + 180x^2 - 288x - 45)$,

$f^{(IV)}(x) = 288(20x^2 + 15x - 12)$,

$f^{(V)}(x) = 1440(8x + 3)$,

$f^{(VI)}(x) = 81.440$.

Vidimo, da je

$f^{(V)}(x) > 0$ za $x \geq 0$ $f^{(IV)}(x) > 0$ za $x \geq 1$ $f'''(x) > 0$ za $x \geq 2$

$f''(x) > 0$ -"- $x \geq 2$ $f'(x) > 0$ -"- $x \geq 2$ $f(x) > 0$ -"- $x \geq 3$.

Dakle je $\underline{P = 3}$.

c) Po metodi grupiranja članova možemo gornju jednačinu napisati u obliku

$16x^4(x^2 - 9) + 2x^3(12x^2 - 45) + (93x^2 + 66x + 35) = 0$.

Prva grupa je pozitivna za $x \geq 3$; druga za $x \geq 2$, a treća za $x > 0$; dakle je

$P = 3.$

2. Odredjivanje donje granice pozitivnih korena. Supstancijom $x = \frac{1}{y}$ dobijamo jednačinu

$$y^6\ F\left(\frac{1}{y}\right) = 35y^6+66y^5+93y^4-90y^3-144y^2+24y+16=0.$$

a. Iz Maklorenovog pravila dobijamo

$$P' = 1+\frac{A_k}{A_o} = 1+\frac{144}{35} \simeq 5,$$

t.j. $P = 5$ $\therefore$ $p = \frac{1}{5}$.

b) Newtonovo pravilo daje:

$$f(y) = 35y^6+66y^5+93y^4-90y^3-144y^3+24y+16,$$

$$f'(y) = 6(35y^5+55y^4+62y^3-45y^2-48y+4),$$

$$f''(y) = 6(175y^4+220y^3+186y^2-90y-48),$$

$$f'''(y) = 12(350y^3+330y^2+186y-45),$$

$$f^{(IV)}(y) = 72\ (175\ y^2 + 110\ y + 31),$$

$$f^{(V)} = 720\ (35\ y + 11),$$

$$f^{(VI)}(y) = 35.720.$$

$f^{(V)}(y)>0$ za sve $y\geq 0$; $f^{(IV)}(y)$ za $y\geq 0$; $f'''(y)>0$ za $y\geq 1$. $f''(y)>0$ za $y\geq 1$ $f'(y)\geq 0$ za $y>1$; $f(y)>0$ za $y\geq 1$.

dakle je $P' = 1$ pa je $p = 1$.

c) Grupiranjem članova dobijamo:

$$y^3(93y-90)+y(35y^4+66y^3-144) + 24\ y + 16 = 0.$$

Prva grupa je za $y \geq 1$, druga za $y \geq 2$; a treća za $y\geq 0$; dakle je $P = 2$, t.j. $p = \frac{1}{2}$.

3. Odredjivanje donje granice negativnih korena. Smenom $x = - y$ dobijamo

$$F(-y) = 16y^6-24y^5-144y^4+90y^3+93y^2-66y+35 = 0$$

a) Maklorenovo pravilo daje

$$P'' = 1 + \frac{144}{16} = 10,\ \text{t.j. } N = -10$$

b) Primenom Newton-ovog pravila dobijamo:

$$f(y) = 16y^6-24y^5-144y^4+90y^3+93y^2-66y+35,$$

$$f'(y) = 6(16y^5-30y^4-96y^3+45y^2+31y-11)$$

$$f''(y) = 6(80y^4-120y^3-288y^2+90y+31),$$

$$f'''(y) = 12\ (160y^3-180y^2-288y+45),$$

$$f^{(IV)}(y) = 288\ (20y^2-15y-12),$$

$$f^{(V)}(y) = 1440\ (8x - 3),$$

$$f^{(VI)}(y) = 8.\ 1440.$$

$f^{(V)}(y) > 0$ za sve $y \geq 1$; $f^{(IV)}(y)>0$ za $y \geq 2$; $f'''(y) > 0$ za $y \geq 2$; $f''(y)>0$ za $y \geq 3$; $f'(y)>0$ za $y \geq 4$; $f(y)>0$ za $y\geq 4$;

Dakle je: $P'' = 4$ i $N = -4$

c) Grupisanjem članova jednačine dobijamo:

$$4\ y^4(4y^2-6y-36)+6y(15y^2-11)+(93y^2+35) = 0$$

Prva grupa je pozitivna za sve $y \geq 4$, druga za $y \geq 1$, a treća za $y \geq 0$; dakle je $P'' = 4$ i $N = -4$.

4. Odredjivanje gornje granice negativnih korena dobijamo jednačinu Smenom $x = -\frac{1}{y}$:

$$f(y) = y^6.F\left(-\frac{1}{y}\right) = 35y^6-66y^5+93y^4+90y^3-144y^2-$$
$$-24y+16 = 0.$$

a) Maclaurin-ovo pravilo daje:

$$P''' = 1 + \frac{144}{35} \approx 5,$$

t.j. $$P''' = 5 \text{ i } n = -\frac{1}{5}.$$

b) po Newton-ovu pravilu imamo:

$f(y) = 35y^6-66y^5+93y^4+90y^3-144y^2-24y+16,$

$f'(y) = 6(35y^5-55y^4+62y^3+45y^2-48y-4),$

$f''(y) = 6(175y^4-220y^3+186y^2+90y-48),$

$f'''(y) = 12(350y^3-330y^2+186y+45),$

$f^{(IV)}(y) = 72(175y^2-110y+31),$

$f^{(V)}(y) = 720(35y-11),$

$f^{(VI)}(y) = 35 \cdot 720.$

Dakle je:

$f^{(V)}(y) > 0$ za sve $y \geq 1$; $f^{(IV)}(y) > 0$ za $y \geq 1$; $f'''(y) > 0$ za $y \geq 1$:, $f''(y) > 0$ za $y \geq 1$; $f'(y) > 0$ za $y \geq 1$; $f(y) > 0$ za $y \geq 1$; t.j. $P = 1$ i $n = -1$.

c. Grupisanjem članova jednačinu svodimo na oblik:

$y^5(35y-66) + 3y(31y^3+30y^2-48y-8) + 16 = 0.$

Prva grupa je pozitivna za sve $y \geq 2$; druga za $y \geq 2$; treća za $y \geq 0$; dakle je:

$$P''' = 2 \quad \text{i} \quad n = -\frac{1}{2}.$$

Konačno dobijamo, kad od ova tri rezultata izmenom najtačnija da se negativni koreni nalaze izmedju -4 i -1, a pozitivni izmedju

1 i 3.

Primećujemo da Newton-ova metoda daje najtačnije rezultate, ali je i najduža. Medjutim metodom grupiranja članova dolazimo brzo do rezultata, koji se ne razlikuju mnogo od rezultata Newton-ove metode $(-4, -\frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2}, 3)$. Maclaurinova metoda koja je najbrža, daje suviše velike razmake $(-10, -\frac{1}{5})$; $(\frac{1}{5}, 10)$.

Da bismo našli racionalne korene jednačine:

$16x^6+24x^5-144x^4-90x^3+93x^2+66x-35 = 0,$

svedimo koeficijenat najvišeg stepena na jedinicu. U ovom slučaju dovoljno je izvršiti supstituciju

$x = \frac{y}{2}$ a ne $x = \frac{y}{16}$, jer je $2^6 = 64$ deljivo sa 16 tada dobijamo:

$$f(y) = \frac{16}{64}y^6 + \frac{24}{32}y^5 - \frac{144}{16}y^4 - \frac{90}{8}y^3 + \frac{93}{4}y^2 + \frac{66}{2}y + 35 = 0,$$

ili $$f(y) = \frac{1}{4}y^6 + \frac{3}{4}y^5 - 9y^4 - \frac{45}{4}y^3 + \frac{93}{4}y^2 + 33y + 35 = 0.$$

i množenjem sa četiri

$$4 \cdot f(y) = y^6 + 3y^5 - 36y^4 - 45y^3 + 93y^2 + 132y + 140 = 0.$$

Celi koreni ove jednačine mogu biti samo delitelji broja $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ i to

1	2	4
5	10	20

7   14   28/70,35, 140

t. j. brojevi

140, - 70, -35, -28, -20, -14, -10, -7, -5,
-4, -2, -1,

1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140.

Granice korena jednačine $F(x) = 0$ su: (-4, -1) i (1,3), transformisane jednačine $f(y) = F(\frac{y}{2}) = 0$ su

(-8, -2) i (2, 6,).

Iz gornjeg niza brojeva treba dakle izabrati samo brojeve

7, -5, -4, -2, +2 +4 i +5.

Uvrstimo li te vrednosti u datu jednačinu dobijamo:

$f(-7) = 0, \quad f(-2) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(5)=0.$

Dakle traženi racionalni koreni jednačine $F(x) = 0$ su:

$$-\frac{7}{2}, \; -1, \; +1, \; +\frac{5}{2}.$$

Deobom polinoma $F(x)$ korenim činiocima $(x+\frac{7}{2})(x+1)(x-1)(x-\frac{5}{2})$, dobijamo količnik $4x^2 + 2x + 1$ čije su nule $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

Na taj način smo našli sve korene date jednačine 6-tog stepena.

2). Naći racionalne korene jednačina

a) $x^3+3ax^2 - (b^4+ b^3-3a^2)\,x - (b^5+ab^4+b^4+ab^3+ab^2-a^3) = 0,$

b) $x^3 - (2a+1)\,x^2 + a\,(a+2)\,x - a\,(a+1) = 0,$

c) $x^4 - ax^3 + ax^2 - ax + a - 1 = 0,$

gde su a i b celi brojevi; zatim rešiti te jednačine. Ovde ćemo rešiti prvi zadatak, t.j. jednačinu:

$x^3+3ax^2 - (b^4+b^3+b^2-3a^2)x - (b^5+ab^4+b^4+ab^3+ab^2 - a^3) = 0.$

Kako su a i b celi brojevi, to su koeficijenti date jednačine takodjer celi brojevi a kako je koeficijenat od x^2 jednak 1, to jednačina može imati samo cele korene koje moramo tražiti medju deliteljima izraza

$$b^5 + ab^4 + b^4 + ab^3 + ab^2 - a^3.$$

Primetimo da je taj izraz jednak nuli, kad je $a = -b$, dakle je on deljiv sa $(a+b)$. Posle izvršene deobe dobijamo:

$(b^5+ab^4+b^4+ab^3+ab^2-a^3) : (a+b) = b^4+b^3+ab-a^2$

Dobiveni količnik je jednak nuli, kad je $a = -b^2$; delenjem sa $(a+b^2)$ dobijamo

$$(b^4+b^3+ab-a^2) : (b^2+a) = b^2+ b - a.$$

Poslednji koeficijenat prvobitne jednačine $-(b^5+ab^4+b^4+ ab^3+ ab^2 - a^3)$ možemo prema tome pisati u obliku $-(a+b)(a+b^2)(b^2+b-a)$.

Znači ako jednačina ima celih korena, to mogu biti samo sledeći:

$$\pm(a+b), \; \pm(a+b^2), \; \pm(b^2+b-a).$$

Kad uvrstimo ove vrednosti u datu jednačinu, vidimo, da je

$F(-a-b) = 0, \quad F(-a-b^2) = 0$

$\quad i \quad F(b^2 + b - a) = 0,$

t.j. sva tri korena date jednačine su celi brojevi i to

$$-(a+b), \; -(a+b^2) \text{ i } (b^2+b-a)$$

3). Neka je data jednačina $F(x) = 0$ sa celim koeficijentima; dokazati da ako su ili $F(0)$ i $F(1)$ ili $F(0)$ i $F(-1)$ neparni brojevi jednačina $F(x) = 0$ nema celih korena.

§ 4. Odredjivanje broja realnih korena

Descartes-ova metoda. Neka je dat niz pozitivnih i negativnih brojeva.

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots\dots \lambda_n \qquad (1)$$

Ako su dva uzastopna broja λ_2 i λ_{2+1}, toga niza suprotno označena (+ -, ili - +), kažemo, da oni predstavljaju menu; ako su dva uzastopna broja isto označena (+ +, ili - -), kažemo, da oni predstavljaju sled.

Na pr. u nizu

+3, -2, -3, -6, +1, +5, -4, +6,

se javljaju četiri mene i tri sleda.

Za broj mena izmedju dva ma kakva broja datog niza važe ova pravila:

I. Izmedju dva broja niza (1), koja su suprotno označena, leži najmanje jedna mena; ako ih pak ima više njihov broj je neparan.

II. Izmedju dva člana istog znaka broj mena je ili nula ili paran.

Uočimo algebarsku jednačinu:

$$F(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots\dots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

uredjenu po opadajućim stepenima od x. Ako se u nizu koeficijenata

$$A_0, A_1, A_2, \dots\dots A_{n-1}, A_n$$

javljaju K mena i K_1 sleda po analogiji kažemo da dotična algebarska jednačina ili polinom $F(x)$ ima K mena i K_1 sleda.

Dokažimo sledeće pravilo

III Ako polinom $F(x)$ pomnožimo sa $(x-a)$ gde je $a > o$, tada je broj mena toga polinoma pri-rastao najmanje za jedinicu ili za neparan broj.

Neka je

$$F(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + A_1x + A_0$$

uredjen po opadajućim stepenima od x, gde je koeficijenat najvišeg stepena od x A_n pozitivan. Skupimo njegove članove u grupe ne menjajući pri tom red članova, tako da se u svakoj grupi nalaze samo članovi istoga znaka i napišimo samo prve i zadnje članove svake grupe; dotični polinom imaće oblik

$$\overbrace{A_nx^n + \dots + A_{\lambda+1}x^{\lambda+1}}^{1} - \overbrace{A_{\lambda_1}x^{\lambda_1} - \dots - A_{\lambda_2+1}x^{\lambda_2+1}}^{2} + \overbrace{A_{\lambda_2}x^{\lambda_2} + \dots + A_{\lambda_2+1}x^{\lambda_2+1}}^{3}$$

$$- \overbrace{A_{\lambda_3}x^{\lambda_3} - \dots}^{4} \pm \overbrace{A_{\lambda_p+1}x^{\lambda_p+1}}^{p} \mp \overbrace{A_{\lambda_p}x^{\lambda_p} \mp \dots\dots \mp A_0}^{p+1}.$$

Ako na taj način dobijemo svega $p + 1$ grupu, očevidno je da se u polinomu javljaju svega p mena. Izvršimo množenje toga polinoma sa $(x-a)$ biće

$$A_n x^{n+1} + \ldots + A_{\lambda_1+1} x^{\lambda_1+2} - A_{\lambda_1} x^{\lambda_1+1} - \ldots - A_{\lambda_2+1} x^{\lambda_2+2} + A_{\lambda_2} x^{\lambda_2+1} + \ldots$$
$$\ldots + A_{\lambda_3+1} x^{\lambda_3+2} - A_{\lambda_3} x^{\lambda_3+1} - \ldots \mp A_{\lambda_{p+1}} x^{\lambda_p+2} \mp A_{\lambda_p} x^{\lambda_p+1} - \ldots \mp A_0 x - a A_n x^{n} - \ldots$$
$$\ldots - a A_{\lambda_1+1} x^{\lambda_1+1} + \ldots + a A_{\lambda_2+1} x^{\lambda_2+1} - \ldots - a A_{\lambda_3+1} x^{\lambda_3+1} + \ldots \mp a A_{\lambda_p+1} x^{\lambda_p+1} \pm \ldots$$
$$\ldots \pm a A_0$$

ili ako grupišemo

$$\overbrace{A_n x^{n+1}}^{1} \ldots \overbrace{-(A_{\lambda_1} + a A_{\lambda_1+1}) x^{\lambda_1+1}}^{2} \ldots \overbrace{+(A_{\lambda_2} + a A_{\lambda_2+1}) x^{\lambda_2+1}}^{3}$$
$$\overbrace{-(A_{\lambda_3} + a A_{\lambda_3+1}) x^{\lambda_3+1}}^{p} \ldots \overbrace{\mp(A_{\lambda_p} + a A_{\lambda_p+1}) x^{\lambda_p+1}}^{p+1} \ldots \overbrace{\pm a A_0}^{p+2}$$

U tako dobivenom proizvodu znamo znak samo napisanih članova što je dovoljno da možemo zaključiti gornje pravilo. Kako su dva uzastopna takva člana suprotnog znaka, prema pravilu I. znamo da se izmedju njih nalazi najmanje jedna mena ili ako ih ima više, njihov je broj neparan. Dakle možemo zaključiti, da se izmedju člana $(A_{\lambda_i} + a A_{\lambda_i+1}) x^{\lambda_i+1}$ i člana $(A_{\lambda_{i+1}} + a A_{\lambda_{i+1}+1}) x^{\lambda_{i+1}+1}$ nalazi $1 + 2\,k_i$ mena, gde je K_i pozitivan broj, a može biti i nula. Saberemo li sad

sve te mene, to, kako je broj članova sa poznatim znakovima jednak $P+2$, dobijamo

$$(1+2k_1) + (1+2k_2) + (1+2k_3) + \ldots + (1+2k_p) +$$
$$+ (1+2k_{p+1}) = p+1+2\,(k_1+k_2+\ldots k_{p+1}) = p+1+2k,$$

gde je $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_{p+1}$.

Dakle broj mena polinoma

$$(x-a)\;F\,(x)$$

je uvek za neparan broj veći no broj mena polinoma $F\,(x)$.

Taj broj $2\,K + 1$ može biti jedinica ako je $K = 0$. Na taj način je pravilo III. dokazano i možemo preći na dokazivanje Descartes-ovog pravila koje glasi:

<u>IV. U algebarskoj jednačini broj pozitivnih korena P ne može nikad biti veći od broja mena M, a, ako je manji, razlika $M-P$ je paran broj.</u>

Neka je data jednačina $F\,(x) = 0$, i neka ona ima P pozitivnih korena koji su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$. Možemo staviti

$$F(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_p)\,\varphi(x)$$

gde jednačina $\varphi\,(x) = 0$ nema više pozitivnih korena. Prema pravilu III znaci prvog i zadnjeg koeficijenta polinoma $\varphi\,(x)$ moraju biti isti, t. j. (vidi pravilo II) u polinomu $\varphi\,(x)$ javlja se paran broj mena. Označimo taj broj mena sa $2\,K_o$. Ako počnemo množiti polinom $\varphi\,(x)$ redom sa $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$ .... $(x-\alpha_p)$ pri svakom množenju prema pravilu III uvadjamo neparan broj mena; neka je taj broj $1+k_r$, $r = 1, 2, \ldots p$,

gde K_r može biti i nula. Dakle množenjem sa svih P faktora uvešćemo svega

$$\underbrace{(1+2k_1)+(1+2K_2)+(1+2K_3)+\ldots+(1+2K_p)}_{p}$$

mena

Kako polinom $\varphi(x)$ ima $2K_o$ mena, to je posle množenja njihov broj

$$2K_o+(1+2K_1)+(1+2K_2)+\ldots\ldots+(1+2K_p)=p+$$
$$+2(K_o+K_1+K_p).$$

Dakle ako jednačina $F(x) = 0$ ima R pozitivnih korena, broj mena mora biti za paran broj ili nulu veći od R. Time je Descartos-ovo pravilo dokazano.

Iz ovog pravila možemo dalje zaključiti:

Pravilo V.- Ako se u jednačini javlja samo jedna mena ta jednačina ima tačno jedan pozitivan koren.

Razlika izmedju broja mena i broja pozitivnih korena mora biti paran broj, dakle u slučaju, kad imamo samo jednu menu, ta razlika mora biti nula.

Pomoću Descartes-ovog pravila možemo naći i gornju granicu broja negativnih korena.

Pravilo VI.- Broj negativnih korena N jednačine $F(x) = 0$ ne može nikad biti veći od broja mena M' transformirane jednačine, $F(-x)=0$, ako je manji, razlika $M' - N$ je parna.

Pomoću pravila IV i VI možemo naći i donju granicu broja imaginarnih korena.

Označimo sa M broj mena jednačine $F(x)=0$ sa M' broj mena jednačine $F(-x) = 0$ i neka je n stepen jednačine imamo

Pravilo VII.- Broj imaginarnih korena jednačine ne može nikad biti manji od $n-(M+M')$.

Ovo je pravilo očevidno, jer broj realnih korena R ne može nikad biti veći od $(M+M')$. Kad označimo sa I broj imaginarnih korena imamo

$R + J = n$, $R = n - J$ i $R \leq (M+M')$;

$$\therefore \quad n - J \leq M + M'$$
$$\therefore \quad J \geq n - (M + M').$$

Descartes-ovo pravilo može služiti i za odredjivanje gornje granice broja korená, koji se nalaze u datom intervalu (a, b), i to na sledeći način (po Jaccobi-u):

Neka je data jednačina

$$F(x) = 0;$$

Izvršimo transformaciju

$$y = \frac{a-x}{x-b}, \text{ ili } x = \frac{a+by}{1+y}; \qquad (I)$$

jednačina $$f(y) = F\left(\frac{a+by}{1+y}\right) = 0 \qquad (II)$$

je n-tog stepena.

Dok y varira od 0 do ∞, x će varirati od a do b; prema tome kad y varirajući od 0 do ∞ naidje na jedan koren jednačine

$$f(y) = F\left(\frac{a+by}{1+y}\right) = 0,$$

$\underline{x}$ će naići na jedan koren jednačine $F(x)=0$, koji leži u intervalu (a, b) Dakle broj korena jednačine $F(x) = 0$, koji se nalazi izmedju a i b, jednak je broju pozitivnih korena jednačine $f(y) = 0$.

Primeri.

1) Primeniti Descartes-ovu metodu na jednačine:

a) $x^5-3x^3+5x^2-7x+1 = 0,$

b) $3x^6 - 7x^3 - 1 = 0,$

c) $x^6 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0,$

d) $x^4 -7x^3 + 8x^2 + x - 3 = 0,$

e) $x^3 -19x^6 + 14x^3 - 5x + 7 = 0,$

f) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0,$

g) $x^{10} + 5x^8 -7x^7 + 5x^5 + 19x^3 + x - 2 = 0.$

Rešimo primer a).

Kako jednačina

$$x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0,$$

predstavlja četiri mene, to broj pozitivnih korena može biti ili 0, ili 2, ili 4.

Transformisana jednačina $F(-x) = 0$,

$$x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 7x - 1 = 0$$

ima samo 1 menu; dakle data jednačina ima tačno jedan negativan koren.

Kako je data jednačina 5-tog stepena, to možemo imati ili 4 pozitiv. kor. 1 negat. kor. 0 imagin. koren.

ili 2 pozitv. kor. 1 negat. kor. 2 imagin. koren.

ili 2 " " 1 " " 2 " "

ili 0 " " 1 " " 4 " "

Ako primetimo da je $F(1) = -3$ i $F(o) > o$ to jednačina $F(x) = 0$ mora imati najmanje dva pozitivna korena (vidi pravilo I.); dakle ona može imati

ili 4 pozitiv. kor., 1 negat. kor. 0 imagin. korem.

ili 2 " " 1 " " 2 " "

Primer c) imamo jednačinu:

$$F(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

kako ona ima samo jednu menu, ona ima tačno 1 pozitivan koren. Transformisana jednačina $F(-x) = 0$ tj. $x^6 - x^3 + x^2 - x - 1 = 0$; tj. 3 mene; dakle $F(x) = 0$ može imati 1 ili 3 negativnih korena. Kako je $n - (M+M') = 6 - 1 - 3 = 2$ jednačina $F(x) = 0$ mora imati najmanje 2 imaginarna korena. Dakle jednačina $F(x) = 0$ može imati

ili 1 pozit. kor., 1 negat. koren 4 imagin. kor.

ili 1 " " 3 " " 2 " "

Neka je data jednačina

$$x^5 - 10x^4 + x^3 + 5x^2 + 2 = 0.$$

Ona ima 2 mene, dakle ili $\underline{0}$ ili $\underline{2}$ pozitivna korena. Transformirana jednačina

$$F(-x) = o$$

je $x^5 + 10x^4 + x^3 - 5x^2 - 2 = 0$
i ima jednu menu. Jednačina $F(x) = 0$ ima tačno 1 negativan koren. Ovde je $n - M - M' = 5 - 2 - 1 = 2$; dakle jednačina ima najmanje 2 imaginarna korena. Otuda, data jednačina može imati:

ili 0 pozit. kor. 1 negat. kor. 4 imagin. kor.
ili 2 " " 1 " " 2 " "

Ako primetimo da je

$$F(0)=2>0 \qquad F(1)=-1<0 \; ; \; F(\infty)=+\infty>0$$

vidimo da jednačina $F(x) = 0$ mora imati najmanje 2 pozitivna korena, dakle jednačina $F(x) = 0$ ima tačno 2 pozitivna, 1 negativan i 2 imaginarna korena.

2) data je jednačina

$$F(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$$

koliko ona ima korena koji se nalaze izmedju 1 i 3 ?

Smenom $x = \frac{1+3y}{1+y}$ dobijamo jednačinu

$F\left(\frac{1+3y}{1+y}\right) - 11y^3 + 39y^2 + 17y - 3 = 0$, kako ova jednačina ima samo jednu menu, to jednačina $F(x) = 0$ ima tačno 1 koren izmedju 1 i 3. Kako jednačina $F(x) = 0$ ima 2 mene, ona može imati ili 0, ili 2, pozitivna korena; pošto znamo da ona ima jedan pozitivan koren (izmedju 1 i 3), to će ona imati tačno 2

pozitivna korena i 1 negativan.

3) Naći broj korena jednačine

$$x^3 - x^2 + x - 2 = 0,$$

koji se nalaze izmedju -1 i $+1$.

4) Naći potrebni uslov koji mora ispuniti broj a, da jednačina

$$3x^4 - 4x^3 - 12x + a = 0$$

ima sva 4 korena realna. (Odgovor $a \geq o$ potreban ali ne i dovoljan uslov.). Odrediti tačan broj realnih korena, kad je $a \leq o$

§ 5 Rolle-ova metoda

Videli smo, da prve dve metode mogu samo približno dati broj realnih korena ili broj korena koji se nalaze u jednom datom intervalu. Medjutim Rolle-ova metoda daje tačan broj realnih korena i u isto vreme razdvaja te korene, ali samo u slučaju, kad je moguće rešiti izvodnu jednačinu date jednačine. Rolleova se metoda sastoji iz sledeća dva pravila:

Pravilo I. Izmedju dva uzastopna korena jednačine $F(x) = 0$ nalazi se najmanje jedan koren izvodne jednačine $F'(x) = 0$ a, ako ih ima više, njihov je broj neparan.

Zaista, neka su α i β $(\beta > \alpha)$ dva uzastopna korena jednačine $F(x) = 0$ i neka je ε pozitivan mali broj. Prema pravilima I i II su izrazi

$$\frac{F(\alpha+\varepsilon)}{F'(\alpha+\varepsilon)} \quad i \quad \frac{F(\beta-\varepsilon)}{F'(\beta-\varepsilon)}$$

suprotnog znaka, t.j. prvi je pozitivan, a drugi negativan. Kako su količine:

$$F(\alpha+\varepsilon) \quad i \quad F(\beta-\varepsilon)$$

istoga znaka, jer kad bi one bile suprotnog znaka, jednačina $F(x) = 0$ bi morala imati najmanje jedan koren izmedju α i β, što se protivi predpostavci, to

$$F'(\alpha+\varepsilon) \quad i \quad F'(\beta-\varepsilon)$$

moraju biti suprotna znaka, t.j. izmedju α i β jednačina $F'(x) = 0$ mora imati najmanje jedan koren, a ako ih ima više, njihov je broj neparan.

Obrnuta teorema prvom Rolleovom pravilu nije tačna tj. ne mora se nalaziti jed. koren jednačine $F(x) = 0$ izmedju dva korena izvodne jednačine $F'(x) = 0$. Za ove pak korene važi ovo drugo Rolleovo pravilo, koje glasi:

II. Izmedju dva uzastopna korena izvodne jednačine $F'(x) = 0$ može se nalaziti samo jedan koren jednačine $F(x) = 0$ ili nijedan.

Ovo je pravilo neposredna posledica prve Rolleove teoreme; jer, ako su α i β dva uzastopna korena jednačine $F'(x) = 0$ i ako pretpostavimo, da se izmedju njih nalaze dva korena jednačine $F(x) = 0$, tada se po prvoj

Rolleovoj teoremi izmedju njih mora nalaziti još najmanje jedan koren jednačine $F'(x) = 0$, što se protivi pretpostavci.

Da bismo videli, da li se izmedju α i β nalazi koren jednačine $F(x) = 0$, treba u jednačini smeniti α i β mesto x i ako su $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ istoga znaka, jednačina $F(x)=0$ nema ni jednog korena izmedju α i β; a ako su $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ različitog znaka jednačina $F(x) = 0$ ima tačno jedan koren izmedju α i β.

Pomoću ove dve Rolleove teoreme možemo tačno odrediti broj realnih korena jednačine $F(x) = 0$ i razdvojiti ih ako su poznati svi realni koreni izvodne jednačine $F'(x) = 0$.

To se vrši na sledeći način:

Neka su:

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots\ldots < \beta_{p-1} < \beta_p$$

svi realni koreni jednačine $F'(x) = 0$ uredjeni po njihovim veličinama.

Obrazujemo ova dva niza - t. zv. Rolleovi nizovi:

1) $-\infty, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots\ldots \beta_{p-1}, \beta_p, +\infty$

2) $F(-\infty), F(\beta_1), F(\beta_2), F(\beta_3), \ldots\ldots F(\beta_{p-1}), F(\beta_p), F(+\infty)$

Kad u drugom nizu dva uzastopna člana

$$F(\beta_n) \quad i \quad F(\beta_{n+1})$$

imaju isti znak, jednačina $F(x) = 0$ nema ni jedan koren izmedju β_n i β_{n+1}, a kad dva uzastopna člana F (β_n) i F (β_{n+1}) imaju suprotan znak, jednačina F (x) = 0 ima tačno jedan koren izmedju β_n i β_{n+1}, a ovo važi i za $-\infty$ i $+\infty$.

Vidimo dakle da broj mena drugoga niza daje tačno broj realnih korena jednačine F (x) = 0 i da brojevi β, r = 1, 2, ... p, razdvajaju te korene.

Primenimo najpre Rolleovu metodu na jednačinu trećeg stepena:

$$F(x) = x^3 + px + q = 0$$

i potražimo uslov, kad su sva tri njena korena realna. Izvodna jednačina je

$$F'(x) = 3x^2 + p = 0,$$

a njeni koreni su

$$\beta_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{i} \quad \beta_2 = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Dakle mora

$$p < 0 \qquad (I);$$

tada su β_1 i β_2 realni, i kad obrazujemo Rolleov niz dobijamo:

$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$+\infty$
$F(-\infty)$	$F(-\sqrt{-\frac{p}{3}})$	$F(+\sqrt{-\frac{p}{3}})$	$F(+\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

da bi donji niz imao tri mene, mora da bude:

$$F(-\sqrt{-\tfrac{p}{3}}) > 0 \quad \text{i} \quad F(+\sqrt{-\tfrac{p}{3}}) < 0$$

to jest mora biti

$$F(-\sqrt{-\tfrac{p}{3}}) = -2\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + \frac{q}{2} > 0 \quad \text{i} \quad F(\sqrt{-\tfrac{p}{3}}) = +\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + \frac{q}{2} < 0;$$

dakle u isto vreme treba da bude

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2} \quad (II) \qquad \text{i} \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > +\frac{q}{2} \quad (III).$$

Kako je prema (I) $p < 0$ to su leve strane nejednačina (II) i (III) pozitivne. Ako uzmemo da je $q > 0$ nejednačina (II) je ispunjena sama po sebi i treba zadržati samo nejednačinu (III). Ako je pak $q < 0$, nejednačina (III) je ispunjena, treba zadržati samo nejednačinu (II), čije su obe strane pozitivne, ako podignemo obe strane na kvadrat, dobijemo samo jedan uslov: $-(\frac{p}{3})^2 > (\frac{q}{2})^2$ ili $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2 < 0$ (IV) koji podrazumeva i uslov (I), jer ako je $p > 0$, leva strana nejednačine (IV) ne može nikad biti negativna.

U slučaju, da nejednačina (IV) nije ispunjena, znaci II-og i III-ćeg člana Rolleovog niza će se izmeniti, te će on dati samo jednu menu, t.j. jednačina F (x) = 0 će imati samo jedan realan koren.

Dakle, potreban uslov, da jednačina trećeg stepena ima sva tri realna korena, izražen je nejednačinom (IV).

U tom slučaju su ta tri korena razdvojena brojevima

$$-\infty, \; -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \; +\sqrt{-\frac{p}{3}}, \; +\infty$$

Za slučaj pak, da je $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = 0$, videli smo već ranije da jednačina ima tri realna korena, od kojih je jedan dupli.

Kao drugi primer, primenimo Rolleov način na trinomnu jednačinu

$$x^k + px^r + q = 0$$

i potražimo uslov, kada će ona imati najveći moguć broj realnih korena. Mi ćemo ispitati samo slučaj, kad su m i r neparni brojevi, t.j. oblika $2n + 1$ i $2r + 1$. Jednačinu možemo onda napisati u obliku

$$F(x) = x^{2n+1} + px^{2r+1} + q = 0$$

Ispitajmo najpre pomoću Dekartove metode, koliko može biti najveći broj njezinih realnih korena prema različitim znacima količina p i q.

Transformacijom $x = -y$ dobivamo jednačinu

$$y^{2n+1} + py^{2r+1} - q = 0$$

Ako označimo sa M broj mena date jednačine, a sa M' broj mena transformisane jednačine, dobijamo

$p > o$	i	$q > o$	$M + M' = 0 + 1 = 1,$
$p > o$	i	$q < o$	$M + M' = 1 + 0 = 1,$
$p < o$	i	$q > o$	$M + M' = 2 + 1 = 3,$
$p < o$	i	$q < o$	$M + M' = 1 + 2 = 3.$

Dakle jednačina $F(x) = 0$ može imati 1 ili 3 realna korena; više od 3 ne može imati.

Izvodna jednačina je

$$F'(x) = (2n+1)x^{2m} + (2r+1)px^{2r} = (2n+1)x^{2r}\left[x^{2(n-r)} + \frac{2r+1}{2n+1}p\right] = o.$$

Ako je $p > o$ jednačina $F(x) = 0$ ne može imati drugih realnih korena osim 0, i kao što i Dekartovo pravilo daje, jednačina $F(x) = o$ ima samo jedan realan koren.

Ako je $p < o$ (I) jednačina $F(x) = 0$ može imati tri realna korena; zaista, pošto jednačina $F'(x) = 0$ osim korena 0 ima još dva realna korena

$$\pm\sqrt[2(n-r)]{-\frac{2r+1}{2n+1}p} = \pm\beta$$

to Roleov niz glasi

1.	$-\infty$	$-\beta$	0	$+\beta$	$+\infty$
2.	$-\infty$	$F(-\beta)$	q	$F(+\beta)$	$+\infty$

Najveći mogući broj mena drugog niza je 3. On se postiže na tri sledeća načina:

$-\infty$	$F(-\beta)$	q	$F(+\beta)$	$+\infty$	
$-$	$+$	$\pm$	$-$	$+$	3
$-$	$\pm$	$+$	$-$	$+$	3
$-$	$+$	$-$	$\pm$	$+$	3

Znači, da broj mena bude 3, mora postojati jedan od tri sledeća dupla uslova.

	$F(-\beta) > 0$	i $F(+\infty) < 0$	(II)
ili	$q > 0$	i $F(+\beta) < 0$	(III)
ili	$q < 0$	i $F(-\beta) > 0$	(IV)

Kako su

$$F(-\beta) = F\left(-\sqrt[2(n-r)]{-\frac{2r+1}{2n+1}p}\right) = \frac{2(n-r)}{2n-1}\left(-\frac{2r+1}{2n+1}p\right)^{\frac{2n+1}{2(n-r)}} + q$$

i

$$F(\beta) = F\left(+\sqrt[2(n-r)]{-\frac{2r+1}{2n+1}p}\right) = -\frac{2(n-r)}{2n+1}\left(-\frac{2n+1}{2n+1}p\right)^{\frac{2n+1}{2(n-r)}} + q$$

to vidimo, da će uslovi (III) i (IV) biti ispunjeni, ako su ispunjeni uslovi (II) koji imaju oblik

$$\frac{2n+1}{2(n-r)}F(-\beta)=\left[-\frac{2r+1}{2n+1}p\right]^{\frac{2n+1}{2(n-r)}}+\frac{2n+1}{2(n-r)}q>0;\quad \frac{2n+1}{2(n-r)}F(\beta)=-\left[-\frac{2r+1}{2n+1}p\right]^{\frac{2n+1}{2(n-r)}}+\frac{2n+1}{2(n-r)}q<0$$

ili $-\left[\frac{2r+1}{2n+1}\right]^{\frac{2n+1}{2(n-r)}}<\frac{2n+1}{2(n-r)}q$ ....(V) i $\left[-\frac{2r+1}{2n+1}p\right]^{\frac{2n+1}{2(n-r)}}>\frac{2n+1}{2(n-r)}q$ ......(VI)

Kako je prema (I) $p<o$ to, ako je $q>o$ uslov (V) je uvek ispunjen, moramo se dakle samo pridržavati uslova (VI) u kome su tada obe strane pozitivne. Ako je $q<o$ uslov (VI) je sam po sebi ispunjen, i treba da vodimo računa samo o uslovu (V), u kome su obe strane negativne. Dakle ako obe strane nejednačina (V) i (VI) podignemo na parnu potenciju 2 (n-r), nejednačina (VI) će zadržati svoj smisao a nejednačini (V) moramo promeniti smisao, jer su njene obe strane negativne.

Tada dobijamo samo jedan uslov, koji možemo pisati u ooliku

$$P=\left(\frac{2r+1}{2n+1}p\right)^{2n+1}+\left(\frac{2r+1}{2(n-r)}q\right)^{2(n-r)}<0,\quad \text{(VII)}$$

a koji podrazumeva i uslov (I) ($p<o$); jer ako je $p>o$ leva strana nejednačine (VII) nemože nikad biti manja od nule. Dakle ako je $P<0$ jednačina $F(x)=0$ ima 3 realna korena, a ako je $P>0$ jednačina ima 1 realan koren.

Tražimo li još uslov, da jednačina $F(x)=x^{2n+1}+px^{2r+1}+q=0$ ima duplih korena različitih od nule; to dobijamo primenom

xomogenih funkcija: $f(x,y)=y^{2n+1}F\left(\frac{x}{y}\right)=x^{2n+1}+px^{2r+1}y^{2(n-r)}+qy^{2n+1}$,

$f'_x(x,y)=(2n+1)x^{2n}+(2r+1)px^{2r}y^{2(n-r)}$,

$f'_y(x,y)=2(n-r)px^{28+1}y^{2(n-r)-1}+(2n+1)qy^{2n}$.

Stavljajući $y=1$ jednačine

$x^{2r}\left[(2n+1)x^{2(n-r)}+(2r+1)p\right]=o$ i

$2(n-r)px^{2r+1}+(2n+1)q=o$

treba da imaju jedan zajednički koren. Ako nadjemo x iz prve jednačine i uvrstimo u drugu, dobijamo traženi uslov, koji ima oblik

$$P=\left(\frac{2r+1}{2n+1}p\right)^{2n+1}+\left(\frac{2r+1}{2(n-r)}q\right)^{2(n-r)}=0.$$

Dakle, jednačina $F(x)=0$ ima

za $P<o$ 3 realna korena i 2 (n-1) imaginarna

za $P=0$ 3 " " (medju njima jedan dupli)

za $P>0$ jedan realni koren i 2 n imaginarna korena.

U slučaju, kad su sva tri korena realna, oni su razdvojeni brojevima: $-\infty$ $-\beta$ $+\beta$ $+\infty$

PRIMERI:

1) Primeniti Rolleovu metodu na jednačinu:

$A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0$

gde su $A_0=1, A_1=2, A_2=3, A_3=4, A_4=2$.

Treba izvršiti najpre ove transformacije:

$x = y - \frac{A}{4A_0}$ i $y = \frac{1}{z}$

te svesti jednačinu na oblik $a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 = 0$,

2.) Razdvojiti realne korene jednačine:

$x^3 - 5x^2 + 7x + 2 = 0$.

3.) Odrediti granice izmedju kojih sme varirato λ tako, da jednačina $F(\lambda) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + \lambda = 0$

ima sva 4 realna korena.

Primenimo najpre Dekartovu metodu, ako označimo sa M i M' broj mena date i transformirane jednačine dobijamo:

za $\lambda < 0$ $\quad M + M' = 1 + 1 = 2$,

" $\lambda > 0$ $\quad M + M' = 2 + 2 = 4$.

Dakle jednačina može imati 4 realna korena samo, ako je $\lambda > 0$; ako je pak $\lambda < 0$, ona ima tačno dva realna korena. Uzmimo da je $\lambda > 0$ za izvodnu jednačinu dobijamo $F'(x) = 12x\,(x^2 - x - 2) = 0$, t.j. njeni su koreni: $-1, 0, 2$.

Dakle Rolleov niz je: 1. $-\infty, -1, 0, 2, +\infty$

2. $+\infty, \lambda - 5, \lambda, \lambda - 32, +\infty$

Da bi data jednačina imala 4 realna korena mora drugi niz imati sledeće znake:

$+, -, +, -, +,$

jer samo u tome slučaju on ima 4 mene.

Dakle uslovi su:

$\lambda - 5 < 0 \qquad \lambda > 0 \qquad \lambda - 32 < 0$

t.j. $\quad 0 < \lambda < 5 \qquad 0 < \lambda < 32$

Ako je prvi uslov ispunjen, drugi će uvek biti ispunjen ali ne i obratno. Dakle λ sme varirati izmedju 0 i 5 da bi data jednačina imala 4 realna korena.

Ako je $5 < \lambda < 32$ jednačina ima samo 2 realna pozitivna korena. Ako je $\lambda > 32$, jednačina nema ni jednog realnog korena. Dakle, kad λ varira od $-\infty$ do $+\infty$ imamo sledeću šemu:

$-\infty < \lambda < 0$	2 realna korena (1poz. i 1 neg.); 2 imag. kor.
$\lambda = 0$	2 realna različ. kor. 2 dupla kor. 0; 0 imag. kor.
$0 < \lambda < 5$	2 real. kor. (2 poz. 2 neg.) 0 imag. kor.
$\lambda = 5$	2 real. razl. kor. 2 real. dupla kor. 0 imag. kor.
$5 < \lambda < 32$	2 real. pozit. kore. 2 imag. kor.
$\lambda = 32$	2 real. dupla kor. 2 " "
$32 < \lambda < +\infty$	nijedan realan koren 4 " "

4.) Kad λ varira od $-\infty$ do $+\infty$, videti kakvi su koreni jednačina:

$$2x^4 + 6x^3 - 18x^2 + \lambda = 0;$$
$$16x^5 - 20x^2 + 5x + \lambda = 0;$$
$$x^3 - x + \lambda = 0;$$
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \lambda = 0;$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{7}{2}x^2 + 6x + \lambda = 0;$$
$$2x^6 - 9x^4 + 8x^3 + \lambda = 0;$$
$$x^6 - 3x^5 + \lambda x^3 - 3x + 1 = 0?$$

5.) Naći uslov koji treba da ispune koeficijenti p i q da bi jednačina

$$x^4 + px + q = 0$$

imala najveći broj realnih korena.

Odgovor: $\left(\frac{p}{4}\right)^4 - \left(\frac{q}{3}\right)^3 > 0$

6.) Dokazati da su svi koreni jednačine

$$x^6 \pm x + 1 = 0$$

imaginarni,

7.) Razdvojiti korene jednačine

$$x^4 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

8.) Dokazati da jednačina

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} = 0$$

može imati najviše 1 realan koren, i to kad je n neparan broj. Kako to važi za jednačine 1-og, 2-og. 3-ćeg stepena, dokazati pomoću Rolleove teoreme, da ako važi za n, važiće i za n+1.

9.) Razdvojiti realne korene jednačina:

a) $x^4 + x^3 + 1 = 0,$
b) $x^4 - 3x - 1 = 0,$
c) $2x^4 + x^3 - 2 = 0,$
d) $x^5 + 3x^2 - 1 = 0,$
e) $x^6 - 5x + 2 = 0,$

f) $x^9 - 5x^4 + 7 = 0,$
g) $x^8 - 8x^7 + 2 = 0,$
h) $x^4 - 12x^2 + 4x + 3 = 0,$
i) $12x^5 - 25x^3 + 15x + 3 = 0,$
k) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0,$

10.) Naći uslov da jednačina

$$x^n + px + q = 0$$

ima najveći broj realnih korena

Odgovor:

$$\left(-\frac{p}{n}\right)^n - \left(\frac{q}{n-1}\right)^{n-1} > 0.$$

§ 6. STURM - ova Metoda

Ako je moguće rešiti izvodnu jednačinu date jednačine F (x) = 0, Rolleova metoda se uvek može primeniti; medjutim ako izvodnu jednačinu nemožemo rešiti, Rolleova metoda se nemože primeniti. Ako pored toga Dekartova metoda nedaje dovoljno tačne rezultate, treba primeniti Šturmovu metodu, koja odredjuje tačan broj realnih korena, koji se nalaze u datom intervalu. Šturmova metoda se može uvek primeniti i sastoji se iz sledećeg.

Neka je data jednačina F (x) = 0 n-tog stepena, koja nema višestrukih korena t. j. polinom F (x) nema nijednog zajedničkog delitelja sa svojim izvodom F' (x).

Stavimo kratkoće radi,

$F(x) = X$ i $F'(x) = X_1$

Izvršimo deobu $X : X_1$ dok nedodjemo do ostatka nižeg stepena od X_1. Označimo taj ostatak sa promenjenim znakom sa X_2. Izvršimo deobu $X_1 : X_2$ dogod ne dodjemo do ostatka, čiji je stepen manji od X_2; i označimo taj ostatak sa promenjenim znakom sa X_3 itd. Taj niz operacija, imajući uvek na umu da kod svakog ostatka promenimo znak, treba produžiti, sve dok se ne dodje do ostatka koji ne zavisi više od x tj. koji je konstantan a do njega se mora doći jer $F(x)$ i $F'(x)$ nemaju zajedničkog delitelja. Označimo taj zadnji ostatak, takodje sa promenjenim znakom sa X_p. Na taj način dobijamo niz polinoma:

$X, X_1, X_2, \ldots X_{r-1}, X_r, X_{r+1}, \ldots X_{p-1}, X_p$, (I)

koji se naziva Šturmovim nizom, Šturmovo pravilo sastoji se u ovom:

I) Ako u Šturmovom nizu (I) smenimo mesto X dva realna broja a i b ($b > a$) i označimo sa M_a brpj mena niza, u kojemu je $k = a$, sa M_b broj mena niza, u kojem je $x = b$, razlika $M - M_b$ daje tačan broj realnih korena jednačine $F(x) = X = 0$, koji se nalaze izmedju a i b .

Označimo sa $Q_1\ Q_2 \ldots Q_{p-1}$, količine gore spomenutih deoba; tada dobijamo, ako uzmemo u obzir, da smo svakom ostatku promenili znak, sledeći niz jednačina:

$$
\begin{aligned}
X &= X_1 Q_1 - X_2,\\
X_1 &= X_2 Q_2 - X_3,\\
X_2 &= X_3 Q_3 - X_4,\\
&\text{--------------}\\
&\text{--------------}\\
X_{r-1} &= X_r \cdot Q_r - X_{r+1},\\
X_r &= X_{r+1} Q_{r+1} - X_{r+2},\\
&\text{--------------------}\\
X_{p-2} &= X_{p-2} Q_{p-1} - X_p.
\end{aligned}
$$

1. Dva uzastopna polinoma niza (I) ne mogu biti jednaki nuli za istu vrednost od x.

2. Ako za jednu vrednost od x jedan od polinoma niza (I) postaje jednak nuli, polinomi izmedju kojih se on nalazi uvek su suprotna znaka.

3. Dok x varira u jednom intervalu, u kojem jednačina $F(x) = 0$ nema ni jednog korena, broj mena Šturmovog niza ostaje nepromenjen.

4. Kad x prodje kroz jedan koren jednačine $F(x) = 0$ Šturmov niz gubi tačno jednu menu.

1) Pretpostavimo, da su dva proizvodnja uzastopna polinoma X_{r-1} i X_r jednaka nuli za jednu istu vrednost od X. Iz jednačina (II) vidimo da mora i X_{r+1}, a odavde jednačina ispod nje daje da mora i X_{r+2} biti jednako nuli;

produžimo li tako dalje dobili bismo konačno, da X_p mora biti jednako nuli, što je nemoguće jer je X_p konstanta.

Ako je za $x = \beta$ polinom X_1 jednak nuli, iz jednačina (II) sledi

$$X_{r-1} = - X_{r+1}$$

tj. polinomi, izmedju kojih se on nalazi moraju biti različita znaka.

3.) Predpostavimo da x varira od x_0 do x_1, izmedju kojih jednačina $F(x) = 0$ nema ni jednog realnog korena. Tada se broj mena u nizu (I) može primeniti samo ako jedan od polinoma X_r, $r = 1, 2, 3, \ldots (p-1), p$, promene svoj znak, tj. prodje kroz nulu. Uočimo polinom X_r koji je jednak nuli za $x = \beta \, [x < \beta < x_1]$ kad x varira od $\beta - h$ do $\beta + h$ polinom X_r menja znak. Kako polinom X_{r-1} i X_{r+1} ne mogu za $x = \beta$ biti jednaki nuli, možemo uvek izabrati h tako malo da ti polinomi nemaju korena u intervalu $[\beta - h, \beta + h]$. Kako je $X_r = 0$ za $x = \beta$, to će ovi polinomi biti suprotna znaka, dok x varira od $\beta - h$ do $\beta + h$. Ma kakav znak imao X_r, broj mena niza

$$X_{r-1}, X_r, X_{r+1}$$

se neće izmeniti do x raste od $\beta - h$ do $\beta + h$, jer su X_{r-1} i X_{r+1} suprotna znaka, tako da je broj mena uvek jednak jedinici

Kako ovo važi za proizvoljan polinom to će ono važiti za sve, polinome niza (I), osim krajnjih. Dakle, ako jedan od polinoma X_r, $r = 1, 2, \ldots\ldots p-1$, menja svoj znak broj mena niza (I) ostaje nepromenjen dogod krajnji polinom X i X_p. Kako polinom X_p ima uvek isti znak (jer je konstantan) a polinom $X = F(x)$ po pretpostavci u intervalu X_0, X, ne menja znak vidimo da dok x varira od X_0 do X_1 broj mena niza (I) ostaje nepromenjen.

4. Neka je α realni koren jednačine $X = F(x) = 0$; pustimo da x varira od $\alpha - h$ do $\alpha + h$. Dok se god nalazi u intervalu $(\alpha - h, \alpha)$ polinom $X = F(x)$ i $X_1 = F'(x)$ su suprotna znaka i imaju jednu menu; kada x predje u interval $(\alpha, \alpha + h)$ ti će polinomi biti istoga znaka i nemaju više mena. Dakle, dok x raste od $\alpha - h$ do $\alpha + h$ niz (I) gubi tačno jednu menu. Iz poslednja dva stava sledi Šturmovo pravilo jer ako jednačina $F(x) = 0$ ima p korena izmedju a i b ($b > a$), kada X rastući od a i predje preko jednog korena, Šturmov niz gubi tačno jednu menu. Kako izmedju dva korena broj mena ostaje nepromenjen, to će Šturmov niz izgubiti drugu menu tek kad x predje preko drugog korena. Najzad, kad x predje preko svih p korena i stigne do b, Šturmov niz će izgubiti tačno p mena. Znači da razlika broja me-

na $M_a - M_b$ daje tačan broj realnih korena jednačine $F(x) = 0$ koji se nalaze u tome intervalu. Ovim je Šturmovo pravilo dokazano pod predpostavkom da jednačina $F(x) = 0$ nema višestrukih korena. Ako data jednačina ima višestrukih korena, kad budemo obrazovali niz

$$X, X_1, X_2, \ldots\ldots X_{p-1}, X_p \quad (I)$$

polinom X_p neće biti više konstanta; on predstavlja najveći zajednički delitelj polinoma X i X_1. Svi polinomi X_r, $r = 1,2, \ldots p-1$, imaće polinom X_p kao faktor. Delenjem sviju polinoma niza (I) sa X_p dobijamo niz:

$$V, V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots V_{p-1}, 1 \quad (II)$$

pretstavlja Šturmov niz polinoma $\frac{F(x)}{X_p} = V$.

Niz (II) može dakle potpuno da zameni niz (I) pošto jednačina $V=0$ sadrži sve korene jednačine $F(x) = X = 0$ samo svaki višestruki koren po jedanput. Prema tome gubitak broja mena niza (II) pri prelazu od $x = a$ do $x = b$ daje tačan broj realnih korena jednačine $F(x) = 0$ koji se nalaze izmedju a i b gde je svaki višestruki koren računat samo jedanput.

Pošto se broj mena niza II neće promeniti ako sve njegove članove pomnožimo istim brojem $X_p(a)$ ili $X_p(b)$ vidimo da nije potrebno izvršiti deobu sa X_p već da iz niza (I) možemo neposredno dobiti broj korena koji se nala-

ze izmedju datih granica računajući pri tome svaki višestruki koren samo jedanput. Šturmovo pravilo važi dakle i u slučaju kad jednačina $F(x) = 0$ ima višestrukih korena. Šturmovo pravilo daje dakle tačan broj realnih korena u datom razmaku. Pomoću njega možemo isto tako dobiti tačan broj sviju realnih, ili pozitivnih ili negativnih korena; treba samo u Šturmovom nizu u mesto a i b staviti $-\infty$, 0, $+\infty$. Razlike $M_{-\infty} - M_{\infty}$; $M_0 - M_{\infty}$; i $M_{-\infty} - M_0$ daju tražene brojeve korena.

Šturmovo pravilo može služiti i za razdvajanje realnih korena. To se vrši na sledeći način: kad su nam poznate granice, izmedju kojih se nalaze svi realni koreni, treba u Šturmovom nizu uvrstiti sve cele brojeve, koji se nalaze izmedju tih granica; prema broju mena tako dobivenih nizova vidimo izmedju kojih se od ovih celih brojeva nalaze realni koreni i koliko. Ako se izmedju dva cela broja n i n + 1 nalaze više korena, treba u Šturmovom nizu uvrstiti brojeve koji se nalaze izmedju njih, na pr. n+o,1; n+o,2; n+o,3,...n+1, i videti, izmedju kojih od njih se nalaze dotični koreni itd.

Šturmova metoda za odredjivanje broja realnih korena, koji se nalaze u datom razmaku, i razdvajanje tih korena, potpuno rešava taj zadatak, i sve bi druge metode bile izlišne, kad bi ona u primeni bila jednostavnija. Medjutim, u primeni zbog velikog broja operacija koje se moraju izvršiti, ona je veoma zamašna i upotrebljava se samo kad je neizbežna. Važnost ove metode ležiumi u tome, što je ona jedina koja potpuno rešava gornje zadatke.

PRIMERI.

1) Pomoću Šturmove metode razdvojiti realne korene jednačina:

a) $x^5-5x+1 = 0$, ... $[-2,-1]$, $[0,1]$, $[1,2]$,

b) $x^4+x^3-5x^2+2 = 0$, ... $[-3,-2]$, $[-1,0]$, $[1,2]$, $[0,1]$,

c) $x^4-2x^3-11x^2-bx+2 = 0$ .... $[0,1]$.

d) $x^5-5x^3+10x^2-15x+16 = 0$ .... $[-4,-3]$,

e) $x^4-16x^2+8 = 0$ .. $[-4,-3]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[3,4]$,

f) $x^4-3x^2+1=0$ .....$[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$,

g) $x^4-x^3+2x^2-6x+5 = 0$ ....

nema realnih korena. Uzmimo prvu jednačinu:

$$X = x^5 - 5x + 1 = 0$$

i potražimo najpre granice, izmedju kojih se nalaze njeni realni koreni. Grupisanjem

$$x(x^4 - 5) + 1 = 0$$

dobijamo za gornju granicu pozitivnih korena $P = 2$. Transformisana ($y = -x$) jednačina ima oblik:

$$y^5 - 5y - 1 = 0, \text{ tj. } y(y^4-5) - 1 = 0$$

a gornja granica negativnih korena je $N = -2$

Obrazujemo Šturmov niz. Izvod leve strane da-

te jednačine je

$$5(x^4 - 1)$$

i možemo staviti

$$X_1 = (x^4 - 1),$$

pošto odbacivanjem brojnog faktora znak ne menjamo. Delenjem dobijamo:

$$x^5 - 5x + 1 : x^4 - 1 = x$$
$$\underline{-x^5 \mp x}$$
$$-4x+1, \text{ t.j. } X_2 = 4x - 1$$

Ponovnim delenjem: $4X_1 : X_2$ t.j.

$$4x^4 - 4 : 4x - 1 = \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$$
$$\underline{-4x^4 \mp x^3}$$
$$x^3 - 4$$
$$4x^3 - 16$$
$$\underline{4x^3 - x^2}$$
$$x^2 - 16$$
$$4x^2 - 64$$
$$\underline{4x^2 - x}$$
$$x - 64$$
$$4x - 256$$
$$\underline{4x - 1}$$
$$-255$$

Dakle je $X_3 = 255$, i Šturm-ov niz glasi:

$X = x^5 - 5x + 1$, $X_1 = x^4 - 1$, $X_2 = 4x - 1$, $X_3 = 255$.

Stavimo redom $x = -2, -1, 0, 1, 2$,

raspored znakova je:

	-2	-1	0	1	2
X	-	+	+	-	+
X_1	+	0	-	0	+
X_2	-	-	-	+	+
X_3	+	+	+	+	+
	3	2	2	1	0

t.j.

$M_{-2} - M_{-1} = 1$; $M_{-1} - M_o = 0$;

$M_o - M_1 = 1$; $M_1 - M_2 = 1$.

Dakle data jednačina ima tri realna korena, koji se nalaze u razmacima

$$[-2, -1], [0, 1], [1, 2].$$

Rešimo još zadatak b). Granice realnih korena dobijamo grupisanjem,

$$x^2[x^2 + x - 5] + 2 = 0$$

tj. $\underline{P} = 2$; transformisana jednačina je

$$y^4 - y^3 - 5y^2 + 2 = 0,$$

ili

$$y^2(y^2 - y - 5) + 2 = 0 \text{ tj. } N = -3.$$

Izvod je

$$X_1 = 4x^3 + 3x^2 - 10x.$$

Delenjem 4 X sa X_1 imamo

$$(4x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 8) : (4x^3 + 3x^2 - 10x) \,/\, x + 1$$

$$\underline{4x^4 + 3x^3 - 10x^2}$$

$$4 \quad x^3 - 10x^2 + 8$$

$$4x^3 - 40x^2 + 32$$

$$\underline{4x^3 + 3x^2 - 10x}$$

$$-43x^2 + 10x + 32.$$

t.j.

$$X_2 = 43x^2 - 10x - 32.$$

Delenjem dalje 43 · X_1 sa X_2 imamo:

$$172x^3 + 129x^2 - 430x : 43x^2 - 12x - 32 \,/\, 4x + 169$$

$$\underline{172x^3 - 40x^2 - 120x}$$

$$169x^2 - 302x$$

$$7267x^2 - 12986x$$

$$\underline{7267x^2 - 1690x - 5408}$$

$$-11296x + 5408 = 32(-353x + 169)$$

dakle je

$$X_3 = 353x - 169$$

Ponovnim delenjem 353 X_2 sa X_3 dobijamo

$$1412x^2 - 3530x - 11296 : 353x - 169 \,/\, 43x - 10797$$

$$\underline{1412x^2 + 7267x}$$

$$353 \quad -10797x - 11{,}296$$

$$-3711341x - 3977388$$

$$\underline{-3711341x + 1824693}$$

$$-5802081,$$

tj. $X_4 = 5802081$ Šturmov niz je:

$$X = x^4 + x^3 - 5x^2 + 2,$$

$$X_1 = 4x^3 + 3x^2 - 10x,$$

$$X_2 = 43x^2 - 10x - 32,$$

$$X_3 = 353x - 169,$$

$$X_4 = 5802081,$$

i kad u njemu stavimo redom

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2,$$

dobijamo sledeći raspored znaka

	-3	-2	-1	0	1	2
X	+	-	-	+	-	+
X_1	-	+	+	+	-	+
X_2	+	+	+	-	+	+
X_3	-	-	-	-	+	+
X_4	+	+	+	+	+	+
V_r	4	3	3	2	1	0

Otuda $M_{-3} - M_{-2} = 1$; $M_{-2}-M_{-1} = 0$; $M_{-1}-M_o=1$;

$$M_o - M_1 = 1; \quad M_1 - M_2 = 1.$$

Dakle, jednačina ima sva 4 realna korena, i oni se nalaze u razmacima

$$[-3, -2]; \; [-1, 0]; [0, 1]; [1,2].$$