Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Zorica D. Milovanović

PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI KOJI SADRŽI DIRAKOVU DISTRIBUCIJU

-master rad-

Beograd, 2008.

Sadržaj

Predgovor

Diferencijalne jednačine, obične ili parcijalne, su matematički modeli kojima se mogu opsati mnoge pojave u prirodi i inženjerskoj tehnici. Pri tome važnu ulogu imaju spektralni problemi, odnosno problemi sopstvenih vrednosti.

Predmet ovog rada su problemi sopstvenih vrednosti koji sadrže Dirakovu distribuciju. Rad se sastoji iz četiri poglavlja.

U prvom poglavlju su prikazani osnovni pojmovi koji se odnose na granične probleme kao i osnovni pojmovi koji se odnose na Šturm-Liuvilov granični problem.

U drugom poglavlju su predstavljeni uslovi konjugacije kao i spektralni problemi sa različitim tipovima graničnih uslova.

U trećem poglavlju je izvršena diferencna aproksimacija spektralnog problema sa mešovitim graničnim uslovima. Na početku poglavlja je izvršena generalizacija spektralnog problema razmatranog u drugom poglavlju, a potom diskretizacija na ravnomernoj mreži. Ispitane su i dokazane neke osobine sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija i izvedena ocena brzine konvergencije diskretizovanog zadatka.

U poslednjem, četvrtom poglavlju date su definicije osnovnih pojmova koje su korišćene u radu.

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru Prof. Dr Bošku S. Jovanoviću na strpljenju, razumevanju i korisnim konsultacijama prilikom izrade ovog rada.

Matematički fakultet

Beograd, 2008. **Zorica D. Milovanović**

1. Uvod

1.1. Obične diferencijalne jednačine: Granični problemi

Granični problem za obične diferencijalne jednačine je problem nalaženja partikularnog rešenja jednačine:

$$u^{(m)}(x) = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)})$$

koje zadovoljava uslove zadate u više od jedne tačke intervala. Stoga se granični problemi ne mogu definisati za jednačine prvog reda. Prvobitno su to bili problemi kod kojih su uslovi definisani samo na krajevima intervala, te otuda potiče naziv.

Primer 1. Rešenjem graničnog problema

$$-u''(x) = f(x), \quad a \le x \le b$$

$$u(a) = u(b) = 0,$$

može se opisati oblik zategnute žice učvršćene na krajevima, kada na nju deluje spoljašnja sila $f(x)$.

Za jednačine ili sisteme jednačina višeg reda, gde je broj zadatih uslova veći pa oni mogu biti zadati i u unutrašnjim tačkama intervala, granični problemi su raznovrsniji.

Primer 2. Granični problem

$$u^{(4)}(x) = f(x), \quad a \le x \le b$$

$$u(x_i) = 0, \quad i = 1,2,3,4, \quad a \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le b,$$

opisuje deformaciju grede pod uticajem spoljašnje sile $f(x)$, ako se u četiri tačke x_i greda oslanja na nosače.

U daljem radu zadržaćemo se na graničnim problemima za linerane diferencijalne jednačine drugog reda. Svaka takva jednačina

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x) = d(x)$$

svodi se smenom

$$y(x) = y_1(x) e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{b(t)}{a(t)}dt}$$

na jednačinu

$$-y_1''(x) + q(x)y_1(x) = f_1(x)$$

koja ne sadrži prvi izvod nepoznate funkcije. Proizvoljan interval (a,b), u kojem je zadat granični problem, može se linearnom smenom svesti na jedinični interval $(0,1)$. Najzad, novom smenom

$$y_1(x) = u(x) + Ax + B$$

gde su A i B pogodno izabrane konstante, nehomogeni granični uslovi

$$\alpha_0 y_1'(0) + \beta_0 y_1(0) = M_0,$$

$$\alpha_1 y_1'(1) + \beta_1 y_1(1) = M_1$$

svode se na homogene. Zato ćemo u daljem radu razmatrati "kanonski granični problem" oblika

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.1}$$

$$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \tag{1.2}$$

$$\alpha_2 u'(1) + \beta_2 u(1) = 0$$

koji se može zapisati u obliku operatorske jednačine

$$Lu = f. \tag{1.3}$$

Ako je $\alpha_i = 0$, $\beta_i \neq 0$, $i = 1,2$, granični uslovi (1.2) su prvi ili Dirihleovi granični uslovi:

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.4}$$

a granični problem (1.1), (1.4) se naziva prvi ili Dirihleov granični problem.

Ako je $\alpha_i \neq 0$ i $\beta_i = 0$, $i = 1,2$, granični uslovi (1.2) su drugi ili Nojmanovi granični uslovi:

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{1.5}$$

Granični problem (1.1), (1.5) se naziva drugi ili Nojmanov granični problem.

Ako je $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$, $i = 1,2$, granični uslovi (1.2) su treći (mešoviti) ili Robinovi granični uslovi:

$$u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0, \qquad u'(1) - \sigma_2 u(1) = 0. \tag{1.6}$$

Granični problem (1.1), (1.6) se naziva treći (mešoviti) ili Robinov granični problem.

U daljem radu koristićemo sledeće funkcionalne prostore:

$C[a,b]$ - prostor neprekidnih funkcija, na intervalu $[a,b]$, sa normom:

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$C(a,b)$ - prostor neprekidnih funkcija na otvorenom intervalu (a,b)

$C^n[a,b]$ i $C^n(a,b)$ - prostori funkcija neprekidnih na intervalu $[a,b]$, odnosno (a,b), zajedno sa svim izvodima reda $\le n$.

$L_2(a,b)$ - Lebegov prostor kvadratno integrabilnih funkcija, sa skalarnim proizvodom

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

i normom

$$\|f\|_{L_2(a,b)}=(f,f)^{1/2}=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

1.2. Šturm-Liuvilov granični problem

Neka su date funkcije $p\in C^1[0,l]$, $p(x)\neq 0$, $q\in C[0,l]$. Operator $L:C^2[0,l]\to C[0,l]$ definisan sa

$$L(u)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right)-q(x)u(x)$$

naziva se samoadjungovan (samokonjugovan) operator ili Šturm-Liuvilov operator.

Za ovako definisan operator se može postaviti Šturm-Liuvilov granični problem:

Odrediti netrivijalno rešenje $u\in C^2(0,l)\cap C^1([0,l])$ ***obične diferencijalne jednačine:***

$$L(u)+\lambda\omega(x)u(x)=0,\quad 0<x<l \tag{1.7}$$

gde je λ ***kompleksan parametar, a funkcija*** $\omega\in C[0,l]$, ***koje na krajevima intervala zadovoljava granične uslove:***

$$\begin{aligned}&\alpha u'(0)-\beta u(0)=0\\&\gamma u'(l)+\delta u(l)=0\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\alpha^2+\beta^2>0,\quad \gamma^2+\delta^2>0.$$

Definicija 1. Vrednost parametra λ za koju Šturm-Liuvilov granični problem (1.7)-(1.8) ima netrivijalno rešenje, naziva se sopstvena (karakteristična) vrednost, a odgovarajuće rešenje sopstvena (karakteristična) funkcija.

Šturm-Liuvilov problem se drugačije zove problem sopstvenih vrednosti.

Sopstvena (karakteristična) vrednost se drugačije zove spektralni parametar, pa ćemo i taj termin koristiti u daljem radu.

Naredne fundamentalne teoreme daju dovoljne uslove egzistencije sopstvenih vrednosti i odgovarajućih sopstvenih funkcija, kao i predstavljanje nekih funkcija apsolutno i uniformno konvergentnim redom po sopstvenim funkcijama.

Teorema 1. (Regularni Šturm-Liuvilov granični problem) Neka u jednačini (1.7) funkcije *p, q* i ω zadovoljavaju uslove:

$$p \in C^1[0,l],\ p(x) > 0 \text{ na } [0,l]$$

$$q \in C[0,l],\ q(x) > 0 \text{ na } [0,l]$$

$$\omega \in C[0,l],\ \omega(x) > 0 \text{ na } (0,l),$$

i neka je

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \gamma + \delta > 0. \tag{1.9}$$

Tada:

(i) Sopstvene vrednosti Šturm-Liuvilovog problema (1.7)-(1.8) su nenegativne (ako je $q(x) \neq 0$ ili $\beta + \delta > 0$, tada su sve sopstvene vrednosti pozitivne), jednostruke i čine strogo rastući niz $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots,\ \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

(ii) Odgovarajuće sopstvene funkcije su ω-ortogonalne, tj. $\int\limits_0^l u_i(x)u_j(x)\omega(x)dx = 0, i \neq j$, i čine potpun ortogonalan sistem u prostoru funkcija $L_{2,\omega}(0,l) = \left\{ u : \|u\|_\omega^2 = \int\limits_0^l u^2(x)\omega(x)dx < \infty \right\}$.

(iii) Za svaku funkciju $f \in C^2[0,l]$ koja zadovoljava uslove (1.8)-(1.9) i uslov $|p(x)f'(x) - q(x)f(x)| \leq C\sqrt{\omega(x)}$, $x \in (0,l)$ (uvek ispunjen ako je $\omega(0) > 0$, $\omega(l) > 0$), red

$$\sqrt{\omega(x)}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\omega(x)} u_k(x) \tag{1.10}$$

gde je $a_k = \dfrac{\int\limits_0^l f(x)u_k(x)\omega(x)dx}{\int\limits_0^l u_k^2(x)\omega(x)dx}$, konvergira apsolutno i uniformno na $[0,l]$. Ako je $\omega(0) > 0$, $\omega(l) > 0$, red (1.10) se svodi na red

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \quad . \tag{1.11}$$

Teorema 2. (Singularni Šturm-Liuvilov granični problem) Neka su u jednačini (1.7) funkcije p i q definisane na sledeći način:

$$p(x) = xr(x)\,,\ q(x) = \frac{s(x)}{x}$$

pri čemu su $r(x), s(x)$ analitičke i ograničene na $(0,l)$, sa osobinama

$$r(x) > 0\,,\ s(x) \geq 0 \text{ na } [0,l]$$

$$\omega \in C[0,l]\,,\ \omega(x) > 0 \text{ na } (0,l)\,,$$

i neka su granični uslovi

$$|u(0)| < \infty,\ \ \gamma u'(l) + \delta u(l) = 0\,,\ \gamma, \delta \geq 0\,,\ \gamma + \delta > 0\,.$$

Tada pri ovim uslovima važe ista tvrđenja kao u teoremi 1 (ako je $q(x) \neq 0$ ili $\delta > 0$, sopstvene vrednosti su pozitivne).

Napomena: Ove teoreme sadrže neophodne uslove za koeficijente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kojima se obezbeđuje nenegativnost, odnosno pozitivnost sopstvenih vrednosti, što se veoma često javlja u mešovitim problemima parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

2. Nestandardni spektralni problemi

Pri rešavanju početno-graničnih problema sa prekidnim koeficijentima primenom metode razdvajanja promenljivih dobijaju se spektralni problemi u kojima se spektralni parametar javlja u uslovima konjugacije, odnosno u graničnim uslovima. Alternativno, ovi problemi mogu da se opišu pomoću diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti sadrže singularnu distribuciju, najčešće je to Dirakova distribucija.

Spektralni problemi koji sadrže singularnu distribuciju su novi i za njih postoji mali broj analitičkih i numeričkih rezultata. Zbog toga se u ovom radu bavimo ispitivanjem njihovih numeričkih i analitičkih rešenja, kao i njihovih svojstava.

2.1. Uslovi konjugacije

Na intervalu $(0,1)$ razmotrimo sledeću jednačinu:

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})-q(x)u+\lambda[r(x)+K\delta(x-\xi)]u=0,$$

gde je $\xi\in(0,1)$. Za $0<x<\xi$ jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})-q(x)u+\lambda r(x)u=0.$$

Istu jednačinu dobijamo ukoliko je $\xi<x<1$. Interesuje nas šta se dešava kada je $x=\xi$. Tada ili je $u(\xi)=0$ ili postoji još jedna Dirakova distribucija koja se može pojaviti prilikom diferenciranja izraza $p(x)\frac{du}{dx}$.

Pretpostavimo da u tački $x=\xi$ funkcija $p(x)$ ima prekid prve vrste:

$$[p]_{x=\xi}=p(\xi+0)-p(\xi-0)\neq 0.$$

a da je funkcija $u(x)$ neprekidna:

$$[u]_{x=\xi}=u(\xi+0)-u(\xi-0)=0$$

Ako integralimo polaznu jednačinu na odsečku $\xi-\varepsilon\le x\le\xi+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ dobićemo:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})dx-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}q(x)udx+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\lambda[r(x)+K\delta(x-\xi)]udx=0$$

$$p(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}q(x)udx+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\lambda r(x)udx+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\lambda K\delta(x-\xi)udx=0$$

Puštajući da $\varepsilon\to 0$ odatle dobijamo sledeći uslov konjugacije:

$$[pu']_{x=\xi}=-\lambda Ku(\xi).$$

2.2. Spektralni problem sa Dirihleovim graničnim uslovima

Razmatramo sledeći spektralni problem:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda[1 + K\delta(x-\xi)]u(x), \quad x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

gde je $K > 0$, i $\delta(x)$ Dirakova distribucija

ili

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u(x), \quad x \in (0,\xi) \cup (\xi,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

a u tački $x = \xi$ su zadovoljeni uslovi konjugacije: (2.1)

$$[u]_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) = 0, \quad -\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi} = \lambda K u(\xi).$$

Rešenje ovog problema može se predstaviti u sledećem obliku:

$$u(x) = \begin{cases} A\sin\alpha x, & \mathrm{x} \in (0,\xi) \\ B\sin\alpha(1-x), & \mathrm{x} \in (\xi,1) \end{cases}.$$

Očigledno je da $u(x)$ zadovoljava granične uslove. Koristeći prvi uslov konjugacije, izračunaćemo vrednost konstanti A i B.

Naime,

$$[u]_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) \Rightarrow$$

$$B\sin\alpha(1-\xi) - A\sin\alpha\xi = 0 \Rightarrow$$

$$B\sin\alpha(1-\xi) = A\sin\alpha\xi \Rightarrow$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\sin\alpha\xi}{\sin\alpha(1-\xi)} \Rightarrow$$

$$B = C\sin\alpha\xi$$

$$A = C\sin\alpha(1-\xi)$$

gde je C multiplikativna konstanta. Sa ovako dobijenim vrednostima za konstante A i B funkcija $u(x)$ postaje:

$$u(x) = \begin{cases} C\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & \mathrm{x} \in (0,\xi) \\ C\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & \mathrm{x} \in (\xi,1) \end{cases}$$

Ukoliko stavimo da je C =1 dobijamo:

$$u(x)=\begin{cases}\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}.$$

Iz jednačine $-\dfrac{d^2u}{dx^2}=\lambda u(x)$ i drugog uslova konjugacije dobijamo α.

Dakle polazimo od sledećeg:

$$u(x)=\begin{cases}\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{du}{dx}=\begin{cases}\alpha\sin\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ -\alpha\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}-\alpha^2\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ -\alpha^2\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}\alpha^2\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \alpha^2\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

Iz jednačine $-\dfrac{d^2u}{dx^2}=\lambda u(x)$ dobijamo sledeće:

ako je $x\in(0,\xi)$ imamo:

$$\alpha^2\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x=\lambda\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x\Rightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{\lambda}=\frac{\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x}{\sin\alpha(1-\xi)\sin\alpha x}=1\Rightarrow\ \alpha^2=\lambda$$

ako je $x\in(\xi,1)$ imamo:

$$\alpha^2\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x)=\lambda\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x)\Rightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{\lambda}=\frac{\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x)}{\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-x)}=1\Rightarrow\ \alpha^2=\lambda\ .$$

Na osnovu gore navedenog zaključujemo da je $\alpha^2=\lambda$ na intervalu $(0,1)$.

Vratimo se sada na drugi uslov konjugacije:

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=-\alpha\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)-\alpha\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi$$
$$=-[\alpha\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)+\alpha\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi]$$
$$-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\alpha[\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)+\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi]$$

Stavljajući da je $\alpha^2=\lambda$ u relaciju $-\left[\dfrac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi)$ dobijamo:

$$\alpha[\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)+\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi]=\alpha^2K\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)$$

$$\alpha=\frac{1}{K}\frac{[\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)+\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi]}{\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)}$$

$$\alpha=\frac{1}{K}[\cot\alpha(1-\xi)+\cot\alpha\xi] \tag{2.2}$$

Desna strana jednačine (2.2) je suma dve periodične funkcije, koje u opštem slučaju imaju različite periode, pa jednačina ima prebrojivo mnogo rešenja $\alpha=\alpha_n$, n=1,2,... iz kojih dobijamo sopstvene vrednosti:

$\lambda=\lambda_n=\alpha_n^2$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, $\lambda_n\to\infty$ kao i sopstvene funkcije $u=u_n(x)$, n=1,2,....

Postoji još jedna klasa sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija koja je rešenje spektralnog problema. Funkcije koje pripadaju ovoj klasi su oblika $u(x)=\sin\alpha x$ i anuliraju se u singularnoj tački. Izvodi ovih funkcija su neprekidni u singularnoj tački pa uslovi konjugacije imaju sledeći oblik:

$$u(\xi)=0,\quad \left[\frac{du}{dx}\right]_\xi=0.$$

Ovakva rešenja zovemo neprelomljena rešenja.

Prvi granični uslov je zadovoljen, a iz drugog imamo $\alpha=m\pi$, $m\in Z$. Iz prvog uslova konjugacije dobijamo da je $\alpha\xi=l\pi$, $l\in Z$. U slučaju kada je ξ iracionalan broj, ne postoji broj α sa gore navedenim osobinama. Znači, $\xi=\frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti. Odavde sledi da je $\alpha=l\frac{q}{p}\pi$. Zbog uslova $\alpha=m\pi$ zaključujemo da l mora biti deljivo sa p, odnosno $\frac{l}{p}=n$. Dobijamo da je $\alpha=qn\pi$, pa sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije imaju sledeći oblik:

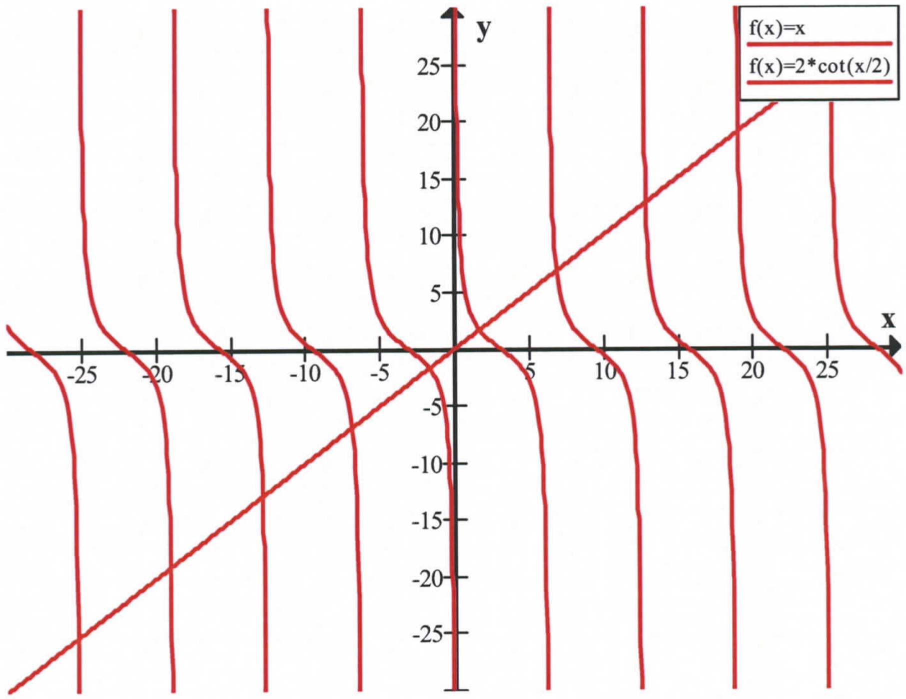
$\lambda_n=(qn\pi)^2$, $u_n(x)=\sin qn\pi x$, n=1,2,...

Primer 1.

Za $\xi=\frac{1}{2}$ jednačina (2.2) postaje :

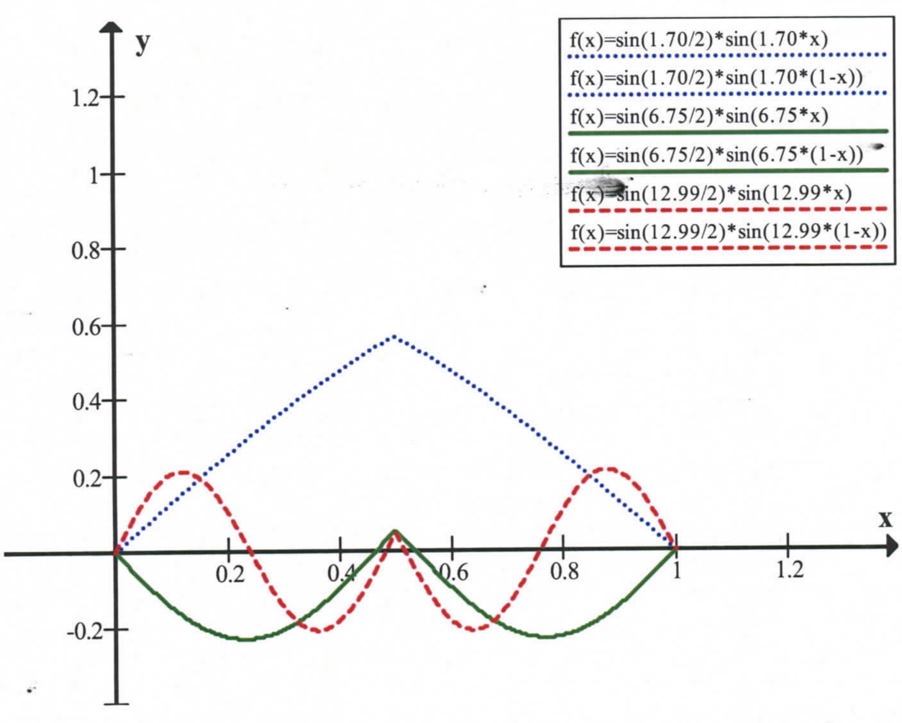
$\alpha=\frac{2}{K}\cot\frac{\alpha}{2}$. Postoji prebrojivo mnogo rešenja $\alpha=\alpha_n$, n=1,2,... Koristeći uslov $\alpha^2=\lambda$ dobijamo sopstvene vrednosti $\lambda_n=\alpha_n^{\,2}$, n=1,2,...

Grafički prikaz ove jednačine za $\xi=\frac{1}{2}$ i $K=1$ dat je na slici 1:



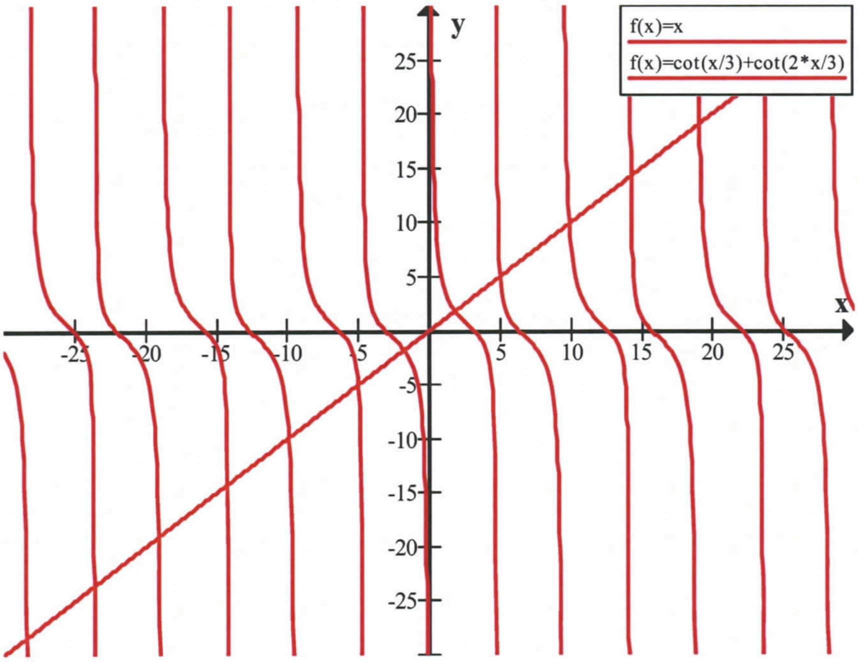
Slika 1. Grafički prikaz jednačine (2.2) za $\xi = \frac{1}{2}$

Na slici 2 dat je prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2}$



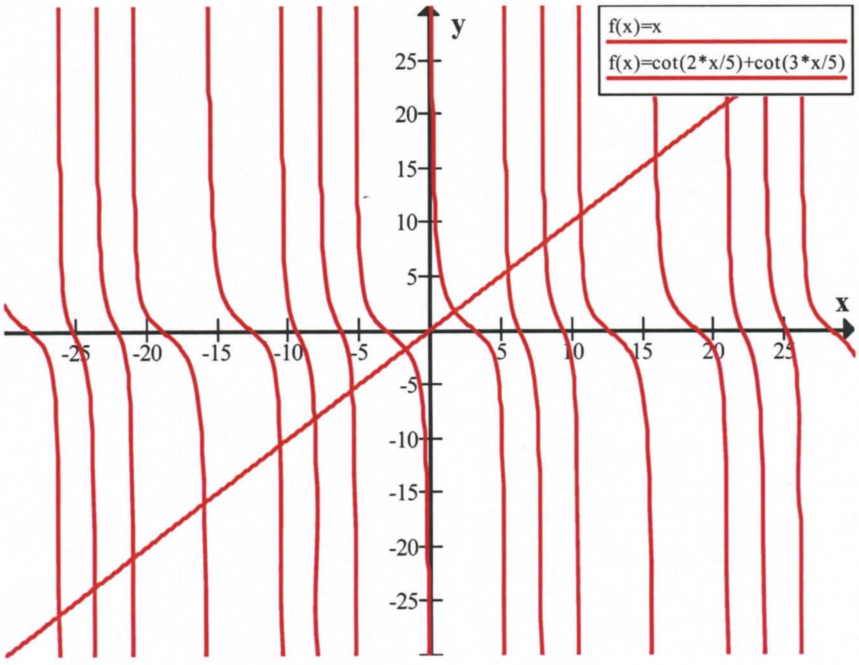
Slika 2. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2}$

Za $\xi = \frac{2}{3}$ jednačina (2.2) postaje: $\alpha = \frac{1}{K}\left[\cot\frac{\alpha}{3} + \cot\frac{2\alpha}{3}\right]$



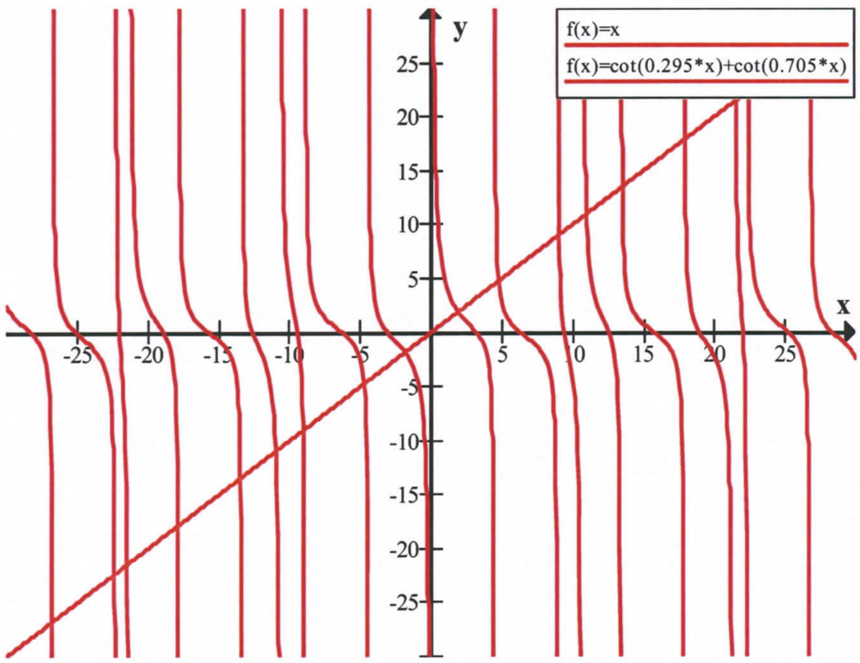
Slika 3. Grafički prikaz jednačine (2.2) za $\xi = \frac{2}{3}$

Za $\xi = \frac{3}{5}$ jednačina (2.2) postaje: $\alpha = \frac{1}{K}\left[\cot\frac{2\alpha}{5} + \cot\frac{3\alpha}{5}\right]$



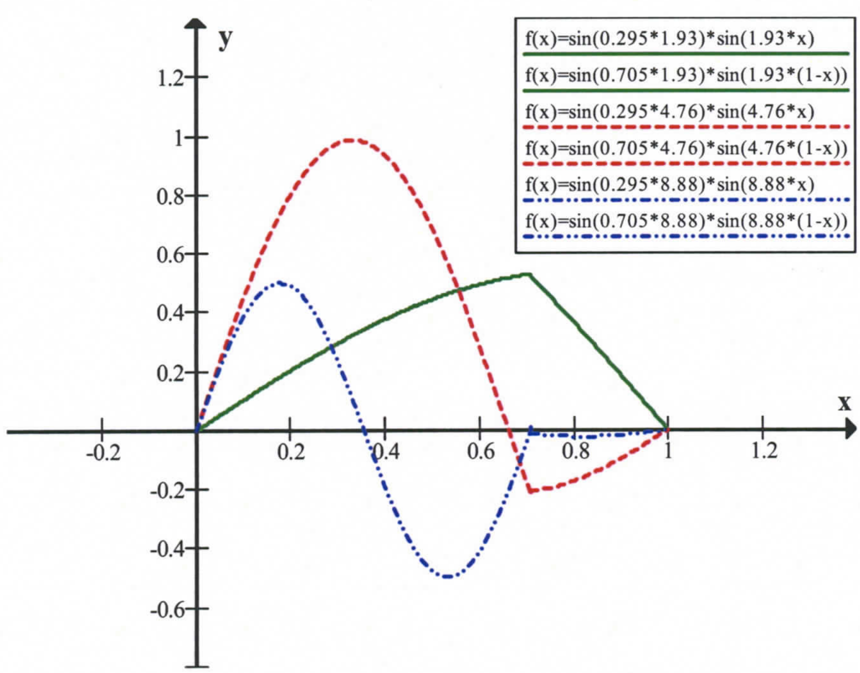
Slika 4. Grafički prikaz jednačine (2.2) za $\xi = \frac{3}{5}$

Za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jednačina (2.2) postaje: $\alpha = \frac{1}{K}\left[\cot\alpha\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + \cot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right]$



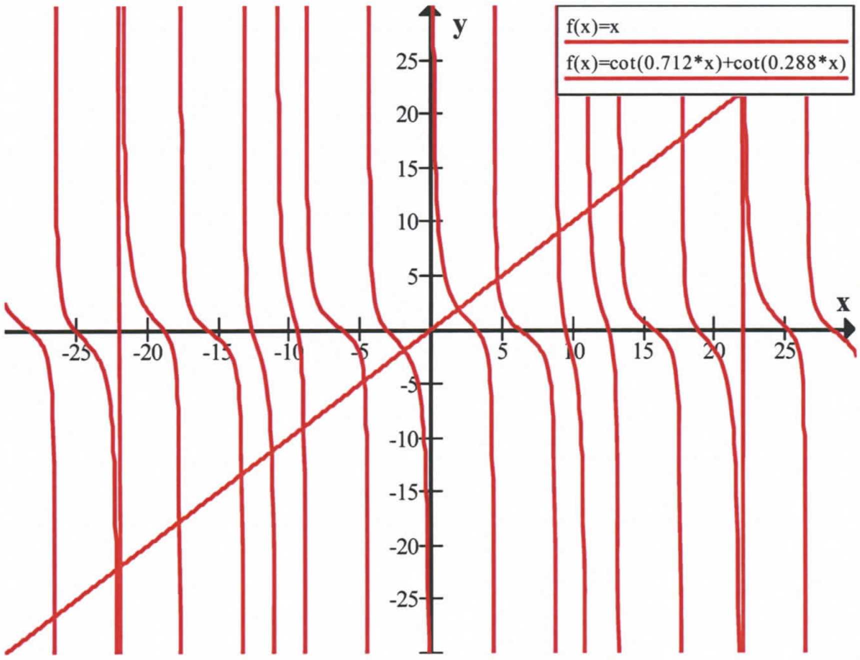
Slika 5. Grafički prikaz jednačine (2.2) za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ date su na slici 6



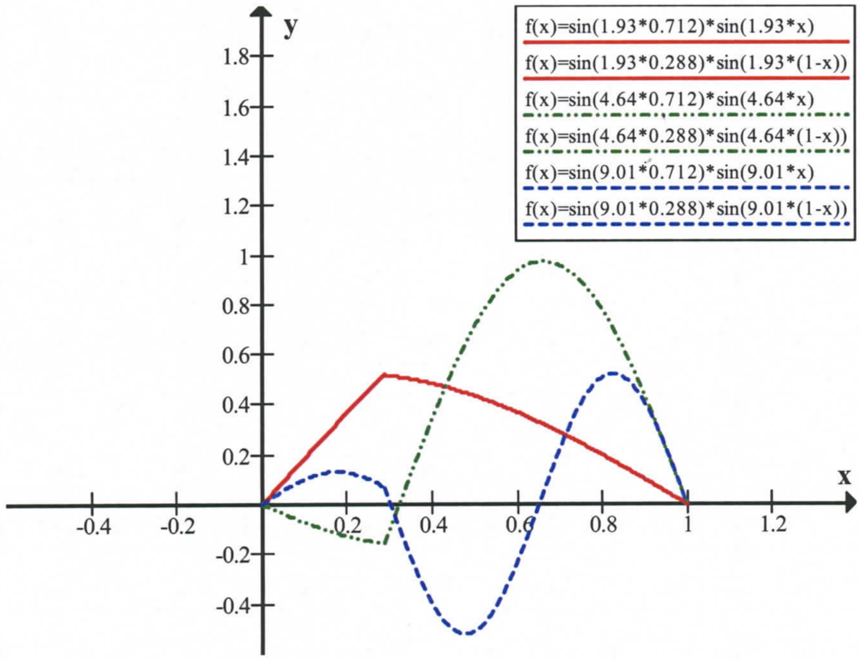
Slika 6. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Za $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ jednačina (2.2) postaje: $\alpha = \dfrac{1}{K}\left[\cot\alpha\left(\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}\right) + \cot\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right]$



Slika 7. Grafički prikaz jednačine (2.2) za $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ date su na slici 8:



Slika 8. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2.3. Spektralni problem sa Nojmanovim graničnim uslovima

Razmatramo sledeći spektralni problem:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda[1 + K\delta(x-\xi)]u(x)\ ,\ x \in (0,1)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

ili

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u(x)\,,\quad x \in (0,\xi) \cup (\xi,1)\,,$$

$$u'(0) = u'(1) = 0\,,$$

$$[u]_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) = 0\,,\quad -\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi} = \lambda K u(\xi)\,.$$

Rešenja ovog problema mogu se predstaviti u sledećem obliku:

$$u(x) = \begin{cases} A\cos\alpha x, & \mathrm{x} \in (0,\xi) \\ B\cos\alpha(1-x), & \mathrm{x} \in (\xi,1) \end{cases}$$

Očigledno je da $u(x)$ zadovoljava granične uslove. Koristeći prvi uslov konjugacije, izračunaćemo vrednost konstanti A i B.

Naime,

$$[u]_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) \Rightarrow$$

$$B\cos\alpha(1-\xi) - A\cos\alpha\xi = 0 \Rightarrow$$

$$B\cos\alpha(1-\xi) = A\cos\alpha\xi \Rightarrow$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha(1-\xi)} \Rightarrow$$

$$B = C\cos\alpha\xi$$

$$A = C\cos\alpha(1-\xi)$$

gde je C multiplikativna konstanta. Sa ovako dobijenim vrednostima za konstante A i B funkcija $u(x)$ postaje:

$$u(x) = \begin{cases} C\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & \mathrm{x} \in (0,\xi) \\ C\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & \mathrm{x} \in (\xi,1) \end{cases}$$

Ukoliko stavimo da je C =1 dobijamo:

$$u(x)=\begin{cases}\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}.$$

Iz jednačine $-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u(x)$ i drugog uslova konjugacije dobijamo α.

Dakle polazimo od sledećeg:

$$u(x)=\begin{cases}\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{du}{dx}=\begin{cases}-\alpha\cos\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \alpha\cos\alpha\xi\sin\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}-\alpha^2\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ \alpha^2\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}\alpha^2\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & x\in(0,\xi)\\ -\alpha^2\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & x\in(\xi,1)\end{cases}$$

Iz jednačine $-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u(x)$ dobijamo sledeće:

ako je $x\in(0,\xi)$ imamo:

$$\alpha^2\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x=\lambda\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}=\frac{\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x}{\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x}=1\Rightarrow\ \alpha^2=\lambda$$

ako je $x\in(\xi,1)$ imamo:

$$\alpha^2\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x)=\lambda\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x)\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}=\frac{\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x)}{\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-x)}=1\Rightarrow\ \alpha^2=\lambda$$

Na osnovu gore navedenog zaključujemo da je $\alpha^2=\lambda$ na intervalu $(0,1)$.

Vratimo se sada na drugi uslov konjugacije:

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\alpha\cos\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)+\alpha\cos\alpha(1-\varepsilon)\sin\alpha\xi$$

$$-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=-\alpha[\cos\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)+\cos\alpha(1-\varepsilon)\sin\alpha\xi]$$

Stavljajući da je $\alpha^2=\lambda$ u relaciju $-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi)$, dobijamo:

$$\alpha=-\frac{1}{K}\frac{[\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)+\sin\alpha(1-\varepsilon)\cos\alpha\xi]}{\cos\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)}$$

$$\alpha = -\frac{1}{K}[tg\alpha(1-\xi) + tg\alpha\xi] \tag{2.3}$$

Postoji prebrojivo mnogo rešenja $\alpha = \alpha_n$, n=1,2,... od kojih dobijamo sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije.

Neprelomljena rešenja su oblika $u(x) = \cos\alpha x$ i postoje ako je $\xi = \frac{2k+1}{2m}$, $k,m \in N$. Dokazaćemo da za ξ mora važiti ova jednakost koristeći granični uslov i prvi uslov konjugacije.

Iz graničnog uslova $u'(0) = u'(1) = 0$ dobijamo da je $\alpha = m\pi$, a iz prvog uslova konjugacije dobijamo da je $\alpha\xi = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(1+2k)$. Zamenjujući α koje smo dobili iz graničnih uslova u poslednju jednakost dobijamo:

$$m\pi\xi = \frac{\pi(2k+1)}{2}$$

$$\xi = \frac{2k+1}{2m}$$

Sopstvene vrednosti za ovaj problem su oblika:

$\lambda_n = [m(2n+1)\pi]^2$, n=0,1,2,...

a odgovarajuće sopstvene funkcije:

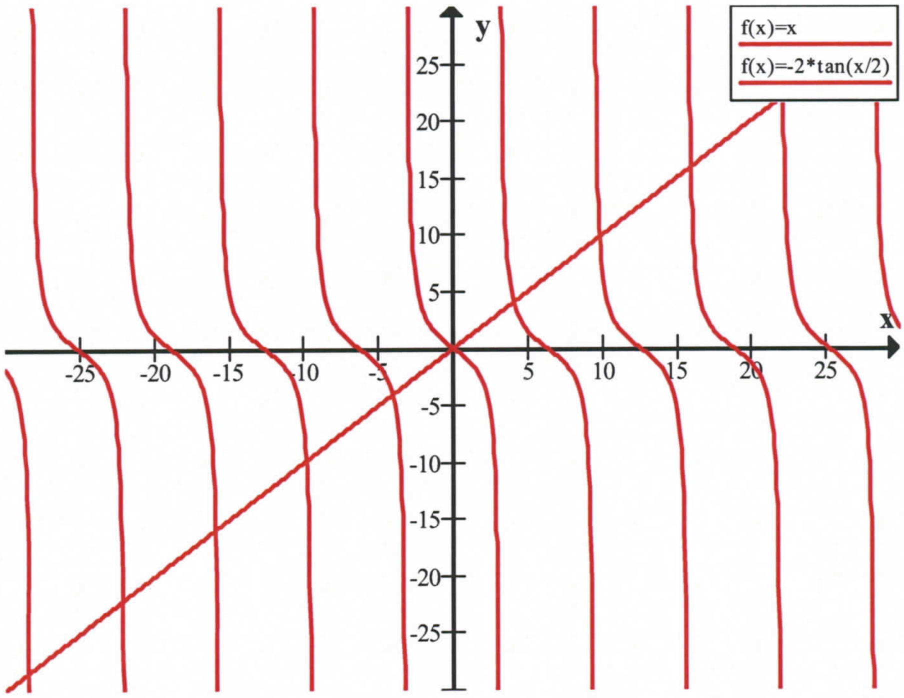
$u_n = \cos m(2n+1)\pi x$.

Primer 2.

Za $\xi = \frac{1}{2}$ jednačina (2.3) postaje $\alpha = -\frac{2}{K} tg\frac{\alpha}{2}$.

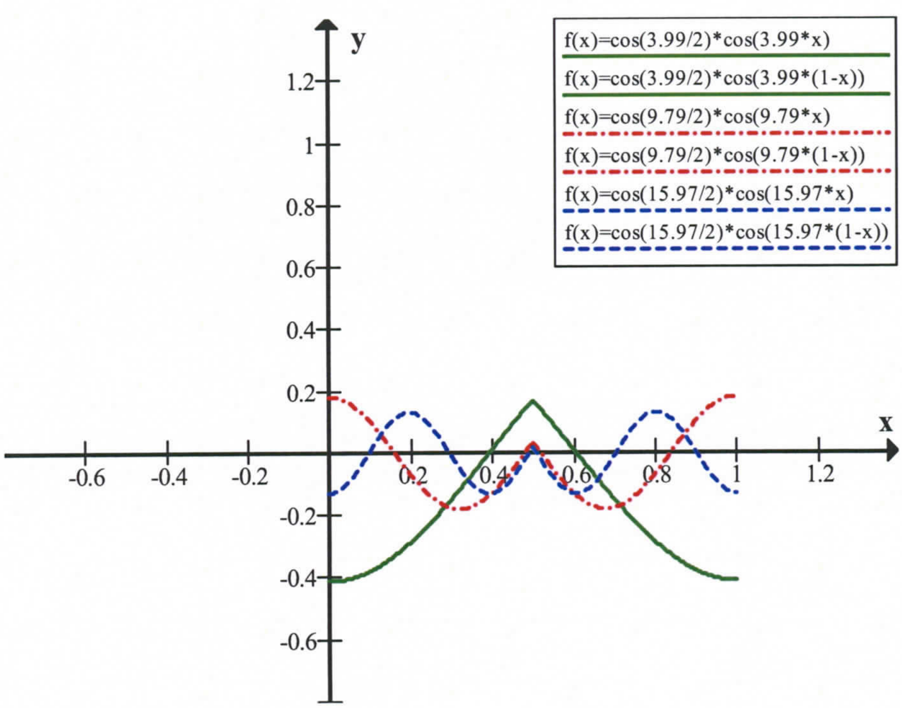
Postoji prebrojivo mnogo rešenja $\alpha = \alpha_n$, n=1,2,... Koristeći uslov $\alpha^2 = \lambda$ dobijamo sopstvene vrednosti $\lambda_n = \alpha_n^2$, n=1,2,...

Grafički prikaz ove jednačine (2.3) za $\xi = \frac{1}{2}$ i $K = 1$ dat je na slici 9:



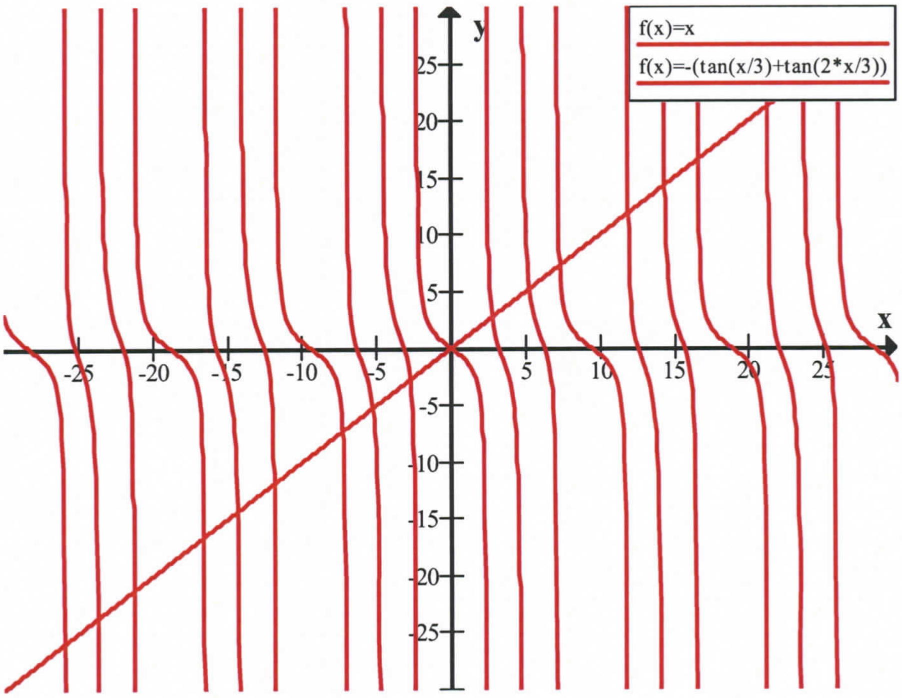
Slika 9. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{1}{2}$

Na slici 8 dat je prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2}$



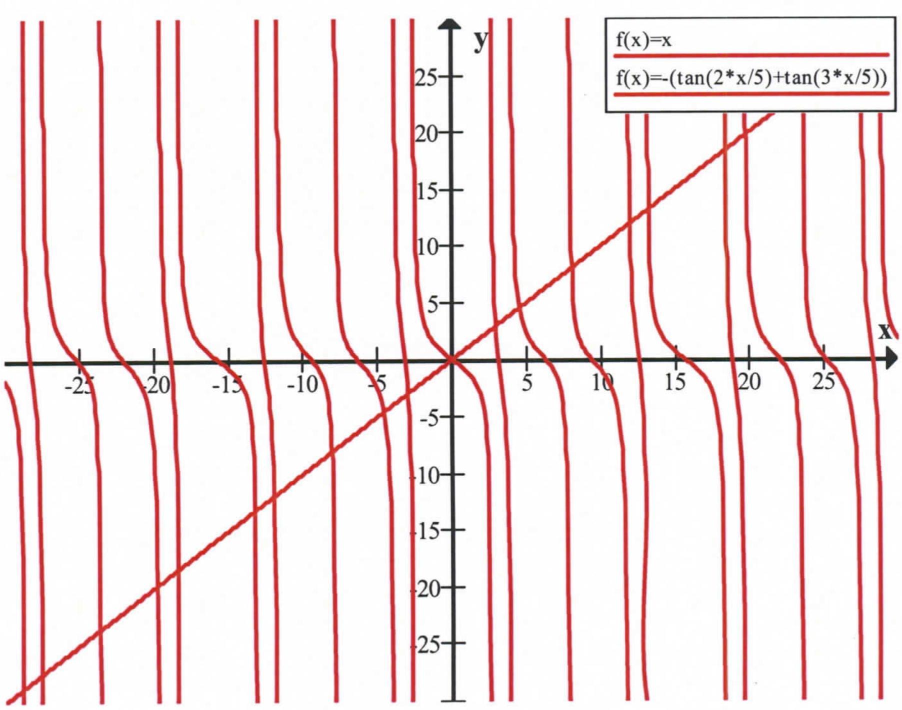
Slika 10. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2}$

Za $\xi = \frac{2}{3}$ jednačina (2.3) postaje: $\alpha = -\frac{1}{K}\left[tg\frac{\alpha}{3} + tg\frac{2\alpha}{3}\right]$



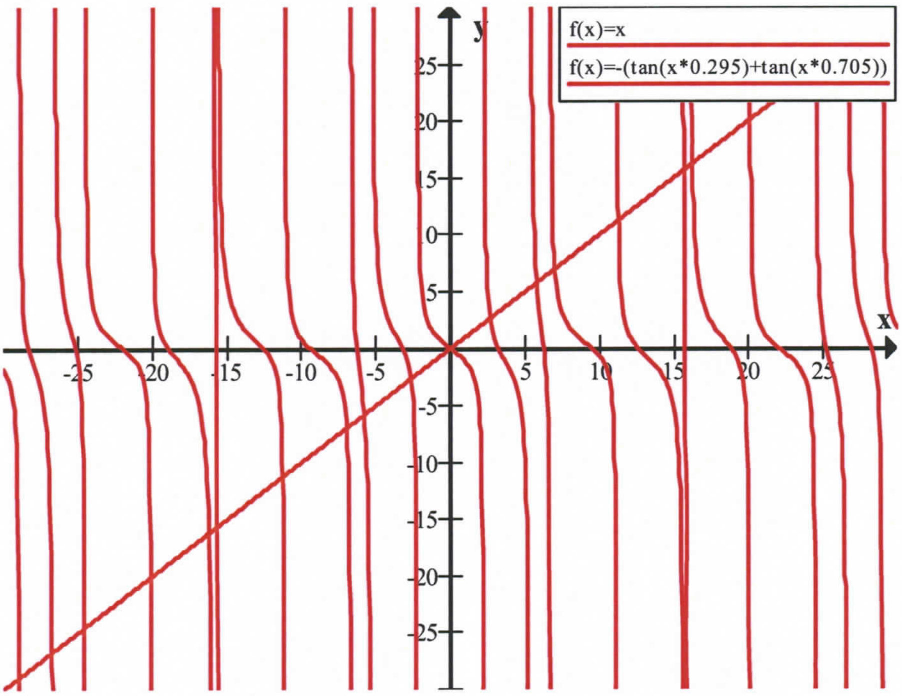
Slika 11. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{2}{3}$

Za $\xi = \frac{3}{5}$ jednačina (2.3) postaje: $\alpha = -\frac{1}{K}\left[tg\frac{2\alpha}{5} + tg\frac{3\alpha}{5}\right]$

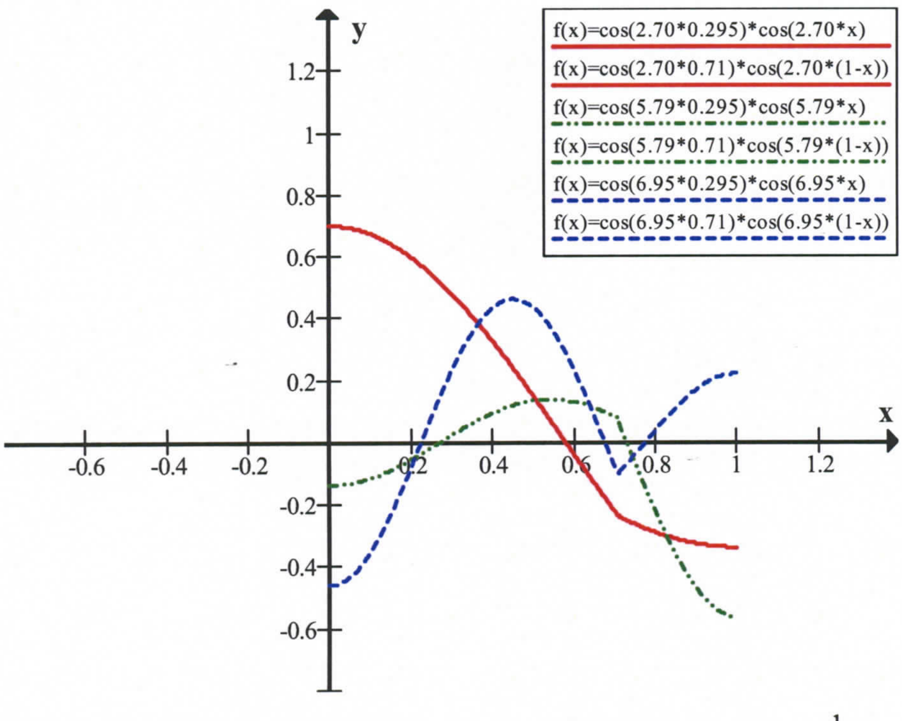


Slika 12. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{3}{5}$

Za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jednačina (2.3) postaje: $\alpha = -\frac{1}{K}\left[tg\alpha\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + tg\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right]$

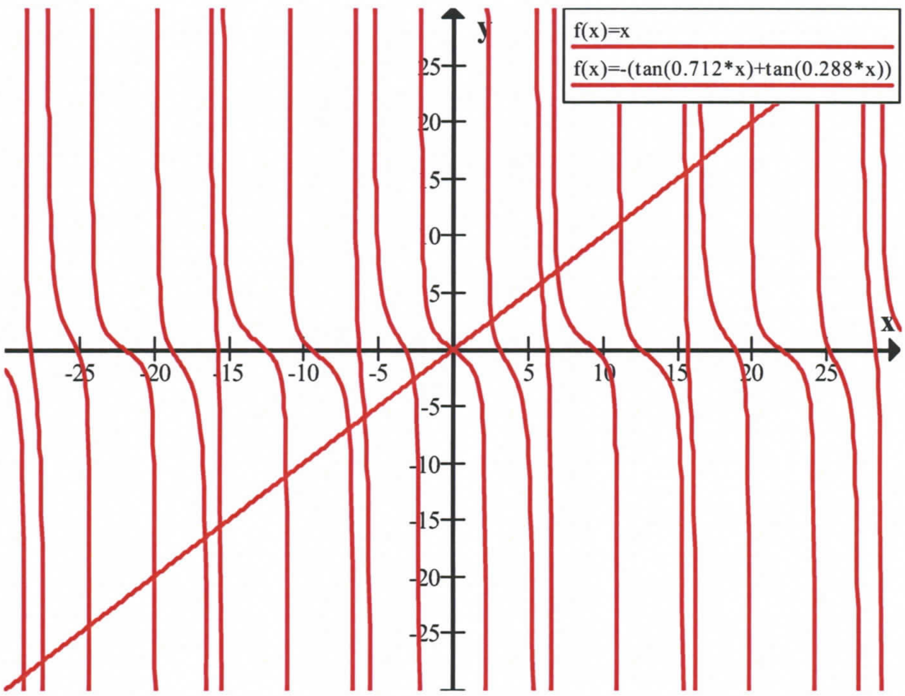


Slika 13. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

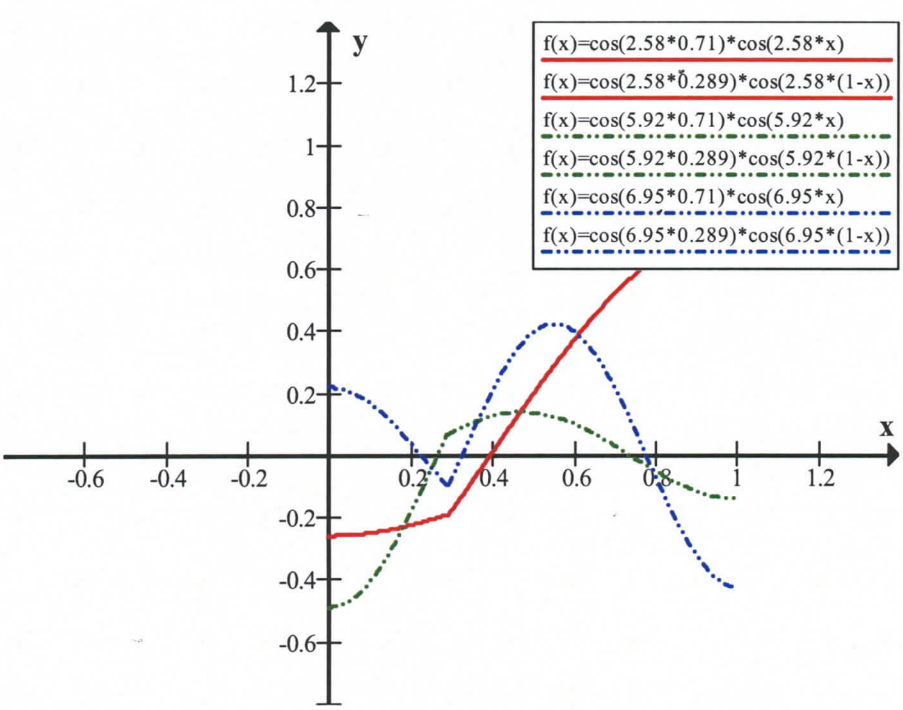


Slika 14. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Za $\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ jednačina (2.3) postaje: $\alpha = -\frac{1}{K}\left[tg\alpha\left(\frac{6-\sqrt{3}}{6}\right) + tg\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right]$



Slika 15. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$



Slika 16. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

2.4. Spektralni problem sa Robinovim graničnim uslovima

Razmatramo sledeći spektralni problem

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda[1+K\delta(x-\xi)]u(x)\,,\quad x\in(0,1)$$

$$-u'(0)+au(0)=0$$

$$u'(1)+bu(1)=0$$

Ili

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u(x)\,,\quad x\in(0,\xi)\cup(\xi,1)\,,$$

$$-u'(0)+au(0)=0$$

$$u'(1)+bu(1)=0$$

$$[u]_{x=\xi}\equiv u(\xi+0)-u(\xi-0)=0\,,\quad -\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi)\,.$$

Rešenje ovog problema može da se zapiše u eksplicitnoj formi:

$$u(x)=\begin{cases}A\sin(\alpha x+\beta), & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ B\sin[\alpha(1-x)+\gamma], & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

Koristeći prvi uslov konjugacije izračunaćemo vrednost konstanti A i B:

$$[u]_{x=\xi}\equiv u(\xi+0)-u(\xi-0)\Rightarrow$$

$$B\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]-A\sin(\alpha\xi+\beta)=0\Rightarrow$$
$$B\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]=A\sin(\alpha\xi+\beta)\Rightarrow$$
$$\frac{B}{A}=\frac{\sin(\alpha\xi+\beta)}{\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]}\Rightarrow$$
$$B=C\sin(\alpha\xi+\beta)$$
$$A=C\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]$$

gde je C multiplikativna konstanta za koju možemo uzeti da je $C=1$. Za ovako odabranu konstanu C rešenje problema možemo zapisati u sledećem obliku:

$$u(x)=\begin{cases}\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin(\alpha x+\beta), & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \sin(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-x)+\gamma], & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}.$$

Kao i u prethodna dva gore navedena spektralna problema i u ovom na isti način dobijamo da je $\alpha^2=\lambda$. Koristeći drugi uslov konjugacije dobijamo:

$$\frac{du}{dx}=\begin{cases}\alpha\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\cos(\alpha x+\beta), & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ -\alpha\sin(\alpha\xi+\beta)\cos[\alpha(1-x)+\gamma], & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}-\alpha^2\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin(\alpha x+\beta), & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ -\alpha^2\sin(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-x)+\gamma], & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}\alpha^2\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin(\alpha x+\beta), & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \alpha^2\sin(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-x)+\gamma], & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=-\alpha[\cos[\alpha(1-\varepsilon)+\gamma]\sin(\alpha\xi+\beta)+\cos(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]]$$

$$-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\alpha[\cos[\alpha(1-\varepsilon)+\gamma]\sin(\alpha\xi+\beta)+\cos(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]]$$

Iz jednakosti $-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi)$ i $\alpha^2=\lambda$ sledi:

$$\alpha=\frac{1}{K}\frac{[\cos[\alpha(1-\varepsilon)+\gamma]\sin(\alpha\xi+\beta)+\cos(\alpha\xi+\beta)\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]]}{\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin(\alpha\xi+\beta)}$$

$$\alpha=\frac{1}{K}[ctg[\alpha(1-\varepsilon)+\gamma]+ctg(\alpha\xi+\beta)]$$

Iz graničnih uslova odredićemo vrednosti za γ i β:

$$-u'(0)+au(0)=0\Rightarrow$$
$$-\alpha\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\cos\beta+a\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin\beta=0\Rightarrow$$
$$\alpha\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\cos\beta=a\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]\sin\beta\Rightarrow$$
$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\alpha\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]}{a\sin[\alpha(1-\xi)+\gamma]}=\frac{\alpha}{a}\Rightarrow$$
$$tg\beta=\frac{\alpha}{a}\Rightarrow\beta=arctg\frac{\alpha}{a}$$

$$u'(1)+bu(1)=0\Rightarrow$$
$$-\alpha\sin(\alpha\xi+\beta)\cos\gamma+b\sin(\alpha\xi+\beta)\sin\gamma=0\Rightarrow$$
$$\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\alpha\sin(\alpha\xi+\beta)}{b\sin(\alpha\xi+\beta)}=\frac{\alpha}{b}\Rightarrow$$
$$tg\gamma=\frac{\alpha}{b}\Rightarrow\gamma=arctg\frac{\alpha}{b}$$

Koristeći trigonometrijske transformacije za prvi i drugi član zbira dobijamo:

$$ctg(\alpha\xi+\beta)=\frac{ctg\alpha\xi ctg\beta-1}{ctg\alpha\xi+ctg\beta}=\frac{\frac{1}{tg\alpha\xi}\frac{1}{tg\beta}-1}{\frac{1}{tg\alpha\xi}+\frac{1}{tg\beta}}=\frac{\frac{1}{tg\alpha\xi}\frac{a}{\alpha}-1}{\frac{1}{tg\alpha\xi}+\frac{a}{\alpha}}=\frac{1-\frac{\alpha}{a}tg\alpha\xi}{\frac{\alpha}{a}+tg\alpha\xi},$$

$$ctg[\alpha(1-\xi)+\gamma]=\frac{1-\frac{\alpha}{b}tg\alpha(1-\xi)}{\frac{\alpha}{b}+tg\alpha(1-\xi)}.$$

Tako konačno dobijamo jednačinu:

$$\alpha=\frac{1}{K}\left\{\frac{1-\frac{\alpha}{b}tg\alpha(1-\xi)}{\frac{\alpha}{b}+tg\alpha(1-\xi)}+\frac{1-\frac{\alpha}{a}tg\alpha\xi}{\frac{\alpha}{a}+tg\alpha\xi}\right\} \tag{2.4}$$

Jednačina (2.4) ima prebrojivo mnogo rešenja.

Neprelomljena rešenja su oblika:

$u(x)=\sin(\alpha x+\beta)$

i postoje ako sistem koji se dobija od graničnih uslova i uslova konjugacije

$$\begin{cases}\alpha\xi+\beta=m\pi, \quad m\in Z\\ -\alpha\cos\beta+a\sin\beta=0\\ \alpha\cos(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)=0\end{cases}$$

ima rešenje.

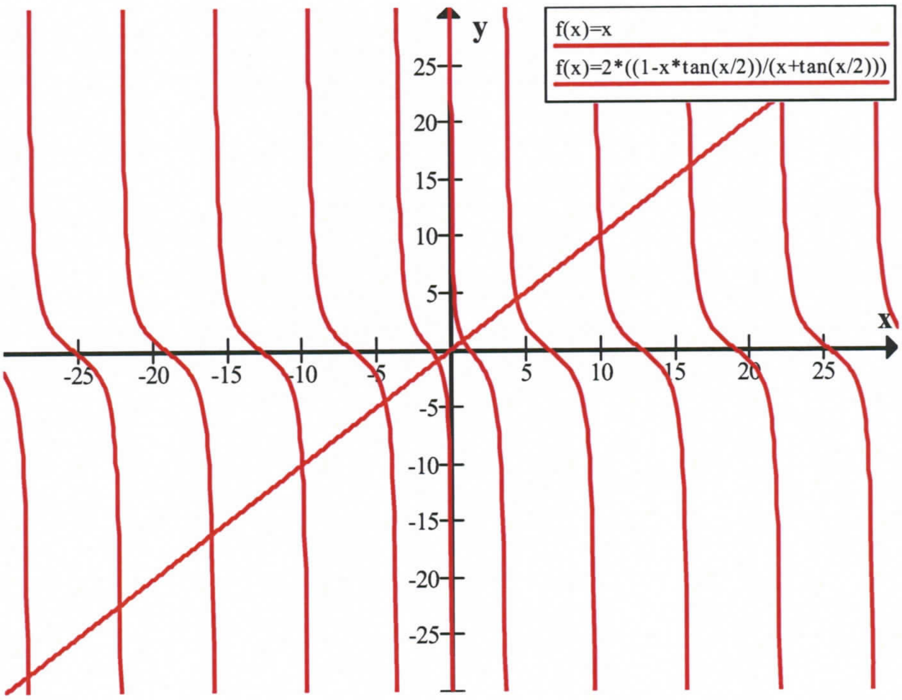
Primer 3.

Za $\xi=\frac{1}{2}$ i $a=b$ jednačina (2.4) postaje:

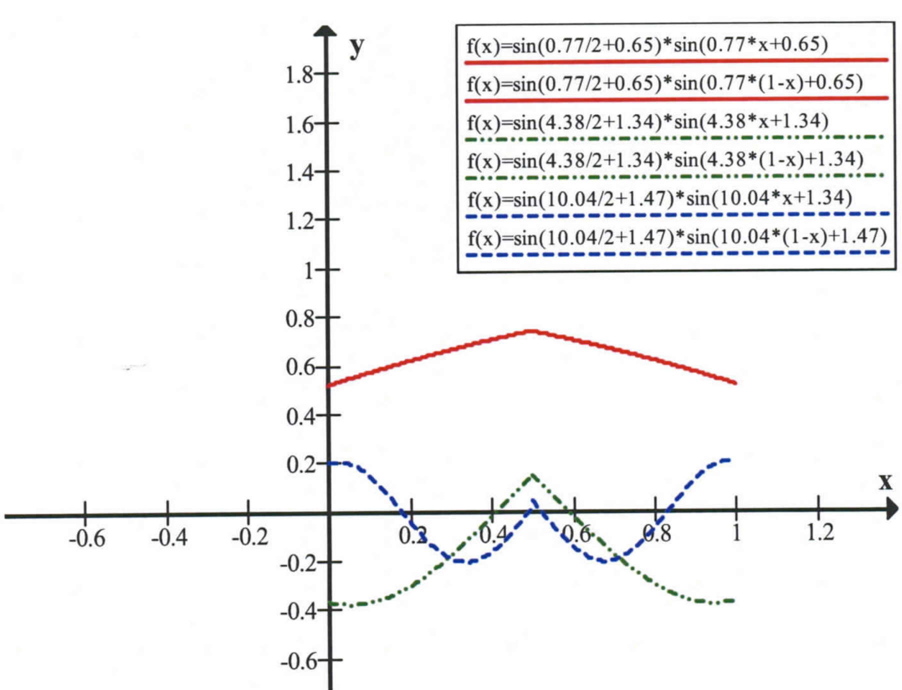
$$\alpha=\frac{2}{K}F(\alpha),\ \ F(\alpha)=\frac{a-\alpha tg\frac{\alpha}{2}}{\alpha+atg\frac{\alpha}{2}}$$

i ima prebrojivo mnogo rešenja α_n, n=1,2,...

Grafički prikaz jednačine (2.4) za $\xi=\frac{1}{2}$ i $a=b=1$, K=1 dat je na slici 17 a odgovarajuće prve tri sopstvene funkcije na slici 18



Slika 17. Grafički prikaz jednačine za $\xi=\frac{1}{2}$, $a=b=1$, K=1

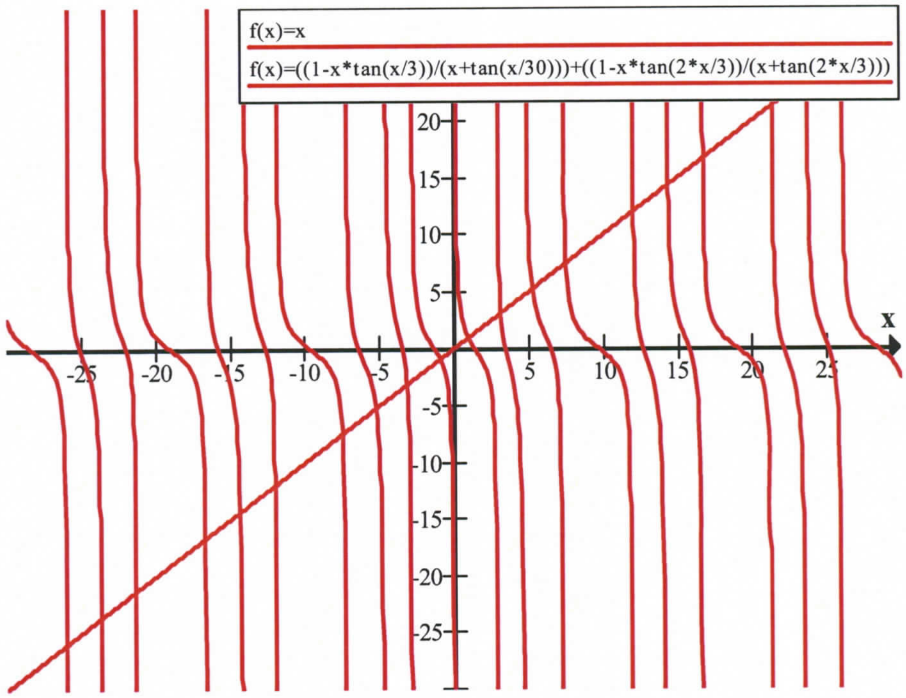


Slika 18. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi=\frac{1}{2}$, $a=b=1$, K=1

Za $\xi=\frac{2}{3}$ i $a=b=1$, K=1 jednačina (2.4) postaje:

$$\alpha=\frac{1-\alpha tg\frac{\alpha}{3}}{\alpha+tg\frac{\alpha}{3}}+\frac{1-\alpha tg\frac{2\alpha}{3}}{\alpha+tg\frac{2\alpha}{3}}$$

i njen grafički prikaz dat je na slici 19.

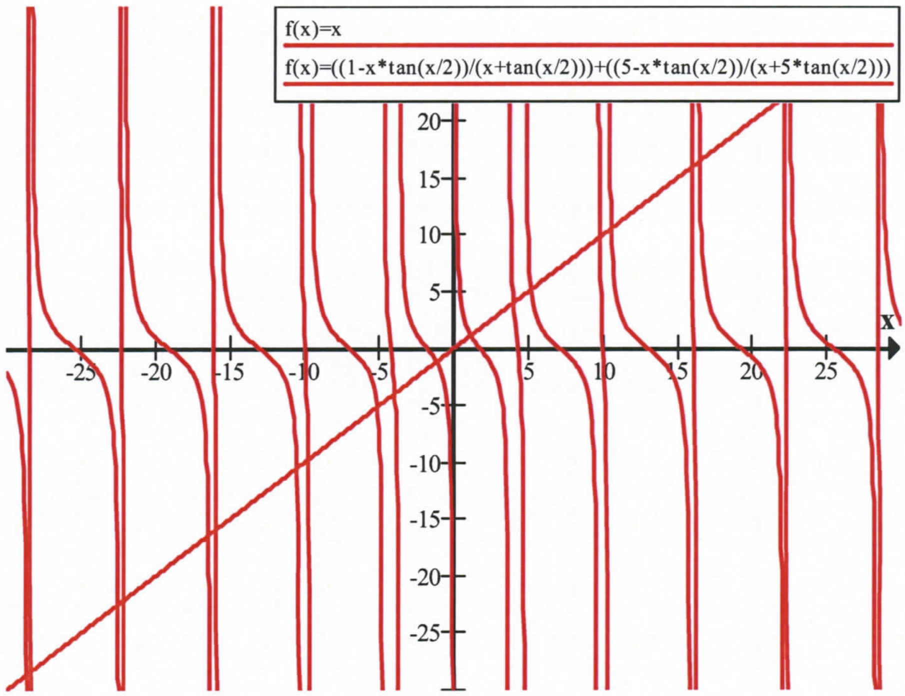


Slika 19. Grafički prikaz jednačine za $\xi=\frac{2}{3}$, $a=b=1$, K=1

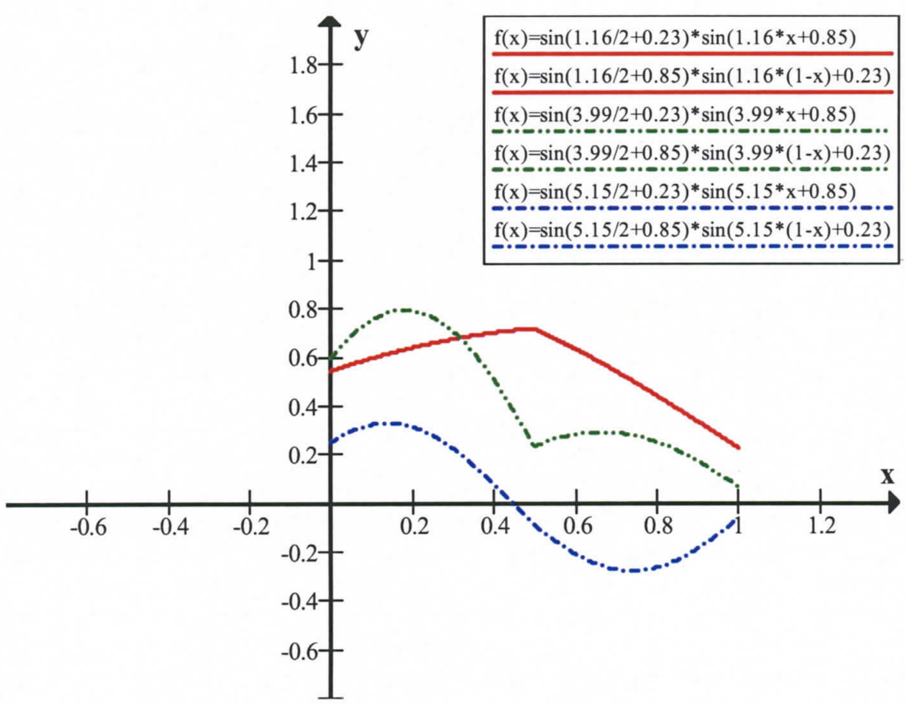
Za $\xi=\frac{1}{2}$ i $a\neq b$ jednačina (2.4) postaje:

$$\alpha=\frac{1}{K}\left[\frac{a-\alpha tg\frac{\alpha}{2}}{\alpha+atg\frac{\alpha}{2}}+\frac{b-\alpha tg\frac{\alpha}{2}}{\alpha+btg\frac{\alpha}{2}}\right]$$

a njen grafički prikaz za $\xi=\frac{1}{2}$ i $a=1$, $b=5$, K=1 dat je na slici 20, a odgovarajuće sopstvene funkcije na slici 21



Slika 20. Grafički prikaz jednačine za $\xi = \frac{1}{2}, a \neq b$



Slika 21. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $\xi = \frac{1}{2}, a \neq b$

2.5. Mešoviti spektralni problem

Razmatramo sledeći spektralni problem:

$$-p\frac{d^2u}{dx^2}+qu=\lambda[1+K\delta(x-\xi)]u(x),\quad x\in(0,1),\ p,q=const>0$$

$$u(0)=0,\ u'(1)=0$$

ili

$$-p\frac{d^2u}{dx^2}+qu=\lambda u,\quad x\in(0,\xi)\cup(\xi,1),$$

$$u(0)=0,\ u'(1)=0$$

$$[u]_{x=\xi}\equiv u(\xi+0)-u(\xi-0)=0,\quad -p\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi).$$

Njegovo rešenje može se predstaviti u eksplicitnoj formi:

$$u(x)=\begin{cases}A\sin\alpha x, & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \mathrm{B}\cos\alpha(1-x), & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

Očigledno je da rešenje zadovoljava granične uslove. Vrednost konstanti A i B odredićemo kao i do sada, koristeći prvi uslov konjugacije:

$$u(\xi+0)-u(\xi-0)=0\Rightarrow$$
$$B\cos\alpha(1-\xi)-A\sin\alpha\xi=0\Rightarrow$$
$$B\cos\alpha(1-\xi)=A\sin\alpha\xi\Rightarrow$$
$$\frac{B}{A}=\frac{\sin\alpha\xi}{\cos\alpha(1-\xi)}\Rightarrow$$
$$B=C\sin\alpha\xi$$
$$A=C\cos\alpha(1-\xi)$$

Neka je $C=1$. Za ovako izabrano C dobijamo da je rešenje:

$$u(x)=\begin{cases}\cos\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \sin\alpha\xi\cos\alpha(1-x), & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

Analogno prethodnim problemima koristeći drugi uslov konjugacije dobićemo α.

$$\frac{du}{dx}=\begin{cases}\alpha\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha x, & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \alpha\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\mathrm{x}), & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}-\alpha^2\cos\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ -\alpha^2\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\mathrm{x}), & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}\alpha^2\cos\alpha(1-\xi)\sin\alpha x, & \mathrm{x}\in(0,\xi)\\ \alpha^2\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\mathrm{x}), & \mathrm{x}\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\alpha[\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)-\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha\xi]$$

$$-\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=-\alpha[\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)-\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha\xi]$$

Iz jednačine :

$$-p\frac{d^2u}{dx^2}+qu=\lambda u \quad x\in(0,\xi)\cup(\xi,1)$$

dobijamo $p\alpha^2+q=\lambda$.

Iz drugog uslova konjugacije

$$-p\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi}=\lambda Ku(\xi)$$

dobijamo:

$$-p\alpha[\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)-\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha\xi]=(p\alpha^2+q)K\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)\Rightarrow$$

$$\frac{p\alpha^2+q}{p\alpha}=-\frac{1}{K}\left[\frac{\sin\alpha\xi\sin\alpha(1-\xi)-\cos\alpha(1-\xi)\cos\alpha\xi}{\sin\alpha\xi\cos\alpha(1-\xi)}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{p\alpha^2+q}{p\alpha}=\frac{1}{K}[ctg\alpha\xi-tg\alpha(1-\xi)] \tag{2.5}$$

Desna strana jednačine (2.5) je suma dve periodične funkcije koje u opštem slučaju imaju različite periode. Postoji prebrojivo mnogo rešenja ove jednačine $\alpha=\alpha_n$, n=1,2,...

Sopstvene vrednosti su $\lambda=\lambda_n=p\alpha_n^2+q$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots,\lambda_n\to\infty$

Sopstvene funkcije su $u=u_n(x)$, n=1,2,...

Neprelomljena rešenja su oblika $u(x)=\sin\alpha x$ i postoje ako je $\xi=\frac{2m}{2k+1}$, $k,m\in N$. Naime, iz graničnog uslova $u'(1)=0$ dobijamo:

$\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, a iz prvog uslova konjugacije $\sin\alpha\xi=0\Rightarrow\alpha\xi=m\pi$.

Iz ove dve dobijene jednakosti sledi da je $\xi=\frac{2m}{2k+1}$, $k,m\in N$.

Odgovarajuće sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije su:

$$\lambda_n = p\left[(2k+1)(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 + q, \quad \mathrm{u}_n = \sin(2k+1)(2n+1)\frac{\pi}{2}x,$$

$n = 0,1,2,...$

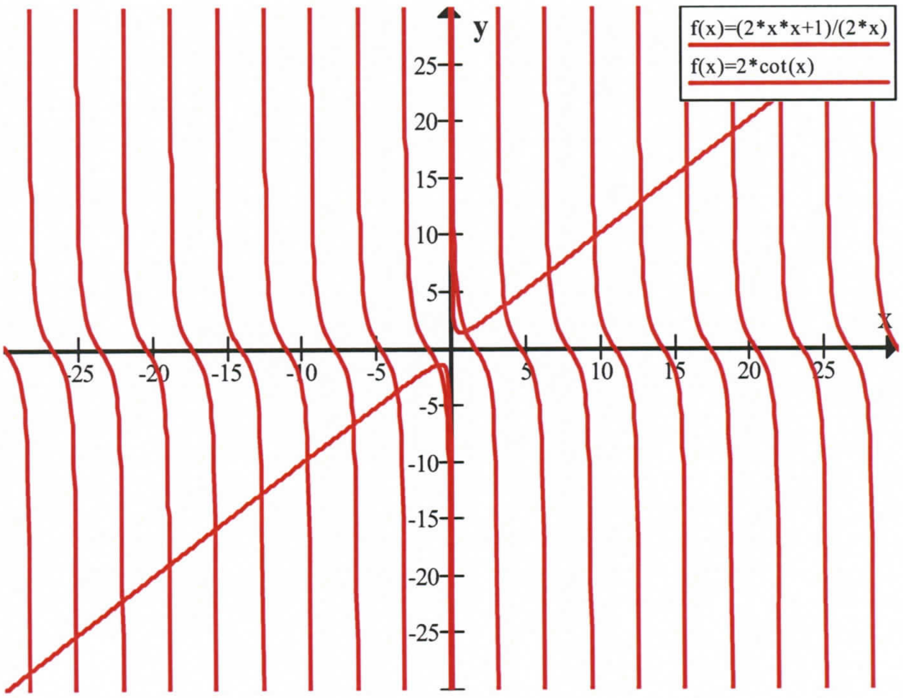
Primer 4.

Za $\xi = \frac{1}{2}$ jednačina (2.5) postaje:

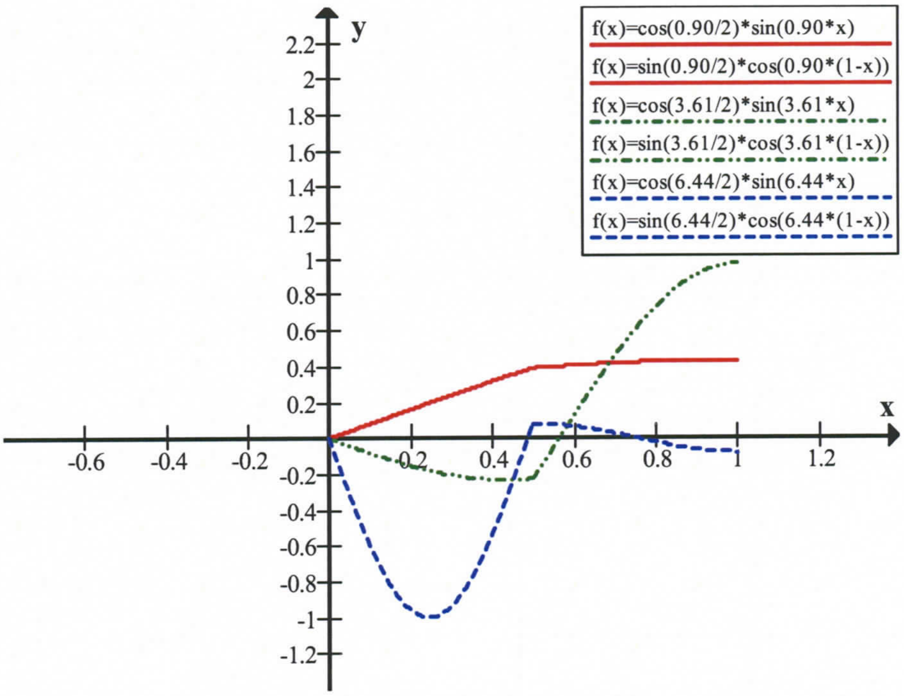
$$\frac{p\alpha^2 + q}{p\alpha} = \frac{1}{K}\left[ctg\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{2}{K}ctg\alpha$$

Grafički prikaz rešenja ove jednačine za $p=2$, q=1, K=1 dat je na slici 22.

Odgovarajuće prve četiri sopstvene funkcije za ove vrednosti parametara su date na slici 23.



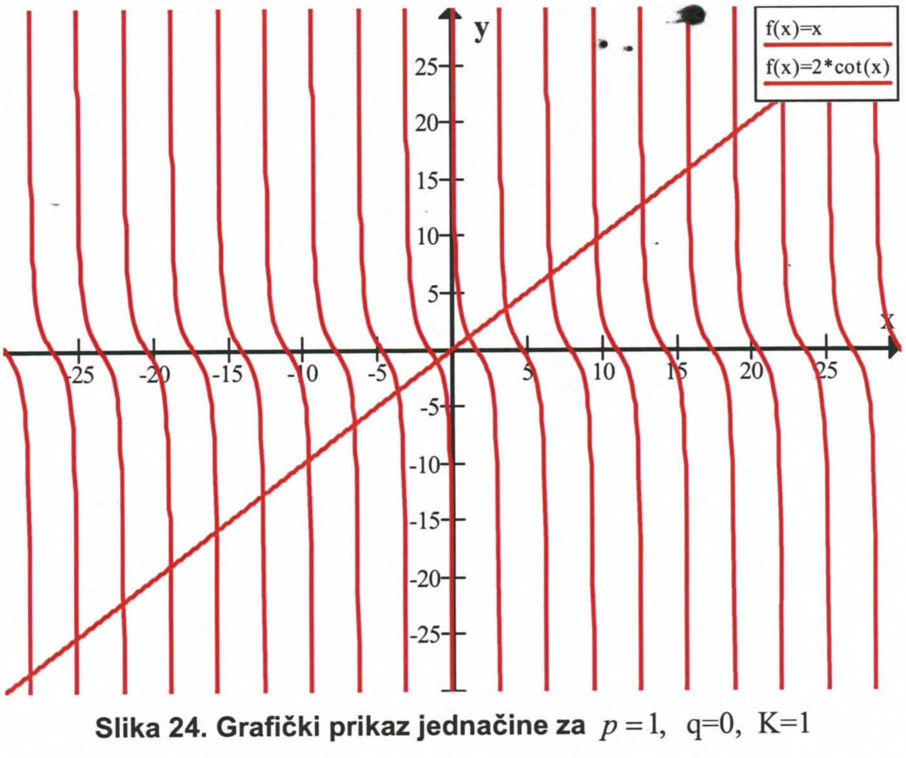
Slika 22. Grafički prikaz jednačine za $p=2$, q=1, K=1



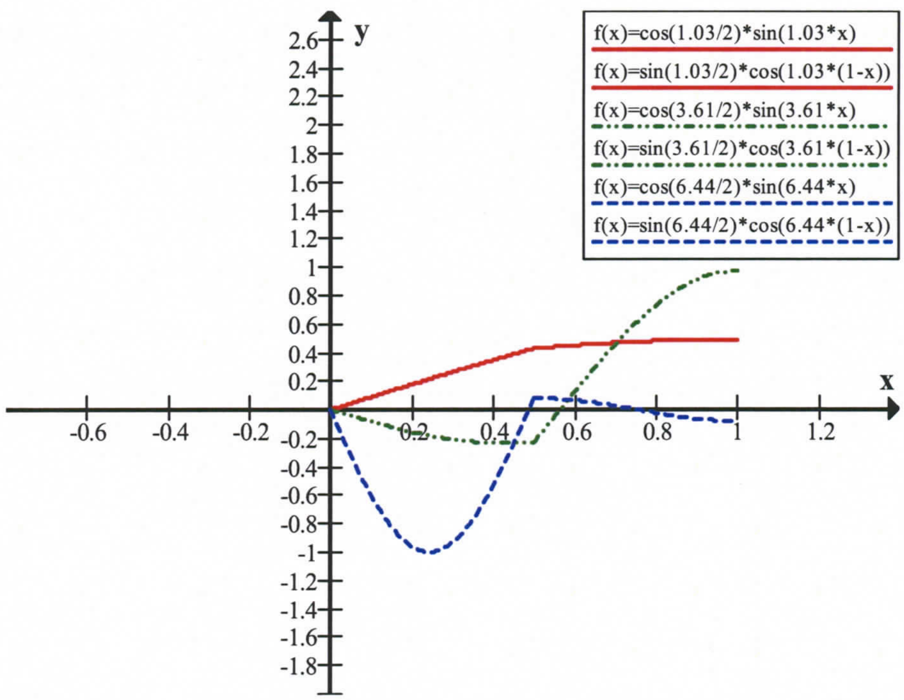
Slika 23. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $p = 2$, q=1, K=1

Grafički prikaz rešenja ove jednačine za $p = 1$, q=0, K=1 dat je na slici 24.

Odgovarajuće prve četiri sopstvene funkcije za ove vrednosti parametara su date na slici 25.



Slika 24. Grafički prikaz jednačine za $p = 1$, q=0, K=1



Slika 25. Grafički prikaz prve tri sopstvene funkcije za $p=1$, q=0, K=1

3. Diferencna aproksimacija Šturm-Liuvilovog problema

3.1. Postavka problema

Na početku izvršimo generalizaciju problema razmatranog u glavi 2. Razmatramo sledeći problem:

$$(p(x)v')' - q(x)v + \lambda r(x)v = 0 \tag{3.1}$$

gde je λ sopstvena vrednost, $v(x)$ je sopstvena funkcija, $p(x), q(x), r(x)$ su deo po deo neprekidne funkcije na intervalu [0,1] takve da je :

$$0 < c_1 \le p(x) \le c_2, \quad 0 < c_1 \le r(x) \le c_3, \quad 0 \le q(x) \le c_4 \tag{3.2}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 su konstante.

Ako $p(x)$ ima jedinstveni prekid u tački $x = \xi$, $(0 < \xi < 1)$ onda $v(x)$ mora zadovoljavati uslove konjugacije:

$$[v]_{x=\xi} = v(x+\xi) - v(x-\xi) = 0, \quad \left[pv'\right]_{x=\xi} = -\lambda K v(\xi) \tag{3.3}$$

K je konstanta i K >0.

Granični uslovi mogu takođe sadržati spektralni parametar:

$$\begin{aligned} &-\alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = \lambda \gamma_0 v(0), \quad \alpha_0 + \beta_0 > 0, \quad \alpha_0, \beta_0 \ge 0 \\ &\alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(1) = \lambda \gamma_1 v(1), \quad \alpha_1 + \beta_1 > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \ge 0 \\ &\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = const, \quad i = 1,2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jednačina (3.1) zajedno sa uslovom (3.3) može da se zapiše u sledećem obliku koristeći Dirakovu distribuciju:

$$(p(x)v')' - q(x)v + \lambda[r(x) + K\delta(x-\xi)]v = 0 \tag{3.5}$$

ili u operatorskoj formi:

$$Av = \lambda Bv$$

gde je $H = L_2(0,1)$ i

$$Av = -(p(x)v')' + q(x)v\,, \qquad Bv = [r(x) + K\delta(x-\xi)]v = 0 \tag{3.6}$$

U daljem radu razmatraćemo problem (3.1)-(3.4) postavljajući sledeće vrednosti konstanti u graničnim uslovima (3.4):

$$\alpha_0 = \beta_1 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1 = p(1), \quad \beta_0 = 1. \tag{3.7}$$

Granični uslovi sada su:

$$v(0) = 0$$

$$p(1)v'(1) = 0\,.$$

Analogni rezultati važe i za druge kombinacije graničnih uslova.

Teorema 1. Šturm-Liuvilov problem (3.1)-(3.4) sa koeficijentima datim u (3.7) ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti $0<\lambda_1<\lambda_2<...$ kojima odgovaraju sopstvene funkcije $v_1(x), v_2(x),...$ Sopstvene funkcije $\{v_n(x)\}$ formiraju kompletan ortogonalan sistem za skalarnim proizvodom definisanim na sledeći način:

$$(u,v)_B = \int_0^1 r(x)uvdx + Ku(\xi)v(\xi). \tag{3.8}$$

Dokaz: Označimo sa K klasu neprekidnih funkcija $f(x)$ takvih da je $\frac{df}{dx}$ ograničen na svakom od intervala $(0,\xi)$, $(\xi,1)$, koje uz to zadovoljavaju uslove (3.3) i (3.4). Uvedimo na klasi K sklalarni proizvod $(u,v)_B$ kao što smo uveli u (3.8). Formiramo novi prostor $L_{2,B}(0,1)\subset L_2(0,1)$ sa normom $\|v\|_B=(v,v)_B^{1/2}$. Uvodimo novi skalarni proizvod:

$$[u,v]=\int_0^1 (pu'v'+quv)dx \tag{3.9}$$

i definišemo na uobičajen način prostor energije $H_L\subset W_2^1$ (W_2^1 – prostor Soboljeva) sa normom $\|[v]\|=[v,v]^{1/2}$. Na taj način dobijamo slabu formulaciju spektralnog problema: pronaći sve realne sopstvene vrednosti λ i sve sopstvene funkcije $v(x)$ tako da je

$$[v,w]=\lambda(v,w)_B,\quad \forall w\in H_L.$$

Koristeći Ricovu teoremu možemo zaključiti da postoji samoadjungovan pozitivan kompletan neprekidan operator $L:L_{2,B}(0,1)\to H_L$ tako da je $(u,v)_B=[Lu,v]$. Sada tvrđenje teoreme dobijamo na osnovu teorije linearnih operatora u Hlibertovim prostorima.

Ako su koeficijenti $p(x),q(x),r(x)$ dovoljno glatki može se dokazati da je generalisana sopstvena funkcija $v(x)$ klasično rešenje Šturm-Liuvilovog problema.

Da bismo dokazali da spektralni problem $Av=\lambda Bv$ može da se predstavi u varijacionoj formi:

$$\inf_v \frac{[v,v]}{(v,v)_B}=\lambda_1\le\lambda_i,\ \mathrm{i}=2,3,...,\mathrm{v}\in \mathrm{H}_L$$

gde je H_L energetski prostor sa skalarnim proizvodom $[u,v]$ i normom $\|[u]\|^{1/2}$ postavimo sledeće:

$$R[v]=\frac{[v,v]}{(v,v)_B}=\frac{\int_0^1 (p(x)v'^2+q(x)v^2)dx}{\int_0^1 r(x)v^2dx+Kv^2(\xi)}$$

gde je $v \in H_L$ ne-nula element za koji $R[v]$ dostiže minimum. Dalje za $\eta \in H_L$ i dovoljno malo α imamo $\frac{d}{d\alpha} R[v+\alpha\eta]|_{\alpha=0} = 0$. Zatim

$$\frac{d}{d\alpha} R[v+\alpha\eta]|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\int_0^1 \left[p(x)(v+\alpha\eta)'^2 + q(x)(v+\alpha\eta)^2\right]dx}{\int_0^1 r(x)(v+\alpha\eta)^2 dx + K(v(\varepsilon)+\alpha\eta(\varepsilon))^2}|_{\alpha=0} =$$

$$2\frac{\int_0^1 \left[p(x)(v'+\alpha\eta')\eta' + q(x)(v+\alpha\eta)\eta\right]dx(v,v)_B|_{\alpha=0}}{(v,v)^2_B} -$$

$$-2\frac{[v,v]\left(\int_0^1 r(x)(v+\alpha\eta)\eta dx + K\left[v(\varepsilon)+\alpha\eta(\varepsilon)\right]\eta(\varepsilon)\right)|_{\alpha=0}}{(v,v)_B^2} =$$

$$2\frac{\int_0^1 \left[(p(x)v'\eta' + q(x)v\eta)dx(v,v)_B - [v,v]\left(\int_0^1 r(x)v\eta dx + Kv(\varepsilon)\eta(\varepsilon)\right)\right]}{(v,v)_B^2} =$$

$$2\frac{[v,\eta](v,v)_B - [v,v](v,\eta)_B}{(v,v)_B^2} = 2\frac{[v,\eta] - R[v](v,\eta)_B}{(v,v)_B}.$$

Pošto je η proizvoljno, možemo pretpostaviti da je $R[v]$ sopstvena vrednost koju označavamo sa $\lambda_1 = R[v]$ i v_1 njena odgovarajuća sopstvena funkcija. Budući da $R[v]$ dostiže za funkciju v_1 minimum na H_L jednak λ_1, sledi da je $\lambda_1 < R[v_j] = \lambda_j$ za ostale sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije za koje je $1 \neq j$. Sopstvene vrednosti λ_n za koje je n>1, mogu se odrediti kao minimum funkcionala $R[v]$ u klasi neprekidnih funkcija $\varphi(x)$ koje su definisane na intervalu $[0,1]$ i koje zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(\varphi, v_m)_B = \int_0^1 r(x)\varphi v_m dx + K\varphi(\xi)v_m(\xi) = 0$$

$$\varphi(0) = 0, \quad p(1)\varphi'(1) = 0, \quad m = 1,2,\dots,n-1$$

gde je $v_m(x)$ m-ta sopstvena funkcija. Ovaj minimum određuje n-tu sopstvenu vrednost

$\lambda_n = \inf_{\varphi} R[\varphi] = R[v_n]$, gde je v_n n-ta sopstvena funkcija.

Teorema 2. Sopstvene vrednosti problema (3.1)-(3.4) sa koeficijentima (3.7), $\lambda_n \to \infty, n \to \infty$, zadovoljavaju nejednakosti:

$$c_5 n^2 \le \lambda_n \le c_6 n^2, c_5 > 0 \qquad (3.10)$$

c_5, c_6 su nezavisne od c_i, $i = 1,2,3,4$ i n.

Dokaz: Koristeći teoriju samoadjungovanih operatora može se pokazati da za operator A važi sledeće:

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_L} \frac{[v,v]}{(v,v)_B} = \inf_{v \in H_L} \frac{\int_0^1 \left[p(x)v'^2 + q(x)v^2\right] dx}{\int_0^1 r(x)v^2 dx + Kv^2(\xi)}$$

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{v:(v,u_i)_B = 0 \\ i=1,2,\dots,k}} \frac{[v,v]}{(v,v)_B}$$

Razmotrimo dva spektralna problema tipa (3.1)-(3.4) sa konstantnim koeficijentima:

$$\left(p_i v'\right)' - q_i v + \lambda r_i v = 0, \text{ i=1,2}$$

pri čemu je $0 < p_1 \le p(x) \le p_2,\ \ 0 < q_1 \le q(x) \le q_2,\ \ x \in [0,1],\ r_1 \ge r(x) \ge r_2$

Označavajući odgovarajuće sopstvene vrednosti prvog spektralnog problema sa λ_k', a drugog λ_k'', k=1,2,... lako zaključujemo da je :

$$\lambda_k' \le \lambda_k \le \lambda_k'', \text{ k=1,2,...}$$

U prethodnoj glavi (mešoviti problem) pokazano je da je nejednakost oblika (3.10) zadovoljena za λ_k' i λ_k'', k=1,2,...

Teorema 3. Sopstvene funkcije problema (3.1)-(3.4) i njihovi izvodi zadovoljavaju nejednakosti:

$$|v_n(x)| \le c_7, \quad |v_n'(x)| \le c_8' \sqrt{\lambda_n} \le c_8 n \qquad (3.11)$$

gde su c_7, c_8 pozitivne konstante koje ne zavise od n.

3.2. Mreža, mrežna funkcija, diferencna aproksimacija

Da bi se konstruisala diferencijska shema koja aproksimira datu diferencijalnu jednačinu, potrebno je da se diskretizuje oblast (odnosno dati interval) i da se diferencijalni operator zameni nekim diferencnim operatorom. Pri tome treba formulisati granične uslove.

Prilikom numeričkog rešavanja prvo izaberemo konačno mnogo tačaka na datom intervalu. Taj skup tačaka čini mrežu, a izabrane tačke se nazivaju čvorovi mreže. Funkcija u ovako zadatim čvorovima mreže je mrežna funkcija. Ako su čvorovi ravnomerno raspoređeni kažemo da je mreža ravnomerna i definisana korakom h - rastojanjem između dva susedna čvora. Ako rastojanje među čvorovima mreže nije konstantno, mreža je neravnomerna.

U jednodimenzionom slučaju razbijamo odsečak $[0,l]$ na N jednakih delova. Rastojanje između dva čvora obeležavamo sa $x_i - x_{i-1} = h = \frac{l}{N}$. Tačka $x_i = ih$ je čvor mreže. Skup ovih čvorova $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1,2,\dots,N-1\}$ predstavlja mrežu na datom odsečku. Ako ovom skupu dodamo i granične tačke dobijamo $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0,1,\dots,N\}$.

Na ravnomernoj mreži moguće aproksimacije izvoda funkcije u tački x_i su:

$$\left.\begin{aligned}
v_{x,i} &= \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h} \\
v_{\bar{x},i} &= \frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h} \\
v_{\overset{\circ}{x},i} &= \frac{v(x_{i+1}) - v(x_{i-1})}{2h} = \frac{1}{2}\left(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}\right)
\end{aligned}\right\} \text{za } v'$$

$$\left. v_{\bar{x}x,i} = \frac{v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + v(x_{i-1})}{h^2} = \frac{v_{x,i} - v_{\bar{x},i}}{h} \right\} \text{za } v''.$$

U narednom paragrafu izvršićemo diskretizaciju Šturm-Liuvilovog problema navedenog u paragrafu 3.1 koristeći gore navedene aproksimacije izvoda.

Navešćemo sada neke formule koje ćemo koristiti u daljem radu:

1. Diferenciranje proizvoda

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Za levu i desnu konačnu razliku proizvoda važe sledeće formule:

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x$$
$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}$$

gde je $f^{(\pm 1)} = f(x \pm h)$, $f_x = \frac{f^{(+1)} - f}{h}$, $f_{\bar{x}} = \frac{f - f^{(-1)}}{h}$.

2. Parcijalna integracija

$$\int_a^b u v' dx = uv|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

isto tako ima dva oblika:

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v]$$

$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v)$

pri čemu je:

$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h, \quad [u,v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h.$

3. Prva i druga Grinova formula

   Prva Grinova formula: $\int_0^1 u(kv')' dx = -\int_0^1 ku'v' dx + kuv' |_0^1$

   Stavljajući u formulu

   $(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v]$

   da je $u = z, v = ay_{\bar{x}}$ dobijamo da je:

   $(z,(ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + azy_{\bar{x}} |_N - a_1 y_{x,0} z_0$ što predstavlja aproksimaciju prve Grinove formule.

   Druga Grinova formula: $\int_0^1 u(kv')' dx - \int_0^1 v(ku')' dx = k(uv' - vu') |_0^1$

   Stavljajući u formulu

   $(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v]$

   da je $u = y, v = az_{\bar{x}}$ dobijamo da je:

   $(y,(az_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + ayz_{\bar{x}} |_N - a_1 y_0 z_{x,0}$.

   Iz poslednje dve izvedene jednakosti dobijamo da je

   $(z,(ay_{\bar{x}})_x) - (y,(az_{\bar{x}})_x) = a_N (zy_{\bar{x}} - z_{\bar{x}} y)_N - a_1 (y_x z - z_x y)_0$,

   što predstavlja aproksimaciju druge Grinove formule.

4. Nejednakost Koši-Švarca

   $\|(u,v)\| \le \|u\| \cdot \|v\|$

   gde je $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod na nekom linearnom prostoru, a norma je $\|u\| = (u,u)^{1/2}$.

   $\|(u,v)\| \le \|u\| \cdot \|v\| \le e\|u\|^2 + \frac{1}{4e}\|v\|^2$

   gde je $e > 0$ proizvoljan broj.

3.3. Diskretizacija Šturm-Liuvilovog problema

Neka je ξ racionalan broj i $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0,1,\dots,N,\ hN = 1\}$ ravnomerna mreža na $[0,1]$ izabrana tako da je $\xi = x_m$ njen čvor. Aproksimirajmo problem (3.1)-(3.4) sa koeficijentima (3.7) na ovoj mreži sledećom diferencijskom shemom:

$$
\begin{aligned}
&-(ay_{\bar{x}})_x + dy = \lambda^h(\rho(x) + K\delta_h(x-\xi))y,\ x \in \omega_h,\\
&y_0 = 0,\quad ay_{\bar{x}} + \frac{h}{2}dy = \frac{h}{2}\lambda^h \rho y,\quad x = x_N
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

gde je:

$$
\delta_h(x-\xi) = \begin{cases} 0, & x \in \omega_h \setminus \{\xi\} \\ \dfrac{1}{h}, & x = \xi \end{cases}
$$

ili:

$$
\begin{aligned}
&-(ay_{\bar{x}})_x + dy = \lambda^h \rho y,\quad 0 < x = x_i = ih < 1, i \neq m\\
&-\frac{h}{\bar{K}}(ay_{\bar{x}})_x + \frac{h}{\bar{K}}\bar{d}y = \lambda^h y\ \ x = x_m,\\
&\bar{d} = \frac{1}{2}(d(x_m - 0) + d(x_m + 0)),\quad \bar{K} = K + h\rho(\xi),\\
&y_0 = 0,\ \frac{2}{h}ay_{\bar{x}} + dy = \lambda^h \rho y,\ x = x_N.
\end{aligned}
$$

Sa Λ označimo diferencni operator:

$$
\Lambda y = \begin{cases} -(ay_{\bar{x}})_x + dy, & x = x_i,\ i = 1,2,\dots,N-1 \\ \dfrac{2}{h}ay_{\bar{x}} + dy, & i = N \\ 0, & i = 0 \end{cases}
$$

$a(x) = \dfrac{p(x) + p(x-h)}{2}$ za $x \neq \xi, \xi_+$

$a(\xi) = \dfrac{p(\xi - 0) + p(\xi_-)}{2},\ a(\xi_+) = \dfrac{p(\xi_+) + p(\xi + 0)}{2}$

$d(x_i) = q(x_i),\ \rho(x_i) = r(x_i)$.

Pri tome važe sledeće nejednakosti:

$$
0 < c_1 \le a \le c_2,\quad 0 < c_1 \le \rho(x) \le c_3,\quad 0 \le d(x) \le c_4 \tag{3.13}
$$

Na taj način dobijamo sledeći diferencni problem Šturm-Liuvila:

Odrediti netrivijalna rešenja problema (3.12) (sopstvene funkcije) koja odgovaraju vrednostima parametra λ^h (sopstvene vrednosti).

Teorema 4. Postoji N-1 sopstvena vrednost problema (3.13), $0<\lambda_1^h<...<\lambda_{N-1}^h$, koje odgovaraju sopstvenim funkcijama $y_1(x),...,y_{N-1}(x)$. Sopstvene funkcije $\{y_n(x)\}$ formiraju ortogonalan sistem u prostoru l_{N-1}^2 sa skalarnim proizvodom definisanim na sledeći način:

$$(y,v]_{B_h}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}\rho_i y_i v_i h+\overline{K}y_m v_m+\frac{h}{2}\rho_N y_N v_N,\quad \overline{K}=K+h\rho(\xi) \qquad (3.14)$$

Dokaz: Operator Λ je samoadjungovan i pozitivno definitan u odnosu na skalarni proizvod (3.14). Pokazaćemo da je

$$(\Lambda y,v]_*=(ay_{\bar{x}},v_{\bar{x}}]+(\bar{d}y,v]_*$$

gde su y,v diskretne funkcije koje zadovoljavaju granične uslove. Ovde je :

$$(y,v]=\sum_{i=1}^{N}y_i v_i h,\quad (y,v]_*=\sum_{i=1}^{N-1}y_i v_i h+\frac{h}{2}y_N v_N$$

Koristeći Grinovu formulu dobijamo:

$$(\Lambda y,v]_*=-\sum_{i=1}^{N-1}((ay_{\bar{x}})_{x,i}-d_i y_i)v_i h+\frac{h}{2}(\frac{2}{h}ay_{\bar{x},N}+d_N y_N)v_N=$$

$$-((ay_{\bar{x}})_x,v)+(dy,v)+a_N y_{\bar{x},N}v_N+\frac{h}{2}d_N y_N v_N=$$

$$(ay_{\bar{x}},v_{\bar{x}}]+(dy,v)+\frac{h}{2}d_N\rho_N y_N v_N=(ay_{\bar{x}},v_{\bar{x}}]+(dy,v]_*$$

Tvrđenje teoreme sledi iz samoadjungovanosti i pozitivne definitnosti operatora Λ.

Pokažimo da je diferencni problem (3.12) ekvivalentan varijacionom problemu.

Množeći jednačinu (3.12) skalarno sa y dobijamo:

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}((ay_{\bar{x}})_{x,i}-d_i y_i)y_i h-((ay_{\bar{x}})_{x,m}-d_m y_m)y_m h+(ay_{\bar{x},N}+\frac{h}{2}d_N y_N)y_N=$$

$$\lambda^h\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}\rho_i y_i^2 h+\overline{K}y_m^2+\frac{h}{2}\lambda^h\rho_m y_n^2\right)$$

Na taj način dobijamo $(ay_{\bar{x}},y_{\bar{x}}]+(\bar{d}y,y]_*=\lambda^h(y,y]_{B_h}$

odnosno $\lambda^h=\dfrac{D_N[y]}{H_N[y]}$ (3.15) gde je $D_N[y]=(a,y_{\bar{x}}^2]+(\bar{d}y,y]_*$, $H_N[y]=(y,y]_{B_h}$.

Na osnovu gore navedenog diferencni problem je ekvivalentan sledećem varijacionom problemu:

Odrediti minimum funkcionala $D_N[\varphi]$ na klasi mrežnih funkcija koje zadovoljavaju granične uslove i $H_N[\varphi]=1$.

Neka je $\lambda_1^h=D_N[y_1]$ najmanja sopstvena vrednost, pri čemu je y_1 odgovarajuća sopstvena funkcija problema (3.12). Možemo pronaći n-tu sopstvenu vrednost, $n>1$, kao minimum funkcionala $D_N[\varphi]$ u klasi funkcija koji zadovoljava granične uslove i uslove ortogonalnosti:

$$H_N[\varphi,y^{(l)}]=(\varphi,y^{(l)}]_{B_h}=0,\quad l=1,2,...,n-1$$

gde je $y^{(l)}$ l-ta sopstvena funkcija.

Diferencni problem Šturm-Liuvila je algebarski problem.

Teorema 5. Sopstvene vrednosti problema (3.12) zadovoljavaju nejednakosti:

$$M_1'n^2\le\lambda_n^h\le M_2'n^2,\quad n=1,2,...,N-1, \tag{3.16}$$

gde su M_1', M_2' pozitivne konstante koje ne zavise od n i h.

Dokaz: Prvo razmatramo specijalne slučajeve postavljajući $a\equiv1$, $d\equiv0$, $\rho\equiv1$ i ξ je racionalno. Na taj način dobijamo diskretizaciju problema:

$$-y_{\bar{x}x}=\lambda^h y,\quad x\ne x_m$$

$$-y_{\bar{x}x,m}=\lambda^h\left(1+\frac{K}{h}\right)y_m,\quad x=x_m,$$

$$y_0=0,\quad y_{\bar{x},N}=\frac{h}{2}\lambda^h y_N$$

Sopstvene vrednosti diskretizovanog problema su:

$$0<\lambda_1^h=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_1 h}{2}<\lambda_2^h<...<\lambda_{N-1}^h=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_{N-1}h}{2}$$

a odgovarajuće sopstvene funkcije možemo zapisati u eksplicitnom obliku:

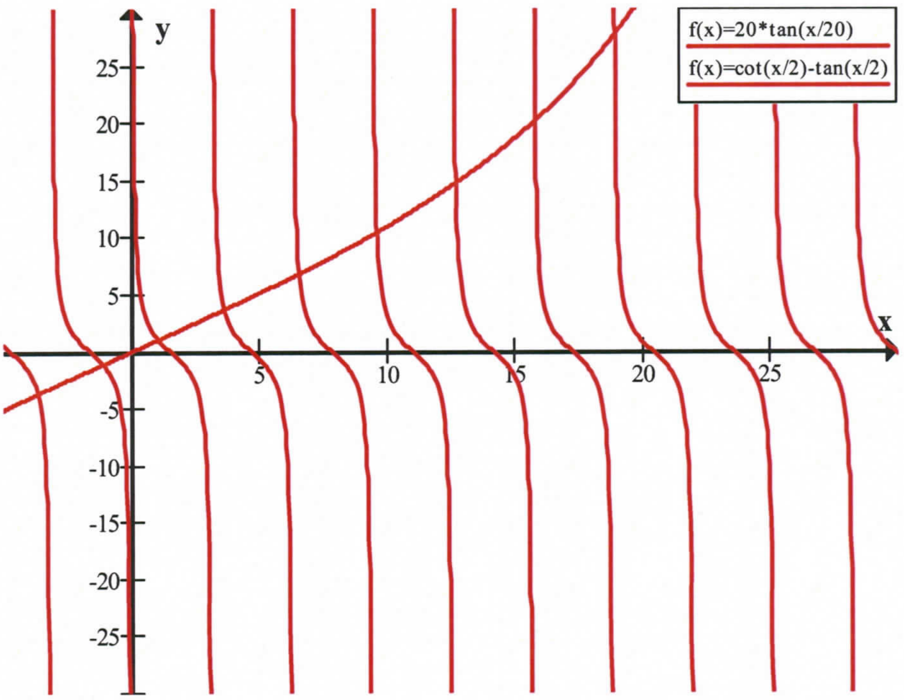
$$y_i(x)=\begin{cases}\cos\alpha_i^h(1-\xi)\sin\alpha_i^h x, & 0<x<\xi\\ \sin\alpha_i^h\xi\cos\alpha_i^h(1-x), & \xi<x<1\end{cases}$$

gde je α_i^h, i=1,2,...,N-1 i-ti pozitivan koren jednačine (videti slike 26 i 27).

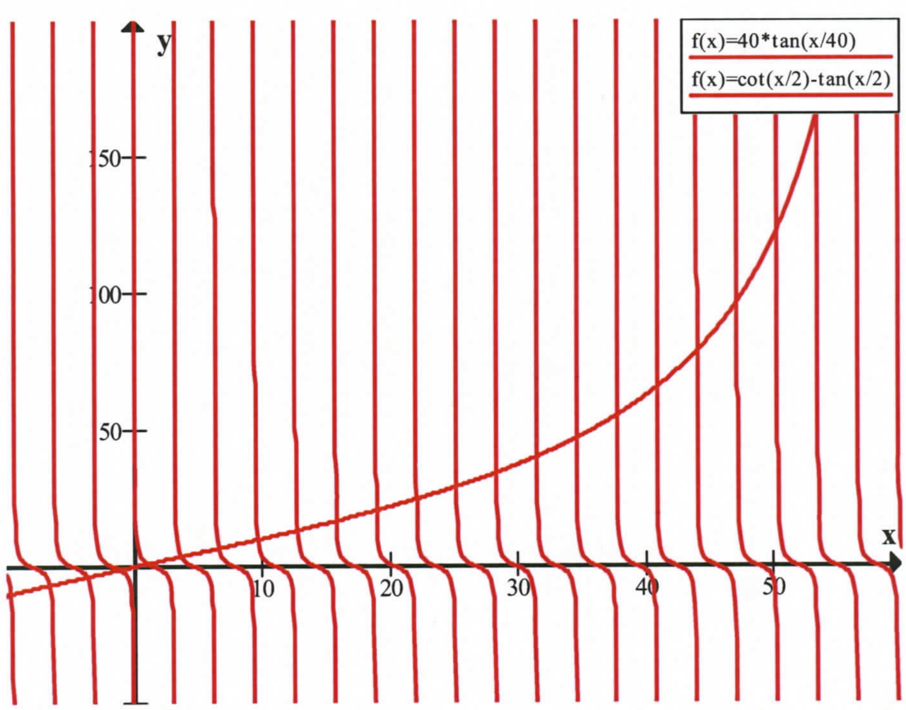
$$\frac{2K}{h}\tan\frac{\alpha^h h}{2}=\cot\alpha^h\xi-\tan\alpha^h(1-\xi).$$

Kada $h\to0$, $\alpha^h\to\alpha$. Sa druge strane koristimo sledeće jednakosti:

$$\overset{\circ}{\lambda}{}_n^h=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_n^h h}{2}=(\alpha_n^h)^2f(\zeta_n),\quad f(\zeta_n)=\frac{\sin^2\zeta_n}{\zeta_n^2},\quad \zeta_n=\frac{\alpha_n^h h}{2}$$



Slika 26. Gfrafički prikaz za $h = 10^{-1}$, K=1, ξ=0.5



Slika 27. Gfrafički prikaz za $h = 5*10^{-2}$, K=1, ξ=0.5

Budući da je $f(\zeta_n)$ monotono opadajuća funkcija na $[0,\frac{\pi}{2}]$, važi sledeća nejednakost:

$$\frac{4}{\pi^2} < f(\zeta_n) < 1, \quad 0 < \zeta_n < 1$$

odakle sledi :

$$\frac{4(\alpha_n^h)^2}{\pi^2} < \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h < (\alpha_n^h)^2 \tag{3.17}$$

Stoga nejednakost (3.10) važi za $\overset{\circ}{\lambda}{}_n^h$ pošto $\alpha_n{}^h \to \alpha$, kada $h \to 0$. Sledeće nejednakosti su očigledne:

$$\frac{D_N[\varphi]}{H_N[\varphi]} = \frac{(a,(\varphi_{\bar{x}})^2]+(\bar{d},\varphi^2]_*}{(1,\varphi^2]_{B_h}} \le c_2 \frac{(1,(\varphi_{\bar{x}})^2]}{(1,\varphi^2]_{B_h}} + \frac{(\bar{d},\varphi^2]_*}{(1,\varphi^2]_{B_h}} \le c_2 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h + \frac{c_4}{c_1}\frac{(\rho,\varphi^2]_*}{(1,\varphi^2]_{B_h}} =$$

$$c_2 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h + \frac{c_4}{c_1} \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne m}}^{N-1} h\rho_i\varphi_i^2 + h\rho_m\varphi_m^2 + \frac{h}{2}\rho_N\varphi_N^2}{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne m}}^{N-1} h\rho_i\varphi_i^2 + \overline{K}\varphi_m^2 + \frac{h}{2}\rho_N\varphi_N^2} \le c_2 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h + \frac{c_4}{c_1}$$

$$\frac{D_N[\varphi]}{H_N[\varphi]} \ge c_1 \frac{(1,(\varphi_{\bar{x}})^2]}{(1,\varphi^2]_{B_h}} + \frac{(\bar{d},\varphi^2]_*}{(1,\varphi^2]_{B_h}} \ge c_1 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h$$

tj. $c_1 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h \le \lambda_n^h \le c_2 \overset{\circ}{\lambda}{}_n^h + \frac{c_4}{c_1}$.

Kombinujući ove nejednakosti sa (3.17) dobijamo ocenu (3.16).

Teorema 6. Za sopstvene funkcije problema (3.12) važe sledeće ocene:

$$\|y_n\|_C \le M_1\sqrt{n}, \quad \|(y_n)_{\bar{x}}\|_C \le M_2 n^{3/2} \tag{3.18}$$

gde je $\|y\|_C = \max\limits_{x\in\omega_h}|y(x)|$, $\|y_{\bar{x}}\|_C = \max\limits_{1\le i\le N}|y_{\bar{x},i}|$, M_1, M_2 su konstante koje ne zavise od n i h.

Dokaz: Neka je $y = y_n$ sopstvena funkcija kojoj odgovara sopstvena vrednost $\lambda^h = \lambda_n^h$ problema (3.12) i neka su x, x' proizvoljne tačke mreže. Uočimo sledeći identitet:

$$y^2(x) - y^2(x') = \sum_{s=x'+h}^{x} (y^2(s))_{\bar{s}} h = \sum_{s=x'+h}^{x} [y(s)+y(s-h)] y_{\bar{s}} h \tag{3.19}$$

$$(a(x)y_{\bar{x}}(x))^2 - (a(x')y_{\bar{x}}(x'))^2 = \sum_{s=x'}^{x-h} [(a(s)y_{\bar{s}}(s))^2]_s h =$$

$$\sum_{s=x'}^{x-h} [a(s)y_{\bar{s}}(s)]_s [a(s)y_{\bar{s}}(s) + a(s+h)y_s(s)] h = \tag{3.20}$$

$$-\sum_{s=x'}^{x-h} [d(s) - \lambda^h\rho(x)][a(s)y_{\bar{s}}(s) + a(s+h)y(s)y_s(s)] h$$

Iz uslova normiranosti $(y,y]_{B_h}=1$ sledi da postoji barem jedna tačka x' takva da je $y^2(x')\le 1$. Primenjujući nejednakost Koši-Švarca na desnu stranu nejednakosti (3.10), saglasno sa (3.15) i (3.10) dobijamo:

$$y^2(x)=y^2(x')+\sum_{s=x'+h}^{x}[y(s)+y(s-h)]y_{\bar{s}}(s)h\le$$

$$1+2\left(\frac{1}{c_1}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne m}}^{N-1}\rho_i y_i^2 h\right)^{1/2}\left(\frac{1}{c_1}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne m}}^{N}\rho_i a(y_{\bar{x}})^2 h\right)^{1/2}\le$$

$$1+\frac{2}{c_1}(y,y]_{B_h}^{1/2}(a,(y_{\bar{x}})^2]^{1/2}\le 1+\frac{2}{c_1}\sqrt{\lambda^h}\le M_1^2 n$$

odakle sledi: $\|y_n\|_C\le M_1\sqrt{n}$.

Iz uslova $(a,(y_{\bar{x}})^2]\le\lambda^h$ sledi da postoji tačka x' takva da je $a(x')y_{\bar{x}}^2(x')\le\lambda^h$ i $[a(x')y_{\bar{x}}(x')]\le c_2\lambda^h$. Primenjujući Koši-Švarcovu nejednakost na desnu stranu jednakosti (3.20) i u skladu sa (3.15), (3.13) i (3.10) dobijamo:

$$y_{\bar{x}}^2(x)\le\frac{c_2}{c_1^2}\lambda^h+\frac{2c_4}{c_1^2}\sqrt{c_2}\sqrt{\lambda^h}+\frac{2}{c_1^2}\sqrt{c_2c_3}(\lambda^h)^{3/2}\le M_2^2 n^3$$

Pošto je x proizvoljno teorema je dokazana.

Razmotrimo sada konvergenciju sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija problema (3.12) ka sopstvenim vrednostima i sopstvenim funkcijama problema (3.1) kada $N\to\infty$, $h\to 0$. Dokažimo konvergenciju na klasi deo po deo glatkih funkcija, koje imaju jedinstven prekid u tački $x=\xi$, $0<\xi<1$. Razmatramo slučaj kada je $n=1$. Sa $\varphi(x)$ označimo proizvoljnu deo po deo glatku funkciju koja zadovoljava granične uslove $\varphi(0)=0$, $\varphi'(1)=0$.

Može se pokazati da je $\lim_{N\to\infty}D_N[\varphi]=D[\varphi]$, $\lim_{N\to\infty}H_N[\varphi]=H[\varphi]$.

Zatim $D_N[\varphi]\le M_0$, $M_0>0$, M_0 ne zavisi od N. Neka je $y=y(x,h)$ mrežna funkcija na kojoj funkcional $D_N[\varphi]$ dostiže minimum $\lambda^h=D_N[y]$ kada je $H_N[y]=1$. Razmotrimo niz mrežnih funkcija $\{y(x,h)\}$ definisanih na nekom nizu mreža $\{\omega_h\}$.

Lema 1. Niz mrežnih funkcija $\{y(x,h)\}$, $h\to 0$, je ravnomerno neprekidan i ravnomerno ograničen.

Dokaz: Pokažimo prvo da je mrežna funkcija $y=y(x,h)$ ravnomerno neprekidna. Neka su x' i x'' proizvoljne tačke mreže. Tada je

$$y(x'',h)-y(x',h)=\sum_{s=x'}^{x''-h}y_s(x,h)h.$$

Primenjujući nejednakost Koši-Švarca i ograničenost $D_N[y]$ dobijamo:

$$|y(x'',h)-y(x',h)| \le \frac{1}{\sqrt{c_1}}\sqrt{(a,(y_{\bar{x}})^2]}\sqrt{|x''-x'|} \le \frac{1}{\sqrt{c_1}}\sqrt{(a,(y_{\bar{x}})^2]+(\bar{d},y^2]_*}\sqrt{|x''-x'|} \le \frac{M_0}{c_1}\sqrt{|x''-x'|} \tag{3.21}$$

što znači da je niz $\{y(x,h)\}$ ravnomerno neprekidan.

Iz uslova normiranosti $(y,y]_{B_h}=1$ sledi da postoji bar jedna tačka x' takva da je $|y(x',h)|\le 1$. Koristeći (3.21) možemo videti da je :

$$|y(x'',h)| \le |y(x',h)| + |y(x'',h)-y(x',h)| \le 1+\frac{M_0}{\sqrt{c_1}}$$

što znači da je niz $\{y(x,h)\}$ ravnomerno ograničen. Po Arcelinoj teoremi, za svaki niz ravnomerno ograničenih i ravnostepeno neprekidnih funkcija postoji ravnomerno konvergentan podniz. Primenjujući ovu teoremu na niz mrežnih funkcija možemo da nađemo podniz $\{y(x,h_k)\}$ koji ravnomerno konvergira ka funkciji $\tilde{u}(x)$ neprekidnoj na odsečku $[0,1]$:

$$\lim_{h_k\to 0}\|y(x,h_k)-\tilde{u}(x)\|_{C_{h_k}}=0 \tag{3.22}$$

Pretpostavimo da niz sopstvenih vrednosti $\{\lambda_1^{h_k}\}=\{\lambda_1(h_k)\}$, koji je prema (3.16) ograničen, konvergira ka $\bar{\lambda}$:

$$\lim_{h_k\to 0}\lambda_1(h_k)=\bar{\lambda}.$$

U suprotnom slučaju možemo odabrati konvergentan podniz ovog niza i razmatrati ograničenost na tom podnizu.

Lema 2. Ako je $\{\lambda(h_k)\}$ niz za koji važi:

$$\lim_{h_k\to 0}\lambda_1(h_k)=\bar{\lambda} \tag{3.23}$$

tada je $\bar{\lambda}\le\lambda_1$, gde je λ_1 najmanja sopstvena vrednost problema (3.1).

Dokaz: Neka je $u^*(x)$ proizvoljna deo po deo glatka funkcija koja zadovoljava granične uslove $u^*(0)=0,\ (u^*)'(1)=0$ i

$$\lambda^*=\frac{D\left[u^*\right]}{H\left[u^*\right]}\le\lambda_1+\varepsilon,\ \varepsilon>0$$

$$\lambda^*(h_k)=\frac{D_{N_k}\left[u^*\right]}{H_{N_k}\left[u^*\right]},\ \mathrm{N}_k=\frac{1}{h_k}$$

Na osnovu principa minimuma $\lambda_1(h_k) \leq \lambda^*(h_k)$ pri čemu $\lambda^*(h_k) \to \lambda^*$ kada $h_k \to 0$. Puštajući da $h_k \to 0$ dobijamo:

$\overline{\lambda} \leq \lambda^* \leq \lambda_1 + \varepsilon$. Pošto je ε proizvoljno zaključujemo da je $\overline{\lambda} \leq \lambda_1$.

Pokažimo da funkcija $\overline{u}(x)$ zadovoljava jednačinu (3.1) kada je $\lambda = \overline{\lambda}$.

Diskretizovan zadatak (3.12) može da se zapiše u sledećem obliku:

$$y(x) = \lambda^h (G(x,\zeta),(\rho(\zeta) + K\delta_h(x-\xi))y(\zeta)]_* = \lambda^h (G((x,\zeta),y(\zeta)]_{B_h} \qquad (3.24)$$

gde je $G(x,\zeta) = G^h(x,\zeta)$ Grinova funkcija za operator Λy. Može se pokazati da rešenje problema:

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad 0<x=ih<1$$

$$y(0)=0, \quad ay_{\bar{x},N} + \frac{h}{2} d_N y_N = \frac{h}{2} \varphi_N$$

može da se zapiše u obliku:

$y(x) = (G(x,\zeta),\varphi(\zeta))$. U našem slučaju je $\varphi(x) = \lambda^h[(\rho(x) + K\delta_h(x-\xi)]y(x)$. Koristeći Grinovu funkciju za operator:

$$\overset{\circ}{\Lambda} y = \begin{cases} -(ay_{\bar{x}})_x, & x=x_i, \ i=1,2,...,N-1 \\ \dfrac{2}{h} ay_{\bar{x}}, & i=N \\ 0, & i=0 \end{cases} \qquad (3.25)$$

diskretizovan zadatak (3.12) može da se predstavi sledećom jednačinom:

$$y(x) = (G_0^h(x,\zeta),(\lambda^h(\rho(\zeta) + K\delta_h(x-\xi)) - d(\zeta))y(\zeta)]_* \qquad (3.26)$$

gde je $G_0^h(x,\zeta)$ Grinova funkcija za operator $\overset{\circ}{\Lambda}$:

$$G_0^h(x_i,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{i} \frac{h}{a(x_j)}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{h}{a(x_j)}}, & 0 \leq x_i \leq \zeta \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{k} \frac{h}{a(x_j)}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{h}{a(x_j)}}, & \zeta \leq x_i \leq 1 \end{cases}, \quad \zeta \in \omega_h$$

Jasno se može videti da $G_0^h(x,\zeta)$ konvergira ka $G_0(x,\zeta)$ kada $h \to 0$, gde je:

$$G_0(x,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{\int\limits_0^x \frac{ds}{p(s)}}{\int\limits_0^1 \frac{ds}{p(s)}}, & 0\le x\le\zeta\\[2ex] \dfrac{\int\limits_0^\zeta \frac{ds}{p(s)}}{\int\limits_0^1 \frac{ds}{p(s)}}, & \zeta\le x\le 1\end{cases}$$

Grinova funkcija zadatog problema.

Budući da je

$$\left(pu'\right)'=f(x),\ 0<x<1,\ u(0)=1,\ u'(1)=0 \tag{3.27}$$

dobijamo: $\lim\limits_{h\to 0}\left|G_0^h(x,\zeta)-G_0(x,\zeta)\right|=0$ (3.28)

Primenjujući na jednačinu (3.26) graničnu vrednost kada $h\to 0$ i uzimajući u obzir jednakosti (3.22), (3.23) i (3.28) dobijamo:

$$\tilde{u}(x)=\int\limits_0^1 G_0(x,\zeta)\left[\overline{\lambda}(r(\zeta)+K\delta(x-\xi))-q(\zeta)\right]\tilde{u}(\zeta)d\zeta \tag{3.29}$$

Uzimajući u obzir definiciju funkcije $G_0(x,\zeta)$ sledi da funkcija $\tilde{u}$ koja je rešenje integralne jednačine (3.29) zadovoljava diferencijalnu jednačinu (3.1) kada je $\lambda=\overline{\lambda}$. Pored toga jasno je da je $\overline{\lambda}$ sopstvena vrednost spektralnog problema (3.1). Na osnovu nejednakosti $\overline{\lambda}\le\lambda_1$, gde je λ_1 najmanja sopstvena vrednost dobijamo da je $\overline{\lambda}=\lambda_1$, a $u(x)=u_1(x)$ prva sopstvena funkcija problema (3.1).

Na taj način pokazujemo da niz $\{y(x,h)\}$ ravnomerno konvergira ka $u_1(x)$ i $\lambda_1^h=\lambda_1(h)$ konvergira ka λ_1 kada $h\to 0$ tj.

$$\lim_{h\to 0}\left\|y_1(x,h)-u_1(x)\right\|_C=0,\ \lim_{h\to 0}\lambda_1^h=\lambda_1 \tag{3.30}$$

Za ostale sopstvene vrednosti λ_n^h kada je $n>1$ važi isto rasuđivanje. Sopstvene vrednosti λ_n^h i λ_n se dobijaju kao minimumi funkcionala $\dfrac{D_N[\varphi]}{H_N[\varphi]}$ i $\dfrac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$ respektivno, pri čemu važe uslovi ortogonalnosti $H_N[\varphi,y_m]=0$ i $H[\varphi,u_m]=0,\ 1\le m<n$.

3.3. Ocena brzine konvergencije diskretizovanog Šturm-Liuvilovog problema

Neka su λ^h, y(x) rešenja diskretizovanog problema (3.12) i neka su λ, u(x) rešenja problema (3.1). Za grešku $z = y - u$ dobijamo sledeći problem:

$$\Lambda z + \lambda^h [\rho + K\delta_h (x-\xi)] z = -\Psi, \quad 0 < x = ih < 1$$

$$z(0) = 0, \quad a z_{\bar{x},N} + \frac{h}{2} d_N z_N = \frac{h}{2} \Psi_N \tag{3.31}$$

gde je

$$\Psi = \begin{cases} \Lambda u + \lambda^h [\rho + K\delta_h (x-\xi)] u, & 0 < x = ih < 1 \\ \lambda^h \rho_N u_N + \dfrac{2}{h} u_{\bar{x},N}, & x = Nh = 1 \end{cases} \tag{3.32}$$

greška aproksimacije sheme (3.12).

Transformišimo izraz za Ψ. Izvršićemo integraciju jednačine (3.1) u granicama od $x_{i-1/2}$ do $x_{i+1/2}$:

$$\frac{\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}}{h} = \frac{1}{h} \begin{cases} \displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [q(x) - \lambda r(x)] u(x) dx & i \neq m \\ \displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [q(x) - \lambda r(x)] u(x) dx - K u(\xi) & i = m \end{cases}$$

$$\omega_i = p(x_i) \frac{du(x_i)}{dx}$$

Zamenjujući ovu jednačinu u (3.32) dobijamo:

$$\Psi = \psi + (\lambda^h - \lambda)[\rho + K\delta_h (x-\xi)] u \tag{3.33}$$

gde je:

$$\psi = D\eta_x + \psi^* \tag{3.34}$$

$$\psi^* = \begin{cases} -du_i - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qudx + \lambda [(\rho + K\delta_h (x-\xi)) u_i - \\ \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (r + K\delta_h (x-\xi)) u_i dx] \quad x = x_i, \ 0<i<N \\ -d_N u_N + \dfrac{2}{h} \displaystyle\int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} qudx + \lambda \left(\dfrac{2}{h} \displaystyle\int_{x_{N-1/2}}^{x_N} rudx - \rho_N u_N \right) \quad x = x_N \end{cases} \tag{3.35}$$

$$D\eta = \begin{cases} \eta_{x,i}, & 0<i<N \\ -\frac{2}{h}\eta_{N}, & i=N \end{cases}, \quad \text{gde je } \eta_i = a_i u_{\bar{x},i} - p_{i-1/2} u'_{i-1/2} \tag{3.36}$$

Da bismo dobili tačnost sheme (3.12), treba da ocenimo rešenje problema (3.32). Parametar λ^h predstavalja sopstvenu vrednost. Pored toga, nehomogena jednačina (3.32) je rešiva samo ako je sopstvena funkcija y diskretizovanog problema (3.12) ortogonalna na desnu stranu jednačine (3.32):

$$\begin{aligned} &(\Psi, y]_* = (\psi, y]_* + (\lambda^h - \lambda)((\rho + K\delta_h(x-\xi)), y]_* = \\ &(\psi, y] + (\lambda^h - \lambda)(u, y]_{B_h} = 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Neka su $u(x)$ i $y(x)$ sopstvene funkcije takve da je:

$$H[u] = \int_0^1 r(x)u^2(x)dx + Ku^2(\xi) = 1,$$

$$H_N[y] = (y, y]_{B_h} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{N-1} \rho_i y_i^2 h + \overline{K} y_m^2 + \frac{h}{2}\rho_N y_N^2 = 1$$

Može se pokazati da $\|y-u\|_C \to 0$ kada $h \to 0$. Pored toga, za dovoljno malo h možemo da tvrdimo da je $(u, y]_{B_h} \neq 0$. Sopstvenoj vrednosti λ^h odgovara samo jedna sopstvena funkcija, dobijena sa tačnošću do na multiplikativnu konstantu C_0. Izaberimo $C_0 = C_0(h)$ tako da funkcija $\bar{y} = C_0 y$ bude ortogonalna na razliku $\bar{z} = \bar{y} - u$:

$$(\bar{y}, \bar{z}]_{B_h} = 0 \tag{3.38}$$

Na osnovu gore navedenog dobijamo:

$$(u, y]_{B_h} = (y, \bar{y} - \bar{z}]_{B_h} = (y, \bar{y}]_{B_h} - (y, \bar{z}]_{B_h} = C_0(y, y]_{B_h} = C_0$$

U prethodnom paragrafu smo pokazali da $y(x) \to u(x)$ kada $h \to 0$. Pored toga $C_0 \to 1$ kada $h \to 0$. Možemo uzeti da je $C_0 > 0$.

$$\begin{aligned} &(u,u]_{B_h} = (1, (\bar{z} - \bar{y})^2]_{B_h} = (1, \bar{z}^2]_{B_h} - 2(1, \overline{zy}]_{B_h} + (1, \bar{y}^2]_{B_h} = \\ &(1, \bar{z}^2]_{B_h} + (1, \bar{y}^2]_{B_h} = (1, C_0^2 y^2]_{B_h} + (1, \bar{z}(\bar{y} - u)]_{B_h} = \\ &C_0^2 + (1, \overline{zy}]_{B_h} - (1, \bar{z}u]_{B_h} = C_0^2 - (\bar{z}, u]_{B_h} \end{aligned}$$

Dobijamo da je

$$1 - C_0^2 = -(\bar{z}, u]_{B_h} - (H_N[u] - H[u]) \tag{3.39}$$

Da bismo odredili $\Delta\lambda$ koristimo uslov (3.37):

$$\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda = -\frac{(\psi, y]_*}{(u, y]_{B_h}} = -\frac{(\psi, \bar{y}]_*}{C_0^2} \tag{3.40}$$

Stavimo $\psi = D\eta + \psi^*$ u desnu stranu jednačine (3.40):

$$(\psi, \bar{y}]_* = (D\eta + \psi^*, \bar{y}]_*$$

$$(D\eta, \bar{y}]_* = h\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{h}\bar{y}_i - \frac{h}{2}\frac{2}{h}\eta_N \bar{y}_N = h\sum_{i=2}^{N} \frac{\eta_i \bar{y}_{i-1}}{h} - h\sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i \bar{y}_i}{h} - h\frac{\eta_N \bar{y}_N}{h} =$$

$$h\sum_{i=1}^{N} \eta_i \bar{y}_{\bar{x},i} = -(\eta, \bar{y}_{\bar{x}}]$$

Odavde i iz ocene (3.18) za $\bar{y}$ i $\bar{y}_{\bar{x}}$ sledi dokaz sledeće leme:

Lema 3. Neka su p, q, r deo po deo diferencijabilne funkcije, λ_n, λ_n^h sopstvene vrednosti problema (3.1) i (3.12) respektivno. Tada važi ocena

$$\left|\lambda_n^h - \lambda_n\right| \le Mn^{3/2}\left(\left(1, |\eta|\right] + \left(1, |\psi^*|\right]_*\right) \tag{3.41}$$

pri čemu je $M = const > 0$ koja ne zavisi od n i h.

Primenimo ovu ocenu na $\bar{z}$. Iz jednakosti $\bar{y} = C_0 y$ sledi da $\bar{y}$ zadovoljava jednačinu (3.12) i $H_N\left[\bar{y}\right] = C_0^2$. Za $\bar{z} = \bar{y} - u$ dobijamo jednačinu (3.32). ova jednačina (3.32) je ekvivalentna sledećoj diskretizovanoj jednačini:

$$\begin{aligned} \bar{z}(x) &= \lambda^h (G(x,\zeta), (\rho(\zeta) + K\delta_h(x-\xi)\bar{z}(\zeta))]_* + (G(x,\zeta), \Psi(\zeta)]_* \\ &= \lambda^h (G(x,\zeta), \bar{z}(\zeta))]_{B_h} + (G(x,\zeta), \Psi(\zeta)]_* \end{aligned} \tag{3.42}$$

gde je $G(x,\zeta) = G^h(x,\zeta)$ Grinova funkcija za operator Λy.

Sopstvena funkcija $\bar{y}$ diskretizovanog problema (3.12) zadovoljava jednačinu:

$$\bar{y}(x) = \lambda^h (G(x,\zeta), (\rho(\zeta) + K\delta_h(x-\xi)\bar{y}(\zeta))]_* = \lambda^h (G(x,\zeta), \bar{y}(\zeta))]_{B_h} \tag{3.43}$$

Neka je $\lambda^h = \lambda_n^h$ n-ta sopstvena vrednost i $y = y_n(x)$ odgovarajuća sopstvena funkcija takva da je $(y_n, y_n]_{B_h} = 1$. Uvodimo smenu:

$$v(x) = \sqrt{\rho(x)}\bar{z}(x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}y, \tag{3.44}$$

$$K(x,\zeta) = \sqrt{\rho(x)\rho(\zeta)}G(x,\zeta). \tag{3.45}$$

Zamenjujući u (3.42) i (3.43) dobijamo sledeću jednačinu:

$$\left.\begin{aligned} v_n(x) &= \lambda_n^h (K(x,\zeta), v(\zeta)]_{B_h} + f(x) \\ f(x) &= (K(x,\zeta), \overline{\Psi}(\zeta)], \quad \overline{\Psi} = \frac{\Psi}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n^h (K(x,\zeta), \varphi_n(\zeta)]_{B_h} \tag{3.47}$$

Iz (3.37) sledi:

$$(\varphi_n(x), f(x)]_* = \left(\varphi_n(x), \left(K(x,\zeta), \overline{\Psi}(\zeta)\right]\right]_* = \left(\overline{\Psi}(\zeta), \left(K(x,\zeta), \varphi_n(x)\right]\right]_* =$$

$$\frac{1}{\lambda_n^h}\left(\overline{\Psi}(\zeta), \varphi_n(\zeta)\right]_* = \frac{1}{\lambda_n^h}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, \sqrt{\rho} y_n\right]_* = \frac{1}{\lambda_n^h}(\Psi, y_n]_* = 0$$

Zapišimo uslov $\left(\overline{y}, \overline{z}\right]_{B_h} = 0$ u obliku

$$\left(\overline{y}, \overline{z}\right]_{B_h} = \left(\frac{\varphi_n}{\sqrt{\rho}}, \frac{v_n}{\sqrt{\rho}}\right]_{B_h} = 0 \tag{3.48}$$

Rešenje $v(x) = v_n(x)$ jednačine (3.46) je oblika

$$v(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N-1} c_k \varphi_n(x) \tag{3.49}$$

i zadovoljava uslov (3.48).

Zamenimo ovaj izraz u (3.46):

$$v(x) = f(x) + \lambda_n^h c_k \left(K(x,\zeta), \varphi_k(\zeta)\right) + \lambda_n^h \left(K(x_m,\zeta), \frac{K\varphi_k(x_m)}{x\sqrt{\rho(\zeta)}}\right) +$$

$$\lambda_n^h \left(K(x,\zeta), f(\zeta)\right)$$

Funkciju $f(x)$ razložimo po sopstvenim funkcijama:

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N-1} d_k \varphi_k(x), \quad d_k = (f, \varphi_k) \tag{3.50}$$

Na taj način dobijamo:

$$\left(K(x,\zeta), f(\zeta)\right) + \left(K(x,\zeta), \frac{Kf(x_m)}{h\sqrt{\rho(\zeta)}}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m,n}}^{N-1} \frac{d_k}{\lambda_k^h} \varphi_k(x),$$

$$c_k = \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h} c_k + \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}(f, \varphi_k)$$

odnosno:

$$v(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N-1} \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h \left(1 - \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}\right)} \varphi_k(x)$$

Ocenimo sada sledeće:

$$\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N-1}\frac{\lambda_n^h(f,\varphi_k)}{\lambda_k^h-\lambda_n^h}\varphi_k(x)\right|\le M\|f\|_C\,\lambda_n^h\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N-1}\frac{\sqrt{k}}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}$$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan broj koji ne zavisi od h. Izaberimo broj n_0 takav da je $\lambda_{n_0}^h\ge(1+\varepsilon)\lambda_n^h$. Tada je

$$\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{\sqrt{k}}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}\le\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{\sqrt{k}}{\lambda_k^h}\le\frac{M'}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{1}{k^{3/2}}\le M$$

gde je $M=const>0$ koja ne zavisi od h. Budući da $\lambda_k^h\to\lambda_k$ kada $k\le n_0$ i $h\to 0$, suma po k od 1 do n_0-1 pri dovoljno malom $h\le h_0$ je ograničena i ne zavisi od h. Pored toga važi sledeća ocena:

$$\|v\|_C\le M(n)\|f\|_C \tag{3.51}$$

Sa druge strane, pri transformaciji izraza za $f(x)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
f(x)=&\left(K(x,\zeta),\overline{\Psi}(\zeta)\right)=\sqrt{\rho(x)}\,(G(x,\zeta),\Psi(\zeta))=\\
&\left(\lambda^h-\lambda\right)\sqrt{\rho(x)}\,(G(x,\zeta),\rho(\zeta)u(\zeta))+\\
&\left(\lambda^h-\lambda\right)\sqrt{\rho(x)}\,\frac{K}{h}(G(x,\zeta),\rho(\zeta)u(\zeta))_{x=x_m}+\\
&\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\zeta),\eta_{\bar{\zeta}}(\zeta)+\psi^*(\zeta)\right)=\\
&\Delta\lambda^h\sqrt{\rho(x)}\,(G(x,\zeta),(\rho(\zeta)+K\delta(x-\varepsilon))u(\zeta))+\\
&\sqrt{\rho(x)}\left[\left(G_{\bar{\zeta}}(x,\zeta),\eta(\zeta)\right)+\left(G(x,\zeta),\psi^*(\zeta)\right)\right]
\end{aligned}$$

Zbog ograničenosti $G(x,\zeta)$ i $G_{\bar{\zeta}}(x,\zeta)$:

$$|G(x,\zeta)|\le\frac{1}{c_1},\quad \left|G_{\bar{\zeta}}(x,\zeta)\right|\le\frac{2}{c_1},\ x,\zeta\in\omega_h$$

dobijamo ocenu:

$$\|f\|_C\le\sqrt{c_3}\,\frac{2}{c_1}(1,|\eta|)+\sqrt{c_3}\,\frac{1}{c_1}\left(1,|\psi^*|\right)+\left|\Delta\lambda^h\right|\sqrt{c_3}\,\lambda^h$$

ili

$$\|f\|_C\le M_1\left((1,|\eta|)+\left(1,|\psi^*|\right)\right)+M_2\lambda^h\left|\Delta\lambda^h\right|$$

Zamenjujući ovu ocenu u (3.51) i vraćajući se na funkciju $\bar{z}=\dfrac{\bar{v}}{\sqrt{\rho}}$, kao posledica (3.16) dobijamo:

$$M_2\lambda^h\left|\Delta\lambda^h\right|\le M_2\lambda^h n^{3/2}\left((1,|\eta|]+\left(1,|\psi^*|\right]_*\right)\le M_3\left((1,|\eta|]+\left(1,|\psi^*|\right]_*\right)$$

Pored toga:

$$\|\bar{z}\|_C \le M(n)\left(\left(1,|\eta|\right] + \left(1,|\psi^*|\right]_*\right)$$

Sada možemo da izrazimo razliku $z = y - u$ preko $\bar{z}$:

$$z = \frac{\bar{z}}{C_0} + \frac{1 - C_0^2}{C_0(1 + C_0)} u .$$

Tada je:

$$\|z\|_C = \frac{\|\bar{z}\|_C}{C_0} + \left|1 - C_0^2\right| \frac{\|u\|_C}{C_0(1 + C_0)} \le M\left(\|\bar{z}\|_C + \left|1 - C_0^2\right|\right)$$

za dovoljno malo h, budući da $C_0 \to 1$ kada $h \to 0$ i $\|u\|_C$ ograničena. Iz (3.39) može da se vidi da je:

$$\left|1 - C_0^2\right| = \left|-(\bar{z}, u]_{B_h} - (H_N[u] - H[u])\right| \le \left(1, \bar{z}^2\right]_{B_h}^{1/2} \left(1, u^2\right]_{B_h}^{1/2} + \left|H_N[u] - H[u]\right|$$

što nam na kraju daje sledeću ocenu:

$$\|z\|_C \le M\|\bar{z}\|_C + M\left|H_N[u] - H[u]\right|$$

Teorema 7. Za grešku aproksimacije sheme (3.12), gde je $\lambda = \lambda_n^h$ i $h \le h_0$ dovoljno malo, važi ocena:

$$\|z\|_C = \|y_n - u_n\|_C \le M_1(n)\left(\left(1,|\eta|\right] + \left(1,|\psi^*|\right]_*\right) + M_2\left|H_N[u_n] - H[u_n]\right| \tag{3.52}$$

$$|\Delta\lambda_n| = \left|\lambda_n^h - \lambda_n\right| \le M_3\left(\left(1,|\eta|\right] + \left(1,|\psi^*|\right]_*\right)$$

n ne zavisi od h, $M_1(n) > 0, M_2(n) > 0, M_3 > 0$ konstante koje ne zavise od h.

Da bismo ocenili red tačnosti problema (3.12), treba da ocenimo izraze $\left(\left(1,|\eta|\right] + \left(1,|\psi^*|\right]_*\right)$ i $H_N[u] - H[u]$.

Ako su $p, q, r \in C^{(2)}$ onda je $\left(1,|\eta|\right] = O(h^2)$, $\left(1,|\psi^*|\right]_* = O(h^2)$ za proizvoljnu mrežu. Posebno, ako su $p \in Q^{(2)}$, q,r $\in Q^{(1)}$ (gde $Q^{(i)}$ označava skup i puta deo-po-deo diferencijabilnih funkcija na $(0,\xi) \cup (\xi,1)$) imamo:

$$H_N[u]-H[u]=\left(1,u^2\right]_{B_h}-\int_0^1 r(x)u^2(x)dx-Ku^2(\xi)=$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}\rho u^2h+\overline{K}\rho_m u_m^2+\frac{h}{2}\rho_N u_N^2-\int_0^1 r(x)u^2(x)dx-Kr(\xi)u^2(\xi)=$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}\rho u^2h-\left(\int_0^{0.5h} r(x)u^2(x)dx+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i-0.5h}^{x_i+0.5h} r(x)u^2(x)dx+\int_{1-0.5h}^{1} r(x)u^2(x)dx\right)+$$

$$\overline{K}\rho_m u_m^2+\frac{h}{2}\rho_N u_N^2-Kr(\xi)u^2(\xi)=$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1}\left[\rho u^2h-\int_{x_i-0.5h}^{x_i+0.5h} r(x)u^2(x)dx\right]-\int_0^{0.5h} r(x)u^2(x)dx-\int_{1-0.5h}^{1} r(x)u^2(x)dx+$$

$$\overline{K}\rho_m u_m^2+\frac{h}{2}\rho_N u_N^2-Kr(\xi)u^2(\xi)$$

Integral $\int_0^{0.5h} r(x)u^2(x)dx$ je veličina reda $O(h^3)$ što proističe iz činjenice da je $u^2=O(h^2)$ i graničnih uslova:

$$\int_0^{0.5h} r(x)u^2(x)dx\sim\int_0^{0.5h} x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0.5h}=\frac{h^3}{24}$$

Posebno,

$$\int_{1-0.5h}^{1} r(x)u^2(x)dx=\int_{1-0.5h}^{1} r(x)(u^2(x)-u^2(1)+u^2(1))dx=$$

$$u^2(1)\int_{1-0.5h}^{1} r(x)dx+\int_{1-0.5h}^{1} r(x)(u^2(x)-u^2(1))dx=$$

$$u^2(1)\int_{1-0.5h}^{1} r(x)dx+\int_{1-0.5h}^{1} r(x)(u(x)-u(1))(u(x)+u(1))dx$$

Sa druge strane $r(x)=r(1-s)=r(1)-sr'(\xi)$ što povlači da je $r(x)\le r(1)+sM$, 0<s<0.5h, M=const.

$$\int_{1-0.5h}^{1} r(x)dx\le\int_{1-0.5h}^{1} r(1)dx+M\int_{1-0.5h}^{1}(1-x)dx=r(1)\frac{h}{2}+M\frac{h^2}{2}$$

Iz gore navedenog sledi:

$$\int_{1-0.5h}^{1} r(x)u^2(x)dx-\frac{h}{2}r(1)u^2(1)\le$$

$$r(1)u^2(1)\frac{h}{2}+u^2(1)M\frac{h^2}{2}+M_4\int_{1-0.5h}^{1}(1-x)^2dx-\frac{h}{2}r(1)u^2(1)=O(h^2)$$

$$\Delta_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{N-1} \left[\rho_i u_i^2 h - \int_{x_i-0.5h}^{x_i+0.5h} r(x) u^2(x) dx \right] =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{N-1} \left[\rho_i u - \int_{-0.5h}^{0.5h} r(x_i + sh) u^2 (x_i + sh) ds \right]$$

$$r(x_i + sh) u^2 (x_i + sh) = (r_i + shr_i^{'})(u_i^2 + sh(u^2)_i^{'}) + O(h^2) =$$

$$r_i u_i^2 + sh(ru^2)_i^{'} + O(h^2), \quad \int_{-0.5h}^{0.5h} sds = 0$$

pa na kraju dobijamo $\Delta_i = O(h^2)$.

$\overline{K} \rho_m u_m^2 - K \rho(\xi) u^2(\xi) \sim O(h)$

Iz svega ovoga možemo da zaključimo da je shema (3.12) drugog reda tačnosti $\left(\left(\|y_n - u_n\|_C = O(h^2), \ |\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2) \right) \right.$, sem u tački $x = \xi$, gde je $H_N[u] - H[u] = O(h)$, odnosno $|y_n(\xi) - u_n(\xi)| = O(h)$.

4. Matematički aparat

U ovoj glavi navešćemo definicije osnovnih pojmova koje smo koristili u radu.

4.1. Metrički prostori

Definicija 1. (X,d) je metrički prostor ako funkcija $d : X \times X \to [0,+\infty)$ zadovoljava sledeće uslove:

1. $d(x,y)=0$ ako i samo ako je $x=y$
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$ - nejednakost trougla.

Definicija 2. Ovako definisanu funkciju d nazivamo metrikom na X.

Metrički prostor (X,d) je kompletan ako u njemu konvergira svaki Košijev niz.

Definicija 3. Neka je (X,d) metrički prostor. Za $K \subset X$ kažemo da je kompaktan ako svaki niz u K ima konvergentan podniz u K. Kada je $K = X$, kažemo da je (X,d) kompaktan metrički prostor.

Definicija 4. Podskup K metričkog prostora X naziva se relativno kompaktnim ako je $\overline{K}$ kompaktan.

$\overline{K}$ – zatvorenje skupa K

$C(K)$ – skup svih neprekidnih funkcija definisanih na kompaktnom skupu K sa vrednostima u skupu kompleksnih brojeva C.

Definicija 5. Skup $T \subset C(K)$ je ekvineprekidan u tački $x_0 \in K$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, za sve $f \in T$ i sve $x \in U(x_0) \cap K$.

Skup T je ekvineprekidan na skupu $S \subset K$ ako je on ekvineprekidan u svakoj tački skupa $x_0 \in S$.

Lema: Ako je $T = \{f_n : n \in N\} \subset C(K)$ ograničen ekvineprekidan skup funkcija na kompaktnom metričkom prostoru K, tada se za svako $\varepsilon > 0$ može izdvojiti podniz $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takav da je

$d(f_{n_k}, f_{n_l}) < \varepsilon$ za sve $k,l \in N$.

Teorema (Arcela-Askoli): Skup $T \subset C(K)$ je relativno kompaktan u $C(K)$ ako i samo ako je ograničen i ekvineprekidan.

Više o metričkim prostorima u [1].

4.2. Normirani, Banahovi prostori

Definicija 1. Neka je X vektorski prostor nad R ili C. Funkcija: $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ sa osobinama:

1. $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

naziva se norma, a $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor.

Definicija 2. Ukoliko je normiran prostor X kompletan u odnosu na metriku koju indukuje njegova norma, onda se on naziva Banahov prostor.

Definicija 3. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem. Preslikavanje $A: X \to Y$ sa osobinama:

$A(x+y) = Ax + Ay$ i

$A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad x, y \in X, \quad \lambda$ -skalar,

naziva se linearni operator (linearno preslikavanje).

S obzirom da je polje skalara Banahov prostor, u slučaju $Y = K$, K polje skalara (R ili C) govorimo o linearnim funkcionalima $\varphi: X \to K$.

Definicija 4. Neka su X i Y normirani prostori nad istim poljem i $A: X \to Y$ linearni operator. A je ograničen operator ako:

$(\exists M = const < +\infty) \ \|Ax\| \le M \cdot \|x\|, \ \forall x \in X$.

Definicija 5. Norma operatora A se definiše na sledeći način:

$\|A\| = \inf\{M : \|Ax\| \le M\|x\|, \ \forall x \in X\}$.

Definicija 6. Neka su X i Y normirani prostori i $A: X \to Y$. A je neprekidan operator u tački x_0 ako za svako $x_n \to x_0$ važi $A(x_n) \to A(x_0)$.

Više o normiranim prostorima u [1].

4.3. Hilbertovi prostori

Definicija 1. Neka je X vektorski prostor nad poljem K ($K=R$ ili $K=C$). Neka je $\Phi: X\times X\to K$ preslikavanje za koje zahtevamo da ima sledeće osobine:

1. $\Phi(\alpha x+\beta y,z)=\alpha\ \Phi(x,z)+\beta\ \Phi(y,z)$ - linearnost po prvoj promenljivoj
2. $\Phi(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}\ \Phi(x,y)+\overline{\beta}\ \Phi(x,z)$ - antilinearnost po drugoj promenljivoj.

Ovako definisano preslikavanje nazivamo seskvilinearna forma.

Ako je ovo preslikavanje linearno i po drugoj promenljivoj, nazivamo ga bilinearna forma.

Definicija 2. Seskvilinearna forma se naziva hermitska forma ukoliko je: $\Phi(f,g)=\overline{\Phi(g,f)}$.

Definicija 3. Ako je forma Φ hermitska takva da je $\Phi(f,f)>0$ za svako $f\neq 0,\ f\in X$, onda se ona naziva skalarnim proizvodom. Prostor X u koji je uveden skalarni proizvod naziva se unitarni prostor.

Definicija 4. Hilbertovim prostorom se naziva svaki Banahov prostor čija je norma indukovana nekom seskvilinearnom formom sa osobinom $\Phi(f,f)>0$, za svako $f\neq 0$.

Definicija 5. Adjungovan operator operatora A je operator A^* za koga važi: $\langle Af,g\rangle=\langle f,A^*g\rangle$. Pri tome važi: $\|A\|=\|A^*\|$. Ako je $A=A^*$ reč je o samoadjungovanom operatoru.

Više o Hilbertovim prostorima u $[1]$.

4.4. Distribucije

Definišimo konvergenciju na prostoru $C_0^\infty(R^n)$ beskonačno diferencijabilnih funkcija na sledeći način:

Definicija 1. Za niz funkcija $\varphi_j\in C_0^\infty(R^n)$ kažemo da konvergira ka funkciji $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1.Postoji kompaktan skup $K \subset R^n$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ za svako j.

2.Za svaki multiindeks α, niz $D^\alpha\varphi_j$ uniformno konvergira ka $D^\alpha\varphi$ na K kad $j \to \infty$.

Prostor $C_0^\infty(R^n)$ sa ovako definisanom konvergencijom označavamo sa $D = D(R^n)$.

Definicija 2. Linearne neprekidne funkcionale na skupu $D(R^n)$ nazivamo distribucijama ili generalisanim funkcijama. Skup distribucija označavamo sa $D' = D'(R^n)$. Vrednost distribucije $f \in D'$ na osnovnoj funkciji $\varphi \in D$ označavamo sa $\langle f,\varphi\rangle$. Pri tome $\langle f,\varphi\rangle \in C$, i važe sledeći uslovi:

linearnost: $$\langle f,\lambda\varphi+\mu\psi\rangle=\lambda\langle f,\varphi\rangle+\mu\langle f,\psi\rangle \quad \forall\lambda,\mu\in C,\forall\varphi,\psi\in D$$

neprekidnost: ako $\varphi_k \to \varphi, k \to \infty$ u D

tada $\langle f,\varphi_k\rangle \to \langle f,\varphi\rangle, k\to\infty$ u C.

Definicija 3. Za niz distribucija $f_k \in D'$ kažemo da konvergira ka f i pišemo $f_k \to f$, $k \to \infty$ ako:

$$\langle f_k,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle, k\to\infty,\ \forall\varphi\in D.$$

Definicija 4. Za distribuciju $f \in D'$ kažemo da se anulira u oblasti Ω i pišemo:

f=0 u oblasti Ω ili f(x)=0, $x \in \Omega$

ako je $\langle f,\varphi\rangle = 0, \forall\varphi\in D(\Omega)$.

Neka je f(x) $\in L_{1,loc}(R^n)$. Neposredno se proverava da je sa:

(1) $$\varphi(x) \to \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx$$

definisan jedan linearan ograničen funkcional na $D(R^n)$. Odnosno, svaka lokalno integrabilna funkcija indukuje jednu distribuciju.

Definicija 5. Distribucija indukovana nekom lokalno integrabilnom funkcijom, određena formulom (1), naziva se regularnom.

Lema (Du Bois Raymond). Distribucija indukovana lokalno integrabilnom funkcijom f(x) se anulira u oblasti Ω ako i samo ako je f(x)=0 skoro svuda u oblasti Ω.

Dalje ćemo svaku regularnu distribuciju izjednačavati sa odgovarajućom lokalno integrabilnom funkcijom koja je indukuje i pisati:

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Definicija 6. Za distribuciju $f \in D'$ kažemo da pripada skupu $C^m(\Omega)$ ako se u oblasti Ω ona može izjednačiti s funkcijom $f_\Omega(x) \in C^m(\Omega)$.

Definicija 7. Distribucija se naziva se singularnom ako nije regularna, odnosno ako nije indukovana nekom lokalno integrabilnom funkcijom.

Na taj način je skup lokalno integrabilnih funkcija potopljen u skup distribucija. Time opravdavamo naziv generalisane funkcije za distribucije.

Potvrda da singularne distribucije zaista postoje je Dirakova distribucija definisana na sledeći način:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in D.$$

Dokaz ćemo izvesti indirektno, pretpostavljajući da postoji funkcija f(x) $\in L_{1,loc}(R^n)$ takva da je:

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \forall \varphi \in D(R^n).$$

Ako je $\varphi \in D(R^n)$ tada je i $x_1\varphi(x) = x_1\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(R^n)$, pa je:

$$\int_{R^n} f(x)x_1\varphi(x)dx = x_1\varphi(0)|_{x=0} = 0, \forall \varphi \in D(R^n).$$

Prema lemi Du Bois Raymonda je $x_1 f(x) = 0$ skoro svuda, odnosno $f(x) = 0$ skoro svuda pa je:

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Iako je singularna Dirakova distribucija se može predstaviti kao granična vrednost niza beskonačno glatkih funkcija, npr.

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x), \varepsilon \to +0,$$

gde je:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} C_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geq \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Konstanta C_ε se dobija iz:

$$\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Ako je $\varphi \in D(R^n)$ proizvoljna osnovna funkcija, tada za svako $\eta > 0$ postoji $\varepsilon_0 > 0$, tako da kada je $|x| < \varepsilon_0$ bude $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Izaberimo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Tada je:

$$\left|\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \left|\int_{K_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx\right| \leq \eta \int_{K_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)dx = \eta,$$

tj. $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Primetimo da je $\delta(x) = 0$ u svakoj oblasti koja ne sadrži koordinatni početak, pa je stoga $\text{supp}\,\delta = \{0\}$.

Dirakova distribucija opisuje raspodelu koncentrisanih veličina kao što su materijalna tačka, tačkasti izvor energije itd.

Više o distribucijama u $[4]$.

4.5. Prostori Soboljeva

Definicija 1. Neka je Ω oblast u R^n. Za $k \in N_0$ definišemo prostore Soboljeva $H^k(\Omega)$ i $H^k_{loc}(\Omega)$ na sledeći način:

$$H^k_{loc}(\Omega) = \{f \in L_{2,loc}(\Omega) : D^\alpha f \in L_{2,loc}(\Omega),\ \forall \alpha : |\alpha| \le k\} \text{ i}$$

$$H^k(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega),\ \forall \alpha : |\alpha| \le k\}.$$

Pri tome se izvodi shvataju u smislu izvoda distribucija. Specijalno, za $k = 0$ označavamo: $H^0_{loc}(\Omega) = L_{2,loc}(\Omega)$ i $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Pored toga, $L_2(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom:

$$(f,g)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

i normom:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Prostor $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom:

$$(f,g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx$$

i normom:

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Definicija 2. Neka je Ω ograničena oblast u R^n, s granicom $\partial\Omega \in C^1$. Neka su $a_{ij}(x) \in L_\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,2,...n)$, $c(x) \in L_\infty(\Omega)$ i $d(x) \in L_\infty(\partial\Omega)$ realne funkcije, pri čemu je $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. Tada je:

$$W(f,g) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_j}dx + \int_\Omega c(x)f(x)\overline{g(x)}dx + \int_{\partial\Omega} d(x)f(x)\overline{g(x)}dS$$

Hermiteova forma na $H^1(\Omega)$.

Više o prostorima Soboljeva u [4].

Zaključak

Spektralni problemi su značajni prilikom ispitivanja rešenja početno-graničnih problema kod diferencijalnih jednačina.

U ovom radu razmatrani su spektralni problemi koji sadrže singularnu distribuciju, odnosno Dirakovu distribuciju.

U prvom delu rada prikazana su analitička rešenja spektralnih problema sa različitim graničnim uslovima.

U drugom delu rada izvršena je aproksimacija spektralnog problema sa mešovitim graničnim uslovima. Aproksimacija je izvršena pomoću metode konačnih razlika. Konstruisana je diferencijska shema za rešavanje problema.

Izvedene su ocene brzine konvergencije i greške aproksimacije diskretizovanog Šturm-Liuvilovog problema. Pokazane su neke osobine sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija spektralnog problema.

Prilikom grafičkog prikazivanja rešenja spektralnog problema korišćen je program Graph.

Literatura

[1] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić, Danko Jocić: *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu (1998).

[2] Соња Геговска-Зајкова: *Спектрални проблеми кои содржат сингуларни дистрибуции и нивна примена*, Докторска дисертација, Природно-математички факултет, Институт за математика, Скопје (2003).

[3] Sonja Gegovska-Zajkova: *Numerical solution of Sturm-Liouville problems containing spectral parameter in boundary or interface conditions,* Математички билтен (2005), Скопје.

[4] Boško Jovanović: *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet, Beograd (1999).

[5] Boško Jovanović, Desanka Radunović: *Numerička analiza,* Matematički fakultet, Beograd (2003).

[6] Julka Knežević-Miljanović, Svetlana Janković, Jelena Manojlović, Vladimir Jovanović: *Parcijalne diferencijalne jednačine - teorija i zadaci*, Univerzitetska štampa, Beograd (2000).

[7] Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić: *Diferencijalne jednačine,* Matematički fakultet, Beograd (2000).