УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Dr И. В. АРНОВЉЕВИЋ

ОСНОВИ
ТЕОРИСКЕ МЕХАНИКЕ

I

УВОД У МЕХАНИКУ. МЕХАНИКА ТАЧКЕ

ИЗДАЊЕ ЦЕНТРАЛНОГ УДРУЖЕЊА СТУДЕНАТА ТЕХНИКЕ

БЕОГРАД 1947

Одбор Фонда за издања Београдског универзитета, на својој седници од 22 октобра 1946 године, донео је одлуку да се књига *Dr Ивана Арновљевића, Основи теориске Механике I (Увод у Механику. Механика тачке)*, штампа као универзитетски уџбеник у 3000 примерака.

„КОСОВО“
Штампарија МИХАЈЛА К. ЂУРЧИЋА — Београд
Космајска 20 — Тел. 28-506

Предговор

Предавање из Теориjске механике, коjа држим на техничком факултету за слушаоце грађевинског и машинског отсека, простиру се на три семестра (други, трећи и четврти). Према томе подељена су и ова „Предавања“ у три дела. Први део обухвата увод у Механику и Механику материјалне тачке, други део Статику верижног полигона (ланчанице), круте плоче и тела, а трећи део: опште теореме система тачака, Кинематику и Динамику крутог тела.

Први и други део саставио је мој асистент г. Инж. Светозар Нешић из мојих литографисаних предавања из 1912 год. и из бележака којима сам предавања у току од две деценије допунио и изменио. У свом раду корисно се послужио стенографским белешкама мога одличног, на жалост рано преминулог слушаоца Ђорђа Гутеше. Рукопис г. Нешића прегледао сам и унео измене и допуне које сам за потребно нашао.

У својим првобитним предавањима ослањао сам се на уџбеник мога учитеља, J. Finger-a „Elemente der reinen Mechanik“. У доцнијим допунама и изменама служио сам се делима: E. Mach-a, A. Ritter-a, A. Föppl-a, M. Grübler-a, Ed. Autenrieth-a, Th. Pöschl-a и E. Wolf-a.

Због претрпаности Графичког завода при Техничком факултету другим пословима није могло литографисање првог тела, започето у октобру 1932., ни до данас бити довршено. Стога је први део раздељен у две свеске. Ова прва свеска садржи увод у Механику, Кинематику тачке и Динамику праволинијског кретања, друга свеска садржаће Динамику криволинијског кретања и Статику тачке.

Београд, у јуну 1934.

Ив. Арновљевић

Предговор

другом издању

Прво издање „Механике Тачке" литографисано 1934. у двема свескама са 554 страна и 239 слика нестало је било из промета почетком 1941. По жељи „Удружења студената машинске и електротехнике" спремио сам био исте године прерађена предавања и предао их литографу, али је рукопис при бомбардовању у априлу пропао.

На позив Одбора за штампање уџбеника Техн. факултета јула прошле године поднео сам поново прерађени рукопис који је на основу повољног реферата примљен од стране Савета техничког факултета а одлука одобрена од Универзитетских власти. „Централно удружење студената технике" (Ц. У. С. Т.) примило се издавања књиге.

Садржај и распоред материјала у овој књизи остао је непромењен сем неких малих додатака (чл. 68, 73, 83, 84, 105, 106), док је обим књиге знатно смањен, а тим у вези и број слика за преко стотину. Појмови и теореме објашњени су упоредно геометријским, векторским и аналитичким методама, јер техничару није довољно да познаје законе Механике, него их мора умети применити на решавање конкретних техничких задатака.

Универзитетске власти и Централно удружење студената технике омогућили су да је овај први део уџбеника Стереомеханике угледао света; ја им за то изјављујем своју захвалност.

У припремању материјала за штампу био ми је од велике помоћи Dipl. Ing. Милан Вречко, доцент Универзитета. Он је извео све слике, савесно водио коректуре, саставио садржај и регистре, давао ми корисне савете техничке природе. Њему је помагао у вршењу коректуре Dipl. Ing. Душан П. Лазаревић, асистент Универзитета. Обојици сам на њиховом труду захвалан.

Најзад заслуга је радног колектива штампарије „Косово", да техничка опрема ове књиге не заостаје иза опреме сличних уџбеника у иностранству.

У Београду 5 марта 1947.

Ив. АРНОВЉЕВИЋ

Садржај

ГЛАВА III

ДИНАМИКА ТАЧКЕ

ГЛАВА IV
СТАТИКА ТАЧКЕ

МЕХАНИКА ТАЧКЕ

ГЛАВА I

Основни појмови и аксиоми Механике

1. Увод. Механика је основна и најстарија грана Физике. Физика се бави опажањем и изучавањем природних појава. Носиоца свих природних појава зовемо материјом, а омеђени део материје материјалним телом. Скуп свих особина (положај, запремина, облик, тврдоћа, боја, температура итд.), које на неком телу опажамо, чини стање тог тела у том тренутку. Промену једне или друге особине тела у току времена, дакле промену њеног стања, зовемо природном појавом. Сретства, помоћу којих опажамо природна стања и појаве, јесу наша чула и њихова појачања: физикални инструменти, а резултати опажања чине наше искуство. Искуство стичемо или спонтаним појавама, тј. на онима које се независно од нас збивају, или на смишљено и намерно изазваним појавама: огледима. Сретство, помоћу кога изучавамо природне појаве, јесте наш разум, а резултат је природна наука. Искуство нас учи, да су природне појаве независне од места, времена и вршиоца опажања: оне се збивају правилно, по извесним законима. Задатак је нашег расуђивања, да те законе открије, да их класификује и подведе под што мањи број општијих закона. Што је мањи број најопштијих закона у некој области природних наука, тим је она савршенија. Када не би било правилности у природним појавама, имали бисмо гомилу чињеница, добивених опажањем, али наука никада не би могла постати.

2. Круто тело. Најпростије, јер најупадљивије, особине неког тела јесу: његов облик, запремина и положај. Оне чине његово просторно стање. Тело, чији облик и запремина остају у току времена у свим приликама приближно непромењени, зовемо чврстим телом. Наука расматра и таква замишљена (тј. која у природи не постоје) тела, у којих су облик и запремина апсолутно стални; за разлику од чврстих тела зовемо их крутим телима. Изучавањем запремине, облика и положаја крутих тела бави се Геометрија; она апстрахује од материје и изучава геометријска тела. Геометрија је, иако рационална наука, основана на искуству, јер до својих основних појмова долази из претставе о крутом телу.

3. Кретање и деформација. Промену положаја неког тела зовемо кретањем, а промену његова облика и запремине деформацијом Изучавањем кретања и деформације тела бави се Механика[1]). Појам „положај тела" има одређена смисла само ако наведемо и координатни систем, према коме одређујемо тај положај. У Геометрији је тај координатни систем замишљен, произвољан; у Механици он мора бити везан за неко тело, које зовемо основним телом (компаративно тело). И сама деформација тела своди се на кретање, наиме на кретање (померање) појединих његових делића према координатном систему, који је за то тело везан. Код крутог тела су та међусобна (релативна) померања његових делића у сваком случају трајно једнака нули. Кретања природних тела скопчана су увек са њиховим истовременим мањим или већим деформацијама. Увођењем крутог тела у Механику, упрошћавамо изучавање те сложене појаве, раздвајајући је а) у кретање тела сматраног крутим, према усвојеном основном телу, и б) у деформацију тела онаквог, какво је по своме природном саставу (еластично, пластично). Првим се задатком бави Механика у ужем смислу речи (Стереомеханика), а другим се бави засебна грана Механике: Наука о чврстоћи. Ми ћемо се бавити само чистим кретањем тела без обзира на његову деформацију, тј. сматраћемо га крутим.

4. Брзина тачке и стање кретања тела. Али и кретање крутог тела још је увек доста сложена појава. При кретању тела описиваће свака његова тачка једну непрекидну (континуалну) уопште криву линију, своју путању (трајекторију). Путање појединих тачака разликоваће се међу собом уопште по облику и положају односно координатног система (основног тела), према коме одређујемо кретање тела. У једном и истом размаку времена (међувремену) описаће свака телесна тачка одређени отсек своје путање, или известан пут. Истовремени путови појединих тачака разликују се међу собом не само по облику, него и по дужини. Однос путова Δs према одговарајућем размаку времена Δt, у коме су пређени, дакле израз $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ зовемо интензитетом кретања или средњом брзином тачке у размаку времена Δt. Замислимо, да размак времена постане бесконачно мали, у коме га случају зовемо једним тренутком: истовремени путови Δs разних тачака постаће такође бесконачно мали, али ипак уопште различите величине и различитог правца. Однос $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ приближиће се једној одређеној граничној вредности:

[1]) Кретањем линија, површина и тела, као и њиховим деформацијама, бави се и Геометрија, али она не узима у обзир време у коме се збивају та кретања и деформације нити узроке који их изазивају.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v \tag{4.1}$$

диференцијалном изводу пута по времену или брзини тачке у посматраном тренутку. Елемент ds пута уједно је и елемент тангенте на путању у оној њеној тачки, у којој се баш у том тренутку телесна тачка налази. Правац тангенте одређује правац кретања или правац брзине у том тренутку. Скуп брзина свих тачака једног тела у неком тренутку одређује стање кретања тела у том тренутку.

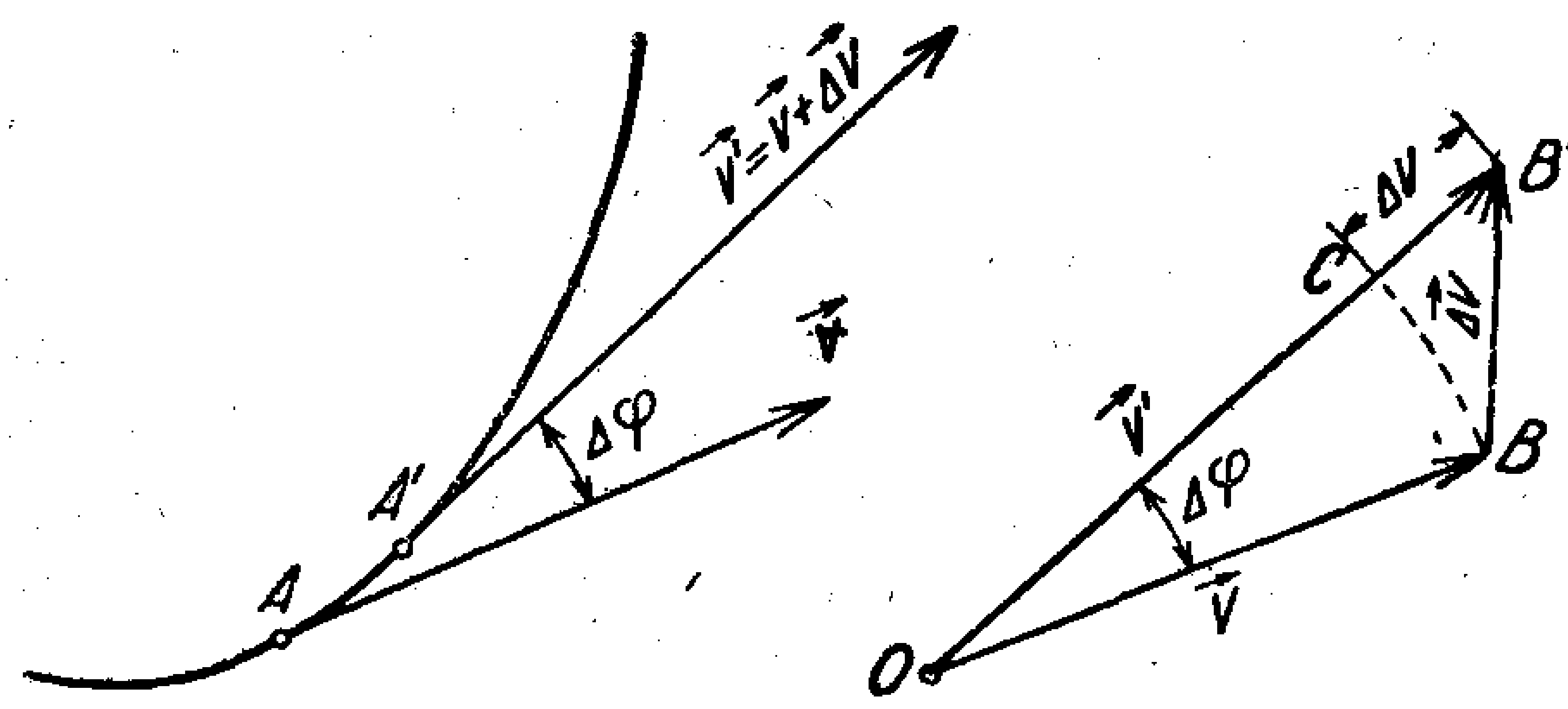
5. Транслација и ротација. Најпростије је стање кретања, када брзине свију тачака у једном тренутку имају исту величину и исти правац. Тада зовемо кретање тела транслаторним у томе тренутку. Геометријско је обележје транслаторног кретања, да свака права повучена у телу остаје за време таквог кретања сама себи паралелна. Ако су брзине у неком коначном међувремену једнаке и паралелне, описиваће све тачке у том времену подударне и хомологне (исте оријентације) путање. Путање могу бити праве или криве линије према томе, дали правац брзине остаје исте или се мења. Величина брзине може бити непроменљива, у коме случају кретање зовемо једноликим, или се може мењати са временом. Главно је обележје транслаторног кретања то, да кретање једне телесне тачке одређује и кретање целог тела. Ако пак при кретању тела две његове тачке A и B остају непомичне (разуме се увек према изабраном основном телу), онда се и све његове тачке на правој $\overline{AB}$, или осовини, неће кретати, а све остале тачке описаће кружне путање; равни тих кругова стајаће управно на осовину, а средишта ће им лежати на осовини. Такво кретање зовемо обртањем (ротацијом) око осовине. Сва остала кретања тела своде се, као што ћемо доцније видети, на транслаторно кретање и обртања око неке осовине.

6. Убрзање тачке. Промена стања кретања тела. Брзине појединих тачака тела мењаће од једног до другог тренутка уопште и величину и правац: стање кретања тела мењаће се. Величине, које се међу собом разликују по бројној количини и правцу, зовемо векторским величинама и бележимо их за разлику од алгебарских величина или скалара стрелицом изнад слова. (Види члан 12). Аналогно појму брзине добијамо појам убрзања (акцелерације) тачке, као граничну вредност:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}. \tag{6.1}$$

Брзина $\vec{v}$, коју телесна тачка има у тачки A путање, и брзина $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$, коју она има у тачки A' путање (сл. 6.1). заклапају угао $\Delta\varphi$ који је истоветан са углом што га заклапају тангенте на путању у тачкама A и

A'. Величину $\overrightarrow{\Delta v}$ претставља графички трећа страна троугла OBB' у коме стране $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ заклапају угао $\Delta\varphi$. Величина $\overrightarrow{\Delta v}$ је геометријски прираштај брзине $\vec{v}$, или геометријска разлика брзина v и v', док је Δv њихова алгебарска разлика. Када међувреме Δt конвергише према нули ($\Delta t \to 0$), приближује се $\Delta\varphi$ својој граничној вредности, контингентном углу $d\varphi$ у тачки A, а однос $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$, или средње убрзање у времену t, пре-



Сл. 6.1

лази у одређену величину одређеног правца $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}$, тј. у убрзање тачке у ономе тренутку t када се она налази на месту A. Правац убрзања $\vec{u}$ у тачки A заклапа са тангентом, дакле са правцем брзине, уопште угао који је различит од 0 и π Само у случају кретања по правој путањи је Δv истоветно са $\overrightarrow{\Delta v}$, те и правац убрзања пада стално у правац путање. Скуп убрзања свих тачака једног тела у неком тренутку одређује промену стања кретања тога тела у датом тренутку. Најпростија је та промена код транслаторног кретања: убрзања свих телесних тачака имају тада исту величину, исти правац и смер. Из дефиниције убрзања излази, да је убрзање неке тачке и онда различито од нуле, кад се тачка креће једнолико али по кривој путањи. Према томе: *стање кретања неког тела остаје непромењено само онда, када се тело креће транслаторно, једнолико, у правој линији.*

7. Сила и маса. Искуство нас учи, да се стање кретања неког тела не може самим собом променити, него само спољним утицајем других тела. Тај спољни утицај зовемо силом. Силе мењају стање кретања тела, али каква ће бити та промена, на то имају утицаја сем сила још и облик, запремина и једна трећа особина материје — маса тела. Дефиниција силе и масе дата је у члану 11.

8. Задатак Механике јесте, да нађе и изрази зависност која у једном тренутку постоји између спољних утицаја (сила) што делују на тело датог облика, запремине и масе, и тренутне промене његовог стања кретања. Та ће зависност бити изражена диференцијалним једначинама другога реда, у којима је време независна променљива, а дужина и углови који одређују положај тела, евентуално и силе, зависне променљиве. Сем тога садрже те једначине извесне сталне величине, које зависе од облика, запремине и масе тела. Интеграцијом тих једначина кретања добивамо коначне једначине, помоћу којих смо у стању да одредимо положај и стање кретања тела за сваки прошли и будући тренутак, ако познајемо положај и стање кретања у ма ком тренутку, т.зв. почетне услове. У тим коначним једначинама појављују се нове константе, интеграционе константе, које се одређују из познатог почетног положаја и стања кретања. *Механика је дакле наука о кретању тела и о силама.* Она је у стању из познате појаве да претскаже будућу појаву. Механика је природна наука, јер се оснива на чињеницама, које нам искуство пружа. Број тих емпиричних чињеница, основних начела или аксиома механике је мален, а на основи њих Механика изводи све законе кретања чисто рационалним путом, она је дакле по превасходству егзактна, математичка наука.

9. Материјална тачка. Решавање малочас наведеног задатка Механике биће тим лакше, чим је тело једноставније. Одузимањем особине деформабилности природном (чврстом) телу, ствара Механика замишљено, круто тело. Али и кретање крутог тела још је увек, као што смо већ напоменули, доста сложена појава. Зато Механика иде у апстракцији још за један корак даље, па одузима крутом телу и особину облика и запремине. Такво најпростије тело, које је обележено само својом масом, а коме занемарујемо облик и димензије, зовемо материјалном тачком или тачкастим телом. Његов је положај одређен једном јединoм његовом геометријском тачком. Материјална тачка садржи ма и најмању количину материје па дакле и масе, а разликује се од геометријске тачке тиме, што има своју запремину ма колико малу. Но димензије материјалне тачке могу бити врло мале, али не морају то бити. Материјална тачка јавља се у Механици као честица некога тела, али и као самостална материјална тачка. У првом случају морају димензије сваке честице, бити тако мале, да ће брзине појединих њених геометријских тачака бесконачно мало разликују, дакле да је њено кретање одређено кретањем једне једине њене геометријске тачке, другим речима да можемо кретање те честице приближно сматрати транслаторним. Самосталном материјалном тачком можемо сматрати свако произвољно велико тело, чије су димензије према димензијама путање врло мале (небеска тела). И овде имамо у виду кретање једне једине његове геометријске тачке, средишта масе, а не обзиремо се на кретање осталих његових тачака према овом. Механика материјалне тачке је најједноставнији, али основни, део Механике, јер је она темељ свима осталим њеним деловима.

10. Принцип инерције. Инерцијални системи. Спољне утицаје, који мењају стање кретање неком телу K, назвали смо силама. Ради простијег расматрања претпоставимо да је то тело K материјална тачка, тј. да је његово стање кретања одређено једном јединим брзином. Спољни ће утицаји мењати уопште и правац и величину те почетне брзине, а у посебном случају мењаће или само правац или само величину брзине. У првом случају кретаће се тачка једнолико по кривој путањи, а у другом случају кретаће се по правој путањи са променљивом брзином: убрзано или успорено. Силе, које тело у његовом кретању успоравају или кретање онемогућују, називамо отпорима. Искуство нам каже, да ће промена брзине бити тим мања, што су мањи спољни утицаји који је изазивају. Када бисмо били у стању да те утицаје у једном тренутку потпуно уклонимо, тело би се од тога тренутка кретало једнолико у правој путањи оном брзином, коју је у томе тренутку имало, или би остало трајно у миру, ако је у томе тренутку било у миру. Ову чињеницу, основану на искуству и расуђивању, зовемо принцип инерције. I. Newton (Њутн, 1643—1727) је тај принцип формулисао као први аксиом или закон кретања: *Свако тело остаје у своме стању мира или једноликог кретања у правој, докле год није утиснутим силама приморано да своје стање промени.* (Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare).

Положај тачке, па дакле и непрекидни низ њених узастопних положаја који зовемо путањом тачке, зависа од координатног система на који односимо кретање. Путања ласте у ваздуху, коју посматрач на Земљи види као праву линију, чиниће се другом посматрачу у балону што лебди непомичан у ваздуху и обрће се око своје осовине, као крива завојна линија. Исказ начела инерције биће дакле потпун и одређен тек када наведемо и координатни систем, на који се односи.

Закони Механике изведени су из појава на Земљиној површини; они се односе на координатни систем Σ_1, везан за Земљину кору. Две осовине система леже у хоризонталној равни, а трећа је управљена према зениту. Тај систем учествује у трима Земљиним кретањима: обртању око њене осовине, кружењу око Сунца и кретању целог планетарног система у извесном опажаном правцу. Последња се два кретања могу са врло малом грешком сматрати праволинијским и једноликим према бесконачно удаљеним звездама некретницама. Али и кружни лук, који наш систем Σ_1 у своме дневном обртању опише разликоваће се — за кратко трајање опажане појаве — врло мало од праве линије, тако да и то кретање система $\sum_1$ можемо приближно сматрати праволинијском, једноликом транслацијом. Два или више једноликих праволинијских кретања тачке слажу се, као што ћемо доцније видети, у једно такође једнолико, праволинијско кретање. Координатни систем $\sum_1$, на који односимо кретање земаљских тела и у коме је откривено начело инерције, креће се дакле приближно транслаторно, једнолико, у правој путањи. Простим математичким расуђивањем налазимо да се једна тачка креће једнолико у правој путањи у односу на све координатне системе, који су међусобно крећу транслаторно и једнолико у правој путањи. Принцип инерције важи у свим тим системима, стога их зовемо: инерцијалним координатним системима или Галилејевим триедрима[1]). Ми сазнајемо само међусобна кретања тела, стога појам апсолутно непомичног тела (система) и кретања према овом, тј. апсолутног кретања, нема реалне егзистенције.

Координатни систем $\sum_1$, везан за Земљину кору, можемо сматрати инерцијалним само за кретања која се простиру на мали део Земљине површине и трају кратко време. Ми ћемо се скоро искључиво таквим кретањима бавити и сматраћемо систем $\sum_1$ апсолутно непомичним. Кретања на Земљи, која трају дуже и простиру се на већи део Земљине површине (Фуколово[2]) клатно, кретање зрна из далекометног топа), морамо односити на систем $\sum_2$, који је независан од Земљиног обртања око њене осовине. Такав је систем коме је почетак у тежишту Земљином T, а коме су осовине управљене према трима звездама некретницама A, B, C. Због огромне њихове даљине према пречнику Земљине путање, остају правци TA, TB и TC стално паралелни самим себи, систем $\sum_2$ је дакле инерцијалан. Најзад, кретање небеских тела морамо односити на координатни систем $\sum_3$, који је и од годишњег кретања Земљиног независан. Његов почетак узимамо у тежишту Сунчевом, или тачније у тежишту целог планетарног система, а осовине су му управљене према трима звездама некретницама. Тај систем се зове Коперников[3]) триедар по обновитељу хелиоцентричног система старих Грка. Системи $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ постепене су апроксимације савршеном али неостварљивом инерцијалном координатном систему.

---

[1]) Galileo Galilei (Галилео Галилеји 1564—1642) је нашао законе слободног пада, хоризонталног и косог хитца и тиме увео у Механику појам убрзања и појам силе. Пре њега била је сила позната само као притисак. Упоређујући кретање тешке тачке по стрмој равни са кретањем по хоризонталној равни, смањујући у мислима нагиб α до границе $\alpha \to 0$ дошао је до сазнања принципа инерције. Стога се с правом сматра оснивачем динамике.

[2]) L. Foucault (1819—1868).

[3]) N. Kopernik (1473—1543).

11. Дефиниција масе и силе. Принцип реакције. Спољни утицај који мења брзину неког тела, тј који му даје убрзање, (позитивно или негативно), долази увек од неког другог (или других) тела, тако да увек имамо међусобни утицај бар двају тела. О томе међусобном утицају тела искуство нам потврђује ове чињенице [4])

а) Две материјалне тачке A и B, које су у релативном миру или покрету, даће једна другој у извесним приликама убрзања у правцу спојне праве AB а у супротном смеру. Прилике у којима ће та убрзања наступити изучава експериментална Физика.

б) Ако са $\vec{u}_a$ обележимо убрзање тачке A, онда је $-\vec{u}_b$ убрзање тачке B. Искуство показује, да је однос $-\dfrac{\vec{u}_b}{\vec{u}_a}$ у свим приликама тј. било да су тачке електризоване, или да се притискују, или да се привлаче, сталан. Ми га можемо изразити разломком, у коме је бројитељ известан број m_a а именитељ број m_b, дакле:

$$-\frac{u_b}{u_a}=\frac{m_a}{m_b}.$$

Односом маса $\dfrac{m_a}{m_b}$ *двају тела A и B дефинишемо негативни реципрочни однос међусобних убрзања*, дакле:

$$\frac{m_a}{m_b}=\frac{u_b}{u_a} \tag{11.1}$$

в) Однос маса остаје исти, било да смо га одредили непосредно или посредно преко трећег тела C. Дакле је:

$$\frac{\dfrac{m_a}{m_c}}{\dfrac{m_b}{m_c}}=\frac{m_a}{m_b}.$$

И ово је чињеница, коју нам једино искуство открива. Не постоји логична потреба, да се две масе, које се у садејству са трећом масом понашају као једнаке, понашају једнако и у међусобном дејству.

Из дефиниције односа масе излазе непосредно и ове чињенице: 1) Две масе су једнаке, ако међусобно одређују једнака убрзања (супротног смера); 2) Масе су увек позитивне величине; 3) Величину једне масе можемо произвољно бирати, а тим избором утврђене су величине свих осталих маса.

Силом дефинишемо производ из масе тела и убрзања које добива. Кад тело масе m има убрзање u у неком тренутку, кажемо да га напада сила

[4]) E. Mach, 1867 (1838—1916).

$$\vec{P} = m\vec{u}. \tag{11.2}$$

Стрелица означује, да сила и убрзање имају исти правац и смер. Дефиницију силе дао је Њутн у своме другом закону кретања: *Промена кретања сразмерна је утиснутој сили и бива дуж праве линије у којој сила дејствује* (Lex II: Mutationem motus proporcionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur).

Дефиниција силе садржи већ принцип инерције. Јер кад тело не подлежи спољњем утицају ($\vec{P} = 0$), онда је по дефиницији силе $\vec{P} = m\vec{u}$ и убрзање $\vec{u} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, дакле $\vec{v} = \text{const.}$, тј. тело се креће сталном брзином у правој путањи.

Из дефиниције односа двеју маса (једначина 11.1) добивамо $m_a u_a = m_b u_b$ или с обзиром на дефиницију силе (једначина 11.2):

$$P_a = P_b,$$

тј. сила, којом тело A дејствује на тело B, једнака је сили, којом B дејствује на A. Ову чињеницу исказао је Њутн у свом трећем закону кретања: *Дејству, (акцији), увек је супротна и једнака реакција, или: међусобна дејства двају тела увек су једнака и у супротне стране управљена.* (Lex III: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi). Овај закон излази већ из дефиниције масе, не исказује дакле никакву нову чињеницу.

12. Скаларне и векторске величине. Према броју података, који одређују неку механичку и уопште физичку величину, делимо све физичке величине у две групе. У једну спадају све оне величине, које су својом јединицом (врстом) и једним бројем потпуно одређене. Број који казује количину може бити позитиван или негативан (на пр.: време, температура) или мора увек бити позитиван (као на пр. маса, кинетичка енергија). Такве величине зовемо скаларним величинама, или краће скаларима, јер су одређене бројевима једне скале (на пр. скале термометра) У другу групу спадају све опе величине, које имају свој одређени правац и смер. Такве величине зовемо управљеним или векторским величинама, или краће векторима. Сваки вектор одређен је са четири податка: јединицом (врстом), величином (мерним бројем), правцем и смером. Векторске су величине — које већ познајемо — брзина, убрзање, сила. Сваку векторску величину можемо геометријски претставити отсечком AB једне праве линије. Дужина AB претставља апсолутну величину, или интензитет вектора; правац претставља правац вектора, а смер од почетка A према крају B претставља смер вектора, који обележавамо обично са стрелицом: $\vec{AB}$.

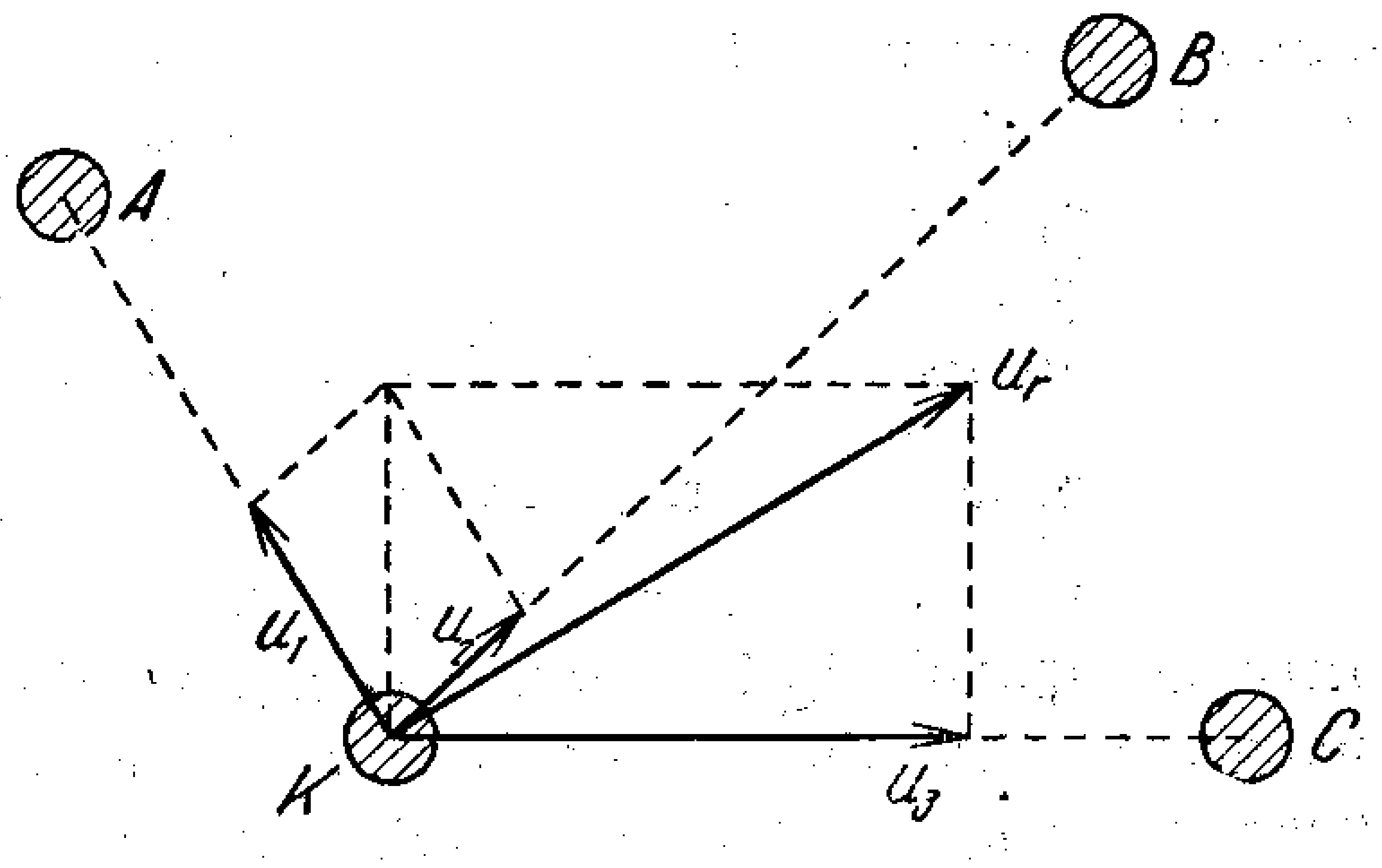
По њиховом физичком значају разликујемо три врсте вектора: а) векторе везане за тачку. Два таква вектора само су онда идентична, ако — сем исте величине, правца и смера — имају и исти почетак или нападну тачку A. Примери вектора везаних за тачку су: брзина, убрзање једне материјалне тачке, тежина једног телесног делића. б) векторе везане за линију. Такав вектор не мења свој физикални значај, ако му почетак A померимо у ма коју тачку његове нападне линије или његовог носиоца. Примери за овакве векторе јесу: сила, која напада неко круто тело, ротациона брзина тела око једне осовине. в) слободне векторе. Такве векторе можемо померати не само дуж њихове нападне линије, него и ма на коју другу праву, паралелну њиховом носиоцу. Свака од тих паралелних правих може бити носилац вектора, а да се његов физикални значај тиме не мења. Примери за слободне векторе су: транслаторна брзина крутог тела, осовина спрега сила итд. Слободан вектор можемо тако померити, да се његов почетак поклопи са почетком координатног система; онда је вектор OA потпуно одређен ако познајемо његове пројекције OA_x, OA_y и OA_z на координатне осовине, другим речима ако познајемо координете његовог краја A. Слободан вектор одређен је са три скаларна податка. Вектор OA везан за своју нападну линију можемо тако померити, да његов почетак лежи у продорној тачки A на равни xy. Осим три податка слободног вектора потребне су још две координате тачке A. Вектор везан за линију одређен је дакле са пет скаларних величина. Најзад, вектор везан за тачку потребује за своје одређивање осим три података слободног вектора још и три координате своје нападне тачке, дакле свега шест скаларних величина.

Векторске су величине сложеније од скаларних величина, јер поред обележја бројне количине садрже још и обележје правца, оне су управљене величине.

Све рачунске операције које важе за скаларне величине, протежу се са извесним изменама и допунама и на векторске величине. У Механици имамо већином посла са управљеним величинама, стога је векторска анализа најприродније и најподесније математичко оруђе Механике. Њеним језиком изражени, имају сви закони Механике свој најпростији и најкраћи облик јер свака векторска једначине замењује три скаларне једначине. Али кад хоћемо неки образац Механике да применимо на један конкретан, бројни задатак, морамо га прво превести на језик координатне Геометрије.

13. Принцип независности дејства. Кад на тело (материјалну тачку) K утичу два или више тела A, B, C, ... даће му она убрзања $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ... (сл. 13.1). Једино на основу искуства (опажања) сазнајемо, да ће та убрзања бити иста, било да тела A, B, C дејствују на K узастопно (сукцесивно) или истовремено. Другим речима дејства појединих тела A, B, C, ... независна су једно од другога.

Услед истовременог дејства добиће тачка K одређено убрзање:

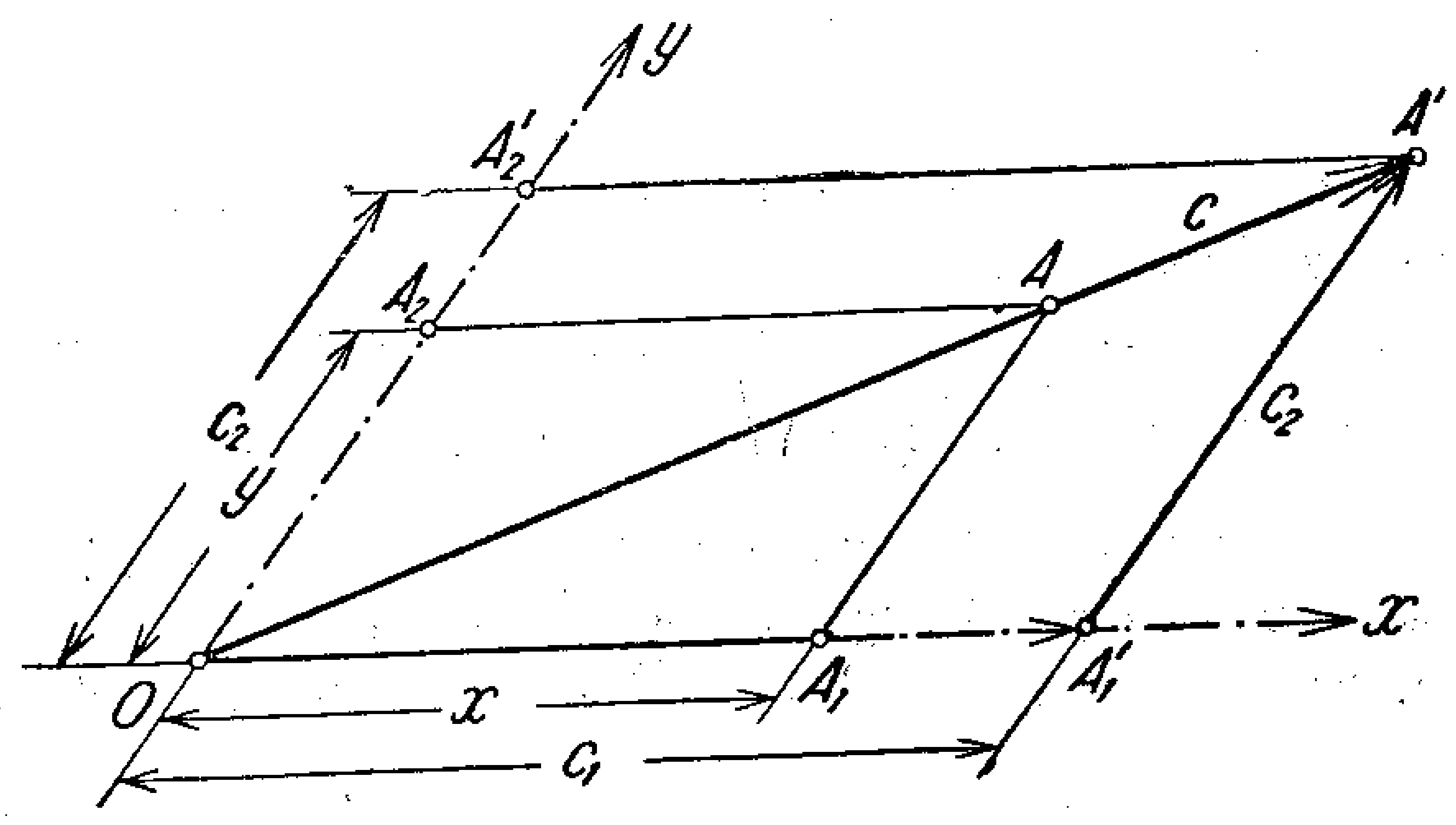


Сл. 13.1

$$\vec{u}_r = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \ldots + \vec{u}_n = \sum_1^n \vec{u},$$

које зовемо резултутујућим убрзањем. Уводећи појам масе тела K и појам силе, кажемо краће да је истовремено дејство сила $\vec{P}_1 = m\vec{u}_1$, $\vec{P}_2 = m\vec{u}_2$, $\vec{P}_3 = m\vec{u}_3$, ... еквивалентно (исте вредности) дејству једне једине силе $\vec{R} = m\vec{u}_r$. Силу $\vec{R} = \sum_1^n \vec{P}$ зовемо резултантом сила $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, ..., $\vec{P}_n$. Две групе сила $\sum_1^n \vec{P}$ и $\sum_1^r \vec{Q}$ које имају исту резултанту $\vec{R}$, дакле које дају телу K исто убрзање $\vec{u}_r$, зовемо еквивалентнима. Ако једна група сила не мења стање кретања тела K (односно брзину тачке K), онда кажемо да се та група сила налази у равнотежи. Ако је тело пре дејства такве групе сила било у миру ($v = 0$), онда ће и уз дејство те групе остати у миру.

14. Релативна и апсолутна брзина. Положај једне покретне тачке A у равни кретања одређен је према косом координатном систему Oxy њеним координантама $OA_1 = x$ и $OA_2 = y$ (сл. 14.1). Услов, да се тачка креће по правој OAA', је очигледно тај, да однос $\frac{x}{y}$ буде стална вредност. Замислимо, да у осовини x лежи правкрутштап, на коме се тачка A креће сталном брзином c_1[1]. Онда је $x = c_1 t$ пут



Сл. 14.1

[1]) Сталне брзине бележе се обично словом c (celeritas), а промењиве словом v (velocitas).

тачке по штапу. На концу прве, друге, ... секунде биће тај пут c_1, $2c_1$, ... Штап Ox нека се истовремено креће транслаторно сталном брзином c_2 у правцу осовине Oy, дакле тако да његов леви крај описује праву Oy. Пут тачке O, па дакле и целог штапа, је $y = c_2 t$. На концу времена t тачка A доћиће по штапу из O у A_1, а у истом тренутку налазиће се штап у положају A_2A. Пошто је однос $\frac{x}{y} = \frac{c_2 t}{c_1 t} = \frac{c_2}{c_1}$ константан, то ће се за једног непомичног посматрача тачка A кретати по правој OAA' сталном брзином. Посматрач, који би се налазио на штапу Ox, опажао би само кретање тачке дуж штапа и њене путове x. То кретање зове се релативно кретање тачке A, а путови x релативни путови. Ако је тачка у првој секунди превалила пут OA'_1, онда је $OA'_1 = c_1$ релативна брзина тачке A. Штап Ox носи тачку А и зове се носачем. Ако је његов леви крај, па дакле и цео носач, превалио у првој секунди пут OA'_2, онда је $OA'_2 = c_2$ брзина носача или преносна брзина; (vitesse d'èntraînement). Пут OAA'... што га опажа непомични посматрач зовемо апсолутним путом и пошто он у првој секунди износи OA', то је $OA' = c$ апсолутна брзина тачке. *Апсолутна брзина је* дакле *геометријски збир преносне и релативне брзине.* Ова теорема важи и у општем случају, када се преносна брзина v_p и релативна брзина v_r мењају, дакле је уопште апсолутна брзина $\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r$. Само неће у општем случају однос $\frac{y}{x}$ бити сталан, те ће апсолутна путања бити уопште крива линија. Тако на пример водена кап, која пада са крова вагона сталним убрзањем g, креће се за посматрача у вагону у вертикалној правој по закону $x = {}^1/_2\, g t^2$ (релативна путања). Вагон се рецимо креће у хоризонталној правој једнолико, дакле је пут носача $y = c_2 t$. Овде је однос

$$\frac{y}{x} = \frac{2c_2 t}{gt^2} = \frac{2c_2}{gt},$$

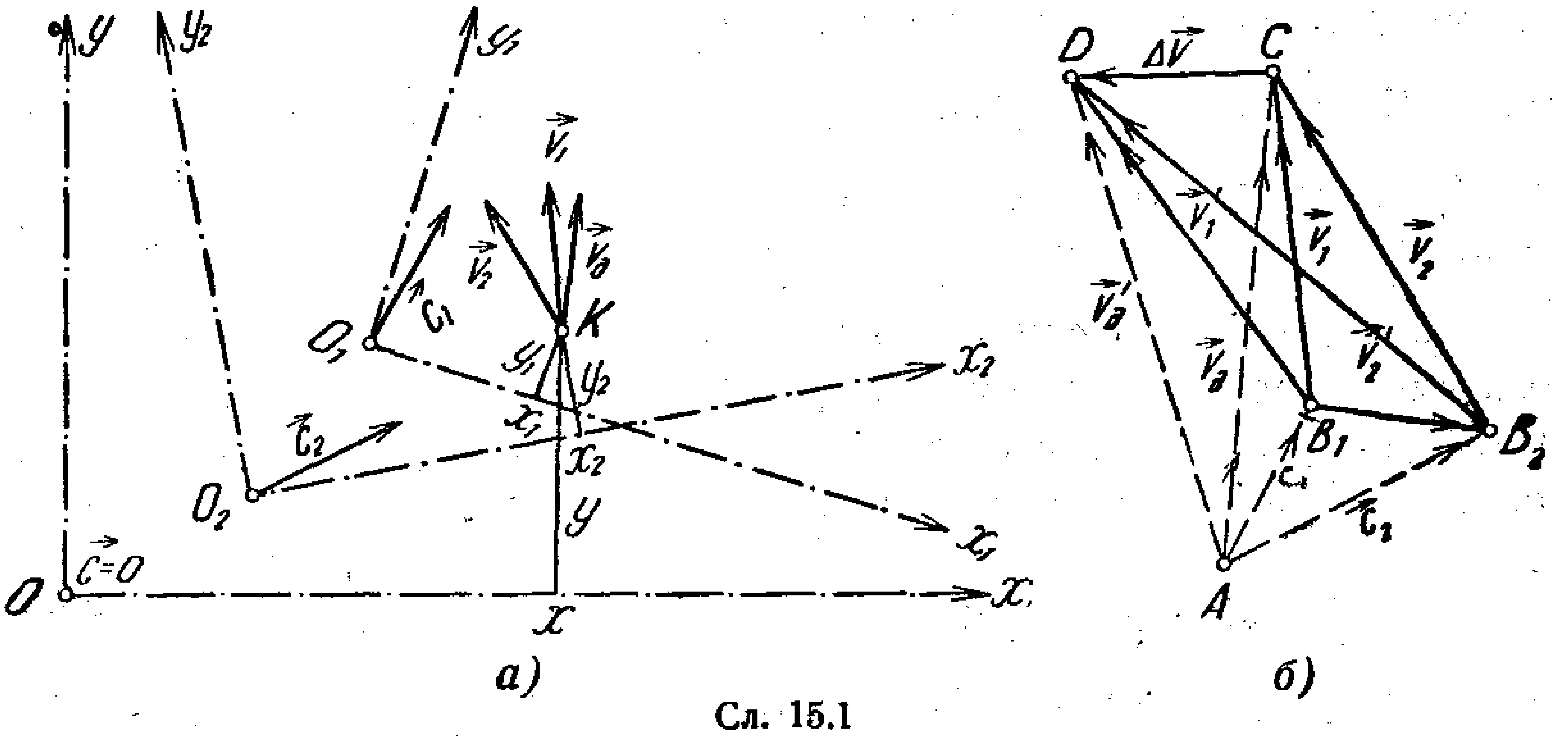
дакле са временом променљив, а апсолутна путања, коју непомични посматрач изван вагона опажа, крива је линија и то — као што се лако елиминацијом времена налази — парабола са вертикалном осовином: $y^2 = 2\frac{c_2^2}{g}x$, што је већ Галилеји нашао. Апсолутна брзина је геометријски збир преносне и релативне брзине не само у сматраном случају кад се носач транслаторно креће, него и у општем случају кад се он око произвољне осовине обрће; о овом ће доцније бити још говора.

15. Принцип релативности у Класичној Механици. Замислимо, да нам је познат један апсолутни тј. непомични координатни систем

Oxy (сл. 15.1.) и у њему посматрач S. Према овом систему нека се крећу два система $O_1x_1y_1$ и $O_2x_2y_2$ транслаторно сталним брзинама $\vec{c}_1$ односно $\vec{c}_2$. Оба система су дакле инерцијална и нека се на њима налазе посматрачи S_1 односно S_2. Једна тачка K креће се у равни коју односимо на сва три координатна система. У једном тренутку t одредиће посматрач S положај тачке K координатама x, y; посматрач S_1 координатама x_1, y_1, а S_2 координатама x_2, y_2. У томе тренутку утврдиће S да тачка K има брзину $\vec{v}_a$, S_2 ће наћи да је њена брзина v_1, а за посматрача S_2 биће брзина тачке $\vec{v}_2$. У идућем тренутку $t+\Delta t$ имаће те брзине друге величине и правце $\vec{v}_a'$, $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$. Брзине $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_a'$ су апсолутне брзине тачке K, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_1'$ њене релативне брзине за посматрача S_1 (за носач $O_1x_1y_1$), а $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_2'$ њене релативне брзине за S_2 (односно за носач $O_2x_2y_2$). Најзад $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ су непромењиве брзине носача S_1 и S_2 (преносне брзине). Према теореми, исказној у прећашњем члану, морају постојати једначине:

$$\text{у тренутку } t \quad : \quad \vec{v}_a = \vec{c}_1 + \vec{v}_1 = \vec{c}_2 + \vec{v}_2;$$
$$\text{у тренутку } t+\Delta t \quad : \quad \vec{v}_a' = \vec{c}_1' + \vec{v}_1' = \vec{c}_2' + \vec{v}_2'.$$

Те једначине читамо из сл. 15.1б). Из произвољне тачке (пола) A



Сл. 15.1

пренесемо векторе $\overrightarrow{AB_1} = \vec{c}_1$, $\overrightarrow{AB_2} = \vec{c}_2$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}_a$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{v}_a'$. Онда је $\overrightarrow{B_1C} = \vec{v}_1$, $\overrightarrow{B_1D} = \vec{v}_1'$, $\overrightarrow{B_2C} = \vec{v}_2$ и $\overrightarrow{B_2D} = \vec{v}_2'$. Геометријски значај двају једнаких векторских збирова је тај, да троугли AB_1C и AB_2C имају заједничку страну AC, а троугли AB_1D и AB_2D заједничку страну AD. Кад од другог израза одузмемо први, налазимо:

$$\vec{v}_a{}' - \vec{v}_a = \vec{v}_1{}' - \vec{v}_1 = \vec{v}_2{}' - \vec{v}_2 = \Delta \vec{v} \ ,$$

тј. да је прираштај брзине за међувреме Δt за сва три посматрача један те исти вектор $\overrightarrow{CD} = \Delta \vec{v}$.

Сваку промену брзине неког тела K приписујемо дејству једне силе чија је величина сразмерна тој промени и има исти правац и смер као и $\Delta \vec{v}$. Пошто смо видели да је промена $\Delta \vec{v}$ независна (инваријантна) од координатног система у коме се посматрач налази, то значи да ће сви посматрачи S, S_1 и S_2 из својих опажања утврдити: да је у тренутку t на тачку K дејствовала иста сила, другим речима они ће из својих опажања кретања извести исте законе Механике. У томе се сазнању састоји принцип релативности у класичној (Њутновој) Механици, које се може овако изрећи: *У свима инерцијалним системима механични су закони истовешни.*

Систем Oxy, од кога смо пошли при нашем расматрању и који смо претпоставили апсолутним, непомичним, такође је инерцијалан ($c = 0$), али он за нас нема реалности, јер не познајемо у васиони непомично тело за које бисмо га могли везати. Брзине $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{v}_a, \vec{v}_a{}' \ldots$ остају нам вазда непознате. Принцип релативности нам каже, да нам је ради сазнања закона Механике познавање тих апсолутних брзина сасвим непотребно. Геометријски изражено значи то, да у сл. 15.1б) можемо све векторе претстављене испрекиданим линијама заједно са полом A уклонити, а да се наше могућно сазнање о кретању не промени. Из $\vec{c}_2 = \vec{c}_1 + \overrightarrow{B_1B_2}$ закључујемо, када имамо на уму да је $\vec{c}_2$ апсолутна брзина система $O_2x_2y_2$, а $\vec{c}_1$ преносна брзина, да је $\overrightarrow{B_1B_2} = \vec{c}_{1,2}$ релативна брзина система Oxy према систему $O_1\,x_1\,y_1$, дакле брзина система $O_2x_2y_2$ коју опажа посматрач S_1. Обратно је $\overrightarrow{B_2B_1} = \vec{c}_{2,1} = -\vec{c}_{1,2}$ релативна брзина система $O_1x_1y_1$, коју опажа посматрач S_2. Из сл. 15.1б) видимо, да све брзине које посматрач S_1 опажа, полазе из пола B_1, а да брзине које S_2 опажа полазе из пола B_2.

Ако је прираштај брзине $\Delta \vec{v}$ бесконачно мали $d\vec{v}$ ($\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}$ убрзање тачке у тренутку t), онда су углови: DAC, DB_1C и DB_2C контингентни углови одговарајућих путања тачке. Из неједнакости тих углова закључујемо, да ће апсолутна путања и обе релативне путање бити уопште три различите криве линије.

Велики значај начела релативности лежи у сазнању, да закони Механике, које је Њутн поставио под претпоставком апсолутног простора, важе и за посматрача на Земљиној површини, јер сваки координатни систем везан за Земљину површину можемо (са ограничењем изложеним у чл. 10.) сматрати инерцијалним.

Да посматрач S_1 није у могућности да опажа брзину c_1 свога система $O_1x_1y_1$ казује нам сопствено искуство. Ми не примећујемо, да се са нашом Земљом транслаторно крећемо, иако нас она носи брзином од 30 km на секунду кроз васиону. Механичке појаве на железничким колима или на броду, који се крећу једнолико, збивају се на исти начин као на Земљиној кори. Камен који пусти путник на броду, падаће у вертикали по истом закону као и кад је пуштен на суву. Али ће путања камена на броду, која је за путника вертикална, бити за посматрача на суву парабола са вертикалном осовином.

16. Основне и изведене величине. Њихове димензије. Све величине, које је Механика ради решавања својих проблема дефинисала, изведене су рачунским операцијама, множењем и дељењем, из три величине: дужине l (longitudo), времена t (tempus) и масе (m). Ове величине, које се не могу на простије свести, зовемо основним величинама, а све остале изведеним величинама. Образац који показује којим је рачунским операцијама нека величина изведена из основних величина l, m, t, зове се димензионим обрасцем те величине (Fourier 1768—1830). Општи је облик једног димензионог обрасца неке изведене механичке и уопште физичке величине: $[l^p m^q t^r]$; за механичке величине су експоненти p, q, r увек цели, позитивни или негативни бројеви. Димензиони образац неке величине одређује њену врсту или димензију. Тако су на пример димензије брзине, убрзања, силе:

$$\dim v = [lt^{-1}]; \quad \dim u = [lt^{-2}]; \quad \dim P = [mlt^{-2}] \qquad (16.1)$$

У Геометрији имамо само једну основну величину: дужину. Из ње су изведене величине: површина $[l^2]$, запремина $[l^3]$. Угао као однос двеју истородних величина, дужине кружног лука и полупречника, има димензију: $[ll^{-1}] = [l^0] = [1]$, тј. величина угла је одређена неименованим бројем. Неименовани су бројеви и тригонометријске функције, на пример $\sin(kt)$, експоненцијалне функције $e^{\lambda t}$ итд. У последњим изразима су kt и λt неименовани бројеви, а t значи време, те су дакле димензије од k и : $\lambda[t^{-1}]$.

Ако је нека механичка величина независна од једне од основних величина, онда кажемо да је по тој величини димензије 1. Сабирати и одузимати можемо само истородне величине; сви чланови једне једначине морају имати исту димензију. На основи тога можемо често открити грешку у неком механичком обрасцу.

17. Мерење механичких величина. Њихове јединице. Свака механичка величина одређена је својом димензијом (врстом) и бројем, који казује колико се пута садржи у тој величини једна произвољно изабрана истородна величина, јединица или мера сматране величине. Избором јединица l_I, m_I, t_I за основне величине одређене су већ и јединице за све изведене величине. Резултат мерења неких величина изражен је обрасцима:

$$l = \lambda l_I; \qquad m = \mu m_I; \qquad t = \tau t_I \tag{17.1}$$

где су λ, μ, τ неименовани бројеви.

Нека величина N, која је дефинисана обрасцем:

$$N = l^p m^q t^r ,$$

биће изражена заменом из (17.1):

$$N = (\lambda l_I)^p\ (\mu m_I)^q\ (\tau t_I)^r = (\lambda^p \mu^q \tau^r)\ [l_I^p m_I^q t_I^r] \tag{17.2}$$

где је:

$$(\lambda^p \mu^q \tau^r) = \nu \tag{17.3}$$

број који казује колико се пута јединица

$$N_I = [l_I^p m_I^q t_I^r] \tag{17.4}$$

садржи у величини N; дакле је

$$N = \nu N_I . \tag{17.5}$$

Јединицу изведене величине добијамо дакле по (17.4), када у њен димензиони образац заменимо основне јединице. Количину изведене величине добивамо по (17.3), када у димензиони образац заменимо количине основних величина.

Исту количину неке изведене величине добићемо и из других количина $l' = \lambda' l_I$, $m' = \mu' m_I$, $t' = \tau' t_I$, ако бројеви λ', μ', τ' задовољава једначину:

$$\nu = \lambda^p \mu^q \tau^r = \lambda'^p \mu'^q \tau'^r . \tag{17.6}$$

Теоријски обрасци Механике морају бити независни од избора основних јединица, тј. морају бити х о м о г е н и у погледу на дужине, времена и масе. Нека су: l једна дужина, t време, m маса, v брзина, u убрзање, P сила, мерени извесним системом основних јединица. Ако затим изаберемо α пута мању јединицу дужине, β пута мању јединицу времена и γ пута мању јединицу масе, биће количине наведених величина у том новом систему (с обзиром на 16.1):

$$\alpha l,\ \beta t,\ \gamma m,\ \frac{\alpha}{\beta} v,\ \frac{\alpha}{\beta^2} u,\ \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} P.$$

Ако оставимо основне јединице неодређене, морају обрасци остати непромењени и онда када факторе α, β, γ произвољно бирамо.

Тако је на пример трајање осцилације математичког (или простог) клатна дужине l на месту где је убрзање Земљине теже g, дато обрасцем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

када изаберемо друге основне јединице, добивамо:

$$\beta T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha l}{\alpha g/\beta^2}} \quad \text{или} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

образац се није променио, дакле је хомоген.

На овим расматрањима оснива се теорија механичке сличности. Два система на пример парну машину и њен смањени модел назваћемо механички сличнима, ако су односи њихових дужина, времена, маса, брзина, убрзања и сила изражени у бројевима α, β, γ, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta^2}$, односно $\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$.

18. Јединице просторних величина. Просторне величине: облик, запремину и положај тела меримо дужинама и угловима. За јединицу дужине усвојен је готово у свима културним државама метар (m). Француска република увела је 1791. као законску јединицу дужине 10^7-ми део квадранта Земљиног меридијана, што пролази кроз Париз. Ту дужину изведену на основи француских геодетских премеравања (1792—1798), има француски прототип метра (étalon à bouts) што је депонован 1799. под именом законског метра у националном архиву у Паризу. То је штап правоугаоног пресека, од платине; његова дужина при температури од 0° C претставља дужину законског метра. Практични значај новог система мера не лежи толико у избору јединице, колико у увођењу децималног система при деоби јединице у мање јединице. Метар се дели у 10 дециметара (dm), у 100 центиметара (cm), у 1000 милиметара (mm). За мерење врло малих дужина у Физици служи хиљадити део милиметра или микрон (μ) и хиљадити део микрона или милимикрон ($m\mu$). За мерење већих дужина служи као јединица километар (1 km = 1000 m).

Многобројна градусна мерења у првој половини XIX. века показала су да је законски метар за 0,2 mm краћи него што би по дефиницији требало да буде. Циљ, да се за дужине уведе природна јединица, изведена из димензија наше Земље, није постигнут. Али тај циљ и нема више оправдања данас, када знамо да се услед Земљиног сажимања њене димензије мењају у току векова; свака јединица дужине, дефинисана као аликвотни део меридијана била би променљива, недостојала би јој особина сваке јединице: постојаност.

На међународном конгресу 1889. усвојиле су све европске државе сем Енглеске, метар као законску јединицу дужине. Стари француски прототип замењен је новим међународним прототипом, израђеним од смесе платине (90%) и иридијума (10%) која има чврстоћу челика. Ради веће крутоће штап има пресек облика ⋊⋉. На крајевима средњег ребра урезане су попречне црте (étalon à traits). Метром дефинишемо растојање тих двеју црта, када штап ставимо у лед што се топи. Тај се међународни прототип метра чува у међународном заводу за мере и тежине у Севру код Париза, а свака држава има копију тога еталона као свој државни прототип.

Метар-еталон такође није апсолутно стална дужина. Два еталона саграђена истом брижљивошћу од истог материјала, што би данас имали исту дужину, неће више бити исте дужине после дужег времена, услед деформација које ће у току времена претрпети. Много сталнија и уједно природна јединица дужине била би на пример дужина таласа једне одређене светлости.

Из јединице дужине изведене су јединице површине: квадратни метар (m^2), и његови делови: cm^2, mm^2, као и јединице запремине: кубни метар (m^3) и његови делови: dm^3 или литар, cm^3, итд.

Углове меримо степенима или радијанима. Степен је 360-ти део пуног угла. Степен се дели у 60 минута (60′), минут у 60 секунада (60″). У Француској је и у деоби угла доследно спроведен децимални систем. Пун угао подељен је у 400 центиграда, овај у 100 минути, минута у 100 секунада. Старе, дуодецималне, јединице угла стоје у простом односу са јединицама звезданог времена (види чл. 19).

У аналитичким обрасцима морамо стављати величину неког угла измереног лучном мером, тј. односом кружног лука према полуречнику. Између угла α^0 (у степенима) и истог угла $\widehat{\alpha}$ (у лучној мери) постоји однос:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^0 &= \frac{360^0}{2\pi}\,\widehat{\alpha} = 57^0\ 17'\ 44'',8\ \widehat{\alpha}\,, \\ \text{или}\qquad \widehat{\alpha} &= \frac{2\pi}{360^0}\,\alpha^0 = 0{,}01\,74\,53\ \alpha^0\,. \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

Углу $\alpha^0 = 57^0\,17'\,44'',8 = 206\,264'',8$ одговара јединица у лучној мери или радијан, а обратно је $1^0 = 0{,}01\,74\,53$ радијана.

19. О времену. Јединица времена. До претставе о времену долазимо опажањем промена периодичних појава око нас. Две или више појава, које су у истом тренутку почеле, завршиће се или у истом тренутку или у разним тренутцима. У првом случају говоримо о једнаком, у другом о различитом *трајању* тих појава. О трајању неке појаве можемо говорити само у односу на трајање неке друге појаве: *трајање* је релативан појам. Искуство нас учи, да односи између трајања разних појава остају исти, ма када и ма колико пута се те појаве поновиле у истим приликама.

Трајање једне појаве можемо мерити само трајањем неке друге појаве. Пошто све појаве стоје у међусобној зависности, то нисмо упућени на једну извесну меру (јединицу), него је можемо произвољно бирати. Ради што веће једноставности меримо трајање таквом појавом (променом), која је у свима својим најмањим деловима једнака, другим речима која једнолико протиче. Најпростија је појава, којом можемо мерити трајање сваке друге појаве, једнолико кретање.

Кретање зовемо једноликим, ако једнаки прираштаји пута одговарају једнаким прираштајима путова једног другог кретања на пример обртања Земљиног. Једно кретање може бити једнолико само у погледу на неко друго кретање. Питање, дали кретање може бити само по себи једнолико, нема смисла. Исто тако нема смисла говорити о апсолутном времену, независном од сваке промене. Време је апстракција, добивена опажањем промена око нас. Из релативности времена закључујемо, да када би се услед неких спољних утицаја трајања свих појава око нас и у нама у истом односу повећала или смањила, ми ту промену не бисмо приметили; сви закони Механике и Физике остали би непромењени.

Захтеву апсолутне постојаности, који постављамо свакој мери, одговара најтачније обртање наше Земље око своје осовине. Земљино обртање је наш најтачнији сат којим располажемо, иако није апсолутно тачан, јер знамо да појава плиме и осеке успорава обртање Земљино. Трајање[1]) једног пуног обрта Земљиног зовемо звезданим даном; то је време између два узастопна проласка ма које звезде некретнице (тј. бесконачно удаљене тачке) кроз меридијан места у коме опажамо. Звездани дан делимо у $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ звезданих секунада. Звездано време стоји у простом односу према подели круга на 360^0. Тако је један звездани час $(1^h) = 15^0$, 1 мин $= 15'$, 1 sec $= 15''$. Звезданим временом служи се Астрономија. У практичном животу и у осталим наукама служимо се средњим сунчаним временом. Време између два узастопна проласка Сунца кроз један меридијан зове се прави сунчани дан. Време које је потребно, да се Сунце у своме привидном кружењу око Земље — супротном дневном кретању — врати на исто место своје привидне путање (еклиптике) зове се тропска година. Годишње кретање Сунца није једнолико, а раван еклиптике није управна на обртну осовину. Свака од ових чињеница

1) По рачуну знаменитог астронома Лапласа (1749—1827) није се трајање једног Земљиног обрта од 729. пре Хр. дакле за 25 векова променило ни за 1/100 секунду.

напосе узрок је, што је прави сунчани дан променљиве дужине. Стога замењујемо стварно Сунце замишљеним, средњим Сунцем, које се креће једнолико у екватору и изврши једно пуно кружење за исто време као и стварно Сунце. Време између два узастопна проласка средњег Сунца кроз један меридијан зове се средњи сунчани дан он се дели на $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ средњих сунчаних секунада.

За време једне тропске године обрне се Земља 366,24 22 пута око своје осовине, тј. толико пута прође нека звезда некретница кроз један меридијан. За то време учинило је Сунце привидно један пун обрт у супротном смислу, прошло је, дакле једанпут мање кроз меридијан. Звездани дан је дакле једнак: $\frac{365{,}24\,22}{366{,}24\,22} = 0{,}99\,72\,70$-том делу средњег сунчаног дана, или једнак: $0{,}99\,72\,70 \times 86\,400 = 86\,164$ средњих сунчаних секунада.

За јединицу времена узима се у Механици, као и у практичном животу, средња сунчана секуда (1 sec). Она је дефинисана као 86 164-ти део трајања једног обрта Земљиног око своје осовине, може се дакле увек лако контролисати опажањем двају узастопних пролазака неке звезде некретнице кроз меридијан. За дуже трајање узима се за јединицу времена средња сунчана минута (у машинској техници) и средњи сунчани час (у жељезничком саобраћају).

Јединицама за дужину и време одређене су јединице за брзину: $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ односно $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\ \text{m}}{36000\ \text{sec}} = \frac{1}{3{,}6} = 0{,}27\ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ и јединице за убрзање: cm/sec^2, m/sec^2.

Да одредимо време, у ком је један догађај (на пример промена положаја тачке) наступио, потребан нам је сем јединице времена и почетак, од кога почињемо мерити време. Тај почетак ($t=0$) можемо, исто као и почетак координатног система, произвољно бирати. Изказ, да се неки догађај десио у времену t_1, значи да је од тренутка у ком смо почели мерити време ($t_0=0$) до тренутка у коме се догађај десио протекло $(t_1 - t_0) = t_1$ секунада.

Време је одређено бројем јединица, дакле је скаларна величина. Графички се може приказати правом линијом, на којој изаберемо једну тачку за почетак. Тачке на тој правој приказују тренутке, а дужи приказују међувремена или интервале.

Избором координатног система и почетка времена (епохе), као и јединицама за дужине и време, одређен је положај једне покретне тачке са четири броја: x, y, z и t.

20. Јединица масе. Апсолутни (физикални) систем мера. За јединицу масе можемо изабрати масу ма кога тела произвољне материје и величине, јер дефиницијом (в. чл. 11.) одређен је само однос маса двају тела, која стоје у међусобном дејству. За јединицу масе усвојен је у науци хиљадити део масе онога комада платине, што се чува у међународном заводу у Севру код Париза као прототип килограма. Та јединица, грам-маса (gr*) практично је једнака 1/1000 делу масе једног кубног дециметра хемијски чисте воде при температури од 4°C (тј. при највећој густини) и под нормалним ваздушним притиском.

Систем мера, у коме су основне јединице: центиметар, грам-маса и средња секунда, или краће систем (CGS), зове се апсолутни или физикални систем мера. Усвојен је на конгресу електричара 1881.

У том физикалном систему јединица силе (P_l=gr*cm sec^{-2}) је изведена јединица и по дефиницији она сила, која маси грама даје убрзање од једног центиметра у секунди. Та се јединица силе у систему (CGS) зове дин (dyn). Пошто је дин врло мала јединица, употребљује се у електротехници мегадин = 10^6 дина. По (17.6) мегадин је сила, која маси једног килограма даје убрзање од 10 метара у секунди, или маси од 10 kg убрзање од једног метра у секунди.

У Француској је 1919 год. узакоњен апсолутни систем мера за практичну употребу са јединицама: метар, маса тоне = 1000 kg* и секунда, тј. систем (MTS). Јединица силе у систему (MTS) зове се стен (sthéne, Sn) = 10^8 дина = 10^2 мегадина. Мегадин је дакле једнак стотинитом делу стена, или центистену.

21. Тежина. Технички систем мера. Најпознатија је и најважнија сила, са којом се у обичном животу као и у техничком раду сретамо, тежина тела тј. она привлачна сила, која стално дејствује између Земље с једне стране и свих тела око ње и на њој с друге стране. Правац те силе на једном месту Земље зовемо вертикалним правцем. Огледи нам показују, да сва тела — без обзира на величину њихове масе — падају истим, сталним убрзањем у вертикалном правцу на Земљу. Даље нас уче огледи, да величина тог убрзања теже (за које је опште усвојен знак g) зависи од географске ширине места на коме оглед вршимо. Највећа је вредност g=983,15 cm/sec^2 на половима, а најмања на екватору, g=978,07 cm/sec^2. На географској ширини од 45° је g=980,62 cm/sec^2. Убрзање теже мења се на истој географској ширини са висином. Наведени бројеви односе се на морску површину; на висини од 1000 m изнад морске површине смањује се g за 0,3 cm/sec^2. За све задатке, у којима није потребна нарочита тачност, усвајамо за g сталну, од места независну, вредност 981 cm/sec^2.

Према дефиницији силе (једначина 11.2) изражене су тежине Q_1 и Q_2 тела са масама m_1 и m_2:

$$Q_1 = m_1 g;\ Q_2 = m_2 g; \quad \text{дакле} \quad Q_1 : Q_2 = m_1 : m_2 \tag{21.1}$$

тј. масе тела односе се као њнхове тежине. Ова чињеница, која непосредно произлази из дефиниције силе и сталности убрзања теже потврђена је поновним огледима од Њутновог доба до данас, са све већом тачношћу коју су допуштала све савршенија средства (Newton, Bessel, Eötvös).

На основи сразмерности између масе и тежине у стању смо одредити масу неког тела кад познајемо његову тежину.

У дефиницији силе: $\vec{P} = m\vec{u}$ спојени су убрзањем тј. основним величинама дужине и времена две нове величине: маса и сила. Стоји нам до воље, коју ћемо од њих узети као трећу основну величину. Систем мера, у ком су: дужина, време и сила основне величине, зове се терестрички или технички систем; он се употребљава у свима гранама технике сем електротехнике. Јединице у техничком систему мера су: метар, средња сунчана секунда и тежина прототипа килограма (kg), коју има у Паризу. Последњи додатак је потребан за тачну дефиннцију тежине kg јер са убрзањем теже g мења се и тежина тела према месту на коме је мерено. Та је промењивост разним методама експериментално проверена. Тако је професор Jolly у München-u 1878. г. нашао помоћу теразија да се тежина једног килограма повећа за 1,51 милиграма, када тег виси за 5,3 m испод таса. Са практичног гледишта разлика тежине једног тела на разним местима Земље тако је малена, да се може пренебрегнути и тежина килограма сматрати сталном јединицом силе. У техничком систему је маса изведена величина, а њена је димензија:

$$\dim m = [P l^{-1} t^2]. \tag{21.2}$$

Називи: килограм, грам, итд. примењују се у двојаком смислу: као маса и као сила. Да бисмо уклонили двосмилицу, бележићемо масу са kg*, gr*. Тако је јединица силе у физикалном систему dyn $=$ gr* cm sec^{-2}, а јединица масе у техничком систему: $m_I =$ kg sec^2 m^{-1}.

Однос између јединица силе и масе у физикалном и техничком систему мера добијамо овим расуђивањем. Један дин је сила која маси gr* даје убрзање од 1 cm/sec^2; тежина 1 gr, пак даје истој маси при слободном паду убрзање од 981 cm/sec^2. Мегадин је сила која маси kg* даје убрзање од 10 m/sec^2, а тежина kg даје истој маси убрзање од 9,81 m/sec^2. Дакле је 1 gr $=$ 981 *dyn*; 1 kg $=$ 0,981 *Megadyn* (centisthène). Обратно је 1 *dyn* $= \frac{1}{981}$ gr $=$ 1,02 милиграма и 1 *Megadyn* $= \frac{1\,\text{kg}}{0{,}981} =$ 1,02 kg. Јединица масе m_I у техничком систему мера је она маса, којој тежина kg даје убрзање од 1 m/sec^2. Дакле у облику једначине с обзиром на (17.6): 1 kg$=$ 1 kg* 9,81 m/sec^2 $=$ 9,81 kg* 1 m/sec^2$=$

$= m_l$ 1 m/sec^2 тј. $m_l = 9{,}81$ kg*; јединица масе у техничком систему је 9,81 пута од исте јединице у физикалном систему.

Битна је разлика између техничког и физикалног система мера у томе, што у првоме једна основна јединица — сила — зависи од особина наше Земље, од Земљине гравитације, која је променљива са местом; стога се овај систем зове и терестрички. Због променљивости са местом у коме вршимо мерења, технички је систем мера неподесан за тачна научна мерења. Стога су C. F. Gauss и W. Weber увели 1838. у науку нови систем мера, основан на јединици масе, као сталне величине независне од наше Земље. Тај систем назвали су апсолутним системом. Од данашњег система мера (*CGS*) он се разликује само по величинама јединица. У Gauss-Weber-овом систему је јединица дужине милиметар, а јединица масе милиграм.

22. Састав материје. Статистичка Механика. Огледима, изведеним у разним областима Физике (хемијске, топлотне, оптичке, електричне и радиоактивне појаве), несумњиво је утврђен молекуларни састав материје. На основи опажања могућно је било срачунати величине и међусобна растојања молекула. Према томе верна би механичка слика природног тела била ова: Тело је систем из огромног броја дискретних материјалних тачака (молекула), које међусобно дејствују молекуларним силама. У растојањима, која молекули имају у чврстом и течном агрегатном стању тела ($< 0{,}10\ m\mu$) те су силе према спољним силама (на пример према тежини) врло велике, али кад та растојања пређу извесну границу (услед повишене температуре), молекуларне силе престају дејствовати (гасовито стање). Сваки молекул изводи кретања у извесној, према агрегатном стању већој или мањој, области. Та кретања по правцу и величини потпуно неправилна; у стању смо их опазити само у њиховим дејствима (притисак гаса на зидове суда, повишење или снижење температуре). Задатку, да се из датих сила и почетног стања кретања одреде кретања сваке појединие тачке, стављају се на супрот несавладљиве математичке тешкоће. Већ за систем од три тачке (проблем трију тела у Небеској Механици) решење до данас није успело. Неправилно кретање једне гомиле многих дискретних тачака можемо рачунски само тако претставити, ако се ограничимо на средње или просечно стање кретања целе гомиле. То је задатак Статистичке Механике. Она је у суштини примена Рачуна вероватноће на природне појаве. Као што обична (на супрот Статистичкој) Детерминистичка Механика из датог почетног стања једног тела одређује његова наредна стања, тако Статистичка Механика из датог вероватног стања једне гомиле неодређено великог броја тела процењује њена вероватна наредна стања. Битно је обележје Статистичке Механике да она никада не даје један одређен резултат, него само граничне вредности које обухватају вероватност неке појаве. Њени су закључци сагласни са искуством исто толико, колико и закључци ма које друге физикалне теорије.

Статистичка је Механика поникла из тежње, да се закони Термодинамике објасне принципима Механике. Најранији њен плод је Кинетичка теорија гасова. Али се њена примена не ограничава само на невидљива молекуларна кретања.

Већину еластичних и хидродинамичких појава могућно је математички описати, када разложимо тела у врло мале запреминске елементе који су још увек врло велики према растојањима у којима молекуларне силе дејствују. У тим случајевима целисходно је у интересу једноставнијег математичког приказивања да хипотезу о молекуларном саставу материје заменимо хипотезом о њеном континуалном простирању.[1])

У обим овим областииа Механике опажамо и таква кретања, која се не могу описати законима обичне Механике. Код течности, која као целина мирно струји, опажамо слободним оком ванредно променљива, неправилна титрања појединих делића; код чврстих тела, напрегнутих преко границе еластичности, наступа стање извлачења (видљиве деформације) и у том стању опажамо под микроскопом многобројне ситне кристале или кристалите, који мењају сасвим неправилно свој положај и оријентацију. И ове се две појаве видљивих неправилних кретања коначних маса могу теоријски приказати једино законима Статистичке Механике.

23. Подела Механике. Механика се може делити са разних гледишта (принципа деобе):

А. У погледу на задатке, којима се бави, дели се Механика обично на три нела: 1) Кинематика[2]) описује кретање тачке и разних система тачака (тела) не обзирући се при том на силе које та кретања проузрокују. У Кинематици се упознајемо са појмовима брзине и убрзања и са њиховим разлагањем у разним координатним системима, према којима одређујемо кретање. Расматрања у Кинематици независна су од материјалних особина тела, у њих улазе само две основне величине: дужина и време. Кинематика је, као и Геометрија, апстрактна наука. 2) Динамика[3]) истражује зависност између кретања тела и сила, које на тело дејствују. Она решава два супротна задатка: одређује кретање тела на које дејствују дате силе и одређује силе

---

[1]) Прве теорије еластичности (Navier, Poisson, Cauchy) оснивале су се на молекуларној хипотези, али се њихови резултати нису подударали са резултатима опажања.

[2]) Од грчке речи κίνημα = кретање као стање.

[3]) Од „ „ δύναμις = сила.

које на тело морају дејствовати, да би оно изводило једно дато кретање. Динамика је природна наука, јер се оснива, сем на појмовима дужине и времена и на појмовима масе и силе, који су апстраховани са опажања природних појава 3) Статика[1]) истражује услове под којима један систем сила, који неку тачку или тело напада, не мења стање кретања те тачке или тог тела, краће речено: испитује услова равнотеже једног система сила. Други је задатак Статике, да нађе услове под којима ће два разна система, који посебице нападају неку тачку или тело проузроковати на овима исту промену кретања, краће речено, да нађе услове еквиваленције двају система сила, а понаособ да нађе најједноставнији систем сила, који је неком датом систему еквивалентан, тј. да дати систем сила редукује на простији систем. Статика се оснива једино на појмовима: силе и дужине.

Подела Механике на: Кинематику, Динамику и Статику најстарија је и најобичнија. У новије доба неки аутори [проф. Heun (Хојн) у Karlsruhe] деле Механику само на Кинематику и Динамику. Динамика садржи као делове: Кинетику[2]) Статику и Кинетостатику. Кинетика (Динамика у ужем смислу речи) истражује законе кретања у вези са силама које га проузрокују. Кинетостатика одређује унутарње силе и отпоре у зглавцима и лежиштима система (међу собом спојених тела), који су у кретању. Она има важну примену у машинској техници.

Најприроднија је деоба Механике према основним величинама, које у појединим њеним гранама имају удела. Тако добивамо ове гране Механике:

1. Кинематика или Геометрија кретања[3]), са основним величинама: дужине и времена;

2. Статика, или Геометрија сила, са основним величинама: дужине и силе;

3. Геометрија маса, са основним величинама: дужине и масе; и

4. Кинетика са Кинетостатиком, са основним величинама: дужине времена, масе и силе.

Прва су три дела апстрактне дисциплине; оне чине прелаз од Геометрије ка Механици. Кинематика и Статика решавају формално исти задатак: обе дисциплине изучавају просторне односе једног система вектора; али је физикални значај вектора у обема различит. Стога свакој теореми Кинематике одговара аналогна теорема у Статици. Геометрија маса изучава просторне односе система скалара тј. тачака којима је по један број додељен; понаособ испитује линеарне, квадратичне моменте тела у погледу на тачку, праву и раван.

---

1) Од грчке речи: στασις = мировање.
2) Од „ „ κινησις = кретање као дејство.
3) Геометрија кретања у ужем смислу или Кинематичка геометрија изучава кретање без обзира на време.

Б. С обзиром на материјални систем, чије кретање изучава, разликујемо ове области Механике: 1) Механика материјалне тачке; она гради елементарне појмове, потребне за описивање кретања једне тачке. 2) Механика система материјалних тачака поставља најопштије законе кретања, који важе за све материјалне системе, без обзира на природу њиховог састава. За решавање својих задатака она гради из елементарних појмова системне појмове. Према томе дали се Механика бави кретањем замишљених (идеалних система), као: крутих, идеално еластичних тела, идеалних течности и гасова, или стварних, природних тела, говоримо о идеалној (теоријској) и физикалној Механици. О материјалном систему ствара Теоријска Механика себи две слике: дискретан систем, тј. сложен из материјалних тачака међусобно одвојених, и континуалан систем, у коме је сваки и најмањи мањи делић једног омеђеног простора испуњен материјом. У оба случаја, може конфигурација (конформација) система бити стално непроменљива (крута) или према спољним утицајима променљива. За описивање кретања непроменљивих система сасвим је свеједно дали их сматрамо континуалнима или дискретнима. Механика система дели се према томе у две групе: 2а) (Механика дискретних система. Овамо спада Механика небеских тела у колико их сматрамо тачкама, Механика крутог тела, (Стереомеханика) и Механика система крутих, међу собом везаних, тела. (Механика механизама). 2б) Механика континуалних маса. Овамо спада: Механика еластичних (Еластомеханика) и пластичних (Пластомеханика) чврстих тела, Механика течних тела (Хидромеханика) и Механика гасовитих тела (Аеромеханика).

В. С обзиром на метод, којим се служи, разликујемо геометријску и аналитичку Механику; прва конструише тражене величине, помоћу геометријских фигура и правила Синтетичне Геометрије, друга рачуна тражене величине, независно од геометријске фигуре, помоћу закона Аналитичке (координатне) Геометрије и Инфинитезималног рачуна. Из Геометријске Механике развила се особено за примену у грађевинској техници Графичка статика, а у најновије доба и Графичка динамика, примењена у машинској техници. У излагању механичких закона потискује Аналитичку Геометрију све више Векторска Геометрија и Анализа, тако да данас имамо трећи облик: Векторску механику (в. чл. 12).

24. Општа и примењена Механика. Теоријска механика бави се кретањем идеалних тела, добијених апстракцијом од природних тела. Природна је тежња науке, да све појаве сведе на најпростије, на кретање. Теоријска је механика стога основа свима гранама Физике. Најједноставнија, па стога и најстарија, грана Физике је Физикална механика; она истражује законе кретања природних тела, која стоје под утицајем природних сила. Величина тих сила (отпор трења, отпор средине итд.) и њихову зависност од других механичких величина налази она опажањем и огледом. Физикална механика почива стога на већем броју емпиричких закона, него ли Теоријска механика. Обе укупно називамо и Општом механиком.

Општа механика изучава кретање тела, уопште, не обзирући се на њихов значај у практичном животу; она ставља себи задатак, да кретање опише са што већом прецизношћу у колико то математичка средства и експериментална техника допуштају.

Примењена механика примењује законе Опште механике на специјалне, природне или техничке, објекте. Према тим објектима она се грана у: Техничку механику (Грађевинску и Машинску механику), Балистику (Науку о кретању пројектила), Механику физикалних апарата и Механику живих тела (Физиолошка Механика).

Технички проблеми траже од Механике што једноставније и што брже методе за постизавање жељеног резултата. Али зато они не траже апсолутну тачност тих резултата Сувишна и илузорна би била свака тачност, већа од тачности података које уносимо у механичке обрасце. Стога Техничка механика упрошћава строге, сложеније обрасце Опште механике уводећи нове претпоставке, а често их замењује емпиричким обрасцима, постављеним на основи непосредног искуства. Тако у Техничкој механици замењује Теорију еластичности Наука о чврстоћи, а теоријску Хидромеханику практична Хидраулика.

Тежња за што већом економијом у грађењу захтева, а све веће усавршавање грађевинског материјала, рачунских и експерименталних средстава и омогућава да се Техничка механика све више приближи Општој механици.

ГЛАВА II

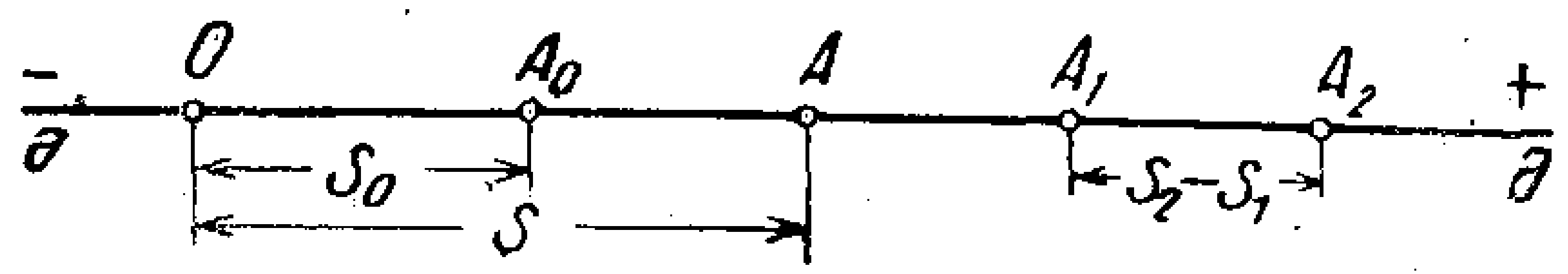
Кинематика тачке

25. Увод. Кинематика описује и изучава кретање без обзира на његове узроке (силе). Зато се све величине на које наилазимо у Кинематици, могу изразити међусобним релацијама просторних (дужинских) и временских величина, те се према томе њихове мере или јединице своде на основне: дужине (l_l) и времена (t_l)

Кретање једног система тачака сразмерно је доста сложена појава, јер кретања појединих тачака система зависе просторно и временски једно од другога. Да бисмо могли разумети ову зависност, потребно је да прво проучимо кретања појединe геометријске тачке. При томе ваља узети у обзир да путање могу бити праволинијске и да се криволинијско кретање тачке увек може претставити помоћу више праволинијских кретања. Стога почињемо са праволинијским кретањем тачке.

А. КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ У ПРАВОЈ ПУТАЊИ

26. Дијаграми пута, брзине и убрзања. Нека је права линија $a—a$ путања тачке A (сл. 26.1), а O произвољна тачка на њој, која нам служи као компаративна тачка за кретање тачке A. Положај тачке A одређен је, ако је дато растојање $\overline{OA}=s$ тачке A од O и ако је познато, на коју страну од O треба пренети дужину s. Како s може бити позитивно или негативно, преносићемо позитивне вредности s на једну а негативне на другу страну од O; тиме је положај тачке A једносмислено одређен. Кретање тачке A зависи од тога, како се s мења са временом t; кретање је одређено ако је дата математичка веза између s и t. Та се веза изражава симболично $s=f(t)$, где $f(t)$ значи неку функцију времена (в. чл. 27).



сл. 26.1

Почетни положај A_0 тачке је онај положај који тачка заузима у такозваном почетном времену кретања t_0. То време означује или тренутак у коме кретање почиње, или пак тренутак у коме кретање починћемо опажати. У оба случаја одређен је почетни положај A_0 релацијом:

$$\overline{OA_0} = s = f(t_0).$$

Ако тренутке t и t_0 меримо временом на часовнику, онда $(t-t_0)$ значи трајање или време за које се тачка кретала од A_0 до A. Ако се у том времену не мења смер кретању, ако се на пример тачка A стално удаљује од O, онда разлика растојања

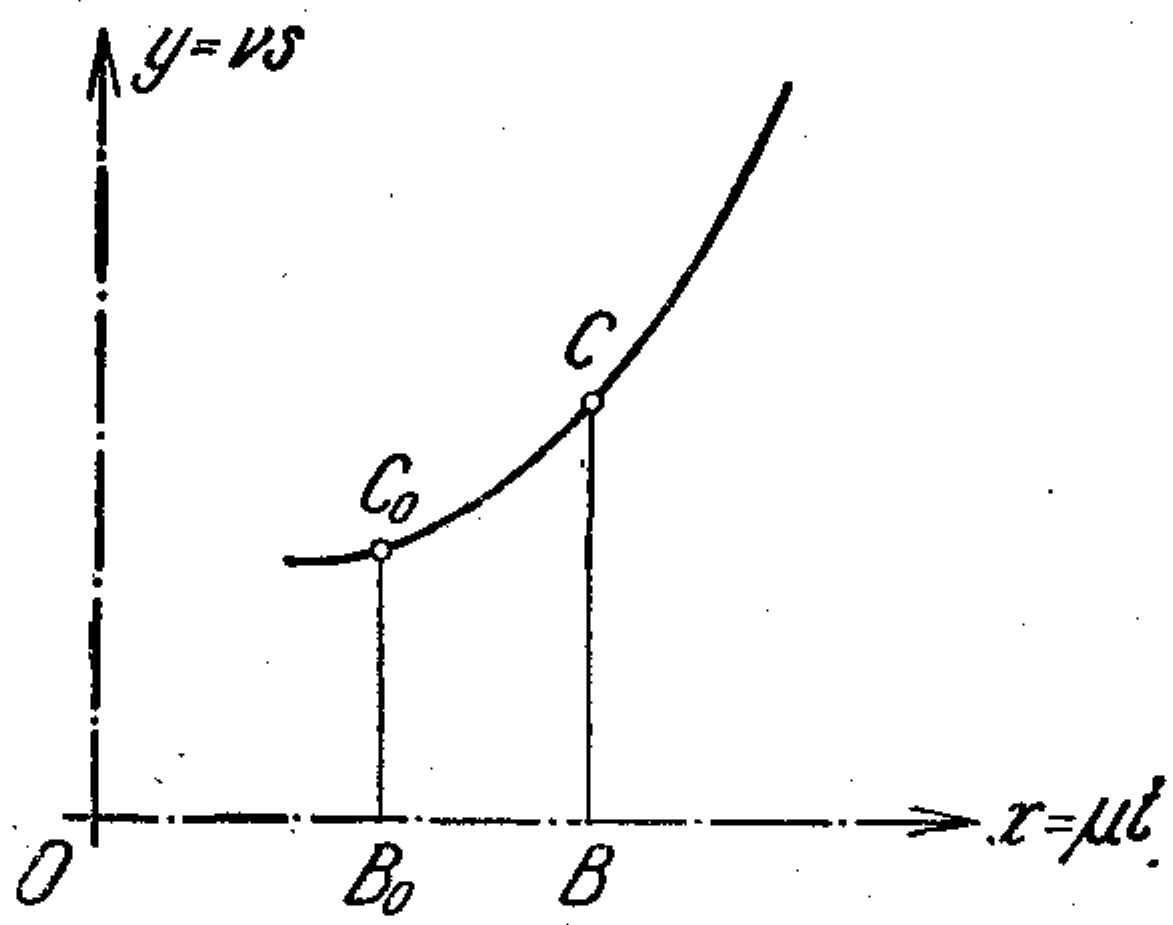
$$\overline{A_0A} = s - s_0,$$

значи пут који је тачка у времену $(t-t_0)$ прешла.

а) Пут. Закон по коме се збива кретање одређено релацијом: $s = f(t)$ може се очигледно претставити дијаграмом пута и времена који добијамо када на осовину x ортогоналног координатног система наносимо као апсцисе дужине пропорционалне времену а као ординате на осовину y наносимо дужине пропорционалне вредностима s. Стављамо дакле (сл. 26.2),

$$\overline{OB} = x = \mu t,$$
$$\overline{BC} = y = \nu s$$

и добијамо низ тачака C, које спојене међу собом дају криву линију, тражени дијаграм кретања. Та крива линија претставља очигледно ток кретања. По релацији $s = f(t)$ добија једначина дијаграмне криве линије облик:



Сл. 26.2

$$y = \nu f\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

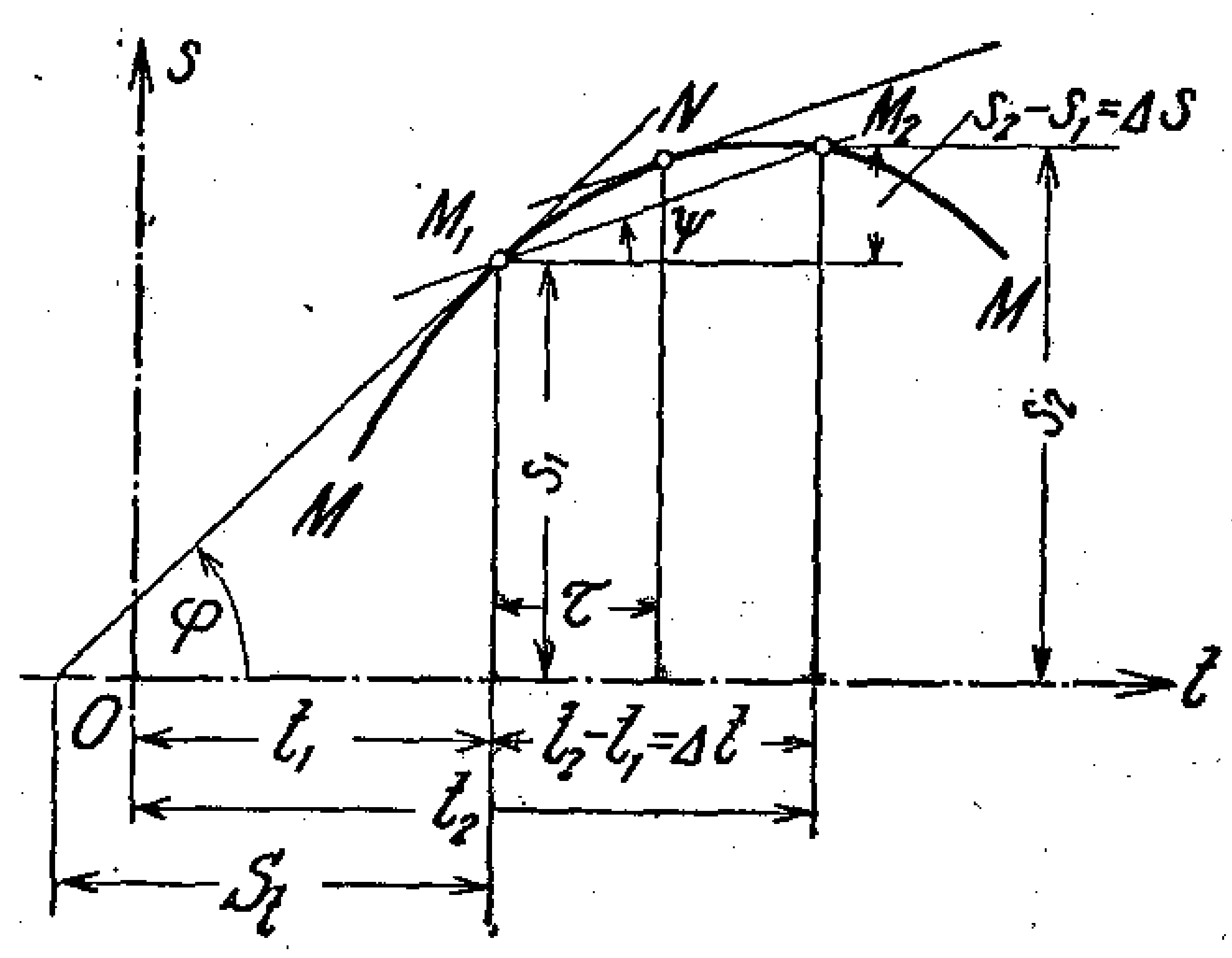
Почетном положају тачке одговара тачка C_0 криве, чије су координате $x_0 = \mu t_0$, $y = \nu t_0$. Размере, у којима су t и s претстављене су произвољне; из њих излазе вредности за μ и ν[1].

Из облика дијаграма видимо: како кретање тачке настаје, дали се тачка компаративној тачки приближује или се од ње удаљује, дали кретање постаје брже или спорије итд.

б) Брзина. Када смо за једно кретање нацртали дијаграм пута и времена, онда можемо појму средње брзине и брзине, који су нам појмови већ из I главе познати, дати и геометријско тумачење. Ако

[1] Ради једноставности ми ћемо убудуће и саме координантне осовине обележавати са t и s, тј. стављаћемо $\mu = \nu = 1$.

крива линија $M—M$ на слици 26.3 претставља дијаграм пута и времена за извесно кретање, онда ће двама обликњим положајима A_1 и A_2 покретне тачке A у сл. 26.1 одговарати у том дијаграму две тачке M_1 и M_2, чије координате претстављају t_1 и s_1, време и пређени пут тачке A у њеном првом положају, а t_2 и s_2 те исте податке за покретну тачку A у њеном другом (доцнијем) положају. У интервалу времена $(t_2 - t_1)$ тачка ће прећи пут, $\overline{A_1A_2}$, који у дијаграму пута и времена претставља разлика $(s_2 - s_1)$, па како смо средњом брзином дефинисали однос пређеног пута према одговарајућем времену, то нам израз



Сл. 26.3

$$c = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

претставља средњу брзину за кретање покретне тачке из положаја A_1 у положај A_2. Тај однос је у дијаграму пута и времена изражен тангентом угла ψ што га заклапа секанта M_1M_2 са апсцисом: $\tang \psi = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Ако сада замислимо, да се смањивањем времена t_2 интервал времена $\Delta t = (t_2 - t_1)$ смањује и да тежи ка нули, тј. ако посматрамо два узастопна — бесконачно блиска — положаја A_1 и A_2 покретне тачке онда ће се и у дијаграму пута и времена тачка M_2 толико примаћи тачки M_1, да ће секанта M_1M_2 прећи у тангенту на дијаграмну криву линију у тачки M_1. Угао ψ, чији тангенс претставља вредност средње брзине постаће угао φ што га тангента у тачки M_1 на дијаграм пута заклапа са апсцисом, а средња брзина за интервал времена Δt, који је сада само један тренутак, значиће брзину покретне тачке у њеном положају A_1. Имаћемо дакле:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v = \tang \varphi .$$

Из овога геометријског разматрања видимо, да је брзина тачке у времену t једнака тригонометријској тангенти угла φ што га тангента у одговарајућој тачки дијаграма пута заклапа са апсцисом. Зато брзину можемо изразити и односом ординате s и суптангенте S_t за тачку M дијаграма пута, из чега се види да она за сваки положај покретне тачке има одређену вредност, независну од интервала времена:

$$v = \operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{S_t}.$$

Из сл. 26.3 читамо да ће тачка A прећи пут $s_2 - s_1 = \Delta s$ за исто време $t_2 - t_1 = \Delta t$ било да се она креће променљивом брзином $v = tg\,\varphi$ или сталном брзином $c = tg\,\psi$. У тренутку $t = \tau$ биће $v = c$ јер је у тачки N дијаграма тангента паралелна секанти M_1M_2.

Из закона кретања $s = f(t)$ добијамо средњу брзину за интервал времена Δt;

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

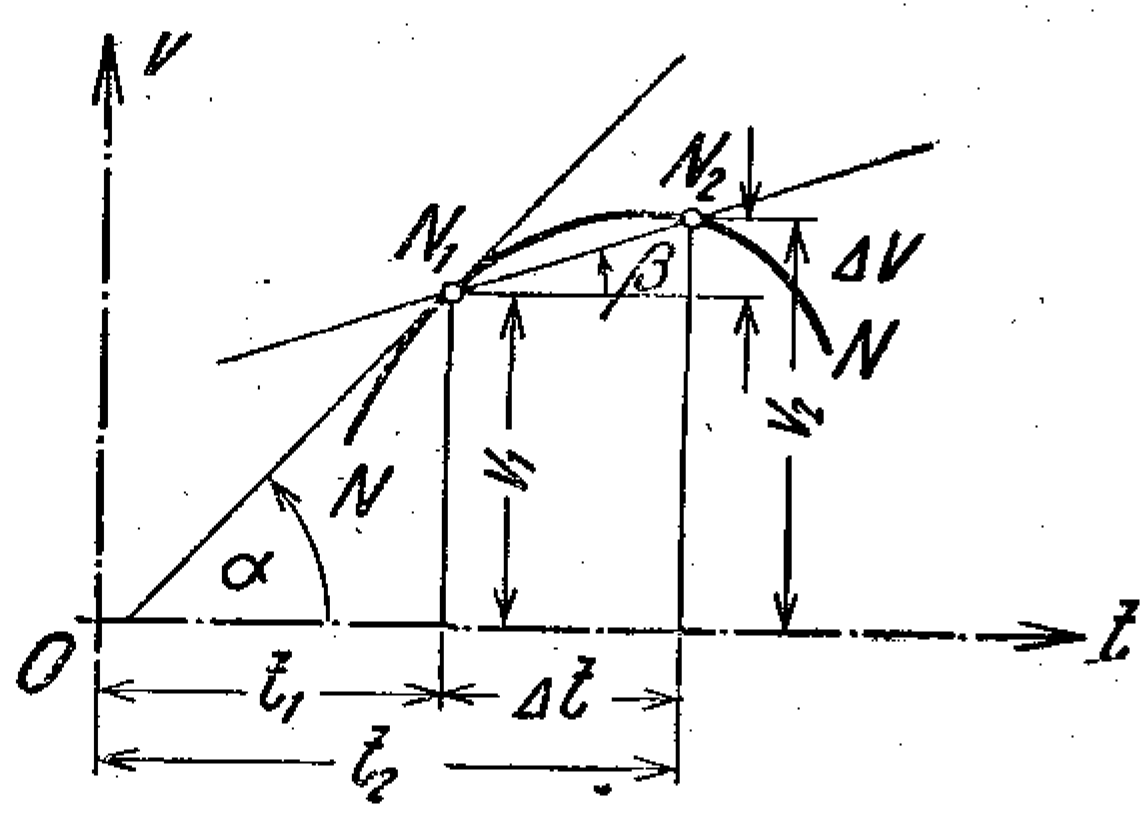
а брзину у ма ком тренутку t

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\,f(t)}{dt} = f'(t). \tag{26.1}$$

Брзина у неком тренутку је диференцијални количник пута по времену, или први извод функције $s = f(t)$.

При извођењу појма брзине нисмо учинили никакве претпоставке у погледу путање дали је она права или крива у равни или у простору.

У општем случају кретања брзина v покретне тачке A мењаће се од тренутка до тренутка, тј. са временом t. Преносећи брзине одређене са $v = f'(t)$ као ординате, а времена као апсцисе, добијамо дијаграм брзине и времена сл. 26.4.



Сл. 26.4

в) Убрзање. Као год што смо из дијаграма пута и времена дошли до геометријске дефиниције брзине кретања у извесном тренутку, тако исто можемо помоћу дијаграма брзине и времена и убрзање, што смо га упознали у првој глави, геометријски дефинисати. Ако нам на сл. 26.4 крива линија $N - N$ претставља дијаграм брзине и времена за извесно кретање тачке, онда временима t_1 и t_2 одговарају брзине v_1 и v_2. Количник

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg}\beta$$

називамо средњим убрзањем у интервалу времена Δt. Али ово важи само онда, када се кретање тачке врши по правој линији, јер само у том случају брзине v_1 и v_2 падају у исти правац те можемо образовати њихову алгебарску разлику да бисмо добили прираштај брзине. Ако је кретање по кривој линији онда се брзине v_1 и v_2 разликују не само по величини, него и по правцу, те их морамо сматрати векторским величинама (в. чл. 12.) Сада ћемо се задржати на кретању тачке по правој путањи.

Ако се у горњем изразу време t_2 смањује тако, да интервал Δt тежи ка нули, онда се средње убрзање интервала претвара у убрзање које важи у тренутку t_1, сечица N_1N_2 прелази у тангенту на дијаграм брзине у тачки N_1, а угао β прелази у угао α, што га та тангета заклапа са апсцисом. Овај прелаз, изражен аналитички, гласи

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \operatorname{tg} \alpha,$$

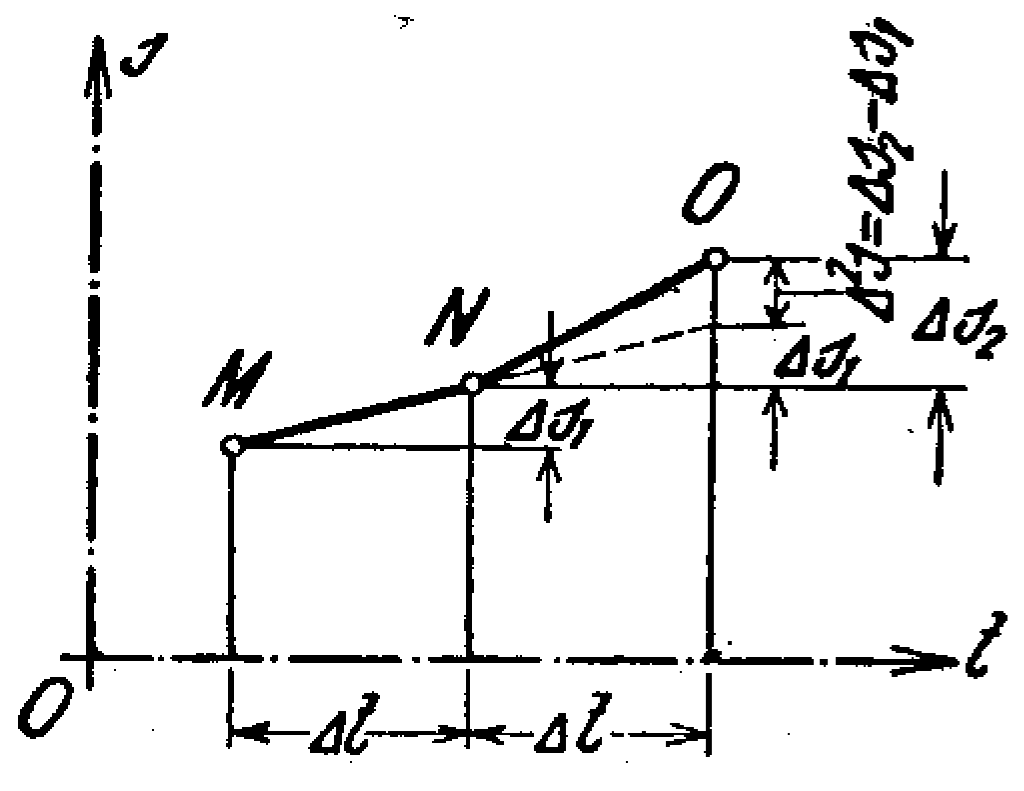
тј. *убрзање у извесном тренутку t је диференцијални количник брзине по времену.* Убрзање добија позитиван знак кад алгебарска вредност брзине расте, а негативан у супротном случају.

Како је према релацији (26.1) $v = f'(t)$ то дакле важи

$$u = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t). \tag{26.2}$$

Појам убрзања можемо извести и непосредно из дијаграма пута према сл. 26.5, где је тај дијаграм претстављен као полигон праволинијских елемената $\overline{MN}$, $\overline{NO}$,...

Средње убзање у интервалу 2 Δt можемо изразити са



Сл. 26.5

$$\frac{\frac{\Delta s_2}{\Delta t} - \frac{\Delta s_1}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Delta s_2 - \Delta s_1}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2},$$

где су $\frac{\Delta s_2}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta s_1}{\Delta t}$ средње брзине у два једнака интервала Δt. Одатле добијамо за убрзање на крају времена t:

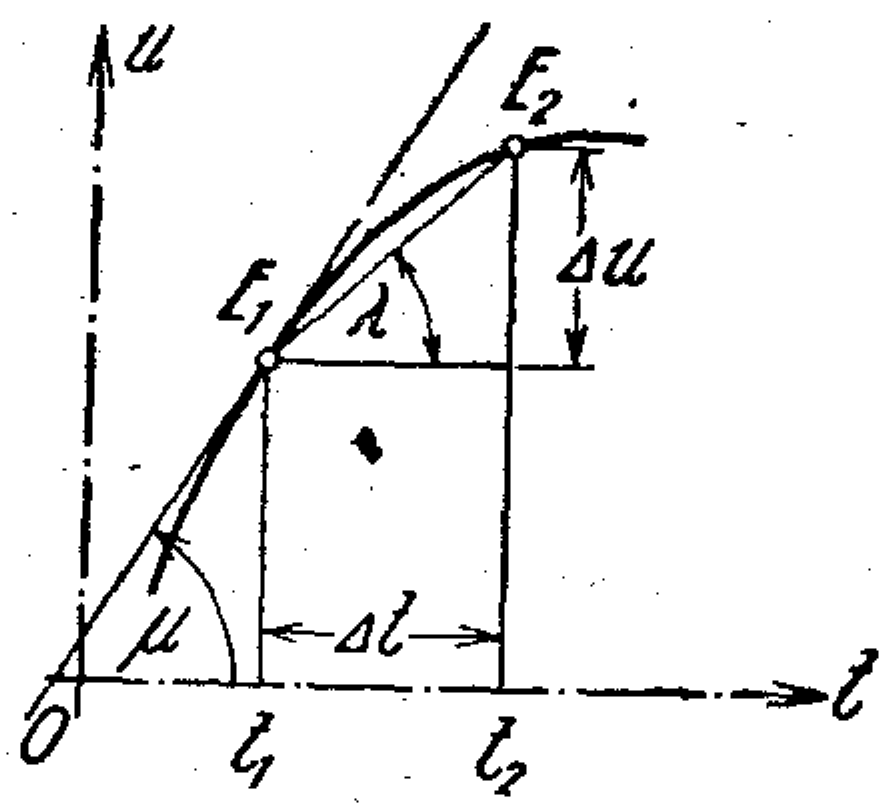
$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2} = \frac{d^2 s}{d t^2}.$$

Убрзање праволинијског кретања је дакле дефинисано као први извод брзине или други извод пута по времену.

Ако функцију $u = f''(t)$ графички прикажемо добијамо дијаграм убрзања и времена сл. 26.6.

Када је дијаграм убрзања крива линија, тј. када се на пример код праволинијског кретања убрзање у току времена неједнако мења, онда бисмо могли према сл. 26.6 образовати количник

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \operatorname{tg} \lambda,$$



Сл. 26.6

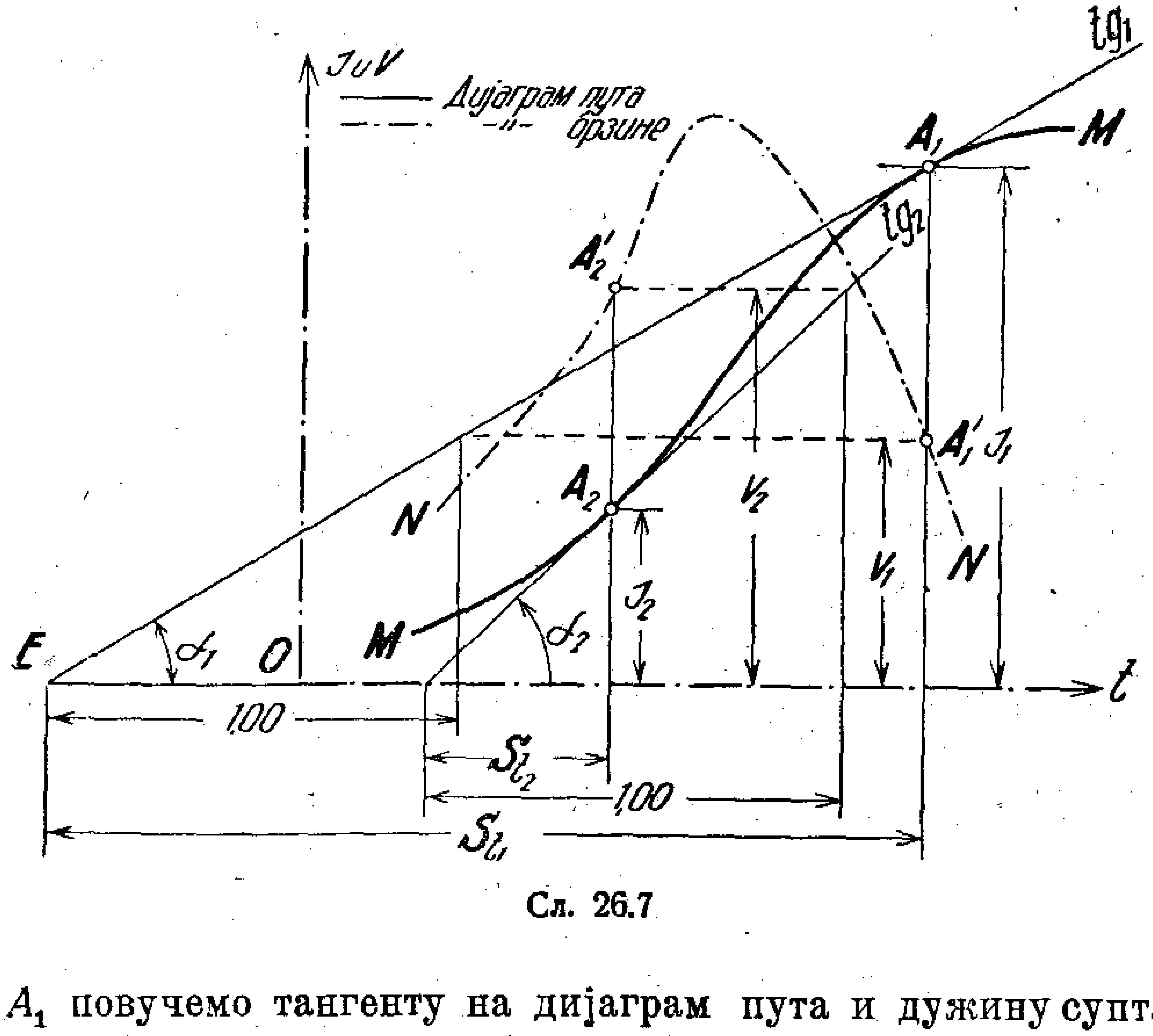
који би нам означавао средње убрзање убрзања. Прелазећи на диференцијални количник

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{d^3 s}{dt^3} = f'''(t) = \tan g\ \mu,$$

добили бисмо појам убрзање убрзања или убрзање другог реда. Тако бисмо могли наћи и даље изводе функције $s = f(t)$ али нам то у Механици није потребно, јер нам искуство каже да се убрзања стварних кретања мењају само са положајем а не са временом.

г) Графичко диференцијалење. Када нам је емпирички дат дијаграм пута и времена, налазимо из тога дијаграма графичким диференцијалењем прво дијаграм брзине и времена а потом из овога на исти начин и дијаграм убрзања и времена.

На сл. 26.7 показана је та конструкција за случај, да се из датог дијаграма пута $M—M$ жели добити дијаграм брзине $N—N$. Кад у



Сл. 26.7

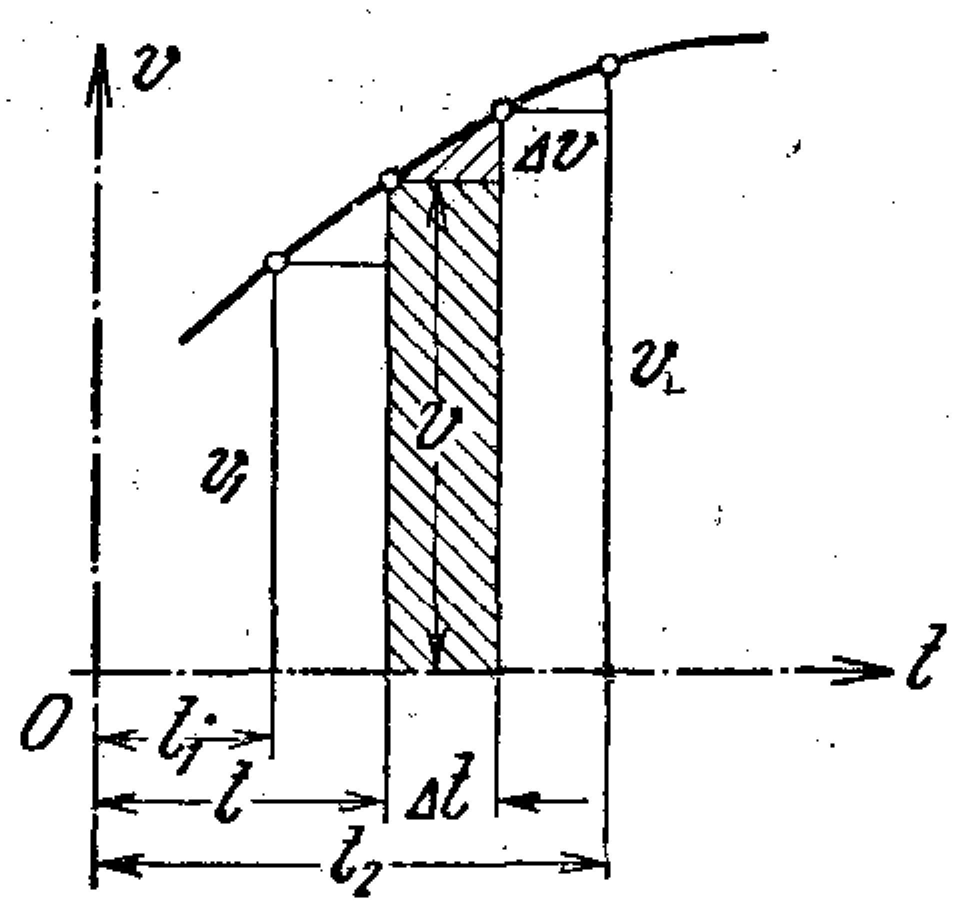
тачки A_1 повучемо тангенту на дијаграм пута и дужину суптангенте означимо са S_{t_1}, онда важи

$$v_1 = \frac{ds}{dt} = \operatorname{tg}\,\alpha_1 = \frac{s_1}{S_{t_1}} \quad \text{или} \quad s_1 : v_1 = S_{t_1} : 1.$$

Према томе, да бисмо нашли брзину у моменту t_1 повућићемо ординату тангенте на размаку 1 (у размери времена) од тачке E_1 где тангента сече апсцису; кад ову ординату пројицирамо на вертикалу кроз A_1 добићемо тачку A'_1 на траженом дијаграму брзине. Исто тако одређујемо другу тачку A'_2 на дијаграму брзине итд. Превојној тачки дијаграма пута одговара максимална брзина.

Из добијеног дијаграма брзине можемо графичким диференцијалењем извести дијаграм убрзања на исти овај начин.

д) Интегралење дијаграма брзине. На сл. 26.8 претстављен је дијаграм брзине и времена. Уску пругу ΔF, коју затварају: дијаграмна линија, ординате v и $(v+\Delta v)$ и диференција апсциса Δt, има површину



Сл. 26.8

$$\Delta F = v\,\Delta t + \frac{\Delta v\,\Delta t}{2}.$$

Други члан као мала величина другог реда отпада тако да за $\Delta t \to 0$ добијамо

$$dF = vdt = \frac{ds}{dt}dt = ds.$$

Цео пређени пут у интервалу времена $(t_2 - t_1)$ одређен је интегралом

$$s = F = vdt = \int_{t_1}^{t_2} vdt \tag{26.3}$$

или графички величином површине F, која је омеђена ординатама v_2 и v_1, разликом апсциса $(t_2 - t_1)$ и дијаграмном линијом.

Из дијаграма брзине и времена можемо дакле наћи све три величине: пут, брзину и убрзање. Убрзање је тригонометријска тангента нагибног угла према апсциси, брзина је ордината, а пут површина F.

Елиминацијом времена из једначина $v = \frac{ds}{dt}$ и $u = \frac{dv}{dt}$ добијамо трећу диференцијалну једначину праволинијског кретања

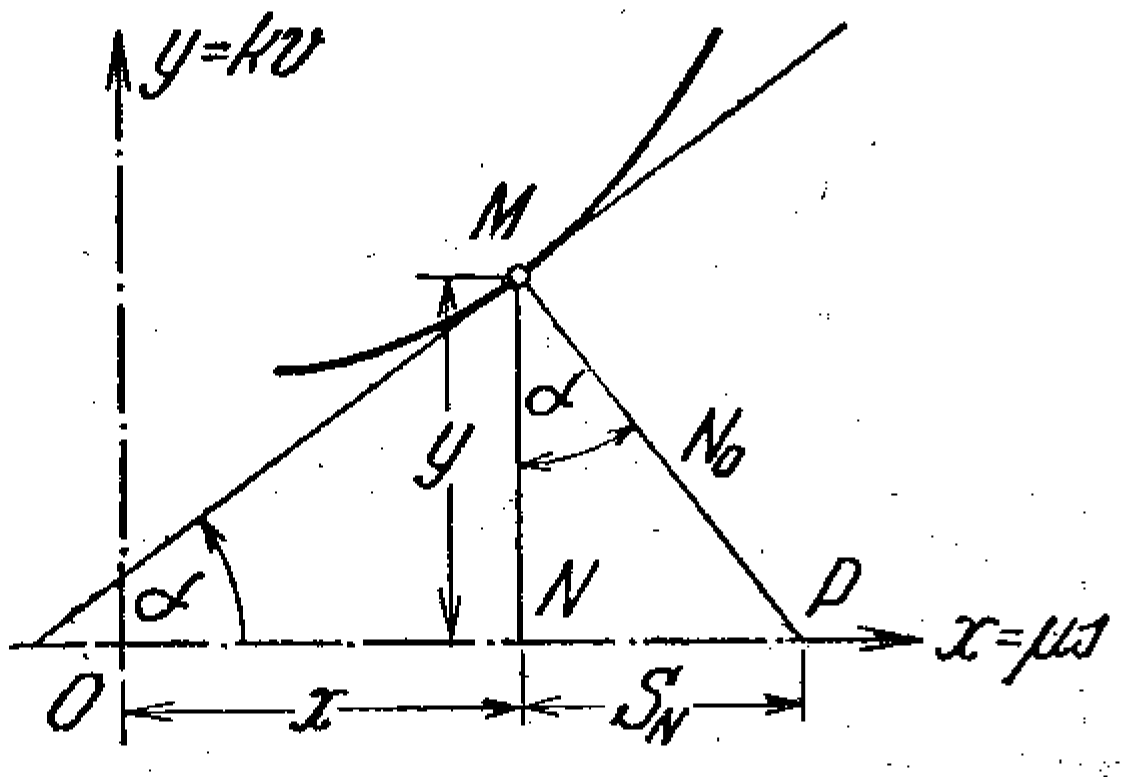
$$v\,dv = uds \tag{26.4}$$

која је од нарочите важности у Динамици.

е. Дијаграм брзине и пута; $v = f(s)$. Када из једначина $s = f(t)$ и $v = f'(t)$ елиминишемо време t, добићемо једначину између v и s облика

$$v = f(s) \tag{26.5}$$

На сл. 26.9 пренесене су на апсцисну осовину дужи пропорционалне путовима $x=\mu s$, а ординате су дужи $y=\varkappa v$, где су μ и $\varkappa$, константе што изражавају размеру цртежа. Геометријско место тако одређених тачака M је тражена линија, дијаграм брзине и пута; он има ту особину, да субнормала дијаграмне линије геометријски претставља убрзање кретања. То ћемо доказати на овај начин:



Сл. 26.9

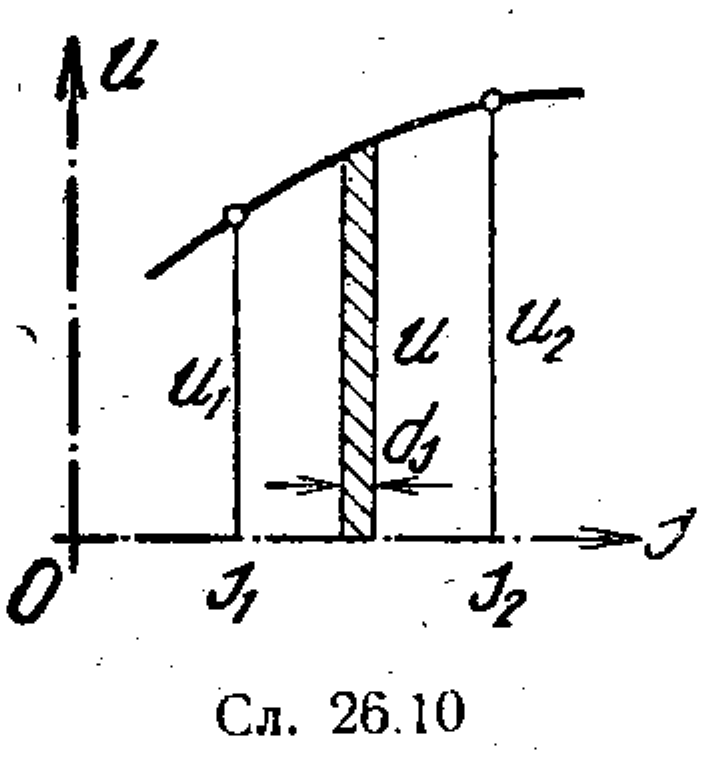
$$u=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}\,.$$

Кад овде заменимо $ds=\frac{dx}{\mu}$, $dv=\frac{dy}{\varkappa}$ односно $\left(s=\frac{x}{\mu}, v=\frac{y}{\varkappa}\right)$ биће према сл. 26.9:

$$u=v\frac{dv}{ds}=\frac{y}{\varkappa}\frac{dy}{\varkappa}\frac{\mu}{dx}=\frac{\mu}{\varkappa^2}y\frac{dy}{dx}=\frac{\mu}{\varkappa^2}\,y\,\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Пошто је $y\operatorname{tg}\alpha=\overline{NP}=S_N$, то је $u=\frac{\mu}{\varkappa^2}S_N$.

Константна вредност $\mu/\varkappa^2$ потиче од размере цртања и биће једнака јединици, ако смо изабрали $\mu=1$ и $\varkappa=1$. У томе случају апсцисе би биле $x=s$, а ординате $y=v$, па бисмо дакле и саме координатне осовине могли обележити само са s и v.



Сл. 26.10

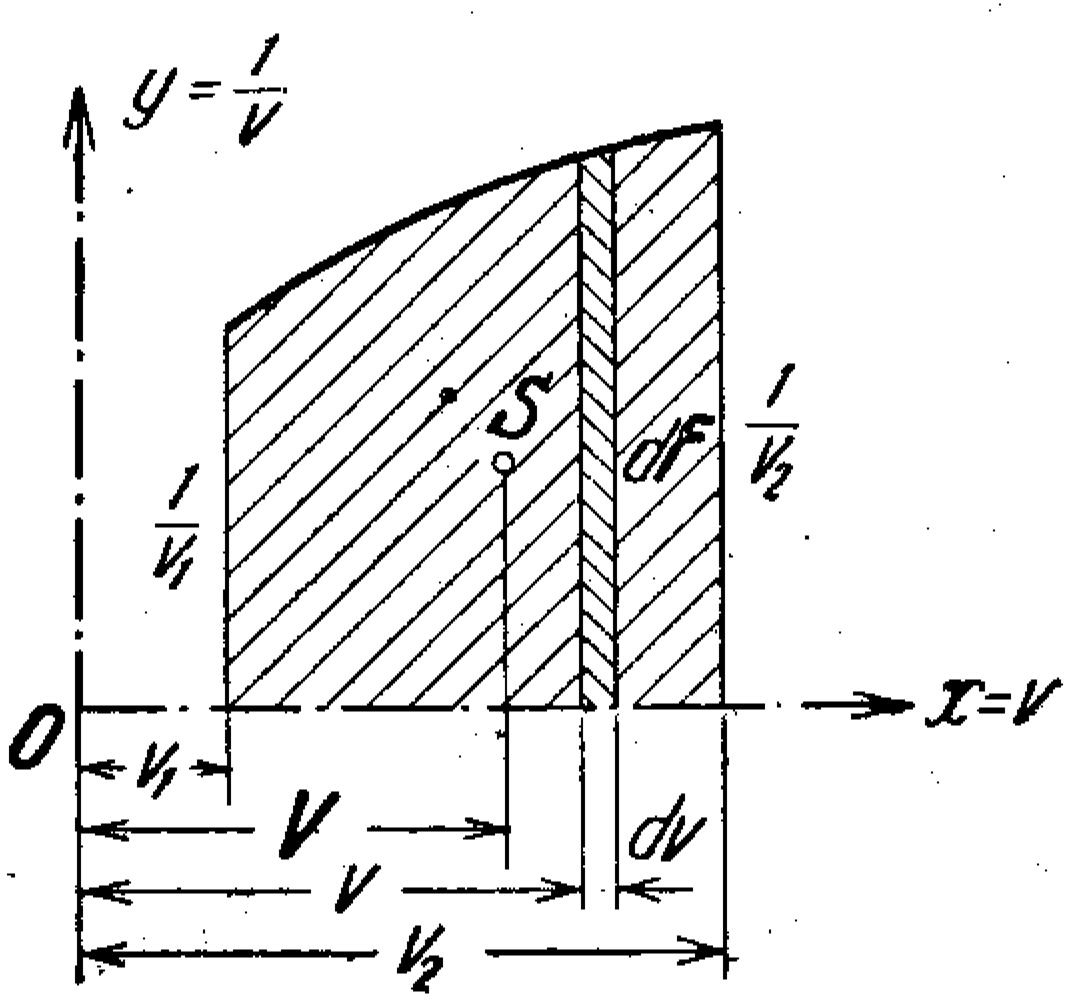
ж) Дијаграм убрзања и пута $u=f(s)$. Елементарна пруга висине u и ширине ds има површину: $dF=u\,ds=\frac{dv}{dt}ds=v\,dv$ (сл.26.10). На коначном путу s_2-s_1 је интеграл

$$F=\int_{v_1}^{v_2}u\,ds=\int_{v_1}^{v_2}v\,dv=\frac{1}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right).$$

Из ове једначине добићемо у Динамици један од основних закона Механике и Физике.

з) Дијаграм $\frac{1}{u}=f(v)$. Најзад, наведимо још дијаграм, који добивамо кад из релација $v=f'(t)$ и $u=f''(t)$ елиминишемо време t и добијену једначину доведемо на облик $\frac{1}{u}=f(v)$. Ова једначина претстављена је на сл. 26.11. Како је $\frac{1}{u}=\frac{dt}{dv}$ то онда из сл. 26.11 читамо:

$$dF = \frac{1}{u}\,dv = \frac{dt}{dv}dv = dt.$$



Сл. 26.11

Интегралећи у границама од v_1 до v_2 (односно од t_1 до t_2) добићемо:

$$F=\int_{v_1}^{v_2} dF = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = T,$$

тј. површина F претставља интервал времена $T=(t_2-t_1)$ у коме кретање посматрамо.

Ако једначину $dF=dt$ помножимо са $v=\frac{ds}{dt}$, добићемо:

$$vdF = dt\frac{ds}{dt} = ds.$$

Интегралећи у истим границама налазимо пређени пут за интервал времена T:

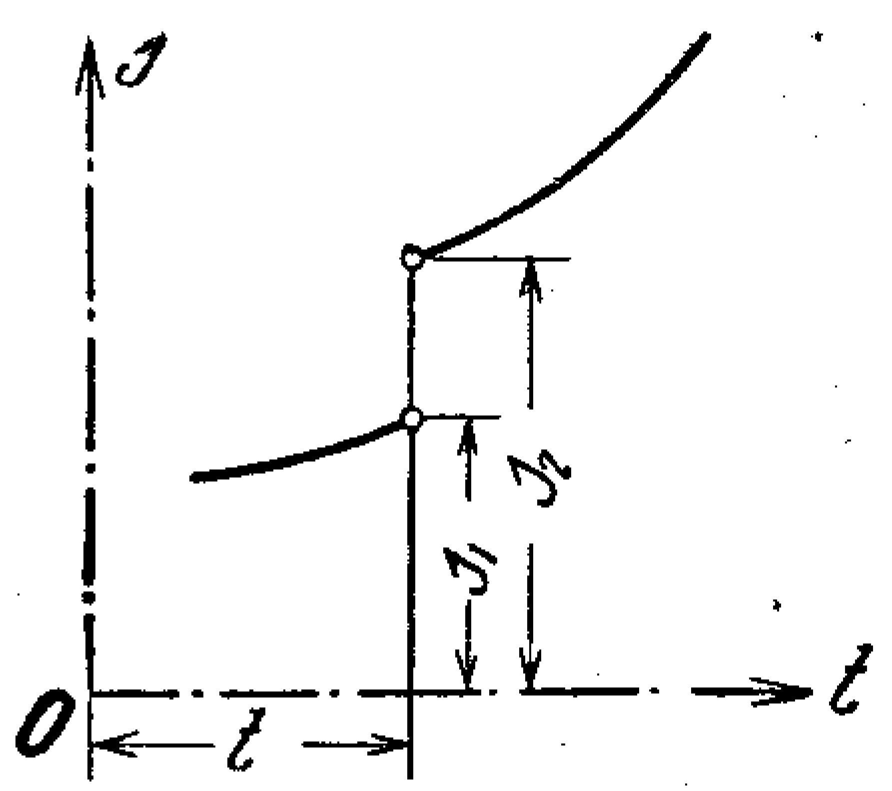
$$s=\int_{v_1}^{v_2} vdF.$$

Из Статике знамо да је овај одређени интеграл једнак $s=VF$ где V значи апсцису тежишта површине F, дакле је $s=VT$.

27. Могућни закони кретања. Да би функција $s=f(t)$, или у имплицитном облику $F(s,t)=0$ могла претстављати неко стварно кретање, потребно је да она задовољи четири услова, и то:

1) Она не сме бити имагинарна, већ мора за сваку вредност t имати реалну вредност за s.

2) Она мора бити непрекидна, континуална. Дисконтинуалну линију имамо на пример на сл. 27.1. Функција чији је израз та линија, не може претстављати закон кретања, јер би по њој покретна тачка морала за размак времена, једнак нули, пређи пут коначне дужине, тј. кретати се бесконачно великом брзином, што је природно немогућно.



Сл. 27.1

3) Она мора бити по s, једнозначна тј. за сваку вредност t она мора имати само једну одређену вредност за s. Ако

узмемо за пример функцију $as^2 - bt - ct^2 = 0$, видећемо да она не може претстављати закон кретања, јер кад је решимо по s добијамо:

$$s = \pm \sqrt{\frac{bt + ct^2}{a}}.$$

То значи, да свакој вредности t одговарају две разне вредности s, те би се у овом случају покретна тачка морала у истом тренутку налазити на два разна места, што је немогућно.

4) Она мора имати бар два извода у свакој својој тачки. Има функција које задовољавају сва три прва услова, али немају извода у свакој тачки. Такве функције не могу изражавати законе кретања, јер по њима покретна тачка при своме кретању не би на извесним местима имала одређену брзину, што природно нема смисла.

Све оне функције, које задовољавају сва четири наведена услова, могу претстављати законе кретања која у природи наилазимо, па било да су те функције алгебарске или трасцендентне. Али, независно од тога дали је закон кретања изражен алгебарском или трансцендентном функцијом, ми ћемо сва могућна праволинијска кретања тачке поделити у две главне врсте, и то: на апериодична и периодична кретања.

28. Апериодична кретања. Под тим именом разумемо она кретања, код којих покретна тачка не долази никада на исто место на коме је већ једном била, ма колико се продужило трајање кретања.

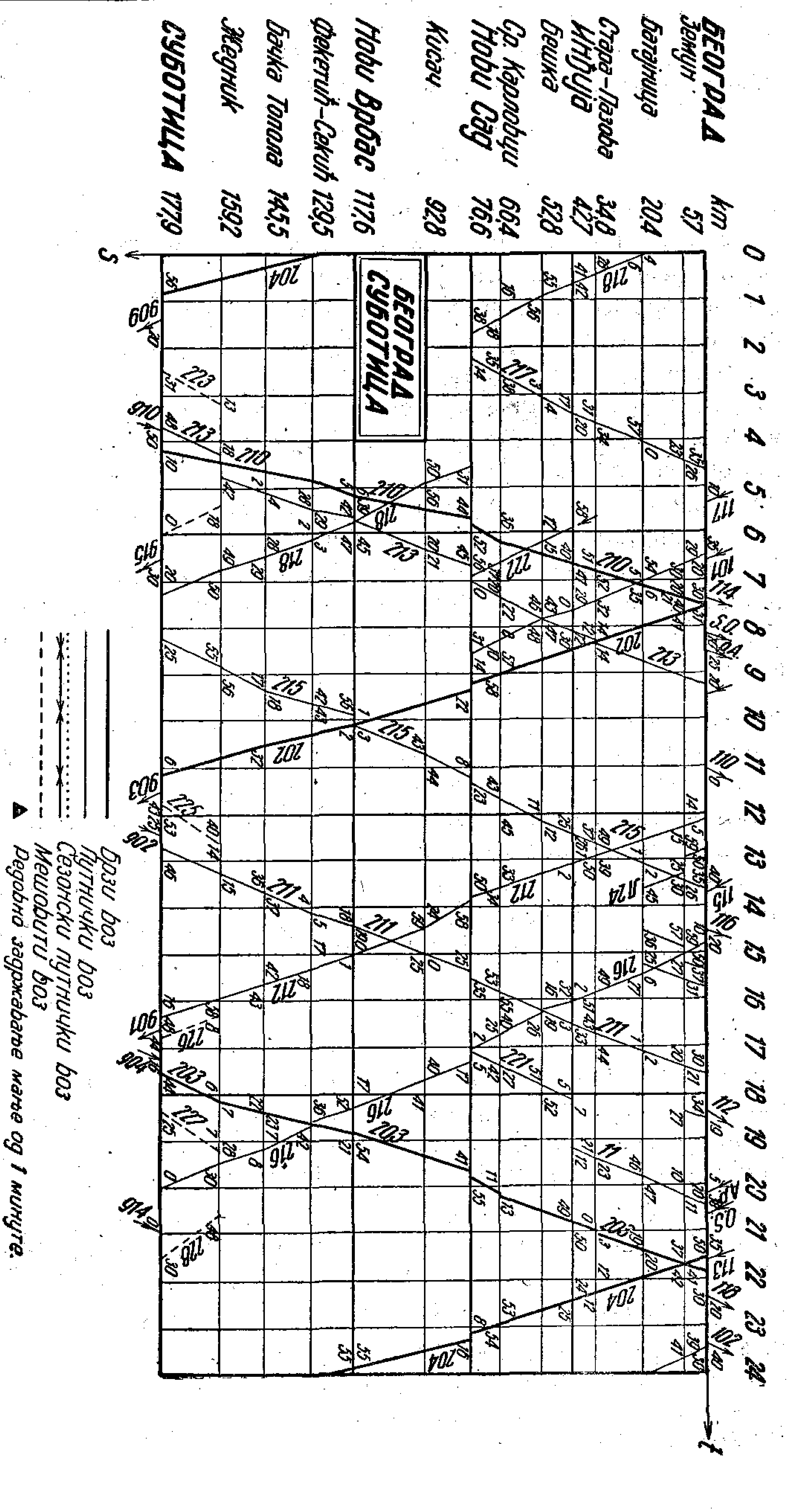
а) **Једнолико кретање.** Најпростије апериодично кретање је изражено линеарном једначином $x = b + c\,t$ [1], где је c константна брзина а b пут пређен до тренутка $t = 0$. Дијаграм пута и времена је права нагнута за угао α према осовини t, дакле је $c = tg\alpha$. Диференцијална једначииа једноликог кретања гласи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Претставом једноликог кретања помоћу дијаграма пређеног пута служимо се да очигледно прикажемо ред вожње на железницама. При томе чинимо претпоставку, да возови пут од станице до станице прелазе једноликим кретањем. Из одговарајућих дијаграмних линија сл. 28.1 читамо, колико времена који воз путује између станица, колико се задржава у станицама, када и где се возови укрштају, престижу итд.; уједно нам тригонометријске тангенте углова, које поједине праве заклапају са апсцисном осовином, дају брзине возова.

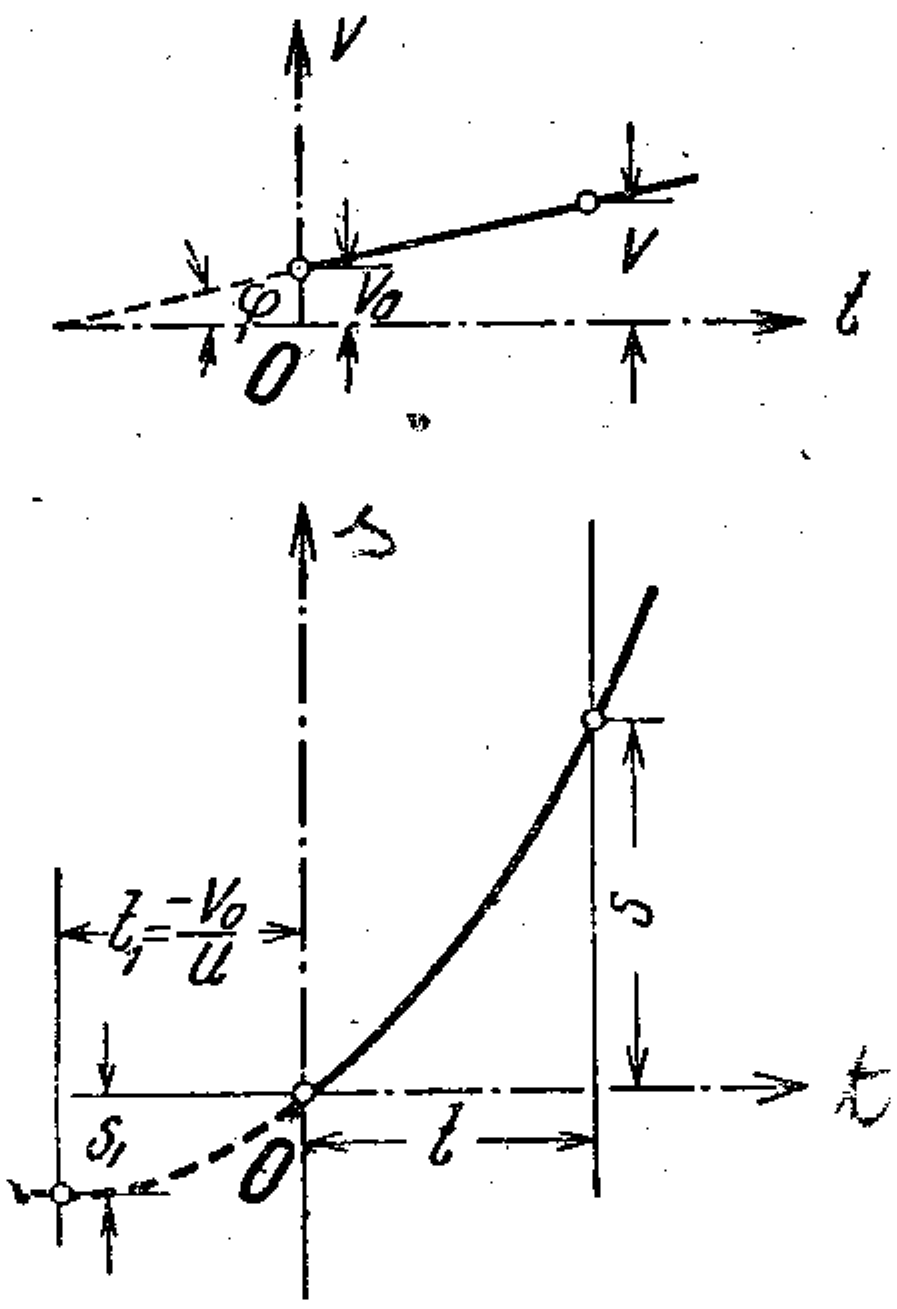
б) **Једнакоубрзано (успорено) кретање.** То је кретање, код код кога је убрзање константно, дакле $u = \pm a$, где горњи знак важи

[1]) Путове у правој бележићемо са x место s.


БЕОГРАД
СУБОТИЦА
km
БЕОГРАД
Земун 5,7
Батајница 20,4
Стара-Пазова 34,6
Инђија 42,7
Бешка 52,8
Ср. Карловци 66,4
Нови Сад 76,6
Кисач 92,8
Нови Врбас 117,6
Фекетић-Секић 129,5
Бачка Топола 143,5
Жедник 159,2
СУБОТИЦА 177,9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
t
s
Брзи воз
Путнички воз
Сезонски путнички воз
Мешовити воз
Редовно задржавање мање од 1 минуте.

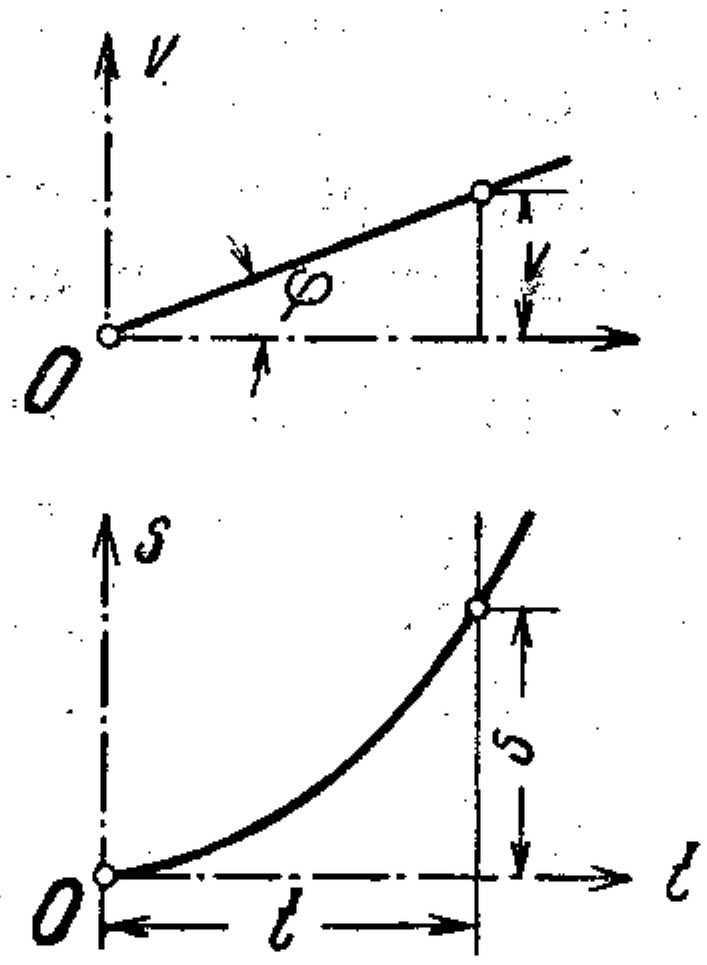
Сл. 28.1

за убрзано а доњи за успорено кретање. Диференцијална једначина гласи дакле $\frac{d^2x}{dt^2} = \pm a$. Први њен интеграл је $\frac{dx}{dt} = \pm at + C_1$. Интеграциона константа C_1 зависи од избора почетних услова. Тако је за $t = 0$, $C_1 = v_0$ почетна брзина, дакле $\frac{dx}{dt} = v_0 \pm at$. Поновним интегралењем добијамо $x = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} + C_2$. Ако поставимо услов да за $t = 0$ буде $x = 0$, биће $C_2 = 0$ и закон кретања је $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Овај образац претставља површина дијаграма брзине и времена која има облик троугла или трапеза.



Сл. 28.2а

На сл. 28.2 а, б, в дати су дијаграми брзине и пута за три специјална случаја једнакопроменљивог кретања. Дијаграми брзине су праве линије, а дијаграми пута параболе; сл. 28.2а важи када постоји почетна брзина v_0, а сл 28.2б када је $v_0 = 0$, а оба су кретања једнакоубрзана; сл. 28.2в важи за једнако успорено кретање са почетном брзином v_0.



Сл. 28 б

Дијаграм брзине и пута за једнакоубрзано или успорено кретање, за $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$, добићемо када

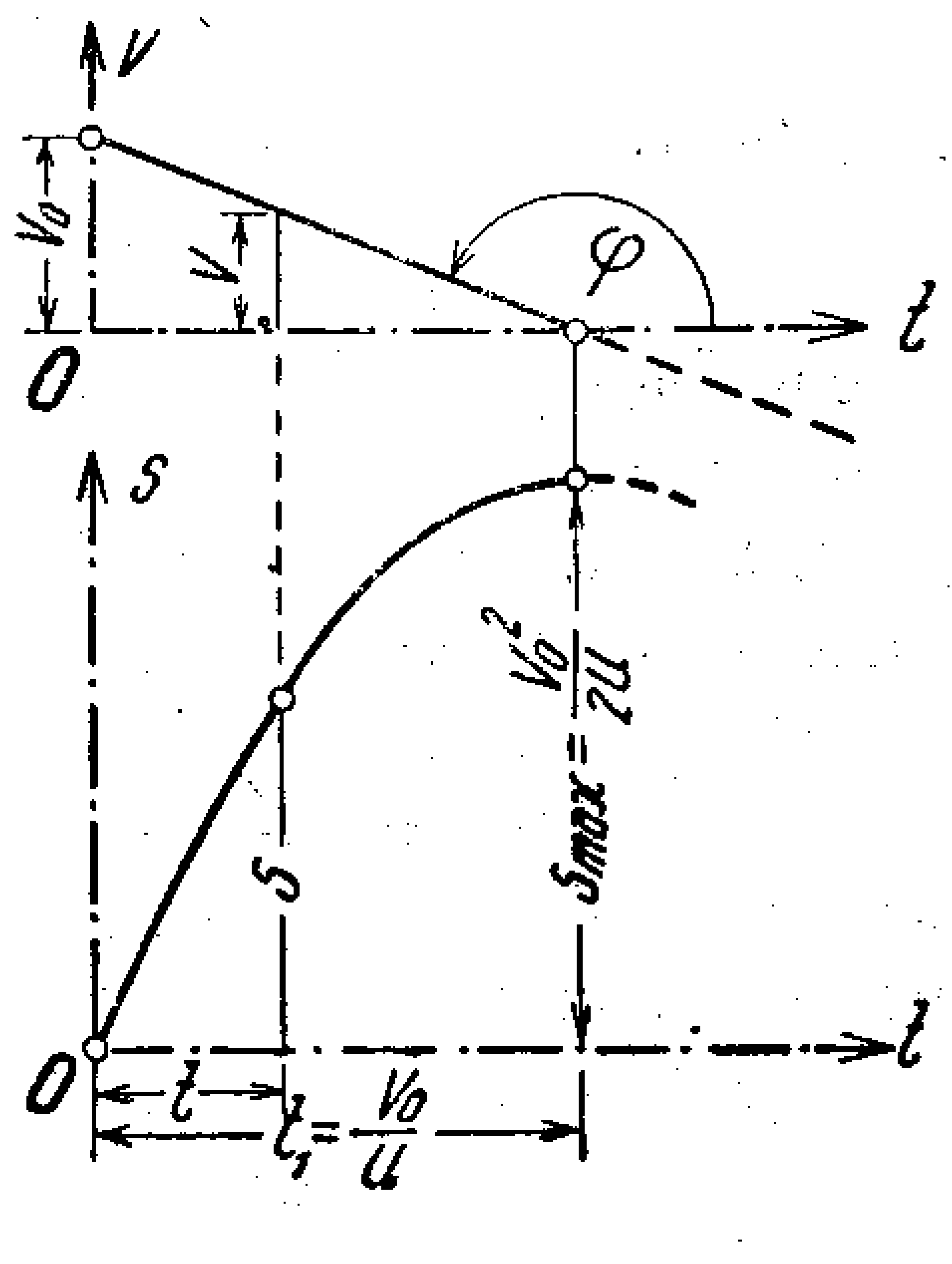
$$v = f(x)$$

из две једначине, што важе за овај случај:

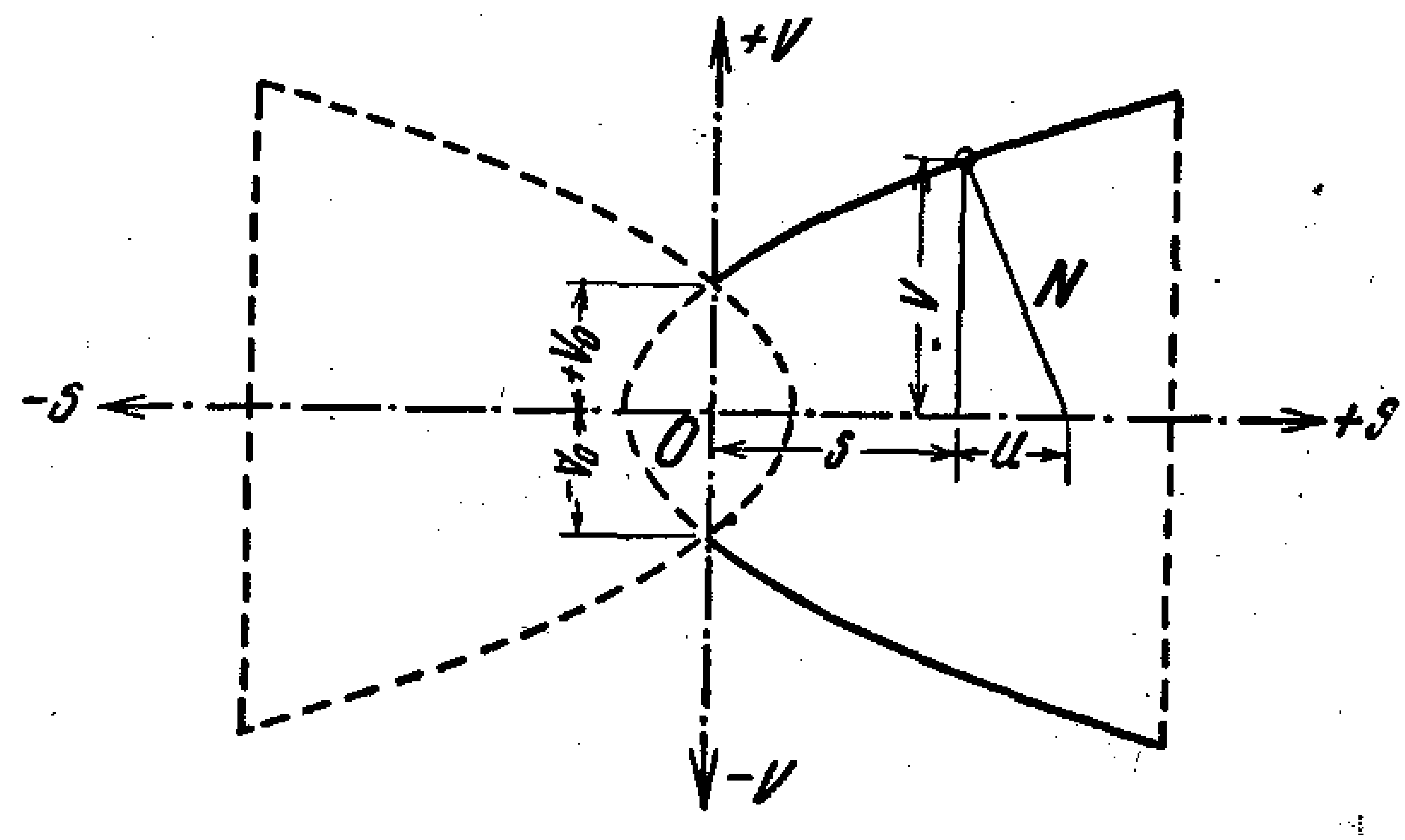
$$x = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2 \quad \text{и} \quad v = v_0 \pm at$$

елиминишемо време, па добијену једначину решимо по v. Добићемо

$$v = \pm\sqrt{v_0 + 2ax}.$$



Сл. 28.2в



Сл. 28.3

Дијаграм $v = f(x)$ је парабола, извучена пуном линијом на сл. 28.3. Њена субнормала у свакој тачки је константна, што је позната особине параболе.

За убрзано кретање важи пуно извучена парабола, за успорено испрекидано цртана.

в) **Амортизовано кретање.** Амортизовано (или пригушено), кретање наступа код тела која се крећу кроз неку средину (воду или ваздух), где наилазе на отпор те средине који кретање успорава. Искуством је утврђено, да је при малим брзинама $v < 1\ m/sec$ успорење пропорционално брзини кретања, дакле је убрзање изражено једначином $\frac{dv}{dt} = -\lambda v$ где је λ емпиричка константа димензије $[t^{-1}]$. Интеграл у границама: $t = 0$, до t односно v_0, v гласи $\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\lambda t$

дакле

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\lambda t$$

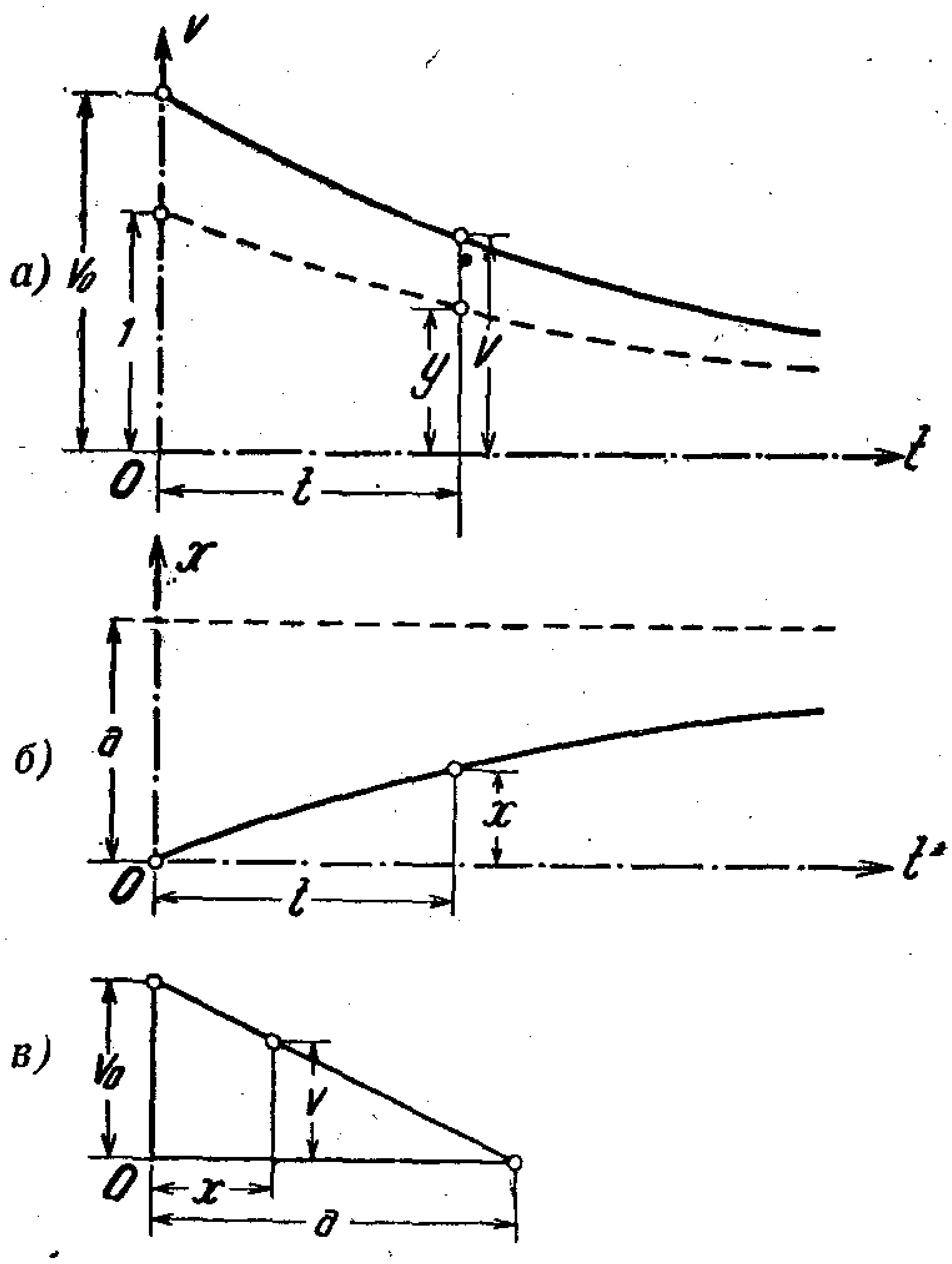
и најзад

$$v = v_0 e^{-\lambda t}.$$

Експоненцијална функција $y = e^{-\lambda t}$ има за $t = 0$ вредност јединице а за $t \to \infty$ вредност нуле (сл. 28.4а) тј. има апсцисну осовину за асимптоту. Брзина је сразмерна ординати експоненцијалне функције, дакле $v \to 0$ кад $t \to \infty$.

Други интеграл гласи

$$x = v_0 \int e^{-\lambda t} = -\frac{v_0}{\lambda} e^{-\lambda t} + C_1,$$



Сл. 28.4

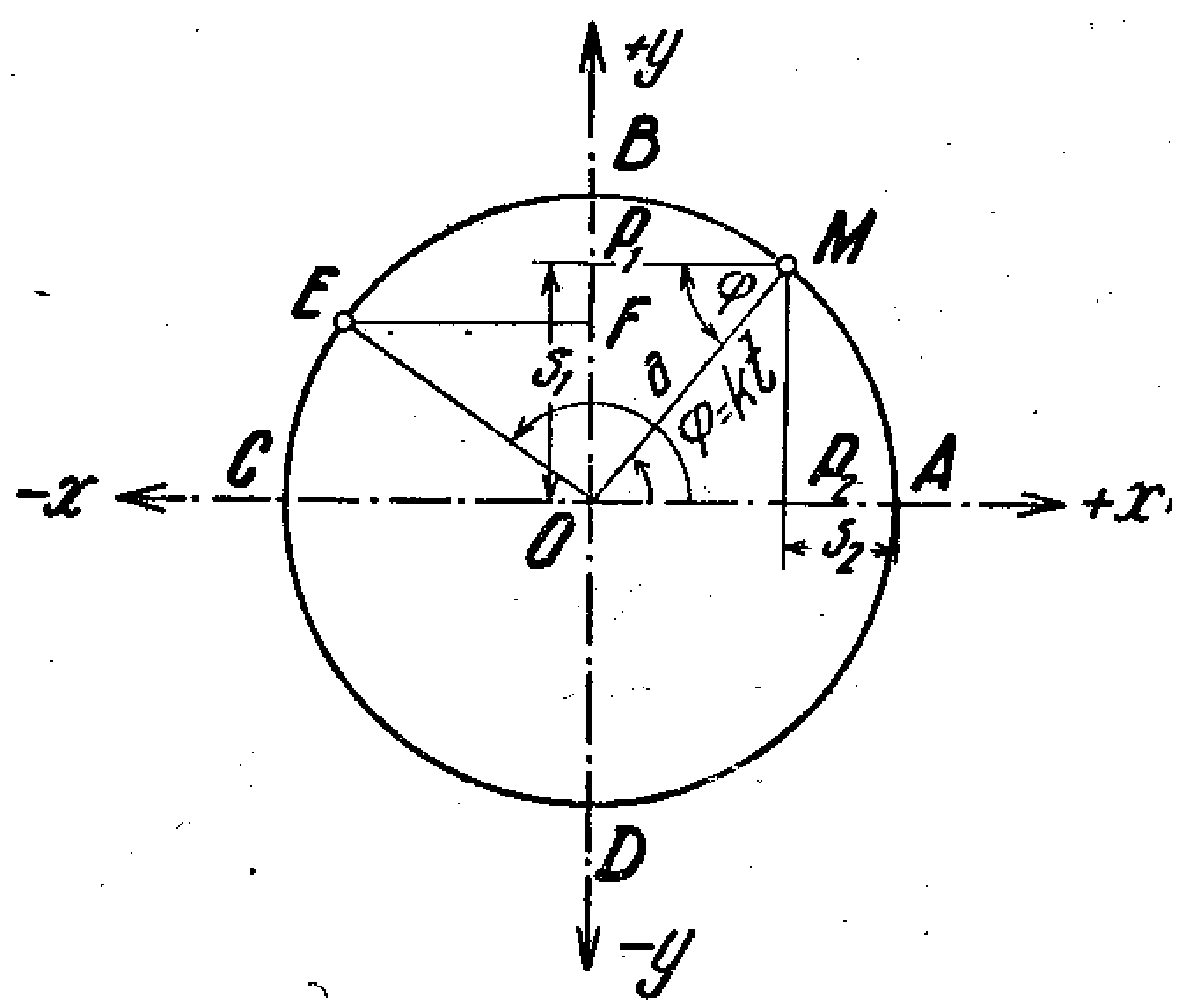
за почетни услов $t=0$, $x=0$ је $C_1=\frac{v_0}{\lambda}$, дакле је закон пута

$$x=\frac{v_0}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})=a(1-e^{-\lambda t})$$

(сл. 28.4б). Максимални пут који ће тачка прећи је $a=v_0/\lambda$, а да тај пут пређе, требаће бесконачно време. Елиминацијом времена из једначина за v и x добијамо функцију $v=v_0-\lambda x$ која важи за $x=a$ (сл. 28.4в)

29. Периодична кретања. То су она кретања, код којих се покретна тачка у извесним размацима времена редовно и у истом стању кретања враћа у свој првобитни положај. Ако је интервал времена у коме се то дешава константан, називамо га периодом. Периоду бележићемо са T.

а) **Хармонична осцилација.** Ако се штап $OM=a$ (сл. 29.1) окреће с десна на лево око своје једне крајње тачке O константном брзином окретања, њен други крај M кретаће се по кругу полупречника a једноликим кружним кретањем. Окретање замишљамо да почиње из положаја OA, у времену $t=0$. Пошто је окретање једнолико то ће угао φ расти пропорционално са временом, те можемо ставити $\varphi=kt$, где је k извесна константна брзина којом угао φ расте или угаона брзина. Пројекције покретне тачке M на осовину y и на осовину x, дакле тачке P_1 и P_2 вршиће обе, за време док се M креће по кругу, дуж тих осовина праволинијско кретање које се зове хармонична осцилација (хармонично титрање). То је најпростији случај периодичног кретања.



Сл. 29.1

Прво ћемо расматрати кретање тачке P_1. За време док тачка M превали пут од A до M њена пројекција P_1 прећиће у позитивном смеру осовине y пут $OP_1=s_1$. Из слике видимо да је

$$s_1=a\sin\varphi=a\sin kt.$$

Док је $0<\varphi<\pi$ тачка P_1 се креће од O до B и натраг, s_1 је позитивно. За $\pi<\varphi<2\pi$ тачка P_1 се креће од O до D и натраг, s_1 је негативно. За сваку вредност угла $\varphi=kt$ гласи закон хармоничне осцилације:

$$s = a \sin kt$$

и тај закон претстављен је синусном линијом на сл. 29.2а од тачке O до тачке O_1 тј. за $0 < \varphi < 2\pi$.

За угао $\varphi + 2\pi$ и уопште $\varphi + 2n\pi$ имаће s исту величину и знак као за φ дакле

$$s = a \sin (kt + 2\pi) = a \sin k \left(t + \frac{2\pi}{k}\right) = a \sin kt.$$

Константан интервал времена

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

зове се **периода хармоничне осцилације** а највећу ординату a у дијаграму пута зовемо **амплитудом** осцилације. *Периода је дакле независна од амплитуде.*

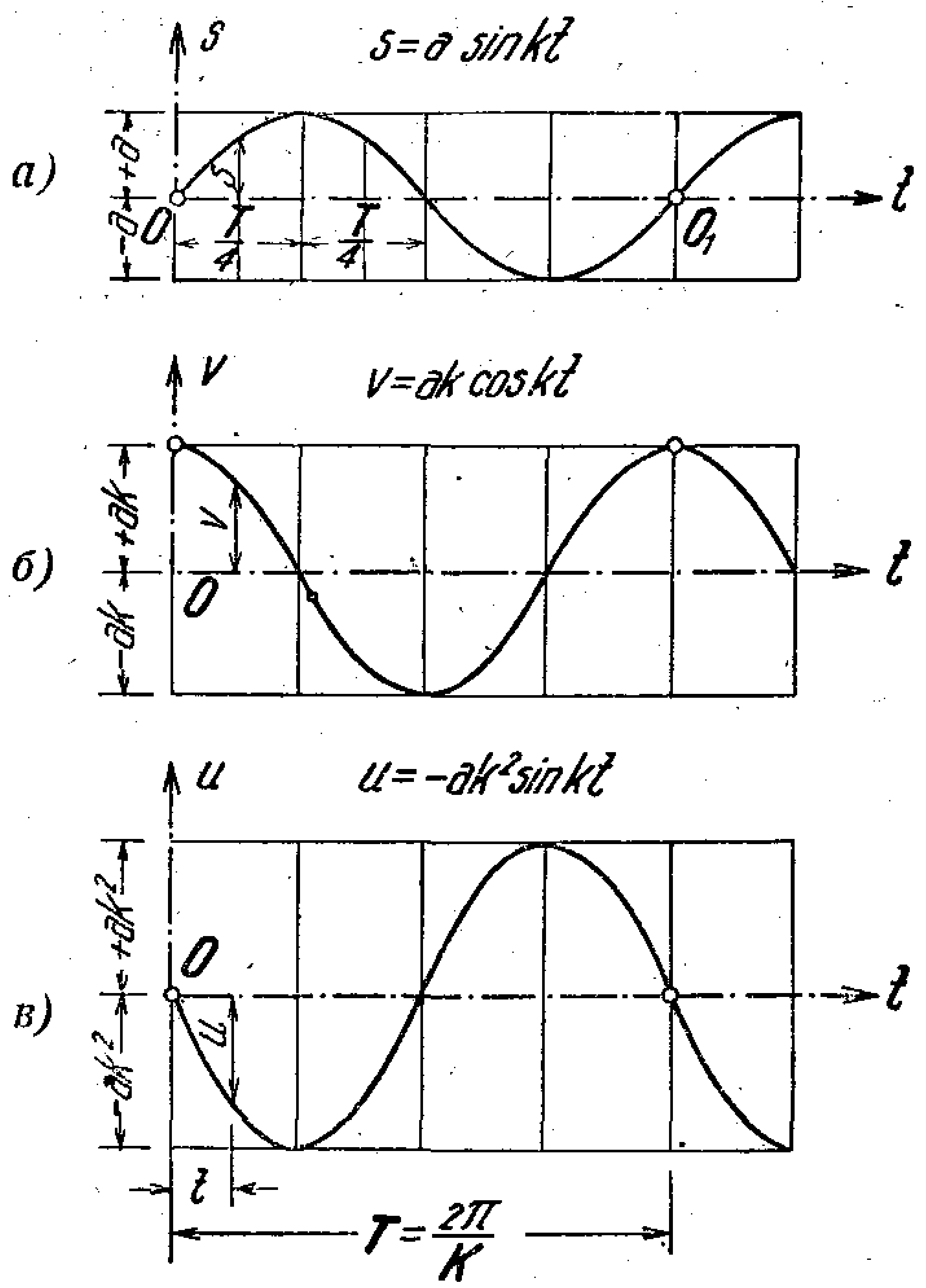
Ако са ν означимо број осцилација у једној секунди, онда је

$$T\nu = \frac{2\pi\nu}{k} = 1,$$

дакле је $k = 2\pi\nu$, тј. број осцилација у 2π секунада; k се зове **кружна фреквенција** осцилације и има димензију $[t^{-1}]$; њена се јединица зове 1 Hertz (Hz) по Физичару H. Hertz-u (1857-1884).

Диференцијалењем једначине $s = a \sin kt$ по времену добијамо брзину тачке P_1

$$\frac{ds}{dt} = v = ak \cos kt.$$



Сл. 29.2

Из дијаграма брзине (сл. 29.2б) се види да је $v = 0$ за $s_{max} = + a$ (положај B) и за $s_{min} = - a$ (положај D), а да је за $s = 0$,

$$v_{max} = + ak \text{ и } v_{min} = - ak$$

(када P_1 пролази кроз O на сл. 29.1).

Када диференцијалимо функцију брзине добијамо убрзање тачке P_1

$$u = \frac{dv}{dt} = - ak^2 \sin kt.$$

Узмемо ли у обзир, да је $s = a\sin kt$, налазимо да је убрзање

$$u = -k^2 s$$

тј. пропорционално пређеном путу. Дијаграм убрзања је синусоида у сл. 29.2b, слична дијаграму пута само са супротним знаком.

Најзад, све три величине: s, v и u код овог кретања можемо претставити једним јединим дијаграмом, а то је дијаграм брзине и пута. Функцију $v = f(s)$ добићемо из две једначине:

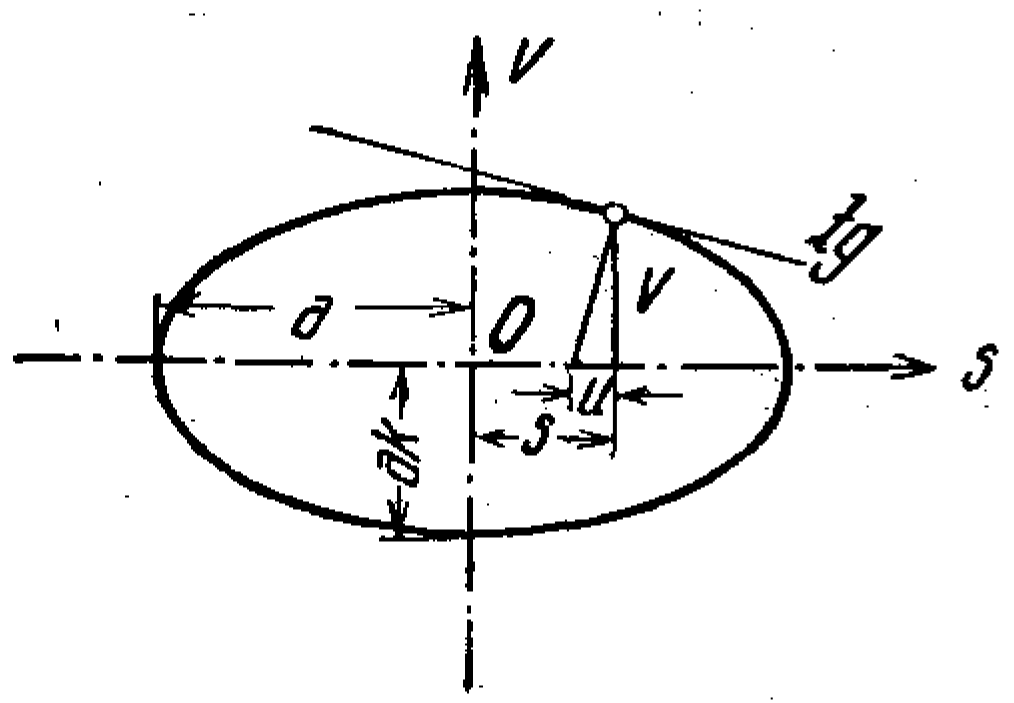
$$s = a\sin kt \quad \text{и} \quad \frac{v}{k} = a\cos kt$$

кад их обе узмемо на квадрат па саберемо:

$$s^2 + \frac{v^2}{k^2} = a^2(\sin^2 kt + \cos^2 kt) = a^2$$

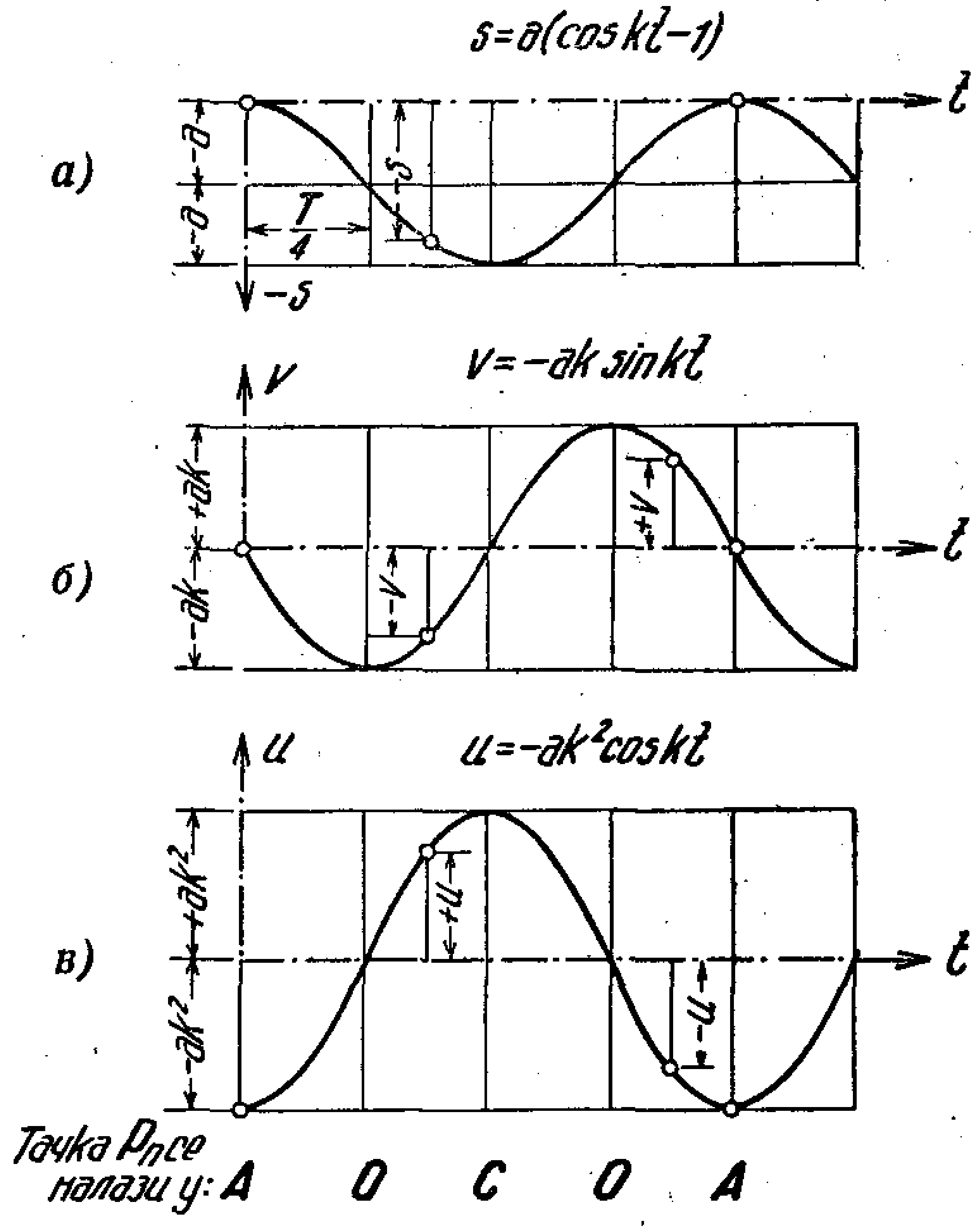
или

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2k^2} = 1,$$



Сл. 29.3

а то је елипса, чије су полуосовине a и ak (сл. 29.3). За сваку тачку ове елипсе апсциса означава пређени пут s, ордината брзину v, а субнормала убрзање u.



Сл. 29.4

При цртању ове елипсе може се размера за s и v тако изабрати да буду у цртежу обе полуосовине a и ak претстављене истом дужином. Тада се елипса претвара у круг, чије све нормале пролазе кроз средиште, те се убрзања добијају једнака пређеним путовима само са негативним знаком.

У суштини исто кретање као тачка P_1 вршиће и тачка P_2 (сл. 29.1.) За време кружења тачке M од A до B њена пројекција P_2 кретаће се дуж линије AO (у негативном смеру осовине x). Пређени пут од A до P_2 биће ако узмемо A за почетак:

$$s_2 = \overline{AP_2} = \overline{OP_2} - \overline{OA}.$$

Закон кретања тачке P_2 гласи дакле $s_2 = a(\cos kt - 1)$. За $kt = 0$ је $s_2 = 0$, за $kt = \pi$ је $s_2 = -2a$. У времену $t = 0$ налази се тачка P_1 у 0 а тачка P_2 у A. Обе осцилације имају фазну разлику од четвртине периоде за које време кретање тачке P_1 заостаје иза кретања тачке P_2.

Брзина кретања тачке P_2 биће:

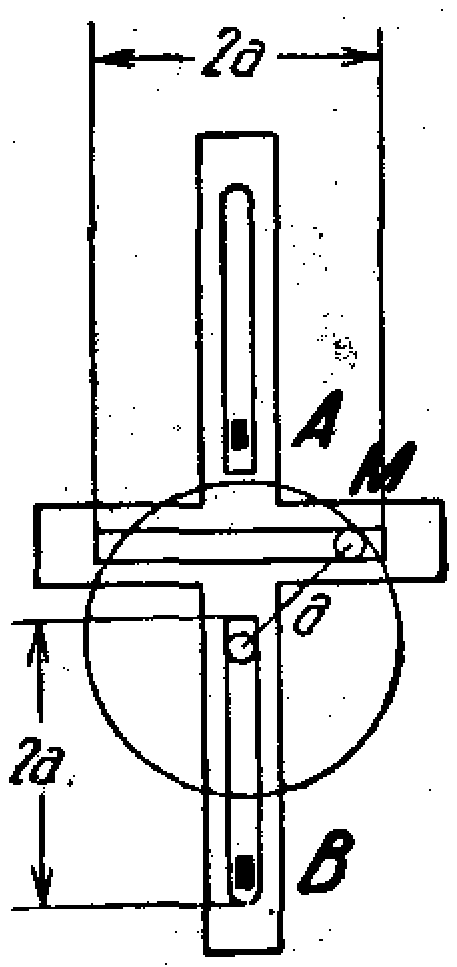
$$v = \frac{ds}{dt} = -ak \sin kt$$

а урбзање:

$$u = \frac{dv}{dt} = -ak^2 \cos kt.$$

Дијаграми кретања тачке P_2 приказани су на сл. 29.4.

Хармонична осцилација може се практично извести помоћу направе претстављеие на сл. 29.5. Полуга OM обрће се око непомичне осовине O констaнтном брзином. Њен крај-M клизи у хоризонталном прорезу крста и приморава овај да осцилише у вертикали кроз O. Вертикални положај крста одржавају две непомичне тачке A и B на које се ослања.



Сл. 29.5

б) **Амортизована осцилација.** Ако се осцилаторно кретање које смо досад проучавали врши у некој отпорној срединн, и ако претпоставимо да је успорење што га ствара отпор средине у сваком тренутку пропорционално брзини, онда наступа кретање које се назива амортизована (пригушена) осцилација. Амплитуда a која је код хармоничне осцилације била константна, смањује се у овоме случају у току времена тако, да кретање најзад (за $t = \infty$) престаје.

Закон таквог кретања изражен је функцијом

$$s = ae^{-\lambda t} \sin kt.$$

Она се састоји из два фактора $ae^{-\lambda t}$ и $\sin kt$, који одговарају кретањима што смо их проучавали у два последња примера. За $t = 0$ биће $x = 0$, а тако исто и за $kt = 2\pi, 4\pi, \ldots$, што значи да је периода $T = \frac{2\pi}{k}$. За $kt = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ је $s = \pm ae^{-\lambda t}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Брзина и убрзање биће

$$v = \frac{ds}{dt} = ae^{-\lambda t} (\lambda \sin kt + k \cos kt),$$

$$u = \frac{dv}{dt} = -ae^{-\lambda t} [(k^2 - \lambda^2) \sin kt + 2 k\lambda \cos kt].$$

Екстремне вредности пређеног пута добијамо када ставимо $\frac{ds}{dt} = v = 0$, или, пошто $ae^{-\lambda t}$ није једнако нули,

$$-\lambda \sin kt' + k \cos kt' = 0$$

а одавде

$$\operatorname{tg} kt' = \frac{k}{\lambda}.$$

Како је периода функције $\operatorname{tg}\varphi$ π, дакле

$$\operatorname{tg} kt = \operatorname{tg} k \left(t + \frac{T}{2}\right),$$

то значи ако прва екстремна вредност за s наступи за $t = t'$, да ће све остале наступити у временима: $\left(t' + \frac{T}{2}\right)$, $\left(t' + 2\frac{T}{2}\right)$, $\left(t' + 3\frac{T}{3}\right)$...

Екстремне вредности путова биће дакле:

за $t_1 = t'$ $\quad s_1 = ae^{-\lambda t'} \sin kt'$,

за $t_2 = t' + \frac{T}{2}$ $\quad s_2 = a e^{-\lambda\left(t' + \frac{T}{2}\right)} \sin k \left(t' + \frac{T}{2}\right) = -ae^{-\lambda t'} e^{-\lambda\frac{T}{2}} \sin kt'$,

за $t_3 = t' + T$ $\quad s_3 = a e^{-\lambda(t' + T)} \sin k (t' + T) = + a e^{-\lambda t'} e^{-\lambda T} \sin kt'$,

итд.

Однос двају узастопних екстремних путова биће:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{ae^{-\lambda t'} \sin kt'}{-a e^{-\lambda t'} e^{-\lambda\frac{T}{2}} \sin kt'} = -e^{\lambda\frac{T}{2}},$$

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{-a e^{-\lambda t'}\frac{T}{2} \sin kt'}{a e^{-\lambda t'} e^{-\lambda T} \sin kt'} = -e^{\lambda\frac{T}{2}},$$

. . . .

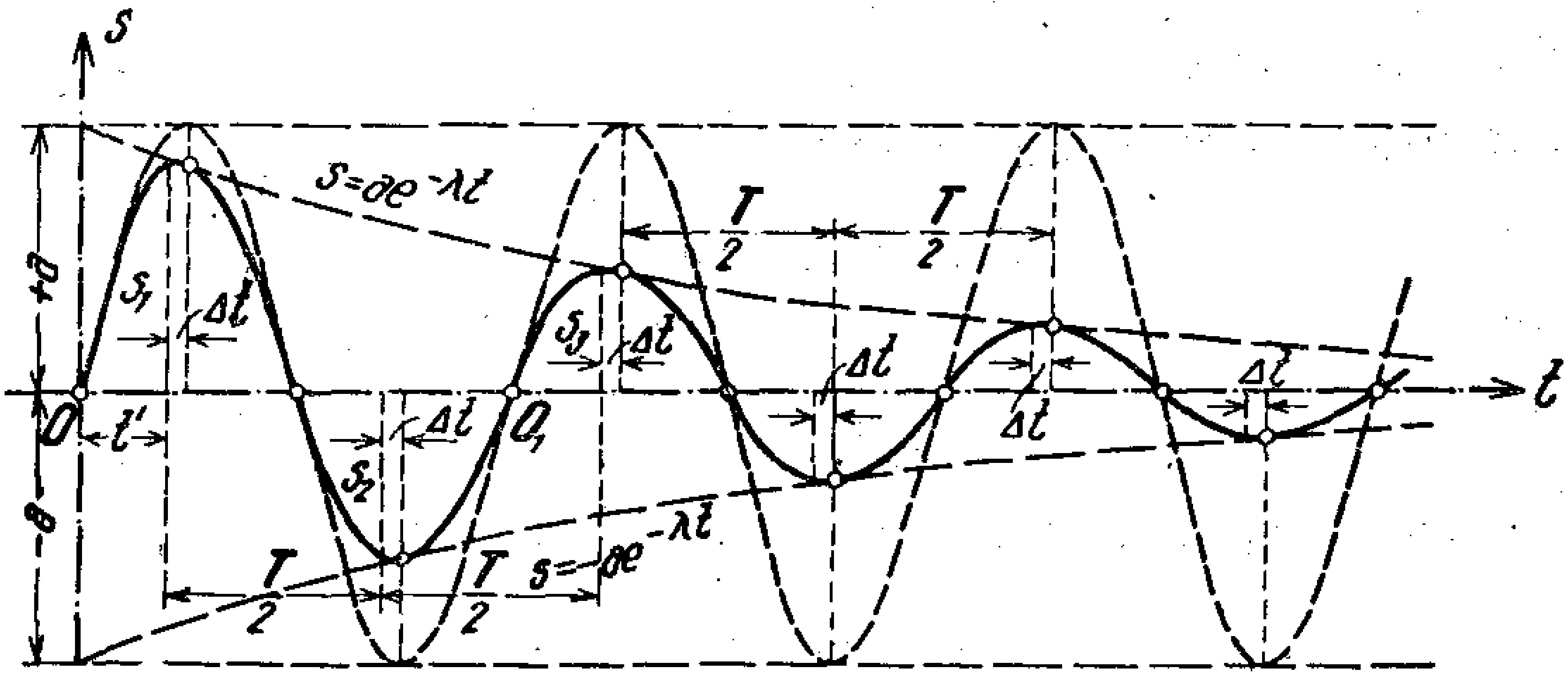
Из овога се види, да амплитуде s_1, s_2, s_3... опадају са временом и *да је однос двеју суседних амплитуда (однос амортизовања) констант; његова апсолутна величина је

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \ldots = e^{\lambda\frac{T}{2}} = \text{const.}$$

Природни логаритам ове константе, дакле израз:

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln x_2 - \ln x_3 = \ldots = \lambda \frac{T}{2},$$

зове се по Gauss-у логаритмички декремент осцилације.



Сл. 29.6

Из дијаграма пута на сл. 29.6 види се да је заједничка тангента линија $ae^{-\lambda t}$ и $\sin kt$ нагнута према осовини t, а то значи да екстремне вредности за s наступају за интервал Δt раније, но што би наступиле када би осцилација била хармонична. Из слике се види да је $\Delta t = T/4 - t'$. Раније смо нашли, да за s_1 важи $\operatorname{tg} kt = k/\lambda$. Уводећи комплеметарни угао $\gamma = \operatorname{arc} tg\ \lambda/k$ добијамо релацију:

$$\gamma + kt' = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad t' = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right).$$

Када у једначину за Δt ставимо горњу вредност за t' и $T = \dfrac{2\pi}{k}$ добијамо:

$$\Delta t = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \lambda\right) = \frac{\lambda}{k},$$

и са $\dfrac{1}{k} = \dfrac{T}{2\pi}$

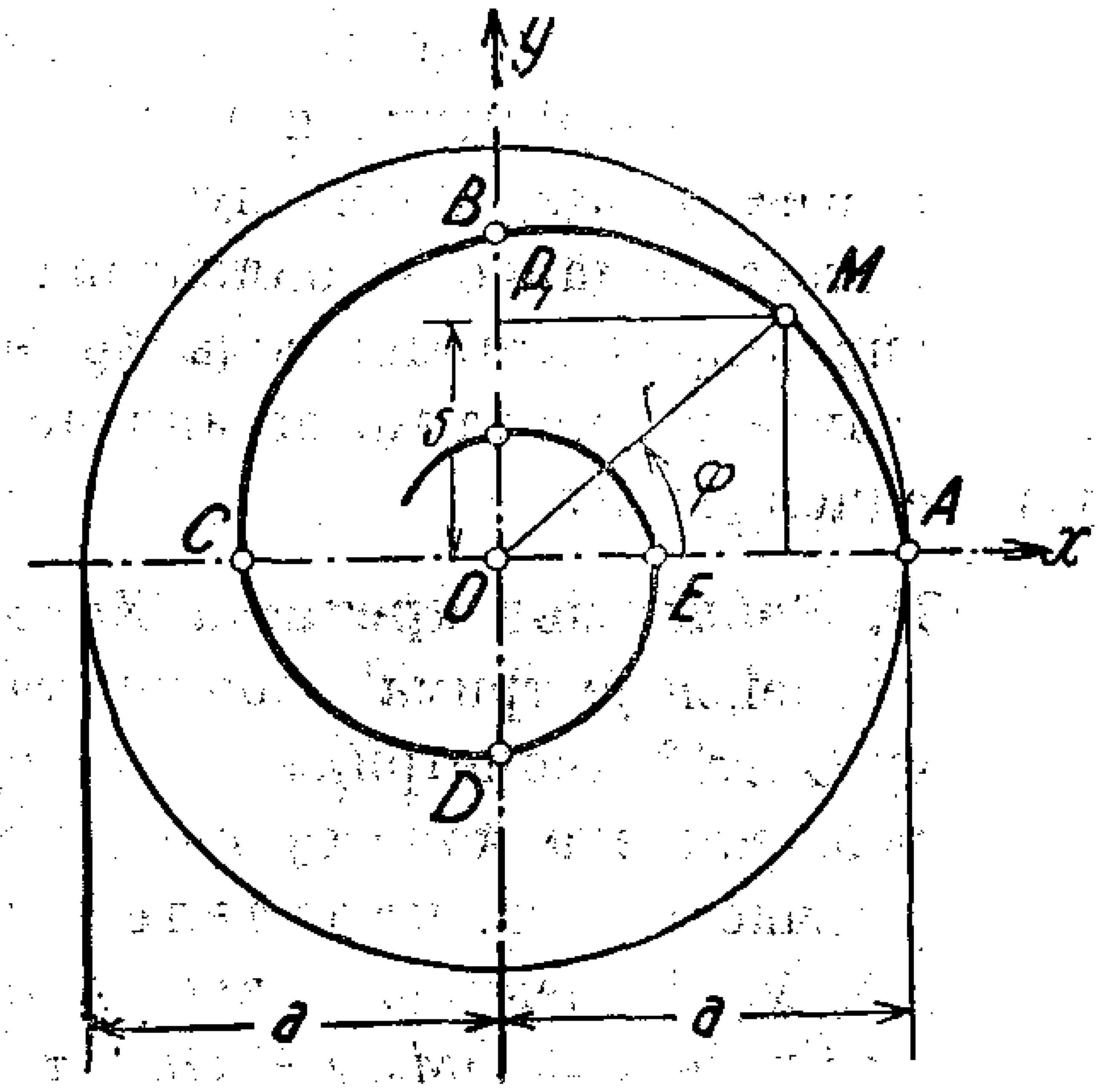
$$\Delta t = \frac{\lambda}{2\pi} T,$$

дакле Δt *је у свима периодама иста величина.*

Ма да се покретна тачка при своме кретању у једнаким размацима времена $T = 2\pi/k$ враћа у свој првобитни положај, ипак ово кретање није право периодично као у прошлом примеру, јер се овде покретна тачка у почетку разних периода, што одговарају тачкама $O, O_1, O_2 \ldots$

у дијаграму пута и тачкама A и E сл. 29.7, не налази у истом стању кретања (брзине и убрзања су различити). Зато се ово кретање зове псеудопериодично.

Амортизовано осцилаторно кретање можемо геометријски приказати помоћу логаритамске спирале[1]), чија је једначина у поларним координатама (сл. 29.7) $r = ae^{-\varphi}$. За $\varphi = 0$ је $r = a$, за $\varphi \to \infty$ је $r = \to 0$. O је асимптотичка тачка спирале. Када се r обрће константном угаоном брзином λ око 0, вршиће пројекција P_1 тачке M дуж осовине y амортизовану осцилацију око координатног почетка.



Сл. 29,7

Б. КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ У КРИВОЈ ПУТАЊИ

30. Два начина описивања кретања. Када са x означимо неку праву, онда нам једначина $x = f(t)$ потпуно одређује кретање тачке по тој правој. Као што нам је већ познато.

Ако пак са s обележимо неку *криву* (равну или просторну) линију по којој је тачка принуђена да се креће, биће њено кретање истом функцијом $s = f(t)$ одређено. Њена ће брзина бити $v = \frac{ds}{dt}$ а убрзање $u_t = \frac{dv}{dt}$. Али је u_t само један део убрзања, онај који мења величину брзине, има дакле правац тангенте а знак + или — према томе дали брзина расте или опада. Други део убрзања је као што ћемо видети: $u_n = \frac{v^2}{\varrho}$ где је ϱ полупречник кривине линије у тачки у којој се покретна тачка налази. Тај део убрзања је управан на тангенту, увек позитиван, управљен према центру кривине. Укупно убрзање тачке у кривој путањи је $u = \sqrt{u_t^2 + u_n^2}$. Тангенцијално убрзање u_t мења величину, а центрипетално убрзање u_c мења правац брзине. Јасно је да када бисмо криву путању s испружили у праву, закон кретања би остао непромењен, отпало би само центрипетално убрзање дакле и

[1]) Назвао је тако Varignon 1704 г. а први је изучавао Декарт 1638 г.

центрипетална сила mu_c која се испољава као притисак вођице на тачку (на пример притисак спољашње шине на точкове кола у кривом колосеку). Потпуно описивање кретања подразумева и познавање убрзања u_n у свакој тачки путање, тј. познавање такозване природне једначине $\varrho = \varphi(s)$ криве путање. Ти су рачуни врло сложени и заметни, стога се данас за описивање криволинијског кретања служимо много простијом методом која брже води циљу како за кретање слободне тачке тако и тачке ограничене у кретању. О њој ћемо говорити у наредном члану.

31. Разлагање кретања. Ходограф брзине и убрзања. Положај тачке одређен је трима координатама x, y, z у једном уопште косом систему $Oxyz$. У геометријском изразу тачка M је теме супротно темену O паралелепипеда коме су ивице једнаке и паралелне координатама x, y, z тачке M т. зв. паралелепипед положаја. Ако са M_x, M_y и M_z означимо пројекције покретне тачке M на осовине усвојеног триедра тако да је $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, одговарају сваком положају тачке M која се креће уопште у кривој путањи, три тачке M_x, M_y и M_z које се крећу у правама, осовинама триедра $Oxyz$. Кретање тачке M разложили смо у три праволинијска кретања њених пројекција. У размаку времена Δt прећиће тачка M пут $\Delta s = MM'$ а у истом времену прећиће њене пројекције путове Δx, Δy, Δz. Брзине $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_x$ и аналогно $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$ су компоненте или пројекције брзине $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$ тачке M. Када брзину $v = Om$ пренесемо из почетка O нашег триедра а то исто учинимо са компоненталним брзинама v_x, v_y, v_z, добићемо паралелепипед брзине у ком је Om дијагонала. Овом је паралелепипеду сличан паралелепипед пута коме су ивице dx, dy, dz, и дијагонала из O једнака ds. Када тачка M описује своју путању s, описиваће m уопште криву линију σ коју можемо сматрати њеном путањом. Према претпоставци, компоненте елементарног пута $\Delta\sigma$ су Δv_x, Δv_y и Δv_z. Брзина тачке m има дакле компоненте:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = u_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = u_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = u_z.$$

То значи да је брзина $\frac{d\sigma}{dt}$ *тачке* m *идентична са убрзањем тачке* M. Линија σ чији потези Om претстављају брзине тачке M зове се ходограф[1]) брзине. *Тангента на ходограф брзине у тачки* m *паралелна је убрзању тачке* M.

[1]) Увео Хамилтон (R. Hamilton 1805—1865).

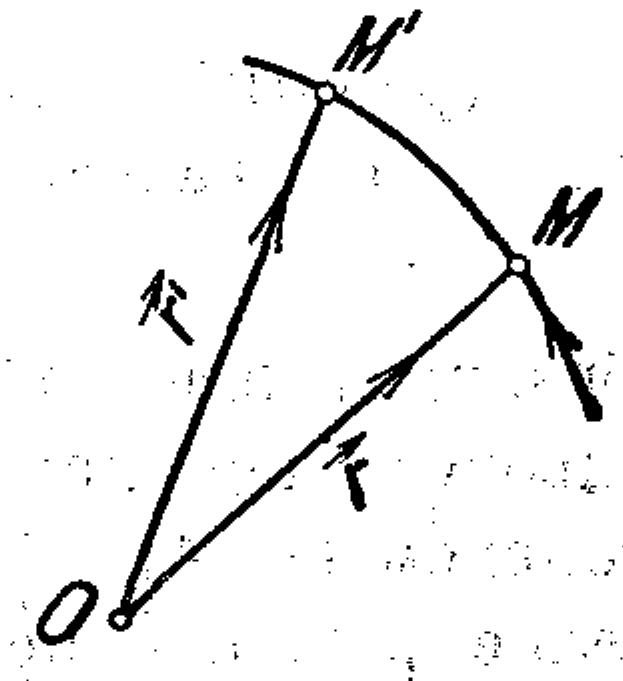
Паралелепипед конструисан у триедру $Oxyz$, убрзањима u_x, u_y и u_z зове се паралелепипед убрзања. Његова дијагонала повучена из O претставља убрзање $\vec{u}$ тачке M. Аналогно ходографу брзине добијамо ходограф убрзања када из O повучемо потеге Ou једнаке векторима $\vec{u}$. Брзина тачке μ претставља убрзање другог реда тачке M, дакле је тангента на ходограф убрзања у тачки μ паралелна убрзању другог реда тачке M.

Три криве линије: Путања тачке M, ходограф брзине и ходограф убрзања у опште су просторне криве (или линије двогубе кривине). Свака образује по једну коничну површину са теменом O. Ако је путања равна крива прелазе површине у три паралелне равни. Површине су независне од оријентације триедра $Oxyz$.

32. Слагање кретања. Кретање тачке које треба да опишемо биће нам дато једном, двема или трима законима праволинијског кретања $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. У првом случају је кретање праволинијско, у остала два случаја имамо два односно три кретања да сложимо у једно кретање. Први је задатак да нађемо једначину путање траженог кретања. Ако су дате само две једначине (на пример прве две) елиминишемо из њих време, те добијемо једначину путање $F(x,y) = 0$ или $y = \varphi(x)$. Ова је једначина уопште крива линија, али изузетно може бити и права. Ако су нам дате све три једначине онда налазимо елиминацијом времена из прве две $F_1(x,y) = 0$ а из прве и треће $F_2(x,z) = 0$. То су једначине пројекције путање на раван (xy) односно (xz), и њима је облик путање потпуно одређен. Трећа једначина $F_3(y,z) = 0$ је сувишна јер се добије из прве две елиминацијом апсцисе x. Три дате једначине зову се параметричним једначинама криве (параметар t) Путања ће у општем случају бити просторна, у специјалном случају равна крива или права линија. Даљи поступак нам је већ познат. Диференцијалећи дате једначине по времену добијамо компоненталне брзине v_x. v_y, v_z и сложимо их паралелепипедом брзина — било рачунски или геометријски — у брзину $\vec{v}$ покретне тачке M. Поновним диференцијалењем добијамо убрзања u_x, u_y, u_z и сложимо их у убрзање $\vec{u}$ тачке M. Тиме је описивање кретања извршено.

Ако су нам закони кретања дати графички, дијаграмима пута и времена, налазимо компоненталне брзине и убрзања графичким диференцијалењем.

33. Описивање кретања векторским рачуном. а) Брзина тачке. Положај тачке M одређујемо према једној усвојеној тачки (полу) 0 управљеном дужином $\overrightarrow{OM}$ (сл. 33.1), или вектором положаја $\vec{r}$. У времену Δt доћиће тачка у положај M' који је одређен вектором $\vec{r}'$ и описаће лук $\Delta s = \widehat{MM'}$. Тетива тог лука $\overline{MM'}$ је векторска разлика $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$. Количник $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ је средња брзина на путу Δs. За $\Delta t \to 0$ конвергише $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ који зависи како од t тако и од Δt, према изводу $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ који зависи само од t. *Брзина је дефинисана као извод вектора положаја по времену.* Ова векторска дефиниција брзине садржи више него скаларна дефиниција: $v = \frac{ds}{dt}$, јер сем величине брзине одређује она и њен правац и смер $d\vec{r}$. Закон кретања гласи

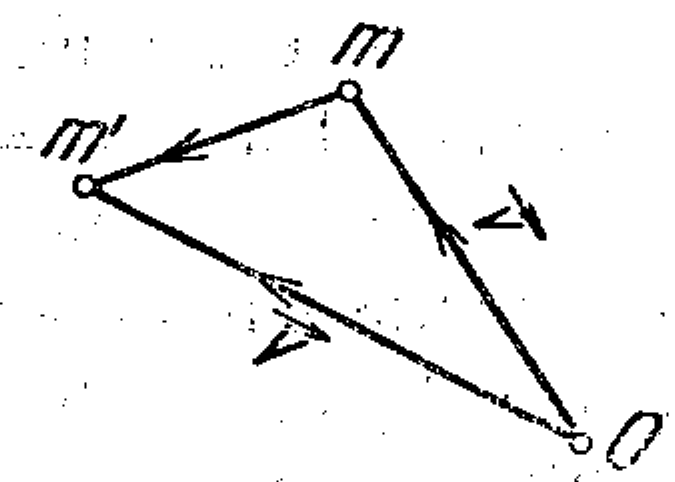


Сл. 33.1

$$\vec{r} = \vec{f}(t),$$

дакле је брзина

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Сл. 33.2

б) Убрзање можемо дефинисати на два начина: променом брзине и променом положаја. Из пола О пренесемо брзине $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ паралелне тангентама на путању у тачкама M и M' на сл. 33.1. У троуглу Omm' (сл. 33.2) је

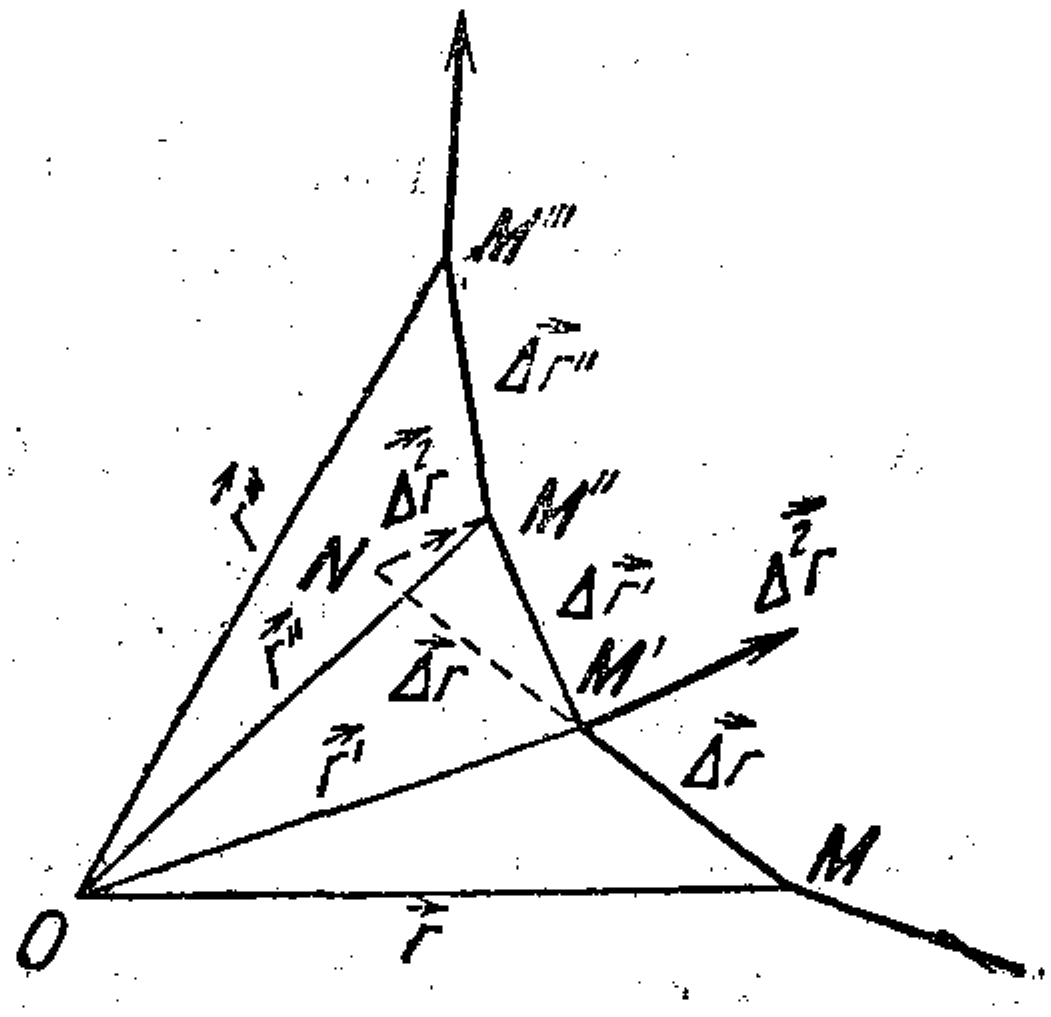
$$\overrightarrow{mm'} = \vec{v}' - \vec{v} = \Delta\vec{v}$$

дакле $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ средње убрзање на путу MM'. Убрзање у тачки M је дакле

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Убрзање је извод вектора брзине по времену.

На сл. 33.2 приказана је путања тачке M као полигон M, M', M''.. у коме стране $\vec{\Delta r}, \vec{\Delta r'}, \vec{\Delta r''}$.... претстављају елементарне путове пређене у једнаким размацима времена Δt.



Сл. 33.2

Средња брзина на путу MM' је $\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$, а на путу $M'M''$ $\frac{\vec{\Delta r'}}{\Delta t}$. Њихова разлика подељена са Δt даће нам средње убрзање на путу MM''; када Δt конвергише према нули приближаваће се M и M'' према M' и средње убрзање прећиће у убрзање $\vec{u}$ тачке M', дакле:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\vec{\Delta r'}}{\Delta t} - \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r'} - \vec{\Delta r}}{\Delta t^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^2 \vec{r}}{\Delta t^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{u},$$

тј. *убрзање је други извод вектора положаја по времену.* Када пут MM' продужимо до N тако да је $M'N = MM'$, претставља страна NM'' троугла $M'N\,M''$ другу диференцију $\Delta^2\vec{r}$. Из конструкције је очевидно да је $\Delta^2\vec{r}$, дакле и убрзање $\vec{u}$ увек усмерено према конкавној страни путање било да је $\vec{\Delta r'}$ веће од $\vec{\Delta r}$ (кретање убрзано) или мање (кретање успорено).

Три суседне тачке M, M' и M'' одређују раван. Када се M и M'' приближе према M' постаје та раван оскулациона раван криве у тачки M'. *Убрзање $\vec{u}$ у тачки M' лежи у њеној оскулационој равни.*

Пресек нормалне равни криве у тачки M' са оскулационом равни је главна нормала тачке M'. Раван положена кроз тангенту криве у M', управно на оскулациону раван, зове се по Ланкрету (Lancret) ректификациона раван. Њен пресек са нормалном равни зове се по Сен Венану (Saint Venant, 1845). бинормала тачке M'. Тангента, главна нормала и бинормала образују ортогоналан триедар са теменом M', такозвани природни координатни систем криве линије. Две суседне тангенте заклапају контингентни (додирни) угао $d\varphi$. Извод $\frac{d\varphi}{ds} = K$ је кривина линије у тачки M. Три суседне тачке одређују круг који конвергише према оскулационом кругу у M' са полупречником ϱ. Како је $d\varphi$ за оскулациони круг и за криву исте величине то је $\varrho d\varphi = ds$, дакле $\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{K}$; оскулациони круг зове се стога и круг кривине; његов центар лежи на главној нормали. Две суседне тангенте се секу а две главне нормале и бинормале се укрштају.

Ако три тачке M, M' и M'' на сл. 33.3 леже у равни цртежа, четврта тачка M''' неће у опште лежати у њој. То значи да ће оскулациона раван тачке M'' сећи оскулациону раван тачке M' у правој MM''. Угао $d\vartheta$ који две суседне оскулационе равни заклапају, зове се угао торзије или оскулациони угао. Извод $\frac{d\vartheta}{ds} = T$ зове се торзија или друга кривина, а прва кривина K зове се и флексија. Крива линија се зове равном ако је у свакој тачки њеној $T = 0$. За $T \neq 0$ пак зове се просторном или линијом двогубе кривине или још и витоперном.

Једина равна линија у којој је $K = \text{const.}$ је круг, а једина витоперна линија са константном флексијом и торзијом је завојна или хеликоидална линија.

34. Природне компоненте убрзања. Видели смо да вектор $\vec{u}$ лежи у оскулационој равни. У природном триедру $M(t,n,b)$ има $\vec{u}$ само две компоненте, у правцу тангенте $\vec{u}_t$ и у правцу главне нормале $\vec{u}_n$, док је увек $\vec{u}_b = 0$. На сл. 34.1 је s путања тачке M, MM' њен врло мали део ds пређен за време dt. Брзине $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ у почетку и крају пута ds пренесене су од пола O, тако да је $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OA'} = \vec{v}'$. $\overline{AA'} = d\vec{v}$ векторски прираштај брзине је $\vec{v}$. У граничном положају је AA' елемент ходографа брзине. Круг пречника $\overline{OA}$ сече $\overline{OA'}$ у тачки B. На граници ($\Delta t \to 0$) је угао $\sphericalangle OBA = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle OAB$. У бесконачно малом правоуглом троуглу ABA' је страна $\overline{BA'} = dv$ алгебарски прираштај брзине v и има правац тангенте те је

$$\frac{dv}{dt} = u_t$$

тангенцијална компонената убрзања $\vec{u}$. Страна $AB = v d\varphi$, је управна на путању, има увек смер према центру кривине C. Центрипетална компонента убрзања је

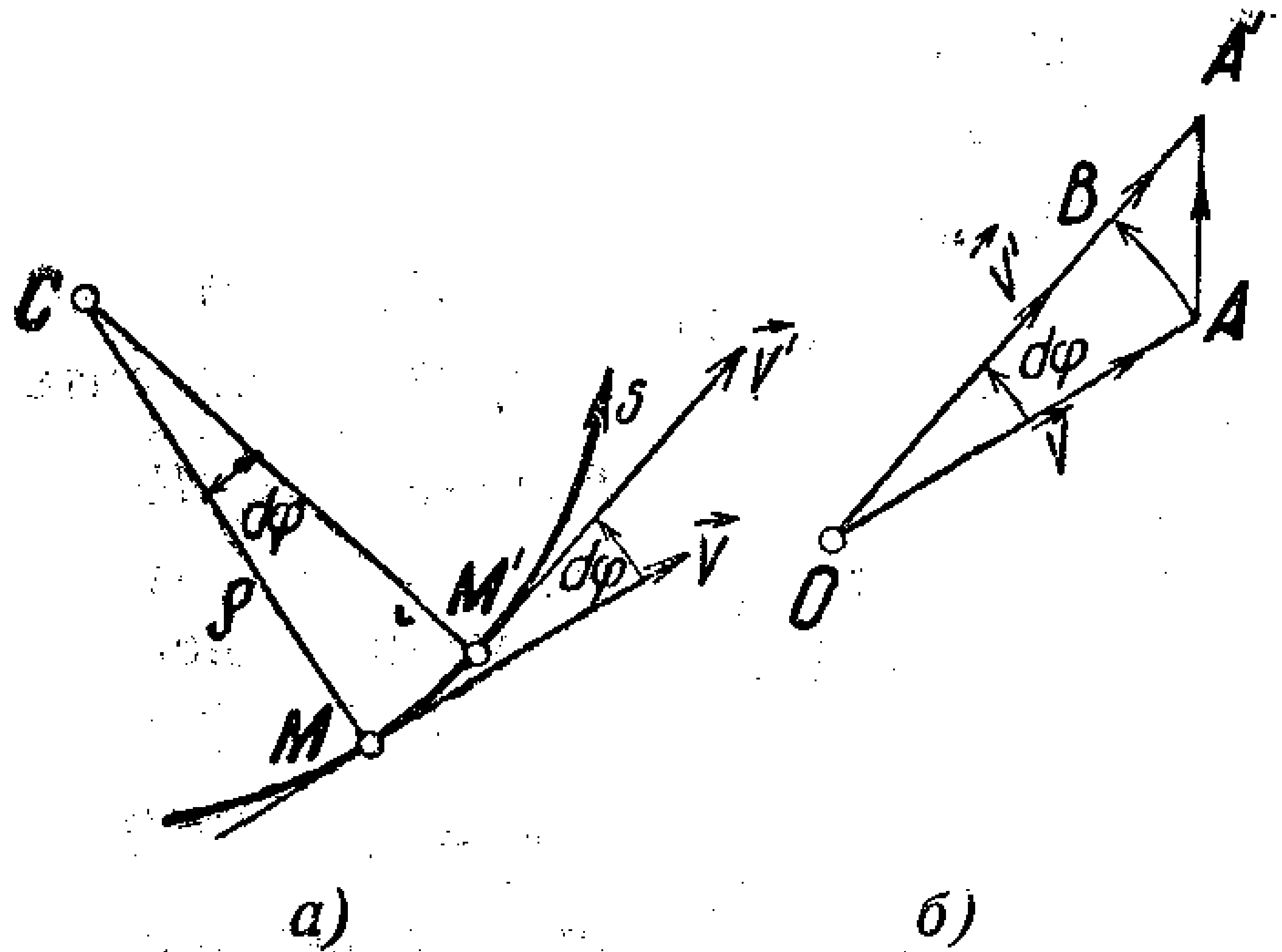
$$u_n = v \frac{d\varphi}{dt}$$

или са $d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$ (Сл. 34.1а)

$$u_n = \frac{v}{\varrho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Када уведемо јединичне векторе $\vec{e}_t$ у правцу тангенте и $\vec{e}_n$ у правцу нормале можемо написати векторску једначину

$$\vec{u} = \vec{e}_t\frac{dv}{dt} + \vec{e}_n\frac{v^2}{\varrho}.$$

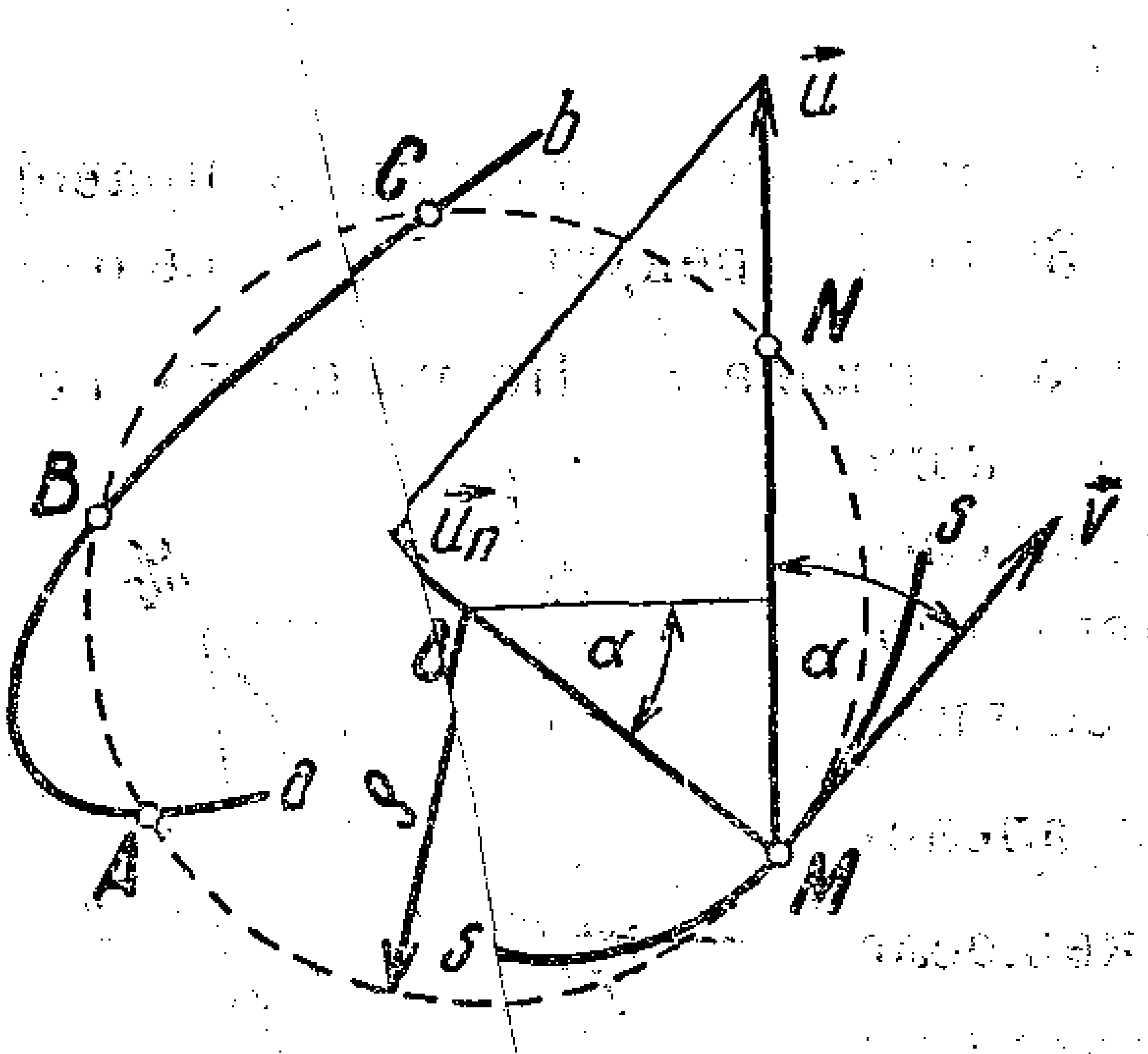


Сл. 34.1

Тангенцијално и центрипетално (нормално) убрзање су **природне компоненте убрзања.**

Дефиниција убрзања важи како за равну тако и за просторну криву линију. Разлика је у томе што се у равној путањи центрипетална убрзања суседних тачака секу, а у просторној путањи укрштају. Док се тачка M креће описују тангента, главна нормала и бинормала праволинијске површине од којих се само прва може развити у раван а остале две су витоперне.

Оскулациони круг има са кривом три заједничке бесконачно блиске тачке стога он додирује и уједно сече криву. Линија a—b сл. 34.2 сече круг у тачкама A, B и C. Када се A и C приближе тачки B до поклапања, отпада у луци $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$, крај aA остаје у кругу а крај Cb изван круга. Крива додирује круг у тачки B и уједно је сече. То важи уопште ако круг и крива имају непаран број заједничких тачака, другим речима ако је додир парног степена. Оскулациони кругови у теменима елипсе (уопште коничних пресека) не секу криву, додир је трећег реда.



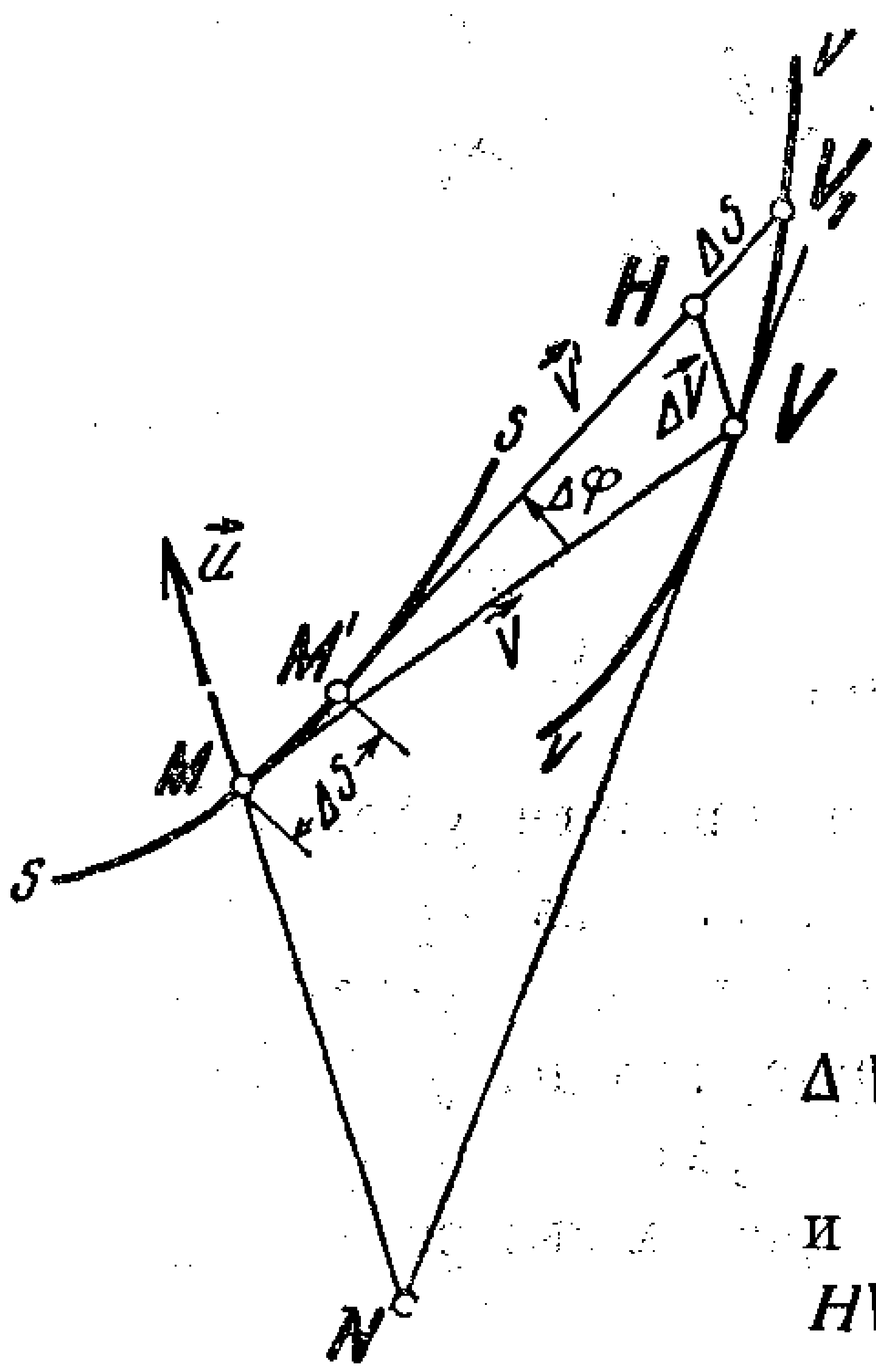
Сл. 34.2

На сл. 34.2 сече вектор убрзања $\vec{u}$ тачке M оскулациони круг у тачки N. Тетива $\overline{MN} = e$ зове се **тетива убрзања.** Тетива (убрзање) заклапа са тангентом угао α. Из слике читамо:

$$\frac{e}{2} = \varrho\sin\alpha, \quad u_n = \frac{v^2}{\varrho} = u\sin\alpha,$$

из којих следује $v^2 = u\frac{e}{2}$ тј., брзина тачке је једнака средњој геометријској пропорционали убрзања и половине тетиве убрзања.

35. Велоцида. Ходограф брзине одређује правац и смер убрзања. Да бисмо одредили графички његову величину, конструишемо нову линију коју је Мемке (Mehmke 1903.) увео и назвао велоцидом.[1])



Сл. 35.1

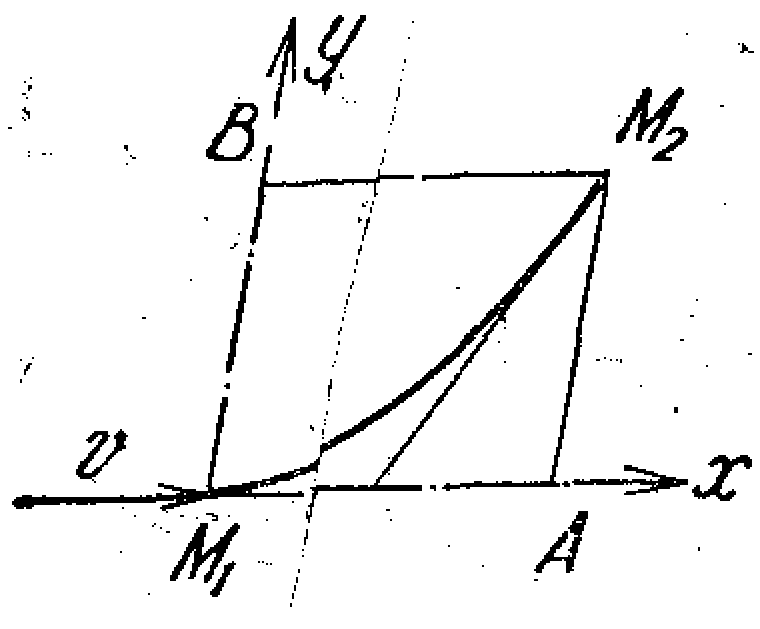
Када у тачкама M, M' и $M'', \ldots$ путање $s—s$ повучемо тангенте и у смеру кретања пренесемо брзине $\vec{v} = \overrightarrow{MV}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{M'V'}$, … образоваће тачке V, V', V'', криву линију $v — v$, велоциду кретања. За мали елемент пута $MM' = ds$ можемо сматрати да тачке M, M' и V' леже у једној правој; са $HV' = \Delta s$ је $\overrightarrow{M'H} = \overrightarrow{M'V'} = \vec{v}'$. $\overrightarrow{VH}$ дакле претставља векторску разлику $\vec{v}' — \vec{v} = \Delta\vec{v}$. У граничном положају ($\Delta\varphi \to 0$) биће правац убрзања у тачки M паралелан са $\overrightarrow{VH}$, тангента велоциде у V сећиће праву $\vec{u}$ у тачки N. Троуглови $\Delta\, NMV$ и $\Delta\, VHV'$ су слични те постоји пропорција $\dfrac{NM}{MV} = \dfrac{VH}{HV'}$ и пошто унесемо вредности $\overrightarrow{MV} = \vec{v}$, $\overrightarrow{VH} = \Delta\vec{v}$, $HV' = \Delta s = v\Delta t$ налазимо:

$$\overrightarrow{NM} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Тангента велоциде у тачки V која одговара положају M покретне тачке отсеца на правој $\vec{u}$ величину убрзања, дакле је

$$\vec{u} = \overrightarrow{NM}.$$

36. Девијација тачке. Тачка M креће се једнолико у правој путањи (по осовини x) брзином v (сл. 36.1). У тренутку t када се она налазу у M_1 почне она добијати стално убрзање $\vec{u}$. По принципу независности дејства наћићемо место на коме ће се налазити у времену $t + \Delta t$ када сложимо два праволинијска пута. У правцу осовине x је пут $M_1A = v\Delta t$, а у правцу осовине y (паралелне са $\vec{u}$) $\overrightarrow{M_1B} = \frac{1}{2}\vec{u}(\Delta t)^2$. Паралелограм путова одређује положај M_2 тачке после времена Δt. За $\Delta t \to 0$ биће $\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\vec{u}\, dt^2$. Тај се вектор зове девијација[2]) (скретање) тачке.



Сл. 36.1

[1]) Velocitas = брзина.

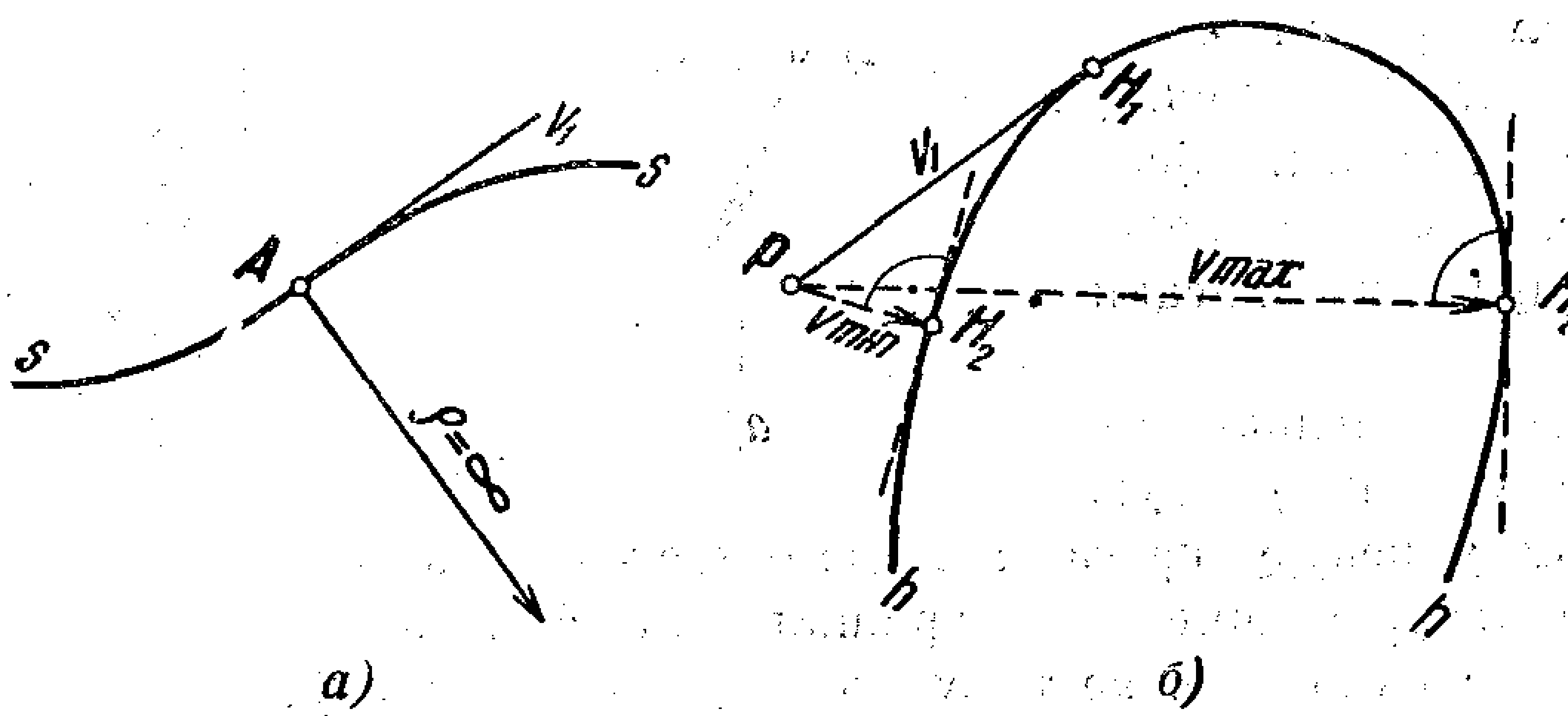
[2]) Појам девијације увео је Ампер (A. M. Ampère 1775—1836).

На слици је дужина AM_2 према M_1A јако увећана јер из обрасца видимо да је M_1A мала величина првог реда а AM_2 другог реда. Путања $\widehat{M_1M_2}$ је парабола. Апсциса је тангента у M_1, а тангента у M_2 полови пут $\overline{M_1A}$.

Примена појма девијације знатно упроштава геометријско описивање релативног кретања.

37. Особите тачке ходографа брзине. Из извесних положаја пола према кривој линији ходографа можемо извести закључке у погледу кретања, односно путање тачке. Навешћемо неколико специјалних случајева.

1) Ако је вектор PH_1 тангента на ходограф (сл. 37.1а), онда се правац убрбања u поклапа са правцем брзине. Стога је у том случају $u = u_t$ и $u_n = v^2/\varrho = 0$. Како је v различито од нуле, то је $\varrho = \infty$, тј. на томе месту путања има превојну тачку. То нам се и очигледно показује када пратимо промену вектора $\vec{v}$ у околини тачке H_1.

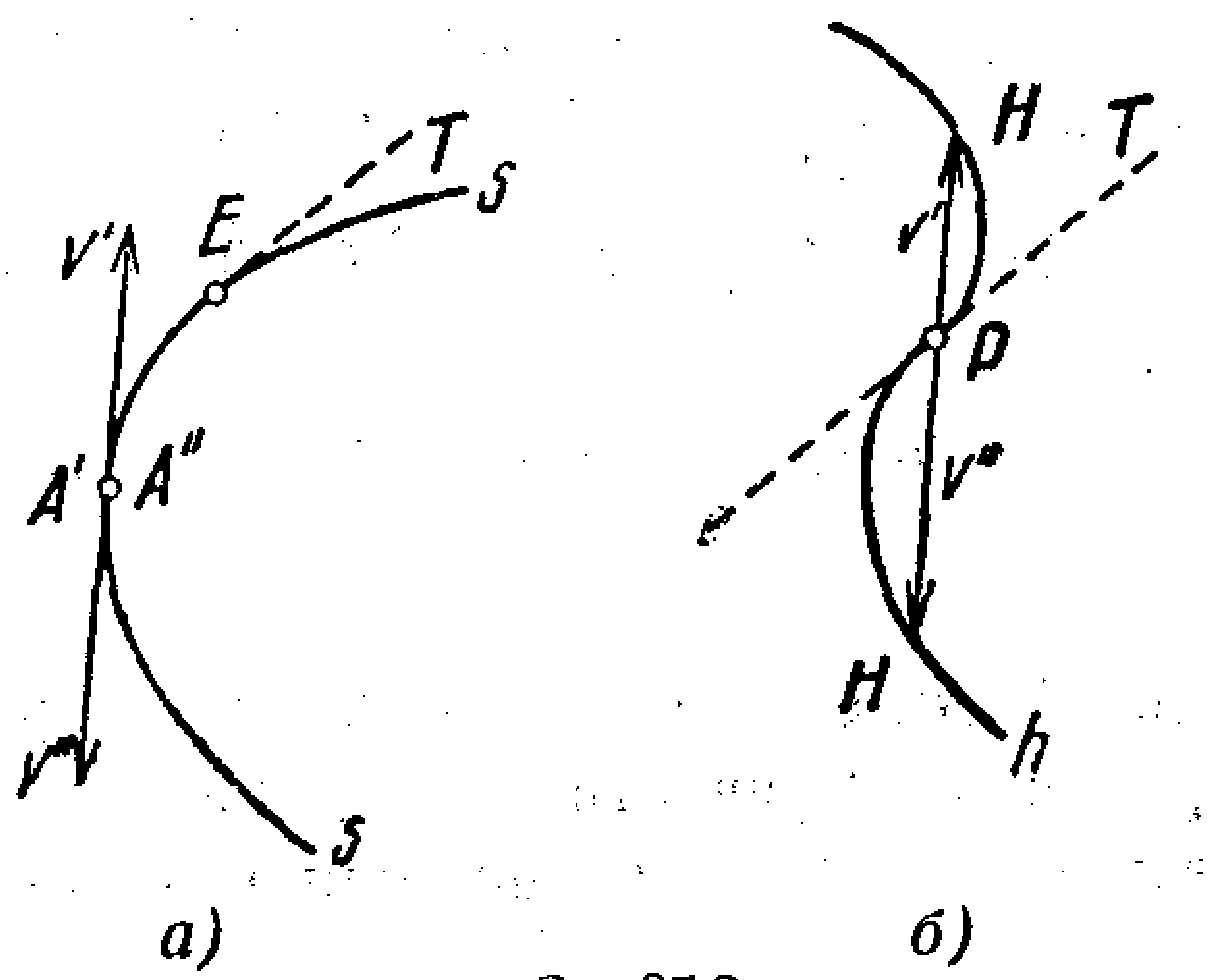


Сл. 37.1

2) Ако вектор PH_2 стоји управно на тангенту ходографа у тачки H_2, убрзање је управно на правац кретања, дакле $u = u_n$, $u_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$. Брзина има у одговарајућој тачки путање екстремну вредност. Тачка прелази из убрзаног у успорено кретање или обратно, као што нам очигледно показује слика 37.1б.

3) Ако пол P лежи на самој линији ходографа, онда је у једној тачки $v = 0$; покретна тачка, мирује, дакле за један тренутак обрне се смер кретања. Овде су могућна два разна случаја.

а) Тачка се обрне на месту E своје путање (сл. 37.2), тј. има у E брзину $v = 0$; онда увиђамо лако, да ходограф h мора имати у

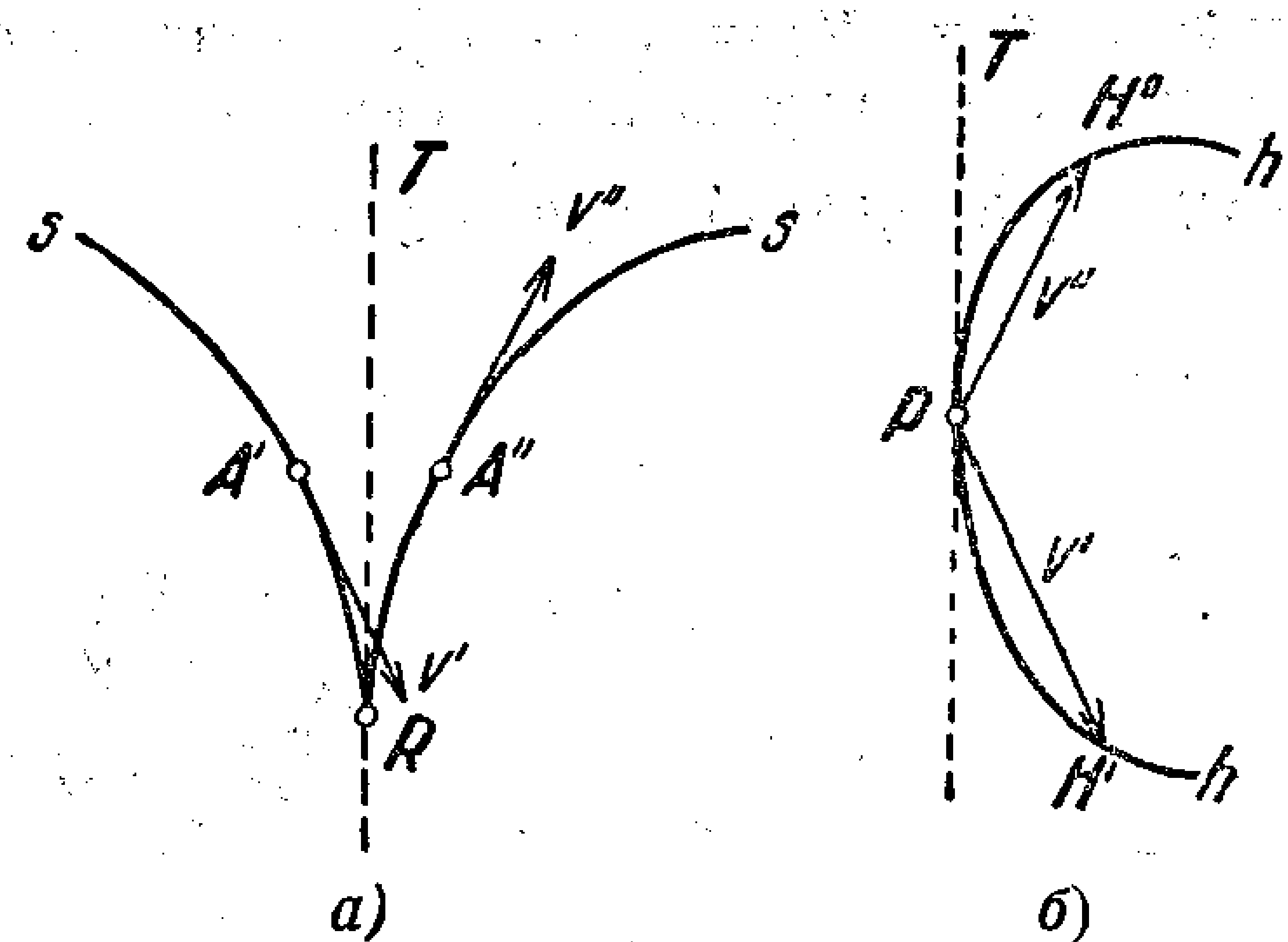


Сл. 37.2

околини пола P облик, какав је приказан на сл. 37.2б, тј. P мора бити превојна тачка криве h. Превојна тангента PT у тачки P паралелна је тангенти ET на путању у тачки E повратка.

б) Путања има на месту обрта повратну тачку R (сл. 37.3а), где је $v = 0$; сада се цео ходограф налази са једне стране своје тангенте PT повучене кроз пол, као што показује сл. 37.3б. Тангента PT паралелна је повратној тангенти RT путање у тачки R, као што и непосредно следује из односа кретања тачке A и ходографа.

38. Примери ходографа. Ходограф као поларни дијаграм од користи је само за испитивање кретања тачке у кривој путањи. За праволинијска кретања замењују ходограф дијаграми описани у чл. 26.



Сл. 37.3

Ходограф једноликог кретања у равни је круг, са полом у центру круга, а за исто кретање у витоперној кривој је ходограф сферна линија на површини лопте са полом у њеном центру.

Једнако убрзаном кретању одговора права линија као ходограф са полом изван те праве. Путања једнако убрзаног кретања може дакле бити или права или равна крива линија.

Примера ради тражићемо ходограф а) једног равног и б) једног просторног кретања тачке.

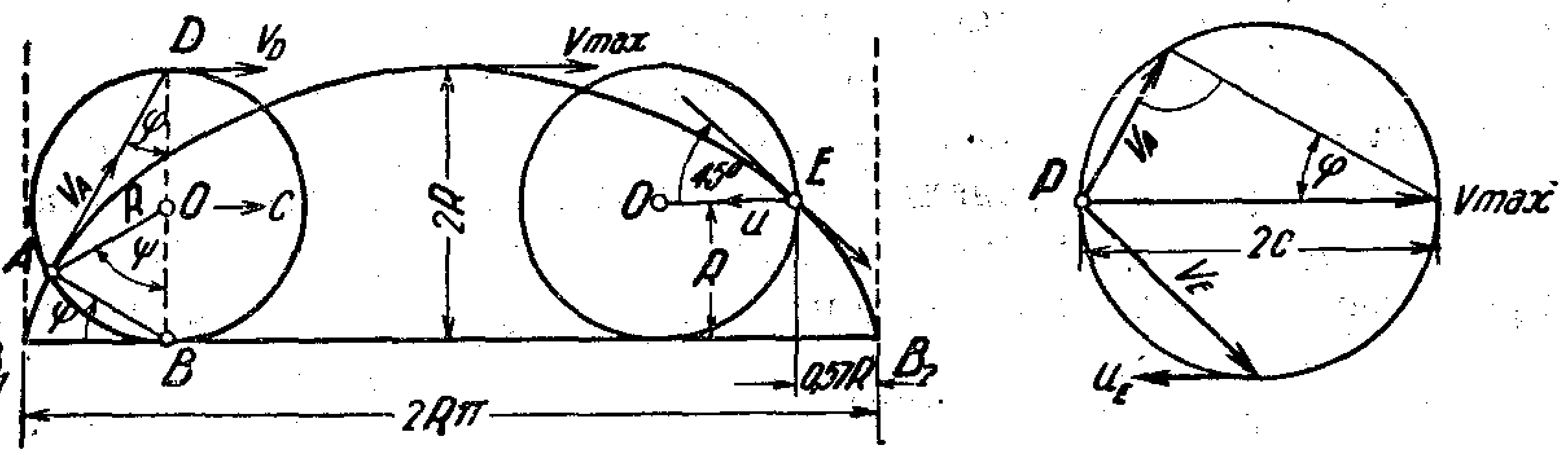
а) Пример за кретање по путањи, која има повратне тачке, претстављен је на сл. 38.1. Такву путању описује тачка на периферији круга који се котрља без клизања по једној правој линији. Размак двеју узастопних повратних тачака B_1 и B_2 износи $2R\pi$, а највећа висина путање изнад праве линије је $2R$, где је R полупречник круга. Линија, која у овом случају претставља путању покретне тачке, зове се у Геометрији ортоциклоида[1]). Када тачка начини пут од B_1 до A биће дужине праве $\overline{B_1B}$ и кружног лука $\widehat{AB}$ једнаке, дакле

$$\overline{B_1B} = \widehat{AB} = R\psi,$$

где је са ψ означен угао котрљања $\measuredangle\ AQB$.

[1]) Назив циклоида приписује се Галилеју.

Брзина v_A покретне тачке у A нормална је на тетиву $AB = r$, сече дакле круг у тачци D, јер се кретање тачке A састоји у тренутном њеном обртању око тачке B која је у том тренутку у миру. $\overline{AD}$ је тангента циклоиде у тачки A. То исто важи и за тачку D (која се креће по некој другој, али подударној, циклоиди), јер и код ње



а) Сл. 38.1 б)

при уцртаном положају круга брзина $v_A = v_{max}$ стоји нормално на одговарајућу тетиву $\overline{BD}$. У следећем тренутку dt угао φ повећаће се са $d\varphi$, а тачка A и D окрећући се око моментаног пола B прећиће путове $rd\varphi$ и $2Rd\varphi$; брзине ће им бити

$$v_A = \frac{rd\varphi}{dt} = r\omega \quad \text{и} \quad v_D = \frac{2Rd\varphi}{dt} = 2R\omega\,,$$

где је $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ позната нам угаона брзина. Када претпоставимо да се круг котрља константном угаоном брзином биће и брзина његовог средишта $c = R\omega$ константна (транслаторна брзина круга). Када две једначине за v_A и v_D поделимо једну с другом, добијамо

$$\frac{v_A}{v_D} = \frac{r}{2R} = \sin\varphi$$

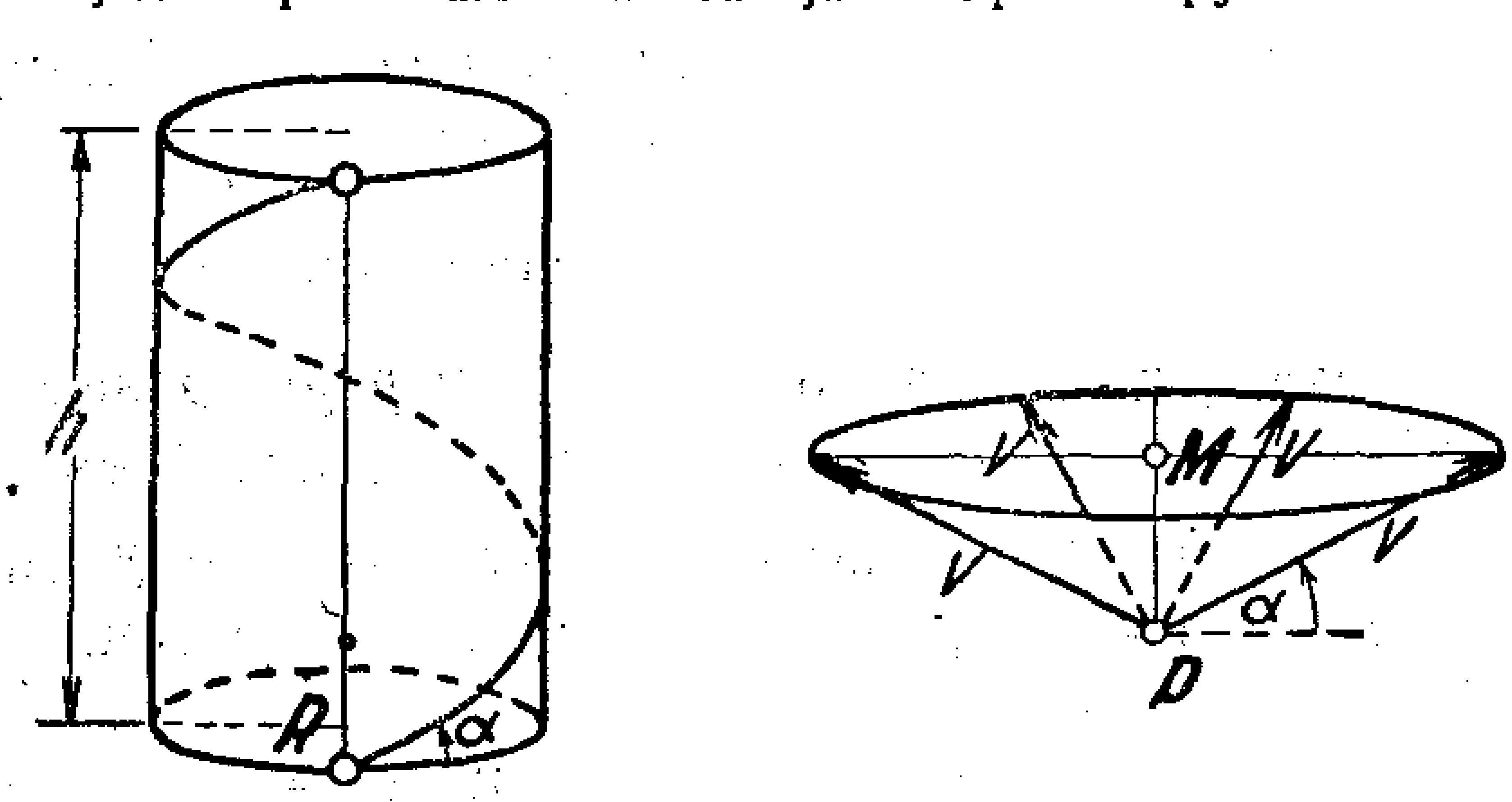
и с обзиром да је $v_D = 2c$ брзина у темену циклоиде, гласи једначина ходографа

$$v_A = 2c \sin\varphi\,.$$

То је поларна једначина круга полупречника c. Пол ходографа је на обиму круга. Из ходографа читамо да је убрзање тачке хоризонтално у тачкама E путање у којима је тангентна на циклоиду нагнута за 45^0 према апсциси. Тачке E су од повратне тачке удаљене за

$$x = R\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = 0{,}57R\,.$$

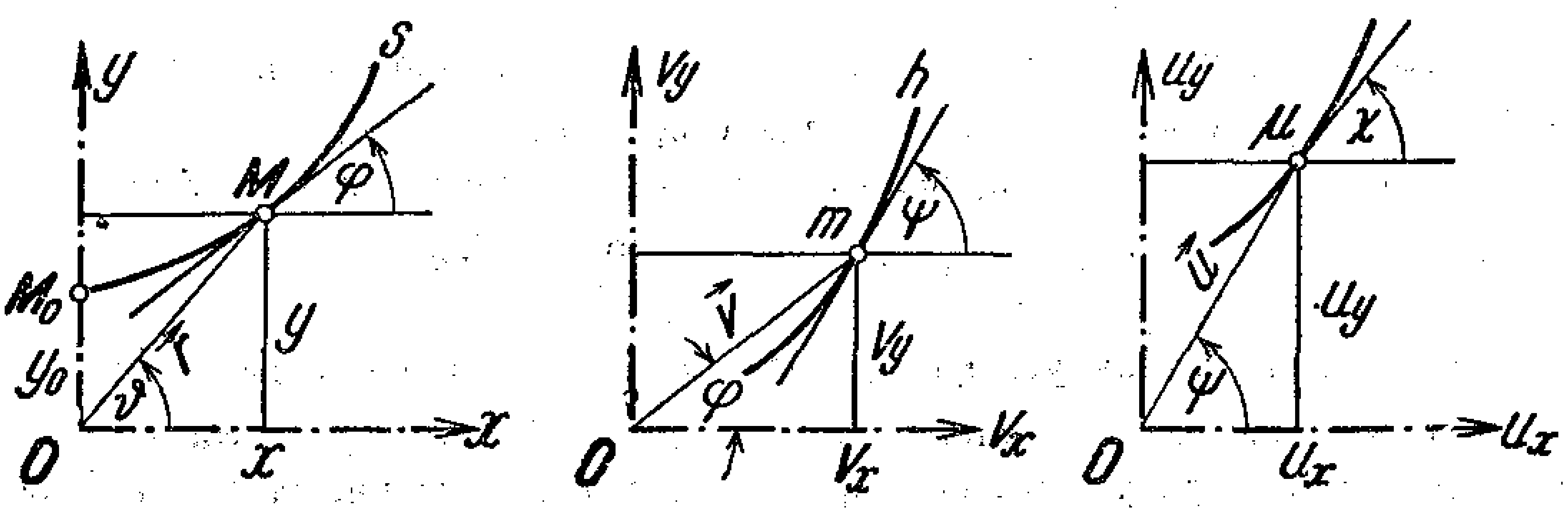
б) Пример кретања у просторној кривој је кретање по хеликоиди (завојници). Она постаје, кад се једна права нагиба α обавија око правог кружног ваљка полупречника R (сл. 38,2). Угао α зове се успон завојнице; то је угао, који тангента на хеликоиду (односно брзина тачке) заклапа са хоризонталом. Скуп тангената повучених из тачке P (сл 38.2б) образује кружни конус са отвором $(\pi - 2\alpha)$ и вертикалном осовином. Ма како се мењала величина брзине, ходограф ће увек бити линија која



а) Сл. 38.2 б)

лежи на површини тога конуса са полом P. Ако је брзина по величини константна, биће ходограф хоризонталан круг. Ако је кретање тачке једнако убрзано, биће хоризонтална пројекција ходографа Архимедова спирала.

39. Равно кретање приказано у ортогоналном систему. У члану 32. била је реч о слагању двају праволинијских кретања по правама које заклапају произвољан угао. Аналитичко решавање слагања биће знатно олакшано када те две праве стоје међу собом управно тј. када изаберемо ортогонални координатни систем. Закони кретања гласе $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ (параметарске једначине путање). Елиминацијом времена налазимо једначину путање $y = F(x)$. Она ће бити права ако је $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$ константно. Потег $\overline{OM}$ (сл. 39.1а) у једном тре-



а) б) в)

Сл. 39.1

нутку има величину $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ а правац је одређен са $\cos\vartheta = \frac{x}{r}$ и $\sin\vartheta = \frac{y}{r}$.

Изводи закона кретања по времену одређују компоненталне брзине: $v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t)$, $v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t)$. Величина брзине тачке M је $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ а правац одређују једначине $\cos\varphi = \frac{v_x}{v}$, $\sin\varphi = \frac{v_y}{v}$ када у њих сменимо горње функције времена. Елиминацијом времена из v_x и v_y добијамо једначину ходографа h (сл. 39.1б) $v_y = F_1(v_x)$ који можемо сматрати путањом помоћне тачке m. Ако је угао $\psi = \mathrm{arc\,tg}\frac{dv_y}{dv_x}$ константан (независан од t) ходограф је права линја, кретања тачке M је једнако убрзано, помоћна тачка m креће се константном брзином.

Други изводи закона кретања по времену одређују компонентална убрзања тачке M (компоненталне брзине тачке m):

$$u_x = \frac{d^2x}{dt^2} = f''_1(t) \quad \text{и} \quad u_y = \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2(t),$$

тиме и величину убрзања

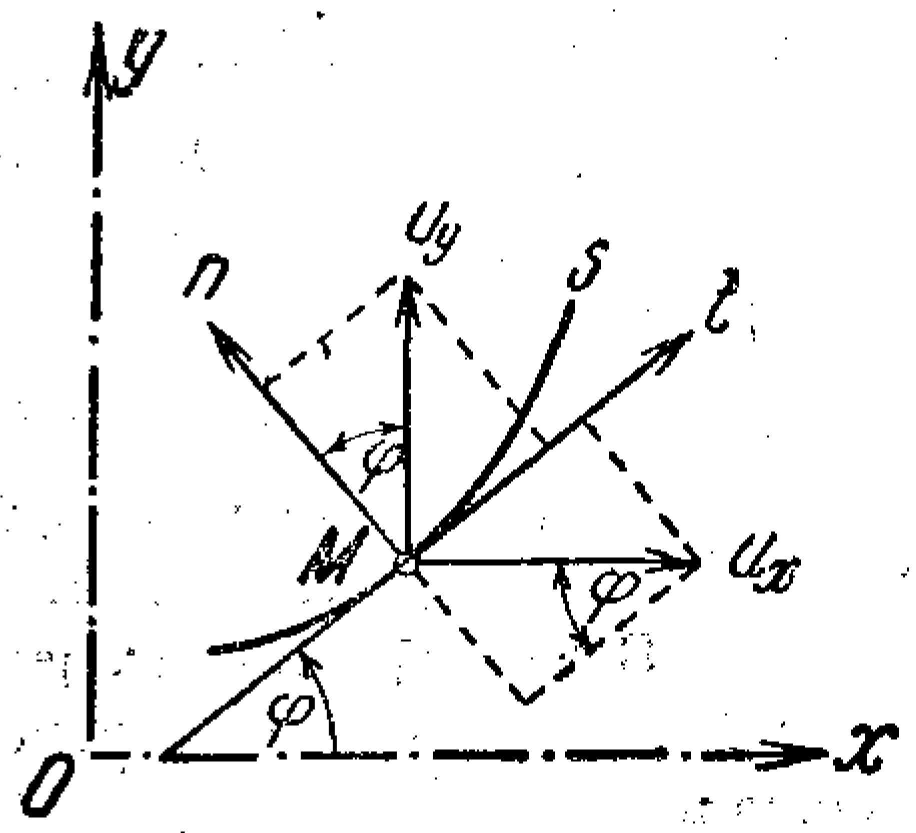
$$u = \sqrt{u^2_x + u^2_y}$$

и његов правац и смер једначинама: $\cos\psi = \frac{u_x}{u}$, $\sin\psi = \frac{u_y}{u}$ (сл. 39.1в).

Елиминацијом времена из u_x и u_y добијамо једначину $u_y = F(u_x)$ ходографа убрзања тачке M.

Паралелограми положаја, брзине и убрзања су правоугаоници са дијагоналама $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{u}$.

40. Одређивање природних компонената убрзања из ортогоналних. Дата су нам компонентална убрзања u_x и u_y тачке M у произвољном ортогоналном систему (сл. 40.1), треба да нађемо природне компоненте u_t и u_n. Пројицирањем u_x и u_y на тангенту и нормалу путање у тачки M налазимо



Сл. 40.1

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi,\\ u_n &= u_y \cos\varphi - u_x \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \text{a)}$$

Када сменимо $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$ гласи прва једначина a)

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{dv_x}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{dv_y}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{dx\sqrt{1+y'^2}}\left[v_x dv_x + v_y dv_y\right].$$

Диференцијал од

$$v^2_x + v^2_y = v^2 \text{ даје } v_x dv_x + v_y dv_y = v\, dv \text{ а } dx\sqrt{1+y'^2} = ds,$$

и сменом у последњу једначину добијамо идентитет

$$u_t = \frac{v\,dv}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}.$$

Сличним путем налазимо

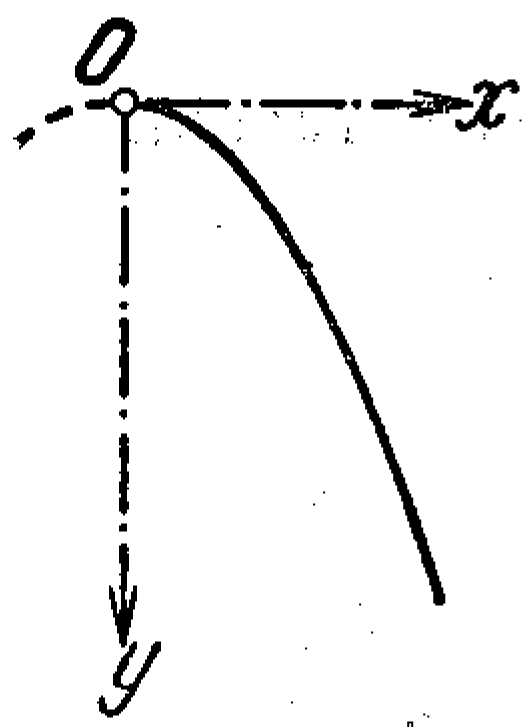
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{dv_y}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} - \frac{dv_x}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{ds}\left(v_x dv_y - v_y dv_x\right).$$

Сменом $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\sin\varphi$ и $dv_x = \cos\varphi\, dv - v\sin\varphi\, d\varphi$, $dv_y = \sin\varphi\, dv + v\cos\varphi\, d\varphi$ добијамо

$$u_n = v^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

41. Примери равног кретања. 1. Пример. Дате су једначине кретања: $x = ct$, $y = bt^2$. Елиминација времена даје једначину путање $y = bx^2/c^2$. Путања је парабола са теменом у почетку 0 и вертикалном осовином. $v_x = c$, $v_y = 2bt$, $u_x = 0$, $u_y = 2b$. $v = \sqrt{c^2 + 4b^2t^2}$, $u = 2b$. Параметар параболе је $p = \frac{c^2}{u}$. Тако се креће тешка тачка бачена у хоризонталном правцу у празном простору (сл. 41.1).

2. Пример. Дате су једначине кретања: $x = x_0 + a \cos kt$, $y = y_0 + a \sin kt$. Елиминацијом времена добијамо једначину путање: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, дакле једначину круга полупречника a; x_0 и y_0 су координате центра круга. k је константа димензије $[t^{-1}]$



Сл. 41.1

Компоненталне брзине су

$$v_x = -ak \sin kt, \quad v_y = ak \cos kt, \quad \text{и } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak.$$

Брзину налазимо простије непосредно, јер је $ds = ad\varphi$, дакле

$$v = \frac{ds}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt} = ak.$$

Компоненталпа убрзања су

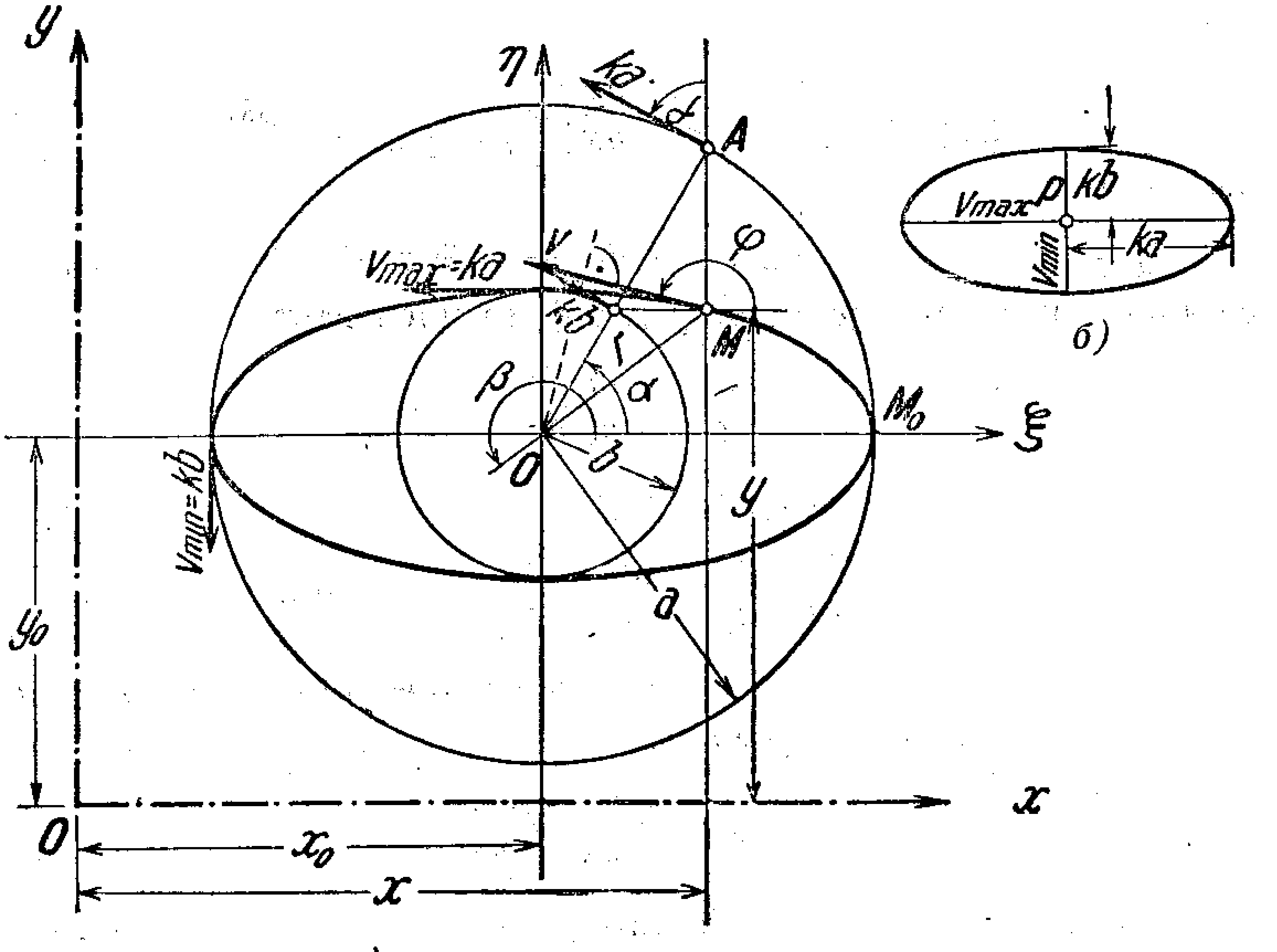
$$u_x = -ak^2 \cos kt, u_y = -ak^2 \sin kt \quad \text{и} \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = ak^2.$$

Пошто је брзина константна то је тангенцијално убрзање једнако нули а центрипетално убрзање $u_n = ak^2$.

3. Пример. Дате су једначине кретања: $x = x_0 + a \cos kt$, $y = y_0 + b \sin kt$, где су x_0, a, y_0, b и k константе. Елиминацијом времена из горњих једначина добијамо

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Путања је елипса са полуосовинама a и b и са координатама средишта x_0 и y_0 (сл. 41.2а). У времену $t = 0$ координате покретне тачке су $(x_0 + a)$, y_0. Тачка се дакле налази у M_0.



а) Сл. 41.2

Компоненталне брзине у правцима координатних осовина су

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -ka \sin kt; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = kb \cos kt,$$

а резултујућа брзина:

$$v = k\sqrt{a^2 \sin^2 kt + b^2 \cos^2 kt}.$$

Њен је правац одређен углом φ са

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v} = -ka\frac{\sin kt}{v}; \quad \sin\varphi = \frac{v_y}{v} = kb\frac{\cos kt}{v}.$$

Када са α означимо ексцентричну аномалију онда важи: $x - x_0 = a \cos\alpha$; $y - y_0 = b \sin\alpha$. Из упоређења ових са датим једначинама видимо, да је $\sphericalangle\, kt = \alpha$ тј. да је аномалија пропорционална времену, дакле је $\frac{d\alpha}{dt} = k$ угаона брзина којом се обрће полупречник OA. Тачка A на периферији круга полупречника a креће се брзином ka, а тачка B на кругу, чији је полупречник b, брзином kb. Време T једног оптицаја тачке M добијамо из идентитета $kaT = 2a\pi$, или $kbT = 2b\pi$, $T = \frac{2\pi}{k}$.

Дато кретање по елипси сложено је дакле из две хармоничне осцилације:

$$x - x_0 = a\cos kt, \qquad y - y_0 = b \sin kt.$$

Ако са δ означимо растојање средишта елипсе од тангенте на путању у тачки M, онда из Аналитичке Геометрије знамо да је

$$\delta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}}$$

па пошто је $\alpha = kt$ видимо, да је резултујућа брзина

$$v = \frac{abk}{\delta}$$

тј. обратно пропорционално са δ. Из овога следује, да су екстремне вредности брзине $v_{\min} = bk$; $v_{\max} = ak$.

Компоненте убрзања су

$$u_x = \frac{dv_x}{dt} = -k^2 a \cos kt, \quad u_y = \frac{dv_y}{dt} = k^2 b \sin kt,$$

или као функције положаја тачке

$$u_x = -k^2 (x - x_0), \qquad u_y = -k^2 (y - y_0);$$

а тотално убрзање

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = k^2 \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = k^2 r,$$

где је $r = O_1M$ потег тачке M. Правац тоталног убрзања одређен је углом β који оно заклапа са позитивном осовином x по обрасцима

$$\cos\beta = \frac{u_x}{u} = -\frac{x - x_0}{r}, \qquad \sin\beta = \frac{u_y}{u} = -\frac{y - y_0}{r}.$$

Правац убрзања поклапа се са правцем потега O_1M а смер му је управљен ка средишту елипсе. Екстремне вредности убрзања су у теменима: $u_{\max} = k^2 a$ и $u_{\min} = k^2 b$. То су центрипетална убрзања, дакле постоје идентитети $k^2 a = \frac{k^2 b^2}{\varrho_1}$ и $k^2 b = \frac{k^2 a^2}{\varrho_2}$ из којих налазимо полупречнике кривине у теменима: $\varrho_1 = \frac{b^2}{a}$ и $\varrho_2 = \frac{a^2}{b}$.

Ходограф кретања добићемо, кад из једначина за v_x и v_y елиминишемо време t. Његова је једначина:

$$\frac{v^2_x}{k^2a^2} + \frac{v^2_y}{k^2b^2} = 1,$$

што значи, да је ходограф елипса са полом у њеном средишту и полуосовинама ka и kb (види сл. 41.2б).

4. Пример. Дате су једначине кретања:

$$x = \cos\mathrm{hyp}\, kt, \quad y = \sin\mathrm{hyp}\, kt.$$

Са обзиром на релацију $\cos\mathrm{hyp}^2 x - \sin\mathrm{hyp}^2 x = 1$ налазимо из датих једначина путању тачке:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

дакле је путања хипербола са реалном осовином $2a$.

Компоненталне брзине су:

$$v_x = ak \sin\mathrm{hyp}\, kt = \frac{ak}{b} y, \quad v_y = bk \cos\mathrm{hyp}\, kt = \frac{bk}{a} x.$$

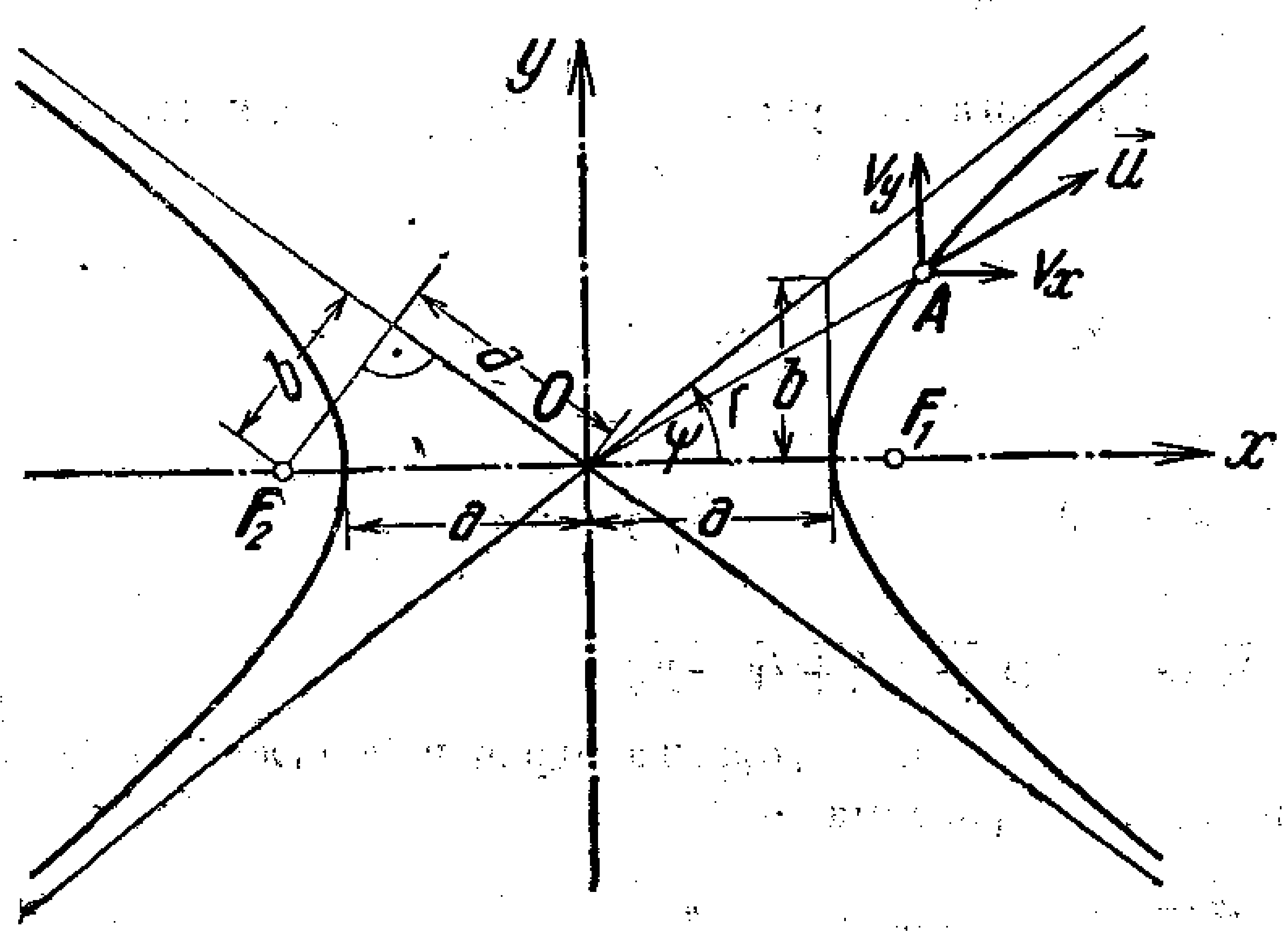
Обе компоненте су позитивне, тачка ће се кретати у смеру означеном на сл. 41.3 брзином

$$v = \frac{k}{ab}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Компонентална убрзања су

$$u_x = ak^2 \cos\mathrm{hyp}\, kt = k^2x, \; u_y = bk^2 \sin\mathrm{hyp}\, kt = k^2y.$$

Правац брзине заклапа са апсцисом угао $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{v_y}{v_x} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b^2}{a^2}\frac{y}{x}$, а правац убрзања:



Сл. 41.3

$$u = k^2\sqrt{x^2 + y^2} = k^2r,$$

где је $r = \overline{OA}$ потег, заклапа са апсцисом угао $arc\,tg\,\frac{u_y}{u_x} = \frac{y}{x}$, тј. вектор $\vec{u}$ се поклапа са потегом $\vec{r}$ тачке A.

Кретање по хиперболи изводиће тачка масе m када на њу дејствује одбојна сила у центру O, јачине mk^2r, дакле пропорционална растојању.

За $a = b$ је нагиб асимптота $\psi = 45^0$, хипербола је равнострана (види 5. пример).

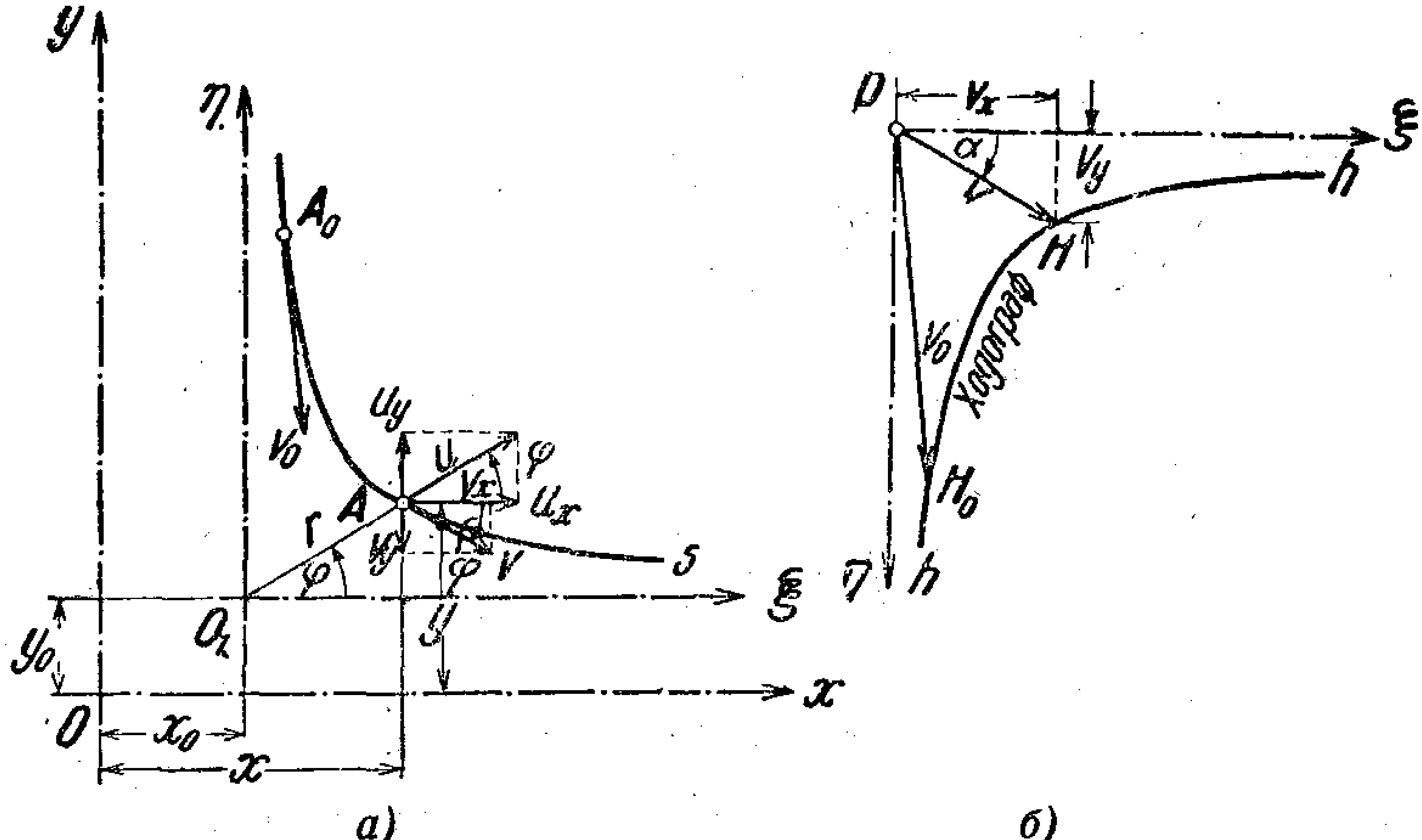
5. Пример. Дате су једначине кретања:

$$x = x_0 + ae^{-kt}; \quad y = y_0 + be^{-kt},$$

где су x_0, a, y_0, b и k константе; елиминисањем t односно e^{-kt} из ова два израза добијамо

$$(x - x_0)\,(y - y_0) = ab$$

као једначину путање. Ова једначина претставља равнокрачну хиперболу (сл. 41.4а) чије су асимптоме ξ и η паралелне координатним осовинама; средиште O_1 хиперболе



Сл. 41.4

има координате: x_0, y_0. Реална полуосовина је $\sqrt{2ab}$. Координате почетног положаја A_0 за $t = 0$, су: $(x_0 + a)$ и $(y_0 + b)$.

Компонентне брзине су:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ka\, e^{kt}\,; \qquad v_y = -kb\, e^{-kt}$$

а резултујућа брзина је

$$v = k\sqrt{a^2e^{2kt} + b^2 e^{-2kt}}$$

са правцем и смером утврђеним релацијама:

$$\cos\alpha = ka\frac{e^{kt}}{v}, \qquad \sin\alpha = -kb\frac{e^{-kt}}{v}.$$

Пошто из x и v_x, односно y и v_y елиминишемо време, добијамо

$$v_x = k\,(x - x_0) \qquad \text{и} \qquad v_y = -k\,(y - y_0),$$

дакле

$$v = k\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = kr,$$

тј. брзина је пропорционална са r. Ако са φ означимо угао, што га заклапа потег са позитивном осовином x, онда је $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, а како је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

то значи да v заклапа са позитивном осовином x угао $-\varphi$. За компоненте v_{0x} и v_{0y} почетне брзине v_0 за $t = 0$ добијамо изразе $v_{0x} = ka$, $v_{0y} = -kb$, дакле

$$v_0 = k\sqrt{a^2 + b^2} = kr.$$

Једначину ходографа добијамо елиминисањем времена из израза за v_x и v_y у облику

$$v_x\, v_y = -k^2 a\, b.$$

Она претставља такође равнокрачну хиперболу (сл. 41.46), која је слична путањи, а лежи симетрично према њој.

Најзад су компоненте убрзања:

$$u_x = \frac{dv_x}{dt} = k^2 a e^{kt} = k^2 (x - x_0),$$

$$u_y = \frac{dv_y}{dt} = k^2 b\, e^{-kt} = k^2 (y - y_0),$$

дакле је тотално убрзање

$$u = k^2 \sqrt{a^2 e^{2kt} + b^2 e^{-kt}} = k^2 \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = k^2 r,$$

тј. оно је пропорционално потегу r и пошто је

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

значи да оно има правац и смер тога вектора. Угао између u и v је једнак 2φ, стога је тангенцијално убрзање

$$u_t = u \cos 2\varphi = k^2 r \sin 2\varphi,$$

а центрипетално убрзање је

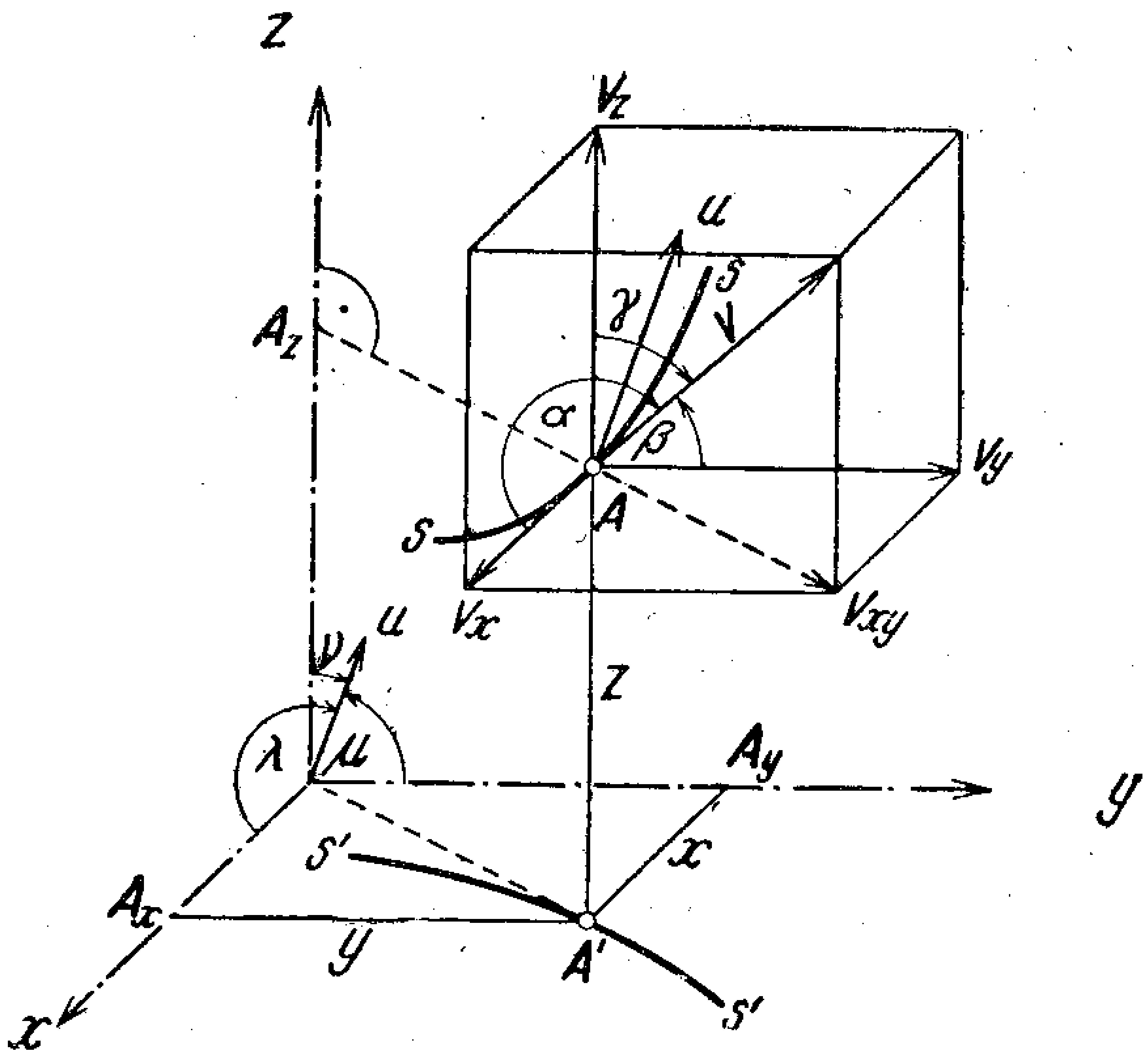
$$u_n = u \sin 2\varphi = k^2 r \sin 2\varphi.$$

Оба се убрзања према томе могу лако графички одредити.

42. Просторно кретање приказано у ортогоналном систему. Кретање тачке A у простору дато је трима законима кретања:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad \text{и} \quad z = f_3(t)$$

по којима се крећу пројекције A_x, A_y, A_z тачке A на координантним осовинама (сл. 42.1).



Сл. 42.1

Кад елиминишемо време t из по две од трију горњих једначина, добијамо три једначине између две координате тачке, од којих су само две међусобно независне и потребне; оне претстављају пројекције путање на координатне равни.

Брзине компоненталних кретања јесу:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t), \quad v_x = \frac{dy}{dt} = f'_2(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = f'_3(t). \qquad (42.1)$$

Из њих налазимо величину брзине, као дијагоналу паралелепипеда,

$$v = \sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}. \qquad (42.2)$$

Правац и смер брзине $\vec{v}$ одређени су косинусима углова α, β, γ, које вектор $\vec{v}$ заклапа са позитивним правцима координатних осовина. Ти су косинуси

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \qquad (42.3)$$

а њихове знаке одређују знаци бројитеља, јер је v као апсолутна величина увек позитивна. Косинуси су међусобом везани познатим условом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Једначине ходографа добивамо елиминисањем времена t из по две од трију једначина за брзине v_x, v_y, v_z, сматрајући величине v_x, v_y, v_z, као ортогоналне координате крајње тачке вектора $\vec{v}$.

Истим путом налазимо величину и правац убрзања u тачке A. Добијамо прво компонентална убрзања:

$$u_x = \frac{d^2x}{dt^2} = f''_1(t), \qquad u_y = \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2(t), \qquad u_z = \frac{d^2z}{dt^2} = f''_3(t), \qquad (42.4)$$

затим величину

$$u = \sqrt{u^2_x + u^2_y + u^2_z}.$$

Косинуси углова λ, μ, ν, што их вектор $\vec{u}$ заклапа са позитивним правцима координатних осовина одређени су са

$$\cos\lambda = \frac{u_x}{u}, \quad \cos\mu = \frac{u_y}{u}, \quad \cos\nu = \frac{u_z}{u} \qquad (42.5)$$

а њима су одређени правац и смер убрзања u.

43. Примери просторног кретања 1. Пример. Дате су једначине:

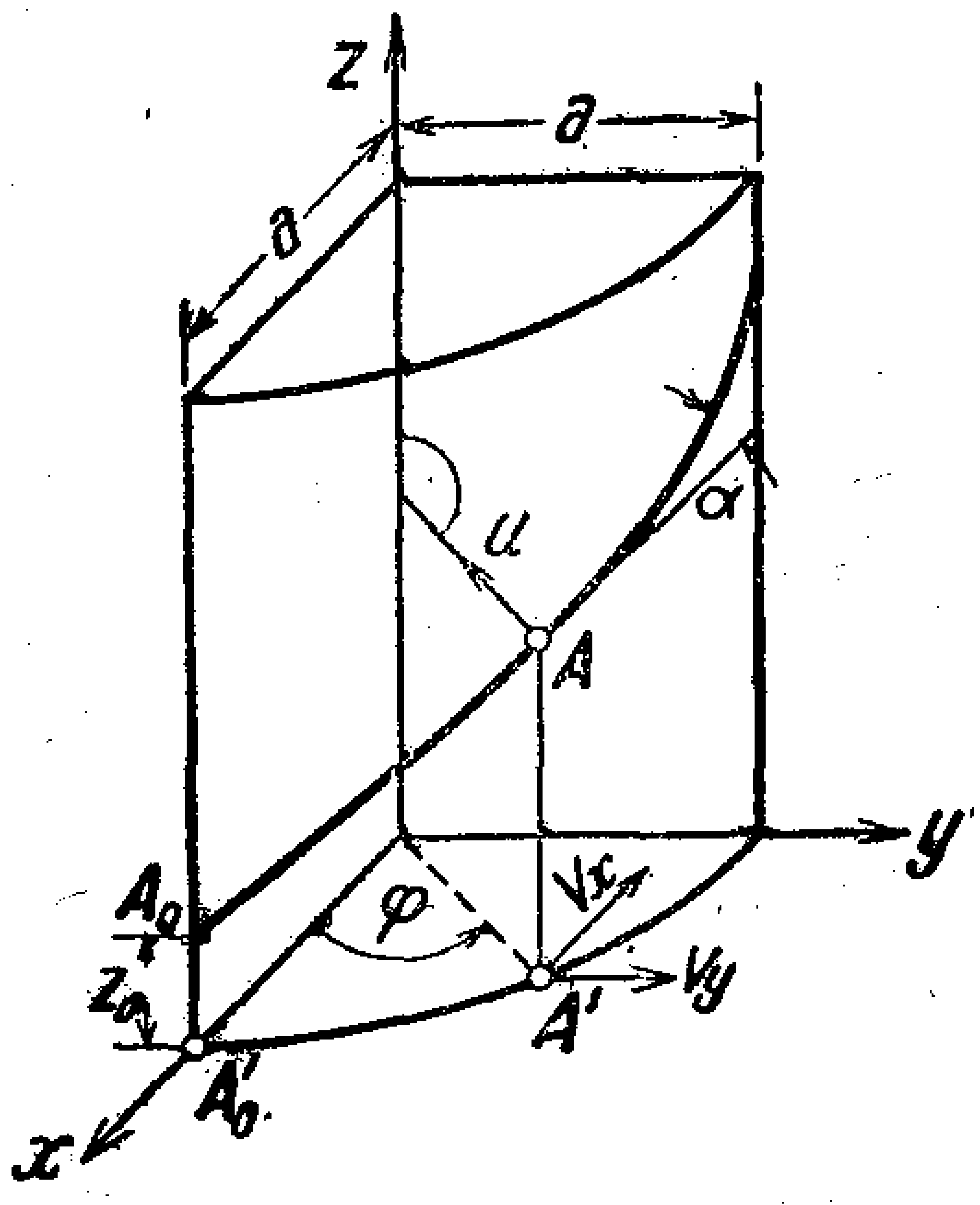
$$x = a\cos kt, \quad y = a\sin kt, \quad z = z_0 + ct$$

где a, z_0, c и k означавају константе. Из прве две једначине следује

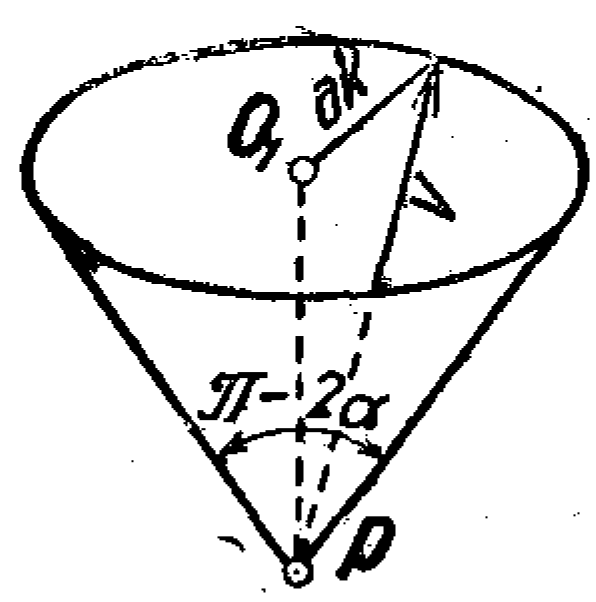
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

дакле је пројекција путање на раван xy круг са полупречником a; средиште тога круга лежи у координатном почетку O (сл. 43.1a). Путања је просторна крива на кружној облици, којој се осовина поклапа са z-осовином.

а)



б)



Сл. 43.1

У времену t_0 тачка се налази у месту A_0 одређеном координатама $x = a$, $y = 0$, $z = z_0$. Пројекција A' тачке A на раван xy описаће за време dt кружни лук $ad\varphi = akdt$ јер из једначина за x и y следује $tg\varphi = \frac{y}{x} = tgkt$, дакле $\varphi = kt$. Истовремено пређе тачка A у правцу осовине z пут $dz = c\,dt$. Нагиб α елемента ds путање одређен је са $tg\,\alpha = \frac{dz}{ad\varphi} = \frac{c}{ak}$ дакле је константан. Путања тачке A је завојна линија. Дате једначине су параметричне једначине хеликоиде.

Компоненталне брзине су

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -ka\sin kt = -ky\,,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = ka\cos kt = kx\,,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = c\,,$$

а резултујућа брзина покретне тачке

$$v = \sqrt{k^2(x^2+y^2)+c^2} = \sqrt{(ka)^2+c^2}.$$

Кретање тачке A по завојној линији је дакле једнолико.

Ходограф кретања је круг, са полупречником ka, коме пол P лежи на вертикали кроз средиште круга O_1 а на размаку c испод овога (сл. 43.1б).

Компоненте убрзања су

$$u_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2a\cos kt = -k^2x\,,\quad u_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2a\sin kt = -k^2y\,,\qquad u_z = 0.$$

Величина резултујућег убрзања је

$$u = \sqrt{u_x^2+u_y^2} = k^2\sqrt{x^2+y^2} = k^2a$$

а правац и смер одређени су косинусима

$$\cos\lambda = \frac{u_x}{u} = -\frac{x}{a},\qquad \cos\mu = \frac{u_y}{u} = -\frac{y}{a},\qquad \cos\nu = \frac{u_z}{u} = 0.$$

Одавде следује, да је тотално убрзање константно, да стоји управно на осовину облице и да има смер ка тој осовини. Тангенцијално убрзање је једнако нули, јер је кретање једнолико; тотално се убрзање дакле подудара са $u_n = v^2/\varrho$. Одавде се може израчунати полупречник кривине завојне линије. Из једначине

$$ak^2 = \frac{a^2k^2+c^2}{\varrho}$$

налазимо

$$\varrho = \frac{a^2k^2+c^2}{ak^2} = a + a\left(\frac{c}{ak}\right)^2 = a(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = \frac{a}{\cos^2\alpha}.$$

Тај израз, из кога следује да је $\varrho > a$, може се лако наћи графичким путом.

2. Пример. Дате су једначине кретања:

$$x = a\,t^3, \qquad y = ct, \qquad z = b\,t^2.$$

Елиминацијом времена добијамо:

а) једначину цилиндра $z = b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$ управног на координатну раван zx и

б) једначину цилиндра $z = \frac{b}{c^2}y^2$ управног на координатну раван yz.

Пресек обих цилиндра је путања тачке M (сл. 43.2). Путања је крива двогубе кривине. Пројекција тачке на раван yz, M'' креће се по параболи (као тешка тачка бачена хоризонтално брзином c, а пројекција на раван zx, M' креће се по параболи $^2/_3$ — тог реда.

Компоненталне брзине су

$$v_x = 3at^2, \quad v_y = c, \quad v_z = 2bt.$$

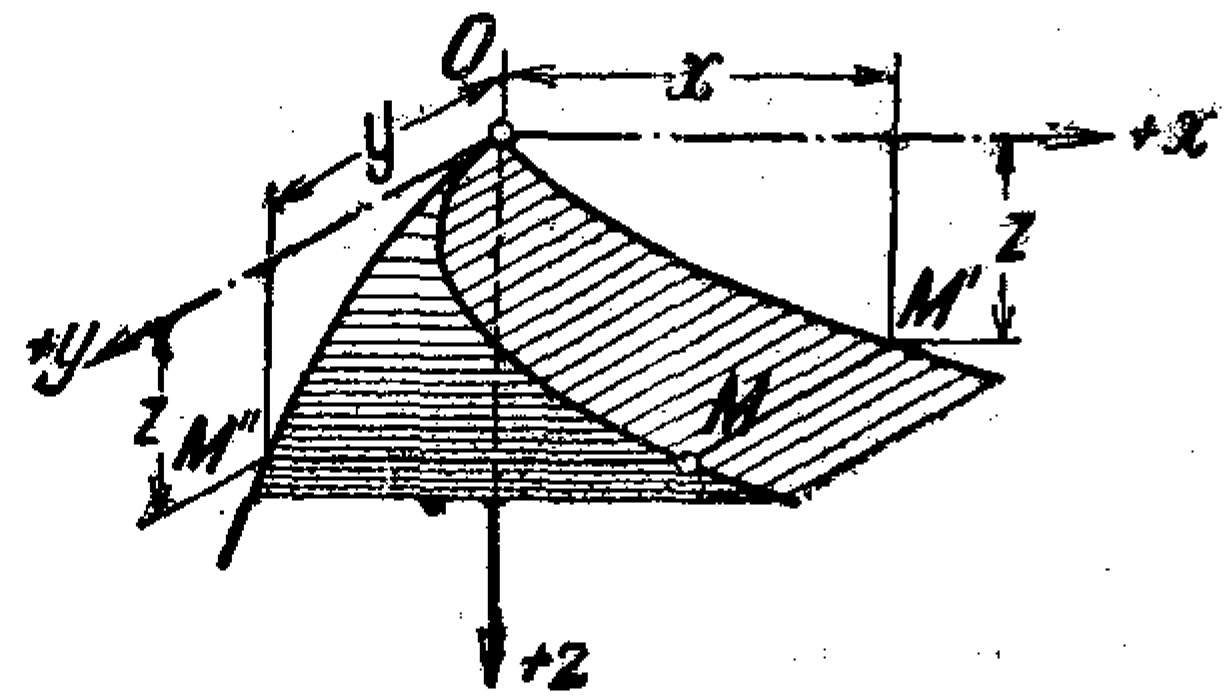
Брзина пројекције M' је

$$v' = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = t\sqrt{(2b)^2 + (3at)^2},$$

пројекције M'':

$$v'' = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{c^2 + (2bt)^2}$$

а брзина тачке M је



Сл. 43.2

$$v = \sqrt{c^2 + (2bt)^2 + (3at)^2t^2}.$$

Компонентална убрзања су

$$u_x = 6at, \qquad u_y = 0, \qquad u_z = 2b.$$

Убрзања тачака M', M'', M су

$$u' = 2\sqrt{(3at)^2 + b^2}, \qquad w'' = u_z = 2b,$$

$$u = u' = 2\sqrt{(3at)^2 + b^2}.$$

Убрзања тачке M' дакле и тачке M је променљиво; убрзање другог реда је $\omega_x = 6a$.

Закон кретања $x = a\,t^3$ јавља се при расматрању слободног пада с обзиром на обртање Земљино. О томе ће бити говора у Кинематици тела.

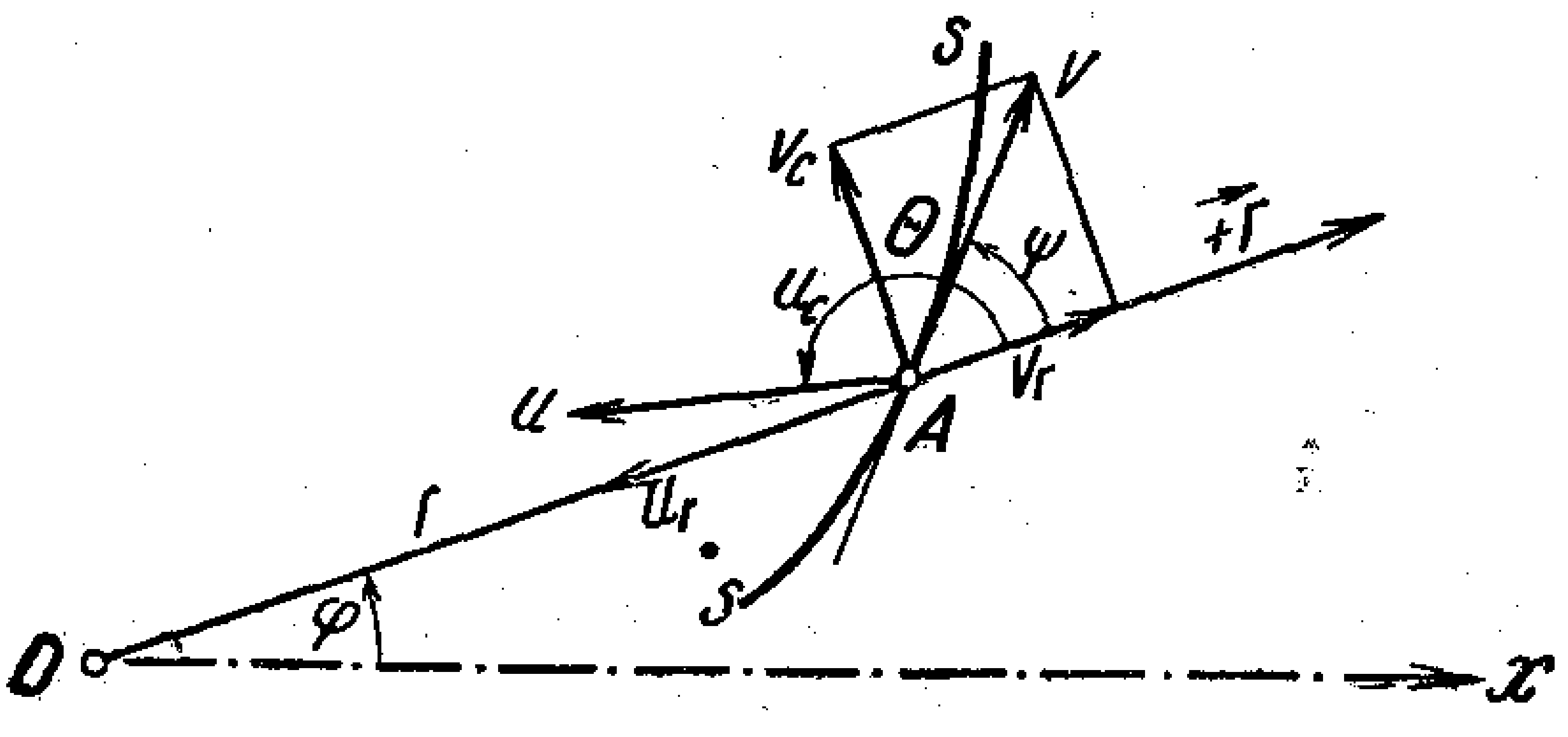
44. Равно кретање приказано у поларном координатном систему. Кретање тачке A потпуно је одређено једнозначним функцијама времена:

$$r = f_1(t) \quad \text{и} \quad \varphi = f_2(t).$$

Једначину путање налазимо из те две једначине елиминисањем времена и то у облику:

$$F(r, \varphi) = 0 \quad \text{или} \quad r = f(\varphi).$$

Помоћу паралелограма брзина разложимо v у компоненте у правцу $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ и у правцу нормале на њега, те добијамо радијалну компо-



Сл. 44.1

ненту $v_r = v \cos\psi$ и циркуларну компоненту $v_c = v \sin\psi$, где угао ψ (сл. 44.1) значи угао између вектора $\vec{v}$ и упоље управљеног $\vec{r}$, мерен у смислу у коме угао φ расте. Нека је $\overline{AA'} = ds$ елемент пута у времену dt, $\overline{OA'} = r' = r + dr$ и $\sphericalangle AOA' = d\varphi$; из бесконачно малог троугла путова ABA' (сл. 44.2a) налазимо, кад занемаримо бесконачно мале количине другог реда,

$$\overline{AB} = dr\,, \qquad BA' = r d\varphi\,.$$

Пошто ове елементарне путове поделимо са временом dt у коме је пут AA' пређен, добијамо величину радијалне и циркуларне или трансверзалне брзине:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_c = r\,\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (44.1)$$

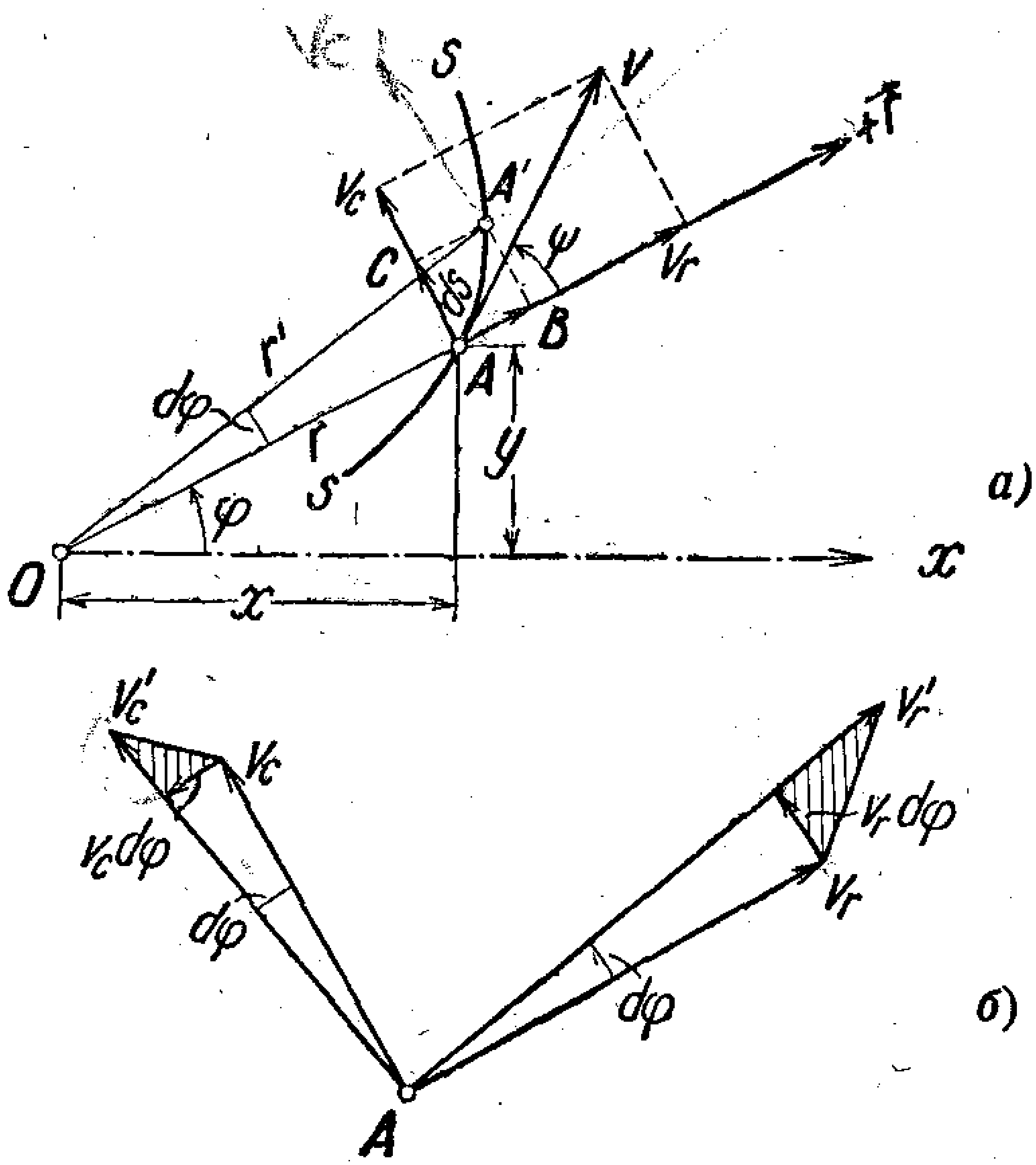
Кад заменимо вредности

$r = f_1(t)$ и $\varphi = f_2(t)$,

добићемо:

$$v_r = f'_1(t)$$
$$\text{и} \quad v_c = f_1(t)\, f'_2(t). \qquad (44.2)$$

Компонента v_r показује којом се брзином A креће по потегу r, а v_c је брзина којом би се тачка кретала по кругу[1]) полупречника r, када би овај остао констан-



Сл. 44.2

[1]) Отуда назив циркуларна брзина.

тан. Из горњих једначина налазимо резултујућу брзину по величини, правцу и смеру као функцију времена:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2}, \qquad \cos\psi = \frac{v_r}{v}, \qquad \sin\psi = \frac{v_c}{v}. \tag{44.3}$$

Убрзање u тачке A заклапа са потегом r угао ϑ, дакле су његове компоненте (сл. 44.1)

$$u_r = u \cos\vartheta \qquad u_c = u \sin\vartheta . \tag{44.4}$$

Да бисмо их могли изразити са r и φ одредићемо прираштаје компоненталних брзина v_c и v_r. Када би се мењале само величине обеју компонената, имали бисмо у правцу потега r убрзање $u'_r = \frac{dv_r}{dt}$, а у правцу трансверзалном убрзање $u'_c = \frac{dv_c}{dt}$. Но како се и правци обеју компонената мењају и то оба за $d\varphi$ даје нам сл. 44.2б у правцу AO векторски прираштај брзине $v_c d\varphi$, дакле радијално унутра управљено убрзање $u''_r = - v_c \frac{d\varphi}{dt}$, а промена правца брзине v_r даје убрзање $u''_c = v_r \frac{d\varphi}{dt}$. Укупно радијално убрзање је дакле

$$u_r = u'_r + u''_r = \frac{dv_r}{dt} - v_c \frac{d\varphi}{dt},$$

а укупно циркуларно убрзање:

$$u_c = u'_c + u''_c = \frac{dv_c}{dt} + v_r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кад овде сменимо изразе за v_r и v_c налазимо

$$u_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$u_c = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right). \tag{44.5}$$

Помоћу једначина $r = f_1(t)$ и $\varphi = f_2(t)$ можемо убрзања u_r и u_c претставити као функције времена. Најзад можемо наћи и резултујуће убрзање по величини, правцу и смеру помоћу образаца:

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_c^2}, \qquad \cos\vartheta = \frac{u_r}{u}, \qquad \sin\vartheta = \frac{u_c}{u}. \tag{44.6}$$

Пример. Дате су једначине кретања:

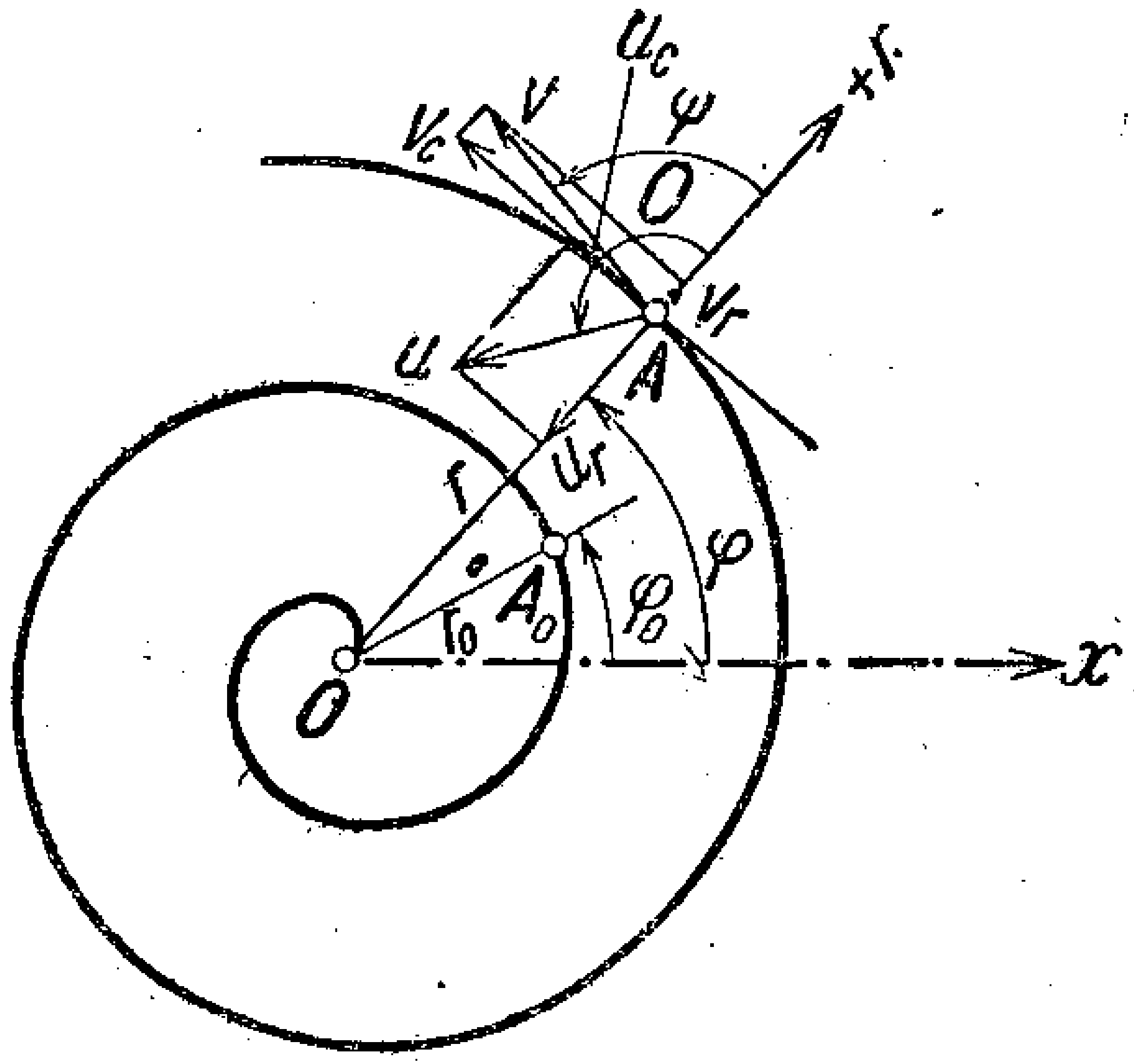
$$r = r_0 + ct \qquad \text{и} \qquad \varphi = \varphi_0 + kt,$$

где су r_0, φ_0, c и k константе.

Сменом времена из друге једначине у прву добијамо једначину путање:

$$r = r_0 + c\,\frac{\varphi - \varphi_0}{k}.$$

Путања је **Архимедова спирала**. (сл. 44.3). Координате φ_0, r_0 одређују положај A_0 тачке у времену $t = 0$.



Сл, 44.3

Радијална брзина је

$$v_r = \frac{d\,(r_0 + ct)}{dt} = c\,,$$

дакле константа.

Циркуларна брзина је

$$v_c = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\,\frac{d(\varphi_0 + kt)}{dt} = kr,$$

дакле сразмерна потегу.

Брзина је

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{c^2 + k^2 r^2}.$$

Угао ψ, дакле правац и смер брзине одређују прве две једначине, а из треће читамо да је $tg\psi$ сразмеран потегу:

$$\sin\psi = \frac{v_c}{v} = \frac{k\,r}{\sqrt{c^2 + k^2 r^2}}, \qquad \cos\psi = \frac{v_r}{v} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + k^2 r^2}}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{k}{c}\,r.$$

Радијално убрзање је

$$u_r = \frac{d^2(r_0 + ct)}{dt^2} - r\left[\frac{d(\varphi_0 + kt)}{dt}\right]^2 = 0 - k^2 r = -k^2 r\,.$$

Негативан знак показује да је убрзање управљено према координатном почетку O. Величина му је пропорционална потегу.

За циркуларно убрзање налазимо

$$u_c = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\,\frac{d(\varphi_0 + kt)}{dt}\right] = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\,(kr^2) = \frac{k}{r}\,\frac{d(r^2)}{dt} = 2k\,\frac{dr}{dt},$$

дакле

$$u_c = 2kc\,.$$

Оно је константно. Резултујуће убрзање је

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_c^2} = k\,\sqrt{k^2 r^2 + 4c^2}.$$

Правац му је одређен првим двема једначинама:

$$\sin\vartheta = \frac{u_c}{u} = \frac{2c}{\sqrt{k^2 r^2 + 4c^2}}, \qquad \cos\vartheta = \frac{u_r}{u} = -\frac{kr}{\sqrt{k^2 r^2 + 4c^2}}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{2c}{kr}.$$

За $r = \infty$ добијамо $\vartheta = \pi$, тј. тада се правац тоталног убрзања поклапа са правцем потега.

45. Принцип површина за једну тачку. Други Кеплеров закон. Ако у обрасцу за циркуларно убрзање:

$$u_c = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

сменимо циркуларну брзину:

$$v_c = r\frac{d\varphi}{dt}$$

добићемо релацију:

$$u_c r = \frac{d}{dt}(r v_c)$$

и с обзиром да је

$$u_c = u \sin\vartheta, \qquad v_c = v \sin\psi$$

$$u\, r \sin\vartheta = \frac{d}{dt}(v\, r \sin\psi).$$

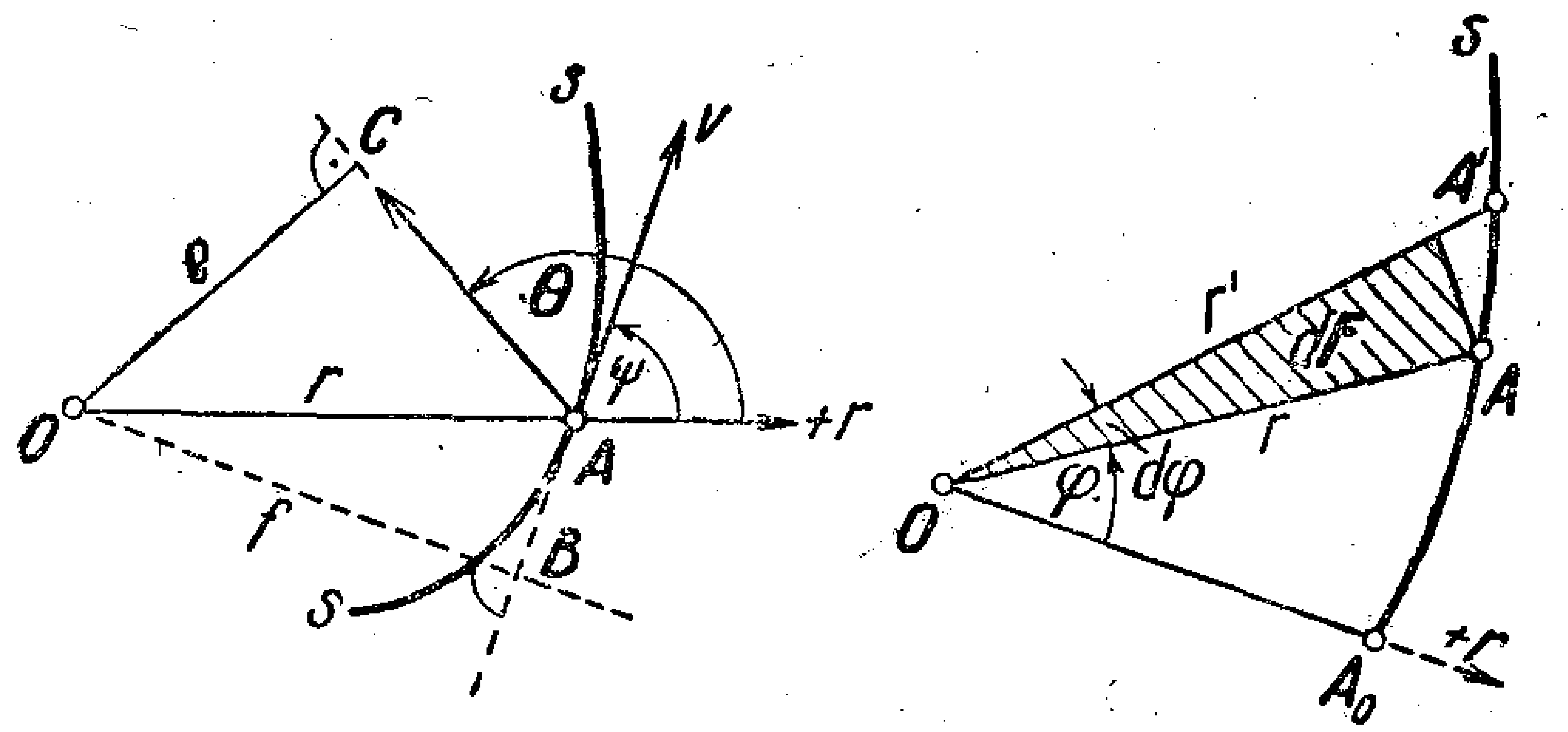
Када на сл. 45.1а повучемо нормале $OC = e$ на праву $\vec{u}$ и $OB = f$ на тангенту путање, то ће са

$$r \sin\vartheta = e, \qquad r \sin\psi = f$$

последња једначина добити облик

$$u\, e = \frac{d}{dt}(v f). \tag{45.1}$$

Производ неког вектора са нормалним растојањем његовим од неке тачке зовемо **моментом вектора** у погледу на ту тачку, последња



а) *б)*

Сл. 45.1

једначина исказује важну теорему: *Момент убрзања једне покретне тачке у погледу на произвољну тачку равни једнак је изводу момента брзине по времену у погледу на исту тачку.*

Када тачка A за време dt пређе бесконачно мали пут AA' (сл.45.1б) описаће њен потег r троугао (сектор) OAA' површине:

$$dF = \frac{1}{2}\, r^2 d\varphi.$$

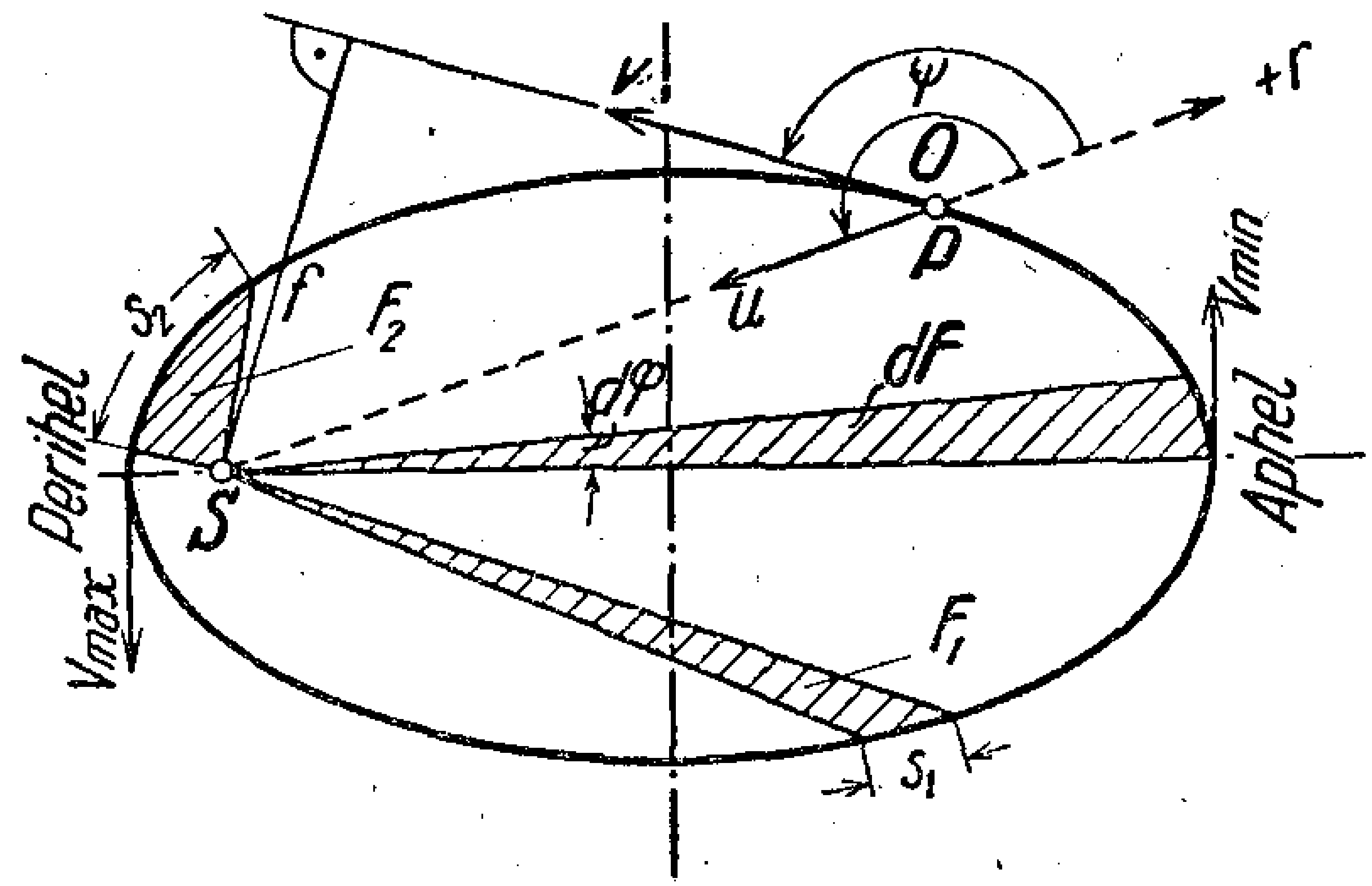
Одавде налазимо т. зв. површинску или секторну брзину:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r\, v_c = \frac{1}{2} v\, f$$

и површинско или секторно убрзање:

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{1}{2} u\, e.$$

Таква кретања, код којих је убрзање управљено стално према истој



Сл. 45.2

тачки O (привлачном центру), за коју је дакле e стално једнако нули зову се централна кретања. Примери таквих кретања су кружења планете P око Сунца S (в. сл. 45.2), примери у чл. 41 и 44 итд. За централна кретања важи дакле

$$\frac{d^2F}{dt^2} = 0 \qquad \text{тј.} \qquad \frac{dF}{dt} = \text{const.} = C.$$

Одавде добивамо интегралењем

$$F = C\,(t - t_0) \tag{45.2}$$

тј. *код централног кретања описује потег у једнаким временима секторе* F_1 *и* F_2 *једнаких површина.* Овај став је посебан случај једног општијег, који ћемо доцније сазнати: т. зв. теореме површина. Примењена на путање планета (сл. 45.2) та је теорема позната као други Кеплеров закон.

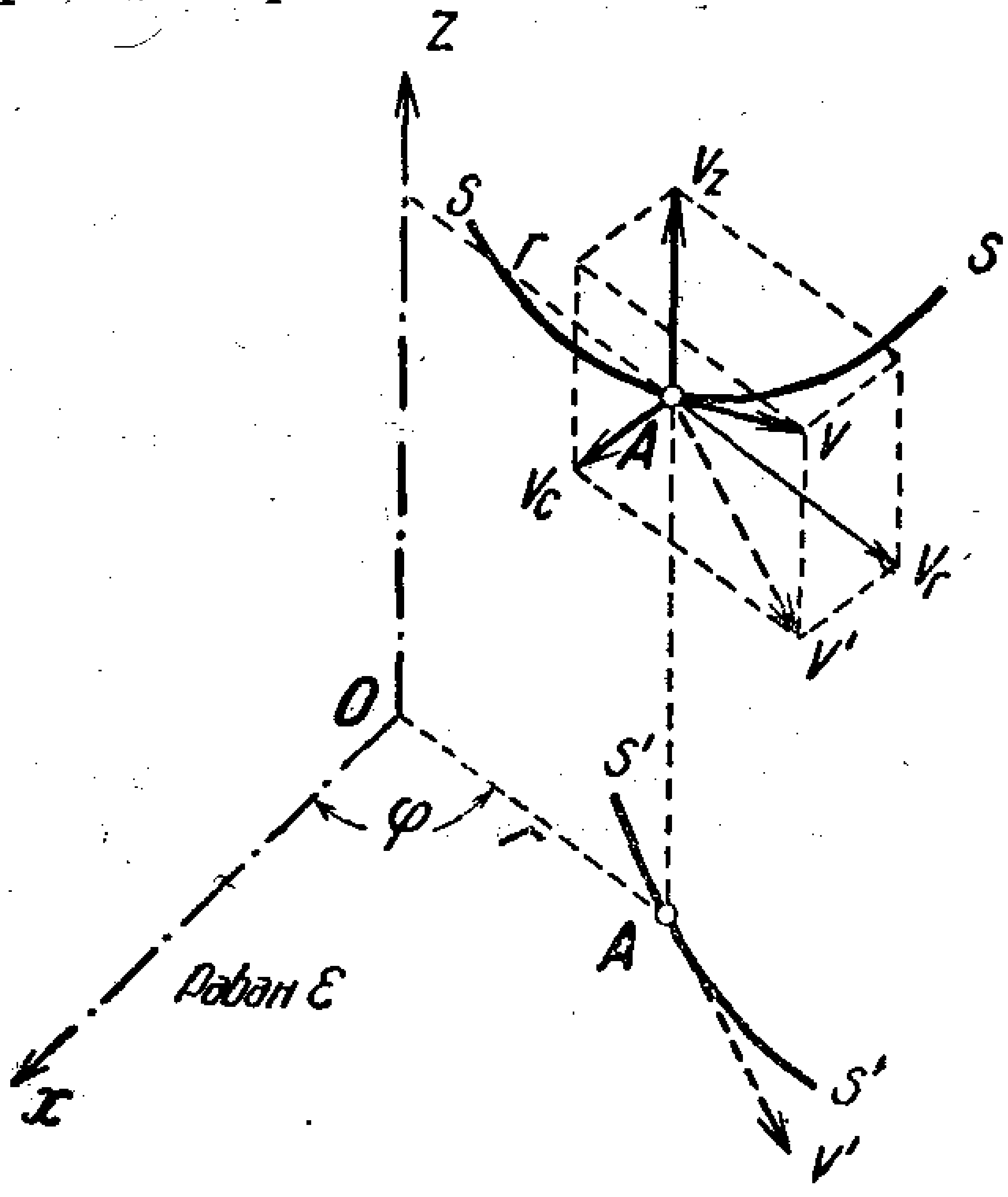
За централно кретање је

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} v f = C \qquad \text{дакле} \qquad v = 2\frac{C}{f},$$

тј. *брзина је обратно пропорционална растојању путањине тангенте од центра силе* S (сл. 45.2). (Упореди $v = \dfrac{abk}{\delta}$ у 3. примеру чл. 41).

Ако је константа $C = 0$, онда је $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, дакле φ константно, путања тачке је права линија која пролази кроз центар S.

46. Просторно кретање приказано у цилиндричном координатном систему. Просторну путању s—s тачке A пројицирамо управно на произвољну раван ε у којој узимамо почетак O и осовину Ox; пројекција A' тачке (сл. 46.1) одређена је поларним координатама r и φ. Дужина пројекционог зрака $AA' = z$ је трећа координата тачке A. При кретању тачке A описује ордината z цилиндричну површину, којој је водиља пројекција S' путање; отуда назив цилиндрични координатни систем.



Сл. 46.1

Кретање тачке одређено је трима функцијама времена:

$$r = f_1(t), \qquad \varphi = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

Елиминисање времена t из прва два израза даје једначину пројекције путање на раван ε, $F(r, \varphi) = 0$.

Брзину v тачке A налазимо из три компоненте

$$v_r = \frac{dr}{dt} = f'_1(t), \qquad v_c = r\,\frac{d\varphi}{dt} = f_1(t)\,f_2'(t), \qquad v_z = f'_3(t), \tag{46.1}$$

које се зову: радијална, циркуларна и аксијална компонента. Величину, правац и смер брзине v добијамо помоћу образаца:

$$v = \sqrt{v^2_r + v^2_c + v^2_z} \tag{46.2}$$

$$\cos(v, v_r) = \frac{v_r}{v}, \qquad \cos(v, v_c) = \frac{v_c}{v}, \qquad \cos(v, v_z) = \frac{v_z}{v}. \tag{46.3}$$

На исти начин налазимо из

$$u_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \qquad u_c = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right), \qquad u_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{46.4}$$

величину, правац и смер убрзања u као функције времена, а помоћу релација:

$$u = \sqrt{u^2_r + u^2_c + u^2_z} \tag{46.5}$$

$$\cos(u, u_r) = \frac{u_r}{u}, \qquad \cos(u, u_c) = \frac{u_c}{u}, \qquad \cos(u, u_z) = \frac{u_z}{u}. \tag{46.6}$$

Пример. Дато нам је кретање једначинама:

$$r = r + at = r_0(1 + kt)$$
$$\varphi = \varphi_0 + \beta \ln(1 + kt),$$
$$z = z_0 + \gamma t.$$

Међу константама a, r_0 и k претпоставља се зависност $a = r_0 k$.

Величине r_0, φ_0, z_0, значе координате почетног положаја тачке у A_0, а a, β, γ, $k = \frac{a}{r_0}$ су дате константе. Елиминисање времена t из прве две једначине даје једначину логаритамске спирале:

$$r = r_0 e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{\beta}}.$$

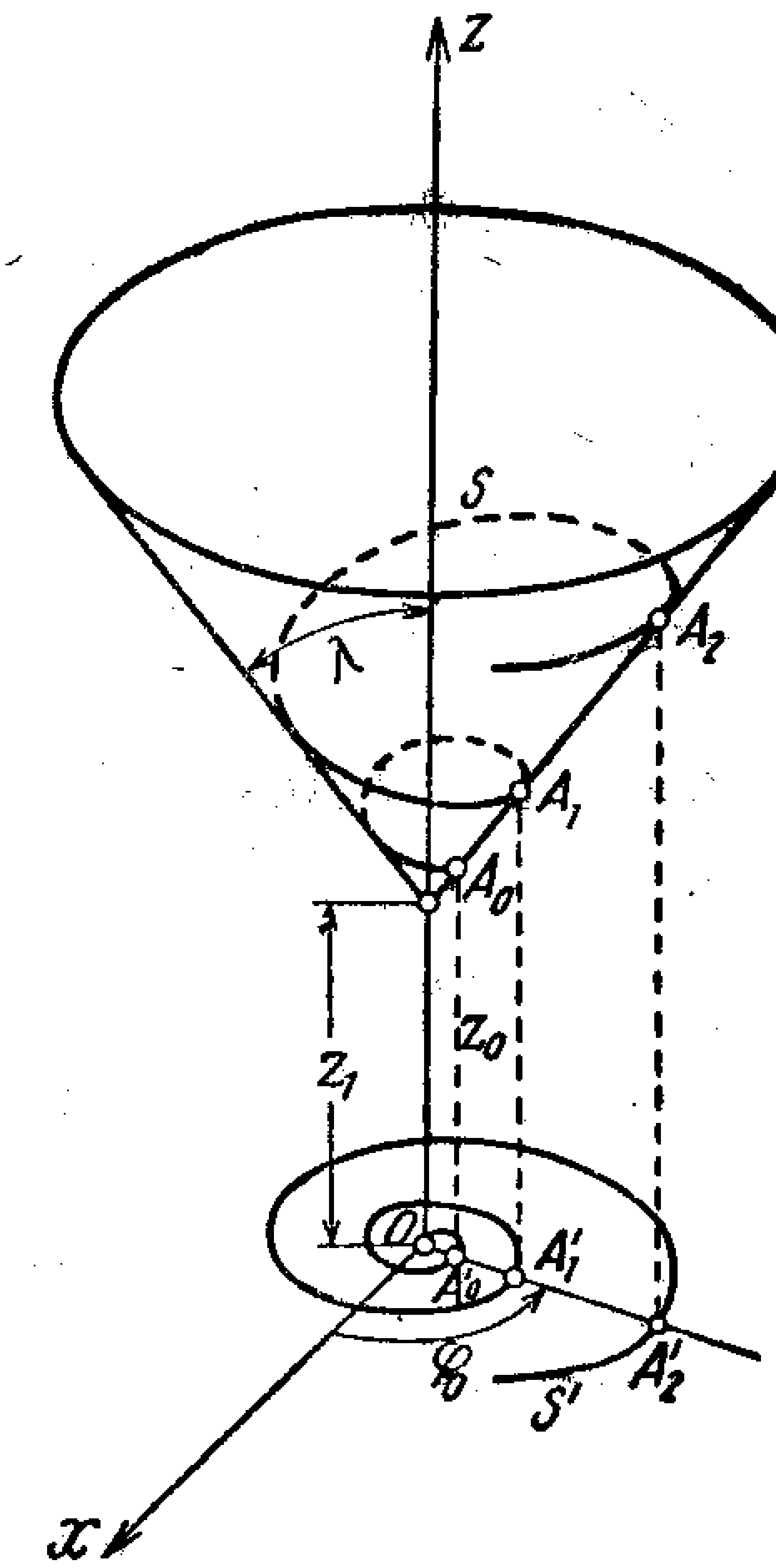
Путања лежи дакле на цилиндричној површини чија је водиља ова спирала. Даље добијамо елиминисањем t из прве и треће једначине

$$z = z_0 + \frac{\gamma}{a}(r - r_0),$$

дакле једначину праве, која сече осовину z под константним углом

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{\gamma}\right)$$

у тачки $z_1 = z_0 - \gamma/k$. Та је тачка дакле врх једне кружне купе на којој путања такође лежи. Поменути спирални ваљак сече површину купе по траженој линији путање (сл. 46.2).



Сл. 46.2

Компоненте брзине су

$$v_r = \frac{dr}{dt} = a,$$

$$v_c = r\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{\beta k}{1 + kt} = a\beta,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \gamma.$$

Како су оне све три константне, то је и резултујућа брзина константна, наиме

$$v = \sqrt{a^2 + (a\beta)^2 + \gamma^2} = \text{const}.$$

Кретање је дакле једнолико и ходограф је кру- паралелан раван ε; његово средиште налази се вертикално изнад пола P на растојању $v_z = \gamma$, а полупречник круга је $a\sqrt{1 + \beta^2}$.

Компонентална убрзања су

$$u_r = -r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{a^2\beta^2}{r}, \qquad u_c = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{a^2\beta}{r}, \qquad u_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Резултујуће убрзање u је нормално на осовину z, управљено је ка њој и величина му је $\frac{\alpha^2\beta}{r}\sqrt{1+\beta^2}$. Пошто је v константно по величини, дакле тангенцијално убрзање једнако нули, то се u поклапа са центрипеталним убрзањем v^2/ϱ. Из тога услова налазимо

$$\varrho = r\,\frac{\alpha^2\,(1+\beta^2)+\gamma^2}{\alpha^2\,\beta\sqrt{1+\beta^2}},$$

тј. полупречник путањине кривине пропорционалан је потегу.

ГЛАВА III

Динамика материјалне тачке

47. Увод. У Кинематици тачке главни појмови о којима смо се бавили, били су: пут, брзина и убрзање. За конструкцију тих појмова биле су нам потребне само две основне величине, простор и време. При њиховом извођењу нисмо се позивали на искуство већ смо целу Кинематику изградили чистим расуђивањем. Кинематику и зато неки и не убрајају и Механику, као део Физике, већ је називају Геометријом кретања или (Форономијом)[1]. Пошто се у њој сем величина x, y, z, које изражавају три димензије простора појављује и време t, то се Кинематика може сматрати по Лагранжу[2]) Геометријом са четири димензије: x, y, z, t.

У праву област Механике, као природне науке, ми ступамо тек сада, прелазећи на Динамику материјалне тачке. У њој ћемо проучавати промену њеног стања кретања услед спољашних утицаја (силâ), другим речима испитиваћемо међусобну зависност кретања тачке и силе (или силâ) које је нападају. То се испитивање састоји у решавању два супротна задатка: а) Може нам бити дат закон кретања тачке и треба да нађемо закон нападне силе. б) Обратно може нам бити дат закон нападне силе и треба да нађемо закон кретања тачке.

У првом случају добијамо двогубим диференцијалењем убрзање тачке и множећи га са масом тачке добијамо убрзавајућу силу која је по дефиницији силе (чл. 11) еквивалентна траженој нападној сили. У другом случају добијамо двогубом интеграцијом једначине: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\vec{P}$, где је $\vec{P}$ дата нападна сила, коначну (односно 2 или 3), једначину кретање тачке.

У Кинематици, при проучавању кретања, нисмо узимали у обзир материјалне особине покретне тачке, те смо увек могли уместо мате-

[1]) Први је Ampère (1775—1836) издвојио Кинематику.

[2]) Lagrange (1736—1813). Mécanique analitique 1788.

ријалне тачке замишљати геометријску тачку. У Динамици морамо узети у обзир да сва физичка тела садрже у себи извесну количину материје. Закони који важе у Динамици материјалне тачке важиће и за транслаторно кретање сваког крутог тела када га заменимо једном његовом одређеном тачком, средиштем његове масе. Стога Динамику материјалне тачке можемо сматрати Динамиком транслаторног кретања.

Једначина $\vec{P} = m\vec{u}$ назива се основним законом Динамике, јер се на њој оснивају сви остали закони Динамике. Она изражава динамичку меру силе као производ масе и убрзања. Али прву претставу силе човек не добија по убрзању које она изазива при кретању неког тела (динамички појам силе), већ по напрезању мишића које он осећа при дизању каквог терета (статички појам силе). Првобитни начин мерења неке силе састоји се у томе да је непосредно помоћу ваге или посредно помоћу динамометра упоредимо са познатом тежином неког тела (тега). То је статичко мерење силе. Дата сила $\vec{P}$ може бити дефинисана разним физикалним законима, тј. имати разне физикалне изворе као што су то гравитационе, еластичне, електричне, магнетичне силе, отпори трења и средине у којој се тела крећу итд. Истраживање закона силе задатак је Експерименталне Физике; Динамика их прима као дате чињенице и уноси у основни закон. Ако тачку нападају више сила (истих или разних извора) онда је њихов векторски збир по закону независног дејства (чл. 13) једнак производу из масе тачке и њеног убрзања или убрзавајућој сили $m\vec{u} = \Sigma\vec{P}$.

Замислимо материјалну тачку на коју делује сила P, зависна само од положаја тачке. Ако материјалну тачку m постављамо у разне положаје у некој области простора и за сваки од тих положаја статички меримо одговарајућу величину и правац силе, сазнаћемо закон по коме се мења сила P са положајем тачке у тој области; аналитички тај закон можемо формулисати тако, што ћемо изразити компоненте X, Y, Z силе P као функције координата x, y, z. Када затим пустимо тачку да се слободно креће под утицајем тих сила, онда ће се она кретати тако, да јој убрзање на сваком месту путање буде идентично са вектором $\frac{\vec{P}}{m}$ на томе месту. Област простора у којој су X, Y и Z дате функције координата x, y, z, зовемо пољем дотичне променљиве силе P.

У ортогоналном координатном систему гласе основне динамичке једначине:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X(x,y,z)\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y(x,y,z)\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z(x,y,z)\,.$$

Интегралећи два пута ове једначине добијамо три коначне једначине, законе кретања:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,.$$

Маса тела сразмерна је његовој тежини (чл. 21). Маса одређена из тежине (статичком методом) зове се тешка маса, а маса одређена из њеног убрзања (динамичком методом) зове се инертна маса.

Чињеницу да су те две, на два разна начина одређене величине једнаке, потврђује искуство; она је позната у класичној механици али је тек у општој теорији релативитета добила значајно објашњење.

Творац ове теорије А. Ајнштајн (A. Einstein *1879) овако објашњава однос између оба појма:

По Њутновом закону кретања је

(сила) = (инертна маса) · (убрзање),

где је „инертна маса" карактеристична константа убрзаног тела. Ако је убрзавајућа сила тежа, онда је

(сила) = (тешка маса) · (интезитет поља теже),

где је „тешка маса" такође карактеристична константа тела. Из обе релације следи:

$$(\text{убрзање}) = \frac{\text{тешка маса}}{\text{инертна маса}} \cdot (\text{интензитет поља теже}),$$

Искуство потврђује да је у датом пољу теже убрзање увек исто, независно од природе и стања тела; стога мора и однос тешке према инертној маси за сва тела бити исти. Можемо дакле тај однос погодним избором јединица ставити једнаким 1; тада важи став: *Тешка и инертна маса једног тела су међусобом једнаке.* Другим речима исти квалитет тела испољава се према приликама као „инерција" или као „тежина".

А. КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ У ПРАВОЈ ПУТАЊИ

I. КРЕТАЊЕ СЛОБОДНЕ ТАЧКЕ

48. Диференцијална једначина кретања. У случају праволинијског кретања мора и покретна сила имати константан правац, који се поклапа са правцем брзине па дакле и путање. Линију путање узећемо за осовину *Ox*. Да бисмо нагласили да је кретање праволинијско, означићемо силу са *X*.

Основна динамичка једначина гласи:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X. \tag{48.1}$$

Векторска ознака овде није потребна, јер су правци силе и убрзања стално исти. Из те једначине можемо, кад је позната природа силе *X*, двојним интегралењем наћи закон кретања у коначном облику $x = f(t)$.

Но како нападна сила X обично није константна, интегралење је често врло отежано па некад и немогуһно у затвореном облику.

У општем случају величина силе X зависиһе од три променљива аргумента: положаја x тачке, њене брзине v и времена t, дакле

$$X = m\,\varphi\,(x\,v, t).$$

Када то унесемо у основну једначину и скратимо са масом, добиһемо је у најопштијем облику при праволинијском кретању:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\,(x, v, t).$$

Ми һемо се сада ограничити само на најпростије и најчешһе специјалне случајеве који се могу јавити, и то: а) када је $X = \text{const.}$; б) када је $X = m\,\varphi_1\,(t)$; в) када је $X = m\,\varphi_2(x)$ и г) када је $X = m\,\varphi_3\,(v)$, тј. када је сила константна или зависна само од једног аргумента: t, x или v и д) када сила зависи од положаја и брзине $X = m\,\varphi_4\,(x, v)$.

а) Сила је константна. Основна диференцијална једначина гласи:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X = \text{const.}$$

Пошто је сила константна, константно је и убрзање, дакле је кретање тачке једнако убрзано (успорено) о коме је у Кинематици (чл. 28.б) било говора; такво кретање гласи

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{ut^2}{2}\,. \tag{48.2}$$

б) Сила је зависна само од времена. Диференцијална једначина гласи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1\,(t)$$

или

$$\frac{d\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{dv}{dt} = \varphi_1(t). \tag{48.3}$$

Први интеграл је

$$v = \int \varphi_1(t)dt + C_1. \tag{48.4}$$

Када ставимо $v = \dfrac{dx}{dt}$ и интегралимо поново, добијамо

$$dx = \left[\int \varphi_1(t)dt + C_1\right] dt$$

а затим као закон кретања

$$x = \int [\varphi_1(t)dt]\, dt + C_1 t + C_2. \tag{48.5}$$

в) Сила је зависна само од пута (положаја) тачке. Диференцијална једначина гласи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(x).$$

Када у ту једначину уведемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

и обе стране помножимо са dx, добијамо

$$\frac{dv}{dt}\, dx = \varphi_2(x)\, dx$$

односно, сменивши $\frac{dx}{dt} = v$

$$v\, dv = d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \varphi_2(x)\, dx.$$

Први инеграл гласи

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int \varphi_2(x)\, dx + \frac{1}{2} C_1,$$

дакле је брзина

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2\int [\varphi_2(x)\, dx + C_1]}. \tag{48.6}$$

Поновним интеграљењем добићемо

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2\int \varphi_2(x)\, dx + C_1}} + C_2. \tag{48.7}$$

Када се по свршеном интеграљењу ова једначина реши по x, добија се тражени закон кретања у облику $x = f(t)$.

г) Сила зависи само од брзине. Диференцијална једначина

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(v_3) \quad \text{или} \quad dt = \frac{dv}{\varphi_3(v)}$$

има први интеграл

$$t = \int \frac{dv}{\varphi_3(v)} + C_1. \tag{48.8}$$

Ако по свршеном интеграљењу једначину решимо по v, добићемо уопште

$$v = F(t, C_1). \tag{48.8a}$$

Када уведемо $v = \frac{dx}{dt}$ и понова интегралимо, имаћемо

$$x = \int F(t, C_1)\, dt + C_2 \tag{48.9}$$

а то је тражени закон кретања у општем облику $x = f(t)$.

д) Сила зависи од положаја и брзине тачке. Диференцијална једначина кретања гласи

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cdot$$

Она се може свести на једначине првог реда када усвојимо $\frac{dx}{dt} = v$ као зависну а x као независну променљиву. На основу релација

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

можемо дату једначину другог реда заменити двема једначинама првог реда

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{и} \quad m\frac{dv}{dx} = \frac{X(x, v)}{v} .$$

Ако успемо да другу једначину интегралимо у облику $v = \varphi(x, C)$ добијамо из прве

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x, C)}$$

дакле квадратуром

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C)} + C_1$$

и инверзијом коначни закон кретања $x = F(t, C, C_1)$.

Пре но што пређемо на примере, на које ћемо применити ове методе за одређивање закона кретања, морамо се упознати још са неким важним појмовима и теоремама Динамике, које ћемо доцније проширити и на криволинијско кретање.

49. Импулс силе и количина кретања. Када у основној динамичкој једначини

$$X = m\,\frac{dv}{dt}$$

пренесемо dt на леву страну, гласиће она с обзиром да је m константна величина

$$X\,dt = d(mv). \tag{49.1}$$

Производ силе и времена $P\,dt$ на левој страни једначине зовемо по Беланже-у (Belanger, 1790—1874) импулсом покретне силе (и то елементарним импулсом, јер траје бесконачно кратко време), а производ масе и брзине (mv) на десној страни једначине називамо по Декарту (Descartes, 1596—1650) количином кретања или краће налетом покретног тела (тачке). Са тим ознакама једначина (49.1) исказује став, *да је елементарни импулс силе једнак прираштају* (диференцијалу) *количине кретања покретног тела (тачке).*

У овом облику горња је једначина једна од основних у теорији судара тела. Помоћу ње можемо дати другу дефиницију силе, јер ако количину кретања (импулс) обележимо са $I = mv$ биће

$$X = \frac{dI}{dt} \tag{49.1a}$$

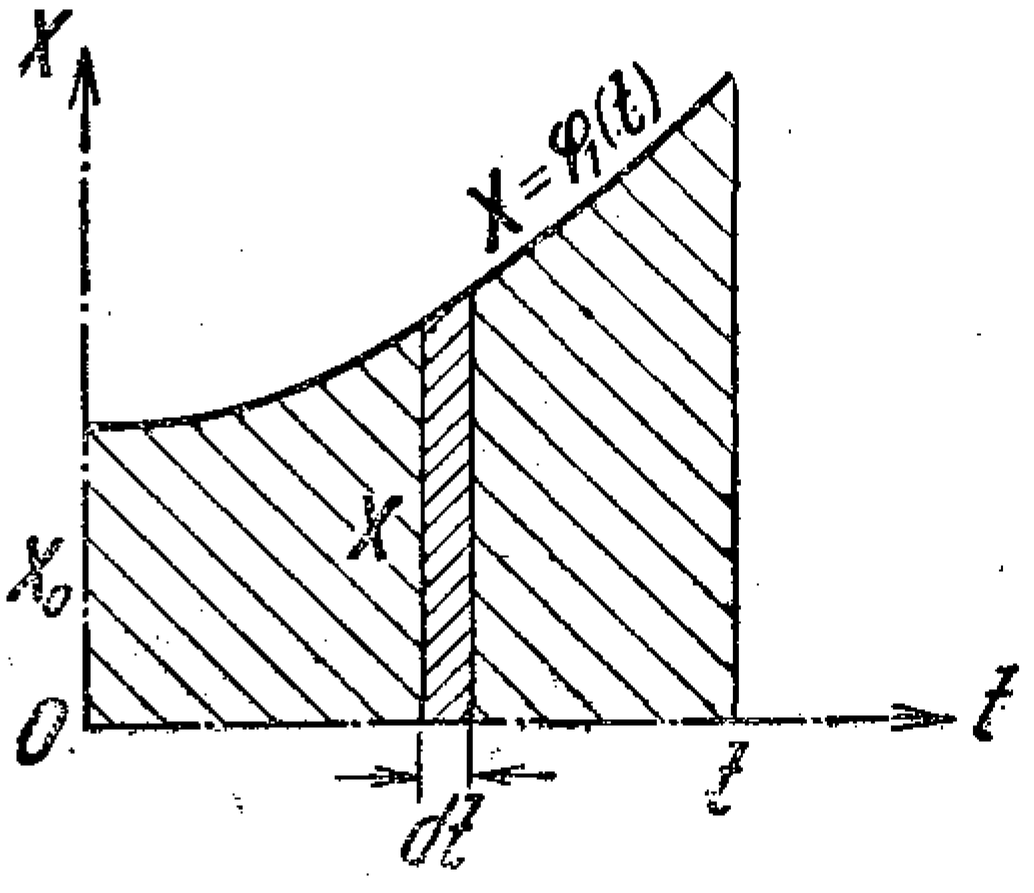
или речима: *сила е једнака изводу количине кретања (импулса) по времену.*

За кретања, код којих нападна сила дејствује дуже времена, добијамо

$$\int_0^t X\,dt = \int_0^t d(mv) = mv - mv_0. \tag{49.2}$$

Интеграл силе по времену $\int_0^t P\,dt$ називамо коначним импулсом силе за временски интервал $(t - t_0)$.

Да бисмо могли израчунати овај интеграл силе по времену, потребно је да изразимо X као функцију времена $X = \varphi_1(t)$. Ту зависност можемо графички претставити дијаграмом силе по времену (сл. 49.1), из кога се види да нам елементарни импулс силе $X\,dt$ означава уска трака густо шрафиране површине, а тотални импулс за интервал од O до t цела површина, коју дијаграм силе заклапа са апсцисом t и крајњим ординатама X_0 и X, дакле



Сл. 49.1

$$mv - mv_0 = \int_0^t \varphi_1(t)\,dt. \tag{49.2a}$$

Ако је сила у току времена константна биће импулс $I = X\,t$, а ако је сила линеарна функција времена импулс је $I = \dfrac{X_0 + X}{2}\,t$.

Теорема о импулсу силе или о количини кретања служи нам за решавање задатака, када су од величина X, t, m, v, три дате, а тражимо четврту.

Пример. На хоризонталној правој прузи откачена су једна кола тежине Q која имају брзину $v_0 = 5{,}5$ m/sec (20 km/h). Пита се после ког времена ће се кола зауставити. Једина сила која кретање кола успорава је: $X = -Qf$, отпор трења, где је f коефицијент отпора о коме ће доцније бити говора. Отпор ваздуха не узимамо у обзир.

Теорема о импулсу гласи

$$-Qf\,t_1 = m\,0 - m\,v_0 .$$

Пошто је $Q = mg$ то налазимо $t_1 = \frac{v_0}{gf}$. Са $g \approx 10 \mathrm{m/sec^2}$ и $f = 0{,}003$ налазимо $t_1 = \frac{5}{0{,}03} = 183$ sec. Кола ће се зауставити после 3 минута. Време t_1 је независно од тежине кола док се она крећу на хоризонталној прузи.

50. Механички рад и кинетичка енергија. Када основну једначину

$$X = m\,\frac{dv}{dt}$$

помножимо са идентитетом $dx = v\,dt$ добијамо

$$X\,dx = m\,v\,dv$$

и са $mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$

$$X\,dx = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{50.1}$$

Производ силе X и елемента пута dx називамо елементарним механичким радом силе и обележавамо га са $\delta A = X\,dx$; половина производа масе и квадрата брзине: $L = \frac{mv^2}{2}$ зове се кинетичка енергија материјалне тачке. Оба назива увео је у Механику Кориолис (Coriolis, 1792—1843); уместо појма кинетичке енергије $\frac{mv^2}{2}$ раније се по Лајбницу (Leibniz, 1646—1716) израз mv^2 звао жива сила материјалне тачке. Кинетичку енергију имају само оне масе које се налазе у покрету, јер када је $v = 0$, онда је и $L = \frac{mv^2}{2} = 0$. Зато се ова врста енергије зове и енергијом покрета за разлику од једне друге врсте енергије, коју могу имати и тела кад се налазе у миру, као што ћемо доцније сазнати.

Интеграл последње једначине

$$A = \int_{x=0}^{x} X\,dx = \int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2} \tag{50.1a}$$

исказује теорему живе силе која гласи: *механички рад силе на путу x једнак је прираштају кинетичке енергије тачке на том путу.*

Да бисмо могли интеграл $\int X\,dx = A$ решити морамо силу X изразити као функцију пута. Ако је сила константна њен је рад $A = Xx$. Од промењљивих сила најчешће су силе зависне од положаја $X = f(x)$. У том случају је

$$A = \int_0^x f(x) dx .$$

У најопштијем случају зависиће сила од положаја, брзине и времена $X = f(x,v,t)$. Сада морамо познавати закон кретања $x = \varphi(t)$ тачке да бисмо могли интеграл $\int X\,dx$ решити. Сменом $x = \varphi(t)$, $v = \dot{\varphi}(t)$ и $dx = \dot{\varphi}(t)\,dt$ добија интеграл облик

$$A = \int X\,dx = \int f\,[\varphi\,(t),\, \dot{\varphi}\,(t),\, t]\, \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^t \Phi(t)\, dt,$$

дакле, изражен независном промењљивом t.

Теорема живе силе служи нам за решавање задатака када су од величина X, x, v, m три дате а тражи се четврта.

Пример. У предњем задатку одредићемо пут који ће кола прећи док се не зауставе. Теорема живе силе даје $-Qfx_1 = 0 - \frac{mv_0^2}{2}$ и одавде $x_1 = \frac{v_0^2}{2gf}$. За исте бројне податке налазимо $x_1 = \frac{5{,}5^2}{0{,}06} \approx 500 m$. Кола ће за 183 sec прећи пут од 500 m. За контролу служи нам закон једнако убрзаног кретања по коме је $x_1 = \frac{v_0 t_1}{2} = 503$ m.

Механички рад је скаларна величина и може бити позитиван или негативан према томе дали сила и пут имају исти или супротни смер. У првом случају брзина, а с њом и кинетичка енергија, расте, сила X в р ш и (ствара) механички рад. У другом случају кинетичка енергија опада, сила троши механички рад.

У примени теореме живе силе код машина, позитивни механички рад назива се п о к р е т н и или м о т о р н и р а д (travail moteur), а негативан механички рад назива се о т п о р н и р а д (travail résistant), па се и силе које дејствују у тим случајевима зову м о т о р н о м односно о т п о р н о м с и л о м (теретом).

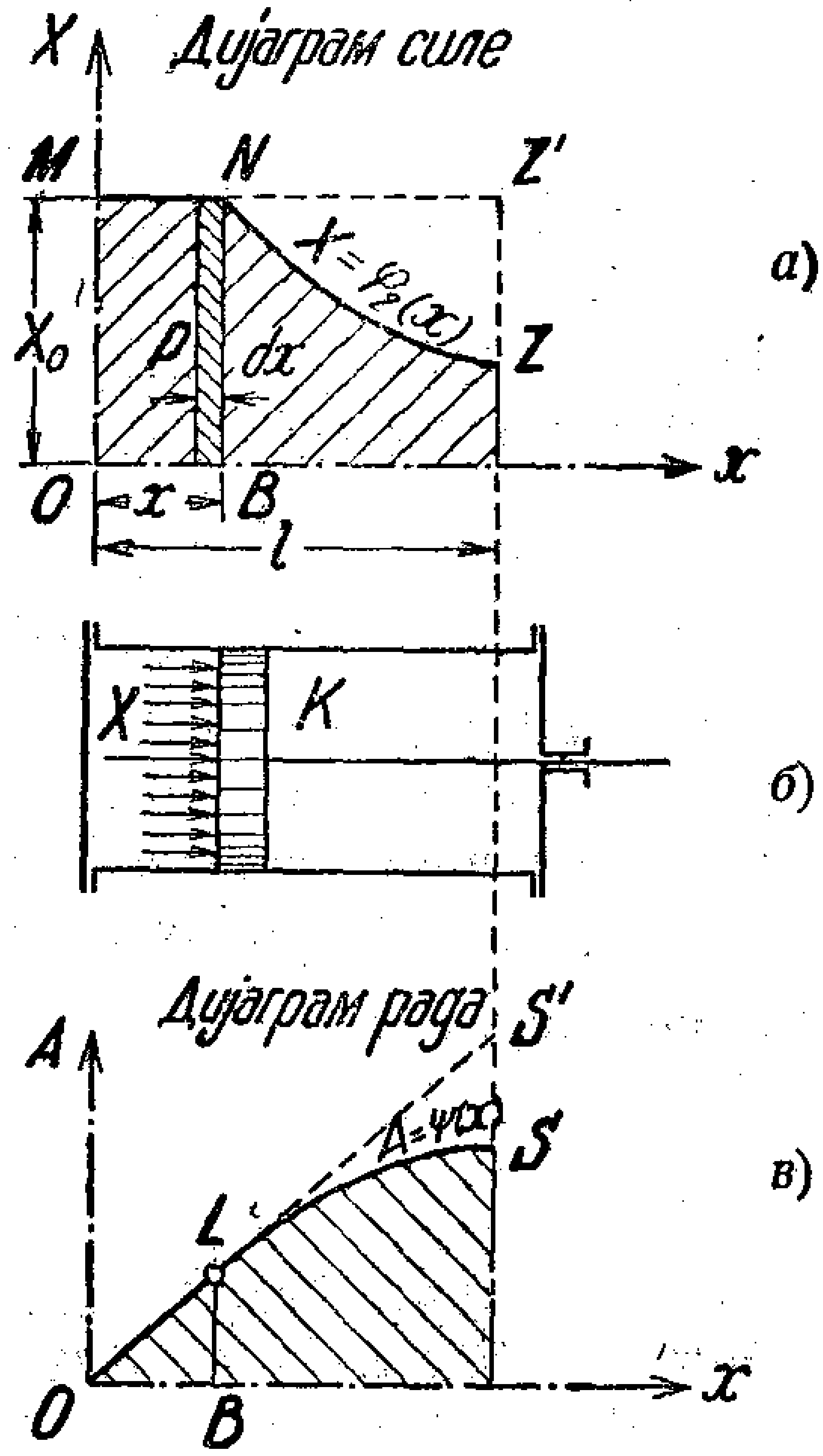
Интеграљење

$$A = \int_0^x X\,dx$$

можемо вршити графички ако нам је дат дијаграм силе по путу $X = \varphi_2(x)$. Такав случај имамо у техничкој пракси код парних машина. На сл. 50.1б претстављен је цилиндар парне машине, у коме клип K

врши праволинијско кретање под утицајем притиска паре X. Максимална дужина пута l зове се ход клипа. Ако се пара пушта у цилиндар све до положаја клипа B[1], на том путу њен ће напон бити константан и дијаграм ће до тога места бити хоризонтална права MN. Када се у положају B довод паре прекине, затворена пара ће се ширити па и даље потискивати клип, али ће сила којом она на клип притискује опадати, те ће дијаграм на томе делу пута бити крива линија NZ.

Графичким интеграљењем дијаграма силе и пута добијамо дијаграм рада и пута (сл. 50.1в). У интервалу OB рад A расте линеарно са пређеним путом. Дијаграм рада по путу је коса линија OL. Пошто се десно од положаја B клипа сила смањује, то дијаграм прелази у криву LS која у L додирује праву OL. Дијаграм рада и пута изражен је са



Сл. 50.1

$$A = \psi(x) = \int_0^x \varphi_2(x)\,dx.$$

Ако је механички рад силе дат као функција пређеног пута $A = \psi(x)$, а пут као функција времена по закону кретања $x = f(t)$, онда можемо елиминацијом пута x из тих једначина наћи механички рад као функцију времена

$$A = F(t).$$

51. Ефект рада (снага) или моћ. Ако желимо окарактерисати радну способност (снагу или моћ) какве силе која делује на некој машини, онда није довољно рећи само колико она механичког рада уопште даје, већ се морамо обазрети и на време у коме се тај рад свршава. Од две машине, које могу вршити одређену количину механичког рада, кажемо за ону која га сврши у краћем року, да има већи ефект рада (већу снагу или моћ).

Аналитички израз за ефект рада неке силе добићемо, кад поделимо њен механички рад са интервалом времена у коме је свршен. Узмемо ли да је свршени рад силе X у моменту t био A, а у позни-

[1]) Обично до 0,3 l.

јем моменту t_2 да је A_2, онда ће рад свршен у интервалу времена $t_2 - t_1$ бити $A_2 - A_1$. Количник

$$\frac{A_2 - A_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

називамо средњим (просечним) ефектом рада силе, јер у општем случају претпостављамо, да је сила (па и њен рад) променљива у току времена. Када интервал времена Δt конвергише према нули, тј. када посматрамо ефект рада у извесном тренутку, овај количник добиће граничну вредност

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = E \tag{51.1}$$

тј. *Ефект рада или моћ је извод рада по времену.* Ако је ефект рада у току времена константан, онда га можемо дефинисати и као свршени рад у јединици времена.

Другу дефиницију ефекта добијамо када у једначини (51.1) сменимо $dA = X\,dx$ и $\frac{dx}{dt} = v$, дакле

$$E = \frac{dA}{dt} = \frac{Xdx}{dt} = X\,v \tag{51.1a}$$

или у речима: *Ефект рада у извесном тренутку једнак је производу силе и брзине у томе тренутку.*

Најзад, из теореме живе силе следује

$$E = \frac{dA}{dt} = \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = \frac{dL}{dt} \tag{51.1б}$$

тј. *ефект је једнак изводу кинетичке енергије по времену.*

Производ из рада и времена или

$$\int_0^t L dt$$

зове се *акција* (дејство). Има примену у вишој Динамици. (Принцип најмање акције).

52. Димензије и јединице. Димензије свих динамичких величина истичу из основне динамичке једначине $\vec{P} = m\,\vec{u}$. Из чл. 20 и 21 знамо да постоје два система мера према томе да ли поред дужине и времена усвајамо као трећу основну величину масу или тежину тачке (тела). Из образаца који дефинишу импулс (односно количину кретања), механички рад (односно енергију) ефект и дејство (акцију) образујемо (чл. 16) димензиони образац дотичне величине. Те су димензије и јединице у следећој таблици изложене. Ради потпуности наведене су и кинематичке величине које у оба система имају исте димензије и разликују се само у јединицама.

На крају таблице налази се величина са којом ћемо се у Динамици тела упознати.

Димензије и јединице у техничком и физикалном систему мера

ВЕЛИЧИНЕ	Врста	Технички систем		Физикални систем	
		Димензија	Јединица	Димензија	Јединица
Дужина	Вектор	l	1 m	l	1 cm
Време	Скалар	t	1 sec	t	1 sec
Брзина	Вектор	$l\,t^{-1}$	1 m sec^{-1}	$l\,t^{-1}$	1 cm sec^{-1}
Убрзање	"	$l\,t^{-2}$	1 m sec^{-2}	$l\,t^{-2}$	1 cm sec^{-2}
Секторна брзина	"	$l^2\,t^{-1}$	1 m^2 sec^{-1}	$l^2\,t^{-1}$	1 cm^2 sec^{-1}
Угаона брзина	"	t^{-1}	1 sec^{-1}	t^{-1}	1 sec^{-1}
Угаоно убрзање	"	t^{-2}	1 sec^{-2}	t^{-2}	1 sec^{-2}
Сила	"	P	1 kg	$m\,l\,t^{-2}$	1 g* cm sec^{-2} = = 1 Dyn
Маса	Скалар	$P\,l^{-1}\,t^2$	1 kg m^{-1} sec^2	m	1 g*
Статички момент масе	Вектор	$P\,t^2$	1 kg sec^2	$m\,l$	1 g* cm
Обртни момент силе	"	P l	1 kg m	$m\,l^2\,t^{-2}$	1 Dyn cm
Импулс, Количина кретања (или налет)	"	P t	1 kg sec	$m\,l\,t^{-1}$	1 Dyn sec
Специфична тежина	Вектор примењен као скалар	$P\,l^{-3}$	1 kg m^{-3}	$m\,l^{-2}\,t^{-2}$	1g* cm^{-2} sec^{-2}
Специфична маса (густина)	Скалар	$P\,l^{-4}\,t^2$	1 kg m^{-4} sec^{-2}	$m\,l^{-3}$	1 g* cm^{-3}
Механички рад, енергија	"	P l	1 kg m	$m\,l^2\,t^{-2}$	1 Dyn cm = 1Erg 10^7 Erg = 1 Joule
Ефект	"	$P\,l\,t^{-1}$	1 kg m sec^{-1} 75 kg m sec^{-1} = 1 HP	$m\,l^2\,t^{-3}$	1 Erg sec^{-1} 10^7 Erg sec^{-1} = = 1 Watt
Дејство (Акција)	"	P l t	1 kg m sec	$m\,l^2\,t^{-1}$	1 Erg sec
Момент инерције и девијације	Тензор	$P\,l\,t^2$	1 kg m sec^2	$m\,l^2$	1 g* cm^2

За прерачунавање свих величина из физикалног у технички систем мера и обрнуто, поред реченог у I глави, важе ови односи:

а) за силу: 1 kg = 9,81 · 10^5Dyna = 0,98 Megadyna;
б) за рад: 1 kg m = 9,81 · 10^7 erg = 9,81 Joule[1];
в) за ефект: 1 kg m sec^{-1} = 9,81 Watt[2]; 1 Watt = 0,102 kgm sec^{-1}.
1 HP = 75 kg m sec^{-1} = 0,736 kW; 1 kW = 1,359 HP.

53. Слободан пад и вертикалан хитац у празном простору. Праволинијско кретање слободне тешке тачке могућно је само у вертикалном правцу Земљине теже. Убрзање Земљине теже g није константно, оно се смањује са удаљавањем материјалне тачке од центра Земље и од њених полова. Али за мање висине пењања ова се променљивост практично може занемарити. Сем Земљине теже на тела у покрету делује и отпор ваздуха, али га ми за сада занемарујемо, сматрајући да се тачка креће у празном (безваздушном) простору. Са тим претпоставкама једина сила mg која на тачку делује је константна; кретање ће бити једнако убрзано или једнако успорено, за које важе једначине изведене у чл. 28б.

Када у те једначине уведемо за убрзање $a = g = 9{,}81\ \mathrm{m\,sec^{-2}}$, означимо пређени пут са $s = Oz$, добијамо за слободан пад и вертикалан хитац три основне једначине кретања

$$z = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2}, \qquad v = v_0 \pm g t, \qquad 2gz = v^2 - v_0^2 .$$

Могућна су три случаја.

а) Слободан пад настаје када је почетна брзина $v_0 = 0$. Брзина и убрзање имају исти смер, дакле важи горњи знак и једничине слободног пада гласе:

$$z = \frac{gt^2}{2}, \qquad v = gt, \qquad 2gz = v^2.$$

Путови пређени у истим временима односе се као непарни бројеви (Galilei).

б) Вертикални хитац наниже. Као у случају а) важи и овде позитивни знак, дакле гласе једначине

$$z = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \qquad v = v_0 + gt, \qquad 2gz = v^2 - v_0^2.$$

в) Вертикални хитац навише. Овде је почетна брзина v_0 управљена навише, насупрот убрзању, па ће кретање бити једнако успорено. Ако узмемо позитивну осовину z у смеру почетне брзине, једначине кретања гласиће

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad v = v_0 - gt \qquad - 2gz = v^2 - v_0^2.$$

---

1) J. P. Joule (1818—1899), физичар.
2) J. Watt (1736—1819), творац парне машине.

Када у другу једначину ставимо $v = 0$, добићемо време T за које ће се тачка кретати на више, или време пењања:

$$T_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Трећа једначина одређује са $v = 0$ максималну вредност z, или висину пењања:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Дијаграми: $z = f(t)$ и $v = f'(t)$ за сва три кретања приказани су на сл. 28.2.

54) **Потенцијална енергија. Механичка енергија.** Пошто три једначине $z = f(v)$ у последњем члану помножимо са масом тачке, назовемо $Q = mg$ њену тежину а $\frac{mv^2}{2} = L$ њену кинетичку енергију, гласиће оне:

$$а)\ Qz = L, \qquad б)\ Qz = L - L_0 \qquad в)\ -Qz = L - L_0.$$

У њима су L_0 и Q константе, L и z променљиве величине. Ордината z рачуната је у прва два случаја на ниже, у трећем пак на више. Да бисмо у сва три случаја имали почетак у истој хоризонтали, ставићемо у прва два случаја $z = H - h$ а у трећем $z = h$, где је H прозвољна стална висина. Сменом у горње једначине и одвајањем променљивих величина од сталних добиће горње једначине облик:

$$а)\ L + Qh = QH, \qquad б)\ L + Qh = L_0 + QH \qquad в)\ L + Qh = L_0.$$

На левој страни стоји збир двеју променљивих величина. Пошто је L кинетичка енергија а сабирати се могу само величине исте врсте, то је и Qh енергија зависна од висине h. Она се зове потенцијална енергија или енергија положаја и бележи се обично V. На десној страни стоји константан израз који се зове механичка енергија и бележи се E. Све три једначине дакле гласе:

$$L + V = E$$

или речима; *збир кинетичке и потенцијалне енергије је константан.*

Висину H бирали смо произвољно, стога је потенцијална енергија релативна величина, мерити можемо само разлику двеју потенцијалних енергија.

Закон константности механичке енергије нашли смо у најпростијем примеру константне силе. Потврдићемо га и за променљиве силе. Али ће се његов значај тек у Динамици система материјалних тачака показати.

55. Закон опште (универзалне) гравитације а) Сила између две материјалне тачке. Из Кеплерових закона о кретању планета Њутн је закључио, да међу планетама постоје узајамне привлачне (гравитационе) силе исте природе каква је и сила којом Земља привлачи сва материјална тела на својој површини. Он је даље нашао да се ове привлачне силе јављају не само међу небеским телима, него и међу свима другим телима у васиони, и да је величина узајамне привлачне силе, која постоји између два тела чије су масе m и m_1 одређена обрасцем

$$P = \Gamma \frac{m m_1}{r^2} \tag{55.1}$$

где је r растојање тих тела, а Γ је такозвана општа гравитациона (Гаусова) константа, јер она има исту вредност за сва тела у васиони. По закону акције и реакције сила $+P$, којом маса m привлачи масу m_1, једнака је а супротног смисла сили $-P$, којом маса m_1 привлачи масу m.

Њутнов закон опште (универзалне) гравитације гласи: *Свака два материјална тела привлаче се узајамно силом, која је сразмерна њиховим масама а обрнуто сразмерна квадрату њиховог растојања.*

Тачност овога закона за дејство Земљине теже на Месец, Њутн је доказао, претпостављајући да Месец описује око Земље кружну путању полупречника $\varrho = 60\,R$ (где је $R = 6\,366{,}74$ km, полупречник Земље). Цео круг дужине $2\varrho\pi$, Месец обиће за 27 дана 7 часова и 43 минута, чиме је брзина v кретања Месеца одређена. Са познатим вредностима v и ϱ нашао је Њутн за убрзање Месеца вредност

$$u_m = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{v^2}{60R} = 0{,}27\,07 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Пошто су убрзања гравитационих сила, као и оне саме, обрнуто пропорционалне квадрату растојања дотичних маса, то убрзање на површини Земље g и убрзање u_m на Месецу стоје у односу

$$g : u_m = \varrho^2 : R^2$$

из чега следује

$$g = \frac{u_m\,(60R)^2}{R^2} = u_m\,60^2 = 0{,}27\,07 \cdot 60^2 = 974{,}5 \text{ cm sec}^{-2}.$$

На овај начин одређено убрзање не слаже се само за $3{,}5\,‰$ са стварним убрзањем $g = 978$ cm sec^{-2} на екватору, које је одређено експерименталним путем.

Општа гравитациона константа Γ претставља силу, којом се привлаче две јединице масе када се налазе на јединици растојања. Димензију константе Γ наћићемо, када једначину (55,1) решимо:

$$\Gamma = \frac{P\,r^2}{m\,m_1}. \tag{55.1a}$$

У CGS систему мера биће

$$\dim \Gamma = \dim\left[\frac{P\,r^2}{m\,m_1}\right] = \left[\frac{(m\,l\,t^{-2})\,l^2}{m^2}\right] = \left[m^{-1} l^3\, t^{-2}\right].$$

Општа гравитациона константа одређена је више пута (почев од 1798.) експерименталним путем од стране разних научника и разним методама (помоћу клатна, теразија, торзионе ваге), па је нађено да је њена величина у апсолутном (CGS) систему мера

$$\Gamma_a = (6{,}685 \pm 0{,}011)\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Dyn\,cm^2\,g^{*-2}}.$$

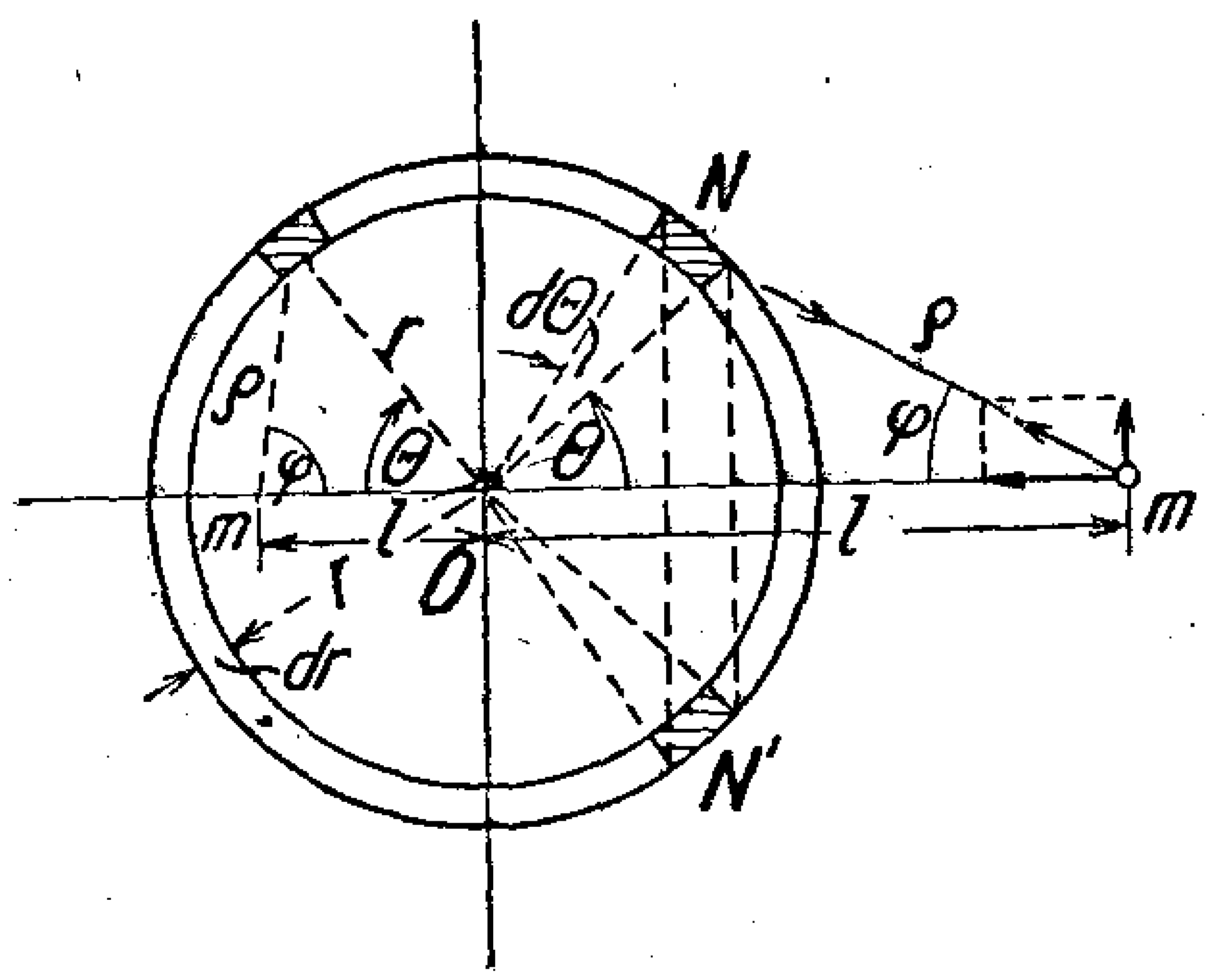
Као што се види, то је једна врло мала вредност, што значи да су и гравитационе силе које се међу Земаљским телима појављују, врло мале. Ради примера израчунаћемо привлачну силу, која постоји између масе једнога човека: $m_1 = 100$ kg* и масе једне зграде: $m_2 = 100000$ kg* које су на међусобном растојању од $r = 10$ m. Добијамо као привлачну силу у систему CGS:

$$P = 6{,}685\cdot 10^{-8}\,\frac{10^5\cdot 10^8}{10^6} = 6{,}685\cdot 10^{-1} = 0{,}66\,85\ \mathrm{Dyn},$$

а то је величина силе, која приближно одговара тежини од 0,7 милиграма. Привлачна сила између Земље и Месеца износи око $2{,}06\cdot 10^{16}$ тона.

У техничком систему мера (kg, met, sec) је гравитациона константа једнака $6{,}56\cdot 10^{-12}$ met^4 kg^{-1} sec^{-4}.

б) Сила између тачке и хомогене лопте. Дефиниција гравитационе силе претпоставља да су m и m_1 материјалне тачке, јер само онда је r одређена дужина. Сила између тачке m и тела коначних димензија M је резултанта многих елементарних сила dP које владају између масе m и елемента dM тела. Ако је ϱ растојање између dM и m; елементарна сила је $dP = \Gamma\frac{m\,dM}{\varrho^2}$. Силе dP секу се у тачки m и њихов геометријски збир је тражена гравитациона сила између тела M и тачке m.



Сл. 55.1

Посматраћемо најпростији случај да је тело хогомена лопта. Њена специфична маса означена је са μ. Све остале ознаке јасне су из сл. 55.1 Одредићемо прво силу између тачке m и шупље лопте са дебљином зида dr. Елементарна маса код N је $\mu r\, d\vartheta\, dr\, ds$ где је ds трећа страна паралелепипеда, управна на раван цртежа. Сила између елемента N и тачке m је $\Gamma\mu r\, d\vartheta\, ds\, \frac{m}{\varrho^2} = dp$; разложићемо је у компоненте у правцу mO и управном на mO. Последња $dp\sin\varphi$ потире се са одговарајућом компонентом на дијаметралној тачки N', а прва $dp\cos\varphi$ је исте величине и знака за све елементарне масе које образују кружни прстан (зону) полупречника $r\sin\vartheta$. Када ds заменимо са $ds = 2\pi r\sin\vartheta$ налазимо силу између прстена NN' и тачке m:

$$dP = \Gamma\mu r\, d\vartheta\, dr\, 2\pi r\sin\vartheta\, \frac{m}{\varrho^2}\cos\varphi.$$

Пошто уведемо масу целе шупље лопте $M = 4\mu r^2\pi dr$, добићемо краћи израз

$$dP = \Gamma\frac{Mm}{2}\, \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\cos\varphi}{\varrho^2}.$$

Променљиве углове ϑ и φ изразићемо са растојањем ϱ помоћу косинусног правила

$$\cos\varphi = \frac{l^2 - r^2 + \varrho^2}{2l\varrho},\ \cos\vartheta = \frac{l^2 + r^2 - \varrho^2}{2lr};\quad d\cos\vartheta = -\sin d\vartheta = -\frac{\varrho\, d\varrho}{lr}.$$

Сменом у последњу једначину гласиће ова

$$dP = \Gamma\frac{Mm}{4rl^2}\, \frac{l^2 - r^2 + \varrho^2}{\varrho^2}\, d\varrho.$$

Неодређени интеграл $\int dP$ је

$$\int\left[(l^2 - r^2)\frac{d\varrho}{\varrho^2} + d\varrho\right] = -\frac{l^2 - r^2}{\varrho} + \varrho.$$

Ако се тачка m налази изван лопте, границе интеграла су: $l + r$ и $l - r$, дакле

$$P = \Gamma\frac{Mm}{4rl^2}\left[-\frac{l^2 - r^2}{\varrho} + \varrho\right]_{l-r}^{l+r} = \Gamma\frac{Mm}{4rl^2}\, 4r = \Gamma\frac{Mm}{l^2}.$$

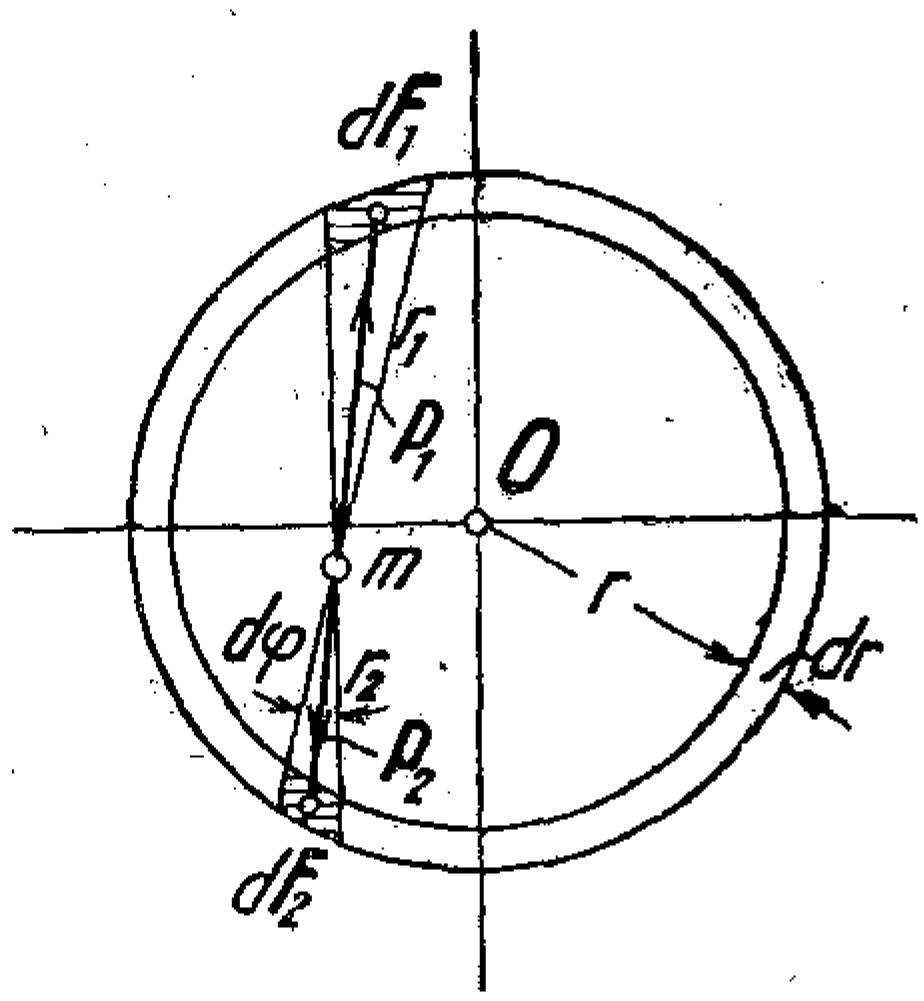
Гравитациона сила P између шупље хомогене лопте и тачке изван ње је исте величине као када би цела њена маса била концентрисана у њеном центру. Јасно је да овај став важи и за пуну лопту, јер ову можемо замислити састављену из концентричних хомогених слојева који не морају имати исту густину. Две хомогене лопте (пуне или шупље) привлачиће се по Њутновом закону као да су њихове масе концентрисане у њиховим центрима.

Ако се тачка m налази у шупљини лопте (сл. 55.1), онда су границе интеграла $r+l$ и $r-l$, а у тим границама је $\left[-\frac{l^2-r^2}{\varrho}+\varrho\right]_{r-l}^{r+l}=0$, дакле и $P=0$. *Привлачна Њутнова сила између хомогене шупље лопте и тачке унутар ње једнака је нули.*

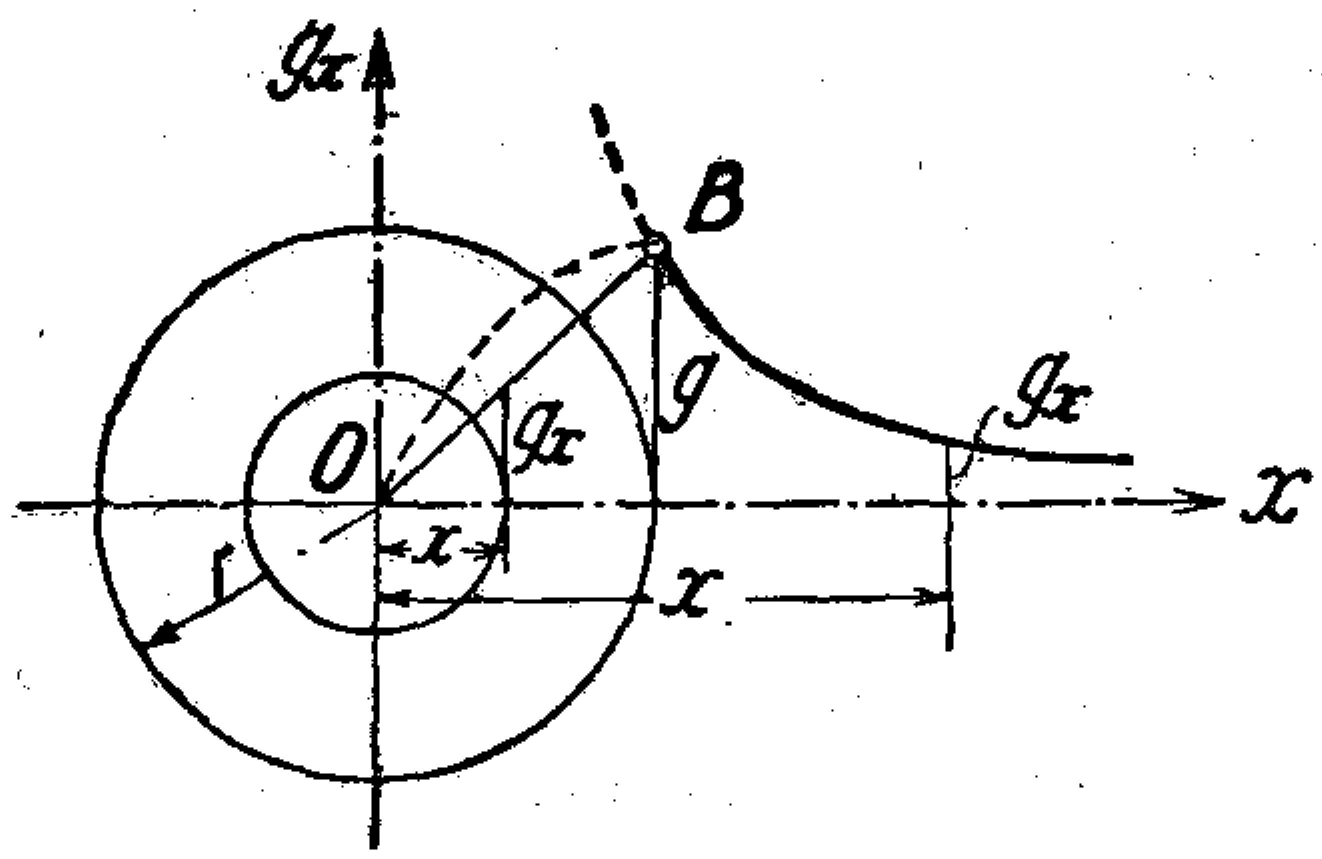
Овај став можемо лако елементарним рачуном доказати. На произвољном месту шупље лопте налази се материјална тачка m (сл. 55.2). Из m као темена опишемо конус са отвором $d\varphi$. Конус исеца из слоја dr запремине $dF_1\,dr$ и $dF_2\,dr$. Горњи елемент дејствује на масу m силом

$$P_1 = \Gamma\frac{\mu\, dF_1\, dr\, m}{r_1^2} \quad \text{а доњи са} \quad P_2 = \Gamma\frac{\mu\, dF_2\, dr\, m}{r_2^2}.$$

Но како је $dF_1 : r^2 = dF_2 : r_2^2$ то је $P_1 = -P_2$. Како то важи за сваки конус то је тиме горњи став доказан.



Сл. 55.2



Сл. 55.3

Физичар Кавендиш (H. Cavendish, 1730—1810) доказао је 1798. да овај став важи само за силе обратно пропорционалне квадрату растојања.

в) Променљивост Земљине теже. Наша Земља замишљена приближно као хомогена лопта полупречника r (6370 km) даће маси m тачке у растојању x од њеног центра убрзање $g_x = \Gamma\frac{M}{x^2}$. Ова једначина важи за $x > r$, тј. ако се m налази изван Земље. За $x=r$ је познато $g = \Gamma\frac{M}{r^2}$. Према томе је

$$g_x : g = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{r^2} \quad \text{или} \quad g_x = \frac{gr^2}{x^2}.$$

Дијаграм $g_x = f(x)$ је хипербола вишег реда; осовине Ox и Oy су јој асимптоте (сл. 55.3); он важи од $x=r$ до $x \to \infty$ где је $g_\infty = 0$.

Ако је $x < r$, тј. тачка m се налази у лопти онда, на тачку дејствује само маса M_x лопте полупречника x дакле је $g_x = \Gamma \frac{M_x}{x^2}$. Из пропорције $M_x : M = x^3 : r^3$ и $g = \Gamma \frac{M}{r^2}$ добијамо да за $x < r$ важи закон $g_x = g \frac{x}{r}$; дијаграм је права OB. Али пошто се Земља не састоји из хомогених слојева то ће стварно дијаграм од O до r бити крива линија (испрекидана на сл).

Ако означимо са h надморску висину онда из односа $g_x : g = r^2 : (r + h)^2$ налазимо занемарећи $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ и $\left(\frac{h}{r}\right)^4$ према јединици приближни образац $g_x = g\left(1-2\frac{h}{r}\right)$. И ова променљивост је тако малена да се у већини техничких задатака може занемарити.

г) Средња густина Земље. Када знамо општу гравитациону константу Γ, можемо наћи величину масе наше Земље. Узећемо да је полупречник Земљине лопте $R \approx 6\ 370$ km, па ће њена запремина бити $V = \frac{4}{3} R^3 \pi$. Масу M Земље добијамо, када ту запремину помножимо са средњом густином (специфичном масом Земље) μ, дакле

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \mu .$$

Ако сад на површини Земље узмемо неко тело, чија је маса m, онда ће узајамна гравитациона сила P између тих двеју маса бити једнака тежини тога тела:

$$Q = mg = \Gamma \frac{Mm}{R^2} = \Gamma \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi \mu m}{R^2}$$

што скраћено са m и R, даје

$$g = \Gamma \frac{4}{3} R \pi \mu.$$

Из те једначине израчунавамо

$$\mu = \frac{3}{4} \frac{g}{R \pi \Gamma} = 5{,}51 \text{ g*cm}^{-3}.$$

Средња (просечна) густина наше Земље је дакле 5,5 пута већа од густине воде. Стене на површини Земље имају специфичну масу око 3,3 g* cm^{-3}. Из тога морамо закључити да се дубље ка средишту Земље у њој налазе знатно гушће материје него на њеној површини.

56. Слободан пад из велике висине. Замислимо материјалну тачку m која из положаја A на великој висини h од Земљине површине (сл. 56.1) слободно пада. Убрзање Земљине теже на њеној површини је $g = 9{,}81$ m sec^{-2}, а убрзање на размаку x од почетног положаја нека је u. Између ових убрзања постоји по Њутновом закону гравитације однос

$$u : g = r^2 : (a - x)^2$$

где је r полупречник Земље, a растојање тачке A од Земљиног центра. Диференцијална једначина кретања гласи:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}. \tag{56.1}$$

Почетно убрзање је $u_0 = g\left(\frac{r}{a}\right)^2$. За $a = 2\,r$ је $u_0 = \frac{g}{4}$.

Ради прве интеграције помножимо диференцијалну једначину са $2\,dx$ и добићемо

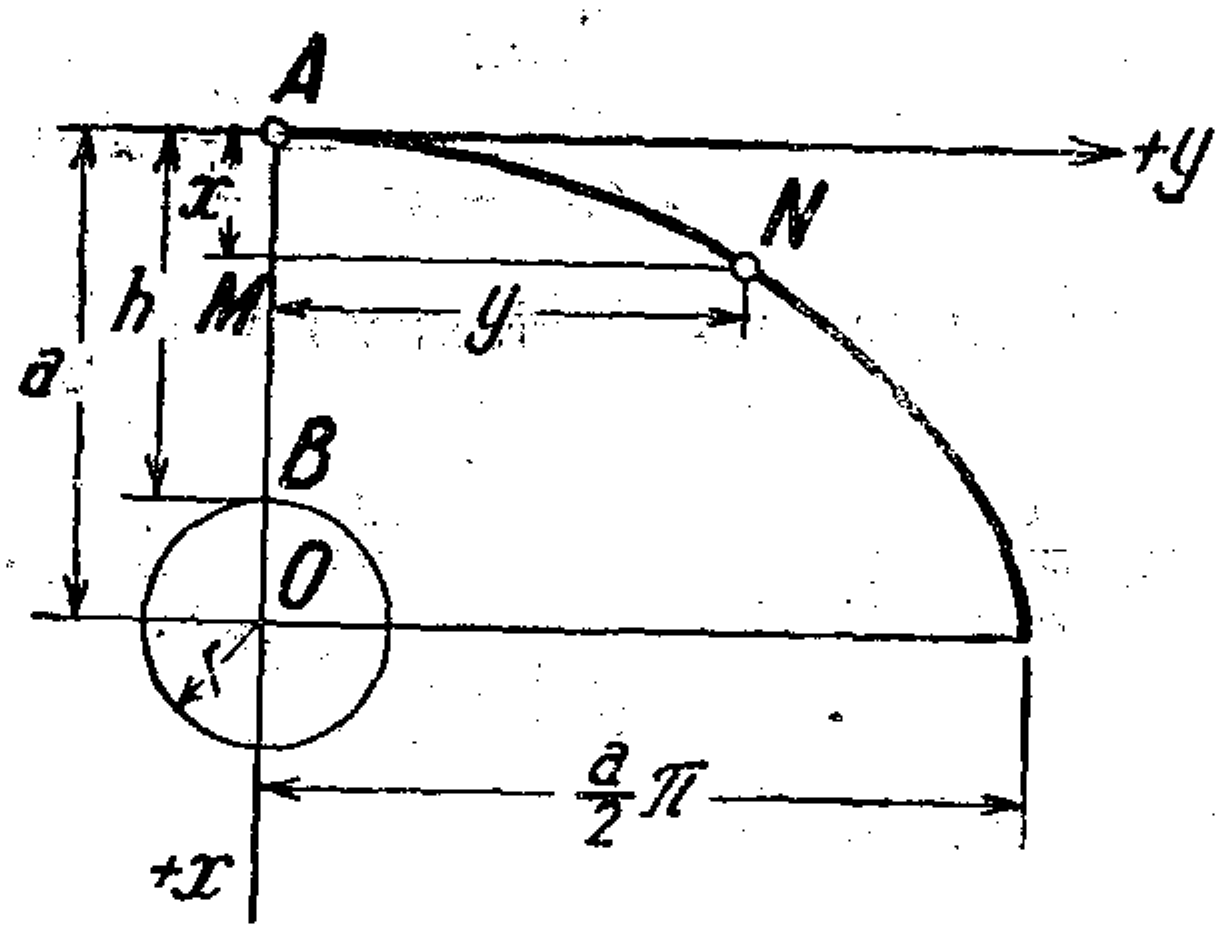
$$2\,\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{2\,gr^2\,dx}{(a-x)^2}$$

а одавде интеграл

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,gr^2\int d\left(\frac{1}{a-x}\right) + C$$

или

$$v^2 = \frac{2\,gr^2}{(a-x)} + C.$$



Слика 56 1

Интеграциону константу одређујемо из почетних услова кретања. За слободан пад је за $x = 0$ и $v = 0$; дакле је

$$C = -\frac{2\,gr^2}{a}$$

и

$$v^2 = \frac{2\,gr^2}{(a-x)} - \frac{2\,gr^2}{a} = \frac{2\,gr^2}{a}\,\frac{x}{a-x}. \tag{56.2}$$

Брзину тачке на Земљиној површини (положај B) добијамо са $x = a - r = h$

$$v_B = \sqrt{2\,gh}\sqrt{\frac{r}{a}}. \tag{56.3}$$

За $a = 2r$ је $v_B = \sqrt{gh} = \sqrt{gr}$.

Пошто је по претпоставци $r < a$, то значи да ће брзина у B бити мања, но што би била када би тело падало од A до B константним убрзањем g, а то је и без рачуна јасно.

Поновним интегралењем једначине (56.2) добићемо закон кретања тачке. Ставићемо $v = \frac{dx}{dt}$ и $\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} = k$, па ће једначина гласити

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

или

$$k\,dt = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{\frac{a}{2}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

На десној страни једначине можемо писати:
први члан

$$\frac{\frac{1}{2}(a-2x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = d\sqrt{ax-x^2}$$

а други члан

$$\frac{\frac{a}{2}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a}{2}\,d\arccos\frac{a-2x}{a}$$

јер кад у други члан ставимо $x = \frac{a}{2} - z$ биће

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-z^2}} = \arccos\frac{2z}{a} = \arccos\frac{a-2x}{a}.$$

Наша једначина сада гласи:

$$k\,dt = d\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\,d\arccos\frac{a-2x}{a},$$

што интеграљено даје, пошто је интеграциона константа $C = 0$:

$$k\,t = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\arccos\frac{a-2x}{a}. \tag{56.4}$$

Ово је тражени закон кретања у инверзном облику $t = \varphi(x)$. Десна страна једначине (56.4) претставља ординату y ортоциклоиде коју описује круг пречника a (сл. 56.1) дакле је

$$k\,t = y \qquad \text{или} \qquad t = \frac{y}{k} = \frac{y}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Време које је тачки m потребно да пређе пут $h = AB$ добијамо сменом $x = h$ и константе k:

$$T = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{r}} + \frac{a}{2r} \arccos\left(1 - \frac{2h}{a}\right) \right];$$

за $a = 2r$, тј. $h = r$ је

$$T = \sqrt{\frac{h}{g}} \left(1 + \arccos 0\right) = \sqrt{\frac{h}{g}} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}57 \sqrt{\frac{h}{g}} \text{ sec};$$

за $g = \text{const.}$ је

$$T' = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}41 \sqrt{\frac{h}{g}} \text{ sec.}$$

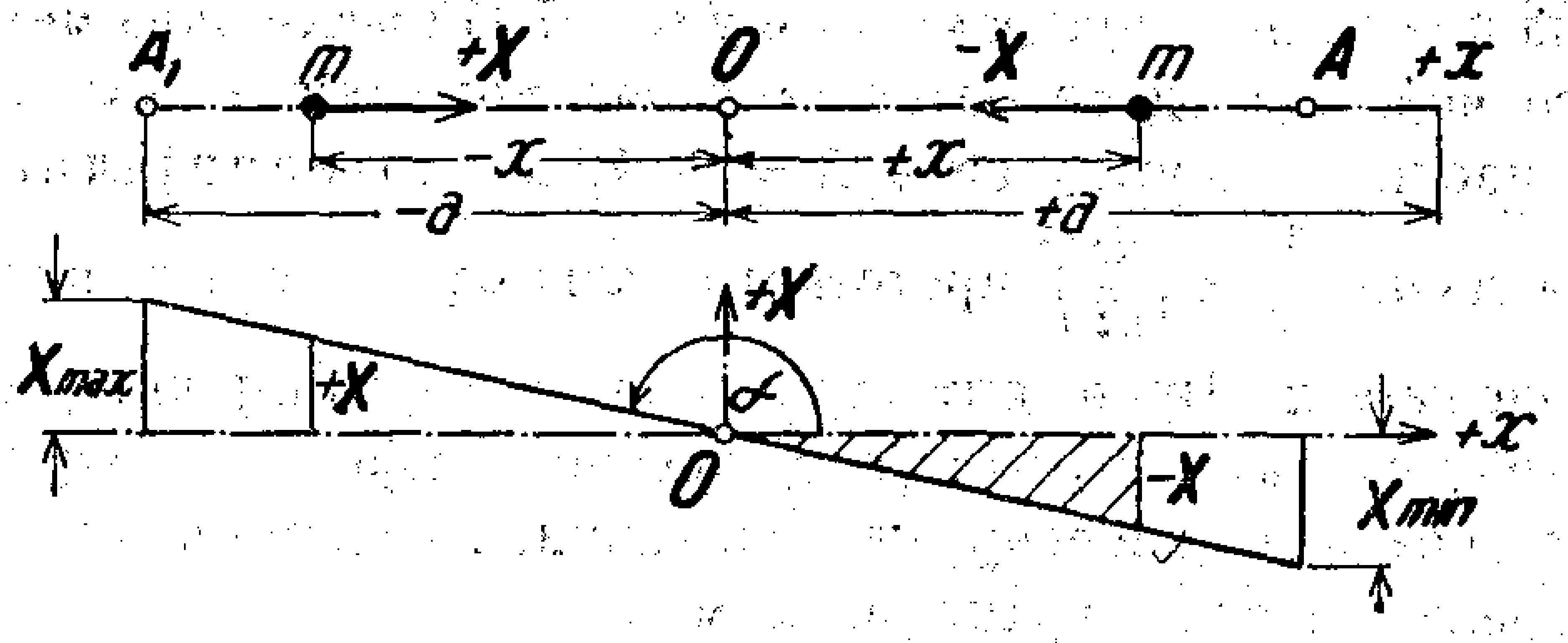
57. Осцилаторно кретање у правој. У Кинематици (чл. 29а) пошли смо од датог закона кретања тачке $x = a \sin kt$ у правој и назвали смо то кретање хармоничном осцилацијом. Диференцијалећи ову једначину два пута добили смо убрзање

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x,$$

где је k кружна фреквенција осцилације. Множећи ову кинематичку релацију са масом m материјалне тачке добијамо динамичку једначину хармоничне осцилације

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = -m k^2 x.$$

Пошто су m и k^2 увек позитивне константе, то ова једначина каже: *Материјална тачка вршиће хармоничну осцилацију када на њу*



Сл. 57.1

дејствује сила пропорционална пређеном путу а смера управљена према центру O силе. (сл. 57.1).

Овде у Динамици решаваћемо обрнути задатак тј. претпоставићемо да нам је дата сила, пропорционална пређеном путу, по обрасцу

$$X = -k_1^2 x$$

$\left(\text{где је } k_1^2 = m k^2, \quad \text{тј. } k = \frac{k_1}{\sqrt{m}}\right)$, а тражићемо закон кретања.

Диференцијална једначина гласи:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1{}^2x. \tag{57.1}$$

Да бисмо извели прву интеграцију ове диференцијалне једначине, помножићемо је интегралећим фактором $\frac{dx}{dt}$ и свешћемо је на нулу:

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + k_1{}^2x\frac{dx}{dt} = 0$$

а то је, написано у другом облику

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k^2{}_1x^2\right] = 0.$$

Израз у великој загради, чији је извод по времену једнак нули, независан је од времена, дакле је

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k_1{}^2x^2 = E = \text{const.} \tag{57.2}$$

Интеграл силе $-X$ по путу

$$\int_0^x (-X)\,dx = \int_0^x k_1{}^2x\,dx = \frac{1}{2}k_1{}^2x^2$$

(шрафирана површина дијаграма силе у сл. 57.1) претставља механички рад који се мора извршити да се тачка из положаја $x = 0$ доведе у положај x насупрот дејству силе $X = -k_1{}^2x$ (потенцијална енергија V), а израз $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ претставља кинетичку енергију (L) тачке у положају x. Први интеграл дате диференцијалне једначине је дакле механичка енергија E кретања, која је у току времена константна. Оба дела енергије су позитивни, ниједан од њих не може нарасти преко извесне границе, а минимална вредност свакога од њих је нула, и то тако, да је први члан збира једнак нули за $\frac{dx}{dt} = v = 0$ када је други максимум и обрнуто. Већ из овога првог интеграла видимо, да је кретање периодично. За $v = \frac{dx}{dt} = 0$ има x највећу вредност, коју ћемо обележити са a, па ће константна механичка енергија материјалне тачке за $x = a$ бити

$$\frac{1}{2}k_1{}^2a^2 = E. \tag{57.3}$$

Елиминацијом константе E из обих једначина добијамо

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}k_1^2(a^2-x^2)$$

и даље

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pm\frac{k_1}{\sqrt{m}}.$$

Ради интеграљења довешћемо ову једначину на облик

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mp\frac{k_1}{\sqrt{m}}=0$$

што значи

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}\mp\frac{k_1}{\sqrt{m}}t\right)=0.$$

Израз у загради је дакле независан од времена и ако га обележимо са ε имаћемо

$$\varepsilon=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}\mp\frac{k_1}{\sqrt{m}}t,$$

или

$$x=a\sin\left(\varepsilon\pm\frac{k_1}{\sqrt{m}}t\right) \tag{57.4}$$

а то је потпуни интеграл диференцијалне једначине (57.1), те нам дакле он претставља тражени закон кретања за хармоничну осцилацију. Узмемо ли у обзир да је према ранијем $k=\frac{k_1}{\sqrt{m}}$, ова једначина се може написати и у облику

$$x=a\sin(\varepsilon\pm kt). \tag{57.4a}$$

У овој се једначини ε назива фазном константом. Исте вредности за x добијамо када аргумент синуса порасте за $2n\pi$ где је n цео број. Најмањи интервал времена протећиће између два једнака стања кретања за $n=1$.

Из

$$\sin(\varepsilon\pm kt)=\sin(\varepsilon\pm kt+2\pi)=\sin\left[\varepsilon\pm k\left(t+\frac{2\pi}{k}\right)\right]$$

излази за периоду T осцилације, тј. за време за које ће тачка начинити пут од A до A_1 и натраг до A, вредност:

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\frac{\sqrt{m}}{k_1}.$$

Ово је најважнија особина хармоничне осцилације, да је *периода независна од амплитуде*, те кажемо да је оваква осцилација изохрона[1]).

Када у горњу једначину уведемо $k = \frac{k_1}{\sqrt{m}} = \frac{2\pi}{T}$, добијамо други облик једначине (57.4):

$$x = a \sin\left(\varepsilon \pm 2\pi \frac{t}{T}\right). \tag{57.5}$$

Добијени закон кретања $x = f(t)$ можемо писати разлагањем sinusa и у облику

$$x = a \sin\varepsilon \cos kt \pm a \cos\varepsilon \sin kt$$

или, пошто уведемо нове неодређене константе

$$A = a \cos\varepsilon \quad \text{и} \quad B = a \sin\varepsilon$$

дакле

$$a = \sqrt{A^2 + B^2},$$

и претпоставимо да је двогуби знак $\pm$ обухваћен константом A,

$$x = A \sin kt + B \cos kt \tag{57.6}$$

а то је општи интеграл дате диференцијалне једначине (57.1)

Диференцијалењем ове последње једначине добијамо за брзину хармоничне осцилације у најопштијем случају израз:

$$v = \frac{dx}{dt} = Ak \cos kt - Bk \sin kt. \tag{57.7}$$

Константе A и B одређујемо из почетних услова кретања. Ако узмемо да је за $t = 0$, $v = v_0$ и $x = x_0$, онда излази из последње две једначине

$$v_0 = A\,k \quad \text{и} \quad x_0 = B.$$

Дакле је закон кретања у одређеном облику

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt, \tag{57.6a}$$

где су v_0 и x_0 почетна брзина и почетни пређени пут. Ако је најзад $x_0 = 0$, (тачка полази из привлачног центра са $v_{max} = v_0 =$ интензитет осцилације), и $a = \frac{v_0}{k}$, онда добијамо ранију просту једначину хармоничне осцилације

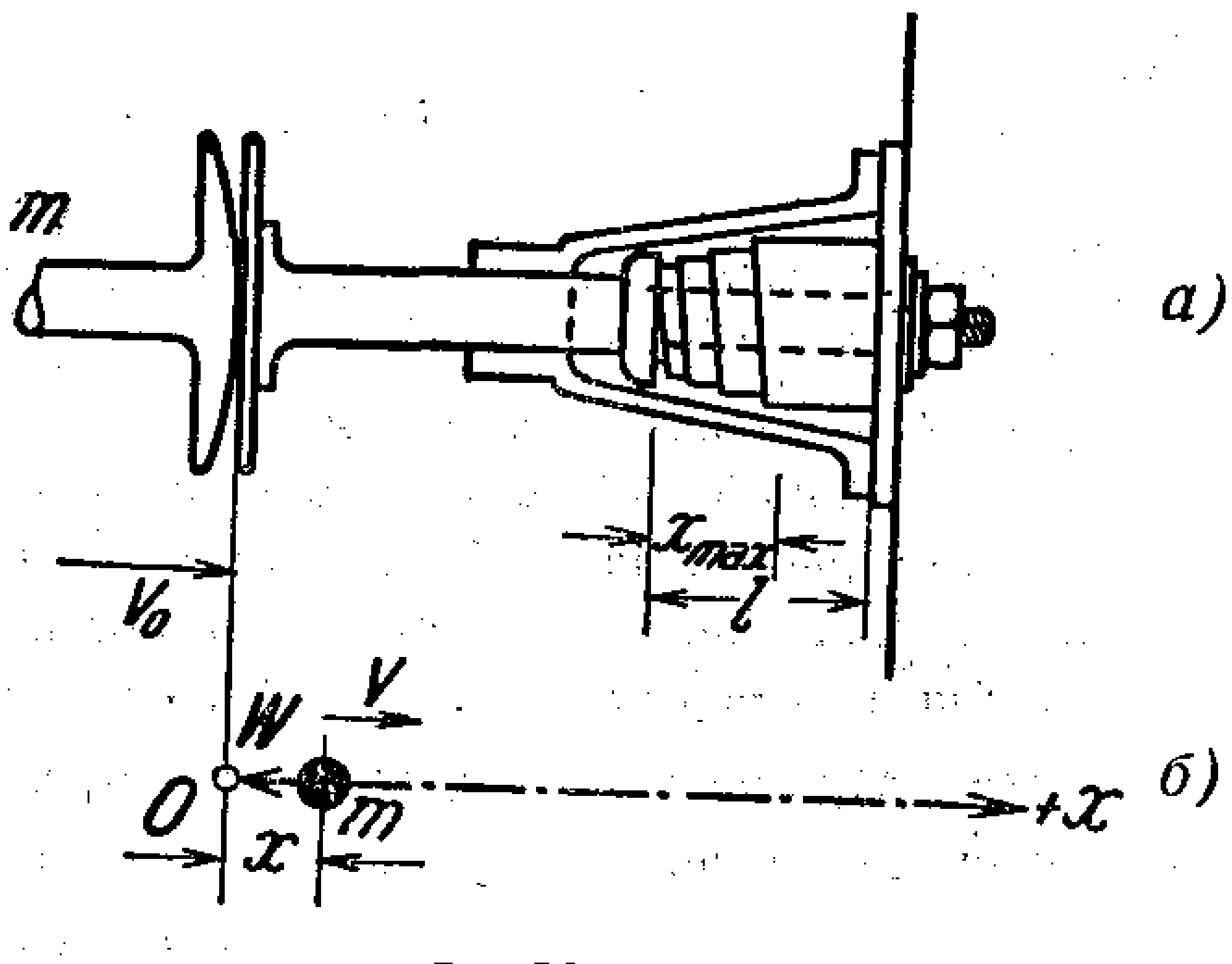
$$x = a \sin kt.$$

58. Примери хармоничне осцилације. Пример. Код одбојника који служи за заустављање вагона на слепом колосеку у жељезничким станицама (сл. 58.1)

[1]) Грчки: ἴσος = једнак, χρόνος = време.

имамо једну еластичну завојну опругу која се при удару вагона у одбојник скраћује. При томе се развија у опрузи еластична сила (отпор) W, која је по Хуковом закону (Robert Hooke, 1635—1703) пропорционална скраћењу опруге x а обрнуто пропорционална њеној првобитној дужини l, дакле

$$W = c\,\frac{x}{l},$$



Сл. 58.1

где је c извесна константа опруге, коју одређује Наука о чврстоћи. Ради једноставности претпостављамо да је одбојник кола крут.

Када вагон чија је маса m дође почетном брзином v_0 у тренутку $t = 0$ у додир са одбојником, онда истовремено почиње и отпор W одбојника да успорава кретање вагона m. Слободни крај одбојника у непритиснутом стању узећемо за почетак O, а правац кретања вагона при доласку за $+x$ правац (сл. 58.1б). Убрзавајућа сила вагона (који сматрамо материјалном тачком) биће

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -W = -c\,\frac{x}{l}$$

или, када ставимо $c/l = mk^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x.$$

Закон пута вагона под утицајем еластичног отпора W одбојника одређен је дакле општим интегралом ове једначине,

$$x = A\sin kt + B\cos kt,$$

а брзина једначином

$$v = \frac{dx}{dt} = A\,k\cos kt - B\,k\sin kt.$$

Са усвојеним почетним условима $t = 0$, $x = 0$ и $v = v_0$ добијамо из прве једначине $B = 0$, а из друге $A = v_0/k$. Једначине пута и брзине гласе дакле у одређеном облику за кретање вагона под дејством одбојника

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt \quad \text{и} \quad v = v_0\cos kt;$$

тј. једначина (57.6а).

Из њих видимо, да је почетна брзина v_0 у исто време и максимална брзина, затим да је $v = 0$ у тренутку t_1 за које важи $\cos k\,t_1 = 0$, дакле $t_1 = \pi/2k$. У том тренутку t_1 пут је достигао највећу вредност

$$x_{max} = A = \frac{v_0}{k}.$$

За $t > \pi/2k$ постаје v негативно, вагон се враћа натраг. У тренутку $t_2 = 2\,t_1 = \pi/k$ одбојник се повратио у свој нестиснути облик, јер је тада поново $x = 0$. У том тренутку t_2 хармонична осцилација је завршена, јер одбојник чија се опруга не може истезати преко дужине l, губи додир са вагоном. У истом том тренутку брзина вагона је $v = -v_0$. Хармонична осцилација траје дакле од $t = 0$ до $t = \pi/k$ тј. само за половину периоде.

Пошто је максимално скраћење завојне опруге $x_{max} = v_0/k$, то значи да његова најмања дужина у тренутку $t_1 = \pi/2k$ износи

$$l - \frac{v_0}{k} \quad \text{или} \quad \left(l - v_0\sqrt{\frac{lm}{c}}\right).$$

Из овога израза може се наћи потребна дужина завојне опруге, кад су дате константе v_0, m и c.

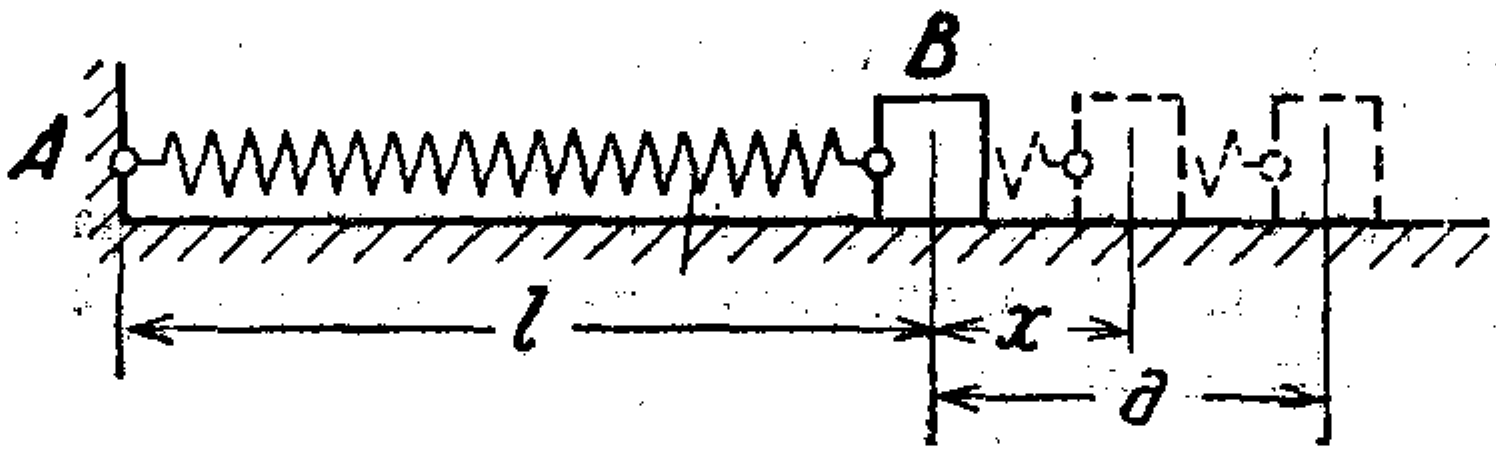
2. Пример. Замислимо да је дуж једног Земљиног пречника $AOB = 2r$ пробушено окно у које спустимо једно тело да слободно пада. Пита се колико времена ће тело требати да пређе пут од A до B? Из чл. 55в знамо да је у унутрашњости Земље под претпоставком хомогености њене масе убрзање тачке у растојању x од средишта $g_x = gx/r$. Са $g/r = k^2$ гласи једначина кретања $d^2x/dt^2 = -k^2x$. Тачка врши̂ће у окну хармоничну осцилацију са амплитудом r и периодом $2\pi/k = 2\pi\sqrt{r/g}$. Тачка ће прећи цео пречник за време $\pi\sqrt{r/g} = \pi\sqrt{6\,370\,000/9{,}81} = 2\,532$ sec $= 42{,}2$ min.

Максимална брзина је $v_{max} = r\,k = \sqrt{g\,r} = 7\cdot905$ m sec^{-1}.

Знамо да је хармонична осцилација пројекција једноликог кружног кретања брзином v_{max}. Када бисмо дакле на крају A окна испалили из топа гранату у хоризонталном правцу брзином од 7·905 m/sec и у истом тренутку пустили у окно неко тело, оба тела стигла би за исто време на други крај B окна. Центрипетално убрзање гранате је $v^2_{max}/r = gr/r = g$, она ће лебдети и кружити око Земље као њен Месец са годином од једног часа и 24,4 минута.

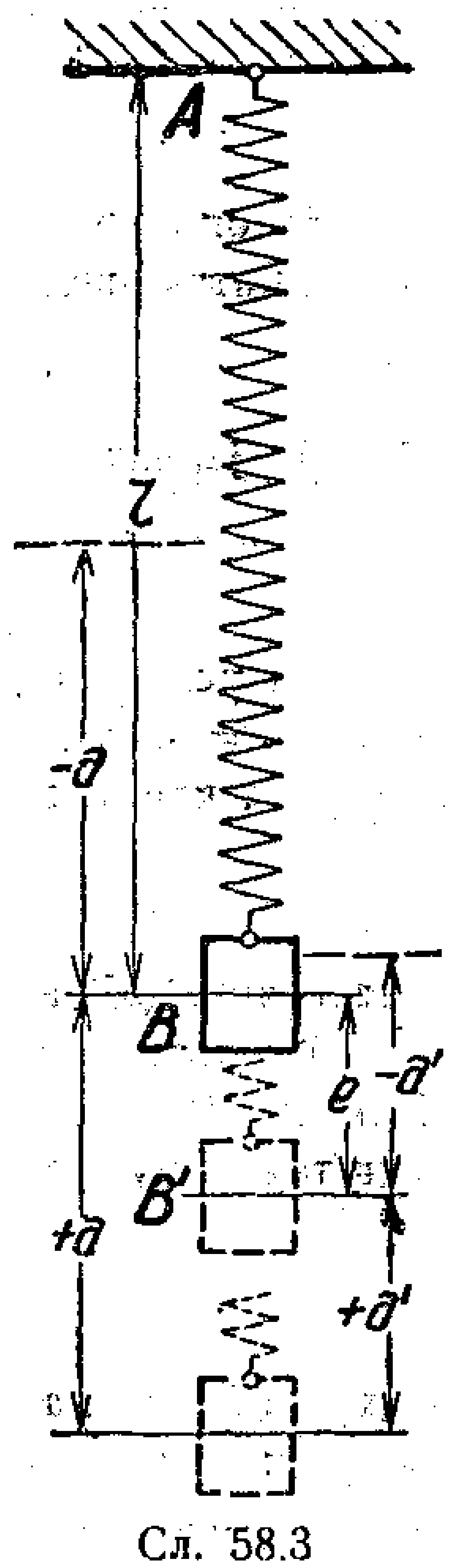
3. Пример. Опруга дужине l у неоптерећеном стању везана је крајем A непомично, а крајем B за материјалну тачку масе m. Ова се може кретати по глаткој хоризонталној равни (сл. 58.2). Да масу m померимо из B за дужину x морамо употребити силу $X = cx/l$ где c зависи од материјала и пресека опруге (константа опруге). Сили X је једнака и супротна еластична сила опруге; када тачку пустимо она ће добити убрзање $d^2x/dt^2 = -cx/lm$. Тачка m ће вршити хармоничну осцилацију са кружном фреквенцијом $k = \sqrt{c/lm}$ око центра B са амплитудом a ако је $l + a$ максимална дужина развучене опруге. Масу опруге не узимамо у обзир.

Када исту опругу са масом m на крају B обесимо о тачку A (сл.58.3), опруга ће се растегнути за дужину $BB' = e$ услед тежине



Сл. 58.2

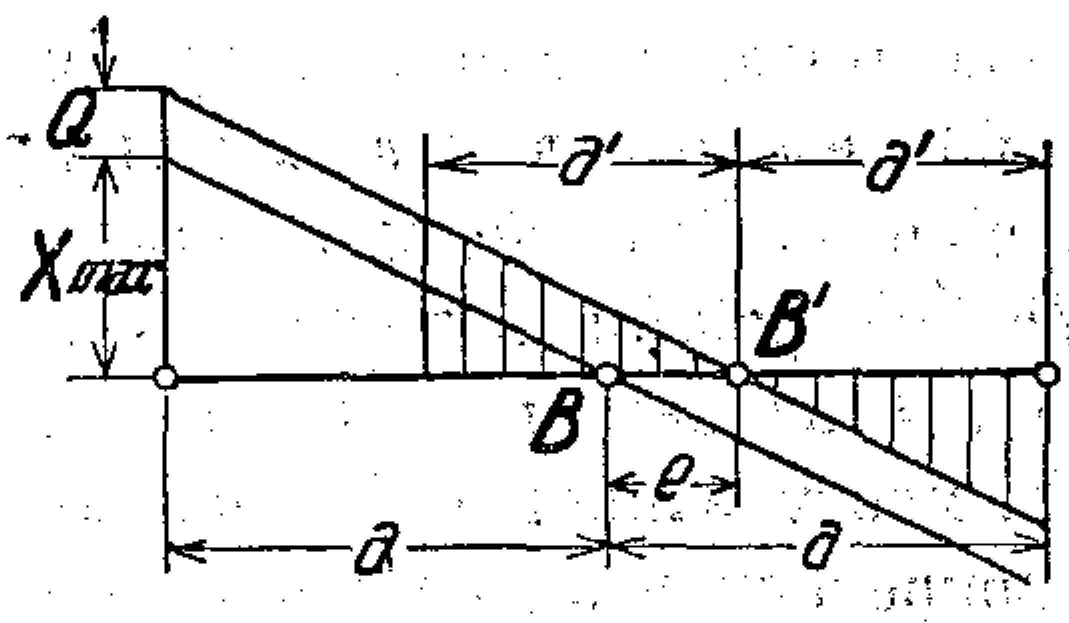
$Q = mg$ обешене масе. Продужење e биће толико да еластична сила опруге $X = c\,e/l$ буде једнака тежини Q. Из тог услова налазимо $e = mgl/c$. Центар осцилације биће сада тачка B' у растојању $l + e$ од горњег краја A. Са $mg = ce/l$ гласи динамичка једначина: $m\,d^2x/dt^2 = mg - cx/l = c(e - x)/l = -cx'/l$ где x'



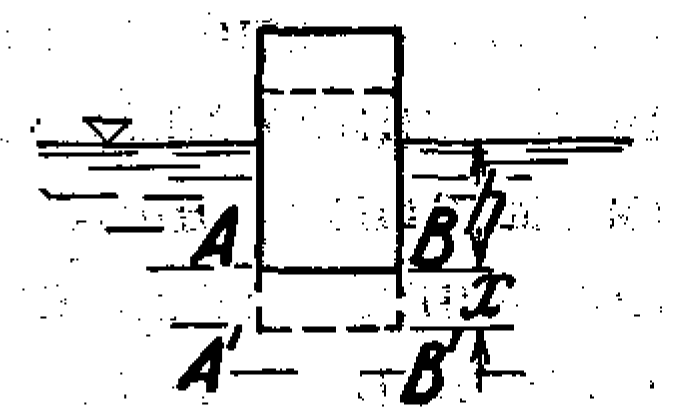
Сл. 58.3

значи апсцису рачунату од центра B'. Ако је максимално издужење опруге a исто као у хоризонталном положају, биће амплитуда $a' = a - e$ а кружна фреквенција остаје иста $k = \sqrt{c/lm}$. Дијаграм силе и пута (сл. 58.4) приказује однос обих осцилација за исто издужење опруге на $l + a$.

4. Пример. Призматично тело загњурено је у вертикалном положају у воду (сл. 58.5). Основа призме има површину F_1, њена тежина $Q = mg$. По Архимедовом ставу биће призма у равнотежи ако је истиснута вода једнака тежини тела, $\gamma F h = Q$ где је γ специфична тежина воде, h дубина гажења.



Сл. 58.4



Сл. 58.5

Ако притиснемо призму тако да се загњури за $h + x$ дејствоваће на призму сила потиска $-\gamma F x$, једначина кретања је $d^2x/dt^2 = -F\gamma x/m$, дакле хармонична осцилација са кружном фреквенцијом $k = \sqrt{g/h}$. Дубина h одговара дужини e у пређашњем примеру.

59. Слободно и ограничено кретање тачке. Положај тачке A одређен је у правоуглаоном координатном систему $Oxyz$ својим координатама. Ако се свака координата може мењати независно од двеју других, зовемо тачку слободном. Дати закони $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ и $z = f_3(t)$ одређују њену путању, а други интеграли одредиће силе које тачку нападају. Ако координате морају у сваком тренутку задовољавати једначину $F(x, y, z) = 0$, могу се само две координате произвољно мењати, трећа је тим променама одређена. За такву тачку кажемо да има два степена слободе. Ако координате тачке A морају задовољавати две једначине $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, онда су прираштајем једне координате Δx прираштаји Δy и Δz одређени, тачка има један степен слободе. Ово у техници важно кретање зове се принудно кретање. Функција $F(x, y, z) = 0$ претставља непомичну површину коју морамо замислити крутом материјалном површином. Тачка везана за површину има дакле два степена слободе. Две површине $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ одређују својим пресеком уопште криву линију. Тачка везана за линију има један степен слободе. При ограниченом кретању тачке задатак је Динамике да из датих нападних сила и услова веза $F = 0$ односно $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ нађе закон кретања и закон $W = f(t)$ по коме зависи сила W којом материјална површина (линија) дејствује на покретну тачку A. Сила W зове се отпор површине (линије), о њему ће бити доцније говора.

60. Кретање слободне тачке у отпорној средини. Када се чврсто тело креће кроз ваздух или кроз воду, оно наилази на отпор који се зове отпор околног медијума или средине. Овај се отпор јавља и онда, када је тело у миру а медијум се према телу креће.

Отпор средине настаје услед тога што се медијум испред покретног тела мора истиснути да би оно прошло, а за то је потребно утрошити извесну енергију. Када бисмо били у стању на основи опажања и теоријског расматрања изразити отпор, на који наилази произвољни елемент површине покретног тела, могли бисмо интегралењем наћи величину и положај резултанте свих елементарних отпора. То је међутим готово немогућно, јер покретно тело доводи околни медијум у завојна и осцилаторна кретања, стварајући вртлоге и празнине, те на неким местима наступају већи а на неким мањи, па чак и негативни притисци. Отпор на сваком месту зависи од стања медијума, а ово опет од облика и величине покретног тела, а понекад и од утицаја других тела у близини. Према свему томе теоријско проучавање отпора средине претставља врло тежак проблем Хидромеханике (или Аеромеханике), који досад није успешно решен.

Стога се задовољавамо, да путем експеримената нађемо тотални отпор, на који извесно тело наилази у своме кретању кроз дати медијум и да тај отпор обрасцем изразимо.

Њутнови закони за отпор средине. Први је експерименте у овоме правцу вршио Њутн и нашао два основна закона за отпор средине, од којих један важи за врло мале а други за врло велике брзине покретног тела.

Када је брзина тела врло мала (до 1 m sec^{-1}), онда се у стварању отпора средине јасно осећа утицај унутрашњег трења (вискозности) течне или гасне средине и за тај случај потврђују огледи да је отпор средине пропорционалан првом степену брзине, а сем тога и извесној линеарној димензији покретног тела по обрасцу:

$$W = c\,l\,v, \tag{60.1}$$

где је c константа (у техничком систему мера kg sec/m^2), која означава отпор што га трпи при брзини $v = 1$ m/sec геометријски слично тело које има $l = 1$ m.

За веће брзине (али које не превазилазе брзину звука од 330 m/sec експерименти су показали, да отпор средине зависи од густине медијума μ, затим од површине највећег пресека F покретног тела, мерене у правцу управном на правац кретања, и да је тај отпор пропорционалан квадрату брзине v[1] којом се тело креће кроз медијум. Њутнов образац за овај случај гласи:

$$W = \psi\,\mu\,F\,v^2 \tag{61.1a}$$

[1]) За брзине преко 300 m sec^{-1} до 450 m sec^{-1} расте отпор ваздуха врло нагло, а преко 450 m sec^{-1} важи опет квадратични закон, али са већим коефицијентом него за брзине од (1 — 300) m sec^{-1}.

где је ψ константа (димензије 1), која се одређује експериментално. Ако ставимо $\psi = c/2$, добиће ова једначина облик:

$$W = cF\left(\frac{\mu v^2}{2}\right) \tag{60.1б}$$

и у њој се фактор $q = \frac{\mu v^2}{2}$ назива **притиском успора**, (димензије kg/m²). Са том ознаком имамо:

$$W = cFq. \tag{60.1в}$$

Но чешће се употребљава образац, у коме се уместо густине μ медијума појављује његова специфична тежина $\gamma = \mu g$ која износи:

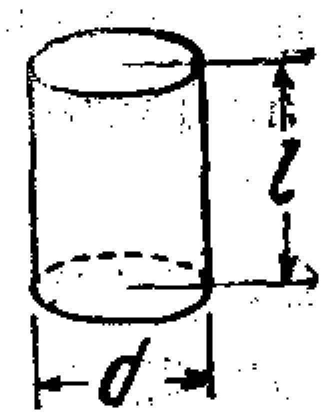
за ваздух $\gamma = 1{,}2 - 1{,}3$ kg/m³ $(\mu = 0{,}122 - 0{,}132$ kg*/m³)
за воду $\gamma = 1\,000$ kg/m³.

Са том заменом једначина добија уобичајени облик:

$$W = c\gamma F\left(\frac{v^2}{2g}\right), \tag{60.1г}$$

где је $v^2/2g$ позната висина пењања, а c неименовани број (димензије 1).

На величину отпора средине има утицаја још и облик покретног тела, па пошто тај утицај може бити одређен само експерименталним путем помоћу модела то је утицај облика у горњој једначини изражен константом c. Примера ради навешћемо да су при кретању кроз ваздух нађене константе c:

	$a/b = 1$	$c = 1{,}10$
За правоугаону плочу са странама	„ $= 2$	$c = 1{,}15$
a и b	„ $= 4$	$c = 1{,}19$
	„ $= 10$	$c = 1{,}29$
→ За равну кружну плочу		$c = 1{,}11$
	$l/d = 1$	$c = 0{,}63$
За кружни цилиндар → 	„ $= 2$	$c = 0{,}68$
	„ $= 5$	$c = 0{,}74$
	„ $= 10$	$c = 0{,}82$

→  За шупљу полулопту без дна са конвексне стране $c = 0{,}34$

→  „ „ „ „ „ са конкавне стране $c = 1{,}33$

→  „ конус са дном, угао на врху 60° $c = 0{,}51$

→  „ „ „ „ „ „ „ 30° $c = 0{,}34$

При решавању практичних задатака увек ће у обрасцу (60.1г) за сваки конкретни случај бити величине c, γ, F, одређене (дате). Како је и g константно, то се са

$$c_1 = \frac{c\,\gamma\,F}{2g}$$

отпор средине може у најкраћем облику изразити једначином

$$W = c_1 v^2. \tag{61.1д}$$

61. Примери кретања у отпорној средини. 1. Пример. Амортизовано кретање. У случају да је отпор средине једина сила, која на материјалну тачку делује при њеном кретању почетном брзином v_0, и ако је тај отпор пропорционалан брзини, гласиће диференцијална једначина кретања:

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v.$$

Ову смо једначину већ у Кинематици (чл. 28в) интегралили и нашли закон кретања

$$x = \frac{v_0}{\lambda}(1 - e^{\lambda t}).$$

2. Пример. Слободан пад у ваздуху. Тачку напада сила $X = mg - W$, управљена на ниже. Сменом

$$W = \psi \mu F v^2,$$

гласи диференцијална једначина кретања:

$$\frac{dv}{dt} = g - \psi\,\mu\,\frac{F}{m}\,v^2. \tag{61.1}$$

На десној страни ове једначине имамо само две константне величине: масу m и површину попречног профила F. Убрзање Земљине теже g и густина ваздуха μ опадају са висином, а тако исто и фактор ψ није сталан већ зависи од многих утицаја. Али, ради упрошћавања задатка, ми ћемо претпоставити да су сем брзине v све количине на десној страни горње једначине константне. Из једначине следује да убрзање опада када брзина расте. Наступиће најзад један тренутак када ће убрзање бити једнако нули, а то ће бити онда, када се отпор ваздуха W изједначи са тежином Q. Од тог тренутка тачка ће се даље кретати константном брзином, па се ни отпор ваздуха неће више повећавати. Разлика између слободног пада у безваздушном простору и слободног пада кроз ваздух је дакле у томе, што се код првога брзина $v = gt$ са временом повећава до бесконачности, а код другога само до извесне коначне максималне вредности.

Ако брзину, коју покретна тачка има у тренутку изједначења сила W и Q, означимо са $v_{max} = k$, добијамо из једначине (61.1) прво:

$$mg = \psi \mu F k^2$$

а одавде

$$k = \sqrt{\frac{mg}{\psi \mu F}}. \tag{61.2}$$

Уведемо ли ову константу k у диференцијалну једначину кретања стављајући у њој

$$\psi \mu F = \frac{mg}{k^2}$$

добијамо је у облику

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$$

или за интегралење подесније:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2). \tag{61.1a}$$

После раздвајања промењивих биће

$$dt = \frac{k^2}{g} \frac{dv}{(k-v)(k+v)}$$

затим, разлажући разломак у парцијалне разломке:

$$\frac{1}{(k-v)(k+v)} = \frac{1}{2k(k-v)} + \frac{1}{2k(k+v)}$$

добијамо

$$dt = \frac{k}{2g}\left[\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right].$$

Ако још уведемо нову константу

$$\alpha = \frac{g}{k} = \sqrt{\frac{g\psi\mu F}{m}} \tag{61.3}$$

чија је димензија[1] $\sec^{-1}$ и извршимо интегралење биће:

$$\int dt = \frac{1}{2\alpha}\int\left[\frac{d(k+v)}{k+v} - \frac{d(k-v)}{k-v}\right];$$

$$t = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{k+v}{k-v} + C_1.$$

Ова једначина важи и за слободан пад и за хитац наниже. Интеграциону константу C_1 одређујемо из почетних услова кретања, стављајући за слободан пад за $t=0$, $v=0$. Добијамо:

[1]) $T = 1/\alpha$ је као што ћемо доцније видети, време падању у празном простору док тачка добије брзину k.

$$0 = \frac{1}{2\alpha} \ln 1 + C_1.$$

Дакле $C_1 = 0$. Према томе једначина за t гласи:

$$t = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{k+v}{k-v}. \tag{61.4}$$

Из ње добијамо образац за рачунање брзине при слободном паду, пошто је решимо по v стављајући прво

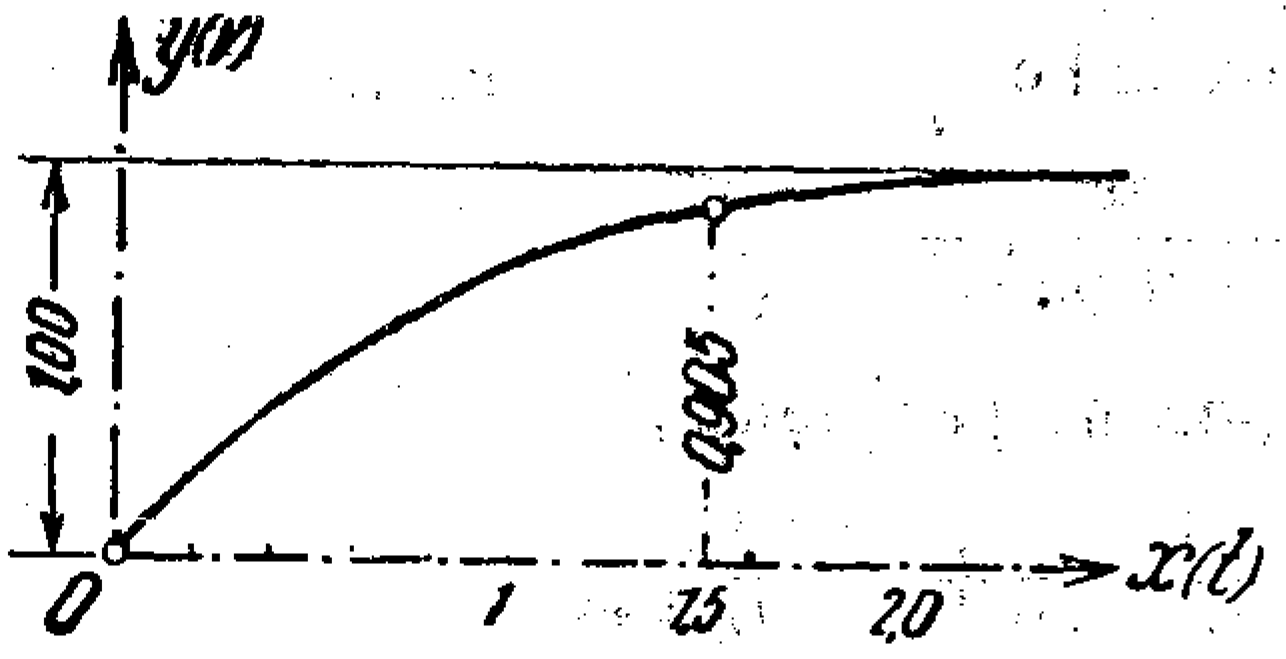
$$e^{2\alpha t} = \frac{k+v}{k-v},$$

а одавде

$$v = k\,\frac{e^{2\alpha t}-1}{e^{2\alpha t}+1} = k\,\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} = k \operatorname{tg\,hyp} \alpha t. \tag{61.5}$$

Закон промене брзине са временом $v = f(t)$ изражен је дакле хиперболичном функцијом времена t. Функција $y = \operatorname{tg\,hyp} x$ приказана је графички на сл. 61.1. То је крива линија OP која полази из координатног почетка и има асимптоте $y = \pm 1$ којима се врло брзо приближује. Тако је:

$\operatorname{tg\,hyp} 1{,}50 = 0{,}905,$
$\operatorname{tg\,hyp} 3{,}00 = 0{,}995,$
$\operatorname{tg\,hyp} 6{,}00 = 1 - 10^{-5}.$



Сл. 61.1

Тело које слободно пада кроз ваздух достићи ће своју максималну брзину $v_{max} = k$ теоријски тек за $\alpha t = \infty$, али практично већ за неколико секунада и то тим брже што је веће α. А према дефиницији константа α је у толико већа у колико је већи производ μF и у колико је мања маса тела.

Закон кретања $x = f(t)$ за слободан пад кроз ваздух добићемо поновним интегралењем једначине (61.5), стављајући у њу $v = \frac{dx}{dt}$, дакле

$$\int dx = k \int \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}\,dt = \frac{k}{\alpha} \int \frac{d\,(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}.$$

Ако k/α заменимо са k^2/g и интегралимо наћи ћемо:

$$x = \frac{k^2}{g} \ln (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) + C_2.$$

Из почетних услова кретања: $t = 0$, $x = 0$, следи:

$$0 = \frac{k^2}{g} \ln 2 + C_2 \quad \text{или} \quad C_2 = -\frac{k^2}{g} \ln 2,$$

па према томе биће тражени закон кретања:

$$x = \frac{k^2}{g} \ln \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} = \frac{k^2}{g} \ln \cos \operatorname{hyp} \alpha t. \tag{61.6}$$

Најзад, релацију између брзине и пређеног пута $x = f(v)$ можемо наћи применом теореме о кинетичкој енергије $dL = P\,dx$ где је $P = mg - W$.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mg\,dx - W dx = mg\,dx\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

јер је према ранијем $W = \frac{v^2}{k^2} mg$. Биће дакле:

$$v\,dv = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2)\,dx$$

а одавде:

$$dx = \frac{k^2}{g} \frac{v\,dv}{k^2 - v^2} = -\frac{k^2}{2g} \frac{d(k^2 - v^2)}{k^2 - v^2}.$$

Интегралећи ову једначину добијамо:

$$x = -\frac{k^2}{2g} \ln(k^2 - v^2) + C_3.$$

За $v = 0$ је $x = 0$, дакле: $C_3 = \frac{k^2}{2g} \ln k^2$, те излази коначно:

$$x = \frac{k^2}{2g}\left[\ln k^2 - \ln(k^2 - v^2)\right] = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2}{k^2 - v^2}. \tag{61.7}$$

Кад у ту једначину ставимо $v = k$, излази $x = \infty$, што је теоријски у складу са $t = \infty$. У ствари, као што смо видели, бар приближно може постати $v = k$ и док тачка није прешла бесконачно дуг пут.

Према свему томе слободан пад у ваздуху одређују четири једначине: (61.6), (61.5), (61.1a) и (61.7) које ћемо упоредити са једначинама слободног пада у безваздушном простору помоћу таблице:

Закон	Слободан пад кроз ваздух	Слободан пад у безваздушном простору
$x = f_1(t)$	$x = \frac{k^2}{g} \ln \cos \operatorname{hyp} \alpha t$	$x = \frac{gt^2}{2}$
$v = f_2(t)$	$v = \frac{dx}{dt} \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \alpha t$	$v = gt$
$u = f_3(t)$	$u = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2)$	$u = g = \text{const.}$
$x = f_4(v)$	$x = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2}{k^2 - v^2}$	$x = \frac{v^2}{2g}$

Дијаграм брзине и времена $v = k\,\mathrm{tg\,hyp}\,\alpha t$ сличан је дијаграму $y = \mathrm{tg\,hyp}\,x$ (сл. 61.1) и приказан је позитивном граном криве.

Дијаграм пута и времена сличан је позитивној грани линије $y = \ln\cos\mathrm{hyp}\,x$ од $t = 0$ до тренутка када брзина постигне своју највећу вредност k. Од тога тренутка тачка се креће константном брзином k. Дијаграм је од тада права линија нагиба $\mathrm{arc\,tg}\,k$. Једначину асимптоте наћићемо из нађеног обрасца

$$x = \frac{k^2}{g}\ln\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}$$

када за $t \to \infty$ занемаримо $e^{-\alpha t}$; добићемо

$$x = \frac{k^2}{g}\left(\ln\frac{1}{2} + \ln e^{\alpha t}\right),$$

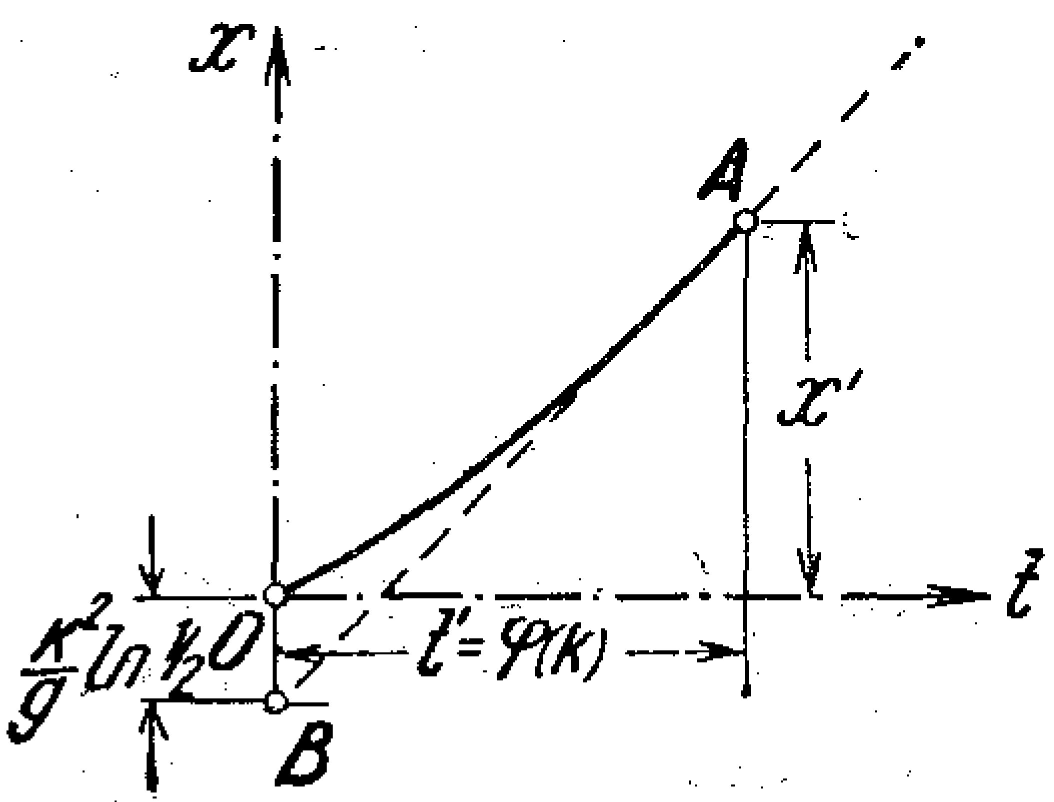
а пошто је $\ln e^{\alpha t} = \alpha t$,

$$x = \frac{k^2}{g}\ln\frac{1}{2} + \frac{k^2}{g}\alpha t,$$

и најзад за $\alpha = g/k$ налазимо једначину праве

$$x = \frac{k^2}{g}\ln\frac{1}{2} + kt;$$

$\ln(1/2) = -0{,}693$. Отсечак $\overline{OB}$ праве на осовини x (сл. 61.2) је негативан јер је $\ln(1/2)$ негативна вредност. Занемарење величине $e^{-\alpha t}$ чини да права AB није више асимптота криве OA, него је додирује у тачки A којој је апсциса $t' = \varphi(k)$.



Сл. 61.2

Закон пада кроз ваздух применићемо на два бројна примера са знатно различитим граничним брзинама.

а) Падање гвоздене коцке. Гвоздена коцка чија је ивица $a = 10$ cm има запремину $1 = \mathrm{dm}^3$, па пошто је специфична тежина гвожђа $\gamma = 7{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}$ то је тежина ове коцке $Q = mg = 7{,}85$ kg. Да бисмо могли применити образац $W = \psi\mu F v^2$ за отпор ваздуха, узећемо из таблице на стр. 107 коефицијент за квадратичну плочу $c = 1{,}10$, дакле $\psi = c/2 = 0{,}55$.

Просечна густина ваздуха је $\mu = 0{,}127\ \mathrm{kg^*/m^3}$, површина пресека тела нормално на правац кретања: $F = 0{,}01\ \mathrm{m^2}$ и са тим подацима

$$k = \sqrt{\frac{mg}{\psi\mu F}} = \sqrt{\frac{7{,}85}{0{,}55\cdot 0{,}127\cdot 0{,}01}} = \sqrt{\frac{78\,500\,000}{6\,985}} = \sqrt{11\,238} = 106\ \mathrm{m\,sec^{-1}},$$

$$\alpha = \frac{g}{k} = 0{,}09\,26\,.$$

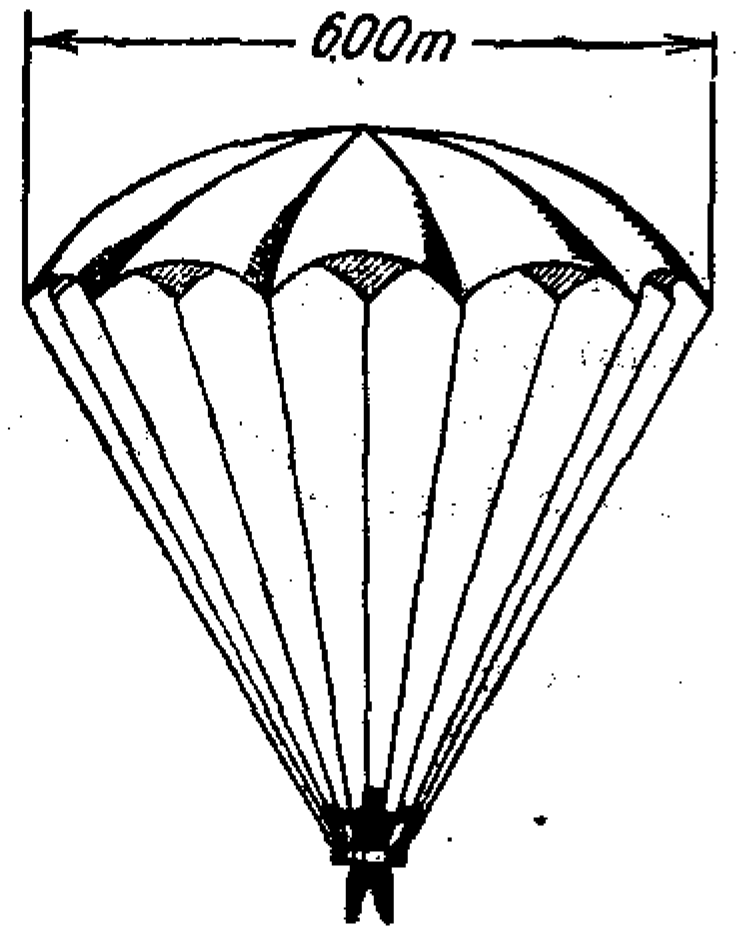
Време t_1 у коме ће брзина постићи максималну вредност k добићемо из услова $\operatorname{tg}\operatorname{hyp}\alpha t = 1$. Из таблице хиперболичних функција налазимо да је за $\alpha t = 6$, $\operatorname{tg}\operatorname{hyp} 6$ само за 10^{-5} мањи од јединице; можемо дакле са великом тачношћу узети $t_1 = 6/0{,}09\,26 = 65$ sec. Пут који ће тело за то време превалити наћићемо обрасцем $x = k^2(\ln\cos\operatorname{hyp} b)/g$. Са $k^2/g = 106^2/9{,}81 = 1146$ m и $\ln\cos\operatorname{hyp} 6 = 5{,}389$ налазимо $x = 6\,175$ m.

Из једначине $x = k^2\,[\ln(1/2)]/g + kt$, налазимо са $\ln(1/2) = -0{,}693$, $x = 106\cdot 65 - 1\,146\cdot 0{,}603 = 6\,100$ m

Разлика оба резултата од $1{,}2\%$ потиче отуда што је први образац строг а други приближан.

У празном простору постигло би тело за исто време (65 sec) брзину $g\,t = 637$ m/sec и прешло би пут $gt^2/2 = 19\,000$ m.

б) Падобран. Као пример узећемо према сл. 61.3 да је пречник падобрана $D = 6{,}00$ m, а укупна тежина штита са корпом и пилотом $Q = mg = 100$ kg. Специфична тежина ваздуха је $\gamma = 1{,}29$ kg/m³, а константа $\psi = c/2 = 0{,}66$ (шупља полулопта). Са тим подацима налазимо да је теоријски максимална брзина коју падобран при слободном паду може достићи:



Сл. 61.3

$$k = \sqrt{\frac{mg}{\psi\gamma F}} = \sqrt{\frac{100\cdot 9{,}81}{0{,}66\cdot 1{,}29\,\dfrac{6^2\cdot 3{,}14}{4}}} = 6{,}37 \text{ m sec}^{-1};$$

$$\alpha = 1{,}54 \text{ sec}^{-1}.$$

Брзина k биће постигнута за време $t_1 = 6/\alpha = 6/1{,}54 = 3{,}9$ sec. Њој одговара у празном простору висина $k^2/2g = 6{,}37^2 : 19{,}6 = 2{,}07$ m. Пилот стане на земљу брзином као да је скочио са скеле висине 2 m.

Пример овај претпоставља да је за $t = 0$ и $v = 0$, а да је падобран одмах отворен. У ствари падобран ће се тек после извесног времена τ отворити (аутоматски или дејством пилота) и постићи брзину v_0. Када би v_0 била позната имало би се даље кретање рачунати као вертикални хитац у ваздуху на ниже са почетном брзином v_0, под претпоставком да се скок врши са непокретног места и у мирном ваздуху.

в) Тоњење тела у води. Слично кретање, као слободан пад у ваздуху, имамо кад неки тежак предмет пада у вертикалном правцу кроз воду (тоне); једина је разлику у томе, што овде сем тежине тела Q и отпора средине W морамо узети у обзир и потисак воде P.

Ако је запремина тела које тоне V, и његова специфична тежина γ_1, онда му је тежина $Q = V\gamma_1$. Насупрот овој сили потисак воде делује оздо навише и величина му је $P = V\gamma$, где је γ специфична тежина воде. Резултујућа сила у вертикалном правцу R' је

$$R' = Q - P = V(\gamma_1 - \gamma).$$

Разлику специфичних тежина покретног тела и воде означићемо са $\gamma' = \gamma_1 - \gamma$ па ћемо имати:

$$R' = V\gamma'.$$

Да би тело тонуло мора бити $\gamma_1 > \gamma$.

Када сили R' додамо и отпор средине по обрасцу $W = c\gamma F\, v^2/2g$, где је према ранијем $c = 2\psi$, добићемо диференцијалну једначину кретања за овај случај:

$$m\,\frac{dv}{dt} = R' - W = V\gamma' - c\gamma\, F\,\frac{v^2}{2g}\,. \tag{61.8}$$

Граничну вредност k брзине v, којој се приближује тело тонећи у воду, налазимо када ставимо $dv/dt = 0$, дакле:

$$V\gamma' = c\gamma F \frac{k^2}{2g}$$

а одавде:

$$k = \sqrt{\frac{2g}{c} \frac{V}{F} \frac{\gamma'}{\gamma}}. \tag{61.9}$$

Када тело при тоњењу достигне ову максималну брзину, оно ће се даље кретати једнолико.

Ако на пример претпоставимо да тело које тоне, има обик лопте полупречника r онда је:

$$V = 4r^3\pi/3 \quad \text{и} \quad F = r^2\pi$$

па дакле

$$\frac{V}{F} = \frac{4}{3} r \quad \text{и} \quad k = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{g}{c} \frac{\gamma'}{\gamma} r}. \tag{61.9a}$$

Према обрасцу, у коме је γ константна специфична тежина воде ($= 1$), видимо да ће за лопту максимална брзина k бити у толико већа у колико је већи њен полупречник r и њена специфична тежина $\gamma_1 = \gamma' + \gamma$. Тако, ако ставимо прво $C_1 = 8g\gamma'/3c\gamma$, важиће $k = \sqrt{rC_1}$, што значи да од две лопте од истог материјала (исто γ' и C_1) а разне величине, већа лопта достиже већу крајњу брзину него ли мања, из чега закључујемо да ће већа лопта брже тонути него ли мања. Ако затим узмемо две лопте једнаке по величини али разне специфичне тежине, и ставимо за обе $C_2 = 8rg/3c\gamma$, добићемо за крајњу брзину:

$$k = \sqrt{\gamma' C_2},$$

што значи да специфички теже лопте тону брже.

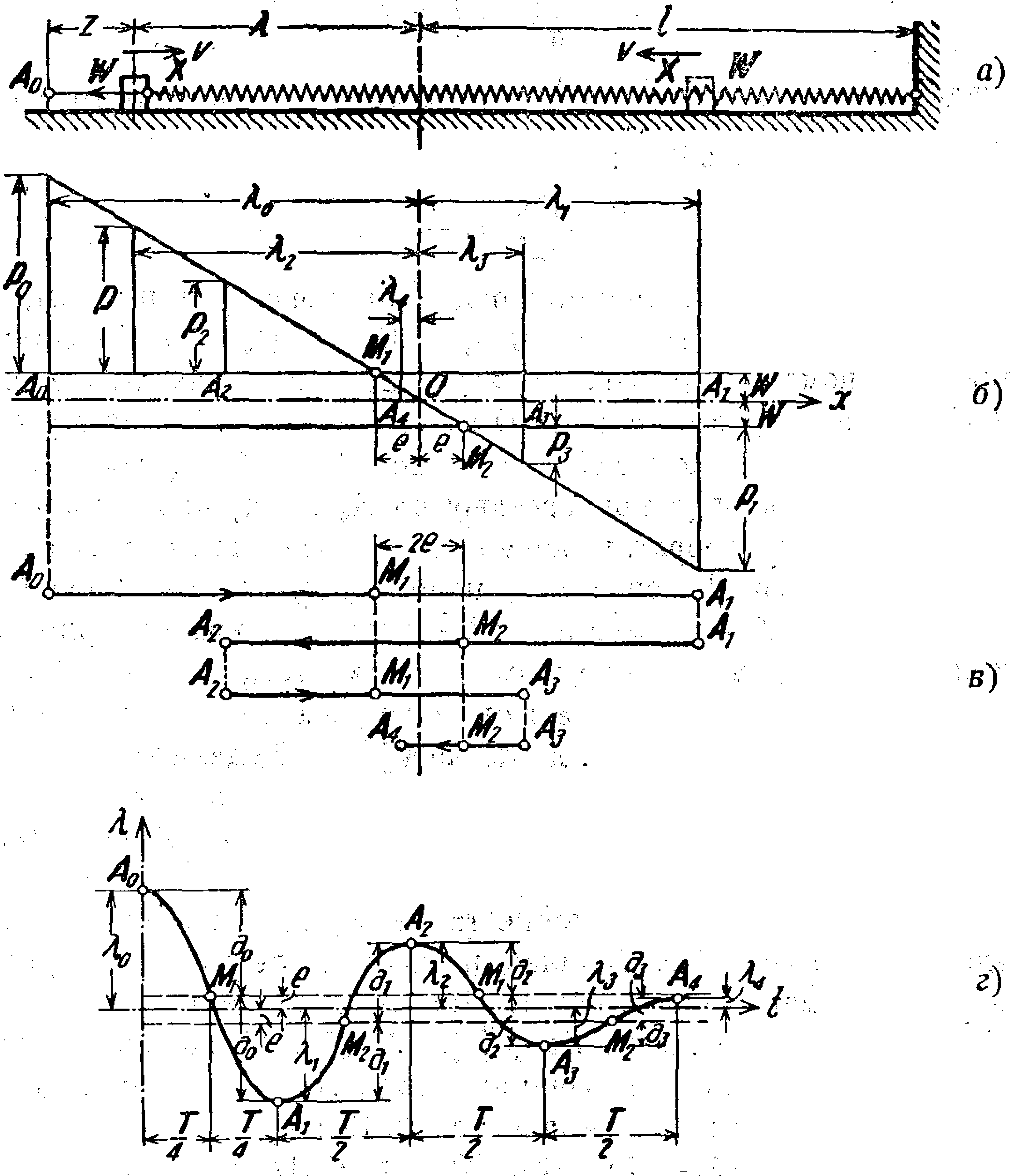
Ове чињенице примењују се у рударству за одабирање и сортирање рудног материјала; поред воде долазе и друге течности у обзир.

62. Осцилације са амортизацијом. Хармонична осцилација једанпут започета, трајала би бесконачно дуго са истом амплитудом и периодом, на основу принципа одржања енергије. Осцилације које у природи опажамо, приближују се у већој или мањој мери том идеалном кретању. Сили $X = -k^2x$ која одржава хармоничну осцилацију, стављају се насупрот увек извесни отпори, услед којих амплитуда бива постепено све мања, и кретање после коначног, дужег или краћег времена престаје. Та стварна кретања зовемо амортизованим (пригушеним) осцилацијама.

Отпори могу бити константне величине (на пример отпор трења између покретне тачке и подлоге на којој се она креће), или пропорционални брзини или квадрату брзине тачке (отпор средине у којој се тачка креће). Ми ћемо расматрати прва два случаја.

а) Осцилација под утицајем сталног отпора трења. Једна тешка тачка A тежине mg креће се на хоризонталној подлози под дејством еластичне силе X опруге која је левим крајем везана за тачку

A, а десним утврђена за зид (сл. 62.1). Дужина опруге је l, њено продужење (скраћење) λ. Еластична сила је по Хук-овом закону $X = \mu\lambda$, где је μ константа, зависна од материјала и димензија опруге; масу опруге занемарујемо. Када тачку ставимо у крајњи положај A_0, опруга је растегнута за $\lambda_0 = OA_0$ и на тачку дејствује сила $X = -\mu\lambda_0$. Када не би било никаквог отпора, тачка би вршила хармоничну осцилацију око равнотежног положаја O са сталном амплитудом λ_0.



Сл. 62.1

Али ако она наилази на отпор W сталне величине, убрзавајућа сила биће $P = \mu\lambda - W$. Ако са z означимо растојање тачке A од почетног положаја A_0, тако да је $z + \lambda = \lambda_0$, гласи, диференцијална једначина кретања

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = P = \mu\lambda - W. \qquad (62.1)$$

На сл. 62.1б претстављени су дијаграми силе X (коса линија са нагибом $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu$) и отпора W (хоризонтална линија). Сила P биће једнака нули за $\lambda = e = \dfrac{W}{\mu}$.

У једначину 62.1 уведимо нову променљиву $x = \lambda - e$, те ће гласити с обзиром да је $z = \lambda - (x + e)$

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(x+e) - W \tag{62.1a}$$

и када унесемо вредност за e, и константу $\dfrac{\mu}{m}$ означимо са k^2, добија (62.1) познати облик:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x. \tag{62.1a}$$

Тачка ће изводити хармоничну осцилацију око средишта M_1, и доћиће до A_1, тако да је амплитуда $M_1A_1 = M_1A_0 = (\lambda_0 - e)$. Средиште осцилације M_1 померено је дакле услед отпора W за дужину e на лево од O Тачка A_1 удаљена је од O за $\lambda_1 = \lambda_0 - 2e$. Она има у A_1 брзину $v_1 = 0$ и креће се под дејством силе $P_1 = \mu(\lambda_1 - e) = \mu(\lambda_0 - 3e)$ на лево. Отпор W који је при кретању од A_0 до A_1 имао смер управљен на лево има при повратку тачке од A_1 на лево сада супротан смер[1]). Пошто је убрзавајућа сила P_1 у положају A_1 мања од силе $P_0 = \mu\lambda_0$ у положају A_0 за $P_0 - P_1 = 3\mu e$, то ће тачка у повратку вршити хармоничну осцилацију са мањом амплитудом $M_2A_1 = (\lambda_0 - 3e)$ око средишта M_2, које је за дужину e померено на десно од O. У свом кретању на лево тачка ће доћи до A_2, која је од O удаљена за $\lambda_2 = \lambda_0 - 4e$. У A_2 је убрзавајућа сила $P_2 = \mu(\lambda_0 - 5e)$, амплитуда треће осцилације смањиће се опет за коначну величину на $A_2M_1 = (\lambda_0 - 5e)$ и тачка ће стићи до A_3, која је удаљена од O за $\lambda_3 = \lambda - 6e$, итд. Средишта осцилација су наизменце тачке M_1 и M_2, а свака идућа амплитуда смањује се за $2e$. Осцилација траје докле год еластична сила X не постане мања од отпора W. На сл. 62.1б видимо да је то случај већ код четврте осцилације јер је $X_4 < W$. Тачка ће у положају A_4 остати у миру. Ако са a означимо амплитуде појединих узастопних осцилација, читамо из дијаграма 62.1б : $a_0 = \lambda_0 - e$, $a_1 = \lambda_0 - 3e$, $a_2 = \lambda_0 - 5e$, $a_3 = \lambda_0 - 7e$, итд. На сл. 62.1в приказане су одвојено амплитуде за прве четири полупериоде.

Амплитуде опадају дакле у аритметичкој прогресији.

Периода хармоничне осцилације је

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu}},$$

1) У чл. 58 (3 пример) напада тачку сила сталне величине и сталног смера.

независна од амплитуде. Сви путови A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 биће дакле пређени за иста времена

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{\mu}}.$$

На сл. 62.1г приказан је дијаграм пута и времена; он се састоји из четири лука синусне линије са различитим амплитудама.

Бројни пример. Тежина тела је 0,60 kg, $f = 0{,}15$, опруга се истеже за 1 cm под дејством силе од 0,30 kg. Опругу истегнемо за $\lambda_0 = 2{,}6$ cm и пустимо тачку да осцилише без почетне брзине. Пита се: 1) колико ће осцилација тачка извршити док не стане, 2) колико се удаљује од равнотежног положаја, и 3) колико трају осцилације?

По обрасцу $X = \mu\lambda$ налазимо $0{,}30 = \mu \cdot 1$ cm, дакле $\mu = 0{,}30$ kg/cm, са овим: $e = 0{,}6 \cdot 0{,}15 : 0{,}30 = 0{,}3$cm. Тачка ће извршити четири осцилације са $\lambda_1 = 2{,}0$ cm, $\lambda_2 = 1{,}4$ cm, $\lambda_3 = 0{,}8$ cm и $\lambda_4 = 0{,}2$ cm. Пошто је $\lambda_4 < e$, тачка ће остати у миру. Кретање у сваком отсеку трајаће $\frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{m}{\mu}} = 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}6}{9{,}8 \cdot 0{,}3}} = 1{,}42$ sec. $X_4 = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$ kg. $W = 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}09$ kg; дакле је $X_4 < W$.

б) Осилација под утицајем отпора пропорционалног брзини. Ако је отпор сили X пропорционалан првом степену брзине $\frac{dx}{dt}$, можемо убрзање услед тог отпора ставити $2\lambda \frac{dx}{dt}$ где је 2λ константа амортизације. Диференцијална једначина кретања гласиће:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0. \tag{62.2}$$

Партикуларни интеграл ове једначине је $x = A\,e^{rt}$; са њиме даје једначина (62.2) квадратичну „карактеристичну" једначину

$$r^2 + 2\lambda r + k^2 = 0$$

из које налазимо за r две вредности

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - k^2}. \tag{62.3}$$

Потпуни интеграл гласиће дакле

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}. \tag{62.4}$$

Какво ће кретање бити, то зависи од међусобног односа величина λ и k. Имамо да разликујемо три случаја.

1. Слаба амортизација, $\lambda < k$. Израз под кореном у (62.3) је негативан, корена вредност имагинарна. Ставимо: $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = i\nu$, дакле $\nu^2 = k^2 - \lambda^2$. Решења квадратичне једначине биће;

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\nu\,.$$

дакле

$$e^{r_{1,2}t} = e^{-\lambda t \pm i\nu t} = e^{-\lambda t}(\cos\nu t \pm i\sin\nu t). \tag{62.5}$$

Са овом вредношћу гласи једначина (62.4).

$$x = A_1 e^{-\lambda t}(\cos\nu t + i\sin\nu t) + A_2 e^{-\lambda t}(\cos\nu t - i\sin\nu t)$$

и сажето

$$x = e^{-\lambda t}[(A_1 + A_2)\cos\nu t + i(A_1 - A_2)\sin\nu t]\,.$$

Да бисмо избегли комплексне величине ставићемо

$$A_1 + A_2 = a_1\,, \qquad \text{и} \qquad i(A_1 - A_2) = a_2\,,$$

дакле

$$x = e^{-\lambda t}(a_1\cos\nu t + a_2\sin\nu t)\,.$$

Када уведемо две константе a и ε стављајући

$$a_1 = a\sin\varepsilon \qquad \text{и} \qquad a_2 = a\cos\varepsilon\,,$$

гласиће једначина кретања

$$x = ae^{-\lambda t}\sin(\nu t + \varepsilon). \tag{62.6}$$

Sinus ће први пут бити једнак нули у времену $t = -\varepsilon/\nu$ а затим ће после сваке полупериоде

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\nu} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \tag{62.7}$$

добити опет вредност нуле; у међувремену пак добиће једанпут вредност ± 1.

Величина x варира дакле између две криве линије са једначинама $x = \pm ae^{-\lambda t}$. Једначину (62.6) дискутовали смо већ у Кинематици (чл. 29б). Тамо смо је сматрали као дату, са том разликом што је фазна константа била једнака нули. Онда је за $t = 0$ био пут $x_0 = 0$, а по једначини (62.6) је $x_0 = a\sin\varepsilon$. Број $e^{-\lambda t}$ зове се фактор амортизације.

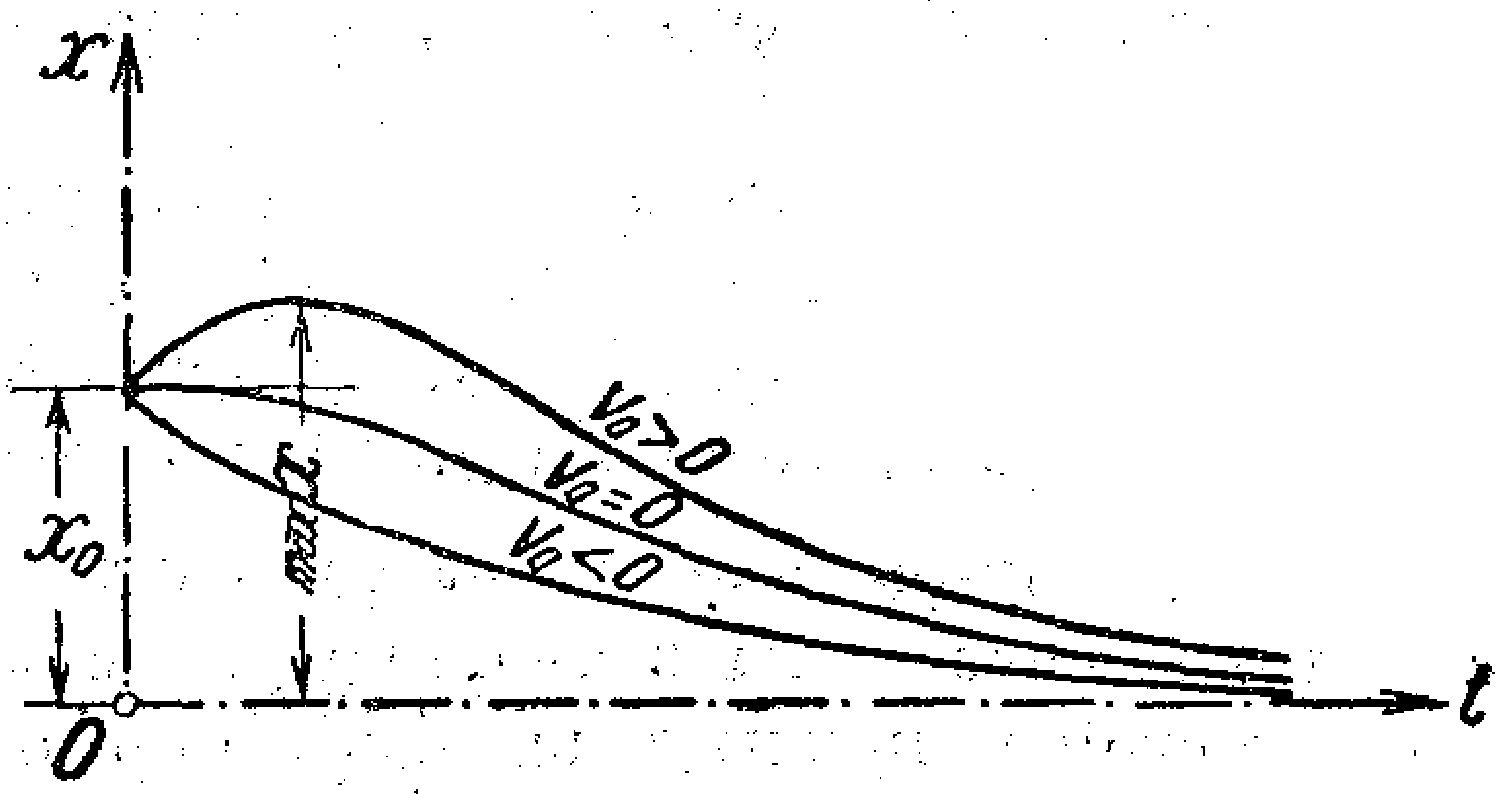
Из једначине (62.7) видимо да је *периода амортизоване осцилације дужа него ли периода хармоничне осцилације са истом кружном фреквенцијом k*. Тачка ће дакле услед амортизације спорије осцилисати са сталном периодом (62.7).

2. Јака амортизација, $\lambda > k$. Оба корена једначине (62.3) су сада реална, једначина кретања гласи са $\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$

$$x = e^{-\lambda t}(A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t}). \tag{62.8}$$

Тачка неће осцилисати, њено је кретање апериодично. У времену $t = 0$ је $x_0 = A_1 + A_0$, за $t = \infty$ је $x = 0$. Облик дијаграма пута и времена зависи од величине и смера почетне брзине v_0. Ако је $v_0 > 0$, тј.

смер почетне брзине супротан отпору, тачка ће се донекле кретати у позитивном смеру, постићи максимални пут, и од тренутка када буде $v = 0$, враћаће се назад до полазне тачке. Ако је пак $v_0 = 0$ или $v_0 < 0$,



Сл. 62.2

тачка ће се већ у почетку ($t = 0$) кретати у негативном смеру (у смеру отпора) до полазног положаја. Дијаграми за сва три случаја приказани су на сл. 62.2.

3. Прелазни случај, $\lambda = k$. Оба корена карактеристичне једначине су једнака и реална:

$$r_1 = r_2 = -\lambda .$$

Из теорије диференцијалних једначина знамо да су сада партикуларни интеграли

$$A\,e^{-\lambda t} \quad \text{и} \quad B\,t\,e^{-\lambda t},$$

дакле је коначна једначина кретања

$$x = (A + B\,t)\,e^{-\lambda t}. \tag{62.9}$$

Интеграционе константе одређују се из датих почетних услова.

Хармонична и амортизована осцилација материјалне тачке, које смо до сада расматрали, чине основу Теорије осцилација еластичних тела (штапова, плоча итд.), која има важну примену у техници. Свако еластично тело које добија моментани импулс (силе или спрега) почиње да осцилише. Према врсти импулса разликујемо три врсте осцилација еластичног штапа: 1) Лонгитудиналне осцилације (осцилације истезања) услед импулса у правцу осовине штапа. 2) Трансверзалне осцилације (осцилације савијања) услед импулса управног на осовину штапа, и 3) Торзионе осцилације услед моментаног дејства спрега у равни управној на осовину штапа. Еластичне осцилације тела настају услед механичке енергије која се импулсом у њих уноси. Када би се та енергија одржала у првобитној величини, осцилација би била хармонична, тј. трајала би бесконачно дуго са сталном амплитудом. Искуство нам каже, да такве једним јединим импулсом произведене осцилације после дужег или краћег времена престају. Осцилације су амортизоване. Узрок је томе што се импулсом унета енергија не троши у целини на извођење осцилација дотичног тела. Тела нису потпуно еластична, један део енергије троши се на извођење пластичних (трајних) деформација, претвара се у топлоту, један део доводи у осцилацију околну средину.

Осцилације неког тела, произведене једним јединим импулсом зову се сопствене или слободне осцилације. Свако тело има своју сопствену осцилацију (лонгитудиналну, трансверзалну и торзиону), која зависи од материјала, облика и димензија дотичног тела.

63. Принудне осцилације. Ако на материјалну тачку масе m дејствује осим еластичне силе $-k^2x$ и амортизујуће силе $-2\lambda v$ још нека трајна сила која своју величину са временом периодично мења, зовемо осцилацију принудном, а периодичну силу P зовемо пертурбационом (поремећајном) силом, јер она сопствену (слободну) осцилацију тачке пертурбира (ремети). Ове принудне осцилације имају важну улогу не само у Техничкој механици (осцилација моста услед ритмичког корачања војске преко моста, осцилација фундамента и читавих зграда услед ритмичког кретања машина и т. с.) него и у другим гранама Физике (Акустици, Радиотехници, Оптици итд.).

Најпростија периодична зависност силе од времена изражена је једначином.

$$P = P_0 \sin\eta t \quad \text{дакле} \quad u = u_0 \sin\eta t\,. \tag{63.1}$$

Периода силе је $2\pi/\eta$, а њена величина варира за време једне периоде између $+P_0$ $-P_0$. Ставом (63.1) обухватили смо и најопштији случај зависности $P=f(t)$. Јер ма како компликована била та зависност, ми је можемо помоћу Фурие-овог реда (J. Fourier, 1768—1830):

$$P = f(t) = a_1 \sin\eta t + a_2 \sin 2\eta t + a_3 \sin 3\eta t + \ldots$$
$$+ b_1 \cos\eta t + b_2 \cos 2\eta t + b_3 \cos 3\eta t + \ldots$$

разложити у поједине тригонометријске функције, и утицај сваког члана тога реда појединце истраживати и та појединачна дејства на основи принципа суперпозиције алгебарски сабрати.

Са вредношћу (63.1) пертурбационог убрзања u гласиће диференцијална једначина принудне осцилације

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + k^2x = u_0 \sin\eta t. \tag{63.2}$$

Ова се једначина разликује од (62.2) у толико, што на десној страни место нуле стоји пертубациони члан $u_0 \sin\eta t$. Једначина (62.2) зове се хомогена; једначина (63.2) је нехомогена, а њој припада хомогена једначина (62.2).

Из теорије линеарних диференцијалних једначина знамо да ћемо добити општи интеграл нехомогене једначине (63.2) када једном њеном партикуларном интегралу додамо општи интеграл (62.6) њене хомогене једначине (62.2).

Из искуства нам је познато да се потреси аутомобила или брода који стоје мирно, услед мотора који је у њима у покрету, збивају у истом темпу као и покрети мотора. Из те појаве закључујемо да ће кретање услед силе P бити периодично са истом кружном фреквенцијом η као и сила P. Али пошто периодична промена силе P и проузрокована осцилација не морају имати исту фазу, то ћемо партикуларни интеграл ставити

$$x = x_1 = C \sin(\eta t - \alpha). \tag{63.3}$$

Овде C и фазна константна α нису произвољне интеграционе константе, него су одређене диференцијалном једначином (63.2) као што ће се одмах показати. Знаком x_1 је наглашено да је то само један део (партикуларни) пута x.

Диференцијалећи (63.3) двапута по t добијамо

$$\frac{dx}{dt} = C\eta\cos(\eta t - \alpha), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -C\eta^2 \sin(\eta t - \alpha).$$

Ове вредности морају задовољавати једначину (63.2). Када их дакле сменимо и на десној страни ставимо $\eta t = (\eta t - \alpha) + \alpha$ добијамо

$$-C\eta^2 \sin(\eta t - \alpha) + 2C\lambda\eta\cos(\eta t - \alpha) + C\kappa^2 \sin(\eta t - \alpha) =$$
$$= u_0 \sin(\eta t - \alpha)\cos\alpha + u_0\cos(\eta t - \alpha)\sin\alpha.$$

Када коефицијенте од $\sin(\eta t - \alpha)$ и $\cos(\eta t - \alpha)$ на левој и десној страни изједначимо, добијамо

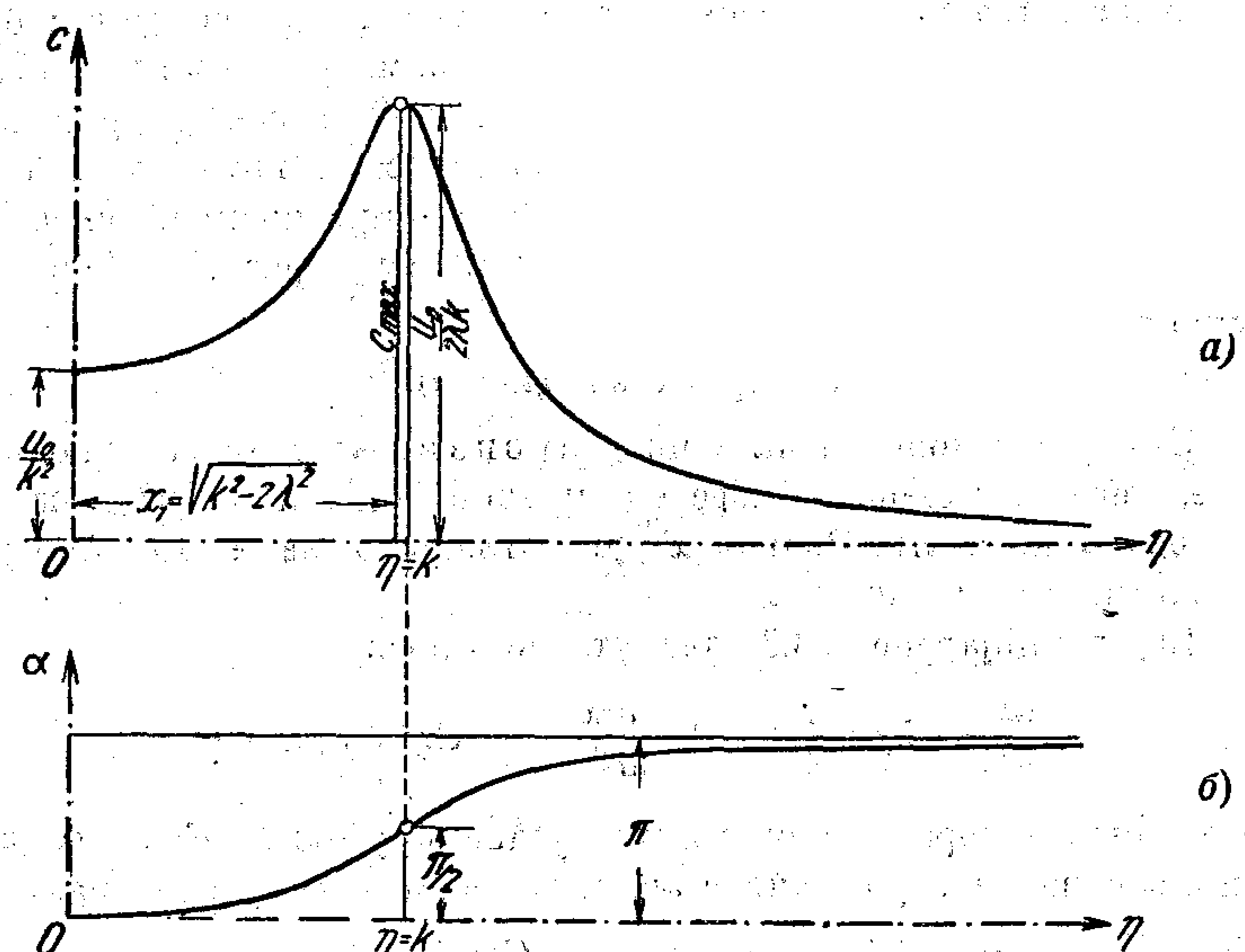
$$(k^2 - \eta^2)\, C = u_0 \cos\alpha,$$
$$2\lambda\eta C = u_0 \sin\alpha$$

и из ових налазимо константе:

$$C = \frac{u_0}{\sqrt{(k^2 - \eta^2)^2 + 4\lambda^2\eta^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda\eta}{k^2 - \eta^2}. \tag{63.4}$$

Принудна осцилација је дакле проста хармонична осцилација са истом кружном фреквенцијом η коју има периодична сила P, и са сталном амплитудом C. Али обе осцилације (тачке и силе) не пролазе кроз вредност нуле истовремено; као што из друге једначине (63.4) видимо, биће за $k > \eta$ тј. када је кружна фреквенција сопствене осцилације већа од кружне фреквенције силе P, $\alpha > 0$, осцилација тачке заостајаће у фази иза осцилације силе за време од α/η секунада.

Ако у једначинама (63.4) сматрамо u_0, k и λ као дате сталне величине, можемо испитати како се мењају амплитуда C и фазна константа α принудне осцилације када кружна фреквенција η периодичне силе прође све вредности од 0 до ∞. Зависности $C_1 = f_1(\eta)$ и $\alpha = f_2(\eta)$ приказане су дијаграмима 63.1а и 1б. За $\eta = 0$ је $C = u_0/k^2$,



Сл. 63.1

за $\eta = \infty$, $C = 0$, линија се асимптотички приближује осовини x. Највећу вредност имаће C када именитељ има најмању вредност. Из

$$\frac{d\,[k^2 - \eta^2)^2 + 4\lambda^2\eta^2]}{d\eta} = 0$$

налазимо да ће C_{max} бити за $\eta^2 = k^2 - 2\lambda^2$; када ту вредност унесемо у једначину за C, добијамо

$$C_{max} = \frac{u_0}{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} = \frac{u_0}{2\lambda\sqrt{k^2 - \lambda^2}}. \tag{63.5}$$

За $\eta = k$ је $C_k = u_0/2\lambda k$, дакле је $C_k < C_{max}$. У овом случају када је кружна фреквенција пертурбационе силе једнака кружној фреквенцији неамортизоване хармоничне сопствене осцилације, говоримо о **резонанцији**. За $\eta = k$ и $\lambda = 0$, дакле, када нема амортизације постаје $C_k = C_{max} = \infty$.

За $\eta = k$ биће $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, дакле, $\alpha = \pi/2$, једначина осцилације (63.3) гласи за случај резонанције

$$x_1 = \frac{u_0}{2\lambda k}\sin\left(\eta t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_0}{2\lambda k}\cos\eta t. \tag{63.6}$$

Ако је константа амортизације мала, може амплитуда да буде врло велика.

У случају ресонанције заостаје осцилација тачке иза силе за четврт периоде ($\alpha = \pi/2$); то значи, када тачка има највећу елонгацију $\pm C_k$, сила P је једнака нули, и обратно, када сила има своју екстремну вредност $\pm P_0$ елонгација тачке је једнака нули.

Једначина (63.6) нам каже да, ако је периода пертурбационе силе P приближно једнака периоди сопствене осцилације тачке (што важи и за свако тело које има сопствену осцилацију), може и сразмерно мала сила P_0 да проузрокује велике осцилације.

Једначина (63.3) је један партикуларни интеграл нехомогене диференцијалне једначине (63.2). Да добијемо њен општи интеграл, морамо интегралу (63.3) додати општи интеграл (62.6) хомогене диференцијалне једначине (62.2):

$$x_2 = a\, e^{-\lambda t} (\sin \nu t + \varepsilon),$$

дакле гласи општи интеграл принудне осцилације

$$x = x_1 + x_2 = C \sin (\eta t - \alpha) + a\, e^{-\lambda t} \sin (\nu t + \varepsilon) \qquad (63.8)$$

а њен извод по времену даје нам брзину:

$$\frac{dx}{dt} = v = C\eta \cos (\eta t - \alpha) + a e^{-\lambda t} [\nu \cos (\nu t + \varepsilon) - \lambda \sin (\nu t + \varepsilon)]. \qquad (63.7)$$

У општем интегралу (63.7) су a и ε произвољне интеграционе константе које одређујемо из усвојених почетних услова. Ако на пример хоћемо да за $t = 0$ буде $x = 0$ и $v = 0$, добијамо уносећи те вредности у (63.7) и (63.8):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -C \sin \alpha + a \sin \varepsilon \\ 0 &= C\eta \cos \alpha + a (\nu \cos \varepsilon - \lambda \sin \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (63.9)$$

а из ових једначина налазимо, имајући на уму да је за слабу амортизацију ($\lambda < k$) коју претпостављамо, $\nu = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$, обе константе C и ε.

Ако означимо $\sqrt{(k^2 - \eta^2)^2 + 4\lambda^2 \eta^2} = N$, налазимо из друге једначине (63.4)

$$\sin \alpha = \frac{2\lambda\eta}{N}, \quad \cos \alpha = \frac{k^2 - \eta^2}{N};$$

затим из једначина (63.9)

$$\sin \varepsilon = \frac{2\lambda\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{N}, \quad \cos \varepsilon = \frac{2\lambda^2 - k^2 + \eta^2}{N}$$

$$a = C \frac{\eta}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} = u_0 \frac{\eta}{N\sqrt{k^2 - \lambda^2}}. \qquad (63.10)$$

Када вредности константи C, a, α и ε из једначина (63.4) и (63.10) унесемо у општи интеграл (63.7), добијамо једначину кретања принудне осцилације за усвојене почетне услове, у којој се налазе као константе кружна фреквенција слободне осцилације k, принудне осцилације η и константа амортизација 2λ.

Дискусија једначине (63.7) нема практичног интереса, јер сопствена осцилација брзо ишчезава услед амортизације и остаје само хармонична принудна осцилација (63.3).

Када периодична сила P престане дејствовати на тачку m, она врши даље слободну осцилацију, док ова услед амортизације не ишчезне.

Када не би било амортизујућег отпора ($\lambda = 0$), имали бисмо у (63.7) да ставимо $\nu = k$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = \pi$, $N = k^2 - \eta^2$, $C = u_0/(k^2 - \eta^2)$, $a = C\eta/k$, те добијамо

$$x = \frac{u_0}{k^2 - \eta^2}\left(\sin\eta t - \frac{\eta}{k}\sin kt\right), \tag{63.11}$$

осцилација тачке састојала би се из две хармоничне осцилације различите амплитуде и различите кружне фреквенције.

Једначина (63.11) нам каже као и једначина (63.6) да ако су фреквенције периодичне силе и сопствене осцилације приближно једнаке, амплитуде постижу врло велике вредности; теоријски, за $\lambda = 0$ и $\eta = k$ чак и бесконачно велику вредност.

Из ових чињеница које се односе и на свако еластично тело, закључујемо да сваки технички објект који је изложен дејству какве ритмички променљиве силе (мост, брод, машинска вратила, темељи машина итд.) морамо тако димензионисати да фреквенција његове сопствене осцилације има знатно различиту величину од фреквенције периодичне силе. Услед ресонанције могу угиби моста и тиме и напрезања материјала постићи толику величину, да се мост под много мањим теретом сруши[1], него што је терет који би мирно могао носити. Дуга вратила бродских пропелера сламала су се услед ресонанције између торзионе осцилације вратила и периодичног импулса мотора. Брод који са бока ударају таласи, може се претурити ако је ритам таласа приближно једнак фреквенцији сопствене осцилације око подужне осовине брода итд.

У новије доба је Наука о техничким осцилацијама грана Науке о динамичкој чврстоћи којој се обраћа све већа пажња.

1 Пример. Треба испитати принудне и амортизоване осцилације материјалне тачке тежине $Q = 4{,}9$ kg. Еластична сила износи 8 kg за елонгацију од 4 mm, отпор

---

[1] Ланчани мост преко реке Фонтанке у Петрограду срушио се 1897. када је прелазио одред војске ритмичким кораком.

амортизације је 1 kg за брзину од 1m/sec, пертурбациона сила $P_0 \sin \eta t$ има екстремне величине ± 2 kg. Претпоставља се да је кретање почетног стања ишчезло.

Тражи се амплитуда C осцилације за разне вредности односа η/k:

$$\frac{\eta}{k} = 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}95;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 4{,}0\,.$$

Приказати графички функцију $C = f(\eta/k)$.

Изразићемо константе k, λ, u_0 датим величинама. Ако са P_e означимо еластичну силу, имамо $P_e/m = P_e g/Q = k^2 x$, и одавде $k^2 = P_e g/Qx$, и са $P_e = 8$ kg, $Q = 4{,}9$ kg $x = 0{,}4$ cm, $g = 980$ cm sec^{-2} налазимо $k^2 = 8\cdot 981/4{,}9\cdot 0{,}4 = 4000$ sec^{-2}, $k = \sqrt{4000} = 63{,}1$ sec^{-1}, дакле ће тачка у 2π секунада учинити 63,1 осцилација без обзира на отпор. Ако отпор означимо са W, имамо $u_W = W/m = Wg/Q = 2\lambda v$, и одавде $\lambda = Wg/2Qv$; када унесемо $W = 1$ kg, $v = 100$ cm sec^{-1}, налазимо

$$\lambda = \frac{1\cdot 980}{2\cdot 4{,}9\cdot 100} = 1\ \mathrm{sec}^{-1}\,.$$

Најзад је

$$u_0 = \frac{P_0}{m} = \frac{P_0}{Q}g = \frac{2\cdot 980}{4{,}9} = 400\ \mathrm{cm\,sec}^{-2}\,.$$

Кружна фреквенција амортизоване осцилације је по једначини (62 7)

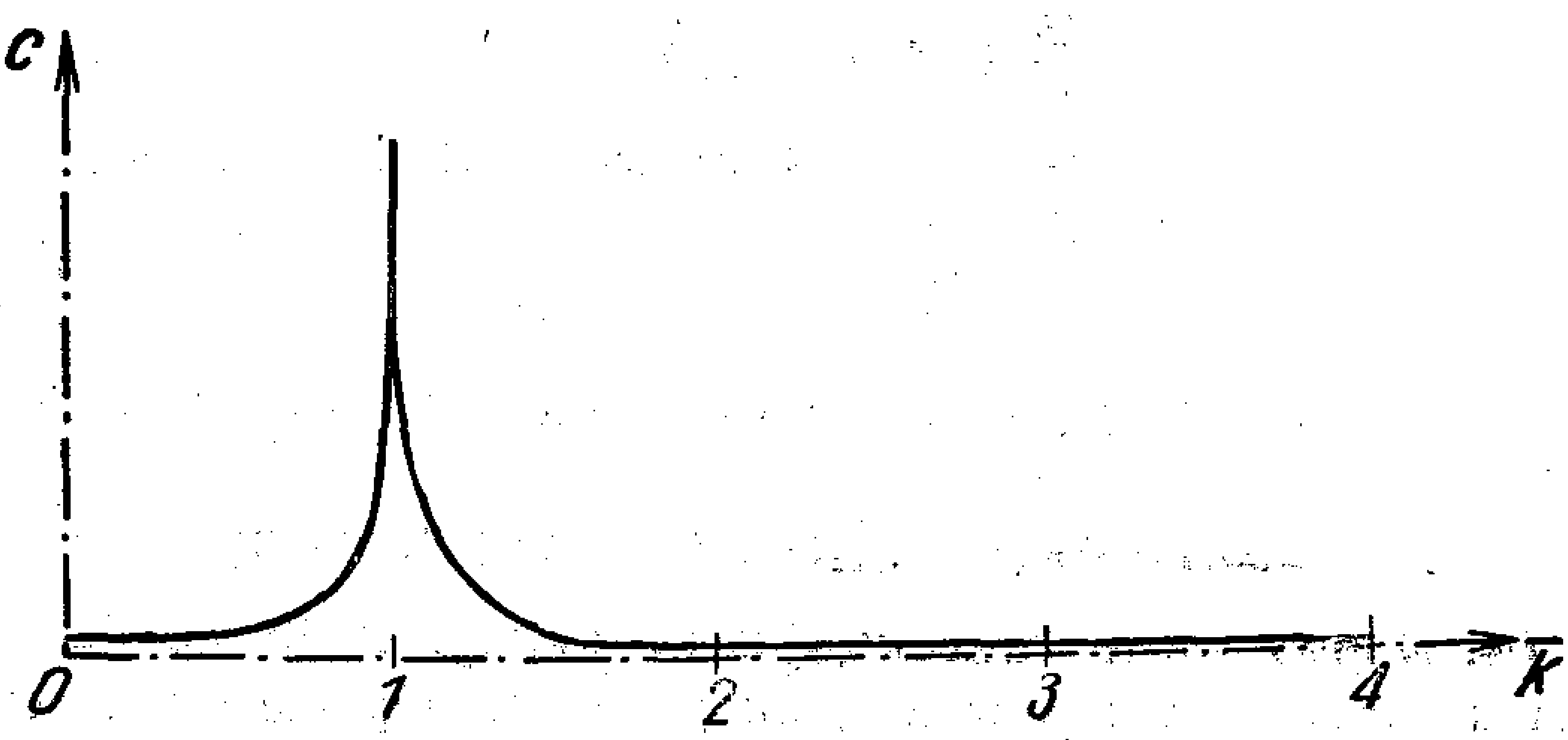
$$\nu = \sqrt{k^2 - \lambda^2} = \sqrt{4000 - 1} = 63{,}1\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Константа амортизације λ је према k тако мала да се ν од k не разликује приметно. Амплитуда принудне осцилације је по једначини (63.4):

$$C = \frac{u_0}{\sqrt{(k^2 - \eta^2)^2 + 4\lambda^2\eta^2}} = \frac{400}{\sqrt{(4000 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}}\,.$$

По овом обрасцу израчунате су вредности C за тражене односе η/k и конструисан је дијаграм $C = f(\eta/k)$ у сл. 63.2.

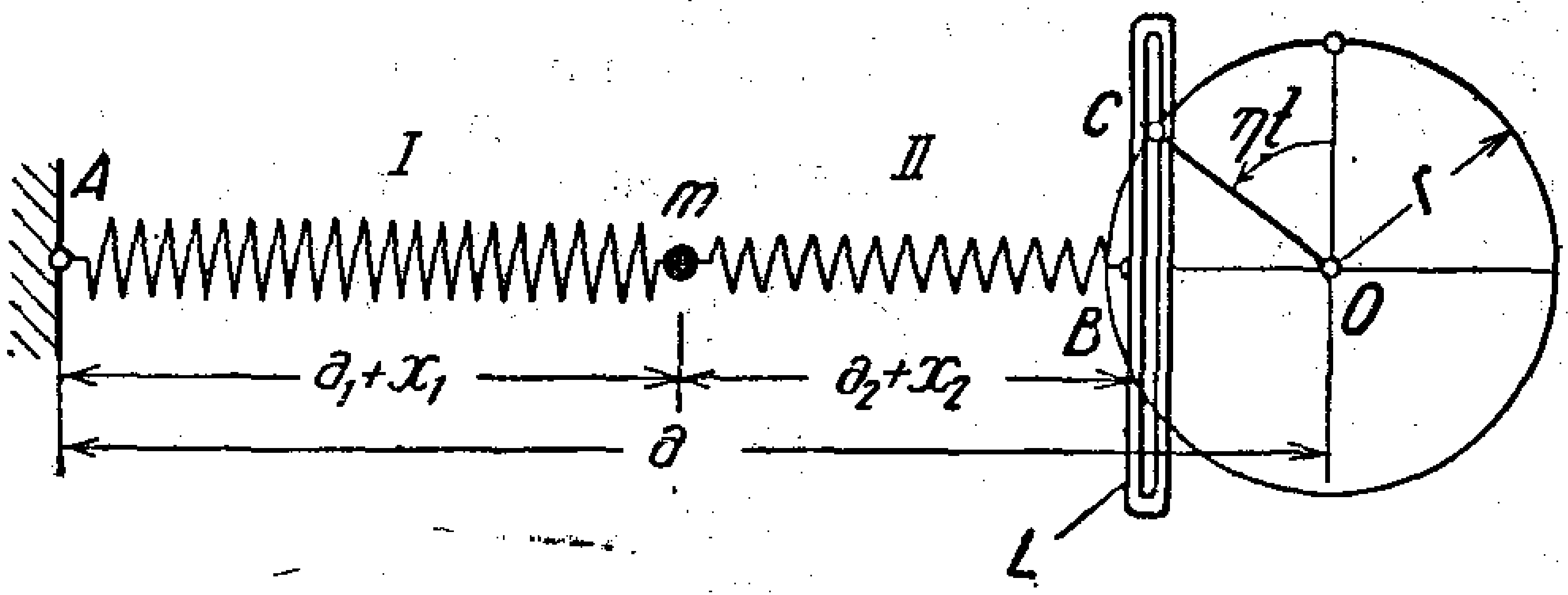
$\frac{\eta}{k}$	η	η^2	C cm
0,1	6,31	40	0,101
0,8	50,5	$25{,}5\cdot 10^2$	0,243
0,95	60,0	$36\cdot 10^2$	3,03
1,0	63,1	$40\cdot 10^2$	3,17
1,5	94,8	$89{,}9\cdot 10^2$	0,08
4,0	253	$6{,}4\cdot 10^4$	0,02



Сл. 63.2

Дијаграм на сл. 63.2 очигледно показује како амплитуда нагло расте када се фреквенција периодичне принудне силе приближи фреквенцији сопствене осцилације тачке.

2. Пример. Принудну осцилацију материјалне тачке масе m када је амортизујућа сила $-2\lambda v$ једнака нули, можемо извести помоћу направе приказане на сл. 63.3. Тачка m везана је између две опруге I и II дужине a_1 и a_2 у неоптерећеном



Сл. 63.3

стању. Масу опруга не узимамо у обзир. Њихове еластичне константе означимо са c_1 и c_2, а c_1/ma_1 и c_2/ma_2 са $k^2{}_1$ и $k^2{}_2$. Тачку нападају у супротном смеру силе $m\,k^2{}_1x_1$ и $m\,k^2{}_2\,x_2$, где су x_1 и x_2 еластична издужења опруга. Динамичка једначина тачке m гласи

$$m\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\,m\,k^2{}_1\,x_1 + m\,k^2{}_2\,x_2.$$

Пошто скратимо са m и сведемо на нулу добијамо

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2{}_1\,x_1 - k^2{}_2\,x_2 = 0.$$

Крај A опруге I учвршћен је у зиду. У растојању $a = a_1 + a_2$ од зида лежи осовина O око које се обрће криваја r. Крај C криваје обухваћен је прорезом вертикалног линеала L за који је учвршћен крај B опруге II. Ако је угаона брзина η криваје константна и вертикални положај линеала вођицама одржаван (што претпостављамо), вршиће L и са њиме тачка B услед обртања криваје хармоничну осцилацију са амплитудом r и периодом $2\pi/\eta$. Укупна дужина AB опруга вариpaће између $a - r$ и $a + r$.

Из геометријског услова који читамо на сл. 63.3 : $a_1 + x_1 + a_2 + x_2 + r\sin\eta t = a$ можемо елиминисати x_2 и уносећи добијени израз у динамичку једначину добиће ова с обзиром да је $a_1 + a_2 = a$ облик

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k^2{}_1 + k^2{}_2)\,x_1 = -\,k^2{}_2\,r\sin\eta t.$$

Пошто уведемо $k^2 = k^2{}_1 + k^2{}_2$ и $u_0 = -\,k^2{}_2\,r$ гласиће диференцијална једначина принудне хармоничне осцилације

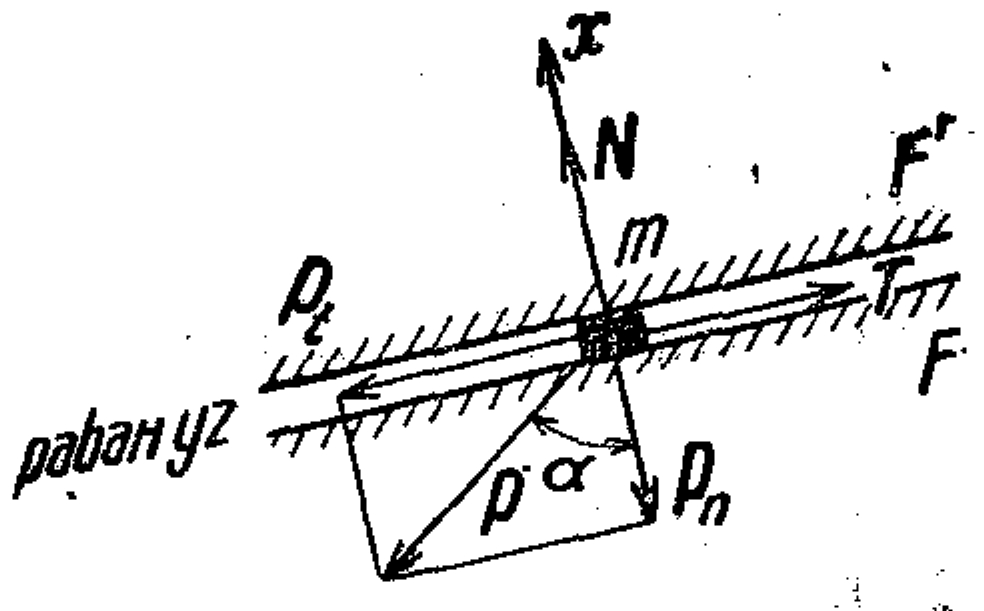
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2\,x_1 = u_0\sin\eta t.$$

Њен интеграл добили смо већ из општег случаја пригушене осцилације стављајући $\lambda = 0$.

II ОГРАНИЧЕНО КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ

64. Нормални и тангенцијални отпор. У 59 чл. смо видели да тачку везану за чврсту површину или линију напада отпор W те површине односно линије. Пошто се засада бавимо праволинијским кретањем, а ово се може само на равној површини и на правој линији вршити то ћемо те претпоставке учинити.

а) Кретање тачке на чврстој равни. Јасно је да се отпор $\vec{W}$ јавља само ако тачку напада нека дата сила $\vec{P}$ (сл. 64.1). Сила $\vec{P}$ заклапа са нормалом непомичне површине F угао α. Силу разлажемо у нормалну компоненту $P_n = P\cos\alpha$ и тангенцијалну компоненту $P_t = P\sin\alpha$. Ма колика била компонента P_n њу ће потирати нормални отпор N равни F. Он је дакле једнозначно одређен са



Сл. 64 1

$$N = P\cos\alpha.$$

Ако угао α има величину $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, његов косинус је негативан, дакле је отпор N негативан. То значи да ће се тачка одвојити од равни F и кретати као слободна тачка. Да то спречимо морамо замислити да се тачка може кретати само између две блиске паралелне равни F и F'. У првом случају говоримо о једнострано ј вези тачке са равни, у другом о обострано ј вези.

Тачку m сматрамо врло малим паралелепипедом који својом основом клизи на равни F односно између равни F и F'. Ако су равни хоризонталне онда је $N = -mg$, када сем тежине никаква друга сила не напада.

Када тачки на хоризонталној равни дамо почетну брзину v_0 она ће се кретати успорено и после краћег или дужег времена стаће. Из те очигледне чињенице закључујемо да на тачку дејствује сила супротна кретању. Ту силу зовемо тангенцијалним отпором T или отпором трења при клизању. Величину отпора у стању је само искуство одредити. Француски физичар и инжењер Кулон (C. Coulomb, 1736—1806) на основу својих многих огледа које је сам извршио, нашао је ове чињенице: 1. Трење расте са рапавошћу површина које се тару. 2. Отпор трења је сразмеран нормалном притиску. 3. При истом притиску трење је независно од површина које се тару. 4. Трење у миру је веће него при кретању. 5. Разлика брзина тела која се тару нема на величину трења код истог материјала никаква утицаја а код неких тако мали да се већином може занемарити. Код трења у миру узима Кулон и адхезију у обзир.

Други став Кулонов одређује величину тангенцијалног отпора $T = fN$ где је f број за сваки пар површина које се тару константан коефицијент трења. По четвртом ставу морамо разликовати коефицијент статичког трења или адхезионог отпора f_0 од коефицијента кинетичког трења f.

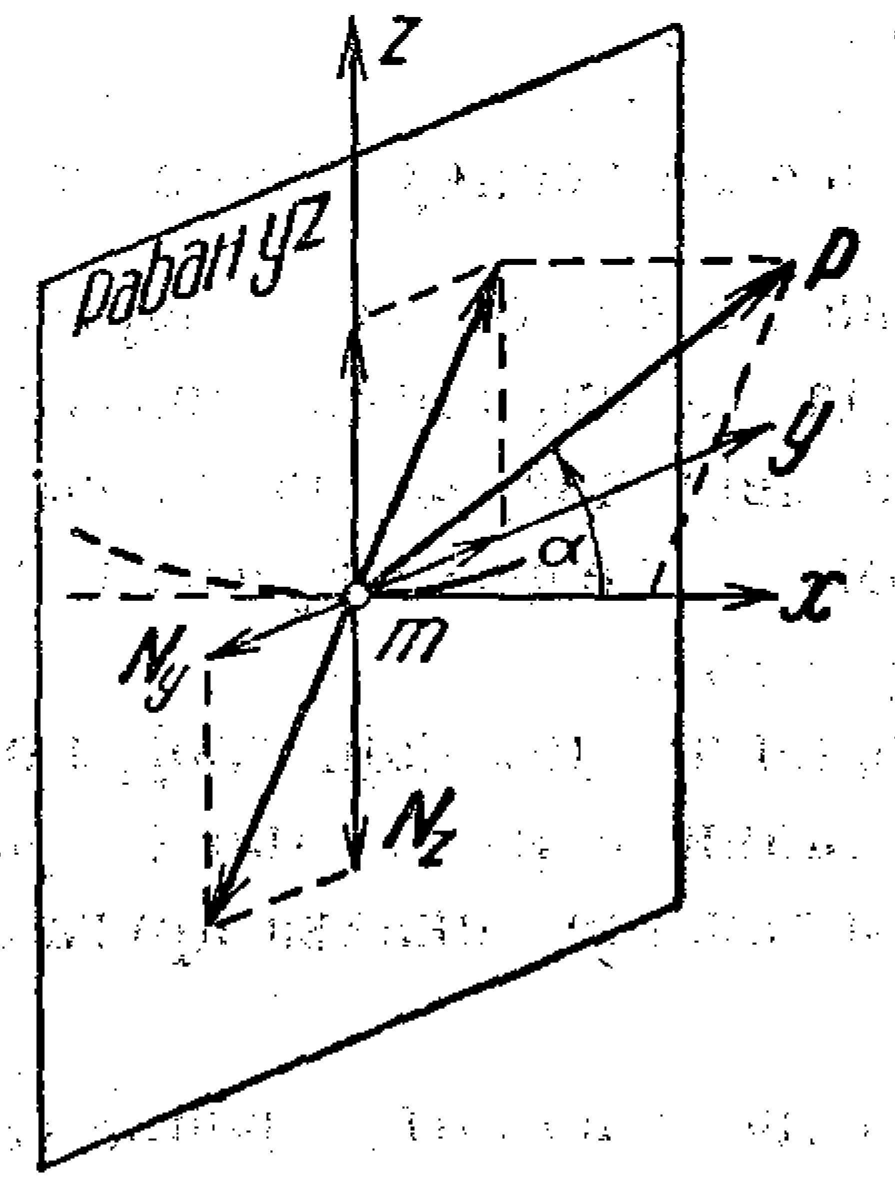
Резултујући отпор рапаве равни има према Куловом закону величину:

$$W = N\sqrt{1+f^2},$$

правац силе $P\sin\alpha$ са супротним смером. Резултати Кулонових истраживања садржани су у обрасцима:

$$T = fN \quad \text{и} \quad f_0 > f.$$

б) Кретање тачке по крутој правој линији. Тачку m замишљамо у облику малог прстена навученог на праву жицу непромењивог облика тако да се прстен и жица на целом обиму додирују. Силу P која тачку напада и нагнута је према жици за угао α, пројицирамо на жицу и на нормалну раван у тачки m (сл 64.2). $P\cos\alpha$ је аксијална а $P\sin\alpha$ нормална компонента. Прва мења брзину тачке а друга се потире са нормалним отпором жице:



Сл. 64.2

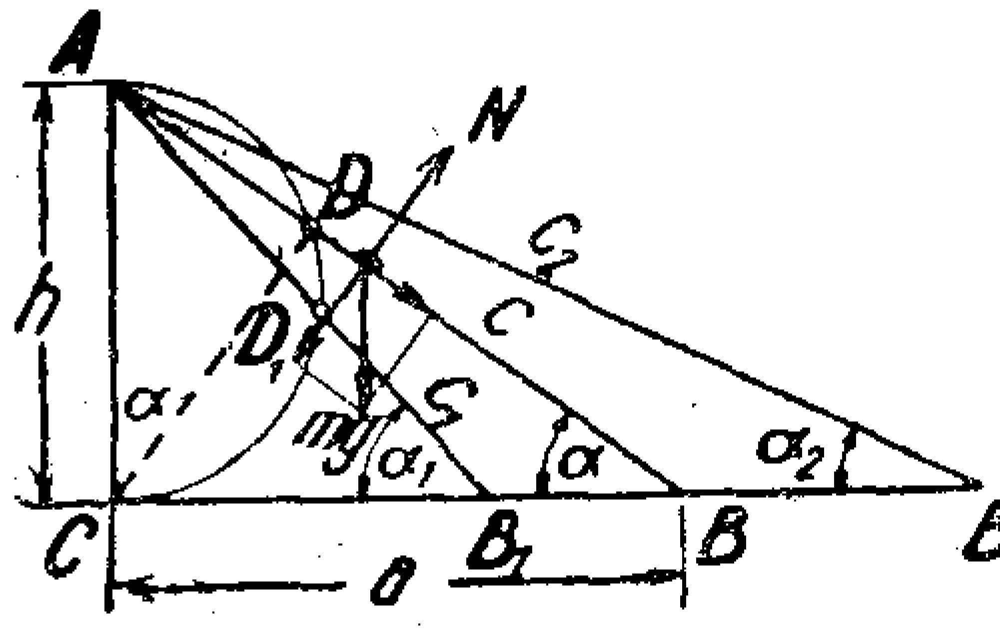
$$P\sin\alpha - N = 0.$$

Пошто је веза тачке m са жицом обострана, може отпор N имати сваки правац у нормалној равни тачке m. Када N разложимо у компоненте N_y и N_z а силу P у компоненте X, Y, Z можемо написати једначине:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - f\sqrt{N_y^2 + N_z^2}, \quad Y - N_y = 0, \quad Z - N_z = 0.$$

У Динамици криволинијског кретања тачке сазнаћемо да било да је тачка слободна, везана за површину или линију постављамо три једначине које одређују три непознате: у првом случају три убрзања, у другом два убрзања и отпор N, а у трећем једно убрзање и два компонентална отпора. Другим речима *сваку неслободну тачку можемо сматрати слободном када отпоре сматрамо нападним силама.*

65. Кретање тешке тачке по глаткој стрмој равни. На стрмој равни (нагиба α) креће се тачка масе m. Једина нападна сила је



Сл. 65.1

њена тежина mg (сл. 65.1). Силу mg разлажемо у нормалну компоненту $mg\cos\alpha$ и тангенцијалну $mg\sin\alpha$. Прва се потире са нормалним отпором равни, дакле је $N = -P\cos\alpha$. Тангенцијална компонента даје тачки убрзање $u = g\sin\alpha$. Ако је почетна брзина тачке једнака нули или има правац највећег пада AB, тачка ће се кретати у тој правој. За сваки други правац биће путања тачке парабола (в. чл. 41).

За праволинијско кретање тачке на глаткој ($f = 0$) стрмој равни гласе познате једначине једнако убрзаног кретања са $u = g\sin\alpha$:

$$s = v_0 t \pm \frac{g\sin\alpha}{2} t^2, \qquad v = v_0 \pm gt\sin\alpha, \qquad v^2 - v_0^2 = \pm 2gs\sin\alpha.$$

Претпоставимо прво да је $v_0 = 0$ и тражимо брзину коју је тачка на крају пута $AB = c$ постигла.

Из треће једначине налазимо

$$v^2 = 2gc\sin\alpha$$

а пошто је $c\sin\alpha = h$ то је

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Крајња је брзина дакле **независна од нагиба равни** и једнака је брзини слободног пада за исту висину. Ако са t' означимо време које је протекло у паду AC а са t време на путу AB, постоји једначина

$$v = gt\sin\alpha = gt',$$

дакле

$$t = \frac{t'}{\sin\alpha}.$$

За сваки нагиб $\alpha < \pi/2$ је $t > t'$ што је очевидно. Galilei је ту чињеницу исказао ставом: *Времена пређених путова односе се као дужине путова.*

На питање колике ће путове прећи тачка на разним равнима за исто време t_1 добићемо одговор када из образаца

$$c = \frac{g\sin\alpha}{2} t_1^2 \quad \text{и} \quad h = \frac{g}{2} t_1^2$$

елминишемо време. Резултат елиминације:

$$c = h\sin\alpha$$

каже да ће тачка пуштена из A по стрмој равни AB стићи у тачку D на периферији круга пречника h за исто време као у слободном паду од A до C. Све путеве AD, AD_1.., као и путеве DC, D_1C. прећиће тачка из стања мира за исто време

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

ти су путеви изохрони.

Када слику 65.1 обрнемо тако да је страна $AC = h$ хоризонтална, имамо низ стрмих равни BA, B_1A_1,.. Пустимо из B, B_1,.. тешке тачке да падају дуж тих равни; пита се по којој ће равни тачка стићи на најкраће време у A?

Дужине $c = AB$ свих равни имају за пројекцију h, дакле $c = h/\sin\alpha = gt^2\cos\alpha/2$ и одавде:

$$t = 2\sqrt{\frac{h}{g\sin 2\alpha}}.$$

Најкраће време је за $\alpha = 45^0$,

$$t_{min} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Ако се тачка креће из B на више почетном брзином v_0, прећиће по стрмој равни пут $v^2{}_0/2g\sin\alpha$ за време $t_2 = v_0/g\sin\alpha$. За $\alpha \to 0$ је $t_2 \to \infty$. На хоризонталној глаткој равни тачка ће се једнолико кретати бесконачно дуго. Сличним расуђивањем дошао је Galilei на идеју принципа инерције (чл. 10) који је тек Њутн као први закон кретања изразио.

Пад на глаткој стрмој равни од историјског је значаја јер је Galilei закон слободног пада проверавао огледима са кретањем тачке на стрмој равни. Узимајући њену дужину $c = 14\ m$, висину $h = 1{,}17$ m, добио је $\sin\alpha = h/s = 1/12$ и тако брзине слободног пада смањио на дванаести део да би мерење путова и времена са својим примитивним сретствима омогућио.

66. Разне врсте отпора трења. Према облику површина које се под притиском додирују и тару (равне, цилиндричне, коничне и у опште обртне површине) и према врсти релативног кретања разликујемо три врсте отпора трења 1) при клизању 2) при вртењу (франц. pivotement) и 3) при котрљању. Пример за 1) је укрсна глава моторног механизма која под притиском вођица (линеала) врши осцилацију. Овамо се може рачунати отпор трења у рукавцима хоризонталног вратила које се обрће око своје геометријске осовине. Рукавци су цилиндрични и на целом омотачу обухваћени својим лежиштем на које преносе оптерећење вратила. Пример за 2) је вертикално вратило. Сада има доње лежиште да прими цео терет вратила. Цилиндрични рукавац завршава се или равном површином управном на осовину вратила или коничном површином. Те површине примају притисак вратила дакле дају отпор трења при вртењу. Оба случаја 1) и 2) су у суштини иста и разликују се само у расподели елементарних отпора $f\,dN$ у појединим елементима dF додирних површина.

Отпор трења при котрљању чврстог ваљка (точка) разликује се у суштини од прва два случаја. Он постаје услед деформације (угиба) ваљка и његове подлоге. Коефицијенте f и f_0 замењују овде коефицијенти e и e_0 који имају димензију дужине и могу се само огледом одредити.

Отпор трења је поред тежине најважнија сила у природи и техници. Када не би било отпора трења (и то статичког трења) не бисмо се могли кретати ни какав предмет у рукама држати. Отпор трења (и средине) омогућује саобраћај на суву, у води и ваздуху. При поледици повећавамо вештачки отпор трења посипањем песка на шине и путове да бисмо кретање омогућили. На супрот овом корисном дејству стоје штетна дејства отпора кинетичког трења у зглавцима и рукавцима машинских органа. Савлађивање тог отпора троши енергију на рачун хабања додирних површина и загревања околног материјала и тиме поскупљује погон машине. Губитак енергије се не може потпуно избећи али се може знатно смањити увођењем течности између додирних површина тј. подмазивањем. Дејство мазива састоји се у томе што један део течности испуњава неравнине површине а други образује слој који раздваја обе површине.

Проблем трења мазаних површина је предмет Хидромеханике. Мазива су течности са унутрашњим трењем или вискозне течности. Теорија ламинарног кретања (тј. у паралелним слојевима) налази да је за велике брзине и мале притиска отпор трења између два тела сразмеран њиховој релативној брзини v, величини F поквашених површина, а обратно сразмеран дебљини h слоја течности: $T = \eta\, F\, v/h$, где је η коефицијент вискозности димензије $[\mathrm{m}\, \mathrm{l}^{-1}\, \mathrm{t}^{-1}]$ који се јако мења са температуром течности.

Уобичајена мазива смањују отпор трења по овом реду: лој, сув сапун, свињска маст, маслиново уље.

Огледи показују да вода у већини случајева повећава отпор трења тако да се може назвати контрамазивом.

За течности које смањују трење као што су масти и уља предложен је назив активне течности, а за оне које повећавају отпор трења као што су бензин, амонијак, терпентин, назив негативне течности. Вода је у стању да активним течностима одузме својство активности.

Код нехомогених материјала као што је дрво, отпор трења је мањи када су при клизању влакна оба тела међусобно управна него када су паралелна; ово се објашњава тиме што се у другом случају обе површине које се тару већма упијају међусобно.

Код сувог трења зависи отпор трења од материјала тела која међусобно клизе. Примена мазива смањује знатно тај утицај на отпор. Тако је на пример за ковано гвожђе на храстовини паралелно влакну суво, $f=0{,}609$; мазано лојем $f=0{,}085$; за ковано гвожђе на брестовини паралелно влакну суво $f=0{,}252$; мазано лојем $f=0{,}078$.

Прецизна испитивања су потврдила да врло танки слојеви течности (течни филмови) који са зрнцима прашине образују капљице могу да величину трења потпуно измене.

На основу Кулоновог закона сувог трења и закона о ламинарном кретању вискозне течности долазимо до овог упоређења отпора трења на јединицу површине.

Код сувих површина	Код мазаних површина
Отпор трења је сразмеран нормалном притиску	Независан од нормалног притиска
Независан од брзине	Сразмеран брзини
Зависи од рапавости површина у додиру	Независан од рапавости наквашених површина
Већи у тренутку покрета	Једнак нули у тренутку покрета.

Из овог упоређења је јасно да примена образаца за суво трење на трење мазаних површина мора довести до противречности са стварношћу; зато се ипак у техничким прорачунима због једноставности то и данас скоро искључиво чини.

67. Угао трења. Конус трења. Неодређеност равнотеже. Замислимо тачку тежине mg да лежи на рапавој стрмој равни нагиба ϑ. Када нагиб постепено малом брзином повећавамо, тачка ће остати у миру, дакле у равнотежи, док ϑ не постигне вредност ϱ_0. За сваки нагиб ϑ важе услови равнотеже:

$$T=mg\sin\vartheta, \qquad N=mg\cos\vartheta;$$

дакле

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{T}{N}.$$

Највећа вредност

$$\operatorname{tg}\varrho_0=f_0$$

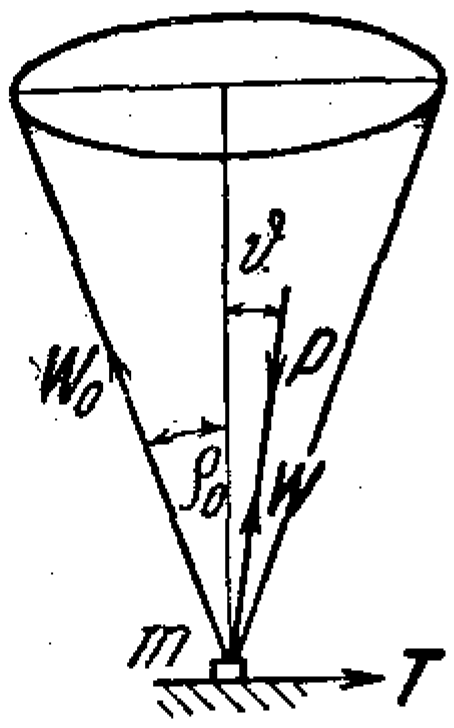
је коефицијент статичког трења а угао ϱ_0 је угао статичког трења. Једначина

$$T\leqslant f_0 N$$

каже да се статички отпор трења појављује у оној величини која је потребна да спречи међусобно клизање тела и да извесну граничну величину не може прећи. Резултанта од N и $T = f_0 N$,

$$W_0 = N\sqrt{1 + f_0^2} = N \sec \varrho_0$$

заклапа са нормалом угао ϱ_0. Конус који описује нападна линија W око нормале зове се **конус статичког трења.** (сл. 67.1). Сила P произвољне величине која заклапа са нормалом угао $\vartheta < \varrho_0$, тј. лежи у конусу, не може тачку m покренути из стања мира јер је њена тангенцијална компонента



Сл. 67.1

$$P \sin \vartheta = N \operatorname{tg} \vartheta < N \operatorname{tg} \varrho_0.$$

Изводнице конуса су гранични положаји силе која још неће покренути тело из стања мира. Конус трења показује очигледно да за материјалну тачку на рапавој површини има ∞^2 могућности равнотеже.

Вратимо се тачки (телу) m која на равни нагиба ϱ_0 још стоји у миру. Ако нагиб и за најмању величину повећамо тачка ће се кренути и са убрзањем u на ниже клизити. Постепеним смањивањем нагиба смањиће се и убрзање и за величину ϱ нагиба биће $u = 0$, тачка ће константном брзином клизити. По принципу инерције тачка се налази у равнотежи, дакле је **коефицијент кинетичног трења**

$$f = \operatorname{tg} \varrho$$

а ϱ је **угао кинетичког трења.** Са коефицијентом f налазимо убрзање тешке тачке на стрмој равни нагиба ϑ.

$$u = g(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) = g\cos\vartheta(\operatorname{tg}\vartheta - f) \text{ а за } \vartheta = \varrho_0 \quad u_0 = g\cos\varrho_0 (f_0 - f).$$

За $\vartheta < \varrho$ убрзање је негативно, тачка ће клизити на више ако добије почетну брзину у том смеру.

68. Старији огледи са отпором трења. Први који је вршио огледе био је вероватно знаменити сликар и инжењер Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452—1519.) Вршио је огледе са трењем при клизању у равни и у рукавцима. У његовим забелешкама има противречности. Тако вели: „Свако тело одупире се на подлози о коју се таре, са четвртином своје тежине". А одмах затим: „Трења тела су од толико различите величине колика је различност клизавости тела која се тару". Француски физичар Амонтон (G. Amontons, 1663—1705.) вршио је 1699. са доста примитивним уређајем опите и дошао до ових резултата: 1. Отпор трења је сразмеран притиску и независан од величине додирних површина. 2. Овај отпор је за сва тела са којима је оглед вршен, скоро једнак и износи од прилике једну трећину притиска. 3. Код тела која се крећу стоји овај отпор у сложеном односу притиска, времена и брзине.

Последња тачка тиче се отпора трења при обртању и котрљању. По Амонтону је отпор трења саоница на чврстом хоризонталном тлу отприлике 1/3 укупног терета, док је код кола у размери обима рукавца и точка отпор мањи. Тако налази Амонтон, за однос 1/18 и $f = 1/3$, да отпор трења кола износи 1/54 целокупног терета.

Амонтонов резултат да је трење независно од величине додирних површина изазвао је велику сумњу академика; резултати огледа Лахира (P. de la Hire, 1640 — 1718.) слагали су се у главном са Амонтоновима али Лахир ипак сматра да у извесним приликама трење расте са додирним површинама.

Паран (A. Parent, 1666 — 1716.) потврдио је својим огледима да на величину трења немају ни величина додирних површина ни брзина кретања никакве утицаје. Он је у својим огледима први применио стрму раван променљивог нагиба и назвао је највећи нагиб при коме тело још стоји у миру углом елевације који данас зовемо углом статичког трења.

Лајбниц (Leibniz, 1646 — 1716.) посветио је питању трења кратку расправу 1710. Он као и Лахир објашњава трење међусобним уклањањем шиљастих испупчења додирних површина која при релативном кретању морају бити или сломљена или савијена или издигнута. Отпор трења стога мора зависити од физичког стања додирних површина. Коефицијент трења не може за све материјале бити исти ($f = 1/3$) као што је Амонтон нашао. Са осталим резултатима Амонтонових огледа се слаже. Холандски физичар и лекар Мушенброк (P. van Musschenbrock, 1692 — 1761.) вршио је огледе искључиво са отпором трења у рукавцима. Његова направа (трибометар састојао се из дрвеног вратила са челичним рукавцима који су обухваћени металним лежиштима. Око вратила положио је уже које носи на крајевима тасове за оптерећење. Својим огледима нашао је: 1. Да је трење челичног рукавца различите величине према материјалу лежишта. 2. Трење није сразмерно притиску него расте у већем односу. 3. За сваки материјал постоји извесна величина додирних површина за које је отпор трења најмањи; према томе претпоставка да је отпор трења независан од величине додирних површина није допуштена. 4. Док је релативна брзина мала, отпор трења је готово сразмеран брзини али при већим брзинама расте много брже него брзина.

Проф. Зегнер (Segner, 1704 — 1777.) у својој дисертацији 1758. сматра кинематичко трење неједнако успоравајућом силом која зависи од брзине, и изводи математичким путем, на основу Мушенброкових огледа закон по коме се приращтаји брзине односе као логаритми одговарајућих величина трења. Али се рачунски резултати већином знатно разликују од резултата огледа. Од веће вредности су рачуни и огледи које је вршио рударски инжењер Шобер (Schober) 1746. у једном окну соног рудника Вијеличке код Кракова. Направа којом је вршио огледе слична је познатој Атвудовој машини (G. Atwood, 1745—1807.) названој тако 1784.

Извештај о његовом раду (објављен 1751.) од вредности је и данас као упутство за срачунавање отпора трења у рукавцима из огледа.

Знаменити швајцарски математичар Ајлер (L. Euler, 1707—1783.) писац прве Аналитичке механике (1736. у Петрограду. II издање 1790. у Грајфсвалду) бавио се теоријски отпором трења. Отпор трења при кретању сматра константном успоравајућом силом и из диференцијалне једначине кретања тела на рапавој равни нагиба ϑ налази величину коефицијента f кинетичког трења $f = \operatorname{tg}\vartheta - 2x/gt^2 \cos\vartheta$, где x означава пут. У суплементу II издања свога дела у седам поглавља (90 страна) изучава дејство отпора трења на: 1) транслаторно кретање, 2) обртање око сталне осовине, 3) кретање зврка који својим врхом клизи по хоризонталној равни, (чигра), 4) котрљање хомогене лопте, 5) котрљање хетерогене лопте на хоризонталној равни и 6) кретање физичког клатна. У првом поглављу Ајлер дефинише трење и објашњава га на исти начин као Лахир и Лајбниц. Своја теоријска излагања заснива на трима феноменима: 1) Трење не зависи од брзине тела. 2) Величина трења не зависи ни од облика ни величина површина које се додирују и 3) Трење је сразмерно притиску којим се тело на површину притискује и веће је што је већа рапавост површина што се тару. Ајлеров образац за величину трења између цилиндричног ваљка и обавијеног ужета добро је познат машинском инжењеру.

Резултати до сада наведених и других испитивања показују велике несагласности тако да је Француска Академија Наука 1779. расписала награду за најбољи рад о отпорима у машинама. Награду је добио Кулон о коме је већ у чл. 64 било говора. Направа Кулона за огледе са трењем клизања састојала се из масивног стола на коме је учвршћена плоча од једног материјала; плоча од другог материјала (или истог) чини дно саоница које могу примити терет, што треба да врши нормални притисак. Уже везано за саонице, пребачено преко хоризонталног ваљка, носи на свом вертикалном крају тегове којима се регулише вучна сила при одређивању величине кинетичког трења. За одређивање коефицијента статичког трења учвршћена је за крај ужета у место таса за тегове полуга која се једним крајем одупире о доњу страну стола и носи померљив тег.

Кулон је вршио огледе и са трењем у рукавцима вратила, са трењем вертикалних вретена и најзад са трењем при котрљању. Нашао је да је отпор при котрљању цилиндричног ваљка сразмеран оптерећењу а обратно сразмеран полупречнику ваљка. О суштини отпора при котрљању није дао објашњења.

Енглески инжењер Рени (G. Rennie) вршио је 1825—1829. огледе да нађе величину хабања додирних површина при трењу тела разног материјала. Поред тога опажао је и отпор трења Служио се као раније Паран стрмом равни. Огледно тело клизило је по њој само 11,4 cm. Сем материјала који је Кулон испитивао, одредио је Рени коефицијент f за кожу на ливеном гвожђу и нашао $f = 0{,}315$ за оптерећење 0,5 kg/cm² а $f = 0{,}255$ за двоструко оптерећење. За међусобно трење сукна: $f = 0{,}5$ до 0,35 према квалитету. Најмању вредност нашао је за челик на леду: $f = 0{,}027$ за 0,7 kg/cm² а $f = 0{,}014$ за 5,6 kg/cm².

Скоро 40 година сматрани су Кулонови огледи као једини поуздани за техничке рачуне.

1830. почео је француски арт. капетан Морен (A. Morin, 1795—1880.) своје врло обимне и прецизне огледе са отпором клизања. У принципу његов је уређај био сличан Кулоновом. Дужина пута износила је до 4 m а брзина до 3,5 m/sec. Напон ужета које је вукло саонице и дијаграм пута и времена бележени су аутоматски. Нормални притисак варирао је између 46 и 1145 kg, а додирне површине између 40 и 880 cm².

Огледе је вршио на разним врстама дрвета, камена, гвожђем, месингом, бронзом у многим комбинацијама, са кожом и ужетима, са сувим, овлаженим и мазаним површинама. Резултати се нису слагали са Кулоновим. Тако на пример за храстовину на храстовини са кретањем паралелно влакнима нашао је Кулон: $f = 0{,}104$, $f_0 = 0{,}440$ а Морен: $f = 0{,}478$, $f_0 = 0{,}625$. Узрок ових несагласности лако се објашњава тиме што степен рапавости није могућно строго дефинисати, према томе није могућно ни исти степен у доцнијим огледима репродуковати.

Из свих 179 серија са по хиљаду огледа што их је Морен извршио, извео је ове опште закључке: Трење при кретању је 1) Сразмерно притиску, 2) Независно од величина додирних површина и 3) Независно од брзине кретања.

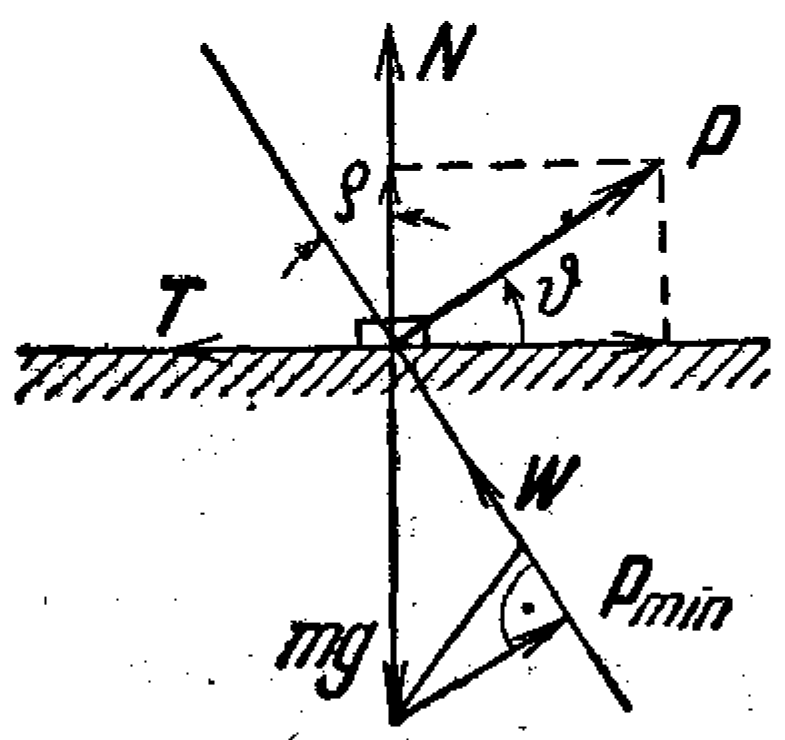
Морен је 1834. вршио огледе са трењем у рукавцима од кованог и ливеног гвожђа и бронзе и нашао из 188 огледа коефицијенте трења за подмазиване рукавце (са уљем, свињском масти или сапуном) при сталном мазању: $f_1 = 0{,}054$, при обичном мазању: $f_1 = 0{,}070 - 0{,}080$: за мало мазане, суве или водом квашене рукавце: $f_1 = 0{,}140 - 0{,}160$. Доцније (од 1847) вршио је Морен огледе са отпором при котрљању са циљем да одреди отпор запрежних кола на обичним друмовима.

Са Мореновим радовима завршена је прва епоха експерименталног испитивања трења. Техника је усвојила Кулон—Моренова гледишта и коефицијенти f_0 и f Моренови и данас су скоро искључиво примењени.

У доњој таблици наведени су коефицијенти f_0 и f за неке материјале који се из познатих разлога могу сматрати приближним величинама.

Материјал	f_0 за статичко трење			f за трење при клизању		
	суво	мазано	са водом	суво	мазано	са водом
Челик по челику	0,15	0,10	—	0,10	0,01	—
Ковано гвожђе по ливеном или бронзи	0,18	0,10	—	0,16	0,01	—
Топљено по вареном гвожђу	0,50	0,13	0,65	0,44	—	0,22
Метал по дрвету	0,60—0,50	0,10	—	0,50—0,20	0,08—0,02	0,26—0,22
Дрво по дрвету	0,65	0,20	0,70	0,40—0,20	0,16 - 0,04	0,25
Кожа по металу	0,60	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Дрво по камену	до 0,70	0,40	—	0,30	—	—
Челик по леду	до 0,027	—	—	0,014	—	—

69. Кретање тачке по рапавој хоризонталној и стрмој равни. а) На хоризонталној рапавој равни креће се тачка под дејством дате силе P и сопствене тежине mg (сл. 69.1).



Сл. 69.1

У правцу вертикале силе се потиру:

$N + P\sin\vartheta - mg = 0$ дакле $N = mg - P\sin\vartheta$.

Тангенцијална сила је

$T = P\cos\vartheta - f\,N = P\cos\vartheta - f\,(mg - P\sin\vartheta)$.

Увођењем угла трења ϱ добијамо после лаке трансформације убрзавајућу силу:

$$m\,u = \frac{1}{\cos\varrho}\left[P\cos(\varrho - \vartheta) - mg\sin\varrho\right].$$

Тачка ће се кретати константним убрзањем. У пракси биће дата брзина v_1 којом ће се тачка једнолико кретати и време t_1 за које треба ту брзину да постигне, тиме је дато убрзање $u = v_1/t_1$. Овим податцима налазимо величину силе P са нагибом ϑ из последње једначине:

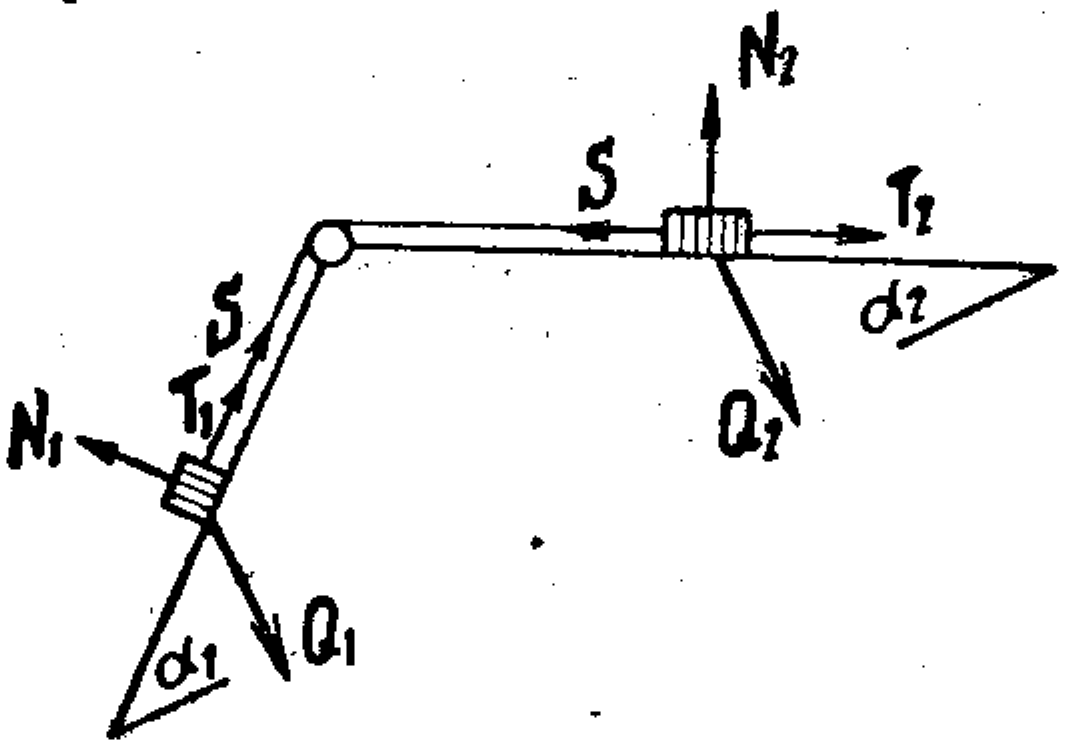
$$P = \frac{(v_1\cos\varrho)/t_1 + g\sin\varrho}{\cos(\varrho - \vartheta)}\,m.$$

Најмању вредност имаће сила када је именилац највећи тј. за $\vartheta = \varrho$.

$$P_{min} = \left(\frac{v_1\cos\varrho}{t_1} + g\sin\varrho\right)m,$$

вати тачку да се не креће убрзано на ниже. У оба случаја најмању вредност има сила P_0 за нагиб $\vartheta = \varrho$ према путањи. Графичко одређивање силе P_0 за разне нагибе ϑ је аналогно ономе под а).

Пример. На двема стрмим равнима нагиба α_1 и α_2 и коефицијентом статичког трења f_0 леже терети Q_1 и Q_2 везани међусобно ужетом које је пребачено преко котура на врху путање (сл. 69.3). Када занемаримо трење у котуру биће у целом ужету исто затезање S. Тежину ужета не узимамо у обзир. Пита се у којим границама може однос Q_1/Q_2 лежати а да не наступи кретање. Претпоставимо да се најмањим повећањем терета Q_1 почело кретање на лево Услови равнотеже су:



Сл. 69.3

$$S + T_1 - Q_1 \sin\alpha_1 = 0, \quad -S + T_2 + Q_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

$$N_1 = Q_1 \cos\alpha_1, \quad N_2 = Q_2 \cos\alpha_2 .$$

По Кулоновом закону је

$$T_1 \leqq f_0 N_1 \quad \text{и} \quad T_2 \leqq f_0 N_2 :$$

Сабирањем налазимо

$$T_1 + T_2 = Q_1 \sin\alpha_1 - Q_2 \sin\alpha_2 \leqq f_0 (N_1 + N_2)$$

и после смене N_1 и N_2 добијамо

$$\frac{Q_1}{Q_2} \leqq \frac{\sin\alpha_2 + f_0 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 - f_1 \cos\alpha_1}$$

и увођењем угла трења ϱ_0

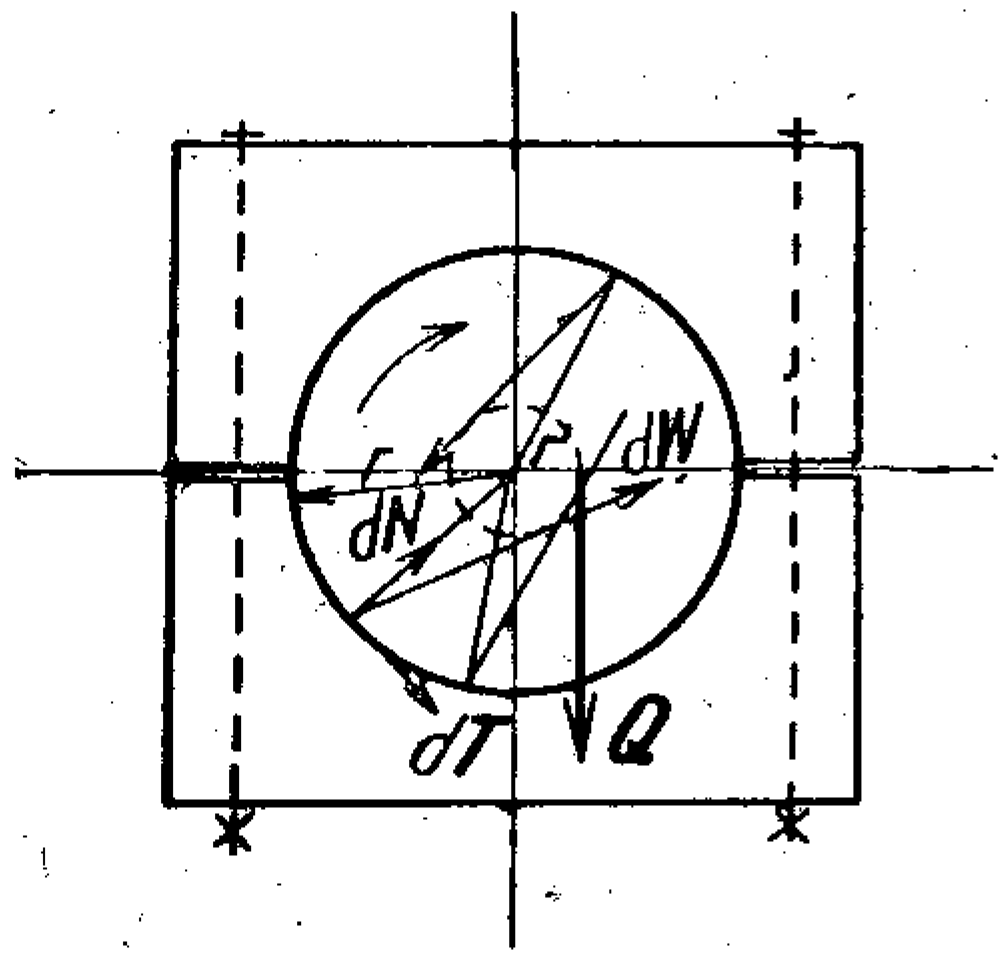
$$\frac{Q_1}{Q_2} \leqq \frac{\sin(\alpha_2 + \varrho_0)}{\sin(\alpha_1 - \varrho_0)} .$$

Када би услед повећања Q_2 наступило кретање на десно обрнули би се смерови T_1 и T_2.

Другу границу за равнотежу налазимо из прве када ϱ_0 заменимо са $-\varrho_0$ и обрнемо знак неједнакости. Тако добијамо одговор да ће равнотежа постојати за све односе Q_1/Q_2 који леже између граница

$$\frac{\sin(\alpha_2 - \varrho_0)}{\sin(\alpha_1 - \varrho_0)} \leqq \frac{Q_1}{Q_2} \leqq \frac{\sin(\alpha_2 + \varrho_0)}{\sin(\alpha_1 - \varrho_0)} .$$

70. Отпор трења у рукавцима. Круг трења. Рукавац полупречника r стегнут је између обе половине лежишта (сл.70.1) тако да на сваком елементу ds обима влада нормални притисак dN управљен ка центру рукавца. Распоред сила dN по обиму круга није познат, али је **геометријски збир** $\int d\vec{N}$ једнак терету који на рукавцу лежи, дакле $\int_0^{2\pi} d\vec{N} = \vec{Q}$. Док се вратило не обрће пролази сила Q кроз центар круга, а када почиње да се обрће и за време обртања настају отпори трења $dT = f\,dN$. Статички момент отпора трења у погледу на осовину рукавца или краће **момент трења рукавца** је



Сл. 70.1

$$M_r = \int r\,dT = r f \int dN,$$

где је $\int dN$ **аритметички** збир елементарних dN који је увек већи од геометријског збира. Стога постоји једнакост

$$\int dN = \alpha\,Q,$$

где је $\alpha > 1$.

Са ознаком $\alpha f = f_1$ добијамо моменг трења:

$$M_r = f_1\,r\,Q.$$

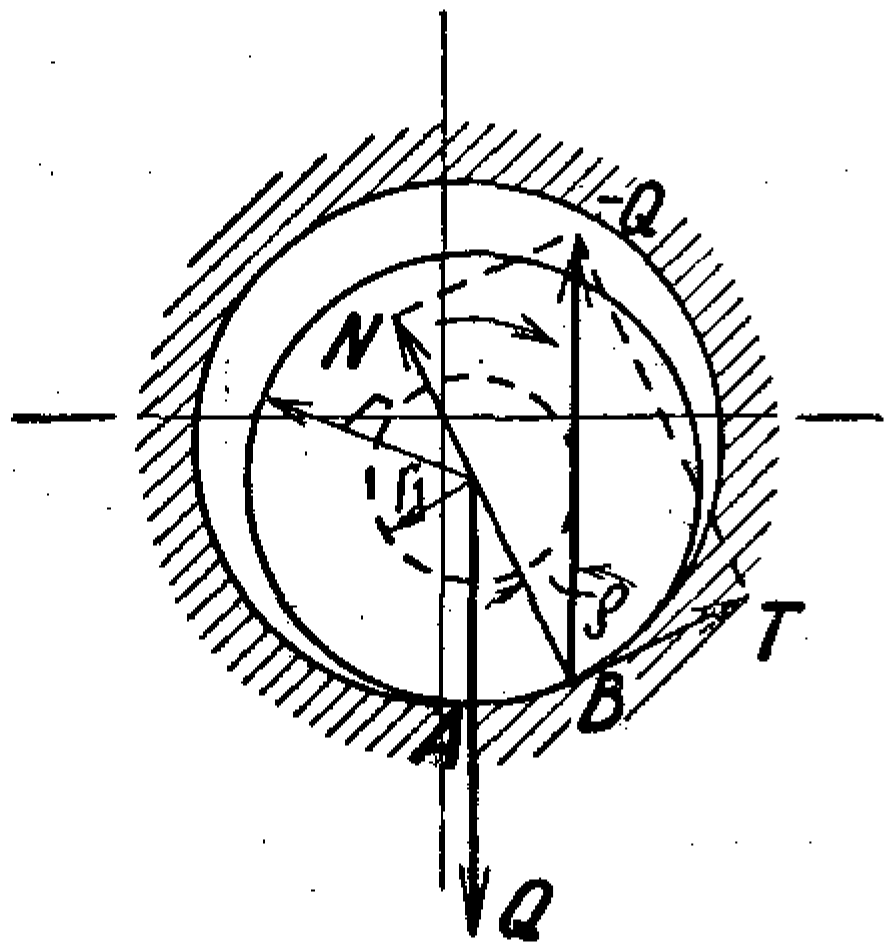
Број f_1 зове се **коефицијент трења рукавца**, а круг полупречника $f_1 r = r'$ је **круг трења**. Пошто је расподела притиска по обиму непозната, може се f_1 само огледима одредити. Круг трења је **обвојница** (enveloppa) свих елементарних отпора: $dW = dN\sqrt{1+f_1^2}$.

Ако је рукавац у лежишту јако стегнут може момент потребан за обртање вратила бити врло велик, а Q може бити при том ма како мало.

Обртање рукавца сталном угаоном брзином омогућено је обртним моментом једнаким и супротним моменту трења $Q\,r'$.

Када је рукавац или лежиште излизано, полупречник рукавца r нешто мањи од полупречника лежишта, налегаће рукавац само у једној изводници, тачније у једној уској прузи лежишта (сл. 70,2). Услед обртања рукавца попеће се додирна тачка из најнижег положаја A у B тако да је $\widehat{AB} = r\varrho$. Услов равнотеже је

$$\vec{Q} = \vec{N} + \vec{T};$$



Сл. 70.2

са $T = Q \sin\varrho$ је

$$M_r = Q\, r \sin\varrho = f_1\, r\, Q = r_1\, Q,$$

где $\sin\varrho = f_1$ значи коефицијент трења а $r_1 = f_1\, r$ полупречник круга трења.

При константном обртању рукавца терет Q додирује круг трења. У стању мира је

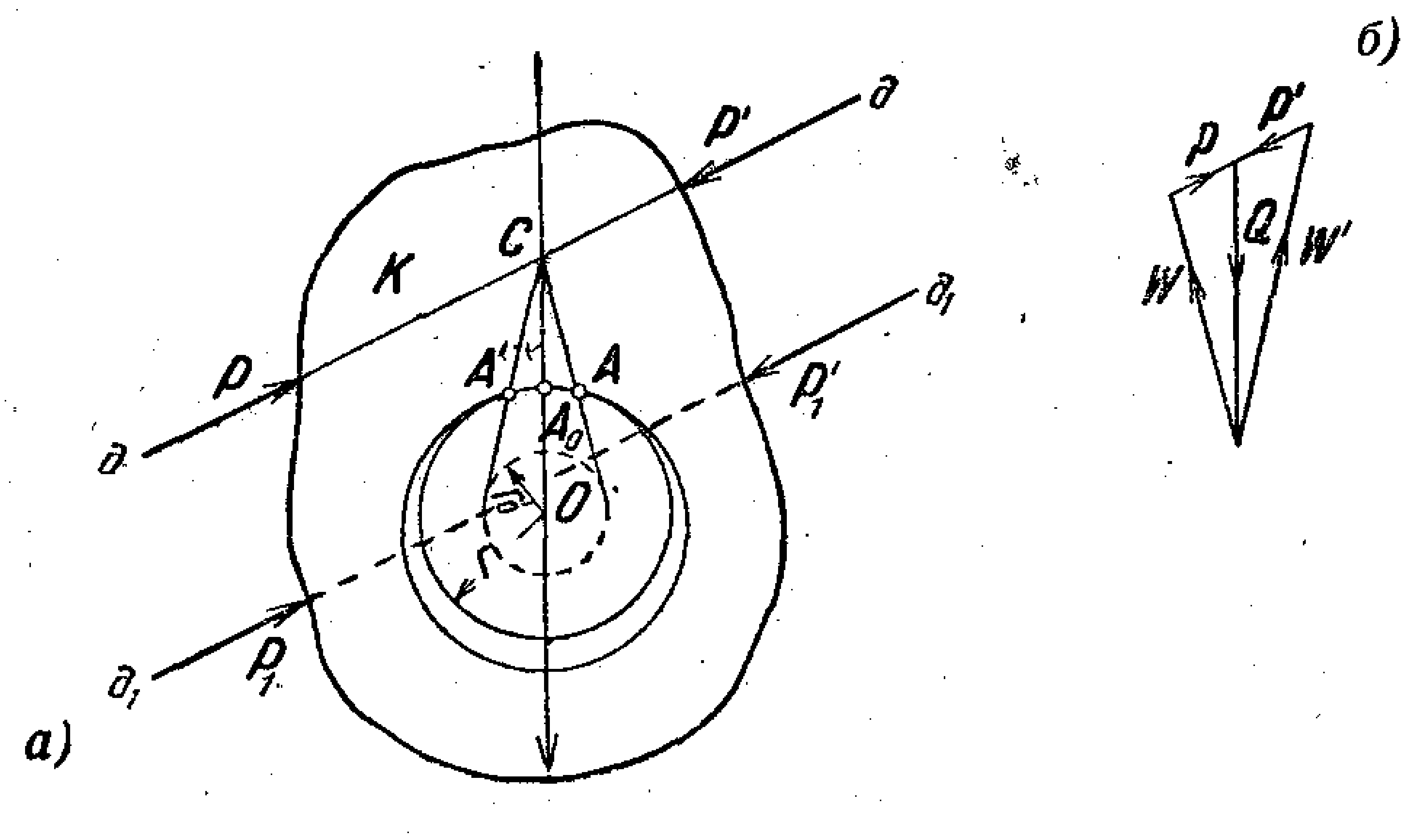
$$M_r \leqq r_1\, Q,$$

дакле ће Q сећи круг трења.

Изведени образац момента трења за суве површине примењује се у техничкој пракси и за мазане површине са коефицијентима Мореновим (чл. 68), иако код ових владају сасвим друге прилике.

Пример. Равна плоча тежине Q виси о хоризонталној цилиндричној осовини полупречника r (сл. 70.3). Пита се колика мора бити сила P у датој нападној линији $a - a$ и са датим полупречником r_0' круга статичког трења, која би могла плочу K покренути из стања мира.

Услов равнотеже је да се сила P, тежина плоче Q и отпор W секу у једној тачки. Та је тачка већ одређена пресеком силе Q и дате праве $a - a$. Отпор W мора кроз ту тачку C пролазити и круг статичког трења додиривати. Како из C можемо

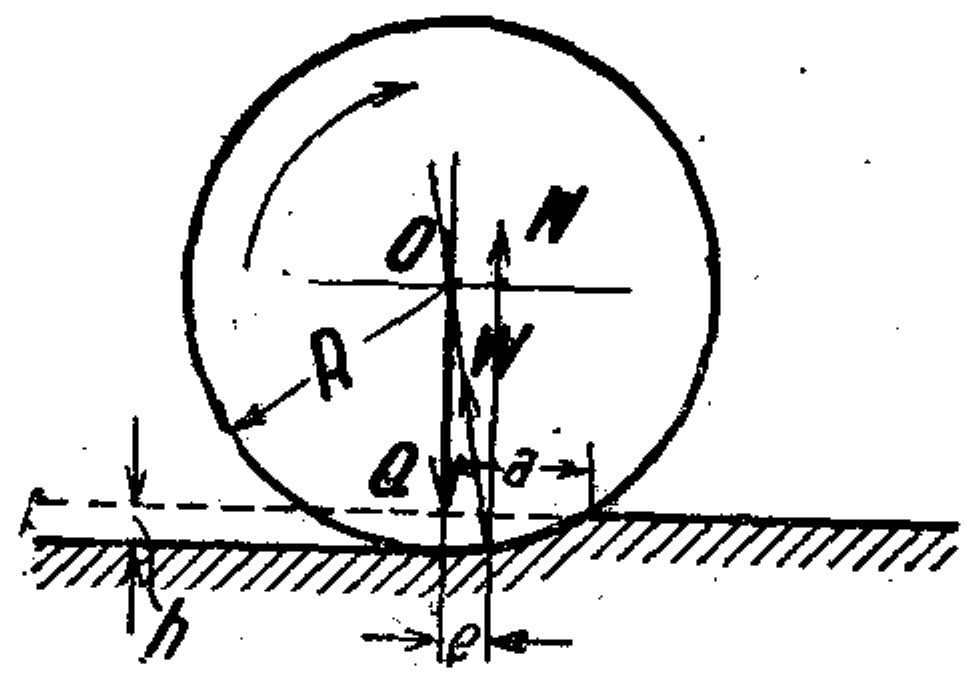


Сл. 70.3

две тангенте на тај круг положити, има задатак два решења помоћу два троугла сила (сл. 70.3б). Сила P ће покренути плочу K на десно (у смислу сказаљке на сату) а сила P' у супротном смислу. При томе се додирна тачка између плоче и осовине помиче из A_0 у A односно A'. Ако дата нападна линија $a - a$ сече круг трења, никоја величина сиде P не може кренути плочу из стања мира. Имамо случај самокочења.

71. Отпор трења при котрљању. Цилиндрични ваљак остаће у миру на хоризонталној равни у сваком положају. Искуство нас учи да ће остати у миру и ако подлози дамо мали нагиб ϑ. То значи да у додиру ваљка и подлоге постоји отпор T који се потире са компонентом $Q \sin \vartheta$ тежине ваљка.

Овај отпор котрљања можемо објаснити када ваљак и његову подлогу не сматрамо крутим, непроменљивим, него деформабилним (еластичним или пластичним телима). Ваљак ће додиривати подлогу у малом луку s (сл. 71.1) и отпор подлоге биће



Сл. 71.1

$$\vec{W} = \int_0^s d\vec{W}.$$

Претпостављамо да се деформација ваљка може занемарити а да је подлога пластична тј. трпи трајну деформацију. Ваљак ће у кретању на десно оставити подлогу удубљену за висину h. Елементарни отпори $d\vec{W}$ подлоге расподељени су на кружни лук коме је полутетива a. Њихова резултанта $\vec{W}$ лежи испред вертикалног пречника, удаљена за дужину e. Док је ваљак у миру или у једноликом кретању, морају силе што нападају ваљак бити у равнотежи. Отпор $\vec{W}$ разложимо у нормалну компоненту N и хоризонталну компоненту T. Прва се потире са Q а T налазимо из сличности троугла сила $\vec{W}$, $\vec{Q}$ и $\vec{T}$ са троуглом на сл. 71.1:

$$T : Q = e : R, \qquad T = \frac{e}{R} Q = \frac{e}{R} N.$$

Исти резултат добијамо из услова равнотеже да збир момената око 0 мора бити једнак нули дакле,

$$Ne - TR = 0.$$

Момент Ne зове се момент трења при котрљању а дужина e је коефицијент трења при котрљању. *Отпор кретања при котрљању је пропорционалан моменту трења и обрнуто пропорционалан полупречнику ваљка.*

Крак e силе N можемо под извесним претпоставкама рачуном одредити. Из Геометрије круга имамо однос $a^2 = 2Rh$. Како је h према R мало, можемо кружни лук тетиве a сматрати параболом са вертикалном осовином. Са даљом претпоставком да је на сваком месту лука притисак пропорционалан угибу, пролазиће отпор W кроз тежиште параболичног сегмента, који је за $3a/8$ удаљен од вертикале Тако налазимо

$$e = \frac{3}{8}\,a = \frac{3}{8}\sqrt{2Rh}\,.$$

За дато оптерећење Q мора површина параболичног сегмента дакле и производ $ah = C$ бити независан од R; константа C зависи само од Q и од попустљивости подлоге. Сменом h из последње једначине добијамо $a^3 = 2RC$ и одавде

$$e = \frac{3}{8}\sqrt[3]{2RC}\,.$$

Због несигурних претпоставки овај теоријски образац нема велике вредности. Најсигурнији начин за одређивање коефицијента је мерење вучне силе $H = T$ помоћу динамометра и примене обрасца $e = TR/Q$.

Ако подлога ваљка није потпуно пластична, она ће се иза ваљка мало подићи; додирни лук ће се продужити иза ваљка, тако да ће се растојање e резултанте $\vec{W}$ од вертикале смањити и тиме и отпор T бити мањи.

На потпуно еластичној подлози је додирни лук симетричан према вертикали кроз центар ваљка па би се могло мислити да ће отпор котрљања због $e = 0$ потпуно нестати. Међутим оглед каже да је сада отпор много мањи него код пластичне деформације тла али није једнак нули. Та се чињеница може овако објаснити. Под притиском ваљка на потпуно еластично тло настаје поред удубљења у вертикалном правцу и истезање у уздужном правцу. Услед тога је дужина пута што га ваљак за потпуни обрт на тлу пређе, нешто мањи од његовог обима, то значи да ће на неким местима настати клизање на тлу. Отпори трења тог клизања dT даће са нормалним отпорима dN укупни отпор $\vec{W}$ који ће као и раније нападати тачку удаљену за e испред вертикале.

Коефицијент e зависи од физичке особине ваљка и тла. Када количник e/R означимо са μ_1 добијамо отпор трења при котрљању:

$$T = \mu_1 N$$

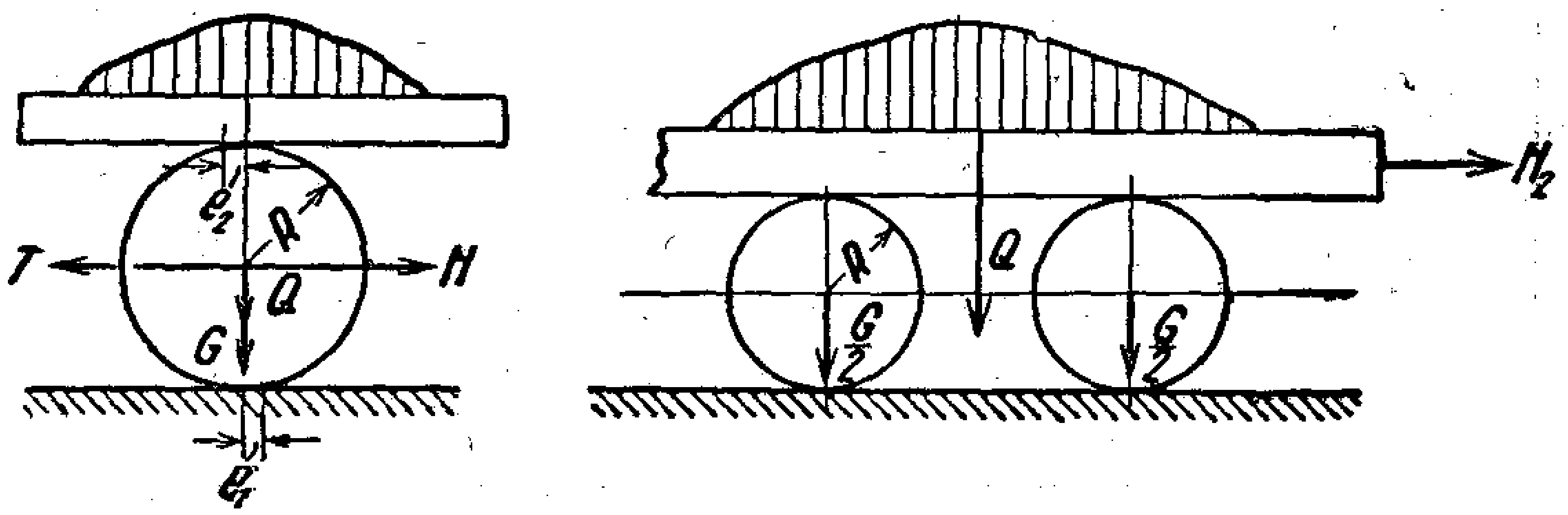
истог облика као што је Кулон-Моренов закон за трење при клизању.

Према огледима варира величина e између 0,05 cm за челичне точкове на шинама и (1,0 до 1,5) cm за точкове са гуменим обручем на меком тлу.

72. Отпор точкова код возила. Најстарија сувоземна возила била су саонице. На њима су превожени и врло велики терети (споменици у Египту и Асирији). Ради смањивања отпора трења саонице су клизале на подметнутим гредама које су уљем мазане. Доцније су подметани ваљци на којима су се терети котрљали. Тај начин покретања примењује се и данас при померању зграда на челичним ваљцима. Истовремено биле су већ познате двоколице за мање терете (путнике). Конструкција точкова за веће терете тек је доцније успела.

Транспорт ваљцима и колима разликује се у томе што на ваљцима лежи терет непосредно док се код кола преноси преко коша (сандука) и постоља на осовине и точкове. Осовине су или чврсто везане са точковима (код железничких кола, аутомобила) или са постољем (код запрежних кола).

При транспорту терета на ваљцима појављују се два отпора котрљања: између ваљка и подлоге (коефицијент e_1) и између ваљка и плоче која носи терет (коефицијент e_2). Када поред терета Q узмемо



Сл. 72.1

у обзир и сопствену тежину ваљка G односно $G/2$ (сл. 72.1) биће момент трења при котрљању

$$M_k = Q\,(e_1 + e_2) + G\,e_1.$$

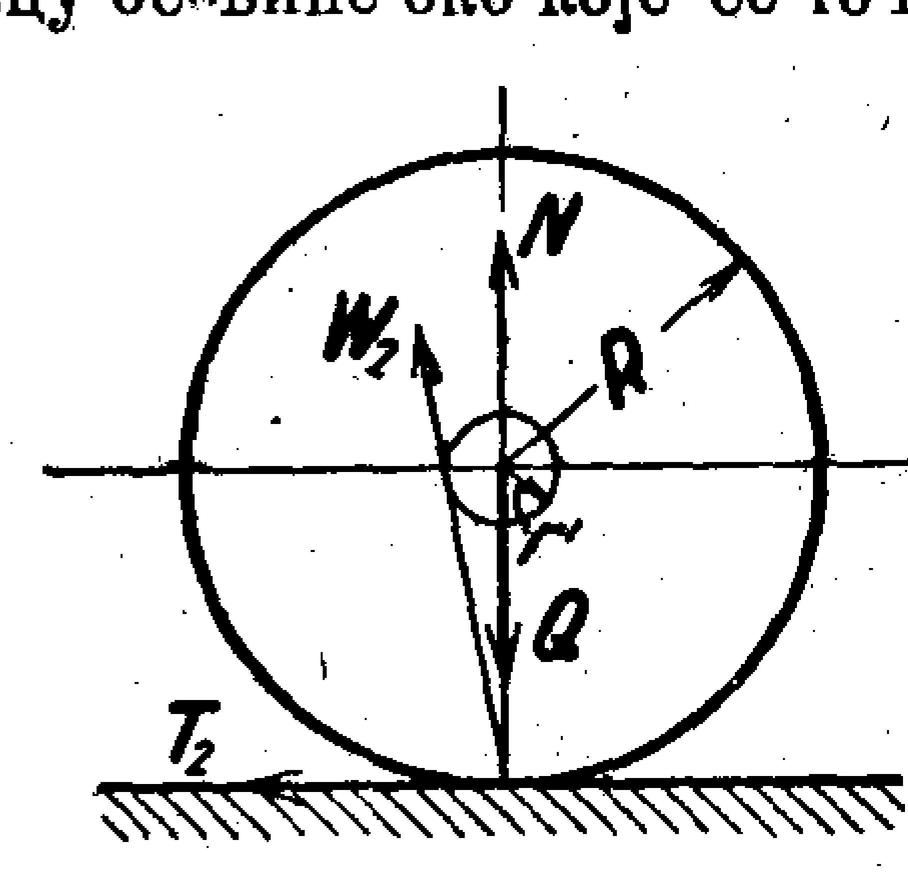
На сл. 72.1а напада вучна сила H_1 центар ваљка дакле је $H_1 = M_k/R$, а на сл. 72.1б напада H_2 обим ваљка, дакле је $H_2 = {}^1/_2\, M_k/R$.

Код колских точкова јавља се само на тлу отпор котрљања

$$T_1 = \frac{e}{R}\,N = \mu_1\,N,$$

али њему придолази отпор трења у рукавцу осовине око које се точак обрће. Видели смо (у чл. 70) да резултујући отпор W_2 мора при једноликом обртању додиривати круг трења (сл. 72.2) са полупречником $r' = f_1\,r$, где је r полупречник рукавца а f_1 коефицијент трења у рукавцу. Разлагањем отпора W_2 у компоненте T_1 и N налазимо

$$T_2 = \frac{f_1 r}{R}\,N = \mu_2\,N.$$

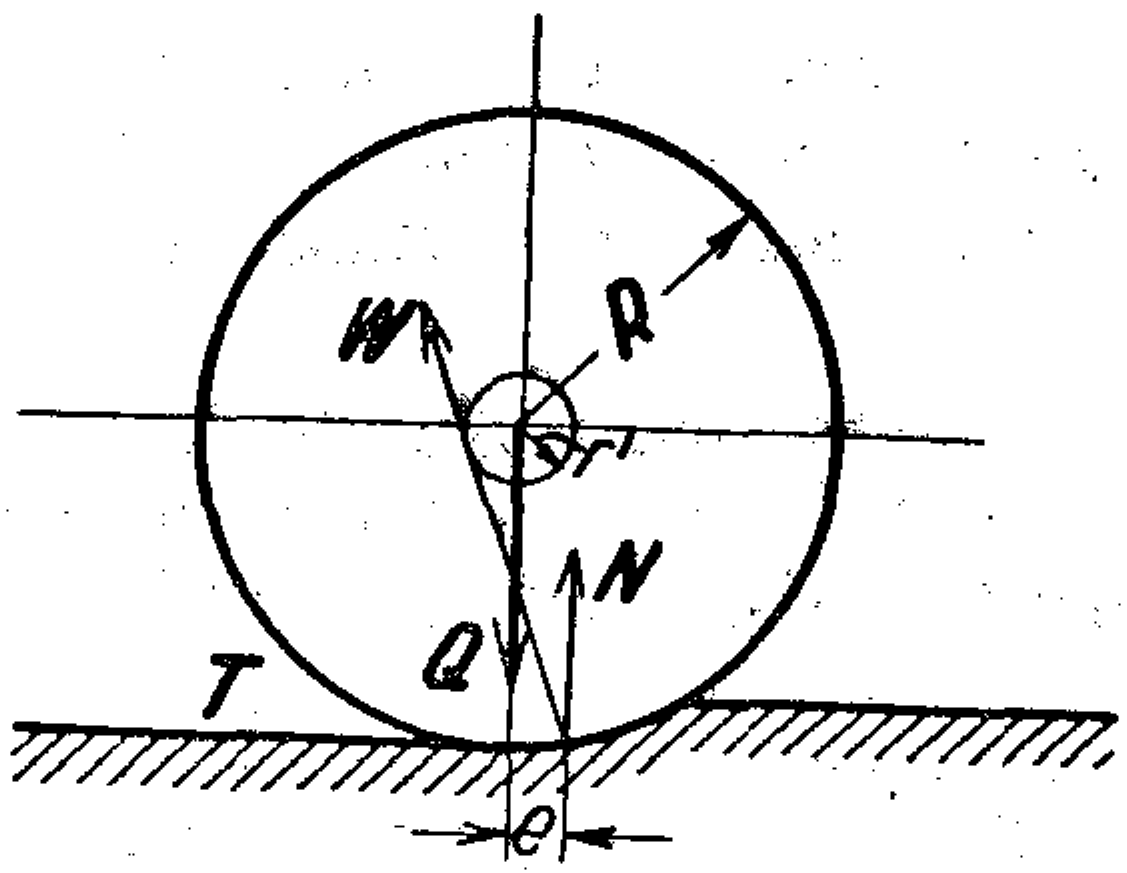


Сл. 72.2

Укупни отпор точка под притиском N

услед котрљања и трења у рукавцима (сл. 72.3) је

$$T = T_1 + T_2 = \frac{f_1 r + e}{R} N = (\mu_1 + \mu_2) N = \mu N$$



Сл. 72.3

Отпор трења T је дакле сразмеран нормалном отпору као и код клизања по рапавој равни.

Сви обрасци које смо нашли за клизање тела по хоризонталној и стрмој рапавој равни важе и за кретање кола када коефицијент клизања f заменимо са коефицијентом μ отпора кола.

Као што смо f изразили углом трења ϱ ($f = \operatorname{tg} \varrho$), тако можемо и $\mu = \operatorname{tg} \beta$ изразити тангенсом угла β. У следећој таблици наведене су вредности μ и β за разне коловозе.

	μ	β
Железничке шине	0,005	$0^0\ 20'$
Трамвајске шине	0,006 — 0,008	$0^0\ 20' - 0^0\ 30'$
Асфалтни друмови	0,0125	$0^0 45'$
Добри обични друмови	0,020	$1^0 10'$
Суви земљани путеви	0,050	$2^0 50'$
Новошљунчени путеви	0,142	$8^0 10'$
Пешчани путеви	0,14 — 0,28	$8^0 - 15^0\ 40'$.

Из ових бројева видимо да ако одбацимо последњи ред таблице, максимални угао β износи 8^0, $\sin 8^0 = 0{,}139$, $\operatorname{tg} 8^0 = 0{,}140$, $\cos 8^0 = 0{,}990$.

С обзиром на приближне вредности коефицијента μ можемо у обрасцима чл. 69 са довољно тачношћу ставити $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta$ и $\cos \beta = 1$.

Нагиб путева α према хоризонтали означава се са успоном $\operatorname{tg} \alpha = \nu$. Тако на пример $\nu = 25^0/_{00}$ значи да се за 1000 m хоризонталне дужине пут попне за 25 m. Максимални успон железница је $35^0/_{00}$ а друмова $(60-80)^0/_{00}$ што одговара углу $\alpha = 4^0 40'$. Можемо дакле ставити $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ и $\cos \alpha = 1$.

Кад још имамо на уму да ће и нагиб ϑ вучне силе према путањи бити мали, гласиће једначина за вучну силу:

$$H = Q \frac{\sin(\varrho \pm \alpha)}{\cos(\varrho - \vartheta)}$$

која ће терет Q константном брзином вући (чл. 69) краће:

$$H = Q(\mu \pm \nu).$$

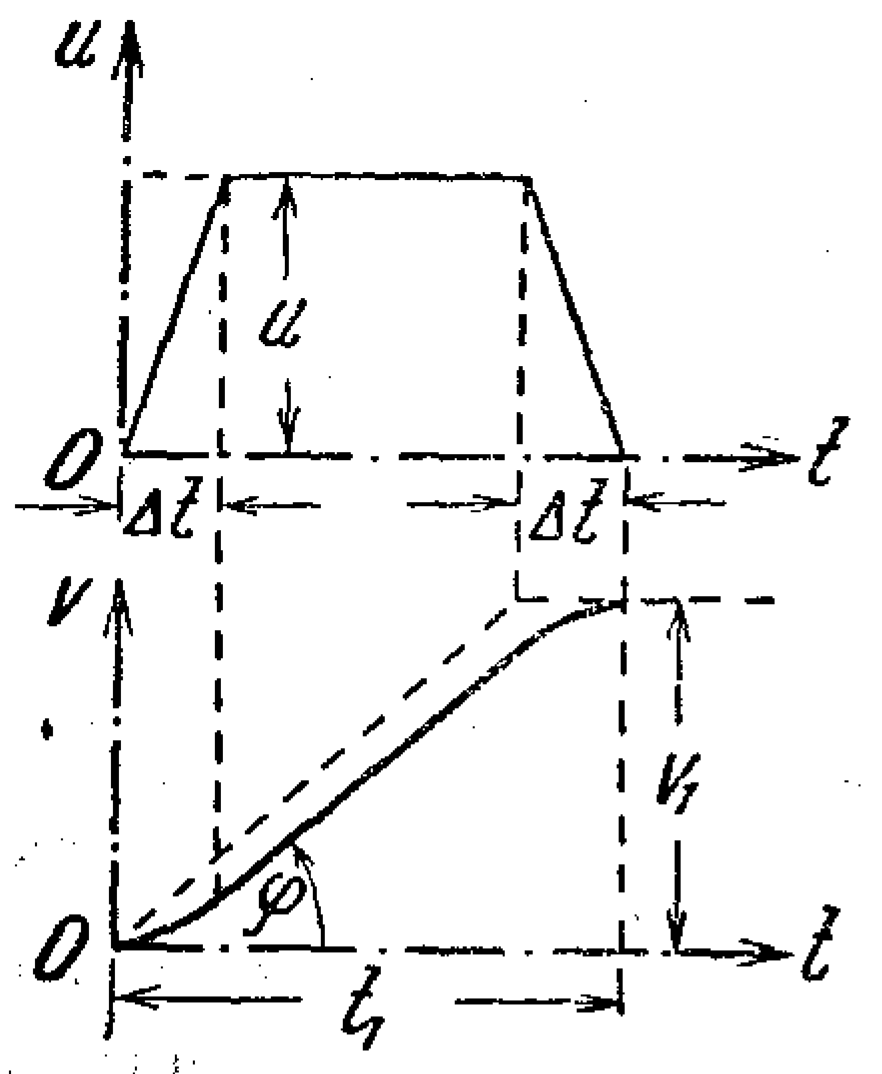
За кретање на више важи горњи знак, за кретање на ниже доњи. За кретање по хоризонталном путу је $\nu = 0$.

При разматрању кретања кола сматрали смо кола материјалном тачком, тј. телом које се транслаторно креће (чл. 47.). Обртање точкова нисмо узели у рачун, што је допуштено јер је маса точкова према укупној маси возила незнатна.

Коефицијент f_0 статичког трења клизања од значаја је за кретање локомотиве. Ако са Q означимо онај део тежине локомотиве који лежи на моторним точковима и онима која су са њима спрегнута (т. зв. адхезиона тежина локомотиве) а са H потребну вучну силу, локомотива ће се кренути само ако је $Qf_0 \geqq H$. У противном случају локомотива се неће кренути а адхезиони точкови обртаће се на месту услед притиска паре.

Кретање сваког возила састоји се из три дела: 1) Покрет од $v=0$ до прописане брзине v_1. 2) Једнолико кретање брзином v_1. 3) Успорено кретање до $v = 0$. Нормална брзина v_1 као и време t_1 за које треба да је брзина v_1 постигнута дате су величине. Дакле је $u = v_1/t_1$ одређено.

Теоријски био би дијаграм убрзања и времена правоугаоник основе t_1 и висине u. То би значило да возило масе m моментано нападне сила $P = mu$, другим речима удар који не би био пријатан ни за путнике ни за возило. Да убрзање порасте од нуле до коначне величине u и обратно потребно је и ако мало, али коначно време Δt. Дијаграм $u = f(t)$ биће у ствари трапез са основом t_1 и паралелном страном $(t_1 - 2\Delta t)$ (сл. 72.4). Дијаграм $v = f(t)$ биће у интервалима Δt парабола са вертикалом осовином које додирује права нагиба $\varphi = \operatorname{arc\,tg} u$.



Сл.72.4

73. Новији огледи о отпору трења.

Нагли развитак машинске и саобраћајне технике у другој половини прошлог века дао је повода многим и обимним огледима са циљем да утврде утицај брзине, нормалног притиска и величине додирних површина на коефицијенте f и f_0.

Из великог броја прецизних огледа извршених ради проверавања Моренових огледа закључио је Конти (P. Conti 1874/75.) да за мале брзине f испочетка расте са v, за $v=(1-2)\,\mathrm{m/sec}$ постизава максимум а после опада, испрва нагло а после спорије. Разлика између почетне и максималне вредности f је тим мања што је већи нормални притисак.

За Механику железничког саобраћаја од интереса су отпори трења клизања при већим релативним брзинама. Француски инжењери Поаре (J. Poirée, 1852.) и Боше (H. Bochet, 1861.) вршили су огледе са трењем између железничких точкова у обртању и папуче за кочење, као и између укочених точкова и шина за брзине од 4 до 22 m/sec.

Резултате огледа изразио је Боше обрасцем:

$$f=\frac{f_0-f_\infty}{1+a\,v}+f_\infty$$

где су a, f, f_0 и f_∞ константе зависне од материјала. За $v=0$ даје образац $f=f_0$ коефицијент статичког трења.

У истом циљу вршио је Енглез Галтон (Douglas Galton, 1878—1879.) велики број огледа са одличним уређајем и дошао до сличних резултата као Французи. За кретање точкова по челичним шинама нашао је просечно:

$$f=0{,}088,\ 0{,}065,\ 0{,}027 \qquad \text{за } v=3{,}09,\ 15{,}16,\ 26{,}7\ \mathrm{m/sec}.$$

Галтон је испитивао трење папуча од ливеног гвожђа на челичним бандажама точкова и нашао екстремне вредности:

$$f=0{,}058-0{,}123 \text{ код } v=26{,}8\,\mathrm{m/sec}$$

и

$$f=0{,}123-0{,}325 \text{ код } v=2{,}1\,\mathrm{m/sec}.$$

Све резултате огледа Поаре-а, Боше-а и Галтона изразио је Франке (J. Franke) обрасцем:

$$f=a\,e^{-\alpha v} \qquad (v \text{ у m/sec})$$

са константама:

$a=0{,}29$	$\alpha=0{,}04$	за ливено гвожђе на челику, суво
0,29	0,02	за ковано гвожђе на кованом гвожђу, суво
0,24	0,029	„ „ „ „ „ „ влажно.

Огледи које је Вихерт (Wichert, 1889.) вршио са кочницама железничких кола при брзинама до 90 km/h дали су резултате који се подударали са ранијима. Савез Управа немачких железница усвојио је стога Боше-ов образац са константама:

$$a=0{,}226,\ f_\infty=0{,}0495\,f_0,$$

$f_0=0{,}45$ за суве, $f_0=0{,}25$ за влажне површине.

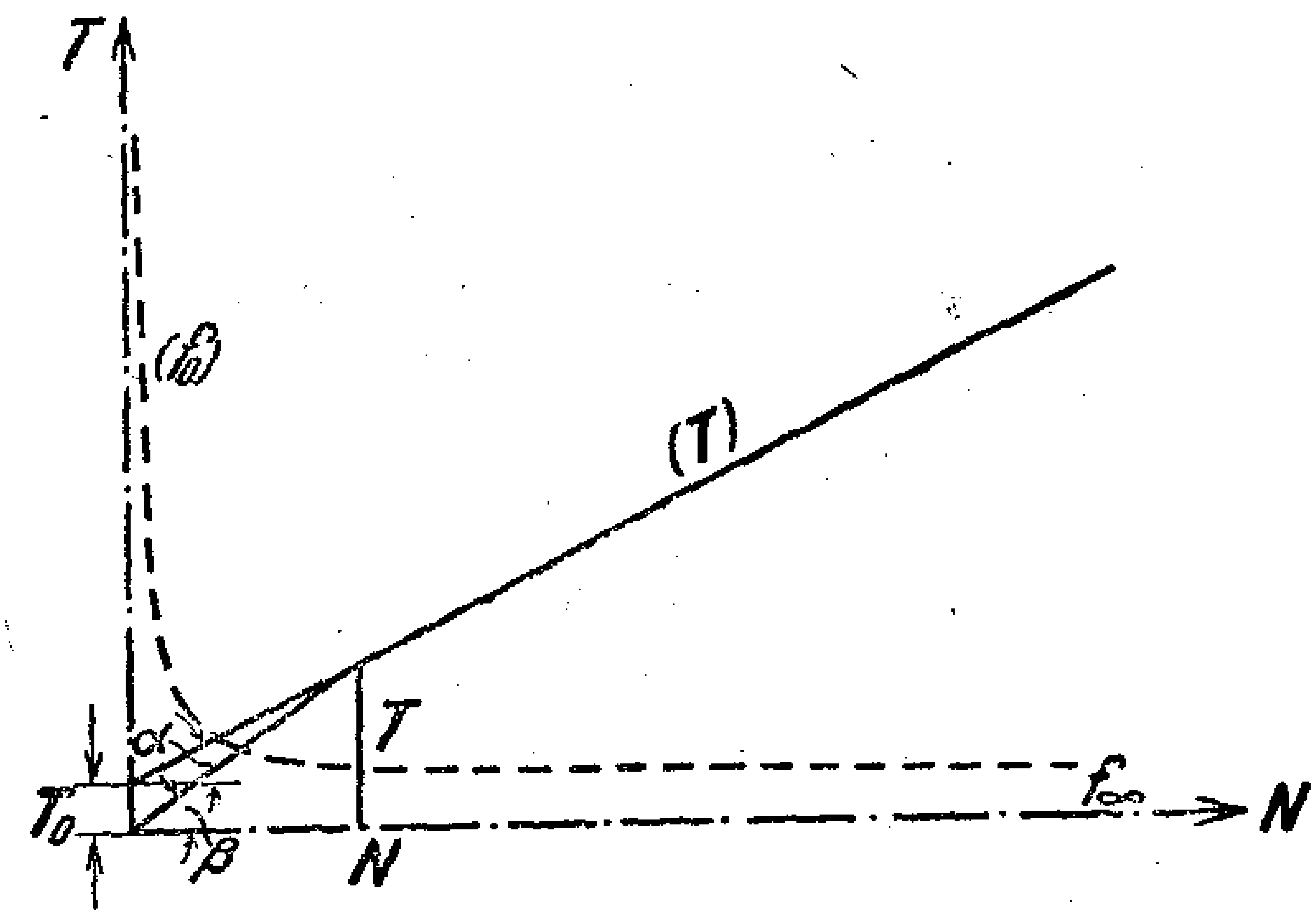
Са брзином V у km/h гласи Боше-Вихертов образац:

$$f=f_0\,\frac{1+0{,}0112\,V}{1+0{,}06\,V}.$$

Најновији опити Бонтеа и Закса (H. Bonte, 1915.; G. Sachs, 1924.) вршени су помоћу коничних (Бонте) или цилиндричних (Закс) ваљака од материјала за које је требало испитати отпор трења. Један ваљак добија угаону брзину трансмисијом и преноси обртање на други ваљак, који га под притиском додирује. (Фрикциони точкови). Нормални притисак између ваљака регулише се теговима а отпор трења T мери се динамометром. Најважнији резултат ових огледа је тај да се **отпор трења T не може изразити Кулоновим законом** него обрасцем:

$$T = T_0 + f_\infty N$$

приказаним на сл. 73.1.



Сл. 73.1

Ако усвојимо Кулонову дефиницију:

$$T = f_0 N$$

онда f_0 није више независан од N него је изражен са

$$f_0 = f_\infty + \frac{T_0}{N},$$

дакле опада по хиперболичком закону.

Коефицијент f_1 трења у рукавцима зависи од расподеле нормалног отпора на обиму рукавца. Из произвољних претпоставака о тој расподели изведени су противречни односи између f_1 и Кулоновог коефицијента f.

У техничкој примени и данас је одржан однос проф. Реја (Th. Reye, 1860.):

$$f_1 = \frac{4}{\pi} f.$$

Инжењер Хирн (G. A. Hirn) вршио је огледе (1854.) са рукавцима хоризонталног вратила у лежиштима од разног материјала са разним мазивима; циљ тих огледа било је одређивање механичког рада утрошеног на савлађивање отпора трења у рукавцима. Хирн је нашао за механички еквивалент топлоте вредност 370 kgm (тачно 427) а за отпор трења у рукавцима нашао је да је за суве површине независан, а за добро и континуално мазане површине готово сразмеран брзини.

Значајнији и поузданији су огледи које је Управа Ханове-ранских жељезница вршила 1861—62. под руководством директора Кирхвегера (Kirchweger). Осовина железничких кола са својим нормалним лежиштима утврђена је у лабораторији на дрвеном постољу и трансмисијом стављена у обртање. На једном лежишту положена је равнокрака полуга са тасовима за тегове што треба да врше притисак на рукавац. Главни резултати огледа су: 1) За обична оптерећења 100 kg cm^{-2} рукавца отпор трења је независан од величине оптерећене површине. 2) При 360 обрта у минути (брзини од 16,7 msec^{-1}) отпор трења је независан од брзине. 3) За конзистентна мазива (лој, палмово уље) и мала оптерећења, коефицијент трења је већи него за течна мазива. При већим оптерећењима, када се рукавац загреје, смањује се коефицијент трења.

Проф. техничке школе у Њујорку Турстон (R. H. Thurston) конструисао је 1878. апарат за испитивање трења у рукавцима коме је главни део било физичко клатно. Циљ му је био да одреди законе трења у рукавцима у врло широким границама притиска, брзине и температуре. Резултати његових огледа као и обрасци које је из ових извео, нису поуздани једно због конструктивних недостатака апарата, а друго због уских граница притиска (од нуле до 70 kg cm^{-2}) и брзине (6,9 msec^{-1}) обртања.

По решењу Удружења машинских инжењера у Лондону вршио је 1882. инж. Бошан (Beauchamp Tower) огледе са трењем у рукавцима. Рукавац био је од лежишта одвојен слојем уља. Највеће оптерећење рукавца било је 44 kgcm^{-2} а највећа обимна брзина рукавца 2,4 msec^{-1}. Огледи су показали да отпор трења расте са додирном површином при истој величини притиска, а при сувом трењу је отпор независан од површине. До обимне брзине 0,5 msec^{-1} опада отпор трења а преко 0,5 m sec^{-1} расте са квадратним кореном брзине.

Теоријска расматрања о трењу у рукавцима циришког политехничара Реје-а (Th. Reye) доцнијег професора Пројективне Геометрије, 1860. и проф. Грасхофа (Grashof) 1861. баве се хипотезама о расподели притиска на обимне површине на основу закона еластичности чврстих тела.

Први који је трење између подмазиваних површина сматрао хидродинамичким проблемом био је Петров (Н. Петровъ). Он је замишљао да се рукавац полупречника r обрће центрично у лежишту полупречника $r+s$; слој мазива дебљине s врши притом ламинарно кретање вискозне течности, зависно од обимне брзине v. Тако налази коефицијент трења:

$$f_1 = 2\pi \frac{\lambda v}{P} \frac{r}{s},$$

где је λ константа унутрањег трења мазива а P оптерећење на јединицу дужине рукавца. Овај образац проверавао је Петров огледима Hirn-a, Kirchweger-a и Thurston-a.

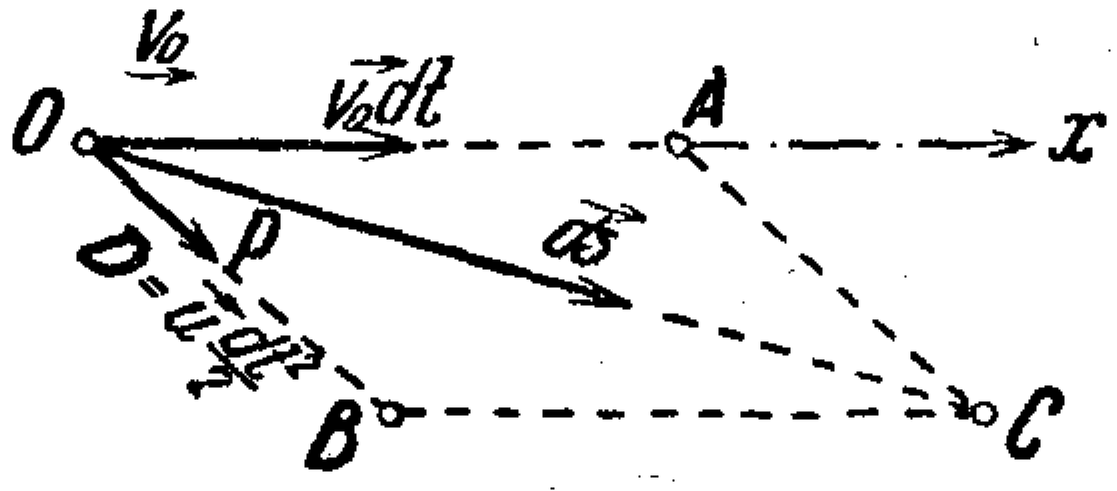
Рејнолдс (O. Reynolds, 1886.) закључио је из искуства да се рукавац не обрће центрично у лежишту, и поставио је теорију са претпоставком променљиве дебљине слоја s. У доцнијем свом раду (1900.) сложио се Петров са том теоријом. Зомерфелд (A. Sommerfeld, 1904.) је математичку обраду теорије знатно упростио и тиме омогућио упоређење са многим најновијим огледима. Овим су се питањем бавили и руски научници Жуковски (Н. Е. Жуковскй) и Чапљигин (С. А. Чаплыгин), Москва 1904.

Б. КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ У КРИВОЈ ПУТАЊИ

74. Динамички услов за криволинијско кретање. Из Кинематике знамо да при криволинијском кретању тачке убрзање заклапа са правцем брзине, дакле са тангентом на путању угао $\vartheta, 0 < \vartheta < \pi$, који се континуално мења са временом и да је убрзање управљено ка конкавној страни путање. На оним местима путање у којима ϑ прелази из позитивне вредности у негативну ($\vartheta = 0$), путања има превојну тангенту. По Њутновом II закову је сила $\vec{P} = m\vec{u}$ вектор истог правца и смера као убрзање.

Динамички услов да се тачка креће по кривој путањи јесте тај, да сила која на њу дејствује заклапа у сваком моменту кретања са правцем кретања (брзине) угао различит од 0 и 180°.

Замислимо да се тачка масе m креће по правој Ox (сл. 74.1), да се у времену $t = 0$ налази у O и да има брзину v_0. У тренутку $t = 0$ нападне тачку сила $\vec{P}$ чији правац заклапа са v_0 угао φ. За време dt можемо силу сматрати константном по правцу и величини. Када не би било силе $\vec{P}$, тачка би по закону инерције у једном тренутку прешла,



Сл. 74.1

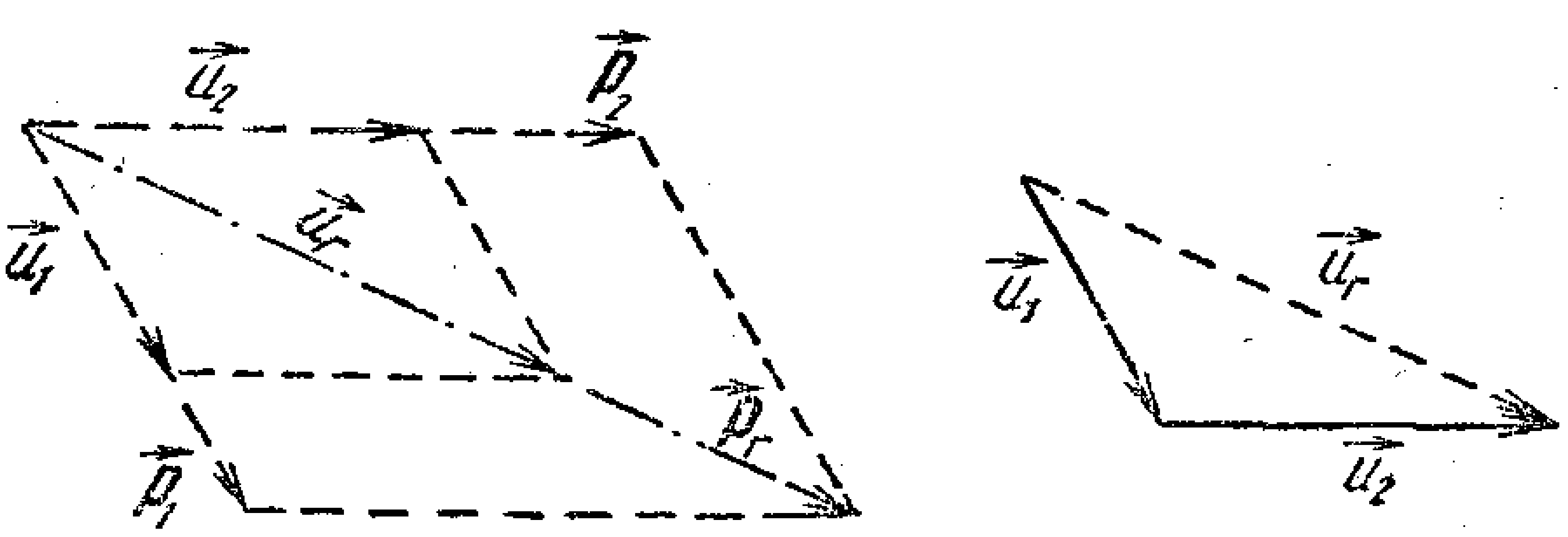
у правцу почетне брзине, пут $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_0\, dt$, а када не би имала почетну брзину, она би се кретала убрзано у правцу и смеру силе $\vec{P}$ и прешла пут $\overrightarrow{OB} = \vec{u}(dt)^2/2$ где је $\vec{u} = \vec{P}/m$. Стварно пређени пут $\overrightarrow{OC} = \vec{ds}$ биће дијагонала паралелограма коме су стране путови $\vec{v}_0\, dt$ и $\vec{u}(dt)^2/2$. Из овога се види да се утицај силе $\vec{P}$, кад се она не поклапа са правцем кретања, састоји у томе што она приморава тачку да скрене с правог пута OX којим би продужила да се креће, када силе $\vec{P}$ не би било. Због тога смо елементарни пређени пут $\vec{D} = \vec{u}(dt)^2/2$ у правцу дејства силе назвали девијацијом или скретањем. Из векторског троугла OBC види се да девијација $\vec{D} = \triangle \vec{ds}$ претставља геометријски (векторски) прираштај пређеног пута $\vec{ds}$. У наредном времену dt прећиће тачка пут $\vec{ds}_1 = \vec{ds} + \vec{D}$, $\vec{ds}_2 = \vec{ds}_1 + \vec{D}$, итд. Тако добијамо полигон са странама $\vec{ds}, \vec{ds}_1, \vec{ds}_2, \ldots$ који за $dt \to 0$ прелази у криву путању тачке. Ако је сила $\vec{P}$ константна биће вектор $\vec{D}$ константан, а путања ће бити парабола (чл. 41.1).

75. Слагање и разлагање сила. На основи дефиниције силе (чл. 11.) закључујемо да став о паралелограму важи за силе као и за убрзање тј. да је паралелограм сила сличан паралелограму убрзања. Замислимо да на материјалну тачку m делују само два тела K_1 и K_2 која дају тачки m убрзања $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Пошто су по закону независности дејства тих убрзања иста када тела једновремено делују као и када би посебно деловала, то ће тела K_1 и K_2 када истовремено дејствују дати тачки убрзање: $\vec{u}_r = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, а из основног динамичког закона: $\vec{P} = m\vec{u}$ и једначине: $m\,\vec{u}_r = m\,\vec{u}_1 + m\,\vec{u}_2$ следује:

$$\vec{P}_r = \vec{P}_1 + \vec{P}_2,$$

дакле став о паралелограму сила.

Када та два убрзања $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ која дају тачки m тела K_1 и K_2 сложимо (сл. 75.1) помоћу паралелограма, онда нам дијагонала $\vec{u}_r$ тога



Сл. 75.1

паралелограма помножена са масом тачке значи резултујућу силу $\vec{P_r}$.

Дејство стварних тела K_1 и K_2 на тачку биће исто као и дејство замишљеног тела K_r које се налази у правцу убрзања $\vec{u_r}$. Јасно је да тела K_1, K_2, K_r морамо сматрати материјалним тачкама да би правци $\vec{u}$ били одређени.

Замену двеју или више стварних сила једном замишљеном силом $\vec{R}$ истог дејства зовемо слагање сила $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, ... а замену једне стварне силе $\vec{R}$ двема или више замишљеним силама зовемо разлагање силе $\vec{R}$.

Материјалну тачку m нападаће уопште више силâ, било да су све истог или различитих физикалних порекла. Ако је тачка слободна биће све силе дате, ако је пак тачка у свом кретању ограничена, нападаће је и непознати отпори које имамо да из динамичких једначина одредимо. Геометријски збир свих тих датих сила $\vec{P}$ и непознатих отпора $\vec{W}$ означићемо краће са $\Sigma\vec{P}+\Sigma\vec{W}=\vec{R}$ па ће тада на основу принципа независног дејства, динамичка једначина тачке гласити:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{R}.$$

Динамичку једначину постављамо тако да на једној страни стављамо производ из масе и убрзања тачке а на другој страни све оне силе које тачку нападају. А за интегралење ове диференцијалне једначине другог реда сводимо је на нулу.

Векторску једначнну разлажемо у три скаларне по ивицама правоуганог триедра што нам је из Кинематике познато. Тако добијамо три скаларне динамичке једначине:

у Декартовом систему $0\,(x, y, z)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=R_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=R_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=R_z; \tag{75.1}$$

у цилиндричном систему $0\ (\varphi, r, z)$:

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=R_r,\quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=R_c,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=R_z; \tag{75.2}$$

у природном (Ајлеровом) систему $M\ (t, n, b)$:

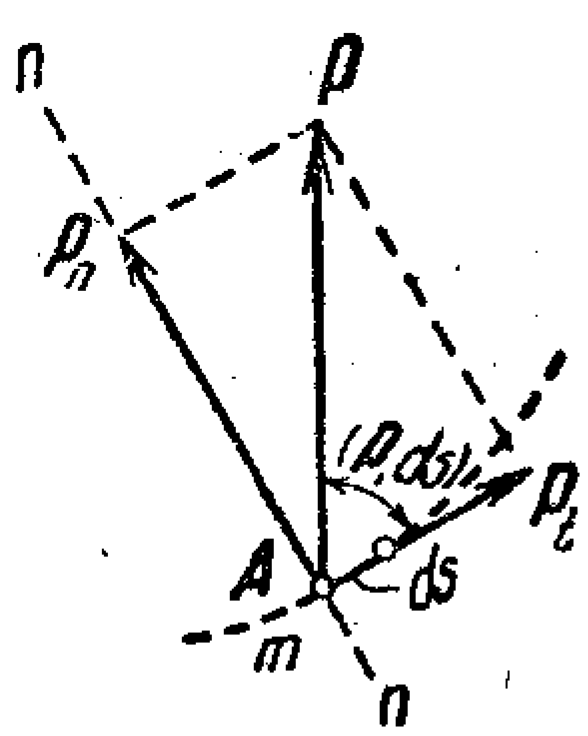
$$m\frac{dv}{dt}=R_t,\quad \frac{mv^2}{\varrho}=R_n,\quad 0=R_b. \tag{75.3}$$

76. Механички рад силе у кривој путањи. Функција силе. Код кретања тачке у правој путањи дефинисали смо елементарни механички рад силе X као производ из силе и елементарног пута dx: $\delta A = X\,dx$. Правци оба вектора стално се поклапају. Код криволинијског кретања правац тангенцијалне компоненте P_t у сваком се тренутку поклапа са правцем пређеног пута ds и према томе и при криволинијском кретању дефиниција механичког рада је иста, као и код праволинијског кретања када силу X заменимо тангенцијалном силом P_t а пут dx са ds. Дакле је

$$\delta A = P_t\,ds.$$

Ако угао, који сила P заклапа са елементарним путом ds тј. са тангентом, обележимо са (P, ds) (сл. 76.1) онда је величина тангенцијалне силе:

$$P_t = P \cos (P, ds)$$



Сл. 76.1

а њен механички рад на путу ds је

$$\delta A_p = P_t ds = P \cos (P, ds)\, ds. \qquad (76.1)$$

Елементарни механички рад силе P једнак је производу из стварно пређеног пута ds и пројекције P cos (P,ds) силе на правац пута. У горњем производу имамо три чиниоца:

$$P \cos (Pds) \text{ и } ds$$

и ако их напишемо другим редом добијамо:

$$\delta A_P = P\, ds \cos (P, ds), \qquad (76.1a)$$

тј. *елементарни механички рад силе P једнак је производу из силе и пројекције пређеног пута на правац силе.*

Механички рад је позитиван за $\cos (P, ds) > 0$ а негативан за $\cos (P, ds) \leqslant 0$. За $\cos (P, ds) = 0$, тј. када је сила P управна на правац елементарног пута њен је механички рад једнак нули.

У Векторској алгебри израз:

$$P\, ds \cos (\vec{P}, \vec{ds}),$$

тј. производ интензитета двају вектора $\vec{P}$ и $\vec{ds}$ и косинуса угла што га ови вектори међу собом заклапају, назива се: скаларним, унутрашњим или радним производом двају вектора $\vec{P}$ и $\vec{ds}$ и означава се са

$$\vec{P}\vec{ds} \quad \text{или} \quad (\vec{P}\,\vec{ds}).$$

Дакле се елементарни рад може бележити:

$$\delta A = \vec{P}\,\vec{ds}. \qquad (76.2)$$

Трећа дефиниција механичког рада гласи: *Елементарни механички рад је скаларни производ силе и елементарног померања тачке.*

Када тачку нападају више сила $\vec{P_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и тачка се помери за $\delta \vec{s}$, вршиће силе укупан механички рад:

$$A = \delta \sum_1^n \vec{P}\, \delta \vec{s},$$

а пошто је у овом збиру $\delta \vec{s}$ заједнички фактор за све силе, то је

$$\delta A = \delta \vec{s} \sum \vec{P_i} = \delta \vec{s}\ \vec{R}.$$

Механички рад силе R једнак је алгебарском збиру радова њених компонената.

Ако су X, Y, Z ортогоналне компоненте силе $\vec{P}$ а dx, dy, dz ортогоналне компоненте померања $\delta \vec{s}$, елементарни механички рад је

$$\delta A = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz. \qquad (76.3)$$

У цилиндричним координатама је

$$\delta A = P_r\, dr + P_c\, r\, d\varphi + P_z\, dz. \qquad (76.4)$$

Из инфинитезималног рачуна знамо да је израз:

$$X\, dx + X\, dy + Z\, dz$$

само онда потпун диференцијал dA када су X, Y, Z делимични изводи по x, y, z једне исте једнозначне функције:

$$U = f(x, y, z),$$

т. зв. функције силе.

Елементарни рад силе P биће дакле потпун диференцијал ако њене компоненте задовољавају три услова:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (76.5)$$

који се могу изразити једном векторском једначином:

$$\vec{P} = \vec{i}\, \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\, \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\, \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (76.6)$$

Израз на десној страни једначине (76.6) зове се градијент функције U.

За силе које задовољавају једначину:

$$\vec{P} = \operatorname{grad} U,$$

где је U једино функцуја положаја (x, y, z) је

$$\delta A = dA = dU.$$

Ако тачка коју таква сила напада пређе пут од неке тачке $r\,(x_r, y_r, z_r)$ до тачке $s\,(x_s, y_s, z_s)$ у којима U има вредности U_r и U_s, онда је на том путу сила $\vec{P}$ извршила рад:

$$A = \int_r^s dU = U_s - U_r. \tag{76.7}$$

Механички рад не зависи од дужине ни облика пута него само од вредности U у крајњим тачкама пута. Према томе ако нападна тачка пређе од r до s произвољан пут, а затим од s до r ма који други пут, биће

$$A_r^s + A_s^r = 0,$$

тј. *механички рад силе $\vec{P} = \operatorname{grad} U$ на ма којој затвореној линији једнак је нули.* Силе које имају функцију силе зову се из разлога о коме ће у чл. 79. бити говора конзервативне силе.

77. Скаларна и векторска поља Област простора у којој свакој тачки одговара извесна вредност неке физикалне величине зове се поље те величине Према томе да ли је она скаларна или векторска величина говоримо о скаларном или векторском пољу. Скаларна поља су поља температуре, специфичне масе, функције силе итд., а векторска поља су поље брзина, убрзања, силе, итд.

У пољу функције U значи:

$$f\,(x, y, z) = C$$

површину на којој све тачке поља имају исту вредност $U = C$. Те површине зовемо еквискаларним или еквипотенцијалним површинама, јер се функција

$$V = -U$$

зове потенцијална функција или потенцијал.

По дефиницији: $\vec{P} = \operatorname{grad} U$ има сила правац нормале на површину $U = C$. Нормала у тачки B површине $U = C$ сећиће блиску површину $U + \Delta U$ у тачки B'. Са ознаком $\overline{BB'} = \Delta n$ биће величина силе одређена изводом:

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{dU}{dn},$$

а смер силе је онај у ком U расте.

Размак двеју суседних површина $U = C$ биће уопште у разним тачкама B различите величине. Што је мањи размак тим је већа сила. У тачки B' нормала површине $U + \Delta U$ сећиће површину $U + 2\Delta U$ у тачки B''; правац њен је $B'B'' = \Delta n'$ итд. Сви узастопни елементи Δn чине полигон (раван или просторан) који за $\Delta U \to 0$ прелази у криву линију коју зовемо линијом силе. Оне су ортогоналне трајекторије површина $U = C$ а диференцијална једначина линија силе је

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \qquad (77.1)$$

Градијент једног скалара можемо сматрати скаларним производом тог скалара са једним симболичним вектором:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

који се зове Хамилтонов оператор, дакле је

$$\operatorname{grad} U = \nabla U.$$

Оператор ∇ можемо као сваки вектор помножити векторски и скаларно са произвољним вектором $\vec{P}$.

Векторски производ

$$\nabla \times \vec{P}$$

зове се ротација вектора $\vec{P}$ и пише се

$$\operatorname{rot} \vec{P} \quad \text{или} \quad \operatorname{curl} \vec{P}.$$

Пошто оба вектора разложимо у ортогоналне компоненте добијамо:

$$\operatorname{rot} \vec{P} = \vec{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \qquad (71.2)$$

Ако је $\vec{P}$ конзервативна сила, добијамо парцијалним диференцијалењем једначина (76.5):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \quad \text{и аналогно:} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \qquad (71.3)$$

Ове једначине унесене у (71.2) дају резултат:

$$\operatorname{rot} \vec{P} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0. \qquad (71.4)$$

Ротација конзервативне силе једнака је нули. Ова чињеница може такође служити за дефиницију конзервативне силе.

Векторско поље у коме је за сваку тачку поља:

$$\operatorname{rot} \vec{P} = 0$$

зове се безвртложно поље.

Скаларни производ:

$$\nabla \vec{P}$$

зове се дивергенција вектора $\vec{P}$ и пише се

$$\operatorname{div} \vec{P} = \nabla \vec{P}.$$

Изражена компонентама гласи:

$$\operatorname{div}\vec{P}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{77.5}$$

За

$$\vec{P}=\operatorname{grad} U$$

добијамо

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{77.6}$$

Дивергенција скалара зове се и Лапласов (Laplace) извод скалара и означава краће са

$$\nabla^2 U \quad \text{или} \quad \triangle U.$$

Најзад налазимо

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{P}=0. \tag{77.7}$$

То значи да ако је у пољу вектора $\vec{R}$:

$$\operatorname{div}\vec{R}=0$$

можемо тај вектор сматрати ротором неког вектора $\vec{P}$.

Векторе $\vec{R}$ за које је у свакој тачки поља

$$\operatorname{rot}\vec{R}=0$$

зовемо потенцијалним векторима а векторе за које је у свакој тачки поља

$$\operatorname{div}\vec{R}=0$$

соленоидалним векторима.

Векторско поље у коме је

$$\operatorname{rot}\vec{R}=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\vec{R}=0$$

зове се Лапласово поље.

Пример:

$$X=a(y^2-x^2),\ Y=2axy,\ Z=0.$$

Градијент скалара, ротација и дивергенција вектора су три основна појма Векторске анализе која има примену у свима гранама модерне Теоријске физике.

78. Закон количине кретања. Величину брзине тачке у кривој путањи, коју напада сила $\vec{P}$ произвољног правца, мења само њена тангенцијална компонента $P_t=P\cos\varphi$, где је φ угао што га сила заклапа са тангентом на путању. Из релације:

$$P_t=\frac{d(mv)}{dt}$$

добијамо једначину:

$$P_t\,dt = d(mv),$$

која каже да је елементарни импулс тангенцијалне силе једнак диференцијалу количине кретања.

У коначном интервалу $(t_2 - t_1)$ времена даје интеграл:

$$\int_1^2 P_t\,dt = m\,v_2 - m\,v_1$$

закон количине кретања у скаларном облику.

Алгебарски прираштај количине кретања једнак је импулсу тангенцијалне силе у истом размаку времена.

Заменом силе промењивог правца P_t са силом X константног правца важи закон за праволинијско кретање (чл. 49).

Аналогно добијамо из векторске једначине: $\vec{P} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$,

$$\vec{P}\,dt = d(m\vec{v}) \quad \text{и} \quad \int_1^2 \vec{P}\,dt = m\,\vec{v}_2 - m\,\vec{v}_1\,,$$

дакле: *векторски прираштај количине кретања једнак је импулсу нападне силе (или интегралу силе по времену) за исти размак времена.* Геометријска разлика двају вектора увек је већа од алгебарске разлике, дакле је

$$\int_1^2 \vec{P}\,dt > \int_1^2 P_t\,dt.$$

Када у Декратовом триедру означимо са X, Y, Z компоненте силе $\vec{P}$, а са v_x, v_y. v_z компоненте брзине $\vec{v}$ замењују векторску једначину закона количине кретања три скаларне једначине:

$$\left.\begin{aligned} \int_1^2 X\,dt &= m\,v_{2x} - m\,v_{1x}\,, \\ \int_1^2 Y\,dt &= m\,v_{2y} - m\,v_{1y}\,, \\ \int_1^2 Z\,dt &= m\,v_{2z} - m\,v_{1z}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (78.1)$$

1. Ако су сва три интеграла различита од нуле тачка ће описи-

вати просторну криву путању са произвољно променљивом брзином.

2. Ако је један интеграл, на пример први, једнак нули, тачка ће описивати просторну путању али ће бити $v_x = const.$ Мењаће се само компонента паралелна равни yz.

3. Ако су два интеграла (на пример први и други) једнаки нули, биће $v_x = const.$ и $v_y = const.$, тачка ће се кретати у равни управној на раван xy променљивом брзином v_z.

4. Најзад ако су сва три интеграла једнака нули; тачка ће се кретати у правој путањи константном брзином.

79. Закон кинетичке енергије (живе силе). Када једначину која дефинише тангенцијалну компоненту нападне силе:

$$P_t = P \cos(P, ds) = m \frac{dv}{dt}$$

помножимо са индентитетом $ds = v\,dt$, добијамо:

$$P\,ds \cos(P, ds) = mv\,dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

На левој страни стоји елементарни рад δA силе $\vec{P}$ а на десној елементарна кинетичка енергија dL. Интегралећи у размаку од $t = 0$ (када је $v = v_0$, а $\delta A = 0$) до времена t добићемо:

$$\int_0^s P\,ds \cos(P, ds) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Ова једначина исказује закон кинетичке енергије или (по старијем називу) живе силе: *Прираштај живе силе у коначном размаку времена једнак је механичком раду нападне силе у истом размаку.*

За нападне силе које имају функцију U механички рад је изражен разликом:

$$U - U_0 = \int P\,ds \cos(P, ds),$$

функције U у неком месту где је брзина v и U_0, где је брзина v_0. Закон живе силе гласи сада:

$$L - L_0 = U - U_0.$$

У место функције U примењује се и потенцијална енергија или потенцијал:

$$V = -U.$$

Са тим појмом гласи закон живе силе:

$$L + V = L_0 + V_0 = E,$$

тј. *Збир кинетичке и потенцијалне енергије је константан и зове се механичка енергија.* Ова једначина исказује општи принцип Механике о одржању механичке енергије. Тиме је закон који смо за специјална кретања упознали (чл. 54. и 57.) проширен на свако кретање под утицајем конзервативних сила. Назив конзервативан за силе које имају функцију U је тиме објашњен.

Отпор трења и отпор средине нису конзервативне силе и зову се дисипативне силе.

Разлику живе силе:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

можемо изразити импулсом $\vec{I}$ на овај начин: Закон количине кретања:

$$\vec{I} = m\vec{v} - m\vec{v}_0,$$

помножимо скаларно прво са v затим са v_0 а пошто тако добијене једначине саберемо, добијемо:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{I}\,\vec{v} + \vec{I}\,\vec{v}_0\right),$$

тј. *прираштај живе силе једнак је полузбиру скаларних производа импулса силе за време кретања са почетном и крајњом брзином.*

I. КРЕТАЊЕ СЛОБОДНЕ ТАЧКЕ

80. Једнолико кружно кретање. Ако се материјална тачка m креће по кругу полупречника r константном брзином $v = c$, онда из обрасца за центрипетално и тангенцијално убрзање добијамо силу која при таквом кретању на тачку мора деловати.

Центрипетална сила биће:

$$P_c = m\frac{c^2}{r}, \tag{80.1}$$

а тангенцијална:

$$P_t = m\frac{dc}{dt} = 0. \tag{80.2}$$

Према томе, једнолико кружно кретање изазива сила константне величине управљена ка центру кружне путање. Њој супротну т. зв. центрифугалну силу $-mc^2/r$ осећамо кад завртимо једну праћку.

Код кружног кретања је елементарни пут тачке $ds = r\,d\varphi$ дакле њена брзина:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \tag{80.3}$$

где је ω позната нам угаона брзина (чл. 29).

Угаоном брзином ω можемо дефинисати брзину оне тачке која се налази на јединици растојања од центра. Њена је димензија $[t^{-1}]$ а јединица sec^{-1}.

Помоћу угаоне брзине добија израз за центрипеталну силу облик:

$$P_c = \frac{mv^2}{r} = \frac{m(r\omega)^2}{r} = mr\omega^2. \tag{80.4}$$

У машинској техници брзину окретања (на пример неког точка) изражава увек број обрта у једној минути који се бележи са n. Између брзине на периферији точка v у $m\,sec^{-1}$ и броја обрта n добијамо релацију рачунајући пређени пут тачке на периферији круга за једну минуту и то једанпут помоћу броја обрта $(S = n\,2r\pi)$ а потом помоћу обимне брзине $(S = 60\,v)$, дакле:

$$n\,2r\pi = 60\,v$$

а одавде

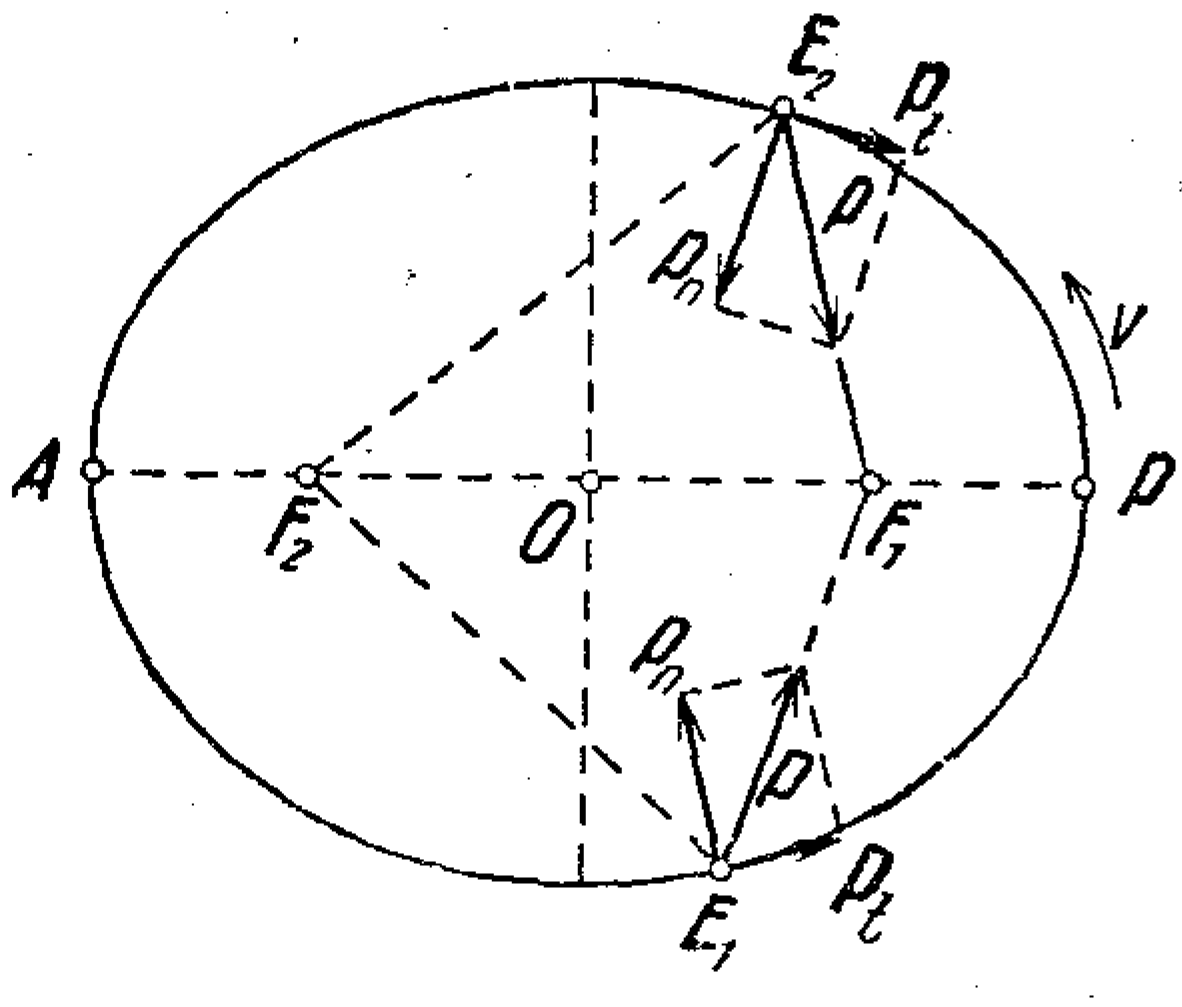
$$v = \frac{2\,r\pi n}{60} = \frac{r\pi n}{30}; \tag{80.5}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\pi n}{30}. \tag{80.6}$$

Према томе, центрипеталну силу код једноликог кружног кретања можемо изразити и бројем обрта n у једној минути:

$$P_c = mr\omega^2 = mr\frac{n^2\pi^2}{30^2} = \frac{mrn^2}{91,2}. \tag{80.7}$$

81. Кретање Земље око Сунца. Познато је да је путања по којој се креће Земља око Сунца елипса у чијој се једној жижи налази Сунце[1] (сл. 81.1). Централна сила којом Сунце привлачи Земљу, има стално правац и смер EF_1, то је дакле правац и смер Земљиног убрзања $\vec{u}$. Смисао кружења супротан је казаљкама на часовнику[2]. Када централну силу $\vec{P}$ разложимо у њене природне компоненте P_t и P_n видимо, да тангенцијална компонента P_t при положају Земље E_1 има исти смер као и брзина, што значи да ће на томе месту кретање бити убрзано. Када Земља дође у положај E_2 тангенцијална сила је супротна смеру кретања па ће се у томе положају Земља кретати успорено. У теменима велике осовине A (Aphel)



Сл. 81.1

[1] Први Кеплеров закон.
[2] Гледајући на путању са севера.

и P (Perihel) је правац централне силе управан на путању, дакле $p_t = 0$. На тим местима Земља се креће константном брзином.

Због мале ексцентричности Земљине путање ($\varepsilon = 0{,}0167$) можемо је сматрати кругом коме је центар Сунце. Са том претпоставком је брзина и убрзање Земљино $\frac{c^2}{r}$ константно.

Са познатим вредностима c и r можемо приближно наћи колико је ово убзање. Ако узмемо да је средњи полупречник Земљине путање $r = 148\ 472 \cdot 10^3$ km, онда добијамо као просечну брзину кретања Земље око Сунца:

$$c = \frac{2 r \pi}{T}$$

где је $T = 365{,}2422$ дана. Замењујући ове бројне вредности у образац $u_c = \frac{c^2}{r}$ налазимо центрипетално убрзање $u_c = 0{,}59 \text{ cm sec}^{-2}$. То значи када би Земља на својој путањи око Сунца одједном стала, почела би да пада према Сунцу убрзањем $u = 0{,}59 \text{ cm sec}^{-2}$, тј. у првој секунди прешла би пут од 0,30 cm.

На исти начин налазимо да центрипетално убрзање за кретање Месеца око Земље износи $u_c = 0{,}27 \text{ cm sec}^{-2}$.

82. **Кос хитац у празном простору.** Посматрајмо кретање тачке која добије услед неког кратког импулса брзину v_0 у произвољном правцу нагнутом за угао α према хоризонталној равни xy. На тачку дејствује само њена тежина, дакле ће се кретати у равни одређеној вектором $\vec{v}_0$ и вертикалом кроз почетни положај тачке O. У тој вертикалној равни узимамо координатне осовине x и z, те ће динамичке једначине гласити:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg.$$

Први интеграли су:

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.} = v_0 \cos\alpha = v_x, \qquad \frac{dz}{dt} = C_1 - gt = v_z,$$

за $t = 0$ је $C_1 = v_0 \sin\alpha$.

Са компонентама:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{и} \quad v_z = v_0 \sin\alpha - gt$$

налазимо брзину у времену t:

$$v = \pm \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \pm \sqrt{v_0^2 - g\,(2 v_0 \sin\alpha - gt)\,t}.$$

Поновним интегралењем добијамо с обзиром да је за $t=0$: $x=0$ и $z_0=0$:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \quad z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Када вредност за z сменимо у израз за v, налазимо:

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gz}\,,$$

тј. ***брзина зависи само од висине z изнад хоризонтале кроз почетак O и од величине почетне брзине.***

Елиминацијом времена добијамо из две параметричне једначине x и z једначину путање:

$$z = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{\cos^2\alpha}\,x^2\,.$$

Путања је парабола са вертикалном осовином, конкавном страном окренутом на ниже (јер је коефицијент од x^2 негативан). Са полупараметром:

$$p = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$$

гласи једначина параболе:

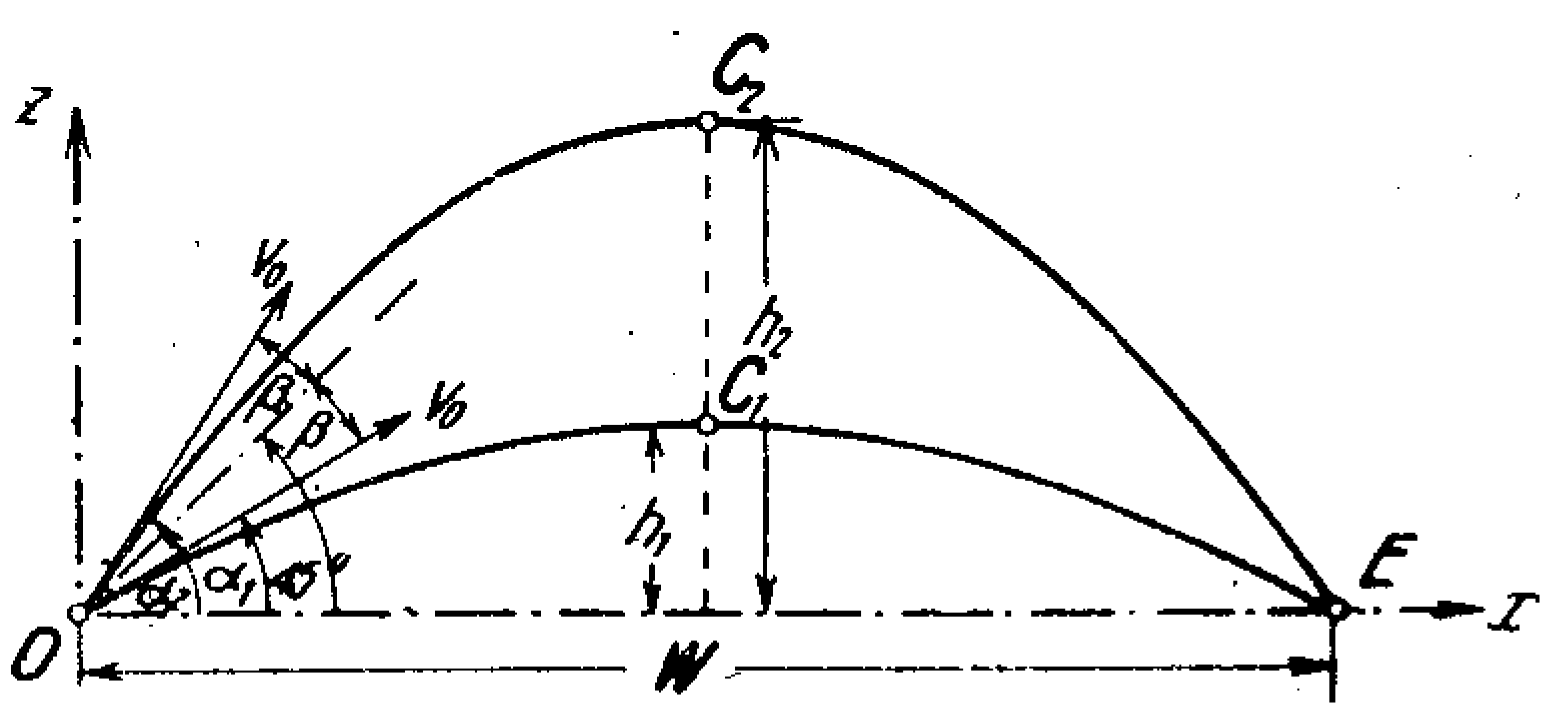
$$z = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{x^2}{2p}\,.$$

Дометом бачене тачке зовемо апсцису W тачке путање за коју је $z=0$. Из последње једначине налазимо:

$$W = 2p\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Домет зависи од угла α елевације и биће највећи за $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

$$W_{max} = \frac{v_0^2}{g}\,.$$



Сл. 82.1

Домети за две елевације $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \beta$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \beta$ имају исту величину јер је $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ (сл. 82.1).

Време t_1 за које ће тачка од почетка O стићи у исту висину добијамо из обрасца за z као функцију времена. Када ставимо $z=0$, добијамо:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

а за $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$T = \frac{2v_0}{g}.$$

Време t_2 за које тачка постиже највећу висину добијамо из услова $v_2 = 0$:

$$t_2 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{t_1}{2},$$

што је већ из обрасца за v јасно.

Висину пењања h бисмо добили стављајући $t = t_2$ у једначину за z. Али пошто је висина независна од v_x то је

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

тј. једнака висини пењања **вертикалног** хитца брзином $v_z = v_0 \sin\alpha$.

Највећа вредност: $h_{max} = H$ је

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Из Геометрије је познато да праву управну на осовину параболе и удаљену за $p/2$ од њеног темена зовемо њеном **директрисом**. Дакле је у нашем случају:

$$H = h + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Све трајекторије са истом величином почетне брзине v_0 имају заједничку директрису, једнаку висини пењања вертикалног хитца брзином v_0.

Када једначину трајекторије решимо по $\operatorname{tg}\alpha$ можемо одговорити на питање: Колика треба да је елевација α да бисмо почетном брзином v_0 погодили дату тачку (мету): $x = a$, $z = b$?

Стављајући у једначину трајекторије: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ и $\frac{v_0^2}{2g} = H$, налазимо:

$$z = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{x^2}{4H}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha),$$

а из ове добијамо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2H}{x} \pm \frac{\sqrt{4H^2 - (x^2 + 4Hz)}}{x}.$$

Према томе да ли је

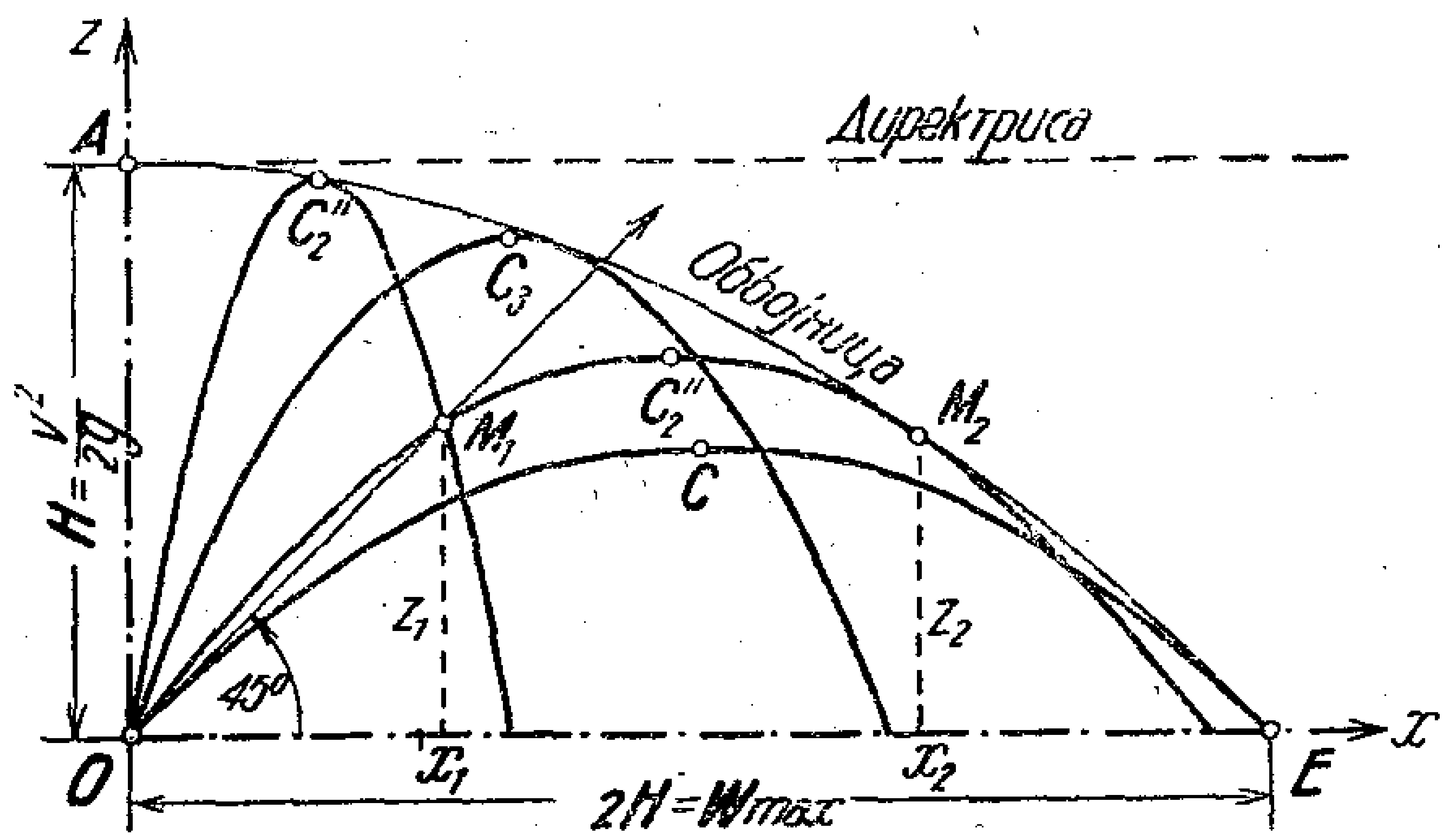
$$4\,H^2 \gtreqless x^2 + 4Hz$$

добијамо за $\operatorname{tg}\alpha$, две, једну или ниједну реалну вредност.

У првом случају може дата мета (x, z) бити погођена двема трајекторијама (стрмом и спљоштеном), у другом само једном. Све тачке (x, z) које могу бити погођене само једном елевацијом леже на т зв. параболи сигурности:

$$4\,H^2 - x^2 - 4Hz = 0,$$

са теменом у: $x = 0, z = H$ и $x = 2H$ за $z = 0$ (сл. 82.2).



Сл. 82.2

Са ознаком $q = \operatorname{tg}\alpha$ гласи једначина трајекторије:

$$z = q\,x - \frac{x^2}{4H}(1 + q^2).$$

Када q, сматрамо промењљивим параметром претставља ова једначина систем од ∞^1 парабола са вертикалном осовином, конкавном страном обрнутом на ниже и истом константом:

$$H = \frac{v_0^2}{2\,g}\cdot$$

Обвојницу тог система добијамо када из једначине трајекторије и њеног извода по параметру, изједначеним са нулом, елиминишемо q. Из

$$\frac{\partial z}{\partial q} = x - \frac{x^2}{2H}\,q = 0$$

имамо

$$q = \frac{2\,H}{x}$$

и сменом у једначину трајекторије добијамо:

$$z = 2H - \frac{x^2}{4H}\left(1 + \frac{4H^2}{x^2}\right) = H - \frac{x^2}{4H}$$

или

$$4H^2 - x^2 - 4Hz = 0$$

тј. једначину параболе сигурности.

Ходограф брзине је вертикална права, а растојање пола од ње је $r_0 \cos\alpha$. Са векторима $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ можемо брзину изразити једначином:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

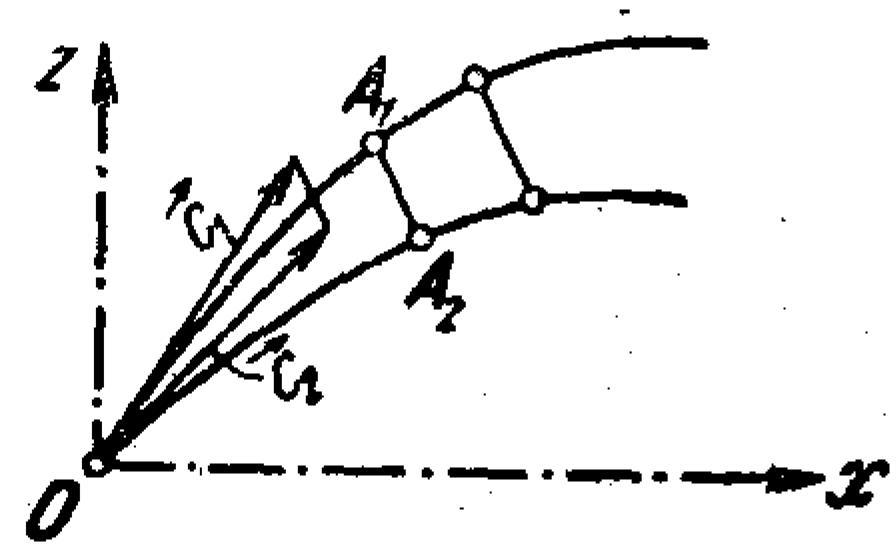
Ако из O бацимо истовремено две тачке са почетним брзинама $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, биће њихове брзине:

$$\vec{v}_1 = \vec{c}_1 + \vec{g}t \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = \vec{c}_2 + \vec{g}t,$$

дакле, њихова релативна брзина:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{c}_1 - \vec{c}_2,$$

независна од времена. Спојна права $\overline{A_1 A_2}$ тачака остаће стално паралелна релативној брзини (сл. 82.3). Ако $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ имају исту хоризонталну пројекцију биће права $\overline{A_1 A_2}$ вертикална и обратно.



Сл. 82.3

83. Одређивање силе сталног правца за дату путању тачке. Дата нам је једначина равне путање $z = f(x)$. Треба одредити закон силе Z паралелне осовини z која ће тачку масе m приморати да се по датој путањи креће. Пошто је по претпоставци $X = 0$, биће $v_x = c$, константна брзина. За v_z добијамо:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dx}c,$$

а за

$$u_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dx}{dt}c = \frac{d^2z}{dx^2}c^2,$$

дакле је

$$Z = m\,u_z = m\,c^2\frac{d^2z}{dx^2}$$

тражени закон силе.

1. Пример. Дата је путања парабола (сл. 83.1):

$$z = ax - bx^2.$$

Налазимо:

$$\frac{dz}{dx} = a - 2bx, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -2b,$$

и са овим

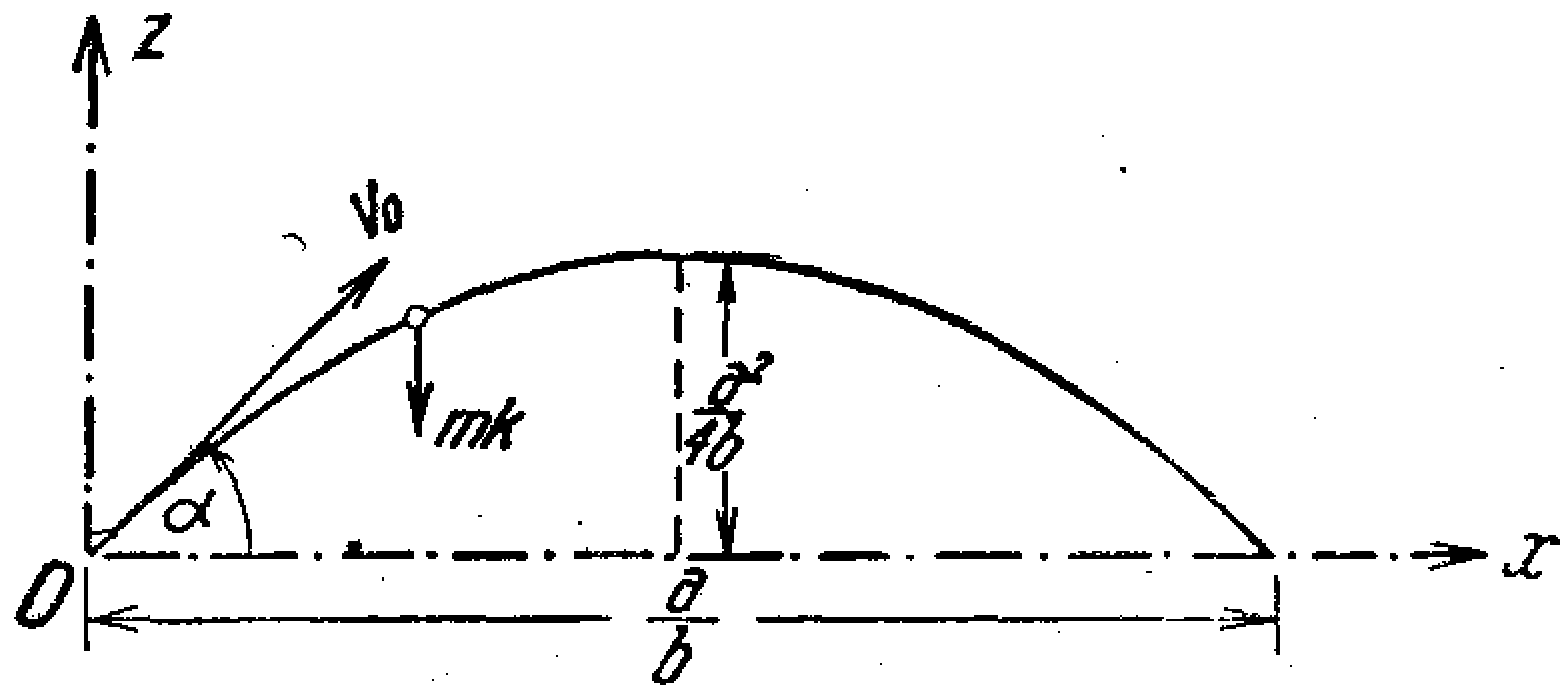
$$Z = -2\,mc^2\,b = -\,mk\,.$$

Убрзање тачке је

$$u_z = -2\,c^2\,b\,.$$

Пошто константу b изразимо са параметром p параболе: $b = 1/2p$ и сменимо $c = v_0 \cos\alpha$ добијамо:

$$u_z = -\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{p}\,.$$



Сл. 83.1

Код косог хитца била је дата сила $Z = -\,mg$ и нашли смо да је путања парабола параметра: $p = (v_0^2\cos^2\alpha)/g$. Овде смо решавали инверзни задатак: из датог параметра одредили смо убрзање.

Закон силе можемо тако трансформисати да буде изражен само једном променљивом x или z.

2. Пример. Дата путања је круг:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Први и други извод по x су

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}$$

дакле је

$$Y = -\frac{mc^2r^2}{y^3} = -\frac{\mu}{y^3}$$

а заменом y

$$Y = -\frac{\mu}{(r^2 - x^2)^{3/2}}\,;$$

константа μ има димензију [ml^4 t^{-2}].

Ова два закона силе дају за путању два различита система коничних пресека, али сваки појединачни закон са усвојеним условима одређује за путању круг:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

84. Кретање тачке под дејством силе пропорционалне растојању. Тачку масе m напада сила

$$\vec{P} = -mk^2\vec{r}.$$

Треба наћи путању тачке. У координатном систему Oxy где је O изабрано у извору силе, а осовине могу бити произвољне косе, гласе динамичке једначине скраћене са масом

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y,$$

негативни знаци кажу да је сила привлачна.

Општи интеграли тих једначина гласе:

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt, \qquad y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt,$$

а њихови изводи по времену

$$x' = -A_1k \sin kt + B_1k \cos kt, \qquad y' = -A_2k \sin kt + B_2k \cos kt.$$

Ако са x_0, y_0 означимо координате тачке, а са x_0', y_0' брзине у времену $t = 0$, добијамо константе:

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = y_0, \qquad B_1 = \frac{x_0'}{k}, \qquad B_2 = \frac{y_0'}{k}$$

те ће интеграли бити

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt, \qquad y = y_0 \cos kt + \frac{y_0'}{k} \sin kt.$$

Када за осовину x изаберемо вектор почетног положаја тачке, а за осовину y паралелу са почетном брзином, биће:

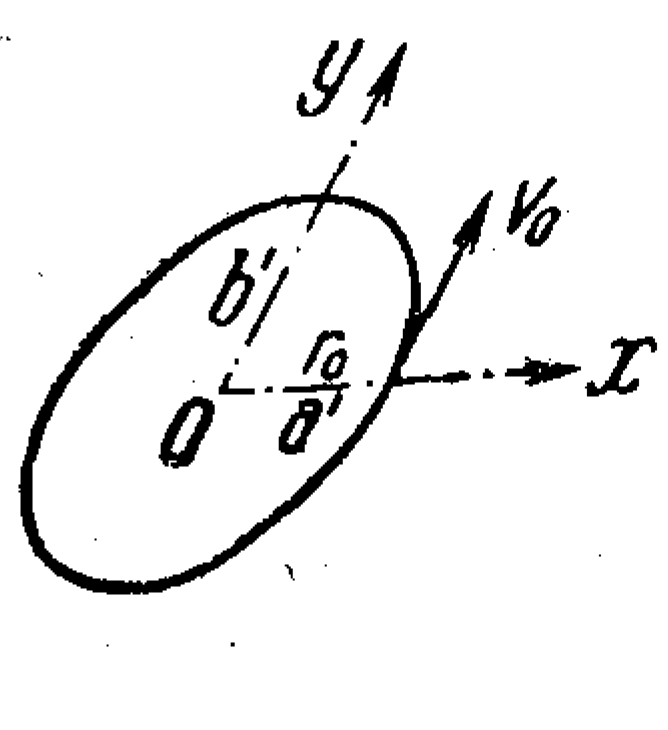
$$x_0 = r_0, \quad y_0' = v_0, \quad y_0 = x_0' = 0,$$

и закони кретања добиће простији израз:

$$x = r_0 \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Када из ових једначина елиминишемо време, добијамо трајекторију тачке:

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2k^2}{v_0^2} = 1.$$



Сл 84.1

Трајекторија је елипса приказана у координатном систему у коме су осовине конјуговане дужине: $a' = r_0$, $b' = v_0/k$ (сл. 84.1).

Како за почетни вектор r_0 можемо бирати произвољни положај тачке, то видимо да је брзина тачке у сваком положају $v = k\,b'$, где b' значи дужину полупречника елипсе паралелног брзини, тј. конјугованог са вектором положаја у том тренутку.

Трајање једног обрта је $T = 2\pi/k$.

У Кинематици смо расматрали обрнути задатак у ортогоналном систему и нашли смо за брзину $v = abk/\delta$, где су a, b полуосовине елипсе а δ растојање центра O од вектора брзине $\vec{v}$. Из упоређења ова израза за v добијамо познату особину елипсе:

$$a\,b = b'\delta = \vec{a}' \times \vec{b}'.$$

Ако је $a = b = b'$, елипса прелази у круг полупречника a; брзина $v = ak$ и убрзање $u = ak^2$ су константни. Тачка ће се кретати у кругу ако је почетна брзина управна на почетни потег $\vec{r}_0$, и сила $\vec{P} = - m\,k^2\,\vec{r}$ константне величине:

$$P = -\frac{m\,v_0^2}{r_0^2},$$

т. ј.

$$v_0 = k\,r_0.$$

Када двема динамичким једначинама додамо $d^2z/dt^2 = 0$ (где осовина z стоји управно на раван xy), добијамо $dz/dt = c$ константну компоненталну брзину, тачка ће описивати завојну линију константном брзином $v = \sqrt{a^2\,k^2 + c^2}$.

Ако је сила P одбојна:

$$\vec{P} = m\,k^2\,\vec{r},$$

добијамо законе кретања из пређашњих замењујући k са ik:

$$x = r_0 \cos\operatorname{hyp} kt, \qquad y = r_0 \sin\operatorname{hyp} kt.$$

Елиминацијом времена с обзиром на релацију:

$$\cos\operatorname{hyp}^2 x - \sin\operatorname{hyp}^2 x = 1$$

налазимо за путању тачке хиперболу:

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{k^2\,y^2}{v_0^2} = 1,$$

брзина је и овде $v = k\,b'$.

85. Кретање планета. Из опажања кретања планете Марса које је дански астроном Тихо (Tycho de Brahe, 1546—1601.) кроз 20 непрекидних година вршио, и из својих сопствених извео је његов наследник J. Кеплер (J. Kepler, 1571—1630.) своја позната три закона планетског кретања:

1. Планете се крећу у елипсама око Сунца као заједничке жиже.

2. Потег повучен од Сунца ка планети превлачи у једнаким размацима времена једнаке површине.

3. Треће потенције великих полуосовина односе се као квадрати трајања оптицаја.

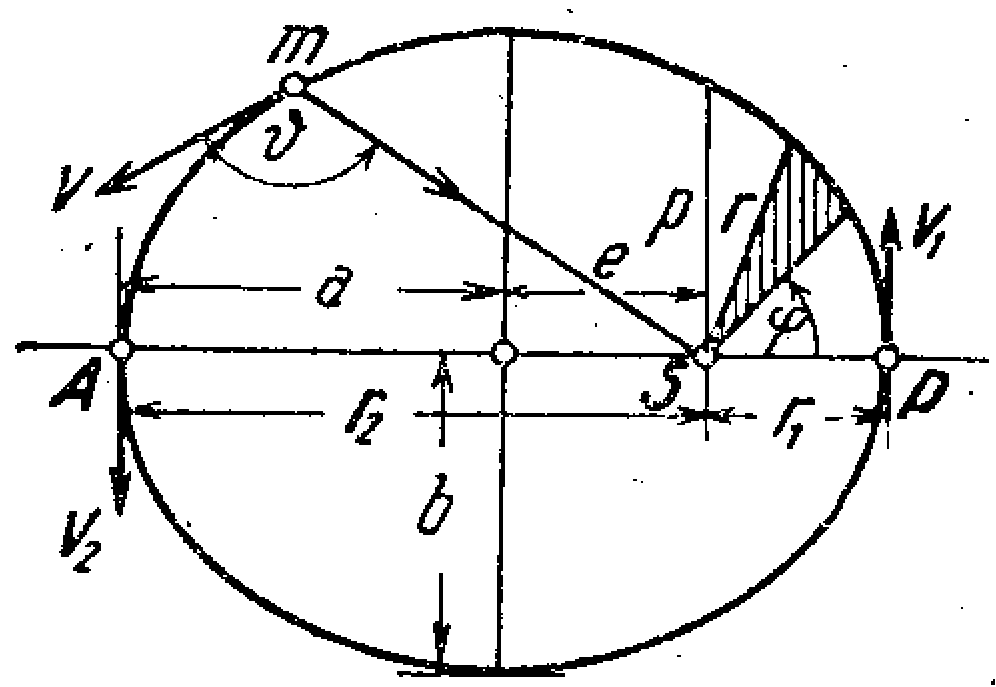
Прва два закона односе се на једну планету а трећи поставља однос између разних планета.

А) На основу Кеплерових емпиричких закона и научних тековина Галилеја, Хајгенса и својих сопствених, поставио је Њутн (I. Newton, 1643—1726.) закон гравитације, тиме открио хиљадугодишњу тајну планетског кретања и засновао Небеску механику. Свој закон саопштио је у свом бесмртном делу: Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1607. (Математички принципи Теоријске физике) служећи се геометријским извођењима. Аналитичком методом доћићемо брже и лакше циљу. У поларном координатном систему гласи једначина коничног пресека:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

где $p = b^2/a$ значи параметар (сл. 85.1), φ центричну аномалију,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$



Сл. 85.1

нумеричку ексцентричност која је за елипсу $\varepsilon < 1$. Пошто унесемо за p горњу вредност и $e = a\varepsilon$, гласиће једначина елипсе:

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi}. \tag{85.1}$$

По другом Кеплеровом закону је секторна брзина $\frac{dF}{dt}$ константна. Када константу означимо са $c/2$ налазимо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{2} \quad \text{или} \quad r^2\omega = c. \tag{85.2}$$

Из Кинематике (чл. 44.) су нам познати обрасци за радијалну и циркуларну компоненту убрзања тачке:

$$u_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2, \qquad u_c = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega).$$

Пошто је $r^2\omega = c$ то је $u_c = 0$, тј. цело убрзање, дакле и сила, пада у спојну праву Сунца и планете. Убрзање $u = u_r$ је независно од аномалије φ и зависи само од потега r. Ту зависност наћићемо лакше када место r уведемо као непознату реципрочну величину $\frac{1}{r}$ и ω сменимо по (85.2) са $\frac{c}{r^2} = \omega$.

Тако добијамо

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\omega=\frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2}=-c\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}. \tag{85.3}$$

Из једначине (85.1) је

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b^2}(a+e\cos\varphi),$$

дакле

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}=-\frac{e}{b^2}\sin\varphi$$

и сменом у једначину (85.3)

$$\frac{dr}{dt}=\frac{ce}{b^2}\sin\varphi,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{ce}{b^2}\omega\cos\varphi=\frac{c^2e}{b^2}\frac{\cos\varphi}{r^2}$$

и сменом из (85.1)

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{b^2}\right). \tag{85.4}$$

Пошто унесемо величине из једначине (85.2) и (85.4) добијамо радијално убрзање:

$$u_r=\frac{c^2}{r^3}-\frac{c^2a}{b^2}\frac{1}{r^2}-\frac{c^2}{r^3}=-\frac{c^2a}{b^2}\frac{1}{r^2}. \tag{85.5}$$

Када трајање једног оптицаја планете означимо са τ имамо по другом Кеплеровом закону:

$$\frac{c}{2}\tau=ab\pi$$

и сменом c је

$$u_r=-\frac{4a^3\pi^2}{\tau^2r^2}.$$

По трећем Кеплеровом закону је

$$\frac{a^3}{\tau^2}=\delta \tag{85.6}$$

за све планете иста константа. Са њоме гласи:

$$u_r=-\frac{4\delta\pi^2}{r^2}, \tag{85.5a}$$

где је $4\delta\pi^2=\lambda$ за све планете иста величина.

По динамичком закону је сила која планету напада

$$P_1=-\frac{\lambda m_1}{r^2} \tag{85.7}$$

обратно пропорционална квадрату растојања и управљена ка Сунцу; m_1 је инертна маса планете а константа λ зависи само од Сунца.

По III. Њутновом закону кретања је сила P_2 којом планета дејствује на Сунце: $P_2 = -P_1$, дакле када је m_2 инертна маса Сунца а λ' константа зависна од планете, важи $P_2 = -\frac{\lambda' m_2}{r^2}$. Једнакост апсолутних величина сила изражена је једначином: $\frac{\lambda m_1}{r^2} = \frac{\lambda' m_2}{r^2}$ што значи да је

$$\frac{\lambda}{m_2} = \frac{\lambda'}{m_1} = K \tag{85.8}$$

константна величина, гравитациона константа, којом је сила између Сунца и планете изражена обрасцем:

$$P = -K\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{85.9}$$

Обе масе m_1 и m_2 јављају се и као тешке и као инертне масе. Када имамо у виду силу P_1 онда је m_1 инертна, m_2 тешка маса, обратно када уочимо силу $P_2 = -P_1$.

Једнакост тешке и инертне масе (чл. 47) показује се у закону гравитације у томе што се у њему појављује производ обих маса.

Б) Обрнути задатак: из закона гравитације одредити кретање планете[1]), решићемо на основу чињенице (чл. 45) да је за *свако централно кретање циркуларно убрзање једнако нули*, дакле, $r^2\omega = c$.

Када означимо $1/r = q$ добијамо као раније

$$\frac{dr}{dt} = -c\frac{dq}{d\varphi}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -c\omega\frac{d^2q}{d\varphi^2} = -c^2q^2\frac{d^2q}{d\varphi^2},$$

дакле

$$u_r = -c^2q^2\frac{d^2q}{d\varphi^2} - c^2q^3$$

или

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = -\frac{u_r}{c^2q^2}. \tag{85.10}$$

Када унесемо у ову једначину убрзање планете: $u_r = -\frac{kM}{r^2}$, где M значи масу Сунца, добијамо:

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = \frac{kM}{c^2}, \tag{85.11}$$

где на десној страни стоји константна величина. Ова нехомогена диференцијална једначина другога реда има партикуларни интеграл:

$$q_1 = \frac{kM}{c^2} = \frac{1}{p},$$

[1]) Решење овог задатка први је показао Johannes Bernoulli, (1667—1748.)

где p значи константну дуж.

Општи интеграл хомогене диференцијалне једначине:

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = 0,$$

гласи:

$$q = A \sin\varphi + B \cos\varphi$$

и увођењем константи ε и φ_0 са

$$A = \frac{\varepsilon}{p} \sin\varphi_0 \qquad \text{и} \qquad B = \frac{\varepsilon}{p} \cos\varphi_0,$$

добијамо општи интеграл једначине (85.11):

$$q = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}(\varphi - \varphi_0)\,. \tag{85.12}$$

Ако угао φ рачунамо од тачке P најближе Сунцу (сл. 85.1), или перихела, бићи $\varphi_0 = 0$ и једначина (85.12) претставља са

$$\frac{1}{q} = r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

познату поларну једначину коничног пресека.

Планета се креће по елипси, параболи или хиперболи према томе дали је

$$\varepsilon \lesseqgtr 1$$

што зависи од почетног стања кретања.

За квадрат брзине: $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2$, добијамо увођењем реципрочне величине $1/r$ из једначине елипсе и даљих трансформација у које даље нећемо улазити, израз:

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2}(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi) \tag{85.13}$$

који има облик косинусовог става за троугао са странама v, c/p и $\varepsilon c/p$.

Из чл. 45 знамо да је код централног кретања момент брзине у погледу центра константна величина. Са ознакама у сл. 85 1 је дакле

$$v_1 r_1 = v_2 r_2 \quad \text{или} \quad v_1 : v_2 = r_2 : r_1\,.$$

Из конструкције поменутог троугла видимо да је годограф брзине планете круг пречника: $c/p = v_1 + v_2$; пол годографа лежи на вертикалном пречнику и дели пречник у обратној сразмери од оне у којој жижа S дели велику полуосовину.

Једначина (85.13) може се трансформацијом довести у простији облик:

$$v^2 = \lambda\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{85.14}$$

и претставља у том облику **једначину енергије** за елиптичко кретање као што ћемо ниже показати.

Све централне силе $P = f(r)$ што зависе само од растојања конзервативне су јер је њихов елементарни рад $dA = f(r)\,dr$ потпуни диференцијал. За гравитациону силу је

$$dA = dU = -\frac{m\lambda}{r^2}\,dr = d\left(\frac{m\lambda}{r}\right) = -\,dV.$$

По принципу живе силе је

$$d(L + V) = 0 \quad \text{или} \quad d\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{m\lambda}{r}\right) = 0$$

дакле

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\lambda}{r} = h,$$

где је h константа енергије (чл. 78).

Из последње једначине добијамо, са ознаком $h' = 2h/m$,

$$v^2 = \frac{2\lambda}{r} + h'. \tag{85.15}$$

Максимална брзина v_1 је у перихелу P, за коју тачку је $r_1 = a(1-\varepsilon)$, дакле је

$$v_1^2 = \frac{2\lambda}{a(1-\varepsilon)} + h'.$$

Одавде налазимо

$$h' = v_1^2 - \frac{2\lambda}{a(1-\varepsilon)}.$$

У теменима елипсе је убрзање λ/r^2 идентично са центрипеталним убрзањем v^2/ϱ. У перихелу је полупречник ϱ кривине: $\varrho = b^2/a = a(1-\varepsilon)^2$, дакле је

$$\frac{v_1^2}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{\lambda}{a^2(1-\varepsilon)^2}$$

и одавде

$$v_1^2 = \frac{\lambda}{a}\,\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} = \frac{\lambda}{a}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Са овом вредношћу налазимо:

$$h' = \frac{\lambda}{a}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{\lambda}{a}\,\frac{2}{1-\varepsilon} = -\frac{\lambda}{a}.$$

Сменом h' у једначину (85.15) добијамо једначину енергије планете:

$$v^2 = \lambda\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

дакле једначину (85.14.)

За облик путање меродавна је величина брзине у перихелу. Из

$$v_1^2 = \lambda \frac{1+\varepsilon}{r_1}$$

видимо да ће путања бити елипса, парабола или хипербола када је

$$v_1 \lesseqqgtr \sqrt{\frac{2\lambda}{r_1}}.$$

Једначина убрзања u_r планете (85.5а) гласи пошто сменимо δ из једначине (85.6):

$$u_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2 r^2}$$

а изражено масом M Сунца, је

$$u_r = -k\frac{M}{r^2}.$$

Изједначењем оба израза налазимо:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{k\tau^2}. \qquad (86.16$$

Ако познајемо велику полуосовину путање ма које планете и трајање њеног обиласка око Сунца, можемо одредити Сунчеву масу.

Закони кретања планете изведени су под претпоставком да је Сунце непомично. Динамика система тачака (проблем двају тела) нас учи да оба тела масе m_1 и m_2 описују елиптичне путање око њиховог заједничког средишта и да је гравитациона сила између њих

$$P = -K\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = -K\frac{m_1 m_2}{r_1^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2},$$

где r_1, r_2 значе растојања маса од њиховог средишта а $r_1 + r_2 = r$. Но како је маса Сунца m_2 далеко већа од масе највеће планете, то можемо однос m_1/m_2 према јединици занемарити, тако исто и r_2 према r_1 те добијамо са великом приближношћу закон силе: $P = -K\,m_1 m_2/r^2$. Претпоставком да је Сунце непомично чинимо тим мању грешку што је мања маса планете.

86. Кос хитац у ваздуху. Кретање гранате испаљене из топа је врло сложено и зависи од њеног облика. Описивање тог кретања задатак је нарочите гране Механике, Спољашње балистике. [1])

[1]) Унутрашња балистика изучава кретање пројектила од тренутка његовог покрета до изласка из цеви.

Ми ћемо испитивати кретање материјалне тачке под утицајем њене почетне брзине $\vec{v}_0$, тежине $\overrightarrow{mg}$ и отпора ваздуха $\vec{W}$. У мирној атмосфери имаће W правац брзине, дакле тангенте на путању и смер супротан брзини. Закон по коме W зависи од брзине остављамо неодређен и означићемо га са

$$W = mg\,\varphi(v);$$

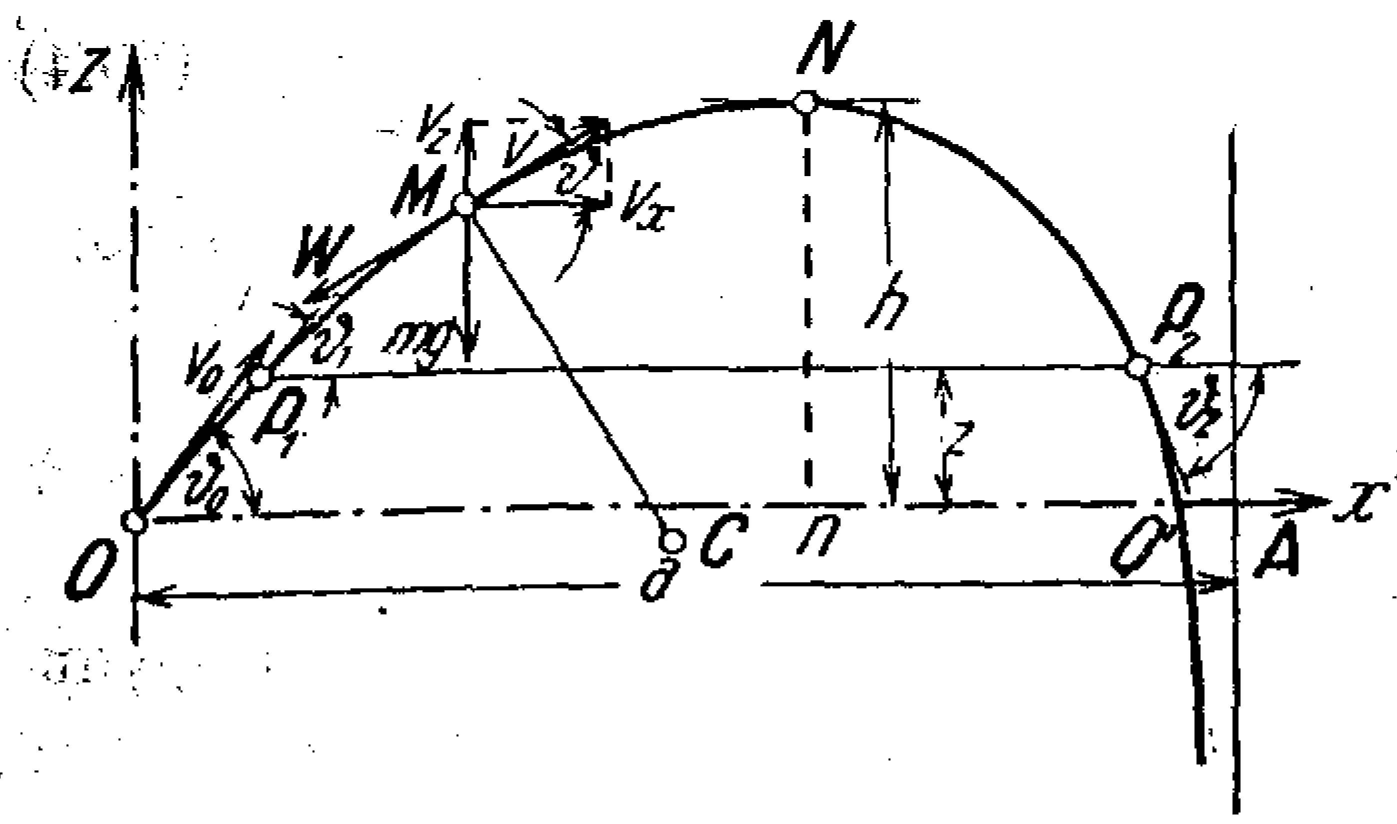
функција $\varphi(v)$ задовољава услов $\varphi(0) = 0$.

У тачки M (сл. 86.1) путање има брзина нагиб ϑ. Када силе mg и W пројицирамо на тангенту и нормалу и поделимо са m, добијамо тангенцијално убрзање:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,[\sin\vartheta + \varphi(v)] \qquad (86.1)$$

и центрипетално убрзање

$$\frac{v^2}{\varrho} = g\cos\vartheta. \qquad (86.2)$$



Сл. 86.1

Из ових једначина кретања читамо неке особине путање које важе за произвољан закон $\varphi(v)$. Из друге једначине следује да полупречник кривине $\varrho = MC$ и убрзање g теже леже увек на истој страни путање, дакле да је путања конкавна према осовини Ox. Угао ϑ стално опада; а како је v^2/ϱ дакле и $\cos\vartheta$ увек позитивно, то величина угла лежи у границама ϑ_0 и $-\pi/2$. Из прве једначине читамо да пошто тачка пређе теме, дакле буде $\vartheta < 0$, тежи dv/dt нули, дакле тежи брзина сталној величини k коју ће постићи за $\vartheta = -\pi/2$. Једначина (86.1) гласи тада: $0 = -g\,[-1 + \varphi(k)]$, дакле $\varphi(k) = 1$. Чињеница да је за $\vartheta \to = -\pi/2$ истовремено $v \to k$ значи да се кретање тачке завршава као слободан пад (чл. 61.2).

Кривина је

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{dt}\frac{1}{v}$$

(негативан знак јер ϑ опада када s расте).

Са том вредношћу кривине гласи једначина (86.2):

$$v\frac{d\vartheta}{dt} = -g\cos\vartheta. \qquad (86.2a)$$

Обе једначине (86.1) и (86.2а) садрже промењиве t, ϑ и v. Елиминацијом времена из ових једначина добијамо диференцијалну једначину првог реда између ϑ и v т. зв. главну једначину спољашњег балистичког проблема:

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}\left[\varphi(v) + \sin\vartheta\right]. \tag{86.3}$$

Ако успемо да ову једначину интегралимо, одредили смо ходограф брзине $v = f(\vartheta)$. Сада можемо лако одредити квадратурама координате (x,z) тачке.

Са $dx = ds\cos\vartheta = v\cos\vartheta\, dt = -(v^2/g)\, d\vartheta$ где је dt смењено из једначине (86.2a) и $dz = dx \operatorname{tg}\vartheta$ добијамо:

$$x = -\frac{1}{g}\int f^2(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad z = -\frac{1}{g}\int f^2(\vartheta) \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta. \tag{86.4}$$

Време које је потребно на путу од O до M одређено је интегралом:

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{f(\vartheta)d\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Пошто је $v = f(\vartheta)$ у интервалу $\vartheta_0 > \vartheta > -\pi/2$ непрекидна функција а мења се у интервалу $v_0 > v > k$, то одређени интеграл:

$$\frac{1}{g}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

има коначну вредност и претставља растојање $a = \overline{OA}$ вертикалне асимптоте од почетка. Из истих разлога је висина пењања h одређена интегралом:

$$h = \frac{1}{g}\int_0^{\vartheta_0} f^2(\vartheta)\, tg\,\vartheta\, d\vartheta$$

а апсциса темена је

$$\overline{On} = \frac{1}{g}\int_0^{\vartheta_0} f^2(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Када бисмо могли решити интеграле (86.4) у облику $x = x(\vartheta)$ и $z = z(\vartheta)$ добили бисмо једначину путање: $F(x, z) = 0$ која за $z = 0$ даје $x = 0$ и $x = \overline{OO'}$ домет пројектила.

Ако v_1 и v_2 значе брзину у двема тачкама P_1 и P_2 на истој висини z, налазимо из теореме живе силе:

$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2}{m}\int_{P_1}^{P_2} W ds,$$

где је $-W\,ds$ елементарни рад отпора ваздуха. Из чињенице да је $v_2 < v_1$ можемо потврдити да је за сваки пар тачака P_1, P_2: $\vartheta_2 > \vartheta_1$. Поделимо: $dz = v \sin\vartheta\, dt$ са $v = -g\cos\vartheta \frac{dt}{d\vartheta}$ (једн. 86.2а) те добијамо:

$$-g\frac{dz}{v^2} = \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta\,; \qquad \int \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta = -\ln\cos\vartheta$$

и када обележимо $\int \frac{dz}{v^2} = J$, имамо $gJ = \ln\cos\vartheta + C$.

Одређени интеграл у границама од P_1 до P_2 гласи:

$$gJ_{P_1}^{P_2} = \Big|\ln\cos\vartheta\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Интеграл $J_{P_1}^{P_2}$ поделићемо у два дела: J_1 и J_2, у границама од P_1 до темена N, односно од N до P_2. Од N до O' z опада, дакле је алгебарски збир:

$$J_{P_1}^{P_2} = J_1 - J_2 = \ln\cos\vartheta_2 - \ln\cos\vartheta_1.$$

Пошто је на сваку вредност z: $v_2 < v_1$, то је $J_2 > J_1$, дакле је

$$\ln\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1} < 0 \qquad \text{и} \qquad \vartheta_2 > \vartheta_1.$$

Силазна грана путање је стрмија од узлазне. Вертикала кроз теме није осовина симетрије.

Колики је огроман утицај отпора ваздуха при великим брзинама показује овај пример. Многобројни огледи са једном бојном пушком модела 88, која даје почетну брзину $v = 620\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$ утврдили су да је највећи домет 4 km и да одговара елевацији 32°. Висина темена трајекторије је 500 m. $\overline{On} = 2{,}2$ km. За исту почетну брзину и најкориснију елевацију од 45° а без отпора ваздуха налазимо домет од 40 km и висину темена од 10 km.

Главна једначина Спољашње балистике може се само за неке законе $\varphi(v)$ интегралити; као за $\varphi(v) = cv^n$. Али се даље интегралење за x и z не могу елементарним средствима извршити. Једино је то могућно за линеарни закон $\varphi(v) = c\,v$, који нема практичне важности. Поред ових математичких тешкоћа има и физикалних. Огледи потврђују да закон $\varphi(v)$ није за све брзине исти и да се утицај облика пројектила не може изразити константним коефицијентима, него да сваком пројектилу припада особени закон отпора, зависан од његова облика. Услед наведених чињеница и многих других утицаја није егзактно математичко одређивање трајекторије ни до данас потпуно решен проблем. Теоријска балистика упућена је стога на примену графичких и нумеричких метода за решавање главне једначине а прак тична балистика служи се таблицама гађања састављених на основ вршених огледа.

Балистичким проблемом бавио се J. Бернули 1719. а Ле жандр (Legendre) извршио је интегралење главне једначине з закон отпора: $\varphi(v) = a - bv^n$.

II. ОГРАНИЧЕНО КРЕТАЊЕ ТАЧКЕ

а) КРЕТАЊЕ ПО ПОВРШИНИ

87. Кретање тачке по непомичној глаткој површини. Ако ј тачка приморана да при свом кретању увек остаје на површини дато једначином:

$$F(x,y,z) = 0 \tag{87.1}$$

она има два степена слободе, јер њене координате x,y,z мо рају у сваком тренутку задовољавати једначину (87.1) тако да је њен положај са две независне величине одређен. Ограничено кретање остварено је силом (отпором) W површине. Када са P означимо резултанту свих датих (познатих) сила, можемо тачку сматрати сло бодном под дејством силе: $\vec{P} + \vec{W}$, дакле је њена једначина кретања

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{W}. \tag{87.2}$$

Отпор површине мењаће се од тачке до тачке путање по величини и правцу. Проблем ограниченог кретања је сложенији од проблема слободног кретања, јер у првом случају имамо да нађемо не само закон кретања тачке, него и отпор $\vec{W}$ у сваком тренутку. Овај ће уопште заклапати са нормалом површине известан угао, угао кинетичког трења, тако да га можемо разложити у нормалну компоненту N и тангенцијалну компоненту $T = fN$. Компонента T има правац тангенте на путању и смер супротан смеру кретања.

Претпостављамо за сада да су површина F као и тачка потпуно глатке, тако да је $f = 0$ дакле и $T = 0$. Отпор $\vec{W}$ је онда једнак нормалном отпору $\vec{N}$.

Ако на једном месту $M(x,y,z)$ путање нормала на површину заклапа са координантним осовинама углове α, β, γ, онда, као што је познато, постоје релације:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{J}, \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{J}, \qquad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{J},$$

где је J краћа ознака за именитељ:

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Када непознати отпор $\vec{N}$ разложимо у ортогоналне компоненте:

$$N_x = N\cos\alpha, \qquad N_y = N\cos\beta \qquad N_z = N\cos\gamma,$$

биће ове пропорционалне парцијалним изводима једначине (87.1). Када дакле са λ означимо фактор пропорционалности, добијамо:

$$N_x = \lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad N_y = \lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad N_z = \lambda\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Када означимо ортогоналне компоненте дате силе $\vec{P}$ са X, Y, Z, изражена је векторска једначина кретања (87.2) трима скаларним једначинама:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{87.3}$$

које су компоненте векторске једначине:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \lambda\,\mathrm{grad}\,F. \tag{87.4}$$

Четири једначине (87.1) и (87.3) одређују x, y, z као функције времена, дакле закон кретања, и λ као функцију времена, дакле отпор N у сваком тренутку.

Када прву једначину (87.3) помножимо са dx, другу са dy, а трећу са dz и тако добијене једначине саберемо, добијамо:

$$m\left[\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] =$$
$$= Xdx + Ydy + Zdz + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right).$$

Израз у загради на левој страни је

$$d\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = d\,\frac{v^2}{2},$$

а израз у загради на десној страни је тотални диференцијал једначине (87.1): $dF = 0$. Једначина се дакле своди на:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \tag{87.5}$$

а то је исказ теореме о живој сили. На десној страни једначине (87.5) стоји елементарни механички рад:

$$\delta A = P\,ds\cos(P, ds) = \vec{P}\,d\vec{s},$$

дате силе $\vec{P}$. Нормални отпор $\vec{N}$ не врши рад јер пошто је померање $\vec{ds}$ тачке увек на самој површини, то је N увек управно на ds, дакле $\cos(N\,ds) = 0$.

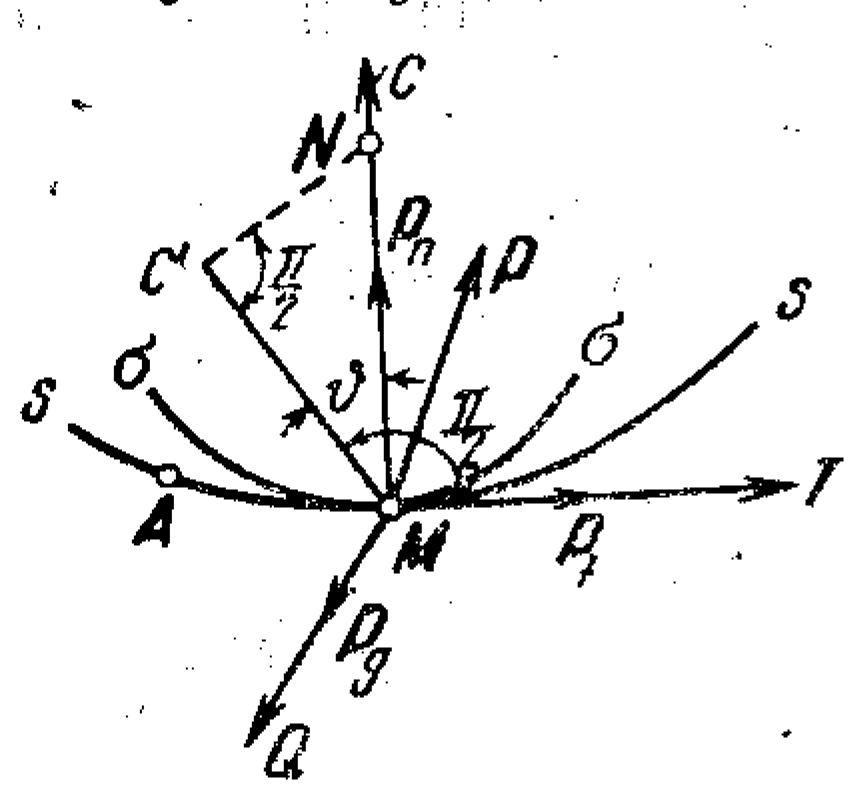
Ако је сила $\vec{P}$ конзервативна даје нам једначина (87.5) први интеграл кретања, независан од фактора λ:

$$m\frac{v^2}{2} = U + h, \tag{87.6}$$

где је h интеграциона константа.

Пошто смо одредили кретање тачке, налазимо отпор $\vec{N}$ као функцију времена када из једне од једначина (87.3) одредимо λ. Ако је отпор површине обостран, може $\vec{N}$ имати произвољан смер; ако је пак отпор једностран, мора $\vec{N}$ имати смер управљен у поље; тај смер сматрамо позитивним смером $\vec{N}$. На конкавној површини је смер $+N$ центрипеталан, а на конвексној површини центрифугалан. Ако у току кретања N постане негативним, тачка напушта површину и креће се даље као слободна тачка.

88. Наставак. Природне једначине кретања. Нека је $s - s$ путања тачке на површини $F(x, y, z) = 0$. На путањи узмемо произвољну тачку A као почетак, од кога меримо пут (сл. 88.1). Тачка се креће од A на десно под дејством силе P и нормалног отпора N. У неком тренутку t тачка се налази у M. MT је тангента на путању у тачки M у смеру кретања; MC је нормала површине. C је центар кривине пресека $\sigma - \sigma$ површине са нормалном равни NMT. Равна линија $\sigma - \sigma$ и путања $s - s$ (која може бити и просторна) имају у тачки M заједничку тангенту MT. Полупречник кривине тога пресека је: $MC = R$. Смер MC узимамо за позитиван смер нормале. MC' је главна нормала путање у тачки M. $MC' = \varrho$ је полупречник кривине путање. Раван TMC' је оскулациона раван путање у тачки M. Када са ϑ означимо угао између оскулационе равни и нормалне равни NMT површине, постоји по Меније-овом ставу (T. Meusnier, 1785.) релација:



Сл. 88.1

$$\varrho = R\cos\vartheta. \tag{88.1}$$

Пошто је $MC \perp MT$ и $MC' = T$ то је раван CMC' нормална раван путање. Права $MQ \perp MC$ је пројекција главне нормале MC' на тангенцијалну раван површине у тачки M, тако да је раван TMQ тангенцијална раван површине. Тако смо добили ортогонални триедар $M(Q,T,C)$.

Дату силу P разложимо у три компоненте P_t, P_n и P_q у правцима MT, MC и MQ. Резултанта из силе P и нормалног отпора N разлаже се, као што нам је познато у тангенцијалну силу $m\,dv/dt$ у правцу MT, и центрипеталну силу $m v^2/\varrho$ у правцу MC'. Кад ову последњу разложимо у компоненте у правцима MC и MQ, добијамо три једначине:

$$m\frac{dv}{dt} = P_t, \qquad m\frac{v^2}{\varrho}\sin\vartheta = P_q, \qquad \frac{m v^2}{\varrho}\cos\vartheta = P_n + N. \tag{88.2}$$

Ове се једначине могу упростити увођењем полупречника **геодетичке кривине**[1]):

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\sin\vartheta}. \tag{88.3}$$

С обзиром на (88.1) и (88.3) гласе једначине (88.2):

$$m\frac{dv}{dt} = P_t, \quad m\frac{v^2}{\varrho'} = P_q, \quad m\frac{v^2}{R} = P_n + N. \tag{88.2a}$$

Ако сила P има функцију U, постоји релација:

$$mv^2 = 2\,(U + h)$$

помоћу које налазимо из треће једначине (88.2а):

$$N = \frac{2\,(U+h)}{R} - P_n. \tag{88.4}$$

Овим обрасцем можемо одредити N **независно од кретања тачке**, када познајемо полупречник нормалне кривине R.

Из једначина (88.2а) можемо извући интересантне закључке. Ако површину по којој се тачка креће, произвољно деформишемо, али тако да се дужина линија на површини не мења, остају полупречници ϱ' геодетичке кривине непромењени. Када силу P тако изменимо да њена пројекција на тангенцијалну раван остане иста као што је на првобитној површини била, онда се прве две једначине (88.2а) које дефинишу кретање, не мењају и кретање по деформисаној површини биће идентично са кретањем по првобитној површини. Мењаће се

---

1) **Геодетичком кривином** $\frac{\sin\vartheta}{\varrho}$ зове се кривина пројекције криве линије на тангенцијалну раван, а $\frac{\cos\vartheta}{\varrho} = \frac{1}{R}$ зове се **нормалном кривином**. Између ϱ, ϱ' и R постоји однос: $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho'^2} + \frac{1}{R^2}$.

само нормални отпор. Тако на пример добијамо путању тешке тачке која је приморана да се креће на површини вертикалног цилиндра, када око цилиндра омотамо параболу са вертикалном осовином. Путању тешке тачке која се креће по површини вертикалног конуса добијамо омотавањем око конуса равне путање тачке која се креће под дејством константне централне силе са центром у врху конуса.

Најпростији случај кретања тачке на површини је онај када је $P=0$. Једначине (88.2a) гласе сада:

$$m\frac{dv}{dt}=0, \qquad m\frac{v^2}{\varrho'}=0, \qquad m\frac{v^2}{R}=N.$$

Из прве једначине излази да ће се тачка кретати константном брзином v_0 коју је у почетку добила. Пошто је N једина сила која на тачку дејствује, лежи она у оскулационој равни путање, главна нормала путање поклапа се у свакој тачки путање са нормалом површине, угао $\vartheta=0$. Криве линије на површини са том особином зову се геодетичке линије. Из друге једначине излази да је за геодетичке линије геодетичка кривина: $\frac{1}{\varrho'}=\frac{\sin\vartheta}{\varrho}=0$ стално једнака нули. Са $\vartheta=0$ излази из (88.1) да је у нашем случају:

$$R=\varrho, \qquad \text{дакле} \qquad N=m\frac{{v_0}^2}{\varrho},$$

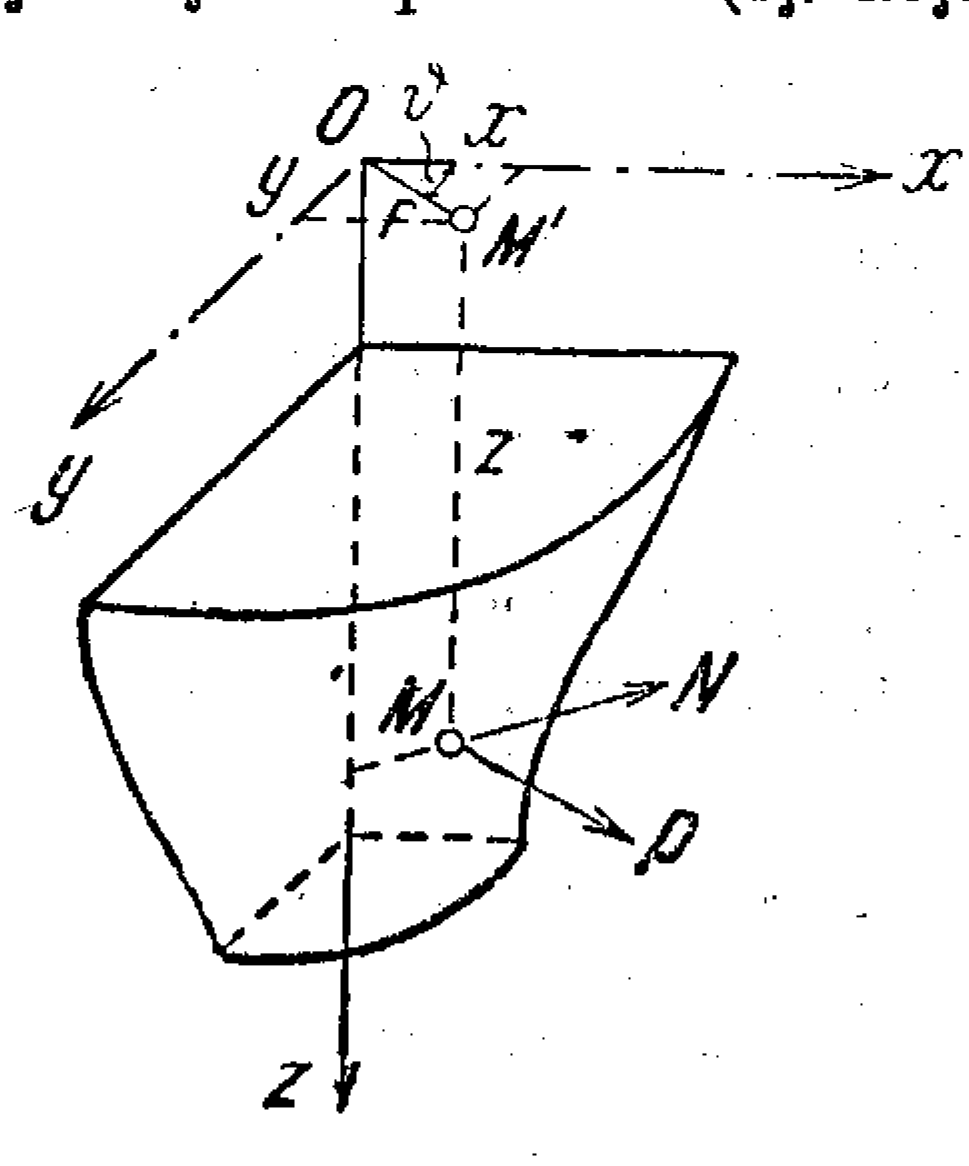
тј. да је нормални отпор обратно пропорционалан полупречнику кривине путање.

Опште једначине кретања (87.3) гласе у овом случају:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\frac{dF}{dy}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\lambda\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Ако се тачка креће по праволинијској површини (тј. која постаје кретањем једне праве) и дадемо јој брзину у правцу једне изводнице, она ће се по принципу инерције кретати по тој правој и отпор површине биће једнак нули.

89. Кретање тачке по глаткој обртној површини. Ако се тачка креће по некој обртној површини $z=f(r)$, где је $r^2=x^2+y^2$, и која је образована обртањем меридијана $z=f(x)$ око осовине z (сл. 89.1) можемо поставити две једначине независне од N, које одређује кретање тачке. Прву нам даје,



Сл. 89.1

као у општем случају, закон живе силе, а другу теорема о моменту количине кретања (или з а м а х а) примењена на обртну осовину z површине.

Према природи површине најподесиција је примена цилиндричних координта: (r, ϑ, z). Позитивна осовина z управљена је на ниже.

Са компоненталним брзинама (чл. 46.):

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_c = r\frac{d\vartheta}{dt} \qquad \text{и} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d f(r)}{dt} = f'(r)\frac{dr}{dt},$$

добијамо:

$$v^2 = v_r^2 + v_c^2 + v_z^2 = (1 + f'^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

где је краће писано f' место $f'(r) = \dfrac{d f(r)}{dr}$.

У Кинематици (чл. 45.) смо извели за равно кретање став да је статички момент убрзања тачке у погледу неке тачке O у равни кретања једнак изводу по времену статичког момента њене брзине у погледу на тачку O. Множећи брзину и убрзање са масом m покретне тачке, добијамо динамички став, *да је код равног кретања момент силе у погледу неке тачке O у равни кретања једнак изводу по времену момента количине кретања mv у погледу на исту тачку.*

Да бисмо ову теорему могли применити на наш случај просторног кретања, морамо дефинисати појам момента неког вектора V у погледу на неку осовину z. Положимо управно на осовину z произвољну раван; на пример раван xy (сл. 89.1) која продире осовину z у тачки 0. Вектор V пројицирамо на ту раван. Величина пројекције нека је V'. Када са e означимо дужину управне повучене из 0 на V' или к р а к вектора V', онда је $V'e$ момент вектора V' у погледу на тачку 0, и тај момент дефинишемо као момент вектора V у погледу на осовину z.

Из ове дефиниције излази непосредно да је момент вектора V у погледу на осовину z једнак нули ако се праве z и V секу, или ако су паралелне.

Нормале обртне површине секу обртну осовину, дакле је момент нормалног отпора N у погледу на осовину z једнак нули, стога N не улази у једначину момената. Од компоненталних количина кретања: mv_r сече осовину z, mv_z је паралелан осовини z, дакле су њихови моменти једнаки нули. Момент компоненте mv_c је:

$$rmv_c = m\, r^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Од компонената силе P је Z паралелна осовини, компонента X има момент $-yX$, а компонента Y има момент xY, дакле је момент силе P у погледу осовине z:

$$M_z^{(P)} = xY - yX.$$

Обе једначине кретања гласиће:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[(1+f'^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}, \\ &m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = xY - yX = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (89.1)$$

За тешку тачку је $X=0$, $Y=0$, $Z=mg$, дакле први интеграли једначина (89.1) гласе сада:

$$\left.\begin{aligned} &(1+f'^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2gz + h = 2g\,f(r) + h, \\ &r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C, \end{aligned}\right\} \quad (89.2)$$

где су h и C интеграционе константе.

Ако је $r=\text{const.}$ дакле и $z=\text{const.}$, дају обе једначине (89.2):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = C,$$

тачка се креће константном брзином у хоризонталном кругу.

Ако је $C=0$ дакле $\vartheta=\text{const.}$ тачка се креће у вертикалној равни.

Пошто елиминишемо dt, добијамо једначину пројекције путање на раван xy:

$$(1+f'^2)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 = [2gf(r)+h]\,\frac{r^4 d\vartheta^2}{C^2}.$$

Променљиве ϑ и r можемо раздвојити и добијамо квадратуром ϑ као функцију од r:

$$\vartheta = \int \frac{C\,dr}{r}\sqrt{\frac{1+f'^2}{[2g\,f(r)+h)]\,r^2 - C^2}}.$$

Интегралење једначина кретања може се извести квадратуром у сваком случају када дате силе имају функцију U која зависи само од r.

90. Геодетичке линије на обртним површинама. Ако је $P=0$, тачка се креће по једној геодетичкој линији. Десне стране једначине (89.1) су једнаке нули, те добијамо:

$$(1-f'^2)\,dr^2 - r^2 d\vartheta^2 = v_0^2 dt^2$$

и

$$r^2 d\vartheta = C\,dt,$$

где v_0 значи почетну брзину а C произвољну константу. Пројекцију путање на раван xy добијамо елиминишући dt из обе једначине:

$$(1+f'^2)\,dr^2+r^2d\vartheta^2=\frac{v_0^2}{C^2}r^4d\vartheta^2.$$

Када ставимо $\frac{v_0^2}{C^2}=\frac{1}{\alpha^2}$ и последњу једначину решимо по $d\vartheta$, налазимо:

$$d\vartheta=\pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+f'^2}{\frac{r^2}{\alpha^2}-1}};$$

знак пред кореном зависи од смера почетне брзине. Коначна једначина геодетичких линија гласи:

$$\vartheta=\int\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+f'^2}{\frac{r^2}{\alpha^2}-1}}+\beta.$$

Ова једначина садржи две константе α и β које одређујемо из датих услова; на пример из услова да линија пролази кроз две дате тачке. Облик геодетичке линије зависи само од константе α; промени константе β одговара обртање геодетичке линије око осовине z. Са елементарним луком $d\sigma$ меридијана је

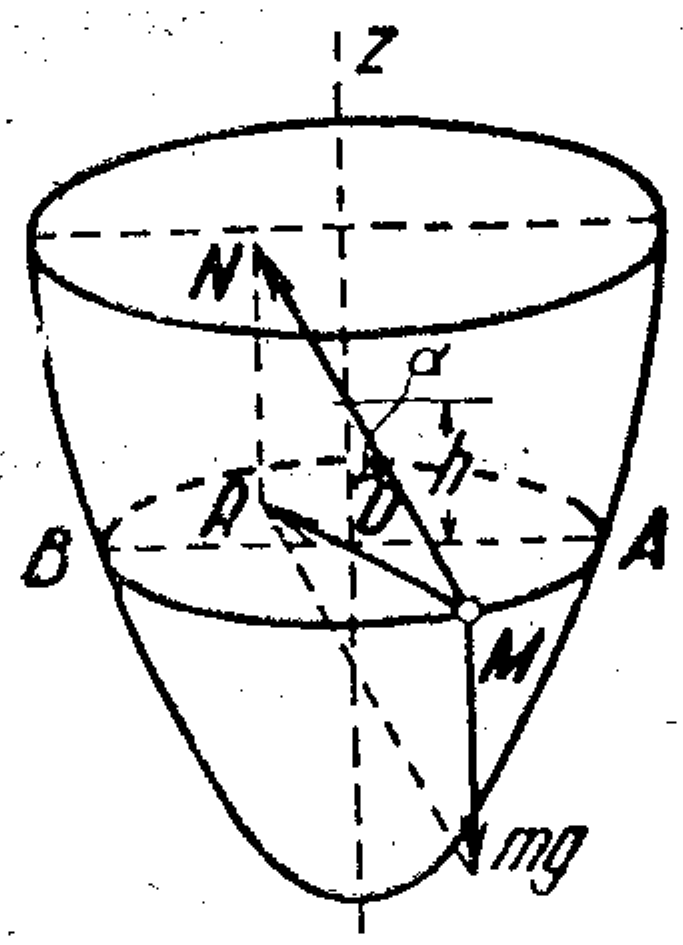
$$d\sigma^2=dr^2+dz^2=(1+f'^2)\,dr^2$$

и диференцијална једначина геодетичке линије добија простији облик:

$$d\vartheta=\pm\frac{\alpha\,d\sigma}{r\,(r^2-\alpha^2)}.$$

Када се покретна тачка креће по једној геодетичкој линији, момент количине кретања, дакле и момент брзине, у погледу осовине z је по другој једначини кретања: $r^2\frac{d\vartheta}{dt}=C$ константан. Ако један елемент путање заклапа са меридијаном угао i, разложимо брзину v у компоненту $v\sin i$ која додирује паралелни круг и $v\cos i$ која додирује меридијан; ова последња сече осовину z, њен момент је једнак нули. Остаје дакле $rv\sin i=\text{const.}$ а пошто је v константно то је $r\sin i=\text{const.}$ Ову карактеристичну особину геодетичких линија на обртним површинама нашао је Клеро (A. Clairaut, 1713—1765.).

91. Стационарно кретање. Конично или центрифугално клатно. Одредићемо потребне почетне услове да се тачка на обртној површини креће у једном паралелном кругу AB (сл. 91.1). Механички рад тежине mg је у том случају једнак нули и тачка ће се кретати



Сл. 91.1

константном брзином v коју смо јој у почетку дали. Пошто је кретање једнолико у кругу, мора резултанта R из тежине mg и нормалног отпора N бити стално управљена према центру O паралелног круга и имати величину: $R = m\, v_0^2/r_0$, где је $r_0 = AO$ полупречник круга. Из слике видимо да то може бити само онда ако се врх D кружног конуса што га образују нормале површине на паралелном кругу AB, налази изнад круга. Ако са α означимо угао између осовине z површине и нормале N, налазимо из векторског троугла MRN:

$$N \sin\alpha = m\,\frac{v_0^2}{r}\,, \quad N\cos\alpha = mg,$$

и из ових једначина излази тражена брзина:

$$v_0 = \sqrt{g r_0 \operatorname{tg}\alpha}.$$

Ако означимо: висину $\overline{OD}$ са h, угаону брзину кружења са ω, трајање једног кружења са T, налазимо из последње једначине са $\operatorname{tg}\alpha = r_0/h$, $v_0 = \omega r_0$ и $T\omega = 2\pi$:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}\,.$$

Ово стационарно кретање тачке у хоризонталном кругу можемо извести и на тај начин, да тачку M обесимо у тачки D на концу дужине DM, конац затегнемо тако да са вертикалом заклапа угао α и дадемо тачки M горе срачунату почетну брзину v_0 у хоризонталном правцу управно на затегнути конац. Отпор N појављује се овде као сила која затеже конац. Таква се направа зове центрифугално или конично клатно и има примену на регулаторе моторних машина.

92. Надвишење спољашње шине у кривини. Практичан пример принудног кретања материјалне тачке по хоризонталном кругу јесте кретање жељезничког воза на неком завијутку, јер се кривине колосека увек извршују као кружни лу̂ци (сл. 92.1).

Када се воз креће по кружној кривини полупречника R брзином v, онда он притискује на шине не само својом тежином mg, већ и центрифугалном силом mv^2/R. Када би колосек био хоризонталан (тј. обе шине у истом нивоу) резултанта N' ових двеју сила која са вертикалом заклапа угао φ, одступила би од средине колосека упоље, те би спољашња шина била више оптерећена него унутрашња. Да се то избегне поставља се спољашња шина у кривини толиким надвишењем z колико је потребно да сила N' падне у средину колосека и нормално на његову раван. Попречни нагиб φ колосека према хоризонтали мора бити исти онолики колики је и нагиб силе N' према вертикали. Ако је ширина колосека s, мора надвишење бити:

$$z = s \sin \varphi = s \operatorname{tg} \varphi,$$

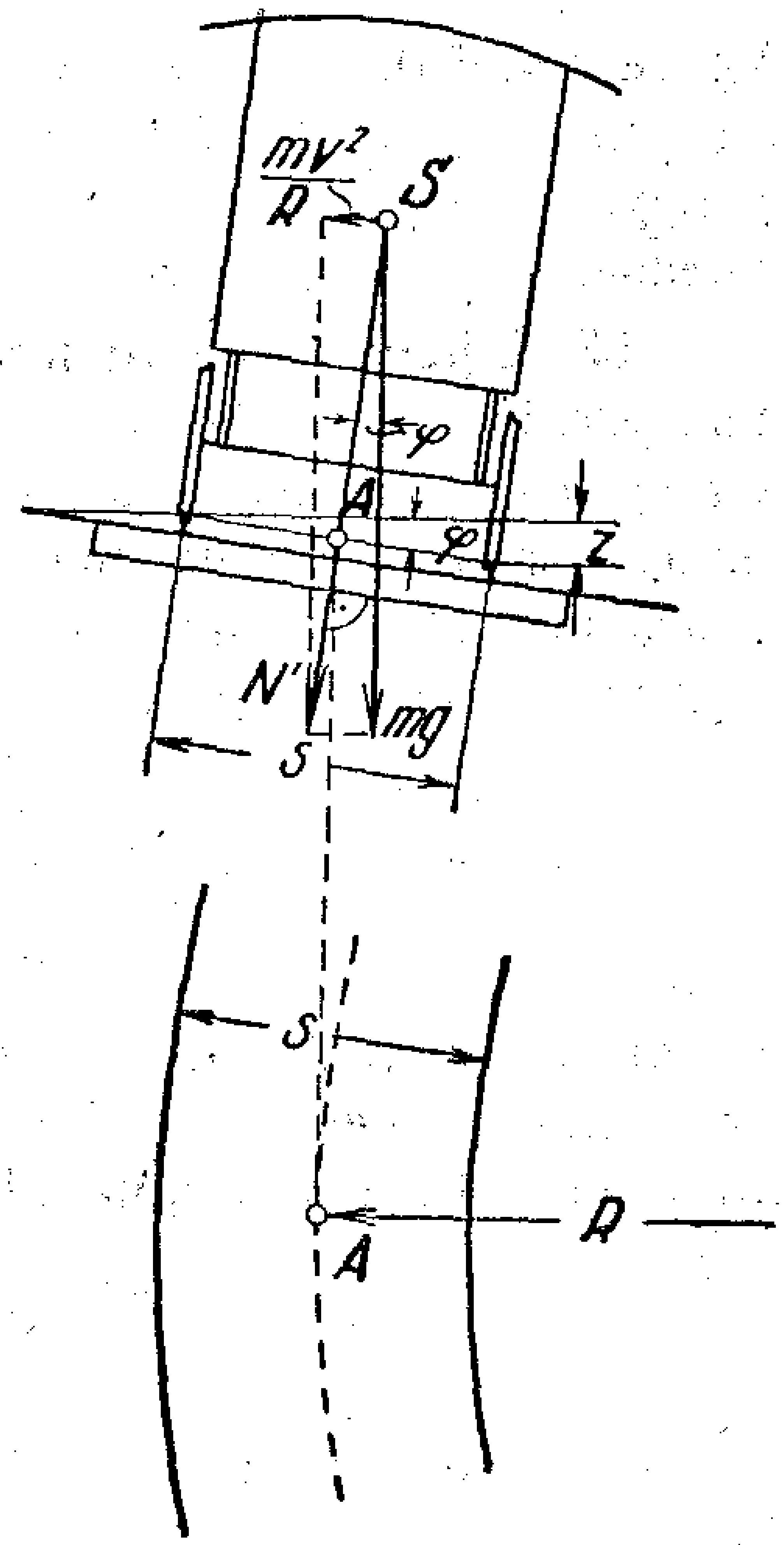
пошто је φ увек врло мали угао ($\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$). Из сл. 92.1 читамо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{Rg},$$

па према томе је

$$z = \frac{sv^2}{Rg} = C\,\frac{v^2}{R}, \qquad (92.1)$$

где је $C = s/g$ константа, зависна од ширине колосека ($s = 1{,}435$ m за нормални, а $s = 0{,}76$ m за уски колосек).



Сл. 92.1

При грађењу железница нормалног колосека узима се $R_{min} = 250$ m, а за уске пруге $R_{min} = 150$ m и ако се уз то још узме у обзир и уобичајена просечна брзина возова, онда се за z рачунски добијају вредности до 0,15m. Многе железничке Управе сматрају да овај теоријски образац даје за z сувише велике вредности, те се за израчунавање надвишења спољне шине често употребљава и емпирички образац:

$$z = \frac{V}{2R}, \qquad (92.1a)$$

где је V брзина воза у km/h.

При прелазу из праве пруге у којој је $z = 0$ у кружну кривину која треба да добије надвишење z, мора се ово надвишење постепено изводити. Значи да се између праве пруге и кружне кривине мора уметнути тзв. прелазна кривина тј. кривина којој се полупречник кривине ϱ континуално смањује од ∞ до R. Као прелазна кривина у пракси се обично употребљава кубна парабола чија је једначина: $y = x^3/6c$, где је c константа која зависи од тога да ли је пруга главна или споредна. За главне пруге узима се $c = 12\ 000$, а за споредне пруге $c = 6\,000$, тако да се добивају дужине прелазних кривина код главних пруга 24—48 m, а код споредних 12—40 m. Прелаз из праве у кружну пругу треба да је у толико блажи, у колико је већа брзина вожње.

93. Сферично или просторно клатно. Најпростија обртна површина је лопта. Тешку тачку која се креће на површини лопте зовемо сферичним клатном. Ако са l означимо полупречник лопте (дужину клатна), узмемо центар лопте O за почетак координатног система а осовину Oz вертикално на ниже, гласи једначина лопте у цилиндричним координатама:

$$r^2 + z^2 = l^2.$$

Теорема живе силе и момента количине кретања дају релације:

$$v^2 = 2gr + h \qquad r^2\, d\vartheta = C dt. \tag{93.1}$$

Са овим трима једначинама можемо координате r, ϑ, z изразити као функције времена t, али је подесније да изразимо r, t, и ϑ као функције од z. Тога ради заменићемо v^2 њеним цилиндричним компонентама:

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h$$

и заменићемо r са $\sqrt{l^2 - z^2}$ а dr са $\dfrac{-z\,dz}{\sqrt{l^2 - z^2}}$. Тако добијамо из теореме момента:

$$d\vartheta = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}$$

и кад ово сменимо у једначини живе силе добијамо:

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2. \tag{93.2}$$

Када означимо краће: $f(z) = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2$, налазимо из (93.2):

$$dt = \frac{l\,dz}{\pm\sqrt{f(z)}}, \qquad t = \int_{z_0}^{z} \frac{l\,dz}{\pm\sqrt{f(z)}} \tag{93.3}$$

а из друге једначине (93.1):

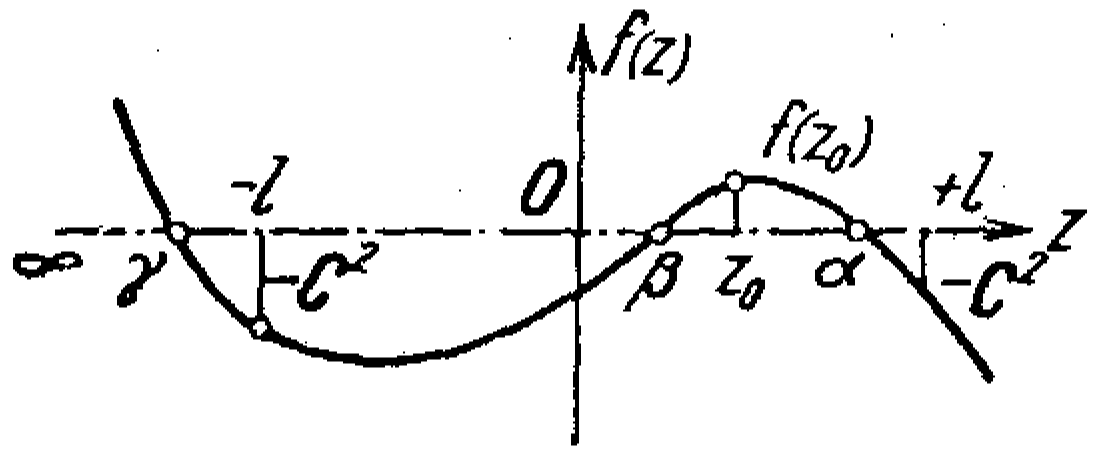
$$d\vartheta = \frac{C\,dt}{r^2} = \pm\frac{C\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}. \tag{93.4}$$

Једначинама (93.3) и (93.4) дефинисани су t и ϑ као функције од z; r одређујемо из једначине лопте. Знак је одређен почетним условима. Из прве једначине (93.3) видимо да двосмисленост у избору знака постоји ако је $\left(\dfrac{dz}{dt}\right)_0 = 0$; у том случају бираћемо знак $+$ или $-$ према томе да ли од вредности z_0 мора z расти или опадати да би $f(z)$ остало позитивно.

Решење задатка своди се на елиптичке квадратуре.

Друга једначина (93.1) нам каже да $d\vartheta/dt$ има сталан знак за време кретања тачке; значи да пројекција тачке на раван xy обилази осовину z увек у истом смислу, сем ако је $C=0$; али у том случају је угао ϑ константан и тачка се креће у вертикалном кругу (кружно клатно).

Да би интеграли били реални, мора функција $f(z)$ бити позитивна. Полином $f(z)$ је трећег степена, лако се можемо уверити да има три реална корена. За $z=-\infty, -l, z_0$ и $+l$ налазимо за $f(z)$ вредности: $+\infty, -C^2, f(z_0)>0$[1]) и $-C^2$. Постоје дакле два реална корена α и β између $+l$ и z_0 и између z_0 и $-l$ и један реални корен γ мањи од $-l$ (сл. 93.1). Претпостављамо за сада да су сва три корена различита. Полином $f(z)=0$ сређен по степенима непознате z гласи:



Сл. 93.1

$$z^3+\frac{h}{2g}z^2-l^2z-\frac{1}{2g}(hl^2-C^2)=0.$$

Из теорије алгебарских једначина знамо да је коефицијент од z једнак збиру производа од два и два корена, дакле

$$\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-l^2$$

и одавде налазимо:

$$\gamma=-\frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Пошто се корени α и β налазе између $+l$ и $-l$ (сл. 93.1), то је увек $|\alpha\beta|<l^2$, дакле је бројитељ увек позитиван; а како је γ негативно, то мора и именитељ $(\alpha+\beta)$ бити позитиван: $(\alpha+\beta)>0$. То значи да паралелни круг који је у једнаком растојању од паралела: $z=\alpha$ и $z=\beta$ лежи увек испод центра лопте, и да је корен α увек позитиван. Функција $f(z)$ разложена у факторе гласи:

$$f(z)=-2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Величина z лежи увек између горњег и доњег темена лопте, дакле између $-l$ и $+l$; корен γ је мањи од $-l$. Узмимо на пример $\gamma=-(l+\delta)$; према томе је $z-\gamma=+(z+l+\delta)$ увек позитивно, јер му је највећа вредност $+(2l+\delta)$, а најмања $+\delta$. Да би $f(z)$ било позитивно, мора због $(z-\gamma)>0$ бити:

$$(z-\alpha)(z-\beta)<0;$$

[1]) Јер је почетна вредност $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ реална величина, мора дакле у првој једначини (93.3) бити $f(z_0)>0$.

корен α је увек позитиван и већи од корена β, дакле ће горња неје[д-]
начина бити задовољена само ако је стално:

$$\beta < z < \alpha ,$$

то значи да ће се тачка у свом кретању увек налазити између пара-
лелних кругова $B_1 B_2 (z = \beta)$ и $A_1 A_2 (z = \alpha)$, (сл. 93.2).

Узмимо да се тачка из свог почетног положаја $M_0 (z = z_0)$ креће
на више, (z опада). Пошто је dz негативно, имамо у (93.3) да усво-
јимо знак — пред кореном, z ће опадати до $z = \beta$ и када тачка M
стигне на паралелном кругу $z = \beta$ у тачку B_1, имаће њена путања
хоризонталну тангенту јер је по (93.3):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{f(\beta)}{l} = 0,$$

док по (93.4):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{r_\beta^2}$$

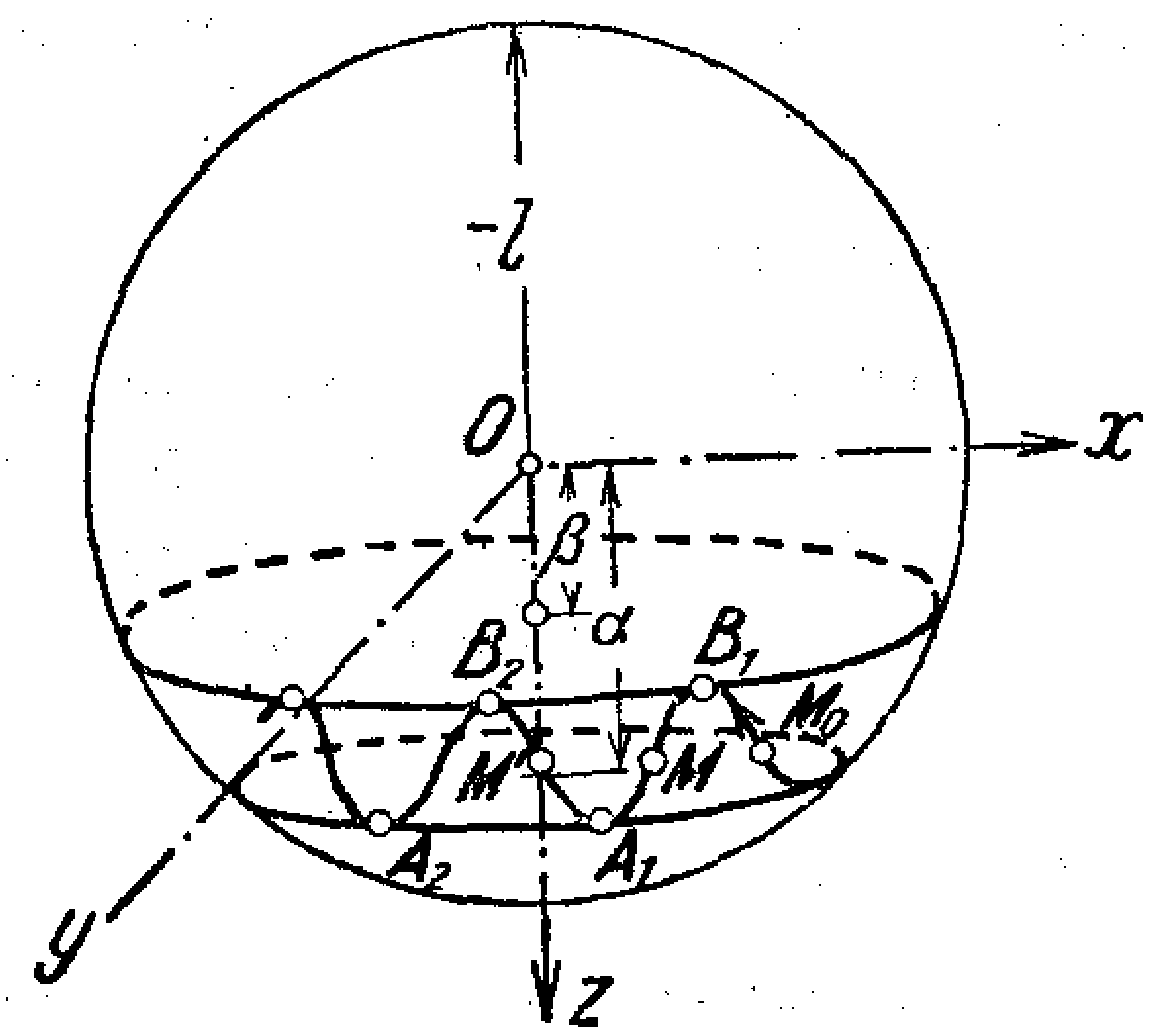
није једнако нули. r_β је полупречник паралелног круга $z = \beta$. Тачка
ће се дакле и даље обртати око осовине z у истом смислу, али ће се
од B_1 кретати на ниже (z ће расти), пред кореном долази знак $+$.
Тачка ће се спустити до паралелног круга $A_1 A_2 (z = \alpha)$, њена путања
имаће у A_1 хоризонталну тангенту, затим ће се попети до $B_2 (z = \beta)$ итд.

Време за које ће тачка прећи пут од B_1 до A_1 је по једначини (93.3):

$$T = \int_\beta^\alpha \frac{l\,dz}{\sqrt{f(z)}},$$

а толико исто времена требаће да пређе путеве $A_1 B_2$, $B_2 A_2$ итд.

Ако тачку бацимо брзином v_0 на једну од крајњих паралела, биће у почетку $dz/dt = 0$, то је случај двосмислености о којој смо раније говорили. Ако се тачка креће са круга β, z ће расти и онда важи позитивни знак пред кореном: $+\sqrt{f(z)}$, ако се пак креће са круга α, z ће опадати и важи знак —.



Сл. 93.2

Меридијане равни кроз додирне тачке $B_1, A_1, B_2, A_2, \ldots$ путање са крајњим паралелама α и β су равни симетрије за путању. Посматрајмо две тачке M и M' (сл. 93.2) на гранама $B_1 A_1$ и $A_1 B_2$ путање, које леже на истом паралелном кругу висине z; ако са $\vartheta, \vartheta', \vartheta_1$ означимо вредности угла ϑ које одговарају тачкама M, M' и A_1, налазимо по (93.4):

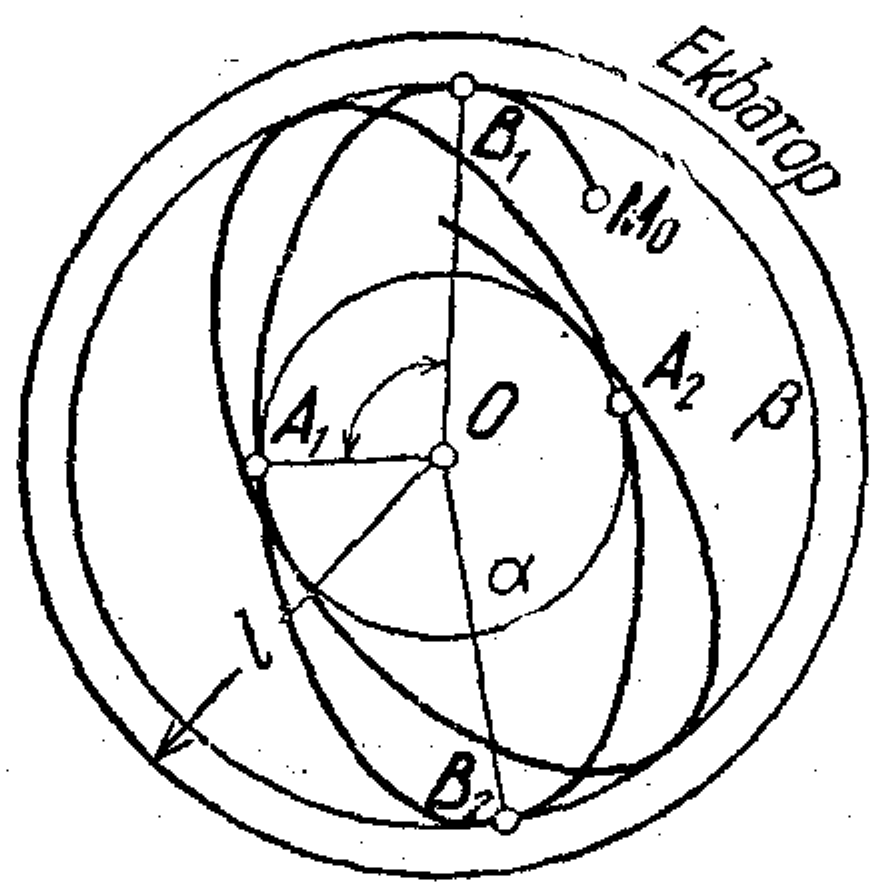
$$\vartheta_1 = \vartheta = \int_z^\alpha \frac{Cl\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} \quad \text{и} \quad \vartheta' - \vartheta_1 = -\int \frac{Cl\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} = \vartheta_1 - \vartheta\,;$$

тачке M и M' леже дакле симетрично према меридијану кроз A_1. Времена за која тачка треба да пређе лукове MA_1 и A_1M' једнака су, јер оба имају величину:

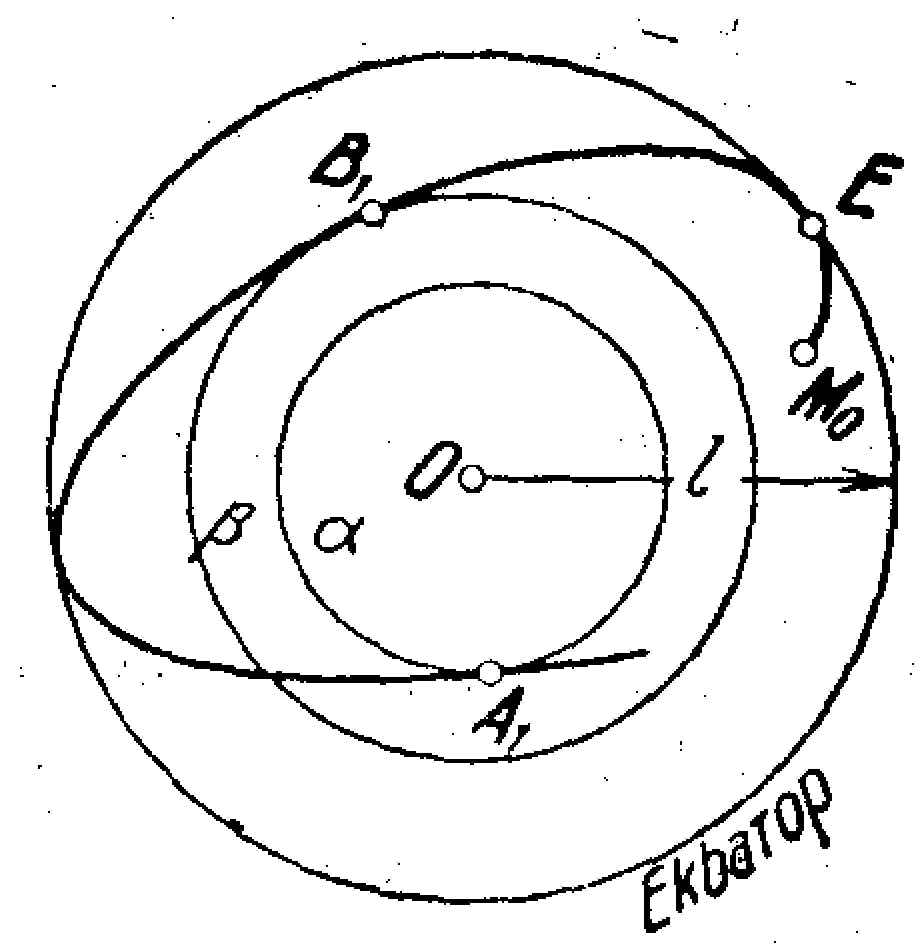
$$\int_z^\alpha \frac{l\,dz}{f(z)}.$$

Када хоћемо да прикажемо пројекцију путање на раван xy морамо разликовати два случаја према томе да ли оба крајња круга леже на истој или на разним хемисферама.

Први случај. Крајње паралеле леже на доњој хемисфери. Нижи круг $z = \alpha$ пројицираће се у кругу $z = \beta$; путања ће осциловати између оба круга и имати облик сл. 93.3; може се доказати да крива



Сл. 93.3



Сл. 93.4

нема превојних тачака. Посматрачу на осовини z чини се да тачка описује криву као елипсу која се помера у смислу кретања. Puiseux је доказао (1842.) да је угао A_1OB_1 увек већи од правог угла.

Други случај. Претпоставимо да се оба крајња круга налазе са обе стране екватора. Нижи круг $z = \alpha$ биће и сада у кругу $z = \beta$, јер је $\alpha + \beta > 0$. Пројекција путање мора додиривати екватор (E), имаће дакле облик приказан у сл. 93.4. Крива може имати и превојне тачке.

Реакција лопте. Нормални отпор N лопте налазимо из треће од природних једначина (88.2а):

$$N + P_n = m\frac{v^2}{R}.$$

Полупречник R кривине нормалног пресека је овде једнак полупречнику лопте, тј. $R=l$, $P_n = -mg\,z/l$, дакле:

$$N = \frac{m v^2}{l} + mg\frac{z}{l} = \frac{m}{l}(2gz+h) + mg\frac{z}{l}$$

и сажето:

$$N = \frac{m}{l}(3gz+h).$$

Нормални отпор је дакле линеарна фунција од z. Ако је покретна тачка везана концем за центар лопте, она ће напустити површину лопте чим N постане негативно и падаће описујући параболу која оскулише путању на лопти. Ако пак тачка не може напустити лопту на пр. ако се налази између две бесконачно блиске сферичне површине, притискиваће спољашњу површину ако је N позитивно, а унутрашњу ако је N негативно. У местима где је $N=0$ имаће хоризонтална пројекција путање превојну тачку. То ће наступити само у другом случају, јер $N=0$ може бити само у горњој хемисфери.

Случај да полином $f(z)$ има двоструки корен; стационарно кретање. Поставили смо раније функцију:

$$f(z) = (2gz+h)(l^2-z^2) - C^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

и нашли смо за величине коренова неједначине:

$$-\infty < \gamma < -l < \beta < z_0 < \alpha < l.$$

Полином $f(z)$ може дакле имати два једнака корена или ако је $\beta=\gamma=-l$, или ако је $\beta=\alpha=z_0$. Прву претпоставку морамо одбацити јер она повлачи са собом $f(-l)=0$, док је стварно $f(-l) = -C^2$. Усвојићемо дакле:

$$\beta = \alpha = z_0.$$

Пошто z мора као у општем случају остати између α и β, то је у овом специјалном случају z константно и једнако z_0, тачка описује паралелан (хоризонталан) круг. То се може и аналитички доказати. Једначина (93 2) гласи сада:

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z) \qquad \text{или} \qquad l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2g(z-z_0)(z-\gamma) = 0.$$

Видели смо да је $(z-\gamma)$ увек позитивно; пошто на левој страни последње једначине стоји збир од два позитивна члана, може она бити задовољена само ако су оба члана једнака нули, тј. ако је $z=z_0$.

Овај случај са два једнака корена своди се дакле на конично клатно, о коме је већ раније било говора.

94. Мале осцилације око равнотежиог положаја. У ортогоналним Декартовим координатама гласе једначине кретања сферичног клатна (осовина z управљена на ниже);

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l},\\ m\,\frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l},\\ m\,\frac{d^2z}{dt^2} &= mg - N\frac{z}{l}. \end{aligned}\right\} \qquad (94.1)$$

Ако су осцилације доста мале, биће x и y врло мале величине. Ми ћемо их сматрати малим величинама првог реда и занемарићемо мале величине другог реда. Са том приближношћу стављамо $z = l$ јер по биномијалном реду је:

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l\,(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots),$$

а други члан занемарујемо као малу величину другог реда. Та претпоставка идентична је са претпоставком да се покретна тачка налази на хоризонталној тангенцијалној равни лопте. Последња из једначина (94.1) гласи сада: $0 = mg - N$ и са $N = mg$ гласе прве две једначине:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,\frac{x}{l}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\,\frac{y}{l}.$$

То су једначине кретања тачке на коју дејствује централна привлачна сила пропорционална растојању. Путања је елипса[1]) са центром на осовини z. Интеграли последњих једначина познати су нам већ из праволинијске хармоничне осцилације:

$$x = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$y = C\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + D\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ако претпоставимо да је за $t = 0$:

$$x = x_0,\quad y = 0,\quad \frac{dx}{dt} = 0,\quad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

тј. положимо кординатну раван $z0x$ кроз једно теме елипсе, добијамо за константе:

$$A = x_0,\quad C = 0,\quad B = 0,\quad D = v_0\sqrt{\frac{l}{g}},$$

[1]) Стварно просторна крива којој је хоризонтална пројекција елипса.

и са овим вредностима једначине кретања:

$$x = x_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad y = v_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Елиминацијом времена из последњих једначина добијамо једначину елипсе:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2 l}{g}} = 1,$$

дакле су константе A и D полуосовине елипсе.

Трајање једног обрта је индентично са трајањем једне осцилације код праволинијског кретања тј.,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ако је детерминанта коефицијената $AD - BC = 0$, онда је $y = kx$ (k константа). Пројекција путање на хоризонталу раван је права линија. (Кружно клатно).

95. Кретање тачке по рапавој површини. Ако је површина $F(y, x, z) = 0$ по којој се тачка креће рапава, улази на десној страни једн. (87.3) као трећа сила отпор трења: $T = fN$ који, као што знамо, има правац брзине и супротан смер. Јединични вектор брзине је $\vec{v}/v$ а $N = |\lambda \operatorname{grad} F|$ тако да је

$$\vec{T} = -f |\lambda \operatorname{grad} F| \frac{\vec{v}}{v},$$

и кад означимо скаларну величину:

$$\mu = \left| \frac{1}{v} \lambda \operatorname{grad} F \right|:$$

добијамо векторску једначину кретања:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \lambda \operatorname{grad} F - f \mu \vec{v}, \tag{95.1}$$

којој одговарају три скаларне једначине:

$$\left.\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} - f\mu \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} - f\mu \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} - f\mu \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{95.2}$$

Ако коефицијент трења f сматрамо константним тј. независним од v и λ имамо као и у случају глатке површине четири једначине за одређивање четири непознатих x, y, z и λ као функције времена. Али је сада интегралење једначина кретања много сложеније јер је μ функција брзине.

У природним координатама гласе једначине кретања:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= P_t - f|N|, \\ m\frac{v^2}{\varrho'} &= P_q, \\ m\frac{v^2}{R} &= P_n + N, \end{aligned}\right\} \tag{95.3}$$

са ознакама једначина (88.2). Услед отпора трења мења се само прва од једначина (89.2а) придоласком члана $-f|N|$ где је $|N|$ апсолутна вредност нормалног отпора.

Ако је нападна сила $\vec{P}=0$ гласиће последње једначине:

$$m\frac{dv}{dt} = -f|N|, \qquad m\frac{v^2}{\varrho'} = 0, \qquad m\frac{v^2}{R} = N. \tag{95.4}$$

Из друге једначине следује да је геодетичка кривина једнака нули, дакле је путања геодетичка линија на датој површини. Пошто из треће једначине сменимо N у прву, добијену једначину скратимо са масом, гласиће она:

$$\frac{dv}{dt} = -f\frac{v^2}{R};$$

делењем једначине са v и сменом: $v = ds/dt$ на десној страни елиминисали смо dt и добили:

$$\frac{dv}{v} = -f\frac{ds}{R}.$$

Интегралење можемо извршити пошто изразимо R као функцију дужине s лука геодетичке линије. Интеграл гласи:

$$\ln v = -f\int\frac{ds}{R} + \ln C.$$

Интеграциону константу одредићемо из услова да је за $s=0$, брзина v_0. Тако добијамо брзину као функцију пута:

$$v = v_0 e \exp\left(-f\int_0^s\frac{ds}{R}\right) = \varphi(s). \tag{95.5}$$

Из те једначине следује:

$$dt = \frac{ds}{\varphi(s)}$$

и са почетним условом $t = 0$, $s = 0$ добијамо:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\varphi(s)},$$

а инверзијом тог интеграла тражени закон пута $s = s(t)$.

Примера ради одредићемо закон пута када се тачка (не узимајући у обзир њену тежину) креће на површини лопте полупречника r. Нормална кривина је $R = r$. Геодетичке линије на лопти су велики кругови јер се само код њих главна нормала поклапа са нормалом површине. За брзину налазимо:

$$v = v_0 e \exp\left(-f s/r\right),$$

и сменом у интеграл:

$$t = \frac{1}{v_0}\int_0^s e \exp(fs/r)\, ds = \frac{r}{fv_0}\left[\, e \exp(f s/r) - 1 \,\right],$$

а одавде инверзијом добијамо закон пута:

$$s = \frac{r}{f} \ln\left(\frac{fv_0}{r} t - 1\right). \tag{95.6}$$

Са централним углом α је у кругу $v = v_0 e \exp(-f\alpha)$.

б) КРЕТАЊЕ ПО ЛИНИЈИ

96. Једначине кретања. Нормални и тангенцијални отпор. а) Посматраћемо кретање материјалне тачке која је приморана да остаје на датој непомичној и непромењивој (крутој) линији. Ако на линији изаберемо тачку O као почетак од кога меримо пређене путеве, биће положај тачке M у сваком тренутку одређен дужином лука $s = \widehat{OM}$, дакле једним податком. Стога кажемо да ова тачка има један степен слободе. Њено кретање зовемо принудним кретањем. На тачку M масе m дејствује дата сила P са ортогоналним компонентама X, Y, Z. Ако је додир тачке са линијом (на пример прстен навучен на жицу или мала лопта која се креће у цеви) без трења, онда линија врши на тачку само нормални отпор N чија нападна линија лежи у нормалној равни криве путање али у тој равни може имати произвољан правац. Тачка ће се кретати по датој линији под заједничким дејством сила $\vec{P}$ и $\vec{N}$ и има се тада сматрати слободном.

Сваку криву линију можемо сматрати пресеком двеју површина:

$$F_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_2(x, y, z) = 0. \tag{96.1}$$

Координате x, y, z тачке M морају у сваком тренутку задовољавати ове две једначине, тако да је само једна координата независна. Нормални отпор криве линије биће резултанта нормалних отпора N_1 и N_2 површина F_1 и F_2 које ту линију образују. Ортогоналне компоненте отпора N_1 и N_2 су као смо у чл. 87 видели:

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z};$$

односно:

$$\lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z};$$

тако да једначине кретања гласе:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{96.2}$$

Ове су једначине компоненте векторске једначине:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \lambda_1 \operatorname{grad} F_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} F_2. \tag{96.3}$$

Једначине (96.1) и (96.2) чине систем од пет једначина које дефинишу x, y, z тј. кретање, и λ_1, λ_2, тј. нормални отпор линије као функције времена t.

Пошто кретање има само један степен слободе, биће оно одређено једном јединoм једначином у коју не улази нормални отпор. Ту ћемо једначину добити ако све три једначине (96.2) помножимо са dx, dy односно dz и саберемо их. Добићемо:

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right) + \\ + \lambda_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\right),$$

последња два израза у заградама претстављају тоталне диференцијале

dF_1, dF_2, који су по (96.1) једнаки нули, те се последња једначина своди на:

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \tag{96.4}$$

дакле на закон живе силе, који је у овом случају једина једначина кретања.

б) Координате покретне тачке можемо изразити као функције једног параметра q који одређује положај тачке:

$$x = \varphi(q), \qquad y = \psi(q), \qquad z = \chi(q);$$

тако добијамо са:

$$\varphi' = \frac{d\varphi(q)}{dq} \quad \text{analogno } \psi' \text{ и } \chi'$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \tag{96.5}$$

и

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (X\varphi' + Y\psi' + Z\chi')\,dq = Qdq. \tag{96.6}$$

Закон живе силе изражен параметром q гласи дакле:

$$d\,\frac{m}{2}\left(\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2\right)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = Qdq. \tag{96.4a}$$

Ако за параметар изаберемо лук s биће:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 1.$$

У најопштијем случају зависи сила P од положаја покретне тачке, од њене брзине и од времена. Компоненте X, Y, Z, дакле и Q су онда функције од, q, dq/dt и t; једначина (96.4) односно (96.4a) је диференцијална једначина другог реда која даје q као функцију од t.

У специјалном случају када сила зависи само од положаја покретне тачке, Q је само функција од q и интегралење једначине кретања своди се на квадратуре. Једначина (96.4a) даје:

$$d\,\frac{mv^2}{2} = Q\,dq, \qquad m\frac{v^2}{2} - m\,\frac{v_0^2}{2} = \int_{q_0}^{q} Q\,dq,$$

где се индекс 0 односи на почетне вредности. Када заменимо v^2 из (96.5) добијамо из закона живе силе dq/dt као функцију од q:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = f(q), \qquad \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{f(q)},$$

и најзад

$$dt = \frac{dq}{\pm\sqrt{f(q)}}, \qquad t - t_0 = \pm\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{f(q)}}. \tag{96.7}$$

У почетку кретања познајемо знак који треба корену дати, јер смер почетне брзине даје знак почетној вредности од dq/dt; тај знак остаје докле год не постане $dq/dt = 0$. Тада смер тангенцијалне силе P одређује смер кретању, дакле и знак који имамо да ставимо пред dq/dt.

После извршене квадратуре добијамо инверзијом закон пута $q = F(t)$.

Ако сила P има функцију $U(x, y, z)$ налазимо одмах први интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

у коме имамо још x, y, z да заменимо њиховим вредностима као функције од q. Ако је $P = 0$ тачка ће се кретати константном брзином v_0 као што из закона живе силе за $Q = 0$ излази. Константа h има вредност: $mv_0^2/2 - U_0$.

в) Нормални отпор линије. Пошто смо из закона живе силе одредили кретање, налазимо из две једначине (96.2) факторе λ_1 и λ_2 и тиме и отпор N као функцију времена.

Једноставније је одређивање отпора N из природних једначина кретања. Ако са индексима t, n, b означимо правце тангенте, главне нормале и бинормале, гласе природне једначине кретања:

$$P_t = m\frac{dv}{dt}, \qquad P_n + N_n = m\frac{v^2}{\varrho}, \qquad P_b + N_b = 0 . \qquad (96.8)$$

Прва једначина која је независна од N, одређује кретање на линији; остале две одређују N из компонената N_n и N_b:

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}. \qquad (96.8a)$$

Ако сила P има функцију U, можемо у другој једначини (96.8) mv^2 заменити са $2(U + h)$ те добијамо:

$$N_n = \frac{2(U+h)}{\varrho} - P_n,$$

тако да можемо N одредити и не познавајући x, y, z као функцију од t.

Прва једначина (96.8) је други, краћи облик закона живе силе. Тангенцијалну компоненту P_t можемо изразити као збир пројекција компонената X, Y, Z на правац тангенте; а како су косинуси углова које тангента заклапа са координантним осовинама: $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, то је:

$$P_t = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = \frac{d\frac{mv^2}{2}}{ds},$$

и кад помножимо једначину са ds:

$$X\,dy + Y\,dy + Z\,dz = d\,\frac{mv^2}{2}\cdot$$

Једначина $P_t = m\,dv/dt$ каже да се функција $s = f(t)$ неће мењати ако криву линију произвољно деформишемо не мењајући њену дужину, и не мењајући тангенцијалну компоненту силе P. Том деформацијом мењаће се само отпор N. Могли бисмо на пример криву путању трансформисати у праву, а да се закон кретања не промени и тако свести проблем на задатак праволинијског кретања.

Када на неком месту путање буде $N = 0$, тачка ће напустити прописану путању и кретаће се даље као слободна тачка. Из (96.8) и (96.8а) видимо да ће $N = 0$ бити када је:

$$P_n = m\,\frac{v^2}{\varrho}, \qquad P_b = 0,$$

тј. покретна тачка може прописану путању само на оном месту напустити на коме сила P лежи у оскулационој равни криве.

г) Тангенцијални отпор. На рапавој линији појављује се у правцу тангенте на путању а у смеру противном смеру кретања отпор трења T који стављамо по Кулоновом закону $T = fN$.

Од природних једначина кретања (96.8) гласиће прва:

$$P_t - fN = m\,\frac{dv}{dt},$$

а друге две остају непромењене.

Косинуси правца отпора fN су: $-dx/ds$, $-dy/ds$, $-dz/ds$, дакле ће једначине кретања у ортогоналним координатама гласити:

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N_x - fN\,\frac{dx}{ds},\\ m\,\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N_y - fN\,\frac{dy}{ds},\\ m\,\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N_z - fN\,\frac{dz}{ds}. \end{aligned}\right\} \qquad (96.9)$$

Са једначинама путање:

$$F_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_2(x, y, z) = 0 \qquad (96.1)$$

и релацијама које су по себи разумљиве:

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= N_x^2 + N_y^2 + N_z^2,\\ N &= N_x\,\frac{dx}{ds} + N_y\,\frac{dy}{ds} + N_z\,\frac{dz}{ds} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (96.10)$$

чине једначине (96.9) систем од седам једначина које одређују x, y, z, као функције од t, дакле дефинишу кретање, и одређују N_x, N_y, N_z и N, дакле и отпор линије као функције од t.

Елементарни механички рад отпора трења је $-fNds$, дакле гласи закон живе силе:

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - fNds\,;$$

а за конзервативну силу:

$$d\frac{mv^2}{2} = dU - fNds.$$

Последња једначина се може интегралити ако је отпор N познат као функција пута или ако је константан. Отпор трења није конзервативна сила дакле закон о одржању механичке енергије овде не важи.

97. Кретање тешке тачке по глаткој кривој линији. Тачка M приморана је да се креће по некој кривој (равној или просторној) линији под дејством њене тежине mg. Координатну осовину z узмимо управљену на више; компоненте силе mg су онда: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$, а елементарни рад тежине је $-mg\,dz$ Закон живе силе:

$$d\frac{mv^2}{2} = -mg\,dz,$$

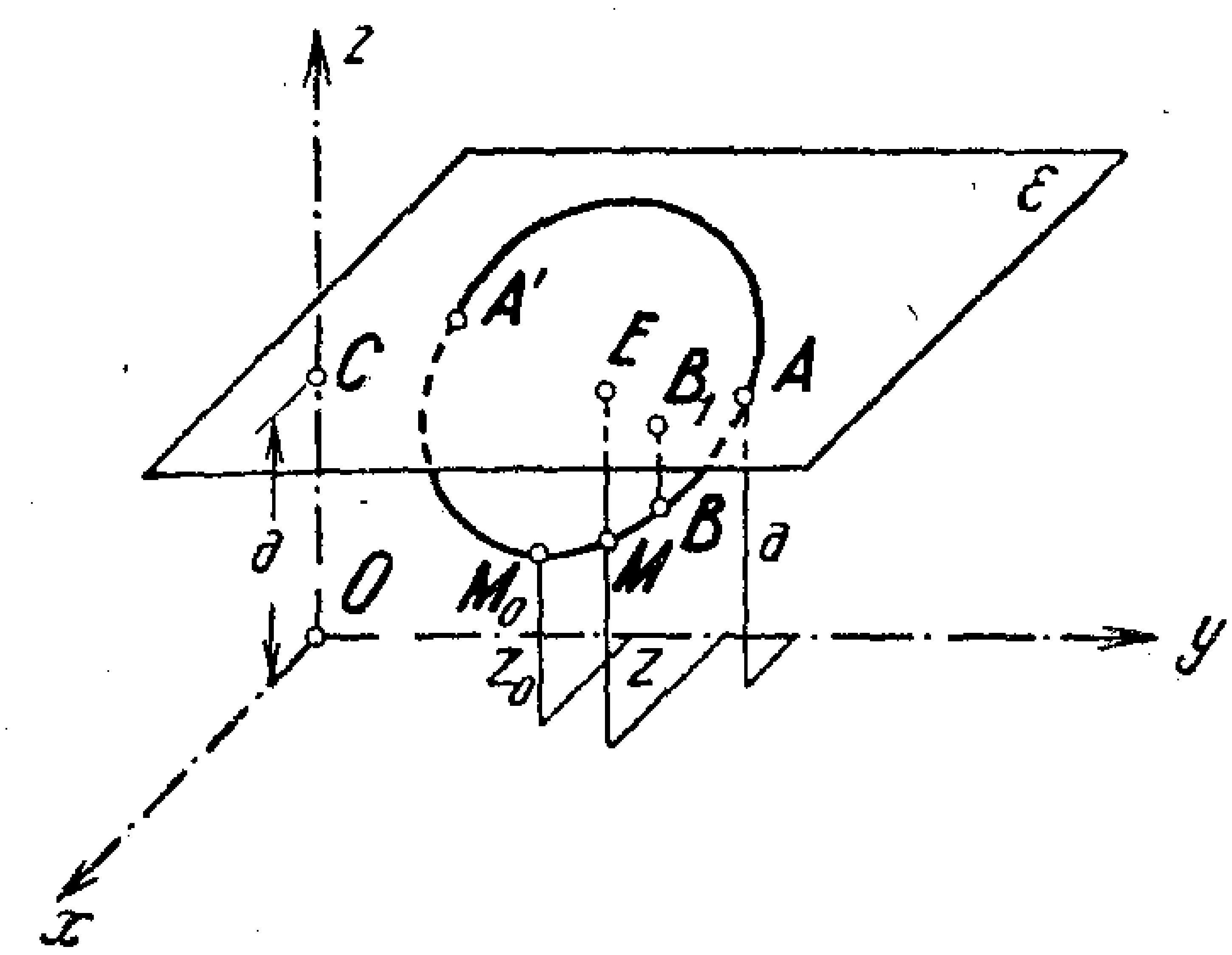
даје интеграл:

$$\frac{v^2}{2} = -gz + h,$$

или када ставимо $h = ag$:

$$v^2 = 2g(a - z). \tag{97.1}$$

У растојању $a = OC$ положимо раван ε паралелну равни xy



Сл. 97.1

(сл. 97.1). Растојање покретне тачке M од равни: $z=a$ је $a-z=ME$ тако да је њена брзина:

$$v^2 = 2g\overline{ME}.$$

Величина брзине је дакле иста као да је тачка пала слободно без почетне брзине од E до M. Она не зависи од облика путање, тј. од x и y.

Нека је путања затворена крива линија; два случаја могу бити према томе да ли раван ε сече или не сече путању. Ма из ког почетног положаја M тачке можемо јој увек дати толику брзину v_0 да висина a равни буде произвољно велика јер је:

$$a = \frac{v_0^2}{2g} + z_0.$$

Претпоставимо да је v_0 довољно велика да се раван ε налази изнад путање. Из једначине (97.1) видимо да брзина тачке v никада неће постати једнака нули, тачка ће бесконачно кружити по својој путањи. Кретање ће бити периодично; највећу брзину имаће тачка у најнижем, а најмању брзину у највишем положају, тј. у положају у којима је тангента на путању хоризонтална.

Посматрајмо сада први случај, када путања продире раван ε у тачкама A и A'. Тачку M бацимо из најближег положаја M_0 према A, и путеве s рачунамо од M_0 према A. Тачка M приближиће се толико тачки A колико год хоћемо. Јер нека је B тачка у близини тачке A_1, $\overline{BB_1}$ њено растојање од равни ε, брзина на путу M_0B остаје увек већа од $\sqrt{2g\overline{BB_1}}$, тако да ће M увек стићи у B за коначно време.

Из једначине (97.1) налазимо са $v=ds/dt$:

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{ds}{\pm\sqrt{a-z}}.$$

Време, као и лукове s рачунајмо од почетног положаја M_0; пошто s расте са t морамо у горњој једначини узети знак $+$, те добијамо:

$$t\sqrt{2g} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a-z}} = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{dz}\frac{dz}{\sqrt{a-z}}. \tag{97.2}$$

Ако тангента на путању у тачки A није хоризонтална, имаће ds/dz за $z=a$ коначну вредност и интеграл ће имати коначну вредност када z конвергише према a.

Време T за које ће се тачка попети из M_0 до A је:

$$T\sqrt{2g} = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{\sqrt{a-z}}.$$

Пошто је стигла у A, тачка ће се вратити према M_0, њена брзина ће бити:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-z)}$$

и у свакој тачки путање AM_0 имаће брзину исте величине и супротног смера оној коју је имала пењући се од M_0 до A. Тачка ће за време T вратити се од A до M_0, стићи у M_0 са брзином v_0 и наставити пут до A'. Од M_0 до A' требаће време T', од A' ће се вратити према M_0 и тако бесконачно дуго. Кретање ће бити дакле осцилаторно између A и A' са периодом $T+T'$.

Ако је тангента у A хоризонтална, биће за $z=a$: $\frac{ds}{dz}$ као и $\frac{1}{\sqrt{a-z}}$ бесконачно велико. Посматрање граничних вредности показује да ће интеграл (97.2) бити у том случају бесконачно велик ако је A обична тачка, а коначан ако је A повратна тачка. У првом случају тачка M неће никада стићи у A, у другом случају пак стићиће за коначно време и зауставиће се у том равнотежном положају. (Види чл. 101).

98. Кретање тачке по равној кривој линији са отпором трења. а) Динамичке једначине. Ако за осовину x изаберемо тангенту, позитивну у смеру кретања, а за осовину y нормалу, позитивну према центру кривине и угао између позитивне нормале и силе R означимо са α (сл. 98.1), гласиће природне једначине кретања:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= R\sin\alpha - fN, \\ m\frac{v^2}{\varrho} &= R\cos\alpha \pm N. \end{aligned}\right\} \qquad (98.1)$$

Прва једначина нам одређује кретање а друга нормални отпор, и њиме и отпор трења. Знак нормалног отпора N биће позитиван кад се тачка креће по конкавној страни путање, а негативан кад је тачка на конвексној страни. За сада ћемо узети да је N позитивно (тј. да је путања стално конкавна).

Ако из друге од једначина (98.1) одредимо нормални отпор:

$$N = m\,v^2/\varrho - R\cos\alpha\,,$$

па нађену вредност заменимо у прву, добијамо основну динамичку једначину за принудно кретање тачке у Ајлеровом координатном систему:

$$m\,\frac{dv}{dt} = R\sin\alpha - f\left(m\,\frac{v^2}{\varrho} - R\cos\alpha\right). \qquad (98.2)$$

Закон пута за овај случај можемо наћи ако су нам $|\vec{R}|$ и познати као функције пута s.

Када је $R=0$ гласиће динамичка једначина:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt}+fN&=0,\\ m\frac{v^2}{\varrho}-N&=0. \end{aligned}\right\} \tag{98.}$$

Сменом N из друге у прву једначину (98.3) добијамо:

$$m\frac{dv}{dt}=-f\,m\frac{v^2}{\varrho} \tag{98.}$$

и пошто скратимо са m, и леву страну помножимо са ds/ds биће:

$$\frac{dv}{ds}v=-f\frac{v^2}{\varrho}\ ;$$

скраћена са v гласи диференцијална једначина:

$$\frac{dv}{v}=-f\frac{ds}{\varrho},$$

а њен интеграл:

$$\ln v+C=-f\int\frac{ds}{\varrho}.$$

За почетно стање кретања: $t_0=0$, $v=v_0$ и $s_0=0$ је:

$$\ln v_0+C=\left(-f\int\frac{ds}{\varrho}\right)_{s=0}=0,$$

дакле:

$$C=-\ln v_0.$$

Једначина за брзину биће са том вредношћу за C:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)=-f\int\frac{ds}{\varrho}$$

и кад пређемо на експоненцијалну функцију:

$$v=v_0\,e\exp\left(-f\int\frac{ds}{\varrho}\right). \tag{98.5}$$

Када нам је функција $\varrho=\varphi(s)$ позната, тада можемо извршити интегралење у експоненту и коначно наћи вредност брзине. Закон пута $s=f(t)$ добијамо инверзијом интеграла:

$$t=\frac{1}{v_0}\int e\exp\left(f\int\frac{ds}{\varrho}\right)ds. \tag{98.6}$$

На пример за кружну путању је: $\varrho = \text{const.} = r$, $ds = r\,d\alpha$, $v = v_0 e^{-f\alpha}$, а интеграл (98.6) гласи:

$$t = \frac{r}{f v_0}\left(e^{f\alpha} - 1\right).$$

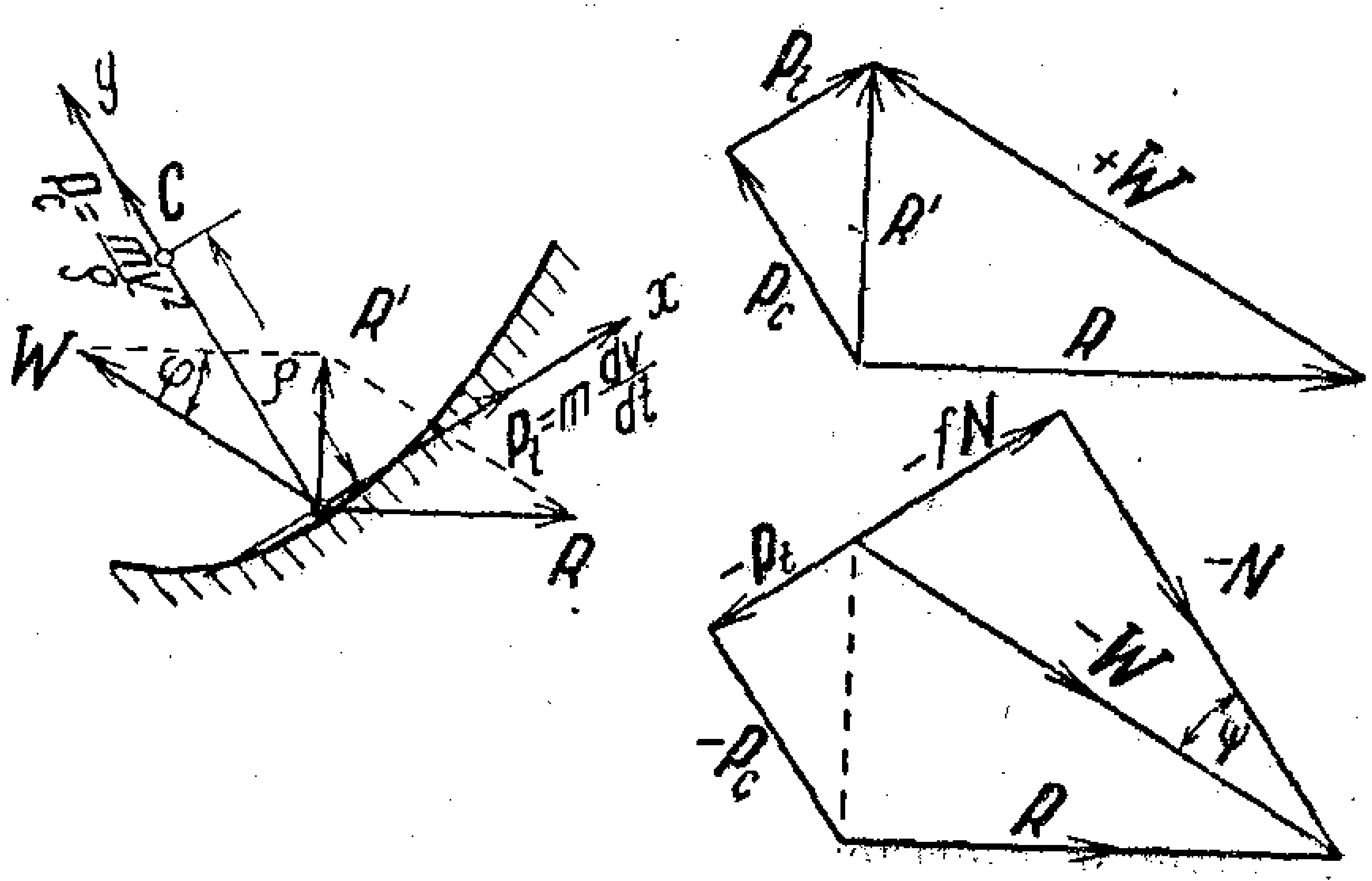
(Види чл. 95).

б) Одређивање тоталног отпора путање. Ако сем нормалног отпора постоји и тангенцијални отпор путање (трење: $T = fN$), онда се они слажу у тотални (кос) отпор путање: $+W$. Угао што га сила W заклапа са нормалом, осовином y, је угао трења ψ (за разлику од ознаке ϱ за полупречник кривине).

Величина тоталног отпора је:

$$W = \sqrt{N^2 + (fN)^2} = N\sqrt{1 + f^2} = N \sec\psi . \qquad (98.7)$$

На материјалну тачку делују две силе: резултанта R датих сила P и отпор W (сл. 98.1). Под њиховим утицајем тачка се креће као слободна тангенцијалним убрзањем dv/dt и центрипеталним убрзањем



Сл. 98.1

v^2/ϱ, што значи да је дејство резултанте R' сила R и W еквивалентно дејству центрипеталне силе $P_c = mv^2/\varrho$ и тангенцијалне силе $P_t = m\,dv/dt$. То изражава векторска једначина:

$$\vec{R} + \vec{W} = \overrightarrow{\left(m\frac{v^2}{\varrho}\right)} + \overrightarrow{\left(m\frac{dv}{dt}\right)}, \qquad (98.8)$$

која замењује скаларне једначине (98.1).

Притисак који тачка врши на подлогу је:

$$-\vec{W} = \vec{R} + \overrightarrow{\left(-m\frac{v^2}{\varrho}\right)} + \overrightarrow{\left(-m\frac{dv}{dt}\right)}. \qquad (98.9)$$

Из једначине (98.9) следује да је тотални притисак тачке на п
тању $-W$ једнак геометријском збиру трију сила: $\vec{R}$, $(\overrightarrow{-mv^2/\varrho})$
$(\overrightarrow{-m\,dv/dt})$. Силу:

$$\overrightarrow{\left(-m\frac{v^2}{\varrho}\right)},$$

зовемо центрифугалном силом, а силу:

$$\overrightarrow{\left(-m\frac{dv}{dt}\right)},$$

негативном тангенцијалном силом. На сл. 98.1 дат је полиго
сила, који изражава геометријско сабирање према једначини (98.9

99. Апсолутна и релативна тежа. Притисак између површин (подлоге) или линије (путање) за коју је материјална тачка везана саме тачке исте је величине, било да се материјална тачка креће док подлога мирује или обрнуто, да се подлога креће а тачка мируј на њој. Овај други случај имамо за сва тела која мирују на Земљин површини кад узмемо у обзир да се Земља обрће око своје осовин

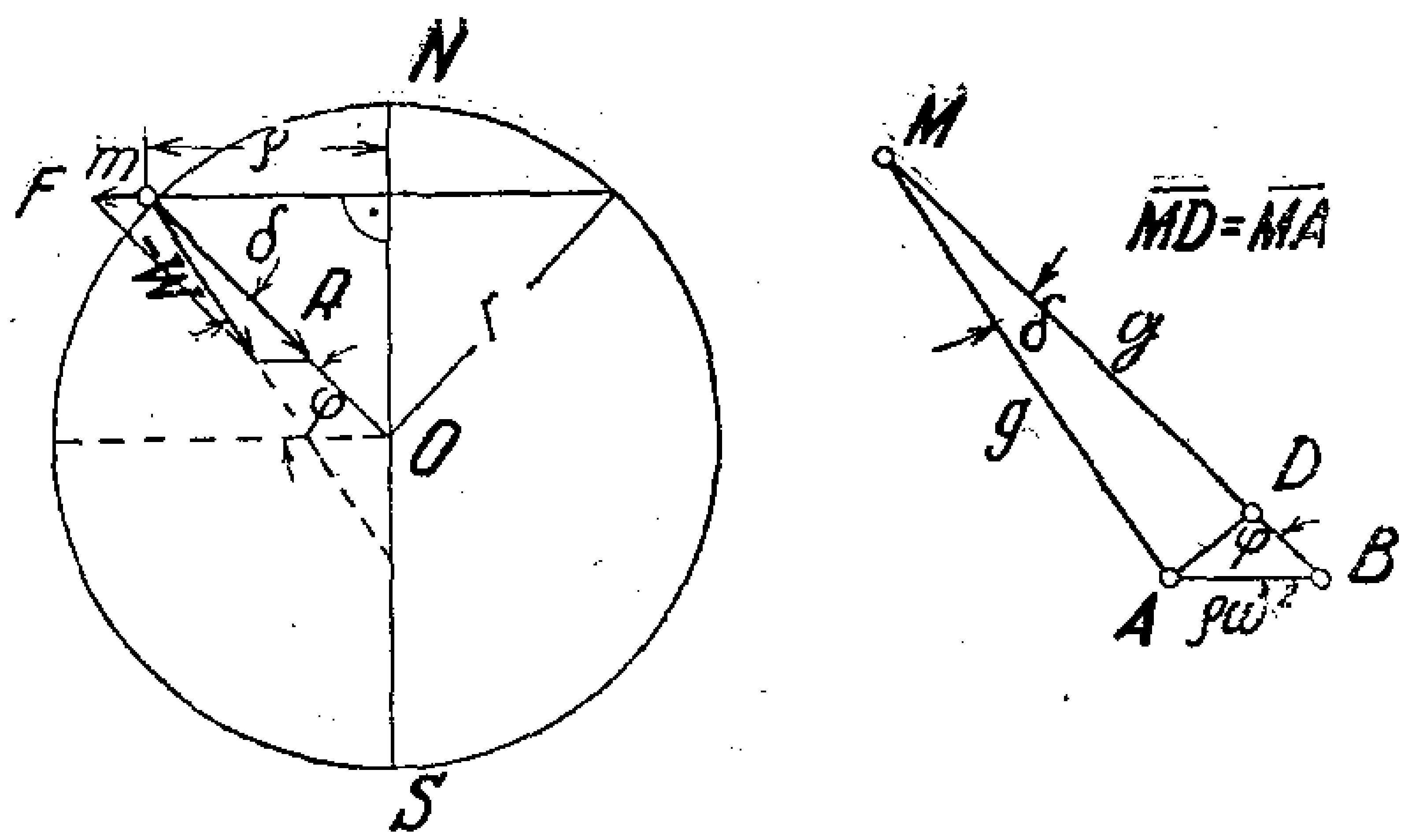
Притисак на подлогу зове се тежина. Када би Земља у једно тренутку престала да се окреће, нашли бисмо мерењем да су тежин свих тела повећане. Узрок те појаве је центрифугална сила $-mv^2/$ која, као што смо видели, смањује притисак тела на подлогу.

Тежину, коју би тела имала кад се Земља не би обртала, зовем апсолутном тежином, а тежину коју тела имају при обртању Земљ и коју меримо помоћу разних справа, зовемо релативном тежином Однос између те две тежине налазимо из векторске једначине (98.9) Но пошто се Земља обрће око своје осовине константном брзином т је $dv/dt = 0$, дакле је притисак:

$$-\vec{W} = \vec{R} + \overrightarrow{\left(-m\frac{v^2}{\varrho}\right)} = \vec{R} + \vec{F}. \qquad (99.1$$

На сл. 99.1 означили смо са F центрифугалну силу материјално тела. R је сила којом Земља стварно дејствује на то тело (апсолутн тежина), док је $-W$ сила којом тело притискује на подлогу и коју меримо помоћу теразија (релативна тежина). Према једначини (99.1) апсолутна тежина R тела која је управљена ка центру Земље, трећа је страна векторског троугла (сл. 99.1) коме су друге две стране релативна тежина $-W$ и центрифугална сила F.

Величина центрифугалне силе по обрасцу: $F = mv^2/\varrho$ зависи од брзине v којом се тело креће по кружној путањи, следујући обртању



а) б)

Сл. 99.1

Земљином, а тако исто и од полупречника кружне путање ϱ. И v и ϱ мењају се са географском ширином φ места на коме се тело налази јер ако полупречник Земље означимо са r (= 6370 km) а константну угаону брзину њеног обртања са ω, добијамо:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r \cos\varphi, \\ v &= \varrho\,\omega = r\,\omega \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{99.2}$$

што унето у једначину центрифугалне силе даје:

$$F = m\,\frac{v^2}{\varrho} = \frac{m\varrho^2\omega^2}{\varrho} = m\varrho\omega^2 = mr\omega^2\cos\varphi. \tag{99.3}$$

Центрифугална сила је на половима Земље ($\varphi = 90^0$) једнака нули те тамо нема разлике између апсолутне и релативне теже.

Угаона брзина Земље је:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где је T трајање једног обрта: $T = 24\,\text{h} = 86\,164\,\text{sec}$ средњег сунчаног времена. За ω добијамо дакле:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{86\,164} = 7{,}29\cdot10^{-5}\,\text{sec}^{-1}.$$

Центрифугалну силу F (једн. 99.3) разложимо у радијалну компоненту: $F_r = F\cos\varphi = mr\omega^2\cos^2\varphi$ и тангенцијалну компоненту $F = mr\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$. F_r има на половима вредност нуле а максималну вредност на екватору. Тангенцијална компонента тера масе на Земљи према екватору и има највећу вредност на ширини: $\varphi = 45^0$ а једнака је нули на екватору и на половима. Ово је узрок спљоштености Земље.

Небеско тело које се обрће око своје осовине мора имати такаı облик да резултанта из теже и центрифугалне силе стоји управно на њену површину. Тај се облик зове код Земље **Геоид** и приближно је једнак **спљоштеном обртном елипсоиду**.

Ако за релативну тежину уведемо: — $W = Q = mg$ онда на исти начин за апсолутну тежину можемо писати: $R = m\mathbf{g}$ где је $\mathbf{g}$ **апсолутно убрзање** Земљине теже које би важило када се Земља не би обртала. Из троугла убрзања (сл 99.1б) читамо:

$$g = \overline{MB} - \overline{DB} = \overline{MB} - \overline{AB}\cos\varphi,$$

$$g = \mathbf{g} - r\omega^2 \cos\varphi \cos\varphi,$$

$$g = \mathbf{g}\left(1 - \frac{r\omega^2 \cos^2\varphi}{\mathbf{g}}\right). \tag{99.4}$$

Кад у ову једначину уведемо бројне вредности за r, ω и $\mathbf{g}$, претпостављајући да је Земља **лопта** излази (са $r\omega^2 = 0{,}03\,39$ и $\mathbf{g} = 9{,}83\,2$)

$$g = 9{,}832\left(1 - \frac{1}{290{,}4}\cos^2\varphi\right) \text{m sec}^{-2}.$$

Вредности g израчунате из овог теоријског обрасца не слажу се довољно са вредностима емпирички одређенима (помоћу клатна). То неслагање долази отуд, што Земља није лопта већ елипсоид и што због тога по закону гравитације ни апсолутно убзање $\mathbf{g}$ не може бити исто на половима и на екватору. Резултатима мерења боље одговара емпирички образац:

$$g = 9{,}832\left(1 - \frac{1}{189{,}3}\cos^2\varphi\right) \text{m sec}^{-2}.$$

Релативно Земљино убрзање на екватору износи према опажањима $g_0 = 9{,}78\,07$ m sec^{-2}. Ако се узме да је оно на половима $g = \mathbf{g} = 9{,}83\,2$ m sec^{-2} онда би се тежина тела на полу према тежини на екватору односила као $1{,}005 : 1$. Разлика је дакле веома мала. Када би се Земља окретала 17 пута брже но што се стварно окреће, била би центрифугална сила тако велика, да би релативна тежина тела на екватору била једнака нули. То се види из садашњег односа убрзања центрипеталног и релативног који износи на екватору:

$$\frac{r\,\omega^2}{g_0} = \frac{0{,}03\,39}{9{,}78\,07} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2},$$

јер када би било $\omega_1 = 17\,\omega$, била би тада центрифугална сила $mr\,\omega_1^2$ једнака привлачној сили Земљиној mg_0 на екватору.

Из векторског троугла на сл. 99 1 видимо да правац релативне теже сече Земљину осовину испод центра, за тачке на северној хемисфери а [из]над центра за тачке на јужној хемисфери. Угао δ што га релативна [т]ежа (правац виска) заклапа са полупречником Земље врло је мали [т]е можемо троугао MAB сматрати правоуглим. Тако израчунавамо:

$$tg\delta = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{F}{mg} = \frac{mr\,\omega^2\cos\varphi}{mg} = \frac{r\,\omega^2}{g}\cos\varphi = \frac{1}{290{,}4}\cos\varphi. \tag{99.5}$$

Тај угао δ зависан је дакле само од географске ширине и он за Београд ($\varphi \approx 45^0$) износи $\delta = 6'$.

100. Принудно кретање тешке тачке у вертикалној равни. a) Отпор трења: $T = 0$. Када са φ означимо оштар угао између нормале и вертикале: $0 < \varphi < \pi/2$, гласиће природне једначине кретања и закон живе силе:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg\sin\varphi,\\ m\frac{v^2}{\varrho} &= \mp mg\cos\varphi \pm N,\\ A = mgz &= \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{100.1}$$

Горњи се знак односи на конкавну, а доњи на конвексну путању. Прву и трећу од једначина (100.1) можемо скратити са m. Када трећу решимо по v добијамо:

$$u = \frac{dv}{dt} = g\sin\varphi, \tag{100.2}$$

$$v^2 = \sqrt{2gz + v_0^2}, \tag{100.3}$$

где је z висинска разлика између почетног и ма ког другог положаја покретне тачке. Најзад, ако је почетна брзина $v_0 = 0$, образац за брзину на маком месту се упрошћава:

$$v = \sqrt{2gz}. \tag{100.3a}$$

Из једначине (100.2) и (100.3a) видимо да је убрзање u покретне тачке промењиво и зависно од промене угла φ тј. од облика путање, а да се брзина v (за случај да је $v_0 = 0$) мења само са променом разлике у нивоу z а не зависи од облика путање. Највеће убрзање биће ($u = g$) за $\varphi = 90^0$ тј. на местима где је тангента на путању вертикална, а највећа брзина биће на најнижим местима путање. У свима тачкама путање са истом ординатом z има брзина исту вредност.

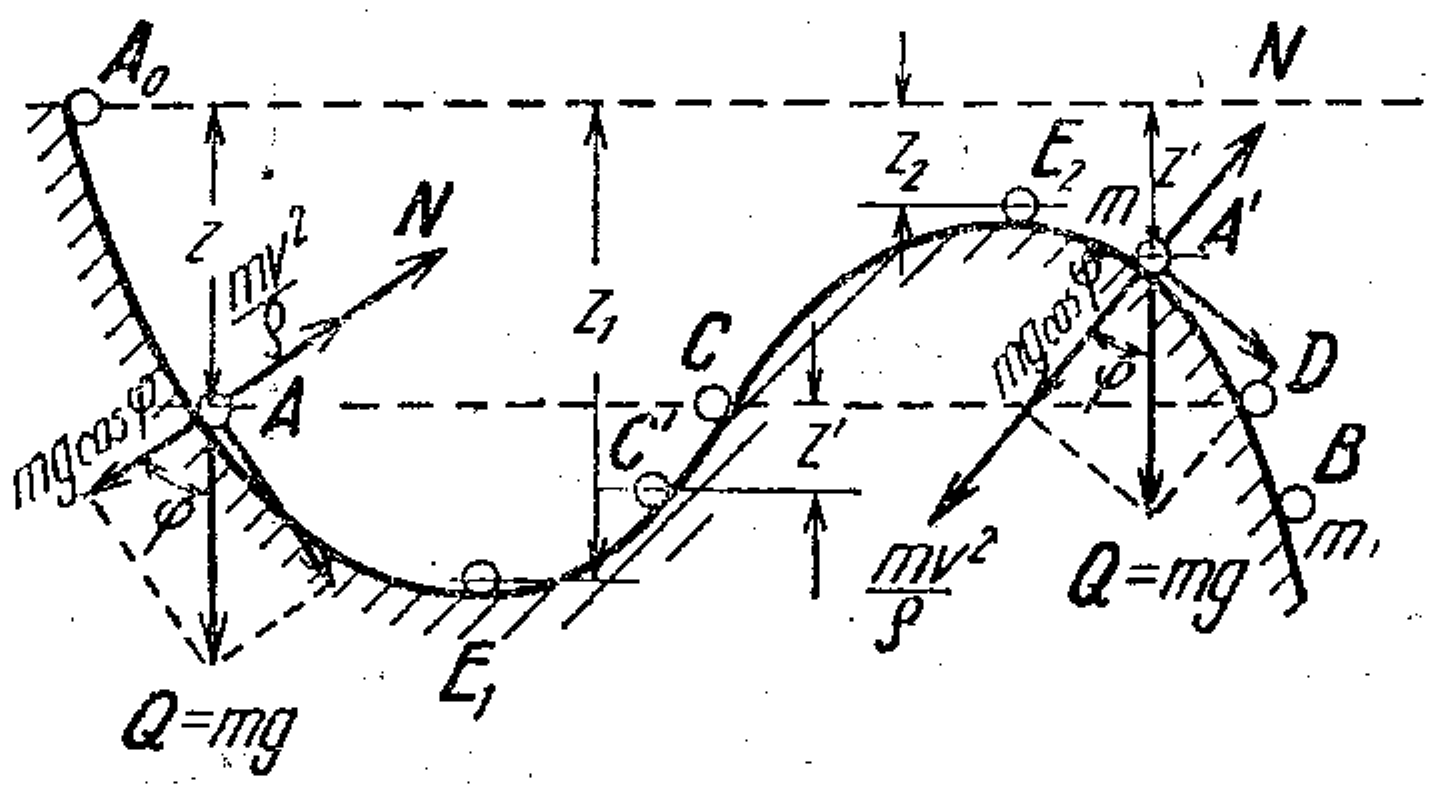
Друга од једначина (100.1) служи за одређивање нормалног отпора путање. Из сл. 100.1 се види да нормални отпор на конкавној страни путање (тачка A) има центрипетални смер, дакле је за тај део путање:

$$N = mg\cos\varphi + \frac{mv_0^2}{\varrho},$$

и пошто сменимо $mv^2 = 2mgz$ $(v_0 = 0)$:

$$N = mg\left(\cos\varphi + \frac{2z}{\varrho}\right). \qquad (100.4)$$

Из овог обрасца следује, пошто је увек угао: $\varphi < \pi/2$, да је на конкавном делу путање нормални отпор увек позитиван и управљен тако да се покретна тачка не може одвојити од путање тј. да је за принудно кретање на конкавној страни путање довољан једнострани нормални отпор N. У превојној тачки C је $\varrho = \infty$ па је нормални отпор $N = mg\cos\varphi$.



Сл. 100.1

На конвексном делу путање (тачка A') има нормални отпор центрифугални смер па је:

$$N = mg\left(\cos\varphi - \frac{2z}{\varrho}\right). \qquad (100\ 5)$$

У случају да је $\frac{2z}{\varrho} > \cos\varphi$ биће дакле нормални отпор негативан тј. биће потребно да путања може на покретну тачку вршити обострани отпор. Ако путања није у стању да даје негативан отпор, као на пример у случају кола на шинама, онда ће тело у тачки B где је $N = 0$ $\left(\text{тј.}\ \frac{2z}{\varrho} = \cos\varphi\right)$ напустити своју подлогу и кретати се даље као слободно по параболичној путањи. Када нам је позната једначина прописане путање, онда можемо из релације: $\cos\varphi = \frac{2z}{\varrho}$ наћи тачку B у којој ће тело напустити путању. Да кола остану увек на шинама мора на сваком месту путање бити $\cos\varphi > \frac{2z}{\varrho}$ а то значи, пошто је највећа вредност за $\cos\varphi$ јединица, да увек мора бити $2z < \varrho$.

Ако је почетна брзина у тачки A $v_0 = 0$ (сл. 100.1), онда је у тачки C која је у истој хоризонтали, по закону живе силе: $v = 0$, а у најнижој тачки E путање је $v_{max}=\sqrt{2gh}$; кретање ће бити периодично (осцилаторно) између A и C. Трајања кретања од A до E и од E до C биће само онда једнака, ако су гране $\widehat{AE}$ и $\widehat{EC}$ путање симетричне према вертикали у E.

б) Ако узмемо у обзир и трење: $T = fN$ онда ћемо сем елементарног рада: $mg\,dz$ тежине имати још и рад трења: $T\,ds$. Рад силе mg биће позитиван или негативан, према томе да ли се тачка m спушта или пење, а рад трења биће стално негативан. Целокупни рад на путу од A_0 до A (сл.100.1) је:

$$A = mgz - f\int_{A_0}^{A} N\,ds. \tag{100.6}$$

Интеграл можемо израчунати ако нам је познат закон по коме се отпор N мења са пређеним путом.

По теореми о кинетичкој енергији важиће за овај случај:

$$mgz - f\int_{A_0}^{A} N\,ds = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \tag{100.7}$$

што решено по брзини даје:

$$v^2 = v_0^2 + 2gz - \frac{2f}{m}\int_{A_0}^{A} N\,ds. \tag{100.8}$$

Овај нам образац каже да ће за разне положаје тачке што леже на истом нивоу: $A, C, D, \ldots$ (сл. 100.1) брзина бивати све мања и најзад у некој тачки E' где је нагиб путање једнак углу статичког трења постати једнака нули. Место E' на коме ће се тачка зауставити биће дабогме близу једног од темена путање $E_1, E_2, \ldots$ путање.

Ако је почетна брзина v_0 у месту A једнака нули, биће највећа брзина опет на најнижем месту путање E_1, али се тачка на супротној страни неће зауставити ($v = 0$) у тачки C што лежи у истом нивоу са A, већ за z' ниже у C' (сл. 100.1). Из C' ће се вратити поново у E, (где ће стићи са мањом брзином него први пут) и продужити слично пригушено периодично кретање док се најзад не заустави на месту E' близу E_1.

101. Кретање тачке у вертикалном кругу. Ако је путања круг полупречника r, што лежи у вертикалној равни (сл. 101.1), онда је:

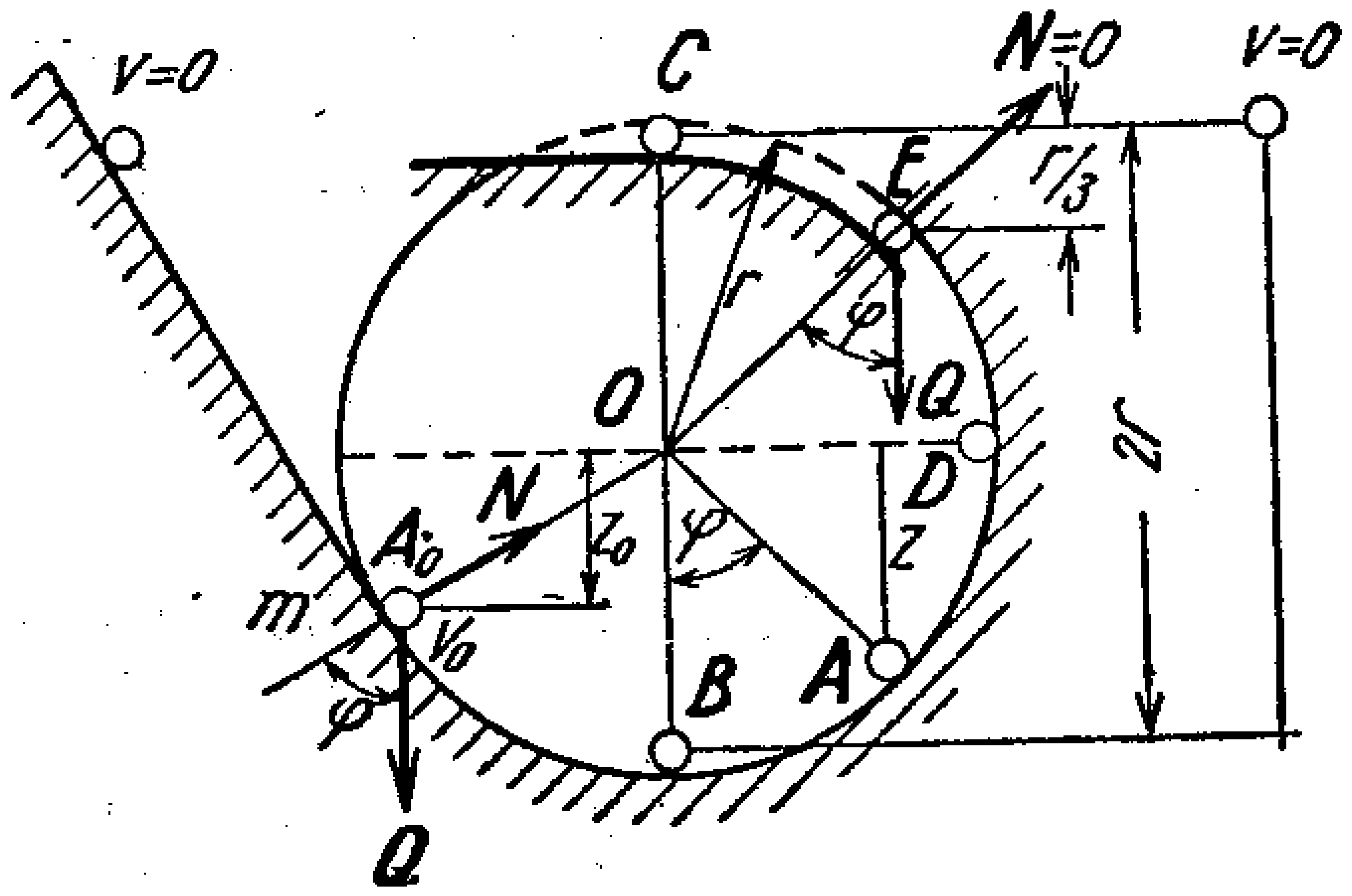
$z = r\cos\varphi$, $z_0 = r\cos\varphi_0$.

По закону живе силе добијамо једначину:

$$mgr(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

из које израчунавамо брзину покретне тачке на ма ком месту:

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \qquad (101.1)$$



Сл. 101.1

Екстремне величине брзине следују из (101.1) кад у њу ставимо екстремне вредности $\cos\varphi$:

$$\left.\begin{aligned} v_B = v_{max} &= \sqrt{v_0^2 + 2gr(1 - \cos\varphi_0)}, \\ v_C = v_{min} &= \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 - \cos\varphi_0)}. \end{aligned}\right\} \qquad (101.2)$$

Величину нормалног отпора, налазимо из опште једначине (100.1) кад у њу сменимо ϱ са r, $\cos\varphi$ са z/r, а v из једначине (101.1). Добијамо:

$$N = \frac{mv_0^2}{r} + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0). \qquad (101.3)$$

Нормални отпор биће највећи за $\cos\varphi = +1$, а најмањи за $\cos\varphi = -1$. Екстремне вредности нормалног отпора биће:

$$\left.\begin{aligned} N_B = N_{max} &= \frac{mv_0^2}{r} + mg(3 - 2\cos\varphi_0), \\ N_C = N_{min} &= \frac{mv_0^2}{r} - mg(3 + 2\cos\varphi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (101.4)$$

Ако покретна тачка треба да се у C заустави (сл. 101.1) мора њена брзина у тачки A бити толика као да је слободно пала са висине $(r + z)$ дакле:

$$v = \sqrt{2g(r+z)} = \sqrt{2gr(1 + \cos\varphi)}, \qquad (101.5)$$

$$v_{max} = 2\sqrt{gr}. \qquad (101.6)$$

Време које тачка треба да из A стигне у C добијамо из једначине (101.5) када сменимо:

$$v = r\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

једначина (101.6) гласи тада:

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\,dt = \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

а њен интеграл:

$$t\sqrt{\frac{g}{r}} = \ln \operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varphi + \pi).$$

Трајање T пута од B до C биће:

$$T\sqrt{\frac{g}{r}} = \left|\ln \operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varphi + \pi)\right|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}.$$

А пошто је $\operatorname{tg}\pi/2 = \infty$ то је $T = \infty$, тачка ће се асимтотички приближавати највишој тачки C круга, али неће никада стићи у C. (Види чл. 97).

Величину нормалног отпора за $v_{min} = 0$ добијамо из једначине 101.3) кад у њу ставимо: $v_0 = \sqrt{2g(r+z)}$, дакле:

$$N = \frac{mg}{r}(2r + 3z). \qquad (101.7)$$

Отпор N постаће једнак нули на месту E са ординатом $z = -2r/3$. Даље кретање по кругу од E до C биће могућно ако покретна тачка буде одоздо подупрта. Брзина у E је тада:

$$v_E = \sqrt{\frac{2}{3}gr}.$$

Из једначине (101.7) читамо да ће нормални отпор имати своју најмању вредност: $-mg$ у C, а највећу: $5mg$ у B.

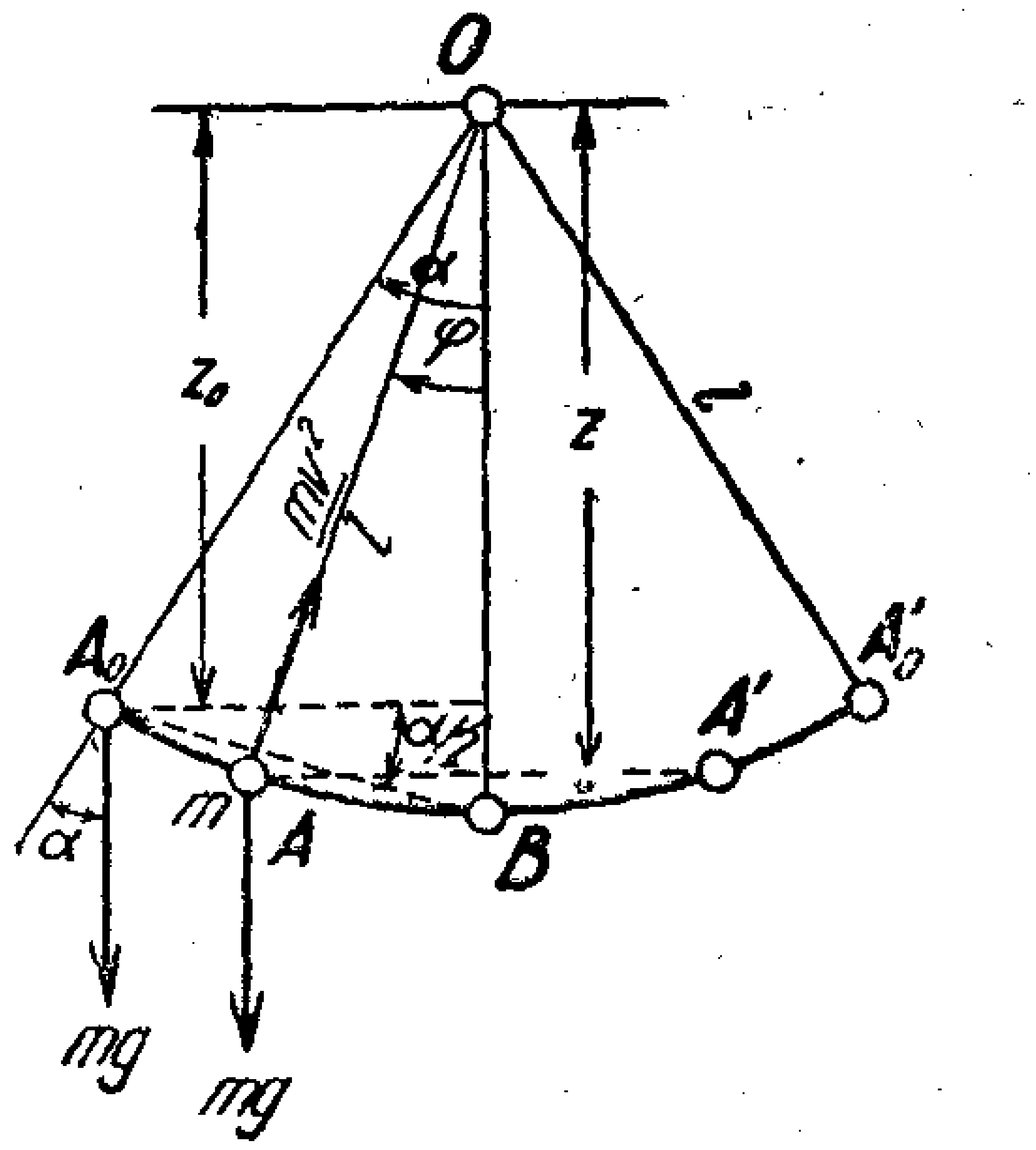
Притисак покретне тачке на путању у њеној највишој тачки C биће једнак нули ако је према другој једначини (101.4) брзина у некој тачки A:

$$v = \sqrt{2gr\left(\frac{3}{2} + \cos\varphi\right)}. \qquad (101.8)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{За } \varphi = 0 \text{ је:} \quad && v_B = v_{max} = \sqrt{5gr}, \\ &\text{а за } \varphi = \pi \text{ је:} \quad && v_C = v_{min} = \sqrt{gr}. \end{aligned}\right\} \qquad (101.9)$$

За $N_{min} = 0$ је: $N_{max} = 6mg$.

102. Математичко клатно. Када у једначини (101.1) ставим $v_0 = 0$ кретање се тачка од A_0 до A'_0 (сл. 102.1) и назад са истом ве личином брзине у свакој хоризон тали. Такву тачку зовемо математичким или простим клатном.



Сл. 102.1

Математичко клатно можем и тако извести да малу лопту тежине mg обесимо помоћу нерастегљивог конца о непомичну тачку 0 Нормални отпор N кружне подлоге замењује тада затезање конца.

Положај A_0 узимамо као почетни положај. На томе месту брзина је $v_0 = 0$. Угао α што правац затегнутог конца у почетном положају A_0 заклапа се вертикалним положајем, зове се угао амплитуде или кратко амплитуда клатна, а угао φ што одговара ма коме положају A, зове се елонгација клатна. Угао φ меримо од вертикале OB.

Пошто у једначини (101.1) ставимо $v_0 = 0$ и слова r и φ_0 заменимо са l и α, добијамо:

$$v = \pm\sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}. \qquad (102.1)$$

Двоструки знак пред квадратним кореном показује да тачка има у месту A две брзине исте величине која је једанпут позитивна (у смеру A_0A), а други пут негативна (у смеру AA_0).

За $\varphi = 0$ следује:

$$v_{max} = \pm\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}. \qquad (102.2)$$

Нормални притисак, односно затезање N у концу налазимо из опште једначине (101.3) стављајући у њу $v_0 = 0$. Добијамо:

$$N = mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\alpha) \qquad (102.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{За } \varphi = 0 \quad \text{је} \quad N_{max} = mg\,(3 - 2\cos\alpha), \\ &\quad "\ \ \varphi = \alpha \quad\ \ " \quad N_{min} = mg\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (102.4)$$

Вредност N_{min}, као што се види из сл. 102.1, једнака је радијалној компоненти тежине у почетном положају A_0.

Време за које тачка стиже из A_0 у A или обратно, добијамо интегралењем једначине (102.1) са позитивним знаком:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Пошто пређени пут s расте кад φ опада, добијамо за ds израз $ds = -l d\varphi$, дакле:

$$dt = -\frac{l\,d\varphi}{\sqrt{2gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}}\,.$$

Време кретања од положаја A_0 до положаја A даје интеграл:

$$t = \int_\alpha^\varphi dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}}\,. \tag{102.5}$$

Ово време можемо добити и на овај начин. Убрзање тачке у неком положају A је:

$$l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi. \tag{102.6}$$

Пошто ову једначину помножимо са $d\varphi/dt$ и сведемо је на нулу, добијамо:

$$\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

лева страна је сада потпун диференцијални извод те му можемо дати облик:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l}\cos\varphi\right\} = 0,$$

из кога следује да је:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l}\cos\varphi = C. \tag{102.7}$$

Ова једначина помножена са масом тачке исказује закон о одржању механичке енергије. [Упореди једначину (57.3)].

Константу C налазимо из услова да је у тачки A_0, $v_0 = d\alpha/dt = 0$, дакле је:

$$C = \frac{g}{l}\cos\alpha\,.$$

Сменом константе у једначину (102.7) добијамо после интегралења једначину (102.5) коју смо већ другим путом нашли.

Овај елиптички интеграл прве врсте може се решити само помоћу тзв. елиптичких функција. Тражићемо **приближно** решење овог интеграла развијањем функција $\cos\varphi$ и $\cos\alpha$ у редове. У тим редовима можемо већ треће чланове φ^4 и α^4 занемарити пошто су код стварних клатна ови углови α и φ релативно врло мали. Узмемо ли на пример $\alpha = 5^0$ (највећа амплитуда код клатна у пракси), онда је $\operatorname{arc}\alpha = 0{,}0873$, а $\alpha^4 = 10^{-4}$.

Узимајући само два члана редова добијамо:

$$\cos\varphi - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2}\,.$$

што унето у једначину (102.5) даје:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}},$$

или

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}}.$$

и после извршене квадратуре:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arcsin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \right]_{\alpha}^{\varphi}. \tag{102.8}$$

Трајање T једне полупериоде добијамо са горњом границом $\varphi = -\alpha$ и са изменом граница:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arcsin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \right]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

и најзад:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{102.9}$$

Овај образац за време T трајања једне полуосцилације извео је први Хајгенс 1673. (Ch. Huygens, 1629—1695.). У обрасцу се не појављује амплитуда што значи да је за *мале осцилације периода независна од величине амплитуде.* Све тачке што полазе са ма ког места на луку A_0A_0' почетном брзином $v_0 = 0$ стићиће у B за исто време. Другим речима: *сва клатна исте дужине l су изохрона.*[1])

Ако у редовима за $\cos\alpha$ и $\cos\varphi$ узмемо у обзир и треће чланове, дакле ставимо:

$$2(\cos\alpha - \cos\varphi) = \alpha^2 - \varphi^2 - \frac{1}{12}(\alpha^4 - \varphi^4),$$

добићемо тачнији образац:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \tag{102.10}$$

За $\alpha = 5^0$ излази тада: $(1 + \alpha^2/16) = 1{,}00\,04\,76$, што значи да би једно клатно са амплитудом $\alpha = 5^0$ извршило милион осцилација за исто

---

1) Грчки: ἴσος = једнак, χρόνος = време. Изохроност клатна за мале амплитуде била је већ Галилеју позната. Он је први научно испитивао кретање клатна и сазнао да периода расте са амплитудом (1638.).

време за које би са бесконачно малом амплитудом учинило за 476 осцилација више.

Строги образац за трајање осцилације, који важи и за произвољно велике амплитуде, извео је Ајлер, 1736. Тај образац гласи:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

Вредност реда у загради износи за $\alpha = 20^0$: 1,00 76 7. Тачна вредност T је само за $0{,}8^0/_{00}$ већа од приближне (102.9).

Образац (102.9) за трајање T једне осцилације са малом амплитудом добијамо непосредно из једначине кретања:

$$l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi,$$

када $\sin\varphi$ заменимо са φ. Јер је

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0$$

диференцијална једначина хармоничне (кружне) осцилације са фреквенцијом $k = \sqrt{g/l}$, дакле је полупериода:

$$T = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Математичко клатно чија полупериода траје једну секунду, зове се **секундно клатно**. Његову дужину l_s добијамо за $T = 1''$. $l_s = g/\pi^2$. За $g = 9{,}81$ m/sec² (средња географска ширина) је:

$$l_s = 0{,}994 \text{ m}.$$

Тешка тачка прећи ће косу раван $\overline{A_0 B}$ (сл. 102.1) почетном брзином $v_0 = 0$ за исто време као у слободном паду кроз висину $2\,l$ (чл. 65), дакле за време:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

За кретање по луку $\widehat{A_0 B}$ требаће само време:

$$t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

дакле је:

$$t_1 : t_2 = 4 : \pi,$$

тј. тачка ће дужи пут прећи за краће време.

103. Кретање клатна са трењем. Ако кружни лук $\widehat{A_0 B}$ по коме тачка m клизи на ниже даје отпор трења: $T = fN$ онда са ознакама слике 102.1 важи диференцијална једначина кретања:

$$m\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{ds}=mg\sin\varphi-f\,|N|, \qquad (103.1)$$

и пошто унесемо:

$$N=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi, \quad ds=-l\,d\varphi \quad \text{и} \quad v\,dv=d\frac{v^2}{2},$$

гласиће једначина (103.1):

$$\frac{dv^2}{d\varphi}-2fv^2=-2gl(\sin\varphi-f\cos\varphi). \qquad (103.2)$$

Ово је линеарна диференцијална једначина првог реда општег облика:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q,$$

где су P и Q функције од x.

Решење[1]) ове једначине гласи:

$$y=e\,\exp\left(-\int P\,dx\right)\left[\int Q\,e\,\exp\left(\int P\,dx\right)dx=C\right]. \qquad (103.3)$$

У нашем случају је:

$$y=v^2,\ x=\varphi,\ P=-2f \ \text{и}\ Q=-2gl(\sin\varphi-f\cos\varphi),$$

дакле:

$$\int P\,dx=-2f\varphi.$$

Сменом ових величина у (103.3) добијамо v као функцију елонгације φ:

$$v^2=e^{2f\varphi}\left\{\int -2gl(\sin\varphi-f\cos\varphi)\,e^{-2f\alpha}\,d\varphi+C\right\}. \qquad (103.4)$$

Константу C одређује услов да је за $\varphi=\alpha$, $v=0$.

Интеграли у једначини (103.4) су:

$$\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{\cos\varphi+2f\sin\varphi}{1+4f^2}, \quad \int e^{-2f\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\sin\varphi-2f\cos\varphi}{1+4f^2}.$$

Сменом ових интеграла у једначину (103.4) добијамо:

$$v^2=2gl\frac{3f\sin\varphi+(1-2f^2)\cos\varphi}{1+4f^2}+Ce^{2f\varphi}. \qquad (103.5)$$

Пошто први члан назовемо краће: $V(\varphi)$ и ставимо за $\varphi=\dfrac{\alpha}{V(\alpha)}$, добијамо најзад v^2 као функцију од φ

$$v^2=V(\varphi)-V(\varphi)\,e^{2f(\varphi-\alpha)}. \qquad (103.6)$$

У најнижој тачки ($\varphi=0$) биће:

$$v^2_{max}=V(0)-V(\alpha)\,e^{-2f\alpha}$$

са

$$V(0)=2gl\frac{1-2f^2}{1+4f^2}.$$

[1]) Прво решење дао је Joh. Bernoulli 1697.

Једначина (103.6) важи само док тачка силази од A_0 до B. За успон од B замењује једначину (103.2):

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = -2gl\,(\sin\varphi + f\cos\varphi),$$

коју добијамо из (103.2) када коефицијент трења f заменимо са $-f$. Јасно је да ће тачка услед отпора трења постићи брзину 0 већ за $\alpha_1 < \alpha$, тј. стаће у тачки A_0 нешто нижој од A'_0. (Види сл. 100).

Интегралење једначине (103.6) којом бисмо нашли закон пута, могућно је само развијањем подинтегралне функције у ред.

104. Таутохроне. Циклоидно клатно. Кружно клатно има као што смо нашли, особину изохроности за мале амплитуде и то само приближно јер је услов $\sin\alpha = \alpha$ само приближно тачан. Природно се намеће питање да ли постоји крива путања у вертикалној равни на којој ће изохроност кретања тачке постојати за с в а к у в е л и ч и н у а м п л и т у д е. Јасно је да ће тражена линија бити конкавна према горе и да ће бити симетрична према вертикали кроз најнижу тачку, коју бирамо за почетак координатног система Oxz, за осовину x тангенту, а позитивну осовину z н а в и ш е. Лук OA рачунамо од O према A и наш је задатак да нађемо непознату функцију $s = f(z)$. (Сл. 104.1)

По закону живе силе је:

$$\frac{v^2}{2} = g\,(h - z), \qquad v = \frac{d(\widehat{A_0A})}{dt} = -\frac{ds}{dt}, \tag{104.1}$$

а из ове једначине налазимо:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}.$$

Време τ за које покретна тачка пређе лук $\widehat{A_0O}$ је:

$$\tau = \int_h^0 \frac{-f(z')\,dz}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_0^h \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{2g(h-z)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{\sqrt{hf'(h\zeta)}}{\sqrt{1-\zeta}}d\zeta. \tag{104.2}$$

Сменом $z = h\zeta$ ослободили смо границе интеграла од h. Пошто време τ треба да је н е з а в и с н о о д h то мора тражена функција $f(z)$ задовољити услов $d\tau/dh = 0$, дакле:

$$\frac{d\tau}{dh} = \frac{1}{\sqrt{8gh}}\int_0^1 \frac{2h\zeta\, f''(h\zeta) + f'(h\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}}\,d\zeta. \tag{104.3}$$

Да ова једначина буде за сваку вредност h задовољена, мора бројилац подинтегралне функције бити једнак нули дакле:

$$2h\zeta f''(h\zeta) + f'(h\zeta) = 0,$$

и пошто опет $h\zeta$ заменимо са z:

$$2z f''(z) + f'(z) = 0, \tag{104.4}$$

одавде следује:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{1}{2z},$$

тј.

$$d \ln f'(z) = -\frac{dz}{2z} = -d \ln z^{\frac{1}{2}}.$$

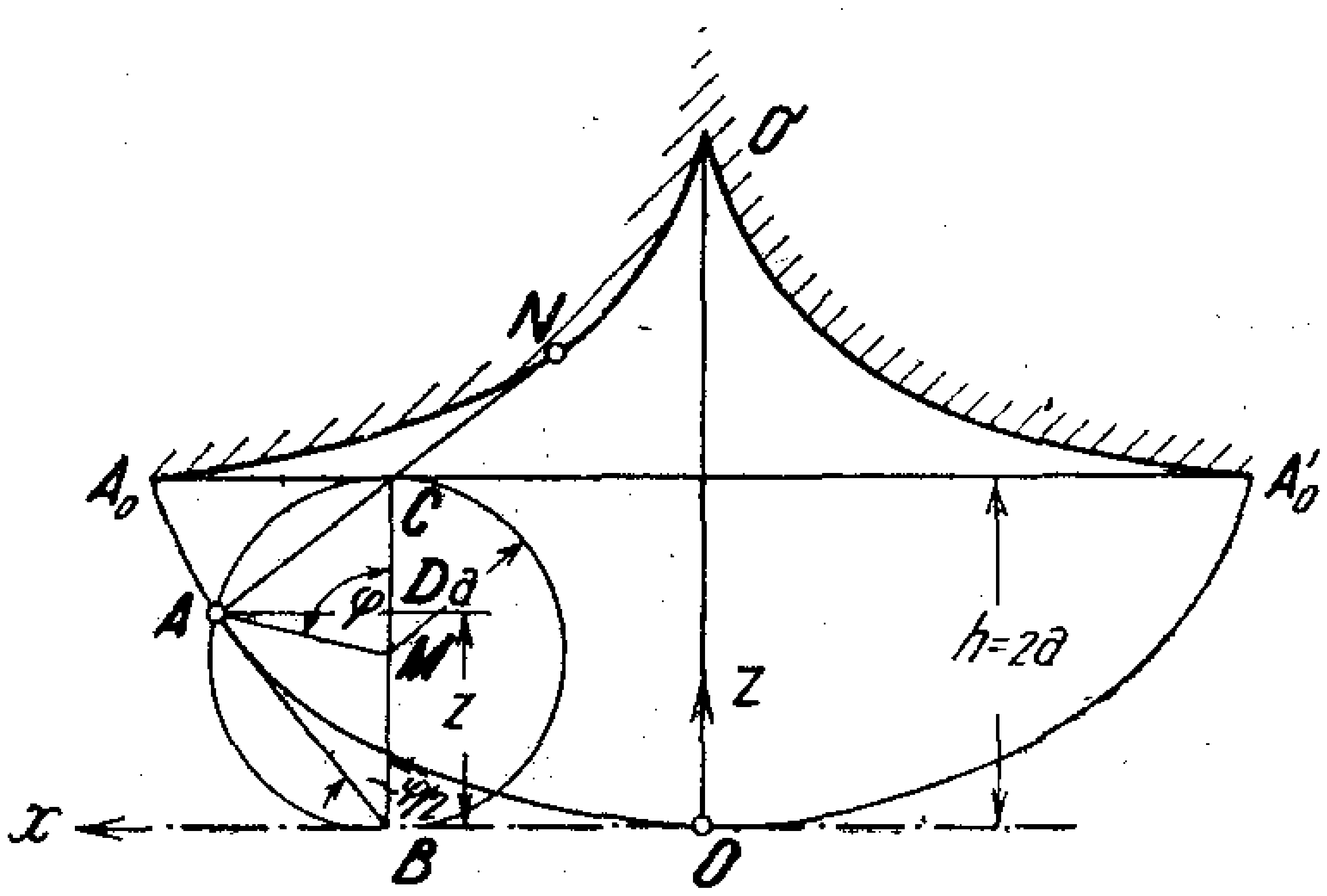
Интеграл је:

$$\ln f'(z) = \ln\left(\frac{c}{z}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где је c произвољна интеграциона константа. Поновним интеграљењем добијамо:

$$s = f(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{c}{z}}\, dz = 2\sqrt{c\, z}, \tag{104.5}$$

($C = 0$), а то је једначина циклоиде између апсцисе x и лука s са теменом у 0 (сл. 104.1). Тачка 0 зове се тачка таутохроности.



Сл. 104.1

Тиме је доказано *да је циклоида једина равна таутохрона тешке тачке,* јер диференцијална једначина допушта као решење само једну функцију $f(z)$.

Таутохроност и изохроност су два имена за исту особину принудног кретања тачке по кривој путањи. Разлика је само формална. Ако уочимо кретање од неке тачке A путање до најниже тачке 0, (тачке таутохроности), без обзира на то какво ће бити даље кретање од 0 (периодично или апериодично), говоримо о таутохроној особини циклоиде. Ако пак мислимо на кретање од A до A' (OA' симетрично са AO) дакле на периодично кретање, кажемо да је циклоида изохрона путања тешке тачке. У оба случаја је тангента у 0 хоризонтална.

За дужину $S = \widehat{A_0 O}$ добијамо: $S^2 = 4\,c\,h$; када изаберемо $c = h$ добијамо: $S = 2\,h = 4\,a$, где је са a означен полупречник круга „генератора" који се котрља по хоризонтали $2\,a\,\pi$.

Елементарни лук циклоиде постаје обртањем потега $\overline{CA}$ око моментаног пола C за елементарни угао. $\overline{AB}$ је дакле тангента, а $\overline{AC}$ нормала циклоиде у тачки A.

Из правоугаоног троугла ABC читамо: $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$, дакле: $\overline{AB} = \sqrt{hz}$. Дужина лука $\widehat{OA}$ је $s = 2\sqrt{hz}$, тј. лук $\widehat{OA}$ је двапут дужи од тангенте $\overline{AB}$.

Из једначине циклоиде (104.5) добијамо:

$$z = \frac{s^2}{4\,h}\,, \quad \frac{dz}{dz} = \frac{s}{2\,h} = \sin\vartheta,$$

где ϑ значи нагиб тангенте према апсциси.

Једначина кретања гласи:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\vartheta = -\frac{g}{2\,h}\,s,$$

где негативан знак каже да је убрзање позитивно када s опада. Сведена на нулу са: $h = 2\,a$ гласи једначина кретања:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4\,a}\,s = 0,$$

и са $k^2 = g/4\,a$:

$$\frac{d^2\,s}{dt^2} + k^2 s = 0. \tag{104.6}$$

То је позната једначина хармоничне осцилације са периодом $T = 2\pi/k$. Тешка тачка прећиће пут од ма које тачке A до A' на истој висини и натраг за време: $2\pi\sqrt{4\,a/g}$, а од ма које тачке A до најниже O за време:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\,a}{g}}\,. \tag{104.7}$$

Циклоидно клатно као и свако друго, (елиптично, параболично) можемо остварити малом лоптом обешеном нерастегљивим концем дужине $4\,a$ о непомичну тачку O'. *Еволута циклоиде је циклоида подударна са датом циклоидом* померена за $a\pi$ у правцу x, а за $2\,a$ у правцу z (сл. 104.1). Када исечемо шаблону еволуте, конац ће при клаћењу једним делом $\widehat{NO'}$ налегати на шаблону. У тренутку када се лопта налази у A, нормала путање у A додирује еволуту у тачки N и $\overline{AN}+\overline{NO'}=4a$. $\overline{AN}=\varrho$ је полупречник кривине у A. $\widehat{AN}=2\,\overline{AC}$ тј. *полупречник кривине једнак је двострукој дужини нормале.* Када уклонимо шаблону добијамо кружно клатно дужине $l=4a$.

Изохроност циклоиде можемо непосредно увидети овим расуђивањем. Ако нам је дата једначина која изражава тангенцијално убрзање u тачке као функцију времена или растојања, можемо кретање тачке испитивати независно од облика путање. Знамо да је хармонична осцилација у правој изохрона (чл. 57). Када праву по којој тачка осцилише убрзањем $gx/4a$ и центром 0 савијемо у циклоиду тако да је 0 њено теме а растојање x постане лук s рачунат од 0, закон кретања се тиме неће мењати, кретање по циклоиди биће изохроно са периодом $2\pi\sqrt{\dfrac{4a}{g}}$.

Доказали смо да је циклоида једина равна таутохрона тешке тачке. Ако циклоиду обавијемо око цилиндра произвољне основе и вертикалне осовине добијамо бесконачно много таутохрона двогубе кривине. Обратно можемо сваку просторну криву пројицирати на хоризонталну раван и развијањем добијеног вертикалног цилиндра у вертикалну раван добити равну криву исте дужине, Тангенцијална сила тежине је такође остала иста, дакле смо добили равну таутохрону тежине.

Таутохроност за тешку тачку открио је Хајгенс; први је испитивао одвијање са дате криве линије и тиме засновао теорију еволуте и еволвенте.[1])

105. Таутохроне криве уопште. Циклоида је таутохрона путања за најједноставнији случај када покретну тачку напада константна сила $P=mg$. Појам таутохроности можемо применити и на општи случај када тачка клизи без трења по једној материјалној линији под дејством произвољне променљиве силе $\vec{P}$.

Ако са P_t означимо тангенцијалну компоненту силе $\vec{P}$ за коју претпостављамо да зависи само од положаја, гласиће једначина кретања: (Види чл. 96).

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=P_t=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}. \tag{105.1}$$

[1] У првом отсеку свога дела „Horologium oscillatorium" 1658 описује Хајгенс конструкцију свога зидног сата са циклоидним клатном, у другом излаже теорију циклоидног клатна, у трећем теорију еволута, у четвртом одређује центар осцилације физичког клатна, и најзад у петом наводи без доказа законе коничног клатна.

Лук s рачунамо од тачке таутохроности O. Та иста једначина важи и за праволинијско кретање под дејством силе P_t и истим почетком O. Познајемо једно праволинијско таутохроно кретање: хармоничну осцилацију за коју важи закон силе: $P = -mk^2x$ Може се доказати да је то једини закон силе за таутохроно кретање у правој. Да би нека крива била таутохрона мора њена диференцијална једначина гласити:

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = -k^2s\,. \tag{105.2}$$

Све криве линије које задовољавају овај једини услов, биће таутохроне за дати закон силе. За $s = 0$ биће $X = Y = Z = 0$, тј. *тачка таутохроности је место стабилне равнотеже* тачке која клизи по кривој путањи.

Ако је сила $\vec{P}$ конзервативна дакле: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU(x,y,z)$, добијамо непосредно интеграл једначине (105.2):

$$U(x,y,z) = -\frac{k^2s^2}{2} + C. \tag{105.3}$$

Проблем таутохроне биће одређен када путањи пропишемо поред услова (105.2) још други произвољан услов.

1.) Можемо на пример захтевати да се тражена путања налази на датој површини:

$$F(x,y,z) = 0\,. \tag{105.4}$$

Две једначине (105.2) и (105.4) у вези са идентитетом:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1\,, \tag{105.5}$$

одређују x, y, z као функцију од s. Интегралење тих једначина уноси две произвољне константе сем k^2 коју смо већ произвољно изабрали.

2.) У место да путању приморамо да се налази на датој површини, можемо захтевати да она буде таутохрона за два закона силе X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1, са истом тачком таутохроности 0. Једначини (105.2) придолази сада једначина:

$$X_1\frac{dx}{ds} + Y_1\frac{dy}{ds} + Z_1\frac{dz}{ds} = -k_1^2 s. \tag{105.2a}$$

Једначине (105.2) и (105.2a) а у вези (105.5) одређују x, y, z као функције од s. Тако одређена крива је по закону суперпозиције таутохрона и за силу: $\lambda X + \mu X_1$, $\lambda Y + \mu Y_1$, $\lambda Z + \mu Z_1$ где су λ и μ позитивне константе.

Ако је сила X, Y, Z такође конзервативна, дакле је и

$$U_1(x,y,z) = -\frac{k_1^2 s^2}{2} + C_1, \tag{105.3a}$$

налазимо елиминацијом пута из (105.3) и (105.3а) једначину површине:

$$k_1^2[U(x,y,z) - C] - k^2[U_1(x,y,z) - C_1] = 0, \tag{105.6}$$

на којој се тражена таутохрона налази.

Таутохрону тешке тачке налазимо из опште једначине (105.2) узимајући почетак координатног система у 0 а осовину z на више као у сл. 104.1. Онда је: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$, а тангенцијална компонента тежине mg је $P_t = -mg\,dz/ds$. Уносећи ове вредности у једначину (105.2) добијамо:

$$-mg\frac{dz}{ds} = -k^2 s,$$

а њен интеграл је:

$$z = \frac{k^2 s^2}{2\,mg} + C,$$

где је $C = 0$. Инверзијом добијамо:

$$s = 2\sqrt{\frac{mg}{2k^2}\,z} = 2\sqrt{c\,z},$$

дакле једначину циклоиде коју смо у прошлом члану непосредним путом нашли.

106. Брахистохрона. Тешка тачка која из стања мира у месту A клизи по произвољној (равној или просторној) глаткој кривој линији $\widehat{AB}$ стићиће у B брзином $v = ds/dt = \sqrt{2gz}$, где z значи висинску разлику места A и B. Са $ds = dx\sqrt{1 + z'^2}$ налазимо време за које ће тачка стићи из A до B:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1 + z'^2}{2}}\,dx. \tag{106.1}$$

Из образаца је јасно да координатни систем на који односимо кретање има почетак у A, да је осовина x управљена на десно а осовина z на ниже. Горња граница x_1 интеграла значи хоризонтално растојање тачака A и B.

Већ Галилеји је доказао да ће тешка тачка за краће време стићи клизећи по кружном луку $\widehat{AB}$ коме је центар на вертикали кроз

B, него на тетиви $\overline{AB}$ и у опште за краће време него по произвољном полигону уписаном луку $\widehat{AB}$.[1])

Проблем по којој кривој путањи ће тешка тачка стићи за најкраће време из A у B поставио је и решио J. Бернули (Johann Bernoulli, 1667—1748.) и назвао ту криву брахистохроном.[2]) По тадашњем обичају позвао је све познате математичаре на решавање (1696.). Идуће године објављени су радови браће Јохана и Јакоба Бернули. Методе решавања су потпуно различите. Први је запазио аналогију кретања тешке тачке са путањом светлосног зрака кроз средину променљивог индекса преламања и са познатим особинама тог кретања нашао је брзо брахистохрону. Био је изненађен да је ова идентична са Хајгенсовом таутохроном. Јакоб примећује да је овај задатак: између бесконачно много кривих $\widehat{AB}$ наћи ону која има извесну екстремалну особину, задатак сасвим нове врсте и стога захтева нов метод решавања. Он полази од става: *Ако нека крива има једну екстремалну особину, онда има и сваки њен елемент исту особину.* Заметном геометријском анализом налази циклоиду као решење проблема. Његова метода је општија него метода млађег брата. Проблем брахистохроне решили су још и Њутн, Лајбниц и Лопитал (L'Hospital). Метод Јакоба Бернули уопштио је и усавршио Ајлер решавајући многе проблеме сличне врсте и тако поставио темеље новој грани Анализе коју је назвао Варијационим рачуном. Главним проблемом варијационог рачуна дефинише Ајлер одређивање екстремалних вредности неког интеграла:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} Z\,dx,$$

где је Z функција од x, y, y', y'' итд. и где се тражи зависност између x и y. Важан напредак постигао је Ајлер при испитивању брахистохроне узимајући у обзир и отпор средине. Када тешка тачка клизи без трења у празном простору, зависи као што знамо, њена брзина само од висине кроз коју се спустила; брзина једног елемента не зависи од суседних елемената путање. Тада је стварно и сваки елемент брахистохроне такође брахистохрон. У отпорној средини пак има цела дужина и облик претходне путање утицај на брзину неког елемента. Цела путања може бити брахистохрона а да сваки елемент не мора имати ту особину Таквим расуђивањима увидео је Ајлер да принцип Јакоба Бернули нема опште важности. На многим примерима показао је како се и у таквим сложенијим пробле

1) „Разговори и математички докази“ 1638. Трећи дан.

2) Грчки: $\beta\varrho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ = најкраћи.

мима долази до циља. Своје резултате објавио је у опширном делу 1744. Једно од његових најважнијих открића је диференцијална једначина која носи његово име. Решења те једначине зову су **екстремале** јер се криве које вредност интеграла чине екстремном (т. максимумом или минимумом) могу само међу тим решењима налазити. Ајлер је своја испитивања кривих са екстремалним особинама још геометријском методом вршио. Али је у последњем свом делу напоменуо да недостаје метод који је независан од геометријског решења.

Нова епоха у развитку варијационог рачуна настаје радовима Лагранжа (J. L. Lagrange, 1736—1813.) који се потпуно ослободио посматране геометријске фигуре и дао аналитички метод. Он примећује да су прираштаји функција услед промене облика функције потпуно аналогни прираштајима услед промене независне променљиве. За разликовање увео је за прве знак δ а за друге d. Имајући у виду ову аналогију могао је Лагранж одмах написати једначине које доводе до решења екстремалних задатака. Свој метод саопштио је Ајлеру 1755.

Да ли у неком конкретном случају наступа максимум или минимум, то најчешће показује већ природа задатка. Питање критеријума између максимума и минимума решавали су Лагранж, Лежандр, 1786 и Јакоби (C. G. J. Jacobi, 1837.) Тековине 18-ог века поставили су на сигурне темеље тек математичари 19-ог века као Јакоби, Вајерштрас, Дарбу, Хадамар, Хилберт и многи други.

У проблему брахистохроне тешке тачке у празном простору имамо да тражимо минималну вредност интеграла:

$$W = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}}\, dx \text{ или краће } W = \int_0^{x} Z\, dx . \tag{106.2}$$

Брахистохрона: $z = f(x)$ мора задовољити Ајлерову диференцијалну једначину:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Z}{\partial z'}\right) - \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{106.3}$$

Парцијални изводи од Z гласе:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{1}{2z}\sqrt{\frac{1+z'^2}{z}}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}},$$

а извод последњег по x је:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial z'} = \frac{2zz'' - z'^2(1+z'^2)}{2\,[z(1+z'^2)]^{3/2}}.$$

Сменом ових вредности у Ајлерову једначину добијамо диференцијалну једначину другог реда:

$$\frac{1}{2z}\sqrt{\frac{1+z'^2}{z}}+\frac{2zz''-z'^2(1+z'^2)}{2[z(1+z'^2)]^{3/2}}=0,$$

коју мора тражена путања задовољити. Сажета она има облик:

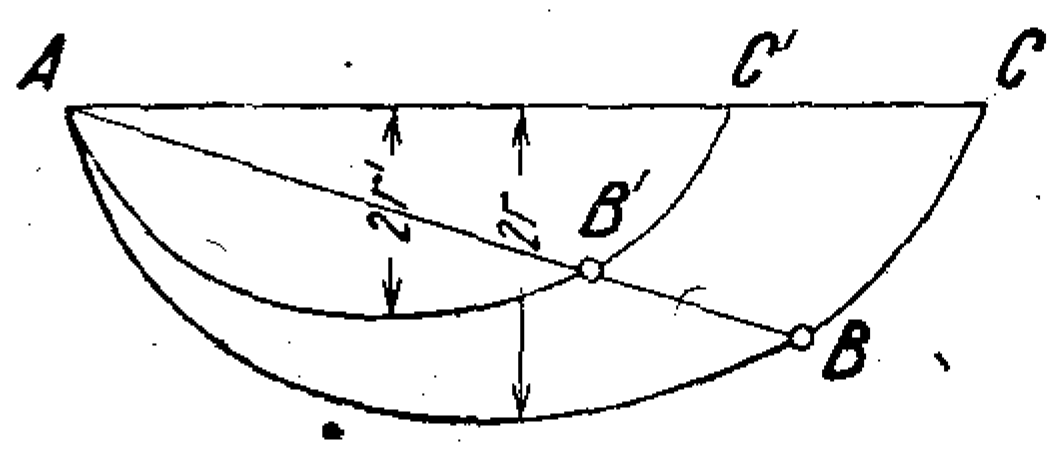
$$1+z'^2+2zz''=0,$$

или:

$$\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}=-2z\sqrt{1+z'^2}; \tag{106.4}$$

на левој страни једначине стоји познати образац за дужину полупречника кривине ϱ, а на десној дужина нормале N.

Последња једначина каже да је код тражене путање однос $\varrho : N = -2:1$ константан. Ту особину имају само циклоиде којима је основа апсциса. Тако већ диференцијална једначина доказује да је *једина брахистохрона тешке тачке циклоида.*



Сл. 106.1

Циклоиду која спаја дате тачке A и B (сл. 106.1) налазимо на основу чињенице да су с в е ц и к л о и д е с л и ч н е. Конструишемо произвољну циклоиду са пречником $2r'$ круга генератора. Тетива $\overline{AB}$ сече циклоиду у тачки B'. Из пропорције $AB:AB' = 2r:2r'$ налазимо пречник: $2r = \frac{AB}{AB'}2r'$ генератора циклоиде $\widehat{AB}$.

Брахистохроне путање изучаване су и за разне законе силе, са отпором трења, отпором средине итд.

ГЛАВА IV

Статика тачке

107. Увод. Статика је по дефиницији наука о равнотежи сила. Али, пре но што почнемо испитивати услове под којима ће материјална тачка под дејством сила бити у равнотежи, потребно је да упознамо разлику која постоји између појмова: стање мира и стање равнотеже. Стање мира је појам Кинематике и под њим разумемо онај случај кретања, када је брзина једнака нули. По принципу инерције знамо да ће тело остати у миру, кад на њега не дејствује никаква сила; али принцип инерције обухвата још један случај кретања: кад на тело не дејствује никаква сила, оно се може и кретати константном брзином у правој линији. Ако дакле видимо да на тело (на пример жељезнички воз), које се креће једноликом брзином у правој путањи, дејствују извесне силе (вучна сила, тежина, отпори трења, ваздуха итд.), онда је очевидно да се дејства морају међусобно поништавати, чим те силе не производе никакву промену у стању кретања. У таквом случају кажемо за силе да су у равнотежи, а за тело (воз) да се креће по принципу инерције. Стање мира ($v = 0$) је дакле један специјални случај стања равнотеже ($v = \text{const.}$): ако је једна тачка у миру она је и у равнотежи, али ако је у равнотежи она не мора бити у миру. Да бисмо јаче истакли ову разлику ми можемо равнотежу, код које тачка под утицајем сила остаје у миру, назвати статичком равнотежом а ону, при којој се тачка креће једнолико у правој, динамичком равнотежом.

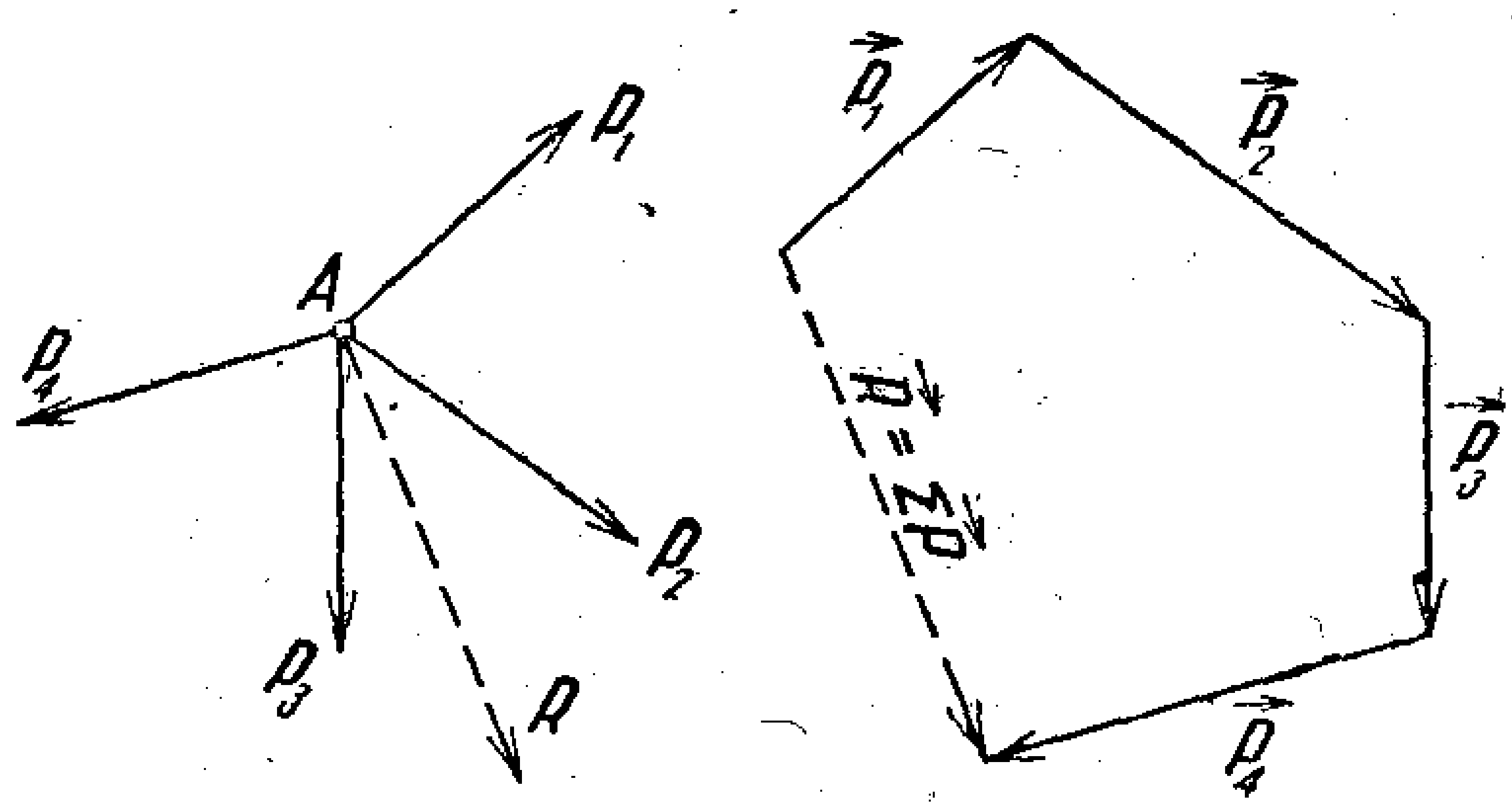
Но сем равнотеже сила Статика проучава и еквиваленцију сила тј. услове под којима ће две различите групе сила: $\sum_1^n \vec{P}_i$ и $\sum_1^m \vec{Q}_i$ што нападају неко тело изазвати исту промену стања кретања тога тела. У томе случају кажемо да су те две групе сила еквивалентне и то симболички означавамо изразом:

$$\sum_1^n \vec{P}_i = \sum_1^m \vec{Q}_i. \tag{107.1}$$

Науку о равнотежи и науку о еквиваленцији сматрамо данас као две гране „Геометрија сила". Ми ћемо Геометрију сила звати кратко Статиком.

Основни појам Статике је појам резултанте сила. Пошто су силе векторске величине, то под резултантом $\vec{R}$ извесних сила $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3, \ldots$ разумемо њихов збир (сл. 107.1) било да силе леже у истој равни или не:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots + \vec{P}_n = \sum_1^n \vec{P}_i. \qquad (107.2)$$



Сл. 107.1

Ако је овај збир за две разне групе сила[1]) исти ($\vec{R}_p = \vec{R}_q$), онда су те две групе сила еквивалентне, а ако је он једнак нули ($\vec{R} = 0$), онда су силе у равнотежи. Према томе све групе сила које стоје у равнотежи, еквивалентне су.

У Статици материјалне тачке претпостављамо да се нападне линија свих сила секу у једној тачки A и зато кажемо да све силе имају исту нападну тачку. Пошто у Статику не улази појам масе то ову тачку можемо сматрати као геометријску тачку. Најприродније је задатке Статике решавати геометријским (графичким) путем. Али као год што се и у Геометрији сем графичке методе употребљује и аналитичка, тако се и у Статици сви задаци могу решавати и графички и аналитички те можемо говорити о Графичкој и Аналитичкој Статици. Према томе имаћемо графичке и аналитичке услове равнотеже и еквиваленције сила.

При излагању градива Статике поступићемо као и у Динамици: прво ћемо проучавати Статику слободне, а потом Статику везане тачке.

А. СТАТИКА СЛОБОДНЕ ТАЧКЕ

108. Општи услови равнотеже и еквиваленције. Ако силе које материјалну тачку нападају леже све у истој равни, онда говоримо

[1]) Кад оне нападају слободну тачку.

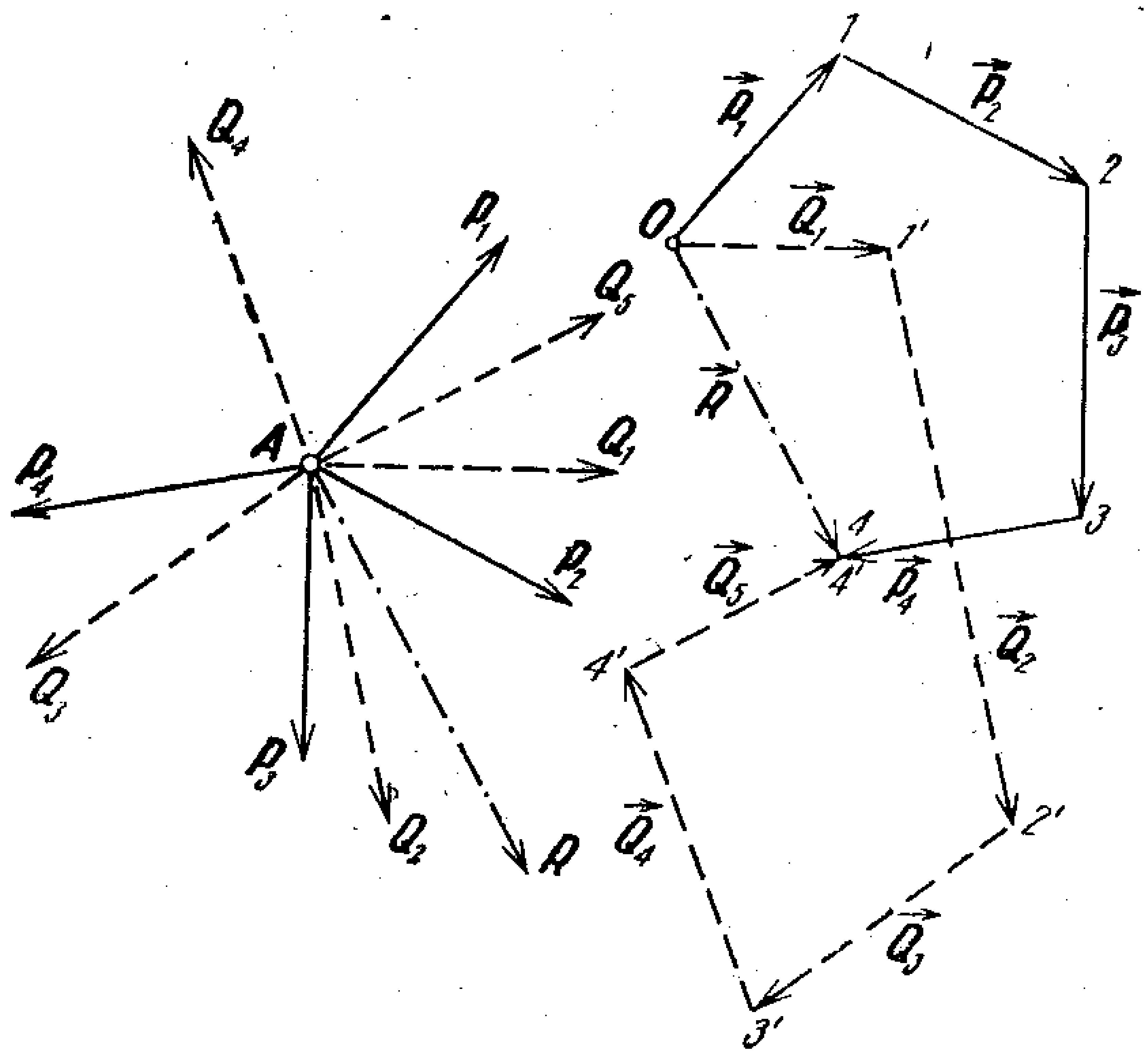
о равном систему сила; под просторним системом сила разумемо случај када су силе распоређене у произвољним правцима простора.

Под једновременим утицајем извесних сила: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ могу уопште наступити два случаја, ако је тачка коју те силе нападају пре тога била у миру:

1) ако су силе $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ у равнотежи ($\vec{R} = 0$), онда ће тачка и даље остати у миру;

2) ако силе $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ нису у равнотежи, онда ће постојати њихова резултанта $\vec{R}$ и тачка ће се кренути убрзано у правцу те резултанте. Исто такво кретање изазваће и нека друга група сила $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{Q}_3$, $\vec{Q}_4$ ако и она буде имала исту резултанту $\vec{R}$.

Да бисмо векторским путем дошли до сазнања да ли су неке силе $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ у равнотежи или не, ми ћемо конструисати векторски влак тих сила. Тај ће влак у случају равног система сила бити раван, иначе просторни полигон. Ако се почетна (0) и крајња тачка (4) тога влака поклопе, онда је резултанта сила једнака нули, а силе су у равнотежи. У том случају је влак вектора $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_4$ затворен полигон и можемо га обићи идући увек у смислу самих вектора (исти смисао обилажења). Други случај који може наступити то је: да се почетна тачка (0) и крајна тачка (4) векторског влака не по-



Сл. 108.1

клапају (сл. 108.1) тада је влак отворен, а страна (0—4) која га затвара даје нам по величини, правцу и смеру резултанту $\vec{R}$ датих сила: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$.

До појма еквиваленције сила[1]) долазимо векторским путем, ако замислимо да на исту тачку уместо групе сила ($\vec{P}_i$) делује друга нека група сила ($\vec{Q}_i$), али таквих да имају исту резултанту $\vec{R}$ (слика 108.1 испрекидано). Векторски услов за еквиваленцију сила: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 је дакле тај, да векторски влакови што одговарају тим силама имају заједничку завршну страну $\vec{R}$. Влакови могу бити равни или просторни. У свему осталоме $\vec{P}_i$ и $\vec{Q}_i$ могу бити сасвим произвољне.

109. Услови равнотеже и еквиваленције за силе у равни. а) Графичка метода. Ако силе на сл. 108.1 леже све у једној равни онда важе сем општих теорема још и следеће примедбе:

1) Ако тачку нападају само три силе што су у равнотежи, онда је влак сила троугао Из овога следује обратно, пошто је троугао равна геометријска слика, да *три силе које нападају једну тачку не могу бити у равнотежи ако не леже све три у истој равни.*

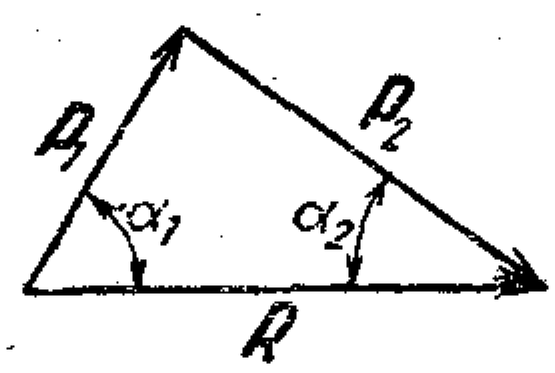
2) Једну познату силу $\vec{R}$ разложити у компоненте: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ значи наћи групу сила која је еквивалентна датој сили.

Полигон сила на сл. 108.1 можемо дакле схватити и као конструкцију која служи за разлагање једне дате силе $\vec{R}$ у компоненте. Пошто је над страном: $\vec{04} = \vec{R}$ могућно нацртати безбројно много равних полигона: $0 - 1 - 2 - 3 - 4$; $0 - 1' - 2' - 3' - 4' - 5' \ldots$ чије стране P_1, P_2, P_3, P_4; $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \ldots$, претстављају компоненте дате силе $\vec{R}$, то видимо да је задатак разлагања једне силе у компоненте неодређен, јер дозвољава безбројно много решења. Задатак разлагања једне силе у n компонената идентичан је са геометријским задатком: конструисати раван полигон од $(n + 1)$ страна, кад је дата само једна од тих страна. Такав полигон има $(n + 1)$ темена од којих су само два дата, дакле остаје $(n + 1) - 2 = (n - 1)$ непознатих темена. Како је за одређивање сваког непознатог темена потребно имати два податка (две дужи или једну дуж и један угао), то нам за конструкцију поменутог полигона над датом страном недостају $(n - 1)\,2 = (2n - 2)$ података. Зато у Статици кажемо да је разлагање једне силе у n компо-

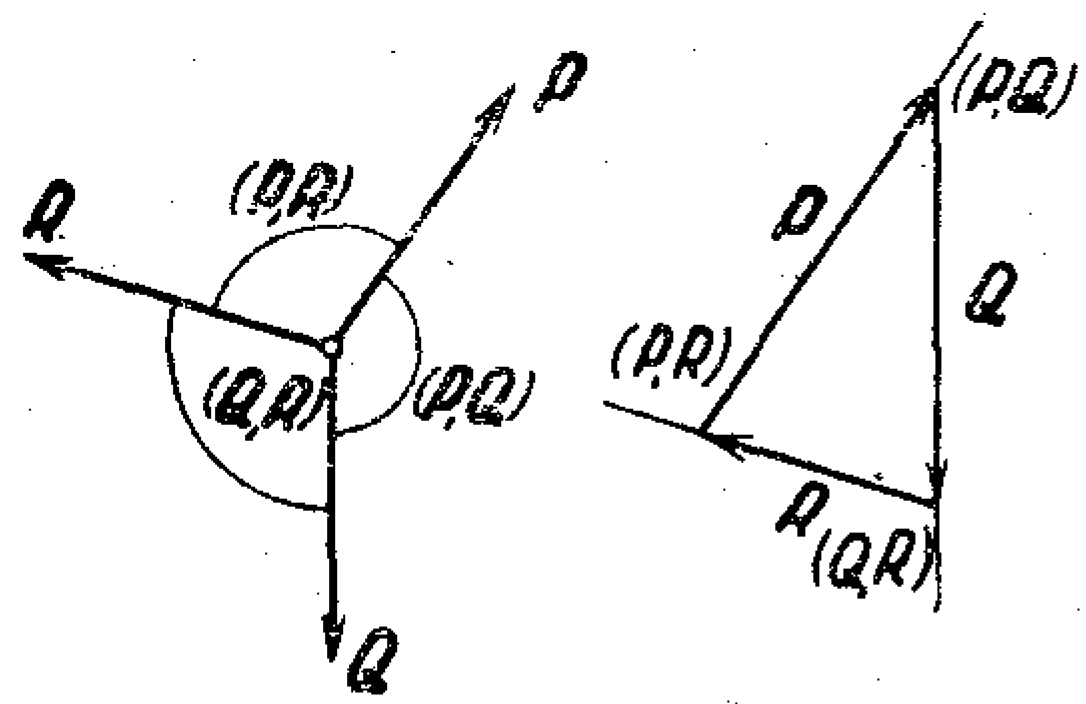
[1]) Када оне нападају слободну тачку.

нената које леже све у истој равни $(2n-2)$ пута неодређен задатак.

3) Ако желимо једну силу разложити у две компоненте $(n=2)$, онда је полигон сила троугао са $(n+1)=2+1=3$ стране, а задатак је $(2n-2)=4-2=2$ пута неодређен, јер нам недостају 2 податка за одређивање троугла сила. Та два непозната податка можемо бирати на четири разна начина (сл. 109.1): *а*) Величину P_1 и правац α_1 једне компоненте; б) величине P_1 и P_2 обеју компонената; в) правце α_1 и α_2 обеју компонената; г) величину P_1 једне а правац α_2 друге компоненте. Први и трећи начин избора дају увек одређено решење и кад оба податка произвољно бирамо, док код другог и четвртог начина одређена решења добијамо само ако изабрани подаци задовољавају још извесне услове, иначе је решење немогућно [на пример код другог начина: $(P_1+P_2)>R$].



Сл. 109.1



Сл. 109.2

Најважнији је трећи случај: разлагање дате силе у компоненте у два правца што леже са силом у истој равни. Тај случај имаћемо нарочито у примени код аналитичке методе.

Тригонометријски услов за равнотежу трију сила: $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{R}$ што нападају једну тачку у разним правцима, добијамо из графичког услова да оне морају образовати затворен троугао, (сл. 109.2). Ако углове које силе међусобно заклапају означимо са (P, Q), (Q, R) и (P, R) и уз то имамо у виду да се углови у троуглу сила са овима допуњују до 180^0, онда по синусном правилу важи пропорција:

$$\frac{R}{\sin(P,Q)}=\frac{P}{\sin(Q,R)}=\frac{Q}{\sin(P,R)}. \tag{109.1}$$

Тако добијамо теорему: Ако три силе стоје у равнотежи на једној тачки, онда је *однос сваке силе према синусу угла, који затварају друге две, исти за све три силе.*

Горња пропорција важи и онда, када смер ма које од три силе променимо, онда ће та сила бити резултанта осталих двеју. Теорема важи дакле и за такав систем трију сила, где су две силе компоненте а трећа њихова резултанта.

1. Пример. Дате су силе P_1 и P_2 и угао α што га међусобом заклапају. Траже се углови α_1 и α_2 које заклапају са непознатом резултантом.

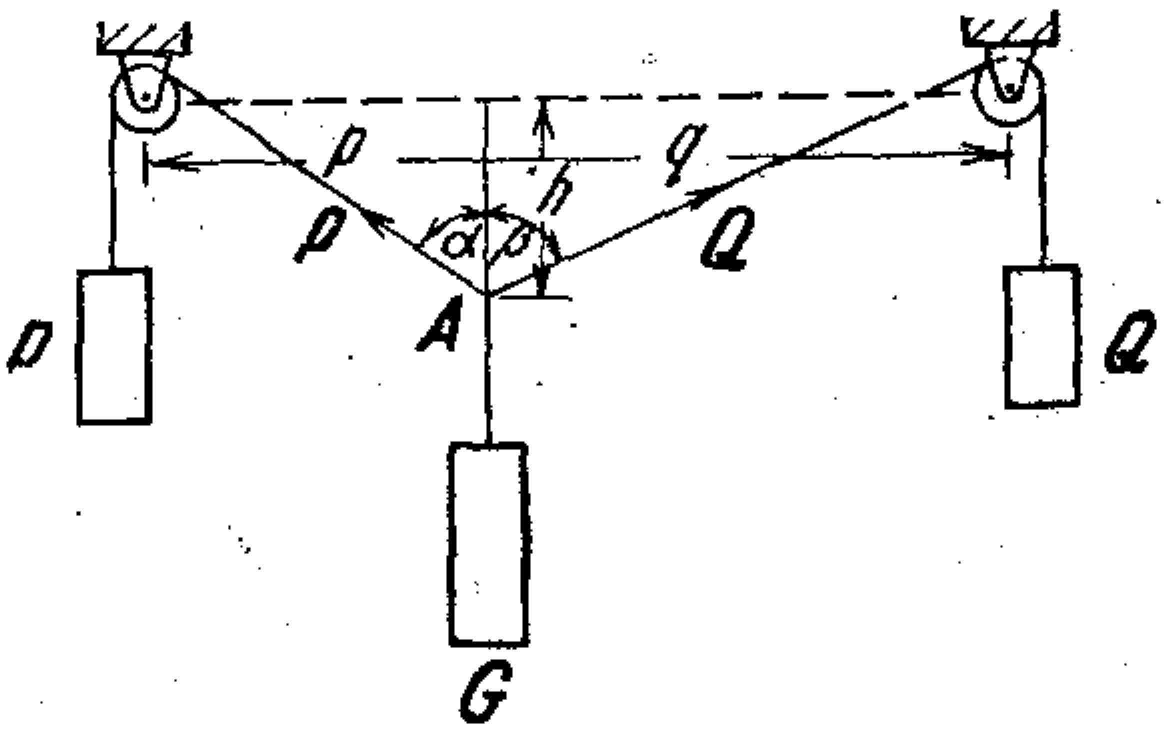
Ако су a и b дужине двеју страна троугла, α_1 и α_2 њихови супротни углови гласи теорема тангенса (Напиер-ов образац):

$$(a-b):(a+b)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2).$$

Са $a=P_1$, $b=P_2$, $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ налазимо:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. Пример. Два ужета пребачена су преко два котура што леже у истој хоризонтали (сл. 109.3) и чије димензије занемарујемо. О вертикалним крајевима обешени су тегови P и Q, Коси крајеви спојени су у тачки A у којој виси тег G. Пита се колики мора бити однос растојања p/q па да три силе: P, Q и G буду у равнотежи?



Сл. 109 3

Из сл. 109.3 читамо: $p=h\operatorname{tg}\alpha$, $q=h\operatorname{tg}\beta$ дакле:

$$\frac{p}{q}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

По синусном ставу је:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{Q}{P},$$

а по косинусном ставу је:

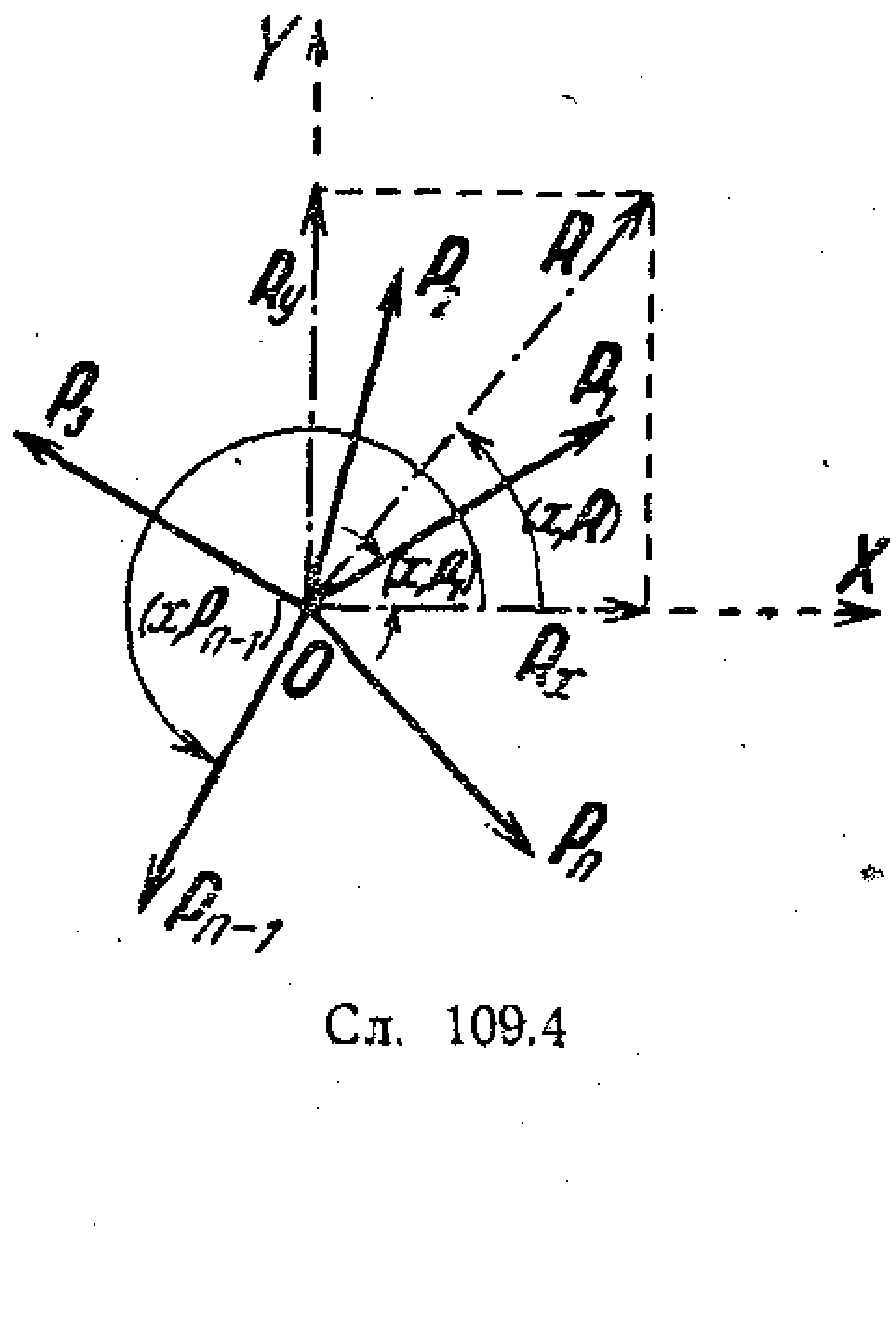
$$Q^2=P^2+G^2-2PG\cos\alpha \quad \text{и} \quad P^2=Q^2+G^2-2QG\cos\beta;$$

ове две једначине одређују однос $\cos\beta/\cos\alpha$, и кад оба односа сменимо у образац за p/q добијамо:

$$\frac{p}{q}=\frac{Q}{P}\,\frac{Q^2+G^2-P^2}{P^2+G^2-Q^2}\,\frac{2PG}{2QG}=\frac{Q^2+G^2-P^2}{P^2+G^2-Q^2}.$$

Равнотежа је могућна само ако је $\cos\alpha>0$ и $\cos\beta>0$ тј. именилац и бројилац морају бити позитивни.

б) Аналитичка метода. Нападну тачку свих сила узимамо за почетак ортогоналног координатног система $0xy$ (сл. 109.4) и разлажемо сваку од датих сила у две компоненте X и Y што падају у правце координатних осовина а имају величине:



Сл. 109.4

$$X_1=P_1\cos(x,P_1),\qquad Y_1=P_1\sin(x,P_1);$$
$$X_2=P_2\cos(x,P_2),\qquad Y_2=P_2\sin(x,P_2);$$
$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$
$$X_n=P_n\cos(x,P_n),\qquad Y_n=P_n\sin(x,P_n);$$

где (x,P_i) означава угао између силе и позитивног правца осовине x. Све компоненте које леже у координатним осовинама сложимо у резултанту алгебарским сабирањем:

$$\begin{aligned} R_x &= R\cos(x,R) = \sum_1^n X_i = \sum_1^n P_i \cos(x, P_i), \\ R_y &= R\sin(x,R) = \sum_1^n Y_i = \sum_1^n P_i \sin(x, P_i). \end{aligned} \tag{109.2}$$

Силе R_x и R_y еквивалентне су датим силама, оне су компоненте тражене резултанте. Величина резултанте биће дакле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2}. \tag{109.3}$$

Правац резултанте одређен је једначинама:

$$\sin(x, R) = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos(x, R) = \frac{R_x}{R}. \tag{109.4}$$

Нека друга група сила: $P_1', P_2', P_3', .., P'_n$ биће датим силама еквивалентна ако постоје ове једнакости:

$$\sum X_i = \sum X_i' \quad \text{и} \quad \sum Y_i = \sum Y_i'.$$

Једначине (109.2) исказују теорему да је *пројекција резултанте на произвољну праву једнака алгебарском збиру пројекција њених компонената на исту праву.*

Једначина (109.3) има ово геометријско значење. Ако једну дату силу $\vec{R}$ узмемо за пречник једног круга што се зове круг сила и из почетне тачке O силе повучемо ма коју тетиву a, онда дужина тетиве тога круга претставља величину компоненте силе $\vec{R}$ у правцу те тетиве, $\vec{R}_a$.

Потребан и довољан аналитички услов за равнотежу произвољног броја сила, што леже све у истој равни а нападају једну тачку, јесте: да њихова резултанта буде једнака нули, дакле према једначини (109.3):

$$R_x^2 + R_y^2 = 0.$$

Ова једначина биће задовољена само ако је једновремено:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i = 0, \\ \text{и} \quad R_y &= \sum Y_i = 0. \end{aligned} \tag{109.5}$$

Једначине (109.5) су аналитички израз за равнотежу сила што леже у једној равни. Оне важе и за коси координатни систем тј. када дате силе разлажемо у два произвољна правца x и y. Два аналитичка услова равнотеже исказују исто што и један графички услов јер ће раван влак вектора бити затворен само ако његове пројекције на две произвољне осовине у његовој равни буду једнаке нули.

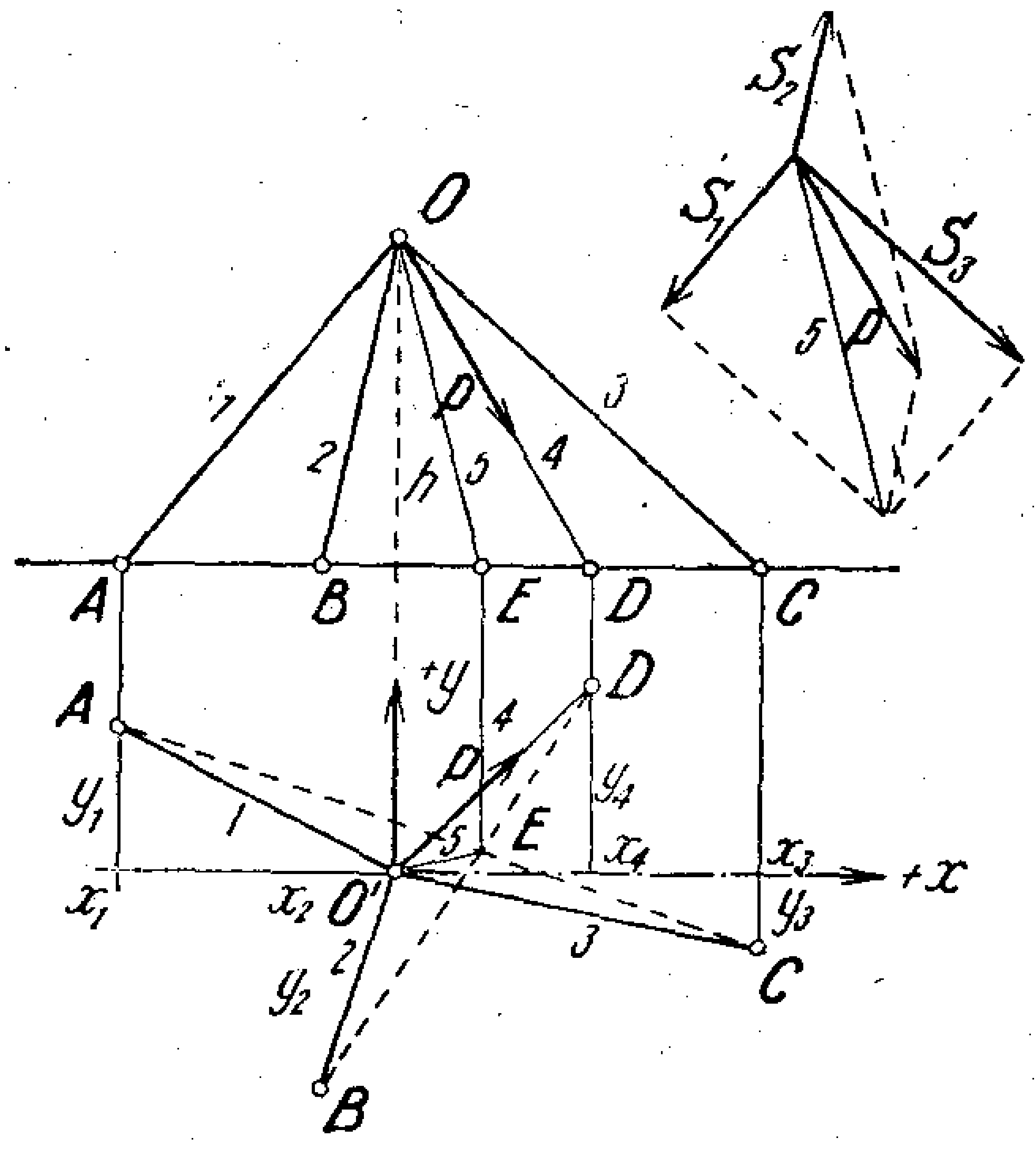
110. Услови равнотеже и еквиваленције за силе у простору. а) Графичка метода. Да бисмо графички могли решавати просторни проблем сила што нападају једну тачку, ми ћемо сваку од тих сила пројицирати на две међусобне нормале (хоризонталну и вертикалну) равни тако да од просторног полигона сила добијамо две пројекције. Ако желимо наћи резултанту датих сила, онда ћемо у обе пројекционе равни нацртати по један влак од пројекција датих сила и завршне стране тих влакова биће пројекције тражене резултанте. Праву величину и положај резултанте можемо сада лако одредити. Ако су две групе сила у простору еквивалентне, онда оне морају имати у обим пројекцијама исту завршну страну у одговарајућим влаковима њихових пројекција. Ако су силе у равнотежи, онда је влак сила затворен, просторни полигон па и његове обе пројекције морају бити затворени полигони.

Када отворен просторни влак од n сила завршимо њиховом резултантом, добијамо просторни полигон од $(n+1)$ страна. Ако су n сила у равнотежи, онда се затворен просторни полигон састоји од n страна. Најмањи број сила које не леже у истој равни је $n=3$. Такве три силе не могу никад бити у равнотежи јер просторни влак од три стране не може никад бити затворен. *Најмањи број сила у простору, које могу стајати у равнотежи на једној тачки, је дакле* $n=4$. Најмањи број сила разног правца, што стоје у равнотежи на једној тачки а леже у истој равни је $n=3$.

Ови односи имају практичног значаја при проучавању равнотеже сила на чворовима равних и просторних решеткастих носача

Пример. Три права штапа спојени су у тачки O (сл. 110.1). Њихови доњи крајеви B, A, C леже на хоризонталном поду у дубини h испод темена O. Такав „троножац" служи као примитивна дизалица.

Теме O напада дата сила P Њена нападна линија продире хоризонталну раван ABC у тачки D. Пита се колике су силе у штаповима тј. компоненте силе $\vec{P}$. Штапове и нападну линију силе P обележимо краће бројевима: 1—4. Два пара правих 1, 3 и 2, 4 одређују две равни што се секу у правој 5; ова продире хоризонталну раван у тачки E. Сила P лежи дакле у равни 2,5 те је можемо разложити у компоненте S_2 и S_5; ова друга лежи у равни 1,3 те је разлажемо у компоненте S_1 и S_3 и тиме је задатак графички решен. У примеру је S_2 негативног смера, крај B штапа мора бити учвршћен за под да се троножац услед дејства силе S_2 не би превврнуо око AC као обртне осовине. Разлагање сила изведено је само у вертикалној пројекцији, одређене су дакле силе S_1'', S_2'' и S''_3. Пројицирањем на основу налазимо хоризонталне про-



Сл. 110.1

јекције сила S_1', S_2' и S_3' и најзад величине: $S_1 = \sqrt{S_1'^2 + S_1''^2}$ итд. У штапу 2 влада услед силе P затезање у штаповима 1 и 3 притисак.

б) Аналитичка метода. Нападну тачку свих n сила $\vec{P}_i$ $(i = 1, ..., n)$ бирамо за почетак ортогоналног координатног система $0xyz$. Ако углове што их дате силе заклапају са правцима координатних осовина обележимо са α_i, β_i и γ_i, а углове које њихова резултанта заклапа са истим правцима са α, β и γ, онда су компоненте датих сила у правцима координатних осовина:

$$X_i = P_i \cos\alpha_i, \qquad Y_i = P_i \cos\beta_i, \qquad Z_i = P_i \cos\gamma_i, \tag{110.1}$$

а компоненте резултанте:

$$R_x = R\cos\alpha, \qquad R_y = R\cos\beta, \qquad R = R\cos\gamma.$$

Компоненте резултанте добијамо алгебарским сабирањем одговарајућих компонената датих сила:

$$R_x = \sum X_i, \qquad R_y = \sum Y_i, \qquad R_z = \sum Z_i.$$

Величина резултанте је:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2}, \tag{110.2}$$

а њен правац и смер одређен је једначинама:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}. \tag{110.3}$$

Ако резултанту $\vec{R}$ узмемо за пречник лопте и из почетка силе R повучемо тетиву у неком правцу a, претстављаће дужина тетиве компоненту R_a силе R у правцу a; дакле ће и дужина тетива у правцима x, y, z претстављати величине R_x, R_y, R_z компонената у правцу тих осовина. Та се лопта назива лопта сила.

Услов равнотеже је:

$$\sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2} = 0. \tag{110.4}$$

Пошто су под кореном све сами позитивни бројеви, ова последња једначина може бити задовољена само ако је:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0. \tag{110.5}$$

Изрази (110.5) су аналитички услови равнотеже за просторни систем сила.

Аналитичке услове еквиваленције двеју просторних група сила: $\Sigma\vec{P}_i$ и $\Sigma\vec{P}_i$ што нападају исту тачку, исказују једначине:

$$R_x = \sum X_i = \sum X_i', \quad R_y = \sum Y_i = \sum Y_i', \quad R_z = \sum Z_i = \sum Z_i'. \tag{110 6}$$

Када у последњем примеру узмемо пројекцију 0 темена за координатни почетак, стварне дужине штапова и нападне линије OD силе

P обележимо са l_i $(i = 1,.,4)$ гласиће аналитички услови равнотеже тронопца:

$$\left.\begin{aligned} S_1 \frac{x_1}{l_1} + S_2 \frac{x_2}{l_2} + S_3 \frac{x_3}{l_3} + P \frac{x_4}{l_4} = 0\,, \\ S_1 \frac{y_1}{l_1} + S_2 \frac{y_2}{l_2} + S_3 \frac{y_3}{l_3} + P \frac{y_4}{l_4} = 0\,, \\ S_1 \frac{h}{l_1} + S_2 \frac{h}{l_2} + S_3 \frac{h}{l_3} + P \frac{h}{l_4} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{110.7}$$

Решењем овог система једначина, (најпогодније помоћу детерминаната) налазимо тражене силе: S_1, S_2, S_3 у штаповима тронопца. Последња једначина исказује да су силе независне од h што је по себи јасно.

Б. СТАТИКА ВЕЗАНЕ ТАЧКЕ

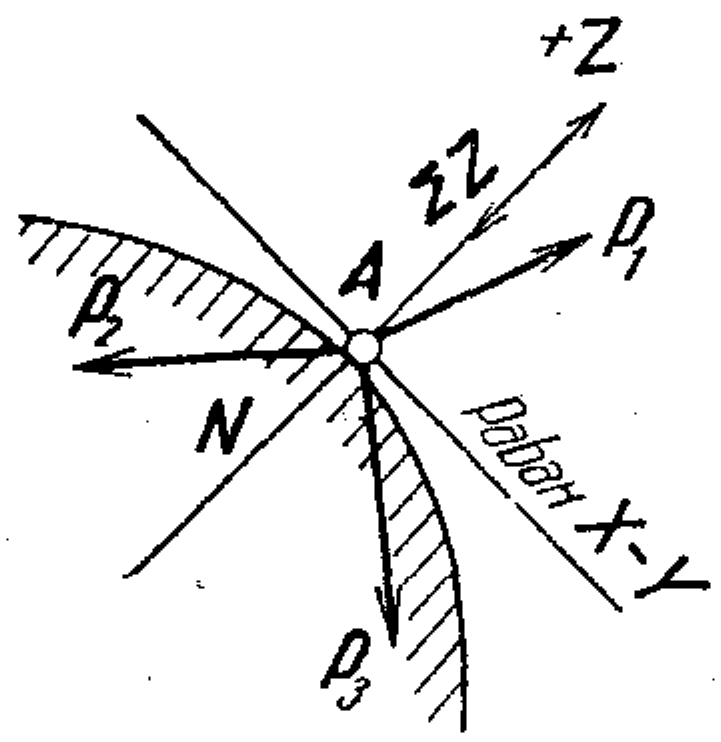
111. Општи услови. Из Динамике знамо да материјална тачка може бити принуђена отпором неке круте површине или линије да се по тој површини или линији креће. Тада кажемо да је тачка везана за ту површину или линију.

Отпор површине или линије може бити једнострани или обостран; у природи и техничкој примени најчешће имамо само једностран отпор и тада кажемо да је тачка подупрта. Ако је површина или линија што тачку подупире, сасвим глатка, онда постоји само нормални отпор, а ако није онда постоји и отпор трења (тангенцијални отпор).

На везаној тачки одржаће се силе: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$ у равнотежи само онда када њихова резултанта $\vec{R}$ задовољава услов: $\vec{R} + \vec{W} = 0$, дакле када се правац силе $\vec{R}$ поклапа са правцем тоталног отпора $\vec{W}$ површине или линије за коју је тачка везана. Смер ове резултанте мора бити управљен ка тој површини или линији, ако је њен отпор једностран, а може бити произвољан ако је отпор обостран.

За слободну тачку знамо да има три степена слободе и зато смо њену равнотежу изразили трима једначинама. Ако је тачка везана за круту површину (равну или криву) онда тачка има два степена слободе па и равнотежу погодним избором координатног система можемо изразити двема једначинама. Најзад, тачка везана за линију (праву или криву, равну или просторну) има само један степен слободе, коме одговара једна једначина равнотеже.

112. Услови равнотеже и еквиваленције сила на тачки везаној за површину. а) Без отпора трења. Ако замислимо да је тачка A везана за једну криву површину (сл. 112.1) што даје само нормални отпор $\vec{N}$ и нападају је силе: $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_n$, онда ће она бити у равнотежи ако силе $\vec{P}_i$ задовољавају само два услова:



Сл. 112.1

$$\left.\begin{aligned}\sum X_i &= 0,\\ \sum Y_i &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{112.1}$$

под претпоставком да се координатна раван xy поклапа са тангенцијалном равни дате површине у тачки A. Трећа једначина:

$$N + \sum Z_i = 0, \tag{112.2}$$

служи за одређивање величине нормалног отпора.

На сл. 112.1 има нормални отпор смер позитивне осовине Az; у том случају ΣZ_i мора имати смер ка кривој површини којом је тачка A подупрта. Негативне вредности отпора могућне су само када постоји обострана веза тачке.

Силе $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$ биће у равнотежи на тачки везаној за површину када крајња тачка отвореног полигона лежи на нормали површине за коју је тачка везана. Ако површина даје само једностран отпор, онда долази још један услов равнотеже: резултанта мора имати и смер управљен ка површини.

Две групе сила: $\Sigma\vec{P}_i$ и $\Sigma\vec{P}_i'$ биће очевидно еквивалентне, ако њихове компоненте у правцима осовина x и y што леже у тангенцијалној равни, задовољавају ова два услова:

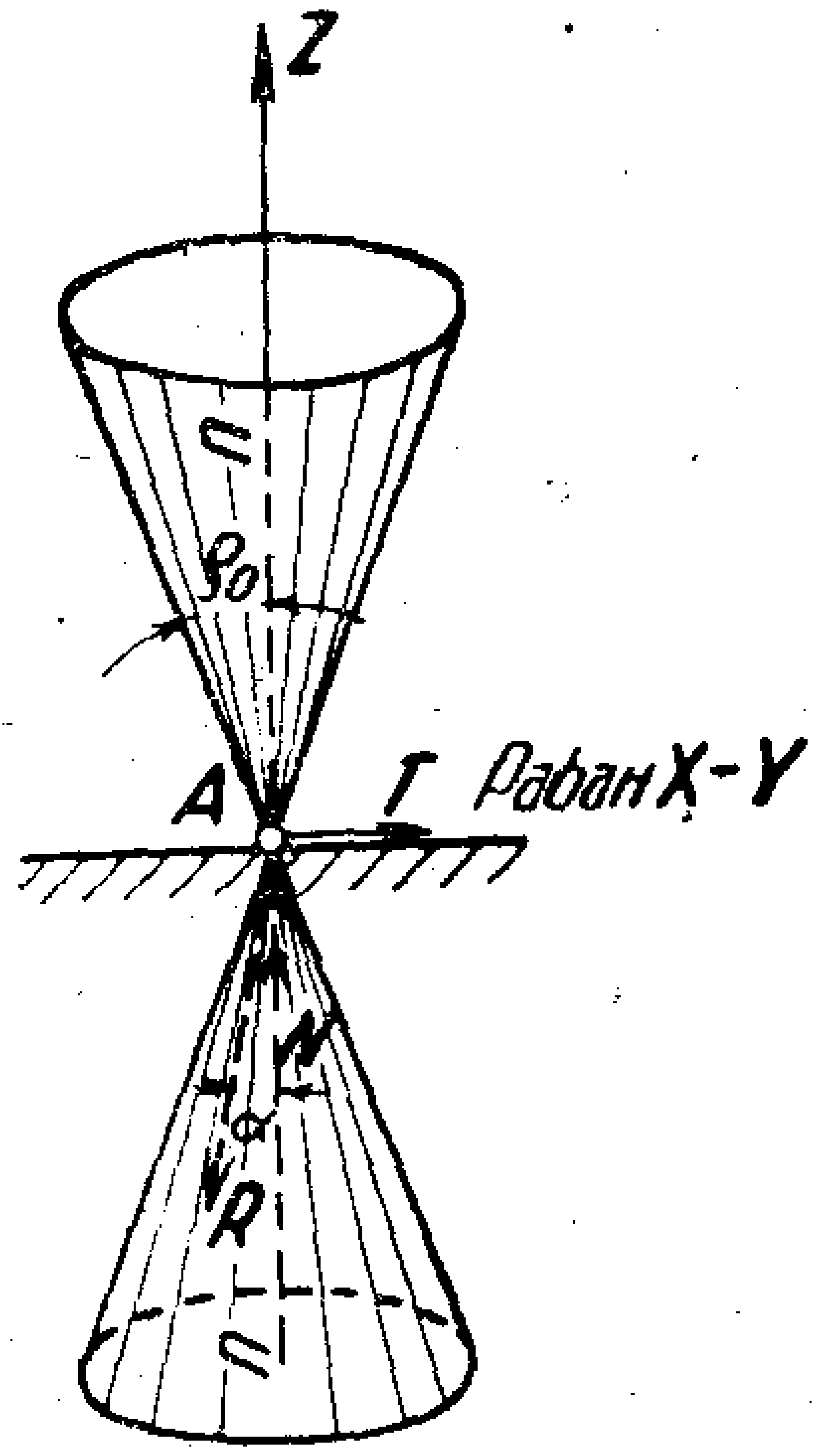
$$\left.\begin{aligned}\Sigma X_i &= \Sigma X_i',\\ \Sigma Y_i &= \Sigma Y_i'.\end{aligned}\right\} \tag{112.3}$$

Суме компонената у правцу нормале (осовине z) не морају бити једнаке међу собом, јер се обе групе сила поништавају нормалним отпором тако да је:

$$\left.\begin{aligned}\sum Z_i + N_z &= 0,\\ \sum Z_i' + N_z' &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{112.4}$$

тј. двема еквивалентним групама сила не мора одговарати исти нормални отпор.

б) Са отпором трења. Ако површина за коју је тачка везана није глатка, онда између тачке A и те површине постоји, сем нормалног отпора N, и отпор трења $T = f_0 N$, а тотални отпор W може са нормалним заклапати углове између 0^0 и ϱ_0, где је ϱ_0 угао статичког трења: $\operatorname{tg}\varrho_0 = f_0$. Тај случај претстављен је на сл. 112.2. Да би силе: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$ биле у равнотежи, довољно је да њихова резултанта $\vec{R}$ падне у унутрашњост конуса трења ($\alpha < \varrho_0$) чија је осовина нормала $n - n$ а угао при врху $2\varrho_0$. У граничном случају ($\alpha = \varrho_0$) резултанта се поклапа са једном изводницом конуса, а чим падне изван њега ($\alpha < \varrho_0$) онда ће њена тангенцијална компонента бити већа од отпора трења који није неограничен, и равнотежа неће бити могућна. Ако на пример тангенцијална компонента резултанте пада у правац осовине x, онда су услови равнотеже:



Сл. 112.2

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i &\leqslant f_0 N_z, \\ \sum Y_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{112.5}$$

113. Услови равнотеже и еквиваленције сила на тачки везаној за линију. а) Без отпора трења. Тачка приморана да остане на једној крутој линији има један степен слободе. Овај случај можемо остварити кад на круту криву шипку навучемо прстен чија ће путања бити прописана том кривом. Нормални отпор линије може имати сваки правац што лежи у нормалној равни линије у дотичној тачки. Слобода кретања постоји још само у правцу тангенте на криву за коју је тачка везана. Ако ову тангенту узмемо за осовину x ортогоналног координатног система, а друге две осовине y и z леже у нормалној равни, онда као аналитички услов равнотеже добијамо само једну једначину:

$$\sum X = 0. \tag{113.1}$$

Остале две једначине исказују овде да нормални отпор N потире резултанту компонената ΣY и ΣZ. Компоненте нормалног отпора у правцу осовина y и z задовољавају једничине:

$$\left.\begin{aligned} N_y + \sum Y &= 0, \\ N_z + \sum Z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{113.2}$$

а из ових налазимо нормални отпор:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{(\sum Y)^2 + (\sum Z)^2}. \tag{113.3}$$

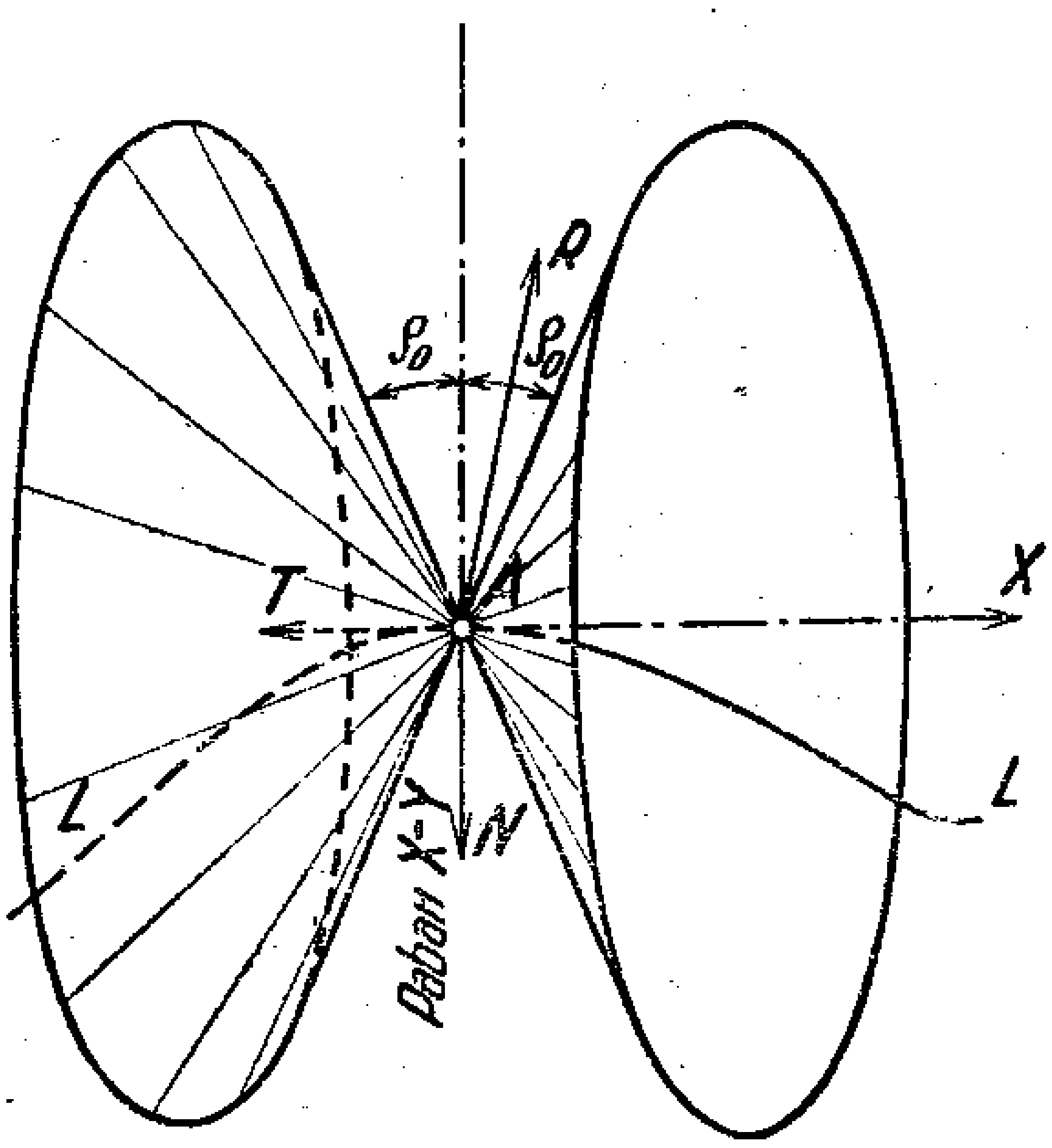
Графички услов равнотеже је тај да крајња тачка полигона сила $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$,..., $\vec{P}_n$, лежи у нормалној равни линије положеној у тачки A.

Две групе сила $\sum \vec{P_i}$ и $\sum \vec{P_i}'$ које нападају тачку везану за круту линију су еквивалентне, ако је задовољен услов:

$$\sum X_i = \sum X_i', \tag{113.4}$$

тј. нормалне пројекције полигона сила на тангенту морају бити једнаке.

б) Са отпором трења. Ако сем нормалног отпора N постоји и трење $T = f_0 N$, онда је равнотежа могућна и онда када резултанта $\vec{R}$ сила $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$,..., $\vec{P}_n$ не пада у нормалну раван криве линије за коју је тачка везана. На сл. 113.1 је правац тангенте на криву узет за осовину x а нормална раван yz лежи управно на раван цртежа. Око тангенте Ax као осовине нацртан је потпун конус са отвором $2(90^\circ - \varrho_0^\circ)$, где је ϱ_0 угао статичког трења.



Сл. 113.1

Услов равнотеже је тај, да резултанта $\vec{R}$ лежи изван овог конуса или у крајњем случају да се поклопи са једном од његових изводница. Ако резултанта падне у унутрашњост конуса, биће њена тангенцијална компонента ΣX већа од отпора трења и равнотеже неће бити, већ ће се тачка помаћи дуж тангенте Ax. Аналитички услов за равнотежу тачке у овоме случају можемо дакле кратко написати у облику:

$$X \leqslant f_0 N, \tag{113.5}$$

где је N одређен једначином (113.3).

В. ПРИМЕНА ПОЈМА МЕХАНИЧКОГ РАДА У СТАТИЦИ ТАЧКЕ

114. Услови равнотеже за слободну и везану тачку. Главне теореме о равнотежи слободне и везане тачке можемо најкраће аналитичким путем извести из појма механичког рада.

За услов равнотеже материјалне тачке нашли смо $\sum \vec{P} = 0$ или у аналитичком облику:

$$\sum X = 0, \ \sum Y = 0, \ \sum Z = 0.$$

Ако све силе $\vec{P}$ леже у равни xy, отпада трећи услов Потребни и довољни услов равнотеже можемо и овако исказати: *Тачка ће бити у равнотежи ако је при сваком могућном померању δs тачке збир механичких радова једнак нули.* Дакле ако је:

$$\sum P\,\delta s \cos\varphi = 0,$$

где је φ угао између δs и резултанте $\Sigma\vec{P}$. Аналитички изражен је овај услов једначином:

$$\delta x \sum X + \delta y \sum Y + \delta z \sum Z = 0, \tag{114.1}$$

где су δx, δy, δz компоненте померања у правцу координатних осовина. Знак δ треба да каже да су померања могућна (виртуелна) за разлику од стварних (актуелних померања) dx, dy, dz.

а) Слободна тачка. Ако је тачка слободна онда су померања δx, δy, δz независна међу собом. Једначина (114.1) може бити само онда задовољена ако су:

$$\sum X = 0\,, \qquad \sum Y = 0\,, \qquad \sum Z = 0\,,$$

б) Тачка везана за површину. Ако је тачка принуђена да остане на датој површини: $F(x, y, z) = 0$ онда мора бити задовољена и једначина:

$$F\,[(x + \delta x),\, (y + \delta y),\, (z + \delta z)] = 0, \tag{114.2}$$

тј. мора тотални диференцијал од F:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0\,, \tag{114.3}$$

бити једнак нули. У случају да је тачка у равнотежи, морају обе једначине (114.1) и (114.3) бити задовољене.

1. Метода елиминације. Када из једначина (114.1) и (114.3) елиминишемо једно померање на пример δz, добијамо условну једначину:

$$\left(\sum X\frac{\partial F}{\partial z} - \sum Z\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(\sum Y\frac{\partial F}{\partial z} - \sum Z\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y = 0\,. \tag{114.4}$$

Тачка на површини има два степена слободе, померања δx и δy су међусобно независна. Једначина (114.4) може бити дакле задовољена ако су изрази у заградама једнаки нули, дакле када су:

$$\sum X\frac{\partial F}{\partial z} - \sum Z\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \sum Y\frac{\partial F}{\partial z} - \sum Z\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{114.5}$$

Ове две једначине у вези са $F(x, y, z) = 0$ одређују три координате x, y, z, оног положаја на површини, у ком се тачка под дејством сила $\sum \vec{P}_i$ налази у равнотежи.

Једну од једначина (114.5) можемо заменити са

$$\sum X \frac{\partial F}{\partial y} - \sum Y \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{114.6}$$

јер се она изводи из обе једначине (114.5), дакле је зависна од њих.

Услове равнотеже на глаткој површини $F(x, y, z) = 0$ можемо написати у симетричном облику:

$$\frac{\sum X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\sum Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\sum Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \,. \tag{114.5a}$$

Једначине (114.5) и (114.6) су компоненте векторског производа вектора:

$$\sum \vec{P} = \vec{\mathrm{i}} \sum X + \vec{\mathrm{j}} \sum Y + \vec{\mathrm{k}} \sum Z$$

и вектора:

$$\nabla \vec{F} = \vec{\mathrm{i}} \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{\mathrm{j}} \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{\mathrm{k}} \frac{\partial F}{\partial z},$$

тј. градијента површине. Три горње једначине замењују векторску једначину:

$$\sum \vec{P} \times \nabla \vec{F} = 0, \tag{114.7}$$

тј. вектори $\sum \vec{P}$ и $\nabla \vec{F}$ су паралелни.

Из диференцијалне Геометрије знамо да су парцијални изводи $\partial F/\partial x, ..$ пропорционални косинусима углова које заклапа нормала на површину у дотичној тачки са координатним осовинама.

Ако те углове означимо са α, β, γ знамо да је: (в. чл. 87):

$$\cos\alpha = \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где је:

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

Према томе градијент $\nabla \vec{F}$ лежи у нормали површине и једначина (114.7) исказ је да за случај равнотеже $\Sigma \vec{P}$ има правац нормале на површину.

2) Метода мултипликатора. Једначину (114.3) помножимо са произвољном константом λ и саберимо је са једначином (114.1), те добијамо:

$$\left(\sum X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x+\left(\sum Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y+\left(\sum Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z=0. \tag{114.8}$$

Мултипликатор λ можемо изабрати толики да један од израза у загради, на пример фактор од δx, буде једнак нули. Тада гласи једначина (114.8):

$$\left(\sum Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y+\left(\sum Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z=0\,. \tag{114.9}$$

Пошто су померања δy и δz међу собом независна (два степена слободе на површини) то ће (114.9) бити задовољена ако су и остала два фактора једнака нули. За одређивање четири непознате λ, x, y и z имамо четири једначине:

$$\left.\begin{aligned}&F(x,y,z)=0,\\&\sum X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0,\\&\sum Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0,\\&\sum Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\} \tag{114.10}$$

Из једначина (114.10) и значења парцијалних извода видимо да су други чланови компоненте нормалног отпора N површине:

$$N_x=-\lambda\frac{\partial F}{\partial x},\qquad N_y=-\lambda\frac{\partial F}{\partial y},\qquad N_z=-\lambda\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{114.11}$$

$$N=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=J\lambda. \tag{114.12}$$

Пример. Тешка тачка на површини лопте. Сада је $F=x^2+y^2+z^2-r^2=0$, дакле:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=2z\,;$$
$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=-mg\,;$$

негативан знак јер је $+z$ узето на више. Последње три једначине (114.10) гласе:

$$0+2\lambda x=0,\qquad 0+2\lambda y=0,\qquad -mg+2\lambda z=0\,.$$

Дакле је тачка у равнотежи у положају: $x=0$, $y=0$ и са овим вредностима даје једначина лопте: $z^2-r^2=0$ тј. $z=\pm r$. На лопти има тешка тачка два равнотежна положаја, на горњем и доњем крају вертикалног пречника. У оба случаја је $N_z = +mg$ управљен према горе, а $N_x = N_y = 0$.

в) Тачка везана за линију. Сваку линију можемо замислити да је постала пресеком двеју површина: $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Пошто се тачка налази и помера на тој линији, морају њене координате задовољити обе једначине облика (114.3) а ако се налази у равнотежи, морају задовољити једначину (114.1). Кала једну диференцијалну једначину (114.3) помножимо са произвољним факторвм λ_1, другу са λ_2 и саберемо их са једначином (114.1), добијамо:

$$\left(\sum X + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(\sum Y + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\delta y + \\ + \left(\sum Z + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\delta z = 0. \qquad (114.13)$$

Мултипликаторе λ_1 и λ_2 можемо тако одредити да два од фактора једначине (114.13) буду једнаки нули Да би једначина (114.13) била задовољена за свако δz мора и трећи фактор у загради бити једнак нули. Имамо дакле три једначине:

$$\left(\sum X + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) = 0,$$

и сличне друге две. Ове три једначине заједно са једначинама површине F_1 и F_2 одређују пет непознатих λ_1, λ_2 и x, y, z тј. оба мултипликатора и равнотежни положај. Чланови:

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} = N_{1x}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} = N_{1y}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} = N_{1z},$$

су компоненте нормалног отпора површине F_1 и аналогно важи и за компоненте: N_{2x}, N_{2y} и N_{2z} отпора површине F_2. Компоненте отпора линије су:

$$N_x = N_{1x} + N_{2x}, \quad N_y = N_{1y} + N_{2y}, \quad N_z = N_{1z} + N_{2z},$$

дакле отпор линије:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}.$$

Линија за коју је тачка везана, може бити дата и двема једначинама њених пројекција:

$$y = f_1(x) \quad \text{и} \quad z = f_2(x). \qquad (114.14)$$

Виртуелна померања δy и δz могу се сада изразити са:

$$\delta y = f_1'(x)\,\delta x, \qquad \delta z = f_2'(x)\,\delta x,$$

и кад ове вредности унесемо у услов равнотеже (114.1), добијамо:

$$\delta x \sum X + \delta x f_1'(x) \sum Y + \delta x f_2'(x) \sum Z = 0.$$

У сва три члана померање δx је исто, дакле је услов равнотеже:

$$\sum X + f_1'(x) \sum Y + f_2'(x) \sum Z = 0. \tag{114.15}$$

Из три једначине (114.14) и (114.15) можемо одредити кординате x, y, z оног места на датој линији (114.14), на коме се тачка под дејством $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ налази у равнотежи.

Ако је линија равна и све силе које тачку нападају леже у истој равни xy, тј. $\Sigma Z = 0$, онда је услов равнотеже:

$$\delta x \sum X + \delta y \sum Y = 0. \tag{114.16}$$

Једначина криве је дата:

$$y = f(x) \tag{114.17}$$

Из ње налазимо $\delta y = f'(x)\, \delta x$ и кад ову вредност унесемо у (114.16) и скратимо са δx, добијамо услов равнотеже:

$$\sum X + f'(x) \sum Y = 0,$$

или

$$f'(x) \frac{\sum Y}{\sum X} = -1. \tag{114.18}$$

$f'(x) = dy/dx = \operatorname{tg} \varphi$, где је φ угао који заклапа тангента путање са апсцисом. $\Sigma Y / \Sigma X = \operatorname{tg} \psi$, где је ψ угао који заклапа резултанта са апсцисом.

Једначина (114.18) гласи дакле:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -1,$$

тј.: $\psi = (\varphi + \pi/2)$, резултанта стоји управно на тангенту.

Из једначина (114.17) и (114.18) налазимо координате x, y места на коме се тачка налази у равнотежи.

Ако је једначина равне криве дата у имплицитном облику $F(x, y) = 0$ онда из (114.13) и:

$$\delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y = 0,$$

добијамо услов равнотеже:

$$X \frac{\partial F}{\partial y} - Y \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{114.5a}$$

који са $F(x, y) = 0$ одређује координате x, y, оног места на равној кривој линији, на коме се тачка под дејством сила X, Y налази у равнотежи.

115. Три врсте равнотеже везане тачке. Када материјалну тачку која се налази у равнотежи и миру (дакле је $\delta A = 0$), померимо за врло малу дуж (тј. дадемо јој врло малу брзину), могу наступити три разна случаја:

1. Брзина тачке ће опадати до нуле, променити смер, и тачка ће се вратити у свој првобитни равнотежни положај. Такву равнотежу зовемо стабилном.

2. Брзина тачке ће расти, тачка ће се све више удаљавати од равнотежног положаја из кога смо је покренули. Тачка је била у лабилној равнотежи.

3. Најзад може брзина коју смо тачки дали, остати непромењена, тачка је у том случају на сваком месту у равнотежи, ова се налази у индиферентној или неутралној равнотежи.

Математичко обележје за ове три врсте равнотеже налазимо из теореме о живој сили:

$$\delta A = \delta\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{115.1}$$

У првом случају је промена живе силе негативна, јер брзина опада, према томе елеметарни рад од своје првобитне вредности $\delta A = 0$ опада тј.,

$$\delta^2 A < 0.$$

У другом случају када брзина расте, расте и $\delta A = 0$ тј.,

$$\delta^2 A > 0.$$

У трећем случају када је брзина константна, $\delta A = 0$ се не мења, дакле је:

$$\delta^2 A = 0.$$

Према томе равнотежа тачке је:

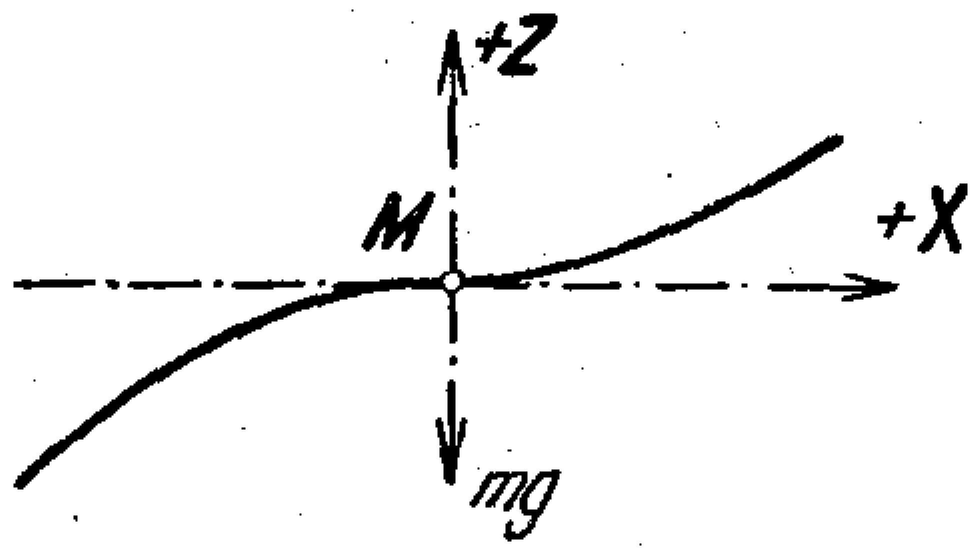
$$\begin{aligned} &\text{стабилна ако је} \quad \delta^2 A < 0, \\ &\text{лабилна} \quad „ \quad „ \quad \delta^2 A > 0, \\ &\text{неутрална} „ \quad „ \quad \delta^2 A = 0. \end{aligned} \tag{115.2}$$

Ова обележја равнотеже важе како за слободну тачку, тако и за тачку везану за површину или линију. На једном месту простора, или површине, или линије може тачка имати разне врсте равнотеже према томе у ком правцу односно смеру тачку померимо.

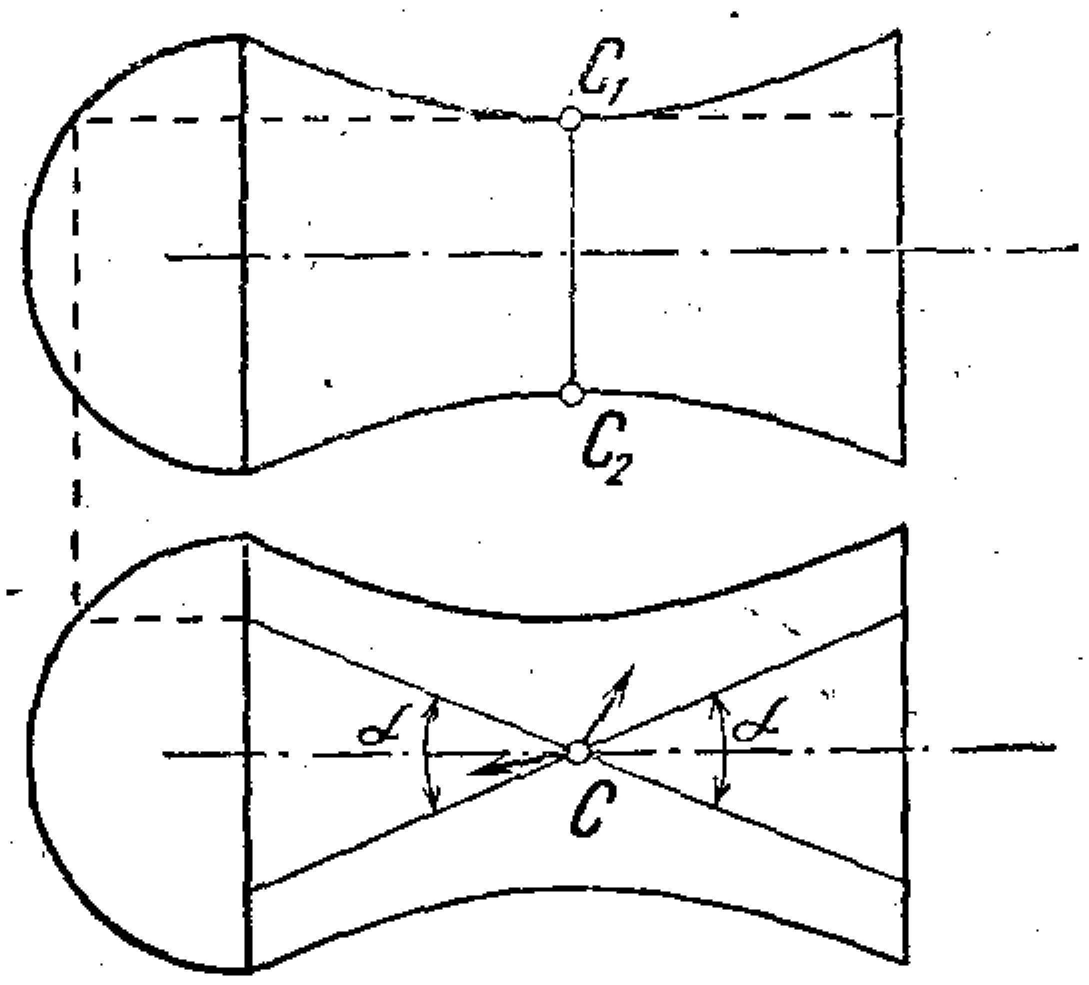
Тако на пример, за тешку тачку, која се налази на хоризонталној повратно тангенти неке линије сл. 115.1, је $dA = - mgdz$ дакле: $\frac{d^2A}{dx^2} = - mg\frac{d^2z}{dx^2}$. Обележје повратне тачке је $\frac{d^2z}{dx^2}=0$; према томе је у тачки M, $d^2A=0$, тачка се налази у неутралној равнотежи Али слика нам показује да се тачка налази у лабилној равнотежи за померање на лево, у стабилној равнотежи за померање на десно.

За тешку тачку која је везана за површину лопте, очевидно је да ће она бити у стабилној равнотежи, и то у свима правцима, на доњем, а у лабилној равнотежи на горњем крају вертикалног пречника; у неутралној равнотежи биће она на хоризонталној равни.

Тешка тачка, везана за површину једног обртног једнограног хипербо-



Сл. 115.1



Сл. 115.2

лоида (сл. 115.2) са хоризонталном осовином, биће у равнотежи у темену C_1 и C_2 горње и доње меридијане хиперболе. Хоризонтална раван што додирује хиперболоид у његовом темену, сече га по двема правама; њихова конструкција је из слике јасна. Праве се секу под углом α За тачку у C_1 биће равнотежа стабилна у свима правцима што леже у угловима α, а лабилна у правцима што леже у угловима $(\pi-\alpha)$. За тачку C_2 важи супротно У правцима двеју правих је равнотежа неутрална.

116. Астатичке површине. Једну област простора у коме дејствује нека сила зависна од координата, чије су дакле компоненте:

$$X=f_x(x,y,z),\quad Y=f_y(x,y,z)\quad \text{и}\quad Z=f_z(x,y,z),$$

на пример гравитациона, електрична, магнетична сила, зовемо пољем силе (в. чл. 77). Ако у неком пољу постоји нека површина за коју је везана тачка, и ако се тачка налази под дејством поља: X, Y, Z на сваком месту површине у равнотежи, зовемо површину астатичком. Тако је например хоризонтална раван астатичка површина за тешку тачку, лопта је астатичка површина за сваку централну силу.

Диференцијална једначина астатичке површине је:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0. \tag{116.1}$$

Пример. Нека је:

$$X = kmx, \quad Y = kmy, \quad Z = -mg.$$

Диференцијална једначина гласи:

$$kmx\,dx + kmy\,dy - mg\,dz = 0,$$

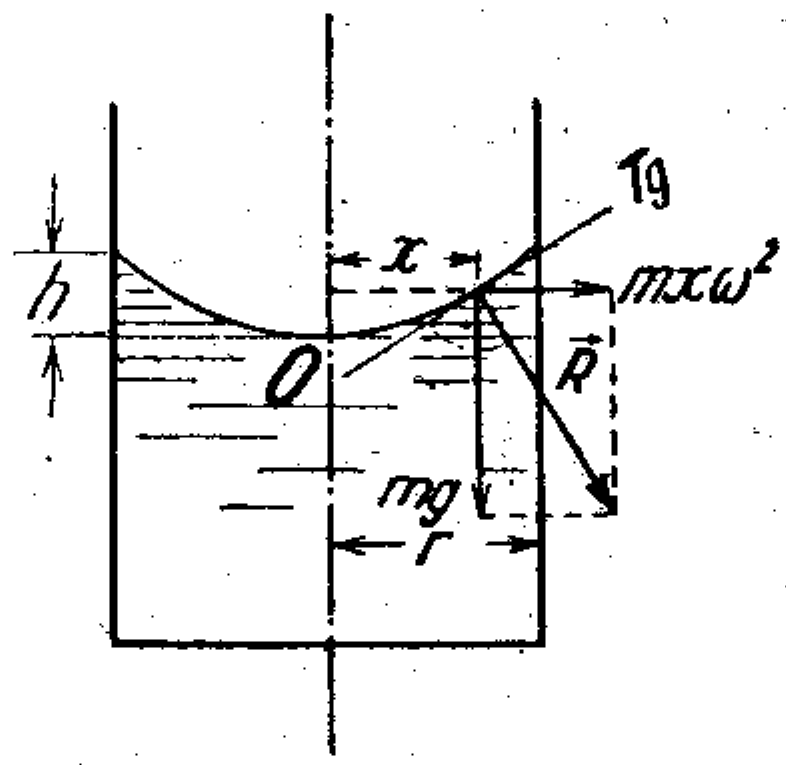
и њен интеграл је:

$$km\frac{x^2}{2} + km\frac{y^2}{2} - mgz = C,$$

или:

$$k(x^2 + y^2) - 2gz - C = 0;$$

астатичка површина је дакле обртни параболоид око осовине z, отворен према горе (сл. 116.1).



Сл. 116.1

Када се цилиндрични суд са неком течности обрће око своје осовине константном угаоном брзином ω, онда дејствује сваки делић течности на своју подлогу својом тежином mg и хоризонталном силом пропорционалном растојању x од осовине (центрифугалном силом $xm\omega^2$), па ће површина течности имати облик параболоида који постаје обртањем параболе: $x^2 = \frac{2g}{\omega^2}z$ око осовине z суда. Дубина h вовршине је $h = \frac{r^2\omega^2}{2g}$, а висину њеног темена O изнад дна добијамо из услова да се запремина течности није променила.

Литература

употребљена при састављању књиге

1. Apell P. Traité de mécanique rationnelle. Tome I 1909, Tome II 1911.
2. Autenrieth—Ensslin. Technische Mechanik. 1922.
3. Билимовић А. Рационална механика I 1939.
4. Föppl A. Vorlesungen über Technische Mechanik. Band I, II, IV i VI. 1900—33.
5. Finger J. Elemente der Reinen Mechanik. 1911.
6. Grübler M. Lehrbuch der Technischen Mechanik. Drei Bände. 1921-22.
7. Hamel G. Elementare Mechanik. 1922.
8. Keck W. Allgemeine Mechanik. 1898.
9. Lorenz H. Technische Mechanik starrer Gebilde. Zwei Teile. 1924, 1926.
10. Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 1921.
11. Pöschl Th. Lehrbuch der Technischen Mechanik. 1930.
12. Rühlmann M. Geschichte der Technischen Mechanik. 1885.
13. Schell W. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Zwei Bände. 1879—80.
14. Webster A. G. The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. 1912.
15. Wolf K. Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. 1931.

Имени Регистар

Бројеви упућују на стране

Стварни регистар

Бројеви упућују на стране