Решења Дипломских Задатака

из

Теоријске Математике

РЕШИО

Божидар П. Ђерасимовић

СТУД. ФИЛ.

БЕОГРАД

УДРУЖЕЊЕ СТУДЕНАТА МАТЕМАТИЧАРА

— 1930 —

У МЕСТО ПРЕДГОВОРА.

У овој збирци, која садржи 78 задатака, налазе се задаци који су падали на дипломском испиту из Теоријске Математике на Философском факултету Београдског Универзитета од октобра 1921 год. до закључно јуна 1930 године, изузимајући целу 1922 годину, два рока 1923 године и два задатка из фебруарског рока 1930 год. до којих нисам никако могао доћи.

Задаци су распоређени хронолошким редом. Често пута има више сличних задатака. Таца је један између њих, за који сам мислио да је најкарактеристичнији, нарочито опширно израђен како би могао служити као образац са сличне задатке.

Већина задатака ове збирке односи се на више одељака Теоријске Математике тако, да би их тешко било тачно поделити по одељцима. Ипак, према ономе што је у коме задатку најпретежније, они би се могли овако поделити:

Виша алгебра: 1, 6, 10, 17, 18, 21, 29, 33, 37, 49, 61, 66, 71,

Аналитична геометрија: 34, 38, 46, 53, 63, 65, 70, 73.

Диференцијални рачун: 3, 5, 7, 9, 13, 14, 25, 30, 41, 45, 50, 57 58, 69, 75, 76.

Интегрални рачун: 2, 19, 54, 62.

Диференцијалне једначине: 11, 12, 15, 22, 27, 35, 39, 42 47 55, 67, 74.

Парцијалне једначине: 24, 28, 31, 43, 51, 60, 77.

Теорија функција: 4, 8, 16, 20, 23, 26, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 59, 64, 68, 72, 78.

Ова збирка садржи и неколико теоријских напомена. Оне су све из теорије функција а односе се на задатак коме претходе.

Јуна 1930 год.
у Београду.

Б. П. Ђерасимовић
студ. филозофије

3

РЕШЕЊА

ДИПЛОМСКИХ ЗАДАТАКА ИЗ ТЕОРИСКЕ МАТЕМАТИКЕ.

1. зад. - Које једначине петог степена

$$x^5 - 5x + n = 0 \qquad (1)$$

имају три реална и два имагинарна корена? Пораздвајати у томе случају та три реална корена.

(октобар 1921 год.)

Изводна једначина има два реална корена: $x = \pm 1$. Rolle-ов низ ће изгледати:

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$n+4$	$n-4$	$+\infty$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$5x^4 - 5 = 0$
$5(x^4-1) = 0$
$x^4 = 1$
$x^2 = \pm 1$

Да би једначина (1) имала три реална корена мора бити:

$$n + 4 > 0 \quad , \quad n - 4 < 0$$

т.ј.

$$-4 < n < +4.$$

Та три реална корена биће у интервалима:

$$(-\infty, -1), (-1, +1), (+1, +\infty),$$

а корен који се налази у интервалу $(-1,+1)$ биће позитиван или негативан према томе да ли је n позитивно или негативно. Како лева страна једначине (1) за $x = -2$ има вредност: $n - 22$, а пошто n мора бити мање од $+4$, то је $n - 22 < 0$, па значи да се први корен стварно налази у интервалу $(-2, -1)$. Исто тако се трећи корен налази у интервалу $(+1,+2)$.

2.зад.- Израчунати површину ограничену осовином ox, луком криве линије трећег степена:

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$$

и њене максималне и минималне вредности.

(октобар 1921. год.)

Максимуму одговара апсциса: $x = 1$, а минимуму апсциса : $x = 5$. Зато је тражена површина:

$$P = \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 15x + 30)\, dx = 84$$

3.зад.- Одредити линије кривина на параболоиду:

$$xy + z = 0.$$

(октобар 1921. г.)

Диференцијална једначина пројекција линија кривине на раван xoy је:

$$\frac{(1+p^2)dx + pq\, dy}{r dx + s dy} = \frac{pq\, dx + (1+q^2)\, dy}{s dx + t dy}$$

где p, q, r, s, t имају позната значења. У нашем случају је: $p = -y$, $q = -x$, $r = t = 0$, $s = -1$, па диференцијална једначина постаје:

$$(1 + y^2)\, dx^2 = (1 + x^2)\, dy^2$$

т.ј.

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

Узмимо прво знак +. Интеграл је:

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = C$$

Ако ставимо:

$$m = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \qquad (1)$$

онда се претходна једначина, због идентичности

$$\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right)^2 + 1 = \left[xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2$$

може написати у облику:

$$m + \sqrt{m^2+1} = C$$

Значи да нам једначина (1), где је m произвољна константа, претставља један систем линија кривине на параболоиду: $xy + z = 0$. Линије кривине другог система биће претстављене једначином:

$$x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2} = n$$

где је n произвољна константа.

4.зад.- Одредити реални и имагинарни део функције:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

при кретању тачке z по периферији круга описаног око почетка са полупречником 1.

(октобар 1921 год.)

Дуж круга описаног око почетка са полупречником 1 променљива z има вредност:

$$z = e^{\theta i} \qquad z^\nu = e^{\nu\theta i}$$

па функција $f(z)$ постаје:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_\nu e^{\nu\theta i} = \sum_0^\infty a_\nu (\cos\nu\theta + i\sin\nu\theta)$$

Зато су реални и имагинарни део P и Q:

$$P(\theta) = \sum_0^\infty a_\nu \cos\nu\theta, \quad Q(\theta) = \sum_0^\infty a_\nu \sin\nu\theta.$$

•3 **5.зад.-** Наћи асимптоте криве линије и овлаш конструисати криву

$$x^3 - 5xy^2 + 7 = 0.$$

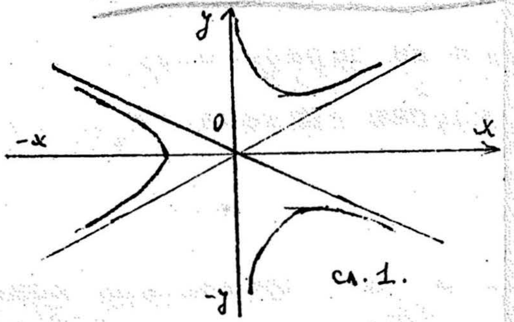
(октобар 1923 год.)

Крива има три асимптоте:

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}\,x$, $x = 0$;

један максимум:

$\left(x = \sqrt[3]{\frac{7}{2}},\ y = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{7}{2}}\right)$,



сл. 1.

један минимум: $\left(x = \sqrt[3]{\frac{7}{2}},\ y = +\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{7}{2}}\right)$. Крива је симетрична према x - оси, ордината је имагинарна за $-\sqrt[3]{7} < x < 0$. Облик криве је као на сл. 1.

Зад.6.- Шта се може рећи о реалним коренима алгебарске једначине:

$$x^5 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

када се тачка $M(a, b)$ креће.

(октобар 1923 год.)

Једначину (1) можемо написати у облику

$$x^5 = mx + n$$

где је: $m = -a$, $n = -b$. Значи да ће реални корени једначине (1) бити апсцисе заједничких тачака сталне криве:

$$y = x^5 \qquad (2)$$

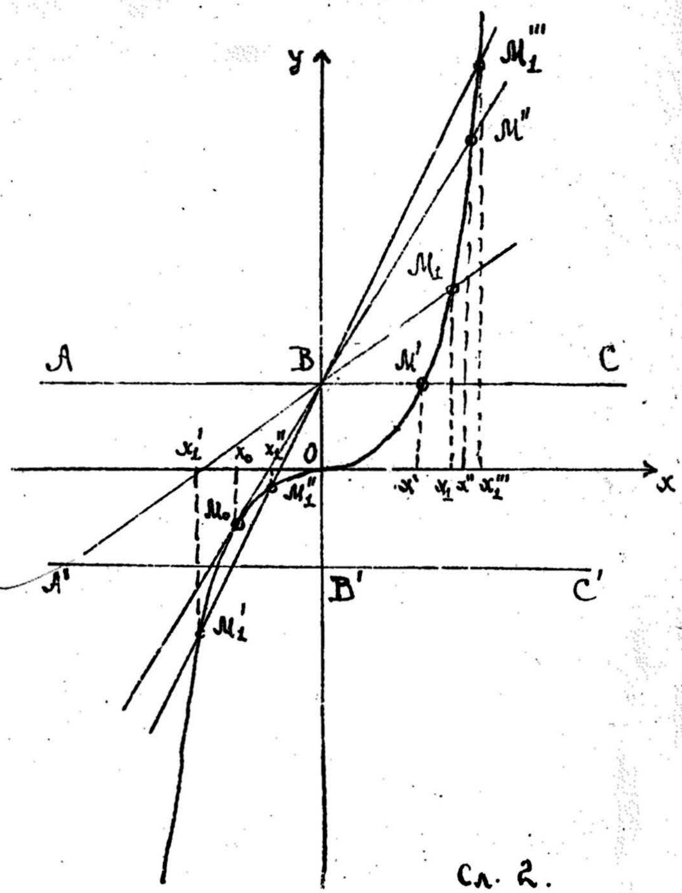
и покретне праве:

$$y = mx + n. \qquad (3)$$

Крива (2) има облик кубне параболе (сл. 2). Узмимо да је $n > 0$ $(b < 0)$ и нека је почетни положај праве (3) паралелан x-оси. Тада је: $m = -a = 0$. У том положају права (3) има само једну пресечну тачку M' са кривом (2), па значи да једначина (1) има само један реалан корен:

$$x' = -b^{\frac{1}{5}} > 0$$

Нека се сада права (3) окреће око свога пресека B са y-осом у смислу супротном кретању казаљке на сату. За време тога кретања имаћемо и даље само једну пресечну тачку M_1,



Сл. 2.

са апсцисом x_1 (јасно је да ће овај корен x_1 бити већи од x', т.ј $x_1 > -b^{\frac{1}{5}}$), све до момента кад права (3) постане тангента на криву (2), т.ј. када заузме положај M_0BM''. Тада имамо две заједничке тачке праве (3) и криве (2): једну додирну тачку M_0, којој одговара један двојни корен x_0 једначине (1), и једну пресечну тачку

M'', којој одговара један прост корен x'' једначине (1). У овом случају дакле, једначина (1) има три реална корена: један двојни и један прост. Како је $x = x_0$ двојни корен једначине (1) то ће он бити прост корен изводне једначине ~~једначине~~ једначине (1). На тај се начин добија:

$$x_0 = -\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (4)$$

где је m_0 (односно $a_0 = -m_0$) вредност параметра m који одговара положају M_0BM'' праве (3). Координате тачке M_0 (x_0, $y_0 = x_0^5$) очигледно морају задовољавати једначину (3), па је:

$$y_0 = m_0x_0 + n$$

или :

$$x_0^5 = -a_0x_0 - b$$

т.ј. кад се x_0 смени својом вредношћу (4):

$$-\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{5}{4}} - a_0\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{1}{4}} + b = 0$$

или после сређивања:

$$b + 4\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{5}{4}} = 0 \qquad (5)$$

Једначина (5) претставља нам услов да би једначина (1) имала један двојни корен.

Ако се права (3) креће и даље у истом смислу онда ће, све док се права (3) не поклопи са y - осом, т.ј. док a не добије вредност:

$a = -m = -\infty$, постојати три пресечне тачке: M_1', M_1'' и M_1''' па ће једначина (1) имати три реална корена: x_1', x_1'' и x_1'''. Са сл. 2. је јасно да је:

$$-\infty < x_1' < x_0 \;, \quad x_0 < x_1'' < 0 \;, \quad x' < x_1''' < +\infty$$

Све ове резултате можемо скупити у следећу шему:

$$b<0 \quad \left| \begin{array}{l} a=0 \ldots 1 \text{ реални корен: } x' = -b^{\frac{1}{5}} \\ 0>a>a_0 \ldots 1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad : x_1 > -b^{\frac{1}{5}} \\ a=a_0 \ldots 1 \text{ двојни корен: } x_0 = -\left(\frac{-a_0}{5}\right)^{\frac{1}{4}},\ 1 \text{ прост корен: } x''> \\ a_0>a>-\infty \ldots 3 \text{ различита реална корена у интервалима: } \left[-\infty, -\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{1}{4}}\right], \\ \left[-\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{\frac{1}{4}}, 0\right], \left[-b^{\frac{1}{5}}, +\infty\right]. \end{array} \right.$$

Ако у једначину (5) у место a_0 ставимо какву вредност $a < a_0$, онда се лева страна те једначи не повећава, јер се повећава њен позитивни члан $4\left(-\frac{a_0}{5}\right)^{5/4}$, па је значи за све вредности $a < a_0$ задовољена неједначина:

$$b + 4\left(-\frac{a}{5}\right)^{5/4} > 0$$

тако исто је за све негативне вредности $a > a_0$:

$$b + 4\left(-\frac{a}{5}\right)^{5/4} < 0$$

Значи да у место горње шеме, можемо саставити следећу:

$$\begin{array}{l} b<0 \\ a<0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(a,b)<0 \ldots\ 1 \text{ прост реалан корен;} \\ \varphi(a,b)=0 \ldots\ 1 \text{ двострук и } 1 \text{ прост реалан корен;} \\ \varphi(a,b)>0 \ldots\ 3 \text{ проста разл. реална корена;} \end{array} \right.$$

где смо ставили:

$$\varphi(a,b) = b + 4\left(-\frac{a}{5}\right)^{5/4}$$

На исти начин, ако узмемо да је $n<0$, т.ј. $b>0$ т.ј. узмемо за почетни положај праве (3), положај A'B'C', можемо доћи до следеће шеме:

$$\begin{array}{l} b>0 \\ a<0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \psi(a,b)>0 \ldots\ 1 \text{ прост реалан корен;} \\ \psi(a,b)=0 \ldots\ 1 \text{ двострук и } 1 \text{ прост реалан корен;} \\ \psi(a,b)<0 \ldots\ 3 \text{ различита реална корена.} \end{array} \right.$$

где је:

$$\psi(a,b) = b - 4\left(-\frac{a}{5}\right)^{5/4}.$$

Нека се сада права (3) креће из истих почетних положаја, али у смислу супротном досадањем, т.ј. у смислу кретања казаљке на сату. На тај ће начин параметар m узимати негативне вредности, а параметар $a = -m$ позитивне. Из сл. 2. је јасно да ћемо у овом случају за $n>o$ т.ј. $b<o$ имати један позитиван реалан корен у интервалу $(0, -b^{\frac{1}{5}})$, а за $n<o$ т.ј. $b>o$ имати један негативан реалан корен у интервалу $(-b^{\frac{1}{5}}, o)$. на тај начин имамо:

$$a>0 \begin{cases} b>0 \text{.. 1 негативан реалан корен у интервалу: } (-b^{\frac{1}{5}}, 0), \\ b<0 \text{.. 1 позитиван реалан корен у интервалу: } (0, -b^{\frac{1}{5}}) \end{cases}$$

Једначине:

$$\varphi(a, b) = 0 \quad , \quad \psi(a, b) = 0$$

представљају у равни aob две гране исте криве линије:

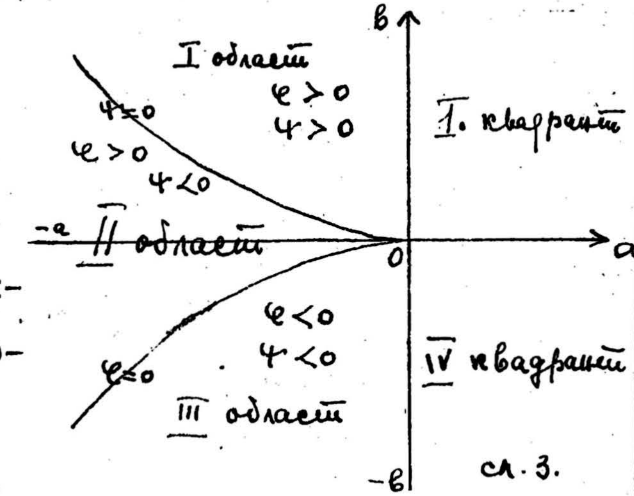
$$b = \mp 4 \left(-\frac{a}{5}\right)^{5/4},$$

т.ј.:

$$5^5 b^4 + 4^4 a^5 = 0. \qquad (6)$$

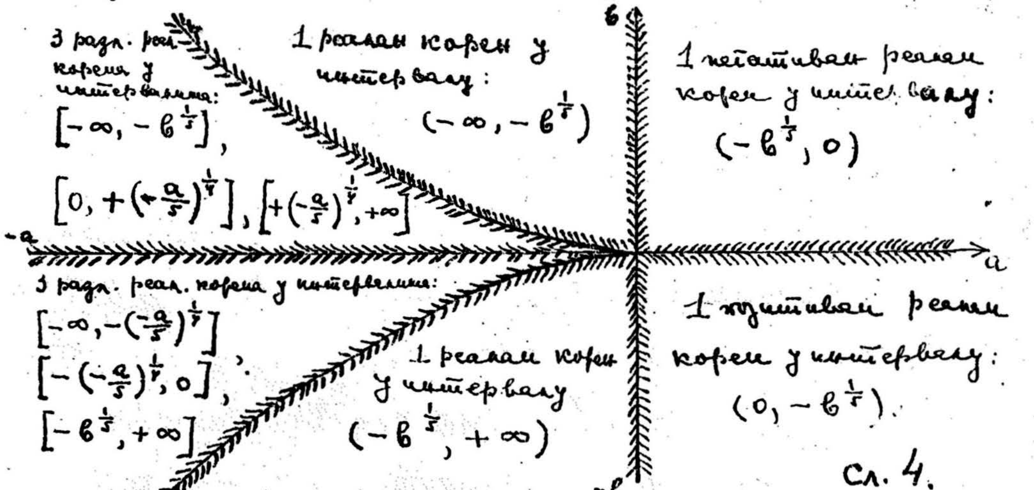
Та крива има једну повратну тачку: кординатни почетак, а изгледа као на сл. 3. Једначина $\varphi(a,b)=0$ представља грану криве (6) у трећем квадранту, а једначина $\psi(a,b)=0$ представља грану криве (6) у другом квадранту. Крива (6) дели полу-раван негативних апсциса на три дела. Знакови функција φ и ψ у тим деловима обележени су на сл. 3

На основу малопређашних шема и сл. 3 можемо саставити дефинитивну шему претстављену на сл. 4. Слика 4. је очигледна. Ако се на пр. тачка $M(a, b)$ налази у првом квадранту онда једначина (1) има свега један реалан корен у интервалу $(-b^{\frac{1}{5}}, o)$.



сл. 3.

Ако се тачка $M(a, b)$ налази на кривим линијама $\varphi=0$ и $\psi=0$ онда једначина (1) има



сл. 4.

један двојни и један прост реални корен.

Ако се тачка $M(a, b)$ налази на координатним осама онда имамо следећу шему:

$a = o, \; b \gtrless o$ ....1 прост реалан корен: $x = -b^{\frac{1}{5}}$

$a > o, \; b = o$ ....1 прост реалан корен: $x = 0$

$a < o, \; b = o$ ....3 проста реална корена:

$$x = o, \quad x = \pm (-a)^{\frac{1}{4}}$$

$a = o, \; b = o$ ....1 петострук реалан корен: $x = o$.

<u>Напомена</u>.- Исту ову дискусију могли би - смо извршити и чисто рачунским путем помоћу Rolle-ове теореме. Напоменимо да је у нашем случају овај геометријски пут прецизнији. Свеједно!

<u>7.зад.</u>- Наћи нормалу и тангенту код криве:

$$y = 3\,x^{2x}\,; \qquad (1)$$

а у тачкама максимума и минимума полупречник кривине.

(<u>октобар 1923 год.</u>)

Логаритмовањем, па затим диференцирањем једначине (1) добија се:

$$y' = 6\,x^{2x}\,(\log x + 1)$$

$$y'' = 12\,x^{2x}\,(\log x + 1)^2 + 6\,x^{2x-1}$$

Једначина $y' = o$ има само један корен : $x_o = \frac{1}{e}$.

За $x = x_o$ други извод има вредност:

$$y_o'' = y''\left(\tfrac{1}{e}\right) = 6\,(e^{-1})^{2e^{-1}-1} = 6\,e^{-2e^{-1}+1} > 0$$

Дакле тачка M_o $\left(x_o = \frac{1}{e},\; y_o = 3e^{-\frac{2}{e}}\right)$ је минимум.

Полупречник кривине има вредност:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

У тачци M_o биће:

$$R = \frac{1}{y_o''} = \frac{1}{6}\,e^{\frac{2}{e}-1}.$$

Једначина тангенте је:

$$Y - y = 6\,x^{2x}\,(\log x + 1)\,(X - x),$$

нормале

$$X - x + 6\,x^{2x}\,(\log x + 1)\,(Y - y) = 0.$$

<u>8.зад.</u>- Интегралити диференцијалну једначину:

$$x \log x \frac{dy}{dx} - y \log y = 0$$

и наћи сингуларитете њених партикуларних интеграла.

(<u>октобар 1923 год.</u>)

Горња једначина има раздвојене промењиве па се може написати у облику:

$$\frac{dy}{y \log y} = \frac{dx}{x \log x}$$

Општи интеграл ове једначине је: $y = x^c$.

Кад је c цео позитиван број интеграл нема сингуларитета. Кад је c цео негативан број, $c = p$, интеграл има само пол p – тог реда: $x=0$. Кад је c позитиван или негативан рационалан број, $c = \frac{p}{q}$, интеграл има алгебарску критичку тачку q. – тог реда $x = 0$. Кад је c ирационалан број онда интеграл има трансцендентну критичку тачку $x = 0$.

9. зад. – Наћи n – ти извод функције:

$$F(x) = x^{n-1} \log(1 - x)$$

и показати да је он позитиван за све вредности $x < +1$; наћи вредност тога извода за $x = 0$.

(фубруар 1924 год.)

Ставимо:

$$u = x^{n-1}, \quad v = \log(1-x); \quad F(x) = uv,$$

онда је:

$$u^{(p)} = (n-1)(n-2)\ldots(n-p)x^{n-p-1}, \quad u^{(n-1)} = (n-1)!,$$

$$u^{(n)} = 0, \quad v^{(p)} = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p},$$

па је по Лајбницовом обрасцу:

$$F^{(n)}_{(x)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{n}u^{(n)}v.$$

т.ј.

$$F^{(n)}_{(x)} = (n-1)!\frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} + \binom{n}{1}(n-1)!\frac{x^{n-2}}{(1-x)^{n-1}} + \cdots + \binom{n}{n-1}(n-1)!\frac{1}{1-x},$$

т.ј.

$$F^{(n)}_{(x)} = (n-1)!\sum_0^{n-1}\binom{n}{\nu}\frac{x^{n-\nu-1}}{(1-x)^{n-\nu}} = \frac{(n-1)!}{x}\sum_0^{n-1}\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n-\nu} = \frac{(n-1)!}{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}+1\right)^n - 1\right\}$$

т.ј.

$$F^{(n)}_{(x)} = \frac{(n-1)!}{x}\left\{\frac{1}{(1-x)^n} - 1\right\},$$

а тај је израз већи од o за све вредности $x < +1$

За $x = 0$ биће:

$$F^{(n)}_{(0)} = n!$$

10. зад. – Одредити све корене једначине:

$$e^{3z} = 1$$

чији се модули налазе између 2 и 9.

(фебруар 1924 год.).

Како је $e^{2k\pi i} = 1$ (k је цео позитиван или негативан број), то наша једначина постаје

$$e^{3z} = e^{2k\pi i}$$

т.ј.

$$3z = 2k\pi i, \quad z = \frac{2k\pi i}{3}$$

Модуо непознате z је:

$$|z| = \frac{2|k|\pi}{3}.$$

Неједнацину: $2 < |z| < 9$

т. ј.: $2 < \frac{2|k|\pi}{3} < 9$

или: $6 < 2|k|\pi < 27$

задовољавају само вредности к:

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4. \qquad (1)$$

Дакле наша једначина има 8 корена чији се модули налазе у интервалу (2,9). Ти корени су:

$$z = \frac{2k\pi}{3} i$$

где k треба смењивати вредностима (1).

11. зад. - Интегралити линеарну диференцијалну једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}\cos 2x \qquad (1)$$

(фебруар 1924 год.)

Општи интеграл једначине (1) без независног члана је:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$

Партикуларни интеграл једначине (1) са независним чланом наћићемо на следећи начин. На основу облика независнога члана: $e^{-x}\cos 2x$, можемо закључити да је партикуларни интеграл једначине (1) са независним чланом, облика:

$$y = e^{-x}(m\cos 2x + n\sin 2x) \qquad (2)$$

Кад нађемо изводе y' и y'' па их сменимо у једначини (1), добићемо да m и n морају имати вредности:

$$m = \frac{1}{52}, \quad n = -\frac{5}{52},$$

па да израз (2) задовољава једначину (1). На тај начин општи интеграл једначине (1) са независним чланом има облик:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{e^{-x}}{52}(\cos 2x - 5\sin 2x).$$

12. зад. - Дат је систем парабола које имају теме у координатном почетку, а осовину ох за своју осовину; одредити систем кривих линија од којих ће свака сећи сваку од датих парабола под сталним углом од 45^0.

(фебруар 1924 год.)

Једначина датог система парабола гласи:

$$y^2 = 2px$$

одакле је коефицијенат правца тангенте:

$$m = \frac{y}{2x} \qquad (1)$$

Нека је $\frac{dy}{dx}$ коефицијенат правца тангенте траженог система кривих линија. Тада постоји релација:

$$tg\,45° = 1 = \frac{m - \frac{dy}{dx}}{1 + m\frac{dy}{dx}} ,$$

т.ј.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m - 1}{m + 1} .$$

Кад за m сменимо вредност (1) биће:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{y + 2x} \qquad (2)$$

Ово је хомогена једначина првога реда која сменом:

$$y = ux , \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

постаје:

$$-\frac{u+2}{u^2+u+2}\,du = \frac{dx}{x} .$$

На тај начин се долази до општег интеграла једначине (2), који је:

$$(2x^2 + xy + y^2)\,e^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}} = C , \qquad (3.)$$

где је C произвољна интеграциона константа. Једначина (3) представља нам тражени систем кривих линија.

13. зад.- Конструисати криву:

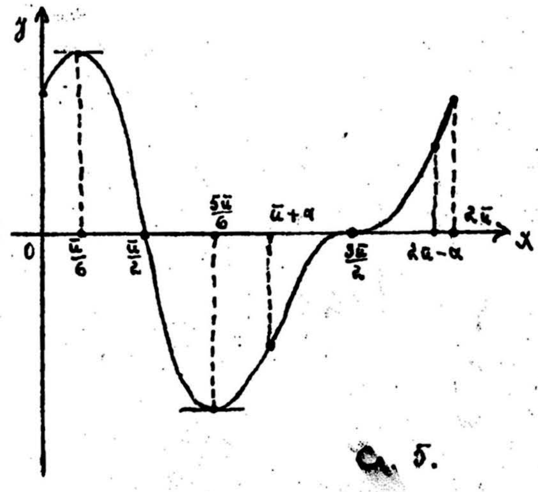
$$y = \sin 2x + 2\cos x$$

у интервалу (0,2π); одредити у томе интервалу

максимуме, минимуме и превојне тачке.

(јуни 1924 год.)

Ако нађемо прва три извода онда видимо да задата функција у интервалу (0,2π) има:
један максимум $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;
један минимум $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;
четири превојне тачке: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\pi+\alpha, -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(2\pi-\alpha, +\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$.



сл. 5.

На основу тога можемо конструисати криву као на слици 5. Количина α има вредност:

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{4} .$$

14. зад.- Одредити полупречник кривине у тачци M (x = 1, y = 2) оне криве која задовољава диференцијалну једначину:

$$\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0 \qquad (1)$$

и пролази кроз поменуту тачку.

(јуни 1924 год.)

Полупречник кривине има вредност:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} .$$

Ако диференцирамо по x једначину (1) добијамо:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \qquad (2)$$

Једначине (1) и (2) дају:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2xy - 1.$$

За x = 1, y = 2 биће:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\y=2}} = 3 \ , \ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\substack{x=1\\y=2}} = 11.$$

Зато је у тачци M:

$$R = \frac{10\sqrt{10}}{11}.$$

Напоменимо да је диференцијална једначина (1) Riccati-ева једначина и да се, према томе, не може интегралити.

15. зад. - Одредити општи интеграл диференцијалне једначине другог реда:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad (1)$$

где су $f(y)$ и $\varphi(y)$ дате функције.

(јуни 1924 год.)

Ако у једначини (1) извршимо смену:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}$$

она постаје:

$$\frac{dz}{dy} - z f(y) - \varphi(y) = 0 \ ,$$

а то је линеарна диференцијална једначина првога реда чији је општи интеграл:

$$z = e^{\int f(y)dy}\left(C_1 - \int \varphi(y)\, e^{-\int f(y)dy} dy\right), \qquad (2)$$

т.j.

$$z = F(y, C_1), \qquad (3)$$

где је $F(y,C_1)$ позната функција дата десном страном једначине (2). Једначина (3) постаје:

$$\frac{dx}{dy} = F(y, C_1).$$

Интеграл ове једначине је:

$$x = \int F(y, C_1)\, dy + C_2$$

То је тражени општи интеграл једначине (1)

16. зад. - Када се тачка $z = \rho e^{\theta i}$ креће по Archimède-овој спирали $\rho = \theta$, по каквој ће се кривој у равни имагинарне количине кретати тачка $f(z) = 1 + z^2$?

(јуни 1924 год.)

Ако у равни z узмемо поларне координате онда је: $z = \rho e^{\theta i}$

па су реални и имагинарни део функције $f(z) = 1 + z^2 = P + iQ$:

$$P(\rho,\theta) = 1 + \rho^2 \cos 2\theta, \quad Q(\rho,\theta) = \rho^2 \sin 2\theta \qquad (1)$$

Из ових једначина и из једначине путање тачке z:

$$\rho = \theta \tag{2}$$

треба елиминисати количине ρ и θ па ће се добити једначина:

$$F(P, Q) = 0,$$

која нам представља путању тачке f(z) у својој равни, где је P апсциса, а Q ордината. У нашем случају резултат елиминације ρ и θ из једначина (1) и (2) биће:

$$2\sqrt[4]{(P-1)^2+Q^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{Q}{P-1}$$

Ако померимо у равни POQ, координатни почетак дуж осе OP у позитивном правцу за 1, т.ј. извршимо смену: $P = P' + 1$, па затим пређемо на поларне координате R и φ добићемо за једначину путање тачке f(z):

$$R = \frac{\varphi^2}{4}$$

Последња једначина нам представља једну спиралу која се врло брзо развија.

Ако вредност за ρ из једначине (2) сменимо у једначинама (1) добијамо параметарске једначине наше путање:

$$P = 1 + \theta^2\cos 2\theta, \quad Q = \theta^2 \sin 2\theta,$$

где је θ произвољан параметар.

17. зад. Решити по x једначину:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (xi)^{\nu i} = A \tag{1}$$

где је A један дати број. Испитати реалност решења.

(фебруара 1925 г.)

Ставимо у једначини (1)

$$(xi)^i = z$$

па она постаје:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} z^{\nu} = A$$

или, како нам лева страна представља геометријску прогресију, која је конвергентна јер јој је збир раван датом броју A;

$$\frac{z}{1-z} = A$$

Одатле је:

$$z = \frac{A}{A+1} \tag{2}$$

С друге стране је:

$$z = (xi)^i = x^i i^i = x^i e^{i\log i} = x^i e^{i(4k+1)\frac{\pi}{2}i} =$$

$$= x^i e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} = a_k x^i$$

где је:

$$a_k = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} \qquad (3)$$

Дакле једначина (2) постаје:

$$a_k x_1^i = \frac{A}{A+1}$$

$1 + \frac{1}{A} = a_k x^i$

$\frac{1}{A} = a_k x^i - 1$

т.ј.

$$x_1^i = \frac{A}{a_k(A+1)} .$$

Степеновањем са $-i$ добија се:

$$x_k = \left[\frac{a_k(A+1)}{A}\right]^i = \left[a_k\left(1+\frac{1}{A}\right)\right]^i$$

Последњи израз претставља нам решење једначине (1). Оно ће бити реално кад је израз у средњој загради облика $e^{\alpha i}$, где је α једна реална количина, т.ј. кад је дати број A облика:

$$A = \frac{a_k}{e^{\alpha i} - a_k} = \frac{a_k(e^{-\alpha i} - a_k)}{a_k^2 - 2a_k\cos\alpha + 1}$$

где је α дати реалан број, а a_k има вредност (3).

18. зад. - Одредити на датоме кругу тачку М за коју ће површина описана обртањем лука $\overset{\frown}{OM}$ око пречника $\overline{OC}$ имати исту бројну вредност коју има десетоструки логаритам апсцисе $\overline{OB}$ тач-

ке М.

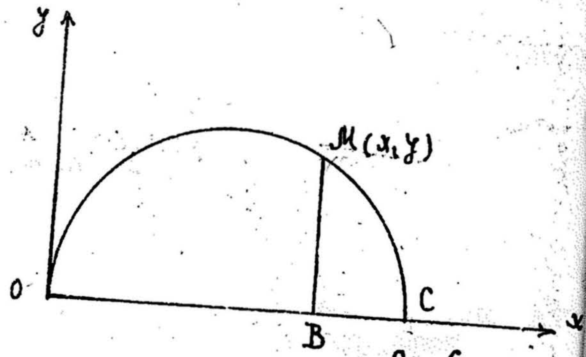
(фебруар 1925 год.)

Тражена ротациона површина дата је, према интегралном рачуну, обрасцем:

$$S = 2\pi\int_0^x y\,ds \qquad (1)$$

Једначина круга OMC је:

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0 ;$$



Сл. 6.

одатле је:

$$y' = \frac{R - x}{y}$$

па је:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{R\,dx}{y} .$$

Сменом ове вредности у једначини (1) добија се:

$$S = 2\pi\int_0^x y\frac{R\,dx}{y} = 2\pi R\int_0^x dx = 2R\pi x ,$$

где је x апсциса тражене тачке М. Према задатку је:

$$2R\pi x = 10\log x ,$$

т.ј.

$$\log x - \frac{R\pi}{5}x = 0 \qquad (2)$$

Апсциса x тражене тачке М је корен трансцендентне једначине (2). Ту једначину је немогуће решити. Испитајмо само реалност решења. Једначину

(2) можемо написати у облику:

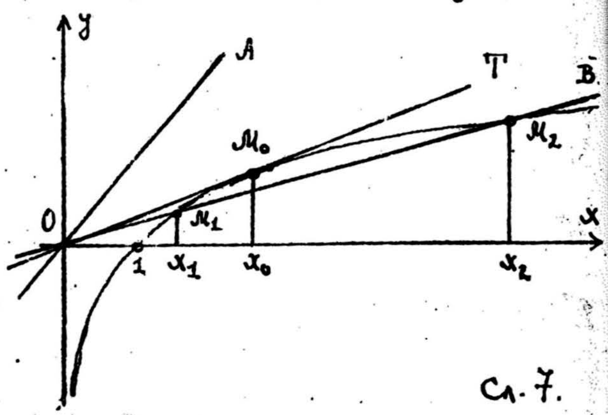
$$\log x = \frac{R\pi}{5} x$$

Значи да су њени реални корени апсцисе заједничких тачака криве:

$$y = \log x \qquad (3)$$

и праве:

$$y = \frac{R\pi}{5} x \qquad (4)$$



Сл. 7.

Из слике 7. је јасно, да ако се права (4) налази у углу TOY, т.ј. заклапа са x-осом већи угао од тангенте OM_0T на криву (3), једначина (2) нема реалних решења јер тада крива (3) и права (4) немају заједничких тачака. Ако се права (4) налази у углу xOT, т.ј. заклапа са x - осом мањи угао од тангенте OM_0T (има на пр. положај OM_1M_2B), онда права (4) и крива (3) имају две пресечне тачке M_1 и M_2, па значи једначина (2) има два реална корена: $x = x_1$ и $x = x_2$.

Како коефицијенат правца тангенте OM_0T има вредност: $m = \frac{1}{e}$, то значи да, да би једначина (2) имала реалних решења, коефицијенат

правца праве (4) мора бити мањи од $m = \frac{1}{e}$,

т.ј.

$$\frac{R\pi}{5} < \frac{1}{e}$$

или:

$$R < \frac{5}{\pi e}.$$

Како је $x_0 = e$, то је из сл.7. јасно да ће се корени x_1 и x_2 налазити респективно у интервалима $(1, e)$ и $(e, +\infty)$.

Ако је:

$$R = \frac{5}{\pi e}$$

онда се права (4) поклапа са тангентом OM_0T, па једначина (2) има двострук реалан корен: $x_0 = e$

Значи да једначина (2) има реалних корена само ако је:

$$R \leqslant \frac{5}{\pi e} = 0{,}585\ldots \qquad (5)$$

и то тада има два реална корена:

$$1 < x_1 \leqslant e \quad , \quad e \leqslant x_2 < +\infty .$$

Да би наш задатак био могућ мора, очигледно, апсциса x тражене тачке M бити мања од пречника круга OMC, т.ј:

$$x < 2R \qquad (6)$$

Из једначине (2) је:

$$2R = \frac{10}{\pi}\,\frac{\log x}{x}$$

па неједначина (6) постаје:

$$x < \frac{10}{\pi}\,\frac{\log x}{x}$$

или:

$$\frac{\pi x^2}{10} - \log x < 0 \qquad (7)$$

Како је израз

$$\frac{\pi x^2}{10} - \log x$$

увек позитиван, па ма какво било x, то значи да неједначина (7) никад није задовољена, па значи да је задати проблем увек немогућ, ма какво било R.

19. зад.- Израчунати вредност одређеног интеграла

$$J = \int_a^b \frac{dx}{\rho}$$

где је ρ полупречник кривине једне криве линије у њеној тачки M (x,y), знајући да дирка на тој кривој гради са осовином ox у тачки x = a угао α, а у тачки x = b угао β.

(фебруар 1925 год.)

Како је:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi},$$

где је φ угао који тангента на криву заклапа са x - осом, то је:

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{dx}{ds}\,d\varphi;$$

како је још:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

то је:

$$\frac{dx}{\rho} = \cos\varphi\,d\varphi;$$

па дакле:

$$J = \int_\alpha^\beta \cos\varphi\,d\varphi = \sin\beta - \sin\alpha.$$

20. зад.- Израчунати модуо и аргуменат функције $f(z) = e^{z^m}$ (где је m цео позитиван број) и одредити границе којима ће тежити модуо кад се z бескрајно удаљава у разним правцима у својој равни. Колика је вредност криволинијског интеграла:

$$J = \int \frac{e^{z^m}}{(z+i)^m}\,dz \qquad (1)$$

узетог дуж једне елипсе око z = 0 као центра.

(фебруара 1925 год.)

Нека је $z = \rho e^{\theta i}$, тада је $z^m = \rho^m e^{m\theta i} =$
$= \rho^m \cos m\theta + i\,\rho^m \sin m\theta.$

А зато је

$$f(z) = e^{z^m} = e^{\rho^m \cos m\theta} \cdot e^{i\rho^m \sin m\theta};$$

одатле је:

$$R = e^{\rho^m \cos m\theta}, \quad \Phi = \rho^m \sin m\theta,$$

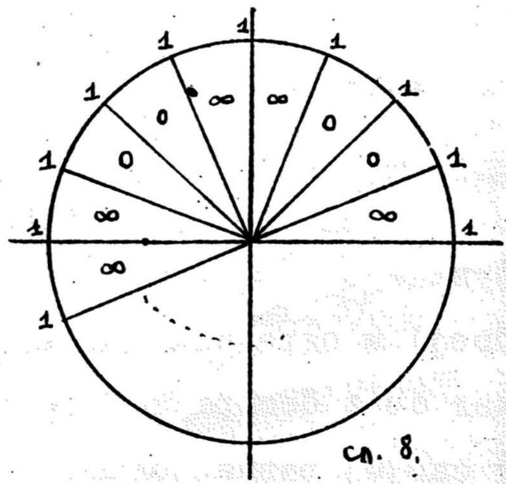
где су R и Φ модуо и аргуменат функције $f(z)$.

Видимо да је:

$$R = e^{\rho^m \cos m\theta}$$

Ако пустимо да модуо ρ бескрајно расте, онда ће бити:

$\theta = 0$ .... $R \to \infty$
$0 < \theta < \alpha$ ... $R \to \infty$
$\theta = \alpha$ .... $R \to 1$
$\alpha < \theta < 3\alpha$ .... $R \to 0$
$\theta = 2\alpha,\ \theta = 3\alpha$ ... $R \to 1$
$3\alpha < \theta < 5\alpha$ ... $R \to \infty$
. . . .
. . . .



сл. 8.

где је: $\alpha = \frac{\pi}{2m}$.

Ако периферију круга око почетка поделимо на $4m$ делова од којих је сваки велики $\alpha = \frac{\pi}{2m}$ онда ће за θ на границама R тежити јединици; за θ у два узастопна угла R ће тежити бескрајности, а за θ у идућа два узастопна угла R ће

тежити нули. Т.ј.:

$\theta = k\alpha$ . . . . $R = 1$
$(4k+1)\alpha < \theta < (4k+3)\alpha$ . . . . . . $R \to 0$
$(4k+3)\alpha < \theta < (4k+5)\alpha$ . . . . . . $R \to \infty$

где је k цео позитиван или негативан број или нула. (сл. 8.)

Криволинијски интеграл (1), према основном Cauchy-евом обрасцу:

$$\int_{(c)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_c R_k \qquad (\alpha)$$

где смо са $\sum_c R_k$ означили збир остатака функције $f(z)$ за све полове у контури C, имаће вредност:

$$\int_{(c)} \frac{e^{z^m}}{(z+i)^m}\,dz = 2\pi i\, R_{-i} \qquad (2)$$

где смо са R_{-i} означили остатак функције

$$f(z) = \frac{e^{z^m}}{(z+i)^m}$$

за једини пол $z = -i$, у контури C. (Контура C је према задатку елипса са центром у координатном почетку. Претпостављамо да је мала полу-оса већа од 1, јер би иначе тачка $z = -i$ била ван елипсе.) Према познатом обрасцу за остатак:

$$R_a = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right]$$

биће за a = - i :

$$R_{-i} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[e^{z^m}\right].$$

Ову вредност за остатак R_{-i} треба још сменити у једначини (2) па нам она онда даје вредност криволинијског интеграла (1).

√**21. зад.** - Решити графички једначину:

$$e^{z^2}\log z + \lambda = 0 \qquad (1)$$

и испитати како се мењају реални корени када се λ мења.

(јуни 1925 год.)

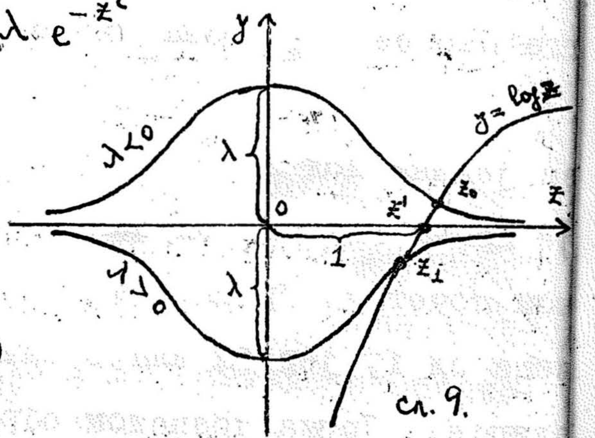
Једначину (1) можемо написати у облику:

$$\log z = -\lambda e^{-z^2}$$

па је раставити у две:

$$y = \log z \qquad (2)$$

$$y = -\lambda e^{-z^2} \qquad (3)$$



сл. 9.

Кад је $\lambda<0$ крива (3) је цела изнад осе oz,

има један максимум ($z = 0, y = \lambda$) и две превојне тачке $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Кад је $\lambda>0$ крива (3) је цела испод z - осе, има један минимум ($z = 0$ $y = -1$) и две превојне тачке $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. У оба случаја ($\lambda<0, \lambda>0$) z - оса је асимптота криве (3) и ова је симетрична према y - оси. Крива (2) је непроменљива. На основу слике 9 имамо (Кад је $\lambda=0$, крива (3) претставља z-осу):

$\lambda>0$ .... $0<z_0<1$

$\lambda=0$ .... $z'=1$

$\lambda<0$ .... $1<z_0<+\infty$.

Дакле у сва три случаја једначина (1) има само по један реалан корен.

√**22 зад.** - Одредити све реалне функције променљиве <u>x</u> које имају ту особину да су једнаке своме <u>n</u>-том изводу.

(јуни 1925 год.)

Диференцијална једначина тражених функција је

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y \qquad (1)$$

Карактеристична једначина ове линеарне дифе -

ренцијалне једначине n-тог реда је:

$$r^n = 1. \qquad (2)$$

Ово је биномна једначина n - тог степена чије је решење

$$r_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} = \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 0, 1, \dots n-1)$$

ако је n парно онда једначина (2) има два реална корена

$$r_0 = +1, \quad r_{\frac{n}{2}} = -1;$$

остали су корени имагинарни. Корен конјугован са кореном r_ν јесте $r_{n-\nu}$. Пару конјугованих корена r_ν и $r_{n-\nu}$ карактеристичне једначине (2) одговара у општем интегралу једначине (1) збир партикуларних интеграла

$$A_\nu e^{r_\nu x} + A_{n-\nu} e^{r_{n-\nu} x} = A_\nu e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n} + ix\sin\frac{2\nu\pi}{n}} + A_{n-\nu} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}} =$$

$$= (A_\nu + A_{n-\nu}) e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cos\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) + i(A_\nu - A_{n-\nu}) e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \sin\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right),$$

или ако се произвољне константе A_ν и $A_{n-\nu}$ смене новим $C_{2\nu+1}$, $C_{2\nu+2}$ према једначинама:

$$A_\nu + A_{n-\nu} = C_{2\nu+1}, \quad i(A_\nu - A_{n-\nu}) = C_{2\nu+2}$$

онда је:

$$A_\nu e^{r_\nu x} + A_{n-\nu} e^{r_{n-\nu} x} = C_{2\nu+1} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cos\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) + C_{2\nu+2} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \sin\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right).$$

На тај начин општи интеграл једначине (1), кад је n парно има облик

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sum_{1}^{\frac{n}{2}-1} \left[C_{2\nu+1} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cos\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) + C_{2\nu+2} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \sin\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) \right].$$

Ако је n непарно, онда једначина (2) има само један реалан корен: $r_0 = 1$, па општи интеграл у овом случају изгледа

$$y = C_1 e^x + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left[C_{2\nu} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cos\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) + C_{2\nu+1} e^{x\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \sin\left(x\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right) \right].$$

I. Теоријска напомена:

Израчунавање одређених интеграла помоћу Рачуна Остатака.

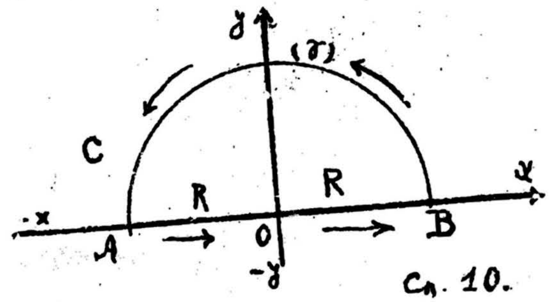
Cauchy-ев рачун остатака има велику примену на израчунавању одређених интеграла. Та примена базира на познатој Cauchy-евој теореми:

Ако функција f(z) у унутрашњости једне затворене контуре C нема никаквих других сингуларитета осим полова, онда интеграл $\int f(z)\,dz$ узет дуж те контуре у директном смислу, има за вредност збир остатака функције f(z) за све те полове, помножен са 2πi, т.ј.:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_C R_k .$$

Како се применом ове теореме, која нам стварно даје вредност једног криволинијског интеграла, долази и до вредности обичних одређених интеграла показаћемо у једном доста широком случају.

Претпоставимо да је функција f(z) униформна и да има коначан број полова у делу равни изнад реалне осе, а на самој реалној оси да је холоморфна. За контуру интеграције C узмимо полукруг (γ) изнад реалне осе са центром у почетку, чији је полупречник R довољно велики да обухвати све полове функције f(z) изнад реалне осе и пречник $\overline{AB}$ тога полукруга који лежи на x- оси.



Сл. 10.

Тада интеграл

$$J = \int_C f(z)\,dz , \quad (1)$$

који према горњој теореми има вредност

$$J = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_P R_k , \quad (2)$$

(где је $\sum_P R_k$ збир остатака функције f(z) за све полове изнад реалне осе), можемо разложити у следећа два интеграла:

$$J = \int_{(AB)} f(z)\,dz + \int_{(\gamma)} f(z)\,dz \quad (3)$$

Први од ових интеграла је узет дуж реалне осе, а како је z дуж реалне осе реално, т.ј.

$$z = x, \quad dz = dx$$

то тај интеграл има вредност:

$$\int_{(AB)} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx \qquad (4)$$

Други интеграл на десној страни једначине (3) је узет дуж полукруга (γ), а како је дуж тог полукруга

$$z = Re^{\theta i}, \quad dz = Ri\,e^{\theta i}\,d\theta$$

то тај интеграл има вредност:

$$\int_{(\gamma)} f(z)\,dz = i\int_0^{\pi} R\cdot f(Re^{\theta i})\,e^{\theta i}\,d\theta \qquad (5)$$

Претпоставимо сада да функција f(z) има особину да је:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = 0 \qquad (6)$$

Тада, на основу једначине (6), имамо:

$$\left|\int_{(\gamma)} f(z)\,dz\right| \leqslant |i|\int_0^{\pi} |R|\cdot|f(Re^{\theta i})|\cdot|e^{\theta i}|\cdot d\theta$$

т.ј. пошто је:

$$|i| = 1, \quad |R| = R, \quad |e^{\theta i}| = 1$$

имамо:

$$\left|\int_{(\gamma)} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta.$$

Како последњи интеграл, према услову (6), тежи нули за $R\to\infty$, то је и:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{(\gamma)} f(z)\,dz = 0.$$

Тада нам једначине (2), (3) и (4), пошто у последњој сменимо R са ∞, дају:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{P} R_k. \qquad (7)$$

Показаћемо сада два врло широка случаја у којима је услов (6) задовољен.

<u>I. случај</u> -Ако је функција f(z) облика:

$$f(z) = e^{azi}\,\varphi(z)$$

где је $a > 0$, а функција $\varphi(z)$ поред услова које смо претпоставили у почетку за функцију f(z) задовољава још и услов:

$$\lim_{R\to\infty}\varphi(Re^{\theta i}) = 0 \qquad (8)$$

и то <u>униформно</u> за све вредности θ;

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Тада интеграл на десној страни једначине (6) постаје:

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = \int_0^{\pi} R\,\left|e^{aiRe^{\theta i}}\,\varphi(Re^{\theta i})\right|\,d\theta = \int_0^{\pi} R\,e^{-aR\sin\theta}\,|\varphi(Re^{\theta i})|\,d\theta.$$

Ако са $\varepsilon(R)$ обележимо максималан модуо функције

$\varphi(Re^{\theta i})$ док θ варира од 0 до π, онда ћемо имати:

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta < \varepsilon(R)\int_0^{\pi} R\,e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \quad (9)$$

Интеграл са десне стране последње неједначине можемо написати у облику:

$$\int_0^{\pi} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta.$$

Ако у последњем интегралу извршимо смену:

$$\theta = \pi - \varphi, \quad d\theta = -d\varphi$$

он постаје:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi.$$

На тај начин имамо:

$$\int_0^{\pi} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta.$$

Зато неједначина (9) постаје:

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta < 2\varepsilon(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \quad (10)$$

Интеграл

$$J(R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta,$$

ако са α обележимо један позитиван број мањи од $\frac{\pi}{2}$, можемо написати у облику.

$$J(R) = \int_0^{\alpha} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \quad (11)$$

Пошто је $\cos\theta$ опадајућа функција, то је за θ у интервалу: $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ увек задовољена неједначина:

$$\cos\alpha \leqslant \cos\theta \qquad \text{т.ј.} \qquad 1 \leqslant \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

Множећи леву и десну страну последње неједначине са позитивном количином $Re^{-aR\sin\theta}$ последња неједначина постаје:

$$Re^{-aR\sin\theta} \leqslant Re^{-aR\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

Множећи са $d\theta$ и интегралећи од 0 до α добија се:

$$\int_0^{\alpha} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta < \frac{1}{\cos\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-aR\sin\theta} R\cos\theta\,d\theta;$$

како последњи интеграл има вредност

$$\int_0^{\alpha} e^{-aR\sin\theta} R\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aR\sin\alpha}\right)$$

то последња неједначина постаје:

$$\int_0^{\alpha} R e^{-aR\sin\theta}\,d\theta < \frac{1}{a\cos\alpha}\left(1 - e^{-aR\sin\alpha}\right)$$

Како је највећа вредност функције $Re^{-aR\sin\theta}$, кад θ варира од α до $\frac{\pi}{2}$, очигледно једнака:

$$Re^{-aR\sin\alpha}$$

то други интеграл на десној страни једначине (11) можемо написати у облику:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R e^{-aR\sin\theta} d\theta < R e^{-aR\sin\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) R e^{-aR\sin\alpha}$$

На тај начин имамо да је:

$$J(R) < \frac{1}{a\cos\alpha}\left(1 - e^{-aR\sin\alpha}\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) R e^{-aR\sin\alpha}$$

ако пустимо да R бескрајно расте онда нам последња неједначина даје:

$$\lim_{R\to\infty} J(R) < \frac{1}{a\cos\alpha} \tag{12}$$

За $R\to\infty$ неједначина (10), с обзиром на последњи резултат, постаје:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta < \frac{2}{a\cos\alpha} \lim_{R\to\infty} \varepsilon(R).$$

Пошто је $\varepsilon(R)$ максимални модуо функције $\varphi(Re^{\theta i})$ која према услову (8) тежи униформно нули за $R\to\infty$, то и $\varepsilon(R)$ тежи нули за $R\to\infty$. На тај начин из последње неједначине имамо да је:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = 0.$$

Доказали смо, дакле, да је услов (6) задовољен кад год је функција f(z) облика: $e^{azi}\varphi(z)$ где је $a > 0$, а функција $\varphi(z)$ задовољава напред поменуте услове и услов (8), т.ј. доказали смо да се на такву функцију f(z) може применити формула (7). Ако у ту формулу ставимо:

$$f(z) = e^{azi}\varphi(z)$$

она постаје:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{axi}\varphi(x)\,dx = 2\pi i \sum_P R_k,$$

или:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\sin ax\,dx = 2\pi i \sum_P R_k.$$

Ваља још на десној страни раздвојити реални и имагинарни део, па добијамо вредности два реална интеграла с леве стране последње једначине.

II случај.-Показаћемо сада да је услов (6) задовољен и ако је функција f(z) равна једном рационалном разломку код кога је степен именитеља бар за два већи од степена бројитеља, т.j. кад год је функција f(z) облика:

$$f(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}$$

где је:

$$n \geq m+2. \tag{13}$$

Јасно је из досадањег да именитељ функције f(z) не сме имати реалних нула, јер би се онда одговарајући полови функције f(z) налазили на контури C.

У овом случају интеграл (6) има облик

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = \int_0^{\pi} R\left|\frac{a_0 R^m e^{m\theta i} + a_1 R^{m-1} e^{(m-1)\theta i} + \dots + a_m}{b_0 R^n e^{n\theta i} + b_1 R^{n-1} e^{(n-1)\theta i} + \dots + b_n}\right| d\theta$$

или, ако се R пред модулом унесе у бројитељ, па се онда и бројитељ и именитељ разломка у интегралу поделе са R^n:

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = \int_0^{\pi}\left|\frac{a_0 \frac{1}{R^{n-m-1}} e^{m\theta i} + \dots + \frac{a_m}{R^{n-1}}}{b_0 e^{n\theta i} + b_1 \frac{1}{R} e^{(n-1)\theta i} + \dots + \frac{b_n}{R^n}}\right| d\theta$$

Ако максималан модуо разломка у последњем интегралу, кад θ варира од 0 до π, обележимо са $\eta(R)$ онда је очигледно:

$$\int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta < \eta(R)\int_0^{\pi} d\theta = \pi\,\eta(R) \qquad (15)$$

Ако пустимо да R бескрајно расте, онда сви чланови у бројитељу разломка у интегралу (14) теже нули пошто је, према услову (13):

$$n-m-1 \geqslant 1,\ n-m \geqslant 2, \dots$$

а модуо именитеља тежи коначној граници: b_0

па је значи:

$$\lim_{R\to\infty} \eta(R) = 0$$

На тај начин, према неједначини (15), имамо да је и:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{\theta i})|\,d\theta = 0$$

Дакле кадгод функција f(z) има облик рационалног разломка, чији је степен именитеља бар за два већи од степена бројитеља, а чији именитељ нема реалних нула, онда је увек задовољен услов (6) и на такву се функцију f(z) може применити образац (7).

Напоменимо да је услов (6) испуњен увек ако z f(z), када |z| бескрајно расте, тежи униформно нули за све вредности θ:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi .$$

Ако би се десило да интеграл (5) тежи каквој коначној и одређеној граници A, за $R\to\infty$, т.ј. да је:

$$\lim_{|z|\to\infty} \int_{(r)} f(z)\,dz = A \qquad (16)$$

онда формула (3) постаје:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_p R_k - A \qquad (17)$$

То је на пр. случај кад је функција $f(z)$ какав рационалан разломак чији је степен именитеља само за један већи од степена бројитеља.

Напоменимо још да је једначина (16) задовољена кадгод $z\,f(z)$, за $|z|\to\infty$, тежи <u>униформно</u> каквој граници <u>a</u>, а за све вредности θ :

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi .$$

23. зад. — Израчунати криволинијски интеграл

$$J = \int \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz \qquad (\alpha)$$

дуж контуре састављене из праве $\overline{AB}$ и полукруга над $\overline{AB}$.

(јуни 1925 год.)

Задати интеграл може се подвести под први случај претходне теоријске напомене, стављајући:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Очигледно је, да је услов (8) задовољен униформно за ма какво θ, пошто је увек:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{1+z^2} = 0.$$

Поред тога функција $\varphi(z)$ задовољава и остале услове напред наведене, т.ј. она је холоморфна на реалној оси, униформна у делу равни изнад реалне осе и у том делу равни има коначан број полова (у овом случају само један: $z = i$). Значи да се на интеграл (α) може применити образац (7). На тај се начин добија:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\,R_i \quad ---- \quad (\beta)$$

где је R_i остатак функције $f(z) = \dfrac{e^{zi}}{1+z^2}$ за њен пол $z = i$. Он ће имати вредност:

$$R_i = \frac{e^{zi}}{[1+z^2]'_z}\Bigg|_{\text{за } z=i} = \frac{e^{zi}}{2z}\Bigg|_{\text{за } z=i} = \frac{1}{2ie}$$

Зато једначина (β) постаје:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$$

Или, кад се на левој страни раздвоје реални и имагинарни део, па се изједначе респективно са реалним и имагинарним делом десне стране, добија се:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Пошто је функција у првом интегралу парна, то се он може написати у облику:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}\ .$$

√24. зад.- Наћи општи интеграл парцијалне једначине:

$$x - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0 \qquad (1)$$

(јуни 1925 год.)

Једначину (1) можемо написати у облику

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x - \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2)$$

Систем симултаних диференцијалних једначина који одговара линеарној парцијалној једначини (2) је:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (3)$$

Диференцијална једначина:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

има општи интеграл:

$$f_1 \equiv \frac{y}{x} = C_1 \qquad (4)$$

Диференцијалну једначину:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (5)$$

можемо написати у облику:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2}\ .$$

Према интегралу (4) је

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + C_1^2\ ;$$

обележимо сад ту константу са k^2, па имамо:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \sqrt{k^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2}$$

Ово је хомогена диференцијална једначина првога реда, која сменом:

$$z = ux\ ,\quad \frac{dz}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

постаје

$$\frac{du}{1-u-\sqrt{k^2+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Интеграл:

$$\int\frac{du}{1-u-\sqrt{k^2+u^2}}$$

после смене

$$u+\sqrt{k^2+u^2} = v,\quad du = \frac{v^2+k^2}{2v^2}\,dv$$

постаје:

$$\int\frac{du}{1-u-\sqrt{k^2+u^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{v^2+k^2}{v^2(v-1)}\,dv \quad \text{и т. д.}$$

На тај се начин добија да је општи интеграл једначине (6)

$$\log\frac{\left(u+\sqrt{k^2+u^2}\right)^{k^2}}{x^2\left(u-1+\sqrt{k^2+u^2}\right)^{1+k^2}} = \frac{k^2}{u+\sqrt{k^2+u^2}} + C'$$

Ако се вратимо на променљиву z, т.ј. ставимо: $u = \frac{z}{x}$ и константу k^2 сменимо њеном вредношћу:

$$k^2 = 1 + C_1^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2}$$

добићемо општи интеграл диференцијалне једначине (5) у облику:

$$f_2 \equiv \frac{\left(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\frac{x^2+y^2}{x^2}}}{x\left(z - x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\frac{2x^2+y^2}{x^2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{x(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}} = C_2$$

На тај смо начин добили два интеграла система (3): f_1 и f_2. Теорија нас учи да је тада општи интеграл парцијалне линеарне једначине (1): $f_2 = \varphi(f_1)$, т.ј.:

$$\frac{\left(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\frac{x^2+y^2}{x^2}}}{x\left(z - x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\frac{2x^2+y^2}{x^2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{x(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

где је φ произвољна функција.
Последња једначина претставља нам тражени општи интеграл.

25. зад. - Испитати облик кривих линија:

$$\lambda y - x^\lambda = 0 \qquad (1)$$

за позитивне вредности од λ, и где је λ један реалан број; разликовати случајеве: $\lambda > 1$, $1 \geq \lambda > 0$.

Наћи обвојницу тих кривих линија (λ је параметар). Нека је ($x = a$, $y = b$) једна тачка M која се налази са десне стране y - осе, колико од горњих кривих пролази кроз ту тачку?

(фебруар 1926 г.)

Из једначине (1) добија се диференцирањем:

$$y' = x^{\lambda-1},$$

одакле се одмах види да је тангента на криву (1) у координатном почетку x - оса, ако је $\lambda > 1$, а y - оса ако је $\lambda < 1$.

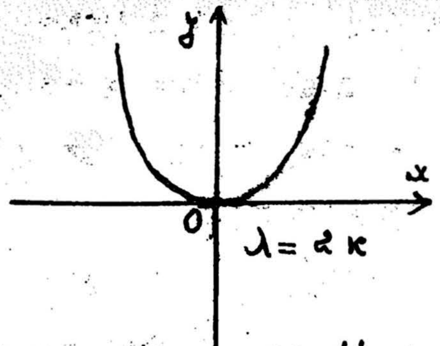
Ако је λ какав цео број, онда је:

$$y^{(\lambda)} = (\lambda-1)!,$$

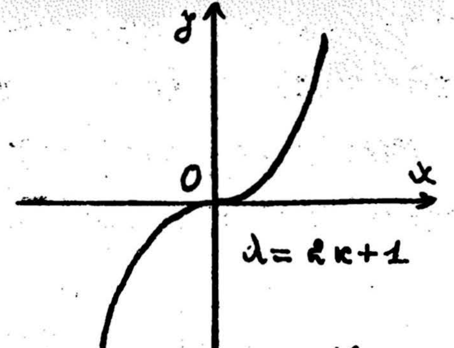
па је јасно да је координатни почетак, за криву (1), тачка минимума, ако је $\lambda = 2k$, или превојна тачка ако је $\lambda = 2k+1$.

Крива тада има облик као на сликама 11. и 12.

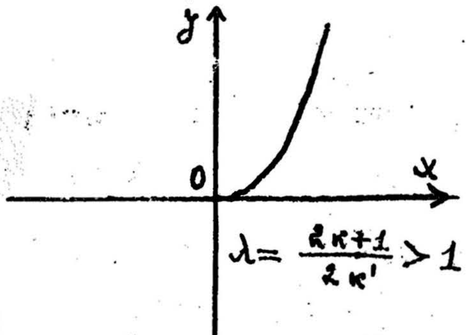
Ако је λ какав рационалан разломак: $\lambda = \frac{p}{q} \leq 1$, онда крива (1) има облик као на сликама 13., 14., 15., 16. Ако је $\lambda = \frac{2k}{2k'+1} > 1$



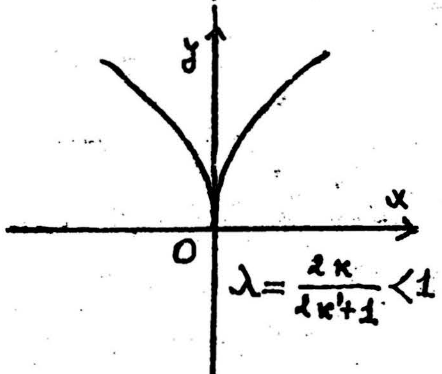
сл. 11.



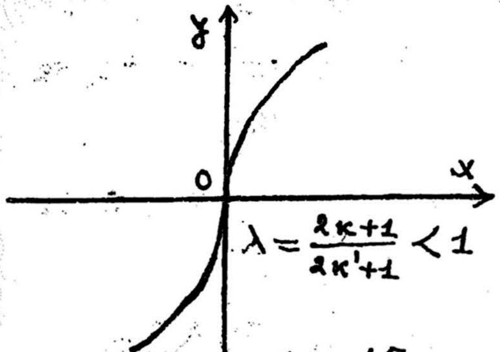
сл. 12.



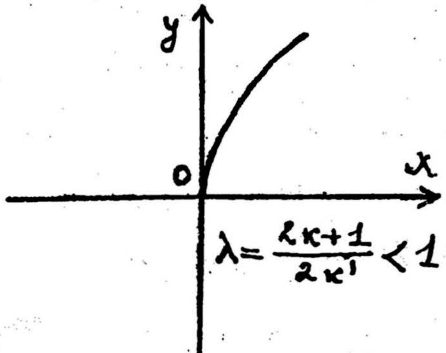
сл. 13.



сл. 14



сл. 15.



сл. 16.

k и k' су цели позитивни бројеви или нула.

онда крива (1) има облик као на сл. 11.; а ако је $\lambda = \frac{2k+1}{2k'+1} > 1$, онда крива (1) има облик као на сл. 12.

Докажимо на пр. да крива (1), ако је:

$$\lambda = \frac{2k+1}{2k'} < 1,$$

има облик као на сл. 16. Пошто је именитељ од λ паран, то ће крива (1) бити реална само за $x > 0$; значи да ће се цела крива налазити са десне стране y - осе. Како је још за $x > 0$, увек и $y > 0$ (то важи увек, па ма какво било $\lambda > 0$), то значи да ће се цела крива налазити у првом квадранту. Пошто је $\lambda < 1$, то је, као што смо већ рекли у координатном почетку y - оса тангента на криву (1). Из свега овога је јасно да крива (1) у овом случају има облик као на сл. 16.

Најзад ако је $\lambda = 1$, тада једначина (1) представља праву линију, бисектрису правог угла између координатних оса која пролази кроз први и трећи квадрант.

Ако је количина λ какав ирационалан број, на пр. $\lambda = \pi$, онда крива (1) уопште није дефинисана.

Да би смо нашли обвојницу кривих (1) диференцирајмо једначину (1) по λ. Добићемо:

$$y - x^{\lambda} \log x = 0 ; \qquad (2)$$

резултат елиминације параметра λ из једначина (1) и (2) преставља тражену обвојницу. Елиминација нам даје:

$$y = e \log x , \qquad (3)$$

где је e познати Неперов број. То је једначина тражене обвојнице фамилије (1).

Да би смо показали колико кривих (1) пролази кроз неку тачку (a,b), где је $a > 0$, напоменимо прво, што смо већ рекли, да кадгод је $x > 0$ увек је и $y > 0$, пошто је λ увек позитивно, т.ј. кроз четврти квадрант не пролази ни једна од кривих (1). Значи да треба посматрати тачке (a,b) само у првом квадранту.

Ако вредности $x = a$, $y = b$ сменимо у једначини (1), добићемо једну једначину по λ:

$$a^{\lambda} - b\lambda = 0 . \qquad (4)$$

Јасно је да ће кроз тачку (a,b) пролазити онолико кривих (1), колико реалних и позитивних корена по λ има једначина (4).

Пошто једначину (4) можемо написати у облику:

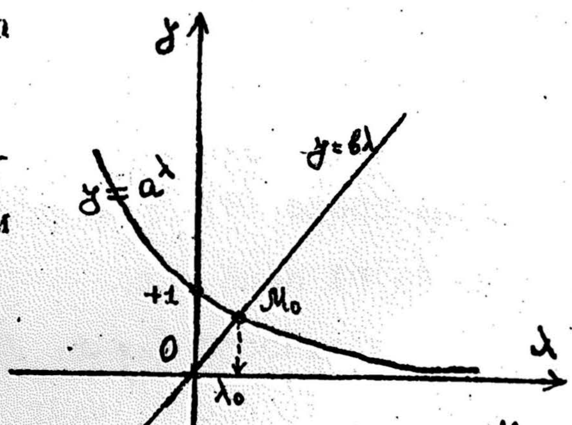
$$a^{\lambda} = b\lambda$$

то значи да апсцисе заједничких тачака кривих (λ апсциса, y ордината)

$$y = a^{\lambda} \ldots (5) \quad и \quad y = b\lambda \ldots\ldots (6)$$

представљају реалне корене трансцендентне једначине (4).

Ако је $a < 1$, онда експоненцијална крива (5) има облик као на сл. 17. Права (6), пошто је $b > 0$ заклапа са апсцисном осом увек оштар угао. На тај начин постоји, ма какво било $a < 1$, и $b > 0$, увек једна, и само једна, пресечна тачка M_0 криве (5) и праве (6). Значи да при тим условима, т.ј. кад се тачка (a,b) налази

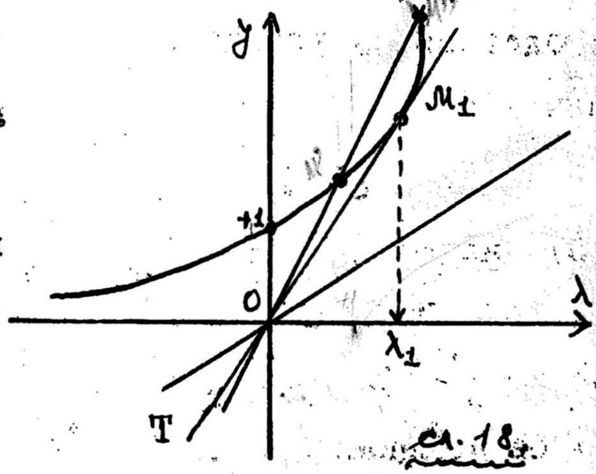


сл. 17.

у појасу између правих $a = 0$ и $a = 1$, а изнад осе $c b$, увек једначина (4) има само један реалан позитиван корен. Дакле кроз сваку тачку у поменутом појасу пролази само једна крива фамилије (1). (сл. 19):

$$\lambda_0 y - x^{\lambda_0} = 0$$

Ако је $a > 1$, онда експоненцијална крива (5) има облик као на сл. 18. Како коефицијенат правца тангенте TOM_1 има вредност: $e \log a$, то ће крива (5) и права (6) имати пресечних тачака само ако је коефицијенат правца праве (6) већи од: $e \log a$, т. ј.



сл. 18

$$b \geq e \log a$$

т. ј.

$$b - e \log a \geq 0,$$

јер ће се тада права (6) налазити у углу M_1OY"

И то ће бити две пресечне тачке M' и M", т. ј. једначина (4) имаће два реална корена λ' и λ''. Ови ће се корени налазити у интервалима:

$$0 < \lambda' < \frac{1}{\log a}, \quad \frac{1}{\log a} < \lambda'' < +\infty,$$

јер је:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\log a}.$$

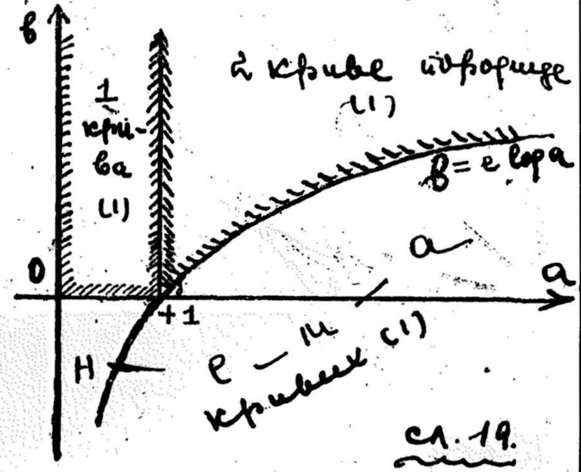
Значи да ће кроз сваку тачку (a, b) која задовољава услове:

$$a > 1, \ b - e \log a \geq 0 \qquad (7)$$

пролазити две криве фамилије (1).

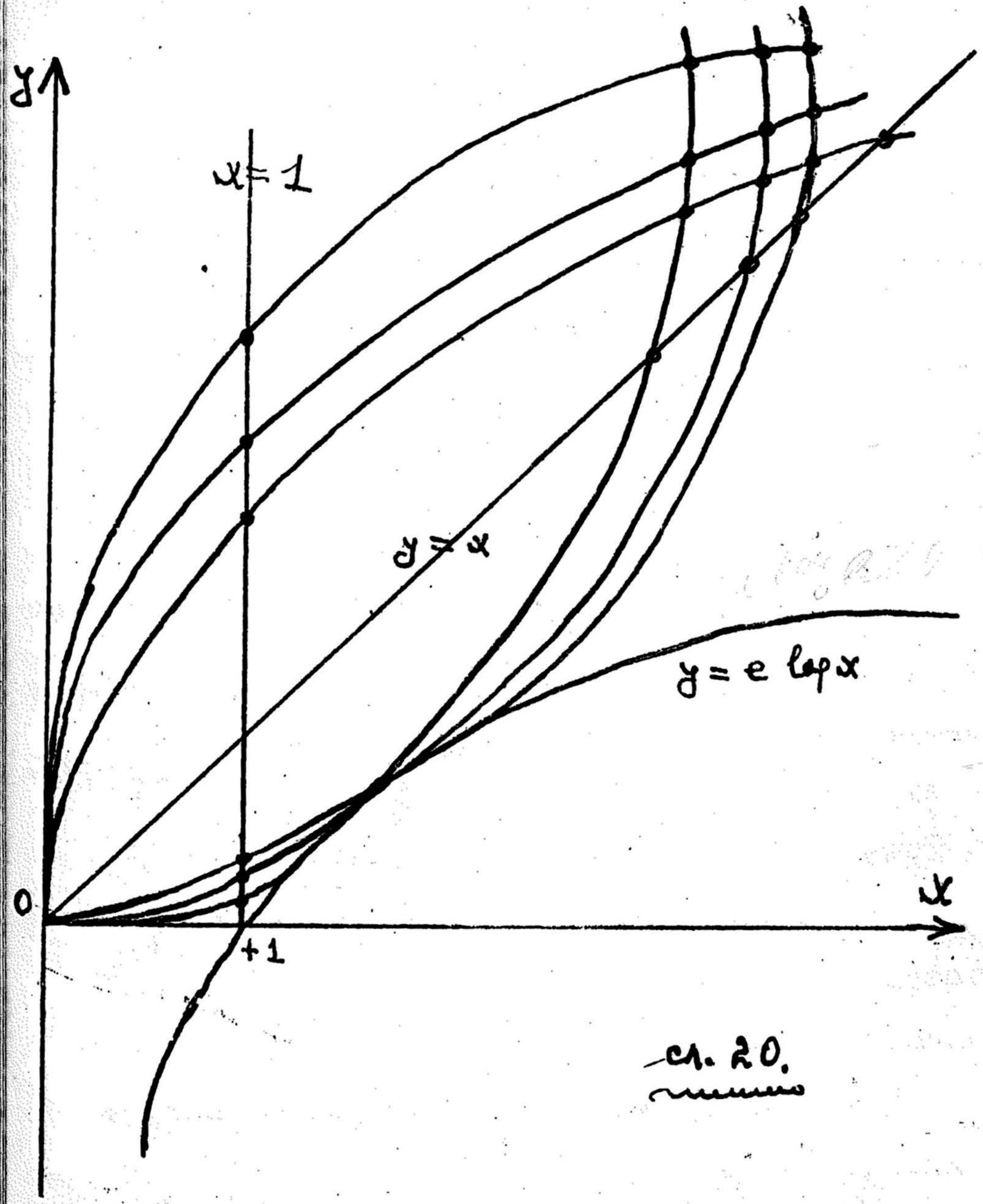
Домен у равни $\boxed{aob}$ дефинисан неједначинама (7) јесте део првога квадранта између праве: $a = 1$ и криве: $b = e \log a$.

Сви добијени резултати виде се јасно са сл. 19.



сл. 19.

Посматрајмо сада само криве фамилије (1) односно делове тих кривих у првоме квадранту. Из једначине (1) се види да за $x = 1$ ордината



сл. 20.

у има вредност : $y = \dfrac{1}{\lambda}$. Значи да ако нацртамо праву $x = 1$, онда одсечак на тој правој од њеног пресека са извесном кривом (1) до апсцисне осе представља реципрочну вредност вредности параметра λ која одговара тој кривој (1).

Из слике 20. се види да се у домену дефинисаном неједначинама (7), т.ј. у свакој његовој тачки секу по две криве фамилије (1) и то једна, којој одговара нека вредност параметра $\lambda > 1$, и друга којој одговара нека вредност параметра $\lambda < 1$.

<u>26. зад.</u> - Нека је A један произвољан број облика $A = Re^{\varphi i}$ (R и φ су стални); одредити све корене трансцендентне једначине $e^{\frac{1}{z}} = A$, где је $z = x + iy$. Показати да они сви леже на кривој, чија је једначина

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{\log R} = 0 \qquad (1)$$

и да их има бесконачно много у близини почетка.

Доказати да је тачка $z = 0$ есенцијални сингуларитет функције $e^{\frac{1}{z}}$.

(фебруара 1926 г.)

Како је $e^{2k\pi i} = 1$, где је <u>k</u> цео позитиван или негативан број или нула, то се број A може написати у облику:

$$A = R\, e^{(\varphi + 2k\pi)i}$$

па задата трансцендентна једначина постаје:

$$e^{\frac{1}{z}} = R\, e^{(\varphi+2k\pi)i} \qquad (\alpha)$$

Логаритмовањем се добија:

$$\frac{1}{z} = \log R + (\varphi + 2k\pi)i.$$

Кад сменимо $z = x + iy$, раздвојимо реални и имагинарни део на левој страни, па изједначимо реалне односно имагинарне делове леве и десне стране добијамо:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \log R\,, \quad -\frac{y}{x^2+y^2} = \varphi + 2k\pi \qquad (2)$$

Решење ових једначина по x и y даје:

$$x_k = \frac{\log R}{(\log R)^2 + (\varphi+2k\pi)^2}\,, \quad y_k = \frac{-(\varphi+2k\pi)}{(\log R)^2+(\varphi+2k\pi)^2} \qquad (3)$$

Значи да је непозната z дата изразом:

$$z_k = \frac{\log R - i(\varphi+2k\pi)}{(\log R)^2+(\varphi+2k\pi)^2} = \frac{\overline{\log A}}{|\log A|^2}$$

где смо са $\overline{\log A}$ означили конјуговану вредност

од log A. (Последњи израз за непознату z можемо добити и директно, логаритмовањем задате трансцендентне једначине па затим избацивањем имагинарности из именитеља).

Једначине (2) представљају нам две криве у равни непознате $z = x + iy$, у чијим се пресецима налазе корени једначине (α) Значи да се ти корени налазе сви на свакој од кривих (2) па значи да се они налазе и на првој од кривих (2), а то је у ствари крива (1), само што је једначина другачије написана.

Да корена z_k има заиста бесконачно много у близини почетка увериһемо се из једначина (3), јер дајући произвољном целом броју <u>k</u> разне врло велике вредности, количине x_k и y_k ће бити врло блиске нули, т.ј. добићемо бескрајно много парова (x_k, y_k) врло блиских нули што значи добићемо бескрајно много вредности z_k у близини почетка.

Да је вредност функције $e^{\frac{1}{z}}$ неодређена у близини координатног почетка, што пред -

ставља особину есенцијалног сингуларитета, јасно је из једначина (3), које нам показују да R и φ могу узимати бескрајно много произвољних разних вредности, па ће x_k, y_k бити веома мали, за разне врло велике вредности броја к. Што значи да је функција $e^{\frac{1}{z}}$, у близини почетка, равна каквом било произвољном броју $A = Re^{\varphi i}$. Очигледно је да је то случај и са њеном изврнутом вредношћу $e^{-\frac{1}{z}}$, па значи да је z = 0 есенцијални сингуларитет за функцију $e^{\frac{1}{z}}$

27. зад. - Одредити на параболоиду:

$$\frac{z}{\sqrt{3}} = x + \frac{y^2}{2} \qquad (1)$$

све криве, чије ће дирке заклапати са z - осом сталан угао од 30°.

(фебруара 1926 год.)

Систем тражених кривих линија биће претстављен двема једначинама и то једначином (1) и на пр. једначином пројекција тих линија на раван xoy, т.ј. једначином облика:

$$f(x, y) = 0 \qquad (1')$$

Узмимо за независно промењиву количину x. Онда нам једначина (1) даје:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{dz}{dx} = 1 + y\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

Знамо да је:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

или кад се за $\frac{dz}{dx}$ смени вредност (2):

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 3(1 + yy')^2 + y'^2} \qquad (3)$$

Како је cosinus угла, који тангента заклапа са z - осом, раван:

$$\frac{dz}{ds}$$

то је према задатку:

$$\frac{dz}{ds} = const. = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Ако једначину (2) поделимо једначином (3), па у резултату количину $\frac{dz}{ds}$ сменимо, према једначини (4), са $\frac{\sqrt{3}}{2}$, добићемо:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + yy'}{\sqrt{1 + y'^2 + 3(1 + yy')^2}}.$$

После редуцирања добија се диференцијална једначина

$$y' = \frac{2y}{1-y^2}$$

чији је општи интеграл:

$$y = C e^{2x + \frac{y^2}{2}} \qquad (5)$$

Једначине (1) и (5) представљају тражени систем кривих линија.

28 зад.- Дата је фамилија обртног елиптичног параболоида:

$$x^2 + y^2 = 2\,kz, \qquad (1)$$

где је <u>к</u> параметар. Наћи њихове ортогоналне трајекторије.

(фебруар 1926 г.)

Коефицијенти правца тангенцијалне равни дате породице површина јесу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{k}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{k}, \quad -1,$$

или, када се вредност за параметар <u>к</u> из једначине (1) смени у горњим изразима, они постају:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2zx}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2zy}{x^2+y^2}, \quad -1 \qquad (2)$$

Тангенцијална раван ортогоналних трајекторија мора бити управна на тангенциалној равни датих

површина. Из услова нормалности две равни (ако су коефицијенти правца тангенцијалне равни тражених трајекторија: p, q, - 1) имамо:

$$p\frac{\partial z}{\partial x} + q\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$$

или према (2):

$$p\,x + q\,y + \frac{x^2 + y^2}{2\,z} = 0 \qquad (3)$$

последња једначина представља нам парцијалну једначину тражених трајекторија. То је линеарна парцијална једначина, па је одговарајући систем симултаних једначина:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{2z\,dz}{x^2+y^2}.$$

Прве две размере дају нам један интеграл:

$$f_1 \equiv \frac{y}{x} = C_1.$$

Прва и трећа размера дају:

$$2\,x\,z\,dz + (x^2 + y^2)\,dx = 0;$$

ако ову једначину поделимо са x, можемо је написати у облику:

$$2z\,dz + \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] x\,dx = 0.$$

Према првом интегралу је:

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + C_1^2 = \lambda \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (4)$$

п… је $\lambda = const.$, зато последња диференцијална једначина постаје:

$$2z\,dz + \lambda x\,dx = 0.$$

Интеграција даје:

$$2z^2 + \lambda x^2 = C_2.$$

Кад избацимо λ (према (4)), добијени интеграл постаје:

$$f_2 = 2z^2 + x^2 + y^2 = C_2$$

Према томе је општи интеграл парцијалне једначине (3):

$$f_2 = F(f_1)$$

где је F произвољна функција свога аргумента; т.ј.:

$$2z^2 = -(x^2 + y^2) + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

где је $\mathfrak{F}$ произвољна функција. Последња једначина представља нам тражени систем ортогоналних трајекторија дате фамилије површина (1).

29. зад. - У једначини:

$$x^4 + ax^2 + bx + 1 = 0 \qquad (1)$$

одредити коефицијенте a и b тако да једначина има:

1° два двојна корена,

2° један тројни корен.

Решити једначину у оба случаја.

(јуни 1926 год.)

1° Да би једначина (1) имала два двојна корена, њена лева страна мора бити потпун квадрат једног полинома другог степена, а да би то било очигледно је да мора бити

$$b = 0, \quad a = \pm 2$$

Кад је $a = 2$, онда су корени: $x = \pm i$, а када је $a = -2$ онда су корени $x = \pm 1$.

2°. Да би једначина (1) могла имати један тројни корен њена лева страна мора бити дељива са: $(x-\alpha)^3$ где је: $x_1 = \alpha$ тај тројни корен. Као резултат те деобе добија се: $x + 3\alpha$ што значи, да је: $x_2 = -3\alpha$ прост корен горње једначине. Као остатак ове деобе добија се:

$$(a + 6\alpha^2)x^2 + (b - 8\alpha^3)x + (3\alpha^4 + 1)$$

Како овај остатак мора бити идентички раван нули за све вредности x - са, то коефицијенти морају бити равни нули, т.ј.:

$$a+6\alpha^2=0, \quad b-8\alpha^3=0, \quad 3\alpha^4+1=0.$$

Последње три једначине одређују нам a, b и α. Добија се:

$$\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{(2k+1)\frac{\pi}{4}i}, \quad a=-6\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}i},$$

$$b = 8\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} e^{(2k+1)\frac{3\pi}{4}i}$$

где је к = 0,1,2,3. Добијамо дакле за a, b, α по четири имагинарне вредности.

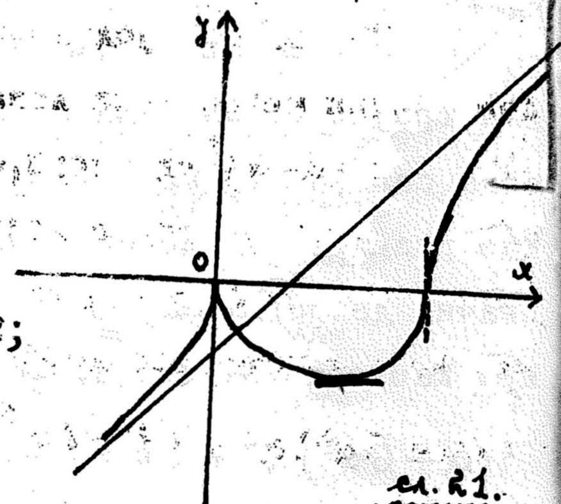
√30. зад. - Одредити асимптоте, максимуме и минимуме криве:

$$y=\sqrt[3]{x^2(x-6)}$$

и конструисати криву

(јуни 1926 год.)

Крива (1) има једну асимптоту: $y = x - 2$; један минимум ($x = 4$, $y = -2\sqrt[3]{4}$); једну превојну тачку ($x = 6$, $y = 0$). Координатни почетак је сингуларна тачка (повратна тачка) криве



сл. 21.

(1). Крива има облик као на слици 21. Први и други извод имају вредности:

$$y' = \frac{x-4}{x^{\frac{1}{3}}(x-6)^{2/3}}, \quad y''=\frac{-8}{x^{4/3}(x-6)^{5/3}}.$$

√31. зад. - Наћи такву површину, да растојање од пројекције ма које дате тачке $M(x,y,z)$ на раван xoy до праве - пресека равни xoy са тангентном равни у истој тачки тражене површине - има сталну дужину a.

(јуни 1926 год.)

Једначина тангентне равни у тачки $M(x,y,z)$ тражене површине гласи

$$(X - x)p + (Y - y)q = Z - z \qquad (1)$$

где су p и q непознати парцијални изводи $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Пресек тангентне равни (1) са равни xoy имаће за једначину:

$$pX + qY - px - qy + z = 0 \qquad (2)$$

(он се добија из једначине (1) за $Z = 0$); пројекција тачке M у равни xoy има за координате $M'(x,y)$. Одстојање тачке M' од праве (2) има за вредност:

$$d = \frac{z}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Према задатку мора бити увек : $\alpha = a$, т.ј.:

$$\frac{z}{\sqrt{p^2+q^2}} = a \qquad (3)$$

Једначина (3) представља нам парцијалну једначину тражене површине. Њен потпуни интеграл је:

$$z = C_1 e^{\frac{x+cy}{a\sqrt{1+c^2}}}$$

где су C и C_1 произвољне интеграционе константе. Сингуларни интеграл једначине (3) је:

$$z = C_1 e^{\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}}$$

√32. зад. - Израчунати помоћу рачуна остатака одређени интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx ,$$

где је x реално.

(јуни 1926 год.)

Пођимо од криволинијског интеграла:

$$J = \int_C \frac{e^{zi}}{(1+z^2)^2}\,dz.$$

Подинтегрална функција може се подвести под први случај I теоријске напомене. Она задовољава све тамо наведене услове. Значи да се на

горњи криволинијски интеграл може применити формула (7) поменуте теоријске напомене. На тај се начин добија:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i R_i$$

Остатак R_i има вредност (пол II-ог реда: $z=+i$, једини пол у контури C, сл. 10.):

$$R_i = \frac{1}{2ie}$$

Ако ту вредност за остатак R_i сменимо у последњој једначини, па на левој и десној страни раздвојимо реални и имагинарни део, изједначимо их респективно, добићемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e} ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0 .$$

Подинтегрална функција у првом интегралу је парна, па зато можемо написати:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2e} .$$

Тиме је задатак решен.

√33. зад. - Какве корене има једначина

$$f(x) = x^5 + mx + 4 = 0 \qquad (1)$$

за разне вредности коефицијента m.

(октобар 1926 год.)

Изводна једначина горње једначине је

$$f'(x) \equiv 5x^4 + m = 0 \qquad (2)$$

Ако је $m > 0$ једначина (2) нема реалних корена, па је Rolle-ов низ за једначину (1):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+4$	$+\infty$

Дакле једначина (1) за $m>0$ има само један реалан корен и то негативан.

Ако је $m<0$ онда једначина (2) има два реална корена:

$$x_{1,2} = \pm\left(-\frac{m}{5}\right)^{1/4},$$

па је Rolle-ов низ

x	$-\infty$	x_2	0	x_1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_2)$	$+4$	$f(x_1)$	$+\infty$

где је:

$$f(x_1) = 4\left[1 - \left(-\frac{m}{5}\right)^{5/4}\right]$$

$$f(x_2) = 4\left[1 + \left(-\frac{m}{5}\right)^{5/4}\right].$$

Кад је $m>-5$ онда су и $f(x_1)$ и $f(x_2)$ позитивни па једначина (1) има само један реалан корен и то у интервалу: $\left[-\infty, -\left(-\frac{m}{5}\right)^{1/4}\right]$. Кад је $m<-5$ онда је $f(x_1)<0$, а $f(x_2)>0$ па једначина (1) има три реална корена и то у интервалима:

$$\left[-\infty, -\left(-\frac{m}{5}\right)^{1/4}\right],\ \left[4, +\left(-\frac{m}{5}\right)^{1/4}\right],\ \left[\left(-\frac{m}{5}\right)^{1/4}, +\infty\right].$$

Ако је $m = -5$ онда је $x_1 = 1$ двојни корен једначине (1). Трећи реалан корен се, у томе случају, налази у интервалу $(-2, -1)$.

(Видети задатак 6.)

34. зад. - Наћи дирке криве линије:

$$2x^2 + 5xy + 8y^2 - 7x + y = 0 \qquad (1)$$

у теменима пречника, који пролази кроз координатни почетак

(октобар 1926 год.).

Теорија кривих линија другог степена нас учи да је једначина пречника који одговара тетивама правца m:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + m\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

где смо са $f(x,y)$ обележили леву страну једна-

чине (1). У нашем случају једначина (2) поста-
је:

$$4x + 5y - 7 + m\ (5x + 16y + 1\ ) = 0$$

или:

$$(5m + 4)\ x + (16m + 5)y + m - 7 = 0 \qquad (3)$$

Одредимо, према услову задатка, m тако да пречник (3) пролази кроз координатни почетак, т.ј. анулирајмо апсолутни члан у једначини (3). Одакле је: m = 7. На тај начин тражени пречник има за једначину:

$$x + 3y = 0 \qquad (4)$$

Решењем једначина (1) и (4) по x и y добијају се пресечне тачке пречника (4) и криве (1):

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{108}{11},\ y_2 = -\frac{36}{11}.$$

Једначине тангената на криву (1) у овим тачкама биће:

$$Y = 7X,\quad Y + \frac{36}{11} = 7\left(X - \frac{108}{11}\right)$$

јер обе тангенте имају правац тетива којима одговара пречник (4), т.ј. имају коефицијенат правца: m = 7.

Напоменимо да је крива (1) реална елипса,

35. зад. - Решити диференцијалну једначину:

$$2\ x^2 \frac{dy}{dx} - 4xy - y^2 = 0 \qquad (1)$$

и од интегралних кривих наћи ону криву која пролази кроз тачку x = 1, y = 1; наћи асимптоте те криве и конструисати је.

(октобар 1926 год.

Сменом: $y = \frac{1}{z}$ се једначина (1) доводи на линеарну а отуда добијамо општи интеграл једначине (1):

$$y = \frac{2x^2}{2C - x}. \qquad (2)$$

Кад у општем интегралу (2) ставимо x = 1, y = 1 добијамо

$$C = \frac{3}{2}$$

и то је вредност константе C, која одговара партикуларном интегралу који пролази кроз тачку (1,1).

$$\boxed{y = \frac{2x^2}{3 - x}}. \qquad (3)$$

Крива (3) има две асимптоте

$$x = 3,\ y = -2x - 6;$$

има затим један минимум (x = 0, y = 0) и један максимум (x = 6, y = - 24). Крива (3) је <u>хипербола</u> чији центар има координате (x = 3, y = - 12) а чије осе имају за једначине:

$$(2 \pm \sqrt{3})x + y + 3(2 \mp \sqrt{3}) = 0.$$

36 зад. За које ће вредности коефицијената λ и μ интеграл функције

$$f(z) = \frac{\lambda e^{z} + \mu e^{2z} + e^{3z}}{z^2 - 3z + 2} \qquad (1)$$

бити униформна функција променљиве z.

(октобар 1926 г.)

Функцију (1) можемо написати у облику

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda e^{z} + \mu e^{2z} + e^{3z}}{z^2 - 3z + 2} &= \frac{\lambda e^{z}}{z-2} + \frac{\mu e^{2z}}{z-2} + \\ &+ \frac{e^{3z}}{z-2} - \frac{\lambda e^{z}}{z-1} - \frac{\mu e^{2z}}{z-1} - \frac{e^{3z}}{z-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

На тај начин смо интеграл функције (1) растворили на збир од шест интеграла. Ни један се од тих интеграла не може наћи у коначном облику, већ се мора подинтегрална функција развити у Laurant - ов ред па онда интегралити. Имаћемо уопште

$$\frac{e^{kz}}{z-a} = \frac{e^{ka}}{z-a} + e^{ka} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{k^{\nu}(z-a)^{\nu-1}}{\nu!}$$

Како је ред на десној страни (други члан десне стране) конвергентан у целој равни, т.ј. представља једну целу функцију, тога можемо интегралити па имамо:

$$\int \frac{e^{kz}}{z-a} dz = e^{ka} \log(z-a) + e^{ka} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{k^{\nu}(z-a)^{\nu}}{\nu . \nu!} \qquad (3)$$

Други члан на десној страни последње једначине претставља нам бесконачан ред конвергентан у целој равни, дакле холоморфну, односно униформну функцију променљиве z Ако формулу (3) применимо на сваки од шест сабирака са десне стране једначине (2) онда ћемо дефинитивно добити

$$\int \frac{\lambda e^{z} + \mu e^{2z} + e^{3z}}{z^2 - 3z + 2} dz = (\lambda + \mu e^{2} + e^{4}) e^{2} \log(z-2) -$$

$$- (\lambda + \mu e + e^{2}) e \log(z-1) + \varphi(z)$$

где је $\varphi(z)$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) = \lambda e^{2} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{(z-2)^{\nu}}{\nu . \nu!} &+ \mu e^{4} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{2^{\nu}(z-2)^{\nu}}{\nu . \nu!} + \\ + e^{6} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{3^{\nu}(z-2)^{\nu}}{\nu . \nu!} &- \lambda e \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{(z-1)^{\nu}}{\nu . \nu!} - \\ - \mu e^{2} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{2^{\nu}(z-1)^{\nu}}{\nu . \nu!} &- e^{3} \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} \frac{3^{\nu}(z-1)^{\nu}}{\nu . \nu!}. \end{aligned}\right\} (4)$$

ако су сви редови са десне стране последње једнаине конвергентни у целој равни промењиве z, то е $\varphi(z)$ једна униформна функција промењиве z.

Да би интеграл (4) био униформна функција од z, мора дакле нестати логаритама, т.ј. мора бити:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda+\mu e^{2}+e^{4}=0\\ \lambda+\mu e+e^{2}=0\end{array}\right\}\quad(6.)$$

дакле је:

$$\lambda=e^{3},\quad \mu=-e(e+1).\ ---\ (7).$$

ко дакле λ и μ имају вредности (7) онда се интеграл функције (1) своди на униформну функцију $\varphi(z)$ ату једначином (5)

I. Теоријска напомена

Доказаћемо следећи став:

Ако је функција f(z) једна мероморфна функција, онда, да би функција:

$$F(z)=\int_{\alpha}^{z} f(z)\,dz$$

била униформна, потребно је и довољно да

сви остаци полова функције f(z) буду равни нули.

Јор, ако је a пол к - тог реда функције f(z) тада је:

$$f(z)=\frac{R_a}{z-a}+\sum_{2}^{k}\frac{b_\nu}{(z-a)^\nu}+\sum_{0}^{\infty}a_\nu(z-a)^\nu$$

па је:

$$\int_{\alpha}^{z} f(z)\,dz = C+R_a\log(z-a)+\sum_{2}^{k}\frac{-b_\nu}{(\nu+1)(z-a)^{\nu+1}}+$$
$$+\sum_{0}^{\infty}\frac{a_{\nu+1}}{\nu+1}(z-a)^{\nu+1};$$

дакле, да би логаритам ишчезао, мора бити:

$$R_a=0.$$

Ако су сви полови првог реда, тада се остатак добија из израза:

$$R_a=\lim_{z=a}(z-a)f(z).$$

Друго решење 36. задатка.- У овом задатку подинтеграална функција има два пола: z = 2, z = 1 који су оба првога реда. Према другој теоријској напомени мора дакле бити:

$$R_2=\lim_{z=2}(z-2)f(z)=\lambda e^{2}+\mu e^{4}+e^{6}=0$$

$$R_1 = \lim_{z=1} (z-1) f(z) = -(\lambda e + \mu e^2 + e^3) = 0,$$

а то су једначине (6).

37. зад. – Које услове треба да задовоље коефицијенти једначине петог степена:

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0 \qquad (1)$$

да би се та једначина подесном сменом $x = t + h$ свела на биномну једначину

$$t^5 = A \qquad (2)$$

Дати један пример такве једначине (1), где ће коефицијенти бити дати у тачним бројевима, као и њено решење

(фебруар 1927. г.)

Претпоставимо да смо у једначини (1) извршили смену: $x = t + h$, и да смо после те смене добили једначину (2). Ако сад у једначини (2) извршимо супротну смену, т. ј. смену: $t = x - h$, морамо опет добити једначину (1). Једначина (2) постаје

$$(x-h)^5 = A$$

или

$$\left.\begin{array}{l} x^5 - 5hx^4 + 10h^2x^3 - 10h^3x^2 + 5h^4x - \\ \quad - h^5 - A = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Као што смо већ рекли једначина (3) је у ствари првобитна једначина (1). Поређењем коефицијената у једначинама (1) и (3) долазимо до тражених услова:

$$a_1 = -5h, \quad a_2 = 10h^2, \quad a_3 = -10h^3,$$

$$a_4 = 5h^4, \quad a_5 = -h^5 - A.$$

Јасно је из последњег услова да апсолутни члан a_5 може бити ма какав (и нула), пошто је $\underline{A}$ произвољно.

Ако узмемо на пр. $h = 1$, онда једначина (1) постаје:

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + a_5 = 0$$

после смене: $x = t + 1$, добиће се једначина:

$$t^5 = -1 - a_5$$

Узмимо на пр. да је $a_5 = -\lambda^5 - 1$, па добијамо:

$$t^5 = \lambda^5,$$

Решење ове једначине је:

$$t = \lambda e^{\frac{2k\pi i}{5}}. \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Ако се вратимо на непознату x добијамо:

$$x = \lambda e^{\frac{2k\pi i}{5}} + 1. \qquad (k=0,1,2,3,4).$$

38 зад.- Наћи геометријско место пројекција темена параболе $y^2 = 2x$ на њеним тангентама.

(фебруар 1927 год

Једначина тангенте у тачци (x, y), на параболу $y^2 = 2x$, биће

$$X - yY + x = 0$$

Ако са (ξ, η) обележимо координате пројекције темена параболе на ову тангенту онде се добија (доводећи једначину тангенте на нормални облик: $X\cos\alpha + Y\sin\alpha - p = 0$, и уочивши да је: $\xi = p\cos\alpha$, $\eta = p\sin\alpha$) да је:

$$\xi = -\frac{x}{y^2+1}, \quad \eta = \frac{xy}{y^2+1}$$

Елиминација количина x и y из последњих двеју једначина и из једначине параболе даје:

$$2\xi^3 + 2\xi\eta^2 + \eta^2 = 0.$$

Последња једначина јесте једначина траженог геометријског места. Лако се уверити да она представља Dioclès - ову цисоиду чија асимптота има за једначину:

$$\xi = -\frac{1}{2}.$$

39 зад.-Наћи општи интеграл једначине

$$y''' - y'' - y' + y = e^{\alpha x} \qquad (1)$$

где је α константа различита од један; наћи онај партикуларан интеграл једначине (1) који постаје нула, као и његов први и други извод за $x = 0$

(фебруар 1927 год)

Партикуларни интеграл једначине (1) са независним чланом има облик

$$y = A e^{\alpha x}$$

где још треба одредити константу A. Ако нађемо y', y'', y''' па све то сменимо у једначини (1) добијамо

$$A = \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}$$

па је зато

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}.$$

Карактеристична једначина једначине (1) гласи

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

или

$$(r-1)^2(r+1) = 0$$

Зато је општи интеграл једначине (1) без независног члана

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-x}.$$

основу свега тога општи интеграл целе једначи-
(1) има облик:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-x} + \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)} .$$

жени партикуларни интеграл, који, заједно са своја
прва извода, постаје раван нули за x = 0, јесте:

$$y_0 = \frac{e^x}{4(\alpha-1)^2}\left[(\alpha-3) - 2(\alpha-1)x\right] -$$

$$- \frac{e^{-x}}{4(\alpha+1)} + \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)} .$$

II. Теориjска напомена:

Израчунавање одређених интеграла

2) помоћу Рачуна Остатака.

Видели смо већ да се на основу Кошијеве теореме
о еквиваленцији путања, полупречници појединих круго
а дуж којих се врши интеграција пуштају да теже ну-
и или да бескрајно расту и да тада интеграли узети
уж тих кругова обично теже нули. За доказивање да
и интеграли заиста теже нули могу нам често пута
орисно послужити следећа два правила:

1° Прво правило изражено је једначином:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| , \qquad (1)$$

где су z_1 и z_2 две комплексне количине. Ово је спе
циалан случај, добро познате теореме: да је модуо
збира неколико комплексних количина мањи или највиш
раван збиру модула тих количина.

2° Ово правило изражено је једначином:

$$|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| , \qquad (2)$$

или речима: модуо збира две комплексне количине
је већи или најмање раван модулу разлике модула са
мих тих количина.

Нека су a и b модули двеју комплексних к
личина: z_1 и z_2, и то нека је $b \geqq a$; нека је зат
α разлика аргумената истих количина. Тада је:

$$|z_1 + z_2| = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| = b - a .$$

Ако ове две вредности сменимо у неједначини (2) она
постаје очевидна.

Из неједначине (2) директно излази и неједн
чина:

$$\frac{1}{|z_1+z_2|} \leqslant \frac{1}{\big||z_1|-|z_2|\big|} \qquad (3)$$

Неједначине (1) и (3) се непосредно примењују
конкретним случајевима. То ћемо видети у 40. за-
тку.

40. зад. - Израчунати одређени интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

моћу рачуна остатака.

(фебруар 1927 год.)

Пођимо од криволинијског интеграла:

$$J = \int_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2}\,dz.$$

нкција: $f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$ има логаритамску кри-
чку тачку z = 0, и два пола другога реда: z = ± i.
а је униформна у контури C, која се састоји из
а концентрична полукруга (Γ) и (γ) и два одсеч-
x - осе: $a'b'$ и $a''b''$, и у тој контури има са-
пол другога реда: z = + i. Зато је, према Cauchy-
ој теореми, вредност интеграла J дата једначином:

$$J = 2\pi i\, R_i \qquad (1)$$

е је R_i остатак функције f(z) за пол z = + i. Тај
статак има вредност:

$$R_i = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\log z}{(z+i)^2}\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}i.$$

ато једначина (1) постаје:

$$J = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}i. \qquad (2)$$

Интеграл J можемо разложити на следећа чети-
интеграла:

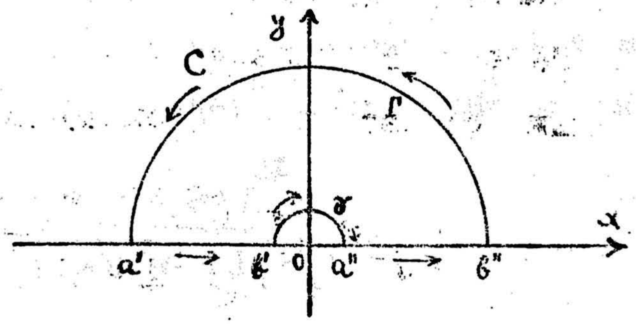
$$J = \int_C = \int_{a''b''} + \int_{\Gamma} + \int_{a'b'} + \int_{\gamma}.$$

уж одсечка $a''b''$, z
реално, т.ј.:

z = x, dz = dx

је:

$$\int_{a''b''} = \int_r^R \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$



сл. 22.

о у тачки a'' лога-
там: log z има реалну вредност, онда после окре-
ња дуж полукруга (Γ), у тачци a', имамо детерми-
цију: log z + πi. Зато ће интеграл дуж одсечка
$a'b'$ имати вредност:

$$\int_{a'b'} = -\int_R^r \frac{\log x + \pi i}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Интеграли дуж полукруга (Г) и (γ) теже нули кад бескрајно расте, а $\underline{r}$ тежи нули. Зато интеграл J постаје:

$$J = 2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx + \pi i\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} \,. \qquad (3)$$

Докажимо да заиста интеграли $\int_\Gamma$ и $\int_\gamma$ же нули за $R \to \infty$ и $r \to 0$. Први од њих изгл

$$\int_\Gamma = i\int_0^{\pi}\frac{\log R + \theta i}{(1+R^2e^{2\theta i})^2}\,R\,e^{\theta i}\,d\theta,$$

пошто је дуж полукруга (Г): $z = Re^{\theta i}$, $dz = Rie^{\theta i}$

На основу правила: да је модуо интеграла (збира) њи од интеграла (збира) модула, имамо:

$$\left|\int_\Gamma\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{|\log R+\theta i|}{|1+R^2e^{2\theta i}|^2}\,R\,d\theta \qquad (4)$$

На основу неједначине (1) III. теоријске напомене имамо:

$$|\log R + \theta i| \leq \theta + \log R$$

пошто је:

$$|\theta i| = \theta \quad , \quad |\log R| = \log R$$

јер је R > 1. (иначе би пол z = + i био ван ко- ре C).

На основу неједначине (3) III теоријске напомене је:

$$\frac{1}{|1+R^2e^{2\theta i}|^2} \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

Зато је:

$$\frac{|\log R+\theta i|}{|1+R^2e^{2\theta i}|^2} \leq \frac{\theta+\log R}{(R^2-1)^2}$$

На тај начин неједначина (4) постаје:

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_\Gamma\right| &< \int_0^{\pi}\frac{\theta+\log R}{(R^2-1)}\,R\,d\theta = \\ &\leq \frac{R}{(R^2-1)^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi\log R\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

На исти начин се добија:

$$\left|\int_\gamma\right| < \frac{r}{(1-r^2)^2}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\log r\right) \qquad (6)$$

јер је $r<1$. Неједначине (5) и (6) јасно показују да интеграли $\int_\Gamma$ и $\int_\gamma$ теже нули за $R \to \infty$ и $r \to 0$. (На бројитељ десне стране неједначине (6) треба применити Лоиталово правило.)

Поређењем једначина (2) и (3) добија се

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx + \pi i\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i$$

дакле је:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

41. зад.- Кроз једну покретну тачку M(α , β) на параболи $y^2 = x$ повући праву D управну а правој, која спаја тачку M (α,β) са теменом араболе; наћи обвојницу правих D.

(јуни 1927 г.).

Коефицијенат правца праве, која спаја теме араболе са тачком M(α,β) на параболи, је: $\frac{\beta}{\alpha}$; ато је коефицијенат правца праве $\mathcal{D}$: $-\frac{\alpha}{\beta}$; па је едначина праве $\mathcal{D}$:

$$y-\beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha).$$

ако је тачка M (α,β) на параболи, то је: $\beta^2=\alpha$,

па зато једначина праве $\mathcal{D}$ постаје:

$$y-\beta = -\beta(x-\beta^2)$$

или:

$$\beta x + y - \beta^3 - \beta = 0. \qquad (1)$$

Да би смо нашли обвојницу правих $\mathcal{D}$, диференцирајмо једначину (1) по β , јер је β промен- љив параметар. Добићемо:

$$x - 3\beta^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

Елиминација параметра β из једначине (1) и (2) даје:

$$27\, y^2 = 4\,(x-1)^3.$$

Последња једначина представља тражену обвојницу правих $\mathcal{D}$. То је семи- кубна парабола чија повратна тачка има координате: $x = 1$, $y = 0$.

42 зад.- Наћи диференцијалну једначину кругова, који се додирују у једној истој тачки и одредити ортогоналне трајекторије ових кругова.

(јуни 1927 год.)

Нека се сви ови кругови додирују у координатном почетку, а заједничка дирка нека им је у -

оса. Тада је њихова једначина:

$$x^2+y^2-2\alpha x=0. \qquad (1)$$

Диференцирањем једначине (1) добија се:

$$y'=-\frac{x-\alpha}{y} \qquad (2)$$

Елиминација параметра α из једначина (1) и (2) даје:

$$2xyy'+x^2-y^2=0 \qquad (3)$$

То је тражена диференцијална једначина.

Из једначине (3) је коефицијенат правца тангенте кругова (1) дат изразом:

$$m=\frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Диференцијална једначина ортогоналних трајекторија биће:

$$m=-\frac{1}{y'},$$

т.ј.

$$\frac{y^2-x^2}{2xy}=-\frac{1}{y'},$$

или:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}. \qquad (4)$$

Диференцијална једначина (4) је хомогена једначина првога реда, која се интеграли сменом: $y = ux$,

где је u нова функција. Општи интеграл једначине (4) је:

$$x^2+y^2-2\beta y=0 \qquad (5)$$

где је β произвољна интеграциона константа. Систем кругова (1) има дакле за ортогоналне трајекторије опет систем кругова.

43.зад.- Наћи општи интеграл парцијалне једначине:

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=1. \qquad (1)$$

(јуни 1927 год.)

Систем симултаних диференцијалних једначина који одговара горњој линеарној парцијалној једначини је:

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{1} \qquad (2)$$

Диференцијална једначина:

$$\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{z}$$

може се написати у облику:

$$\frac{z\,dy-y\,dz}{z^2}=\frac{dz}{z},$$

т.ј.

$$d\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{dz}{z}.$$

Одатле имамо један интеграл:

$$V_1 \equiv \frac{1}{z}\, e^{\frac{y}{z}} = C_1 \qquad (3)$$

Једначина:

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dz}{z}$$

може се написати у облику:

$$d\left(\frac{x}{z}\right)=\frac{y}{z}\,\frac{dz}{z}\,; \qquad (4)$$

из једначине (3) је:

$$\frac{y}{z}=\log C_1 z\,,$$

па зато једначина (4) постаје:

$$d\left(\frac{x}{z}\right)=\log C_1 z\cdot\frac{dz}{z}\,.$$

Интеграл је:

$$\frac{x}{z}=\frac{(\log C_1 z)^2}{2}+C_2\,,$$

или пошто избацимо константу C_1:

$$V_2 \equiv \frac{2zx-y^2}{2z^2}=C_2\,. \qquad (5)$$

Из диференцијалне једначине:

$$\frac{dz}{z}=du$$

имамо директно:

$$V_3 \equiv u-\log z = C_3 \qquad (6)$$

На тај смо начин добили три интеграла система (3): V_1, V_2, V_3.

Теорија нас учи да ће општи интеграл линеарне једначине (1) бити:

$$V_3=\varphi(V_1, V_2)\,,$$

где је φ произвољна функција својих аргумената. У нашем случају је тражени општи интеграл једначине (1):

$$u=\log z+\varphi\left(\frac{1}{z}\,e^{\frac{y}{z}},\ \frac{2zx-y^2}{2z^2}\right).$$

44. зад.-Које услове треба да задовоље реалне функције $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ па да функција:

$$f(x,y)+i\left[f(x,y)+\varphi(x,y)\right] \qquad (1)$$

буде аналитичка?- Када је то случај интегралити диференцијалну једначину првога реда:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) + i\left[f(x,y) + \varphi(x,y)\right] \qquad (2.)$$

(јуни 1927 год.)

Да би израз : u (x,y) + i v (x,y) претстављао аналитичку функцију треба да су задовољени услови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

У нашем случају они постају:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Кад су они задовољени онда израз (1) претставља аналитичку функцију и можемо написати:

$$f(x,y) + i\left[f(x,y) + \varphi(x,y)\right] = \mathfrak{F}(z),$$

где је z = x + iy. Диференцијална једначина (2) тада постаје:

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{F}(z).$$

Ако последњу једначину помножимо са i, па јој додамо идентитет:

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

добићемо:

$$\frac{dx}{dx} + i\frac{dy}{dx} = 1 + i\,\mathfrak{F}(z),$$

или:

$$\frac{dx + i\,dy}{dx} = 1 + i\,\mathfrak{F}(z)$$

Како је: dx + i dy = dz, то добијамо:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + i\,\mathfrak{F}(z)$$

одакле је:

$$x = \int \frac{dz}{1 + i\,\mathfrak{F}(z)} + C = \Phi(z) + C,$$

т.ј.:

$$x = \Phi(x+iy) + C,$$

одакле је:

$$y = \Psi(x, C).$$

Последња једначина претставља општи интеграл диференцијалне једначине (2)

45.зад.- Наћи максимуме и минимуме криве:

$$y = a \log\left(\cos\frac{x}{a}\right), \qquad (1)$$

где је <u>a</u> позитивна константа, а логаритам је природан. Затим одредити асимптоте, полупречник кривине у ма којој тачци, лук <u>s</u> рачунат од координатног почетка до ма које тачке. Напослетку конструисати приближно криву.

(октобар 1927 год.

(1) можемо извести следеће закључке:

1°. Како је функција $\cos\frac{x}{a}$ периодична са периодом $2a\pi$, то је криву (1) довољно посматрати у интервалу $(x = 0,\ x = 2\pi a)$ или, што је исто, у интервалу $(x = -\pi a,\ x = +\pi a)$.

2°. Како је логаритам негативне количине имагинаран, то ће ордината y бити реална само кад је $\cos\frac{x}{a}$ позитиван. За наш интервал $(x = -\pi a,\ x = +\pi a)$ то ће бити за x у интервалу $\left(-\frac{\pi a}{2}, +\frac{\pi a}{2}\right)$. Зато ћемо криву (1) посматрати само у овом последњем интервалу.

3°. Како је $\cos\frac{x}{a}$ увек мањи од јединице, то је ордината y увек негативна. Значи крива (1) нема тачака изнад апсцисне осе.

4°. Из једначине (1) је најзад јасно да ће y бити бескрајно, и то $-\infty$, кад је $\cos\frac{x}{a} = 0$, т.ј. кад је $x = (2k+1)\frac{\pi a}{2}$, и то само у томе случају. Значи да наша крива има бесконачно много асимптота паралелних оси oy, чије су једначине:

$$x = (2k+1)\frac{\pi a}{2}$$

где је k цео позитиван или негативан број или нула.

Из једначине (1) је тако исто јасно да ће y бити равно нули за $x = 2k\pi a$.

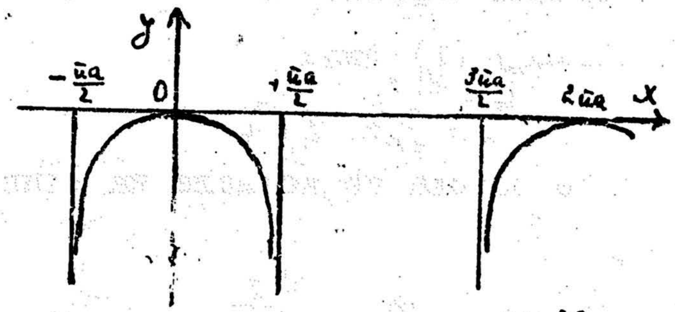
Први и други извод ће бити:

$$y' = -\operatorname{tg}\frac{x}{a}$$

$$y'' = -\frac{1}{a}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{a}\right) = -\frac{1}{a}\left(1+y'^2\right).$$

Први извод је раван нули за $x = k\pi a$. Од ових вредности треба одмах одбацити вредности кад је k непарно, јер је тада ордината y имагинарна. Дакле први извод је раван нули за $x = 2k\pi a$. То су све тачке максимума, јер је други извод негативан, кад год је $y' = 0$. $\left(y'' = -\frac{1}{a}\right)$. Одговарајућа ордината је увек $y = 0$.

На основу свега тога јасно је да ће крива (1) бити облика као на сл. 23.



сл. 23

Кад већ нађене вредности за y' и y'' сменимо у изразу за полупречник кривине добићемо:

$$R = + \frac{a}{\cos\frac{x}{a}}$$

Елеменат лука је:

$$ds = \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}},$$

зато је:

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}} = a \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a}\right).$$

46. зад. – Из сваке тачке равни могу се повући четири нормале на елипсу. Доказати да су бар две од тих нормала реалне.

(октобар 1927 год.)

Нека је једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Једначина нормале из неке тачке (α, β) у равни на елипсу (1) биће:

$$Y - \beta = m(X - \alpha). \qquad (2)$$

Ако је основа те нормале на елипси тачка (x, y), онда је:

$$m = \frac{a^2 y}{b^2 x}. \qquad (3)$$

Како нормала (2) пролази кроз своју основу (x, y),

то координате (x, y) задовољавају једначину (2) па имамо:

$$y - \beta = m(x - \alpha). \qquad (4)$$

Ако из једначина (1), (3) и (4) елиминишемо x и y добићемо једначину која нам одређује коефицијенат правца нормале из тачке (α, β) на елипсу (1). Резултат те елиминације је:

$$(a^2 + b^2 m^2)(\beta - \alpha m)^2 - m^2 c^4 = 0. \qquad (5)$$

Како је последња једначина по m четвртог степена, то значи добијамо за m четири вредности, па дакле постоје и четири нормале из тачке (α, β) на елипсу.

Обележимо леву страну једначине (5) са $f(m)$. Како $f(m)$ мења знак кад m варира у интервалу $(0, \frac{\beta}{\alpha})$, јер је:

$$f(0) = a^2\beta^2 > 0, \quad f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -m^2 c^4 < 0.$$

то значи да једначина (5) има у том интервалу један реалан корен. Пошто је реч о једној једначини парног степена (са реалним коефицијентима) то значи да она мора увек имати два реална корена пом.

Значи да увек постоје бар две реалне нормале из тачке (α, β) на елипсу (1).

47.зад.- Интегралити диференцијалну једначину:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \log(1+x) \qquad (1)$$

и наћи онај партикуларни интеграл који је холоморфан у близини почетка.

(октобар 1927 г.)

Једначина (1), после смене: $x = e^t$, постаје

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \log(1+e^t) \qquad (2)$$

општи интеграл једначине (2) добићемо методом варијације констаната. Он ће бити:

$$\left.\begin{aligned} y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \\ + \frac{1}{2}\frac{(1+e^t)^2}{e^{2t}}\log(1+e^t) - \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ако се вратимо на x, добићемо општи интеграл једначине (1) у облику:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{x^2}\log(1+x) - \frac{3}{4} \qquad (3')$$

2.

Ако функцију $\log(1+x)$ развијемо у Маклоренов ред добићемо:

$$\log(1+x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu}. \qquad (4)$$

Овај ред је конвергентан у кругу описаном око почетка са полупречником 1. Ставимо сада у општи интеграл (3') израз (4) па ћемо после срећивања добити:

$$y = \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_1 + \frac{1}{2}}{x} + \sum_1^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \qquad (5)$$

где је ред на десној страни конвергентан у горњем кругу.

Да би израз y представљао холоморфну функцију од x у близини почетка очигледно је да треба у изразу (5) да отпадну чланови са x-ом у имениоцу. То ће бити када је:

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 0.$$

Зато тражени партикуларни интеграл холоморфан у близини почетка има облик:

$$y = \frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{x^2}\log(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}.$$

а $x = 0$ он постаје $y = 0$.

Напомена.- При одређивању траженог партику-
арног интеграла могли бисмо и овако поступити:
шти интеграл y може се написати у облику

$$y = \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{x}\left[C_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\log(1+x)\right] + $$

$$+ \frac{1}{x}\log(1+x) + \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{3}{4}.$$

ако је израз $\frac{1}{x}\log(1+x)$ коначан у близини почет-
а (има вредност 1) то је јасно да је $x = 0$ пол
ругог реда за интеграл y. Ако се узме $C_2 = 0$, он-
а је $x = 0$ пол првог реда. Да би смо и тај пол
дбацили из интеграла y потребно је и довољно
а остатак функције y за тај пол буде раван нули.
ад се узме $C_2 = 0$, интеграл y постаје:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{x^2}\log(1+x) - \frac{3}{4}.$$

статак за пол првога реда $x = 0$ има вредност:

$$R_0 = C_1 + \frac{1}{2}$$

датле се добија већ нађена вредност:

$$C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Напомена:
Много је простије приметити да је:

$$\frac{d}{dx}(x^2y' + 2xy) = x^2y'' + 4xy' + 2y$$ па је

$$x^2y' + 2xy = \int \ln(1+x)\,dx + C$$ и тд.

48.зад.- Нека је $f(z)$ функција промењиве z, претстављена бескрајним производом:

$$f(z) = u_0 u_1 u_2 \dots \qquad (1)$$

где је:

$$u_k = e^{2\pi i z^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

За које се вредности z ова функција може развити у конвергентан ред уређен по степенима од z?

Показати да, ма какав био број A независан од z, једначина:

$$f(z) - A = 0 \qquad (\alpha)$$

има бесконачно много корена у близини тачке $z = 1$.

(октобар 1927 г.)

Ако u_k сменимо у бескрајном производу (1) добићемо:

$$f(z) = e^{2\pi i(1 + z + z^2 + \dots)}$$

Бескрајан ред:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

конвергентан је само за $|z| < 1$ и збир му је тада $\frac{1}{1-z}$. Зато је:

$$f(z) = e^{\frac{2\pi i}{1-z}} \qquad (2)$$

где је $|z| < 1$. Из последње једначине је јасно да се функција $f(z)$ може развити у ред уређен по степенима од z који ће бити конвергентан за $|z|<1$ јер: 1° сам израз (2) вреди само за $|z|<1$ и 2°. тачка $z = 1$ је есенцијални сингуларитет функције $f(z)$.

За решење другог дела задатка видети задатак 26.

49.- зад.- Када се тачка $M(x,y)$ креће у равни xoy, мењају се и корени једначине петог степена:

$$t^5 + xt + y = 0$$

решене по t. Шта се може рећи за ове корене, кад се тачка $M(x,y)$ тако креће?

(фебруар 1928 год.)

Видети задатак 6.

50. зад.- Дата је крива:

$$y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x} \qquad (1)$$

где је a променљив параметар; наћи асимптоте ових кривих, затим геометријско место тачака у којима

је тангента паралелна x - оси и на послетку ортогоналне трајекторије датих кривих.

(фебруар 1928 г.

Крива (1) има три асимптоте:

$$x = 0, \ y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,x.$$

Диференцирањем једначине (1) по x добија се:

$$y' = \frac{2x^3 + a^3}{6x^2 y}. \qquad (2)$$

Координате тачака у којима је тангента паралелна x - оси морају задовољавати једначину:

$$y' = 0$$

т.ј. једначину:

$$2x^3 + a^3 = 0 \qquad (3)$$

Геометријско место ових тачака добићемо кад елиминишемо параметар a из једначина (1) и (3), јер њихове координате морају задовољавати обе те једначине. Та елиминација даје:

$$y = \pm x.$$

Последња једначина, која представља бисектрисе углова координатних оса, представља нам тражено геометријско место.

Коефицијенат правца тангенте на нашу криву према једначини (2) дат је изразом:

$$m = \frac{2x^3 + a^3}{6x^2 y}.$$

Кад још сменимо вредност за $\underline{a}^3$ из једначине (1) у последњој једначини, добијамо:

$$m = \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$$

Значи да је диференцијална једначина ортогоналних трајекторија:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{x^2 - y^2}{2xy},$$

т.ј.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \qquad (4)$$

То је хомогена диференцијална једначина првога реда, која се интеграли сменом: $y = ux$. Њен општи интеграл је:

$$x^2 = \frac{y^3 - b^3}{3y}$$

где је $\underline{b}^3$ интеграциона константа. Систем ортогоналних трајекторија система (1) је дакле исти систем (1) само му је положај обрнут за 90^0 око координатног почетка.

51.зад.- Наћи општи интеграл парцијалне једначине :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{z} \sin(x+y) \qquad (1)$$

и одредити интегралну површину која пролази кроз криву:

$$x + y = 0, \quad e^z . \cos^2 x = 1; \qquad (2)$$

затим одредити линије кривине на тој површини.

(фебруар 1928 год.)

Парцијална диференцијална једначина (1) је линеарна. Одговарајући систем обичних диференцијалних једначина гласи:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{e^z \sin(x+y)}$$

Одатле имамо два интеграла:

$$C_1 = x - y, \quad C_2 = 2e^{-z} - \cos(x+y),$$

па је општи интеграл једначине (1):

$$2e^{-z} - \cos(x+y) = \varphi(x-y) \qquad (3)$$

где је φ произвољна функција. Да би површина (3) пролазила кроз криву (2), мора једначина (3) да постане идентитет кад у њој сменимо на пр. $\underline{y}$ и $\underline{z}$ у функцији од $\underline{x}$ из једначина (2). Биће:

$$y = -x, \quad e^{-z} = \cos^2 x,$$

па једначина (3) постаје:

$$2\cos^2 x - 1 = \mathcal{C}(2x),$$

или:

$$\cos 2x = \mathcal{C}(2x).$$

Значи да функција $\mathcal{C}$ представља косинус, т.ј.:

$$\mathcal{C}(\alpha) = \cos\alpha .$$

На тај начин једначина (3) постаје:

$$2e^{-z} - \cos(x+y) = \cos(x-y),$$

што се може написати у облику:

$$e^{z}\cos x \cos y = 1 .$$

Последња једначина представља нам интегралну површину парцијалне једначине (1) која пролази кроз криву (2).

Пројекције линија кривине на раван xoy имају за једначине:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = C_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. (Види зад.3)

52.зад.- По којој ће се кривој кретати у својој равни тачка:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

када се тачка z креће по својој равни дуж квадранта круга полупречника 1 описаног око почетка.

(фебруар 1928 г.)

Једначине (α) у 4. задатку представљају параметарске једначине тражене путање. У њима θ треба да варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$.

53.зад.- Наћи тачке пресека две криве линије:

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2=1,\\ &b^2x^2-2abxy+a^2y^2+2ax+2by=1 \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где је:

$$a^2+b^2=1. \qquad (2)$$

Нацртати положај обе криве.

(јуни 1928 год.)

Ако прву од задатих једначина помножимо једначином (2) добићемо:

$$a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=1.$$

Одузмимо сад од тако добивене једначине другу од задатих једначина, па ћемо добити:

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2-2ax-2by=0$$

што се може написати у облику:

$$(ax+by)^2-2(ax+by)=0$$

или

$$(ax+by)(ax+by-2)=0,$$

што се распада у две једначине:

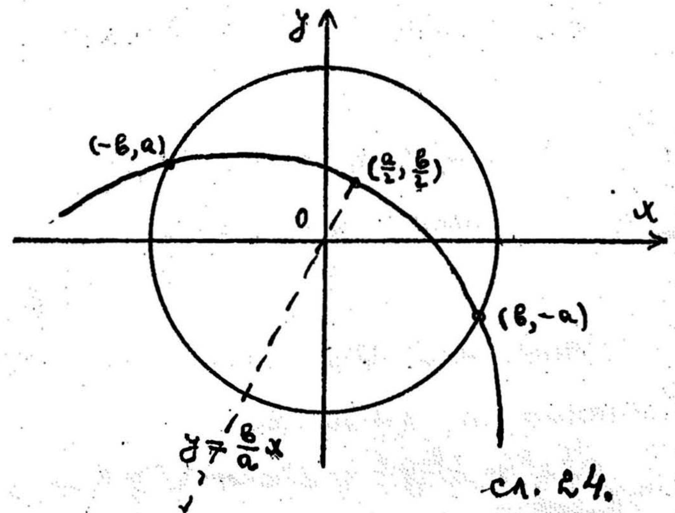
$$ax+by=0$$

$$ax+by-2=0.$$

На тај смо начин добили два система (I) и (II):

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1\\ ax+by&=0\end{aligned}\right\}(I)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1\\ ax+by&=2\end{aligned}\right\}(II)$$



сл. 24.

Решавајући ова два система једначина добићемо четири пара решења система (1). И то:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b\\ y_1&=-a\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2&=-b\\ y_2&=+a\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3&=2a+bi\sqrt{3}\\ y_3&=2b-ai\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_4&=2a-bi\sqrt{3}\\ y_4&=2b+ai\sqrt{3}\end{aligned}\right\}$$

Пошто имамо свега два пара реалних решења то значи да се горње криве секу свега у двема тачкама. Прва од кривих (1) је круг са центром у почетку. Друга крива је парабола чија оса има за једначину:

$$y=\frac{b}{a}x$$

а чије теме има координате: $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$.

Обе криве имају положај као на сл. 24.

54. зад. – Помоћу рекурентне формуле наћи вредност одређеног интеграла:

$$J_n=\int_{-1}^{+1}x^n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \qquad (1)$$

где је n цео позитиван број; испитати случајеве за n парно и n непарно.

(јуни 1928 год.).

Интеграл (1), множећи бројитељ и именитељ интегранта са $\sqrt{1-x}$, можемо написати у облику:

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} . \qquad (2)$$

На интеграл:

$$J'_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

применимо делимичну интеграцију, стављајући:

$$u = x^{n-1}, \quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

одакле је:

$$du = (n-1)x^{n-2}dx, \quad v = -\sqrt{1-x^2}$$

па је:

$$J'_n = \left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{+1} + (n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx. \qquad (3)$$

Како је први члан на десној страни последње једначине раван нули, то множећи и делећи интегрант последњег интеграла са: 1 + x, добијамо:

$$J'_n = (n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-2}(1+x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx =$$

$$= (n-1)\int_{-1}^{+1} (x^{n-2} + x^{n-1})\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx =$$

$$= (n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx + (n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$$

То јест:

$$J'_n = (n-1)J_{n-2} + (n-1)J_{n-1} \qquad (4)$$

Одатле, смењујући n са n + 1, добија се:

$$J'_{n+1} = nJ_{n-1} + nJ_n \qquad (5)$$

Сменивши вредности (4) и (5) за J'_n и J'_{n+1} у једначини (2) она постаје:

$$J_n = J'_n - J'_{n+1} =$$

$$= (n-1)J_{n-2} + (n-1)J_{n-1} - nJ_{n-1} - nJ_n ,$$

т.ј.:

$$J_n = -\frac{1}{n+1}J_{n-1} + \frac{n-1}{n+1}J_{n-2} . \qquad (6)$$

Једначина (3) се може написати у облику:

$$J'_n = (n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx . \qquad (7)$$

Одатле је јасно да је:

$$J'_{2k+1} = 0 \qquad (8)$$

пошто је функција под интегралним знаком непарна.

Према једначини (5) је:

$$J'_{2k+1} = 2k\,(J_{2k-1} + J_{2k}) = 0$$

т.ј.

$$J_{2k} = - J_{2k-1}. \qquad (9)$$

Једначина (2):

$$J_n = J'_n - J'_{n+1}$$

према томе даје:

$$J_{2k+1} = J'_{2k+1} - J'_{2k+2} = - J'_{2k+2},$$

или према једначини (5):

$$J_{2k+1} = -(2k+1)\,J_{2k} - (2k+1)\,J_{2k+1},$$

т.ј. (према једначини (9)):

$$J_{2k+1} = - \frac{2k+1}{2k+2}\,J_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2}\,J_{2k-1},$$

т.ј.

$$J_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\,J_{2k-1} \qquad (10$$

На исти начин се добија:

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,J_{2k-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (11)$$

Рекурентна формула (6) вреди за ма какво n, парно или непарно. Формуле (10) и (11) вреде само, прва за n = 2к + 1, а друга за n = 2к.

За израчунавање интеграла (1) ми ћемо употребити формулу (10). Стављајући сукцесивно: к = 1, 2, 3, ... имаћемо:

$$J_3 = \frac{3}{4}\,J_1$$

$$J_5 = \frac{5}{6}\,J_3 = \frac{5}{6}\;\frac{3}{4}\,J_1$$

$$J_7 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\,J_1$$

. . . .

. . . .

$$J_{2k+1} = \frac{(2k+1).(2k-1)\,.....\,5.\,3}{(2k+2)\cdot 2k\,.....\,6.\,4}\,J_1.$$

Имајући на уму да је:

$$J_0 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \pi$$

формула (6) нам даје:

$$J_1 = - \frac{\pi}{2},$$

зато је:

$$J_{2k+1} = - \frac{(2k+1)\,(2k-1)\,.....\,5.3.1}{(2k+2).\,2k\,.....\,6.4.2}\,\pi. \qquad (12)$$

Ако у место к ставимо к - 1 добијамо:

$$J_{2k-1} = -\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 5.3.1}{2k.(2k-2)\ldots\ldots 6.4.2}\,\pi.$$

Зато је према једначини (9):

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 5.3.1}{2k.(2k-2)\ldots\ldots 6.4.2}\,\pi. \qquad (13)$$

Обрасци (12) и (13) представљају решење нашег задатка.

Напомена.- Ако се у интегралу:

$$J'_{2k} = \int_{-1}^{+1} x^{2k}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^{2k}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

изврши смена: $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$ добија се интеграл: $J'_{2k} = \int_0^1 t^{\frac{2k-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt =$

$$= \int_0^1 t^{(k+\frac{1}{2})-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt.$$

Последњи интеграл на десној страни представља Euler - ов интеграл прве врсте:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

тако да је:

$$J'_{2k} = B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Према познатом обрасцу из теорије Euler-ових интеграла:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

где је Г (p) Euler-ов интеграл друге врсте:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$$

J'_{2k} ће имати вредност:

$$J'_{2k} = B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)}.$$

Како је:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(k+1) = k!,$$

$$\Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2}\,\frac{2k-3}{2}\ldots\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1.3.5\ldots\ldots(2k-3)(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi},$$

то је:

$$J'_{2k} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2k-3)(2k-1)}{2^k.\,k!}\,\pi.$$

Како је:

$$J'_{2k-1} = 0,$$

то је према једначини (2):

$$J_{2k-1} = J'_{2k-1} - J'_{2k} = -J'_{2k} = -\frac{1.3.5.\ldots(2k-3)(2k-1)}{2^k . k!}\,\overline{u};$$

одатле је према једначини (9):

$$J_{2k} = \frac{1.3.5.\ldots(2k-3)(2k-1)}{2^k . k!}\,\overline{u}.$$

Лако је видети да су ове вредности идентичне са већ нађеним вредностима.

55.зад.- Наћи такву криву линију у равни, да пројекција њеног полупречника кривине на x - осовини има сталну дужину a; одредити једну интеграциону константу да крива пролази кроз координатни почетак.

(јуни 1928 год.

Нека је R полупречник кривине тражене криве у тачци (x,y). Како он има правац нормале на криву, то је његова пројекција на x- осу равна: $R \sin \varphi$, где је φ угао тангенте на криву са x - осом; т.ј.:

$$R \sin \varphi = R\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Како је:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

то је:

$$R \sin \varphi = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Према задатку треба да је увек:

$$R \sin \varphi = \text{const.} = a$$

т.ј.

$$\frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a. \qquad (1)$$

Једначина (1) представља нам диференцијалну једначину тражене криве. Сменом $y' = p$, па затим двема квадратурама долази се до општег интеграла једначине (1) у облику:

$$y = a.\text{arc} \sin (C e^{\frac{x}{a}}) + C_1, \qquad (2)$$

где су C и C_1 интеграционе константе. Да би крива (2) пролазила кроз координатни почетак мора бити:

$$C_1 = - a.\text{arc} \sin C$$

па је зато њена једначина:

$$y = a\left[\text{arc} \sin (C e^{\frac{x}{a}}) - \text{arc} \sin C\right],$$

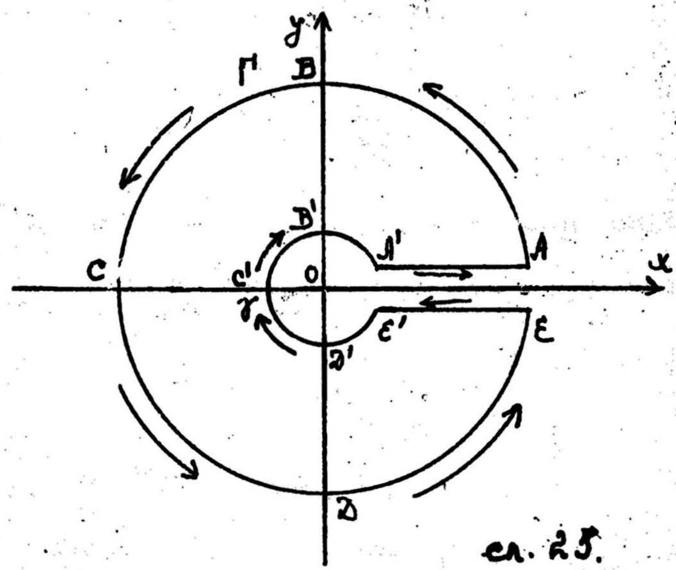
или:

$$y = a.\text{arc} \sin \left(C e^{\frac{x}{a}}\sqrt{1-C^2} - C\sqrt{1-C^2 e^{\frac{2x}{a}}}\right).$$

56. зад.- Нека је $f(z)$ једна рационална функција, холоморфна дуж позитивног дела реалне осовине и која тежи нули кад z бескрајно расте у позитивном правцу.

Нека је <u>a</u> један позитиван број мањи од 1

Опишимо око почетка O два круга (γ) и (Γ) полупречника <u>r</u> и <u>R</u>, таква да се сви полови функције $f(z)$ налазе у прстенастој површини (сл.25).



сл. 25.

Задатак је тада овај:

1°. Применити Cauchy-еву теорему на криволинијски интеграл:

$$\mathcal{J}=\int z^{a-1} f(z)\, dz$$

узет дуж контуре: A'A B C D E E'D'C'B'A'.

2°. Пустивши да полупречник r тежи нули, а полупречник R бескрајно расте, израчунати из тога

вредност одређеног интеграла:

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

(јуни 1928 г.

Интеграл $\mathcal{J}$ можемо разложити на четири интеграла:

$$\mathcal{J}=\int_{A'A}+\int_{\Gamma}+\int_{EE'}+\int_{\gamma}. \qquad (2)$$

Дуж одсечка $\overline{A'A}$, <u>z</u> је реално, т.ј.: $z = x$, $dz = d$

па је зато:

$$\int_{A'A}=\int_r^R x^{a-1} f(x)\, dx. \qquad (3)$$

Дуж круга (Γ) је: $z = Re^{\theta i}$, $dz = Rie^{\theta i}d\theta$,

па је зато:

$$\int_{\Gamma}=i\int_0^{2\pi} R^{a-1} e^{(a-1)\theta i} f(Re^{\theta i})\, Re^{\theta i} d\theta. \qquad (4)$$

Функција $z^{a-1} f(z)$ има алгебарску критичку тачк $z = 0$ (јер је $0 < a < 1$). Зато, ако смо из та ке A' пошли са аргументом од z равни нули, онда у тачци E, због окретања дуж круга (Γ), тај аргуме нат има вредност: 2π. Због тога функцију под интегралним знаком у интегралу $\mathcal{J}$ треба сад пом жити са: $e^{2\pi(a-1)i} = e^{2\pi a i}$.

На тај начин интеграл $\int_{\varepsilon\varepsilon'}$ има вредност:

$$\int_{\varepsilon\varepsilon'} = \int_R^r x^{a-1} e^{2\pi a i} f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Интеграл дуж круга (γ) имаће вредност ($z = re^{\theta i}$, $dz = rie^{\theta i}d\theta$):

$$\int_\gamma = -i\int_0^{2\pi} r^{a-1} e^{(a-1)\theta i} f(re^{\theta i})\, re^{\theta i}\, d\theta \qquad (6)$$

Ако пустимо да R бескрајно расте, а r тежи нули онда интеграли дуж кругова теже нули, па према једначини (2), у вези са једначинама (3) и 5), имамо:

$$J = (1-e^{2\pi a i})\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\,dx \ \ldots \qquad (7)$$

Докажимо сада да интеграли (4) и (6) доиста теже нули за $R\to\infty$ и $r\to 0$. Из једначине (4) директно следује:

$$\left|\int_\Gamma\right| \leqslant \int_0^{2\pi} R^a \left|f(Re^{\theta i})\right| d\theta$$

Како је функција f(z) рационалан разломак који тежи нули за $|z|\to\infty$, то је значи степен његовог именитеља бар за један већи од степена бројитеља. Значи да се увек може наћи неки позитиван број M, довољно велики, такав да је за довољно велико R:

$$\left|f(Re^{\theta i})\right| < \frac{M}{R}$$

и то за све вредности θ у интервалу:

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

На тај начин последњи интеграл постаје:

$$\left|\int_\Gamma\right| < \frac{M}{R^{1-a}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi M}{R^{1-a}}.$$

Пошто је $a < 1$, то је из последње неједначине јасно да је:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma = 0.$$

Једначина (6) нам даје:

$$\left|\int_\gamma\right| \leqslant \int_0^{2\pi} r^a \left|f(re^{\theta i})\right| d\theta,$$

Пошто је функција f(z) холоморфна у координатном почетку, то је f(o) равно неком коначном броју α; значи да се, за довољно мало r, може ставити:

$$\left|f(re^{\theta i})\right| = \left|\alpha + \varepsilon(r)\right|$$

где $\varepsilon(r)$ тежи нули заједно са r. Зато последњи интеграл постаје:

$$\left|\int_\gamma\right| < r^a\left|\alpha+\varepsilon(r)\right|\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi r^a \,|\alpha + \varepsilon(r)|.$$

Пошто је a $>$ 0, то је из последње неједначине јасно да је:

$$\lim_{r \to 0} J_r = 0.$$

Према познатој Cauchy-евој теореми (видети I теоријску напомену)интеграл J има вредност:

$$J = 2\pi i \sum R_k$$

где смо са $\sum R_k$ обележили збир остатака за све полове функције $z^{a-1} f(z)$. (Према задатку полупречници r и R су такви да се сви ти полови налазе у прстенастој површини, сл. 25.). Ако ту вредност за интеграл J сменимо у једначини (7) она нам даје:

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx = \frac{2\pi i \cdot \sum R_k}{1 - e^{2\pi a i}} \qquad (8)$$

Ваља сада још, кад нам је дато f(z), израчунати $\sum R_k$, па је тражена вредност интеграла (1) дата последњом једначином.

Напомена.- Веома је важан за теорију Euler-ових функција случај горњег интеграла када је:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Тада функција:

$$z^{a-1} f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$$

има само један пол $z = -1 = e^{\pi i}$, па је:

$$\sum R_k = R_{-1} = \left.\frac{z^{a-1}}{(1+z)'_z}\right|_{\text{за } z=-1} =$$

$$= z^{a-1}\Big|_{\text{за } z=e^{\pi i}} = e^{(a-1)\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

Зато једначина (8) даје:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1}.$$

Ако бројитељ и именитељ разломка на десној страни последње једначине помножимо са $\frac{e^{-a\pi i}}{2i}$ добијамо:

$$\frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\frac{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Зато наш интеграл има вредност:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad \ldots \qquad (9)$$

Euler- ов интеграл прве врсте може се написати у облику:

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt.$$

Ако извршимо смену: $t=\frac{1}{1+x}$ он постаје:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx. \qquad (10)$$

Према познатом обрасцу:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

кад се $B(p,q)$ смени вредношћу (10), је:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx;$$

ако се стави:

$$p = a,\quad q = 1 - a,\quad p + q = 1$$

где је: $0 < a < 1$, последња једначина постаје:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx,$$

пошто је: $\Gamma(0) = 1$. Према томе је на основу

једначине (9):

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Последња једначина је врло корисна у теорији Euler- ових интеграла.

57. зад. - Наћи максимуме, минимуме и превојне тачке криве:

$$y = e^{-x}\sin x \qquad (1)$$

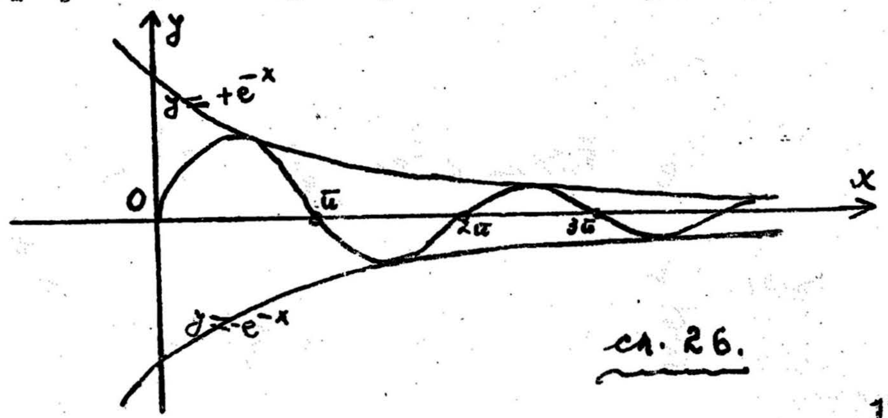
и конструисати криву. Развити функцију

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

у Maclaurin-ов ред.

(октобар 1928).

Крива (1) има бескрајно много максимума, чије су апсцисе $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$; бескрајно много минимума, чије су апсцисе $x = (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{4}$; и бескрајно много превојних тачака чије су апсцисе



сл. 26.

$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Крива (1) сече x - осу у тачка

$x = k\pi$. Она се стално налази између кривих y = ...

и додирује их у тачкама $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Јасно је из саме једначине (1) да је

крива коју она представља слична синусоиди, само

што амплитуда стално опада и тежи нули. Крива (1)

има облик као на сл. 26.

Да бисмо функцију:

$$f(x) = e^{-x} \sin x \qquad (2)$$

развили у Maclaurin-ов ред пођимо од функције :

$$g(x) = e^{-(1-i)x} \qquad (3)$$

па њу развимо у Maclaurin-ов ред. Јасно је да ће

бити:

$$g(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu (1-i)^\nu \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Израз $(1 - i)^\nu$ можемо написати у облику:

$$(1-i)^\nu = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^\nu = \left[\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}\right]^\nu =$$

$$= 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu\frac{\pi}{4}i} = 2^{\frac{\nu}{2}} \cos\frac{\nu\pi}{4} - i\, 2^{\frac{\nu}{2}} \sin\frac{\nu\pi}{4};$$

зато је:

$$g(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu 2^{\frac{\nu}{2}} \frac{x^\nu}{\nu!} \cos\frac{\nu\pi}{4} +$$

$$+ i \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} 2^{\frac{\nu}{2}} \frac{x^\nu}{\nu!} \sin\frac{\nu\pi}{4} - \cdots \qquad (4)$$

Како је:

$$g(x) = e^{-x}\cos x + i e^{-x} \sin x,$$

то ако изједначимо реалне и имагинарне делове леве и десне стране једначине (4) добијамо:

$$\left.\begin{aligned} e^{-x}\cos x &= \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot x^\nu \cdot \cos\frac{\nu\pi}{4}}{\nu!} \\ e^{-x}\sin x &= \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{2^{\frac{\nu}{2}} x^\nu \sin\frac{\nu\pi}{4}}{\nu!} \end{aligned}\right\} \quad (5.)$$

Оба реда (5) су конвергентна у целој равни, јер представљају целе функције.

58. зад. - Наћи такву везу између параметара a и b да криве

$$y = x^2 + 1, \quad xy = ax + by$$

имају додир првог реда у једној тачци; затим одредити геометријско место средишта хипербола:

$$xy = ax + by \qquad (1)$$

где a и b задовољавају горе нађену везу.

(октобра 1928.)

Две криве ће имати додир првог реда у једној тачци кад су им поред апсциса и ордината у тој тачци једнаки и први изводи. Зато горње једначине дају:

$$\left.\begin{aligned} x_0^2+1 &= \frac{a x_0}{x_0-b} \\ 2x_0 &= \frac{-ab}{(x_0-b)^2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где је x_0 апсциса додирне тачке. Из ових једначина треба елиминисати ту апсцису x_0, па ће се добити тражена веза. Како је та елиминација, ма да могућа, доста компликована, то је нећемо вршити, већ место ње решимо једначине (2) по a и b. Добија се:

$$a=-\frac{(x_0^2+1)^2}{x_0^2-1} \quad , \quad b=\frac{2x_0^3}{x_0^2-1} \qquad (3)$$

На тај начин тражену везу нам представљају последње две једначине, где је x_0 један нов произвољан параметар.

Једначина (1) се може написати у облику:

$$f(x,y)=xy-ax-by=0.$$

Теорија нас учи да ће се координате центра добити, решењем по x и y, једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

а геометријско место центара добиће се елиминацијом произвољног параметра из тих једначина. У нашем случају је:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv y-a=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}\equiv x-b=0$$

Одатле, ако са ξ и η обележимо координате центра, добијамо:

$$\xi=b \quad , \quad \eta=a \qquad (4)$$

Пошто између параметара a и b постоји једна веза то се, помоћу те везе, један од њих може избацити из једначина (4). Тада у њима остаје само један параметар, па се његовом елиминацијом долази до једначине:

$$F(\xi,\eta)=0 \quad - \; - \; - \; - \qquad (5)$$

која би нам претстављала тражено геометријско место. Значи, да ми у нашем случају треба из једначина (3) и (4) да елиминишемо a, b и x_0, па да резултат елиминације буде једначина (5). Елиминација количина a и b даје:

$$\xi=\frac{2x_0^3}{x_0^2-1} \quad , \quad \eta=-\frac{(x_0^2+1)^2}{x_0^2-1} \qquad (6)$$

Остаје нам још да елиминишемо параметар x_0. Али ми то нећемо чинити, као што смо горе већ рекли. На тај начин једначине (6) представљају нам параметарске једначине траженог геометријског места средишта хипербола (1), где је x_0 произвољан параметар.

59. зад. - У какав се ред може развити онај интеграл диференцијалне једначине

$$2x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \qquad (1)$$

који за дату вредност $x = a$ добија дату вредност $y = b$. Одредити природу тачке $x = 0$, ово коефицијенте реда и област његове употребљивости.

(октобар 1928. год)

Интеграл диференцијалне једначине (1), који за $x = a$ постаје $y = b$, има облик:

$$y = \frac{1}{1 - c\sqrt{x}}, \qquad (2)$$

где је:

$$c = \frac{b-1}{b\sqrt{a}}.$$

Тачка $x = 0$ је алгебарска критичка тачка другога реда за интеграл (2). Зато се он може развити у ред уређен по степенима од $\sqrt{x}$. Тај ред ће имати

облик

$$y = 1 + c^2x + c^3x^{\frac{3}{2}} + c^4x^2 + \cdots + c^n x^{\frac{n}{2}} + \cdots \qquad (3)$$

или:

$$y = (1 + c\sqrt{x})(1 + c^2x + c^4x^2 + \cdots + c^{2n}x^n + \cdots) \qquad (3')$$

Како интеграл (2) има један пол: $x = \frac{1}{c^2}$, то је ред (3) односно (3') конвергентан у кругу описаном око координатног почетка са полупречником $\rho = \frac{1}{c^2}$

60. зад. -Интегралити парцијалну једначину:

$$p_1 + x_1 p_2^2 + x_2 p_3 = 0. \qquad (1)$$

(октобар 1928. год.

Lagrange-Charpy- ева метода даје нам одговарајући систем обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{2x_1p_2} = \frac{dx_3}{x_2} = -\frac{dp_1}{p_2^2} = $$

$$= -\frac{dp_2}{p_3} = -\frac{dp_3}{0}.$$

Одавде директно имамо један интеграл:

$$f_1 \equiv p_3 = C_1 \qquad (2)$$

Из односа

$$\frac{dp_1}{p_2^2} = \frac{dp_2}{p_3},$$

т. ј., у вези са интегралом (2):

$$\frac{dp_1}{p_2^2} = \frac{dp_2}{c_1};$$

одатле добијамо други интеграл:

$$f_2 \equiv 3\,p_1 p_3 - p_2^3 = 3\,c_2. \qquad (3)$$

Лако се уверити да су ови интеграли у инволуцији, т. ј. да задовољавају Poisson - ове заграде:

$$(f_1, f_2) = 0.$$

Једначине (1), (2) и (3) дају нам:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -c_1 x_2 - x_1 (c_1 x_1 - c_2)^2, \\ p_2 &= -c_1 x_1 + c_2, \\ p_3 &= c_1. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

На тај начин добијамо одговарајућу једначину са тоталним диференцијалом у облику:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3,$$

где p_1, p_2, p_3 имају вредности (4). Одатле се добија потпуни интеграл једначине (1) у облику:

$$z = -c_1 x_1 x_2 - \frac{1}{4} c_1^2 x_1^4 - \frac{2}{3} c_1 c_2 x_1^3 + \frac{1}{2} c_2^2 x_1^2 +$$
$$+ c_2 x_2 + c_1 x_3 + c_3.$$

61. зад. - Постоје ли такви логаритамски системи у којима има бројева x једнаких своме двоструком логаритму? Који су то системи и бројеви x?

(фебруар 1929 год.)

Нека је <u>a</u> основа логаритамског система, а <u>x</u> тражени број. Тада горњи проблем рачунски изгледа:

$$x = 2 \log_{(a)} x$$

што се може написати у облику

$$a^x = x^2$$

одакле је:

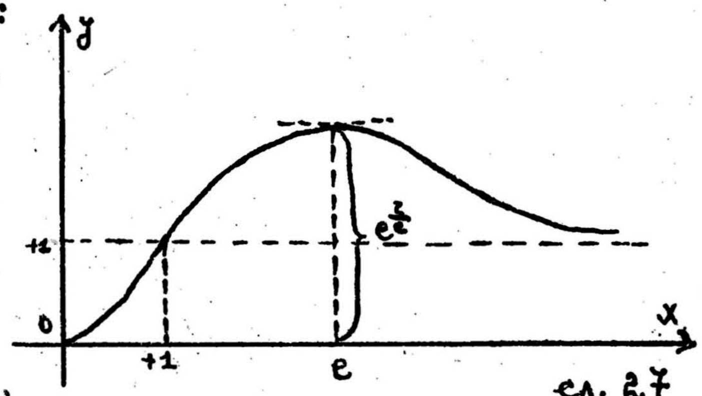
$$a = x^{\frac{2}{x}}. \qquad (1)$$

Пошто је израз са десне стране једначине (1) реалан за све позитивне вредности <u>x</u> (изузимамо случај $x = 1$, јер је тада $a = 1$) то значи да сваком позитивном броју x одговара један логаритамски систем неке основе <u>a</u>, дате једначином (1), у коме aj број $\underline{x}$ има за логаритам $\frac{x}{2}$.

Посматрајмо сада функцију.

$$y = x^{\frac{2}{x}}.$$

ва функција има један максимум $x = e$, $y = e^{\frac{2}{e}}$
едну асимптоту:
$y = 1$, за $x = 0$
ункција има
редност $y = 0$,
за $x = \infty$
ункција тежи
единици.(сл.27)



сл. 27

Одатле можемо за наш проблем извести следе-
е закључке:

1° Свакој вредности основе $\underline{a}$:

$$0 < a < 1$$

дговара по $\underline{\text{један}}$ број $\underline{x}$:

$$0 < x < 1$$

који задовољава задати проблем.

2° Свакој основи $\underline{a}$:

$$1 < a < e^{\frac{2}{e}} = 2,087\ldots\ldots$$

одговарају два броја $\underline{x}$:

$$1 < x_1 \leqslant e \qquad e \leqslant x_2 < +\infty$$

који задовољавају задати проблем.

3° У логаритамском систему чија је основа

$$a > e^{\frac{2}{e}}$$

не постоји ни један број $\underline{x}$ чији би логаритам има вредност $\frac{x}{2}$.

62. зад. - Који полином $P(x)$ има ту особину да је извод функције $P(x).e^x$ једнак $x^m e^x$? Означивши са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ нуле тога полинома, израчунати збир:

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \ldots\ldots$$

(фебруар 1929 г

Диференцијална једначина помоћу које ћемо наћи полином $P(x)$ очигледно има облик:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\, e^x\right] = x^m e^x. \qquad (1$$

Кад помножимо са dx обе стране последње једначине и интегралимо, добићемо општи интеграл једначине (1):

$$P(x)\, e^x = \int x^m e^x dx + C \;\ldots\ldots \qquad (2$$

е је C интеграциона константа. Општи интеграл (2) жемо написати у облику:

$$P(x) = e^{-x}\int x^m e^x dx + Ce^{-x}. \qquad (3)$$

једначине (3) видимо да функција P(x), која довољава диференцијалну једначину (1), у општем учају није полином већ збир једног полинома:

$$e^{-x}\int x^m e^x dx$$

једне експоненцијалне функције:

$$Ce^{-x}.$$

једначине (3) је јасно да је, да би израз P(x) о полином по x, довољно узети C = 0. На тај нан тражени полином P(x) дат је једначином:

$$P(x) = e^{-x}\int x^m e^x dx. \qquad (4)$$

теграл са десне стране последње једначине обелемо са J_m и применимо на њега делимичну интеграју стављајући:

$$u = x^m, \; dv = e^x dx \qquad uv - \int v du$$

обиће се:

$$J_m = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx$$

т.ј.

$$J_m = x^m e^x - m J_{m-1}. \qquad (5)$$

Једначина (5) нам представља рекурентну формулу за интеграл J_m. Стављајући у тој једначини m = 1, 2, 3, ..., (m - 1), m добиће се:

$$J_1 = xe^x - e^x,$$
$$J_2 = x^2e^x - 2xe^x + 2\cdot1\cdot e^x,$$
$$J_3 = x^3e^x - 3x^2e^x + 3\cdot2\,x\,e^x - 3\cdot2\cdot1\cdot e^x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Радећи тако постепено, добиће се уопште:

$$J_m = \left[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)\,x^{m-2} - \cdots \right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^m m!\right] e^x.$$

Ако ту вредност ставимо у једначину (4) добићемо

$$\left.\begin{aligned} P(x) = {} & x^m - mx^{m-1} + m(m-1)\,x^{m-2} - \\ & - m(m-1)(m-2)\,x^{m-3} + \cdots + \\ & + (-1)^k m(m-1)\cdots(m-k+1)\,x^{m-k} + \\ & + \cdots + (-1)^m m! \end{aligned}\right\} (6$$

Виша алгебра нас учи да ће симетрична функција корена:

$$S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \cdots\cdots$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ корени неког полинома:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m$$

бити дата Newton- овим обрасцима:

$$\left.\begin{aligned} S_1 + A_1 &= 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 &= 0 \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (N)$$

У нашем случају је:

$$A_1 = -m, \quad A_2 = m(m-1), \quad A_3 = -m(m-1)(m-2).$$

Кад сменимо ове вредности у једначинама (N) добићемо:

$$S_1 = m, \quad S_2 = -m(m-2)$$

$$S_3 = m(m^2 - 6m + 6).$$

63. зад.- Одредити криву линију другог степена која пролази кроз тачку (1,1) и има два пара коњугованих дијаметара:

$$2x - 3y = 0, \qquad x + 2y = 0$$

и

$$x - y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

(фебруар 1929 год.)

Нека је једначина тражене криве:

$$x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0. \qquad (1)$$

Теорија кривих линија другога реда учи нас да су тада коефицијенти правца коњугованих дијаметара везани једначином:

$$1 + \alpha(m + m_1) + \beta m m_1 = 0 \qquad (2)$$

где су α и β коефицијенти из једначине (1). У нашем случају је:

$$\left.\begin{aligned} m &= \tfrac{2}{3} \\ m_1 &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad и \quad \left.\begin{aligned} m' &= 1 \\ m_1' &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}\right\}$$

Сменивши ове вредности у једначини (2) добијамо:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - 2\beta + 6 &= 0 \\ 8\alpha + 3\beta + 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \qquad (3)$$

Пошто сви дати пречници пролазе кроз координатни почетак, то значи да је координатни почетак центар тражене криве, а одатле

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0 \qquad (4)$$

Једначине (3), решене по α и β дају:

$$\alpha = -\frac{28}{19}, \quad \beta = \frac{43}{19}.$$

На тај начин једначина (1) постаје:

$$19x^2 - 56xy + 43y^2 + 19\varepsilon = 0 \qquad (1')$$

Коефицијенат ε ћемо одредити из услова да крива (1') пролази кроз тачку (1,1). Одатле се добија

$$\varepsilon = -\frac{6}{19}.$$

Значи да дефинитивно добијамо, да је једначина тражене криве другог реда:

$$19x^2 - 56xy + 43y^2 - 6 = 0.$$

65. зад. Једна крива другога реда пролази кроз дату тачку (1,1) и додирује x - осу у тачци (4,0) а y -осу у таци (0,3). Саставити једначину тражене криве и редуковати је на најпростији облик (канонични облик).

(јуни 1929 год.)

Нека је једначина тражене криве:

$$x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0 \qquad (1)$$

Коефицијенте $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε одредићемо из горњих услова. Да би крива (1) пролазила кроз тачку (1,1), мора очигледно једначина (1) бити задовољена вредностима x = 1, y = 1. Одатле је први услов

$$1 + 2\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta + \varepsilon = 0. \qquad (2)$$

Крива (1) мора затим пролазити кроз тачке (4,0) и (0,3). Одатле услови:

$$16 + 8\gamma + \varepsilon = 0, \qquad (3)$$

$$9\beta + 6\delta + \varepsilon = 0. \qquad (4)$$

Диференцирањем једначине (1) добија се да коефицијенат правца тангенте на криву (1) има вредност:

$$-\frac{x + \alpha y + \gamma}{\alpha x + \beta y + \delta}. \qquad (5)$$

Да би x - оса била тангента на криву (1) у тачци (4,0), мора очигледно израз (5) у тој тачци бити раван нули. Одатле услов:

$$4 + \gamma = 0 \qquad (6)$$

Да би y - оса била тангента на криву (1) у тачци (0,3), мора очигледно израз (5) у тој тачци бити бескрајан, т.ј. његов именитељ раван нули. Одатле услов:

$$3\beta + \delta = 0. \qquad (7)$$

На тај начин смо добили за непознате коефицијенте пет услова: (2), (3), (4), (6) и (7). То су пет линеарних једначина по $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε. Њихово решење је:

$$\alpha = -\frac{1}{18}, \quad \beta = \frac{16}{9}, \quad \gamma = -4,$$

$$\delta = -\frac{16}{3}, \quad \varepsilon = 16.$$

Зато једначина (1) постаје:

$$9x^2 - xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0. \qquad (8)$$

Ако једначину криве (8) упоредимо са општом једначином кривих другога реда:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\mathcal{D}x + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F} = 0$$

видимо да је:

$$A = 9, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = 16,$$

$$\mathcal{D} = -36, \quad \mathcal{E} = -48, \quad \mathcal{F} = 144.$$

Како је:

$$g = B^2 - AC = \frac{1}{4} - 144 = -\frac{575}{4} < 0$$

то крива (8) припада врсти елипсе. Ако координатни почетак пренесемо у средиште криве (8), њена једначина постаје:

$$9x'^2 - x'y' + 16y'^2 - \frac{\Delta}{g} = 0 \qquad (9)$$

где је:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & \mathcal{D} \\ B & C & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} & \mathcal{E} & \mathcal{F} \end{vmatrix} = -22500;$$

зато је:

$$-\frac{\Delta}{g} = -\frac{3600}{23}. \qquad (10)$$

Ако сад окренемо координатни систем за известан угао φ, па тај угао одредимо на тај начин што ће отпасти члан са x_1y_1, онда ћемо једначину наше елипсе свести на облик:

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 - \frac{\Delta}{g} = 0.$$

Теорија кривих линија другога реда учи нас да су тада коефицијенти A_1 и C_1 корени квадратне једначине:

$$t^2 - St - G = 0 \qquad (11)$$

где је:

$$S = A + C, \quad G = B^2 - AC.$$

У нашем случају је:

$$S = 25, \quad G = -\frac{575}{4};$$

зато једначина (11) има облик:

$$4t^2 - 100t + 575 = 0.$$

Одатле је

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm 5\sqrt{2}}{2}$$

Зато је:

$$A_1 = \frac{25 - 5\sqrt{2}}{2}, \quad C_1 = \frac{25 + 5\sqrt{2}}{2}.$$

Зато је дефинивна, редукована једначина криве (8):

$$\frac{5-\sqrt{2}}{2}x_1^2+\frac{5+\sqrt{2}}{2}y_1^2=\frac{720}{23}$$

То је реална елипса чије полуосе имају вредности:

$$a=\sqrt{\frac{1440}{23(5-\sqrt{2})}}\ , \quad b=\sqrt{\frac{1440}{23(5+\sqrt{2})}}\ .$$

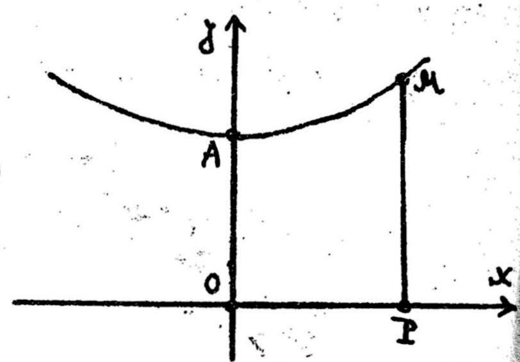
66. зад.- Наћи на ланчаници:

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x \dots (1)$$

тачку М, где је (сл. 28)

$$\overline{OA}+\overline{PM}=\overline{OP}+\text{лук }\widehat{AM} \dots (2)$$

и одредити границе између којих се налази апсциса тачке М.



сл. 28.

(јуни 1929 год.)

Елеменат лука ланчанице (1) има вредност:

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\,dx=\operatorname{ch}x\,dx$$

јер је:

$$y'=\operatorname{sh}x\ , \quad 1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x.$$

Ако са x обележимо апсцису тачке М, онда лук $s=\widehat{AM}$ има вредност:

$$s=\int_0^x\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^x=\operatorname{sh}x,$$

јер је:

$$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\ , \quad \operatorname{sh}0=0.$$

Како је још:

$$\overline{OA}=1\ , \ \overline{PM}=y=\operatorname{ch}x,\ \overline{OP}=x,$$

то једначина (2) добија облик:

$$1+\operatorname{ch}x=x+\operatorname{sh}x$$

или:

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x-x+1=0$$

Из теорије хиперболичних функција зна се да је:

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$$

па зато последња једначина добија облик:

$$e^{-x}-x+1=0. \qquad (3)$$

Тражена апсциса x је корен трансцендентне једначине (3). Како ову једначину није могуће решити, то ћемо одредити само границе између којих лежи x. Једначину (3) је могуће написати у облику:

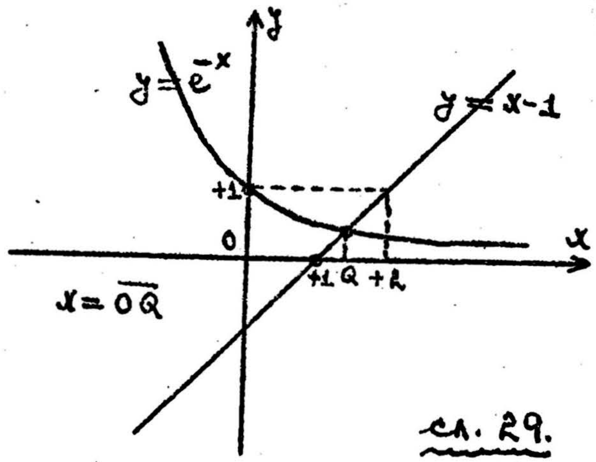
$$e^{-x}=x-1.$$

Значи да се x налази у пресеку кривих:

$$y = e^{-x}, \quad y = x - 1.$$

Из сл 29 је јасно да постоји само један корен x, који се налази у интервалу

$$1 < x < 2.$$



сл. 29.

67. зад - Дата је линеарна диференцијална једначина другога реда:

$$(x^2 + A)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - y(Bx^2 + Cx + D) = 0. \qquad (1)$$

Одредити коефицијенте B, C и D тако да дата једначина има као партикуларни интеграл функцију: $y = e^{mx}$. За те вредности констаната наћи општи интеграл једначине (1).

(јуни 1929 год.)

Из једначине:

$$y = e^{mx}$$

директно следује:

$$y' = me^{mx}, \quad y'' = m^2 e^{mx}.$$

Кад те вредности за y, y' и y'' сменимо у једначини (1) она мора, да би функција $y = e^{mx}$ била партикуларни интеграл једначине (1), постати идентичност. На тај начин се добија да константе B, C и D имају вредности:

$$B = m^2, \quad C = -2m, \quad D = Am^2.$$

Зато једначина (1) постаје.

$$(x^2 + A)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - y(m^2x^2 - 2mx + Am^2) = 0. \qquad (2)$$

Из теорије диференцијалних једначина знамо да сменом:

$$v = \frac{y'}{y} \qquad (3)$$

можемо једначину (2) свести на Рикатијеву. Партикуларни интеграл те Рикатијеве једначине који одговара партикуларном интегралу $y = e^{mx}$ једначине (2) биће према смени (3):

$$v_1 = \frac{me^{mx}}{e^{mx}} = m.$$

Ако сад у тој Рикатијевој једначини извршимо смену:

$$u = v - v_1 = v - m$$

добићемо Бернулијеву једначину, коју ћемо сменом:

$$u = \frac{1}{z}$$

свести на линеарну. Из свега тога видимо да ћемо једначину (2) сменом:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{z} + m \qquad (4)$$

свести на линеарну једначину првога реда. Из смене (4) је:

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{z} + m\right)^2 - \frac{z'}{z^2}.$$

Кад те изразе сменимо у једначини (2) добијамо:

$$z' - 2\frac{mx^2 - x + mA}{x^2 + A} z - 1 = 0. \qquad (5)$$

Општи интеграл ове линеарне диференцијалне једначине првога реда има облик:

$$z(x, C_1) = \frac{4m^3 C_1 e^{2mx} - 2m^2x^2 - 2mx - 1 - 2m^2A}{4m^3(x^2 + A)}. \qquad (6)$$

Ако ову вредност за z ставимо у једначину (4), раздвојимо променљиве и интегралимо, добићемо:

$$\log y = \int \frac{dx}{z(x, C_1)} + mx + C'$$

т.ј.

$$y = C_2 e^{mx} e^{\int \frac{dx}{z(x, C_1)}}, \qquad (7)$$

где $z(x, C_1)$ има вредност (6). Једначина (7) претставља општи интеграл једначине (2).

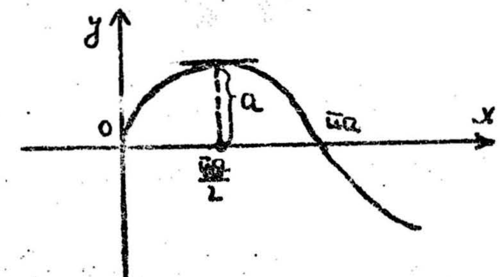
69 зад. - Наћи максимуме и минимуме функције

$$y = a \sin \frac{x}{a} \qquad (1)$$

(где је $a > 0$) и полупречник кривине у тачкама максимума и минимума, кад крива варира у интервалу $(0, \pi a)$; затим наћи кубатуру тела, које описује лук дате криве у интервалу $(0, \pi a)$, кад се крива обрће око осе ox. Напослетку, сматрајући a као променљив параметар, наћи обвојницу кривих (1).

(октобар 1929 год)

Крива (1) у интервалу $(0, \pi a)$ има само један максимум $\left(\frac{\pi a}{2}, a\right)$.



сл. 30

У тачкама максимума и минимума полупречник кривине уопште има вредност:

$$R = \frac{1}{|y''|}.$$

Зато је у тачци ($\frac{\pi a}{2}$, a):

$$R = a.$$

Из интегралног рачуна нам је познато да је запремина, која постане обртањем лука неке криве око осе ох, дата изразом:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx$$

где су $\underline{x_0}$ и $\underline{x}$ апсцисе крајњих тачака лука. У нашем случају је:

$$V = \pi a^2 \int_0^{\pi a} \sin^2 \frac{x}{a} dx = \frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

Да бисмо нашли обвојницу кривих (1) диференцирајмо једначину (1) по параметру $\underline{a}$. Добићемо

$$\sin \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} = 0, \qquad (2)$$

што се може написати у облику:

$$tg \frac{x}{a} = \frac{x}{a}. \qquad (3)$$

Ако вредност за sin $\frac{x}{a}$ из једначине (2) сменимо у једначини (1) она постаје:

$$y = x \cos \frac{x}{a}. \qquad (4)$$

Једначина обвојнице ће се добити кад се елиминише параметар $\underline{a}$ из једначина (1) и (2), т.ј. из једначина (3) и (4). Једначина (3) има бескрајно много корена по $\frac{x}{a}$ који су

$$\frac{x}{a} = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k, \ldots$$

где је:

$$k\pi a < \lambda_k < (2k+1)\frac{\pi a}{2}$$

и сви су они апсолутне константе. Кад све те вредности за $\frac{x}{a}$ смењујемо редом једну по једну у једначини (4) она нам даје низ правих линија:

$$y = x, \quad y = x \cos \lambda_1, \quad y = x \cos \lambda_2, \ldots\ldots \qquad (5)$$

Значи да се тражена обвојница кривих (1) састоји из бескрајно много правих линија датих једначинама (5).

70.зад.- Саставити једначину параболе, која додирује осу ох у тачки (4,0) а осу оу у тачки (0,3).

(октобар 1929 г.)

Ако у задатку 65. у место једначине (2) узмемо услов да једначина (1) представља параболу

$$\alpha^2 - \beta = 0 \qquad (\alpha)$$

па решимо систем од пет једначина: (а), (3), (4), (6) и (7) добићемо за непознате коефицијенте: α, β, γ, δ и ε следеће вредности:

$$\alpha = \pm\frac{4}{3}, \quad \beta = \frac{16}{9}, \quad \gamma = -4$$

$$\delta = -\frac{26}{3}, \quad \varepsilon = 16.$$

Лако се уверити да вредности: $\alpha = +\frac{4}{3}$ одговарају две праве које се поклапају:

$$3x + 4y - 12 = 0,$$

а вредности: $\alpha = -\frac{4}{3}$ тражена парабола:

$$(3x - 4y)^2 - 72x - 96y + 144 = 0.$$

~~71. зад.~~ Наћи услове кад ће једначина

$$x^{2k+1} + ax + b^2 = 0 \qquad (1)$$

имати два реална позитивна или два једнака корена.

(октобар 1929 г.)

Радећи као у задатку 6[illegible], (видети и 25. зад.), дођиће се до следећег услова:

$$b^2 - 2k\left(\frac{-a}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2k}} \leqslant 0.$$

знаку „мање" одговарају два позитивна реална корена једначине (1); знаку „равно" одговара један двојни корен једначине (1). Параметар a при томе треба да је увек негативан.

73. зад. Дате су две тачке са координатама (1,1), (-1,1). Наћи једначину свих парабола које пролазе кроз те две тачке и додирују x - осу. Наћи површину ограничену једном од ових парабола и одсечком праве y = 1 и показати да је она иста за све ове параболе.

(фебруар 1930 г.)

Нека је једначина тражених парабола:

$$x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0. \qquad (1)$$

Да би једначина (1) уопште представљала параболу мора бити:

$$\alpha^2 - \beta = 0. \qquad (2)$$

Из услова што парабола (1) пролази кроз тачке (1,1) и (-1,1) добијају се две једначине:

$$1 + 2\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta + \varepsilon = 0 \; \ldots\ldots \; (3)$$

$$1 - 2\alpha + \beta - 2\gamma + 2\delta + \varepsilon = 0 \; \ldots\ldots \; (4)$$

Коефицијенат правца тангенте на параболу (1) има вредност:

$$-\frac{x+\alpha y+\gamma}{\alpha x+\beta y+\delta} \quad \text{- - - - - - -} \quad (5)$$

Да би x - оса била тангента у некој тачци $x = x_0$, мора коефицијенат (5) у тој тачци бити раван нули одатле је:

$$x_0 + \gamma = 0 \qquad (6)$$

најзад, парабола (1) мора пролазити и кроз тачку $(x_0, 0)$, јер је у тој тачци тангира x - оса, па је одатле:

$$x_0^2 + 2\gamma x_0 + \varepsilon = 0 \qquad (7)$$

Добили смо дакле за одредбу непознатих коефицијената: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε пет једначина: (2), (3), (4), (6) и (7). У овим једначина фигурише још и произвољна апсциса x_0. Из њих дакле све непознате коефицијенте можемо израчунати у функцији од x_0. На тај се начин добија:

$$\alpha = x_0, \quad \beta = x_0^2, \quad \gamma = -x_0$$

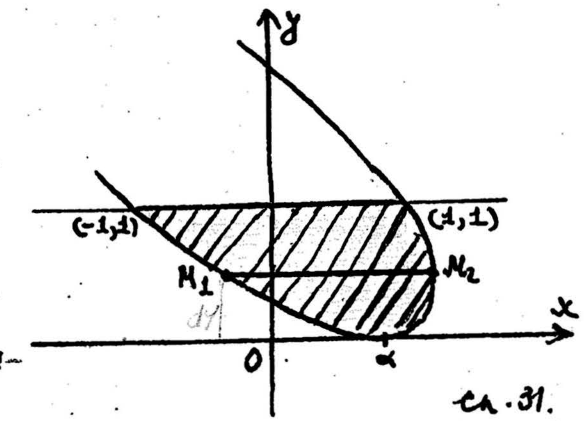
$$\delta = -\frac{1+2x_0^2}{2}, \quad \varepsilon = x_0^2$$

Зато једначина (1) постаје:

$$x^2 + 2\alpha xy + \alpha^2 y^2 - 2\alpha x - (1+2\alpha^2)y + \alpha^2 = 0 \; \ldots\ldots \; (8)$$

Једначина (8) где је $\alpha = x_0$ променљив параметар (његово геометријско значење већ смо видели) претставља нам тражени систем парабола.

Да бисмо нашли тражену површину P (бледо шрафирана површина, сл. 31.), уочимо у њој један бесконачно мали елеменат (бесконачно мали правоугоник) чија је висина dy, а основица одстојање $\overline{M_1 M_2}$. Његова површина је према томе



сл. 31.

$$dP = \overline{M_1 M_2}\, dy.$$

Из слике је јасно да је:

$$\overline{M_1 M_2} = x_2 - x_1$$

где су x_1 и x_2 апсцисе тачака M_1 и M_2. Јасно је затим да су ове апсцисе x_1 и x_2 корени једначине (8) по x. На тај начин се добија:

$$\overline{M_1 M_2} = x_2 - x_1 = 2\sqrt{y},$$

па је зато:

$$dP = 2\sqrt{y}\,dy.$$

Да бисмо добили целу тражену површину P, треба елеменат dP интегралити у границама 0 и 1. Зато је:

$$P = 2\int_0^1 \sqrt{y}\,dy = \frac{4}{3}.$$

На тај начин смо доказали да је површина P збиља иста за све параболе, јер јој вредност не зависи од параметра α.

74. зад. Наћи такву криву линију код које пројекција ординате на тангенту у свакој тачци има сталну дужину 1. Одредити ону интегралну криву која пролази кроз тачку $x = 0$, $y = 1$.

(фебруар 1930 год.)

Диференцијална геометрија нас учи да пројекција ординате на тангенту има вредност:

$$y \sin\alpha = y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

где је α угао тангенте и x-осе. Зато је дифе-

из диференцијалног рачуна нам је познато да ред са десне стране последње једначине представља функцију $-\log(1-x)$. Зато је:

$$f'(x) = -\log(+1-x),$$

одатле интеграцијом.

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - 1 + C.$$

Како је из једначине (1) за $x = 0$ и $f(0) = 0$, то се добија да је $C = +1$. Зато је тражени коначни облик функције $f(x)$: Lagrange.

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x.$$

3° Теорија нас учи да ће грешка, која се учини кад се уместо праве вредности S неког реда узме приближна вредност S_n, бити равна

$$S - S_n < u_n \frac{k}{1-k}, \qquad (2)$$

(образац (34) на страни 170. Диф. и Инт. рачуна од Dr. Тадије Пејовића проф. Унив.), где је k неки број такав да је од извесног ранга p стално

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < k.$$

У нашем случају за $x = \frac{1}{2}$ ред (1) постаје:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}.$$

Зато је:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1}{2}\,\frac{p}{p+2} < \frac{1}{2}.$$

Према (2) је:

$$S - S_n < u_n \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = u_n. \qquad (3)$$

Израчунајмо првих шест чланова реда са по четири децимала, т.ј. сваки са погрешком мањом од $\frac{1}{10^4}$. Добиће се:

$u_1 = 0,1250$

$u_2 = 0,0208$

$u_3 = 0,0052$

$u_4 = 0,0015$

$u_5 = 0,0005$

$u_6 = 0,0001$

Сабирајући те чланове добија се:

$$S_6 = 0,1531 \qquad (4)$$

Према (3) је:

$$S - S_6 < u_6 = 0,00018 < \frac{2}{10^4}.$$

Поред ове погрешке коју смо учинили занемарујући чланове преко u_6, учинили смо и погрешке занемарујући децимале преко четвртог у појединим члановима узетим у обзир. Та погрешка учињена на сваком узетом члану мања је, као што смо казали од $\frac{1}{10^4}$. Пошто смо узели 6 чланова то је та читава погрешка мања од $\frac{6}{10^4}$. Значи да је целокупна погрешка мања од

$$\frac{2}{10^4} + \frac{6}{10^4} = \frac{8}{10^4} < \frac{1}{10^3},$$

као што је и тражено у задатку. Дакле прва три децимала у изразу (4) су сигурно тачна.

76. зад. - Одредити тачке пресека дате параболе са њеном еволутом.

(јуни 1930 год.)

Геометријско место центара кривине, као што нам је познато, називамо еволутом. Координате центра кривине у некој тачци (x, y) имају вредности

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Нека је једначина дате параболе: $y^2 = 2px$. Одатле је.

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Кад ове вредности за први и други извод сменимо у једначинама (1) оне постају.

$$\alpha = \frac{3y^2 + 2p^2}{2p}, \quad \beta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Кад из последњих двеју једначина елиминишемо y добијамо:

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 = 0$$

где је α апсциса, а β ордината. Кад их сменимо са $\underline{x}$ и $\underline{y}$ добијамо.

$$27py^2 - 8(x-p)^3 = 0 \qquad (2)$$

Последња једначина представља нам дакле еволуту параболе.

$$y^2 = 2px \qquad (3)$$

Да бисмо нашли пресечне тачке параболе и њене еволуте, т.ј. да бисмо решили једначине (2) и (3) по $\underline{x}$ и $\underline{y}$ поступимо овако. Вредност за $\underline{y^2}$ сменимо из једначине (3) у једначину (2). Она постаје.

$$27p^2x - 4(x-p)^3 = 0,$$

или после сређивања.

$$4x^3 - 12px^2 - 15p^2x - 4p^3 = 0$$

што се може написати у облику:

$$4x^3 - 16px^2 + 4px^2 - 16p^2x + p^2x - 4p^3 = 0$$

одакле се добија:

$$4x^2(x-4p) + 4px(x-4p) + p^2(x-4p) = 0$$

или, кад се извади заједнички фактор $(x-4p)$:

$$(x-4p)(4x^2 + 4px + p^2)$$

Значи да се наша једначина распада на две.

$$\left.\begin{aligned}x - 4p &= 0\\ 4x^2 + 4px + p^2 &= (2x+p)^2 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Из прве се добија

$$x = 4p,$$

а друга има НЕГАТИВНЕ корене (ТЕ ЈЕ y ИМАГИНАРНО) па за нас зато немају интереса. Ако ову добијену вредност за x сменимо у једначину (3) добијамо два решења

$$y_1 = +2p\sqrt{2}, \quad y_2 = -2p\sqrt{2}.$$

Значи да се парабола (3) и њена еволута (2) секу у двема тачкама: $(4p, 2p\sqrt{2})$ и $(4p, -2p\sqrt{2})$.

77. зад. Дата је права d у равни xoy паралелна оси ox на растојању $2a$ (у правоуглом координатном систему у простору). Из тачке M у простору повучене су нормале $\overline{MP}$ на праву d и $\overline{MQ}$ на осу Oz.

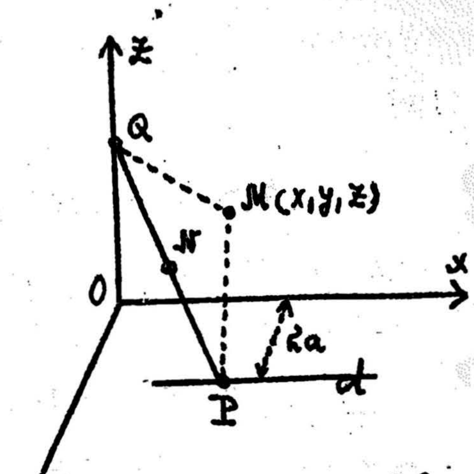
Наћи површину чија тангентна раван у тачки M пролази кроз средину N праве линије која спаја подножја тих нормала.

(јуни 1930. г.)

Ако координате тачке M обележимо са M(x, y, z) онда ће подножја нормала $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$, т. ј. тачке P и Q имати координате

$$P(x, 2a, 0), \quad Q(0, 0, z).$$

То је јасно из слике, кад се има на уму да је нормала $\overline{MP}$ паралелна yoz равни, а нормала $\overline{MQ}$ паралелна xoy равни. Зато ће координате тачке N која полови растојање PQ бити



сл. 32.

$$N\left(\frac{x}{2}, a, \frac{z}{2}\right).$$

Нека је једначина тангентне равни у тачци M тражене површине

$$(X-x)p + (Y-y)q = Z - z, \qquad (1)$$

где су p и q непознати парцијални изводи коте z тражене површине по апсциси x и ординати y. Како раван (1) мора, према услову задатка, да пролази кроз тачку N, то се добија

$$\left(\frac{x}{2} - x\right)p + (a-y)q = \frac{z}{2} - z,$$

или после сређивања

$$px + 2(y-a)q = z. \qquad (2)$$

Последња једначина представља нам парцијалну једначину тражених површина. То је линеарна парцијална једначина првога реда, чији је општи интеграл:

$$z = x\,\varphi\left(\frac{y-a}{x^2}\right) \qquad (3)$$

где је φ произвољна функција. Једначина (3) представља нам тражене површине.

64. зад. Одредити онај партикуларни интеграл диференцијалне једначине.

$$\frac{dy}{dz} + 2zy + A e^{z^2+Az} y^2 = 0, \qquad (1)$$

(где је A комплексан сталан број са позитивним реалним и имагинарним делом), који за z = 0 добија вредност $y = \infty$.

Показати да тај интеграл y има бескрајно много полова и да сви ови леже на једној правој линији што пролази кроз почетак у равни z.

(фебруар 1929 г.)

Диференцијална једначина (1) је Bernoulli-ева једначина, која се сменом: $y = \frac{1}{v}$ своди на линеарну, а одатле се добија општи интеграл једначине (1) у облику:

$$y = \frac{e^{-z^2}}{e^{Az} + C} \qquad (2)$$

где је C интеграциона константа. Да би за z = 0, интеграл (2) био бескрајан, мора константа C имати вредност. C = - 1. На тај начин тражени партикуларни интеграл изгледа:

$$y = \frac{e^{-z^2}}{e^{Az} - 1}. \qquad (3)$$

Из теорије аналитичких функција нам је познато да ће полови интеграла (3) бити нуле једначине:

$$e^{Az} - 1 = 0.$$

Одатле је:

$$z_k = \frac{2k\pi i}{A} \qquad (4)$$

где је k позитиван или негативан цео број или нула. Нека је:

$$A = \alpha + \beta i$$

где је, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тада једначина (4) постаје:

$$z_k = \frac{2k\pi i}{\alpha+\beta i} = \frac{2k\pi i(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2},$$

т. ј.

$$z_k = \frac{2k\pi\beta}{\alpha^2+\beta^2} + i\,\frac{2k\pi\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Одавде је:

$$\arg z_k = \theta_k = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$

Значи да сви полови $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ интеграла (3) имају исти аргуменат: $\theta_k = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$ (пошто тај аргуменат не зависи од броја k), што значи да сви ти полови леже на једној правој кроз почетак (пошто је и почетак пол интеграла (3)), чија је једначина:

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta}\,\xi$$

(ξ и η су реални и имагинарни део променљиве $z = \xi + i\eta$).

68. зад.- Дата је елипса великом полу-осом a и екцентрицитетом e. Наћи површину обртног елипсоида добијеног када се дата елипса обрће око своје велике осовине. Сматрајући ту површину као функцију од e и стављајући $e = z$, испитати ту функцију:

1° Наћи сингуларитете те функције и вредност за $z = 0$.

2° Развити је у ред по степенима од z.

(јуни 1929 г.)

Нека је једначина елипсе дата у облику:

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2. \tag{1}$$

Површина обртног елипсоида који постаје када се елипса (1) окреће око своје велике осе биће:

$$S = 4\pi\int_0^a y\,ds. \tag{2}$$

Из једначине (1) је:

$$ds = \frac{\sqrt{1-e^2}}{y}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

Зато интеграл (2) постаје:

$$S = 4\pi\sqrt{1-e^2}\int_0^a\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

или после смене: $ex = at$

$$S = 4\pi a^2\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\int_0^e\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

На тај начин се добија да је:

$$S(e) = 2\pi a^2\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,\arcsin e}{e} + 1 - e^2\right).$$

место функције S(z) ми ћемо посматрати функцију:

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}\, \operatorname{arc\,sin} z}{z}, \qquad (3)$$

која има апсолутно исте особине као и S(z).

Познато је из теорије функција да се функција arc sin z може написати у облику:

$$\operatorname{arc\,sin} z = \frac{1}{i} \log\left(zi \pm \sqrt{1-z^2}\right).$$

На тај начин функција (3) постаје:

$$f(z) = \frac{1}{i}\, \frac{\sqrt{1-z^2}\, \log\left(zi \pm \sqrt{1-z^2}\right)}{z}. \qquad (4)$$

Одавде се прво види да је тачка z = 0 обична тачка, јер никад не може бити: $zi \pm \sqrt{1-z^2} = 0$, и функција је коначна и одређена за <u>z = 0</u>. Из израза (3) је:

$$f(0) = 1.$$

Из једначине (4) се даље види да су тачке z = ± 1 критичке тачке за функцију f(z), па према томе и за функцију S(z).

Да бисмо функцију f(z) развили у Maclaurin-ов ред, развимо у тај ред функцију

$$\varphi(z) = \sqrt{1-z^2}\, \operatorname{arc\,sin} z.$$

Добићемо:

$$\varphi(z) = \frac{z}{1!} - 2\frac{z^3}{3!} - 16\frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Ако последњи ред поделимо са <u>z</u> и додамо му $1 - z^2$ добићемо дефинитивно:

$$S(z) = 2\pi a^2 \left(2 - \frac{4}{3} z^2 - \frac{2}{15} z^4 - \cdots\right).$$

<u>72. зад.</u> - Интегралити диференцијалну једначину.

$$\frac{dy}{dx} = (e^y - 1)\operatorname{cotg} x. \qquad (1)$$

За које вредности константе интеграл остаје реална функција за све реалне вредности x - са и испитати онај интеграл за који је таква константа нађена. Наћи све његове сингуларитете и испитати како тај интеграл варира кад x описује затворену путању, која опкољава 1, 2, 3, ..., n узастопних сингуларитета.

(октобар 1929 год.)

Диференцијална једначина (1), има раздвојене променљиве па је можемо написати у облику:

$$\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x}.$$

Одатле је директно:

$$\log(1-e^{-y}) = \log\sin x + \log C,$$

што се може написати у облику.

$$y = -\log(1 - C\sin x) \qquad (2)$$

где је $\underline{C}$ произвољна интеграциона константа. Једначина (2) представља нам општи интеграл диференцијалне једначине (1). Да би он био реална функција за све реалне вредности x - са, довољно је да буде увек.

$$1 - C\sin x \geqslant 0.$$

Последња неједначина ће очигледно бити задовољена за свако $\underline{x}$, ако је задовољена за оне вредности x - са за које sin x има највећу и најмању вредност.

$$1 + C \geqslant 0 \quad , 1 - C \geqslant 0$$

одакле је:

$$-1 \leqslant C \leqslant 1. \qquad (3)$$

Дакле, за свако $\underline{C}$ које задовољава неједначину (3) интеграл (2) је реална функција за све реалне вредности x - са. Одатле се види да је највећа вредност константе $\underline{C}$ која задовољава тај услов: C = 1. На тај начин тражени партикуларни интеграл има облик:

$$y = -\log(1 - \sin x). \qquad (4)$$

Сингуларитете интеграла (4) добићемо као нуле једначине

$$1 - \sin x = 0, \qquad (5)$$

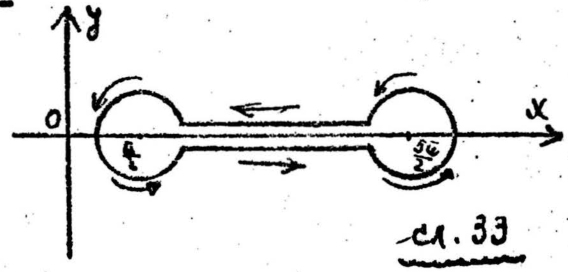
и то су логаритамске критичке тачке интеграла (4). Других сингуларитета интеграл (4) нема. Из једначине (5) се види да тих логаритамских критичких тачака има бескрајно много и да су оне:

$$x = (4k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Да бисмо видели како интеграл (4) варира кад $\underline{x}$ опише затворену путању око једног сингуларитета, на пр. око $x = \frac{\pi}{2}$, напишимо интеграл (4) у облику.

$$y = -\log\frac{1-\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} - 2\log(x-\frac{\pi}{2}).$$

Довољно нам је сада да испитамо само други члан на десној страни последње једначине, јер је тачка $x = \frac{\pi}{2}$ за први члан обична тачка. Пустимо x да опише круг у равни z око $x = \frac{\pi}{2}$ као центра, а полупречника довољно малог да не обухвати ни један други сингуларитет. Видеће се да ће се функција y повећати за $-4\pi i$. Ако промењива z описује једну затворену контуру као на сл. 33, која обухвата два сингуларитета $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{5\pi}{2}$ онда интеграл y можемо написати у облику.



сл. 33

$$y = -\log\frac{1-\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2(x-\frac{5\pi}{2})^2} - 2\log(x-\frac{\pi}{2}) - 2\log(x-\frac{5\pi}{2}).$$

Пошто овде стварно z обилази дуж два круга и то у истом смислу то је лако видети да ће се интеграл y повећати свега за $-8\pi i$. Ако би се тако постепено радило дошло би се до закључка да ако z опише једну затворену контуру која обухвата n узастопних сингуларитета интеграла y, да ће се тај интеграл повећати за $-4n\pi i$.

78. зад. - Одредити функцију $\varphi(u)$, где је $u = x^2 + y^2$, тако да $\varphi(x^2+y^2)$ буде реални део једне аналитичке функције. Међу таквим функцијама која је то, која се, кад z опише затворену путању око почетка, повећава за јединицу.

(јуни 1930 год.)

Реални део P(x, y) сваке аналитичке функције мора задовољавати Лапласову парцијалну једначину.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

У нашем случају дакле мора бити.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Како је $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{d\varphi}{du}$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{d^2\varphi}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{d\varphi}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\frac{d^2\varphi}{du^2}+2\frac{d\varphi}{du}$$

тако исто:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=4y^2\frac{d^2\varphi}{du^2}+2\frac{d\varphi}{du},$$

то једначина (1) постаје:

$$4(x^2+y^2)\frac{d^2\varphi}{du^2}+4\frac{d\varphi}{du}=0$$

т.ј.

$$u\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{d\varphi}{du}=0 \qquad (2)$$

Диференцијална једначина (2) јесте обична диференцијална једначина другог реда. Њу можемо написати у облику:

$$u\frac{dp}{du}+p=0$$

или:

$$u\,dp+p\,du=0 \qquad (3)$$

(ставили смо $\frac{d\varphi}{du}=p$). Из једначине (3) имамо први интеграл.

$$pu=C_1$$

т.ј.

$$u\frac{d\varphi}{du}=C_1$$

Интеграл последње једначине је:

$$\varphi(u)=\log C_2\, u^{C_1} \qquad (4)$$

Израз (4) представља нам тражену функцију $\varphi(u$

Значи да је тражени реални део:

$$P(x,y)=\log C_2\,(x^2+y^2)^{C_1} \qquad (5)$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.

Теорија нас учи да, ако нам је дат какав израз P(x,y), за који се зна да је реални део как ве аналитичке функције f(z), онда је сама та функ ција:

$$f(z) = P(z,0).$$

У нашем случају ће бити

$$f(z)=P(z,0)=\log C_2\, z^{2C_1}. \qquad (6)$$

функцију f(z), стављајући $z=\rho e^{\theta i}$, можемо написа ти у облику

$$f(z)=\log C_2\,\rho^{2C_1}+2C_1\theta i.$$

Кад z опише затворену путању око почетка, онда се, очигледно, модуо ρ враћа на своју пр битну вредност, а аргуменат θ се, услед окре ања, повећа за 2π; на тај начин ће нова вредност

функције f(z) бити:

$$f(z) = \log C_2 \rho^{2C_1} + 2C_1(\theta + 2\pi)i.$$

Функција се дакле повећава за $4C_1 \pi i$. Према задатку треба да буде:

$$4C_1 \pi i = 1;$$

одатле је:

$$C_1 = \frac{1}{4\pi i} = -\frac{i}{4\pi};$$

Значи да је тражена функција f(z):

$$f(z) = \log C_2 z^{-\frac{i}{2\pi}}$$

К Р А Ј.

****