Народный университет. Естественнонаучный факультет
Издается с 1961 года

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ», МОСКВА 1977

51
Ф50

Авторы сборника: *А. П. Савин, Ю. М. Брук, М. Б. Волошин, А. Р. Зильберман, С. Г. Семенчинский, В. А. Сендеров*

Ф 50 Физико-математические олимпиады. Сборник. М., «Знание», 1977.

160 с. (Нар. ун-т. Естественнонаучный фак. Издается с 1961 г.)

Физико-математические олимпиады являются важным средством пропаганды знаний среди учащейся молодежи и играют большую роль в повышении уровня преподавания математики и физики в средней школе.

Авторы сборника в интересной и популярной форме знакомят читателей с материалами физических и математических олимпиад, рассказывают об истории и методике проведения всесоюзных олимпиад.

Книга представляет несомненный интерес для организаторов и участников различных физико-математических олимпиад, преподавателей средней и высшей школ, учащихся старших классов, руководителей физических и математических кружков, студентов, всех тех, кто любит решать задачи и хочет попробовать в этом свои силы.

$Ф \dfrac{60\,500-025}{073(02)-77}$ 96—77

51+53

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рост научного и технического потенциала страны, непрерывно растущая потребность в высококвалифицированных кадрах в области естественных и технических наук вызвали к жизни много новых форм пропаганды естественнонаучных знаний.

Одной из таких форм являются физико-математические олимпиады для учащихся средних школ и средних специальных учебных заведений. Не случайным является и то, что в организации олимпиад наряду с органами народного образования принимают самое активное участие университеты, ведущие физико-математические вузы страны и учреждения АН СССР.

За последние 10—15 лет возник ряд специализированных физико-математических школ-интернатов при крупных университетах, появились вечерние и заочные физико-математические школы, неоднократно устраивались летние лагеря для победителей олимпиад, значительное развитие получили самые разные формы работы вузов физико-математического профиля со школьниками.

Одной из причин активизации такой работы безусловно является заинтересованность вузов в отборе наиболее подготовленной молодежи. Другим важным обстоятельством является то, что именно преподаватели и студенты вузов, ученые академических институтов могут оказать сегодня средней школе ту помощь, в которой она очень нуждается. Речь идет о необходимости существенного повышения уровня преподавания естественных наук, и в первую очередь математики и физики.

Переход на новые программы поставил перед средней школой много проблем. Одной из самых существенных является проблема повышения интереса учащихся к точным наукам. Сейчас уже надо не только отыскивать наиболее способных и отбирать их для дальнейшего обучения в ведущих физико-математических вузах, но и воспитывать активный интерес к физике и математике в массовой школе. В полной мере такая задача не может быть решена только школьными педагогами. Именно поэтому работа вузов и ученых со школьниками перерастает задачу отбора, хотя, конечно, последняя все время остается очень актуальной. Чрезвычайно важным является по этим причинам и выпуск книг, отражающих результаты работы вузов со школьниками.

Предлагаемая читателю книга посвящена физико-математическим олимпиадам. В основу книги легли материалы, накопленные организаторами олимпиад ведущего физического вуза страны — Московского физико-технического института за последние 15 лет.

Можно надеяться, что знакомство с этой книгой будет интересно и полезно организаторам и участникам различных физико-математических олимпиад, преподавателям средней и высшей школ, учащимся старших классов, руководителям физических и математических кружков, студентам, всем тем, кто любит решать задачи и хочет попробовать в этом свои силы.

Авторам хотелось бы еще специально отметить здесь, что известность физтеховских олимпиад в очень большой степени обязана инициативе и энергии многих бывших и нынешних студентов МФТИ, многих преподавателей института, принимавших участие в проведении олимпиад, о которых будет рассказано дальше.

Мы искренне признательны и благодарны всем преподавателям и выпускникам МФТИ, вместе с которыми мы много лет участвовали в этой работе, и приносим свои извинения за то, что не можем перечислить всех их здесь.

Мы также хотим поблагодарить рецензентов книги А. Л. Стасенко и И. М. Яглома и редактора Н. И. Феоктистову.

Авторы

ГЛАВА 1

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Начнем мы с упоминания о двух книгах. Одна из них называется «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.» (ОНТИ, М.—Л, 1936 г.). Автор ее — Р. Н. Бончковский — один из первых организаторов советских школьных олимпиад. Это, вероятно, первая книга про олимпиады в нашей стране. Сейчас об этой книге мало кто знает даже среди тех, кто активно занимается проведением олимпиад. Прошло уже сорок лет с тех пор, как в Москве начали проводиться олимпиады. Какой же была первая московская олимпиада? Оказывается, что в ней принимали участие 314 человек. Школьников среди них было всего 227, остальные — рабфаковцы, учащиеся школ взрослых и курсов подготовки в вуз. Подавляющее большинство участников составляли юноши, средний возраст 16—20 лет. Проходила олимпиада в два тура. Первый тур был отборочным, и на нем предлагались обычные школьные задачи, второй тур включал в себя решение более трудных задач по геометрии, алгебре и комбинаторике. Так это начиналось.

Вторая книга, о которой мы хотим сказать, известна в наши дни гораздо лучше. Эта книга написана руководителями советских команд на многих международных математических олимпиадах — Е. А. Морозовой, И. С. Петраковым и В. А. Скворцовым. Она так и называется «Международные математические олимпиады» (М., «Просвещение», 1976). Эти две книги до какой-то степени характеризуют то, какими были и какими стали школьные олимпиады. От небольших олимпиад в самых крупных городах до олимпиад в каждой школе, в каждом районе и области и до ежегодных призов на олимпиадах международных — путь непростой. История школьных олимпиад богата событиями, а архивы оргкомитетов — задачами, предлагавшимися на олимпиадах. И то, и другое представляет не только «исторический» интерес. Опыт и задачи, накопленные за много лет проведения олимпиад, полезны сегодня как тем, кто проводит олимпиады, так и тем, кто в них участвует.

Первыми олимпиадами, проводившимися в нашей стране, были олимпиады по математике. Самая первая была организована в 1934 г. в Ленинграде по инициативе члена-корреспондента АН СССР Б. Н. Делоне и профессора В. А. Тартаковского. Уже в то время ленинградские ученые думали и о проведении олимпиад по физике. Физические олимпиады оказались, однако, моложе математических. В Московском университете олимпиада по физике впервые была организована в 1938 г. До войны и в первые послевоенные годы олимпиады проводились фактически только в больших городах, там, где были сильные университеты. Значительный рост «олимпиадного дела» произошел в конце 50-х — начале 60-х годов. Кроме математических и физических олимпиад, получили развитие олимпиады по химии, биологии, географии, языкознанию и математике и по другим предметам. С 1959 г. проходят международные математические олимпиады, несколько позже появились и международные олимпиады по физике и химии.

Авторы этой книги не ставили своей целью подробно рассказать все об олимпиадах. Мы имеем возможность лишь очень схематично рассказать о сложившейся структуре физико-математических олимпиад (заметим, кстати, что структура химических олимпиад во многом аналогична). Особое внимание в нашем рассказе будет уделено тем олимпиадам, в организации которых мы много лет сами участвовали. Речь идет об олимпиадах Московского физико-технического института. Такие олимпиады ежегодно организуются для московских школьников. Кроме того, МФТИ проводил много олимпиад и в других городах страны. На олимпиадах физтеха предлагаются, как правило, задачи и по математике, и по физике. Этим олимпиады МФТИ отличаются от олимпиад, проводящихся, например, на факультетах Московского университета.

Задачи являются, конечно, основой любой олимпиады. Естественно поэтому, что большую часть и этой книги также составляют задачи. Здесь впервые собраны задачи олимпиад МФТИ примерно с 1960 г. По этой причине

книга носит в известной мере «документальный» характер. В нее в основном включены задачи московских олимпиад МФТИ, но есть также и задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, проводившихся студентами физтеха в других городах, задачи тех московских физических олимпиад (проводимых Мосгороно), в организации которых принимали участие студенты и преподаватели МФТИ. Значительная часть задач приводится в книге с решениями. Но по обычным для задачников традициям условия и решения задач помещены в разных главах.

Олимпиадные задачи очень часто — продукт коллективного творчества. Далеко не всегда можно назвать автора той или иной задачи. Среди тех, кто предлагал задачи для школьных олимпиад, были студенты и академики, преподаватели МФТИ и научные сотрудники академических институтов. Некоторые задачи, начав свою жизнь на физтеховской олимпиаде, стали уже своеобразным «олимпиадным фольклором», часть их попала даже в учебники и популярные книжки. Мы не считали нужным, однако, исключать их по этой причине из издаваемого сборника. Как и в любом задачнике, авторы должны претендовать здесь в большей степени на роль собирателей и «обработчиков» задач. Тем не менее и самими авторами были предложены многие из приводимых задач. А все решения написаны нами заново специально для этой книги.

Отметим еще, что в книге отсутствуют описания экспериментальных задач, предлагавшихся школьникам в физическом практикуме. Это связано как с тем, что экспериментальные туры олимпиад пока еще очень молоды, так и с тем, что описания задач студенческого практикума МФТИ здесь были бы совершенно неуместны. Авторам кажется, что при подборе экспериментальных задач (скажем, для областных олимпиад) нужно исходить прежде всего из реальных возможностей тех физических кабинетов, на базе которых проводятся соответствующие экспериментальные туры. И во всяком случае вопрос о возможных олимпиадных экспериментальных заданиях требует совершенно отдельного обсуждения.

Московские олимпиады МФТИ

До середины 50-х годов в Москве ежегодно проводились одна математическая и одна физическая олимпиады. Назывались они московскими городскими олимпиадами и проходили на механико-математическом и физическом факультетах МГУ. У физиков, и особенно у математиков МГУ, были уже в то время богатые олимпиадные традиции, особую популярность завоевали к тому времени и тесно связанные с олимпиадами математические кружки на мехмате МГУ.

Физтех в то время еще не был так известен школьникам, как теперь. Физтеховские олимпиады начали проводиться существенно позже университетских, и в первые годы они привлекали не так уж много старшеклассников. В начале 60-х годов ситуация, однако, существенно изменилась. Это было, безусловно, следствием того большого внимания, которое уделялось Московским физико-техническим институтом различным формам работы со школьниками.

В основе проведения московских олимпиад МФТИ и сейчас лежат принципы и традиции, сложившиеся в те годы. Как и университетские, олимпиады физтеха проводятся обычно в два (а в последние годы в три) тура. Каждому участнику олимпиады предлагают на первом и втором турах три задачи по физике и три задачи по математике. На решение этих задач дается, как правило, 5 часов. В отличие от вступительных экзаменов на олимпиаде школьнику разрешают пользоваться любыми тетрадками, конспектами, книжками и справочниками. Не поощряются только разговоры друг с другом во время решения задач. (Заметим, кстати, что такой же порядок существует на физтехе и на письменных студенческих экзаменах по физике.) Прошедшие первый тур допускаются ко второму. При распределении премий после второго тура учитывались и результаты первого. Такой порядок определения победителей немного изменился после того, как стал проводиться еще и третий — экспериментальный тур. Группа победителей второго тура получает теперь возможность проделать какой-нибудь эксперимент в студенческом физическом практикуме. Во время эксперимента или сразу после него устраиваются индивидуальные собеседования со школьниками.

Разумеется, премию на олимпиаде школьник может

получить не только «по совокупности» всех заслуг (хотя так чаще всего и бывает), но и просто за красивое или оригинальное решение даже одной-единственной задачи.

Жюри московских олимпиад физтеха в начале 60-х годов возглавлял известный советский математик и механик профессор Ф. Р. Гантмахер. Он сыграл очень большую роль в организации не только московских, но и «больших» олимпиад МФТИ, речь о которых еще пойдет ниже.

Оргкомитет и жюри олимпиад составляли студенты, аспиранты и преподаватели МФТИ. Состав оргкомитета и жюри систематически обновлялся, но при этом всегда соблюдалось несколько принципов. Пожалуй, основной — это доверие. Ректорат МФТИ, партком и комитет комсомола доверяли проведение олимпиад студентам, и студенты это доверие всегда оправдывали. Немало часов провели на самих олимпиадах, на заседаниях жюри, в беседах со школьниками и многие преподаватели кафедр высшей математики и общей физики, других кафедр института, аспиранты.

Второй существенный принцип — это добровольность. Вся работа со школьниками всегда строилась в МФТИ на добровольных началах. И надо сказать, что никогда не было недостатка в желающих проводить олимпиады, лекции или беседы для школьников, вести занятия в вечерних физико-математических школах и кружках, организованных институтом. О масштабах только московских олимпиад говорит уже тот факт, что число участников первого тура почти каждый год превышало тысячу человек, а, бывало, доходило и до двух тысяч.

Работы школьников на олимпиадах приходится проверять обычно за два-три дня, так что совсем нетрудно представить себе тот громадный объем работы, который выполняли студенты и преподаватели. Заметим еще, что все работы жюри олимпиады проверяет, как минимум, два раза. И, конечно, дело не только в проверке работ. Встретить в институте тысячную «толпу» школьников, позаботиться о каждом из них во время олимпиады (иногда во время олимпиады организовывались даже легкие завтраки), ответить на все вопросы гостей, разобрать через неделю после каждого тура задачи, поговорить с теми, кто недоволен решением жюри, посмотреть вместе со школьниками их работы и объяснить, где и в чем они ошиблись,— такая работа по силам только большому коллективу. Много бывает и чисто «канцелярской» работы: до олимпиады надо позаботиться о том, чтобы отпечатать афиши и разослать их по школам, заказать в типографии грамоты для будущих победителей и заполнить их после окончательного решения жюри — все это тоже олимпиадные проблемы, требующие и сил, и времени. Вряд ли надо говорить, что вся эта работа вовсе не освобождает студентов от посещения лекций и семинаров, а учебная нагрузка на физтехе довольно велика. Неудивительно и то, что число тех, кто организует и проводит олимпиады, всегда было трехзначным.

Наконец, обязательно нужно сказать еще и о том, что в числе членов оргкомитета, жюри, как и среди тех, кто не имел во время олимпиад каких-то «официальных» постов, всегда были студенты младших курсов. Несколько лет они работали вместе со своими старшими товарищами, а тем временем и сами становились старшекурсниками и воспитывали уже свою смену. Дело всегда находилось всем желающим. А преемственность поколений — очень важная черта в работе студентов МФТИ со школьниками.

За прошедшие годы сменилось, конечно, уже не одно поколение участников и организаторов олимпиад. Многие из приходивших на олимпиады робкими восьмиклассниками стали впоследствии студентами, а потом и преподавателями МФТИ, научными сотрудниками различных институтов. Много бывших участников олимпиад защитило кандидатские и докторские диссертации, некоторые возглавляют теперь крупные научные коллективы. Несмотря на большую занятость и множество обязанностей, бывшие «олимпийцы» всегда охотно и активно откликаются на просьбу прочитать на олимпиаде лекцию школьникам, принять участие в работе жюри.

Первые «большие» олимпиады

Самой первой «большой» олимпиадой нужно считать математическую олимпиаду, состоявшуюся в Москве в 1960 г. Ее условно называют иногда «нулевой» Всероссийской математической олимпиадой. Проводилась она на механико-математическом факультете МГУ. Впервые на олимпиаду собрались школьники из разных областей страны. Нужно сказать, что олимпиады по математике проходили в то время уже в довольно многих областных и республиканских центрах; олимпиад же по физике и химии было существенно меньше. На «нулевой» олимпиаде присутствовали команды не всех областей и республик, но опыт межобластных соревнований юных математиков оказался удачным.

Официальная нумерация началась со следующего года. На первую Всероссийскую математическую олимпиаду весной 1961 г. приехали уже команды почти всех областей РСФСР, были приглашены и команды союзных республик. С тех пор всероссийские олимпиады стали проходить ежегодно. Фактически они сразу стали всесоюзными — каждый год в них принимали участие победители республиканских олимпиад. Всего было проведено шесть всероссийских математических олимпиад, а с 1967 г. олимпиады получили официальное название всесоюзных. В 1976 г. проходила уже 10-я Всесоюзная олимпиада. О нынешней структуре олимпиад мы расскажем дальше.

Совершенно естественно, что сразу после первой Всероссийской математической олимпиады возник вопрос и о проведении «больших» олимпиад по физике.

В конце 1961 г. около комитета ВЛКСМ МФТИ появилось объявление. Оно призывало зайти в комитет всех иногородних студентов и аспирантов, которые собирались ехать во время зимних каникул в свои родные города. Предлагалось провести в этих городах выездные олимпиады МФТИ. Честно говоря, с самого начала организаторы не слишком хорошо представляли себе, сколько найдется желающих и до каких масштабов вырастет это дело уже через два месяца. А желающих оказалось много. Первая «большая» олимпиада МФТИ прошла в феврале 1962 г. в 58 городах, а через неделю после нее, когда каникулы кончились, в комитет комсомола, где обосновался оргкомитет олимпиады, стали поступать работы участников. Члены оргкомитета — преподаватель А. П. Савин и тогда еще студенты Л. Г. Асламазов, Ю. М. Брук, П. П. Вороничев, И. Ш. Слободецкий и А. С. Эльтеков — едва успевали принимать и регистрировать толстые пакеты со школьными тетрадками.

Организована олимпиада была так. На Центральной станции юных техников были отпечатаны афиши, задачи и анкеты участников. Задачи запечатывались в конверт и вручались едущим на каникулы студентам и аспирантам. Если город был небольшой, организация олимпиады в нем могла быть поручена двум-трем студентам и аспирантам (в нескольких случаях даже и одному). Из больших же городов, как выяснилось, на физтехе училось иногда до десятка человек. Поэтому для организации олимпиад создавались целые бригады. Очень помог физтехам отдел школьной молодежи ЦК ВЛКСМ. В обкомы комсомола и в местные вузы были написаны письма с просьбой помочь физтеховским бригадам. За несколько дней до олимпиады были расклеены и разосланы по школам афиши. Сообщения об олимпиаде были опубликованы местными газетами, переданы по местному радиовещанию и телевидению. На олимпиаду могли прийти все желающие школьники 8—11-х классов, но часто приходили семи- и даже шестиклассники. Среди городов, в которых прошла олимпиада, были и столицы республик (Киев, Баку, Ереван), и многие областные города, и сравнительно небольшие районные центры. Помогли организаторам областные отделы народного образования, студенты местных университетов, педагогических и технических вузов, журналисты. Общее число участников олимпиады МФТИ по всем городам превысило 6000 человек.

Проверялись все работы на физтехе. Жюри олимпиады присудило 5 первых, 15 вторых и 45 третьих премий. Эти премии и 280 похвальных отзывов были посланы через некоторое время в обкомы комсомола с просьбой вручить их победителям.

Вскоре после возвращения с каникул студентов и аспирантов, проводивших олимпиады в других городах, на физтехе стало известно о том, что в Сибири прошла первая Всесибирская физико-математическая олимпиада. Эта олимпиада была организована учеными Сибирского отделения АН СССР и охватила области от Урала до Тихого океана. В первой сибирской олимпиаде приняло участие около полутора тысяч школьников. Общие принципы проведения олимпиады в Сибири были таковы же, как и принципы олимпиады МФТИ. Существенное отличие заключалось в том, что сибирская олимпиада не закончилась поездками ученых в области. Сибиряки пошли дальше и организовали в Новосибирском Академгородке летом 1962 г. летнюю физико-математическую школу. В этой школе проводился заключительный тур Всесибирской олимпиады, который стал одновременно и приемными экзаменами в ныне уже широко известную физико-математическую школу-интернат при Новосибирском государственном университете. В 1963 г. начали работу аналогичные интернаты при Московском, Ленинградском и Киевском университетах.

Начали думать о проведении «больших» олимпиад и в других вузах. В первую очередь нужно сказать здесь о физическом факультете МГУ, Московском инженерно-физическом институте, Ленинградском университете. Конечно, каждый из вузов был заинтересован в поиске способных и подготовленных школьников и пропаганде своих собственных специальностей и факультетов. Но нужно было думать и о школьниках — ведь олимпиады проводились именно для них. Вряд ли было бы целесообразно усилиями разных вузов одновременно проводить в каждом городе множество разрозненных олимпиад. Именно поэтому было признано разумным объединить усилия физтеха и физфака МГУ в 1963 г. Всероссийская физическая олимпиада в тот год еще не могла быть организована. Главной причиной этого было то, что во многих областях еще не было собственного опыта организации областных физических олимпиад.

Совместная олимпиада МФТИ и физфака МГУ 1963 г. получила название второй физико-математической олимпиады европейской части СССР и Закавказья. Она была организована почти так же, как и предыдущая олимпиада МФТИ. Число городов, в которых проводилась олимпиада, достигло на этот раз 167. Было у нее и важное отличие от олимпиады 1962 г. Оно заключалось в том, что олимпиада проходила уже в два тура. Первый — заочный тур прошел в декабре 1962 г. по районам. Заранее на места были разосланы афиши с задачами по математике и физике. Проверку работ заочного тура организовывали местные органы народного образования. К участию в очном туре в феврале 1963 г. допускались победители заочного тура и все желающие. Здесь необходимо, конечно, сделать пояснение. Возникает естественный вопрос — нужно ли было участвовать в заочном туре, если потом все равно можно участвовать в очном? Ответ таков — можно было не участвовать. Но победителей заочного тура специально привозили в областные и республиканские центры на очный тур. Об этом позаботились областные отделы народного образования, министерства просвещения республик. И это было очень существенно для многих сельских ребят — ведь далеко не каждый из них смог бы поехать на олимпиаду в областной центр или столицу республики самостоятельно. В то же время всегда соблюдался «принцип максимальной доступности» — двери, ведущие на олимпиаду, всегда были широко открыты для всех желающих в ней участвовать.

Говоря об итогах первых больших физико-математических олимпиад, надо сказать прежде всего о той роли, которую они сыграли в развитии олимпиад на местах. Ведущие вузы страны оказали большую помощь местным органам народного образования, местным университетам и педагогическим институтам. Уже с 1964 г. областные физические олимпиады стали проходить практически повсеместно. Олимпиады европейской части СССР и Закавказья вместе с всесибирскими олимпиадами, с одной стороны, и всероссийские математические олимпиады, с другой, послужили основой для создания единой системы школьных олимпиад в нашей стране. Важно и то, что уже в это время были заложены основы заочных олимпиад. В последующие годы с помощью «Комсомольской правды», «Учительской газеты» и областных и республиканских молодежных газет заочные олимпиады получили широкое развитие. В дальнейшем они были этапом всероссийских и всесоюзных олимпиад, существенным в первую очередь для школьников из отдаленных и сельских районов.

Первые олимпиады были также отличной школой организационной работы для сотен студентов и аспирантов. Доверие, оказываемое им, рождало и укрепляло чувство ответственности. Проведение олимпиад стало одним из важных дел для студенческих комсомольских организаций.

Существенную роль сыграли олимпиады и в привлечении в вузы увлеченных и способных выпускников школ. Большие олимпиады всегда сопровождались и большой агитационно-пропагандистской работой — рассказами о вузах, о достижениях современной науки и техники, лекциями для учителей и школьников, выступлениями студентов и аспирантов, ученых и преподавателей вузов в местной и центральной печати, по радио и телевидению. Результаты этой работы не замедлили сказаться, и уже можно подвести немало итогов. Многим школьникам олимпиады помогли выбрать свой путь в жизни, поверить в свои силы, а в конечном счете стать высококвалифицированными специалистами.

Всероссийские и всесоюзные олимпиады

С 1964 г. всероссийские математические олимпиады вместе с олимпиадами физическими проходили под руководством объединенного оргкомитета всероссийских физико-математических олимпиад. Председателем этого оргкомитета в 1964 г. был академик П. Л. Капица, позднее оргкомитет возглавил академик И. К. Кикоин. Он руководит Центральным оргкомитетом теперь уже всесоюзных физико-математических и химических олимпиад и до сих пор.

Центральный оргкомитет является «верховным» органом олимпиад. Он создается Министерствами просвещения и высшего и среднего специального образования СССР, ЦК ВЛКСМ, Академией наук СССР. Активное участие в его работе принимают преподаватели ведущих физико-математических и химических вузов, научные сотрудники академических институтов. С самого начала «больших» олимпиад входили в состав Центрального оргкомитета преподаватели и аспиранты Московского физико-технического института. Центральный оргкомитет создает предметные комиссии и жюри всесоюзных олимпиад по соответствующим предметам.

Расскажем о сложившейся ныне структуре олимпиад. Самым первым этапом всесоюзной олимпиады являются олимпиады в школах. Проводятся они учителями, а участвовать в них могут все желающие школьники. Следующий тур олимпиады — обычно его называют вторым туром — это районные олимпиады. В третьем — областном (а в больших городах — городском) — туре участвуют победители районных олимпиад. Из победителей третьего тура формируются команды для участия в республиканских олимпиадах. В республиках без областного деления вместо областной олимпиады организуется сразу республиканская. В РСФСР олимпиады имеют одну особенность. Заключается она в том, что российские республиканские олимпиады проходят по нескольким зонам. Победители зональных олимпиад в РСФСР и республиканских в других союзных республиках едут на олимпиады всесоюзные [1]. Кроме того, право на участие во всесоюзной олим-

[1] До 1975 г. на всесоюзные олимпиады приезжали команды всех областей страны и республик, не имеющих областного деления.

пиаде имеют школьники, получившие на предыдущей всесоюзной олимпиаде первые и вторые премии. Всесоюзные олимпиады организуются непосредственно Центральным оргкомитетом. Для организации районных, городских, областных и республиканских олимпиад соответствующие оргкомитеты и жюри создаются местными органами народного образования.

В состав местных оргкомитетов и жюри входят представители комсомольских организаций, преподаватели, аспиранты и студенты вузов, ученые, учителя, методисты. Для оказания методической и организационной помощи областным и республиканским оргкомитетам в областные и республиканские центры выезжают представители Центрального Оргкомитета. Предметные комиссии ежегодно разрабатывают задачи, рекомендуемые для областных и республиканских олимпиад. Эти задачи, утвержденные Ученым методическим советом Министерства просвещения СССР, рассылаются заранее во все облоно и министерства просвещения республик. Разумеется, местные оргкомитеты и жюри могут предлагать школьникам на олимпиадах и другие задачи. Цель же рекомендаций заключается в том, чтобы повсеместно обеспечить достаточно высокий научный уровень олимпиад.

Сроки олимпиад и количественный состав команд от школ, районов, областей (городов) и республик на соответствующих турах ежегодно определяются органами народного образования.

В последние годы на областных, республиканских и заключительных турах олимпиад по физике, кроме решения задач, стали проводиться еще и экспериментальные работы.

На Всесоюзной физической олимпиаде 1975 г. впервые все участники олимпиады выполняли одну-две экспериментальные задачи. Официально на олимпиадах проводится, как правило, только личное первенство. Но, как и на спортивных соревнованиях, иногда неофициально подводятся и командные итоги. Следует ясно отдавать себе отчет в том, что по выступлениям на республиканской или всесоюзной олимпиаде команды всего из нескольких школьников еще нельзя делать выводов об уровне преподавания в соответствующей области или республике.

Каждый тур олимпиады отражает способности и уровень подготовки только тех учащихся, которые принимают в нем участие. И именно поэтому командному первенству никогда не придавалось и не следует придавать никакого серьезного значения. Заметим, кстати, что и на международных олимпиадах официально проводится тоже только личное первенство.

Первые всероссийские олимпиады проходили в Москве.

Сейчас всесоюзные олимпиады (а в Российской Федерации и на Украине и республиканские) «кочуют» — каждый год они проводятся в одном из крупных областных или республиканских городов. В организации олимпиад активно участвуют университеты, педагогические и технические вузы.

Единая организация всесоюзных олимпиад очень тесно связана и с другими формами массовой внешкольной работы по физике и математике. Мы уже упоминали об олимпиадах заочных. С заочных олимпиад много раз начинались олимпиады всесибирские. Областные туры олимпиад в сибирских, дальневосточных и среднеазиатских областях являлись одновременно этапом всесибирской олимпиады. В европейской части страны в последние годы заочные олимпиады фактически не проводятся. В значительной степени их роль перешла теперь к заочным конкурсам по решению задач, проводимым журналом «Квант». Победители таких конкурсов получают право участвовать в областных или республиканских олимпиадах наравне с победителями районных и городских олимпиад.

Несколько раз проводило олимпиады по физике и математике и Центральное телевидение. Нельзя не сказать и о специализированных летних лагерях. Впервые большая летняя школа для участников олимпиад была организована, как мы уже упоминали, в Новосибирском научном центре. Центральный Комитет комсомола и Центральный Совет пионерской организации им. В. И. Ленина вместе с оргкомитетом всесоюзных олимпиад несколько раз организовывали для победителей физико-математических и химических олимпиад смены во всероссийском комсомольско-пионерском лагере «Орленок». Отрядными вожатыми и руководителями кружков в «физико-математических» сменах работали студенты, аспиранты и выпускники Московского физико-технического института. Проведение межобластных летних школ для победителей олимпиад давно стало традицией в Московском университете, проводят летние школы и другие вузы.

Одной из первоначальных целей школьных олимпиад был отбор наиболее подготовленных и способных. В этом заинтересованы вузы, эта цель и сейчас остается очень важной. Вместе с тем в университетах и вузах всегда понимали и то, что олимпиады служат активной формой широкой пропаганды естественнонаучных знаний. Естественным поэтому нужно считать переход от призывов к более глубокому изучению физики и математики, к конкретной помощи учащимся в систематических занятиях этими науками. Именно таким целям служили и служат физические и математические кружки и возникшие в последние 10—15 лет многочисленные физико-математические вечерние школы, заочные школы, охватывающие (вместе с филиалами) всю территорию нашей страны. Одна из этих школ — заочная математическая школа — организована на мехмате МГУ, вторая — заочная физико-техническая школа — работает в МФТИ.

Само собой разумеется, что все эти формы работы вузов со школьниками взаимно дополняют и обогащают одна другую. Значительно возросли возможности такой работы, помощи ученых и вузов средней школе после создания научно-популярного физико-математического журнала АН СССР и АПН СССР для школьников — «Квант». Регулярно рассказывает «Квант» и о всесоюзных и международных олимпиадах школьников.

Прошло уже 15 лет с той зимы, когда впервые была проведена «большая» олимпиада МФТИ. Немногим раньше появилась на физтехе и одна из первых в Москве вечерних физико-математических школ. Едва ли не большинство нынешних студентов МФТИ еще задолго до поступления в институт начали участвовать в олимпиадах. А став студентами, многие из них становятся и организаторами этих олимпиад — московских и «выездных», приходят работать в вечерние физико-математические школы и ЗФТШ, становятся активными пропагандистами физико-математических знаний и достижений современной науки. Историю олимпиад продолжают писать новые поколения студентов и аспирантов, ветераны и новички.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Числа

1. Найти целое число, кубичный корень из которого равен количеству тысяч этого числа.

2. Доказать, что сумма цифр числа, являющегося полным квадратом, не может равняться 1967.

3. Найти все тройки натуральных чисел таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

4. При каких k выражение $k^{k+1}+(k+1)^k$ делится на 3?

5. Найти наименьшее натуральное число a такое, что выражение $50^n+a\cdot 23^n$ делится на 1971 при любом нечетном n.

6.** Доказать, что для любого натурального k найдется k составных чисел, попарно взаимно простых и образующих арифметическую прогрессию.

7.* Доказать, что не существует арифметической прогрессии с разностью, меньшей 1968, в которой подряд располагалось бы одиннадцать различных простых чисел.

8. Для данного числа n составляется число n_1, равное сумме кубов цифр числа n. Для числа n_1 таким же образом составляется число n_2 и т. д. Доказать, что, начиная с некоторого номера, числа в этой последовательности начнут периодически повторяться.

9. Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее начинается с той же цифры, на которую оканчивается предыдущее. Получается некоторое многозначное число. Из всех многозначных чисел, которые можно получить таким образом, выбирают наибольшее и наименьшее. Найти их сумму.

10. Пусть $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ — всевозможные делители числа n. Доказать, что $(d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\ldots\cdot d_k)^2=n^k$.

11. Обозначим через s сумму всех делителей числа n, а через k — их число. Доказать, что при $n\geqslant 2$

$$\frac{3}{4}n\geqslant\frac{s}{k}\geqslant\sqrt{n}.$$

12. Доказать, что число $\frac{(nk)!}{(n!)^k\cdot k!}$ — целое.

13. a, b и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные числа. Доказать, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — тоже рациональные числа.

14**. Дана несократимая дробь $\frac{p}{q}$. Рассматриваются все несократимые дроби со знаменателем, не превосходящим q. Из дробей, принадлежащих этому множеству и больших $\frac{p}{q}$, выбирается наименьшая $\frac{x_1}{y_1}$, а из дробей, принадлежащих этому множеству и меньших $\frac{p}{q}$, наибольшая $\frac{x_2}{y_2}$. Доказать, что

$$\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{p}{q}.$$

Многочлены

15. Даны два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с целыми коэффициентами. Их произведение есть многочлен, у которого все коэффициенты делятся на пять. Доказать, что хотя бы у одного из данных многочленов все коэффициенты делятся на пять.

16. Доказать, что многочлен $(x+a)^n\,(bx+c)$ имеет не менее $n+1$ члена, если $bx+c\not\equiv 0$, $a\neq 0$.

17*. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_7$ — корни некоторого многочлена седьмой степени с комплексными коэффициентами. Докажите, что если соответствующие им точки на комплексной плоскости лежат строго внутри некоторого угла в 60° с вершиной в начале координат (т. е. не лежат на сторонах и в вершине этого угла), то все коэффициенты многочлена отличны от нуля.

Уравнения и неравенства

18. Решить в целых числах уравнение:

$$19x^2-65y^2=1965.$$

19. Найти все целые решения уравнения: $x^3+y^3=1972$.

20. Найти все решения уравнения $x^2-2y^2=1$ в простых числах x, y.

21. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{1970}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}?$$

22. Найти наименьший корень уравнения

$$x-[\sqrt{x}]^2=n;$$

(n — целое, $[\sqrt{x}]$ — целая часть $\sqrt{x}$).

23. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1960}?$$

24*. Даны положительные числа a, b, c ($a\geqslant b\geqslant c$). Числа x, y, z удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ xyz=abc. \end{cases}$$

Доказать, что если каждое из чисел x, y, z не больше a и не меньше c, то x, y, z равны в некотором порядке числам a, b, c.

25. Найти все целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

26. Доказать, что если для положительных чисел a, b и c выполнено соотношение

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0,$$

то хотя бы два из чисел a, b и c равны.

27. Решить уравнение: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{x}}}}=x.$

28*. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{aligned} \cos x_1 &= x_2 \\ \cos x_2 &= x_3 \\ &\ldots\ldots \\ \cos x_{n-1} &= x_n \\ \cos x_n &= x_1? \end{aligned}$$

29. Найти n из уравнения

$$\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\ldots+\cos 40^\circ\cdot n=\cos 20^\circ.$$

30. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям: $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$.
Известно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$. Найти a_{1964}.

31.** Числа x_n определяются рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10x_n}, \quad x_1 = 2.$$

Доказать, что $\frac{4}{5} < x_n \leqslant \frac{5}{4}$ при всех $n > 1$.

32. Числа m, n — целые положительные и $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$.

Доказать, что $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}\,n^2}$.

33. Доказать, что наименьшее из чисел $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ меньше или равно числу $0{,}5\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

34. Доказать неравенство

$$n(1 + a^{2n}) - a^n \geqslant a^{2n-1} + a^{2n-2} + \ldots + a^2 + a,$$

если $a > 0$ и n — натуральное число.

35*. Доказать неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\sqrt[k]{2} - 1) < \sqrt[k]{2a_1^k + 2^2a_2^k + \ldots + 2^na_n^k},$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, k — фиксированное натуральное число.

Задачи на построение и описание геометрических фигур

36. Построить треугольник по данным серединам двух сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

37.* Построить точку P внутри треугольника ABC, для которой $|AK| = |BE| = |CH|$, где K, E, H — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB, BC, CA соответственно.

38. На плоскости даны две точки A и B. Построить квадрат, у которого эти точки лежат на границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата минимальна.

39. Дан треугольник ABC. На прямой AC найти такую точку M, чтобы сумма радиусов окружностей, описанных вокруг треугольников AMB и CBM, была наименьшей.

40. Из всех треугольников периметра 1 найти тот, у которого сумма $aA + bB + cC$ наименьшая. a, b, c — стороны, A, B, C — соответствующие углы треугольника в радианах.

41. На плоскости даны четыре точки: A, B, C и D. Найти множество точек M, таких, что

$$|AM|^2 + |BM|^2 = |CM|^2 + |DM|^2.$$

42. Дан равносторонний треугольник ABC. Найти множество точек M, таких, что треугольники ABM и ACM равнобедренные.

43. По полю проходит прямолинейная дорога. Человек, стоящий на дороге в точке A, может двигаться по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дороге со скоростью не более 6 км/ч. Найти множество точек, в которые он может попасть за 1 ч.

44. Из точки M квадратного биллиарда пускается шарик параллельно одной из диагоналей. Найти множество точек P на биллиарде таких, что шарик, пущенный из точки P одновременно с первым шариком со скоростью, равной (по величине и направлению) скорости первого, столкнется с ним.

45. На плоскости даны три точки K, L, N. Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках K, L и N. Найдите множества точек, в которые может попасть:

а) середина четвертой стороны;

б) вершина этого четырехугольника.

46.* Около населенных пунктов A и B протекает прямой канал. Как провести водопровод в A и B, чтобы длина труб была минимальна?

47. A и B — различные фиксированные точки окружности, K — переменная точка той же окружности. На каждой ломаной AKB отметим середину M. Найти множество точек M. (Если, например, $|AK| > |KB|$, то M — такая точка отрезка AK, что $|AM| = |MK| + |KB|$.)

48. На необитаемом острове путешественники нашли записку с указанием места, где спрятан клад. В записке говорится: «От перевернутой лодки дойдите до пальмы, измеряя расстояние, около нее поверните направо и пройдите еще столько же. Отметьте место остановки. Потом

вернитесь обратно к лодке и идите к большому камню, от которого пройдите влево такое же расстояние. Снова отметьте место остановки. Посередине между вашими отметками зарыт клад». Путешественники нашли и пальму, и камень, но лодки уже не было. Смогут ли они найти клад?

49. Дан угол на плоскости. Найти множество центров окружностей, описанных вокруг равнобедренных треугольников, у которых вершины при основании лежат на противоположных сторонах этого угла, а третья вершина — в данной точке A на его биссектрисе.

Геометрические задачи на доказательство

50. Через точку M на диаметре окружности проводится секущая CD под углом 45° к диаметру. Докажите, что число $|CM|^2+|DM|^2$ не зависит от положения точки M на диаметре.

51. Дан прямоугольник $ABCD$. В него вписаны два разных прямоугольника, имеющих общую вершину на стороне AB. Доказать, что сумма площадей этих прямоугольников равна площади исходного.

52.* A, B, C, D — последовательные вершины четырехугольника, вписанного в окружность. Проведены диагонали AC и BD. Доказать, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

53. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников ABC, ABD, ACD и BCD подобен данному.

54. В некотором треугольнике одна из сторон равна полусумме двух других. Доказать, что прямая, соединяющая центр вписанного круга с точкой пересечения медиан, параллельна одной из его сторон.

55**. В треугольнике со сторонами a, b, c проведена прямая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности. Доказать, что если эта прямая перпендикулярна биссектрисе угла C, то $\frac{a+b+c}{3}=\frac{2ab}{a+b}$.

56. Точки касания вписанной в треугольник окружности соединяются отрезками с противоположными вершинами. Доказать, что указанные отрезки пересекаются в одной точке.

57. Доказать, что если прямая, соединяющая центр окружности, вписанной в треугольник, с точкой пересечения его медиан, параллельна одной из его сторон, то длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию.

58. В треугольник ABC вписана окружность и проведена биссектриса AF, пересекающая эту окружность в точках E и D (рис. 1). Доказать, что $|AD|>|FE|$.

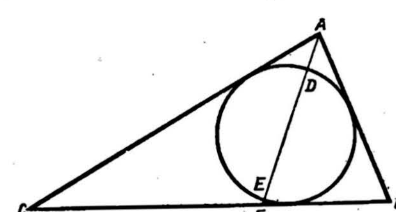
59. Из точки P, внешней по отношению к данной окружности, проведены касательные PT_1 и PT_2 (T_1 и T_2 — точки касания). Внутри окружности построена дуга T_1T_2 с центром в точке P. Произвольная точка A этой дуги соединена с точками T_1 и T_2. Доказать, что точки M_1 и M_2, в которых прямые AT_1 и AT_2 второй раз пересекают окружность, диаметрально противоположны.

60.* Доказать, что если в треугольнике перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник — равнобедренный.

61. Каждая хорда, делящая площадь выпуклой плоской фигуры пополам, имеет длину, не превосходящую 1. Доказать, что площадь этой фигуры не превосходит 2π.

62. Для треугольника определим три числа: R_o — радиус описанного круга, R_b — радиус наименьшего круга, вмещающего в себя этот треугольник, и R_n — наименьшее из чисел R таких, что круги радиуса R с центрами в вершинах треугольника в сумме полностью его покрывают. Доказать, что если какие-либо два из чисел R_o, R_b и R_n равны, то равны все три.

63. Для треугольной пирамиды определяются три числа: R_o — радиус описанного шара, R_b — радиус наименьшего шара, вмещающего в себя эту пирамиду, и R_n — наименьшее из чисел R таких, что шары радиуса R с



1

центрами в вершинах пирамиды в сумме полностью покрывают пирамиду. Доказать, что если какие-либо два из чисел R_o, R_b и R_n равны, то равны все три.

64. Внутри треугольной пирамиды $ABCD$ лежит точка M. A', B', C', D' — ее проекции на плоскости граней, противолежащие вершинам A, B, C, D. S_A, S_B, S_C, S_D — площади этих граней. Доказать, что:

$$S_A \cdot |AM| + S_B \cdot |BM| + S_C \cdot |CM| + S_D \cdot |DM| \geqslant$$
$$\geqslant 3(S_A \cdot |MA'| + S_B \cdot |MB'| + S_C \cdot |MC'| + S_D \cdot |MD'|).$$

65. В основании четырехгранной пирамиды — ромб с углом 60° при вершине A. Боковое ребро, выходящее из вершины A, равно стороне ромба. Доказать, что из остальных боковых ребер можно составить прямоугольный треугольник.

Задачи на замощение, разрезание, вырезание и раскрашивание

66. Можно ли замостить шашечную доску 10×10 плитками 4×1?

67. Из шахматной доски вырезаны одна черная и одна белая клетки. Доказать, что ее можно замостить без наложения фишками домино 2×1.

68. На какое наименьшее число остроугольных треугольников можно разрезать тупоугольный треугольник?

69.* На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать правильный m-угольник $(m>12)$?

70. Плоскость разбивается на многоугольники, каждый из которых окрашивается в один из трех цветов. Доказать, что при этом найдутся по крайней мере две точки, расстояние между которыми равно 1 и принадлежащие многоугольникам одного цвета. Если взять количество цветов, равное 7, то существуют такое разбиение плоскости и такая раскраска, что любые две точки, находящиеся на расстоянии 1, окрашены в разные цвета.

71. Дан многогранник, из каждой вершины которого исходят три ребра. Его грани окрашены четырьмя красками так, что любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены разными красками. Доказать, что для любых

двух цветов общее количество многоугольников этих цветов с нечетным числом сторон четно.

72.* Фигуру, вырезанную из листа бумаги, разделили несколькими линиями на 10 частей. Затем ее перевернули на обратную сторону и вновь разделили на 10 частей. Затем окрасили одну из сторон с помощью 10 разных красок (каждую из частей одной краской), с помощью тех же красок аналогично раскрасили и другую сторону. Доказать, что раскраску можно произвести так, чтобы площадь, окрашенная с обеих сторон одинаковой краской, составила не меньше 1/10 площади всей фигуры.

73. Клетчатая плоскость раскрашивается десятью красками так, что клетки с общей стороной (соседние) покрашены в разные цвета, причем все десять красок использованы. Две краски называются соседними, если ими где-нибудь покрашены соседние клетки. Каково минимальное возможное число пар соседних красок?

74. Вырезать из клетчатой бумаги многоугольник наименьшей площади такой, что, играя на нем в крестики — нолики — три (КН—3), начинающий всегда выигрывает. КН—3 — игра в «крестики — нолики», когда выигрывает тот, кто первым поставит три значка — крестика или нолика — подряд на одной прямой.

Игры

75. На трех крайних справа полях шахматной доски $1\times n$ стоит по одной фишке. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди берет одну из фишек и передвигает ее на несколько полей влево. Проигрывает тот, кому в свою очередь невозможно сделать ход. Кто выигрывает в этой игре?

76. На шахматной доске 8×8 клеток ставятся две фишки. Два игрока поочередно делают ходы каждый своей фишкой. Фишка первого игрока может при каждом ходе передвигаться лишь на одну клетку по вертикали или горизонтали. Фишка второго — на одну клетку по вертикали или горизонтали либо на одну клетку — по диагонали. Выигрывает тот, кто поставит свою фишку на фишку партнера. Кто выигрывает при правильной игре?

77. Павлик и Саша хотят расставить в вершинах куба цветные шарики. У каждого из них по одному белому, одному черному, одному красному и одному зеленому ша-

рику. Мальчики поочередно ставят по одному шарику. Первым ставит Павлик, а Саша ставит свои шарики в таком порядке: сначала белый, потом красный, потом черный и последним зеленый. Всегда ли Павлик может так расставить свои шарики, чтобы на каждом ребре куба оказались шарики разного цвета?

78. Город NN построен так, что каждая его улица соединяет две площади, а на каждую площадь выходит по три улицы от разных площадей. На карте этого города играют двое. Они поочередно окрашивают изображения площадей. В их распоряжении имеются краски четырех цветов. Начинающий хочет, чтобы для каждой улицы цвета площадей, на которые она выходит, были различны, а второй, наоборот, хочет, чтобы в одинаковые цвета оказались окрашенными хотя бы две площади, соединенные улицей. Однако второй пользуется сначала первой, потом второй, потом третьей, потом четвертой, потом снова первой и т. д. красками. При каком числе площадей (найти все значения) начинающий может играть так, что он выиграет, как бы ни играл второй?

79. n игроков играют в следующую игру: имеется $(2n+1)$ шашек, из них $2k$ черных, остальные белые. Играющие садятся вокруг стола и каждый из них получает по две шашки. По жребию один из игроков берет оставшуюся шашку. Если у него при этом три шашки оказываются одного цвета, то он выиграл, и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе шашки одинакового цвета, а третью отдает соседу справа. Если у того окажутся три шашки одинакового цвета, то он выиграл, если нет, то он делает то же, что и первый, и т. д.

Доказать, что при k, не равном n, игра окончится за конечное число передач шашек (ходов). Найти максимально возможное число ходов в этой игре.

80. Играют двое. Вначале первый из играющих ставит две фишки (свою и противника) в какие-либо вершины правильного $2n$-угольника, стороны которого не проведены, а затем передвигает свою фишку в другую вершину многоугольника и проводит карандашом диагональ или сторону, соединяющую эти вершины. После этого второй передвигает свою фишку в одну из вершин и отмечает свой путь и т. д. Запрещается передвигаться в вершину, занятую в этот момент противником, и передвигаться по уже пройденному пути. Проигрывает тот, кто в некоторый момент не сможет передвинуть свою фишку, не нарушая

правила. Доказать, что при правильной игре второй всегда выигрывает.

81. Двое пишут $2p$-значное число, употребляя только цифры 6, 7, 8 и 9. Первую цифру числа пишет первый, затем вторую пишет второй, за ним третью пишет снова первый и т. д. При каких значениях p второй может добиться того, что полученное число будет делиться на 9?

Задачи на максимум и минимум

82. На всесоюзную олимпиаду школьников посылается от каждой области четыре человека. Кроме того, посылаются школьники — победители прошлогодней олимпиады. За каждого 8-классника области начисляется 1 очко, за 9-классника — 2 очка, за 10-классника — 3 очка. Какое максимальное число очков может набрать область за первые пять лет проведения олимпиад?

Количество победителей на каждой всесоюзной олимпиаде заранее не ограничивается.

83. В математическом кружке принимают участие 100 школьников. Известно, что среди любых четырех участников кружка всегда найдется, по меньшей мере, один, знакомый с остальными тремя. Доказать, что существует участник кружка, знакомый со всеми остальными 99 школьниками. Каким может быть число школьников, знакомых со всеми остальными?

84. Человек идет по шпалам железной дороги. Максимальная длина его шага 0,8 м. Шпалы уложены так, что на любом стометровом участке ровно 200 шпал. Расстояние между шпалами не меньше 0,3 м и не больше 0,6 м и может меняться в этих пределах от шпалы к шпале. При какой укладке шпал человек сделает максимальное число шагов на 1 км пути, а при какой минимальное?

85. На уроке физкультуры учитель расставил школьников на прямой тропинке. По сигналу учителя дети бегут к тому из школьников, на которого покажет учитель, а потом на свои места. Докажите, что после нескольких таких пробежек наибольшее расстояние пробежит один из крайних школьников.

86. Канал имеет прямоугольный поворот. Какой максимальной площади прямоугольный плот может пройти по этому каналу?

87. На плоскости рассматриваются самонепересекающиеся многоугольники, все стороны которых выражаются целыми числами, а углы прямые. Найти величину наибольшей и наименьшей площади таких многоугольников, если все они имеют один и тот же данный периметр, равный $4n$ (n — целое).

88. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m \times n$ клеток. Какой максимальной длины несамопересекающийся путь можно провести по линиям сетки на прямоугольнике из угла прямоугольника в угол, ему противоположный?

Разные задачи

89. Волшебный замок имеет в плане вид, изображенный на рис. 2. Известно, что три двери открыты, а три закрыты. Если человек или волшебник проходит через любую из дверей, то тут же открытые двери закрываются, а закрытые — открываются. Хоттабыч хочет войти в замок, побывать во всех комнатах замка по одному разу и выйти из него. Если он вырывает волосок из своей бороды, то все открытые двери закрываются, а закрытые — открываются. Доказать, что Хоттабыч всегда сможет выполнить свою задачу (независимо от того, какие именно двери были первоначально открыты), затратив не более двух волосков из своей бороды.

90. В 1964 г. начинает издаваться альманах «Юный физик», который будет выпускаться нерегулярно, но не реже, чем 5 номеров в 3 года. Докажите, что если альманах будет издаваться достаточно долго, то в некотором году его номер совпадет с годом.

91.* Из одинаковых равносторонних треугольников черного и белого цвета сложен большой равносторонний треугольник, причем каждый из черных треугольников граничит по стороне лишь с четным числом белых треугольников, а каждый белый треугольник — с нечетным числом белых треугольников. Доказать, что маленькие треугольники, стоящие в вершинах большого треугольника, обязаны быть одного и того же цвета (рис. 3).

92. Одна из стенок кубической клетки с ребром 150 см должна быть затянута капроновой сеткой. Имеется прямоугольная сетка размером 105 см$\times$180 см с квадратными ячейками площадью 1 см^2. Как с помощью ножниц превратить ее в сетку, которой можно было бы полностью затянуть стенку, чтобы все ячейки были одинаковыми правильными многоугольниками площадью не более 3 см^2?

93. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведена прямая. Тангенс угла наклона этой прямой к стороне AD равен $\frac{k}{p}$ (k и p — натуральные числа). Точка A_1 пересечения этой прямой с границей квадрата ортогонально проектируется в точку A_2 на противоположной стороне квадрата. Из точки A_2 проводится прямая, параллельная прямой AA_1, вновь до пересечения с границей квадрата в точке A_3. Точка A_3 ортогонально проектируется на противоположную сторону квадрата в точку A_4 и т. д.

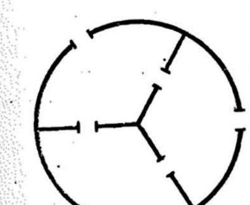
На сколько частей проведенные прямые разобьют квадрат?

94. На плоскости расположены n окружностей ($n \geqslant 5$). Известно, что любые три из них имеют общую точку. Доказать, что и все n окружностей имеют общую точку.

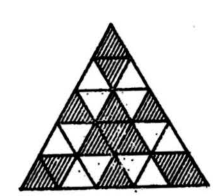
95. Космонавты K, E и Φ соревнуются в космическом многоборье. В каждом виде соревнований победитель получает A очков, занявший второе место — B очков, последний — C очков. A, B и C — натуральные числа. После окончания всех соревнований K получил 22 очка, E и Φ — по 9 очков. Соревнование на быстроту реакции выиграл E. Кто был вторым в соревновании на выносливость?

96. 50 гангстеров стреляют одновременно. Каждый стреляет в ближайшего к нему гангстера (в одного из ближайших, если несколько человек находятся на одинаковом расстоянии от него) и убивает его наповал. Найти наименьшее возможное число убитых.

97. В замке появились два привидения. Одно из них поет, другое хохочет. В течение каждой минуты каждое из них либо звучит, либо молчит. Поведение же их в по-



2



3

следующую минуту зависит от событий предыдущей минуты следующим образом: Пение в последующую минуту ведет себя так же, как и в предыдущую, если только в предыдущую минуту не было игры на органе при молчащем Смехе. В противном случае оно меняет свое поведение на противоположное. Если в предыдущую минуту горела свеча, то Смех будет звучать или молчать в зависимости от того, звучало или молчало Пение. Если свеча не горела, то Смех будет делать противоположное тому, что делало Пение. В настоящую минуту Смех и Пение оба звучат. Какие действия со свечой и органом нужно совершить, чтобы установить и поддерживать тишину в замке?

98. Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, в крышке которой имеются 4 отверстия, образующие квадрат. Под отверстиями находится по кувшину, в каждом из которых торчит селедка хвостом вверх либо вниз.

Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положение расположенных под ними селедок и повернуть одну или обе по своему усмотрению. Если хвосты всех селедок окажутся направленными в одну сторону, то дверь пещеры открывается.

После того, как Али-Баба вытащит руки из отверстий, бочка быстро поворачивается и останавливается, причем Али-Баба не в состоянии определить новое положение бочки по отношению к старому.

Существует ли способ действий, позволяющий Али-Бабе за несколько попыток наверняка открыть дверь?

99. Десять рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть первоначально окрашено, а затем смонтировано. Время окраски — 10 мин, время монтажа — 20 мин. После окраски изделие должно 5 мин сохнуть. Как разбить рабочих на маляров и монтажников, чтобы выполнить работу в кратчайшее время?

100. Дан выпуклый 1970-угольник. Рассматриваются все треугольники с вершинами в вершинах этого многоугольника. Доказать, что всякая точка плоскости, не лежащая ни на одной из сторон этих треугольников, покрыта четным числом указанных треугольников.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Следует предупредить читателей, что распределение задач по разделам в этой главе носит условный характер. Большая часть задач приводится в том виде, в каком они давались на олимпиадах. В нескольких задачах нужно ввести дополнительные данные, формально отсутствующие в условиях (например, скорость света). Такие «пропуски» сделаны умышленно, иногда их стóит делать в олимпиадных задачах (но, разумеется, не слишком часто!). В практической деятельности и физики-экспериментаторы, и физики-теоретики тоже ведь далеко не всегда знают заранее, какая информация может им понадобиться при решении той или иной задачи. Несколько задач, в которых требуется оценить те или иные величины из соображений размерности, взято из архивов оргкомитета. По мнению авторов, задачи такого типа следует чаще предлагать на олимпиадах.

Задачи по механике

101. В звездном скоплении ФАПМ-66 одна из звезд ГУ-50 покоится, а все остальные разбегаются от нее со скоростями, пропорциональными их расстоянию до звезды ГУ-50. Какую картину увидят космонавты, высадившиеся на планете вблизи другой звезды скопления ФАПМ-66?

102. Для защиты самолета сзади было предложено установить в хвосте самолета реактивный снаряд. При испытании было обнаружено, что через некоторое время после пуска снаряда он разворачивался и догонял самолет. Как объясняется это явление?

103. В межзвездной среде с плотностью ρ вспыхнула Новая звезда. Ее оболочка непрерывно расширяется. В момент вспышки масса оболочки равна M_0, а ее скорость v_0. Каков будет радиус оболочки R к тому моменту, когда ее скорость уменьшится в n раз?

104. В плоскости (X, Y) находятся N неподвижных одинаковых шаров. Параллельно оси X в отрицательном направлении движется еще один точно такой же шар. Какое максимальное число шаров может после всех происшедших столкновений получить скорость, имеющую

ненулевую положительную составляющую вдоль оси X? Плоскость считается гладкой, а соударения — упругими.

105. Чем лучше замедляются нейтроны — блоком свинца или таким же по размерам блоком парафина? (парафин состоит из водорода и углерода).

106. В прямолинейном желобе лежит $(K-1)$ шар одинакового радиуса. Еще один шар того же радиуса движется по желобу, имея количество движения KP. Найти соотношение между массами шаров, если после последнего столкновения все шары стали обладать одинаковым количеством движения. Трения нет, все удары абсолютно упругие.

107. По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут без трения скользить две абсолютно упругие бусинки с массами m_1 и m_2. В начальный момент между бусинками помещена сжатая пружинка, а бусинки скреплены нитью. Нить пережигают. Где столкнутся бусинки в n-й раз? Размеры бусинок и пружинки много меньше радиуса кольца.

108. К тележке массы M, которая может кататься без трения, на длинной нити подвешен груз точно такой же массы M. Длина нити l. Тележку и груз отвели в противоположные стороны и одновременно отпустили. Через некоторое время начали наблюдать за колебаниями системы. Считая эти колебания малыми, предскажите результат измерения периода колебаний (рис. 4).

109. Тело брошено под углом к горизонту. Что займет больше времени — подъем или спуск? Учесть сопротивление воздуха.

110. Камень массы M падает с высоты H. На какую глубину h он зароется в землю, если сила трения камня о землю равна F $(F>Mg)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

111. Два автомобиля имеют одинаковую мощность. Максимальная скорость первого v_1 *км/ч*, второго v_2 *км/ч*. Какую максимальную скорость смогут развить автомобили, если один возьмет на буксир другого?

112. Гоночный автомобиль массой m движется вдоль экватора с востока на запад, а затем с той же скоростью v относительно Земли в направлении с запада на восток. Найдите разность сил давления автомобиля на поверхность шоссе в этих случаях.

113. Железная дорога сначала идет прямолинейно, затем поворачивает по полуокружности радиуса R направо, затем налево по полуокружности радиуса $2R$, далее снова идет прямолинейно. Какой участок пути подвергается наибольшему разрушению при движении поездов?

114. Может ли оставаться в покое ящик, висящий на веревке у вертикальной стены так, как показано на рис. 5, если трение отсутствует?

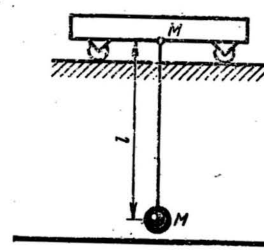
115. Однородный стержень длины $2a$ и весом P опирается одним концом на вертикальную стену, а другим концом на гладкий неподвижный профиль. Каким должен быть этот профиль, чтобы стержень в любом положении оставался в равновесии, даже в отсутствие трения?

116. Стопка тетрадей лежит на столе. Нижняя тетрадь приклеена к столу. Как будут двигаться тетради, если медленно потянуть за одну из них в горизонтальном направлении?

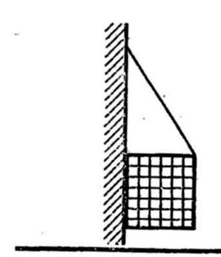
117. Стержень AB шарнирно закреплен в точке A и опирается концом B на платформу. Какую минимальную силу нужно приложить для того, чтобы сдвинуть тележку с места? Вес стержня равен P, коэффициент трения стержня о платформу равен k, угол, образуемый стержнем с вертикалью, равен α. Трением качения колес и трением в осях пренебречь (рис. 6).

118. Маховик массы M раскрутили и поместили между двумя стенками, расположенными под углом 2α друг к другу. Зная, что коэффициент трения между маховиком и стенками равен k, определить силы, с которыми маховик действует на стенки. Углы стенок с горизонтальной плоскостью одинаковы (рис. 7).

119. Груз массы M подвешен к пружине жесткостью k, которая, в свою очередь, прикреплена к потолку. Груз приподнимают до положения, при котором пружина не растянута, и отпускают. Какой максимальной скорости достигнет груз при движении? Собственная длина пружины мала по сравнению с ее растяжением.



4



5

120. На лед плашмя падает хоккейная шайба под углом α со скоростью v_0. Определить ее скорость после n-го падения, если известно, что при падении перпендикулярно к поверхности льда происходит абсолютно упругий удар. Коэффициент трения между льдом и шайбой равен k (рис. 8).

121. На край горизонтального стола с высоты H падает горизонтально расположенная гантеля, состоящая из двух одинаковых массивных маленьких шариков, насаженных на невесомый стержень длины l. Какое расстояние пролетит гантеля после абсолютно упругого соударения со столом до того момента, когда она впервые опять примет горизонтальное положение? (рис. 9).

122. На абсолютно упругой плоскости лежит упругий шарик массы m/n. С некоторой высоты на ту же плоскость падает другой, также упругий, шарик массы m. При этом он передает первому шарику $1/k$ — часть своей энергии. При каком соотношении между k и n шарики снова встретятся на плоскости?

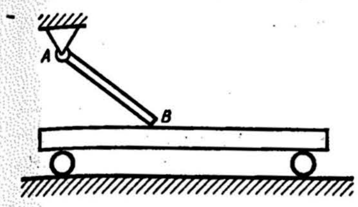
123. В закрытом фургоне равномерно движущегося грузового автомобиля в центре пола лежит арбуз, а над ним у крыши висит очень легкий резиновый шарик, надутый водородом. Как будут двигаться арбуз и шарик, если автомобиль резко затормозит? Сопротивлением воздуха и трением арбуза о пол пренебречь.

124. Имеется веревка, перекинутая через неподвижный блок. Концы веревки свободно лежат на подставках, расположенных на разных уровнях. С какой скоростью будет сматываться веревка, когда ее движение станет равномерным? Расстояние между уровнями равно H (рис. 10).

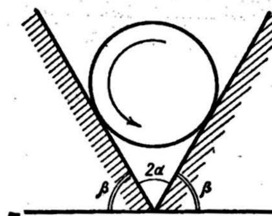
125. Оцените минимальную допустимую продолжительность суток для планеты с массой M и радиусом R.

126. Оцените минимальное значение радиуса не слишком большой твердой планеты, не имеющей жидкого ядра, если средний модуль Юнга вещества планеты равен E, а ее масса равна M.

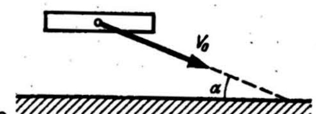
127. На непроводящей оси свободно насажены два одинаковых колесика A и B, сделанные из металла. На колесико A помещен заряд $+Q$. В точке C на наклонной плоскости находится заряд $-Q$. Было замечено, что центр этой системы при скатывании с наклонной плоскости движется по траектории, показанной на рис. 11. Объясните, почему траектория имеет такую форму?



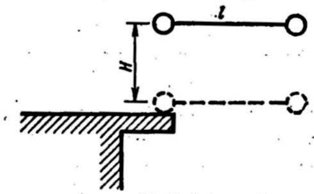
6



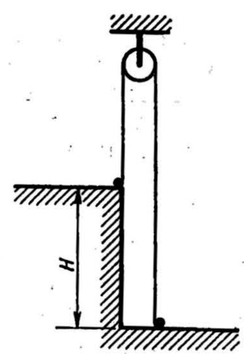
7



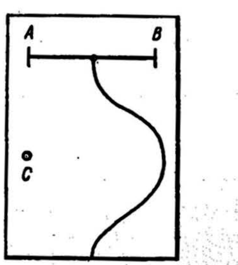
8



9



10



11

128. Почему сосиски при варке обычно лопаются вдоль, а не поперек?

129. Для того чтобы оторвать змею от добычи, нужно приложить к ее хвосту силу F. За какое наименьшее время эта змея, не отпуская добычи, может завязать узел посредине тела? Масса змеи M, длина L, диаметр d; L много больше d. Трения нет.

130. На одном из концов соломинки, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, сидит жук. С какой наименьшей скоростью он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Длина соломинки l, ее масса m, масса жука M.

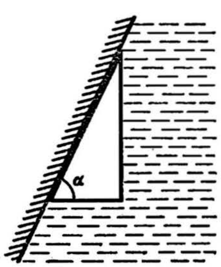
Жидкости и гидродинамика

131. Стальной кубик с ребром a и плотностью ρ_1 плавает в ртути (плотность ртути ρ_2). Поверх ртути наливают воду так, что она едва покрывает кубик. Какова высота слоя воды?

132. К деревянному бруску, вмороженному в кусок льда, привязана веревка. Другой конец веревки закреплен на дне сосуда с водой так, что весь лед погружен в воду. Как изменится натяжение веревки после того, как лед растает?

133. Оценить, пользуясь соображениями размерности и задавая плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ, период возможных колебаний T жидкой капли радиуса R.

134. Трехгранная призма с объемом V и плотностью ρ имеет один из углов 90°, а другой α. Призма погружена в сосуд с жидкостью, имеющей плотность $\rho_1 > \rho$. Призма всплывает с постоянной скоростью, скользя по тонкому слою жидкости вдоль стенки сосуда, наклоненному также под углом α к горизонту (рис. 12). Найти силу сопротивления движению.



12

135. На дне сосуда с жидкостью (или газом) лежит тело, удельный вес которого лишь немного больше удельного веса жидкости (или газа). Можно ли, повышая давление на жидкость (или газ), заставить тело подняться вверх?

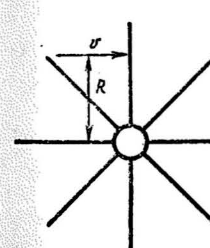
136. Трубке радиуса r придана форма кольца радиуса R. Внутри трубки со скоростью v пропускается вода. Определить продольное натяжение трубки. Радиус трубки много меньше радиуса кольца. Вязкостью жидкости пренебречь.

137. Колесо водяной мельницы с плоскими радиальными лопастями приводится во вращение ударом струи воды, направленной перпендикулярно лопастям. При какой угловой скорости вращения колеса КПД будет максимальным, если скорость воды в струе v и струя попадает в лопасть на расстоянии R от оси вращения колеса? (рис. 13).

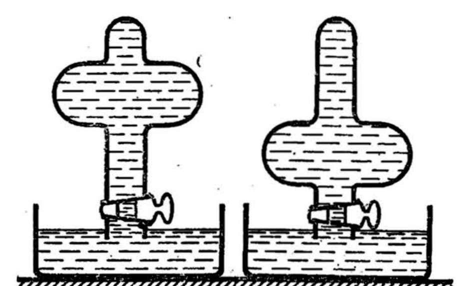
138. Цилиндрический сосуд до краев заполнен водой и плотно закрыт крышкой. В нем находятся три тела: пробка, кусочек свинца и тело, плотность которого равна плотности воды. Цилиндр приводится во вращение вокруг оси. Как будут расположены тела в цилиндре? Ось вращения вертикальна.

139. Два предварительно откачанных сосуда равных объемов и высоты опускают открытыми концами в одинаковые кюветы с водой и открывают краны (рис. 14). Вода полностью затопляет сосуды. Работа сил атмосферного давления в обоих случаях одинакова (почему?), потенциальная же энергия воды в сосудах будет различна. Объяснить полученное противоречие с законом сохранения энергии.

140. На рисунке изображен большой бак с водой, у которого сбоку внизу выведена длинная трубка с краном на конце. Оценить, на какое давление должен быть



13



14

рассчитан кран, чтобы его не выбило потоком воды при быстром закрывании (рис. 15).

141. Уже давно было замечено, что скорость длинных волн в неглубоком бассейне зависит от его глубины. Учитывая это, попытайтесь объяснить, почему во время шторма на море волна «разбивается» не в открытом море, а вблизи берега или отмелей.

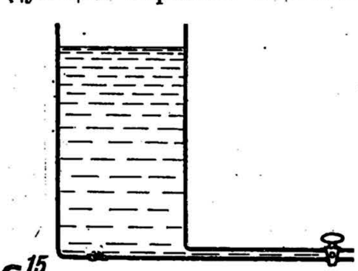
142. Из соображений размерности получить зависимость скорости течения вязкой жидкости на оси горизонтальной цилиндрической трубы от перепада давлений на концах трубы Δp, длины трубы l, вязкости η и радиуса трубы R.

Теплота и молекулярная физика

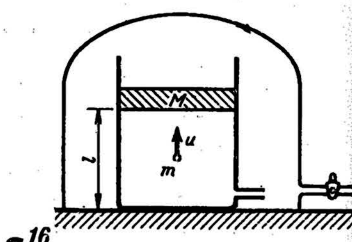
143. Под колпаком воздушного насоса стоит стеклянный цилиндр с поршнем массы M. Под поршнем летает шарик массы m. Скорость шарика равна u, а его масса m много меньше массы поршня M. Шарик последовательно упруго отражается от дна цилиндра и поршня. Поршень может скользить в цилиндре без трения. Воздух из-под колпака и из-под поршня откачан. Было замечено, что поршень практически никуда не перемещается. Исследуйте условия такого «квазиравновесия» поршня. Влиянием силы тяжести на движение шарика пренебречь (рис. 16).

144. В герметически закрытом сосуде смешали равное количество молекул кислорода и гелия. Затем в стенке сделали небольшое отверстие. Найти состав молекулярного пучка, выходящего из отверстия. Средние энергии молекул зависят только от температуры.

145. Для определения плотности газа поступили следующим образом: большой стеклянный баллон емкостью



15



16

V был наполнен испытуемым газом до давления H и взвешен. Его вес оказался равным Q. Затем часть газа была удалена, и давление его упало до H_1. Новый вес баллона Q_1. Какова плотность газа при атмосферном давлении и температуре T_0, если температура газа в баллоне все время поддерживалась постоянной и была равна T?

146. Идеальный газ может переходить из состояния p_1, V_1 в состояние p_2, V_2 различными путями. Один раз переход совершался сначала по изобаре, а затем по изохоре. Во второй раз переход совершался сначала по изохоре, а затем по изобаре. При каком переходе выделилось больше тепла и насколько? $p_1=4\cdot10^5$ *н/м²*, $V_1=3$ *м³*, $p_2=2\cdot10^5$ *н/м²*, $V_2=1$ *м³*.

147. Бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда длиной l, движется с ускорением a в направлении своей длины. Найдите разность плотностей газа у задней и передней стенок бака. Плотность покоящегося газа ρ_0, его молекулярный вес μ, температура T. Силой тяжести, действующей на газ, можно пренебречь.

148. На весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом при давлении p и температуре T, другой — влажным при тех же условиях. Какой сосуд тяжелее?

149. На улице идет мокрый снег. Как определить процентное содержание воды в нем?

150. Как изменится энергия воздуха в комнате при нагревании его от T_1 до T_2, если известно, что энергия $E=AmT$, m — масса воздуха в комнате, а A — постоянная.

151. Может ли теплоемкость газа быть отрицательной?

152. При неправильной регулировке двигателя внутреннего сгорания иногда вместо сравнительно медленного сгорания горючей смеси происходит так называемая «детонация», когда смесь сгорает быстро со взрывом. Почему при этом падает КПД двигателя?

153. Форма сообщающихся сосудов показана на рис. 17. Куда потечет вода по трубке, если нагреть воду в левом сосуде? в правом сосуде?

154. Вертикальный металлический стержень равномерно прогревается в печи от температуры T_0 до температуры T_1. В каком случае потребуется больше тепла — если он стоит на жесткой подставке или если он подвешен на нерастяжимой нити?

155. Почему капли воды на раскаленной сковородке будут «бежать» (перемещаться) от ее центра к краю?

156. Г. Дэви заметил, что если внести в пламя зажженной газовой горелки металлическую сетку (рис. 18), то она «отрезает» верхушку язычка пламени. Через некоторое время язычок снова появляется и горит над сеткой. Как объяснить такой опыт?

157. Сидя в кресле зубного врача, пациент заметил, что вместе с другими инструментами врач прогрел и зеркальце. Удивившись, больной спросил у врача, для чего это делается. Что ответил врач?

158. В каком месте температура нити светящейся электрической лампочки выше — на поверхности нити или внутри ее?

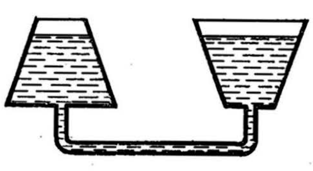
159. Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается 10 мин, а «встряхнуть» термометр можно практически сразу после измерения?

160. Можно ли «построить» максимальный спиртовой термометр, работающий на том же принципе, что и медицинский термометр?

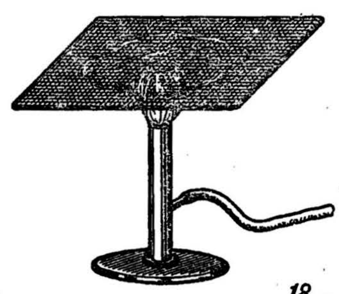
161. Двое в столовой взяли на третье чай. Первый сразу же растворил в стакане сахар, второй сначала съел первое и второе, а потом положил в стакан сахар и растворил его. Кто будет пить более горячий чай?

162. В кастрюле с кипящей водой у дна образуется пузырек пара радиуса R. Атмосферное давление равно $p_{атм}$, коэффициент поверхностного натяжения α, плотность воды ρ, высота воды в сосуде H. Какое количество энергии пошло на образование пузырька?

163. Два мыльных пузыря радиусов r_1 и r_2 сливаются в один пузырь радиуса R. Определите атмосферное давление, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ.



17



18

164. Сферическая капля ртути радиуса R падает без начальной скорости с высоты H на стеклянную пластинку. На какое максимальное число одинаковых сферических капель она может разбиться? Плотность ртути ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ. Теплоемкостью пластинки и окружающей среды пренебречь.

165. К мокрой вертикальной стене прилеплен квадратный бумажный лист $ABCD$ со стороной a и массой M. Сторона AB закреплена на стене. С какой минимальной силой нужно тянуть сторону CD, заворачивая лист в сторону AB, чтобы отлепить его за время T? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен σ. Силой тяжести пренебречь (рис. 19).

166. С какой скоростью капля воды должна налететь на такую же неподвижную каплю, чтобы в результате взаимодействия они испарились? Начальная температура капель $20°\,C$.

167. В кабине космического корабля имеется высокочастотная печь для исследования плавления в условиях невесомости. Хорошо проводящий тепло металлический шар нагревается в печи токами высокой частоты и начинает плавиться. Разработайте методику экспериментального определения времени полного расплавления шара. Для простоты считайте, что теплообмен шара с окружающей средой пропорционален разности их температур. Космонавт-исследователь имеет возможность наблюдать за плавлением визуально, может изменять подводимую к шару мощность и пользоваться необходимыми ему приборами и справочниками.

Задачи по электричеству

168. Из лампочек для карманного фонаря собрана гирлянда, рассчитанная на включение в сеть 220 В. На каждую из лампочек приходится напряжение всего около 3 В, однако если вывинтить одну из лампочек из патрона и сунуть туда палец, то сильно «дернет». Объясните почему.

169. Имеется пять электрических лампочек на 110 В с мощностями 40, 40, 40, 60, 60 Вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 В, чтобы все они горели нормальным накалом?

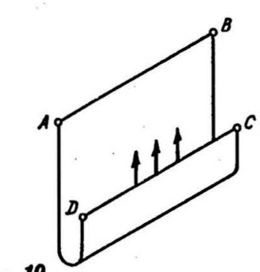
170. Имеются две проволоки квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения одной проволоки — 1 мм, а другой — 4 мм. Для того, чтобы расплавить первую проволоку, нужно пропустить через нее ток в 10 ампер. Какой ток нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась? Количество тепла, уходящего в окружающую среду за 1 с, подчиняется закону: $Q = kS(T - T_{\text{ср}})$, здесь S — площадь поверхности проволоки, T — ее температура, $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды вдали от проволоки, k — коэффициент, одинаковый для обеих проволок.

171. К источнику постоянного тока подключено сопротивление R_1. Внутреннее сопротивление источника тока равно r. На сопротивлении R_1 в единицу времени выделяется некоторое количество тепла. Можно ли включить в цепь вместо R_1 какое-нибудь другое сопротивление так, чтобы на нем в единицу времени выделялось такое же количество тепла?

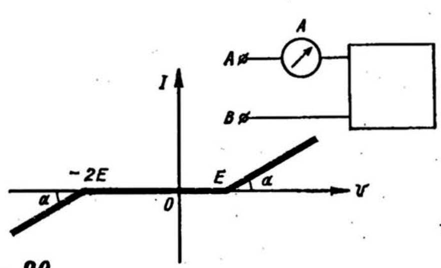
172. Два удаленных изолированных сферических проводника радиусов r_1 и r_2 заряжены до потенциалов V_1 и V_2 соответственно. Затем они соединяются тонким проводником. Какое количество тепла выделится в проводнике?

173. Во сколько раз нужно увеличить напряжение источника, чтобы потери в линии электропередачи уменьшились в 100 раз, а передаваемая линией мощность не изменилась? Потери напряжения в линии первоначально равны $U_{\text{пот}} = kU$, здесь U — напряжение на нагрузке.

174. Некоторая схема содержит источники постоянного тока, сопротивления и идеальные диоды. На рис. 20 приведен график зависимости показаний амперметра от напряжения, приложенного к точкам A и B. Нарисуйте возможную схему «черного ящика».



19



20

175. Каждая из N точек соединена с каждой из оставшихся одинаковыми проводниками с сопротивлением R. Определить сопротивление между какими-либо двумя точками системы.

176. В однородное электрическое поле плоского конденсатора помещен хорошо проводящий незаряженный шар, так что центр его находится на равных расстояниях от пластин. Потенциалы пластин равны +100 В и −100 В соответственно. Нарисуйте поверхность нулевого потенциала.

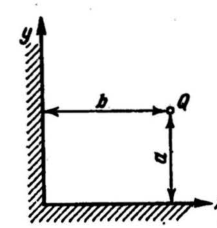
177. На расстояниях a и b от двух взаимноперпендикулярных бесконечных металлических полуплоскостей помещен заряд Q. Найти силу, действующую на заряд (рис. 21).

178. На два медных шара радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) помещены разноименные заряды $+Q$ и $-Q$ соответственно. После этого оба шара разрезаны на две равные половинки. Заряды при разрезании с шаров не стекают. Естественно, что половинки шаров будут отталкиваться одна от другой. Если предоставить им возможность двигаться, то для какого шара половинки разъедутся быстрее?

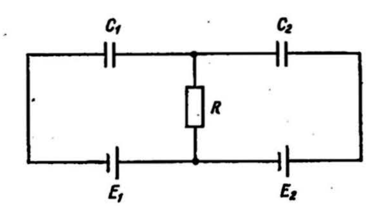
179. Какой заряд проходит через сопротивление R при вдвигании в конденсатор C_2 слюдяной пластинки? Диэлектрическая постоянная слюды равна ε (рис. 22).

180. Плоский конденсатор состоит из двух металлических пластин, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной, равной 2. Как изменится емкость конденсатора, если его поместить в изолированную металлическую коробку, стенки которой будут на расстоянии от пластин, вдвое меньшем, чем расстояние между пластинами?

181. В однородное электрическое поле E помещен неподвижный заряд Q. На расстоянии l от него держат заряд q. Затем заряд q отпускают. Какую максимальную



21



22

скорость он получит? Масса заряда q равна m (рис. 23).

182. Заряд e помещен в центре однородно заряженной полусферы радиуса R с зарядом Q. Какой заряд q нужно равномерно распределить на кольце радиуса r, расположенном на большом расстоянии l от полусферы, чтобы заряд e не смог пролететь сквозь него? (рис. 24).

183. Имеется схема, состоящая из конденсаторов одинаковой емкости c. Емкость, измеренная между некоторыми двумя точками схемы, оказалась равной C. Затем конденсаторы схемы заменили сопротивлениями r. Сопротивление между теми же двумя точками оказалось равным R. Определить величину c, если $C=100$ пФ, $r=10$ Ом, $R=100$ Ом.

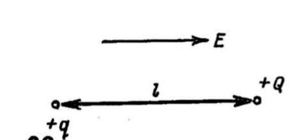
184. В одной из пластин плоского конденсатора имеется маленькое круглое отверстие, затянутое мыльной пленкой. Радиус отверстия r, конденсатор заряжен до разности потенциалов U и отсоединен от батареи. Расстояние d между пластинами конденсатора мало по сравнению с линейными размерами пластин. Коэффициент поверхностного натяжения пленки σ. Оценить величину прогиба пленки внутрь конденсатора, считая его малым (слабое поле).

185. Оцените скорости электронов и давление электронного газа в металлах. Как эти величины зависят от плотности?

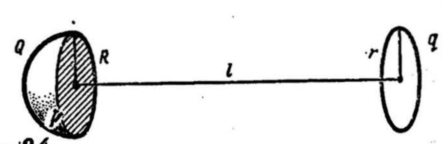
186. Почему пламя вольтовой дуги всегда выгнуто вверх?

187. В странах, где часто бывают грозы, было замечено, что сильный дождь часто начинается только после того, как первая молния «проскочит» между облаком и землей. Объясните, почему это так?

188. Для измерения очень сильных токов часто используют стержни из магнитных материалов. Магнитное поле тока намагничивает их, и по величине остаточной намагниченности можно судить о величине тока. Такая методика используется, например, для измерения токов молний. При этом возникают, однако, такие проблемы. Во-первых, заранее неизвестно, куда ударит молния, во-



23



24

вторых, интересно изучить распределение тока по сечению канала молнии, в-третьих, одни и те же стержни хотелось бы использовать не один раз. Как решить эти проблемы?

189. Предположим, что молния распространяется по цилиндрическому каналу. На что тратится энергия молнии? Если считать, что существенная часть этой энергии идет на расширение канала молнии, то по какому закону будет изменяться давление цилиндрической ударной волны?

190. Используя результаты предыдущей задачи, оцените, каковы характерные длины волн и частоты для звуковых волн, излучаемых молнией.

191. На лист бумаги равномерно насыпаны металлические опилки. Этот лист помещают в магнитное поле. Если слегка постукивать по листу, то опилки расположатся в цепочки по направлению силовых линий. Для чего необходимо постукивать по листу? Почему опилки не просто ориентируются по полю, а соединяются в цепочки? (рис. 25).

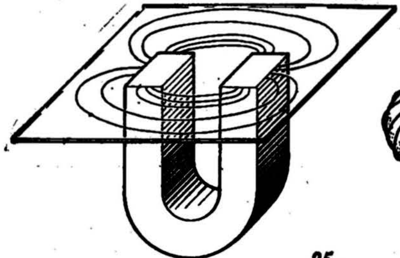
192. Как расположится небольшая магнитная стрелка, помещенная в центре плотно намотанной тороидальной катушки, если катушку подключить к источнику постоянного тока? Середина стрелки жестко закреплена в центре катушки (сама стрелка может крутиться, как в компасе) (рис. 26).

193. Почему трансформатор выходит из строя в том случае, если хотя бы два витка обмотки замкнуты накоротко?

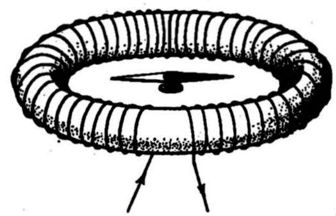
194. По проволоке, изогнутой в виде овала (рис. 27), протекает электрический ток. Найти отношение сил F_A и F_B, растягивающих проволоку в точках A и B соответственно, если проволока находится в магнитном поле, перпендикулярном плоскости овала.

195. В прямоугольную кювету, передняя и задняя стенки которой металлические, а остальные сделаны из диэлектрика, налит электролит. Плотность электролита ρ, электропроводность σ. К металлическим стенкам приложено напряжение U, а вся кювета помещена в однородное вертикальное магнитное поле B. Определить разность уровней жидкости около боковых стенок кюветы. Длина кюветы равна l, ширина d.

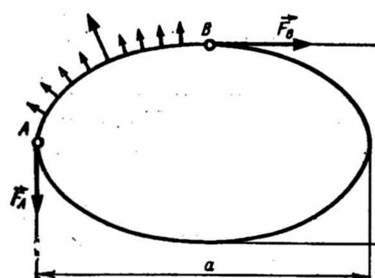
196. В вертикальном магнитном поле B движется горизонтально проводящий стержень длины l со скоростью



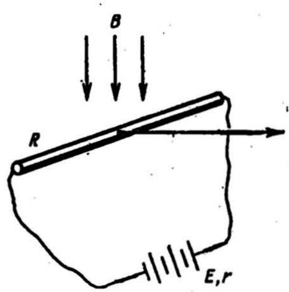
25



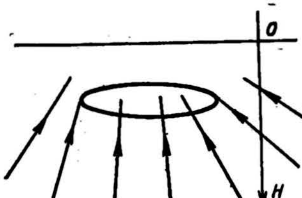
26



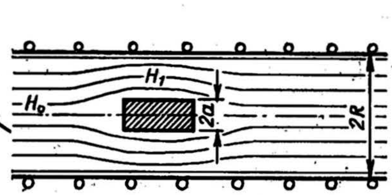
27



28



29



30

v. Концы стержня присоединены к батарее с ЭДС E и внутренним сопротивлением r. Какое количество теплоты выделится в стержне за время t, если его сопротивление равно R? (рис. 28).

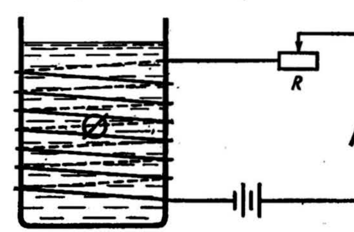
197. Проволочный квадрат помещается в переменное магнитное поле $B=\alpha_0 t$, перпендикулярное плоскости квадрата. Как изменится ток, текущий через лампочку, включенную в контур квадрата, если из квадрата сделать два квадрата, отношение сторон которых равно k?

198. Полое резиновое кольцо со ртутью падает на конус, ось которого вертикальна. В каком случае оно налезет глубже: в отсутствие магнитного поля или при наличии однородного и постоянного магнитного поля, параллельного оси конуса и направленного вверх (вниз) и почему?

199. Медные кольца, сделанные из проволоки разного диаметра, падают в неоднородном вертикальном магнитном поле. Индукция поля изменяется по закону: $B=B_0+\alpha H$. Как будет зависеть установившаяся скорость падения колец от диаметра проволоки, из которой они сделаны? Радиусы колец одинаковы и много больше диаметра проволоки (рис. 29).

200. Цилиндр радиуса a помещен в горизонтальный соленоид радиуса R так, что их оси совпадают. Цилиндр и соленоид сверхпроводящие, причем магнитное поле не проникает внутрь цилиндра. Из-за неоднородности магнитного поля вблизи цилиндра на него действует сила, выталкивающая его из соленоида. Оцените скорость, с которой он вылетит. Силой тяжести пренебречь. Плотность энергии магнитного поля равна kH^2 (рис. 30).

201. Тонкая длинная магнитная стрелка протыкает по диаметру маленький деревянный шарик, который плавает в цилиндрическом стакане с водой так, что вода полностью закрывает и шар, и стрелку. Центр стрелки находится в центре шара. Стакан стоит на столе, на него намотано несколько витков медной проволоки, присоединенной через большое сопротивление к батарейке. Ключ K замыкают и размыкают. Опишите поведение шара



31

со стрелкой (рис. 31). Как изменится их поведение, если изменять величину сопротивления R?

202. В жидком гелии плавает диэлектрический шарик, который протыкает магнитная спица. Шарик проткнут по диаметру, центр спицы находится в центре шарика. Шарик и спица целиком погружены в гелий. На дюаровский сосуд с шариком намотана замкнутая сама на себя обмотка из сверхпроводящего металла. Вся эта система помещена в другой дюаровский сосуд, также наполненный жидким гелием. Первоначально в системе было постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси сосудов. Ориентирована ли при этом спица вдоль оси? Будет ли шарик совершать колебания после выключения внешнего магнитного поля?

Задачи по оптике

203. Почему в ясный солнечный день при сближении двух предметов (карандашей, пальцев и т. п.) их тени на экране тянутся друг к другу и слипаются раньше, чем соприкасаются сами предметы?

204. Почему днем из комнаты, окно которой завешено тюлевой занавеской, предметы на улице хорошо различимы, а предметы, находящиеся в комнате, с улицы не видны?

205. Почему молнию мы видим короткое время, а гром от нее длится долго?

206. В полой сфере проделано маленькое отверстие, через которое внутрь проникает луч света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут различаться в этом случае освещенности точки, диаметрально противоположной отверстию, и всех остальных точек сферы?

207. Как будет ориентироваться относительно Солнца спутник сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая покрыта черными термобатареями?

208. Чистая вода прозрачна для света. Почему непрозрачен туман, представляющий собой мелкие капли воды?

209. Пролетая на самолете через облако, висящее над аэродромом, авиапассажир не смог увидеть землю из иллюминатора. Когда самолет приземлился, оказалось, что здание аэровокзала можно было разглядеть издали, хотя

на земле шел довольно сильный дождь. Объясните, почему так различна видимость в облаке и на земле.

210. Оцените, какими должны быть размеры металлических пылинок в Солнечной системе, чтобы солнечное световое давление сообщило бы им скорость, направленную от Солнца? Светимость Солнца $L=4\cdot10^{33}$ *эрг/с*, его масса $M=2\cdot10^{33}$ г, гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-8}$ дин·см²/г².

211. Нейтронная звезда имеет массу, примерно равную массе нашего Солнца $M \approx 2\cdot10^{33}$ г. Радиус нейтронной звезды всего лишь около 10 км, тогда как радиус Солнца $R_C \approx 7\cdot10^{10}$ см. Известно, что проходящий вблизи края солнечного диска световой луч из далекой галактики отклоняется на угол $\varphi_C \approx 2\cdot10^{-6}$ рад. Определите, насколько отклонится световой луч, проходящий вблизи поверхности нейтронной звезды. Гравитационная постоянная равна $\gamma \approx 7\cdot10^{-8}$ см³/г·с².

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Пусть x — искомое число. По условию задачи $\sqrt[3]{x} = \frac{x}{1000} - a$, где $0 \leqslant a < 1$. Полагая $y = \sqrt[3]{x}$, получим $y^3 - 1000y - 1000a = 0$, или $y^2 = 1000 + \frac{1000a}{y}$. Отсюда $y^2 \geqslant 1000$, а $y \geqslant 32$. С другой стороны, $y^2 \leqslant 1000 + \frac{1000}{32}$, отсюда $y \leqslant 32$, следовательно, $y = 32$, а $x = 32768$.

2. Всякое число, являющееся полным квадратом, имеет либо вид $(3k)^2$, либо вид $(3k\pm1)^2$. Поэтому число, являющееся полным квадратом, при делении на три не может давать в остатке двойку. Но остаток от деления любого числа на три равняется остатку от деления суммы цифр этого числа на три. Значит, сумма цифр числа, являющегося полным квадратом, не может давать при делении на три в остатке двойку, а $1967 = 3\cdot655+2$. Отсюда следует утверждение задачи.

3. Пусть a, b, c — тройка натуральных чисел таких, что сумма любых двух из них делится на третье. Будем считать для определенности, что $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда $2a \geqslant b + c = ka$. Поэтому $k \leqslant 2$.

1 случай: $k=2$. В этом случае $a=b=c$, и тройка чисел имеет вид: (c, c, c).

2 случай: $k=1$, тогда $b+c=a$. По условию $a+c=lb$, поэтому $(b+c)+c=lb$, $2c=(l-1)b$. Так как $b\geqslant c$, то $2b\geqslant 2c=(l-1)b$. Отсюда либо $l-1=2$, либо $l-1=1$.

Пусть $l-1=2$. Тогда $b=c$, $a=b+c=2c$, и тройка чисел имеет вид: $(2c, c, c)$.

Пусть $l-1=1$. Тогда $b=2c$, $a=b+c=3c$, и тройка чисел имеет вид: $(3c, 2c, c)$.

4. Пусть выражение $k^{k+1}+(k+1)^k$ делится на три. Рассмотрим, каков может быть остаток от деления числа k на три. Очевидно, что он не может быть равным нулю (в этом случае наше выражение при делении на три давало бы в остатке единицу). Пусть $k=3l-1$. Тогда $k^{k+1}+(k+1)^k=(3l-1)^{k+1}+(3l)^k=3m+(-1)^{k+1}$ выражение, которое, очевидно, не делится на три.

Остается единственная возможность: $k=3l+1$. Подставим $k=3l+1$ в наше выражение:

$$(3l+1)^{k+1}+(3l+2)^k=3n+1+2^k=3r+1+(3-1)^k.$$

Отсюда видно, что k — нечетное число, то есть l—четное число. Значит, $k=6p+1$.

Обратно, пусть $k=6p+1$. Тогда

$$k^{k+1}+(k+1)^k=(6p+1)^{k+1}+(6p+2)^{6p+1}=3t+1+\\+(-1)^{6p+1}$$

выражение, которое, очевидно, делится на три.

Ответ: $k=6p+1$.

5. $1971=27\cdot73$. Так как числа 27 и 73 взаимно просты, то делимость числа $50^n+a\cdot23^n$ на 1971 эквивалентна его делимости на 27 и на 73. Имеем: $50^n+a\cdot23^n=50^n+a(50-27)^n$.

Отсюда, вследствие взаимной простоты чисел 50 и 27, вытекает, что $a+1=27l$.

Представив число $50^n+a\cdot23^n$ в виде $(73-23)^n+a\cdot23^n$ и воспользовавшись нечетностью числа n, получаем аналогично: $a-1=73k$. Следовательно, $73k+1=27l-1$. Поэтому $73k+2$ делится на 9, а так как $73k=72k+k$, то $k+2$ делится на 9 и $k\geqslant7$. Но при $k=7$ число l является целым $(l=19)$.

Ответ: $a=73\cdot7+1=512$.

6. Очевидно, если $1<n\leqslant N$, то $N!+n$ — составное число. Пусть p — простое число, большее k, а N — натуральное, большее чем $p+(k-1)k!$. Тогда числа $N!+p$, $N!+p+k!, \ldots, N!+p+(k-1)k!$ составные и образуют арифметическую прогрессию. Докажем, что любые два числа из этой последовательности взаимно просты. Пусть q — простой делитель пары таких чисел, тогда q делит и разность этих чисел, то есть для некоторого j $(0<j<k)$ число $j\cdot k!$ делится на q. Поэтому $q\leqslant k$, значит, число $k!$ делится на q; тем более, $N!$ делится на q. Следовательно, p делится на q, что противоречит простоте числа p.

7. Очевидно, разность прогрессии — четное число. Далее, если бы разность прогрессии не делилась на три, то любые три последовательные члена прогрессии давали бы разные остатки при делении на три, откуда вытекает, что один из них делился бы на три, что противоречит условиям задачи. Аналогично показывается, что разность прогрессии делится на пять и на семь, а также на одиннадцать, если прогрессия не начинается с одиннадцати. Но в таком случае знаменатель прогрессии не меньше, чем $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310$, что больше, чем 1968, следовательно, если такая прогрессия существует, то она обязана начинаться с 11, а ее разность кратна числу $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$. То есть $d=210\,k$, где k меньше 10. Нетрудно проверить, что при $k=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ найдутся члены, которые делятся на 13. Их номера будут соответственно 1, 7, 9, 10, 8, 2, 5, 3. А при $k=6$ четвертый член прогрессии делится на 17.

Утверждение задачи доказано. Отметим, что если не требовать положительности членов прогрессии, то существуют две прогрессии, удовлетворяющие условиям задачи. Одна из них: -11, 199, 409, 619, 829, 1039, 1459, 1669, 1879, 2085. Вторая отличается от нее знаком.

8. Заметим, что если некоторое число в рассматриваемой последовательности меньше 10 000, то и сумма кубов его цифр (т. е. следующее за ним число) также меньше 10 000 (более точно, оно меньше даже $4\cdot9^3=2956$). Если же это число больше 10 000, то сумма кубов его цифр меньше самого числа. Действительно, пусть k — число знаков числа. Тогда само число больше, чем 10^{k-1}, а сумма его цифр не больше, чем $9^3\,k$. Но при $k\geqslant5$ выполнено неравенство: $10^{k-1}>9^3k$.

Из приведенного замечания следует, что члены последовательности либо сразу, либо начиная с некоторого становятся и остаются меньшими 10 000. Но тогда среди них найдется по крайней мере два одинаковых числа. Обозначим их через n_m и n_{m+l}. Отсюда следует, что равны n_{m+1} и n_{m+l+1}, n_{m+2} и $n_{m+l+2}, \ldots, n_{m+i}$ и $n_{m+l+i}, \ldots$. То есть последовательность становится периодической. Мы доказали даже более сильное утверждение, что все числа, входящие в период, меньше 10 000.

9. Сначала нужно показать, что числа действительно можно расположить указанным образом (хотя бы одним способом), а затем заметить, что сумма цифр, стоящих в одинаковых разрядах наибольшего и наименьшего из чисел, равна 10. Следовательно, искомое число равно $\underbrace{11\ldots1}_{162 \text{ раза}}0$.

10. Пусть $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. Тогда $d_1 = \frac{n}{d_k}$, $d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, \ldots, d_k = \frac{n}{d_1}$. Перемножив эти равенства, получим $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \frac{n^k}{d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k}$.

11. Пусть $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ — делители числа n. Тогда $d_1 = 1$, $d_k = n$. Оценим сумму всех делителей. Во-первых, $d_1 + d_k = n + 1 \leqslant \frac{3}{2}n$, а каждый делитель, отличный от n, меньше, чем $\frac{3}{4}n$. Значит, $d_1 + d_2 + \ldots + d_k \leqslant \frac{3}{2}n + (k-2)\frac{3}{4}n = \frac{3}{4}nk$.

Второе неравенство следует из очевидного соотношения $d_i \cdot d_{k-i+1} = n$, а по неравенству средних $\frac{1}{2}(d_i + d_{k-i+1}) \geqslant \sqrt{d_i \cdot d_{k-i+1}} = \sqrt{n}$.
Сложив все такие соотношения, получим $d_1 + d_2 + \ldots + d_k \geqslant k\sqrt{n}$.

12. Представим указанное выражение в виде произведения k скобок:

$$\left\{\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n! \cdot 1}\right\} \cdot \left\{\frac{(n+1) \cdot \ldots \cdot (2n)}{n! \cdot 2}\right\} \cdot \ldots \cdot \left\{\frac{(ln+1) \cdot \ldots \cdot [(l+1)n]}{n!\,(l+1)}\right\} \times$$
$$\times \ldots \cdot \left\{\frac{[(k-1)n+1] \cdot \ldots \cdot (kn)}{n!\,k}\right\}.$$

Осталось заметить, что каждая скобка представляет собой следующее целое число:

$$\frac{(ln+1) \cdot \ldots \cdot [(l+1)n]}{n!\,(l+1)} = \frac{(ln+1) \cdot \ldots \cdot [(l+1)n-1]}{(n-1)!} = C_{ln+n-1}^{n-1}.$$

13. Из тождества $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ следует, что число $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ рационально. Отсюда $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ рациональны как полусумма и полуразность рациональных чисел $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

14. Помимо решений традиционными способами эта задача имеет также очень изящное геометрическое решение. Оно основано на довольно известной «формуле Пика»:

«Площадь простого многоугольника (ограниченного одной самонепересекающейся кривой) с вершинами в узлах квадратной сетки (клетчатой бумаги) равняется площади $j + \frac{r}{2} - 1$ клеток, где j — число узлов сетки внутри многоугольника, а r — число узлов сетки на его границе».

Сопоставим каждой дроби $\frac{x}{y}$ точку плоскости с координатами (x, y). Рассмотрим треугольник OAB, вершинами которого являются точки $O(0, 0)$, $A(p, q)$ и $B(x_1, y_1)$. Его площадь равна $\frac{1}{2}(x_1 q - y_1 p)$. Но, с другой стороны, в силу несократимости дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{x_1}{y_1}$ на сторонах OA и OB треугольника OAB нет целочисленных точек. Нет их и на отрезке AB, так как если бы такая точка $C(x, y)$ нашлась, то ее координата y также была бы меньше q, а дробь $\frac{x}{y}$ была бы меньше, чем $\frac{x_1}{y_1}$, но больше, чем $\frac{p}{q}$ (если дробь $\frac{x}{y}$ сократима, то теми же свойствами обладает равная ей несократимая дробь). А это противоречит выбору дроби $\frac{x_1}{y_1}$.

Отсюда, по формуле Пика, площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}$. Сравнивая полученные значения площади треугольника OAB, можем записать равенство: $x_1 q - y_1 p = 1$.

Аналогично, рассматривая треугольник OAD, где D — точка с координатами (x_2, y_2), получим равенство $x_2 q - y_2 p = -1$.

Сложив полученные равенства и произведя с суммой простейшие преобразования, получим

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{p}{q}.$$

15. Предположим противное и разложим тогда каждый из них в сумму двух многочленов

$$P_1(x) = Q_1(x) + R_1(x) \text{ и } P_2(x) = Q_2(x) + R_2(x)$$

так, что все коэффициенты многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ делятся на 5, а ни один из коэффициентов многочленов $R_1(x)$ и $R_2(x)$ на 5 не делится. Тогда

$$(P_1(x) - Q_1(x))(P_2(x) - Q_2(x)) = R_1(x) \cdot R_2(x),$$

но у многочлена слева, как нетрудно видеть, все коэффициенты делятся на 5, а у многочлена справа старший коэффициент на 5 не делится.

16. Предположим противное. Тогда найдутся хотя бы два различных натуральных числа k и l, таких, что коэффициенты при x^k и x^l многочлена $(x+a)^n(bx+c)$ равны нулю. Запишем это:

$$c \cdot a^{n-k} \cdot C_n^k + ba^{n-k+1} \cdot C_n^{l-1} = 0,$$
$$c \cdot a^{n-l} \cdot C_n^l + ba^{n-l+1} \cdot C_n^{k-1} = 0.$$

Поскольку $a \neq 0$, то после упрощений получаем эквивалентную систему равенств

$$c(n-k+1) + abk = 0,$$
$$c(n-l+1) + abl = 0.$$

Отсюда получаем, что $c=0$ и $ab=0$, что противоречит условию задачи.

Замечание. Верен более общий факт: многочлен $(x+a)^n \times \times P(x)$, где $a \neq 0$, $P(x) \not\equiv 0$, содержит не менее $n+1$ члена, однако известное авторам доказательство этого факта опирается на понятие производной.

17. Лемма. Пусть числа $z_1, \dots, z_n$ лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Тогда

$$z_1 + \dots + z_n \neq 0 \text{ и } \frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

Доказательство.

Первое утверждение леммы становится очевидным, если использовать представление комплексных чисел как векторов на плоскости. Второе утверждение сводится к первому, если учесть, что направления векторов комплексного числа и ему обратного числа симметричны относительно вещественной оси и поэтому числа, обратные данным, будут лежать по одну сторону от прямой, симметричной данной относительно вещественной прямой.

Решение задачи.

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_7$ — корни многочлена

$$P_7(z) = z^7 + a_6z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0,$$

удовлетворяющего условиям задачи (каждый кратный корень взят здесь соответствующее число раз). Очевидно, что $a_0 = -z_1 \cdot \dots \cdot z_7 \neq 0$. Из условий задачи вытекает, что все числа z_iz_j $(1 \leqslant i, j \leqslant 7)$ находятся внутри некоторого угла $\beta = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$, а все числа $z_iz_j z_k$ $(1 \leqslant i, j, k \leqslant 7)$ — внутри некоторого угла $\gamma = 3 \cdot \frac{\pi}{3}$ с вершинами в начале координат. Следовательно,

$$a_5 = z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_1z_7 + \dots + z_6z_7 \neq 0,$$
$$a_4 = -(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \dots + z_5z_6z_7) \neq 0.$$

По лемме отсюда вытекает, что

$$b_3 = \frac{1}{z_1z_2z_3} + \frac{1}{z_1z_2z_4} + \dots + \frac{1}{z_5z_6z_7} \neq 0, \; b_2 = \frac{1}{z_1z_2} + \dots + $$
$$+ \frac{1}{z_1z_7} + \frac{1}{z_2z_3} + \dots + \frac{1}{z_6z_7} \neq 0.$$

Далее, применяя лемму, получаем, что $a_6 = -(z_1 + z_2 + \dots + z_7) \neq 0$ и $b_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_7} \neq 0$. Отсюда

$$a_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_7 \cdot b_3 \neq 0$$
$$a_2 = -z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_7 \cdot b_2 \neq 0$$
$$a_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_7 \cdot b_1 \neq 0.$$

Предложение доказано.

Замечание. Утверждение задачи оказывается верным также и при более слабом условии — корни многочлена лежат в одной полуплоскости, но доказательство этого факта уже не элементарно.

18. Перепишем уравнение в следующем виде: $x^2 + y^2 + 1 = 4(5x^2 - 16y^2 - 491)$. Заметим, что квадрат целого числа при делении на 4 может иметь в остатке лишь 0 или 1, поэтому $x^2 + y^2 + 1$ не делится на 4, а правая часть уравнения кратна четырем. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

19. Числа x и y, очевидно, одинаковой четности. Более того, вследствие равенства $x^3+y^3=4 \cdot 493$ числа x и

y оба нечетные. Поэтому в разложении $x^3+y^3=(x+y)\times$ $\times(x^2-xy+y^2)$ во второй скобке стоит нечетное число. Кроме того, число x^2-xy+y^2 положительно. Значит, имеет место одно из двух соотношений: $x+y=4$, $x+y=1972$.

В первом случае $493=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=$ $=16-3xy$. Поэтому $xy=-159$. Разлагая это число в произведение двух целых множителей, видим, что сумма этих множителей не равна 4.

Во втором случае из очевидного неравенства x^2+y^2- $-xy\geqslant|xy|$ следует, что $|xy|\leqslant 1$. Отсюда $x+y$ не может равняться 1972.

20. Перепишем уравнение следующим образом: $(x+1)(x-1)=2y^2$. По условию x — простое число. Отсюда $x+1$ и $x-1$ — четные числа. Значит, y делится на 2, поэтому $y=2$, $x=3$.

21. Избавляясь от знаменателя дроби, получаем $1970x+1970y=xy$, или $(x-1970)(y-1970)=1970^2$. Но $1970^2=2^2\cdot5^2\cdot197^2$, причем 197 — простое число.

Отсюда следует, что число $x-1970$ может содержать множитель 2 в одной из трех степеней: нулевой, первой и второй. Аналогично с множителями 5 и 197. Таким образом, мы получаем $3\cdot3\cdot3=27$ различных натуральных значений для числа $x-1970$, то есть 54 различных целых значения этого числа. Все соответствующие значения x, кроме $x=0$, удовлетворяют, очевидно, исходному уравнению (при этом $y=\frac{1970^2}{x-1970}+1970$).

Окончательно получаем 53 решения.

22. Введем обозначение $k=[\sqrt{x}]$, тогда $x=k^2+n$.

Заметим, что $x<(k+1)^2$, так как в противном случае $[\sqrt{x}]\geqslant k+1$. Таким образом, $x=k^2+n<(k+1)^2$, откуда $k>\frac{n-1}{2}$.

Минимальным натуральным числом k, удовлетворяющим этому условию, является $k_{\min}=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1$, поэтому $x_{\min}=$ $=\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)^2+n$.

23. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=14\sqrt{10}$, или $\sqrt{\frac{x}{10}}+\sqrt{\frac{y}{10}}=14$.

Отсюда легко получить, что $\sqrt{\frac{x}{10}}$ и $\sqrt{\frac{y}{10}}$ — рациональные числа (см. задачу 13). Легко видеть, что если $\sqrt{\frac{m}{n}}$ есть рациональное число, а натуральные числа m и n взаимно просты, то $m=k^2$, $n=l^2$. Поэтому числа x и y делятся на 10: $x=10z$, $y=10t$.

Перепишем уравнение: $\sqrt{z}+\sqrt{t}=14$.

Отсюда видно, что уравнение имеет 15 решений.

24. Рассмотрим два многочлена:

$P_1(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и $P_2(t)=(t-x)(t-y)(t-$ $-z)$. Так как $abc=xyz$ и $a+b+c=x+y+z$, то $P_1(t)-$ $-P_2(t)=kt$.

Покажем, что $k=0$. Действительно, $P_1(a)-P_2(a)=ka$, но $P_1(a)=0$, $a-x\geqslant0$, $a-y\geqslant0$, $a-z\geqslant0$.

Поэтому $P_2(a)\geqslant0$ и $ka\leqslant0$.

Аналогично доказывается, что $kc\geqslant0$. Значит, $k=0$ и $P_1(t)=P_2(t)$. А поскольку числа a, b и c являются корнями многочлена $P_1(t)$, а числа x, y и z — корни многочлена $P_2(t)$, то числа a, b и c равны в некотором порядке числам x, y и z.

Утверждение задачи доказано.

25. Возведем первое уравнение в куб и вычтем второе:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=24.$$

Разложим левую часть на множители:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Поэтому $(x+y)(x+z)(y+z)=8$. Но $x+y=3-z$. Следовательно, число $3-z$ является делителем восьми.

Перебирая возможные значения, получаем четыре решения: $(1,1,1)$, $(-5,4,4)$, $(4,-5,4)$ и $(4,4,-5)$.

26. Приводя левую часть равенства к общему знаменателю и разлагая полученный числитель на множители, получаем:

$$\frac{(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)^2}{(b+c)(a+c)(a+b)}=0.$$

Отсюда и следует утверждение задачи.

27. Заметим, что при всяком n рассматриваемое уравнение — квадратное, следовательно, имеет не более двух корней. Покажем, что при любом n оно имеет одни и те же

корни. При $k=1$ уравнение $1+\frac{1}{x}=x$ имеет корни: $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. Пусть при $k=n-1$ корни уравнения те же. Тогда в равенстве $1+\frac{1}{x}=x$ мы можем число в знаменателе заменить выражением, содержащим $n-1$ знак дроби, следовательно, при $k=n$ уравнение имеет те же корни.

28. Докажем сначала, что $|\cos z-\cos t|\leqslant|z-t|$, причем знак равенства имеет место лишь при $z=t$. Из рис. 32 очевидно, что $|\cos z-\cos t|=|AB|$, а $|z-t|$ равняется длине дуги CD. Отсюда следует наше утверждение.

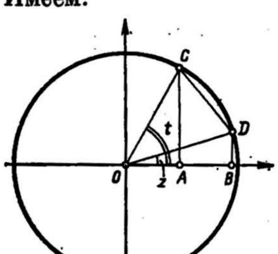
Вычтя из первого уравнения второе, получим $\cos x_1-\cos x_2=x_2-x_3$. Отсюда, воспользовавшись только что доказанным утверждением, получим $|x_1-x_2|\geqslant|x_2-x_3|$. Аналогично выписываем $|x_2-x_3|\geqslant|x_3-x_4|\geqslant\ldots\geqslant|x_{n-1}-x_n|\geqslant|x_n-x_1|\geqslant|x_1-x_2|$.
Последнее неравенство получается из рассмотрения разности последнего и первого уравнений. Значит, всюду должны стоять знаки равенства. Но по ранее доказанному это может быть лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Осталось заметить, что уравнение $\cos x=x$ имеет единственное решение. Отсюда и система уравнений имеет единственное решение.

29. Домножив и разделив левую часть уравнения на $\sin\frac{40°}{2}=\sin 20°$, приведем уравнение к виду:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 40°}{\sin 20°}-1\right]=\cos 20°.$$

Имеем:



32

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 40°=\sin 20°+\sin 40°,$$

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 40°=2\sin 30°\cdot\cos 10°,$$

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 40°=\sin 80°,$$

$$\sin\frac{n\cdot 40°-60°}{2}\cdot\cos\frac{n\cdot 40°+100°}{2}=0.$$

Отсюда либо $n\cdot 40°-60°=360°k$, либо $80°-n\cdot 40°=360°l$ (k и l — целые числа).

Пусть $n\cdot 40°-60°=360°k$. Тогда $2n=3(6k+1)$, что невозможно. Если $80°-n\cdot 40°=360°l$, то $2-n=9l$.

Ответ: $n=2+9l$, где $l\geqslant 0$.

Другой вариант решения может быть основан на следующем факте: сумма любых девяти последовательных слагаемых в левой части уравнения равна нулю. Отсюда достаточно проверить выполнение равенства для $1\leqslant n\leqslant 9$, что, как и само доказательство указанного факта, удобнее всего провести на тригонометрическом круге.

30. Имеем: $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-3}=a_{n-2}\cdot a_{n-3}\cdot a_{n-4}=a_{n-4}\times a_{n-5}=a_{n-7}$. Поэтому $a_{1964}=a_{280\cdot 7+4}=a_4=1$.

31. Докажем, что $x_n>\frac{1}{2}$. Очевидно, все числа x_n положительны. Имеем:

$$x_n=\frac{x_{n-1}^4+9}{10x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}^3}{10}+\frac{3}{10x_{n-1}}+\frac{3}{10x_{n-1}}+\frac{3}{10x_{n-1}}\geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{x_{n-1}^3}{10}\cdot\frac{3}{10x_{n-1}}\cdot\frac{3}{10x_{n-1}}\cdot\frac{3}{10x_{n-1}}}=\frac{2}{5}\sqrt[4]{27}>\frac{4}{5}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что среднее арифметическое нескольких чисел больше их среднего геометрического.

Докажем, что $x_n\leqslant\frac{5}{4}$.

Сначала заметим, что $x_2=\frac{5}{4}$. Далее исследуем, в каких случаях $x_{n+1}\leqslant x_n$, т. е. $x_n\geqslant\frac{x_n^4+9}{10x_n}$, или $x_n^4-10x_n^2+9\leqslant 0$. Это соотношение справедливо тогда, когда $1\leqslant x_n^2\leqslant 9$. Отсюда, если $1\leqslant x_n\leqslant\frac{5}{4}$, то и $x_{n+1}\leqslant\frac{5}{4}$. Если же $x_n<1$, то $x_n=\frac{9+x_n^4}{10x_n}<\frac{10}{10x_n}<\frac{5}{4}$.

32. По условию $2n^2-m^2$ — целое положительное число. Следовательно, $2n^2-m^2\geqslant 1$, или $(n\sqrt{2}+m)(n\sqrt{2}-m)\geqslant 1$. Так как $m<n\sqrt{2}$, то $m+n\sqrt{2}<2n\sqrt{2}$.

Отсюда следует, что $n\sqrt{2}-m \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}+m} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$. Разделив обе части этого неравенства на n, получим: $\sqrt{2}-\frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$, что и требовалось доказать.

33. Очевидно, можно считать $a \geqslant b \geqslant c$.

Предположим, что доказываемое неравенство не имеет места, то есть $a-b > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ и $b-c >$
$> \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Сложив неравенства, получим $a-c > \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Отсюда $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

Заметим, что $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$.

Тогда получим: $3(a^2+b^2+c^2) < 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

Противоречие.

34. Разделим обе части неравенства на a^n. Получим неравенство, эквивалентное данному, поскольку $a>0$ и, следовательно, $a^n>0$. Сгруппировав члены, придем к следующему неравенству:

$$n\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right) \geqslant \left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)+\left(a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(a+\frac{1}{a}\right)+(1+1).$$

Докажем, что $a^n+\frac{1}{a^n} \geqslant a^{n-k}+\frac{1}{a^{n-k}}$, если $2n>k>0$ и $a>0$. Преобразуем это неравенство к виду:

$$\frac{a^{2n}+1}{a^n}-\frac{a^{2(n-k)}+1}{a^{n-k}} \geqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{(a^{2n}+1)-(a^{2n-k}+a^k)}{a^n} = \frac{a^{2n}-a^{2n-k}-a^k+1}{a^n} =$$
$$= \frac{a^{2n-k}(a^k-1)-(a^k-1)}{a^n} = \frac{(a^k-1)(a^{2n-k}-1)}{a^n}.$$

У полученной дроби знаменатель положителен; при $a>1$ оба сомножителя числителя положительны, поскольку $2n>k>0$; итак, при $a>1$ дробь положительна. При $a<1$ оба сомножителя числителя отрицательны, следовательно, числитель положителен и вся дробь положительна. При $a=1$ наше неравенство превращается в тождество: $2n-1=2n-1$.

Таким образом, справедливость данного неравенства доказана.

35. Выберем из чисел $2a_1^k, 2^2a_2^k, \ldots, 2^na_n^k$ наибольшее. Пусть это будет $2^sa_s^k$, тогда $2^sa_s^k \geqslant 2^ma_m^k$, где $m=1, 2, \ldots, n$.

Отсюда $a_m \leqslant (2^{s-m}a_s^k)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{s-m}{k}}a_s$ и сумма a_1+a_2+
$+\ldots+a_n$ не превосходит $2^{\frac{s-1}{k}}a_s+2^{\frac{s-2}{k}}a_s+\ldots+2^{\frac{s-n}{k}}a_s =$
$= a_s\cdot 2^{\frac{s}{k}}(2^{-\frac{1}{k}}+2^{-\frac{2}{k}}+\ldots+2^{-\frac{n}{k}})$.

В скобках стоит сумма нескольких членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $2^{-\frac{1}{k}}$, причем $0<$
$<2^{-\frac{1}{k}}<1$. Следовательно, сумма этой прогрессии меньше, чем $\frac{2^{-\frac{1}{k}}}{1-2^{-\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$.

Итак, слева стоит число, меньшее, чем $\frac{a_s\sqrt[k]{2^s}(\sqrt[k]{2}-1)}{(\sqrt[k]{2}-1)} =$
$= a_s\cdot 2^{\frac{s}{k}}$, а справа число, не меньшее, чем $\sqrt[k]{2^s a_s^k} =$
$= a_s\cdot 2^{\frac{s}{k}}$.

Неравенство доказано.

36. Пусть в треугольнике ABC точка D — середина стороны AC, точка E — середина стороны BC, F — точка пересечения прямой DE с прямой l, на которой лежит биссектриса угла A. Так как $\angle AFD=\angle FAB=\angle FAC$, то треугольник ADF — равнобедренный ($|FD|=|AD|$).

Построение. Проведем прямую через точки D и E и отметим точку пересечения ее с биссектрисой. Проведем окружность с центром в точке E радиуса $|EF|$. Эта окружность пересечет данную прямую в точках F и B. Точка B найдена. Проведем прямую EB и от точки E отложим на ней отрезок $|EC| = |EB|$. Найдена точка C. Прямая $AB \| DE$, так как DE — средняя линия. Проведем через точку B прямую, параллельную DE, а также прямую DC. Точка пересечения этих прямых будет точкой A.

37. Пусть точка P — искомая. Рассмотрим треугольник, образованный следующими прямыми: перпендикуляром к AB в точке A, перпендикуляром к BC в точке B, перпендикуляром к CA в точке C. Очевидно, что расстояния точки P до сторон полученного треугольника равны, т. е. точка P является в нем центром вписанного круга. Отсюда следует требуемое построение.

38. Пусть точка A лежит на стороне CD квадрата $CDEF$. Очевидно, расстояние от точки A до одной из вершин E или F не меньше $|AB|$. Будем считать, что $|AE| \geqslant |AB|$. Имеем:

$$|AF| \geqslant |CD|, \ |AF| + |AC| + |AD| = |AF| + |CD| \geqslant$$

$$\geqslant 2|CD| = \frac{2|CE|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot |AB|.$$

Следовательно, $|AC| + |AD| + |AE| + |AF| \geqslant$

$\geqslant (1+\sqrt{2})|AB|$.

Отсюда вытекает, что искомым будет квадрат, для которого отрезок AB является диагональю, поскольку лишь для него это неравенство переходит в равенство.

39. Заметим, что сумма радиусов не меньше полусуммы длин сторон AB и BC и равна ей тогда, когда точка M — основание высоты треугольника ABC, опущенной из точки B.

40. Решение задачи вытекает из следующего неравенства:

$$aA + bB + cC \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(A+B+C),$$

если $a \geqslant b \geqslant c$, а $A \geqslant B \geqslant C$.

Докажем его: $3(aA+bB+cC) - (a+b+c)(A+B+C) = (A-B)(a-b) + (A-C)(a-c) + (B-C)(b-c) \geqslant 0$. Неравенство доказано. Отсюда: поскольку $a+b+c=1$, $A+B+C=\pi$, то $aA+bB+cC \geqslant \frac{\pi}{3}$. Равенство достигается лишь для равностороннего треугольника.

41. Обозначим расстояние между точками A и B через a, а между точками C и D через b. Соединим точку M отрезками с точками E и F — серединами отрезков AB и CD (рис. 33). Тогда, по теореме о длине медианы треугольника, можно записать:

$$|EM|^2 = \frac{1}{4}(2|AM|^2 + 2|BM|^2 - |AB|^2),$$

$$|FM|^2 = \frac{1}{4} \times (2|CM|^2 + 2|DM|^2 - |CD|^2).$$

Отсюда $|EM|^2 - |FM|^2 = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)$. Разберем три случая.

1. Точки E и F различны. Тогда искомое множество есть перпендикуляр к отрезку EF.

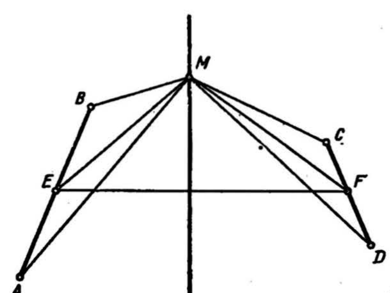
2. Точки E и F совпадают, а $a \neq b$. Из полученного соотношения следует, что искомое множество пусто.

3. Точки E и F совпадают, а $a=b$. Тогда любая точка плоскости принадлежит искомому множеству.

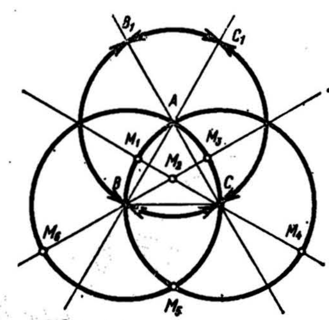
42. Для треугольника ABM возможны три варианта его равнобедренности:

1) $|AB| = |AM|$, 2) $|AB| = |BM|$ и 3) $|AM| = |BM|$.

Рассмотрим три множества точек, соответствующих этим вариантам. Точки M в первом случае располагаются по окружности радиуса $|AB|$ с центром в точке A, во втором случае — по окружности того же радиуса, но с центром в точке B, в третьем случае — по прямой, проведенной через середину стороны AB перпендикулярно ей. Аналогично получаем для треугольника ACM, что он будет равнобедренным, если точка M лежит либо на одной из окружностей радиуса $|AC|$ (заметим, что $|AC| = |AB|$)



33



34

с центром в точке A или C, либо на перпендикуляре к середине стороны AC.

Рассмотрим совокупность всех точек, принадлежащих одновременно обоим множествам. Это будет окружность O радиуса $|AB|$ с центром в точке A и еще шесть точек: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, и M_6 (рис. 34). Заметим, что если точка M совпадет с точкой B или с точкой C, то один из треугольников ABM или ACM будет вырожденным. Вырождение одного из указанных треугольников будет также еще в двух случаях: 1) если точка M совпадает с точкой C_1, лежащей на пересечении окружности O с продолжением стороны AB, и 2) если M совпадает с точкой B_1, лежащей на пересечении окружности O с продолжением стороны AC.

Окончательно получаем в качестве искомого множества точек окружность O с выколотыми точками B, C, B_1 и C_1 и еще четыре точки: M_1, M_2, M_3 и M_4.

43. Проведем окружность с центром в точке A радиуса 3 км и отметим на дороге точки B и C на расстоянии 6 км от A. Из точки B проведем к этой окружности касательные, обозначив точки касания через B_1 и B_2; проведем также касательные из точки C с точками касания C_1 и C_2. Фигура, ограниченная кривой $BB_1C_1CC_2B_2B$ (рис. 35), и будет искомым множеством точек.

Чтобы доказать это, требуется показать, что человек может за 1 ч попасть в любую точку этой фигуры и не может за это время попасть ни в какую точку вне фигуры. Начнем со второго утверждения. Пусть человек в последний раз был на дороге в момент времени t_0, тогда точка M, в которой он в этот момент находился, расположена на расстоянии, не большем, чем $6t_0$ км от точки A, поскольку двигаться со скоростью, большей 6 км/ч, он не может. Далее он, по предположению, идет полем, и поскольку его скорость не более 3 км/ч, то он находится внутри круга радиуса $R=(1-t_0)3$ км с центром в точке M. Осталось показать, что этот круг лежит внутри построенной фигуры. Расстояние от A до M обозначим через l. Проведем окружность с центром в точке M, касающуюся отрезков BB_1 и BB_2 в точках M_1 и M_2. Легко видеть, что она лежит внутри нашей фигуры. Ее радиус находится из подобия треугольников AB_1B и MM_1B

$$(|AB|:|AB_1|=|MB|:|MM_1|),$$

где $|AB|=6$ км, $|AB_1|=3$ км, $|MB|=(6-l)$ км,

следовательно, $|MM_1|=\frac{1}{2}(6-l)$ км.

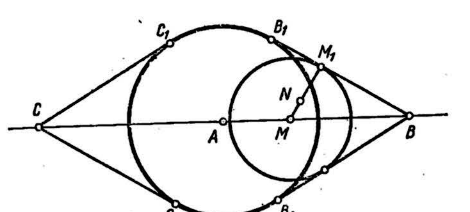
Но, как мы указывали выше, $l\leqslant 6t_0$, поэтому

$$MM_1|=\frac{1}{2}(6-l)\geqslant\frac{1}{2}(6-6t_0)=3(1-t_0)=R.$$

Отсюда непосредственно следует, что человек находится внутри круга радиуса $|MM_1|$, то есть внутри указанной выше фигуры.

Осталось показать, что человек может за 1 ч попасть в любую точку указанной фигуры. Пусть N — произвольная такая точка; проведем через N перпендикуляр к ближайшему из отрезков BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 (в нашем случае, см. рис. 35, к BB_1). Пусть M — точка пересечения этого перпендикуляра с дорогой. Тогда, если $|AM|=l$, то отрезок AM может быть пройден за $\frac{l}{6}$ ч, длина отрезка MN не больше расстояния от M до соответствующего отрезка; это расстояние равно (по предыдущему) $\frac{1}{2}$ $(6-l)$ км, то есть отрезок MN может быть пройден (со скоростью 3 км/ч) за время, не большее $\frac{1}{6}(6-l)$ ч. Итак, общее время человека в пути от точки A до N не больше, чем $\frac{l}{6}+\frac{1}{6}\times$ $\times(6-l)$ ч, то есть 1 ч.

44. Заметим сначала, что траектория шара, пущенного из произвольной точки M биллиарда параллельно одной из его диагоналей, является прямоугольником $B_1B_2B_3B_4$ со сторонами, параллельными диагоналям квадрата, и периметром, равным сумме длин этих диагоналей (рис. 36).



35

Заметим, что при столкновении двух шариков, пущенных с равными скоростями, может быть всего два случая: первый — в момент столкновения скорости противоположны по направлению, второй — в момент столкновения скорости перпендикулярны.

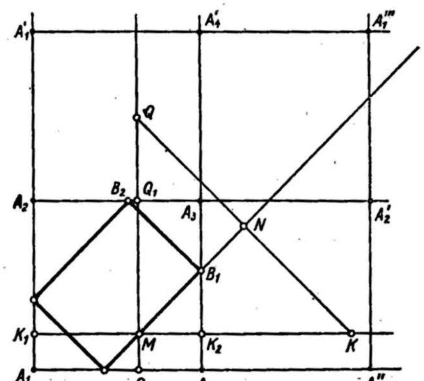
В первом случае траектория второго шарика, как легко видеть, должна совпадать с траекторией первого, и соответствующей частью множества будет отрезок B_2B_3.

Посмотрим, что происходит во втором случае.

Здесь очень удобно рассмотреть серию зеркальных отражений биллиарда, изображенную на рис. 36. Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ — данный биллиард, квадраты $A_1'A_2A_3A_4'$ и $A_1''A_2'A_3A_4$ получены из него зеркальным отражением от прямых A_2A_3 и A_3A_4 соответственно. Квадрат $A_1'''A_2'A_3A_4'$ может быть получен зеркальным отражением как квадрата $A_1'A_2A_3A_4'$ относительно прямой A_3A_4', так и квадрата $A_1''A_2'A_3A_4$ относительно прямой A_3A_2'. Такое замощение плоскости последовательными зеркальными отражениями данного квадрата можно продолжать неограниченно, но нам в основном будет достаточно лишь четырех вышеописанных квадратов.

Теперь можно считать, что первый шарик движется не по прямоугольнику $B_1B_2B_3B_4$, а по лучу MB_1. Возьмем точку N на этом луче и посмотрим, из каких точек плоскости может попасть в эту точку второй шарик одновременно с первым, если его траектория перпендикулярна лучу MB_1, а скорости обоих шариков равны.

Из рисунка легко увидеть, что таких точек только две: K и Q, причем точка K лежит на прямой K_1K_2, проходя-



36

щей через точку M параллельно сторонам A_1A_4 и A_2A_3, а точка Q лежит на прямой Q_1Q_2, также проходящей через точку M параллельно второй паре сторон квадрата.

Этим точкам соответствуют точки внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$, лежащие на отрезках K_1K_2 и Q_1Q_2.

Из того же рисунка непосредственно видно, что и, наоборот, шарик, выпущенный из любой точки отрезков K_1K_2 и Q_1Q_2 со скоростью, равной (по величине и направлению) скорости первого шарика, столкнется с ним.

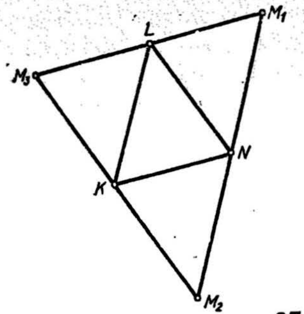
45. а) Заметим, что если в четырехугольнике соединить последовательно середины сторон, то образуется параллелограмм. Для доказательства этого известного факта достаточно провести одну из диагоналей четырехугольника: в образовавшихся треугольниках два отрезка, соединяющих середины сторон, являются средними линиями, а следовательно, они параллельны проведенной диагонали и равны ее половине.

Из сделанного замечания следует, что середина четвертой стороны — точка M — является четвертой вершиной параллелограмма, тремя другими вершинами которого являются точки K, L и N.

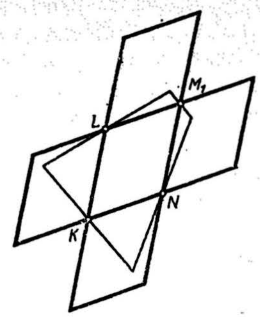
Отсюда множество, в которое может попасть точка M, состоит из трех точек: M_1, M_2, M_3 — вершин треугольника, средними линиями которого являются стороны треугольника KLN (рис. 37).

б) Рассмотрим один из параллелограммов, например, KLM_1N. Где могут находиться вершины выпуклого четырехугольника, если середины сторон находятся в точках K, L, M_1 и N? Напомним, что многоугольник — выпуклый, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, являющейся продолжением его стороны. Поэтому вершины четырехугольника могут лежать только в полуполосах между продолжениями противоположных сторон параллелограмма. Пользуясь тем, что две соседние вершины четырехугольника симметричны относительно вершины параллелограмма, находим множество точек, в которых могут оказаться вершины четырехугольника,— оно состоит из четырех параллелограммов, получающихся из KLM_1N параллельным переносом и имеющих с ним общую сторону (рис. 38); нужно еще убедиться, что любая точка этого «креста» может служить вершиной четырехугольника.

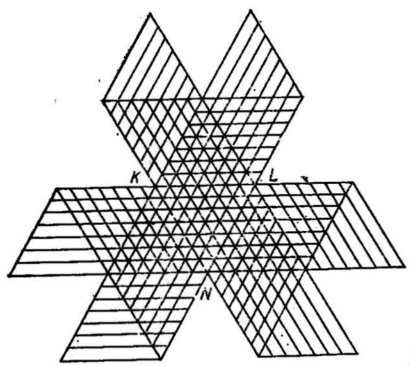
Если рассмотреть теперь еще две точки: M_2 и M_3, в которых может оказаться середина четвертой стороны



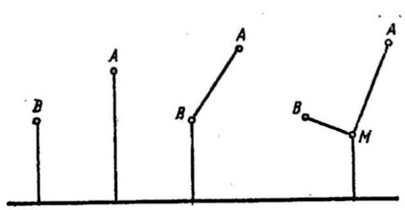
37



38



39



40

многоугольника, и взять объединение трех «крестов», соответствующих точкам M_1, M_2 и M_3, то окончательно получится множество, выделенное штриховкой на рис. 39; оно состоит из 15 треугольников, конгруэнтных треугольнику LKN.

46. Нетрудно заметить, что существуют три различных типа прокладки водопровода, которые имеет смысл рассмотреть:

1) Из A и B независимые подводки к каналу.
2) Из A в B (или из B в A) и далее к каналу.
3) Из A и B в некоторую точку M и далее к каналу (см. рис. 40).

Если в двух первых случаях кратчайшие пути находятся с очевидностью (в первом случае по перпендикулярам к каналу, во втором — соединение A с B, а затем ближайшей из них к каналу — с ним), то в третьем случае отыскание точки M достаточно сложно.

Для определенности будем везде далее считать, что точка A находится дальше от канала, чем B. Пусть точка M — искомая. Повернем треугольник ABM на 60° (рис. 41) вокруг точки A. Точка B перейдет при этом в точку B_1, а точка M — в точку M_1. Рассмотрим ломаную B_1M_1MN, ее длина равна сумме длин отрезков водопровода: $|B_1M_1| = |BM|$, $|MM_1| = |AM|$, так как треугольник AMM_1 равносторонний. Длина этой ломаной не меньше расстояния точки B_1 до берега канала и равна ему лишь тогда, когда отрезок MM_1 вертикален. В этом случае углы AMN, AMB и BMN равны по 120°, так как треугольник AMM_1 равносторонний, а угол AMB равен углу AM_1B_1. Эти рассуждения справедливы до тех пор, пока угол прямой AB с направлением канала не превосходит 30°. Если же он более 30°, то роль точки M станет выполнять точка B, т. е. третий случай переходит во второй. Это также указывает на то, что при наклоне прямой AB к направлению канала под углом, меньшим 30°, третий случай выгоднее второго. Определим теперь линию, разделяющую первый и второй варианты. Довольно ясно, что это будет окружность с центром в точке A и радиусом, равным расстоянию точки A до канала. Действительно, внутри этой окружности расстояние от A до B меньше расстояния точки A до канала, а вне — больше.

Осталось определить линии, разделяющие первый и третий случаи. Рассмотрим одну из точек пересечения уже рассмотренных линий разделения, обозначим ее через C.

Восставим в этой точке перпендикуляр к AC. Возьмем точку B на этом перпендикуляре выше прямой AC. Опустим из точки B перпендикуляр на направление канала и отметим точку K его пересечения с прямой AC. Выберем на прямой AC точку M, соответствующую третьему случаю соединения точек A и B с каналом. Тогда треугольник MBK, очевидно, равносторонний. Рассмотрим на прямой BK точку S, такую, что прямая MS параллельна направлению канала. Подсчитаем теперь разницу длин при соединениях первым и третьим способами. В первом случае общая длина равна $|AP|+|QB|$. Во втором $|AM|+|BM|+$ $+|MR|$. Но $|AM|=|AP|-|MC|$; $|MB|=2|BS|$; $|MR|=|BQ|-|BS|$. Отсюда $|AM|+|BM|+|MR|=$ $=|AP|-|MC|+2|BS|+|BQ|-|BS|=|AP|+|QB|+$ $+(|BS|-|MC|)$. Но $|BS|=|MC|$, следовательно, соединения первым и третьим способами дают здесь одинаковую длину. Из сказанного следует, что линия, разделяющая первый и третий случаи, — прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой AC. Окончательное распределение изображено на рис. 42.

47. Рассмотрим для начала случай, когда $|AK|\geqslant|KB|$. Продолжим отрезок AK до точки C так, что $|KC|=$ $=|KB|$, тогда $\angle KCB=\angle KBC$ и $\angle AKB=\angle KCB+$ $+\angle KBC$ как внешний угол треугольника, поэтому $\angle KCB=$ $=\frac{1}{2}\angle AKB$. Обозначая D — середину отрезка AB, имеем $\angle AMD=\angle ACB$, так как M — середина AC.

Следовательно, $\angle AMD=\frac{1}{2}\angle AKB$. Для всех точек K, лежащих по одну сторону от AB, угол AKB один и тот же как вписанный, опирающийся на постоянную дугу $\smile AEB$. Следовательно, угол AMD тоже постоянен и точка M лежит на дуге окружности, в которой AD стягивает дугу, равную половине дуги AEB. Обратными рассуждениями получается, что каждой точке M на дуге указанной окружности, заключенной между точками P и D (P — середина дуги AKB первоначальной окружности), соответствует точка K на первоначальной окружности такая, что M — середина ломаной AKB, причем точка K удовлетворяет условиям случая. Случай $|AK|\leqslant|KB|$ (K лежит на $\smile APB$) рассматривается аналогично и приводит к дуге, симметричной построенной относительно прямой PD. Случай, когда K лежит по другую сторону AB, рассматривается аналогично.

В результате получаем изображенную на рис. 43 кривую. (Отметим, что олимпиада проходила 8 марта. Эта задача была подарком Жюри для девушек.)

48. Покажем, что искомая точка не зависит от точки начала отсчета. Пусть A и B — точки, соответствующие пальме и камню, M — одна точка начала, M_1 — первая отметка, M_2 — вторая отметка, N — другая точка начала, N_1 и N_2 — соответствующие ей отметки.

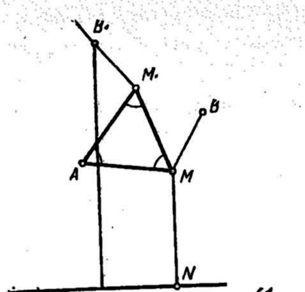
Соединим отрезками точки M и N, M_1 и N_1, M_2 и N_2 (рис. 44). Заметим, что треугольник AM_1N_1 может быть получен из треугольника AMN поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг точки A, а треугольник BM_2N_2 получается из треугольника BMN поворотом его на 90° по часовой стрелке вокруг точки B. Отсюда отрезки M_1N_1 и M_2N_2 конгруэнтны и параллельны, а середины отрезков M_1M_2 и N_1N_2 совпадают, поскольку они являются серединами диагоналей параллелограмма $M_1N_2M_2N_1$.

49. Искомое множество точек состоит из трех частей, соответствующих трем случаям расположения треугольников ABC относительно заданного угла.

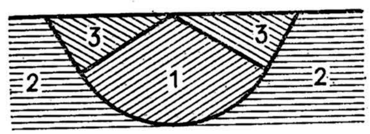
а) Оба угла ABO и ACO тупые (O — вершина данного угла). В этом случае точки искомого множества, очевидно, расположены на биссектрисе угла. Ближайшей из них к точке A будет центр окружности, вписанной в заданный угол и проходящей через точку A (рис. 45).

б) Оба угла ABO и ACO острые. В этом случае точки множества также образуют луч, идущий по биссектрисе угла, но в противоположную сторону, с вершиной в точке O_2 — центре второй окружности, вписанной в угол и проходящей через точку A.

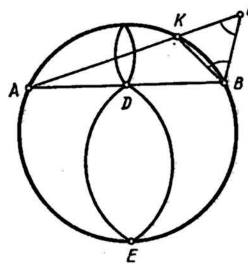
в) Если же один из углов острый, а другой тупой, то тогда они в сумме составляют развернутый угол. Из этого следует, что четырехугольник $ABOC$ является вписанным. Отсюда получаем, что центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABO, и, следовательно, лежит на перпендикуляре к середине отрезка AO. Граничные точки искомого множества на этой прямой определяются предельными положениями треугольника ABC, то есть положениями, при которых точка B или точка C совпадает с точкой O, что соответствует точкам пересечения полученной прямой с перпендикулярами из точки A к сторонам заданного угла.



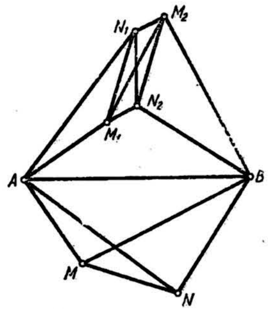
41



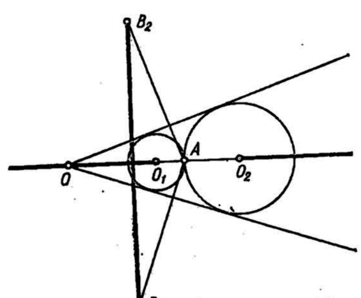
42



43



44



45

50. Рассмотрим точку D', симметричную точке D относительно диаметра AB. Заметим, что угол CMD' прямой, поэтому $|CM|^2+|DM|^2=|CM|^2+|D'M|^2=|D'C|^2$. Заметим далее, что угол CDD' равен $45°$, следовательно, дуга CD' равна $90°$, а, значит, стягивающая ее хорда CD' имеет постоянную длину (равную $|AB|\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

Предложение доказано.

51. Пусть H — общая вершина вписанных прямоугольников, лежащая на стороне AB. Рассмотрим диагональ HF одного из этих прямоугольников. Ее центр равноудален от сторон AB и CD. Значит, точка пересечения диагоналей любого вписанного прямоугольника совпадает с центром O прямоугольника $ABCD$. Отсюда сразу следует, что F — общая вершина обоих вписанных прямоугольников.

Пусть $E\,(Q)$ — вершина первого (второго) вписанного прямоугольника, лежащая на стороне AD; $G\,(P)$ — вершина первого (второго) вписанного прямоугольника, лежащая на стороне BC. Имеем: $\angle FEH=\angle FQH=\angle FGH=$ $=\angle FPH=\dfrac{\pi}{2}$.

Значит, точки E, Q, G и P лежат на окружности, диаметром которой является отрезок HF. Отсюда $|AQ|=$ $=|ED|=|BG|=|PC|$ и $QG\parallel AB$. Поэтому

$$S_{HFG}+S_{HFP}=S_{HFG}+S_{HQF}=S_{HQG}+S_{GQF}=\frac{1}{2}S_{AQGB}+$$
$$+\frac{1}{2}S_{QDCG}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

52. Обозначения: I_D, I_A, I_B, I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB соответственно.

Имеем: $\angle BI_AC=\pi-\dfrac{1}{2}(\angle DBC+\angle DCB)=\pi-\dfrac{1}{2}\times$ $\times(\pi-\angle BDC)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\angle BDC.$

Аналогично $\angle BI_DC=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\angle BAC.$ Но $\angle BDC=$ $=\angle BAC$. Следовательно, $\angle BI_AC=\angle BI_DC$.
Поэтому точки B, I_A, C и I_D лежат на одной окружности.

Отсюда $\angle I_DBC+\angle I_DI_AC=\pi$.

Аналогично $\angle I_BDC+\angle I_BI_AC=\pi$.

Сложим последние два равенства:

$\angle I_DBC+\angle I_DI_AC+\angle I_BDC+\angle I_BI_AC=2\pi.$

Но $\angle I_DBC + \angle I_BDC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC) = \frac{\pi}{2}$ и

$$\angle I_DI_AI_B = 2\pi - (\angle I_DI_AC + \angle I_BI_AC) = 2\pi -$$

$- [(\pi - \angle I_DBC) + (\pi - \angle I_BDC)] = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

53. Обозначим через P, Q, R и S точки пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно; через M — середину отрезка CD. Тогда AM — медиана треугольника ACD, BM — медиана треугольника BCD. Отсюда точка Q принадлежит отрезку AM, точка P — отрезку BM. Кроме того, $|AM|:|QM| = |BM|:|PM| = |AB|:|PQ| = 3$. Следовательно, отрезок PQ параллелен отрезку AB и $|PQ| = \frac{|AB|}{3}$. Рассмотрев аналогично отрезки QR, RS и SP, получаем утверждение задачи.

54. По условию, $\frac{a+c}{2} = b$. Значит, $p = \frac{3b}{2}$ (p — полупериметр треугольника).

Поэтому центр вписанного круга находится на том же расстоянии от стороны b, что и точка пересечения медиан.

55. Пусть D—точка пересечения прямых MO и AC, а точка E — прямых MO и BC. Из условия задачи следует, что $|CD| = |CE|$. Обозначим длину отрезка CD через x, а через h_a и h_b — длины соответствующих высот треугольника ABC, r — радиус вписанной в него окружности. Выразим площадь треугольника CDE: $S_{CDE} = S_{CDM} + S_{CEM} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}h_b\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}h_a\right)x$. С другой стороны, $S_{CDE} = S_{CDO} + S_{CEO} = \frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}rx$.

Приравнивая полученные выражения для площади этого треугольника, получаем: $\frac{1}{3}(h_a + h_b) = 2r$. Подставляя в это равенство $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $r = \frac{S}{p}$, получаем: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{2}{a+b+c}$, что эквивалентно условию задачи. Очевидно, верно и обратное утверждение.

56. Пусть A' и B' — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC треугольника, E — точка пе-

ресечения отрезков AA' и BB', D — точка пересечения прямых AB и CE. Заметим, что

$\frac{|A'C|}{|A'B|} = \frac{S_{ACE}}{S_{ABE}}$, а $\frac{|B'A|}{|B'C|} = \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}}$; отсюда получаем:

$\frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = \frac{S_{ACE}}{S_{ABE}} \cdot \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}}$. Но, по условию, $|A'C| = |B'C|$. Следовательно, $\frac{|B'A|}{|A'B|} = \frac{S_{ACE}}{S_{BCE}}$. Заметим, что и отношение $\frac{|DB|}{|DA|}$ также равно отношению этих площадей. Поэтому $|B'A|:|A'B| = |DB|:|DA|$. Но если C' — точка касания стороны AB со вписанной окружностью, то $|AC'| = |AB'|$ и $|BC'| = |BA'|$, тем более, $|AC'|:|BC'| = |B'A|:|A'B|$. Следовательно, точки D и C' делят отрезок AB в одном и том же отношении, а значит, совпадают. Отсюда следует утверждение задачи.

57. Пусть прямая, соединяющая центр вписанной окружности с точкой пересечения медиан, параллельна стороне b. Тогда $r = \frac{h_b}{3}$. Но $r = \frac{S}{p}$ (p — полупериметр треугольника), $h_b = \frac{2S}{b}$. Поэтому $\frac{S}{p} = \frac{2S}{3b}$, $\frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, $b = \frac{a+c}{2}$ (это утверждение является обратным к задаче 54).

58. Проведем касательную к вписанной окружности, параллельную одной из сторон треугольника. Пусть K — точка ее пересечения с прямой AD. Очевидно, что $|DF| < |KF|$. Но нетрудно показать, что $|KF| = |AE|$. Отсюда следует утверждение задачи.

59. $$\angle T_1AT_2 = \frac{2\pi - \alpha}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}$$

(как угол, вписанный в окружность с центром в точке P).

Обозначим через $\smile T_1T_2$ дугу данной окружности с концами T_1 и T_2, меньшую π.

Имеем: $\smile T_1T_2 = \pi - \alpha$, $\angle M_1AM_2 = \frac{\smile T_1T_2 + \smile M_1M_2}{2}$

(здесь $\smile M_1M_2$ — дуга с концами M_1 и M_2, на которой не лежат точки T_1 и T_2).

Но $\angle T_1AT_2 = \angle M_1AM_2$.

Поэтому $\pi - \frac{\alpha}{2} = \frac{(\pi - \alpha) + \smile M_1M_2}{2}$, откуда $\smile M_1M_2 = \pi$.

60. Обозначения: D, E, F — основания биссектрис углов A, B, C соответственно; O — точка пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника из оснований биссектрис; $|AE| = x$, $|CD| = y$, $|BF| = z$.

Нетрудно заметить, что $x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + (c - y)^2 + (b - z)^2$. Выражая отрезки x, y, z через стороны треугольника, приводим это равенство к виду:

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{ca}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2.$$

Отсюда $\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0$.

Приведем левую часть этого равенства к общему знаменателю и разложим полученное выражение на множители. Получим (см. решение задачи 26), что $(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)^2 = 0$. Отсюда сразу следует доказываемое утверждение.

61. Возьмем некоторую точку M на границе фигуры Φ. Поскольку фигура выпукла, то можно провести через точку M прямую так, что фигура будет лежать по одну сторону от этой прямой. Покажем, что расстояние любой точки фигуры Φ до точки M не превосходит 2. Это вытекает из рассмотрения следующих утверждений.

1. Через любую точку фигуры Φ можно провести хорду, делящую ее площадь пополам.

2. Любые две хорды, делящие пополам площадь фигуры, пересекаются внутри этой фигуры.

Первое утверждение считается известным, его доказательство содержится в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры».

Второе утверждение доказывается следующим образом: пусть две хорды, делящие площадь фигуры пополам, не пересекаются внутри фигуры, тогда они разбивают ее на три части, две из которых имеют площади, равные по половине площади фигуры Φ, а третья, лежащая между этими хордами, следовательно, имеет площадь, равную нулю, что невозможно.

Пусть теперь N — произвольная точка фигуры Φ; проведем через нее хорду, делящую площадь пополам. Пусть

далее O — точка пересечения этой хорды с соответствующей хордой, проведенной из точки M. Тогда $|MO| \leqslant 1$, $|ON| \leqslant 1$, следовательно, $|MN| \leqslant |OM| + |ON| \leqslant 2$.

Таким образом, фигура Φ заключена внутри полукруга радиуса 2 с центром в точке M, следовательно, площадь фигуры Φ не превосходит $\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

(Имеет место более точная оценка: $\frac{\pi}{4}$.)

62. Возможны два случая.

I случай. Треугольник ABC не является тупоугольным.

В этом случае легко видеть, что $R_0 = R_в$. Покажем, что $R_0 = R_n$. Ясно, что круги радиуса R_0, помещенные в вершинах треугольника, полностью его покрывают. Поэтому $R_0 \geqslant R_n$. Но круги радиуса $R < R_0$, помещенные в вершинах треугольника, не покрывают центр O описанной окружности. Так как в случае I точка O лежит внутри треугольника либо на его границе, то $R_0 = R_n$.

II случай. Треугольник ABC является тупоугольным.

Пусть C — тупой угол. Очевидно, $R_в = \frac{c}{2} < R_0$.

Поместим в вершинах треугольника круги радиуса $R_в$. Ясно, что эти круги полностью покрывают треугольник. Кроме этого, точка пересечения D окружности радиуса $R_в$ с центром в точке A с отрезком AB находится внутри круга радиуса $R_в$, помещенного в вершине C. То же верно для точки D^1 пересечения окружности радиуса $R_в$, с центром в точке B с отрезком AB (точки D и D^1, очевидно, совпадают). Поэтому найдется такое число $R < R_в$, что круги радиуса R, помещенные в вершинах треугольника, полностью его покрывают.

Следовательно, $R_n < R_в$.

Предложение доказано.

63. Лемма. Пусть пирамида $ABCD$ заключена внутри шара радиуса R с центром O. Тогда для любой точки E пирамиды, отличной от O, длина хотя бы одного из отрезков EA, EB, EC, ED меньше R.

Доказательство. Точка E принадлежит одной из пирамид $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$. Пусть, например, точка E принадлежит пирамиде $OABC$. Покажем, что длина хотя бы одного из отрезков EA, EB, EC меньше R. Для этого рассмотрим прямую, проходящую через точку E перпендикулярно плоскости грани ABC. Обозначим точку пересечения этой прямой с плоскостью грани ABC через H.

Очевидно, хотя бы одна из граней OAB, OAC, OBC пересекается с прямой EH в точке F такой, что $|FH| \geqslant |EH|$. Будем считать, что точка F принадлежит грани OAB.

Пусть точки E и F совпадают. Тогда точки F и O различны. Имеем: точка E лежит внутри треугольника OAB. Поэтому длина хотя бы одного из отрезков EA и EB меньше одной из длин сторон OA и OB треугольника OAB. Но $|OA| \leqslant R$, $|OB| \leqslant R$.

Пусть точки E и F не совпадают. Тогда $|EA| \leqslant |FA|$, $|EB| < |FB|$. Но, как и выше, доказывается, что $|FA|$ либо $|FB|$ меньше или равно R.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству утверждения задачи. Возможны два случая.

I случай. Центр описанного шара O лежит внутри треугольной пирамиды либо на ее грани.

Докажем, что в этом случае $R_0 = R_в = R_n$. Очевидно, всегда $R_0 \geqslant R_в$. Если $R_0 > R_в$, то треугольную пирамиду можно сдвинуть так, что она останется внутри описанного шара. Но в случае I всякая плоскость, проведенная через центр описанного шара, имеет с пирамидой общие точки. Значит, в любом из двух полушарий, на которые эта плоскость делит описанный шар, найдутся вершины пирамиды (быть может, лежащие в этой плоскости). Отсюда следует, что при любом сдвиге хотя бы одна точка пирамиды окажется вне описанного шара. Значит, $R_0 = R_в$.

Из леммы следует, что $R_0 \geqslant R_n$. Но при $R < R_0$ шары радиуса R, помещенные в вершинах пирамиды, не покрывают точку O. Но в случае I центр описанного шара O принадлежит пирамиде. Поэтому $R_0 = R_n$.

II случай. Центр описанного шара O лежит вне пирамиды.

В этом случае, очевидно, $R_0 > R_в$. Поместим пирамиду $ABCD$ в шар радиуса $R_в$. Так как $R_0 > R_в$, то можно считать, что точка A лежит внутри этого шара. Значит, $|O_1A| < R_в$ (O_1 — центр шара радиуса $R_в$). Применяя лемму, получаем отсюда, что для любой точки E пирамиды длина хотя бы одного из отрезков EA, EB, EC, ED меньше $R_в$. Следовательно, $R_n < R_в$.

64. $V = \frac{1}{3}(S_A \cdot |MA'| + S_B \cdot |MB'| + S_C \cdot |MC'| + S_D \cdot |MD'|)$.

$V = \frac{1}{3} h_A \cdot S_A = \frac{1}{3} h_B \cdot S_B = \frac{1}{3} h_C \cdot S_C = \frac{1}{3} h_D \cdot S_D$.

$h_A \leqslant |MA| + |MA'|$, $h_B \leqslant |MB| + |MB'|$, $h_C \leqslant |MC| + |MC'|$, $h_D \leqslant |MD| + |MD'|$.

Используя эти соотношения, получаем:

$$\frac{1}{3}(S_A \cdot |MA'| + S_B \cdot |MB'| + S_C \cdot |MC'| + S_D \cdot |MD'|) =$$
$$= \frac{1}{12}(h_A \cdot S_A + h_B \cdot S_B + h_C \cdot S_C + h_D \cdot S_D) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{12}[(|MA| + |MA'|) \cdot S_A + (|MB| + |MB'|) \cdot S_B +$$
$$+ (|MC| + |MC'|) \cdot S_C + (|MD| + |MD'|) \cdot S_D].$$

Отсюда сразу вытекает доказываемое неравенство.

65. Соединим вершину пирамиды S с точкой E пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды. Воспользуемся выражением медианы треугольника через его стороны. Из треугольника BSD получим:

$|SE|^2 = \frac{1}{4}(2|BS|^2 + 2|SD|^2 - |BD|^2)$. Из треугольника ASC получим: $|SE|^2 = \frac{1}{4}(2|AS|^2 + 2|SC|^2 - |AC|^2)$.

Но $|BD| = a$, $|AS| = a$, $|AC| = a\sqrt{3}$. Поэтому, приравнивая два различных выражения для $|SE|^2$, получаем: $|SC|^2 = |BS|^2 + |SD|^2$. Отсюда по теореме, обратной теореме Пифагора, следует доказываемое утверждение.

66. Раскрасим доску в четыре цвета, как указано на рис. 46 (цифры — номера цветов). Тогда каждая фишка замостит четыре клетки со всеми четырьмя цветами. Но клеток, окрашенных в 1-й цвет,— 25, во 2-й — 26, в 3-й — 25, а в 4-й — 24. Отсюда следует невозможность указанной укладки.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

46

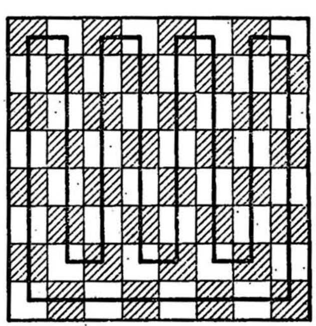
67. Доску можно замостить по линии, изображенной на рис. 47, начав от какой-либо вырезанной клетки (аналогично можно решить подобную задачу на доске $m \times n$ клеток, если одно из чисел m или n четно).

68. Любой тупоугольный треугольник можно разрезать на семь остроугольных треугольников. Докажем это.

Пусть C — тупой угол треугольника ABC. Впишем в треугольник ABC окружность O. Проведем к окружности O касательную DE, такую, что точка D принадлежит отрезку AC, точка E — отрезку AB и $|AD|=|AE|$. Проведем также касательную FH, такую, что точка F принадлежит стороне AB, точка H — стороне BC и $|BF|=|BH|$. Соединим центр O окружности с точками C, D, E, F и H. Докажем, что все семь треугольников, на которые проведенные отрезки разбивают треугольник ABC, остроугольные.

Очевидно, достаточно доказать, что остроугольными являются треугольники с вершиной O. Рассмотрим, например, треугольник OCD. Так как CO — биссектриса угла $\angle DCH$, то угол $\angle DCO$ острый. Аналогично, угол $\angle CDO$ острый (DO — биссектриса угла $\angle CDE$). Но углы ACB и CDE тупые. Следовательно, $\angle DCO > \frac{\pi}{4}$, $\angle CDO > \frac{\pi}{4}$. Поэтому $\angle COD < \frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается, что все остальные треугольники с вершиной O также являются остроугольными.

Докажем, что никакой тупоугольный треугольник нельзя разрезать менее чем на семь остроугольных треугольников. Предположим противное. Рассмотрим минимальное число $n<7$, такое, что некоторый тупоугольный треугольник можно разрезать на n остроугольных треугольников. Очевидно, некоторый отрезок выходит из вершины C тупого угла этого треугольника. Ясно, что этот отрезок не доходит до стороны AB (в противном случае некоторый тупоугольный треугольник можно было бы разрезать менее чем на n остроугольных треугольников).



47

Рассмотрим лучи, выходящие из конца O этого отрезка. Так как углы между соседними лучами острые, то этих лучей не менее пяти. Каждый из них проведен до некоторой стороны треугольника ABC. Действительно, если бы некоторая внутренняя точка одного из этих лучей была вершиной остроугольного треугольника, то из этой точки выходило бы не менее пяти отрезков (см. выше) и общее число остроугольных треугольников было бы не менее восьми. Кроме этого, к каждой стороне треугольника ABC подходит не более двух отрезков, выходящих из точки O. Иначе, рассуждая, как и выше, мы получили бы, что некоторый тупоугольный треугольник можно разрезать менее чем на n остроугольных треугольников.

Отсюда сразу следует, что ни один из отрезков, выходящих из точки O, не оканчивается ни в вершине A, ни в вершине B треугольника ABC.

Значит, точки A и B принадлежат некоторым другим остроугольным треугольникам (не имеющим вершины в точке O). Так как, очевидно, вершины A и B принадлежат различным остроугольным треугольникам, то общее число остроугольных треугольников, на которые можно разрезать данный тупоугольный треугольник, не менее семи.

69. Во-первых, отметим, что m-угольник нельзя разбить менее, чем на $(m-2)$ треугольника. Действительно, сумма внутренних углов m-угольника равна $(m-2)\pi$; следовательно, сумма углов треугольников не менее $(m-2)\pi$; отсюда вытекает наше утверждение; более того, $m-2$ треугольника может быть лишь в том случае, если вершинами таких треугольников являются только вершины m-угольника, а сторонами—стороны и диагонали m-угольника. Поскольку же мы рассматриваем правильные многоугольники, то найдется такой треугольник, у которого центр описанной окружности лежит внутри или на стороне. Такой треугольник будет соответственно остроугольным или прямоугольным.

Из сказанного следует, что правильный многоугольник разбивается не менее, чем на $m-1$ тупоугольный треугольник. Покажем, что при $m>12$ такое разбиение на $m-1$ тупоугольный треугольник возможно.

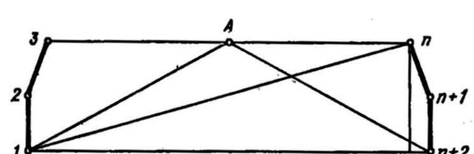
Доказательство проведем отдельно для многоугольников с четным и нечетным числом сторон.

Пусть $m=2n$. Занумеруем последовательно вершины и рассмотрим трапецию с вершинами 1, 3, n и $n+2$. Остальную часть $2n$-угольника, очевидно, диагоналями можно разбить на тупоугольные треугольники. Рассмотрим разбиение трапеции на три треугольника отрезками из середины верхнего основания в вершины нижнего основания (рис. 48). Треугольники, примыкающие к боковым сторонам трапеции, очевидно, тупоугольные, а оставшийся треугольник будет тупоугольным, если его высота меньше половины основания. Но в этой трапеции диагональ равна нижнему основанию, поэтому высота будет более чем вдвое меньше диагонали, а следовательно, и основания, если угол между нижним основанием и диагональю меньше $30°$. Этот угол измеряется половиной дуги описанной вокруг многоугольника окружности, которая, по построению, равна $360°: n$. Отсюда следует наше утверждение.

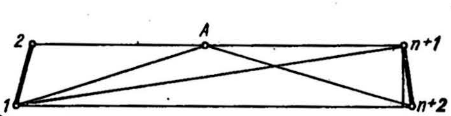
При нечетном $m=2n+1$ аналогичная трапеция изображена на рис. 49. Все рассуждения полностью повторяются, за исключением вычисления дуги окружности, которая в этом случае равна $360°: (2n+1)$. Следовательно, для многоугольников с нечетным числом сторон утверждение задачи верно, начиная с $m=7$.

70. Возьмем произвольную точку O плоскости; будем считать, что она окрашена в первый цвет. Проведем из точки O как из центра две концентрические окружности, радиусы которых $r=1$ и $R=\sqrt{3}$ соответственно. Если хотя бы одна из точек окружности радиуса 1 окрашена в первый цвет, то утверждение доказано. Будем считать поэтому, что любая точка этой окружности окрашена либо во второй, либо в третий цвет.

Рассмотрим произвольную точку A окружности радиуса $\sqrt{3}$. На окружности радиуса 1 есть две точки, удаленные от A на расстояние 1. Расстояние между этими точками также равно единице. Поэтому, если эти две точки окрашены в один цвет, то утверждение доказано. Значит, можно считать, что одна из этих точек — второго, а другая — третьего цвета. Но тогда точка A окрашена в первый цвет.



48



49

Итак, произвольная точка окружности радиуса $R=\sqrt{3}$ окрашена в первый цвет. Утверждение доказано.

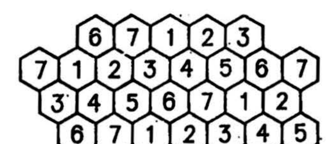
При числе цветов, равном 7, достаточно разбить плоскость на правильные шестиугольники со стороной a $\left(\frac{1}{2}>a>\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ и раскрасить их так, как показано на рис. 50.

71. Обозначим через a_1 количество вершин, граничащих с гранями 2, 3 и 4 цвета, a_2 — количество вершин, граничащих с гранями 1, 3 и 4 цвета, аналогично определим a_3 и a_4. Заметим, что ребер у многоугольников 1-го цвета ровно $a_2+a_3+a_4$, а у многоугольников 2-го цвета $a_1+a_3+a_4$. Общее количество ребер у них будет $a_1+a_2+2a_3+2a_4$. Теперь отметим, что из каждой вершины, граничащей с гранями 2-го, 3-го и 4-го цвета или с гранями 1-го, 3-го и 4-го цвета, выходит ровно одно ребро, разделяющее грани 3-го и 4-го цвета, и входит оно опять в одну из вершин указанных двух типов. Таким образом, все вершины этих типов разбились на пары. Следовательно, a_1+a_2 — четное число, $a_1+a_2+2a_3+2a_4$ — также четно. Отсюда следует, что число граней 1-го и 2-го цвета с нечетным числом сторон четно. Аналогичное рассуждение можно провести для любой другой пары цветов.

72. Пусть при первом делении фигура разделена на 10 частей A_i $(1 \leqslant i \leqslant 10)$, а при втором делении — на 10 частей B_j $(1 \leqslant j \leqslant 10)$. Обозначим пересечение областей A_i и B_j через A_{ij}. Будем считать, что часть A_i закрашена i-й краской. Количество способов раскрашивания частей B_j равно $10!$. Занумеруем их числами $k=1, 2, \ldots, 10!$ и обозначим в каждом способе через S_k сумму площадей областей A_{ij}, покрашенных с обеих сторон одной краской.

Лемма. $\sum\limits_{k=1}^{10!} S_k = 9!$.

Доказательство леммы. Подсчитаем, сколько раз площадь S_{ij} области A_{ij} входит в сумму $\sum\limits_{k=1}^{10!} S_k$, то есть сколько S_k содержат S_{ij}.



50

Для того чтобы площадь S_{ij} вошла в S_k, необходимо и достаточно, чтобы при k-ом способе раскраски часть B_j была закрашена одним определенным цветом — тем же, что и A_i. Остальные 9 цветов могут как угодно прийтись на остальные 9 частей; их можно распределить 9! способами. Итак, сумма $\sum_{k=1}^{10!} S_k$, выраженная через S_{ij}, содержит каждую из этих площадей 9! раз. Имеем поэтому:

$$\sum_{k=1}^{10!} S_k = 9! \sum_{i,j=1}^{10} S_{ij} = 9!.$$

Лемма доказана.

Решение задачи. Так как $\sum_{k=1}^{10!} S_k = 9!$, то найдется число k_0, такое, что $S_{k_0} \geqslant 9! : 10! = 0{,}1$, что и требовалось доказать.

73. Докажем, что искомое число не меньше девяти. Возьмем на плоскости составленный из клеток квадрат такой, что в нем встречаются все десять красок. Рассмотрим путь, проходящий через все клетки этого квадрата. Очевидно, пары с красками, встречающимися впервые, разные. Но таких пар девять.

Покажем, что существует раскраска, содержащая 9 пар соседних красок. Произвольную диагональ красим первой краской, соседние с ней — второй, соседние с ними — третьей и т. д. Свободные диагонали, соседние с закрашенными десятой краской, красятся в девятую и т. д.

Очевидно, при такой раскраске число пар соседних красок равно девяти.

74. При $n=7$ многоугольник, на котором выигрывает первый, существует (рис. 51). Вначале первый игрок ставит крестик в клетку a. При любом ответном ходе второго игрока либо горизонтальная, либо вертикальная полоса свободна от нулей; будем считать, что нулей нет на горизонтали. Тогда вторым своим ходом первый игрок ставит крестик в клетку b и, очевидно, выигрывает, как бы ни пошел второй игрок.

Покажем, что при $n \leqslant 6$ искомого многоугольника не существует.

I случай. Никакие четыре клетки подряд не лежат на одной прямой.

В этом случае после двух ходов первого игрока остается разве лишь одна клетка, такая, что, поставив в нее

крестик, первый может выиграть. Вторым своим ходом второй игрок ставит в эту клетку нулик — и первый не выигрывает.

II случай. Найдутся четыре клетки подряд, лежащие на одной прямой.

Если на этой прямой найдется еще хотя бы одна клетка, то поставить три крестика можно только на этой прямой, и, очевидно, при правильной игре второго первый не выигрывает.

Пусть на этой прямой нет пятой клетки.

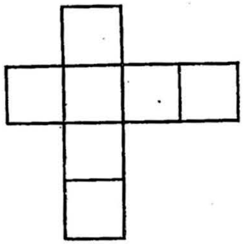
Стратегия второго игрока.

На любой крестик, поставленный на «прямую четырех клеток», второй игрок отвечает постановкой нулика на свободную клетку той же прямой (если таковая имеется). Если прямая заполнена, то второй игрок ходит произвольным образом.

На любой крестик, поставленный вне этой прямой, второй игрок отвечает постановкой нулика на свободную клетку вне этой прямой (если таковая имеется). Если ее нет, то второй ходит произвольным образом.

Ясно, что при такой стратегии второго игрока первый не выиграет.

75. Выигрывает начинающий. Опишем его стратегию. Перенумеруем поля доски слева направо. Первым ходом начинающий передвигает одну из фишек на поле 1, причем если n четно, то он передвигает фишку, стоящую на клетке с номером n, а если n нечетно, то фишку, стоящую на клетке с номером $n-2$. Опишем полученную позицию: одна фишка стоит на клетке 1, остальные две — рядом, причем левая — на поле с четным номером. Осталось заметить, что из этой позиции невозможно получить такую же, а из любой другой (при условии, что одна фишка стоит на поле 1) можно. Позиция, из которой невозможно дальше сделать хода, также принадлежит к этому типу — одна фишка на клетке 1, остальные на клетках 2 и 3.



51

76. Первый выигрывает лишь в том случае, если в начальном положении фишки стоят рядом по горизонтали или вертикали. Покажем, что в любом другом случае выигрывает второй.

Заметим, что первый каждым своим ходом меняет цвет поля, на котором стоит его фишка. Поэтому если второй своим первым ходом встанет на поле того же цвета, на котором очутился первый, и далее будет ходить лишь по горизонтали и вертикали, то перед ходом первого его фишка всегда будет стоять на поле того же цвета, что и фишка первого. Следовательно, первый не сможет поставить свою фишку на фишку второго.

Покажем, что второй, двигая свою фишку только по горизонтали или вертикали, сможет нагнать фишку первого и поставить на нее свою фишку.

Сопоставим каждой клетке доски пару натуральных чисел (p, q), где p — номер горизонтали, на которой находится клетка, а q — номер ее вертикали. Пусть фишка первого игрока стоит на клетке (p_1, q_1), а второго — на клетке (p_2, q_2). До начала игры $|p_1 - p_2| \leqslant n-1$; $|q_1 - q_2| \leqslant n-1$. Каждым своим ходом первый игрок либо а) увеличивает на единицу одно из чисел $|p_1 - p_2|$, $|q_1 - q_2|$ (при этом второе число не меняется), либо б) уменьшает на единицу одно из этих чисел (второе число при этом также не меняется).

Стратегия второго игрока. Поскольку первый игрок не может выиграть, то перед ходом второго по крайней мере одно из чисел $|p_1 - p_2|$ и $|q_1 - q_2|$ отлично от нуля. Второй игрок своим ходом уменьшает его на единицу. При такой стратегии второго после каждого обмена ходами в случае а) число $|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|$ остается неизменным, а в случае б) уменьшается на два.

Вследствие конечности доски из любого положения первый игрок за конечное число ходов попадает в положение, когда он не может сделать ход типа а), так как, например, для того чтобы все время увеличивать $|p_1 - p_2|$, он должен уходить от второго по вертикали в одну сторону. Следовательно, за конечное число ходов первый игрок попадает в ситуацию, когда он может сделать лишь ход типа б). А так как в начальном положении $|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| \leqslant 2(n-1)$, то после повторения этой ситуации не более $(n-1)$ раза второй игрок выигрывает.

77. При правильной игре выигрывает Саша. Пусть Павлик первым своим ходом ставит белый, красный либо черный шарик. Тогда одним из первых трех своих ходов Саша может поставить шарик того же цвета на одно ребро с шариком Павлика.

Пусть Павлик первым своим ходом ставит зеленый

шарик. Заметим сразу, что каждый свой шарик Павлик вынужден ставить на одно ребро с этим зеленым шариком. В противном случае выигрывает Саша (см. начало решения).

Первым своим ходом Саша ставит белый шарик в вершину, противоположную той, в которой стоит зеленый шарик Павлика.

Вторым своим ходом Павлик вынужден ставить белый шарик; в противном случае Павлик проигрывает (см. начало решения).

Вторым своим ходом Саша ставит красный шарик в вершину, не лежащую в плоскости, в которой расположены белые шарики, и не лежащую на одном ребре с зеленым шариком.

Павлик вынужден теперь ставить черный шарик в одну из вершин, лежащих на одном ребре с зеленым шариком. Но есть вершина, свободная и лежащая на одном ребре с черным шариком. Поставив в эту вершину черный шарик, Саша выигрывает.

78. При $n \geqslant 8$ при правильной игре выигрывает второй (см. решение задачи 77).

Пусть $n < 8$. Обозначим через j число улиц. Ясно, что $3n = 2j$. Поэтому n есть четное число.

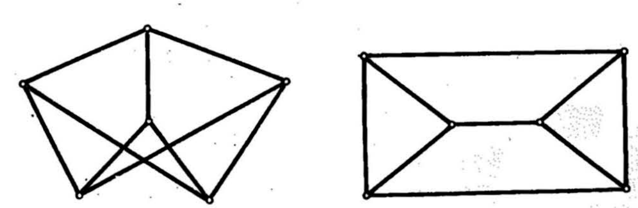
I. $n=4$. Начинающий закрашивает первую свою площадь третьей (четвертой) краской, а при втором своем ходе пользуется четвертой (третьей) краской. Начинающий выигрывает.

II. $n=6$. Существует всего два таких города (рис. 52, 53).

Назовем треугольником тройку площадей, каждая из которых соединена с двумя другими. Заметим, что в городе не более двух треугольников.

Стратегия начинающего.

Первым своим ходом начинающий закрашивает некоторую площадь четвертой краской; вторым своим ходом



52 53

он закрашивает некоторую площадь первой краской. Ясно, что начинающий может сделать второй свой ход так, что после этого:

а) закрашенные первой краской площади не будут соединены улицей;

в) в каждом треугольнике (если он имеется) будет закрашена хотя бы одна площадь.

Вторым своим ходом второй играющий закрашивает какую-либо площадь второй краской. Имеются две возможности.

I случай. Эта площадь соединена с обеими незакрашенными. В этом случае две незакрашенные площади не соединены улицей. Первый играющий закрашивает любую из оставшихся площадей третьей краской и выигрывает.

II случай. Эта площадь не соединена хотя бы с одной из незакрашенных площадей. Закрасив ее второй краской, начинающий выигрывает.

Ответ: $n=4$, $n=6$.

Замечание. Отметим, что начинающий не пользовался никакой краской дважды (хотя по условию задачи он имел на это право).

79. Докажем, что при $k \neq n$ игра окончится за конечное число ходов. Действительно, после $(n-1)$-го хода у каждого игрока будут по две шашки одного цвета (если игра еще не будет окончена). Ясно также, что каждым ходом, начиная с n-го, будет передаваться белая шашка. Но $k \neq n$. Следовательно, у некоторого игрока две белые шашки. Когда этот игрок получит белую шашку, игра окончится.

Найдем максимально возможное число ходов в этой игре. Так как имеется $2k$ черных шашек, то после $(n-1)$-го хода черные шашки будут у k игроков. Следовательно, число ходов в игре не более чем $n+k$. Но после $(n-1)$-го хода у n-го игрока имеются две черные шашки (иначе игра была бы окончена за $n-1$ ход). Поэтому число ходов в игре не более, чем $n+k-1$.

Пусть до начала игры у первых $(k-1)$ игроков черные шашки, у k-го игрока белая и черная шашки, от $(k+1)$-го до $(n-1)$ игрока белые шашки, а у n-го игрока черная и белая шашки. В этом случае, как легко видеть, игра окончится после $n+k-1$ хода.

Ответ: максимально возможное число ходов в игре $n+k-1$.

80. Сделаем вначале простое замечание. Рассмотрим какую-либо диагональ или сторону правильного $2n$-угольника и какую-либо его вершину. Легко видеть, что через эту вершину можно провести диагональ или сторону, симметричную данной относительно некоторой прямой, проходящей через центр $2n$-угольника.

I случай. До начала игры обе фишки расположены на одной стороне многоугольника. В этом случае из замечания, сделанного выше, ясна стратегия второго игрока: после каждого хода первого передвигать свою фишку так, чтобы отмеченный путь был симметричен пути, отмеченному первым игроком, относительно прямой, проходящей через центр многоугольника и середину этой стороны.

II случай. До начала игры фишки стоят в произвольных вершинах. Отобразим множество вершин данного $2n$-угольника взаимно однозначно на множество вершин некоторого правильного $2n$-угольника таким образом, чтобы фишки оказались в соседних вершинах.

Стратегия второго игрока. Каждым ходом второй игрок ставит свою фишку в вершину данного $2n$-угольника, отвечающую той вершине нового $2n$-угольника, в которую второй игрок поставил бы фишку в случае I.

Ясно, что при такой стратегии второй всегда выигрывает.

Замечание. Авторам неизвестно решение этой задачи для многоугольников с нечетным числом сторон.

81. При $p=3n$ второй выигрывает.

Стратегия второго игрока. После каждого хода первого игрока второй пишет цифру, которая в сумме с предыдущей цифрой при делении на 9 дает в остатке 6: после 6 второй пишет цифру 9, после 7 — цифру 8, после 8 — цифру 7, после 9 — цифру 6.

При $p=3n+1$ выигрывает первый.

Стратегия первого игрока. Первым своим ходом первый игрок ставит любую цифру, отличную от 9. После каждого хода второго игрока первый пишет цифру, которая в сумме с предыдущей цифрой при делении на 9 дает в остатке 6.

При такой игре первого сумма всех цифр, кроме первой и последней, делится на 9. Но первая цифра отлична от 9. Следовательно, сумма всех цифр не делится на 9.

При $p=3n+2$ выигрывает первый.

Стратегия первого игрока. Первым своим ходом первый игрок ставит цифру 9. После каждого хода второго игрока, кроме последнего, первый ходит так же, как и в случае $p=3n+1$. Если предпоследним своим ходом второй игрок ставит цифру 9, то первый ставит вслед за этим цифру, отличную от 9. Если предпоследним своим ходом второй игрок ставит цифру, отличную от 9, то первый ставит вслед за этим цифру 9.

При такой игре первого сумма всех цифр, кроме первой и трех последних, делится на 9. Среди «исключительных» четырех цифр найдутся две девятки и найдется хотя бы одна цифра, отличная от 9. Значит, сумма этих четырех цифр не делится на 9, а поэтому и сумма всех цифр не делится на 9.

82. Ответ: 104.

Доказательство. Будем набирать в команду на протяжении первых трех лет восьмиклассников, на четвертый год — девятиклассников, а на пятый год — десятиклассников. В этом случае мы можем набрать 104 очка. Докажем, что в любом другом случае мы наберем меньше очков.

Действительно, если мы заменим хотя бы одного десятиклассника девяти- или восьмиклассником, мы, очевидно, наберем не более 103 (102) очков. Замена девятиклассника десяти- или восьмиклассником ведет к потере не менее чем двух очков. В самом деле, десятиклассник, введенный в команду, дает ей на первом году своего участия в олимпиаде выигрыш в одно очко по сравнению с девятиклассником. Однако в этом случае на следующий год команда уменьшится по крайней мере на одного человека, то есть теряет (по сравнению с «оптимальным» вариантом) не менее трех очков.

Точно так же при замене девятиклассника восьмиклассником теряется одно очко в год замены и не менее одного — на следующий год.

Аналогично показывается, что при замене хотя бы одного восьмиклассника десяти- или девятиклассником теряется не менее трех (одного) очка.

83. Возьмем произвольного участника A. Если A знаком со всеми остальными 99 школьниками, то утверждение доказано. Будем поэтому считать, что A не знаком с некоторым участником B.

Рассмотрим некоторого школьника C. Если C знаком со всеми остальными 99 школьниками, то утверждение доказано. Будем поэтому считать, что C не знаком с некоторым участником кружка.

Пусть C не знаком со школьником D. Тогда среди четырех участников A, B, C и D кружка ни один не знаком со всеми остальными тремя. Противоречие.

Пусть C не знаком с одним из школьников A и B. Для определенности будем считать, что C не знаком с A. Рассмотрим некоторого школьника D. Как показано выше, D знаком со всеми участниками кружка, кроме, может быть, A, B, C.

Рассмотрим четырех участников A, B, C и D кружка. Один из них знаком со всеми остальными тремя. Но ни один из школьников A, B, C этим свойством не обладает. Значит, D знаком с A, B и C, то есть D знаком со всеми остальными 99 школьниками.

Рассуждение, проведенное выше, показывает, что в кружке найдутся хотя бы 97 школьников, знакомых со всеми остальными. С другой стороны, ясно, что таких школьников может быть ровно 97.

Итак, наименьшее число школьников в кружке, знакомых со всеми остальными, равно 97.

84. Уложим шпалы так, что расстояние между любыми двумя соседними шпалами равно 0,5 м. При такой укладке человек будет ступать на каждую шпалу. Поэтому он сделает максимальное число шагов.

Уложим теперь шпалы следующим образом. На участке длиной 40 м уложим их так, что расстояние между любыми двумя соседними шпалами равно 0,4 м; на соседнем участке длиной 60 м уложим шпалы так, что расстояние между любыми двумя соседними шпалами равно 0,6 м, и т. д.

Покажем, что при такой укладке число шагов на 1 км минимально.

Пусть n — число шагов на 100 м пути, длина которых больше 0,6 м. При любой укладке шпал на любом стометровом участке $n \leqslant 50$ (в противном случае этот участок содержал бы более 200 шпал).

Итак, на 1 км пути приходится не более 500 шагов, длина которых больше 0,6 м.

В нашем случае:

а) таких шагов сделано 500;

в) длина каждого из них равна 0,8 м;

с) длина любого другого шага — 0,6 м.

85. Предположим противное, пусть наибольшее расстояние пробежал мальчик A, а его сосед слева (B) пробежал меньше. Пусть A бегал налево n раз, направо m раз

и оставался на месте k раз. Обозначим расстояние между A и B через l. Тогда B пробежал меньше, чем A, на $(n-m-k)l$, то есть $n-m-k>0$. Сосед же мальчика A справа — мальчик C — пробежал на $(m-n-k)d$ меньше, чем A, где d — расстояние между A и C. Но $m-n-k=-(n-m-k)-2k<0$. Следовательно, вопреки предположению, C пробежал больше, чем A. Мы использовали лишь то обстоятельство, что у пробежавшего больше всех есть сосед слева и сосед справа. Полученное противоречие показывает, что у него сосед может быть лишь с одной стороны.

Второе решение, из которого и появилась эта задача, таково: введем на прямой координаты, пусть в k-й раз бежали к точке x_k, тогда мальчик, стоящий в точке x, пробежал $|x-x_k|$. Осталось заметить, что $y_k=|x-x_k|$ — функция, выпуклая вниз, сумма таких функций также выпукла вниз, а выпуклая вниз функция принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка ее задания.

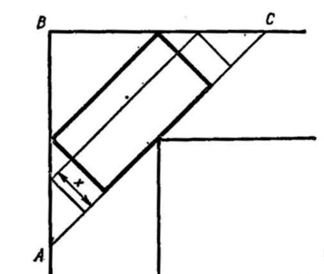
86. Будем различать два случая: первый — если все его стороны не больше H и второй — одна пара сторон больше H (обе пары сторон не могут быть одновременно больше H, иначе плот не уместится в канале).

В первом случае площадь S плота не превосходит H^2. Квадратный плот со стороной H можно провести по каналу, совершив два параллельных переноса. Во втором случае плот при прохождении поворота должен повернуться на 90°. В некоторый момент его стороны образуют угол в 45° с берегами. При этом он должен уместиться внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (рис. 54). Легко усмотреть, что плот максимальной площади, помещающийся в треугольнике ABC, должен одной из своих сторон лежать на гипотенузе этого треугольника, а вершины, лежащие на другой стороне, должны находиться на катетах треугольника. Катеты треугольника равны по $2H$. Обозначим длину стороны плота, лежащей на гипотенузе треугольника, через x, тогда перпендикулярная ей сторона равна половине разности между длиной гипотенузы и длиной лежащей на ней стороны плота, то есть $\frac{1}{2}(2H\sqrt{2}-x)$. Таким образом, площадь плота в этом случае равна $x\left(H\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)$. Преобразуем это выражение к виду:

$$-\frac{1}{2}(x^2-2Hx\sqrt{2}+2H^2)+H^2=H^2-\frac{1}{2}(x-H\sqrt{2})^2.$$

Это выражение максимально при $x=H\sqrt{2}$ и при этом равно H^2. И в этом случае мы также получили в качестве наибольшей площади плота $S=H^2$, вторая сторона плота при этом равна $\frac{1}{2}(2H\sqrt{2}-H\sqrt{2})=\frac{H\sqrt{2}}{2}$. Такой плот может быть проведен через поворот следующим образом: установим его у поворота так, чтобы одна из больших его сторон своей серединой упиралась в вершину выступающего угла канала, и повернем плот вокруг вершины этого угла на 90°. Это можно сделать, поскольку расстояние середины большой стороны плота до любой его точки не превосходит расстояния ее до вершин на противоположной стороне, которое равно $\frac{1}{2}H\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=H$. Следовательно, при повороте плот лишь коснется берегов канала.

87. Для удобства будем рассматривать многоугольники на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, причем их стороны проходят по линиям сетки, а вершины находятся в узлах. Найдем сначала многоугольник с максимальной площадью. Пусть дан некоторый многоугольник. Рассмотрим вместе с ним прямоугольник, построенный следующим образом: проведем прямые через крайнюю левую, крайнюю правую, самую верхнюю и самую нижнюю стороны данного многоугольника. Многоугольник будет находиться внутри построенного прямоугольника, следовательно, его площадь не превосходит площади этого прямоугольника, а периметр прямоугольника будет не больше периметра данного многоугольника. Если стороны построенного прямоугольника равны k и m, то его площадь равна km; но из условия на периметр $2(k+m)\leqslant 4n$, следовательно, $km=k(k+m-k)\leqslant k(2n-k)=-(k^2-2kn+n^2)+n^2=n^2-(n-k)^2\leqslant n^2$.



54

Таким образом, максимальная площадь не больше n^2, она будет равна n^2 у квадрата со стороной, равной n.

Для нахождения наименьшей из площадей наших многоугольников удобно воспользоваться формулой $S=j+\frac{r}{2}-1$, где S — площадь многоугольника, j — число узлов сетки внутри многоугольника, а r — число узлов сетки на его границе. Из этой формулы вытекает, что минимальная площадь будет в том случае, когда $j=0$. Число узлов сетки на границе в нашем случае равно периметру и не зависит от формы многоугольника, то есть минимальная площадь равна $2n-1$ и достигается во многих случаях.

88. Без ограничения общности можно считать, что размеры клетки 1×1.

Рассмотрим произвольную несамопересекающуюся ломаную, проведенную по линиям сетки на прямоугольнике из угла A прямоугольника в противоположный угол C. Будем передвигаться по этой ломаной из точки A в точку C. Разобьем ломаную на отрезки единичной длины. Каждый такой отрезок выходит из некоторого узла сетки. Так как ломаная — несамопересекающаяся, то из каждого узла сетки выходит не более одного отрезка. Кроме этого, из точки C не выходит ни одного отрезка.

Значит, длина любой несамопересекающейся ломаной, удовлетворяющей условиям задачи, не превосходит $(m+1)(n+1)-1$.

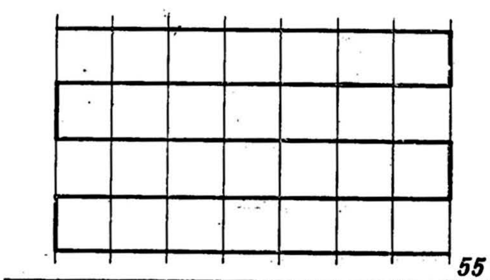
Рассмотрим два случая.

I случай. Хотя бы одно из чисел m и n четно.

В этом случае существует ломаная, удовлетворяющая условиям задачи, длина которой $(m+1)(n+1)-1$ (рис. 55).

II случай. Оба числа m и n нечетны. Ломаная, удовлетворяющая условиям задачи, пересекает любую полосу нечетное число раз. Значит, в случае II длина ломаной есть четное число и, следовательно, не превосходит $(m+1)(n+1)-2$.

Ломаная, удовлетворяющая условиям задачи, длина которой $(m+1)(n+1)-2$, в случае II существует (рис. 56).



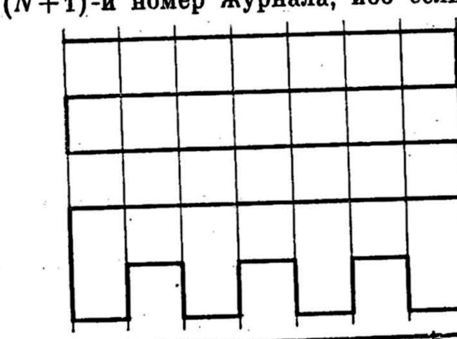
55

89. Для того чтобы обойти все три комнаты замка и выйти из него, необходимо пройти 4 двери. Будем обозначать открытую дверь знаком +, а закрытую —. Маршрут через четыре двери можно будет записать последовательностью четырех знаков, отражающих первоначальное положение дверей по маршруту, например, + — — +. Хоттабычу потребуется 1 волосок, если первым стоит минус, и еще по волоску на каждые два подряд стоящих одинаковых знака.

Если маршрут начинается знаком плюс, то, так как знаков плюс на маршруте не более трех, будет хотя бы одна перемена знака, т. е. не более двух пар одинаковых знаков, следовательно, он проходится с соблюдением условий, следовательно, и маршрут, оканчивающийся на знак плюс, можно пройти с соблюдением условий, но в обратном порядке. Если же маршрут начинается и оканчивается знаком минус, то из трех пар знаков в двух происходит перемена знака, следовательно, опять достаточно двух волосков.

90. Сначала покажем, что через некоторое время номер журнала станет больше года его выпуска. Действительно, через 3000 лет по условию выйдет не менее $\frac{3000}{3}\cdot5=$ $=5000$ номеров, а год будет $1964+3000=4964$, следовательно, год издания в это время будет меньше номера журнала.

Доказательство основного утверждения задачи проведем от противного. Предположим, что не существовало года, когда номер журнала совпадал с годом его выпуска. Пусть N-й год — первый из тех лет, в которых номер журнала стал больше года выпуска. В этом году должен выйти $(N+1)$-й номер журнала, ибо если бы он вышел



56

раньше, в году $N-k$, то N-й год не был бы первым годом, в котором номер стал больше года выпуска, поскольку это имело бы место и для года $N-k$. Позже N-го года журнал тоже не мог выйти, так как в противном случае в этом году вышли бы лишь журналы, имеющие номер, не больший N. Итак, в N-ом году вышел $(N+1)$-й номер журнала, N-й номер в этом году не мог выйти по предположению, следовательно, он вышел в некотором году $N-n$, но это означает, что в году $N-n$ номер журнала (N) больше года издания $(N-n)$. Таким образом, N-й год не является первым из тех, в которые номер журнала стал больше года выпуска. Получено противоречие с допущением, что не существует года, в котором номер журнала равен году издания, следовательно, такой год существует.

91. Заметим, что если записать внутри каждого белого треугольника число -1, а внутри каждого черного треугольника число $+1$, то условие задачи выразится так: произведение числа, стоящего в произвольном треугольнике, на числа, стоящие в соседних с ним треугольниках, равно $+1$.

Рассмотрим теперь последние четыре ряда треугольников. Они изображены на рис. 57. Цифры внутри треугольников указывают номер ряда.

Запишем для каждого треугольника третьего ряда соотношение задачи и перемножим эти соотношения. Если обозначить через Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 произведения всех чисел в треугольниках соответствующего ряда, то в результате получим следующее соотношение: $\Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^2 = +1$. Действительно, каждое число из четвертого ряда войдет в соотношение по два раза, а из второго и третьего по одному.

Аналогично запишем такое соотношение для треугольников второго ряда. Получим: $\Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1^2 / \Pi = 1$ (через Π обозначено произведение чисел в двух крайних треугольниках). Действительно, числа из треугольников второго и третьего ряда войдут по одному разу, а из первого — по два, за исключением чисел в двух крайних треугольниках, которые войдут по одному разу.

Перемножив полученные соотношения, в результате будем иметь: $\Pi_1^2 \cdot \Pi_2^2 \cdot \Pi_3^2 \cdot \Pi_4^2 = \Pi$. А так как все числа равны ± 1, то $\Pi = +1$. Следовательно, числа в крайних треугольниках имеют одинаковые знаки, то есть они были одинаково окрашены.

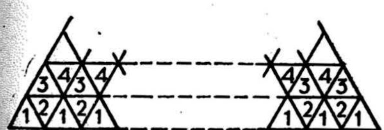
Утверждение доказано.

92. Достаточно разрезать сетку так, как показано на рис. 58, и превратить полученные прямоугольники растяжением по горизонтали в правильные шестиугольники (рис. 59).

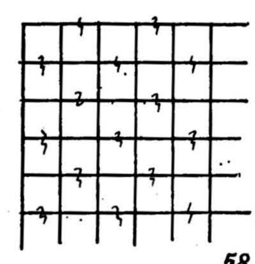
93. Прежде всего отметим, что указанное в задаче построение нужно делать лишь до тех пор, пока мы не попадем в вершину квадрата. Далее оно повторяется, и луч проходит по тем же отрезкам.

При дальнейшем решении этой задачи воспользуемся следующим методом: рассмотрим квадратную сетку на плоскости и каждый отрезок изобразим в своем квадрате так, чтобы в совокупности они образовывали луч, выходящий из точки A. Будем считать, что числа k и p взаимно просты. Наш луч пройдет по диагонали прямоугольника, составленного из линий сетки и имеющего одну из сторон равной k, а другую равной p (за единицу длины выбираем длину стороны квадрата). При этом он не проходит ни через один из узлов сетки (не считая концов этой диагонали). Между концами диагонали он пересекает $k-1$ горизонтальную прямую и $p-1$ вертикальную прямую. Таким образом, на этой диагонали возникают $p+k-2$ точки, которые разобьют ее на $p+k-1$ отрезков. Перенеся эти отрезки согласно правилу их построения на исходный квадрат, получим, что они разобьют его на $p+k$ частей. Мы предположили, что p и k взаимно просты, если же не так, то смысл задачи не изменится при замене p на $p:(p, k)$, а k на $k:(p, k)$, где (p, k) — наибольший общий делитель чисел p и k. Таким образом, в общем случае ответ будет таков: $\frac{p+k}{(p, k)}$.

94. Заметим, что если какие-нибудь две из данных окружностей имеют единственную общую точку, то через эту точку согласно условию обязаны проходить и все ос-



57



58

тальные окружности. В этом случае утверждение задачи очевидно.

Пусть любые окружности из данных имеют две точки пересечения. Выберем две произвольные окружности из данных O_1 и O_2 и обозначим их точки пересечения через A и B. По условию задачи каждая из оставшихся окружностей обязана проходить по крайней мере через одну из точек A и B. Если все они проходят через точку A (или все проходят через точку B), то утверждение задачи выполнено.

Пусть окружность O_3 проходит через точку A, но не проходит через точку B, а окружность O_4 проходит через точку B, но не проходит через A.

Одна из точек пересечения этих окружностей (обозначим ее через C) обязана лежать на окружности O_1, так как окружности O_1, O_3 и O_4 должны иметь общую точку, а другая (обозначим ее через D) — на окружности O_2, так как окружности O_2, O_3 и O_4 также обязаны иметь общую точку.

Осталось заметить, что любая пара точек из совокупности A, B, C, D является парой точек пересечения каких-нибудь двух из четырех выбранных нами окружностей, а любые три лежат на одной из этих окружностей. Поэтому любая пятая окружность из данной совокупности, с одной стороны, не может содержать более двух из точек A, B, C, D, а с другой стороны, должна содержать по одной точке из любого двухточечного подмножества этой совокупности. А это, очевидно, не может быть одновременно. Доказательство окончено.

95. Обозначим: n — число всех соревнований, $D = A+B+C$.

Имеем: $nD=22+9+9=40$. Значит, n есть делитель 40. Так как $A>B\geqslant C>0$, то E в соревновании на быстроту реакции получил не менее трех очков. Всего E набрал 9 очков. Поэтому $n\leqslant 7$. Таким образом, имеем три случая: $n=2$, $n=4$, $n=5$.

I случай ($n=2$) невозможен: очевидно, $A<9$, значит, $2A<18<22$.

II случай ($n=4$). Имеем: $D=10$. Поэтому $A\leqslant 7$. Но K набрал 22 очка. Следовательно, $A\geqslant 6$.

Пусть $A=7$. Тогда E набрал не менее 10 очков — противоречие.

Пусть $A=6$. Тогда $B\geqslant 3$ и K получил не более чем $6\cdot 3+3\cdot 1=21$ очко — противоречие.

Итак, II случай также невозможен.

III случай ($n=5$). В этом случае $D=8$. Поэтому $A\leqslant 5$.

С другой стороны, K получил 22 очка. Значит, $A\geqslant 5$.

Итак, $A=5$, $B=2$, $C=1$.

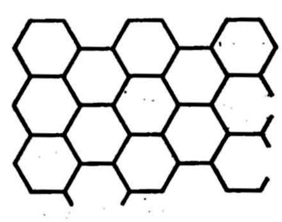
В соревновании на быстроту реакции E получил 5 очков; всего E получил 9 очков. Поэтому в каждом из остальных четырех соревнований E набрал по одному очку.

В соревновании на быстроту реакции K получил не более 2 очков; всего K набрал 22 очка. Поэтому в каждом из остальных четырех соревнований K набрал по 5 очков (а в соревновании на быстроту реакции — 2 очка).

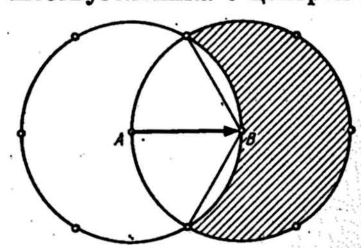
Ответ: вторым в соревновании на выносливость был $Ф$.

96. Заметим, во-первых, что в каждом убитом может оказаться не более шести пуль. Допустим обратное, т. е. что гангстер A оказался ближайшим более чем для шести других. Соединим A с его «убийцами» отрезками; так как этих отрезков не меньше семи, то хотя бы между одной парой соседних отрезков угол составит менее 60°. Пусть это будут отрезки, соединяющие A с B и C (рис. 60). Так как сумма углов в треугольнике ABC равна 180° и $\angle BAC<60°$, то хотя бы один из углов $\angle ABC$ и $\angle BCA$ больше 60° и, следовательно, больше $\angle BAC$; пусть для определенности это угол $\angle ABC$, тогда $|BC|<|AC|$ (против большего угла лежит большая сторона), что противоречит предположению о том, что A ближайший для C. Аналогичным образом видно, что в убитом может оказаться шесть пуль лишь в случае, если он находится в центре правильного шестиугольника, в вершинах которого расположены его «убийцы».

Предположим теперь, что в A оказалось шесть пуль. Так как A тоже стреляет, то он убивает одного из своих убийц (назовем его B). Так как «убийцы» A расположены в вершинах правильного шестиугольника с центром в



59



60

A, то, как легко видеть, для остальных (кроме A) «убийц» B остается место лишь внутри угла в 120° с вершиной в точке B вне круга радиуса $R = |AB|$ с центром в той же точке. В самом деле, если некий гангстер окажется внутри круга, то B убьет его, а не A, а если он окажется вне указанного угла за кругом, то, как легко видеть, B не будет ближайшим для него, так как C или D будет расположен ближе. В угле 120° могут расположиться не более трех «убийц» (рассуждения аналогичны доказательству первого замечания). Следовательно, B будет убит не более чем четырьмя пулями.

Таким образом, доказано, что для каждого гангстера, убитого шестью пулями, существует еще один гангстер, убитый не более чем четырьмя пулями.

Теперь заметим, что из того, что в каждом убитом не более шести пуль, а всего выпущено 50 пуль, следует, что убитых не менее 9. Но, как легко видеть, если убито ровно 9, то число убитых шестью пулями не менее пяти. Согласно доказанному выше отсюда следует, что должно быть по крайней мере еще пять убитых гангстеров. Это противоречит предположению о том, что убитых ровно девять. Следовательно, число убитых не менее 10.

Ситуация, в которой убитыми оказываются ровно 10 гангстеров, показана на рис. 61 (гангстеры разбиваются на пять групп, по 10 человек в каждой, таких, как на рисунке, и в каждой из групп убитыми оказываются двое).

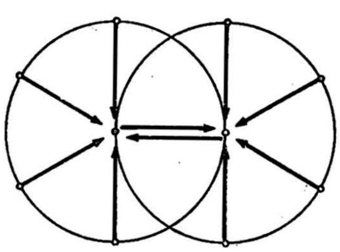
97. В первую минуту нужно играть на органе, не зажигая свечи. Тогда в течение второй минуты и Смех, и Пение будут молчать.

Затем необходимо прекратить игру на органе и зажечь свечу.

Тогда в замке установится тишина...

98. Такой способ существует, например, следующий.

а) Вначале руки вставляются в отверстия по какой-нибудь стороне квадрата и селедки устанавливаются в них головой вверх. На рис. 62, *а* это положение отмечено знаком плюс.



61

б) Далее руки вставляются в отверстия по одной из диагоналей квадрата, и селедки в них также устанавливаются головой вверх.

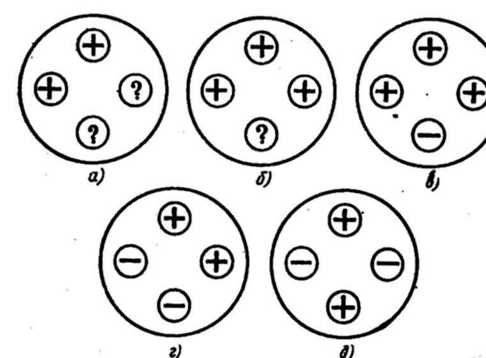
в) Мы получили расположение, изображенное на рис. 62,*б*. Если при этом дверь не открылась, значит, селедки расположены так, как на рис. 62,*в* (минус означает положение хвостом вверх).

г) Теперь просовываем руки по какой-либо диагонали. Если обнаружим при этом селедку головой вниз, то переворачиваем ее и тем самым открываем дверь. Если же обе окажутся головой вверх, то переворачиваем одну из них. В результате приходим к положению, изображенному на рис. 62,*г*.

д) Снова просовываем руки по одной из сторон квадрата. Если селедки оказываются одинаково направленными, то после их переворачивания дверь открывается, а если они были направлены противоположно, то после их переворачивания получим расположение, изображенное на рис. 62,*д*. Теперь, просунув руки по любой диагонали и перевернув селедки, открываем дверь.

99. Ответ: 3 маляра и 6 монтажников, оставшегося рабочего можно поставить либо маляром, либо монтажником, либо вообще не использовать — от этого время выполнения работы — 195 мин — не изменится. Это утверждение можно проверить непосредственно.

Покажем, что при других расстановках время работы больше. Действительно, если маляров меньше трех (один или два), то время на окраску не меньше 250 мин, а если монтажников меньше шести, то время на монтаж не меньше 200 мин.



62

100. Всякая точка M вне многоугольника покрыта нулем треугольников и нуль — четное число. Будем двигать точку M по плоскости. Посмотрим, как при этом будет изменяться четность числа покрывающих ее треугольников. Очевидно, что это число меняется лишь при пересечении стороны или диагонали многоугольника. Пусть по одну сторону от такого отрезка лежит n вершин многоугольника, тогда по другую будет лежать $1970-n$ вершин. Поэтому если вначале точку покрывало N треугольников, то после пересечения этого отрезка число станет равным $N+1970-2n$, следовательно, четность числа покрывающих точку треугольников не изменится. Утверждение доказано.

ГЛАВА 5

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

101. Пусть космонавты находятся около звезды X. Рассмотрим треугольник с вершинами, расположенными на звездах ГУ-50, X и произвольной звезде Y — рис. 63. Так как звезды X и Y удаляются от ГУ-50 со скоростями, пропорциональными их расстояниям от ГУ-50, отношение расстояний до звезд X и Y от ГУ-50 не изменяется со временем. Звезды X и Y движутся от ГУ-50 по прямым, поэтому не изменяется и угол α. Следовательно, треугольник ГУ-50—X—Y остается все время подобным самому себе. Отсюда следует, что звезды X и Y разбегаются со скоростями, пропорциональными расстоянию между ними. Так как в качестве Y можно взять любую из звезд скопления, мы должны заключить, что космонавты увидят из окрестности звезды X ту же самую картину, что и из окрестности звезды ГУ-50.

102. Разберем сначала вопрос об устойчивости ракеты в полете. Устойчивость ракеты обеспечивают стабилизаторы, расположенные в ее хвосте. Если ракета начинает отклоняться от направления своей скорости, т. е. если ось ракеты составит некоторый угол с направлением вектора скорости, то силы, действующие на стабилизаторы, создадут возвращающий момент. Ясно, что если ракету пустить хвостом вперед, то эти же моменты сил развернут ее. Но как раз хвостом вперед ракета и запускалась на испытаниях — ведь ее скорость складывается из скорости движения самолета и скорости ракеты относительно самолета.

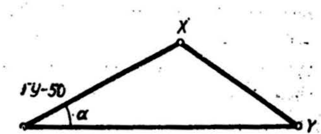
Если ракета еще не успела набрать достаточной (большей, чем у самолета) скорости к тому моменту, когда она покинула самолет, то она будет иметь скорость, направленную в сторону полета самолета. При этом она разворачивается, набирает скорость и догоняет самолет. Чтобы избавиться от этого неприятного эффекта, нужно увеличить ускорение ракеты или включать ее двигатель чуть раньше пуска. Следует помнить, что реактивная сила после пуска не сразу достигает максимальной величины.

103. Расширение оболочки происходит как за счет вещества, выброшенного из звезды, так и за счет межзвездного вещества, захватываемого оболочкой. Закон сохранения импульса для рассматриваемой системы записывается в таком виде:

$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho+M_0\right)v=M_0v_0$. Отсюда сразу получается, что при $v=v_0/n$ $R=\left[\frac{(n-1)M_0}{\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)}\right]^{1/3}$.

104. Обсуждение этой задачи будет состоять из нескольких этапов. Заметим сначала, что искомое число шаров не может быть равно $(N+1)$, так как в противном случае импульс системы имел бы положительную составляющую вдоль оси X, но полный импульс системы сохраняется и равен импульсу первоначально двигавшегося шара, т. е. направлен в отрицательном направлении оси X. Искомое число шаров не может равняться и N. Если бы это было так, то шар, который будет двигаться в отрицательном направлении оси X (чтобы компенсировать положительную X-вую составляющую импульса N шаров), имел бы скорость вдоль оси X большую, чем скорость первоначально (до всех столкновений) двигавшегося шара. Закон сохранения импульса мы должны были бы записать так: $mV_x-mV=P_x$, здесь V — скорость первоначально двигавшегося шара, V_x — X-вая составляющая скорости «компенсирующего» шара; P_x — X-вая компонента импульса N шаров. Но в этом случае оказалось бы, что кинетическая энергия «компенсирующего» шара больше кинетической энергии первоначально двигавшегося шара:

$$\frac{m}{2}(V_x^2+V_y^2)\geqslant\frac{m}{2}V_x^2>\frac{m}{2}V^2.$$



63

Тем самым мы доказали, что искомое число не равно N.

Докажем, что шары можно расставить на плоскости так, что после всех столкновений $(N-1)$ шар приобретет положительную скорость вдоль оси X. Для этого сделаем несколько простых утверждений:

У-1. Можно так поставить неподвижный шар на пути движущегося, что движущийся шар после удара отклонится на произвольный наперед заданный малый угол. Это ясно из того, что шар можно поставить так, что налетающий шар только немного его коснется, а значит, и отклонится несильно.

У-2. При столкновении двух одинаковых шаров, из которых один до столкновения покоился, шары разлетаются под углом 90°. Докажем это. Закон сохранения импульса эквивалентен условию: $\vec{V} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$, $\vec{V}$ — скорость налетающего шара, $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ — скорости шаров после столкновения. Векторы $\vec{V}$, $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ образуют треугольник, а из закона сохранения энергии вытекает: $V^2 = U_1^2 + U_2^2$. Другими словами, треугольник прямоугольный, а значит, векторы $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ перпендикулярны друг другу.

У-3. Неподвижный шар можно поставить так, что если налетающий шар имеет положительную составляющую скорости вдоль оси X, то после столкновения скорости обоих шаров будут иметь положительные составляющие вдоль этой же оси. Это утверждение является следствием $У-1$ и $У-2$. В самом деле, пусть скорость налетающего шара $\vec{V}$ направлена под углом $\alpha < 90°$ к оси X. В силу $У-1$ неподвижный шар можно поставить так, что скорость первого шара после столкновения $-\vec{U}_1$ будет составлять с $\vec{V}$ угол $\beta = \frac{1}{2}(90° - \alpha)$, а с осью X — угол $(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + 90°) < 90°$. Скорость $\vec{U}_2$ в силу $У-2$, будет направлена под углом 90° к скорости $\vec{U}_1$, а с осью X составит угол $\frac{1}{2}(90° - \alpha) < 90°$, то есть обе скорости $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ будут иметь положительные составляющие вдоль оси X.

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения. Перенумеруем шары, которые первоначально были неподвижными, номерами 1, 2, 3, 4,... Первоначально двигавшийся шар будем обозначать буквой О. Шар 1 поставим на пути шара О так, чтобы шар О после столкновения отклонился на 10°. Это можно сделать (У—1). Шар 1, в силу У—2, полетит тогда под углом 80° к отрицательному направлению оси X. На пути шара 1 поставим шар 2 так, чтобы шар 1 отклонился после столкновения с шаром 2 на угол 10°. Шар 2 полетит под углом 20° к положительному направлению оси X. Шар 2 имеет положительную составляющую скорости вдоль оси X, поэтому в силу У—3, шар 3 можно поставить так, чтобы после столкновения шаров 2 и 3 оба они имели скорости в положительном направлении оси X. Аналогично дальше — на пути шаров 2 и 3 поставим шары 4 и 5 соответственно так, чтобы все шары: 2, 3, 4 и 5 после столкновений продолжали двигаться в положительном направлении оси X. Эта процедура повторяется до полного исчерпания запаса шаров.

105. Будем для простоты считать взаимодействие нейтронов с атомами защитного слоя упругим центральным ударом, а сами атомы защитного слоя — первоначально неподвижными. Пусть масса нейтрона m_1, скорость его до соударения с атомом v_1, после соударения w_1; масса атома m_2, скорость атома после удара w_2. Законы сохранения энергии и импульса: $m_1v_1^2 = m_1w_1^2 + m_2w_2^2$; $m_1v_1 = m_1w_1 + m_2w_2$ приводят к равенству $w_1 = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$. В том случае, когда $m_1 \approx m_2$ (атом водорода) нейтрон после удара практически останавливается: $w_1 \approx 0$. В случае же $m_2 \gg m_1$ (свинец) нейтрон продолжает движение и, столкнувшись с ядрами еще несколько раз, может пройти через защитный слой. Следовательно, парафин и другие соединения, содержащие водородные атомы, лучше замедляют нейтроны, чем свинец.

106. Ясно, что массы шаров должны убывать, если смотреть с той стороны, с которой движется шар с импульсом KP. Удобнее, однако, смотреть с противоположной стороны. Перенумеруем шары с конца и рассмотрим столкновение шаров с номерами n и $(n-1)$ (от конца!). Напишем законы сохранения импульса и энергии для такого столкновения:

$$Pn = P + m_{n-1}v_{n-1};\quad \frac{(Pn)^2}{m_n} = \frac{P^2}{m_n} + m_{n-1}v_{n-1}^2.$$

Мы использовали здесь условие задачи — после удара шары обладают одинаковыми импульсами. Исключая импульс P из этих уравнений, получим: $(m_{n-1}/m_n) = [(n-1)/(n+1)]$. Значит, отношение масс, считая «с конца», равно

1:3:5:7:9:11; ....

Заметим, что ответ не зависит от начального импульса KP.

107. Первоначально бусинки покоились. После пережигания нити они стали ускоряться силой сжатой пружины, помещенной между ними. Трение отсутствует, поэтому единственная сила, изменяющая абсолютное значение скорости бусинок,— это сила упругости пружины. Под действием этой силы бусинки ускоряются таким образом, что в каждый момент времени их ускорения будут обратно пропорциональны их массам, так как на них действуют одинаковые по величине силы. Время, в течение которого бусинки ускоряются, для обеих бусинок одно и то же. Значит и их конечные скорости будут относиться как ускорения: $(v_1/v_2) = (m_2/m_1)$. Пути, пройденные бусинками до их первого соударения, будут пропорциональны их скоростям, а положение точки, в которой они столкнутся, будет определяться условием: $(s_1/s_2) = (m_2/m_1)$. Мы считаем при этом, что пружинка «выкинулась» после того, как бусинки разошлись из начальной точки. При соударении справедлив закон сохранения импульса:

$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' - m_2v_2'$. Но $m_1v_1 = m_2v_2$,

поэтому $(v_1'/v_2') = (m_2/m_1)$. Кроме того, скорости изменят знаки — бусинки не могут пройти одна сквозь другую и начнут после столкновения двигаться в обратном направлении. После первого столкновения бусинки опять пройдут до следующего пути, обратно пропорциональные их массам, то есть те же самые пути s_1 и s_2. Во второй раз они столкнутся в той точке, откуда они начинали свое движение. Далее все будет повторяться — все четные столкновения будут происходить в начальной точке, а все нечетные — в той же точке, что и первое. Ситуация не изменится, если пружинку считать скрепленной с одной из бусинок, но при этом имеющей массу, много меньшую массы бусинки. Если это так, то все четные столкновения будут происходить через пружинку, а все нечетные — при непосредственном воздействии бусинок друг на друга.

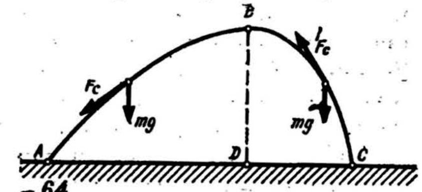
108. Центр тяжести системы не должен перемещаться в горизонтальном направлении — в этом направлении никакие силы на систему в целом не действуют (трения

нет). Пусть максимальный угол, на который отклоняется маятник, равен φ_0. Нетрудно проверить, что амплитуда вертикальных колебаний центра тяжести системы равна $\frac{l}{2}(1-\cos\varphi_0) \approx \frac{l}{2}\cdot\frac{\varphi_0^2}{2}$. Мы считаем колебания малыми; это значит, что угол φ_0 мал, и в линейном по углу приближении центр тяжести тем самым можно считать неподвижным. Закрепим нить в точке, в которой находится центр тяжести, то есть в нашем приближении в середине ее. Можно принять, что период колебаний от закрепления нити не изменится — ведь закрепленная точка есть центр тяжести, а мы уже договорились, что он неподвижен. Но теперь нижняя часть системы превратилась в математический маятник с длиной $l/2$ и периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/2g}$. Это же есть период колебаний всей системы.

109. Траектория тела, брошенного под углом к горизонту, отличается от параболы, если учесть сопротивление воздуха (рис. 64). На восходящем участке траектории вертикальная составляющая силы сопротивления воздуха F_c направлена в ту же сторону, что и сила тяжести mg, на нисходящем участке вертикальная составляющая силы сопротивления и сила тяжести направлены в противоположные стороны. Это означает, что в любой точке восходящего участка траектории вертикальная сила по величине больше силы тяжести, а на нисходящем участке — меньше. Вертикальная составляющая ускорения на любой высоте на восходящем участке больше, чем вертикальная составляющая ускорения на той же высоте на нисходящем участке. В верхней точке траектории вертикальная скорость равна нулю. Время подъема будет меньше времени спуска. Проанализируйте (не прибегая к точному вычислению траектории), какой из отрезков: AD или DC больше и почему?

110. Из закона сохранения энергии сразу получается: $h = \frac{MgH}{F - Mg}$.

111. Будем считать, что второй автомобиль едет с выключенным мотором, а силы сопротивления движению



64

складываются. Пусть мощность каждого из автомобилей есть $P_{авт}$, тогда
$F_{сопр.\,1} \cdot v_1 = F_{сопр.\,2} \cdot v_2 = P_{авт.}$, а для интересующего нас случая

$$P_{авт} = (F_{сопр.\,1} + F_{сопр.\,2}) \cdot v_x = \left(\frac{P_{авт}}{v_1} + \frac{P_{авт}}{v_2}\right) v_x.$$

Искомая скорость $v_x = \dfrac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$.

112. Разность давлений численно равна разности центростремительных сил, действующих на автомобиль в обоих случаях. Эта разность есть

$$m \cdot \frac{(v+\omega R)^2}{R} - m\,\frac{(v-\omega R)^2}{R} = 4mv\omega.$$

Здесь $\omega = 2\pi/T$, T — период обращения Земли вокруг оси, R — радиус Земли. Ответ на поставленный вопрос от R не зависит.

113. Сильнее всего будет разрушаться участок сопряжения полуокружностей, так как разные части его испытывают нагрузки в разных направлениях. Для предотвращения такого эффекта реальный железнодорожный путь устроен так, что резкие изменения радиуса кривизны пути отсутствуют. Это достигается включением на переходах участков пути переменной кривизны.

114. Не может. В самом деле, рассмотрим моменты сил, действующих на ящик. Очень удобно вычислять эти моменты относительно точки О (рис. 65) — точки веревки над центром тяжести ящика. Сила натяжения веревки и сила тяжести не создают моментов относительно этой точки. Стенка гладкая, силы реакции стенки перпендикулярны к ней. Суммарный момент этих сил закручивает ящик против часовой стрелки. Этот момент ничем не компенсируется, значит равновесие невозможно.

115. Так как стержень находится в положении безразличного равновесия, высота центра тяжести над землей остается постоянной. Если ввести оси координат, как показано на рис. 66, то ордината центра тяжести равна a (это ясно из рассмотрения крайнего положения стержня, когда он прислонен к вертикальной стенке). Этот факт выражается формулой: $y + \dfrac{y_1 - y}{2} = \dfrac{y_1 + y}{2} = a$.

Напишем еще условие того, что длина стержня равна $2a$: $x^2 + (y_1 - y)^2 = 4a^2$. Из этих двух соотношений получается: $x^2 + 4(a-y)^2 = 4a^2$. Это и есть уравнение профиля.

116. Пусть мы потянули n-ую тетрадь считая сверху. Очевидно, что все тетради, лежащие на ней, вместе с ней и поедут. Пусть k — коэффициент трения между тетрадями. Тогда на $(n+1)$-ую тетрадь со стороны n-ой действует сила трения, не превышающая knP, P — вес одной тетради. Эта сила меньше предельной силы трения между $(n+1)$-ой и $(n+2)$-ой тетрадями, равной $k(n+1)P$, $(n+2)$-ой и $(n+3)$-ей — $k(n+2)P$ и т. д. Самая нижняя тетрадь приклеена к столу. Значит силы, действующей на тетради со стороны n-ой тетрадки, не хватит для того, чтобы сдвинуть какую-нибудь тетрадь, лежащую ниже ее. Все тетради ниже n-ой останутся, таким образом, на месте, а все выше — поедут.

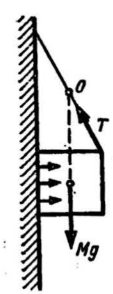
117. Рассмотрим вначале случай, когда тележку двигают вправо,— рис. 67. На этом рисунке изображены силы, действующие на стержень. Запишем условие равновесия стержня — уравнение моментов сил относительно точки A (эту точку мы выбираем, чтобы исключить из уравнения силы, действующие на стержень в шарнире А):

$$(F_{тр.}\cos\alpha + N\sin\alpha)\,l - \frac{P\sin\alpha}{2}\,l = 0.$$

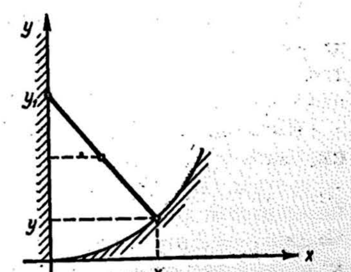
Когда мы прилагаем минимальную силу, тележка еще не движется, но проскальзывание вот-вот начнется. Это значит, что сила трения равна предельному значению: $F_{тр} = F_{тр.о} = kN$. Из написанных уравнений найдем силу трения:

$$F_{тр.\,о} = \frac{kP\sin\alpha}{2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}.$$

Ясно, что тележку можно сдвинуть силой большей, чем $F_{тр.\,о}$. Если тележку тянуть влево, то изменится только направление силы трения. В этом случае аналогично



65



66

предыдущему получим: $F > F_{\text{тр. 0}} = \dfrac{kP \sin\alpha}{2(\sin\alpha - k\cos\alpha)}$. Интересно, что при $\sin\alpha < k\cos\alpha$, то есть для $k > \operatorname{tg}\alpha$ тележку сдвинуть с места нельзя — происходит заклинивание.

118. На рис. 68 — N_1 и N_2 — силы реакции стенок. Уравнения равновесия маховика в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси есть:

$$N_1\sin\alpha + N_2\sin\alpha + kN_1\cos\alpha - kN_2\cos\alpha = Mg;$$
$$kN_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + kN_2\sin\alpha = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$N_1 = Mg\frac{\cos\alpha + k\sin\alpha}{\sin 2\alpha\,(1+k^2)};\quad N_2 = Mg\frac{\cos\alpha - k\sin\alpha}{\sin 2\alpha\,(1+k^2)}.$$

Полные силы, действующие со стороны стенок на маховик:

$$R_1 = N_1\sqrt{1+k^2} = Mg\frac{\cos\alpha + k\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2}\,\sin 2\alpha};$$
$$R_2 = N_2\sqrt{1+k^2} = Mg\frac{\cos\alpha - k\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2}\,\sin 2\alpha}.$$

С такими же по величине силами маховик действует на стенки. Направление сил, действующих на стенки, противоположно векторам $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, указанным на рисунке. Приведенное решение справедливо, если $\cos\alpha - k\sin\alpha > 0$, то есть $k < \operatorname{ctg}\alpha$. Если же $k > \operatorname{ctg}\alpha$, маховик поедет вверх по левой стенке.

119. Скорость груза максимальна в тот момент, когда $Mg = kx_0$, x_0 — растяжение пружины. Действительно, выше этой точки на груз действует сила, направленная вниз, и он ускоряется, а ниже — сила, направлена вверх, то есть движение груза замедляется. Скорость груза найдем из закона сохранения энергии: $\frac{1}{2}Mv^2_{\text{макс}} + \frac{1}{2}kx_0^2 = Mgx_0$.

Учитывая условие, написанное выше, получим:

$$v_{\text{макс.}} = g\sqrt{M/k}.$$

120. По условию перпендикулярная к поверхности льда скорость $v_\perp$ до и после удара постоянна и равна $v_\perp = v_0\sin\alpha$. Пусть удар длится время τ, тогда средняя сила нормальной реакции определяется из уравнения: $N_{\text{ср}}\tau = 2mv_\perp = 2mv_0\sin\alpha$. Так как коэффициент трения равен k, потеря горизонтального импульса $\Delta p_{\text{гор}} = F_{\text{тр.}}\tau = Nk\tau = 2mv_0 k\sin\alpha$. Мы считаем, что шайба проскальзывает, т. е.

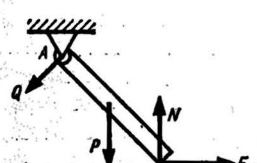
горизонтальная скорость. Если $mv_0\cos\alpha \leqslant n\cdot 2mv_0k\sin\alpha$, то шайба «прыгает» вертикально и $v = v_\perp = v_0\sin\alpha$. Если же $mv_0\cos\alpha > n\cdot 2mv_0k\sin\alpha$, то горизонтальная скорость $v_{\text{гор.}} = v_0\cos\alpha - 2v_0nk\sin\alpha$. Полная скорость

$$v_{\text{полн.}} = \sqrt{v^2_{\text{гор.}} + v^2_\perp} =$$
$$= \sqrt{v_0^2 + 4v_0^2n^2k^2\sin^2\alpha - 4v_0^2nk\sin\alpha\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{v_\perp}{v_{\text{гор.}}}.$$

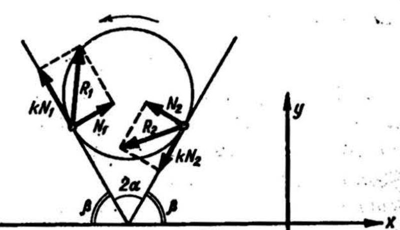
121. Скорость гантели в момент удара $v = \sqrt{2gH}$. После удара левый шар изменит направление скорости на противоположное. Удар происходит очень быстро, так что правый шар не успевает за время удара изменить свою скорость. Гантеля будет после удара вращаться. Угловая скорость вращения равна $\omega = 2v/l$. Время T полупериода вращения равно $\frac{\pi}{\omega}$. За это время гантеля пролетит $h = gT^2/2$, отсюда

$$h = \frac{\pi^2}{16}\,\frac{l^2}{H}.$$

122. Пусть энергия второго шарика перед первым ударом о плоскость равнялась E. Тогда после этого удара энергия первого шарика $\frac{1}{2}\,\frac{m}{n}v_1^2 = \frac{E}{k}$, а энергия второго шарика $\frac{1}{2}mv_2^2 = E\left(1 - \frac{1}{k}\right)$; v_1 и v_2 — скорости соответственно первого и второго шариков, с которыми они взлетают с плоскости после первого падения на нее второго шарика. Из написанных равенств следует, что $(v_1^2/v_2^2) = n/(k-1)$. Между последующими ударами первого шарика о плоскость проходит время $t_1 = 2v_1/g$, а второго — $t_2 = 2v_2/g$. Пусть шарики встретятся на плоскости при



67



68

p-ом ударе первого и $(q+1)$-ом ударе второго. Тогда $pt_1 = qt_2$, следовательно, $(v_1/v_2) = (q/p)$. Но $(v_1/v_2)^2 = n/(k-1)$, а значит, должно быть $(q/p) = \sqrt{n/(k-1)}$, другими словами, число $\sqrt{n/(k-1)}$ должно быть рациональным.

123. Ясно, что арбуз будет двигаться с прежней скоростью (трения нет). Поэтому при торможении он ударится о переднюю стенку. С легким шариком дело сложнее. Рассмотрим такой же объем воздуха. Такой «шар» из воздуха будет тормозиться вместе с фургоном (воздух не перемешивается). Это значит, что на «шар» из воздуха будет действовать сила торможения со стороны окружающего воздуха. Эта сила обусловлена не трением, а создается разностью давлений — воздух уплотняется при торможении. Эта сила обеспечивает воздуху ускорение, равное ускорению фургона. На шар с водородом действует такая же сила, но масса его меньше «шара» из воздуха, значит ускорение его назад будет больше. В результате шарик, наполненный водородом, отклонится назад.

124. Рассмотрим уже установившийся процесс. Пусть искомая скорость равна v. Тогда за отрезок времени Δt с верхней полки поднимется и приобретет скорость v кусок веревки, длина которого $\Delta l = v \cdot \Delta t$. Обозначим массу единицы длины веревки буквой ρ, тогда масса куска с длиной Δl есть $\Delta m = \rho \Delta l = \rho v \Delta t$, а приобретенный этим куском импульс $\Delta p = v \Delta m = \rho v^2 \Delta t$. Этот импульс приобретается под действием силы $F = \rho g H$, так как правая часть веревки тяжелее левой как раз на эту величину. По второму закону Ньютона $F \cdot \Delta t = \Delta p$, или $\rho g H \cdot \Delta t = \rho v^2 \Delta t$, откуда $v = \sqrt{gH}$. При движении веревки выделяется тепло (в частности, при ударе внизу), поэтому пользоваться «энергетическими» соображениями без учета выделяющегося тепла при решении задачи нельзя.

125. Минимально допустимая продолжительность суток $T_{мин}$ соответствует максимально возможной угловой скорости вращения планеты вокруг собственной оси — $\omega_{макс}$. Для того, чтобы вещество с поверхности планеты не улетало в космос, нужно, чтобы скорости всех точек поверхности были бы меньше первой космической скорости: $v^2 < gR$. Для точек на экваторе планеты скорость $v = \omega R$, значит должно выполняться неравенство: $\omega^2 R < g$. Отсюда ясно, что $\omega^2_{макс} = g/R$. В свою очередь, $g = \gamma M/R^2$, поэтому $\omega^2_{макс} = \gamma M/R^3$. Оцените теперь сами, чему равны $\omega_{макс}$ и $T_{мин}$ для планеты с массой и радиусом такими же, как у Земли: $M_з \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, $R_з \approx 6400$ км. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ дин $\cdot$ см^2/г^2.

126. Для того, чтобы могла существовать полностью «твердотельная» планета, нужно, чтобы гравитационное давление в центре ее (там оно максимально) «не раздавило» бы твердое тело. Другими словами, гравитационное давление не должно превышать модуль Юнга. Модуль Юнга меняется, конечно, по мере продвижения в глубь планеты. Однако для не слишком больших планет эти изменения не очень велики — **по порядку величины** модуль Юнга в глубине примерно таков же, как и вблизи поверхности. Например, для кристаллических планет с массой и радиусом такими же, как у Земли, модуль Юнга меняется всего в несколько раз и во всяком случае не на порядок. Если бы плотность вещества была постоянна вдоль радиуса планеты, модуль Юнга вообще не менялся бы. (Заметьте, кстати, что плотность у поверхности и в центре Земли отличается примерно в три раза, но не на порядок!) Гравитационное давление в центре планеты можно грубо оценить, используя соображения размерности: $p_c \sim (\gamma M^2/R^4)$, γ — гравитационная постоянная, R — радиус планеты. Можно посмотреть на эту формулу и с другой точки зрения: величина $\gamma M^2/R$ есть гравитационная энергия планеты, поделив ее на объем планеты $\sim R^3$, мы получаем плотность гравитационной энергии $\sim \gamma M^2/R^4$. Размерность плотности энергии такова же, как и размерность давления. Поэтому можно «надеяться», что они просто пропорциональны друг другу. Разумеется, мы не можем с помощью таких рассуждений найти численные коэффициенты в написанных формулах. Можно допустить, что **для грубых оценок** мы можем «забыть» о численных коэффициентах и считать, что **по порядку величины** давление в центре равно $\gamma M^2/R^4$. Другими словами, мы считаем недостающие численные коэффициенты числами порядка единицы. При этом предположении мы можем написать **приближенное** неравенство, устанавливающее связь массы и радиуса для полностью «твердотельной» планеты: $E \gtrsim (\gamma M^2/R^4)$, или $R^4 \gtrsim (\gamma M^2/E)$. **По порядку величины** минимальный радиус есть $R_{мин} \sim (\gamma M^2/E)^{1/4}$. Разумеется, мы должны предположить еще, что планета холодная — температура ее недр должна быть много меньше характерной темпера-

туры плавления вещества, из которого эта планета построена. Понять связь плотности энергии и давления помогает еще такая аналогия. Пусть у нас есть плоский конденсатор, пусть он заряжен и отсоединен от батареи. Можно вычислить силу притяжения пластин друг к другу и поделить ее на площадь пластин. При этом получится характерное давление электростатических сил на пластины. С другой стороны, можно вычислить энергию, заключенную в конденсаторе, и поделить ее на объем конденсатора. Мы предоставляем читателям убедиться самим в том, что «электростатическое» давление и плотность электростатической энергии в точности равны друг другу. Быть может, после этого приведенные выше рассуждения покажутся более естественными. Полученный выше результат следует, конечно, и из точного расчета.

127. В верхнем положении на точку A действует сила притяжения со стороны заряда C (рис. 69). Видно, что эта сила создает момент относительно центра тяжести системы, закручивающий ее против часовой стрелки. Момент сил сменит направление после того, как система пройдет положение $A'B'$. После этого она станет вращаться по часовой стрелке, катясь одновременно вдоль наклонной плоскости.

128. Рассмотрим поперечный и продольный разрезы сосиски (рис. 70). Предположим, что давление внутри сосиски равно p. Сила, разрывающая сосиску «поперек», пусть равна $F_1 = pS = p\frac{\pi d^2}{4}$, d — диаметр сосиски. На единицу длины оболочки тогда приходится сила: $\frac{F_1}{\pi d} = \frac{pd}{4}$. Для продольного разреза полная сила есть $F_2 = pdl$, а на единицу длины приходится $\frac{F_2}{2l+2d} = \frac{pd}{2(1+d/l)}$. Учтем теперь, что $(d/l) \ll 1$, тогда ясно, что «вдоль» сосиска порвется раньше, чем лопнет «поперек»: $\frac{pd}{2} > \frac{pd}{4}$. Мы не учитываем здесь, что оболочка имеет различную прочность в разных направлениях. Поэтому полученный результат имеет, конечно, только качественный смысл.

129. Самое выгодное для змеи, раз уж ей придется завязывать узел, это завязать его на хвосте, а затем протянуть до середины равноускоренно, при этом будет перетягиваться минимальная масса (рис. 71). Оценим массу узла, считая его тором. Средний радиус тора $R \approx d$, тогда

его масса примерно равна $m \approx \frac{M}{L} 2\pi d$. Сила F может сообщить узлу ускорение $a = (F/m) = \frac{FL}{2\pi dM}$. Время t можно найти из уравнения $at^2/2 = L/2$ или $t = \sqrt{\frac{L}{a}} = \sqrt{\frac{2\pi Md}{F}}$. Интересно, что в ответ не вошла длина змеи (только косвенно — через массу).

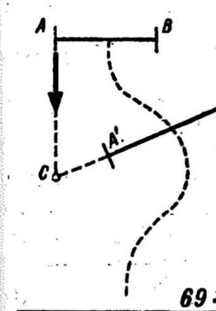
130. Пусть жук прыгает, имея горизонтальную скорость v_1 (относительно стола) и вертикальную скорость v_2. Обозначим скорость соломинки через u. Эта скорость направлена против v_1. Из закона сохранения импульса в горизонтальном направлении следует: $mu = Mv_1$. Значит, относительно соломинки жук движется по горизонтали со скоростью $v_1 + u = v_1\left(1 + \frac{M}{m}\right)$. Время полета определяется вертикальной скоростью жука: $t = (2v_2/g)$. За это время жук должен попасть на другой конец соломинки. Значит,

$$(v_1 + u)\,t = v_1 v_2\,\frac{2\left(1+\frac{M}{m}\right)}{g} = l, \text{ то есть } v_1 v_2 = \frac{gl}{2(1+M/m)}.$$

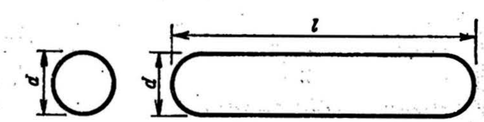
Нас интересует минимальная скорость, то есть минимум выражения $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, причем задано произведение $v_1 v_2$. Ясно, что минимальное значение $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ достигается при $v_1 = v_2$. Тогда

$$v_{\text{мин}} = v_1\sqrt{2} = \sqrt{\frac{gl}{(1+M/m)}}.$$

131. Пусть толщина слоя воды x. Тогда давление в ртути на уровне нижней грани кубика: $p = \rho_0 gx + \rho_2 g(a - x)$.



69



70

По вертикали на кубик действуют сила тяжести и сила давления ртути снизу (рис. 72). Условие равенства сил: $\rho_1 g a^3 = p a^2$, или $\rho_0 g x + \rho_2 g (a - x) = \rho_1 g a$. Отсюда $x = a \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_0}$. Подумайте, изменится ли ответ, если над водой есть воздух или пары.

132. Натяжение веревки равно разности выталкивающей силы, действующей на привязанный к ней предмет, и веса этого предмета. В первом случае натяжение равно:

$$F_1 = g\,[(\rho_в - \rho_д)\, V_д + (\rho_в - \rho_л)\, V_л],$$

во втором случае, когда лед растаял:

$$F_2 = g\,(\rho_в - \rho_д)\, V_д.$$

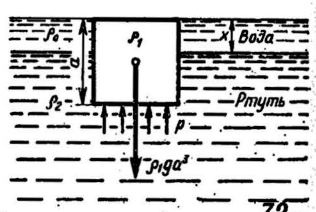
Здесь $\rho_в$ — плотность воды, $\rho_л$ — плотность льда, $\rho_д$ — плотность дерева, $V_д$ — объем дерева, $V_л$ — объем льда. Так как $\rho_в > \rho_л$, натяжение веревки уменьшается. Мы предполагаем здесь, что деревянный брусок весь остается в воде после таяния льда.

133. Размерность величины σ в системе СГС есть *эрг/см*^{2} = *дин/см* = *г/сек*^{2}. Из соображений размерности получается однозначная формула: $T \sim (\rho/\sigma)^{1/2} R^{3/2}$. Метод размерностей часто помогает находить качественные (а иногда и количественные) соотношения между физическими величинами (см. дальше задачи 142, 185, 189, 190, 211).

134. Сила сопротивления F направлена против движения. Призма движется вдоль стенки, значит и сила сопротивления направлена вдоль стенки. Выталкивается призма равнодействующей архимедовой силы и силы тяжести, эта равнодействующая имеет вдоль стенки составляющую $(\rho_1 - \rho) g V \sin\alpha$. Движение происходит с постоянной скоростью, значит

$$F = (\rho_1 - \rho)\; g V \sin\alpha.$$

71

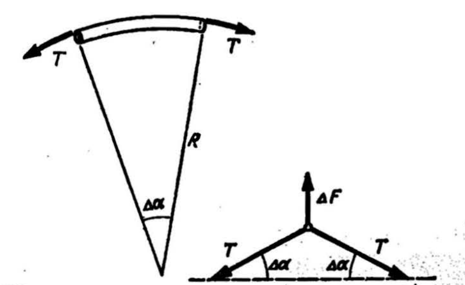


72

135. Это зависит от сжимаемости тела. Если оно сжимается под давлением меньше, чем жидкость (газ), то при некотором давлении его удельный вес станет меньше, чем у жидкости (газа), и тело всплывет. Большинство жидкостей очень мало сжимается под давлением, поэтому такой опыт лучше проделывать с газом. Рассуждения эти относятся к случаю, когда тело не является «лежачим камнем» (под который, как известно, вода не течет). Если тело прижато к дну сосуда и под ним нет жидкости (или газа) — оно не всплывет.

136. Выделим малый элемент трубки длиной $R \cdot \Delta\alpha$ (рис. 73). Деформированная стенка трубки сообщает жидкости, протекающей по этому элементу, ускорение $a = (v^2/R)$. По третьему закону Ньютона на элемент со стороны жидкости будет действовать сила $\Delta F = \rho \cdot \pi r^2 \cdot R\Delta\alpha \cdot \dfrac{v^2}{R}$; ρ — плотность жидкости. Сила ΔF уравновешивается силами натяжения кольца: $\Delta F = 2T \sin\dfrac{\Delta\alpha}{2} \approx T \cdot \Delta\alpha$. Отсюда $T \approx \rho \pi r^2 v^2$.

137. Пусть угловая скорость вращения колеса равна ω, S — площадь сечения струи, ρ — плотность воды. При попадании струи на лопасть скорость воды меняется от v до скорости лопасти ωR. За время Δt вода теряет импульс $F \cdot \Delta t = \rho S v (v - \omega R) \cdot \Delta t$, F — сила, с которой струя давит на лопасть. За время Δt место, на которое попадает струя, проходит путь $\omega R \cdot \Delta t$. Полезная работа равна $\Delta A = \rho S v (v - \omega R)\, \omega R \Delta t$. Подводимая к колесу энергия (энергия струи) от ω не зависит. Следовательно, КПД будет максимальным при максимальной ΔA. Максимум выражения $\omega R (v - \omega R)$ достигается при $\omega R = (v/2)$. Это решение



73

справедливо, конечно, только если пренебречь нагреванием воды при ударе и разбрызгиванием струи.

138. Будем рассуждать так. Сравним силы, действующие на каждое тело, с силами, действующими на такой же по форме объем воды. Сразу ясно, что для тела, плотность которого равна плотности воды, любое положение будет положением безразличного равновесия (так же, как для такого же объема воды). Для кусочка свинца: со стороны окружающей его воды на него действует такая же сила, как и на такой же объем воды. Эта сила сообщила бы объему воды центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 R$, R — расстояние от центра, ω — угловая скорость (выделенный объем воды вращается без перемешивания с остальной водой в сосуде). Однако для свинца, масса которого больше, чем у такого же объема воды, эта сила не обеспечит такого же ускорения, значит кусочек свинца будет отброшен на край сосуда. Аналогичные рассуждения для пробки показывают, что она будет вращаться около оси. Само собой разумеется, что свинец будет находиться у дна сосуда, а пробка — на поверхности воды.

139. Потенциальная энергия поднятой воды равна только части работы, совершенной силами атмосферного давления. Оставшаяся часть работы переходит в тепло. Это тепло в рассматриваемых случаях различно. Поэтому никакого противоречия с законом сохранения энергии нет.

140. Когда кран быстро закрывается, по воде в трубке бежит волна сжатия, останавливающая воду. Скорость этой волны равна скорости звука в воде c. Пусть S — сечение трубки, тогда за время Δt останавливается объем воды, равный $cS\Delta t$. Воде при этом передается импульс, равный по абсолютной величине импульсу этого объема до остановки, то есть $\Delta p = cS\Delta t\rho v$. Здесь ρ — плотность воды, а v — скорость ее течения до остановки. Сила, действующая на кран, есть, очевидно, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = Sc\rho v$, а давление $\frac{F}{S} = c\rho v$. Заметьте еще, что скорость вытекания воды при открытом кране v может быть связана с высотой столба жидкости в баке.

141. Прежде всего получим соотношение, связывающее скорость бегущей волны с глубиной бассейна. Нам помогут соображения размерности. Пользуясь ими, легко получить формулу $v \sim \sqrt{gh}$, здесь h — средняя высота воды

в бассейне, а g — ускорение силы тяжести. Может, правда, возникнуть вопрос, не должна ли скорость зависеть от длины волны λ? Ведь рассуждая совсем формально, мы могли бы получить и формулу $v \sim \sqrt{g\lambda}$ (см., например, статью А. Л. Стасенко «Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха», журнал «Квант», 1972 г., № 9). Выбор между этими двумя формулами можно сделать, исходя из такого рассуждения. Попытаемся понять — какой характерный размер в задаче должен играть главную роль. Если бы бассейн был очень большим в длину и ширину и очень глубоким, а длина волны λ была бы наименьшим линейным размером в задаче, то очевидно, что ею все бы и определялось. Волна бы ничего «не знала» ни о границах бассейна, ни о его глубине; она «помнила» бы только о своей собственной длине. В этом случае была бы правильна формула $v \sim \sqrt{g\lambda}$. Пусть теперь бассейн опять имеет очень большие размеры вдаль и вширь (по сравнению с длиной волны), но малую глубину: $h \ll \lambda$. В этом случае разумно считать, что волна должна в первую очередь «чувствовать» глубину бассейна. Это становится совсем понятным, если рассмотреть такую предельную ситуацию. Пусть в бассейне совсем мало воды, тогда в гребнях волны воды относительно «много», а во впадинах — «почти нет». Период волны соответствует подъему, опусканию и снова подъему гребня в каждой точке. Силой, заставляющей гребень опускаться, является сила тяжести, а период и скорость частиц в волне зависят от высоты воды в гребне, которую для нашего предельного случая можно считать $\sim h$. Поэтому при $\lambda \gg h$ естественно считать правильной формулу $v \sim \sqrt{gh}$. Эти рассуждения носят, конечно, только качественный характер, но аккуратный расчет и эксперименты их полностью подтверждают. Отметим еще, что скорость v — есть скорость движения волны **вдоль поверхности воды.**

Рассмотрим теперь морскую волну. Если размеры моря «вдаль и вширь» считать бесконечными, то от них скорость волны зависеть не должна. Морские волны имеют обычно очень большую длину, во всяком случае много большую, чем глубины вблизи берегов или отмелей. Поэтому скорость волн вблизи берега или отмели описывается формулой $v \sim \sqrt{gh}$. Высота гребней может быть вполне сравнима с глубиной, в этом случае «скорость гребня» оказывается больше «скорости впадины» (глубина под гребнем заметно больше!). В результате волна «опрокидывается» на мелких местах. Ясно, что различие в скоростях гребня и впадины на глубоких местах меньше, чем на мелких.

142. Считаем, что скорость жидкости на стенках трубы равна нулю. На оси трубы скорость v должна, очевидно, зависеть от отношения $(\Delta p/l)$. Двумя другими параметрами служат η и R. Размерность η просто найти, если вспомнить, например, формулу Стокса для силы сопротивления движению шарика в вязкой жидкости: $F=6\pi\eta r v$; r — *см*, v — *см/сек*. Искомое соотношение для нашей задачи таково: $v \sim \frac{\Delta p}{l}\cdot\frac{R^2}{\eta}$. Еще раз подчеркнем, что скорость жидкости у стенок трубы мы считаем равной нулю. В чем смысл этого условия?

143. Учтем сначала, что из-за того, что масса шарика много меньше массы поршня, а его скорость больше скорости поршня, можно приближенно рассматривать столкновение шарика с поршнем как упругий удар шарика о неподвижную стенку. В этом случае изменение импульса шарика равно $2mu$. Пусть непосредственно перед таким столкновением поршень двигался вниз со скоростью v, тогда импульс поршня перед ударом есть Mv, а для того, чтобы после удара поршень поехал вверх с той же скоростью v, его импульс должен стать $-Mv$. Изменение импульса поршня есть $2Mv$, и именно в этом случае поршень будет ползать вверх-вниз с одинаковой амплитудой, то есть **в среднем** оставаться на одной и той же высоте. Для этого при каждом столкновении должно быть, очевидно, выполнено условие: $Mv=mu$. Время подъема поршня после удара равно v/g, столько же времени он спускается назад, значит, если столкновения все время происходят на одной и той же высоте, то между ними проходит время $2v/g$. Так как мы пренебрегаем влиянием силы тяжести на движение шарика, можно считать, что шарик за это же время проходит путь до дна цилиндра и обратно, чтобы «успеть» столкнуться с поршнем на заданной высоте. Условие это записывается в виде $(2v/g)=(2l/u)$, или $uv=lg$. Определим еще среднюю силу, действующую на поршень. Она равна, конечно, изменению импульса поршня, поделенному на время между столкновениями: $\frac{2Mv}{2v}g=Mg$. Пусть теперь S — площадь сечения поршня, а $Sl=V$ — объем под поршнем. Тогда можно записать такие равенства:

$$mu^2=Mvu=Mgl=\frac{Mg}{S}V=pV;\ p=\frac{Mg}{S}.$$

По существу, мы получили, тем самым, «уравнение состояния» одномерного газа, состоящего из одной частицы.

144. Так как средние значения энергий молекул зависят только от температуры, мы должны считать, что $\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_2v_2^2$ (v_1, v_2 означают средние значения). Отсюда следует, что $(v_1^2/v_2^2)=(m_2/m_1)$. Масса молекулы кислорода в 8 раз больше массы молекулы гелия, значит скорость молекул гелия в среднем в $2\sqrt{2}$ раз больше скоростей молекул кислорода. Количество тех и других молекул в начальный момент в сосуде одинаково. Поэтому молекулы гелия будут в $2\sqrt{2}$ раз чаще сталкиваться со стенками сосуда. Следовательно, и в отверстие молекулы гелия вначале будут попадать в $2\sqrt{2}$ раз чаще, чем молекулы кислорода. Ясно также, что по мере изменения относительной концентрации молекул гелия и кислорода в сосуде доля молекул гелия в выходящем из отверстия газе будет уменьшаться.

145. Разность $Q-Q_1$ представляет собой вес откачанного газа, так как вес сосуда и Архимедова сила остаются в процессе опыта неизменными. Применим уравнения Клапейрона — Менделеева: $pV=\frac{m}{\mu}RT$, $p_1V=\frac{m_1}{\mu}RT$. Вычитая, получим $(p-p_1)V=\frac{m-m_1}{\mu}RT$. Нас интересует величина $\rho=\frac{p_{\text{атм}}\mu}{RT_0}$. Учитывая предыдущее соотношение, напишем окончательно:

$$\rho=\frac{p_{\text{атм}}}{p-p_1}\cdot\frac{T}{T_0}\cdot\frac{Q-Q_1}{gV}=\frac{H_{\text{атм}}}{H-H_1}\cdot\frac{T}{T_0}\cdot\frac{Q-Q_1}{gV}.$$

146. В обоих случаях тепло выделяется за счет двух факторов. Во-первых, изменяется внутренняя энергия газа (кинетическая энергия движения молекул), во-вторых, совершается работа. Изменение внутренней энергии газа в обоих случаях одинаково, так как кинетическая энергия молекул зависит только от температуры, а изме-

нение температуры в обоих случаях одно и то же. Следовательно, искомая разность теплот есть разность работ, совершенных газом в каждом случае. При изохорных процессах работа не совершается, поэтому

$$A_1 = p_1 (V_2 - V_1); \ A_2 = p_2 (V_2 - V_1).$$

Искомая разность $\Delta Q = A_2 - A_1 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 4$ н. м $= 4$ Дж.

Во втором случае тепла выделяется больше.

147. Сила, действующая на газ со стороны задней стенки F_1, больше аналогичной силы со стороны передней стенки F_2 как раз на величину $m_0 a$, m_0 — здесь масса всего газа. Это становится понятным, если учесть, что именно при действии разности $(F_1 - F_2)$ газ движется с ускорением a. В то же время силы F_1 и F_2 равны произведениям давления газа у соответствующей стенки на площадь стенки: $F_1 = p_1 S$, $F_2 = p_2 S$. Остается воспользоваться законом Клапейрона — Менделеева. Выражая плотность газа через давление и заменяя S на (V/l), а V на (m_0/ρ_0), получим:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\mu}{RT} \, l a \rho_0.$$

148. Количество молекул в обоих сосудах одинаково. Так как молекулярный вес воды —18 — меньше среднего молекулярного веса воздуха (около 29), сосуд с влажным воздухом легче, чем сосуд с сухим.

149. Возьмем m граммов мокрого снега. В нем содержится $\frac{m}{100} x$ г воды и $\frac{m}{100}(100 - x)$ г снега, x — здесь процентное содержание воды. Температура мокрого снега равна 0°С. Добавим теперь M граммов воды с температурой Т°С так, чтобы весь снег растаял. Пусть конечная температура будет t°С. Запишем уравнение теплового баланса:

$$cMT = \frac{m}{100}(100 - x)\ \lambda + (m + M)\ ct.$$

В этом уравнении c — теплоемкость воды, λ — удельная теплота плавления льда. Процентное содержание воды равно:

$$x = 100 - \frac{100c}{\lambda m}(MT - Mt - mt).$$

150. Давление воздуха в комнате равно внешнему атмосферному давлению, поэтому процесс нагревания изобарический. При нагревании воздух, занимавший первоначально объем комнаты V, расширится до объема $V' = V(T_2/T_1)$. Если вначале масса воздуха в комнате была m_1, то после нагревания в комнате останется масса $m_2 = (m_1/V')\ V = m_1 (T_1/T_2)$. Значит, $m_1 T_1 = m_2 T_2$, и энергия воздуха в комнате не изменится.

151. Может. Очевидно, что теплоемкость газа отрицательна, если работа, совершаемая газом, больше подводимого к газу тепла. В ходе такого процесса газ будет охлаждаться.

152. За время взрыва горючей смеси поршень не успевает набрать необходимую скорость и давление в цилиндре резко увеличивается. Это приводит к деформациям поршня и цилиндра, а на это уходит довольно значительная энергия. Если сгорание смеси «медленное», то по мере сгорания увеличивается объем газов «под поршнем», давление же меняется не так значительно, как при детонации.

153. Пусть нагревается жидкость в правом сосуде (рис. 17). Тогда она расширяется и занимает больший объем (мы предполагаем, что начальная температура выше точки максимальной плотности). Если бы правый сосуд был цилиндрическим, давление на дно его не изменилось бы, так как уменьшение плотности в точности компенсировалось бы увеличением высоты столба жидкости. Из-за того, что сосуд кверху расширяется, увеличение высоты столба меньше, а давление на дно сосуда уменьшается. Поэтому жидкость будет перетекать в правый сосуд. Если нагревать жидкость в левом сосуде, то, аналогично рассуждая, мы придем к тому же результату — жидкость будет перетекать в правый сосуд. Рассмотрите сами особенности, возникающие в том случае, когда начальная температура ниже точки максимальной плотности воды.

154. При нагревании стержень расширяется, при этом в первом случае центр тяжести его поднимается, а во втором опускается. Следовательно, в первом случае нужно сообщить стержню больше тепла, чем во втором. Предполагается, что сама подставка и нить при нагревании не деформируются. Количественно разница между двумя этими случаями, конечно, очень незначительна.

155. Температура сковородки падает от ее центра к краям. Рассмотрим каплю на некотором расстоянии от

центра O сковородки (рис. 74). С нижней поверхности капли происходит интенсивное испарение. Давление паров под каплей больше с той стороны, которая ближе к центру (температура вдоль BC выше, чем вдоль CA). Разность давлений и вызывает движение капли от центра сковородки. Приведенное объяснение справедливо, если центр сковородки нагрет сильнее, чем ее края. Всегда ли это так, если сковородка стоит на газовой плите?

156. Металлическая сетка отнимает у горящего газа тепло. Проходящий через сетку газ сначала охлаждается ниже температуры воспламенения. Поэтому сразу после внесения сетки в пламя язычка над сеткой нет. Через некоторое время сетка раскаляется, и теперь уже газ эффективно не охлаждает — язычок пламени появляется над сеткой.

157. Врач ответил, что холодное зеркальце «запотевает», так как на нем конденсируются водяные пары, выдыхаемые пациентом. Если зеркальце нагреть до температуры, не меньшей, чем температура тела, то пары конденсироваться не будут.

158. Температура нити выше внутри, так как через поверхность происходит отвод тепла в окружающее пространство.

159. При измерении температуры термометр должен нагреться от комнатной температуры до температуры тела, то есть примерно на 16—17°C. Для того, чтобы можно было «стряхнуть» термометр, достаточно, чтобы он остыл всего на 2—4°C, так как шкала термометра начинается с 34°C. Следует учесть также, что скорость нагрева (или охлаждения) термометра пропорциональна разности температур термометра и среды. Термометр будет нагреваться от 34°C до температуры тела существенно дольше, чем остывать от температуры тела до 34°C при комнатной температуре.

160. Максимальный термометр — это термометр, измеряющий максимальную за время измерения температуру. Спиртовой максимальный термометр «построить» можно, если использовать капилляр, не смачиваемый спиртом.

161. При растворении сахара происходит поглощение

74

некоторого количества тепла, температура чая при этом падает. Потери тепла в окружающее пространство тем меньше, чем меньше разность температур чая и окружающего пространства. Это значит, что чай с растворенным в нем сахаром потеряет за данное время меньшее количество тепла, чем более горячий чай без сахара. Поэтому тот, кто растворил сахар сразу, будет пить более горячий чай.

162. Энергия, необходимая для образования пузырька, складывается из следующих слагаемых: а) теплоты парообразования $W_1 = qm$, q — удельная теплота парообразования, m — масса пара в пузырьке, значение q должно браться при давлении $p_{атм} + \rho gH$; б) энергии, требуемой для образования поверхности пузырька. Если его радиус R, то эта энергия равна $4\pi R^2\alpha$. Следует еще отметить, что коэффициент α очень мал при температуре, достаточно близкой к температуре кипения; в) работы против сил давления. Давление на дне есть $p_{атм} + \rho gH$, поэтому работа, совершаемая при раздувании пузырька при постоянном давлении, равна произведению этого давления на объем пузырька: $(p_{атм} + \rho gH)\frac{4}{3}\pi R^3$. Значит, всего для образования пузырька требуется энергия:

$$W = W_1 + 4\pi R^2\alpha + (p_{атм} + \rho gH)\frac{4}{3}\pi R^3.$$

163. Обычная формула для разности давлений внутри и вне сферической капли имеет вид: $\Delta p = (2\sigma/r)$. В случае мыльного пузыря, однако, разность давлений вдвое больше: $\Delta p = (4\sigma/r)$. Это связано с тем, что оболочка пузыря имеет наружную и внутреннюю поверхности, фактически мыльный пузырь — есть пленка с удвоенным поверхностным натяжением. Запишем теперь очевидные соотношения:

$$p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_1}; \; p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_2}; \; p - p_0 = \frac{4\sigma}{R}.$$

Для газа внутри каждого пузыря справедлив закон Менделеева—Клапейрона. (R — газовая постоянная):

$$p_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{m_1}{\mu}\tilde{R}T; \; p_2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{m_2}{\mu}\tilde{R}T;$$

$$p \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{m_1 + m_2}{\mu}\tilde{R}T.$$

Мы использовали здесь тот факт, что при слиянии пузырей суммарная масса газа в них не изменилась. Отсюда вытекает, что

$$pR^3 = p_1r_1^3 + p_2r_2^3,$$

или $\left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)R^3 = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}\right)r_1^3 + \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_2}\right)r_2^3.$

Атмосферное давление p_0 равно поэтому:

$$p_0 = \frac{4\sigma(r_1^2 + r_2^2 - R^2)}{(R^3 - r_1^3 - r_2^3)}.$$

164. Упав с высоты H, капля приобретет кинетическую энергию $\frac{mV^2}{2} = mgH = \rho gH \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Пусть вся эта кинетическая энергия пойдет на создание поверхностей n капель радиуса r. Поверхностное натяжение можно рассматривать как плотность поверхностной энергии, поэтому $\rho gH \times \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi r^2\sigma n$, откуда $n = (\rho gHR^3/3r^2\sigma)$. С другой стороны, сохраняется масса: $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, значит $r = Rn^{-1/3}$. Подставляя это значение r в написанную выше формулу, мы получим окончательно:

$$n = (\rho gHR/3\sigma)^3.$$

165. Будем тянуть сторону $СД$ с постоянной силой F. Пусть работа этой силы идет только на отрыв листа от стены, но не на его ускорение. Тогда скорость края $СД$ будет постоянной. За время Δt в движение вовлекается масса Δm, равная $\Delta m = v \cdot \Delta t \cdot a\frac{M}{a^2}$, здесь v — скорость края $СД$. Эта масса получает импульс $\Delta p = \Delta m \cdot v = v^2\Delta t\frac{M}{a}$. По второму закону Ньютона $F - F_{нат} = (\Delta p/\Delta t)$, а сила натяжения $F_{нат.} = \sigma a$. Поэтому $F - \sigma a = \frac{v^2M\Delta t}{a\Delta t} = (v^2M/a)$, а значит $F = \sigma a + (v^2M/a)$.

Учтем теперь, что $vT = a$, то есть $v = (a/T)$, окончательно теперь получится такое выражение для искомой силы:

$$F = \sigma a + \frac{M}{a}\,\frac{a^2}{T^2} = a\left(\sigma + \frac{M}{T^2}\right).$$

166. Закон сохранения импульса $mV = 2mv$ дает $v = (V/2)$, V — скорость налетающей капли, v — скорость капель сразу после удара. По закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} \approx \frac{2mv^2}{2} + 2mC\,(t_{кип.} - t_{нач.}) + 2m\lambda,$$

здесь C — удельная теплоемкость воды, $t_{кип.}$ — температура кипения, $t_{нач.} = 20°C$, λ — удельная теплота парообразования. Из написанных формул вытекает, что

$$V = 2\sqrt{2}\,\sqrt{C\,(t_{кип.} - t_{нач.}) + \lambda}.$$

Для воды $C \approx 4{,}2 \cdot 10^3$ *Дж/кг · град*, $\lambda \approx 2{,}26 \cdot 10^6$ *Дж/кг*.

По порядку величины $V \sim 4{,}5$ *км/с*. Заметим еще, что мы не учли в уравнении для энергетического баланса энергию поверхностного натяжения капель. Небольшая часть кинетической энергии сталкивающихся капель пойдет еще и на разрушение поверхностей. Аккуратный учет этого слагаемого сложен, так как, с одной стороны, поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности и требовалось бы задать в условии еще размеры капель, с другой стороны, коэффициент поверхностного натяжения сам зависит от температуры. Пренебрежение поверхностной энергией в рассмотренной задаче вполне законно, так как нас интересует испаряющаяся капля, испарение происходит при температуре кипения, а коэффициент поверхностного натяжения при $t \to t_{кип}$ стремится, очевидно, к нулю. Обратите внимание, что получившаяся выше скорость $V \sim 4{,}5$ км/с, грубо говоря, всего в два раза меньше характерных для Земли космических скоростей.

167. Пусть в момент $t_0 = 0$ космонавт включил высокочастотную печь, поместив предварительно в нее металлический шар. Высокая теплопроводность шара обеспечивает его быстрый прогрев. Температуру внутри шара можно считать не зависящей от его радиальной координаты. (Глубину скин — слоя считаем большой по сравнению с радиусом шара.) Температура вне шара отличается от температуры внутри, поверхность шара будет излучать. Пусть выделяющаяся внутри мощность равна N и не зависит для простоты от температуры. Эта мощность обусловлена выделяющимся джоулевым теплом, последнее же зависит от сопротивления. Поэтому фактически мы предполагаем сейчас, что температурной зависимостью сопротивления можно пренебречь. Шар начнет плавиться с поверхности. Из-за того, что опыт проводится в условиях

невесомости, образующаяся жидкая пленка будет покрывать шар и никуда не будет стекать. В конечном счете получится жидкая капля с радиусом, равным радиусу шара. Изменением объема при плавлении тоже можно пренебречь, оно невелико. Ясно также, что визуально можно наблюдать только за поверхностью капли, поэтому такие наблюдения ничего не скажут о том, расплавился ли уже весь шар или еще нет. Пусть температура снаружи равна T_0, а температура плавления — $T_{пл}$. Можно написать уравнение теплового баланса:

$$Nt = C_к \rho_к V_к (T_{пл} - T_0) + \lambda \alpha V_к \rho_к + W_{изл}.$$

Здесь t — время, $C_к$ и λ — теплоемкость кристалла и удельная теплота плавления (в расчете на единицу массы), $\rho_к$ — плотность кристалла, $V_к$ — объем шара, α — доля расплавившегося к моменту t объема, а $W_{изл.}$ — излученная с поверхности энергия. Заметим теперь, что

$$W_{изл} = W_{изл.\,о} + 4\pi R^2 (T_{пл} - T_0)\ \varkappa (t - t_1);$$

R — радиус шара, $\varkappa$ — некоторый коэффициент, а $W_{изл.\,о}$ — тепло, излученное за время t_1, равное времени нагрева шара от T_0 до $T_{пл}$. Очевидно также, что

$$Nt_1 = C_к \rho_к V_к (T_{пл} - T_0) + W_{изл.\,о}.$$

Это уравнение описывает нагрев шара от T_0 до $T_{пл.}$: при $t < t_1$ плавления еще нет, а при $t > t_1$ оно уже есть. Из написанных уравнений теплового баланса следует, что

$$[N - 4\pi R^2 \varkappa (T_{пл} - T_0)]\ (t - t_1) = \lambda \alpha V_к \rho_к.$$

Нас интересует время полного расплавления шара. Этому соответствует $\alpha = 1$. Величины N, R, $T_{пл}$ и T_0 космонавт может, вероятно, измерить. Параметры λ и $\rho_к$ могут быть для известного металла взяты из таблиц. Время t_1 замечается по часам, это то время после включения печи, когда на поверхности только что появилась жидкая пленка (придумайте, кстати, способы обнаружения такой пленки **невизуальными** методами!). Что касается коэффициента $\varkappa$, то его можно определить, например, так. Будем менять мощность высокочастотной печки. Добьемся при этом такого состояния, когда подводимая к шару и теряемая им мощности равны, в этом случае шар может иметь температуру $T_{пл}$, но еще не плавиться. Тогда из уравнения $4\pi R^2 \varkappa (T_{пл} - T_0) = N_1$ по измеряемым величинам N_1, $T_{пл}$, T_0 и R — найдем коэффициент $\varkappa$. Этот дополнительный

опыт надо проводить на грани плавления: совсем малое увеличение N_1 должно вести к появлению жидкой пленки на поверхности шара.

168. Палец имеет очень большое сопротивление по сравнению с сопротивлением лампочек. При «включении» его последовательно с лампочками через палец и через лампочки течет одинаковый ток, поэтому падение напряжения на пальце будет значительно больше падения напряжения на лампочках, то есть практически все напряжение — 220 В — будет приложено к пальцу.

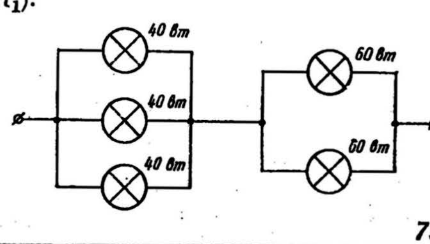
169. Лампочки нужно включить так, как показано на рис. 75. В этом случае напряжение поровну распределится между двумя группами ламп, на каждой лампочке будет напряжение 110 В.

170. Уравнение теплового баланса: $I^2_{пл} R = kS (T_{пл} - T_{ср})$, $I_{пл}$ — ток, при котором проволока плавится, R — сопротивление ее: $R = \rho\,(l/a^2)$, ρ — удельное сопротивление материала, l — длина проволоки, a — сторона сечения ее. Величина $S = 4al$. Уравнение баланса перепишем в виде: $I^2_{пл} = \frac{4k}{\rho} (T_{пл} - T_{ср})\ a^3$.

Отсюда видно, что ток плавления пропорционален $\sqrt{a^3}$, а значит, ток плавления проволоки со стороной сечения 4 мм равен 80 А.

171. Пусть E — ЭДС источника. Тогда в цепи идет ток $I = E/(R_1 + r)$, а на сопротивлении R_1 выделяется количество тепла, равное $W_1 = I^2 R_1 = R_1 [E/(r + R_1)]^2$. Предположим, что столько же тепла выделяется на сопротивлении $R_2 \neq R_1$, если включить R_2 вместо R_1. Условие $W_2 = R_2 [E/(r + R_2)]^2 = W_1$ приводит к уравнению $\frac{R_2}{(r + R_2)^2} = \frac{R_1}{(r + R_1)^2}$, которое преобразуется к виду

$r^2 (R_2 - R_1) = R_1 R_2 (R_2 - R_1)$. При $R_2 \neq R_1$ сопротивление $R_2 = (r^2/R_1)$.



75

172. Емкость сферы радиуса r равна r. Электростатическая энергия сферы, заряженной до разности потенциалов V, равна $\frac{1}{2}rV^2$. Полная энергия системы до соединения проводником $\frac{1}{2}r_1V_1^2+\frac{1}{2}r_2V_2^2$. После соединения потенциалы сфер становятся равными между собой. Этот общий потенциал V находится из условия сохранения заряда:

$$r_1V+r_2V=r_1V_1+r_2V_2.$$

Отсюда $V=\frac{r_1V_1+r_2V_2}{r_1+r_2}$. Энергия системы после соединения равна $\frac{1}{2}r_1V^2+\frac{1}{2}r_2V^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(r_1V_1+r_2V_2)^2}{(r_1+r_2)}$. Количество выделившегося тепла есть:

$$Q=\frac{1}{2}\left[r_1V_1^2+r_2V_2^2-\frac{(r_1V_1+r_2V_2)^2}{(r_1+r_2)}\right]=\frac{1}{2}\ \frac{r_1r_2}{(r_1+r_2)}(V_1-V_2)^2.$$

Заметьте, что Q не зависит от сопротивления проводника.

173. Мощность, выделяющаяся в проводах, равна $W_{\text{пот}}=RI^2$, где R — сопротивление линии, а I — текущий через нее ток. Для того, чтобы снизить потери в 100 раз, ток следует уменьшить в 10 раз. При этом падение напряжения на линии уменьшится в 10 раз. Мощность, передаваемая линией, измениться не должна, значит на нагрузке напряжение должно в 10 раз увеличиться. Напряжение источника должно теперь быть равно $U_{\text{ист}}=\left(\frac{k}{10}+10\right)U$. Первоначально же напряжение источника равнялось $U_{\text{ист.0}}=(k+1)U$. Следовательно, напряжение источника должно быть увеличено в $\left(\frac{k}{10}+10\right)/(k+1)$ раз. Заметим еще, что это напряжение увеличивается, когда $k<10$. В противном случае для того, чтобы удовлетворить требованиям условия задачи, напряжение источника пришлось бы фактически уменьшить.

174. При такой вольт-амперной характеристике, которая изображена на рис. 20, сразу ясно, что внутри «черного ящика» должен быть хотя бы один нелинейный элемент (диод, транзистор, лампа, реле, срабатывающее при определенном напряжении, и т. п.). Одна из возможных схем приведена на рис. 76. Величина $R=\operatorname{ctg}\alpha$. Если напряжение между A и B превысит E, диод $Д_2$ откроется. Если напряжение между A и B будет отрицательным и превысит по величине $2E$, откроется $Д_2$.

175. Пусть мы хотим найти сопротивление между точками 1 и 2. Подключим к ним батарею. Легко понять, что по проводникам, соединяющим между собой остальные точки, ток течь не будет. Потенциалы всех этих точек должны быть равны, они совершенно «равноправны» между собой относительно точек 1 и 2, значит ни у одной из них потенциал не может быть выше или ниже, чем у остальных. А если разность потенциалов между этими точками отсутствует, токи не текут, то и провода, соединяющие их, можно убрать. Схема при этом сильно упростится. Теперь к каждой из $(N-2)$ точек подходят провода из 1 и 2. Это значит, что $(N-2)$ сопротивлений по $2R$ каждое подключены между 1 и 2 параллельно. Кроме того, один провод соединяет 1 и 2. Значит, сопротивление R подключено параллельно с $\frac{2R}{(N-2)}$, результирующее сопротивление равно поэтому

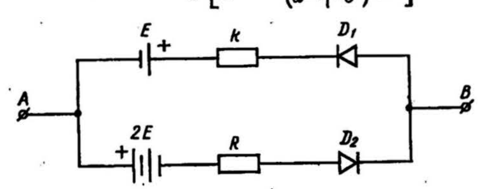
$$R_{\text{рез.}}=\frac{R\cdot\frac{2R}{(N-2)}}{R+\frac{2R}{(N-2)}}=\frac{2R}{N}.$$

176. Поверхность нулевого потенциала образует плоскость, равноудаленную от пластин конденсатора, вместе с поверхностью шара (рис. 77).

177. Мы воспользуемся методом изображений. Полуплоскости можно заменить таким распределением зарядов вне угла $x>0$, $y>0$, чтобы потенциал полуплоскостей в поле этих зарядов и заряда Q равнялся нулю. Такая система зарядов изображена на рис. 78. Теперь уже легко найти x- и y-компоненты силы, действующей на наш «реальный» заряд:

$$F_x=-\frac{Q^2}{4}\left[\frac{1}{b^2}-\frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right];$$

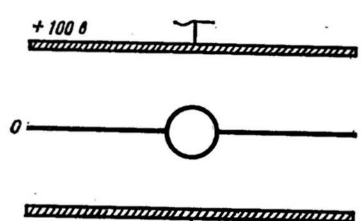
$$F_y=-\frac{Q^2}{4}\left[\frac{1}{a^2}-\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right].$$



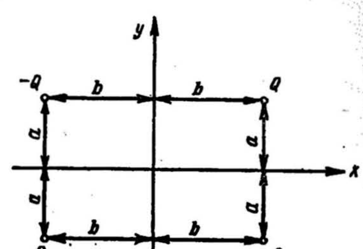
76

178. Ясно, что сила, которая вызывает движение половинок после разрезания шаров, есть сила электростатического отталкивания. Она должна зависеть от заряда шара, его радиуса и расстояния между половинками. Рассмотрим сначала начало движения. Шары из одного и того же материала, поэтому массы их пропорциональны R^3, а сила отталкивания сразу после разрезания шаров должна быть пропорциональна Q^2/R^2. Такая зависимость от радиуса связана просто с тем, что нет никакого другого характерного размера (шары еще не разъехались!). Разумеется, численного коэффициента в формуле $F \sim (Q^2/R^2)$ мы не узнаем без точного расчета, но должно быть ясно, что он зависит не от размера, а только от геометрической формы тел. Ускорение половинок в начале движения $a \sim \frac{F}{M} \sim \frac{Q^2}{R^2}\cdot\frac{1}{R^3} \sim \frac{Q^2}{R^5}$. Поэтому, чем больше радиус, тем меньше ускорение, а значит, за одинаковые времена шар с бо́льшим радиусом набирает меньшую скорость, то есть его половинки разъезжаются на меньшие расстояния. Рассмотрим теперь ситуацию, когда половинки обоих шаров разъехались на большие расстояния: $d \gg R$. В этом случае можно считать, что наша задача превратилась в задачу о движении точечных зарядов и теперь собственные размеры шаров для вычисления сил взаимодействия уже не играют роли. Сила взаимодействия теперь пропорциональна Q^2/d^2, а ускорение $a' \sim \frac{Q^2}{d^2R^3}$. Таким образом, и в этом случае для шара с бо́льшим R ускорение будет меньше. Поэтому половинки шара бо́льшего радиуса разъезжаются после разрезания медленнее. От знака зарядов на шарах ничего не зависит.

179. До вдвигания пластины заряды на конденсаторах равны: $q_1 = C_1E_1$; $q_2 = C_2E_2$ (потенциалы обоих концов



77



78

сопротивления R одинаковы — ток в схеме не течет). Вдвинем пластину и подождем, пока заряды перестанут перетекать. Теперь заряды на конденсаторах: $q_1' = C_1E_1$; $q_2' = \varepsilon C_2E_2$. Суммарный заряд на правой обкладке C_1 и левой обкладке C_2 изменился на величину:

$$\Delta q = (q_1' - q_2') - (q_1 - q_2) = -C_2E_2(\varepsilon - 1).$$

Этот заряд и протек по сопротивлению. Величина его не зависит от R. При изменении R будет меняться только **длительность процесса перераспределения зарядов** в схеме.

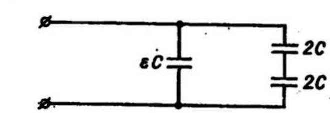
180. Поле в такой системе будет как между пластинами конденсатора, так и между стенками коробки и пластинами. Систему можно заменить эквивалентной схемой из трех конденсаторов (рис. 79). Конденсатор емкости εC образован пластинами с диэлектриком между ними, а конденсаторы $2C$ — стенками коробки и каждой из пластин. Общая емкость системы равна $C_{общ} = \varepsilon C + C$. Значит, отношение $k = \frac{C_{общ}}{\varepsilon C} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{3}{2}$.

181. Скорость заряда q будет увеличиваться до тех пор, пока сила, действующая на него со стороны заряда Q, не уравновесится силой $q\vec{E}$. Очевидно, что это произойдет на расстоянии $r_0 = \sqrt{Q/E}$, затем его скорость начнет уменьшаться. Следовательно, максимальную скорость заряд (q, m) имеет на расстоянии r_0 от заряда Q. Для нахождения скорости воспользуемся законом сохранения энергии.

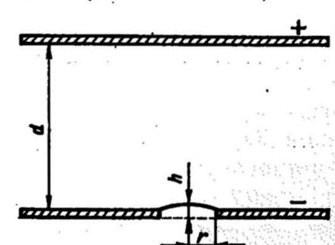
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{qQ}{r_0} = \frac{qQ}{l} - qE(r_0 - l).$$

Подставляя r_0, получим:

$$v^2 = \frac{2q}{m}\left(\frac{Q}{l} + El - 2\sqrt{QE}\right) = \frac{2q}{m}\left(\sqrt{\frac{Q}{l}} - \sqrt{El}\right)^2$$



79



80

Заметим еще, если $E=(Q/l^2)$, то из написанной для v^2 формулы следует, что $v=0$. Это и понятно — в этом случае заряд q не будет двигаться после того, как мы его отпустим. Действующие на него силы (Qq/l^2) и $q\vec{E}$ в этом случае уравновешены.

182. Чтобы заряд e не смог пролететь сквозь кольцо, его потенциальная энергия в центре кольца должна быть больше, чем в начальном положении:

$$\frac{eQ}{l}+\frac{eq}{r}>\frac{eQ}{R}+\frac{eq}{l}.$$

Отсюда $q>Q\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{(l-R)}{(l-r)}$. Мы считаем, что $l\gg R$ и $l\gg r$, поэтому $(l-R)/(l-r)\approx 1$, тогда $q>Q\,(r/R)$. При условии $l\gg R$, r законно рассматривать на больших расстояниях и полусферу, и кольцо как точечные заряды.

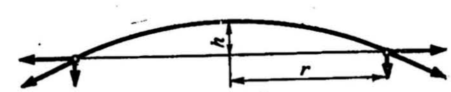
183. Пусть r и c — сопротивление или емкость одного элемента схемы, а R и C — сопротивление или емкость между двумя выбранными точками схемы. Пусть в схеме с сопротивлениями $R=F(r)$. Очевидно, что $F(\alpha r)=\alpha F(r)$. Это последнее равенство можно доказать так. Любая схема состоит из участков, которые можно рассматривать как последовательно или параллельно соединенные сопротивления. Для последовательного соединения двух или нескольких сопротивлений доказываемое утверждение очевидно. Для параллельного соединения двух сопротивлений R_1 и R_2 общее сопротивление есть $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, а потому изменение каждого сопротивления в одинаковое число раз меняет полное сопротивление во столько же раз. На сложные схемы это утверждение распространяется непосредственно. Поэтому всегда замена $r\to\alpha r$ приводит к изменению полного сопротивления также в α раз. Рассмотрим теперь схему с конденсаторами. Пусть в такой схеме течет переменный ток частоты f. Тогда каждый конденсатор можно рассматривать как сопротивление, равное $(2\pi fc)^{-1}$. Сопротивление всей схемы между выбранными точками равно $(2\pi fC)^{-1}$. В силу сделанных выше утверждений можно написать:

$$\frac{1}{2\pi fC}=F\left(\frac{1}{2\pi fc}\right)=F\left(\frac{r}{2\pi fcr}\right)=\frac{1}{2\pi fcr}F(r)=\frac{1}{2\pi fcr}R,\quad \text{откуда}$$

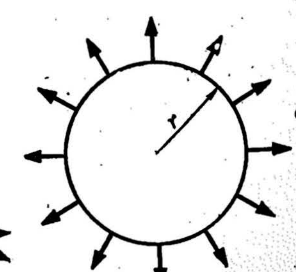
$cr=CR$. Подставляя численные значения C, r и R, получим $c=1000$ пФ.

184. Силы поверхностного натяжения действуют по касательной к пленке (рис. 80 — 82). Их составляющая вдоль силовых линий электрического поля в конденсаторе (перпендикулярная пластинам) получается умножением на отношение (h/r), где h — величина прогиба. Мы считаем, что это отношение мало: $(h/r)\ll 1$. Суммарная сила, обусловленная поверхностным натяжением и направленная вдоль силовых линий, есть, очевидно, $4\pi r\sigma\frac{h}{r}=4\pi\sigma h$. Мы учли здесь, что мыльная пленка двусторонняя, с этим связано появление лишней двойки в последней формуле. Эта сила должна быть уравновешена силой притяжения пленки к другой пластине конденсатора. Последняя же равна силе притяжения пластин друг к другу, деленной на площадь пластин S и умноженной на площадь пленки, приблизительно равную πr^2. Сила притяжения пластин друг к другу равна $\frac{E^2}{8\pi}S=\frac{U^2}{8\pi d^2}S$. Написав равенство $4\pi\sigma h\approx\frac{U^2}{8\pi d^2}\pi r^2$, получаем для величины прогиба: $h\approx\frac{U^2r^2}{32\pi\sigma d^2}$.

185. Прежде всего заметим, что пользоваться формулами обычной кинетической теории газов $p=nkT$; $\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT$ (p — давление, n — число частиц в 1 $см^3$, k — постоянная Больцмана, T — температура, m — масса частиц и v — их скорость) для электронного газа в металле нельзя. Это видно уже из того, что при $T\to 0$ из написанных формул следует: $p\to 0$, $v\to 0$. Для электронов в металлах скорость и давление вовсе не стремятся к нулю с уменьшением температуры. Например, скорость свободных электронов (электронов проводимости) не слишком сильно от-



81



82

личается от скорости электронов на внешних атомных орбитах, а уж про эти последние никак не скажешь, что они зависят от температуры — они определяются ведь кулоновским взаимодействием с ядрами. Поэтому для оценки скоростей электронов и их давления в металле нужно использовать какие-то другие соображения. Мы уже сказали, что скорости свободных электронов в каком-то смысле «близки» к скоростям электронов, связанных с атомными ядрами. Можно думать поэтому, что и характеристики свободных электронов должны быть существенно квантовыми (само существование различных электронных орбит в атоме — типичный и принципиально квантовый эффект!). Естественно воспользоваться соображениями размерности для того, чтобы получить нужные нам соотношения. Во все квантовые формулы должна входить квантовая характеристика — постоянная Планка $\hbar$. Предположим, что скорость зависит, кроме $\hbar$, еще от массы электрона m и концентрации n. Число частиц в 1 см^3 n связано со средним расстоянием между частицами a простой формулой $n = a^{-3}$, поэтому вместо концентрации n можно взять и среднее межчастичное расстояние a. Про давление p также предположим, что оно зависит от $\hbar$, m и n. Записывая формулы $v \sim \hbar^x m^y n^z$ и $p \sim \hbar^\alpha m^\beta n^\gamma$, где x, y, z, α, β, γ — некоторые числа, и выписывая размерности обеих частей последних равенств, мы получим:

$$\text{см} \cdot \text{с}^{-1} = \text{г}^x\ \text{см}^{2x}\ \text{с}^{-x}\ \text{г}^y\ \text{см}^{-3z};$$

$$\text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} = \text{г}^\alpha\ \text{см}^{2\alpha}\ \text{с}^{-\alpha}\ \text{г}^\beta\ \text{см}^{-3\gamma}.$$

Размерности правой и левой частей этих равенств должны быть одинаковы, из систем уравнений:

$$x + y = 0;\ 2x - 3z = 1;\ -1 = -x;$$

и

$$\alpha + \beta = 1;\ 2\alpha - 3\gamma = -1;\ -\alpha = -2$$

мы найдем окончательно:

$$x = 1;\ y = -1;\ z = 1/3;\ v \sim \frac{\hbar}{ma} \sim \frac{\hbar n^{1/3}}{m};$$

$$\alpha = 2;\ \beta = -1;\ \gamma = 5/3;\ p \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}.$$

Заметьте теперь, что давление есть, по существу (по порядку величины, разумеется), произведение числа частиц в 1 $см^3$ и энергии одной частицы $\sim mv^2$), другими словами, давление и плотность энергии есть пропорциональ-

ные величины. Заметим еще, что числовые коэффициенты, получаемые при более подробных вычислениях, оказываются для написанных формул числами порядка единицы. Считая, что от каждого атома «отодран» в среднем один электрон, мы найдем, что число электронов в 1 $см^3$ равно числу атомных ядер в 1 $см^3$, а последнее есть просто $n_Я \approx (\rho/m_Я)$, ρ — плотность металла, $m_Я$ — масса атомного ядра (примерно равная массе атома, массой всех электронов атома по сравнению с массой ядра при оценках нужно, конечно, пренебрегать). Мы рекомендуем читателям сравнить полученное значение электронного давления с модулями Юнга металлов. Необходимые численные значения возьмите из любого справочника. О чем говорит результат такого сравнения? Если подставить типичные для металлов численные значения n в формулу $v \sim \frac{\hbar}{m} n^{1/3}$, то легко убедиться и в том, что скорости $v \ll c$, c — скорость света. Это означает, что электроны в металле подчиняются квантовой механике, но использовать для их описания релятивистские формулы (формулы теории относительности) не нужно, релятивистские формулы потребовались бы только в том случае, когда скорости v стали бы порядка c.

186. Температура ионизованных газов, из которых состоит пламя дуги, велика, а плотность их меньше плотности воздуха. Поэтому пламя дуги выталкивается вверх действующей на него архимедовой силой — «всплывает».

187. Облако и землю можно рассматривать как обкладки заряженного конденсатора. Сильное электрическое поле удерживает заряженные капли на высоте. Молния эквивалентна пробою конденсатора. Электрическое поле при пробое уменьшается, и сила тяжести капель теперь уже превосходит удерживающую их электрическую силу.

188. Для решения первой проблемы можно использовать громоотвод — обычно это стержень или труба, поднятые на большую высоту. Громоотвод специально предназначен для того, чтобы молния «ударяла» в него. Он должен быть выше всех других предметов в ближайшей окрестности. Поэтому первая задача решается легко — мы можем «управлять» молнией, «предписывая ей куда попасть». Вторая задача может быть решена, если расположить несколько стержней на небольшом расстоянии друг от друга и от оси громоотвода, причем так, чтобы их оси были параллельны громоотводу. Разместить их лучше

вблизи верхнего конца громоотвода (почему?). Для того чтобы использовать стержни многократно, их нужно после каждого измерения размагничивать. Это можно было бы сделать с помощью магнитных полей или токов, но так поступать неразумно — для этого нужны такие же токи, как в молнии. Получение таких токов в лаборатории — дело трудное. К тому же нужно было бы опять следить за тем, чтобы не оставалось остаточной намагниченности. Поэтому целесообразнее стержни нагревать. Разогретые стержни размагничиваются, и их можно снова установить на громоотвод.

189. Очевидно, что энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндрического канала молнии, тратится на диссоциацию молекул воздуха, на ионизацию атомов (отрыв внешних электронов), на увеличение кинетической энергии частиц в канале молнии, на расширение канала, а также на излучение. Если предположить, что радиус цилиндрического канала r меняется со временем t и в зависимости от величины энергии W, приходящейся на единицу длины, то из соображений размерности можно попытаться построить формулу, связывающую r, W, t и ρ (ρ — плотность воздуха). Запишем $r \sim W^x t^y \rho^z$, размерность W есть эрг/см. Сравнение размерностей правой и левой частей приводит к системе уравнений: $x - 3z = 1$; $x + z = 0$; $-2x + y = 0$; откуда $x = 1/4$; $y = 1/2$; $z = -1/4$. Канал молнии расширяется, следовательно, по закону $r \sim \left(\frac{W}{\rho}\right)^{1/4} t^{1/2}$.

Этот закон справедлив, конечно, только если энергия W много больше энергии молекул воздуха в столбике цилиндрического канала с единичной высотой (этой энергией мы пренебрегаем по сравнению с W). Скорость радиального расширения канала для молнии должна быть не меньше скорости распространения энергии вдоль оси, в противном случае энергия будет уноситься вдоль канала и не будет фактически идти на увеличение радиуса канала. С этим обстоятельством связан тот факт, что иногда молния не доходит до земли — ее энергия, «выйдя из облака», «рассасывается» в радиальном направлении быстрее, чем «доходит до земли». Скорость радиального расширения канала и давление на фронте ударной волны могут быть также получены из соображений размерности: $v \sim \left(\frac{W}{\rho}\right)^{1/4} t^{-1/2}$; $p \sim (W\rho)^{1/2} t^{-1}$.

Проверьте теперь, что $W \sim pr^2$. Какой физический смысл этого соотношения? Численные коэффициенты в написанных формулах из соображений размерности найти, конечно, нельзя, но все качественные зависимости получаются однозначно. Заметим еще, что если все численные коэффициенты считать числами порядка единицы (см. по этому поводу статью Ю. М. Брука и А. Л. Стасенко «Как физики делают оценки» в книге «О современной физике — учителю». М., «Знание», 1975), то существование цилиндрической ударной волны ограничено условием: $v \gg s$, s — скорость звука в воздухе. Нетрудно проверить, что соотношение $v \sim s$ эквивалентно такому: $p \sim \rho s^2 \sim p_0$, p_0 — здесь давление в невозмущенном воздухе. Другими словами, ударная волна затухает на тех же расстояниях, на которых ее давление сравнивается с давлением невозмущенной окружающей среды.

190. Как сказано в решении предыдущей задачи, ударная волна затухает, когда ее давление p сравнивается с давлением невозмущенного воздуха p_0. Если зафиксировать энергию молнии на единицу ее длины — W, то равенство $p \sim p_0$ наступит через время $\sim T$, определяющееся из соотношения: $(W\rho)^{1/2} T^{-1} \sim p_0$. Отсюда $T^{-1} \sim \frac{p_0}{(W\rho)^{1/2}}$.

Очевидно, что $T^{-1} \sim \omega$ — характерной частоты звуковой волны. Можно прийти к этому же результату и с помощью таких рассуждений. Вспомним, что $W \sim pr^2$. Ясно, что радиус максимальной возмущенной области как раз и определяет длину волны звука λ. На границе возмущенной цилиндрической области $p \sim p_0$, значит $W \sim p_0 \lambda^2$, а $\lambda \sim (W/p_0)^{1/2}$. Скорость звука $s \sim (p_0/\rho)^{1/2}$, поэтому характерная частота есть $\omega \sim (s/\lambda) \sim p_0/(W\rho)^{1/2}$.

Проделайте сами численные оценки, принимая, что типичное значение W в молнии $\sim 10^5$ Дж/м.

191. Постукивать нужно, чтобы заставить частицы двигаться. Пока частицы находятся в покое, магнитные силы не могут преодолеть силы трения покоя (сухое трение). За счет намагничивания частицы в продольном направлении поле около ее концов увеличивается. Это создает условия для соединения частиц цепочкой.

192. Тороидальная катушка создает в центре такое же поле, как один виток с током. Иначе говоря, поле должно быть перпендикулярно к плоскости витка, и направление его можно найти по правилу буравчика. Стрелка развер-

ется в направлении магнитного поля, то есть перпендикулярно плоскости тороида.

193. Каждый виток трансформатора представляет собой маленькую «вторичную обмотку». Если виток замкнуть с соседним, то эта «вторичная обмотка» будет нагружена на очень малое сопротивление, по этому витку потечет большой ток, будет выделяться много тепла. В результате трансформатор выйдет из строя.

194. Рассмотрим одну четверть овала — участок AB (рис. 83). На этот участок действуют силы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ со стороны других частей овала и сила $\vec{F}_H$ со стороны магнитного поля. Условия равновесия участка AB есть $\vec{F}_H + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$. Силу $\vec{F}_H$ можно представить как сумму сил, действующих на малые участки длиной Δl_i: $\vec{F}_H = \Delta\vec{F}_1 + \Delta\vec{F}_2 + \ldots$. Сила $\Delta\vec{F}_i$ пропорциональна магнитному полю H, току I, текущему по проволоке, длине Δl_i участка и направлена перпендикулярно к направлению тока — для малого участка перпендикулярно к касательной, проведенной к центральной точке участка. Запишем теперь проекции силы $\Delta\vec{F}_i$ на направления векторов $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ (угол α_i — угол между вектором $\Delta\vec{F}_i$ и горизонталью на рис. 83);

$$\text{Пр}_A(\Delta\vec{F}_i) = kHI\Delta l_i \sin\alpha_i;$$

$$\text{Пр}_B(\Delta\vec{F}_i) = kHI\Delta l_i \cos\alpha_i.$$

Остается переписать условие равновесия в проекциях на направления $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$:

$$F_A = kHI\sum_i \Delta l_i \sin\alpha_i = kHI\,\frac{b}{2};$$

$$F_B = kHI\sum_i \Delta l_i \cos\alpha_i = kHI\,\frac{a}{2}.$$

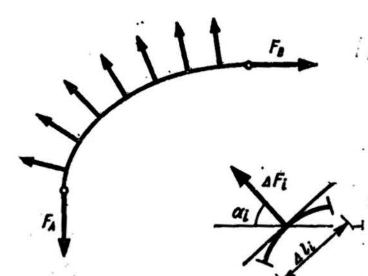
Отсюда следует, что искомое отношение $(F_A/F_B) = (b/a)$.

Приведем еще одно решение этой задачи, которое кажется очень поучительным. Рассмотрим моменты сил, действующих на овал, относительно его центра — точки O. Проведем для этого симметричные линии MN и PQ. Из рис. 84 видно, что моменты сил, обусловленных магнитным полем, в точности компенсируются: пара сил в точках M и N создает момент, направленный по часовой стрел-

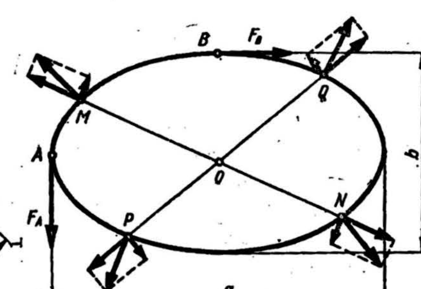
ке, а пара сил в точках P и Q — точно такой же момент, но против часовой стрелки. Если из овала вырезать его четверть, то надо приложить к точкам A и B силы точно такие же, какие на эти точки действовали в «неразрезанном» овале. При этом условии участок AB останется в равновесии. Условие отсутствия вращения вокруг точки O означает равенство моментов: $F_A a = F_B b$ то есть мы получили то же самое, что в предыдущем решении просто из условий симметрии и равновесия без всяких вычислений.

195. Будем считать разность уровней очень малой (слабое магнитное поле). Найдем силы, действующие на тонкий «шнур» тока вблизи поверхности. Очевидно, что это — сила тяжести P и сила, действующая со стороны магнитного поля (сила Лоренца) — F_M (рис. 85). Пусть сечение «шнура» равно ΔS. Тогда на «шнур» длиной l действует сила $F_M = \Delta I \cdot B \cdot l$. Здесь ΔI — ток через «шнур»: $\Delta I = I \times (\Delta S/S)$, S — сечение кюветы, перпендикулярное току, а I — полный ток. Сила тяжести $P = \rho g \cdot \Delta S \cdot l$. При установившейся форме поверхности сумма сил P и F_M должна быть направлена перпендикулярно поверхности жидкости, тогда $(F_M/P) = tg\,\alpha$ или $tg\,\alpha = IB/\rho g S$. Сила тока определяется из закона Ома: $I = \frac{U}{R} = \frac{\sigma U S}{l}$. Подставляя это значение I в предыдущую формулу, получим: $tg\,\alpha = (\sigma UB/\rho g l)$. Искомая разность уровней есть $\Delta h = d \times (\sigma UB/\rho g l)$.

196. За время Δt магнитный поток через контур меняется на $Blv\Delta t$, а значит, в проводнике индуцируется ЭДС — Blv и ток (Blv/R). Ток от батареи равен $E/(R + r)$. Суммарный ток есть поэтому: $\left(\frac{E}{R+r} \pm B\,\frac{lv}{R}\right)$. Направление



83



84

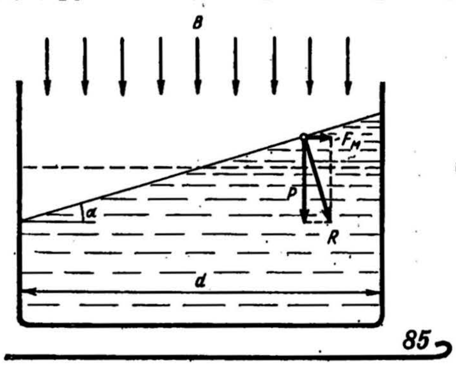
индукционного тока определяется правилом правой руки, а происхождение двух знаков в формуле для суммарного тока связано с взаимными направлениями индукционного и «батарейного» токов. Очевидно, что количество выделяющегося тепла есть теперь: $Q = \left(\frac{E}{R+r} \pm \frac{Blv}{R}\right)^2 Rt$.

Из этой формулы видно, что возможна ситуация, когда $Q = 0$.

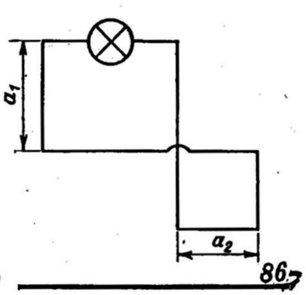
197. До перегибания сторон: $E_1 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\alpha_0 S$; E_1 — ЭДС индукции, S — площадь квадрата: $S = a^2$. Если два получившихся квадрата расположены так, как показано на рис. 86, то ЭДС получившихся контуров направлены в противоположные друг другу стороны и вычитаются.

ЭДС $E_2 = E_{21} - E_{22} = -\alpha_0 a_1^2 + \alpha_0 a_2^2$. Из геометрических соображений: $a_1 + a_2 = a$. Пусть $k = (a_1/a_2)$. Подставим в формулу для E_2 значения a_1 и a_2, выраженные через a и k: $a_1 = \frac{k}{1+k}a$; $a_2 = \frac{a}{1+k}$; $E_2 = -\alpha_0 a^2 \frac{(1-k^2)}{(1+k)^2}$. Тогда ток через лампочку изменится в $(E_2/E_1) = \frac{(1-k^2)}{(1+k)^2}$ раз. Если квадраты расположить так, как показано на рис. 87, то ЭДС будут складываться. В этом случае ток изменится в $\frac{(1+k^2)}{(1+k)^2}$ раз, то есть тоже уменьшится по величине.

198. Когда кольцо растягивается, налезая на конус, то при наличии магнитного поля поток магнитной индукции через кольцо будет увеличиваться. При этом в ртути индуцируется ток, который по правилу Ленца направлен так,



85



86

чтобы уменьшить изменение потока, то есть сжать кольцо. Следовательно, в отсутствие магнитного поля кольцо налезет глубже. Этот эффект не зависит от направления поля (вверх или вниз).

199. Пусть скорость падения кольца установилась. Тогда из закона сохранения энергии следует: $mg\Delta H = \frac{U^2}{R}\Delta t$. Здесь $\Delta H = v\Delta t$ — путь, пройденный кольцом за время Δt, U — ЭДС, наводимая в кольце, R — его сопротивление и m — масса. Величина ЭДС U пропорциональна скорости изменения магнитного потока через кольцо: $S(\Delta B/\Delta t) = S\alpha(\Delta H/\Delta t) = S\alpha v$. Параметры S и α постоянны, поэтому U пропорционально v. Заменим U на kv, k — некоторый постоянный коэффициент, а $(\Delta H/\Delta t)$ на v, тогда $mgR = k^2 v$. При изменении диаметра проволоки (при неизменной ее длине) масса кольца увеличивается пропорционально квадрату диаметра, а электрическое сопротивление R также пропорционально квадрату диаметра уменьшается. Ясно, что произведение mR, а вместе с ним и установившаяся скорость падения кольца v не изменяется.

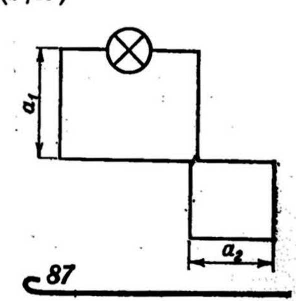
200. Будем считать, что среднее магнитное поле между цилиндром и соленоидом равно H_1, длина цилиндра d много меньше длины соленоида, а магнитное поле внутри соленоида вдали от цилиндра равно H_0. Тогда можно записать, во-первых, закон сохранения энергии, а во-вторых, закон сохранения магнитного потока:

$$kH_1^2\pi(R^2 - a^2)\,d - kH_0^2\pi R^2 d = \pi a^2 d\rho v^2/_2;$$
$$H_1\pi(R^2 - a^2) = H_0\pi R^2.$$

Исключая из этих уравнений поле H_1, мы получим выражение для скорости выброшенного цилиндрика:

$$v = H_0\left(\frac{2k}{\rho}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-(a^2/R^2)}}.$$

Неявные предположения, которые мы фактически сделали, таковы. Мы пренебрегли потерями, связанными с краевыми эффектами, и учли, что в обмотке соленоида и в самом цилиндре не выделяется тепло — их сопротивление равно нулю. Если рассмотреть предельный случай $(a/R) \ll 1$, то есть считать, что $H_0 \approx H_1$, то



87

из написанной формулы видно, что скорость становится независящей от размера цилиндра a.

201. Очевидно, что сила тяжести системы шар+стрелка уравновешена силой Архимеда. До включения тока в цепи на стрелку действует магнитное поле Земли, и она ориентирована вдоль магнитного меридиана. После включения тока появилось дополнительное магнитное поле тока, направленное вдоль оси стакана. Направление магнитного поля тока не совпадает с направлением земного поля, поэтому стрелка должна занять новое положение равновесия. Процесс ее установления вдоль направления суммарного магнитного поля будет носить колебательный характер. После выключения тока стрелка должна будет вернуться в конце концов в исходное положение равновесия. Процесс такого возвращения также будет носить колебательный характер. Затухание колебаний обусловлено вязкостью жидкости. Изменение сопротивления R должно приводить к изменению угла отклонения стрелки от первоначального направления. Попробуйте сами оценить период колебаний шарика, считая максимальный угол отклонения стрелки малым. Зависит ли период колебаний от величины сопротивления R? В приведенных рассуждениях мы молчаливо предполагали, что стрелка сделана из «мягкого» магнитного материала, другими словами, что отсутствует остаточное намагничивание. Опишите поведение шара со стрелкой в том случае, если остаточное намагничивание есть.

202. В первоначальном внешнем магнитном поле спица ориентирована вдоль результирующего поля, получающегося при сложении поля, создаваемого магнитом, и поля Земли. Если поле магнита по величине намного больше земного, то спица будет почти параллельна оси системы. После выключения магнита, создающего внешнее поле, в намотанной на внутренний сосуд обмотке появляется ЭДС индукции, которая «заставляет» течь по обмотке индукционный ток. В обычном металле этот ток быстро затухает, так как металл имеет сопротивление. Для рассматриваемого случая это не так — у нас сверхпроводящая обмотка, и пока металл находится при достаточно низкой температуре, сопротивление обмотки равно нулю. Незатухающий ток создает точно такое же магнитное поле, какое было раньше. Поэтому шарик колебаться не будет (сравните это с задачей 201).

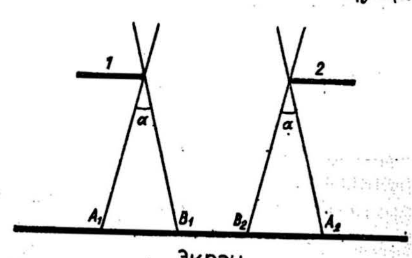
Такую же задачу можно рассмотреть и для случая, когда шарик сделан из металла. Проанализируйте сами случаи, когда сам шарик сверхпроводящий и несверхпроводящий. Учтите еще, что в зависимости от того, из какого материала сделана магнитная спица, она может обладать разным остаточным намагничиванием. Как это скажется на поведении системы после выключения внешнего магнитного поля? Еще один интересный вопрос таков. Пусть сам шарик сверхпроводящий, а обмотки на внутреннем сосуде нет. Будет ли шарик колебаться после выключения внешнего магнита в этом случае?

203. Солнце имеет конечный угловой размер, и края тени будут размыты. В каждую точку отрезков A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 88) попадают лучи лишь от части солнечного диска. Границы тени — точки B_1 и B_2 совпадут, как видно из рисунка, раньше, чем сблизятся предметы 1 и 2. Обычно участки A_1B_1 и A_2B_2 называют полутенями (часть света на них ведь все-таки попадает). Правильнее поэтому сказать, что **полутени** сливаются раньше, чем совпадают сами предметы.

204. Днем, когда в комнате не включено освещение, предметы, находящиеся в ней, освещены гораздо слабее, чем на улице. С улицы мы наблюдаем предметы, находящиеся в комнате, через занавеску, освещенность которой гораздо больше освещенности самих предметов. Из комнаты мы видим предметы, находящиеся на улице, через занавеску почти не освещенную (сторона занавески, обращенная в комнату, освещена слабо). Проанализируйте, что происходит вечером, когда в комнате горит свет.

205. Гром слышен дольше потому, что молния имеет значительные размеры, звук от удаленных ее «частей» запаздывает. Скорость же света так велика, что запаздывание его незаметно. Поэтому сверкание молнии мы ощущаем как одну вспышку.

206. Точка, диаметрально противоположная отверстию, освещена падающим извне лучом и рассеянным («диффузным») светом от других точек сферы. Остальные точки освещены только «диффузным» светом. Так как



88

отверстие очень мало, то освещенность, обусловленная «диффузным» светом, одинакова для всех точек сферы. В частности, такова же освещенность и отверстия изнутри. В равновесии световые потоки через отверстие извне и изнутри должны быть равны между собой, поэтому мы можем утверждать, что освещенность, создаваемая «диффузным» светом, равна освещенности, создаваемой падающим лучом. Отсюда следует, что освещенность точки, диаметрально противоположной отверстию, в два раза больше освещенности остальных точек сферы.

207. При «ударе» фотона о зеркальную часть шара угол падения равен углу отражения. Это означает, что изменяется проекция импульса фотона на направление радиуса, проведенного в точку удара, проекция же импульса на перпендикулярное радиусу направление остается неизменной. Это значит, что шар не закручивается при ударе частиц о зеркальную часть. Иное дело, когда фотон поглощается — шар получает закручивающий его импульс. Отсюда следует, что устойчивое положение равновесия шара — зеркальной стороной к Солнцу. Как только шар подставит часть черной поверхности Солнцу, удары фотонов об эту часть «загонят» ее на неосвещенную сторону. Следует отметить, что эффект, о котором идет речь, вообще говоря, довольно мал. Если одно из полушарий будет чуть массивнее другого — это гораздо больше повлияет на ориентацию спутника (подумайте, как именно?).

208. При прохождении через туман луч света испытывает преломление и отражение на большом числе случайно расположенных поверхностей капелек тумана. Это приводит к тому, что свет полностью рассеивается при прохождении достаточно толстого слоя тумана.

209. На первый взгляд количество воды в 1 см³ в облаке и на земле не должно сильно различаться, если идет дождь (почему?). Предположим, что это так и есть, пусть $V_{\text{воды}}$ — объем воды в 1 см³. Пусть радиус капель (вблизи земли или в облаке) равен r, тогда в 1 см³ будет $\left(V_{\text{воды}}/\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ капель. «Вырежем» вдоль луча зрения цилиндрик с поперечным сечением 1 см² и длиной L см. Каждая капля заслоняет площадь порядка ее поперечного сечения $\sim \pi r^2$, значит, капли в 1 см³ заслоняют площадь порядка $\pi r^2 \times \left(V_{\text{воды}}/\frac{4}{3}\pi r^3\right) \sim (V_{\text{воды}}/r)$ см². Капли во всем цилиндре заслонят в $\sim L$ раз большую площадь, то есть $\left(\frac{V_{\text{воды}}}{r}\right) \times \left(\frac{L\text{см}}{1\text{см}}\right)$. Пассажир практически ничего не увидит, если эта площадь как раз порядка 1 см². Напротив, если $\left(\frac{V_{\text{воды}}}{r}\right)\left(\frac{L\text{см}}{1\text{см}}\right) \ll 1$ см², видимость будет относительно хорошей. Можно переписать это неравенство так:

$r \gg (V_{\text{воды}}/1\text{см}^2)\cdot(L\text{см}/1\text{см})$.

Этому условию должен удовлетворять радиус капель r, чтобы были видны различные предметы на расстоянии L см. Различие видимости в облаке и у поверхности земли можно объяснить тем, что капли воды в облаке имеют меньшие размеры, чем капли дождя у поверхности земли. Для капель у земли написанное неравенство может быть выполнено, в то время как для капель в облаке нет. Приведенные рассуждения имеют, конечно, только качественный смысл, численную же оценку заслоненной каплями площади следует считать не вполне аккуратной. Это связано, во-первых, с тем, что несколько (и даже много) капель могут находиться на одной и той же прямой, параллельной оси выбранного нами цилиндра, а в этом случае они будут эффективно заслонять площадь, меньшую, чем мы оценили выше. Во-вторых, рассеяние световых лучей на капельках приводит к тому, что сами световые лучи в цилиндре не параллельны друг другу. Тем не менее можно считать, что предел видимости $L_{\text{макс.}}$ определяется по порядку величины соотношением: $L_{\text{макс.}} \lesssim \left(\frac{1\ \text{см}^3}{V_{\text{воды}}}\right) r$. Эту формулу совсем нетрудно проверить экспериментально во время дождя (подумайте как). Типичное значение радиуса капель в облаках $\sim 10^{-3}$ см, радиус дождевых капель у поверхности земли обычно $\sim 10^{-2}$ см. Зная это и задавая реальное значение $L_{\text{макс.}}$, можно оценить из написанной формулы количество воды в облаках или в дожде. Проделайте такие оценки сами.

210. Пусть пылинка находится на расстоянии R от Солнца. Сила светового давления зависит, очевидно, от потока света $q = (L/4\pi r^2)$ эрг/см² · сек; площади поперечного сечения пылинки $\sim \pi r^2$ (для простоты мы считаем ее сферической). Если пылинка далеко от Солнца, то естественно считать световые лучи, падающие на нее, параллельными. Кроме q и πr^2, в выражение, определяющее силу светового давления F_c, может входить только скорость света

216. В таблице $m \times n$ разрешается у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца изменить знак. Доказать, что несколькими такими заменами можно добиться того, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке будет неотрицательна.

217. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Доказать, что, повторив эту операцию достаточное число раз, можно сделать все данные числа равными.

218. В n стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно за конечное число шагов слить всю воду в один стакан?

219. По окружности написаны в произвольном порядке несколько плюсов и минусов, всего n штук. Затем в промежутке между одинаковыми знаками пишется плюс, между разными — минус, а первоначальные знаки стираются; с новым набором проделывается то же самое и т. д. Доказать, что если $n=2^k$, то из произвольного набора плюсов и минусов в конце концов получится набор из одних плюсов.

220. Доказать, что в любой бесконечной арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с цифры 1.

221. Разбить множество натуральных чисел на два подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию.

222. Доказать, что из 11 любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном количестве разрядов.

223. Найти все десятизначные числа, у которых первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая — количеству единиц и т. д., десятая — количеству девяток.

224. a — число, большее 2. Некто пишет на карточках числа a, a^2, ..., a^n (каждое на одной карточке). Потом часть карточек он кладет себе в правый карман, часть — в левый, а остальные выбрасывает. Доказать, что сумма чисел на карточках в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

225. Из прямоугольного листа бумаги вырезать ромб наибольшей площади.

226. Даны треугольная и четырехугольная пирамиды, все ребра которых равны единице. Разрезать эти пирамиды на конечное число кусков, из которых можно сложить куб.

227. Двое играют в такую игру: из кучки, где имеется 25 спичек, берут по очереди — каждый себе — одну, две или три спички. Выигрывает тот, у которого в конце будет четное число спичек. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или противник?

228. На бесконечной клетчатой бумаге двое играют в крестики-нолики по следующим правилам. Первым ходом начинающий ставит на произвольное поле крестик, а второй два нулика на любые свободные поля. Вторым и каждым последующим ходом начинающий ставит крестик на любое свободное поле, соседнее с полем, на котором стоит крестик (границы полей имеют хотя бы одну общую точку), а второй ставит по два нулика на любые свободные поля. Может ли начинающий поставить сколь угодно много крестиков при любой игре другого?

229. На плоскости дана сетка из шестиугольников (пчелиные соты). Двое играют на ней в крестики-нолики по следующим правилам. Первым ходом начинающий ставит на произвольное поле крестик, а второй ставит два нулика на любые свободные поля. Вторым и каждым следующим ходом начинающий ставит крестик на любое свободное поле, соседнее с одним из полей, на которых стоят крестики. Второй каждым своим ходом ставит два нулика на свободные поля. Второй хочет, чтобы было поставлено как можно меньше крестиков. Доказать, что при правильной игре второго начинающий поставит не более восьми крестиков.

230. Стрелки некоторых часов движутся следующим образом: от нуля часов до часу как в обычных часах, с часу до двух часовая стрелка движется со скоростью минутной, а минутная со скоростью часовой. С двух до трех они движутся с нормальными скоростями, далее опять меняются скоростями и т. д. Указать все моменты времени, когда эти часы показывают верное время.

231. На линии Москва—Дмитров движется n поездов, интервал между поездами в каждую сторону равен 10 минутам. В 17 часов со станции Долгопрудная, расположенной вдвое дальше от Дмитрова, чем от Москвы, отправляется поезд на Дмитров. Когда отправится ближайший поезд на Москву?

232. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа. Число a_k назовем m-лидером, если при некотором p

$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+p-1} \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant m$. Доказать, что сумма всех m-лидеров неотрицательна.

233. Дан звездный многоугольник (многоугольник называется звездным, если внутри него имеется точка, из которой видны все его точки). Берутся две его смежные стороны, угол между которыми больше развернутого, и на них строится параллелограмм. Эта же операция повторяется с полученным многоугольником и т. д. Доказать, что через конечное число шагов получится выпуклый многоугольник.

234. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Доказать, что если среди них нет трех таких, что все они должны драться друг с другом, то найдется четверо мушкетеров, не поссорившихся между собой.

235. В некоторой стране между любыми двумя городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение только в одном направлении. Из каждого города можно выехать в какой-нибудь другой. Город называется «легкодоступным», если из любого другого города можно попасть в него либо непосредственно, либо через один промежуточный город. Доказать, что существует не менее трех легкодоступных городов.

236. В алфавите некоторого африканского языка n букв. Чтобы передавать телеграммы на этом языке, нужно составить «азбуку Морзе», то есть поставить каждой букве в соответствие некоторую последовательность точек и тире. Доказать, что обязательно найдется такая буква, для которой соответствующая последовательность точек и тире состоит не менее чем из $(\log_2 n - 1)$ знаков.

237. Имеется 11 мешков, в каждом из которых находится неограниченное количество монет, и весы со стрелкой. Каково наименьшее число взвешиваний, за которое можно выделить мешок с фальшивыми монетами? Известно только, что фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих.

238. В клетки квадратной таблицы $n \times n$ записаны числа, причем известно, что сумма $2n-1$ чисел, составляющих произвольный крест (то есть заполняющих некоторую строку и некоторый столбец), равна нулю. Докажите, что все числа в таблице равны нулю.

239. По кругу выписаны p плюсов и q минусов. Пусть

a — число рядом стоящих плюсов, b — число рядом стоящих минусов. Доказать, что $p - q = a - b$.

240. Стороны выпуклого n-угольника последовательно пронумерованы числами от 1 до n. Внутри этого n-угольника берется точка и соединяется с каждой вершиной отрезком. Нужно пронумеровать эти отрезки числами от 1 до n так, чтобы сумма номеров сторон для всех n треугольников, на которые разбит многоугольник, была одна и та же. Доказать, что это можно сделать тогда и только тогда, когда n нечетно.

241. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Доказать, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

242. На плоскости дано 100 точек. Доказать, что их можно заключить в несколько непересекающихся кругов, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. Расстояние между двумя непересекающимися кругами — это расстояние между их ближайшими точками.

243. На круглом столе радиуса R расположены без наложения n круглых монет радиуса r так, что больше нельзя положить ни одной монеты. Доказать систему неравенств:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{R}{r}\right) - 1\right] < \sqrt{n} < \left(\frac{R}{r}\right).$$

244. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке A. Радиус круга 10 км, скорость самолета — 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A выпускается ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой A. Через какое время ракета достигнет самолета?

245. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает некоторый отрезок поверхности моря, начинающийся у острова. Прожектор вращается равномерно вокруг вертикальной оси так, что конец его луча перемещается со скоростью v. Доказать, что катер, имеющий максимальную скорость $\frac{v}{8}$, не сможет незаметно (не попадая в луч прожектора) подойти к острову.

246. Дан квадрат. Две вершины равностороннего треугольника находятся на противоположных сторонах квадрата. Найти множество третьих вершин.

247. Диаметр круга разделен на n равных частей. На окружности взята точка M. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до точек деления не зависит от выбора точки M на окружности.

248. а) Из медиан треугольника со сторонами a, b, c сложен треугольник. Доказать, что этот треугольник остроугольный, если $a^2+b^2<5c^2$; прямоугольный, если $a^2+b^2=5c^2$, и тупоугольный, если $a^2+b^2>5c^2$.

б) Отрезки m_1, m_2, m_3 $(m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3)$ являются медианами некоторого треугольника. Доказать, что этот треугольник остроугольный, если $m_1^2+m_2^2<5m_3^2$, прямоугольный, если $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$, и тупоугольный, если $m_1^2+m_2^2>5m_3^2$.

249. В круг радиуса 1 вписан квадрат, в него — круг, в него — правильный 8-угольник, в него — круг, в него — правильный 16-угольник и т. д. Доказать, что радиусы всех кругов больше $2/\pi$.

250. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площадью 1 см^2?

251. Существует ли тетраэдр, у которого каждое ребро является стороной тупого плоского угла?

252. Даны трехгранный угол и на одной из его граней точка A. Найти кратчайший замкнутый путь на поверхности трехгранного угла, пересекающий все ребра и проходящий через A.

253. В кубе расположено выпуклое тело, обладающее тем свойством, что проекция его на каждую грань куба совпадает с этой гранью. Доказать, что объем тела не меньше одной трети объема куба.

Задачи по физике

254. В лифте, движущемся с постоянной скоростью, в некоторый момент времени на высоте h от пола отпущен шарик. В тот же момент лифт получает ускорение a вверх, которое длится t секунд, после чего ускорение лифта меняет знак. Еще через t секунд ускорение снимается, а шарик падает на пол. Определить, на какую высоту относительно пола подскочит шарик. Удар считать абсолютно упругим.

255. Детская игрушка вертолет запущена под определенным углом к горизонту. Объяснить, почему вертолет взмывает вверх, увеличивая этот угол.

256. Какую работу совершает человек при подъеме на высоту H по движущемуся вниз эскалатору метро? Угол наклона эскалатора, скорости эскалатора и человека относительно земли, а также массу человека считать известными.

257. В длинном коридоре учреждения перед началом рабочего дня положили ковровую дорожку. Кто-то поставил на одном из ее концов ящик. Где будет находиться дорожка после окончания рабочего дня, если ее не поправлять и ящик не переставлять?

258. Цилиндр без дна радиуса a стоит на горизонтальном столе (кусок большой трубы). В цилиндре лежат два шара, причем радиус каждого из них b, $a>b>a/2$. При каком минимальном отношении m/M, где m—масса шара, а M — масса цилиндра, край цилиндра оторвется от стола? Силы трения отсутствуют, а стенки цилиндра достаточно тонкие.

259. К двум точкам прикреплены цепочка длины l и концы двух стержней, сумма длин которых равна также l, а свободные концы шарнирно связаны. Какой из центров тяжести будет ниже — цепочки или стержней?

260. 19 одинаковых шестеренок сцеплены в кольцо. Оси шестеренок закреплены. На какой наибольший угол можно повернуть одну из шестеренок, если каждую из них при неподвижной соседней можно повернуть за счет неточности сцепления на угол α?

261. На горизонтальной абсолютно гладкой поверхности находятся три шара: стальной, свинцовый и резиновый. Их центры лежат на одной прямой, а массы равны m. Стальному шару сообщается скорость v по направлению к резиновому. Найти скорость резинового шара после всех соударений. Все соударения центральные.

262. Два одинаковых абсолютно упругих шарика связаны нерастяжимой нитью длины l. Первый шарик отпускают, а когда нить натягивается, отпускают и второй. Определить, какое расстояние шарики пролетят до 11-го столкновения.

263. Упругий шарик влетает в пространство между двумя параллельными наклонными плоскостями. В мо-

мент первого удара о верхнюю плоскость скорость шарика горизонтальна и равна v_0. Найти расстояние между точками n-го и $(n+1)$-го соударений шарика с верхней плоскостью. Расстояние между плоскостями равно h, все удары абсолютно упругие.

264. По рельсам движутся параллельно друг другу две одинаковые тележки, на которых сидят одинаковые дворники. На тележки падает снег. Сначала тележки имели одинаковые скорости. В некоторый момент дворник на первой тележке начинает сметать снег перпендикулярно направлению движения тележки. Какая тележка будет двигаться быстрее?

265. Альпинист хочет взобраться на пик, имеющий форму конуса, набросив на его вершину веревочную петлю. Угол конуса равен α. Сможет ли альпинист это сделать, если трение веревки о конус пренебрежимо мало (пик гладкий — покрыт льдом)?

266. На боковой стене вагона электрички, идущей из Москвы в Долгопрудную и обратно, висят маятниковые часы. В момент отправления из Москвы часы в вагоне и часы на здании Савеловского вокзала показывали одно и то же время. Как будут отличаться показания часов, когда электричка вернется в Москву?

267. Объясните, почему, приседая на качелях в момент наибольшего отклонения от положения равновесия и выпрямляясь при прохождении положения равновесия, человек увеличивает амплитуду колебаний.

268. К пружине, массой и первоначальной длиной которой можно пренебречь, подвешивают груз массы m. Затем на середину уже растянутой пружины подвешивают еще один груз, также массы m. Определить, во сколько раз увеличится при этом длина пружины.

269. Шарик подвешен на нити длины l. С какой скоростью v надо потянуть точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот в вертикальной плоскости?

270. Легкая стеклянная трубка длины l и поперечного сечения S, запаянная с одного конца, расположена горизонтально в резервуаре с ртутью вблизи его поверхности. Какая минимальная работа совершается при перемещении этой трубки в вертикальное положение, в котором она касается открытым концом поверхности ртути?

271. Что будет происходить с параллельными стеклянными пластинками, находящимися близко друг от друга, если они погружены: а) в воду, б) в ртуть, в) в воду, но одна из пластин покрыта парафином? Концы пластин выступают из жидкости, а сами пластины расположены вертикально.

272. В кабине космического корабля проделывается такой опыт. В длинный тонкий капилляр, постепенно сужающийся к концу, со стороны широкого конца помещается без начальной скорости капля воды массы m. Максимальный внутренний диаметр капилляра $2R$. Найти условие, при котором вода вытечет из капилляра. В какую сторону и с какой скоростью будет двигаться вода при выполнении этого условия? Силами сопротивления пренебречь, смачивание полное.

273. Бутылку бьют дном о стенку. Почему в том случае, когда бутылка полна воды, пробка не вылетает, а когда в бутылке есть вода и воздух — пробка вылетает из бутылки?

274. На плите греется чайник. Закипит ли он быстрее, если в него добавить горячей воды?

275. В далекой галактике вспыхнула Сверхновая. Ее радиус непрерывно увеличивается со скоростью v. Учитывая, что скорость света конечна, найти скорость изменения углового размера Сверхновой.

276. В сосуд с водой погружается на некоторую глубину свинцовый шар на подставке. Представим себе, что вода лишь слегка покрывает шар. Оцените, можно ли наблюдать искажения горизонтальной поверхности воды, обусловленные гравитационным полем шара.

277. Почему пассажира в электричке иногда отбрасывает назад, а не вперед во время полной остановки?

278. Из окна вагона пассажир следит за дымовой трубой. Все предметы кажутся ему бегущими. Может ли дымовая труба «обгонять» поезд?

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Редактор Н. ФЕОКТИСТОВА
Художник Т. ДОБРОВОЛЬНОВА
Худож. редактор М. ГУСЕВА
Техн. редактор Т. САМСОНОВА
Корректор В. КАНОЧКИНА

А 08 708. Индекс заказа 76 708. Сдано в набор 27/IX 1976 г. Подписано к печати 26/V 1977 г. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 1. Бум. л. 2,5. Печ. л. 5,0. Усл. печ. л. 8,40. Уч.-изд. л. 8,57. Тираж 150 000 экз. Издательство «Знание». 101 835, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Заказ 1497. Цена 30 коп.
Киевская книжная фабрика Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, ул. Воровского, 24.