

UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički fakultet

Mag AS. 26

Zlatko Čatović

PLANETSKO KRETANJE U ROSENOVOJ BIMETRIČKOJ TEORIJI GRAVITACIJE

magistarski rad

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Kraj. Broj 26/1 Datum 23.11.1990.

Beograd, 1990

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Broj 26/1 Datum 23. 11. 1990

Sadržaj

Uvod	1
§1 Problem kretanja i gravitacija	
1.1 Uvod	2
1.2 Kretanje u klasičnoj teoriji	2
1.3 Kretanje u OTR i BTG	3
§2 Neka rešenja OTR i BTG	
§3 Geodezijske linije u Rosenovom sferno-simetričnom rešenju	
3.1 Uvod	7
3.2 Jednačine kretanja	7
3.3 Radijalni pad	9
3.4 Kvalitativna analiza jednačina geodezijskih linija	9
3.5 Kružne orbite	11
3.6 Svetlosne geodezijske	12
§4 Jednačine kretanja u prvoj aproksimaciji	
4.1 Uvod	14
4.2 Jednačine kretanja	14
4.3 Približni izraz za pomeranje pericentera	15
4.4 Približni izraz za "savijanje" putanje svetlosnog zraka	17
§5 Orbite u nestatičkom rešenju	
5.1 Uvod	19
5.2 Jednačine kretanja	19
5.3 Veza sa statičkim slučajem	20
Zaključak	23

Uvod

Problem kretanja makroskopskih tela je kardinalni problem svake teorije gravitacije. Otprilike ovim rečima T. Damour započinje svoju lekciju, pod naslovom "Problemi kretanja u Newtonovoj i Einsteinovoj teoriji gravitacije", u monografiji posvećenoj tri stotoj godišnjici štampanja Newtonovih "Principia ...". Sa druge strane, činjenica da u Rosenovoj bimetričkoj teoriji gravitacije (BTG) problem kretanja nije detaljno ispitan, odredila je zapravo temu ovog magistarskog rada. Kako se u relativističkim teorijama problem kretanja ne može "linearno" razdvojiti od problema određivanja gravitacionog polja (kao što je to slučaj u klasičnoj teoriji), to će predmet ispitivanja biti zapravo kretanje probnih tela (jer se u tom slučaju jednačine kretanja mogu odvojiti od jednačina polja, ali ne kao nezavisni element teorije (Fock V. A., 1979)) u dve metrike-rešenja BTG.

Efektivno biće razmotrene neke osobine geodezijskih linija u pomenuta dva rešenja i te osobine upoređene sa analognim osobinama Schwarzschildovog rešenja OTR (pomeranje pericentra, "savijanje" putanje svetlosnog zraka,...). Metodi koji se koriste su poznati kao kvalitativna analiza i numerička integracija diferencijalnih jednačina geodezijskih linija. Treba još napomenuti da planetsko kretanje, pomenuto u naslovu, predstavlja zapravo geodezijsko kretanje (koje je našlo primenu u teoriji planetskog kretanja), kako je to u literaturi već usvojeno.

U prvom paragrafu se razmatra problem kretanja sa principijelnog stanovišta. Drugi paragraf govori o izboru rešenja BTG u kojima će se razmatrati geodezijsko kretanje. Treći paragraf daje kvalitativnu analizu geodezijskih orbita statičkog sferno simetričnog rešenja u BTG (Rosen N., 1975) uz upoređenje sa Schwarzschildovim rešenjem OTR. Ujedno u ovom paragrafu su predstavljeni razni oblici relativističkih orbita dobijenih numeričkom integracijom. U četvrtom paragrafu se izvode približni izrazi za pomeranje pericentra i "savijanje" putanje svetlosnog zraka. Peti paragraf analizira jedno nestatičko rešenje BTG (Lukačević I., 1986). U šestom paragrafu se analiziraju "majorizovane" jednačine (u pomenutom nestatičkom rešenju) i neke osobine geodezijskih u "slabom" gravitacionom polju.

§1. PROBLEM KRETANJA I GRAVITACIJA

1.1 Uvod

U klasičnoj teoriji problem kretanja makroskopskih tela je sa logičke, dakle principelne tačke gledišta, rešen na prilično jednostavan način. Naime, u toj teoriji su, modela prostor-vreme (kao arene u kojoj se kretanje odvija) i model za gravitaciju, razdvojeni (tj. nezavisni). Sa druge strane Newtonova mehanika precizno definiše veze između kinematičkih i dinamičkih veličina koje opisuju kretanje, tako da se nebesko-mehanički problemi u klasičnoj teoriji "lako" formulišu.

Položaji tela su zapravo njihove koordinate u trodimenzionom Euklidskom prostoru (zavise od vremena), a njihovi vremenski izvodi su povezani sa gravitacionom silom (koja je dinamička veličina i zavisi od položaja) preko principa Newtonove mehanike.

Za razliku od Newtonove teorije koja se bazira na pojmovima apsolutnog prostora i vremena u OTR su ovi pojmovi mnogo neposrednije vezani sa gravitacijom. Gravitacija i geometrija su i formalno izjednačeni u OTR (slično i u BTG), tj. opisani su istom matematičkom veličinom, osnovnim metričkim tenzorom Riemannske četvorodimenzionalne mnogostrukosti (prostor-vremena). Time je rešen problem prostiranja gravitacionog dejstva na daljinu. Po klasičnoj teoriji gravitaciono dejstvo se prostire trenutno što nije u skladu sa specijalnom teorijom relativnosti.

1.2 Kretanje u klasičnoj teoriji

Klasična (Newtonova) teorija gravitacije spada u grupu takozvanih skalarnih teorija, jer je gravitaciono dejstvo opisano jednim skalarom-gravitacionim potencijalom. Gravitacioni potencijal (u oznaci U) zadovoljava Poissonovu jednačinu:

$$\nabla^2 U = 4\pi \rho, \quad (1.2.1)$$

gde je ρ gustina (raspodela) izvora gravitacionog polja. Bitno svojstvo klasične teorije je njena linearnost, koja sledi iz jednačine (1.2.1). Efektivno, to znači da svaka dva nezavisna rešenja jednačine (1.2.1) (dva gravitaciona potencijala) u linearnoj kombinaciji predstavljaju takođe rešenje te jednačine. Gradijent gravitacionog potencijala U predstavlja gravitacionu silu koja deluje na određenu materijalnu tačku. Dalje, uz pomoć drugog Newtonovog principa, kretanje materijalne tačke mase m pod dejstvom sile \vec{F} je opisano jednačinom:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla U, \quad (1.2.2)$$

gde je \vec{r} vektor položaja pomenute tačke. Sada je jasnije zašto se u klasičnoj teoriji ebesko-mehanički problemi "lako" formulišu. U slučaju više gravitacionih sila koje deluju a uočenu materijalnu tačku, rezultujuća sila jednaka je vektorskom zbiru pojedinačnih sila. Sa aspekta rešivosti diferencijalnih jednačina kretanja, stvari stoje sasvim drugačije u klasičnoj teoriji. Naime, eksplicitno je rešen problem dva tela (što podrazumeva da je rešenje diferencijalne jednačine tipa (1.1.2) može izraziti preko elementarnih funkcija). Problem tri tela je matematički formalno rešen (tj. rešenje se može izraziti preko konvergentnih redova (Sigel C. L., 1956)), ali je to rešenje toliko nekomforno da je praktično nepotrebno (Dubošin G. N., 1964). Što se problema četiri i više tela tiče, nema opštih rešenja, a često se razmatraju posebni slučajevi.

1.3 Kretanje u OTR i BTG

OTR i BTG su tenzorske teorije gravitacije. U njima je gravitaciono dejstvo opisano metričkim tenzorom Riemannske četvorodimenzione mnogostrukosti. Isti tenzor ujedno određuje i geometrijske osobine pomenute mnogostrukosti. Taj tenzor mora da zadovoljava Bianchievu identičnost koja predstavlja algebarski identitet. Sa druge strane poznato je (iz specijalne teorije relativnosti) da je tenzor energije-impulsa kovarijantno konstantan (što se najčešće interpretira kao relativistički zakon održanja), pa logično sledi zaključak da $g_{\alpha\beta}$ u OTR treba da zadovoljava relaciju:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.3.1)$$

gde je $T_{\alpha\beta}$ pomenuti tenzor energije-impulsa, a $R_{\alpha\beta}$ i R Riemannov tenzor i Riemannova krivina respektivno. Jednačine (1.3.1) predstavljaju sistem hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina (drugog reda) gravitacionog polja u OTR. Ima ih deset nezavisnih (zbog simetrije $g_{\alpha\beta}$) i nelinearne su (u smislu da linearna kombinacija dva nezavisna rešenja ne mora da bude rešenje).

Kada se jednom odredi neko rešenje jednačina (1.3.1), tj. nađe metrika $g_{\alpha\beta}$, učinjen je prvi korak u rešavanju problema kretanja probnog tela (tj. tela čija masa ne utiče na gravitaciono polje). Naime, probna tela se kreću po ekstremalnim (geodezijskim) linijama. Ovo vrđenje nije nezavisni element relativističke teorije gravitacije, već je posledica jednačina gravitacionog polja (Fock V. A., 1979). Dakle jednačine kretanja probnog tela su oblika:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad (1.3.2)$$

gde su $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ Chrstoffelovi simboli druge vrste, a ds "diferencijalno rastojanje" u prostoru-vremenu, odnosno parametar koji se najčešće naziva sopstveno vreme.

U BTG situacija je slična ovoj u OTR. Jednačine polja (Rosen N., 1977) su oblika :

$$K_{\alpha\beta} \equiv N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -8\pi\kappa T_{\alpha\beta}, \quad (1.3.3)$$

gde je $N_{\alpha\beta}$ tenzor koji zavisi od parcijalnih izvoda (drugih i prvih) metričkog tenzora $g_{\alpha\beta}$ po koordinatama, a κ je odnos $\frac{g}{\gamma}$. Bitno je napomenuti da je radna pretpostavka u BTG da se na prostorno-vremensku mnogostrukost uvode dve metrike, od kojih se za jednu zahteva da

opisuje ravan prostor Minkowskog, a druga predstavlja Riemannsku metriku koja zadovoljava jednačine (1.3.3). Sa druge strane u BTG uslovi konzervacije jednačine (1.3.3) su posledica posebnog uslova ekstremalnosti tenzora $T_{\alpha\beta}$ (divergencija $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$), a ne nekih algebarskih osobina tenzora koji je sačinjavaju kao što je to bio slučaj u OTR (Bianchieva identičnost). Kao posledica, dobija se da je prva metrika na prostorno-vremenskoj mnogostrukosti zapravo ravan prostor Minkowskog. Metrikom $g_{\alpha\beta}$ je zapravo opisana gravitacija kao i u OTR.

Problem kretanja probnih tela se rešava na isti način kao i u OTR, tj. probno telo se kreće po geodezijskoj liniji. Taj princip je i osnovna pretpostavka u daljem radu.

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

§2. NEKA REŠENJA OTR I BTG

Svakako najpoznatije rešenje jednačina gravitacionog polja OTR je Schwarzschildovo rešenje (Schwarzschild K., 1916). Ta metrika je sferno-simetrična i u standardnim koordinatama ima oblik:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.1)$$

Schwarzschildovo rešenje je detaljno ispitano (vidi npr. Chandrasekhar S., 1983), a i neki eksperimentalni testovi OTR se vezuju za ovo rešenje (pomeranje perihela Merkurove putanje, "savijanje" putanje svetlosnog zraka u okolini Sunca, ...).

Sa druge strane najpoznatije rešenje jednačina polja u BTG je dao sam Rosen (Rosen N., 1977). To rešenje u izotropnim koordinatama ima oblik:

$$ds^2 = -e^{-2M/r} dt^2 + e^{2M/r} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.2)$$

Ako se metrika (2.2) uporedi sa Schwarzschildovom metrikom u izotropnoj formi¹:

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^2} d\tilde{t}^2 + \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^4 \left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 + \tilde{r}^2 \sin^2\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2\right), \quad (2.3)$$

vidi se da se član uz $d\tilde{t}^2$ poklapa sa odgovarajućim članom u (2.2) do drugog reda veličine, dok se članovi uz "prostorne" delove poklapaju do prvog reda veličine. Iz ove činjenice sam Rosen je zaključio da se dva rešenja (Schwarzschildovo iz OTR i njegovo iz BTG) slažu sa do tada poznatim eksperimentalnim testovima teorije relativnosti. Međutim, detaljna analiza geodezijskih linija u metrici (2.2) i upoređenje sa odgovarajućim rezultatima u Schwarzschildovom rešenju nije sprovedena. To je bio jedan od motiva da se u ovom radu analizira kretanje probnog tela (geodezijske linije) u Rosenovom sferno-simetričnom i statičkom rešenju (§3.).

Nedavno je pokazano (Lukačević I., 1986) da konformno vezane metrike (u BTG) zadovoljavaju jednačine gravitacionog polja ukoliko je konformni faktor oblika $e^{2\Phi}$, gde je Φ rešenje D'Alembertove jednačine:

¹ Izotropne koordinate su sa standardnim koordinatama vezane sledećom transformacijom:

$$r = \tilde{r}\left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^2, \quad t = \tilde{t}, \theta = \tilde{\theta}, \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Neki autori (npr. Green R., 1985) izotropne koordinate smatraju posebno pogodnim za razmatranje astronomskih pojava.

$$\square\Phi = 0, \quad (2.4)$$

za ravan prostor Minkowskog. Dakle, ako se izabere rešenje jednačine (2.2) tada je i metrika:

$$ds^2 = e^{2\Phi} \left[-e^{-2M/r} dt^2 + e^{2M/r} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (2.5)$$

rešenje Rosenovih jednačina polja. Poznato je da se rešenje D'Alembertove jednačine u opštem obliku može izraziti preko Besselovih funkcija. U tom se rešenju pojavljuju trigonometrijski redovi, a bitno je napomenuti da svako rešenje jednačine (2.4) zavisi eksplicitno od vremena. To znači da je svaka metrika tipa (2.5) nestatička. Međutim, zbog sferne simetrije² metrike (2.2), u ovom radu je uzeto jedno rešenje jednačine (2.4) koje zavisi samo od r i t i ima oblik (Synge J., 1955):

$$\Phi = \frac{K}{r} \sin(\omega r) \cos(\omega t), \quad (2.6)$$

gde su K i ω konstante integracije. Na taj način je osobina sferna simetrije očuvana, a rešenje (2.6) zbog prigušene periodičnosti dobro aproksimira opšte rešenje. U §6. biće detaljnije ispitane geodezijske linije u nestatičkoj metrici oblika (2.5).

² Za orbite u ekvatorskoj hiperravni $\theta = \frac{\pi}{2}$, metrika ne zavisi od φ i θ .

§3. GEODEZIJSKE LINIJE U ROZENOVOM SFERNO SIMETRIČNOM REŠENJU

3.1 Uvod

Kao što je već bilo naglašeno, problem kretanja (tj. određivanja putanja tela) u klasičnoj teoriji (Newtonova mehanika + Newtonova gravitacija) i relativističkim teorijama gravitacije (Einstein, Rosen, ...) se rešava na principijelno različit način. Sa druge strane, u slučaju problema kretanja tzv. probnih tela (njihovo gravitaciono polje je zanemarljivo u poredjenju sa gravitacionim poljem u kome se kreću), klasična teorija i OTR daju vrlo slične rezultate. U ovom poglavlju biće upoređeni rezultati, u vezi sa kretanjem probnih tela, koje daje sferno-simetrično i statičko rešenje Rosenovih jednačina gravitacionog polja sa rezultatima poznatim iz Schwarzschildovog rešenja OTR.

3.2 Jednačine kretanja

Jednačine kretanja su zapravo jednačine geodezijskih linija, kako je to već naglašeno u prethodnom paragrafu. Najjednostavniji način da se te jednačine (za metriku (2.11)) izvedu je varijacioni princip (Lagrangeove jednačine). Lagrangeova funkcija je oblika:

$$L \equiv -e^{-2M/r} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + e^{2M/r} \left[\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] = -m^2, \quad (3.2.1)$$

gde je λ neki afini parametar po kome se vrši diferenciranje. Veličina m se interpretira kao masa probnog tela (sopstveno vreme τ i parametar λ su vezani preko m ; $\tau = m\lambda$). Lagrangeova funkcija (3.2.1) je napisana u obliku u kome je izvršena tzv. geometrizacija jedinica ($G = C = 1$), što predstavlja izbor oblika pogodnog za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina geodezijskih linija. U slučaju $m \neq 0$ Lagrangeova funkcija (3.2.1) opisuje tzv. vremenske geodezijske (po geodezijskom principu to su putanje probnih tela), a svetlosne geodezijske ($m = 0$, putanje svetlosnih zraka) se obično ispituju posebno. Lagrangeove jednačine za koordinate t, φ, θ su:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^{-2M/r} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 e^{2M/r} \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 e^{2M/r} \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2, \quad (3.2.4)$$

respektivno. Umesto jednačine za r pogodno je koristiti tzv. geodezijski integral (koji predstavlja jedan algebarski integral Lagrangeovih jednačina, bez obzira na oblik metričke $g_{\alpha\beta}$), a koji je zapravo izražen jednačinom (3.2.1). Jednačine (3.2.2) i (3.2.3) su zapravo svedene na oblik prvih integrala i to integrala energije i integrala ugaonog momenta respektivno. Sa druge strane, iz jednačine (3.2.4) se vidi da ako se čestica u početnom trenutku nalazi u ekvatorskoj hiperravni ($\theta = \frac{\pi}{2}$) i početna brzina joj leži u toj hiperravni ($\dot{\theta} = 0$), tada ona sve vreme ostaje u istoj hiperravni. Dakle jedna od konačnih jednačina kretanja je $\theta = \frac{\pi}{2}$. Posle integracije jednačine (3.2.2) i (3.2.3) dobijaju oblik:

$$e^{-2M/r} \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (3.2.5)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} e^{2M/r} = l. \quad (3.2.6)$$

U slučaju $m \neq 0$ (posebno se ispituje slučaj $m = 0$) pogodno je renormalizovati prve integrale E i l sa

$$\tilde{E} = \frac{E}{m} \quad i \quad \tilde{l} = \frac{l}{m}, \quad (3.2.7)$$

Tada, ako se za parametar uzme sopstveno vreme τ jednačine geodezijskih mogu da se napišu u obliku:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \tilde{E}^2 - e^{-2M/r} \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} e^{-2M/r} \right), \quad (3.2.8)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}}{r^2} e^{-2M/r}, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \tilde{E} e^{2M/r}. \quad (3.2.10)$$

Analogni izrazi u Schwarzschildovom rešenju OTR su:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \right), \quad (3.2.11)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}}{r^2}, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - 2M/r}, \quad (3.2.13)$$

a mogu se naći u svakom udžbeniku OTR (npr. Misner C. W., Thorne S. K., Wheeler A. J., 1973).

3.3 Radijalni pad

Najjednostavniji slučaj geodezijskih linija predstavlja tzv. radijalni pad ($\varphi = \varphi_0, \tilde{l} = 0$). Tada jednačine (3.2.8) – (3.2.10) dobijaju sledeći oblik:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - e^{-2M/r} \quad (3.3.1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \tilde{E}e^{2M/r}. \quad (3.3.3)$$

Iz jednačine (3.3.1) se vidi da kritično rastojanje, definisano sa:

$$R = -\frac{M}{\ln \tilde{E}}; \quad \tilde{E} < 1 \quad (3.3.4)$$

karakteriše radijalni pad za različite energetske nivoe. R zapravo razdvaja oblast u kojoj je kretanje moguće ($r \leq R$) od oblasti u kojoj kretanje nije moguće ($r > R$). Kritični parametar u Schwarzschildovom rešenju ima oblik:

$$R = \frac{2M}{1 - \tilde{E}^2}. \quad (3.3.5)$$

Jednačine (3.3.1) i (3.3.3) izražena preko novog parametra imaju oblik:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C - C\frac{R}{r}, \quad (3.3.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = e^{M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\right)}. \quad (3.3.7)$$

Konstanta C je jednaka $e^{2M/R}$. Numeričkom integracijom jednačina (3.3.6) i (3.3.7) se dobija zavisnost radijusa r od sopstvenog i koordinatnog vremena. Na slici (3.1) je prikazano i kako ta ista zavisnost izgleda u Schwarzschildovom rešenju OTR. Za "udaljenog" posmatrača probno telo nikada ne dostiže centralni (fizički) singularitet. Tu istu osobinu ima i Schwarzschildovo rešenje ali na rastojanju $r = 2M$ od centralnog singulariteta.

3.4 Kvalitativna analiza jednačina geodezijskih linija

U ovom odeljku biće razmotreno "neradijalno" kretanje ($\tilde{l} \neq 0$). Poznato je da se jednačina (3.2.11) može svesti na oblik eliptičkog integrala (Chandrasekhar S., 1983.). Što

se jednačine (3.2.8) tiče, vidi se da je njena desna strana transcendentna funkcija od r (nije moguće analitički naći njene nule) i taj integral nema odgovarajućeg analitičkog rešenja.

Sa druge strane, iz oblika tzv. efektivnih potencijala (slika (3.2)) definisanih sa:

$$V_R(r) = e^{-2M/r} \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} e^{-2M/r} \right) \quad (3.4.1)$$

u Rosenovoj teoriji, a sa:

$$V_S(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \right) \quad (3.4.2)$$

u Schwarzschildovom rešenju OTR, vidi se da razlike izmedju dve teorije ne bi trebalo da budu velike (sudeći po obliku ovih krivih). Efektivni potencijali su funkcije tipa (3.4.1) ili (3.4.2) koji se koriste pri kvalitativnoj analizi jednačina (3.2.8) ili (3.2.11) (npr. Shapiro L. I., Teukolsky A. S., 1983). Pre analize i uporedjenja rezultata dobijenih numeričkom integracijom treba imati u vidu neke važne zaključke koji slede iz pomenute kvalitativne analize. Kao prvo, na slici (3.2) se jasno vidi da efektivni potencijali (za različite vrednosti ugaonog momenta \tilde{l}) teže jedinici kada r teži beskonačnosti. Na narednoj slici (3.3) prikazan je efektivni potencijal za fiksiranu vrednost \tilde{l} , a tri horizontalne linije označene sa 1, 2, 3 predstavljaju tri izabrana energetska nivoa ($\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$). Rastojanje na grafiku (3.3) od izabranog energetskog nivoa do krive efektivnog potencijala za neko r predstavlja u stvari desnu stranu jednačine (3.2.8). Ta razlika je jednaka kvadratu radijalne sopstvene brzine, pa prema tome mora da bude pozitivna. Tačke u kojima je

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 0$$

nazivaju se obrtnim tačkama zato što u njima r prelazi iz rasta u pad i obrnuto (one definišu pericentralno i apocentralno rastojanje).

Prema rasporedu obrtnih tačaka (odnosno njima odgovarajućih energetskih nivoa), orbite (geodezijske linije), mogu da se podele na sledeće tipove:

1) zatvorene orbite;

Ovaj tip orbita odgovara horizontalnoj liniji 1 (\tilde{E}_1). Probno telo se nalazi izmedju dve obrtne tačke A i B koje odgovaraju pericentralnom i apocentralnom odstojanju (respektivno). Kretanje je moguće i ako se probno telo u početnom trenutku nadje izmedju koordinatnog početka ($r = 0$) i obrtne tačke C, ali u tom slučaju telo pada na izvor gravitacionog polja.

2) otvorene orbite;

Ovaj tip orbita odgovara horizontalnoj liniji 2 (\tilde{E}_2). Probno telo dolazi sa beskonačnog rastojanja r do obrtne tačke D i vraća se u beskonačnost.

3) orbite gravitacionog zahvata;

Ovaj tip orbita odgovara horizontalnoj liniji 3 (\tilde{E}_3). Nema obrtnih tačaka, pa probno telo pada na izvor gravitacionog polja ili odlazi u beskonačnost. Isti oblici orbita poznati su i u Schwarzschildovom rešenju OTR (Shapiro L. I., and Teukolsky A. S., 1983). Primeri

različitih tipova orbita (1, 2, 3) dati su na slikama (3.4) – (3.9), a dobijeni su numeričkom integracijom. Na svakoj slici su prikazane orbite odgovarajućeg tipa u Rosenovoj teoriji i Schwarzschildovom rešenju OTR za iste početne uslove. Sa tih slika su očigledne sličnosti i razlike u obliku orbita za različite početne uslove. Za numeričku integraciju je korišćena Hammingova prediktor-korektor metoda, koja se bazira na Runge-Kutta metodi četvrtog reda. Stabilnost integracije je proveravana pomoću vrednosti geodezijskog integrala (3.2.1) na svakom koraku integracije.

3.5 Kružne orbite

Kvalitativna analiza efektivnih potencijala i numerička integracija jednačina geodezijskih, pokazale su da pored sličnosti u obliku postoje i razlike u konkretnim slučajevima između Rosenove teorije i Schwarzschildovog rešenja OTR. Sa druge strane poznato je da je "glavna" razlika između dva rešenja nepostojnje tzv. koordinatnog singulariteta na konačnom rastojanju od izvora polja u Rosenovom rešenju, kao što je to slučaj sa Schwarzschildovim rešenjem. Što se kružnih orbita tiče, a koje postoje u obe teorije, situacija je sledeća: dok je u Schwarzschildovom rešenju donja granica za postojanje kružnih orbita rastojanje $r = 3M$ (npr. Chandrasekhar S., 1983), kod Rosena je ta granica spuštana na $r = 2M$. Međutim, ako se Schwarzschildovo rešenje posmatra u izotropnim koordinatama (Brumberg V. A., 1972), donja granica egzistencije kružnih orbita¹ je $r = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})M$ (u izotropnoj formi Schwarzschildovo rešenje je po obliku najbližije Rosenovom rešenju). Pri tome energija \tilde{E} i ugaoni moment \tilde{l} su određeni poluprečnikom kružne orbite r_0 na sledeći način:

$$\tilde{E}^2 = \frac{r_0 - M}{r_0 - 2M} e^{-2M/r_0}, \quad (3.5.1)$$

$$\tilde{l}^2 = \frac{Mr_0^2}{r_0 - 2M} e^{2M/r_0}. \quad (3.5.2)$$

Iz izraza (3.5.1) i (3.5.2) je jasno i zašto kružne orbite ne mogu postojati za $r_0 \leq 2M$. Granični slučaj $r_0 = 2M$ odgovara svetlosnoj kružnoj orbiti, jer su tada \tilde{E} i \tilde{l} beskonačno veliki, a iz definiciji (3.2.7) se vidi da je tada $m = 0$. Analogni izrazi poznati iz Schwarzschildovog rešenja (Shapiro L. I., Teukolsky A. S., 1983) su:

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r_0 - 2M)^2}{r_0(r_0 - 3M)}, \quad (3.5.3)$$

$$\tilde{l}^2 = \frac{Mr_0^2}{r_0 - 3M}. \quad (3.5.4)$$

Sa grafika (3.3) se vidi da za fiksirano \tilde{l} poluprečnici kružnih orbita odgovaraju ekstremnim vrednostim efektivnog potencijala ako je odgovarajući energetski nivo tako izabran da je jednak toj ekstremnoj vrednosti (tada se minimalna i maksimalna vrednost

¹ Na manjim rastojanjima od centralnog tela nema kružnih orbita bez obzira na zadate početne uslove.

r , izmedju kojih se odvija kretanje, poklapaju). Pri tome minimum efektivnog potencijala odgovara stabilnim, a maksimum nestabilnim kružnim orbitama (Chandrasekhar S., 1983).

3.6 Svetlosne geodezijske

U ovom odeljku biće uporedjene svetlosne geodezijske ($m = 0$) u Rosenovoj teoriji i Schwarzschildovom rešenju. Jednačine (3.2.8) – (3.2.10) u ovom slučaju imaju oblik:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{l^2}{r^2}e^{-2M/r}, \quad (3.6.1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2}e^{-2M/r}, \quad (3.6.2)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = Ee^{2M/r}. \quad (3.6.3)$$

Ako se uvede parametar sudara b definisan sa:

$$b = \frac{l}{E}, \quad (3.6.4)$$

tada jednačine geodezijskih (3.6.1) – (3.6.3) (izražene preko parametra sudara b) mogu biti napisane u obliku:

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}e^{-2M/r}, \quad (3.6.4)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{r^2}e^{-2M/r}, \quad (3.6.5)$$

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{b}e^{2M/r}, \quad (3.6.6)$$

gde je $\alpha = l\lambda$. Efektivni potencijal u ovom slučaju je funkcija oblika:

$$V_{phot,R} = \frac{1}{r^2}e^{-2M/r}, \quad (3.6.7)$$

pomoću koje se mogu ispitati neke važne osobine svetlosnih geodezijskih linija. Na slici (3.10) prikazana je kriva $V_{phot,R}(r)$. Za razliku od odgovarajućeg efektivnog potencijala $V_{phot,S}(r)$ u Schwarzschildovom rešenju, koji ima oblik:

$$V_{phot,S} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.6.7)$$

i koji maksimum dostiže na rastojanju $r = 3M$, funkcija $V_{phot,R}(r)$ dostiže maksimum na rastojanju $r = M$, pa je kritična vrednost parametra b data sa:

$$b = eM. \quad (3.6.8)$$

Kritična vrednost parametra b razdvaja orbite zahvata (foton pada na centralni singularitet) od neograničenih orbita. U Schwarzschildovom rešenju odgovarajuća kritična vrednost je:

$$b = 3\sqrt{3}M. \quad (3.6.9)$$

Nekoliko primera svetlosnih geodezijskih linija dobijenih numeričkom integracijom² su prikazani na slikama (3.11) – (3.13).

Beograd
Fiziko-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

² Integracija u Schwarzschildovom rešenju je izvedena u standardnim koordinatama.

§4. JEDNAČINE KRETANJA U PRVOJ APROKSIMACIJI

4.1 Uvod

Iz Lagrangeove funkcije u obliku (3.2.1) Rosen (Rosen, 1977) je zaključio da se član uz $\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2$ poklapa sa odgovarajućim članom u Schwarzschildovom rešenju OTR (u izotropnoj formi) do drugog reda veličine (uključujući i drugi red veličine), a članovi uz "prostorni deo" geodezijskih Lagrangeovih funkcija se poklapaju do prvog reda veličine. Iz tog poklapanja Rosen je dalje, u svom članku objavljenom 1977. godine zaključio da se njegova teorija slaže sa do tada posmatranim relativističkim efektima. Zanimljivo je odgovoriti na sledeće pitanje: kakve su razlike između približnih izraza za pomeranje pericentra i "savijanje" svetlosnih zraka u dve teorije? Ako se umesto eksponencijalnih funkcija u Lagrangeovoj funkciji (3.2.1) iskoriste njihovi razvoji u Taylorove redove, zadržavajući se na članovima drugog reda veličine, aproksimacija geodezijske Lagrangeove funkcije će biti oblika:

$$L_1 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right) \left[\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \right] = -m^2. \quad (4.1.1)$$

4.2 Jednačine kretanja

Prvi integrali jednačina geodezijskih linija (uz (4.1.1)), koje odgovaraju Lagrangeovoj funkciji L_1 , su oblika ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right) \frac{dt}{d\tau} = \tilde{E}, \quad (4.2.2)$$

$$r^2 \left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right) \frac{d\varphi}{d\tau} = \tilde{l}, \quad (4.2.3)$$

tako da se jednačine (jedan put integraljene) mogu napisati u obliku:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}\right)} - \frac{1}{1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}} \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}} \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \right], \quad (4.2.4)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}} \frac{\tilde{l}}{r^2}, \quad (4.2.5)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}}. \quad (4.2.6)$$

Najpogodnije je, za anliziranje orbite, jednačine kretanja napisati u obliku koji određuje orbitu (relativistički analogon Binetovog obrasca). Kombinovane, jednačine (4.2.4) i (4.2.5) daju:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}} \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{l}^2} - \frac{1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}}{\tilde{l}^2}, \quad (4.2.7)$$

ili,

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{1 + 2Mu + 2M^2u^2}{1 - 2Mu + 2M^2u^2} \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{l}^2} - \frac{1 + 2Mu + 2M^2u^2}{\tilde{l}^2}, \quad (4.2.8)$$

gde je $u = \frac{1}{r}$. Ako se dalje izraz uz $\frac{\tilde{E}^2}{\tilde{l}^2}$ na desnoj strani jednačine (4.2.8) razvije u Taylorov red do članova drugog reda, biće:

$$\frac{1 + 2Mu + 2M^2u^2}{1 - 2Mu + 2M^2u^2} \approx 1 + 4Mu + 8M^2u^2 + \dots,$$

pa zamenom u (4.2.8), približna jednačina orbite postaje:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{l}^2} + \frac{2M}{\tilde{l}^2} (2\tilde{E}^2 - 1)u + \left[\frac{2M^2}{\tilde{l}^2} (4\tilde{E}^2 - 1) - 1 \right] u^2. \quad (4.2.9)$$

Analogna diferencijalna jednačina za Schwarzschildovo rešenje, u izotropnim koordinatama, je oblika:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{l}^2} + \frac{2M}{\tilde{l}^2} (2\tilde{E}^2 - 1)u + \left[\frac{3M^2}{2\tilde{l}^2} (5\tilde{E}^2 - 1) - 1 \right] u^2. \quad (4.2.10)$$

Na desnim stranama jednačina (4.2.9) i (4.2.10) nalaze se izrazi tipa kvadratnih trinoma. Taj trinom je pozitivan (a samo u toj oblasti kretanje je moguće) u oblasti između dva svoja korena, a negativan za ostale vrednosti u .

4.3 Približni izraz za pomeranje pericentra

Uvodjenjem parametara e (ekscentričnost) i p (parametar) pomoću:

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{l}^2}, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{M}{\tilde{l}^2}, \quad (4.3.2)$$

jednačine (4.2.8) i (4.2.9) dobijaju sledeći oblik:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{p} \left[1 - \frac{2M}{p}(1 - e^2)\right]u + \left\{ \frac{2M}{p} \left[3 - \frac{4M}{p}(1 - e^2)\right] - 1 \right\}u^2, \quad (4.3.3)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{p} \left[1 - \frac{2M}{p}(1 - e^2)\right]u + \left\{ \frac{3M}{2p} \left[4 - \frac{5M}{p}(1 - e^2)\right] - 1 \right\}u^2, \quad (4.3.4)$$

respektivno. Ovi komplikovani izrazi se znatno uprošćavaju ako se zanemare članovi tipa $\frac{M}{p^2}$ i $\frac{M^2}{p^2}$, jer su oni za nekoliko redova veličine manji od ostalih članova. Za Zemlju je, na primer, $\frac{M}{p} \approx 10^{-8}$, pa $\frac{M^2}{p^2} \approx 10^{-16}$. U tom slučaju se jednačine (4.3.3) i (4.3.4) svode na jednačinu:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(1 - \frac{6M}{p}\right)u^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2u}{p}. \quad (4.3.5)$$

Diferenciranjem ove jednačine po φ dobija se:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \omega^2 u = \frac{1}{p}. \quad (4.3.6)$$

Frekvencija ω je jednaka:

$$\omega \approx 1 - \frac{3M}{p} \quad (4.3.7)$$

uz gore usvojenu aproksimaciju. Za $\omega = 1$ rešenje jednačine (4.3.6) je konusni presek. Za slučaj Sunčevog sistema ω vrlo malo odstupa od jedinice što znači da će i orbite (ili preciznije relativističke neporemećene orbite) vrlo malo odstupati od konusnih preseka (elipsi za većinu tela Sunčevog sistema). Rešenje jednačine (4.3.6) je oblika:

$$u = \frac{1 + e \cos(\omega\varphi)}{p}, \quad (4.3.9)$$

gde je uzeto da je konstanta integracije koja ulazi u argument kosinusa jednaka nuli što ne umanjuje opštost zaključaka ali tehnički pojednostavljuje razmatranja). Iz (4.3.9) e vidi da u dostiže svoju maksimalnu (a r minimalnu) vrednost kada je:

$$\omega \varphi = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pa je ugao koji pravac ka pericentralnom rastojanju predje, dok planeta predje jedan un obrt, jednak:

$$\delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) = \frac{6M\pi}{p} \left(1 + \frac{3M}{p} + \dots \right) \approx \frac{6M\pi}{p}. \quad (4.3.10)$$

Približni izraz (4.3.10) je dobro poznat iz Schwarzschildovog rešenja OTR. Dakle u prvoj aproksimaciji Rosenova teorija i Schwarzschildovo rešenje OTR daju isti izraz za pomeranje pericentra.

4.4 Približni izraz za "savijanje" putanje svetlosnih zraka

Analogno aproksimaciji vremenskih geodezijskih (putanja planeta) izvodi se jednačina koja aproksimira nulte geodezijske (putanje svetlosnih zraka). Ta jednačina, ukoliko se zadrže članovi drugog reda veličine ($\frac{M}{r}$), je:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} + \frac{4M}{b^2}u + \left(\frac{8M^2}{b^2} - 1 \right)u^2, \quad (4.4.1)$$

gde je $b = \frac{1}{E}$ parametar zahvata i ima dimenziju rastojanja. Diferenciranjem po φ jednačine (4.3.1), dobijamo:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \omega^2 u = \frac{2M}{b^2}. \quad (4.4.2)$$

Frekvencija ω je jednaka:

$$\omega \approx 1 - \frac{4M^2}{b^2}, \quad (4.4.3)$$

Opšte rešenje jednačine (4.4.2) se može napisati u obliku:

$$u = \frac{2M}{b^2} + \frac{1}{b} \cos \omega\varphi, \quad (4.4.4)$$

gde su konstante integracije tako izabrane da za $\varphi = 0$ rastojanje r dostiže svoju minimalnu vrednost:

$$r_{min} \approx b - 2M.$$

U Euklidskoj ravni (r, φ) jednačina (4.4.4) određuje hiperbolu (za frekvenciju ω se može uzeti jedinica u ovoj aproksimaciji). Pravac asimptota te hiperbole se dobija iz uslova $u = 0$:

$$\cos \varphi = -\frac{2M}{b}, \quad (4.4.5)$$

odakle sledi

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} - \delta, \quad (4.4.6)$$

gde je mali ugao δ zapravo:

$$\delta = \frac{2M}{b}. \quad (4.4.7)$$

Njegova dvostruka vrednost predstavlja ugao između dve asimptote, koji određuje savijanje svetlosnog zraka sa dalekog izvora u okolini Sunca. Isti približni izraz daje i Schwarzschildovo rešenje OTR.

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj **Datum**

§5. ORBITE U NESTATIČKOM REŠENJU

5.1 Uvod

U ovom paragrafu se razmatraju neke osobine geodezijskih linija u metrici (2.5), kada funkcija Φ ima oblik (2.6). Lagrangeova funkcija u ovom slučaju je oblika:

$$L \equiv -e^{\Phi_1} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + e^{\Phi_2} \left[\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] = -m^2, \quad (5.1.1)$$

gde su funkcije Φ_1 i Φ_2 date sa:

$$\Phi_1 = 2 \left(\Phi - \frac{M}{r} \right), \quad (5.1.2)$$

$$\Phi_2 = 2 \left(\Phi + \frac{M}{r} \right). \quad (5.1.3)$$

Kao i u statičkom slučaju, kretanje u "ekvatorskoj hiperravni" ($\dot{\theta} = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$) ne umanjuje opštost razmatranja (Chandrasekhar S., 1983), ali znatno tehnički uprošćava neke izraze.

5.2 Jednačine kretanja

Diferencijalne jednačine geodezijskih linija imaju dva prva integrala (od kojih je jedan dat sa (5.1.1)):

$$e^{\Phi_2} r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \tilde{l}, \quad (5.2.1)$$

$$-e^{\Phi_1} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + e^{\Phi_2} \left[\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] = -1, \quad (5.2.2)$$

gde je \tilde{l} renormalizovana vrednost integrala ugaonog momenta (vidi §3.), a τ sopstveno vreme. Odmah se uočava da nedostaje integral energije, zato što Lagrangeova funkcija nije statička¹. Međutim Lagrangeove jednačine za t i r mogu znatno da se uproste korišćenjem prvih integrala (5.2.1) i (5.2.2). Jednačina za t je:

¹ Zavisi eksplicitno od vremena.

$$2 \frac{d}{d\tau} \left(e^{\Phi_1} \frac{dt}{d\tau} \right) = -e^{\Phi_1} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + e^{\Phi_2} \left[\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \quad (5.2.3)$$

no kako je:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

to jednačina (5.2.3) dobija sledeći oblik:

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{\Phi_1} \frac{dt}{d\tau} \right) = \left\{ e^{\Phi_1} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - e^{\Phi_2} \left[\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.2.4)$$

Konačno, ako se uoči da izraz u vitičastim zagradama u (5.2.4) predstavlja zapravo prvi integral (5.2.2), vidi se da jednačina (5.2.4) ima jednostavan oblik:

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{\Phi_1} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.2.5)$$

Posle integracije ta jednačina postaje:

$$e^{\Phi_1} \frac{dt}{d\tau} = \tilde{E} + \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau, \quad (5.2.6)$$

gde je \tilde{E} konstanta integracije². Iz izraza (5.2.6) se vidi da izraz na desnoj strani osciluje³ oko konstante \tilde{E} .

Jednačine (5.2.1), (5.2.2) i (5.2.6) su zatvoren sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija, a Lagrangeova jednačina za r (koja nije nezavisna od ove tri jednačine), se znatno uprošćava uz pomoć prvih integrala (5.2.1) i (5.2.2):

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{\Phi_2} \frac{dr}{d\tau} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{M}{r^2} + \frac{\tilde{l}^2}{r^3} e^{-\Phi_2}. \quad (5.2.7)$$

5.3 Veza sa statičkim slučajem

Neke zanimljive osobine pokazuje Lagrangeova funkcija (5.1.1) kada konstante K i ω , koje se pojavljuju u Φ , teže nuli. Očigledno je da K ima dimenziju rastojanja i, kada teži nuli, tada i Lagrangeova funkcija u obliku (5.1.1) teži Lagrangeovoj funkciji u obliku (3.2.1)⁴. Slična osobina, se javlja i u slučaju kada ω teži nuli.

² Najpogodnije je izabrati je tako da ona ima vrednost integrala energije iz statičkog slučaja.

³ Zbog periodičnosti podintegralnog izraza (Φ ima oblik (2.6)). Amplituda tih oscilacija će za malo ω , ili (i) K , biti vrlo mala veličina.

⁴ Teži zapravo statičkom rešenju.

Nezavisno od ovih svojstava Lagrangeove funkcije (5.1.1) i jednačine geodezijskih linija u oba ova slučaja ($K \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$) teže svojim statičkim analogonima.

Ako se uvede nova promenljiva \tilde{E}_1 sa:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E} + \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau, \quad (5.3.1)$$

tada se jednačina (5.2.2) može napisati u obliku:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^{-(\Phi_1 + \Phi_2)} \left[\tilde{E}_1^2 - e^{\Phi_1} \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} e^{-\Phi_2} \right) \right]. \quad (5.3.2)$$

Izraz u uglastoj zagradi po obliku podseća odgovarajući izraz u analognoj jednačini za statički slučaj (jed. (3.2.8)). Razlika je u tome što \tilde{E}_1^2 nije konstanta, a i efektivni potencijal:

$$V = e^{\Phi_1} \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} e^{-\Phi_2} \right) \quad (5.3.3)$$

zavisi od vremena t . Kao i u statičkom slučaju, od znaka izraza u uglastoj zagradi zavisi da li je kretanje moguće ili ne⁵. Minimalno i maksimalno "rastojanje" od izvora gravitacionog polja, ukoliko postoje, takođe zavise od vremena. Probno telo dostiže ta rastojanja u tačkama u kojima je:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Jasno je dakle da u nestatičkom slučaju geodezijsko kretanje probnog tela ima dve komponente: prvu kao i u statičkom slučaju, a drugu kao posledicu nestatičnosti, odnosno "pomeranja" same metrike⁶. Ponovo se javljaju tri tipa orbita (vidi odeljak 3.3), a mogući su i neki prelazni oblici. Primeri orbita dobijeni numeričkom integracijom prikazani su na slikama (5.1) - (5.3).

Zanimljivo, asimptotsko ponašanje, pokazuje efektivni potencijal (5.3.3) kada ω teži nuli. Tada period dvostrukog oscilovanja (po r i po t) teži beskonačnosti, a oblik efektivnog potencijala V teži onom obliku iz statičkog slučaja. Na slikama (5.4) i (5.5) prikazani su efektivni potencijali za različite vrednosti ω . Po tri krive na tim slikama predstavljaju zapravo efektivne potencijale u trenucima:

$$t = P \begin{cases} \frac{1}{2} + k \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + k); k = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 + k \end{cases} \quad (5.3.4)$$

⁵ Kvadrat radijalne brzine $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ mora biti pozitivan ili jednak nuli.

⁶ U odnosu na statičku metriku.

odnosno kada je

$$\cos(\omega t) = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad (5.3.5)$$

P je period pomenutog oscilovanja. Srednja kriva je statički efektivni potencijal, a ostale dve krive određuju amplitude vremenskog oscilovanja efektivnog potencijala. Vidi se da sa smanjenjem ω opada i ta amplituda, da bi za $\omega = 0$ ona postala jednaka nuli. Jasno je da se majorizacijom (5.3.5) dobijaju ekstremne vrednosti funkcija e^{Φ_1} i $e^{-\Phi_2}$, koje se javljaju u izrazu za efektivni potencijal (5.3.3), a samim tim dobijaju se i granice vremenskog oscilovanja efektivnog potencijala. Na slici (5.6) prikazana je jedna "vremenska poluoscilacija" efektivnog potencijala. Treba još napomenuti da je i energetska nivo \tilde{E}_1^2 takođe periodična funkcija vremena⁷.

Ovim razmatranjima nikako nisu iscrpljene sve važne osobine orbita probnih tela u ovom nestatičkom slučaju, ali su izvedene osnovne jednačine i potcrtane neke osobine značajne za dalji rad. Zanimljivo je da se sve veličine relevantne za problem kretanja probnih tela iz statičkog slučaja javljaju i u nestatičkom slučaju, ali kao funkcije vremena. Sa druge strane, zbog izabranog oblika funkcije Φ -rešenja D'Alembertove jednačine, jasno je da je ta vremenska zavisnost periodična funkcija vremena.

⁷ Na slici (5.7) prikazano je kako razlika $\tilde{E}_1 - E$ (vidi izraz (5.3.1)) zavisi od sopstvenog vremena za dve različite vrednosti ω . Slika (5.8) prikazuje kako ista ta razlika zavisi od radijalne koordinate r (opet za dve različite vrednosti ω).

ZAKLJUČAK

Cilj ovog rada bio je pre svega da se uporede poznata sferno-simetrična (statička) rešenja u dve teorije gravitacije OTR i BTG, a sa stanovišta nebeske mehanike. Upravo sa stanovišta nebeske mehanike problem koji je razmatran spada u grupu najjednostavnijih, ali kao što je već rečeno u relativističkim teorijama gravitacije komplikovaniji problemi još nisu do kraja ni definisani. Takođe je delimično ispitano jedno nestatičko rešenje koje je dopušteno jednačinama polja u BTG.

U vezi sa statičkim rešenjem opšti zaključak bi mogao da se podvede pod sledeće:

a) U slučaju radijalnog pada za "udaljenog" posmatrača probno telo asimptotski teži centralnom singularitetu (u Schwarzschildovom rešenju ono teži Schwarzschildovom radijusu $r = 2M$), dok u sopstvenom vremenu ono dostiže singularitet za konačan vremenski interval (kao i u Schwarzschildovom rešenju).

b) Na osnovu izraza za efektivni potencijal izvršena je poznata klasifikacija orbita na zatvorene, otvorene i zahvatne, a razni oblici ovih orbita dobijeni numeričkom integracijom prikazani su na slikama u prilogu. Dalje je određena donja granica egzistencije kružnih orbita i kritična vrednost parametra zahvata za svetlosne orbite.

c) Jednačine kretanja su formulisane u prvoj aproksimaciji i dobijen je izraz za pomeranje pericentra, kao i približna vrednost ugla za koji "skrene" svetlosni zrak u okolini izvora gravitacionog polja. Ti izrazi se poklapaju sa poznatim izrazima u Schwarzschildovom rešenju OTR.

d) U pomenutom nestatičkom rešenju utvrđena je egzistencija dva prva integrala. Dalje je ilustrovana mogućnost egzistencije sva tri tipa orbita koji se javljaju u statičkom rešenju. Analizirano je asimptotsko ponašanje nestacionarne komponente polja. Naime, pri malim vrednostima parametara ω i K , monopolnog gravitacionog talasa koji se pojavljuje u ovom slučaju, nestacionarnost ne igra dominantnu ulogu, tj. nestatička metrika blago osciluje oko odgovarajućeg statičkog slučaja.

Na kraju hteo bih da se zahvalim kolegama na Institutu za Astronomiju za podršku koju su mi pružili, a posebno prof. I. Lukačeviću koji je svojim primedbama i sugestijama aktivno učestvovao u izradi ovog magistarskog rada.

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

Literatura:

- [1] Brumberg, V. A.: 1972, *Relativistička Nebeska Mehanika (na ruskom)*, ed, Nauka, Moskva.
- [2] Bogorodski, A. F.: 1962, *Ajnštajnovе Jednačine Polja i njihova Primena u Astronomiji (na ruskom)*, ed, Izdanje Kijevskog Univerziteta, Kiev.
- [3] Bergman, P. G.: 1942, *Introduction to the Theory of Relativity*, ed, Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N.J..
- [4] Chandrasekhar, S.: 1983, *The Mathematical Theory of Black Holes*, ed, Oxford University Press New York.
- [5] Dubošin, G. N.: 1964, *Nebeska Mehanika - analitičke i kvalitativne metode (na ruskom)*, ed, Nauka, Moskva.
- [6] Fock, V. A.: 1959, *The Theory of Space Time and Gravitation* ed, Pergamon Press, London, New York, Paris Los Angeles.
- [7] Green, M. R.: 1985, *Spherical Astronomy*, ed, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney.
- [8] Landau, L., Lifšic, E.: 1952 *Teorija polja*, ed, Izdavačko preduzeće Narodne Republike Srbije, Beograd
- [9] Lukačević, I.: 1986 *On Conformally Related Fields in Rosen's Bimetric Gravitation Theory*, GRG Vol. 18, No. 9
- [10] Lukačević, I.: 1980 *Osnovi Teorije Relativnosti* ed, Naučna knjiga, Beograd
- [10] Misner, W. C., Thorne, S. K., Wheeler, A. J.: 1973, *Gravitation* ed, W. H. Freeman and Company, San Francisco.
- [12] Novikov, I. D., Frolov, V. P.: 1986 *Fizika crnih rupa (na ruskom)* ed, Nauka, Moskva
- [13] Siegel, C. L.: 1959 *Lekcije iz Nebeske Mehanike* ed, Nauka, Moskva
- [14] Synge, J. L.: 1955, *Relativity: The Special Theory* ed, North Holland Publishing Company, Amsterdam, London, New York.
- [15] Synge, J. L.: 1960, *Relativity: The General Theory* ed, North Holland Publishing Company, Amsterdam, London, New York.
- [16] Shapiro, L. S., Teukolsky, S. A.: 1983, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* ed, JOHN WILEY & SONS New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [17] Rjabuško, A. P.: 1979, *Kretanje tela u opštoj teoriji relativnosti (na ruskom)* ed, "Viša Škola", Minsk
- [18] Rosen, N.: 1975, ...
- [19] Schwarzschild, K.: 1916, *Über das Gravitationsfeld eines Massen der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte Kongich Preuss. Akad. Wiss., Phy.-Math. Kl. 198-96
- [20] Will, M. C.: 1981, *Theory and Experiment in Gravitation Physics*

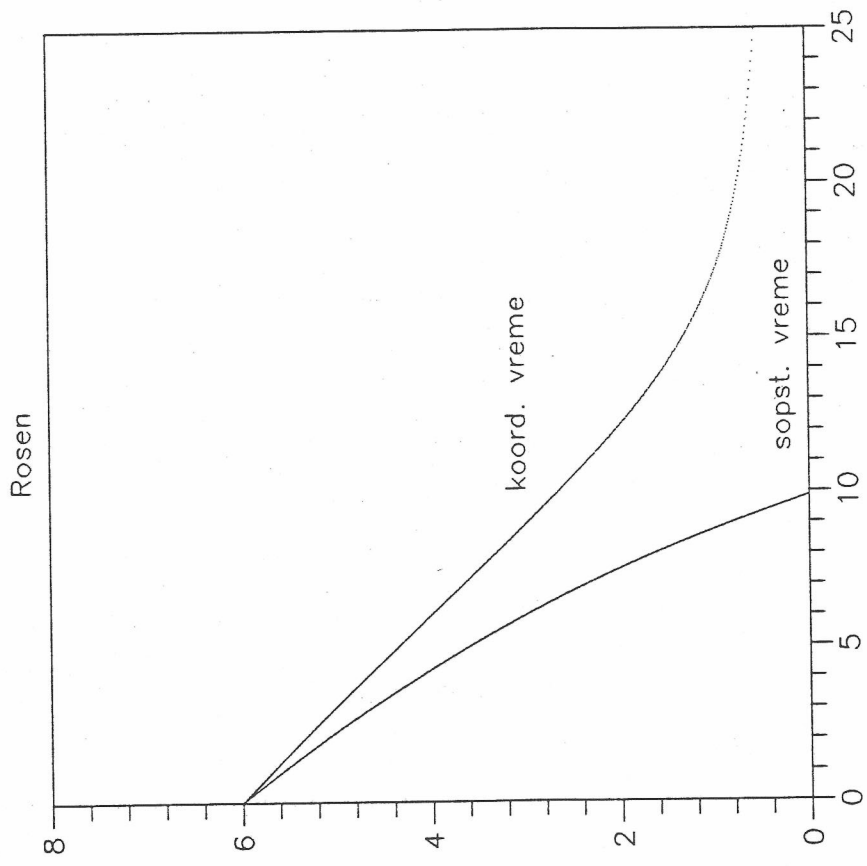
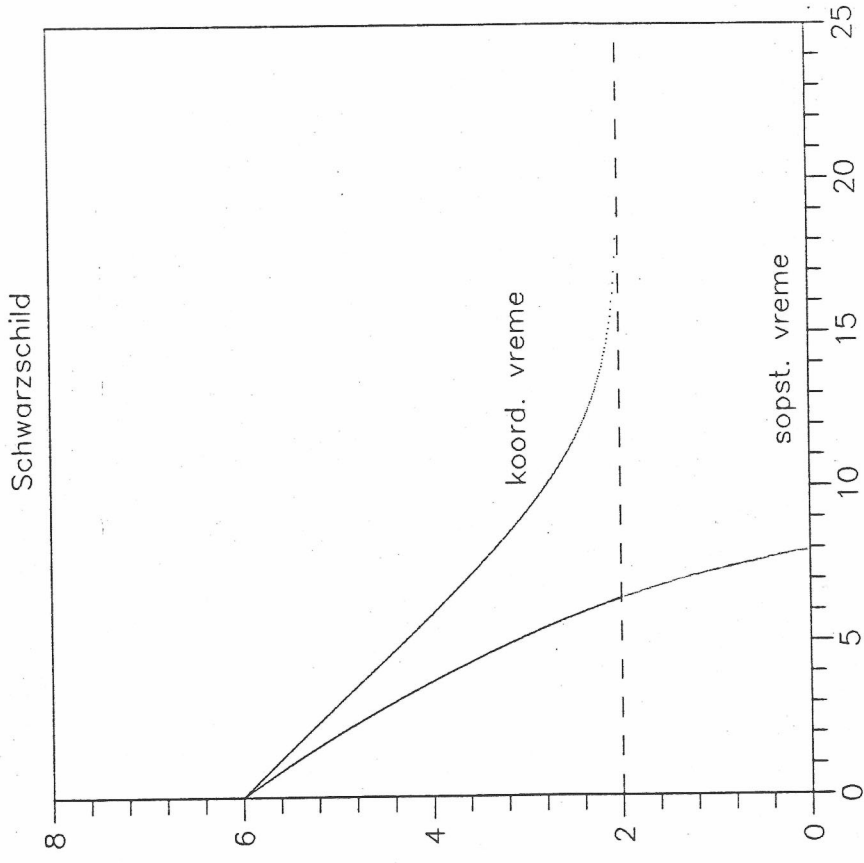
ed, Cambridge University Press, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

[21] Zeljmanov, A. L., Agakov, V. G.: 1989, *Elementi opšte teorije relativnosti (na ruskom)*

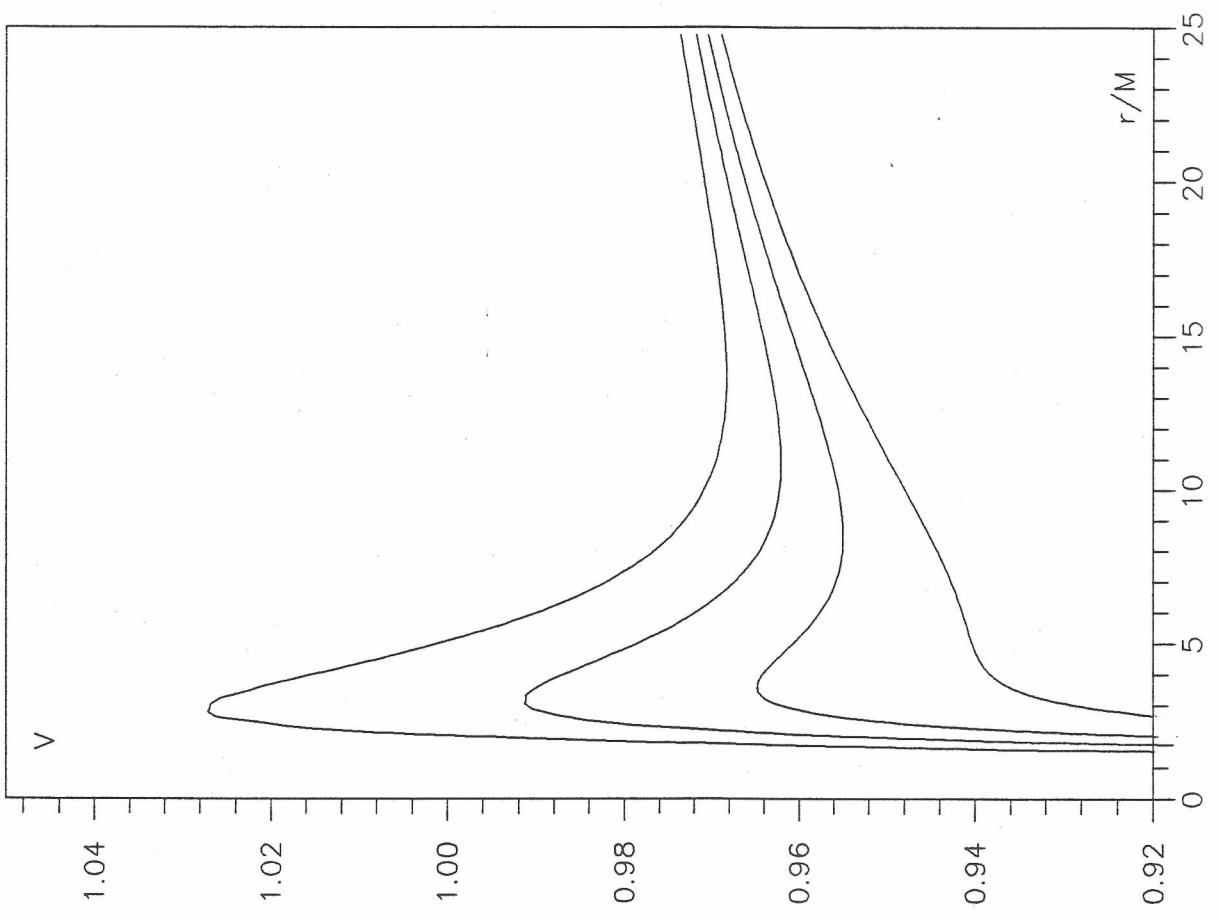
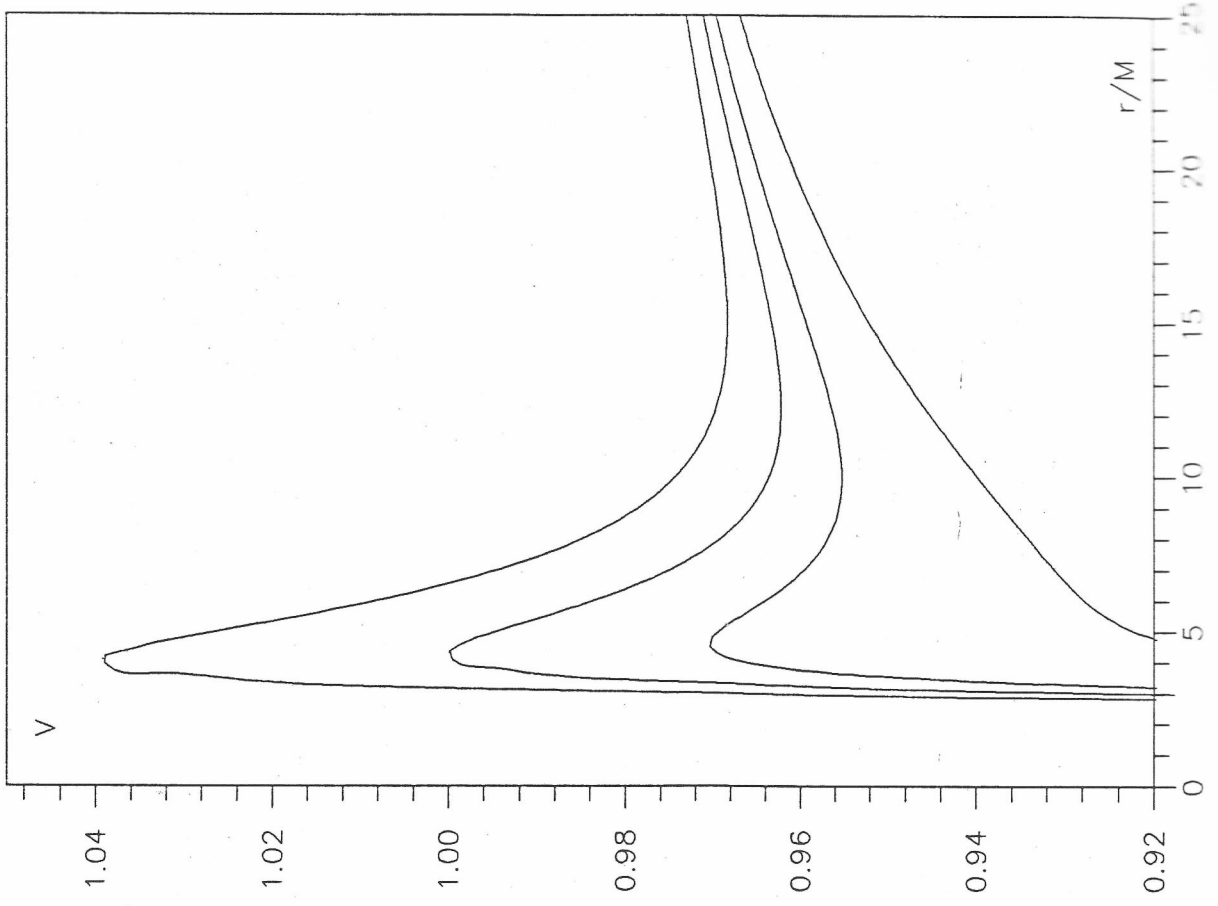
ed, Nauka, Moskva

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

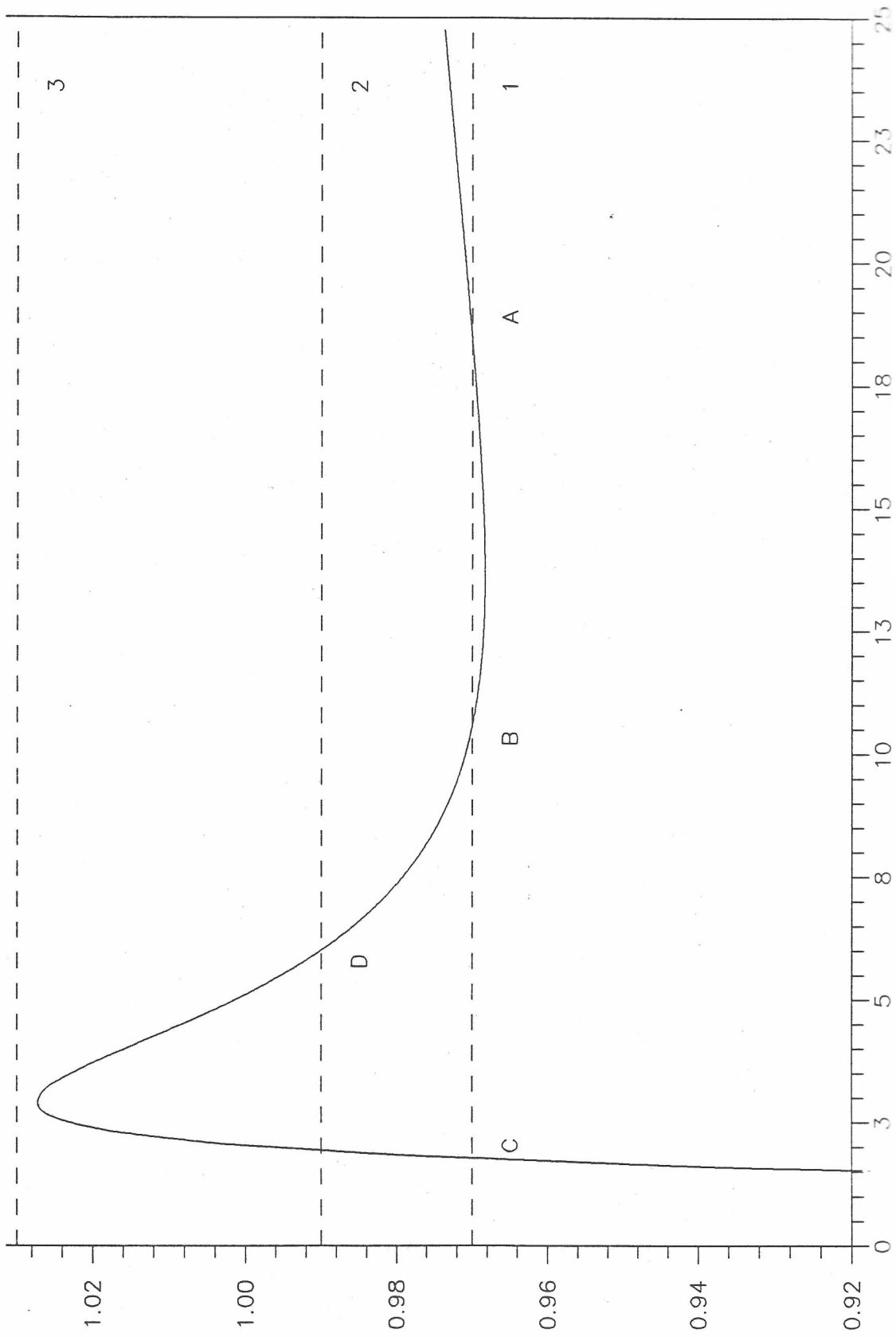
Broj _____ Datum _____



slika (3.1) radialni pad

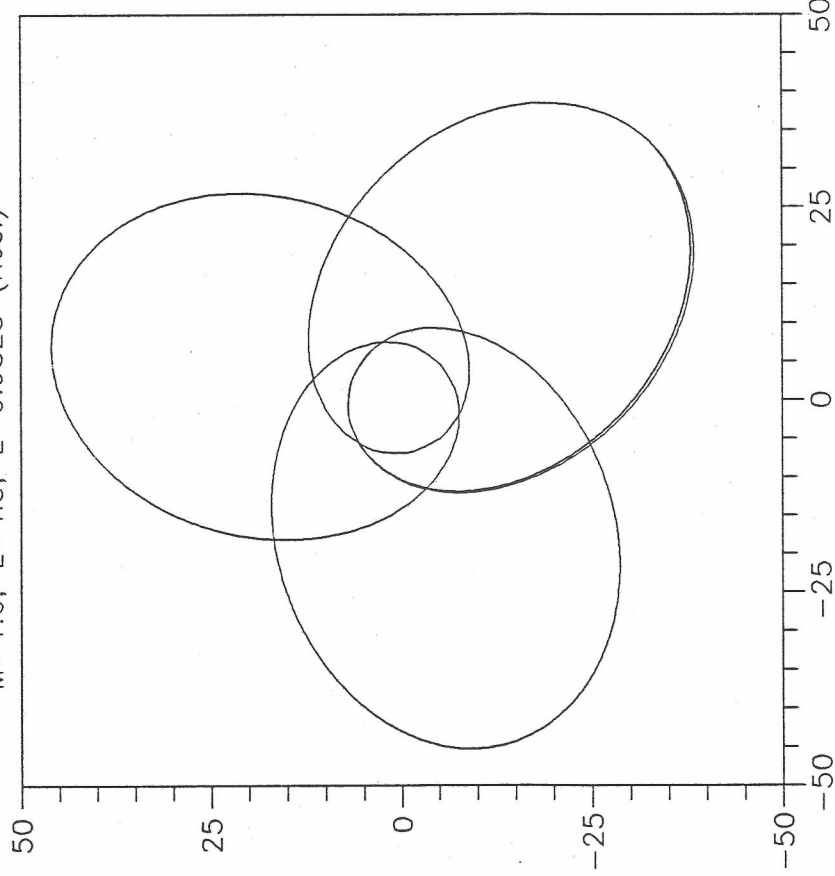


slika (3.2) efektivni potencijali

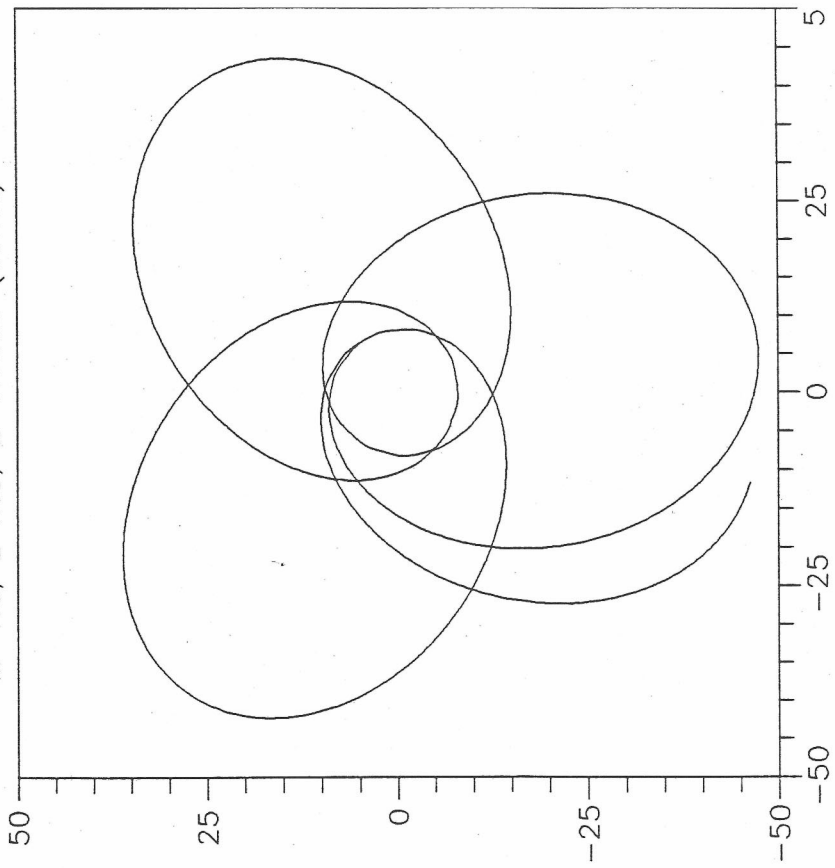


5/10/00 (3.5)

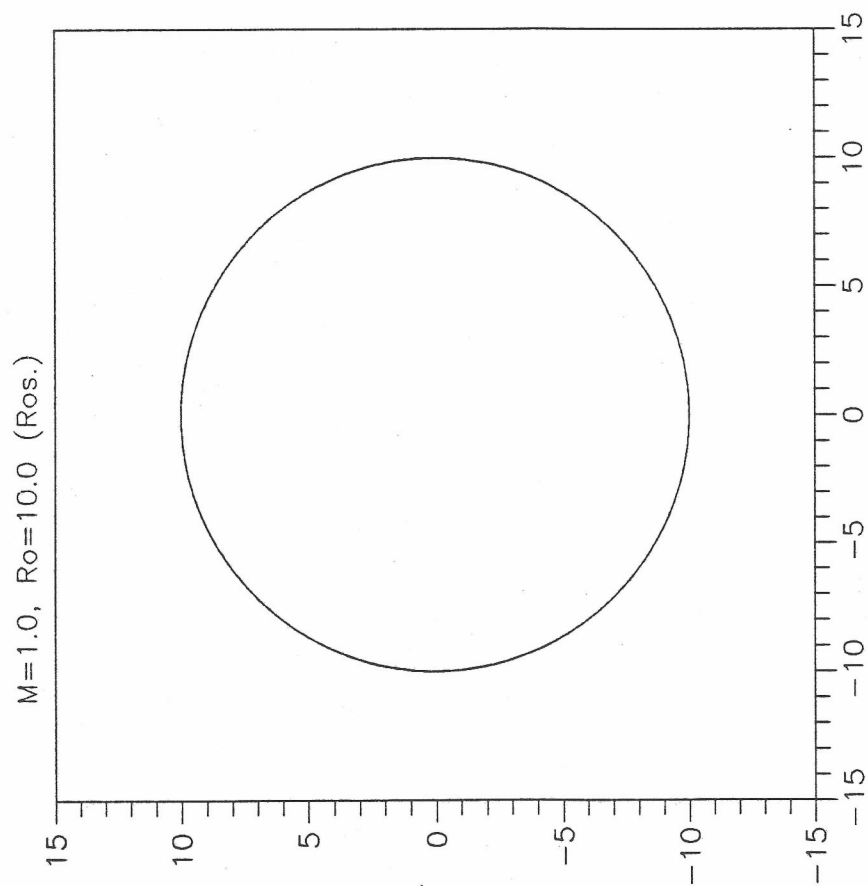
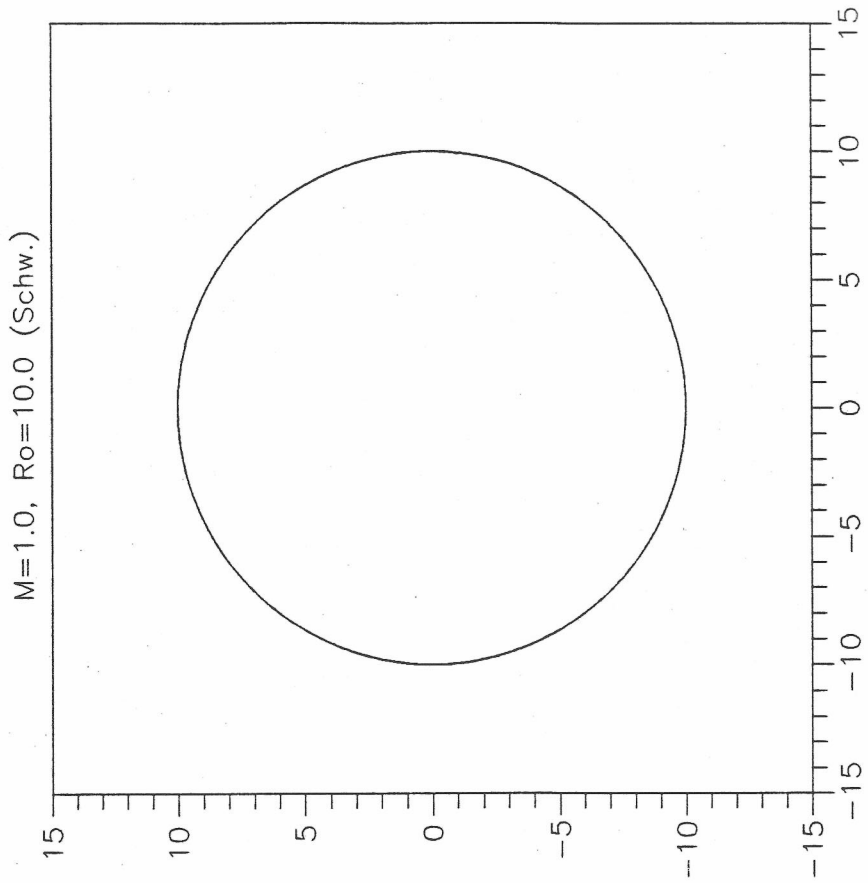
$M=1.0, L=4.3, E=0.9828$ (Ros.)



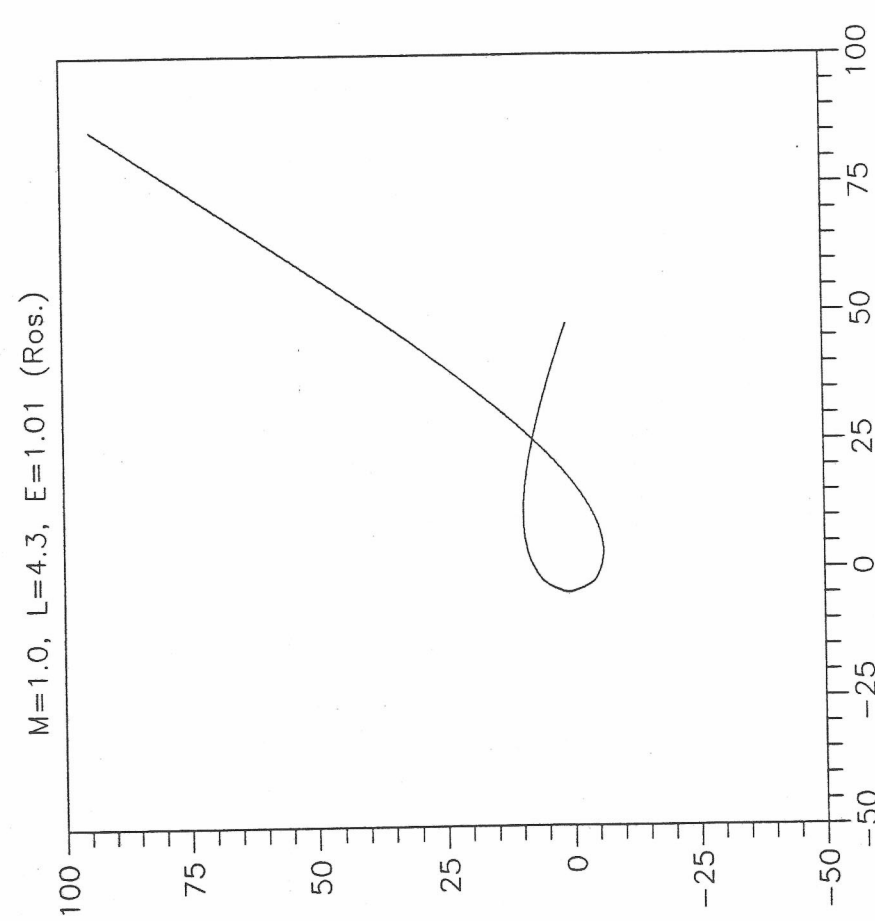
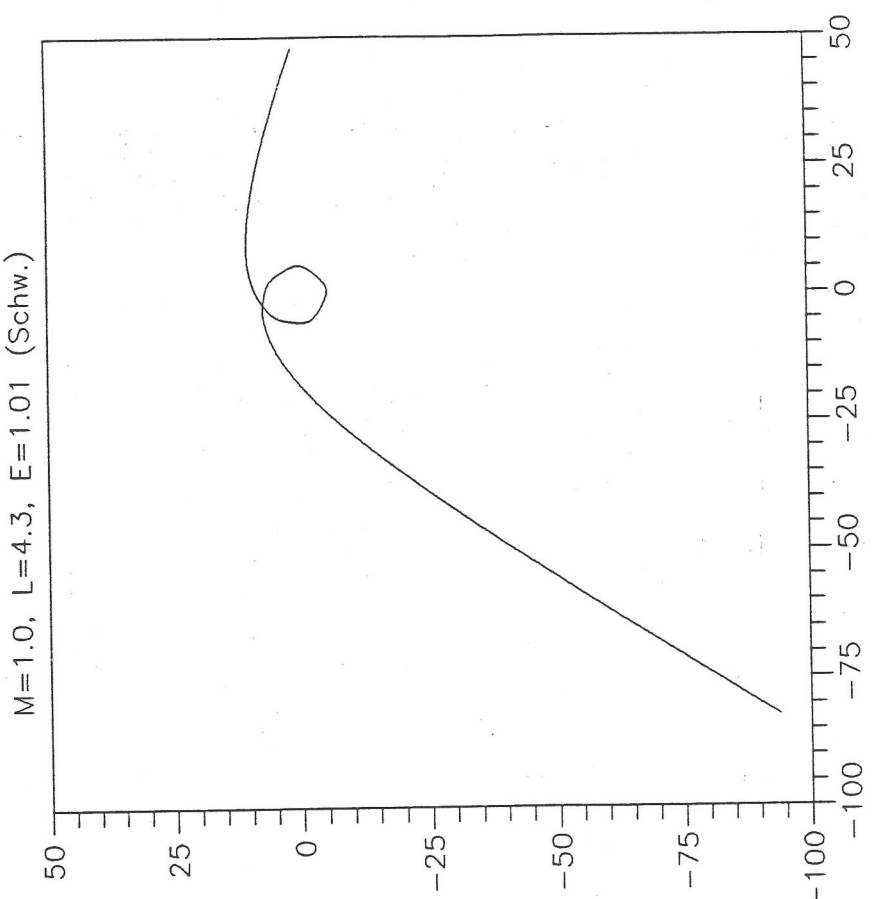
$M=1.0, L=4.3, E=0.9828$ (Schw.)



slika (3.4) primer zatvorenih orbita

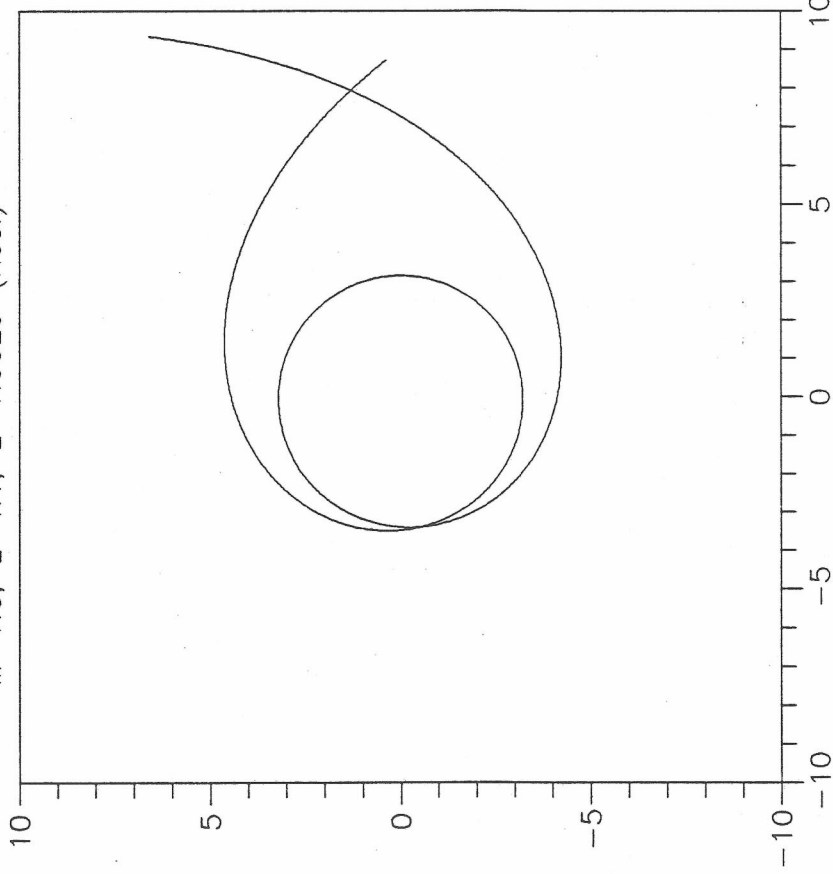


slika (3.5) primer kruznih orbita

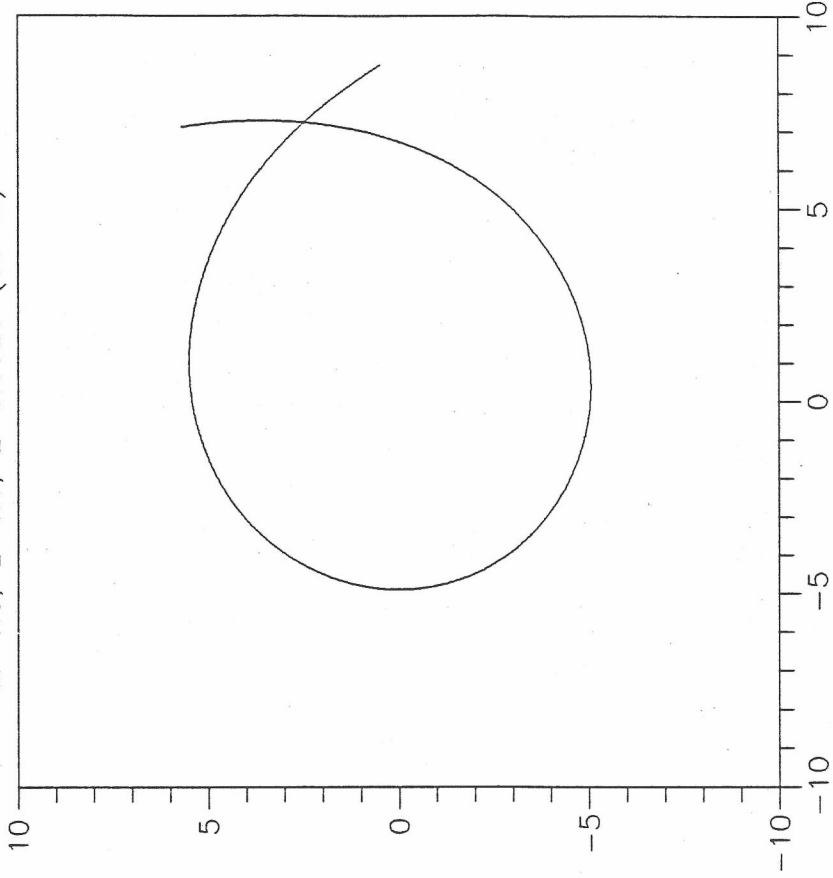


slika (3.6) primer otvorenih orbita

$M=1.0, L=4.1, E=1.0029$ (Ros.)

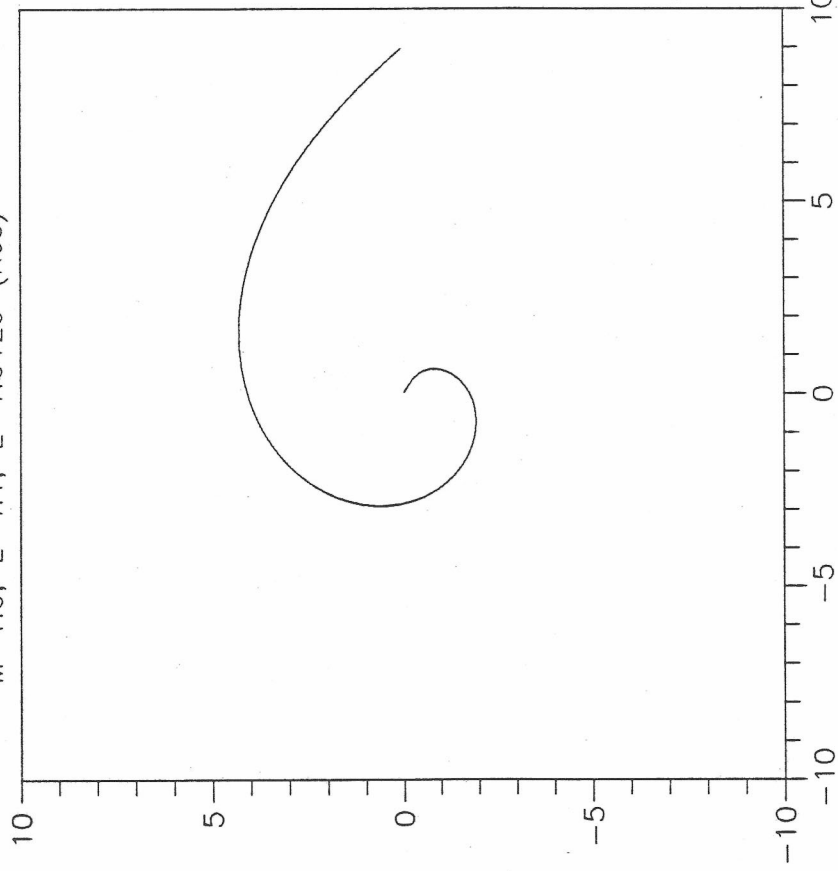


$M=1.0, L=4.1, E=1.0029$ (Schw.)

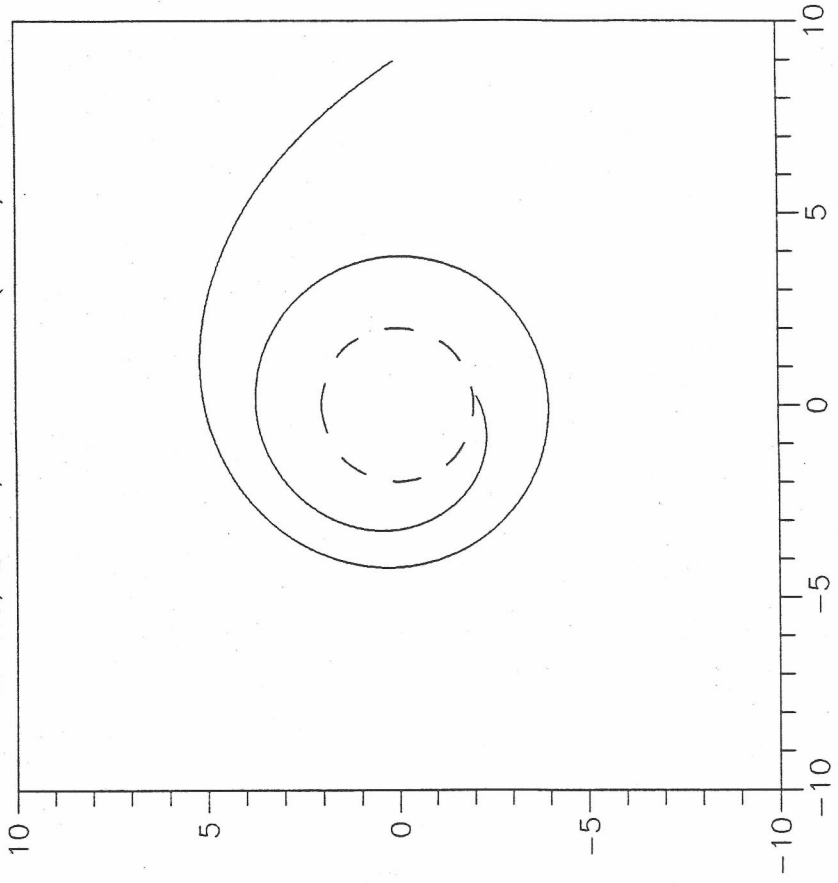


slika (3.7) primer otvorenih orbita

$M=1.0, L=4.1, E=1.0129$ (Ros)

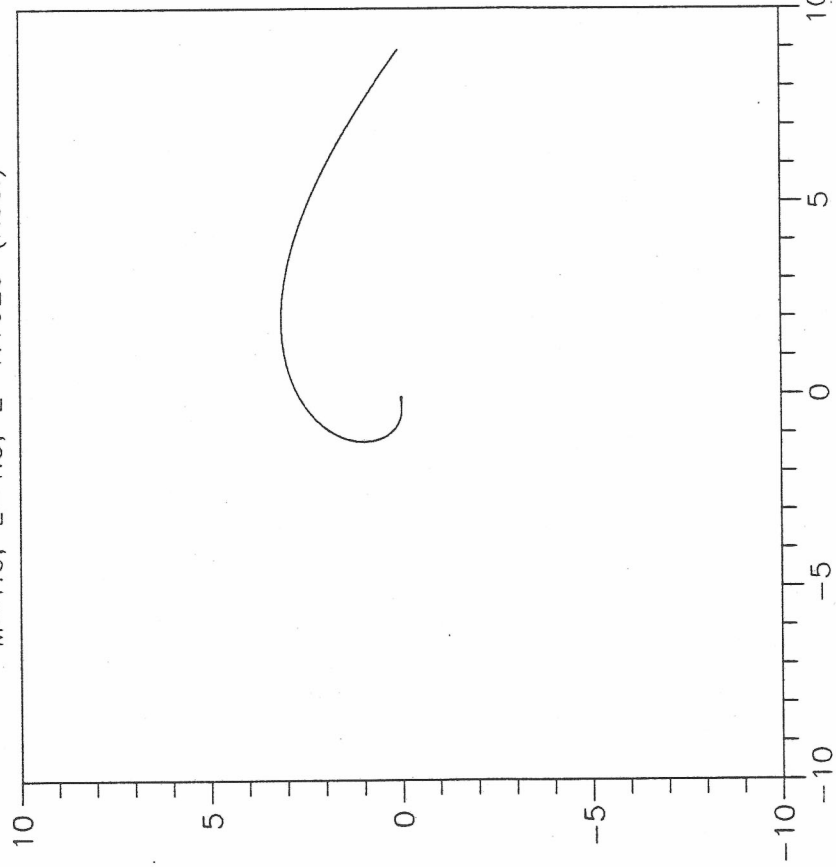


$M=1.0, L=4.1, E=1.0129$ (Schw.)

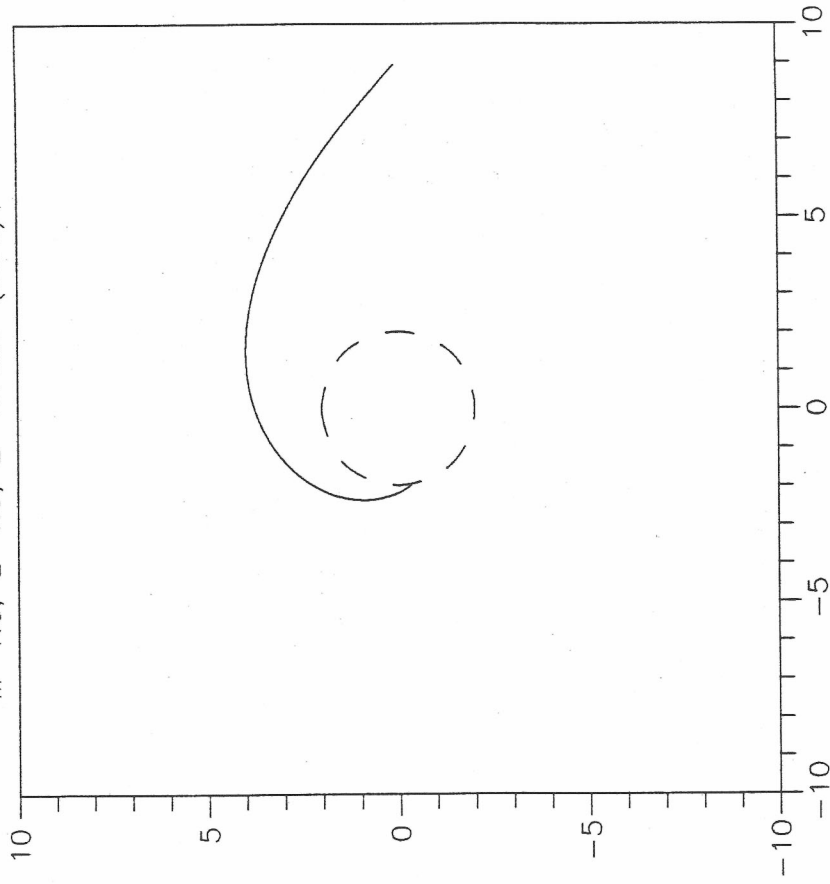


slika (3.8) primer orbita zahvata

$M=1.0, L=4.3, E=1.1029$ (Ros.)



$M=1.0, L=4.3, E=1.1029$ (Sch.)



slika (3.9) primer orbita zahvata

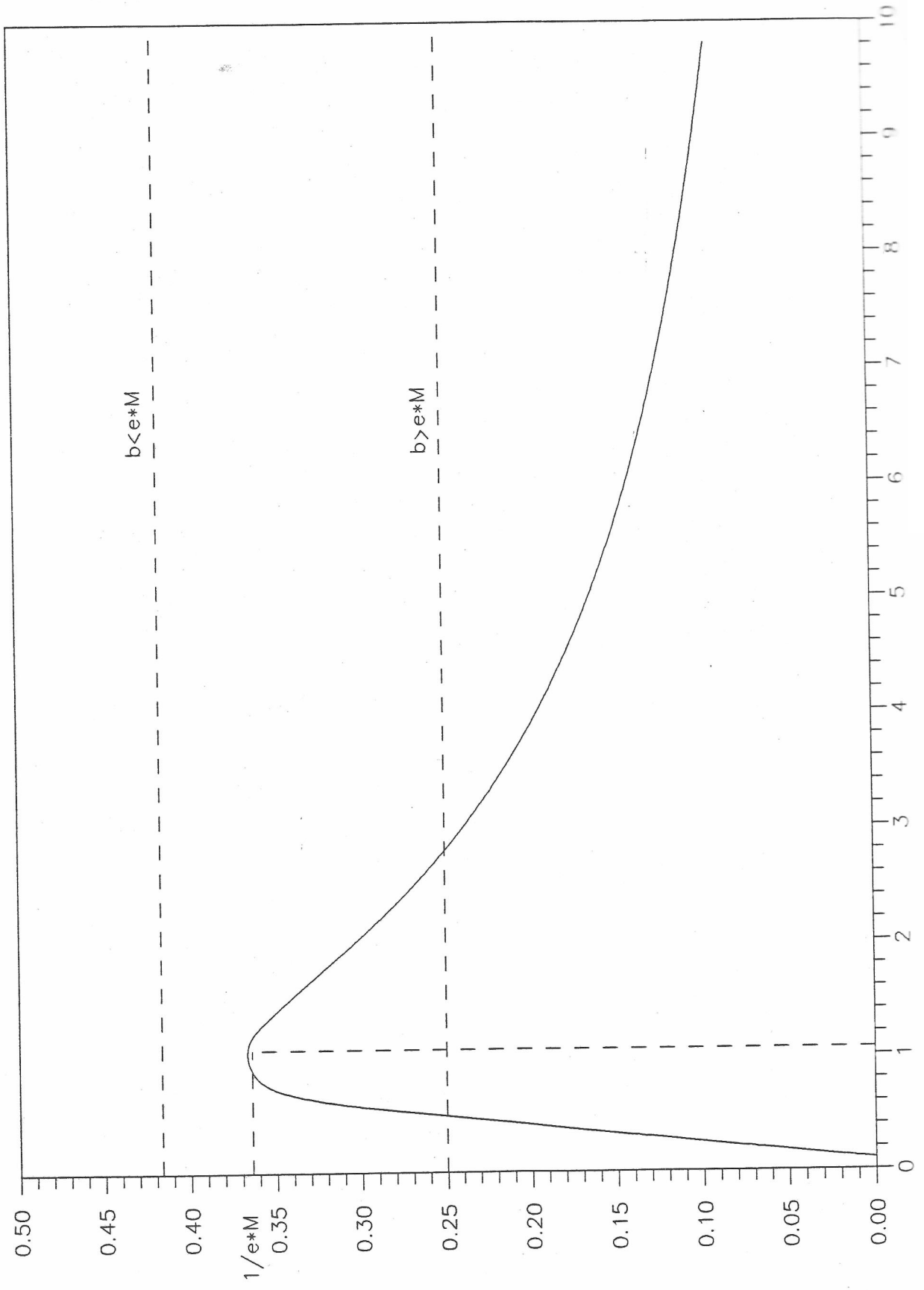
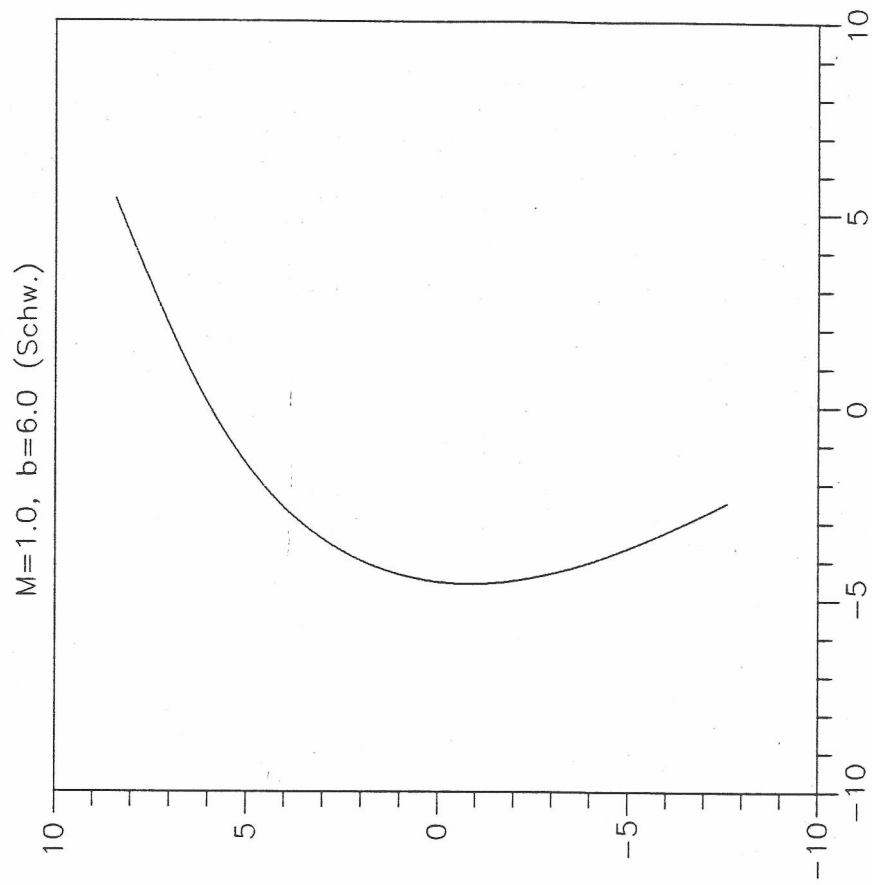
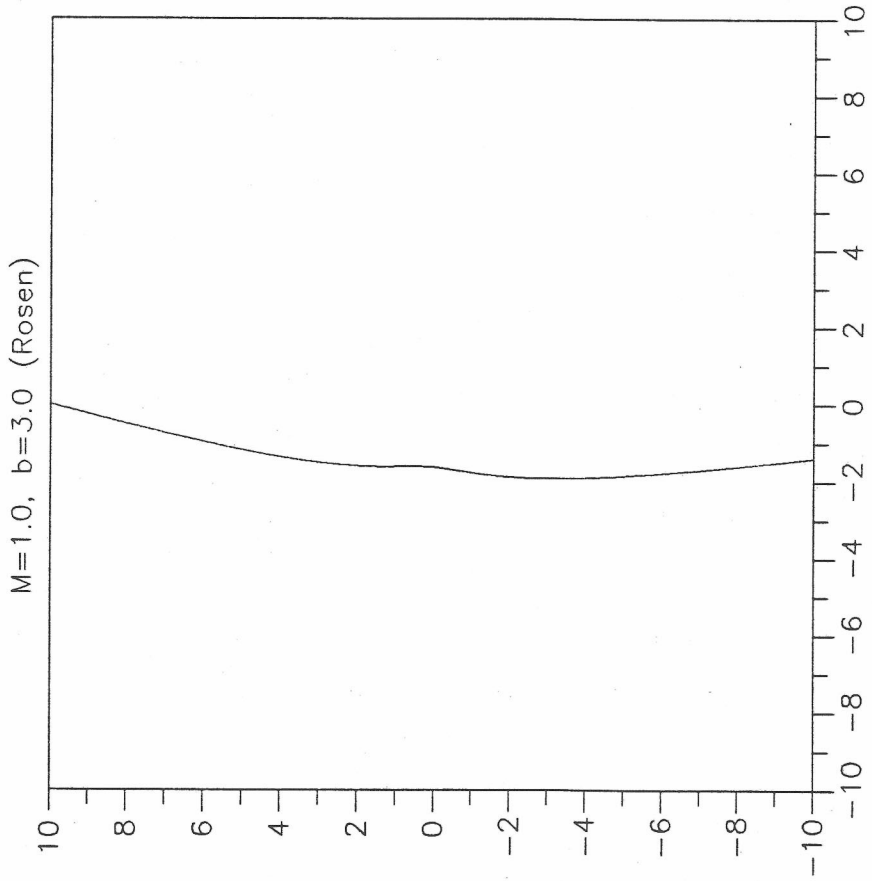
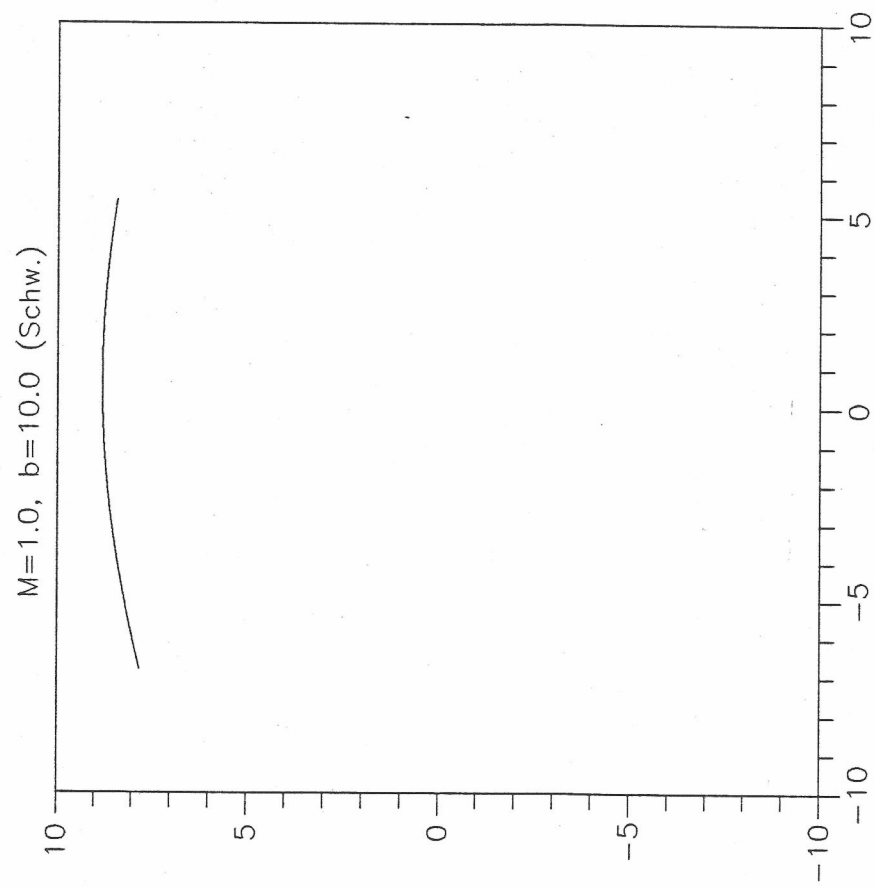
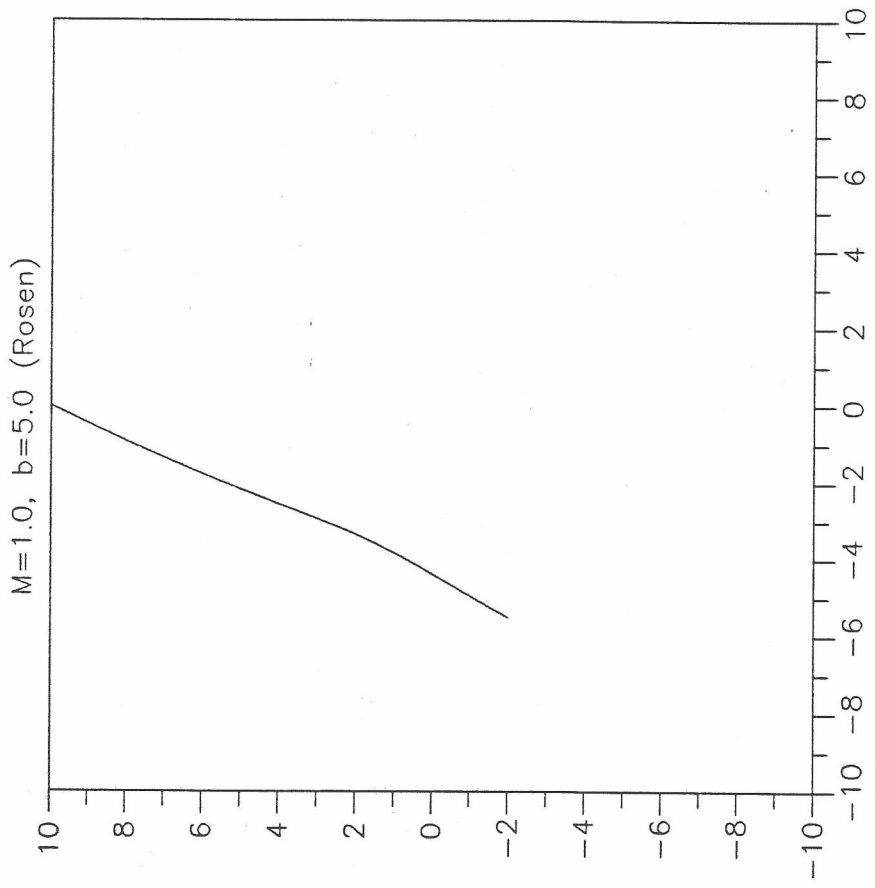


Figure (3.10)

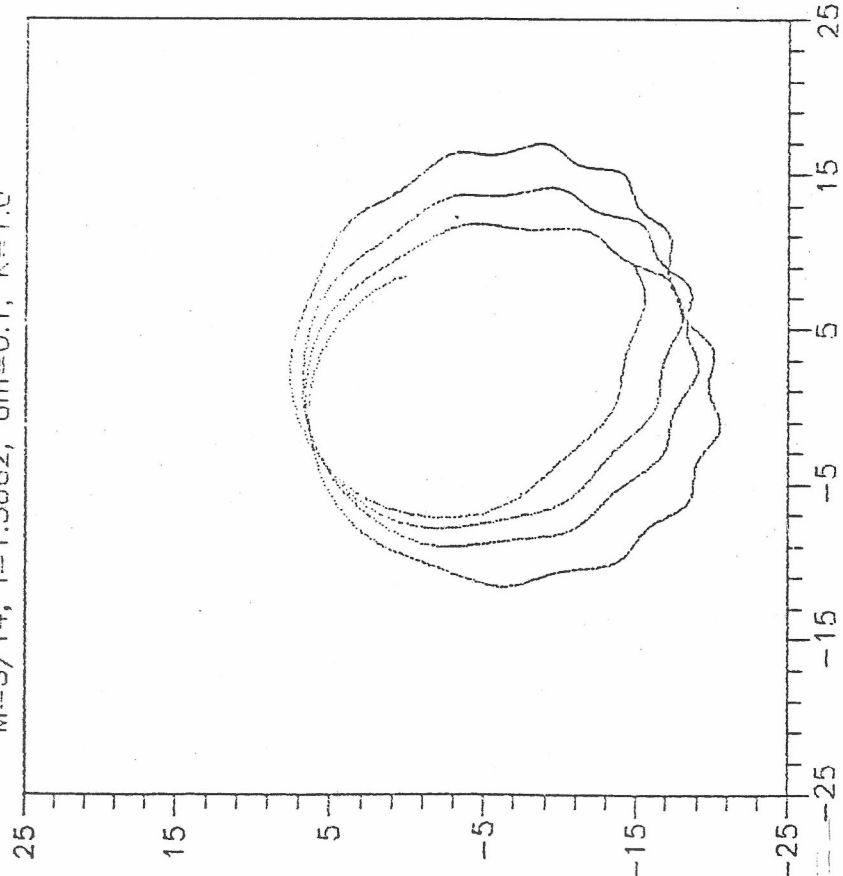


slika (3.11) primer fotonskih orbita

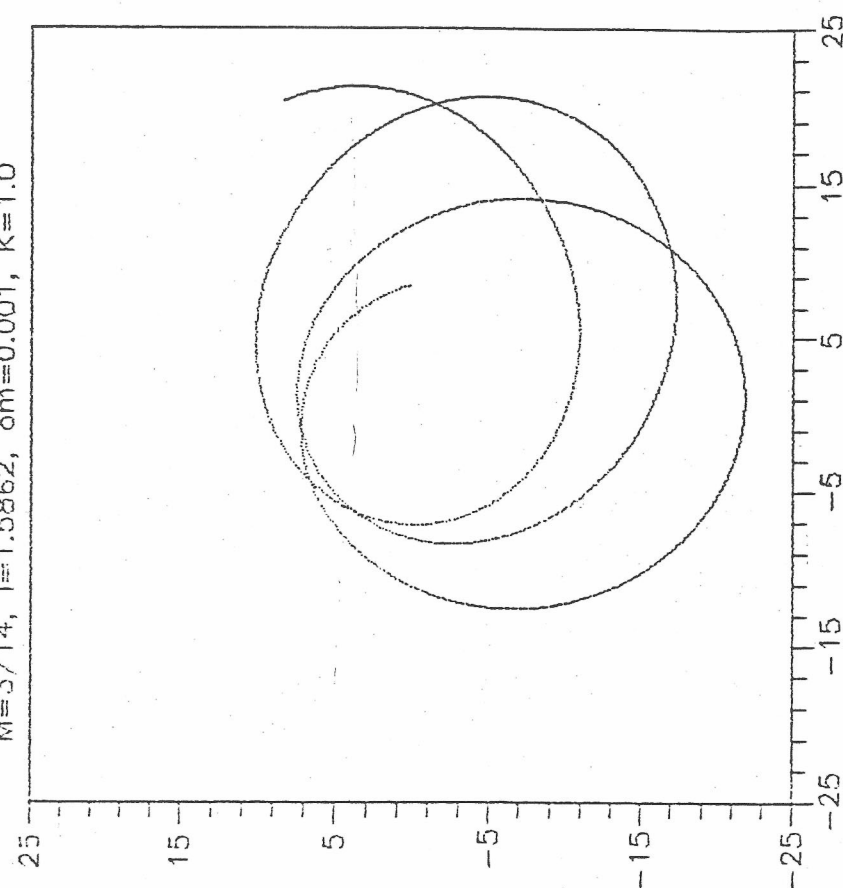


slika (3.12) primer fotonskih orbita

$M=3/14$, $l=1.5862$, $\sigma_m=0.1$, $K=1.0$

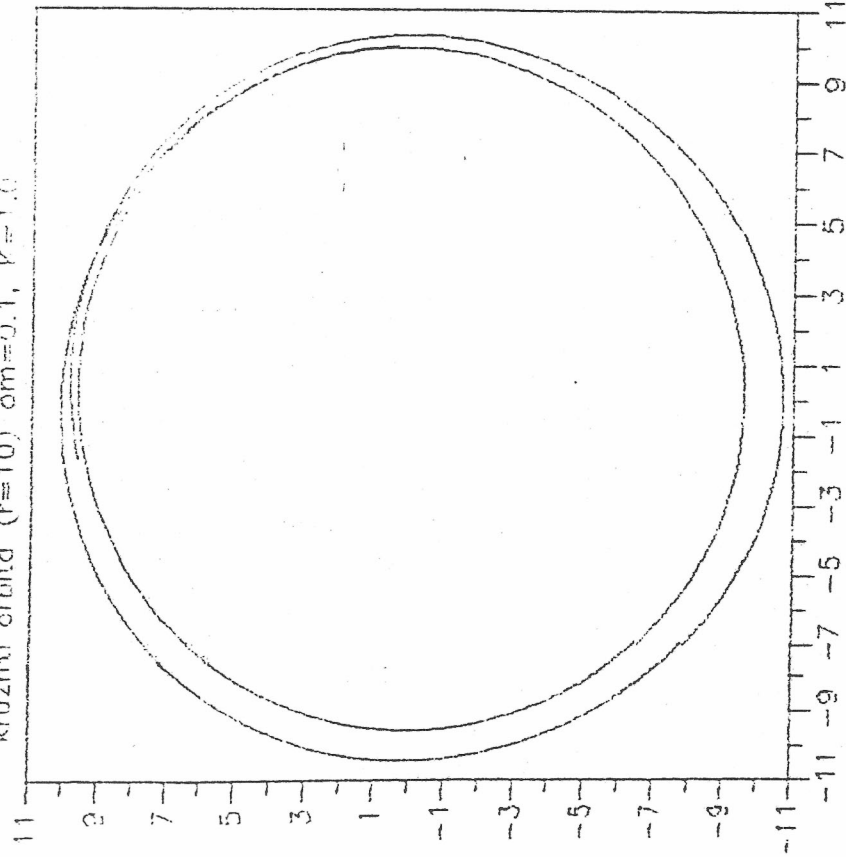


$M=3/14$, $l=1.5862$, $\sigma_m=0.001$, $K=1.0$

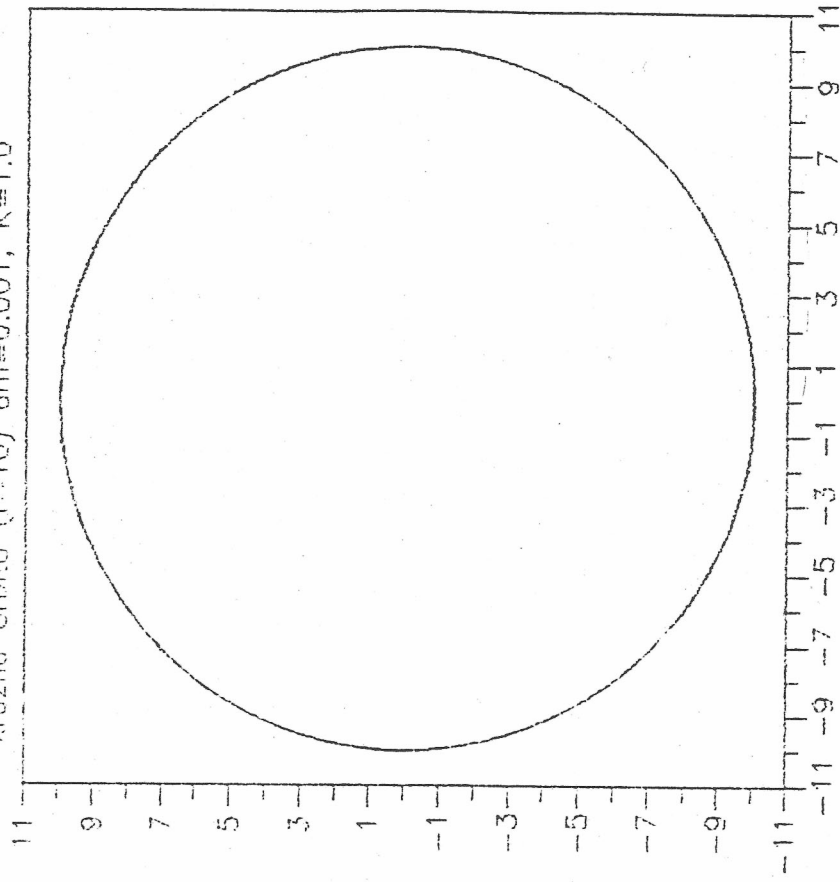


slika(5.1)

kružna orbita ($r=10$) $\alpha m=0.1$, $K=1.0$

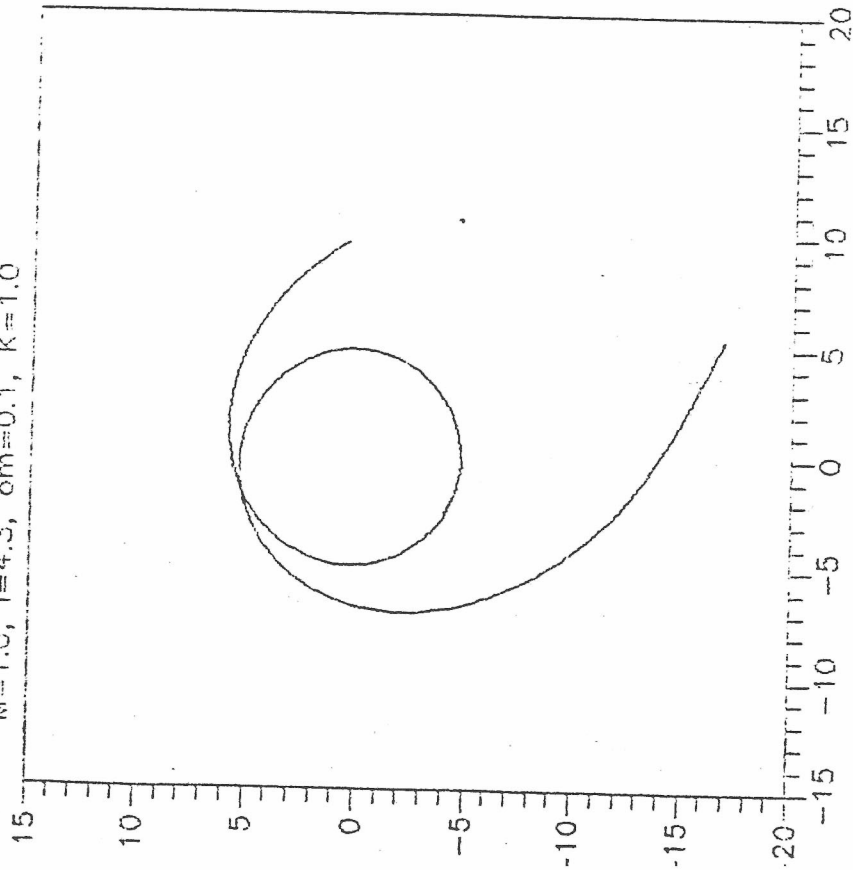


kružna orbita ($r=10$) $\alpha m=0.001$, $K=1.0$

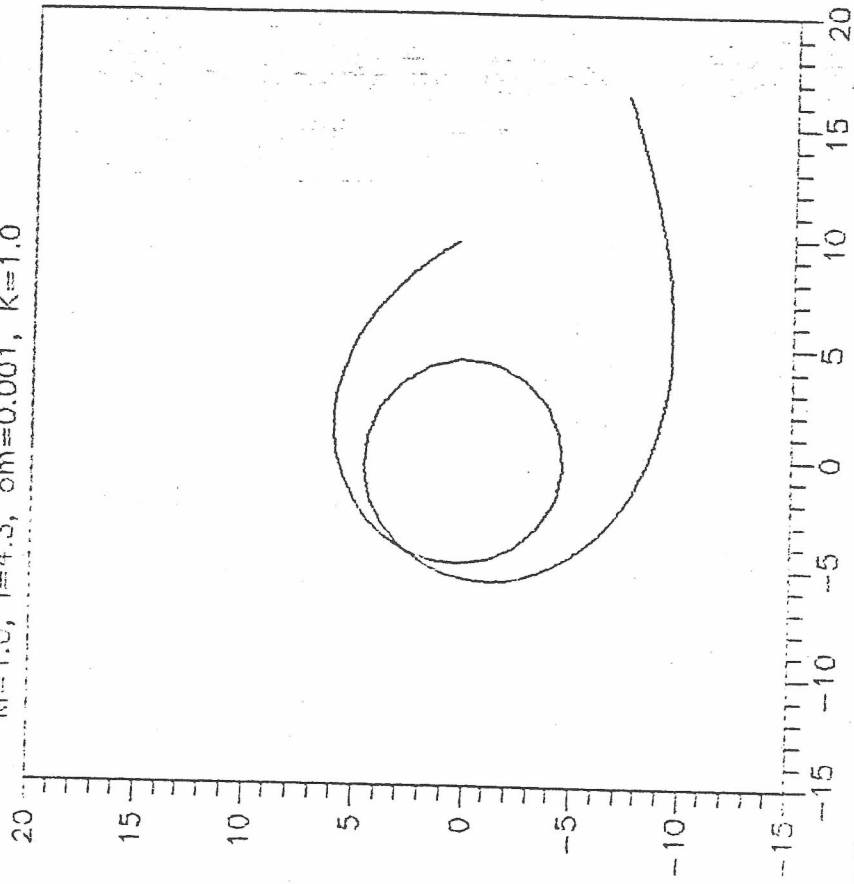


slika (5.2)

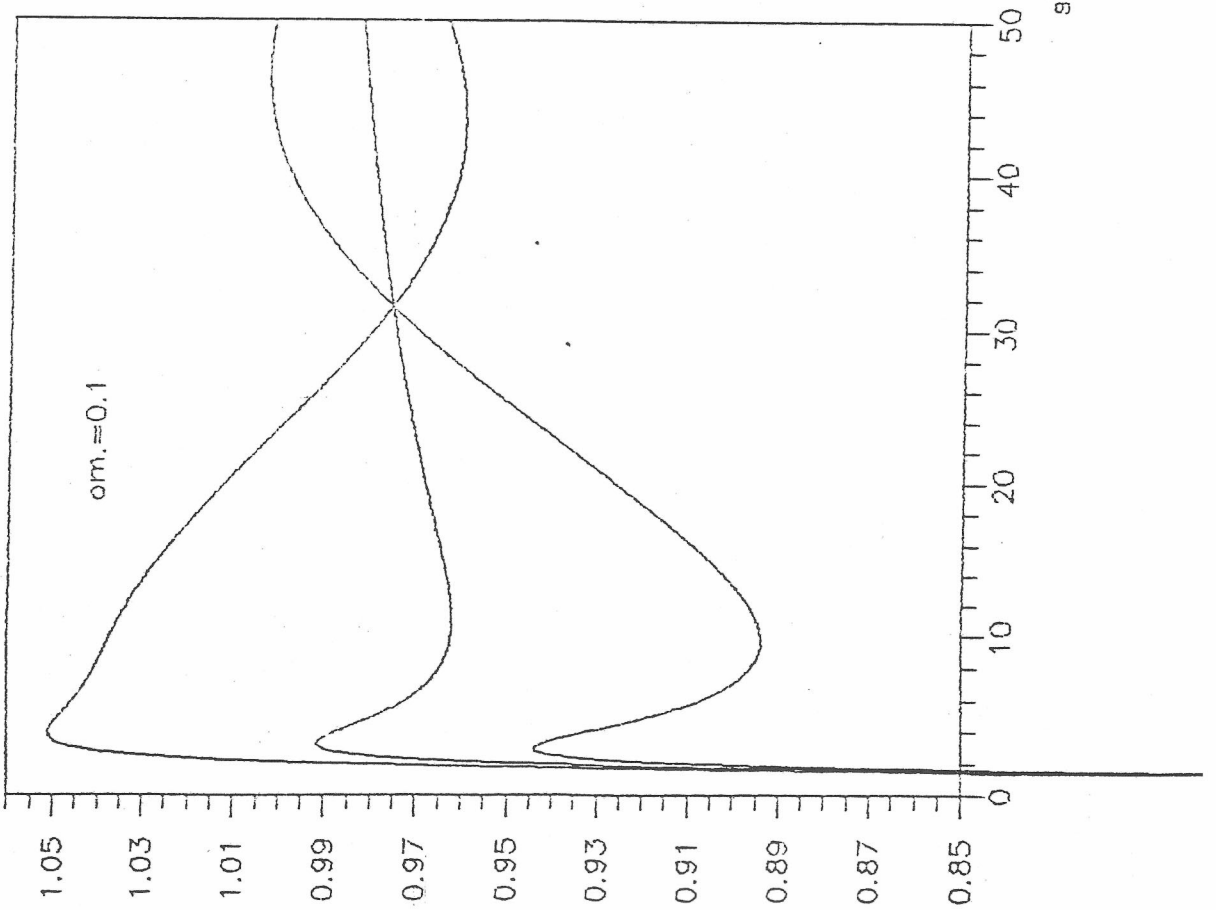
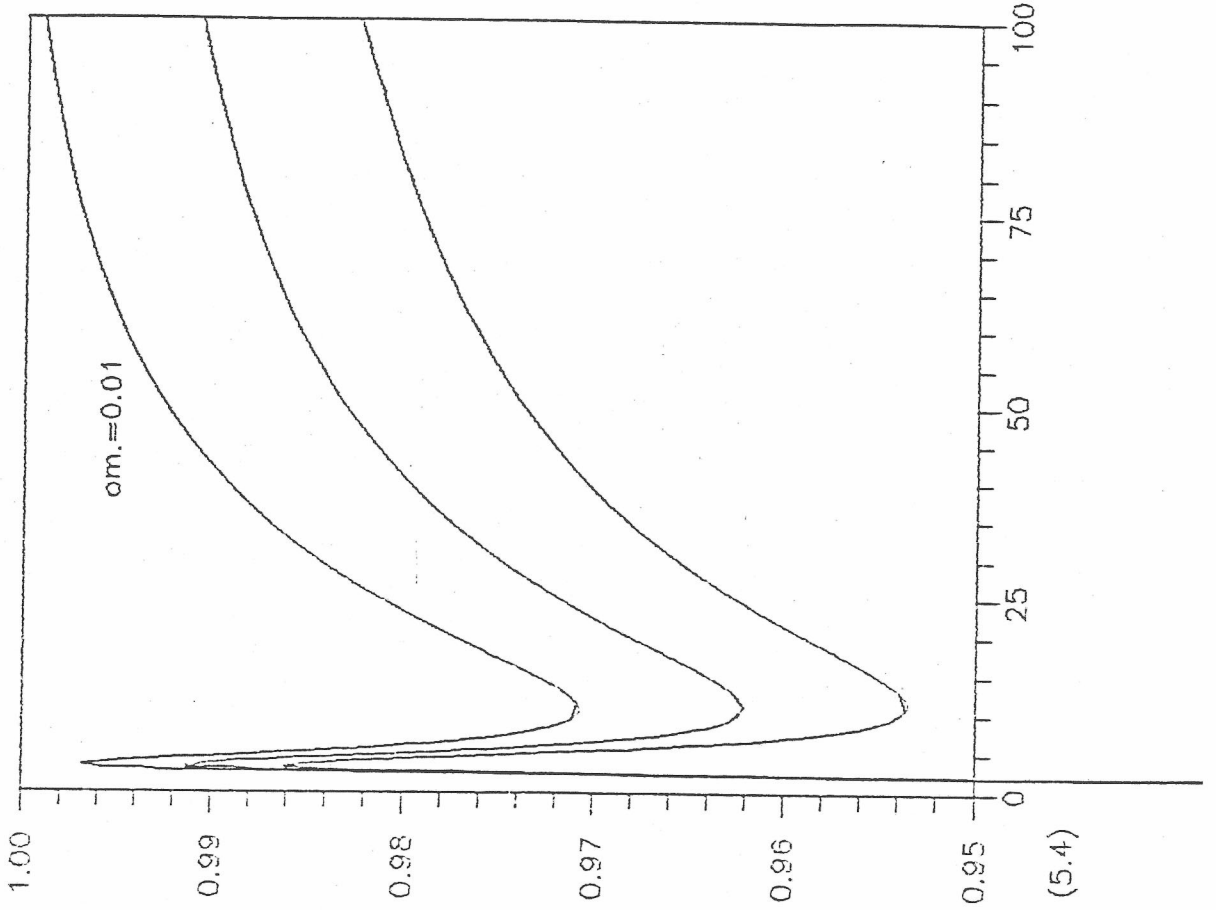
$M=1.0, l=4.3, \sigma m=0.1, K=1.0$

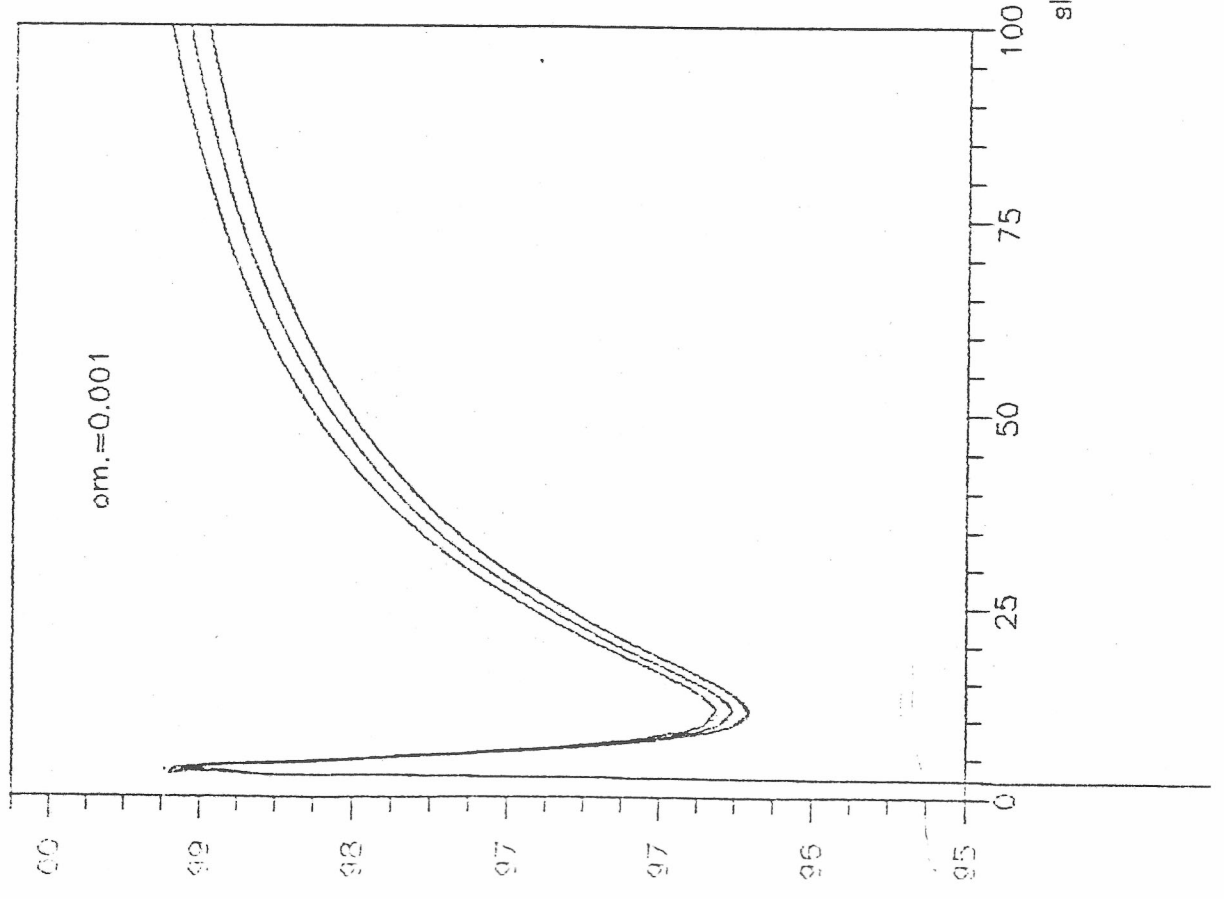
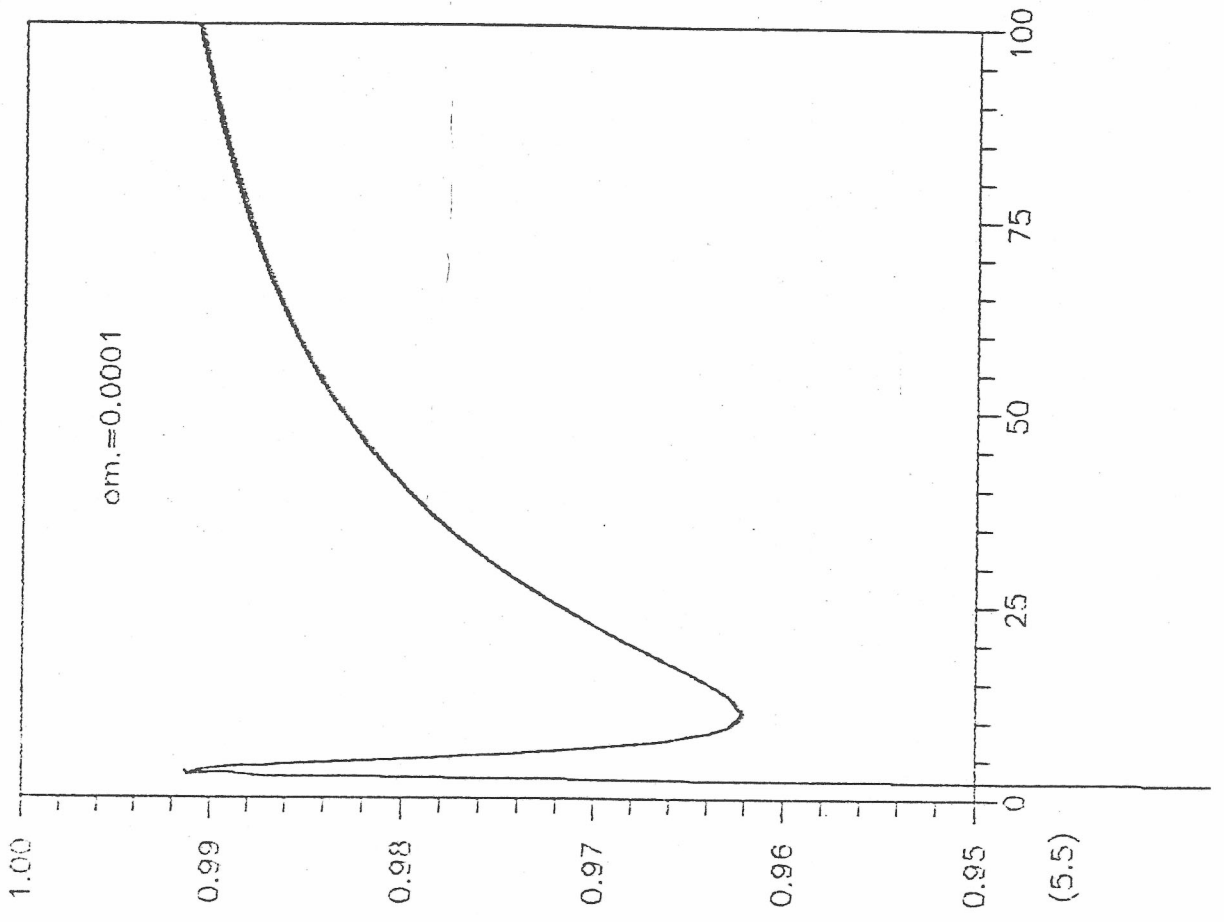


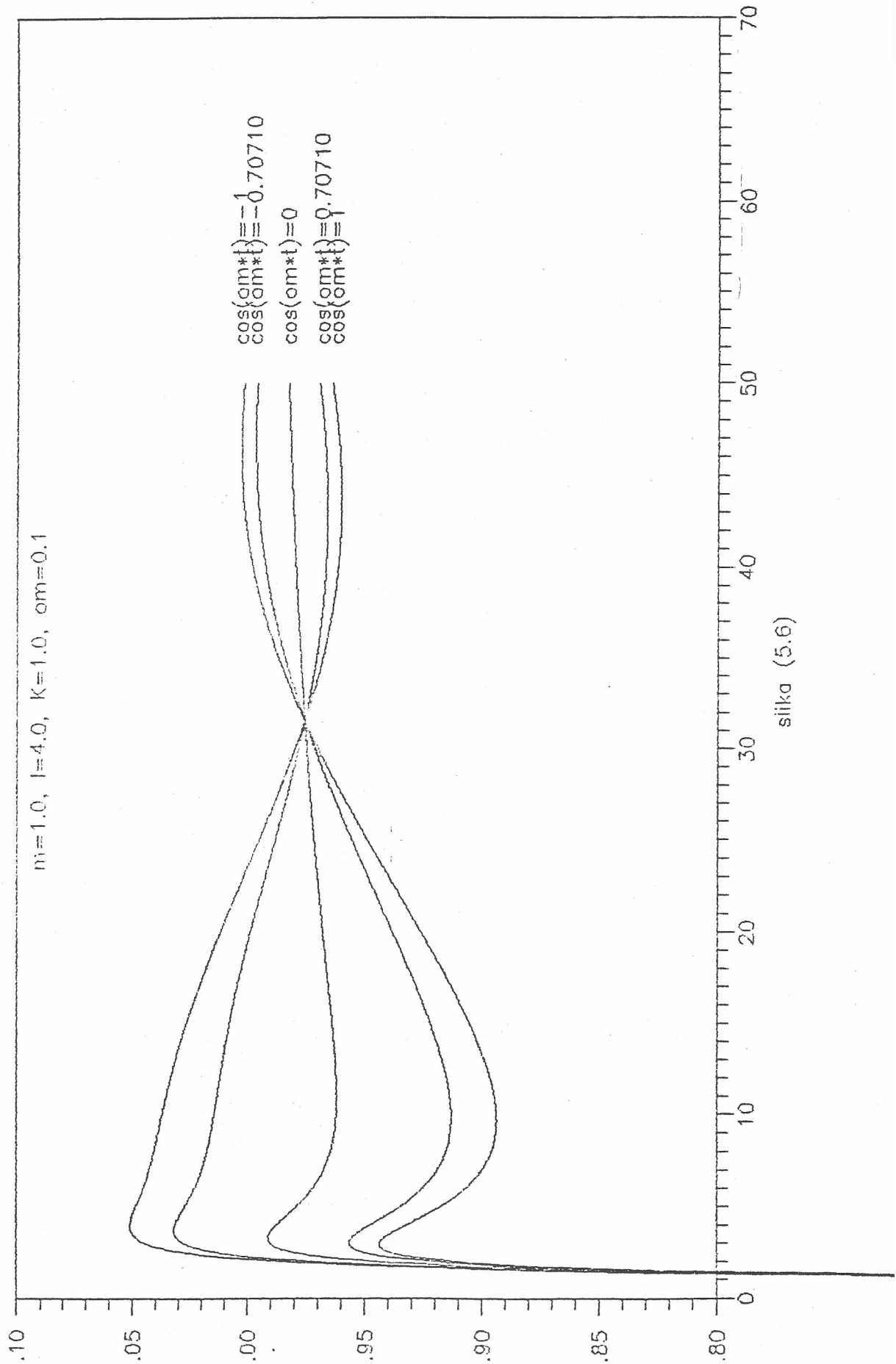
$M=1.0, l=4.3, \sigma m=0.001, K=1.0$

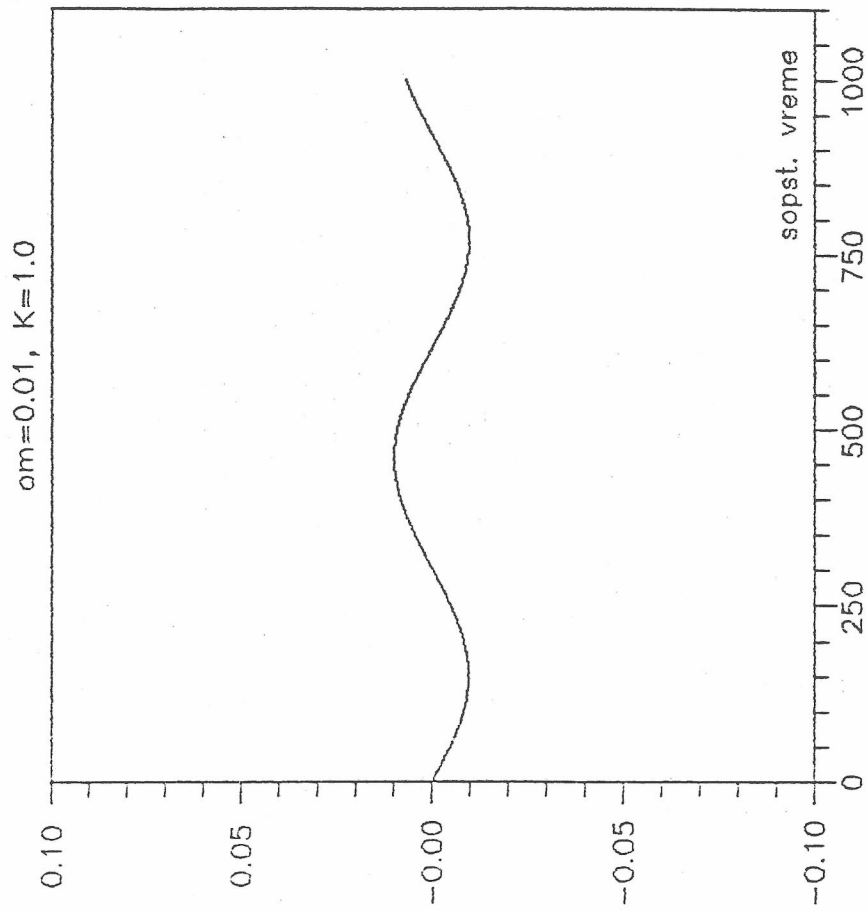
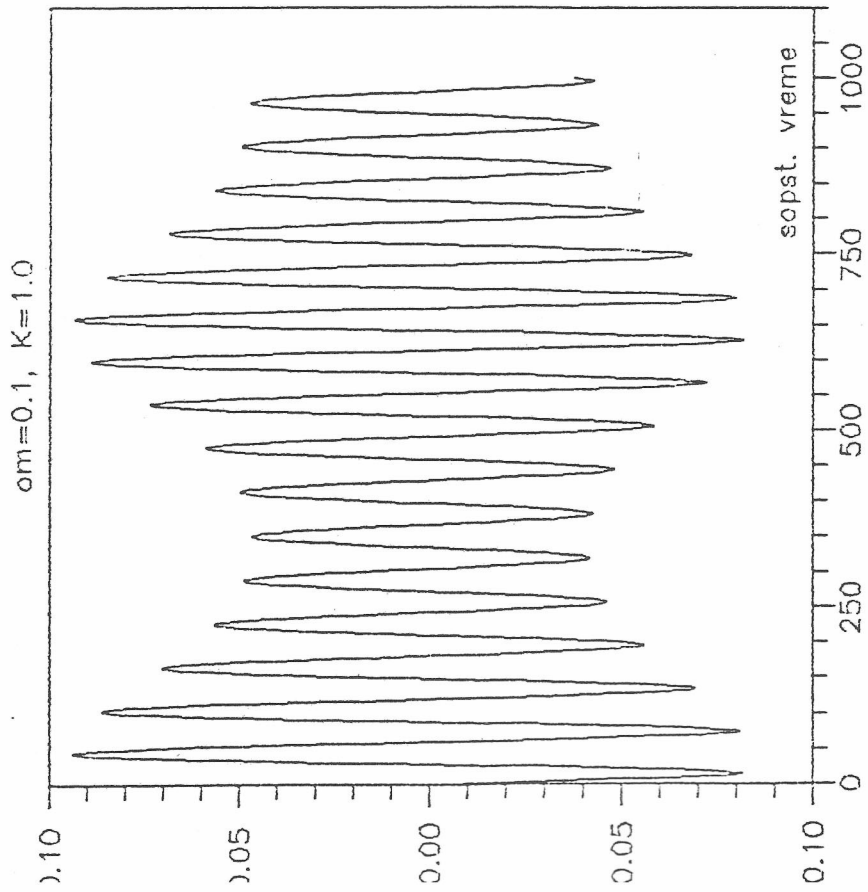


slika (5.3)









slika (5.7)

Ispravke

U uvodu:

- 1) U sedmom redu odozdo stoji (Rosen N., 1975), a treba (Rosen N., 1977).
- 2) Poslednja rečenica se briše.

U prvom paragrafu:

- 1) Formula (1.3.3) je napisana u obliku:

$$K_{\alpha\beta} \equiv N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -8\pi\kappa T_{\alpha\beta},$$

a treba u obliku:

$$K_{\alpha\beta} \equiv N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}N = -8\pi\kappa T_{\alpha\beta}$$

U spisku literature kod rednog broja 18) stoji

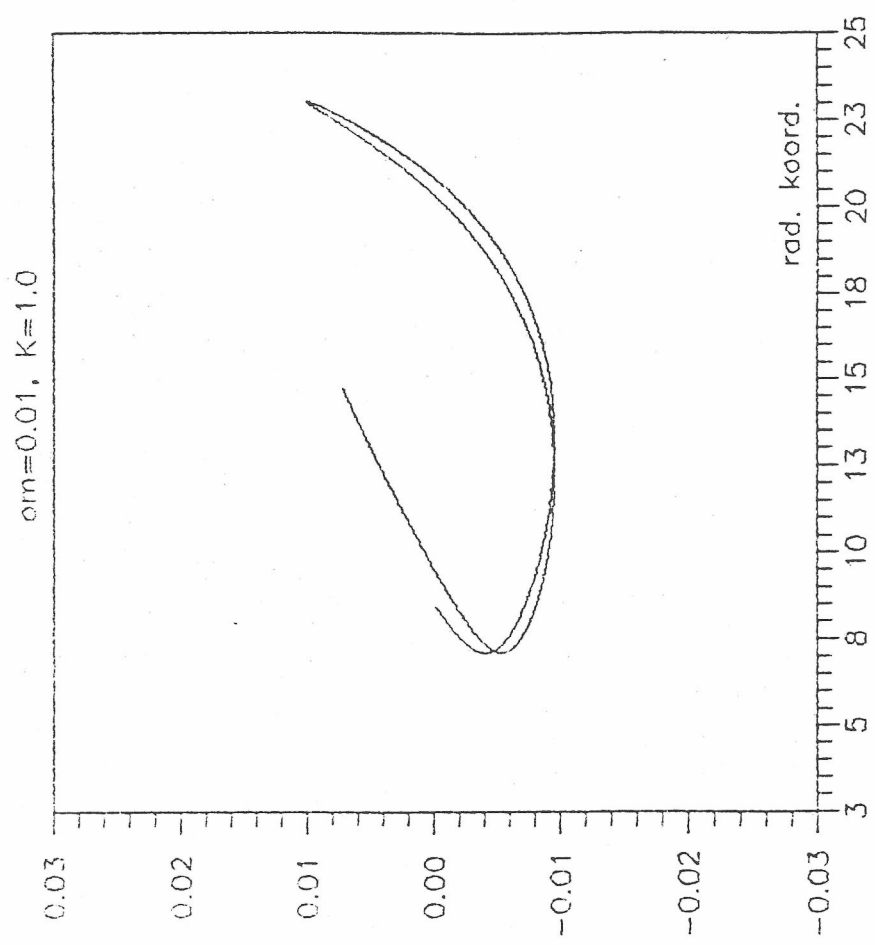
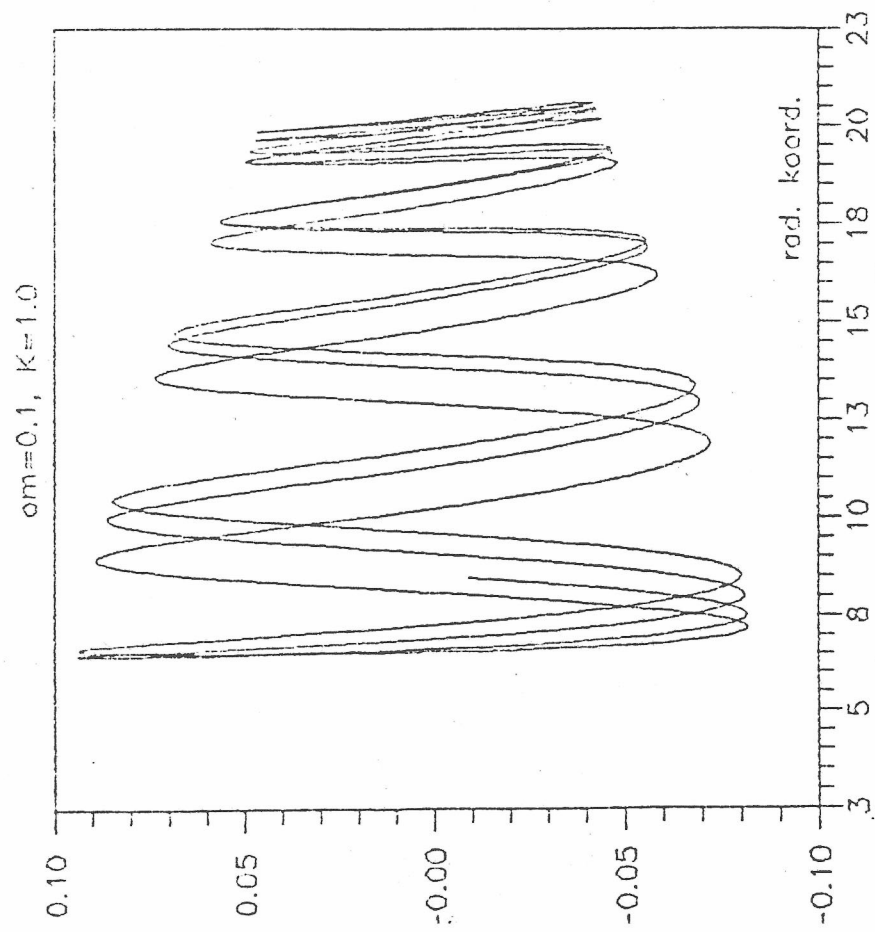
Rosen, N.: 1975 ...,

a treba

Rosen, N.: 1977, u *Topics in Theoretical and Experimental Gravitation Physics;*
V. De Sabbata i J. Weber, pp. 273-244

ed, Plenum Press, New York

Na kraju treba dodati sliku (5.8) koja je u prilogu.



slika (5.8)