Математички Факултет

Мастер Рад

Раширења модула

Аутор:
Милан Алимпић

Ментор:
Бранислав Првуловић

У Београду, септембар 2020.

Предговор

Тема овог рада је дефинисање функтора $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ на категорији Λ-модула и специјално функтора $\mathrm{Ext}(-,-)$. Назив $\mathrm{Ext}(-,-)$ потиче од речи екстензија односно раширење, што ће нам бити основа прве дефиниције. Како је ова дефиниција незгодна за конкретно рачунање, уводимо и испитујемо еквивалентне начине да се овај функтор уведе. Осим самог испитивања ових функтора, рад има за циљ да прикаже и њихову везу са другим значајним функторима, као што су Hom и хомолошке и кохомолошке групе. Такође имамо и извесну аналогију са функтором Tor. Најзнацхајнију примену у топологији има специјалан случај када је $n = 1$, односно функтор $\mathrm{Ext}(-,-)$. Ову примену имамо у Теореми о универзалним коефицијентима, у рацхунању кохомолошких група ланчастих комплекса, односно тополошких простора. У специјалном случају Абелових група овај функтор је први увео Бер[1] 1934. Назив Ext су дали Ајленберг[2] и Меклејн[3] 1942. и применили га на Теорему о универзалним коефицијентима. Дефиницију у случају Λ-модула над произвољним престеном Λ дао је Картан[4] 1956. Већина рада је базирана на [4], [7] и [8].

Увод има за циљ да дефинише основне појмове, који ће у даљем тексту бити потребни за изучавање раширења. У другој глави, најпре уводимо функтор $\mathrm{Ext}(-,-)$, преко кратких тачних низова, и дајемо примере израчунавања неких једноставних раширења. Затим уводимо њему еквивалентан функтор $\overline{\mathrm{Ext}}(-,-)$, овога пута помоћу кохомолошких група. Овај други начин ће нам учинити много очигледнијим како се овај функтор примењује у топологији. Такође рачунамо још неке примере раширења, која су нам, уз нову дефиницију, доста једноставнија за рачунање.

Наредна глава доказује Теорему о универзалним коефицијентима и примењује је на израчунавање кохомолошких група неких познатијих тополошких простора. Ова теорема нам омогућава да уколико знамо хомолошке групе простора, израчунамо његове кохомолошке групе.

Четврта и пета глава се баве раширењима вишег реда. Најпре, у четвртој глави, имамо две дефиниције, донекле аналогне онима из прве главе, функтора $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ и $\overline{\mathrm{Ext}}^n(-,-)$. У петој глави дајемо извесно уопштење функтора $\overline{\mathrm{Ext}}^n(-,-)$. Уводимо дефиницију изведених функтора, а затим показујемо како је она уопштење дефиниције $\overline{\mathrm{Ext}}^n(-,-)$ и како из тог општијег контекста можемо видети раширења на још један еквивалентан начин: уводимо функтор $\hat{\mathrm{Ext}}^n(-,-)$. Поново ћемо показати да су сви ови функтори еквивалентни, и искористити разне дефиниције за рачунање разних раширења, кроз примере.

---

[1] Reinhold Baer 1902-1979, немачки математичар

[2] Samuel Eilenberg 1913-1998, пољско-амерички математичар

[3] Saunders MacLane 1909-2005, амерички математичар

[4] Henri Cartan 1904-2008, француски математичар

Садржај

1 Увод

У уводу ћемо дати дефиниције основних појмова које изучавамо и користимо у даљем раду. Све време подразумевамо да је Λ фиксиран комутативан прстен са јединицом. Централни појам рада је свакако модул, односно модул над Λ.

Дефиниција 1. *Модул* A над Λ, или Λ-модул, јесте Абелова група на којој је дефинисана и спољна операција множења, таква да за све $a, b \in A$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$ важи

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$$

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a),$$

$$1_\Lambda a = a.$$

Код ове дефиниције битно је напоменути да је веома значајан избор прстена Λ. Свака Абелова група је и $\mathbb{Z}$-модул, уз уобичајено дефинисано множење целим бројевима. Избор комутативног прстена са јединицом над којим су дефинисани модули игра значајну улогу у дефиницији категорије, односно морфизама између модула.

Дефиниција 2. *Хомоморфизам* Λ-модула A и B је пресликавање $f : A \to B$ такво да за $a, b \in A$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$ важи $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$.

Лако се проверава да постоји категорија чији су објекти Λ-модули, а морфизми хомоморфизми Λ-модула. Из дефиниције је јасно да је сваки хомоморфизам Абелових група такође и хомоморфизам $\mathbb{Z}$-модула, односно да су та два појма еквивалентна.

Пример 1. Сваки комутативни прстен са јединицом Λ је модул над самим собом. У овом случају је спољна операција из дефиниције модула заправо множење у прстену. Подмодули овог модула су тачно идеали тог прстена. Даље, количнички модули поменутог модула су модули облика Λ/I где је I неки подмодул, односно идеал.

Производи и директне суме Λ-модула ће такође бити Λ-модули. Специјално, уколико су I_i идеали прстена Λ тада су и $\prod_i \Lambda/I_i$ и $\bigoplus_i \Lambda/I_i$ Λ-модули.

Наредна два значајна појма су инјективни и пројективни модули.

Дефиниција 3. Модул P је *пројективан* ако има својство подизања у односу на све епиморфизме, односно ако за свака два модула M и N, сваки епиморфизам $f : N \to M$ и сваки (хомо)морфизам $g : P \to M$ постоји $h : P \to N$такво да дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, two heads, "f"] \\
P \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"] & M
\end{tikzcd}$$

Дуално, модул I је инјективан ако има својство продужења у односу на све мономорфизме, односно ако за свака два модула M и N, сваки мономорфизам $f : M \to N$ и сваки морфизам $g : M \to I$ постоји $h : N \to I$, такво да дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
I & M \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

У дијаграмима као у претходној дефиницији, када имамо део дијаграма, за пресликавање које допуњава дијаграм до комутативног кажемо да *решава* тај дијаграм. У наставку ћемо углавном то пресликавање на дијаграмима означавати испрекиданим стрелицама.

Пример 2. Сваки слободан модул P је и пројективан. Заиста, за дијаграм

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

довољно је да на базним елементима дефинишемо пресликавање h. Њега можемо дефинисати тако да базни елемент слика у било који оригинал (при f) слике (при g) тог базног елемента. Ово такође илуструје да подизање, које мора да постоји, не мора бити јединствено.

Пример 3. За Абелову групу G кажемо да је дељива ако за свако $a \in G$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $b \in G$ такво да је $nb = a$. Примери дељивих група су $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$. Осим претходна три примера, занимљив је и пример p-квазицикличних група $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Ову групу дефинишемо као подгрупу $\mathbb{C}$ која садржи све p^n-те корене из јединице, за свако $n \in \mathbb{N}$. Такође је можемо видети као директни лимес низа група $\mathbb{Z}_{p^n}$, уз стандардно утапање $\mathbb{Z}_{p^n}$ у $\mathbb{Z}_{p^{n+1}}$, што нам даје инспирацију за ознаку $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. И више, важиће да су све дељиве групе директне суме копија p-квазицикличних група и рационалних бројева. Доказ овога може се наћи у [6]. Дељиве групе ће, до на изоморфизам, бити одређене бројем (односно кардиналношћу) ових група у тој директној суми.

Абелова група је дељива ако и само ако је инјективна. Један смер овог тврђења није тешко доказати. Претпоставимо да је G инјективна група и нека су $a \in G$ и $n \in \mathbb{N}$. Ако је пресликавање $f : \mathbb{Z} \to G$ задато са $f(1) = a$ дијаграм

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ G & \mathbb{Z} \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\cdot n"'] \end{tikzcd}$$

има решење h. Нека је $b = h(1)$. Тада је $nb = h(n) = a$. Дакле, група G јесте дељива. Доказ другог смера је компликованији, и овде га нећемо наводити.

Ови појмови ће нам бити значајни у оквиру пројективних, односно инјективних, резолуција модула. За дати модул A тачан низ

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{\pi_n} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\pi_1} A \to 0$$

у којем су сви P_i пројективни зовемо пројективна резолуција модула A. Сваки модул има пројективну (и више, слободну) резолуцију. Заиста, можемо дефинисати низ слободних модула P_i и пресликавања π_i на њиховим базним елементима на следећи начин. P_{i+1} ће бити модул генерисан елементима $\ker \pi_i$, а π_{i+1} ће сваки од базних елемената сликати у себе. Значајне ће нам бити и коначне пројективне резолуције, односно низови

$$0 \to R \to P_n \to \cdots \to P_1 \to A \to 0$$

у којем су сви P_i пројективни. Ове низове можемо добити тако што пројективну резолуцију прекинемо на било ком месту и додамо $R = \ker \pi_n$ на крај. Подмодул пројективног модула не мора бити пројективан, па тако ни R из датог низа не мора бити пројективан.

Дуално, посматраћемо инјективне резолуције, односно низове

$$0 \to A \to I_1 \to \cdots \to I_n \to \cdots$$

где су сви модули I_i инјективни. Може се показати да категорија модула над комутативним прстеном са јединицом има довољно инјективних објеката, прецизније, да за сваки модул A постоје модул I и инјекција $i : A \to I$. Одатле можемо да конструишемо инјективну резолуцију на следећи начин. Нека је $i_1 : A \to I_1$ инјекција и I_1 инјективан модул. Посматрајмо $\operatorname{coker} i_1$. За њега постоји $\overline{i_2} : \operatorname{coker} i_1 \to I_2$ где је и I_2 инјективан модул. Сада је низ $0 \to A \to I_1 \xrightarrow{i_2} I_2$, где је $i_2 = \overline{i_2}\pi$, а $\pi : I_1 \to I_1/\operatorname{im} i_1 = \operatorname{coker} i_1$ природна пројекција, тачан. Индуктивно можемо наставити овај поступак, што нас доводи до инјективне резолуције.

Још неки значајни појмови су пулбек и пушаут дијаграма.

Дефиниција 4. Нека је дат дијаграм

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Пулбек (*pullback*) овог дијаграма је дијаграм

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

који комутира и важи да за сваки комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "g''"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

дијаграм

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\ & E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

има јединствено решење h.

Пулбек дијаграма ће увек постојати. Дефинишемо

$$E = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \leq X \times Y$$

и $f' = \pi_2$ и $g' = \pi_1$, где су π_1 и π_2 редом пројекције на прву, односно другу координату.

Није тешко проверити да за дијаграм

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

важи да је пулбек ако и само ако је низ $0 \to E \xrightarrow{(g', f')} X \oplus Y \xrightarrow{f\pi_1 - g\pi_2} Z$ тачан. Одавде следи и да је пулбек једнозначно одређен до на изоморфизам. Сваки је изоморфан језгру $f\pi_1 - g\pi_2$.

Дефиниција 5. Нека је дат дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Пушаут (*pushout*) овог дијаграма је комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g'"] \\
Y \arrow[r, "f'"] & E
\end{tikzcd}$$

са својством да за сваки комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g''"] \\
Y \arrow[r, "f''"] & F
\end{tikzcd}$$

постоји јединствено решење h дијаграма

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "g''"] & \\
Y \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "f''"] & E \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & F
\end{tikzcd}$$

И пушаут дијаграма увек постоји. Дефинишемо

$$E = X \oplus Y / \{(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}$$

и пресликавања $f' = \pi i_2$ и $g' = \pi i_1$, где су i_1 и i_2 инклузије модула X и Y редом у њихову директну суму, а π је пројекција те суме на дати количник.

Није тешко проверити да за дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g'"] \\
Y \arrow[r, "f'"] & E
\end{tikzcd}$$

важи да је пушаут ако и само ако је низ $Z \xrightarrow{(f,g)} X \oplus Y \xrightarrow{g'\pi_1 - f'\pi_2} E \to 0$ тачан. Одавде следи да је пушаут једнозначно одређен до на изоморфизам. Сваки је изоморфан којезгру (f, g).

Тврђење 1. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, dashed, "h"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "j'"] & B' \arrow[r, "k'"] & C' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

на којем су оба хоризонтална низа тачна. Тада постоји пресликавање h које решава дијаграм.

Доказ: Заиста, нека је $a \in A$. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, dashed, mapsto] & j(a) \arrow[r, mapsto, "k"] \arrow[d, mapsto, "f"] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
a' \arrow[r, mapsto, "j'"] & fj(a) \arrow[r, mapsto, "k'"] & 0
\end{tikzcd}$$

Како $fj(a) \in \ker k' = \operatorname{im} j'$ и j' је мономорфизам, то постоји јединствено a' које се слика у њега, па можемо да дефинишемо $h(a) = a'$. $\square$

2 Функтор Ext

2.1 Кратки тачни низови

Приликом изучавања алгебарских структура значајно нам је посматрање подструктура и количничких структура. Уколико су нам дата два модула, над комутативним прстеном са јединицом Λ, A и B, поставља се питање шта можемо рећи о модулу C чији је B подмодул и $C/B \cong A$. Ово можемо записати у облику кратког тачног низа

$$0 \to B \to C \to A \to 0.$$

Дефиниција 6. Кратак тачан низ Λ-модула

$$0 \to B \to C \to A \to 0$$

називамо *раширењем (екстензијом) модула B модулом A*

Желимо да идентификујемо раширења која су на неки начин еквивалентна, па уводимо наредну релацију.

Дефиниција 7. Два раширења модула B модулом A су *еквивалентна* уколико постоји хомоморфизам α такав да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Јасно је да је релација рефлексивна (идентички хомоморфизам), као и да је транзитивна (композиција хомоморфизама). Према пет леми дати хомоморфизам мора бити и изоморфизам, одакле следи да је релација и симетрична. Дакле можемо да дефинишемо $\mathrm{Ext}_\Lambda(A, B)$ као скуп свих раширења модула B модулом A, посечен по датој релацији. У даљем тексту ћемо, кад год нам није значајно да нагласимо о којем прстену је реч, уместо ознаке Ext_Λ користити само ознаку Ext и подразумеваћемо да се ради о Λ-модулима.

Желимо да покажемо да је $\mathrm{Ext}(-,-)$ бифунктор, односно да када фиксирамо први аргумент добијамо функтор $\mathrm{Ext}(A,-)$ и када фиксирамо други аргумент добијамо функтор $\mathrm{Ext}(-,B)$. Да бисмо то доказали, најпре је потребно да за пресликавања $\alpha : A' \to A$ и $\beta : B \to B'$ дефинишемо пресликавања $\alpha^* : \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A', B)$ и $\beta_* : \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A, B')$. За раширење $0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} A \to 0$ посматрамо пулбек дијаграма

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[d, dashed, "\alpha'"] & A' \arrow[d, "\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r, "k"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Хомоморфизам k' мора бити епиморфизам. Заиста посматрајмо слободан модул P генерисан елементима A' и пројекцију $\pi : P \to A'$ која сваки базни елемент P слика у себе. Ово пресликавање је очигледно епиморфизам. Постоји $\pi' : P \to C$ које је подизање $\alpha\pi$ у односу на епоиморфизам k. Дакле, постоји $h : P \to E$ такво да је $k'h = \pi$ па је и k' епиморфизам. Пресликавање α^* ће сликати класу почетног раширења у класу раширења

$$0 \to B \xrightarrow{j'} E \xrightarrow{k'} A' \to 0,$$

где је j' јединствено решење дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrd, bend left, "\mathbb{0}"] \arrow[rd, dashed, "j'"] \arrow[rdd, bend right, "j"'] & & \\
& E \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\alpha'"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
& C \arrow[r, "k"] & A
\end{tikzcd} .$$

Из дефиниције j' следи да је $k'j' = \mathbb{0}$ и како је j мономорфизам и $\alpha' j' = j$, то је и j' мономорфизам. Такође ако имамо елемент $e \in \ker k'$ тада је $\alpha'(e) \in \ker k = \operatorname{im} j$ па постоји $b \in B$такво да је $j(b) = \alpha'(e)$ па је и $e = j'(b)$, односно $e \in \operatorname{im} j'$, па је $\ker k' = \operatorname{im} j'$. Дакле,

$$0 \to B \xrightarrow{j'} E \xrightarrow{k'} A' \to 0$$

заиста јесте раширење модула B модулом A'.

Дуално дефинишемо и слику класе раширења $0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} A \to 0$ при β_* као

$$0 \to B' \xrightarrow{j'} F \xrightarrow{k'} A \to 0,$$

где су j' и F са наредног пушаута дијаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta'"] & A \arrow[r] & 0 \\
& B' \arrow[r, dashed, "j'"] & F & &
\end{tikzcd} .$$

Хомоморфизам j' ће бити мономорфизам. Постоји мономорфизам $i : B \to I$ за неки инјективан модул I. Постоји и продужење i' пресликавања $i\beta$ у односу на мономорфизам j. Даље, постојаће и пресликавање $h : F \to I$ такво да је $hj' = i$ па је и j' мономорфизам.

Хомоморфизам k' ће бити решење дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\beta'"] \arrow[rdd, bend left, "k"] & \\
B' \arrow[r, "j'"] \arrow[rrd, bend right, "\mathbb{0}"] & F \arrow[rd, dashed, "k'"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

па ће важити да је $k'j' = \mathbb{0}$ и да је k' епиморфизам. Уколико је $f \in \ker k' \leq F$ тада постоје $c \in C$ и $b' \in B'$ такви да је $f = \beta'(c) - j'(b')$. Како је $k(c) = k'(\beta'(c)) = 0$ то је $c \in \ker k = \operatorname{im} j$. Даље, постоји $b \in B$ такво да је $c = j(b)$, па је

$$f = \beta'(c) - j'(b') = \beta'(j(b)) - j'(b') = j'(\beta(b) - b')$$

односно $f \in \operatorname{im} j'$ одакле је $\ker k' = \operatorname{im} j'$. Дакле,

$$0 \to B' \xrightarrow{j'} F \xrightarrow{k'} A \to 0$$

јесте једно раширење модула B' модулом A.

Може се показати да су пресликавања α^* и β_* добро дефинисана, односно да слике не зависе од избора представника полазне класе.

Лема 1. За сваки комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j''"] & C' \arrow[r, "k''"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

доњи низ припада класи слике класе горњег низа при β_*.

Доказ: Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j'"] & E \arrow[r, "k'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

из дефиниције пресликавања β_*, односно дијаграм на којем је E пушаут. Како први дијаграм комутира то постоји $h : E \to C'$ које решава дијаграм

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
B' \arrow[r, "j'"] \arrow[drr, bend right] & E \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & C'
\end{tikzcd}$$

Уз овако дефинисано h дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j''"] & C' \arrow[r, "k''"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутира. Заиста, лева половина комутира са претходног дијаграма. Десна половина комутира из дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "k"] & \\
B' \arrow[r, "j'"] \arrow[drr, bend right, "k''h"] & E \arrow[dr, bend left, "k'"] \arrow[dr, bend right] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

и јединствености пресликавања из E које решава овај дијаграм. $\square$

Слично, за сваки комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j''"] \arrow[d, equal] & C' \arrow[r, "k''"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "k"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

важи да је класа горњег низа слика класе доњег низа при α^*.

Дакле, треба да докажемо да је $\mathrm{Ext}(-,-)$ контраваријантан функтор по првом аргументу и коваријантан функтор по другом. Уколико је α (односно β) идентичко пресликавање, тада ће пулбек (пушаут) пресликавања $k(j)$ поново бити $k(j)$. Треба показати још да је $(\alpha_1\alpha_2)^* = \alpha_2^*\alpha_1^*$ и $(\beta_1\beta_2)_* = \beta_{1*}\beta_{2*}$.

Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[d, "\alpha_1\alpha_2"] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
 & & E' \arrow[r] \arrow[u] & A' \arrow[u, "\alpha_1"'] & \\
 & & E'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uuu, bend left, "\xi"] & A'' \arrow[u, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Из универзалности пулбека следи да постоји хомоморфизам ξ из E'' у E за који важи да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутира, односно слике било ког кратког тачног низа при $(\alpha_1\alpha_2)^*$ и $\alpha_2^*\alpha_1^*$ су исте, па важи

$$(\alpha_1\alpha_2)^* = \alpha_2^*\alpha_1^*$$

Дуално посматрајући дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & B'' \arrow[r] & F & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[u, "\beta_1\beta_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
 & B' \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & F' \arrow[d] & & \\
 & B'' \arrow[r] & F'' & &
\end{tikzcd}$$

из универзалности пушаута следи да постоји хомоморфизам из F у F'' такав да

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & F'' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутира, па слично као и у првом случају важи $(\beta_1\beta_2)_* = \beta_{1*}\beta_{2*}$.

Нека је $0 \to B \to C \to A \to 0$ кратак тачан низ Λ-модула. Његова класа је елемент $\mathrm{Ext}(A, B)$, и у наставку ћемо, кад год то не изазива забуну, ту класу означавати са C.

Тврђење 2. Ако су $\alpha : A' \to A$ и $\beta : B \to B'$ морфизми Λ-модула онда следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(A, B) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "\alpha^*"] & \mathrm{Ext}(A, B') \arrow[d, "\alpha^*"] \\
\mathrm{Ext}(A', B) \arrow[r, "\beta_*"] & \mathrm{Ext}(A', B')
\end{tikzcd}$$

Доказ: Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & & & D'' \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[rrd, two heads, "\tilde{k}"] & & \\
 & B' \arrow[rru, tail, "\tilde{j}"] \arrow[rr, tail, "j'''"] \arrow[dd, equal] & & D' \arrow[rr, two heads, "k'''"] \arrow[dd, "\delta"] & & A' \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dl, equal] \\
B \arrow[ru, "\beta"] \arrow[rr, tail, "j''"] \arrow[dd, equal] & & C'' \arrow[ruu, "h''"] \arrow[ru, dashed, "h'"] \arrow[rr, two heads, "k''"] \arrow[dd, "\varepsilon"] & & A' \arrow[dd, "\alpha"] & \\
 & B' \arrow[rr, tail, "j'"] & & C' \arrow[rr, two heads, "k'"] & & A \arrow[dl, equal] \\
B \arrow[ru, "\beta"] \arrow[rr, tail, "j"] & & C \arrow[ru, "\gamma"] \arrow[rr, two heads, "k"] & & A &
\end{tikzcd}$$

на којем су C' и C'' редом слике од C при β_* и α^*, D' је слика од C' при α^*, а D'' је слика од C'' при β_*. Дакле $D' = \alpha^*\beta_*C$ и $D'' = \beta_*\alpha^*C$ и желимо да конструишемо пресликавање h које ће нам обезбедити да су ова два низа екививалентна. Најпре конструишемо пресликавање h'. Оно постоји зато што је D' пулбек дијаграма и зато што комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
C'' \arrow[rrd, bend left, "k''"] \arrow[rd, dashed, "h'"] \arrow[rdd, bend right, "\gamma\varepsilon"'] & & \\
 & D' \arrow[r, "k'''"] \arrow[d, "\delta"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
 & C \arrow[r, "k'"] & A
\end{tikzcd}$$

Сада ће из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, bend left, "j'''\beta"] \arrow[dr, bend right] \arrow[drr, bend left=40, "\mathbb{0}"] \arrow[ddr, bend right=40, "h'j''"'] & & \\
& D' \arrow[r, "k'''"] \arrow[d, "\delta"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
& C' \arrow[r, "k'"] & A
\end{tikzcd}$$

и из јединствености пресликавања у пулбек следити да за овако конструисано h' важи $h'j'' = j'''\beta$. Сада конструишемо пресликавање h. Оно постоји зато што је D'' пушаут дијаграма и из претходно установљене комутативности.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j''"] \arrow[d, "\beta"'] & C'' \arrow[d, "h''"] \arrow[ddr, bend left, "h'"] & \\
B' \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[drr, bend right, "j'''"'] & D'' \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & D'
\end{tikzcd}$$

Поново из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j''"] \arrow[d, "\beta"'] & C'' \arrow[d, "h''"] \arrow[ddr, bend left] & \\
B' \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[drr, bend right, "\mathbb{0}"'] & D'' \arrow[dr, bend left, "k'''h"] \arrow[dr, bend right, "\tilde{k}"'] & \\
& & A'
\end{tikzcd}$$

и јединствености пресликавања из пушаута за овако конструисано h ће важити $k'''h = \tilde{k}$. Дакле, важи да је $\alpha^*\beta_* = \beta_*\alpha^*$. □

За сада смо $\mathrm{Ext}(A, B)$ дефинисали само као скуп. На њему можемо увести и операцију сабирања под којом $\mathrm{Ext}(A, B)$ постаје Абелова група. Такође можемо увести и операцију множења скаларом, па ће $\mathrm{Ext}(A, B)$ заправо бити и Λ-модул.

Посматрајмо два кратка тачна низа $0 \to B \to C_1 \to A \to 0$ и $0 \to B \to C_2 \to A \to 0$. Они одређују кратак тачан низ

$$0 \to B \oplus B \to C_1 \oplus C_2 \to A \oplus A \to 0$$

чија класа припада $\mathrm{Ext}(A \oplus A, B \oplus B)$. Када на овај кратак тачан низ применимо $(\sigma_B)_* {d_A}^*$, где су $d_A : A \to A \oplus A$ и $\sigma_B : B \oplus B \to B$ дефинисани са $d_A(a) = (a, a)$ и $\sigma_B(b_1, b_2) = b_1 + b_2$, поново добијамо елемент $\mathrm{Ext}(A, B)$. Овиме смо дефинисали бинарну операцију на $\mathrm{Ext}(A, B)$:

$$C_1 + C_2 = (\sigma_B)_* {d_A}^* (C_1 \oplus C_2).$$

Нека је $C_0 \in \operatorname{Ext}(A, B)$ класа раширења

$$C_0 : 0 \to B \to B \oplus A \to A \to 0,$$

где је $j(b) = (b, 0)$ и $k(b, a) = a$.

Лема 2. (а) Ако су $\beta_1, \beta_2 : B \to B'$ хомоморфизми Λ-модула, онда је за све Λ-модуле A

$$(\beta_1 + \beta_2)_* = \beta_{1*} + \beta_{2*} : \operatorname{Ext}(A, B) \to \operatorname{Ext}(A, B').$$

(б) Ако је $\mathbb{0} : B \to B'$ тривијалан хомоморфизам Λ-модула онда је

$$\mathbb{0}_*(C) = C_0 \in \operatorname{Ext}(A, B')$$

за све $C \in \operatorname{Ext}(A, B)$.

Доказ: (а) Нека је

$$0 \to B \oplus B \to E' \to A \to 0$$

слика $0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} A \to 0$ при d_{B*} и

$$0 \to B \oplus B \xrightarrow{(j \oplus j)'} E'' \to A \to 0$$

слика $0 \to B \oplus B \xrightarrow{j \oplus j} C \oplus C \xrightarrow{k \oplus k} A \oplus A \to 0$ при ${d_A}^*$. Постоји h' које решава дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & C \oplus C \arrow[r, "k \oplus k"] & A \oplus A \\
 & E'' \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "d_A"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "d_C"] \arrow[ur, dashed, "h'"] \arrow[urr, bend right, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

За овако конструисано h', из јединствености пресликавања у пулбек, важиће да је $h'j = (j \oplus j)' d_B$, па постоји h које решава дијаграм

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d_B"'] & C \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
B \oplus B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(j \oplus j)'"'] & E' \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & E''
\end{tikzcd}$$

Ово h нам даје једнакост $d_{B*}(C) = {d_A}^*(C \oplus C)$. Одатле и из једнакости $\beta_1 + \beta_2 = \sigma_B(\beta_1 \oplus \beta_2) d_B$ следи

$$(\beta_1 + \beta_2)_*(C) = \sigma_{B*}(\beta_1 \oplus \beta_2)_* d_{B*}(C) =$$

$$= \sigma_{B*}(\beta_1 \oplus \beta_2)_* {d_A}^*(C \oplus C) = \sigma_{B*} {d_A}^*(\beta_{1*}C \oplus \beta_{2*}C) =$$

$$\beta_{1*}C + \beta_{2*}C,$$

где претпоследња једнакост важи зато што је $(\beta_1 \oplus \beta_2)_* = (\beta_{1*} \oplus \beta_{2*})$. Заиста, са наредних дијаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \oplus B \arrow[r, "j\oplus j"] \arrow[d, "\beta_1\oplus\beta_2"] & C \oplus C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \oplus A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \oplus B' \arrow[r] & E \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

следи да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B \arrow[r, "j\oplus j"] \arrow[d, "\beta_1\oplus\beta_2"'] & C \oplus C \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "f'\oplus f''"] & \\
B' \oplus B' \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & E \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
 & & E' \oplus E'
\end{tikzcd}$$

има решење g које нам даје тражену једнакост.

(б) Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{0}"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "(0,k)"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B' \oplus A \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Са дијаграма следи да је $C_0 = \mathbb{0}_* C$ за свако $C \in \operatorname{Ext}(A, B)$. □

Тврђење 3. $\operatorname{Ext}(A, B)$ је Абелова група у односу на операцију $+$. Неутрал је C_0, док је инверз класе $C \in \operatorname{Ext}(A, B)$ класа $(-\mathbb{1}_B) * (C)$.

Доказ: Из претходне леме следи

$$C + C_0 = \mathbb{1}_* C + \mathbb{0}_* C = (\mathbb{1}_* + \mathbb{0}_*)C = C$$

па је C_0 заиста неутрал. Како је низ $0 \to B \to C \to A \to 0$ еквивалентан са C_0 ако и само ако се цепа, то су представници неутрала тачно низови који се цепају.

Слично следи да је

$$C + (-\mathbb{1})_* C = (\mathbb{1}_* + (-\mathbb{1})_*)C = \mathbb{0}_* C = C_0$$

па слика при $(-\mathbb{1}_B)_*$ заиста јесте инверз. □

Тврђење 4. Ако су $\alpha : A' \to A$ и $\beta : B \to B'$ тада су α^* и β_* хомоморфизми Абелових група.

Доказ: Уверимо се да за хомоморфизам $\alpha : A' \to A$ важи да се α^* слаже са операцијама у $\mathrm{Ext}(A, B)$ и $\mathrm{Ext}(A', B)$. Како је $d_A\alpha = (\alpha \oplus \alpha)d_{A'}$ то важи

$$\alpha^*(C_1 + C_2) = \alpha^*(d_A^*\sigma_{B*}(C_1 \oplus C_2)) = d_{A'}^*(\alpha \oplus \alpha)^*\sigma_{B*}(C_1 \oplus C_2) =$$

$$= d_{A'}^*\sigma_{B*}(\alpha \oplus \alpha)^*(C_1 \oplus C_2)) = d_{A'}^*\sigma_{B*}(\alpha^*(C_1) \oplus \alpha^*(C_2)) =$$

$$\alpha^*(C_1) + \alpha^*(C_2),$$

где претпоследња једнакост важи зато што је $(\alpha_1 \oplus \alpha_2)^* = ({\alpha_1}^* \oplus {\alpha_2}^*)$. Доказ овога је дуалан доказу да важи $(\beta_1 \oplus \beta_2)_* = (\beta_{1*} \oplus \beta_{2*})$, те ћемо га овде изоставити.

Слично и за $\beta : B \to B'$ због $\beta\sigma_B = \sigma_{B'}(\beta \oplus \beta)$ важи

$$\beta_*(C_1 + C_2) = \beta_*(C_1) + \beta_*(C_2). \qquad \square$$

Остало нам је још да дефинишемо множење скаларом. За класу C раширења

$$0 \to B \to C \to A \to 0$$

и $\lambda \in \Lambda$ дефинишемо $\lambda \cdot C = (m_\lambda)_*(C)$, где је $m_\lambda : B \to B$ множење скаларом λ у модулу B. Важи да је

$$(\lambda\mu)C = m_{\lambda\mu *}C = (m_\lambda m_\mu)_*C = m_{\lambda *}m_{\mu *}C = \lambda(\mu C).$$

Слично је

$$\lambda(C_1 + C_2) = m_{\lambda *}\sigma_{B*}d_A^*(C_1 \oplus C_2) = \sigma_{B*}d_A^*(m_\lambda \oplus m_\lambda)_*(C_1 \oplus C_2) =$$

$$= \sigma_{B*}d_A^*(m_{\lambda *}C_1 \oplus m_{\lambda *}C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$$

а већ смо доказали да је $(\beta_1+\beta_2)_*(C) = \beta_{1*}C+\beta_{2*}C$ одакле следи да важи и $(\lambda+\mu)C = \lambda C+\mu C$. Дакле, уз овако уведену операцију, $\mathrm{Ext}(A, B)$ заиста јесте модул. Покажимо да су уз овако уведену операцију, за $\alpha : A' \to A$ и $\beta : B \to B'$, α^* и β_* заправо и хомоморфизми Λ-модула. Ако имамо хомоморфизам $\alpha : A' \to A$ важиће да је $\alpha^*(\lambda C) = \lambda\alpha^*(C)$. Заиста

$$\alpha^*(\lambda C) = \alpha^*m_{\lambda *}C = m_{\lambda *}\alpha^*C = \lambda\alpha^*(C)$$

Такође, за хомоморфизам $\beta : B \to B'$ важи да је $\beta(\lambda b) = \lambda\beta(b)$, односно важи да је $m_\lambda\beta = \beta m_\lambda$, па је

$$\beta_*(\lambda C) = \beta_*m_{\lambda *}C = (\beta m_\lambda)_*C = (m_\lambda\beta)_*C = m_{\lambda *}\beta_*C = \lambda\beta_*(C)$$

Дакле, уз претходно тврђење, доказали смо да су α^* и β_* хомоморфизми модула.

Дакле, укупно смо доказали централни резултат овог одељка.

Теорема 1. *За комутативни прстен са јединицом* Λ*,* $\mathrm{Ext}_\Lambda(-, -)$ *је бифунктор из категорије* Λ*-модула у категорију* Λ*-модула. Он је коваријантан по другом аргументу, а контраваријантан по првом.*

Пример 4. Нека је $\Lambda = \mathbb{Z}$. За прост број p посматрајмо $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, односно низове $0 \to \mathbb{Z}_p \to C \to \mathbb{Z}_p \to 0$. Група C има p^2 елемената, па мора бити или $\mathbb{Z}_{p^2}$ или $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Међутим $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$. Посматрајмо низове

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}_p \to 0$$

Хомоморфизам j ће бити одређен сликом јединице и мора важити да $\omega(j(1)) = p$. Дакле, $j(1) = mp, 1 \leq m \leq p-1$. Јасно је да ће, независно од избора m, слика $\mathbb{Z}_p$ при j увек бити иста и једнака подгрупи $\{0, p, 2p, ..., (p-1)p\}$, групе $\mathbb{Z}_{p^2}$, изоморфној са $\mathbb{Z}_p$. Слично и k ће бити одређено сликом јединице и $k(1)$ може да буде било који ненула елемент у $\mathbb{Z}_p$. Дакле, постоји $p-1$ могућих пресликавања j и $p-1$ могућих k. У наставку ћемо их означавати са j_m и k_n где је $j_m(1) = mp$, а $k_n(1) = n$. Желимо да видимо који од датих низова су међусобно еквивалентни. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "j_m"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r, "k_n"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "j_a"] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r, "k_b"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавање f је такође одређено сликом јединице. Уколико дијаграм комутира, из леве половине важи да уколико је $f(1) = x$ тада је $ap = j_a(1) = f(j_m(1)) = f(mp) = mpx$ у $\mathbb{Z}_{p^2}$, односно да је $mx = a$ у $\mathbb{Z}_p$. Из десне половине дијаграма важи да је $bx = k_b(f(1)) = k_n(1) = n$ у $\mathbb{Z}_p$, па множењем са m добијамо да је $ab = mn$ у $\mathbb{Z}_p$. Обрнуто, уколико је $ab = mn$ у $\mathbb{Z}_p$ тада је са $f(1) = am^{-1}$, где је m^{-1} мултипликативни инверз m у $\mathbb{Z}_{p^2}$, дефинисано пресликавање f за које горњи дијаграм комутира. Заиста $f(j_m(1)) = f(mp) = ap = j_a(1)$ у $\mathbb{Z}_{p^2}$ и $k_b(f(1)) = k_b(am^{-1}) = abm^{-1} = nmm^{-1} = k_n(1)$, где претпоследња једнакост важи зато што је мултипликативни инверз из $\mathbb{Z}_{p^2}$ сигурно и мултипликативни инверз у $\mathbb{Z}_p$.

Из претходног закључујемо да низови $0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{j_m} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{k_n} \mathbb{Z}_p \to 0$ и $0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{j_a} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{k_b} \mathbb{Z}_p \to 0$ одређују исти елемент $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ ако и само ако важи да је $ab = mn$ у $\mathbb{Z}_p$. Дакле, како су и m и n ненула елементи $\mathbb{Z}_p$, имамо $p-1$ могућих вредности за mn, па самим тим и $p-1$ елемената $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ овог облика.

Такође, сваки низ облика

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

се цепа. Заиста, ако је $j(1) = (a, b)$ тада је бар један од a и b различит од нуле. Нека је то, без губљења општости a. Тада a генерише $\mathbb{Z}_p$ па је свако $(m, n) \in \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ облика $(qa, qb + r)$. Једнострани инверз пресликавања j можемо да дефинишемо са $j'(qa, qb + r) = q$. Дакле, сваки низ облика

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

припада класи неутрала.

Укупно, укључујући и неутрални елемент, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ има p елемената, па како је p прост број то ће важити $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$.

Претходни пример нам показује да не постоји бијекција између модула C таквих да је B подмодул C и да је $C/B \cong A$ и скупа $\mathrm{Ext}(A, B)$, већ нам $\mathrm{Ext}(A, B)$ разликује такве модуле C не само по њиховој структури, него и по начину на који се пројектују на A, односно начину на који је B утопљен у њих.

Пример 5. Нека је $0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} A \to 0$ представник елемента C Λ-модула $\mathrm{Ext}(A, B)$ и $\lambda \in \Lambda$ инвертибилан скалар. Желимо да одредимо λC. Како је λ инвертибилан, имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "m_\lambda"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathbb{1}"] & A \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "m_{\lambda^{-1}} j"] & C \arrow[r, "k"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

који комутира, па је $0 \to B \xrightarrow{m_{\lambda^{-1}} j} C \xrightarrow{k} A \to 0$ један од представника λC. Такође комутира и дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "m_\lambda"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m_\lambda"] & A \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "m_{\lambda^{-1}} k"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

па видимо да је и $0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{m_{\lambda^{-1}} k} A \to 0$ такође један од представника класе λC. Дакле, множење било пресликавања j или k неким инвертибилним скаларом, одговара множењу целог низа његовим инверзом. Специјално, за инвертибилно λ, сви λC имају изоморфне модуле на средњем месту у кратком тачном низу. Специјално, за $\lambda = -1$ важи да је $\lambda^{-1} = -1$ па су представници класе $-C$ низови

$$0 \to B \xrightarrow{-j} C \xrightarrow{k}\to A \to 0$$

и

$$0 \to B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{-k}\to A \to 0.$$

Пример 6. За инјективан модул I важи $\mathrm{Ext}(A, I) = 0$. Посматрајмо кратки тачан низ $0 \to I \xrightarrow{j} C \to A \to 0$. Како је модул I инјективан и j мономорфизам, то имамо решење i дијаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathbb{1}"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "i"] & A \arrow[r] & 0 \\
& I & & &
\end{tikzcd}$$

за који важи $ij = \mathbb{1}$. Дакле сваки низ се цепа, односно припада класи неутрала, па је $\mathrm{Ext}(A, I) = 0$. Дуално, уколико је P пројективан, за кратак тачан низ $0 \to B \to C \xrightarrow{k} P \to 0$ постоји решење дијаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r, "k"] & P \arrow[r] & 0 \\
& & & P \arrow[u, "\mathbb{1}"'] \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

па се поново сви низови цепају, односно важи $\mathrm{Ext}(P, B) = 0$.

Пример 7. Ако је Λ поље тада је сваки Λ-модул, односно векторски простор над Λ, слободан, па и пројективан. Дакле, за Λ-модуле A и B важи да је $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$.

Ово нам илуструје значај прстена над којим посматрамо модуле. Као што смо већ израчунали $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, док је по претходном $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong 0$.

У наредном делу разматраћемо други, еквивалентан начин за увођење овог функтора.

2.2 Пројективни модули

Нека је A Λ-модул, где је Λ комутативни прстен са јединицом. Посматрајмо кратак тачан низ $X : 0 \to R \overset{\alpha}{\to} P \to A \to 0$, где је P пројективан модул. Овакав тачан низ зовемо пројективна репрезентација модула A. Када на овај низ применимо функтор $\mathrm{Hom}(-, B)$ добијамо низ

$$0 \to Hom(A, B) \to Hom(P, B) \to Hom(R, B) \to 0.$$

Сада дефинишемо $\overline{\mathrm{Ext}}^X_\Lambda(A, B) = H_1(\mathrm{Hom}(X, B))$, односно $\overline{\mathrm{Ext}}^X_\Lambda(A, B)$ нам је хомологија низа на месту $\mathrm{Hom}(R, B)$. И овде ћемо, као и у претходном делу, најчешће изостављати Λ и писати само $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$.

У уводу смо показали да за дати Λ-модул A морају постојати R, P и α из дефиниције $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$. Сада треба да покажемо да је модул $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$ добро дефинисан, односно да $H_1(\mathrm{Hom}(X, B))$ не зависи од избора R, P и α, као ни од морфизама између њих. Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
X : 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, bend right, "f"'] & P \arrow[r] \arrow[d, bend right, "f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
X' : 0 \arrow[r] & R' \arrow[r] \arrow[u, dashed, bend right, "g"'] & P' \arrow[r] \arrow[u, bend right, "g"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавања f и g између P и P' постоје јер су P и P' пројективни модули, а између R и R' по тврђењу 1. На наредном дијаграму желимо да конструишемо пресликавања која ће остварити ланчасту хомотопију између gf и $\mathbb{1}_X$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "j"] \arrow[d] & P \arrow[r, "k"] \arrow[d] \arrow[dl, "d_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "d_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "j"'] & P \arrow[r, "k"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавање $d_0 : A \to P$ мора бити тривијално, док ће пресликавање $gf - \mathbb{1}_P$ сликати P у $\ker(k) = \mathrm{im}(j)$, па ће из пројективности P постојати пресликавање $d_1 : P \to R$ такво да $jd_1 = gf - \mathbb{1}_P$. За елемент $r \in R$ имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & r \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[dl, mapsto, "gf-\mathbb{1}"'] & j(r) \arrow[dl, mapsto, "d_1"] \\
(gf - \mathbb{1})(r) \arrow[rr, mapsto, bend right, "j"'] & d_1(j(r)) \arrow[r, mapsto, "j"] & (gf - \mathbb{1})(j(r))
\end{tikzcd}$$

па из инјективности j следи да је $d_1 j = gf - \mathbb{1}_R$. Дакле, ово ће бити тражена пресликавања, па следи да је $H_1(\mathrm{Hom}(X, B)) \cong H_1(\mathrm{Hom}(X', B))$, односно да модул $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$ јесте добро дефинисан до на изоморфизам.

Пример 8. За пројективан модул P важи $\overline{\mathrm{Ext}}(P, B) = 0$. Заиста, ако је P пројективан модул, постоји тачан низ $0 \to 0 \to P \overset{\mathbb{1}}{\to} P \to 0$, одакле следи да је $\overline{\mathrm{Ext}}(P, B) = 0$.

Теорема 2. *За Λ-модуле A и B важи да је* $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, B)$.

Доказ: Нека је $C \in \mathrm{Ext}(A, B)$ и нека је $0 \to R \to P \to A \to 0$ пројективна репрезентација модула A. Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавање $f : R \to B$ ће бити коцикл, односно добро је дефинисана $[f] \in \overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$. Ово ће бити слика низа $C \in \mathrm{Ext}(A, B)$ при пресликавању $\zeta : \mathrm{Ext}(A, B) \to \overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$. Низ $P : 0 \to R \to P \to A \to 0$ припада $\mathrm{Ext}(A, R)$ па је дефинисано $f_*(P) \in \mathrm{Ext}(A, B)$. Дефинишемо пресликавање $z : \overline{\mathrm{Ext}}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A, B)$ са $z([f]) = f_*(P)$. Ово пресликавање ће бити инверз пресликавања ζ. По разматрањима из претходног дела $(f + g)_*(P) = f_*(P) + g_*(P)$, односно z се слаже са операцијама у Ext и $\overline{\mathrm{Ext}}$. Одавде следи да је ζ изоморфизам. □

$\overline{\mathrm{Ext}}(-, -)$ можемо дефинисати и као бифунктор. За модул A можемо изабрати канонску пројективну репрезентацију у којој је модул P слободан модул генерисан елементима из A, $\pi : P \to A$ слика сваки од генератора у самог себе, а R је $\ker \pi$. За тако дефинисано X ће $\overline{\mathrm{Ext}}^X(-, -)$ бити бифунктор, а сваки други $\overline{\mathrm{Ext}}^{X'}(-, -)$ ће бити њему природно еквивалентан бифунктор. Сви ови функтори ће бити природно еквивалентни бифунктору $\mathrm{Ext}(-, -)$. Већ смо видели пресликавање које остварује изоморфизам између ових модула. То пресликавање ће бити и природна еквиваленција, али ћемо доказ тога на овом месту изоставити.

За функтор $\mathrm{Hom}(-, B)$ важи да слика директне суме модула, односно копроизводе у категорији Λ-модула, у производе модула, који ће бити и производи у категорији Λ-модула. Такође, директна сума пројективних репрезентација је поново пројективна репрезентација. Такође, хомологија производа је производ хомологија. Одавде можемо извести следећа два важна својства

$$\mathrm{Ext}(\bigoplus_i A_i, B) \cong \prod_i \mathrm{Ext}(A_i, B)$$

$$\mathrm{Ext}(A, \prod_i B_i) \cong \prod_i \mathrm{Ext}(A, B_i)$$

Пример 9. Нека је Λ главноидеалски домен и $\lambda \in \Lambda$. Израчунајмо $\overline{\mathrm{Ext}}(\Lambda/\lambda\Lambda, B)$ за све Λ-модуле B. Посматрајмо пројективну резолуцију модула $\Lambda/\lambda\Lambda$

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{m_\lambda} \Lambda \to \Lambda/\lambda\Lambda \to 0$$

Када на њу применимо функтор $\mathrm{Hom}(-, B)$ добијамо низ

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Lambda/\lambda\Lambda, B) \to \mathrm{Hom}(\Lambda, B) \xrightarrow{(m_\lambda)^{\#}} \mathrm{Hom}(\Lambda, B) \to 0.$$

Из дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Lambda, B) \arrow[r, "{m_\lambda}^{\#}"] \arrow[d, tail, two heads, "ev_1"] & \mathrm{Hom}(\Lambda, B) \arrow[d, tail, two heads, "ev_1"] \\
B \arrow[r, "m_\lambda"] & B
\end{tikzcd}$$

где је $ev_1 : \mathrm{Hom}(\Lambda, B) \to B$ евалуација у јединици следи да је

$$\mathrm{Ext}(\Lambda/\lambda\Lambda, B) \cong \mathrm{coker}(m_\lambda) = B/\lambda B.$$

Специјално за $B = \Lambda/\mu\Lambda$ имамо

$$\mathrm{Ext}(\Lambda/\lambda\Lambda, \Lambda/\mu\Lambda) \cong (\Lambda/\mu\Lambda)/\lambda(\Lambda/\mu\Lambda) \cong \Lambda/(\lambda, \mu)\Lambda$$

где је (λ, μ) највећи заједнички делилац λ и μ. Последња једнакост важи зато што је $\lambda(\Lambda/\mu\Lambda) = (\lambda, \mu)\Lambda/\mu\Lambda$ и из треће теореме о изоморфизму. Специјално у случају када је $\Lambda = \mathbb{Z}$ добијамо да је $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

Ако је $B = \Lambda$ имамо $\mathrm{Ext}(\Lambda/\lambda\Lambda, \Lambda) \cong \Lambda/\lambda\Lambda$. Такође, из претходних разматрања, како је Λ слободан модул над самим собом, имамо да су $\mathrm{Ext}(\Lambda, \Lambda/\lambda\Lambda)$ и $\mathrm{Ext}(\Lambda, \Lambda)$ тривијални. Претходни резултати, заједно са $\mathrm{Ext}(\bigoplus_i A_i, B) \cong \prod_i \mathrm{Ext}(A_i, B)$, нам омогућавају да израчунамо $\mathrm{Ext}(A, B)$ за било који коначно генерисан Λ-модул A и произвољан Λ-модул B. Специјално, можемо да израчунамо $\overline{\mathrm{Ext}}(A, B)$ за сваке две коначно генерисане Абелове групе.

3 Теорема о универзалним коефицијентима

Једна од најзначајнијих примена претходних функтора је у израчунавању кохомолошких група ланчастих комплекса, односно тополошких простора, када су познате хомолошке групе. О томе нам говори наредна теорема.

Теорема 3. *(Теорема о универзалним коефицијентима за кохомологију) Нека је Λ главноидеалски домен,C Λ-модул и A слободан ланчасти комплекс Λ-модула. Постоји природан кратак тачан низ*

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(A), C) \to H^n(A; C) \to \operatorname{Hom}(H_n(A), C) \to 0$$

Овај низ се (неприродно у A) цепа.

Доказ: Посматрајмо резолуцију $0 \to B_n(A) \hookrightarrow Z_n(A) \to H_n(A) \to 0$ модула $H_n(A)$, где су $Z_n(A)$ и $B_n(A)$ циклови, односно границе комплекса A. Како је комплекс A слободан, такви су и Z и B (Z и B су комплекси модула $Z_n(A)$ и $B_n(A)$ уз тривијална гранична пресликавања), односно, ово је пројективна репрезентација модула $H_n(A)$. Ово нас доводи до тачног низа

$$0 \to \operatorname{Hom}(H_n(A), C) \to \operatorname{Hom}(Z_n(A), C) \xrightarrow{i_B^\#} \operatorname{Hom}(B_n(A), C) \to \operatorname{Ext}(H_n(A), B) \to 0.$$

Из претходног низа имамо $\ker i_B^\#$ и $\operatorname{coker} i_B^\#$.

Како је $B_{n-1}(A)$ слободан, као подмодул слободног модула, низ $0 \to Z_n(A) \to A_n \to B_{n-1}(A) \to 0$ се цепа, па је тачан и низ $0 \to \operatorname{Hom}(B_{n-1}(A), C) \to \operatorname{Hom}(A_n, C) \to \operatorname{Hom}(Z_n(A), C) \to 0$ и он индукује дуги тачан низ (где је B' исти ланчасти комплекс B у којем су индекси повећани за 1, односно $B'_n = B_{n-1}$).

$$\cdots \to H^{n-1}(Z(A); C) \xrightarrow{\delta} H^n(B'(A); C) \to H^n(A; C) \to H^n(Z(A); C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B'(A); C) \to \cdots$$

Како комплекси $\operatorname{Hom}(Z, C)$ и $\operatorname{Hom}(B', C)$ имају тривијалне граничне операторе, то је $H^n(Z(A); C) = \operatorname{Hom}(Z_n(A), C)$ и $H^{n+1}(B'(A); C) = \operatorname{Hom}(B_n(A), C)$. Пресликавање δ је заправо пресликавање $i_B^\#$ из претходног дела. Заиста, повезујући хомоморфизам дугог тачног низа слика класу коцикла z у $[b']$ са наредног дијаграма

$$\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, mapsto, "\partial_A^\#"] & a' \arrow[r, mapsto] & 0 \\
& a \arrow[u, mapsto, "\partial_A^\#"] \arrow[r, mapsto, "i^\#"] & z \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Одавде ће заиста важити $b' = i_B^\#(z)$. Из дугог тачног низа имамо кратак тачан низ

$$0 \to \operatorname{coker}(i_B^\#)_{n-1} \to H^n(A, C) \to \ker(i_B^\#)_n \to 0$$

из којег заменом резултата из претходног дела добијамо низ

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(A), C) \to H^n(A, C) \to \operatorname{Hom}(H_n(A), C) \to 0$$

Из цепања низа $0 \to Z_n(A) \to A_n \to B_{n-1}(A) \to 0$ следи цепање нашег низа. □

Последица 1. Уз претпоставке из претходне теореме, ако је још и $H_n(A) \cong \Lambda^{k_n}$ слободан коначно генерисан модул за све $n \in \mathbb{Z}$, онда је $H^n(A;C) \cong \mathrm{Hom}(H_n(A),C) \cong C^{k_n}$.

Доказ: Уколико су сви $H_n(A)$ слободни, то су и пројективни, па је $\overline{\mathrm{Ext}}(H_{n-1}(A),C)$ тривијалан модул. Одатле следи да је $H^n(A;C) \cong \mathrm{Hom}(H_n(A),C)$. Како је $\mathrm{Hom}(\Lambda,C) \cong C$ и $\mathrm{Hom}(-,C)$ пресликава директне суме модула у производе $\mathrm{Hom}(-,C)$ модула, то важи и $\mathrm{Hom}(H_n(A),C) \cong C^{k_n}$. □

3.1 Кохомолошке групе тополошких простора

Нека је $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Пример 10. Израчунајмо кохомолошке групе сфере са коефицијентима у произвољној Абеловој групи G.

Како су хомолошке групе сфере S^n (са коефицијентима у $\mathbb{Z}$)

$$H_m(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 0, n \\ 0, & m \neq 0, n \end{cases}$$

увек слободне, то је на основу последице 1

$$H^m(S^n; G) = \begin{cases} G, & m = 0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Слично као у претходном случају, последицу 1 можемо применити и на израчунавање кохомолошких група $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$.

$$H_m(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 2k, k \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

па је

$$H^m(\mathbb{C}P^n; G) = \begin{cases} G, & m = 2k, k \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Слично

$$H_m(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 4k, k \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

па је

$$H^m(\mathbb{H}P^n; G) = \begin{cases} G, & m = 4k, k \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 11. Израчунајмо кохомолошке групе реалног пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ са коефицијентима у $\mathbb{Z}$.

Најпре, посматрајмо случај када је n парно. Хомолошке групе реалног пројективног простора су

$$H_m(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & m < n, m = 2k-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, а $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ је тривијална. Дакле, имамо тачне низове

$$0 \to 0 \to H^0(\mathbb{R}P^n,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

из којег следи да је $H^0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, затим

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^{2k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \to 0 \to 0$$

за $2 \leq 2k \leq n$ из којег следи $H^{2k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ и

$$0 \to 0 \to H^{2k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \to 0 \to 0$$

из којег следи да су непарне кохомолошке групе тривијалне.

У случају када је n непарно, хомолошке групе су

$$H_m(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 0, n \\ \mathbb{Z}_2, & m < n, m = 2k-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

па се од претходног случаја евентуално разликују групе H^n и H^{n+1}. Њих рачунамо помоћу низова

$$0 \to 0 \to H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

одакле следи да је $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и

$$0 \to 0 \to H^{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \to 0 \to 0$$

одакле следи да је $H^{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$ тривијална.

Уколико уместо коефицијената $\mathbb{Z}$ посматрамо коефицијенте $\mathbb{Z}_p$, где је p прост, $p \neq 2$, добићемо да су и $\mathrm{Ext}(H_m(\mathbb{R}P^n), \mathbb{Z}_p)$ тривијални увек, док су $\mathrm{Hom}(H_m(\mathbb{R}P^n), \mathbb{Z}_p)$ тривијални, осим када је $H_m(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$, па су тривијалне и све кохомолошке, осим H^0 и H^n када је n непарно (оне су изоморфне $\mathbb{Z}_p$).

Пример 12. Израчунајмо кохомолошке групе реалног пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$.

Разлика у односу на претходни пример је што овог пута имамо нетривијалне $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Дакле, ако је n парно имамо низове

$$0 \to 0 \to H^0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

одакле је $H^0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$,

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^{2k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to 0 \to 0$$

за $2k \leq n$, одакле је $H^{2k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ и

$$0 \to 0 \to H^{2k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

за $2k - 1 < n$, одакле је и $H^{2k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Као и за претходни пример, у случају непарног n разликују се евентуално H^n и H^{n+1}. Њих рачунамо из низова

$$0 \to 0 \to H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

одакле је $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ и

$$0 \to 0 \to H^{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to 0 \to 0$$

одакле је $H^{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ тривијална. Укупно добијамо

$$H^m(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & m \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 13. Израчунајмо кохомолошке групе компактних оријентисаних површи са коефицијентима у Абеловој групи G.

Како су за компактну оријентисану многострукост рода g (M_g) хомолошке групе

$$H_n(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0,2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

све слободне, то је на основу последице 1

$$H^n(M_g; G) = \begin{cases} G, & n = 0,2 \\ G^{2g}, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 14. Израчунајмо кохомолошке групе компактних неоријентисаних површи са коефицијентима у $\mathbb{Z}$.

Овај случај се разликује од претходног јер хомолошке групе неоријентисане површи рода h (N_h)

$$H_n(N_h) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

нису више слободне. Како је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ и $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{h-1}$ то имамо низове

$$0 \to 0 \to H^1(N_h; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^{h-1} \to 0$$

из којег је $H^1(N_h; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{h-1}$ и

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^2(N_h; \mathbb{Z}) \to 0 \to 0$$

из којег је $H^2(N_h; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, док је јасно да је $H^0(N_h; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, као и да су све остале кохомолошке групе тривијалне.

За разлику од претходног примера, у којем нам прелазак на коефицијенте у $\mathbb{Z}_p$ није представљао велику промену, овде ћемо имати значајнију разлику. Најпре, уколико имамо коефицијенте у $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$, тада је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p)$ тривијална, па ће поново важити $H^n(N_h; \mathbb{Z}_p) \cong \operatorname{Hom}(H_n(N_h), \mathbb{Z}_p)$. Дакле

$$H^n(N_h; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_p^{h-1}, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

У случају када имамо коефицијенте $\mathbb{Z}_2$, $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ и $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^h$ па имамо

$$H^n(N_h; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n = 0,2 \\ \mathbb{Z}_2^h, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

4 Функтор Ext^n

4.1 Тачни низови

Нека је Λ комутативан прстен са јединицом. У претходној глави смо дефинисали функтор Ext преко класа кратких тачних низова. Ово можемо уопштити на низове произвољне дужине, односно на тачне низове Λ-модула облика

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_1 \to A \to 0.$$

Дефиниција 8. Тачне низове облика

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

називамо *n-тострукимм раширењем* модула B модулом A.

Релација коју смо увели приликом дефинисања Ext у овом случају је дефинисана тако да су два елемента у релацији ако постоје хомоморфизми α_i такви да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Као и у претходном случају, ова релација је рефлексивна и транзитивна, али у овом случају није симетрична, јер пресликавања α_i не морају бити изоморфизми. Зато уводимо нову релацију, као најужу релацију еквиваленције која садржи дату релацију.

Скуп свих n-тоструких раширења модула B модулом A, посечен по наведеној релацији је скуп $\mathrm{Ext}^n(A, B)$.

За $\alpha : A' \to A$ дефинишемо $\alpha^* : \mathrm{Ext}^n(A, B) \to \mathrm{Ext}^n(A', B)$ које класи раширења

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_2 \xrightarrow{j} C_1 \xrightarrow{k} A \to 0$$

додељује класу раширења

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_2 \xrightarrow{j'} E_1 \xrightarrow{k'} A' \to 0$$

где су E_1 и k' одређени пулбеком дијаграма

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r, dashed, "j'"] \arrow[rr, bend left, "\mathbb{0}"] \arrow[dr, "j"'] & E_1 \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[d, dashed] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
& C_1 \arrow[r, "k"] & A
\end{tikzcd}$$

и j' је јединствено пресликавање из C_2 у E_1 које решава дијаграм. Тачност на местима E_1 и A' се доказује потпуно аналогно случају $n = 1$. Са дијаграма следи да је $\ker j' \leq$

$\ker j$. Уколико је $l : C_3 \to C_2$ гранично пресликавање, тада је $j'l$ решење дијаграма

$$\begin{tikzcd}
C_3 \arrow[r, dashed, "j'l"] \arrow[rr, bend left, "\mathbb{0}"] \arrow[dr, "jl=\mathbb{0}"'] & E_1 \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[d, dashed] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
& C_1 \arrow[r, "k"] & A
\end{tikzcd}$$

па важи да је $j'l = \mathbb{0}$, односно да је $\operatorname{im} l \leq kerj'$, а већ смо утврдили да је $\ker j' \leq \ker j = \operatorname{im} l$, па је $\operatorname{im} l = kerj'$. Дакле низ

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_2 \xrightarrow{j'} E_1 \xrightarrow{k'} A' \to 0$$

јесте тачан. Може се показати да је ово пресликавање добро дефинисано, односно да низове који су у истој класи еквиваленције слика у низове који су у истој класи еквиваленције, али ћемо на овом месту тај доказ изоставити.

Аналогно, за пресликавање $\beta : B \to B'$ дефинишемо пресликавање $\beta_* : \operatorname{Ext}^n(A, B) \to \operatorname{Ext}^n(A, B')$ које класу раширења

$$0 \to B \xrightarrow{j} C_n \xrightarrow{k} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

слика у класу раширења

$$0 \to B' \xrightarrow{j'} E_n \xrightarrow{k'} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

где су E_n и j' одређени пушаутом дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_n \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "k"] & \\
B' \arrow[r, dashed, "j'"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{0}"'] & E_n \arrow[r, dashed, "k'"] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

а k' јединствено пресликавање из E_n у C_{n-1} које решава дијаграм. Тачност на местима E_n и B' се доказује аналогно случају $n = 1$. Са дијаграма је $\operatorname{im} k' \geq \operatorname{im} k$. Ако је $l : C_{n-1} \to C_{n-2}$ гранични хомоморфизам, тада је lk' решење дијаграма

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_n \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "lk=\mathbb{0}"] & \\
B' \arrow[r, dashed, "j'"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{0}"'] & E_n \arrow[r, dashed, "lk'"] & C_{n-2}
\end{tikzcd}$$

па је $lk' = \mathbb{0}$ односно $\operatorname{im} k' \leq \ker l$ што нас уз $\operatorname{im} k' \geq \operatorname{im} k = \ker l$ доводи до $\operatorname{im} k' = \ker l$. Дакле низ

$$0 \to B' \xrightarrow{j'} E_n \xrightarrow{k'} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

јесте тачан. И за ово пресликавање се може показати да је добро дефинисано, односно да раширења из исте класе слика у раширења из исте класе. И овај доказ изостављамо.

Нека је C n-тоструко раширење

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

и $\alpha : A' \to A$ хомоморфизам. Посматрајмо дијаграм, за који важи да је сваки од $\alpha_k, k \leq i$, добијен пулбеком хомоморфизама α_{k-1}, где је $\alpha_0 := \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, dashed, "h"'] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & C'_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C'_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & \cdots \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
& {} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r] & C_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Са дијаграма видимо да ће раширења C'

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C_{i+1} \to C'_i \to \cdots \to C'_1 \to A \to 0$$

и C''

$$0 \to B \to C_n \to \cdots \to C'_{i+1} \to C'_i \to \cdots \to C'_1 \to A \to 0$$

бити у релацији, односно да су представници исте класе. Заиста, постоји ланчасто пресликавање које је идентичко на свим местима осим $i+1$, а на месту $i+1$ је $h : C_{i+1} \to C'_{i+1}$ са дијаграма. Индуктивно, и раширење C_2 је представник класе $\alpha^*(C)$, и можемо конструисати раширење C', које је представник класе $\alpha^*(C)$ и ланчасто пресликавање $\alpha' : C' \to C$ такво да је сваки квадрат пулбек дијаграма. Дуално, за дато $\beta : B \to B'$ можемо направити представника C'' класе $\beta_*(C)$ и ланчасто пресликавање β' такво да је сваки квадрат пушаут дијаграма.

Даље уколико имамо било који комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C'_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

важиће да је горње раширење представник слике класе низа доњег раширења при α^*. Заиста, из горњег низа можемо индуктивно конструисати ланчасто пресликвање у представника класе $\alpha^*(C)$ који смо претходно конструисали, а у којем је сваки квадрат пулбек. Дуално, за сваки комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\beta_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

важиће да је доње раширење представник слике класе горњег раширења при β_*.

Операцију на овом скупу можемо дефинисати слично као и за Ext. За две класе X_1 и X_2 из $\operatorname{Ext}^n(A, B)$ дефинишемо њихов збир $X_1 + X_2$ као $\sigma_{B*} d_A^*(X_1 \oplus X_2)$ где је $X_1 \oplus X_2 \in \operatorname{Ext}^n(A \oplus A, B \oplus B)$ класа низа добијена директним сумирањем одговарајућих модула, а σ_B и d_A су дефинисани исто као и код Ext. Множење скаларом, за скалар λ и класу X такође дефинишемо са $\lambda \cdot X = (m_\lambda)_*(X)$, где је поново $m_\lambda : B \to B$ множење скаларом у B.

При претходно дефинисаном сабирању, за случајеве када је $n > 1$ неутрал ће бити класа низа

$$C_0 : 0 \to B \xrightarrow{\mathbb{1}} B \to 0 \to \cdots \to 0 \to A \xrightarrow{\mathbb{1}} A \to 0$$

док је инверз класе X, исто као и код Ext, $(-\mathbb{1}_B)_*(X)$. Ово се доказује аналогно случају Ext. Дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathbb{0}"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{0}"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\mathbb{1}"] & B \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathbb{1}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутира, што доказује да је $C_0 = \mathbb{0}_*(C)$. Аналогно остатку доказа у претходној глави долазимо до следеће теореме

Теорема 4. *За комутативни прстен са јединицом Λ, за свако $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ је бифунктор из категорије Λ-модула у категорију Λ-модула, контраваријантан по првом аргументу, а коваријантан по другом.*

Из дефиниције $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ и дефиниције операција на њему јасно је да важи да је $\mathrm{Ext}^1(-,-)$ исто што и $\mathrm{Ext}(-,-)$. Дакле, бифунктор $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ заиста јесте уопштење бифунктора $\mathrm{Ext}(-,-)$.

Посматрајмо $C \in \mathrm{Ext}^n(A, K)$ и $C' \in \mathrm{Ext}^m(K, B)$. Наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & & & & C : 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & C_n \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & C_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
C' : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C'_m \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & C'_1 \arrow[r, "k"] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

нам омогућава да дефинишемо композицију

$$\circ : \mathrm{Ext}^m(K, B) \times \mathrm{Ext}^n(A, K) \to \mathrm{Ext}^{m+n}(A, B)$$

где је $C' \circ C$ класа низа

$$0 \to B \to C'_m \to \cdots \to C'_1 \xrightarrow{jk} C_n \to \cdots \to C_1 \to A \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dd, equal] & C'_n \arrow[r, dashed] \arrow[dd, "\alpha'_n"] & \cdots \arrow[r, dashed] & C'_1 \arrow[rr, "jk"] \arrow[dd, "\alpha'_1"'] \arrow[dr, "k"] & & C_n \arrow[r, dashed] \arrow[dd, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r, dashed] & C_1 \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_1"] & A \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
 & & & & & K \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j'"] & & & & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & D'_n \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & D'_1 \arrow[rr, "j'k'"] \arrow[ur, "k'"] & & D_n \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & D_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Са претходног дијаграма видимо да је $\circ$ добро дефинисано, односно да уколико постоје $\alpha : C \to D$ и $\alpha' : C' \to D'$ тада постоји и пресликавање из $C' \circ C$ у $D' \circ D$, односно њима одређена класа је иста. Може се доказати и да за дату композицију важи да је дистрибутивна према сабирању, односно за $C' \in \mathrm{Ext}^m(K, B)$ и $C_1, C_2 \in \mathrm{Ext}^n(A, K)$ важи

$$C' \circ (C_1 + C_2) = C' \circ C_1 + C' \circ C_2.$$

Пример 15. У претходном разматрању смо дефинисали $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Уколико бисмо на сличан начин пробали да дефинишемо $\mathrm{Ext}^0(A,B)$, добили бисмо низ $0 \to B \to A \to 0$ из којег следи да су A и B изоморфни. Дакле, за произвољно A и B не можемо тако дефинисати $\mathrm{Ext}^0(A,B)$. Међутим, можемо дефинисати $E^0(A)$ као скуп низова облика $0 \to A \to A \to 0$. Средњи хомоморфизам мора бити изоморфизам. Дакле, ово ће бити исто што и модул аутоморфизама модула A.

Слично, видели смо да композиција два низа неће увек бити дефинисана. Међутим, уколико посматрамо само модуле $\mathrm{Ext}^n(A,A)$, можемо компоновати било која два елемента из било која два $\mathrm{Ext}^n(A,A)$. Дефинишемо $E^n(A) = \mathrm{Ext}^n(A,A)$. Даље, уколико имамо елемент $E \in E^0(A)$ који одговара $\mathbb{1} \in \mathrm{Aut}(A)$, тада за свако $C \in E^n(A)$ важи

$$C \circ E = E \circ C = C$$

Дакле, $E^*(A)$ је моноид у односу на операцију композиције низова. Као што смо већ видели, композиција је дистрибутивна према сабирању у $E^n(A)$, па је $E^*(A)$ једна градуисана Λ-алгебра.

Пример 16. Уколико је I инјективан модул, важи $\mathrm{Ext}^n(A,I) = 0$. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\mathbb{1}"] & I \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathbb{1}"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[u, equal] & C_n \arrow[r] \arrow[u, "i"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r] \arrow[u] & C_1 \arrow[r, "k"] \arrow[u, "k"] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавање i постоји зато што је модул I инјективан. Одавде видимо да је сваки низ у релацији са неутралом, односно $\mathrm{Ext}^n(A,I) = 0$. Овиме смо доказали тврђење за $n \geq 2$, док је за $n = 1$ тврђење већ доказано.

4.2 Пројективне резолуције

Као уопштење разматрања из прве главе можемо уместо низова облика $0 \to R \to P \to A \to 0$ посматрати низ, односно пројективну резолуцију, произвољне дужине

$$X' : 0 \to R \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$$

Ако је

$$X : 0 \to R \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to 0$$

дефинишемо $\overline{\mathrm{Ext}}^n(A,B) := H_n(\mathrm{Hom}(X;B))$. За све $n \in \mathbb{N}$ нам је свеједно који од низова X и X' посматрамо, односно којем од ова два низа рачунамо кохомологију, тако да ћемо често посматрати и кохомологију првог низа

$$0 \to R \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$$

Најпре треба да докажемо да за две различите пројективне резолуције X'_1 и X'_2 модула А важи $H^n(X_1,B) \cong H^n(X_2,B)$. Пресликавање α_i на дијаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha_i"] & P'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r] & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

постоји, уколико је дефинисано пресликавање α_{i-1}, зато што је P_i' пројективан. Индукцијом, постојаће ланчасто $\alpha : P' \to P$, а аналогно и $\beta : P \to P'$. Поново желимо да индуктивно конструишемо ланчасту хомотопију

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & P_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i\beta_i-\mathbb{1}"] \arrow[dl, dashed, "d_{i+1}"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}\beta_{i-1}-\mathbb{1}"] \arrow[dl, "d_i"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r] & P_i \arrow[r] & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

односно пресликавање d_{i+1}. Нека је $p \in P_i$. Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta p \arrow[rr, mapsto, "\delta"] \arrow[d, mapsto] \arrow[dl, mapsto, "d_i"] & & 0 \arrow[dl, mapsto, "d_{i-1}"] \\
d_i(\delta p) \arrow[r, mapsto, dashed] & \alpha_{i-1}\beta_{i-1} - \mathbb{1}(\delta p) & 0 &
\end{tikzcd}$$

Одавде се p и при $\delta d_i \delta$ и при $\delta(\alpha_i\beta_i - \mathbb{1})$ слика у исти елемент, па се при $d_i\delta - (\alpha_i\beta_i - \mathbb{1})$ слика у $\ker\delta$ односно $\operatorname{im}\delta$. Како је P_i пројективан, то постоји $d_{i+1} : P_i \to P_{i+1}$ које остварује ланчасту хомотопију. Дакле, $\overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B)$ јесте добро дефинисан до на изоморфизам. У случају када је $n = 1$ из дефиниције видимо да је $\overline{\operatorname{Ext}}^1(A, B) \cong \overline{\operatorname{Ext}}(A, B)$

Пример 17. Као и у случају $n = 1$, за пројективан модул P важи да је за $n \in \mathbb{N}$ $\overline{\operatorname{Ext}}^n(P, B) = 0$, поново због низа $0 \to 0 \to \cdots \to P \xrightarrow{\mathbb{1}} P \to 0$.

Теорема 5. *За комутативни прстен са јединицом* Λ*, за свако* $n \in \mathbb{N}$ $\overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B)$ *је изоморфан са* $\operatorname{Ext}^n(A, B)$*. За* $n = 0$ $\overline{\operatorname{Ext}}^0(A, B)$ *је изоморфан са* $\operatorname{Hom}(A, B)$*.*

Доказ: Уколико имамо модул A, његова пројективна резолуција дужине 0 ће бити низ $0 \to A \to A \to 0$. Дакле, када на $0 \to A \to 0$ применимо функтор $\operatorname{Hom}(-, B)$ добијамо низ $0 \to \operatorname{Hom}(A, B) \to 0$ којем рачунамо хомологију на средњем месту, која је очигледно изоморфна $\operatorname{Hom}(A, B)$. Дакле, $\overline{\operatorname{Ext}}^0(A, B) \cong \operatorname{Hom}(A, B)$.

Слично као и у случају $n = 1$ доказујемо да су $\operatorname{Ext}^n(A, B)$ и $\overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B)$ изоморфни. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
X : 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
C : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пресликавање $f : R \to B$ је коцикл, па је добро дефинисана класа $[f] \in H^n(X; B)$. Дефинишемо пресликавање $\xi : \operatorname{Ext}^n(A, B) \to \overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B)$ које класу C пресликава у $[f]$. Конструкција инверзног пресликавања $x : \overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B) \to \operatorname{Ext}^n(A, B)$ је потпуно аналогна конструкцији у случају $n = 1$. Дакле, $\overline{\operatorname{Ext}}^n(A, B)$ и $\operatorname{Ext}^n(A, B)$ су изоморфни. □

Слично као и у случају $n = 1$ из својстава $\operatorname{Hom}(-, -)$, H^n и пројективних резолуција можемо закључити да $\operatorname{Ext}^n(-, -)$ по првом аргументу слика директне суме у производе, а по другом производе у производе.

Уколико дефинишемо да је низ X' из дефиниције *канонска* пројективна резолуција односно да је P_i слободан модул генерисан елементима P_{i-1} и да се сваки од тих генератора слика у себе при повезујућем хомоморфизму, тада ће $\overline{\operatorname{Ext}}^n(A,B) = H^n(X,B)$ бити и добро дефинисан бифунктор. Уколико фиксирамо било коју другу пројективну X_1' резолуцију за сваки Λ-модул A добијамо неки нови функтор $\overline{\operatorname{Ext}}^{n\prime}(A,B) = H^n(X_1,B)$ који је природно еквивалентан са $\overline{\operatorname{Ext}}^n$. Доказе ових тврђења ћемо на овом месту изоставити.

Пример 18. Ако је Λ главноидеалски домен и A и B Λ модули, онда је $\operatorname{Ext}^n(A,B) = 0$ за $n \geq 2$. Заиста $A \cong P/R$, где су модули P и R слободни (па самим тим и пројективни). Дакле, имамо пројективну резолуцију $X : \cdots \to 0 \to P_1 = R \to P_0 = P \to A \to 0$, У њој су све групе $P_n, n \geq 2$ тривијалне, па ће и одговарајуће кохомолошке групе бити тривијалне, одакле следи тврђење. Специјално, свака Абелова група A, посматрана као модул на $\mathbb{Z}$ има тривијална виша раширења.

Наредни пример се може наћи у [1].

Пример 19. Нека су m и n природни бројеви. Групу $\mathbb{Z}_n$ можемо посматрати као модул над $\mathbb{Z}_{mn}$. Посматрајмо низ

$$\cdots \to \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \to 0$$

где је π пројекција $\mathbb{Z}_{mn}$ на $\mathbb{Z}_n$ задата редукцијом по модулу n. Ово ће бити слободна резолуција $\mathbb{Z}_{mn}$-модула $\mathbb{Z}_n$, па самим тим и пројективна. Када за произвољан $\mathbb{Z}_{mn}$-модул G применимо $\operatorname{Hom}(-,G)$ на овај низ, и одбацимо први члан, добијамо низ

$$0 \to G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{n} G \xrightarrow{m} G \to \cdots$$

из којег добијамо све $\operatorname{Ext}^n(\mathbb{Z}_n, G)$. Специјално нека је $m = n = p$ за неки прост p и $G = \mathbb{Z}_p$. Тада имамо низ $\mathbb{Z}_{p^2}$-модула

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p \to \cdots$$

одакле рачунамо

$$\operatorname{Ext}^n(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$$

за свако $n \geq 0$.

Из овог, и из претходних примера, видимо да $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ у зависности од прстена Λ може да буде и тривијално за све n, када је $\Lambda = \mathbb{Z}_p$, и нетривијално само у димензијама $n \leq 1$, када је $\Lambda = \mathbb{Z}$, и нетривијално у свим димензијама, када је $\Lambda = \mathbb{Z}_{p^2}$.

Наредни пример се може наћи у [5].

Пример 20. Нека је F поље, $\Lambda = F[x,y]/(x^5, xy)$ и $M = \Lambda/x^3\Lambda$ модул над прстеном Λ. Посматрајмо пројективну резолуцију

$$\cdots \to \Lambda^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^3 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}} \Lambda^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y \end{bmatrix}} \Lambda \xrightarrow{x^3} \Lambda \to M \to 0$$

и њену слику при $\mathrm{Hom}(-, M)$

$$0 \to M \to M \to M \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix}} M^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}} M^3 \to \cdots$$

На месту M^2 имамо цикл $[x^2, 0]$. Уколико је ово и граница, постоји $p \in M$ такво да је $[x^2, 0] = [x^2 p, yp]$ односно да је $yp = x^2(1-p) = 0$. Ово значи да је $p = xq$ и $p = xr + ys + 1$ што је немогуће. Дакле, кохомологија на месту M^2 је нетривијална, односно $\overline{\mathrm{Ext}}^2(M, M) \neq 0$.

5 Изведени функтор

Из претходног разматрања, видимо да постоји одређена веза између функтора Ext^n и функтора Hom. Овај однос можемо посматрати у већој општости. Нека је T адитиван контраваријантан функтор из категорије Λ-модула у категорију Λ-модула. Ако је A модул и X' његова канонска пројективна резолуција, односно тачан низ Λ-модула

$$X' : \cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

такав да су сви P_i пројективни и

$$X : \cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

дефинишемо низ функтора $R^nT(A) = H^n(TX)$. Слично као и у претходној глави, можемо, уместо канонске пројективне резолуције, за сваки Λ-модул A фиксирати неку пројективну резолуцију и добићемо неки природно еквивалентан функтор. И овде, као и у претходној глави, за све случајеве $n > 0$ нам је свеједно да ли посматрамо низ X или X', па ћемо и овде често користити низ

$$X' : \cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

Желимо да докажемо да је R^nT функтор. Најпре треба да дефинишемо

$$\alpha^* : R^nT(A) \to R^nT(A')$$

за хомоморфизам $\alpha : A' \to A$. За хомоморфизам α имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
X : \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
X' : \cdots \arrow[r] & P'_n \arrow[r] \arrow[u, "\pi_n"] & \cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[u, "\pi_1"] & A' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

односно ланчасто пресликавање π. Оно индукује коланчасто пресликавање између TP и TP', које даље индукује пресликавање $\alpha^* : R^nT(A) \to R^nT(A')$. Уколико је α идентички хомоморфизам, такво ће бити и ланчасто пресликавање π, па и α^*. Такође, ако имамо два хомоморфизма α_1 и α_2 и њима индукована ланчаста π_1 и π_2 и π индуковано са $\alpha_1\alpha_2$ важиће да су π и $\pi_1\pi_2$ ланчасто хомотопни, па ће $T(\pi)$ и $T(\pi_2)T(\pi_1)$ индуковати исто пресликавање у хомологији, па R^nT јесте функтор. И овде се може доказати да је функтор R^nT добро дефинисан, односно да не зависи од избора ланчастих пресликавања.

Дефиниција 9. Нека је T контраваријантан функтор. Функтор R^nT је *n-ти десни изведени функтор* функтора T.

Десни изведени функтор можемо дефинисати и за коваријантне функторе. Посматрајмо појам дуалан појму пројективне резолуције, инјективну резолуцију. Уколико је низ Y' канонска инјективна резолуција модула A, односно

$$Y' : 0 \to A \to I_0 \to \cdots \to I_n \to \cdots$$

где су сви I_i инјективни модули, а

$$Y : 0 \to I_0 \to \cdots \to I_n \to \cdots$$

тада за коваријантан функтор T дефинишемо $R^nT(A) = H^n(TY)$. За разлику од пројективних резолуција, до сада нисмо дефинисали канонску инјективну резолуцију. Ово је нешто комплексније питање од дефинисања канонске пројективне резолуције. Овде можемо, за сваки Λ-модул A, да фиксирамо неку инјективну резолуцију и да њу надаље сматрамо за канонску. Слично као и код пројективних резолуција, избор било које друге инјективне резолуције даје природно еквивалентне функторе. Дуално, као у случају за контраваријантне функторе, за хомоморфизам $\alpha : A \to A'$ дефинишемо и α_* као пресликавање индуковано ланчастим $T(i) : T(A) \to T(A')$, где је i ланчасто такво да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Y : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & \cdots \arrow[r] & I_n \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & \cdots \\
Y' : 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & I_1' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_n' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

комутира. Овакво i постоји и одређено је до на ланчасту хомотопију, као и у случају пројективне резолуције.

Такође дефинишемо и леве изведене функторе, овог пута помоћу n-те хомолошке групе. За коваријантан функтор T дефинишемо $L_nT(A) = H_n(TX)$ где је X канонска пројективна резолуција A, док за контраваријантне функторе дефинишемо $L_nT(A) = H_n(TY)$ где је Y канонска инјективна резолуција модула A.

Како су изведени функтори дефинисани помоћу (ко)хомолошких група, имаћемо и дуги тачан низ за изведене функторе.

Лема 3. За кратак тачан низ $0 \to A' \xrightarrow{j} A \xrightarrow{k} A'' \to 0$. Постоје инјективни модули I_1', I_1 и I_1'' и инјективна пресликавања i', i и i'' таква да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "j"] \arrow[d, tail, "i'"] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, tail, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1' \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & I_1'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутира.

Доказ: Модули A' и A'' могу да се утопе у неке инјективне модуле I_1' и I_1'' редом. Нека су i' и i'' та утапања. Дефиншемо $I_1 = I_1' \oplus I_1''$. Овај модул је поново инјективан као производ инјективних модула. Желимо да дефинишемо пресликавање $i : A \to I_1' \oplus I_1''$ такво да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "j"] \arrow[d, tail, "i'"] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, tail, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1' \arrow[r, "i_1"] & I_1' \oplus I_2' \arrow[r, "\pi_2"] & I_1'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где је i_j утапање у j-у координату, а π_j пројекција на j-у координату. Хомоморфизам $i\pi_1$ дефинишемо као проширење пресликавања i' у односу на мономорфизам j, а $i\pi_2$ као $i''k$. Овиме је дефинисан и хомоморфизам i. Десни квадрати очигледно комутира. Леви квадрат комутира, јер за $a' \in A'$ важи да је $i(j(a')) = (i'(a'), i''kj(a')) = (i'(a), 0)$, зато што је композиција kj тривијална. $\square$

Из претходне леме, како су вертикална пресликавања инјективна, по Змијској леми постоји кратак тачан низ $0 \to \operatorname{coker}(i') \to \operatorname{coker}(i) \to \operatorname{coker}(i'') \to 0$. По леми, постоје I'_2, I_2 и I''_2такви да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(i') \arrow[r] \arrow[d, tail] & \operatorname{coker}(i) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \operatorname{coker}(i'') \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_2 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I''_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

па ће комутирати и дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[r] \arrow[d, tail] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_1 \arrow[r] \arrow[d] & I''_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_2 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I''_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Индуктивно, добијамо инјективне резолуције Y', Y и Y'' модула A', A и A'' редом. Имамо и кратак тачан низ $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$. Сваки од низова $0 \to I'_i \to I_i \to I''_i \to 0$ се цепа па ће и $0 \to TY' \to TY \to TY'' \to 0$ бити кратак тачан низ за сваки коваријантан функтор T. Ово нас доводи до дугог тачног низа

$$\cdots \to R^{n-1}T(A'') \xrightarrow{\delta_{n-1}} R^nT(A') \to R^nT(A) \to R^nT(A'') \xrightarrow{\delta_n} R^{n+1}T(A') \to \cdots$$

Ово је био први дуги тачан низ. Други добијамо из низа функтора $0 \to T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T'' \to 0$, где су T', T и T'' коваријантни функтори. Најпре треба да дефинишемо шта уопште значи да је низ претходног облика тачан. Кажемо да је дати низ тачан на пројективним модулима уколико је низ $0 \to T'P \xrightarrow{\tau'} TP \xrightarrow{\tau''} T''P \to 0$ тачан за све пројективне модуле P. Аналогно дефинишемо да је низ функтора тачан на инјективним модулима ако је низ $0 \to T'I \xrightarrow{\tau'} TI \xrightarrow{\tau''} T''I \to 0$ тачан за сваки инјективан модул I.

Посматрајмо модул A и његову инјективну резолуцију Y. Уколико имамо низ функтора тачан на инјективним модулима, имамо и тачан низ $0 \to T'Y \to TY \to T''Y \to 0$, који у кохомологији индукује дуги тачан низ. Дакле за низ функтора $0 \to T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T'' \to 0$ који је тачан на инјективним модулима, за произвољан модул A имамо дуги тачан низ

$$\cdots \to R^{n-1}T''(A) \xrightarrow{\delta_{n-1}} R^nT'(A) \to R^nT(A) \to R^nT''(A) \xrightarrow{\delta_n} R^{n+1}T'(A) \to \cdots$$

Конструкцију аналогну овој имамо за све врсте изведених функтора, односно и за леве и за десне изведене функторе, како коваријантних, тако и контраваријантних функтора. Тачни низови десних изведених функтора контраваријантних функтора и левих изведених функтора коваријантних функтора ће бити дефинисани помоћу пројективних резолуција и за низове функтора тачне на пројективним модулима. Тачни низови за леве изведене функторе контраваријантних фуктора, као и наведена конструкција за десне изведене функторе коваријантних функтора користи инјективне резолуције и низове функтора тачне на инјективним модулима.

Пример 21. Нека је дат коваријантан функтор $- \otimes B$. Дефинишемо $\mathrm{Tor}_i(-, B) = L_i(- \otimes B)$. Ово ће бити уопштење већ познатог Tor функтора, који ће бити еквивалентан са овако дефинисаним Tor_1. Заиста, уколико имамо пројективну резолуцију модула A

$$X : \cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

када на ово применимо $- \otimes B$ добијамо низ

$$X \otimes B : \cdots \to P_n \otimes B \to \cdots \to P_1 \otimes B \to P_0 \otimes B \to 0$$

па нам је $\mathrm{Tor}_1(A, B) = H_1(X \otimes B)$ што нам је била и дефиниција $\mathrm{Tor}(A, B)$. Можемо израчунати и да је $\mathrm{Tor}_0(A, B) = A \otimes B$.

5.1 Функтор $\hat{\mathrm{Ext}}^n$

Изведени функтори нам дају два нова начина да видимо функтор Ext^n. Најпре, можемо дефинисати $\mathrm{Ext}^n(-, B)$ као n-ти десни изведени функтор функтора $\mathrm{Hom}(-, B)$, што је само реформулација дефиниције функтора $\overline{\mathrm{Ext}}^n$ из претходне главе.

Други начин за дефинисање је дуалан првом. Дефинишемо $\hat{\mathrm{Ext}}^n(A, -)$ као n-ти десни изведени функтор функтора $\mathrm{Hom}(A, -)$. Поново желимо да докажемо природну еквивалентност поменуте две дефиниције.

Пример 22. Ако је I ињективан модул, тада је $\hat{\mathrm{Ext}}^n(A, I) = 0$. Заиста, низ $Y : 0 \to I \to I \to 0 \to \cdots$ је ињективна резолуција модула I, па ће и $H^n(\mathrm{Hom}(A, Y))$ бити 0 за све $n \geq 1$.

Пример 23. Посматрајмо ињективну резолуцију модула B

$$Y : 0 \to I_0 \xrightarrow{i_0} \cdots \to I_n \to \cdots$$

За коваријантан функтор $\mathrm{Hom}(A, -)$, $H^0(\mathrm{Hom}(A, Y)$ ће бити изоморфан $\ker \mathrm{Hom}(A, i_0)$ односно са $\mathrm{Hom}(A, B)$, јер је $\mathrm{Hom}(A, -)$ лево-тачан функтор, односно видимо да и за $\hat{\mathrm{Ext}}^n(A, -)$ важи да је $\hat{\mathrm{Ext}}^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B)$.

Посматрајмо ињективну презентацију модула B, односно кратак тачан низ $0 \to B \to I \to J \to 0$, где је модул I ињективан. Овај низ индукује два тачна низа. Први за изведене функторе функтора $\mathrm{Hom}(A, -)$, за тачан низ $0 \to B \to I \to J \to 0$, односно

$$\cdots \to \hat{\mathrm{Ext}}^{n-1}(A, J) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \hat{\mathrm{Ext}}^n(A, B) \to \hat{\mathrm{Ext}}^n(A, I) \to \hat{\mathrm{Ext}}^n(A, J) \xrightarrow{\delta_n} \hat{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A, B) \to \cdots$$

Други за изведене функторе, за низ функтора $0 \to \mathrm{Hom}(-, B) \to \mathrm{Hom}(-, I) \to \mathrm{Hom}(-, J) \to 0$ и модул A, односно

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(A, J) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathrm{Ext}^n(A, B) \to \mathrm{Ext}^n(A, I) \to \mathrm{Ext}^n(A, J) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Ext}^{n+1}(A, B) \to \cdots$$

Да би претходни низ постојао низ $0 \to \mathrm{Hom}(-, B) \to \mathrm{Hom}(-, I) \to \mathrm{Hom}(-, J) \to 0$ мора бити тачан на пројективним модулима, односно да је низ $0 \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, I) \to \mathrm{Hom}(P, J) \to 0$ тачан за произвољан пројективан модул P. Тачност на прва два места следи из лево-тачности функтора $\mathrm{Hom}(P,-)$, а тачност на последњем месту важи зато што за свако пресликавање $f \in \mathrm{Hom}(P,J)$ постоји подизање $g \in \mathrm{Hom}(P,I)$ пресликавања f у односу на епиморфизам $k : I \to J$, па је $f = k_{\#}(g)$, односно и $k_{\#}$ је епиморфизам.

Како су и $\mathrm{Ext}^0(A,B)$ и $\hat{\mathrm{Ext}}^0(A,B)$ еквивалентни са $\mathrm{Hom}(A,B)$ то имамо једнакости на дијаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0(A,I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^0(A,J) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau_1"] & 0 \\
\hat{\mathrm{Ext}}^0(A,I) \arrow[r] & \hat{\mathrm{Ext}}^0(A,J) \arrow[r] & \hat{\mathrm{Ext}}^1(A,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

па имамо пресликавање τ_1. Уколико су дефинисана пресликавања τ_i за $i < n$, желимо да дефинишемо τ_n. Како су сви $\mathrm{Ext}^n(A,I)$ и $\hat{\mathrm{Ext}}^n(A,I)$ тривијални за $n \geq 1$ имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-1}(A,J) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^n(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathrm{Ext}}^{n-1}(A,J) \arrow[r] & \hat{\mathrm{Ext}}^n(A,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

и пресликавање τ_n које га решава. Треба још показати да су τ природне трансформације функтора. Најпре да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(A,I') \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^1(A,B') \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_1"] & & 0 \\
\mathrm{Hom}(A,I') \arrow[ur, equal] \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^1(A,B') \arrow[rr] & & 0 & \\
& \mathrm{Hom}(A,I) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^1(A,B) \arrow[uu, "\beta_*"'] \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_1"] & & 0 \\
\mathrm{Hom}(A,I) \arrow[uu] \arrow[ur, equal] \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^1(A,B) \arrow[uu, "\beta_*"] \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

комутира, односно да је τ_1 природна. Ово заиста важи, јер леви квадрат очигледно комутира, предњи и задњи квадрат комутирају по конструкцији, а горњи и доњи из природности дугог тачног низа. Даље, уколико је τ_{n-1} природна, треба доказати да следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^n(A,I') \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_n"] & & \mathrm{Ext}^{n+1}(A,B') \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_{n+1}"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^n(A,I') \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A,B') \arrow[rr] & & 0 & \\
& 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^n(A,I) \arrow[uu, "\beta_*"'] \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_n"] & & \mathrm{Ext}^{n+1}(A,B) \arrow[uu, "\beta_*"'] \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_{n+1}"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^n(A,I) \arrow[uu, "\beta_*"] \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A,B) \arrow[uu, "\beta_*"] \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

односно да је τ_n природна. Поново, лева страна дијаграма комутира по претпоставци, горње и доње из природности, а предња и задња по конструкцији. Овиме смо добили природност по другом аргументу. Ово нам такође обезбеђује и да дефиниција трансформације не зависи од избора I и J, ако уместо произвољног хомоморфизма β посматрамо $\mathbb{1}_B$. Слично, са дијаграма

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^n(A',I) \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_n"] & & \mathrm{Ext}^{n+1}(A',B) \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau_{n+1}"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^n(A',I) \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A',B) \arrow[rr] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^n(A,I) \arrow[rr] \arrow[uu, "\alpha^*"] \arrow[dl, "\tau_n"] & & \mathrm{Ext}^{n+1}(A,B) \arrow[rr] \arrow[uu, "\alpha^*"] \arrow[dl, "\tau_{n+1}"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \hat{\mathrm{Ext}}^n(A,I) \arrow[rr] \arrow[uu, "\alpha^*"] & & \hat{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A,B) \arrow[rr] \arrow[uu, "\alpha^*"] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

и из природности дугог тачног низа добијамо природност по другом аргументу.

Пример 24. На категорији торзионих Абелових група постоји природна еквиваленција функтора $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Ext}^1(-,\mathbb{Z})$. Посматрајмо инјективну резолуцију групе $\mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Када на ово применимо функтор $\mathrm{Hom}(A,-)$ добијамо

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q})$ је тривијална, зато што је A торзиона, а у $\mathbb{Q}$ нема торзионих елемената. Одатле је кохомологија на месту $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ изоморфна $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, односно $\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Наредни пример се може наћи у [9].

Пример 25. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ је изоморфна са $(\mathbb{R},+)$.

Посматрајмо низ

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Он нам, за функтор $\mathrm{Ext}(-,\mathbb{Z})$ даје дуги тачан низ. Како су $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ тривијални, имамо кратак тачан низ

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to 0$$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ће бити изоморфно директној суми $\bigoplus Z_{p^\infty}$ по свим простим p, па је $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ изоморфно производу $\prod \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z})$.

Ако на низ

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

применимо функтор $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},-)$ и посматрамо њему придружен дуги тачан низ, добијамо низ

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}) \to 0$$

зато што су $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})$ тривијални. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})$ је тривијална зато што је $\mathbb{Q}$ торзионо слободна, а $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})$ зато што је $\mathbb{Q}$ инјективна. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong$

$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong Z_p$ где су Z_p p-адски цели бројеви.Ово заиста важи. Група $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ је директни лимес низа

$$\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^3} \hookrightarrow \cdots$$

Уколико на овај низ применимо функтор $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ добићемо низ

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \leftarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \leftarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^3}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \leftarrow \cdots$$

чији је инверзни лимес $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$. Како је $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^k}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^k}, \mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ то нам је горњи низ заправо

$$\mathbb{Z}_p \leftarrow \mathbb{Z}_{p^2} \leftarrow \mathbb{Z}_{p^3} \leftarrow \cdots$$

чији је инверзни лимес баш Z_p.

Из $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong Z_p$ следи да је и $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}) \cong Z_p$. Дакле, $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \prod Z_p$. Одавде и из низа $0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0$ закључујемо да је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ кардиналности $2^{\aleph_0}$.

Важиће да је производ $\prod Z_p$ которзиона група, односно да за њега важи да је $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \prod Z_p)$ тривијална и да за било коју торзионо слободно групу G важи да је $\operatorname{Ext}(G, \prod Z_p)$ тривијална. Доказ овога може се наћи у [3]. Специјално, $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \prod Z_p)$ је тривијална.

Вратимо се нашем разматрању. Ако на низ

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0$$

применимо функтор $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, -)$ и посматрамо њему придружен дуги тачан низ, имамо низ

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})) \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0$$

зато што су по претходним разматрањима $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))$ и $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))$ тривијални.

Важиће и да уколико је G дељива и торзионо слободна, тада је и $\operatorname{Hom}(G, H)$ дељива и торзионо слободна. Када ово применимо на $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}))$ добијамо да је она торзионо слободна и дељива, односно да је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ торзионо слободна и дељива. Из овога се, уз чињеницу да је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ кардиналности $2^{\aleph_0}$, може закључити да је $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R}, +)$.

Литература

[1] D.S. Dummit, R.M Foote - Abstract Algebra, Third Edition, John Wiley & Sons 2003

[2] L. Fuchs - Abelian Groups, Pergamon Press 1960

[3] D.K. Harrison - Infinite Abelian Groups and Homological Methods, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 69, No. 2 (Mar., 1959), pp. 366-391

[4] P.J. Hilton, U. Stambach - A Course in Homological Algebra, Springer 1997

[5] S.B. Iyengar, R. Takashi - The Jacobian Ideal of a Commutative Ring and Anihilators of Cohomology arXiv:1610.02599 2018

[6] I. Kaplansky - Infinite Abelian Groups, The University of Michigan Press 1965

[7] S. MacLane - Homology, Springer 1975

[8] E.H. Spanier - Algebraic Topology, Springer 1966

[9] J. Wiegold - Ext(Q,Z) is the additive group of real numbers, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. I (1969), 341-343.