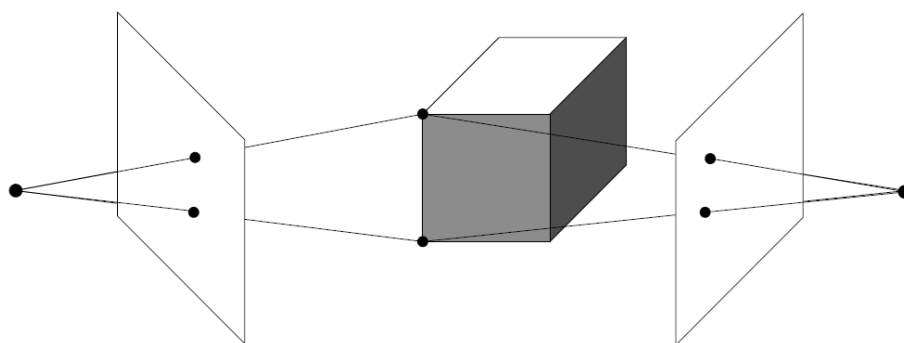


Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

РЕКОНСТРУКЦИЈА ПРОСТОРНОГ ОБЈЕКТА ИЗ ЊЕГОВИХ РАВАНСКИХ ПРОЈЕКЦИЈА

Милош Антић 1082/2011



Београд
2012.

МЕНТОР:

др Срђан Вукмировић

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Срђан Вукмировић
проф. др Мирјана Ђорић
др Мирослава Антић

Садржај

Увод	1
1 Пројективна пресликавања	3
1.1 Пројективна пресликавања равни	3
1.1.1 Класификација пројективних пресликавања равни	4
1.1.2 Афина и пројективна дисторзија. Уклањање пројективне дисторзије.	5
Одређивање праве ишчежавања равни	6
1.1.3 Циркуларне тачке. Коника дуална циркуларним тачкама.	7
1.1.4 Пројекције углова	8
1.1.5 Уклањање афине дисторзије	9
1.2 Пројективна пресликавања простора	11
1.2.1 Класификација пресликавања простора. Пројективна дисторзија и њено елиминисање.	11
1.2.2 Апсолутна коника	11
1.2.3 Пројекције углова. Елиминисање афине дисторзије.	13
2 Модели камере	15
2.1 Пројективне камере са коначним центром пројекције	15
Централно пројектовање простора на раван	15
ССD камере	17
Коначна пројективна камера	17
2.2 Анатомија матрице камере	18
2.3 Дејство пројективне камере на тачке и праве	20
2.3.1 На тачке	20
2.3.2 На праве	20
2.4 Веза двеју пројекција при фиксираном центру пројекције	22
2.4.1 Транслација равни слике	22
2.4.2 Ротација камере	23
2.4.3 Интересантни примери	23
2.4.4 Промена центра пројекције при пројектовању	24
2.5 Калибрација камере	26
2.5.1 Слика апсолутне конике	27
2.6 Тачке и праве ишчежавања	29
2.6.1 Тачке ишчежавања	29
2.6.2 Праве ишчежавања	30
2.6.3 Веза ортогоналности са односом тачака и правих ишчежавања	31
2.7 Одређивање калибрације камере из једне пројекције	32
3 Реконструкција просторног објекта на основу његове две пројекције	33
3.1 Еиполарна геометрија и фундаментална матрица	33
3.1.1 Еиполарна геометрија	33
3.1.2 Фундаментална матрица F	33
Геометријска конструкција	34
Алгебарска конструкција	35

Својства фундаменталне матрице	35
Хомографија еиполарних правих	36
3.1.3 Рачунање фундаменталне матрице F двеју пројекција	36
Нормализовани алгоритам са осам тачака $x \leftrightarrow x'$	37
Одређивање F на основу минималног броја кореспонденција $x_i \leftrightarrow x'_i$ (седам)	38
Одређивање фундаменталне матрице на основу шест кореспонденција тачака $x_i \leftrightarrow x'_i$	38
3.2 Одређивање матрица камера на основу фундаменталне матрице F	40
3.2.1 Одређеност камера. Канонски пар матрица камера	40
3.2.2 Формула канонског пара матрица камера за познато F	41
3.3 Реконструкција матрица камера и структуре просторног објекта	43
3.3.1 Метод реконструкције	43
3.3.2 Вишезначност реконструкције	43
Теорема пројективне реконструкције	45
3.4 Директна реконструкција	46
3.5 Слојевит приступ реконструкцији	47
3.5.1 Афина реконструкција	47
Идентификација слике бесконачне равни	47
3.5.2 Метричка реконструкција	48
Идентификација слике измештене апсолутне конике	48
3.6 Триангулација тачака просторног објекта	50
3.6.1 Метод линеарне триангулације	51
3.6.2 Оптималан метод триангулације	51
А Матрице - својства и декомпозиција	55
А.1 Сингуларна декомпозиција матрице	55
А.2 Векторски производ вектора из \mathbb{R}^3 и антисиметричне матрице	57
Закључак	59
Индекс појмова	61
Литература	63

Увод

У протеклих пар деценија је дошло до великог напретка у примени теоријских резултата геометријске визуелизације у рачунарској графици. Развој информационих технологија је омогућио решавање проблема који су пре неколико деценија били у домену научне фантастике.

Један од тих проблема је и реконструкција и моделовање просторног објекта, и простора уопште, на основу његових раванских пројекција. У овом раду је конкретно описан метод реконструкције структуре просторног објекта на основу његове две раванске слике произвољним камерама из разних положаја у простору. Значај резултата описаних у овом раду је управо у томе што за одређену реконструкцију простора на основу две пројекције није неопходно познавање параметара камера којима су пројекције добијене, већ је реконструкцију могуће извршити само на основу кореспонденције тачака у пројекцијама.

Како фотографисање представља једно пројективно, тачније перспективно, пресликавање резултати наведени у овом раду су тесно повезани са пројективном геометријом простора и равни.

Метод реконструкције просторног објекта се заснива на обележавању тачака у пројекцијама које су слике исте просторне тачке. Релација између пројекција је пројективна, али оне у општем случају нису повезане пројективним пресликавањем, већ на неки други начин. Показује се да постоји тзв. *фундаментална матрица* двеју пројекција за коју важи да је $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$ ако и само су \mathbf{x} координате слике у првој, а \mathbf{x}' координате слике у другој пројекцији исте просторне тачке \mathbf{X} . Потребно је успоставити кореспонденције свих тачака у пројекцијама да би се извршила реконструкција целог објекта. Показује се да је потребно обележити слике у пројекцијама за коначан број просторних тачака да би се успоставила кореспонденција свих тачака у пројекцијама. Из поменуте фундаменталне матрице је потом могуће доћи до матрица камера којима су пројекције добијене, као и до положаја тачака у простору чије се слике налазе у двема пројекцијама.

Показује се да тако добијена реконструкција се од стварне разликује за пројективну трансформацију простора, тј. постоји одређена пројективна искривљеност, или *дисторзија* у добијеној реконструкцији коју треба елиминисати. У раду су наведене методе исправљања реконструкције до *метричке*, у којој се просторни објекат разликује од стварног за неку трансформацију сличности простора. Главну улогу у исправљању играју *слика бесконачно далеке равни* и тзв. *апсолутне конике* на њој.

У првом поглављу је дата класификација пројективних пресликавања равни и простора. Наведено је њихово дејство на тачке, праве, равни и остале геометријске објекте. Анализирано је њихово „непожељно“ дејство, тачније дисторзија коју пресликавања праве и њено елиминисање.

У другом поглављу су наведени модели камере, као и њихово дејство на геометријске објекте. Анализирани су параметри камере, као и њихово одређивање из пројекција добијених њом.

У трећем поглављу је детаљно анализирана реконструкција просторног објекта из његових раванских пројекција, као и реконструкција матрица камера којима су пројекције добијене. Наведене су теоријске основе успостављања везе двеју пројекција, као и алгоритми за рачунање *фундаменталне матрице* F двеју пројекција. Дата је формула за одређивање матрица камера, за познату *фундаменталну матрицу* F , као и алгоритам триангулације просторних тачака. Анализирана је вишезначност реконструкције, и приказане су методе за елиминисање пројективне *дисторзије* и конструисање пуне реконструкције просторног објекта.

Текст се заснива у доброј мери на књизи [1], где се могу пронаћи додатне информације о овој теми.

Глава 1

Пројективна пресликавања

1.1 Пројективна пресликавања равни

Напомена: у даљем тексту се под равни подразумева пројективна раван добијена додавањем еуклидкој равни бесконачно далеке праве. Под простором се подразумева пројективни простор, добијен додавањем еуклидском простору бесконачно далеке равни. Детаљи се могу наћи у књизи [2]

Дефиниција 1.1. Пројективно пресликавање равни је инверзибилно пресликавање $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ које чува колинеарност тачака.

Скуп свих пројективних пресликавања је група. Докажимо битну карактеризацију пројективних пресликавања равни:

Теорема 1.1. Нека је H несингуларна матрица формата 3×3 . Линеарно пресликавање дато формулом

$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

где су \mathbf{x} координате неке тачке у равни \mathbb{P}^2 , а \mathbf{x}' координате њене слике дефинише пројективно пресликавање пројективне равни \mathbb{P}^2 .

Доказ: Нека тачке $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbf{l}$, тј. $\mathbf{l}^T \mathbf{x}_i = 0$ за $i = 1, 2, 3$. Како је H несингуларна матрица, постоји H^{-1} , па претходну једнакост можемо да запишемо као $\mathbf{l}^T H^{-1} H \mathbf{x}_i = 0$, тј. $(H^{-T} \mathbf{l})^T H \mathbf{x}_i = 0$, што значи да тачке $\mathbf{x}'_i = H \mathbf{x}_i$ леже на правој чије су хомогене координате $H^{-T} \mathbf{l}$. Дакле, пресликавање дато са (1.1) чува колинеарност тачака, па је зато пројективно. \square

Поменимо да важи и обрат претходног тврђења, наиме за свако пројективно пресликавање равни постоји несингуларна матрица H која повезује координате слика и оригинала као у формули (1.1). Доказ би подразумевао увођење пројективних координатних система у равни оригинала и слике, и успостављање одговарајуће везе којом бисмо дошли до матрице H . Нећемо га детаљније наводити.

Пример 1.1. Ако за четири тачке у равни, у слободном положају (никоје три нису колинеарне) имамо њихове оригиналне координате и координате у равни слике, можемо да одредимо матрицу H одговарајућег пројективног пресликавања до на константу.

Матрица H има 8 независних параметара који је одређују (како је формата 3×3 има их укупно 9, али минус 1 због хомогене репрезентације). Зато је потребно поставити укупно 8 линеарно независних услова, да би матрица H била потпуно одређена. Конкретно, нека је

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

и нека су $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ координате оригинала и слике неке тачке пројективне равни, тј. $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$. Нека су одговарајуће координате у Декартовом координатном систему $(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$

и $(x', y') = (\frac{x'_1}{x'_3}, \frac{x'_2}{x'_3})$. Тада је задовољено:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3}, \text{ и } y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}.$$

или еквивалентно,

$$\begin{aligned} x'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) &= h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ y'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) &= h_{21}x + h_{22}y + h_{23}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ако за четири тачке у слободном положају знамо координате њихових оригинала и слика, за сваку од њих можемо да формирамо по две једначине облика (1.3) у којима су непознате компоненте матрице H . Како бисмо тада имали укупно 8 једначина непознате можемо да одредимо као решење тог хомогеног система једначина. \triangle

Како пројективна пресликавања чувају инциденције тачака и правих, она ће праве сликати у праве а конике у конике. Навешћемо формуле одговарајућих пресликавања у наредној теорему:

Теорема 1.2. При пројективном пресликавању тачака $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$:

- (i) права са координатама \mathbf{l} се слика у праву са координатама $\mathbf{l}' = H^{-T}\mathbf{l}$,
- (ii) крива другог реда чија је матрица C се слика у криву другог реда чија је матрица $C' = H^{-T}CH^{-1}$,
- (iii) крива друге класе чија је матрица C^* се слика у криву друге класе чија је матрица $C^{*'} = HC^*H^T$.



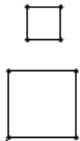
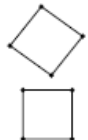
Доказ:

- (i) Доказано у теорему 1.1.
- (ii) Тачка са хомогеним координатама \mathbf{x} која припада кривој другог реда чија је матрица C задовољава $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = 0$. Како важи $\mathbf{x} = H^{-1}\mathbf{x}'$, где су \mathbf{x}' координате исте тачке у слици, то је $0 = \mathbf{x}^T C \mathbf{x} = (H^{-1}\mathbf{x}')^T C H^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T H^{-T} C H^{-1}\mathbf{x}'$, па можемо да закључимо да одговарајућа слика тачке са координатама \mathbf{x} припада кривој другог реда чија је матрица једнака $H^{-T} C H^{-1}$.
- (iii) Права са хомогеним координатама \mathbf{l} која припада кривој друге класе чија је матрица C^* задовољава $\mathbf{l}^T C^* \mathbf{l} = 0$. Како важи $\mathbf{l} = H^T \mathbf{l}'$, где су \mathbf{l}' координате исте праве у слици, то је $0 = \mathbf{l}^T C^* \mathbf{l} = (H^T \mathbf{l}')^T C^* H^T \mathbf{l}' = \mathbf{l}'^T H C^* H^T \mathbf{l}'$, па можемо да закључимо да одговарајућа слика праве са координатама \mathbf{l} припада кривој друге класе чија је матрица једнака $H C^* H^T$. \square

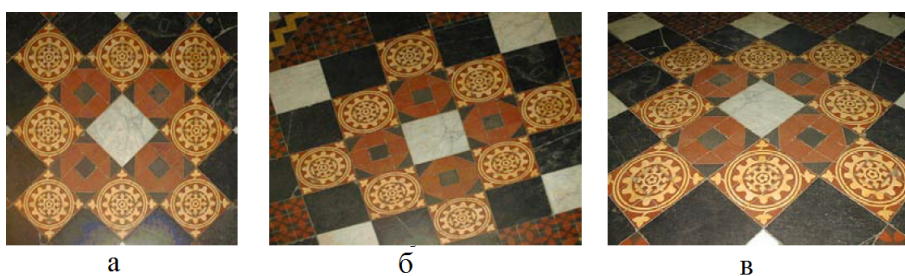
1.1.1 Класификација пројективних пресликавања равни

У овој подсекцији ћемо навести основна својства групе пројективних пресликавања, као и неких њених битних подгрупа. Општа линеарна група је $\mathbb{GL}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$. Ако је $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, пројективна линеарна група је количнички скуп $\mathbb{PL}(n) = \mathbb{GL}(n)/\mathbb{R}^*$ чији су елементи класе релације еквиваленције над матрицама ($A \sim B \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^*) A = kB$).

Група *пројективних пресликавања равни* је група $\mathbb{PL}(3)$. Врло важна подгрупа ове групе је *група афиних пресликавања равни* чији елементи одговарају матрицама из $\mathbb{GL}(3)$ чија је последња врста $(0, 0, 1)$. Врло значајне подгрупе групе афиних пресликавања равни су *група изометрија равни*, чији елементи одговарају матрицама чија је још горња, лева 2×2 подматрица ортогонална, као и *група сличности равни* чији елементи одговарају изометријама уз додатно скалирање. Њихове карактеристике су наведене у табели 1.1.

Група пресликавања	Матрица	Дисторзија квадрата	Инваријанте
Пројективна пресликавања 8 степени слободe	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$		конкурентност, колинеарност, двора- змера, криве другог реда (све су јед- нако третиране)
Афина пресликавања 6 степени слободe	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		паралелност, размера на правој, бес- коначно далека права, криве другог реда (сваку понаособ)
Сличности 4 степена слободe	$\begin{bmatrix} se \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ se \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		размера, углови, циркуларне тачке $\mathbf{I} = (1, i, 0)^T$ и $\mathbf{J} = (1, -i, 0)^T$
Изометрије 3 степена слободe	$\begin{bmatrix} e \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ e \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		дужина, површина

Табела 1.1: Геометријска својства група пресликавања равни. Под степенима слободe подразумевамо број неравних параметара матрице. Матрица $A = [a_{ij}]$ је несингуларна матрица формата 2×2 , θ је угао ротације, (t_x, t_y) је вектор транслације, s је коефицијент склаирања, а параметар e узима вредност 1 [-1] у случају директног [индиректног] пресликавања. Под дисторзијом квадрата подразумевамо ефекат који одговарајућа група пресликавања оставља на његов облик. Конкретна трансформација у табели може да направи дисторзију напоменути у одговарајућој врсти, али и све остале дисторзије ниже од ње у табели. Конкретна трансформација у табели за инваријанте има оне напоменуте у одговарајућој врсти, али и све остале инваријанте изнад ње у табели.



Слика 1.1: Дисторзија слике. Слика пода поплочаног квадратним плочицама. (а) **Сличност**: Може се рећи да је пресликавање којим је под усликан пресликавање сличности, с обзиром да је облик квадрата сачуван. (б) **Афино пресликавање**: Кругови се виде као елипсе, праве које су ортогоналне у стварности, у слици нису. Очувана је релација паралелности правих. (в) **Пројективно пресликавање**: Под је усликан перспективним пресликавањем. Праве које су у стварности паралелне, у слици се секу, тј. није очувана релација паралелности правих. Плочице које су ближе центру пројектовања су и кружније, иако у стварности није тако.

1.1.2 Афина и пројективна дисторзија. Уклањање пројективне дисторзије.

При афином, и уопште пројективном пресликавању долази до дисторзије пресликаног објекта у слици, тј. до његовог извесног кривљења. На пример, слика 1.1.а пода пресликана афином трансформацијом се види на слици 1.1.б. Кругови су „искривљени“ тако да се сада виде као елипсе, док се квадрати виде као паралелограми. Поменути дисторзију називамо *афином дисторзијом*, јер је настала применом афине трансформације.

Теорема 1.3. Пројективна трансформација равни је афина ако и само ако фиксира бесконачну праву чије су координате $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$.

Доказ: Нека пројективно пресликавање равни има матрицу H , облика као у табели 1.1. Бесконачна права ће бити фиксна при поменутом пресликавању ако и само ако је $\mathbf{l}_\infty = H^{-T}\mathbf{l}_\infty$ тј. ако и само ако је $H^T\mathbf{l}_\infty = \mathbf{l}_\infty$, тј. $h_{31} = 0, h_{32} = 0$ и $h_{33} = 1$, што је еквивалентно са тим да је H матрица афиног пресликавања. \square

Афина трансформација бесконачну праву не фиксира тачка-по-тачка, већ пермутује тачке на њој (посебно две тачке $\mathbf{I} = (1, i, 0)^T$ и $\mathbf{J} = (1, -i, 0)^T$ помера из основног положаја), и између осталог то пермутовање узрокује поменути дисторзију. О томе ће бити више речи у наредним подсекцијама, а сада ћемо се позабавити пројективном дисторзијом и њеним уклањањем.

Слика 1.1.а пода пресликана пројективним (у овом случају перспективним) пресликавањем се види на слици 1.1.в. Плочице које су ближе посматрачу су крупније од оних које су више удаљене. Паралелне линије које је могуће уочити на текстури пода ће се на слици 1.1.в пресећи. Поменути дисторзију називамо *пројективном дисторзијом*, јер је настала применом пројективне трансформације. Она је последица тога што су тачке са бесконачне праве измештене и сада се виде као коначне тачке на слици 1.1.в. Како пројективна пресликавања чувају колинеарност тачака, слике бесконачних тачака ће припадати слици бесконачне праве. Сliku бесконачне праве ћемо другачије звати *правом ишчезавања равни*.

Први корак у уклањању пројективне дисторзије би био враћање слике бесконачне праве у њен канонски положај $(0, 0, 1)$. Рецимо да смо идентификовали слику бесконачне праве, и да она има координате $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$. Ако применимо пројективну трансформацију чија је матрица нпр.

$$H_p' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

на слику којом располажемо, бесконачна права ће бити враћена у канонски положај $(0, 0, 1)$, јер је, имајући у виду теорему 1.2.(i), $(0, 0, 1)^T = H_p'^{-T}\mathbf{l}$. Претходна једнакост је еквивалентна једнакости $H_p'^T(0, 0, 1)^T = \mathbf{l}$, чију тачност утврђујемо директним провером. Треба обратити пажњу да ће, ако права \mathbf{l} пролази кроз координатни почетак, матрица H_p' бити сингуларна, па она не дефинише пројективно пресликавање. У том случају можемо узети Хаусхолдерову матрицу, на начин како је објашњено у подсекцији 3.5.1.

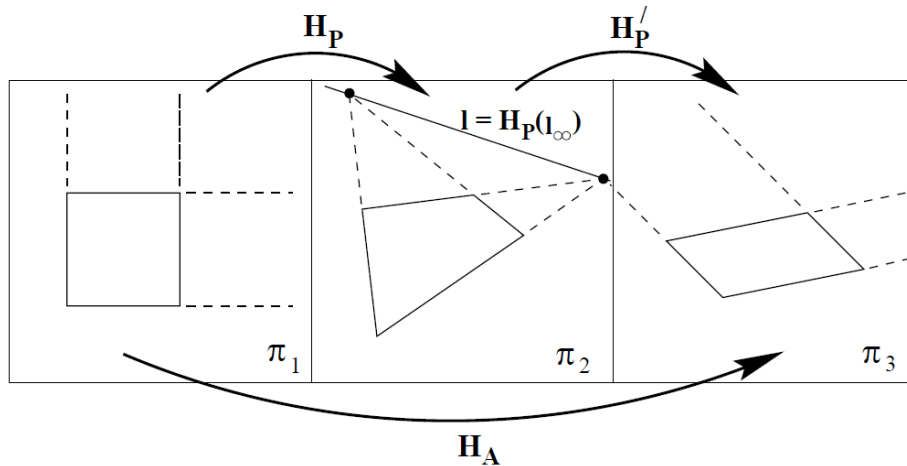
Када применимо трансформацију (1.4) обезбедили смо да се бесконачна права налази у канонском положају $(0, 0, 1)$. Сада знамо да се слика којом располажемо од стварне разликује за пројективну трансформацију која фиксира бесконачну праву, а то је афина трансформација (теорема 1.3), што је демонстрирано и на слици 1.2. Дакле, можемо да закључимо да, када уклонимо пројективну дисторзију на помунти начин остаје нам још афина дисторзија, које се треба на неки начин решити. Постоји начин да се направи и тај последњи корак, али пре него објаснимо како, поменимо неке методе за идентификовање слике бесконачне праве.

Одређивање праве ишчезавања равни

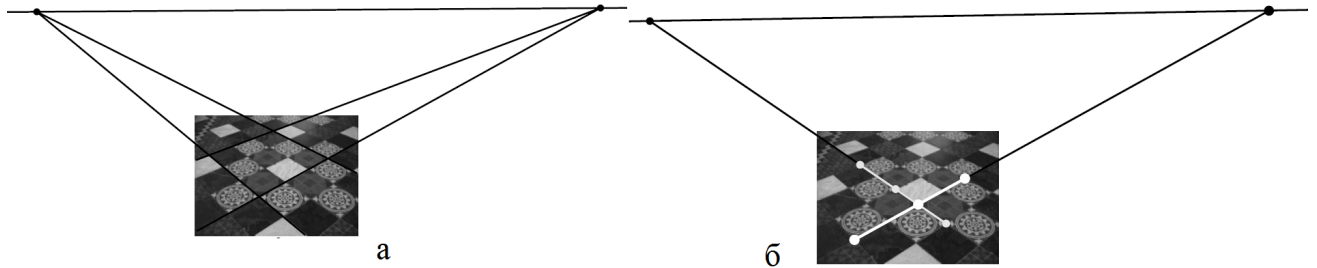
Да бисмо одредили слику бесконачне праве, довољно је да одредимо бар две разне тачке на њој. То можемо урадити на више начина:

Један начин је да у слици идентификујемо пар правих које су у оригиналу паралелне. Како се тај пар правих у стварности сече у једној тачки на бесконачно далекој правој, то ће се њихове слике сећи у слици те тачке са бесконачно далеке праве, као на слици 1.3.а.

Други начин (слика 1.3.б) је да у слици идентификујемо две дужи на правој чији однос дужина у оригиналу знамо. Нпр. нека су тачке A, B и C колинеарне тачке за које знамо однос $\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{a}{b}$, и нека су њихове слике у пројекцији A', B' и C' . Пројективно пресликавање равни индукује пројективно пресликавање праве (A, B, C) на праву (A', B', C') . Нама је циљ да одредимо то пресликавање. Директно у слици можемо измерити однос $\frac{d(A',B')}{d(B',C')}$ и нека је он једнак $\frac{a'}{b'}$. На правој (A, B, C) можемо узети пројективни координатни систем у ком тачке A, B и C имају редом хомогене координате $(0, 1)$, $(a, 1)$ и $(a + b, 1)$. Бесконачна тачка на тој правој ће тада имати координате $(1, 0)$. На правој (A', B', C') можемо слично узети координатни систем у ком тачке A', B' и C' имају редом координате $(0, 1)$, $(a', 1)$ и $(a' + b', 1)$. За



Слика 1.2: Уклањање пројективне дисторзије. Пројективно пресликавање у општем случају слика бесконачну праву l_∞ равни π_1 у неку коначну праву l равни π_2 . Ако конструишемо пресликавање које ће праву l да врати у канонски положај $(0, 0, 1)$, трансформација која повезује равни π_1 и π_3 је афина, на основу теореме 1.3.



Слика 1.3: Идентификовање слике бесконачне праве. Слика бесконачне праве је одређена налажењем две тачке ишчезавања. (а) Свака тачка ишчезавања је одређена у пресеку слика правих које су оригиналу паралелне. (б) Свака тачка ишчезавања је одређена на основу познавања оригиналног односа дужина дужи на уоченој правој.

наведене координате можемо да одредимо матрицу $H \in M_2(\mathbb{R})$ пројективног пресликавања праве која слика координате тачака $(A, B, C) \mapsto (A', B', C')$. Тада ће слика бесконачне тачке праве (A, B, C) имати координате $\mathbf{x}' = H(0, 1)^T$.

1.1.3 Циркуларне тачке. Коника дуална циркуларним тачкама.

Дефиниција 1.2. Тачке $I = (1, i, 0)$ и $J = (1, -i, 0)$ су конјуговано комплексне тачке бесконачне праве l_∞ . Зовемо их **циркуларним тачкама**.

Произвољан круг у равани са центром (c_x, c_y) и полупречником r задат је једначином $k : (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$, или у хомогеним координатама $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$ $k : (x_1 - c_x x_3)^2 + (x_2 - c_y x_3)^2 = r^2 x_3^2$. Директном заменом I и J у последњу једначину круга закључујемо да му поменути тачке припадају. Дакле, произвољан круг сече бесконачну праву у тачкама I и J . Зато их и зовемо циркуларним тачкама.

Теорема 1.4. Циркуларне тачке I и J су фиксне као скуп при пројективној трансформацији, ако и само ако је она трансформација сличности.

Доказ: \Rightarrow) Нека је H матрица пројективног пресликавања, као у табели 1.1. Решавањем матричне једначине $HI = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ по H закључујемо да је $h_{12} = -h_{21}$, $h_{11} = h_{22}$ и $h_{31} = h_{32} = 0$, а тиме $h_{33} \neq 0$ (иначе је H дегенерисано пресликавање). Када матрицу H помножимо са $\frac{1}{h_{33}}$, имамо да је њена горња лева 2×2 подматрица ортогонална матрица помножена скаларом $\frac{\sqrt{h_{11}^2 + h_{12}^2}}{h_{33}}$, а да је њена последња врста једнака $(0, 0, 1)$. Дакле, матрица H је матрица пресликавања које је сличност, на основу табеле 1.1. Треба напоменути само да је $HI = I \Leftrightarrow HJ = J$.

Слично се показује да, када је $HI = J$, H је матрица пресликавања које је сличност, али индиректна, тј. $\epsilon = -1$ (табела 1.1).

\Leftrightarrow Ако је H матрица неке сличности, директно се показује да важи $HI = I$ и $HJ = J$ када је поменута сличност директна, односно $HI = J$ и $HJ = I$ када је индиректна. \square

Дефиниција 1.3. Коника чија је матрица $C_\infty^* = IJ^T + JI^T$ је дегенерисана крива друге класе. Зваћемо је **коника дуална циркуларним тачкама**.

Крива друге класе је скуп правих. Апсолутна коника је крива друге класе коју чине све праве кроз I и кроз J . Одредимо њену матрицу,

$$C_\infty^* = IJ^T + JI^T = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad -i \quad 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad i \quad 0] = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Гледано над \mathbb{R} , $l = (x, y, z) \in C_\infty^* \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow l = (x, y, z) = (0, 0, 1) = l_\infty$, тј. од свих правих које припадају C_∞^* , само је l_∞ реална, а остале су комплексне.

Наредна теорема је директна последица претходне.

Теорема 1.5. Коника C_∞^* је фиксна при пројективном пресликавању ако и само ако је оно сличност.

Интересантно је приметити да се бесконачна права l_∞ налази и у левом и у десном језгру матрице C_∞^* . То је и за очекивати, јер бесконачна права припада и прамену тачке I и прамену тачке J .

Бесконачна коника игра битну улогу у рачунању углова који две праве заклапају, што ће бити детаљније објашњено у наредној подсекцији.

1.1.4 Пројекције углова

Угао између две праве можемо да одредимо преко скаларног производа њихових вектора нормала. Наиме, ако имамо две праве чије су координате $l = (l_1, l_2, l_3)$ и $m = (m_1, m_2, m_3)$, њихови вектори нормала ће редом бити (l_1, l_2) и (m_1, m_2) , а косинус једног од углова које те праве заклапају:

$$\cos \sphericalangle(l, m) = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)(m_1^2 + m_2^2)}}. \quad (1.5)$$

„Проблем“ са претходним изразом је што није пројективно (а ни афино) инваријантан. Тачније, ако поменуте праве пресликамо неком пројективном трансформацијом H , појавиће се пројективна дисторија и добићемо праве са координатама $l' = H^{-T}l$ и $m' = H^{-T}m$ које ће заклапати неки други угао, различит од оригиналног. Међутим, ако у пројекцији одредимо слику од C_∞^* (конике дуалне циркуларним тачкама) на основу координата двеју права у слици можемо да израчунамо угао који заклапају одговарајући оригинали по формули:

$$\cos \sphericalangle(l, m) = \frac{l'^T C_\infty^* m'}{\sqrt{(l'^T C_\infty^* l')(m'^T C_\infty^* m')}}. \quad (1.6)$$

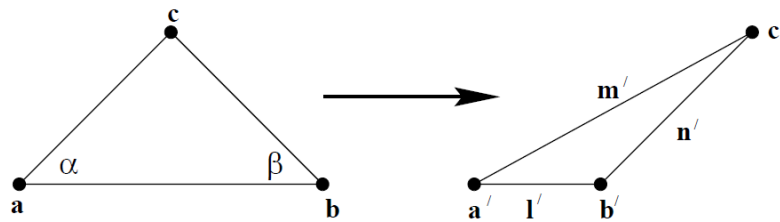
Имајући у виду да је C_∞^* крива друге класе, она се (по теорему 1.2) при пројективном пресликавању слика у криву чија је матрица $C_\infty^{*'} = HC_\infty^* H^T$. Како коника дуална циркуларним тачкама у канонском положају за матрицу има $C_\infty^* = \text{diag}(1, 1, 0)$ имамо,

$$\begin{aligned} \frac{l'^T C_\infty^* m'}{\sqrt{(l'^T C_\infty^* l')(m'^T C_\infty^* m')}} &= \frac{(H^{-T}l)^T HC_\infty^* H^T H^{-T}m}{\sqrt{((H^{-T}l)^T HC_\infty^* H^T H^{-T}l)((H^{-T}m)^T HC_\infty^* H^T H^{-T}m)}} = \\ &= \frac{l^T C_\infty^* m}{\sqrt{(l^T C_\infty^* l)(m^T C_\infty^* m)}} = \\ &= \cos \sphericalangle(l, m). \end{aligned}$$

Сумирајмо претходно доказано у наредној теорему:

Теорема 1.6. Када идентификујемо слику конике дуалне циркуларним тачкама у пројекцији, угао између две праве у оригиналу можемо да измеримо на основу њихових слика у пројекцији по формули (1.6). Такође, десни израз у једнакости (1.6) је пројективно инваријантан, тј. ако применимо неку пројективну трансформацију на променљиве које фигуришу, вредност израза се неће променити.

Пример 1.2. Односи дужина у оригиналу се могу рачунати на основу пројекције, ако је одређено C_{∞}^* . Узмимо троугао $a'b'c'$ који је пројективна слика троугла abc (слика 1.4). Користећи (1.6) и слике правих одређених теменима $l' = a' \times b'$, $m' = c' \times a'$ и $n' = b' \times c'$ можемо одредити $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, а применом синусне теореме и однос дужина страница троугла abc : $\frac{d(b,c)}{d(a,c)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. \triangle



Слика 1.4: **Одређивање односа дужина.** Ако у слици троугла abc одредимо слику конике дуалне циркуларним тачкама, можемо да одредимо односе оригиналних дужина страница троугла, како је објашњено у примеру 1.2.

Наредна теорема је директна последица теореме 1.6.

Теорема 1.7. Две праве чије су координате l и m су ортогоналне ако и само ако су њихове слике конјуговане у односу на слику конике дуалне циркуларним тачкама, тј. $l'^T C_{\infty}^* m' = 0$.

1.1.5 Уклањање афине дисторзије

Вратимо се сада на уклањање дисторзије у слици, односно исправљање слике. У подсекцији 1.1.2 је било речи о уклањању пројективне дисторзије идентификовањем слике бесконачне праве у слици. При њеном постављању у канонски положај долази до елиминације пројективне дисторзије, али и даље постоји афина дисторзија.

Аналогно се врши уклањање и афине дисторзије. Оно се заснива на идентификању слике циркуларних тачака (или слике конике дуалне циркуларним тачкама) и њиховим постављањем у канонски положај $(1, \pm i, 0)$ на бесконачно далекој правој. Када бисмо то применили на нашу пројекцију, она ће се од оригиналне ситуације разликовати за пројективно пресликавање равни које фиксира циркуларне тачке. Како је у теорему 1.4 показано да је таква трансформација, трансформација сличности, пројекцију којом располажемо још само треба зумирати или пресликати неком изометријом да би била идентична оригиналној.

Како ће тада коника дуална циркуларним тачкама бити у свом канонском положају, углове између правих и односе дужина можемо да меримо директно у пројекцији којом располажемо.

Главни корак у уклањању афине дисторзије (или пројективне и афине заједно) представља идентификовање C_{∞}^* . Како је C_{∞}^* директно повезана са угловима између правих, то можемо искористити за њено налажење. Претпоставимо да у слици можемо да идентификујемо две праве са координатама l' и m' које су у оригиналу ортогоналне. Тада ће, на основу теореме 1.7, оне постављати линеаран услов $l'^T C_{\infty}^* m' = 0$ одређености C_{∞}^* . Како је коника у равни представљена симетричном матрицом формата 3×3 , она има 5 независних параметара (укупно шест, али минус један због хомогене репрезентације), па је потребно поставити бар 5 линеарно независних услова да бисмо је одредили.

Треба напоменути да услов одређености C_{∞}^* можемо поставити и ако у слици идентификујемо две праве за које знамо који угао у оригиналу заклапају користећи теорему 1.6. Тај угао не мора бити прав, и тада једначина која поставља поменути услов не мора бити линеарна, већ квадратна. Зато такав метод треба избегавати због значајног компликовања у рачуну при решавању одговарајућег система једначина.

Након налажења матрице конике дуалне циркуларним тачкама треба наћи пројективно пресликавање које ће је поставити у канонски положај и тиме „исправити слику“. Имајући у виду теорему 1.2 матрица

тог пресликавања ће бити матрица H_p која задовољава

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H_p C_\infty^{*'} H_p^T.$$

Матрицу H_p можемо одредити применом SVD алгоритма на матрицу $C_\infty^{*'}$, где бисмо је изразили као $U \text{diag}(1, 1, 0) U^T$ где је матрица U ортогонална. Тада ће H_p бити једнако U^T .

Овај поступак се може применити на пројекцију са афином као и на пројекцију са пројективном дисторзијом. Њиме циркуларне тачке постављамо у канонски положај $(1, \pm i, 0)$, а тиме и саму бесконачну праву (у случају постојања пројективне дисторзије када је она измештена из канонског положаја $(0, 0, 1)$). Ефекат који се постиже је уклањање сваке дисторзије, наравно до на трансформацију сличности.

1.2 Пројективна пресликавања простора

Слично као и пројективно пресликавање равни, дефинишемо **пројективно пресликавање простора** као инверзибилно пресликавање $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ које чува колинеарност тачака. Аналогно ситуацији у равни, показује се да, ако уведемо координатни систем пројективног простора \mathbb{P}^3 , постоји несингуларна матрица

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

таква да је

$$\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$$

где су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ и $\mathbf{X}' = (X'_1, X'_2, X'_3, X'_4)^T$ хомогене координате оригинала и слике произвољне тачке при поменутом пројективном пресликавању.

Можемо да приметимо да је матрица пројективног пресликавања одређена са 15 независних параметара (укупно их има 16, али рачунамо минус један због хомогене репрезентације).

Теорема 1.8. При пројективном пресликавању тачака $\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$ раван са координатама $\boldsymbol{\pi}$ се слика у раван са координатама $H^{-T}\boldsymbol{\pi}$.

Доказ: Произвољна тачка са координатама \mathbf{X} припада равни са координатама $\boldsymbol{\pi}$ ако и само ако је задовољено $\mathbf{X}^T\boldsymbol{\pi} = 0$. Како је важи $\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$, имамо $(H^{-1}\mathbf{X}')^T\boldsymbol{\pi} = 0$, тј. $\mathbf{X}'H^{-T}\boldsymbol{\pi} = 0$, па можемо да закључимо да ће одговарајућа тачка пресликана трансформацијом H припадати равни са координатама $H^{-T}\boldsymbol{\pi}$. \square

1.2.1 Класификација пресликавања простора. Пројективна дисторзија и њено елиминисање.

У табели 1.2 је наведена кратка класификација подгрупа групе $\mathbb{P}\mathbb{L}(4)$, пројективних трансформација простора \mathbb{P}^3 , аналогна класификацији из табеле 1.1.

При пројективном пресликавању долази до пројективне дисторзије простора. Ако бисмо желели да је елиминисамо, и да „исправимо“ простор, то можемо да урадимо слично као у случају пројективне дисторзије равни (погледати 1.1.2).



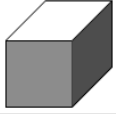
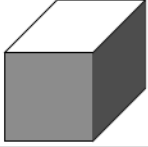
У табели 1.2 се види да ће се праве одређене паралелним ивицама коцке пресећи у тачки ишчезавања одговарајућег правца, ако има пројективне дисторзије. То је последица тога што је бесконачна раван (на којој се секу паралелне праве) измештена из канонског положаја у ком има координате $(0, 0, 0, 1)$. Да бисмо постигли да праве паралелне у оригиналу буду паралелне и у слици, треба идентификовати слику бесконачне равни, и вратити је у канонски положај. Тада ће се слика простора од оригинала разликовати за пројективно пресликавање простора које фиксира бесконачну раван, а то је афино пресликавање (доказ је аналоган оном у случају равни теореме 1.3). Дакле, можемо да закључимо да, када уклонимо пројективну дисторзију на поменути начин остаје нам још афина дисторзија, које се треба на неки начин решити.

У случају афине дисторзије равни било је потребно идентификовати слике циркуларних тачака на бесконачној правој а овде је, аналогно томе, потребно идентификовати слику тзв. апсолутне конике на бесконачној равни да би елиминисали и афину дисторзију, што ће бити појашњено у наредном тексту.

1.2.2 Апсолутна коника

Дефиниција 1.4. Апсолутна коника, Ω_∞ је крива другог реда на бесконачној равни чије тачке (X_1, X_2, X_3, X_4) задовољавају:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, X_4 = 0.$$

Група пресликавања	Матрица	Дисторзија коцке	Инваријанте
Пројективна пресликавања 15 степени слободe	$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix}$		конкурентност, колинеарност, дворазмера, површи и криве другог реда (све су једнако третиране), знак Гаусове кривине површи
Афина пресликавања 12 степени слободe	$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & v \end{bmatrix}$		паралелност, размера на правој, бесконачно далека раван, површи и криве другог реда (сваку понаособ), односи запремина
Сличности 7 степени слободe	$\begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & v \end{bmatrix}$		размера, углови, апсолутна коника $\Omega_\infty : X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, X_4 = 0$
Изометрије 6 степени слободe	$\begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & v \end{bmatrix}$		дужина, површина, запремина

Табела 1.2: Геометријска својства група пресликавања простора. Под степенима слободe подразумевамо број независних параметара матрице. Матрица A је несингуларна матрица формата 3×3 , R је матрица ротације простора, $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$ је вектор транслације, s је коефицијент скалирања, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}$. Под дисторзијом квадрата подразумевамо ефекат који одговарајућа група пресликавања оставља на његов облик. Конкретна трансформација у табели може да направи дисторзију напомену у одговарајућој врсти, али и све остале дисторзије ниже од ње у табели. Конкретна трансформација у табели за инваријанте има оне напоменуте у одговарајућој врсти, али и све остале инваријанте изнад ње у табели.

Јасно је да је то коника чије су тачке имагинарне. Ако посматрамо само тачке са бесконачне равни $\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T$, у природно индукованом координатном систему на њој, једначина ове конике је

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Дакле, ако је посматрамо као конику у бесконачној равни, њена матрица је $I = \text{diag}(1, 1, 1)$, и тачке које јој припадају су чисто имагинарне. У наредној теорему дајемо јако битно својство ове необичне криве другог реда.

Теорема 1.9. Пројективно пресликавање простора фиксира апсолутну конику Ω_∞ ако и само ако је оно сличност.

Доказ: \Rightarrow) Нека пресликавање чија је матрица H фиксира апсолутну конику. Како се апсолутна коника налази на бесконачној равни, поменута трансформација мора фиксирати и бесконачну раван. Зато је она афина, тј. њена матрица је облика

$$H = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Како матрица H тачке са бесконачне равни оставља на бесконачној равни, четврта координата оригинала и слика је једнака нули, и једина промена је на прве три координате. Закључујемо да је рестрикција поменутог просторног пресликавања на бесконачну раван, пројективно пресликавање равни чија је матрица једнака подматрици A , матрице H . Како је матрица апсолутне конике на бесконачној равни матрица I , и она је фиксна при пројективном пресликавању равни чија је матрица једнака A , на основу теореме 1.2.(i) имамо $A^{-T}IA^{-1} = I$, тј. $AA^T = I$. Имајући у виду хомогене репрезентације закључујемо да је $A = sR$, где је R ортогонална матрица, а s неки коефицијент скалирања. Зато је H матрица неке сличности.

⇐) Нека је H матрица неке сличности. Директном провером, како је наведено у обрнутом смеру се показује да поменуто пресликавање оставља фиксном апсолутну конику, на бесконачној равни. \square

Особине апсолутне конике:

- (i) Апсолутна коника је фиксна као скуп при пресликавању сличности. То значи да њене тачке не морају да буду фиксне, већ да се свака од њих у општем случају слика у неку другу на апсолутној коници.
- (ii) Сваки круг у простору сече апсолутну конику Ω_∞ у две тачке. Наиме, нека раван из простора са координатама π садржи поменути круг. Раван π сече бесконачну раван по некој правој, а та права сече Ω_∞ у две тачке које су циркуларне тачке равни π . Те циркуларне тачке ће дакле припадати и поменутом кругу и апсолутној коници Ω_∞ . Поменуте законитости се лако проверавају.
- (iii) Свака сфера сече бесконачну раван по апсолутној коници. Ова законитост се још лакше показује од претходних, а потпуно им је еквивалентна.

1.2.3 Пројекције угла. Елиминисање афине дисторзије.

Узмимо две праве које секу бесконачну раван у тачкама чије су координате $(\mathbf{d}_1^T, 0)$ и $(\mathbf{d}_2^T, 0)$. Њихови вектори правца су тада \mathbf{d}_1 и $\mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^3$, а косинус угла који оне заклапају

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2)}}. \quad (1.7)$$

Претходну једнакост можемо записати и као:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2)}}. \quad (1.8)$$

када се Ω_∞ налази у канонском положају, на бесконачној равни.

Претпоставимо да је простор трансформисан неким афиним пресликавањем. Тада ће слике поменутих правих сећи бесконачну раван у неким тачкама $(\mathbf{d}'_1{}^T, 0)$ и $(\mathbf{d}'_2{}^T, 0)$, а апсолутка коника ће имати за матрицу неку другу, Ω'_∞ . Интересантно је да на основу координата у слици можемо да израчунамо оригиналне углове и односе дужина користећи формулу (1.8) ако на бесконачној равни идентификујемо слику апсолутне конике, тј. њену матрицу Ω'_∞ (посматрану као конику у равни). То је последица тога што је израз (1.8) афино инваријантан. Наиме, имајући у виду доказ теореме 1.9 у ком се наводи како матрица афиног пресликавања простора делује на тачке бесконачне равни, и теорему 1.2.(i), имамо

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}'_1{}^T \Omega'_\infty \mathbf{d}'_2}{\sqrt{(\mathbf{d}'_1{}^T \Omega'_\infty \mathbf{d}'_1)(\mathbf{d}'_2{}^T \Omega'_\infty \mathbf{d}'_2)}} &= \frac{(\mathbf{A}\mathbf{d}_1)^T \mathbf{A}^{-T} \Omega_\infty \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{d}_2}{\sqrt{((\mathbf{A}\mathbf{d}_1)^T \mathbf{A}^{-T} \Omega_\infty \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{d}_1)((\mathbf{A}\mathbf{d}_2)^T \mathbf{A}^{-T} \Omega_\infty \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{d}_2)}} = \\ &= \frac{\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2)}} = \\ &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Када у слици простора имамо афину дисторзију, да бисмо је елимисали требало би да идентификујемо слику апсолутне конике, и да је потом поставимо у канонски положај на бесконачној равни у ком за матрицу има $\text{diag}(1, 1, 1)$. Када то урадимо, слика простора којом располажемо ће се од оригинала разликовати за пројективну трансформацију простора која фиксира апсолутну конику. У теорему 1.9 је показано да је то трансформација сличности. Дакле, да бисмо дошли до оригиналне ситуације, простор треба само увећати или смањити и евентуално пресликати неком изометријом.

Глава 2

Модели камере

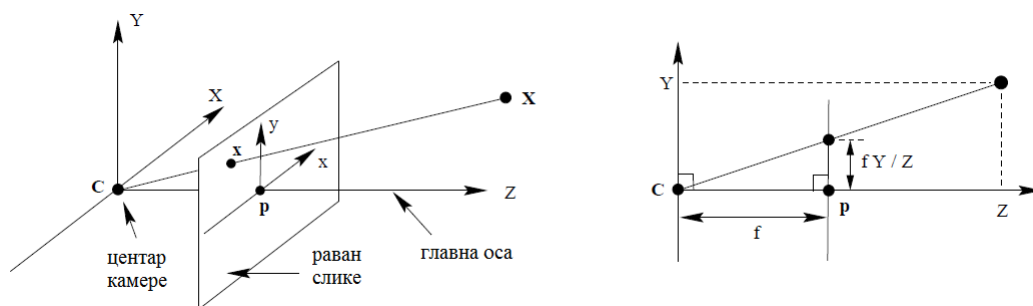
Камера представља пресликавање тродимензионог простора на дводимензиону раван. Најелементарнији пример камере јесте централно пројектовање простора на раван, а остали модели камера су само блага модификација ове. У овој глави ћемо навести њихове репрезентације и најинтересантија својства.

2.1 Пројективне камере са коначним центром пројекције

Централно пројектовање простора на раван

Посматрамо пројектовање тачака из простора на раван. Нека се центар пројектовања C налази у координатном почетку, и нека је раван пројектовања, раван $z = f$, као на слици 2.1. Тачка из простора са Декартовим координатама $X = (X, Y, Z)$ се слика у тачку пресека равни слике са правом која спаја центар пројектовања C и тачку X .

Праву кроз центар камере ортогоналну на раван слике ћемо звати *главни зрак*, а њен пресек са равни слике *главна тачка* камере. Раван која садржи центар пројектовања и паралелна је равни слике ћемо називати *главном равни* камере. Удаљеност равни слике од центра камере (f) ће бити *жизжна даљина* камере.



Слика 2.1: Централна пројекција. C је центар камере, а p је главна тачка. Центар камере се налази у координатном почетку. Слика тачке X је тачка x у равни слике. У равни слике се виде само тачке које су испред камере, наиме важи распоред тачака $C - x - X$ на зраку пројектовања.

На основу сличности троуглова (слика 2.1) можемо да закључимо да се тачка $X = (X, Y, Z)$ пројектује у тачку $(f \frac{X}{Z}, f \frac{Y}{Z}, f)$ у равни слике. Ако претпоставимо да је главна тачка камере координатни почетак у равни слике, а координатне осе x и y паралелне координатним осама X и Y , одговарајуће пресликавање које слика тродимензиони простор у дводимензиони је дато са:

$$(X, Y, Z) \mapsto (f \frac{X}{Z}, f \frac{Y}{Z}).$$

Како се главна тачка камере не мора налазити у координатном почетку равни слике (слика 2.2.а), претпо-

ставимо да она има координате $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$. Тада је пресликавање камере:

$$(X, Y, Z) \mapsto \left(f \frac{X}{Z} + p_x, f \frac{Y}{Z} + p_y\right).$$

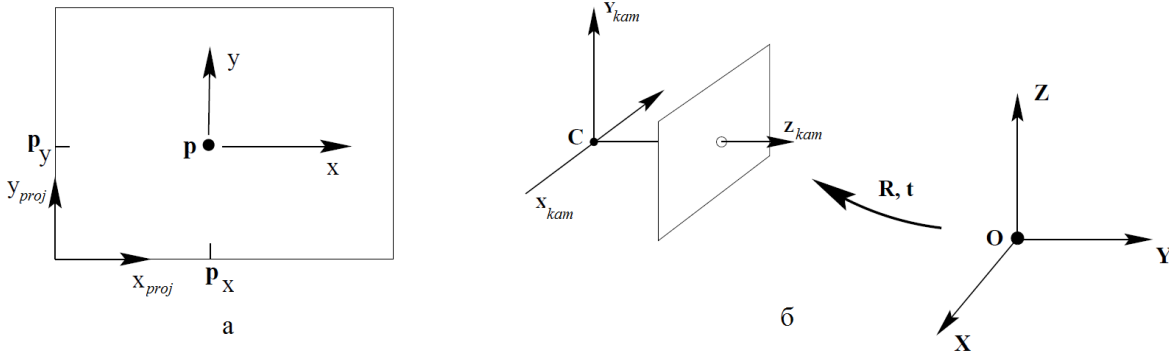
Ако тачке представимо у хомогеним координатама пројективне геометрије, претходно поменуто пресликавање камере има једноставан матрични запис:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & p_x & 0 \\ f & p_y & 0 \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

тј.

$$\mathbf{x} = K[I | \mathbf{0}] \mathbf{X}_{kam}, \text{ где је } K = \begin{bmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Матрицу K зовемо *калибрациона матрица камере*. У претходној формули \mathbf{x} јесу хомогене координате слике тачке \mathbf{X}_{kam} . Тачку у простору $(X, Y, Z, 1)$ смо именовали \mathbf{X}_{kam} да би нагласили да су то координате изражене у координатном систему чији се координатни почетак поклапа са центром пројектовања, а z -оса са главном осом камере. Тај координатни систем зато можемо назвати *координатним системом камере*.



Слика 2.2: (а) Веза координатних система у слици, када главна тачка јесте и није координатни почетак. (б) Веза произвољног координатног система и координатног система камере.

Координате тачака у простору ће нам често бити дате у неком координатном систему који није исти као координатни систем камере (слика 2.2.б). Наведена два координатна система су повезана изометријом простора.

Нека је $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^3$ нехомогена репрезентација координата просторне тачке (тј. Декартове координате) у произвољном координатном систему, и слично, нека $\tilde{\mathbf{X}}_{kam}$ представља исту тачку само у координатном систему камере. Како су ова два координатна система повезана translацијом (за вектор $\tilde{\mathbf{C}}$ - координате центра камере у „општем“ координатном систему) и ротацијом простора (чија је матрица R) важи $\tilde{\mathbf{X}}_{kam} = R(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})$. То можемо записати и у хомогеним координатама:

$$\mathbf{X}_{kam} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X},$$

што са формулом (2.1) даје

$$\mathbf{x} = KR[I | -\tilde{\mathbf{C}}]\mathbf{X} \quad (2.2)$$

где су \mathbf{X} координате у „општем“ координатном систему.

Како матрица $P = KR[I \mid -\tilde{C}]$ потпуно одређује пресликавање камере, често ћемо је поистоветити са самом камером. Параметре матрице K ћемо називати *унутрашњим параметрима* камере с обзиром да се они тичу природе саме камере. Насупрот њима параметре матрице R и вектора \tilde{C} називаћемо *спољашњим параметрима* камере с обзиром да се тичу позиције камере у неком координатном систему простора.

Наведена матрица камере има 9 независних параметара, или степени слободе: 3 за $K(f, p_x, p_y)$, 3 за R (углови ротације око координатних оса) и 3 за \tilde{C} .

ССD камере

Претходно разматрана камера је подразумевала да је слика у пројекцији подједнако скалирана у правцима оса. Међутим, код ССD камера (Charge-coupled device) то не мора бити случај. Ако камера скалира пројекцију у правцу x -осе за фактор m_x , а у правцу y -осе за фактор m_y , њена матрица је као у формули (2.1) само помножена матрицом $\text{diag}(m_x, m_y, 1)$ слева.

Њена калибрациона матрица је тада:

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

где је $\alpha_x = fm_x$, $\alpha_y = fm_y$, $x_0 = m_x p_x$ и $y_0 = m_y p_y$.

Како овде имамо један више параметар него раније, можемо да закључимо да матрица ССD камера има 10 степени слободе.

Коначна пројективна камера

Како је матрица пројективне камере формата 3×4 она има 11 независних параметара (12 очигледних и минус 1 због хомогене репрезентације) или степени слободе. Можемо да разматрамо калибрациону матрицу

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

где је параметар s , параметар „искошености“ или „смицања“. Он је код већине камера једнак нула, али код неких то не мора бити случај. Ако је неки објекат првобитно усликан камером P , а потом његова слика неком другом камером \hat{P} , композиција те две камере ће такође бити пројективна камера, а у њеној матрици калибрације K , параметар s скоро сигурно неће бити једнак нула. Зато треба размотрити и такве камере чија је матрица

$$P = KR[I \mid -\tilde{C}], \quad (2.4)$$

где је K облика (2.3). Све камере чије су матрице овог облика ћемо звати **коначне пројективне камере**.

Коначне пројективне камере имају укупно 11 независних параметара, што је и максималан број за камере које се представљају матрицама формата 3×4 .

Теорема 2.1. Матрица P формата 3×4 је матрица коначне пројективне камере ако и само ако је лева 3×3 подматрица матрице P регуларна.

Доказ: \Rightarrow) Нека је $P = KR[I \mid -\tilde{C}]$ где је R матрица ротације (и $\det R = 1$), а матрица K је облика као у формули (2.3) ($\det K = \alpha_x \alpha_y \neq 0$). Детерминанта леве 3×3 подматрице матрице P је $\det KR = \det K \det R \neq 0$, па је она регуларна.

\Leftarrow) Нека је $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ где је M регуларна матрица. Матрица M се тада може декомпоновати као $M = KR$ где је K горње-троугаона матрица формата 3×3 , а R одговарајућа ортогонална матрица (нпр. применом Грам-Шмитовог поступка ортогонализације на врсте матрице M). Зато је $P = M[I \mid M^{-1}\mathbf{p}_4] = KR[I \mid M^{-1}\mathbf{p}_4]$. Како је матрица камере, P облика као у формули (2.4), центар камере има координате $\tilde{C} = -M^{-1}\mathbf{p}_4$ и тврђење је доказано. \square

У претходном доказу смо за дату матрицу $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ коначне пројективне камере одредили формулу за налажење њеног центра. Наиме, $\tilde{C} = -M^{-1}\mathbf{p}_4$. У наредној секцији ћемо навести шта је све могуће одредити од ентитета везаних за камеру, само на основу њене матрице.

2.2 Анатомија матрице камере

Центар камере

Теорема 2.2. Центар камере, чија је матрица P , у хомогеним координатама је ненула вектор C којим је генерисано десно језгро матрице P .

Доказ: Како је матрица P формата 3×4 и ранга 3 њено десно језгро је једнодимензиони векторски потпростор од \mathbb{R}^4 , па поменути ненула вектор C у њеном десном језгру постоји.

Посматрајмо праву кроз тачку C и неку у простору, различиту од ње, A . Све тачке на овој правој су облика $X(\lambda) = \lambda A + (1 - \lambda)C$. При пресликавању камере $x = PX$ све ове тачке се сликају у:

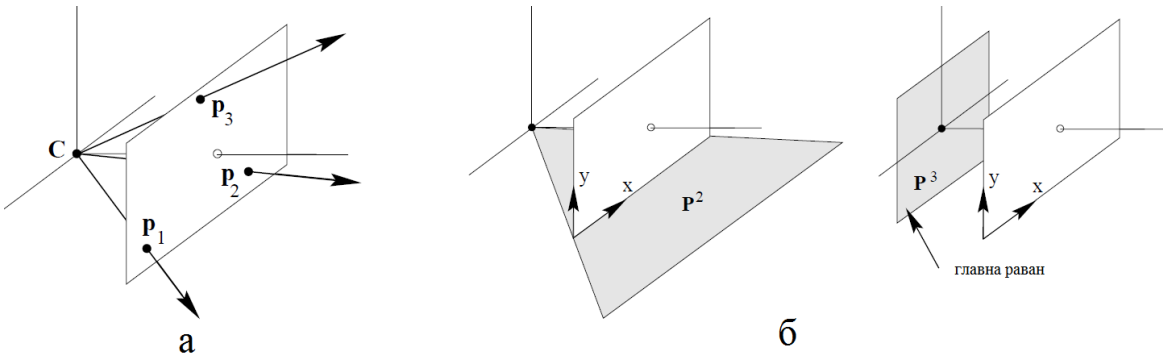
$$x = PX = \lambda PA + (1 - \lambda)PC = \lambda PA$$

с обзиром да је $PC = 0$. То значи да се све тачке ове праве сликају у једну исту, PA , што је једино могуће ако ова права садржи центар камере. Како је тачка A била произвољна, то центар камере мора бити баш C . \square

Ово је било за очекивати, с обзиром да слика самог центра камере, при камера пресликавању не би ни требало да буде дефинисана, наиме $PC = (0, 0, 0)^T$.

Већ смо видели да је за камеру $P = [M \mid p_4]$, $\det M \neq 0$ центар $C = \begin{bmatrix} -M^{-1}p_4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ако је $\det M = 0$ десно језгро матрице M је нетривијално. Рецимо да је генерисано ненула вектором $d \in \mathbb{R}^3$. Тада је центар камере $C = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ с обзиром да је тада $PC = 0$. Центар овакве камере се налази у бесконачности. Такве камере су тзв. афине камере.

Колоне матрице камере Колоне матрице $P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]$ камере су вектори у \mathbb{R}^3 који представљају хомогене координате специфичних тачака у равни пројекције. Наиме, p_1 , p_2 и p_3 представљају слике бесконачно далеких тачака оса Ox , Oy и Oz редом (слика 2.3.а), док је p_4 слика координатног почетка. Како су $X = (1, 0, 0, 0)^T$ координате бесконачно далеке тачке са x -осе то је $PX = p_1$. Слично се показује за остале тачке.



Слика 2.3: (а) Три тачке у слици чије су координате колоне p_1 , p_2 и p_3 матрице P јесу тачке ишчезавања оса координатног система простора. (б) Две, равни дефинисане врстама p_2^T и p_3^T матрице P .

Врсте матрице камере Врсте матрице P су вектори из \mathbb{R}^4 :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{1T} \\ p^{2T} \\ p^{3T} \end{bmatrix}.$$

Како је главна раван паралелна равни слике и садржи центар камере, то се све тачке са ње сликају у бесконачно далеку праву у слици. Дакле, ГЛАВНА РАВАН = $\{\mathbf{X} \mid P\mathbf{X} = [x \ y \ 0]^T, x, y \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} = 0\}$, тј. хомогене координате главне равни су једнаке последњој врсти матрице камере, \mathbf{p}^{3T} (слика 2.3.б).

Врста \mathbf{p}^{1T} матрице P је вектор који представља хомогене координате равни кроз центар камере и y -осу у слици. То је јасно на основу једнакости $\{\mathbf{X} \mid \mathbf{p}^{1T}\mathbf{X} = 0\} = \{\mathbf{X} \mid P\mathbf{X} = [0 \ y \ w]^T, y, w \in \mathbb{R}\}$, што је једнако скупу тачака чије се слике налазе на правој $x = 0$ у слици, тј. на y -оси.

Слично се показује да врста \mathbf{p}^{2T} представља хомогене координате равни кроз центар камере и x -осу у слици (слика 2.3.б).

Главна тачка Главна оса је права кроз центар камере \mathbf{C} , нормална на раван слике. Главна тачка се налази у пресеку главне осе и равни слике, па је самим тим једнака слици главне осе при пресликавању камере. Да би одредили главну тачку, довољно је да одредимо једну тачку са главну осе, различиту од центра камере, и да је пресликамо камером.

Како је главна оса ортогонална на раван слике, она је ортогонална и на главну раван чије су координате једнаке последњој врсти матрице камере P , $\mathbf{p}^3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34})$. Вектор нормале на главну раван је вектор (p_{31}, p_{32}, p_{33}) , а како главна оса има тај исти правац, њена бесконачно далека тачка ће имати координате $\hat{\mathbf{p}}^3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33}, 0)$. Дакле, главна тачка ће у слици имати координате $P\hat{\mathbf{p}}^3$. Имајући у виду да на тачке са бесконачне равни при пресликавању камере $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ делује само лева 3×3 подматрица M , главна тачка ће имати координате $\mathbf{p}_0 = M\mathbf{m}^{3T}$, где је \mathbf{m}^{3T} последња врста матрице M .

Вектор главне осе Иако свака тачка \mathbf{X} која није на главној равни би требало да се види у слици на позицији одређеној координатама $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$, то је случај само са оном „половином“ тачака које се налазе испред камере. Да бисмо знали која је то половина, требало би да одредимо вектор који показује у позитивном смеру главне осе, тј. ка предњој страни камере. Као што смо видели у претходном параграфу, тај вектор има правац као вектор $\mathbf{m}^3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33})$, а да ли је истог смера као он, то је питање.

Теорема 2.3. Вектор који показује у позитивном смеру главне осе, тј. ка предњој страни камере $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ је вектор $\mathbf{v} = \det M \cdot \mathbf{m}^{3T}$ где је \mathbf{m}^{3T} последња врста матрице M .

Доказ: Посматрајмо камеру у њеном координатном систему. Тачке се сликају са $\mathbf{x} = P_{kam}\mathbf{X}_{kam} = K[I \mid \mathbf{0}]\mathbf{X}_{kam}$, где су \mathbf{X}_{kam} координате тачке у простору, изражене у координатном систему камере. Како се ова камера налази у позицији као код *централног пројектовања на раван* са самог почетка ове главе, јасно је да је тражени вектор онај који показује у позитивном смеру z -осе, тј. $(0, 0, 1)$. Можемо да приметимо да то задовољава и вектор $\mathbf{v} = \det M \cdot \mathbf{m}^3$ с обзиром да је матрица K (а тиме и M у овом случају) горњетроугаона и на дијагонали има позитивне бројеве. Вектор \mathbf{v} ће и даље показивати у истом смеру и ако матрицу P помножимо неким скаларом $k \neq 0$, јер одговарајући вектор \mathbf{v} постаје $k^4\mathbf{v}$.

Посматрајмо сада ситуацију где је камера измештена из свој координатног система неком ротацијом и транслацијом, тј. $P = kK[R \mid -R\mathbf{C}] = [M \mid \mathbf{p}_4]$, где је $M = kKR$. Како је камера заротирана заједно са главном осом и $\det R = 1$ вектор $\mathbf{v} = \det M \cdot \mathbf{m}^3$ ће и даље показивати у позитивном смеру главне осе. Поред тога, његов смер се не мења ако матрицу P помножимо неким скаларом k . \square

2.3 Дејство пројективне камере на тачке и праве

2.3.1 На тачке

Камера чија је матрица пројектовања $P = [M | \mathbf{p}_4]$ тачку у простору са координатама \mathbf{X} пресликава у тачку која има координате $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$ у равни пројекције. Интересантно је за тачку \mathbf{x} у равни пројекције, одредити све тачке у простору које се у њу пројектују. Одговарајући скуп тачака ће бити права која пролази кроз центар камере и тачку \mathbf{x} у равни пројекције. Ако су координате центра познате ($P\mathbf{C} = \mathbf{0}$), треба одредити координате још једне тачке у простору са те праве. То ће бити тачка $P^+\mathbf{x}$ у простору, где је $P^+ = P^T(PP^T)^{-1}$ - псеудо-инверз матрице P , с обзиром да је задовољено да је њена слика баш $PP^+\mathbf{x} = P^T(PP^T)^{-1}P\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Дакле, све тачке у простору које се камером $P = [M | \mathbf{p}_4]$ пројектују у тачку \mathbf{x} су одређене са:

$$\mathbf{X}(\lambda) = P^+\mathbf{x} + \lambda\mathbf{C}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Дубина тачака Значајно је за тачку коју смо усликали камером знати колико се дубоко у сцени она налази. Под *дубином тачке* ћемо подразумевати њену удаљеност од главне равни камере. Наредна теорема даје формулу за рачунање дубине тачке:

Теорема 2.4. Нека је $\mathbf{X} = (X, Y, Z, T)^T$ тачка у простору, и $P = [M | \mathbf{p}_4]$ матрица камере са коначним центром $\mathbf{C} = (\tilde{\mathbf{C}}^T, 1)^T$. Ако је $P(X, Y, Z, T)^T = w(x, y, 1)^T$ и \mathbf{m}^{3T} последња врста матрице M , тада је

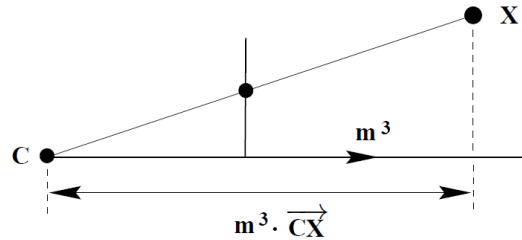
$$dubina(\mathbf{X}, P) = \frac{sgn(\det M)w}{T\|\mathbf{m}^3\|}$$

дубина тачке \mathbf{X} у сцени усликаној камером P .

Доказ: Како је $\mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} = w$ и $\mathbf{p}^{3T}\mathbf{C} = 0$, то је $\frac{w}{T} = \frac{1}{T}\mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} - \mathbf{p}^{3T}\mathbf{C} = \mathbf{p}^{3T}(\frac{1}{T}\mathbf{X} - \mathbf{C}) = \mathbf{m}^{3T}(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})$, где су $\tilde{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ одговарајуће Декартове координате тачака \mathbf{X} и \mathbf{C} . То значи да $\frac{w}{T}$ има вредност скаларног производа вектора \mathbf{m}^{3T} који показује у правцу главне осе и вектора $\overrightarrow{\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}}}$, слободно речено. Ако би матрица M била нормализована, тако да је $\|\mathbf{m}^3\| = 1$ и $\det M > 0$ тада би $\frac{w}{T}$ имало баш вредност дужине пројекције вектора $\overrightarrow{\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}}}$ на правац главне осе у смеру у ком гледа камера, односно дубину тачке \mathbf{X} (слика 2.4). Поменути услов можемо да исфорсирамо тако што резултат помножимо са $\frac{sgn(\det M)}{\|\mathbf{m}^3\|}$, тј.

$$dubina(\mathbf{X}, P) = \frac{sgn(\det M)}{\|\mathbf{m}^3\|} \mathbf{m}^{3T}(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{sgn(\det M)w}{T\|\mathbf{m}^3\|}$$

с обзиром да средњи израз претходне једнакости има вредност скаларног производа јединичног вектора који показује ка позитивном смеру главне осе, и вектора $\overrightarrow{\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}}}$. \square



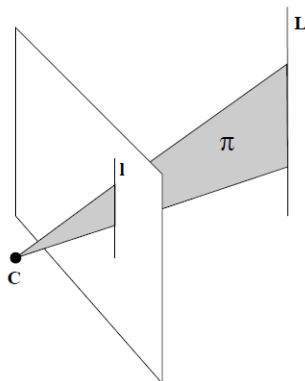
Слика 2.4: Ако је матрица камере $P = [M | \mathbf{p}_4]$ нормализована тако да је $\|\mathbf{m}^3\| = 1$ и $\det M > 0$ тада је скаларни производ $\mathbf{m}^{3T}(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})$ једнак дужини пројекције вектора $\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}}$ на правац главне осе у смеру у ком гледа камера.

2.3.2 На праве

Све тачке које се пројектују у праву \mathbf{l} у равни слике припадају равни π која је одређена том правом и центром камере, као на слици 2.5. Наредна теорема нам казује које су координате те равни.

Теорема 2.5. Скуп тачака у простору које се сликају у праву чије су координате у слици l матрицом камере P је раван која чије су координате у простору $P^T l$.

Доказ: Тачка x лежи на правој l у слици ако и само ако је $x^T l = 0$. Та тачка x је слика просторне тачке X камером P ако и само ако је $PX = x$. Дакле, за сваку просторну тачку X која се слика у неку тачку на правој l је задовољено $(PX)^T l = 0$ тј. $X^T P^T l = 0$. Како све те просторне тачке припадају некој равни π у простору задовољено је $X^T \pi = 0$. На основу последње две једнакости закључујемо да та раван има координате $\pi = P^T l$. \square



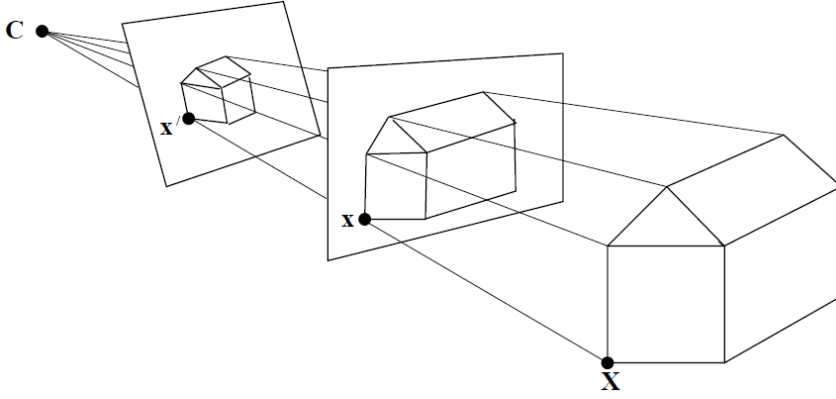
Слика 2.5: **Пројектовање правих.** Права у простору, са координатама L која не садржи центар камере се у слици види као права са координатама l . Права l се налази у пресеку равни слике и равни одређене правом L и центром камере C . Инверзна слика праве у слици са координатама l је раван са координатама $\pi = P^T l$.

2.4 Веза двеју пројекција при фиксираним центру пројекције

Претпоставимо да имамо две слике просторног објекта двома различитим камерама из исте позиције у простору, као на слици 2.6. Тада постоји перспективно пресликавање једне пројекције на другу, чију формулу можемо експлицитно да одредимо. Претпоставимо да су матрице двеју поменутих камера са истим центром

$$P = KR[I \mid -\tilde{C}] \text{ и } P' = K'R'[I \mid -\tilde{C}].$$

Како је $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}' = P'\mathbf{X}$, то је $\mathbf{x}' = K'R'[I \mid -\tilde{C}]\mathbf{X} = K'R'(KR)^{-1}KR[I \mid -\tilde{C}]\mathbf{X} = K'R'(KR)^{-1}\mathbf{x}$, па је матрица поменутог пресликавања $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$, $H = K'R'(KR)^{-1}$.



Слика 2.6: Конус зракова пројектовања са врхом у центру камере. Две пројекције просторног објекта добијене пресецањем конуса и конкретне равни пројекције. Координате одговарајућих тачака су повезане раванском хомографијом $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$.

У наредним подсекцијама ћемо анализирати шта се дешава када померамо раван пројектовања, док је центар пројектовања фиксиран. Без умањења општости, а ради лакшег рачуна узећемо да се центар камере поклапа са координатним почетком просторног координатног система.

2.4.1 Транслација равни слике

За почетак ћемо посматрати шта се дешава када повећавамо жижну даљину (f) камере. Како се тада раван слике приближава објекту који посматрамо, долази до повећања његове слике, односно зумирања.

Теорема 2.6. Увећање слике k пута се постиже тако што се матрица калибрације K камере помножи сдесна матрицом $\text{diag}(k, k, 1)$.

Доказ: Нека су $\tilde{\mathbf{x}}_0$ Декартове координате главне тачке, и $\tilde{\mathbf{x}}$ Декартове координате произвољне тачке у равни слике. Увећање слике k пута је исто што и увећање вектора $\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0$ k пута. Ако су $\tilde{\mathbf{x}}'$ Декартове координате исте тачке након увећања слике, тада је $\tilde{\mathbf{x}}' = k\tilde{\mathbf{x}} + (1-k)\tilde{\mathbf{x}}_0$. У хомогеним координатама $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}^T, 1)^T$ и $\mathbf{x}' = (\tilde{\mathbf{x}}'^T, 1)^T$ претходна једнакост гласи: $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} kI & (1-k)\tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

Како је $\mathbf{x} = K[I \mid \mathbf{0}]\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}' = K'[I \mid \mathbf{0}]\mathbf{X} = K'K^{-1}K[I \mid \mathbf{0}]\mathbf{X} = K'K^{-1}\mathbf{x}$, то је $\mathbf{x}' = K'K^{-1}\mathbf{x}$, тј. $K'K^{-1} = \begin{bmatrix} kI & (1-k)\tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$.

Ако узмемо да је $K = \begin{bmatrix} A & \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$, где је $A = \begin{bmatrix} \alpha_x & s \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix}$ на основу претходних једнакости имамо

$$K' = \begin{bmatrix} kI & (1-k)\tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} kI & (1-k)\tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Тврђење је доказано. \square

2.4.2 Ротација камере

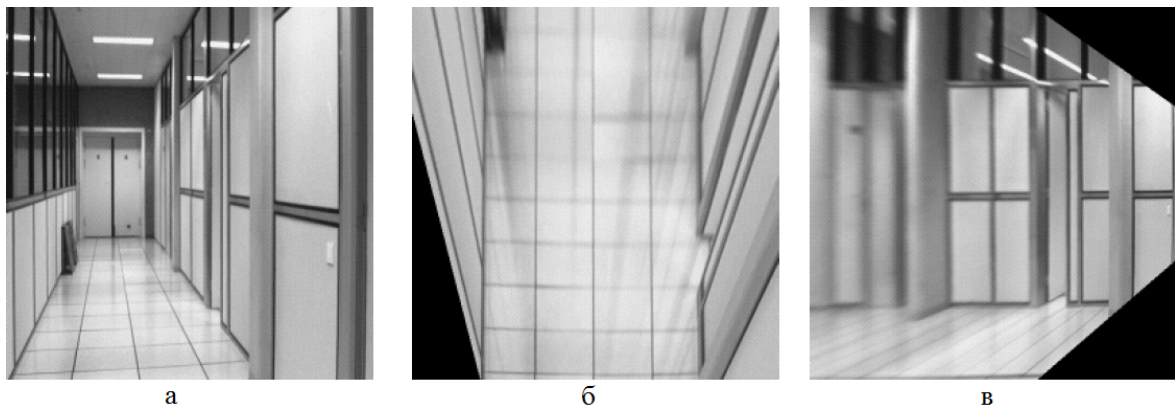
Камера се ротира, без промене позиције и унутрашњих параметара, као на слици 2.8. Нека су \mathbf{X} хомогене координате произвољне тачке из простора и нека њена слика пре ротације има координате $\mathbf{x} = K[I | \mathbf{0}]\mathbf{X}$, а после ротације $\mathbf{x}' = K[R | \mathbf{0}]\mathbf{X}$. Тада је $\mathbf{x}' = KRK^{-1}K[I | \mathbf{0}]\mathbf{X} = KRK^{-1}\mathbf{x}$, тј. хомографија између две пројекције је дата матрицом $H = KRK^{-1}$, па можемо да закључимо да је поменута хомографија у ствари конјугована ротација.

2.4.3 Интересантни примери

Пример 2.1. Синтетизовани погледи

Из једне слике можемо синтетизовати нову која одговара камери са истим центром а другачијом оријентацијом, применом одговарајуће хомографије чију смо егзистенцију показали у претходном тексту. Слика нпр. правоугаоника камером која фронтално гледа на њега ће бити неки правоугаоник, без неке уочљиве дисторзије. Такав фронтални поглед можемо синтетизовати из неког произвољног у ком се правоугаоник види као неки четвороугао применом одговарајуће раванске хомографије која тај четвороугао пресликава у одговарајући правоугаоник. Налажење одговарајуће хомографије је описано у примеру 1.1. Том хомографијом ефективно долазимо до слике истом камером, само заротираном тако да фронтално гледа на поменути правоугаоник.

Један пример синтетизованих погледа је приказан на слици 2.7. Можемо да приметимо да ће неке тачке у синтетизованим погледима бити црне боје, с обзиром да о њима немамо никаквих информација из првог погледа. \triangle

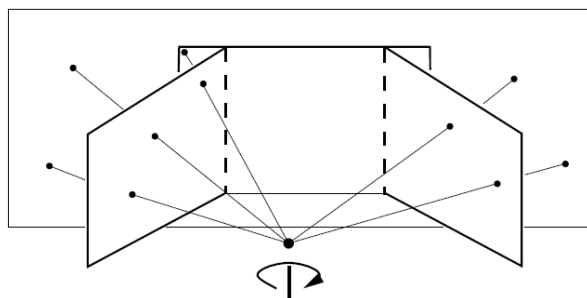


Слика 2.7: (а) Почетна слика. (б) Синтетизован фронтални поглед на под ходника из прве фотографије, помоћу хомографије која темена једне полочице почетне слике пресликава у темена квадрата. (в) Синтетизован фронтални поглед на десни зид ходника, помоћу хомографије која искошена врата пресликава у правоугаона.

Пример 2.2. Лепљење слика у панорамски поглед. Пројекције добијене ротацијом камере са истим центром су повезане раванским хомографијама. Ако се на деловима слика види исти део сцене, могуће је одредити те раванске хомографије које повезују пројекције, а потом уз помоћ њих „налепити“ једну слику на другу као што је илустровано на слици 2.8.

Алгоритам формирања панорамског погледа:

- (i) Изабрати једну слику као почетну.
- (ii) Одредити раванску хомографију између почетне слике и неке друге на којој се види неки део сцене као на почетној, како је објашњено у примеру 1.1. Потребно је одредити бар четири тачке на заједничим деловима у обе пројекције за одређивање поменуте хомографије.
- (iii) Хомографијом пресликати нову слику на почетну. Почетну слику сцене проширујемо подацима из нове слике.



Слика 2.8: Три слике добијене након ротације камере. Лева и десна слика се могу налепити на средњу, успостављањем одговарајућих раванских хомографија.

(iv) Поновити кораке (ii) и (iii) на остале слике којима располажемо.

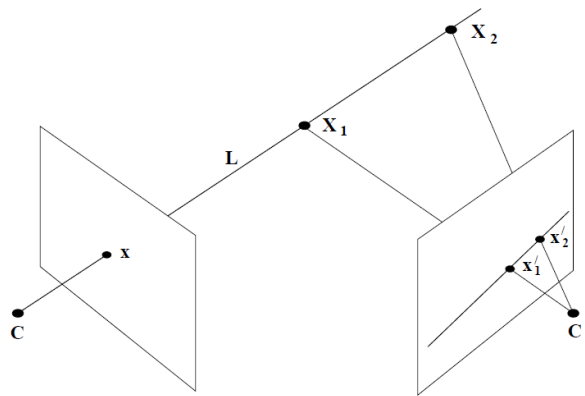
На слици 2.9 је приказан пример лепљења слика у панорамски поглед. Осам слика је направљено ротацијом камере при фиксираном центру. Оне су потом налепљене једна по једна по принципу који је описан у претходном алгоритму. \triangle



Слика 2.9: Лепљење слика, добијених ротацијом камере при фиксираном центру, у панорамски поглед.

2.4.4 Промена центра пројекције при пројектовању

Зумирањем и ротацијом камере описаним у претходним подсекцијама постижемо померање равни слике, док центар пројектовања остаје фиксан. Овима, при новим пројекцијама, не добијамо никакве информације о просторној структури објекта. Међутим, ако променимо центар камере између пројектовања (слика 2.10), кореспонденција одговарајућих тачака пре и после померања центра ће зависити од просторне структуре објекта.



Слика 2.10: Сlike тачака X_1 и X_2 се поклапају при сликању камером са центром у тачки C . Међутим, тачке X_1 и X_2 усликане камером са центром у тачки C' , која не припада правој L , јесу тачке x_1' и x_2' које се не поклапају.

Ако успемо да идентификујемо две тачке које су у првој слици инцидентне (на истом су зраку), а у другој нису (слика 2.10), можемо да закључимо да је друга слика направљена након промене центра камере.

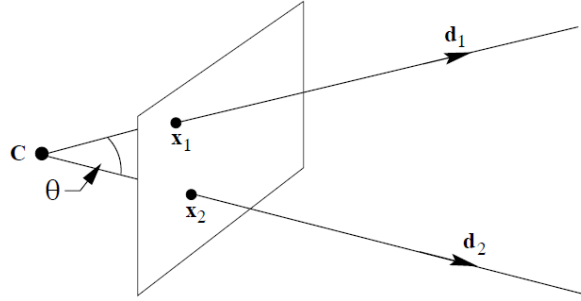
Посебан случај је када су све тачке у сцени компланарне. Тада су одговарајуће слике тачака повезане раванском хомографијом чак и када је центар камере померен између два пројектовања.

2.5 Калибрација камере

До сада смо разматрали пројективна својства камере, на основу познавања њене матрице P . Сада ћемо видети шта све можемо да закључимо ако су познати унутрашњи параметри камере, тј. њена калибрација (матрица K).

Теорема 2.7. Нека су координате тачака и матрица камере дати у координатном систему камере. Матрица калибрације камере, K , дефинише (афино) пресликавање тачака \mathbf{x} у слици, у вектор правца зрака пројектовања кроз центар камере и \mathbf{x} , $\mathbf{d} = K^{-1}\mathbf{x}$.

Доказ: Нека је \mathbf{x} произвољна тачка у слици, и нека је \mathbf{d} вектор правца зрака пројектовања у \mathbf{x} . С обзиром да се центар камере налази у координатном почетку, координате тачака на зраку пројектовања су облика $\mathbf{X} = (\lambda\mathbf{d}^T, 1)^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Како је испуњено $\mathbf{x} = K[I \mid \mathbf{0}](\lambda\mathbf{d}^T, 1)^T = K\mathbf{d}$ до на константу, то је $\mathbf{d} = K^{-1}\mathbf{x}$. С обзиром да је K горњетроугаона, на основу класификације у табели 1.1 закључујемо да је поменуто пресликавање афино. \square



Слика 2.11: Угао θ је угао између зракова пројектовања у тачке \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , односно између одговарајућих вектора правца \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .

На основу претходне теореме за две тачке у пројекцији са координатама \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 можемо да одредимо угао θ између њихових зракова пројектовања (слика 2.11) као угао који заклапају вектори $\mathbf{d}_1 = K^{-1}\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{d}_2 = K^{-1}\mathbf{x}_2$. Наиме,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2)}} \\ &= \frac{(K^{-1}\mathbf{x}_1)^T (K^{-1}\mathbf{x}_2)}{\sqrt{(K^{-1}\mathbf{x}_1)^T (K^{-1}\mathbf{x}_1)} \sqrt{(K^{-1}\mathbf{x}_2)^T (K^{-1}\mathbf{x}_2)}} \\ &= \frac{\mathbf{x}_1^T (K^{-T} K^{-1}) \mathbf{x}_2}{\sqrt{\mathbf{x}_1^T (K^{-T} K^{-1}) \mathbf{x}_1} \sqrt{\mathbf{x}_2^T (K^{-T} K^{-1}) \mathbf{x}_2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Претходна формула показује да, када је позната матрица $K^{-T} K^{-1}$ могу се измерити углови између зракова пројектовања у тачке \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Камера за коју је позната матрица K кажемо да је *калибрисана*, и може послужити као „просторни угломер“.

Теорема 2.8. Нека су координате тачака и матрица камере дати у координатном систему камере и нека је у слици дата права са координатама \mathbf{l} . Вектор нормале на раван π која се камером пројектује у праву поменутој праву је $\mathbf{n} = K^T \mathbf{l}$.

Доказ: Нека су \mathbf{x} координате произвоље тачке на правој \mathbf{l} , тј. $\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$. Зрак пројектовања у \mathbf{x} има вектор правца $\mathbf{d} = K^{-1}\mathbf{x}$, на основу теореме 2.7. Како поменути зрак пројектовања лежи у равни π , то је вектор \mathbf{d} ортогоналан на вектор \mathbf{n} нормале равни π . Дакле, $0 = \mathbf{d}^T \mathbf{n} = (K^{-1}\mathbf{x})^T \mathbf{n} = \mathbf{x}^T K^{-T} \mathbf{n}$. Како је $\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$, то је $\mathbf{l} = K^{-T} \mathbf{n}$, тј. $\mathbf{n} = K^T \mathbf{l}$. \square

Треба напоменути да претходна прича важи само када се камера налази у свом координатном систему, тј. центар је у координатном почетку, а раван пројектовања је ортогонална на z -осу. Међутим, њен део се може пренети и на ситуацију када су координате дате у произвољном координатном систему. Наиме,

поменута два координатна система су повезана изометријом простора која између њих помера цео простор укључујући и камеру. Зато, иако вектори правца зракова пројектовања неће бити исти у оба координатна система, угао који они заклапају хоће, па ће формула 2.5 важити у произвољном координатном систему.

2.5.1 Слика апсолутне конике

Апсолутни конуку Ω_∞ смо дефинисали у подсекцији 1.2.2. То је крива другог реда која се налази на бесконачној равни, и на њој је дефинисана матрицом $I = \text{diag}(1, 1, 1)$. Биће интересно посматрати њену слику ω у пројекцији, али пре тога одредимо како се камером сликају тачке са бесконачне равни π_∞ .

Произвољна тачка са бесконачне равни има координате $\mathbf{X}_\infty = (\mathbf{d}^T, 0)^T$. Она се камером чија је матрица $P = KR[I \mid -\tilde{C}]$ слика у тачку са координатама

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X}_\infty = KR[I \mid -\tilde{C}] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} = KR\mathbf{d}.$$

Дакле, пресликавање бесконачне равни π_∞ на раван пројекције индуквано пресликавањем камере $P = KR[I \mid -\tilde{C}]$ је раванска хомографија $\mathbf{x} = H\mathbf{d}$, где је $H = KR$. Интересно је да поменуто пресликавање не зависи од позиције камере C , већ само од унутрашње калибрације и оријентације камере.

Теорема 2.9. Слика апсолутне конике Ω_∞ камером чија је матрица $P = KR[I \mid -\tilde{C}]$ је коника у равни пројекције чија је матрица $\omega = (KK^T)^{-1} = K^{-T}K^{-1}$.

Доказ: На основу претходне анализе и теореме 1.2(ii) имамо да је слика апсолутне конике, чија је матрица на бесконачној равни $I = \text{diag}(1, 1, 1)$, коника у слици чија је матрица $\omega = (KR)^{-T}I(KR)^{-1} = K^{-T}R^{-T}IR^{-1}K^{-1} = K^{-T}RR^{-1}K^{-1} = K^{-T}K^{-1}$. односно, $\omega = (KK^T)^{-1}$. \square

Као и Ω_∞ , и коника ω је коника имагинарних тачака. Наведимо нека својства слике апсолутне конике која су последице претходне теореме:

- (i) Слика апсолутне конике је потпуно одређена унутрашњим параметрима камере (матрицом K).
- (ii) На основу формуле 2.5 закључујемо да, ако знамо матрицу слике апсолутне конике, угао између зракова пројектовања у тачке са координатама \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 у слици можемо да одредимо по формули:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}_1^T \omega \mathbf{x}_2}{\sqrt{(\mathbf{x}_1^T \omega \mathbf{x}_1)} \sqrt{(\mathbf{x}_2^T \omega \mathbf{x}_2)}}. \quad (2.6)$$

Израз 2.6 не зависи од избора координатног система у слици. Наиме, ако применимо неку пројективну трансформацију равни чија је матрица H на пројекцију, тачке ће се сликати као $\mathbf{x}_i' = H\mathbf{x}_i$, а апсолутна коника $\omega' = H^{-T}\omega H^{-1}$, па ће вредност израза 2.6 остати непромењена и након примене ове трансформације.

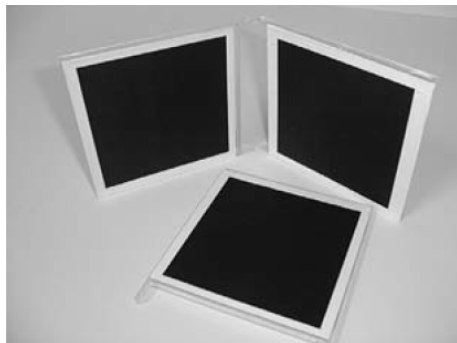
- (iii) Тачке у слици са координатама \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 одговарају ортогоналним зрацима пројектовања ако и само ако је $\mathbf{x}_1^T \omega \mathbf{x}_2 = 0$.
- (iv) Ако знамо слику апсолутне конике (матрица ω), можемо да одредимо калибрацију камере K Чолешки¹ декомпозицијом матрице ω^{-1} .
- (v) Као што је виђено у 1.2.2 произвољна раван у простору са координатама π сече бесконачну раван по правој, а ова права сече апсолутну конику у двама тачкама које су циркуларне тачке равни π . Слика поменутих циркуларних тачака су пресечне тачке слике апсолутне конике и праве ишчежавања равни π .

Пример 2.3. Одређивање калибрације камере

Узмимо три квадрата од којих никоја два немају међусобно паралелне ивице. Слика 2.12 та три квадрата нам је довољна да одредимо калибрацију камере.

¹André-Louis Cholesky (1875-1918.)

Можемо за сваки од квадрата да успоставимо хомографију H између његове равни и равни слике. Ако са H пресликамо циркуларне тачке равни једног квадрата, имаћемо две тачке на слици апсолутне конике, ω . Када то урадимо за сва три квадрата, имаћемо укупно шест тачака на слици апсолутне конике, чиме је она потпуно одређена (довољно нам је и пет тачака). Навешћемо конкретан поступак калибрације у наредном алгоритму. \triangle



Слика 2.12: Три квадрата од којих никоја два немају међусобно паралелне ивице.

Калибрисање камере

Алгоритам:

- (i) За један од квадрата одредимо матрицу H хомографије која слика тачке са Декартовим координатама $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$ у темена квадрата у слици. (Квадрат са претходно напоменутих теменима се неком сличношћу слика у оригинална темена квадрата, која циркуларне тачке оставља инваријантним.)
- (ii) Срачунамо координате слика циркуларних тачака као $H(1, \pm i, 0)^T$. Ако је $H = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3]$ слике циркуларних тачака имају координате $\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2$.
- (iii) Претходна два корака поновимо за остала два квадрата.
- (iv) Одређујемо матрицу ω слике апсолутне конике, из услова да садржи претходно срачунате слике циркуларних тачака. Наиме,

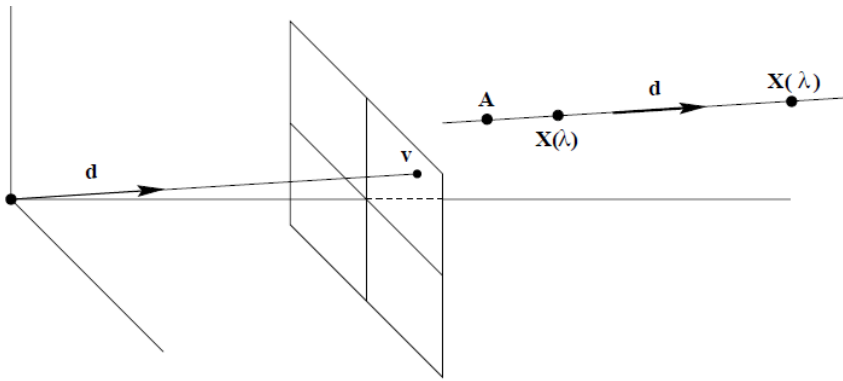
$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2 \in \omega &\Leftrightarrow (\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2)^T \omega (\mathbf{h}_1 \pm i\mathbf{h}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2^T \omega \mathbf{h}_2 \pm i(\mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2^T \omega \mathbf{h}_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2^T \omega \mathbf{h}_2 = 0 \wedge \mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_2 = 0. \end{aligned}$$
 Матрица ω је одређена до на константу са пет оваквих линеарних једначина.
- (v) Применом Чолешки декомпозиције налазимо K тако да је $\omega = (KK^T)^{-1}$.

2.6 Тачке и праве ишчезавања

При перспективном пресликавању камере праве се могу прсликати у полуправе, а равни у полуравни. То је последица тога, што се бесконачне тачке правих и равни у слици могу видети као коначне тачке. Сliku бесконачне праве равни зовемо њеном *правом ишчезавања*, а слику бесконачне тачке праве зовемо њеном *тачком ишчезавања*. На пример, ако усликамо возне шине које се пружају дуж неког правца, оне иако су паралелне ће се у нашој слици пресећи, и видећемо их као две „полуправе“. Бесконачност ка којој се оне пружају видимо као једну тачку у којој се оне секу. Такође, ако се налазимо на пучини и ако посматрамо привидну раван површине мора, у даљини ће се море и небо састати на хоризонту, на једној правој, која је права ишчезавања поменуте равни површине мора. Раван површине мора видимо као полураван чија је гранична права, поменута права ишчезавања.

2.6.1 Тачке ишчезавања

Ако имамо неку праву у простору која пролази кроз тачку чије су хомогене координате \mathbf{A} и која има вектор правца \mathbf{d} , произволна тачка са те праве има координате $\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{A} + \lambda\mathbf{D}$, где је $\mathbf{D} = (\mathbf{d}^T, 0)^T$ (слика 2.13). Она се камером $P = K[I | \mathbf{0}]$ слика у тачку $\mathbf{x}(\lambda) = P\mathbf{X}(\lambda) = P\mathbf{A} + \lambda P\mathbf{D} = \mathbf{a} + \lambda K\mathbf{d}$, где су \mathbf{a} хомогене координате слике тачке \mathbf{A} . Како је тачка ишчезавања \mathbf{v} поменуте праве слика њене бесконачне тачке $\mathbf{v} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\mathbf{X}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathbf{a} + \lambda K\mathbf{d}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\frac{1}{\lambda}\mathbf{a} + K\mathbf{d}) = K\mathbf{d}$. Овом приликом смо доказали наредну теорему.



Слика 2.13: Камера је дата центром \mathbf{C} и равни пројектовања. Тачка ишчезавања \mathbf{v} праве која има вектор правца \mathbf{d} се налази у пресеку равни слике и праве паралелне вектору \mathbf{d} кроз центар камере \mathbf{C} .

Теорема 2.10. Нека су координате тачака и матрица камере дати у координатном систему камере. Тачка ишчезавања \mathbf{v} правих у простору паралелних вектору $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ је тачка пресека равни слике са правом која садржи центар камере \mathbf{C} и има вектор правца \mathbf{d} , тј. $\mathbf{v} = K\mathbf{d}$.

Дакле слика бесконачно далеке тачке неке праве зависи само од њеног правца, а не и од њеног положаја у простору. Претходна прича се односила на камеру која се налази координатном почетку, и чија је раван пројектовања била ортогонална на z -осу, мада неки закључци важе и у општем случају.

Геометријски, паралелне праве у простору се секу на бесконачној равни у истој тачки. Слика те тачке је тачка ишчезавања поменутих правих. Зато, у општем случају, тачку ишчезавања произвољне праве \mathbf{l} у простору можемо наћи у пресеку равни слике са правом која пролази кроз центар камере \mathbf{C} и паралелна је правој \mathbf{l} . Наредна теорема важи за камеру у произвољном координатном систему.

Теорема 2.11. Нека су \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 тачке ишчезавања двеју правих \mathbf{m} и \mathbf{l} у простору, и нека је ω матрица слике апсолутне конике. Тада је угао између поменуте две праве у оригиналу одређен са:

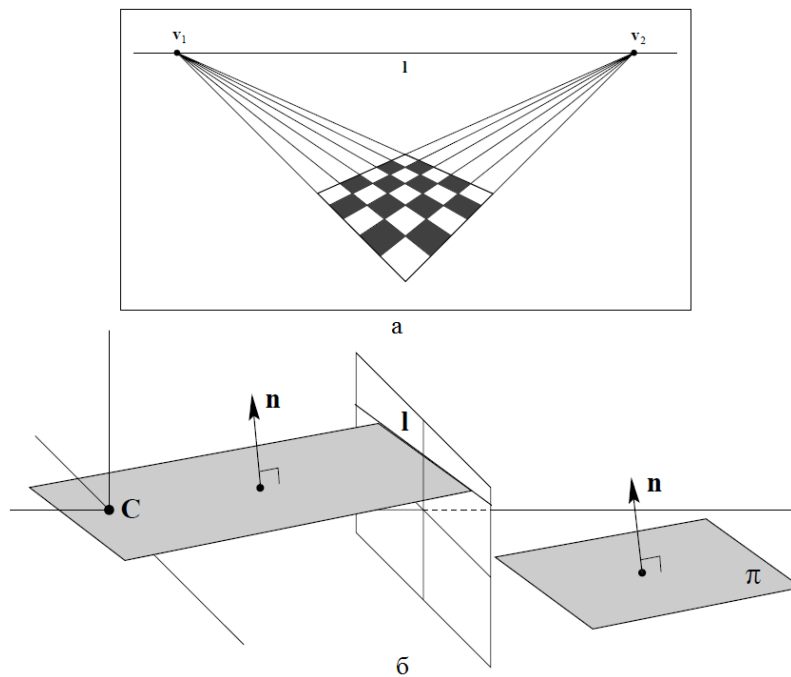
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1^T \omega \mathbf{v}_2}{\sqrt{\mathbf{v}_1^T \omega \mathbf{v}_1} \sqrt{\mathbf{v}_2^T \omega \mathbf{v}_2}}. \quad (2.7)$$

Доказ: Узмимо две праве m' и l' које пролазе кроз центар камере и које су редом паралелне правама m и l . Због једнакости углова са паралелним крацима биће $\angle(m', l') = \angle(m, l)$. Како праве m' и l' јесу зраци пројектовања у тачке v_1 и v_2 , на основу формуле 2.6 следи тврђење. \square

Тачку ишчезавања праве можемо одредити ако у слици идентификујемо слику неке друге праве која је у оригиналу паралелна првобитној. Тачка ишчезавања поменутих правих ће бити пресечна тачка њихових слика. Тачку ишчезавања праве такође можемо одредити ако учимо неке дужи на њој чији однос дужина у оригиналу знамо, као што је објашњено на крају подсекције 1.1.2.

2.6.2 Праве ишчезавања

Паралелне равни у простору секу бесконачну раван по истој правој. Слика те праве у пројекцији је права ишчезавања тих равни. Зато праву ишчезавања произвољне равни π (слика 2.14.б) можемо наћи у пресеку равни слике и равни која садржи центар камере C и паралелна је поменутој равни π . Такође, како тачке ишчезавања правих које су паралелне датој равни припадају правој ишчезавања те равни, ако нађемо две такве тачке ишчезавања имаћемо тражену праву ишчезавања (слика 2.14.а).



Слика 2.14: **Налажење праве ишчезавања равни.** (а) Слика паралелних правих у оригиналу, секу се у тачки ишчезавања v_1 на правој ишчезавања равни која садржи поменут скуп паралелних правих. Слично се други скуп, у оригиналу паралелних правих, сече у тачки ишчезавања v_2 . (б) Права ишчезавања l равни π се налази у пресеку равни слике и равни која садржи центар камере C и паралелна је равни π .

Праве ишчезавања равни зависе једино од оријентације равни, а не од њеног положаја у простору.

Теорема 2.12. Нека су l_1 и l_2 праве ишчезавања двеју равни π_1 и π_2 у простору, и нека је ω матрица слике апсолутне конике. Тада је угао између поменутих две равни у оригиналу одређен са:

$$\cos \theta = \frac{l_1^T \omega^{-1} l_2}{\sqrt{l_1^T \omega^{-1} l_1} \sqrt{l_2^T \omega^{-1} l_2}}. \quad (2.8)$$

Доказ: Како је угао између равни једнак углу између њихових вектора нормала, то на основу теорема 2.8 и 2.9, имајући у виду изометријску повезаност два одговарајућа координатна система простора, тврђење директно следи. \square

2.6.3 Веза ортогоналности са односом тачака и правих ишчезавања

Теорема 2.13. Нека је ω матрица слике апсолутне конике.

(i) Тачке ишчезавања v_1 и v_2 међусобно ортогоналних правих задовољавају

$$v_1^T \omega v_2 = 0. \quad (2.9)$$

(ii) Ако је нека права ортогонална на неку раван, тада су редом њихове тачка v и права l ишчезавања повезане наредном релацијом:

$$l = \omega v. \quad (2.10)$$

(iii) Праве ишчезавања l_1 и l_2 међусобно ортогоналних равни задовољавају

$$l_1^T \omega^{-1} l_2 = 0. \quad (2.11)$$

Доказ:

(i) Следи директно из теореме 2.11.

(ii) Раван чија је права ишчезавања l је ортогонална на праву чија је тачка ишчезавања v ако и само ако је свака тачка праве l тачка ишчезавања неке праве која је ортогонална на праву чија је тачка ишчезавања v , тј. ако и само ако је $(\forall x)(x^T l = 0 \implies x^T \omega v = 0)$ (на основу дела под (i)), тј. ако и само ако је $l = \omega v$.

(iii) Следи директно из теореме 2.12. □

2.7 Одређивање калибрације камере из једне пројекције

До сада смо у примеру 2.3 и теоремама 2.11, 2.12 и 2.13 доказали неке услове одређености слике апсолутне конике.

Ако знамо неке „унутрашње“ особине камере можемо још прецизније одредити слику апсолутне конике. Наиме, нека су матице калибрације камере и апсолутне конике:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix}.$$

Имајући у виду да је $\omega = (KK^T)^{-1}$, директним рачуном се проверава:

Теорема 2.14. Ако је параметар „искошености“ $s = K_{12} = 0$, тада је $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$. Ако је још слика подједнако скалирана у правцима оса, тј. $\alpha_x = K_{11} = K_{22} = \alpha_y$ тада је и $\omega_{11} = \omega_{22}$.

Резимираћемо претходне закључке у наредној табели:

Услов	Хомогене једначине	# независних једначина
Тачке ишчезавања \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 одговарају ортогоналним правцима.	$\mathbf{v}_1^T \omega \mathbf{v}_2 = 0$	1
Тачка ишчезавања \mathbf{v} и права ишчезавања \mathbf{l} одговарају редом правој и равни које су међусобно ортогоналне.	$[\mathbf{l}]_{\times} \omega \mathbf{v} = 0$ (погледати А.2)	2
Позната је хомографија $H = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_3]$ неке равни из простора на раван слике, као у примеру 2.3.	$\mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_2 = 0$ $\mathbf{h}_1^T \omega \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \omega \mathbf{h}_2$	2
Параметар искошености $K_{12} = s = 0$.	$\omega_{12} = \omega_{21} = 0$	1
Параметар искошености $K_{12} = s = 0$ и слика је поједнако скалирана у правцима оса, тј. $\alpha_x = K_{11} = K_{22} = \alpha_y$.	$\omega_{12} = \omega_{21} = 0$ $\omega_{11} = \omega_{22}$	2

Табела 2.1: Услови одређености слике апсолутне конике ω . Свака од (матричних) једначина наведених у другој колони је хомогена и линеарна по компонентама матрице ω . У трећој колони је наведено колико линеарно независних једначина добијамо из сваке (матричне) из друге колоне.

Да бисмо одредили слику апсолутне конике потребно је да формирамо хомоген систем од бар 5 линеарно независних једначина на неки од начина наведених у табели 2.1. Матрицу калибрације бисмо потом одредили Чолешки декомпозицијом матрице ω^{-1} .

Глава 3

Реконструкција просторног објекта на основу његове две пројекције

3.1 Еиполарна геометрија и фундаментална матрица

Еиполарна геометрија је унутрашња пројективна геометрија односа двеју пројекција. Она не зависи од структуре самог просторног објекта, већ само од његових пројекција.

Фундаментална матрица је матрица формата 3×3 . Она енкапсулира еиполарну геометрију двеју пројекција. Ако је слика просторне тачке X у првој пројекцији x , а у другој x' , тада је задовољено $x'^T F x = 0$. Она се може израчунати само на основу кореспонденција одговарајућих тачака $x \leftrightarrow x'$ из пројекција.

3.1.1 Еиполарна геометрија

Основа еиполарне геометрије су пресечне праве равни пројекција са равнима из прамена који за осу има *основицу* (**основица** је права која спаја центре камера). Овакво заснивање је мотивисано намером да се успостави веза између двеју пројекција.

Посматрајмо тачку у простору X и њену прву пројекцију x и другу x' . С обзиром да се зраци пројектовања секу у тачки X , то су тачке X , x , x' , као и центри камера, C и C' , компланарне тачке, што се види на слици 3.1.а. Ово нам омогућава да ако знамо једну пројекцију, x , можемо оријентационо да одредимо положај друге, x' .

Нека је π раван одређена основицом и зраком пројектовања у x . Како зрак пројектовања у (непознату) тачку x' лежи у π , тачка x' се налази у пресеку равни π и равни друге пројекције, l' (слика 3.1.б). Права l' је пројекција зрака пројектовања у x , на другу раван пројектовања и садржи другу пројекцију, x' . Ова права је *еиполарна права* која одговара пројекцији x .

Поменимо неке битне појмове еиполарне геометрије:

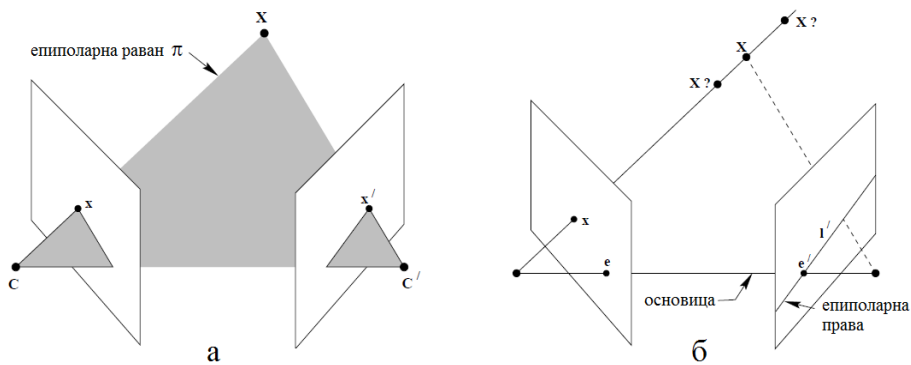
- **Еипол** је тачка пресека равни слике са правом која спаја центре камера (основица). Еипол представља слику центра једне камере другом камером.
- **Еиполарна раван** је раван у којој лежи основица. Основица је оса прамена еиполарних равни.
- **Еиполарна права** је пресечна права еиполарне равни и равни слике.

3.1.2 Фундаментална матрица F

Фундаментална матрица представља алгебарску репрезентацију еиполарне геометрије.

Дефиниција 3.1. Ако су дате две пројекције са разним центрима, тада за сваку тачку x прве пројекције постоји одговарајућа еиполарна права l' у другој пројекцији. Матрица овог F пресликавања ($x \mapsto l'$) се назива **Фундаментална матрица** датих двеју пројекција ($Fx = l'$).

ЗАГЛАВА 3. РЕКОНСТРУКЦИЈА ПРОСТОРНОГ ОБЈЕКТА НА ОСНОВУ ЊЕГОВЕ ДВЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

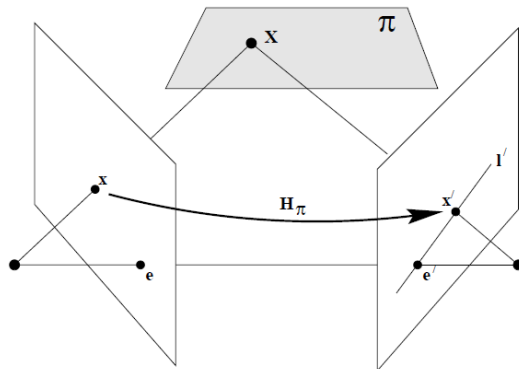


Слика 3.1: Кореспонденција пројекција. (а) Камере су идентификоване центрима и равнима пројектовања. (б) Инверзна слика тачке x је зрак пројектовања одређен тачкама C и x . Овај зрак се у другој пројекцији види као права l' . Свака просторна тачка X која се пројектује у тачку x се мора налазити на овом зраку, а њена слика у другој пројекцији мора припадати правој l' .

Геометријска конструкција

Поменуто пресликавање тачке x једне слике у одговарајућу епиполарну праву l' у другој слици се може разложити на два корака:

- Уочимо равн π у простору која не пролази ни кроз један од центара датих двеју камера. Зрак пројектовања у тачку x сече равн π у некој тачки X . Тачку X пројектујемо другом камером у неку тачку x' . Како се тачка X налази на зраку пројектовања у тачку x , овако добијена тачка x' мора припадати епиполарној правој l' која одговара слици овог зрака, као на слици 3.2. Тачки x је овим, преко равни π , композицијом два пројективна пресликавања равни додељена тачка x' . Композиција ова два пресликавања је раванска хомографија H_π која једну пројективну равн слика на другу тако што $x \mapsto x'$, тј. $H_\pi x = x'$.



Слика 3.2: Тачка x из прве пројекције се преко равни π пресликава у тачку x' у другој пројекцији.

- Како ће епиполарна права l' пролазити кроз епипол e' и садржати конструисану тачку x' , она је $l' = e' \times x' = [e'] \times x' = [e'] \times H_\pi x$ (погледати А.2). С обзиром да је по дефиницији $l' = Fx$, добијамо да је

$$F = [e'] \times H_\pi. \tag{3.1}$$

Како је $[e'] \times$ ранга 2, а H_π ранга 3, то је матрица F сингуларна матрица ранга 2. Геометријски, фундаментална матрица дефинише пројективно пресликавање пројективне равни прве слике (2-димензиони пројективни простор) на прамен епиполарних правих кроз епипол e' (1-димензиони пројективни простор), па заиста мора бити ранга 2.

Алгебарска конструкција

Ако су још познате матрице двеју камера, фундаменталну матрицу је могуће одредити чисто алгебарски. До зрака пројектовања у тачку \mathbf{x} можемо доћи решавањем једначине $P\mathbf{X} = \mathbf{x}$ по \mathbf{X} , као у подсекцији 2.3.1. Решење је једнопараметарска фамилија тачака:

$$X(\lambda) = P^+\mathbf{x} + \lambda\mathbf{C}, \text{ где је } PP^+ = I \text{ и } P\mathbf{C} = \mathbf{0}, \text{ тј.}$$

$P^+ = P^T(PP^T)^{-1}$ је псеудо-инверз матрице P , док је \mathbf{C} центар прве камере. Две тачке на зраку су $P^+\mathbf{x}$ (за $\lambda = 0$) и центар прве камере \mathbf{C} (за $\lambda = \infty$). Њихове слике другом камером, $P'P^+\mathbf{x}$ и $P'\mathbf{C}$, одређују слику зрака пројектовања у тачку \mathbf{x} на другу раван пројектовања, што је управо епиполарна права која одговара тачки \mathbf{x} . Зато је $\mathbf{l}' = (P'\mathbf{C}) \times (P'P^+\mathbf{x}) = \mathbf{e}' \times (P'P^+\mathbf{x}) = [\mathbf{e}']_{\times}(P'P^+\mathbf{x}) = [\mathbf{e}']_{\times}P'P^+\mathbf{x}$. Дакле,

$$F = [\mathbf{e}']_{\times}P'P^+. \quad (3.2)$$

Ово извођење нема смисла када је исти центар при првом и другом пројектовању, јер је тада $P'\mathbf{C} = \mathbf{0}$, па је F нула матрица.

Формуле (3.1) и (3.2) су суштински исте. Сада имамо и експлицитну формулу за $H_{\pi} = P'P^+$, у функцији матрица камера.

Пример 3.1. Срачунајмо фундаменталну матрицу за пар камера

$$P = K[I | \mathbf{0}] \quad P' = K'[R | \mathbf{t}].$$

Псеудо-инверз матрице P је $P^+ = P^T(PP^T)^{-1} = \begin{bmatrix} K^{-1} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{e}' = P'\mathbf{C} = K'\mathbf{t}$, па је

$$F = [P'\mathbf{C}]_{\times}P'P^+ = [K'\mathbf{t}]_{\times}K'RK^{-1}.$$

△

Наведимо најбитније својство фундаменталне матрице:

Теорема 3.1. Матрица F , ранга 2, је фундаментална матрица двеју пројекција ако и само ако за сваке две тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' које су пројекције исте просторне тачке важи

$$\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0.$$

Доказ: \Rightarrow) Како су \mathbf{x} и \mathbf{x}' одговарајуће пројекције исте просторне тачке, то тачка \mathbf{x}' лежи на епиполарној правој $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ која одговара тачки \mathbf{x} . Другим речима, $0 = \mathbf{x}'^T \mathbf{l}' = \mathbf{x}'^T F \mathbf{x}$.

\Leftarrow) Обрнуто, нека је $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$ за сваке две тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' које су пројекције исте просторне тачке. Нека су \mathbf{x} и \mathbf{x}' пројекције просторне тачке \mathbf{X} , тј. $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$. Нека је $\widehat{\mathbf{X}}$ тачка на зраку пројектовања у \mathbf{x} , различита од тачке \mathbf{X} . Тада је пројекција тачке $\widehat{\mathbf{X}}$ првом камером тачка \mathbf{x} , а другом нека тачка $\widehat{\mathbf{x}}' \neq \mathbf{x}'$, тј. $\widehat{\mathbf{x}}'^T F \mathbf{x} = 0$. Следи, $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} + \lambda \widehat{\mathbf{x}}'^T F \mathbf{x} = 0$, тј. $(\mathbf{x}'^T + \lambda \widehat{\mathbf{x}}'^T) F \mathbf{x} = 0$, за свако $\lambda \in \mathbb{R}$. То значи да права $F\mathbf{x}$ садржи све тачке епиполарне праве одређене тачкама \mathbf{x}' и $\widehat{\mathbf{x}}'$, па јој мора бити једнака. □

Претходна теорема даје битну карактеризацију фундаменталне матрице. Наиме, она је потпуно одређена кореспонденцијом одговарајућих тачака $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ у пројекцијама. Зато се може дефинисати у контексту пројекција без референцирања на саме матрице камера.

Својства фундаменталне матрице

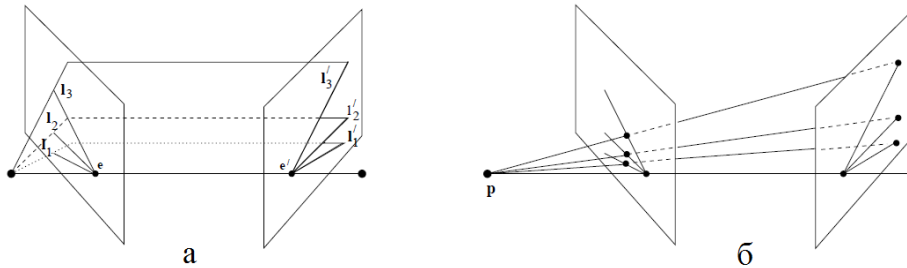
Наредна својства фундаменталне матрице су директне последице њене дефиниције и теореме 3.1.

- **Транспонат:** Ако је F фундаментална матрица пара камера (P, P') , тада је F^T фундаментална матрица истог пара камера само у обрнутом поретку, (P', P) .

- **Епиполарне праве:** За сваку тачку \mathbf{x} у првој слици одговарајућа епиполарна права у другој слици је $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$. Слично је $\mathbf{l} = F^T\mathbf{x}'$ епиполарна права у првој слици која одговара пројекцији \mathbf{x}' из друге слике.
- **Епипол:** За сваку тачку $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}$ у првој слици епиполарна права $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ садржи епипол \mathbf{e}' . Зато важи $0 = \mathbf{e}'^T(F\mathbf{x}) = (\mathbf{e}'^T F)\mathbf{x}$ за свако \mathbf{x} , па је $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$. Слично се показује да $F\mathbf{e} = \mathbf{0}$, тј. да је \mathbf{e} у десном језгру фундаменталне матрице F .
- **Степени слободе:** Матрица F је хомогена матрица формата 3×3 . На одређеност матрице F утиче седам параметара јер имамо девет независних компоненти чији се број умањује за један када урачунамо заједнички параметар скалирања, и за још један када урачунамо услов сингуларности матрице F , $\det F = 0$. Дакле, матрица F има седам степени слободе, и зато је потребно поставити минимум седам линеарно независних услова да би одредили матрицу F .
- **Корелација:** Матрица F дефинише пресликавање између равни пројекција, које је дегенерисана корелација. Наиме, она тачки \mathbf{x} из прве слике додељује праву $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ у другој слици. Она штавише свакој тачки са епиполарне праве $\mathbf{l} = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$ додељује исту праву $F(\mathbf{e} + \lambda\mathbf{x}) = F\mathbf{x} = \mathbf{l}'$. Зато је ово пресликавање дегенерисано, и нема инверз.

Хомографија епиполарних правах

Све епиполарне праве једне слике се секу у епиполу. Епиполарна раван сече равни пројектовања и дефинише одговарајућу пројективну кореспонденцију између епиполарних правах једне и друге слике (слика 3.3.а). Штавише, та кореспонденција је перспективна, као што се види на слици 3.3.б. Одредићемо њену формулу:



Слика 3.3: (а) У свакој пројекцији постоји прамен епиполарних правах центриран у епиполу. Кореспонденција правах $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ је дефинисана праменом епиполарних равни чија је оса основица. (б) Одговарајуће епиполарне праве су повезане перспективним пресликавањем, са центром у било којој тачки \mathbf{p} основице.

Теорема 3.2. Нека је \mathbf{l} произвољна епиполарна права у првој пројекцији и \mathbf{l}' њој одговарајућа епиполарна права у другој пројекцији. Ако је \mathbf{k} нека права у првој пројекцији која не садржи епипол \mathbf{e} , тада важи: $\mathbf{l}' = F[\mathbf{k}]_{\times}\mathbf{l}$. И слично, $\mathbf{l} = F^T[\mathbf{k}']_{\times}\mathbf{l}'$.

Доказ: Тачка $\mathbf{x} = [\mathbf{k}]_{\times}\mathbf{l} = \mathbf{k} \times \mathbf{l}$ је пресечна тачка правах \mathbf{k} и \mathbf{l} . Како права \mathbf{k} не пролази кроз епипол \mathbf{e} , то је $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}$. Зато је права $F[\mathbf{k}]_{\times}\mathbf{l}$, епиполарна права у другој пројекцији која одговара тачки \mathbf{x} , тј. права \mathbf{l}' . \square

Праву \mathbf{k} можемо zgodno да изаберемо као $\mathbf{k} = \mathbf{e}$, обзиром да она тада сигурно неће садржати епипол \mathbf{e} ($\mathbf{e}^T\mathbf{e} \neq 0$).

3.1.3 Рачунање фундаменталне матрице F двеју пројекција

Фундаментална матрица је дефинисана једначином:

$$\mathbf{x}^T F \mathbf{x} = 0, \quad (3.3)$$

за сваки пар одговарајућих тачака $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ у два сликама. Ако нам је познат довољан број парова $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ (бар седам) на основу једначине (3.3) се може одредити фундаментална матрица F .

Нормализовани алгоритам са осам тачака $x \leftrightarrow x'$

Конкретно, ако су тачке $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ и $\mathbf{x}' = (x', y', 1)$ координате пројекција просторне тачке \mathbf{X} у двама сликама, и $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$, једначина 3.3 је еквивалентна једначини:

$$xx'f_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0.$$

што је за $\mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$ еквивалентно са

$$(xx', x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1)\mathbf{f} = 0.$$

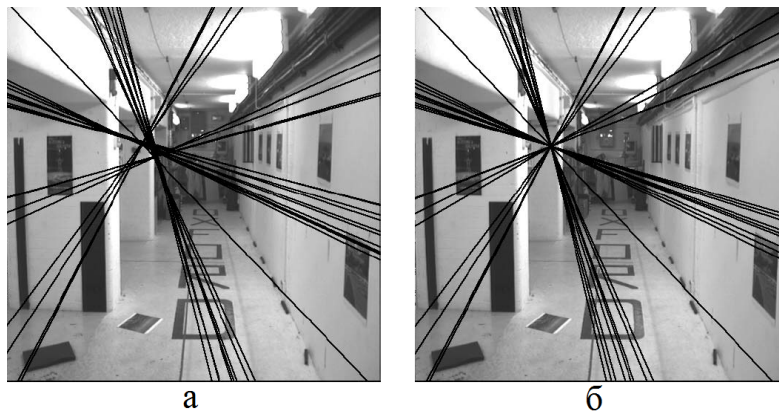
За n оваквих парова $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ добијамо хомоген систем линеарних једначина чије је решење, \mathbf{f} , десно језгро матрице

$$A = \begin{bmatrix} x_1x'_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_nx'_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Јасно је да \mathbf{f} једино можемо да одредимо до на умножак скаларом, а да би решење уопште постојало матрица A мора бити ранга мањег или једнаког 8. Ако је ранга 8, решење је јединствено (до на скалар).

Ако су координате у пројекцијама дате са одређеном грешком (што је често случај) матрица A може бити и ранга 9. У том случају треба нумеричким методама тражити вектор који минимизује $\|A\mathbf{f}\|$ при нпр. услову $\|\mathbf{f}\| = 1$. Поменути услов треба поставити да би избегли нула вектор. Вектор \mathbf{f} можемо наћи SVD декомпозицијом (погледати додаток А.1) матрице A тако да је $A = UDV^T$, где је U матрица са ортогоналним колонама, D дијагонална матрица са вредностима на дијагонали поређаним у опадајућем поретку и V ортогонална матрица. Тражени вектор се налази на месту последње колоне матрице V .

Важно својство фундаменталне матрице је да је ранга 2, епиполарне праве не би биле конкурентне, тј. не би се секле у епиполу, него би ситуација била као на слици 3.4.а. Матрица F одређена како је претходно описано, у општем случају, неће бити сингуларна због грешака у рачуну и обележавању тачака у пројекцијама, и зато треба наћи начин да се исфорсира поменута сингуларност матрице F . То би могло да се уради тако што би се у SVD декомпозицији $A = UDV^T$ најмања вредност на дијагонали матрице D заменила нулом. Тачније, ако је $F = U\text{diag}(r, s, t)V^T$ где је $r \geq s \geq t$, матрица $F = U\text{diag}(r, s, 0)V^T$ ће минимизовати $\|F - F'\|$ при услову $\det F' = 0$, и тиме представљати најбоље могуће решење.



Слика 3.4: Епиполарне праве срачунате по формули $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ за разне \mathbf{x} . (а) Ефекат несингуларне матрице F . (б) Ефекат, након исфорсираоног услова сингуларности матрице F SVD алгоритмом.

Проблем у раду са рачунаром је што он не препознаје све реалне бројеве који се нама јављају у рачуну, већ коначан број рационалних на које заокружује све бројеве. Ради стабилности нумеричких метода препоручљива је нормализација улазних података, тако да се све тачке у пројекцијама налазе на просечном

растојању $\sqrt{2}$, од координатног почетка. То значи да „просечна тачка“ има хомогене координате $(1, 1, 1)$. Нормализација улазних података је од есенцијалне важности при имплементацији овог алгоритма.

Овај начин одређивања матрице је најједноставнији за имплементацију. Резимираћемо поступак у наредном алгоритму:

Нормализовани алгоритам са осам тачака $x \leftrightarrow x'$

Циљ: За познате пројекције $x_i \leftrightarrow x'_i$ просторних тачака X_i ($1 \leq i \leq n, n \geq 8$), одредити фундаменталну матрицу F тако да $x_i^T F x'_i = 0$.

Алгоритам:

(i) **Нормализација:** Применити трансформације нормализације координата тачака у пројекцијама (транслација уз хомотетију):

$$\hat{x}_i = T x_i \quad \text{и} \quad \hat{x}'_i = T' x'_i.$$

(ii) Одредити фундаменталну матрицу \hat{F}' за одговарајуће тачке у пројекцијама $\hat{x}_i \leftrightarrow \hat{x}'_i$:

(a) Одредити \hat{F} из вектора последње колоне матрице V из декомпозиције $\hat{A} = UDV^T$, где је матрица \hat{A} формирана из кореспонденција $\hat{x}_i \leftrightarrow \hat{x}'_i$ као у формули (3.4).

(b) **Форсирање сингуларности:** Заменили \hat{F} са \hat{F}' тако да је $\det \hat{F}' = 0$, као што је описано горе.

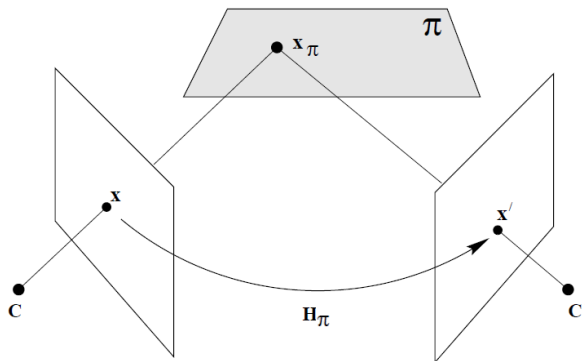
(iii) **Денормализација:** Матрица $F = T'^T \hat{F}' T$ је фундаментална матрица оригиналних пројекција $x_i \leftrightarrow x'_i$.

Одређивање F на основу минималног броја кореспонденција $x_i \leftrightarrow x'_i$ (седам)

Како матрица F има седам степени слободе, она може да се одреди на основу седам кореспонденција $x \leftrightarrow x'$ одговарајућих тачака у пројекцијама, јер свака од њих (под условом да су њихови оригинали у простору, у слободном положају) фиксира по један степен слободе. У том случају долазимо до матрице A као у формули (3.4) која је формата 7×9 , а ранга 7. Одговарајуће десно језгро је дводимензиони векторски простор чија је једна база нпр. (f_1, f_2) . Нека су матрице F_1 и F_2 формиране од вектора f_1 и f_2 како је описано на почетку ове подсекције. Тражена фундаментална матрица је тада $F = \alpha F_1 + (1 - \alpha) F_2$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Услов $\det F = 0$ можемо искористити да фиксирамо параметар α . Како се $\det(\alpha F_1 + (1 - \alpha) F_2) = 0$ своди на налажење нула полинома трећег степена, имаћемо јединствено или три могућа решења за фундаменталну матрицу F .

Одређивање фундаменталне матрице на основу шест кореспонденција тачака $x_i \leftrightarrow x'_i$

Интересантно је да фундаменталну матрицу F двеју пројекција можемо да одредимо на основу само шест кореспонденција $x_i \leftrightarrow x'_i$ пројекција просторних тачака X_i . Оно што мора да буде испуњено је да четири од тих шест тачака X_i у сцени леже у једној равни π , док остале две не припадају тој равни. Поступак се заснива на успостављању одговарајућих раванских хомографија између равни π и равни пројекција.

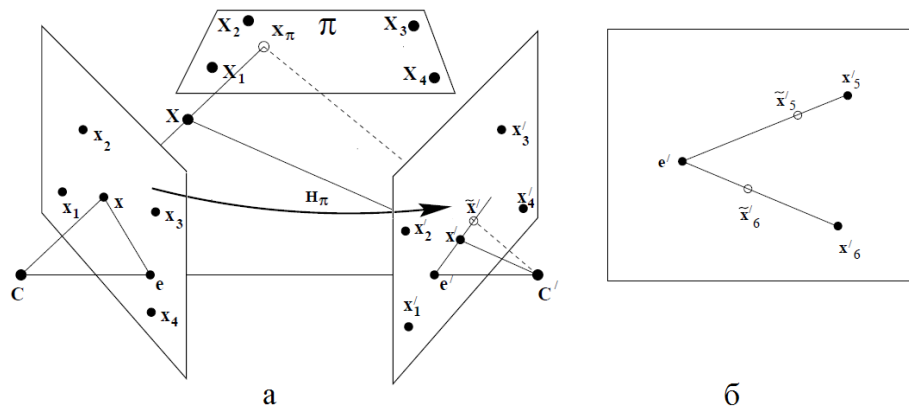


Слика 3.5: Хомографија равни пројекција, индукована равни π

Нека је π раван која се налази у општем положају у сцени (не садржи ни један од центара пројектовања

C и C'). Камера са центром у C дефинише перспективно пресликавање равни π на раван прве пројекције чија је матрица нека матрица H . Слично друга камера дефинише перспективно пресликавање равни π на раван друге пројекције чија је матрица нека H' . Тада, за произвољну тачку $X_\pi \in \pi$ важи да су њене слике у пројекцијама $x = HX_\pi$ и $x' = H'X_\pi$. Композиција инверзног првог, и другог перспективног пресликавања је раванска хомографија $H_\pi = H'H^{-1}$ равни једне пројекције на другу тако да је $x' = H_\pi x$ (слика 3.5).

Посматрајмо неку тачку X која не припада поменутој равни π . Нека су њене пројекције у сликама x и x' . Тачка $\tilde{x}' = H_\pi x$ ће лежати на епиполарној правој у другој пројекцији која одговара тачки x , као на слици 3.6.а. То је зато што су x' и \tilde{x}' слике тачака другом камером које леже на истом зраку пројектовања у тачку x . Као последицу имамо да је права $x' \times H_\pi x$ епиполарна права у другој пројекцији. На овај начин можемо да одредимо две разне епиполарне праве у другој пројекцији (слика 3.6.б), а тиме и епипол e' , као њихов пресек. Тада ће бити $F = [e']_\times H_\pi$.



Слика 3.6: Фундаментална матрица је јединствено одређена сликама шест просторних тачака од којих су четири компланарне. (а) Зрак пројектовања првом камером кроз X сече раван π у тачки X_π . Слике тачака X и X_π су редом x' и $\tilde{x}' = Hx$. То су разне тачке (осим када X лежи у π) и обе припадају епиполарној правој l' која одговара тачки x . (б) Епипол e' је одређен пресеком две епиполарне праве: $\tilde{x}'_5 \times x'_5$ и $\tilde{x}'_6 \times x'_6$.

На основу претходне анализе можемо да закључимо да се фундаментална матрица F може јединствено одредити на основу слика шест просторних тачака, од којих четири леже у једној равни, док су преостале две ван поменуте равни. Слике четири компланарне тачке дефинишу раванску хомографију H_π , док преостале две постављају услове за одређивање епипола e' .

Резимираћемо претходно наведени поступак у наредном алгоритму:

Одређивање фундаменталне матрице F на основу пројекција шест тачака, од којих су четири компланарне

Циљ: За познате пројекције $x_i \leftrightarrow x'_i$ шест просторних тачака X_i од којих су првих четири компланарне, одредити фундаменталну матрицу F тако да $x_i'^T F x_i = 0$.

Алгоритам:

- (i) Одредити хомографију H тако да је $x'_i = Hx_i$, за $i = \overline{1,4}$.
- (ii) Одредити епипол e' као пресек правих $(Hx_5) \times x'_5$ и $(Hx_6) \times x'_6$.
- (iii) $F = [e']_\times H$.

3.2 Одређивање матрица камера на основу фундаменталне матрице F

Једно од најбитнијих својстава фундаменталне матрице је да се може искористити за одређивање матрица камера којима су добијене две пројекције.

3.2.1 Одређеност камера. Канонски пар матрица камера

У подсекцији 3.1.2 до формула $\mathbf{l}' = F\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'^T F\mathbf{x} = 0$ смо дошли користећи само инциденције тачака, правих и равни, тј. односе пројективне геометрије. Зато су оне пројективно инваријантне. Заиста, ако применимо пројективне трансформације равни на координате једне и друге слике $\hat{\mathbf{x}} = H\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{x}}' = H'\mathbf{x}'$, постојаће одговарајућа корелација $\hat{\mathbf{l}}' = \hat{F}\hat{\mathbf{x}}$, где је $\hat{F} = H'^{-T}FH^{-1}$. С обзиром да $H' : \hat{\mathbf{x}}' = H'\mathbf{x}'$ делује на праве као $\hat{\mathbf{l}}' = H'^{-T}\mathbf{l}'$ (теорема 1.2), претходан закључак је последица низа извођења: $\mathbf{l}' = F\mathbf{x} \implies H'^T\hat{\mathbf{l}}' = FH^{-1}\hat{\mathbf{x}} \implies \hat{\mathbf{l}}' = H'^{-T}FH^{-1}\hat{\mathbf{x}}$.

Фундаментална матрица F зависи само од пројективних односа матрица P и P' . Како матрице камера повезују координате просторних тачака са координатама пројекција, то оне директно зависе од координатног система у слици и координатног система простора. При промени координатног система простора долази до промене матрица камера, али не и фундаменталне матрице F . Штавише,

Теорема 3.3. Ако је H пројективна трансформација простора, тада су фундаменталне матрице које одговарају паровима камера (P, P') и $(\tilde{P}, \tilde{P}') = (PH, P'H)$ једнаке.

Доказ: Како је $\mathbf{x} = P\mathbf{X} = (PH)(H^{-1}\mathbf{X}) = \tilde{P}\tilde{\mathbf{X}}$, ако се камером P тачка из простора \mathbf{X} слика у тачку \mathbf{x} , камером $\tilde{P} = PH$ се тачка $\tilde{\mathbf{X}} = H^{-1}\mathbf{X}$ слика у исту тачку \mathbf{x} . Фундаментална матрица пара камера (P, P') је $F = [P'C]_{\times} P'P^+$ (по формули (3.2)), где је $P^+ = P^T(PP^T)^{-1}$. Користећи $\tilde{P}^+ = \tilde{P}^T(\tilde{P}\tilde{P}^T)^{-1}$ за фундаменталну матрицу пара камера (\tilde{P}, \tilde{P}') по формули (3.2) добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= [\tilde{P}'\tilde{C}]_{\times} \tilde{P}'\tilde{P}^+ = \\ &= [(P'H)(H^{-1}C)]_{\times} P'H(PH)^T((PH)(PH)^T)^{-1} = \\ &= [P'C]_{\times} P'(P^{-1}P)H(PH)^T((PH)(PH)^T)^{-1} = \\ &= [P'C]_{\times} P'P^{-1}(PH)(PH)^T((PH)(PH)^T)^{-1} = \\ &= [P'C]_{\times} P'P^{-1} = F. \end{aligned}$$

□

За пар камера (P, P') постоји јединствена фундаментална матрица F . Обрнуто не важи јер је фундаментална матрица F пара камера (P, P') , фундаментална матрица и сваког другог пара камера $(PH, P'H)$ где је H нека пројективна трансформација простора. Видећемо у теорему 3.4 да је то једина вишезначност, тј. да је скуп свих парова камера које одговарају фундаменталној матрици F баш $\{(PH, P'H) | H\}$ — пројективна трансформација простора.

С обзиром да имамо ову вишезначност одређености пара матрица камера за дату фундаменталну матрицу F , издвојићемо један репрезентативан пар којим можемо релативно лако да баратамо. То је пар који за прву матрицу камере има $[I | \mathbf{0}]$. Увек је могуће изабрати овакав пар матрица камера. Да би ово показали само треба за сваки пар камера (P, P') наћи одговарајућу регуларну матрицу H формата 4×4 тако да када пар (P, P') матрица камера помножимо њоме за прву добијамо $[I | \mathbf{0}]$. Матрица $H = P^{*-1}$, где је матрица P^* добијена од матрице P дописивањем четврте врсте тако да је новодобијена матрица регуларна, је тражена матрица.

Овакав пар матрица $P = [I | \mathbf{0}]$ и $P' = [M | \mathbf{m}]$ ћемо називати **канонски пар матрица**. Њихова фундаментална матрица је једнака $[\mathbf{m}]_{\times} M$ што се лако добија применом формуле 3.2.

Пре него што докажемо да фундаментална матрица одређује пар одговарајућих матрица камера до на десни умножак пројективном трансформацијом простора, докажимо помоћно тврђење:

Лема 3.1. Ако се матрица F ранга 2 може декомпоновати на два разна начина као $F = [\mathbf{a}]_{\times} A$ и $F = [\tilde{\mathbf{a}}]_{\times} \tilde{A}$ тада је $\tilde{\mathbf{a}} = k\mathbf{a}$ и $\tilde{A} = k^{-1}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T)$ за неко $k \neq 0$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Доказ: Како је $\mathbf{a}^T F = \mathbf{a}^T [\mathbf{a}]_{\times} A = \mathbf{0}$ и слично $\tilde{\mathbf{a}}^T F = \mathbf{0}$, то вектори \mathbf{a} и $\tilde{\mathbf{a}}$ припадају левом језгру матрице F . С обзиром да је матрица F ранга 2, то је одговарајуће језгру димензије 1. Како ни

један од вектора \mathbf{a} и $\tilde{\mathbf{a}}$ није нула вектор (иначе је F ранга 0), они генеришу исти векторски простор па мора бити $\tilde{\mathbf{a}} = k\mathbf{a}$ за неко $k \neq 0$.

Даље, из $[\tilde{\mathbf{a}}]_{\times} \tilde{A} = [\mathbf{a}]_{\times} A$ следи $[\mathbf{a}]_{\times} (k\tilde{A} - A) = 0$, односно колоне матрице $(k\tilde{A} - A)$ јесу у десном језгру матрице $[\mathbf{a}]_{\times}$ па је $(k\tilde{A} - A) = \mathbf{a}\mathbf{v}^T$ за неко $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Дакле, $\tilde{A} = k^{-1}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T)$. \square

Теорема 3.4. Нека су паром камера чије су матрице P и P' добијене исте слике као паром камера чије су матрице \tilde{P} и \tilde{P}' . Ако је матрица F фундаментална матрица за парове камера (P, P') и (\tilde{P}, \tilde{P}') тада постоји пројективна трансформација простора чија је матрица H таква да је $\tilde{P} = PH$ и $\tilde{P}' = P'H$.

Доказ: За сваки пар матрица камера можемо изабрати канонски пар матрица камера тако да је $P = \tilde{P} = [I \mid \mathbf{0}]$ применом одговарајућих пројективних трансформација простора на сваки од парова матрица камера:

$$\begin{aligned} (\underline{P}, \underline{P}') &= (PP^{*-1}, P'P'^{-1}) = ([I \mid \mathbf{0}], [A \mid \mathbf{a}]), \\ (\tilde{P}, \tilde{P}') &= (\tilde{P}\tilde{P}^{*-1}, \tilde{P}'\tilde{P}'^{-1}) = ([I \mid \mathbf{0}], [\tilde{A} \mid \tilde{\mathbf{a}}]). \end{aligned}$$

На основу теореме 3.3. фундаменталне матрице новодобијених парова матрица су једнаке почетној фундаменталној матрици F . Директним рачунањем фундаменталне матрице за први и други пар новодобијених матрица камера по формули 3.2 добијамо $F = [\mathbf{a}]_{\times} A = [\tilde{\mathbf{a}}]_{\times} \tilde{A}$. На основу леме 3.1. добијамо да је $\underline{P}' = [\tilde{A} \mid \tilde{\mathbf{a}}] = [k^{-1}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T) \mid k\mathbf{a}]$.

Ако изаберемо $\bar{H} = \begin{bmatrix} k^{-1}I & \mathbf{0} \\ k^{-1}\mathbf{v}^T & k \end{bmatrix}$ директним рачуном добијамо:

$$\underline{P}\bar{H} = [I \mid \mathbf{0}] \begin{bmatrix} k^{-1}I & \mathbf{0} \\ k^{-1}\mathbf{v}^T & k \end{bmatrix} = k^{-1}[I \mid \mathbf{0}] = k^{-1}\underline{P} \implies PP^{*-1}\bar{H} = k^{-1}\tilde{P}\tilde{P}^{*-1} \implies PP^{*-1}\bar{H}\tilde{P}^* = k^{-1}\tilde{P}.$$

$$\underline{P}'\bar{H} = [A \mid \mathbf{a}] \begin{bmatrix} k^{-1}I & \mathbf{0} \\ k^{-1}\mathbf{v}^T & k \end{bmatrix} = [k^{-1}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T) \mid k\mathbf{a}] = [\tilde{A} \mid \tilde{\mathbf{a}}] = \tilde{P}' \implies P'P'^{-1}\bar{H} = \tilde{P}'\tilde{P}'^{-1} \implies P'P'^{-1}\bar{H}\tilde{P}^* = \tilde{P}'$$

Ако означимо $H = P^{*-1}\bar{H}\tilde{P}^*$ имамо $PH = k^{-1}\tilde{P}$ и $P'H = \tilde{P}'$ где је H регуларна матрица формата 4×4 што је и требало доказати. \square

3.2.2 Формула канонског пара матрица камера за познато F

Показали смо да F одређује матрице камера до на пројективну трансформацију простора. Сада ћемо наћи формуле канонског пара матрица камера, за познато F . Пре тога, наведимо битну карактеризацију фундаменталне матрице.

Лема 3.2. Ненула матрица F је фундаментална матрица пара камера (P, P') ако и само ако је $A = P'^T F P$ антисиметрична.

Доказ: \Leftarrow) Нека је матрица A антисиметрична, тј. $A^T = -A$, и нека је $\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = a(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}$. Ако транспонујемо последњи израз добијамо $\mathbf{X}^T A^T \mathbf{X} = a(\mathbf{X})$, а сума последња два даје $2a(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T A \mathbf{X} + \mathbf{X}^T A^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (A + A^T) \mathbf{X} = 0$ за свако \mathbf{X} . Дакле, $\mathbf{X}^T P'^T F P \mathbf{X} = 0$ за свако \mathbf{X} , а како је $\mathbf{x}' = P' \mathbf{X}$ и $\mathbf{x} = P \mathbf{X}$, то је претходна једнакост еквивалентна са $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$ за сваки пар одговарајућих тачака $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ у сликама, па је на основу теореме 3.1 матрица F фундаментална матрица пара камера (P, P') .

\Rightarrow) Нека је F фундаментална матрица пара камера (P, P') , тј. $\mathbf{X}^T P'^T F P \mathbf{X} = 0$ за сваку тачку \mathbf{X} у простору, тј. $\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = 0$ за свако \mathbf{X} . Како је онда $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^T A (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = 0$ за свака два вектора \mathbf{X} и \mathbf{Y} , расписивањем овог изрази, и користећи $\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = 0$ и $\mathbf{Y}^T A \mathbf{Y} = 0$, добијамо $\mathbf{X}^T A \mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^T A \mathbf{X}$ што је еквивалентно са тим да је матрица A антисиметрична. \square

Теорема 3.5. Нека је F фундаментална матрица, и нека је

$$P = [I \mid \mathbf{0}] \text{ и } P' = [[\mathbf{e}']_{\times} F \mid \mathbf{e}']$$

где је \mathbf{e}' епипол такав да је $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$. Тада је (P, P') пар матрица камера чија је фундаментална матрица управо матрица F .

Доказ: Покажимо прво су матрице P и P' матрице неких камера, тј. да су ранга 3. Матрица P је очигледно потребног ранга. Како је $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$ колоне матрице F су ортогоналне на вектор \mathbf{e}' , па како је F ранга 2 њене колоне генеришу раван ортогоналну на \mathbf{e}' . Колоне матрице $[\mathbf{e}']_{\times} F$ јесу векторски производи вектора \mathbf{e}' са колонама матрице F па тиме генеришу исту раван ортогоналну на вектор \mathbf{e}' . Зато вектор \mathbf{e}' не лежи у равни генерисаној колонама матрице $[\mathbf{e}']_{\times} F$, па је матрица $P' = [[\mathbf{e}']_{\times} F \mid \mathbf{e}']$ ранга 3.

Како је матрица $[\mathbf{e}']_{\times}$ антисиметрична, то је и матрица

$$P'^T F P = \begin{bmatrix} F^T [\mathbf{e}']_{\times}^T \\ \mathbf{e}'^T \end{bmatrix} F [I \mid \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} F^T [\mathbf{e}']_{\times}^T F & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'^T F & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^T [\mathbf{e}']_{\times}^T F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

антисиметрична, па је према лемми 3.2 матрица F фундаментална матрица за пар матрица камера (P, P') . □

Можемо приметити да је лева 3×3 подматрица матрице P' из претходне теореме сингуларна, тако да одговарајућа камера није коначна пројективна камера, већ камера са центром пројектовања у бесконачности.

У доказу теореме 3.4 смо, између осталог, показали да пар матрица камера $(\underline{P}, \underline{P}') = ([I \mid \mathbf{0}], [A \mid \mathbf{a}])$ има исту фундаменталну матрицу као пар матрица камера $(\tilde{\underline{P}}, \tilde{\underline{P}}') = ([I \mid \mathbf{0}], [k^{-1}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T) \mid k\mathbf{a}])$. Користећи то долазимо до општијег решења за пар матрица камера (P, P') чија је фундаментална матрица дата матрица F :

$$P = [I \mid \mathbf{0}] \text{ и } P' = [\lambda^{-1}([\mathbf{e}']_{\times} F + \mathbf{e}'\mathbf{v}^T) \mid \lambda\mathbf{e}'],$$

где је $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ и $\lambda \neq 0$.

3.3 Реконструкција матрица камера и структуре просторног објекта

У овој секцији ћемо размотрити како и до ког нивоа је могуће извршити реконструкцију просторног објекта и уопште целе сцене, на основу две слике. Почетна претпоставка је да су познате координате $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ пројекција одговарајућих просторних тачака \mathbf{X}_i , док координате самих просторних тачака нису познате, као ни позиција, оријентација и калибрација двеју камера којима су добијене пројекције. Циљ реконструкције је да се одреде матрице камера P и P' , као и координате просторних тачака \mathbf{X}_i таквих да је:

$$\mathbf{x}_i = P\mathbf{X}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{x}'_i = P'\mathbf{X}_i,$$

за све i .

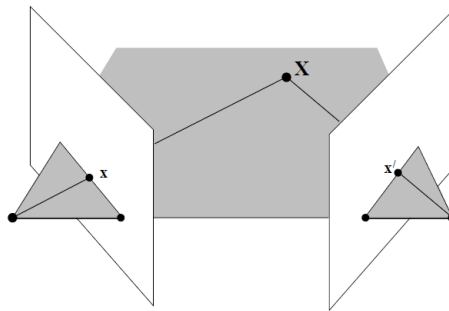
3.3.1 Метод реконструкције

- (i) Одређивање фундаменталне матрице F на основу кореспонденција тачака $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ у пројекцијама како је објашњено у подсекцији 3.1.3.
- (ii) Одређивање матрица камера по формули датај у теорему 3.5.
- (iii) Триангулација просторних тачака, уз помоћ матрица камера P и P' и одговарајућих тачака $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ у пројекцијама, које задовољавају услов $\mathbf{x}_i'^T F \mathbf{x}_i = 0$.

Геометријски, тражимо пресек зрака одређеног центром прве камере (C) и тачком прве пројекције (\mathbf{x}), и зрака одређеног центром друге камере (C') и тачком друге пројекције (\mathbf{x}') непознате тачке \mathbf{X} . Како тачка \mathbf{x}' лежи на епиполарној правој $F\mathbf{x}$, поменути зраци кроз тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' ће лежати у заједничкој епиполарној равни, као што је приказано на слици 3.7 и зраци ће се заиста пресећи.

Једине тачке у простору чије се координате не могу одредити на овај начин јесу тачке са *основице*, јер се одговарајући зраци пројектовања тих тачака не секу у јединственој тачки већ се поклапају. То су тачке које се пројектују у епиполове.

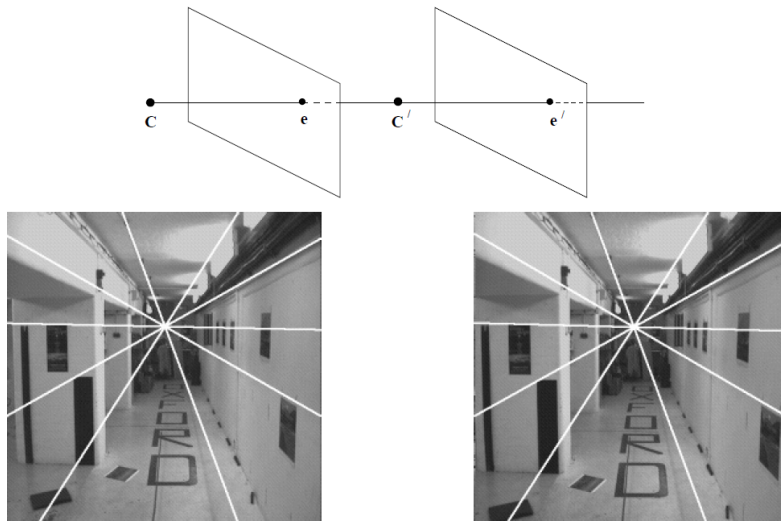
Метод триангулације просторних тачака је детаљно објашњен у секцији 3.6.



Слика 3.7: Триангулација. Ако је задовољено $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$, зраци који су инверзне слике пројектовања у \mathbf{x} и \mathbf{x}' ће лежати у истој равни и пресећи ће се у одговарајућој тачки \mathbf{X} у простору.

3.3.2 Вишезначност реконструкције

Без познавања додатних параметара сцене није могућа реконструкција тачне позиције објекта, нити његове оријентације у простору само из две пројекције (нити из више пројекција). На пример, на основу две слике ходника (слика 3.8) није могуће одредити његову ширину и висину, нити правац у ком се простире. Ми из те две слике немамо представу да ли је ширина ходника $2m$ или су то слике ходника из кућице за лутке, па је његова ширина $10m$. Исто тако не можемо да проценимо да ли се ходник простире на север, или југо-запад.

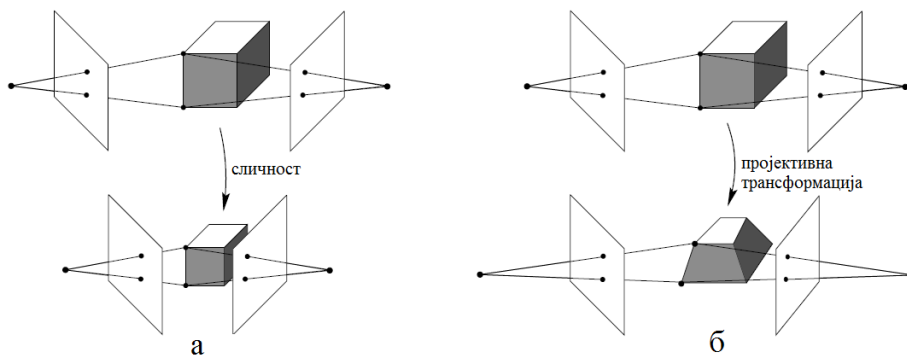


Слика 3.8: Две слике ходника истом камером. Цentar камере је транслиран при другом сликању, у односу на прво.

Имајући то у виду, без познавања додатних параметара сцене, реконструкцију можемо да извршимо, у најбољем случају, до на трансформацију сличности простора (транслација, ротација и скалирање).

Формално, нека су тачке из простора \mathbf{X}_i матрицама камера P и P' пројектоване у тачке \mathbf{x}_i и \mathbf{x}'_i . Тачке \mathbf{X}_i , заједно са матрицама камера представљају једну **реконструкцију сцене** из кореспонденција двеју пројекција. Нека је $H_s = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & \lambda \end{bmatrix}$ просторна трансформација сличности (R - матрица ротације, \mathbf{t} - вектор транслације, λ^{-1} - коефицијент скалирања). Како је $\mathbf{x}_i = P\mathbf{X}_i = (PH_s^{-1})(H_s\mathbf{X}_i)$ и $\mathbf{x}'_i = P'\mathbf{X}_i = (P'H_s^{-1})(H_s\mathbf{X}_i)$, то тачке $H_s\mathbf{X}_i$ заједно са матрицама камера PH_s^{-1} и $P'H_s^{-1}$ респективно представљају такође једну реконструкцију сцене из истих кореспонденција $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$.

Штавише, ако је $P = K[R_p | \mathbf{t}_p]$, тада је $PH_s^{-1} = K[R_p | \mathbf{t}_p] \begin{bmatrix} R^{-1} & -\lambda^{-1}R^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & \lambda^{-1} \end{bmatrix} = K[R_p R^{-1} | \mathbf{t}']$, за неко \mathbf{t}' , па можемо да закључимо да се калибрациона матрица камере не мења ако матрицу камере помножимо са H_s^{-1} , што се види и на слици 3.9.а.



Слика 3.9: **Вишезначност реконструкције.** (а) Како је калибрација камера иста код обе реконструкције, угао између одговарајућих зракова пројектовања у првој и другој реконструкцији мора бити исти (погледати секцију 2.5). Трансформација сличности примењена на просторни објекат и позицију камера не мења углове између зракова пројектовања у сцени. (б) Пројективна трансформација примењена на просторни објекат и позицију камера не утиче на координате тачака у слици, али мења углове између зракова пројектовања у сцени.

Аналогно се показује да је у општем случају могуће извршити реконструкцију сцене, тј. одредити

тачке \mathbf{X}_i и матрице камера P и P' , до на пројективну трансформацију простора, што се може закључити и на основу слике 3.9.б. У наредној теорему ћемо доказати да је ово једина вишезначност реконструкције просторног објекта на основу две пројекције.

Теорема пројективне реконструкције

Теорема 3.6. Нека су $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ кореспонденције одговарајућих тачака двеју пројекција, и нека је фундаментална матрица F јединствено одређена из тих кореспонденција тако да важи $\mathbf{x}'_i{}^T F \mathbf{x}_i = 0$ за све i . Ако су $(P_1, P'_1, \{\mathbf{X}_{1,i}\})$ и $(P_2, P'_2, \{\mathbf{X}_{2,i}\})$ две реконструкције из кореспонденција $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$, тада постоји несингуларна матрица H таква да је $P_2 = P_1 H^{-1}$, $P'_2 = P'_1 H^{-1}$ и $\mathbf{X}_{2,i} = H \mathbf{X}_{1,i}$ за све i сем за оне за које је $F \mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i F = \mathbf{0}$.

Доказ: Како је фундаментална матрица јединствено одређена на основу кореспонденција $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ тако да $\mathbf{x}'_i{}^T F \mathbf{x}_i = 0$ за свако i , и $(P_1, P'_1, \{\mathbf{X}_{1,i}\})$ је једна реконструкција следи да је $(P'_1 \mathbf{X}_{1,i})^T F (P_1 \mathbf{X}_{1,i}) = 0$ за све i , тј. F је фундаментална матрица пара камера (P_1, P'_1) . Аналогно, F је фундаментална матрица и пара камера (P_2, P'_2) , па према теорему 3.4 постоји пројективна трансформација простора H таква да је $P_2 = P_1 H^{-1}$ и $P'_2 = P'_1 H^{-1}$, што је и требало доказати.

Што се тиче тачака, $\mathbf{x}_i = P_1 \mathbf{X}_{1,i} = P_1 H^{-1} H \mathbf{X}_{1,i} = P_2 (H \mathbf{X}_{1,i})$, док је са друге стране $\mathbf{x}_i = P_2 \mathbf{X}_{2,i}$. Следи да је $P_2 (H \mathbf{X}_{1,i}) = P_2 \mathbf{X}_{2,i}$, што значи да се тачке $H \mathbf{X}_{1,i}$ и $\mathbf{X}_{2,i}$ сликају у исту тачку камером P_2 , тј. тачке $H \mathbf{X}_{1,i}$, $\mathbf{X}_{2,i}$ и \mathbf{C}_2 (центар камере P_2) су колинеарне. На исти начин се показује да су тачке $H \mathbf{X}_{1,i}$, $\mathbf{X}_{2,i}$ и \mathbf{C}'_2 (центар камере P'_2) колинеарне. Могућа су два случаја:

1^о уочене праве се секу и пресечна тачка је управо $\mathbf{X}_{2,i} = H \mathbf{X}_{1,i}$,

2^о уочене праве се поклапају и тада се тачке $H \mathbf{X}_{1,i}$ и $\mathbf{X}_{2,i}$ пројектују у епиполе, тј. $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}$ и $\mathbf{x}'_i = \mathbf{e}'$, па је $F \mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i F = \mathbf{0}$.

Тврђење је доказано. □

3.4 Директна реконструкција

Претходна теорема даје изузетно битан резултат, јер реконструкција просторног објекта и камера која се добија методом описаном у подсекцији 3.3.1 се од стварне реконструкције (до на просторну трансформацију сличности) разликује само за пројективну трансформацију објекта (простора). Објекат који добијемо том реконструкцијом је тражени објекат, само „искривљен“ неком пројективном трансформацијом простора. Када одредимо ту пројективну трансформацију простора њом можемо да „исправимо“ простор, и тиме добијемо пуну реконструкцију просторног објекта.

Прецизније, ако смо дошли до реконструкције чије су матрице камера и координате тачака у простору $(P, P', \{X_i\})$, а у пуној реконструкцији матрице камера и координате тачака су $(P_E, P'_E, \{X_{Ei}\})$, на основу теореме 3.6 закључујемо да су реконструкције повезане несингуларном матрицом H формата 4×4 на следећи начин:

$$P_E = PH^{-1}, P'_E = P'H^{-1} \text{ и } X_{Ei} = HX_i.$$

Притом, матрица H је непозната, али иста за све тачке.

Ако су нам за неке од тачака X_i познате њихове стварне координате X_{Ei} у простору (и то бар пет њих у слободном положају), можемо да одредимо матрицу H решавањем система линеарних једначина $X_{Ei} = HX_i$. Применом матрице H на остале тачке добијемо пуну реконструкцију, до на трансформацију сличности.

Треба напоменути да нам реконструкција до на пројективну трансформацију простора може дати, за неке потребе, задовољавајуће резултате. На пример, на основу такве реконструкције можемо да проценимо у којој тачки нека права продире неку раван, као и да уочимо остала пројективна својства.

Како се срећемо са више типова реконструкција, могли бисмо да их именујемо:

- **Пројективна реконструкција** је реконструкција која се од стварне разликује за пројективну трансформацију простора. Код ње, у општем случају постоји пројективна дисторзија простора (погледати подсекцију 1.2.1).
- **Афина реконструкција** се од стварне разликује за афину трансформацију простора (она која бесконачну раван оставља фиксном). Код ње, у општем случају постоји афина дисторзија простора (погледати подсекцију 1.2.3).
- **Метричка реконструкција** се од стварне разликује за трансформацију сличности простора.

Овде смо са пројективне реконструкције прешли директно на метричку, али је то захтевало посебне додатне информације о просторном објекту. Када немамо те додатне податке, постоји други начин да дођемо до метричке реконструкције објекта. Он подразумева реконструкцију корак-по-корак, где у првом кораку одређујемо афину, а у другом метричку реконструкцију просторног објекта. Наравно, и он захтева неке додатне информације о просторном објекту, али нешто другачије од претходно наведених.

3.5 Слојевит приступ реконструкцији

3.5.1 Афина реконструкција

Нека смо неком методом дошли до пројективне реконструкције сцене $(P, P', \{X_i\})$. Та реконструкција се од стварне $(P_E, P'_E, \{X_{E_i}\})$ разликује за пројективну трансформацију простора, H , која задовољава $X_{E_i} = HX_i$. С обзиром да пројективна трансформација, у општем случају, тачке са бесконачне равни може пресликати у коначне, може се десити да у нашој реконструкцији нека коначна раван π одговара бесконачној равни стварне реконструкције. С обзиром да таква раван π у стварној реконструкцији има координате $(0, 0, 0, 1)^T$ битан корак у „исправљању“ реконструкције би био постављање равни π у канонски положај $(0, 0, 0, 1)^T$. То можемо урадити применом одговарајуће пројективне трансформације на реконструкцију којом располажемо.

Имајући у виду како пројективна трансформација простора делује на равни (теорема 1.8), треба наћи матрицу H такву да $H^{-T}\pi = (0, 0, 0, 1)^T$. Једна таква матрица је

$$H = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \pi^T & \end{bmatrix},$$

с обзиром да је заиста $H^T(0, 0, 0, 1)^T = \pi$, а тиме и $H^{-T}\pi = (0, 0, 0, 1)^T$. Применом матрице H добијемо реконструкцију $(PH^{-1}, P'H^{-1}, \{HX_i\})$ код које је бесконачна раван у канонском положају, па се она од стварне реконструкције разликује за пројективну трансформацију простора која фиксира бесконачну раван као скуп. С обзиром да пројективна трансформација простора фиксира бесконачну раван ако и само ако је афина, реконструкција коју смо добили је афина.

Треба напоменути да претходно поменута матрица H неће бити регуларна ако је последња координата равни π нула (ако π садржи координатни почетак), и таква нам неће бити од користи јер дефинише дегенерисано пројективно пресликавање. Једно од исправних решења може бити Хаусхолдерова¹ матрица, $H_v = I - 2vv^T/v^T v$, где је $v = \pi + \|\pi\|(0, 0, 0, 1)^T$. За њу важи $H_v^T H_v = I$ тако да је несингуларна, а директним рачуном се добија $H_v \pi = (0, 0, 0, -\|\pi\|^2(\|\pi\| + (0, 0, 0, 1)\pi))$ што је жељени резултат.

Идентификација слике бесконачне равни

Главни корак ка афиној реконструкцији представља идентификацију равни π (слику бесконачне равни, у нашој реконструкцији). За то је потребно идентификовати три тачке за које се зна да у стварности леже на бесконачној равни, а да би то постигли потребно је доћи до додатних информација о самом објекту, поред његове две пројекције.

Паралелне праве: До тачака у бесконачности можемо доћи ако у реконструкцији идентификујемо парове правих које су у стварности паралелне. Пресек двеју паралелних правих је тачка која лежи на бесконачној равни, а пројекција ове тачке је тачка ишчезавања тих двеју правих и налази се у пресеку њихових пројекција у сликама. Ако успемо да нађемо три пара паралелних правих тако да сваки пар има други правац имаћемо три разне тачке ишчезавања, што нам је довољно да идентификујемо слику бесконачне равни.

Треба напоменути да не морамо да одредимо одговарајуће тачке ишчезавања у обе слике. Ако одредимо тачку ишчезавања v у првој пројекцији на основу познавања правих које су у стварности паралелне, одговарајућа тачка ишчезавања у другој пројекцији се налази у пресеку пројекције једне од посматраних паралелних правих l' и еиполарне праве Fv тачке v . С обзиром да се тражена просторна тачка X са бесконачне равни у првој слици пројектује у тачку v она задовољава $([v]_{\times} P)X = \mathbf{0}$, а како се у другој слици X пројектује у тачку праве l' она задовољава и $(l'^T P')X = 0$. Имајући у виду да одговарајуће тачке ишчезавања $v \leftrightarrow v'$ задовољавају еиполарни услов претходне две једначине су еквивалентне услову да су пројекције тачке X баш v и v' , па се тачка X са слике бесконачне равни може одредити као решење претходне две једначине.

¹Alston Scott Householder (1904-1993.)

Односи дужина на правој: Тачке са бесконачне се могу одредити и на други начин. Ако идентификујемо две дужи на правој чији је стварни однос дужина познат тачка ишчезавања те праве се може одредити на начин описан у подсекцији 1.1.2. Потом је могуће одредити и саму тачку са слике бесконачне равни која се пројектује у одговарајуће тачке ишчезавања.

Треба напоменути да нам је за неке потребе и афина реконструкција просторног објекта довољна. На пример, из афине реконструкције можемо да проценимо где се налази средиште неке дужи или да закључимо које праве су паралелне међусобом или некој равни, с обзиром да су ти односи инваријантни при афиним пресликавања и очигледни у афиној реконструкцији.

3.5.2 Метричка реконструкција

Кључ метричке реконструкције је идентификација слике апсолутне конике, Ω_∞ (погледати подсекцију 1.2.2) на бесконачној равни. Да се подсетимо, апсолутна коника је коника која у метричкој реконструкцији лежи у бесконачној равни и садржи тачке $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ које задовољавају једначину $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ на бесконачној равни ($X_4 = 0$).

Претпоставимо да располажемо афином реконструкцијом просторног објекта. То значи да су координате просторних тачака одређене до на афину трансформацију простора и да се бесконачна раван налази у канонском положају $(0, 0, 0, 1)$. Како афина трансформација фиксира бесконачну раван (али не тачка по тачка) апсолутна коника се у нашој реконструкцији не мора налазити у канонском положају $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$, него може бити мало измештена на бесконачној равни. Претпоставимо да смо некако успели да одредимо где се налази измештена апсолутна коника. Тада треба применити афину трансформацију на нашу афину реконструкцију која би измештену апсолутну конику поставила у канонски положај. Реконструкција коју бисмо тада добили би се од стварне разликовала за пројективну трансформацију простора која фиксира апсолутну конику, односно трансформацију сличности (теорема 1.9). То значи да тада располажемо метричком реконструкцијом сцене.

Ако успемо да у једној од пројекција нађемо слику измештене апсолутне конике, тада инверзном пројекцијом можемо да одредимо баш измештену апсолутну конику. Она се налази у пресеку конуса, који је инверзна слика пројектовања измештене апсолутне конике, и бесконачне равни.

Теорема 3.7. Претпоставимо да располажемо афином реконструкцијом сцене. Нека је у једној од пројекција, којој одговара матрица камере $P = [M \mid \mathbf{m}]$, идентификована слика измештене апсолутне конике, ω . Тада се афина реконструкција може трансформисати на метричку применом просторне трансформације

$$H = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

где је A дефинисана формулом: $AA^T = (M^T \omega M)^{-1}$

Доказ: При трансформацији H , матрица камере P се трансформише у матрицу $P_M = PH^{-1} = [M_M \mid \mathbf{m}_M]$. „ M “ у индексу означава да је то матрица прве камере у метричкој реконструкцији, у којој апсолутна коника није измештена, него се налази у канонском положају на бесконачној равни.

Ако је $H^{-1} = \begin{bmatrix} A & \\ & 1 \end{bmatrix}$, тада је $M_M = MA$. Лева 3×3 подматрица матрице камере се може декомпоновати на матрицу калибрације и ротације као $M_M = KR$. Тада, је на основу теореме 2.9, $\omega^{-1} = KK^T = M_M R^T (M_M R^T)^T = M_M M_M^T = MA(MA)^T$, тј. $\omega^{-1} = MAA^T M^T$. Дакле, матрица A је одређена формулом $AA^T = (M^T \omega M)^{-1}$. До ње можемо доћи Чолешки² декомпозицијом матрице $(M^T \omega M)^{-1}$. \square

Идентификација слике измештене апсолутне конике

Главни корак ка метричкој реконструкцији представља идентификацију слике измештене апсолутне конике, ω у једној од пројекција. Њену матрицу можемо да одредимо на начин, како је описано у табели

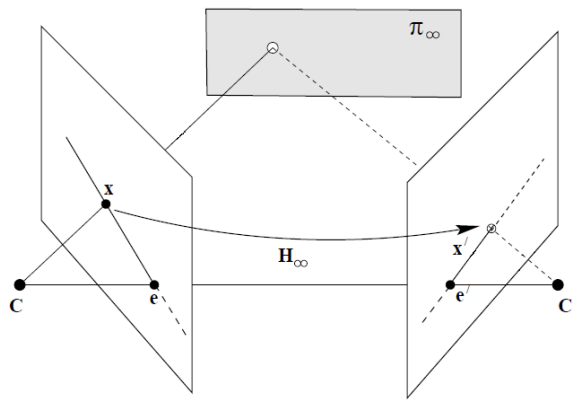
²André-Louis Cholesky (1875-1918.)

2.1 секције 2.7. Међутим, како сада располажемо са две пројекције простора, на основу њихове везе можемо да поставимо још услова одређености слике измештене апсолутне конике.

Ако је коришћена иста камера Претходно поменуते услове из табеле 2.1 постављамо за слику измештене апсолутне конике само у једној пројекцији. Исти поступак можемо да спроведемо за обе пројекције, а потом да повежемо резултате које добијемо.

Измештена апсолутна коника лежи у бесконачној равни π_∞ што је јако битно својство. Све тачке са π_∞ су облика $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_\infty^T, 0)^T$. Оне се првом камером $P = [M \mid \mathbf{m}]$ сликају у $\mathbf{x} = P\mathbf{X} = M\mathbf{x}_\infty$, а камером $P' = [M' \mid \mathbf{m}']$ у $\mathbf{x}' = P'\mathbf{X} = M'\mathbf{x}_\infty$. Зато важи $\mathbf{x}' = M'M^{-1}\mathbf{x}$, тј. постоји раванска хомографија која слике тачака са π_∞ у првој пројекцији слика у одговарајуће слике тачака са π_∞ у другој пројекцији (слика 3.10). Како је та раванска хомографија индукована бесконачном равни, назваћемо је *бесконачна хомографија*:

$$H_\infty = M'M^{-1}.$$



Слика 3.10: **Бесконачна хомографија.**

С обзиром да и апсолутна коника Ω_∞ лежи у бесконачној равни, њене слике ω и ω' су на основу теореме 1.2 повезане на следећи начин:

$$\omega' = H_\infty^{-T} \omega H_\infty^{-1}.$$

Ако су слике добијене пројектовањем истом камером из разних положаја, то значи да је матрица калибрација иста за камере P и P' . Како је слика бесконачне конике одређена калибрационом матрицом са $\omega = K^{-T}K^{-1}$, то су онда њене слике исте у обе пројекције. Зато важи:

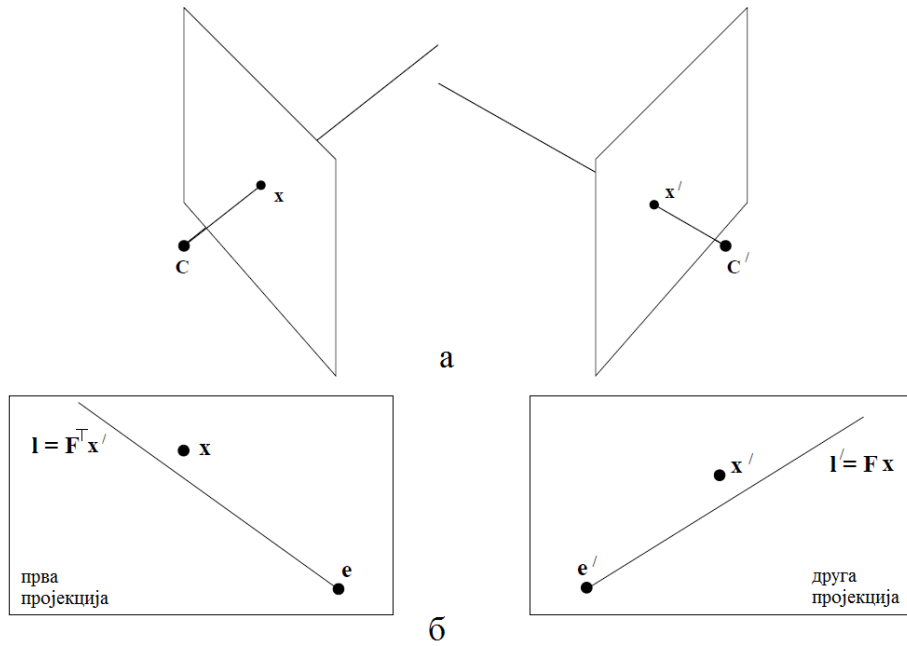
$$\omega = H_\infty^{-T} \omega H_\infty^{-1},$$

што је врло битан резултат који се може искористити при одређивању слике измештене апсолутне конике.

3.6 Триангулација тачака просторног објекта

Под триангулацијом тачке просторног објекта подразумевамо одређивање координата тачке у простору \mathbf{X} за коју су познате њене пројекције \mathbf{x} , \mathbf{x}' , као и матрице камера, P и P' којима су добијене пројекције.

Ми ћемо узети у обзир да постоје одређене грешке у мерама координата тачака у пројекцијама (што је скоро неизбежно), и приказаћемо начин да се те грешке превазиђу. Узимајући у обзир те грешке, наиван приступ триангулацији где бисмо тачку \mathbf{X} тражили као пресек зракова пројектовања у тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' неће дати жељене резултате, јер се посматрани зраци неће пресећи у општем случају што је приказано и на слици 3.11. То значи да не постоји тачка \mathbf{X} која задовољава $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$, $\mathbf{x}' = P'\mathbf{X}$, или еквивалентно, да тачке у пројекцијама не задовољавају $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$.



Слика 3.11: **Неуспешна триангулација.** (а) Зраци пројектовања у тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' су мимоилазни у општем случају (б) Епиполарна геометрија тачака \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Обележене тачке „за мало“ не задовољавају епиполарни услов, али довољно да се оригинална тачка \mathbf{X} у простору не може лако наћи.

Битна карактеристика коју метод триангулације мора да има, је да је инваријантан при афиној (односно пројективној) трансформацији ако су матрице камера одређене до на афину (односно пројективну) трансформацију простора. Формално, нека је τ метод триангулације који за улазне податке има пар матрица камера (P, P') и пројекције тачке \mathbf{X} њима, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, а као резултат даје тачку \mathbf{X} , тј. $\mathbf{X} = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', P, P')$. Кажемо да је метод триангулације τ инваријантан при трансформацији H ако је

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', P, P') = H^{-1} \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', PH, P'H).$$

Ово значи да је резултат триангулације при трансформисаним камерама са H , тачка трансформисана са H .

Треба приметити да нема смисла да код пројективне реконструкције минимизујемо грешку у простору. На пример, с обзиром да се, у општем случају, зраци пројектовања неће пресећи у траженој тачки \mathbf{X} , један начин да је приближно одредимо је да нађемо средиште исечка између зракова, заједничке нормале на њих. Како појмови, као што је дужина и ортогоналност нису валидни у контексту пројективне геометрије, овај метод ће давати различите резултате, у зависности каквом реконструкцијом располажемо, и зато није пројективно инваријантан!

У подсекцији 3.6.2. ћемо приказати оптималан метод триангулације који је пројективно инваријантан.

3.6.1 Метод линеарне триангулације

Ако су нам познате пројекције просторне тачке \mathbf{X} , \mathbf{x} и \mathbf{x}' , као и матрице камера, P и P' , и задовољено је $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}' = P'\mathbf{X}$, \mathbf{X} можемо одредити као решење система формираног од претходне две матричне једначине. С обзиром да су све репрезентације хомогене у свакој једначини нам се јавља по један заједнички коефицијент скалирања. Те коефицијенте можемо да избегнемо малом модификацијом једначина тако да

би нпр. услов пројектовања у \mathbf{x} био $\mathbf{x} \times (P\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ који је за $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ и $P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T} \\ \mathbf{p}^{2T} \\ \mathbf{p}^{3T} \end{bmatrix}$ еквивалентан са

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \mathbf{p}^{1T}X & \mathbf{p}^{2T}X & \mathbf{p}^{3T}X \end{vmatrix} = l \iff \begin{cases} y(\mathbf{p}^{3T}X) - z(\mathbf{p}^{2T}X) = 0 \\ z(\mathbf{p}^{1T}X) - x(\mathbf{p}^{3T}X) = 0 \\ x(\mathbf{p}^{2T}X) - y(\mathbf{p}^{1T}X) = 0. \end{cases}$$

У претходном систему, ако прву једначину помножимо са x , другу са y и саберемо их добићемо трећу помножену са z , па можемо да закључимо да су само по две линеарно независне и оне су нам од користи. Аналогно одређујемо услове пројектовања у тачку $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ матрицом P' . Коначно, услов који треба да задовољава непознат хомоген вектор X је да се налази у десном језгру матрице

$$\begin{bmatrix} y\mathbf{p}^{3T} - z\mathbf{p}^{2T} \\ z\mathbf{p}^{1T} - x\mathbf{p}^{3T} \\ y'\mathbf{p}'^{3T} - z'\mathbf{p}'^{2T} \\ z'\mathbf{p}'^{1T} - x'\mathbf{p}'^{3T} \end{bmatrix}.$$

Као што је објашњено на почетку ове секције, овај метод нам неће дати најбоље резултате, и зато треба направити неке модификације.

3.6.2 Оптималан метод триангулације

Главни разлог што се одговарајући зраци пројектовања у одговарајуће тачке $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ неће пресећи је тај што у општем случају тачке \mathbf{x} и \mathbf{x}' не задовољавају услов епиполарности, него је $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} \approx 0$. До тога долази због немогућности савршеног обележавања тачака и њихових координата у пројекцијама. Тачке које нам требају јесу $\hat{\mathbf{x}} \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}'$ које се налазе близу обележених $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ и задовољавају баш $\hat{\mathbf{x}}'^T F \hat{\mathbf{x}} = 0$ као на слици 3.12. Тако ћемо их и тражити, као тачке у којима функција

$$C(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}') = d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})^2 + d(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')^2 \quad (3.5)$$

достигне минимум, при услову $\hat{\mathbf{x}}'^T F \hat{\mathbf{x}} = 0$, где је d еуклидско растојање тачака.

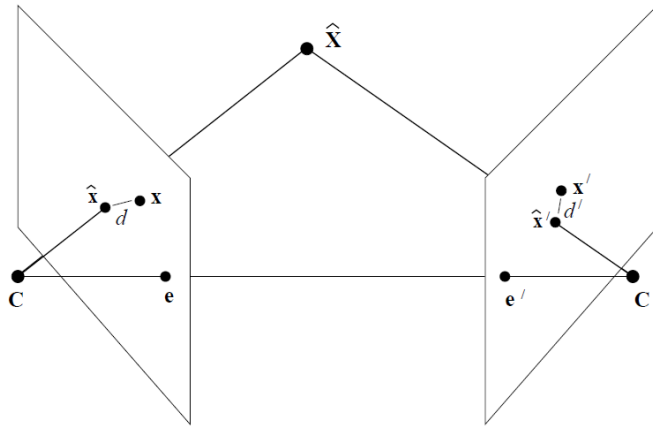
Пар тачака који задовољава епиполарни услов мора лежати на одговарајућем пару епиполарних правих, зато $\hat{\mathbf{x}}$ мора лежати на епиполарној правој l и $\hat{\mathbf{x}}'$ на одговарајућој l' у другој слици. Са друге стране, сваки пар тачака који лежи на пару епиполарних правих (l, l') ће задовољавати епиполарни услов. Ово ће бити тачно и за пар тачака $(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}'_\perp)$ где је \mathbf{x}_\perp тачка на l која је најближа познатој тачки \mathbf{x} (ортогонална пројекција \mathbf{x} на l), и слично је \mathbf{x}'_\perp тачка на l' најближа тачки \mathbf{x}' , као на слици 3.13. За погодно изабран пар одговарајућих епиполарних линија (l, l') можемо узети $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}') = (\mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}'_\perp)$. Сада имамо још $d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = d(\mathbf{x}, l)$ и $d(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') = d(\mathbf{x}', l')$, где је $d(\mathbf{x}, l)$ ортогонално растојање тачке \mathbf{x} до праве l , па грешку коју желимо да минимизујемо сада можемо да запишемо на други начин као:

$$d(\mathbf{x}, l)^2 + d(\mathbf{x}', l')^2 \quad (3.6)$$

у функцији уређеног пара (l, l') одговарајућих епиполарних правих.

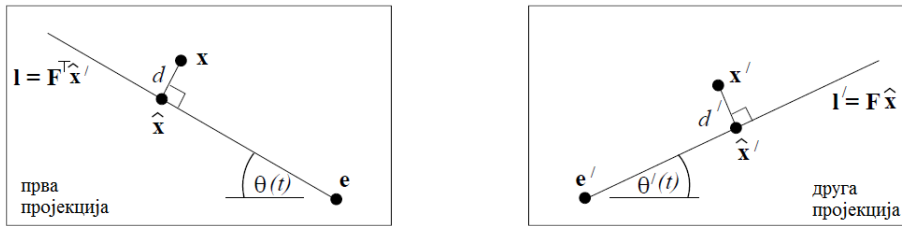
Претходно поменутоу грешку ћемо минимизовати на следећи начин:

- (i) Како је прамен епиполарних правих у првој слици једнодимензиони пројективни простор, он се може изразити у функцији од неког параметра t . Нека је зато епиполарна права у првој слици $l(t)$.
- (ii) Користећи фундаменталну матрицу F можемо наћи одговарајућу епиполарну праву $l'(t)$ у другој слици.



Слика 3.12: Минимизовање геометријске грешке. Тачка \widehat{X} се пројектује у тачке \widehat{x} и \widehat{x}' . Тачке $\widehat{x} \leftrightarrow \widehat{x}'$ задовољавају епиполарни услов за разлику од тачака $x \leftrightarrow x'$. Тачка \widehat{X} је одређена тако да је грешка пројектовања $d^2 + d'^2$ минимална.

(iii) Сада грешку можемо да изразимо експлицитно у функцији параметра t као $C(t) = d(x, l(t))^2 + d(x', l'(t))^2$. Само још треба наћи минимум функције $C(t)$.



Слика 3.13: Пројекције \widehat{x} и \widehat{x}' просторне тачке \widehat{X} леже на пару одговарајућих епиполарних правах.

Наведимо поступак минимизације грешке:

Нека су пројекције непознате тачке X , тачке $x = (x, y, 1)^T$ и $x' = (x', y', 1)^T$. За почетак можемо претпоставити да се ни једна од пројекција не поклапа са епиполом. У случају да је $(x, x') = (e, e')$ не постоји начин да се одреди положај тражене тачке X у простору јер се она тада налази негде на основици и одговарајући зраци пројектовања се поклапају; а ако се нпр. само прва пројекција поклапа са епиполом, онда се тражена тачка поклапа са центром друге камере, што нам није посебно интересантно.

С обзиром да се пројекције не поклапају са епиполовима, можемо да применимо изометијску трансформацију на сваку од слика која ће тачке x и x' да премести у координатни почетак $(0, 0, 1)^T$ у свакој слици, а епиполове e и e' на x -осу тако да су њихове хомогене координате редом $(1, 0, f)^T$ и $(1, 0, f')^T$. Како су те трансформације раванске изометрије, оне неће утицати на суму (3.6). Након примене наведених трансформација фундаментална матрица двеју пројекција ће се променити као што је објашњено на почетку подсекције 3.2.1, и нека је она једнака матрици F . Како је задовољено $F(1, 0, f)^T = (1, 0, f')F = 0$ фундаментална матрица је облика:

$$F = \begin{bmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Циљану епиполарну праву у првој слици можемо да запишемо као праву која пролази кроз тачке $(0, t, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$ и $e = (1, 0, f)^T$, тј. $l(t) = (0, t, 1) \times (1, 0, f) = (tf, 1, -t)$. Квадрат растојања од $x = (0, 0, 1)^T$ ће бити:

$$d(x, l(t))^2 = \frac{t^2}{1 + (tf)^2}.$$

Одговарајућа епиполарна права у другој слици је тада:

$$\mathbf{l}'(t) = F(0, t, 1)^T = (-f'(ct + d), at + b, ct + d)^T, \quad (3.8)$$

а квадрат њеног растојања од \mathbf{x}'

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{l}'(t))^2 = \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2}.$$

Сума квадрата растојања је дакле:

$$s(t) = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2}. \quad (3.9)$$

Наш задатак је да одредимо апсолутни минимум ове функције, и то можемо да урадимо елементарним методама математичке анализе.

Како је

$$s'(t) = \frac{t((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2 - (ad - bc)(1 + f^2t^2)^2(at + b)(ct + d)}{(1 + f^2t^2)((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2} \quad (3.10)$$

апсолутни минимум ће функција $s(t)$ достићи у неком од корена полинома шестог степена који се налази у бројиоцу првог извода функције $s(t)$, или у бесконачности (тада је $\mathbf{l} = (f, 0, -1)$, тј. $l : fx = 1$).

Резимираћемо претходно наведен поступак у наредном алгоритму:

Оптималан метод триангулације

Циљ: За познате пројекције $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ просторне тачке \mathbf{X} , и фундаменталну матрицу F одредити одговарајуће тачке $\hat{\mathbf{x}} \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}'$ које минимизују функцију геометријске грешке дату формулом 3.5 при услову $\hat{\mathbf{x}}'^T F \hat{\mathbf{x}} = 0$.

Алгоритам:

- (i) Дефинисати матрице транслација

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ & 1 & -y \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ и } T' = \begin{bmatrix} 1 & -x' \\ & 1 & -y' \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

које тачке $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ и $\mathbf{x}' = (x', y', 1)$ сликају редом у координатни почетак.

- (ii) Заменити фундаменталну матрицу
- F
- матрицом
- $T'^{-T} F T^{-1}$
- . Нова матрица
- F
- одговара транслираним координатама у пројекцијама.

- (iii) Одредити леви и десни епипол,
- $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$
- и
- $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$
- тако да је
- $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$
- и
- $F \mathbf{e} = \mathbf{0}$
- . Помножити скаларом
- $1/\sqrt{e_1^2 + e_2^2}$
- вектор
- \mathbf{e}
- , и слично
- \mathbf{e}'
- са
- $1/\sqrt{e'^2_1 + e'^2_2}$
- .

- (iv) Дефинисати матрице ротација

$$R = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \\ -e_2 & e_1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ и } R' = \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & \\ -e'_2 & e'_1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

које сликају епиполе у $R\mathbf{e} = (1, 0, e_3)^T$ и $R'\mathbf{e}' = (1, 0, e'_3)^T$.

- (v) Заменити фундаменталну матрицу
- F
- матрицом
- $R'FR^T$
- . Нова матрица одговара ротираним координатама у пројекцијама и мора бити облика (3.7) зато узимамо,

- (vi)
- $f = e_3$
- ,
- $f' = e'_3$
- ,
- $a = F_{22}$
- ,
- $b = F_{23}$
- ,
- $c = F_{32}$
- и
- $d = F_{33}$
- .

- (vii) Формирати полином
- $g(t)$
- једнак имениоцу разломка у формули (3.10) и наћи његових шест нула. Проценити вредност функције (3.9) у свакој од нула функције
- $g(t)$
- , као и када
- $t \rightarrow \infty$
- (
- $\frac{1}{f^2} + \frac{c^2}{a^2 + f'^2 c^2}$
-), и одредити тачку
- t_{min}
- од наведених седам у којој функција 3.9 достиже минимум.

- (viii) Одредити епиполарне праве
- $l = (tf, 1, -t)$
- и
- l'
- према формули 3.8 за
- $t = t_{min}$
- , и тачке
- $\hat{\mathbf{x}}$
- и
- $\hat{\mathbf{x}}'$
- на њима, најближе координатном почетку. Координате тачке са праве
- (λ, μ, ν)
- , најближе координатном почетку су
- $(-\lambda\nu, -\mu\nu, \lambda^2 + \mu^2)$
- .

- (ix) Вратити се на старе координате, где
- $\hat{\mathbf{x}}$
- треба заменити са
- $T^{-1}R^T\hat{\mathbf{x}}$
- и
- $\hat{\mathbf{x}}'$
- са
- $T'^{-1}R'^T\hat{\mathbf{x}}'$
- .

- (x) Координате тачке у простору чије су пројекције
- $\hat{\mathbf{x}}$
- и
- $\hat{\mathbf{x}}'$
- се сада могу наћи помоћу метода линеарне триангулације описаном у подсекцији 3.6.1

Додатак А

Матрице - својства и декомпозиција

А.1 Сингуларна декомпозиција матрице

SVD (singular value decomposition) је једна од најкориснијих декомпозиција матрице. Она је тесно повезана са дијагонализацијом симетричне матрице.

Теорема А.1. Нека је A матрица формата $m \times n$ над пољем реалних бројева. Тада постоји факторизација у облику $A = UDV^T$ где је

- U ортогонална матрица формата $m \times m$,
- D матрица формата $m \times n$ која само на главној дијагонали има елементе различите од нуле $D_{ii} = d_i \geq 0$ поређане у опадајућем поретку,
- V ортогонална матрица формата $n \times n$.

Позитивне компоненте на дијагонали матрице D зовемо *сингуларним вредностима* матрице A . Колоне матрица U и V зовемо редом *левим* и *десним сингуларним векторима*. Ову декомпозицију зовемо **сингуларном декомпозицијом** матрице A .

Доказ: Нека је матрица A формата $m \times n$. Она дефинише линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Конструисаћемо ортонормиране базе $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ и $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ домена и кодомена, редом, за које матрица пресликавања L само на дијагонали има компоненте различите од нуле.

Како је матрица $A^T A$ симетрична она је дијагоналног типа, па постоји дијагонална матрица $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на чијој се дијагонали налазе сопствене вредности матрице $A^T A$ поређане у опадајућем поретку, и ортогонална матрица V у чијим се колонама налазе одговарајући нормирани сопствени вектори $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ матрице $A^T A$, тако да је $A^T A = V D V^T$. Тада поменути сопствени вектори чине једну ортонормирану базу простора \mathbb{R}^n .

Како је тада,

$$A\mathbf{v}_i \cdot A\mathbf{v}_j = (A\mathbf{v}_i)^T A\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T A^T A\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T (\lambda_j \mathbf{v}_j) = \lambda_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j,$$

генератриса $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n\}$ слике поменутог линеарног пресликавања је скуп ортогоналних вектора, па је одговарајући подскуп ненула вектора овог скупа једна база слике линеарног пресликавања L . Нека је та база слике пресликавања L нпр. једнака $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_k\}$. Тада је ранг пресликавања L и матрице A баш једнак k .

Како је $\|A\mathbf{v}_i\|^2 = \lambda_i$, то су сопствене вредности матрице $A^T A$ веће или једнаке нули, тј. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$, а како је $\text{rang}(L) = k$ то је $\lambda_i = 0$ за све $i > k$. Зато ће скуп вектора

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\mathbf{v}_i,$$

за $1 \leq i \leq k$ чинити једну ортонормирану базу простора \mathbb{R}^m ако је $k = m$. Ако је $k < m$, поменути скуп вектора треба проширити до ортонормиране базе простора \mathbb{R}^m . Овиме смо конструисали жељене базе домена и кодомена линеарног пресликавања L .

Ако узмемо $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, имамо да важи $A\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ за све $i \leq \min\{m, n\}$. Ако је U матрица у чијим се колонама налазе вектори \mathbf{u}_i , $0 \leq i \leq m$, V матрица у чијим се колонама налазе вектори \mathbf{v}_i , $0 \leq i \leq n$ и D матрица формата $m \times n$ која на главној дијагонали има скаларе σ_i и све остало нуле, тада је матрични запис последњих једнакости $AV = UD$, тј. $A = UDV^T$. \square

SVD представља уопштење дијагонализације симетричне матрице. Поред тога што се може искористити за одређивање Чолешки декомпозиције позитивно дефинитне матрице, SVD декомпозиција има велику примену у решавању система линеарних једначина.

Посматрајмо један систем облика $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ где је A матрица формата $m \times n$ и ранга n . Систем ће имати решење само ако се \mathbf{b} налази у линеарном омотачу колона матрице A .

Претпоставимо да поменути систем нема решења. У неким ситуацијама има смисла тражити вектор \mathbf{x} који је најближи решењу система, у смислу да минимизује норму $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Њега можемо одредити применом SVD декомпозиције на матрицу $A = UDV^T$. Како је U ортогонална, имамо

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \|UDV^T\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \|UDV^T\mathbf{x} - U(U^T\mathbf{b})\| = \|U(DV^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b})\| = \|DV^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b}\| = \|D\mathbf{y} - \mathbf{b}'\|$$

где је $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) = V^T\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}' = (b'_1, \dots, b'_n, b'_{n+1}, \dots, b'_m) = U^T\mathbf{b}$. Проблем се сада своди на одређивање вектора \mathbf{y} који минимизује норму $\|D\mathbf{y} - \mathbf{b}'\|$. Како је

$$\|D\mathbf{y} - \mathbf{b}'\| = \left\| \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \\ b'_{n+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix} \right\|,$$

то је норма минимална за $y_i = b'_i/d_i$, $i = \overline{1, n}$ и једнака је $\sum_{i=n+1}^m b'_i$. Тражени вектор \mathbf{x} је тада једнак $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$.

При рачунају фундаменталне матрице F у подсекцији 3.1.3 је било потребно, у општем случају, решити предетерминисан хомоген систем једначина облика $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ где је A матрица формата $m \times 9$ ($m \geq 9$) и ранга 9. Једино решење таквог система једначина је нула вектор. Како он не може дефинисати фундаменталну матрицу, има смисла поставити услов $\|\mathbf{x}\| = 1$, да бисмо избегли нула вектор. Зато ћемо као најповољније решење тражити вектор \mathbf{x} који минимизује норму $\|A\mathbf{x}\|$ при услову $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Овај проблем се слично може решити применом SVD декомпозиције матрице $A = UDV^T$. Како је матрица U ортогонална, то је

$$\|A\mathbf{x}\| = \|UDV^T\mathbf{x}\| = \|DV^T\mathbf{x}\| = \|D\mathbf{y}\|$$

за $\mathbf{y} = V^T\mathbf{x}$. С обзиром да је и матрица V ортогонална, то је $\|\mathbf{y}\| = \|V^T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$, па се проблем своди на налажење вектора \mathbf{y} који минимизује норму $\|D\mathbf{y}\|$ при услову $\|\mathbf{y}\| = 1$. Како су дијагоналне компоненте матрице D поређане у опадајућем поретку, норма $\|D\mathbf{y}\|$ је минимална за $\mathbf{y} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Тада је вектор $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$, односно тражени вектор \mathbf{x} је једнак последњој колони матрице V .

A.2 Векторски производ вектора из \mathbb{R}^3 и антисиметричне матрице

Векторски производ вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ се згодно може представити као производ антисиметричне матрице формата 3×3 и матрице формата 3×1 које су формиране од поменутих вектора.

Посматрајмо матрице:

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } [\mathbf{b}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Директном провером закључујемо да важи:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = (\mathbf{a}^T [\mathbf{b}]_{\times})^T.$$

Закључак

У раду су изложена својства пројективних камера и њихових параметара. Наведен је метод калибрације камере на основу само једне слике њом направљене.

Као главни циљ, изложен је метод реконструкције просторног објекта на основу његових раванских пројекција. Поред теоријских основа наведени су и алгоритми чија имплементација даје задовољавајуће резултате. Међутим, они нису подобни за комерцијалну употребу, из разлога што подразумевају да су одговарајуће тачке у пројекцијама обележене са одређеном тачношћу. Када имамо улазне податке од којих су неки дати са одређеном грешком препоручује се употреба робустних алгоритама као што је RANSAC (RANdom SAmple Consensus) који одбацује погрешне уносе, или итеративни алгоритам „златног стандарда“ за рачунање фундаменталне матрице F . Поменути алгоритми су детаљно описани у књизи [1].

Као наредни корак, интересантно је проучити реконструкцију просторног објекта из његове три или више пројекција. Трећа и свака наредна пројекција нам даје додатне информације о објекту, које се могу искористити за побољшање реконструкције. Као што се у реконструкцији из две пројекције користи фундаментална матрица, тако се код реконструкције из три пројекције користи тзв. *трифокални тензор*. Детаљи о поменутом *трифокалном тензору* као и методама реконструкције просторног објекта из његове три или више пројекција су изложени у књизи [1].

Велика популаризација информационих технологија, рачунарске графике и геометријске визуелизације је довела до тога да је данас материја којом се бави овај рад врло актуелна и истражена, али постоје многе теме које чекају даљи напредак технологије ради имплементације. Поред тога развој технологије доводи до формирања нових проблема у овој области, и потребе за њиховим решавањем.

Индекс појмова

- CCD камера, 17
- Апсолутна коника, Ω_∞ , 11
- Бесконачна хомографија H_∞ , 49
- Центар камере, 15, 18
- Циркуларне тачке I и J , 7
- Дисторзија, 5
афина, 5, 11
пројективна, 6, 11
- Дубина тачака, 20
- Епипол, 33
- Епиполарна
геометрија, 33
права, 33
раван, 33
- Фундаментална матрица F , 33
- Главна раван камере, 15
- Главна тачка камере, 15
- Главни зрак камере, 15
- Хаушолдерова матрица, 47
- Калибрациона матрица K камере, 16, 26
- Канонски пар матрица камера, 40
- Коначна пројективна камера, 17
- Коника C_∞^* дуална циркуларним тачкама, 8
- Координатни систем камере, 16
- Метод реконструкције просторног објекта, 43
- Нормализовани алгоритам са осам тачака $x \leftrightarrow x'$, 37
- Основица, 33
- Параметар искошености, 17
- Права ишчезавања, 29, 30
- Реконструкција просторног објекта, 43
афина, 46, 47
директан приступ, 46
- метричка, 46, 48
пројективна, 46
услојавање, 47
вишезначност, 43
- Слика апсолутне конике, ω , 27
- Тачка ишчезавања, 29
- Теорема пројективне реконструкције, 45
- Триангулација, 43, 50
линеарна, 51
оптимална, 51
- Вектор главне осе, 19
- Жижна даљина камере, 15

Литература

- [1] R. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd Edition*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] Н. Бокан, Срђан Вукмировић: *Пројективна геометрија*, Математички факултет, Београд, 2004.
- [3] Г. Калајџић: *Линеарна алгебра и геометрија*, Завод за уџбенике - Београд, 2011.
- [4] Н. Блажић, Н. Бокан, З. Лучић, З. Ракић: *Аналитичка геометрија*, Математички факултет, Београд, 2003.
- [5] С. Вукмировић, З. Станић: *Збирка задатака из пројективне геометрије са применама у рачунарској графизи*, Математички факултет, Београд, 2003.
- [6] Robotics Research Group in the Department of Engineering Science, University of Oxford
- [7] Wikipedia
- [8] Wolfram MathWorld
- [9] Dan Kalman: *A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix*, The American University, Washington, DC 20016, 2002.