УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александра Матовић

АНАЛИЗА УЧЕЊА МАТЕМАТИКЕ У РАДОВИМА ЂЕРЂА ПОЉЕ

МАСТЕР РАД

Ментор:
Проф. Др Милан Божић

Београд, 2012.

САДРЖАЈ

1. УМЕСТО УВОДА: БИОГРАФИЈА GEORGE-a POLYA-e

Слика 1. George Polya

Рођен: 13. децембра 1887. године у Будимпешти, Мађарска
Умро: 7. септембра 1985. године у Пало Алту, Калифорнија, САД

George Polya је имао истакнуто место у математици, не само због својих оригиналних и дуготрајних доприноса чистој и примењеној математици, већ и због доприноса настави математике кроз рад у хеуристици и на методама за решавање проблема, и као сјајан наставник математике.

Родитељи George-a Polya-e били су Anna Deutsch и Jakab Pólya, и обоје су били Јевреји. Anna је била из породице која је генерацијама живела у Будиму, и имала је деветнаест година када су се 1972. године градови Будим, Стари Будим и Пешта административно припојили како би настао град Будимпешта. Треба рећи нешто о имену George Polya, јер није све онако како изгледа. Када се Jakab-у Pólya-и родио син György (касније познат као George), он се презивао Pólya. Пре тога, његово име било је Jakab

Pollák, али како би се разумело зашто је Jakab Pollák променио своје презиме у Pólya, треба мало продискутовати и о његовој каријери и о мађарској историји.

Jakab се школовао за адвоката, водио је своју адвокатску фирму која је пропала, а затим је радио за међународно осигуравајуће друштво Assicurazioni Generali из Трста. Међутим, оно што је он стварно хтео била је позиција на универзитету са које би могао управљати истраживањем ствари које су га стварно интересовале, а то су биле економија и статистика. После 1867. године Мађарска је добила потпуну међународну независност у оквиру Аустроугарске монархије, и политичка филозофија земље била је да се иде ка мађарској држави која је била мађарска и по духу и по свом уређењу. Најбољи начин којим би Jakab Pollák увећао своје шансе за добијање места на универзитету био је да промени своје јеврејско презиме у презиме које звучи типично мађарски. То је и урадио 1882. године, и да ли је то допринело његовом успеху у добијању звања доцента на Универзитету у Будимпешти не може се знати, али добио је ово постављење мало пре него што је умро, у својим раним педесетим годинама, када је George имао десет година.

Иако су George-еви родитељи били Јевреји, он је био крштен у римокатоличкој цркви, убрзо након свог рођења. Како се ово догодило? Па, Jakab, Anna и њихово троје деце, које су тада имАли променили су своју јеврејску веру у римокатоличку 1886. године, годину дана пре него што је George рођен.

Када је Jakab Pólya умро 1897. године, његова жена Anna имала је четрдесет четири године и петоро деце. George је имао старијег брата Jenö-а, који је имао двадесет једну годину и студирао медицину када је његов отац умро, две старије сестре Ilona-у (која је била десет година старија од George-а) и Flóra-у (осам година старија од George-а), које су радиле за осигуравајуће друштво Assicurazioni Generali како би помогле породици, и имао је млађег брата Lásló-а (био је четири године млађи од George-а). Важно је поменути да је Jenö, који је волео математику и увек жалио што се није бавио тим предметом, био познат међу лекарима можда исто колико је и George био познат међу математичарима. Ипак, Lásló је сматран најпаметнијим међу децом, али нажалост, убијен је у Првом светском рату, пре него што се прославио. Није било изненађујуће што је Anna наговарала George-а да настави очеву професију адвоката, јер је његов отац улагао велике напоре како би George започео академску професију.

George је ишао у основну школу у Будимпешти, и његова породица је добила сведочанство 1894. године у коме се каже:

„*... марљивост и добро понашање*“ (Alexanderson, 2000).

Након тога уписао је Dániel Berzsenyi Gymnasium, изучавао је грчки и латински језик, као и модерни језик Немачке, и наравно, мађарски језик. Polya-ини омиљени предмети у школи били су биологија и књижевност. Прилично је необично да неко ко је био фасциниран различитим гранама математике у животу не заволи тај предмет у школи, али у Polya-ином случају то се десило. Он није добијао изразито високе оцене из математике у гимназији, његов рад у геометрији био је оцењен само као „задовољавајући“. Међутим, имао је доста бољи резултат у аритметици. Разлог недостатка његовог успеха у математици била је можда лоша настава, а касније је описао своја два, од три, наставника математике из гимназије као „подле наставнике“.

Polya је уписао Универзитет у Будимпешти 1905. године, и његов брат Jenö, који је тада био хирург, финансијски га је помагао. Почео је да студира право, али му је досадило, па је после једног семестра одустао. Затим је студирао своје омиљене школске предмете, језике и књижевности две године, и добио је сертификат који му је омогућио да предаје латински и мађарски језик у гимназији. Била је то квалификација на коју је био поносан, али никада је није искористио. Затим се веома заинтересовао за фолозофију, али му је његов професор, Bernát Alexander, саветовао да крене на курсеве физике и математике како би боље разумео ове предмете, тако да је случајно изабрао математику да студира. Рекао је духовиту примедбу, коју не треба схватити озбиљно:

„*Мислио сам да нисам довољно добар за физику, а да сам превише добар за филозофију. Математика је негде између*“ (Albers & Alexanderson, 1985).

На Универзитету у Будимпешти физику је учио од Eötvös-а, а математику од Fejér-а. Polya је рекао:

„*Fejér је у великој мери утицао на мене, баш као и на све мађарске математичаре из моје генерације, и у ствари, једном сам или два пута сарађивао са Fejér-ом у неким мањим садржајима. У једном или два његова рада имао сам примедбе, и он је имао примедбе у једном или два моја рада, мада ово није био неки велики утицај*“ (Albers & Alexanderson, 1985).

Школску 1910/1911. годину Polya је провео студирајући на Универзитету у Бечу, где је новац зарађивао тако што је предавао сину важног локалног великодостојника (његов ученик није имао никакав таленат). У Бечу је ишао на предавања из математике код Wirtinger-а и Mertens-а, али и даље га је пуно интересовала физика, па је слушао предавања о релативности, оптици и другим темама. Следеће године вратио се у Будимпешту где је докторирао на пољу математике, што је и студирао, у суштини без надзора, на проблему у теорији геометријске вероватноће. Затим је већи део 1912. и 1913. године провео у Гетингену, где је био са водећим математичарима, као што су Klein, Carathéodory, Hilbert, Runge, Edmund Landau, Weyl, Hecke, Courant и Toeplitz.

Заправо, Polya је напустио Гетинген у несрећним околностима. Описао је инцидент у писму Bieberbach-у из 1921. године:

„На Божић 1913. године, путовао сам возом из Цириха ка Франкфурту, и разговарао сам о мојој корпи која је пала са младићем који је седео преко пута мене у купеу воза. Био сам расположен и провоцирао сам га. Како није реаговао на моју провокацију, ударио сам га по увету. Касније се испоставило да је младић, који је био студент, и то у Гетингену, син извесног Geheimrat-а. После неких неспоразума, Сенат Универзитета ми је наложио да напустим град“ (Alexanderson, 2000).

Polya је добио понуду за постављење у Франкфурту, међутим, пре него што је преузео дужност, отишао је у Париз у кратку посету, почетком 1914. године, где је упознао Émile-а Picard-а и Hadamard-а, али није уживао у тој посети, углавном због лошег смештаја. Из широког опсега математичких звезда које је Polya упознао, математичар који је највише утицао на њега био је Hurwitz. Стога, када је Polya у току свог боравка у Паризу сазнао да је Hurwitz уговорио његово постављење за доцента на Eidgenössische Technische Hochschule у Цириху, где је Hurwitz био главни на катедри за математику, Polya је одлучио да прихвати:

„Био сам... под великим утицајем Hurwitz-а. У ствари, ја сам отишао у Цирих како бих био близу Hurwitz-а, и били смо у блиском контакту око шест година, од мог доласка у Цирих 1914. до његове смрти... 1919. године. И имамо један заједнички рад, али то није све. Био сам веома импресиониран њиме и уредио сам његове радове. Такође, био сам импресиониран његовим рукописима“ (Albers & Alexanderson, 1985).

У Цириху, поред Hurwitz-а, Polya-ине колеге били су и Geiser, Bernays, Zermelo и Weyl. Polya је дошао у Цирих у години када је почео Први светски рат, и на први поглед то није био проблем за њега, јер се као студент повредио на фудбалу и медицински није био способан за службу у мађарској војсци. Ово је била срећна околност за њега, с обзиром да је до тада имао изразито миролубиве ставове. Живот је постао још тежи како је рат напредовао, па је мађарска војска све више била забринута за своје војнике, и Polya-и су затражили да се врати у Мађарску, како би се придружио војсци и борио за своју земљу, што је он одбио. Ово је имало последицу, дуго година након рата Polya није могао да се врати у Мађарску због страха да ће га ухапсити што је одбио учешће у рату. Узео је држављанство Швајцарске, иако га то није заштитило од мађарских власти, а 1918. године оженио је девојку из Швајцарске, Stella-у Vera-у Weber, која је била ћерка професора физике на Универзитету у Нешателу. Тешко је разумети зашто је Polya чекао све до 1967. године да се врати у Мађарску, педесет четири године након своје последње посете родној земљи.

Polya је упознао Szegö-а у Будимпешти око 1913. године, када се тамо вратио између својих разноликих студија у иностранству. Szegö је тада био студент у Будимпешти, и Polya је разговарао са њим о претпоставци до које је дошао на основу Фуријеових коефицијената. Szegö је наставио са доказом Polya-ине претпоставке и ово је био његов први објављени рад. Када је Polya, неколико година касније, одлучио да напише књигу о проблемима у анализи, знао је да то не може урадити без помоћи, па се окренуо Szegö-у и за више од две године направио је сјајну колекцију проблема. Polya је објаснио зашто је пришао објашњавању математичких идеја на другачији начин, за разлику од начина који се до тада примењивао:

„*Веома касно сам се заинтересовао за математику... како сам дошао до математике и научио нешто о њој, помислио сам: Па тако је, видим, доказ изгледа убедљив, али како људи могу доћи до таквих резултата? Моја тешкоћа у разумевању математике је: Како се долази до резултата?*" (Albers & Alexanderson, 1985).

Велика новина по којој се разликовала Polya-ина и Szegö-ова књига о проблемима у анализи била је Polya-ина идеја да се проблеми класификују не по својој теми, већ по својим методима за решавање. Polya и Szegö дошли су код издавача Springer-а 1923. године, са својим идејама за два тома и 1925. појавила се књига *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Задаци и теореме у анализи)*. Овај рад био је:

„*...ремек дело у математици који је осигурао њихов углед*" (Alexanderson & Lange, 1987).

Polya је унапређен у ванредног професора на ETH у Цириху 1920. године. Добио је Рокфелер Фелоушип (положај за дипломираног студента на енглеским универзитетима) 1924. године за место на енглеском универзитету, што му је омогућило да студира са Hardy-јем у Енглеској. Један део 1924. године провео је у Оксфорду, један део у Кембриџу, радећи са Hardy-јем и Littlewood-ом, и започели су сарадњу на књизи *Inequalities (Неједнакости)* која је објављена 1934. године. Док су радили на књизи, Polya је наставио са публикацијама, и за три године, од 1926. до 1928. године објавио је укупно тридесет један рад. С обзиром на опсег, дубину и број публикација није изненађујуће да је унапређен у редовног професора на ETH 1928. године.
Duren је истакао значај Polya-иних математичких достигнућа:

„*Polya је вероватно најутицајнији математичар 20. века. Његови основни истраживачки доприноси су у области комплексне анализе, математичке физике, теорије вероватноће, геометрије и комбинаторике. Био је изврстан предавач са великим интересовањем за педагошка питања током своје дуге каријере*" (H. Taylor & L. Taylor, 1993).

У Цириху, Polya-ин рад у математици био је широког спектра. На пример, 1918. године објавио је низ радова из теорије бројева, комбинаторике и система гласања. Следеће године, поред ових радова, објавио је радове из астрономије и вероватноће. Док је радио ове радове, такође, доказивао је и неке резултате истраживања о целобројним функцијама.

Polya је добио други Рокфелер Фелоушип 1933. године, што му је овога пута омогућило да посети Принстон. Док је био у Сједињеним Америчким Државама, Blichfeldt га је позвао да посети Стенфорд, што је Polya и учинио, и увелико је уживао тамо. Вратио се у Цирих, али политичка ситуација из 1940. године приморала је Polya-у да се пресели у Сједињене Америчке Државе, где је након две године рада на Браун Универзитету и краткотрајног рада на Смит Колеџу, преузео дужност на Стенфорду. Пре одласка у Сједињене Америчке Државе, Polya је имао концепт књиге *How to solve it (Како ћу решити математички задатак)*, написан на немачком језику. Морао је да покуша са четири издавача пре него што је нашао оног који му је објавио енглеску верзију књиге у Сједињеним Америчким Државама, и током година књига је продата у преко милион примерака и преведена на седамнаест језика. Schoenfeld је описао њен значај:

„*У математичком образовању и свету решавања проблема забележена је линија разграничења између две ере, решавање проблема пре и после Polya-е*“ (Schoenfeld, 1987).

Polya је у књизи *How to solve it* објаснио како решавање проблема захтева проучавање хеуристике:

„*Циљ хеуристике је да проучава методе и правила открића и проналазака... Хеуристички, као придев, значи „служи за откривање“. ... Њена сврха је да открије решење датог проблема. ... Шта је добро образовање? Систематично даје прилику ученику да сам открије ствари.*“

Он је, такође, дао мудар савет:

„*Ако не можете да решите неки проблем, онда постоји лакши проблем који не можете да решите: нађите га.*“

Polya је објавио додатне књиге о уметности решавања проблема. На пример, *Mathematics and plausible reasoning (Математика и прихватљиво расуђивање)* (1954), и *Mathematical discovery (Математичко откриће)* која је била објављена у два тома (1962, 1965).

Када се разматрају Polya-ини доприноси у настави, а многи људи сматрају да је то његов највећи допринос математици, треба навести неке његове цитате на ову тему. Прво цитат са предавања о настави математике у основним школама:

„*Математика у основним школама има добар и узак циљ, и то је прилично јасно у основним школама. ... Међутим, имамо виши циљ. Желимо да развијемо све ресурсе детета у развоју. И део ком математика припада је углавном размишљање. Математика је добра школа мишљења. Али шта је мишљење? Размишљање које можете да научите у* *математици је, на пример, за руковање апстракцијама. Математика говори о бројевима. Бројеви су апстракција. Када решимо практичан проблем, из овог практичног проблема морамо прво направити апстрактан проблем. ... Али мислим да постоји једна ставка која је још важнија. Математика, видите, није спорт у коме посматрате. Разумети математику значи имати способност за рад математике. А шта то значи радити математику? На првом месту то значи бити способан решавати математичке проблеме.*“

Следећи је Polya-ин цитат о настави уопште:

„*Настава није наука; она је уметност. Ако би настава била наука тада би постојао најбољи начин за њено предавање и свако би морао предавати на тај начин. Будући да настава није наука, постоји велика ширина и много могућности за личне разлике. ... дозволите ми да вам кажем шта је моја идеја наставе. Можда прва ставка, која је широко прихваћена, јесте да настава буде активна, односно активно учење. ... главни циљ у настави математике јесте развити тактику решавања проблема.*“

Укратко ћу рећи о Polya-иним истраживањима које је спровео у различитим областима математике. Његова истраживања су веома широк спектар, па ћу поменути неке од њих. У вероватноћи, Polya је проучавао Фуријеове трансформације вероватносне мере, и 1923. године показао је да је то карактеристична функција. Писао је о нормалној расподели и увео термин „централна гранична теорема“ 1920. године, која се и данас употребљава. Polya је доказао своју чувену теорему о случајном лутању на целобројној решетки 1931. године. Узео је у обзир d – димензионални низ тачака решетке, где се тачка помера на било које суседно место са истом вероватноћом. Питао се, да ли за произвољну тачку A са решетке, која врши случајно лутање, важи да ако крене од почетка решетке стиже на одређено место са вероватноћом 1. Polya је дошао до изненађујућег одговора, тврђење важи за $d = 1$ и $d = 2$, али не важи за $d \geq 3$. У каснијим радовима посматрао је две тачке које су извршавале независна случајна лутања, и такође у току случајног лутања задовољавале су услов да тачка која се креће никада не пролази кроз исту тачку решетке два пута.

Симетрије у геометрији и набрајање класа симетрија објеката били су главна област Polya-иних интересовања током много година. Допринео је разумевању седамнаест кристалографских група 1924. године. Овај рад инспирисао је Escher-а да направи свој чувени рад са периодичним цртежима. Од суштинског значаја је Polya-ин рад са функцијама генератрисе и групама пермутација како би набројао изомере у органској хемији.

Његов главни допринос у комбинаторици је теорема набрајања, објављена 1937. године. Теорема је описана као:

„*...изузетна теорема у изузетном раду, и прекретница је у историји комбинаторне анализе*“ (Read, 1987).

Теорема решава проблем колико конфигурација са одређеним особинама постоји. Има примене, на пример, код набрајања хемијског састава и код набрајања стабала у теорији графова. У ствари, читава нова област теорије графова, која се назива енумеративном теоријом графова, заснива се на Polya-иним идејама.

Polya-ино интересовање за комплексну анализу навело га је да истражује о сингуларитету степених редова, гап теоремама, степеним редовима са целобројним коефицијентима и њиховом узимању целобројних вредности на природним бројевима, представљању целих функција експоненцијалног типа, и налажењу нула. Такође, радио је на конформним пресликавањима и теорији потенцијала, и проучавао је Кошијев гранични задатак за парцијалне диференцијалне једначине и теорију различитих функционала повезаних са њима. Његове методе делимично се примењују на изопериметријским проблемима у доменима са високим степеном симетрије.

Заједно са Szegö-ом написао је класичан текст *Isoperimetric inequalities in mathematical physics (Изопериметријске неједнакости у математичкој физици)* 1951. године. Schiffer је написао:

„*Цео рад приказује склоност аутора ка конкретном и јасном резултату, ка елеганцији и довитљивим методама*“ (Schiffer, 1987).

Polya се 1953. године повукао са Стенфорда, али је наставио да се бави математиком, што се посебно односило на математичко образовање. Наставио је своју везу са Стенфордом као професор у пензији, и 13. децембра 1977. године тамо је организована вечера како би се обележио Polya-ин деведесети рођендан, на којој су му многи пријатељи и колеге одали почаст. Његова каријера предавања, међутим, још увек није била завршена, 1978. године држао је курс комбинаторике у оквиру Катедре за рачунарство на Стенфорду. George Polya је преминуо 7. септембра 1985, у Пало Алту, након неколико месеци болести.

Добитник је многих признања за своје изванредне доприносе и поменућу само неке овде. Изабран је за почасног члана Мађарске академије, Друштва математичара у Лондону, Математичког удружења Велике Британије и Друштва математичара Швајцарске. Изабран је за члана Националне академије наука Сједињених Америчких Држава, Америчке академије наука и уметности, Међународне академије филозофије и науке у Бриселу, Већа математичара Калифорније. Био је дописни члан Академије наука у Паризу.

Завршићу његову биографију речима Frank-a Harary-ja:

„*Без сумње, George Polya је мој лични херој као математичар. ... Он није само истакнути господин, већ је и племенит човек: његов узаврео ентузијазам, светлуцање у његовим очима, његова огромна радозналост, његова великодушност према времену, његов живахан и енергичан ход, његова топла јединствена друже љубивост, његово гостопримство према гостима његове куће и показивање слика познатих математичара које је упознао – то су све компоненте његове срећне личности. Као математичар, његова оштроумност, брзина, брилијантност, свестраност, моћ и универзалност, све је то било инспиративно. Да ли је постојао начин подучавања и учења ових особина?*“ (Harary, 1977).

2. РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА У МАТЕМАТИЦИ

„*Проблем је такав мисаони или практични задатак у коме ученик треба да открије нешто ново, њему до тада непознато, да реши неко спорно место, да израчуна неки податак, да би решио постављени проблем. Ученик се увек среће с неком тешкоћом у проблему, с неком празнином коју треба да испуни да би дошао до решења. Ако нема тешкоће и празнине у задатку, онда то није проблем*“ (Ничковић, 1976).

Учење путем решавања проблема било је предмет многобројних психолошких и педагошких истраживања и конституисало се, посебно у психологији учења, као прворазредна когнитивна област, без чијег правилног научног разумевања није могуће истражити неке основне законитости људског мишљења, учења и понашања (Ничковић, 1976). Научно је утврђено да је учење путем решавања проблема највиши облик људског мишљења, и решавањем проблема почиње процес мишљења.

У дидактичком значењу, учење путем решавања проблема као облик организације процеса учења у настави повлачи за собом битније измене у структури наставног процеса у смислу стимулисања самосталног, стваралачког, критичког и истраживачког приступа предмету учења. Ипак, теоријска сазнања о учењу путем решавања проблема не сежу тако далеко и толико обухватно да би дидактичка теорија и наставна пракса могле за себе извући потребне импликације за брже укључење овог облика мишљења и учења у све облике и методе рада. Постоји несумњива удаљеност између теоријских сазнања у овој области и потребе да се настава обогати још једним обликом интезивног учења.

Учење путем решавања проблема значајније доприноси вишим исходима учења него уобичајена настава. Такође, учење путем решавања проблема представља веома ефикасан облик ученичке активности када се ради о *применљивости стечених знања*, посебно оних која се заснивају на позитивном трансферу као и оних која потичу са часова у којима је „проблемска“ организација учења била доминантна. На овај начин постиже се значајан успех и у погледу *трајности стечених знања*, посебно оних која се односе на битније садржаје (разумевање природних законитости, откривање унутрашњих релација у појавама и узајамних веза међу њима и друго) и у погледу тога да је настава путем решавања проблема дала боље резултате у односу на усвајање садржаја претежно чињеничног и информативног карактера.

Учење путем решавања проблема доприноси значајно бољем укупном успеху и усвајању садржаја из области математике. С обзиром на то да је креативност једно од његових основних обележја, овакво учење требало би да послужи као фактор бржег развоја математичке креативне мисаоне способности.

Математика је пуна различитих проблема за размишљање. Она је скоро сва испуњена њима. Настава мора да води много рачуна о овој чињеници и да учи ученике математици највише путем проблема, тј. уз максимално учешће дечјег мишљења и расуђивања. То, опет, значи да у настави математике ученици треба да, уз вођење и помоћ наставника, претежно самосталним мисаоним и вољним напором упознају математичке појмове и величине, математичке операције и законитости, математичке симболе и правила. То је најефикасније учење математике.

Шта је проблем? Када је један задатак проблем?

Проблем је такав мисаони или практични задатак у коме ученик треба да открије нешто ново, њему до тада непознато, да реши неко спорно место, да израчуна неки податак, да би решио постављени проблем. Ученик се увек среће с неком тешкоћом у проблему, с неком празнином коју треба да испуни да би дошао до решења. Ако нема тешкоће и празнине у задатку, онда то није проблем. Такође, задатак није или престаје да буде проблем ако се поново решава једном већ решени проблем или ако се у истом проблему незнатно измене бројчани подаци. Али ако се дати проблем другачије постави, преструктурира, или ако већ научени тип решења треба применити у неком новом проблему, онда постоји нови проблем, без обзира на то да ли је он текстуални или се састоји од бројчаних података или се ради о упознавању неке нове операције, дефиниције, правила, формуле. Такође, један задатак није проблем ако не захтева никакав умни напор.

Решавање проблема као процес је добрим делом стваралачки умни чин ученика. Тај процес иде спонтано ако је ученик мотивисан да реши неки проблем. Али решавање проблема се и учи. Значи, треба постепено научити ученика да решава проблеме. Разуме се, у математици има разних типова проблема: одливање - доливање, проблеми кретања и брзине, проблеми упоређивања величина итд. Сваки тип проблема има доста специфичног што се не може описати истим именом које би важило за сваку ситуацију. Али у томе има и нечега заједничког. Следе нека корисна упутства и препоруке којима треба обучити ученике да би у сваком конкретном случају решавања проблема поступили што рационалније.

1. Проблем треба најпре са разумевањем прочитати и проучити.
2. Треба, затим, уочити шта се у проблему тражи.
3. Направити план за решавање проблема. Од могућих начина изабрати онај који је најбољи, најрационалнији.
4. Утврдити који су подаци у проблему дати, познати.
5. Утврдити који подаци недостају а потребни су за решење и која су израчунавања потребна.

6. У току решавања проблема проверавати да ли се тачно ради, а на крају решења још једном проверити.
7. Кад је решење готово, упитати се „Шта сам добио?“, „Шта значи добијени резултат?“ и „Да ли сам добио одговор на постављени проблем?“.

Нема сумње да учење путем решавања проблема има високу ефикасност и могућност да делује двојаким правцем, развијајући и основне способности учења и подижући општи ниво успеха ученика. Овакво учење је веома продуктиван облик наставног рада за све који трагају за мало познатим и неистраженим иновацијама. Учење путем решавања проблема је ту, оно не захтева чак ни скупа наставна средства. Потребне су стваралачка жеља и воља да се покуша у пракси с оним што је истраживањем већ потврђено.

3. POLYA-ино ВИЂЕЊЕ РЕШАВАЊА ПРОБЛЕМА

3.1. Постоји проблем

Саставни део проблема је жеља, воља и одлука да се он реши. Проблем који треба да решите и који сте прилично добро разумели, још увек није ваш проблем. Он постаје ваш проблем када одлучите да га решите, када желите да га решите. Можете бити укључени у проблем мало или пуно – ваша жеља да га решите може бити мање или више јака. Жеља да решите проблем који је пред вама је стваралачка жеља: она може довести до решења, и свакако изазива промене у вашем интелектуалном понашању.

3.2. Процена

Ако ученик има писмено испитивање из математике он не мора да реши све задате проблеме, али треба да уради што је могуће више проблема. У овој ситуацији, његова најбоља стратегија за почетак рада била би да погледа све проблеме одговарајућим темпом и изабере оне које ће највероватније решити.

На основу претходног може се претпоставити да је особа која решава проблем у извесној мери способна да процени тежину проблема. У ствари, свако ко озбиљно решава неки проблем има осећај да је решење близу и свестан је темпа свог напредовања ка решењу. Не мора користити речи, али осећа: „Добро иде, ускоро могу доћи до решења,“ или „Иде споро и решење је још увек далеко,“ или „Не могу решити, нема напретка уопште“ или „Нисам ни близу решења.“

3.3. Предвиђање

Ако се нека особа озбиљно бави проблемом, она покушава да предвиди, труди се да погоди; очекује нешто, очекује нацрт свог решења. Сви који решавају проблеме нагађају, али они искусни у решавању и они неискусни нагађају различито. Особе које немају велико знање само седе са својим проблемом, чешкају главу и гризу оловку, чекају паметну идеју, и раде мало или ништа како би били ближе тој паметној идеји. И када се жељена идеја напокон појави и донесе прихватљиву претпоставку, они једноставно прихватају ту претпоставку, као решење са малим или никаквим критикама. Особа која има више искуства у решавању проблема прихвата своје закључке са више сумње. Њен први закључак може бити: „То је 25." или „Требао сам му рећи и ово и оно." Још тада проверава свој закључак и може га мењати: „Не, није 25. Још да видим да ли је 30." или „Не. Не би користило да сам му то рекао, јер би могао одговорити на тај начин и слично. Још сам могао да му кажем да..." И коначно, „покушајем и грешком", узастопним апроксимацијама, онај ко решава проблем може доћи до тачног одговора, помоћу одговарајућег нацрта.

Особа која решава проблем, која је још више мудра и искусна, када не успе да погоди цео одговор, покушава да погоди неке делове одговора, неке одлике решења, неки приступ решењу, или неке одлике приступа решењу. Онда она покушава да прошири своју претпоставку, али такође проверава њену тачност, и жели да прилагоди своју претпоставку информацијама које тренутно може добити.

Наравно, и они са више и они са мање искуства желе да дођу до тачних претпоставки, до корисних идеја. И свако жели да зна које су шансе да је његова претпоставка тачна. Те шансе се не могу прецизно проценити. Много пута, међутим, особа која решава проблем има одређен утисак о изгледима своје претпоставке. Особе које мање знају, које чак и не знају шта је то доказ, могу имати јачи утисак о својој претпоставци; они који више знају могу разликовати нијансе утиска; али свако ко је разумео претпоставку има неки утисак о могућој судбини његове претпоставке.

Да ли је ова ставка применљива? Колико је далеко решење? Колико је добра претпоставка? Оваква питања прате сваки корак оног ко решава неки проблем. Да ли овакви ставови воде онога ко решава проблем или он само прати своје одлуке? Да ли су то узроци или знакови? Ако немате оваква осећања и утиске, ви нисте пуно окупирани својим проблемом, истакао је Polya (Polya, 1965).

3.4. Локализација решења

Polya се ретко одвајао од свог ручног сата, а када би то урадио, обично га је тешко налазио. Када би тражио сат, обично је почињао потрагу на добро познатим местима: на свом столу, или на некој полици коју је користио за чување малих ствари, или на било ком месту ако би се сетио да га је скинуо баш на том месту.

Такво понашање је уобичајно. Чим се особа озбиљно бави проблемом, она очекује нацрт свог решења. Могу се тестирати различита решења, али сва су она слична; сва решења су унапред смишљена, можда не свесно. Када ниједно решење није тачно, та особа се осећа изгубљено, ништа више јој не пада на памет; не може да се одвоји од претходно осмишљеног нацрта. Не треба тражити било какво решење, већ решење у оквиру претходног нацрта. Не тражи се решење било где, већ у одређеној *области претраге*.

Разумљиво је да се потрага за решењем започне у оквиру одређене области. Polya је нагласио да када је покушавао да тражи сат који је изгубио, прилично је било јасно да га неће тражити било где на свету, или било где у граду, већ на свом столу где га је нашао неколико пута раније. Сасвим је разумно да се непознато тражи у одређеној области, али је неразумно наставити тражење чак и када постаје све више и више јасно да није ту.

3.5. Мобилност и организација

Мисаоне активности особе која решава проблем нису пуно познате и комплексност активности може бити несхватљива. Још један резултат ових активности је потпуно јасан: како онај ко решава проблем напредује, он сакупља све више и више материјала.

Упоредимо концепцију рада особе која решава математички проблем на почетку и на крају решавања проблема. Кад се појави проблем, постоји једноставна слика: особа која решава проблем посматра проблем као недељиву целину без детаља, или са мало детаља; на пример, може видети само главне делове, непознате податке, или претпоставке и закључке. Ипак, коначна слика доста се разликује: сложенија је, са пуно додатих детаља и материјала који се могу искористити, а који на почетку нису уочени. Постоје помоћне непознате, као и материјали од раније стечених знања на основу којих су се решавали проблеми и теореме које су се примењивале у решавању.

Како се долази до ових материјала, помоћних елемената, теорема? Особа која решава проблем сакупља ову грађу; мора да је „извуче" из свога ума и повеже са проблемом. Такво прикупљање назива се *мобилношћу,* а такво повезивање *организацијом*. Мобилност и организација заправо не могу бити одвојени; они су аспекти истог сложеног процеса, који се допуњују, они су аспекти рада који је усмерен ка решењу. Такав рад, када је интезиван, доводи у игру све психичке ресурсе, захтева много мисаоних активности. Особа која решава проблем може да разликује неке од многобројних мисаоних радњи које су укључене, и да их опише појмовима као што су издвајање и комбиновање, препознавање и памћење, прегруписање и допуњавање. Следећи одељци настоје да опишу ове активности.

3.6. Препознавање и памћење

Свако ко решава проблем орасположи се кад при посматрању свог проблема *препозна* неке познате елементе. Тако, на пример, при посматрању геометријске фигуре може се уочити троугао који раније није уочен, или два слична троугла, или неки други познати елементи. Код алгебарских формула може се уочити потпун квадрат, или нека друга позната формула. Наравно, могу се уочити, и то може бити веома корисно, нека сложенија својства која се још увек не могу именовати и формално дефинисати, али упућују да је то познато и битно.

На пример, особа која решава проблем има добре разлоге да буде задовољна када уочи троугао на датој слици. Заправо, она зна неколико теорема и решила је много задатака са троугловима, и можда неку од ових теорема или претходних решења може применити у решавању текућег проблема. Уочавањем троугла, надовезује се на широк опсег претходно стеченог знања, и нешто од тога можда ће јој бити од користи. Дакле, уопштено, препознавање може довести до *памћења* нечег корисног, до промене знања које се примењује.

3.7. Допуњавање и прегруписање

Особа која решава проблем уочила је, на пример, троугао на слици и успела да запамти теорему о троугловима коју ће можда применити у свом проблему. Да би применила ову теорему она заправо мора искористити још неке елементе, као на пример, висину троугла. Уопштено, елементи, који ће се можда искористити, могу да се користе само измењени како би допунили оно што недостаје, како би употпунили дати проблем, како би га обогатили, једном речју, како би га *допунили*.

Допуњавање укључује нове податке и материјал за решавање проблема, и то је важан корак у организацији проблема. Ипак, понекад се може остварити значајан напредак у организацији без увођења нових података, већ само променом распореда познатих елемената, успостављањем нових односа међу њима, другачијим повезивањем или *прегруписањем*. Прегруписањем елемената мења се концепција проблема. Ово прегруписање значи реструктурирање.

Размотримо ово мало конкретније. Пресудни корак у решавању, на пример, проблема из геометрије је можда увођење одговарајућих помоћних елемената. Мада, понекад се до решења може доћи без увођења нових података, смисленим искоришћавањем датих података. На пример, може се запазити да се користан податак добија на основу сличности троуглова. Примећујући ово, препознају се до сада неуочени односи елемената на слици, виде се елементи који су другачије груписани, уочава се нова структура, боље организована слика, складнија. Дакле, добија се реструктурирани материјал за проблем.

Прегруписање може променити истицање појединих елемената и података. Елементи и односи који су били у првом плану пре прегруписања прелазе у други план; могу отићи тако далеко да испадну из идеје проблема. За бољу организацију морају се одбацити ствари за које се сматрало да су биле корисне пре неког времена. Ипак, у целини, више се дода него што се одбаци.

3.8. Издвајање и комбиновање

Када се особа бави сложеном целином, њена пажња фокусира се прво на један детаљ, а затим на неки други. Сконцентрише се на одређени детаљ, он је у центру њене пажње, проширује га, разликује од осталих детаља, једном речју, *издваја* га. Затим се њена пажња усмерава на други детаљ, издваја још један детаљ, и тако даље.

После разматрања различитих детаља, та особа има потребу да сагледа проблем још једном у целини. Заправо, након преиспитивања неких детаља, проблем може изгледати другачије. Преиспитивање одређених детаља може довести до нове интелектуалне слике проблема, у новој, више складнијој *комбинацији* детаља.

Издвајање и комбиновање могу унапредити решење ако се међусобно допуњују. Издвајање рашчлањује целину на делове, а комбиновање које следи поново саставља делове у мање или више различиту целину. Сопствено виђење проблема може одвести особу до тачног решења.

3.9. Део указује на целину

Размотримо мало компликованији пример. Математички задатак може се брзо решити применом одређене теореме *D*, али се тешко решава без теореме *D*. На самом почетку, особа која решава проблем не слути да треба применити теорему *D*, иако јој је прилично добро позната та теорема. Како она може да открије одлучујућу улогу теореме *D*? Проблем је релативно једноставан ако дати задатак и теорема *D* имају заједнички саставни део. Особа која решава проблем, после многих покушаја, доћи ће до тог заједничког дела, издвојиће га и усредсредиће се на њега, и тако се може досетити теореме *D*.

Проблем је мање једноставан ако постављени задатак и битна теорема *D* немају заједничких делова. Ипак, ако се појави теорема *C*, која је позната особи која решава задатак, и која има нешто заједничко са проблемом и са неким делом теореме *D*, та особа ће доћи до теореме *D* тако што ће се прво сетити теореме *C* па ће преко ње доћи до *D*. Наравно, може се применити велики број теорема. На пример, дати задатак се доводи у везу са *A*, *A* са *B*, *B* са *C*, и коначно *C* са *D*. Што је дужи низ теорема, то онај ко решава проблем мора више да размишља и повезује чињенице, док на крају не дође до теореме *D*.

Уствари, када особа која решава проблем препозна неки елемент, она тај елемент укључује у решење проблема. Било који нови, променљиви елемент, који је укључен у решење, може довести до других елемената за решавање проблема. Када особа која решава проблем издвоји и усредсреди се на неки елемент, пажња коју поклања том елементу даје шансу да се дође до нових елемената који су у вези са претходним. Поновно повезивање елемената доприноси бржем решавању проблема, него што би то могао сваки елемент појединачно.

4. ПРАВИЛА ОТКРИЋА

4.1. Правила и правила

Како особа која решава проблем напредује у решавању, изглед проблема стално се мења. У свакој фази, она се сусреће са новим ситуацијама и одлукама: шта треба урадити у овој ситуацији, шта ће бити следећи корак? Ако има добар метод, непогрешиву стратегију за решавање проблема, она може да одреди шта је следећи корак у решавању на основу података из тренутне ситуације прецизним размишљањем, на основу јасних правила. Нажалост, не постоји општи савршени метод за решавање проблема, не постоје прецизна правила која се могу применити у свакој ситуацији, и по свему судећи никада неће бити таквих правила.

Ипак постоје правила и правила. Правила понашања, принципи и упутства могу бити веома корисни и разумни, а да нису тако строги као правила математике или логике. Изгледа да су ставови, начини размишљања, навике мишљења корисни у многим, и можда у већини ситуација које се тичу решавања проблема. Дакле, не треба поставити питање: „Да ли постоје правила открића?“, већ га треба формулисати другачије: „Да ли постоје начела којима се исказују ставови који су корисни за решавање проблема?“

4.2. Рационалност

Кажемо да је неко дело или мишљење разумно ако се заснива на јасним разлозима и не настаје само на основу навика, неистраживачких утисака, осећаја и „инспирације“. Сагласност која се успостави са неком теоремом из математике након проверавања доказа корак по корак, је прототип разумног мишљења. Са одређене тачке гледишта, главна поента испитивања математичких доказа је да она воде разумном понашању које приличи човеку, као „рационалном бићу.“

Међутим, није очигледно како то разумно треба да се понаша особа која решава проблеме. Размотримо њену тешкоћу детаљније, замислимо типичну ситуацију која се често јавља. Нека на пример, особа решава одређени проблем *A*, и тај проблем је повезан са другим проблемом *B*. Решавање проблема *B* може је проближити циљу, односно решењу почетног проблема *A*. Међутим, са друге стране, решавање проблема *B* може бити неуспешно и резултира губитком времена и труда. Па се особа која решава проблем суочава са одлуком: да ли да за неко време одустане од почетног проблема *A* и почне да решава нови проблем *B*? Њена дилема своди се на то да ли да уведе *B* као помоћни проблем. Може ли особа која решава проблем доћи до разумне одлуке?

Важна предност коју она може да добије од проблема *B* је да решавање проблема *B* може покренути њено памћење и довести је до елемената који су корисни за почетни проблем *A*. Које су шансе да ће решавање проблема *B* имати жељени ефекат? Изгледа немогуће проценити ове шансе само на основу јасног, разумног доказа; особа која решава проблем, у извесној мери, треба да се ослања на своја нејасна и недефинисана уверења.

Са друге стране, могу постојати јасни разлози за и против увођења *B* као помоћног проблема. Како треба да, особа која решава проблем, узме у обзир и нејасна уверења и јасне разлоге? Она може – и ово изгледа као разуман поступак – да пажљиво размотри јасне разлоге у одговарајућем времену и повеже их са својим уверењима како би донела коначну одлуку. Заправо, пажљиво разматрање јасних разлога има шансу да усмери њена уверења ка правом путу; тешко да може разумније поступити.

У сваком случају, особа која решава проблем мора да научи да успостави равнотежу између нејасних уверења и јасних разлога. И можда је ово најважнија ствар коју она мора да научи. Главно правило понашања, главно начело онога ко решава проблем треба да буде:

> *Никада не радите против својих уверења, али покушајте да непристрасно увидите јасне разлоге за и притив ваших планова.*

4.3. Економичност, без унапред одређених ограничења

Склоност ка економичности не захтева објашњење. Разумљиво је да треба трошити што је могуће мање времена и напора при извршавању одређеног задатка. Човеков ум је можда његова најважнија имовина, и чување умног напора је можда најважнија грана економије. *Не улажите пуно труда како бисте урадили нешто, ако можете мало.* Ово је општи принцип економичности; користи се при решавању проблема када се проблем решава увођењем *што је могуће мање сувишних података*.

Очигледно, мора се пажљиво проучити сам проблем и материјал који се односи на проблем; треба прво покушати наћи пут до решења без испитивања других ствари. Ако се не успе у томе, треба проучити материјал који се не односи директно на дати проблем, али му је близак. Ако се опет не уочи неки користан податак треба наставити даље али – и ово је пожељан општи став – не треба трошити време и труд на тешке ствари све док постоји нада да ће се дати проблем решити помоћу ствари које су му блиске. Ова врста економичности требала би се исказати начелом:

Останите што је могуће ближе проблему.

У складу са начелом економичности, прво се истражује дати проблем; ако ово није довољно, истражује се непосредна околина проблема. Ако ни ово није довољно, истражује се још шире; сваки пут када се не успе у налажењу пута ка решењу, треба наставити даље. Особа која је одлучна да реши проблем по сваку цену, треба да уложи пуно напора. Она мора да прихвати начело *одсуства ограничења*, што је копија начела економичности:

Ипак, будите спремни да одете толико далеко од проблема као што вас околности могу натерати да одете.

4.4. Упорност, али разноврсност

Особа која решава проблем мора да буде тврдоглава, да се држи проблема, не сме да одустане. Оно што се односи на целину не односи се у потпуности и на делове. Свакако, приликом решавања проблема у току испитивања неког детаља или неког виђења проблема треба се држати проблема, и не треба одустати прерано. Ипак, треба проценити могућности, да ли треба наставити одређеним путем или не.

Држите се чињеница које испитујете све док постоји нада да ћете доћи до корисне идеје.

Рад особе која решава проблем је у великој мери променљив посао; мора да се досети неке ставке коју ће применити у решавању. Ставка које треба да се досети може да буде више повезана са одређеним виђењем или одређеним детаљем проблема него са осталим виђењима и детаљима. Али особа која решава проблем не зна унапред шта ће је довести до циља. Дакле, треба размотрити различита виђења и детаље.

Како би испитала све, особа која решава проблем не треба предуго да се задржава само на једном аспекту. Треба да тражи нешто другачије, да пронађе нешто ново у свакој фази – нови податак, или комбинацију података коју је претходно разматрала, или да уочи неки нови смисао оног што је већ разматрала. Циљ је, наравно, сагледати проблем у новом светлу, које више обећава.

Укратко, разноврсност је саставни део упорности. Као што је претходно наведено, треба разматрати оне чињенице за које се сматра да су корисне, али са упорношћу. *Ипак, треба покушати размотрити нешто ново, и уочити нешто корисно у оном што се истражује.* Најочигледнија опасност на коју упућује ово начело јесте мана разноврсности, а то је понављање истих ствари изнова и изнова, без промене и напретка.

4.5. Правила предности

Ако постоје два приступа истом проблему која су подједнако корисна, а један од њих изгледа лакши од другог, логично је да се пође од лакшег приступа. Овде се примећује *правило предности* које се може навести као следеће:

Лакше претходи тежем.

Уствари, овај исказ је непотпун: треба додати ограничење „*ceteris paribus*“ или „*под истим околностима*“. Треба напоменути да се ово ограничење, које је од суштинског значаја, иако није исказано, мора разумети у овом и слично формулисаним правилима предности. Следи неколико подједнако очигледних правила ове врсте:

Више познато претходи мање познатом.
Ставка која има више заједничких тачака са проблемом претходи ставки са мање заједничких тачака.

Ова правила су очигледна, али њихова примена може бити мање очигледна. Ограничење „*ceteris paribus*“, које није посебно наглашено а подразумева се, може захтевати детаљно сагледавање проблема.

Постоје и друга мање очигледна правила, мање општа, посебна правила предности. Да би се она правилно протумачила морају се класификовати елементи који су везани за та правила. Дата је подела елемената која је можда непотпуна, али важи за најочигледније случајеве:

1. Материјал који је везан за проблем
2. Доступна знања
3. Помоћни проблеми

Размотрићемо ове елементе у наредним одељцима.

4.6. Материјал који је везан за проблем

Када особа која решава проблем почне да проучава проблем, она још увек не зна које чињенице ће бити важне. Стога, може се десити да превише истиче неважну чињеницу, што ће отежати решавање. Дакле, треба почети са проучавањем проблема као целине, не обраћати пажњу на детаље, све док се у потпуности не схвати суштина проблема. *Целина претходи деловима.*

Када особа која решава проблем има утисак да не може пуно да напредује док проблем посматра као целину, и жели да размотри детаље, она треба да примети да постоји нешто попут хијерархије детаља. Најзначајнији су главни делови, то јест они који су најближи суштини проблема. (Као што је речено, претпоставка и тврђење су главни делови проблема доказивања.) Природно је да се детаљно разматрање проблема започне разматрањем његових главних делова. *Главни делови претходе осталим деловима.*

Један од два главна дела може бити подељен: претпоставка може да се састоји од неколико мањих претпоставки, закључак од неколико тврдњи; непознато може да има неколико компоненти; и може да постоји неколико података који су груписани у првом разматрању. После главних делова, треба се осврнути на њихову поделу; може да се испитује сваки податак, све што је непознато, свака одредба стања, свака мања претпоставка, свака тврдња закључка појединачно. У сваком случају, остали детаљи који се тичу проблема налазе се испод главних делова и њихове поделе у поменутој хијерархији. Може постојати и редослед првенства међу мање битним деловима проблема. Али нећемо ићи даље него што нам је то потребно. Под истим околностима (ово ограничење остаје) део који је ближи суштини проблема је кориснији него онај што је удаљен. *Мање удаљени делови претходе више удаљеним.*

4.7. Доступна знања

Као што је више пута поменуто, од суштинског је значаја да особа која решава проблем употреби одговарајућа знања и повеже их са елементима проблема. Она може решавати проблем са „унутрашње“ или „спољашње“ стране. Може остати у оквиру проблема, пажљиво испитати његове различите делове, надајући се да ће тако доћи до корисних знања. А може и отићи изван проблема, и тражити неки користан податак у оквиру свог знања. У претходним одељцима разматрано је решавање проблема унутар самог проблема, сада хоћемо да разматрамо решавање изван проблема.

Сваки део знања, свако претходно искуство може да буде корисно за решење тренутног проблема, али очигледно је да је немогуће размотрити сво знање које одређена особа поседује. Чак иако је тај проблем из математике и ако се узме у обзир само део знања који је у вези са проблемом, и заснива се на претходно решеним проблемима и доказаним теоремама из одређене области математике, ни то знање не може у потпуности да се размотри. Особа која решава проблем мора да се ограничи, мора да изабере оне делове знања који имају највеће шансе да буду употребљени.

Размотримо конструктивне проблеме (проблеме које треба решити) и проблеме доказивања (проблеме које треба доказати).

Нека је дат проблем који треба решити. Када се утврде његови главни делови, и оно што је непознато, чињенице, треба тражити неки претходно решен проблем који може бити користан. Логично је да се тражи проблем који има нешто заједничко са задатим проблемом, са чињеницама, са неким појмом који је у вези са проблемом, и слично. Постоји могућност, мања или већа, да било који претходно решен проблем може бити користан, али свакако их има пуно да би се сваки разматрао. Ипак, највише треба обратити пажњу на *непознати* заједнички елемент. Наравно, у посебним случајевима, други заједнички елементи могу имати предност, али уопштено, под истим околностима, прво се треба *осврнути на непознато*. *Претходно решени проблеми који имају исте непознате као текући проблем претходе осталим претходно решеним проблемима.*

Ако се не може наћи довољно приступачан, претходно решен проблем који има исту непознату као дати проблем, може се потражити проблем који има сличну непознату – чак и такви проблеми имају велику предност.

Ако је дат проблем који треба доказати, ситуација је слична. Док се тражи теорема која је претходно доказана, која може бити корисна, треба се осврнути на доказ. *Претходно доказане теореме са истим закључком као теорема коју треба доказати претходе осталим претходно доказаним теоремама.*

4.8. Помоћни проблеми

Једна од најважнијих одлука са којима се суочава особа која решава проблем је избор одговарајућег помоћног проблема. Она може да тражи такав проблем радећи унутар постављеног проблема, или изван њега, или (што је најчешће случај) радећи и унутар и изван датог проблема. Одређене врсте помоћних проблема, под истим околностима, имају већу шансу да буду корисни, за разлику од осталих проблема.

Помоћни проблем може побољшати решавање датог проблема на много различитих начина: може дати теоријску помоћ, методолошку помоћ, стимулативно деловати, орјентисати онога ко решава, обезбеђује вежбање. Али каква год помоћ да се тражи, *унапред* постоје веће шансе да се она добије од помоћног проблема који је уско повезан са датим проблемом, него од неког другог проблема који је мање повезан са њим. *Проблеми који су еквивалентни задатом проблему претходе проблемима који су мање или више слични датом, а ови проблеми претходе осталим проблемима.*

5. УЧЕЊЕ, ПОДУЧАВАЊЕ, И УЧЕЊЕ ПОДУЧАВАЊА

„Оно што треба да откријете самостално оставља траг у вашем уму који можете поново да искористите кад вам се укаже потреба за тим.“

G. C. LICHTENBERG: *Aphorismen*.

„Дакле, све људске спознаје почињу интуицијом, затим се иде ка схватањима, а завршавају се идејама.“

I. KANT: *Critique of Pure Reason*, translated by J. M. D. Meiklejohn, 1878, p. 429.

5.1. Циљ подучавања

Не можемо судити о учинку наставника ако не знамо његов циљ. Не можемо смислено расправљати о подучавању ако се у одређеној мери не слажемо са циљем подучавања.

Polya се бавио наставним планом за математику средњих школа, и имао је старомодну идеју о циљу наставног плана: прво и пре свега, план би требао да научи младе људе да МИСЛЕ. Ово је било његово чврсто убеђење; сматрао је да се људи не морају у потпуности слагати са овим, али претпостављао је да се у одређеној мери слажу. Ако се „учење мишљења“ не посматра као примарни циљ, може се сматрати секундарним, истакао је Polya (Polya, 1965). „Учење мишљења“ значи да професор математике не треба само да преноси информације, већ треба и да покуша да развије способност ученика да користе пренете информације: треба да нагласи практично знање, корисне ставове, пожељне начине мишљења. Овде треба нагласити две ставке.

Прво, мишљење којим се овде бавимо није сањарење већ „мишљење са сврхом“ или „добровољно мишљење“ (William James) или „продуктивно мишљење“ (Max Wertheimer). Овакво „мишљење“ може се поистоветити са „решавањем проблема“. У сваком случају, по мишљењу Polya-е, један од главних циљева наставног плана за математику у средњој школи јесте развијање способности ученика да решавају проблеме.

Друго, математичко мишљење није само „формално“; оно се не бави само аксиомама, дефиницијама, строгим доказима, и многе друге ствари му припадају:

уопштавање на основу посматраних случајева, индуктивни аргументи, аргументи на основу аналогије, препознавање математичког концепта, или његово издвајање из конкретне ситуације. Професор математике има одличну прилику да упозна своје ученике са овим веома важним „неформалним“ мисаоним процесима, и Polya је сматрао да сваки професор треба да искористи ову прилику много боље, него што то генерално ради. Речено непотпуно, али сажето: професор треба да подучава како се нешто доказује на све могуће начине, али и да подучава претпостављање решења.

5.2. Подучавање је уметност

Подучавање није наука, већ уметност. Ово мишљење изразили су многи људи и много пута, па се Polya осећао непријатно кад је ово понављао. Подучавање, очигледно, има много тога заједничког са позоришном уметношћу. На пример, професор треба да изложи одељењу доказ који је темељно излагао много пута претходних година у оквиру истог предмета. Он заиста не може да буде узбуђен због овог доказа – али Polya је сматрао да се то не сме показати одељењу; ако је професору досадно и целом одељењу ће бити досадно. Он треба да се претвара да је узбуђен због доказа када га започне, да има корисне идеје док напредује, да је изненађен и одушевљен кад заврши доказ. Професор треба мало да глуми због својих ученика који могу научити, понекад, и више из понашања професора него из теме која је изложена. Polya је признао да је уживао у тој глуми, посебно док је био старији, јер је тада ретко откривао нешто ново у математици.

Мање је очигледно да подучавање има нешто заједничко и са музиком. Разумљиво је, наравно, да професор не треба да каже нешто једном или двапут, већ три, четири, или више пута. Ипак, понављање исте реченице више пута без паузе или неке промене може да буде јако досадно и доводи до губљења њеног смисла. Једна од основних уметничких форми музике је „мелодија са променама“. Преношење ове уметничке форме из музике у подучавање састоји се у томе да професор одређену реченицу изговори у најједноставнијем облику; затим је понови са малом изменом; затим је понови са још неким изменама, и тако даље; па може излагање завршити враћањем на првобитну једноставну формулацију. Друга уметничка форма у музици је „рондо“. Преношењем ронда из музике у подучавање професор понавља исту реченицу, која је од суштинског значаја, више пута са малом или без промене, али између два понављања убацује одговарајући илустративни материјал који се разликује од онога што излаже.

5.3. Три принципа учења

Подучавање је занат који има безброј малих трикова. Сваки добар професор има своја омиљена средства, и сваки добар професор се разликује од било ког другог доброг професора.

Свако ефикасно средство мора да буде повезано са природом процеса учења, на одређени начин. Не зна се пуно о процесу учења, али чак и груба скица његових више очигледних карактеристика може побољшати трикове овог заната. Polya је навео ту грубу скицу у виду три „принципа“ учења. Сам Polya их је формулисао и комбиновао, али „принципи“ сами по себи нису ништа ново; принципи су били навођени и преправљани у различитим облицима, изведени су из годишњег искуства, потврђени од важних људи, а такође и предложени на основу психолошког истраживања учења.

Ови „принципи учења“ могу бити и „принципи подучавања“, и то је главни разлог за њихово разматрање.

(1) *Активно учење.* Много њих је на различите начине рекло да учење треба да буде активно, а не само пасивно које се своди на рецепцију; само читањем књига или слушањем лекција или гледањем покретних слика без активности сопственог ума тешко да се може нешто научити и сигурно се неће много научити.

Постоји још једно мишљење које се често помиње (и уско је повезано са претходним): *Најбољи начин да нешто научите јесте да то сами откријете.* Lichtenberg (немачки физичар, из 18. века, више познат као писац афоризама) је рекао: *Оно што треба да откријете самостално оставља траг у вашем уму који можете поново да искористите кад вам се укаже потреба за тим.* Мање живописна али можда више применљива је следећа тврдња: *Како би учење било ефикасно, ученик мора сам да открије велики део градива које треба да научи, и то што је могуће више на основу датих чињеница.*

Ово је *принцип активног учења*. И веома је стар принцип.

(2) *Најбоља мотивација.* Учење треба да буде активно, као што је претходно речено. Али ученик неће деловати ако није мотивисан да делује. Он мора да буде подстакнут нечим да ради, на пример, неком наградом. Најбољи подстицај за учење треба да буде заинтересованост да се одређено градиво научи, и најбоља награда за такву активност треба да буде задовољство сопственим менталним активностима. Али ако нема најбољу мотивацију, ученик треба да се потруди да добије што бољу мотивацију, и не треба да заборави мање суштинске разлоге за учење.

Како би учење било ефикасно, ученик треба да буде заинтересован за градиво које треба да научи и треба да осети задовољство у тој активности учења. Ипак, поред

ових најбољих мотива за учење, постоје и други мотиви, такође, и неки од њих су пожељни. (Кажњавање за неучење је најмање пожељно.)
Ово је *принцип најбоље мотивације*.

(3) *Повезане фазе.* Polya је у својој књизи „*Mathematical Discovery On Understanding, Learning, And Teaching Problem Solving*“ овај део започео са Kant-овом реченицом која се често наводила: *Дакле, све људске спознаје почињу интуицијом, затим се иде ка схватањима, а завршавају се идејама*. Навео је своје виђење ове реченице:
Учење почиње акцијом и опажањем, затим се иде ка речима и концептима, и требало би да се заврши са пожељним навикама мишљења.

Polya је објаснио појмове из претходне реченице. „Учење“ треба да подсети на учионицу у којој се одређена особа налази у улози ученика или професора (односно наставника). „Акција и опажање“ треба да сугеришу на овладавање и увиђање конкретних ствари као што су инструменти у лабораторији и слично.

Ова конкретна интерпретација појмова може да буде једноставнија и природнија када се односи на једноставно градиво. Али након неког времена могу се уочити исте фазе у савладавању сложенијег градива. Разликују се три фазе: *фаза истраживања, фаза формализације*, *фаза усвајања*.

Прва фаза *истраживања* ближа је акцији и опажању и више иде ка интуитивном, хеуристичком нивоу.

Друга фаза *формализације* иде ка нивоу општег схватања, уводећи терминологију, дефиниције, доказе.

Фаза *усвајања* долази на крају: треба покушати увидети „скривену основу“ ствари, градиво које се учи треба ментално усвајати, унети у целокупан систем знања, и у цели ментални склоп ученика; ова фаза отвара пут за нове примене, у даљим уопштавањима.

Да сумирамо: *Како би учење било ефикасно, фаза истраживања треба да претходи фази вербализације и опште формализације, и на крају, градиво које је научено треба да се споји, и да унапреди целокупан ментални склоп ученика.*
Ово је *принцип повезаних фаза*.

5.4. Три принципа подучавања

Наставник тј. професор треба да познаје методе учења. Он треба да избегава неефикасне методе и да искористи ефикасне методе учења. На тај начин може добро да искористи три принципа који су управо поменути, принцип активног учења, принцип најбоље мотивације, и принцип повезаних фаза; ова три принципа учења су такође и принципи подучавања. Постоји, међутим, услов: ако професор користи неки принцип онда он треба добро да разуме тај принцип на основу личног искуства, које је претходно добро размотрио.

(1) *Активно учење.* Шта професор каже у учионици није неважно, али шта ученици мисле много је важније. Ученици треба сами да створе идеје, а професор треба да их надгледа. Ово је класично Сократово правило и облик наставе који му је најбоље прилагођен јесте Сократов дијалог. Професор у средњој школи има одређену предност у односу на професора на факултету јер може да користи форму дијалога много интезивније. Нажалост, чак и у средњој школи, време је ограничено и постоји прописано градиво које треба обрадити, и не може се све обрађивати у форми дијалога. Али принцип је: професор треба да пусти ученике да *сами открију што је могуће више* на основу датих чињеница.

Polya је сматрао да је много више изводљиво него што се обично уради. Навео је један користан трик: професор треба да допусти ученицима да *активно допринесу формулисању* проблема који касније морају да реше. Ако су ученици имали удела у постављању проблема, они ће много активније радити на његовом решавању. Заправо, у раду научника, формулисање проблема може да буде велики део открића, решење обично захтева мање размишљања и оригиналности него формулисање. Према томе, допуштањем ученицима да учествују у формулисању, професор их не мотивише само да раде озбиљније, већ их учи и жељеним начинима мишљења.

(2) *Најбоља мотивација.* Професор треба себе да види као продавца: он жели да прода део математике младима. Ако се продавац опире продаји и његови потенцијални купци одбијају да купе, он не треба да криви само купце. Треба запамтити, купац је нечелно увек у праву, а понекад је у праву и у пракси. Особа која одбија да учи математику можда је у праву; она не мора да буде ни лења ни глупа, већ је једноставно заинтересована за нешто друго – има много интересантних ствари око нас. Професор је дужан да као продавац знања убеди ученике да је математика интересантна, да је тема дискусије интересантна, да проблем који треба да реше заслужује њихов труд.

Дакле, професор треба да обрати пажњу на избор, на формулацију, и на одговарајућу презентацију проблема који износи. Проблем треба да се појави као значајан и применљив са гледишта ученика; проблем треба да буде повезан, ако је то могуће, са свакодневним искуством ученика, и треба га увести, ако је могуће, на занимљив начин. Или проблем треба започети са неким добро познатим знањем; он треба да има, ако је могуће, делове општег интереса или практичне употребе. Ако професор жели да стимулише ученика да уложи велики труд, онда му мора дати разлог који ће оправдати труд који захтева његов проблем.

Најбоља мотивација је ученикова заинтересованост за задатак. Али постоје и други мотиви које не треба занемарити. Polya је навео још један користан трик у подучавању. Пре него што ученици реше проблем, професор треба да им допусти да *претпоставе решење*, или део решења. Ученик који изражава своје мишљење обавезује се; његов углед и самопоуздање зависе мало и од исхода, нестрпљив је да сазна да ли ће његова претпоставка бити тачна или не, и тако ће он бити заинтересован за свој задатак и за рад у учионици – неће заспати и недолично се понашати на часу.

Заправо, у раду научника, претпоставка скоро увек претходи доказу. На тај начин, ако професор дозволи ученицима да претпоставе решење, не само да ће их мотивисати да раде више, већ ће их научити и пожељним начинима мишљења.

(3) *Повезане фазе.* Велика мана проблемски орјентисаног градива у уџбеницима је та што се у уџбеницима налазе углавном рутински (увежбани) примери. Рутински пример је пример са уском облашћу примене; он илуструје и нуди примену само једног издвојеног правила у задатку. Polya је истакао да и ови рутински примери могу бити корисни и неопходни, али недостају им две важне фазе учења: фаза истраживања и фаза усвајања. Обе фазе настоје да повежу текући проблем са светом око ученика и са другим знањем, пре него што он дође до коначног решења. Ипак, рутински проблем је очигледно повезан са правилом које илуструје и мало је повезан са нечим другим, па се не добија пуно тражењем даљих веза. Насупрот таквим рутинским проблемима, школе треба да постављају теже проблеме, а затим проблеме са богатом позадином који заслужују даље истраживање, и проблеме који унапред одређују рад ученика.

Овде је дат практичан предлог: ако је проблем о ком професор жели да дискутује са одељењем одговарајући, он треба да пусти ученике да претходно ураде неко истраживање, што може подстаћи њихову жељу за коначним решењем. И треба да остави мало времена за дискусију након решавања о томе шта је све урађено; то може да буде од користи и за решавање наредних проблема.

Овде је Polya завршио објашњавање три принципа - активног учења, најбоље мотивације, и повезаних фаза. Он је сматрао да ови принципи могу заћи у детаље свакодневног рада професора и могу га учинити бољим професором. Такође, сматрао је да ови принципи треба да помогну у планирању целокупног наставног програма, као и у планирању сваке лекције било ког предмета.

5.5. Учење подучавања

Остала је још једна тема коју треба поменути и која је веома важна: обука наставника и професора. Polya се овде усредсредио на два питања. Овим питањима посветио је велики део свог посла и практично сва предавања у последње две деценије живота. Приближно речено, прво питање везано је за курсеве о „садржају предмета“, а друго за курсеве о „методама“.

(1) *Садржај предмета*. Ово је тужна чињеница, али широко прихваћена, да је знање професора математике у средњим школама о њиховом предмету, у просеку, недовољно. Постоје, наравно, добро припремљени професори средњих школа, али постоје и они други (са којима се Polya, такође, сусретао) којима се Polya дивио због добре воље, али њиховој припреми за наставу није се дивио. Званичне препоруке за курсеве о садржају предмета можда нису савршене, али нема сумње да би њихово прихватање резултирало значајним побољшањем. Polya је хтео да скрене пажњу на ставку, коју је по његовом мишљењу, требало додати званичним препорукама.

Знање из било ког предмета састоји се из информација и практичног знања. Практично знање је способност да се користе информације; наравно, практичног знања нема без сопственог мишљења, оригиналности и стваралаштва. У математици практично знање је способност решавања проблема, налажења доказа, критичког мишљења, коришћења математичких термина са лакоћом, препознавања математичких концепата у конкретним ситуацијама.

Сви ће се сложити да је у математици практично знање много важније од пуког поседовања информација. Средња школа треба да пренесе ученицима не само информације већ и практично знање, независност, оригиналност, стваралаштво. Званичне препоруке не помињу практично знање професора у метематици. У њима се не помиње самостални или истраживачки рад будућих професора математике. Ако, међутим, професор нема никаквог искуства о стваралачком раду, како ће он бити способан да инспирише, да води, да помогне, или чак да организује стваралачке активности својих ученика? Професор који је сво своје знање из математике стекао само рецепцијом тешко да може да унапреди активно учење својих ученика. Професор који никада није имао паметне и стваралачке идеје вероватно ће прекоравати ученика који има такве идеје, уместо да га подстиче. Према Polya-ином мишљењу, највећи пропуст у знању просечног професора математике средње школе јесте следеће: он нема искуства у активном раду из математике, и зато не влада добро градивом које треба да предаје.

Са циљем да унапреди знање професора Polya је увео и више пута држао *семинаре о решавању проблема*. Проблеми који су били понуђени на овим семинарима нису захтевали знање ван средње школе, али захтевали су одређени степен концентрације и расуђивања – и на том нивоу њихово решавање је „стваралачки“ рад. Polya је семинаре организовао тако да ученици могу да користе велики део градива које се обрађује у школи, без великих промена; да они овладају градивом математике из средње школе; и да имају прилику за наставну праксу (да подучавају једни друге у малим групама).

(2) *Методе*. На основу свог искуства са професорима математике Polya је имао утисак да су курсеве о „методама“ професори прихватали са мало одушевљења, као и курсеве које су организовале катедре за математику. Polya је сматрао да је требало јавно дискутовати о томе да ли су ови курсеви стварно потребни, да ли су корисни, и да ће се само на тај начин доћи до правих одговора.

Свакако постоје важна питања, као на пример, да ли се подучавање лако учи, да ли постоји нешто што се може назвати матодом подучавања. Постоји онолико добрих метода колико и добрих професора. До ових закључака Polya је дошао на основу сопственог искуства, и веровао је да су курсеви о методама корисни.

Polya је нагласио да следеће две ставке треба додати званичним препорукама:

1. *Обучавање професора математике у оквиру Семинара о решавању проблема или у оквиру неке друге обуке треба да обезбеди искуство у самосталном („стваралачком“) раду на одговарајућем нивоу.*
2. *Курсеви о методама морају бити у тесној вези са курсевима о садржају предмета или са практичним подучавањем, и уколико је то изводљиво, те курсеве треба да држе инструктори који имају искуства и у математичком истраживању и у подучавању.*

5.6. Став професора

У оквиру својих семинара за професоре математике Polya је дефинисао десет правила за професоре. Приликом формулисања ових правила он је разматрао учеснике својих семинара, тј. професоре који су предавали у средњој школи. Ипак, ова правила могу се применити у било којој ситуацији у настави, и за било који предмет. Мада, професори у средњим школама имају веће и боље могућности за примену неких правила, као што су правила 6, 7 и 8, која се касније помињу.

Сада ћемо размотрити десет правила једно по једно, са посебним освртом на обавезе и задатке професора математике.

(1) Постоји само један непогрешиви наставни метод: ако професору није занимљива његова тема, она неће бити занимљива ни његовом одељењу. Ово је сасвим довољно за дефинисање првог и најважнијег правила за професоре: *Будите заинтересовани за вашу тему.*

(2) Ако професор није заинтересован за тему, не треба да је предаје, зато што неће бити у могућности да то учини како треба. Заинтересованост је нешто без чега се не може, али сама по себи није довољна. Мада, професору неће помоћи ни заинтересованост, ни наставна метода, или било шта друго у објашњавању нових појмова ученицима, уколико сам себе не разуме. Ово је довољно за дефинисање другог правила за професоре: *Треба да знате вашу тему.*

И заинтересованост за предмет и знање о том предмету неопходни су за професора. Polya је на прво место ставио заинтересованост, зато што са искреним интересовањем професор има добре шансе да стекне неопходно знање, док нека знања заједно са недостатком интересовања могу га учинити изразито лошим професором.

(3) Читање добре књиге или слушање доброг предавања о психологији учења може бити од велике користи. Ипак, читање и слушање нису у потпуности неопходни, и без сумње су недовољни; професор треба да *зна методе учења*, треба да је добро упознат са процесом учења на основу *искуства* – искуства сопствених истраживања и посматрања својих ученика.

Прихватање само оног што се чује као доказ јако је лош принцип. Постоји још једна ситуација где професор не може себи да дозволи да буде задовољан само са оним што чује, постоји још један принцип учења који треба озбиљно да схвати, а то је принцип активног учења. Треба да покуша да увиди његову суштину: *Најбољи начин да научите нешто је да то сами откријете*.

(4) Чак и са огромним знањем, заинтересованошћу и разумевањем процеса учења професор може да буде лош. Ситуација је необична, али не тако ретка; постоје веома стручни професори који не могу да успоставе „контакт“ са својим одељењем. Како би се постигао циљ да са једне стране постоји неко ко подучава а са друге стране неко ко треба да научи, мора постојати нека врста контакта између професора и ученика: професор треба да буде способан да увиди положај ученика. Стога, следеће правило је: *Покушајте да прочитате изразе лица ученика, покушајте да увидите њихова очекивања и тешкоће, ставите се у њихов положај*.

Реакције ученика на предавање професора зависе од њихове позадине, њихове перспективе, и њихових интересовања. Дакле, професор треба да има на уму шта ученици знају а шта не, шта би они хтели да науче а шта их не занима, шта ученици треба да знају и шта је мање важно за њих да знају.

(5) Претходна четири правила садрже основне елементе доброг подучавања. Она заједно формирају неку врсту неопходног и довољног услова: ако је професор заинтересован, и добро зна свој предмет, и ако, поред тога, може да сагледа положај ученика, и шта му помаже а шта га спутава у учењу, он је већ добар професор или ће то постати ускоро; можда му је потребно само мало искуства.

Остаје да се наведу неке последице горе наведених правила, посебно оне последице које забрињавају професоре средњих школа. Знање се једним делом састоји од „информација“, а једним делом од „практичног знања“. Практично знање је вештина; то је способност да се барата информацијама, да се оне користе за одређену сврху; практично знање је способност да се ради плански.

У математици, практично знање је способност решавања проблема, налажења доказа, и критичког испитивања решења и доказа. Практично знање је много важније од самог поседовања информација и у математици. Због тога, следеће правило је јако битно за професора математике: *Немојте ученицима давати само информације, дајте им и практично знање, начине мишљења, навикавајте их да раде методички.*

Како је практично знање много важније од информација, можда је за наставу математике много важније како се предаје градиво него шта се предаје.

(6) Прво се претпостави, па се онда доказује – тако се обично долази до открића. Ово треба знати (на основу сопственог искуства, ако је то могуће), и такође, треба знати да професор математике има добре шансе да покаже улогу претпоставки у откривању и на тај начин представи својим ученицима суштински битне начине размишљања. Ова последња ставка није толико позната као што би требала бити, и баш због тога, заслужује посебну пажњу. Polya је веровао да је следеће правило јако битно: *Дозволите ученицима да уче путем претпоставки.*

Ученици који не знају пуно и нису вредни наклоњени су непромишљеном нагађању. Професори треба да науче ученике да образовано и рационално претпостављају, а не да то чине непромишљено. Рационално претпостављање заснива се на промишљеном коришћењу индуктивних доказа и аналогије.

(7) „Математика је добра школа прихватљивог расуђивања.“ Ова тврдња сумира став који је исказан у претходном правилу; она звучи непознато и недавно је настала. „Математика је добра школа приказивања сопственог расуђивања.“ Ова тврдња звучи познато – неки њени облици стари су колико и сама математика. Професор математике треба да упозна све своје ученике са сопственим расуђивањем на много вишем нивоу него што је елементарни: *Пустите ученике да уче доказивањем.*

(8) Практично знање је кориснији део математичког знања у односу на само поседовање информација. Али како научити ученике том практичном знању? Ученици то могу да науче само опонашањем и вежбањем.

Када професор представља решење проблема, он треба да *нагласи корисне идеје* тог решења. Идеја је корисна ако се може поновити, тј. ако се може користити и за решавање других проблема а не само за решавање тренутног проблема – што се чешће користи, више је корисна. Корисне идеје решења не треба наглашавати само похвално, већ и *понашањем* (мало глуме веома је корисно ако професор има талента за то). Добро наглашене идеје могу претворити решење у *модел за решавање*, који ће ученици користити за решавање многих других проблема. Отуда и правило: *Обратите пажњу на оне идеје текућег проблема које могу бити корисне за решавање наредних проблема – покушајте да откријете општи образац који се крије иза конкретне ситуације.*

(9) Polya је навео мали трик везан за наставу који се лако учи и сваки професор би то требао да зна. Када професор почне да дискутује о проблему, треба да дозволи ученицима да погађају решење. Ученик који је осмислио претпоставку, или је чак и саопштио, обавезује се: он мора да прати развој решења како би увидео да ли је његова претпоставка тачна или није – и тако не може да буде непажљив. Стога, правило гласи: *Не откривајте целу тајну одједном – пустите да ученици нагађају пре него им кажете – пустите да они сами открију што је могуће више.*

(10) Нека, на пример, ученик рачуна неки израз у више редова. Polya је истакао да ако професор види да је у последњем реду погрешно израчунао, не треба то одмах ученику да каже. Он је сматрао да професор треба да провери заједно са учеником тачност резултата, и да проверава ред по ред. На пример: „Добро си почео, први ред је тачан. Следећи ред је такође тачан; урадио си ово и ово. Следећи ред је добар. Али шта мислиш о овом реду?“ Грешка је у том реду и ако ту грешку открије ученик сам, он има шансе да научи нешто. Али ако једном каже „Ово није тачно.“ ученик ће се можда увредити и неће слушати шта ће му професор касније рећи. И ако каже „Ово није тачно.“ превише често ученик неће волети ни професора ни математику, и сав труд биће узалудан.

Polya је истакао да треба избегавати реченице „Погрешио си.“. Уместо тога, ако је могуће, професор треба да каже: „У праву си, али...“ Ако тако настави, он није лицемеран већ хуман. И тако треба да настави. Формулишимо правило прецизније: *Предложите ученицима, немојте их терати.*

Последња два правила, 9 и 10, углавном иду у истом смеру. Она заједно предлажу да професор остави ученицима онолико слободе и иницијативе колико год је то могуће у оквиру постојећих наставних услова. Притиснут временом, професор математике може често да погреши код ових правила, и код *принципа активног учења*. Он може да пожури ка решењу проблема не остављајући ученицима довољно времена да сами раде на проблему. Професор може навести концепт или формулисати правило прерано, без адекватне припреме одговарајућим материјалом, и пре него што ученицима затреба тај концепт или правило. И може да направи велику грешку, као на пример, да уведе неке елементе који воде до решења, али ученици никако не могу да открију како се до њих дошло ниоткуда.

Постоји пуно начина да се наруши принцип. Треба истаћи неке аспекте.

Пустите ученике да постављају питања; или поставите таква питања која би и они сами поставили.
Пустите да ученици дају одговоре; или ви одговорите на питања као што би и они одговорили.

У сваком случају професор треба да избегава питања која нико не би поставио, па чак ни он сам.

6. У УЧИОНИЦИ

6.1. Помоћ ученику

Једна од најважнијих наставникових дужности јесте да помогне својим ученицима. Тај задатак није сасвим лак, захтева време, праксу, преданост и добре принципе. Ученик треба да се што више осамостали. Али ако га наставник остави самог са задатком, без помоћи или без довољне помоћи, он можда уопште неће напредовати. Ако напротив, наставник превише помаже, не остаје ништа самом ученику. Наставник треба да помаже, али ни превише ни премало. Треба да помаже тако да ученик *учествује у раду у разумној мери*.

Ако ученик сам не може много да учини, нека му наставник остави бар неку илузију да ради самостално. Како би то постигао, наставник мора да помаже ученику опрезно и *ненаметљиво*. Најбоље је ученику помагати на природан начин. Наставник треба да се стави у позицију ученика, треба да сагледа ситуацију са гледишта ученика, да покуша да разуме шта се збива код ученика, и да поставља таква питања или да упозорава на такав поступак *који би самом ученику могао пасти на ум*.

6.2. Питања, препоруке, мисаоне операције

Ако наставник жели да помогне ученику успешно, ненаметљиво и природно, може доћи до такве ситуације да наставник стално понавља иста питања и упозорава на исте поступке. Стога, Polya наглашава да наставник мора увек да пита: *Шта је непознато?* (Polya, 1966). Ово питање може да се постави и на други начин, на пример: Шта се тражи у задатку? Шта желиш да нађеш? Шта заправо тражиш? Циљ ових питања је да се ученик сконцентрише на оно што је непознато. Исти ефекат може се постићи и препоруком: *Размотри оно што је непознато!*

6.3. Општа ваљаност

Општа ваљаност је важна карактеристика питања и препорука које се овде помињу. Узмимо, на пример, питања: *Шта је непознато? Шта је дато? Који је услов?* Ова питања могу се употребљавати уопштено, могу се постављати при решавању било које врсте задатака. Примена ових питања није ограничена на одређену област. Задатак може да буде алгебарски, геометријски, математички, нематематички, озбиљан проблем или обична загонетка – свеједно, ова питања имају смисла и могу да помогну при решавању задатака. Заправо, постоји једно ограничење које се не односи на област. Нека питања могу се применити само у задацима у којима се налази оно што је непознато, док се у задацима у којима се доказује нешто не могу применити.

6.4. Здрав разум

Препоруке и питања које је Polya навео важе уопштено, и она су природна, једноставна, очигледна и произилазе из здравог разума. Уочимо препоруку: *Размотри непознату! И покушај да се сетиш неког теби познатог задатка који има исту или сличну непознату!* Овде се саветује да ученик уради оно што би свакако урадио и сам, без икаквог савета, ако се озбиљно бави својим задатком. Решавајући било какав проблем, треба наћи оно што је непознато, сетити се неког познатог метода којим се налази тренутна или слична непозната. Ако ученик решава задатак на овај начин, он је на добром путу који обично води успеху.

6.5. Наставник и ученик. Опонашање и вежбање

Обраћајући се својим ученицима питањем или препоруком, наставник има двоструки циљ пред собом. Прво, треба да помогне ученику да успешно реши задатак, и друго, треба да развије умне способности ученика тако да наредне задатке може решавати сам. Оба ова циља су међусобно уско повезана: ако ученик успе да реши свој задатак, он је тиме и унапредио своју способност за решавање задатака. Не сме се заборавити да су поменута питања због своје уопштености примењива у многим случајевима. Ако исто питање помогне више пута, то ће запазити и ученик, и то ће га навести да исто питање искористи у наредним сличним задацима. Ако ученик себи поставља то исто питање више пута, једном ће успети да дође до исправног закључка. Такав успех открива му прави начин како треба употребити питање, а на тај начин ученик стварно усваја питање.

Решавање задатака је практична вештина, као што је на пример, пливање. Свака практична вештина стиче се опонашањем и вежбањем. Онај ко хоће да научи да плива мора то да научи вежбањем. Онај ко настоји да решава задатке мора да разматра и опонаша оно што други чине кад решавају задатке, а затим да учи да решава задатке вежбањем.

Ако наставник жели да развије способност решавања задатака код својих ученика, он мора да изазове код њих интересовање за задатке и да им да довољно прилика за опонашање и вежбање. Наставник треба да решава задатке пред одељењем, неке идеје мора мало да драматизује и сам себи да поставља она питања која користи кад помаже својим ученицима. Уз такво вођење ученик ће открити како се правилно употребљавају питања и препоруке и тиме ће стећи нешто што је важније од познавања неке специфичне математичке чињенице.

7. ФАЗЕ РЕШАВАЊА ПРОБЛЕМА

„**Прво**
Треба да разумеш задатак.
Друго
Потражи везу измађу датог и непознатог! Ако се не може наћи непосредна веза, можда ћеш морати да разматраш помоћне задатке. Најзад треба да добијеш план решавања.
Треће
Изврши свој план!
Четврто
Провери добијено решење!“ (Polya, 1966)

7.1. Четири фазе рада

Кад неко покушава да реши постављени задатак, често се дешава да мора више пута да мења гледиште са којег тај задатак разматра. Непрестано мора да има друго гледиште. На почетку рада претпоставке о задатку углавном су непотпуне. Како особа напредује у решавању, видици се мењају, и опет су другачији када је задатак готово решен.

Polya је разликовао и издвојио четири фазе код решавања задатка. Прво, треба *разумети* задатак, мора се јасно видети шта се тражи. Друго, морају се размотрити међусобно зависне појединости, која је веза између непознатог и датих података, како би се дошло до идеје решења и како би се створио *план*. Треће, треба *извршити* план. Четврто, врши се *осврт*, проверава се добијено решење и дискутује се о њему.

Свака од ових фаза има своје значење. Може се десити да ученик дође до сјајне идеје за решавање, прескочивши све припреме. Свакако да су овакве идеје пожељне. Али може доћи и до оног непожељног, кад ученик изостави неку од ове четири фазе, а нема добре идеје. Најгоре је ако се ученик упусти у израчунавање и конструкције, а задатак уопште није разумео. Ученик ће избећи многе грешке ако контролише сваки корак у извршавању свог плана. И најбољи успех биће ослабљен ако ученик коначно решење још једном не преиспита.

У наредним одељцима детаљно ћемо размотрити четири фазе решавања проблема.

Табела 1: Препоруке за успешно решавање задатка

<table>
<tr><th colspan="2">КАКО РЕШАВАТИ ЗАДАТАК?</th></tr>
<tr><td>РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА</td><td>
Шта је непознато? Шта је дато? Који је услов?
Да ли је могуће задовољити услов? Је ли услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је превише одређен? Или контрадикторан?
Нацртај слику! Уведи згодне ознаке!
Разложи услов на делове! Можеш ли да их напишеш?
</td></tr>
<tr><td>СТВАРАЊЕ ПЛАНА</td><td>
Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?
Знаш ли неки сличан задатак? Знаш ли неку теорему која би ти била од помоћи?
Размотри непознату! И покушај да се сетиш неког теби познатог задатка који има исту или сличну непознату!
Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли да га искористиш? Можеш ли да примениш његов резултат? Можеш ли да примениш метод којим је тај задатак решен? Да ли ћеш увести неки помоћни елемент како би искористио тај решени задатак?
Можеш ли задатак да изразиш другачије? Можеш ли да га изразиш још некако другачије? Врати се на дефиниције!
Ако не можеш да решиш постављени задатак, покушај најпре да решиш неки сличан задатак! Можеш ли да се сетиш неког приступачнијег сличног задатка? Општијег задатка? Специфичнијег задатка? Аналогног задатка? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а други део одбаци; како је онда непозната одређена, како се она може мењати? Можеш ли да закључиш нешто корисно на основу датих података? Можеш ли да замислиш друге дате податке који би били погодни за одређивање непознате? Можеш ли да промениш непознату,
</td></tr>
</table>

	или дате податке, или - ако треба – обоје, тако да нова непозната и нови дати подаци буду ближи? • Да ли си искористио све што је дато? Јеси ли искористио цели услов? Јеси ли узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?
ИЗВРШАВАЊЕ ПЛАНА	• У току извршавања свог плана за решавање, *контролиши сваки корак*! Можеш ли јасно да уочиш да је корак исправан? Можеш ли да докажеш да је исправан?
ОСВРТ	• Можеш ли да *контролишеш резултат*? Можеш ли да контролишеш доказ? • Можеш ли да дођеш до резултата на други начин? Можеш ли да га уочиш на први поглед? • Можеш ли да употребиш резултат или метод за неки други задатак?

7.2. Разумевање задатка

Нема смисла одговарати на питање које се не разуме. У школама се често дешава да ученици не разумеју питања и немају жељу за решавањем задатака, али наставник мора да учини све како би то спречио у свом одељењу. Ученик треба да разуме задатак. Али не само то, потребно је и да жели да реши тај задатак. Ако ученик не разуме довољно или не показује довољно интересовања, није увек он сам крив; задатак треба да је пажљиво одабран, ни претежак ни прелак, треба да је занимљив, а извесно време треба посветити природном и привлачном постављању задатка.

Пре свега, ученик треба да схвати текст задатка. Наставник може то да провери тако што захтева од ученика да понови текст. Ученик би морао знати лако да формулише задатак. Такође он треба да буде способан да укаже на главне делове задатка: на оно што је непознато, на дате податке и на услов. Стога ће наставник ретко када моћи да изостави питања: *Шта је непознато? Шта је дато? Који је услов?*

Ученик треба пажљиво да разматра главне делове задатка, више пута и са разних страна. Ако је задатак у вези са неким цртежом, онда треба *нацртати слику* и на њој истаћи оно што је непознато и оно што је дато. Ако те објекте треба именовати, онда ваља *увести згодне ознаке*. Ученик треба да води рачуна о прикладном избору ознака и о објектима које треба обележити. У овој припремној фази корисно је још једно питање, уз услов да се не очекује коначан, већ само привремен одговор, претпоставка. То питање гласи: *Да ли можемо да задовољимо услов?*

7.2.1. Пример

Неке моменте из претходних одељака појаснићемо на конкретном примеру. Посматрајмо једноставан задатак: *Колика је дијагонала квадра, коме су познате дужина, ширина и висина?* Да би успешно дискутовали о задатку ученици треба да знају Питагорину теорему, и неке њене примене у планиметрији.

Наставник може да учини овај задатак интересантним ако га конкретизује. Учионица има облик квадра чије би се димензије могле измерити, а могу се само и грубо проценити. Ученици треба да нађу, „индиректно измере“, дијагоналу. Наставник показује дужину, ширину и висину учионице, и покретом руке показује дијагоналу, и истовремено црта слику на табли.

Разговор између наставника и његових ученика могао би да се започне на следећи начин:

„*Шта је непознато?*“
„Дужина дијагонале квадра.“
„*Шта је дато?*“
„Дужина, ширина и висина квадра.“
„*Уведи ознаке.* Којим ћемо словом означити непознату?“
„Са x.“
„Којим словима ћемо означити дужину, ширину и висину?“
„a, b, c.“
„*Који услов* повезује a, b, c и x?“
„ x је дијагонала квадра коме су a, b, c дужина, ширина и висина.“
„Да ли задатак има смисла? Мислим на то *да ли је услов довољан за одређивање непознате?*“
„Да. Ако знамо a, b, c тада је квадар одређен. Ако је одређен квадар, одређена је и дијагонала.“

7.3. Стварање плана

План постоји када се зна, или бар оквирно, које рачунске операције, трансформације или конструкције треба урадити како би се одредила непозната. Пут од разумевања задатка до постављања плана може да буде дуг и кривудав. У решавању задатка свакако је главно доћи до идеје плана. Та идеја може се појављивати постепено. Али она може, након привидно безуспешних покушаја, изненада да сине као „сјајна идеја“. Најбоље што наставник може да учини за своје ученике јесте да им ненаметљиво помогне да дођу до такве „сјајне идеје“. Питања и препоруке о којима се овде говори имају за циљ да изазову такве идеје. Да би могао да схвати положај ученика, наставник треба да мисли на властито искуство, на тешкоће и успехе које је и сам имао при решавању задатака.

Познато је да је тешко доћи до добре идеје ако предмет, у оквиру кога решава задатак, ученик зна врло мало, а немогуће је ако уопште не зна тај предмет. Добре идеје настају на основу искуства и знања које је претходно стечено. Само сећање није довољно за добру идеју, али не може доћи до такве идеје ако се ученик не присети чињеница које се односе на његов задатак. Материјал који је потребан за решавање математичког задатка састоји се од извесних појединости које су у вези са раније стеченим математичким знањима, као што су раније решени задаци или доказане теореме. Према томе, често је згодно да наставник започне рад питањем: *Знаш ли неки сличан задатак?*

Тешкоћа је у томе што често има превише задатака који су на неки начин слични са датим, тј. који са њим имају нешто заједничко. Како међу њима изабрати један задатак или неколико њих који ће стварно бити од користи? Polya је дао препоруку која указује на једно битно заједничко својство: *Размотри непознату! И покушај да се сетиш неког теби познатог задатка који има исту или сличну непознату!*

Ако ученик успе да се сети неког раније решеног задатка, који је веома сличан његовом, онда тај задатак треба искористити. *Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен. Можеш ли да га искористиш?*

Ако је ученик добро схватио претходна питања, она му могу помоћи, али не у потпуности. Уколико она не помажу, он мора да тражи нове додирне тачке и да истражује различите аспекте његовог задатка, мора да преображава задатак. *Можеш ли задатак другачије да изразиш?* Варирање задатка може довести до корисног помоћног задатка: *Ако не можеш да решиш постављени задатак, покушај најпре да решиш неки сличан задатак!*

Ако ученик покуша да употреби разне познате задатке и теореме, ако разматра разне модификације и уводи разне помоћне задатке, може се десити да се удаљи од свог првобитног задатка, и тако га може скроз „изгубити“. Али постоји једно добро питање које ученика враћа његовом задатку: *Јеси ли искористио све што је дато? Јеси ли искористио све из услова?*

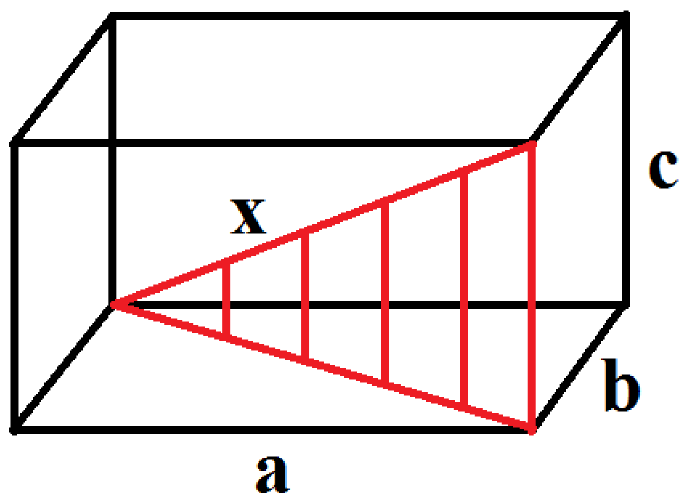
7.3.1. Пример

Вратимо се на пример који је разматран у одељку **7.2.1**. Ученици су схватили задатак и помало су се заинтересовали за њега. Могуће је да сада имају неке властите идеје и да ће показати иницијативу. Уколико наставник не примећује никакву иницијативу за рад код ученика, он мора да настави са дијалогом са ученицима. Наставник мора да буде спреман да у нешто измењеном облику понавља питања на која ученици не одговарају. И мора очекивати да ће ученици често ћутати (у даљем тексту ћутање је означено тачкицама . . . . .).

„*Знаш ли неки сличан задатак?*“
. . . . .
„*Размотри непознату! Знаш ли неки задатак који има исту или сличну непознату?*“
. . . . .
„Али *шта је непознато*?“
„Дијагонала квадра.“
„Знаш ли неки *задатак са истом непознатом*?“
„Не. Још нисмо радили задатке са дијагоналом квадра.“
„Знате ли неки *задатак са сличном непознатом*?“
. . . . .
„Видите, дијагонала је дуж. Зар никад нисте решавали задатак у коме је била непозната дужина неке дужи?“
„Да, да, наравно, јесмо. Тражили смо, на пример, страницу правоуглог троугла.“
„Добро! *То је задатак који је сличан вашем, а већ је решен. Можете ли га искористити?*“
. . . . .
„Ви се сећате једног задатка који сте пре решавали а сличан је вашем садашњем. Хоћете ли га искористити? *Да ли ћете увести неки помоћни елемент како би што боље искористили тај задатак?*“
. . . . .
„Пазите! Задатак ког сте се сетили односи се на троугао. Имате ли на својој слици неки троугао?“

Надамо се да је последње упутство било довољно јасно да допринесе јављању идеје за решавање, која се састоји у томе да се уведе правоугли троугао, коме је тражена дијагонала хипотенуза. Ипак, наставник мора да буде спреман и за случај да ово упутство није довољно ученицима, па мора имати и јаснија упутства.

„Да ли бисте хтели да имате троугао на слици?"



Слика 2. Квадар

„Коју врсту троугла бисте најрадије имали?"
„Дијагоналу још не знате наћи, а кажете да бисте могли наћи страницу троугла. Шта ћете урадити?"
„Да ли можете да одредите дијагоналу ако је она страница троугла?"

Кад ученици, уз већу или мању помоћ, успеју да уведу одлучујући помоћни елемент, правоугли троугао, наставник треба да се увери да ли ученици слуте шта би се затим радило, пре него крену да рачунају.

„Мислим да је била добра идеја нацртати тај троугао. Сад имате троугао, али да ли имате непознату?"
„Непозната је хипотенуза тог троугла. Можемо је израчунати помоћу Питагорине теореме."
„Можете, ако су познате обе катете. А јесу ли оне познате?"
„Једна катета је дата, то је *c*. А другу катету, мислим да није тешко наћи. Па да – друга катета је хипотенуза другог правоуглог троугла."
„Врло добро. Видим да сада имате план."

7.4. Извршавање плана

Створити план, доћи до идеје за решавање – није лако. Да би се у томе успело потребно је много тога. Потребна су раније стечена знања, дисциплина мишљења, сконцентрисаност на циљ и још нешто: срећа. Извршити план – много је лакше. За то је углавном потребно само стрпљење. План даје опште контуре; ученик који решава задатак мора се уверити да елементи плана припадају тој контури. Стога он треба да стрпљиво, по реду, испитује детаље док све не буде потпуно јасно, и уклони могуће грешке.

Ако је ученик схватио план, наставнику преостаје мало посла. Главна опасност била би да ученик заборави свој план. То се лако може десити ако је ученик дошао до плана на основу наставниковог ауторитета. Али ако је тај план израдио сам ученик, макар и уз малу помоћ, и ако му је „сјајна идеја" синула праћена унутрашњим задовољством, он ту идеју неће лако заборавити или изгубити. Ипак, наставник треба да захтева да ученик *контролише сваки корак*.

О исправности неког корака у свом размишљању ученик може да се увери или „интуитивно" или „формално". Може да се сконцентрише на одређени корак све док му у потпуности не буде јасан, и више не сумња у његову исправност; или тај корак може да изведе на основу формалних правила. Главно је да ученик буде уверен у исправност сваког корака. У неким случајевима наставник ће нагласити разлику између „увидети" и „доказати": *Можеш ли јасно да уочиш да је корак исправан? Али можеш ли да докажеш да је корак исправан?*

7.4.1. Пример

Поново се враћамо тамо где смо стали са нашим примером. Ученик напокон има идеју решења. Он уочава правоугли троугао коме је непозната хипотенуза означена са x, једна катета је дата висина c, док је друга катета дијагонала једног правоугаоника. Ученик треба да уведе одговарајућу ознаку. Узмимо да је он са y означио другу катету, дијагоналу правоугаоника чије су странице a и b. Можда ће тако ученик јасније да види идеју решења, која се састоји у томе да се уведе помоћни задатак са непознатом y. Разматрајући један, па други правоугли троугао, ученик ће добити:

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

а одатле, елиминисањем помоћне непознате y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Наставник нема разлога да прекида ученика ако он тачно решава задатак, осим да га можда опомене да *контролише сваки корак*. Па, наставник може да пита:

„Можеш ли *јасно да увидиш* да је троугао чије су странице *x, y, c* правоугли?“

Ученик ће можда на то питање искрено одговорити са „да“, али могао би да се збуни кад би наставник, незадовољан уверењем ученика, питао даље:

„А можеш ли и *да докажеш* да је тај троугао правоугли?“

Ако одељење није добро уведено у стереометрију, боље је да наставник последње питање не поставља. Чак и ако је добро уведено, постоји извесна опасност да одговор на једно споредно питање постане главна тешкоћа за већину ученика.

7.5. Осврт

И прилично добри ученици, кад реше задатак, кад уредно напишу доказ, затварају свеске и чекају нешто ново. Радећи тако, они изостављају важну и поучну фазу рада. Освртом на коначно решење, поновним разматрањем и преиспитивањем резултата и пута који је до њега довео, ученици би могли да учврсте своје знање и унапреде своје способности за решавање задатака. Добар наставник сматра да ниједан задатак никад није потпуно испитан, и такво мишљење треба пренети и ученицима. Увек остаје још посла. Ако су ученици довољно марљиви и оштроумни, побољшаће свако решење, а у сваком случају боље ће га разумети.

Ученик је, дакле, извршио свој план. Написао је решење контролишући притом сваки корак. Према томе, има разлога да верује да му је решење исправно. Ипак, грешке су увек могуће, нарочито ако је доказивање било дуго и компликовано. Стога је проверавање пожељно. Затим, треба размислити о неком брзом поступку за проверавање резултата или доказа. *Можеш ли да контролишеш резултат? Можеш ли да контролишеш доказ?* Треба размислити и о следећем питању: *Можеш ли доћи до резултата на други начин?* Тако се долази до истог резултата на два различита начина, што говори о тачности резултата.

Важно је да наставник код својих ученика не створи утисак да математички проблеми међу собом имају мало везе, и да немају везе са било чим другим. Осврт на решавање проблема добра је прилика да се истраже везе тог задатка. Ученицима ће заиста бити интересантно да погледају задатак уназад кад га реше, ако су се при решавању заиста трудили, па су свесни да су нешто урадили. Осим тога, они ће истински желети да виде шта још могу да постигну својим напором и како могу неки наредни пут да поступе једнако добро. Наставник може да подстакне своје ученике да се присете случајева у којима би могли поново искористити претходни поступак или применити добијени резултат. *Можеш ли резултат или метод да употребиш за неки други задатак?*

7.5.1. Пример

У одељку **7.4.1.** ученици су добили решење. Ако су *a, b, c* димензије квадра, његова дијагонала је

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Можеш ли да контролишеш резултат? Наставник не може да очекује добар одговор на ово питање од неискусних ученика. Међутим, ученици, ипак, треба доста рано да сазнају како задаци „са словима“ имају велику предност наспрам задатака са чисто нумеричким знацима. Ако је задатак задат „словима“, његов резултат може се проверити на разне начине, док код нумеричког задатка то не може. Иако је наш пример веома једноставан, довољан је да се то покаже. Наставник може да поставља разна питања о резултату, на која ученици могу лако одговорити са „да“, док би одговор „не“ указао на озбиљну грешку у резултату.

„*Јеси ли искористио све што је дато?* Појављују ли се у твојој формули за дијагоналу све задате величине *a, b, c*?“

„Дужина, ширина и висина једнако су важне у нашем питању; наш задатак је симетричан у односу на *a, b, c*. Је ли израз, добијен за дијагоналу, симетричан по *a, b, c*? Остаје ли он непромењен ако међусобно замењујемо *a, b, c*?“

„Наш задатак је стереометријски: одредити дијагоналу квадра ако су задате димензије *a, b, c*. Овај задатак аналоган је планиметријском задатку: одредити дијагоналу правоугаоника коме су задате странице *a, b*. Да ли је и резултат нашег „просторног“ задатка аналоган резултату „раванског“ задатка?“

„Ако се висина *c* смањује и на крају нестаје, паралелопипед постаје паралелограм. Ако у формулу уврстимо $c = 0$, да ли добијамо тачну формулу за дијагоналу квадра?“

„Ако се висина *c* повећава, повећава се и дијагонала. Указује ли на то и твоја формула?“

„Ако се све три димензије *a, b, c* квадра повећавају у истом односу, повећава се и дијагонала у том истом односу. Ако у својој формули замениш *a, b, c* са 10*a*,

$10b$, $10c$, због ове замене израз за дијагоналу морао би испасти десетострук. Да ли је то тачно?“

„Ако a, b, c изразимо у дециметрима, тада ће и дијагонала бити изражена у дециметрима. Ако све димензије претворимо у центиметре, формула мора остати тачна. Да ли је то тачно?“

Учинак ових питања је добар, и то из више разлога. Као прво, интелигентног ученика не може а да не импресионира чињеница да формула „одолева многим искушењима“. Пре је био уверен да је формула тачна, јер ју је пажљиво извео. А сада је још више уверен. Затим, захваљујући претходним питањима, појединости формуле добијају ново значење и повезују се са разним чињеницама. Стога ће се и повећати шансе да ученици запамте формулу. На крају, ова питања могу се пренети и на сличне задатке. Кад стекне мало искуства са сличним задацима, интелигентан ученик моћи ће да запази опште основне идеје: искоришћавање свих битних података, варирање података, симетрију, аналогију. Ако се ученик навикне да своју пажњу усмерава на овакве ствари, то ће бити веома корисно за његову вештину у решавању задатака.

Можеш ли да контролишеш доказ? У тежим задацима ученик треба да проверава доказ корак по корак. У једноставнијим задацима то чини само на извесним местима.

Можеш ли резултат или методу искористити за неки други задатак? Након једног или два примера, ученици ће лако проналазити примене које се углавном састоје у томе да се апстрактним математичким елементима задатка придаје нека *конкретна интерпретација*. Наставник је сам употребио конкретну интерпретацију кад је у задатку за квадар узео учионицу. Ако ученици схвате задатак, наставник може да постави незнатно промењен задатак, на пример: „Дате су дужина, ширина и висина квадра. Израчунати удаљеност његовог средишта до једног врха.“ Ученици овде могу применити резултат свог управо решеног задатка ако уоче да је тражена удаљеност половина управо израчунате дијагонале. Или могу применити метод уводећи одговарајуће правоугле троуглове.

Након ове примене наставник може да разматра међусобни положај четири дијагонале квадра и шест пирамида, којима су базе горња и доња основа и бочне стране квадра, средиште квадра им је заједнички врх, а полудијагонале су им бочне ивице. Ако су ученици довољно заинтересовани за геометрију, наставник сада треба да се врати на своје питање: *Можеш ли резултат или методу искористити за неки други задатак?* Сад су веће шансе да ученици нађу неку занимљиву конкретну интерпретацију, на пример:

„На некој згради, у средишту њеног хоризонталног правоугаоног крова, чија је дужина 21 m, ширина 16 m, треба подићи јарбол за заставу висине 8 m. Да бисмо учврстили јарбол потребна су нам четири једнака челична конопа. Конопи треба да се протежу од једног заједничког места на јарболу, које је 2 *m* испод врха јарбола, па до четири угаоне тачке на крову. Колика је дужина сваког конопа?“

Ученици ће приметити метод свог детаљно решеног задатка и увести један правоугли троугао у вертикалној, а други у хоризонталној равни. Или ће употребити резултат тако што ће замислити квадар, коме је дијагонала x један од четири конопа, а ивице су му:

$$a = 10{,}5 \qquad b = 8 \qquad c = 6.$$

Једноставном применом формуле добија се да је $x = 14{,}5$.

7.6. Различити прилази

Задржимо се још мало на задатку који је разматран у одељцима **7.2.1.**, **7.3.1.**, **7.4.1.**, **7.5.1**. Главни посао, проналажење плана, био је описан у одељку **7.3.1**. Али наставник је могао да поступи и другачије. Полазећи са истог места као у одељку **7.3.1.**, могао је да пође другим путем, постављајући, на пример, оваква питања:

„*Знаш ли неки сличан задатак?*“
„Знаш ли неки *аналоган* задатак?“
„Ти примећујеш да је наш задатак стереометријски. Да ли можеш навести неки једноставнији аналогни задатак из планиметрије?“
„Примећујеш да наш задатак обрађује фигуру у простору, бави се дијагоналом квадра. Како би гласио аналогни задатак у равни? Бавио би се . . . дијагоналом . . . једног . . . правоуглог . . .“
„Паралелограма.“

Ако су ученици чак и веома спори, равнодушни и не могу да се сете, ипак ће на крају бити присиљени да бар мало допринесу идеји. Осим тога, ако ученици не знају много, наставник не треба да обрађује задатак о паралелопипеду док није, као припрему, обрадио аналоган задатак о паралелограму. У том случају, може да поступи отприлике на следећи начин:

„*Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли да га искористиш?*“
„*Да ли ћеш увести неки помоћни елемент како би искористио тај задатак?*“

На овај начин, наставник ће можда успети да изазове код ученика жељену идеју за решавање задатка. Та идеја састоји се у томе да се дијагонала датог квадра схвати као дијагонала одговарајућег правоугаоника, који треба увести у слику (као пресек квадра и равни која садржи две наспрамне ивице). Замисао је иста као и пре (одељак **7.3.1.**) само је начин решавања другачији. У одељку **7.3.1.** веза са расположивим знањем ученика успостављена је помоћу непознате; сетили су се раније решеног задатка јер је он имао исту непознату као и садашњи задатак. Овде је ипак аналогија пресудна за решавање задатка.

7.7. Наставников метод постављања питања

Наставников метод постављања питања приказан у одељцима **7.2.1.**, **7.3.1.**, **7.4.1.**, **7.5.1.**, **7.6.**, је следећи: наставник треба да почне са једним општим питањем или препоруком, па постепено да пређе, ако је то потребно, на све специфичнија и све конкретнија питања односно препоруке, док најзад једно од њих не измами одговор од ученика. Ако ученику треба помоћ у реализовању његове идеје, наставник треба да почне, ако је могуће, поново са општим питањем или препоруком, па ако је потребно, треба да настави ка специфичнијем, и тако даље.

Препоруке морају да буду једноставне и природне, иначе не могу да буду *ненаметљиве*. Морају да буду уопштене, примењиве не само на дати задатак већ и на задатке сваке врсте ако наставник жели да оне помогну развоју ученикових способности, а не само неке специјалне технике. Постепен прелаз на специфичније препоруке потребан је зато да ученик, што је могуће више, учествује у раду.

Ако наставник жели да у свом разреду примени метод који се овде предлаже, свакако је потребно да поступа опрезно. Он треба помно да проучи пример из одељка **7.2.1**. Треба да пажљиво припрема задатке које намерава да обрађује, разматрајући и притом различите прилазе. Треба да почне са неколико примера и да постепено увиди колико успева да овлада тим методом, како ученици прихватају метод и колико је времена за то потребно.

8. КАКО РЕШАВАТИ ЗАДАТАК – ДИЈАЛОГ

Ова поглавље написано је у дијалошкој форми; замишљени наставник одговара на кратка питања замишљеног ученика, и упућује га како да успешно реши дати задатак.

8.1. Упознавање са задатком

Где да почнем? Пођи од формулације задатка!

Шта да радим? Предочи себи задатак као јасну целину, колико год је то могуће! У први мах не треба да се бринеш о појединостима.

Шта ћу тиме постићи? Задатак мораш да разумеш, да се упознаш са њим, и да знаш његов смисао. Пажња коју посвећујеш задатку подстаћи ће и твоју меморију и припремити је за подсећање на појединости које су у вези са задатком.

8.2. Стицање бољег разумевања

Где да почнем? Пођи поново од формулације задатка! Започни онда када ти је формулација толико јасна и толико дубоко усађена у твоју свест да је можеш за неко време изгубити из вида, без страха да је поново изгубиш!

Шта да радим? Издвој главне делове свог задатка! Претпоставка и тврђење су главни делови „задатка доказивања“, а непозната, дати подаци и услов су главни делови „конструктивног задатка“. Разматрај главне делове свог задатка, и то по реду, разматрај их наизменично, разматрај их у разним комбинацијама повезујући сваки детаљ са другим детаљем и са целином задатка!

Шта ћу тиме постићи? Припремићеш и разјаснићеш детаље који ће касније вероватно бити важни.

8.3. Пратећи корисне идеје

Где да почнем? Пођи од разматрања главних делова свог задатка! Почни онда када су главни делови јасно сређени и добро схваћени, а твоје памћење је спремно за сарадњу.

Шта да радим? Разматрај свој задатак са различитих страна, па покушај да успоставиш везу са знањем које си раније стекао!

Разматрај свој задатак са различитих страна! Истакни разне делове, испитај разне детаље, испитуј исте детаље поново, али другачије, комбинуј детаље на различите начине, прилази им са различитих страна! Покушај да у сваком детаљу уочиш неко ново значење, неку нову интерпретацију целине!

Потражи везу са знањем које си раније стекао! Настој да се сетиш шта ти је у претходним сличним ситуацијама помогло! Покушај да препознаш нешто познато у оном што истражујеш, а у оном што си препознао настој да запазиш нешто корисно!

Шта бих могао да запазим? Корисну идеју, а можда и важну идеју, која ће ти на први поглед показати пут ка циљу.

У чему је корист неке идеје? Корисна идеја показује ти цео пут или један његов део. Она те, више или мање јасно, наводи како да поступаш. Идеје су потпуније или мање потпуне. Бићеш срећан ако уопште будеш имао неку идеју.

Шта ћу са непотпуном идејом? И њу мораш да разматраш! Ако ти се чини да је корисна, разматрај је дуже! Ако ти се чини да је поуздана, мораш да установиш колико далеко те води, па опет да процениш ситуацију! Због твоје корисне идеје ситуација се изменила. Размотри нову ситуацију са различитих страна и потражи везу са знањем које си раније стекао!

Шта ћу постићи таквим понављањем? Може ти пасти на памет нека нова идеја. Она ће те можда одмах одвести ка циљу. А можда ће ти након ње бити потребне још неке корисне идеје. Неке идеје ће те можда одвести на погрешан пут. Ипак, мораш да будеш задовољан новим идејама, и допунским идејама, које не пуно корисним идејама дају неку тачност или настоје да коригују неку мање корисну идеју. Свакако, ако за неко време не дођеш ни до какве нове корисније идеје, треба да будеш задовољан ако концепцију свог задатка употпуниш, боље повежеш.

8.4. Извршавање плана

Где да почнем? Пођи од добре идеје која те је одвела ка решењу! Почни онда када се осећаш сигуран да владаш главним делом задатка и кад поуздано сматраш да ћеш моћи да употпуниш мање важне детаље кад то буде потребно!

Шта да радим? Овладај добро главним делом задатка! Размотри детаљно све алгебарске и геометријске операције које си пре спознао као практичне! Увери се у исправност сваког појединог корака формалним закључивањем или интуитивним увиђањем или, ако је то могуће, на оба начина! Ако је твој задатак веома компликован, згодно је разликовати „велике“ и „мале“ кораке, имајући у виду да се сваки велики корак састоји од више мањих. Контролиши прво велике кораке па затим пређи на мање!

Шта ћу тиме постићи? На тај начин можеш да добијеш такав приказ решења где ће сваки корак бити несумњиво исправан.

8.5. Осврт

Где да почнем? Почни са решењем, које је потпуно и тачно у свакој појединости!

Шта да радим? Размотри решење са различитих страна и потражи везу са знањем које си раније стекао!

Разматрај детаље решења, па покушај да их поједноставиш колико год је то могуће! Дуже разматрај делове решења, па покушај да их упростиш! Покушај да цело решење сагледаш на први поглед! Настој да побољшаш краће или дуже делове решења, и то покушај са целокупним решењем! Прикажи своје решење поносно и што природније га уклопи у своје раније стечено знање! Испитај пажљиво идеју која те је довела до решења, покушај у њој да уочиш битни детаљ, па настој да га употребиш у другим задацима! Пажљиво испитај резултат и покушај да га примениш у другим задацима!

Шта ћу тиме постићи? Можеш да нађеш ново и боље решење, можеш да откријеш неке нове и занимљиве чињенице. У сваком случају, ако се навикнеш да своја решења прегледаш и провераваш на такав начин, стећи ћеш сређено и употребљиво знање, и развијаћеш своје способности у решавању задатака.

9. УТИЦАЈИ GEORGE-а POLYA-е

George Polya је много утицао на наставу математике у Јапану. Јапан се угледао на Polya-ин метод учења и подучавања математике који се своди на решавање проблема, на активно учествовање ученика у настави, на самостално откривање ученика.

У Јапану ученицима је дозвољено да стварају сопствене процедуре за решавање проблема. Мото јапанског предавања назван је: „постепено решавање проблема“ (Stigler & Hiebert, 1999). У поређењу са предавањима других земаља јапанско предавање садржи пет активности (Miyakawa, 2006):

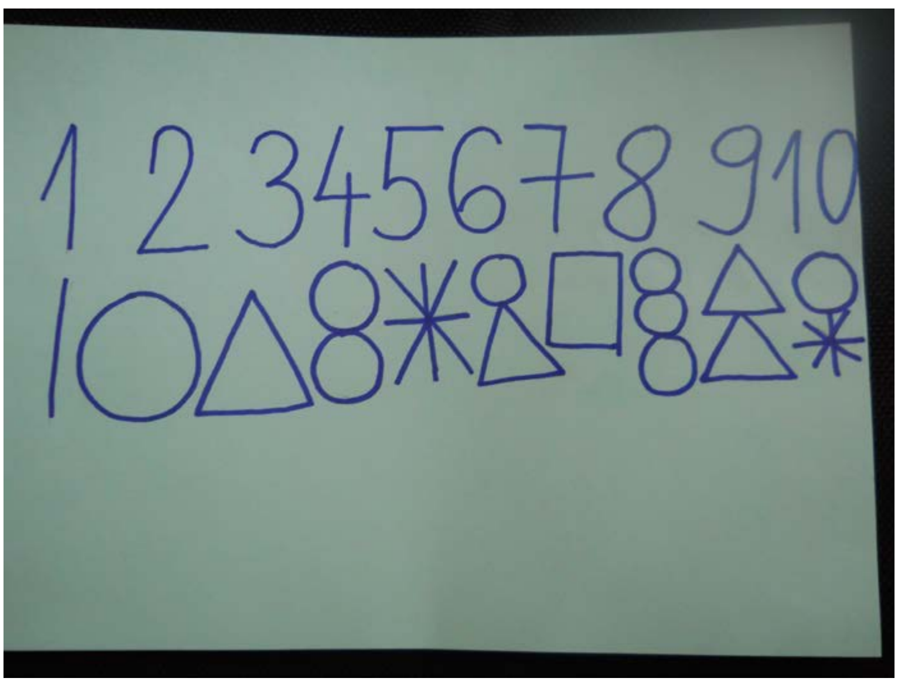
- Преглед претходне лекције
- Представљање проблема за тај час
- Ученици самостално раде
- Дискутовање о методама за решавање
- Истицање и сумирање главних ставки.

Наставник почиње час кратким прегледом претходне лекције, а затим, представља ученицима проблем. Проблем (односно задатак) је пред ученика постављен као тешкоћа коју он треба да савлада (Rohlen & LeTendre, 1998). Задатак који не садржи никакву тешкоћу за ученика не само да нема никаквог значаја за његово даље оспособљавање, него врло негативно делује. Преостали део часа фокусиран је на разумевање и решавање проблема. Ученици приступају решавању задатка без икакве припреме, без икаквог претходног упутства, изузев објашњења термина који се у задатку помињу. Имају одређено време за решавање, индивидуално или у групама. Јапански наставници сматрају да ученицима треба пружити помоћ тек после ученичких напора да савладају тешкоћу, не дајући им готове закључке. Они имају стрпљење које се огледа у довољном чекању да ученици учине све што могу у погледу решавања проблема. Ставови и мишљења ученика имају важну улогу у наставниковом планирању активности за наставу. На часовима математике у Јапану ствара се таква атмосфера у којој се запажа и вреднује мишљење ученика. Након самосталног рада, ученици заједно са наставником дискутују о методама за решавање проблема, и дискутују о свим могућим начинима за решавање. Књижевници кажу да је боље једну књигу прочитати десет пута, него десет књига по једанпут. Слично се може рећи за математичке задатке. Боље је један исти задатак решити на више начина (најбоље на све могуће начине) него више задатака на један начин. Јер, решавање задатака на више начина најбоље, најбрже и најсигурније оспособљава ученике за посао о коме је реч, развија мишљење, иницијативу и смисао за налажење и испитивање разних могућности, навикава ученике на тражење најкраћег и најлепшег решења датог проблема. Самосталним радом ученици проналазе све начине којима може да се реши дати проблем. Након тога, ученици у својим свескама решавају неколико практичних задатака у којима примењују оно што су управо научили.

9.1. Час математике у Јапану

Наставна јединица: *Прости и сложени бројеви*
Разред: четврти

Циљно математичко знање су прости и сложени бројеви. Циљ предавања је да ученици уоче број који је представљен као производ других бројева. То ће свакако укључити разумевање чињенице да неки бројеви не могу бити производ других бројева осим јединице и њих самих. На пример, број „12“ може се посматрати као производ бројева „3“ и „4“.



Слика 3. Бројеви и њима одговарајући симболи

На Слици 2 приказани су бројеви са одговарајућим симболима. На почетку часа ученицима су подељене картице где је свака картица имала само симболе, док број који одговара том симболу није дат. Дакле, бројеви су представљени графички, а задатак ученика је да одреде који симбол одговара одређеном броју. Наставник је очекивао да ученици дођу до правила која ће им омогућити да ураде постављени задатак. Због тога, ученици су морали да препознају да круг, на пример, одговара броју „2“, троугао броју „3“, звезда броју „5“, итд. као и то да су неки симболи повезани множењем. Па, ученици имају два задатка: први задатак је да нађу јасна правила, и други задатак је да нађу симболе за бројеве „11“ и „12“.

Са тачке гледишта представљања бројева, нумеричко представљање и графичко или сликовно представљање укључени су у објашњење. У активностима је предложено смењивање нумеричког и графичког представљања. Бројеви који су нумерички представљени нису били приказани на картицама, али откривени су у току предавања. Предност графичког представљања је што визуелно приказује структуру броја и систем који се састоји из простих, другим речима, комбинованих простих бројева. Ова ставка је често прикривена нумеричким представљањем.

9.1.1. Анализа задатка 1: јасна правила

У задатку 1, ученици треба само да нађу јасна правила, и разматраћемо неколико правила. Нека од њих су делотворнија за други задатак, а нека нису. У току анализирања правила, направљена је разлика између „описних правила“ и „претпоставки“.
На пример, следећа правила су описна:
1. Неке картице имају само један симбол, док друге имају неколико симбола.
2. Ако је број велики, број симбола се повећава, са неким изузецима.
3. Јавља се најмање један круг на сваке две картице.
4. Паран број има најмање један круг.
5. Јавља се најмање један троугао на сваке три картице.
6. Бројеви који су дељиви са три имају најмање један троугао.
7. Прости бројеви увек имају један симбол, не више, и различит од осталих.
8. Сложени бројеви увек имају два или више симбола.

Наредна правила су уопштени искази који су претпоставке, и њихова ваљаност може се проверити искуствено на датим картицама. На пример, то су следећа правила:
9. Симбол представља број.
10. Симбол представља прост број.
11. Круг представља број „2“.
12. Троугао представља број „3“.
13. Комбиновање симбола представља множење бројева.

Ова разлика биће значајна зато што описна правила могу да буду уочена или саопштена директно на основу опажања датих картица и бројева, док правила која су претпоставке морају да буду потврђена коришћењем других правила претпоставки. Штавише, описна правила омогућавају ученицима да формулишу претпоставке.

Горе наведена правила су „исправна“ са тачке гледишта очекивања наставника. Такође могу се разматрати и „нетачна“ правила, као на пример, комбиновање симбола представља сабирање бројева. Постоји и веза између правила у смислу да постоји хијерархија међу њима. На пример, за налажење и примену правила 13, нека друга правила, као што су правила 9, 11 и 12, морају да буду нађена и примењена.

9.1.2. Анализа задатка 2

У другом задатку ученици треба графички да представе бројеве „11“ и „12“. Овај задатак састоји се од два подзадатка. Први од њих је наћи симбол за број „11“, а други је урадити исто за број „12“. Откривање описног правила 7 на горњој листи натераће ученике да предвиде симбол на једанаестој картици, и да закључе да је то један симбол, па ће тако решити први подзадатак. Ученици морају да искористе неколико правила како би решили други подзадатак.

Поступак решавања другог подзадатка је следећи:
1. прво факторизовати дати број „12“ нумерички (нпр. 12 = 2 x 6);
2. наћи симболе који одговарају нумеричким бројевима који су добијени разлагањем (нпр. „2“ за „○“, „6“ за „Δ○“);
3. нацртати их заједно један до другог.

У првом кораку, дељење и множење дозвољени су за факторизацију. У случају множења, ученик ће интуитивно наћи два или три броја, помножиће их, и проверити да ли је њихов производ „12“. Ученици који не могу да разложе број не могу да дођу до одговора. Правила 8 и 13 указују ученицима на то да треба да факторизују дати број. Заправо, ако комбиновање симбола није препознато као множење бројева, факторизација се не може урадити. Стога, овај корак захтева да се јасно и прецизно користи правило 13 како би се урадио задатак. Други корак састоји се од откривања сагласности између нумеричких бројева и симбола. Претпоставке 11 и 12 се траже. Трећи корак биће решен поновним коришћењем правила 13.

Претпоставке су неопходне како би се урадио други подзадатак. Описна правила нису довољна, и овај последњи низ правила допушта ученицима да предвиде симболе на дванаестој картици, али не и да попуне низ. На пример, правило 3 или 4 наводи их да предвиде да ће најмање један круг бити на картици; правило 5 или 6 да очекују најмање један троугао на картици. Како год, ова описна правила не омогућавају им да предвиде два круга.

9.2. Анализа предавања

Даљи ток предавања укључивао је неколико активности. Лекција је подељена на три етапе: уводне активности, активности за задатак 1 и активности за задатак 2. Сваки део је описан и у исто време анализиран.

9.2.1. Уводне активности

Активности ученика у овој етапи биле су ограничене на давање одговора или испуњавање захтева који су хронолошки описани.
1. Док је наставник насумично лепио картице са симболима на таблу, питао је ученике шта су уочили на тим картицама које су употребљене у лекцији. Међу њима две картице нису имале симбол.
2. Ученици су требали да одреде симболе који би се могли наћи на празним картицама.
3. Ученици су требали да предложе начине којима би разврстали картице, како би појаснили нека правила. (не обавезно оне начине који се очекују да знају)

Како није било пуно критеријума на којима би се базирали одговори на друго питање, када је ученик предложио груписање, наставник је питао постоје ли критеријуми за класификацију картица. Ово питање јасно је невело ученике да групишу картице. Ученици су предложили следеће методе за класификацију картица:

- на основу броја симбола на свакој картици
- на основу комбинације различитих симбола на свакој картици.

У овој етапи ученици су упознали симболе, и могли су да препознају или нађу описно правило које говори о разлици између једног симбола и комбинованих симбола. Такође, чини се да су ученици свесни разлика и сличности између типова симбола на датим картицама. (видети наредни дијалог)

22. У: Картица са усправном цртом треба да иде у другу групу зато што има само један симбол.
23. Н: Дакле имамо групе симбола, два симбола и три симбола. Ово је шаблон који свако може лако да уочи.
24. У: Све картице прве групе имају круг, па картице са два троугла или без круга не треба да буду ту.
25. Н: Дакле, ти кажеш да су ово све кругови и да троуглови треба да припадају другој групи. Ово може да буде један начин размишљања.
26. У: Картице са два различита симбола припадају првој групи, али картице са два круга треба да буду у доњој групи, где су картице само са истим типом симбола.

Наставник није тражио од ученика директно следећу активност, али користио је оно што су ученици рекли и водио их је (пример „Дакле, ти кажеш...“ [25]). Овде је наставник навео ученике да учествују у активностима које су изван њихове одговорности.

9.2.2. Активности за задатак 1

Задатак 1 дат је ученицима [29]. Наставник је лепио картице полако једну по једну на таблу, слева надесно. Индиректно је указао на редослед картица. Нумеричке фигуре још увек нису придружене картицама. Док је наставник лепио картице, ученици су предвиђали која би картица била стављена следећа. У овом моменту, циљ је био да ученици нађу јасна правила, и у исто време да нађу следећу картицу.

29. Н: […] Сада ћу да променим редослед картица на мој начин. Посматрајући мој начин ређања, молим вас, реците који сте образац ви нашли. Начин на који ви размишљате биће од помоћи. Ја стављам прву картицу, другу картицу, трећу...

Одмах након лепљења свих картица на таблу, ученици су предложили неке идеје. Једна од њих је „У: То је множење.“ [36]. Наставник је записао на табли последње правило и рекао ученицима да нађу једноставнија описна правила: „Н: Можете ли да уочите интересантнија правила у овом примеру?“ [43]. Одговори које су ученици дали на наставниково питање су следећи:

- парни бројеви имају кругове на картици
- троугао се појављује после сваке две картице.

Ово су описна правила. Како нумерички бројеви нису још увек били записани на картицама, наставник је рекао ученицима да ко хоће да предложи прво описно правило нека запише број како би разјаснио свој предлог осталим ученицима, а затим је појаснио идеје ученика. У овом моменту, наведена правила нису крајње претпоставке, али су описна и одиграће важну улогу у проналажењу последњег правила. Зато је наставник нагласио ово правило ученицима: „Н: Ово је занимљиво откриће. Свака картица са парним бројем има круг." [51].

До сада, јасна правила која су предложена фокусирала су се искључиво на однос између картица и описних правила која су наведена. Затим је један ученик споменуо везу између симбола:

> 56. У: Број „2" има један круг, а „4" два круга, па ја мислим... два и два су четири. И следећи је „6"...
> 57. Н: […] Круг значи два. Два и два су четири. Да ли разумете? Два и два су четири. Како то још можете рећи у математици?

Прва тврдња ученика да „два и два су четири" је двосмислена, и чини се да ученик није сигуран у свој одговор [56]. Наставник је појаснио одговор ученика, и навео ученика да се фокусира на одговор говорећи „Како то још можемо рећи у математици?" [57]. Ово питање навело је ученике да размишљају о односу између састављених симбола и да формулишу идеју. До овог момента, ученици су радили и размишљали о задатку како би нашли јасна правила на основу датог редоследа картица и симбола. Дакле, они су били активни.

> 58. У: „2" плус „2" једнако је „4". „2" пута „2" једнако је „4".
> 59. Н: Оба су тачна, зар не?... Ова четири ученика хоће да кажу да то није тачно. Па, молим вас, објасните зашто сте против.
> 60. У: Мислим да је тачно да два круга на четвртој картици означавају збир две двојке или производ две двојке, али ако је тако, када дођемо до шесте картице, троугао треба да представља број „3" и добијамо „3" плус „2", што је пет. Па, мислим да ово не би могло бити сабирање.

Затим је наставник проценио ваљаност датих правила [59]. Неки ученици су објаснили да је правило које они траже множење, а не сабирање, тако што су користили друге бројеве [60]. Након објашњења ученика, наставник је укратко приказао и потврдио ово правило за остале бројеве на табли: 2 x 2 x 2 = 8, 2 x 5 = 10. И навео је и записао да је правило које они траже „множење".

9.2.3. Активности за задатак 2

Наставник је поставио први подзадатак задатка 2: који симболи ће бити на једанаестој картици? Такође, питао је ученике да ли се симболи, који су малопре нацртани (три троугла „∆∆∆“), могу користити за једанаесту картицу. Ученици су брзо дали одговор: представљање броја „27“ са три троугла није толико важно, и нови симбол је потребан за број „11“. Наставник је затим питао ученике зашто су тако одговорили [83], а ученици су одговорили да је то оно што наставник очекује [84].

(ученици цртају петоугао)
83. Н: То је тачно. И то је такође тачно. Зашто мислите да су ови симболи тачни? Да ли су симболи које сте нацртали они прави? Зашто мислите да је исправно користити овакве симболе?
84. У: Бројеви који имају само један симбол, узмимо „2“ и „3“ на пример, могу се поделити само са „1“ или са самим собом. Једанаест се исто тако може поделити само са један или са самим собом, па картица мора имати само један симбол, као претходно са троуглом или правоугаоником.
85. Н: Ако мислите да користите множење, не можемо представити број „11“ на тај начин. Он се може представити сабирањем, али ниједна картица не представља сабирање. Је ли тако?

Активност за први подзадатак није трајала дуго. Ученици су јасно навели битну чињеницу да се неки бројеви могу поделити само са „1“ [84]. Због тога, достигнут је један од циљева овог предавања, а то је разумевање концепта простих бројева. Наставник је поновио и разјаснио нову идеју са примерима множења [85]. Он није увео термин „прости бројеви“ у лекцији. Оно што је навело ученике да дођу до ове идеје јесте први подзадатак. Посебно, одговор наставника зашто је изабран одређени симбол навео је ученика да сам формулише идеју [83]. Такође, може се приметити да су ученици на путу да открију ову идеју која се јавила у примедби ученика из претходне етапе [71].

71. У: Ја разумем да је то множење, али како да дођемо до броја „11“ множењем?

Наставник је навео други подзадатак, и требало је одредити симболе који ће бити на дванаестој картици. Овај пут рекао је ученицима да то запишу у својим свескама. Наставник је питао једног ученика и он је дао погрешан одговор, шест кругова „○○○○○○“. Овај одговор исправили су други ученици који су указали на то да су дати симболи погрешни и на основу тога ученик је написао поново: четири троугла „∆∆∆∆“. Проблем је што је он користио нежељено правило сабирања, уместо множења, и наставник је искористио прилику да разјасни које је следеће правило. Пре наговештаја да су дати одговори погрешни, наставник је рекао једној ученици да напише на табли одговоре који се разликују од претходних. Девојчица је написала два круга и троугао (○○∆). Наставник је питао за разлог и она је објаснила да је „4 x 3 = 12“ (○○ и ∆).

> 102. У: (ученица црта два круга и троугао) Како је до сада, „2“ пута „4“ једнако „8“, овде су три круга, и како је „2“ пута „3“ једнако „6“, круг и троугао састављамо, како је „4“ пута „3“ једнако „12“ и „6“ пута „2“ је „12“, то ће бити овако (сваки пут, она се позивала на симболе са претходних картица, као 2 и 4 за 8, 2 и 3 за 6, 4 и 3, и 6 и 2).
> 103. Н: Ови кругови чине „4“, и „4“ пута „3“ је „12“. Одлично! Зашто си мислила да су ови симболи погрешни? (мислећи на четири троугла)
> 104. У: Код броја „8“, ми смо множили „2“ пута „2“ пута „2“, због тога и у случају троугла, „3“ пута „3“ једнако „9“, „9“ пута „3“ једнако „27“, „27“ пута „3“ биће „81“.

Након што је разјаснио одговор ученице, наставник се вратио на претходни одговор (∆∆∆∆) и питао цело одељење зашто то није тачно [103]. Ученица је објаснила зашто [104], па је затим, наставник појаснио њен одговор. Међутим, када је наставник поново питао за друге одговоре, ученица је нацртала два шестоугла на табли. Ученица није дала објашњење, али други ученици су растумачили зашто је то написала [112, 113]. Ова ученица није користила очекивано правило множење, већ неочекивано правило, сабирање поново.

> 112. У: Можда, како су два симбола за „6“, ја мислим да је она спојила два симбола и направила нови симбол, шестоугао. Па је мислила да шестоугао представља дванаест.
> 113. У: Можда је она направила нови симбол, шестоугао, за „6“, због броја „6“. И како су овде два шестоугла и како је „6“ пута „2“ једнако „12“, мислим да је она направила два шестоугла.

Након добијања других одговора (∆○○ и ○∆○) од ученика, наставник је завршио лекцију говорећи „Н: Неки ученици, можда, још увек имају потешкоће у разумевању множења.“, и тражио је да веће бројеве представе, као на пример, број „100“.

Сада се може приметити да неки ученици нису користили претпоставку да „комбиновање симбола представља множење одговарајућих бројева“, што је наставник очекивао да ће користити у задатку 1. Одговори са четири троугла или два шестоугла јавили су се из овог разлога. То значи да није било повратне информације о одговорима које су ученици дали. Увиђа се да је овде битна организација одељења од стране наставника. Како год, мора се поменути начин на који се наставник укључио у лекцију када је приметио одсутност повратне информације код неких ученика. Није директно дао ученицима повратну информацију. Он је само појаснио идеје ученика, и питао друге ученике из разреда да ли су оне исправне или не и зашто. На пример, излагање ученика [104] може бити повратна информација за ученика који је дао погрешан одговор (ΔΔΔΔ).

Узимајући у обзир назначену математичку идеју у овој лекцији (посматрање броја као производа других бројева), и предвиђена правила – множење, кореспондира између бројева и симбола, ученици су разматрали и користили директно или индиректно ове идеје како би нашли симболе за број „12“. Посебно, како је комбиновање графичких симбола бројева јасно приказано, ученици су схватили суштину комбиновања. У последњем делу активности за задатак 2, може се запазити да је наставник покушао да дође до идеје да поредак бројева у производу није битан тако што је тражио други начин за представљање броја „12“.

9.3. Закључци о часу

Анализирано предавање је било организовано, постављени су прилично захтевни проблеми и ученици су дошли до својих процедура или решења. Наставник је пажљиво осмислио и водио предавање. Чини се да ови аспекти указују на „добре“ делове математичког подучавања у Јапану. Они се могу објаснити у наредне две ставке: начин на који наставник учествује у организацији одељења и проблем припремљен за лекцију.

Прво, као што се примећује у анализи, наставник је сасвим ретко давао одговор или решење за дати задатак и није појаснио одговор ученика директно. Он је само тражио разлог зашто је ученик дао одређени одговор, а затим је појаснио одговоре ученика, и наводио их да уопште решење на основу својих идеја. Иако ученици нису били добро организовани како би дали повратну информацију, јер наставник није тај који даје повратну информацију, повратна информација других ученика употпуњена је уз помоћ наставника кроз социјалне интеракције. Све ове активности имају за циљ успостављање примењивог начина комуникације између наставника и ученика кроз математичко знање.

Друго, наставни материјал који је припремљен за ово предавање требао је да упути на откривање поменутих математичких идеја (број је производ других бројева и изузетак за неке бројеве). Графичко представљање, које дозвољава да се увиди структура бројева и систем бројева, усвојено је. Поред тога, проблем, посебно задатак 2, постављен је тако да су ове идеје неопходно средство за решавање датог проблема.

10. „ЈАПАНСКИ ЧАС“ У СРБИЈИ

Описаћу „јапански час“ који сам одржала у Основној школи „Мирослав Антић“ у Београду. Час је одржан у шестом разреду. Наставна јединица коју сам обрађивала била је „*Унутрашњи и спољашњи углови четвороугла*“. На часу је коришћен следећи наставни материјал: папир за пано, колаж папир, креде, картице са задацима, лепак, маказе, маркери, селотејп, фломастери, шестар, угломер. Час је трајао шездесет минута. Часу су присуствовали директор школе, заменик директора, психолог школе и наставница математике која предаје овом одељењу.

У уводном делу часа, који је трајао пет минута, поделила сам ученике у пет група уједначених способности. Објаснила сам им да ће на овом часу учити кроз игру и такмичење. Задатак ученика био је да уоче одређена својства о унутрашњим и спољашњим угловима четвороугла. Потребно је било урадити дате задатке, који ће се бодовати и на крају ће бити проглашена победничка група. Свакој групи поделила сам по два конвексна и два неконвексна четвороугла од колаж папира, и папир на коме ће решавати задатке.

Главни део часа трајао је педесет минута. Прва етапа у такмичењу био је квиз знања. Свакој групи постављена су по два различита питања. Питања су била везана за лекције које су обрађивали на претходним часовима, са циљем да се подсете претходног градива и уведу у наставну јединицу коју је требало обрадити. Одговор је могао дати било који члан групе којој је питање било намењено. Док је једна група одговарала на питања, ученици из осталих група су слушали утврђивали да ли су одговори тачни, и ако је било потребно, исправљали су нетачне одговоре. Тако је нека група могла да добије додатне поене.

Квиз је садржао следећа питања:

1. Колики је збир унутрашњих углова троугла, а колики је збир спољашњих углова?
2. Колики је збир унутрашњег угла троугла и њему одговарајућег спољашњег?
3. Шта је четвороугао?
4. Набројати његове елементе.
5. Шта је угао?
6. Шта су суседни углови четвороугла?
7. Шта је дијагонала четвороугла?
8. Шта је конвексан четвороугао?
9. Шта су наспрамни углови четвороугла?
10. Да ли суседна темена четвороугла одређују дијагоналу? Зашто?

Углавном су групе тачно одговориле на постављена питања, и свака група добила је поене у квизу. Једна група погрешно је одговорила на једно питање, па је друга група уместо њих дала тачан одговор и тако добила додатни поен.

Друга етапа у главном делу часа био је рад на задацима. Групе су добијале један по један задатак, који су били исти за све групе. Циљ је био да група уради задатке што пре. Када су урадили дати задатак, ученици су ме обавештавали да су завршили, па сам проверавала тачност решења и давала групи следећи задатак. Такође, нагласила сам ученицима да све што раде уредно пишу на папиру за пано, јер ће на крају излагати своја решења на табли.

Списак задатака које су ученици требали да ураде:

1) Један конвексан и један неконвексан четвороугао залепити на папир и обележити њихове елементе.
2) Утврдити колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла. То утврдити на бар два различита начина. И записати те начине на папиру, тј. паноу.
3) Наведите још неке начине помоћу којих можете утврдити збир унутрашњих углова овог четвороугла.
4) Ако сте утврдили колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла, да ли можете да тврдите да то важи за сваки четвороугао? И зашто? Одговор образложити и записати на паноу.
5) Формулисати теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и доказати је.
   (Упутство за доказ: нацртати произвољан четвороугао на паноу, обележити његове елементе и нацртати дијагоналу тог четвороугла.)
6) Утврдити колики је збир спољашњих углова датог четвороугла од колаж папира. И све записати на паноу.
7) Формулисати теорему о збиру спољашњих углова четвороугла и доказати је.
   (Упутство за доказ: сетити се како је доказана теорема о збиру спољашњих углова троугла, и искористити дати четвороугао за проверу.)
8) Све што сте написали и нацртали на паноу препишите у школске свеске.

Ученици су прво залепили два четвороугла на пано и обележили елементе четвороуглова. Затим су почели да траже начине помоћу којих би утврдили збир унутрашњих углова четвороугла. Углавном, ученици су дошли до идеје да измере углове угломером, па да их саберу, или да отцепе углове датог четвороугла, а затим их надовежу и залепе један до другог, и тако добију круг. На основу тога, закључили су да је збир унутрашњих углова четвороугла 360^{o}. Неки ученици су се сетили да углове могу пренети и сабрати помоћу конструисања. Било је и идеја, које су само поменули, да од укупног збира унутрашњих и спољашњих углова одузму спољашње углове.

Код четвртог задатка ученици су имали различита мишљења. Неки ученици су сматрали да на основу једног четвороугла могу тврдити колики је збир унутрашњих углова произвољног четвороугла, док су други ученици закључили да не могу тврдити исто само на основу једног четвороугла. Наводила сам их на одговор да мора постојати неко правило или теорема на основу које можемо тврдити да важи за све четвороуглове. Једна група дала је одговор да су утврдили збир унутрашњих углова и конвексног и неконвексног четвороугла, и добили су исти збир, па су на основу тога тврдили да важи за све.

У петом задатку ученици су требали да формулишу теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и да је докажу. Добили су упутство да нацртају дијагоналу четвороугла. Уз помоћ упутства три групе самостално су доказале теорему, одмах су се сетили да је четвороугао дијагоналом подељен на два троугла, и да је збир унутрашњих углова троугла 180º. Уочили су да је угао четвороугла подељен дијагоналом на два угла, који припадају различитим троугловима. И када су сабрали углове оба троугла добили су збир унутрашњих углова четвороугла. Остале две групе наводила сам да уоче шта се добија када се четвороугао подели дијагоналом, и шта знају о збиру унутрашњих углова троугла. Па су и они доказали теорему.

Слика 4. Наставник даје инструкције ученицима

У шестом задатку ученици су имали сличне идеје као за унутрашње углове. Неки су угломером измерили углове, али сетили су се и да их могу пренети и сабрати помоћу констриусања. Једна група се сетила да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла 180º. И тако су утврдили да је збир спољашњих углова датих четвороуглова 360º.

Седми задатак су две групе решиле без помоћи наставника. Одмах су се досетили да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла 180º. Па су користили чињеницу да се спољашњи угао добија кад се од 180º одузме њему одговарајући унутрашњи угао, и кад саберу све спољашње углове (користећи да је збир унутрашњих углова 360º) добијају збир 360º. Једној групи помогла сам да се присете правила за збир унутрашњег и спољашњег угла, као и осталим двема групама којима је била потребна детаљнија помоћ. Требало их је и навести како да искористе то правило.

Затим су ученици записали у школским свескама све оно што су писали на паноу. Док су ученици вредно радили задатке, ја сам их обилазила, пратила њихов рад и давала упутства групама које нису могле самостално да реше одређени задатак.

Након свих урађених задатака, групе су бирале свог представника који је презентовао решење одређеног задатка на табли.

Слика 5. Презентовање решења на табли

Ученици су на табли презентовали различите начине на основу којих су утврдили колики је збир унутрашњих углова датих четвороуглова, затим су на табли доказали теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла, и на крају теорему о збиру спољашњих углова. У току решавања задатака забележила сам која група је прва тачно урадила одређени задатак, па су представници тих група решавали задатке на табли. Док је једна група презентовала своје решење задатка, остале групе су слушале, и могле су да допуне оно што није речено. Ученици су пажљиво слушали ученика који је решавао задатак на табли. Групе су добијале одговарајући број поена за презентације. Доказивање теорема носило је највише поена. Ученици су били веома активни на часу, добро мотивисани и заинтересовани за проналажење различитих решења задатака. Међу ученицима истих група била је успостављена добра комуникација, заједнички су правили пано и украшавали га. Код ученика је био развијен такмичарски дух, интересовали су се да ли је њихова група прва урадила дати задатак, ко је урадио задатак на више начина.

Након презентација решења, ученици су радили примере како би утврдили оно што су научили, кроз задатке са картица. Поделила сам свакој групи картице са два иста примера, тј. задатка у којима је требало применити теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова.

Пример 1. Дата су три унутрашња угла четвороугла $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 76^\circ$, $\gamma = 123^\circ$. Одреди преостали унутрашњи угао тог четвороугла.
Пример 2. Дата су три спољашња угла четвороугла $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 120^\circ$, $\delta_1 = 80^\circ$. Одреди преостали спољашњи угао тог четвороугла.

Све групе су тачно урадиле примере, разумели су шта се од њих тражило. Кад су урадили задатке, две одабране групе радиле су задатке на табли, а то су биле групе које нису претходно презентовале своја решења. Ученици из осталих група пратили су рад ученика на табли и исправљали могуће грешке. Групе које су радиле задатке на табли добијале су одговарајући број поена. Након урађених примера на табли сабрали смо поене за сваку групу и прогласили групу која је победила.

У завршном делу часа, који је трајао пет минута, питала сам групу која је имала најмање поена шта су данас радили на часу, шта су научили, које теореме. И одговорили су да су то теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Затим сам дала ученицима домаћи задатак, неколико задатака из збирке.

На крају часа, ученицима сам поделила анкету, која је била анонимна. Анкета је садржала следећа питања:

1. Да ли је час био занимљив?
2. Да ли мислиш да би требало бити више оваквих часова?
3. Да ли ти се свидео рад у групи са другим ученицима?
4. Да ли си на овом часу научио/ла више него на стандардним часовима?
5. Да ли је атмосфера на часу била радна?
6. Шта си научио/ла на овом часу?

На првих пет питања ученици су одговарали заокруживањем понуђених одговора: „Да“ или „Не“. Анкету је попунило двадесет осам ученика. Сви ученици су одговорили позитивно на питање „Да ли ти се свидео рад у групи?“ и „Да ли је атмосфера на часу била радна?“. И на преостала три питања већина ученика одговорила је са „Да“. На питање шта су научили на часу, ученици су најчешће одговарали да су научили пуно тога о четвороуглу, да су научили нешто ново што раније нису знали али нису конкретно написали шта је то ново што су научили. Неки ученици су тачно написали да су научили колики је збир унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Један ученик је одговорио да је научио да се збир унутрашњих и спољашњих углова може израчунати на више начина. Било је и одговора да су научили да раде заједно у групи, да су научили да доказују теореме. Неки ученици су и усмено прокоментарисали да им је час био занимљив и да треба да буде више оваквих часова. На основу њихових одговора може се закључити да је ученицима час био веома занимљив, да су били мотивисани задацима, и да су чланови свих група били укључени у рад и решавање задатака.

10.1. Закључци о одржаном часу

Само оно знање које се стиче сопственим снагама, које се открива својим умом, постаје и остаје трајна својина ученика (и човека уопште). Тешко је научити некога да мисли правилно, логички и математички. Само онај ко се лично вежбао у томе, ко је био принуђен или стављен у положај да сам суди и закључује, само се тај оспособио да *мисли* у правом смислу те речи, као што су ученици решавали задатке самостално на горе поменутом часу. Морали су сами да пронађу различите начине за решавање проблема.

Неопходно је створити „атмосферу“ у којој ученик осећа да је остављен сам себи. Јер, ако се нада помоћи, он неће употребити све своје снаге, неће учинити све што може, неће заиста радити самостално, па неће стећи ни одговарајуће навике, ни потребне способности, ни самопоуздање. Мада, у том погледу, стоје на располагању и друга средства (развијање интересовања, задовољство од постигнутих успеха, племенито такмичење итд.), али наглашава се уздржавање од пружања помоћи и инсистирање да сваки ученик, самостално или у групи, реши постављени проблем. Конкретно, на овом часу, ученици су знали да ће на крају бити проглашена победничка група, и да ће они бити награђени, па су и на тај начин били мотивисани да раде, и постигну што бољи резултат.

Разуме се да би погрешно било и кад се не би ништа помогло неким ученицима, али та помоћ не сме да буде потпуна: само толика да ученик може да крене са места на коме је стао. На овом часу, помогла сам неким ученицима око формулисања теорема о збиру унутрашњих и спољашњих углова четвороугла, наводила их како да докажу поменуте теореме, али не директно, већ упутствима (повуците дијагоналу четвороугла, шта сте сада добили, знате ли колики је збир унутрашњих углова троугла, колико је збир унутрашњег и њему одговарајућег спољашњег угла итд.). Наравно, било је ученика којима помоћ није била потребна, сами су радили задатке.

Стварање радне атмосфере и пружање помоћи неопходни су не само у почетку навикавања на решавање проблема и проналазачки рад, него и касније, при сваком стицању нових знања. Уопште, *одржавање проналазачког духа код ученика и пружање праве помоћи у право време две су основне способности потребне како за увођење ученика за стицање знања путем решавања проблема, тако и за даљи рад у том смислу*. Ако наставник поседује те способности, ученици се брзо навикну на решавање проблема и постају све способнији за то. Искуство је показало и то да, временом, ученици постају способни, уз мали наставников подстицај, и за постављање проблема. Рад са таквим ученицима постаје све лакши и занимљивији, садржајнији и обимнији (често се излази ван оквира наставног програма), а успех који се постиже је *успех у правом и пуном смислу те речи*.

И кад наставник вешто примењује стицање нових знања решавањем проблема, може се десити да се неки (или сви) ученици не могу укључити у рад, не могу да, остављени сами себи, открију ништа или скоро ништа ново. Такве ученике наставник не оставља саме, али не пружа им ни готова знања. Он управља њиховим самосталним стицањем знања, што значи допунским питањима и потпитањима, а нарочито подстицајима упућује ученикову мисао тако да ученик не лута, а ипак, самостално реши постављени проблем, самостално дође до сазнања нових чињеница, новог рачунског поступка, потребног правила. Знања стечена решавањем проблема стоје, и по квалитету и по трајности, високо изнад знања која су стечена неким другим методом.

Ученик који је био само рецептиван и репродуктиван у основној школи не може, по правилу, касније, у средњој школи, да мисли математички. Већи успех би у том погледу постигао онај који није ништа учио, него ученик који је навикнут да прима готова знања. Са развијањем математичког мишљења треба, дакле, почети од првог школског дана.

Сматрам да је час био успешан, да су ученици били задовољни самом организацијом часа, као и сопственим ангажовањем на часу, што се може закључити из анкете и њихових одговора. Били су одлучни да реше задатке који су им дати, трудили су се да нађу више начина за решавање, и оно што је веома битно у оваквој организацији наставе, ученици су имали жељу да решавају задатке, били су мотивисани. На овом часу ученици су научили не само нова својства четвороугла, него су и научили како треба радити у групи, како сваки члан групе треба да је укључен у решавање задатака, како се процењује тачност туђих одговора, како се један задатак може урадити на више начина, како се доказују теореме, како се градиво надовезује и како се користе претходна знања.

Оваквим начином рада ученици развијају логичко мишљење, дедуктивно закључивање (уопштавају правила), закључивање по аналогији (повезују претходна знања), развијају способности вербалног изражавања и презентовања својих идеја, ученици се оспособљавају за активно учествовање у настави, за анализу и просуђивање туђих одговора.

11. УМЕСТО ЗАКЉУЧКА: ЗНАЧАЈ МАТЕМАТИКЕ И УЧЕЊА МАТЕМАТИКЕ

У савременом свету, живот и комуникација јединке са природним и друштвеним окружењем незамисливи су без познавања математике. Непотребно је наводити ситуације у којима је математика неопходна, нити проблематику у којој ће се напредније математички образован појединац лакше снаћи од оних са мањим математичким компетенцијама. При томе се не мисли само на конкретно нумеричко операционе могућности човека, нити на математички апарат потребан за извођење неких практичних делатности, већ и на апстрактно математичко-логичко мишљење и његову улогу у општем интелектуалном развоју и формирању идентитета. Математика је настала у најстаријим цивилизацијама, и развијала се из практичних људских потреба за сазнавањем и овладавањем природом и међуљудским, првенствено материјалним, а касније, и другим односима. У њеном каснијем развоју често се дешавало и дешава се да њени апстрактни резултати претходе искуству и практичној употреби.

Веома је битан и значај математике за цивилизацију уопште. Своју примену она је нашла у другим наукама, уметности и култури. Незамислив је напредак човечанства без коришћења резултата природних наука, којима математика даје метод и алате за даља истраживања и унапређивања. У уметности естетски склад изучава се математичким пропорцијама величина, звукова, боја.... У језику и књижевности математика се користи у граматичким изучавањима, у метрици стиха итд. Чак и тамо, где би најокорелији критичари математизације света, на први поглед тврдили да нема учешћа математике, она се појави макар и у најелементарнијем виду. Највећи продори људског ума у суштину света, законе живих организама; технолошке, друштвено историјске и психичке процесе; дефинисање естетског, немогући су без директног или бар посредног деловања математичких теорија и чињеница.

Из практичног значаја математике произилази и значај математичког образовања. У нашој средини устаљено је мишљење да је математика тешка, па чак, и сувишна у многим делатностима. Отуда су деца, често и пре поласка у школу, заплашена таквим коментарима у својој околини. Није циљ тражити кривце том феномену, већ учествовати у активностима које демистификују таква негативна мишљења и афирмишу позитивне ставове према математици и учењу математике.

Они који највише могу непосредно помоћи у том послу су сигурно васпитачи у предшколском узрасту и учитељи у нижим разредима основне школе. Најраније представе деце о математици увелико имају последице на касније резултате у њиховом учењу математике. Стога је улога васпитача и учитеља у афирмацији математике велика. Самим тим велики је и значај правилног, широког и богатог образовања студената за ова друштвено корисна и хумана занимања. У образовању наставника најзначајнији су следећи циљеви:

- повећање теоријских и практичних математичких знања
- продубљивање нивоа математичког мишљења
- оспособљавање за повећање мотивисаности за учење математике
- повећање општег образовања, ради корелације са другим предметима и реалним животним ситуацијама
- упознавање са психофизичким развојем деце на одговарајућим узрастима
- овладавање широким спектром метода подучавања и организације наставе.

Иако има различитих виђења, настава је целисходан и веома промишљен процес, који је нужно организован, вођен, којим се управља и руководи, те у том смислу мора да буде планиран и припремљен. Од наставног процеса се очекује да од ученика створи способног, самосталног и активног човека који мисли, проверава чињенице, поставља питања, доноси закључке, практично користи своја знања. Када ученик долази до знања кроз самостално откриће, такво знање је трајно, а његова употребна вредност велика. Ученик тако савладава општу методологију учења, унутрашња мотивација за стицање знања је већа, а повећава се и његова радозналост и осетљивост за решавање интелектуалних проблема.

Да би настава остварила своју образовну и развојну функцију, она мора да садржи интелектуалне проблеме и задатке, различите по садржају и по природи интелектуалних делатности. Као што наука представља откривање непознатог, тако и настава треба да буде симулација тог откривања. Реч је о откривању и развијању нових правила, принципа и решења.

Решавање проблема подразумева ангажовање у задатку у коме метод за решавање није унапред познат. Са циљем да пронађу решење, ученици морају да се ослањају на своје знање, и кроз овај процес, они често развијају нова математичка схватања. Решавање проблема није само циљ учења математике, оно је и главно средство учења. Ученици треба да имају пуно прилика да формулишу, да се суочавају, и решавају сложене проблеме који захтевају значајну количину труда, што ће се одразити и на њихово мишљење. Учењем решавања проблема у математици, ученици треба да стекну начине размишљања, навике упорности и радозналости, и самопоуздање у непознатим ситуацијама које ће им користити изван учионице. У свакодневном животу и на радном месту, особа која је способна за решавање проблема може имати велике предности. Решавање проблема је саставни део учења математике, и треба да буде укључен у све области: бројеви и операције, алгебра, геометрија, мерење, анализа, вероватноћа.

Вештине за откривање новог знања, а самим тим и за решавање проблема, могу бити укључене у све нивое образовања, јер, ученик ће користити оно што зна и наћи ће начине да истражује непознато и учи о томе. Вештина поделе проблема на мање делове како би овладали њиме је корисно средство у сваком аспекту живота. Појединац може да превазиђе сваки изазов овим корисним средством и тако ће постићи успех. Способност за „решавање проблема“ држаће пажњу ученицима у процесу учења и њихова радозналост увек ће бити побуђена зато што су прихватили изазов да истражују непознато. Кад наставници представљају проблеме који захтевају вештине за решавање проблема, ученицима се нуди прилика да прошире своја знања. Окружење које даје подршку корисно је за учење у учионици са ученицима, на било ком нивоу и у оквиру било ког садржаја. Имајући у виду различитост стратегија, решавање проблема треба да буде и може се користити у било којој научној области. За решавање проблема ученици треба да буду охрабрени да их решавају користећи Polya-ин модел.

Успех којим се изводи настава математике није задовољавајући. Узрок томе обично се налази у општем мишљењу да је математика тешка и несхватљива већини ученика. Такав став има, нажалост, и један део наставника математике. Међутим, искуство добрих наставника и психологија показали су да је број ученика неспособних за математику врло мали и да се у случају аритметике он своди на нулу, а да су слаба и недовољна стручност и невешто извођење наставе математике два главна узрока неуспеха. Наставници треба да се фокусирају на занимљиве математичке проблеме који ће ученике подстицати на активно мишљење и примену наученог у конкретним животним ситуацијама. Дакле, кроз наставу математике ученици стичу знања потребна за свакодневни живот у савременој друштвеној заједници и знања за обављање многих професија (вршење многих делатности). Настава математике помаже развијању интелектуалних способности ученика. Штавише, она се може изводити тако да ученици сами открију многа математичка знања, а то представља највиши ступањ умног рада. Могућност да се провери тачност добијених резултата и решења навикава ученика на самоконтролу и критички однос према свом раду и раду других. За стицање математичких знања и решавање математичких задатака потребни су: јак вољни напор, свесна и вољна концентрација пажње, упорност, стрпљење, истрајност, а то су карактерне особине сваког човека од акције.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polya, G. (1965): *Mathematical Discovery On Understanding, Learning, And Teaching Problem Solving*. Volume II. New York, London, Sydney: JOHN WILEY & SONS

2. Polya, G. (1966): *KAKO ĆU RIJEŠITI MATEMATIČKI ZADATAK* (2. izdanje). Zagreb: Školska knjiga

3. Ničković, R. (1976): *UČENJE PUTEM REŠAVANJA PROBLEMA U ELEMENTARNOJ NASTAVI MATEMATIKE*. Beograd: Naučna knjiga, 9-12, 26-27, 85.

4. Rohlen, T., & LeTendre, G. (1998): *Teaching and Learning in Japan*. Cambridge University Press, 219-229.

5. Prvanović, S. (1958): *Metodski priručnik za izvođenje nastave aritmetike*. Biblioteka prosvetnih radnika Jugoslavije, 1-18.

6. Alexanderson, G. L. (2000): *The random walks of George Pólya*. Washington, DC

7. Albers, D. J., & Alexanderson, G. L. (1985): *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Boston, 245-254.

8. Alexanderson, G. L., & Lange, L. H. (1987): *Obituary: George Pólya*. Bull. London Math. Soc. 19 (6), 559-608.

9. Taylor, H., & Taylor, L. (1993): *George Pólya : Master of Discovery*. Palo Alto, CA

10. Schoenfeld, A. H. (1987): *Pólya, problem solving, and education*. Math. Mag. 60 (5), 283-291.

11. Read, R. C. (1987): *Pólya's enumeration theorem*. Bull. London Math. Soc. 19 (6), 588-590.

12. Schiffer, M. M. (1987): *Pólya's contributions in mathematical physics*. Bull. London Math. Soc. 19 (6), 591-594.

13. Harary, F. (1977): *Homage to George Pólya*. J. Graph. Theory 1 (4), 289-290.

14. Miyakawa, T. (2006): *A study of "good" mathematics teaching in Japan*. In Proceedings of the APEC International Symposium on Innovation and Good Practice for Teaching and Learning Mathematics through Lesson Study (pp. 119-132), 14-17 June, Khon Kaen, Thailand

15. Stigler, J., & Hiebert, J. (1999): *Teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press