Универзитет у Београду, Математички факултет

О реалним дометима увођења основних појмова вероватноће код петнаестогодишњака са примерима из праксе

Метнор:

Др Милан Божић

Др Весна Јевремовић

Мр Иван Анић

Студент:

Душица Адамовић 1049/2011

Садржај:

1. Етичка питања у наукама о васпитању

Математика снажно васпитава моралоно.

А. Ј. Хинчин

"Етичка питања се покрећу јер су суштина сваке науке. Од науке се тражи да буде морална а од научника да поштено и искрено тумаче резултате до којих су дошли у својим истраживањима. Узроци занемаривања етичких питања у наукама о васпитању су многоструки, а међу првима истичемо место превласти перспективе и прагматичне оријентације чија је суштина у доминацији *како* (како поступити у настави, како изабрати методе...) над питањем *зашто* (зашто је потребно то радити, какве су каузалне везе одређених приступа...). Први приступ се чини лакшим, јер подржава лењост духа, а други знатно тежим јер захтева темељно понирање у природу и суштину човека. Други приступ претпоставља дубоку анализу појма хуманости, људске слободе и критичко преиспитивање програма образовања и учења како би се утврдила њихова ваљаност и легитимност.

Занемаривање етичких проблема је последица удаљавања науке о васпитању од филозофије и њених подручја етике. Када цивилизација или поједина друштва западну у кризу онда се јавља кључно питање које су то вредности на којима би требало да почива друштво. Из тог питања јавља се ново питање о потреби преиспитивања циљева образовања и учења. Науке о васпитању, посебно у нашој земљи, пропустиле су да темељније анализирају вредност друштва као основу из које се извлаче циљеви образовања и васпитања. Циљеви су се изводили из идеала који нису доступни и зато су углавном остали апстракција, као што је на пример, циљ о свестрано развијеној личности. Када се сусрећемо са проблемом циљева као теоријском категоријом, онда се поново враћамо вредностима, то јест питању које су то праве вредности са становишта човека и његовог образовања. Уважавајући чињеницу да су вредности променљиве категорије, јавља се питање да ли постоје одређене вредности које имају стални карактер из којих се извлаче циљеви васпитања и образовања" (Кука, М. 2005; 9).

Задатак овог рада је да покушамо да дамо одговор на питање: Зашто учимо математику, да се упознамо са основним карактеристикама методике наставе математике, као и да на практичним примерима испитамо ниво разумевање вероватноће код ученика првог разреда средње школе.

1.1. Зашто учимо математику?

Прави математичар може и усред неповољних прилика наћи могућност за стваралачки рад

Л. Мардел

Основни задатак математике је да нам помогне да самостално, креативно и критички мислимо. Математика нам служи у свакодневном животу, науци, трговини, индустрији јер је моћно, сажето и недвосмислено средство комуникације, објашњавања и процене. Њена моћ је у посебном универзалном језику и знаковима који имају властиту граматику и синтаксу као и допринос у развију логичког мишљења. Као и уметност, математика нам пружа естетичко и интелектуално задовољство. Уска повезаност математике и песме (бројевни однос који одговара хармонији тонова), математике и сликарства (златни пресек, обликовање простора и слично), као и књижевности имају велики значај у формирању личности, тежњи ка истини, креативност, критичког размишљања као и развијање осећаја за унутрашњу и спољашњу лепоту.

Кад је ученицима јасно зашто је важно усвајање знања за сналажење у поједниним друштвеним, психичким и животним ситуацијама, ако уче уз објашњавање кроз животне примере, наставни садржаји ће им бити прихватљивији. Математички садржаји су од самог почетка апстрактни па је потребна добра методичка прерада и стална повезаност да би се приближили ученицима. Градиво је уско повезано па неразумевање једног дела градива доводи до неразумевања свих садржаја који се на тај део надограђују. Учење кроз примену у проблемским ситуацијама, комуникација, стална повезивања и разнолике репрезентације градива позитивно утичу на савлађивање градива. Уместо преоптерећивања памћења ученика великим бројем чињеница и задатака, требало би побуђивати и покретати њихово мишљење кроз занимљиве и изазовне задатке.

Основни задатак наставе математике јесте да ученици усвоје математичка знања потребна за доношење одлука у различитим свакодневним ситуацијама. Та знања могу омогућити интерпретацију и успешно коришћење информација, праћење процеса доношења одлука у друштву. Настава математике би требало ученицима омогућити примену математике и математичко споразумевање у различитим животним ситуацијама, где ће активним и отвореним приступом савладати нове математичке концепте и тако решавати разне проблеме. Као наставни предмет математика би требало осигурати и чврсту основу за учење наставних предмета у свим другим васпитнообразовним подручјима. Такође, математика је темељ даљег образовања и целоживотног учења.

У складу с тим темељним поставкама математичко образовање има следеће опште циљеве:

- ✓ Развој позитивног става према математици, трајно креативно занимање за њу и постизање успеха у математичким активностима.
- ✓ Развој самопоуздања у властите математичке способности, свести о њиховим границама и развој одговорности за властити успех и напредак у учењу математике.
- ✓ Разумевње важности доприноса математике развоју различитих цивилизација, култура и савременог друштва.
- ✓ Разумевање вредности математике као универзалног језика науке, технологије и уметности.
- ✓ Развој способности математичког моделирања различитих процеса као и критичког преиспитивања претпоставки модела.
- ✓ Развој способности логичког мишљења, закључивања и генерализације.
- ✓ Развој вештина и способности формулисања проблема као и њихово решавање разноликим поступцима.

2. Значење случајности за ученике средњих школа

Случајност је тумачена на различите начине током различитих периода у историји. Најзначајнија истраживања из ове области су спровели Батернеро, Серано, Бенет, Грин (Batanero, Serrano, Green, 1998; Bennett, 1993). Од најстаријих времена до почетка средњег века, за случајност се сматра оно што је супротно од нечега што има познат узрок. У каснијим приступима, случајност је била повезана са фреквенцијом и субјективном приступу вероватноћи.

Истраживање код деце о схватању случајности почело је са Пијажеом и Барбел Инхелдер (1951), који су истраживали како деца разумеју дводимензионалну расподелу. Дизајнирали су апарат да симулира како падају капи кише. На питање где ће следећа капљица кише пасти, мала деца (од 6 до 9 година) су предвидела да ће број капљица бити приближно једнак броју који је пао на сваком делу трга, производећи на тај начин унформну расподелу. Са старијом децом, пропорционално резоновање почиње да се развија, и Пијаже и Инхелдерова су веровали да деца разумеју закон великих бројева, који истовремено објашњава опште правилности и промењљивост сваког експеримента.

Гринова (Green 1983, 1989, 1991) истраживања са великим узорцима деце узраста од 7 до 16 година, користећи верзију Пијажеовог задатака, показао је, међутим, да се способност препознавања случајности не побољшава са годинама. У Гриновим истраживањима, деца су суочена са задатком који се односи на случајан низ глава и писама који представљају резултате бацања новчића. Резултати тих истраживања су показала да су деца у стању да опишу шта се подразумева под једнаковероватно. Међутим, она нису успела да схвате независност закључивања, и тежила су да произведу серије у којима се добија исти резултат али те серије су прекратке у односу на оне које бисмо очекивати у случајним процесима.

Друга истраживања, као што су она која су вршили Тухеј (Toohey (1995)), Фишбаин и Газит (Fischbein and Gazit (1984)), и Фишбаин, Нело и Марино (Fischbein, Nello, and Marino (1991)), такође су документовала тешкоће деце у разликовању насумичних и детерминистичких ситуација и њихових веровања у могућност контроле случајног експеримената. Такође је дошло до великог броја истраживања у субјективној перцепцији случајности одраслих, од којих су најзначајнија истраживања Фалка и Конолда (Falk & Konold, 1997). Они су увидели да постоје систематске предрасуде. Људи су склони да одбаце низ са великим бројем истог резултата (као што су дуги низ глава), и сматрају га случајно добијеним.

2.1. Претходна истраживања

У експерименталном истраживању "*The Meaning of Randomness for Secondary School Students*" које су спровели Карл Батанер и Луис Серано испитиване су евентуалне разлике у схватањима ученика средњих школа о случајности пре и после наставе вероватноће, код шпанских ученика старости од 14 и 17 година. Узорак су чинили 277 средњошколаца, а писани упитник је био са неким ставкама преузетих из Грина (1989, 1991). Њихови резултати су допринели проширењу Гринових претходних истраживања на седамнаестогодишње ученике. Такође, значајан је и допринос увођења анализе аргумената ученика. Њихови резултати показују да су субјективна схватања ученика случајности блиска неким тумачењима случајности кроз историју.

У наставку рада анализираћемо резултате Карловог и Луисовог истраживања, односно, одговоре 277 ученика средњих школа. Око половине ученика (n=147) су били у трећој години средње школе (петнаестогодишњаци) и нису имали наставу о вероватоћи. Остатак ученика (n=130) су последња година средње школе (седамнаестогодишњаци и осамнаестогодишњаци). Ова друга група је учила вероватноћу са формалним, математичким приступом у трајању од око два месеца. Као циљ истраживања аутори истичу допринос у развоју интуиције вероватноће кроз године, који према Фишбеину и Шнарчу (Fischbein and Schnarch (1997)) није детаљно проучавана.

Анализирано је осам ставки, четири из случајних низова, а преостале четири из случајне дводимензионалне расподеле. За сваку ставку, прво је одређиван проценат студената који сматра ситуацију случајном, а затим су анализирани аргументи ученика за прихватање или одбијање случајности. У ставкама од 1 до 4, проучавани су капацитети ученика за прихватање или одбијање случајности модела. Модел је резултат бацања новчића (пример Бернулијевог низа).

Две променљиве су чиниле низове:

1. Однос броја добијених глава и писама је био различит. У ставкама од 1 до 3 број добијених глава је веома близу теоријске вероватноће (тј. P (Г) = 0.53 у ставци 1, P (Г) = 0.48 у ставкама 2) и 3), док је у ставци 4) број добијених глава само P (Г) = 0.30.

2. Дужина експеримента и, сходно томе, проценат промене (промене у броју добијених глава и писама или писама и глава). Овај однос је био веома близак теоријској вероватноћи од 0.5 у ставкама 1) и 4) (то јест, P(П) = 0.54) и у ставци 3) (тј., P(П)=0.51). Међутим, како је P(П) = 0.74 у ставци 2), број бацања новчића је мали да би се добијени низ исхода сматрао случајним.

Ученици су бацали новчић 40 пута. Неки су то и урадили, бацили новчић и записали добијен исход, док су други само попунили низ насумице без бацања новчића, писали су Г за главу и П за писмо. Исход експеримента је:

Марија: П П П Г П Г Г П П П Г П Г Г Г Г Г П Г П Г П П Г П Г Г П П П П Г Г Г П Г Г П Г Г

Данијел: Г П Г П П Г Г П Г П Г Г П П Г П П Г Г П П Г П Г Г П П Г П Г П Г П Г П Г П П Г П

Мартин: Г П П П Г П П Г Г Г П Г П П П П П Г П Г П Г Г П Г П П Г Г Г Г П П П Г П П Г Г Г

Дијана: Г П П П Г П П Г П Г П П П Г П П П П Г Г П П П Г П П Г П П Г П П П П Г П П П Г П

Ставка 1: Да ли је Марија бацала новчић?

Ставка 2: Да ли је Данијел бацао новчић?

Ставка 3: Да ли је Мартин бацао новчић?

Ставка 4: Да ли је Дијана бацала новчић?

Са нормативне тачке гледишта, сматра се да је тачан одговор код ставки 1) и 3) да је ученик урадио задатак по правилима, а за ставке 2) и 4) да је ученик варао. Како у тестовима случајности увек постоји мали проблем, тј. могућност да редослед није случајан, одговори ученика нису довољни да би се закључило да ли су њихова схватања у праву или не. Дакле, ово истраживање се бави, поред тога да ли су се одговори ученика поклопили са нормативним одговором, већ и особинама случајности низа. Добијени резултати ученика приказани су у табели 1. За петнаестогодишње ученика резултати су слични онима добијених од стране Грина (1991) са ученицима исте старости. Није било седамнаестогодишњих ученика у истраживању Грина.

Табела1. Проценат студената који сматрају да су ситуације случајне

Ставке	Година	
Линеарне секвнце	15 n=147	17 n=130
Марија P(H)=0,53 P(A)=0,54	60	58
Данијел P(H)=0,48 P(A)=0,74	58	63
Мартин P(H)=0,48 P(A)=0,51	53	56
Дијана P(H)=0,30 P(A)=0,54	36	37
Дводимензионални низови		
Хајме χ^2=1,83	85	85
Лора χ^2=2,39	57	58
Мигел χ^2=15,50	36	38
Луис χ^2=24,36	25	22

Извор: Batanero, C., Serrano, L., *The meaning of randomness for secondary school studenst*, Journal for research in Mathematics Education, 1999

Већина ученика је добило Бернулијев низ (ставке 1- 4) осим код ставке 4), код које је фреквенција главе (12) била потпуно другачија од очекиваних теоријских фреквенција за случајни низ. У ставци 2), већина ученика сматра низ случајним, иако је број бацања новчића (а самим тим и дужина експеримента) била пристрасна. Овај резултат указује на то да су ученици имали већих тешкоћа у препознавању карактеристика експеримената од својстава фреквенција. Доследност у процентима ученика, с обзиром да су низови случајни у ставкама 1), 2) и 3), показује да сличност између добијених и очекиваних фреквенције је важнија од дужине експеримента у ученичком закључивању да би низ био случајан. Није било значајних разлика по старосним групама међу процентима ученика, с обзиром на ставке, (као што је приказано у Табели1), што може да укаже да узраст има мало утицаја на ученичке "концепције случајности". Међутим, закључак је тешко извести само на основу резлтата овог истраживања, јер концепт случајности далеко сложенији. Да би разјаснили које специфичне особине случајности ученици користе за прављење њихових судова и да ли ће те особине зависити од старости, од ученика је тражено да оправдају своје одговоре. За анализу њихових аргумената Карл и Луис су користили следеће категорије:

Постоји редован образац - Ово резоновање се односи на редослед којим се писмо и глава појављују у низу и регуларност овог шаблона. Неки од образложења су: "Добијени низ писама и глава би чинили случајни низ, зато што је сувише тачно, све у своје место, добро поређано", "Он није варао, има приближно исти број глава и писама, што је највероватније да се догоди ".

Постоји неправилан образац у низу - На пример, "Он није бацао новчић, јер низ не прати било који редослед." У овом примеру аргумент ученика је недостатак шаблона.

Фреквенције добијених резултата су прилично сличне са могућим резултатима - На пример: "Он није варао, јер број добијених глава и писама су веома избалансирани", или "Он је варао јер је веома тешко да се писма и главе појављују исти број пута."

Фреквенције добијених резултата су сасвим другачије од могућих резултата - Ово је опозит претходног аргумента. Претходна два разлога су заснована на поређењу између посматраних фреквенција и теоријске расподеле вероватноћа. У основи овакво расуђивање може бити фреквентни приступ вероватноћи и случајности. Ученички аргумент је: "Мора бити једнака вероватноћа за главу и писмо".

Има дугих релација - (постоје серије са превише истих исхода). Ученици са овим ставом показују заблуде у вези са идејом о независности између узастопних исхода, аргумент је: "Постоји много узастопних писама".

Не постоји релација - (не постоји серија са неколико поена). То је опозит претходног разлога, аргумент је: "Има премало секвенца главе."

Она је непредвидива, значи да је случајна - Дајући овај одговор ученици могу рећи, на пример: "То је срећа", или: "Иако правилно бацан новчић, он може дати тај резултат, јер је игра".

Млађи ученици (петнаестогодишњаци) су закључивали на основу експеримента, тј. на основу правилности или неправилности шаблона, док седамнаестогодишњи ученик изгледа да фаворизује фреквенције и непредвидљивости за доношење закључка. (више о томе у)

2.2. Развој вероватноће кроз године

Сврха истраживања, које су спровели Ефраим Фишбеин, (Efraim Fishbein) и Дитза Сханрич, (Ditza Schnarch), је испитивање развоја вероватноће и интуиције засноване на заблуди. Хипотеза је да ће се ове заблуде стабилизовати током појаве формалног операционалног периода.

По Фишбеину појам интуиције је дефинисан као сазнање које се појављује субјективно, као очигледно, директно прихватљиво. Интуитивна спознаја се разликује од аналитичког и логично основаног сазнања. На пример, појединац може са сигураношћу да тврди да је збир углова 180°, зато што то може да докаже. С друге стране, чињеница да је најкраће растојање две тачке права линија субјективно изгледа да је апсолутно тачна, без потребе за било каквим формалним или емпиријским доказом. У првом случају је реч о неинтуитивној, а у другом о интуитивној спознаји.

Поставља се питање зашто нека од сазнања имају конкретне доказе и директно следе док друга не. Хипотеза је да је разлог тај што особе природно имају тенденцију да сазнања интегришу и организују у кохерентну структуру. Проблем је што је људско искуство обично ограничено. Последица тога је склоност да верујемо да одређени узорак увек производи исти ефекат и што при тумачењу догађаја често не правимо разлику између узрока и последице. Такође, склони смо да особине које има појединац, припадник одређене класе, генерализујемо за целу класу. Ови додатни фактори проузроковали су да се прошири првобитно питање истраживања, те се Ефраим и Дитза баве и питањем: Како фактори који се односе на кохерентност и ефикасност утичу на развој интуиције кроз године? Утврђено је да је полазна претпоставка превише поједностављена у односу са стварним експерименталним налазима у домену вероватноће.

У истраживању "*The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions* " Ефраим и Дитза су испитивали пет група ученика:

Прва група - 20 ученика петог разреда (узраста 10-11 година),
Друга група - 20 ученика седмог разреда (узраста 12-13 година),
Трећа група - 20 ученика деветог разреда (узраста 14-15 година),
Четврта група - 20 ученика првог разреда средње школе (16-17 година),
Пета група -18 студената који су специјализовани за математику.

Ученици првог разреда средње школе су средњи ниво способности од три нивоа наставе у израелским средњим школама. Ниједан од ученика није претходно имао неко предавање о вероватноћи. Учесници у истраживању нису добили информације о циљу истраживања. Ученици и студенти су различитог социоекономског и културног порекла.

Тест је садржао седам питања која се односе на вероватноћу. Сваки проблем је био у вези са познатим заблудама у вероватноћи. Одговори су морали да се напишу. Упитник се попуњавао у току регуларног часа, у уобичајној учионици у трајању око сат времена.

Проблеми и проценат одговара:

1. *Репрезентативност*

У игри лото, човек мора да бира 6 бројева од укупно 40. Веред је изабрао 1, 2, 3, 4, 5, 6. Рут је изабрао 39, 1, 17, 33, 8, 27. Ко има веће шансе за победу?

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Рут има веће шансе за победу. (Главна заблуда)	70	55	35	35	22
Веред и Рут имају исту шансу за победом. (Исправно)	30	45	65	65	78
Веред има веће шансе за победу.	0	0	0	0	0

2. *Негативна и позитивна грешка*

Код бацање новчића постоје два могућа исхода: писмо или глава. Рони је бацао новчић три пута и сваки пут добио главу. Рони намерава да баци новчић поново. Каква је шанса да падне и четврти пут глава?

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Мања од шансе да падне писмо. (Главна заблуда, негативни ефекат)	35	35	20	10	0
Једнака је шанса да падне писмо или глава. (Исправно)	40	55	70	90	94
Већа је од шанса да ће пасти писмо. (Позитиван ефекат)	0	5	0	0	6
Друге врсте одговора.	25	5	10	0	0

3. *Сложени и једноставни догађаји*

Претпоставимо да бацамо истовремено две коцкице. Који од понуђених одговора има већу шансу да се оствари?

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Добијање пара 5-6. (Исправно)	15	20	10	25	6
Добијање пара 6-6.	0	0	0	0	0
Оба имају исту шансу. (Главна заблуда)	70	70	75	75	78
Други одговори.	15	10	15	0	16

4. *Конјуктивна заблуда*

Ден сања да постане лекар. Он воли да помаже људима. Када је био у средњој школи учествовао је као добровољац Црвеног Крста. Завршио је средњу школу са високим просеком а затим служио у војсци као доктор. После завршетка војног рока Ден је уписао факултет. Шта има више изгледа да се догодило?

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Ден је студент медицинског факултета. (Заблуда)	85	70	80	40	44
Ден је студент.	15	30	20	60	56

5. *Утицај величине узорка*

У једном граду постоје две болнице, мала у којој има, у просеку, око 15 порођаја дневно и велика у којој има, у просеку, око 45 порођаја на дан. Вероватноћа рађања дечака је око 50% (ипак, било је дана када је рођење дечака било више од 50%, а било је дана када је број рођених дечака био мањи од 50%). У малој болници рекорд је задржан током годину дана у којој је укупан број рођених дечака био већи од 9, што представља више од 60% од укупног броја порођаја у малој болници. У великој болници, они су држали рекорд током годину дана у којем је било више од 27 рођених дечака, што представља више од 60% рођених. У којој од ове две болнице има више таквих дана?

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
У великој болници је било више забележених дана када је рођено више од 60% дечака.	20	35	5	10	0
У малој болници је било више забележених дана када је рођено више од 60% дечака. (Исправно)	0	0	5	0	0
Број дана када је више од 60% дечака рођено је једнака у обе болнице. (Главна заблуда)	10	30	70	80	89
Други одговори.	10	5	5	10	0
Без одговора.	60	30	15	0	11

6. *Утицај величине узорка*

Вероватноћа добијања главе најмање два пута од три бацања новчића је:

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Мања од вероватноће добијања главе најмање 200 пута од 300 бацања. (Погрешно)	5	5	25	10	6
Једнака је вероватноћи добијања главе најмање 200 пута од 300 бацања. (Главна заблуда)	30	45	60	75	44
Већа од вероватноће добијања главе најмање 200 пута од 300 бацања. (Исправно)	35	30	10	5	50
Други одговори.	5	10	0	0	0
Без одговора.	25	10	5	10	0

7. *Број расположивих*

Приликом избора комисије која се састоји од два члана од десет кандидата, број могућности је:

Старосне групе:	I	II	III	IV	V
Мањи од броја могућности при избору комисије од осам чланова од десет кандидата. (Нетачно)	20	5	10	0	22
Једнак је броју могућности при избору комисије од осам чланова од десет кандидата. (Тачно)	0	5	5	15	6
Већи од броја могућности при избору комисије од осам чланова од десет кандидата. (Главна заблуда)	10	20	65	85	72
Други одговори.	15	30	15	0	0
Без одговора.	55	40	5	0	0

Резултати који су Ефреим и Дитза постигли у истом истраживању су:

Репрезентативност - Заблуда репрезантативности смањује се са годинама.

Негативни и позитивни ефекти - Утицај негативних стратегија смањује се са годинама.

Утицај величине узорка - За проблеме код петог и шестог питања основна заблуда је да узорак није репрезентативан. На основу овог налаза, закључено је да се одређени логички став побољшава како се ученички узраст повећава (као резултат наставе и интелектуалног развоја).

Фреквенција – Још једном је добијен случај у коме је учесталост погрешно интерпретирана и аутори закључују да се ова заблуда повећава са старошћу ученика.

Добијени резултати су у супротности са општом претпоставком о стабилности интуиције. Може се претпоставити да се повећањем математичког искуства, која подстиче зрелост размишљања код ученика, смањује ефекат одговарајућих заблуда.

3. Истраживање

Најбољи начин да се нешто научи јесте – да се самостално открије

Д. Пољa

Након што смо се упознали и прокоментарисали претходна истраживања о схватању и развоју вероватноће, извршићемо истраживање и у Србији, код ученика првог разреда средње школе. У овој експерименталној студији смо намеравали да испитамо схватање основних појмова вероватноће код ученика средњих школа, како бисмо проверили колико се њихова мишљења подударају са вршњацима из других земаља. Ученици немају теоријска предзнања о вероватноћи.

3.1. Кратак преглед изучавања вероватноће и статистике у Србији

Када је реч о почетку изучавања вероватноће, односно првог сусрета ученика са њом можемо рећи да је то већ на самом почетку школовња. Током првог разреда започиње сусретање са вероватноћом, углавном кроз задатке везане за комбинаторику. Пред ученике се постављају проблемски задаци да се испише најмањи или највећи број, број дељив са неким бројем, да се преброји колико има тачака, дужи, троуглова, многоуглова итд. Ученици исписивањем и бројењем долазе до решења. За израчунавање се не користе варијације, комбинације и пермутације да би се помоћу њих дошло до решење. Затим, у осмом разреду се ученици баве статистиком. Конкретно, раде графичко представљање података, рачунања моде, медијане и аритметичке средине. Изучавање вероватноће у средњој школи је на „вишем нивоу“, јер ученици раде пермутације, комбинације, варијације тако да имају неке основе за даље изучавање вероватноће. Највише се вероватноћа изучава у Гимназији природно-математички смер петнаест часова у оквиру математике у четвртом разреду, док у Математичкој гимназији постоји предмет Вероватноћа и Статистика који се изучава у четвртом разреду (два часа недељно укупно 36 часова). У првом полугодишту ученици се баве вероватноћом као на природно-математичко смеру, док се у другом полугодишту ради статистика. Ученици се сусрећу са наставним јединицама:

Случајни догађаји. Класична дефиниција вероватноће догађаја. Геометријска дефиниција вероватноће догађаја. Вероватноћа уније догађаја. Условна вероватноћа. Независност догађаја. Тотална вероватноћа. Бајесова формула. Вероватноћа догађаја. Дискретна и непрекидна случајна променљива. Закон расподеле случајне променљиве. Функција расподеле и густина случајне променљиве. Математичко очекивање и дисперзија. Функција расподеле, густина, нумеричке карактеристике случајне променљиве. Биномна расподела. Нормална расподела. Биномна и нормална расподела. Елементи вероватноће.

Од ученика се очекује да овлада основним појмовима везаним за вероватноћу, да примени формуле, израчуна математичко очекивање и дисперзију, да зна шта је густина расподеле, шта је функција расподеле, да савлада нормалну и биномну расподелу и да стечено знање касније примени у статистици.

Следећи ниво проучавања вероватноће и статистике је на факултету. На Факултету организационих наука вероватноћа се изучава у оквиру предмета Теорија вероватноће на другој години студија (трећи семестар) и то студенти уче:

Дескриптивна статистика, статистичко обележје. Расподела фреквенција, графичко приказивање расподеле фреквенција. Параметри обележја, индекси. Случајни догађаји, особине. Операције и релације са случајним догађајима. Вероватноћа (дефиниције). Условна вероватноћа, особине. Формула тоталне вероватноће, Бајесова формула. Једнодимензионалне случајне промењљиве прекидног типа. Једнодимензионалне случајне промењљиве непрекидног типа, параметри случајне промењљиве. Модели прекидних *расподела. Модели непрекидних расподела. Граничне теореме у вероватноћи. Дводимензионалне случајне промењљиве прекидног типа. Дводимензионалне случајне промењљиве непрекидног типа. Маргиналне расподеле. Регресиона анализа.*

Циљ је стицање основних знања из теорије вероватноће и оспособљавање за примену тих знања у решавању проблема из праксе. Познавање теорије вероватноће представља основу за разумевање метода и модела статистичке анализе. На Електротехничком факултету вероватноћа се изучава у оквиру предмета Вероватноћа и статистика (2+2, четврти семестар) и то студенти уче:

Увод у теорију вероватноће. Статистички експеримент, простор вероватноће. Аксиоме вероватноће. Једнаковероватни догађаји. Геометријска вероватноћа. Статистичка дефиниција вероватноће. Особине вероватноће. Примена комбинаторике. Бесконачни скупови елементарних догађаја. Условна вероватноћа и независност. Условна вероватноћа. Формула тоталне вероватноће. Бајесова формула. Примене Бајесове формуле у техничким наукама. Случајне промењљиве. Функција расподеле. Дискретне случајне промењљиве. Непрекидне случајне промењљиве. Случајни вектори. Независност случајних промењљивих. Функције случајних промењљивих и случајних вектора. Нумеричке карактеристике случајних промењљивих. Математичко очекивање. Моменти. Коваријанса и коефицијент корелације. Матрица коваријансе. Информација и ентропија. Карактеристичне функције. Дефиниција и особине. Карактеристичне функције случајних вектора. Граничне теореме. Врсте конвергенције у теорији вероватноће. Неједнакост Чебишова. Закони великих бројева. Централна гранична теорема и њене примене. Емпиријске функције расподеле и централна теорема статистике. Условне расподеле. Дефиниција условне расподеле у односу на случајну промењљиву. Условно математичко очекивање и варијанса. Увод у предикцију. Примене. Оцењивање параметара. Оцене параметара: математичког очекивања, варијансе, вероватноће. Примене централне граничне теореме. Интервали поверења. Тестирање параметарских хипотеза. Хипотезе о вредности параметра. Хипотезе о разлици параметара. t-тест. Тест једнакости варијанси. Непараметарско тестирање. Хи-квадрат тест са применама. Тест

Колмогорова и Смирнова. Тестирање независности. Линеарна регресија. Регресиона права. Општа линеарна регресија. Тестирање хипотеза о регресионој кривој. Монте Карло методи. Генерисање псеудослучајних бројева. Генерисање случајних промењљивих са датим расподелама.

По завршетку курса од студента се очекује да овлада вероватноћом у потпуности и да је примене у статистици. На Саобраћајном факултету вероватноћа се изучава у оквиру предмета Вероватноћа и статистика, курс садржи следеће наставне јединице:

Случајни догађаји, алгебра догађаја, дефиниције вероватноће. Условна вероватноћа. Формула тоталне вероватноће. Бајесова формула. Случајна промењлива: потпуне и непотпуне карактеристике. Дводимензионална случајна промењлива: потпуне и непотпуне карактеристике. Расподела функције случајне промењливе, функција изводница. Основне расподеле дискретног типа. Основне расподеле непрекидног типа. Закони великих бројева и Централна гранична теорема. Случајни процеси и Ланци Маркова. Узорак, популација, основне статистике и њихове расподеле. Тачкасте и интервалне оцене параметара. Тестирање хипотеза: параметарски и непараметарски тестови. Регресија и корелација.

По завршетку курса студент ће бити способан да решава једноставне проблеме засноване на вероватноћи, препозна основне расподеле и зна да барата са њима, уме да направи узорак, изврши израчунавање основних статистика на основу узорка, спроведе елементарну анализу узорка. Најбољи студенти ће по завршетку курса бити способни да решавају сложене проблеме засноване на вероватноћи, оперишу са свим обрађеним расподелама, спроведу детаљну анализу узорка, изводе правилне закључке из анализе. На Пољопривредном и Шумарском факултету вероватноћа се учи у оквиру предмета Математика (прва година, први семестар) и то само једним „малим“ делом. Предмет би требало да омогући студенту разумевање оновних елемената комбинаторике и вероватноће (почетни део вероватноће). На Мегатренду вероватноћа се учи у оквиру предмета Вероватноћа и то студенти уче:

Основни појмови. Експерименти и догађаји. Елементарни догађаји, простор догађаја, Операције као са скуповима. Дефиниција вероватноће. Особине вероватноће. Основне теореме. Условна вероватноћа. Независни догађаји. Формула тоталне вероватноће и Бајесова формула. Дискретне и непрекидне случајне промењљиве. Функција расподеле. Функција густине расподеле. Математичко очекивање и дисперзија. Моменти вишег реда. Неједнакост Чебишова. Униформна, експоненцијална, биномна, гама, бета, студентова, фишерова и норамална расподела. Муавр-Лапласова теорема.

Предмет треба студенту да омогући да у потпуности овлада основним појмовима и применама вероватноће. На Грађевинском факултету вероватноћа се учи у оквиру предмета Математика III (Елементи вероватноће). Наставне јединице су:

Основни појмови. Дефиниција вероватноће. Особине вероватноће. Функција расподеле. Функција густине расподеле. Математичко очекивање и дисперзија.

Од студента се очекује да савлада основне појмове који су везани за вероватноћу и да уме да их примени. На Економском факултету вероватноћа се помиње у предметима: Математика (прва година) и Теоријска статистика (трећа година). У оквиру предмета Математика студенти се сусрећу са основним појмовима везаним за вероватноћу:

Модели једнодимензионалних дискретних расподела. Униформна расподела. Бернулијева расподела. Биномна, негативна биномна и геометријска расподела. Хипергеометријска расподела. Пуасонова расподела. Модели једнодимензионалних непрекидних расподела. Униформна расподела. Нормална расподела. Хи-квадрат расподела. Студентова т-расподела. Ф-расподела. Дводимензионалне и вишедимензионалне случајне промењљиве. Функција расподела случајне промењљиве. Маргиналне расподеле. Условне расподеле. Функције случајних промењљивих. Математичко очекивање. Коефицијент корелације. Модели вишедимензионалних расподела. Мултиномна расподела. Нормална n-димензионална расподела. Граничне теореме. Закони великих бројева. Централна *гранична теорема. Узорак из нормалне расподеле. Расподела средине узорка. Расподеле неких статистика.*

Студент стечено знање из вероватноће примењује на даљи рад у оквиру овог предмета који обухвата статистика и то:

Уређене статистике. Дефиниција уређене статистике. Расподела уређених статистика. Заједничка расподела уређених статистика. Расподела ранга узорка. Границе толеранције. Теорија одлучивања. Функција одлуке. Функција губитка. Функција ризика. Минимаксимални принцип избора функција одлуке. Бајесов принцип избора функција одлуке. Бројевно оцењивање. Предмет бројевног оцењивања. Непристрасна оцена. Најбоља непристрасна оцена. Довољна оцена. Конзистентан низ оцена. Метода највеће веродостојности. Метод момената. Бајесов метод бројевног оцењивања. Интервално оцењивање. Интервал поверења. Интервал поверења за средину нормалне расподеле (са познатом или непознатом варијансом). Интервал поверења за параметар п код биномне расподеле. Интервал поверења за варијансу нормалне расподеле (са познатом или непознатом средином). Бајесов метод интервалног оцењивања. Дефиниција статистичке хипотезе. Тестирање статистичке хипотезе. Нојман - Пирсонова лема. Секвенцијални тест. Минимакс тест. Бајесов тест. Униформно најјачи тест неких сложених хипотеза. Тест базиран на количнику веродостојности. Тестови о средини нормалне расподеле. Тестови о варијанси нормалне расподеле. Непараметарски методи. Оцена и интервал поверења за медијану расподеле. Пирсонов хи-квадрат тест. Тест Колмогорова. Тест Колмогорова - Смирнова. Тест знакова. Тест медијане.

Задатак предмета Теоријска статистика је да се на основу регистрованих података (то јест реализованих догађаја) одреди вероватноћа, из класе допустивих вероватноћа, која ће најбоље описати појаву која се посматра или да се што је могуће више смањи класа допустивих вероватноћа. У даљем раду се уводе основни појмови математичке статистике*:*

модели једнодимензионалних и вишедимензионалних расподела, дефинише се статистички модел и емпиријска функција расподеле, излаже се теорија тачкастог и интервалног оцењивања, проучава тестирање статистичких хипотеза и наводе тестови за проверавање параметарских и непараметарских хипотеза који се најчешће користе у пракси.

3.2. Циљеви и методологија истраживања

Узорак су чинили 30 ученика првог разреда средње школе који имају петнаест година. Ученици су различитог социјалног и економског порекла. Сви су добили папир са питањима, једну коцкицу и један метални новчић. Ученици нису имали информације о циљу истраживања. Вршили су експерименте, а затим смо на бази целог одељења формирали добијени скуп исхода. Имали су тачно 45 минута да ураде експерименте и да дају одговоре на постављена питања. Истраживање је спроведено у току регуларног часа. Амбијент у коме је истраживање спроведено је била школска учионица и сваки од ученика је седео сам у клупи. Обрада прикупљених података је рађена у програмском језику "R". Истраживање се састојало од три експеримента од тога два експеримента се односе рачунање вероватноће и један на независност. Такође, ученици су током експеримента формирали скуп исхода, једнодимензионални и дводимензионални низ.

Задаци који су били на тесту су следећи:

1. **задатак:**

Бацити новчић три пута и написати добијене резултате (П-писмо или Г-глава). Затим формирати низ на бази целог одељења.

Одговорити на питање:

Да ли је већа шанса добити:

а) ПГП

б) ППП

в) иста је шанса

2. задатак:

Бацити коцкицу четири пута и написати добијени резултат. Затим формирати низ на бази целог одељења.
Одговорити на питање:
Да ли је већа шанса добити низ:

а) 1234
б) 6666
в) иста је шанса

3. задатак:

Бацити коцкицу и новчић по два пута и то на следећи начин: прво баците једанпут новчић, а затим коцкицу и записите добијени резултат. Поновите поступак још једанпут. Затим формирати низ на бази целог одељења.
Одговорити на питање:
Да ли су добијене вредности зависне или независне (да ли добијени број на коцкици зависи од тога шта је пало при бацању новчића)?

3.3. Теорија

Навешћемо укратко теорију коју смо користити приликом обраде података, конкретно коришћен је хи-квадрат тест независности два обележја. Тестови су коришћени у оквиру стандардног пакета програмског језика “R”, није било потребе за накнадним програмирањем.

Хи-квадрат тест независности два обележја

Нека је F_X функција расподеле обележја X, а F_Y функција расподеле обележја Y и нека је $F_{X,Y}$ заједничка функција расподеле дводимензионе случајне промењливе (X,Y). Претпостави се да је за дати праг значајности α, на основу дводимензионалног узорка обима n, потребно тестирати хипотезу

$$H_0 : F_{X,Y} = F_X F_Y$$

против алтернативне хипотезе

$$H_1 : F_{X,Y} \neq F_X F_Y .$$

Нека су подаци из тог дводимензионалног узорка обима n поређани у r категорија по вредностима обележја X, а у s категорија по вредностима обележја Y. Ти подаци се онда дају у табели контингенције (табели повезаности).

Табела повезаности

X/Y	y_1	y_2	...	y_s	Збир
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}	$n(x_1)$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}	$n(x_2)$
...	...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}	$n(x_r)$
Збир	$n(y_1)$	$n(y_2)$	...	$n(y_s)$	n

Број n_{ij} озчава да се пар (x_i, y_j) појавио n_{ij} пута у узорку. Збир $n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ је једнак обиму узорка. Нека су маргинални збирови по врстама (тј. по вредностима обележја X) $n(x_1)$, $n(x_2)$, ..., $n(x_r)$, а по колонама $n(y_1)$, $n(y_2)$, ..., $n(y_s)$.

Ако је хипотеза H_0 тачна онда је

$$\overline{u}_n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n\cdot n_{ij} - n(x_i)\cdot n(y_j))^2}{n\cdot n(x_i)\cdot n(y_j)}$$

реализована вредност случајне промењиве $\overline{U}_n$ која има $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ расподелу.

Из таблица се чита вредност константе c_α, из услова

$$P\{\overline{u}_n \geq c_\alpha\} = \alpha\ ,$$

и уједно одређује критична област

$$W = [c_\alpha, +\infty)\ .$$

3.4. Обрада података

Прикупили смо податке од свих ученика и формирали базу која садржи пол ученика, резултате експеримента и одговоре на постављена питања, и коју у даљем тексту обрађујемо.

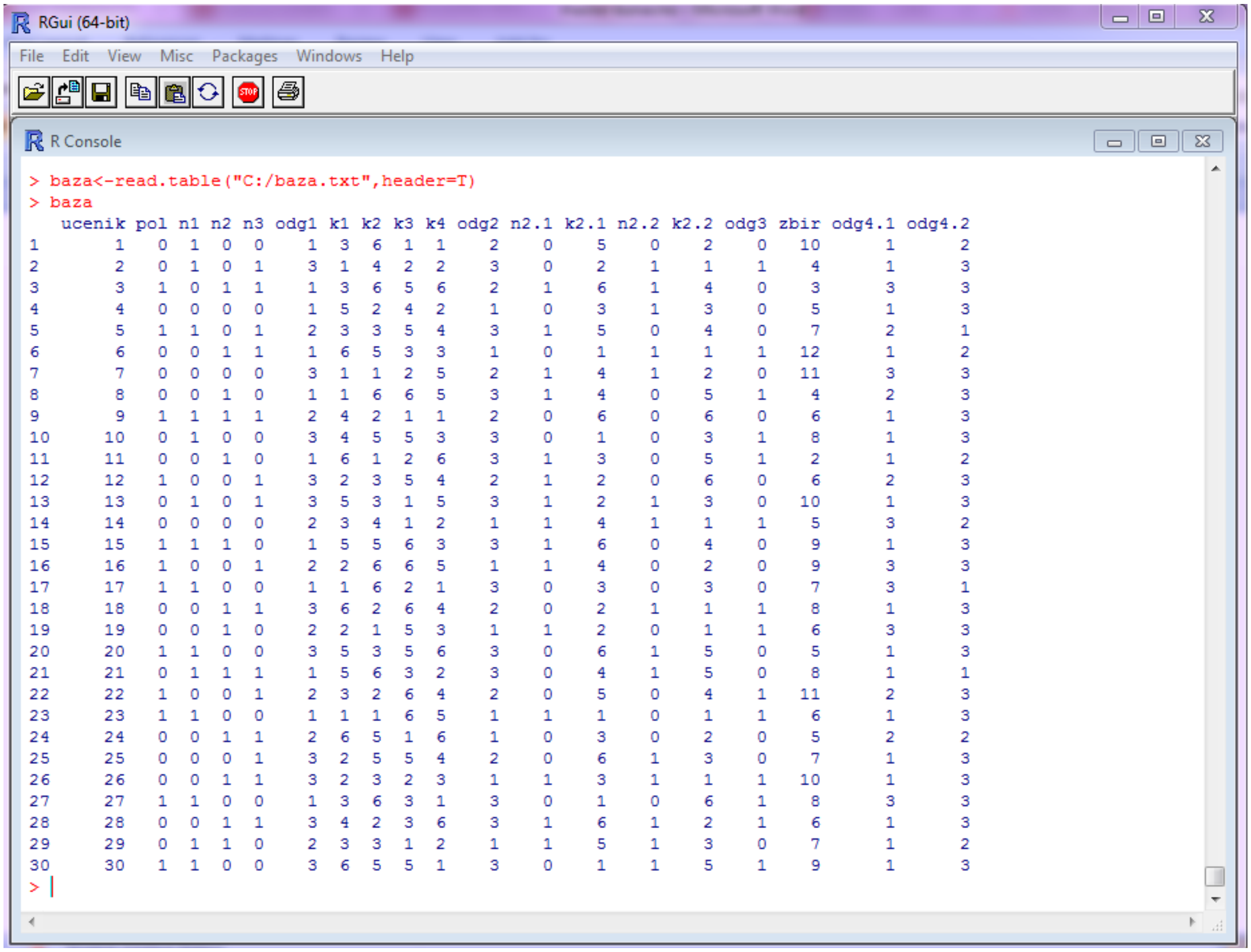
Учитавање базе:

База се учитава укуцавањем следеће функције у програму “R”:

baza<-read.table("C:/baza.txt",header=T)

baza

Учитавање базе у програмском језику "R"



```
> baza<-read.table("C:/baza.txt",header=T)
> baza
   ucenik pol n1 n2 n3 odg1 k1 k2 k3 k4 odg2 n2.1 k2.1 n2.2 k2.2 odg3 zbir odg4.1 odg4.2
1       1   0  1  0  0    1  3  6  1  1    2    0    5    0    2    0   10      1      2
2       2   0  1  0  1    3  1  4  2  2    3    0    2    1    1    1    4      1      3
3       3   1  0  1  1    1  3  6  5  6    2    1    6    1    4    0    3      3      3
4       4   0  0  0  0    1  5  2  4  2    1    0    3    1    3    0    5      1      3
5       5   1  1  0  1    2  3  3  5  4    3    1    5    0    4    0    7      2      1
6       6   0  0  1  1    1  6  5  3  3    1    0    1    1    1    1   12      1      2
7       7   0  0  0  0    3  1  1  2  5    2    1    4    1    2    0   11      3      3
8       8   0  0  1  0    1  1  6  6  5    3    1    4    0    5    1    4      2      3
9       9   1  1  1  1    2  4  2  1  1    2    0    6    0    6    0    6      1      3
10     10   0  1  0  0    3  4  5  5  3    3    0    1    0    3    1    8      1      3
11     11   0  0  1  0    1  6  1  2  6    3    1    3    0    5    1    2      1      2
12     12   1  0  0  1    3  2  3  5  4    2    1    2    0    6    0    6      2      3
13     13   0  1  0  1    3  5  3  1  5    3    1    2    1    3    0   10      1      3
14     14   0  0  0  0    2  3  4  1  2    1    1    4    1    1    1    5      3      2
15     15   1  1  1  0    1  5  5  6  3    3    1    6    0    4    0    9      1      3
16     16   1  0  0  1    2  2  6  6  5    1    1    4    0    2    0    9      3      3
17     17   1  1  0  0    1  1  6  2  1    3    0    3    0    3    0    7      3      1
18     18   0  0  1  1    3  6  2  6  4    2    0    2    1    1    1    8      1      3
19     19   0  0  1  0    2  2  1  5  3    1    1    2    0    1    1    6      3      3
20     20   1  1  0  0    3  5  3  5  6    3    0    6    1    5    0    5      1      3
21     21   0  1  1  1    1  5  6  3  2    3    0    4    1    5    0    8      1      1
22     22   1  0  0  1    2  3  2  6  4    2    0    5    0    4    1   11      2      3
23     23   1  1  0  0    1  1  1  6  5    1    1    1    0    1    1    6      1      3
24     24   0  0  1  1    2  6  5  1  6    1    0    3    0    2    0    5      2      2
25     25   0  0  0  1    3  2  5  5  4    2    0    6    1    3    0    7      1      3
26     26   0  0  1  1    3  2  3  2  3    1    1    3    1    1    1   10      1      3
27     27   1  1  0  0    1  3  6  3  1    3    0    1    0    6    1    8      3      3
28     28   0  0  1  1    3  4  2  3  6    3    1    6    1    2    1    6      1      3
29     29   0  1  1  0    2  3  3  1  2    1    1    5    1    3    0    7      1      2
30     30   1  1  0  0    3  6  5  5  1    3    0    1    1    5    1    9      1      3
> 
```

Обележје пол факторисаћемо на следећи начин: вредност 0 је за женски пол, а 1 за мушки. Функције за факторисање изгледа:

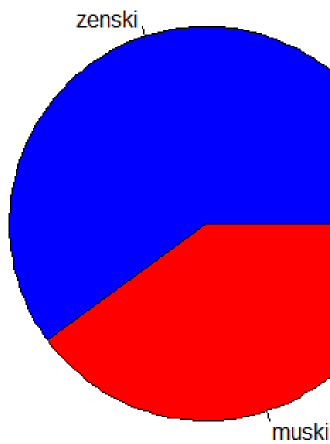
fpol<-factor(baza$pol, levels=0:1)

levels(fpol)<-c("zenski", "muski")

Након што смо факторисали обележје, можемо га притиказати графичком методом питом, помоћу следеће функције.

pie(summary(fpol),col=c("blue","red"))

Графички приказ пита односа броја девојчица и дечака



Функцијом ***summary()*** видећемо тачан број девојчица, односно дечака.

summary(fpol)

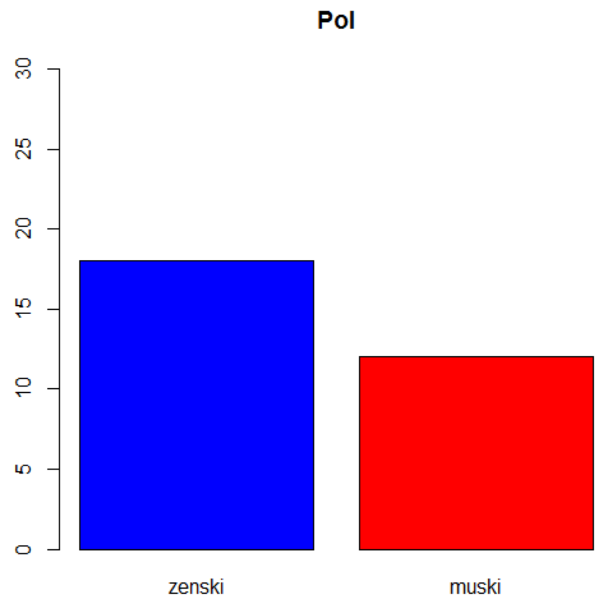
<u>Излаз:</u>

zenski	muski
18	12

Један од графичких приказа је и барплот и за обележје пол изгледа овако:

barplot(summary(fpol),5,ylim=c(0,30),col=c("blue","red"),main='Pol')

Графички приказ барплот односа броја девојчица и дечака



1. <u>Први задатак је бацање новчића три пута и формирање скупа исхода.</u>

Овим задатком проверићемо како ученици схватају скуп исхода и како разумеју појам вероватноће. Из базе учитамо прво, друго и треће бацање новчића и спојимо у један низ. Затим декодирамо податке, то јест вредност 0 је добијена глава на новчићу, а 1 је добијено писмо.

То све постижемо следећим функцијама:

niz<-c(baza$n1,baza$n2,baza$n3)

fniz<-factor(niz, levels=0:1)

levels(fniz)<-c("G","P")

Скуп исхода је:

P P G G P G G G P P G G P G P G P G G P P G P G G G P G P P G G P G G P G P

P G P G G G P G G P P G P G G P G P G P P G G P P G P P G G P G G P P G G P

G P G G P P G P P P G P G G

Факторисаћемо обележје низ и функцијом **summary()** добићемо тачан број добијених глава, односно писама.

fniz<-factor(niz,levels=0:1)

levels(fniz)<-c("glava","pismo")

summary(fniz)

Излаз:

glava	pismo
48	42

Од 90 бацања новчића добијено је 48 пута глава и 42 пута писмо, видимо да је приближно исти број глава и писама.

Прво питање је да ли је већа шанса добити:

1) писмо-главу-писмо,
2) писмо-писмо-писмо,
3) исте су шансе

Ученички одговори су:

fodgovor1<-factor(baza$odg1,levels=1:3)

levels(fodgovor1)<-c("veca je sansa dobiti PGP","veca je sansa dobiti PPP","iste su sanse")

summary(fodgovor1)

<u>*Излаз:*</u>

veca je sansa dobiti PGP	veca je sansa dobiti PPP	iste su sanse
11	8	11

Вероватноћа добијања низа писмо-глава-писмо је једнака вероватноћи добијања низа писмо-писмо-писмо:

$$P(PGP) = P(PPP) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Видимо да се приближно исти број ученика одлучило за сва три понуђена одговора, тако да на основу добијених резултата не можемо закључити да ли ученици разумеју појам вероватноће.

Представићемо и ученичке одговоре према полу помоћу следеће функције:

baza1<-data.frame(fpol,fodgovor1)

baza1<-na.omit(baza1)

a1<-table(baza1)

Излаз:

fodgovor1			
fpol	veca je sansa dobiti PGP	veca je sansa dobiti PPP	iste su sanse
zenski	6	4	8
muski	5	4	3

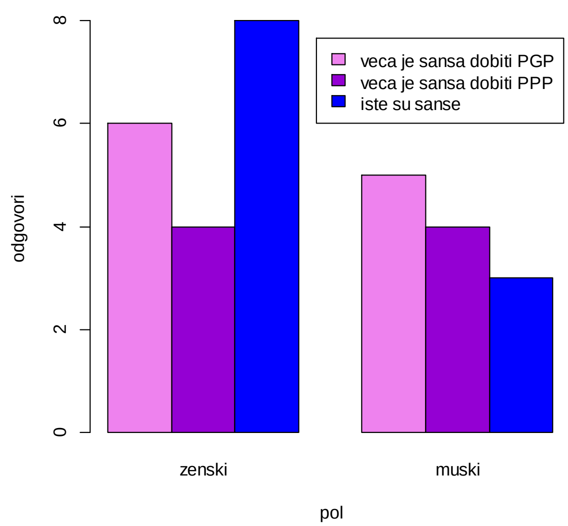
Из табеле видимо да је 44.44% девојчица односно 25% дечака, тачно одговорило на ово питање.

Графички приказ односа између пола и одговора изгледа:

barplot(t(a1),beside=T, col = (boje1 <-c("violet", "dark violet", "blue")),main=" ",xlab='pol', ylab='odgovori')

legend(locator(n=1),legend=colnames(a1),fill=boje1)

Графички приказ односа пола и одговора1



2. <u>Други задатак је бацање коцкице четири пута.</u>

Циљ овог задатка је исти као и код првог, с тим што је у овом задатку другачији скуп исхода. Број могућих исхода је 6 и сваки од ученика је 4 пута бацио коцкицу и записао резултат. Сва четири бацања ћемо спојити у један низ и тако формирати скуп исхода.

niz2<-c(baza$k1,baza$k2,baza$k3, baza$k3)

Скуп исхода је:

3 1 3 5 3 6 1 1 4 4 6 2 5 3 5 2 1 6 2 5 5 3 1 6 2 2 3 4 3 6 6 4 6 2 3 5 1

6 2 5 1 3 3 4 5 6 6 2 1 3 6 2 1 5 5 3 6 2 3 5 1 2 5 4 5 3 2 6 1 5 2 5 1 1

6 6 2 6 5 5 3 6 6 1 5 2 3 3 1 5 1 2 6 2 4 3 5 5 1 3 6 4 5 2 3 5 1 4 3 6 2

4 5 6 4 3 1 6 2 1

Обележје коцкица факторишемо на следећи начин:

kockice<-c(baza$k1,baza$k2,baza$k3, baza$k4)

fkockice<-factor(kockice, levels=1:6)

levels(fkockice)<-c("1","2","3","4","5","6")

Функција **summary(fkockice)** примењена на факторисано обележје даје нам тачан број добијених 1, односно 2, 3, 4, 5, и 6 у току четири бацања свих ученика.

summary(fkockice)

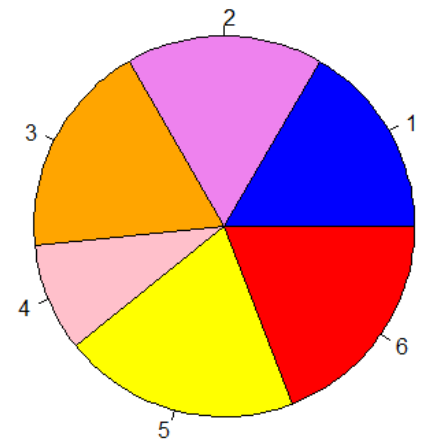
<u>*Излаз:*</u>

1	2	3	4	5	6
20	20	22	11	24	23

И можемо графички представити однос добијених 1, односно 2, ..., 6:

pie(summary(fkockice),col=c("blue", "violet","orange","pink","yellow","red"))

Графички приказ добијених бројева бацањем коцкице



Питање код овог задатка је да ли је већа шанса добити низ:

1) 1 - 2 - 3 - 4
2) 6 - 6 - 6 - 6
3) Исте су шансе

Учитаћемо ученичке одговоре:

fodgovor2<-factor(baza$odg2,levels=1:3)

levels(fodgovor2)<-c("veca je sansa dobiti 1234","veca je sansa dobiti 6666","iste su sanse")

summary(fodgovor2)

Излаз:

veca je sansa dobiti 1234	veca je sansa dobiti 6666	iste su sanse
9	8	13

Код овог питања видимо да су се ученици мало боље "снашли", него код претходног иако су задаци суштински исти.

Вероватноћа добијања низа 1-2-3-4 је једнака вероватноћи добијања низа 6-6-6-6 и износи:

$$P(1-2-3-4) = \mathrm{P}(6-6-6-6) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

Представићемо и одговоре према полу.

```
baza2<-data.frame(fpol,fodgovor2)
baza2<-na.omit(baza2)
a2<-table(baza2)
```

Излаз:

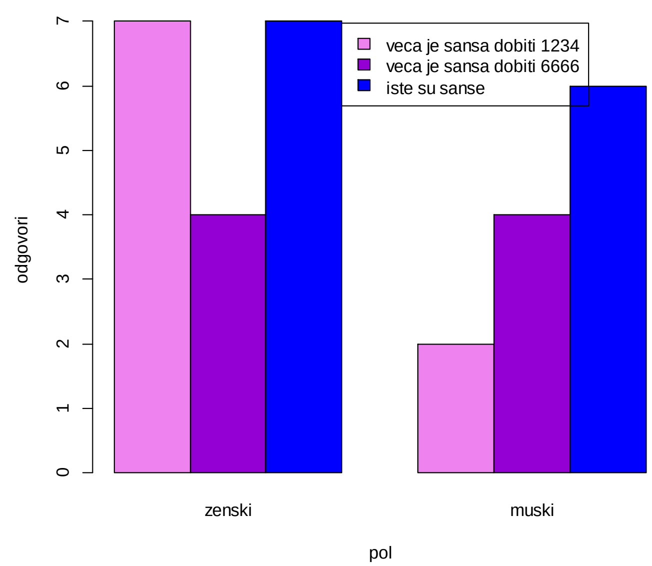
	fodgovor2		
fpol	veca je sansa dobiti 1234	veca je sansa dobiti 6666	iste su sanse
zenski	7	4	7
muski	2	4	6

Код овог питања видимо да је 38.89% девојчица тачно одговорило и 50% дечака. Представићемо и графички однос између пола и одговора:

barplot(t(a2),beside=T, col = (boje1 <-c("violet", "dark violet", "blue")),main=" ",xlab='pol', ylab='odgovori')

legend(locator(n=1),legend=colnames(a2),fill=boje1)

Графички приказ односа пола ученика и одговора2



3. Трећи задатак је наизменично бацање новчића и коцкице два пута.

Циљ овог задатка је да ученици схвате појам дводимензионалних расподела и да одреде да ли су две случајне променљиве зависне. Њихов задатак је да баце новчић и коцкицу наизменично два пута и да упишу добијени резултат. Формираћемо скуп исхода бацања новчића и коцкице. А затим добијене резултате упоредићемо са ученичким одговорима.

Исход добијен бацањем новчића два пута је:

novcic2<-c(baza$n2.1,baza$n2.2)

fnovcic2<-factor(novcic2, levels=0:1)

levels(fnovcic2)<-c("G","P")

Излаз:

G G P G P G P P G G P P P P P P G G P G G G P G G P G P P G

G P P P G P P GG G G G P P G G G P G P P G G G P P G P P P

Тачан број добијених глава и писама је:

levels(fnovcic2)<-c("glava","pismo")

summary(fnovcic2)

Излаз:

glava	pismo
30	30

Исход добијен бацањем коцкице два пута је:

kockica2<-c(baza$k2.1,baza$k2.2)

fkockice2<-factor(kockica2, levels=1:6)

levels(fkockice2)<-c("1","2","3","4","5","6")

Излаз:

5 2 6 3 5 1 4 4 6 1 3 2 2 4 6 4 3 2 2 6 4 5 1 3 6 3 1 6 5 1

2 1 4 3 4 1 2 5 6 3 5 6 3 1 4 2 3 1 1 5 5 4 1 2 3 1 6 2 3 5

Функцијом **summary(fkockice2)** добићемо тачан број добијених 1, 2, ..., 6.

Излаз:

1	2	3	4	5	6
12	10	11	9	9	9

Следећа табела даје нам вектор две величине, једна је исход новчића а друга је исход коцкице.

kombinovanje<-table(fnovcic2,fkockice2)

Излаз:

	fkockice2					
fnovcic2	1	2	3	4	5	6
G	6	5	5	4	4	6
P	6	5	6	5	5	3

Хи-квадрат тестом ћемо испитати зависност ове две величине:

chisq.test(kombinovanje)

Излаз:

```
Pearson's Chi-squared test
data:  kombinovanje
X-squared = 1.3131, df = 5, p-value = 0.9336
```

Како смо добили да је *p-value = 0.9336* > 0.05 не одбацујемо хипотезу да су ова два обележја независна.

Питали смо ученике да ли су ове две величине зависне. Сада ћемо учитати њихове одговоре из базе и упоредити са добијеним резултатима.

fodgovor3<-factor(baza$odg3,levels=0:1)

levels(fodgovor3)<-c("velicine su nezavisne","velicine su zavisne")

summary(fodgovor3)

Излаз:

velicine su nezavisne	velicine su zavisne
16	14

Из добијених резулта видимо да је више од 50% ученика тачно одговорило на питање. Следећом табелом видећемо одговоре према полу.

baza3<-data.frame(fpol,fodgovor3)

baza3<-na.omit(baza3)

a3<-table(baza3)

Излаз:

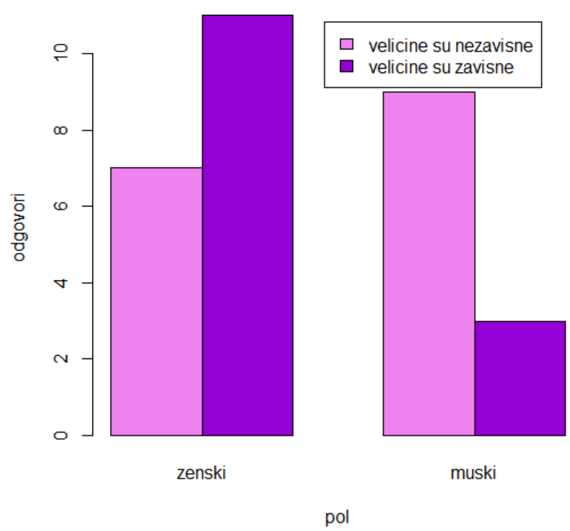
	fodgovor3	
fpol	velicine su nezavisne	velicine su zavisne
zenski	8	10
muski	8	4

Код овог питања видимо да је више од 50 % девојчица дало погрешан одговор док то није случај код дечака. Добијен однос представићемо графички.

barplot(t(a3),beside=T, col = (boje1 <-c("violet", "dark violet")),main="",xlab='pol', ylab='odgovori')

legend(locator(n=1),legend=colnames(a3),fill=boje1)

Графички приказ ученичких одговора3 према полу



Након овог тестирања, спроведен је један интерактивни час, где су ученицима објашњени основни појмови вероватноће и статистике, а затим је спроведен још један експеримент, а затим су резултати упоређени.

3.5. Интерактивни час

Као што се у геометрији не дефинише појам тачке, праве и равни, тако се и у теорији вероватноће не дефинише појам елементаран догађај или елементаран исход. Скуп свих елементарних исхода неког експеримента је простор елементарних исхода и обележићемо га са Ω, а његове елементе са ω.

На пример, ако је експеримент бацање новчића тада имамо два могућа исхода, писмо или глава, па је простор елементарних исхода $\Omega = \{П, Г\}$. Ако је експеримент бацање коцкице тада је простор елементарних исхода $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а ако двапута бацамо коцкицу и бележимо збир добијених бројева имамо 11 могућих исхода, то јест бројеве од 2 до 12, па би простор елементарних исхода био $\Omega_1 = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.

<u>Дефиниција1.</u>

Ако је A *подскуп скупа* Ω*, тада је* A *случајни догађај.*

Ако је A случајни догађај и ако је резултат експеримента један од елементарних догађаја који припада скупу A тада кажемо да се догађај A остварио. Скуп Ω је сигуран догађај, а празан скуп $\emptyset$ је немогућ догађај.

Нека скуп Ω има n елементарних догађаја, а скуп A нека садржи k елементарних догађаја, тада је вероватноћа догађаја A једнака:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

То јест, вероватноћа догађаја A је једнака количнику броја повољних исхода за догађај A и броја свих могућих исхода.

Основне особине су:

1. За сваки догађај $A \in \Omega$ важи $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$,
2. За сигуран догађај Ω важи $P(\Omega) = 1$,
3. За немогућ догађај $\emptyset$ важи $P(\emptyset) = 0$.

На пример, ако је експеримент бацање новчића тада је вероватноћа да ће пасти писмо једнака $P(\Pi) = \frac{1}{2}$, јер имамо два могућа исхода.

Ако је експеримент бацање коцкице два пута тада је простор елементарних исхода

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6), \end{array} \right\}$$

Тада је вероватноћа добијања пара $(3,3)$ једнака $P((3,3)) = \frac{1}{36}$, док је вероватноћа добијања једне 3 и једне 4 једнака $P((3,4),(4,3)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Условна вероватноћа и независност догађаја

<u>Питање:</u>

Ако извлачимо карту из шпила од 52 карте, и знамо да је извучена карта “пик”, колика је вероватноћа да је та карта “дама”"?

<u>Објашњење:</u>

Вероватноћа да је извучена карта “пик” је $\frac{13}{52}$, а у том новом скупу једна карта је повољна, “дама” и вероватноћа је $\frac{1}{13}$.

Ако посматрамо два случајна догађаја A и B и ако је познато да се један од њих остварио, на пример догађај B, задатак нам је да одредимо вероватноћу да се остварио и догађај A.

Дефиниција2.

Нека су А *и* B *догађаји из истог простора елементарних исхода* Ω *и нека је* $P(B) > 0$, *тада је условна вероватноћа догађаја* А, *ако се десио догађај* B *једнака:*

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Па је решење претходног проблема:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

Догађај AB означава да се остварио и догађај А и догађај B. У нашем случају то је карта "дама пик" и њена вероватноћа је једнака $\frac{1}{52}$. Док догађај B представља да је извучена карта "пик".

Дефиниција3.

Нека су А *и* B *догађаји из истог простора елементарних исхода* Ω. *Ако важи* $P(AB)$= $P(A)P(B)$ *тада су догађаји* А *и* B *независни.*

Пример независности је задатак 3, бацање новчића и коцкице. Скуп исхода је

$$\Omega = \{П1, П2, П3, П4, П5, П6, Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6\}$$

Ако је задатак одредити независност догађаја да је на новчићу добијено писмо а на коцкици шестица, тада задатак решавамо на следећи начин:

Догађај А је добијање писма и вероватноћа је $P\{П\} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Догађај је В добијање шестице и вероватноћа је $P\{6\} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Догађај је АВ добијање и шестице и писма и вероватноћа је

$$P\{П6\} = \frac{1}{12}$$

$$P\{П\} * P\{6\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P\{П6\} = P\{П\} * P\{6\}$$

По дефиницији смо показали да су ова два догађаја независна.

3.6. Резултати и дискусија

Након интерактивног часа, ученицима је постављен још један задатак: бацање коцкице два пута. Скуп исхода је збир добијен приликом та два бацања коцкице.

Збир добијен бацањем коцкице два пута је:

```
kockica4<-c(baza$zbir)
fkockice4<-factor(kockica4, levels=2:12)
levels(fkockice4)<-c("2","3","4","5","6","7","8","9","10","11","12")
```

Излаз:

```
10 4  3  5  7  12 11 4  6  8  2  6  10 5  9  9  7  8  6  5  8  11 6  5  7  10 8  6  7  9
```

Функцијом **summary(fkockice4)** добићемо тачан број добијених 2, 3, ... , 12.

Излаз:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	4	5	4	4	3	3	2	1

Прво питање код овог задатка гласи:

1. Да је већа вероватноћа добити збир:

1) 7
2) 12
3) Вероватноћа је иста

А одговори су:

```
fodgovor4.1<-factor(baza$odg4.1,levels=1:3)
levels(fodgovor4.1)<-c("zbir 7","zbir 12","verovatnoca je ista")
summary(fodgovor4.1)
```

Излаз:

zbir 7	zbir 12	verovatnoca je ista
18	5	7

Вероватноћа добијања збира 7 једнака је:

$$P(16,25,34,43,52,61) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

А вероватноћа добијања збира 12 једнака је:

$$P(66) = \frac{1}{36}$$

И видимо да је 60% ученика тачно одговорило. Проценат тачних одговора је већи након часа. Представићемо одговоре према полу ученика.

baza4<-data.frame(fpol,fodgovor4.1)

baza4<-na.omit(baza4)

a4<-table(baza4)

Излаз:

	fodgovor4.1		
fpol	zbir 7	zbir 12	verovatnoca je ista
zenski	13	2	3
muski	5	3	4

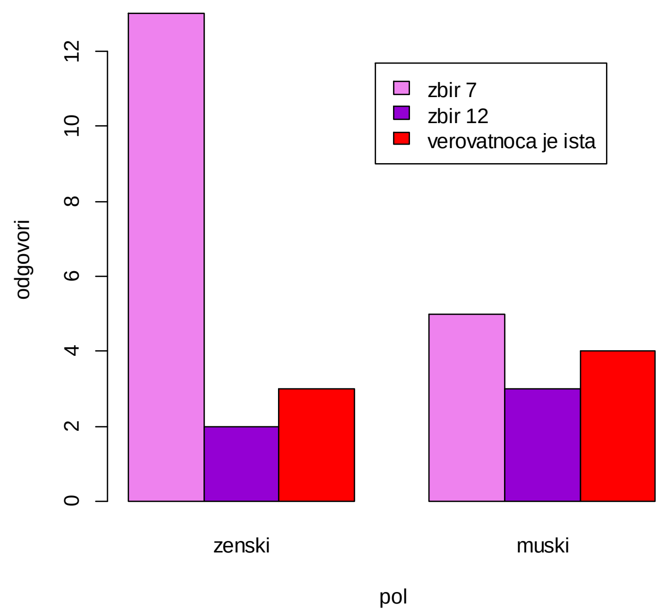
Видимо да је 72.22% девојчица тачно одговорило и 41.67% дечака.

Одговоре ћемо представити графички користећи функције:

barplot(t(a4),beside=T, col = (boje1 <-c("violet", "dark violet","red")),main=" ",xlab='pol', ylab='odgovori')

legend(locator(n=1),legend=colnames(a4),fill=boje1)

Графички приказ одговора 4.1



И друго питање код овог задатка је:

Да је већа вероватноћа добити збир:

1) 6
2) 8
3) Вероватноћа је иста

А одговори су:

```
fodgovor4.2<-factor(baza$odg4.2,levels=1:3)
levels(fodgovor4.2)<-c("zbir 6","zbir 8","verovatnoca je ista")
summary(fodgovor4.2)
```

Излаз:

zbir 6	zbir 8	verovatnoca je ista
3	6	21

Вероватноћа добијања збира 6 једнака је:

$$P(15,24,33,42,51) = \frac{5}{36}$$

А вероватноћа добијања збира 8 једнака је:

$$P(26,35,44,53,62) = \frac{5}{36}$$

Дакле вероватноће су једнаке и видимо да је 70% ученика тачно одговорило. Представићемо одговоре према полу ученика.

baza4.2<-data.frame(fpol,fodgovor4.2)

baza4.2<-na.omit(baza4.2)

a4.2<-table(baza4.2)

Излаз:

	fodgovor4.3		
fpol	zbir 6	zbir 8	verovatnoca je ista
zenski	1	6	11
muski	2	0	10

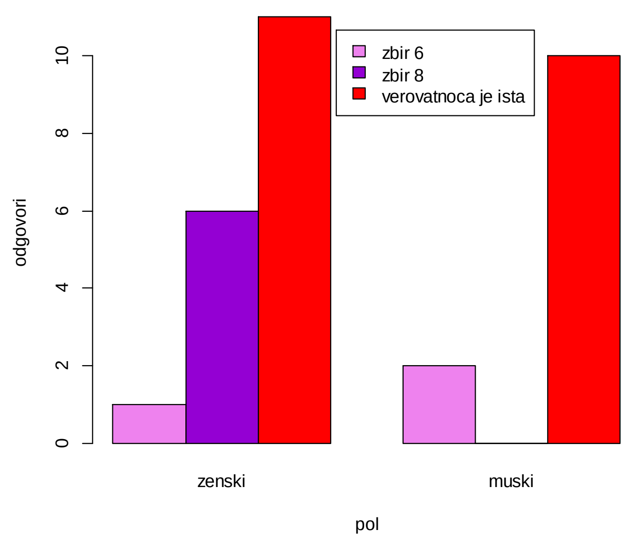
Из табеле можемо видети да је 83.33% дечака дало тачан одговор, док је код девојчица тај проценат мањи, тачније 61.11%.

Графички ћемо представити одговоре према полу ученика.

barplot(t(a4.2),beside=T, col = (boje1 <-c("violet", "dark violet","red")),main=" ",xlab='pol', ylab='odgovori')

legend(locator(n=1),legend=colnames(a4.2),fill=boje1)

Графички приказ одговора 4.2



На крају ћемо формирати базу коју чине пол ученика и њихови одговори на ова три задатка.

ba<-data.frame(fpol,fodgovor1 ,fodgovor2, fodgovor3,fodgovor4.1,fodgovor4.2)

summary(ba)

<u>*Излаз:*</u>

fpol	fodgovor1	fodgovor2	fodgovor3
zenski:18	veca je sansa dobiti PGP:11	veca je sansa dobiti 1234: 9	velicine su nezavisne:16
muski :12	veca je sansa dobiti PPP: 8	veca je sansa dobiti 6666: 8	velicine su zavisne :14
	iste su sanse :11	iste su sanse :13	

fodgovor4.1	fodgovor4.2
zbir 7 :18	zbir 7 : 3
zbir 12 : 5	zbir 12 : 6
verovatnoca je ista: 7	verovatnoca je ista: 21

Закључак нашег истраживања је да одговори ученика не зависе од пола јер је број тачних одговора код девојчица приближно исти као и код дечака. Можемо из последњег табличког приказа видети да је више ученика тачно одговорило на други задатак, да су вероватноће добијања низа 1-2-3-4 и низа 6-6-6-6 једнаке, док је код првог питања тај број мањи. Код трећег задатка, схватања независности, већи је број тачних одговора али видели смо да је код тог питања мање од 50% девојчица дало тачан одговор. Очекивали смо боље резултате, да ће већи број ученика тачно одговорити. Разлог може бити узраст и то да нису имали предзнање о случајном догађају и независноти две случајне величине. Такође требало би узети у обзир да је број ученика у одељењу недовољан, тако да нећемо генерализовати добијене резултате.

Навешћемо и закључак који је донео Конолд у свом истраживању "*Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics*". Наиме, он сматра да постоје три главна разлога за процену разумевања вероватноће:

1) Ученици почињу са наставом вероватноће са, у суштини, нетачном интуицијом.

2) Показало се да се такве интуиције тешко мењају.
3) Мењање таквих интуиција компликује чињеница да ученици често имају више контрадикторних уверења о одређеној ситуацији.

Пре почетка наставе вероватноће и статистике ученици имају мишљење које је у супротности са конвенционалним начином размишљања. Конолд је спровео једноставно истраживање које је назвао "*Weather problem*": Метеоролошки центар Спрингфилд је желео да утврди тачност временске прогнозе. Они су претражили своје евиденције за дане када је прогнозер пријавио да су шансе за кишу 70%. Упоредили су ове прогнозе са стварним временом.

Прогноза да ће падати киша са вероватноћом од 70% је прецизна, ако је падала киша:

а) 95% - 100% од укупно дана,

б) 85% - 94% од укупно дана,

в) 75% - 84% од укупно дана,

г) 65% - 74% од укупно дана,

д) 55% - 64% од укупно дана.

Овај задатак је постављен пре почетка курса вероватноће и статистике. На слици је представљена фреквенција одговора 119 ученика.

Графички приказ ученичких одговора пре наставе

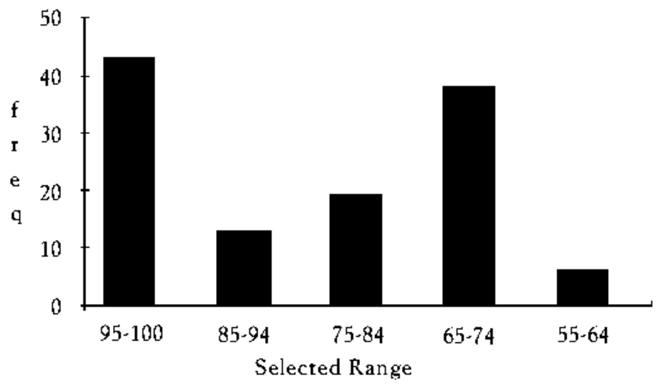


Figure 2

Извор: Konold, C., Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics, *Journal of Statistics Education*, 1995

Око 32% ученика је изабрало одговарајући опсег 65% - 74%, који обухвата нормативну вредност од 70%. Модални одговор (36%) је опција, највиши домет. Постоје различити подаци који сугеришу да су погрешне интуиције присутне и након наставе. У многим истраживањима међу ученицима закључено је да има мало или нимало разлика између одговора ученика пре и после наставе. Дизајниран је и тестиран наставни план и програм који се фокусира на концептуални развој и постигнути су мали до умерени напредак. На пример, на следећој слици представљен је проценат одговора поменутих 119 ученика пре и после наставе. Проценат повећања тачних одговора након наставе је само 6%.

Графички приказ ученичких одговора пре наставе и после наставе

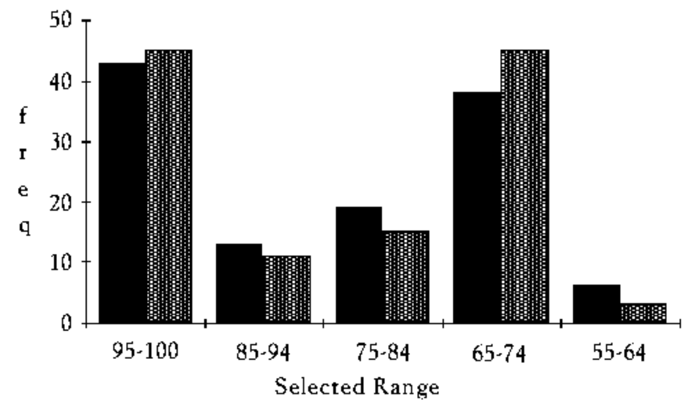


Figure 5

Извор: Konold, C., Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics, *Journal of Statistics Education*, 1995

Конолд истиче да је тешко мењати ученичку концепцију, али да то свакако не значи да не треба начинити покушај да се уведе курс вероватноће и статистике. Он наглашава да би требало више радити на утврђивању ефекта курса.

У истраживњу "*Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?*", које су спровели Фишхбеин и Газит, је учествовало 285 ученика који су чинили експерименталну групу и 305 ученика који су чинили контролну групу. Експериментална група је добила инструкције из вероватноће. Упитник, који је спроведен на експерименталној групи, садржи ставке које укључују могуће, немогуће и одређене догађаје. Резултати овог истраживања су показали да су готово сви ученици из експерименталне групе били у могућности да дају исправне примере за могуће и немогуће догађаје и више од 90% ученика је било у стању да то ураде и за одређене догађаје. Проценат тачних одговора био је много већи него у другим истраживањима. Ученици из контролне групе су показали слабије знање, нарочито у погледу ставке одређених догађаја. Као и већина истраживања и ово указује на значај ефикасног наставног програма у превазилажењу тешкоћа при разумевању вероватноће.

4. Закључак

Упоређивањем резулта добијених истраживањим у свету и овог нашег истраживања можемо закључити да нема великих разлика. Интуиција ученика је процентуално подједнако развијена, видимо да се она не повећава са годинама већ се напредак може видети након изучавања предмета вероватноће и статистике. Дакле, нема разлике у половима, код неких проблема интуиција је више изражена код дечака, а код неких проблема код девојчица.

Такође, уочавамо напредак у разумевању основних појмова вероватноће након интерактивног часа. Ученици су савладали појам *скуп елементарних исхода*, као и класичну дефиницију вероватноће. Више од 60% ученика је знало да препозна повољне исходе и да израчуна дату вероватноћу, што представља значајан напредак у односу на резултате добијене пре интерактивног часа. Иако је наш узорак био недовољно велики да би се сматрао репрезентативним, добијени резултати указују на потребу израде квалитетног наставног плана и програма који би допринео разјашњењу интуитивних заблуда у вези са вероватноћом и статистиком, као што истиче и Конолд.

Сва ова истраживања и добијене резултате, требало би искористити у циљу побољшања наставе математике. Ученицима је било посебно занимљиво то што су сами вршили експерименте, тако да би требало што је више могуће давати им задатке које ће сами извршавати. Тиме се постиже разумевање проблема, а самим тим и већа заинтересованост за њихово решавање. Тако усвојено знање је трајније од сувопарног учења напамет. Такође, константним повезивањем новог градива са претходним даће ученицима јасну слику о важности редовног учења. Разумевање савладаног градива би требало применити на практичним примерима из свакодневног живота. И обрнуто, када је ученицима јасна могућност примене одређеног наставног садржаја имаће већу мотивацију да тај наставни садржај савладају.

Овакав начин учења развија код ученика критичко размишљање, креативност, тежњу ка решавању и других проблема. Тиме нам математика као наука поможе формирању личности, а као уметност даје нам интелектуално задовољство.

Литература

- Batanero, C., Serrano, L., *The meaning of randomness for secondary school studenst*, Journal for research in Mathematics Education, 1999
- Батанеро, Ц., Серано, Л., и Грин , *Случајности, значења и њене образовне импликације,* Интернационални журнал математичког образовања, науке и технологије, 1998
- Вилотијевић, Н., *Наставник између "треба и јесте*", Образовна технологија, Учитељски факултет, Београд, 2002
- Грин, *Ученичко разумевање случајности*, Истраживање у математици - Настава статистике, Париз: УНЕСКО, 1989
- Konold, C., *Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics*, Journal of Statistics Education, 1995
- Конолд, Ц., *Разумевање уверења ученика о вероватноћи,* Радикални конструктивизам у математичком образовању, Холандија: Клувер, 1991
- Кука, М., *Методологија педагошких истраживања*, Ауторскоиздање, Београд, 2005
- Пијаже, Ј., Инхелдер, Б., *Порекло идеје среће код детета*, Универзитет у Француској, Париз, 1951
- Тохеи, П. Г., *Перцепција адолесцената о концепту случајности,* Универзитет у Аделаиди, Аустралија, 1995
- Фалк, Р., Коналд, Ц., *Развој осећаја за случајност,* Психолошки резиме, 1997
- Фишбеин, Е., Газит, А., *Да ли настава вероватноће побољшава интуицију?,* Едукативна истраживања у математици, 1984
- Fischbein, E., Schnarch, D., *The evolution with age of probabilitic, Intuitively Based Misconceptions*, Journal for research in Mathematics Education, 1997
- Фин, Т., *Теорија вероватноће – испитивање фундаментарности*, Академска штампа, Лондон, 1973
- Фон Мизес, Р., *Вероватноћа, статистика и истина*, Њујорк, (Оригинални рад је објављен 1928), 1939