Miloš Radojćić

OPŠTA MATEMATIKA

MATEMATIKA EGIPTA, MESOPOTAMIJE I STARE GRČKE

MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD

Sadržaj

Glava 1

Matematika pre Grka

1.1 Uvod

Reč je o najstarijim epohama istorije, o najstarijim kulturama koje su nam, usled velikih uspeha istorijskih nauka, vaskrsle iz mnogovekovnog zaborava. To su na prvome mestu kulture *Egipta* i *Mesopotamije*. Arheološka otkopavanja dala su nam mnoge pisane spomenike, mnoge listove papirusa iz Egipta i glinene ploče na kakvim se pisalo u Mesopotamiji. Među tim nalazima ima nešto spisa koje možemo nazvati matematičkim spisima. Na osnovu njih znamo sada već nešto, ali dosta malo, pa ipak toliko da vidimo glavne obrise matematike tih drevnih vremena. Vidimo šta je od matematike najpre dohvatila ljudska misao. Sva matematika, kroz mnoge vekove trajanja tih starih kultura, sastoji se, takoreći, samo iz elementarnih odlomaka aritmetike i geometrije.

Još nema nikakvih teorija, niti dužih nizova zaključaka, jer na svome izvoru matematika nije deduktivna, već pretežno induktivna nauka. Matematičko, tj. logičko izvođenje, dokazivanje, je tek u začecima. Matematika je u najužoj vezi sa svojim primenama. Ona još uopšte nije zasebna nauka. Zasebnih nauka u ono doba još uvek nema. Učeni ljudi onog vremena, a to behu sveštenici, žreci raznih božanstava, nose u sebi celokupnu učenost sjedinjenu. Još ju je mogao nositi jedan čovek, još se nauke nisu počele granati. Tako i matematika nije nešto odvojeno, nego u jedinstvu sa građevinarstvom, zemljomerstvom, ekonomijom, trgovinom itd. Ona niče iz životnih potreba.

Jasno vidimo kako životne potrebe uslovljavaju pojavu matematičkih problema i metoda njenog rešavanja. To nam je napomenuo još *Herodot*, grčki istoričar iz 5. veka pre Hrista, rekavši da geometrija potiče iz Egipta, od potrebe sveštenika da brzo i sigurno mere posle poplave *Nila*, kad voda odnese međašne znake, granice zemljišta. Isto to vidimo i iz arheološkog materijala. Matematički spisi Egipta i Mesopotamije su praktični „priručnici", „savetnici", o tome kako se meri zemlja, kako trasira ili gradi kanal, kako postavlja temelj hramu, zida piramida, računa količina rada ili veličina zarade, kako utvrđuje položaj zvezda na nebu itd. To kazuju egipatski papirusi — njih imamo srazmerno malo, jer je to slab materijal, izložen truljenju, a dolina Nila biva vlažna od poplava. To kazuju i glinene ploče s klinastim pismom nađene u Mesopotamiji — njih ima više, čitave biblioteke su otkrivene i u njima dosta matematičkog sadržaja. Otuda vavilonsku matematiku poznajemo bolje od egipatske.

Uporedimo li matematiku ovih zemalja, vidimo da je otprilike na istoj visini. Razumljivo, jer ma koliko da su sveštenici čuvali svoja znanja kao tajnu vekovima, tajne su se kojim bilo putem saznavale i matematičko znanje je postalo opšte, svih onih koji su kulturno stojali na odgovorajućoj visini. Dakle, to u što ćemo zagledati možda nije svojstveno ni samo tim dvema oblastima drevnosti, nego manje više i drugim zemljama oko njih, pa i podalje od njih gde je kultura dostigla istu visinu.

1.2 Egipat

Doskora nam je glavni izvor bio tzv. *Rajndov papirus* (papirus Rhind) koji se čuva u Britanskom muzeju. Na njemu piše neki sveštenik *Ahmes*, više od hiljadu godina pre Hrista, a prepisuje sa još starijeg papirusa koji potiče iz vremena oko 1750. godine pre Hrista. Rukopis pretstavlja, zapravo, zbirku problema iz aritmetike i geometrije.

Reč je tu, na primer, o svođenju običnih razlomaka — ali ne ma kakvih nego oblika $\frac{2}{2n+1}$ na razlomke oblika $\frac{1}{m}$, tj. kojima je brojitelj 1. Kao da su im se razlomci gde brojitelj nije 1 činili nečim tako složenim, da ih treba nekako rastaviti na razlomke gde je brojitelj 1. O tome donosi taj papirus dugu tabelu, brojeve manje od 50. Na primer,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}.$$

Smatrali su, dakle, potrebnim, da razlomke oblika $\frac{2}{2n+1}$ svode na zbir razlomaka oblika $\frac{1}{m}$. Zašto? Pre svega zato što nisu pronašli pogodnu metodu za pisanje razlomaka. Razlomak $\frac{1}{m}$ beležili su stavljanjem crtice iznad znaka kojim su beležili celi broj m, tj. $\overline{m}$ im je značilo $\frac{1}{m}$. Isto tako $\overline{\overline{m}}$ je značilo $\frac{2}{m}$. Kao da se uopšte nisu setili da razlomak $\frac{n}{m}$ obeleže time što će brojeve n i m staviti, na primer, jedan iznad drugoga! Nama je to danas vrlo jasno i prirodno. Ali s tim najprostijim elementima išlo je po pravilu najteže, dok su se pronašli. Tako je aritmetika čekala vekovima na pogodno pisanje razlomaka da bi se moglo pravilno razviti računanje s razlomcima.

Primetimo da su kod razlomaka $\frac{2}{2n+1}$ imenitelji neparni. Parni imenitelji se i ne pominju. Znači da su Egipćani dobro znali da se razlomak oblika $\frac{2}{2n}$, tj. sa parnim imeniteljem, može lako uprostiti delenjem brojitelja i imenitelja sa 2, i dobiti mesto njega $\frac{1}{n}$.

Evo, uostalom, kakvim su se znacima služili Egipćani za pisanje brojeva (v. tablicu).

1	|
2	|||
3	|||
4	||||
5	||| ||
6	||| |||
7	|||| |||
8	|||| ||||
9	||| ||| |||
10	∩
15	∩ ||| ||
20	∩∩
30	∩∩∩
40	∩∩∩∩

50	∩∩∩ ∩∩
60	∩∩∩ ∩∩∩
70	∩∩∩∩ ∩∩∩
80	∩∩∩∩ ∩∩∩∩
90	∩∩∩ ∩∩∩ ∩∩∩
100	𓍢
200	𓍢𓍢
400	𓍢𓍢𓍢𓍢
500	𓍢𓍢𓍢 𓍢𓍢
1000	𓆼
10000	𓂭
10^5	𓆐
10^6	𓁨
10^7	Ω

Egipatska numeracija

Otkud ti znaci? Znak

∩

označava gomilu, znak

𓍢

uvijeno uže kojim se mere daljine, valjda rastojanje od Egipta do Meseca? Dugovečnost žabe povod je, svakako, poslednjem znaku. Prema tome, broj 1025 pisao se ovako

𓆼 ∩∩ |||
||

No, u egipatskoj aritmetici ima i nečeg što je približuje već algebri — rešavanje nekih jednačina. Tako je, na primer, tipičan ovaj problem (iznećemo ga prvo rečima otprilike kao u originalu): „Gomila — njena sedmina, njeno celo, to je 19”, zatim se rečima, isto tako nejasno, skraćeno, izlaže rešavanje i rezultat. U našem primeru to znači: traži se kolika je neka nepoznata gomila, tj. množina, kad njena sedmina i ona sama daju zajedno 19. Dakle, kako bismo danas pisali, postavlja se jednačina

$$\frac{x}{7} + x = 19.$$

Mi bismo je rešili ovako:

$$\frac{8}{7}x = 19,$$

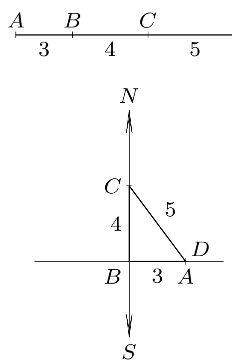
dakle,

$$x = \frac{19 \cdot 7}{8} = 16\frac{5}{8}.$$

I *Ahmes* ima tačan rezultat, samo što umesto $16\frac{5}{8}$ piše: „16 i $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$”. Postoji u samom njihovom skraćenom izražavanju već i nekakva matematička simbolika u začeću. Tako se sabiranje označava nogama koje koračaju („idu napred”), jednakost znakom $\leqslant$, nepoznata ili kako oni kažu „gomila” ili „množina” zasebnim znakom kojim se označava reč za gomilu.

Pređimo na geometriju. Po jednom navodu, poznati grčki filozof *Demokrit* (oko 420. godine pre nove ere) je rekao: „U konstruisanju linija pri iznošenju dokaza nije me niko prestigao, čak ni takozvani *harpedonapti* Egipta”. Prema tim rečima Demokrit bi samouvereno tvrdio da je u geometriji u kojoj se iznose dokazi i pri tome konstruišu linije (dakle pre svega prave i krugovi) veštiji od grčkih geometara onog vremena, pa „čak i od harpedonapta Egipta”. Odatle bi trebalo zaključiti, među ostalim, da je u ono doba postajalo mišljenje u Grčkoj da su izvesni ljudi u Egiptu znali geometriju kao nauku u kojoj se izvode konstrukcije i dokazi bolje i od samih Grka koje smatramo tvorcima te nauke. Ti ljudi u Egiptu se zovu harpedonapti, što znači „zatezači užeta”, tj. ljudi koji zatežu uže, naravno u svrhu merenja. Dakle, to su geometri.

Uže možemo, uopšte, smatrati najstarijim instrumentom za merenje (hijeroglif broja 100). U starim semitskim jezicima ta veza između geometrije i užeta je očigledna. Na starim reljefima vidi se svečan čin polaganja temelja hrama koji se sastoji u tome što se po zabijanju prvog koca u zemlju vizira zvezda Severnjača i, u pravcu te zvezde, zategne merno uže koje će obeležiti jedan od četiri glavna zida. Po mišljenju *Kantora*, jednog od značajnih matematičara i istoričara matematike s kraja prošlog i početka ovog veka, posao zatezača užeta, a to činjaše pri polaganju temelja hrama faraona, nije samo zatezanje u jednom pravcu, nego obeležavanje i pravca ka istoku, upravnog na pravac ka severu. Po pretpostavci Kantora to se radilo na osnovu tzv. *Pitagorina stava o pravouglom trouglu* na sledeći način. Na mernom konopcu (užetu) obeležena su čvorovima redom rastojanja koja se među sobom odnose kao brojevi 3, 4 i 5 (sl. 1). Držeći srednju duž zategnutu u pravcu severa i spojivši krajeve konopa, dobijamo pravougli trougao, dakle, i pravac upravan na pravac ka severu, tj. još jedan od četiri glavna zida.



Slika 1

Ovaj postupak zasniva se na osobitom svojstvu brojeva 3, 4, i 5 da tri duži kojima su veličine srazmerne tim brojevima mogu sastaviti pravougli trougao. Zaista, po *Pitagorinu pravilu* treba da je za tri strane a, b, c pravouglog trougla $a^2+b^2 = c^2$, a to zbilja ispunjavaju brojevi 3, 4, 5, jer je $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Zaista, starim Egipćanima je bilo poznato Pitagorino pravilo, makar samo što se tiče izvesnih brojeva kao što su 3, 4, 5. Verovatno da se nisu udaljavali od celih brojeva.

Ovim povodom možemo progovoriti koju reč o brojevima kao što su 3, 4, 5. Takve cele, prirodne brojeve, nazivamo *pitogorejskim brojevima.*

Iz elementarne *teorije brojeva* znamo kako možemo doći do takvih brojeva, koliko ih god hoćemo. Stavimo

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4, \quad (a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4.$$

Odatle oduzimanjem dobijamo

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2,$$

dakle

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Ako u taj obrazac stavimo $a = 1$, $b = 2$ dobijamo: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ako stavimo $a = 3$, $b = 5$ dobijamo: $16^2 + 30^2 = 34^2$, itd.

Takvim brojevima, bar onim prvim — 3, 4, 5, Egipćani su poklanjali naročitu pažnju. U osobini da ti celi brojevi grade pravougli trougao, gledali su oni neku tajanstvenu harmoniju i stoga su, valjda, voleli da u hramovima i piramidama grade odaje tako da se tri njihove dimenzije: visina, širina i dužina odnose kao ti brojevi.

U Rajndovu papirusu nalazimo i obrazac za površinu kruga („okruglog polja"). Kao što znamo, ako r označava poluprečnik, površina kruga je dana obrascem $P = \pi r^2$ ili, ako je d prečnik, tj. $r = d/2$, obrascem

$$P = \frac{\pi}{4}d^2.$$

Taj obrazac poznat je u papirusu, samo što nisu poznavali tačnu vrednost broja π koji ima beskrajno mnogo decimala (tako da ga ni mi ne poznajemo niti možemo poznavati do kraja, nego samo na onoliko decimala koliko zaželimo da izračunamo). Egipćani još nisu imali pojma o takvim, tzv. *iracionalnim brojevima.* Otuda su za $\frac{\pi}{4}$ davali netačnu, ali ipak dosta približnu vrednost koju ćemo mi označiti grčkim slovom κ:

$$\kappa = \frac{64}{81} = \frac{8^2}{9^2} = 0,79012, \qquad P = \kappa d^2$$

(Podsećamo: Celi brojevi i razlomci nazivaju se *racionalnim brojevima*; na primer, 256, $3\frac{2}{17}$, $\frac{212}{1237}$. Zasad pominjemo samo pozitivne racionalne i iracionalne brojeve, jer negativni brojevi javljaju se u istoriji mnogo kasnije. Razlomci pisani pomoću razlomačke crte nazivaju se *običnim razlomcima.* Možemo ih pisati kao tzv. *decimalne razlomke* koje dobijamo deljenjem brojitelja imeniteljem. Opšta je osobina racionalnih brojeva da, pisani u obliku decimalnog broja, imaju ili konačan broj decimala, ili beskrajan broj decimala, ili se te decimale ponavljaju u jednakim grupama, tzv. periodama. Na primer,

$$\frac{141}{55} = 2,563636363\ldots \quad (\textit{kracepisano } 2,5\overline{63}).$$

Takvi decimalni razlomci nazivaju se *periodičnim razlomcima.*

Ako decimalan broj ima beskrajno mnogo decimala, a nije periodičan, on nije racionalan broj. Tako, na primer,

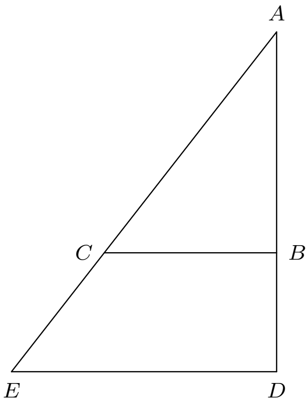
$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots, \qquad \pi = 3,14159\ldots$$

nisu periodični decimalni brojevi — dakle, nisu racionalni brojevi. Te brojeve nazivamo *iracionalnim brojevima*. Svi racionalni i iracionalni brojevi zajedno nazivaju se *realnim brojevima*, za razliku od *imaginarnih* o kojima ćemo govoriti kasnije.

Egipćani, koji su jedva proučavali razlomke nisu, naravno, imali ni pojma o iracionalnim brojevima i tako su, tražeći broj $\frac{\pi}{4}$ koji daje površinu kruga (ili pak obim kruga) tražili taj broj u oblasti racionalnih brojeva, i našli su vrednost κ koja zaista nije mnogo daleka od tačnije vrednosti broja $\frac{\pi}{4}$. Imamo:

$$\kappa = 0,79012\ldots \quad i \quad \frac{\pi}{4} = 0,78539\ldots,$$

dakle $\kappa - \frac{\pi}{4} = 0,0047$, a to je manje od pet hiljaditih.

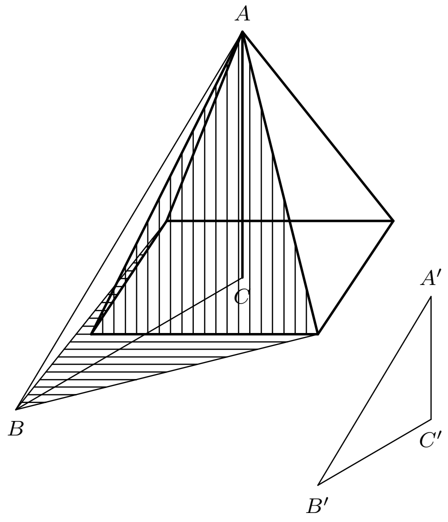


Slika 2

Iz Rajndova papirusa vidimo da su Egipćani tada već znali za geometrijske proporcije ili srazmere, za proporcionalnost strana dvaju sličnih pravouglih trouglova. ABC i ADE su dva slična pravougla trougla. U papirusu se na izvestan način utvrđuje da je (sl. 2)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}.$$

Na osnovu takvih proporcija mogli su, na primer, pri građenju piramida izračunavati dimenzije koje nisu neposredno merljive, pomoću onih koje su mogli izmeriti. Stari Grci su se hvalili da je njihov poznati filosof, jedan od „sedam mudraca”, *Tales*, boraveći u Egiptu pronašao kako da pomoću upravnog štapa izračuna visinu piramide i da je time zadivio samog faraona. Izmerio je dužinu štapa $A'C'$ i njegove senke $B'C'$, zatim dužinu BC, senke piramide, i otud, na osnovu pomenute proporcije, visinu AC same piramide (sl. 3). Tačnije će biti da je Tales, učeći se u Egiptu, to naučio od učenih sveštenika koji su imali i matematičke papiruse kao što je ovaj Rajndov.



Slika 3

Napredak u našem poznavanju matematike starog Egipta donelo je odgonetanje tzv. *Moskovskog matematičkog papirusa*, što je izvršio B. B. Struve (objavljeno god. 1930). Starost papirusa je oko 1850. godina pre nove ere dakle, šta više, stariji je od Rajndova. Po zaključcima Struvea taj nam papirus otkriva da je „početak naučnog posmatranja matematičkih pitanja, ne u Grčkoj, nego u Egiptu". Zaista, vidimo da egipatska matematika nije bila onoliko, skoro isključivo induktivna, empirijska, kao što se u nauci ranije mislilo. Postoji dokaz, logika, geometrijska konstrukcija kojom se omogućuje dokaz nekog stava geometrije. Time je egipatska matematika postala u našim očima sličnija i matematici stare vavilonske kulture.

Prema moskovskom papirusu Egipćani su, na primer, znali obrazac za površinu pravougaonika

$$P = a \cdot b,$$

(pravougaonik su nazivali „ploča"); pa obrazac za površinu trougla

$$P = \frac{a \cdot h}{2},$$

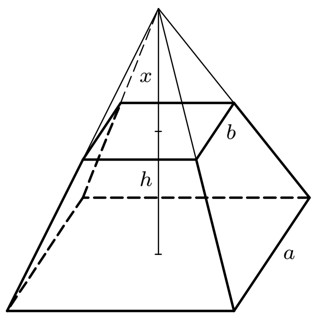
(naravno, ovako mi danas pišemo te obrasce, a oni su opisivali rečima); pa obrazac za površinu lopte (po njihovom nazivu „ljuska jajeta")

$$P = 4\pi r^2 \approx 4\kappa d^2,$$

gde $\approx$ znači *približno jednako*, i za površinu polulopte

$$P \approx 2\kappa d^2,$$

(tu površinu oni su nazvali „korpa", dakle, vidimo kako nemaju apstraktnih geometrijskih naziva, nego se služe izrazima iz svakodnevnog života; otud, iz konkretnog života izrašćuju vremenom naučni pojmovi).



Slika 4

Još nas više začuđuje kad vidimo da su imali i tačan obrazac za zapreminu zarubljene piramide! Reč je o pravilnoj, četvorostranoj zarubljenoj piramidi. Njenu zapreminu mi možemo lako izračunati. Ako je veličina stranice na donjoj osnovici a, na gornjoj osnovici b, a visina zarubljene piramide h (sl. 4) označimo visinu cele piramide sa $h+x$ tako da je x visina one piramide koju treba otseći da bi se dobila zarubljena. Zapremina velike i te male piramide je:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2(h+x), \qquad V_2 = \frac{1}{3}b^2x.$$

Ali

$$(z+h) : x = a : b,$$

tj.

$$x = hb/(a-b),$$

dakle, zapremina zarubljene piramide je

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^2(h+x) - \frac{1}{3}b^2x = \frac{1}{3}a^2\left(h + \frac{hb}{a-b}\right) - \frac{1}{3}b^2\frac{hb}{a-b},$$

tj.

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

Do tog istog obrasca došli su Egipćani. Kako? Da li ovakvim ili sličnim izvođenjem? Može biti. Tako pomišlja Struve. Mogli su i geometrijskim putem razlažući zarubljenu piramidu na delove — na piramide i tetraedre (dakle opet piramide), čije su zapremine morali znati (svakako, pod pretpostavkom da su znali činjenicu da sve piramide koje imaju jednake osnovice i jednake visine imaju i jednake zapremine). Kako god uzeli, Egipćani su znali za izvođenje, dokazivanje matematičkih stavova. Znali su, svakako, za jednostavna logička izvođenja, verovatno i za metodu geometrijske konstrukcije u svrhu dokaza.

Napomenimo da, na primer, za površinu „korpe” ne stoji u moskovskom papirusu $2\kappa d^2$ nego, ako to što tamo stoji izrazimo svojim matematičkim znacima, piše

$$P = \left[\left(2d - \frac{2}{9}d\right) - \frac{1}{9}\left(2d - \frac{2}{9}d\right)\right]d.$$

Razume se, otud je

$$P = \left(2d - \frac{2}{9}d\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)d = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 d^2 = 2 \cdot \frac{8^2}{9^2}d^2 = 2\kappa d^2.$$

Otud možemo zaključiti i kako je tačno glasio njihov obrazac za površinu kruga, što mi napisasmo u obliku κd^2. Glasio je svakako

$$P = \left[\left(d - \frac{1}{9}d\right) - \frac{1}{9}\left(d - \frac{1}{9}d\right)\right]d.$$

Moskovski papirus sadrži i mnoge aritmetičke zadatke. Zadaci se izriču onako kako već videsmo u Rajndovu papirusu: rečima, kratko, pa se i rešavaju rečima. Evo, na primer, kako glasi 25. zadatak:

„Oblik izračunavanja jedne gomile, računate dvaput zajedno, sa još jednom gomilom dostižući 9."

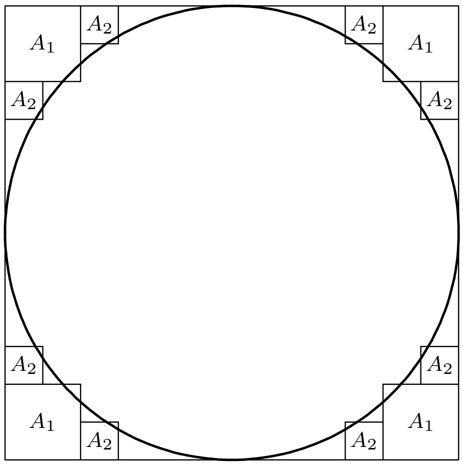
„Koje je ime te gomile? Računaj zbir te jedne gomile zajedno sa te dve".

„Nastaje 3. Računaj sa te tri, da bi dobio 9. Nastaje triput."

„Gle! Ime je 3. Tačno si našao!".

To znači, današnjim znacima: treba rešiti jednačinu $2x + x = 9$. Sabirajući na levoj strani dobija se $x + 2x = 3x$, dakle je $9 : 3 = 3 = x$.

U jednom drugom primeru imamo jednačinu $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$, pa se oduzme 4 obema stranama i dobije $1\frac{1}{2}x = 6$, a otud $x = 4$.



Sukcesivno smanjivanje površine kvadrata

Zadaci su često iz oblasti građenja lađe, ili iz ekonomskih problema. Na primer: Neki radnik mora da odnese izvestan broj hlebova iz pekare u stovarište. Mesto u većim korpama, treba da nosi u manjim: mesto u „5-hlebovnim" u „4-hlebovnim". Koliko veći rad izvrši?

Iz svega toga možemo izvesti ovaj zaključak. Još uvek u matematici Egipta nema opštih metoda, niti sistematski izloženih oblasti, tj. teorija. Logičko rezonovanje nalazimo već na izvesnoj visini no, još ne kao opštu metodu koja se sistematski sprovodi, nego tek u odlomcima, u pojedinim zadacima. Rezonovanje je tu tek da bi potpomagalo neposrednoj očiglednosti, tamo gde ona sama nije dovoljna, gde intuicija prestaje. Dakle, deduktivna metoda stupa na snagu ponegde, da potpomogne. Jer, starim Egipćanima nije još stalo do čistote koje bilo naučne metode. Njima stoje pred očima praktični problemi koji za njih imaju vrednosti samo ukoliko se primenjuju u zemljomerstvu, građevinarstvu, ekonomiji ili pak u sklopu religijskih shvatanja. No ipak, moramo govoriti o izrazitim počecima deduktivne metode. Izvestan uspeh i istorijski značaj egipatske matematike nađosmo u aritmetici, u proširenju računanja od celih brojeva (što pripada, bez sumnje, praistoriji) na razlomljene brojeve, tj. racionalni brojevi ulaze u matematiku.

1.3 Mesopotamija

Kao što je rečeno, o matematici naroda i kultura Mesopotamije znamo više no o matematici Egipćana zahvaljujući, pre svega, trajnijem materijalu. Od prvih početaka, *akadsko-vavilonaska* kultura poseduje već srazmerno znatna znanja iz matematike. To se tumači time što su već stari *Sumeri* sa svojom kulturom u trećem hiljadulеću pre Hrista, imali prilično razvijenu matematiku. Na njihovu mestu raširili su se semitski narodi Mesopotamije otprilike u 22. stoleću pre Hrista. Njihova „vavilonska" matematika pokazuje, kako nam se čini, svoje cvetanje u najstarije svoje doba, otprilike od oko godine 2000. do 1800. pre Hrista, mada je i kasnije bila u razviću. Može se reći da je snaga vavilonske matematike bila, pre svega, u računanju i aritmetici, mada i u geometriji znaju mnogo toga — otprilike to je ono što smo našli i u Egipćana — mere trougao, pravougaonik, trapez, zapreminu zarubljene piramide itd. U pogledu aritmetike postoji, pre svega, osnovna metodska razlika prema egipatskoj — Vavilonjani su već od Sumera nasledili u aritmetici *heksagezimalni* (šezdesetni) brojevni sistem, gde se računa sa brojem 60 kao osnovom, onako kao što mi u svome *dekadnom* (desetnom) sistemu računamo sa brojem 10. Dodirnimo, tim povodom, pitanje brojevnih sistema. Naš dekadni sistem ima korena u samim jezicima, jer za brojeve od 1 do 10 nazivi su, kako u slovenskim jezicima tako i u drugim, različiti, dakle, ima svega deset raznih naziva (jedan, dva, tri, itd.), a ostali nazivi za prirodne brojeve (jedanaest, dvanaest itd.), osim za 100 i 1000, izvedeni su iz prvih deset. U našem načinu pisanja brojeva imamo, saobrazno tome, deset raznih znakova, *cifara* — 0, 1, 2 itd. do 9. I u starih naroda Mesopotamije jezik odaje dekadni sistem. Heksagezimalni sistem je, dakle, jedna vrsta naučne zgrade koja se superponira u izvesnom času vavilonske kulture, na stariju, dekadnu tradiciju koja je utemeljena i u samom jeziku naroda. Kad, na primer, napišemo broj 7235 i pročitamo ga — sedam hiljada i dve stotine i trideset i pet, time neposredno izražavamo da je reč o nekom sabiranju, tj. izražavamo (pomoću reči „i") okolnost koja se aritmetički može pretstaviti ovako

$$7235 = 7000 + 200 + 30 + 5.$$

Ako tzv. *više jedinice* desetnog sistema izrazimo pomoću osnove 10, tj.

$$100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \quad 10000 = 10^4 \quad itd.$$

možemo pisati i ovako

$$7235 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Tu je najjasnije istaknuto da je deset osnova celog našeg brojevnog sistema. Prema tome, možemo dati shemu po kojoj se piše ma kakav prirodan broj u desetnom sistemu. Ako nam

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

pretstavljaju ma koje cifre $(0, 1, 2, \ldots, 9)$, izabrane kako bilo, svaki prirodan broj A biće nam u dekadnom sistemu napisan ovako

$$\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0.$$

Pri tome je

$$\begin{aligned} A &= \alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0 \\ &\alpha_n 10^n + \alpha_{n-1}10^{n-1} + \alpha_{n-2}10^{n-2} + \ldots + \alpha_1 10 + \alpha_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Broj koji nije ceo, na primer 57,348, može se pretstaviti kao

$$5 \cdot 10 + 7 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{8}{10^3}.$$

Prema tome, za opšti racionalni (a pozitivni) broj B kome je celi deo A imamo da je

$$B = A + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \ldots \tag{2}$$

Time je jasno istaknuta uloga osnove 10 i u pogledu razlomaka, u odnosu na razlomljeni deo racionalnog broja. Za A imamo u (1) konačan zbir, a za B može u (2), naprotiv, taj zbir biti beskrajan.

U šezdesetnom sistemu brojeva imali bismo pak 60 raznih *osnovnih* brojeva naime, od 0 do 59 (kao što u desetnom imamo 10).

Za brojeve veće od 59 služimo se prvom višom jedinicom 60, za $60 \cdot 60$ i veće brojeve idućom višom jedinicom $60^2 = 3600$ itd. Vavilonjani su imali za te dve više jedinice zasebne nazive da bi brojeve u heksagezimalnom sistemu lakše čitali (za 60 „coc", a za 60^2 „cap"). Tako bi, na primer, u šezdesetnom sistemu imali broj 5cap, 27coc i 53, a to bi bilo

$$5 \cdot 60^2 + 27 \cdot 60 + 53 = 19673.$$

A, na primer, naš broj 8834 u heksagezimalnom sistemu se piše kao zbir

$$2 \cdot 60^2 + 27 \cdot 60 + 14,$$

kao što je lako izračunati.

Znaci za brojeve bili su, pri tome, sledeći: $\curlyvee = 1$, $\prec = 10$ (dakle po staroj dekadnoj tradiciji) i s njima su, na primer, pisali

$$\curlyvee\curlyvee\curlyvee = 3, \quad \prec\prec\prec = 30, \quad \prec\prec \curlyvee \curlyvee \curlyvee = 23.$$

Po uvođenju šezdesetnog sistema pisali su, na primer, broj 71 ovako $\curlyvee \prec \curlyvee$, a to znači da znak za jedinicu stavljen ispred znaka za deseticu znači sledeću višu jedinicu, tj. 60. Ovo je upravo načelo našeg, tzv. *pozicionog* (*položajnog sistema*) u pisanju brojeva jer nam iste cifre označuju jedinice, desetice, stotine itd. prema mestu na kojem stoje. Ali Vavilonjani se nisu mogli uzdići do čistog pozicionog načina pisanja brojeva koji bi zahtevao zaseban znak za svaki broj manji od 60 i još i za nulu, i zato nisu mogli videti svu korist od njega. Dakle, na primer,

$$\begin{aligned} \curlyvee\curlyvee\prec\prec\prec \substack{\curlyvee\curlyvee\\ \curlyvee\curlyvee} &= 2 \cdot 60 + 34 = 154, \\ \curlyvee\prec\prec \substack{\curlyvee\curlyvee\curlyvee\\ \curlyvee\curlyvee} \substack{\prec\prec\\ \prec\prec} \curlyvee\curlyvee \prec \curlyvee &= 1 \cdot 60^3 + 25 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60 + 11 = 308531. \end{aligned}$$

Postavlja se pitanje zašto su ti stari narodi prešli na heksagezimalni brojevni sistem. Pitanje je dosta složeno, pa i odgovor. Između ostalog, postoji prednost brojevnog sistema kome je osnova veća, u pogledu kratkoće oblika broja — kao što vidimo na prethodnim primerima, četvorocifreni, pa i petocifrni brojevi dekadnog sistema mogu biti izraženi pomoću samo tri *jedinice* (kao naši trocifreni). Drugo je, i to važnije, prednost osnove 60 kao broja lako deljivog raznim brojevima — 60 je, naime, deljivo sa 2,3,4,5,6,10,12,15,20,30. Treća je prednost stara podela godine na 360 dana (12 meseci po 30 dana, umesto $29\frac{1}{2}$ koliko približno traje perioda mesečevih mena). Tome broju dodavalo se još 5 „suvišnih" dana svake godine. Kao što je, manje više, uvek u tim starim narodima, praktični motivi prepliću se sa mistično religijskim.

Broj 360 nalazimo i u podeli kruga na stepene. Ta podela je vavilonskog porekla. A kad stepen delimo na 60 minuta, minut na 60 sekundi, stojimo u čistom heksagezimalnom sistemu brojeva. Ovakav izbor jedinica za merenje kružnih lukova je neka vrsta skamenjenog ostatka prošlosti. On strši kao strano telo u našem dekadnom sistemu i treba priznati da stvara u računu izvesne, iako ne velike, poteškoće kao, na primer, kad treba sabrati lukove

$$30^\circ 45' 29'' + 5^\circ 48' 53'' = 35^\circ 93' 82''$$

pa treba svesti sekunde na minute, a minute na stepene tako da broj minuta i sekundi bude manji od 60. Imaćemo

$$36^\circ 33' 22''.$$

Pokušavalo se već dosta davno da se ova heksagezimalna, starovavilonska podela kruga zameni dekadnom pri čemu se krug delio na 400 jednakih delova, *gradi*, svaki grad na 10 decigradi, decigrad na 10 centigradi itd. Tada pišemo, na primer, 25 38547... Zapete za minute i sekunde su nepotrebne jer samo pisanje decimalnog razlomka izdvaja decigrade, centigrade, miligrade itd. Praktičniji je predlog da se ostane pri podeli kruga na 360 stepeni da se stepen deli na desete delove, stote itd.

Heksagezimalni sistem je pak imao velikog uspeha — prešao je još pre Hrista u grčku nauku, ne samo kao metod računanja s uglovima i lukovima nego i u elemente aritmetike kao metoda računanja s razlomcima.

Vavilonjani su, naime, smatrali da je vrednost njihovog heksagezimalnog sistema u tome što im, na neki način, omogućava računanje s razlomcima. Svaki razlomak gledali su da odmah izraze u heksagezimalnom sistemu, u šezdesetinama.

Na primer, ako im je bio dat broj $\frac{3}{5}$ prvo su pretvarali petinu u šezdesetine

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{12}{60},$$

zatom pomnožili sa 3, tj.

$$3 \cdot \frac{12}{60} = \frac{36}{60}.$$

Ako se neki razlomak nije mogao izraziti tačno u šezdesetinama tražili su da ga, makar približno, izraze tako jer opšte metode za računanje sa razlomcima nije bilo, kao ni u Egiptu. Recimo da treba sabrati dva razlomljena broja, na primer

$$\frac{5}{6} \quad i \quad 2\frac{4}{15}.$$

Prvo bi smo oba pretvorili u šezdesetne razlomke, a zatim sabrali

$$\frac{5}{6} + 2\frac{4}{15} = \frac{50}{60} + 2 + \frac{16}{60} = 2\frac{66}{60} = 3 + \frac{6}{60} = 3\frac{1}{10}.$$

Prema našem sadašnjem poznavanju egipatske aritmetike (a verovatno da se ono neće bitno promeniti u tome pogledu) ovo je ipak nešto više od egipatskog pisanja sa brojevima $\frac{1}{m}$ i $\frac{2}{2n+1}$. Računanje sa racionalnim brojevima pretstavlja u Vaviloniji bar jednu opštu, homogenu metodu koju oni dosledno sprovode kako u podeli kruga, tako svud u računanju. To je znatan uspeh. Zanimljivo je da se, koliko znamo, Egipćani nisu koristili time. Tek Grci primaju taj vavilonski izum.

No, kako ni Vavilonjani još nemaju pogodnih metoda za vršenje raznih, pa i najprostijih aritmetičkih operacija (našeg *arapskog* načina pisanja brojeva još nema, niti praktičnih pravila pomoću kojih mi sabiramo, množimo, delimo, kvadriramo itd. — pravila koja ne bi bila moguća da nema tog našeg načina pisanja brojeva), to u vavilonskoj matematici caruju razne vrste *tabela*. Veliko mnoštvo ispisanih ploča sa matematičkim sadržajem pokazuje nam kako su daleko došli Vaviljonjani u izrađivanju tabela za razne i, naravno, raznim svrhama namenjene, račune. Tako imamo, na primer,

1. *Tabele recipročnih brojeva* $\frac{1}{m}$, i njihovih (tačnih ili približnih) vrednosti u heksagezimalnom sistemu — ovo je, očigledno, bio praktičan priručnik za računanje sa razlomcima.

2. *Tablice množenja* (u tome naši osnovci nastavljaju tradiciju drevnih Vavilonjana).

3. *Tabele kvadrata i kubova*, za broj n kazuju se koliki je n^2 i n^3.

4. *Tabele kvadratnih korena* pa, štaviše, i kubnih korena izraženih, naravno, približno pomoći šezdesetina.

5. *Tabele eksponencijalnih brojeva*, tj. za izvesne vrednosti osnove c, a za razne izložioce n koji se uzimaju redom, daju se vrednosti stepena c^n; na primer, 2^n za $n = 1, 2, 3, 4,$ itd. jednako je 2,4,8,16, itd., a pri tome nalazimo i osnove koje nisu celi brojevi kao, na primer, 4,5.

Izrađivanje tabela možemo, dakle, smatrati još jednom opštom metodom stare vavilonske matematike.

No, vrhunac drevne sumersko-vavilonske aritmetike je, bez sumnje, u rešavanju algebarskih jednačina prvog, drugog pa čak i trećeg stepena, jednačina sa jednom i sa dve nepoznate. Evo jednog takvog zadatka koji se svodi na rešavanje dveju jednačina sa dve nepoznate. Tekst je iz najstarijeg doba Vavilonije. Donosimo uporedo tekst i tumačenje.

Nisaba!	Doziva se boginja Nisaba, zaštitnica nauke.
Dužina, širina. Dužinu i širinu pomnožih i dobih površinu.	Imenuju se nepoznate. One se nazivaju *dužina*, recimo x i *širina*, recimo y. *Površina* je $x \cdot y$.
Opet, što dužina prelazi preko širine, dodadoh površini i to daje 3;3	$x \cdot y + x - y = 3;3 \quad (1)$ Znakom 3;3 smo označili broj $3 \cdot 60 + 3 = 183$, napisan u heksagezimalnom sistemu.
Opet, dužina i širina sabrano daje 27.	$x \cdot y + x - y = 3;3 \quad (1)$ Sad treba rešiti sistem dobijenih jednačina (1) i (2).
Dužina, širina i površina šta su? 27 i 3;3 su zbirovi, 15 dužina, 12 širina, 3;0 površina.	Ponavljaju se zadati brojevi i odmah daje rezultat. Mi ćemo staviti da je $3;3 = a$ i 27=b.
Ti pri svome postupku, 27 zbir dužine i širine saberi ka $3;3$. Daje $3;30$. 2 saberi ka 27. Daje 29. Odbij od 29 polovinu, $14'30$.	Opisuje se postupak rešavanja. $a + b = 3;30$, tj. 210, $b + 2 = 29$, a $\frac{b+2}{2} = 14'30$. Neka nam ovo označava heksagezimalni razlomak $14 + \frac{30}{60} = 14,5$.
Puta $14'30$ jeste $3;30'15$	$14'30 \cdot 14'30 = 3;30'15$, tj. $14,5^2 = 210,25$.
Od $3;30'15$ oduzećeš $3;30$. Razlika je $0'15$.	$(\frac{b+2}{2})^2 - (a + b) = 0'15$, tj. 0,25.
$0'15$ ima $0'30$ za kvadratni koren.	$\sqrt{(\frac{b+2}{2})^2 - (a + b)} = \sqrt{0'15} = 0'30$.
$0'30$ ka prvoj [veličini] $14'30$ saberi. Daje 15 za dužinu.	$x = \frac{b+2}{2} + \sqrt{(\frac{b+2}{2})^2 - (a + b)} = 15$.

$0'30$ od druge [veličine] $14'30$ oduzmi. Daje 14 za širinu.	$y^* = \frac{b+2}{2} - \sqrt{(\frac{b+2}{2})^2 - (a+b)} = 14.$ Ovo y^* još nije prava „širina”.
2, koliko si sabrao ka 27, oduzmi od 14, od dužine. Daje 12 kao konačnu širinu.	$y = y^* - 2 = 12.$
15 (dužinu) i 12 (širinu) pomnožio sam. 15 puta 12 daje $3;0$ za površinu.	$x \cdot y = 15 \cdot 12 = 180 = 3;0.$
Dužina 15 koliko strši iznad širine 12? Za 3 strši. Tri dodaj površini $3;0$. Proizilazi $3;3$.	Ovo je sad kontrolni račun. Zaista, $x - y = 3$ $xy + x - y = 3;3$

Dakle, Vavilonjani se služe obrascem

$$x = \frac{b+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b+2}{2}\right)^2 - (a+b)},$$

kojim se i mi služimo pri rašavanju kvadratnih jednačina. Kao što vidimo, pomoću kvadratne jednačine rešavaju sistem dveju jednačina sa dve nepoznate. Ne daju potpunu dedukciju nego pravila, put kojim se do rezultata dolazi, postupak. Kako u njih ne postoji pojam opšteg broja sav taj račun teče aritmetički ali ako imamo na umu da su takvim zadatkom s određenim brojevima a i b pokazali opštu metodu kako se i slični zadaci rešavaju s ma kojim vrednostima a i b, možemo reći da ih je samo ideja obeležavanja opštih brojeva zasebnim znacima odvajala od naše algebre. To je već nekakva *algebra* na dve do tri hiljade godina pre nove ere — ne naša *simbolička algebra* koja raspolaže simbolima za poznate i nepoznate opšte brojeve i za računske radnje, nego tzv. *retorička algebra* gde se sve opisuje rečima.

Dokle je dopiralo njihovo računanje pokažimo još na sledećoj vrsti zadataka kojima su se oni bavili. Kao što su im zadaci, jedni iz astronomije, drugi iz geodezije, treći iz građevinarstva (građenje kanala, nasipa, zgrada itd.), četvrti iz brodogradnje, peti iz finansija itd, tako imamo sledeći problem: Stojeći na osnovi da se neka vrsta kapitala usled interesa, udvostručuje svakih pet godina, postavlja se pitanje: za koliko puta po pet godina će neki kapital dostići vrednost K_n, gde je n broj tih petogodišta. S današnjim načinom rešavanja imamo

$$K_1 = 2K_0, \quad K_2 = 2K_1, \quad K_3 = 2K_2, \ldots, K_n = 2K_{n-1},$$

a otud je

$$K_n = 2^n K_0.$$

Odavde dobijamo da je eksponent n (prema definiciji logaritma) *logaritam* sa osnovom 2 broja K_n, tj.

$$n = \log_2 \frac{K_n}{K_0}.$$

Dodajmo da dotična glinena ploča potiče iz starijeg doba Vavilonije.

Nekoliko reči o geometriji. Pitagorino pravilo poznaju Vavilonjani od najstarijeg doba i to ne samo kad su dužine strana pravouglog trougla celi brojevi, nego za ma kakve strane. Grci nas tu (kao i u drugim otkrićima svojih najstarijih matematičara, pa i novijih) zavode pripisujući sebi otkrića koja su oni doneli od starijih kultura. No, time se, naravno, veliki značaj Grka za nauku i kulturu ne dovodi u pitanje. Da li su pak i Egipćani poznavali *Pitagorino pravilo* za ma koji prvougli trougao ne može se odgovoriti na osnovu dosadašnjih arheoloških nalaza.

U vavilonskoj matematici nalazimo u jednom primeru kako se na osnovu Pitagorina pravila dobija za *kvadrat hipotenuze* vrednost 1700. Drugi koren kojim se dobija veličina hipotenuze izračunava se približno. U tome se služe oni postupkom koji se naziva imenom jednog od poznijih grčkih matematičara — *Heronovim obrascem*. On glasi

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}.$$

Po tom obrascu imamo da je

$$\sqrt{1700} = \sqrt{1600 + 100} = \sqrt{40^2 + 100} \approx 40 + \frac{100}{80} = 41 + \frac{20}{80} = 41\frac{1}{4}.$$

Zaista,

$$(41\frac{1}{4})^2 - (41 + \frac{1}{4})^2 = 41^2 + \frac{41}{2} + \frac{1}{16} = 1701\frac{9}{16},$$

tj. dosta približno 1700.

Najzad, spomenimo da vavilonski obrazac za zapreminu zarubljene četvorostrane pravilne piramide ima nešto drugi oblik nego u Egiptu jer glasi

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right],$$

što ukazuje, možda, na izvesnu nezavisnost matematike u ovim zemljama.

Glava 2

Matematika stare grčke kulture

2.1 Uvod

Kad je vodeća uloga u kulturi prešla na Grke, matematika je dobila nove potstreke, nov pravac razvića i nov, do tada neviđen polet koji ju je doveo, osobito geometriju, do visine neslućene pre toga.

U starim kulturama *Mesopotamije* i *Egipta* izgubile su se vremenom prilike povoljne za razvoj nauke tako da novih velikih pronalazaka i poleta nije više bilo. Nova sredina, sa novim mogućnostima, bila je potrebna da bi se otvorili novi izvori kulturnog, pa i matematičkog stvaranja. Takva sredina je postala *stara Helada*, grčki narod u *Grčkoj* i svojim naseobinama van Grčke.

Sve to stoji u najtešnjoj vezi s dubokom razlikom u psihičkom i društvenom sklopu između onih istočnih naroda i Grka. Pre Grka matematiku su držali u svojim rukama uglavnom sveštenici — oni su bili „znalci" i saopštavali su svoja znanja onima kojima su hteli i koliko su hteli. Oni su mahom bili „majstori" i u grđevinarstvu i u drugim građenjima i proračunavanjima. Oni su, naravno, dali i svoj pečat nauci.

Naprotiv, Grci, raštrkani po dalekim obalama i ostrvima, razvijaju se kao male države kojima vlada bogati građanski stalež obogaćen najviše trgovinom i gde se nadmoć sveštenstva sve manje oseća. Dakle, prelaskom u Grčku prelazi matematika iz ruku sveštenstva u ruke građanstva, mahom obogaćenog trgovinom.

Ti trgovci i njihovi potomci su mogli putovati po dalekim zemljama i posećivati kulturne znamenitosti Bliskog istoka, upoznati se tako i sa naukom i uneti u svoju postojbinu naučne tekovine tih starih kultura. Prvi učeni Grci, poznati kao prvi filozofi, putovali su mahom u Egipat ili Vavilon. Tako su činili i *Tales* i *Pitagora* i neki drugi, docnije i *Platon.* A posle takvih putovanja budući naučnik se mogao odmarati i služen robovima, razmišljati. No, tada je njegovo razmišljanje u izvesnoj meri uslovljeno tim njegovim položajem. Na jednoj strani on je nezavisan od onih koji su mu svoje znanje poklonili, dakle, moguće postaje da se razvija nauka nezavisna od religije; na drugoj strani on se ne mora rukovoditi potrebama svoje sredine, već se može upuštati u pitanja i pronalaske koji nemaju, bar za neposrednu okolinu, nikakve praktične vrednosti. Tako se menjaju donekle i sami motivi naučnog istraživanja, pa i njihov pravac. Mislioca goni, pre svega, težnja za saznanjem. To je radoznalost laika. Uz raniju praktičnu svrhu sada dolazi smisao za teoriju, a iz mističnog posmatranja sad se obrazuje smisao za racionalnu nauku.

Svega toga bivali su svesni već i sami Grci, osećajući opreke koje su u njima bile delatne. Na primer, pitagorejci su se, kažu, hvalili da su uzdigli nauku o brojevima iznad potrebe trgovine i naglašavali su da ne traže bogatstva nego saznanja.

Prema tome, kod Grka su mogla sazreti i dva velika načela naučnog rada: *sistematika u iznošenju gradiva* i čistota, *doslednost u sprovođenju određene naučne metode*. To je u matematici, pre svega, *deduktivna metoda* kojom se stavovi izvode jedni iz drugih. Takvim ciljevima nije, čini nam se, mogao stremiti učeni sveštenik *Haldeje* ili *Egipta.*

No, rukovođena takvim, teorijskim ciljevima, nauka se, naravno, u izvesnoj meri udaljavala od praktičnog života pa, kada je grčka kultura zamrla, kada se nalazilo manje ljudi koji će se uzdizati u visinu teorije, nauka sa svim svojim sjajnim rezultatima ostala je napuštena i zaboravljena. Tada su drugi, staroj kulturi suprotni pokreti i narodi, uzimali maha, sa novim oblicima društvenog života na pomolu.

Glavni uspon grčke matematike trajao je oko tri do četiri stotine godina — od VI do II stoleća pre nove ere. Znatan je to uspon. Grci su mnogo doprineli razviću matematičkih nauka. Za aritmetiku su imali manje smisla nego za geometriju. No, ono što su dali u geometriji, to nisu ni dve hiljade godina posle toga mogle uzdrmati. To je i danas čvrst sastavni deo školske nastave. Znatni su, zatim, doprinosi grčke nauke i astronomiji. I o tome moraćemo reći koju reč.

Sva ta matematika grčke kulture razvijala se na raznim svojim ognjištima — prvo u grčkim gradovima uže Grčke i grčkih kolonija od obala *Male Azije* do *južne Italije*, zatim, oko godine 300. pre nove ere, kad se centri kulture pomeraju ka istoku, kada *Aleksandrija* postaje glavno središte nauke, postaje taj grad i glavno ognjište matematičih nauka. Prema tome razlikujemo i dva velika razdoblja grčke matematike: prvo, *g*rčko u užem smislu ove reči, drugo, aleksandrijsko, *helenističko doba*. U tom drugom razdoblju nisu delatni samo Grci, nego naučnici raznih narodnosti, ali je kultura po svom karakteru grčka.

2.2 Stara Helada

O prvom dobu grčke matematike znamo, u stvari, malo. Nije nam se sačuvalo ni jedno pisano delo. Srećom, u grčkoj nauci javila su se kasnije i prva dela istorijskog sadržaja pa, tako, i iz istorije matematike. Doduše, delo Eudema koje je govorilo o grčkoj matematici od njenih početaka, nije dospelo do nas. Euklidovih *Elemenata*. Bilo je još istoričara, a i sačuvano je dosta odlomaka o grčkoj matematici, razbacanih po raznim delima starih pisaca. Otuda možemo donekle rekonstruisati istoriju grčke matematike od njenog početka.

Tales (624–540. pre Hrista), poznati filozof i jedan od legendarnih „sedam mudraca" poznat beše i kao matematičar. U mlađim godinama beše trgovac, na vlasti u svome gradu. Kažu da je na putovanju kroz *Egipat* upoznao astronomuju i geometriju. Pod starost, u svome domu, posvećuje se nauci i okuplja učenike. Tako je nastala tzv. jonska škola — i u matematici. Osim njega, kao pisac nekog dela iz geometrije pominje se u toj školi samo još njegov učenik *Anaksimandar* (610–546. pre Hrista).

Za Talesa se kaže da je pronašao izvestan broj stavova geometrije, koje je on i dokazao. No, možda su ti dokazi bili više empirijski nego logički. U njega još nema ni logičkog nizanja stavova. Pitanje je koliko je te svoje stavove „pronašao" on, a koliko je za njih saznao u *Egiptu*. Među tim stavovima je i poznati „drugi stav o podudarnosti trouglova", zatim stav o jednakosti unakrsnih uglova, pa i o sličnosti trouglova itd. Anegdota o Talesu i faraonu, koju spomenusmo, odnosi se na tu sličnost.

Talesa su smatrali znalcem i u astronomiji. Pominje se jedno njegovo predviđanje sunčeva pomračenja. To je na njegovu neupućenu sredinu učinilo, bez sumnje, jak utisak. Tales je pak za datum tog pomračenja saznao, verovatno, od egipatskih sveštenika ili iz njihovih astronomskih kataloga.

U matematici se više zna i pominje ***Pitagora***. Da li zato što je on više znao i više uradio nego Tales? Svakako i zato što je Pitagora ostavio za sobom svoju školu, tzv. *pitagorejce*, koji su se, uprkos i najžešćem proganjanju, održavali dugo posle njegove smrti. I za Pitagoru (579–500. pre Hrista) kažu da je bio u *Egiptu* i odande doneo svoje znanje. Njegovo učenje, protkano mistikom, ima zaista još sasvim egipatski karakter. Uopšte, ono što se zna o pitagorejcima više je izvesno produženje egipatske nauke, nego što je to nova grčka nauka.

Pitagori pripisuju glavni deo onoga što sadrže prve dve knjige Euklidovih *Elemenata*. On je, ako je verovati, osnovao deduktivnu metodu, logičko nizanje bar izvesnih stavova. On se već trudi oko definicija i počinje izlaganje s nekim definicijama kao što je ova, njemu pripisana definicija tačke:

„Tačka je jedinstvo koje ima položaj."

Možda je znatan deo onoga što se pripisuje Pitagori nađeno tek docnije, od pojedinih pitagorejaca. Za čuveno *Pitagorino pravilo* već znamo da je drevna tekovina istočnih kultura.

Pitagori pripisuju i neka otkrića o brojevima, na primer o razmerama i proporcijama, zatim o celim činiocima pozitivnih celih brojeva (da podsetimo 1,2,3,4,6 su činioci broja 12).

U Pitagorinoj i pitagorejskoj školi imali su osobiti značaj i neka razmatranja koja pripadaju koliko matematici toliko *fizici* i *muzici*. To je saznanje da se harmonični muzički intervali dobijaju samo pod izvesnim matematičkim uslovima — ako je razmera među dužinama zvučnih žica jednostavna. Ako se dužina jednako zategnute žice koja treperi, menja u odnosu 1:2, 2:3, 3:4, itd. javlja se interval oktave, kvinte, kvarte, itd. Harmoniji zvuka odgovara, dakle, harmonija brojeva kao da je harmonija brojeva uzrok harmoniji zvuka. U vezi s takvim činjenicama pitagorejci su brojevima pridavali čudotvornu moć i verovali da nauka o brojevima sadrži osnovne tajne sveta. Zaista, to se u savremenoj fizici u izvesnom smislu ostvarilo. U pitagorejaca, kad još nije bilo egzaktnih prirodnih nauka, to je morala biti opšta, nejasna slutnja koja nije mogla prodreti u konkretnu materijalnu stvarnost.

Isto tako, simbolično i mistično, posmatrali su pitagorejci i geometrijske oblike — slike u ravni i tela u prostoru — i davali svakom obliku naročiti značaj i značenje. Pri tome su, na primer, posmatrali pravilne poliedre, tj. rogljasta tela kojima su sve strane, ivice i uglovi jednaki. Možda su oni tako i pronašli neka od tih tela. Ima ih svega pet: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

Uporedimo li ono, što u pogledu na matematiku, znamo o pitagorejcima sa onim što se van i posle njih javlja u Grka kao matematika, tada možemo videti kako se postepeno, došavši sa *Orijenta* u *Grčku*, pod drugim uslovima života, matematika izdvaja iz svojih religijsko-mističnih ovoja i sve jasnije javlja kao racionalna nauka.

Pre nego što pomenemo još po nekog mislioca-matematičara i po neku matematičku školu iz prvih stoleća grčke nauke, pokušaćemo da iznesemo ukratko glavne momente koji karakterišu tadašnji rad u matematici, i razviće te nauke.

Razviće se sastojalo, pre svega, u pronalaženju novih geometrijskih istina, pre svega geometrijskih teorema i njihovih dokaza. Time se broj poznatih i dokazanih činjenica geometrije brzo množio i, kao što ćemo videti, uskoro se pokazalo potrebnim da se pronađeni stavovi prikupe i srede.

No, u dokazivanju novih stavova geometri su udarali i o probleme koji se rešavaju teško ili nikako. Tako su nastali izvesni problemi koji su postali čuveni i oko kojih su mnogi, vekovima — pa neki neobavešteni čak i danas — okušali sreću, ali uzalud, jer to što se u tim problemima traži nije uopšte moguće.

To su, pre svega, ova tri problema:

1. *Udvostručenje kocke*, tzv. *Delski problem* (po ostrvu Delu), koji se sastoji u tome da treba konstruisati kocku čija je zapremina dvaput veća od zapremine zadate kocke.

2. *Trisekcija ugla*, tj. podela ugla na tri jednaka dela, tj. konstrukcija ugla koji je po veličini trećina datog ugla.

3. *Kvadratura kruga*, tj. konstrukcija kvadrata kome je površina jednaka površini datog kruga, ili konstrukcija duži koja ima dužinu obima kruga.

Nemogućnost se sastoji u tome što se podrazumeva da konstrukciju treba obaviti samo pomoću *lenjira* i *šestara*. To su, svakako, dve najprostije sprave u geometriji. Pomoću njih se, naravno, ne može konstruisati sve što bi se moglo kad bi se u pomoć uzele još i neke druge sprave. U prvo doba razvića geometrije javili su se i pronalasci nekih sprava pomoću kojih bi se i pomenuta tri problema mogla tačno rešiti ali, pod uticajem *Platona* i njegove matematičke škole, utvrdio se konačno zahtev da se u geometriji dopuste jedino lenjir i šestar. To znači da sve što se u geometriji konstruiše treba konstruisati povlačenjem samo pravih i krugova (ili kružnih lukova). Zaista, to su dve najjednostavnije vrste linija i tim ograničenjem geometrija se sa svojim stavovima i dokazima drži na određenoj visini svoje jednostavnosti, preglednosti i lepote dok bi usvajanje neke nove linije, odnosno sprave, znatno komplikovalo i dokaze i gradivo. Ograničenjem na pravu i krug kao elemente geometrijskih konstrukcija je, bez sumnje, došao do izraza i statični karakrer grčke misli, a posebno misli Platona, koja je u pravoj i krugu morala videti izvesno savršenstvo kakvog nemaju ostale linije.

Zašto je konstrukcija pomoću pravih i krugova nemoguća u navedena tri zadatka, možemo lako uvideti ako se poslužimo metodom analitičke geometrije koja rešava geometrijske zadatke algebarski, pomoću jednačina. Svakoj pravoj odgovara jednačina prvog stepena, a svakom krugu jednačina drugog stepena. Ako nam x i y označuju *apscisu* i *ordinatu* tačaka u ravni, jednačinu prave možemo napisati u obliku

$$y = ax + b,$$

a jednačinu kruga u obliku

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Svakoj konstrukciji prave ili kruga u toku rešavanja geometrijskog zadatka odgovara uvođenje jedne takve jednačine, a svakom sečenju pravih i krugova odgovara traženje zajedničkih rešenja takvih jednačina. Dakle, svaka geometrijska konstrukcija ostavlja nas u oblasti jednačina prvog i drugog stepena i prema tome, sve što se pomoću šestara i lenjira može konstruisati, rešava se u analitičkoj geometriji samo pomoću jednačina prvog i drugog stepena. No, prva dva od navedenih problema rešavaju se u analitičkoj geometriji tek jednačinom trećeg stepena, a treći problem niti jednačinom kojeg bilo višeg stepena, nego tek jednom od tzv. *transcendentnih jednačina*. Dakle, rešenje tih problema, kakvo se traži, ne postoji.

Evo kako se algebarski mogu rešiti ta tri problema.

Prvi problem

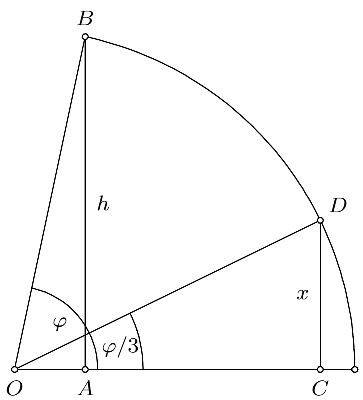
Neka je a dužina ivice date kocke, a x dužina ivice tražene kocke. Treba da bude

$$2a^3 = x^3 \quad ili \quad x^3 - 2a^3 = 0, \quad tj. \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Kojim god putem išli, moramo dobiti x kao rešenje jednačine trećeg stepena, a do takve jednačine i rešenja ne možemo dospeti konstrukcijom pravih i krugova.

Drugi problem

Neka je φ dati ugao. Tada nam je data i duž AB (sl. 5) i njena veličina h, tj. $h = \sin\varphi$ (izabrali smo $OB = 1$).



Slika 5

Obratno, ako nam je poznata duž CD i njena veličina, dobićemo odmah traženi ugao veličine $\frac{\varphi}{3}$ jer, ako je veličina te duži x, imamo da je

$$x = \sin\frac{\varphi}{3}.$$

No, iz trigonometrije znamo da je, za svako a,

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

a otud

$$\sin 3a = \sin(2a + a) = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

Dakle, ako umesto $3a$ pišemo φ, biće

$$\sin\varphi = 3\sin\frac{\varphi}{3} - 4\sin^3\frac{\varphi}{3},$$

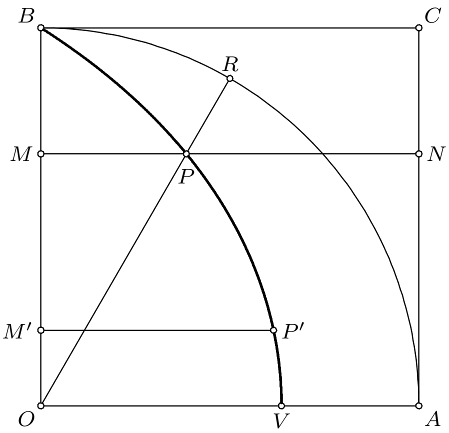
tj.

$$h = 3x - 4x^3 \qquad ili \qquad 4x^3 - 3x + h = 0.$$

Opet valja rešavati jednačinu trećeg stepena da bi se konstruisao traženi ugao.

Treći problem

Hipija Eleaćanin konstruisao je izvesnu krivu liniju pomoću koje se može lako izvršiti deoba nekog ugla na onoliko i onakve delove kako se hoće, pa i kvadratura kruga. To je tzv. *kvadratrisa*. Zamislimo da se poluprečnik OR jednog kruga (sl. 6) okreće ravnomerno, od položaja OB ka položaju OA jednovremeno kada se duž MN kreće ravnomerno od položaja BC ka položaju OA, ostajući paralelna sebi samoj. Tada se presek P ovih duži kreće od B do V i opisuje određenu liniju — kvadratrisu. Prema rečenome je



Slika 6

$$\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle AOB} = \frac{OM}{OB},$$

a za neku drugu tačku P' krive linije

$$\frac{\measuredangle AOP'}{\measuredangle AOB} = \frac{OM'}{OB}. \tag{1}$$

Iz ovih odnosa sledi

$$\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle AOP'} = \frac{OM}{OM'}$$

i najposle

$$\frac{\measuredangle AOP'}{\measuredangle P'OP} = \frac{OM'}{M'M}.$$

Prema tome, ako treba ugao $\measuredangle AOP$ podeliti na dva dela u izvesnom datom odnosu (na primer 1:2 u slučaju trisekcije ugla), treba samo podeliti duž OM u tom istom odnosu, tj. doći do tačke M' (što se lako čini na osnovu sličnih trouglova), zatim konstruisati pravu $M'P'$ i tako dobiti tačku P' koja određuje traženi ugao $\measuredangle AOP'$.

Uzmimo prave OA i OB za x i y osu. Neka je $OA = OB = 1$, a θ dužina luka AR. Ovim znacima jednačina (1) glasi

$$\theta : \frac{\pi}{2} = y : 1,$$

odakle je

$$y = \frac{2\theta}{\pi}, \quad \theta = y\,\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

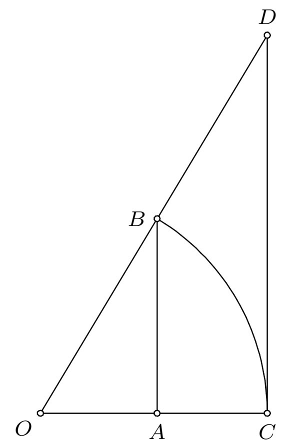
Ali, kao što iz trigonometrije znamo,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta,$$

odakle je

$$y = x \ \operatorname{tg} (y\frac{\pi}{2}). \tag{3}$$

Ovo je jednačina kvadratrise. Ona spada u *transcendentne* jednačine.



Slika 7

Iz (2) i (3) sledi da je

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} (y\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \cos\theta.$$

Ako θ teži ka nuli $\cos\theta$ i $\frac{\sin\theta}{\theta}$ teže ka jedinici, dakle x teži ka $\frac{2}{\pi}$, tj. $OV = \frac{2}{\pi}$. Iz duži čija je veličina $\frac{2}{\pi}$ izvodi se lako kvadratura kruga jer ako je r poluprečnik, površina p kruga je $p = \pi r^2$, a tu veličinu je lako konstruisati u obliku duži. Neka je, naime (sl. 7)

$$OA = \frac{2}{\pi}, \quad OB = OC = r, \quad OD = u.$$

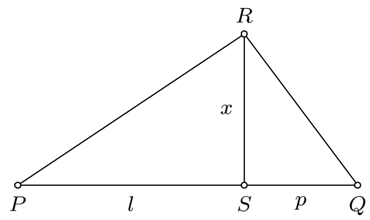
Tada je

$$\frac{2}{\pi} : r = r : u,$$

dakle, i

$$u = \frac{\pi r^2}{2},$$

pa, prema tome, $p = 2u$, što se neposredno može konstruisati. Neka je, na posletku, PQR pravougli trougao (sl. 8), u kome je visina $RS = x$, $PS = l$ i $QS = p$. Kako je $PS : RS = RS : QS$, imamo da je $x^2 = p$. Dakle, kvadrat kome je strana RS ima jednaku površinu kao i zadati krug poluprečnika r. Time je kvadratura kruga, pomoću Hipijine kvadratrise, izvršena. Kao što videsmo, pri tome se javlja transcendentna kriva sa transcendentnom jednačinom.



Slika 8

Jedan od velikih problema beše *problem iracionalnih veličina*. Upoređivanjem dveju duži dolazi u geometriji i do racionalnih i do iracionalnih brojeva. Ako, na primer, neka duž sadrži pet puta neku drugu duž, odnos između prve i druge duži izražen je celim brojem 5. Ako tu drugu duž smatramo jedinicom, 5 je dužina prve duži izmerene drugom duži kao jedinicom. Lako nailazimo i na duži čiji je odnos izražen razlomljenim brojem, na primer $\frac{3}{2}$. U tom slučaju se dužine ovih duži odnose kao 3:2. No, isto tako lako dolazimo i do dveju duži čiji odnos nije izražen ni celim ni razlomljenim brojem. Takve duži su, na primer, strana i dijagonala nekog kvadrata. Danas nam je i takav odnos jasan — dijagonala se odnosi prema strani kao $\sqrt{2} : 1$. Taj odnos je, dakle, *iracionalan*.

No, Grci nisu poznavali iracionalne brojeve. Do tog pojma nisu nikada došli. A kada se, mnogo kasnije, obrazovao i pojam iracionalnog broja, ostalo je u samom nazivu sećanje na teškoću koju su nekad osećali matematičari u shvatanju takvog broja. Nazvali su ga *iracionalnim*, „van razuma", i razumevanja. To ime ukazuje na nekadanju naviku da se razumu shvatljivim smatra samo ceo i razlomljen broj. Razlomljen broj izražava se pomoću dva cela broja, a iracionalni samo pomoću beskrajnog niza celih brojeva (decimala, kada se broj napiše kao decimalan broj). Da bi se ovakav beskrajan niz brojeva shvatio kao jedan „iracionalan broj", trebalo je izvršiti sintezu do koje se shvatanje starih Grka nije nikada uzdiglo. Prema tome, dve dužine čija je razmera izražena iracionalnim brojem, kao što su dijagonala i strana kvadrata, nazvane su *nesamerljivim dužima* smatrajući da se jedna od njih ne može izmeriti pomoću druge kao jedinice. U stvari, postupak merenja zahteva u takvom slučaju beskrajno ponavljanje izvesnog elementarnog postupka.

No, možemo misliti kakvu je krizu u geometriji moralo prouzrokovati otkriće nesamerljivih veličina. Mišljenje se moralo na neki način pomiriti sa činjenicom da, istina, svakom broju odgovara duž (danas bi smo rekli — svakom racionalnom broju) ali da svakoj duži ne odgovara broj (upravo — racionalan broj). Ali pre otkrića da postoje nesamerljive veličine čije se merenje ne može izraziti „brojem" prethodilo je, bez sumnje, dugo uzaludno pokušavanje da se odnos tih veličina nađe u „merljivom" obliku, tj. kao racionalan broj. Morala se dugo održavati nada da će se tačni odnos dužina dijagonale i strane kvadrata, ili obima i poluprečnika kruga itd. najzad uspeti da izrazi pomoću dva cela broja.

Smatra se da je u školi pitagorejaca uspelo, ne zna se tačno kad i od strane koga, dokazati logičkim putem da postoje i nesamerljive veličine (dužine) i to upravo na primeru kvadrata. Evo u čemu se sastoji taj dokaz kojim se zapravo utvrdilo da je odnos između dijagonale i strane iracionalan. Dokaz je indirektan.

Neka su u izvesnom kvadratu a i d dužine strane i dijagonale (sl. 9). Pretpostavimo, protivno onome što treba da dokažemo, da je odnos $d : a$ racionalan. Tada bi postojala dva cela broja m i n takva da je

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{n}.$$

Pretpostavimo još da je ovaj razlomak napisan u svom najprostijem obliku, tj. da se m i n ne mogu dalje skraćivati. Primenom Pitagorinog stava dobijamo

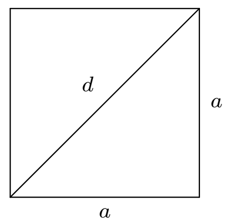
$$d^2 = 2a^2 \quad ili \quad \frac{d^2}{a^2} = 2,$$

ali

$$\frac{d^2}{a^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

dakle

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \quad ili \quad m^2 = 2n^2.$$



Slika 9

Na desnoj strani ove jednačine stoji ceo broj koji je deljiv sa 2, dakle i m^2 je deljiv sa dva pa možemo pisati

$$m = 2\mu,$$

gde je μ opet ceo broj. Prema tome je

$$4\mu^2 = 2n^2 \quad ili \quad 2\mu^2 = n^2.$$

Na isti način zaključujemo ponovo da je n paran broj, tj.

$$n = 2\nu.$$

Vratimo se prvoj razmeri. Biće

$$\frac{m}{n} = \frac{2\mu}{2\nu} = \frac{\mu}{\nu},$$

a to protivreči pretpostavci da se m i n ne mogu skraćivati. Dakle, naša pretpostavka od koje smo pošli sadrži, implicitno, protivrečnost — ona je nemoguća. Prema tome odnos dijagonale i strane nije samerljiv.

Na čelu prethodnog razmatranja spomenuli smo napretke stare helenske matematike u pogledu nalaženja novih činjenica geometrije. Razviće matematike se sastojalo isto tako, a po značaju prvenstveno, u izobražavanju *deduktivne metode* u geometriji. Težište nije više u samom pronalasku neke nove matematičke istine nego u dokazivanju te istine, u logičkom svođenju njenom na neke druge, jednostavnije polazne geometrijske istine. Zatim, dedukcija, a ne samo puka težnja za sređivanjem, dovodi do *sistematisanja* stečenog znanja. Potrebno je bilo izložiti kako, polazeći od naoko najjednostavnijih činjenica prostora, dolazimo postupno, dokazujući stav po stav, do sve daljih i težih stavova. Taj zadatak sistematisanja postavljao se, svakako, rano u grčkoj geometriji i on je urodio onakvim plodom kao što su *Elementi* Euklida. Dalje posmatranje matematike onog doba povezaćemo opet sa imenima nekih od glavnih starih grčkih matematičara i njihovih škola.

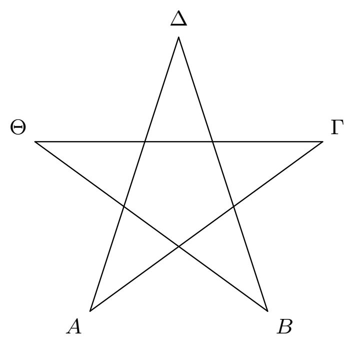
Tales i Pitagora pripadaju 6. veku pre nove ere. U 5. veku postojali su i drugde u Grčkoj poznati „matematičari", delom poznatiji kao filozofi. Takav beše i ***Zenon iz Eleje***, sa svojim *čuvenim paradoksima* u kojima je tobože dokazano da ne postoji kretanje. Prvi paradoks glasi ovako:
„*Ako postoji kretanje, pokretno mora najpre preći polovinu puta, a pre polovine celog puta polovinu njegove polovine, i opet polovinu ove polovine. A ako je broj polovina beskrajan, nemoguće je da beskrajno bude pređeno u konačnom vremenu. Kretanje dakle ne postoji.*"

Zabuna koju tako unosi Zenon karakteristična je za ono doba koje se mučilo oko nesamerljivih veličina. U svemu se ogleda nemoć grčke misli prema beskrajnome. Prethodni „dokaz" sadrži neistinu da se beskrajno mnogo sve manjih polovina ne može preći u konačnom vremenu. Slično stoji i sa ostalim Zenonovim dokazima protiv kretanja.

Jedan od najvećih grčkih geometara je svakako ***Hipokrat sa Hiosa*** koji je živeo oko polovine 5. veka. I on beše trgovac, a kad su mu propali brodovi on je, vodeći parnicu u Atini, prišao bliže nauci i odao se njoj. Kažu da tek sa Hipokratom počinje u geometriji, nekad mnogo hvaljena, „grčka strogost" naučne metode. On brižljivo ređa pretpostavke na osnovu kojih treba da dokaže neki stav. Zatim izvodi konstrukciju, odgovara na sve moguće prigovore, upušta se posebno u svaki pomoćni stav koji mu je u dokazu potreban. Tu, u Hipokrata dolazi možda prvi put do punog izražaja tzv. *metoda redukcije*, tj. svođenje neke teoreme na izvesne druge teoreme koje se pri tome pretpostavljaju kao poznate. Redukcija izvedena sistematski je, u stvari, dedukcija, izvođenje stava iz stava i odgovarajuće nizanje stavova. Dedukcija pretstavlja ujedno već izvesno sistematsko izlaganje cele neke oblasti, recimo u geometriji. Toga u prvi mah nije bilo i Hipokrat je morao pri dokazu svakog novog stava da obavi možda i zamašni posao izricanja onih stavova koje pretpostavljaja i, štaviše, dokazivanja onih stavova koje mora pretpostaviti, a ne sme smatrati poznatim.

Otuda je brzo sazrela misao da se jednom počne od početka i u sistematskom izlaganju izvedu makar samo svi najelementarniji stavovi geometrije. Tada će već lakše biti pri dokazivanju nekog daljeg stava — postojaće ona prva zbirka stavova kao osnova na koju će se geometri moći ukratko pozivati. Takvo sistematsko delo, prvo u matematičkoj književnosti napisao je, vele, sam Hipokrat. Njegovi *Elementi* služili su, bez sumnje, kasnijim naučnicima, pa i Euklidu, kad su prišli sličnom poduhvatu i uopšte, bavili se geometrijom.

Da li je Hipokrat ili neko drugi u njegovo doba, možda i pre njega, uvideo svu praktičnu vrednost uvođenja slova u geometriju. To je jedno od najznačajnijih otkrića. Da bismo tačno i kratko iskazali o kojim je elementima neke geometrijske slike ili oblika reč, imenujemo tačke pomoću slova azbuke. Danas nam je to vrlo obično. Reći ćemo, na primer: „neka je H podnožje normale iz temena C ravnostranog trougla ABC; onda su duži AH i BH jednake, a trougli ACH i BCH dva podudarna pravougla trougla”. Kad bi umesto slovima trebalo ovo opisati samim rečima, teškoća izricanja i, još više, čitanja i razumevanja, bila bi znatna, a kamo li u mnogim drugim, složenijim iskazima geometrije.



Slika 10

No, Hipokrat još nije došao do potpuno skraćenog izražavanja kakvo je i naše danas. On još uvek umesto „tačka A”, „prava b”, u više reči kaže: „tačka na kojoj je slovo A”, „prava na kojoj je zabeleženo b” i slično. No, tu je načelo već pronađeno, a do njega nije bilo lako doći, jer unapred moralo je ljudima biti vrlo neobično i besmisleno vezivati geometrijske pojmove kao što su tačka i prava sa glasovima govora i njihovim pisanim znacima. Geometrijska simbolika pitagorejaca daje nam da zagledamo izbliže u proces kojim je do toga došlo. Petokraki zvezdasti poligon — pentagram, bio je jedan od glavnih simbola njihovih kao što se negde pominje. Oni su neki put stavljali uz svako teme zvezde po jedno slovo (sl. 10), verovatno kao početno slovo izvesne reči, tako da je zvezda simbolizovala uzajamni odnos izvesnih pet kategorija, recimo kosmosa — možda pet „elemenata”. Kada se pak docnije iskristalisalo čisto geometrijsko posmatranje mogli su geometri zadržati slova i služiti se dalje njima u svrhe same geometrije. Tada je, naravno, postalo svejedno koja će se slova kada upotrebiti. Do toga praktičnog pronalaska Hindusi, na primer, nisu nikada došli.

Za istoriju matematike značajan je i ***Platon*** (429–348. pre Hrista). I on je putovao zajedno sa Eudoksom, opet jednim od najvećih grčkih matematičara, u *Egipat*, ne bi li dohvatio još koji zračak drevne egipatske nauke koja se već gasila, osobito u poređenju sa novim procvatom nauke u Grčkoj. I pitagorejci, do kojih je takođe putovao, imali su uticaja na Platona, kako u filozofiji, tako i u matematici. On je na svoj način razradio pomenutu misao pitagorejaca da je tajna svega u broju. Poznato je i često pominjano, da je na ulazu u svoju *Akademiju* u *Atini* Platon postavio reči:

„Neka niko ne ulazi ovamo ako ne zna geometriju."

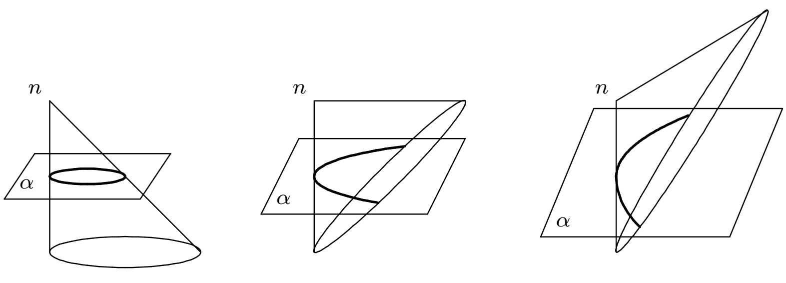
Matematičko, a to u ono doba znači uglavnom geometrijsko obrazovanje, smatralo se temeljom svakog obrazovanja. To nam samo dokazuje koliko se uviđala važnost sređenog, logičkog mišljenja, upotrebe razuma, koji je do prve potpune pobede svoje došao u grčkoj geometriji.

Šta je tačno dao Platon sam u geometriji nije nam poznato, ali sigurno da i njegov rad u geometriji nosi pečat njegove filozofije. Kažu da se on bavio naročito sistematisanjem gradiva zatim ispitivanjem osnova geometrije i da je njegovo postavljanje postulata i aksioma na čelo geometrije (što ćemo mi još videti). Platon je, navodno, doprineo i prečišćavanju geometrijske metode uopšte — jamačno i u stilu svojih *Sokratovih dijaloga.* Pošto je svaki stav sveo na prethodni dospeo je, vele, najzad do definicija, postulata i aksioma. No, možda je tu znatna zasluga prijatelja Platonova, onog iz dijaloga poznatog ***Teeteta***[1].

S Platonom smo već ušli u 4. stoleće. Tada je, možda potstaknut Platonom, ***Leon*** (oko 370. godine pre Hrista) izradio nove *Elemente* jer su Hipokratovi, usled naglog razvića geometrije, već bili zastareli. I ponovo, već trideset godina posle Leona piše ***Teudije*** treće, još potpunije Elemente. Četvrto delo je Euklidovo. U to doba kad je Atina bila glavno središte nauka, postala je potrebna i istoriji matematike i nju je prvi napisao (oko 334. godine pre Hrista) učenik *Aristotelov*, ***Eudem*** koga već spomenusmo.

Savremenik Platonov ***Eudoks*** (410–356. pre Hrista) beše osnovao školu u *Kiziku*, u severozapadnoj *Maloj Aziji.* On je radio naročto na izučavanju geometrijskih proporcija, njegov je tzv. *zlatni presek*, njegova je i tzv. *metoda ekshaustije* ili ispražnjivanja, gde se progresivno, beskrajnim nizovima manjih duži ili tačaka približujemo i zvesnoj duži ili kakvom drugom geometrijskom obliku. Ta metoda približavanja pokazala se plodna, na primer, u posmatranju oblih likova, a ona u suštini već sadrži nauku o racionalnim veličinama. No, pobliže o tome biće reči kasnije. Zasad recimo samo to da se Eudoksu pripisuje glavni deo sadržaja pete knjige Euklidovih *Elemenata.*

Iz ovog razdoblja grčke matematike spomenućemo još samo ***Menehma*** (375–325. pre Hrista), učenika Eudoksova, kao onog geometra koji je, vele, prvi napisao čitavo delo izučavajući krug, elipsu, hiperbolu i parabolu, krive linije koje se jednim imenom nazivaju *konusnim presecima* jer se dobijaju kada se kupa ili konus preseca ravnom površinom. Zna se da je pri tome posmatrao kupe kojima je jedna izvodnica n upravna na jednu ravan α. Tada zavisi od veličine ugla što kupa obrazuje na svom vrhu da li će presek njen sa ravni α biti elipsa, parabola ili hiperbola — ako je ugao oštar biće elipsa, ako je prav biće parabola, a ako je tup biće hiperbola (sl. 11).



Slika 11

[1]Teetet (oko -414 do -369) je bio Sokratov sledbenik i učenik čuvenog *Teodora iz Kirene.*

2.3 Euklidovi elementi

2.3.1 Uvod

Sa ***Euklidom*** (365–275. pre Hrista) počinje drugo, helenističko doba grčke matematike. On beše pozvan iz Platonove Akademije u *Atini* da pređe u *Aleksandriju* oko godine 300. pre Hrista, gde se tada otvarao prvi univerzitet, tzv. *Museion*, koji posta glavno središte nauke antičkog sveta. Euklid beše i prvi upravitelj te visoke škole. Smatra se da je napisao svoje čuvene *Elemente* oko godine 325. dakle još dok beše u *Atini.* To delo je bacilo u senku sve dotadanje pokušaje iste vrste. Iz njega se uglavnom učila geometrija stolećima, sve do danas. Na grčkom naziv glasi Στοιηεια tj. elementi, načela. Uticaj toga dela na kulturu je ogroman, jer iz njega su se ljudi, osobito u doba kad je strogi dogmatizam bio potisnuo nauku, učili ne samo geometriji već preko geometrije logičkom rasuđivanju i dokazivanju izvesnih istina. Otuda je geometrija lebdela mnogima kao ideal razumskog saznanja, kristalne jasnosti i savršenstva nauke i, kroz vekove, kada je naučni život bio potisnut, delo Euklida stajalo je kao putokaz ka nauci nezavisnoj od dogmi i svega što se može podvrgnuti sumnji.

Pa ipak, ni to Euklidovo delo nije savršeno. I ono se može kritikovati i usavršavati. Izvesna kritika je, štaviše, postojala još u starom veku — da i ne pominjemo naše doba. Ali o kritici može biti reči tek na drugom mestu, pošto se, pre svega, upozna stroga naučnost i izvesno relativno savršenstvo *Elemenata.*

Euklid je u svoje delo ugradio svekoliko znanje svoga doba iz geometrije koje je smatrao — ili koje se smatralo — osnovnim, elementarnim. Otud naziv *Elementi.* Nije u njima sadržana sva tadanja geometrija. Sam Euklid je napisao još neka dela iz geometrije. Izrađujući pak *Elemente* on je svakako preradio i dopunio pomenute *Elemente* ranijih pisaca. Uneo je naročito nauku o nesamerljivim veličinama i to vrlo opširno (knjiga X) koju su dotle poznavali samo vodeći geometri, jer ta oblast beše još dosta nova i smatrala se „višom" geometrijom. Uopšte, podela i izbor materijala u *Elementima* Euklida odaje istorijski momenat svoj, stepen do koga se razvila geometrija tada i veliki uticaj najnovijih otkrića.

Evo ukratko koji je sadržaj tih *Elemenata.* Delo je obimno, sastoji se iz 13 knjiga. Njihov sadržaj je ukratko sledeći:

KNJIGE I–VI	*Planimetrija*
KNJIGE VII–X	*Elementarna teorija brojeva*
KNJIGE XI–XIII	*Stereometrija*

U našu nastavu geometrije ušle su knjige I–VI i XI–XII. Knjige I–IV sadrže uglavnom najvažnije stavove o pravoj, uglu, trouglu, četvorouglu, krugu i površini ravnih likova. Knjige V i VI sadrže geometrijske proporcije i sličnost. Veruje se da su knjige I–IV i VI geometrijski rezultati pitagorejske škole, dok knjiga V donosi novu Eudoksovu nauku o proporcijama. Knjige VII–IX sadrže, aritmetička ispitivanja pitagorejaca, a knjiga X tek nauku o nesamerljivim (inkomensurabilnim) veličinama na kojoj je možda najviše radio Teetet, a verovatno i sam Euklid. Knjige IX i XII sadrže elementarne stavove stereometrije o pravoj, ravni, poliedrima i oblim telima (kao što je, na primer, lopta). U poslednjoj, XIII knjizi obrađeni su zasebno pravilni poligoni i poliedri.

Osvrnimo se odmah na razne vrste tvrđenja koje sadrži ovo delo. To su, pre svega, *definicije* u kojima se određuju na izvestan način potrebni geometrijski pojmovi. Zatim imamo dve vrste stavova koji se ne dokazuju, no izriču izvesne osnovne činjenice od kojih polazimo u dokazivanju geometrijskih stavova. To su *postulati* (grčki= αιτεμα, latinski=postulatum, zahtev) i *aksiome* (grčki=αχσιομα = ono što se poštuje, ali Euklid daje drugo ime aksiomama χοιναι, ενοιαι=sveopšti, zajednički pojmovi). Zatim imamo stavove koji se dokazuju i koji se u *Elementima* zovu *pretstavke* (grčki προτασις, latinski propositia=pretstavka, propozicija). Pretstavke se javljaju u obliku tvrđenja uslovljenih odgovarajućim pretpostavkama i tada ih nazivamo *teoreme* (grčki τηεορεμα=razmatrano, razmatranje) ili u obliku zadatka (grčki προβλεμα=rt, zapreka, sporno pitanje). Poneki stav sledi bez dokaza i tada se u *Elementima* zove *posledica* (πορισμα,) poneki služi samo tome da se neki drugi stav dokaže i tada se zove *pomoćni stav* (λεμα). Pominju se najzad *pouke* (σηολια). No, glavno je razlikovati definicije, postulate, aksiome i propozicije.

Ovim povodom progovorićemo koju reč o tim vrstama stavova koji karakterišu ne samo geometriju, nego matematiku uopšte, tj. deduktivnu metodu. U geometriji kao racionalnoj nauci pojmovi se, uopšte uzevši, logički određuju *definicijama*. Pri tome dolaze u obzir, naravno, samo geometrijski pojmovi, a ne oni ostali pojmovi koji se u izricanju stavova javljaju po prirodi samog logičkog mišljenja (na primer pojam „svaki", „neki", „tri", itd.). U definiciji se, dakle, neki novi geometrijski pojam određuje i to pomoću drugih, od ranije već poznatih geometrijskih pojmova. Ako, na primer, definišemo trougao kao ukupnost triju duži koje spajaju tri tačke što ne leže na jednoj pravoj, oslanjamo se na geometrijske pojmove „duž", „tačka" i „prava". Prma tome, možemo zaključiti da već u prvoj definiciji moramo pretpostaviti izvesne geometrijske pojmove kao poznate, i koji nam ostaju nedefinisani. Ti pojmovi zovu se *polazni* ili *osnovni pojmovi*. Naše nastojanje pri izgrađivanju geometrije biće, očigledno, upućeno, pre svega, u prvcu traženja tih osnovnih pojmova. Trudićemo se da pronađemo sve potrebne pojmove od kojh možemo, preko niza definicija, dospeti do svih ostalih geometrijskih pojmova.

Nastojaćemo da nam broj osnovnih pojmova bude što manji. Tako ćemo doći do isvesnog malog broja pojmova koje ćemo ostaviti nedefinisanim. Ali ne treba misliti da se izbor osnovnih pojmova može izvršiti samo na jedan način. Tako bi se, na primer, tačka mogla definisati kao završetak linije, ali bi se i, obrnuto, linija mogla definisati kao izvesna ukupnost tačaka. U prvom slučaju bi nam tačka bila jedan od osnovnih pojmova, u drugom slučaju linija, ali tada bi se tačka mogla definisati. Geometrijske pojmove koje definišemo nazivamo *izvedenim pojmovima*.

Slično razmatranje imamo o geometrijskim stavovima koji iziskuju činjenice geometrije, tj. u kojima se utvrđuju odnosi, a ne uvode novi pojmovi. Opšte uzevši, geometrijske činjenice se logički dokazuju. Pri tome se neka nova geometrijska činjenica utvrđuje na osnovu već poznatih geometrijskih činjenica koje, dakle, u dokazu pretpostavljamo, o koje se oslanjamo. Na primer, lako je dokazati da je zbir uglova svakog trougla jednak zbiru dva ugla, ako znamo da se kroz svaku tačku van koje bilo prave može povući jedna jedina paralelna prava. Otud možemo zaključiti da se i u dokazu prvih stavova koje u geometriji dokazujemo moramo već oslanjati o neke geometrijske činjenice koje pri tome smatramo poznatim. To znači da pre svih dokazivanih stavova moramo navesti izvestan broj stavova koji će nam ostati nedokazanim. To su *polazni* ili *osnovni stavovi*. U prethodnom primeru dokazujemo da je zbir uglova trougla jednak zbiru dva prava ugla pomoću stava da u ravni postoji kroz tačku van neke prave samo jedna prava uporedna prvoj pravoj. Ovaj drugi stav uzima se često kao jedan od polaznih stavova i ne dokazuje se. No, mogli smo i obratno, izabrati stav o zbiru uglova trougla za polazni stav, a tada bismo pomoću njega lako dokazali i onaj drugi, o uporednoj pravoj. Polazne, osnovne stavove nazivamo danas bilo *aksimama* bilo *postulatima*, ne podrazumevajući više pod aksiomama ono što su podrazumevali stari grčki geometri. Sve stavove koje dokazujemo nazivamo pak *izvedenim stavovima*.

Naravno, deduktivnu nauku odlikuje nastojanje da što više stavova dokažemo, tj. da nam broj nedokazivanih stavova bude što manji. No, potrebno je i da im broj ne bude manji nego što je neophodan. Ako bi se naime pošlo od manje polaznih stavova nego što je potrebno ne bi se iz njih mogla izvesti cela geometrija, mnogi geometrijski stavovi ostali bi nedokazani. Ova napomena upućuje nas u jedno od glavnih pitanja pri izgrađivanju geometrije: Je li broj osnovnih izabranih stavova zaista najmanji? Je li, na drugoj strani, dovoljan? Kažemo da svi osnovni stavovi geometrije obrazuju *sistem* i da je taj sistem *potpun* ako iz njega možemo izvesti sve geometrijske stavove. Ako broj osnovnih stavova ne bi bio najmanji mogući broj, značilo bi da neke od tih stavova možemo dokazati pomoću ostalih osnovnih stavova, da osnovni stavovi nisu među sobom logički nezavisni. Oni treba da budu *nezavisni*.

Osim geometrijskih pojmova i stavova javljaju se u geometriji i drugi, opštiji elementi, neophodni u njenoj logičkoj zgradi. To su, na primer, izvesni pojmovi aritmetike kao, na primer, „jedan”, „dva”, itd. (jer valjda je reč o „jednoj pravoj”, o „tri tačke” itd.), zatim pojmovi opšteg logičkog značaja („neki”, „ili”, „ako” itd.). To su i neki aritmetički i algebarski stavovi kao, na primer: ako je $a = b$ i $b = c$ tada je i $a = c$, itd. Poznavanje tih opštijih pojmova i stavova se u geometriji pretpostavlja, o njima se ne govori, oni ne pripadaju predmetu geometrije.

Pređimo sad na razmatranje pojedinih „knjiga” Euklidovih *Elemenata*.

2.3.2 Prva knjiga

Definicije

1. *Tačka* je ono čiji je deo nikakav.
2. *Linija* (crta) je dužina bez širine.
3. *Krajevi linije* su tačke.
4. *Prava linija* je ona koja je podjednako (ravnomerno) postavljena između svojih tačaka.
5. *Površina* je ono što ima samo dužinu i širinu.
6. *Krajevi površine* su linije.
7. *Ravna površina* je ona koja je ravnomerno postavljena između svojih pravih.
8. *Ravan ugao* je u jednoj ravni međusobni nagib dveju linija koje se sastaju a nisu postavljene u isti pravac.
9. Kada su linije što sadrže rečeni ugao prave, ugao se zove *pravolinijski*.
10. Kad prava, padnuvši na pravu, stvara dva susedna ugla jednaka, svaki od dva ugla je *prav*, a prava koja pada zove se *upravna* (normalna) na onu na koju pada.
11. *Tup* ugao je onaj koji je veći od pravog.
12. *Oštar* je onaj koji je manji od pravog.
13. *Rub* je ono što je nečemu kraj.
14. *Lik* (figura) je ono što je sadržano u jednom ili više rubova.
15. *Krug* je ravan lik sadržan jednom linijom da sve prave što padaju na krug iz jedne tačke postavljene u tom liku, jesu jednake među sobom.
16. Ta tačka se zove *središte kruga*.

itd.

Skratimo! Sad se definiše *prečnik*, *polukrug*, *pravolinijski lik*, *trostran lik*, *četvorostran*, *mnogostran*, pa *ravnostrani trougao*, pa *raznostrani*, *pravougli*, *tupougli*, *oštrougli*, zatim se definiše *kvadrat*, *pravougaonik*, *romb*, *romboid*, *trapez* (trapezi su mu svi ostali nepravilni četvorougli) i najzad:

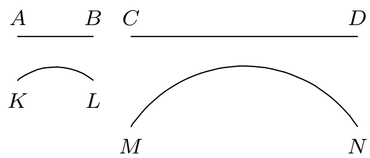
23. *Paralelne prave* su one koje postoje u istoj ravni, a produžene u beskraj na obe strane, nigde se ne sastaju.

Pogledajmo izbliže ove definicije.

Definiciju 1 ne možemo smatrati definicijom u strožijem smislu te reči jer nije ni adekvatna. Šta je i šta bi sve moglo biti ono čiji je deo „nikakav" ili „ništa"? To ne mora biti tačka. I samo „ništa" je nešto čemu je deo ništa. Pravilna definicija nekog pojma treba da sadrži prvi viši pojam i specifičnu oznaku što se definiše, ali „ono" je isuviše širok viši pojam.

Ni *definicija* 2 ne ispunjava što od definicije tražimo. Najviše što se za nju može reći to je da ovlašno daje pretstavu o tome šta je linija ali ko unapred ne zna šta je linija teško će to saznati iz definicije. Ona, u stvari, sabija niz složenih pretstava u prividni oblik definicije. Nacrtana linija ima svoju dužinu i širinu, a geometrijski lik treba zamisliti, takoreći, da se beskrajno stanjuje tako da, najzad, izgubi potpuno širinu. Zatim „dužina" nije uopšte viši pojam pojma „linija" i, najposle, šta je dužina? Sve da smo ispravno sveli pojam linije na pojam dužine, ostaje ovaj pojam nedefinisan, a on nije jednostavniji od pojma linije.

Definicija 3 pretpostavlja pojam kraja i pomoću njega definiše vrstu kraja za linije — to su tačke. Euklidu se, valjda, pojam kraja činio toliko poznatim da nije smatrao da ga treba definisati. Na kraju, kao opšti pojam u geometriji „kraj" je nešto složeno (na primer, kraj površi je neka linija itd.) i pre bi trebalo definisati kraj nego tačku i liniju.

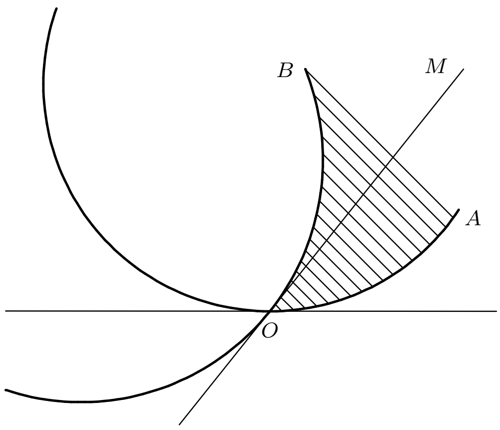


Slika 12

Definicija 4 izražava, opet na ovlašan način, svojstvo prave da je, mogli bi smo takođe reći, svaki komad prave sličan svakom drugom komadu prave. Krug već nema to svojstvo — što je luk nekog kruga manji, to je sličniji pravoj duži (sl. 12, duž AB je slična duži CD, ali luk KL nije sličan luku MN).

Definicija 5 je slična definiciji 2. Mogla bi biti potpuno analogna: „površina je širina bez debljine", ali time ne bi bila bolja.

Iz ovih napomena vidimo da Euklidovim definicijama možemo stavljati razne zamerke. Možemo im dati vrednost izvesnih uputstava koja upućuju čitaoca da precizira svoje geometrijske pojmove. Danas smo u geometriji načisto s tim šta treba da bude definisano. Svi geometrijski pojmovi ne mogu se definisati jer već u prvoj definiciji, ako je ispravna, definišemo izvestan geometrijski pojam na osnovu nekog ili nekih geometrijskih pojmova koje pri tome pretpostavljamo, smatramo ih poznatim. Dakle, u svakom slučaju, moramo izabrati izvestan minimalan broj geometrijskih pojmova koje nećemo definisati, ali na osnovu kojih ćemo definisati sve ostale geometrijske pojmove. Ti pojmovi nazivaju se obično *osnovnim pojmovima*. Izaberemo li, na primer, *tačku*, *pravu* i *ravan* kao osnovne pojmove, moći ćemo sve ostale geometrijske pojmove definisati (docnije će se o tome tačnije govoriti). Nastavimo razmatranje Euklidovih definicija.



Slika 13

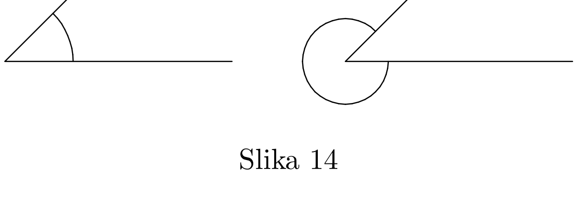
U *definiciji* 8 definiše se ugao kao međusobni nagib dveju linija. Pojam ugla svodi se, dakle, na pojam nagiba koji nije ni malo prostiji od pojma ugla, dakle, tom definicijom se ne postiže glavni cilj definicije da se složeniji pojam izvede iz prostijih. Zanimljivo je da Euklid ovde definiše pojam ugla opštije nego što mi, po običaju, činimo. Mi se zadovoljavamo pojmom pravolinijskog ugla, a ugao između dve krive linije (sl. 13) svodimo na pravolinijski, naime, na ugao između tangenata na krive linije u tački njihova uzajamnog preseka. Pravolinijski ugao nam je dovoljan za sve svrhe i prema tome, mogao je, izvesno, i Euklid bez ovoga šireg ugla.

Ugao je, svakako, jedan od najelementarnijih i najprostijih geometrijskih oblika. Njega je teško definisati kao i pravu i ravan, ali redovno se smatra potrebnim da se definiše i valjda ga još niko nije uzeo za osnovni pojam mada bi se i to moglo. Definicije ugla do kojih se došlo vrlo su različite, no možemo ih uglavnom podeliti u četiri vrste:

1. Definicije kao ova Euklidova, u kojima definišemo ugao kao nagib ili, na primer, kao razliku između dve poluprave sa zajedničkom polaznom tačkom (zadržimo se na pravolinijskim uglovima) pripadaju jednoj grupi. Slaba tačka tih definicija je to što pretpostavljaju pojam nagiba ili pojam razlike u neobičnoj primeni na dve poluprave, a time se odstupa od poznatog pojma razlike.

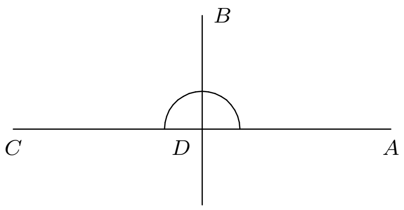
2. Poznati matematičar *Hilbert* definiše ugao kao skup dveju polupravih sa zajedničkim ishodištem. Slaba tačka te definicije je to što dve poluprave sa zajedničkim ishodištem određuju dva ugla od kojih je, obično, jedan udubljen, a drugi ispupčen, te Hilbertova definicija važi samo dok pretpostavljamo da je reč samo o jednoj od te dve vrste uglova, recimo, samo o udubljenim uglovima.

3. Ugao se definisao i pomoću obrtanja poluprave oko njenog ishodišta kazujući, na primer, da je ugao veličina tog obrtanja. I takva definicija je nejasna kao i prva i sem toga, osniva se na kretanju, pojmu koji, strogo uzev, ne spada u geometriju već u mehanihu (u nauku o kretanju, kinematiku).



Slika 14

4. Ugao se definiše kao deo ravni ograničen dvema polupravama sa zajedničkim ishodištem pa, kako ima dva takva dela, dodaje se — onaj deo koji (pod pretpostavkom da poluprave ne padaju u istu pravu) ne sadrži produženja tih polupravih. Ovaj se naziva *udubljen ugao*, a onaj koji ih sadrži *ispupčen ugao* (sl. 14). Ovakvu definiciju smatramo logički najispravnijom ali ona pruža pretstavu ugla koja odstupa od uobičajene pretstave, od psihološke pretstave pojma ugla koja sadrži među raznim elementima i pretstave kretanja, okretanja i nagiba.



Slika 15

Definicija 10 (sl. 15) pretpostavlja pojam susednog ugla koji pak nije prethodno definisan. Ta pogreška dolazi jamačno otud što je Euklid smatrao da je ugao već definisao, a pojam „susedni”, uzet nezavisno, nije geometrijski pojam nego je opšteg značaja pa se, prema tome, ne bi morao definisati. Ali, mada je to tačno za pojam susedstva, nije samom sobom jasno šta ćemo u odnosu na uglove smatrati susednim i stoga, oba pojma zajedno, tj. „susedni ugao” predstavlja određen geometrijski pojam koji treba definisati. Ni šta znači „pasti na pravu” nije ranije objašnjeno mada ovde „pasti” ima određeno geometrijsko značenje, upravo značenje sečenja — kad jedna prava seče drugu pravu.

I *definicije* 11 i 12 imaju nedostataka. „Tup ugao je veći od pravog” — ali šta znači „veći” ili „manji” ugao? Euklid je ostao dužan tu definiciju.

Definicija 15 je u suštini tačna samo što nije najodređenije izražena. Ona nam još jedanput pokazuje da pod pravom treba u Euklida zamišljati duž, a ne beskrajnu pravu.

I *definicija* 23 je ispravna ukoliko ne iziskujemo potpunu strogost jer tada ćemo zahtevati da se prethodno definiše šta znači „produžiti” neku duž, šta je to „strana” u odnosu na neku duž ili pravu i šta je „sastajanje” — ukoliko nam to nisu osnovni pojmovi.

Postulati

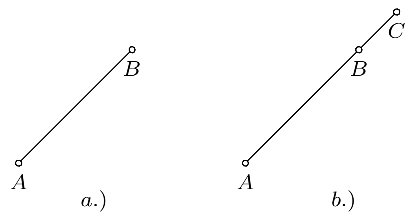
1. Zahteva se (da je moguće) od svake tačke ka svakoj drugoj tački povući pravu liniju,
2. i konačnu pravu, sledeći njen pravac, neprestano produžavati,
3. i sa svakim središtem i razmakom opisati krug,
4. i da svi pravi uglovi budu jednaki među sobom,
5. i ako jedna prava padne preko dve prave i učini da su unutrašnji uglovi na istoj strani manji od dva prava, te dve prave produžavane u beskraj — da se sastaju na onoj strani gde su uglovi manji od dva prava,
6. i da dve prave ne sadrže prostora.

Možemo reći da postulati sadrže one geometrijske istine koje se dokazuju. U Euklidovim *Elementima* nalazimo šest postulata (u nekim rukopisima samo prvih pet). Možemo ih podeliti odmah na dve vrste:

1. Postulati 1–3 treba da u daljem izvođenju geometrije daju svakad kad ustreba, pravo da se izvrši izvesna elementarna geometrijska konstrukcija — da se dve tačke spoje pravom, da se uočena prava (danas bismo rekli duž) produži koliko god treba i da se opiše krug koji god zatreba.

2. Ostala tri postulata imaju drugi karakter. U njima se utvrđuju izvesne geometrijske činjenice i kad bi se dokazivale, to bi bile teoreme. To su, dakle, geometrijski stavovi koje stavlja Euklid na čelo svoga dela ne dokazujući ih.

Od nekih stavova mora se u geometriji, naravno, uvek poći, da bi se tek na osnovu tih polaznih činjenica mogle dokazivati ostale. Mi te polazne stavove nazivamo danas obično *osnovnim stavovima* ili *aksiomama*, odstupajući od naziva kako su ih upotrebljavali stari Grci.

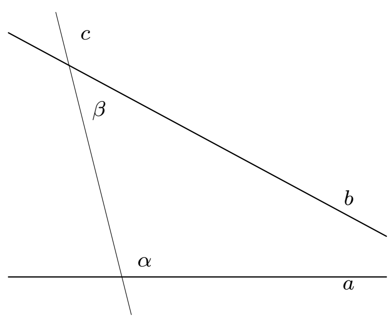


Slika 16

I prvim postulatima mogli bismo, uostalom, dati oblik sličan poslednjim. Umesto postulata 1 možemo reći: Zahteva se da kroz svake dve tačke prolazi prava. To znači, kako je prava Euklidu zapravo duž, da se svake dve tačke A i B mogu spojiti jednom duži (sl. 16a). Umesto postulata 2 možemo, na primer, reći: Kakva god bila duž AB postoji tačka C takva da duž AC sadrži prethodnu duž AB (sl. 16b). Tim stavom bila bi zajamčena beskrajna produživost svake duži. Umesto postulata 3 možemo pak reći: Sa svakim središtem, u svakoj ravni, sa svakim poluprečnikom, postoji krug. Tada bi svi postulati imali egzistencijalni oblik, tj. njima bi se utvrdjivalo postojanje (ili pak nepostojanje) nečega.

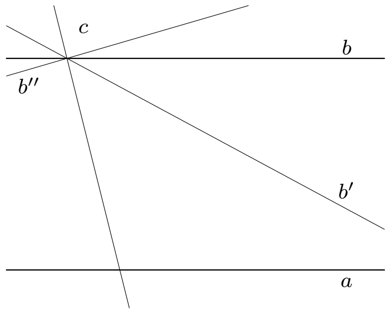
Povodom postulata 1 i 2 napomenimo još jednom da su stari Grci pod pravom zamišljali, u stvari, konačan deo prave, tj. duž. Time su bili bliži konkretnoj pretstavi prave koja, bilo da se nacrta ili pretstavi u konkretnom prostoru, nije nikad beskrajna. Beskrajna prava je viši stepen apstrakcije kojim se postiže izvesno uprošćavanje, jer tada više nije potrebno produžavati datu pravu, postojanje preseka dveju pravih ne zavisi više od njihova produžavanja, on postoji uvek osim kad su prave uporedne ili ako se u prostoru mimoilaze. Ali beskrajna prava je udaljavanje od neposredne geometrijske stilizacije prostornih iskustava koje stvarno posedujemo. Istina, da li tvrdimo sa Euklidom da se prava može beskrajno produžavati ili odmah tvrdimo da je beskrajna, izlazi na isto. No, ipak je izvesna razlika. Možemo reći da je Euklidova prava *potencijalno beskrajna*, a naša *aktualno beskrajna*. Grci kao da se nisu usuđivali uvesti u geometriju beskrajno.

Postulat 4 ustanovljuje da su svi pravi uglovi jednaki među sobom. Potrebu tog stava Grci su uvideli i učinilo im se iziskuje nešto tako osnovno, da ga treba istaći među postulate.



Slika 17

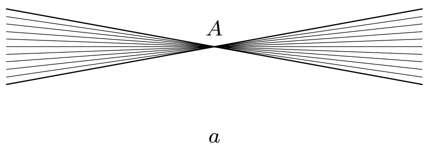
Postulat 5 ne izriče tako jednostavnu činjenicu prostornih oblika. Reč je o tri prave, zapravo o tri duži, a, b, c u jednoj ravni (ovo je trebalo izreći) o kojima se tvrdi da jedna — c — seče druge dve, zatim, reč je o dva unutrašnja ugla — α i β — čiji zbir iznosi manje od zbira dvaju pravih uglova i, na posletku, o produžavanju dveju duži a i b na dotičnoj strani (sl. 17). Zbog te složenosti mnogi su se trudili da taj postulat dokažu. Činilo im se da tako složen stav koji ne iskazuje najočigledniju činjenicu ne bi trebalo da bude polazan stav nego teorema. To je čuveni *peti Euklidov postulat* o paralelnim pravama. U njemu nije neposredno reč o uporednim pravama ali na njemu se u *Elementima* temelji svako razmatranje uporednih pravih.



Slika 18

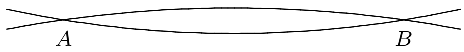
Ako, naime, prava c seče dve prave a i b koje pripadaju istoj ravni i ako se, po postulatu 5, prave a i b seku kad je zbir dva odgovarajuća unutrašnja ugla manji od dva prava ugla, one će se seći i kada je taj zbir veći od dva prava ugla, jer tada će na suprotnoj strani prave c taj zbir biti manji od dva prava ugla. Dakle, prave a i b se ne moraju seći jedino ako je zbir tih dvaju uglova tačno jednak zbiru dvaju pravih uglova, a to biva samo s jednom pravom b između svih koje prolaze kroz istu tačku prave c. Drugim rečima, kroz neku tačku (presek pravih b i c) postoji najviše jedna uporedna prava datoj pravoj a (sl. 18).

Danas iskazujemo u obliku tog poslednjeg stava postulat o paralelnim pravama. Kao što taj stav sledi iz Euklidova petog postulata tako i obratno, iz tog stava sledi Euklidov peti postulat. Dakle, oba uočena stava, Euklidov i ovaj drugi, jesu ekvivalentni i mogu podjednako stojati kao polazni stav u razmatranju paralelnih pravih, pa i paralelnih ravni u prostoru.



Slika 19

Dugi uzaludni pokušaji da se peti postulat dokaže urodio je plodom tek u prošlom stoleću, otkrićem takozvane *ne-euklidske geometrije*. Nju je prvi izneo Lobačevski, potom Boljaj. Tražeći da dokažu Euklidov peti postulat geometri su, na posletku, uvideli da se i bez njega može nizati stav za stavom i tako izgraditi čitava geometrija koja će se, dodoše, unekoliko razlikovati od geometrije Euklida, geometrije koja odgovara prostoru u kome živimo, no koja je logički isto tako besprekorna kao Euklidova. Ta druga geometrija nazvana je neeuklidskom geometrijom. Ona se posebno zove po Lobačevskom, *apsolutna* *geometrija*. U njoj se ne tvrdi da se kroz tačku van prave može povući samo jedna paralelna prava datoj pravoj. No, štaviše, može se tvrditi i suprotno iskustvu, da se kroz tačku A van prave a može povući više od jedne paralelne prave, a tada ih ima beskrajno mnogo. No, to ne možemo nacrtati, jer ne odgovara prirodi našeg prostora ili, može se nacrtati, no slika je pogrešna (sl. 19). Pa i tada, s tom, iskustvu oprečnom pretpostavkom, može se izgraditi geometrija, neeuklidska, koja je logički isto tako besprekorna kao o euklidska. Uzgred rečeno, ako neeuklidska geometrija i ne odgovara prostoru našeg neposrednog iskustva na zemlji, prema teoriji relativnosti ona odgovara (u složenijem obliku nego taj što ocrtasmo) strukturi vasione.



Slika 20

Postulat 6 smo već dodirnuli u prethodnim napomenama. Po njemu, ako dve prave imaju dve zajedničke tačke, podudaraju se u svim svojim tačkama, „ne sadrže prostora”, kako stoji ovlašno u *Elementima*. Dakle, postulati 1 i 6 spadaju, u neku ruku, zajedno. Prema prvome postoji uvek prava koja prolazi kroz dve tačke, po poslednjem postoji samo jedna takva prava (dakle ne kao na sl. 20).

Aksiome

1. Ono što je jednako nečem jednako je među sobom.
2. I ako se jednakom jednako doda, celine su jednake.
3. I ako se jednakom oduzme jednako, ostaci su jednaki.
4. I ako se nejednakim doda jednako, celine su nejednake.
5. I ako se nejednakim oduzme jednako, ostaci su nejednaki.
6. I ono što je nečemu dvostruko jednako je među sobom.
7. I ono što je polovina nečemu jednako je među sobom.
8. I što se podudara među sobom, jedanako je među sobom.
9. I celina je veća od dela.

Kao što vidimo, u *Elementima* aksiome treba da sadrže one osnovne istine čija priroda nije samo geometrijska već šira, čije je važenje opštije, a koje su potrebne radi dokazivanja geometrijskih stavova, teorema i problema. Zato su te „aksiome” i nazvane sveopštim pojmovima, dakle, onim što treba da se zna unapred, a što ima opšte važenje. Danas se u izlaganju geometrije ne iznose takve „aksiome” nego se ukratko kaže da su u geometriji pretpostavljene elementarne istine osnovnih matematičkih disciplina koje posmatraju broj i množinu, dakle, pretpostavlja se, pre svega, aritmetika i elementarna algebra, jer, na primer, sa brojevima imamo neprestano posla i u geometriji — čas je reč o dve prave čas o tri ravni itd. Reč je, zatim, o merenju duži i uglova ili površina, a mere su brojevi. Kad bismo hteli da ispred geometrije izložimo sve što iz aritmetike pretpostavljamo trebalo bi izneti čitav jedan odlomak te grane matematike, a to nije stvar same geometrije. Euklid je pak verovao da u ovih devet aksioma može obuhvatiti sve osnovne istine čija je priroda, recimo, opšte matematička.

Pogledajmo ih redom.

Aksioma 1 je neki opšti logički stav. Euklid ga pominje jer će ga primenjivati na geometrijske veličine (na primer, ako su dve duži jednake trećoj, jednake su među sobom). Ali taj stav ne važi samo za geometrijske veličine nego gde god se u granicama važenja formalne logike može govoriti o jednakosti nečega s nečim.

Aksioma 2 pokazuje već jasno da je reč o veličinama, jer njima (ili količinama) može se nešto dodati (ili oduzeti). Ako po metodi naše algebre označimo veličine slovima (mogu to biti i geometrijske veličine) aksiome 1–7 izražavamo ovako:

1. Ako je $a = b$ i $a = c$ takođe je $b = c$;
2. Ako je $a = b$ i $c = d$ takođe je $a + c = b + d$;
3. Ako je $a = b$ i $c = d$ takođe je $a - c = b - d$;
4. Ako je $a \neq b$ i $c = d$ takođe je $a + c \neq b + d$;
5. Ako je $a \neq b$ i $c = d$ takođe je $a - c \neq b - d$;
6. Ako je $a = b$ takođe je $2a = 2b$;
7. Ako je $a = b$ takođe je $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$.

U *aksiomi* 8 Euklid izražava da je podudaranje dvaju geometrijskih objekata merilo za njihovu „jednakost”. Pod jednakošću Euklid podrazumeva tu potpunu jednakost veličine i oblika, a ne jednakost površina ravnih likova. Mi tu potpunu jednakost veličine i oblika nazivamo „podudarnost” (ili kongruentnost) za razliku od površinske jednakosti.

U poslednjoj aksiomi Euklid iskazuje opštu činjenicu da, gde god govorimo o delu i celini nečega, a gde možemo govoriti i o veličini, celina je veća od dela. To je istina, na primer, kad imamo neki konačan broj, ili neki geometrijski oblik u konačnom prostoru. Ali ako je celina beskonačna to više nije istina kao što može pokazati sledeći primer:

Prirodnih brojeva 1,2,3,... itd. ima beskrajno mnogo, neparnih prirodnih brojeva ima takođe beskrajno mnogo: prvi, drugi, treći, itd. a to su 1,3,5,... itd. Samim tim što rekosmo prvi, drugi, treći utvrdili smo da svakom neparnom broju odgovara zaseban prirodan broj — broju jedan isti taj broj, broju tri broj 2, broju 5 broj 3, broju 7 broj 4 itd. Dakle, u ovom određenom smislu ima neparnih brojeva isto onoliko koliko je prirodnih brojeva. Pa ipak, množina neparnih brojeva je samo deo prirodnih brojeva. No, ta napomena ne važi u oblasti u kojoj se kreću stavovi *Elemenata*.

Stavovi Knjige I

Evo kako glasi prvih pet stavova ili „pretstavki”:

Pretstavka 1: *Na datoj konačnoj pravoj sagraditi ravnostran trougao.*

Pretstavka 2: *U datu tačku postaviti pravu jednaku datoj pravoj.*

Pretstavka 3: *Date su dve nejednake prave; otseći od veće pravu jednaku manjoj.*

Pretstavka 4: *Ako dva trougla imaju dve strane jednake dvema stranama, svaka svakoj, i ako imaju jednake uglove sadržane između jednakih pravih, oni će imati i osnovicu jednaku osnovici, trougao će biti jednak trouglu i ostali uglovi biće jednaki ostalim uglovima, svaki svakom, naime oni koji su nalegli na jednake strane.*

Pretstavka 5: *U ravnokrakom trouglu uglovi na osnovici jednaki su među sobom i ako se produže jednake strane uglovi ispod osnovice biće takođe jednaki među sobom.*

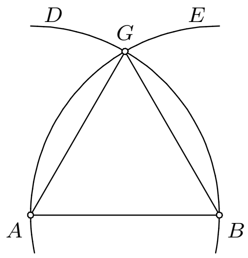
Kako odmah vidimo stavovi 1–3 su probleme, a stavovi 4 i 5 su teoreme. Stavovima 1 i 2 određeno je, u stvari, pomoću geometrijske konstrukcije, prenošenje duži. To je predmet pretstavke 2, s tim ograničenjem što se data duži tačka nalaze u jednoj ravni. No, lako je otud preći u prostor, dakle, odrediti konstrukciju za prenošenje date duži na ma koju pravu počev od ma koje tačke na toj pravoj. Pretstavka 1 je je potrebna u dokazu pretstavke 2. Napomenimo da bi se, isto tako, mogla odrediti konstrukcija za prenošenje uglova. Tada bi se podudarnost svih geometrijskih oblika mogla definisati pomoću tih konstrukcija što pretpostavlja samo pojmove tačke, prave, ravni i kruga. Ali za uglove nije Euklid doneo analognu konstrukciju i otud mu je podudarnost ostala ovlašno zasnovana.

Pretstavka 4 je takozvani prvi stav o podudarnosti trouglova gde se pretpostavlja jednakost dveju strana i zahvaćenog ugla u oba trougla. Tu znači „trougao će biti jednak trouglu" da će oba trougla biti podudarna.

Pošto smo upoznali kako pomenutu stavovi glase iznećemo, primera radi, celokupni tekst koji se odnosi na pretstavke 1 i 4.

Pretstavka 1.

[1] Na datoj duži sagraditi ravnostran trougao.
[2] Neka bude AB data duž.



Slika 21

[3] Treba sagraditi ravnostran trougao na duži AB (sl. 21).

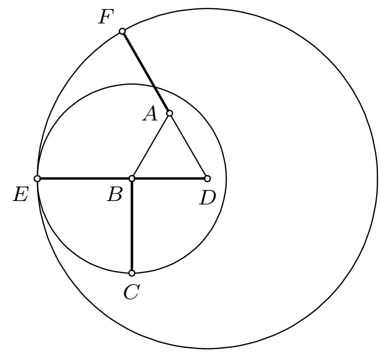
[4] Iz središta A razmakom AB opišimo krug BGD (postulat 3) i, sem toga, iz središta B razmakom BA opišimo krug AGE i iz tačke G gde se krugovi uzajamno seku povucimo do A i B duži GA i GB (postulat 1).

[5] Kako je, naime, tačka A središte kruga BGD, duž AG je jednaka duži AB (definicija 15), zatim, kako je tačka B središte kruga AGE, duž BG je jednaka duži BA. Dokazano je pak da je duž GA jednaka duži AB, dakle, svaka od duži GA i GB jednaka je duži AB, no ono što je nečem jednako, jednako je među sobom (aksioma 1). Dakle, duž GA je jednaka duži GB, dakle, tri duži GA, AB, BG jednake su među sobom.

[6] Dakle, trougao ABG je ravnostran (definicija 24) i sagrađen na datoj duži AB, što je trebalo uraditi.

Brojeve ispred stavova dodali smo mi, isto tako u zagradama postulate, aksiome i definicije na kojima se dotično tvrđenje osniva. Umesto „konačna prava" ili „prava" stavili smo, prema našem nazivu — *duž*.

Kako o toj pretstavci, tako o svakoj, u svih 13 knjiga *Elemenata* nalazimo sadržaj raščlanjen na šest delova. Jedino ukoliko će negde neki od tih delova biti nepotreban moći će se izostaviti, ali prvi, peti i šesti nikad. Po Proklusu [1] je sama *pretpostavka*, iskazivanje stava gde se kaže šta je dato, a šta se traži, [2] je *izlaganje (ekspozicija)*, iznošenje određenog lika obeleženog određenim slovima, [3] je *određivanje (determinacija)* onoga što treba uraditi s likom izloženim u [2], [4] je *konstrukcija (građenje)*, kojom treba dograditi dati lik u svrhu dokaza, [5] je *dokaz* i [6] je *zaključak*. Poslednje reči su, redovno, „što je trebalo uraditi" ili „što je trebalo dokazati" prema tome da li propozicija ima oblik probleme ili teoreme.

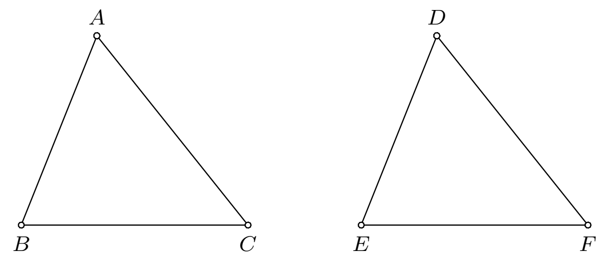


Slika 22

U stavu 2 „postavlja” se data duž u datu tačku na sledeći način: Neka je A data tačka i BC data duž (sl. 22). Prvo se na duži AB konstruiše ravnostran trougao ABD, zatim se iz tačke B opiše krug s poluprečnikom BC i na njemu odredi tačka E u preseku s pravom BD. Tada se iz tačke D opiše krug s poluprečnikom DE i na njemu odredi tačka F u preseku s pravom AD. Jednake su duži BC i BE, zatim DE i DF pa, kako su duži DB i DA jednake, jednake su i duži BE i AF. Dakle, duž BC jednaka je duži AF, tj. AF je tražena duž.

Pretstavka 4.

[1] Ako dva trougla imaju dve strane jednake dvema stranama, svaka svakoj, i ako imaju jednake uglove sadržane između jednakih pravih, oni će imati i osnovicu jednaku osnovici, trougao će biti jednak trouglu i ostali uglovi biće jednaki ostalim uglovima, svaki svakom, naime oni koji su nalegli na jednake strane.



Slika 23

[2] Neka budu ABC, DEF dva trougla kojima su dve strane AB i AC jednake dvema stranama DE i DF, naime, AB spram DE i AC spram DF, i ugao BAC jednak uglu EDF (sl. 23).

[3] Kažem da je i osnovica BC jednaka osnovici EF, trougao ABC biće jednak (podudaran) trouglu DEF i ostali uglovi biće jednaki ostalim uglovima, naime, oni koji su nalegli na jednake strane, tj. ugao ABC uglu DEF i ugao ACB uglu DFE.

[Tačka [4] nedostaje.]

[5] Jer, ako se trougao ABC postavi na trougao DEF i ako se [prema tome] tačka A stavi na tačku D i duž AB na duž DE, tada će se tačka B takođe poklopiti sa E, jer AB je jednako DE.

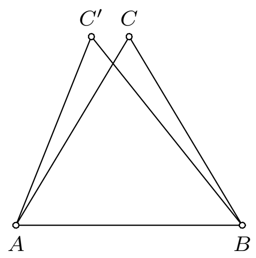
Opet, ako se AB poklapa sa DE, duž AC će se takođe poklopiti sa DF, jer je ugao BAC jednak uglu EDF (slaba tačka dokaza), otud će se tačka C takođe poklopiti sa tačkom F, jer je AC jednako DF.

Ali B se takođe poklapa sa E, otud će se osnovica BC poklopiti sa osnovicom EF, Jer ako se B poklapa sa E i C sa F, a osnovica BC se ne bi poklapala sa osnovicom EF dve duži bi zatvarale prostora, što je nemoguće (postulat 6). Zato će se osnovica BC poklopiti sa EF i biće joj jednaka. Tako će se celi trougao ABC poklopiti s celim trouglom DEF i bić mu jednak. I ostali uglovi poklopiće se sa ostalim uglovima i biće im jednaki, ugao ABC uglu DEF, a ugao ACB uglu DFE.

[6] Zato, ako dva trougla imaju dve strane jednake dvema stranama, svaka svakoj, i ako imaju jednake uglove sadržane između jednakih pravih, oni će imati i osnovicu jednaku osnovici, trougao će biti jednak trouglu i ostali uglovi biće jednaki ostalim uglovima, svaki svakom, naime oni koji su nalegli na jednake strane, što je trebalo dokazati.

Bacimo još koji pogled na stavove prve knjige *Elemenata.* Stav 6 je obratan stavu 5, njemu je pretpostavka ono što je zaključak stavu 5, i obratno. On glasi:

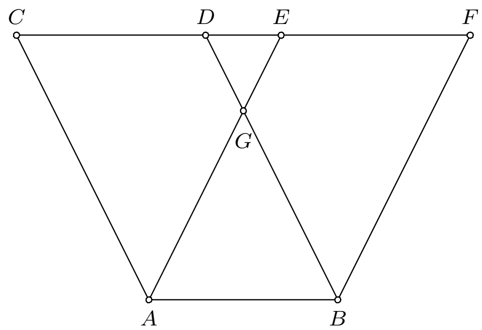
Ako su u trouglu dva ugla među sobom jednaka, strane nalegle na jednake uglove su takođe jednake među sobom.



Slika 24

U stavu 7 dokazuje se vrlo elementarna činjenica da u jednoj ravni sa iste strane neke duži AB (sl. 24) ne postoje dve razne tačke C i C' tako da bude $AC = AC'$ i $BC = BC'$. Stav 8 je takozvani *treći stav o podudarnosti trouglova* (kad su tri strane jednog trougla jednake trima stranama drugog trougla).

Zatim dolaze četiri probleme. U stavu 9 se raspolovljuje ugao, u stavu 10 raspolovljuje se duž, u stavu 11 podiže se upravna iz tačke na pravoj, u stavu 12 se spušta upravna iz tačke na pravu, itd. Tek sa stavom 27 počinje se govoriti o paralelnim pravama, a u stavu 29 primenjuje se prvi put peti postulat. U stavu 32 dokazuje se da je u svakom trouglu zbir uglova jednak zbiru dva prava ugla.

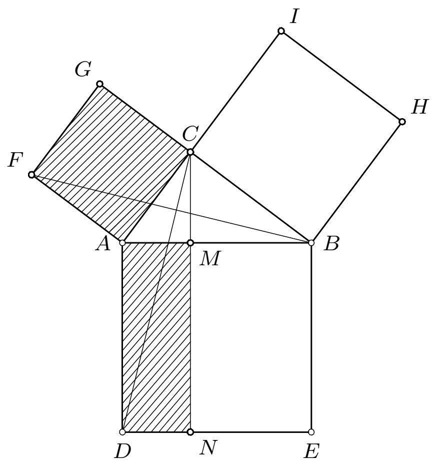


Slika 25

Stavom 35 dokazuje se da su paralelogrami s istom osnovicom i visinom jednaki, no sad u smislu jednakosti površina. U svrhu dokazivanja razmatraju se dva paralelograma $ABCD$ i $ABEF$ (sl. 25). Pri tome, strane CD i EF pripadaju istoj pravoj. Uzima se da one zahvataju jedna drugu. Prvo se dokazuje da su duži CE i DF jednake, a otud da su trougli ACE i BDF podudarni. Oduzimajući im zajednički deo DEG dobija se da su čtvorougli $ACDG$ i $BFEG$ jednaki, a otud, kad im se doda trougao ABG, dobija se da su paralelogrami $ABCD$ i $ABEF$ jednaki.

Stav 47 je takozvani *Pitagorin stav*. On glasi:

U pravouglim trouglima je kvadrat na strani naspramnoj pravom uglu jednak kvadratima na stranama koje sadrže pravi ugao.



Slika 26

Evo Euklidova dokaza ukratko: Neka je ABC pravougli trougao (sl. 26), $ABDE$ kvadrat na hipotenuzi, $ACFG$ kvadrat na jednoj kateti, $BCHI$ kvadrat na drugoj kateti. Povucimo duž CN upravnu na AB, preko preseka M sa AB, do duži DE, zatim spojimo tačke B i F i tačke C i D. Dokazaćemo da su pravougaonici $ACFG$ i $ADMN$ jednaki.

Pre svega uglovi BAF i CAD su jednaki jer se sastoje oba iz jednog pravog ugla i zajedničkog ugla BAC. Zatim je $AC = EF$ i $AB = AD$ (jer su to strane kvadrata), dakle, po pretpostavci 4 trougli AFB i ACD su podudarni. No, trougao AFB i kvadrat $ACFG$ imaju zajedničku osnovicu AF i jednake visine pa, kako je taj trougao jednak polovini paralelograma kome bi strane bile AF i AB, iz stava 35 sledi da je trougao ABF jednak polovini kvadrata $ACFG$. Isto tako, trougao ADC i pravougaonik $ADMN$ imaju istu osnovicu i jednake visine, dakle, i trougao ADC jednak je polovini pravougaonika $ADMN$. Dakle, kako su trougli ABF i ADC podudarni i prema tome, jednaki, jednaki su po aksiomi 6 i pravougaonici $ACFG$ i $ADMN$.

To što smo sada dokazali iskazuje se i kao zaseban stav i naziva se *Euklidovim stavom*. Na osnovu toga Pitagorin stav je očigledan. Jer, kao što je s jedne strane duži CN kvadrat $ACFG$ jednak pravougaoniku $ADMN$, tako je i s druge strane kvadrat $BCHI$ jednak pravougaoniku $BEMN$, dakle, i zbirovi su jednaki (aksioma 2), tj. zbir imenovanih kvadrata je jednak kvadratu $ABDE$.

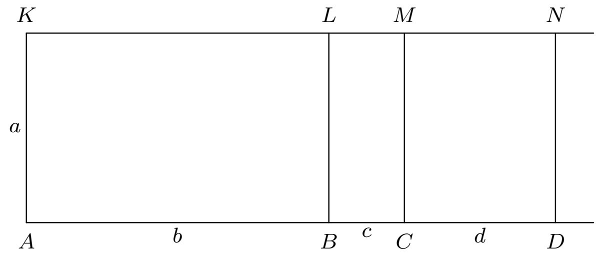
Pretstavka 48, kojom se završava prva knjiga Euklidovih elemenata je obratna prethodnom stavu. On glasi:

Ako je u trouglu kvadrat jedne strane jednak zbiru kvadrata drugih dveju strana, ugao naspram prve strane je prav.

2.3.3 Druga knjiga

Posle dve nove definicije koje ovde ne pominjemo, niže se 14 stavova o površinama ravnih likova. Značaj im je, delom, algebarski. To će najbolje pokazati sledeći primeri.

U *pretstvaci* 1 razmatraju se pravougaonici koji nastaju kad se dve uporedne prave spoje nizom upravnih duži. Recimo da tako imamo jedan do drugog pravougaonike $ABKL$, $BCLM$, $CDMN$ (sl. 27) i da je pravougaonik $ADKN$ njihov zbir, tj.



Slika 27

$$ADKN = ABKL + BCLM + CDMN.$$

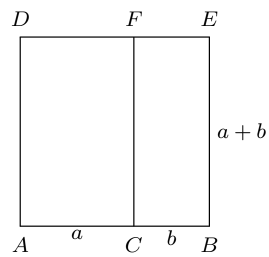
Ako stavimo $AK = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$ i koristimo se obrascem za površinu pravougaonika, prethodna jednakost će dobiti oblik

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

U pretstavci 1 se, prema tome, dokazuje da je, pri ma kakvom nizu upravnih duži, površina pravougaonika koji sadrži ostale, jednaka zbiru njihovih površina u smislu prethodnih obrazaca, tj. da je uopšte

$$a(b + c + d + e + \ldots) = ab + ac + ad + ae + \ldots$$

Slično tome dokazuje se stavom 2 da, kad podelimo kvadrat $ABDE$ (sl. 28) na dva dela upravnom duži CF, on je jednak zbiru pravougaonika $ACDF$ i $BCEF$ ili, ako označimo (po našem načinu koji Grci nisu poznavali) $AC = a$, $BC = b$, dokazuje se, u stvari, da je



Slika 28

$$(a + b)^2 = (a + b)a + (a + b)b.$$

Na sličan način dokazuje se stavom 3 da je

$$(a + b)b = ab + b^2,$$

stavom 4 da je

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

itd.

To su sve elementarni stavovi algebre. Prema tome, možemo reći da se u knjizi 2 Euklidovih *Elemenata* javlja, u stvari, elementarna algebra, ali ne u svom neposrednom obliku, nego u geometrijskom obliku. Mi to možemo nazvati *geometrijskom algebrom* jer se u geometrijskom vidu, na geometrijskim likovima dokazuju stavovi čija je priroda algebarska.

U tim i takvim stavovima *Elemenata* možemo videti kao težnju da se ustanove algebarski odnosi uprkos nemoći da se misao pri tome oslobodi geometrijskih pretstava i da neposredno pristupi formalnoj algebri. Algebra je, svakako, viši stupanj apstrakcije od geometrije. U geometriji, doduše, razmišljamo o nečem već apstraktnom ali što ipak prostorno zamišljamo i, po potrebi, nacrtamo sliku pa, kako je nacrtana duž, trougao, itd. jedna pojedina duž, pojedini trougao, itd. stav očigledno važi za, recimo, ma koju duž, ma kakav trougao, te tako postižemo geometrijske stavove vrlo opšteg karaktera. Drukše je u algebri. Tu treba da se zamišljaju opšti odnosi među brojevima koji važe, takoreći, bez obzira na to da li je jedan od posmatranih brojeva 3 ili 5 ili 23, itd. a pri tome se ne može pred očima imati slika koja sve to obuhvata kao u geometriji. Otuda se algebra pojavila kasnije u svom pravom, simboličnom obliku gde slovima označavamo *opšte brojeve*. Pronalazak da nam slova služe kao simboli za opšte brojeve pojavio se, istina, još pred kraj grčke matematike ali je taj pronalazak dobio svoj konačni praktični oblik tek pri kraju 16. stoleća i tek onda imamo našu algebru i njeno naglo i daleko razviće.

Budući da stari Grci nisu došli do naše praktične simbolike brojeva i računskih radnji, vidimo kako se u *Elementima* algebra ipak probija, ali u obliku geometrije, geometrijskom metodom. U tom obliku mogu se lako izvoditi opšta rasuđivanja o veličinama, a još nemajući algebarske simbolike. Umesto algebarskih simbola imamo tu razne poznate i nepoznate duži, pravougaonike itd.

Još neki primeri: U stavu 6 traži se, u stvari, na geometrijski način rešenje jednačine

$$bx + x^2 = b^2,$$

a u stavu 11, jednačine

$$x^2 = a(a - x).$$

2.3.4 Treća knjiga

U ovoj knjizi, posle 11 definicija, dolazi 37 elementarnih stavova o krugu, kao što su oni koji se redovno iznose u našim srednjoškolskim udžbenicima geometrije.

2.3.5 Četvrta knjiga

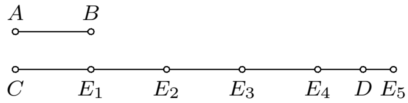
Ovde je reč o upisanim i opisanim krugovima oko trougla, kvadrata i drugih poligona, zatim o upisivanju poligona u krug i opisivanju poligona oko kruga i o srodnim nekim stavovima. Ima 7 definicija i 16 stavova.

2.3.6 Peta knjiga

Njen predmet je teorija proporcija. U tom svom obliku ona potiče, kako se misli, od ***Eudoksa***. U nas je reč o proporcijama (srazmerama) u aritmetici i algebri no, u doba Euklida bilo je pogodnije, kao što rekosmo, vršiti proučavanja iz algebre zamišljajući geometrijske oblike. Prema tome, ova opisivanja vrše se na dužima ali se pri tome govori o „veličinama" (kao da bi se time naznačilo da se sve to ne odnosi samo na geometriju nego i na druge vrste „veličina"). Dakle, sadržaj i ove knjige može se uvrstiti u grafičku, geometrijsku algebru. Evo nekoliko prvih definicija (u ovoj knjizi ima ih svega 18):

1. Neka veličina je *deo* neke druge veličine, manja od veće, kada meri veću.
2. Veća je *višestruko* od manje kada je merena manjom.
3. *Razmera* je odnos u pogledu na veličinu između dve veličine iste vrste.
4. Kaže se da veličine imaju *razmeru*, jedna spram druge, ako mogu, uvišestručene, prekoračiti jedna drugu.
5. Kaže se da su veličine *u istoj razmeri*, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj kada, uzevši ma koja jednaka uvišestručenja prve i treće [veličine] i ma koja jednaka uvišestručenja druge i četvrte, prva jednaka uvišestručenja jednovremeno prekoračuju, jesu jednaka ili zaostaju za dugim jednakim uvišestručenjima, svako prema svakom, uzeta odgovarajućim redom.
6. Veličine koje imaju istu razmeru neka budu nazvane *srazmernim* (proporcionalnim).

Razmotrimo te definicije. U prvoj se reči „deo” daje uže značenje nego što je obično. „Deo” treba da „meri” veću količinu, tj. da je u njoj sadržan celi broj puta. Tako je, na primer, 3 „deo” od 12 ili 15, a nije „deo” od 14. „Višestruko” je recipročni pojam o istom odnosu. Treća definicija je slabo uspela. No, značajne su iduće dve.



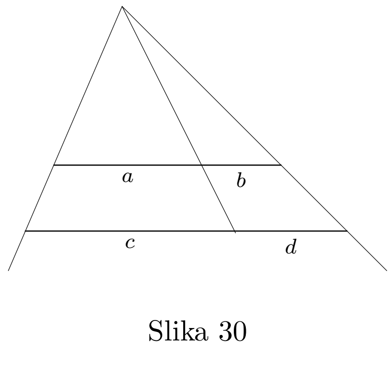
Slika 29

Definicijom 4 se utvrđuje značenje izraza „imati razmeru”, gde je opet reč o veličinama koje su pretstavljene dužima. Po toj definiciji duži AB i CD (sl. 29) *imaju razmeru* jer ako AB prenesemo na CD polazeći iz tačke C u smeru tačke D tako da se AB prvo podudari sa CE_1, zatim sa E_1E_2, pa sa E_2E_3 itd. „uvišestručenjem” duži AB duž CE_5 će „prekoračiti” duž CD, tj. tačka D će pasti između tačaka C i E_5. To je tačno i kad pođemo od duži CD i prenesemo nju na pravu AB polazeći od tačke A u smeru tačke B no tada će već tim prvim prenošenjem tačka B biti prekoračena.

Očigledno, u geometriji dve duži uvek „imaju razmeru”. Prenošenjem manje duži na opisani način možemo uvek „prekoračiti” drugu duž, ma kako velika ona bila. To je tako očigledno da tu činjenicu Euklid i ne pominje kao neku zasebnu geometrijsku činjenicu nego samo želi da definiše izraz „imati razmeru”. No, to je zasebna geometrijska činjenica koju bi trebalo, bilo dokazati bilo uvrstiti među postulate.

Euklid to nije primetio. Tek ***Arhimed*** (287–212 pre Hrista) je to uvideo i tu činjenicu postavio među svoje postulate kojima dopunjuje Euklidove *Elemente*. Zato se u savremenoj geometriji, gde se ta činjenica obično smatra postulatom (aksiomom), ona često naziva *Arhimedovim postulatom* ili pak *Eudoksovim*.

Izraz „biti u istoj razmeri” koji je definisan u definiciji 5 vodi nas neposredno pojmu *srazmere*, definisanom u definiciji 6. Zato već definiciju 5 možemo smatrati suštinom definicije srazmere kako ju je, verovatno, izrekao još ***Eudoks*** (Eudoksova definicija proporcije). Značaj te definicije je u tome što se može odnositi kako na samerljive, tako i na nesamerljive veličine i, prema tome, kako na racionalne, tako i na iracionalne brojeve. Evo u čemu je njen sadržaj ako ga analizujemo i pribeležimo svojim algebarskim znacima.



Slika 30

Neka budu a, b, c, d četiri veličine, recimo četiri duži (sl. 30). Kažemo da je razmera prve prema drugoj $(a : b)$ jednaka razmeri treće prema četvrtoj $(c : d)$, tj. da je

$$a : b = c : d$$

ako postoje sledeći odnosi: Obrazujmo sa bilo koja dva prirodna broja m i n proizvode ma, mc i nb, nd; treba da bude jednovremeno

$$ma > nb \quad i \quad mc > nd,$$

ili

$$ma = nb \quad i \quad mc = nd,$$

ili

$$ma < nb \quad i \quad mc < nd.$$

Tih šest odnosa možemo napisati, očigledno, u obliku razlomaka tako da, po definiciji, treba da bude jednovremeno

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \quad i \quad \frac{c}{d} > \frac{n}{m},$$

ili

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \quad i \quad \frac{c}{d} = \frac{n}{m},$$

ili

$$\frac{a}{b} < \frac{n}{m} \quad i \quad \frac{c}{d} < \frac{n}{m}.$$

Drugim rečima, ove razmere $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ zovu se jednakim ako su jednovremeno veće, jednake ili manje od nekog proizvoljnog racionalnog broja $\frac{n}{m}$.

Na istu tu definiciju naišla je, nezavisno, matematika 19. stoleća tražeći definiciju opšteg realnog broja. Po toj (Dedekindovoj) definiciji, dva *realna broja* A i B su istovetna ako je istovremeno

$$A \gtreqless \frac{n}{m} \quad i \quad B \gtreqless \frac{n}{m},$$

za ma koji racionalni broj $\frac{n}{m}$, kao što je, definišući proporciju, učinio Eudoks skoro dve i po hiljade godina ranije.

O stavovima ove, pete knjige *Elemenata* kojih ima 25, reći ćemo samo da imaju algebarsku vrednost, kao i u knjizi II. Ako prva četiri stava izrazimo na savremen algebarski način, nalazimo da im je sadržaj sledeći:

1. $ma + mb + mc + \ldots = m(a + b + c + \ldots)$. To nam je već kazivao stav 1 u knjizi II i to opštije, jer sada je m prirodan broj. Ali sada je geometrijska interpretacija drukčija nego pre.

2. $ma + na + pa + \ldots = (m + n + p \ldots)a$. Dakle, opet isto, samo drugim redom. Sve je to distributivni zakon množenja.

3. $m(na) = (mn)a$. To je asocijativni zakon množenja.

4. Ako je $a : b = c : d$ tada je i $ma : nb = mc : nd$, gde su m i n ma koja dva prirodna broja.

2.3.7 Šesta knjiga

U ovoj knjizi primenjuju se proporcije na geometrijske likove i prema tome, razvija teorija sličnosti.

2.3.8 Sedma, osma i deveta knjiga

U tim knjigama Euklid razvija zapravo, elementarnu teoriju brojeva. Razjasnimo, pre svega, taj naziv. Pod *teorijom brojeva* (upotrebljen je i naziv „viša aritmetika") podrazumeva se grana matematike koja ispituje osobine ili zakonitosti posebnih, naročito prirodnih brojeva i pojedinih vrsta tih brojeva. Tako, na primer, ispituje deljivost celih brojeva, zatim osobine prostih brojeva pa kvadrata, kubova i uopšte, stepena tih brojeva itd. Tu ima vrlo elementarnih činjenica koje se uče još u nižim razredima naših škola, a ima i činjenica vrlo elementarnih za razumevanje no vrlo teških za dokazivanje. Primera radi spomenimo tzv. *veliki Fermaov stav*, koji je pronašao veliki franciski matematičar Ferma u 17. stoleću i tvrdio da ga je dokazao. Ali dokaz nije objavio i nikome posle njega nije do danas uspelo da taj stav dokaže. On glasi ovako: Ako je n ma koji prirodan broj veći od 2, jednačina

$$x^n + y^n = z^n$$

nema rešenja u kome bi sva tri broja x, y, z bili prirodni brojevi. Za $n = 2$ ta jednačina je moguća sa prirodnim rešenjima kao što smo već videli u glavi 1 — tada su to pitagorejski brojevi — ali za $n > 2$ ona, po Fermau nije moguća.

Elementarnu računicu koju su Grci nazivali *logistikom*, izučavala su deca u nižim školama, a sadržaj ovih triju Euklidovih knjiga pripadao je, po tadašnjem shvatanju, višoj nastavi i smatran je kao naučno izučavanje brojeva, a nazivan *aritmetikom* (αριτημος znači broj). Prema tome, te tri knjige mogu nas zanimati kao prozor na koji ćemo, donekle, upoznati aritmetičku i algebarsku stranu tadanje matematike, kao što smo to učinili iz knjiga II i V.

Ova elementarna teorija brojeva uključena je u nastavu geometrije zato što je i u njoj metoda geometrijska. Sva ta razmatranja o kojima ćemo ukratko progovoriti, jesu čisto aritmetičke prirode ali se vrše razmatrajući duži.

Čini nam se danas da su se ta poglavlja teorije brojeva mogla lako osloboditi toga geometrijskog elementa, da je njihova veza s geometrijom vrlo labava, ali kad je Euklid ipak zadržao tu vezu ona nas može samo uveriti još jedanput u teškoću koju su stari Grci osećali u aritmetičkom i algebarskom rasuđivanju u kome se ne bi neprestano oslanjali o geometrijske pretstave. Predmet ovih triju knjiga je, dakle, *geometrijska teorija brojeva.*

Knjiga VII počinje sa 22 definicije, a zatim se nižu kroz sve tri knjige stavovi — teoreme i probleme. U knjizi VII ima 39 stavova, u knjizi VIII 27 stavova, a u knjizi IX 36 stavova. Evo nekih od definicija:

1. *Jedinica* je ono po čemu se sve što jeste naziva „jedno”.
2. *Broj* je množina sastavljena iz jedinica.
3. Broj je *deo* broja, manji od većega, ako meri veći.
4. *Delovi* su, kada ga ne meri.
5. Veći broj je *višestruk* od manjega kad je meren manjim.
6. *Paran* broj je onaj koji je deljiv u dva jednaka dela.
7. *Neparan* je koji nije deljiv u dva jednaka dela, ili koji se razlikuje za jedinicu od parnog broja.

   itd.

8. *Prost* broj je onaj koji je meren samo jedinicom.
9. Brojevi *uzajamno prosti* su oni koji su mereni samo jedinicom kao zajedničkom merom.
10. *Složen* broj je onaj koji je meren s nekoliko brojeva.

    itd.

Definicija 1 nije srećno izabrana. Definicija 2 kazuje više — da je broj množina jedinica, dakle, da se pojam broja svodi na pojam množine i pojam jedinice. Definicijama 3 i 5 vraćaju nam se definicije „dela” i „višestrukoga”, koje smo već sreli u knjizi V pod 1 i 2. „Deo” nam se javlja opet u onom užem značenju (samo što je sad reč o brojevima, a pre beše o veličinama) kad je manji broj sadržan kao činilac u većem broju. Ako pak manji broj nije sadržan u većem celi broj puta kao, na primer 2 u 5, Grci smatraju da izraz „deo” nije dopušten i upotrebljavaju čudnovat način izražavanja govoreći da je manji broj

„delovi" većeg, tj. upotrebljavajući množinu reči „deo". To kazuje definicija 4 — ovo dolazi otud što se, na primer, $\frac{2}{5}$ sastoji iz dva „dela" $\frac{1}{5}$, tj. iz više od jednog dela.

U svim tim definicijama ogleda se geometrijski način mišljenja o brojevima. To kazuje, pre svega, reč „meriti" jer sami brojevi se ne „mere", tim pre što pod brojem treba zamišljati isključivo prirodan broj. Merenje je, prvobitno, postupak za određivanje veličine nekog zida, polja, tj. geometrijskih oblika. Otud se uskoro počelo govoriti o merenju i drugih vrsta veličina kao što su težine. Grci su pak pretstavu merenja uneli i u samu aritmetiku, misleći na geometrijski način, a otud se i danas još govori o „najvećoj zajedničkoj meri" iako se naša aritmetika odavno oslobodila pokroviteljstva geometrije. Geometrijski krug pretstava se nazire i u definiciji 6 gde se opšti parni broj pretstavlja jednom duži, a ta duž deli na dva jednaka dela. „Deljivo" tu znači da središte te duži pada u tačku koja određuje neki celi broj jedinica.

Definicija 11 kazuje, očigledno, da je prost broj $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \text{ itd.})$ onaj koji je deljiv samo jedinicom; definicija 12 da su uzjamno prosti brojevi oni kojima je jedina zajednička mera 1, a definicija 13 da je složen broj onaj koji je deljiv ne samo jedinicom nego bar još jednim prirodnim brojem.

Spomenimo još neki stav koji će nas upoznati s karakterom gradiva.

Stav 1. Neka budu dana dva nejednaka broja i neka se manji uvek ponovo oduzima od većega. Ako broj koji ostaje, nikad ne meri onaj pre njega sve dok ne preostane jedinica, tada su prvobitini brojevi uzajamno prosti.

Tim stavom se kazuje sledeće: Neka su a i b dva prirodna broja, recimo $a = 39$, $b = 11$; podelimo veći broj manjim, ostatak je 6; podelimo sad 11 sa 6, ostatak je 5. Ako tako nastavimo da delimo prethodni delitelj s ostatkom najzad ćemo dobiti ostatak 1 pod pretpostavkom da su a i b brojevi prosti jedan spram drugoga pa ma koliki oni bili veliki inače. Zaista, u razmatranom primeru treba još podeliti 6 sa 5 i dobiće se ostatak 1.

Taj postupak uzastopnih delenja zove se u matematici *Euklidov algoritam* („algoritam" znači računski postupak). On se može upotrebiti ne samo zato da bi se utvrdilo jesu li dva broja uzajamno prosta nego i da bi se dobila najveća zajednička mera (najveći zajednički delitelj). Ako, na primer, treba odrediti najveći zajednički delitelj brojeva 270 i 57 može se izvršiti sledeći niz delenja:

Kako u poslednjem delenju nema ostatka, 3 je sadržano u 12, a otud se zaključuje da je sadržano i u 15 (jer je $15 = 1 \cdot 12 + 3$), a otud pak da je sadržano u 42 (jer je $42 = 2 \cdot 15 + 12$), otuda da je sadržano u 57, dakle i u 270. Dakle data dva broja su deljiva sa 3. Ona su jedino deljiva sa 3 jer ako je s ma koji broj sa kojim su ta dva broja deljiva, sličnim putem uviđamo da se taj broj mora provlačti kroz sva delenja kao što se provlači 3. To je Euklid izveo u sledećem stavu kome je dao oblik probleme:

Stav 2. Data su dva broja koji nisu uzajamno prosti. Naći njihovu najveću zajedničku meru.

Pođimo dalje. Stavovi 4 do 22 razvijaju teoriju razlomaka zasnovanu na proporcijama. Prvi od tih stavova (stav 4) glasi: Svaki broj je deo ili delovi od ma kog broja, manji od većeg. Taj stav znači, naprosto, da je od dva cela broja uvek manji sadržan kao činilac u većem ili pak nije sadržan. Zanimljiv je stav 16 jer njime se dokazuje zakon komutativnosti množenja, tj. da je za dva prirodna broja a i b uvek $a \cdot b = b \cdot a$.

Stavovi 23 do 34 su elenemtarni stavovi o prostim brojevima. Evo šta kazuju neki od njih, izraženi na savremen način:

Stav 25. Ako su a i b uzajamno prosti, tada su a^2 i b uzajamno prosti.

Stav 26. Ako su a i b prosti spram c i d, tada je i broj ab prost spram cd.

Stav 28. Ako su a i b uzajamno prosti, tada je i broj $a + b$ prost spram a i spram b.

U stavovima 35 do 41 reč je pak o najmanjem zajedničkom sadržatelju i još o nekim problemima. Zatim u knjizi VIII i IX nižu se najviše stavovi o brojevima koji su u geometrijskoj progresiji, tj. opšte uzevši, kao $a, ap, ap^2, ap^3, \ldots, ap^n$. Uz to dolaze razni elementarni stavovi koji se danas daju đacima kao zadaci iz elementarne algebre i gde je reč o proporciji, o kvadratima i kubovima prirodnih brojeva i slično. Od svih tih stavova nalazimo samo dva koja ćemo, zbog značaja njihova, spomenuti. To su stav 20 i stav 35 knjige IX. U prvome se dokazuje da prostih brojeva ima beskrajno mnogo, u drugom se utvrđuje rezultat koji, preveden na savremeni jezik matematike, pretstavlja obrazac za sabiranje geometrijske progresije.

Stav 20. Prostih brojeva je više od ma koje naznačene množine brojeva.

Evo na šta se svodi Euklidov dokaz tog stava, izražen na savremen način.

Neka su $a, b, c, \ldots, k$ ma koji prosti brojevi. Broj

$$s = (a \cdot b \cdot c \cdots k) + 1$$

je takođe prost broj ili nije prost broj. Ako jeste, imamo još jedan prost broj više nego što smo naznačili i naš stav je dokazan.

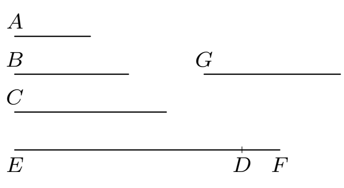
Pretpostavimo zato da taj broj nije prost. Dokazaćemo da je tada deljiv sa izvesnim prostim brojem p koji je različit i od 1 i od datih prostih brojeva, tj. od $a, b, c, \ldots, k$.

Ako bi, naprotiv, prost broj p bio jednak jednom od datih prostih brojeva, proizvod tih brojeva $a \cdot b \cdot c \cdots k$ bi bio deljiv sa p i bilo bi

$$\frac{s}{p} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdots k + 1}{p} = t + \frac{1}{p},$$

gde smo sa t označili nekakav ceo broj. No, broj na desnoj strani oba znaka jednakosti svakako nije ceo broj jer je $p \neq 1$, tj. s nije deljiv sa p. To se protivi pretpostavci da je deljiv sa p. Dakle, pretpostavka da je broj p jednak jednom od datih prostih brojeva vodi do protivrečja, ona je nemoguća. Dakle, opet imamo u broju p jedan prost broj više nego što smo prvobitno uzeli. Prema tome, uvek ima više prostih brojeva nego što je ma koja zadata konačna množina prostih brojeva

Pogledajmo kako to dokazuje Euklid. On piše: „Neka su A, B, C naznačeni prosti brojevi. (Obeležavanje brojeva slovima kao i u našoj algebri, ali uzaman, jer time on misli samo da označuje geometrijske duži. Primetimo, osim toga, da dokaz nema opšti oblik jer do kraja dokaza posmatra se posebni slučaj kad je zadato svega tri prosta broja). Ja kažem da ima više prostih brojeva nego A, B, C."



Slika 31

Uzmimo, naime, najmanji zajednički sadržatelj od A, B, C i neka to bude DE. Dodajmo jedinicu DF ka DE. Tada je EF prosto ili nije prosto.

Uzmimo prvo da je prosto. Tada su nađeni prosti brojevi A, B, C, EF kojih je više nego A, B, C.

Sad neka EF ne bude prosto. Tada je mereno nekim prostim brojem. Uzmimo da je mereno prostim brojem G. Ja kažem da G nije isto što koji bilo od brojeva A, B, C. Jer, kad bi to bilo moguće, uzmimo da je tako.

No, A, B, C mere DE. Stoga će i G meriti DE. Ali G meri takođe EF. Stoga G, pošto je broj (tj. ceo broj), meriće ostatak — jedinicu DF, a to je besmisleno.

Stoga G nije isto što i bilo koji od brojeva A, B, C, a po pretpostavci je prosto.

Stoga su nađeni prosti brojevi A, B, C, G kojih je više od naznačene množine A, B, C, što je trebalo dokazati.

U stavu 35 se razmatra zbir geometrijskog niza $a, ap, ap^2, \dots, ap^n$ i nalazi njegova vrednost

$$S = \frac{a(p^{n+1} - 1)}{p - 1}.$$

Ta dva i možda još koji zanimljivi stav su izgubljeni u množini beznačajnih stavova koji nama liče na đačke zadatke. Tome se nije čuditi, jer još nije postojala pogodna metoda za opšta aritmetička razmatranja, nije postojala algebra i zato nije ta grana matematike mogla ni da mnogo napreduje niti da dobije preglednost koja omogućuje razlikovati bitnoga od sporednoga.

2.3.9 Deseta knjiga

Ova knjiga sadrži dosta opširnu teoriju *nesamerljivih veličina*: 115 teorema i problema i 16 definicija. No, kao da ta glava još nije dobila svoj konačni oblik, te se definicije sve ne javljaju na čelu knjige kao do sada, nego u tri grupe kad se javi potreba za njima u toku izlaganja. Štaviše, još neke definicije se dodaju samim stavovima, u njihovu izricanju.

Spomenimo samo definiciju 1 i pretstavku 2.

Definicija 1. One veličine nazivaju se *samerljivim* koje su merene istom merom, a one *nesamerljive* koje ne mogu imati nijedne zajedničke mere.

To znači: Ako su A i B dve veličine, recimo dužine koje su samerljive, postoji treća duž C takva da je $A = mC$ i $B = nC$. Tada je, dakle, $A : B = mC : nC = m : n$ i prema tome, možemo pisati

$$A = \frac{m}{n}B \qquad \textit{ili} \qquad B = \frac{n}{m}A.$$

Ako umesto $\frac{m}{n}$ pišemo p možemo reći: Samerljive su one dve veličine A i B za koje postoji neki racionalni (celi ili razlomljeni) broj p takav da je $A = pB$.

Ako pak ne postoji duž C, ako, prema tome, ne postoji racionalan broj p, veličine A i B se zovu nesamerljivim. Budući da smo proširili pojam broja tako da govorimo i o iracionalnim brojevima, znamo pak da u slučaju nesamerljivosti postoji *iracionalan* broj p takav da je $A = pB$.

No, iracionalan broj je po definiciji svojoj nedostižni cilj beskrajnog računskog procesa kojim se njemu neprestano približujemo. Taj smisao iracionalnog broja je očigledan i ako je neki iracionalan broj napisan u obliku decimalnog broja. Možemo ga napisati samo približno. Tako, na primer, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ Kada tako napišemo $\sqrt{2}$, napisali smo samo racionalni broj 1,4142, a tačkice treba da nagoveste da je to samo približna vrednost drugog korena iz 2 i da decimala ima beskrajno mnogo kojih je moguće izračunati koliko se god hoće, ali nikad se neće dospeti saznati ih sve jer ih je beskrajno mnogo. „Broj" $\sqrt{2}$ je tada cilj beskrajnog niza racionalnih brojeva

$$1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \dots$$

Prema tome, mogli bismo, govoreći o dve nesamerljive veličine A i B, reći: tada postoji iracionalan broj p, tj. beskrajan niz racionalnih brojeva, recimo

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$$

koji se sve više, beskrajno, približavaju broju p. Pomoću tih racionalnih brojeva određene su izvesne veličine $A_1, A_2, A_3, \dots$ koje su, naprotiv, samerljive sa B. Naime,

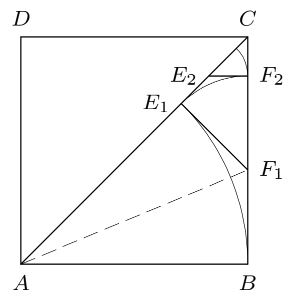
$$A_1 = c_1B, \quad A_2 = c_2B, \quad A_3 = c_3B, \dots$$

Te duži nisu nikad jednake nesamerljivoj duži A ali se sve manje od nje razlikuju. Ovo nas upozorava da u slučaju dveju nesamerljivih duži postoji uvek beskrajan niz duži koje su sve samerljive datoj duži B i koje sve tačnije mogu zameniti nesamerljivu duž A što dalje odmaknemo u tom nizu, ali nikad potpuno tačno, uvek samo približno.

Stav 2. *Ako se manja od dve nejednake veličine uvek ponovo oduzima od veće pa ako preostala veličina nikad ne meri prethodnu, veličine će biti nesamerljive.*

Slika 32

To znači: Ako je, na primer, AB duž manja od duži CD (sl. 32) pa ako prenosimo prvu na drugu tako da na CD dobijemo, na primer, tri duži CE, EF, FG i ostane nam duž DG manja od AB pa, ako na sličan način prenosimo duž DG na AB dok ne dobijemo duž BK manju od prethodne, tj. od DG, ako i dalje nastavimo slično, prenoseći duž BK na većoj duži DG itd. i ako tome nikad kraja nema, date dve duži AB i CD su nesamerljive.



Slika 33

Nećemo doneti Euklidov dokaz tog stava ali možemo navesti primer toga u razmatranju strane i dijagonale kvadrata o kojima znamo da su nesamerljive. Neka je AC dijagonala kvadrata $ABCD$ (sl. 33). Šestarom je lako odrediti na dijagonali AC duž AE_1 jednaku strani AB. Kako je strana trougla uvek manja od zbira ostale dve strane, dijagonala AC je manja od $AB+BC$, tj. od $2AB$. Dakle, posle prenošenja duži AB na duž AC preostaje već posle prvog opisanog prenošenja duž CE_1 koja je manja od AB.

Podignimo u E_1 upravnu na AC do tačke F_1 na strani BC kvadrata. Trougao CE_1F_1 je sličan trouglu ABC. Dakle, ako kao u trouglu ABC prenesemo duž E_1F_1 koja je jednaka duži CE_1 na stranu CF_1, dobićemo duž CF_2 manju od E_1F_1.

Podignimo u F_2 upravnu do preseka E_2 sa AC. Trougao CF_2E_2 je još manji od prethodnoga i ako u njemu izvršimo sličnu konstrukciju, dobićemo još manju duž CE_3 itd. Kao što neposredno primećujemo, na taj način se neprestano približujemo tački C, ali je nikad ne možemo dostići.

Mi, koji za svaku duž imamo broj, racionalan ili iracionalan, možemo lako prevesti sadržaj stava 2 u algebru. Neka su a i b dva broja i recimo da je $a > b$. Ako delimo veći manjim i u dobijanju količnika ne idemo dalje od jedinica, tj. zadržimo se kod celog broja q_1 kao količnika, imaćemo, u slučaju da broj b nije sadržan u broju a, izvestan ostatak r_1 manji od b. To znači da je

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}, \quad (b > r_1).$$

Ako sad veći broj b podelimo manjim — r_1 , i opet ostanemo pri celom broju q_2 kao količniku, imaćemo, slično, da je

$$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad (r_1 > r_2).$$

Ako nastavimo tako, dobićemo niz delenja i prema tome,

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = q_4 + \frac{r_4}{r_3} \ldots$$

Ako posle izvesnog broja tih deoba dođemo do deobe u kojoj nema ostatka, tj. ako je, za nezavisan broj n

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n,$$

imaćemo, stavivši drugi obrazac u prvi, zatim treći u drugi, pa četvrti itd. do poslednjeg, da je

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \frac{1}{q_n}}}}$$

To je takozvani *verižni razlomak*. Njime je razmera $a : b$ izražena pomoću samih celih brojeva $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$. Ovakvo neprekidno delenje smo već sreli u knjizi VII, no, tada su a i b bila dva prirodna broja, a sad nema tog ograničenja jer su to dužine bilo kakvih dveju duži. Ovo je dakle, i sada, *Euklidov algoritam*. On vodi do verižnih razlomaka.

Pretpostavimo sada da se takvim neprekidnim delenjem ne dođe nikada do kraja, da uvek postoji ostatak. Tada, po stavu 2, ove posmatrane veličine nisu samerljive, oba broja a i b nemaju racionalan odnos, p je iracionalan broj. Tada se taj broj izražava beskrajnim razlomkom

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5 + \ddots}}}}$$

2.3.10 Jedanaesta knjiga

Predmet poslednje tri knjige je geometrija prostora, stereometrija. Napomenimo da je ova grčka reč došla od „stereon", čime se u geometriji nazivalo telo. Mada u grčkom jeziku postoje i druge reči za „telo", kao što je „soma" što označava živo telo, u geometriji se odomaćila reč „stereon" koja znači čvrsto, kruto, jer u geometriji je zaista reč o telima ili oblicima prostora ukoliko su ti oblici čvrsti, ukoliko ta tela ne menjaju oblik. Čvrsta tela pretstavljaju one osobine koje izučava geometrija, nauka koja apstrahuje od svih promena što se događaju u prostoru tokom vremena zadržavajući sam, nepromenjeni, „čvrsti" oblik. Tako nam ta grčka reč, kao i druge u geometriji, ukazuje na blisku vezu geometrije sa njenim poreklom u iskustvu.

Knjiga XI počinje sa 28 definicija. Na primer:

1. *Telo* (stereon) je ono što ima dužinu, širinu i debljinu.
2. Kraj tela je *površ* (površina).
3. *Prava linija je pod pravim uglovima prema ravni* kada čini prave uglove sa svim pravama koje se sa njom seku, a jesu u toj ravni.
4. *Ravan* je *pod pravim uglovima prema ravni* kada prave nacrtane u jednoj od tih ravni pod pravim uglovima prema zajedničkom preseku tih ravni, jesu pod pravim uglovima prema drugoj od tih ravni,

itd.

Među ostalim definiše se piramida, prizma, lopta, kupa, valjak. U prvoj spomenutoj definiciji poznaćemo analogon definiciji linije i površi na čelu prve knjige. Slično o

„definiciji" 2. U definiciji 3 se ispravno definiše prava upravna na nekoj ravni, a u definiciji 4 upravnost dveju ravni među sobom.

Iza definicija dolazi 39 stavova, elementarnih stavova stereometrije koji se, delom, nalaze i danas po udžbenicima, ili su njima slični. To su stavovi o pravoj i ravni u raznim međusobnim položajima, o paralelnim ravnima, o rogljevima („čvrstim uglovima") itd. Navešćemo, primera radi, prva tri stava.

Stav 1. Ne može prava biti delom u nekoj ravni, delom van nje.

Stav 2. Dve prave koje se seku jesu u jednoj ravni.

Stav 3. Ako se dve ravni seku njihov presek je prava.

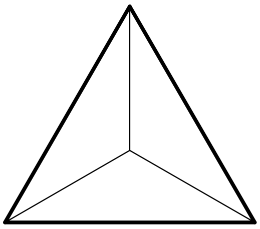
Dokaze tih stavova nećemo donositi ovde. Lako je zapaziti nedovoljnost dokaza prva dva stava. No, sva tri stava su vrlo elementarne prirode i danas u njima obično gledamo, ako ne same aksiome ono neposredne posledice izvesnih aksioma. Kao što već rekosmo, aksioma ili postulata (po današnjem poimanju) ima više nego što ih je Euklid istakao i zato, sa ono malo postulata i aksioma svojih, on i nije mogao ispravno dokazati stavove.

2.3.11 Dvanaesta knjiga

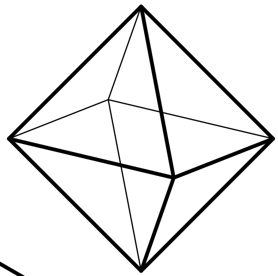
Nastavljajući geometriju prostora, Euklid u ovoj knjizi donosi uglavnom stavove o odnosima među zapreminama pojedinih tela (na primer o jednakosti zapremine dveju prizama ili dveju piramida s jednakim osnovicama i jednakim visinama, o tome da se zapremine lopti odnose kao treći stepeni njihovih prečnika).

2.3.12 Trinaesta knjiga

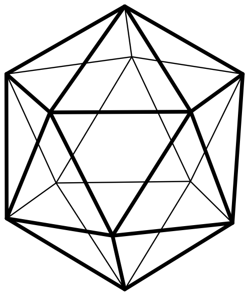
Ona sadrži 18 stavova, prvo dvanaest o pravilnim poligonima: o ravnostranom trouglu, kvadratu i pravilnom petouglu, zatim 6 stavova o pravilnim poliedrima. Prvih 12 stavova je potrebno u dokazivanju ovih 6 i zato se, bez sumnje, ovde i iznose.



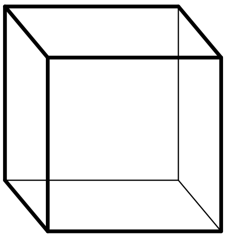
*sl.*34



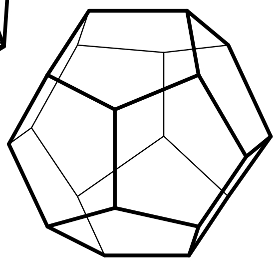
*sl.*36



*sl.*38



*sl.*35



*sl.*37

Slike 34-38

Poznato je da postoji pet vrsta pravilnih poliedara: *pravilni tetraedar* koji je ograničen pomoću četiri ravnostrana trougla (sl. 34), *pravilni heksaedar* ili *kocka* koja je ograničena pomoću šest kvadrata (sl. 35), *pravilni oktaedar* koji je ograničen pomoću osam ravnostranih trouglova (sl. 36), *pravilni dodekaedar* koji je ograničen pomoću dvanaest pravilnih petouglova (sl. 37) i *pravilni ikosaedar* koji je ograničen pomoću dvadeset ravnostranih trouglova (sl. 38). Podsetimo da se pravilnim nazivaju oni poliedri (rogljasta tela) koji su ograničeni pravilnim poligonima podudarnim među sobom i kojima su, takođe, rogljevi među sobom podudarni.

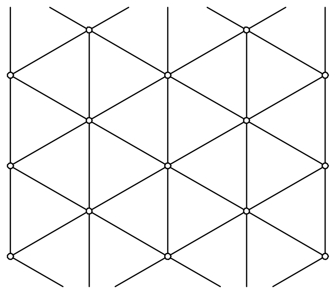
Iza stava 18 u kome se utvrđuje odnos između veličina ivica pravilnih poliedara, iznosi se, u stvari, još jedan, poslednji stav *Elemenata* i dokazuje se. Taj stav nije numerisan, kao da je naknadno dodat. On glasi ovako:

> „Kažem zatim da se nikakav drugi oblik osim rečenih pet oblika ne može konstruisati, koji bi bio sadržan između ravnostranih i ravnougaonih oblika, jednakih među sobom".

To znači: Pomenutih pet pravilnih poliedara su jedine vrste pravilnih poliedara i nema ih više. Zanimljiv je dokaz tog stava i mi ćemo ga izneti svojim rečima.

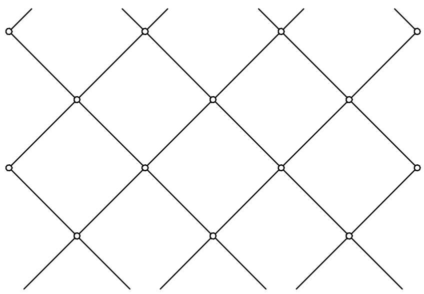
U svakom roglju ili svakom temenu poliedra sastaje se izvestan broj trouglova, četvorouglova, uopšte izvesnih poligona. Kod pravilnog poliedra svi ti poligoni su među sobom podudarni. Broj tih poligona koji se sastaju u jednom temenu mora biti veći od dva, jer sa dva se, očigledno, ne može obrazovati rogalj. Posmatrajmo redom slučajeve kad su poligoni ravnostrani trougli, zatim kad su kvadrat, zatim petougli itd.

U jednom temenu mogu se satati tri ravnostrana trougla i tada imamo, očigledno, pravilni tetraedar. Mogu se sastati četiri ravnostrana trougla i tada imamo pravilni oktaedar. Mogu se sastati pet ravnostranih trouglova i tada imamo pravilni ikosaedar. Šest ravnostranih trouglova ne mogu se sastati u jednom roglju jer poređani tako oko jedne tačke šest ravnostranih trouglova postaviće se u jednu ravan, dakle nema roglja (sl. 39). Još manje je moguće sagraditi rogalj sa više od šest ravnostranih trouglova.



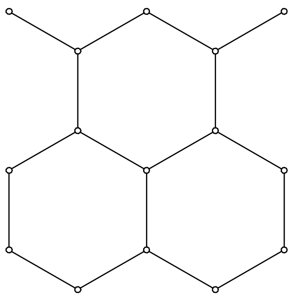
Slika 39

Zatim, u jednom temenu pravilnog poliedra mogu se sastati tri kvadrata i tada imamo kocku. Četiri kvadrata ne mogu se sastati jer, kao ono šest ravnostranih trouglova, tako i četiri kvadrata poređana oko jedne tačke postaviće se u jednu ravan (sl. 40).



Slika 40

Zatim, u jednom temenu pravilnog poliedra mogu se sastati tri pravilna petougla i tada imamo pravilni dodekaedar. Četiri pravilna petougla ne mogu obrazovati rogalj jer svaki ugao tih petouglova iznosi više od jednog pravog ugla, dakle, njih četiri zajedno iznose više od četiri prava ugla (a trebalo bi da iznose manje od četiri prava ugla da bi rogalj bio moguć). Još pre je nemoguće sagraditi rogalj sa više od četiri pravilna petougla.



Slika 41

Tri pravilna šestougla postavljena na sličan način leže već u jednoj ravni (sl. 41), dakle, s pravilnim šestouglima nije uopšte moguće sagraditi rogalj i prema tome, niti neki pravilni poliedar. Još manje bi moguće bilo konstruisati pravilan poliedar s pravilnim poligonima koji imaju više od šest strana.

Prema tome uočenih pet vrsta pravilnih poliedara su jedine.

Napomenimo, najzad, da se u nekim starijim izdanjima donosi više od trinaest knjiga *Elemenata* (do petnaest) ali dokazano je da te knjige ne potiču od Euklida već su kasnije dodate.

2.4 Helenističko razdoblje

Sa Euklidom stupili smo već u drugu od dveju velikih epoha grčke matematike i kulture uopšte, u epohu *helenizma*, tj. grčke (helenske) kulture, kad se ona razlila preko dalekih kulturnih zemalja onog vremena i dobila međunarodni značaj i karakter. Glavno središte nauke pa i matematike postala je tada, i uglavnom ostala, *Aleksandrija*, grad na ušću Nila. Onde je među prvima bio delatan *Euklid* kao jedan od najvećih naučnika onog doba. Nisu Στοιηεῖα (Stoiheia) njegovo jedino delo. U tom delu on je, kako videsmo, izložio sistematski onaj deo geometrijske nauke koji je smatrao osnovnim, potrebnim za naučno obrazovanje uopšte, a za one koji će se još dublje baviti matematikom to je imalo da bude osnovno delo preko koga se tek moglo ići dalje. Sam Euklid je napisao i druga matematička dela, uglavnom geometrijska, čiji sadržaj nije obuhvaćen Stoiheiama. Napisao je tako naučno delo o konusnim presecima, zatim jedno o oblim površima (površinama) kao što su valjak i kupa. Napisao je spis o geometrijskim sofizmima, gde su se problemi sastojali u tome da se pronađe skrivena greška u rasuđivanju. Među njegovim delima jedno beše iz optike, jedno iz astronomije, jedno iz muzike. Sadržaj svih tih dela bio je, svakako, pretežno matematički.

Pogledajmo letimice razviće matematike helenističkog perioda. U Aleksandriji behu nastali osobito povoljni uslovi za razviće nauke — ne samo zato što su se onde našli na okupu mnogi od najvećih umova, nego i zato što se sistematskim prikupljanjem i prepisivanjem svih naučnih i kulturnih spisa i spomenika do kojih se moglo doći, stvorila uskoro u Aleksandriji ogromna biblioteka, oko pola miliona svitaka (tuba) od papirusa ili pergamenta.

Tada su se plodovi grčkog duha našli opet u onoj geografskoj sredini odakle im beše poreklo. Kao što je, uopšte, suština aleksandrijske, helenističke učenosti u prožimanju grčke kulture sa starijim, istočnijim kulturama, tako je i s matematikom. U prvi mah ona ima još sasvim onaj karakter kakav je stekla u Atini i drugim središtima grčke učenosti no vremenom se sve jače ta grčka učenost prožima odlikama egipatske i vavilonske matematike, a naravno, i njenim rezultatima koji su Grcima bili ostali nepoznati. To se može zapaziti možda i po tome što se u Grčkoj matematika osobito razvila u pravcu teorijske nauke kao što pokazuju Euklidovi *Elementi*, a što se sad uskoro javljaju znatni napreci u praktičnim naukama kao što su fizika i astronomija. I kad mi budemo pošli da razmotrimo aleksandrijsku matematiku imaćemo više potrebe nego prethodno, da zahvatimo i u astronomiju i u pojedine grane fizike. Takav hod razvića naći ćemo i kad bacimo pogled na kulturu uopšte i njene društvene uslove jer helenizam pretstavlja prožimanje grčkih oblika s istočnijim.

Vremenom, u okviru rimskog svetskog carstva, u mešanju svih njegovih naroda i kultura, menjaju se oblici dotadanjeg života i dubok preobražaj društva obavlja se kroz hrišćanstvo koje je obećavalo da će izjednačiti robove s njihovim vlasnicima. U tom teškom i zamašnom previranju iščezavaju i dotadanji uslovi razvića nauke te se i razviće matematičkih nauka postepeno usporava i uskoro potpuno gasi na kraju ove epohe.

Najsjajnijim dobom antičke nauke može se smatrati prvo stoleće po osnivanju aleksandrijskog *Museiona*, tj. treće stoleće pre nove ere. Sva kasnija stoleća pokazuju već znake venenja iako se sve do četvrtog stoleća nove ere javlja, s vremena na vreme, poneki znatni matematičar i napreci s njime.

Iz III veka pre nove ere spomenućemo ***Aristarha sa Samosa*** (otprilike od godine 310. do 250. pre Hrista) koji bi se mogao nazvati i najvećim astronomom Starog veka, jer je on prvi izveo račun kojim je dokučio daljinu Sunca i Meseca i njihove veličine s tačnošću koja se tada mogla postići. Na osnovu toga on je prvi izgradio heliocentrični sistem sveta.

Spomenućemo zatim ***Arhimeda*** (287–212. pre Hrista), velikog fizičara i matematičara koji je živeo na Siciliji ali je stojao u vezi sa aleksandrijskim naučnicima, zatim ***Apolonija*** (265–170. pre Hrista), jednog od najvećig geometara Starog veka i ***Eratostena*** (276–194. pre Hrista), savremenika dvojice prethodno navedenih.

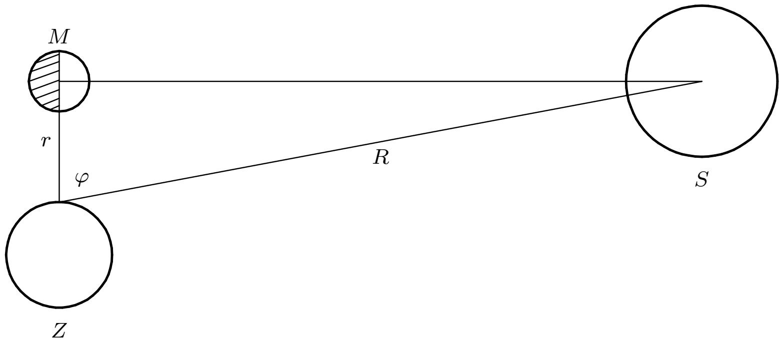
Iz drugog veka pre Hrista spominjemo ***Hiparha*** (otprilike 170–120. pre Hrista), drugog velikog astronoma Starog veka, velikog u praktičnoj astronomiji, u određivanju položaja nebeskih tela, zatim ***Herona*** (oko godine 100. pre Hrista), velikog tehničkog pronalazača i geometra. No, veliki matematičari postaju sve ređi i prema onome što znamo, o prvom stoleću pre Hrista nemamo šta govoriti. Godine 47. pre Hrista u ratu s Rimljanima izgorela je bogata *Aleksandrijska biblioteka.* To je bio jedan od najtežih gubitaka što ga je nauka ikad pretrpela.

Iz vremena posle Hrista spomenućemo astronoma ***Ptolemaja*** (87–168) čiji je geocentrični sistem sveta kroz vekove potisnuo heliocentrični sistem, zatim velikog geometra ***Paposa*** i aritmetičara ***Nikomaha*** iz III veka nove ere i najzad, ***Diofanta*** koji se može smatrati prethodnikom naše algebre. Poslednji matematičari nestaju iz Aleksandrije u V veku. Godine 342. uništila je rulja, fanatizovana od hrišćanskog arhiepiskopa, i drugu veliku biblioteku u Aleksandriji. Posle prve propasti postojala je, naime, velika biblioteka u gradu Pergamonu u Maloj Aziji i ona je preneta u Aleksandriju, a kad je i ta druga velika biblioteka propala gubitak je bio još dublji.

Time se završilo cvetanje nauke u Aleksandriji. Posle toga još je neko vreme izvesno središte naučnog života bila stara Platonova *Akademija* u Atini. No, već oko 100 godina kasnije, 529. godine, zabranio je car Justinijan „pagansku nastavu” i dao zatvoriti *Akademiju.*

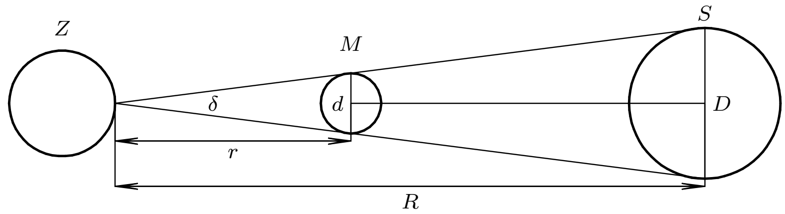
Počnimo s Aristarhom. U kratkom spisu *O odstojanju Sunca i Meseca* koje nam se izuzetno sačuvalo zato što je bilo ušlo u udžbenike aleksandrijske škole, ***Aristarhas*** dolazi matematičkim rasuđivanjem do saznanja o veličini i udaljenosti ovih nebeskih tela. Izložićemo tok njegovih zaključaka služeći se, pri tome, savremenim matematičkim oznakama. Iz tri nebeske pojave izveo je Aristarh svoje zaključke:

1. iz pojave da Mesec, rastući ili opadajući biva u jednom trenutku tačno do polovine obasjan, a polovina mu je u tami,
2. iz pomračenja Sunca i
3. iz pomračenja Meseca.



Slika 42

Kada je Mesecu tačno polovina svetla, pravac u kome vidimo Mesec je upravan na pravu koju bi smo zamislili da spaja Mesec sa Suncem. Neka je (sl. 42) S Sunce, M Mesec, Z Zemlja (slike su, naravno, netačne što se tiče relativnih dimenzija pojedinih rastojanja i nebeskih tela). Aristarh je izmerio ugao između pravca u kome se tog trenutka vidi Mesec i pravca u kome se vidi Sunce. Označimo ga slovom φ. Taj ugao je jedva nešto manji od 90° jer je odstojanje Sunca od Zemlje mnogo puta veće od odstojanja Meseca.



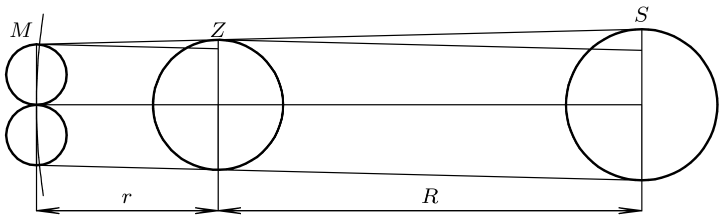
Slika 43

Neka nam je R odstojanje Sunca, r odstojanje Meseca od nas. Po trigonometriji je razmera $r : R$ jedaka $\cos\varphi$. Ta razmera zavisi samo od ugla φ i nju je Aristarh mogao izračunati. Ona je izvestan vrlo mali broj k. Dakle,

$$\frac{r}{R} = k. \tag{1}$$

Budući da prilikom totalnog pomračenja Sunca konus senke što je Mesec baca na Zemlju dodiruje zemljinu površinu (sl. 43) Sunce i Mesec imaju isti prividni prečnik. Označimo li sa d prečnik Meseca, a sa D prečnik Sunca zaključujemo da je $d : D = r : R$, pa iz (1) sledi obrazac

$$\frac{d}{D} = k. \tag{2}$$



Slika 44

Naznačimo u slici 44 krugovima Sunce S, Zemlju Z, Mesec M i, približno, njegovu kružnu putanju oko Zemlje. Po toj putanji Mesec dospeva, kad su za to podesni uslovi, u kupu koju u svemirskom prostoru obrazuje senka Zemlje (osenčeni deo). Aristarh je iz opažanja znao koliko vremena Mesec provede u senci Zemlje, a otud je odmah mogao zaključiti koliki deo mesečeve putanje provede Mesec u senci. To je mogao saznati i neposredno, mereći na nebu položaj Meseca kad uđe u senku, i položaj kada izađe iz senke. Tako je saznao da je širina Zemljine senke u onoj daljini gde kruži Mesec, jednaka dva prečnika Mesečeva (to smo na slici naznačili ucrtavanjem dva kružića jednaka krugu M). Širina senke je tu, dakle, $2d$.

Povucimo, na slici 44 , kroz najvišu tačku tih dvaju kružića duž uporednu s donjom zajedničkom dirkom krugova S i Z, sve do naznačenog prečnika Zemlje. Isto tako povucimo kroz gornju tačku Zemljinog kruga duž uporednu s donjom zajedničkom dirkom, sve do naznačenog prečnika Sunca. Na taj način dobili smo dva slična trougla. To su dva ravnokraka trougla. Manjem trouglu je dužina kraka r, a većem R. Osnovica manjem je, očigledno $\Delta - 2d$, a većem $D - \Delta$, ako nam Δ ozmačava prečnik Zemlje. Kako su oba trougla slična imamo opet srazmeru, i to

$$r : R = (\Delta - 2d) : (D - \Delta)$$

ili

$$\frac{\Delta - 2d}{D - \Delta} = \frac{r}{R},$$

dakle, ako opet upotrebimo obrazac (1),

$$\frac{\Delta - 2d}{D - \Delta} = \frac{d}{D} = k. \tag{3}$$

Najzad, vratimo se slici 43.

Kako je Aristarhu bio poznat ugao δ, a razmera $D : R$ zavisi jedino od tog ugla, on je tu razmeru mogao lako izračunati. Mi ćemo je označiti slovom ε, dakle, napisaćemo

$$\frac{D}{R} = \varepsilon. \tag{4}$$

Iz prethodna četiri obrasca Aristarh je računom izveo ono što je hteo, na sledeći način. Iz (3) sledi

$$\Delta - 2d = k(D - \Delta),$$

a otud

$$\Delta + k\Delta = kD + 2d.$$

No, iz (2) imamo da je $d = kD$, dakle

$$(1 + k)\Delta = kD + 2kD = 3kD,$$

a otud je

$$D = \frac{1 + k}{3k}\Delta. \tag{5}$$

Ovo je prvi rezultat — prečnik Sunca se dobija u odnosu na prečnik Zemlje. Kako je k vrlo mali broj, razlomak ispred Δ je vrlo veliki broj. Ako Aristarh i nije imao pouzdanih podataka o veličini Zemlje (po jednoj oceni na koji nailazimo u *Aristotela*, Zemlja bi bila veća nego što uistinu jeste, njen meridijan bi bio oko 74000 km umesto 40000 km koliko ima), ako mu je broj k netačan (0,523 umesto 0,0029), on je, svakako, dobio važno saznanje da je Sunce mnogo veće od Zemlje, a ne onako kako je naivno čovek zamišljao.

Iz (2) imamo da je $d = kD$, a kad se za D vrednost uzme iz (5) dobija se drugi važan obrazac

$$d = \frac{1 + k}{3}\Delta, \tag{6}$$

kojim je data veličina Meseca u odnosu na Zemlju. Razlomak je sada jedva veći od $\frac{1}{3}$, dakle, Aristarh je saznao tada da je prečnik Meseca trećina prečnika Zemlje, da je Mesec manji od Zemlje, no ipak mnogo veći nego što se ranije zamišljalo.

Iz (4) imamo da je $R = \frac{D}{\varepsilon}$, a otud, iz obrasca (5), da je

$$R = \frac{1 + k}{3k\varepsilon}\Delta. \tag{7}$$

Tako je Aristarh dobio udaljenost Sunca od Zemlje. Kako je i ε vrlo mali broj, dobio je za tu udaljenost još kudikamo veći broj no za prečnik Sunca. Možemo zamisliti da njegovu divljenju u čuđenju nije bilo kraja. Prvi put od postanka čovečanstva otkrila se umu čovekovu neizreciva ogromnost svemirskog prostora.

Na posletku, iz (1) imamo da je $r = kR$, a kada to stavimo u (7) dobijamo i udaljenost Meseca:

$$r = \frac{1 + k}{3\varepsilon}\Delta, \tag{8}$$

koja je manja od prethodne, ali još uvek veća od prečnika Zemlje.

Na osnovu takvog svog računa izgradio je Aristarh prvi heliocentrični sistem sveta, no njegov spis o tome nije nam se očuvao. Napomenimo uzgred da je u tome Aristarh imao u pitagorejcima izvesne prethodnike. Pitagorejsko shvatanje sveta, a tako i drugih, bilo je, u početku, geocentrično no, kako se u školi pitagorejaca negovala nauka, došlo se u njoj, možda prvi put, do heliocentričnih pretstava. Tako je ***Filolaj*** koji je krajem petog veka pre Hrista živeo u Tebi, učio da je središte vasione „središnja vatra” koju nije jasno odredio, a mislio je, možda, na Sunce, no to nije smeo reći s obzirom na uticaj sveštenstva. Druga dva pitagorejca učila su, saobrazno tome, da se Zemlja obrće oko svoje ose i da time izaziva smenu dana i noći, a da je sfera zvezda nekretnica nepomična (suprotno geocentričnom shvatanju). To pitagorejsko shvatanje prihvatio je, verovatno, i poznati atinski filozof ***Anaksagora*** (5. stoleće pre Hrista) kad je učio da Mesec prima svetlost od Sunca i da zato pokazuje svoje mene. Optužen zbog ovakvog učenja za krivoboštvo, spasao se, jedva, smrtne kazne.

Nije nam poznato kako je prošao Aristarh zbog revolucionarnosti svog učenja. Po jednom *Plutarhovom* spisu, stoičar *Kleantes* „pozivao je celu Grčku da optuži Aristarha” zato što je „hteo da pomeri sveti centar vasione i, da bi objasnio nebeske pojave, zaustavio je nebo zvezda nekretnica, a našu Zemlju uputio da se kreće po krugu nagnutu prema nebeskom ekvatoru i da se u isti mah obrće oko svoje ose”. Time je već jasno naznačen Aristarhov heliocentrični sistem. Prema jednoj napomeni *Arhimeda*, Aristarh je izveo da je „svet mnogo veći nego što se misli” i da je „sfera zvezda nekretnica čije središte je takođe u Suncu, toliko ogromna da krug što ga Zemlja opisuje, stoji prema njoj u istoj razmeri kao središte jedne lopte prema njenoj površini” (tj. beskrajno je velika).

Spomenućemo ovom prilikom zanimljiv podatak prema kome je *Seleuk*, sledbenik Aristarhov, Haldejac iz drugog stoleća pre Hrista učio da „Mesec obilazi oko Zemlje i stvara plimu” što je zaista tačno i tvrdio da je „dokazao Aristarhov sistem”. Ovo nas navodi na misao da je Seleuk došao do ideje o kosmičkoj gravitaciji po kojoj Mesec kao teško telo privlači mora na Zemlji i tako stvara plimu i oseku.

Arhimed je svakako jedan od najvećih matematičara Starog veka, svojim pronalascima u geometriji, aritmetici, algebri i fizici. O njegovoj nauci svedoče i neke zgode iz njegova života koje se prepričavaju sve do danas, na primer, kako je pomoću paraboličkih ogledala spalio rimske brodove pri opsdi *S*irakuze, kako je pomoću poluge podigao veliki brod iz brodogradilišta i tada rekao da bi isto tako mogao podić celu Zemlju kad bi našao tačku oslonca za polugu.

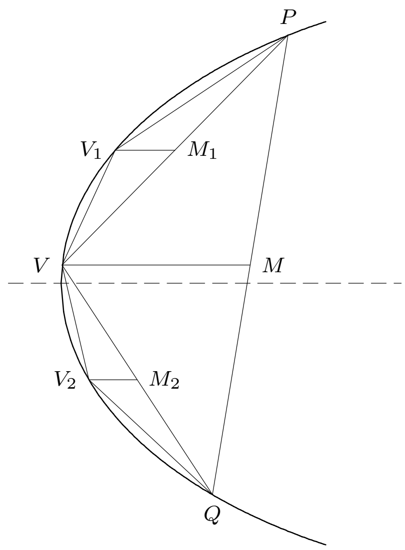
Od Arhimedovih geometrijskih radova značajan je spis o merenju obima kruga, spis o spirali, spis u kome nalazi površinu parabolična otsečka, dva spisa iz stereometrije. U prvom spisu se približava tačnoj vrednosti obima kruga posmatranjem opisanih i upisanih pravilnih poligona sa sve većim brojem strana. Izračunavajući obime tih poligona on dobija brojeve veće od obima kruga (obimi opisanih poligona) i manje od obima kruga (obimi upisanih poligona), a ti brojevi se sve manje razlikuju od obima kruga ukoliko je broj strana poligona veći. No, tom metodom koja je najznačajnija po tome što bi se po njoj mogao izračunati obim kruga s onolikom tačnošću s kojom bi se htelo, dakle, mogao bi se po njoj izračunati s proizvoljnom tačnošću, na onoliko decimala koliko se hoće. Arhimed tom metodom nije išao daleko ali ipak toliko da je za broj π, kako to danas kažemo, našao da se nalazi između $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{10}{71}$, tj. da je

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

Kako je $3\frac{1}{7} = 3,1428\ldots$, a $3\frac{10}{71} = 3,1408\ldots$ Arhimed je, dakle, dobio tačne dve decimale broja π, tj. $\pi = 3,14\ldots$

Metodu beskrajnog uzastopnog približavanja nalazimo, još jasnije, u Arhimedovu nalaženju površine otsečka parabole (kvadratura parabole).

Ta metoda je dobila svu svoju vrednost tek pronalaskom infinitezimalnog (diferencijalnog i integralnog) računa. Beskrajnim približavanjem dolazimo do tzv. *graničnih vrednosti*, a pojam granične vrednosti ili granice je osnovni stub infinitezimalnog računa i svekolike „više matematike”. U tim stvarima Arhimed je, dakle, jedan od prethodnika infinitezimalnog računa.



Slika 45

Evo ukratko kako dolazi Arhimed do površine (do takozvane *kvadrature*) otsečka parabole. Da bi dobio površinu otsečka omeđenog tetivom (sl. 45) Arhimed povuče prvo duž MV kroz središte M tetive PQ, paralelno osi parabole. Označimo površinu trougla PQV slovom Δ. Ona se lako izračunava čim su date tačke P i Q na paraboli. Ako na tetivama PV i QV sagradimo analogno, trouglove PVV_1 i QVV_2, polazeći od središta M_1 i M_2 tih tetiva, imamo dva nova trougla, oba manja od prvoga. Jednostavnim geometrijskim posmatranjem doznaje se da je površina svakog od ta dva trougla $\frac{\Delta}{8}$, dakle, da je površina oba zajedno $\frac{\Delta}{4}$.

Da bi dobio površinu otsečka parabole Arhimed nastavlja započeto raspolovljavanje tetiva beskrajno i dobija tako, između lukova parabole i dvaju trouglova PVV_1 i QVV_2, prvo četiri još manja trougla kojima je ukupna površina, kao što se odmah uviđa, opet četvrtina površine prethodana dva trougla, tj.

$$\frac{1}{4}\frac{\Delta}{4} = \frac{\Delta}{16}.$$

Zatim dobija osam još manjih trouglova s ukupnom površinom

$$\frac{1}{4}\frac{\Delta}{16} = \frac{\Delta}{64},$$

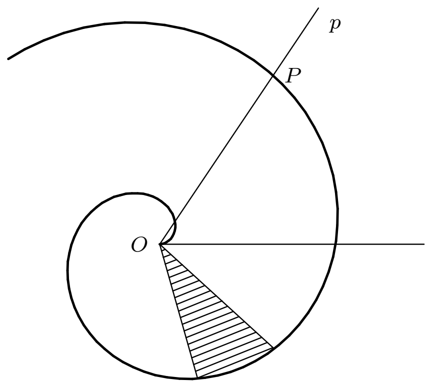
itd. Prema tome, površina S uočenog otsečka parabole ima vrednost beskrajnog zbira

$$\begin{aligned} S &= \Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{16} + \frac{\Delta}{64} + \dots \\ &= \Delta\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) \end{aligned}$$

To je geometrijski red (beskrajne zbirove nazivamo *redovima*, a članovi tog reda sačinjavaju geometrijsku progresiju) i, kao što se u Euklidovim *Elementima* moglo naći, imamo da je

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},$$

dakle, $S=\frac{4}{3}\Delta$, a time je problem rešen.



Slika 46

S velikom veštinom primenjuje Arhimed geometrijska razmatranja da bi izvršio konstrukciju tangente na spirali (pužnoj liniji) koju je on naročito ispitivao i koju nazivamo njegovim imenom, da bi izvršio kvadraturu isečka spirale s vrhom u njenom središtu. Tu svoju spiralu definiše Arhimed na sledeći način: Neka se poluprava p obrće u ravni oko svoga kraja O stalnom brzinom, i neka se istovremeno na polupravoj p tačka P udaljuje od O stalnom brzinom. Tada tačka P opisuje u ravni izvesnu liniju — *Arhimedovu spiralu* (sl. 46).

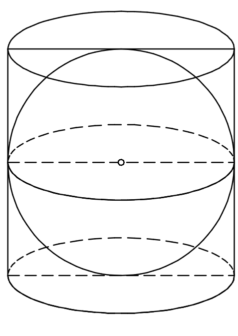
Sam Arhimed je, kažu, najviše cenio dva svoja rada iz stereometrije. Tu je dokazao da je *površina lopte* jednaka četvorostrukoj površini najvećeg kruga te lopte (tj. kruga koji se dobija kad se lopta preseče ravni koja prolazi kroz njeno središte). To je ono što mi izražavamo obracsem za površinu lopte

$$P=4\pi r^2.$$

Zatim, dokazao je da je *površina kalote* (otsečka lopte) onolika koliku daje poznati obrazac

$$P=2\pi hr,$$

gde je r poluprečnik lopte, a h visina kalote.



Slika 47

Zatim je dokazao da je zapremina lopte jednaka dve trećine zapremine valjka opisanog oko lopte (sl. 47). Ako je r poluprečnik lopte, visina valjka je $2r$, dakle, zapremina valjka je $\pi r^2 2r = 2\pi r^3$, a prema tome, zapremina lopte je

$$\frac{2}{3} 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

tačno prema poznatom obrascu.

Poznajemo i jedan njegov naučni spis nazvan „peščani”, jer u njemu je reč o mogućnosti zamišljanja i određivanja neograničeno velikih brojeva kao što bi bio broj zrnaca peska. Arhimed pokazuje da se tačno može navesti broj koji je ne samo veći od broja zrnaca peska oko Sicilije nego, štaviše, veći od broja zrnaca peska koji bi ispunio sav svemirski prostor do svoda zvezda stajačica (po tadanjem zamišljanju svemira). U tom radu njegova je težnja da, jasnom matematičkom mišlju ukaže na mogućnost imenovanja brojeva tako velikih da se naivno mišljenje oseća potpuno nemoćnim i nalazi još reči kao „beskrajno”, „neizrecivo” i slično. Načelo pak pomoću koga Arhimed pokazuje ma koliko velike brojeve je ono isto koje je u osnovi samog dekadnog sistema brojeva — definisanje sve više jedinica. Tako Arhimed, brojeći prvo na tada poznati način, dolazi do broja sto miliona, tj, $100000000 = 10^8$ i taj broj smatra jedinicom više vrste s kojom počinje ponovo brojati kao što je prethodno s običnom jedinicom. Brojeve do te prve više jedinice naziva prvom *oktadom*.

S višom jedinicom može imenovati neposredno sve brojeve od $1 \cdot 10^8$ do $10^8 \cdot 10^8$. Oni obrazuju drugu oktadu. Broj $10^8 \cdot 10^8 = 10^{2 \cdot 8} = 10^{16}$ mu je nova, još viša jedinica s kojom opet počinje brojati. Tako se Arhimed penje sve više, ka sve većim brojevima koji se izražavaju pomoću sve viših jedinica $10^{3 \cdot 8}$, $10^{4 \cdot 8}$ itd.

Pri tome je izračunao da bi broj zrna peska, kad bi ovaj ispunjavao sav „svemir” svakako bio manji od broja koji ćemo mi ukratko napisati u obliku 10^{63}. Zanimljivosti radi, spomenimo da je u teoriji relativnosti jednom izračunat približni broj elektrona u svemiru i dobio se broj 10^{77}.

Arhimed ide i dalje i broj koji bismo mi napisali $10^{8 \cdot 10^8}$ on smatra osnovnom jedinicom još više kategorije i sve brojeve do nje naziva *prvom periodom* da bi s njom gradio još veće brojeve. Ovaj rad svedoči, svakako. i o tome da je problem beskrajnosti pred kojim se misao antike bojažljivo povlači, ozbiljno zanimao Arhimeda. Tako je i moralo biti matematičaru koji se već približavao *infinitezimalnoj metodi*.

Ovim povodom progovorimo koju reč o grčkom pisanju brojeva. Kako ni oni u pisanju nisu imali pozicioni sistem, pisanje, pa otud i zamišljanje brojeva i računanje s njima, bilo je znatno teže nego nama. U starije doba znaci su, na primer, bili sledeći

I	II	III	IIII	Π	ΠI	ΠII	Δ	ΔI	ΔΠII	ΔΔ
1	2	3	4	5	6	7	10	11	17	20

i slično dalje. Znak Π dolazi od reči Πέντε (pet), Δ od Δέκα (deset). Znak za 100 je bio H (Hεκατoν), za 1000 X (Xιλιαξ), a za 10000 M(Mηριoν). Prema tome bilo bi

XXHHHΔΔIII= 2328.

Znak Π se obično skraćivao i dobijao oblike Γ ili T te bi se pisalo Γ^{Δ}=50, Γ^{H}=500,

Γ^{M}MMΓ^{X}XXXΓ^{H}HHHHΓ^{Δ}ΔΓII=78967.

Kasnije se uvelo načelo (već oko petog stoleća pre Hrista) da se brojevi označavaju slovima. Taj, u istinu manje praktični jer je nejasniji, način pisanja, mada nešto kraći, zadržao se do kraja grčke i helenističke kulture. Po tom načinu je, na primer

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\iota}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\varrho}$	$\bar{\varphi}$
1	2	3	4	5	10	20	100	500

i

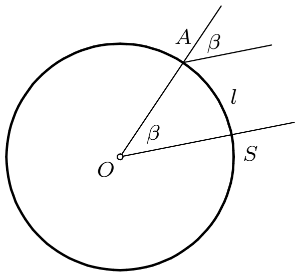
$$\bar{\varphi}\bar{\kappa}\bar{\gamma} = 523.$$

Znak nad slovom kazuje da slovo treba smatrati znakom broja. Ali na taj način se, uzimajući u pomoć i neka inače neupotrebljavana slova, moglo pisati samo do 999. Hiljade su se pisale istim znacima stavljajući crticu ispred njih, na primer

$$-\bar{\alpha} = 1000, \quad -\bar{\beta} = 2000, \quad \textit{itd.}$$

Poznati su Arhimedovi radovi iz statike čvrstih tela (poluga) i statike tečnosti (Arhimedov zakon). Jedan spis se odnosi na određivanje težišta ravnih ploča raznih oblika, jedan je o telima što plivaju. Time je Arhimed jedan od osnivača mehanike, ali još ne mehanike tela u pokretu nego samo u mirovanju. Ljudskoj misli je trebalo dugo da se zadrži na pitanjima *statike* kojima je, svakako, lakše prilaziti pre no što se osmelila da istražuje kretanja, tj. da se posveti pitanjima *kimematike* i *dinamike*. Početak dinamike pada tek u doba Preporoda i vezan je za ime Galileja, a Stari vek je ostao uglavnom u granicama statike kao što je, u neku ruku, statičko i svekoliko mišljenje grčkog racionalizma.

Eratosten, savremenik Arhimeda, izazvao je divljenje svoji savremenika svestranošću. On je, kažu, sebe smatrao, pre svega, književnikom ali je napisao dela i iz filozofije i iz geodezije i geografije i hronologije i matematike. Možda je ideja da se egipatskoj godini koja je imala uvek 365 dana i zato zakašnjavala svake četiri godine za jedan dan, doda svake četvrte godine (prestupna godina) jedan dan, tj. ideja takozvanog *julijanskog kalendara* (no koji su pre Rimljana uveli Egipćani), Eratostenova ideja.



Slika 48

Eratosten je, na primer, izmerio nagib ekliptike i našao da je taj ugao $23°51'20''$. Njegov je prvi pokušaj da se tačno izmeri veličina Zemlje. Sastoji se u sledećem: U južnom Egiptu, u gradu Sijeni — tačka S na krugu koji pretstavlja Zemlju na slici 48 — bio je poznat bunar u čijem dnu se Sunce ogledalo u podne samo jedanput u godini. Tog dana je, dakle, Sunce bilo u podne u Sijeni na zenitu, dakle u pravcu poluprečnika OS. Da bi došao do cilja Eratostenu su bila potrebna još samo dva podatka: ugao β što u Aleksandriji (tačka A) u isto podne zaklapa pravac zenita s pravcem u kome stoji Sunce i, zatim, daljina Sijene od Aleksandrije, tj. dužina luka AS. Ovaj drugi podatak je bio poznat iz radova geodeta. Znalo se da je $l = 5000$ stadija. Prvi podatak je merenjem dobio sam Eratosten i našao da ugao β iznosi tačno pedeseti deo punog ugla. Kako se pravci sunčevih zraka u tačkama A i B mogu smatrati paralelnim zbog velike daljine Sunca, ima i ugao AOS vrednost β, dakle luk l je pedeseti deo celog Zemljinog meridijana ili ekvatora (Zemlja se tada još smatrala loptom). Prema tome dužina meridijana je $50l = 50 \cdot 5000$ stadija $= 250000$ stadija. Kako grčki stadion iznosi 164 metra, znači da je dužina ekvatora 41000 km, što se, zaista, malo razlikuje od tačne vrednosti 40003 km.

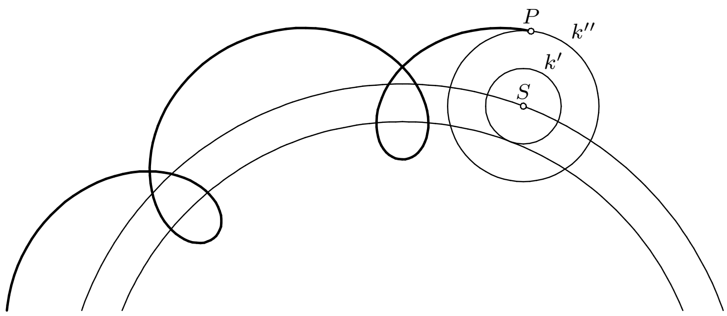
1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Eratostenovo sito

Spomenućemo još tzv. *Eratostenovo sito*. To je elementaran način dobijanja prostih brojeva. Ispišemo niz prirodnih brojeva dokle hoćemo, tako da brojevi do 10 stoje u prvom redu, zatim do 20 u drugom redu itd. Brojevi 1 i 2 su prosti. Brojevi čiji je oblik $2n$, gde je n ma koji prirodni broj veći od 1, nisu prosti i njih ćemo precrtati (vidi shemu), a to znači od 2 precrtavamo svaki drugi broj u ispisanoj shemi, dakle, 2, 4, 6, itd. Posle 2 sledeći neprecrtani broj je 3. To je prost broj. Naprotiv, brojevi oblika $3n$, gde je n ma koji prirodni broj veći od 1, nisu prosti, te sad i njih treba precrtati, a to znači, pošavši od 3, treba precrtati svaki treći broj. Zatim prelazimo na sledeći neprecrtani broj iza 3, a to je 5 i precrtamo, po istom pravilu, sve brojeve oblika $5n$, gde je n ma koji prirodni broj veći od 1, a to znači sve brojeve u stupcu ispod 5 i sve u desetom stupcu (ovo je već ranije učinjeno. Idući neprecrtani broj je 7 i sad treba precrtati sve brojeve $7n$ itd. Primetimo da je dovoljno ako se osvrnemo na brojeve $7n$ kad je $n \geq 7$ jer, na primer, broj $7 \cdot 5$ je već ranije precrtan kao jedan od brojeva $5n$. Dakle kada dospemo do nekog prostog broja p treba precrtati sve brojeve pn, gde je $n \geq p$. Prema tome, ako, na primer, tražimo samo proste brojeve manje od 120 ne treba ni otpočinjati sa 11, jer je $11 \cdot 11$ već veće od 120. Brojevi koji pri svakom postupku ostanu neprecrtani jesu prosti brojevi.

Apolonije iz Perga je treći veliki matematičar trećeg stoleća pre nove ere, savremenik Arhimeda i Eratostena. On je, kao i Eratosten, živeo u Aleksandriji. Njegovo delo o konusnim presecima — „Konika", u koje je uneo dotadašnje znanje o tom predmetu kao i svoja otkrića izazvalo je divljenje savremenika i kasnijih naučnika. Govorilo se da se nema više šta dodati teoriji konusnih preseka. To delo obuhvata u osam knjiga oko 400 stavova. Govoriti o sadržaju tog dela, jednog od najsjajnijih matematičkih dela drevnosti, odvelo bi nas predaleko. Recimo još samo da se geometrijsko ispitivanje tu izdiže do takvih visina da se Apolonije može smatrati i prethodnikom savremene *projektivne geometrije*. Naravno, nije to jedino delo Apolonijevo. Napisao je i razna druga dela iz geometrije i astronomije. Jedan rad *O dodirima* sadrži i tzv. Apolonijev problem koji se sastoji u sledećem: treba konstruisati u ravni krug koji dodiruje tri data kruga te ravni. Pri tome se može pretpostaviti i da je neki od datih krugova beskrajno mali, tj. da se sveo na jednu tačku ili pak da je postao beskrajno veliki i pretvorio se u pravu liniju. Prema tome Apolonijev provlem obuhvata više užih problema kao što je konstrukcija kruga koji prolazi kroz jednu tačku i dodiruje dva kruga ili koji prolazi kroz dve tačke i dodiruje jedan krug ili koji dodiruje jednu pravu i dva kruga itd.

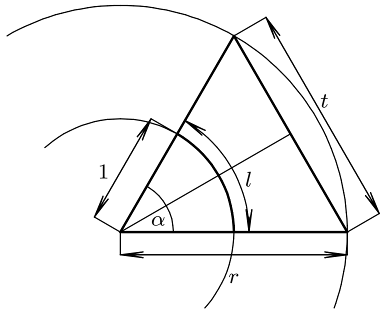
Napomenimo da je Apolonije proračunavao obim kruga i približio se vrednosti broja π još više nego Arhimed. Misli se da je, kako bi smo danas rekli, dobio broj π približno na prve četiri decimale, tj. dobio je da je $\pi \approx 3,1416$ ($\approx$ je znak za približnu jedakost).



Slika 49

Važno je i Apolonijevo proučavanje *epicikala*, tj. krivih koje opisuju tačke čvrsto spojene s krugom koji se kotrlja u ravni po nepomičnom krugu. Ako se krug k' kotrlja po krugu k, tačka P na krugu k'' koji je čvrsto spojen s krugom k' opisuje epicikl (epicikličnu krivu, sl. 49). U proučavanju tih linija Apolonije je, po mišljenju profesora *M. Milankovića* pošao od Aristarhova heliocentričnog sistema jer, ako se sa saznanjem koji taj sistem pruža, stavimo na stanovište koje zauzima posmatrač koji smatra da Zemlja miruje, tada bi se planete kretale po epiciklima. Pri tome je k krug po kome se sunce prividno kreće oko zemlje u jednoj godini. Apolonijevu teoriju epicikala, izniklu iz heliocentričnog sistema Aristarhova, iskoristio je kasnije *Ptolemaj* i na njoj izgradio svoj geocentrični sistem. No, *Kopernik* je još jasnije prozreo heliocentrično jezgro teorije epicikala i tako probratio Ptolemajev sistem sveta u heliocentrični.

Treće stoleće pre nove ere je prvo i najstarije doba aleksandrijske matematike — doba Euklida, Arhimeda, Aristarha i Apolonija. U idućim stolećima više se dopunjavalo i komentarisalo nego što se nadmašivalo ono što se tada bilo dostiglo.



Slika 50

Hiparh koji je živeo uglavnom na Rodosu (otprilike 170–120. godine pre nove ere)jedan je od najvećih grčkih astronoma što se tiče astronomske prakse. Značajni su mu i radovi u geografiji gde je vršio tačnije izmeravanje položaja pojedinih mesta na Zemlji. Tom prilikom uvodi geografske dužine i širine mesta, a to je već jedna vrsta *koordinatnog sistema*, i javlja mu se potreba za *trigonometrijom* te se Hiparh može smatrati tvorcem trigonometrije. Napisao je dvanaest knjiga o tetivama krugova i njihovim centralnim uglovima. Tu razmera tetive t, zahvaćene centralnim uglom α, spram poluprečnika r kruga (sl. 50) ima ulogu osnovne trigonometrijske funkcije. Ekvivalentna je sinusu. Ako, naime, ugao α raspolovimo, dolazimo lako do obrasca

$$\frac{t}{r} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

ili, ako ugao merimo dužinom zahvaćenog luka l na koncentričnom krugu kome je poluprečnik 1

$$\frac{t}{r} = 2\sin\frac{l}{2}.$$

S dužinom luka l menja se i dužina tetive t koja je, prema tome, određena trigonometrijska funkcija luka l, data prethodnim obrascem. Hiparh je radi svojih praktičnih računa izradio bio tablice te veze između l i t. To su, verovatno, prve trigonometrijske tablice u istoriji. Pomoću njih on je praktično izvodio triangulaciju (o kojoj ćemo govoriti kasnije) i, na primer, izračunavao daljinu nekog predmeta koju bi neposrednim načinom bilo nemoguće izmeriti. Slični trigonometrijski problemi javili su mu se, svakako, i u astronomiji te je isto toliko i radi nje postavio svoju trigonometrijsku metodu.

Jedan od največih matematičara što se tiče praktičnih primena njenih je ***Heron*** koji je živeo, verovatno, u prvom stoleću pre nove ere. On je, kažu, postavio građevinarstvo i geodeziju na naučne osnove. Njega ne interesuje teorijska strana matematičkih problema nego sve radi prakse. U tome je, bez sumnje, bliži egipatskoj matematici nego grčkoj. Praktični su mu ciljevi i u delu *Metrika* koje je geometrijskog sadržaja i obuhvata tri knjige. U prvoj knjizi bavi se izračunavanjem ravnih i oblih površi, u drugoj zapreminom tela, u trećoj deobom tela i površi. U prvoj knjizi nalazimo i poznati *Heronov obrazac* za površinu trougla kome poznajemo samo njegove tri strane, a, b i c. Površina P ima vrednost

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Da bi taj obrazac bio zaista praktičan treba znati kako vaditi drugi koren na lak način. Zato Heron daje i obrazac pomoću koga se lako izračunava drugi koren približno. Recimo da treba dobiti drugi koren broja N. Potražićemo broj koji je potpun kvadrat, na primer A, a koji se što manje razlikuje od N. Imaćemo

$$N = A^2 \pm B,$$

gde je B srazmerno mali broj. Tada važi sledeći obrazac približne jednakosti koji se, takođe, naziva Heronovim

$$\sqrt{N} = \sqrt{A^2 \pm B} \approx A \pm \frac{B}{2A}.$$

Taj obrazac može poslužiti da se tačnoj vrednosti drugog korena još više približimo i, štaviše, da joj se neprestano približujemo. To je i sam Heron znao. Ako naime stavimo

$$A \pm \frac{B}{2A} = A_1,$$

imamo

$$\sqrt{N} = \sqrt{A_1^2 \pm B_1},$$

gde je B_1 broj manji od B jer je A_1^2 bliži broju N od A^2. Ako opet primenimo Heronovu približnu jednakost imamo da je

$$\sqrt{N} \approx A_1 \pm \frac{B_1}{2A_1}.$$

Evo primera koji se nalazi u Herona. Treba naći približno $\sqrt{720}$. Kako je $27^2 = 729$, imamo da je $720 = 27^2 - 9$. Dakle,

$$\sqrt{720} \approx 27 - \frac{9}{54} = 27 - \frac{1}{6} = 26\frac{5}{6}.$$

Zaista, $26\frac{5}{6}^2 = 720\frac{1}{36}$ što se od 720 vrlo malo razlikuje. Ako hoćemo da razlika bude manja stavimo $26\frac{5}{6}$ umesto 27. Imaćemo

$$\sqrt{720} \approx 26\frac{5}{6} - \frac{1}{36} = 26\frac{29}{36}.$$

Heron je napisao i jedno delo u tri knjige o mehanici i razna druga dela iz matematike i fizike. U njegovim spisima nalazimo, na primer, ideju hidraulične mašine i teodolita, kojim se vrše meranja u geodeziji. U spisima *Pneumatika* i *Automata* iznosi opis oko sto mašina koje odaju genijalnog pronalazača i prednjače za mnoge vekove u razviću mašinske tehnike. Tu nalazimo, na primer, opis dvocilindrične vatrogasne pumpe pa, čak, i parne mašine kakva se pojavila ponovo tek u prošlom stoleću, pre Vatova uređaja. Može nas čuditi što se ti tehnički izumi nisu još tada razvili dalje i počeli preobražavati način rada i života. Uzrok je u celokupnom družtvenom ustrojstvu antičkog doba. Osim toga, kao što već rekosmo, godine 47. pre nove ere zadesila je nauku katastrofa požara Aleksandrijske biblioteke, a to je samo doprinelo da se razviće nauke zaustavi za mnoga stoleća.

Ptolemaj (87–168. nove ere) je pisac čuvenog astronomskog dela u kome je razrađen geocentrični sistem sveta i koje je kroz dugi niz vekova smatrano isto tako neprigovorivim kao što beše Euklidovo u geometriji. To je *Veliki matematički zbornik*, poznat pod imenom *Almagest*. U tom delu Ptolemaj nastavlja Hiparha, dopunjujući ga i usavršavajući njegova izlaganja. Delo se sastoji iz 13 knjiga. Evo ukratko sadržaja.

U prvoj knjizi reč je o prethodnim geometrijskim pojmovima. Među ostalim razvija se tu trigonometrija, ravna i sferna. Izlaganje trigonometrije, mada u starom obliku kakav upoznasmo kod Hiparha, tako je dobro izvedeno da se sve do doba Preporoda nije nadmašilo. U toj knjizi Ptolemaj tumači i kosost ravni ekliptike. U drugoj knjizi proučava posledice sfernog oblika Zemlje. Tu na jednom mestu primećuje da bi bilo jednostavnije uzeti da se Zemlja okreće ali to se, kaže, protivi činjenicama posmatranja. Kao što znamo, tog protivljenja nema kao što su Aristarh i njegovi učenici već bili utvrdili ali, na jednoj strani, možda su o tim pitanjima spisi bili iščezli jer Ptolemaj je živeo oko dva stoleća iza požara Aleksandrijske biblioteke, a na drugoj, doba Ptolemaja je već doba neopitagorejaca i drugih srodnih shvatanja sveta koja su se protivila izbacivanju naše planete iz središta vasione.

U trećoj knjizi Ptolemaj tumači kretanje Sunca oko Zemlje, a u četvrtoj i petoj kretanje Meseca. U šestoj knjizi izlaže teoriju *eklipsa* (pomračenja Sunca i Meseca). U ostalim knjigama izlaže teoriju planeta, gde se koristi Apolonijevom teorijim epicikala. Kao što rekosmo, to delo je ostalo merodavno i osnovno delo astronomije sve do Kopernika i Keplera, tj. do 16. i 17. stoleća.

Kao i drugi „matematičari”, Ptolemaj se u svojim istraživanjima nije ograničavao samo na jednu oblast, mada je astronomija sama bila već tada vrlo široka oblast naučnog rada. Znamo za njegove radove i iz optike, i akustike, i mehanike, pa i geometrije. On je prvi za koga znamo da je nastojao da dokaže Euklidov postulat o paralelama. O tome je i spis napisao ali je njegov „dokaz” nepotpun.

Otprilike u isto doba živeo je ***Nikomah***. Njegovo delo *Aritmetika* smatrano je skoro hiljadu godina onim u aritmetici što su Euklidovi *Elementi* u geometriji. Donekle slično *Elementima*, Nikomahova Aritmetika izlaže sistematski ono što se u aritmetici smatralo u njegovo doba osnovnim, a možda i glavnim znanjem. Dok je i u Elementima bilo reči o brojevima, ali su se onde posmatrali geometrijski, Nikomah se aritmetikom bavi aritmetički. Njegova *Aritmetika* razmatra pojedine vrste prirodnih brojeva kao što su parni i neparni, prosti brojevi, zatim tzv. savršeni brojevi, figurativni brojevi itd. Proučavanju proporcija posvečuje se zasebna pažnja i razlikuje se *geometrijska*, *aritmetička* i *harmonijska sredina*. Podsetimo se, aritmetička sredina dva broja a i b je broj

$$\frac{a+b}{2},$$

geometrijska sredina je

$$\sqrt{a \cdot b},$$

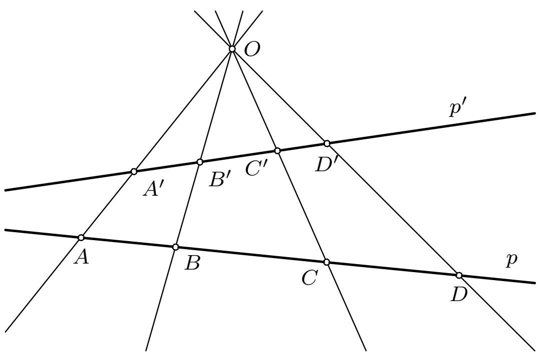
a harmonijska je

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ako hoćemo da karakterišemo sadržaj *Aritmetike*, možemo reći da se u njoj izlažu ona učenja iz elementarne teorije brojeva koja su grčkoj nauci bila poznata, a razvila su se naročito kod pitagorejaca i u njima srodnim kasnijim školama.

Sve do kraja trećeg stoleća nove ere nemamo ničeg što bi iz matematike vredelo pomenuti. U sklopu celokupnog hoda istorije, gube se sve više one povoljne prilike koje su i matematičkim naukama omogućile procvat kakav je bio osobito u doba Euklida. Grčka nauka koja se bila uzdigla u borbi sa starijim religioznim i mitološkim pogledima i koja je dostigla bila veliku samostalnost prema njima, sad se ponovo slivala s njima, stvarajući sinteze u kojima se egzaktna nauka sve više gubila. Posle neopitagorejaca dolazi doba neoplatoničara. Jedan od njih, ***Jamblih***, poznat i kao matematičar, tipičan je pretstavnik tog doba. Živeo je početkom IV stoleća. Njegova *Zbirka pitagorejskih učenja* sastojala se iz nekih deset knjiga (sačuvale su se prve četiri) čiji sadržaj je ukratko ovaj: prva knjiga — život Pitagore, druga — uvod u filozofiju, treća —uvod u matematiku, četvrta — razjašnjenje k Nikomahu, peta — razmatranja iz fizike, šesta — iz etike, sedma — mistično-aritmetička razmatranja, osma — muzika, deveta — geometrija, deseta — sferna geometrija. Već iz ovih reči nazire se eklektični i mistični karakter ovog dela kojim se matematika u njemu prožima. Ipak, još su se u matematici obavljali i neki znatniji napreci, kao što ćemo videti posmatrajući dela dva velika pozna pretstavnika grčke matematike — Paposa Aleksandrijskog i Diofanta.

Papos, s kraja III stoleća, najpoznatiji nam je svojom *Zbirkom* matematičkih razmatranja gde u osam knjiga daje pregled izvesnih problema i spisa ranijih matematičara, a dodaje i svoja otkrića koja se odlikuju znatnim znanjem i oštroumnošću pisca. Tako, na primer, možemo njemu pripisati tzv. *Guldinovo pravilo* koje je ponovo pronađeno tek u 17. veku i koje nam daje zapreminu obrtnih (rotacionih) tela. Nalazimo i stav o *stalnosti dvorazmere*, jedan od osnovih u projektivnoj geometriji i koji se sastoji u sledećem: Neka su A, B, C, D ma kakve četiri tačke na nekoj pravoj p. Razmera $AC : BC$ podeljena razmerom $AD : BD$ je izvestan broj λ i zove se *dvorazmera*. Ako tačke A, B, C, D projiciramo iz koje god tačke O na koju bilo pravu p', dobićemo opet čtiri tačke A', B', C', D' (sl. 51). Naravno, razmete $AC : BC$ i $A'C' : B'C'$ nisu jednake, osim ako prava p' ima nartočti položaj (ako je uporedna sa p ili se, na primer, tačke A i A' poklapaju).



Slika 51

Opšte rečeno, razmere se pri projiciranju ne održavaju, one se menjaju. Ali, u svoj toj promenljivosti, održavaju se dvorazmere. To kazuje dotični stav. Po njemu je dvorazmera tačaka A, B, C, D uvek jednaka dvorazmeri A', B', C', D', tj.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

U Paposovim aritmetičkim razmatranjima nalazimo sledeću novinu. On označava *posebne* brojeve kao svi, tadanjim običnim grčkim slovima. Ali on upotrebljava ta slova i u drugom smislu: da bi označio koji bilo broj, dakle, upotrebljava ta slova da bi označio *opšte* brojeve. Tada piše veća slova da bi se po veličini razlikovala od onih koja označuju posebne brojeve. Tako mu, na primer, veliko A može značiti 20, veliko B može značiti 3 itd. To je već ono načelo koje odlikuje našu algebru. Nešto slično našli smo i ranije, u Euklida, ali obeležavajući opšte brojeve slovima Euklid misli na duži koje mu pretstavljaju brojeve. Odatle je trebalo poći korak dalje da bi se i bez geometrijske interpretacije postavilo načelo označavanja opštih brojeva slovima. No, čini nam se da Papos još nije uvideo svu dalekosežnost tog otkrića.

Ipak su najznačajnija Paposova otkriča ona iz geometrije koja danas ubrajamo u projektivnu geometriju i čine da ga možemo smatrati, uz Apolonija, prethodnikom te grane matematike.

Diofant je učio u Aleksandriji u III ili IV stoleću. Njegovo glavno delo *Aritmetika* sastojalo se iz 13 knjiga od kojih nam nisu sve poznate. U tom delu Diofant se znatno približio našoj algebri. Rešava algebarske jednačine prvog, drugog pa i trećeg stepena pomoću izvesne simbolike koja potseća na našu. Tako, na primer, Diofant obeležava nepoznatu znakom ζ čije poreklo nije dovoljno utvrđeno. Prema tome, kad mu se u jednačini javlja nepoznata koju bismo obeležili, na primer, slovom x, kao sabirak, Diofant piše $\zeta\tilde{\alpha}$, gde $\tilde{\alpha}$ znači, kao što videsmo 1. Ali ako se kao sabirak javlja x više puta, na primer, $11x$, Diofant piše $\zeta\zeta\tilde{\iota}\tilde{\alpha}$ gde $\tilde{\iota}\tilde{\alpha}$ znači 11, tj. znak ζ se javlja dvaput uzastopce. Kad bi smo mi pak pisali x^2 ili x^3, Diofant piše Δ^{υ}, odnosno K^{υ} kao skraćenice za reči διναμξ (dinamis=kvadrat) i κύβοξ (kibos=kub). Slične skraćenice ima i za više stepene, sve do x^6. Nezavisni član jednačine obeležava pomoću znaka M° koji dolazi od reči μονάξ (monas=jedinica), na primer, $M^\circ\tilde{\iota}\tilde{\beta} = 12$. Zatim za oduzimanje postoji znak $\pitchfork$ (slovo Λ od reči Λέιπσις, leipsis=oduzimanje), a gde treba sabrati Diofant stavlja znake jedan do drugog bez zasebnog znaka za sabiranje. Znak jednakosti je ι, prvo slovo reči ιξοξ (isos=jednak). Tako, na primer,

$$K^\circ\tilde{\alpha}\zeta\zeta\tilde{\eta} \pitchfork \Delta^{\upsilon}\tilde{\epsilon}M^\circ\tilde{\alpha}\ \iota\zeta\tilde{\alpha}$$

znači

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x.$$

Na taj način Diofant računa s jednačinama. To je već neka simbolička algebra koja još nije našla najpogodnije simbole ali se s njom već mogu rešavati uspešno jednačine. Kako su Diofantovi simboli mahom skraćenice, sinkope, algebra obrađivana njegovim načinom naziva sa *sinkopnom algebrom* i smatra se stepenicom razvića algebre koji prethodi našoj, *simboličnoj algebri*. Ali, kao što vidimo, između Diofantove sinkopne algebre i naše simbolične, razlika je načelno skoro nikakva. Izvesna krupnija razlika je u tome što su koeficijenti Diofantovih jednačina uvek samo posebni brojevi. On, dakle, ne rešava formalno neku opštu jednačinu, nego uvek posebnu, s određenim brojevima, kao što su još i drevni Vavilonjani činili. Ali na takvoj posebnoj jednačini izlaže se opšta metoda rešavanja kao i na opštoj jednačini.

Glavni nedostaci Diofantove algebre su oni koji proističu iz još nedovoljno proširenog pojma broja. Kao što smo videli, *broj* je u grčkoj matematici samo celi pozitivan broj. Tek Diofant računa i sa pozitivnim razlomljenim brojevima kao i sa celim brojevima i, mada razlomke ne naziva izričito brojevima, on sa njima postupa kao sa brojevima. Na taj način on je došao sasvim blizu savremenom shvatanju, po kome su i razlomci brojevi u izvesnom širem smislu. Razlika je još samo u reči, odnosno u proširenom pojmu kome služi reč *broj*.

Sličan napredak nalazimo i u pravcu negativnih brojeva. U Diofanta, štaviše, nalazimo formalno pravilo o množenju pozitivnih i negativnih brojeva koje se uči u našim srednjim školama. Nalazimo reči: „broj za oduzimanje pomnožen brojem za oduzimanje daje broj za sabiranje; broj za oduzimanje pomnožen brojem za sabiranje daje broj za oduzimanje". Doifant je, naime, otkrio da je u nekom *algebarskom zbiru* gde se nekoliko brojeva delom sabiraju, a delom oduzimaju, na primer, $2 + 3 - 4 + 7$, ako taj zbir treba pomnožiti s drugim takvim zbirom, na primer, sa $7 - 5$, možemo prvo sabrati, tj. računati ovako

$$(2 + 3 - 4 + 7) \cdot (7 - 5) = 8 \cdot 2 = 16,$$

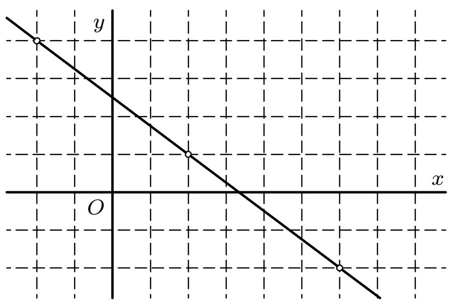
a možemo i prvo množiti, mada su neki od tih brojeva „za oduzimanje", prema rečenom pravilu, pa ćemo opet dobiti tačan rezultat:

$$(2 + 3 - 4 + 7) \cdot (7 - 5) = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 - 4 \cdot 7 + 7 \cdot 7 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = 16.$$

Otkrivši to formalno pravilo po kome možemo množiti i sa „brojevima za oduzimanje", Diofant je uistinu došao do pojma negativnog broja, ali on eksplicitno još nije (koliko nam je poznato danas) obrazovao pojam negativnog broja. On samo postupa tako kao da taj pojam već ima, po navedenom pravilu. Govoreći o „brojevima za sabiranje" i „brojevima za oduzimanje" on, u stvari, govori o *pozitivnim i negativnim brojevima* ali se nigde ne usuđuje da negativan broj napiše sam za sebe kao što mi, na primer, pišemo -5, nego samo u razlikama i algebarskim zbirovima čija vrednost mora biti pozitivna, što možemo shvatiti kao dokaz da do pojma negativnog broja nije došao.

Naravno, Diofant je ostao daleko od iracionalnih brojeva. Držeći se čiste algebre koja ima u vidu samo *brojeve*, a ne geometrijske interpretacije (kao što smo, na primer, našli u Euklida), Diofantu se ne čini mogućim da u oblasti brojeva obrazuje pojam koji bi odgovarao razmeri dveju nesamerljivih duži. Njemu je drugi koren iz nekog broja izvestan pozitivan broj ili on uopšte ne postoji. Tako je Diofant u svojoj algebri dalje od iracionalnih brojeva nego što beše Euklid.

Napominjemo da u rešenjima kvadratnih jednačina Diofant uzima u obzir uvek samo ono rešenje koje ispred korena ima znak +. Zašto ne pominje nikad ono drugo rešenje pa ni onda kad bi oba rešenja bila pozitivna, nije nam poznato i dovodi do sumnje da je za nj uopšte znao.



Slika 52

Opšte uzevši, Diofant je u svojoj *Aritmetici* usavršio rešavanje određenih algebarskih jednačina došavši, u više no u jednom pogledu, sasvim blizu našoj simboličnoj algebri. Ali, osim toga, on je tu izložio i kako se rešavaju tzv. *neodređene jednačine* koje se nazivaju i njegovim imenom, i nije nemoguće da se on njima prvi bavio u istoriji matematike. Reč je uvek o jednoj jednačini prvog stepena s dve nepoznate, na primer,

$$3x + 4y = 10. \qquad (1)$$

Očigledno, takva jednačina ima beskrajno mnogo rešenja, jer za svako x postoji izvesno rešenje u odnosu na y. Ali ako s Diofantom pretpostavimo da rešenja treba da budu celi pozitivni brojevi, postoji određeni niz rešenja. To se može najlakše uvideti ako se setimo da jednačina (1) pretstavlja, u analitičkoj geometriji, pravu; x i y su tada koordinate tačaka te prave. Tražimo li da te vrednosti budu celi brojevi pitamo, znači, da li ta prava prolazi kroz tačke s celim koordinatama i, ako prolazi, kroz koje prolazi (sl. 52). To su za jednačinu (1) tačke $(2, 1)$, $(-2, 4)$, $(6, -2)$ itd. Diofant bi samo par pozitivnih brojeva $x = 2$, $y = 1$ smatrao rešenjem.