Conforme Abbildung

DES

elliptischen Paraboloïds auf die Ebene.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPH. FAKULTAET ZU JENA

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT VON

Demeter Danitsch

AUS

Belgrad.

BELGRAD.

DRUCK DER KÖNIGL. SERBISCHEN STAATSDRUCKEREI.

1885

Seiner lieben Mutter

Katharina Danitsch,

verw. königl. serb. Staatsräthin

als Zeichen der Dankbarkeit

der

SOHN.

I.

Unter der Abbildung einer Flæche auf eine andere Flæche, versteht man im Allgemeinen jede Uebertragung der Punkte und Gebilde der einen Flæche auf die andere Flæche, wenn dieser Uebertragung, d. h. dem Entsprechen der einzelnen Punkte dieser Flæchen ein bestimmtes Gesetz zu Grunde liegt. Eine Uebertragung, bei welcher zwischen dem Bilde und dem Abgebildeten *Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen* besteht, hat *Gauss* mit dem Namen *conform* bezeichnet.

Diese Art der Abbildung, welche zuerst von *Lambert* bei einigen Himmelskarten endeckt wurde, ist sodann für die Umdrehungsflächen durchgeführt und angewandt auf die Konstruktion geographischer Karten von *Lagrange*. *Gauss* war der Erste, der das Problem ganz allgemein für alle Flächen löste und zwar als Antwort[1]) auf die von der Kopenhagener Akademie gestellte Preisfrage.

In der oben citirten Abhandlung hat *Gauss* gezeigt, dass wenn man das Linienelement der einen Flæche ausdrückt in der Form

$$ds^2 = n\ (dp^2 + dq^2)$$

und ebenso dasjenige der anderen in

[1]) abgedruckt in dem dritten Heft der astronomischen Abhandlungen, herausgegeben von H. C. Schumacher. Altona 1825.

$$dS^2 = N\,(dP^2 + dQ^2),$$

wo n, p, q und ebenso N, P, Q Funktionen der rechtwinkligen Coordinaten sind, jede Substitution von der Form

$$P \pm i\,Q = f\,(p \pm iq),$$

worin $i = \sqrt{-1}$ ist, eine Lösung des Problems der conformen Abbildung liefert.

Das Problem ist somit zurückgeführt auf ein Problem der Integralrechnung und die Hauptschwierigkeit besteht darin, Funktionen n, p, q resp. N, P, Q zu finden, mittelst deren das Linienelement sich in obiger Gestalt bringen læsst.

Da sich das allgemeine Problem der Abbildung einer Flæche auf eine andere Flæche in die zwei einfacheren der Abbildung der einen Flæche auf die Ebene und der Abbildung der Ebene auf die zweite Flæche zerlegen læsst, so kann man zunæchst für P und Q die cartesischen Coordinaten in der Ebene substituiren und $N = 1$ setzen.

Weil ferner jede Substitution von der Form

$$P \pm i\,Q = f\,(p \pm iq),$$

d. h. jede Funktion des imaginæren Argumentes $p \pm iq$ zu einer Lösung führt, diese Funktion aber willkürlich bleibt, so lange nicht besondere Annahmen gemacht werden, kann die Abbildung stets auf unendlich viele Arten geschehen. Wæhlt man die einfachste Substitution

$$P + iQ = p + iq,$$

so dass

$$P = p, \quad Q = q$$

und ist die eine der Flæchen eine Ebene, so giebt $\sqrt{n}$ das Vergrösserungsverhæltniss unendlich kleiner Bogenlængen an. Geschieht die Uebertragung aber zwischen zwei beliebigen Flæchen, so ist, bei Annahme der einfachsten Substitution dasselbe $= \sqrt{\frac{N}{n}}$.

Zur Berechnung der Funktionen p und q, der sog. Abbildungsparameter, hat *Gauss* zwei Differentialgleichungen angegeben. Für Rotations-, Kegel- und Cylinderflæchen, læsst sich die Integration immer ausführen, für andere jedoch und insbesondere für die allgemeine Flæche zweiten Grades, sehr schwer.

Drückt man næmlich das Linienelement mittelst zweier Parameter u und v in der allgemeinen Form

$$ds^2 = e.du^2 + 2\,f.du.dv + g.dv^2$$

aus, so liefert die Gleichung

$$ds^2 = o$$

die zwei zu integrirenden Ausdrücke

$$e.du + \left[f + i\sqrt{eg - f^2}\right].dv = o$$

$$e.du + \left[f - i\sqrt{eg - f^2}\right].dv = o,$$

deren Integrale sind

$$p + iq = Const.$$

$$p - iq = Const.$$

Für den Faktor n gab *Gauss* folgende Gleichung

$$\pm n = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}} \quad {}^{1})$$

wenn $\psi = o$ die Gleichung der Flæche darstellt.

Man sieht, dass zur Berechnung von n die Kenntniss von p und q nothwendig ist. Kennt man aber p und q, so folgt n unmittelbar.

Drei andere Formeln zur Berechnung der Funktionen n, p, q, die umgekehrt n unabhængig zu ermitteln gestatten und mit Hülfe davon dann die Werthe von p und q sich ergeben, die aber ebenfalls nur in denselben erwæhnten Fællen, wie die vorhergehenden Gleichungen, leicht durchführbar sind, findet man mit Hülfe einiger anderen *Gauss*'schen Formeln[2]).

Bezeichnet ω den Winkel, den die allgemeinen Parameterlinien u und v mit einander einschliessen, so findet man leicht für p und q die Differentialgleichungen

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\sqrt{e\,(1 + \sin\omega)}\,du + \sqrt{g\,(1 - \sin\omega)}\,dv\right]$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\sqrt{e\,(1 - \sin\omega)}\,du + \sqrt{g\,(1 + \sin\omega)}\,dv\right],$$

deren Integration also die Kenntniss von n voraussetzt. Der Faktor n selbst ist bestimmt mit der Forderung,

---

1) welche sich kürzer auch schreiben læsst: $\pm n = \dfrac{\sqrt{eg - f^2}}{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}}$

2) Disquisitiones generalis circa superficies curvas. Art. 21 etc. (Carl Friedrich Gauss Werke herausgegeben von der koenigl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen 1873. IV. Band).

dass er die obigen zwei Ausdrücke zu vollstændigen Differentialen machen muss, d. h. mit der Bedingung, dass

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1+\sin\omega)}{n}}=\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1-\sin\omega)}{n}},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1-\sin\omega)}{n}}=\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1+\sin\omega)}{n}}.$$

Nach Ausführung der angedeuteten Differentiation, einigen Umsetzungen, Addition oder Subtraktion, der beiden so erhaltenen Ausdrücke und Zusammenziehung der nach derselben Variabeln differentirten Glieder, findet man für n folgende Differentialgleichungen

$$\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}}-\sqrt{e}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}}=o,$$

$$\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}}+\sqrt{e}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}}=o,$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\ln\left(\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}\right)=X,$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)=Y$$

setzt

$$\sqrt{g}\frac{\partial X}{\partial u}-\sqrt{e}\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}-\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}$$

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial Y}{\partial u}+\sqrt{e}\,\frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}+\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v},$$

welches lineare, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Die Lösungen der, beide der obigen zwei Formen enthaltenden, simultanen Differentgleichungen

$$\frac{du}{\sqrt{g}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{e}}=\frac{dZ}{\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\pm\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}}$$

bestimmen Z also auch n unabhængig von der Kenntniss der Fuukttonen p und q. Diese Letzteren erhælt man nach der Berechnung von n mit Hülfe von Quadraturen.

Um nun die für n, p, q aufgestellten Differentialgleichungen auf die allgemeine Flæche zweiten Grades und zwar das hier zu behandelnde Beispiel des elliptischen Paraboloïds

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

anzuwenden, bemerke man, dass die für n gegebenen Differentialgleichungen sich wesentlich vereinfachen, wenn man die allgemeinen Parameter u, v so zu wæhlen sucht, dass

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}=\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}=o.$$

Dieses ist aber erreicht mit der einfachen Substitution

$$x = a.u,$$
$$y = b.v,$$
$$2z = u^2 + v^2.$$

Es ist næmlich in diesem Falle

$$e = a^2 + u^2,$$
$$f = uv,$$
$$g = b^2 + v^2$$

und somit die obige Voraussetzung erfüllt.

Die Differentialgleichungen liefern dann die beiden allgemeinen Lösungen

$$\sqrt{n} = \frac{\varepsilon^{\phi\left(\int\sqrt{e}\,du + \sqrt{g}\,dv\right)}}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

$$\sqrt{n} = \sin\frac{\omega}{2}\,.\,\varepsilon^{\phi\left(\int\sqrt{e}\,du - \sqrt{g}\,dv\right)}$$

wenn ϕ einen Funktionsbuchstaben und ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet oder die einfacheren

$$\sqrt{n} = \frac{1}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt{n} = \sin\frac{\omega}{2}.$$

Damit ist auch das Auffinden der Funktionen p und q auf Quadraturen zurückgeführt, deren Ausführung jedoch wieder mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist.

II.

In der einfachsten Weise erhælt man aber die Abbildungsparameter für die Flæchen zweiten Grades mit Benutzung elliptischer Raumcoordinaten, nach denen die Punkte einer solchen Flæche auf die Krümmungslinien dieser, d. h. die Durchschnittscurven der gegebenen mit zwei mit ihr confokalen Flæchen zweiten Grades, bezogen sind. Das Linienelement ist dann ausgedrückt in der Form

$$ds^2 = e.du^2 + g.dv^2$$

und die Differentialgleichungen für p und q lassen sich ohne Weiteres integriren.

Die Gleichung des elliptischen Paraboloïds ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

und die der dazu confokalen Flæchen

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} = 2z - u$$

$$\frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} = 2z - v,$$

wo

$$\infty \geqq u \geqq a^2 \geqq v \geqq b^2,$$

und somit die erste confokale Flæche ein elliptisches, die zweite ein hyperbolisches Paraboloïd darstellt.

Jeder Punkt der gegebenen Flæche ist also durch ein zusammengehöriges Werthepaar von u und v bestimmt. $u = Const.$ repræsentirt das eine, $v = Const.$ das andere System der Krümmungslinien.

Aus den obigen drei Gleichungen folgen die Werthe

$$x^2 = a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{b^2 - a^2},$$

$$y^2 = b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{a^2 - b^2},$$

$$2z = u + v - a^2 - b^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{x}{a^2 - u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{x}{a^2 - v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{y}{b^2 - u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{y}{b^2 - v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

und somit wenn wie allgemein

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e.du^2 + 2f.du.dv + g.dv^2$$

$$e = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2-u)^2} + \frac{y^2}{(b^2-u)^2} + 1\right] = \frac{1}{4}\frac{u(u-v)}{(a^2-u)(b^2-u)},$$

$$f = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{a^2-u}\frac{x}{a^2-v} + \frac{y}{b^2-u}\frac{y}{b^2-v} + 1\right] = o,$$

$$g = \left[\frac{x^2}{(a^2-v)^2} + \frac{y^2}{(b^2-v)^2} + 1\right] = \frac{1}{4}\frac{v(v-u)}{(a^2-v)(b^2-v)}.$$

Die Abbildungsparameter, die jetzt mit U und V bezeichnet werden mögen, ergèben sich sofort, wenn man

$$n = \frac{u-v}{4}$$

setzt. Es ist alsdann

$$dU = \frac{udu}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)}}, \quad dV = \frac{vdv}{\sqrt{-v(a^2-v)(b^2-v)}}.$$

Wæhlt man den Scheitelpunkt des Paraboloïds zum Anfang der Zæhlung der U und V (also bei der einfachsten Abbildung zum Coordinatenanfang in der Ebene), d. h. setzt man fest, dass für

$$x = y = z = o$$
$$U = V = o$$

werden soll, so hat man, weil für $x = y = z = o$

$$u = a^2, \quad v = b^2$$

ist, bei der Integration der beiden Ausdrücke für U und V im ersten Falle a^2, im zweiten b^2 zur unteren Grenze zu nehmen. Also

$$U = \int_{a^2}^{u} \frac{udu}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)}}, \quad V = \int_{b^2}^{v} \frac{vdv}{\sqrt{-v(a^2-v)(b^2-v)}}.$$

Um nun diese elliptischen Integrale auf Normalformen zu reduciren, beachte man zunæchst, dass

$$\infty \geqq u \geqq a^2, \qquad a^2 \geqq v \geqq b^2$$

und fidet, da die Radikanden die für die Reduktion solcher Integrale nöthige Gestalt schon besitzen ohne

Mühe die betreffenden Substitutionsformeln. Mit der Annahme, welche nach der Natur der Aufgabe die passendere ist, dass die neuen Variabeln mit u und v gleichzeitig wachsen, lauten dieselben

$$u = \frac{a^2 - b^2 t^2}{1 - t^2}, \qquad v = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) w^2},$$

$$t^2 = \frac{u - a^2}{u - b^2}, \qquad w^2 = \frac{a^2 (v - b^2)}{v (a^2 - b^2)},$$

so dass also

$$1 \geqq t^2 \geqq 0, \qquad 1 \geqq w^2 \geqq 0.$$

Für die Moduln findet man die Werthe

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad l = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - k^2 = k'^2.$$

Damit wird

$$U = 2a \int_0^t \frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}},$$

$$V = \frac{2b^2}{a} \int_0^w \frac{1}{1 - k'^2 w^2} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k'^2 w^2)}}$$

und setzt man

$$t = \sin \varphi, \qquad w = \sin \psi$$

$$U = 2a \int_0^\varphi \frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$$

$$- 2ak^2 \int_0^\varphi tg^2 \varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$V = \frac{2b^2}{a} \int_0^\psi \frac{1}{\Delta^2(\psi,k')} \frac{d\psi}{\Delta(\psi,k')}.$$

Bezeichnet wie üblich

$$F(\sigma,k) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma,k)},$$

$$E_1(\sigma,k) = \int_0^\sigma \Delta(\sigma,k)\, d\sigma,$$

so findet man mit Hülfe der bekannten Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\sigma \frac{1}{\cos^2\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma,k)} &= \frac{1}{k'^2} tg\sigma.\Delta(\sigma,k) + F(\sigma,k) - \frac{1}{k'^2} E_1(\sigma,k); \\
\int_0^\sigma tg.^2\sigma \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma,k)} &= \frac{1}{k'^2} tg\sigma.\Delta(\sigma,k) - \frac{1}{k'^2} E_1(\sigma,k), \\
\int_0^\sigma \frac{1}{\Delta^2(\sigma,k)} \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma,k)} &= -\frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin\sigma.\cos\sigma}{\Delta(\sigma,k)} + \frac{1}{k'^2} E_1(\sigma,k),
\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

dass ist

$$\left.\begin{aligned}
U &= 2a\left[tg.\varphi.\Delta\varphi + F(\varphi) - E_1(\varphi)\right] \quad mod.k \\
V &= 2a\left[E_1(\psi) - \frac{k'^2 \sin\psi.\cos\psi}{\Delta\psi}\right] \quad mod.k'
\end{aligned}\right\} (1)$$

Führt man die elliptischen Funktionen ein und setzt zu dem Ende

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= am\,\vartheta \\
F(\varphi) &= \vartheta \\
E_1(\varphi) &= E(\vartheta)
\end{aligned}\right\} mod.k \qquad
\left.\begin{aligned}
\psi &= am\,\eta \\
F(\psi) &= \eta \\
E_1(\psi) &= E(\eta)
\end{aligned}\right\} mod.k'$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[tg\,am\,\vartheta.\Delta am\,\vartheta + \vartheta - E(\vartheta)\right] \quad mod.k \\ V &= 2a\left[E(\eta) - \frac{k'^2 sin\ am\ \eta . cos\, am\, \eta}{\Delta\ am\ \eta}\right] \quad mod.k' \end{aligned}\right\}(2)$$

Die beiden Ausdrücke für U und V lassen sich noch etwas einfacher schreiben.

Benutzt man zur Vereinfachung des ersten Ausdruckes die bekannte Substitution

$$sin\ \varphi = i.tg\chi$$

zufolge welcher

$$F(\varphi,k) = i.F(\chi,k')$$

und mit der Anwendung der Formeln (a)

$$E_1(\varphi,k) = i\left[tg\chi\Delta(\chi,k') + F(\chi,k') - E_1(\chi,k')\right]$$

und zur Vereinfachung des zweiten Ausdruckes die Formel für das Additionstheorem elliptischer Integrale zweiter Gattung, indem man das eine Argument $= K'$ gesetzt, also die Formel

$$E(\eta,k') - \frac{k'^2 sin\ am\ \eta . cos\ am\eta}{\Delta\ am\ \eta} = E(\eta + K') - E' \quad mod.k',$$

so findet man für U und V die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} U &= -\,2ai.E(i\vartheta) \\ V &= 2a.\left[E(\eta + K') - E'\right] \end{aligned} \quad mod.k' \right\}(3)$$

in denen die Grössen U und V als Ellipsenbogen (U freilich in imaginærer Form) dargestellt sind.

Drückt man schliesslich noch die Parameter U und V in der *Jacobi*'schen Funktion aus, welche definirt ist durch die Gleichung

$$\Theta(\sigma) = 1 - 2q\cos\frac{\pi\sigma}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi\sigma}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi\sigma}{K} + \ldots$$

und worin bezeichnet

$$q = \varepsilon^{\frac{\pi K'}{K}}, \quad q' = \varepsilon^{-\frac{\pi K}{K'}}$$

und ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so erhælt man

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\vartheta - \frac{i\Theta'(i\vartheta)}{\Theta(i\vartheta)}\right] \\ V &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\eta + \frac{\Theta'(\eta + K')}{\Theta(\eta + K')}\right] \end{aligned} \quad mod.k' \right\} \quad (4)$$

oder wenn man nach (2) auch U in reeller Form ausdrückt und zu dem Zwecke die Formeln für $\sin am.$, $\cos am.$ und $\Delta am.$ anwendet, folgt

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[\frac{K-E}{K}\vartheta - \frac{\Theta'(\vartheta)}{\Theta(\vartheta)} + \frac{H(\vartheta).\Theta(\vartheta + K)}{H(\vartheta + K).\Theta(\vartheta)}\right] \quad mod\ k \\ V &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\eta + \frac{\Theta'(\eta + K')}{\Theta(\eta + K')}\right] \quad mod.k' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wobei die Funktion H definirt ist mit

$$H(\sigma) = \frac{\sqrt[4]{q}}{i}\,\varepsilon^{\frac{\pi i\sigma}{2K}}.\Theta(\sigma + iK').$$

Die allgemeine Formel

$$P \pm iQ = f\,(U \pm iV),$$

wo P und Q die cartesischen Coordinaten in der Ebene bedeuten, liefert alle conformen Abbildungen des elliptischen Paraboloïds auf die Ebene. Die einfachste Annahme über die Funktion f ist, dass man sie ihrem Argumente gleich setzt und liefert die einfachste Abbildungsart. In diesem Falle werden U und V selbst die rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene und die Abbildung geschieht so, dass sich die Krümmungslinien des Paraboloïds als zu den Coordinatenaxen parallele Gerade übertragen.

Eine andere, der stereographischen Projektion der Kugelflæche in gewisser Hinsicht analoge Uebertragungsart würde die Substitution

$$P + iQ = \varepsilon^{U + iV},$$

d. h.

$$P = \varepsilon^{U}.\cos V$$

$$Q = \varepsilon^{U}.\sin V$$

liefern. Hier entspricht dem einen System von Krümmungslinien ein System von Geraden, welche sæmmtlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, wæhrend das andere System der Krümmungslinien als System concentrischer Kreise um den Coordinatenanfang beschrieben sich darstellt.

III.

Die einfachste Art der Uebertragung ist also diejenige, bei welcher U und V selbst die rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene darstellen und mithin diese letzteren durch die Formeln (5) ausgedrückt sind.

Drückt man u, v und ebenso die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in den elliptischen und der *Jacobi*'schen Funktion aus, so findet man dafür folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a^2.\Delta^2 am\vartheta}{\cos^2 am\vartheta} = a.^2 cosec^2 am(\vartheta + K) = a.b.\frac{\Theta^2(\vartheta + K)}{H^2(\vartheta + K)}, \\ v &= \frac{b^2}{\Delta^2 am\,\eta} = a^2.\Delta^2 am(\eta + K') = a.b.\frac{\Theta^2(\eta)}{\Theta^2(\eta + K')}. \end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm a^2 k'.\frac{\sin am\vartheta \cos am\,\eta}{\cos am\vartheta\ \Delta\, am\,\eta} = \pm a^2 \frac{H(\vartheta).H(\eta + K')}{H(\vartheta + K).\Theta(\eta + K')}, \\ y &= \pm b^2 k' \frac{1}{\cos am\vartheta} \frac{\sin am\eta}{\Delta\, am\eta} = \pm b^2 \frac{\Theta(\vartheta).\ H(\eta)}{H(\vartheta + K).\Theta(\eta + K')}, \\ z &= k'^2 \frac{a^2.\sin^2 am\vartheta.\cos^2 am\eta + b^2.\sin^2 am\eta}{2\cos^2 am\vartheta.\Delta^2 am\,\eta} = \\ &= \frac{a^2.H^2(\vartheta).H^2(\eta + K') + b^2.\Theta^2(\vartheta).H^2(\eta)}{2\,H^2(\vartheta + K).\Theta^2(\eta + K')}, \end{aligned}\right|(7)$$

wo den Funktionen mit dem Argument ϑ der Modul k, denen mit dem Argument η der Modul k' zukommt.

Setzt man, gemæss dem doppelten Vorzeichen in den Ausdrücken für x und y fest, dass positiven Werthen dieser Variabeln ebensolche Werthe von ϑ und η, negativen daher auch negative ϑ und η entsprechen; setzt man also fest, dass ϑ und η sich stetig mit x, y, z ændern, so ist für

$$+\infty > x > -\infty$$

$$+\infty > y > -\infty,$$

$$+K > \vartheta > -K$$

und ebenso

$$+K' > \eta > -K'.$$

Wæhrend also

x und y von $-\infty$ bis o und von da bis $+\infty$ wachsen, durchlæuft

ϑ die Werthe von $-K$ bis o und von da bis $+K$ und somit

U die Werthe von $-\infty$ bis o und von da bis $+\infty$, wæhrend

V nur die Werthe von $-2aE'$ bis $+2aE'$ annimmt.

Das ganze Paraboloïd ist somit abgebildet auf einem parallelen Streifen von der Breite $4aE'$. Den vier verschiedenen Octanten des Paraboloïds correspondiren die dem Vorzeichen nach ihnen entsprechenden durch die Parallelen $V = \pm 2aE'$ abgegrenzten Quadranten der Ebene.

Man bemerkt, dass die Ausdrücke für die Coordinaten U und V wesentlich aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine mit ϑ resp. η direkt proportional, wæhrend der andere, der Natur der Funktionen Θ und

 2

$\frac{\Theta'}{\Theta}$ nach, periodisch ist. Da jedoch die Argumente ϑ und η zwischen den oben angeführten Grenzen eingeschlossen sind, sind auch diese Theile eindeutig und so auch die Werthe von U und V. Jedem Punkte auf dem Paraboloïd entspricht daher immer nur ein Punkt in der Uebertragung. Weil ferner $\frac{dU}{d\vartheta}$ und $\frac{dV}{d\eta}$ stets positiv ist, erkennt man, dass U und V mit ϑ resp. η und also auch mit x und y zugleich wachsen.

Die Krümmungslinien bilden sich alsdann als gerade Linien ab, die parallel den Coordinatenaxen U und V laufen. Im Besonderen entspricht der $U =$ Axe die Parabel $y = o$, $x^2 = 2a^2 z$ und der $V =$ Axe die Parabel $x = o$, $y^2 = 2b^2 z$.

Die beiden Kreispunkte des Paraboloïds, deren Coordinaten sind

$$x = o,$$

$$y = \pm b\sqrt{a^2 - b^2},$$

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2},$$

befinden sich im Bilde somit auf der $V =$ Axe und zwar weil in denselben

$$u = v = a^2,$$

mit den Coordinaten

$$U = o$$

$$V = \pm 2aE'.$$

Einen Begriff über den Verlauf dieser Uebertragung erhælt man durch Betrachtung der Bildcurven einiger besonders einfachen und charakteristischen Linien der Flæche.

Solche sind vorzüglich die ebenen Schnitte des Paraboloïds und unter diesen zunæchst die Niveaulinien, d. h. die Ellipsen

$$z = Const. = \frac{h^2}{2}$$

oder

$$a^2 k'^2 tg^2 am\,\vartheta + \frac{b^2 (1 - \varDelta^2 am\eta)}{\varDelta^2\, am\, \eta} = h^2,$$

worin also h^2 eine wesentlich positive Constante bedeutet.

Die Gleichung læsst sich auch schreiben

$$tg^2 am\,\vartheta = \frac{(h^2 + b^2)\varDelta^2 am\eta - b^2}{a^2 k'^2 \varDelta^2 am\,\eta}$$

und

$$\varDelta^2\, am\,\eta = \frac{b^2}{h^2 + b^2 - a^2 k'^2 tg^2 am\vartheta}.$$

Die Bildcurven sind also symetrisch in Bezug auf die beiden Axen U und V. Ferner trifft keine der Curven weder die unmittelbar darauf folgende noch die vorhergehende, weil sowohl ϑ (also auch U) wie η (d. h. V) mit h^2 zunehmen.

Aus der ersten Gleichung folgert man, dass ϑ nur dann reelle Werthe annimmt, so lange

$$\varDelta^2 am\,\eta \geqq \frac{b^2}{h^2 + b^2}$$

oder

$$sin^2\, am\,\eta \leqq \frac{1}{k'^2}\,\frac{h^2}{h^2 + b^2}.$$

Hieraus folgt, dass bei allen Curven η den Werth Null erhalten kann und erhælt, dass sie also sæmmtlich die $U =$ Axe treffen und zwar in Punkten, deren Abstand von der $V =$ Axe mit h^2 zugleich wæchst.

Der Maximalwerth

$$sin^2 am\, \eta = \frac{1}{k'^2} \frac{h^2}{h^2 + b^2}$$

entspricht aber, wie leicht zu beweisen, nur Curven, für welche

$$h^2 \leqq a^2 - b^2$$

d. h. für die

$$u + v \leqq 2a^2,$$

also nur Curven, deren Originale auf der Flæche nicht oberhalb der beiden Kreispunkte verlaufen. Diesem Maximalwerth von η entspricht, wie die erste Gleichung zeigt, der Werth

$$\vartheta = o$$

und somit

$$U = o.$$

In Worten: sæmmtliche Bildcurven der Niveaulinien, welche nicht oberhalb der Kreispunkte verlaufen, schneiden die $V =$ Axe und zwar in Punkten, deren Abstand von der $U =$ Axe gleichzeitig mit der Höhe h^2 der betreffenden Ellipsen wæchst.

Die Niveaulinie durch die Kreispunkte selbst ist die Letzte, welche die $V =$ Axe noch trifft und zwar weil für sie

$$h^2 = a^2 - b^2$$

in den Punkten

$$\eta = \pm K'$$

d. h.

$$V = \pm 2aE'.$$

Die Punkte in denen sie die $U =$ Axe trifft sind bestimmt mit

$$\eta = o, \ am\,\vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$$

und so

$$U = \pm 2a\left[\sqrt{\frac{1 + k'^2}{2}} + \vartheta_* - E\,(\vartheta_*)\right],$$

wenn

$$am\,\vartheta_* = \frac{\pi}{4}.$$

Alle anderen Curven, für welche also

$$h^2 > a^2 - b^2$$

schneiden die $V =$ Axe nicht mehr, wohl aber sæmmtliche Parallelen der $U =$ Axe, da bei diesen Curven η alle Werthe von $- K'$ bis $+ K'$, also V die Werthe von $- 2aE'$ bis $+ 2aE'$ annimmt.

In Worten: die Bildcurven der Niveaulinien oberhalb der Kreispunkte bestehen jede aus zwei zu der $V =$ Axe symetrischen und durch dieselbe getrennten, von $V = - 2aE'$ bis $V = + 2aE'$ reichenden Zweigen, deren Zwischenraum unter einander mit wachsendem h^2 zunimmt.

Untersucht man nun den allgemeinen Verlauf der Parabeln

$$y = Const. = \beta$$

in der Uebertragung, so dienen dafür die Gleichungen

$$\cos am\,\vartheta = \frac{b^2 k'}{\beta}\,\frac{\sin am\,\eta}{\Delta\,am\,\eta}$$

$$\sin^2 am\,\eta = \frac{\beta^2 . \cos^2 am\,\vartheta}{k'^2 (b^4 + \beta^2 \cos^2 am\,\vartheta)}.$$

Die Curven sind symetrisch in Bezug auf die $V =$ Axe und keine schneidet die andere.

Reelle Werthe für η finden statt, so lange

$$\cos^2 am\,\vartheta \leqq \frac{k'^2 b^4}{k^2 \beta^2}$$

und reelle Werthe für ϑ, so lange

$$\sin^2 am\,\eta \leqq \frac{\beta^2}{k'^2 (b^4 + \beta^2)}.$$

Dem Maximalwerth

$$\sin^2 am\,\eta = \frac{\beta^2}{k'^2 (b^4 + \beta^2)}$$

entspricht der Werth

$$\vartheta = o$$

oder

$$U = o$$

und zwar, wie aus der ersten Ungleichung folgt, nur bei Curven, für welche

$$\beta^2 \leqq \frac{k'^2 b^4}{k^2} \text{ oder } + a.b.k' \geqq y \geqq - a.b.k'$$

d. h. alle diese Bildcurven schneiden die $V =$ Axe und zwar bei grösstem Werth der Ordinate, der mit β gleichzeitig wæchst.

Alle anderen Bildcurven, d. h. alle für die

$$\beta^2 > \frac{k'^2 b^4}{k^2}$$

schneiden die $V =$ Axe nicht mehr, dagegen immer eine der Parallelen (je nach dem Vorzeichen von β) $V = \pm\, 2aE'$; bestehen somit aus zwei zur $V =$ Axe symetrischen und durch sie getrennten Zweigen.

Ferner bemerkt man, dass wæhrend ϑ zunimmt, η abnimmt nnd umgekehrt. Es ist ferner für

$$\vartheta = \pm\, K, \qquad \eta = o,$$

oder also für

$$U = \pm\, \infty, \qquad V = o$$

und man schliesst hieraus, dass sæmmtliche Curven die beiden Richtungen der $U =$ Axe asymptotiscn berühren [1]).

Ebenso findet man den allgemeinen Verlauf der Parabeln

$$x = Const. = \alpha$$

in der Bildebene, mit Hülfe der Gleichung

$$tg\ am\ \vartheta = \frac{\alpha}{a^2 k'} \frac{\Delta\, am\, \eta}{cos\ am\ \eta}$$

---

[1]) Es folgt dieses auch aus $\frac{d\,V}{d\,U} = tg\,\mu = -\sqrt{\frac{g}{e}\,\frac{k'^2\beta^2}{k^2(u-b^2)^2}}$, wenn μ den $\sphericalangle$ bedeutet, den die Tangente der Bildcurve mit der $U =$ Axe bildet.

oder

$$sin^2 am\,\eta = \frac{tg^2 am\vartheta - \frac{\alpha^2}{a^4 k'^2}}{tg^2 am\vartheta - \frac{\alpha^2}{a^4}},$$

woraus hervorgeht, dass jedem Werthe von η ein reeller Werth von ϑ entspricht, dass also diese Bildcurven sæmmtliche Parallelen zur $U =$ Axe schneiden. Weil ferner einem Werthe von ϑ stets zwei gleiche und entgegengesetzte von η entsprechen sind, wie auch sonst klar, die Curven symetrisch zur $U =$ Axe.

Ferner beachtet man, dass weil für

$$\vartheta = \pm K, \qquad \eta = \pm K'$$

d. h. für

$$U = \pm \infty, \qquad V = \pm 2aE',$$

jede Curve die beiden Parallelen $V = \pm 2aE'$ asymptotisch berührt[1]).

Der Punkt in welchem sie die $U =$ Axe schneiden ist

$$\eta = o, \;\; tgam\,\vartheta = \frac{\alpha}{a^2 k'}.$$

Um endlich noch den Verlauf der Bildcurven der Parabeln

$$\frac{y}{x} = Const. = \gamma$$

---

[1]) Auch hier ergiebt sich dies aus $\frac{dV}{dU} = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{a^2 k'^2}{(a^2 - u)^2}$, sowie aus dem hieraus folgendem Werthe von $\frac{d^2V}{dU^2}$, dass sæmmtliche Bildcurven concav gegen die $U =$ Axe verlaufen.

festzustellen, setze man wieder für x und y ihre Werthe in elliptischen Funktionen und findet die Gleichung

$$tg\,am\,\eta = \frac{\gamma}{k^2}\,sin\,am\,\vartheta.$$

Die Curven sind symetrisch in Bezug auf die beiden Richtungen ein und derselben Axe und da bei constanten ϑ für wachsende γ auch η zunimmt, wæhrend bei constantem η mit wachsenden γ der Werth von ϑ abnimmt, schneiden die Curven einander bloss im Punkte $U = V = o$[1]). Aus der Gleichung folgt, dass jedem Werthe von ϑ ein reeller Werth von η entspricht, die Curven also sæmmtliche Parallelen zur $V =$ Axe treffen.

Was die Ausdehnung in der dazu senkrechten Richtung anbelangt, so ist diese bestimmt durch die Grenzbedingung

$$\frac{\gamma}{k^2} \geqq tg\,am\,\eta \geqq -\frac{\gamma}{k^2}.$$

Irgend eine dieser Curven ist also enthalten in dem parallelen Streifen $tg\,am\,\eta = \pm\frac{\gamma}{k^2}$ und berührt diese begrenzenden Parallelen asymptotisch.

Ein anderer bemerkenswerther ebener Schnitt der Flæche ist der Kreisschnitt.

Bekanntlich giebt es zwei Systeme von Kreisschnitten auf dem elliptischen Paraboloïd. Ihre Ebenen sind

---

[1]) Man findet auch ohne Mühe aus $\frac{d^2V}{dU^2}$, dass dieser Punkt für sæmmtliche Curven ein Wéndepunkt ist.

normal zur $yz =$ Ebene und bilden mit der $xy =$ Ebene Winkel, die sich zu 180^0 ergænzen. Der Cosinus dieser Winkel ist $= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$.

Bezeichnet l den Abstand der Horizontalspur der Schnittebene von der $x =$ Axe, so lassen sich die Gleichungen der beiden Kreisschnittebenen zusammenfassen in

$$\sqrt{a^2 - b^2}\, y \mp bz = l.\sqrt{a^2 - b^2}$$

oder kürzer

$$ak'y \mp bz = lak'.$$

Reelle Kreisschnitte fallen, im Falle des oberen Zeichens nur dann aus, wenn

$$\frac{abk'}{2} > l > -\infty$$

und im Falle des unteren Zeichens, wenn

$$+\infty > l > -\frac{abk'}{2}.$$

Führt man für y und z ihre Werthe in elliptischen Funktionen ein, so wird die Gleichung der Kreisschnitte

$$\frac{2ab.\sin am\eta}{\cos am\vartheta.\Delta am\eta} \mp \frac{a^2\sin^2 am\vartheta.\cos^2 am\eta}{\cos^2 am\vartheta.\Delta^2 am\eta} = \frac{2l}{kk'}.$$

Um aber diese Gleichung auf eine bequemere Form zu bringen, löse man sie nach $\cos am\,\vartheta$ auf und erhælt

$$\cos am\,\vartheta = \frac{\dfrac{k\sin am\eta}{\Delta am\,\eta} \pm \sqrt{1 \mp \dfrac{2l}{ab\,k'}}}{\dfrac{2l}{a\,b\,k'} \mp \dfrac{\cos^2 am\eta}{\Delta^2 am\,\eta}}$$

$$= \pm \frac{\cos am\,(K' - \eta) \pm \sqrt{1 \mp \dfrac{2l}{abk'}}}{\cos^2 am\,(K' - \eta) - \left(1 \mp \dfrac{2l}{abk'}\right)}$$

$$= \pm \frac{1}{\cos am(K' - \eta) \mp \sqrt{1 \mp \dfrac{2l}{abk'}}},$$

woraus wieder

$$\cos am\,(K' - \eta) = \pm \sec am\,\vartheta \pm \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}.$$

In diesen beiden Gleichungen beziehen sich die doppelten Vorzeichen einzeln auf die zwei verschiedenen Systeme von Kreisschnitten, ausgenommen dem Doppelzeichen des Wurzelausdrucks, dessen Wahl aber durch das Folgende bestimmt wird.

Untersucht man die Schnittpunkte der Bildcurven mit der $U =$ und $V =$ Axe, so ist zunaechst für

$$\eta = o$$

$$\pm \sec am\,\vartheta \pm \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}} = o.$$

Hieraus folgt, dass das Vorzeichen der Wurzel immer dem von *sec am* ϑ entgegengesetzt sein muss, also für das erste System von Kreisschnitten —, für das zweite $+$.

Die Gleichungen der Kreisschnitte lassen sich mithin schreiben

$$\cos am\,\vartheta = \pm \frac{1}{\cos am\,(K'-\eta) \pm \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}},$$

$$\cos am\,(K'-\eta) = \pm \sec am\,\vartheta \mp \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}$$

$$\sin^2 am\,\eta = \frac{\left(\sec am\,\vartheta - \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}\right)^2}{k^2 + k'^2\left(\sec am\,\vartheta - \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}\right)^2},$$

wobei dem ersten System stets die oberen, dem zweiten System dagegen die unteren Vorzeichen gelten.

Mit dieser Bestimmung ist also für

$$\eta = o,$$

$$\cos am\,\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}}$$

und somit fællt ϑ reell aus

beim ersten System von Kreisschnitten nur wenn

$o > l > -\infty$ und

beim zweiten System von Kreisschnitten nur wenn

$+\infty > l > o.$

Liegt also l zwischen den angegebenen Grenzen, so ergeben sich für ϑ (und somit auch für U) immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe, welche überdies mit l zugleich wachsen. Und dieses gilt auch für jede Parallele zur $U =$ Axe, somit sind die Bildcurven symetrisch zur $V =$ Axe.

Ist $l = o$, so fallen die beiden Werthe in $\vartheta = o$ zusammen und die beiden Bildcurven berühren die $U =$ Axe im Coordinatenanfange.

Setzt man jetzt

$$\vartheta = o,$$

so folgt

$$sin^2 am\, \eta = \frac{\left(1 - \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}\right)^2}{k^2 + k'^2\left(1 - \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}\right)^2}.$$

Damit η reell wird, besteht demnach für l die Bedingung beim ersten System, dass $+\frac{abk'}{2} \geqq l \geqq -\frac{3abk'}{2}$ und beim zweiten System, dass $+\frac{3abk'}{2} \geqq l \geqq -\frac{abk'}{2}$.

Ferner findet man, wenn man in eine der obigen Gleichungen $\eta = \pm K'$ setzt, dass alle Curven des ersten Systems die Parallele $V = +\ 2aE'$ treffen und ebenso alle Curven des zweiten Systems die Parallele $V = -\ 2aE'$ und dann, dass sæmmtliche Curven, welche die $V =$ Axe nicht mehr schneiden, d. h. also die Curven des ersten Systems für welche

$$-\frac{3abk'}{2} \geqq l > -\infty \text{ und}$$

die Curven des zweiten Systems für welche

$$+\infty > l \geqq +\frac{3abk'}{2},$$

beide der Parallelen $V = \pm\ 2aE'$ treffen und so jede aus zwei getrennten die ganze Breite des Streifens einnehmenden Zweigen bestehen.

Ferner bemerkt man, dass je zwei Curven, für welche l denselben absoluten Werth hat, also den zwei verschiedenen Systemen von Kreisschnitten angehörend, in Bezug auf die $U =$ Axe symetrisch gelegen sind und somit, wenn überhaupt, so sich nur auf der $U =$ Axe schneiden.

Die Gleichung irgend einer geodætischen Linie auf dem elliptischen Paraboloïd ist bekanntlich von der Form

$$u.sin^2\mu + v.cos^2\mu = h,$$

wenn μ den Winkel bedeutet, den die geodætische Linie mit der Parameterlinie u einschliesst und zwar in dem Sinne gezæhlt in welchem u gedreht werden muss, damit es nach einer Drehung um einen rechten Winkel mit v zusammenfællt. h bezeichnet aber eine Constante mit der Einschrænkung, dass

$$u \geq h \geq v.$$

Weil der Winkel μ seine Bedeutung auch im Bilde beibehælt und also die Neigung der Tangente an die Bildcurve der geodætischen Linie gegen die $U =$ Axe ausdrückt, læsst sich die Gleichung dieser Linie nach schreiben

$$tg\mu = \frac{dV}{dU} = \sqrt{\frac{h - v}{u - h}}$$

und man sieht hieraus, dass so lange $\mu < \frac{\pi}{2}$ (d. h.

U und V gleichzeitig wachsen) die Curve concav gegen die $U =$ Axe, hingegen wenn $\mu > \frac{\pi}{2}$ (d. h. wæhrend U wæchst V abnimmt) sie convex ist. Dieses folgt auch aus

$$\frac{d^2V}{dU^2} = - \frac{\left(\frac{dv}{du} + tg^2\mu\right)}{2\,(u-h)\,tg\mu}\,\frac{du}{dU}.$$

Betreffs der Constanten h sind die drei Fælle zu unterscheiden

$$a^2 \gtreqless h > b^2.$$

Ist 1) $h < a^2$, so kann u alle Werthe von a^2 bis ∞ annehmen, wæhrend v nur die Werthe von b^2 bis h durchlæuft. Für $v = h$ ist $tg\mu = o$, $\mu = o$. Die geodætischen Linien berühren die Krümmunglinie $v = h$.

Ist 2) $h > a^2$, so wird $\infty > u > h$, $a^2 > v > b^2$. Für $u = h$ ist $tg\mu = \infty$, $\mu = \frac{\pi}{2}$. Die geodætischen Linien berühren mithin die Krümmungslinie $u = h$.

Wenn endlich 3) $h = a^2$, so gehen die Curven durch einen der Kreispunkte, weil in diesen $u = v = a^2$. In diesem Falle durchlaufen u und v alle die ihnen zukommenden Werthe.

Die Gleichung der geodætischen Linie ist alsdann

$$tg\mu = \sqrt{\frac{a^2 - v}{u - a^2}} = \frac{sinam\,(\eta - K')}{tgam\,\vartheta} = \frac{dV}{dU}.$$

Setzt man hierin $\eta = o$, so erhælt man für die

Schnittpunkte der verschiedenen von den Kreispunkten ausgehenden Linien mit der U = Axe

$$tg\mu = \frac{-1}{tg\, am\, \vartheta}$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + am\, \vartheta,$$

so dass von $\vartheta = o$ an, wo $\mu = \frac{\pi}{2}$, der Winkel μ zunimmt bis er für $\vartheta = K$, $\mu = \pi$ wird.

Integrirt man die allgemeine Gleichung der geodætischen Linie

$$\frac{dU}{\sqrt{u-h}} = \frac{dV}{\sqrt{h-v}},$$

so hat man die zwei Fælle

$$h \gtrless a^2$$

zu berücksichtigen. Da sich jedoch die bezüglichen Formeln für den einen Fall aus denen für den anderen unmittelbar ergeben, wenn man überall h und a^2 mit einander vertauscht, so sei

$$h < a^2$$

und also

$$\infty \geqq u \geqq a^2 \qquad\qquad h \geqq v \geqq b^2.$$

Mit der Annahme, dass die neuen Variabeln gleichzeitig mit u und v wachsen, werden die Substitutionsformeln

$$u = a^2 h \frac{1 - sin^2\varphi_1}{h - a^2 . sin^2\varphi_1}, \qquad v = \frac{b^2 h}{h - (h - b^2)\, sin^2\psi_1},$$

$$sin^2\varphi_1 = \frac{(u - a^2)\, h}{(u - h)\, a^2}, \qquad sin^2\psi_1 = \frac{(v - b^2)\, h}{(h - b^2)\, v}$$

$$Modul = \lambda^2 = \frac{a^2(h - b^2)}{(a^2 - b^2)}.$$

Damit wird die Gleichung

$$a^2 . \int \frac{1 - sin^2\varphi_1}{1 - \frac{a^2}{h} sin^2\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} =$$

$$= b^2 . \int \frac{1}{1 - \frac{h - b^2}{h} sin^2\psi_1} \frac{d\psi_1}{\Delta\psi_1} + Const.$$

und setzt man

$$\frac{1 - sin^2\varphi_1}{1 - \frac{a^2}{h} sin^2\varphi_1} = \frac{h}{a^2} + \frac{a^2 - h}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{h} sin^2\varphi_1},$$

so

$$h . F(\varphi_1) + (a^2 - h) . \Pi_1 (\varphi_1, - \frac{a^2}{h}) =$$

$$b^2 . \Pi_1 (\psi_1, - \frac{h - b^2}{h}) + Const.,$$

wobei die Integrale in der *Legendre*'schen Normalform dargestellt sind. Die beiden Integrale dritter Gattung, welche hier auftreten, gehören zu der logarithmischen

Klasse. Um diese Integrale in der *Jacobi*'schen Form auszudrücken hat man, weil

$$-1 > \frac{a^2}{h} > -\infty, \qquad o > -\frac{h-b^2}{h} > -\lambda^2$$

zu setzen

$$\frac{a^2}{h} = \lambda^2.\sin^2 am\,(\alpha + iK'), \quad \frac{h-b^2}{h} = \lambda^2.\sin^2 am\,\beta,$$

so dass also

$$\sin^2 am\,\alpha = \frac{h}{a^2}, \qquad \sin^2 am\,\beta = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Setzt man ferner

$$\varphi_1 = am\,\vartheta_1, \qquad \psi_1 = am\,\eta_1,$$

so wird die Gleichung der geodætischen Linie

$$\vartheta_1.\sin^2 am\,\alpha -$$

$$\left[\Pi(\vartheta_1,\alpha) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin am\,(\alpha-\vartheta_1)}{\sin am\,(\alpha+\vartheta_1)}\right]\sin am\,\alpha.\sin am\,\beta =$$

$$\eta_1.\cos^2 am\,\beta + \Pi\,(\eta_1\,\beta).\sin am\,\alpha.\sin am\,\beta + Const.$$

oder in der *Jacobi*'schen Funktion ausgedrückt

$$\left[\frac{H(\alpha).\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha).H(\beta)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right]\vartheta_1 - \frac{1}{2}\log\frac{H(\alpha-\vartheta_1)}{H(\alpha+\vartheta_1)} =$$

$$\left[\frac{\Theta^2(o).\Theta(\alpha).H^2(\beta+K)}{\Theta^2(K).H(\alpha).\Theta(\beta).H(\beta)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right]\eta_1 + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\beta-\eta_1)}{\Theta(\beta+\eta_1)}$$

$$+ Const.$$

Geht die geodætische Linie durch den Punkt $u = a^2$, $v = b^2$, ihr Bild also durch $U = o$, $V = o$, so ist die Constante = Null. Eine dieser Curven ist die U = Axe selbst.

Geht die geodætische Linie durch einen Kreispunkt, so ist ihre Gleichung

$$\frac{dU}{\sqrt{u - a^2}} = \frac{dV}{\sqrt{a^2 - v}}$$

und die daraus sich ergebenden Integrale sind Quadraturen. Führt man diese aus, so erhælt die Gleichung die Form

$$\left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{u - b^2}}{\sqrt{u} - \sqrt{u - b^2}}\right)^{k'} \frac{\sqrt{u - b^2} - k'\sqrt{u}}{\sqrt{u - b^2} + k'\sqrt{u}}, =$$

$$\left(\frac{\sqrt{v} - \sqrt{v - b^2}}{\sqrt{v} + \sqrt{v - b^2}}\right)^{k'} \frac{\sqrt{v - b^2} + k'\sqrt{v}}{\sqrt{v - b^2} - k'\sqrt{v}} . \, Const.$$

und wenn man hierin für v und u ihre Werthe in elliptischen Funktionen einsetzt

$$\left(\frac{\Delta am\, \vartheta + k'}{\Delta am \vartheta - k'}\right)^{k'} \frac{1 - \Delta am\, \vartheta}{1 + \Delta am\, \vartheta}$$

$$= \left(\frac{1 - k' \sin am\, \eta}{1 + k' \sin am\, \eta}\right)^{k'} \frac{1 + \sin am\, \eta}{1 - \sin am\, \eta} . \, Const.$$

Diese Gleichung læsst sich auf eine andere Form bringen, wenn man die in ihr auftretenden Summen als Producte darstellt.

Zunæchst findet man mit Hülfe der Formeln

$$\left.\begin{array}{l}\Delta am(x+y)+\Delta am(x-y) \\ = \dfrac{2\Delta am\,x.\Delta am\,y}{1-k^2 sin^2 am\,x.sin^2 am\,y} \\ \Delta am(x+y)-\Delta am(x-y) \\ = -\dfrac{2k^2 sin\,am\,x.\,sin\,am\,y.\,cos\,am\,x.cos\,am\,y}{1-k^2 sin^2 am\,x.sin^2 am\,y}\end{array}\right\}\ mod.k.$$

wenn man

$$x - y = K$$

$$x + y = \vartheta$$

setzt und sie durch einander dividirt

$$\frac{\Delta am\,\vartheta + k'}{\Delta am\,\vartheta - k'} = \frac{1}{k^2 sin^2 am\left(\frac{K+\vartheta}{2}\right) sin^2 am\left(\frac{K-\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Theta^2\left(\frac{K+\vartheta}{2}\right).\,\Theta^2\left(\frac{K-\vartheta}{2}\right)}{H^2\left(\frac{K+\vartheta}{2}\right).\,H^2\left(\frac{K-\vartheta}{2}\right)}.$$

Ebenso findet man mit Hülfe obiger Gleichungen, wenn man

$$x + y = o$$

$$x - y = \vartheta$$

setzt, dass

$$\frac{1-\Delta am\,\vartheta}{1+\Delta am\,\vartheta} = \frac{k^2.sin^2 am\,\frac{\vartheta}{2}\,cos^2 am\,\frac{\vartheta}{2}}{\Delta^2 am\,\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \frac{H^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right).H^2\left(\frac{\vartheta}{2}+K\right)}{\Theta^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right).\Theta^2\left(\frac{\vartheta}{2}+K\right)}.$$

Man erhælt ferner mit Hülfe der Formel

$$\frac{1 - k' \sin am\,(x+y)}{1 + k' \sin am\,(x+y)}$$

$$= \left(\frac{\Delta\, am\, x - k' \sin am\, y.\cos am\, x}{\Delta\, am\, y + k' \sin am\, x.\cos am\, y}\right)^2 \qquad mod. k',$$

wenn man

$$x = y = \frac{\eta}{2}$$

setzt

$$\frac{1 - k' \sin am\, \eta}{1 + k' \sin am\, \eta} = \left(\frac{\Delta\, am \frac{\eta}{2} - k' \sin am \frac{\eta}{2} \cos am \frac{\eta}{2}}{\Delta am \frac{\eta}{2} + k' \sin am \frac{\eta}{2} \cos am \frac{\eta}{2}}\right)^2$$

und mit Hülfe der Relation

$$\sin am (x + K' \pm iK) = \frac{\Delta\, am\, x}{k' \cos am\, x} \qquad mod. k'$$

$$\frac{1 - k' \sin am \eta}{1 + k' \sin am \eta} = \left(\frac{\sin am \left(\frac{\eta}{2} + K' \pm iK\right) - \sin am \frac{\eta}{2}}{\sin am \left(\frac{\eta}{2} + K' \pm iK\right) + \sin am \frac{\eta}{2}}\right)^2.$$

Endlich mit Anwendung von

$$\frac{\sin am\, x - \sin am\, y}{\sin am\, x + \sin am\, y}$$

$$= \frac{\sin am \frac{1}{2}(x - y).\cos am \frac{1}{2}(x + y).\Delta\, am \frac{1}{2}(x + y)}{\sin am \frac{1}{2}(x + y).\cos am \frac{1}{2}(x - y).\Delta\, am \frac{1}{2}(x - y)}$$

$$\frac{1 - k' \sin am\, \eta}{1 + k' \sin am\, \eta}$$

$$= \left(\frac{\cos am \frac{1}{2}(\eta + K' \pm iK).\Delta am \frac{1}{2}(\eta + K' + iK) \sin am \frac{1}{2}(K' \pm iK)}{\sin am \frac{1}{2}(\eta + K' \pm iK) \cos am \frac{1}{2}(K' \pm iK)\ \Delta\, am \frac{1}{2}(K' \pm iK)}\right)^2.$$

Die hier auftretende Constante

$$\frac{\sin am \frac{1}{2}(K' \pm iK)}{\cos am \frac{1}{2}(K' \pm iK)\ \Delta am \frac{1}{2}(K' \pm iK)}$$

ist, wie sich leicht zeigen læsst, $= \frac{1}{k}$ und somit

$$\frac{1 - k' \sin am\, \eta}{1 + k' \sin am\, \eta}$$

$$= \left(\frac{\cos am \frac{1}{2}(\eta + K' \pm iK).\Delta am \frac{1}{2}(\eta + K' \pm iK)}{k.\sin am \frac{1}{2}(\eta + K' \pm iK)}\right)^2$$

$$= \frac{H^2\left(\frac{\eta - K' \pm iK}{2}\right).\ \Theta^2\left(\frac{\eta - K' \pm iK}{2}\right)}{H^2\left(\frac{\eta + K' \pm iK}{2}\right).\ \Theta^2\left(\frac{\eta + K' \pm iK}{2}\right)}.$$

Endlich findet man noch mit Hülfe der allgemeinen Formel

$$\frac{\sin am\,(x+y) + \sin am\,(x-y)}{\sin am\,(x+y) - \sin am\,(x-y)}$$

$$= \frac{\sin am\, x.\cos am\, y\, \Delta\, am\, y}{\sin am\, y.\cos am\, x.\Delta\, am\, x},$$

wenn man hierin

$$x + y = K'$$

$$x - y = \eta$$

setzt und hernach die Functionen in selbem Argument ausdrückt, dass

$$\frac{1 + \sin am\,\eta}{1 - \sin am\,\eta} = k^2\ \frac{\sin^2 am \frac{1}{2}(\eta + K')}{\cos^2 am \frac{1}{2}(\eta + K').\Delta^2 am \frac{1}{2}(\eta + K')}$$

$$= \frac{H^2\left(\frac{\eta + K'}{2}\right).\ \Theta^2\left(\frac{\eta + K'}{2}\right)}{H^2\left(\frac{\eta - K'}{2}\right).\ \Theta^2\left(\frac{\eta - K'}{2}\right)}.$$

Mit diesen so gefundenen Werthen erhælt die Gleichung der geodætischen Linie die Form

$$\left(\frac{\Theta\left(\frac{K+\vartheta}{2}\right).\Theta\left(\frac{K-\vartheta}{2}\right)}{H\left(\frac{K+\vartheta}{2}\right).H\left(\frac{K-\vartheta}{2}\right)}\right)^{k'}\frac{H\left(\frac{\vartheta}{2}\right)H\left(K+\frac{\vartheta}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{\vartheta}{2}\right).\Theta\left(K+\frac{\vartheta}{2}\right)}=$$

$$\left(\frac{H\left(\frac{\eta-K'\mp iK}{2}\right).\Theta\left(\frac{\eta-K'\mp iK}{2}\right)}{H\left(\frac{\eta+K'\pm iK}{2}\right).\Theta\left(\frac{\eta+K'\pm iK}{2}\right)}\right)^{k'}\frac{H\left(\frac{K'+\eta}{2}\right).\Theta\left(\frac{K'+\eta}{2}\right)}{H\left(\frac{K'-\eta}{2}\right).\Theta\left(\frac{K'-\eta}{2}\right)}.\,\mathit{Const.}$$

Die hier auftretende Constante ist im Bilde bestimmt durch den Winkel, den die Curve mit der $V =$ Axe einschliesst.

Was endlich den Vergrösserungsfaktor

$$n=\frac{u-v}{4}=\frac{ab}{4}\left[\frac{\Theta^2(\vartheta+K)}{H^2(\vartheta+K)}-\frac{\Theta^2(\eta)}{\Theta^2(\eta+K')}\right]\ldots \quad (8)$$

betrifft, so bemerkt man vor Allem, dass er mit wachsenden Werthen von U zunimmt, dagegen mit wachsenden V abnimmt.

Im Anfangspunkte der Coordinaten, wo

$$u = a^2, \qquad v = b^2,$$

$$\vartheta = o, \qquad \eta = o$$

ist

$$n=\frac{a^2-b^2}{4}=\frac{ab}{4}\left[\frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)}-\frac{\Theta^2(o)}{\Theta^2(K')}\right].$$

Von da an nimmt n nach beiden Seiten der $U =$ Axe stettig bis in's Unendliche zu. Længs der $V =$ Axe hingegen nimmt n nach beiden Richtungen stetig ab und erreicht in den Kreispunkten, in welchen

$$u = a^2, \qquad v = a^2,$$
$$\vartheta = o, \qquad \eta = \pm K'$$

den Minimalwerth

$$n = o = \frac{ab}{4}\left[\frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)} - \frac{\Theta^2(K')}{\Theta^2(o)}\right].$$

In diesen beiden Punkten hört somit die Aehnlichkeit zwischen Bild und Ursprung auf. Dadurch erklært sich auch die an diesen Stellen plötzliche Richtungsænderung (um einen rechten Winkel) der Parabel $x = o$, $y^2 = 2b^2z$, als deren Bildcurven die Parallelen $V = \pm 2aE'$, sowie das zwischen diesen abgegrenzte Stück der $V =$ Axe zu betrachten ist. Ebenso auch, dass alle Curven, welche im Originale die Parabel $x = o$ treffen, im Bilde entweder die $V =$ Axe oder die Parallelen $V = \pm 2aE'$ schneiden. Ferner ist zu bemerken, dass alle Punkte der Parabel $x = o$ sich doppelt abbilden, ausgenommen diejenigen, welche sich auf dem zwischen den beiden Kreispunkten enthaltenen Stücke der Linie befinden. Zwei in gleichem Abstande von der $V =$ Axe gelegenen und derselben Parallelen angehörenden Punkte sind næhmlich Bildpunkte ein und desselben Punktes. Und hiemit erklært sich auch der Zusammenhang derjenigen Curven im Bilde, welche aus zwei getrennten in Bezug auf die $V =$ Axe symetrischen Zweigen bestehn, wæhrend ihre Originale geschlossene Linien sind, wie etwa die Niveaulinien und die Kreisschnitte.

Aehnlich wie bei der U- und $V =$ Axe verhælt sich der Vergrösserungsfaktor n auch længs den Parallelen zu den Axen: auf jeder Parallelen zur U=Axe besitzt n einen Minimalwerth dort, wo diese die V=Axe durchschneidet und wæchst von da auf beiden Seiten derselben bis in's Unendliche und: auf jeder Parallelen zur V = Axe hat n einen Maximalwerth an der Stelle, wo diese die U=Axe schneidet und nimmt von da an zu beiden Seiten derselben stetig ab, bis es einen gewissen kleinsten Werth (der aber stets grösser als Null) in den Abstænden $\pm 2aE'$ von der U = Axe annimmt.

Man bemerkt ferner, dass jeder Werth von n (ausser Null) sich unendlich oft mal wiederholt und dass alle diejenigen Punkte, in denen der Faktor n einen constanten Werth hat Curven bilden, welche anzusehen sind als Durchscnittslinien der gegebenen Flæche mit dem elliptischen Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - b^2} = z + \frac{(a^2 - b^2)^2 - c^2}{4(a^2 - b^2)}$$

oder was dasselbe ist als Durchschnittslinien mit dem hyperbolischen Cylinder

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2 - b^2} = z - \frac{(a^2 - b^2)^2 - c^2}{4(a^2 - b^2)},$$

wenn

$$n = \frac{c}{4}.$$

Die Flæchen sind jedoch reel nur so lange

$$c^2 < 2(a^2 - b^2)^2.$$

Diese Curven sind es auch, deren Længen sich in constantem Verhæltniss abbilden.