УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МИЛОШ РАДОЈЧИЋ

ЕЛЕМЕНТАРНА ГЕОМЕТРИЈА

ОСНОВЕ И ЕЛЕМЕНТИ ЕУКЛИДСКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Научна књига

БЕОГРАД, 1961.

САДРЖАЈ

Приступ

Глава прва

Узајамни положај тачака и ликови засновани на узајамном положају тачака

Глава друга

Подударност

Глава трећа

Непрекидност

Глава четврта

Упоредност

Глава пета

Сразмерност

Глава шеста

Упоређивање површи у равни и тела у простору по величини

Глава седма

Мерење

ПРЕДГОВОР

Овој уџбеник „Елементарне геометрије“, који треба да служи студентима математичких наука, настао је на темељу истоименог течаја, који сам почео предавати на београдском универзитету године 1938, на тадањем Филозофском факултету, од кога се после одвојио Природно-математички факултет. Основа за израду ове књиге били су ми литографисани табаци, издати 1948 и 1950 године*.

Једна од главних разлика између тих табака и ове књиге је та што геометрија у простору сада није изложена засебно, после геометрије у равни, него обе упоредо, враћајући геометрији њено јединство. Сем теоријске вредности коју пружа овакав распоред излагања, спомињем практичну околност да се тиме доприноси сузбијању једностраног проучавања планиметрије и запостављања стереометрије. Што се теоријске предности тиче, треба имати на уму да се опште узевши садржај елементарне геометрије може изложити према групама аксиома и геометријских теорија које се на ове групе надовезују, и може се такође изложити према броју димензија, обрађујући прво геометрију на правој, затим у равни и најзад (ако не идемо даље од три димензије) у простору. Ако се усвоји први распоред — као што је учињено у овом течају — разумљиво је што се други распоред не може више одржати доследно и што је, према томе, боље напустити га сасвим. Али, било би оправдано такође изнети прво све оне аксиоме и њихове последице, које се односе на једнодимензиону еуклидску геометрију, затим учинити исто за дводимензиону еуклидску геометрију, па за тродимензиону итд.

Систем аксиома, који сам за течај изабрао, није Хилбертов. При избору је пресудна била тежња да се слушаоцима пружи систем геометрије довољно строг и једноставан. Са аксиоматичког становишта не мора број основних појмова бити минималан. Хилберт узима, сем тачке, праву и раван за полазне појмове, (за „елементе геометрије”) ма да се напр. и раван може дефинисати помоћу тачака и правих. Сматрам да дедуктивна метода, у сагласности с аксиоматичком, долази чистије до изражаја кад се број полазних елемената сведе на минимум — на саму тачку — а права и раван дефинишу, разуме се, помоћу полазног односа „између”. Уместо овог односа могла се такође изабрати дуж за основни појам, дакле за други полазни „елемент” простора; тиме би настао аксиоматички потпуно еквивалентан систем.

Због разлике у гледиштима потребно је можда додирнути питање, шта је уопште елементарна геометрија, или шта треба да буде у наше време, особито кад је реч о једном универзитетском течају. Схватање да је

---

* М. Радојчић, Елементарна геометрија (Основе и елементи еуклидске геометрије). I, II, Научна књига, Београд (1948/50).

елементарна геометрија онај део геометрије у који не улазе бесконачни низови тј. гранично посматрање, дакле ни обрада непрекидности, застарело је још од времена кад се увидело да се без аксиома непрекидности може изградити само оскудан одломак геометрије. Мислим да је најоправданије сматрати елементарну геометрију оном основном граном геометрије, која за разлику од осталих садржи основна учења о еуклидском (еуклидовском) простору, доводећи уједно до раскршћа на којима се почињу одвајати путеви у разне врсте геометрија, као што је аналитичка геометрија и као што су разне „више" геометрије (напр. нееуклидска геометрија). Аксиоматско проучавање основа геометрије нисмо унели у овај течај, изузимајући оно што је неопходно ради разумевања логичке структуре елементарне геометрије. Уосталом, бесумње да и од степена развића геометрије, и математике уопште, зависи шта ће се сматрати основним и елементарним. Отуд елементарна геометрија не може никад више бити истоветна с Еуклидовом геометријом, изложеном у његовим „Елементима".

Као што се из овог уџбеника види, овакав универзитетски течај елементарне геометрије разликује се знатно од средњошколских течаја геометрије. Дакле, било би погрешно мислити да је елементарна геометрија „елементарна" у смислу једноставности, или да обрађује методику геометрије. Ово последње би такође морало занимати будуће наставнике математике, али није предмет овог течаја. Једна од сврха овог универзитетског течаја је продубљавање средњошколског знања и уопште знања геометрије, као и припремање за течаје Више геометрије (који се такође одржавају на Природно-математичком факултету). Саобразно томе, доказивање теорема је већином прецизније него што је у средњим школама потребно и оправдано, али местимично је та строгост снижена — а неки ставови, штавише, споменути без доказа — да би се смањила опширност књиге.

Од тешкоћа у избору назива, с којима има да се бори ко год предаје геометрију на српском језику, споменућу (и овај пут) само једну, која се тиче површи (plohe, француски „surface", енглески „surface", немачки „Fläche") и површине (француски „aire", енглески „area", немачки „Flächeninhalt"). Мада се у овом питању још и данас понеки наставник не усуђује да уведе два разна назива, него му површина значи час једно, час друго, или прибегава привидном решењу, (као кад се површ назива површином, а површина величином површине) сматрам исправним да наставим досадању употребу речи „површ" и „површина", која је углавном већ усвојена.

Неки уџбеници који би се могли упоредити с овим, усвајају Хилбертов систем аксиома као најпознатији од свих новијих система (тако *G. B. Halsted,* Rational Geometry). Има пак новијих уџбеника у којима је број аксиома повећан, да би се упростило у почетку извођење ставова. Тако чини напр. *H. Thieme,* Die Elemente der Geometrie (1909), па и *M. Zacharias*, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes (1930).

Изграђивајући свој течај служио сам се понајвише овим последњим уџбеником, но велики део садржаја ове књиге написан је независно од других аутора.

Што се тиче начина како треба студенти да се служе овим уџбеником, који предајем јавности, важно је истаћи да сваки који учи треба да пажљиво и систематски пређе целу ову књигу, не зато да би научио напамет све теореме и доказе — јер местимично је довољно знати само најбитније елементе у појединим теоријама елементарне геометрије — него да би стекао самостално знање и да би се научио логички ексактном изрицању геометријских дефиниција и ставова и извођењу доказа, и да би тиме стекао, такорећи, специфичну способност која је особито потребна сваком будућем наставнику математике у средњим школама, где ће своје знање елементарне геометрије непосредно примењивати у настави.

Појединим главама овог уџбеника додати су задаци за вежбање. Број тих задатака није велики, али може допринети бољем усвајању садржаја и потребном развоју способности у доказивању геометријских ставова и решавању конструктивних задатака. За избор велике већине тих задатака захваљујем Драгомиру Лопандићу, асистенту за геометрију на Природно-математичком факултету.

Захваљујем такође Војни Радојчић, дипл. мат., на обилној помоћи коју ми је пружила приликом исправљања и дефинитивног припремања рукописа за штампање.

Београд, 12.6.1959. *М. Р.*

ПРИСТУП

1. О ПРЕДМЕТУ ГЕОМЕТРИЈЕ.

Ако је уопште могуће рећи у три речи шта је геометрија, рекли бисмо: наука о простору. Као део математике, геометрија обухвата разне и обимне математичке теорије. Свугде је реч о просторним односима. Свугде се полази од просторних претстава, па и онда кад се претставе напуштају. У геометрији се проучавају особине тела, површи, линија, каквих било геометријских ликова, а које се односе на њихов положај, облик, величину. При томе се у геометрији не посматра кретање у току времена, па ни остале особине тела у свету, као што су напр. топлина, еластичност итд. Истина, понекад се и у геометрији говори о кретању, али то је само ради погоднијег описивања чисто геометријских односа, као што је подударност. Апстрахује се дакле од времена и од разних других особина, којима се, напротив, бави физика и друге природне науке и њихове математичке теорије.

Кад кажемо напр. да је у правоуглом троуглу квадратна површ над хипотенузом једнака збиру квадратних површи над обема катетама, апстрахујемо од околности да су троугли, које налазимо, цртамо или градимо у свету, од разног материјала и у разним бојама, да су напр. нацртани кредом на школској плочи, и да је тачност којом су остварени увек ограничена, итд. Чињенице искуства улазе у геометрију мисаоно прерађене. Свака нацртана тачка има своју величину и није „геометријска тачка", о којој претпостављамо да уопште нема величине. Раван неког стола је ограничена рубом стола и равна је само док се овлашно посматра, а „геометријску раван" замишљамо неограниченом и савршено равном.

Додајмо да се у геометрији, штавише, често апстрахује и од самих геометријских својстава природног простора, разрађујући разне врсте геометрија, које више не одговарају нашим просторним претставама.

2. ИНДУКТИВНА МЕТОДА У ГЕОМЕТРИЈИ.

Како чињенице искуства улазе у геометрију мисаоно прерађене и разрађене, био је у прошлости дуг пут до геометрије као логичке, математичке науке. Ако потражимо како се током историје човечанства развијала геометрија, наћи ћемо да је дуго црпла своја сазнања непосредно из искуства. Таква је била геометрија старих култура Месопотамије и Египта, пре Грка, дакле од почетака историје до отприлике седмог столећа пре наше ере. Није се можда ни мислило на то да се удео посматрања разлучи од удела размишљања и вођство преда самом размишљању. Тада беше геометрија првенствено искуствена, *емпиријска наука* (грчки: ἐμπειρία = искуство). Она је уводила у своја сазнања (која су сва мање више општег карактера) полазећи од појединих чињеница посматрања (које су увек посебног карактера). Дакле била је уједно *индуктивна наука* (латински: inducere = уводити).

Посматрајмо напр. став према коме се три симетрале страница једног троугла секу у једној тачки. У тачност овог можемо се уверити самом конструкцијом. Нацртајмо какав било троугао. Затим одредимо средишта његових страница. Ако је цртеж довољно тачан, видећемо непосредно то што став тврди. Ово је пут непосредног опажања, искуства. Могло би се рећи да смо цртањем извршили један геометријски оглед. Пут је индуктиван, јер из једног конкретног случаја (из слике) закључујемо да став важи у свим случајевима. Строжије узето, индуктивна метода би захтевала да исту конструкцију поновимо више пута, бирајући троугле разних облика и величина и да тек на основи свих тих „огледа" закључимо да је општи став тачан.

Строго узевши, индуктивна метода не даје довољан доказ онога што се тврди. Само искуство не казује зашто је онако као што се тврди ни зашто не може бити друкчије. Тачност сваког цртежа је уосталом ограничена и дешава се, рецимо, да се у слици три праве не секу у једној тачки ма да се у истини секу. Логички доказ једини је поуздан и, штавише, довољан. У поузданости и, тако рећи, потпуном разјашњењу, коју пружају логички докази можемо видети један од мотива који су још у давна времена гонили људе да геометрију изграде у логичку науку.

Још данас, особито у школама, геометрији се приступа као збирци мање више очигледних чињеница, учећи прво како да се из појединих опажања образују индуктивним путем општи геометријски закључци. То је у настави оправдано. Па и доцније, сваку геометријску слику коју смо нацртали да бисмо се лакше снашли у решавању неког геометријског задатка, можемо сматрати остатком индуктивне, емпиријске методе. Свака геометријска слика је (као што рекосмо) геометријски оглед. Као што се напр. у експерименталној физици утврђује Архимедов закон — да тело у течности губи од своје тежине онолико колико је тешка истиснута течност — тиме што се изведе дотични оглед, а не низом логичких закључака (што је такође могуће, али је предмет теоријске, математичке физике) тако се у геометрији може нацртати слика или (у стереометрији) саградити модел, да би се лакше увидела нека геометријска истина. Слика и модели су посебни, конкретни предмети, али наше расуђивање има опште значење. Сваки геометријски став исказује једну општу чињеницу, која се око нас остварује безброј пута, или би се могла остварити, на разне начине, са мањом или већом тачношћу.

3. ДЕДУКТИВНА МЕТОДА У ГЕОМЕТРИЈИ.

Биће да се врло давно почело наслућивати, да геометријске истине стоје у нарочитој узајамној зависности, која се открива пажљивом расуђивању. Погледајмо напр. такозвани „други" став о подударности троуглова: „Два троугла су подударна ако имају подударне по једну страницу и оба угла, налегла на ту страницу". Можемо се уверити у тачност тог става и непосредно, ако конструишемо, рецимо од картона, два троугла на којима су остварени услови става, па пренесемо један на други тако да се поклопе елементи који су по претпоставци подударни. Тада ће непосредно види да се оба троугла потпуно подударају. Извршен је у ствари оглед и став је њиме потпуно потврђен. Поступак је емпиријски, индуктиван. — Но уместо тога можемо се уверити у тачност овог става и путем који нас ослобађа потребе да начинимо два троугла на описани начин па да их преносимо један на други, али под условом да смо већ утврдили такозвани „први" став о подударности троуглова. На основи тог „првог" става можемо, наиме, на познати начин доказати самим логичким расуђивањем „други" став о подударности троуглова. (Строжије посматрано, треба претпоставити још извесне ставове, али засад можемо имати у виду упрошћен доказ какав се учи у средњим школама.) Дакле, „други" став о подударности троуглова следује логички из „првог" става о подударности троуглова. Исто тако могао би се самим расуђивањем доказати и „први" став о подударности троуглова кад би се пошло од „другог" става. Између оба става постоји узајамна логичка зависност. Такве логичке везе постоје међу свим ставовима геометрије, простије или сложеније.

У изналажењу те логичке повезаности састоји се такозвана метода *логичке редукције* у геометрији, тј. свођења једног става на друге, доказивањем на темељу тих других ставова (латински: reducere = сводити). Но логичка редукција карактерише геометрију тек ако се изводи систематски, тако да се ставови геометрије поставе у известан низ и у том низу сваки став докаже на темељу ранијих ставова тога низа. Кад се тако геометријски ставови изводе логичким расуђивањем једни из других, доцнији из ранијих, идући извесним редом, геометрија постаје *дедуктивна наука* латински: deducere = изводити).

Тек у старој грчкој култури, у сразмерно кратком времену, углавном од 6. до 4. столећа пре н. е., геометрија се јавно развила у дедуктивну науку, која се са својих темеља подиже самом логичком нужношћу. Дедуктивна метода је оно што више од свега другога карактерише не само геометрију, него математику уопште.

4. УЛОГА СЛИКЕ И МОДЕЛА. НЕЗАВИСНОСТ ОД ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПРЕТСТАВА.

Али геометрија је као логичка, математичка наука, изнад слике и модела, а служи се њима (особито сликама) само као помоћним средствима, која могу користити, али не смеју реметити логички ток доказивања. Услед очигледности неког тврђења могла би се, наиме, превидети потреба да се то тврђење докаже. Доказ би могао прескочити и неку појединост, не издвајајући је уопште из њеног склопа, датог непосредном опажању и претстављању. Тако је напр. тек у прошлом столећу откривена логичка потреба да се у геометрији поставе постулати и теореме о непрекидности. Геометри су и раније знали да су напр. права и круг непрекидни геометријски ликови, али у томе не беху запазили засебан геометријски проблем. Не беху можда ни слутили да се ту скрива цело једно поглавље геометрије, које треба тек развити, а без кога геометрија остаје логички непотпуна.

Стога, да би се геометрија изградила доследно својој методи, као строго дедуктивна наука, њено излагање треба да буде независно од наших геометријских претстава. Њен садржај треба да остане на снази и ако се одрекнемо потпуно просторних претстава и задржимо једино „празне" логичке односе, садржане у њеним судовима и закључцима. То је виши степен апстракције од онога на коме се, додуше, одричемо конкретности предмета у простору, али још се држимо геометријских претстава. Њиме се одликује аксиоматичко излагање геометрије. — Ми се у овом течају нећемо одрицати геометријских претстава, па ни слика, али ћемо у постављању основа и у изношењу градива усвојити у извесној мери савремену, аксиоматичку строгост геометрије.

ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ИЗРАЗИ И ПОЈМОВИ

Како се у геометрији изражавамо пре свега речима, цела геометрија је, такорећи, испуњена геометријским изразима који се састоје из једне или више речи. Разуме се, у геометрији, као и у другим математичким наукама, говорни изрази се често замењују писаним симболима и могу се, штавише, састојати из симбола (то бива већ када тачке обележавамо словима), али сад је особито реч о говорним изразима.

У геометрији као дедуктивној науци геометријски изрази се уводе нарочитом врстом исказа, у којима се сваки нов израз доноси ради погоднијег изражавања, уместо неког другог, можда дужег, раније уведеног, дакле већ познатог израза. Тако напр. уводимо реч „троугао“, уместо израза „укупност трију дужи које спајају три разне тачке, кад ове не припадају једној правој“.

Исказе којима уводимо нове изразе, одређујући њихову употребу, називамо *дефиницијама* (латински: definitio=одредба).

Како је сваки израз својим значењем говорни знак за известан појам нашег мишљења, геометријским дефиницијама се у ствари одређују геометријски појмови.

Ако смо сад у први мах говорили само о изразима а не о њиховој мисаоној садржини (о појмовима) то је зато што у аксиоматичком излагању геометрије треба, кад год се укаже потреба, апстраховати од геометријских претстава, дакле од значења појединих речи и израза. Када тако чинимо, свели смо геометријске изразе на симболе без одређеног значења (као што напр. слова a и b у обрасцу $a+b=b+a$ немају одређеног значења и могу претстављати неке целе бројеве, или ма какве реалне, или комплесне бројеве, или пак векторе итд.).

Ако, дакле, желимо да геометрију излажемо аксиоматички, морамо дефиниције сматрати ставовима, којима се уводе, пре свега, нови геометријски изрази. Самим тим уводе се и одговарајући појмови, уколико желимо да држимо у мислима значење тих израза.

У свакој дефиницији одређује се неки нови геометријски израз — дакле и појам — помоћу других, раније усвојених израза, односно појмова. Према томе, на почетку геометрије, пре прве дефиниције, мора се за неке геометријске изразе (појмове) претпоставити да су нам унапред познати. Ти изрази се дакле не дефинишу. Зовемо их *полазним* или *основним изразима*, а појмови, означени тим изразима, зову се *полазни* или *основни појмови*. Из основних појмова изводе се пак сви остали геометријски појмови.

Тако напр. узима се обично да је „тачка“ полазан израз, појам тачке полазан појам, дакле да се тај појам не одређује дефиницијом, помоћу других геометријских појмова. Од појма тачке полазимо, претпостављајући, уосталом, да нам је довољно познат.

Сви геометријски изрази и појмови који нису основни зову се *изведени изрази*, односно *изведени појмови*. Напр. „троугао“ или „пирамида“ су редовно изведени појмови.

У избору основних појмова поступамо у суштини слободно. Не мора се, рецимо, појам равни изабрати за један од основних појмова: раван се може и дефинисати. Но у избору полазних појмова имамо у виду извесне захтеве, као што је тај да у извођењу геометрије треба да изаберемо што једноставније геометријске ликове и односе за полазне појмове и да њихов број треба да буде што мањи, но ипак довољан да би се могли дефинисати сви потребни појмови геометрије или оне њене гране коју имамо у виду. Ако имамо довољно основних појмова да бисмо, полазећи од њих, развили геометрију, кажемо да сачињавају *потпун систем основних појмова.* Разуме се, основни појмови не смеју доводити до логичке противречности, треба да образују *непротивречан систем.* Ако је број основних појмова најмањи који је при томе могућан, а то значи да се ниједан не може дефинисати помоћу осталих, кажемо да су основни појмови међу собом *логички независни.* Али геометри се не држе строго овог трећег услова у извођењу геометрије, већ и стога што би зграда геометрије постала у својим почецима сувише сложена и изгубила би сасвим свој класични лик. Данас најпознатији систем геометрије, који потиче од Хилберта, садржи шест полазних појмова.

ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ СТАВОВИ.

Геометријске истине се у геометрији логички утврђују *доказивањем.* У доказу се нека нова геометријска чињеница изводи из других, раније утврђених геометријских чињеница. Дакле, на почетку геометрије, пре сваког доказа, морају стојати већ неки геометријски ставови, које унапред усвајамо без доказа. Те геометријске ставове називамо *полазним* или *основним ставовима* и такође *аксиомама* (грчки ἀξίωμα = оно што се поштује, у што се не сумња). На темељу основних ставова доказују се сви остали геометријски ставови.

Тако се напр. узима обично да је став: „Кроз две тачке пролази увек једна права“ — основан став. Тај став се не доказује, већ се од њега (и још неких ставова) полази у доказивању, претпостављајући прећутно да су основни ставови непосредно јасни.

Сви геометријски ставови који се доказују зову се *изведени ставови,* кратко *ставови,* или пак *пропозиције* (лат.: propositio = поставка, претставка).

У избору основних ставова поступамо у суштини слободно. Не мора се напр. претходно споменути став узети за основни, него неки други, а први тада доказати. Можемо отпочети извођење геометрије од разних система основних ставова, из којих тада произлазе доказивањем сви остали ставови геометрије. Но и у том избору имамо у виду извесне захтеве, као што је обично тај, да систем основних ставова садржи што једноставније и очигледније геометријске чињенице. Пре свега, основни ставови не смеју доводити до логичких противречности, тј. мора бити немогуће да се из основних ставова изведу два става која непосредно противрече један другоме. Тражимо затим и да број основних ставова буде што мањи, но ипак довољан да би се на темељу њих могла изградити цела зграда геометрије коју проучавамо. Ако имамо довољан број основних ставова, кажемо да они сачињавају *потпун систем основних ставова.* Ако се број основних ставова не може смањити или, тачније, ако није могуће да се један од основних ставова, или макар само један његов део, докаже на темељу осталих основних ставова истог система, кажемо да су основни ставови међу собом *логички независни.* Геометри се у извођењу геометрије не држе обично ни тог услова, да би упростили излагање.

У том смислу говори се и о мање строгој, *распоредној независности* која се састоји у томе што излажући геометрију, износимо основне ставове одређеним редом и захтевамо да ни један касније изведени став не буде последица раније-изнесених основних ставова. Та независност, у одређеном поретку, је особито важна у односу на поједине групе основних ставова. Напр. у Хилбертову систему геометрије основни ставови треће групе (подударности) не могу се доказати на темељу основних ставова претходних двеју група (везе и распореда), али кад би се пошло од основних ставова треће групе могли би се неки ранији основни ставови доказати. Независност основних ставова која остаје при ма ком поретку којим би се ти ставови доносили зове се *апсолутна независност.* — И у нашем течају независност постоји само у изложеном поретку аксиома.

7. АКСИОМЕ И ТЕОРЕМЕ, ПОСТУЛАТИ И ПРОБЛЕМИ.

Ставови геометрије могу имати разне облике. Тако можемо разликовати ставове у којима се тврди да постоји извесна геометријска чињеница и ставове у којима се захтева да се изврши извесна геометријска конструкција или само тврди да се извесна конструкција може извршити. Ставове у којима се тврди да постоји известан геометријски лик (тачке, праве итд.) називамо *ексистенционим ставовима,* а ставове у којима је реч о геометријским конструкцијама називамо *конструкционим ставовима.*

Овим двема врстама геометријских ставова одговарају два начелно разна становишта у геометрији. Можемо, наиме, претпоставити да за сваке две тачке постоји права која те тачке садржи, да за сваке три тачке, које не припадају једној правој, постоји раван која те три тачке садржи, да у свакој равни постоји круг са датим средиштем и датим полупречником итд. И можемо, напротив, претпоставити да је простор, такорећи, празан, али да се увек могу, неограничено вршити елементарне геометријске конструкције, под условом да не противрече основним ставовима, — као што је постављање тачака где год хоћемо, повлачење правих ма кроз које две тачке, постављање равни ма кроз које три тачке, конструисање кругова у свакој равни са датим средиштем и полупречником, итд. Прво становиште можемо назвати *ексистенционим,* а друго *конструкционим.* Еуклид стоји у својим „Елементима“ више на конструкционом становишту и према томе већ неки његови основни ставови имају облик захтева да се извесна конструкција може извршити, а многи његови изведени ставови имају облик конструктивних задатака. Хилбертов систем геометрије, изложен у његовим „Основама геометрије“ одговара напротив ексистенционом становишту. Таква је већ прва његова аксиома: „Какве год биле две разне тачке, постоји права којој те две тачке припадају“. И ми усвајамо у овом течају ексистенционо становиште, али не држимо га се увек строго, ради једноставнијег изражавања. (Напр. рећи ћемо да се полиједар може разложити на тетраедре.)

Изведени ставови у којима се захтева извршење извесне геометријске конструкције зову се *проблеми* (πρόβλημα = рт, запрека, тежак задатак). Такви су напр. ставови: Из тачке *A*, која је изван праве *p* спустити дуж управну на праву *p*. — Конструисати једнакостраничан троугао коме је дата једна страница. — Конструисати круг који пролази кроз темена једног троугла.

И основни ставови могу припадати овој врсти ставова. Таква су прва три основна става у Еуклидовим „Елементима“, која у слободном преводу гласе: Захтева се да је могуће, од сваке тачке до сваке друге тачке повући дуж, и сваку дуж продужавати неограничено, и из сваке тачке као средишта описати (у датој равни) круг датог полупречника. Такви основни ставови заслужују, више од других, да ће зову *постулати* (латински: postulatum, грчки αἴτημα = захтев, молба; овако се и зову у „Елементима“).

Аксиоме су у ствари основни ставови ~~у којима~~ се не тражи извршење геометријске конструкције, него тврди да постоји извесна геометријска истина. Таква је напр. споменута аксиома: Какве год биле две разне тачке, постоји права којој те две тачке припадају.

Изведени ставови у којима се тврди да постоји извесна геометријска истина зову се *теореме* (θεώρημα = призор, посматрано). Такви су напр. ставови: Какав год био троугао *ABC*, постоји круг који додирује све три његове странице. — Све три висине једног троугла секу се у једној тачки.

Често се претпоставља сем тога да је теорема став који се доказује, а ставови који следују непосредно из претходних називају се последицама или лемама (λῆμμα = примљено).

8. О ОНОМЕ ШТО СЕ У ГЕОМЕТРИЈИ ПРЕТПОСТАВЉА, А ШТО НЕ СПАДА У ЊЕН ПРЕДМЕТ.

Сем геометријских израза (појмова) и ставова јављају се у геометрији и други елементи, неопходни у њеној логичкој згради. То су, пре свега, извесни појмови и ставови *аритметике* и *алгебре*, као што су природни бројеви и њихово сабирање, одузимање итд., затим основни и елементарни ставови опште аритметике (напр.: „ако су *a*, *b*, *c* ма каква три броја и ако је $a=b$ и $b=c$, такође је $a=c$“). То су затим најелементарнији (свакоме познати) појмови *теорије мноштава* (скупова), пре свега сам појам *мноштва* извесних предмета, који се називају *елементима* мноштва. Полазећи од тачака, — дужи, праве, кругови итд. су у ствари бесконачна мноштва тачака. Елементи тих мноштава су тачке. И ако (напр. по Хилберту) ~~пођемо од тачака~~, правих и равни као „елемената простора„ прихватамо, напр. у дефиницији круга, да је круг извесно бесконачно мноштво тачака. Са аксиоматичког становишта апстрахујемо од садржине геометријских појмова и тиме стајемо управо на становиште теорије мноштава ма каквих (неодређено којих) елемената, међу којима постоје апстрактни односи изречени у аксиомама.

Сем тих појмова теорије мноштава и неких других елементарних појмова математике, који нису геометријски, претпостављају се у геометрији и неки појмови без којих је немогуће изрицати логичке судове и закључке. Мислимо на појмове изражене напр. речима „сваки“, „неки“, „само“, „ако“, „није“ „јесте“ итд. Ни те појмове, наравно, не дефинишемо у геометрији, нити их сматрамо основним геометријским појмовима, јер нису геометријски. Њима се уосталом, са математичког становишта бави *наука о основама математике* (тзв. математичка логика или металогика).

9. ПОГЛЕД У ИСТОРИЈУ ГЕОМЕТРИЈЕ.

а) Геометрија пре старих Грка. — Међу археолошким налазима у Египту и Месопотамији има старих папируса и глинених плоча с математичким садржајем. Из њих познајемо и геометрију тамошњих древних култура. Математика се кроз многе векове трајања тих култура састојала из почетка аритметике и геометрије. Геометрија је тада још претежно индуктивна наука, у најужој вези са својим пореклом и применама у астрономији, геодезији, грађевинарству итд. По мишљењу Херодота, грчког историчара из 5. века пре н. е., геометрија је потекла из Египта, од сталне потребе да се брзо и поуздано измере границе појединих земљишта после поплаве Нила, јер вода је брисала граничне знаке. Но у Месопотамији су почеци геометрије бар толико стари као у Египту. Већ око 2000 године пре н. е. имали су Сумери сразмерно високо развијену математику. Из археолошког материјала закључујемо да су чувари знања (свештеници) у тим двема земљама познавали већ одавно напр. извесне ставове о троуглима, проучавали површине правоугаоника, приближно израчунавали обим и површину круга, запремину купе и полулопте, а тачно запремину извесних пирамида, зарубљених пирамида итд. На глиненим плочама Сумера нађено је и решавање извесних задатака о „дужини‘и „ширини“ и „површини“ које је истоветно с решавањем квадратних, па „ кубних једначина.

b) Геометрија старе Грчке. — Кад је водећа улога у култури прешла на Хелене (Грке), математика је добила нове потстреке, нов правац развоја и нов, још невиђен полет, који је особито геометрију подигао на висину са које је она царевала кроз .дуги низ векова. У Грчкој је сазрео смисао за геометрију као научну теорију, која се изграђује самостално, у извесној независности од примена, но да би у толико моћније захватала у своје многобројне примене. Управо у геометрији појавила су се у античких Грка два велика начела науке: систематско изношење градива и доследност у спровођењу једне, дедуктивне методе. Сав тај успон грчке геометрије трајао је у главном само три стотине година: од VI до II столећа пре н. е. Што се за то време у геометрији створило нису ни две хиљаде каснијих година могле уздрмати.

Колико знамо, дедуктивна метода отпочиње у геометрији са школом питагорејаца, коју је у 6. веку пре н. е. основао *Пиїаїорас*. И његов савременик, познати филозоф *Талес* беше основао своју школу, у којој се такође неговала геометрија; он је свакако познавао известан број ставова, али их, вероватно, није доказивао нити низао у логичке низове. Питагори су пак приписивали главни део онога што садрже прве две књиге Еуклидових „Елемената“. Питагорејци су се бавили напр. и проблемом несамерљивих величина, тј. таквих којима при мерењу не одговара по тадањем појму броја никакав мерни број. Доказали су логичким путем да несамерљиве дужи постоје, да је, пре свега, страница квадрата несамерљива дијагонали (размера је, како знамо, $1 : \sqrt{2}$).

Један од најзначајнијих грчких геометара је *Хийокраїес* са Хиоса (5. век пре н. е.). Кажу да управо од њега почиње „хваљена грчка строгост“ у геометрији. Он брижљиво ређа претпоставке на основи којих треба доказати неки став, затим изводи конструкцију, одговара на могуће приговоре, наводи сваки помоћни став који му је у доказу потребан итд. (метода редукције). Такав поступак наводи сам собом на то да се ставови систематски нанижу тако да би испред сваког става стајали они ставови из којих се овај изводи. Прво такво дело написао је, кажу, Хипократ. Но његови „Елементи“ нису до нас доспели, али су свакако били узор геометрима после њега, па вероватно и Еуклиду при писању његових „Елемената“.

И откриће да се у геометрији могу поједини елементи, особито тачке обележавати словима, припада вероватно Питагорејској школи. Данас нам је то сасвим обично, али мора бити да ни до тога открића није одмах дошло. Но важност тог практичног начела је велика, јер кад би се уместо словима све морало описивати речима, многи ставови, а особито докази, тешко би се схватили и још теже исказали. Чини нам се да Хипократ још не беше дошао у томе до касније краткоће, јер напр. каже: „тачка на којој је слово *A*“, „права на којој је забележено *B*“, где бисмо данас казали: тачка *A*, права *B*.

На развој геометрије знатан утицај имао је *Платон* (429 — 348 пре н. е.) Речи: „Нека нико не улази овамо ако не зна геометрију“, — које су, кажу, биле написане на улазу у његову школу, „Академију“, сведоче колико се у тој школи геометрија сматрала темељем наставе и образовања и колико се у њој, бесумње, и обрађивала геометрија. Кажу да се Платон бавио особито систематисањем њенога градива и испитивањем њених основа, те да од њега потиче постављање постулата и аксиома на чело геометрије. Пошто је сваки став свео на претходни доспео је, кажу, напослетку до дефиниција, постулата и аксиома.

Платонов савременик *Еудоксос* (410 — 356 пре н. е.) радио је особито на изучавању геометријских пропорција. Бесумње његова је тзв. метода ексхаустије (испражњавања), у ствари граничног приближавања. Та се метода показала особито плодном у проучавању облих геометријских ликова. Еудоксу се приписује и главни део садржаја пете књиге Еуклидових „Елемената“. И Еудокс беше основао научну школу, и његов ученик *Меноехмос* је написао, кажу, први дело о конусним пресецима.

Далеко најпознатије, најчитаније и најутицајније дело из геометрије написао је *Еуклеидес* (отприлике 365 — 275 пре н. е.), ученик Платонов школе и оснивач геометријске школе у Алесандрији. Његово дело „Стоихеиа“, на латинском „Elementa“, написано око године 325 пре наше ере садржи систематски изложено, дедуктивно изведено тадање основно, елементарно знање из геометрије. Није у том делу садржано све што се тада у геометрији знало. Сам Еуклид је написао још неке списе, један о конусним пресецима. Утицај Еуклидових „Елемената“ на културу човечанства је велики, јер из тог дела људи су се столећима, све до новијег времена учили — не само геометрији, већ преко ње, уопште, логичком расуђивању и научној методи. По том делу гледали су многи у геометрију као у савршенство сазнања и науке. — Али ни то дело није савршено. Штавише, већ у Старом веку отпочело је критично разматрање Еуклидових „Елемената“. Тако је већ *Архимедес* (287—212 пре н. е.) запазио непотпуност списка Еуклидових постулата и додао пет даљих постулата које је сматрао потребним за теорију мерења. Једном од тих придаје се и данас значај постулата.

Друго славно дело грчке геометрије су „Коника“ (тј. „Конусни пресеци“), које је написао велики грчки геометар *Аполониос* (отприлике 260—200 пре н. е.). После тога дела сматрало се некада да се о конусним пресецима нема шта да дода. Дело садржи око 400 ставова у осам књига. Њима се Аполоније јавља и као претходник пројективне геометрије.

Ово се још пре може рећи о касном александријском геометру *Папосу* (отприлике 250 — 300 н. е.). Он је открио дворазмеру, инволуцију, налажење четврте хармонијске тачке помоћу потпуног четвороугла итд.

c) Геометрија новијих времена. — Пошто је потом, столећима, развој геометрије био у извесном застоју, сем што су Арапи, негујући научно наслеђе Старог века, допринели развићу алгебре и разрадили тригонометрију, дошло је у току 16. и 17. столећа проницање геометрије алгебром. Најзначајнији је у том погледу *François Viète* (Виет, 1540 —

1603), који је уједно један од твораца наше алгебре, и уз њега *Марин Геталдић* (1568 — 1626), разрадивши примену алгебре на геометрију, која се састоји у решавању геометријских задатака путем алгебре. То још није аналитичка геометрија, јер се још не оснива на координатном систему. Идеја координатног система је стара, али тек је *René Descartes* (Декарт, 1596 — 1650) схватио сву далекосежност методе која у геометрији настаје увођењем координатног система. Његов кратки спис „Геометрија“ (1637) доноси свету велико откриће тзв. аналитичке геометрије.

Кад су у 17. столећу *Isaac Newton* (Њутн, 1642 — 1727) и независно од њега *G. W. Leibniz* (Лајбниц, 1646 — 1716) пронашли диференцијални и интегрални рачун, пронашли су самим тим и његову примену на решавање геометријских проблема (проблем тангенте, ректификација, квадратура итд.) Тако се аналитичка геометрија проширила у *геометрију математичке анализе*, са својом општом теоријом кривих линија и површи.

У 17. столећу јављају се и нови почеци *пројективне геометрије*, ставом шеснаестогодишњег *Pascala* (Паскал, 1623 — 1662), познатим као Паскалов став, и особито једним списом *Desarguesa* (Дезарг, 1593 — 1662). Но тек од почетка 19. столећа развила се пројективна геометрија као засебна грана геометрије. Њени главни творци су *J. V. Poncelet* (Понсле, 1788 — 1867), *M. Chasles* (Шал, 1793 — 1880), *J. Steiner* (Штајнер, 1796 — 1863). *Möbius* (Мебиус, 1790 — 1868) и *Staudt* (Штаут, 1798 — 1867).

До другог великог развоја геометрије у 19. столећу дошло се на путу критичког проучавања њених основа. Никад, још од Архимеда, не беше потпуно утрнула тежња да се недостаци запажени у основама Еуклидових „Елемената“ исправе. Но тек у 19. столећу развила се отуд нееуклидовска геометрија и потом, уопште наука о основама геометрије (па и математике уопште). — Највише, и још од Старог века привлачило је пажњу питање: може ли се пети Еуклидов постулат у његовим „Елементима“ — којим се утврђује постојање само једне упоредне датој правој и која пролази кроз дату тачку — доказати помоћу осталих његових постулата и аксиома? После покушаја неких других аутора, објавио је *Н. Лобачевски* (1793 — 1856) први спис (1829) у коме развија нееуклидовску геометрију, која се разликује од наше еуклидовске геометрије, тј. онакве какву налазимо у Еуклидовим „Елементима“, тиме што је у њој Еуклидов пети постулат замењен другим. У исто време дошао је до истог открића *I. Bolyay* (Бољај, 1802 — 1860). Још много даље у ослобађању од еуклидовске геометрије отишао је *B. Riemann* (Риман, 1826 — 1866) кад је (1854) у једном кратком саопштењу изложио n-димензиону геометрију врло општег карактера, звану Riemann-ova геометрија.

Једна од главних грана геометрије, која се такође развила од половине прошлог столећа, је топологија. У топологији се испитују оне геометријске особине које се не мењају при ма каквим непрекидним трансформацијама. На пример, познати Ојлеров став о полиједрима, који казује да је на полиједру збир броја темена и броја пљосни већи за два од броја ивица, може се сматрати ставом топологије, јер остаје на снази када полиједар ма како деформишемо, не нарушавајући непрекидност.

У критичком проучавању основа геометрије дошло се пре свега до образовања потпуних система аксиома. Морало се увидети да, супротно очекивању, број аксиома није мањи, него већи но у Еуклида. После радова у том правцу, које су предводили геометри као што су *Pasch* (Паш, 1863 — 1930) и *Peano* (Пеано, 1858—1932) поставља *David Hilbert* (1862—1943) први потпуни систем аксиома и показује путеве аксиоматике, која карактерише истраживање основа геометрије („Основе геометрије“, 1899).

За савремени развој геометрије битна је, сем аксиоматичког становишта у критичком испитивању основа геометрије, улога теорије мноштава (скупова) и теорије група. Теорија мноштава је довела до образовања и проучавања врло општих, апстрактних геометрија, у којима се задржавају само понека карактеристична својства обичног простора (такви су напр. општи тополошки простори, линеарни простори, метрички простори). Теорија група је пак омогућила да се продуби, прошири и уједно среди наше геометријско знање, схватајући врсте геометрије као теорије које се баве чињеницама инваријантним (непроменљивим) у односу на извесну групу трансформација. Тако можемо напр. рећи да еуклидска геометрија проучава особине простора које су инваријантне према еквиформним трансформацијама, тј. оним које одржавају облик (такве су подударност и сличност). Група трансформација, од које се полази, тек уноси одређену структуру у иначе аморфни апстрактни простор. — Са тог становишта, образовати једну геометрију значи: дати мноштво извесних елемената и групу трансформација тога мноштва, и проучавати чињенице које су инваријантне према тим трансформацијама. На тај начин се и разним другим гранама математике може дати геометријска структура, јер, по начелима аксиоматике, испражњени појмови, невезани за претставе, допуштају разне интерпретације. — Овим прекидамо овај кратки преглед развића геометрије, које траје, као и у другим наукама, и данас.

10. О ЕУКЛИДОВИМ „ЕЛЕМЕНТИМА“.

Дело се састоји из тринаест „књига“. Књиге I — VI обрађују планиметрију, књиге XI — XIII стереометрију, а књиге VII — X, у ствари, елементе алгебре и теорије бројева у геометријском облику, говорећи о дужима и другим ликовима. На појединим местима стоје дефиниције оних геометријских појмова о којима се после тога говори. Тако читамо на почетку прве књиге:

1. Тачка је оно чији део је ништа,
2. линија пак дужина без ширине,
3. крајеви линије пак тачке,
4. права линија је она, која је подједнако постављена у односу на своје тачке,
5. површ је пак оно што има само дужину и ширину,
6. крајеви површи пак линије,
7. равна површ је она која је подједнако постављена у односу на своје праве,
8. угао у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни, које се стичу и које не леже у истој правој,
9. ако су линије које образују угао праве, угао се зове праволинијски, итд.*

Као што се одмах види, то нису строге дефиниције, него само кратка објашњења дотичних геометриских појмова. Шта је и шта би све могло бити „оно чији је део ништа“? Дефиниција линије, и кад би била исправна, претпоставља појмове дужине и ширине, дакле извесне геометријске појмове, који нису дефинисани, а нису ни јаснији од појма линије, итд. Зато данас

---

* Види и превод Еуклидових „Елемената“ од А. Билимовића (С. А. Н., Класични научни списи, Београд, 1949 — 1957).

одлучујемо прво које ћемо геометријске појмове оставити недефинисане, тј. које ћемо изабрати за полазне појмове, а затим дефинишемо на темељу њих све остале.

Иза „дефиниција” следују у Еуклидовој првој књизи, „постулати”, затим „аксиоме” (које Еуклид назива *општим појмовима*, грчки κοιναι εννοιαι). Постулати гласе:

I. Захтева се (да је могуће) од сваке тачке до сваке тачке повући праву линију,

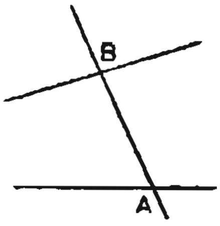
II. и ограничену праву, следујући њен правац, непрестано продужавати,

III. и са сваким средиштем и размаком описати круг,

IV. и да су сви прави углови једнаки међу собом,

V. и ако једна права падне преко две праве и учини да су унутарњи углови с исте стране мањи од два права, те две праве, продужаване неограничено састају се с оне стране где су углови мањи од два права,

VI. и да две праве не садрже простора.



Сл. 1

Као што видимо, ти постулати изричу извесне геометријске истине: оне од којих Еуклид полази, које претпоставља а не доказује. Према постулату I, какве год биле две тачке, увек постоји права која те тачке спаја. Према постулату II, свака дуж се може на обе стране продужавати. Дакле, ако су *A* и *B* две тачке на једној правој, постоји увек тачка *C* тако да је тачка *B* између *A* и *C*. Постулат V је највише помињани постулат о паралелности. Из њега следује да две праве могу бити упоредне само кад је збир поменута два унутрашња угла једнак збиру два права угла, а отуд следује да се кроз једну тачку ван једне праве може повући само једна упоредна права. Према постулату VI две праве не садрже никада део равни, тј. кроз две тачке пролази само једна права.

Еуклидове „аксиоме“ гласе:

1. Оно што је једнако нечему, једнако је и међу собом,
2. и ако се једнаком једнако дода, целине су једнаке,
3. и ако се једнаком одузме једнако, остаци су једнаки,

итд.

7. и оно што се може поклопити једнако је међу собом,
8. и целина је већа од дела.

Има осам таквих аксиома. (У извесним преписима „Елемената“ постулат VI јавља се као девета аксиома.) Као што видимо, аксиоме треба да садрже опште, основне истине чија природа није, сем аксиоме 7, само геометријска, а које су такође потребне у доказивању геометријских ставова. Данас се у излагању геометрије не набрајају такве „аксиоме“, него се постављају аксиоме подударности и сем тога претпостављају извесне елементарне чињенице из основних грана математике, као што је речено у броју 8.

После тих „аксиома“ ређају се у „Елементима“ ставови и ставовима условљене конструкције и докази. По својој природи једни ставови су проблеми, а други теореме.

II. НАПОМЕНЕ О ГЕОМЕТРИЈСКИМ ЗАДАЦИМА.

Постоје две врсте геометријских задатака. У једнима треба доказати извесно тврђење у другима треба извршити извесну геометријску конструкцију и, разуме се, образложити је доказом. У решавању задатка за вежбање (који се налазе и на крају појединих глава ове књиге) треба закључивати на темељу аксиома изречених и теорема доказаних пре дотичне групе задатака које треба решити. Решавање треба извршити писмено, речима, уз употребу само неопходних симбола, настојећи да доказ буде логички и граматички тачан, кратак али исцрпан, избегавајући непотребне речи, али не изостављајући потребне елементе доказа.

Решавање конструкционих задатака састоји се 1) из описа конструкције, 2) из доказа, којим се конструкција образлаже и 3) из дискусије, којом треба обухватити све могуће случајеве. О конструкцији у равни претпоставља се (ако се изричито не каже друкчије) да се састоји из конструкције правих линија и кругова у равни, као што се цртањем врши помоћу лењира и шестара, а у простору конструкцијом (обично само замишљаних) правих, равни, кругова, лопти итд. Елементарним геометријским конструкцијама сматрамо 1) конструкцију праве која садржи две дате тачке, 2) конструкцију равни која садржи три тачке које не припадају једној правој и 3) конструкцију круга у датој равни, са датим средиштем и датим полупречником. Може им се додати: 4) конструкција праве каја садржи дату тачку и упоредна је датој правој. Ово се постиже у равни троугаоним лењиром, прислоњеним уз један други лењир, али упоредне се могу конструисати и помоћу само једног лењира и шестара, дакле првом и трећом слементарном конструкцијом. Може се говорити и о „конструкцији" тачке, ма где у простору, или у датој равни, или на датој правој.

ГЛАВА ПРВА

УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ТАЧАКА И ЛИКОВИ ЗАСНОВАНИ НА УЗАЈАМНОМ ПОЛОЖАЈУ ТАЧАКА

ОСНОВНИ ИЗРАЗИ И ГРУПЕ ОСНОВНИХ СТАВОВА.

У овом извођењу елементарне геометрије основни (или полазни) геометријски изрази су: *тачка, између* и *подударно.* Имамо дакле свега три основна геометријска израза и према томе три основна појма.

Са становишта аксиоматике замишљамо саобразно томе мноштво „предмета" које називамо *тачкама,* одричући се сваке претставе коју реч „тачка" својим значењем буди. О тачкама задржавамо у мислима само то да су елементи извесног мноштва, за које су испуњени основни ставови. Као „предмети", тачке су *основни предмети.* Обележавамо их великим латинским словима, *A, B, C,* . . .

Међу тачкама и међу извесним мноштвима тачака (међу дужима) постоје, пре свих других, односи изражени речима, „*између*" и „*подударно*". Ово су *основни геометријски односи.* Имамо дакле два основна геометријска односа.

Тачну и са становишта аксиоматике потпуну, имплицитну дефиницију основних појмова „тачка", „између" и „подударно" дају основни (или полазни) ставови или *аксиоме.*

Имамо свега шеснаест аксиома и распоређујемо их у пет група:

I аксиоме *распореда* (5 аксиома),
II аксиоме *припадања* (3 аксиоме),
III аксиоме *подударности* (5 аксиома),
IV аксиоме *непрекидности* (2 аксиоме),
V аксиома *упоредности* (1 аксиома).

Преко аксиома I улази у геометрију распоред тачака, преко аксиома II улазе извесне везе између тачака, правих и равни, преко аксиома III улази подударност (конгруенција), преко аксиома IV непрекидност (континуалност), а преко аксиоме V упоредност (паралелност).

Према ономе што смо већ рекли, у елементарној геометрији посматрамо мноштво тачака за које су испуњене аксиоме I — V. Мноштво (свих) тачака за које су испуњене те аксиоме називамо *простором* (тачније: тродимензионим еуклидовским простором). Али ово тврђење не сматрамо дефиницијом простора у нашем систему дефиниција. (Један од разлога је тај што би оваквој дефиницији право место било тек после свих аксиома, на крају излагања геометрије.) У § 8 долази она дефиниција простора коју усвајамо у овом излагању. — Тачка је *елемент простора.*

2. ИСТОВЕТНОСТ И ПОКЛАПАЊЕ

Пре но што почнемо износити теореме геометрије, у којима се описују геометријски односи међу тачкама и мноштвима тачака, зауставимо се на чисто логичком односу истоветности (идентичности) и геометријском односу поклапања, који му је обично еквивалентан.

1. Ако једну тачку посматрамо двоструко и обележимо је, рецимо, једанпут словом A, други пут словом B, тј. ако су A и B *иста* тачка, кажемо такође да су тачке A и B *истоветне (идентичне).*

Ако две тачке нису истоветне, кажемо да су то две *разне* тачке.

Ако је у два мноштва тачака, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, свака тачка мноштва $\mathbf{M}$ истоветна са по једном тачком мноштва $\mathbf{N}$ и свака тачка мноштва $\mathbf{N}$ истоветна са по једном тачком мноштва $\mathbf{M}$, кажемо да су мноштва $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ *истоветна.*

Ако два мноштва тачака нису истоветна, кажемо да су то два *разна* мноштва.

Ако су мноштва $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ истоветна пишемо $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$. Ако нису, пишемо $\mathbf{M} \not\equiv \mathbf{N}$.

Однос истоветности испуњава одређене аксиоме, о којима је реч у логици и логичким основама математике. По једној од тих аксиома је $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$, по другој из $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M}_2$ следује $\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}_1$, по трећој из $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M}_3$ следује $\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}_3$.

2. По свом садржају појам поклапања се разликује од појма истоветности. Поклапање тачака и мноштава тачака је геометријски однос. Напр. ако је X ма која тачка на дужи AB, та тачка може бити између A и B, или се поклапати са A или са B. Кад би се тачка P кретала, описујући неку линију и кад би A, B, C биле тачке на тој линији, тачка P би се у разним тренуцима поклапала са тачкама A, B, C.

Кад се посматра кретање треба разликовати поклапање од истоветности, али кад се апстрахује од времена и кретања, као што чинимо у геометрији, разлика између поклапања и истоветности се обично губи, тако да за два лика која се поклапају можемо, сем изузетно, рећи да су истоветна, и обратно, за два истоветна лика да се поклапају.

Дакле, поклапање усвајамо, сем изузетно, као други начин изражавања кад су тачке истоветне или мноштва тачака истоветна. Отступићемо од тог становишта само кад будемо проширили појам угла на произвољно велике углове (§12).

Могућност да се истоветност и поклапање сматра једним истим темељи се на самим аксиомама поклапања, јер ове су истоветне с аксиомама идентичности. Ако за поклапање употребимо исти знак као за истоветност, назначене аксиоме истоветности можемо сматрати такође аксиомама поклапања.

3. ТАЧКА, ПРАВА И РАВАН У ПОВЕСТИ. ИЗРАЗ „ИЗМЕЂУ“.

1. Појмови тачке, праве и равни су још од давнина потстицали геометре на размишљање. Питагорас је, кажу, рекао да је тачка „јединство које има положај”. У „Елементима” Еуклеида нађосмо да је тачка

„оно чији је део ништа”. Као што рекосмо, није то у логичком смислу дефиниција, него само неко објашњење. Још нејасније су Еуклеидове дефиниције праве и равни: права је по њему она линија „која је подједнако постављена у односу на своје тачке“, а раван је површ „која је подједнако постављена у односу на своје праве”. Уз то треба имати на уму да „права” геометрима Старог века није, строго узевши, бескрајна (актуално бескрајна) него коначна (дуж), али таква да се увек може продужавати (потенцијално бескрајна). О томе нам јасно сведочи Еуклеидов други постулат (на стр.12).

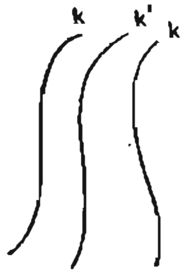
И после Еуклеида покушавали су разни геометри да дефинишу праву и раван. Сврха тих дефиниција је била та да се ти појмови објасне помоћу других, наоко простијих појмова. Тако је Херон Александријски (око године 100 пре н.е.) дефинисао праву као линију која не мења свој положај кад се врти око две своје непомично држане тачке. Та дефиниција претпоставља међу осталим појам извесног кретања. Архимедес (287—212 пре н.е.) дефинише праву као најкраћу линију што спаја две тачке, но тиме пртпоставља упоређивање линија по дужини. У Новом веку француски математичар A. M. Legendre (1752—1833) преузима ту дефиницију. Немачки математичар и филозоф G. W. Leibniz (1646—1716) дефинише праву као геометријско место тачака једнако удаљених од три тачке A, B, C, такве да је $AB < AC + BC$. Појмови који се тако претпостављају нису једноставнији од самог појма праве, која је бесумње један од најпростијих геометријских ликова. То је један од разлога зашто у новије време многи праву не дефинишу, већ узимају као полазан појам.

Што се тиче равни, Тхеон Смирнски (1. столеће н.е.) дефинише је као површ која садржи сваку праву што с њом има две заједничке тачке. По Leibnizu раван је геометријско место тачака једнако удаљених од две тачке. Француски математичар J. B. Fourier (1768—1830) дефинише раван као геометријско место свих правих које су у датој тачки дате праве управне на тој правој. Да би ова дефиниција вредела требало би претходно дефинисати управност двеју правих, дакле прав угао и углове уопште, не ослањајући се о појам равни. Немачки математичар Crelle (19. столеће) дефинише раван као геометријско место правих које секу једну праву AB, а пролазе кроз једну тачку C, која је ван праве AB. Но тако дефинисана раван не садржи ону своју праву кроз C, која је упоредна правој AB. Стога би се та дефиниција морала употпунити посматрањем непрекидности. Исправну дефиницију равни дао је у том смислу талијански геометар G. Peano (1858—1932) у својим „Начелима геометрије“ (1889), схватајући раван као укупност правих које спајају сваку од три тачке A, B, C, које не припадају једној истој правој, са тачкама наспрамних дужи BC, CA, AB (види сл. 5). Усвојићемо ту дефиницију.

2. Било да се сва три појма или израза (тачка, права и раван) или само неки од њих изаберу за основне изразе, потребни су свакако још неки основни изрази, но који нису именице, него друге врсте речи. Такав израз је реч „између“. Све до 19. столећа геометри нису обраћали довољно пажње на тај појам, нити су образлагали његову употребу, јер у том погледу не беху се ослободили очигледности. Није се довољно схватала потреба да се и тај појам дефинише или уброји у полазне појмове. Немачки математичар C. F. Gauss (1777—1855) примећује већ 1832 да и неке простије ставове о распореду тачака на правој и у равни треба усвојити као аксиоме и да појам „између“ треба строго формулисати. Но тек је немачки геометар M. Pasch (1863—1930) у својим „Предавањима о новијој геометрији“ (1882) поставио систем аксиома за тај однос. У Hilbertovim „Основама геометрије“ (1899) „између“ је полазан појам.

Кад кажемо да је тачка B на правој a између A и C, одређен је тиме известан распоред тачака A, B, C на правој. Тада можемо дефинисати дуж као укупност двеју тачака неке праве и свих тачака које су између ове две тачке. Ако пак узмемо „дуж“ за основан израз, као што је учинио Pasch, можемо израз „између“ дефинисати: B је између A и C ако припада дужи AC а не поклапа се с њеним крајевима. Али ако нећемо да сматрамо „дуж“ основним изразом, морамо поћи од израза „између“. Донекле тако поступио је амерички математичар O. Veblen* (рођ. 1880), полазећи од „праволинијски поређаних тројки тачака“.

Хилберт је при томе узео да су оба појма, „права“ и „између“, основни појмови, а то значи да је појам „између“ узео независно од појма праве. Заиста, реч „између“ може означавати разне односе и односити се такође на тачке које припадају некој отвореној кривој линији. Напр. за три разне тачке на параболи може се увек рећи да је једна између остале две. Реч „између“ не мора се уопште односити на три тачке, него напр. на три линије у равни, које немају заједничких тачака и за које би се у извесном смислу могло рећи да је једна, рецимо k' између друге две линије, k и k'' (сл. 2). Али, како у Елементарној геометрији не почињемо с макаквим ликовима, него с најпростијима, међу којима долази на првоме месту права, није потребно, нити са становишта дедуктивне методе оправдано поставити најопштији појам „између“ на чело елементарне геометрије. Треба дакле унапред претпоставити да се „између“ односи само на тачке и то на тачке једне праве.



Сл. 2

Према томе, кад кажемо да је тачка B између тачака A и C, то треба већ да значи да су A, B, C три тачке на једној правој. Ако „између“ схватимо тако и у том смислу сматрамо основним појмом, можемо на том основном појму темељити не само дефиницију дужи, већ и саме праве и рећи да је права укупност тачака, која се састоји из две тачке A, B, свих тачака између A и B и свих тачака C таквих да је A између B и C или B између A и C. Ако доцније буде потребно да се посматра и распоред тачака на отвореној кривој линији, појам „између“ биће други (шири) и увешће се засебном дефиницијом, којом ће се утврдити шта значи кад се каже да је тачка B између тачака A и C на некој отвореној кривој. На том становишту стојимо и у овом течају и према томе основни појмови с којима почињемо јесу засад само два појма: *тачка* и *између*.

4. АКСИОМЕ РАСПОРЕДА.

Аксиоме распореда и припадања дефинишу у суштини имплицитно тачку и однос „између“ и дају тиме основу за проучавање распореда тачака на правој, у равни и у простору и уопште узајамног положаја тачака, правих и равни. Разликујемо пет аксиома распореда.

---

* O. Veblen. A system of axioms for geometry (Transact. Amer. Math. Soc. 5, 1904).

АКСИОМА I 1. *Ако је тачка* В *између тачака* А *и* С, *тачке* А, В, С *су три разне тачке и тачка* В *је такође између тачака* С *и* А (сл. 3).

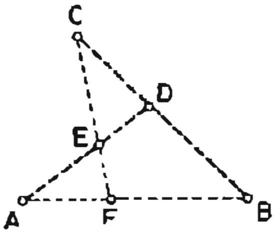
Сл. 3

АКСИОМА I 2. *Ако је тачка* В *између тачака* А *и* С, *тачка* С *није између тачака* А *и* В.

АКСИОМА I 3. *Ако су* А *и* В *две разне тачке, постоји тачка* С *тако да је тачка* В *између тачака* А *и* С.

АКСИОМА I 4. *Постоје најмање три разне тачке од којих ниједна није између остале две.*

АКСИОМА I 5. *Ако су* А, В, С *три разне тачке од којих ниједна није између остале две,* D *тачка између* В *и* С, Е *тачка између* А *и* D, *тада постоји тачка* F *између* А *и* В *тако да је* Е *између* С *и* F (сл. 4).



Сл. 4

Чињеницу да је тачка B између тачака A и C обележаваћемо знаком $A-B-C$. Служећи се тим знаком, првих пет аксиома пишу се овако:

I 1. Ако је $A-B-C$, тачке A, B, C, су три разне тачке и такође је $C-B-A$.

I 2. Ако је $A-B-C$, није $A-C-B$.

I 3. Ако су A и B две разне тачке, постоји тачка C тако да је $A-B-C$.

I 4. Постоје, најмање, три разне тачке A, B, C, тако да није ни $A-B-C$ ни $B-C-A$ ни $C-A-B$.

I 5. Ако су A, B, C три разне тачке и ако није ни $A-B-C$ ни $B-C-A$ ни $C-A-B$, али ако је $B-D-C$ и $A-E-D$, постоји F тако да је $A-F-B$ и $C-E-F$.

Напомена. Додајмо неколико речи које ће нам унапред оцртати смисао тих пет аксиома.

Аксиома I 1 исказује немогућност да се у односу $A-B-C$ неке од тих тачака поклапају, а затим утврђује „симетричност“ тог односа. Из аксиоме I 2 следује напр.: Ако су A, B, C тачке на једној правој, само једна од њих може бити између остале две. Из аксиоме I 3 следује напр. да се свака дуж може продужавати, тј. да је права неограничена отворена линија. Из аксиоме I 4 следује да тачке, праве и равни постоје. Из аксиоме I 5 следује напр. да права која припада равни троугла ABC и која сече једну страницу тог троугла, рецимо страну AB, сече још једну страницу, BC или CA или пролази кроз наспрамно теме C.

Ради лакшег изражавања служимо се често, уместо једним изразом, неким њему равноправним изразом. Тако, уместо да кажемо „B је између A и C“ говоримо такође „C је иза B, посматрано из A“ — Напр. аксиома I 1 гласи тим речима овако: Ако је C иза B, посматрано из A, то су три разне тачке и такође је A иза B, посматрано из C.

5. ДЕФИНИЦИЈА ДУЖИ, ПРАВЕ И РАВНИ. АКСИОМЕ ПРИПАДАЊА.

1. Да би се аксиоме припадања могле једноставно исказати и да би се цело градиво геометрије могло износити погодним и одговарајућим речима, потребно је дефинисати дуж, праву и раван.

Дефиниција 5.1. Укупност двеју тачака A и B и свих тачака између A и B зовемо *дуж*. Тачке A и B називамо *крајевима*, а остале тачке те дужи њеним *унутрашњим тачкама*.

За дуж којој су крајеви A и B рећи ћемо и да спаја тачке A и B.

Дефиниција 5.2. Укупност двеју тачака A и B, свих тачака између A и B и свих тачака које су иза B, посматрано из A, и иза A, посматрано из B, зовемо *права*. О тачкама A и B кажемо да *одређују* ту праву.

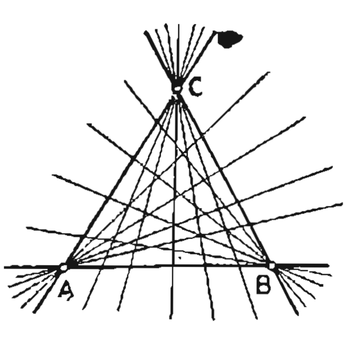
Ако је нека тачка P једна од тачака извесне праве, рећи ћемо (саобразно изражавању у теорији мноштава) и да тачка P припада тој правој, или да та права садржи тачку P, а такође и да је тачка P на правој, или да права пролази кроз ту тачку итд. Ако тачка не припада правој рећи ћемо и да је изван праве. Исто тако се изражавамо о дужи.

Дужи и праве обележаваћемо малим латинским словима a, b, c, ... Праву одређену тачкама A и B обележаваћемо и знаком AB; и дуж којој су крајеви A и B обележаваћемо знаком AB.

Дефиниција 5.3. Нека су A, B, C три тачке од којих ниједна није између остале две; укупност правих што пролазе

кроз тачку A и тачке дужи BC,
кроз тачку B и тачке дужи CA,
кроз тачку C и тачке дужи AB

зовемо *раван*. О тачкама A, B, C кажемо да *одређују* ту раван (сл. 5).



Сл. 5

Ако је нека тачка P једна од тачака извесне равни, рећи ћемо и да тачка P припада тој равни, или да та раван садржи тачку P, а такође да је тачка P у тој равни, или да раван пролази кроз ту тачку итд. Ако тачка не припада равни, кажемо и да је изван те равни.

Равни ћемо обележавати малим грчким словима α, β, γ, ... Раван одређену тачкама A, B, C обележаваћемо и знаком ABC.

2. Имамо три аксиоме припадања. Оне гласе:

АКСИОМА II 1. *Две разне праве имају највише једну заједничку тачку.*

АКСИОМА II 2. *Постоје, најмање, четири тачке које не припадају једној равни.*

АКСИОМА II 3. *Ако две разне равни имају једну заједничку тачку, имају још најмање једну заједничку тачку.*

Напомене. Из аксиоме II 1 следује напр. да кроз две тачке пролази само једна права; из аксиоме II 2 да простор има више од две димензије; из аксиоме II 3 да се две равни секу по једној правој, а и да простор нема више од три димензије.

Аксиоме припадања говоре непосредно о припадању тачака правим, равнима и простору. Али појам припадања није у овом излагању засебан полазан појам геометрије, него појам теорије мноштава, који сматрамо унапред познатим. Праву и раван дефинисали смо као мноштва тачака, на темељу односа „између". Према томе, аксиоме припадања, говорећи о правим, и равнима, говоре у суштини о распореду тачака, дакле употпуњују имплицитно дефинисање израза „тачка" и „између". Избегавајући речи „права" и „раван", ове би се аксиоме могле изрећи и тако да се потпуно изједначе с аксиомама распореда. Тако би се на место аксиоме II 1 могла поставити следећа аксиома распореда:

Нека су A, B, C, D четири разне тачке. Ако је једна од тачака A, B, C између остале две и једна од тачака A, B, D између остале две, тада је такође једна од тачака A, C, D између остале две.

Аксиоме распореда и аксиоме припадања (или везе) називане су заједно пројективним аксиомама. Можемо рећи и да говоре све о узајамном положају тачака, правих и равни и назвати их такође аксиомама положаја.

Приметићемо да је аксиома упоредности (V) најближа по својој природи аксиомама I и II. И та аксиома би се могла, на основи дефиниција праве и равни, изрећи као аксиома распореда. Према томе било би оправдано донети аксиому упоредности прву после аксиома I и II. Али, да би се изложио прво онај део еуклидовске геометрије, који не зависи од ове аксиоме (због значаја таквог посматрања по нееуклидовску —хиперболну— геометрију и по развој геометрије уопште) износимо аксиому упоредности напослетку.

3. Савремено критичко схватање геометрије спроведено је први пут у делу F. Pascha: „Предавања о новијој геометрији“, 1882. Он се први држао строго начела да се „све што спада у логичко заснивање ставова мора без изузетка садржавати у основним ставовима (аксиомама)“. Паш почиње са системом аксиома положаја, које он назива пројективним или графичким аксиомама. То су, наиме, аксиоме које изричу оне геометријске особине, које долазе до израза самим „стављањем“ тачака, повлачењем правих и постављањем равни, без икаквог преношења дужи, дакле без подударности и мерења. Напр. чињеница да кроз две тачке пролази увек само једна права, да од три тачке на једној правој може само једна бити између остале две, да се две праве могу сећи само у једној тачки — исказују пројективне (графичке) особине. У овима се још не јавља једнакост или неједнакост дужи, углова итд., нити њихово мерење (тзв. метричке —мерне— особине), него само оно што се и без мерења и подударности може утврдити. (Грана геометрије која проучава пројективне особине без метричких је пројективна геометрија.)

После Пашова дела јављала су се и друга у којима је спроведено савремено становиште. Нарочит значај имају међу њима следећа: *G. Peano*, Принципи геометрије логички изложени (I principii di geometria logicamente esposti, 1889); *G. Veronese*, Основе геометрије (Fondamenti di geometria, 1891); *D. Hilbert*, Основе геометрије (Grundlagen der Geometrie, 1899). — Вебленов систем аксиома положаја (распореда) је различит од нашег и садржи девет аксиома.

6. ПРАВА.

У овом параграфу изводимо прве теореме које се односе на праву и на геометрију на правој. При томе је потребно посматрати и тачке које не припадају једној правој.

1. Доказујемо прво следећу теорему о постојању извесних тачака, правих и равни.

Теорема 6.1. *Тачке, дужи, праве и равни постоје.*

Доказ. По аксиоми I 4 постоје бар три тачке. Нека су A и B ма које две. Нека је a укупност тачака A и B и свих тачака између A и B. По дефиницији 5.1 a је дуж AB, ова дакле постоји. — Нека је p укупност тачака A и B и свих осталих тачака које наводи дефиниција 5.2. По тој дефиницији *p* је права одређена тачкама *A* и *B*, дакле права *p* постоји. — По аксиоми I 4 постоје бар три тачке *A*, *B*, *C*, тако да ниједна није између остале две. Нека је α укупност тачака *A*, *B*, *C*, и свих осталих које наводи дефиниција 5.3. По тој дефиницији α је раван одређена тачкама *A*, *B*, *C*, дакле раван α постоји. Тиме је ова теорема доказана.

Докажимо сада три теореме о правој, чији је значај очигледан.

Теорема 6.2. *Какве год биле две тачке* A *и* B, *постоји права којој те две тачке припадају.* *

Доказ. Нека су *A* и *B* две ма које (разне) тачке. Постоји укупност тачака које наводи дефиниција 5.2, тј. постоји права *AB* коју те две тачке одређују и којој, према томе, оне припадају.

Теорема 6.3. *Какве год биле две тачке* A *и* B, *не постоји више од једне праве којој те две тачке припадају.*

Доказ. Кад би постојале две праве тако да обема припадају тачке *A* и *B*, те две праве би имале две заједничке тачке, а ово се противи аксиоми II, 1.

Теорема 6.4. *Ма које две тачке једне праве одређују ту праву.*

Доказ. Нека су *M* и *N* ма које две разне тачке неке праве *p*. Кад би права *p* и права *MN*, одређена тачкама *M* и *N*, биле две разне праве, обема би припадале тачке *M* и *N*, а то се противи теореми 6.3. Дакле права *p* је истоветна с правом која је одређена тачкама *M* и *N*.

Теорема 6.5. *Свака права садржи најмање две тачке.*

Доказ. Према дефиницији 5.2 права је укупност двеју тачака, рецимо *A* и *B*, затим свих тачака између *A* и *B*, свих тачака иза *B*, посматрано из *A*, и свих тачака иза *A*, посматрано из *B*. Тачке *A* и *B* припадају тој правој, тј. свака права садржи најмање две тачке.

Напомена. Још нисмо доказали да дуж и права садрже бесконачно много тачака, а тек из аксиома непрекидности следоваће непрекидност праве и дужи. Засад знамо само то да свака дуж и свака права садржи најмање две тачке. Дуж *AB* садржи наиме своје крајеве *A* и *B*, а права *AB* садржи тачке *A* и *B* које одређују ту праву. Тек пошто докажемо да између сваке две тачке постоји трећа, можемо доказати да дуж садржи бескрајно много тачака (теорема). Што се тиче праве, већ помоћу аксиоме I 3 следује да права садржи бескрајно много тачака.

Докажимо две теореме у којима се не ограничавамо на једну праву, но које су нам потребне ради доказивања даљих теорема о правој. Те теореме имају и саме по себи основан значај.

Теорема 6.6. *Изван сваке праве постоји најмање једна тачка.*

Доказ. По дефиницији 5.2 и аксиоми I 4 постоје бар три тачке *A*, *B*, *C* које не припадају једној правој. Нека је *a* која било права. Све три тачке *A*, *B*, *C* не могу бити на *a*, јер те тачке не припадају једној правој. Дакле најмање једна од те три тачке је изван праве *a*. Тиме је теорема доказана.

Теорема 6.7. *Ако је тачка* C *ван праве* AB, *тачке* A, B, C *су три разне тачке од којих ниједна није између остале две, и обратно: ако су* A, B, C *три разне тачке од којих ниједна није између остале две, тачка* C *је ван праве* AB.

Доказ. Ако је тачка C ван праве AB одређене тачкама A и B, из дефиниције 5.2 следује непосредно да C није истоветна ни с A ни с B, нити је $A-B-C$, нити $A-C-B$, нити $C-A-B$. Обратно: ако су A, B, C три разне тачке од којих ниједна није између остале две, тачка C није истоветна ни с A ни с B, нити је $A-B-C$, нити $A-C-B$, нити $C-A-B$, дакле по дефиницији 5.2 C не припада правој AB.

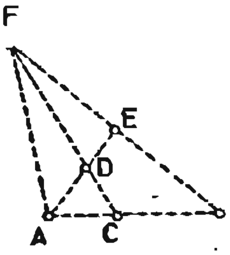
2. Следеће две теореме, затим теореме 6.11, 6.14, 6.15 и 6.16 утврђују извесне основне чињенице о распореду тачака на правој, које нису исказане аксиомама распореда. За распоред трију тачака на правој особито су значајне ове две теореме:

Теорема 6.8. *Од ма које три тачке на једној правој, једна и само једна је између остале две.*

Доказ. Нека су A, B, C три тачке на правој a, Према теореми 6.3 a је једна права којој припадају тачке A и B, дакле истоветна је с правом AB, одређеном тачкама A и B, тј. по дефиницији 5.2 имамо $A-B-C$ или $A-C-B$ или $C-A-B$. Ако је $A-B-C$, по аксиоми I 2 није $A-C-B$, али по аксиоми I 1 је $C-B-A$, дакле, по аксиоми I 2 није ни $C-A-B$. То значи: ако је тачка B између A и C, није ни C између A и B, ни A између C и B. Једино је тачка B између остале две. Исто то вреди и у остала два случаја, кад би било $A-C-B$ или $C-A-B$, јер та два случаја произлазе из првога само заменом слова A, B, C. Дакле увек је само једна тачка између остале две.

Теорема 6.9. *Ако су* A *и* B *две разне тачке, постоји најмање једна тачка* C *између* A *и* B.

Доказ. Према теореми 6.6 постоји ван праве AB тачка D (сл. 6), а према аксиоми I 3 тачка E тако да је $A-D-E$. Праве AB и AD су две разне праве са заједничком тачком A. По аксиоми II 1 A је једина заједничка тачка тих двеју правих, дакле B и E су две разне тачке.



Сл. 6

По аксиоми I 3 постоји тачка F тако да је $B-E-F$. Праве AB и BE су две разне праве са заједничком тачком B. По аксиоми II 1 B је једина заједничка тачка тих правих, дакле A и F су две разне тачке.

Тачка F је, дакле, изван праве AB. По теореми 6.7 ниједна од тачака A, B, F није између остале две. Како је $B-E-F$ и $A-D-E$, по аксиоми I 5 постоји тачке C тако да је $A-C-B$ и $C-D-E$. Дакле постоји тачка C између A и B.

Значајна је и следећа теорема. Њен други део указује на чињеницу да је права отворена линија.

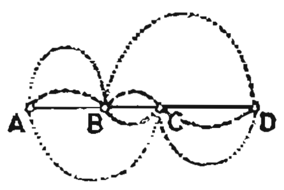
Теорема 6.10. *Тачка праве* AB, *која не припада дужи* AB, *налази се или иза* B *у односу на* A, *или иза* A *у односу на* B. *Ако је иза* B *у односу на* A, *није иза* A *у односу на* B, *и обратно.*

Доказ. Нека је C која било трећа тачка праве AB. По теореми 6.8 је $A-C-B$, или $A-B-C$ или $C-A-B$, па како по дефиницији 5.1 није $A-C-B$, постоји један од два друга односа, тј, C је или иза B у односу на A, или иза A у односу на B. Према теореми 6.8 постоји само један од та два односа.

3. У теореми 6.11, а затим у теоремама 6.14, 6.15 и 6.16 посматрају се увек по четири тачке и на темељу два односа изражена помоћу речи „између“ закључује се да постоје још два таква односа.

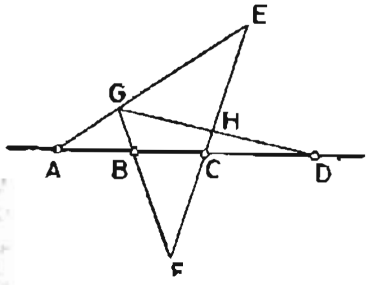
Теорема 6.11. *Ако је тачка* B *између тачака* A *и* C, *а тачка* C, *између тачака* B *и* D, *тачке* B *и* C *су између тачака* A *и* D.

Доказ. Како је $A-B-C$ и $B-C-D$ (сл. 7), тачке A и D припадају по дефиницији 5.2 правој одређеној тачкама B и C, дакле све четири тачке A, B, C, D припадају једној правој a. По аксиоми I 1 и теореми 6.10 то су четири разне тачке.



Сл. 7

По аксиоми I 4 постоји тачка E ван праве a (сл. 8), а по аксиоми I 3 постоји тачка F тако да је $E-C-F$. Тачка C је по аксиоми II 1 једина заједничка тачка правих a и EF, дакле, тачка A је ван праве CF. Дакле A, E, F су по теореми 6.7 три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Према томе, како је $E-C-F$ и $A-B-C$, постоји по аксиоми I 5 тачка G тако да је $A-G-E$ и $F-B-G$.



Сл. 8

Тачке D, F, G су исто тако три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Према томе, како је $B-C-D$ и $F-B-G$ постоји по аксиоми I 5 тачка H тако да је $F-C-H$ и $D-H-G$.

Тачке A, D, E су, исто тако, три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Како је $A-G-E$ и $D-H-G$, постоји по аксиоми I 5 на правој a тачка T тако да је $A-T-D$ и $E-H-T$. Тачка T је заједничка тачка правих a и EH, па како је EH истоветна с правом EF, а C је једина заједничка тачка правих a и EF, тачка T је истоветна са C и према томе је $A-C-D$.

Исто тако доказујемо, замењујући у доказу узајамно B и C да је и $A-B-D$. Тиме је теорема доказана.

4. Прелазимо сада на два става која образују заједно с аксиомом I 5 три сродна става. Посматрајући, као у I 5, три тачке A, B, C од којих ниједна није између остале две (сл. 4), можемо закључити:

1) из $B-D-C$ и $A-E-D$ да постоји тачка F тако да је $A-F-B$ и $C-E-F$,

2) из $B-D-C$ и $A-F-B$ да постоји тачка E тако да је $A-E-D$ и $C-E-F$.

Први став је изабран за аксиому I 5, а други је став 6.13. Да би се пак овај доказао потребан је сродан став 6.12, у коме из $A-F-B$ и $A-E-D$ додуше не можемо закључити да постоји, аналого, тачка као што је C, али се може доказати да не постоји извесна тачка, да се, наиме, праве EF и BD не секу између B и D. Тај став би се могао изрећи овим речима: Ако нека права сече две странице једног троугла, она не сече трећу његову страницу. Нисмо га тако изразили, јер још нисмо дефинисали троугао.

Ради једноставнијег изражавања доносимо прво следећу дефиницију:

Дефиниција 6.1. Ако две праве имају заједничку тачку кажемо да се *секу* у тој тачки. И ако дуж и права, или две дужи имају заједничку тачку, која се разликује од крајева тѐ дужи, кажемо да се оне *секу* у тој тачки. Ту тачку називамо *пресеченом тачком*.

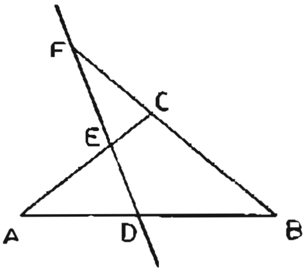
SLEDI IZ PAŠOVOG AKSIOMA

Теорема 6.12. *Ако су* A, B, C, *три разне тачке од којих ниједна није између остале две и ако права* p *сече праву* AB *између* A *и* B *и праву* AC *између* A *и* C, *тада права* p *не сече праву* BC *између* B *и* C.

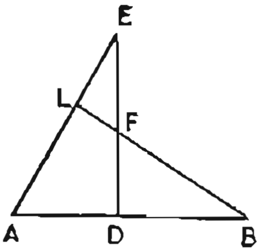
Доказ. Нека су D и E тачке у којима p сече праве AB и AC (сл. 9). Права p не сече уопште праву BC или је сече у једној тачки F (по аксиоми II 1). Треба доказати да није $B-F-C$.

Тачке D, E, F су три разне тачке на правој p, дакле по теореми 6.8 је или $D-F-E$ или $D-E-F$ или ~~B~~ E $-D-F$.

Узмимо да је $D-F-E$. Из $A-D-B$ и $D-F-E$ (сл. 10) следује по аксиоми I 5 да постоји тачка L тако да је $B-F-L$ и $A-L-E$. Како је L тачка у којој се секу праве BF и AE, истоветна је са тачком C, тј. имамо $A-C-E$. Али по претпоставци наше теореме је $A-E-C$, дакле по аксиоми I 2 не може бити $D-F-E$.



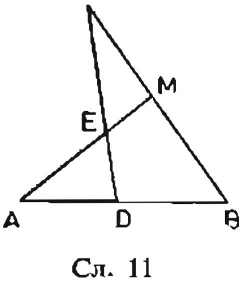
Сл. 9



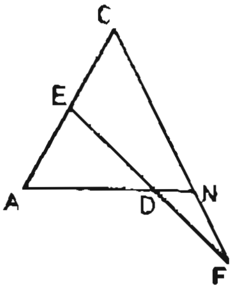
Сл. 10

Узмимо да је $D-E-F$. Из $A-D-B$ и $D-E-F$ (сл. 11) следује по аксиоми I 5 да постоји тачка M тако да је $A-E-M$ и $B-M-F$. Како је M тачка у којој се секу праве AE и BF, истоветна је са C, тј. имамо $B-C-E$, дакле није $B-F-C$.

Узмимо да је $E-D-F$. Из $A-E-C$ и $E-D-F$ (сл. 12) следује по аксиоми I 5 да постоји тачка N тако да је $A-D-N$ и $C-N-F$. Како је N тачка у којој се секу праве AD и CF, истоветна је са тачком B, тј. имамо $C-B-F$, дакле није $B-F-C$.



Сл. 11



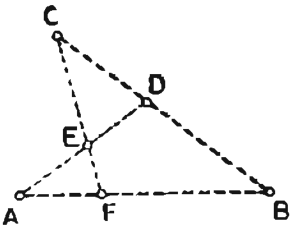
Сл. 12

Тиме смо доказали да ни у једном од два једино могућа случаја није $B-C-F$.

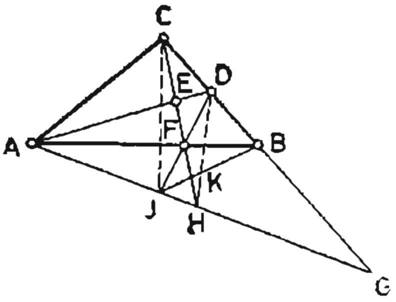
Теорема 6.13. *Ако су* A, B, C *три разне тачке од којих ниједна није између остале две,* D *тачка између* B *и* C, F *тачка између* A *и* B, *постоји тачка* E *између* A *и* D *и између* C *и* F.

Доказ. По претпоставци је $A-F-B$ и $B-D-C$ (сл. 13), треба доказати да је такође $A-E-D$ и $C-E-F$. По аксиоми I 3 постоји тачка G тако да је $D-B-G$. Из $B-D-C$, тј. $C-D-B$, и $D-B-G$ следује по теореми 6.11 да је $C-D-G$ и $C-B-G$ (сл. 14).

Како је по теореми 6.7 тачка A ван праве BC, а права EC је истоветна са CG, тачка A је ван праве CG, дакле по теореми 6.7 A, C, G су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Како је $A-F-B$ и $C-B-G$, по аксиоми I 5 постоји тачка H тако да је $C-F-H$ и $A-H-G$.



Сл. 13



Сл. 14

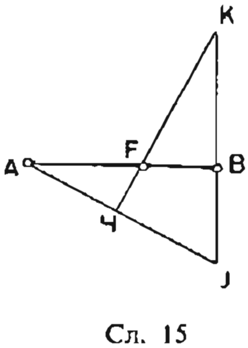
Тачке A, D, G су, исто тако, три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Како је $D-B-G$ и $A-F-B$, по аксиоми I 5 постоји тачка J тако да је $D-F-J$ и $A-J-G$. Како је $C-F-H$ и $D-F-J$, праве CH и DJ секу се у тачки F, која им је према II 2 једина заједничка тачка.

Тачка J је изван праве CG, дакле тачке B, C, J су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Како је $B-D-C$ и $D-F-J$, по аксиоми I 5 постоји тачка K тако да је $C-F-K$ и $B-K-J$.

Како је $A-H-G$ и $A-J-G$ и како су H и J две разне тачке, A, H, J су три разне тачке на једној правој, дакле је према теореми 6.8 једна од три тачке A, H, J између остале две, тј. имамо $A-J-H$ или $A-H-J$ или $J-A-H$.

Кад би било $J-A-H$, имали бисмо услед $A-H-G$ према теореми 6.11 да је $J-A-G$. Но то се по теореми 6.8 противи чињеници да је $A-J-G$. Дакле не може бити $J-A-H$.

Претпоставимо да је $A-H-J$ (сл. 15). Како је J ван праве AB, тачке A, B, J су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Права FA сече праву AB између A и B у тачки F и праву AJ између A и J, па како сече и праву BJ у тачки K, по теореми 6.12 права FH не сече праву BJ између B и J, тј. не може бити $B-K-J$. Но ми смо доказали да је $B-K-J$. Дакле претпоставка да је $A-H-J$ погрешна је, тј. имамо $A-J-H$.



Сл. 15

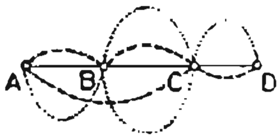
AG и CG су две разне праве, дакле тачке A, D, H су три разне тачке од којих ни једна није између остале две. Како је $A-J-H$ и $D-F-J$, по аксиоми I 5 постоји тачка E тако да је $H-F-E$ и $A-E-D$.

Најзад A, B, C су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Како је $B-D-C$ и $A-E-D$, по аксиоми I 5 постоји тачка T тако да је $C-E-T$ и $A-T-B$. У T се секу праве AB и CE. Но имамо $C-F-H$

и $E-F-H$, дакле из дефиниције 5.2 C и E су две (разне) тачке на правој FH, C, E, F, H су тачке на једној правој, и по теореми 6.4 права CE је истоветна с правом CF. Дакле у тачки T се секу праве AB и CF, тј. тачка T је истоветна са F. Дакле доказали смо да је $C-E-F$ и $A-F-B$.

6. Сад можемо наставити са теоремама о распореду тачака на правој.

Теорема 6.14. *Ако је тачка* B *између тачака* A *и* C *и тачка* C *између тачака* A *и* D, *тачка* C *је између* B *и* D, *и тачка* B *је између* A *и* D.

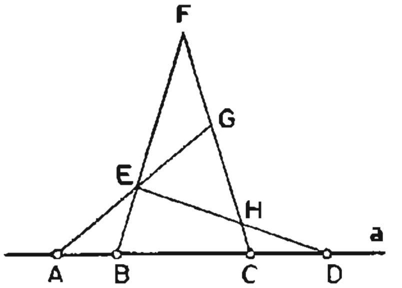


Сл. 16

Доказ. Како је $A-B-C$ и $A-C-D$ (сл. 16) тачке B и D припадају правој одређеној тачкама A и C, дакле све четири тачке A, B, C, D припадају једној правој a.

По аксиоми I 4 постоји тачка E (сл. 17) ван праве a, а по аксиоми I 3 постоји тачка F тако да је $B-E-F$. Тачка B је по аксиоми II 1 једина заједничка тачка правих a и BF, дакле A, C, F су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Према томе, како је $A-B-C$ и $B-E-F$, постоји по аксиоми I 5 тачка G тако да је $C-G-F$ и $A-E-G$.

Тачка A је једина заједничка тачка правих a и AE, дакле тачке A, D, G су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Према томе, како је $A-C-D$ и $A-E-G$, постоји по теореми 6.13 тачка H тако да је $C-H-G$ и $D-H-E$.



Сл. 17

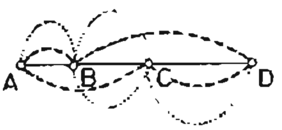
И тачке B, D, F су три разне тачке од којих ниједна није између остале две. Према томе, како је $B-E-F$ и $E-H-D$, постоји по аксиоми I 5 тачка T тако да је $B-T-D$ и $T-H-F$. Но C је по аксиоми II 1 једина заједничка тачка правих a и FH, дакле тачка T је истоветна са C и према томе је $B-C-D$.

Из $A-B-C$ и $B-C-D$ следује по теореми 6.11 да је и $A-B-D$.

T.7

Теорема 6.15. *Ако су* B *и* C *две разне тачке, обе између тачака* A *и* D, *тачка* B *је између* A *и* C, *а* C *између* B *и* D, *или је тачка* C *између* A *и* B, *а* B *између* C *и* D.

Доказ. По аксиоми I 1 тачке B и C се не поклапају ни с A ни с D, дакле A, B, C, D су четири разне тачке (сл. 18). По дефиницији 5.2 тачке B и C припадају правој AD, дакле A, B, C су три разне тачке једне праве. Према теореми 6.8 или је $A-B-C$ или $A-C-B$, или $C-A-B$.



Сл. 18

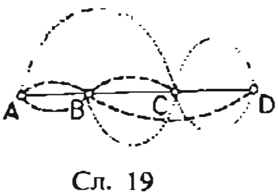
Кад би било $C-A-B$, по теореми 6.11 би из $C-A-B$ и $A-B-D$ следовало да је $C-A-D$, а то је по теореми 6.8 немогуће, јер је $A-C-D$. Дакле, или је $A-B-C$, а тада је због $A-C-D$, по теореми 6.14 и $B-C-D$, или је $A-C-B$, а тада је због $A-B-D$, по теореми 6.14 и $C-B-D$. Тиме је теорема доказана.

Теорема 6.16. *Ако су* C *и* D *две разне тачке и ако је тачка* B *између тачака* A *и* C *и између тачака* A *и* D, *тачка* C *је између* A *и* D *и између* B *и* D, *или је тачка* D *између* A *и* C *и између* B *и* C.

Доказ. По дефиницији 5.2 C и D припадају правој AB. По теореми 6.8 је $A-C-D$ или $A-D-C$ или $C-A-D$ (сл. 19). Кад би било

$C-A-D$, из $A-B-D$ би по теореми 6.14 следовало $B-A-C$, а то се по аксиоми I 2 коси с односом $A-B-C$. Дакле није $C-A-D$ и према томе је или $A-C-D$ или $A-D-C$, а отуд је по теореми 6.14 и $B-C-D$, односно $B-D-C$.

6. Помоћу теорема 6.11, 14, 15 можемо доказати следећу, која има такође основан значај за распоред тачака на правој:



Сл. 19

Теорема 6.17. *Четири ма које тачке на једној правој могу се увек означити словима* A, B, C, D *тако да буде тачка* B *између* A *и* C *и између* A *и* D *и да буде тачка* C *између тачака* A *и* D *и између* B *и* D.

Доказ. Уочимо ма које три од четири посматране тачке. Према теореми 6.8 једна од три тачке је између остале две: обележимо ту тачку словом Q, остале две словима P и R, а четврту словом S. Постоје ове могућности:

1. $P-Q-R$ и $P-R-S$. Ако тада уместо P, Q, R, S пишемо редом A, B, C, D, имамо $A-B-C$ и $A-C-D$, дакле по теореми 6.14 такође $B-C-D$ и $A-B-D$ — како захтева теорема коју доказујемо.

2. $P-Q-R$ и $S-P-R$. Ако уместо R, Q, P, S пишемо редом A, B, C, D, имамо $C-B-A$ и $D-C-A$, дакле по аксиоми I 1 $A-B-C$ и $A-C-D$, те опет имамо по теореми 6.14 и остала два односа, као што захтева постављена теорема.

3. $P-Q-R$ и $P-S-R$. Према теореми 6.15 тада је или $P-Q-S$ и $Q-S-R$ или $P-S-Q$ и $S-Q-R$.

У првом случају пишемо уместо P, Q, S, R, редом A, B, C, D. Тада је $A-B-C$ и $B-C-D$, дакле по теореми 6.11 такође $A-B-D$ и $A-C-D$.

У другом случају пишемо уместо P, S, Q, R редом A, B, C, D. Тада је опет $A-B-C$ и $B-C-D$, дакле по теореми 6.11 такође $A-B-D$ и $A-C-D$.

Дакле, у сваком случају је $A-B-C$, $A-B-D$, $A-C-D$ и $B-C-D$, а тиме је теорема доказана.

Следећа теорема је уопштење претходне:

Теорема 6.18. *Ма који број* n, *већи од три, разних тачака једне праве може се увек обележити знацима* A_1 $A_2, \dots, A_n$ *тако да тачка* A_2 *буде између* A_1 *с једне стране и* $A_3, A_4, \dots, A_n$ *с друге стране, да* A_3 *буде између* A_1, A_2 *с једне стране и* $A_4, A_5, \dots, A_n$ *с друге стране итд. и најзад да* A_{n-1} *буде између* $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}$ *с једне стране и* A_n *с друге стране.*

Доказ ове теореме нећемо цео извести, него само показати како тече:

Претпоставимо да је за известан број n тачака ова теорема тачна и докажимо је за $n+1$ тачку. Нека су $P_1, P_2, \dots, P_n$ тих n тачака, обележених саобразно теореми и нека је S $(n+1)$—ва тачка. Постоје пре свега три могућности: $S-P_1-P_2$, P_1-S-P_2, P_1-P_2-S. У првом случају пишемо $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ редом уместо $S, P_1, P_2, \dots, P_n$, у другом случају пишемо исто, редом, уместо $P_1, S, P_2, \dots, P_n$.

У трећем случају, како је $P_1-P_2-P_3$, по теореми 6.16 је P_2-S-P_3 и P_1-S-P_3 или P_2-P_3-S и P_1-P_3-S. У првом од ова два случаја пишемо $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ редом уместо $P_1, P_2, S, P_3, \dots, P_n$, а у другом случају, како је $P_2-P_3-P_4$, по теореми 6.16 је P_3-S-P_4 и P_2-S-P_4 или P_3-P_4-S и P_2-P_4-S. У првом од ова два случаја пишемо редом $A_1, A_2 \dots, A_{n+1}$ уместо $P_1, P_2, P_3, S, P_4, \dots, P_n$. Итд.

Обележавање знацима A_1, $A_2 \ldots$, A_{n+1} задовољава сваки пут све услове наше теореме. Дакле теорема је тачна и за $n+1$ тачку. Али по теореми 6.17 тачна је за $n=4$; дакле тачна је за свако n.

Лако се доказује следећа теорема, коју доносимо без доказа.

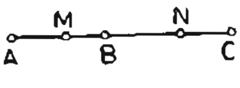
Теорема 6.19. *Ако су тачке* A_1, A_2, ..., A_n *једне праве обележене саобразно претходном ставу, па ако их обележимо редом знацима* B_n, B_{n-1}, ..., B_1, *те тачке су опет обележене саобразно претходном ставу. Постоје свега два начина да се коначно мноштво тачака обележи саобразно претходном ставу.*

У посматрању мноштава тачака на једној правој потребно је често разликовати да ли између две тачке једног мноштва постоји трећа тачка истог мноштва или не. Стога уводимо следећу дефиницију:

Дефиниција 6.2. Ако између две тачке извесног мноштва тачака на једној правој не постоји трећа тачка истог мноштва, рећи ћемо да су то две *суседне* тачке тога мноштва тачака.

7. Следеће четири теореме односе се на дужи.

Теорема 6.20. *Ако је тачке* B *између тачака* A *и* C, *дуж* AC *се састоји из двеју дужи* AB *и* BC *и* B *је једина заједничка тачка тих двеју дужи.*



Сл. 20

Доказ. Нека је M која било тачка дужи AB (сл. 20). Ако се тачка M поклапа с A или B по дефиницији 5.1 припада и дужи AC. Ако је различита од A и B, имамо $A-B-C$ и $A-M-B$, дакле по теореми 6.14 је $A-M-C$, тј. и тада је M тачка дужи AC. Исто тако, ако је N која било тачка дужи BC, такође је и тачка дужи AC.

Обратно: нека је M која било тачка дужи AC. Ако се тачка M поклапа с A, B или C, по дефиницији 5.1 припада дужи AB или BC. Ако је различита од A, B, C, имамо $A-B-C$ и $A-M-C$, дакле по теореми 6.15 је $A-B-M$ и $B-M-C$ или је $A-M-B$ и $M-B-C$. У првом случају по дефиницији 5.1 тачка M припада дужи BC, у другом случају припада дужи AB. Тиме је теорема 6.20 у целости доказана.

Теорема 6.21. *Ако су* C *и* D *две разне тачке на дужи* AB, *дуж* CD *је садржана на дужи* AB.

Доказ. Према дефиницији 5.1 је $A-C-B$ и $A-D-B$, дакле по теореми 6.15 је $A-C-D$ или $A-D-C$. Рецимо да је $A-C-D$. Нека је M која било тачка дужи CD. Ако се M поклапа са C или D, припада по претпоставци дужи AB. Ако се M разликује од C и D, по дефиницији 5.1 је $C-M-D$. Како је такође $A-C-D$, по теореми 6.14 је $A-M-B$, тј. тачка M припада дужи AB. Дакле цела дуж CD садржана је на дужи AB.

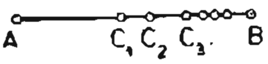
Ако је $A-D-C$, доказ проистиче из претходнога разменом слова C и D.

Теорема 6.22. *Две дужи* AB *и* BC *са једином заједничком тачком* B *и које припадају једној правој, сачињавају дуж* AC.

Доказ. По теореми 6.8 једна од три тачке A, B, C је између остале две (сл. 20). Кад би било $A-C-B$, према теореми 6.9 постојала би тачка N између B и C, а по теореми 6.14 било би и $A-N-B$, дакле и N би била тачка заједничка дужима AB и BC, што је противно претпоставци. Дакле није $A-C-B$. Исто тако се показује да није $C-A-B$. Према томе је $A-B-C$. По теореми 6.20 дуж AC састоји се из двеју дужи AB и AC.

Теорема 6.23. *Свака дуж садржи бесконачно много тачака.*

Доказ. Нека је AB ма која дуж. По теореми 6.9 постоји тачка C_1 између A и B, затим нека тачка C_2 између B и C_1, затим C_3 између B и C_2 итд. Тако добијамо бескрајни низ тачака C_1, $C_2, \ldots$ (сл. 21). Докажимо да су све међу собом различите и да су све између A и B.



Сл. 21

Тачка C_1 је између A и B.

Тачка C_2 је између B и C_1, дакле по аксиоми I 1 различита је од C_1, а по теореми 6.14 је између A и B.

Тачка C_3 је између B и C_2, дакле различита је од C_2, а по теореми 6.14 је између B и C_1, дакле различита је и од C_1. Како је C_3 између B и C_1 по теореми 6.14 је и између A и B.

Настављајући овако, безгранично, доказујемо за све тачке поменутог низа да су између A и B, тј. по дефиницији 5.1 на дужи AB и да су све међу собом различите. Дакле дуж AB има бескрајно много тачака.

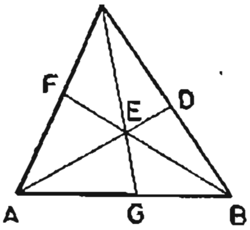
7. РАВАН

У овом параграфу доказујемо теореме које се односе на раван и на геометрију у равни.

1. У дефиницији 5.3 раван ABC је дефинисана помоћу правих које, изражавајући се очигледно, покривају целу раван. То покривање је у троуглу ABC штавише троструко. Стога је потребно доказати да су оне тачке које су између A и унутарњих тачака дужи BC истоветне с тачкама између B и унутарњих тачака дужи AC и с тачкама између C и унутарњих тачака дужи AB.

Теорема 7. 1. *Свака тачка равни одређене тачкама* A, B, C, *која је између тачке* A *и једне унутарње тачке дужи* BC, *такође је између тачке* B *и једне унутарње тачке дужи* AC *и, такође, између тачке* C *и једне унутарње тачке дужи* AB.

Доказ. Нека је E тачка која је између A и неке унутарње тачке D дужи BC (сл. 22). Како је $B-D-C$ и $A-E-D$, по аксиоми I 5 постоји тачка F тако да је $A-F-C$ и $B-E-F$, тј. тачка E је такође између B и неке тачке F дужи CA. Исто тако се доказује да је E између C и неке тачке дужи AB.



Сл. 22

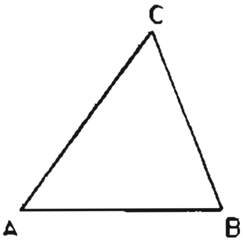
2. Ради даљих посматрања потребно је дефинисати троугао.

Дефиниција 7. 1. Укупност трију дужи што спајају три тачке које не припадају истој правој називамо *троуглом.* Те три дужи називамо *страницама,* а те три тачке *теменима* троугла (сл. 23). За теме троугла и његову страницу која не садржи то теме кажемо да су једно *насрам* другога.

Троугао коме су темена A, B, C обележавамо знаком ABC или $\triangle ABC$ (за разлику од равни ABC). Троугли ABC, ACB, BCA итд. су према дефиницији 7.1 један исти троугао.

За раван ABC кажемо такође да је раван троугла ABC.

Дефиниција 7.2. За тачке равни ABC, које су између тачке A и неке унутарње тачке дужи BC или између тачке B и неке унутарње тачке дужи AC или између тачке C и неке унутарње тачке дужи AB кажемо да су *у троуглу* ABC. За тачке равни ABC, које не припадају троуглу ABC нити су у њему кажемо да су *изван* троугла ABC.



Сл. 23

Додајемо дефиницију троугаоне површи.

Дефиниција 7. 3. Укупност тачака једног троугла ABC и свих тачака које су у том троуглу називаћемо *троугаоном равном површи* или краће, *троугаоном површи*. Троугао ABC називаћемо *рубом*, а тачке у том троуглу *унутарњим тачкама* те троугаоне површи. Унутарње тачке сачињавају *унутрашњост* троугаоне површи.

Троугаону површ чија темена су A, B, C обележаваћемо знаком (ABC) или $\triangle(ABC)$.

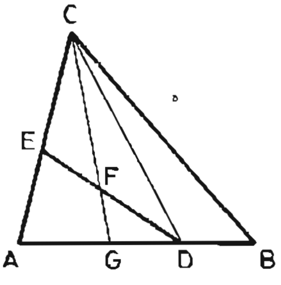
3. Доносимо пре свега следећу теорему, која следује непосредно из дефиниција, а затим ћемо показати три теореме о припадању правих равнини једног троугла.

Теорема 7.2. *Троугао* ABC *и троугаона површ* (ABC) *припадају равни* ABC.

Праве AD, BF, CG, споменуте у дефиницији 7.1, припадају равни ABC по самој тој дефиницији. Но и свака права која сече две од трију правих AB, BC, CA, припада равни ABC. То би се морало доказати. Доказаћемо у ствари општију теорему: да је свака права која има две тачке заједничке с једном равни, садржана у тој равни. Али, ради даљих доказа потребне су нам четири следеће теореме о троуглу. Доносимо их у ствари као помоћне ставове.

Теорема 7.3. *Дуж која спаја ма које две тачке на двема страницама неког троугла припада равни тог троугла.*

Доказ. Нека је D тачка странице AB и E тачка странице AC троугла ABC, затим F која било тачка дужи DE (сл. 24). Ако се обе тачке D и E поклапају с теменима троугла ABC, дуж DE се поклапа с једном његовом страницом и теорема је непосредно по дефиницији 5.3 тачна. Ако није тако, тачке A, C, D нису никад на једној правој, дакле по аксиоми I 5 тачка F припада и дужи CG која спаја теме C са једном тачком G странице AD троугла ACD. Према теореми 6.20 тачка G припада дужи AB, тј. F је на правој CG која спаја C с тачком дужи AB. Дакле по дефиницији 5. 3 F припада равни ABC. Тиме је ова теорема доказана.



Сл. 24

Теорема 7.4 *Ако је* D *тачка праве* BC, *но ван странице* BC *троугла* ABC, *права* AD *припада равни* ABC.

Доказ. Или је $B-C-D$ или $C-B--D$ (сл. 25). Нека је напр. $B-C-D$. Тачке A и D праве AD припадају по дефиницији 5.3 равни ABC. Нека су E, F, G ма које друге тачке праве AD, за које је $A-E-D$, $F-A-D$ и $A-D-G$. Покажимо да и те тачке припадају равни ABC.

Посматрајмо прво троугао ABD. Како је $A-E-D$ и $B-C-D$, постоји по теореми 6.13 тачка L тако да је $A-L-C$ и $B-L-C$, дакле E припада правој BL, а ова припада по дефиницији 5. 3 равни ABC. Према томе E припада равни ABC.

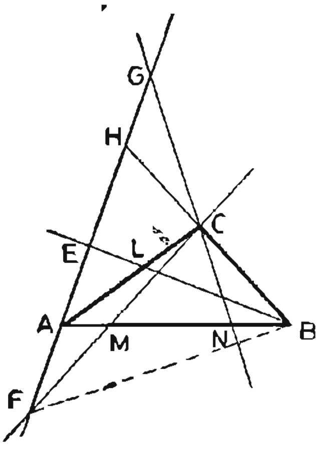
Посматрајмо затим троугао BDF. Како је $F-A-D$ и $B-C-D$, постоји према теореми 6.13 тачка M тако да је $A-M-B$ и $C-M-F$, дакле F припада правој CM, која припада равни ABC.

Посматрајмо најзад троугао ABC. Како је $A-D-G$ и $B-C-D$ постоји по аксиоми I 5 тачка N тако да је $A-N-B$ и $G-C-N$, дакле G припада правој CN, која припада равни ABC. Према томе и G припада равни ABC.

Тиме је доказано да све тачке праве AD припадају равни ABC.

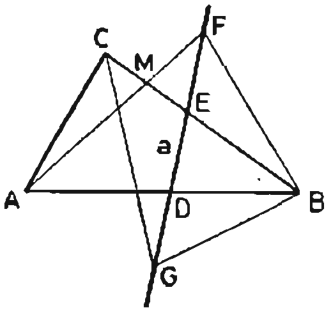
Теорема 7.5. *Права која сече две странице троугла* ABC *припада равни* ABC.

Доказ. Нека је a та права и нека сече напр. страницу AB у тачки D и страницу BC у тачки E (сл. 26). Према теореми 7.3 дуж DE припада равни ABC. Докажимо да и остале тачке праве DE припадају тој равни.



Сл. 25

Нека је F тачка за коју је $D-E-F$. Посматрајмо троугао ABF. Како је $A-D-B$ и $D-E-F$ постоји по аксиоми I 5 тачка M тако да је $A-M-F$ и $B-E-M$. Према теореми 6.16 је $B-M-C$ или $B-C-M$. Ако је $B-M-C$, F је према дефиницији 5.3 у равни ABC као тачка праве AM. Ако је пак $B-C-M$, тачка M је у продужењу странице BC, дакле права AM припада по теореми 7.4 равни ABC, па и то да тачка F припада равни ABC. Дакле F је свакако у равни ABC.



Сл. 26

Нека је G тачка за коју је $E-D-G$. Аналогним посматрањем троугла BCG доказујемо да и G припада равни ABC. Тиме је наведена теорема доказана.

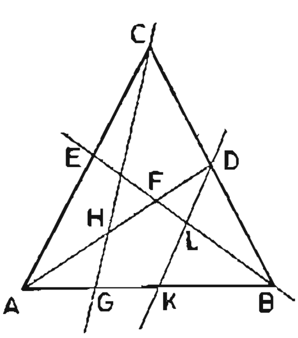
4. За раван има основан значај ова теорема:

Теорема 7.6. *Ма које три тачке неке равни, које не припадају једној правој, одређују ту исту раван.*

Доказ изводимо у три дела.

1. Нека је D тачка између B и C. Доказујемо прво да су равни ABC и ABD истоветне. – Докажимо пре свега да је свака тачка равни ABC уједно тачка равни ABD (сл. 27). Посматрајмо редом праве равни ABC, које се помињу у дефиницији 5.3.

Права која пролази кроз A и кроз неку тачку дужи BD припада по дефиницији 5.3 равни ABD. Права која пролази кроз A и неку тачку дужи CD припада по теореми 7.4 равни ABD. Дакле све праве равни ABC које пролазе кроз A и тачке дужи BC припадају равни ABD.



Сл. 27

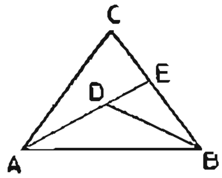
Права која пролази кроз B и неку тачку E дужи CA сече дуж AD према теореми 6.13 у некој тачки F, тако да је $A-F-D$ и $B-F-E$. Дакле и та права припада по дефиницији 5.3 равни ABD. Исто тако и права која пролази кроз C и неку тачку G дужи AB сече дуж AD према теореми 6.13 у некој тачки H, тако да је $A-H-D$ и $C-H-G$. По теореми 7.5 припада и та права равни ABD. Дакле и све праве равни ABC које пролазе кроз B и кроз тачке дужи CA и све праве равни ABC које пролазе кроз C и кроз тачке дужи AB припадају равни ABD. Свака тачка равни ABC је дакле уједно тачка равни ABD.

Докажимо да је и обрнуто, свака тачка равни ABD уједно тачка равни ABC. Права која пролази кроз A и неку тачку дужи BD припада, очигледно; равни ABC. Права која пролази кроз B и кроз неку тачку дужи DA, сече дуж AC, према аксиоми I 5, у некој тачки E, тако да је $A-E-C$ и $B-F-E$, дакле припада равни ABC. Најзад права која пролази кроз D и неку тачку E дужи AB, припада, према теореми 7.5 равни ABC. Тиме је први део доказа завршен.

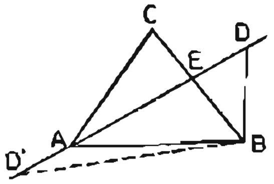
2. Нека је D каква било четврта тачка равни ABC, која не припада правој AB. Докажимо да су равни ABC ABD истоветне.

Према дефиницији 7.2 тачка D припада троуглу ABC, или је у њему, или изван њега. Но свакако припада некој правој која пролази кроз једно теме троугла ABC и неку тачку наспрамне странице.

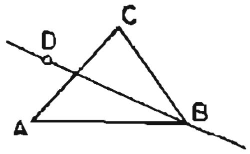
Нека је, прво, D у троуглу ABC (сл. 28). Према теореми 7.1 D је на дужи AE која спаја A са неком тачком E странице BC. Према претходно доказаноме раван ABC истоветна је са равни ABE, а ова са равни ABD, дакле равни ABC и ABD су истоветне.



Сл. 28



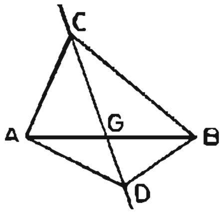
Сл. 29



Сл. 30

Нека је затим D на правој AE, али изван дужи AE (сл. 29). Опет је према ономе што смо претходно (под 1) доказали, раван ABC истоветна са равни ABE, а ова са равни ABD, дакле равни ABC и ABD су истоветне.

Исто тако расуђујемо кад је D на правој која пролази кроз B и кроз неку тачку F странице CA, и то изван дужи BF (сл. 30).



Сл. 31

Нека је, најзад, D на правој CG, која пролази кроз C и неку тачку G странице AB, и то изван дужи CG (сл. 31). Према ономе што смо доказали под 1, раван ABC је истоветна са равни ACG, ова са равни ACD, ова пак са равни ADG, а ова, најзад, са равни ABD. Дакле равни ABC и ABD су истоветне. Тиме је и други део доказа завршен.

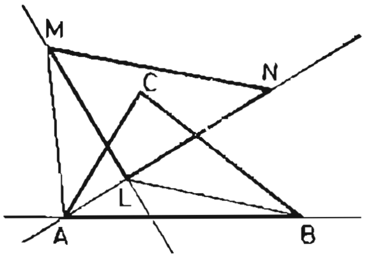
3. Нека је ABC дата раван, и L, M, N три ма које њене тачке које не припадају једној истој правој (сл. 32). Како тачке L, M, N не припадају све три правој AB, нека је например L ван AB. Према претходно доказаноме раван ABC је истоветна са равни ABL. Како M и N не припадају обе правој AL, нека је напр. M изван AL. Према ономе што смо под 2 доказали, раван ABL је истоветна са равни ALM. По претпоставци N не припада правој LM, дакле опет, према ономе што смо под 2 доказали, раван ALM је истоветна са равни LMN. Према томе равни ABC и LMN су истоветне.

Тиме је теорема 7.6 доказана.

5. Претходна теорема одговара теореми 6.4 о правој и једна је од најосновнијих теорема о равни. Сличне по значају су следеће теореме. Прве две одговарају теоремама 6.2 и 6.3 о правој.

Теорема 7.7 *Какве год биле три тачке које не припадају истој правој, постоји раван којој те три тачке припадају.*

Доказ. Какве год биле три тачке A, B, C, које не припадају истој равни, постоји укупност тачака из дефиниције 5.3, тј. постоји раван коју те три тачке одређују и којој, према томе, оне припадају.



Сл. 32

Теорема. 7.8. *Какве год биле три тачке које не припадају истој правој, не постоји више од једне равни којој те три тачке припадају.*

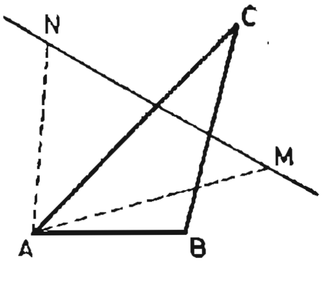
Доказ. Раван ABC коју одређују три тачке A, B, C, је укупност свих тачака наведених у дефиницији 5.3, дакле постоји само једна раван коју те три тачке одређују. Кад би постојала нека друга раван којој би такође припадале тачке A, B, C, то дакле не би била раван ABC, него друга раван, одређена трима другим тачкама, рецимо L, M, N, које нису истоветне с A, B, C. Тачке A, B, C, би припадале равни LMN. Но по теореми 7.6 ма које три тачке неке равни, које не припадају истој правој, одређују ту раван. Дакле и тачке A, B, C одређују раван LMN, тј. раван LMN је истоветна са равни ABC. Дакле, ово је једина раван којој припадају тачке A, B, C.

Теорема. 7.9. *Каква год била једна права и једна тачка ван те праве, постоји једна и само једна раван која садржи ту праву и ту тачку.*

Доказ. Нека је то права p и тачка P. По дефиницији 5.2 постоје на правој p две разне тачке A и B. Тачке A, B, P не припадају једној правој, дакле према теоремама 7.7 и 7.8 припадају једној и само једној равни, а по дефиницији 5.3 та раван садржи праву p. Дакле постоји једна и само једна раван којој припадају права p и тачка P.

Теорема 7.10. *Какве год биле две праве које се секу, постоји једна и само једна раван која садржи те две праве.*

Доказ. Нека су то праве p и q, а S њихова заједничка тачка. По дефиницији 5.2 постоји на p још једна тачка P и слично Q на q. По аксиоми II 1 S је једина заједничка тачка правих p и q, дакле тачке P, Q, S не припадају једној правој. Према теоремама 7.7 и 7.8 постоји једна и само једна раван која садржи тачке P, Q, S. По дефиницији 5.3 та раван садржи праве p и q. Дакле постоји једна и само једна раван која садржи праве p и q.



Сл. 33

Теорема 7.11. *Ако права има две тачке заједничке са неком равни, она припада тој равни.*

Доказ. Нека су то раван ABC и права MN (сл. 33). Једна од тачака A, B, C свакако није на правој MN, напр. тачка A, дакле и тачке A, M, N одређују раван. Према теореми 7.6 равни ABC и AMN су истоветне. Но права MN припада равни AMN по дефиницији 5.3, дакле припада и равни ABC.

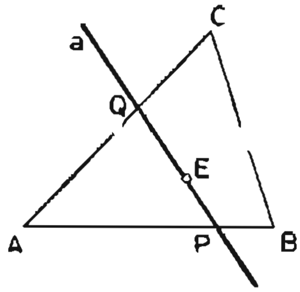
6. Следећа теорема садржи у себи познату Пашову теорему, која је у ~~Пашову и Хилбертову систему геометрије аксиома (аксиома II 4 у §9~~).

Теорема 7.12. *Ако права, која припада равни неког троугла, а не пролази ни кроз једно његово теме, сече једну страницу тог троугла, она сече још једну и само једну његову страницу.*

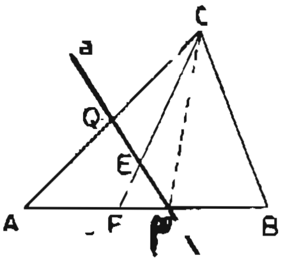
Доказ. Нека су то троугао ABC и права a, и нека a сече напр. страницу AB у тачки P. Доказаћемо да a сече још једну страницу у извесној тачки Q. Права a припада, према теореми 7.11 равни ABC, дакле и ма која њена тачка E, различита од P, припада равни ABC (сл. 34).

Тачка E је на страницама AC или BC троугла или је према дефиницији 7.2 у троуглу или изван њега. Ако је на страницама, теорема је доказана.

Ако је тачка E у троуглу, припада по дефиницији 7.2 дужи која спаја C са неком тачком F дужи AB (сл. 35). Како права a не пролази кроз C, тачка P је различита од F, дакле као тачка дужи AB, F припада према теореми 6.20 само једној од двеју дужи AP и PB, дакле је $A-F-P$ или $P-F-B$. Ако је $A-F-P$, посматрајмо троугао ACP. Према аксиоми I 5 постоји тачка Q тако да је $A-Q-C$ и $P-E-Q$, тј. права a сече дуж AC у тачки Q. Ако је $P-F-B$, посматрајмо троугао BCP. По аксиоми I 5 је $B-Q-C$ и $P-E-Q$, тј. a сече дуж BC у тачки Q.



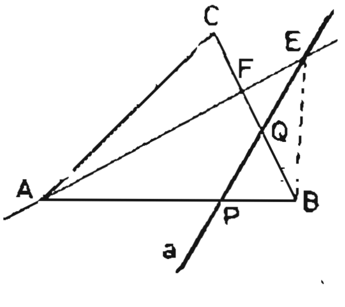
Сл. 34



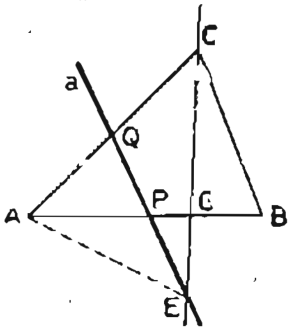
Сл. 35

Ако је E ван троугла ABC, по дефиницијама 5.3 и 7.2 E може бити:

1. на правој што пролази кроз A и неку тачку F дужи BC, и то тако да је $A-F-E$ или $E-A-F$ (сл. 36). Ако је $A-F-E$, посматрајмо троугао ABE. Како је и $A-P-B$, постоји по теореми 6.13 тачка Q тако да



Сл. 36



Сл. 37

је $B-Q-F$ и $E-Q-P$, тј. a сече дуж BF, дакле и дуж BC у тачки Q. Ако је $E-A-F$, посматрајмо троугао BEF. Како је и $A-P-B$, имамо по аксиоми I 5 $B-Q-F$ и $E-P-Q$, тј. права a сече дуж BF, дакле и дуж BC у тачки Q.

2. Тачка E може бити и на правој што пролази кроз B и неку тачку дужи AC. Доказ је исти као у претходном случају. Тада права a сече дуж AC.

3. Најзад, E може бити на правој што пролази кроз C и неку тачку G дужи AB, и то тако да је $C-G-E$ или $E-C-G$ (сл. 37). Како су G и P две разне тачке дужи AB, имамо по теореми 6.15 $A-P-G$ или $G-P-B$. Ако је $C-G-E$ и $A-P-G$, посматрајмо троугао ACE. По аксиоми I 5 постоји тачка Q тако да је $A-Q-C$ и $E-P-Q$, тј. права a сече дуж AC у некој тачки Q. Ако је $C-G-E$ и $G-P-B$, закључујемо на исти начин да a сече дуж BC. — Ако је $E-C-G$ и $A-P-G$, према теореми 6.13 постоји тачка Q тако да је $A-Q-C$ и $E-Q-P$, тј, a сече дуж AC у тачки Q. Ако је $E-C-G$ и $G-P-B$, закључујемо исто тако да a сече дуж BC.

Дакле, права a сече свакако једну од двеју страница AC и BC троугла ABC у извесној тачки Q. Тачке P и Q су једине заједничке тачке праве a и троугла ABC, јер ако права сече две странице троугла ABC, према теореми 6.12 не може сећи трећу страницу. — Тиме је теорема 7.12 доказана.

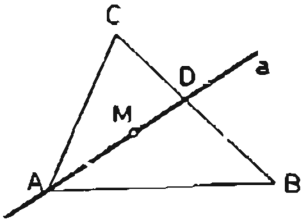
7. Следећа теорема следује непосредно из претходне:

Теорема 7.13. *Права која припада равни неког троугла, а не пролази кроз његова темена и не сече две његове странице, не сече ни трећу његову страницу.*

Ради доцније примене потребна је, најзад, и ова теорема:

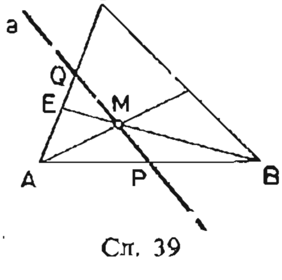
Теорема 7.14. *Права* a *у равни троугла* ABC, *која пролази кроз тачку* M *садржану у томе троуглу, има с њим две заједничке тачке* P *и* Q *тако да је* M *између* P *и* Q.

Доказ. Претпоставимо прво да права a пролази кроз једно теме троугла ABC, рецимо кроз A (сл. 38). Како је M у том троуглу, по дефиницији 7.2 постоји тачка D таква да је $B-D-C$ и $A-M-D$. Права AD је истоветна с a, дакле тачке A и D задовољавају услове постављене тачкама P и Q у теореми коју доказујемо, тј. теорема је под том претпоставком доказана.

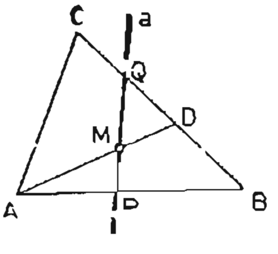


Сл. 38

Ако права a не пролази ни кроз једно теме троугла ABC, нека је опет D тачка за коју је $B-D-C$ и $A-M-D$. Посматрајмо троугле ABD и ACD. Права a сече њихову заједничку страницу AD, дакле по теореми 7.12 сече и страницу AB или BD једног троугла и уједно страницу AC или CDдругог троугла, тј. права a сече тада две и само две од тих дужи: AB и AC или AB и CD или BD и AC (сл. 39).



Сл. 39



Сл. 40

Ако a сече дужи AB и AC рецимо да сече прву у P, другу у Q, тј. да је $A-P-B$ и $A-Q-C$ (сл. 39). Према теореми 6.12 права a не сече дуж BC. Како је M у троуглу ABC, постоји тачка E тако да је $A-E-C$ и $B-M-E$. Права a сече странице AB и BE троугла ABE у тачкама P и M, дакле према теореми 6.12 не сече страницу AE, па како је $A-Q-C$ и $A-E-C$, прему теореми 6.15 је $A-E-Q$. Дакле је $A-P-B$ и $A-E-Q$, а отуд следује по теореми 6.13 да је $P-M-Q$, тј. права a има с троуглом ABC заједничке тачке P и Q саобразно теореми коју доказујемо.

Ако a сече дужи AB и CD, нека су опет пресечне тачке P и Q, тј. $A-P-B$ и $D-Q-C$ (сл. 40). Имамо $B-D-C$ и $D-Q-C$, дакле по теореми 6.14 је $B-D-Q$. Из $B-P-A$ и $B-D-Q$ следује пак по теореми 6.13 $P-M-Q$, тј. и за тај случај наша теорема је доказана.

Ако a сече дужи AC и BD, односи су исти као у претходном случају. Дакле увек права a има с троуглом ABC две заједничке тачке, P и Q тако да је $P-M-Q$, као што је требало доказати.

8. ПРОСТОР

1. За изграђивање геометрије у простору нарочит значај имају просторне аксиоме припадања II 2 и II 3. Све теореме које смо досад изнели односе се на положај тачака на правој и тачака и правих у равни. Сада докажимо прво неколико теорема о узајамном положају тачака, правих и равни, кад сви ти „ликови" нису садржани у једној равни. Прво, теореми 6.6 по којој изван сваке праве постоји најмање једна тачка, одговара следећа:

Теорема 8.1. *Изван сваке равни постоји најмање једна тачка.*

Доказ. Нека је α која било раван. По аксиоми II 2 постоје бар четири тачке које не припадају једној равни, дакле највише три од тих тачака могу припадати равни α, тј. постоји најмање једна тачка изван равни α.

Теорема 8.2. *Уз сваку раван постоји права која не припада тој равни. Уз сваку праву постоји друга права која с првом нема заједничких тачака, нити је садржана с њом заједно у једној равни.*

Доказ. Нека је α која било раван. По дефиницији 5.3 постоје у α три тачке A, B, C од којих ниједна није између остале две, а по теореми 8.1 постоји изван равни α тачка D. По дефиницији 5.2 права AD постоји, али не припада равни α.

Нека је PQ ма која права. Према теореми 6.6 постоји ван те праве тачка R, а по теореми 7.9 постоји раван PQR. Према теореми 8.1 постоји тачка S изван равни PQR, а RS је права која није садржана у равни PQR. Праве PQ и RS немају заједничке тачке, јер кад би имале заједничку тачку припадале би према теореми 7.10 једној равни.

Теорема 8.3. *Ако четири тачке* A, B, C, D *нису садржане у једној равни, тада од тих тачака никад три нису садржане на једној правој.*

Доказ. По теореми 6.6 изван праве AB постоји најмање једна тачка. Нека је то тачка E. По дефиницији 5.3 тачке A, B, E одређују раван. Кад би све четири тачке A, B, C, D припадале правој AB, по дефиницији 5.3 припадале би равни ABE, противно претпоставци. Према томе, најмање једна од тачака C, D не припада правој AB, рецимо тачка C. Дакле тачке A, B, C одређују раван. Кад би тачка D припадала правој AB, према дефиницији 5.3 све четири тачке A, B, C, D би припадале равни ABC, противно претпоставци.

Према томе ни C ни D не припадају правој AB. Исто тако показује се да ни остале од шест правих AB, AC, AD, BC, BD, CD не садрже више од две међу тачкама A, B, C, D.

2. Пређимо сад на пресеке двеју равни и пресек праве и равни.

Теорема 8.4. *Ако две разне равни имају једну заједничку тачку, оне имају заједничку праву, која пролази кроз ту заједничку тачку.*

Доказ. Нека су α и β те равни, A заједничка тачка. Према аксиоми II 3 α и β имају још једну заједничку тачку B. По теореми 7.11 права AB је садржана у равни α и, тако исто, у равни β, дакле AB је заједничка права тих равни. Та права пролази кроз A.

Дефиниција 8.1. Ако две разне равни имају заједничку праву кажемо да се *секу* по тој правој. Ту праву називамо *пресечном правом.*

Теорема 8.5. *Две равни се секу или немају заједничких тачака.*

Доказ. Две равни немају заједничких тачака или имају најмање једну заједничку тачку, а тада се према теореми 8.4 секу по једној правој. Дакле, две равни се секу или немају заједничких тачака.

Теорема 8.6. *Две равни које се секу немају ниједне заједничке тачке ван праве по којој се секу.*

Доказ. Нека су P и Q две тачке на правој по којој се равни α и β секу. Ако би, противно теореми, α и β имале ван праве PQ неку заједничку тачку R, тада би по теореми 7.8 равни α и β биле истоветне. Дакле α и β немају ван пресечне праве ниједне заједничке тачке.

Теорема 8.7. *Раван и права која не припада тој равни имају једну или ниједну заједничку тачку.*

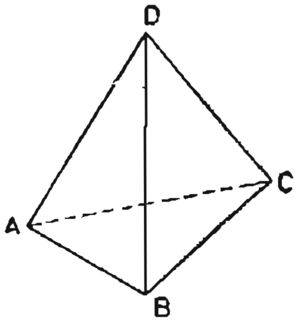
Доказ. Нека су то раван α и права a. Ако би раван α и права a имале две заједничке тачке, према теореми 7.11 права a би припадала равни α. Дакле раван α и права a могу имати само једну или ниједну заједничку тачку.

Дефиниција 8.2. Ако права и раван имају само једну заједничку тачку кажемо да права *продире* кроз раван или да раван *сече* праву. Заједничку тачку називамо *тачком продора* или *пресека.*

3. Као што смо у проучавању равни посматрали троугао, тако ћемо сад у проучавању простора посматрати тетраедар.

Дефиниција 8.3. Нека су A, B, C, D четири тачке које не припадају истој равни. Укупност троугаоних површи (ABC), (ABD), (BCD), (CAD) називаћемо *тетраедарском површи.* Те четири троугаоне површи називаћемо *странама* или *пљоснима*, четири тачке A, B, C, D *теменима*, а шест дужи које спајају по два темена *ивицама* тетраедарске површи (сл. 41).

Тетраедарску површ чија су темена A, B, C, D обележаваћемо знаком $(ABCD)$.



Сл. 41

Дефиниција 8.4. За тачке које су између тачке A и неке унутарње тачке троугаоне површи (BCD) или између B и неке унутарње тачке троугаоне површи (CAD) или између C и неке унутарње тачке троугаоне површи (DAB) или између D и неке унутарње тачке троугаоне површи (ABC), казаћемо да су *у* тетраедарској површи $(ABCD)$. За тачке које не припадају тетраедарској површи нити су у њој казаћемо да су *изван* ње.

За теме тетраедарске површи и његову страну која не садржи то теме казаћемо да су једно *наспрам* другога. И за две ивице тетраедарске површи, које немају заједничких тачака (AB и CD, BC и DA, CA и BD) казаћемо да су *наспрамне.*

Дефиниција 8.5. Укупност тачака тетраедарске површи и свих тачака које су у њој називаћемо *тетриедром*. Стране, ивице и темена тетраедарске површи називаћемо *странама*, *ивицама* и *теменима* тог тетраедра.

Укупност тачака које су у тетраедарској површи називаћемо *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван ње *спољашњошћу* тетраедра.

Тетраедар чија су темена A, B, C, D обележавамо знаком $ABCD$.

4. Докажимо теорему која одговара теореми 7.2 о равни:

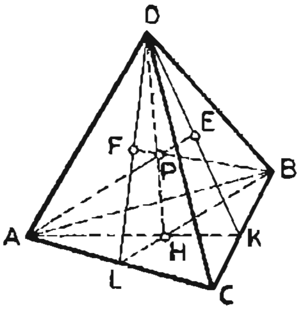
Теорема 8.8. *Ако су* A, B, C, D *четири тачке које не припадају истој равни, свака тачка која је*

између тачке A *и неке унутрашње тачке троугаоне површи* (BCD) *такође је*

између тачке B *и неке унутрашње тачке троугаоне површи* (CDA) *и такође*

између тачке C *и неке унутрашње тачке троугаоне површи* (DAB) *и такође*

између тачке D *и неке унутрашње тачке троугаоне површи* (ABC).



Сл. 42

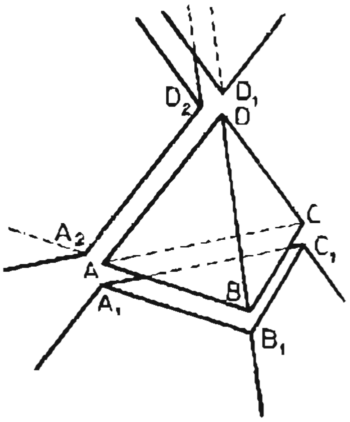
Доказ. Нека је P тачка између A и неке унутарње тачке E троугаоне површи (BCD) (сл. 42). Докажимо да је P такође између B и неке унутарње тачке F троугаоне површи (CAD).

Како је E у троуглу BCD, према дефиницији 7.2 постоји на дужи BC тачка K тако да је $D-E-K$. Тачка K припада равни BCD, а тачка A је према претпоставци ван те равни, дакле и ван праве DK, тј. тачке A, D, K су темена троугла, па како је $D-E-K$ и $A-P-E$, постоји према аксиоми I 5 тачка H тако да је $A-H-K$ и $D-F-H$.

Како је $A-H-K$ и $B-K-C$ постоји према истој аксиоми тачка L тако да је $A-L-C$ и $B-H-L$. Како L припада равни ACD а B је по претпоставци ван те равни, тачке B, D, L су темена троугла, па како је $B-H-L$ и $D-P-H$, постоји тачка F тако да је $D-F-L$ и $B-P-F$, тј. P је између B и неке унутрашње тачке троугаоне површи (CAD).

Исто се тако доказују остала два тврђења у теореми 8.8. Тиме је та теорема доказана.

5. Ради објашњења идућег излагања приметимо да четири равни које садрже стране једног тетраедра деле простор на петнаест делова. Неки од тих делова су у слици 43 истакнути тиме што су се померили мало из свог положаја. Тих петнаест делова јесу: унутрашњост тетраедра, па унутрашњост четири рогља, као што је у слици 43 онај с теменом D_1 (његово теме је у истини D); затим четири области које личе на тростране зарубљене пирамиде (у слици је истакнута једна, с теменима A_1, B_1, C_1); најзад шест области сличне крововима са слеменом (у слици је истакнута једна оваква област, с теменима A_2 и D_2). На основи § 10 то се може лако доказати.



Сл. 43

Засад помињемо то зато, да би се лакше увидело, да се тачке простора налазе било на правим које пролазе кроз поједина темена тетраедра и тачке наспрамних троугаоних површи, било на правим које пролазе кроз тачке на паровима наспрамних његових ивица (ове последње пролазе кроз области последње врсте). Ову чињеницу користимо да бисмо простор дефинисали слично као што смо дефинисали раван. У нашој, тродимензионој геометрији постоји само један простор, док има бесконачно много равни.

Дефиниција 8.6. Нека су A, B, C, D четири тачке које не припадају истој равни; укупност свих правих које пролазе

кроз тачку A и ма коју тачку троугаоне површи (BCD),
кроз тачку B и ма коју тачку троугаоне површи (CDA),
кроз тачку C и ма коју тачку троугаоне површи (DAB),
кроз тачку D и ма коју тачку троугаоне површи (ABC),

затим

кроз ма коју тачку дужи AB и ма коју тачку дужи CD,
кроз ма коју тачку дужи BC и ма коју тачку дужи DA,
кроз ма коју тачку дужи CA и ма коју тачку дужи BD

називаћемо *простор*.

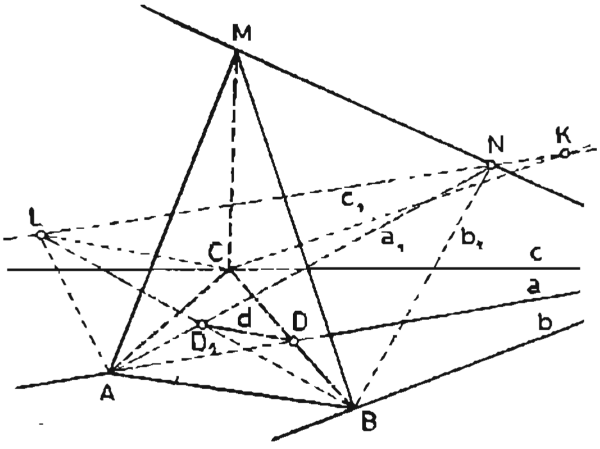
О тачкама A, B, C, D рећи ћемо да *одређују* тај простор.

6. Следећу теорему доносимо ради доказа теореме 8.10.

Теорема 8.9. *Ако су* A, B, C, M, N *пет тачака од којих никакве четири не припадају једној равни, тада равни* AMN, BMN, CMN *секу раван* ABC *по трима разним правим од којих најмање једна сече неку страницу троугла* ABC.

Доказ. Како четири од датих пет тачака не припадају једној равни, закључујемо да су равни AMN, BMN, CMN три разне равни (сл. 44). Оне имају са равни ABC по једну заједничку тачку, наиме, редом A, B, C. Дакле према теореми 8.4 прве три равни секу раван ABC по извесним правим a, b, c, које пролазе редом кроз A, B, C и међу собом су различите, јер кад би се две поклопиле, поклопиле би се и две од првих трију равни. Тиме је прво тврђење овог става доказано.

Равни AMN, BMN, CMN секу и раван ABN по извесним правим a_1, b_1, c_1, које пролазе кроз заједничку тачку N свих тих четири равни. И то су три разне праве, јер кад би се две поклопиле, поклопиле би се и две од првих трију равни, супротно претпоставци.



Сл. 44

Нека је K тачка на c_1, различита од N и затим (по аксиоми I 3) L тачка на c_1, тако да је N између K и L. Ако се праве AB и c_1 секу, претпоставимо да су K и L различите од пресечне тачке. Тачка C је ван праве c_1, јер кад би била на c_1, била би у равни ABN, супротно претпоставци да од датих пет тачака четири нису у једној равни. Дакле постоји троугао CKL. Права MN сече његову страницу KL у тачки N, дакле према теореми

7.12 сече још једну и само једну његову страницу. Рецимо да сече страницу CK, тј. да не сече страницу CL.

Како тачка L није на правој AB, тачке A, B, L одређују раван истоветну с равни ABN, па како је тачка N у тој равни, најмање једна од правих AN, BN, LN (тј. a_1, b_1, c_1) сече према дефиницији 5.3 страницу троугла ABL. Докажимо да у сва три ова случаја једна од трију правих a, b, c сече једну страницу троугла ABC. Посматрајмо редом три могућа случаја.

1. Нека a_1 сече страницу BL троугла ABL у извесној тачки D_1. Тачка C није у равни ABN по претпоставци, дакле ни на правој BL, дакле постоји троугао CBL, а тачка D_1 је на његовој страници BL. Равни CBL и AMN су две разне равни, јер садрже свих пет датих тачака, а тачка D_1 им је заједничка, дакле те две равни секу се по извесној правој d. У равни CBL права d сече страницу BL троугла CBL у тачки D, а не пролази кроз C, јер тачка C је ван равни AMN, која садржи праву d. Дакле према теореми 7.12 права d сече и једну од двеју страница BC и CL троугла CBL.

Ако би права d секла страницу CL у извесној тачки D, ова би тачка била како у равни CMN тако и у равни AMN, дакле на правој MN. Ово се противи претпоставци да права MN не сече дуж CL. Дакле права d сече страницу BC троугла CBL у извесној тачки D. Како тачка D припада равнима AMN и ABC, припада правој a. Дакле права a сече страницу BC троугла ABC, саобразно тврђењу постављене теореме.

2. Нека b_1 сече страницу AL троугла ABL у некој тачки E_1. Посматрањем које је аналого претходном доказујемо да тада права b сече страницу AC троугла ABC у некој тачки E. (У претходноме треба само извршити одговарајуће размене слова.)

3. Нека c_1 сече страницу AB троугла ABL у извесној тачки F. Како је c_1 у равни CMN, тачка F припада равнима ABC и CMN, тј. правој c. Према томе права c сече страницу AB троугла ABC.

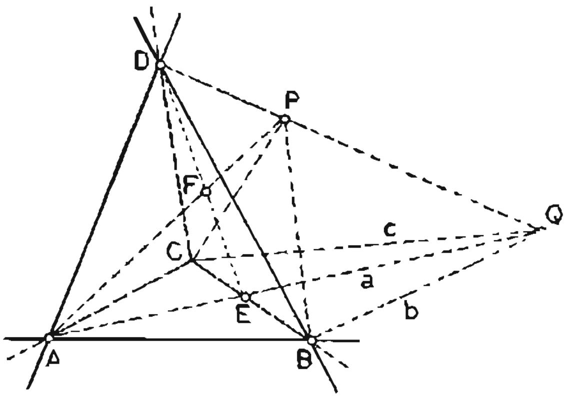
Тиме је у сва три могућа случаја доказано да једна од трију правих a, b, c сече страницу троугла ABC, а овим је теорема 8.9 доказана.

7. Помоћу претходне теореме можемо доказати следећу, која има основан значај за појам простора.

Теорема 8.10. *Какав год био тетраедар* ABCD, *све тачке садржане су у простору који је одређен тачкама* A, B, C, D.

Доказ. Нека је P ма која тачка (мноштва тачака што проучава ова геометрија).

Ако је тачка P у равни ABC, права AP сече према дефиницији 5.3 дуж BC, или права BP сече дуж CA, или права CP сече дуж AB, дакле, посматрано истим редом, права AP пролази кроз тачку троугаоне површи BCD, или права BP пролази кроз тачку троугаоне површи ACD, или права CP пролази кроз тачку троугаоне површи ABD. Дакле по дефиницији 8.6 тачка P припада простору који је одређен тачкама A, B, C, D.



Сл. 45

Исто тако показујемо да је P у том простору ако је у равни BCD или CDA или DAB.

Претпоставимо да је тачка P ван четири равни којима припадају стране тетраедра $ABCD$, дакле да од пет тачака A, B, C, D, P никакве четири нису у једној равни. Уочимо коју било страну тетраедра $ABCD$, рецимо ABC (сл. 45). Према теореми 8.9 три равни ADP, BDP, CDP секу равни ABC по трима разним правима a, b, c, које пролазе редом кроз тачке A, B, C. и најмање једна од тих трију правих сече једну страницу троугла ABC.

Нека напр. права a сече дуж BC у извесној тачки E. Права AD има према теореми 8.7 са равни ABC само тачку A заједничку, дакле не садржи тачку E. Према томе A, D, E одређују раван која је истоветна са равни ADP. По дефиницији 5.3 права AP сече дуж DE или права DP сече дуж AE или права EP сече дуж AD.

Ако права AP сече дуж DE у некој тачки F (сл. 45), ова тачка је по дефиницији 7.2 у троуглу BCD, дакле тачка P је на правој која пролази кроз A и кроз тачку троугаоне површи BCD. Ако права DP сече дуж AE у некој тачки G, ова тачка је у троуглу ABC, дакле тачка P је на правој која пролази кроз D и кроз тачку троугаоне површи ABC. Ако права EP сече дуж AD у некој тачки H, тачка P је на правој која пролази кроз тачке E и H на наспрамним ивицама BC и AD тетраедра. У сва три случаја тачка P припада по дефиницији 8.6 простору који је одређен тачкама A, B, C, D.

Исто тако се доказује и ако права b сече дуж CA или пак права c сече дуж AB. Увек тачка P припада простору који је одређен тачкама A, B, C, D. Тиме је теорема 8.10 доказана.

8. Сад изводимо лако следеће теореме, које вреде само у тродимензионој геометрији.

Теорема 8.11. *Сваке четири тачке које не припадају једној равни, одређују један исти простор.*

Доказ. Нека су A, B, C, D четири тачке које не припадају једној равни, затим A', B', C', D' друге четири такве тачке. Према претходној теореми све тачке су како у простору који је одређен тачкама A, B, C, D, тако у простору који је одређен тачкама A', B', C', D'. Дакле, све тачке које су у првом простору, такође су у другом. и обратно. Према томе оба простора су истоветна.

Као непосредну последицу ове теореме исказујемо следећу:

Теорема 8.12. *У овом извођењу геометрије постоји само један простор.*

Можемо доказати и следећу теорему:

Теорема 8.13. *Простор је укупност свих тачака.*

Доказ. Према дефиницији 8.6 простор је извесна укупност тачака, а према теореми 8.10 та укупност садржи све тачке (мноштва што проучава ова геометрија). Дакле простор је укупност свих тих тачака.

Доказ следеће теореме препуштамо читаоцу.

Теорема 8.14. *Какав год био тетраедар* ABCD, *простор је истоветан с укупношћу равни које садрже по једну ивицу тетраедра* ABCD *и једну тачку наспрамне ивице.*

Напомена. Слично посматрање налази се већ у спису Шура „О основама геометрије"*. Простор би се могао дефинисати и као мноштво свих тачака за које су испуњене аксиоме распореда и садржавања. Тада би требало доказати између осталог и следећу теорему:

---

* Mathem. Annalen, 55 (1902).

Какав год био тетраедар *ABCD*, свака тачка *P* (простора) је било на право, која пролази кроз једно теме тог тетраедра и кроз ма коју тачку његове наспрамне стране, било на правој која пролази кроз две тачке на двема наспрамним ивицама тог тетраедра.

Дефиниција 8.6 простора, полазећи од тетраедра, аналога је дефиницији 5.3 равни и задржала би своју вредност у четвородимензионој па и вишедимензионој еуклидовској геометрији, где вишедимензиони простори садрже бескрајно много тродимензионих простора.

У доказима теорема 8.9 и 8.10 битна је улога аксиоме II 3 посредно преко теореме 8.5 према којој се две равни, које имају једну заједничку тачку, секу по правој. У четвородимензионом простору две равни могу, напротив, имати само једну заједничку тачку, Преко теореме 8.5 аксиома II 3 омогућује закључак да тродимензиони простор, одређен којим било тетраедром *ABCD*, садржe све тачке, дакле да простор који проучавамо нема више од три димензије.

9. После дефиниције простора можемо изрећи дефиницију геометријског лика следећим речима:

Дефиниција 8.7. Свако мноштво тачака у простору називаћемо *геометријским ликом* или, краће, *ликом* или *фигуром.*

Према овој општој дефиницији лик се може састојати из коначно или и из бесконачно много тачака. Например, троугао је лик, а и укупност трију тачака је лик. Тачка је у нашем извођењу геометрије основни лик.

9. О ХИЛБЕРТОВИМ АКСИОМАМА ВЕЗЕ И РАСПОРЕДА.

1. Д. Хилберт узима у свом познатом делу „Основе геометрије" *тачку, праву и раван* за основне појмове. Дакле праву и раван не дефинише, али зато је број аксиома припадања (у ствари: везе) у њега већи него у нас. Уместо „експлицитних дефиниција" праве и равни морају, наиме, доћи одговарајуће „имплицитне дефиниције". На пример теорема: „*Какве год биле две тачке, увек постоји права којој те две тачке припадају*" (или: „*која те две тачке садржи*") у Хилберта је аксиома. Реч „садржи" (или „припада") не означује сада више појам теорије мноштава, јер не полазимо више од праве као од мноштва тачака. У почетку Хилбертова излагања права се не односи према тачки као извесно мноштво према свом елементу. Њему су и праве и равни елементи простора.

У ствари, аксиоме припадања називају се по Хилберту аксиоме везе (немачки: Verknüpfung), јер се њима успоставља извесна „веза" између самосталних геометријских ликова: тачака, правих и равни, а не садржавање у смислу теорије мноштава.

Хилберт разликује осам аксиома везе. Исказујемо их нешто другим речима него Хилберт, тако да се истакне улога основног односа, за који употребљавамо (саобразно нашем језику) реч припадати*. Аксиоме везе дефинишу имплицитно (уз тачку, праву и раван) тај основни појам.

I 1. *За две тачке* A, B *постоји увек права* a *којој припада свака од обеју тачака* A, B.

---

* Тачнији превод тих аксиома може се наћи на стр. 4 дела: *Д. Хилберт*, Основе геометрије (Београд, 1957). Види и *Н. В. Јефимов*, Виша геометрија (Београд, 1949), стр. 39, 40, превела М. Дајовић.

I 2. *За две тачке* А, В *не постоји више од једне праве којој припада свака од обеју тачака* А, В.

I 3. *За сваку праву постоје, најмање, две тачке које јој припадају. Постоје, најмање, три тачке које не припадају једној правој.*

I 4. *Ма за које три тачке* А, В, С, *које не припадају истој правој, постоји увек раван* α *којој припада свака од трију тачака* А, В, С. *За сваку раван постоји, најмање, једна тачка која јој припада.*

I 5. *Ма за које три тачке* А, В, С *које не припадају истој правој, не постоји више од једне равни којој припада свака од трију тачака* А, В С.

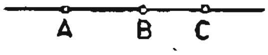
I 6. *Ако две тачке* А, В, *праве* а *припадају равни* α, *свака тачка праве* а *припада равни* α.

I 7. *Ако једна тачка* А *припада двема равнима* α, β, *постоји најмање, још једна тачка* В *која припада обема равнима* α, β,

I 8. *Постоје, најмање, четири тачке које не припадају истој равни.*

Тачније преведено. Хилберт полази од израза „спадати заједно“ (zusammengehören) и његова прва аксиома везе гласи дословно: „*Какве год биле две тачке А, В, постоји права* а *која спада заједно са сваком од тачака А, В.* У даљим аксиомама везе служи се и другим изражавањем. Тако у трећој аксиоми стоји: „*Постоје, најмање, три тачке које не леже на једној правој*“ уместо: „*које не спадају заједно с једном правом*“. Полазни однос изражен речима „спадати заједно“ је у логичком погледу симетричан однос, јер кад је тачка на правој, може се у смислу Хилберта рећи „тачка спада заједно са правом“, а исто тако и „права спада заједно са тачком“. Однос припадања је обично несиметричан однос („тачка припада правој“).

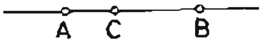
2. Хилбертове аксиоме распореда дефинишу имплицитно основни појам „између“ и гласе:



Сл. 46

II 1. *Ако тачка* В *лежи између тачака* А и С, *тада су* А, В, С *три разне тачке једне праве и* В *лежи такође између* С *и* А (сл. 46).

II 2. *Какве год биле две тачке* А *и* С, *увек постоји најмање једна тачка* В *на правој* АС, *тако да* С *лежи између* А *и* В (сл. 47).



Сл. 47

II 3. *Од ма којих трију тачака праве не постоји више од једне која лежи између оне друге две.*

II 4. *Нека су* А, В, С *три тачке које не леже на једној правој и нека је* а *права у равни* АВС, *која не пролази ни кроз једну од тачака* А, В, С; *ако тада права* а *пролази кроз тачку дужи* АВ, *она мора пролазити кроз тачку дужи* АС *или кроз тачку дужи* ВС.

PAŠ

Када у тим аксиомама стоји да тачка лежи на правој, или да права пролази кроз тачку, то је само други начин изражавања за исказ: тачка припада правој. Само „између“ је нов основан појам.

Аксиома II 4 назива се често Пашовом аксиомом. Испред те аксиоме Хилберт доноси дефиницију дужи. Приметимо да реч „или“ нема у тој аксиоми дисјунктивно значење, тј. обе могућности, да права *a* сече дуж *AC* или дуж *BC*, том аксиомом не искључује се узајамно. Тврди се само да права *a* сече више од једне странице троугла *ABC*. Да не може сећи све три странице, може се доказати (теорема 6.12).

3. Хилбертове аксиоме I и II јесу или истоветне с нашим аксиомама I и II или се из ових могу извести, и обратно: наше аксиоме I и II јесу или истоветне с Хилбертовим аксиомама I и II или се из ових могу извести. Дакле све теореме које се могу доказати из Хилбертових аксиома I и II могу се доказати и из наших аксиома I и II, и обратно.

Кад постоји овакав однос између два система основних израза (или појмова) и аксиома, кажемо да су та два система *еквивалентна*. — Хилбертове аксиоме I и II и наше аксиоме I и II образују заједно с одговарајућим основним изразима два еквивалентна система.

Задржимо се на аксиомама.

Пре свега, Хилбертове аксиоме I 1 и I 2 истоветне су с нашим теоремама 6.2 и 6.3. Први део Хилбертове аксиоме I 3 следује непосредно из наше дефиниције праве 5.2 а други део је истоветан с нашом аксиомом I 4. Први део Хилбертове аксиоме I 4 истоветан је с нашом теоремом 7.7, а други део следује непосредно из наше дефиниције равни 5.3. Хилбертове аксиоме I 5, I 6, I 7 и I 8 истоветне су с нашим теоремама 7.8 и 7.11 и нашим аксиомама II 3 и II 2. Хилбертове аксиоме II 1 и II 2 истоветне су с нашим I 1 и I 3, сем што се у Хилбертовим претпоставља да три тачке A, B, C припадају једној правој, а у нас је то сувишно, саобразно дефиницији праве 5.2. Најзад, Хилбертове аксиоме II 3 и II 4 су садржане у нашим теоремама 6.8 и 7.12. Дакле све Хилбертове аксиоме I и II јесу или истоветне с нашим аксиомама I и II или се из ових могу извести.

Обратно: Наше аксиоме I 1 и I 2 следују непосредно из Хилбертових II 1 и II 3. Наше аксиоме I 3 и I 4 истоветне су с Хилбертовом II 2 и с другим делом његове аксиоме I 3. Наше аксиоме I 5 и II 1 следују из Хилбертових II 4 и I 2, а наше аксиоме II 2 и II 3 истоветне су с Хилбертовим I 8 и I 7.

Дакле све наше аксиоме I и II јесу или истоветне с Хилбертовим аксиомама I и II или се из ових могу извести.

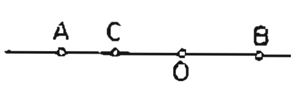
Тачно образлагање свих наведених односа између појединих Хилбертових и наших аксиома и теорема препуштамо читаоцу.

ПОЛУПРАВА, ПОЛУРАВАН, ПОЛУПРОСТОР.

Посматрајући распоред тачака на правој, у равни и у простору потребно је разликовати да ли су две тачке на правој с исте стране или са разних страна извесне тачке, да ли су у равни с исте или са разних страна извесне праве, и да ли су у простору с исте или са разних страна извесне равни. Те односе треба дефинисати, а у вези с тим такође полуправу, полураван и полупростор.

1. Посматрајмо прво праву.

Дефиниција 10.1. Ако су O, A, B три разне тачке на некој правој a и ако је O између A и B, кажемо да су тачке A и B на правој *a с разних страна тачке O* (сл. 48).



Сл. 48

Ако су O, A, C три разне тачке на правој a и ако O није између A и C, кажемо да су тачке A и C на правој a с исте стране тачке O.

Ако су тачке A и B праве a с исте стране тачке O казаћемо такође да је тачка A с исте стране тачке O као тачка B; ако су тачке A и B с разних страна тачке O казаћемо такође да је тачка A с оне стране тачке O с које није тачка B.

Доказујемо прво следећу теорему:

Теорема 10.1. *Ако су на правој* a *тачке* A *и* B *с разних страна тачке* O *и такође* A *и* C *с разних страна тачке* O, *а* B *и* C *две разне тачке, тада су тачке* B *и* C *с исте стране тачке* O.

Ако су на правој a *тачке* A *и* B *с исте стране тачке* O, *и такође* A *и* C *с исте стране тачке* O, *а* B *и* C *две разне тачке, тада су и тачке* B *и* C *с исте стране тачке* O.

Ако су на правој a *тачке* A *и* B *с исте стране тачке* O, *а* A *и* C *с разних страна тачке* O, *тада су* B *и* C *с разних страна тачке* O.

Доказ. Прво докажимо први део теореме. Према дефиницији 10.1 имамо $A-O-B$ и $A-O-C$, дакле према теореми 6.16 је $O-B-C$ или $O-C-B$, дакле по дефиницији 10.1 тачке B и C су с исте стране тачке O.

Други део теореме доказујемо слично: По дефиницији 10.1 имамо $O-A-B$ или $O-B-A$ и такође $O-A-C$ или $O-C-A$. Ако је $O-A-B$ и $O-A-C$, према теореми 6.16 је и $O-B-C$ или $O-C-B$, тј. B и C су с исте стране тачке O. Ако је $O-A-B$ и $O-C-A$, по теореми 6.14 је и $O-C-B$, тј. опет су B и C с исте стране тачке O.

Исто тако се доказује помоћу теорема 6.14 и 6.16 и у остала два случаја. — И трећи део теореме се доказује слично.

Из теореме 10.1 следује за све тачке на правој a, које су с исте стране тачке O као нека тачка A, да су и у међусобном односу с исте стране тачке O. Тако се може говорити о мноштву тачака које је на правој с исте стране тачке O То нас води следећој дефиницији.

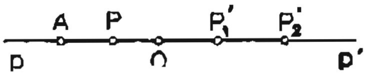
Дефиниција 10.2. Укупност тачака које су на правој a с једне исте стране једне њене тачке O називамо *полуправом*, а тачку O њеном *почетном тачком* (*почетком*, *исходиштем* или *крајем*; сл. 48).

Полуправе, као и праве обележавамо малим латинским словима, напр. p, или, ако је O почетак а P тачка полуправе p, такође и знаком Op или OP (а не PO).

За полуправу чији почетак је тачка O кажемо и да полази из тачке O.

Докажимо следећу теорему:

Теорема 10.2. *Ако је* O *ма која тачка праве* a, *постоје на* a *две полуправе којима је тачка* O *заједничко исходиште и чије су тачке са разних страна тачке* O. *Права* a *се састоји из тачке* O *и из тих двеју полуправих.*



Сл. 49

Доказ. Нека је A једна тачка праве a, различита од O, а P ма која тачка праве a, различита од A и O (сл. 49). Према теореми 6.8 је или $O-A-P$ или $O-P-A$ или $A-O-P$. У последњем случају писаћемо P' уместо P. — По дефиницији 10.1 у прва два случаја тачке A и P су с исте стране тачке O, дакле A и све тачке P сачињавају по дефиницији 10.2 једну полуправу праве a; обележимо ову с p.

У трећем случају нека су P'_1 и P'_2 две разне тачке P' за које је дакле $A-O-P'_1$ и $A-O-P'_2$. Према теореми 6.16 имамо $O-P'_1-P'_2$ или $O-$ $-P'_2-P'_1$, дакле тачке P'_1 и P'_2, тј. све тачке P' јесу с исте стране тачке O и сачињавају по дефиницији 10.2 опет једну полуправу; обележимо је с p'.

Полуправе p и p' су две полуправе на правој a, којима је O заједнички почетак. Како ма за коју тачку полуправе p' имамо $O-A-P'$, дакле и $P'-O-A$, а ма за коју тачку полуправе p $O-A-P$ или $O-P-A$, имамо према теореми 6.11 одн. 6.14 $P'-O-P$, тј. тачке полуправих p и p' су са разних страна тачке O.

Али свака тачка праве a, различита од O, или је нека тачка P или нека тачка P', дакле права a се састоји из тачке O и двеју полуправих p и p'. — Тиме је ова теорема доказана.

Дефиниција 10.3. Ако су a и a' две полуправе које припадају једној правој и ако је тачка O њихов заједнички почетак, кажемо да тачка O разлаже ту праву на те две полуправе.

Сваку од двеју полуправих на које је разложена једна права називамо *продужењем* оне друге полуправе.

Нека је AB дуж на правој a. Полуправу на правој a, којој је почетак тачка A, а не припада јој тачка B, називаћемо *продужењем* дужи AB иза тачке A.

Према теореми 10.2 *свака тачка неке праве разлаже ту праву на две полуправе.*

На темељу дефиниција 5.1 и 5.2 имамо следећу теорему:

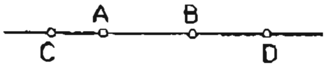
Теорема 10.3. *Ако су* A *и* B *две разне тачке на некој правој, та права се састоји из дужи* AB, *продужења дужи* AB *иза* A *и продужења дужи* AB *иза* B. *Ова три лика немају заједничких тачака.*

Идуће две теореме доводе у везу ново дефинисане појмове са дужима и њиховим продужењима.

Теорема 10.4. *Ма које две тачке на некој правој, са разних страна извесне тачке* O *те праве, одређују дуж која садржи тачку* O. *Ма које две разне тачке на тој правој, с исте стране тачке* O, *одређују дуж која не садржи тачку* O.

Доказ. Ако су тачке A и B на правој a с разних страна њене тачке O, дуж AB садржи по дефиницији 5.1 све тачке између A и B, дакле по првом делу дефиниције 10.1 садржи и тачку O. Ако су A и C две разне тачке на a, с исте стране тачке O, по другом делу дефиниције 10.1 није $A-O-C$, нити се A или C поклапа с O, дакле по дефиницији 5.1 дуж AC не садржи тачку O.

Теорема 10.5. *Ако је тачка* C *на продужењу дужи* AB *иза* A *и тачка* D *на продужењу дужи* AB *иза* B, *тачке* C *и* D *су с разних страна тачке* A *и тачке* B.



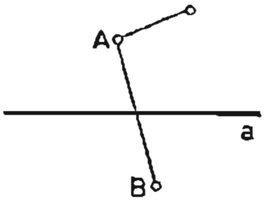
Сл. 50

Доказ. Имамо $C-A-B$ и $A-B-D$ (сл. 50), дакле према теореми 6.11 имамо $C-A-D$ и $C-B-D$, тј. по дефиницији 10.1 C и D су с разних страна тачке A и тачке B.

2. Пређимо сад на одговарајуће односе у равни.

Дефиниција 10.4. Ако је a права у некој равни α, затим A и B две разне тачке равни α, и ако права a има тачку између A и B, кажемо да су тачке A и B у равни α *са разних страна праве* a (сл. 51).

Ако су A и C у равни α две разне тачке изван праве a и ако права a нема тачке између A и C, кажемо да су тачке A и C у равни α *с исте стране праве* a.



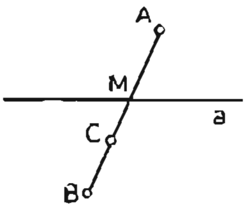
Сл. 51

Ако су тачке A и B равни α с исте стране праве a казаћемо такође да је тачка A с исте стране праве a као тачка B; ако су тачке A и B с разних страна праве a казаћемо и да је тачка A с оне стране праве a с које није тачка B. — Ако права a садржи полуправу или дуж, казаћемо такође да су тачке A и B с исте стране или с разних страна те полуправе или те дужи.

Теорема 10.6. *Ако су у равни* α *тачке* A *и* B *с разних страна праве* a *и такође тачке* A *и* C *с разних страна праве* a, *а* B *и* C *две разне тачке, тада су тачке* B *и* C *с исте стране праве* a.

Ако су у равни α *тачке* A *и* B *с исте стране праве* a *и такође* A *и* C *с исте стране праве* a, *а* B *и* C *две разне тачке, тада су и* B *и* C *с исте стране праве* a.

Ако су у равни α *тачке* A *и* B *с исте стране праве* a, *а* A *и* C *с разних страна праве* a, *тада су* B *и* C *с разних страна праве* a.

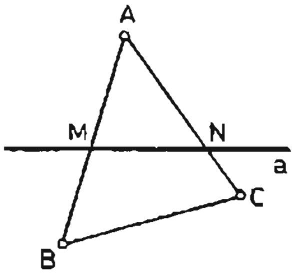


Сл. 52

Доказ. A, B, C су у сва три случаја три разне тачке. Претпоставимо прво да су све три на једној правој, тј. да је C на правој AB. У првом случају (сл. 52) постоји по дефиницији 10.4 на a тачка M тако да је $A-M-B$ и $A-M-C$, тј. по дефиницији 10.1 A и B, а такође A и C су на AB с разних страна тачке M. Дакле према теореми 10.1 B и C су с исте стране тачке M, па су по дефиницији 10.4 с исте стране праве a.

У другом случају су према дефиницији 10.1 и 10.4 A, B, C на AB с исте стране тачке M, дакле по дефиницији 10.4 B и C су с исте стране праве a.

У трећем случају су A и B с исте стране, а A и C с разних страна тачке M, дакле B и C су с разних страна праве a.



Сл. 53

Ако тачка C није на правој AB, постоје у првом случају према дефиницији 10.4 на правој a тачке M и N тако да је $A-M-B$ и $A-N-C$ (сл. 53). Тачке M и N су пресеци праве a са страницама AB и AC троугла ABC, дакле према теореми 7.12 права a не сече страницу BC, тј. по дефиницији 10.4 тачке B и C су с исте стране праве a.

У другом случају не постоје тачке M и N, тј. права a не сече странице AB и AC троугла ABC, дакле по теореми 7.13 не сече ни страницу BC, тј. тачке B и C су с исте стране праве a.

У трећем случају права a не сече страницу AB, али сече страницу AC троугла ABC, дакле по теореми 7.12 сече страницу BC, тј. тачке B и C су с разних страна праве a. — Тиме је доказ ове теореме завршен.

Ова последња теорема омогућује да се говори о мноштву тачака које су све, две по две, с исте стране једне праве. Дакле можемо дефинисати полураван.

Дефиниција 10.5. Укупност свих тачака које су у равни α с једне исте стране једне њене праве a називамо *полураван*, а праву a њеним *рубом*.

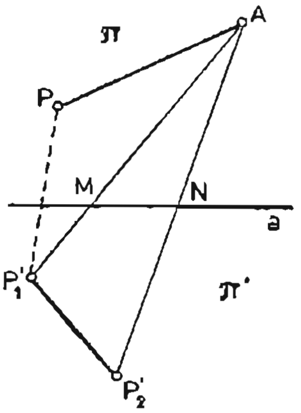
Полуравни обележавамо, као и равни, малим грчким словима, напр. π. Ако је a руб полуравни π, обележавамо такође и знаком $a\pi$.

Доносимо још следећу теорему:

Теорема 10.7. *Ако је* a *ма која права равни* α, *постоје у тој равни две полуравни којима је* a *заједнички руб и чије тачке су с разних страна праве* a. *Раван* α *се састоји из праве* a *и из тих двеју полуравни.*

Доказ. Нека је A тачка у равни α, ван праве a, а P ма која друга тачка у α, ван a (сл. 54). Права a сече дуж AP или нема с њом заједничких тачака. У првом случају писаћемо P' уместо P; дакле a сече дуж AP'.

Ако a нема с дужи AP заједничких тачака, нема на a ни тачке која би била између A и P, дакле A и све такве тачке P јесу по дефиницији 10.4 с исте стране праве a и по дефиницији 10.5 сачињавају полураван. Обележимо ову с π.



Сл. 54

Ако a сече дуж AP', нека су P'_1 и P'_2 две разне тачке P'. Како су A и P'_1, а исто тако A и P'_2 с разних страна праве a, према теореми 10.6 тачке P'_1 и P'_2 су с исте стране праве a, тј. све тачке P' су с исте стране праве a и сачињавају по дефиницији 10.5 опет полураван. Обележимо ову с π'.

π и π' су две полуравни у равни α, којима је a заједничка права. Како су A и P с исте стране праве a, а A и P' су с разних страна праве a, према теореми 10.6 тачке P и P' су с разних страна праве a.

Но свака тачка равни α, која је ван праве a, јесте или нека тачка P или нека тачка P', дакле раван α састоји се из праве a и двеју полуравни π и π'. — Тиме је цела теорема доказана.

Дефиниција 10.6. Ако је a права у једној равни, а φ и ψ обе полуравни којима је a заједнички руб, рећи ћемо да је та раван *разложена* правом a на полуравни φ и ψ.

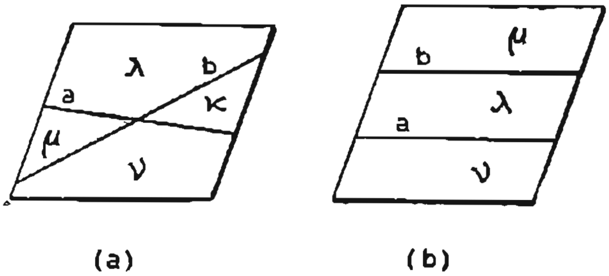
На темељу те дефиниције теорема 10.7 може се изрећи овим речима: *Свака права у једној равни разлаже ту раван на две полуравни.*

Две полуравни у једној равни могу имати два разна руба. То су две праве које се секу или које се не секу (сл. 55 a и b). О првом случају биће речи у § 11. Посматрање другог случаја остављамо читаоцу. Раван је тада подељена на три дела: две полуравни и једну траку. (Имајмо на уму да још нисмо дефинисали паралелне праве).

3. Најзад посматрајмо одговарајуће односе у простору.

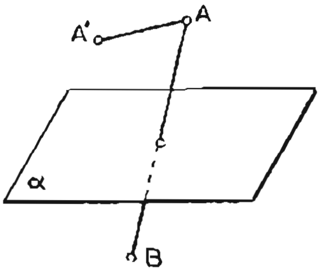
✱ **Дефиниција** 10.7. Ако је α нека раван, затим A и B две разне тачке изван равни α и ако раван α има тачку између A и B кажемо да су тачке *A и B са разних страна равни α* (сл. 56).

Ако су A и C две разне тачке изван равни α и ако раван α нема тачке између A и C кажемо да су тачке *A и C с исте стране равни α.*



(a) (b)

Сл. 55



Сл. 56

Ако су A и B с исте стране равни α казаћемо и да је тачка A с исте стране равни α као тачка B, ако су тачке A и B с разних страна равни α казаћемо и да је тачка A с оне стране равни α с које није тачка B.

Теорема 10.8. *Ако су тачке* A *и* B *с разних страна равни* α *и такође тачке* A *и* C *с разних страна равни* α, *а* B *и* C *две разне тачке, онда су* B *и* C *с исте стране равни* α.

Ако су тачке A *и* B *с исте стране равни* α *и такође тачке* A *и* C *с исте стране равни* α, *а* B *и* C *две разне тачке, тада су и* B *и* C *с исте стране равни* α.

Ако су тачке A *и* B *с исте стране равни* α, *а* A *и* C *с разних страна равни* α, *тада су* B *и* C *с разних страна равни* α.

Доказ. *A, B, C* су у сва три случаја три разне тачке. Ако су све три тачке на једној правој, нека је β ма која раван која садржи ту праву. Ако све три тачке нису на једној правој, нека је β раван *ABC*.

Ако се равни α и β не секу, раван α не сече дужи *AB, BC, CA*, дакле према дефиницији 10.6 имамо други случај теореме 10.8.

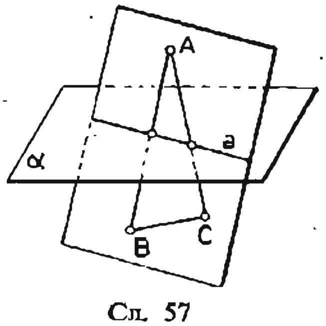
Ако се равни α и β секу, нека је *a* пресечна права (сл. 57). Тада су у првом, другом и трећем случају теореме 10.8 испуњени редом услови првог, другог и трећег случаја теореме 10.6 у односу на раван β, на тачке *A, B, C* и на праву *a*. Дакле вреде закључци теореме 10.6 а тиме и теореме 10.8.

Нека читалац изведе подробније овај доказ, посматрајући засебно поједине случајеве.

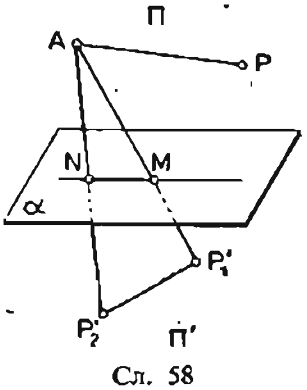
Сад можемо дефинисати полупростор, јер на основи теореме 10.8 можемо говорити о мноштву тачака које су све, две по две, с исте стране равни α.

Дефиниција 10.8. Укупност тачака које су с једне исте стране неке равни α називаћемо *полупростором* а раван α њеном *површи*.

Полупросторе обележавамо великим грчким словима, напр. П, а такође, ако је α површ полупростора П, знаком αП.



Сл. 57



Сл. 58

Теорема 10.9. *Ако је* α *ма која раван, постоје два полупростора којима је* α *заједничка површ и чије тачке су с разних страна равни* α. *Простор се састоји из равни* α *и из та два полупростора.*

Доказ је сличан доказу теореме 10.7 и произлази из овога кад се уместо праве *a* посматра раван α (сл. 58).

И за полуравни вреде напомене сличне онима које стоје иза доказа теореме 10.7.

Дефиниција 10.9. Ако су Φ и Ψ оба полупростора којима је раван α заједничка површ, рећи ћемо да је простор *разложен* том равни на полупросторе Φ и Ψ.

На темељу те дефиниције теорема 10.9 се може изрећи овако: *Свака раван разлаже простор на два полупростора.*

11. УГАОНА ЛИНИЈА.

1. Разни геометри су дефинисали угао врло различито, па ни сад још не постоји сагласност, не само у начину дефиниција, него ни у самом појму угла. По **Еуклеиду** „угао је међусобни нагиб двеју линија у равни, које се састају и не леже у истом правцу“. Како се реч „нагиб“ овде јавља у „Елементима“ први пут, овом дефиницијом није појам угла сведен на већ усвојене или објашњене појмове. Сем тога, у тој дефиницији је реч о линијама које би могле бити и криве, а у математици је довољно посматрати праволинијске углове, јер уместо угла образована двема кривим може се увек посматрати угао образован диркама тих кривих у њиховој заједничкој тачки. **Legendre** дефинише угао као разлику двају праваца (Елементи геометрије, 1794). E. Bézout (Безу) у свом „Течају математике“ (1812) дефинише угао као „величину окретања, које доводи један крак у положај другога“. Ни ове две дефиниције не можемо усвојити, јер прва се оснива на нејасном појму разлике двају праваца (или, тачније, смерова), а друга на недефинисаној „величини окретања“. Сем тога, Безуова дефиниција, као и неке друге, сличне, не одговара настојању да геометрију изградимо као науку о простору, у којој апстрахујемо од времена, дакле и од кретања. **Hankel** (Ханкл) у својој „Теорији комплексних бројева“ (1867) дефинише угао као „лик који образују два полузрака који полазе из једне тачке“. **Hilbert** (Основе геометрије, 1899) усваја у суштини исту дефиницију и дефинише угао као „систем двеју полуправих“ које „полазе из једне тачке а припадају разним правим“. L. **Bertrand** (Бертран) дефинише у свом делу „Ново развиће елементарног дела математике“ (1774) угао као део равни „који је заједнички полуравнима које су ограничене његовим крацима“. G. **Veronese** (Веронезе) предлаже у својим „Основама геометрије“ (1891) да се угао дефинише као укупност полуправих у равни, које су „између“ двеју полуправих са заједничким почетком.

Према двема последњим дефиницијама угао је површ или област, ограничена двема полуправим, а према двема дефиницијама које стоје испред њих угао се састоји из двеју полуправих и њихова заједничког почетка и у ствари је извесна изломљена линија, која има само једно теме. Ако угао схватимо као изломљену линију немамо могућности да разликујемо удубљен и испупчен угао. Ово можемо само ако угао дефинишемо као површ. И из других разлога потребно је говорити о углу као о површи. У ствари потребна су оба појма. Треба само изабрати за њих два разна назива. Тако можемо поменуту изломљену линију назвати **угаоном линијом**, а под **углом** подразумевати део равни, ограничен угаоном линијом; или можемо ту линију назвати **углом**, а одговарајући део равни **угаоном површи** (или **угаоном облашћу** равни). — Усвајамо оно прво. То чинимо већ и стога што одговара више обичној употреби речи „угао“. Напр. кад упоређујемо углове по величини и један угао назовемо већим од другога, не упоређујемо угаоне линије, него делове равни, који су њима ограничени. И кад сабирамо углове, сабирамо „угаоне површи“, а не саме линије. Исто је кад углове меримо.

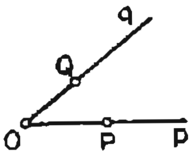
Према томе, прво ћемо дефинисати **угаону линију** и о њој изнети неке од најелементарнијих теорема. Затим ћемо у § 12 прећи на проучавање **угла** као равне површи.

„Углови“ који имају преко 360° нису уопште ликови у равни у обичном смислу речи. Можемо их схватити као делове извесних (логаритамских) Риманових површи, раширених „преко“ равни (види § 12, 8).

2. Усвајамо следећу дефиницију угаоне линије:

Дефиниција 11.1. Лик који се састоји из једне тачке O и двеју полуправих p и q којима је O заједнички почетак, а које припадају двема разним правим, називаћемо угаоном линијом. Тачку O називаћемо *теменом*, а полуправе p и q *крацима* те угаоне линије (сл. 59).

Угаону линију с теменом O и крацима p, q или с крацима OP, OQ обележаваћемо знаком pq или POQ.



Сл. 59

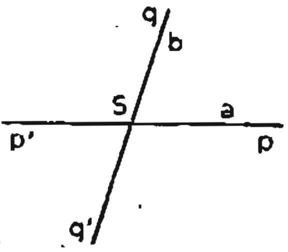
Доносимо пре, свега, ове теореме:

Теорема 11.1 *Свака уіаона линија је садржана у једној одређеној равни.*

Доказ. Како обе полуправе које образују угаону линију припадају двема разним правим које се секу у темену угаоне линије, постоји према теореми 7.10 једна и само једна раван којој те две праве припадају, дакле којој припадају и обе полуправе.

Теорема 11.2 *Ако се две ӣраве секу, њихова ӣресечна ѿачка је заједничко ѿеме за чеѿири уіаоне линије чији ћу краци садржани на ѿим ӣравим.*

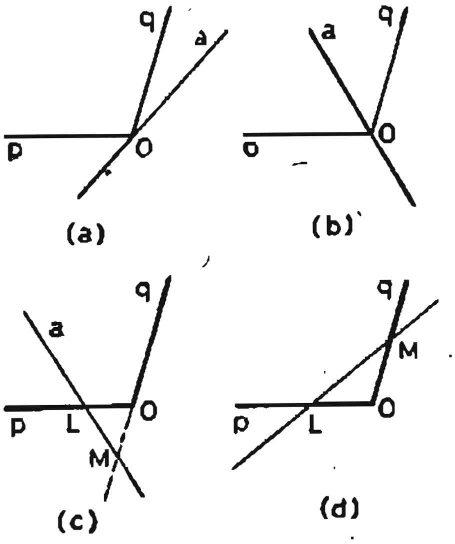
Доказ. Нека су a и b две праве које се секу у тачки S (сл. 60) Према теореми 10.2 тачка S разлаже праву a на две полуправе p и p' и разлаже праву b на две полуправе q и q'. По дефиницији 11.1 постоје четири разне угаоне линије: pq, pq', $p'q$, $p'q'$.



Сл. 60

3. Ако угаона линија има заједничких тачака с једном дужи или правом, садржаном у равни те угаоне линије, можемо у извесним случајевима рећи да се права и угаона линија секу. То нећемо рећи напр. у случају кад права пролази кроз теме угаоне линије а оба њена крака су с исте стране те праве. Доказујемо пре свега ову теорему:

Теорема 11.3. *Нека је уіаона линија pq садржана у равни α. Та уіаона линија и ӣрава садржана у равни α и која не садржи ниједан њен крак моіу имаѿи, највише, две заједничке ѿачке. Ако је заједничка ѿачка ѿеме уіаоне линије, оба крака уіаоне линије су с исѿе сѿране ѿе ӣраве или с разних сѿрана ѿе ӣраве. Ако имају две заједничке ѿачке, уіаона линија је с обеју сѿрана ѿе ӣраве.*



Сл. 61

Доказ. Према аксиоми II 1 права a, садржана у равни α и која не садржи полуправу p или q, може имати са сваком од двеју правих којима припадају полуправе p и q највише по једну тачку заједничку, дакле може имати с угаоним линијом pq највише две заједничке тачке (сл. 61). Ако је теме O угаоне линије pq заједничка тачка, права a сече обе праве којима припадају полуправе p и q у тачки O. Нека су λ и μ полуравни равни α, чији руб је права a. Све тачке полуправе p су у λ или у μ; исто вреди и за тачке полуправе q. Дакле полуправе p и q су обе у λ или у μ или једна је у λ, друга у μ, тј. p и q су с исте стране праве a или с разних страна те праве. Ако је једна тачка на p или на q заједничка тачка угаоне линије и праве a, ова права сече полуправу p или q, дакле угаона линија pq је с обеју страна праве a. Тиме је овај доказ завршен.

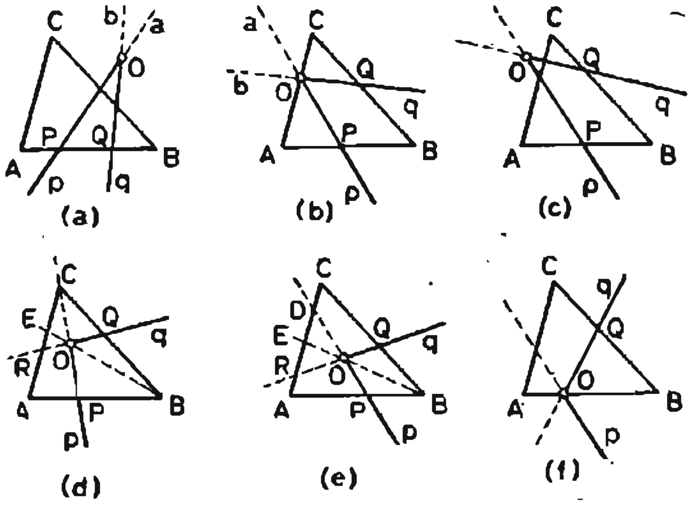
Саобразно овој теореми постављамо следећу дефиницију:

Дефиниција 11.2. Ако је права или дуж AB садржана у равни којој припада угаона линија pq и ако има само једну или две заједничке тачке с угаоном линијом pq, тако да је та угаона линија с разних страна праве AB, рећи ћемо да се права или дуж AB и та угаона линија *секу*.

Докажимо сад теорему о пресеку троугла угаоном линијом, која одговара Пашовој теореми (7.10).

Теорема 11.4. *Ако угаона линија pq, садржана у равни троугла* ABC, *сече једну његову страницу у једној тачки, а не садржи ни једно његово теме, та угаона линија сече странице тог троугла у најмање још једној тачки.*

Доказ. Нека је a права којој припада крак p, а b права којој припада крак q угаоне линије. Ако дуж AB сече угаону линију у двема тачкама (сл. 62а), предложена теорема је на основи теореме 11.3 већ доказана. Нека дакле дуж AB сече само један крак угаоне линије, рецимо p, у извесној тачки P. По теореми 7.12 права a пролази кроз C или сече једну од дужи AC и BC, рецимо дуж AC у извесној тачки D. Како угаона линија не пролази кроз C, постоје ова три случаја:



Сл. 62

1) Тачка D се поклапа с теменом O угаоне линије (сл. 62 b). Тада права b сече страницу AC троугла ABC у тачки O, дакле, по теореми 7.12 сече и његову страницу AB или BC у извесној тачки Q. Ако је полуправа q с оне стране праве AC с које није тачка B, полуправе p и q су по теореми 10.6 с разних страна праве AC, јер су p и C с исте стране те праве, дакле тада угаона линија сече страницу AC у тачки D. Ако је полуправа q с оне стране праве AC с које је тачка B, тачка Q припада правој q, дакле угаона линија сече у тачки Q страницу BC троугла ABC. Страницу AB не може сећи по претпоставци. Дакле у посматраном случају предложена теорема је доказана.

2) Тачка D припада полуправој p (сл. 62 c). Тада је D тачка ван AB, заједничка троуглу ABC и полуправој p, дакле теорема је опет доказана.

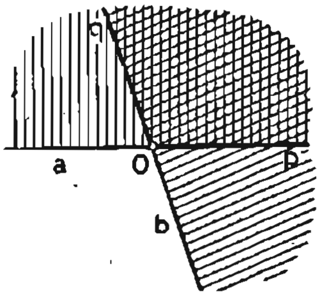
3) Тачка C, односно D није на полуправој p, тј. тачке P и C одн. P и D су на a с разних страна тачке O, дакле полуправа p има с троуглом ABC само тачку P заједничку (сл. 62, d и e). Докажимо прво да је тада тачка O у троуглу ABC.

Ако је $P-O-C$, тачка O је у троуглу ABC по дефиницији 7.2. Претпоставимо да је $P-O-D$. Како је такође $A-P-B$, по аксиоми I 5 постоји тачка E тако да је $B-O-E$ и $A-E-D$. Из $A-D-C$ и $A-E-D$ следује по теореми 6.14 $A-E-C$, тј. O је између темена B и унутарње тачке E странице AC троугла ABC, дакле по дефиницији 7.2 O је опет у троуглу ABC.

Како права b пролази кроз тачку O садржану у троуглу ABC, по теореми 7.14 има с тим троуглом две заједничке тачке, рецимо Q и R, тако да је $Q-O-R$, тј. једна од тих тачака, рецимо Q припада полуправој q. Дакле и у овом трећем случају угаона линија pq има с троуглом ABC, сем тачке P, још једну заједничку тачку Q.

Остаје да посматрамо случај кад, саобразно дефиницији 11.2 дуж AB садржи теме O угаоне линије а краци p и q су с разних страна праве AB (сл. 62 f). Нека је q с оне стране праве AB с које је тачка C. Права b, која садржи полуправу q, сече страницу AB троугла ABC, дакле према теореми 7.12 пролази кроз C или сече још једну страницу, рецимо BC у тачки Q. Како су C и Q с исте стране праве AB, и то с оне с које је q, полуправа q садржи тачку C, односно Q. Тиме је теорема и у овом случају, дакле у целини доказана.

4. Дефинишимо што треба да значи *у* угаоној линији *ван* угаоне линије и *на* угаоној линији. Од разних могућих дефиниција усвајамо следећу:

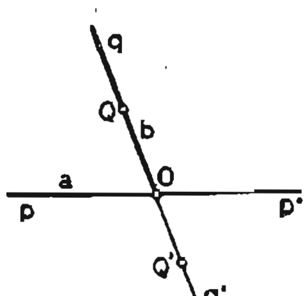


Сл. 63

Дефиниција 11.3. Нека крак p угаоне линије pq припада правој a а крак q правој b. За тачку у равни те угаоне линије, која је с оне стране праве a с које је крак q и уједно с оне стране праве b с које је крак p, рећи ћемо да је *у угаоној линији* pq.

За тачку која припада самој угаоној линији pq, рећи ћемо и да је *на* тој угаоној линији, а за тачку која није ни на угаоној линији pq ни у њој рећи ћемо да је *изван* те угаоне линије (сл. 63).

У следећим теоремама примењују се изрази „у“ и „ван“ угаоне линије:



Сл. 64

Теорема 11.5. *Нека крак* p *угаоне линије* pq *припада правој* a, *крак* q *правој* b. *Тачке које су изван те угаоне линије јесу или с оне стране праве* a *с које није крак* q *или с оне стране праве* b *с које није крак* p.

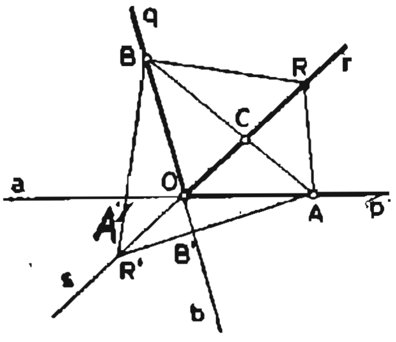
Доказ. По дефиницији 11.3 тачка која је изван угаоне линије pq није уједно с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p, дакле или је с оне стране праве a с које није q или с оне стране праве b с које није p.

Теорема 11.6. *Продужења кракова једне угаоне линије јесу изван те угаоне линије.*

Доказ. Нека су a и b праве којима припадају редом краци p и q угаоне линије pq (сл. 64). Те праве се секу у темену O угаоне линије. Ако је Q тачка на краку q, а Q' на његову продужењу q', O је између Q и Q', дакле Q и Q' су с разних страна праве a, тј. q' је с оне стране праве a с које није q. Исто тако продужење p' крака p је с оне стране праве b с које није крак p. Дакле, по дефиницији 11.3 продужења p' и p' су изван угаоне линије pq.

Теорема 11.7. *Полуйрава* r *која йолази из шемена* O *уїаоне линије* pq *и садржана је у шој уїаоној линији, сече сваку дуж која сйаја једну шачку на* p *с једном шачком на* q.

Обрашно: Ако йолуйрава r, *која йолази из* O, *сече дуж која сйаја извесну шачку на* p *с извесном шачком на* q, *йолуйрава* r *је у уїаоној линији* pq.



Сл. 65

Доказ. Докажимо прво да полуправа садржана у угаоној линији pq, сече дуж AB која спаја тачку A на p с тачком B на q (сл. 65). Нека је s права којој припада r, затим R тачка на r, а R' тачка на продужењу полуправе r, тј. тако да је $R-O-R'$. Како је r у угаоној линији pq, тачке A и R су с исте стране праве b, којој припада q, дакле права b не сече дуж AR. Исто тако права a не сече дуж BR. Но права b сече страницу RR' троугла $RR'A$ у тачки O, дакле, како не сече страницу AR, по теореми 7.12 сече страницу AR' у извесној тачки B'. Права a пак сече страницу RR' троугла $RR'B$ у тачки O, дакле, како не сече страницу BR, по теореми 7.12 сече страницу BR' у извесној тачки A'.

Дакле имамо $A-B'-R'$ и $B-A'-R'$, а отуд по теореми 6.13 постоји тачка између A и A' и између B и B'. Ово је тачка O, дакле имамо $A-O-A'$ и $B-O-B'$. Како је $B-A'-R'$ и $A-O-A'$, тачке B и A су с исте стране праве s, а A и A' су с разних страна те праве. Дакле по теореми 10.6 A и B су с разних страна праве s, тј. по дефиницији 10.3 права s сече дуж AB у извесној тачки C.

Како је $A-C-B$, тачке B и C су с исте стране праве a, дакле C је с оне стране праве a с које је q. Исто тако C је с оне стране праве b с које је p. Дакле C је у угаоној линији pq и према томе на полуправој r, тј. r сече дуж AB.

Докажимо у други део теореме. Нека полуправа r сече дуж AB која спаја тачку A на p с тачком B на q, у извесној тачки C. Тачке B и C су с исте стране праве a, дакле C је с оне стране праве a с које је q и, исто тако, с оне стране праве b с које је p, дакле C је у угаоној линији pq. Како је цела полуправа r с истих страна правих a и b с којих је C, ово исто вреди за r, тј. полуправа r је у угаоној линији pq. — Тиме је теорема доказана.

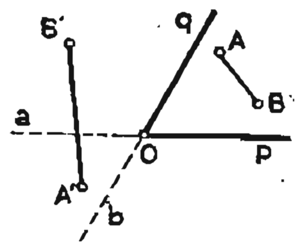
Теорема 11.8. *Ако су* A *и* B *две шачке у уїаоној линији* pq, *цела дуж* AB *је у шој уїаоној линији. Ако је* A *на краку* p, B *на краку* q, *свака унушарња шачка дужи* AB *је у уїаоној линији* pq.

Ако су A' *и* B' *изван уїаоне линије* pq, *дуж* A'B' *је изван ше уїаоне линије или сече оба њена крака, или садржи њено шеме шако да су јој краци* p *и* q *с исше сшране йраве* A'B'.

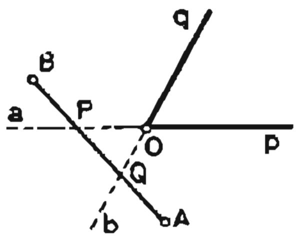
Ако је шачка A'' *у уїаоној линији* pq, *а* B'' *шачка изван ње, дуж* A''B'' *сече један и само један њеїов крак или йак сече уїаону линију* pq *йролазећи кроз њено шеме.*

Доказ. Ако су A и B тачке у угаоној линији pq, тада су A и B с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p. На темељу дефиниције 11.3 то вреди за сваку тачку дужи AB, тј. дуж AB је у угаоној линији pq (сл. 66). Ако је тачка A на краку p, а B на q, на темељу дефиниције 11.3 свака унутарња тачка дужи AB је с оне стране праве b с које је p и с оне стране праве a с које је q, тј. у угаоној линији pq.

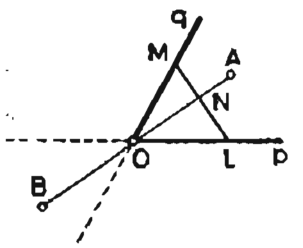
Ако су A и B изван линије pq, према дефиницији 11.3 постоје ове могућности: 1) Обе тачке A и B су с оне стране праве a с које није q или су с оне стране праве b с које није p (на слици 66 тачке A, B). 2) Само једна од тачака A, B је с оне стране праве a с које није q, а само друга с оне стране праве b с које није p. У првом случају цела дуж AB је с дотичне једне исте стране праве a или b, дакле изван угаоне линије pq. У другом случају нека је A с оне стране праве a с које није q, а B с оне стране праве b с које није p. Како је при томе A с оне стране праве b с које је p, а B је с оне стране праве a с које је q, тачке A и B су с разних страна праве a и праве b. Нека су P и Q тачке у којима дуж AB сече праву a одн. b (сл. 67).



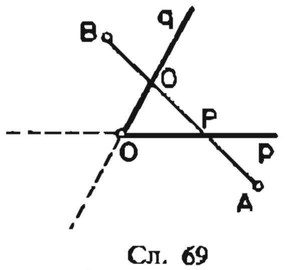
Сл. 66



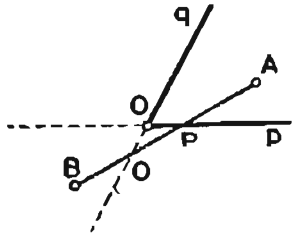
Сл. 67



Сл. 68



Сл. 69



Сл. 70

Ако се P и Q поклапају с теменом O угаоне линије pq, краци p и q су с исте стране праве AB. Кад би наиме биле с разних страна те праве, ова би секла извесну дуж LM (сл. 68) која спаја тачку L на p с тачком M на q и то у једној тачки N, дакле полуправа на правој AB, која садржи тачку N а полази из O била би по теореми 11.7 у угаоној линији pq. Како на правој AB једна од обеју полуправих с почетком у O садржи тачку A, друга тачку B (јер је $A—O—B$), једна од тачака A и B била би у pq, супротно претпоставци. Дакле краци p и q су с исте стране праве AB, као што се у предложеној теореми тврди.

Нека су P и Q разне тачке. Ако је P на краку p (сл. 69), тачке B и P су с разних страна праве b, дакле тачка Q у којој дуж AB сече праву b је између B и P. Према томе B и Q су с исте стране тачке P, дакле с исте стране праве a. Но B је с оне стране праве a с које је q, дакле тачка Q је на q. Према томе, ако је P на p, Q је на q, тј. дуж AB сече оба крака линије pq, или не сече ни један. Тиме је и други део теореме доказан.

Нека је A у угаоној линији pq а B ван те линије. Тада је тачка B с оне стране праве a с које није крак q, или је (уједно или не) с оне стране праве b с које није крак p. Претпоставимо да је оно прво. Тада су A и B с разних страна праве a, тј. a сече дуж AB у извесној тачки P (сл. 70). Ако су при томе A и B с исте стране праве b, тј. с оне с које је p, дуж AB сече крак p у P, а не сече праву b, дакле нити крак q. Према томе дуж AB сече само крак p угаоне линије pq.

Ако су A и B уједно с разних страна праве b, дуж AB сече и праву b у извесној тачки Q. Ако се P и Q поклапају с теменом O (сл. 68), дуж AB садржи тачку O. Како је полуправа OA у угаоној линији pq, према теореми 11.7 сече једну дуж LM која спаја тачку L на полуправој p с тачком M на полуправој q, према томе L и M су с разних страна праве AB, дакле p и q су такође с разних страна. Дакле, по дефиницији 11.2 дуж AB сече угаону линију pq у O.

Нека су P и Q разне тачке. Како су обе на дужи AB, према теореми 6.15 је $A-P-Q$ или $A-Q-P$. Ако је $A-P-Q$, тачке A и Q су с разних страна праве a (сл. 70), па како је A с оне стране праве a с које је q, тачка Q је на продужењу крака q. Но како је $A-P-Q$, тачка P је с оне стране праве b с које је A, тј. на краку p. Ако је пак $A-Q-P$, показује се исто тако да је P на продужењу крака p, а Q на краку q. Дакле у оба ова случаја дуж AB сече само један крак угаоне линије pq.

Тиме је теорема 11.8 у целини доказана.

Ослањајући се о претходну теорему, доказујемо следећу, обрнуту теорему.

Теорема 11.9. *Ако дуж* AB *не сече угаону линију* pq, *нити је на њој, тачке* A *и* B *су обе у тој угаоној линији, или обе изван ње. Ако дуж* AB *сече угаону линију* pq *у једној тачки, једна од тачака* A, B *је у тој угаоној линији а друга изван ње. Ако дуж* AB *сече угаону линију* pq *у двема тачкама, тачке* A *и* B *су обе изван те угаоне линије.*

Доказ. Нека дуж AB не сече угаону линију pq. Ако тачке A и B не би биле обе у угаоној линији pq или обе ван те угаоне линије, била би једна у угаоној линији pq, а друга ван ње, дакле, према теореми 11.8 дуж AB би секла угаону линију pq у једној тачки, противно претпоставци. Слично се доказују и остала два тврђења.

5. Угаона линија разлаже, слично правој, раван на два дела: на укупност тачака које су у угаоној линији и на оне које су изван ње. За две тачке, садржане у равни једне угаоне линије, а које не припадају њој, можемо такође дефинисати изразе „с исте стране“ и „с разних страна“ угаоне линије, као што смо дефинисали у односу на праву. Дефиницију постављамо независно од дефиниције 11.3.

Дефиниција 11.4. Ако су A и B две тачке у равни угаоне линије pq, а које нису на њој, и ако постоји у тој равни трећа тачка C тако да дужи AC и BC немају заједничких тачака с угаоном линијом pq, рећи ћемо да су A и B *с исте стране* угаоне линије pq.

Ако не постоји таква тачка C, рећи ћемо да су тачке A и B *с разних страна* угаоне линије pq.

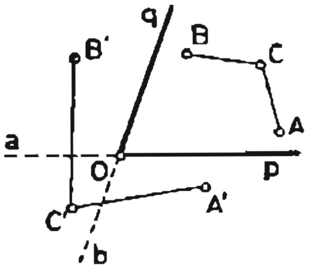
Спомињемо прво следећу теорему:

Теорема 11.10. *Ако дуж* AB, *садржана у равни угаоне линије* pq, *нема заједничких тачака с том угаоном линијом, тачке* A *и* B *су с исте стране те угаоне линије.*

Доказ. Нека је C ма која тачка између A и B. Како дуж AB нема заједничких тачака с pq, немају према теореми 6.20 ни дужи AC и BC заједничких тачака с pq, дакле по дефиницији 11.4 A и B су с исте стране угаоне линије pq.

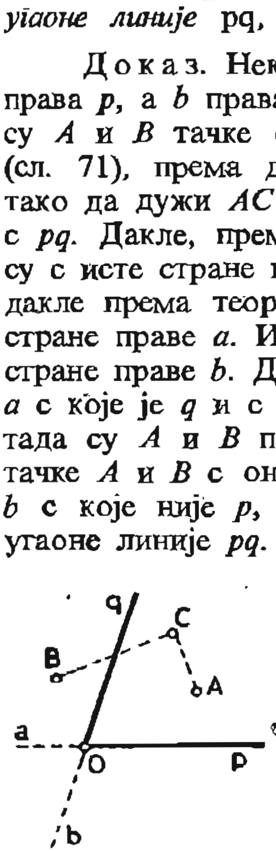
У двема следећим теоремама доводе се у везу изрази „у“ и „ван“ угаоне линије и изрази уведени дефиницијом 11.4.

Теорема 11.11. *Ако су* A *и* B *две тачке с исте стране угаоне линије* pq, *обе су у* pq *или су обе изван* pq. *Ако су тачке* A *и* B *с разних страна угаоне линије* pq, *једна је у* pq, *друга изван* pq.



Сл. 71

Доказ. Нека је a права којој припада полуправа p, а b права којој припада полуправа q. Ако су A и B тачке с исте стране угаоне линије pq (сл. 71), према дефиницији 11.4 постоји тачка C тако да дужи AC и BC немају тачака заједничких с pq. Дакле, према дефиницији 10.4 тачке A и C су с исте стране праве a и тако исто тачке C и B, дакле према теореми 10.6 тачке A и B су с исте стране праве a. Исто тако су тачке A и B с исте стране праве b. Дакле, A и B су с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p, а тада су A и B према дефиницији 11.3 обе у угаоној линији pq. Или су тачке A и B с оне стране праве a с које није q, и с оне стране праве b с које није p, а тада су према дефиницији 11.3 тачке A и B изван угаоне линије pq.



Сл. 72

Ако су A и B с разних страна угаоне линије pq (сл. 72) не постоји таква тачка C. — Претпоставимо да је тачка A у pq и докажимо да је тада B изван pq. Кад би, наиме, и тачка B била у pq, биле би према дефиницији 11.3 тачке A и B с исте стране праве a и с исте стране праве b, дакле према дефиницији 10.4 дуж AB не би имала заједничких тачака с a и b, дакле ни с угаоном линијом pq. Према теореми 11.10 тачке A и B биле би с исте стране угаоне линије pq, што се противи претпоставци. Дакле тачка B је ван угаоне линије pq.

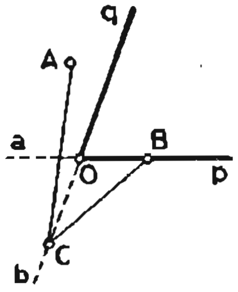
Ако је тачка A изван pq, доказује се аналого да је тачка B у угаоној линији pq.

Теорема 11.12. *Ако су* A *у* B *две тачке у угаоној линији* pq *или изван* pq, *тада су* A *и* B *с исте стране те угаоне линије. Ако је* A *у* pq, *а* B *изван* pq, *тачке* A *и* B *су с разних страна те угаоне линије. Ако је* A *у* pq *или ван* pq, *а* B *на* pq, *постоји у равни те угаоне линије тачка* C *тако да дужи* AC *и* BC *немају сем тачке* B *заједничких тачака с том угаоном линијом.*

Доказ. Први и други део теореме следују непосредно из теореме 11.11.

Ако је тачка A у угаоној линији pq, а B на тој угаоној линији, дуж AB је, сем можда тачке B, на основу дефиниције 11.3 у угаоној линији pq.

Ако је тачка A ван угаоне линије pq, рецимо да је тачка B на краку p (сл. 73). Ако је тада A с оне стране праве a с које није q, дуж AB има с краком p само тачку B заједничку, а нема заједничке тачке с q, дакле свака тачка C између A и B задовољава услове тврђења које доказујемо. Ако је A с оне стране праве a с које је q, а с оне стране праве b с које није p, нека је C тачка на продужењу крака q. Тада опет AC и BC немају, сем тачке B, заједничке тачке с угаоном линијом pq. Слично је ако је тачка B на q. Ако се B поклапа с тачком O, дуж AB је, сем тачке B, заједно с тачком A с оне стране праве a с које није p, дакле дуж AB је, сем тачке B, цела изван угаоне линије pq. Тиме је и трећи део теореме доказан.



Сл. 73

12. УГАО.

1. На темељу израза „с исте стране угаоне линије“ пружа нам се проста дефиниција угла као равне површи, и могућност да разликујемо удубљене, испупчене и опружене (или равне) углове.

Опружен угао ћемо дефинисати као укупност једне полуравни и праве која је њен руб, али једну тачку на тој правој називаћемо теменом, а обе полуправе p и q, на које је та права разложена теменом O, крацима тог опруженог угла. Праву разложену на полуправе p и q обележаваћемо при томе знаком pq, као и угаоне линије.

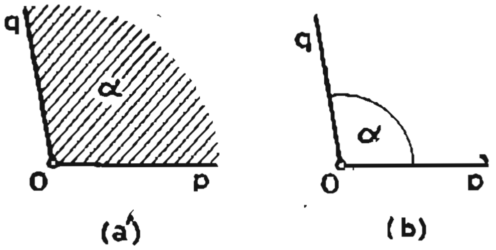
Дефиниција 12.1. Нека су p и q у извесној равни α две полуправе са заједничким почетком O и које сачињавају, заједно с тачком O, угаону линију или праву pq.

Укупност тачака те угаоне линије или те праве pq и свих тачака равни α, које су с једне исте стране те угаоне линије или те праве, називаћемо *угао*.

Заједнички почетак полуправих p и q називаћемо *теменом* тог угла, полуправе p и q његовим *крацима*, а угаону линију или праву pq његовим *рубом*.

За тачке угла које не припадају његову рубу, рећи ћемо да су *у* углу, а за тачке које су са супротне стране руба рећи ћемо да су *изван* угла. Укупност тачака које су у углу називаћемо његовом *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван угла, његовом *спољашњошћу*.

Дакле, угао се састоји из своје унутрашњости и свога руба.



Сл. 74

Углове ћемо обележавати малим грчким словима (као и равни и полуравни). Ако је O теме, а p и q, или пак OP и OQ краци, угао ћемо обележавати и знаком $\sphericalangle pq$ одн. $\sphericalangle POQ$. Овим знацима угао није једнозначно одређен, јер постоје два угла с крацима p и q. Кад год се нарочито не истакне, под углом $\sphericalangle POQ$ се подразумева удубљен угао.

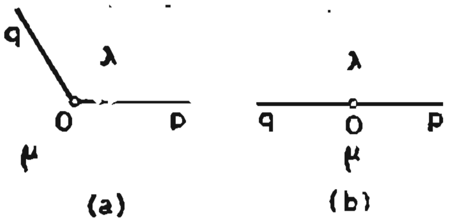
У слици 74a угао α је назначен „осенченим“ делом равни, а у слици 74b на други, често примењивани начин, тј. луком круга са средиштем у темену O и који спаја тачке на крацима p и q.

Докажимо пре свега ову теорему:

Теорема 12.1. *Угао коме је руб угаона линија* pq *састоји се из те угаоне линије и свих тачака које су у тој угаоној линији или које су изван те угаоне линије. Угао коме је руб права* pq, *састоји се пак из те праве и једне полуравни којој је та права руб.*

Доказ. Ако је руб угла угаона линија pq, према дефиницији 12.1 угао $\sphericalangle pq$ се састоји из угаоне линије pq и из свих тачака које су с једне исте стране те угаоне линије, а према теореми 11.11 то значи да се састоји из те угаоне линије и из свих тачака које су у тој угаоној линији или које су изван те угаоне линије. Ако је руб угла права pq, по дефиницији 12.1 угао $\sphericalangle pq$ се састоји из те праве и из свих тачака које су с једне исте стране те праве, а по дефиницији 10.5 то значи да се састоји из те праве и из једне полуравни којој је та права руб.

Према претходној теореми разликујемо удубљене, испупчене и опружене углове.



Сл. 75

Дефиниција 12.2. Угао који се састоји из тачака на једној угаоној линији и у њој називаћемо *удубљеним* или *конкавним*; угао који се састоји из тачака на једној угаоној линији и ван ње називаћемо *испупченим* или *конвексним*; а угао који се састоји из полуравни и њеног руба називаћемо *опруженим* углом.

У слици 75a λ је удубљен, μ испупчен угао, а у слици 75b λ и μ су опружени углови.

Напомена. Удубљен угао је у ствари испупчен део равни, а испупчен угао је удубљен део равни. Кад ипак говоримо о удубљеним и о испупченим угловима, замишљамо као да дотичну угаону линију посматрамо у оба случаја из унутрашњости дотичног угла.

Докажимо сада прво ове три теореме:

Теорема 12.2. *Нека су* a *и* b *праве којима припадају редом краци* p *и* q *удубљеног угла* $\sphericalangle$pq. *Унутрашњост тог угла* $\sphericalangle$pq *састоји се из свих тачака које су с оне стране праве* a *с које је крак* q *и с оне стране праве* b *с које је крак* p.

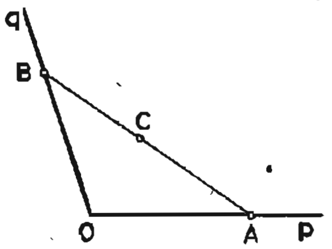
Доказ. Према дефиницији 12.1 унутрашњост удубљеног угла $\sphericalangle pq$ састоји се из тачака које су у угаоној линији pq. Но по дефиницији 11.3 тачке у тој угаоној линији јесу с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p. Дакле унутрашњост угла $\sphericalangle pq$ састоји се из тачака које су с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p.

Теорема 12.3. *Ако је* A *тачка на краку* p *и* B *тачка на краку* q *удубљеног угла* $\sphericalangle$pq, *све тачке између* A *и* B *и само те тачке праве* AB *јесу у том углу.*

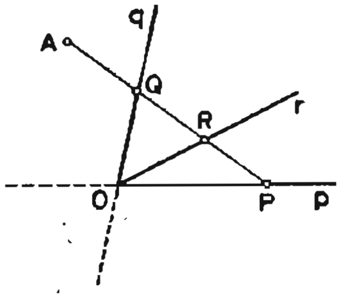
Доказ. Нека је O-теме угла, C тачка између A и B (сл. 76). Према дефиницији 10.3 тачке B и C су с исте стране праве OA, дакле C је с оне стране с које је q. Исто тако, C је с оне стране праве OB с које је p.

Дакле према теореми 12.2 C је у удубљеном углу $\sphericalangle pq$. Обрнуто: ако је C на AB, у углу $\sphericalangle pq$, тада је C, према теореми 12.2 с оне стране праве OA с које је q и с оне стране праве OB с које је p, те на основу дефиниције 10.4 није $B-A-C$, нити је $A-B-C$, дакле је $A-C-B$.

Теорема 12.4. *Ако полуправа* r *полази из темена удубљеног угла* $\sphericalangle$pq *и садржана је у том углу, тада су и удубљени углови* $\sphericalangle$pr *и* $\sphericalangle$qr *садржани у том углу.*



Сл. 76



Сл. 77

Доказ. Докажимо да је ма која тачка A, која је садржана у удубљеном углу $\sphericalangle pr$, садржана такође у удубљеном углу $\sphericalangle pq$. Докажимо прво да је A с оне стране праве b, која садржи полуправу q, с које је ма која тачка P на полуправој p. Кад би, напротив, тачке A и P биле са разних страна праве b, постојала би на b тачка Q тако да би било $A-Q-P$. Но према теореми 12.2 тачка A је с оне стране праве a, која садржи полуправу p, с које је полуправа q, а по дефиницији 10.4 тачке A и Q су с исте стране праве a, дакле тачка Q је на полуправој q.

Како је тачка P на полуправој p, а Q на q, полуправа r, која је у удубљеном углу $\sphericalangle pq$, сече према теореми 11.7 дуж PQ у извесној тачки R, тј. имамо $P-R-Q$, па како је $P-Q-A$, према теореми 6.14 је такође $P-R-A$. Дакле према теореми 12.3 тачка A није у удубљеном углу $\sphericalangle pr$, супротно претпоставци. Тиме је доказано да је тачка A с оне стране праве b, с које је полуправа p.

Сем тога, тачка A је према теореми 12.2 с оне стране праве a с које је полуправа r, јер је у удубљеном углу $\sphericalangle pr$. Но r је у удубљеном углу $\sphericalangle pq$, дакле с оне стране праве a с које је полуправа q. Дакле према теореми 10.6 тачка A је с оне стране праве a с које је полуправа q.

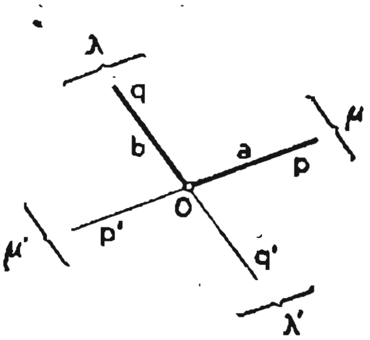
Како је тачка A с оне стране праве a с које је q и с оне стране праве b с које је p, тачка A је према теореми 12.2 у удубљеном углу $\sphericalangle pq$, па како је A ма која тачка у удубљеном углу $\sphericalangle pr$, унутрашњост овог угла $\sphericalangle pr$ је садржана у удубљеном углу $\sphericalangle pq$. Сем тога, краци p и r су садржани у том углу $\sphericalangle pq$, дакле цео удубљени угао $\sphericalangle pr$ садржан је у удубљеном углу $\sphericalangle pq$.

2. Неке теореме о тачкама у угаоној линији и ван ње преносе се непосредно на угао. Нећемо их све наводити. Докажимо напр. следећу теорему:

Теорема 12.5. *Две праве које се секу одређују четири удубљена угла чији краци припадају тим правим. Свака тачка равни, која је ван тих правих, припада једном и само једном од та четири угла.*

Доказ. Нека су a и b те праве, O тачка пресека, ρ раван. Према теореми 10.2 тачка O разлаже праву a на две полуправе p и p', а праву b

на две полуправе q и q'. Према дефиницији 10.6 права a разлаже раван ρ на две полуравни λ и λ' и то, рецимо, λ садржи полуправу a, λ' полуправу q', исто тако права b разлаже раван ρ на две полуравни μ и μ' и то, рецимо, μ садржи полуправу p, μ' полуправу p' (сл. 78). Према томе, све тачке равни ρ, које су ван правих a и b, могу се поделити у четири групе: у тачке заједничке полуравнима λ и μ, затим полуравнима λ и μ', затим μ' и λ' и најзад полуравнима μ' и λ. Према дефиницијама 11.3 и 12.2 то су унутрашњости четири удубљена угла: $\sphericalangle pq$, $\sphericalangle pq'$, $\sphericalangle p'q'$, $\sphericalangle q'p$.



Сл. 78

Дакле постоје та четири удубљена угла. Унутрашње тачке двају разних углова јесу с разних страна праве a или праве b, дакле свака тачка равни, која је ван a и b, припада само једном од та четири угла.

На темељу следеће теореме можемо дефинисати разлагање равни угаоном линијом.

Теорема 12.6. *У равни α угаоне линије* pq *постоје два угла, један удубљен, други испупчен, којима су* p *и* q *заједнички краци, а угаона линија* pq *заједнички руб. Та два угла немају ван угаоне линије* pq *заједничких тачака, а раван α се састоји из та два угла.*

Доказ. По дефиницији 11.3 раван α се састоји из тачака у угаоној линији pq, на тој угаоној линији и ван ње. По дефиницији 11.6 тачке на угаоној линији pq и у тој угаоној линији сачињавају удубљени угао $\sphericalangle pq$, а тачке на pq и ван pq сачињавају испупчени угао $\sphericalangle pq$. Дакле постоје два угла о којима говори ова теорема, а раван α се састоји из та два угла. Како по дефиницији 11.3 тачка која је у угаоној линији pq, није изван ње, нити је обратно, оба та угла немају ван pq заједничких тачака.

Дефиниција 12.3. Ако је pq угаона линија у једној равни и ако су λ и μ углови којима је pq заједнички руб, рећи ћемо да је та раван *разложена* угаоном линијом pq на углове λ и μ.

Сад можемо на основу теореме 12.6, а затим дефиниције 10.6 и теореме 10.7 изрећи следећу теорему:

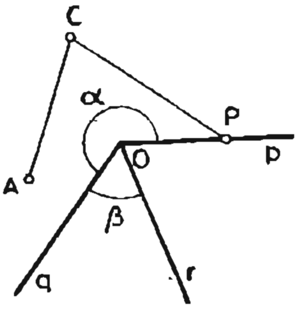
Теорема 12.7. *Свака угаона линија разлаже раван којој припада на два угла, један удубљен и један испупчен.*

Свака права у једној равни, разложена једном својом тачком на две полуправе p *и* q, *разлаже ту раван на два опружена угла којима су* p *и* q *заједнички краци.*

3. Углови могу имати узајамно разне положаје. Посматрају се нарочито два угла у једној равни, којима је теме заједничко, и разликују пре свега суседни, напоредни и унакрсни углови. Нећемо захтевати да два суседна угла буду оба удубљена. Стога је пре дефиниције потребно доказати ову теорему:

Теорема 12.8. *Нека су у једној равни* p, q, r *три полуправе са заједничким почетком. Постоји само један угао са крацима* p, q *и само један угао с крацима* q, r *тако да та два угла немају ван заједничког крака* q *заједничких тачака.*

Доказ. Према теореми 10.6 и 12.6 постоје два угла с крацима p и q, било да p и q припадају једној правој или не. Полуправа r нема заједничких тачака с p, q и према дефиницији 10.2 не садржи тачку O, дакле, ако p и q припадају једној правој, r је у једној од двеју полуравни, ако пак p и q не припадају једној правој, r је према теореми 11.9 у угаоној линији pq или ван ње. Дакле r је према дефиницији 11.8 у једном од та два угла. Нека је α онај у коме је r. Постоје исто тако два угла с крацима q, r; нека је β онај у коме није p (сл. 79).



Сл. 79

Углови α и β имају заједнички крак q. Нека је A унутрашња тачка угла α, а P тачка на његову краку p. Према теореми 11.11 постоји у равни тог троугла тачка C тако да дужи AC и PC немају, сем P, заједничких тачака с угаоном линијом pq. Како је A у углу α, те дужи су према теореми 11.9 целе у α. Но како је r, изван α, дужи AC и PC немају заједничких тачака ни с r, дакле ни с угаоном линијом qr. Према томе, по теореми 11.11 A и P су обе у угаоној линији qr или су обе ван те угаоне линије, па како је P ван β, и A је ван β. Ово је тим пре ако p и q припадају једној правој или ако q и r припадају једној правој.

Дакле свака тачка A која је у унутрашњости угла α, налази се изван угла β, тј. α и β немају заједничких тачака ван крака q.

Нека је сад α' онај угао с крацима p и q у коме је крак r. Како α' и оба угла с крацима q и r имају заједничку не само полуправу q, већ и r, α' не испуњава услове ове теореме, дакле α је једини угао с крацима p и q, који испуњава те услове. Исто тако је β једини угао с крацима q и r који испуњава те услове. — Тиме је ова теорема доказана.

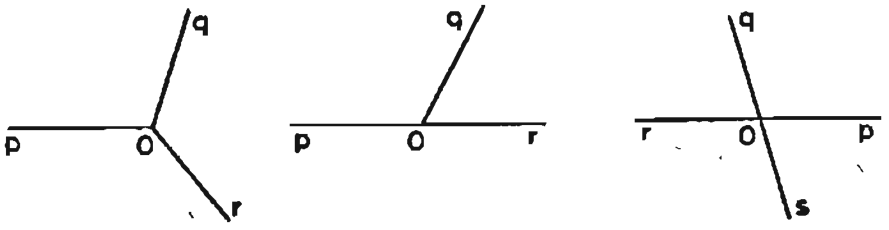
Дефиниција 12.4. Два угла с једним заједничким краком и који ван тог крака немају заједничких тачака, зваћемо *суседним угловима*.

У слици 79 α и β су два суседна угла. Напоредни и унакрсни углови су по својој природи удубљени углови и зато их можемо дефинисати овако:

Дефиниција 12.5. Два суседна удубљена угла којима она два крака која нису заједничка, припадају једној правој, зваћемо *напоредним угловима*.

Два удубљена угла, која имају само теме заједничко, а краци, два по два, образују две праве, зваћемо *унакрсним угловима*.

У слици 80а $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ су суседни углови ($\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ су такође). У слици 80б $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ су напоредни углови ($\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ нису). У слици 80в $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle rs$ су унакрсни углови ($\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle ps$ су такође).



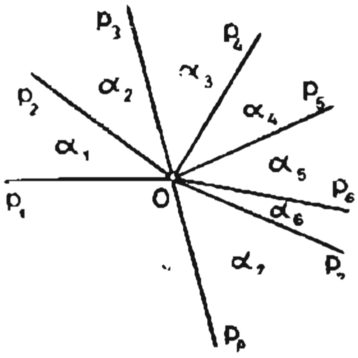
Сл. 80 – а – б – в

Како реч „упоредно“ значи „паралелно“, потребно је, да би се избегли неспоразуми, назвати углове у првом делу дефиниције 12.5 другим називом — напоредним угловима.

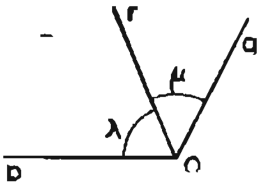
Следећа дефиниција користиће нам у каснијем излагању.

Дефиниција 12.6. Нека су $p_1\ p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ ($n=3, 4, \ldots$) праве са заједничким почетком, садржане у једној равни и нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ угаоне површи чији су краци редом p_1 и p_2, p_2 и $p_3, \ldots, p_n$ и p_{n+1} (сл. 81). Ако ти углови немају заједничких тачака, сем што су α_1 и α_2, затим α_2 и α_3, итд. и најзад α_{n-1} и α_n парови суседних углова, називамо их *основним угловима* у мноштву свих оних углова којима су краци полуправе датог низа.

За суседне углове докажимо ову теорему:



Сл. 81



Сл. 82

Теорема 12.9. *Нека је* r *полуправа која полази из темена угла* α *с крацима* p, q *и садржана је у том углу. Тада се угао* α *састоји из два суседна угла, једног с крацима* p, r *и другог с крацима* q, r.

Доказ. Према теоремама 10.6 и 12.6 постоје два угла $\measuredangle pr$, рецимо λ и λ', два угла $\measuredangle qr$, рецимо μ и μ', и два угла $\measuredangle pq$, један α, а други обележимо с α' (сл. 82).

Према теореми 12.4 само два од прва четири угла су суседна. Нека су то λ и μ. Ако p и r не припадају једној правој, крак q је у углу $\measuredangle pr$ или ван њега, дакле само један од углова λ и λ' садржи крак q. Ово је тим пре ако p и r припадају једној правој. Но λ и μ имају по дефиницији 12.4 само крак r заједнички, дакле λ не садржи крак q. Исто тако μ не садржи крак p. Докажимо да се α састоји из λ и μ.

Према теореми 12.8 постоје само два суседна угла $\measuredangle pq$ и $\measuredangle pr$ са заједничким краком p. Први није α, јер α садржи и крак r, а други није λ', јер λ' садржи и крак q. Дакле, α' и λ су два суседна угла. Исто тако су α' и μ. Дакле, по дефиницији 12.4 λ и μ немају ван кракова p и q заједничких тачака с углом α'. Према томе, по дефиницијама 11.3 и 12.1 углови λ и μ су садржани у углу α.

Докажимо да и обратно, свака тачка A, садржана у углу α, припада углу λ или μ. То је за тачку на r јасно, дакле нека A није на r. Претпоставимо да две од полуправих p, q, r не припадају једној правој (за случај да припадају једној правој доказ је простији и препуштамо га читаоцу). Нека је L ма која тачка садржана у λ. Према претходном делу овог доказа L је у α. Како су A и L у α, према теореми 11.10 постоји тачка C тако да дужи AC и LC немају заједничких тачака с углом $\measuredangle pq$. Ако немају ни с r, немају ни с угаоном линијом pr, дакле су A и L према теореми 11.12 с исте стране угаоне линије pr, тј. обе су у λ или у λ'. Но L је у λ, дакле и A је у λ.

Ако обе дужи AC и LC имају заједничку тачку с r и ако припадају једној правој, дуж AL нема заједничке тачке с r, дакле опет нема ни с угаоном линијом pr, и као претходно закључујемо да је тачка A у λ. Ако обе дужи AC и LC секу r, али не припадају једној правој, према теореми 7.12 (Пашовој) дуж AL не сече полуправу r, дакле нема ни заједничке тачке с угаоном линијом pr, и опет закључујемо на исти начин да је A у λ.

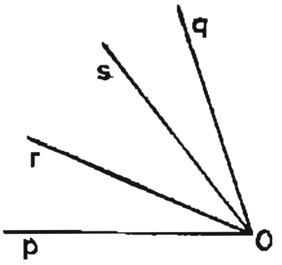
Ако само једна од дужи AC и LC сече r, само та једна сече праву којој припада r, јер су те дужи у углу α, а продужење крака r је ван α. Нека је R тачка на r. Полуправа LR с почетком у L сече крак q у некој тачки Q или га не сече. Ако га сече, нека је M тачка на LR тако да је M између R и Q; ако га не сече, нека је M која било тачка на полуправој LR. У оба случаја дуж LM сече r у тачки R, а не сече q, дакле према теореми 11.9 L и M су с разних страна угаоне линије pq. Како је L у λ, а λ и μ немају ван r заједничких тачака, L је ван μ, дакле M је у углу μ.

Но дужи AL и ML секу r, дакле према теореми 11.9 тачке A и M су с исте стране угаоне линије qr, па како је M у углу μ, и A је у том углу.

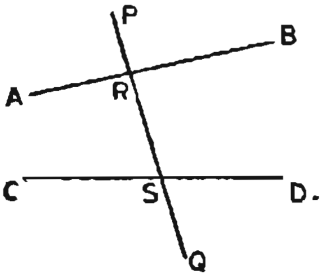
Тиме смо доказали да је свака тачка A, која је садржана у α, такође садржана у λ или у μ.

Сад можемо доказати и ову теорему:

Теорема 12.10. *Ако полуправе* r *и* s *полазе из темена удубљеног угла* $\sphericalangle$ pq *и садржане су у том углу, тада је и удубљени угао* $\sphericalangle$ rs *садржан у том углу* $\sphericalangle$pq



Сл. 83



Сл. 84

Доказ. Како је r у посматраном углу $\sphericalangle pq$, према теореми 12.9 r разлаже тај угао $\sphericalangle pq$ на два суседна угла $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle qr$, која су према теореми 12.8 оба удубљена. Како је и s у $\sphericalangle pq$, s је дакле у једном од та два угла, рецимо у углу $\sphericalangle qr$ (сл. 83).

Дакле према теореми 12.8 удубљени угао $\sphericalangle rs$ је садржан у удубљеном углу $\sphericalangle qr$. Но овај је у удубљеном углу $\sphericalangle pq$, дакле удубљени угао $\sphericalangle rs$ је садржан у удубљеном углу $\sphericalangle pq$.

Када у једној равни права сече две друге праве, настају извесни углови (свега осам), који имају обично одређене називе.

Дефиниција 12.7. Ако у једној равни права PQ сече две друге праве AB и CD редом у тачкама R и S, праву PQ која сече друге две праве зваћемо *попречницом* или *трансверзалом* (сл. 84). Удубљене углове $\sphericalangle ARS$, $\sphericalangle BRS$, $\sphericalangle CSR$, и $\sphericalangle DSR$, којима су једни краци полуправе правих AB и CD, а други краци припадају правој PQ и садрже по једну од пресечних тачака S одн. R, називаћемо *унутарњим угловима*, а углове $\sphericalangle ARP$, $\sphericalangle BRP$, $\sphericalangle CSQ$, $\sphericalangle DSQ$, којима су једни краци полуправе правих AB и CD а други краци припадају правој PQ и не садрже пресечне тачке R и S називаћемо *спољашњим угловима*.

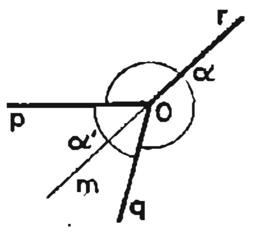
Два несуседна удубљена угла са по једним краком с исте стране попречнице PQ, кад је један угао унутарњи и један спољашњи (као што су $\sphericalangle ARP$ и $\sphericalangle CSR$ или пак $\sphericalangle ARS$ и $\sphericalangle CSQ$) називаћемо *сагласним угловима*, а кад су оба угла унутарња или оба спољашња (као што су $\sphericalangle ARP$ и $\sphericalangle CSQ$ или пак $\sphericalangle ARS$ и $\sphericalangle CSR$) називаћемо *супротним угловима*.

Два несуседна удубљена угла са по једним краком са сваке стране праве PQ, кад су оба угла унутарња или оба спољашња (као што су $\sphericalangle ARS$ и $\sphericalangle DSR$ или $\sphericalangle ARP$ и $\sphericalangle DSQ$) називаћемо *наизменичним угловима.*

4. У даљем посматрању користићемо чињеницу да се сваки испупчени угао може разложити на два удубљена. Стога доносимо следећу дефиницију и за њом теорему.

Дефиниција 12.8. Ако се угао α састоји из два суседна угла λ и μ, рећи ћемо да је угао α *разложен* на углове λ и μ.

Теорема 12.11. *Сваки испупчен угао може се разложити на два удубљена угла.*



Сл. 85

Доказ. Нека је α испупчен угао, а угаона линија pq његов руб. На основи теореме 12.7 угаона линија pq разлаже раван на два угла, на испупчени α и удубљен, који обележимо са α' (сл. 85). Нека је m која било права која пролази кроз теме O угла и сече га, тј. p и q су с разних страна праве m. Тачка O разлаже праву m на две полуправе: једну у угаоној линији pq, другу ван те угаоне линије. Ову последњу обележимо са r. Према дефиницији 12.2 r је у α.

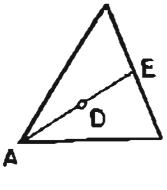
Удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle qr$ имају крак r заједнички, а остале њихове тачке су с разних страна праве m. Према дефиницији 12.4 то су два суседна угла, а према теореми 12.8 угао α се састоји из та два угла. Дакле према дефиницији 12.8 угао α је разложен полуправом r на два удубљена угла, а то је и требало доказати.

5. Додајмо неке појмове о угловима троугла. Кад се три праве секу у три тачке настаје троугао. Неки тако настали углови, чија су темена у у теменима тог троугла, имају одређене називе.

Дефиниција 12.9. Удубљен угао чији краци садрже странице једног троугла зове се *унутарњи угао* или, краће, *угао троугла.* Оба напоредна угла тог угла зову се *спољашњи углови троугла.*

Додајемо још једну дефиницију о страницама и угловима троугла:

Дефиниција 12.10. За две странице троугла, садржане на крацима једног његовог угла кажемо да су *налегле на тај угао.* За трећу страницу кажемо да је *насупрам тог угла.*



Сл. 86

За два угла троугла, на које је налегла једна његова страница кажемо да је *насупрам те странице.*

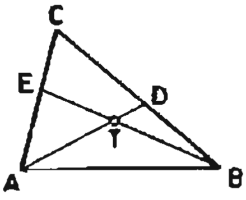
О угловима троугла постоје напр. ове две теореме:

Теорема 12.12. *Све тачке које су у једном троуглу, садржане су у сваком углу тог троугла.*

Доказ. Докажимо да је ма која тачка D, која је у троуглу ABC, садржана у његовом углу $\sphericalangle BAC$ (сл. 86). Према теореми 7.2 и дефиницији 7.2 тачка D је између тачке A и неке унутарње тачке E дужи BC, дакле је на полуправој AE која полази из A и сече дуж BC што спаја тачке B и C на крацима угла $\sphericalangle BAC$, тј. према дефиницији 12.1 тачка D је у углу $\sphericalangle BAC$.

Теорема 12.13. *Свака тачка која је садржана у два угла једног троугла, садржана је и у трећем углу тог троугла и налази се у том троуглу.*

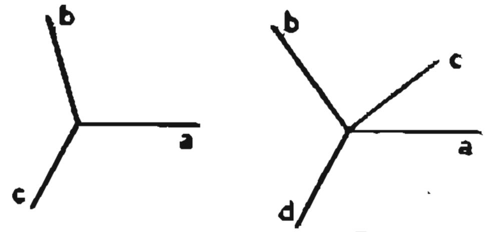
Доказ. Нека је тачка T садржана у угловима $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$ троугла ABC (сл. 87). Према дефиницији 11.3 тачка T је с оне стране праве AB с које је тачка C, с оне стране праве AC с које је B и с оне стране праве BC с које је тачка A, дакле је и у углу $\sphericalangle BCA$ троугла.



Сл. 87

Докажимо да је T у троуглу ABC. Како је T у углу $\sphericalangle BAC$, постоји према теореми 11.7 између B и C тачка D тако да је T на полуправој AD, а како је T у $\sphericalangle ABC$, постоји између A и C тачка E тако да је T на полуправој BE. Према теореми 6.13 дужи AD и BE имају заједничку тачку, а то је тачка T, тако да је $A-T-D$ и $B-T-E$, тј. према дефиницији 7.2 тачка T је у троуглу ABC. — Тиме је ова теорема доказана.

6. Као што је неопходно посматрати у геометрији распоред тачака на правој, заснован односом „између“, тако је потребно посматрати и распоред у једној равни, полуправих које полазе из једне тачке. Но за три разне полуправе a, b, c које полазе из једне тачке не може се разликовати



а б

Сл. 88

која је „између“ остале две, јер истим правом којим би се рекло да је полуправа b између a и c, могло би се рећи и да је полуправа c између a и b или да је a између b и c (сл. 88а).

Одређен распоред полуправих око њихова заједничког почетка O у једној равни можемо дефинисати тек ако посматрамо најмање четири полуправе, рецимо a, b, c, d. Заиста, из слике 88б видимо да окретање полуправе a око O не можемо довести ову до поклапања с полуправом b а да не пређемо преко пулуправе c или преко полуправе d. Исто тако не можемо довести полуправу b до поклапања с a, а да не пређемо преко c или d, нити полуправе c и d до међусобног поклапања а да не пређемо преко a или b.

Кажемо да се парови полуправих a, b и c, d раздвајају. Ако се пак парови a, b и c, d раздвајају, парови a, c и b, d истих полуправих се не раздвајају, нити парови a, d и b, c дакле односом раздвајања утврђује се одређен распоред полуправих око заједничког почетка. Тај однос има за такве полуправе исти значај као „између“ за тачке на правој.

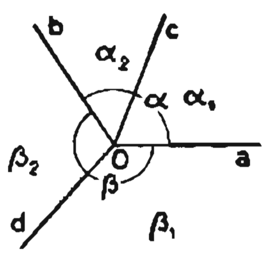
Полазимо дакле од следеће дефиниције:

Дефиниција 12.11. Нека су у једној равни a, b и c, d два пара полуправих са заједничким почетком. Ако је једна од полуправих c, d у једном а друга у другом углу чији заједнички краци су a, b, рећи ћемо да пар полуправих a, b *раздваја* пар *полуправих* c, d.

Основан значај имају следеће две теореме:

Теорема 12.14. *Ако пар полуправих* a, b *раздваја пар полуправих* c, d, *тада и обратно, пар* c, d *раздваја пар* a, b.

Доказ. Према дефиницији 12.11 c и d су у два разна угла с крацима a и b. Нека је α онај од тих углова у коме је c, а β онај у коме је d (сл. 89). Према теореми 12.9 α се састоји из два угла, једног с крацима a и c, другог с крацима b и c; нека је први α_1, други α_2. Исто тако β се састоји из два угла, једног с крацима a и d, другог с крацима b и d; нека је први β_1, други β_2.



Сл. 89

Углови α_1 и β_1 имају крак a заједнички, а α_2 и β_2 крак b заједнички. Како α и β немаји ван a и b заједничких тачака, а угао α_1 је садржан у α и β_1 у β_2, углови α_1 и β_1 су према дефиницији 12.4 суседни. Исто тако су и α_2 и β_2 суседни углови.

Нека је γ угао с крацима c и d и који садржи полуправу a, а δ угао с истим крацима који садржи полуправу b. Према теореми 12.9 γ се састоји из два суседна угла, једног с крацима a, c и другог с крацима a, d, а према теореми 12.8 постоји само један такав пар суседних углова. Како су α_1 и β_1 таква два суседна угла, γ се састоји из α_1 и β_1, дакле, заједнички крак ова два угла садржан је у γ.

Исто тако се δ састоји из α_2 и β_2, дакле заједнички крак последња два угла садржан је у δ. Но α_1 и α_2 немају ван c заједничких тачака, дакле γ и δ се не поклапају, него су то два разна угла с крацима c и d. Али полуправа a је у γ, а b у δ, дакле према дефиницији 12.11 пар c, d раздваја пар a, b.

На темељу претходне теореме можемо за два пара полуправих, од којих један раздваја други рећи и да се узајамно раздвајају.

Следећа теорема одговара теореми 6.8 о односу „између" за тачке на правој.

Теорема 12.15. *Четири разне полуправе у једној равни и које полазе из исте тачке, могу се увек на један једини начин груписати у два пара која се узајамно раздвајају.*

Доказ доносимо укратко. Прво треба доказати да се у једној равни четири разне полуправе a, b, c, d са заједничким исходиштем увек могу груписати у два пара која се раздвајају. Нека су φ и ψ оба угла с крацима a и b. Ако је од полуправих c и d једна у φ а друга у ψ, парови a, b и c, d се раздвајају. Ако су пак c и d у једној од та два угла, нека су рецимо у φ

Како се φ састоји из два суседна угла, једног α с крацима a и c. и другог α' с крацима b и c, полуправа d је у α или у α'; рецимо да је у α. Како је α' садржано у φ, а φ и ψ немају ван a и b заједничких тачака, но α' и ψ имају заједнички крак b, ово су два суседна угла.

Нека је β угао с крацима a и c и који се састоји из α' и ψ, дакле који садржи полуправу b. Полуправе d и b су дакле садржане у два разна угла α и β са заједничким крацима a и c, тј. парови a, c и b, d се раздвајају.

Докажимо још да се полуправе a, b, c, d могу само на један начин груписати у два пара која се раздвајају. Заиста, те четири полуправе могу се на свега три начина груписати у два пара: 1) a, b и c, d, 2) a, c и b, d, 3) a, d и b, c. Претпоставимо да се парови a, b и c, d раздвајају. Нека су α и β оба угла с крацима a, b и нека је полуправа c у α, а d у β.

Полуправа c разлаже угао α на два суседна угла, један γ с крацима a, c и други γ' с крацима b, c. Углови β и γ' сачињавају угао δ с крацима a и c и који се не поклапа с γ. При томе су полуправе b и d обе у углу

δ с крацима a и c. Дакле парови a, c и b, d се не раздвајају. — Исто тако се ни парови a, d и b, c не раздвајају. — Тиме је доказ довршен.

7. Ако се у посматрању полуправих са заједничким исходиштем, садржаних у једној равни ограничимо на полуправе садржане у једном углу чије теме је то заједничко исходиште, можемо за њих дефинисати и однос истих особина као што има однос „између“ у посматрању тачака на правој. За овај нови однос употребићемо исту реч „између“, а дефиницију истичемо на основи раздвајања парова полуправих.

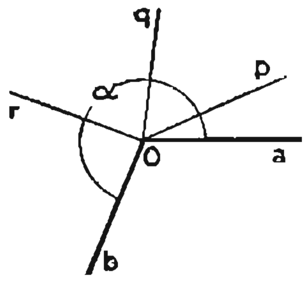
Дефиниција 12.12. Ако су p, q, r три разне полуправе, садржане у углу α с крацима a и b и које полазе из његова темена и

ако се парови a, q и p, r раздвајају,
или се парови b, q и p, r раздвајају,
или се p поклапа с a и r с b,

рећи ћемо да је у углу α полуправа q *између* полуправих p и r.

Приметимо да по овој дефиницији a, b, p, q, r могу бити пет разних полуправих (сл. 90) и да се такође једна од полуправих p, r или обе могу поклапати с крацима a и b.

Ако је у углу α полуправа q између полуправих p и r писаћемо $p-q-r$.



Сл. 90

Из дефиниције 12.12 следује непосредно:

Теорема 12.16. *Ако је у углу* α *полуправа* q *између полуправих* p *и* r, *тада су* p, q, r *три разне полуправе и такође је* q *између* r *и* p.

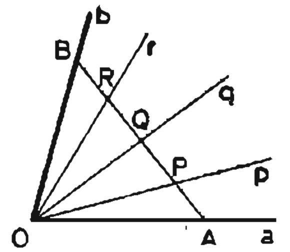
Ова теорема има исти облик као аксиома I 1. Уопште, сви односи распореда, који постоје међу тачкама на једној дужи, постоји и међу посматраним полуправим у једном углу, Те теореме нећемо износити. Но наведимо напр. следећу теорему која следује непосредно из дефиниције 12.12:

Теорема 12.17. *Ако су* p, q *две разне полуправе, садржане у углу* α *с крацима* a *и* b *и које се не поклапају с тим крацима, и ако се парови* a, q *и* p, b *раздвајају, у углу* α *је* p *између* a *и* q, *а* q *је између* p *и* b. *Сем тога* p *и* q *су између* a *и* b.

Следеће две теореме успостављају врло присну везу између овог односа „између“ за полуправе и истоименог односа за тачке на дужи.

Теорема 12.18. *Нека су* p, q, r *три полуправе садржане у удубљеном углу* α *са крацима* a *и* b, *а с исходиштем у темену тог угла, и нека су* A *и* B *тачке на крацима* a *и* b, *а* P, Q, R *пресеци дужи* AB *с* p; q, r (сл. 91).

Ако је тачка Q *између тачака* P *и* R, *тада је у углу* α *полуправа* q *између полуправих* p *и* r; *и обратно: ако је у* α q *између* p *и* r, *тада је* Q *између* P *и* R.



Сл. 91

Доказ. Ако су a, b, p, q, r пет разних полуправих, A, B, P, Q, R су пет разних тачака и према теореми 11.7 имамо $A-P-B$, $A-Q-B$ и $A-R-B$. Ако је и $P-Q-R$ имамо такође $A-P-Q$, дакле по теореми 11.7 полуправа p је у удубљеном углу $\sphericalangle aq$. Но полуправа r је ван тог угла, јер је R ван њега. Дакле, према дефиницији 12.11 парови a, q и p, r се раздвајају, тј. према дефиницији 12.12 у углу α је $p-q-r$.

Исто се доказује и ако се p или r поклапају с a или b. Обрнути део теореме може се доказати индиректним доказом.

Теорема 12.19. *Нека су* p, q, r *три полуправе садржане у испупченом углу* β *с крацима* a *и* b, *а с изходиштем у темену тог угла и нека је, затим, тај угао разложен полуправом* c *на два удубљена угла* $\sphericalangle ac$ *и* $\sphericalangle bc$ (сл. 92).

Нека су A, B, C *тачке редом на крацима* a, b, c, *а* P, Q, R *пресеци дужи* AB *и* BC *редом с* p, q, r.

Ако је испуњен један од следећа четири пара услова:

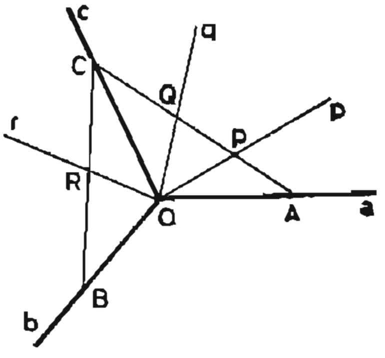
1) *на дужи* AC *је* P – Q – R,

2) *на дужи* BC *је* P – Q – R,

3) *на дужи* AC *је* A – P – Q, *а на дужи* BC *је* B – R – C,

4) *на дужи* AC *је* A – P – C, *а на дужи* BC *је* C – Q – R,

тада је у углу β *полуправа* q *између полуправих* p *и* r, *и обратно.*



Сл. 92

Доказ препуштамо читаоцу.

На основи претходне две теореме све теореме о распореду тачака на једној дужи преносе се лако на теореме о распореду полуправих око једне тачке, садржаних у једном углу.

Споменимо још само следећу теорему, која одговара теореми 6.18 о тачкама на једној правој.

Теорема 12. 20. *Ма који број* n, *већи од* 2, *разних полуправих садржаних у једном углу и које полазе из његова темена може се увек обележити са* p_1, p_2, . . . , p_n *тако да* p_2 *буде између* p_1 *с једне стране и* p_3, p_4, . . . , p_n *с друге стране, да* p_3 *буде између* p_1 *и* p_2 *с једне стране и* p_4, p_5, . . . , p_n *с друге стране, итд. и да најзад* p_{n-1} *буде између* p_1, p_2, . . . , p_{n-2} *с једне и* p_n *с друге стране.*

Доказ. Нека су те полуправе садржане у једном углу α. Ако је то удубљен угао и ако су A и B тачке на његовим крацима a и b, свих n посматраних полуправих пролазе кроз тачке дужи AB. Обележимо те тачке саобразно теореми 6.18 са P_1, P_2, . . . , P_n а полуправу која пролази кроз P_ν ($\nu = 1,2, \ldots, n$) са p_ν. Очигледно, ово обележавање тих полуправих испуњава на темељу теореме 12.18 услове теореме коју доказујемо.

Ако је угао α испупчен, c полуправа која га разлаже на два удубљена угла и ако су A, B, C тачке на a, b, c редом, нека m ($\leqslant n$) посматраних полуправих пролазе кроз тачке дужи AC; тада их има $n-m$ које пролазе кроз тачке дужи BC (изузевши тачку C која је урачуната у дуж AC). Обележимо прво оне полуправе које пролазе кроз тачке дужи AC саобразно теореми 6.18 са p_1, p_2, . . . , p_m, и то тако да је природни распоред дат низом A, P_1, P_2, . . . , P_m (уколико се P_1 не поклапа с A) затим полуправе које пролазе кроз тачке дужи BC (изузев тачке C) са p_{m+1}, p_{m+2}, . . . , p_n и то тако да је природни распоред дат низом C, P_{m+1}, P_{m+2}, . . . , P_n. Лако је показати да ово обележавање испуњава услове теореме коју доказујемо, на темељу теореме 12.19.

8. Из разних разлога, као напр. зато да би се могао образовати збир ма којих углова, потребно је проширити појам угла. То је могуће напуштањем, бар у овом посматрању, становишта које смо усвојили на почетку (у § 2) и по коме је поклапање ликова исто што њихова истоветност (идентичност). Треба допустити да се два лика поклапају а да ипак нису истоветна, него да су два разна лика. Тада је, разуме се, поклапање засебан, у односу на тачке основан геометријски однос, који је имплицитно одређен трима аксиомама поклапања:

1. *Ако се тачка* А *поклапа с тачком* В, *такође се тачка* В *поклапа с тачком* А.

2. *Ако се тачка* А *поклапа с тачком* В *а тачка* В *с тачком* С, *тада се тачка* А *поклапа и с тачком* С.

3. *Свака тачка се поклапа са самом собом.*

Дефиниција. За два лика кажемо да се поклапају ако се свака тачка једног лика поклапа с једном тачком другог лика, и обратно.

Где год се, стојећи на становишту да је поклапање истоветност, казало за две тачке да су разне тачке или уопште за два лика да су два разна лика, то је значило да се те две тачке или та два лика не поклапају. Сад није тако. У том смислу би са новог становишта требало изменити све досад исказане дефиниције, теореме и доказе, па и све будуће. То нећемо чинити, сем кад буде реч о проширеним угловима.

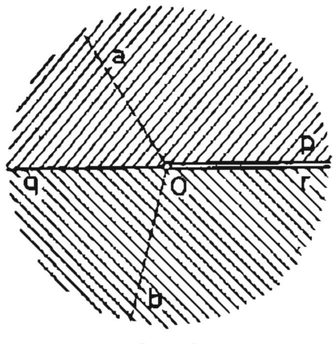
Из аксиома поклапања следује да се сваки лик, који се састоји из тачака које се међу собом поклапају, поклапа са једном јединoм тачком. Како се у аксиомама и у првим дефиницијама претпостављало да се тачке не поклапају, лик који се састоји из тачака које се међу собом поклапају је у ствари једна тачка. Очигледно, простора и геометрије у правом смислу речи нема догод не посматрамо тачке и ликове који се не поклапају.

Из дефиниције поклапања изводе се теореме као што је напр. ова:

Теорема. *Ако се ликови* **А** *и* **В** *поклапају и ликови* **А′** *и* **В′** *поклапају, тада се и лик који се састоји из* **А** *и* **А′** *поклапа с ликом који се састоји из ликова* **В** *и* **В′** *и, тако исто, заједнички део ликова* **А** *и* **А′** *поклапа се са заједничким делом ликова* **В** *и* **В′**.

Под заједничким делом ликова M и M' подразумевамо овде укупност оних тачака које се поклапају како с тачкама лика M тако и с тачкама лика M'.

Дефинишимо прво два суседна опружена угла (сл. 93).



Сл. 93

Дефиниција 12.13. Нека су у равни α $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ два опружена угла са заједничким теменом O и заједничким краком q, и којима се краци p и r поклапају али нису један другом истоветни.

Ако су унутрашњости тих опружених углова са разних страна праве на којој су њихови краци, називаћемо те опружене углове *суседним*.

Помоћу суседних опружених углова може се дефинисати пун угао и затим углови већи од пуног угла.

Дефиниција 12.14. Укупност двају суседних опружених углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ са заједничким краком q називаћемо *пуним углом*. Њихове краке p и r (који се поклапају) називаћемо *крацима* тог пуног угла, а њихово заједничко теме *теменом* тог пуног угла.

Оба крака пуног угла заједно с теменом називаћемо његовим *рубом*, а за сваку другу тачку пуног угла рећи ћемо да је у том пуном углу.

Опружене углове $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ из којих се састоји тај пуни угао називаћемо његовим *крајњим опруженим угловима.*

Пун угао ћемо обележавати као и досадање углове, дакле $\sphericalangle pr$ означава пун угао коме су краци p и r.

Да би се имала конкретнија претстава о пуном углу замислимо да је раван засечена по једној полуправој и да су p и q рубови тако расечене равни. (То је претстављено у слици 93.)

Пазећи да за тачку или за мноштво тачака кажемо да припада лику или да су садржани у њему само ако је та тачка истоветна или то мноштво тачака истоветно са извесном тачком или с извесним мноштвом тачака тога лика, можемо доказати напр. следећу теорему:

Теорема 12. 21. *Ако су* a *и* b *две полуправе садржане у пуном углу* $\sphericalangle$pr, *које полазе из његова темена и не поклапају се, тада је само онај од двају углова с крацима* a *и* b *садржан у углу* $\sphericalangle$pr, *који не садржи полуправу која се поклапа с* p *и* r.

Доказ. Нека је α раван пуног угла $\sphericalangle pr$. Према теореми 12. 6 постоје у равни α два угла с крацима a и b (сл. 93). Полуправе p и r су садржане у једном од њих, а изван другога су. Први од та два угла није садржан у пуном углу $\sphericalangle pr$, јер p и r нису по дефиницији 12.14 у углу $\sphericalangle pr$, а други је у углу $\sphericalangle pr$, јер све тачке равни α, које не припадају рубу тог угла јесу у њему.

Називајући „угао“ који се састоји из два или више опружених углова „вишеструко опруженим углом“, а угао који се састоји из два или више пуних углова (који се два по два поклапају) „вишеструко пуним углом“, постављамо ове две дифиниције:

Дефиниција 12.15. Ако је $\sphericalangle pq_1, \sphericalangle q_1q_2, \sphericalangle q_2q_3, \ldots, \sphericalangle q_{n-1}r \ (n=2,3,\ldots)$ низ опружених углова у једној равни, тако да су парови углова

$$\sphericalangle pq_1 \text{ и } \sphericalangle q_1q_2,\ \sphericalangle q_1q_2 \text{ и } \sphericalangle q_2q_3,\ \ldots,\ \sphericalangle q_{n-2}q_{n-1} \text{ и } \sphericalangle q_{n-1}r$$

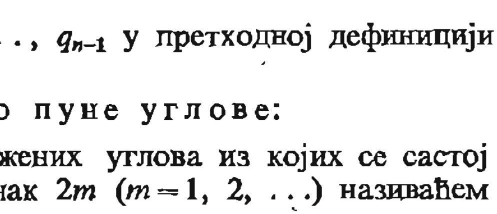
парови суседних опружених углова, укупност тих опружених углова називаћемо *вишеструко опруженим углом.* Краке p и r називамо *крацима* овог „угла“, а заједничко теме свих тих опружених углова његовим *теменом.*

Оба крака заједно с теменом називаћемо *рубом* овог „угла“, а за сваку другу тачку вишеструко опруженог угла рећићемо да је *у* њему. Опружене углове $\sphericalangle pq_1$ и $p_{n-1}r$ називаћемо његовим *крајњим опруженим угловима*

За разне вредности броја n разликујемо *двоструко, троструко, ..., n-тоструко* опружен угао.

За обележавање вреди иста напомена као мало пре о пуном углу.

У слици 94 је претстављен, ради очигледности, четвороструко опружен угао $\sphericalangle pr$ као да се састоји из два „листа“ која се не поклапају потпуно (упореди с листовима Риманових површи).



Сл. 94

Приметимо да су полуправе $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ у претходној дефиницији садржане у уопштеном углу $\sphericalangle pr$.

Дефинишемо засебно вишеструко пуне углове:

Дефиниција 12.16. Ако је број опружених углова из којих се састој вишеструко опружен угао паран и једнак $2m$ $(m=1, 2, \ldots)$ називаћем тај угао *вишеструко (m-тоструко) пуним углом.*

Вишеструко опружен угао $\sphericalangle pr$ „покрива“ за $n > 2$ бар један од два његова крајња опружена угла више пута. Прво треба дефинисати вишеструко покривање равни неким равним ликом.

Дефиниција 12.17. Ако се свака тачка једног равног лика поклапа с p-1 других тачака истог лика ($p = 2, 3, \dots$), при чему је број p за сваку тачку тог лика исти, рећи ћемо да тај лик *покрива* раван p пута.

Сад се може изрећи ова теорема:

Теорема 12.22. *Угао* m-*тоструко пун* (m = 2,3, ...) *покрива целу раван* m *пута, сем у тачкама својих кракова, где покрива раван* m + 1 *пут, и у своме темену, где је покрива само једанпут.*

Угао $\sphericalangle$ pr, n-*тоструко опружен, где је* n = 2m + 1 (m = 1, 2, ...) *покрива ону полураван коју покривају његови крајњи опружени углови* $\sphericalangle \mathrm{pq}_1$ *и* $\sphericalangle \mathrm{q}_{n-1}\mathrm{r}$ m + 1 *пут, а другу полураван* m *пута.*

Доказ. Задржавајући раније обележавање, пун угао који се састоји према дефиницијама 12.15 и 12.16 из $\sphericalangle pq_1$ и $\sphericalangle q_1q_2$ покрива целу раван, сем у поменутим тачкама, једанпут. Како су углови $\sphericalangle q_1q_2$ и $\sphericalangle q_2q_3$ суседни, према дефиницији 12.13 унутрашњости углова $\sphericalangle pq_1$ и $\sphericalangle q_2q_3$ су с исте стране праве pq_1, дакле троструко опружени угао $\sphericalangle pq_3$ покрива дотичну полураван двапут.

Исто тако, четвороструко опружен угао $\sphericalangle pq_4$ покрива обе полуравни двапут, петоструко опружен угао $\sphericalangle pq_5$ покрива ону полураван коју покривају његови крајњи опружени углови, трипут, а другу полураван двапут, итд.

Истим посматрањем доказујемо и тврђење о покривању осталих тачака равни.

Вишеструко пуни углови олакшавају дефиницију проширеног угла чији се краци поклапају ма с које две полуправе које полазе из једне тачке. Углове веће од пуних називаћемо прекопуним угловима.

Дефиниција 12.18. Укупност опружених углова $\sphericalangle pq_1$, $\sphericalangle q_1q_2$, ... $\sphericalangle q_{n-1}q_n$ ($n = 2,3, \dots$), који сачињавају вишеструко опружен угао $\sphericalangle pq_n$, и удубљеног или опруженог угла $\sphericalangle q_nr$, који је суседан углу $\sphericalangle q_{n-1}q_n$, називаћемо *прекопуним углом*.

И ове углове обележавамо као што смо досад углове обележавали.

Прекопун угао $\sphericalangle pr$ претходне дефиниције садржан је у $n+1$-струко опруженом углу $\sphericalangle pq_{n+1}$, који садржи низ опружених углова $\sphericalangle pq_1$, $\sphericalangle q_1q_2$, ..., $\sphericalangle q_nq_{n+1}$.

Углове уведене дефиницијом 12.1 називаћемо *угловима у ужем смислу*, а те углове заједно с пуним и прекопуним углом називаћемо *угловима у ширем смислу*.

Лако је доказати напр. ове две теореме:

Теорема 12.23. *Нека је* $\sphericalangle \mathrm{p}_1\mathrm{p}_{n+1}$ *вишеструко опружен угао, који се састоји из опружених углова* $\sphericalangle \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$, $\sphericalangle \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3, \dots, \sphericalangle \mathrm{p}_n\mathrm{p}_{n+1}$ *и нека из његова темена полазе две разне полуправе* a *и* b, *полуправа* a *садржана у опруженом углу* $\sphericalangle \mathrm{p}_i\mathrm{p}_{i+1}$; *а полуправа* b *у опруженом углу* $\sphericalangle \mathrm{p}_k\mathrm{p}_{k+1}$, $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \mathrm{k} \leqslant \mathrm{n}$.

Тада постоји увек један одређен угао $\sphericalangle$ab *у ширем смислу, који је садржан у углу* $\sphericalangle \mathrm{p}_1\mathrm{p}_{n+1}$ *и коме су краци* a *и* b. *Тај угао се, за* $i < k$ *састоји из углова*

$$\sphericalangle ap_{i+1}, \sphericalangle p_{i+1}p_{i+2}, \dots, \sphericalangle p_{k-1}p_k, \sphericalangle p_kb.$$

Теорема 12.24. *Нека је* $\sphericalangle \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{n+1}$ *вишеструко опружен угао, који се састоји из опружених углова* $\sphericalangle \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\sphericalangle \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, \ldots,$ $\sphericalangle \mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n+1}$ *и нека су* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *и* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *два угла, садржана у углу* $\sphericalangle \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{n+1}$.

Ако је испуњен један од следећа четири услова:

1) $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *и* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *су два суседна угла, садржана у* $\sphericalangle \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}$,

2) *угао* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *је садржан у* $\sphericalangle \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}$, *а угао* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *се састоји из угла* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{p}_{i+1}$, *који је суседан углу* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, *а затим из углова* $\sphericalangle \mathfrak{p}_{i+1}\mathfrak{p}_{i+2}, \ldots,$ $\sphericalangle \mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k$, $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{c}$,

3) *угао* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *се састоји из углова* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{p}_{i+1}$, $\sphericalangle \mathfrak{p}_{i+1}\mathfrak{p}_{i+2}, \ldots,$ $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{b}$, *а угао* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *је садржан и* $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{p}_{k+1}$ *и суседан је углу* $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{b}$,

4) *угао* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *се састоји из углова* $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{p}_{i+1}$, $\sphericalangle \mathfrak{p}_{i+1}\mathfrak{p}_{i+2}, \ldots,$ $\sphericalangle \mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k$, $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{b}$, *а угао* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *из угла* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{p}_{k+1}$, *који је суседан углу* $\sphericalangle \mathfrak{p}_k\mathfrak{b}$, *а затим из углова* $\sphericalangle \mathfrak{p}_{k+1}\mathfrak{p}_{k+2}, \ldots,$ $\sphericalangle \mathfrak{p}_l\mathfrak{c}$ $(1 \leqslant i < k < l)$

тада углови $\sphericalangle \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *и* $\sphericalangle \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *немају ван заједничког крака* $\mathfrak{b}$ *и темена, заједничких тачака.*

Да не бисмо понављали исказ претходне теореме, изрецимо следећу дефиницију кратко:

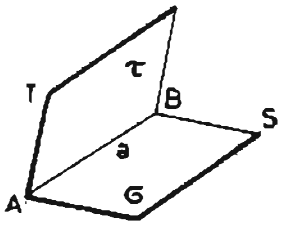
Дефиниција 12.19. Ако два угла $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle bc$, садржана на вишеструко опруженом углу $\sphericalangle p_1 p_{n+1}$, испуњавају услове претходне теореме, називаћемо их *суседним угловима* (у ширем смислу).

После ових теорема и дефиниција имамо могућност да у § 26 дефинишемо збир макојих углова, што нам је био један од главних разлога зашто смо те теореме и дефиниције изнели.

13. ДИЈЕДАР.

1. Углу, као лику у равни, одговара у простору дијeдар (двопљосник). Као што смо разликовали угао и угаону линију, тако разликујемо сада дијeдар и његову површ: дијeдарску површ.

Дефиниција 13.1. Лик који се састоји из једне праве a и двеју полуравни σ и τ којима је a заједнички руб, а које припадају двема разним равнима зваћемо *дијeдарска површ*. Праву a називаћемо *ивицом* а полуравни σ и τ *странама* или *пљоснима* те дијeдарске порши (сл. 95).



Сл. 95

Дијeдарску површ са странама σ и τ обележаваћемо знаком $\sigma\tau$. Ако је AB ивица дијeдра $\sigma\tau$, S тачка у σ, а T у τ, обележаваћемо ту дијeдарску површ и знаком $SABT$.

Аналогија која постоји између угаоне линије и дијeдарске површи протеже се и на неке дефиниције и теореме, па и на многе доказе тих теорема. Међу првим теоремама постоји напр. следећа:

Теорема 13.1. *Ако се две равни секу, њихова пресечна права је заједничка ивица за четири дијeдарске површи чије су стране садржане у тим равнима.*

Доказ је сасвим аналоган доказу теореме 11.2.

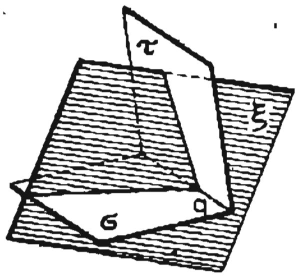
2. Сечење дијeдарске површи једном равни можемо дефинисати слично као сечење угаоне линије правом. Но пре дефиниције имамо теорему:

Теорема 13.2. *Дијeдарска површ и раван која не садржи ниједну њену пљосан, могу имати заједничку једну или две праве или једну угаону линију.*

Ако је заједничка права ивица диједарске површи, обе пљосни диједарске површи су с исте стране те равни или с разних страна те равни. Ако имају другу једну или пак две заједничке праве или једну угаону линију, диједарска површ је с разних страна те равни.

Доказ. Према теореми 8.6 раван α, која не садржи ниједну пљосан диједарске површи $\sigma\tau$, може имати са сваком од две равни којима припадају полуравни σ и τ највише по једну праву заједничку. Ако дакле раван α нема заједничке тачке с ивицом s диједарске површи $\sigma\tau$, она може имати с том површи највише две заједничке праве.

Ако раван α сече ивицу s у извесној тачки O (сл. 96), она сече равни којима припадају пљосни σ и τ по двема правим које се секу у O, дакле раван α сече полуравни σ и τ по двема полуправим које полазе из тачке O, тј. раван α сече тада диједарску површ $\sigma\tau$ по једној угаоној линији.



Сл. 96

Ако је ивица s заједничка права равни α са $\sigma\tau$, раван α сече обе равни којима припадају полуравни σ и τ по правој s. Нека су Φ и Ψ полупростори чија је површ α. Полураван σ је у Φ или у Ψ; исто вреди за τ. Дакле полуравни σ и τ су обе у Φ или у Ψ или једна је у Φ, друга је у Ψ, тј. σ и τ су с исте стране равни α или с разних страна те равни.

Ако раван α има са $\sigma\tau$ заједничку неку праву a полуравни σ или неку праву b полуравни τ, или обе такве праве, раван α сече те полуравни, дакле диједарска површ $\sigma\tau$ је с обеју страна равни α. Ако раван α сече ивицу s, ова ивица, дакле и диједарска површ $\sigma\tau$ је с обеју страна равни α.

Дефиниција 13.2. Ако раван има с диједарском површи само једну или две праве заједничке, или једну угаону линију, тако да је диједарска површ с разних страна те равни, рећи ћемо да се та раван и та диједарска површ *секу*.

Претходну теорему можемо сад изрећи овако: Ако раван ξ не садржи ниједну страну диједарске површи $\sigma\tau$, она сече ту површ по једној или двема правим, или по једној угаоној линији, или је пак не сече, а тада нема с њом заједничких тачака или садржи ивицу диједра тако да су његове пљосни с исте стране те равни.

3. Изразе „у“ дијеларској површи и „ван“ дијеларске површи дефинишемо слично као исте изразе у односу на угаону линију.

Дефиниција 13.3. Нека пљосни σ, τ диједарске површи $\sigma\tau$ припадају, прва равни α, друга равни β. За тачку која је с оне стране равни α с које је пљосан τ и с оне стране равни β с које је пљосан σ рећи ћемо да је *у* диједарској површи $\sigma\tau$.

За тачку која припада самој диједарској површи $\sigma\tau$ рећи ћемо и да је *на* њој, а за тачку која није ни на диједарској површи $\sigma\tau$ ни у њој рећи ћемо да је *изван* диједарске површи $\sigma\tau$.

Теореме у којима је реч о тачкама у угаоној линији и ван ње могу се пренети на диједарске површи. Ако полураван, која има с датом полуравни σ заједнички руб и сачињава с њом и с тим рубом целу раван, називамо проширењем полуравни σ, можемо изрећи следећим речима теорему која одговара теореми 11.6:

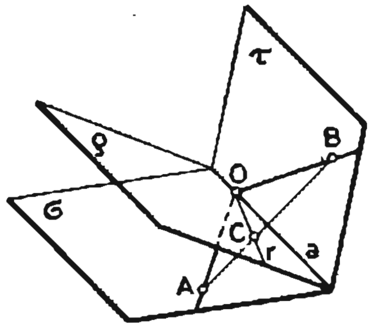
Теорема 13.3. *Проширења обеју страна једне диједарске површи јесу изван те површи.*

Доказ. Нека су α и β равни којима припадају редом стране σ и τ диједарске површи $\sigma\tau$. Те равни се секу по ивици a те површи. Ако је S тачка у σ, а S' у њеном проширењу σ', тачке S и S' су у равни α с разних страна праве a, дакле и с разних страна равни β, тј. σ' је с оне стране равни β с које није σ. Исто тако проширење τ' стране τ је с оне стране равни α с које није τ. Дакле, према дефиницији 13.3 проширења странâ σ и τ су изван диједарске површи $\sigma\tau$.

Уместо теореме 11.7 имамо сад ову:

Теорема 13.4. *Полураван ρ којој је руб ивица* a *диједарске површи $\sigma\tau$ и садржана је у тој површи, сече сваку дуж која спаја једну тачку на полуравни σ с једном тачком на полуравни τ.*

Обратно: ако полураван ρ, којој је руб ивица a *сече дуж која спаја извесну тачку у полуравни σ с извесном тачком у полуравни τ, полураван ρ је у диједарској површи $\sigma\tau$.*



Сл. 97

Доказ. Нека је A тачка у σ, а B у τ, затим O тачка на a (сл. 97). Раван ABO има с диједарском површи $\sigma\tau$ заједничке полуправе OA и OB, дакле сече ту површ по угаоној линији AOB.

Раван ABO и полураван ρ имају тачку O заједничку, дакле секу се по извесној полуправој r. Како је ρ у диједарској површи $\sigma\tau$, по дефиницији 13.3 је с оне стране полуравни σ с које је τ, дакле и r је с исте стране, тј. с оне стране полуравни σ с које је полуправа OB. Но r и OB су у равни ABO која се сече са σ по полуправој OA. Дакле r и OB су у равни ABO с исте стране полуправе OA.

Исто тако доказујемо да су полуправе r и OA с исте стране полуправе OB. Дакле по дефиницији 11.3 полуправа r је у угаоној линији AOB и према теореми 11.7 сече дуж AB у извесној тачки C. И полураван ρ, која садржи полуправу r, сече дуж AB у тачки C. — Тиме је први део теореме 13.4 доказан.

Аналого доказујемо (према доказу теореме 11.7) и други део теореме 13.4.

Исто тако имамо теореме аналоге теоремама 11.8 и 11.9.

4. Аналого дефиницији 11.4 дефинишемо изразе „с исте стране“ и „с разних страна“ једне диједарске површи.

Дефиниција 13.4. Ако за две тачке A и B, које не припадају диједарској површи $\sigma\tau$ постоји трећа тачка C, тако да дужи AC и BC немају заједничких тачака с диједарском површи $\sigma\tau$, рећи ћемо да су A и B с исте стране диједарске површи $\sigma\tau$. Ако не постоји таква тачка C, рећи ћемо да су тачке A и B с разних страна диједарске површи $\sigma\tau$.

Затим би се могле изрећи и доказати теореме које одговарају теоремама 11.11 и 11.12. Изрицање тих теорема и доказа препуштамо читаоцу.

5. Диједар дефинишемо аналого углу:

Дефиниција 13.5. Нека су σ и τ две полуправе са заједничким рубом и које образују диједарску површ или раван $\sigma\tau$.

Укупност тачака те диједарске површи или те равни $\sigma\tau$ и свих тачака које су с једне исте стране те диједарске површи или равни, називаћемо *диједром*.

Заједнички руб полуравни σ и τ називаћемо *ивицом* тог диједра, полуравни σ и τ његовим *странама* или *пљоснима*, а диједарску површ или раван $\sigma\tau$ његовом *површи*.

За тачке диједра које не припадају његовој површи, рећи ћемо да су *у диједру*, а за тачке које су са супротне стране те површи рећи ћемо да су *изван* диједра. За тачке које припадају површи диједра кажемо и да су *на* диједру. Укупност тачака које су у диједру називаћемо његовом *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван диједра његовом *спољашњошћу*.

Диједре можемо обележавати великим грчким словима. Ако су σ и τ стране диједра, или пак AB ивица, S тачка у полуравни σ, а T у полуравни τ, тај диједар ћемо обележавати и знаком $\sphericalangle\sigma\tau$ или $\sphericalangle SABT$.

На темељу дефиниција 13.4 и 13.5 постоји следећа теорема:

Теорема 13.5. *Диједар коме је површ диједарска површ $\sigma\tau$, састоји се из те диједарске површи и свих тачака простора које су у тој диједарској површи или које су изван те диједарске површи. Диједар коме је површ раван $\sigma\tau$, састоји се пак из те равни и једног полупростора коме је површ та раван.*

Доказ. препуштамо читаоцу.

О пресеку диједра једном равни докажимо следећу теорему и затим изрецимо дефиницију пресечног угла.

Теорема 13.6. *Раван која сече ивицу једног диједра, има с тим диједром заједнички један угао коме је руб она угаона линија по којој та раван сече површ тог диједра, а коме се унутрашњост састоји из унутрашњих тачака диједра, садржаних у тој равни.*

Доказ. Као што је у теореми 13.2 доказано, раван σ која сече ивицу диједра $\sphericalangle\varphi\psi$, сече диједарску површ $\varphi\psi$ по извесној угаоној линији pq. Према дефиницији 13.5 диједар $\sphericalangle\varphi\psi$ се састоји из диједарске површи $\varphi\psi$ и свих тачака које су с исте стране те површи. Дакле раван σ има с тим диједром заједничку угаону линију pq и оне тачке у σ, које су с дотичне стране диједарске површи $\varphi\psi$, дакле с исте стране угаоне линије pq. То је један од углова $\sphericalangle pq$, и то онај коме се унутрашњост састоји из унутрашњих тачака диједра.

Према тој теореми постављамо следећу дефиницију:

Дефиниција 13.6. Угао који се састоји из тачака заједничких једном диједру и једној равни која сече ивицу тог диједра, називамо *пресечним углом* тог диједра и те равни.

Слично угловима, разликујемо удубљене, испупчене и испружене диједре.

Дефиниција 13.7. Диједар који се састоји из тачака на једној диједарској површи и у њој називаћемо *удубљеним* или *конкавним*, онај диједар који се састоји из тачака на једној диједарској површи и ван ње називаћемо *испупченим* или *конвексним*, а онај који се састоји из полупростора и његове површи *опруженим*.

Споменимо напр. следећу теорему, аналогу теореми 12.6, чији је доказ кратак.

Теорема 13.7. *Ако је $\sigma\tau$ ма која диједарска површ, постоје два диједра, један удубљен, други испупчен, којима су σ и τ заједничке стране, а диједарска површ заједничка површ, а ван те диједарске површи немају заједничких тачака. Простор се састоји из та два диједра.*

На основи те теореме можемо дефинисати разлагање простора једном диједарском површи, аналого дефиницији 12.3.

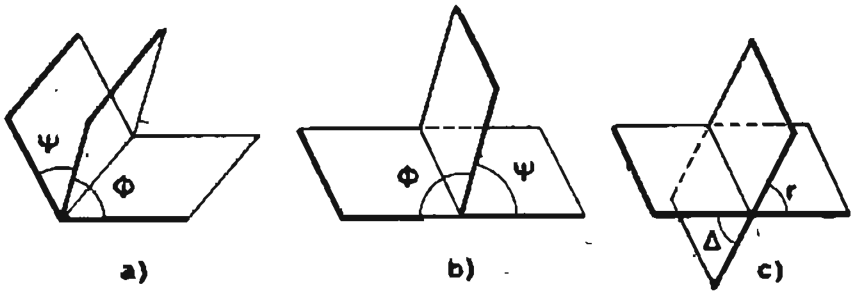
Теорема 13.7 значи да *свака диједарска површ разлаже простор на два диједра: један удубљен и један испупчен.*

У потпуној аналогији с дефиницијом 12.4 и 12.5 имамо следеће:

Дефиниција 13.8. Два диједра с једном заједничком страном и који ван те стране немају заједничких тачака, зваћемо *суседним диједрима.*

Дефиниција 13.9. Два суседна удубљена диједра којима оне две стране које нису заједничке припадају једној равни зваћемо *напоредним диједрима.*

Два удубљена диједра који имају само ивицу заједничку, а стране, две по две, образују две равни, зваћемо унакрсним диједрима.



Сл. 98

У слици 98а претстављена су два суседна диједра Φ и Ψ, у слици 98b два напоредна диједра Φ и Ψ а у слици 98с два унакрсна диједра Γ и Δ.

И остали садржај §12 може се лако пренети на диједре. О триједрима је реч у §16.

14. СМЕР НА ПРАВОЈ И ОКО ТАЧКЕ У РАВНИ.

1. У геометрији се говори о *смеру* пре свега у посматрању правих. Кад је на правој одређен смер то значи да су њене тачке поређане на особит начин. Та поређаност може се дефинисати помоћу појма „између“, али потребни су пре свега извесни појмови из теорије уређених мноштава.

Полазимо од основног појма пре и кажемо за неко мноштво да је уређено или да су његови елементи поређани, ако је за свака његова два разна елемента одређено који од њих долази пре другога. Ако су x, y ма која два елемента једног уређеног мноштва и ако x долази пре y пише се $x \prec y$. Тада кажемо такође да y долази после x и пишемо $y \prec x$.

Уредити у том смислу једно мноштво значи, дакле, у суштини, посматрати све његове елементе у времену извесним редом. Основни услови овог односа су несиметрија и транзитивност. То исказују две аксиоме о уређеним мноштвима, које гласе:

(I). *Ако су* x, y *елементи уређеног мноштва и ако је* x *пре* y, *није* y *пре* x.

(II). *Ако су* x, y, z *елементи уређеног мноштва и ако је* x *пре* y, *а* y *пре* z, *тада је такође* x *пре* z.

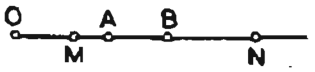
Мноштво свих целих, или рационалних, или реалних бројева, поређаних по својој величини (тј. $a \prec b$ ако је $a < b$) јесу примери уређених мноштава. Свако мноштво, па и ово, може се уредити и на безброј других начина (напр. ако је $|a| < |b|$ или ако је пак $|a|=|b|$ но $a < 0$, $b > 0$, сматраћемо да је $a \prec b$).

И тачке на правој могу се поређати на разне начине. Основни значај има тзв. природни или нормални распоред, кад су поређане у једном одређеном смеру. Ако на правој посматрамо само коначно много тачака и поређамо их у низ онако као што казује теорема 6.18, поређали смо их, очигледно, у једном смеру. Но потребно је посматрати тако и бескрајна мноштва тачака, па и све тачке на једној правој.

2. Дефинисаћемо прво смер на полуправој а затим на правој. Но пре тих дефиниција доказаћемо две теореме.

Теорема 14.1. *Укупност тачака полуправе* p *с исходиштем* O *може се уредити тако да ма од којих двеју њених тачака* A *и* B *од којих је* A *између* O *и* B, *тачка* A *долази* пре *тачке* B, *или пак тако да тачка* B *долази* пре *тачке* A.

Доказ. Покажимо прво да се p може уредити тако да ма од којих двеју њених тачака A и B од којих је A између O и B, тачка A долази пре B. — Нека су M и N ма које две разне тачке на p (сл. 99). Према дефиницији 10.2 је $O-M-N$ или $O-N-M$. Ако је $O-M-N$ казаћемо да је M пре N, ако је пак $O-N-M$ казаћемо да је N пре M. На тај начин је за сваке две тачке на правој p одређено која долази пре које.



Сл. 99

Треба још доказати да су испуњене аксиоме (I) и (II). Рецимо да је M пре N. Тада је према претходноме $O-M-N$, дакле није $O-N-M$, и према томе није N пре M. Нека су затим L, M, N три разне тачке на p, тачка L пре M, а M пре N. Имамо дакле $O-L-M$ и $O-M-N$, дакле према теореми 6.14 је такође $O-L-N$, тј. L је пре N. Тиме је први део теореме доказан.

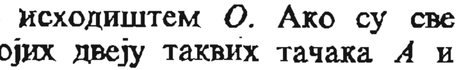
Други део теореме доказује се исто тако, стављајући да је M пре N ако је $O-N-M$ и да је N пре M ако је $O-M-N$.

На темељу ове теореме оправдана је следећа дефиниција.

Дефиниција 14.1. Нека је p полуправа с исходиштем O. Ако су све тачке полуправе p поређане тако да од ма којих двеју таквих тачака A и B тачка A долази пре тачке B кад год је A између O и B, рећи ћемо да је на полуправој p одређен *смер од исходишта O*.

Ако су пак све тачке полуправе p поређане тако да тачка B долази пре тачке A кад год је A између O и B, рећи ћемо да је на полуправој p одређен *смер према исходишту O*.

Теорема 14.2. *Нека је права* a *разложена тачком* O *на полуправе* p *и* q. *Укупност тачака праве* a *може се уредити тако да на полуправој* p *буде одређен смер ка њеном исходишту* O, *а на полуправој* q *смер од њеног исходишта* O *и да свака тачка на* p *долази пре сваке тачке на* q *и пре тачке* O, *а тачка* O *пре сваке тачке на* q.



Сл. 100

Доказ. Саобразно теореми 14.1 и дефиницији 14.1 поређајмо све тачке полуправе p тако да на p буде одређен смер ка O, а све тачке полуправе q тако да на q буде одређен смер од O. За две тачке на p или пак на q

одређено је тиме која долази испред које. Ако две тачке праве a не припадају обе полуправој p или полуправој q постоје само ова три случаја:

1) Једна тачка је на p, а друга се поклапа с O; тада узимамо да прва долази пре друге.

2) Једна тачка је на q, а друга се поклапа с O; тада узимамо да друга долази пре прве.

3) Једна тачка је на p, а друга на q; тада узимамо да прва долази пре друге.

Тиме је за сваке две тачке на правој a одређено која долази пре које.

Треба доказати да су за укупност тачака праве a испуњене и аксиоме (I) и (II). Заиста, нека су X, Y ма које две тачке на a и $X \prec Y$ (сл. 100). Ако су обе тачке на p или на q, тада саобразно дефиницији 14.1 смера, који је уведен на p и на q, не може бити $X \succ Y$. Ако тачке X и Y нису обе на p или на q, постоје набројана три случаја. У првом случају X је на p, а $Y \equiv O$, у другом је $X \equiv O$ а Y је на q, у трећем је X на p а Y на q, дакле према захтевима постављеним у та три случаја не може бити $Y \prec X$.

Најзад, нека су X, Y, Z три тачке на a и нека је $X \prec Y$, $Y \prec Z$. Ако су све три тачке на p или на q, тада је саобразно дефиницији 14.1 такође $X \prec Z$. Ако тачке X, Y, Z нису све три на p или на q, тада X није на q, а Z није на p. Заиста, кад би тачка X била на q, из $X \prec Y$ би следовало на темељу захтева постављених у другом и трећем од три набројана случаја, да је и Y на q, а исто тако да је и Z на q. Кад би пак тачка Z била на p, из $Y \prec Z$ би следовало, на темељу захтева постављених у првом и трећем од набројаних случајева, да је и Y на p, а отуд, исто тако, да је и X на p.

Дакле, постоје само ове три могућности:

1) X је на p, а $Z \equiv O$,
2) X је на p, а Z на q,
3) $X \equiv O$, а Z је на q.

Према захтевима које смо поставили у раније наведена три случаја, увек је $X \prec Z$. — Тиме је теорема доказана.

Сад се може изрећи следећа дефиниција:

Дефиниција 14.2. Нека је права a разложена тачком O на полуправе p и q. Ако су све тачке праве a поређане тако да је на полуправој p одређен смер ка њеном почетку O, а на полуправој q смер од њеног почетка O и тако да свака тачка на p долази пре сваке тачке на q и пре тачке O, а тачка O пре сваке тачке на q, рећи ћемо да је на a одређен *смер од p ūрема q*.

Ако су при томе A и B две ма које тачке на правој a и ако A долази пре B, рећи ћемо такође да је тај смер одређен од A према B.

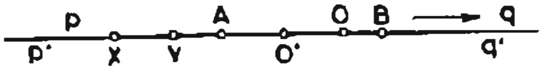
Кад је на правој одређен смер, казаћемо такође да је права (као мноштво тачака) уређена у једном смеру или да је природно или нормално уређена, или да је усмерена (оријентисана), или пак да су све њене тачке поређане у једном смеру. Исто тако говоримо за полуправу.

Могло би се рећи да је смер праве уређеност мноштва њених тачака саобразно дефиницији 14.2.

Уместо „A долази пре B“ каже се такође „A је испред B“ или „B је иза A“. (Ово је особито оправдано кад су тачке на правој поређане у једном смеру. Тада реч „испред“ добија своје конкретно геометријско значење.)

3. Докажимо да је смер на правој, уведен дефиницијом 14.2, независан од избора тачке O.

Теорема 14.3. *Ако је преко разлагања праве* a *тачком* O *на две полуправе одређен на* a *смер од* A *ка* B, *па ако се преко разлагања праве* a *ма којом другом њеном тачком* O' *на две полуправе одреди опет на* a *смер од* A *ка* B, *тачке праве* a *су оба пута поређане на исти начин.*



Сл. 101

Доказ. Назовимо уређење праве a, које полази од тачке O укратко **првим** уређењем, а оно које полази од тачке O' **другим** уређењем. Обележимо полуправе на које је права a разложена тачком O словима p и q, а полуправе на које је разложена тачком O' знацима p' и q', тако да у првом уређењу смер од A ка B буде по дефиницији 14.2 истоветан са смером од p ка q и да у другом уређењу смер од A ка B буде истоветан са смером од p' ка q'. Тачка O' је на p или на q; рецимо да је на p (сл. 101).

Како је свеједно које су две тачке на a узете за A и B, под условом да је $A \prec B$, претпоставимо да је A на p и да је $A-O'-O$, а B на q. Тада су A и B с разних страна тачке O', дакле једна је на p', друга на q', па како је и у другом уређењу $A \prec B$, полуправа p' је она на којој је A, а q' она на којој је B. Према томе p и q' имају заједничку тачку A, па како је $A-O'-O$, а O' је на p, полуправа p' је садржана на p. Исто тако q и q' имају заједничку тачку B, и полуправа q је садржана на q'.

Нека су X, Y ма које две тачке на a, тако да је $X \prec Y$ у првом уређењу. Докажимо да је и у другом уређењу $X \prec Y$.

На темељу дефиниције 14.2 постоји пет могућности: 1) X и Y су на p, 2) X је на p, а $Y \equiv O$, 3) X је на p, а Y на q, 4) $X \equiv O$ а Y је на q, 5) X и Y су на q.

Ако су X и Y на p, имамо три случаја:

1) X и Y су на p' и $X-Y-O'$, дакле на p' је $X \prec Y$ у смеру ка O', а отуд је према дефиницији 14.2 $X \prec Y$ и у другом уређењу.

2) X је на p', а $Y \equiv O$, дакле према дефиницији 14.2 је $X \prec Y$ и у другом уређењу.

3) X је на p' и $X-O'-Y$ $(O'-Y-O)$, дакле Y је на q', тј. опет је према истој дефиницији и у другом уређењу $X \prec Y$.

Ако је X на p, а $Y \equiv O$, имамо опет три случаја:

1) X је на p', па како је O на q', Y је на q', тј. опет је према дефиницији 14.2 и у другом уређењу $X \prec Y$.

2) $X \equiv O'$, па како је Y на q', опет је $X \prec Y$ и у другом уређењу.

3) $O'-X-O$, тј. $O'-X-Y$, дакле X и Y су на q и то $X \prec Y$ у смеру од O', а отуд је и у другом уређењу $X \prec Y$.

Ако је X на p, а Y на q, постоје опет три случаја:

1) X је на p'. Како је Y на q, а полуправа q је садржана на q', Y је на q', дакле према дефиницији 14.2 имамо $X \prec Y$ и у другом уређењу.

2) $X \equiv O$, па како је Y на q', опет је према дефиницији 14.2 и у другом уређењу $X \prec Y$.

3) $O'-X-O$, па како је Y на q, имамо $O'-O-Y$, дакле према теореми 6.14 $O'-X-Y$, тј. на q' је $X \prec Y$ у смеру од O', дакле је $X \prec Y$ и у другом уређењу.

Ако је $X \equiv O$, а Y на q, тачке X и Y су обе на q' и имамо $O'-X-Y$ као претходно, дакле је $X \prec Y$ и у другом уређењу.

Ако су X и Y на q, имамо $O-X-Y$, па како је полуправа q садржана на q', X и Y су на q'. Но O' је ван q, дакле имамо $O'-O-X$, а отуд, према теореми 6.11 $O'-X-Y$, тј. опет је $X \prec Y$ и у другом уређењу.

Дакле, претпоставивши да је O' на p, кад год је у првом уређењу праве a XY, увек је и у другом уређењу $X \prec Y$, тј. оба уређења су истоветна.

Ако је пак O' на q, тада је O на p' и услови се изједначују с претходним ако уместо O, p, q пишемо O', p', q' и обратно. Дакле ако би у другом уређењу било $Y \prec X$, било би по претходном закључку и у првом уређењу $Y \prec X$, супротно претпоставци. Према томе, и ако је O' на q, кад год је у првом уређењу $X \prec Y$, то је и у другом уређењу. — Тиме је доказ завршен.

Теорему 14.3 можемо изрећи и овим речима: *Смер на правој не зависи од избора тачке* O *којом се права разлаже на две полуправе.*

4. Као што се на полуправој могу одредити два смера: смер од њеног почетка и смер према почетку, тако можемо и на правој одредити два (и само два) смера. Ако је права a разложена на две полуправе p и q, један је смер од p према q, а други од q према p. Ако су пак A и B две тачке на правој a, један од та два смера је смер од A према B, а други од B према A. Однос између оба смера, како на полуправој тако и на правој исказан је у следећим двема теоремама: Прва следује непосредно из дефиниције 14.1.

Теорема 14.4. *Ако су* X *и* Y *ма које две тачке на полуправој* Op *и ако је тачка* X *испред тачке* Y *у смеру од исходишта* O, *тада је тачка* Y *испред тачке* X *у смеру према исходишту* O.

Теорема 14.5. *Ако су* X *и* Y *ма које две тачке на правој* a, *разложеној на полуправе* p *и* q *и ако је тачка* X *испред тачке* Y *у смеру од* p *према* q, *тада је тачка* Y *испред тачке* X *у смеру од* q *према* p.

Доказ. Како је $X \prec Y$ у смеру од p према q, према дефиницији 14.2 је на p $X \prec Y$ у смеру ка исходишту O обеју полуправих, или је на q $X \prec Y$ у смеру од O, или је X на p а $Y \equiv O$, или је X на p а Y на q или $X \equiv O$ а Y је на q. Дакле, према теореми 14.4 и према дефиницији 14.2 је, изменивши ред посматрања; на q $Y \prec X$ у смеру ка O, или је на p $Y \prec X$ у смеру од O, или је Y на q а $X \equiv O$, или је Y на q а X на p, или је $Y \equiv O$ а X на p, а то значи према дефиницији 14.2 да је $Y \prec X$ у смеру од q према p.

Будући да се услед промене смера однос $X \prec Y$ обрће у однос $Y \prec X$, можемо изрећи следећу дефиницију:

Дефиниција 14.3. На правој, смер од исходишта и смер ка исходишту називаћемо *супротним* (или обрнутим) један другоме. И на правој смер од p према q (или од тачке A према тачки B) и смер од q према p (одн. од B према A) називаћемо један другоме *супротним* (или обрнутим).

На темељу дефиниција и теорема 14.3 и 14.5 постоји, очигледно, следећа теорема:

Теорема 14.6. *Све тачке на једној правој могу се на два и само два начина поређати у једном смеру. Ако су* A *и* B *две тачке на тој правој, та два смера су; смер од* A *ка* B *и супротни смер, од* B *ка* A.

5. Односи „између“ и „испред“ стоје у непосредној вези. Полазећи од односа „између“ и од неких појмова из теорије уређених мноштава, дефинисали смо геометријски однос „испред“, примењујући га само кад су тачке на правој поређане у једном одређеном смеру. Могло би се исто тако поћи од односа „испред“ као основног геометријског појма и дефинисати „између“, рецимо, овако: Ако је на правој a у једном одређеном смеру тачка A испред тачке B, а ова испред тачке C, казаћемо да је тачка B између тачака A и C (или пак тачака C и A). У таквом извођењу геометрије права се не би дефинисала, а о смеру би се говорило од почетка излагања.

Следеће две теореме утврђују везу између односа „између“ и „испред“.

Теорема 14.7. *Ако су* A, B, C *три тачке на једној правој и ако је у једном одређеном смеру на тој правој* A *испред* B, *а* B *испред* C, *тада је тачка* B *између тачака* A *и* C.

Обрнуто: ако је тачка B *између тачака* A *и* C, *тада је* A *испред* B, *а* B *испред* C *или је пак* A *иза* B *и* B *иза* C.

Доказ. Претпоставимо да је на правој a $A \prec B$ и $B \prec C$. Према теореми 14.3 свеједно је којом се тачком O права a разлаже на полуправе p и q. Изаберимо $O \equiv A$ и обележимо обе полуправе словима p и q тако да смер од A ка B буде смер од p према q. Тада је према дефиницији 14.2 B на q. Како је и $A \prec C$, тачка C је такође на q, а како је $B \prec C$, тачка B је према дефиницији 14.1 између A и C.

Обрнуто, нека је тачка B између A и C. Поређајмо тачке на a у једном смеру, разложивши је на две полуправе тачком A. По дефиницији 14.2 полуправа AB с исходиштем A је уређена у смеру од A или у смеру према A. У првом случају из дефиниције 14.1 следује $B \prec C$, у другом случају $C \prec B$, дакле $B \succ C$. Према дефиницији 14.2 је у првом случају такође $A \prec B$, а у другом $A \succ B$.

Теорема 14.8. *Нека су* A, B, C *три тачке на једној правој и нека је* B *између* A *и* C. *Ако постоји један од три односа:* A *је испред* B, *или* B *је испред* C, *или* A *је испред* C, *тада постоје сва три односа.*

Доказ. Према другом делу претходне теореме је $A \prec B \prec C$ или $A \succ B \succ C$. Ако је $A \prec B$, не може бити други од ова два двострука односа, дакле је $A \prec B \prec C$. Исти је закључак ако је $B \prec C$ или $A \prec C$.

6. Самим тим што су све тачке на правој поређане у једном одређеном смеру, поређано је и свако мноштво тачака на правој, која садржи бар две тачке. Можемо изрећи ову дефиницију.

Дефиниција 14.4. Нека је M ма које мноштво тачака на правој a (које садржи бар две тачке) затим X, Y ма које две тачке тога мноштва, а тачке A, B пак ма које две тачке на a. Рећи ћемо да је у мноштву M *тачака X испред тачке Y у смеру од A ка B* ако је на правој a X испред Y у смеру од A ка B. Тада ћемо рећи и да је мноштво M *уређено у смеру од A ка B*.

На пример, коначно мноштво тачака, које су према теореми 6.18 поређане у низ $A_1, A_2, \ldots, A_n$, поређане су самим тим у једном одређеном смеру, наиме у смеру од A_1 ка A_2 (општије узето: од A_i ка A_k, $i < k$).

Може се, наиме, доказати следећа теорема:

Теорема 14.9. *Ако је коначно мноштво тачака једне праве* а *обележено знацима* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n > 3$) *тако да је* A_2 *између* A_1 *с једне стране и* $A_3, A_4, \ldots, A_n$ *с друге стране, да је* A_3 *између* A_1, A_2 *с једне стране и* $A_4, A_5, \ldots, A_n$ *с друге стране итд. и да је* A_{n-1} *између* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ *с једне и* A_n *с друге стране, тада је то мноштво тачака уређено у једном* *одређеном смеру, наиме у смеру од* A_1 *ка* A_2. *Свака тачка тога низа, од прве до последње, стоје на а испред следеће тачке истог низа.*

Доказ. Разложимо праву a на две полуправе p и q напр. тачком A_1 и нека је q она која садржи тачку A_2. Поређајмо све тачке на a у смеру од A_1 ка A_2. Према дефиницији 14.2 тачке на q су поређане, дакле, од њеног исходишта A_1. Како је $A_1-A_2-A_3$, према дефиницији 14.1 је $A_2 \prec A_3$; како је $A_1-A_3-A_4$, имамо исто тако $A_3 \prec A_4$; итд. Најзад, како је $A_1-A_{n-1}-A_n$, имамо $A_{n-1} \prec A_n$. Тиме је доказано да свака тачка посматраног низа, све до претпоследње, стоји на a испред следеће тачке истог низа.

На основу дефиниције 14.4 то мноштво тачака је уређено у смеру од A_1 ка A_2.

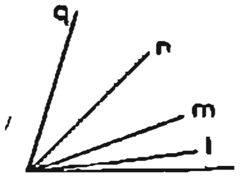
7. О смеру се у геометрији говори особито још и кад се посматрају полуправе у једној равни, које полазе из једне заједничке тачке. За те полуправе може се дефинисати кружан (цикличан) распоред, а саобразно томе и смер, на темељу узајамног раздвајања парова полуправих (§ 12, 6).

Но будући да смо за полуправе садржане у једном углу дефинисали однос „између", можемо и на темељу тог односа „између" дефинисати смер за полуправе у једном углу. На тај начин се излагање може највише упростити.

8. Пре него што искажемо дефиницију доказаћемо теорему која одговара теореми 14.1. У њој је реч о полуправим a и b, садржаним у једном углу с крацима p и q и које полазе из његовог темена O. Треба имати на уму да се при томе a може поклопити са p, а b са q, а да треба обухватити све случајеве када се може рећи да a долази пре b у извесном смеру. Дакле, треба допустити да у том углу буде не само $p-a-b$ и $a-b-q$, него такође $a \equiv p$ и $a-b-q$ или пак $b \equiv q$ и $p-a-b$ или, штавише, $a \equiv p$ и $b \equiv q$ истовремено. Прва три случаја обухваћена су, очигледно у два следећа: $p-a-b$ и $a-b-q$. Стога дајемо теореми овај облик:

Теорема 14.10. *Нека је* φ *угао с крацима* p *и* q *и с теменом* O. *Укупност полуправих садржаних у* φ *и које полазе из* O *може се уредити тако да ма од којих двеју таквих полуправих* a *и* b, *од којих је* a *између* p *и* b *или пак* b *између* a *и* q, *полуправа* a *долази пре* b; *а може се уредити и тако да полуправа* b *долази пре полуправе* a.

Доказ. Докажимо први део теореме, не улазећи у све појединости Нека су x, y ма које две разне полуправе у φ с исходиштем O и које се не поклапају с p. Тада је на темељу дефиниције 11.12 $p-x-y$ или $p-y-x$ (сл. 102). Ако је $p-x-y$ казаћемо да је x пре y, ако је пак $p-y-x$, казаћемо да је y пре x. Ако се m и n не поклапају с q, али једна од тих полуправих се поклапа с p, имамо пак $m-n-q$ или $n-m-q$. Ако је $m-n-q$ казаћемо да је m пре n, ако је $n-m-q$ казаћемо да је n пре m. Приметимо да је дакле p пре сваке полуправе у углу φ, различите од p и q, а ова пре q. Најзад, стављамо p пре q. Тиме је за сваке две полуправе посматраног мноштва одређено која долази пре које.



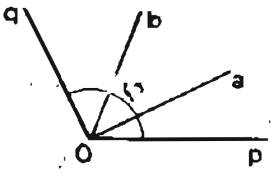
Сл. 102

Треба доказати да су испуњене и аксиоме (I) и (II) уређених мноштава. Рецимо да је m пре n. Ако није $m \equiv p$ и $n \equiv q$, имамо $p-m-n$ или $m-n-q$. Дакле није ни $p-n-m$ ни $n-m-q$ и према томе није n пре m. Није ни q пре p, јер смо узели непосредно да је p пре q. Дакле, аксиома (I) је испуњена.

Нека су l, m, n три разне полуправе, l пре m а m пре n. Ако се не поклапа ни једна с p имамо $p-l-m$ и $p-m-n$, дакле такође $p-l-n$, тј. l је пре n. Ако се једна од тих трију полуправих поклапа с p, то је l, дакле l је пре сваке полуправе у φ различите од l и q, према томе и пре n. Дакле и аксиома (II) је испуњена.

Други део теореме доказује се исто тако.

9. Сад се може изрећи следећа дефиниција:



Сл. 103

Дефиниција 14.5. Нека је φ угао с крацима p и q и с теменом O (сл. 103). Ако су све полуправе, садржане у φ и које полазе из темена O, поређане тако да ма од којих двеју таквих полуправих a и b полуправа a долази пре полуправе b кад год је у φ полуправа a између полуправих p и b, или полуправа b између полуправих a и q, или се a поклапа с p а b с q, рећи ћемо да је у углу φ одређен *смер од* p *према* q.[*]

Ако су при томе m и n две ма које полуправе посматраног мноштва и ако m долази пре n, можемо рећи такође да је у углу φ одређен смер од m према n.

Казаћемо и да је угао — као мноштво тих полуправих — уређен у једном смеру или да је природно или нормално уређен, или, једном речи, усмерен, или да су његове полуправе поређане у једном смеру.

Уместо „полуправа a долази пре полуправе b“ можемо рећи такође „a је испред b“ или „b је иза a“.

10. Као што се на правој могу одредити два смера, тако и у углу можемо одредити два смера.

Теорема 14.11. *Ако су* x *и* y *ма које две полуправе у углу* $\sphericalangle pq$ *и које полазе из његовог темена* O *и ако је* x *испред* y *у смеру од* p *према* q, *тада је* y *испред* x *у смеру од* q *према* p.

Доказ. Ако је у углу $\sphericalangle pq$ x испред y у смеру од p према q. према дефиницији 14.5 је $p-x-y$ или $x-y-q$ или $x \equiv p$, $y \equiv q$, тј. другим редом написано $q-y-x$ или $y-x-p$ или је $y \equiv q$, $x \equiv p$, а ово значи да је према дефиницији 14.5 y испред x у смеру од q према p.

Дефиниција 14.6. У углу $\sphericalangle pq$ смер од p према q и смер од q према p називаћемо један другоме *супротним* (или обрнутим).

11. Постоје и теореме које су аналогне теоремама 14.6, 14.7, 14.8 и 14.9. И њихови докази су аналогни. Наводимо само теорему која одговара теореми 14.9.

Теорема 14.12. *Ако је коначно мноштво полуправих садржаних у углу* $\sphericalangle pq$ *и које полазе из његовог темена, обележено знацима* $a, a\ldots, a$ $(n>3)$ *тако да је* a_1 *између* p *с једне стране и* $a_2, a_3, \ldots, a_n$ *и* q *с друге стране, да је* a_2 *између* p *и* a_1 *с једне стране и* $a_3, a_4, \ldots, a_n$ *и* q *с друге стране итд. и да је* a_n *између* $p, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ *с једне стране и* q *с друге стране, тада су све те полуправе поређане у углу* $\sphericalangle pq$ *у једном одређеном смеру, наиме у смеру од* p *ка* q. *Свака полуправа низа* $p, a_1, a_2, \ldots, a_n, q$ *од прве до претпоследње, стоји у углу* $\sphericalangle pq$ *испред следеће полуправе истог низа.*

---

[*] Могао се уместо тог односа „између“ употребити и однос узајамног раздвајања и у дефиницији рећи да је у углу $\sphericalangle pq$ *x испред y у смеру од p* према q ако се парови a, y и b, x раздвајају или је $x \equiv a$ или $y \equiv b$.

12. У претходном посматрању смера ограничили смо се на полуправе садржане у једном углу. Но смер се уводи за све полуправе са заједничким почетком, садржане у једној равни. Доносимо дефиницију каква се може изрећи на темељу претходних. Но као што је дефиниција 14.2 претходила теореми 14.2, тако овој дефиницији претходи аналога теорема коју доносимо без доказа:

Теорема 14.13. *Нека је раван* α *разложена угаоном линијом* pq *на два угла* φ *и* ψ. *Укупност полуправих у тој равни, које полазе из темена* O *тих углова може се уредити тако да у* φ *буде одређен тиме смер од* p *према* q, *а у* ψ *смер од* q *према* p. *и то тако да свака полуправа и* φ *долази пре сваке полуправе у* ψ *— изузимајући у оба последња случаја полуправу* p.

Дефиниција 14.7. Нека је раван α разложена угаоном линијом pq на два угла φ и ψ. Ако су све полуправе у тој равни, које полазе из темена O тих углова, поређане тако да је у углу φ одређен смер од p према q, у углу ψ смер од q према p и тако да свака полуправа у φ долази пре сваке полуправе у ψ — искључујући у оба последња случаја полуправу p из посматрања, рећи ћемо да је у равни одређен смер око тачке O, полазећи од полуправе p.

Ако су m и n ма које полуправе истог мноштва, различите од p, и ако m долази пре n, рећи ћемо за дефинисани смер да је *смер* од m *према* n.

Приметимо да је у тако уређеном мноштву полуправих полуправа p испред свих других полуправих тога мноштва. Називамо је полазном полуправом. Очигледно, свака полуправа тога мноштва може се изабрати за полазну полуправу. Тиме се мења њихова уређеност. Кад у каквом било уређеном мноштву постоји почетни (први) елемент, то мноштво се назива добро уређеним.

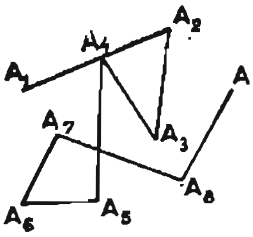
Кад је око једне тачке одређен тако смер, кажемо и да је мноштво тих полуправих добро уређено у једном смеру око тачке O.

Затим, могло би се доказати да је поређаност полуправих, саобразно дефиницији 14.7, независна од избора полуправе q и да после избора полуправе p постоје два начина да се све полуправе око O поређају у једном одређеном смеру (два супротна смера). Најзад, могло би се посматрати какво било мноштво полуправих са заједничким исходиштем O, у равни α и дефинисати за то мноштво смер, полазећи од p. — Сва та и друга посматрања изостављамо. Њихово излагање не пружа тешкоће и читалац може ради вежбе поставити и доказати неке од тих теорема.

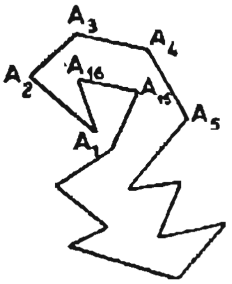
15. МНОГОУГЛИ.

1. Најопштије врсте изломљених линија и многоуглова проучавају се у теорији мноштава. Како би нас то проучавање одвело предалеко, почињемо с једном дефиницијом изломљене линије, којом ограничавамо од почетка своје посматрање, но која још увек обухвата врло широку класу тих линија. У тој дефиницији, као и у посматрању које затим долази полазимо од низа тачака и дужи, претпостављајући, као до сада, да је појам низа познат. (У теорији мноштава низ се дефинише као извесно „добро уређено“ мноштво.) Ограничавамо се пак на коначне низове, и то на низове дужи, а не кривих линија, и сем тога искључујемо могућност да се два темена изломљене линије поклапају. Усвајамо дакле следећу дефиницију, за којом долазе остале.

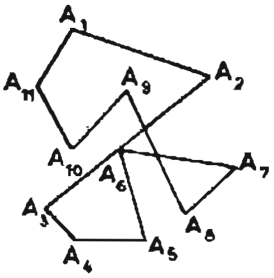
Дефиниција 15.1. Нека је A_1, A_2, . . . , A_n $(n - 3,4, \ldots)$ коначан низ тачака, разних међу собом, сем што се A_1 и A_n могу поклопити. Низ дужи $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, , . . . , $A_{n-1} A_n$, чији крајеви су по две узастопне тачке првог низа и у коме две узастопне дужи не припадају једној правој — сматрајући у случају кад се A_1 и A_n поклапају да су и дужи $A_{n-1} A_1$ и $A_1 A_2$ узастопне — називамо *изломљеном линијом* или *изломљеном цртом*. Те дужи називамо *страницама* изломљене линије, а сваки заједнички крај двеју страница *теменом* изломљене линије. Два темена на једној страници зовемо *суседним теменима*, а две странице са заједничким теменом *суседним страницама*. Угао чији краци садрже две суседне странице зове се *угао изломљене линије*.



Сл. 104



Сл. 105



Сл. 106

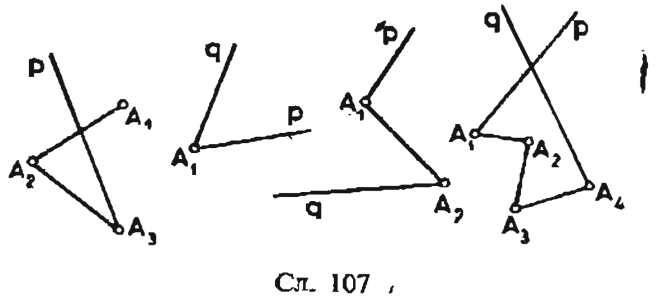
Ако је A_m, A_{m+1}, . . . , A_{m+r} $1 \leqslant m < m+r \leqslant n$, делимичан низ узастопних $r+1$ тачака датог низа A_1, A_2, . . . , A_n, рећи ћемо да на тој изломљеној линији има $r-1$ теме *између* темена A_m и A_m'.

Дефиниција 15.2. Ако се изломљена линија састоји из дужи A_1A_2, A_2A_3, . . . , A_{n-1} A_n и ако су A_1 и A_n две разне тачке, зовемо је *отвореном изломљеном линијом*; тачке A_1 и A_n зову се њени *крајеви* а остале тачке изломљене линије њене *унутарње тачке* (сл. 104). Ако се тачке A_1 и A_n поклапају, изломљену линију зовемо *затвореном изломљеном линијом* или *пик многоуглом* или *полигоном* (сл. 105 и 106).

Дуж која спаја два несуседна темена многоугла зове се *дијагонала*.

Према броју темена многоугла разликујемо *тоугле*, *четвороугле*, *петоугле* итд. и уопште *n-тоугле*.

Према претходним дефиницијама троугао, који смо ради ранијих посматрања дефинисали засебно у § 7, је многоугао.



Сл. 107

Отворену изломљену линију са страницама A_1A_2, $A_2 A_3$, . . . , $A_{n-1} A_n$ обележаваћемо знаком $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ или, краће, једним малим латинским словом.

Напомена. Изломљена линија је у ствари „изломљена дуж" за разлику од „изломљене криве" (напр. чије странице су кружни лукови) и за разлику од „изломљене полуправе" и „изломљене праве", које би садржале једну или две полуправе. Угао би био изломљена права с једним теменом (сл. 107).

Дефиниција 15.3. Ако су темена изломљене линије садржана сва у једној равни, називамо је *равном изломљеном линијом*, ако нису називамо је *просторном изломљеном линијом*. Ако је изломљена линија затворена називамо је у првом случају *равним многоуглом*, а у другом случају *просторним многоуглом*.

Дефиниција 15.4. Ако странице изломљене линије немају других заједничких тачака, сем што суседне две странице имају заједничко теме, изломљену линију називамо *простом изломљеном линијом* (сл. 105), а у противном случају *сложеном изломљеном линијом* (сл. 106).

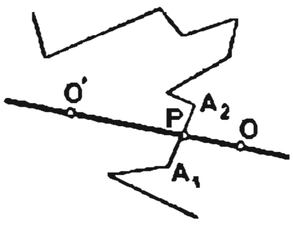
Ако је изломљена линија затворена, називамо је у првом случају *простим многоуглом*, а у другом случају *сложеним многоуглом*.

Дефиниција 15.5. Ако су у односу на сваку праву која садржи једну страницу равног многоугла све остале тачке тог многоугла садржане с једне исте стране те праве многоугао (полигон) зовемо *испупченим* (*конвексним*). Ако није тако за сваку такву праву, многоугао називамо *удубљеним* (*конкавним*).

2. У доказивању теорема ограничићемо се на просте равне многоугле који имају ма колики број темена. Једна од сврха нам је та да докажемо да је сваким таквим многоуглом његова раван подељена на два дела: на унутрашњост и на спољашност многоугла. Сваки део је „из једног комада" (повезан) у смислу теорије мноштава. Тада ћемо моћи да дефинишемо многоугаону површ. Још једна сврха нам је да докажемо могућност разлагања сваке просте равне многоугаоне површи на троугаоне површи. Но да би се дефиниција унутрашњости и спољашности многоугла оправдала, треба претходно доказати следеће две теореме.

Теорема 15.1. *У равни равног многоугла* $A_1, A_2 \ldots A_n$ *постоји полуправа чији почетак не припада многоуглу и која не садржи ниједно његово теме, а има с многоуглом било паран број заједничких тачака или ниједну, било непаран број заједничких тачака.*

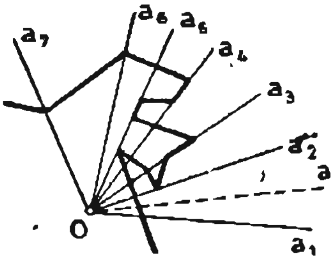
Доказ. Нека је P тачка на многоуглу, рецимо између A_1 и A_2 и a права у равни многоугла, која сече дуж A_1A_2 у P и не пролази ни кроз једно теме многоугла (сл. 108). Како је број правих које пролазе кроз P и кроз темена многоугла коначан, права a свакако постоји. Нека је O тачка на a, која не припада многоуглу и p полуправа с почетком O и која пролази кроз P. Ова полуправа сече најмање једну страницу многоугла, наиме A_1 A_2 у P. Заједничке тачке ове полуправе с многоуглом су пресечне тачке с његовим страницама. Нека је m број тих тачака. Како је P једна од њих, имамо $m > 0$. Нека је O' тачка на p која не припада мноштву и таква је да дуж OO' садржи само једну пресечну тачку с многоуглом, наиме P. (Ако је P' ма која друга пресечна тачка на p, увек је $P-O'-P'$). Полуправа p' која је садржана на p а почетак јој је O' не садржи тачку P, дакле број пресечних тачака полуправе p' с многоуглом је $m-1$. Према томе, ако је број m пресечних тачака полуправе p с многоуглом паран, број пресечних тачака полуправе p' је непаран; ако је пак број m непаран, овај други број је паран или нула. — Тиме је ова теорема доказана.



Сл. 108

Теорема 15.2 *Нека је у равни ма каквог равног многоугла* O *тачка која не припада том многоуглу, затим* a *полуправа која полази из* O *и не пролази ни кроз једно теме многоугла. Ако полуправа* a *има с многоуглом паран број* *заједничких тачака или ниједну, тада свака таква полуправа која полази из* O *има с многоуглом паран број заједничких тачака или ниједну. Ако пак полуправа* a *има с многоуглом непаран број заједничких тачака, тада свака таква полуправа има с многоуглом непаран број заједничких тачака.*

Доказ. Нека је то многоугао p и нека су $a_1, a_2, \dots, a_m$ полуправе које полазе из O и пролазе кроз темена многоугла, поређане у једном смеру, полазећи од a_1, и то у смеру од a_2 према a_3 у смислу дефиниције 14.7 (сл. 109). Како је полуправа a у једном од основних углова $\sphericalangle a_i a_{i+1}$ $(i=1, 2, \dots, m,\ a_{m+1} \equiv a_1)$ образованих низом тих полуправих (дефиниција 12.6), претпоставимо да је a у углу $\sphericalangle a_1 a_2$. Пренумерацијом полуправих може се увек постићи да буде тако. Ако је q полуправа с почетком у O и садржана у једном од основних углова, нека $k(q)$ означава број пресечних тачака полуправе q с многоуглом p.



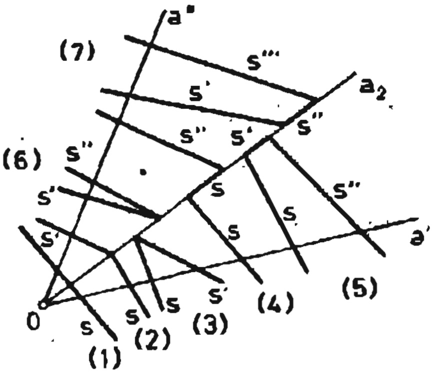
Сл. 109

Ако је a' још једна полуправа у углу $\sphericalangle a_1 a_2$, имамо $k(a') \equiv k(a)$. Заиста, ако је s која било страница многоугла коју сече a, према теореми 11.7 сече ту страницу и a', јер дуж s има по једну тачку на сваком краку угла $\sphericalangle a_1 a_2$, и обратно, ако је s' страница коју сече a', њу сече и a (сл. 110).

Ако је a'' полуправа у суседном основном углу, имамо уопште $k(a'') \equiv k(a')$. Покажимо да је разлика $k(a'') - k(a')$ парна или нула.

Нека је опет s страница многоугла p, коју сече a'. Разликујемо седам случајева:

1) Ако s нема крајњу тачку на a_2, ова полуправа сече страницу s, па како се у углу $\sphericalangle a_2\ a_3$ не налази ниједно теме многоугла, сече и a'' страницу s, дакле сваком оваквом пресеку многоугла с полуправом a' одговара пресек и са полуправом a''. Ако је, напротив, на a_2 једна крајња тачка странице s, то је теме многоугла у коме се састаје s са суседном страницом s'. Тада разликујемо даља четири случаја:



Сл. 110

2) Странице s и s' су с разних страна полуправе a_2. Тада као што a' сече s, тако a'' сече s', дакле и у овом случају пресеку многоугла са полуправом a' одговара пресек и с полуправом a''.

3) Суседне странице s и s' су с исте стране полуправе a_2. Тада a' сече s и s', но у углу $\sphericalangle a_2\ a_3$ нема пресека с тим страницама, дакле овде двама пресецима многоугла са a' не одговара ниједан пресек са a''.

Може s' припадати полуправој a_2. Тада уочимо идућу страницу s'', суседну страници s'. Према дефиницији 15.1 s'' није на a_2, дакле постоје две могућности:

4) s'' је с оне стране полуправе a_2 с које је a'' и сече се с a'', дакле пресеку многоугла с полуправом a' одговара пресек и са a'', и

5) s'' је с оне стране полуправе a_2 с које је a' и сече се с a', дакле двама пресецима многоугла са a' не одговара ниједан пресек са a''.

Постоје још два случаја:

6) Две суседне странице многоугла, s и s' могу бити с исте стране полуправе a_2 и то с оне с које је a''. Тада двама пресецима многоугла с a'' не одговара ниједан пресек с a'.

7) Једна страница s' је на a_2, а две њене суседне странице s и s'' су с оне стране полуправе a_2 с које је a''. Тада је закључак исти.

Уочимо укупност пресечних тачака многоугла p с a' и укупност пресечних тачака с a''. Ако из првог мноштва издвојимо тачке које се јављају у случајевима 4) и 5), а оне долазе у паровима, дакле има их, рецимо, $2h$, $(h=0,1,\ 2,\ \ldots)$ остаје $k(a')$ — $2h'$ пресечних тачака. Ако из другог мноштва издвојимо тачке које се јављају у случајевима 6) и 7) и које долазе такође у паровима, дакле има их, рецимо, $2h''$ $(h'=0,1,\ 2,\ldots)$ остаје у овом мноштву $k(a'')$ — $2h''$ тачака. Но преостале тачке оба мноштва су оне које се јављају у случајевима 1), 2) и 3), у којима свакој пресечној тачки с a' одговара пресечна тачка с a'' обострано једнозначно. Дакле

$$k(a')-2h'=k(a'')-2h'' \text{ или } k(a'')-k(a')=2\ (h''-h'),$$

тј. разлика оба броја k је паран или нула.

Претходни закључак, који се односи на полуправе a' и a'' у основним угловима $\sphericalangle a_1\ a_2$ и $\sphericalangle a_2\ a_3$, вреди очигледно за полуправе у ма која два суседна основна угла: ако је a''' полуправа у $\sphericalangle a_3\ a_4$, $k(a''')\ - k(a'')$ је паран број или нула; итд. Према томе, ако је a^* полуправа ма у ком основном углу, разлика $k(a^*)$ — $k(a)$ је паран број или нула. Како је свеједно које теме многоугла се обележи с A_1, може $\sphericalangle a_1\ a_2$ претстављати сваки основни угао, тј. разлика бројева k ма за које две полуправе као што је a, је паран број или нула. Дакле, ако је k број паран или нула за једну од посматраних полуправих, паран је или нула за све те полуправе које полазе из исте тачке O, ако је пак непаран за једну, непаран је за сваку. Тиме је ова теорема доказана.

Напомена: Претходне две теореме вреде не само за просте него ма за какве равне многоуглове. Али следећа дефиниција тиче се само простих многоуглова.

3. Према теореми 15.2 парност или непарност броја $k(a)$ пресечних тачака с многоуглом је особина која зависи од тачке O (од њеног положаја) а не зависи од избора полуправе a. Можемо дакле поставити следећу дефиницију:

Дефиниција 15.6. Нека је у равни простог равног многоугла P тачка која не припада том многоуглу, a ма која полуправа која полази из P и не пролази ни кроз једно његово теме. Ако полуправа a сече многоугао у непарном броју тачака, рећи ћемо да је тачка P у том многоуглу; ако га сече у парном броју тачака или ни у једној, рећи ћемо да је P *изван* тог многоугла.

Укупност тачака равни, које су у многоуглу називамо њиховом *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван њега називамо његовом *спољашњошћу*.

4. На основи следеће теореме може се говорити о разлагању равни многоуглом.

Теорема 15.3. *Сваким простим равним многоуглом раван којој овај припада подељена је на три мноштва тачака: на његову унутрашњост, његову спољашњост и на сам тај многоугао.*

Упореди: *Van der Waerden*, Logische Grundlagen der euklidischen Geometrie, 1937.

Доказ: У равни једног простог многоугла нека је P која било тачка која не припада многоуглу и a која било полуправа с почетком P и која не садржи ниједно теме многоугла. Права a има с многоуглом било непаран број заједничких тачака, било паран број, или ниједну, тј. по дефиницији 15.6 тачка P је у многоуглу или изван њега. Према теореми 15.1 постоје и тачке које су у многоуглу и тачке које су изван њега. Дакле, све тачке равни могу се поделити у три мноштва, као што се теоремом тврди.

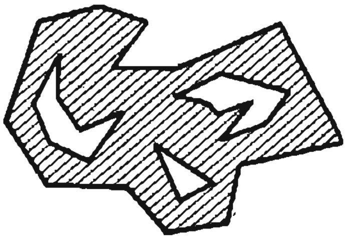
Дефиниција 15.7. Ако је p прост многоугао, садржан у једној равни, рећи ћемо за ту раван да је *разложена* многоуглом p на његову унутрашњост и његову спољашност.

Теорему 15.3 можемо сад изрећи овако: *Сваким простим равним многоуглом раван је разложена на унутрашњост и на спољашњост тог многоугла.*

Засад су нам унутрашњост и спољашност многоугла само мноштва тачака у равни. Тек у бр. 10 овог параграфа доћи ћемо до њихових основних особина.

5. После дефиниције 15.6 можемо увести многоугаону површ. Тако ћемо називати пре свега део равни који је ограничен једним простим мнгоуглом — у ствари унутрашњост простог многоугла — којој додајемо и сам тај многоугао. Као део равни, многоугаона површ је дакле област равни, ограничена простим многоуглом (многоугаона област).

Општије посматрано, многоугаона област, па дакле и многоугаона површ може бити ограничена више него једним простим многоуглом. Тада кажемо да је *вишеструко повезана*. Њен руб се може састојати из два или више многоуглова (сл. 111). Ако се руб састоји из N многоуглова, површ називамо *N-тоструко повезаном* многоугаоном површи. Површ ограничена само једним многоуглом је према томе *једноструко повезана* многоугаона површ. Прво ћемо се бавити једноструко повезаним многоугаоним површима и стога доносимо прво следећу дефиницију:



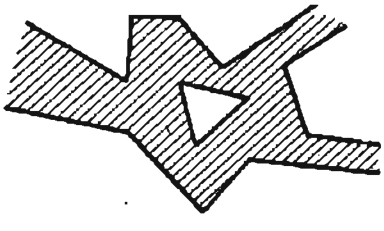
Сл. 111

Дефиниција 15.8. Лик који се састоји из простог равног многоугла и његове унутрашњости називамо *једноструко повезаном равном многоугаоном површи* (а неки пут и краће *многоугаоном површи*). Сам многоугао називамо *рубом* многоугаоне површи, а за површ кажемо да је *омеђена* својим рубом.

Сви називи који се тичу многоугла преносе се и на такву многоугаону површ. — Многоугаоне површи обележавамо малим грчким словима.

Многоугаону површ одређену многоуглом p или $A_1A_2, \ldots A_n$ обележаваћемо и знаком (p) или $(A_1A_2 \ldots A_n)$.

Напомена. Повезаност равних и других области и површи проучава нарочито топологија. Овде се ограничавамо скоро искључиво на једноструко повезане површи, ограничене многоуглом.



Сл. 112

Приметимо да равна многоугаона површ може допирати и у бесконачност (сл. 112). Тада је ограничена простим отвореним многоугаоним линијама, које немају (у коначноме) завршних тачака.

6. Прелазимо сад на разлагање једноструко повезане многоугаоне површи на исте такве многоугаоне површи с мањим бројем страница. Ради тога нам је пре свега потребна дефиниција, коју изричемо за површ које било повезаности:

Дефиниција 15.9. Кажемо да је многоугаона површ π *разложена* на многоугаоне површи $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ $(m=2, 3, \ldots)$ или да је *сложена* из њих, ако је свака унутарња тачка многоугаоне површи π, која не припада рубовима многоугаоних површи $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ уједно унутарња тачка једне и само једне многоугаоне површи овог низа и ако је свака унутарња тачка сваке од ових многоугаоних површи уједно унутарња тачка многоугаоне површи π.

Приметимо да се многоугао може разложити на дужи и на отворене изломљене линије из којих се многоугао састоји, а да се само многоугаона површ може разложити на области у равни, омеђене троуглима или многоуглима, тј. на **многоугаоне површи.**

Ако је многоугаона површ π сложена из многоугаоних површи φ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l$, рећи ћемо такође да су многоугаоној површи φ додате површи $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l$.

Ради даљег посматрања потребна нам је и следећа дефиниција:

Дефиниција 15.10. Дијагоналу простог равног многоугла, којој су само крајње тачке заједничке с многоуглом називамо *простом дијагоналом*. Ако су све унутарње тачке на простој дијагонали садржане у многоуглу, зовемо је *унутарњом дијагоналом*; ако су јој све унутарње тачке изван многоугла зовемо је *спољном дијагоналом*.

7. Потребне су нам пре свега ове две теореме:

Теорема 15.4. *У равни простог равног многоугла постоји права која садржи бар два његова темена и таква је да су сва његова темена с једне исте стране те праве, сем оних који су на тој правој.*

Доказ. Нека је p посматрани многоугао, h права у његовој равни и која сече најмање једну његову страницу а не пролази ни кроз једно његово теме (сл. 113). Права h сече странице и дијагонале многоугла у извесном коначном мноштву **M** тачака. Поређајмо их по **природном** распореду (§ 13, бр. 10) и нека је H почетна тачка тако поређаног мноштва.

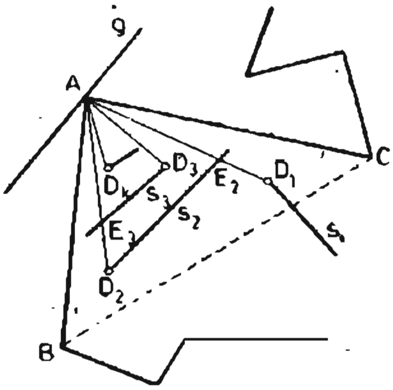
Сл. 113

Тачка H је на извесној страници или дијагонали AF многоугла p. Нека је g права AF. Њоме је раван подељена на две полуравни; у једној је садржано мноштво **M**, сем тачке H (која је на g).

С оне стране праве g где **M** нема тачака не постоји ни једно теме многоугла, јер кад би такво теме T постојало, права h, која сече дуж AF, секла би страницу AF троугла AFT, дакле према теореми 7.12 секла би још једну његову страницу у извесној тачки. Ова би била на h с оне сране праве g где **M** нема тачака, дакле с оне стране тачке H где **M** нема тачака, а то је немогуће. Према томе сва темена многоугла, сем оних која су на правој g, јесу с једне исте стране праве g. Ова пак садржи два темена A и F многоугла.

Теорема 15.5. *Сваки прост раван многоугао са више од три странице има најмање једну унутарњу дијагоналу.*

Доказ. Нека је g права у равни многоугла p, о којој се говори у претходној теореми, A теме многоугла на g и B, C оба суседна темена (сл. 114). Како су сва темена многоугла према тој теореми у једној полуравни омеђеној правом g, унутрашњост удубљеног угла $\sphericalangle BAC$ је у тој полуравни. Посматрајмо троугао ABC. Како многоугао има више од три странице, дуж BC је дијагонала. Ако ни у троуглу ABC ни на BC између B и C нема тачака многоугла p, дуж BC је према дефиницији 15.10 проста дијагонала. У супротном случају постоји бар једна његова страница s_1, која има тачака у троуглу ABC или макар само између B и C. Та страница је садржана на дијагонали BC или ову сече или је цела у троуглу ABC. У сва три случаја бар један крај дужи s_1, а то је теме многоугла, је на BC или у троуглу ABC. Нека је то теме D_1.



Сл. 114

Ако између A и D_1 нема тачака многоугла, дуж AD_1 је проста дијагонала. Ако пак између A и D_1 има тих тачака, нека је E_2 она од тих тачака која је суседна тачки A. Тачка E_2 је теме многоугла, дакле AE_2 је проста дијагонала, или E_2 припада једној страници s_2 многоугла, која сече дијагоналу AD_1. Како права која садржи s_2 има према теореми 7.14 са троуглом ABC две заједничке тачке, бар једна је на AB или AC. Ова тачка не припада многоуглу, дакле између ње и тачке E_2 је један крај дужи s_2, тј. једно теме многоугла, које је дакле у троуглу ABC. Нека је то теме D_2. Приметимо да је D_1 изван троугла AD_2E_2.

Ако између A и D_2 нема тачака многоугла, дуж AD_2 је проста дијагонала. Ако пак између A и D_2 има тих тачака, нека је E_3 опет она која је суседна тачки A. Тачка E_3 је теме многоугла, дакле AE_3 је проста дијагонала, или E_3 припада једној страници s_3 многоугла, која сече дијагоналу AD_2. Како права која садржи s_3 сече страницу AD_2 троугла AD_2E_2, према теореми 7.12 има такође заједничку тачку с AE_2 или D_2E_2. Ова тачка не припада многоуглу, дакле између ње и E_3 и према томе у троуглу AD_2E_2 налази се један од крајева дужи s_3, тј, једно теме многоугла. Нека је то теме D_3. Како је D_1 ван троугла AD_2E_2 а D_2 на њему, D_1, D_2, D_3 су три разна темена.

Ако између A и D_3 нема тачака многоугла, дуж AD_3 је проста дијагонала. Ако пак има тих тачака између A и D_3, нека је E_4 опет она која је суседна тачки A. Итд.

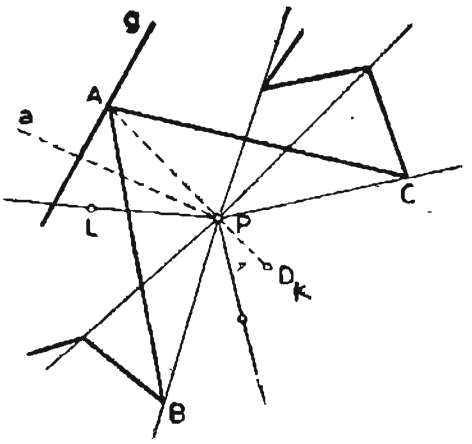
Тако добијамо низ темена D_1, D_2, $\ldots$, D_k многоугла, разних међу собом, па како је број темена многоугла коначан, тај низ је такође коначан, дакле завршава се извесним теменом D_k ($k = 1, 2, \ldots$), таквим да између A и D_k многоугао нема тачака, тј. дуж AD_k је проста дијагонала.

Тиме је доказано да из темена A полази свакако једна проста дијагонала d многоугла p.* Докажимо још да је d унутарња дијагонала.

---

* Тај доказ је укратко изложио *B. Kerékjártó* у књизи: Vorlesungen über Topologie, I, S. 21 (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarst., Bd. VIII).

Било да је већ дуж BC проста дијагонала d, било да је то тек AD_k, нека је P унутарња тачка те дијагонале (сл. 115). Повуцимо све полуправе које полазе из P и пролазе кроз темена многоугла. Како су темена B и C с разних страна праве AP, има тих полуправих с обеју страна те праве.



Сл. 115

Нека је PL с једне или друге стране те праве она у мноштву тих полуправих која је суседна полуправој PA. У удубљеном углу $\sphericalangle APL$ нема дакле даљих темена. Према томе, ако нека страница многоугла има тачака у том углу, има заједничке тачке с оба његова крака. Таква је страница AB с једне и AC с друге стране праве AP. Кад би постојала још једна таква страница, имала би дакле заједничку тачку с полуправом PA између A и P или с оне стране тачке A с које није тачка P. Прво је немогуће зато што између A и D многоугао нема тачака, а дурго зато што с оне стране праве g с које није тачка P, дакле и с оне стране тачке A с које није P, многоугао нема тачака. Према томе, AB одн. AC су једине такве странице.

Дакле, која била полуправа a у удубљеном углу $\sphericalangle APL$, с почетком P, не пролази ни кроз једно теме многоугла p и сече само једну његову страницу. Дакле, према дефиницији 15.6 P је у многоуглу p, а према дефиницији 15.10 проста дијагонала BC одн. AD_k је унутарња дијагонала. — Тиме је теорема доказана.

8. Разлагање многоугаоних површи дефинисали смо у дефиницији 15.9. О разлагању постоје, пре свега, следеће две теореме:

Теорема 15.6. *Свака многоугаона површ са више од три темена разложена је сваком својом унутарњом дијагоналом на две многоугаоне површи. Две или више ових дијагонала, које се међу собом не секу, разлажу пак многоугаону површ на три или више многоугаоних површи.*

Број темена сваке нове многоугаоне површи — која се добија разлагањем једне од претходних — мањи је од броја темена те претходне многоугаоне површи.

Доказ. Нека је прост раван многоугао $A_1\,A_2\ldots A_n$ ($\equiv p$) руб многоугаоне површи π. Према теореми 15.5 постоји унутарња дијагонала d која спаја два несуседна темена A_i и A_k ($1< i+1<k\leqslant n$). Додавши дијагоналу d изломљеним линијама $A_iA_{i+1}\ldots A_k=l_1$ и $A_k\ldots A_nA_1\ldots A_i$ настају два проста равна многоугла, наиме $A_iA_{i+1}\ldots A_k=p_1$ и $A_k\ldots A_nA_1\ldots A_i=p_2$, јер њихове странице и дијагонала $d=A_iA_k$ немају других заједничких тачака, сем што две узастопне странице имају заједничко теме и што парови A_iA_{i+1} и A_iA_k па $A_{k-1}A_k$ и A_kA_i, затим A_kA_{k+1} и A_kA_i па $A_{i-1}A_i$ и A_iA_k имају по једно заједничко теме. Нека су π_1 и π_2 многоугаоне површи с рубовима p_1 и p_2.

Докажимо да је многоугаона површ π разложена на π_1 и π_2.

Нека је P ма која тачка површи π. Према дефиницији 15.6 P је на многоуглу p или у њему. У првом случају је на једном и само једном од многоуглова p_1 и p_2, сем ако је $P=A_i$ или $P=A_k$, јер тада је на оба многоугла.

Ако је тачка P у многоуглу p, може бити на унутарњој дијагонали d, а тада је на оба многоугла p_1 и p_2. Ако је у p а није на $A_i A_k$, нека је a ма која полуправа у равни тих многоуглова, која полази из P, не садржи ниједно теме многоугла p, нити сече дуж d. Према дефиницији 15.6 a сече многоугао p, тј. изломљене линије l_1 и l_2 заједно у непарном броју тачака. Дакле, ако сече изломљену линију l_1 у непарном броју $2r+1$ тачака, сече l_2 у парном броју $2s$ тачака, и обратно. Како a не сече дијагоналу d, исти закључак вреди за p_1 и p_2. Следује да је P у многоуглу p_1, а изван p_2 или, обратно, изван p_1 а у p_2.

Тиме смо доказали да је испуњен први услов дефиниције 15.9.

Нека је сад P ма која тачка површи π_1. Ако је P на p_1, припада рубу p површи π или дијагонали d, а тада је у p. Ако је P у p_1, нека је b полуправа из P и која не пролази кроз темена многоуглова, нити сече дијагоналу d. Према дефиницији 15.6 b сече p_1, дакле и изломљену линију l_1 у непарном броју $2r+1$ тачака.

Кад би полуправа b секла и изломљену линију l_2, дакле и p_2, у непарном броју $2s+1$ тачака, секла би p у парном броју тачака. Покажимо да је ово немогуће. Нека је b' полуправа исте врсте као b, но која сече дијагоналу d. Према теореми 15.6 и b' сече и p_1 и p_2 у непарном броју тачака, дакле и l_1 и l_2 у парном броју тачака или ни у једној. Нека сече дијагоналу d у тачки Q и нека је b'' полуправа с почетком Q и која је садржана на b. Како b'' сече и l_1 и l_2 у непарном броју тачака (јер пресек са Q не постоји више), b'' сече p у парном броју тачака, тј. Q је изван p, противно претпоставци да је d унутарња дијагонала.

Дакле, ако b сече изломљену линију l_1 у непарном броју тачака, сече l_2 у парном броју тачака, тј. ако је тачка P у p_1, тада је изван p_2. Исто тако, ако је P у p_2, тада је изван p_1.

Тиме је доказано да је испуњен и други услов у дефиницији 15.9, дакле многоугаона површ π је разложена на π_1 и π_2. Како сва темена многоугла p нису темена многоугла p_1 или p_2, број темена сваког од ових многоуглова је мањи од n.

Ако макар једна од многоугаоних површи π_1, π_2, рецимо π_1, има више од три темена, може се, према овоме што смо сада доказали, разложити на две многоугаоне површи π_{11} и π_{12}. Свака тачка површи π припада дакле најмање једној од многоугаоних површи $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Тачка садржана у π_{11} је изван π_2, па како је у π_1, такође је изван π_2. Исто тако је тачка садржана у π_{12}, изван π_{11} и π_2. Самим тим је и тачка садржана у π_2 изван π_{11} и π_{12}. Отуда се показује да су испуњена оба услова дефиниције 15.9, тј. многоугаона површ π разложена је на три многоугаоне површи π_{11}, π_{12}, π_2. — Број темена многоугаоних површи π_{11} и π_{12} је мањи од броја темена многоугаоне површи π_1, дакле такође мањи од n.

Ово посматрање се може понављати догод преостаје многоугаоних површи са више од три темена. Тиме је теорема доказана.

Теорема 15.7. *Свака многоугаона површ са више од три темена може се разложити на саме троугаоне површи.*

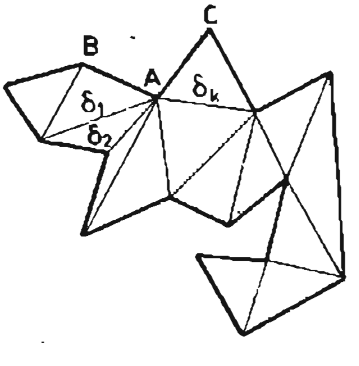
Доказ. На основи претходне теореме, како се разлагање може наставити догод преостаје многоугаона површ са више од три темена, како се сваким даљим разлагањем добијају две многоугаоне површи с бројем темена мањим него што је број темена непосредно разложене многоугаоне површи, разлагање се може наставити све док све многоугаоне површи тога разлагања не буду троугаоне површи.

Напомена. Ако у свакој троугаоној површи после разлагања изаберемо једну тачку и спојимо тачке суседних троугаоних површи, једном дужи, настаје уопште множтво дужи (тзв. дрво) које се састоји из простих изломљених линија. Полазећи од једне такве линије и додајући јој постепено остале, могу се лако избројати троугаоне површи. Може се доказати да им је број $n-2$, при чему је n број страница датог простог многоугла.

9. Од два угла $\sphericalangle BAC$ чији краци су две суседне странице AB и AC једне многоугаоне површи, један угао има особину да су у близини његовог темена A све тачке које су у њему уједно у тој многоугаоној површи, а за други угао су, „напротив, све тачке близу темена A, које су у њему уједно изван те многоугаоне површи. Ако је многоугаона површ испупчена, околности су једноставније: цела многоугаона површ је садржана у удубљеном углу $\sphericalangle BAC$. — Према томе, први угао називамо углом дотичне многоугаоне површи (или дотичног многоугла). Да бисмо дошли до одговарајуће дефиниције погодно је поћи од разлагања многоугаоне површи на троугаоне површи, и доказати теорему 15:8. Ради лакшег изражавања усвајамо пре свега следећу дефиницију:

Дефиниција 15.11. Две многоугаоне површи чији рубови имају најмање једну заједничку дуж, и које немају заједничких тачака ван својих рубова, називаћемо суседним многоугаоним површима.

Теорема 15.8. *Нека су* AB *и* AC *две суседне странице многоугаоне површи* π (сл. 116), *разложене на троугаоне површи. Тада један од углова* $\sphericalangle$BAC *садржи низ тих троугаоних површи* δ_1, δ_1, . . ., δ_k *тако да* AB *припада површи* δ_1, AC *површи* δ_k, *а* δ_1 *и* δ_2 *и* δ_3, . . . , δ_{k-1} *и* δ_k *су парови суседних троугаоних површи. Овај низ се може састојати из само једног члана (за* $k=1$). *Уочени угао* $\sphericalangle$BAC *је исти за сва разлагања површи на троугаоне површи.*



Сл. 116

Доказ. Ако је δ_1 троугаона површ (BAC) имамо $k=1$. Ако није, нека је P_1 треће теме троугаоне површи δ_1, тј. $\delta_1 \equiv (BAP_1)$. Како дуж AP_1 није страница многоугаоне површи π, то је заједничка страница двеју троугаоних површи посматраног разлагања. Једна је δ_1; нека је δ_2 друга. Или је $\delta_2 \equiv (P_1AC)$ и тада је $k=2$, или нека је P_2 треће теме од δ_2, тј. $\delta_2 \equiv (P_1AP_2)$. Како дуж AP_2 није страница многоугаоне површи π, то је заједничка страница двеју троугаоних површи истог разлагања од којих је δ_2 једна, нека је δ_3 друга, итд. Како је број троуглова у сваком разлагању коначан, тако долазимо до низа $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ с изреченим особинама, при чему је $\delta_k \equiv (P_{k-1}AC)$. Како дужи AB и AC припадају само троугаоним површима δ_1 и δ_k, свих k троугаоних површи садржане су у једном од два угла с крацима AB и AC; обележимо овај угао словом α. Ако је одговарајући низ троугаоних површи у неком другом разлагању δ_1', $\delta'_2, \ldots \delta_l'$, а δ_1' она која садржи дуж AB, троугаоне површи δ_1 и δ_1' нису с разних страна праве AB, јер дуж AB је на рубу многоугаоне површи π. Дакле на темељу овог другог разлагања долазимо до истог угла α као угла који садржи све троугаоне површи $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_l'$. Тиме је теорема доказана.

Према томе може се изрећи следећа дефиниција:

Дефиниција 15.12. Нека су AB и AC две суседне странице многоугаоне површи (p), разложене на троугаоне површи. Онај од два угла $\sphericalangle BAC$

који садржи троугаоне површи, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ $(k \geqslant 1)$ тог разлагања, тако да AB припада површи δ_1, AC површи δ_k, а да су δ_1 и δ_2, δ_2 и $\delta_3, \ldots,$ δ_{k-1} и δ_k парови суседних троугаоних површи, називамо *углом* многоугла p или многоугаоне површи (p).

Свако теме многоугаоне површи је дакле теме једног њеног угла.

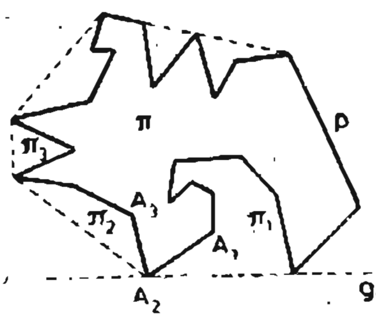
Докажимо о угловима многоугла само следећу теорему, која ће нам бити потребна у § 47.

Теорема 15.9. *Ако су два суседна угла* $\sphericalangle$ABC *и* $\sphericalangle$BCD *простог равног многоугла оба удубљена или оба испупчена, темена* A *и* D *су с исте стране праве* BC.

Доказ. Нека је p прост раван многоугао. Према дефиницији 15.11 постоји при коме било разлагању многоугаоне површи (p) на троугаоне површи:

1) низ троугаоних површи $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ $(k \geqslant 1)$ тако да страница BA многоугла припада површи δ_1, страница BC површи δ_k, а да су δ_1 и δ_2, δ_2 и $\delta_3, \ldots, \delta_{k-1}$ и δ_k парови суседних троугаоних површи;

2) низ троугаоних површи δ_1' и $\delta_2', \ldots,$ δ_l' $(l \geqslant 1)$ тако да страница CB припада троугаоној површи δ_1', страница CD површи δ_l', а да су δ_1' и δ_2', δ_2' и $\delta_3', \ldots, \delta_{l-1}'$ и δ_l' парови суседних троугаоних површи (сл. 117).



Сл. 117

Како у једном разлагању постоји само једна троугаона површ којој је једна страница BC, троугаоне површи δ_k и δ_1' су истоветне. Нека је P треће теме те површи, тј. $\delta_k \equiv \delta_1' \equiv (BCP)$.

Угао $\sphericalangle ABC$ многоугла p садржи тачку P, јер садржи полуправу BP, а угао $\sphericalangle BCD$ многоугла p садржи тачку P, јер садржи полуправу CP. Ако су дакле оба та угла удубљена, њихови краци BA и CD су према теореми 12. с оне стране праве BC с које је тачка P, дакле тачке A и D су с исте стране праве BC. Ако су пак та два угла оба испупчена, краци BA и CD су с оне стране праве BC с које није тачка P, дакле опет су тачке A и D с исте стране праве BC.

10. Следеће теореме утврђују да се многоугаона површ, а исто тако и њена спољашњост састоји „ из једног комада“. Спољашњост и унутрашњост су пак међу собом раздвојене дотичним многоуглом.

Теорема 15.9. *Ако су* δ *и* δ' *ма које две троугаоне површи једног разлагања дате многоугаоне површи на троугаоне, постоји низ* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ *тих троугаоних површи тако да су* δ *и* δ_1, δ_1 *и* $б_2$, δ_2 *и* $\delta_3, \ldots, \delta_m$ *и* δ' *парови суседних троугаоних површи.*

Доказ. Како су темена троугаоних површи разлагања уједно темена многоугаоне површи $\pi(=A_1 A_2 \ldots A_n)$, нека је теме A_i многоугла π на δ, а A_k на δ'. Обележавање знацима δ и δ' може се извршити увек тако да буде $i \leqslant k \leqslant n$.

Како је свака страница многоугаоне површи π уједно страница једне од многоугаоних површи на које је при разлагању претходна многоугаона површ разложена, свака страница многоугаоне површи π је уједно страница једне од троугаоних површи коначног разлагања.

Ако су δ и δ' суседне троугаоне површи теорема је доказана. Ако нису, али ако је $i=k$, δ и δ' имају само теме A_i заједничко. Тада постоји још једна троугаона површ, δ_1, садржана у углу многоугаоне површи, π, коме је теме A_i, а суседна површ δ.

Посматрајмо δ_1 и δ' као што смо претходно посматрали δ и δ'. Или су δ_1 и δ' суседне и теорема је доказана, или постоји троугаона површ δ_2 суседна површи δ_1 а са заједничким теменом A_i. Настављајући овако долазимо до низа $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ који има особине изречене у овој теореми и тиме је доказ завршен.

Ако је $i < k$, нека је γ_1 троугаона површ датог разлагања, којој припада страница $A_i A_{i+1}$ многоугла. Како δ и γ имају теме A_i заједничко, нека је према претходноме $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m1}$ низ троугаоних површи тако да су парови δ и δ_1, δ_1 и $\delta_2, \dots, \delta_{m1}$ и γ суседне површи, Ако је $i+1=k$, γ и δ' имају теме A_k заједничко, дакле постоји исти такав низ $\delta_{m1+1}, \dots, \delta_{m2}$ за γ и δ', дакле $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m2}$ је тражени низ за δ и δ' и теорема је доказана.

Ако је $i+1 < k$, нека је γ_2 троугаона површ којој припада страница $A_{i+1} A_{i+2}$. На исти начин налазимо одговарајући низ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m3}$ за δ и γ_2, итд. Тако долазимо свакако до низа $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ за δ и δ'. — Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 15.10. *Ако су* P *и* Q *тачке у простом равном многоуглу* p *или на њему, постоји дуж или проста изломљена линија с крајевима* P *и* Q *чије су све унутарње тачке у многоуглу* p.

Доказ. Нека су δ и δ' троугаоне површи једног разлагања многоугаоне површи (p) на троугаоне, тако да P и Q припадају редом површима δ и δ'. Ако би било $\delta=\delta'$, P и Q би припадале истој троугаоној површи и дуж PQ би испуњавала услове теореме. Ако су δ и δ' суседне површи, нека је P_1 унутарња тачка њихове заједничке странице (унутарња дијагонала). Све унутарње тачке изломљене линије PP_1Q, сем тачке P_1 су у δ и δ', дакле све унутарње тачке линије PP_1Q су у p.

Ако δ и δ' нису суседне троугаоне површи, према теореми 15.8 постоји низ δ_1, и $\delta_2 \dots, \delta_m$. Нека су тада $P_1, P_2, \dots, P_{m+1}$ редом унутарње тачке заједничких страница парова δ и δ_1, δ_1 и $\delta_2, \dots, \delta_m$ и δ'. Изломљена линија $PP_1P_2 \dots P_mQ$ је проста изломљена линија, јер према дефиницији 15.9 две од тих троугаоних површи немају других заједничких тачака, сем највише по једну страницу, дакле ни дужи PP_1, $P_1P_2, \dots, P_mQ$ немају заједничких тачака сем две узастопне дужи заједнички крај. Све унутарње тачке линије $PP_1P_2 \dots P_mQ$ су пак у тим многоугаоним површима или су то унутарње тачке унутарњих дијагонала, дакле све су у многоуглу p. — Тиме је ова теорема доказана.

Ради даљег посматрања треба прво доказати следећу теорему.

Теорема 15.11. *Ма за који удубљени многоугао* p *постоји једна одређена испупчена многоугаона површ, чија темена су извесна темена многоугла* p *и која је многоуглом* p *разложена на његову унутрашњост и на још неке многоугаоне површи.*

Доказ. Нека је у равни удубљеног многоугла p $(=A_1A_2 \dots A_n$; сл. 118), h права која сече најмање једну његову страницу, а не пролази ни кроз једно његово теме. Према теореми 15.4 постоји права g_1, која садржи бар два темена и таква је да су сва темена која нису на g_1 с једне исте стране те праве. Поређајмо сва темена која су на g_1 у одређеном смеру и обележимо с B_1 и B_2 прво и последње теме.

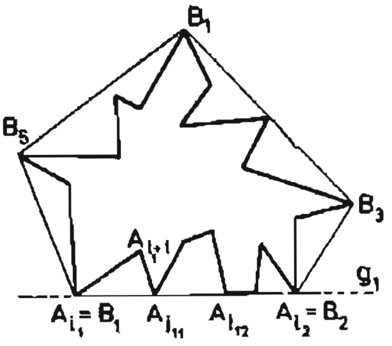
Поређајмо затим у једном смеру све полуправе које полазе из B_2 и пролазе кроз темена многоугла и нека је a_2 она од тих полуправих која с правом B_2B_1 одређује удубљен угао који садржи све остале полуправе тог мноштва. Нека је g_2 права којој припада a_2. Поређајмо сва темена многоугла p која су на g_2 у одређеном смеру. Како је једна од крајњих тачака тог низа (прва или последња) тачка B_2 нека је B_3 друга крајња тачка.

Поређајмо затим у одређеном смеру све полуправе које полазе из B_3 и пролазе кроз темена многоугла и нека је a_3 она која с полуправом B_3B_2 одређује удубљен угао који садржи све остале полуправе тог мноштва итд.

На тај начин добијамо низ дужи B_1B_2, B_2B_3, $\ldots$, $B_{k-1}B_k$, $\ldots$, таквих да су све тачке многоугла p, које нису на којој било од њих, с једне исте стране те дужи.

Догод су B_1, $B_2, \ldots$, B_k међу собом разне тачке, постоји даље полуправа a_k, па тачка B_{k+1} итд. Но како су ово темена многоугла p, број разних тачака овог низа је коначан. Нека је B_{s+1} прва која се поклапа с једном од тачака B_1, $B_2, \ldots$, B_s. Докажимо да је $B_{s+1} \equiv B_1$. Кад би, напротив, било $B_{s+1} \equiv B_i$, $i > 1$, просте изломљене линије $B_sB_1B_2 \ldots B_i$ и $B_sB_i B_{i+1} \ldots B_{s-1}$ биле би с исте стране праве B_sB_{s+1}, дакле с те исте стране биле би полуправе B_iB_{i-1} и B_iB_{i+1} и према томе један од удубљених углова $\sphericalangle B_sB_iB_{i-1}$ и $\sphericalangle B_sB_iB_{i+1}$ био би садржан у другоме, напр. први у другоме, а тада би тачке B_s и B_{i+1} биле с разних страна праве $B_{i-1}B_i$. Ово се противи претпоставци да је $B_{i-1}B_i$ једна од правих $g_1, \ldots$, g_s, дакле је $B_{s+1} = B_1$.

Многоугао $B_1B_2 \ldots B_s$, који обележимо с q, је према дефиницији 15.5 испупчен, јер сва његова темена која нису на ма којој његовој страници јесу с једне стране праве која садржи ту страницу. Из доказа произлази да је q једини многоугао те врсте.



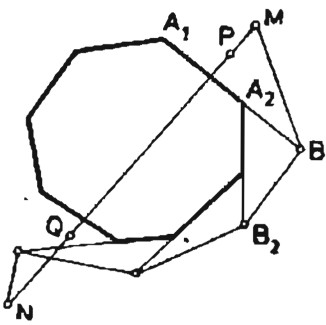
Сл. 118

Докажимо да је многоугаона површ (q) разложена многоуглом p на површ (p) и на још неке многоугаоне површи. Доказ доносимо скраћено. — Темена B_1, $B_2, \ldots$, B_s многоугла p, (сл. 118) која се налазе редом на правим g_1, $g_2, \ldots$, g_s, можемо увек пренумерисати тако да буде $B_1 = A_{i1}$, $B_2 = A_{i2}, \ldots$, $B_s = A_{is}$ и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$. Пошто темена многоугла p поређамо на g_1 у одређеном смеру, имамо редом на g темена A_{i1}, A_{j11}, $A_{j12}, \ldots$, A_{i2}. Неке од дужи које спајају узастопне тачке тог низа су дијагонале. Ако је напр. $A_{i1}A_{j11}$ дијагонала, постоји прост многоугао $A_{i1}A_{i1+1}A_{i1+2} \ldots A_{j11}$. Тако за сваку дијагоналу, d_1, $d_2, \ldots$, d_r, садржану на страницама многоугла q постоји прост многоугао. Нека су то многоугли p_1, $p_2, \ldots$, p_r.

Како полуправа која полази из унутрашњости многоугла p_1 и сече дијагоналу d_1, не сече q, дакле ни p_1 у другим тачкама, и уопште не сече p, унутрашњост многоугла p_1 је изван многоугла p, и многоуглова $p_2, \ldots$, p_r, а садржана је у многоуглу q. Аналого вреди редом многоугле $p_2, \ldots$, p_r. Повлачењем полуправе која полази из унутрашњости многоугла p и сече q у само једној тачки доказујемо да је и унутрашњост многоугла p садржана у q. Тиме је доказано да је многоугаона површ (q) разложена на многоугаоне површи (p) и $(p_1), \ldots$, (p_r).

Теорема 5.12. *Ако су* P *и* Q *тачке изван простог равног многоугла* p *или на њему, постоји дуж или проста изломљена линија с крајевима* P *и* Q, *чије су све унутарње тачке изван многоугла* p.

Доказ доносимо скраћен. Нека је многоугао p испупчен. Ако дуж PQ нема заједничких тачака с p, по дефиницији 15.6 теорема је очигледно тачна. Ако дуж PQ садржи само једно или два темена многоугла, тако да су остала темена с једне стране праве PQ, нека је R тачка с оне стране те праве с које нема темена многоугла. Изломљена линија PRQ нема заједничких тачака с многоуглом, сем можда P и Q, дакле теорема је опет тачна. Ако права PQ сече многоугао p, дуж PQ може имати две заједничке тачке с p. Више не може, јер кроз ону која је између остале две пролазила би страница многоугла p и овај би био удубљен. Нека дакле права PQ сече две странице, рецимо $A_i A_{i+1}$ и $A_k A_{k+1}$ $(i+1 < k)$ многоугла p. Изаберимо, да бисмо имали две тачке које су свакако ван p, на правој PQ тачке M и N (сл. 119) тако да је $M-P-Q$ и $N-Q-P$ и на полуправим $A_i A_{i+1}$, $A_{i+1} A_{i+2}, \ldots, A_{k-1} A_k$ по једну тачку, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ тако да је $A_i - A_{i+1} - B_1$, $A_{i+1} - A_{i+2} - B_2, \ldots, A_{k-1} - A_k - B_k$. Лако је показати да сад изломљена линија $PMB_1 B_2 \ldots B_k NQ$ задовољава поствљену теорему.



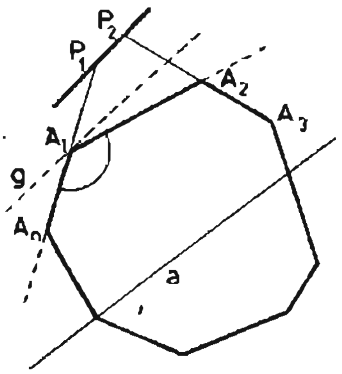
Сл. 119

Теорема 15.13. *Ако је* P *тачка у простом равном многоуглу* p, *а* Q *тачка изван њега, постоји дуж или проста изломљена линија с крајевима* P *и* Q, *која има с многоуглом само једну заједничку тачку.*

Доказ. Нека је R ма која тачка многоугла p. Према теоремама 15.10 и 15.12 постоји дуж или изломљена линија l_1, која спаја P и R и чије унутарње тачке су у многоуглу p, и изломљена линија или дуж l_2, која спаја R и Q и чије унутарње тачке су изван p. Изломљена линија која се састоји из l_1 и l_2 је линија о каквој говори ова теорема.

11. Доказане теореме о простим многоуглима или многоугаоним површима вреде, разуме се, и за испупчене многоугле. Неке од тих теорема добијају тада једноставнији облик:

Теорема 15.14. *Права у равни испупченог многоугла може имати с њим ниједну, једну или највише две заједничке тачке.*

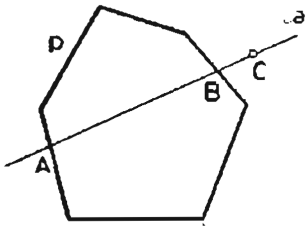


Сл. 120

Доказ. Нека је $A_1 A_2 \ldots A_n$ $(\equiv p)$ испупчен многоугао. Према дефиницији 15.5 сва темена, сем A_1 и A_2, су с исте стране праве $A_1 A_2$. Нека су P_1 и P_2 тачке на правим $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$ (сл. 120) тако да је $P_1 - A_1 - A_n$ и $P_2 - A_2 - A_3$. Како су A_3 и A_n с исте стране праве $A_1 A_2$, тачке P_1 и P_2 су обе са супротне странс праве $A_1 A_2$. Дакле према дефиницији 10.3 тачке A_1, A_2, а такође и A_3, A_4 су с исте стране праве $P_1 P_2$. Кад би тачка A_4 била са друге стране, била би и са друге стране праве $A_1 A_2$. што је немогуће, јер је многоугао испупчен. Према томе и A_4 је с исте стране праве $P_1 P_2$ као и A_1, A_2, A_3. Исто тако се показује да су сва остала темена с исте стране праве $P_1 P_2$. Дакле права $P_1 P_2$ нема заједничких тачака са многоуглом p.

Како су сва темена многоугла p с исте стране праве $A_1 A_2$ као A_n, и с исте стране праве $A_1 A_n$ као A_2, сва темена, сем A_1, A_2, A_n, су према теореми 11.5 у удубљеном углу $\sphericalangle A_2 A_1 A_n$. Нека је g права која пролази кроз A_1 тако да су A_2 и A_n с исте стране те праве. Тада су сва темена многоугла p с те исте стране праве p, дакле права g има с p само једну тачку заједничку.

Нека је a ма која права у равни испупченог многоугла p, која с p има заједничких тачака. Не може бити више од две заједничке тачке. Ако би пак постојала трећа, нека су то тачке A, B, C и нека је $O-A-B$ и $A-B-C$. Нека је тада b права која пролази кроз B и садржи страницу многоугла p на којој је тачка B. Тада тачке A и и C многоугла p су с разних страна праве b, а то је према дефиницији 15.5 испупченог многоугла немогуће.



Сл. 121

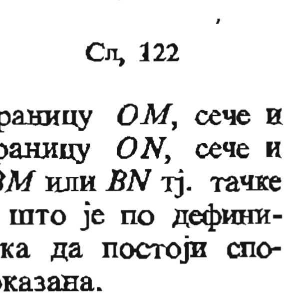
Нека су A и B ма које две тачке на p, које нису темена и не припадају истој страници. Тада права AB има с многоуглом p тачно две заједничке тачке A и B. — Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 15.15. *Полуправа у равни испупченог многоугла, која полази из тачке садржане у њему, има с тим многоуглом само једну заједничку тачку. Полуправа која полази из тачке ван испупченог многоугла има с тим многоуглом ниједну, једну или две заједничке тачке.*

Доказ. Према дефиницији 15.6 полуправа r, која полази из тачке R садржане у испупченом многоуглу p, а не пролази кроз теме, сече га у непарном броју тачака, дакле према теореми 15.14 само у једној тачки. И ако r пролази кроз теме, има са p само то теме заједничко, јер би иначе права која садржи r имала с p више од две заједничке тачке. — Полуправа s, која полази из тачке S ван p, има пак с многоуглом p ниједну или две заједничке тачке, јер више од две не може имати.

Теорема 15.16. *Све дијагонале испупченог многоугла су унутрашње дијагонале.*

Доказ. Ако многоугао p има дијагоналу која није проста, по дефиницији 15.10 има с њим бар три заједничке тачке, дакле према теореми 15.14 многоугао p није испупчен. Нека је MN проста, али спољашња дијагонала (сл. 122) испупченог многоугла p. Тада је ма која тачка O између M и N изван p, дакле ако је A тачка на p, таква да полуправа OA, која полази из O, не пролази ни кроз једно теме многоугла, по дефиницији 15.6 та полуправа има с p још једну заједничку тачку B. Може бити $O-A-B$ или $O-B-A$. Нека је напр. $O-A-B$. Тада права a, која садржи страницу многоугла на којој је тачка A, сече полуправу OA, дакле страницу OB троугла OBM у тачки A, а отуд по Пашовој теореми пролази кроз M или сече страницу OM или BM. Слично је и у односу на троугао OBN. Сем тога, ако права a пролази кроз M или ако сече страницу OM, сече и страницу BN; ако пролази кроз N, или ако сече страницу ON, сече и страницу BM. У сваком случају права a сече страницу BM или BN тј. тачке B и M или пак B и N јесу с разних страна праве a, што је по дефиницији испупченог многоугла немогуће. Дакле претпоставка да постоји спољашња дијагонала је погрешна. — Тиме је теорема доказана.



Сл, 122

Теорема 15.17. *Испупчена многоугаона површ је сваком својом дијагоналом разложена на две испупчене многоугаоне површи са мањим бројем темена.*

Доказ. Нека је $A_1 A_2 \ldots A_n (=p)$ испупчен многоугао обележен тако да уочена дијагонала полази из A_1. Нека је то дијагонала $A_1 A_i$. Како је свака дијагонала према теореми 15.16 проста, многоугли $A_1 A_2 \ldots A_i (=p_i)$ и $A_1 A_i A_{i+1} \ldots A_n (=p'_i)$ од којих први има само i а други $n-i+2$ темена, су прости. Како је $2<i<n$, имамо такође $2<n-i+2<n$, дакле оба ова многоугла имају мање од n темена.

Докажимо да је многоугао p_i испупчен. Како је дати многоугао p испупчен, сва темена многоугла p_i су с једне исте стране сваке од његових страница $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $\ldots$, $A_{i-1} A_i$, сем, разуме се, оних темена која су на дотичној страници. Треба доказати да исто вреди и у односу на страницу $A_i A_1$ многоугла p_i. Заиста, кад не би било тако, постојало би $j<i$ тако да би темена A_1, A_2, $\ldots$, A_j била с једне стране праве $A_i A_1$, а A_{j+1} с друге стране, дакле страница $A_j A_{j+1}$ би секла праву $A_i A_1$, тј. ова права би имала више од две тачке заједничке са многоуглом p, што је по теореми 15.14 немогуће. Дакле, сва темена многоугла p_i су с једне исте стране сваке његове странице, сем оних двају темена која су на тој страници, тј. тај многоугао је испупчен.

Исто тако се доказује да је и многоугао p'_i испупчен.

Многоугли p_i и p'_i су пак с разних страна праве $A_1 A_i$, сем, разуме се, странице $A_1 A_i$, јер кад то не би било, темена A_2 и A_n била би с исте стране праве $A_1 A_i$, дакле или би темена A_i и A_n била с разних страна праве $A_1 A_2$ или би пак темена A_i и A_2 биле с разних страна праве $A_1 A_n$, што је немогуће, јер је многоугао p испупчен.

Слично као у доказу теореме 15.6 доказује се да је свака тачка у многоугаоној површи (p) уједно у једној површи (p_i), (p'_i), и обратно. Дакле, према дефиницији 15.9 дата многоугаона површ је разложена дијагоналом $A_1 A_i$ на те две испупчене многоугаоне површи.

Као што на темељу теореме 15.6 следује теорема 15.7, тако сад на темељу теореме 15.17 имамо следећу.

Теорема 15.18. *Свака испупчена многоугаона површ са више од три темена може се дијагоналама које полазе из једног њеног темена разложити на троугаоне површи.*

Доказ. Нека је $(A_1 A_2 \ldots, A_n)$ испупчена многоугаона површ. Из сваког њеног темена полазе $n-3$ дијагонале. Напр. из A_1 полазе дијагонале $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $\ldots$, $A_1 A_{n-1}$. Свака од $n-2$ троугаоне површи $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_1 A_3 A_4)$, $(A_1 A_4 A_5)$, $\ldots$, $(A_1 A_{n-1} A_n)$ је изван сваке друге троугаоне површи истог низа. Заиста, нека су $(A_1 A_i A_{i+1})$ и $(A_1 A_k A_{k+1})$ $(i<k)$ ма које две од тих површи. Многоугли $A_1 A_2$, $\ldots$, A_i и $A_1 A_i A_{i+1} \ldots, A_n$ су према теореми 15.17 с разних страна праве $A_1 A_i$, сем заједничке странице $A_1 A_i$, дакле, тим пре, троугли $A_1 A_i A_{i+1}$ и $A_1 A_k A_{k+1}$ су с разних страна праве $A_1 A_i$, сем темена A_1 и можда њихове заједничке странице $A_1 A_i$. Према томе те две троугаоне површи су једна изван друге. Слично као у доказу теореме 15.7, но једноставније доказује се даље да је дата многоугаона површ разложена на посматране троугаоне површи.

Теорема 15.19. *Дуж која спаја ма које две тачке у испупченом многоуглу или на њему, а не припада истој његовој страници, садржана је сем можда њених крајева, у том многоуглу.*

За сваке две тачке које су ван испупченог многоугла или на њему постоји проста изломљена линија којој су те две тачке крајеви и којој су све тачке изван тог многоугла, сем можда самих тих крајева.

Доказ. Ако су A и B тачке у или на испупченом многоуглу p, али не на истој страници, права AB има с p према теореми 15.14 дзе заједничке тачке, јер обе полуправе с почетком A и које сачињавају праву AB имају по једну тачку заједничку. Те заједничке тачке нису између A и B. Тиме је први део теореме доказан.

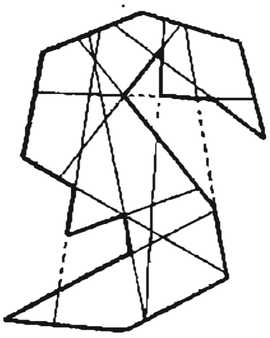
Други део теореме доказује се слично као у доказу теореме 15.12 но једноставније.

Скраћене доказе претходних теорема може читалац извести, ради вежбања, исцрпније.

12. Покажимо пак како се помоћу теореме 15.18 може једноставније него у бр. 2 до 9 доказати да се и свака удубљена многоугаона површ може разложити на троугаоне површи. Али разлагање не врше само унутарње дијагонале. Докажимо прво следеће:

Теорема 15.20. *Свака удубљена многоугаона површ може се помоћу правих којима припадају њихове странице разложити на испупчене многоугаоне површи.*

Доказ. Посматрајмо праве које садрже редом странице удубљеног многоугла $A_1 A_2 \ldots, A_n$ (сл. 123). Обележимо га кратко словом p. Према дефиницији 15.5 многоугао има својих темена с обеју страна бар једне од тих правих. Ако је таква права $A_1 A_2$, нека су напр. A_3 и A_n с разних страна ове праве. Изломљена линија $A_3 A_4 \ldots, A_m$ $(3<m\leqslant n)$ има с правом $A_1 A_2$ бар једну заједничку тачку, дакле права $A_1 A_2$ има ван странице $A_1 A_2$ заједничких тачака с многоуглом p, којих има, очигледно, мање од $n-3$. Те тачке одређују на правој $A_1 A_2$ известан број дужи, чије тачке су у многоуглу p или на њему. Како је за сваку праву кајо садржи једну страницу многоугла број тих дужи свакако коначан, укупан број тих дужи за све странице је коначан. Обележимо словом d ма коју од тих дужи.



Сл. 123

Докажимо да је укупношћу тих дужи многоугаона површ p разложена на испупчене многоугаоне површи. — Нека је P ма која тачка, садржана у тој површи (p), а која не припада дужима d и нека је a полуправа која полази из P и не пролази кроз заједничке тачке страница многоугла p међу собом, или дужи d међу собом, или првих са другима. Обележимо све те заједничке тачке словом S.

Полазећи из P, полуправа a има по дефиницији 15.6 с многоуглом p непаран број заједничких тачака, дакле бар једну. Уочимо заједничке тачке полуправе a са дужима d и нека је Q она од тих двеју врста заједничких тачака, која је најближа тачки P. Тачка Q припада само једној страници многоугла p или само једној дужи d. Нека су тачке S' и S'' на p одн. на d оне од тачака S које су најближе тачки Q.

Уочимо укупност дужи $S'S''$ и удубљених углова $\sphericalangle S'PS''$. Обележимо једну од тих дужи са $S_1 S_2$. Сви остали парови тачака S' и S'' су ван тог угла, јер тачке на свакој дужи $S' S''$ су најближе на полуправим а које полазе из P. Нека су S_3, S_4, ..., S_m ($m \geqslant 3$) све те тачке, поређане тако да су полуправе PS_1, PS_2, ..., PS_3 поређане пошав од PS, у смеру од PS_1 ка PS_2.

Укупност дужи S_1S_2, S_2S_3, ..., S_mS_1 образују многоугао $S_1S_2 \dots S_m$. Овај је прост, јер када то неби био, две његове странице, имале би заједничку тачку и два од удубљених углова $\sphericalangle S_1PS_2$, $\sphericalangle S_2PS_3$, ..., $\sphericalangle S_mPS_1$ имали би заједничких унутарњих тачака, дакле кроз такву тачку пролазила би извесна полуправа a која би секла две несуседне странице многоугла $S_1S_2 \dots S_m$, супротно-претпоставци по којој су те пресечне тачке најближе тачки P од свих заједничких тачака полуправе a с једне стране и линија p и d с друге стране.

Докажимо да је многоугао $S_1S_2 \dots S_m$ испупчен. Кад, напротив, не би био испупчен, према дефиницији 15.5 имао би својих темена с обеју страна праве која садржи једну његову страницу, рецимо S_1S_2. Нека је, дакле, S_h једно његово теме с оне стране праве S_1S_2 с које није тачка P. Права S_1S_2 сече дуж PS_h у извесној тачки T. Ова тачка је у многоуглу p, јер је између P и најближе тачке S_h многоугла p или дужи d, која је на полуправој PS_h. Но како је тачка T на правој S_1S_2, која припада многоуглу p или дужима d, та тачка и сама припада многоуглу p или дужима d, дакле S_h није најближа тачка. Ово се противи претпоставци. Дакле, многоугао $S_1S_2 \dots S_m$ је испупчен.

Број разних оваквих многоуглова је коначан, јер укупан број њихових темена је коначан. Нека су дакле p_1, p_2 ..., p_k сви ти испупчени многоугли. По претходном доказу свака тачка P која не припада дужима d, али је у многоуглу p, такође је у једном од испупчених многоуглова p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и само у том једном.

Обратно: У сваком многоуглу p_i постоји бар једна тачка P, која је такође у p, јер од таквих тачака P смо пошли у одређивању многоуглова p_i. Дакле, ако је P_i ма која друга тачка у p_i, полуправа a која пролази кроз P_i разложена је овом тачком на дуж PP_i и на извесну полуправу a'. Како полуправа a има с p једну заједничку тачку, а та тачка није на дужи PP_i, јер многоугао p нема тачака у p_i полуправа a' има с p_i једну заједничку тачку. Дакле, и тачка P_i је у многоуглу p, тј. свака тачка која је у p_i, такође је у p.

Тиме је доказано да је дата многоугаона површ (p) разложена на испупчене многоугаоне површи (p_i), $i = 1, 2, \dots, k$.

Сад можемо лако доказати теорему 15.7:

Теорема (15.7). *Свака многоугаона површ са више од три темена може се разложити на троугаоне површи.*

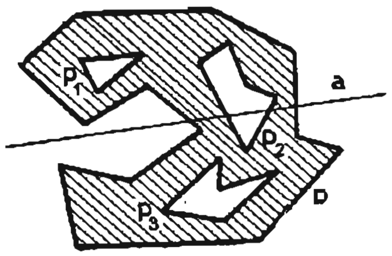
Доказ. Ако је многоугаона површ испупчена, нека је на основи теореме 15.18 разложена је на троугаоне површи. Ако је многоугаона површ удубљена, нека је прво према претходној теореми разложена на испупчене многоугаоне површи; свака од ових је, по теореми 15.18 разложена на троугаоне површи.

13. Осврнимо се још на вишеструко повезане многоугаоне површи. То нам је и потребно ради проучавања полиједара. Из следеће теореме следује да такве многоугаоне површи постоје.

Теорема 15.21. *Нека су* p_1, p_2, ..., p_r *прости равни многоугли који немају заједничких тачака, а садржани су у простом равном многоуглу* p, *и нека је сваки многоугао низа* p_1, p_2, ..., p_r *изван сваког другог многоугла истог низа.*

Тада постоје у тој равни тачке садржане у многоуглу p, *а изван многоуглова* p_1, p_2, ..., p_r.

Доказ. Нека је a права у равни многоуглова, која не пролази ни кроз једно њихово теме, а сече многоугао p у извесним тачкама, које поређане у једном смеру образују низ P', P'', ... $P^{(s)}$ (сл. 124). Ма која тачка Q између P', и P'' је у многоуглу p, јер полуправа QP' сече p само у P', а Q је изван сваког многоугла p_i, јер полуправа QP' нема заједничких тачака с p_i. Дакле постоји укупност тачака које су у p а изван свих p_i.



Сл. 124

На темељу ове теореме имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 15.13. Нека су p_1, p_2 ..., p_r ($r = 1, 2, \ldots$), прости равни многоугли који немају заједничких тачака, а садржани су у унутрашњости простог равног многоугла p, и нека је сваки многоугао низа p_1, p_2, ..., p_r изван сваког другог многоугла истог низа. Лик који се састоји из многоуглова p, p_1, p_2, ..., p_r и из свих тачака које су у многоуглу p а изван многоуглова p_1, p_2, ..., p_r називамо *вишеструко повезаном равном многоугаоном површи*.

Број r се зове *број повезаности*. Кажемо и да је та површ *r-тоструко* повезана.

Многоугле p, p_1, ..., p_r називамо *рубовима* те многоугаоне површи: многоугао p *спољним рубом*, а p_1, p_2, ..., p_r *унутарњим рубовима;* све рубове заједно називамо *рубом* многоугаоне површи. За остале тачке те многоугаоне површи кажемо да су у тој површи *(унутарње тачке)*. За тачке у равни, које не припадају многоугаоној површи, кажемо да су *изван* ње.

Под дијагоналама многоугаоне површи подразумеваћемо и дужи које спајају темена двају разних многоуглова њеног руба.

Дефиниција 15.14. Дуж која спаја два темена на рубу вишеструко повезане многоугаоне површи и не поклапа се ни с једном страницом тога руба називамо *дијагоналом многоугаоне површи*.

Дијагоналу којој су само крајње тачке заједничке с рубом називамо *простом дијагоналом*. Ако и све унутарње тачке на простој дијагонали припадају многоугаоној површи, просту дијагоналу зовемо *унутарњом дијагоналом*, ако су јој све унутарње тачке изван многоугаоне површи, називамо је *спољашњом дијагоналом*.

Приметимо да су унутарње дијагонале унутарњих рубова у односу на многоугаону површ спољне дијагонале.

Лако је доказати следећу теорему, којом се успоставља веза са дефиницијом 15.6.

Теорема. 15.22. *Ако је* P *тачка у вишеструко повезаној многоугаоној површи* π, *полуправа која иолази из* P *и не садржи темена те површи, сече њен руб у непарном броју тачака. Ако је* Q *тачка изван* π, *одговарајућа полуправа која полази из* Q *сече руб у парном броју тачака или ни у једној.*

Поступком којим је доказана теорема 15.5 доказује се пак и следећа, општија теорема:

Теорема 15.23. *Свака једноструко или вишеструко повезана равна многоугаона површ са више од три странице има најмање једну унутарњу дијагоналу.*

Идући истим путем као кад смо посматрали једноструко повезане многоугаоне површи, долазимо до разлагања вишеструко повезаних површи. Дефиниција 15.9 задржава вредност и за вишеструко повезане многоугаоне површи, а теорема 15.6 може се с малим изменама изрећи за многоугаоне површи које било повезаности:

Теорема 15.24. *Свака многоугаона површ, које било повезаности, а са више од три темена може се једном или двема својим унутарњим дијагоналама, које немају заједничких тачака, разложити на две многоугаоне површи. Две или више ових дијагонала, које се међу собом не секу, разлажу пак многоугаону површ на три или више многоугаоних површи.*

Број темена сваке нове многоугаоне површи мањи је од броја темена претходне, а број њене повезаности једнак је или мањи од броја повезаности многоугаоне површи чијим је разлагањем настала.

На темељу ове теореме закључујемо пак да и теорема 15.7 вреди за површи које било повезаности:

Теорема 15.25. *Свака многоугаона површ, које било повезаности, а са више од три темена може се разложити на троугаоне површи.*

Исто тако вреде теореме 15.8 и 15.9 и дефиниције 15.10 и 15.11. Теореме 15.10 до 15.13 треба пак саобразно изменити и доказати, што не пружа особитих тешкоћа.

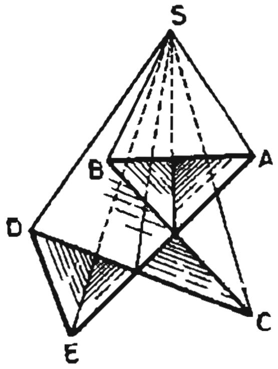
16. РОГЉЕВИ.

1. Постоји извесна аналогија између рогљева и многоуглова. Као што се многоугао састоји из низа дужи, тако се рогаљ састоји из низа угаоних површи, при чему два узастопна угла имају један заједнички крак. Отвореној и затвореној изломљеној линији одговара отворена и затворена „изломљена угаона површ". У том смислу рогаљ би био „затворена изломљена угаона површ". Но да бисмо скратили посматрање полазимо од следеће дефиниције рогља.

Дефиниција 16.1. Нека је SA_1, SA_2, ..., SA_n $(n = 3,4, \dots,)$ коначан низ полуправих, разних међу собом и са заједничким почетком S. Укупност одређених углова $\sphericalangle A_1 SA_2$, $\sphericalangle A_2 SA_3$, ..., $\sphericalangle A_{n-1} SA_n$, $\sphericalangle A_n SA_1$, чији краци су по две узастопне полуправе првог низа и у коме два узастопна угла не припадају једној равни — сматрајући узастопним и углове $\sphericalangle A_n SA_1$ и $\sphericalangle A_1 SA_2$ — називамо *рогљем*.

Те полуправе називамо *ивицама* рогља, њихов заједнички почетак *теменом* или *врхом* рогља, а те углове (тј. угаоне површи) *странама* или *пљоснима* рогља. Две узастопне полуправе називамо *суседним ивицама*, а две пљосни са заједничком ивицом *суседним пљоснима* (сл. 125).

Рогаљ који има n страна (или ивица) зове се n-тострани рогаљ. Тространи рогаљ зове се *триједар*.

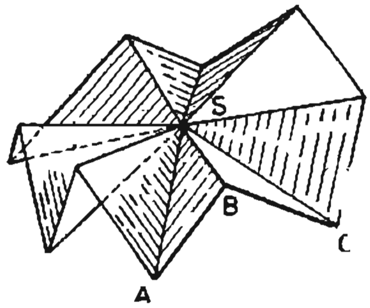


Сл. 125

Рогаљ коме је врх S а ивице редом SA_1, SA_2, ..., SA_n или пак a_1, a_2, ..., a_n, а коме су пљосни редом α_1, α_2, ..., α_n обележавамо помоћу пљосни знаком $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n$, или помоћу ивица знаком $a_1 a_2 \dots, a_n$ или помоћу тачака знаком $SA_1 A_2. \dots, A_n$, или само једним малим грчким словом.

Напомена: Како су две узастопне полуправе низа $SA_1, \ldots, SA_n$ краци двају углова, рогаљ није одређен самим низом својих ивица.

Дефиниција 16.2. Ако стране рогља немају заједничких тачака ван врха рогља и сем што две суседне стране имају заједничку ивицу, рогаљ називамо *простим рогљем*, а кад није тако *сложеним рогљем*.

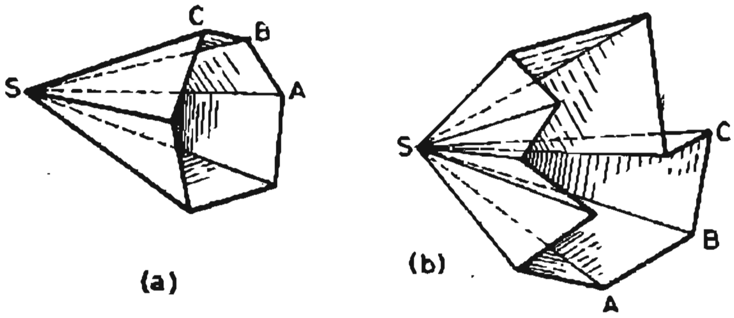


Сл. 126

Дефиниција 16.3. Ако су све пљосни рогља с једне исте стране извесне равни која садржи његов врх, називамо рогаљ *једнострано раширеним*. Ако не постоји таква раван називамо га *неједнострано раширеним* рогљем. Ако су све пљосни рогља с обеју страна сваке равни која садржи његов врх, називамо га *обострано раширеним* рогљем (сл. 126).

Ако су у односу на сваку раван која садржи једну пљосан простог рогља све остале његове пљосни, сем самих кракова те једне пљосни, с једне исте стране те равни, рогаљ зовемо *испупченим* (*конвексним*; сл. 126). Ако није тако за сваку пљосан, рогаљ зовемо *удубљеним* (*конкавним*; сл. 127).

Аналогија између рогљева и многоуглова долази до изражаја и у теоремама. Многе теореме о многоуглима могу се с малим изменама пренети на рогљеве. То, разуме се, не вреди за све теореме.



Сл. 127

2. Пљосан рогља може бити изузетно опружен угао. Али постоји следећа теорема, потребна и ради доказа идућих теорема.

Теорема 16.1. *Ако је једна пљосан рогља опружен угао, њој суседне пљосни нису опружени углови.*

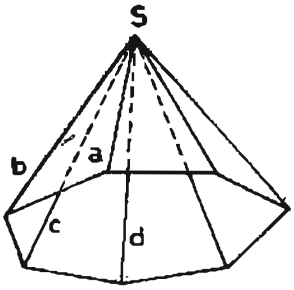
Доказ. Нека је у рогљу $Sa_1 a_2 \ldots a_n$ пљосан $\sphericalangle a_1 a_2$ испружен угао, дакле нека су a_1 и a_2 полуправе једне исте праве. Кко би и суседна пљосан $\sphericalangle a_2 a_3$ била опружен угао, ивица a_3 би се поклопила с a_1, што је према дефиницији 16.1 немогуће. — Тиме је ова теорема доказана.

3. Ограничавањем на испупчене рогљеве, проучавање рогљева бива знатно простије. Тако имамо следеће три теореме.

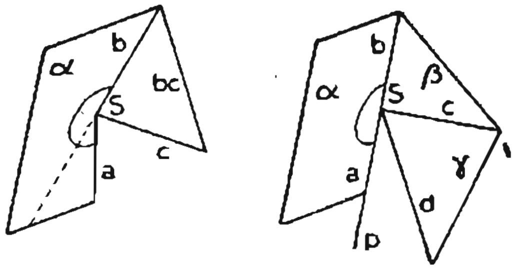
Теорема 16.2. *Свака пљосан испупченог рогља је удубљен угао.*

Доказ. Нека је $Sabc\ldots, m$ рогаљ с теменом S и ивицама a, b, $c, \ldots m$ (сл. 128). Претпоставимо да је пљосан $\sphericalangle ab$ испупчен угао. Нека је b' права којој припада ивица b (сл. 129а). Равни α и β којима припадају суседне пљосни $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle bc$ не поклапају се према дефиницији 16.1 дакле секу се по правој b'. Како је угао $\sphericalangle ab$ испупчен, по дефиницији 12.2 и теореми 11.6 има у равни α својих тачака с обеју страна праве b', дакле у простору пљосан $\sphericalangle ab$ има тачака с обеју страна равни β. Према дефиницији 16.3 рогаљ није испупчен.

Ако је пљосан $\sphericalangle ab$ опружен угао, ивице a и b сачињавају једну праву p (сл. 129b). Према теореми 16.1 суседна пљосан $\sphericalangle bc$ није опружен угао и сече раван на α прве пљосни $\sphericalangle ab$ по правој p. Како је рогаљ испупчен, сав је с оне стране равни β друге пљосни $\sphericalangle bc$ с које је пљосан $\sphericalangle ab$. Дакле и идућа ивица d је с исте стране равни β. Како је раван γ пљосни $\sphericalangle cd$ различита од равни β, а пресек ових двеју равни је права која садржи полуправу c, раван γ сече праву p у тачки S. Према томе ивице a и b су с разних страна равни γ, дакле рогаљ није испупчен.



Сл. 128



(a) (b)

Сл. 129

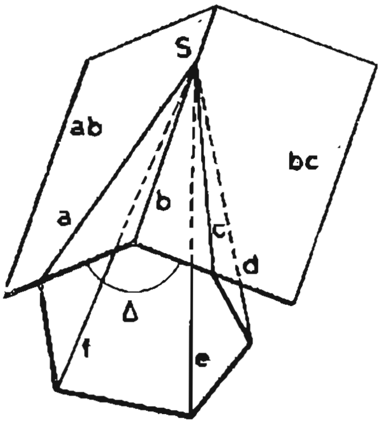
Према томе, ако је рогаљ испупчен, пљосан $\sphericalangle ab$, дакле и свака његова пљосан је удубљен угао, а то је и требало доказати.

Из претходне теореме следује да је прост рогаљ на коме је макар једна пљосан испупчен или опружен угао, удубљен рогаљ. Но може се доказати да је такав рогаљ штавише нееднострано раширен.

Теорема 16.3. *Ако је макар једна пљосан рогља опружен угао, рогаљ је нееднострано раширен. Ако је макар једна пљосан испупчен угао, рогаљ је, штавише, обострано раширен.*

Доказ. Ако је пљосан $\sphericalangle ab$ рогља $Sabc\ldots m$ опружен угао, ивице a и b сачињавају једну праву p (сл. 130). Свака раван σ која пролази кроз S, садржи ивице a и b или пак сече праву p, а тада су a и b с разних страна равни σ. Дакле a и b нису никад с исте стране равни σ, према томе рогаљ је нееднострано раширен.

Ако је пљосан $\sphericalangle ab$ испупчен угао, нека је a' права којој припада ивица a (сл. 129). Свака раван σ која пролази кроз S садржи праву a', дакле и крак a, или пак сече праву a', а тада су крак a и његово продужење a'' с разних страна равни σ. Како је пљосан $\sphericalangle ab$ испупчена, a'' припада према дефиницији 12.2 и теореми 11.6 тој пљосни, дакле пљосан $\sphericalangle ab$ има тачака с обеју страна равни σ, тј. рогаљ је обострано раширен.



Сл. 130

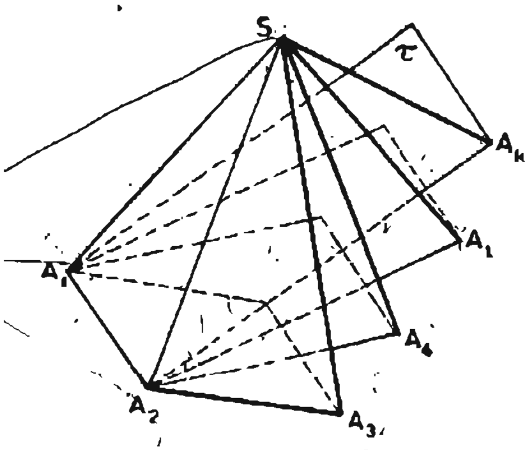
Из претходне теореме следује непосредно:

Теорема 16.4. *Свака пљосан еднострано раширеног рогља је удубљен угао.*

4. Следећа теорема тумачи аналогију која постоји између испупчених рогљева и испупчених многоуглова:

Теорема 16.5. *За сваки испупчени рогаљ постоји раван која сече све његове ивице и пљосни. Тај пресек је испупчен многоугао.*

Доказ. Нека је $SA_1A_2,\dots,A_n$ испупчен рогаљ с теменом S и ивицама SA_1, $SA_2,\dots,SA_n$ (сл. 131). Претпоставимо да је $\sphericalangle A_1SA_2$ једна од пљосни тог рогља, који није опружен угао. Према дефиницији 16.3 све његове пљосни, сем пљосни $\sphericalangle A_1SA_2$ су с једне исте стране равни A_1SA_2, дакле у једном од оба полупростора, рецимо П, који одређује та раван. Полуравни $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4,\dots,A_1A_2A_n$, којима је заједничка ивица права A_1A_2 и које садрже редом тачке $A_3A_4,\dots,A_n$, садржане су у П и одређују заједно са полуравни A_1A_2S, којој је ивица A_1A_2 и која садржи тачку S, низ диједара којима је полураван A_1A_2S заједничка страна, а друге стране су им редом полуравни $A_1A_2A_i$, $i=3,4,..,n$.



Сл. 131

Свака полураван $A_1A_2A_i$ налази се с оне стране полуравни A_1A_2S с које је свака друга полураван $A_1A_2A_l$. Ако се извесна полураван $A_1A_2A_l$ не поклапа с полуравни $A_1A_2A_3$, налази се с оне стране равни $A_1A_2A_3$ с које је полураван A_1A_2S, или с друге стране те равни. Ако је $A_1A_2A_i$ с оне стране равни $A_1A_2A_3$ с које је A_1A_2S, полураван је према дефиницији 13.3 у диједру $SA_1A_2A_3$.

Ако постоји полураван $A_1A_2A_i$ садржана у диједру $SA_1A_2A_3$, нека је $A_1A_2A_{i1}$ једна од њих. Ако затим у диједру $SA_1A_2A_{i1}$ постоји полураван $A_1A_2A_i$, нека је $A_1A_2A_{i2}$ једна од њих. Наставимо овако. Како полураван $A_1A_2A_3$ није у диједру $SA_1A_2A_3$, нити су $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_{i1}$ у диједру $SA_1A_2A_{i1}$ итд., добијамо низ диједара за које се смањује број садржаних полуравни $A_1A_2A_l$. Према томе постоји диједар $A_1A_2A_k$ у коме није више ниједна од тих полуравни.

Све полуравни $A_1A_2A_i$, $i=3,4,\dots,n$, се дакле поклапају с $A_1A_2A_k$ или су с оне стране равни $A_1A_2A_k$ с које није тачка S. Дакле, S и све тачке A_i, $i\neq 1, 2, k$, јесу са супротних страна равни $A_1A_2A_k$, тј. постоји тачка A'_i на свакој полуправој SA_i, $i\neq 1, 2, k$, где ова продире кроз раван $A_1A_2A_k$. Обележимо ову раван са τ. Како и полуправе SA_1, SA_2, SA_k продиру кроз раван τ, све ивице датог диједра продиру кроз τ.

Како је посматрани рогаљ испупчен, према теореми 16.2 пљосан $\sphericalangle A_1SA_2$ је удубљен угао, дакле дуж A_1A_2 припада тој пљосни, а њена продужења јој не припадају, тј. пресек пљосни $\sphericalangle A_1SA_2$ с равни τ је дуж A_1A_2. Како то вреди за све пљосни рогља, а ивице рогља продиру кроз раван τ у тачкама A_1, A_2, $A'_3,\dots,A'_n$, пресек рогља том равни је многоугао $A_1A_2A'_3\dots A'_n$.

Како су све тачке A'_3, $A'_4,\dots,A'_n$ с исте стране равни A_1SA_2, такође су с исте стране праве A_1A_2. Уопште, сва темена многоугла $A_1A_2A'_3\dots A'_n$ су с једне стране у односу на праву која садржи ма коју његову страницу, тј. тај многоугао је испупчен.

5. После претходне теореме може те лако доказати следећа:

Теорема 16.6. *Испупчен рогаљ је једнострано раширен.*

Доказ. Нека је на темељу претходне теореме τ раван која сече све пљосни испупченог рогља $Sa_1 a_2 \ldots a_n$. Пресек је испупчен многоугао $A_1 A_2 \ldots A_n$. Нека је у равни τ s права која нема заједничких тачака с тим многоуглом. Тада раван σ, која садржи врх S рогља и праву s, нема заједничких тачака с рогљем, сем тачке S.

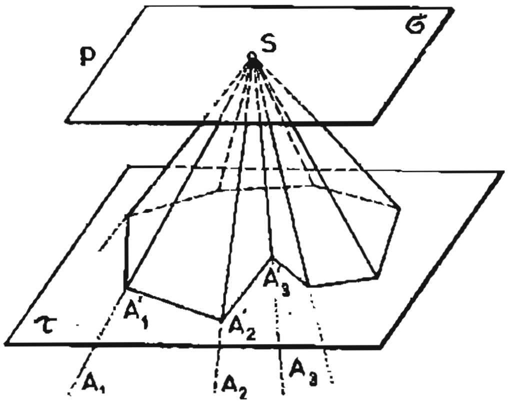
Заиста, кад би раван σ имала с рогљем још једну заједничку тачку, рецимо R, тачка R би припадала једној пљосни рогља, рецимо $\sphericalangle a_1 a_2$. Како је полуправа SR с почетком у S садржана у $\sphericalangle a_1 a_2$, ова полуправа би припадала пресеку рогља равнином σ. Но полуправа SR би секла дуж $A_1 A_2$ у извесној тачки T, дакле T би била заједничка тачка равнина σ и τ, тј. права s би секла многоугао $A_1 A_2 \ldots A_n$ у T, супротно претпоставци.

Како је цео рогаљ, сем врха S, с једне стране равни σ, тај рогаљ је једнострано раширен. — Тиме је овај доказ завршен.

Постоји и донекле обрнута теорема, шира од теореме 16.5.

Теорема 16.7. *За сваки једнострано раширен рогаљ постоји раван која сече све његове ивице и пљосни. Тај пресек је раван многоугао. Ако је рогаљ прост, тај многоугао је прост.*

Доказ. Нека је $SA_1 A_2 \ldots A_n$ посматрани рогаљ, с теменом S и ивицама $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ и нека је према дефиницији 16.2 σ раван која пролази кроз S тако да је цели рогаљ у једном полупростору коме је σ међа (сл. 132). Нека је p права у σ, која не садржи S. Посматрајмо полуравни $pS, pA_1, pA_2, \ldots, pA_n$, са заједничким рубом p и које садрже дотичне тачке. Све те полуравни, сем pS, јесу с исте стране равни σ.



Сл. 132

Посматрајмо удубљене диједре са заједничком страном pS и странама $pA_1, pA_2, \ldots, pA_n$. Као у доказу теореме 16.5 доказујемо да је једна од ових полуравни, рецимо pA_k, садржана у свим овим диједрима, уколико им се једна страна не поклапа с pA_k. Тачке A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, су све изван тих диједара и уколико нису у полуравни pA_k (као што је сама тачка A_k) налазе се с оне стране равни pA_k с које није тачка S. Обележимо ову раван с τ. Нека је A'_i тачка у којој дуж SA_i продире кроз раван τ, а уколико је A_i у τ нека је $A'_i \equiv A_i$.

Раван τ сече све ивице датог рогља у тачкама A'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Како су према теореми 16.4 пљосни једнострано раширеног рогља удубљени углови, пресек равни τ сваком пљосни је по једна дуж, тј. раван τ сече рогаљ по многоуглу $A'_1 A'_2 \ldots A'_k$.

Ако је рогаљ прост, његове пљосни немају заједничких тачака ван S, сем што по две суседне пљосни имају заједничку ивицу, дакле ни у равни τ немају странице тога многоугла заједничких тачака, сем што по две суседне странице имају заједничко теме, тј. многоугао је прост. — Тиме је теорема доказана.

На основи теореме 16.7 може се дефинисати једноставно диједар простог једнострано раширеног рогља.

Дефиниција 16.4. Нека је $SA_1A_2\dots A_n$ прост једнострано раширен рогаљ, $A_1A_2\dots A_n$ прост многоугао по коме га сече извесна раван. Диједар чија ивица садржи ивицу SA_i рогља $(i=1, 2,\dots, n)$ а чије пљосни су полуравни које садрже обе пљосни рогља са заједничком ивицом SA_i, и у коме је садржан угао многоугла $A_1A_2\dots A_n$ са теменом A_i — називаћемо *дијерором рогља* $SA_1A_2\dots A_n$.

Како су на темељу теореме 15.18 углови испупченог многоугла удубљени, лако се доказује исто за диједре испупченог рогља.

Теорема 16.8. *Углови испупченог многоугла су удубљени.*

Доказ препуштамо читаоцу.

6. Ако је једнострано раширен прост многоугао испупчен, пресек једном равни која сече све његове ивице је према теореми 16.6 испупчен многоугао. Ако је једнострано раширен прост рогаљ удубљен, пресек је удубљен многоугао. Имамо, наиме:

Теорема 16.9. *Ако раван сече све ивице једнострано раширеног удубљеног рогља, пресек рогљем је удубљен многоугао.*

Доказ. Нека је τ раван која сече све ивице рогља $Sa_1a_2\dots a_n$ у тачкама A_1, $A_2,\dots$, A_n. Према теореми 16.4 пљосни једнострано раширеног рогља су удубљени углови, дакле њихови пресеци са τ су дужи A_1A_2, $A_2A_3,\dots$, A_nA_1 и према томе пресек рогља је многоугао $A_1A_2\dots A_n$. Тај многоугао је прост, јер је рогаљ прост, дакле његове пљосни немају заједничких тачака, сем суседне што имају заједничку ивицу. Но како је рогаљ удубљен, постоји раван α, која садржи једну његову пљосан, рецимо $\sphericalangle a_1a_2$, и која има бар с једном несуседном пљосни, рецимо са $\sphericalangle a_ia_{i+1}$, заједничку полуправу. Тада у равни τ и права A_1A_2 има заједничку тачку са страницом A_iA_{i+1} пресечног многоугла, дакле овај је удубљен.

7. Следећа теорема је у извесном смислу обрнута теоремама 16.5 и 16.9.

Теорема 16.10. *Ако је* S *тачка изван равни* α *простог многоугла, постоји једнострано раширен прост рогаљ коме је* S *врх, а раван* α *га сече по том многоуглу. Ако је тај многоугао испупчен, рогаљ је испупчен, ако је многоугао удубљен, рогаљ је удубљен.*

Доказ. Нека је то многоугао $p\equiv A_1A_2\dots A_n$. Полуправе SA_1, SA_2, $\dots$, SA_n с почетком S су према дефиницији 16.1 ивице рогља, јер су разне међу собом, а како две суседне странице многоугла p не припадају једној правој, три узастопне ивице, које пролазе кроз крајеве тих страница не припадају једној равни.

Уочимо онај рогаљ λ с тим ивицама, коме су пљосни удубљени углови $\sphericalangle A_1SA_2$, $\sphericalangle A_2SA_3,\dots$, $\sphericalangle A_nSA_1$.

Како странице многоугла p немају заједничких тачака, сем суседне странице заједничко теме, немају ни одговарајуће пљосни рогља заједничких тачака, сем суседне пљосни заједничку ивицу, тј. рогаљ је прост.

Ако је многоугао p испупчен, сва његова темена, сем A_1 и A_2 су с исте стране праве A_1A_2, дакле су и све ивице рогља λ, сем тачке S и ивица SA_1 и SA_2 с исте стране равни A_1SA_2, а према томе су и сви удубљени углови $\sphericalangle A_2SA_3,\dots$, $\sphericalangle A_nSA_1$, сем ивица SA_1 и SA_2, с исте стране те равни. Ово вреди како у односу на раван A_1SA_2, тако у односу на раван сваке пљосни рогља λ, дакле према дефиницији 16.3 λ је испупчен рогаљ.

Ако је многоугао p удубљен, постоји страница, рецимо A_1A_2, тако да права A_1A_2 има са несуседном страницом A_iA_{i+1} заједничку тачку. Тада и раван SA_1A_2 има са пљосни $\sphericalangle A_iSA_{i+1}$ заједничку полуправу, дакле рогаљ је удубљен.

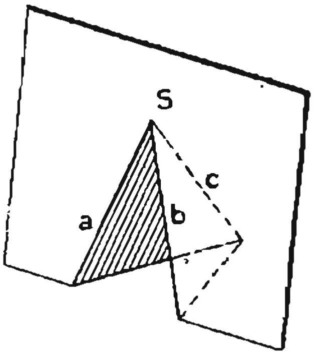
8. Триједар не мора бити испупчен рогаљ. Постоји напротив ова теорема:

Теорема 16.11. *Три полуправе са заједничким почетком и које не припадају једној равни јесу ивице једног испупченог и три удубљена проста триједра.*

Доказ. Нека су a, b, c, те три полуправе. Према дефиницији 10.8 c је с једне стране равни ab полуправих a и b. Посматрајмо триједре којима су пљосни удубљени углови $\sphericalangle ac$ и $\sphericalangle bc$. Унутрашњости тих удубљених углова су према теореми 12.2 с оне стране равни ab с које је полуправа c, дакле те пљосни су с те једне стране равни ab, сем самих полуправих a и b. Ако је и пљосан $\sphericalangle ab$ удубљен угао, одговарајући закључак вреди и у односу на равни bc и ca, дакле према дефиницији 16.3 триједар је испупчен.

Сваки други прости триједар истих ивица је према теореми 16.2 удубљен. јер је бар једна његова пљосан испупчен угао (сл. 133).

И ако је пљосан $\sphericalangle ab$ испупчен угао, а остала два су удубљена, те две пљосни су с једне исте стране равни ab, дакле пљосан $\sphericalangle ab$ има с осталим двема пљоснима само ивице a и b заједничке, а те две пљосни само ивицу c заједничку, тј. триједар је прост. Али према теореми 16.2 није испупчен, јер му је једна пљосан испупчен угао. Како уместо угла $\sphericalangle ab$ може пљосан $\sphericalangle bc$ или пак $\sphericalangle ac$ бити испупчен угао, има три оваква удубљена триједра.



Сл. 133

Ако би две пљосни триједра биле испупчени углови, лако је показати да триједар није прост рогаљ, јер се два удубљена угла пресецају. Дакле постоје свега три удубљена триједра с датим ивицама a, b, c.

9. Постоји аналогија између једнострано раширених простих рогљева и простих многоуглова. Враћајући се на пресечни многоугао једнострано раширеног простог рогља једном равни, може се за сваку теорему о простом многоуглу изрећи и доказати одговарајућа теорема о рогљу Према томе, сва посматрања у § 15 о простим многоуглима могу се пренети, односно применити на рогљеве.

Унутрашњост и спољашњост једнострано раширеног простог рогља можемо дефинисати помоћу равни која пресеца све његове ивице, на следећи начин:

Дефиниција 16.5. Нека је $Sa_1a_2\ldots a_n$ прост једнострано раширен рогаљ и нека је τ раван која сече тај рогаљ по простом многоуглу p. За тачку T рећићемо да је *у рогљу* $Sa_1a_2\ldots a_n$ ако полуправа ST, која полази из S, продире кроз раван τ у тачки која је у многоуглу p.— Ако тачка није у рогљу нити припада њему, рећићемо да је *изван* њега.

Укупност тачака које су у рогљу $Sa_1a_2\ldots a_n$ називамо његовом *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван њега његовом *спољашњошћу*.

Према томе, ако полуправа SU продире кроз раван τ у тачки која је изван p, или ако уопште не продире кроз τ, тачка U је изван рогља.

На основи теореме која је аналога теореми 15.3 можемо говорити о *разлагању простора* оваквим рогљем на његову унутрашњост и спољашњост и дефинисати *тело рогља* или *једнорогљасто тело* као укупност тачака које су на простом једнострано раширеном рогљу или у њему.

Затим се може проучавати *разлагање једнорогљастог тела*, као што смо проучавали разлагање многоугаоних површи.

Свако једнорогљасто тело са више од три ивице разложено је сваком својом унутрашњом дијагоналном површи на два таква тела. Свако од та два тела има мањи број ивица од првога. Тако се једнорогљасто тело са више од три ивице може разложити на триједарска тела, као што се многоугаона површ може разложити на троугаоне површи,

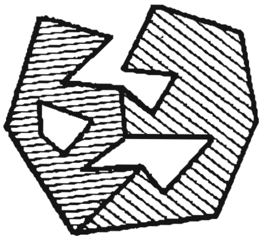
РОГЉАСТА ТЕЛА

1. Под полиједром подразумева се неки пут затворена површ која се састоји из многоугаоних површи (пљосни полиједра), а неки пут тело које је ограничено таквом површи. Ми ћемо под полиједром (многопљосником) подразумевати тело и називати га такође рогљастим телом, а његову површ рогљастом или полиједарском површи. Прво ћемо проучавати рогљасте површи, а затим укратко полиједре.

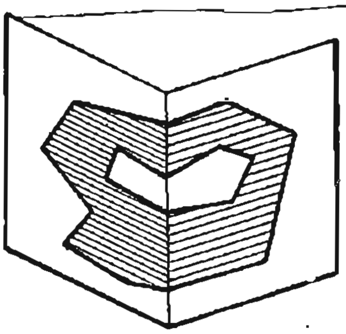
Разноврсност полиједарских површи је још много већа од разноврсности полигона и рогљева. Како проучавамо само најједноставније геометријске ликове, ограничићемо се, мање више, на најједноставније полиједарске површи.

Како се обично и узима, рогљаста површ је извесно мноштво равних многоугаоних површи. (Али о „полиједарским површима“ би се могло говорити и кад би пљосни биле криве површи, а ивице криве линије). За мноштво многоугаоних површи које образују рогљасту површ битно је то да је у смислу топологије повезано. Разликоваћемо отворене и затворене рогљасте површи (напр. омотачи пирамиде и призме су отворене рогљасте површи с једним, односно с два руба). Али у геометрији се посматрају и отворене површи које се не састоје само из многоугаоних површи, већ и из безконачних делова равни, омеђених праволинијски (као што су углови). Такав је напр. рогаљ.

Полиједри се називају и рогљастим телима, јер се њихове пљосни могу проширити тако да образују рогљеве. У том смислу, све пљосни с једним заједничким теменом одређују пљосни једног рогља. Али отворена „рогљаста површ“ не мора имати ниједног рогља (напр. диједар или укупност двеју троугаоних површи с једном заједничком страницом и које припадају двема равнима), Сам рогаљ је отворена рогљаста површ с једним рогљем.



Сл. 134



Сл. 135

2. Прво треба дефинисати шта је повезано мноштво многоугаоних површи. Полазимо од дефиниције 15.12 према којој две полигонске површи, које имају најмање једну дуж заједничку, а ван својих рубова немају заједничких тачака, називамо суседним полигонским површима.

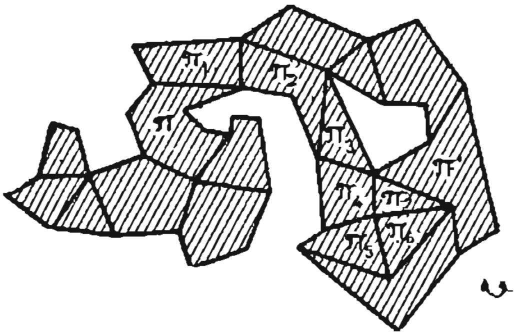
У слици 134 претстављене су две суседне многоугаоне површи у једној равни са двема заједничким страницама. Слика 135 претставља две суседне многоугаоне површи у двема разним равнима; све њихове заједничке тачке припадају пресечној правој обеју равни.

Дефиниција 17.1. За мноштво полигонских површи рећи ћемо да је *повезано* ако има следећу особину:

ма за које две несуседне полигонске површи π и π' тога мноштва постоји коначан низ $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$ $(m = 1,2, \ldots)$ полигонских површи истога мноштва, тако да су π и π_1, π_1 и π_2, π_2 и $\pi_3, \ldots$, π_m и π' парови суседних полигонских површи.

За низ π_1, и $\pi_2 \ldots, \pi_m$ кажемо да образује *ланац*, а за овај кажемо да *спаја* π и π'.

Напомена. Повезано мноштво полигонских површи може бити садржано у једној равни (сл. 136). Кад мноштво образује полиједарску површ, две ма које суседне полигонске површи тог мноштва припадају двема разним равнима. Кад би, наиме, две суседне пљосни припадале једној равни, не бисмо их сматрали разним пљоснима, већ деловима једне.



Сл. 136

3. Ради лакшег израчунавања треба дефинисати шта значи кад се каже да полигонске површи (пљосни полиједра) одређују рогаљ. Прво треба доказати:

Теорема 17.1. *Ако су* π_1 *и* π_2, π_2 *и* $\pi_3, \ldots, \pi_{n-1}$ *и* π_n *и најзад* π_n *и* π_1 *парови суседних полигонских површи и ако сваки пар има по једну заједничку страницу, тако да све те странице имају један заједнички крај, тада постоји рогаљ чије теме је овај заједнички крај, чије ивице садрже редом те заједничке странице, а чије пљосни су углови који редом припадају полигонским површима* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$.

Доказ. Нека су рèдом $SA_1, SA_2, \ldots, SA_{n-1}, SA_n$ заједничке странице полигонских површи π_1 и π_2, π_2 и $\pi_3, \ldots, \pi_{n-1}$ и π_n, π_n и π_1, затим нека су углови $\sphericalangle A_nSA_1$, $\sphericalangle A_1SA_2, \ldots, \sphericalangle A_{n-1}SA_n$ они углови који припадају редом полигонским површима $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ (дефиниција 15.11). Према дефиницији 16.1 укупност тих углова је рогаљ $SA_1A_2 \ldots A_n$.

Имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 17.2. Ако су π_1 и π_2, π_2 и $\pi_3, \ldots, \pi_{n-1}$ и π_n и најзад π_n и π_1 парови суседних полигонских површи и ако сваки пар има по једну заједничку страницу такву да све те странице имају један заједнички крај, тако за рогаљ чије теме је овај заједнички крај, чије ивице садрже редом те заједничке странице а чије пљосни су углови који припадају редом полигонским површима $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ кажемо да је *одређен* тим низом полигонских површи.

4. Сматрајући да рогљаста површ може бити и отворена површ, постављамо следеће дефиниције:

Дефиниција 17.3. Повезано мноштво полигонских површи називамо *полиједарском* или *рогљастом површи* ако испуњава следећа два услова:

1. свака дуж на страници једне полигонске површи може бити уједно на страници још само једне (суседне) полигонске површи тог мноштва,

2. сваке две суседне полигонске површи припадају двема разним равнима.

Те полигонске површи називамо *пљоснима* или *странама* рогљасте површи, њихове странице *ивицама*, а укупност оних тачака на страницама, које нису заједничке двема пљоснима називамо *рубом* рогљасте површи.

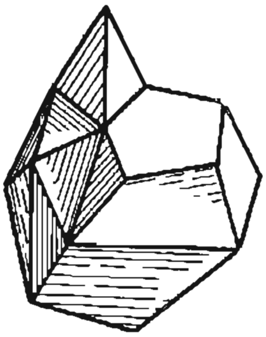
Темена и углове појединих пљосни називамо *теменима* (врховима) и *угловима* рогљасте површи, а рогљеве који су образовани низом пљосни којима је једно теме заједничко називамо *рогљевима* рогљасте површи.

Дефиниција 17.4. Ако рогљаста површ нема руба, тада је називамо *затвореном*. Рогљасту површ која није затворена називамо *отвореном*.

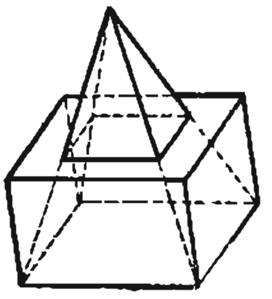
У следећим дефиницијама и теоремама ограничавамо се на затворене рогљасте површи. Стога не кажемо увек изричито да су затворене.

Дефиниција 17.5. Ако пљосни затворене рогљасте површи немају других заједничких тачака, сем што је свака страница једне полигонске површи уједно страница још само једне полигонске површи и што је свако теме једне полигонске површи заједничко теме трију или више полигонских површи, које одређују само један рогаљ, затворену површ називамо *простом рогљастом површи*. У противном случају називамо је *сложеном рогљастом површи*.

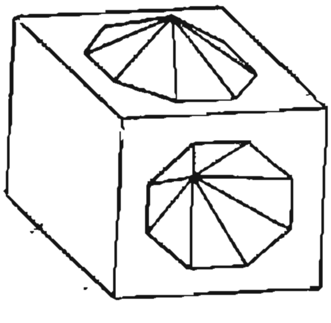
Слика 137 претставља просту затворену полиједарску површ, а слика 138 сложену затворену полиједарску површ са девет пљосни (ова је настала из површи квадра тиме што је доња пљосан замењена омотачем четворостране пирамиде, а овај омотач продире кроз горњу пљосан квадра и тиме добијамо с доње стране удубљену полиједарску површ, која сама себе пресеца).



Сл. 137



Сл. 138

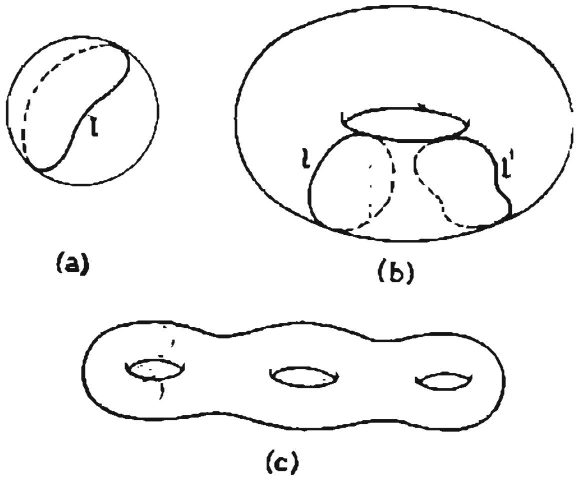


Сл. 139

Приметимо да пљосни рогљасте површи могу бити и вишеструко повезане многоуглоне површи (§15.5). Затим теме једне пљосни не мора бити теме друге пљосни. Слика претставља просту затворену рогљасту површ која је настала тиме што је квадру озго додата осмострана пирамида, а с предње стране одузета иста таква пирамида. Тиме су од горње и предње стране квадра преостале двоструко повезане пљосни нове затворене рогљасте површи. — Дефиниције 17.3 до 17.5 допуштају прву околност, јер под полигонском површи можемо замишљати и вишеструко повезане површи. Другу околност допушта само ако и неке унутарње тачке на страницама полигонске површи сматрамо њиховим теменима (дакле ако изоставимо у дефиницији многоугла услов да суседне странице не припадају једној правој). Али обично се претпоставља да су пљосни једноструко повезане и да се теме једне пљосни не поклапа никад с унутарњом тачком странице друге пљосни.

5. За проучавање простих рогљастих површи потребно је дефинисати **повратни пресек** и на темељу њега **род** рогљасте површи. Посматрајући какве било просте, отворене или затворене површи, свака проста затворена линија, која нигде не долази до руба површи, назива се повратним пресеком.

Например, сваки повратни пресек l лопте разлаже лопту на два комада, а повратан пресек торуса не мора разложити торус на два дела (сл. 140 а и b). Али два повратна пресека (напр. l и l') која **немају** заједничких тачака, разлажу торус, очигледно, увек. Највећи број могућих повратних пресека на површи, који немају заједничких тачака а не разлажу ту површ је такозвани **род** (у смислу **врсте**) те површи. Лопта је рода 0, торус рода 1, а напр. затворена површ са три „пролаза" (сл. 140 с) је рода 3.



Сл. 140

Довољно је на таквим површима нацртати мрежу криволинијских полигона, да би се видело да просте рогљасте површи могу бити кога било рода.

Проучавајући затворене рогљасте површи, дефинисаћемо прво повратне пресеке, а затим разлагање рогљастих површи таквим пресецима.

Пре свега, из дефиниција 15.1 и 15.4 и дефиниција 17.3 и 17.4 следује непосредно следећа теорема:

Теорема 17.2. *На простој рогљастој површи низ темена* A_1, A_2, . . . , A_r $(r>2)$, *разних међу собом, сем што се* A_1 *и* A_r *могу поклопити, и таквих да су* A_1A_2, A_2A_3, . . . , $A_{r-1}A_r$ *ивице те рогљасте површи, одређује просту изломљену линију* $A_1A_2 \ldots A_r$ *којој су странице те ивице.*

Дефиниција 17.6. Ако је проста изломљена линија, чије странице су ивице једне просте затворене рогљасте површи, затворена (тј. ако је прост многоугао) називамо је *повратним пресеком* те рогљасте површи.

Приметимо да је такав повратни пресек обично просторан полигон.

6. Могуће је да један или више повратних пресека **разложе** полиједарску површ. То разлагање дефинишемо овако:

Дефиниција 17.7. Нека су p_1, p_2, . . . , p_r повратни пресеци просте затворене рогљасте површи φ. Ако постоје на тој површи две њене пљосни π и π' тако да сваки ланац њених пљосни, који спаја π и π', садржи бар две суседне пљосни којима је заједничка страница једна страница тих повратних пресека, рећи ћемо да ти повратни пресеци разлажу полиједарску површ φ.

Постоји пре свега ова теорема:

Теорема 17.3. *Ако је повратним пресеком* p *затворена рогљаста површ* φ *разложена, разложена је на два повезана мноштва полигонских површи које су пљосни рогљасте површи* φ.

Доказ. Нека је π која било пљосан полиједарске површи φ, а π' ма која друга пљосан исте полиједарске површи. Према дефиницији 17.3 постоји увек ланац пљосни, који спаја π и π'. Нека је ψ_1 укупност оних пљосни π' за које сваки ланац садржи две суседне пљосни којима је једна страница многоугла p заједничка, а ψ_2 укупност осталих пљосни рогљасте површи φ.

Ако је π' у ψ_2, постоји дакле ланац пљосни, који спаја π са π' и који не садржи две суседне пљосни којима је једна страница многоугла p заједничка. Дакле, све пљосни тог ланца припадају укупности ψ_2. Према дефиницији 17.1 ψ_2 је дакле повезано мноштво полигонских површи.

Нека су π' и π'' ма које две пљосни у ψ_1. Уочимо један ланац који спаја π и π' и један који спаја π и π''. Нека је $\pi_1', \pi_2' \dots, \pi_k', \pi_{k+1}', \dots, \pi_r'$ први ланац и нека π_k' и π_{k+1}' имају извесну страницу $P'Q'$ многоугла p заједничку. Исто тако нека је $\pi_1'', \pi_2'', \dots, \pi_l'', \pi_l''_{+1}, \dots, \pi_s''$ други ланац и нека π_l'' и π_{l+1}'' имају извесну страницу $P''\,Q''$ многоугла p заједничку.

Ако је $P'\,Q' = P''\,Q''$, ланац $\pi_r', \pi_{r-1}', \dots, \pi_{k+1}' \ (\equiv \pi_{l+1}''), \pi_{l+2}'', \dots, \pi_s''$ спаја π' и π'', а садржан је у мноштву ψ_1. Ако су $P'Q'$, $P''Q''$ две разне странице полигона p, нека је $P'Q'R_1R_2 \dots R_kP''Q''$ изломљена линија садржана у p, образована узастопним теменима тог полигона. Свака страница линије $Q'R_1R_2 \dots R_kP''$ је заједничка за две пљосни, од којих једна припада мноштву ψ_1. Нека су то пљосни $\pi_1''', \pi_2''', \dots, \pi_{h+1}'''$. Ако су две узастопне пљосни тог низа суседне, ланац $\pi_r', \pi_{r-1}', \dots, \pi_{k+1}', \pi_1''', \dots, \pi_{h+1}''', \pi_{l+1}'', \pi_{l+2}'', \dots, \pi_s''$ спаја π' π''.

Ако две узастопне пљосни низа $\pi_{k+1}', \pi_1''', \dots, \pi_{h+1}''', \pi_{l+1}''$, рецимо π_{k+1}' и π_1''' низу суседне, постоји ланац $\pi_1^{IV}, \pi_2^{IV}, \dots, \pi_l^{IV}$ који спаја π_{k+1}' и π_1''' и који је садржан у низу свих пљосни са заједничким теменом Q' (тј. у дотичном рогљу), а који се састоји из пљосни садржаних у ψ_1.

Укратко, у сваком случају постоји ланац пљосни садржаних у ψ_1 и који спаја π' и π''. Дакле и мноштво ψ_1 је повезано.

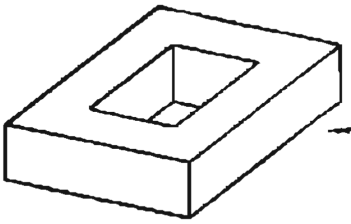
7. Постоји и општија теорема:

Теорема 17.4. *Ако је повратним пресецима* $p_1, p_2, \dots p_{s+1}$ *који немају заједничких тачака, рогљаста површ* φ *разложена, а повратним пресецима* $p_1, p_2, \dots, p_s$ *није разложена, тада је разложена повратним пресеком* p_{s+1} *на два повезана мноштва полигонских површи.*

Доказ. Како низ $p_1, \dots, p_s$ не разлаже рогљасту површ φ, ма за које две њене пљосни π и π' постоји ланац њених пљосни, који спаја π и π' и не садржи две суседне пљосни којима је једна страница ма којег од тих мноштава $p_1, \dots, p_s$ заједничка. Но како је низом $p_1, \dots, p_{s+1}$ рогљаста површ φ разложена, постоје пљосни π и π' тако да сваки од претходних ланаца, који спаја π и π' садржи две суседне пљосни којима је једна страница полигона p_{s+1} заједничка. Отуд, истим посматрањем као у доказу претходне теореме, доказујемо ову теорему.

Сад можемо дефинисати род полиједра.

Дефиниција 17.6. Највећи могући број повратних пресека просте затворене рогљасте површи φ, који немају заједничких тачака и који не разлажу ту рогљасту површ, називамо њеним *родом*.



Сл. 141

Дакле, ако сваки повратни пресек разлаже полиједарску површ, та површ има род нулу.

Род полиједарске површи претстављене у слици 137 је нула. На слици 141 претстављена је проста затворена полиједарска површ рода 1. Постоје, очигледно, полиједарске површи чији род је ма који природан број.

8. Разликујемо испупчене и удубљене просте затворене рогљасте површи. Посматраћемо особито испупчене. Но пре свега потребна је следећа дефиниција:

Дефиниција 17.9. Ако су у односу на сваку раван која садржи једну пљосан просте затворене рогљасте површи све остале њене тачке садржане с једне исте стране те равни, рогљасту површ називамо *испупченом* (*конвексном*). Ако није тако, за сваку такву раван, рогљасту површ називамо *удубљеном* (*конкавном*).

Све околности које се тичу простих полиједарских површи знатно се упрошћавају кад су те површи испупчене. Докажимо прво четири теореме о испупченим затвореним рогљастим површима.

Теорема 17.5. *Пљосни испупчене рогљасте површи су испупчене полигонске површи.*

Доказ. Претпоставимо да је, напротив, пљосан π испупчене рогљасте површи ξ удубљена или, штавише, вишеструко повезана многоугаона површ. Тада постоји једна страница пљосни π, рецимо AB, тако да π има у равни α у којој је π, тачака с обеју страна праве AB. Нека је π' суседна пљосан, која с π има заједничку дуж AB. Пљосан π' је у другој равни, α'. Како се α и α' секу, тачке пљосни π, које су с разних страна праве AB такође су с разних страна равни α'. Дакле, по дефиницији 17.9 рогљаста површ ξ није испупчена, Дакле, пљосни испупчене рогљасте површи су испупчене многоугаоне површи.

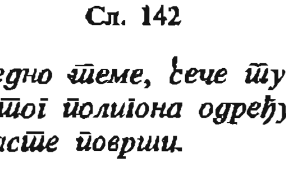
Теорема 17.6. *Рогљеви испупчене рогљасте површи су испупчени.*

Доказ. Нека пљосни π_1, π_2 ..., π_s имају теме A заједничко и нека π_1 и π_2, π_2 и π_3, ..., π_s и π_1 имају по једну заједничку ивицу, редом AA_1, AA_2, ..., AA_s. Како су пљосни испупченог рогља испупчене полигонске површи, пљосан π_1 је садржана у удубљеном углу $\sphericalangle A_sAA_1$, π_2 у удубљеном углу $\sphericalangle A_1AA_2$ итд. Према дефиницији 17.9 све тачке рогљасте површи које нису на пљосни, јесу с једне стране равни A_sAA_1, дакле то вреди посебно за пљосни π_2, π_3, ..., π_s и према томе за све пљосни уоченог рогља, сем за $\sphericalangle A_sAA_1$, тј. све тачке тог рогља, сем оних које припадају пљосни $\sphericalangle A_sAA_1$ јесу с једне стране равни те пљосни. Како то вреди у односу ма на коју пљосан рогља, овај је испупчен.

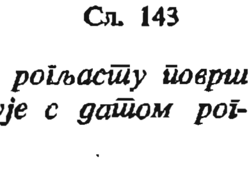
Теорема 17.7. *Права која не припада равни неке пљосни извесне испупчене рогљасте површи, нема с том рогљастом површи више од две заједничке тачке.*

Доказ. Претпоставимо, напротив, да права a сече испупчену рогљасту површ у најмање три тачке A, B, C, и да је тачка B између A и C (сл. 142). Кроз те три тачке би пролазиле три разне пљосни те рогљасте површи, дакле тачке A и C биле би с разних страна оне пљосни која садржи тачку B, а то је противно дефиницији 17.8 испупчене рогљасте површи.

Теорема 17.8. *Свака раван што пролази кроз две тачке испупчене рогљасте површи, које припадају двема разним пљоснима, а не пролази ни кроз једно теме, сече ту рогљасту површ по извесном испупченом полигону. Површ тог полигона одређује с датом рогљастом површи две нове испупчене рогљасте површи.*



Сл. 142



Сл. 143

Доказ. Нека раван α има с датом рогљастом површи ξ заједничке тачке A и B, које припадају пљоснима λ и λ' (сл. 143). Раван α је различита од равни пљосни λ, јер кад би била с њом истоветна, по дефиницији 17.8 не би имала заједничке тачке са пљосни λ'.

Раван α и раван пљосни λ секу се по једној правој a, која сече пљосан λ по једној дужи PP_1, јер према теореми 17.5 пљосни су испупчене полигонске површи. Како то нису темена рогљасте површи, P_2 је унутарња тачка једне њене ивице, која је заједничка пљосни π и још једној пљосни π_1. Како та ивица продире кроз α, раван пљосни π_1 сече раван α по једној правој a_1, која сече полигон пљосни π_1 по извесној дужи P_1P_2. Настављајући на исти начин налазимо низ $\pi_1, \pi_2, \ldots$ пљосни, које образују ланац, и низ дужи P_1P_2, P_2P_3, ...

Како полиједарска површ има коначно много пљосни, само коначно много пљосни су у том низу разне међу собом, рецимо $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ па су и одговарајући пресеци P_1P_2, P_2P_3, ..., P_kP_{k+1} дужи, којима су само крајеви, два по два, заједнички, сем P_1 и P_{k+1}. Како се π_{k+1} поклапа с једном ранијом пљосни уоченог низа, тачка P_{k+1} је на рубу те раније пљосни, дакле је то пљосан π, а $P_{k+1} \equiv P$. Према томе дужи $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_kP$, PP_1 сачињавају раван полигон $PP_1P_2 \ldots P_k$ и пресек равни α рогљастом површи ξ је тај полигон. Обележимо га словом p.

Нека је s ма која страница полигона p. Она припада извесној пљосни μ. Све тачке рогља, осим μ, су с исте-стране равни ове пљосни, дакле су све тачке полигона p, сем странице s, са исте стране те равни, а тиме и с исте стране праве којој припада страница a. То значи да је полигон p испупчен.

Раван α разлаже простор на два полупростора Π' и Π''. У Π'' могу бити садржане извесне пљосни рогљасте површи ξ, рецимо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Како α сече пљосни π, $\pi_1 \ldots, \pi_k$ по појединим дужима, разлаже их према теореми 15.14 на испупчене полигонске површи. Нека су редом π', $\pi'_1, \ldots, \pi_k'$ оне које су садржане у Π'.

Уочимо укупност полигонских површи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \pi', \pi_1', \ldots, \pi_k'$ и додајмо јој испупчену полигонску површ (р). То мноштво полигонских површи сачињава извесну рогљасту површ ξ'. Заиста, изван α свака страница тих површи је уједно страница једне и само једне суседне површи, јер та страница је ивица или део ивице рогљасте површи ξ; у α је пак свака страница полигонске површи (р) уједно страница једне и само једне од површи $\pi', \pi_1', \ldots, \pi_k'$ и обратно. Дакле први услов дефиниције рогљасте површи је испуњен.

Аналого се доказује да је испуњен и други услов. Задржимо се само на доказу да је мноштво полигонских површи повезано, саобразно дефиницији 17.1. Свака површ низа $\pi', \pi_1', \ldots, \pi_k'$ је суседна површи (р), дакле ма за које две површи тога низа успоставља се преко површи (р) ланац по дефиницији 17.1.

Нека је λ_i ма која површ низа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. На рогљастој површи ξ постоји ланац, рецимо $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ који спаја пљосни λ_i и π. Нека је μ_j прва пљосан тог низа, која је истоветна с једном од пљосни $\pi, \pi_1, \ldots, \pi_k$, рецимо с π_l. Тада површи $\lambda_i, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{j-1}, \pi_l'$, немају заједничких тачака с α, сем дужи P_lP_{l+1}, која је у α. Дакле на ξ' пљосни $\mu_1\, \mu_2, \ldots, \mu_{j-1}$ образују ланац који спаја λ_i и π_l'.

Како на ξ' постоји и ланац за π_l' и ма коју површ $\pi', \ldots, \pi_k'$, постоји такође ланац за λ_i и ма коју површ овог низа, а отуд и ланац ма за које две пљосни λ_i'. Тиме је доказано да је ξ' повезано мноштво.

Како је рогљаста површ ξ испупчена, а све тачке рогљасте површи ξ', које нису у α, јесу с исте стране равни α, и ξ' је испупчена рогљаста површ.

Исто тако постоји у полупростору Π'' одговарајућа испупчена рогљаста површ ξ''. Према дефиницији 17.7 рогљаста површ ξ је разложена на рогљасте површи ξ' и ξ''.

9. Аналого као у проучавању многоуглова дефинишемо прво када треба рећи да је нека тачка у затвореној рогљастој површи, а када да је изван ње. Али пре те дефиниције треба доказати следећу теорему, која одговара теореми 15.2:

Теорема 17.9. *Нека је π затворена проста рогљаста површ и нека је О тачка која није на њој, затим а ма која полуправа која полази из О и нема заједничких тачака с њеним ивицама. Ако полуправа а има с рогљастом површи π паран број заједничких тачака или ниједну, тада свака таква полуправа има с том рогљастом површи паран број заједничких тачака или ниједну; ако пак полуправа а има с рогљастом површи π непаран број заједничких тачака, тада свака таква полуправа има с том површи непаран број заједничких тачака.*

Доказ доносимо скраћен. — Нека је a' ма која друга полуправа која полази из O и нека је α раван која садржи полуправе a и a'.

Докажимо да и a' има с π непаран број заједничких тачака. Ако раван α садржи макар једно теме рогљасте површи π, поставимо прво две равни, једну која садржи полуправу a и другу која садржи полуправу a', тако да те две равни не садрже ниједно теме те рогљасте површи. Нека је a'' једна од двеју полуправих које полазе из O, а припадају пресеку тих двеју равни. Тада докажимо прво да a'' има с π непаран број заједничких тачака, а затим, одатле, исто за a'.

Можемо дакле претпоставити да α не садржи ниједно теме рогљасте површи.

Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_k$, при чему је k непаран број, заједничке тачке полуправе a са π. Тачка A_1 је на извесној пљосни (p_1) рогљасте површи, дакле раван α сече ту пљосан по једној дужи B_1B_2 која садржи тачку A_1. Ако полигон p_1 није испупчен, могу α и (p_1) имати још заједничких тачака, али уочимо само B_1B_2. Крајеви те дужи су на ивицама рогљасте површи. Дакле B_2 је на пресеку равни α са извесном суседном пљосни (p_2). Како раван α не садржи темена рогљасте површи, пљосан (p_2) је једна одређена пљосан. Нека је B_2B_3 дуж тога пресека до нове ивице рогљасте површи и до пресека равни α са даљом пљосни (p_3), итд. Тако добијамо изломљену линију $B_1B_2B_3\ldots$, коју обележимо са b_1 и која је затворена, јер је свако њено теме на једној ивици рогљасте површи на којој се састају две пљосни. Полигон b_1 је прост, јер рогљаста површ π је проста.

Нека су $b_1, b_2, \ldots, b_r$ сви међу собом различити полигони као што је полигон b_1 и који секу полуправу a у тачкама $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Ако раван α има с рогљастом површи π заједничких тачака које не припадају тим полигонима, нека је C_1 таква тачка. Полазећи од C_1 као што смо пошли од тачке A_1, налазимо да постоји још један прост полигон, рецимо c_1, који је заједнички полиједру π и равни α, но који не сече полуправу a. Нека су $c_1, c_2, \ldots, c_s$ сви овакви полигони. Тачка O је изван ових полигона.

Полигони b_i и c_j ($i = 1,2, \ldots, r$; $j = 1,2, \ldots, s$) немају заједничких тачака, јер је π проста полиједарска површ.

Тачка O може бити у неким од полигона b_i и према дефиницији 15.6 полуправа a сече сваки у непарном броју тачака, а све заједно, рецимо, у k тачака. Број k је паран или непаран, према томе да ли је број тих полигона паран или непаран. Како је тачка O изван осталих полигона b, полуправа a их сече све заједно у парном броју или ни у једној, рецимо у $2l$ тачака. Према теореми 15.2 сече и полуправа a' сваки од полигона у којима је тачка O у непарном броју тачака, па како је број тих полигона исти за a и a', сече их укупно у извесном броју k' тачака, који је паран ако је број k паран, а непаран ако је број k непаран. Сваки од осталих полигона b_i и сваки од полигона c_j сече полуправа a', према теореми 15.2 у парном броју тачака или ни у једној, јер је тачка O изван тих полигона, дакле укупно, рецимо, у $2l'$ тачака.

Према томе, ако је укупан број $k+2l$ тачака у којима полуправа a продире кроз рогљасту површ π непаран, одговарајући број $k'+2l'$ за полуправу a' је такође непаран; ако ли је први број паран, и други је паран.

Сад можемо дефинисати изразе „у“ и „ван“ рогљасте површи.

Дефиниција 17.10. Нека је P тачка која не припада извесној затвореној простој рогљастој површи, a ма која полуправа која полази из P и нема заједничких тачака с њеним ивицама. Ако полуправа a сече рогљасту површ у непарном броју тачака, рећи ћемо да је тачка P *у* тој рогљастој површи, ако је сече у парном броју тачака, или ни у једној, рећи ћемо да је тачка P *изван* те рогљасте површи.

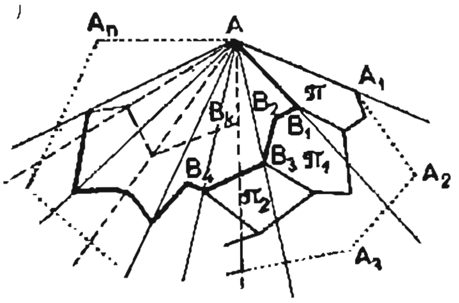
Укупност тачака простора, које су у рогљастој површи називаћемо њеном *унутрашњошћу*, а укупност тачака које су изван ње њеном *спољашњошћу*.

10. За испупчене рогљасте површи постоји, посебна, следећа теорема:

Теорема 17.10. *Полуправа која полази из унутрашњости испупчене рогљасте површи има с том површи само једну заједничку тачку.*

Доказ. Нека полуправа a полази из тачке S која је у испупченој рогљастој површи ξ, и нека је s која било друга полуправа која полази из S и нема заједничких тачака с ивицама површи ξ. Свака полуправа која полази из S, има са ξ према дефиницији 17.10 непаран број заједничких тачака, дакле обе полуправе имају заједно бар две.

Нека је α раван која садржи полуправе a и s. Према теореми 17.8 раван α сече рогљасту површ ξ по извесном испупченом многоуглу p. Но тачка S је у многоуглу p, јер полуправа a има са ξ, дакле и са p, непаран број заједничких тачака. Дакле, према теореми 15.15 полуправ a, има са многоуглом p, и према томе такође са ξ, тачно једну заједничку тачку.



Сл. 144

За испупчене рогљасте површи важна је и ова теорема:

Теорема 17.11. *Род испупчене рогљасте површи једнак је нули.*

Доказ доносимо скраћен. — Кад би род испупчене рогљасте површи ξ био већи од нуле, постојао би повратан пресек $p \equiv AA_1A_2\ldots A_h$ који не разлаже ту површ, тј. ако су π и π' њене пљосни са заједничком ивицом AA_1, постојао би ланац пљосни, π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_s$, који спаја π и π', али нема заједничких страница с p. Уочимо полигон који се састоји из страница појединих пљосни тог ланца и пролази кроз A. Нека је $q \equiv AB_1B_2\ldots B_k$ тај прости полигон (сл. 144).

Пљосни π припада дуж AB_1 или, рецимо, изломљена линија $AB_1B_2 \ldots B_l$ тог полигона, првој пљосни, π_1 ланца припада дуж $B_{l1}\ B_{l1+1}$ или изломљена линија $B_{i1}\ B_{l1+1} \ldots B_{l2}$, другој пљосни, π_2 припада дуж $B_{l2}B_{l2+1}$ или опет изломљена линија, итд. до B_{l_r} и натраг у A.

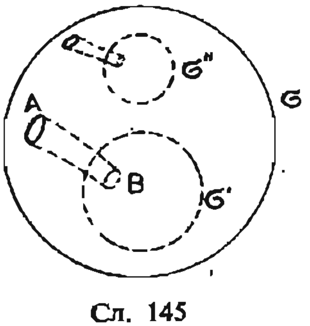
Полуправе AA_1, AB_{l1} AB_{l2}, $\ldots$, AB_{l_r} су ивице рогља λ, чије пљосни су удубљени углови $\sphericalangle A_1AB_{l1}$, $\sphericalangle B_{l1}AB_{l2}, \ldots$, $\sphericalangle B_{l_r}AA_1$. Рогаљ λ је једнострано раширен, јер садржан је у рогљу полиједарске површи ξ са теменом A, а овај је према теореми 17.6 испупчен, дакле према теореми 16.6 једнострано раширен. Рогаљ λ је сем тога прост, јер кад не би био, две његове пљосни би имале заједничку једну полуправу Aa, која би секла обе дужи или изломљене линије, делове полигона q, а који припадају тим двема пљоснима, и то у двема разним тачкама. Дакле полуправа a би имала с q три заједничке тачке и према томе полиједарска површ ξ не би била испупчена.

Због испупчености површи ξ, све њене тачке које нису на пљоснима π и π', садржане су у диједру чија ивица је права AA_1, дакле теме A_2 је у том диједру, дакле и у рогљу λ. Напротив, теме A_h је изван λ, јер диједар коме су стране пљосни са заједничком ивицом AA_h садржи цео рогаљ λ, сем његова темена A.

Отуд закључујемо да изломљена линија $A_2\ A_3 \ldots A_h$, која спаја тачку у λ са тачком ван λ, има с λ бар једну тачку C заједничку. Ово се лако доказује помоћу пресека рогља λ и полуправе AA_h једном равни. Најзад, полуправа AC сече оба полигона p и q у двема разним тачкама, дакле права AC има с полиједром три заједничке тачке, тј. полиједарска површ није испупчена, што је противно претпоставци. — Тиме је теорема доказана.

11. Као што смо разликовали многоугао од многоугаоне површи, тако разликујемо полиједарску или рогљасту површ од рогљастог тела или полиједра. Изнесимо прво укратко неке од најосновнијих појмова о полиједрима.

Обично се под полиједром подразумева коначан део простора, ограничен једном, двема или већим бројем затворених рогљастих површи. За те површи претпостављамо да немају простих заједничких тачака. Ако им је број већи од 1, кажемо да је полиједар вишеструко повезан. Ако му се површ састоји из N рогљастих површи, називамо га N-тоструко повезаним. Према томе полиједар који има за површ само једну рогљасту површ називамо једноструко повезаним.



Сл. 145

У топологији се посматрају тела ограничена каквим било (непрекидним) површима. Те површи могу бити рода нула или већег од нуле. Ако се две тачке A и B на двема разним површима σ и σ' једног тела, које немају заједничких тачака, споје простом линијом (рецимо изломљеном) чије су унутарње тачке у том телу — ако се, тако рећи, тело прободе од A до B (сл. 145), образујући узану „цев" AB, две површи σ и σ' су спојене у једну и број повезаности тела смањује се за јединицу. Ако је, дакле, тело N -тоструко повезано, најмањи број таквих „пробода", потребних да би се све његове одвојене површи спојиле у једну је, очигледно, једнак N.

Повратан пресек на једној од површи из којих се састоји руб једног тела је руб отворених површи (рецимо рогљастих) којима су остале тачке у том телу. Овакву отворену површ називамо једноставним пресеком тог рогљастог тела. Највећи могући број једноставних пресека, којима се тело не распада (или не разлаже) на два или више комада је број који смо дефинисали као род дотичне рогљасте површи.

Полиједри могу затим бити коначни или бесконачни. Коначни су они чије тачке су садржане све у коначном делу простора, бесконачни они за које такав коначан део простора не постоји.

Зауставимо се на коначним, једноструко повезаним рогљастим телима.

12. Усвајамо следећу дефиницију једноструко повезаног рогљастог тела:

Дефиниција 17.11. Лик који се састоји из просте затворене рогљасте површи и њене унутрашњости називамо *једноструко повезаним рогљастим телом* или *једноструко повезаним полиједром*. Сама та рогљаста површ назива се *површ полиједра* и каже се да је полиједар *ограничен* својом површи.

Темена, ивице, пљосни и рогљеве рогљастих површи називамо *теменима, ивицама, пљоснима* и *рогљевима* тог полиједра. Род рогљасте површи називамо *родом* полиједра. Ако је полиједарска површ испупчена или удубљена, кажемо и за полиједар да је *испупчен* односно *удубљен*.

Како нећемо проучавати вишеструко повезане полиједре, називаћемо једноструко повезане кратко полиједрима или рогљастим телима.

Према броју пљосни, полиједар са четири пљосни назива се тетраедар (четворопљосник), са пет пљосни пентаедар (петопљосник) итд. — грчким називима.

Полиједре ћемо обележавати великим грчким словима или, ако је полиједру површ π, знаком (π), или пак помоћу његових темена, напр. ABCD.

Прво дефинишимо разлагање полиједра.

Дефиниција 17.12. Рећи ћемо да је полиједар П *разложен* на полиједре Π_1, $\Pi_2 \dots \Pi_m$ или да је *сложен* из њих ако је свака унутарња тачка полиједра П, која не припада површима полиједара $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$, уједно унутарња тачка једног и само једног полиједра овог низа и ако је свака унутарња тачка сваког од ових полиједара уједно унутарња тачка полиједра П.

Ако је полиједар П сложен из полиједара Ф и $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_l$, рећи ћемо такође да су полиједру Ф *додати* полиједри $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_l$.

Докажимо прво следећу теорему, која одговара теореми 15.20 о испупченим многоуглима.

Теорема 17.11. *Сваки испупчен полиједар са више од четири темена може се разложити на тетраедре.*

Доказ. Нека је S ма која тачка у полиједру (π), чија површ, π је испупчена. Нека су $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ пљосни полиједра (π). Дужи које спајају тачку S са теменима, рецимо $A_1, A_2, \dots, A_{n_1}$, пљосни π_1 јесу ивице полиједра коме су тачке $A_1, A_2, \dots, A_{n_1}$ и S темена, а многоугаона површ π_1 и троугаоне површи $(A_1A_2S), (A_2A_3S), \dots, (A_{n_1}A_1S)$ су му пљосни. Нека је (σ_1) тај полиједар. Како је према теореми 17.5 пљосан π_1 испупчена, сва темена полиједра (σ_1) су с једне стране сваке од n_1 равни A_1A_2S, A_2A_3S, $\dots$, $A_{n_1}A_1S$, сем три темена која су у дотичној равни. Како је сем тога S једино теме ван пљосни π_1, полиједар (σ_1) је према дефиницији 17.9 испупчен. Исто тако су испупчени и полиједри $(\sigma_2), (\sigma_3), \dots, (\sigma_m)$, којима су заједничке пљосни с (π) редом $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_m$.

Нека је P ма која тачка у (π), различита од S, и која није на полиједрима (σ_i). На основи дефиниције 17.10 и теореме 17.7 полуправа SP

продире кроз једну од пљосни полиједра π у извесној тачки T, дакле полуправа садржана на овој полуправој и која полази из P има с π само тачку T заједничку. Дакле тачка P је у једном и само у једном полиједру (σ_i). Обратно, ако је P тачка у једном од тих полиједара, полуправа садржана на полуправој SP, и која полази из P продире дотичну пљосан полиједра (π) у извесној тачки T, дакле по дефиницији 17.10 тачка T је у полиједру (π).

Дакле полиједар (π) је по дефиницији 17.12 разложен на полиједре (σ_i).

Нека је према теореми 15.18 пљосан π_1, тј. пљосан $(A_1, A_2, \ldots, A_{n1})$, разложена на троугаоне површи, рецимо на $(A_1A_2A_3)$, $(A_1A_3A_4), \ldots, (A_1A_{n1-1} A_{n1})$. Слично као претходно показује се да је полиједар (π_1) разложен на тетраедре $A_1A_2A_3S$, $A_1A_3A_4S, \ldots, A_1A_{n1-1}A_{n1}S$. — Тако је сваки полиједар (π_i) $(i=1,2,\ldots, m)$ разложен на тетраедре.

Тима је дати полиједар (π) разложен на тетраедре, као што следује одмах из дефиниције 17.12. — Тиме је доказ завршен.

Сад можемо да докажемо исту теорему ма за какве једноструко повезане полиједре, али претходно докажимо следећу теорему:

Теорема 17.12. *Сваки удубљени полиједар може се помоћу равни којима припадају његове пљосни, разложити на испупчене полиједре.*

Доказ је аналоган доказу теореме 15.20 и зато га доносимо скраћено. — Посматрајмо равни којима редом припадају пљосни дате рогљасте површи π. Свака таква раван има са полиједром (π) известан број заједничких полигонских површи. Обележимо словом δ ма коју од тих полигонских површи.

Доказујемо да је укупношћу тих површи δ полиједар (π) разложен на испупчене полиједре (аналого доказу теореме 15.20), рецимо на (π_1), (π_2), $\ldots$, (π_k). Затим доказујемо ма за коју тачку P која не припада полигонским површима δ, али је у (π), да је такође у једном и само једном од испупчених полиједара (π_i) $(i=1,2,\ldots, k)$ и, обратно, да је свака тачка, која је у (π_i) такође у (π). — Тиме се доказује да је дати полиједар (π) разложен на испупчене полиједре (π_i).

Теорема 17.13. *Сваки полиједар са више од четири темена може се разложити на тетраедре.*

Доказ је уз примену претходне теореме, потпуно аналоган другом доказу теореме 15.7 (на стр. 94).

13. Постоје теореме које утврђују односе само између броја темена, ивица и пљосни једног полиједра. И те теореме су тополошке по својој природи. Независне су у толикој мери од облика полиједра, да остају на снази и кад се полиједар на који било начин непрекидно деформише, не мењајући му род. (Те теореме вреде и за „полиједре“ којима пљосни нису равне, нити ивице праволинијске.) Имамо, тако, следеће две теореме:

Теорема 17.15. *Троструки број темена, као и троструки број пљосни простог полиједра није никад већи од двоструког броја његових ивица.*

Доказ. Нека је број темена t, број пљосни p, број ивица i. Како се у сваком темену састају бар три ивице, број $3t$ је једнак или мањи од двоструког броја ивица, тј. од $2i$, јер свака ивица долази двапут у обзир: једанпут посматрајући као теме један њен крај, други пут њен крај. Дакле имамо

$$3t \leqslant 2i$$

Како свака пљосан има бар три ивице као странице, број $3p$ је, исто такò, једнак или мањи од двоструког броја ивица, тј. имамо

$$3p \leqslant 2i.$$

Теорема 17.16. *Број углова сваког полиједра је двапут већи од броја његових ивица.*

Доказ. Број углова сваке полигонске површи, пљосни полиједра једнак је броју њених страница. Дакле, број свих углова једнак је броју свих страница на свим пљоснима, при чему треба сваку ивицу полиједра рачунати двапут, јер припада двема суседним пљоснима. Дакле, број свих углова једнак је двоструком броју свих ивица.

13. Идућа теорема је позната Ојлерова теорема о полиједрима (Leonhard Eeuler, 1707—1783). Ту теорему је пре Ојлера пронашао Descartes, а Ојлер је, вероватно, први доказао. Ми ћемо ту теорему исказати и доказати за просте затворене полиједре чији род је нула и чије пљосни су једноструко повезане. Тада између броја темена t, броја ивица i и броја пљосни p полиједра постоји увек однос:

$$t-i+p=2.$$

Напомена. Општији однос за просте затворене полиједре ма ког рода r ($t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) гласи:

$$t-i+p=2-2r.$$

Ако површ није затворена, него има k рубова, образац је

$$t-i+p=2-2r-k.$$

Ако бројеве повезаности појединих пљосни, умањене за јединицу, саберемо преко свих пљосни и тај збир обележимо са s, тада је

$$t-i+p=2-2r-k+s.$$

Број $t-i+p$ је исти за све полиједре истог рода и с истим бројем рубова и зове се *карактеристика полиједра.*

Теорема 17.17 *Укупан број темена и пљосни простог полиједра нултог рода, са једноструко повезаним пљоснима, је за два већи од броја његових ивица.*

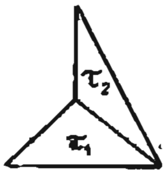
Доказ. Обележивши број темена, ивица и пљосни редом словима t, i, p, одредимо вредност карактеристике полиједра: $z=t-i+p$. У ту сврху разложимо прво сваку пљосан полиједра на троугаоне површи саобразно теореми 15.7 (или општијој теореми 15.24). Разлагање се врши на темељу теореме 15.6 (одн. 15.23) узастопним разлагањем помоћу унутарњих дијагонала.

Свака унутарња дијагонала разлаже једноструко повезану полигонску површ на две. Дакле, ако унутарњом дијагоналом d разложимо једну пљосан на две полигонске површи, број темена t се не мења. Али ако у ивице урачунамо и дијагоналу d, број i се повећао за 1. Схватајући и број пљосни p као целокупни број полигонских површи, налазимо да се и број p повећао за 1. Дакле број z се тим разлагањем не мења. Према томе, ни када уочену пљосан разложимо на троугаоне површи, па ни када то учинимо са свим пљоснима полиједра, број z се не мења. Бројеви i и p су се повећали за исти цео број, па имамо опет $t-i+p=z$.

Да бисмо одредили број z посматрајмо извесним редом мноштво M троугаоних површи које смо добили разлагањем, без обзира на то којим пљоснима припадају. Нека их је свега m. Свака страница троугаоне површи је страница још једне и само једне троугаоне површи.

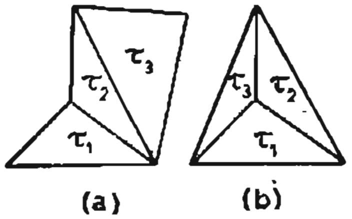
Нека је τ_1 која било троугаона површ мноштва M. Што се тиче бројева t, i, p, за саму ту површ имамо $t=3$, $i=3$ $p=1$, дакле $z=1$.

Нека је τ_2 суседна троугаона површ (сл. 146). Додавањем те површи број t се повећа за 1, број i за 2 а број p за 1, дакле, опет је $z=1$. Обе површи заједно сачињавају, ако припадају једној равни, четвороугаону или троугаону површ; ако не припадају истој равни, сачињавају отворен полиједар са две пљосни, чији руб је просторан четвороугао.



Сл. 146

Додајмо нову троугаону површ τ_3, суседну претходнима. Постоје две могућности: τ_3 има само једну страницу заједничку са τ_1 и τ_2, или две ивице заједничке (сл. 147, а и b). У првом случају t се повећа за 1, i за 2, а p за 1; у другом случају t остаје исто, i се повећа за 1 и p за 1. У оба случаја је опет $z=1$. Све три површи заједно образују у општем случају полиједар чији руб је просторан петороугао.



(a) (b)

Сл. 147

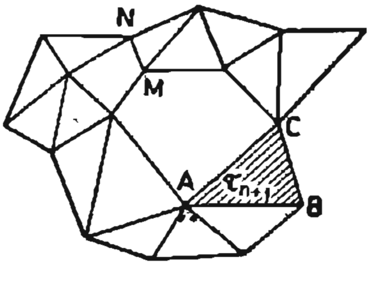
Наставимо додавање појединих троугаоних површи, тако да мноштву троугаоних површи $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, које смо већ образовали и које обележимо са σ_n ($n \leqslant m$) додамо ма коју троугаону површ овог мноштва. Нека је τ_{n+1} нова површ. Ово је, очигледно, могуће догод се σ_n не састоји из свих елемената мноштва M.

Површ σ_n је за $n=1, 2, 3$, полиједар чији руб је један прост полигон. И при даљем додавању троугаоних површи σ_n остаје полиједар, јер додавањем једне суседне троугаоне површи мноштву σ_n, које је према дефиницији 17.3 повезано, то мноштво остаје повезано. Бројеве t, i, p и z за површ σ_n обележимо са t_n, i_n, p_n и z_n.

Претпоставимо да се руб полиједра σ_n састоји (као за $n=1, 2, 3$) само из једног простог полигона. При додавању нове троугаоне површи τ_{n+1} постоје следеће могућности:

1. τ_{n+1} има са σ_n само једну страницу заједничку. Тада се додавањем троугаоне површи τ_{n+1} број i страница повећа за 2. Како су крајеви заједничке странице два темена површи τ_{n+1}, та два темена припадају и површи σ_n. Треће теме површи τ_{n+1} може се поклапати или не поклапати с теменима површи σ_n (као за $n=1$ и 2). Претпоставимо да се не поклапа. Тада се број t темена додавањем површи τ_{n+1} повећава за 1. Како се и број p пљосни повећа за 1, имамо $z_{n+1}=z_n$.

2. τ_{n+1} има с σ_n опет само једну заједничку страницу, али треће теме троугаоне површи τ_{n+1} поклапа се с једним теменом површи σ_n. Тада број t остаје исти. Како се i повећа за 2, а p за 1, имамо $z_{n+1}=z_n-1$.



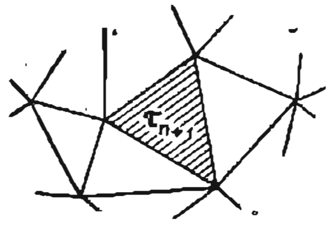
Сл. 148

У овом случају, ако је AB заједничка страница површи σ_n и τ_{n+1} (сл. 148), треће теме C троугаоне површи τ_{n+1} није на рубу површи σ_n суседно теме темену A или B. Кад би, наиме, теме C било на σ_n суседно темену A, страница AC би била заједничка површима σ_n и τ_{n+1}, а кад би на σ_n теме C било суседно темену B, страница BC би била заједничка, противно претпоставци.

Дакле тачкама *A*, *B*, *C* руб површи σ_n је разложен на дуж *AB* и на две просте изломљене линије *A*...*M*...*C* и *B*...*N*...*C*. Руб површи $\sigma_{n+1}\equiv\sigma_n+\tau_{n+1}$ састоји се дакле из два проста многоугла *A*...*M*...*C* и *B*...*N*...*C*, са заједничком тачком *C*.

3. τ_{n+1} има са σ_n две странице заједничке, дакле само једна страница је нова, тј. број *i* се повећа за 1, као и број *p*. Број *t* остаје исти, дакле опет је $z_{n+1}=z_n$.

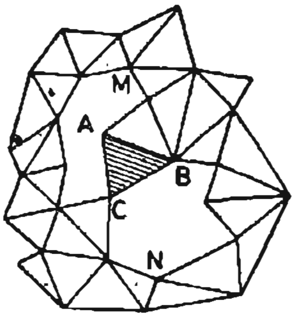
4. τ_{n+1} има са σ_n све три странице заједничке (сл. 149). Тада се бројеви *t* и *i* не мењају, па како се *p* повећа за 1, имамо $z_{n+1}=z_n$.+1



Сл. 149

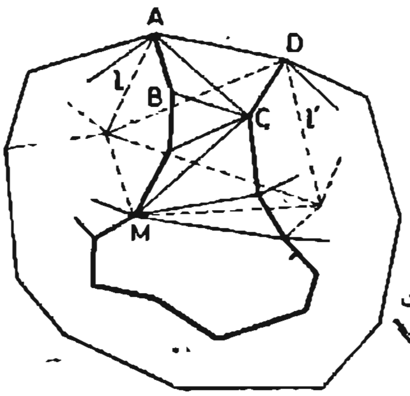
Видимо дакле да додавањем нове троугаоне површи број *z* остаје исти у случајевима 1 и 3, а промени се у случајевима 2 и 4. Ако, наиме, додавањем троугаоне површи чија сва три темена (а не све три странице) припадају полиједарској површи σ_n, број простих многоуглова који сачињавају руб полиједарске површи σ_n нарасте од 1 на 2, број *z* се смањи за 1; ако се пак додавањем троугаоне површи чије све три странице припадају полиједарској површи σ_n, број тих многоуглова смањи за 1, број *z* се повећа за 1.

Овај закључак вреди и кад се руб површи σ_n не састоји само из једног простог многоугла. За случајеве 1, 3 и 4 то је јасно, јер у дотичним посматрањима није реч о броју простих многоуглова из којих се састоји руб полиједарске површи σ_n. У случају 2 нека је пак страница *AB* троугаоне површи τ_{n+1} страница простог многоугла $l\equiv AB\ldots M\ldots A$ тога руба. Тада је треће теме *C* површи τ_{n+1} теме истог многоугла *l*.



Сл. 150

Претпоставимо, наиме, да теме *C* припада другом простом многоуглу *l'* руба полиједарске површи σ_n (сл. 150). Тада је дуж *AC* заједничка страница површи τ_n и суседне троугаоне површи (*ACD*), која има такође темена на оба полигона *l* и *l'*. Исто тако, *AD* је заједничка страница површи (*ACD*) и њој суседне површи, која има исто својство, итд. Свака страница полигона *l* је уједно страница троугаоне површи која има теме заједничко са *l'*, и обратно.



Сл. 151

Како је и пре додавања троугаоне површи τ_{n+1} полиједарска површ σ_n повезано мноштво троугаоних површи, полиједарска површ која настаје додавањем свих троугаоних површи са страницама *l* и *l'* има својство да га полигон *l* (а и сто тако и *l'*) не разлаже. Према дефиницији 17.6 *l* и *l'* су повратни пресеци овог полиједра, дакле по дефиницији 17.8 овај није нултог рода, противно претпоставци теореме коју доказујемо.

Дакле, треће теме *C* троугаоне површи τ_{n+1} је теме истог многоугла $1=AB\ldots M\ldots A$ (коме припада и страница *AB*), но које није суседно теменима *A* и *B* (сл. 151). Дакле, додавањем површи τ_n добијамо наместо овог многоугла два нова, *A*...*M*...*C* и *B*...*N*...*C*. При томе је, заиста, $z_{n+1}=z_n-1$, као у случају 2.

Посматрајмо још једном низ полиједара $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, свих у мноштву М. За прве чланове тог низа, рецимо све до σ_{n1}, руб полиједра се састоји из једног простог полигона. Имамо

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{n1} = 1.$$

Затим постоје две могућности:

1) $n_1 = m - 1$, тј. преостаје још само једна троугаона површ, а тада је то трећи случај, дакле $z_m = z_{n1} + 1 = 2$;

2) за даљи низ чланова, $\sigma_{n1+1}, \sigma_{n1+2}, \ldots, \sigma_{n2}$ руб се састоји из два проста полигона. Као што смо доказали, тада је

$$z_{n1+1} = z_{n1+2} = \ldots = z_{n2} = z_1 - 1.$$

Затим постоје опет две могућности:

1) Један прост многоугао руба полиједра σ_{n2} је троугао, а τ_{n2+1} има тај троугао за свој руб, дакле према случају 4 је $z_{n2+1} = z_{n2} + 1 = z_1$, а σ_{n2} има сад опет само један многоугао на рубу;

2) број простих полигона на рубу полиједра σ_{n2+1} је већи за 1, тј. сад је 3, а при томе је, према случају 2, $z_{n2+1} = z_{n2} - 1 = z_1 - 2$.

Укратко, кад год број k простих полигона на рубу полиједарских површи σ_n нарасте за 1, број z опадне за 1, а кад год број k опадне за 1, број z нарасте за 1. Ако у току додавања троугаоних површи τ_n број простих полигона на рубу површи σ_n буде k $(=1,2,\ldots)$, имамо дакле $z_n = z_1 - k + 1 = 2 - k$. Како напослетку број простих полигона на рубу опадне на 1, па на 0, имамо увек $z_m = 2$. Како је у почетку овог доказа утврђено, број z за дати прости затворени полиједар је једнак том броју за мноштво М троугаоних површи, дакле броју z_m, тј. $z = 2$. — Тиме је Ојлерова теорема доказана.

Напомена. Незнатним допунама у претходном доказу лако је доказати Ојлерову теорему за полиједре ма ког рода, па и кад полиједри нису затворени. Ово се препушта читаоцу.

15. Помоћу Ојлерове теореме можемо доказати још неке о бројевима t, i и p простих затворених полиједара којима су пљосни једноструко повезане.

Теорема 17.18. *У простом затвореном полиједру са једноструко повезаним пљоснима како за број темена* t, *тако и за број пљосни* p, *у односу на број ивица* i *постоје релације:*

$$i + 6 \leqslant 3t \leqslant 2i,$$

$$i + 6 \leqslant 3p \leqslant 2i.$$

Такође је

$$t + 4 \leqslant 2p$$

и обратно

$$p + 4 \leqslant 2t.$$

Доказ. Према теореми 17.14 је $3p \leqslant 2i$, а из теореме 17.16 следује $p = i + 2 - t$, дакле $3i + 6 - 3t \leqslant 2i$, а отуд

$$i + 6 \leqslant 3t. \qquad (1)$$

Према теореми 17.14 је такође $3t \leqslant 2i$, а отуд следује на сличан начин

$$i + 6 \leqslant 3p. \qquad (2)$$

Ако у неједначину (1) ставимо према теореми $i = p + t - 2$, налазимо

$$p + t + 4 \leqslant 3t \leqslant 2p + 2t - 4.$$

Из леве неједначине следује $p + 4 \leqslant 2t$, а из десне $t \leqslant 2p - 4$, тј. $t + 4 \leqslant 2p$, — Тиме је цела теорема доказана.

Теорема 17.19. *Нема простог затвореног полиједра са једноструко повезаним пљоснима, који би имао мање од шест ивица, нити са седам ивица.*

Доказ. Уочимо једну пљосан. Ако јој је руб троугао, постоје још најмање три даље ивице, у сваком темену троугла по једна, дакле свега најмање шест ивица. Ако је руб прве пљосни четвороугао, постоје још најмање четири даље ивице, ако је петоугао, још најмање пет, итд. Дакле, број ивица полиједра не може бити мањи од шест.

Број ивица не може бити седам, јер би из прве двоструке неједначине у теореми 17.17 следовало $13 \leqslant 3t \leqslant 14$, тј. $13/3 \leqslant t \leqslant 14/3$, дакле t не би могао бити цео број.

Теорема 17.20. *У простом затвореном полиједру са једноструко повезаним пљоснима не могу све пљосни имати преко пет страница, нити се могу у свим рогљевима састајати преко пет пљосни.*

Доказ. Кад би све пљосни имале више од пет страница, био би двоструки број ивица бар $6p$, тј. $6p \leqslant 2i$, а отуд $3p \leqslant i$. То се противи неједначини $i + 6 \leqslant 3p$ у теореми 17.17.

Код би се у свим рогљевима састајало више од пет ивица, био би двоструки број ивица бар $6t$, тј. $6t \leqslant 2i$, а отуд $3p \leqslant i$. То се противи неједначини $i + 6 \leqslant 3t$ у теореми 17.17.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ*.

1. Доказати да кроз n тачака пролазе највише $\binom{n}{2}$ правих које садрже најмање по две од тих тачака.

2. У колико тачака могу се у једној равни сећи а) три праве, б) четири праве, в) n правих ($n = 2, 3, \ldots$).

3. Повући у једној равни најмањи могући број правих тако да се у m тачака секу по три праве а) за $m = 1, 2, 3, 4, 5$, б) за $m = 6$, в) за $m = 7$, г) за $m > 7$. Колики је број тих правих? У колико тачака могу се сваки пут сећи, сем тога, по две праве?

4. Повући у једној равни најмањи могући број правих, тако да се у m тачака секу по s правих ($s = 4, 5, \ldots$) за $m = 1, 2, 3, \ldots$

5. У колико правих могу се сећи m равни ($m = 2, 3, \ldots$). У колико тачака секу се тада по три или више равни?

6. Конструисати најмањи могући број равни тако да се у m тачака секу по четири равни.

7. Конструисати најмањи могући број равни тако да се у p правих секу по три равни. У каквом положају треба да буду те праве?

8. Доказати да све праве које спајају једну тачку ван једне праве са тачкама те праве, припадају једној равни.

9. Доказати да две праве које нису садржане у истој равни немају заједничких тачака.

---

* Види Приступ, бр. 11.

10. Ако раван α садржи праву a и раван β праву b и ако равни α и β имају заједничку тачку P ван a и b, а праве a и b заједничку тачку Q, доказати да се тада α и β секу по правој PQ.

11. Доказати да постоје бар три праве које имају заједничку тачку а не припадају истој равни.

12. Доказати да постоје бар четири равни које се две по две секу.

13. Доказати да кроз сваку тачку пролазе бар три праве које не припадају истој равни.

14. Доказати да кроз сваку тачку пролазе бар три равни.

15. Доказати да је свака права пресечна права бар двеју равни.

16. Доказати да кроз сваку тачку једне равни пролази бесконачно много правих које су садржане у тој равни.

17. Ако су A, B, C, D, E тачке такве да је C између A и B, D између A и C, E између B и C, доказати да је C између D и E.

18. Ако су крајеви P и Q једне дужи у троуглу ABC, доказати да је свака тачка дужи PQ у троуглу ABC.

19. Нека су A, B, C ма које три тачке које не припадају једној правој и нека је p права која сече праву AB између A и B, а не сече BC између B и C, нити AC између A и C, нити садржи тачку C. Доказати да права p није у равни ABC.

20. Ако ниједна од три тачке A, B, C није између остале две и ниједна од три тачке A, B, D није између остале две и ниједна од три тачке A, C, D није између остале две, тада такође ниједна од три тачке B, C, D није између остале две.

21. Ако су A и B две тачке на правој a, доказати да дуж AB и две полуправе исте праве, једна с крајем A и која не садржи тачку B, и друга с крајем B која не садржи тачку A, садрже све тачке праве a.

22. Ако су A и B две тачке на правој a, докажимо да полуправа праве a, с исходиштем A и која садржи тачку B, садржи целу дуж AB.

23. Ако троугли ABC и $A'B'C'$ припадају двема разним равнима и ако се парови правих AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ секу, доказати да се праве AA', BB', CC' или не секу или све три секу у једној тачки.

24. Ако троугли ABC и $A'B'C'$ припадају двема разним равнима и ако се праве AA', BB', CC' секу у једној тачки, тада се парови правих AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ или секу у тачкама пресечне праве двеју равни ABC и $A'B'C'$ или се не секу.

25. Ако троугли ABC и $A'B'C'$ припадају једној равни и троугао $A''B''C''$ припада другој равни и 1) ако се парови правих AB и $A''B''$, BC и $B''C''$, CA и $C''A''$ секу и праве AA'', BB'', CC'' секу у једној тачки, 2) ако се парови правих $A'B'$ и $A''B''$, $B'C'$ и $B''C''$, $C'A'$ и $C''A''$ секу и праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ секу у једној тачки — доказати да се тада и парови правих AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ секу, а праве AA', BB', CC' се или не секу или се све три секу у једној тачки.

26. Ако троугли ABC и $A'B'C'$ припадају једној равни и ако се парови правих AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ секу у тачкама једне праве, доказати да се тада праве AA', BB', CC' или не секу или све три секу у једној тачки (Дезаргусов став).

27. Ако троугли ABC и $A'B'C'$ припадају једној равни и ако се праве AA', BB', CC' секу у једној тачки, доказати да се тада парови правих AB

и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ секу у тачкама једне праве, или се праве бар једног од та три пара не секу.

28. Ако су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ два тетраедра и ако се праве AA', BB', CC', DD' секу у једној тачки, доказати да се тада праве којима припадају одговарајуће ивице ових тетраедара не секу ван тачака једне равни. Уколико свих шест пресечних тачака постоје, садржане су на четири праве.

29. Ако се пет парова правих које садрже одговарајуће ивице двеју тетраедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ секу, доказати да се и шести пар правих које садрже одговарајуће две ивице сече, и да пресечне тачке припадају једној равни.

30. Ако се одговарајућа темена трију троуглова $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ налазе на правим које пролазе кроз исту тачку S простора и ако равни тих троуглова секу две по две, доказати да се те пресечне праве или не секу или секу у једној тачки.

31. Дата су два троугла $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ и раван σ. Конструисати тачке X_1 и X_2 такве да се праве A_1X_1 и A_2X_2, B_1X_1 и B_2X_2, C_1X_1 и C_2X_2 секу у тачкама равни σ.

32. Дата су два тетраедра $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ таква да праве A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 пролазе кроз исту тачку. Доказати да се праве којима припадају одговарајуће ивице ових тетраедара не секу ван тачака једне равни. Ако се ове праве секу, доказати да су три по три пресечне тачке садржане на четири праве.

33. Доказати да се дијагонале AC и BD испупченог равног четвороугла $ABCD$ секу. Исказати став обрнут овоме и доказати га.

34. Доказати да су тачке у којима се секу дијагонале испупченог равног петоугла темена испупченог петоугла који је садржан у првоме.

ГЛАВА ДРУГА

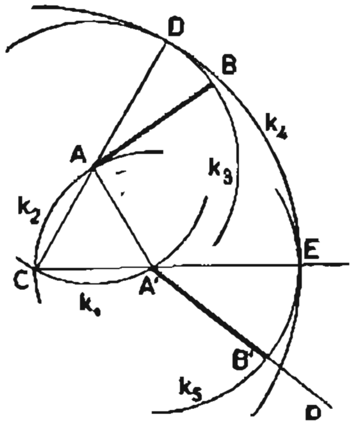
ПОДУДАРНОСТ

18. ПОДУДАРНОСТ У ПОВЕСТИ.

Реч „подударно“ или „конгруентно“, односећи се на дужи, један је од основних израза нашег излагања.

У Еуклидовим „Елементима“ подударност се ослања о кретање. Еуклидова седма аксиома гласи: „И оно што се може поклопити, једнако је међу собом“. Тиме је Еуклид хтео рећи: геометријски ликови који се преношењем једнога на други могу поклопити (или подударити), подударни су међу собом. Дакле, та аксиома се може схватити и као некаква дефиниција подударности, полазећи од кретања и поклапања ликова. Затим, већ у четвртом ставу прве књиге „Елементи“ Еуклид доказује такозвани први став о подударности троуглова, преношењем једног троугла на други, тако да се оба твоугла поклопе. О самом кретању Еуклид се не изјашњава, нити га дефинише, нити његову улогу објашњава како било у геометрији.

Тачније посматрано, Еуклид полази у „Елементима“ строжијим путем, али не иде њиме до краја. Њему су полазни појмови не само тачка и права, него и круг (чија дефиниција је петнаеста у групи полазних дефиниција) и у своја прва три става (проблема) даје у равни конструкцију дужи ма ког положаја и која је једнака датој дужи, служећи се лењиром и шестаром. Та конструкција се укратко састоји у следећем: Нека је дата дуж AB и полуправа p с почетком A' (сл. 152). Да би се на полуправој p конструисала дуж $A'B'$ која је једнака дужи AB, конструише се описивањем кругова k_1 и k_2 једнакостран троугао $AA'C$, а затим у пресеку полуправе CA с кругом k_3, описаним из A полупречником AB, одреди се тачка D, а отуд на полуправој CA, помоћу круга k_4, описаног из C, тачка E. У пресеку полуправе p са кругом k_5, описаним из A' полупречником AE је тачка B'. Очигледно $AB=AD=A'E=A'B'$.



Сл. 152

Та конструкција омогућава строгу дефиницију подударних дужи, не ослањајући се о кретање, само што Еуклид није ово посматрање проширио ма на које дужи у простору, нити је дефиницију изрекао. Можда ради једноставности прекинуо је то излагање са ставом 3 и прешао на површан доказ првог става подударности троуглова, ослањајући се о поменуту аксиому 7.

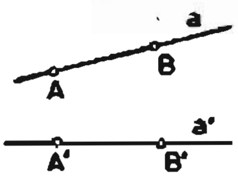
Два су излаза: или треба усвојити појам кретања као један од основних појмова и установити аксиоме које утврђују основна својства и улогу кретања у геометрији, или треба отстранити (макар само у почетку излагања) појам кретања и поћи од подударности као основног појма, независно од кретања и утврдити аксиоме које при томе долазе у обзир.

Првим путем пошао је напр. у Немачкој **Helmholtz** у својој расправи „О чињеницама на којима се темељи геометрија“ (1868) усвајајући четири аксиоме или хипотезе, које вреде за простор ма од колико димензија. No Helmholtz изводи само аналитичку геометрију. — Напротив, **Meray** у Француској у својој књизи „Нови елементи геометрије“ (1874), изводи геометрију конструктивно, пошавши од извесних аксиома кретања. Њему су основни појмови простор, мир и кретање. Он говори о премештању. Паралелно померање и окретање су две врсте премештања, које задовољавају извесним аксиомама и на које се свако премештање своди. — Сродна посматрања излажу **Peano**, **Schur**, **Borel** i drugi.

На друго становиште стао је међу првима **Pasch** (Новија геометрија, 1882), затим **Veronese** (Елементи геометрије, 1891) и **Hilbert** (Основе геометрије, 1899). Но док се Hilbertove аксиоме односе на подударне дужи и на подударне углове, прва двојица полазе само од подударних дужи, тј. не дефинишу изричито шта су подударне дужи, већ постављају о њима аксиоме, а шта су подударни углови дефинишу. На том становишту стојимо и ми у овом заснивању подударности: Према томе „подударно“ нам је основан појам само кад се односи на дужи, а шта су подударни углови, троуглови итд. дефинишемо.

19. АКСИОМЕ ПОДУДАРНОСТИ.

Имамо пет аксиома подударности. Оне нам одређују појам „подударно“ и то за дужи, а на основи тог појма дефинишемо подударност и за друге геометријске ликове. За подударне дужи и углове кажемо такође да су једнаки, за све остале геометријске ликове подударне кажемо само да су подударни (или конгруентни).



Сл. 153

АКСИОМА III 1. *Ако су* A *и* B *две тачке на правој* a, *затим* A' *тачка на истој или некој другој правој* a', *тада постоји на* a, *с дате стране тачке* A' *тачка* B', *тако да је дуж* AB *подударна дужи* A' B' (сл. 153).

Подударност, како дужи тако и других геометријских творевина обележавамо знаком $\cong$, а само у случају подударности дужи и углова (кад говоримо о њиховој једнакости) такође и знаком $=$*. Дакле, чињеницу да је дуж AB подударна или једнака дужи $A'B'$ изражавамо знацима:

$$AB \cong A'B' \text{ или } AB = A'B'.$$

АКСИОМА III 2. *Ако су две дужи* A'B' *и* A''B'' *подударне трећој дужи* AB, *такође је и дуж* A'B' *подударна дужи* A''B'', *тј. из*

$$A'B' \cong AB \text{ и } A''B'' \cong AB$$

---

*Подударност се обележава и знаком $\equiv$ (напр. у Хилберта), којим се обележава обично истоветност (идентичност), дакле и поклапање; стога нећемо подударност обележавати тим знаком.

следује

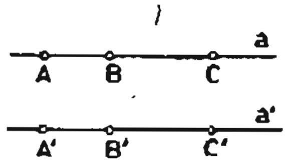
$$A'B' \cong A''B''.$$

АКСИОМА III 3. *Нека су* AB *и* BC *две дужи на правој* a, *које немају заједничких унутарњих тачака и нека су* A'B' *и* B'C' *две дужи на истој или на другој правој* a', *које такође немају заједничких унутарњих тачака* (сл. 154) *Ако је*

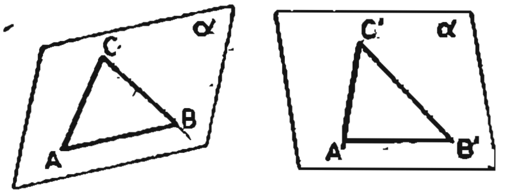
$$AB = A'B' \text{ и } BC = B'C',$$

такође је

$$AC = A'C'.$$



Сл. 154



Сл. 155

АКСИОМА III 4. *Ако је* ABC *троугао у равни* α, *затим* A'B' *дуж у истој или другој равни* α', *подударна дужи* AB, *тада постоји у* α' *с дате стране праве* A'B' *једна и само једна тачка* C' *тако да је дуж* AC *подударна дужи* A'C' *и дуж* BC *подударна дужи* B'C' (сл. 155), *тј. ако је*

$$AB = A'B',$$

постоји у тој полуравни једна и само једна тачка C' *тако да је*

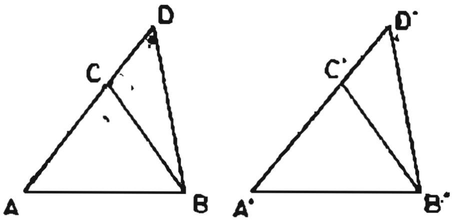
$$AC = A'C' \text{ и } BC = B'C'.$$

АКСИОМА III 5. *Нека су* ABC *и* A'B'C' *два троугла у истој или у разним равнима, затим* D *тачка полуправе* AC *с крајем* A, *различита од* A *и* C, *и* D' *тачка полуправе* A'C' *с крајем* A' (сл. 156). *Ако је*

$$AB = A'B', \ AC = A'C', \ BC = B'C',$$
$$AD = A'D',$$

тада је такође

$$BD = B'D'.$$



Сл. 156

Аксиома III 1 значи да се свака дуж може „пренети“ ма на коју праву, ма од које тачке на тој правој, на дату страну. Из аксиоме III 2 следује транзитивност подударности дужи, из аксиоме III 3 следује адитивност дужи. Аксиоме III 4 и III 5 омогућују подударност геометријских ликова у равни и простору.

Аксиоме III 1—3 изражавају подударност на правим (линеарне аксиоме подударности), а аксиоме III 4 и 5 изражавају подударност у равни (равне аксиоме подударности).

И у Хилбертовим „Основама геометрије“ аксиоме подударности сачињавају трећу групу аксиома. Има их такође пет. Прве три су истоветне (сем незнатних стилских разлика) с нашим аксиомама III 1—3 остале две гласе (по осмом издању тог дела):

III 4. *Нека је дат угао* $\sphericalangle$ h k *у равни* α *и права* a' *у равни* α' *као и одређена страна равни* α' *у односу на* a'*. *Нека* h' *означава полуправу праве* a', *која полази из тачке* O'. *Тада постоји у равни* α' *једна и само једна полуправа* k' *тако да је угао* $\sphericalangle$ hk *подударан или једнак углу* $\sphericalangle$ h'k' *и да уједно све унутарње тачке угла* $\sphericalangle$ h'k' *леже на датој страни од* a' *што ћемо означити овако:*

$$\sphericalangle hk \cong \sphericalangle h'k'.$$

Сваки угао је себи самом подударан, тј. увек је

$$\sphericalangle hk \cong \sphericalangle hk$$

III 5. *Ако за два троугла* ABC *и* A'B'C' *постоје подударности:*

$$AB \cong A'B',\ AC \cong A'C',\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C',$$

тада постоји увек и подударност

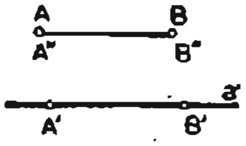
$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'.$$

20. ПОДУДАРНОСТ ДУЖИ.

1. Доказујемо прво неке теореме у којима је реч о подударности самих дужи.

Теорема 20. 1. *Свака дуж је подударна себи самој.*

Доказ. Докажимо да је дуж AB подударна себи самој. Нека је a' која било права и A' тачка на њој (сл. 157). Према аксиоми III 1 постоји на a', са дате стране тачке A' тачка B' тако да је $AB \cong A'B'$.



Сл. 157

Ако сада тачку A обележимо знаком A'', а тачку B знаком B'', дужи AB и $A''B''$ су истоветне, дакле из подударности $AB \cong A'B'$ следује $A''B'' \cong A'B'$.

Како је $AB \cong A'B'$ и $A''B'' \cong A'B'$, према аксиоми III 2 је

$$AB \cong A''B'',\ \text{тј.}\ AB \cong AB.$$

Теорема 20. 2. *Ако је дуж* AB *подударна дужи* A'B', *такође је обратно: дуж* A'B' *подударна дужи* AB, *тј. из*

$$AB = A'B'\ \textit{следује}\ A'B' = AB.$$

Доказ. Према теореми 20. 1 је $A'B' = A'B'$ па како је $AB = A'B'$, имамо према аксиоми III 2 $A'B' = AB$.

Теорема 20. 3. *Ако је дуж* AB *подударна дужи* A'B' *а ова подударна дужи* A''B'', *такође је и дуж* AB *подударна дужи* A''B'' *тј. из*

$$AB = A'B'\ \textit{и}\ A'B' = A''B''$$

следује

$$AB = A''B''.$$

Доказ. Како је $AB = A'B'$, а из $A'B' = A''B''$ следује према теореми 20. 2 $A''B'' = A'B'$, имамо по аксиоми III 2 $AB = A''B''$.

Напомена. За који било однос којим се доводе у везу два елемента неког мноштва кажемо да је рефлексиван ако је тачан кад

---

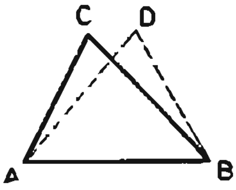
* Тј. полураван — напом. писца.

се њиме доведе у везу један елемент са самим собом. Напр. једнакост у алгебри је рефлексивна јер у алгебри је $a=a$. — За однос кажемо да је симетричан ако можемо разменити елементе који стоје у том односу. Једнакост у алгебри има и ту особину, јер из $a=b$ следује $b=a$. — За однос кажемо да је транситиван ако из чињеница да доводи у везу један елемент са другим и тај други са трећим следује да доводи у везу и непосредно први са трећим. Једнакост у алгебри има и ту особину, јер из $a=b$ и $b=c$ следује $a=c$. Исту особину има и однос „мање", јер из $a<b$ и $b<c$ следује $a<c$. Напротив, однос „мање" није ни рефлексиван ни симетричан.

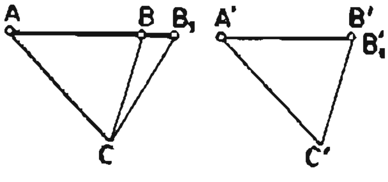
Теоремама 20.1, 2 и 3 утврђена је рефлексивност, симетричност и транситивност подударности. На темељу њене транситивности можемо уместо „дуж AB је подударна са дужи AB" рећи и да су дужи AB и AB подударне међу собом.

Теорема 20.4. *У равни троугла* ABC, *с оне стране праве* AB *с које је тачка* C *не постоји нека друга тачка* D *тако да је* $AC \cong AD$ *и* $BC \cong BD$.

Доказ. Према аксиоми III·4 постоји у равни ABC, с оне стране праве AB с које је тачка C, једна једина тачка D (сл. 158) тако да је $AC \cong AD$, $BC \cong BD$. Но према теореми 20.1 је $AC \cong AC$ и $BC \cong BC$, тј. C је већ једна таква тачка D, дакле је и једина. Не постоји тачка D, која се не поклапа са C, а испуњава услове $AC \cong AD$, $BC \cong BD$.



Сл. 158



Сл. 159

Теорема 20.5. *Какве год биле две тачке* A *и* B, *на правој* AB *не постоји с оне стране тачке* A *с које је тачка* B, *још нека тачка* B_1 *различита од* B *тако да је*

$$AB \cong AB_1.$$

Доказ. Нека, напротив, постоји на правој AB, с оне стране тачке A с које је тачка B, таква тачка B_1 да је $AB \cong AB_1$ (сл. 159). Како су A, B, B_1 три разне тачке, једна је између остале две, па како су B и B_1 с исте стране тачке A, имамо $A-B-B_1$ или $A-B_1-B$. Претпоставимо напр. да је $A-B-B_1$.

Према аксиоми III 1 постоји на којој било правој дуж $A'B'$ тако да је $AB \cong A'B'$; према аксиоми I 4 постоји тачка C ван праве AB, а према аксиоми III 4 постоји тачка C' ван праве $A'B'$ тако да је $AC=A'C'$ и $BC=B'C'$. Нека је B_1' тачка истоветна о B'. Како је тачка B_1 на полуправој AB с крајем A, тако да је $A-B-B_1$, а B_1' тачка полуправе $A'B'$ с крајем A' и како је

$$AC \cong A'C', \quad AB \cong A'B', \quad CB \cong C'B', \quad AB_1 \cong A'B'_1,$$

према аксиоми III 5 такође је

$$CB_1 \cong C'B'_1, \quad \text{тј.} \quad CB_1 \cong C'B'.$$

Дакле имамо

$$CB \cong C'B' \quad \text{и} \quad CB_1 \cong C'B',$$

а отуд према аксиоми III 2 $CB\cong CB_1$. Према томе B и B_1 би биле две разне тачке с исте стране тачке A, дакле и с исте стране праве AC, такве да је

$$AB\cong AB_1 \quad \text{и} \quad CB\cong CB_1,$$

а то је према аксиоми III 4 немогуће. Исти је доказ ако је $A-B_1-B$.

Сад можемо идућом теоремом употпунити аксиому III 1 тврђењем да је у њој тачка B′ једина оваква тачка:

Теорема 20.6. *Ако су* A *и* B *две тачке на правој* a, *затим* A′ *тачка на истој или другој правој* a′, *тада постоји на* a′, *с дате стране тачке* A′ *једна и само једна тачка* B′ *тако да је дуж* AB *подударна дужи* A′B′.

Доказ. Претпоставимо, напротив, да постоји сем B' још једна таква тачка B'_1. Из $AB=A'B'$ и $AB=A'B'_1$ следује према теореми 20.2 и аксиоми III 2 $A'B'=A'B'_1$, а то је по теореми 20.5 немогуће. Дакле B' је једина таква тачка.

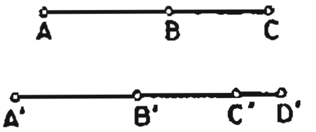
Теорема 20.7 *Нека су на правој* a, AB *и* BC *две дужи које немају заједничких унутарњих тачака и нека су* A′B′ *и* B′C′ *две дужи на истој или некој другој правој* a′, *које такође немају заједничких унутарњих тачака. Ако је*

$$AB\cong A'B' \quad и \quad AC\cong A'C',$$

такође је и

$$BC\cong B'C'.$$

Доказ. Претпоставимо да није $BC\cong B'C'$. Тада постоји према аксиоми III 1 на a', с оне стране тачке B' с које је C', тачка D' различита од C', тако да је $BC=B'D'$ (сл. 160). Дужи $A'B'$ и $B'D'$ такође немају заједничких унутарњих тачака, дакле према аксиоми III 3 је $AC\cong A'D'$.



Сл. 160

Како су тачке C' и D' с исте стране тачке B', а A' је са друге стране тачке B', тачке C' и D' су према дефиницији 10.1 с исте стране тачке A'. Уз то је и $AC\cong A'C'$ и $AC\cong A'D'$, а то је према теореми 20.6 немогуће. Дакле имамо $BC\cong B'C'$.

Теорема 20.8 *Ако је дуж* AC *подударна дужи* A′C′ *и ако је тачка* B *између* A *и* C, *постоји једна и само једна тачка* B′ *између* A′ *и* C′ *тако да је*

$$AB\cong A'B' \quad и \quad BC\cong B'C'.$$

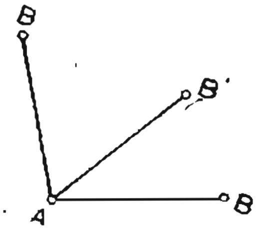
Доказ. Према теореми 20.6 постоји (сл. 160) на правој $A'C'$ с оне стране тачке A' с које је C' једна и само једна тачка B' тако да је $AB\cong A'B'$. Затим, с оне стране тачке B', с које није A' постоји на правој $A'C'$ тачка D' тако да је $BC\cong B'D'$. Како су сем тога A и C са разних страна тачке B, а A' и D' са разних страна тачке B', имамо према аксиоми III 3 и $AC\cong A'D'$.

Тачке B' и D' су с исте стране тачке A', а B' је с оне стране тачке A' с које је C', дакле C' и D' су с исте стране тачке A'. Сем тога је по претпоставци $AC\cong A'C'$ и, као што смо доказали, $AC\cong A'D'$. Дакле према теореми 20.6 тачка D' је истоветна с тачком C' и, према томе, B' је између A' и C' и постоји једнакост $AB\cong A'B'$ и $BC\cong B'C'$.

2. Завршимо ово расматрање подударности дужи увођењем једног начина изражавања, који је често погодан. Реч је о двема дужима које не морају припадати истој правој.

Дефиниција 20.1. Ако су две дужи AB и AC са заједничким крајем A једнаке, кажемо да су тачке B и C једнако удаљене од тачке A.

Следећа теорема изражава транситивност симетричног односа „једнаке удаљености". Садржана је у теореми 20.3.

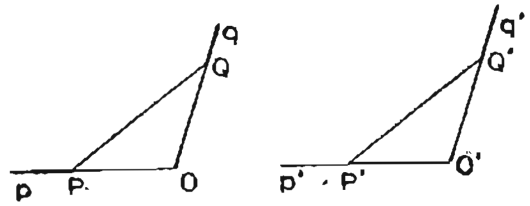


Сл. 161

Теорема 20.9. *Ако су тачке* B *и* B' *једнако удаљене од тачке* A *и ако су тачке* B' *и* B'' *једнако удаљене од тачке* A, *онда су и тачке* B *и* B'' *једнако удаљене од тачке* A (сл. 161).

21. ПОДУДАРНИ УГЛОВИ.

1. Подударност углова дефинишемо следећом дефиницијом, непосредно као симетричан однос:



Сл. 162

Дефиниција 21.1. Нека су $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ два удубљена или два испупчена угла, O и O' њихова темена (сл. 162). Ако постоје на крацима p, q, p', q' редом тачке P, Q, P', Q' тако да је

$$OP \cong O'P', \quad OQ \cong O'Q', \quad PQ \cong P'Q',$$

кажемо да су та два удубљена или та два испупчена угла $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ подударна или једнака. Изражено знацима је:

$$\sphericalangle pq \cong \sphericalangle p'q' \quad \text{или} \quad \sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'.$$

Докажимо сад неколико теорема о подударности углова.

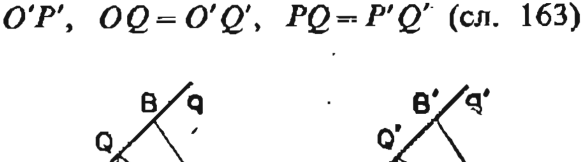
Теорема 21.1. *Ако су углови* $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ *с теменима* O *и* O' *подударни и ако су* A, B, A', B' *тачке редом на крацима* p, q, p', q' *тако да је*

$$OA \cong O'A' \quad \textit{и} \quad OB \cong O'B',$$

такође је и

$$AB = A'B'.$$

Д о к а з. Према дефиницији 21.1 постоје тачке P, Q, P', Q' редом на крацима p, q, p', q', тако да је $OP = O'P'$, $OQ = O'Q'$, $PQ = P'Q'$ (сл. 163). Како је $OA = O'A'$, према аксиома III 5 је и $QA = Q'A'$, дакле имамо $OA = O'A'$, $OQ = O'Q'$, $AQ = A'Q'$, $OB = O'B'$, а отуда је, опет према III 5, такође $AB = A'B'$.



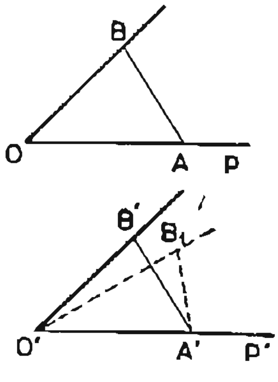
Сл. 163

Приметимо да је теорема 21.1 садржана у такозваној првој теореми о подударности троуглова (теорема 22.5).

Следећа теорема је истоветна с Хилбертовом аксиомом III 4.

Теорема 21.2. *Ако је* $\sphericalangle pq$ *удубљен или испупчен угао у равни* α, *затим* p' *полуправа у истој или другој равни* α' *тада постоји у* α', *са дате стране* *оне праве која садржи полуправу* p' *једна и само једна полуправа* q' *тако да је удубљени, одн. испупчени угао* $\sphericalangle pq$ *подударан удубљеном, одн. испупченом углу* $\sphericalangle p'q'$.

Доказ. Нека је $\sphericalangle pq$ удубљен угао у равни α, O његово теме (сл. 164) и p' полуправа у равни α', с крајем O'. Нека је A тачка на p, B на q, затим на темељу теореме 20.6, A' једина тачка на p' тако да је $OA = O'A'$. Према аксиоми III 4 постоји у α', с дате стране праве која садржи полуправу p', једна једина тачка B' тако да је $OB = O'B'$ и $AB = A'B'$. Ако је q' полуправа с крајем O' и која садржи тачку B', имамо према дефиницији 21.1 $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$.



Сл. 164

Полуправа q' је једина таква полуправа, јер када би постојала још једна, q_1' таква да је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q_1'$, постојала би на њој тачка B_1' тако да је $OB = O'B_1'$, а тада би према теореми 21.1 било $AB = A'B_1'$. При томе би B' и B_1' биле две разне тачке, а то је према аксиоми III 4 немогуће.

Ако је пак угао $\sphericalangle pq$ испупчен, према теореми 12.6 његови краци p и q одређују и један удубљен угао, а по претходноме постоји једна и само једна полуправа q' у α', с дате стране праве што садржи p', тако да је удубљени угао $\sphericalangle pq$ подударан с удубљеним углом $\sphericalangle p'q'$. Дакле постоји према теореми 12.6 један и само један испупчен угао $\sphericalangle p'q'$ тако да је испупчени угао $\sphericalangle pq$ подударан испупченом углу $\sphericalangle p'q'$.

Теорема 21.3. *Ако су два угла* $\sphericalangle p'q'$ *и* $\sphericalangle p''q''$ *подударна трећем углу* $\sphericalangle pq$ *такође је и угао* $\sphericalangle p'q'$ *подударан углу* $\sphericalangle p''q''$, *тј. из*

$$\sphericalangle p'q' = \sphericalangle pq \quad и \quad \sphericalangle p''q'' = \sphericalangle pq$$

следује

$$\sphericalangle p'q' = \sphericalangle p''q''.$$

Доказ. Нека су редом O, O', O'' темена тих углова, затим $A, B, A', B', A''B''$ тачке редом на крацима $p, q, p', q', p''q''$, тако да је $O'A' = OA$, $O''A'' = OA$, $O'B' = OB$, $O''B'' = OB$ и, према аксиоми III 2 такође је $O'A' = O''A''$ и $O'B' = O''B''$. Према теореми 21.1 је такође $A'B' = AB$, $A''B'' = AB$ и, по аксиоми III 2, такође је $A'B' = A''B''$. Но из $O'A' = O''A''$, $O'B' = O''B''$, $A'B' = A''B''$ следује према дефиницији 21.1 $\sphericalangle p'q' = \sphericalangle p''q''$.

Теорема 21.4. *Сваки угао је подударан са самим собом.*

Доказ. Докажимо да је угао $\sphericalangle pq$ подударан са самим собом. Нека му је O теме, A нека друга тачка на p, B на q. Према теореми 20.1 је $OA = OA$, $OB = OB$, $AB = AB$, дакле према дефинипији 21.1 је $\sphericalangle pq = \sphericalangle pq$.

Теорема 21.5. *Ако је угао* $\sphericalangle pq$ *подударан с углом* $\sphericalangle p'q'$, *а овај подударан с углом* $\sphericalangle p''q''$, *такође је угао* $\sphericalangle pq$ *подударан с углом* $\sphericalangle p''q''$, *тј. из*

$$\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q' \quad и \quad \sphericalangle p'q' = \sphericalangle p''q''$$

следује

$$\sphericalangle pq = \sphericalangle p''q''.$$

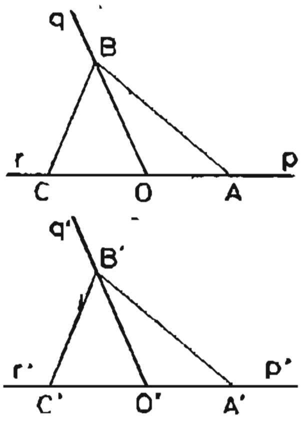
Доказ. Како је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$, а из $\sphericalangle p'q' = \sphericalangle p''q''$ следује на основи теореме 20.2 и дефиниције 21.1 $\sphericalangle p''q'' = \sphericalangle p'q'$, дакле према теореми 21.3 имамо $\sphericalangle pq = \sphericalangle p''q''$.

2. Докажимо да су напоредни углови и унакрсни углови једнаких углова једнаки.

Теорема 21.6. *Напоредни углови једнаких углова су једнаки.*

Доказ. Нека су $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ два једнака удубљена угла и нека су r и r' продужења кракова p и p' (сл. 165). Доказаћемо да су и напоредни углови $\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle q'r'$ (дефиниција 12.5) једнаки.

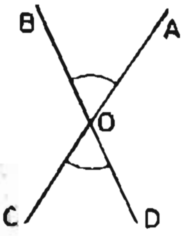
Нека су A, B, C ма које тачке на p, q, r, различите од O и нека су према аксиоми III 1 A', B', C' три тачке редом на p', q', r', тако да је $OA=O'A'$, $OB=O'B'$, $OC=O'C'$. Како је $\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q'$, према теореми 21.1 је и $AB=A'B'$. Тачке A и C су са разних страна тачке O и тачке A' и C' са разних страна тачке O', дакле дужи AO и CO имају само тачку O и дужи $A'O'$ и $C'O'$ само тачку O' заједничку, па како је $OA=O'A'$ и $OC=O'C'$, по аксиоми III 3 је такође $AC=A'C'$.



Сл. 165

Дакле имамо $AB=A'B'$, $AO=A'O'$, $BO=B'O'$, $AC=A'C'$, а отуд је по аксиоми III 5 такође $BC=B'C'$. Како је и $OB=O'B'$, $OC=O'C'$, по дефиницији 21.1 је $\sphericalangle qr=\sphericalangle q'r'$.

Теорема 21.7 *Унакрсни углови су једнаки.*



Сл. 166

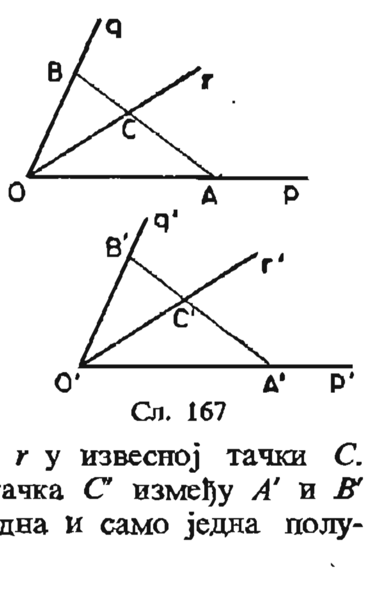
Доказ. Нека су $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ два унакрсна угла, тако да краци OA и OC сачињавају једну праву, а краци OB и OD другу (сл. 166). Удубљени углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ имају крак OB заједнички, а краци OA и OC сачињавају једну праву, дакле по дефиницији 12.5 то су два напоредна угла. Исто тако доказујемо да су и удубљени углови $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COD$ напоредни.

Оба угла $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ су дакле напоредна углу $\sphericalangle BOC$, који је пак према теореми 21.4 једнак себи самом, а према теореми 21.6 напоредни углови једнаких углова су једнаки. Дакле углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ су једнаки.

3. Основан значај имају и следеће три теореме:

Теорема 21.8 *Ако је удубљени угао* $\sphericalangle \mathrm{pq}$ *у равни* α *једнак удубљеном углу* $\sphericalangle \mathrm{p'q'}$, *у равни* α' *и ако је* r *полуправа садржана у углу* $\sphericalangle \mathrm{pq}$ *и с крајем у његову темену, тада постоји једна и само једна полуправа* $\mathrm{r'}$ *садржана у* $\sphericalangle \mathrm{p'q'}$ *и с крајем у темену овог угла, тако да постоје ове подударности удубљених углова:*

$$\sphericalangle \mathrm{pr}=\sphericalangle \mathrm{p'r'} \quad \text{и} \quad \sphericalangle \mathrm{qr}=\sphericalangle \mathrm{q'r'}.$$



Сл. 167

Доказ. Нека су (сл. 167) A и B тачке редом на p и q, различите од O и нека су на темељу аксиоме III 1 A' и B' две тачке на p' и q', тако даје $OA=O'A'$ и $OB=O'B'$. Како је и $\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q'$, према теореми 21.1 такође је $AB=A'B'$.

Према теореми 11.7 дуж AB сече полуправу r у извесној тачки C. Према теореми 20.8 постоји једна и само једна тачка C' између A' и B' тако да је $AC=A'C'$ и $BC=B'C'$ и према томе једна и само једна полуправа r' са крајем O', која пролази кроз C', дакле, према теореми 11.7 садржана је у углу $\sphericalangle p'q'$.

Како је $A-C-B$, тачка C је на полуправој AB с крајем A. Исто тако C' је на полуправој $A'B'$ с крајем A'. Сем тога је $OA=O'A'$, $OB=O'B'$, $AB=A'B'$ и $AC=A'C'$, дакле по аксиоми III 5 је и $OC=O'C'$.

Према томе имамо

$$OA=O'A', \quad OC=O'C', \quad AC=A'C'$$

и такође

$$OB=O'B', \quad OC=O'C', \quad BC=B'C'.$$

Но прве три подударности значе према дефиницији 21.1 да је $\sphericalangle pr=\sphericalangle p'r'$, а друге три да је $\sphericalangle qr=\sphericalangle q'r'$.

Теорема 21.9 *Ако су* $\sphericalangle \mathrm{pq}$ *и* $\sphericalangle \mathrm{qr}$ *два суседна удубљена угла у равни* α *и* $\sphericalangle \mathrm{p'q'}$ *и* $\sphericalangle \mathrm{q'r'}$ *два суседна удубљена угла у истој или другој равни* α' *па ако је*

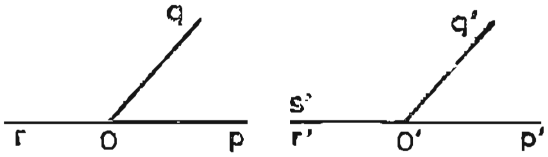
$$\sphericalangle \mathrm{pq}=\sphericalangle \mathrm{p'q'} \quad \text{и} \quad \sphericalangle \mathrm{qr}=\sphericalangle \mathrm{q'r'},$$

углови $\sphericalangle \mathrm{pr}$ *и* $\sphericalangle \mathrm{p'r'}$, *који садрже полуправе* q *и* $\mathrm{q'}$, *такође су једнаки тј.*

$$\sphericalangle \mathrm{pr}=\sphericalangle \mathrm{p'r'}.$$

Доказ. Нека је O заједнички почетак полуправих p, q, r, а O' заједнички почетак полуправих p', q', r'. Полуправе p и r се поклапају, јер како су углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ удубљени, према дефиницији 12.4 су с разних страна праве којој припада полуправа q. Дакле p и r су две полуправе на које је тачком O разложена једна права, или су p и r краци угла $\sphericalangle pr$.

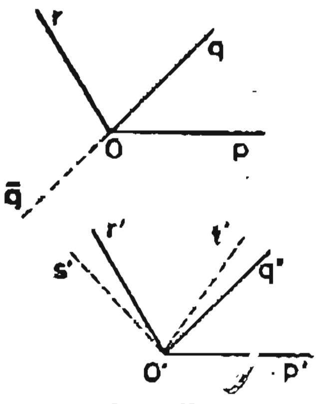
Претпоставимо прво да p и r припадају једној правој и докажимо да тада p' и r' припадају такође једној правој, која је тачком O' разложена на те две полуправе (сл. 168). Нека је s' продужење полуправе p'. Углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ су напоредни, и углови $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle q's'$ су напоредни. Како су углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ једнаки према теореми 21.6 углови $\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle q's'$ су такође једнаки. Но углови $\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle q'r'$ су једнаки дакле и углови $\sphericalangle q'r'$ и $\sphericalangle q's'$ су једнаки. При томе су p' и r' с разних страна тачке O', а и p' и s' су с разних страна тачке O', јер су с разних страна праве којој припада полуправа q. Дакле r' и s' су с исте стране праве којој припада полуправа q'. Према теореми 21.2 полуправе r' и s' се поклапају, тј. r' је продужење полуправе p'.



Сл. 168

Претпоставимо сада да p и r не припадају једној правој, него да су краци угаоне линије pr. Нека је $\bar{q}$ продужење полуправе q. Према теореми 11.8 једна од полуправих q, $\bar{q}$ је у угаоној линији pr. Узмимо прво да је q у угаоној линији pr (сл. 169), дакле у удубљеном углу $\sphericalangle pr$.

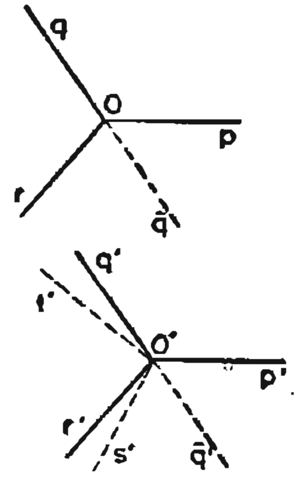
Ни p' и r' не припадају једној правој, јер према претходно доказаном делу ове теореме полуправе p и r би припадале тада једној правој. Докажимо да су удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p'r'$ једнаки. Према теореми 21.2 постоји, с оне стране полуправе p' с које је q' једна једина полуправа s' која полази из O', таква да су удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p's'$ једнаки. Према теореми 21.8 постоји у углу $\sphericalangle p's'$ једна једина полуправа t' која полази из O' и таква да је $\sphericalangle pq=\sphericalangle p't'$ и $\sphericalangle qr=\sphericalangle t's'$.



Сл. 169

Како је t' у $\sphericalangle p's'$, по теореми 11.5 t' је с оне стране полуправе p' с које је s'. Но s' је с оне стране полуправе p' с које је q', дакле q' и t' су с исте стране полуправе p'. При томе је $\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle pq=\sphericalangle p't'$, дакле према теореми 21.3 $\sphericalangle p'q'=\sphericalangle p't'$. Према теореми 21.2 полуправе q' и t' се поклапају.

Отуд следује да је q' у углу $\sphericalangle p's'$ и да је $\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle qr=\sphericalangle q's'$. Но $\sphericalangle qr=\sphericalangle q'r'$, дакле $\sphericalangle q'r'=\sphericalangle q's'$. При томе су p' и r' према дефиницији 11.4, с разних страна праве којој припада q'; исто тако p' и s', јер q' се поклапа с t' а t' је у углу $\sphericalangle p's'$. Дакле r' и s' су с исте стране праве којој припада q' и сем тога је $\sphericalangle q'r'=\sphericalangle q's'$. Према теореми 21.2 r' и s' се такође поклапају. Дакле $\sphericalangle pr=\sphericalangle p'r'$ што је требало доказати.



Сл. 170

Ако је, напротив, полуправа q у углу $\sphericalangle pr$, нека је $\bar{q}'$ продужење полуправе q' и нека је s' полуправа с оне стране полуправе p' с које је $\bar{q}'$, таква да су удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p's'$ једнаки (сл. 170). Настављајући доказ као претходно, доказујемо да се полуправе $\bar{q}'$ и t' поклапају, а отуд опет да се r' и s' поклапају и да су дакле удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p'r'$ једнаки. Но како удубљени угао $\sphericalangle pr$ садржи полуправу $\bar{q}$, испупчени угао $\sphericalangle pr$ садржи полуправу q, а како удубљени угао $\sphericalangle p'r'$ садржи полуправу $\bar{q}'$, испупчени угао $\sphericalangle p'r'$ садржи полуправу $\bar{q}'$. Из дефиниције 21.1 следује пак непосредно, ако су удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p'r'$ једнаки, да су тада и испупчени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle p'r'$ једнаки. Ти испупчени углови садрже дакле редом краке q и q' и једнаки су. — Тиме је наша теорема у сва три могућа случаја доказана.

Теорема 21.10. *Ако су углови* $\sphericalangle pq$ *и* $\sphericalangle qr$ *два суседна удубљена угла у равни* α *и* $\sphericalangle p'q'$ *и* $\sphericalangle q'r'$ *два суседна удубљена угла у истој или другој равни* α', *па ако је*

$$\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q' \quad и \quad \sphericalangle pr=\sphericalangle p'r',$$

такође је

$$\sphericalangle qr=\sphericalangle q'r'.$$

Доказ. Претпоставимо да теорема није тачна. Тада постоји према теореми 21.2 у α' с оне стране полуправе q' с које није p' друга полуправа s' тако да су удубљени углови $\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle q's'$ једнаки. Удубљени углови $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle q's'$ су дакле такође суседни, јер су им краци p' и s' с разних страна полуправе q', па како је $\sphericalangle pq=\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle qr=\sphericalangle q's'$, према теореми 21.9 је $\sphericalangle pr=\sphericalangle p's'$, подразумевајући углове који садрже редом полуправе q и q'. Но $\sphericalangle pr=\sphericalangle p'r'$, при чему и угао $\sphericalangle p'r'$ садржи по дефиницији 12.4 полуправу q'. Дакле је према теореми 21.3 и $\sphericalangle p'r'=\sphericalangle p's'$.

Углови $\sphericalangle p'r'$ и $\sphericalangle p's'$ су по дефиницији 21.1 оба удубљена, испупчена или испружена. Оба садрже полуправу q'. Дакле, ако су удубљени, њихови краци r' и s' су с оне стране полуправе p' с које је q', тј. с исте стране полуправе p'. Према теореми 21.2 краци r' и s' се поклапају, па и сами углови $\sphericalangle p'r'$ и $\sphericalangle p's'$ се поклапају.

Ако су ти углови испупчени, њихови краци r' и s' су с оне стране полуправе p' с које није q', дакле опет су с исте стране полуправе p' и поклапају се, па и сами углови $\sphericalangle p'r'$ и $\sphericalangle p's'$ се поклапају.

Ако су ти углови опружени, опет се краци r' и s' поклапају, јер су продужења исте полуправе p', па како оба та угла садрже q', поклапају се и та два угла.

Дакле, како је $\sphericalangle pr = \sphericalangle p's'$, имамо $\sphericalangle pr = \sphericalangle p'r'$, чиме је доказ завршен.

22. ПОДУДАРНОСТ ТРОУГЛОВА И МНОГОУГЛОВА.

1. У овом параграфу проучавамо подударне троугле и многоугле и то само до граница где постаје увођење правог угла и управних (нормалних) правих потребно.

Дефиниција 22.1. Ако су странице и углови троугла ABC редом подударни страницама и угловима троугла $A'B'C'$, тј. ако је

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \; BC = B'C',$$

$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C', \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B',$$

кажемо да су троугли ABC и $A'B'C'$ подударни и пишемо

$$ABC \cong A'B'C'.$$

За две троугаоне површи кажемо да су подударне ако су им рубови подударни троугли.

Како је подударност рефлексивна, симетрична и транситивна кад се тиче дужи и углова, исто вреди, на темељу дефиниције 22.1 непосредно и за троугле, а као што ће произићи из дефиниције 22.3, вредеће ма за какве многоугле. То су у ствари опште особине подударности, које карактеришу групу у смислу теорије група. Дакле, имамо напр. теореме:

Теорема 22.1. *Сваки троугао је подударан себи самом.*

Теорема 22.2. *Ако је троугао* ABC *подударан троуглу* A'B'C' *такође је троугао* A'B'C' *подударан троуглу* ABC.

Теорема 22.3. *Ако је троугао* ABC *подударан троуглу* A'B'C' *и троугао* A'B'C' *подударан троуглу* A''B''C'' *тада је такође троугао* ABC *подударан троуглу* A''B''C''.

Како те теореме следују непосредно из дефиниције 22.1 и одговарајућих теорема о дужима и угловима, износимо их без доказа.

2. Докажимо прво три теореме о подударности троуглова, познате као први, други и трећи став о подударности троуглова. Из начина како смо засновали подударност дужи и подударност углова произлази да нам на првоме месту стоји такозвани трећи став о подударности троуглова.

Теорема 22.4 — III став о подударности троуглова. — *Два троугла су подударна ако су три странице једног троугла редом једнаке трима страницама другог троугла.*

Доказ. Нека су ABC и $A'B'C'$ та два троугла и нека је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Према дефиницији 21.1 је и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, јер на њиховим крацима AB, AC и $A'B'$, $A'C'$ су тачке B, C, B', C', такве да је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ а сем тога је $BC = B'C'$. Исто тако је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, дакле, према дефиницији 22.1 та два троугла су подударна.

Теорема 22.5. — I став о подударности троуглова. — *Два троугла су подударна ако су редом две странице и захваћени угао једног троугла једнаки двема страницама и захваћеном углу другог троугла.*

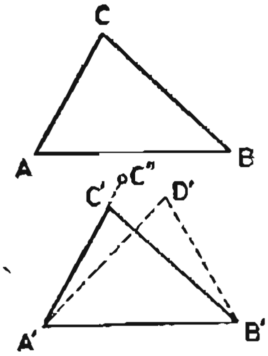
Доказ. Нека су ABC и $A'B'C'$ та два троугла и нека је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Према теореми 21.1 такође је $BC = B'C'$, дакле, према теореми 22.4 троугли ABC и $A'B'C'$ су подударни.

Теорема 22.6. — II став о подударности троуглова. — *Два троугла су подударна ако су редом једна страница и на њој належни углови једног троугла једнаки једној страници и на њој належним угловима другог троугла.*

Доказ. Нека су ABC и $A'B'C'$ ти троугли (сл. 171) и нека је $AB = A'B'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Претпоставимо да није $AC = A'C'$. Тада постоји према аксиоми III 1 на краку AC угла $\sphericalangle BAC$ друга тачка C'' тако да је $AC = A'C''$. Према теореми 22.5 троугли ABC и $A'B'C''$ су подударни, дакле је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C''$. Но $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, дакле $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A'B'C''$. Како је C'' на полуправој $A'C'$ која полази из A', тачке C' и C'' су с исте стране праве $A'B'$.

Дакле, према теореми 21.2 полуправе $B'C'$ и $B'C''$ се поклапају, тј. C'' је не само на правој $A'C'$, већ и на $B'C'$ и поклапа се с њиховим пресеком C', што је супротно претпоставци.

Дакле је $AC = A'C'$, па како је $AB = A'B'$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, троугли ABC и $A'B'C'$ су према теореми 22.5 подударни.



Сл. 171

3. У погледу на подударност међу страницама или угловима једног истог троугла постоје две могућности: или су две странице једног троугла међу собом једнаке, или су све три странице међу собом једнаке.

Дефиниција 22.2. Троугао коме су две странице међу собом једнаке назива се *једнакокрак троугао*. ~~Његове једнаке странице називају се *краци*, теме~~ у коме се састају краци назива се *врх*, а трећа страница *основица* једнакокраког троугла.

Троугао коме су све три странице међу собом једнаке назива се *једнакостраничан троугао*.

Троугао коме су све три странице међу собом неједнаке назива се *разностраничан троугао*.

Докажимо прво да постоје једнакокраки троугли. Постојање једнакостраничних троуглова моћи ћемо доказати тек помоћу друге аксиоме непрекидности.

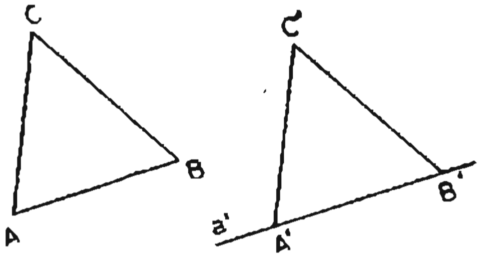
Теорема 22.7. *Постоји једнакокрак троугао коме су краци једнаки датој дужи, а угао при врху једнак датом углу.*

Доказ. Нека је угао $\sphericalangle pq$ ма који угао, C његово теме. Према аксиоми III 1 постоје на крацима p и q редом тачке A и B тако да су дужи CA и CB једнаке којој било датој дужи. Како тачке A, B, C не припадају једној правој, укупност трију дужи AB, AC, BC је према дефиницији 7.1 троугао. Према дефиницији 22.2 троугао је једнакокрак и испуњава услове ове теореме.

Теорема 22.8. *У једнакокраком троуглу су углови насупрам једнаких страница једнаки.*

Доносимо три разна доказа. Други је сличан првом, али је краћи и оснива се на подударности истоветних дужи и углова. Трећи се налази у Еуклидовим „Елементима“.

Доказ 1. Нека су у једнакокраком троуглу ABC (сл. 172а) странице AC и BC једнаке. Изаберимо у некој равни α праву a' и на њој, према аксиоми III 1 тачке A' и B' тако да је $AB = A'B'$, затим према теореми 21.2 с једне стране праве a' угао $\sphericalangle B'A'C'$ тако да је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, напослетку, на краку $A'C'$ тачку C' тако да је $AC = A'C'$.



Сл. 172а

Према теореми 22.5 троугли ABC и $A'B'C'$ су подударни, дакле је и $BC = B'C'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. При томе теменима A, B, C одговарају редом темена A', B', C'.

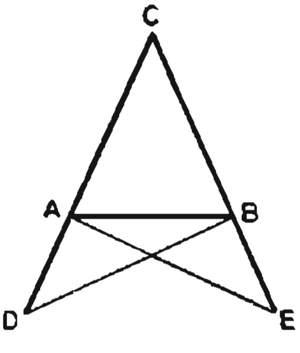
С друге стране, из $AC = A'C'$ и $AC = BC$ следује, према аксиоми III 2 $A'C' = BC$. Исто тако из $BC = B'C'$ и $BC = AC$ следује $B'C' = AC$. Слично из $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCA$ следује, по теореми 21.3 $\sphericalangle A'C'B' = BCA$. Тако имамо следеће подударности:

$$A'C' = BC, \quad B'C' = AC, \quad \sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle BCA,$$

дакле, према теореми 22.5 троугли $A'B'C'$ и BCA су подударни. При томе теменима A', B', C' одговарају редом темена B,A,C. Дакле је и $\sphericalangle A' = \sphericalangle B$. Но имамо $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, дакле, према теореми 21.3 такође је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

Доказ 2. Нека су у троуглу ABC странице AC и BC једнаке. Како је према теореми 20.1 $AB = AB$, $AC = AC$, $BC = BC$, троугао ABC је према теореми 22.4 подударан себи самом. При томе сваком темену одговара то исто теме. Но како је и $AB = BA$, $AC = BC$, и $BC = AC$, троугли ABC и BAC су такође подударни, а при томе теменима A, B, C одговарају редом темена B, A, C. Дакле су према дефиницији 22.1 и одговарајући углови једнаки, па како углу $\sphericalangle A$ одговара угао $\sphericalangle B$, та два угла су једнака.

Доказ 3. Ако су у троуглу ABC странице AC и BC једнаке међу собом, нека је D тачка на правој AC тако да је A између C и D, и нека је E тачка на правој BC тако да је $BE = AD$ и да је тачка B између C и E (сл. 172б). Тада је према аксиоми II 3 и $CE = CD$. Троугли BCD и ACE су подударни, јер је $BC = AC$, $CD = CE$ и $\sphericalangle BCD = ACB$. Дакле је и $BD = AE$ а отуд су и троугли ABD и BAE подударни, јер је $AD = BE$, $BD = AE$ и $AB = BA$. Дакле је и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE$, а отуд су према теореми 21,6 и углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$ једнаки као напоредни углови једнаких углова.



Сл. 172б

Докажимо сад обрнуту теорему:

Теорема 22.9. *Ако су у троуглу два угла једнака, једнаке су и наспрамне странице, тј. троугао је једнакокрак.*

Доказ који доносимо одговара доказу 1. претходне теореме. — Нека су у троуглу ABC углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ једнаки (сл. 172а). Изаберимо у некој равни α' подударан троугао $A'B'C'$ (као у претходном доказу 1) тако да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Троугао $A'B'C'$ подударан је троуглу BAC при чему теменима A', B', C' одговарају редом темена B, A, C. Заиста, имамо $AB = A'B'$, $AB = BA$, дакле је и $A'B' = BA$, затим имамо $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle A, = \sphericalangle B$, дакле је и $\sphericalangle A' = \sphericalangle B$. Најзад имамо $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle A$, дакле и $\sphericalangle B' = \sphericalangle A$.

Како је $A'B' = BA$, $\sphericalangle A' = \sphericalangle B$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle A$, троугао $A'B'C'$ је према теореми 22.6 подударан троуглу BAC у реченом смислу. Према томе је и $A'C' = BC$, па како је $A'C' = AC$ имамо $AC = BC$.

4. Подударност ма каквих равних многоуглова можемо дефинисати као и подударност троуглова, на следећи начин*:

Дефиниција 22.3. Нека међу теменима и страницама два равна многоугла $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ $(n \geqslant 3)$ садржаним у двема разним или једној равни постоји обострано једнозначан однос, тако да теменима $A_1, A_2, \dots, A_n$ једног многоугла одговарају редом темена $B_1, B_2, \dots, B_n$ другог многоугла и да страници која спаја два темена једног многоугла одговара она страница другог многоугла, која спаја два одговарајућа темена.

Ако су одговарајуће странице тих многоуглова једнаке и њихови одговарајући углови једнаки, кажемо да су та два многоугла *подударна*.

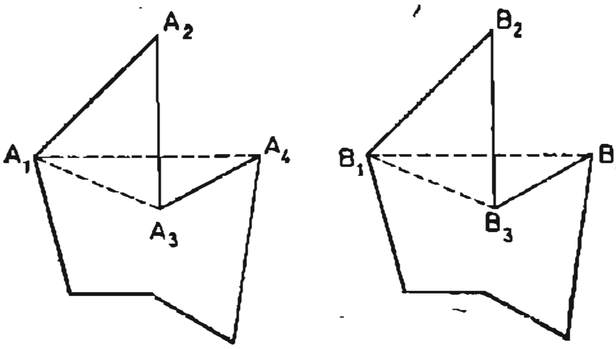
Ова дефиниција обухвата и троугле $(n = 3)$ и у томе случају се своди на дефиницију 22.1, само што у овој није изричито споменут обострано једнозначан однос међу теменима и страницама два подударна троугла.

Од многих могућих теорема о подударности многоуглова спомињемо само две:

Теорема 22.10. *У два подударна многоугла дијагонале које спајају одговарајућа темена су једнаке.*

Доказ. Нека су $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ дати многоугли. Троугли $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ су према теореми 22.5 подударни, јер је $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$ а и $\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle B_1B_2B_3$, јер су то два одговарајућа угла тих многоуглова. Дакле и дијагонале A_1A_3 и B_1B_3 су једнаке.

И троугли $A_1A_3A_4$ и $B_1B_3B_4$ су подударни. Заиста, како је $\sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle B_2B_3B_4$ и $\sphericalangle A_1A_3A_2 = \sphericalangle B_1B_3B_2$, а краци A_3A_1 и B_3B_1 су истовремено у угловима $\sphericalangle A_2A_3A_4$ одн. $\sphericalangle B_2B_3B_4$ или су изван њих, имамо $\sphericalangle A_1A_3A_4 = \sphericalangle B_1B_3B_4$. Но $A_1A_3 = B_1B_3$, $A_3A_4 = B_3B_4$, дакле према теореми 21.5 троугли $A_1A_3A_4$ и $B_1B_3B_4$ су подударни. Према томе и дијагонале A_1A_4 и B_1B_4 су једнаке и углови $\sphericalangle A_1A_4A_3$ и $\sphericalangle B_1B_4B_3$ једнаки.



Сл. 173

На исти начин доказујемо даље да су троугли $A_1A_4A_5$ и $B_1B_4B_5$ једнаки и уопште да су сви троугли $A_1A_iA_{i+1}$ и $B_1B_iB_{i+1}$, $i = 2,3 \dots n-1$, одговарајући међу собом једнаки. Према томе ма које две одговарајуће дијагонале A_1A_i и B_1B_i су једнаке.

Исто тако доказујемо да су једнаке ма које две одговарајуће дијагонале које полазе из A_2 одн. B_2, затим из A_3 одн. B_3 итд. Тиме је доказано да су две дијагонале које спајају ма која два и њима одговарајућа темена једнаке.

Теорема 22.11. *Ако међу теоремама и страницама два многоугла постоји обострано једнозначан однос и ако су одговарајуће странице једнаке и одговарајуће дијагонале једнаке, та два многоугла су подударна.*

Доказ. Из једнакости одговарајућих страница и одговарајућих дијагонала два многоугла $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ следује да су сви троугли

---

* У § 29 даће се друга дефиниција за подударност ма каквих ликова.

посматрани у претходном доказу подударни, дакле и одговарајући углови тих троуглова су једнаки, а отуд се доказује да су и одговарајући углови датих многоуглова, два и два, једнаки.

23. УПРАВНОСТ ПРАВИХ И РАВНИ.

1. Прво морамо дефинисати **прав угао**. То можемо на основи подударности углова, јер прав угао је онај који је своме напоредном углу једнак.

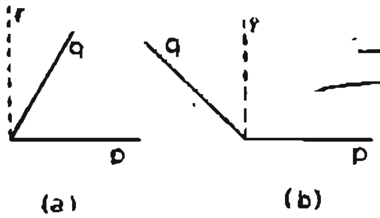
Дефиниција 23.1. Удубљен угао једнак свом напоредном углу назива се *прав угао*.

Прав угао ћемо обележити словом R. Ако је угао $\sphericalangle pq$ прав, писаћемо

$$\sphericalangle pq = R.$$

На основи правог угла можемо дефинисати **оштар** и **туп угао**.

Дефиниција 23.2. Нека је у равни угла $\sphericalangle pq$ r полуправа која с краком p тог угла образује прав угао, а садржана је с оне стране крака p с које је крак q.



Сл. 174

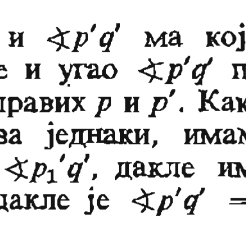
Ако је крак q у правом углу $\sphericalangle pr$, угао $\sphericalangle pq$ назива се *оштар угао*, ако је крак q изван правог угла $\sphericalangle pr$, угао $\sphericalangle pq$ назива се *туп угао*.

Сл. 174a претставља оштар, а слика 174b туп угао $\sphericalangle pq$.

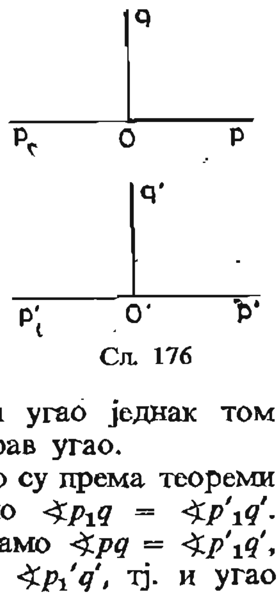
У следећим теоремама реч је о правим угловима.

Теорема 23.1. *Ако је један од углова који је образован двема правим које се секу, прав угао, сва четири удубљена угла што те праве образују јесу прави углови.*

Доказ. Нека су то праве a и b, које се секу у тачки O (сл. 175). Нека су p и p' обе полуправе што сачињавају праву a и полазе из O, а q и q' обе полуправе што сачињавају праву b и полазе из O, и нека је $\sphericalangle pq$ прав угао. Према дефиницији 23.1 један од напоредних углова угла $\sphericalangle pq$ једнак је самом углу $\sphericalangle pq$, рецимо $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q$. Како је такође угао $\sphericalangle pq$ напоредан углу $\sphericalangle p'q$, и угао $\sphericalangle p'q$ је према дефиницији 23.1 прав угао. Али и $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pq'$ су два напоредна угла, дакле је и $\sphericalangle pq'$ прав угао и, најзад, $\sphericalangle pq'$ и $\sphericalangle p'q'$ су такође два напоредна угла, дакле и $\sphericalangle p'q'$ је прав угао.



Сл. 175



Сл. 176

Теорема 23.2 *Прави углови су једнаки међу собом.*

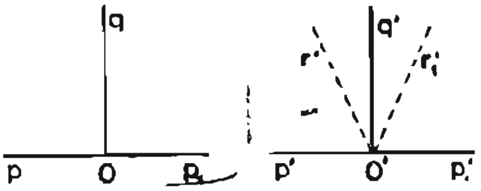
Доказ. Нека је $\sphericalangle pq$ прав угао и $\sphericalangle p'q'$ ма који угао једнак том правом углу (сл. 176). Докажимо да је и угао $\sphericalangle p'q'$ прав угао.

Нека су p_1 и p'_1 продужења полуправих p и p'. Како су према теореми 21.6 напоредни углови једнаких углова једнаки, имамо $\sphericalangle p_1q = \sphericalangle p'_1q'$. Но према дефиницији 23.1 је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p_1'q'$, дакле имамо $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'_1q'$, а по претпоставци је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$, дакле је $\sphericalangle p'q' = \sphericalangle p_1'q'$, тј. и угао $\sphericalangle p'q'$ је прав угао.

Теорема 23.3. *Сваки угао једнак правом углу је такође прав угао.*

Доказ. Нека је $\sphericalangle pq$ прав угао, $\sphericalangle p'q'$ њему једнак угао и нека су p_1 и p'_1 продужења полуправих p и p'. Кад $\sphericalangle pq$ не би био једнак углу $\sphericalangle p'q'$, постојала би у равни угла $\sphericalangle p'q'$, с оне стране полуправе p' с које је q', полуправа r_1, различита од q', но која полази из темена угла $\sphericalangle p'q'$, тако да је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'r'$. Полуправа r' је с једне или друге стране праве којој припада полуправа q', дакле је у $\sphericalangle p'q'$ или у $\sphericalangle p'_1q'$. Рецимо да је у $\sphericalangle p'q'$.

Како је угао $\sphericalangle pq$ прав, према дефиницији 23.1 једнак је углу $\sphericalangle p_1q$, а како су према теореми 21.6 напоредни углови једнаких углова једнаки, имамо $\sphericalangle p_1q = \sphericalangle p_1'r'$. Дакле, према теореми 21.3 имамо да је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'_1r'$.



Сл. 177

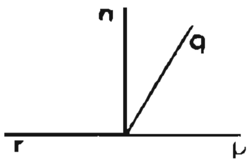
Како су углови $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle p'_1q'$ према дефиницији 23.1 једнаки, а полуправа r' је у $\sphericalangle p'q'$, постоји у углу $\sphericalangle p_1'q'$ полуправа r'_1 тако да је $\sphericalangle p'r' = = \sphericalangle p'_1r'_1$ и $\sphericalangle q'r' = \sphericalangle q'r'_1$. Но $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'r'$, дакле $\sphericalangle pq = p'_1r'_1$, па како је такође $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'_1r'$, имамо $\sphericalangle p'_1r' = \sphericalangle p'_1r'_1$. При томе су r' и r'_1 два разна крака, с исте стране праве којој припада крак p'_1 а то је према теореми 21.2 немогуће.

Исто тако доказујемо (ако уместо p и p' пишемо p_1 и p'_1, и обратно) да r' не може бити у углу $\sphericalangle p'_1q'$. Дакле претпоставка да угао $\sphericalangle pq$ није једнак углу $\sphericalangle p'q'$ погрешна је. — Тиме је теорема доказана.

О оштром и тупом углу доказујемо само следећу теорему:

Теорема 23.4. *Од два напоредна угла један је оштар, други туп, или су оба угла права.*

Доказ. Нека су $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ два напоредна угла са заједничким краком q (сл. 178), а $\sphericalangle pn$ прав угао коме је крак n с оне стране праве што садржи p и r, с које је крак q. Крак q је или истоветан са n и тада су углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle qr$ прави углови, или је крак q у углу $\sphericalangle pn$ или у $\sphericalangle rn$. Ако је у $\sphericalangle pn$, према дефиницији 23.2 $\sphericalangle pq$ је оштар угао, а $\sphericalangle qr$ туп угао. Ако је крак q у $\sphericalangle rn$, тада је $\sphericalangle pq$ туп а $\sphericalangle qr$ оштар угао.



Сл. 178

2. Прелазимо на дефиницију и прве теореме о управним (нормалним) правим.

Дефиниција 23.3. Ако две праве, полуправе или дужи a и b имају заједничку тачку и образују прав угао, рећи ћемо за њих да су *управне* или *нормалне* једна на другој; знацима $a \perp b$.

Заједничка тачка зове се често *подножје*.

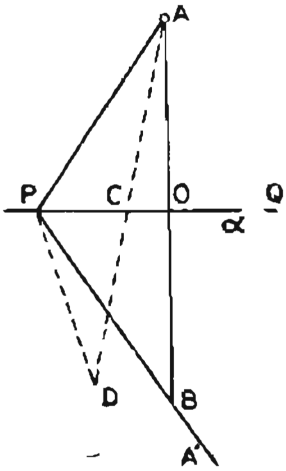
Од других начина како изражавамо управност једне дужи или полуправе n на другој правој, полуправој или дужи a, споменућемо само израз: дуж n је управна спуштена на a из извесне тачке ван праве a, или полуправа n је управна подигнута из једне тачке праве a. Заједничка тачка обеју линија назива се тада подножјем дужи или полуправе n.

За праву која није управна на правој a рећи ћемо да је коса према правој a.

Кроз тачку изван једне праве или кроз тачку на једној правој пролази увек једна и то само једна права, управна на правој. То доказујемо у следећим двема теоремама, 23.5 и 23.7.

Теорема 23.5. *Кроз сваку тачку изван дате праве пролази једна и само једна права која је управна на тој датој правој.*

Доказ. Нека су то тачке A и права a (сл. 179). Изаберимо на правој a две тачке P и Q и у равни APQ одредимо према теореми 21.2 угао $\sphericalangle A'PQ$ једнак углу $\sphericalangle APQ$, с теменом P, с једним краком PQ, а другим краком PA' с оне стране праве a с које није тачка A. Одредимо према аксиоми III 1 на краку PA' тачку B тако да буде $PA=PB$.



Сл. 179

Доказаћемо да је права AB управна на a. Како је тачка B с оне стране праве a с које није A, права a сече праву AB између A и B у извесној тачки O. Бар једна од тачака P и Q је различита од O, рецимо да је P различита од O. Према теореми 22.5 троугли APO и BPO су подударни, јер им је страна PO заједничка а према теореми 20.1 је $PO=PO$; затим је $AP=BP$ и $\sphericalangle APO=\sphericalangle BPO$. Дакле је и $\sphericalangle AOP=\sphericalangle BOP$. Но то су два напоредна угла јер имају крак OP заједнички а краци AO и OB сачињавају праву AB; дакле то су према дефиницији 23.1 два права угла и према томе по дефиницији 23.3 права AB је управна на правој a. Та управна права пролази кроз A.

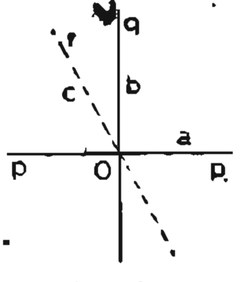
Докажимо да је AO једина управна на правој a и која пролази кроз тачку A. Нека је AC ма која управна, која сече праву a у извесној тачки C. Тачке O и C су с исте стране тачке P или нису. Ако нису, можемо изабрати на a за P такву тачку да буду O и C с исте стране те тачке P.

Одредимо на AC тачку D с оне стране тачке C с које није A, тако да је $AC=DC$. Троугли ACP и DCP су подударни, јер како је $\sphericalangle ACP$ прав угао, $\sphericalangle DCP$ њему напоредан угао, ови углови су једнаки, затим је $AC=DC$ и $PC=PC$, па је и $AP=DP$ и $\sphericalangle APC=\sphericalangle DPC$. Но имамо $\sphericalangle APC= =\sphericalangle BPC$, дакле према теореми 21.3 је $\sphericalangle BPC=\sphericalangle DPC$. Али то су два угла са заједничким краком PC и с исте стране праве a, дакле према теореми 21.2 краци PB и PD се поклапају. Према томе тачка D је на краку PB. Но $AP=BP$ и $AP=DP$, дакле $BP=DP$, тј. тачка D се поклапа с B и према томе права AD се поклапа с правом AB, тј. AB је једина управна на правој a и која пролази кроз A.

Теорема 23.6. *Прав угао постоји.*

Доказ. Према теореми 23.5 кроз тачку изван једне праве пролази права која је на њој управна, дакле која према дефиницији 23.3 образује с првом правом прав угао. Дакле прав угао постоји.

Теорема 23.7. *Кроз сваку тачку на једној правој пролази у равни која садржи ту праву једна и само једна права која је управна на првој правој.*



Сл. 180

Доказ. Нека је то (сл. 180) тачка O праве a у равни α и нека су p и p_1 полуправе праве a, којима је почетак O. Према теореми 23.4 постоји прав угао $\sphericalangle mn$, а према теореми 21.2 постоји у равни α, с дате стране праве a полуправа q тако да је угао $\sphericalangle pq$ једнак углу $\sphericalangle mn$. Дакле, према теореми 23.3 и угао $\sphericalangle pq$ је прав. Према дефиницији 23.3 права b којој q припада, управна је на правој a. Сем тога садржи тачку O. Докажимо да је права b једина права која пролази кроз O и управна је на a.

Кад би, наиме, c била још једна управна права у α, која пролази кроз тачку O на правој a, нека је r полуправа те праве, с исте стране праве a с које је q. И угао $\sphericalangle pr$ је прав угао, дакле $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ су два права угла и према теореми 23.2 једнаки су међу собом. Но оба њихова крака q и r су с исте стране праве a, дакле према теореми 21.2 истоветни су, супротно претпоставци да су b и c две разне праве. Дакле b је једина права управна на правој a и која у равни α пролази кроз тачку O.

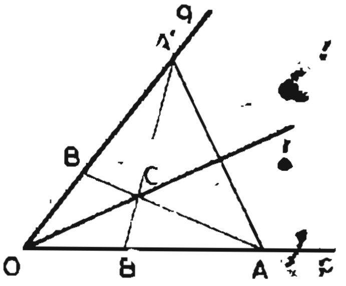
3. Помоћу управних правих можемо доказати да свака дуж има једно одређено средиште и сваки угао једну одређену полуправу која га полови, тј. располовницу. Уз то доказумо три теореме о једнакокраком троуглу, а претходно дајемо дефиниције.

Дефиниција 23.4. Ако је C тачка дужи AB, таква да је $AC=BC$, кажемо да тачка C полови (располовљује) дуж AB. Тачка C се назива средиште дужи AB.

Дефиниција 23.5. Ако је r полуправа садржана у извесном углу $\sphericalangle pq$, полазећи из његова темена, и ако су удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle qr$ два једнака угла, каже се да полуправа r *полови* (располовљује) угао $\sphericalangle pq$. Полуправа r се назива *располовница* (бисектриса) угла $\sphericalangle pq$.

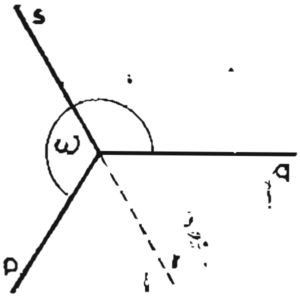
Теорема 23.8. *Сваки угао има располовницу.*

Доказ. Нека је φ ма који угао с крацима p и q и с теменом O. По дефиницијама 12.1 и 12.2 угао φ је удубљен, испупчен или опружен. Нека је прво φ удубљен угао A и B две тачке на краку p, тако да је напр. B између O и A, и нека је A' тачка на краку q тако да је $OA=OA'$. Према теореми 20.8 постоји између O и A' тачка B' тако да је $OB=OB'$, $AB=A'B'$ (сл. 181). Дакле права AB' сече страницу OA' а не сече страницу OB троугла $OA'B$ и према теореми 7.12 сече страницу $A'B$ у некој тачки C, тј. имамо $A'-C-B$. Исто тако имамо $A-C-B'$. Према теореми 12 C је у углу $\sphericalangle pq$. Нека је r полуправа с исходиштем O и која пролази кроз C.



Сл. 181

Троугао OAA' је једнакокрак, јер је $OA=OA'$, дакле према теореми 22.8 је $\sphericalangle OAA'=\sphericalangle OA'A$. Троугли OAB' и $OA'B$ су подударни, јер је $OA=OA'$, $OB'=OB$, $\sphericalangle AOB'=\sphericalangle A'OB$, дакле је и $\sphericalangle OAB'=\sphericalangle OA'B$, па како је $\sphericalangle OAA'=\sphericalangle OA'A$ а ова два угла садрже претходна два угла, то је према теореми 21.8 $\sphericalangle B'AA'=\sphericalangle BA'A$. Дакле према теореми 22.9 троугао $A'AC$ је једнакокрак, тј. $AC=A'C$. Напослетку, троугли OAC и $OA'C$ су подударни, јер је $AC=AC$, $OA=OA'$ и $\sphericalangle OAC=\sphericalangle OA'C$, дакле је и $\sphericalangle AOC=\sphericalangle A'OC$, тј. $\sphericalangle pr=\sphericalangle qr$, дакле r је располовница угла $\sphericalangle pq$.



Сл. 182

Ако је ω испупчен угао с крацима p и q (сл. 182), према петходноме удубљени угао $\sphericalangle pq$ има своју располовницу r. Нека је полуправа s продужење полуправе r. Како су тачке полуправих r и s према дефиницији 10.2 с разних страна темена O, једне су према теореми 11.10 у угаоној линији pq, друге ван ње, па како је r у pq, s је ван pq, тј. у испупченом углу ω. Но удубљени углови $\sphericalangle pr$ и $\sphericalangle ps$ су два напоредна угла, исто тако и удубљени углови $\sphericalangle qr$ и $\sphericalangle qs$, па како је $\sphericalangle pr=\sphericalangle qr$, према теореми 21.7 је и $\sphericalangle ps=\sphericalangle qs$. Дакле s је располовница угла ω.

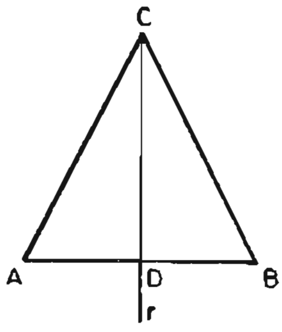
Ако је, најзад, угао ω опружен нека је n полуправа која полази из темена O и управна је на његовим крацима. Прави углови $\sphericalangle pn$ и $\sphericalangle qn$ су према теореми 23.2 једнаки, дакле n је располовница опруженог угла ω.

Тиме је доказано да сваки угао има располовницу·

Докажимо сада три теореме о једнакокраким троуглима.

Теорема 23.9. *Располовница угла при врху једнакокраког троугла полови основицу и управна је на њој.*

Доказ. Располовница r угла $\sphericalangle ACB$ при врху једнакокраког троугла ABC сече, према теороми 11.7 основицу AB у извесној тачки D (сл. 183). Троугли ACD и BCD су подударни, јер је $AC=BC$, $CD=CD$, $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCD$, дакле је $AD=BD$, тј. r полови основицу AB. Из подударности троуглова ACD и BCD следује и да је $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDC$, па како су то два напоредна угла, угао $\sphericalangle ADC$ је прав, дакле r је управна на AB.



Сл. 183

Теорема 23.10. *Права која спаја врх једнакокраког троугла са средиштем његове основице, управна је на основици и полови угао при врху.*

Доказ. Нека је то једнакокраки троугао ABC (сл. 183), AB основица D средиште основице. Дакле имамо: $AC=BC$, $AD=BD$ и према теореми 22.8 $\sphericalangle A=\sphericalangle B$. Дакле према теореми 22.5 троугли ACD и BCD су подударни, те је $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCD$, тј. CD је располовница угла $\sphericalangle ACB$. Сем тога је $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDC$, па како су то два напоредна угла, то су по дефиницији 23.1 два права угла, тј. CD је управна на AB.

Теорема 23.11. *Управна спуштена из врха једнакокраког троугла на његову основицу, полови основицу и угао троугла при врху.*

Доказ. Задржавамо исто обележавање. Троугли ACD и BCD су подударни, јер је $AC=BC$, $CD=CD$ и $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDC$, као прави углови, а отуд је и $AD=BD$. Дакле, према теореми 23.10 права CD полови и угао $\sphericalangle ACB$.

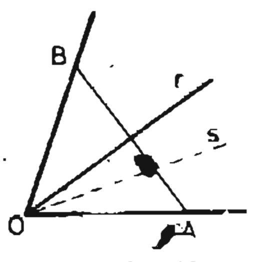
Теорема 23.12. *Сваки угао има само једну располовницу.*

Доквз. Нека су на крацима удубљеног угла $\sphericalangle AOB$ тачке A и B такве да је $OA=OB$ (сл. 184). Кад би тај угао имао две располовнице, r и s, морале би према теореми 23.9 обе бити управне на правој AB, а то је према теореми 23.5 немогуће. Дакле, удубљен угао има само једну располовницу.

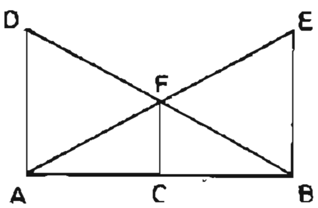
Располовница испупченог угла је продужење располовнице удубљеног угла који има исте краке, па како једна полуправа има само једно продужење, и испупчен угао има само једну располовницу. Најзад, према теореми 23.7 и сваки опружен угао има само једну располовницу.

Теорема 23.13. *Свака дуж има средиште.*

Доказ. Нека је AB дуж и нека су AD и BE управне на AB у тачкама A и B. Изаберимо тачке D и E с исте стране праве AB и то тако да је $AD=BE$. Праве AD и BE се не секу, јер кад би се секле, биле би то две управне на AB из једне



Сл. 184



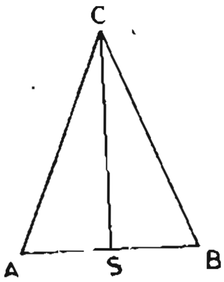
Сл. 185

исте тачке, а то је према теореми 23. 5 немогуће. Према томе тачка E је с оне стране праве AD с које је тачка B, па како је и с оне стране праве AB с које је D, тачка E је према теореми 12.2 у правом углу $\sphericalangle BAD$. Дакле и цела полуправа AE је том углу, те према теореми 11.7 сече удж BD у узвесној тачки F.

Троугли ABD и BAE су подударни, јер је $AB=BA$, $AD=BE$ и $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABE$, дакле је и $\sphericalangle ABD=\sphericalangle BAE$. Према томе троугао ABF је према теореми 29.2 једнакокрак и $AF=BF$. Према теореми 23.8 постоји располовница његовог угла $\sphericalangle AFB$, а према теореми 23.9 та располовница полови дуж AB у извесној тачки C, која је средиште те дужи.

Теорема 23.14. *Свака дуж има само једно средиште.*

Доказ. Нека је дата дуж AB. Према теореми 23.13 та дуж има бар једно средиште, рецимо S, и нека је C тачка ван праве AB, на управној подигнутој из S на AB (сл. 186). Троугли ACS и BCS су подударни, јер је $AS=BS$, $CS=CS$, $\sphericalangle ASC=\sphericalangle BSC$, дакле је и $AC=BC$, тј. троугао ABC је једнакокрак. Кад би дуж AB имала још једно средиште T, према теореми 23.10 би и праве CS и CT обе биле управне на AB, а то је према теореми 23.5 немогуће. Дакле S је једино средиште дужи AB.

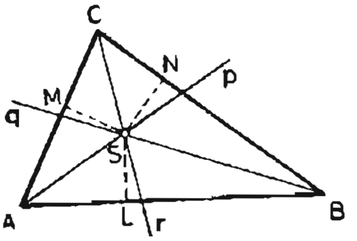


Сл. 186

4. Докажимо најзад теорему о располовницама трију углова једног троугла.

Теорема 23.15. *Располовнице трију углова једног троугла секу се у једној тачки. Управне дужи спуштене из те тачке на све три странице тог троугла једнаке су међу собом.*

Доказ. Нека су p, q, r редом располовнице углова $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ троугла ABC (сл. 187). Како је према дефиницији 23.5 располовница садржана у углу који полови, полуправа p је у углу $\sphericalangle BAC$, дакле према теореми 11.7 сече у извесној тачки A_1 дуж BC, која спаја тачке B и C с крацима тог угла. Исто тако је полуправа q у углу $\sphericalangle ABC$, дакле сече у извесној тачки S дуж AA_1 која спаја тачке A и A_1 на крацима овог угла. Како је A_1 на полуправој p а $A-S-A_1$, и тачка S је на полуправој p, дакле је на обема располовницама p и q.



Сл. 187

Нека су SL и SM управне дужи спуштене из тачке S редом на краке AB и AC угла $\sphericalangle BAC$. Правоугли троугли ALS и AMS су подударни, јер им је страница AS заједничка а углови $\sphericalangle LAS$ и $\sphericalangle MAS$ једнаки, дакле имамо и $SL=SM$.

Нека је SN управна дуж спуштена из тачке S на крак BC угла ABC. Како је дуж SL управна на краку BA тог угла, такође је $SL=SN$. Отуд је и $SM=SN$.

Троугли CMS и CNS су правоугли, јер су им дужи SM и SN управне на крацима угла $\sphericalangle ACB$. Како им је страница CS заједничка, а странице SM и SN једнаке, ти троугли су подударни. Отуд је $\sphericalangle MCS=\sphericalangle NCS$, тј. полуправа CS је располовница угла ACB, дакле истоветна је с r. Према томе све три располовнице p, q, r, секу се у једној тачки S.

24. УПРАВНОСТ ПРАВИХ И РАВНИ У ПРОСТОРУ.

1. О сечењу праве и равни (продирању праве кроз раван) и сечењу двеју равни било је говора већ у § 8. Сада је реч о правим које су управне на равнима и те узајамно управним равнима. Прво дефинишимо управност праве и равни.

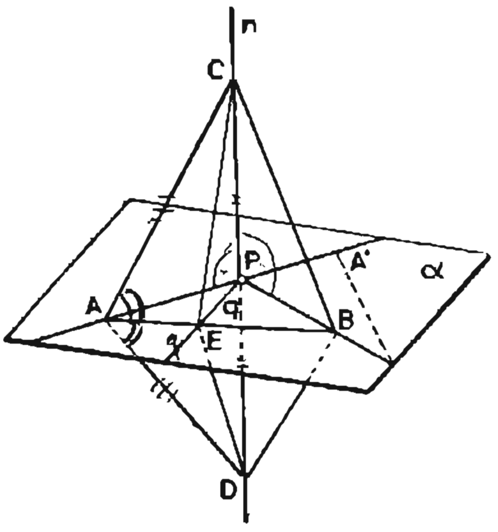
Дефиниција 24.1. Ако права, полуправа или дуж има тачку заједничку с једном равни и управна је на свим правим те равни које пролазе кроз ту заједничку тачку рећи ћемо да је та права, полуправа или дуж *управна* или *нормална* на тој равни, или да је та раван *управна* на тој правој, полуправој или дужи. Тачку продора називамо често и *подножјем.*

Ако права, полуправа или дуж продире кроз раван а није на њој управна рећи ћемо да је спрам те равни *коса.*

У тој дефиницији захтева се за управну праву више него што је неопходно да би била управна на равни. Постоји, наиме, следећа теорема, за коју је доказ дао Cauchy (1789–1857):

шиј(ћ **Теорема** 24.1. *Права која продире кроз раван и управна је на двема правим те равни, које пролазе кроз тачку продора, управна је на тој равни.*

Доказ. Нека је n права која продире кроз раван α у тачки P, управна на двема правим AP и BP равни α и нека је A' тачка на AP таква да је $A-P-A'$ (сл. 188). Ма која права q у равни α, која пролази кроз P и није истоветна са AP и BP, сече према теореми 7.12 дуж AB или дуж $A'B$. Претпоставимо прво да права q сече дуж AB у некој тачки E и докажимо да је права q управна на n.



Сл. 188

Нека су C и D тачке на n, различите од P, такве да је $C-P-D$ и $CP=DP$. Тада су троугли APC и APD подударни, јер је $AP=AP$, $CP=DP$, а углови $\sphericalangle APC$ и $\sphericalangle APD$ су једнаки, као два угла од којих је један прав а други њему напоредан, дакле такође прав. Отуд је и $AC=AD$. Исто тако следује из подударности троуглова BPC и BPD да је $BC=BD$.

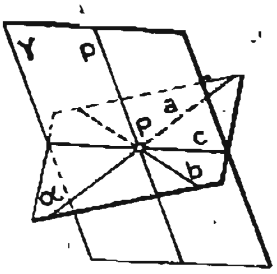
Дакле троугли ABC и ABD су подударни, јер је $AC=AD$, $BC=BD$, $AB=AB$. Према томе је $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BAD$, па како је $AC=AD$, $AE=AE$, троугли ACE и ADE су такође подударни и према томе је $CE=DE$.

Из $CE=DE$, $CP=DP$, $EP=EP$ следује да су и троугли CPE и DPE подударни и према томе је $\sphericalangle CPE=\sphericalangle DPE$. Али ово су два напоредна угла, дакле оба су права, тј. права q је управна на правој n.

Тиме је доказано да свака права у α, која сече дуж AB, стоји управно на n. Исто тако се доказује да је и свака права у α, која сече дуж $A'B$, управна на n. Дакле, све праве у α, које пролазе кроз P управне су на n.

Теорема 24.2. *Све праве које су управне на једној правој, у једној њеној тачки, припадају једној равни. Та раван је у тој тачки управна на тој правој.*

Доказ. Нека су a, b, c три ма које праве које су у тачки P праве p управне на p (сл. 189) и нека је α раван одређена правим a и b. Докажимо да права c припада равни α. Праве p и c одређују извесну раван γ. Кад права c не би припадала равни α, разликовала би се од пресека равни α и γ; тај пресек би био нека друга права c'. Будући да је права p управна на a и b, према теореми 24.1 била би и права c' управна на p, дакле би у равни γ постојале две управне c и c' на p у истој тачки P. Ово је према теореми 23.7 немогуће, дакле права c припада равни α и према томе све праве које су у тачки P управне на p припадају једној равни, управној на p.

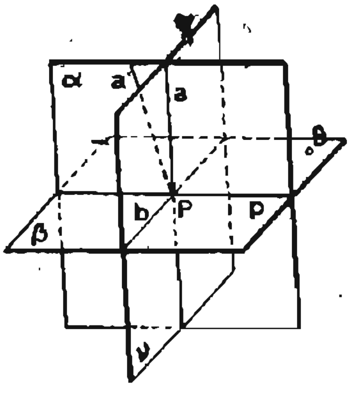


Сл. 189

О управности праве и равни основан значај имају и следеће четири теореме.

Теорема 24.3. *Кроз сваку тачку једне праве пролази једна и само једна раван која је управна на тој правој.*

Доказ. Нека је P тачка праве p. Докажимо прво да постоји раван управна на p и која пролази кроз P (сл. 190). Према теореми 6.6 постоји тачка A ван праве p. Нека је α раван која садржи тачку A и праву p. Према теореми 8.1 постоји тачка B ван равни α. Нека је β раван која садржи тачку B и праву p. Према теореми 23.7 у равни α постоји права a која пролази кроз тачку P и управна је на правој p. Исто тако постоји у β права b која пролази кроз P и управна је на p. Праве a, b и p секу се у тачки P. Нека је ν раван правих a и b. Како је права p управна у тачки P на правим a и b, управна је на равни ν. Дакле ν је раван која је управна на p и пролази кроз тачку P.



Сл. 190

Докажимо да је ν једина таква раван. Кад би, напротив, постојала још једна таква раван ν', равни ν и ν' би се секле према теореми 8.4 по једној правој која пролази кроз тачку P. Како та права не може бити у обема равнима α и β, претпоставимо да није у α, дакле да се равни α и ν' секу по извесној правој a' која није истоветна с a. Како је раван ν' управна на p, управна је према дефиницији 24.1 на правој a', дакле према теореми 24.2 припада равни ν, тј. ν и ν' секу се по правој a', противно претпоставци. Према томе не постоји раван ν' различита од ν и који би у тачки P била управна на p. — Тиме је цела теорема доказана.

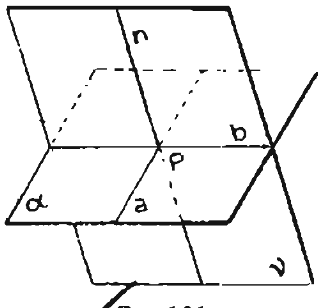
Теорема 24.4. *Кроз сваку тачку ван дате праве пролази једна и само једна раван која је управна на тој правој.*

Доказ. Нека је Q тачка ван дате праве p. У равни која садржи тачку Q и праву p постоји према теореми 23.5 једна и само једна права која је управна на p. Нека је P њен пресек са p. Према теореми 24.3 постоји раван ν која је управна на p и пролази кроз P. Та раван садржи према дефиницији 23.1 праву PQ, дакле тачку Q. Према томе ν је раван која пролази кроз дату тачку Q и управна је на датој правој p.

Кад би постојала и раван ξ, различита од ν, која пролази кроз Q и управна је на p, нека је X њен пресек с p. По дефиницији 24.1 права XQ би била управна на p, дакле PQ и XQ биле би две разне праве које пролазе кроз Q и управне су на p, а то је према теореми 23:7 немогуће. Дакле ν је једина таква раван, управна на правој p.

Теорема 24.5. *Кроз сваку тачку у датој равни пролази једна и само једна права која је управна на тој равни.*

Нека је P тачка у равни α (сл. 191). Докажимо да постоји права која пролази кроз P и управна је на α. — Нека је a која било права у равни и која садржи тачку P. Према теореми 24.3 постоји раван ν која пролази кроз P и управна је на правој a. Нека је b права по којој се секу равни α и ν, а у равни ν нека је n права која пролази кроз P и управна је на правој b. Како је права n у равни ν, према дефиницији 24.1 управна је и на правој a, дакле управна је на равни α, тј. n је права која пролази кроз тачку P и управна је на равни α.



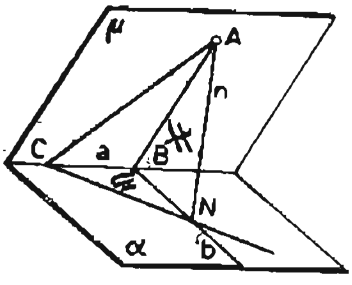
Сл. 191

Докажимо да је n једина таква права. Кад би, напротив, постојала још једна таква права n', праве n и n' би се секле у тачки P и припадале би једној равни σ, која би се секла са равни α по извесној правој s. Праве n и n' биле би у σ према дефиницији 24.1 обе управне на правој s, а то је према теореми 23.7 немогуће. Према томе не постоји права n' различита од n и која би у тачки P била управна на α. — Тиме је цела теорема доказана.

Теорема 24.6. *Кроз сваку тачку ван дате равни пролази једна и само једна права која је управна на тој равни.*

Доказ. Нека је A тачка изван дате равни α, затим a ма која права у α, а μ раван која садржи тачку A и праву a (сл. 192). Према теореми 23.5 постоји у равни μ права која пролази кроз тачку A и управна је на правој a. Нека је тачка B пресек те управне праве с правом a. Затим према теореми 23.7 нека је b у равни α права која пролази кроз B и управна је на a. Праве AB и b секу се у B и одређују раван. Нека је према теореми 23.5 n права у тој равни која пролази кроз тачку A и управна је на правој b, а N тачка продора праве n кроз раван α. Докажимо да је раван n управна на равни α.

Према аксиоми III 1 постоји на правој a тачка C тако да су дужи BC и AN једнаке. Тада су троугли ABN и CNB подударни, јер странице AN и BC су једнаке, BN је заједничка, а захваћени углови $\sphericalangle ANB$ и $\sphericalangle CBN$ су једнаки, јер су оба угла права, а прави углови су према теореми 23.2 једнаки. Дакле, отуд је и $AB \doteq CN$.



Сл. 192

И троугли ABC и CNA су подударни, јер је $AB = CN$, $BC = AN$, а страница AC је заједничка. Дакле и углови $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ANC$ су једнаки. Но угао $\sphericalangle ABC$ је прав, дакле и угао $\sphericalangle ANC$ је прав, тј. права n је управна на правој CN.

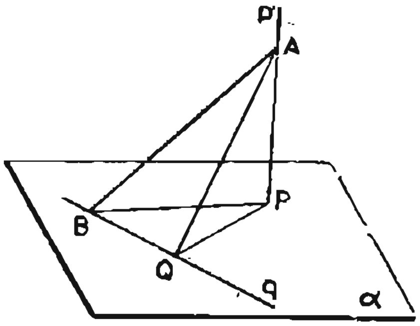
Како је права n управна на двема правим BC и CN равни α, која пролази кроз њено подножје N права n је по теореми 24.1 управна на равни α.

Докажимо да је n једина права управна на α и која пролази кроз A. Кад би, напротив, постојала још једна таква управна n', праве n и n' би припадале једној равни σ, која би секла раван α по извесној правој [illegible] а n и n' биле би две разне праве управне на s и које пролазе кроз тач[illegible] A. Како је ово према теореми 23.5 немогуће, n је једина права која пролази кроз A и управна је на α'. — Тиме је доказ завршен.

Следећа теорема позната је као теорема о трима нормалама.

Теорема 24.7. *Ако је права* p *управна на равни* α *у тачки* P *њеног продора и ако је* Q *подножје управне из* P *на неку праву* q *у* α, *која не пролази кроз* P, *тада је и права што спаја ма коју тачку праве* p *с тачком* Q *управна на* q.

Доказ. Нека је A тачка на правој p, различита од тачке P, затим B тачка на q, таква да је $BQ=AP$ (сл. 193). Онда је троугао APQ подударан троуглу BQP, јер је $AP=BQ$, $PQ=QP$ и $\sphericalangle APQ=\sphericalangle BQP$, дакле је и $AQ=BP$. Према томе је и троугао ABP подударан троуглу BAQ, јер је $AB=BA$, $BP=AQ$, $AP=BQ$. Дакле је и $\sphericalangle APB=\sphericalangle BQA$, па како је $\sphericalangle APB$ прав угао, и угао $\sphericalangle BQA$ је прав, тј. и права AQ је управна на q.

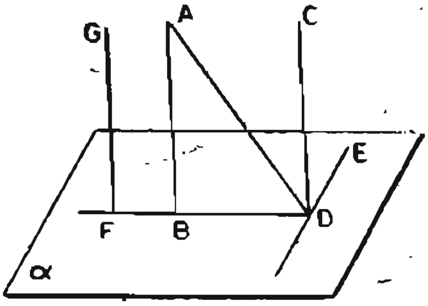


Сл. 193

2. Прелазимо сада на посматрање међу собом управних равни.

Теорема 24.8. *Две разне праве управне на некој равни припадају обе једној истој равни.*

Доказ. Нека су AB и CD две управне на равни α у тачкама B и D те равни и нека је у α DE управна на BD (сл. 194). Тада је према теореми 24.7 права AD управна на DE, тј. угао $\sphericalangle ADE$ је прав. Све три праве DA, DB, DC су дакле управне на DE, те према теореми 24.2 припадају једној равни β. Како су A и B тачке у равни β, припада и права AB равни β, дакле управне AB и CD припадају једној истој равни.



Сл. 194

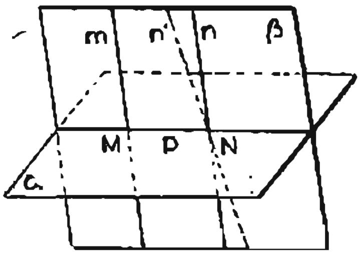
Теорема 24.9. *Све праве које су управне на једној равни и пролазе кроз тачке на једној њеној правој, припадају једној равни.*

Доказ. Нека је p права у равни α и нека је m права управна на α и која пролази кроз извесну тачку M праве p. Праве m и p одређују извесну раван β.

Нека је n права управна на α и која пролази кроз ма коју другу тачку N праве p. Према теореми 24.8 праве n и m припадају једној равни, дакле равни правих m и p, тј. равни β. Према томе све праве управне на α и које пролазе кроз тачку праве p, управне су на α.

Докажимо сад теорему која је у извесном смислу обрнута претходној.

Теорема 24.10. *Ако су* α *и* β *две равни тако да раван* β *садржи једну праву управну на равни* α, *тада је свака права у равни* β, *која је управна на пресеку обеју равни* α *и* β *управна и на равни* α.



Сл. 195

Доказ. Нека је m права садржана у равни β и која је управна на α, затим p пресек равни α и β и нека је n ма која друга права у β, која је управна на p (сл. 195). Докажимо да је права n управна такође на равни α.

Нека је N тачка у којој се праве n и p секу. Ако права n не би била управна на α, кроз тачку N би пролазила друга права n', која би била управна на α. Према теореми 24.8 права n' би припадала равни која садржи праву m и тачку N, тј. равни β. Како и n припада равни β, биле би n и n' две разне праве у β, које су управне на правој p и пролазиле би кроз тачку N. То је према теореми 23.5 немогуће, дакле права n је управна на α. — Тиме је ова теорема доказана.

Претходне теореме оправдавају следећу дефиницију:

Дефиниција 24.2. Ако се две равни секу тако да свака права, која је управна на њихову пресеку, а садржана је у једној од тих равни, управна и на другој равни, рећи ћемо да су те две равни *управне* једна на другој.

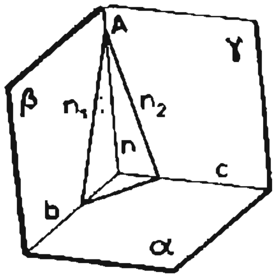
Теорема 24.11. *Раван која садржи једну праву управну на једној равни, управна је на тој равни.*

Доказ. Нека је m права управна на равни α и нека је β ма која раван која садржи праву m (сл. 195). Ако је p пресек обеју равни, а n ма која права у равни β, која је управна на правој p, према теореми 24.10 права n је управна и на равни α, дакле према дефиницији 24.2 раван β је управна на равни α.

Значајна је и следећа теорема:

Теорема 24.12. *Ако су две равни које се секу, управне на трећој равни, управан је и њихов пресек на тој трећој равни.*

Доказ. Нека су β и γ (сл. 196) управне на равни α и нека секу α по правим b и c, а нека се узајамно секу по правој n. Кад права n не би била управна на α, она услед теореме 24.1 не би била управна на оба пресека b и c. Дакле ако је n_1 управна у равни β на правој b и која пролази кроз A, а n_2 управна у γ на правој c и која пролази кроз A, бар једна од тих управних била би различита од n, дакле n_1 и n_2 биле би две разне праве. Дакле права n је управна на α.

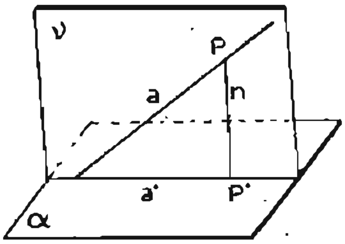


Сл. 196

Теорема 24.13. *Ако је α која било раван и a која било права, која није управна на равни α, постоји једна и само једна раван која садржи праву a и управна је на равни α.*

Доказ. Нека је P која било тачка праве a (у равни α или ван α), затим n права која пролази кроз P и управна је на α (сл. 197). Како су a и n две разне праве, оне одређују раван ν која је према теореми 24.11 управна на α, јер садржи праву n, управну на α.

Кад би постојала још једна раван ν', која би садржала праву p и била управна на α, према теореми 24.12 равни ν и ν' би се секле по правој управној на равни α, тј. права p би била управна на α, супротно претпоставци. Дакле ν је једина раван која задовољава услове теореме.



Сл. 197

3. Додајмо неколико података о управној (нормалној) пројекцији на једну раван.

Дефиниција 24.3. Подножје управне спуштене из тачке A на раван називамо *управном (нормалном) пројекцијом* тачке A на раван α.

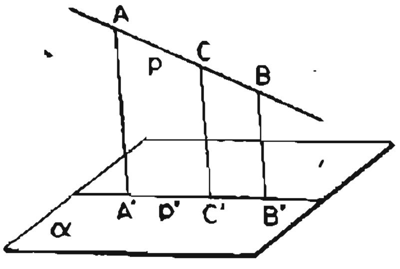
Ако права a није управна на равни α, праву по којој раван, која садржи праву a и управна је на α, сече раван α називамо *управном (нормалном) пројекцијом* праве a на раван α.

Уопште, лик који се састоји из управне пројекције ма каквог лика Ω на раван α називамо *управном (нормалном) пројекцијом* лика Ω на раван α.

О управним пројекцијама доносимо само једну теорему:

Теорема 24.14. *Управне пројекције тачака једне праве јесу на управној пројекцији те праве.*

Доказ. Нека је A тачка на правој p, затим A' управна пројекција тачке A и p' пројекција праве p (сл. 198). Како је права AA' управна на α, и раван која садржи праву p и тачку A' управна је на α, дакле то је раван која садржи праву p'. Према томе пројекција A' је на пројекцији p'.



Сл. 198

25. УПОРЕЂИВАЊЕ ДУЖИ И УГЛОВА ПО ВЕЛИЧИНИ.

1. Ако све тачке дужи a припадају дужи b, кажемо, другим речима да дуж a припада дужи b или да је део дужи b, или да је садржана на дужи b. Ако све тачке угла α припадају углу β, а темена су им заједничка, кажемо исто тако да угао α припада углу β или да је део угла β, или пак да је садржан у углу β.

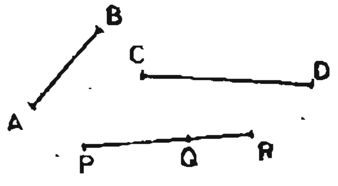
Но у геометрији је потребно упоређивање дужи међу собом и углова међу собом и онда кад нису садржани једни у другима. Уколико две дужи или два угла нису подударни, потребни постају појмови означени речима „веће“ и „мање“.

Шта значи да је једна дуж већа од друге дужи или да је један угао мањи од другог угла треба прво дефинисати. Речи „веће“ и „мање“ означују тада извесне геометријске односе. Те речи се употребљавају и у аритметици и онде претстављају аритметичке појмове. Сад је реч о геометријским појмовима „веће“ и „мање“. Пошто ће на темељу следећих дефиниција дужи и углови тек добити особину да буду већи или мањи, постаће тек сад величине: геометријске величине.

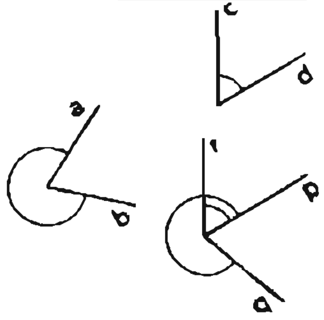
Постављамо ове две дефиниције:

Дефиниција 25.1. Ако је тачка Q између тачака P и R (сл. 199) и ако су AB и CD две дужи тако да је $AB=PQ$ и $CD=PR$ кажемо да је дуж AB *мања* или *краћа* од дужи CD или да је дуж CD *већа* или *дужа* од дужи AB. Знацима:

$$AB<CD, \quad CD>AB.$$



Сл. 199



Сл. 200

Дефиниција 25.2. Ако су p, q, r три полуправе са заједничким почетком, $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ два угла са крацима p, q, r, угао $\sphericalangle pq$ садржан у углу $\sphericalangle pr$ (сл. 200) и ако су $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ ма која два угла тако да је $\sphericalangle ab = \sphericalangle pq$, $\sphericalangle cd = \sphericalangle pr$, кажемо да је угао $\sphericalangle ab$ *мањи* од угла $\sphericalangle cd$ или да је угао $\sphericalangle cd$ *већи* од угла $\sphericalangle ab$. Знацима:

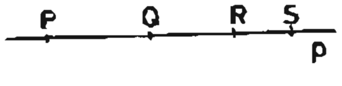
$$\sphericalangle ab < \sphericalangle cd, \quad \sphericalangle cd > \sphericalangle ab.$$

2. Докажимо неколико најосновнијих теорема о упоређивању дужи и углова по величини. Прва теорема следује непосредно из дефиниције 25.1.

Теорема 25.1. *Ако је тачка* B *између тачака* A *и* C *имамо* AB<AC.

Теорема 25.2. *Какве год биле две дужи* AB *и* CD, *увек постоји један и само један од три односа:* AB=CD, AB<CD, AB>CD.

Доказ. Изаберимо на некој правој p прво тачку P (сл. 201), затим одредимо према аксиоми III 1 другу тачку Q тако да је $AB = PQ$, затим с исте стране тачке P одредимо тачку R тако да је $CD = PR$. Како су тачке Q и R с исте стране тачке P, оне су према дефиницији 10.1 истоветне, или је $P-Q-R$ или $P-R-Q$. Ова три случаја се узајамно искључују. Према теореми 20.1 у првом случају је $AB = CD$, према дефиницији 25.1 у другом случају је $AB < CD$, а у трећем $AB > CD$.



Сл. 201

Теорема 25.3. *Ако је* AB<CD *и ако је* CD=EF *или* CD<EF, *тада је* AB<EF.

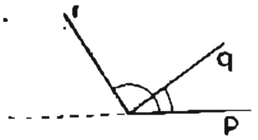
Доказ. Изаберимо на некој правој p прво тачку P (сл. 201) затим Q тако да је $AB = PQ$, затим одредимо с исте стране тачке P тачке R и S тако да је $CD = PR$ и $EF = PS$. Како је $AB < CD$, према дефиницији 25.1 је $P-Q-R$. Ако је $CD = EF$, према теореми 20.6 су R и S једна иста тачка, дакле имамо $P-Q-S$, тј. према дефиницији 25.1 $AB < EF$. Ако је $CD < EF$, према дефиницији 25.1 је $P-R-S$, дакле према теореми 6.11 је $P-Q-S$, тј. $AB < EF$.

Теорема 25.4. *Ако је* AB>CD *и ако је* CD = EF *или* CD>EF, *тада је* AB>EF.

Доказ. Изаберимо опет P и Q тако да је $AB = PQ$, затим одредимо с оне стране тачке P с које је Q тачке R и S тако да је $CD = PR$ и $EF = PS$. Како је $AB > CD$, према дефиницији 25.1 је $P-R-Q$. Ако је $CD = EF$, према теореми 20.6 су R и S једна иста тачка, дакле је и $P-S-Q$, тј. $AB > EF$. Ако је $CD > EF$ према дефиницији 25.1 је $P-S-R$, дакле према теореми 6.14 је $P-S-Q$, тј. $AB > EF$.

3. Из дефиниције 25.2 следује непосредно ова теорема о угловима:

Теорема 25.5. *Ако је угао* $\sphericalangle$pq *садржан у углу* $\sphericalangle$pr *а при томе су* q *и* r *две разне полуправе, имамо* $\sphericalangle$pq < $\sphericalangle$pr.



Сл. 202

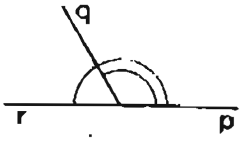
Теорема 25.6. *Каква год била два угла* $\sphericalangle$ab *и* $\sphericalangle$cd, *увек постоји један и само један од три односа:* $\sphericalangle$ab = $\sphericalangle$cd, $\sphericalangle$ab < $\sphericalangle$cd, $\sphericalangle$ab > $\sphericalangle$cd.

Доказ. Изаберимо у некој равни α прво полуправу p, затим према теореми 21.2 крак q тако да је $\sphericalangle ab = \sphericalangle pq$, затим одредимо крак r тако да је $\sphericalangle cd = \sphericalangle pr$, и да буде угао $\sphericalangle pq$ садржан у углу $\sphericalangle pr$ или $\sphericalangle pr$ у $\sphericalangle pq$. Постоје следећи случаји:

1. $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ су удубљени углови. Тада су q и r с исте стране праве што садржи p (сл. 202). Краци q и r су или истоветни и тада је према теореми 21.4 $\sphericalangle ab = \sphericalangle cd$, или нису, а тада су p и r с исте стране праве

што садржи q или с разних страна . Ако су с исте стране, полуправа r је с оне стране праве што садржи полуправу p с које је q и с оне стране праве што садржи полуправу q с које је p, дакле према теореми 12.2 r је у углу $\sphericalangle pq$ и према томе $\sphericalangle pr$ је у углу $\sphericalangle pq$, дакле према дефиницији 25.2 $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$. Ако су с разних страна, полуправе p и q су с исте стране праве што садржи r, дакле према теореми 12.2 полуправа q је у углу $\sphericalangle pr$ и према томе $\sphericalangle pq$ у $\sphericalangle pr$, тј. $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$.

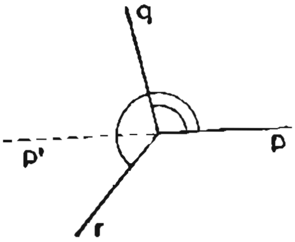
2. Један од углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ је удубљен други опружен. Нека је $\sphericalangle pq$ удубљен, а $\sphericalangle pr$ опружен (сл 203), и нека је полуправа q у углу $\sphericalangle pr$. Тада је $\sphericalangle pq$ садржан у $\sphericalangle pr$, па је $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$. Ако је угао $\sphericalangle pr$ удубљен а угао $\sphericalangle pq$ опружен тада на исти начин долазимо до односа $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$.



Сл. 203

3. Оба угла $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ су опружени, према томе су једнаки, дакле и $\sphericalangle ab = \sphericalangle cd$.

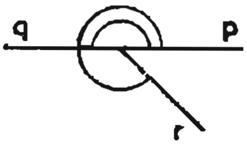
4. Један угао је удубљен, а други испупчен, Ако је $\sphericalangle pq$ удубљен, а $\sphericalangle pr$ испупчен (сл. 204), полуправе q и r су с разних страна праве што садржи полуправу p. Продужење p' полуправе p је у $\sphericalangle pr$, дакле $\sphericalangle pq$ је и $\sphericalangle pp'$ и, тим пре, у углу $\sphericalangle pr$, тј. $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$. Ако је $\sphericalangle pr$ удубљен а $\sphericalangle pq$ испупчен угао имамо $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$.



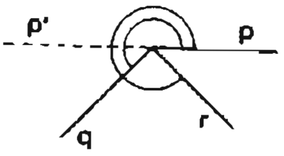
Сл. 204

5. Један угао је опружен, други испупчен . Ако је $\sphericalangle pq$ опружен а $\sphericalangle pr$ испупчен (сл. 205), угао $\sphericalangle pq$ садржи ону полураван која не садржи r. Тада је $\sphericalangle pq$ у углу $\sphericalangle pr$, дакле $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$. Ако је $\sphericalangle pr$ опружен а $\sphericalangle pq$ испупчен угао, имамо $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$.

6. Оба угла су испупчена (сл. 206). Тада су p и r с исте стране праве што садржи полуправу p. Краци q и r су или истоветни, а тада су углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ једнаки, па је $\sphericalangle ab = \sphericalangle cd$, или нису истоветни, а тада су p и r с исте стране праве што садржи полуправу q, или пак с разних страна.



Сл. 205

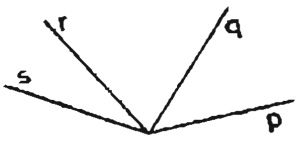


Сл. 206

Ако су с исте стране, полуправа r је тада према теореми 12.2 у удубљеном углу чији краци су p и q, дакле ван угла $\sphericalangle pq$ и како се $\sphericalangle pq$ састоји из углова $\sphericalangle pp'$ и $\sphericalangle p'q$ а $\sphericalangle pr$ из углова $\sphericalangle pp'$ и $\sphericalangle p'r$, полуправа r је ван угла $\sphericalangle pq$, угао $\sphericalangle p'q$ је у $\sphericalangle p'r$ и отуд $\sphericalangle pq$ у углу $\sphericalangle pr$, дакле $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$.

Ако су p и r с разних страна праве што садржи q, полуправа r је у углу $\sphericalangle p'q$, дакле $\sphericalangle pr$ је у $\sphericalangle pq$, тј. $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$.

Дакле, у сваком случају је или $\sphericalangle ab = \sphericalangle cd$, или $\sphericalangle ab < \sphericalangle cd$ или $\sphericalangle ab > \sphericalangle cd$. Ови односи се међу собом искључују, као што се искључују одговарајући односи међу угловима $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$.



Сл. 207

Теорема 25.7. *Ако је* $\sphericalangle \mathrm{ab} < \sphericalangle \mathrm{cd}$ *и ако је* $\sphericalangle \mathrm{cd} = \sphericalangle \mathrm{ef}$ *или* $\sphericalangle \mathrm{cd} < \sphericalangle \mathrm{ef}$, *тада је* $\sphericalangle \mathrm{ab} < \sphericalangle \mathrm{ef}$.

Доказ. Изаберимо у равни α краке p и q тако да је $\sphericalangle ab = \sphericalangle pq$ (сл. 207), затим одредимо крак r тако да је $\sphericalangle ed = \sphericalangle pr$ и да је према дефиницији 25.2 $\sphericalangle pq$ садржан у $\sphericalangle pr$, затим изаберимо крак s тако да је $\sphericalangle ef = \sphericalangle ps$ и да је $\sphericalangle pr$ истоветан с $\sphericalangle ps$ или садржан у $\sphericalangle ps$. У оба случаја је угао $\sphericalangle pq$ садржан у углу $\sphericalangle ps$, дакле према дефиницији 25.2 је $\sphericalangle ab < \sphericalangle ef$.

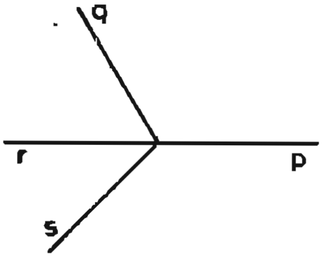
Теорема 25.8. *Ако је* $\sphericalangle \mathrm{ab} > \sphericalangle \mathrm{cd}$ *и ако је* $\sphericalangle \mathrm{cd} = \sphericalangle \mathrm{ef}$ *или* $\sphericalangle \mathrm{cd} > \sphericalangle \mathrm{ef}$, *тада је* $\sphericalangle \mathrm{ab} > \sphericalangle \mathrm{ef}$.

Доказ. Изаберимо полуправе p и q тако да је $\sphericalangle ab = \sphericalangle pq$, затим одредимо крак r тако да је $\sphericalangle cd = \sphericalangle pr$ и да је угао $\sphericalangle pr$ садржан у углу $\sphericalangle pq$, затим крак s тако да је $\sphericalangle ef = \sphericalangle ps$ и да је угао $\sphericalangle ps$ истоветан с углом $\sphericalangle pr$ или садржан у углу $\sphericalangle pr$. У оба случаја је угао $\sphericalangle ps$ садржан у углу $\sphericalangle pq$, дакле према дефиницији 25.2 је $\sphericalangle ab > \sphericalangle ef$.

4. За испупчене, опружене, удубљене, тупе, праве и оштре углове вреде следеће теореме.

Теорема 25.9. *Удубљен угао мањи је од опруженог угла, а испупчен угао већи је од опруженог угла.*

Доказ. Нека је $\sphericalangle ab$ удубљен угао а $\sphericalangle cd$ који било опружен угао и нека су у равни α углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle pr$ такви да је $\sphericalangle ab = \sphericalangle pq$, $\sphericalangle cd = \sphericalangle pr$ и да $\sphericalangle pr$ садржи полураван у којој је крак q, (сл. 208). Онда је угао $\sphericalangle pq$ садржан у $\sphericalangle pr$, дакле према дефиницији 25.2 је $\sphericalangle ab = \sphericalangle cd$.



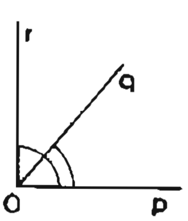
Сл. 208

Нека је $\sphericalangle ef$ испупчен угао, а $\sphericalangle ps$ угао у равни α такав да је $\sphericalangle ef = \sphericalangle ps$ и да опружен угао $\sphericalangle pr$ не садржи полураван у којој је крак s. Тада је према теореми 12.2 крак r ван удубљеног угла $\sphericalangle ps$, дакле у испупченом углу $\sphericalangle ps$, те је угао $\sphericalangle pr$ садржан у испупченом углу $\sphericalangle ps$, тј. $\sphericalangle ef > \sphericalangle cd$.

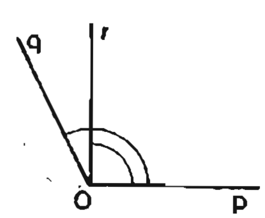
Теорема 25.10. *Сваки оштар угао је мањи од правог угла, а сваки туп угао је већи од правог угла.*

Доказ. Према дефиницији 23.2 крак q оштрог угла $\sphericalangle pq$ је у правом углу $\sphericalangle pr$, коме је крак r с оне стране крака p с које је крак q (сл. 209). Према дефиницији 23.2 прав угао $\sphericalangle pr$ је удубљен, дакле према теореми 25.9 садржи крак q, а отуд садржи и удубљени угао $\sphericalangle pq$. Дакле, према дефиницији 25.2 оштар је мањи од права угла.

Према дефиницији 23.2 крак q тупог угла $\sphericalangle pq$ је ван правог угла $\sphericalangle pr$, коме је крак r с оне стране крака p с које је крак q (сл. 210). Но како су q и r с исте стране крака p, удубљен угао $\sphericalangle pq$, садржи према теореми 12.2 крак r, а отуд садржи према теореми 11.5 и прав угао $\sphericalangle pr$. Дакле, према дефиницији 24.2 туп угао је већи од правог угла.



Сл. 209



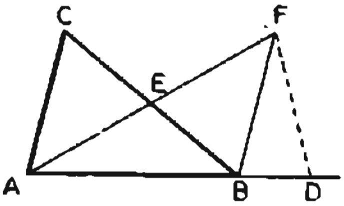
Сл. 210

5. Следеће значајне теореме односе се на троугле.

Теорема 25.11. *Сваки спољашњи угао неког троугла већи је од свакої несуседног угла тог троугла.*

Доказ. Докажимо да је у троуглу ABC (сл. 211) напр. $\sphericalangle CBD > \sphericalangle ACB$. Нека је BD продужење иза тачке B странице AB, која не садржи темена уочених углова. Нека је E средиште дужи BC и нека је на правој

AE, с оне стране тачке E с које није A, тачка F таква да је $AE=EF$. Троугли CAE и BFE су према теореми 22.5 подударни, јер је $AE=FE$, $CE=BE$ и $\sphericalangle CEA=\sphericalangle BEA$, будући да су то унакрсни углови. Отуд је и $\sphericalangle ACB=\sphericalangle CBF$.



Сл. 211

Како је $A-E-F$, тачке E и F су према дефиницији 10.4 с исте стране праве AB. Посматрајмо троугао ADF. Како је $A-E-F$ и $A-B-D$ права BC сече његове две странице, дакле према теореми 7.12 не сече трећу, тј. D и F су с исте стране праве BC. Дакле F је с оне стране праве AD с које је C и с оне стране праве BC с које је D. Отуд је према теореми 12.2 F у углу $\sphericalangle CBD$ и према томе крак BF угла $\sphericalangle CBF$ је у углу $\sphericalangle CBD$, тј. угао $\sphericalangle CBF$ је садржан у углу $\sphericalangle CBD$. Како је $\sphericalangle CBF=\sphericalangle ACB$, према дефиницији 25.2 је $\sphericalangle CBD>\sphericalangle ACB$. Како је $\sphericalangle CBD$ ма који спољашњи угао, а $\sphericalangle ACB$ ма који несуседни унутрашњи угао, теорема је доказана.

Теорема 25.12. *У троуглу може бити само један угао туп или прав, а најмање два угла у троуглу су оштра.*

Доказ. Ако је угао $\sphericalangle A$ троугла ABC туп или прав, према теореми 25.11 његови спољашњи углови при теменима B и C су већи од $\sphericalangle A$, дакле тупи. Према томе, како су унутрашњи углови $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$ напоредни углови одговарајућих спољашњих углова, они су, према теореми 23.4 оштри, тј. троугао ABC има само један туп или прав угао.

На темељу претходне теореме може се изрећи следећа дефиниција:

Дефиниција 25.3. Троугао коме је један угао прав зове се *правоугли троугао*. Страница наспрам правог угла зове се *хипотенуза*, а остале две странице зову се *катете*.

Троугао коме је један угао туп зове се *тупоугли троугао*, а троугао коме су сва три угла оштра зове се *оштроугли троугао*. Оштроугли и тупоугли троугли зову се и *косоугли троугли*.

У § 22 смо доказали три теореме о подударности троуглова. Постоји свега пет теорема о подударности ма каквих троуглова. То су:

1) теорема која претпоставља једнакост свих трију страница (III став о подударности троуглова — наша теорема 22.4),

2) теореме које претпостављају једнакост две странице и једног угла, дакле захваћеног угла (I став о подударности троуглова — наша теорема 22.5), или незахваћеног угла (V став о подударности троуглова),

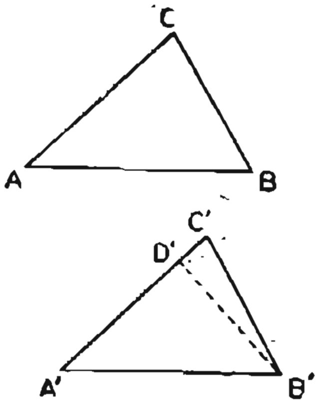
3) теореме које претпостављају једнакост једне странице и два угла, дакле два налегла угла (II став о подударности троуглова — наша теорема 22.6), или једног налеглог и једног наспрамног угла (IV став о подударности троуглова).

То су, очигледно, сви могући случајеви. Докажимо сад IV и V теорему о подударности троуглова.

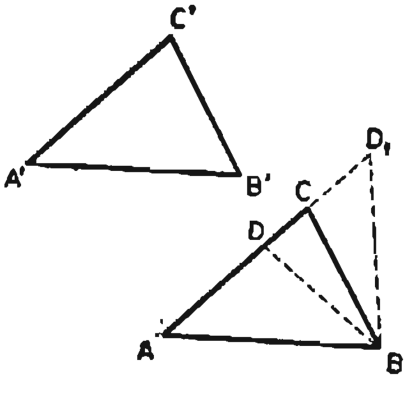
Теорема 25.13. — IV став о подударности троуглова — *Два троугла су подударна ако су једна страница, један налегли угао и наспрамни угао једног троугла једнаки редом једној страници, једном налеглом углу и наспрамном углу другог троугла.*

Доказ. Нека је у троуглима ABC и $A'B'C'$ $AB=A'B'$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$ и $\sphericalangle C=\sphericalangle C'$ (сл. 212).

Претпоставимо да није $AC=A'C'$. Одредимо тада на краку $A'C'$ угла $\sphericalangle A$ тачку D' тако да је $AC=A'D'$. Троугли ABC и $A'B'D'$ су подударни, јер је $AB=A'B'$, $AC=A'D'$ и $\sphericalangle BAC=\sphericalangle B'A'D'$. Дакле имамо $\sphericalangle A'D'B'=\sphericalangle C$. Но $\sphericalangle C=\sphericalangle C'$, дакле $\sphericalangle ACB=\sphericalangle A'D'B'$ и према томе је $\sphericalangle A'C'B'=\sphericalangle A'D'B'$. Но то је према теореми 25.11 немогуће, јер $\sphericalangle A'D'B'$ је спољни угао троугла $B'C'D'$, а $\sphericalangle A'C'B'$ несуседан унутарњи угао истог троугла. Дакле је $AC=A'C'$, па како је и $AB=A'B'$ и $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$ троугли ABC и $A'B'C'$ су према теореми 22.5 подударни.



Сл. 212



Сл. 213

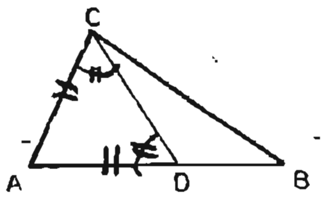
Теорема 25.14 — V став о подударности троуглова. — *Два троугла су подударна ако су две странице и угао насрам једне од њих у једном троуглу редом једнаки двема страницама и углу насрам одговарајуће странице у другом троуглу, и ако је угао насрам друге поменуте странице у другом троуглу оштар, прав или туп, према томе да ли је угао насрам одговарајуће странице прве троугла редом оштар, прав или туп.*

Доказ. Нека је у троуглима ABC и $A'B'C'$ (сл. 213) $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$ и нека су углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C'$ оба оштра, права или тупа. Кад не би било $AC=A'C'$ постојала би, према аксиоми III. 1 на правој AC, с оне стране тачке A с које је C, тачка D тако да је $A'C'=AD$. Тада би према теореми 22.5 троугли ABD и $A'B'C'$ били подударни, јер би било $AB=A'B'$, $AD=A'C'$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$, дакле би било и $\sphericalangle ADB=\sphericalangle C'$ и $BD=B'C'$. Према томе, како је $BC=B'C'$ било би $BC=BD$, дакле би троугао BCD био једнакокрак и према теореми 22.8 $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BDC$.

Како су тачке C и D с исте стране тачке A, према дефиницији 10.1 је $A-D-C$ или $A-C-D$. Ако је $A-D-C$, $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle BDC$ су напоредни углови и према теореми 23.4 један је оштар, други туп или су оба права. Ако је $A-C-D$, $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BCD$ су напоредни углови, и закључак је исти. Како је $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BDC$, у првом случају су $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle BCD$, у другом случају $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BDC$, тј. у оба случаја $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ оба права или један је оштар, други туп угао. Али оба не могу бити права, јер према теореми 23.5 из темена B се не могу спустити две управне на AC. Но $\sphericalangle ADB=\sphericalangle A'C'B'$, дакле од углова $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle A'C'B'$ један би био оштар, други туп, супротно претпоставци да су оба оштра или тупа. Према томе је $AC=A'C'$, дакле троугли ABC и $A'B'C'$ су подударни.

Основан значај имају и следеће две теореме:

Теорема 25.15. *У сваком троуглу је наспрам веће странице већи угао, а наспрам мање странице мањи угао, и обрнуто: наспрам већег угла је већа страница а наспрам мањег угла је мања страница.*



Сл. 214

Доказ. Нека је у троуглу ABC (сл. 214) $AB>AC$. Докажимо да је $\sphericalangle ACB>\sphericalangle ABC$. Одредимо на правој AB, с оне стране тачке A с које је тачка B, тачку D тако да је $AC=AD$. Према дефиницији 25.1 је $A-D-B$. Троугао ACD је једнакокрак, јер је $AC=AD$, дакле према теореми 22.8 је $\sphericalangle ACD=\sphericalangle ADC$. Како је $A-D-B$, крак CD угла $\sphericalangle ACD$ је према теореми 11.7 у углу $\sphericalangle ACB$, и према томе угао $\sphericalangle ACD$ је садржан у углу $\sphericalangle ACB$, тј. $\sphericalangle ACB>\sphericalangle ACD$. Но $\sphericalangle ACD=\sphericalangle ADC$, дакле према теореми 25.8 $\sphericalangle ACB>\sphericalangle ADC$. С друге стране, угао $\sphericalangle ADC$ је спољашњи угао троугла BCD, а отуд према теореми 25.11 $\sphericalangle ADC>\sphericalangle ABC$. Дакле према теореми 25.8 је $\sphericalangle ACB>\sphericalangle ABC$.

Други део теореме следује непосредно из првог дела.

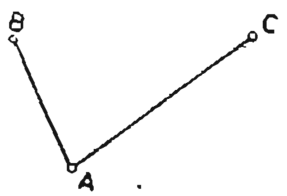
Теорема 25.16. *Хипотенуза правоуглог троугла је већа од сваке његове катете.*

Доказ. Према теореми 25.12 у правоуглом троуглу један угао је прав, друга два су оштра, а према теореми 25.10 прав угао је већи од оштрог угла. Но у правоуглом троуглу хипотенуза је наспрам правог угла, а катете су наспрам оштрих углова, дакле према теореми 25.15 хипотенуза је већа од обеју катета.

6. Пре исказивања теореме 25.18 погодно је увести изразе „ближе“ и „даље“ за тачке.

Дефиниција 25.4. Ако су AB и AC две дужи са заједничким крајем A и ако је дуж AB мања од дужи AC кажемо и да је тачки A *ближа* тачка B од тачке C, или да је тачки A *даља* тачка C од тачке B.

Кажемо такође да је тачка A ближа тачки B него тачка C или да је даља од тачке C него тачка B (сл. 215).



Сл. 215

Постоје теореме као напр. ова, која је садржана у теореми 25.3:

Теорема 25.17. *Ако је тачка* A *ближа тачки* B *него тачки* C, *а тачки* C *ближа него тачки* D, *или ако су* C *и* D *једнако удаљене од тачке* A, *тада је тачка* A *ближа тачки* B *него тачки* D.

Докажимо следећу теорему:

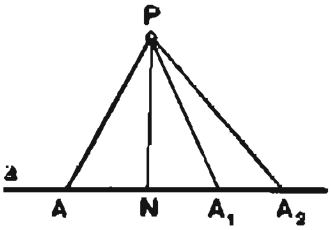
Теорема 25.18. *Ако је* P *тачка изван једне праве* a, *тада је од свих тачака праве* a *тачки* P *најближе подножје* N *управне спуштене из тачке* P *на* a.

Од две ма које тачке праве a, *неједнако удаљене од тачке* N, *тачки* P *је ближа она која је ближа тачки* N, *а даља она која је даља од тачке* N.

Тачке праве a *које су једнако удаљене од* N, *једнако су удаљене и од тачке* P, *и обратно.*

Доказ. Нека је A ма која тачка праве a, различита од N. У троуглу ANP (сл. 216) угао $\sphericalangle ANP$ је прав, дакле AP је хипотенуза и према теореми 25.16 је $AP > NP$.

Ако су A_1 и A_2 две разне тачке на правој a, тако да је $NA_1 = NA_2$, тачка N је средиште дужи A_1A_2. Правоугли троугли PNA и PNA су тада подударни, јер је $NA_1 = NA_2$, $PN = PN$, $\sphericalangle PNA_1 = \sphericalangle PNA_2$. Отуд је и $PA_1 = PA_2$, тј. тачке на правој a, које су једнако удаљене од N, једнако су удаљене и од P.



Сл. 216

Ако су A_1 и A_2 две тачке на правој a тако да је $NA_1 < NA_1$, прво претпоставимо да су A_1 и A_2 с исте стране тачке N. Како је $A_1N < A_2N$, према дефиницији 25.1 тачка A_1 је између A_2 и N. Углови $\sphericalangle PA_1N$ и $\sphericalangle PA_1A_2$ су напоредни, а угао $\sphericalangle PA_1N$ је угао правоуглог троугла PA_1N, дакле оштар. Отуд је према теореми 23.4 угао $\sphericalangle PA_1A_2$ туп угао. Но и угао $\sphericalangle PA_2A_1$ је оштар, јер је то угао правоуглог троугла PA_2N, дакле према теореми 25.10 имамо $\sphericalangle PA_2A_1 < \sphericalangle PA_1A_2$, а отуд је према теореми 25.15 $PA_1 < PA_2$.

Ако су пак A_1 и A_2 с разних страна тачке N, уочимо тачку A_1' која је с оне стране тачке N с које је A_2 и за коју је $NA_1 = NA'_1$, Према претходном је такође $PA_1 = PA'_1$, дакле, према теореми 25.3 је $PA_1 < PA_2$.

Тиме је доказано да је ближа тачки P она тачка праве a која је ближа тачки N. Ако је пак $NA_1 > NA_2$, тада је $NA_2 < NA_1$, дакле према претходноме је $PA_2 < PA_1$, а отуд $PA_1 > PA_2$, тј. даља је тачки P она тачка праве a, која је даља од тачке N.

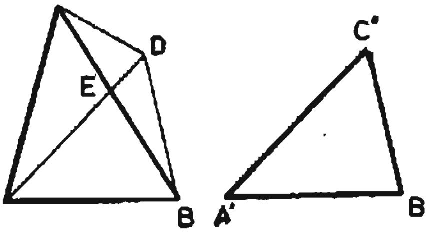
Најзад докажимо да, обратно, из $PA_1 = PA_2$ следује $NA_1 = NA_2$. Заиста тада није ни $NA_1 < NA_2$, ни $NA_1 > NA_2$, јер одавде би, према овоме што смо мало пре доказали, следовало $PA_1 < PA_2$, одн. $PA_1 > PA_2$, што је супротно претпоставци да је $PA_1 = PA_2$. Дакле је $NA_1 = NA_2$. — Тиме је цела теорема доказана.

7. Значајне су и ове две теореме о троуглима.

Теорема 25.19. *Ако су две странице једног троугла једнаке редом двема страницама другог троугла и ако је захваћени угао првог троугла већи од захваћеног угла другог, трећа страница првог троугла је већа од треће странице другог троугла.*

Доказ. Нека су ABC и $A'B'C'$ два троугла (сл. 217) и нека је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$. Доказаћемо да је $BC > B'C'$. Како странице AB и AC могу бити једнаке или неједнаке, претпоставимо да је $AB \leqslant AC$.

Нека је AD полуправа с почетком у тачки A, у равни ABC, с оне стране праве AB с које је тачка C и тако да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle A'$. Како је $\sphericalangle BAC > \sphericalangle A'$, то је према дефиницији 25.2 угао $\sphericalangle BAD$ садржан у углу $\sphericalangle BAC$, тј. крак AD је у удубљеном углу $\sphericalangle BAC$ и према теореми 11.7 сече дуж BC у извесној тачки E.



Сл. 217

Угао $\sphericalangle AEC$ је спољашњи угао троугла ABE, дакле према теореми 25.11 је $\sphericalangle AEC > \sphericalangle ABE$. Но $AC \geqslant AB$, дакле према теореми 25.15 и теореми 22.8 је $\sphericalangle ABE \geqslant \sphericalangle ACB$, те је $\sphericalangle AEC > \sphericalangle ACB$, дакле према теореми 25.15 је $AC > AE$, па како је $AC = AD$, према теореми 25.3 је $AD > AE$, тј. по дефиницији 25.1 је $A - E - D$. Према теореми 11.7 тачка E је у удубљеном углу $\sphericalangle ACD$, дакле и крак CE угла $\sphericalangle BCD$ је у углу $\sphericalangle ACD$, тј. по дефиницији 25.2 је $\sphericalangle BCD < \sphericalangle ACD$. Но троугао ACD је једнакокрак, стога је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$, па је према теореми 25.7 $\sphericalangle BCD < \sphericalangle ADC$.

Како је $B-E-C$, тачке B и C су с разних страна праве AD, дакле и углови $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle ADC$ су с разних страна праве AD и према томе то су два суседна угла и сачињавају угао $\sphericalangle BDC$. Дакле, према дефиницији 25.2 је $\sphericalangle ADC < \sphericalangle BDC$, па како је $\sphericalangle BCD < \sphericalangle ADC$, према теореми 25.7 је $\sphericalangle BCD < \sphericalangle BDC$, дакле, према теореми 25.15 у троуглу BCD је $BC > BD$. Но како је $BD = B'C'$, имамо $BC > B'C'$.

Постоји и обрнута теорема:

Теорема 25.20. *Ако су две странице једног троугла једнаке редом двема страницама другог троугла, а трећа страница првог троугла већа од треће странице другог троугла, угао наспрам треће странице првог троугла већи је од угла наспрам треће странице другог троугла.*

Доказ. Нека су то троугли ABC и $A'B'C'$ и нека је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, али нека је $BC > B'C'$, дакле нека су ти наспрамни углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle A'$. Према теореми 25.6 или је $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, или $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, или $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$. Ако је $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, према теореми 22.5 је $BC = B'C'$, ако је $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, према теореми 25.19 је $BC < B'C'$, дакле оба ова закључка су супротна претпоставци да је $BC > B'C'$. Дакле једино може бити $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$.

26. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ДУЖИ И УГЛОВА.

1. Сабирање и одузимање дужи или углова треба разликовати од сабирања и одузимања њихових мера. Мере су бројеви и њихово сабирање и одузимање дефинише се у аритметици. За сабирање и одузимање дужи и углова, па и за множење и делење дужи и углова, потребне су засебне, геометријске дефиниције.

Дефиниција 26.1. Ако су $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ тачке на једној дужи PQ, такве да је

$$P-P_1-P_2, \quad P_1-P_2-P_3, \ldots, P_{n-2}-P_{n-1}-Q,$$

називаћемо дуж PQ *збиром дужи* $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}Q$.

Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ ма какве дужи, а $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ тачке на извесној дужи PQ, такве да је ова дуж збир дужи $PP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}Q$ и да је

$$a_1 = PP_1, \ a_2 = P_1P_2, \ldots, a_n = P_{n-1}Q.$$

Ако је извесна дуж s једнака дужи PQ, рећи ћемо да је дуж s једнака *збиру дужи* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и писаћемо

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ако су два збира дужи једнака једној истој дужи, рећи ћемо и да су та два *збира дужи* међу собом *једнака*.

Ако је један збир дужи једнак једној дужи, други збир другој дужи и ако је прва од те две дужи мања од друге, рећи ћемо да је први збир *мањи* од другог збира, или да је други *већи* од првог збира.

Дефиниција 26.2. Ако су у једној равни $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ полуправе садржане у једном углу $\sphericalangle pq$ и који полазе из његова темена тако да је

$$p-p_1-p_2, \ p_1-p_2-p_3, \ldots, p_{n-2}-p_{n-1}-q,$$

називаћемо угао $\sphericalangle pq$ *збиром углова* $\sphericalangle pp_1, \sphericalangle p_1p_2, \sphericalangle p_2p_3, \ldots, \sphericalangle p_{n-1}q$.

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(n = 2, 3, \dots)$ ма какви углови, такви да постоје полуправе $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ садржане у једном углу $\sphericalangle pq$, такве да је овај угао збир углова $\sphericalangle pp_1, \sphericalangle p_1p_2, \dots, \sphericalangle p_{n-1}q$ и да је

$$\alpha_1 = \sphericalangle pp_1, \ \alpha_2 = \sphericalangle p_1p_2, \dots, \ \alpha_n = \sphericalangle p_{n-1}q.$$

Ако је известан угао σ једнак углу $\sphericalangle pq$, рећи ћемо да је угао σ једнак *збиру углова* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и писаћемо

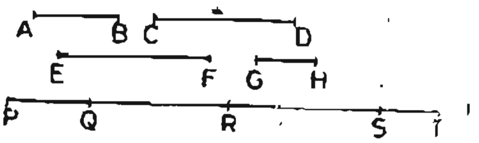
$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Ако су два збира углова једнака једном истом углу, рећи ћемо и да су та два *збира углова* међу собом *једнака*.

Ако је један збир углова једнак једном углу, други збир другом и ако је први од та два угла мањи од другог угла, рећи ћемо да је први збир углова *мањи* од другог збира углова, или да је други збир већи од првог збира.

Напомене. Како је свака дуж једнака себи самој и сваки угао једнак себи самом, можемо и за дуж PQ рећи да је једнака збиру дужи $PP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}Q$ и писати

$$PQ = PP_1 + P_1P_2 + \dots + P_{n-1}Q.$$



Сл. 218

У слици 218 је $AB = PQ$, $CD = QR$, $EF = RS$, $GH = ST$ и $MN = PT$, дакле

$$AB + CD + EF + GH = MN.$$

Исто тако за угао $\sphericalangle pq$ можемо рећи да је једнак збиру углова $\sphericalangle pp_1, \sphericalangle p_1p_2, \dots, \sphericalangle p_{n-1}q$ и писати

$$\sphericalangle pq = \sphericalangle pp_1 + \sphericalangle p_1p_2 + \dots + \sphericalangle p_{n-1}q.$$

У изрицању и доказивању теорема погодно је допустити да се збир дужи или углова састоји из само једног члана (дужи или угла).

2. Доносимо прво неколико теорема о сабирању дужи. Значајно је пре свега то да ма од ког коначног мноштва дужи можемо образовати збир или, како кажемо, те дужи можемо сабирати.

Теорема 26.1. *Ма какве да су дужи* $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n = 2, 3\dots)$ *постоји дуж која је једнака њихову збиру.*

Доказ. Нека је p полуправа, P њен почетак. Према аксиоми III 1 постоји на p тачка P_1 тако да је $PP_1 = a_1$, затим с оне стране тачке P_1 с које није тачка P постоји тачка P_2 тако да је $P_1P_2 = a_2$, итд. и најзад, с оне стране тачке P_{n-1} с које није тачка P_{n-2} постоји тачка Q тако да је $P_{n-1}Q = a_n$. Тада је према дефиницији 26.1

$$PQ = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

тј. постоји дуж PQ која је једнака њихову збиру.

За углове не постоји одговарајућа теорема догод се држимо дефиниције 26.2, која се односи на углове у ужем смислу. Тек узимајући у обзир проширене углове, можемо и за углове доказати аналогну теорему.

Теорема 26.2. *Ако су два збира дужи једнака трећем збиру дужи, тада су прва два збира и међу собом једнака.*

Доказ. Нека је први збир (кратко означено) x, други збир y, трећи z. Имамо $x=z$ и $y=z$. Према дефиницији 26.1 постоји дужи MN и PQ, такве да је $x=MN$ и $y=PQ$. Из $x=z$ и $y=z$ следује $z=MN$ и $z=PQ$, дакле према дефиницији 26.1 је $MN=PQ$ и према томе оба прва збира су једнака дужи MN, дакле једнака су и међу собом.

Теорема 26.3. *Збир двеју дужи* a *и* b *не зависи од реда којим се те дужи посматрају, тј.*

$$a+b=b+a.$$

Доказ. Нека су a и b ма које две дужи. Према аксиоми III 1 постоје тачке P, Q, R тако да је $P-Q-R$ и $a=PQ$, $b=QR$. Тада је према дефиницији 26.1 $a+b=PR$. Но како је и $R-Q-P$ имамо и $b+a=RP=PR$, дакле $b+a=PQ$ и према дефиницији 26.1 је

$$a+b=b+a.$$

Теорема 26.4. *Ако је збир дужи* a *и* b *једнак дужи* p, *а збир дужи* b *и* c *једнак дужи* q, *тада је збир дужи* p *и* c *једнак збиру дужи* a *и* q *тј. из*

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{p} \quad \text{и} \quad \mathrm{b}+\mathrm{c}=\mathrm{q}$$

следује

$$\mathrm{p}+\mathrm{c}=\mathrm{a}+\mathrm{q}$$

или, друкчије написано,

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}=\mathrm{a}+(\mathrm{b}+\mathrm{c}).$$

Доказ. Нека су P, Q, R, S тачке на једној правој, тако да је $P-Q-R$, $Q-R-S$ и да је $PQ=a$, $QR=b$, $RS=c$. Како је $a+b=p$, $b+c=q$, према дефиницији 26.1 такође је $PR=p$, $QS=q$.

Из $P-Q-R$ и $Q-R-S$ следује такође $P-R-S$ и $P-Q-S$, дакле по дефиницији 26.1 је и $p+c=PS$ и $a+q=PS$, дакле и $p+c=a+q$ или, користећи се заградама у познатом смислу,

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Теорема 26.5. *Ако су* x, y, z *збирови дужи и ако је* $\mathrm{x}>\mathrm{y}$, *а* $\mathrm{y}=\mathrm{z}$ *или* $\mathrm{y}>\mathrm{z}$, *тада је и* $\mathrm{x}>\mathrm{z}$.

Доказ. Према дефиницији 26.1 постоје тачке P, R, S тако да је $P-R-S$ и да је $x=PS$, $y=PR$. Ако је $y=z$, имамо $z=PR$, дакле, према дефиницији 26.1 је $x>z$. Ако је $y>z$ постоји тачка Q тако да је $P-Q-R$ и да је $z=PQ$. Тада је $P-Q-S$, па је $x>z$.

Теорема 26.6. *Ако су* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ *и* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ *два низа дужи и ако је*

$$\mathrm{a}_1 \leqq \mathrm{b}_1,\ \mathrm{a}_2 \leqq \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{a}_n \leqq \mathrm{b}_n,$$

тада је

$$\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+\ldots+\mathrm{a}_n<\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\ldots+\mathrm{b}_n,$$

сем у случају самих једнакости, јер тада је

$$\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+\ldots\mathrm{a}_n=\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\ldots+\mathrm{b}_n.$$

Доказ. Нека су на једној правој тачке P, Q, R такве да је $P-Q-R$ и $PQ=a_1$, $QR=a_2$, затим на истој правој P' и R' такве тачке да је $P'-Q-R'$ и $P'Q=b_1$, $QR'=b_2$. Према дефиницији 15.1 је $P'-P-Q$ или $P'\equiv P$ и $Q-R-R'$ или $R\equiv R'$. У случају непоклапања из $P-Q-R$ и $P'-P-Q$

следује $P'-Q-R$ и $P'-P-R$, а из $P'-Q-R$ и $Q-R-R'$ следује $P'-R-R'$. Из $P'-P-R$ и $P'-R-R'$ следује пак према дефиницији 25.1 $PR<P'R<P'R'$, тј. $PR<P'R'$.

Како је $PR=a_1+a_2$, $P'R'=b_1+b_2$, имамо дакле $a_1+a_2<b_1+b_2$. На исти начин, али краће, доказујемо да је у случају поклапања тачака P и P' или R и R', $a_1+a_2 \leqq b_1+b_2$, а у случају оба поклапања $a_1+a_2=b_1+b_2$. Тиме је теорема, за $n=2$ доказана.

Нека је a_2' дуж једнака збиру a_1+a_2, а b'_2 дуж једнака збиру b_1+b_2. Посматрајући као претходно дужи a_2', a_3, b'_2, b_3 доказујемо укратко да је $a_2'+a_3 \leqq b_2'+b_3$, тј.

$$a_1+a_2+a_3 \leqq b_1+b_2+b_3.$$

За ма које n доказујемо теорему потпуном индукцијом.

Нека су a_n' и b_n' дужи такве да је $a_1+a_2+\ldots+a_n=a_n'$ и $b_1+b_2+\ldots+b_n=b_n'$. Претпоставимо да је теорема тачна за то n, тј. да је $a_n' \leqq b_n'$. Тада закључујемо на исти начин да је са још двема дужима, $a_{n+1} \leqq b_{n+1}$, такође $a_n'+a_{n+1} \leqq b_n'+b_{n+1}$, тј. теорема је тачна и за $n+1$. Но теорема је тачна за $n=2$, 3, дакле тачна је за свако n.

3. Теоремама 26.2 до 26.6 одговарају о угловима следећих пет теорема, које се доказују аналого:

Теорема 26.7 *Ако су два збира углова једнака трећем збиру углова, тада ћу прва два збира једнака и међу собом.*

Теорема 26.8. *Збир два угла* α *и* β *не зависи од реда којим се ти углови посматрају, тј.*

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

Теорема 26.9. *Ако је збир углова* α *и* β *једнак углу* φ, *а збир углова* β *и* γ *једнак углу* ψ, *тада је збир углова* φ *и* γ *једнак збиру углова* α *и* ψ, *тј. из*

$$\alpha+\beta=\varphi \text{ и } \beta+\gamma=\psi$$

следује

$$\varphi+\gamma=\alpha+\psi$$

или, друкчије написано,

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Теорема 26.10. *Ако су* x, y, z *збирови углова и ако је* $\mathrm{x}>\mathrm{y}$, *а* $\mathrm{y}=\mathrm{z}$ *или* $\mathrm{y}>\mathrm{z}$, *тада је и* $\mathrm{x}>\mathrm{z}$.

Теорема 26.11. *Ако су* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *и* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *два низа углова и ако је*

$$\alpha_1 \leqq \beta_1,\ \alpha_2 \leqq \beta_2, \ldots,\ \alpha_n \leqq \beta_n,$$

тада је и

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \leqq \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n,$$

уколико та два збира постоје.

Теореме 26.3 и 26.8 изричу комутативни закон, а теорема 26.4 и 26.9 асоцијативни закон за сабирање дужи и углова.

4. Потребно је дефинисати и разлику двеју дужи или два угла. Пре дефиниције разлике двеју дужи доказујемо следећу теорему:

Теорема 26.12. *Ако су* a *и* b *две дужи, прва већа од друге, постоји дуж* d *тако да је* $\mathrm{a}=\mathrm{b}+\mathrm{d}$.

Ако је d' *још једна дуж, за коју је* $\mathrm{a}=\mathrm{b}+\mathrm{d}'$, *дужи* d *и* d' *су једнаке.*

Доказ. Како је $a>b$, према дефиницији 25.1 постоје тачке P, Q, R тако да је $P-Q-R$ и $a=PR$, $b=PQ$. Нека је d ма која дуж једнака дужи

QR. Према дефиницији 26.1 је $a=b+d$. Дакле дуж d постоји. Ако је d' још једна дуж за коју је $a=b+d'$, према дефиницији 26.1 је $d'=QR$, дакле $d=d'$.

Дефиниција 26.3. Ако су a и b две дужи, прва већа од друге и ако је d ма која дуж тако да је $a=b+d$, дуж d називамо *разликом* веће дужи a и мање дужи b, и пишемо:

$$d=a-b.$$

Кад су дужи a и b једнаке, њихове разлике нема. Писаћемо тада симболично: $a-b=\theta$. Кад год разлика постоји, писаћемо $a-b>\theta$. Слично можемо писати и за углове.

Следећа теорема је аналогна теореми 26.12, само се односи на углове. Доказ је такође сличан претходном доказу.

Теорема 26.13. *Ако су α и β два угла, први већи од другога, постоји угао δ тако да је $\alpha=\beta+\delta$.*

Ако је δ' још један угао за који је $\alpha=\beta+\delta'$, углови δ и δ' су једнаки.

Дефиниција аналогна дефиницији 26.3, а која се односи на углове гласи:

Дефиниција 26.4. Ако су α и β два угла, први већи од другога, и ако је δ ма који угао тако да је $\alpha=\beta+\delta$, угао δ називамо *разликом* већег угла α и мањег угла β и пишемо

$$\delta=\alpha-\beta.$$

Додајемо дефиницију комплементних и суплементних углова:

Дефиниција 26.5. Ако је збир два угла једнак правом углу, кажемо да су та два угла *комплементна*. Ако је збир два угла једнак опруженом углу, кажемо да су та два угла *суплементна*.

Напомена. Према тој дефиницији два напоредна угла су суплементна, али обрнуто не мора бити: два суплементна угла не морају бити упоредни.

5. Следећим дефиницијама уводимо n-тоструку дуж и n-ти део дужи, ма за који природан број n, затим исто за углове.

Дефиниција 26.6. Ако је дуж p једнака збиру од n дужи једнаких извесној дужи a ($n=1, 2, \dots$), кажемо да је дуж p једнака *n-тострукој дужи a* или да је *n пута већа* од дужи a, и пишемо

$$p=n\,a.$$

Дуж p називамо и *увишеструченом* (мултиплумом) дужи a.

За дуж a кажемо да је *n-ти део* дужи p или да је *n пута мања* од дужи p, и пишемо

$$a=\frac{p}{n}.$$

За $n=2, 3, \dots$ n-ти део дужи називамо и њеном *половином, трећином* итд.

Дефиниција 26.7. Ако је угао φ једнак збиру од n углова једнаких извесном углу α ($n=1, 2, \dots$), кажемо да је *угао φ* једнак *n-тоструком углу α* или да је *n пута већи* од угла α и пишемо

$$\varphi=n\alpha.$$

Угао φ називамо и *увишестручењем* (мултиплумом) угла α.

За угао α кажемо пак да је n-ти део угла φ или да је n пута мањи од φ и пишемо

$$\alpha = \frac{\varphi}{n}.$$

За $n = 2, 3, \ldots$ n-ти део угла називамо и његовом *половином*, *трећином* итд.

Постоји напр. следећа теорема:

Теорема 26.14. *Ако су две дужи једнаке, једнаки су и* n-*ти делови тих дужи* (n = 2, 3, . . .).

Д о к а з. Нека су AB и CD две једнаке дужи. По дефиницији 26.6 претпоставља се да постоје на AB тачке $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и на CD тачке $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$, поређане тако у природном распореду и за које је

$$AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}B, \quad CN_1 = N_1N_2 = \ldots = N_{n-1}D.$$

Претпоставимо да је $AM_1 < CN_1$. Тада је према теореми $AB < CD$, супротно претпоставци. Исто тако, ако је $AM_1 > CN$, имамо $AB > CD$. Дакле је $AM_1 = CN_1$, а тиме је теорема доказана.

Постоји одговарајућа теорема за углове:

Теорема 26.15. *Ако су два угла једнака, једнаки су и* n-*ти делови тих углова.*

Из теореме 26.1 следује непосредно да за сваку дуж a и сваки природан број n постоји n-пута већа дуж p. Преношењем дужи a на једну праву, дуж p се може лако и конструисати. Постојање n пута мање дужи моћи ће се доказати пак применом аксиоме непрекидности, а применом аксиоме паралелности моћи ће се и конструисати таква дуж. За углове аналогија није потпуна.

Читаоцу препуштамо да докаже основне особине ових производа и количника као напр.:

1. $m\,(n\,a) = (m\,n)\,a$
2. $ma + na = (m+n)\,a$
3. $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}a\right) = \frac{1}{mn}a$
4. $\frac{1}{m}a + \frac{1}{n}a = \frac{m+n}{mn}a$
5. $\frac{ma}{n} = m\frac{a}{n}$

Ако дефинишемо: $\frac{ma}{n} = \frac{m}{n}a$, можемо производ дужи бројем проширити на све позитивне рационалне бројеве.

6. $\frac{m}{n}a + \frac{m}{n}b = \frac{m}{n}(a+b)$.

Исто вреди и за углове.

6. Да би се ма за колико ма каквих углова могао дефинисати збир, потребно је применити угао у ширем смислу, уведен у § 12,8. Тада се дефиниција 26.2 може непосредно применити ма на које углове. Како нисмо дефинисали однос „између“ за полуправе у пуном и прекопуном углу, дефиницију исказујемо мало другим речима.

Дефиниција 26.8. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$(n = 2, 3, . . .) полуправе садржане у једном углу $\sphericalangle pr$ (у ширем смислу) и које полазе из његова темена тако да су парови углова

$$\sphericalangle pp_1 \text{ и } \sphericalangle p_1p_3, \ \sphericalangle p_1p_2 \text{ и } \sphericalangle p_2p_3, \ldots, \sphericalangle p_{n-2}p_{n-1} \text{ и } \sphericalangle p_{n-1}r,$$

садржаних на углу $\sphericalangle pr$, парови суседних углова (дефиниција 12.17), називаћемо угао $\sphericalangle pr$ *збиром углова* $\sphericalangle pp_1, \sphericalangle p_1p_2, \ldots, \sphericalangle p_{n-1}r$.

Нека су α_1 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ ма какви углови, а $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ полуправе садржане у једном углу $\sphericalangle pr$, такве да је овај угао збир углова $\sphericalangle pp_1$, $\sphericalangle p_1\, p_2, \ldots, \sphericalangle p_{n-1}r$ и да је

$$\alpha_1 = \sphericalangle pp_1, \ \alpha_2 = \sphericalangle p_1p_2, \ldots, \alpha_n = \sphericalangle p_{n-1}r.$$

Ако је известан угао σ једнак углу $\sphericalangle pr$, рећи ћемо да је угао σ једнак *збиру углова* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и писаћемо

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Ако су два збира углова једнака једном истом углу рећи ћемо и да су та два *збира углова* међу собом *једнака*.

Ако је један збир углова једнак једном углу, други збир другом и ако је први од та два угла мањи од другога, рећи ћемо да је први збир углова *мањи* од другог збира углова или да је други збир углова *већи* од првог збира.

Све теореме о збиру и разлици углова, које смо у бр. 3 и 4 овог параграфа изнели, могу се сад изрећи ма за које углове. Штавише, сад постоји и теорема која одговара теореми 26.1 за дужи:

Теорема 26.16. *Ма какви да су углови* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *постоји угао који је једнак њиховом збиру.*

Доказ је аналоган доказу теореме 26.1.

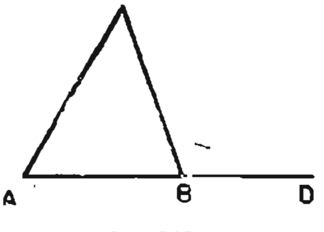
Следећа теорема је такође значајна:

Теорема 26.17. *Збир ма каквих углова* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *једнак је збиру извесног броја правих углова и, можда, још једног оштрог угла.*

Доказ препуштамо читаоцу.

7. Доносимо три теореме о троуглима у којима се користи збир углова и збир дужи и од којих су прве две особито значајне.

Теорема 26.18. *Збир два угла једног троугла мањи је од збира два права угла.*



Сл. 219

Доказ. Докажимо да је у троуглу ABC (сл. 219) збир углова $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$ мањи од (којег било) збира два права угла. Нека је BD продужење дужи AB иза B. Према дефиницији 26.1 је збир $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD$ једнак опруженом углу $\sphericalangle ABD$, а према дефиницији правог угла, опружен угао је једнак збиру два права угла, дакле

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 2R. \tag{1}$$

Према теореми 25.11. је пак $\sphericalangle CBD > \sphericalangle ACB$, па је према теореми 26.6

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD > \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB,$$

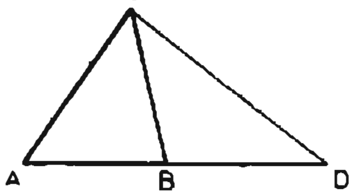
а отуд имамо

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + < \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD.$$

Дакле, услед једнакости (1), имамо

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < 2R.$$

Теорема 26.19. *Збир двеју страница троугла већи је од треће странице. Разлика двеју страница троугла (мање од веће) мања је од треће странице.*



Сл. 220

Доказ. Докажимо да је у троуглу ABC (сл. 220)

$$AB + BC > AC.$$

Нека је D тачка у продужењу странице AB, иза тачке B, тако да је $BC = BD$. Троугао BCD је једнакокрак, дакле је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC$. Како је $A - B - D$, тачка B је према теореми 11.7 у удубљеном углу $\sphericalangle ACD$, дакле крак CB, па и угао $\sphericalangle BCD$, садржан је у $\sphericalangle ACD$, тј. према дефиницији 25.5 је $\sphericalangle ACD > \sphericalangle BCD$, па како је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC$, имамо према теореми 26.6 $\sphericalangle ACD > \sphericalangle ADC$ и према теореми 25.15 $AD > AC$. Но имамо једнакост

$$AD = AB + BC,$$

дакле према теореми 26.5 је

$$AB + BC > AC.$$

Нека је напр. $AB > BC$. Докажимо да је

$$AB - BC < AC.$$

Према претходном је

$$AB < AC + BC.$$

Ако је

$$AC + BC = MN,$$

према дефиницији 26.3 је

$$MN - BC = AC,$$

па како је $AB < MN$, имамо

$$AB - BC < MN - BC = AC,$$

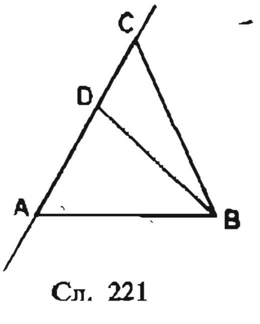
тј.

$$AB - BC < AC.$$

Тиме су доказана оба дела теореме.

Теорема 26.20. *На правој* AC, *која садржи крак једнакокраког троугла* ABC *не постоји тачка* D *различита од* C, *тако да су* AD *и* BD *краци другог једнакокраког троугла* ABD.

Доказ. Кад би постојала таква тачка D, било би $A - D - C$ или $D - A - C$ или $A - C - D$. У првом случају је према теореми 11.7 тачка D у удубљеном углу $\sphericalangle ABC$, дакле према дефиницији 26.2 је $\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABC$, па како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BAD$, имамо $\sphericalangle ABD < \sphericalangle BAD$. Према томе троугао ABD није једнакокрак с врхом D, тј. није $AD = BD$.



Сл. 221

Ако је $D - A - C$, угао $\sphericalangle BAD$ троугла ABD био би туп, дакле тај троугао опет није једнакокрак с врхом D, тј. није $AD = BD$, јер кад би то било, његова два угла при основици, $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABD$, била би оба тупа, а то је према теореми 25.12 немогуће.

Ако је $A-C-D$, и ако би било $AD=BD$, троугао ABD би био једнакокрак, дакле (разменом слова C и D) имали бисмо опет први случај, према томе не би било $AC=BC$, а то је противно претпоставци. Дакле није ни сад $AD=BD$. — Тиме је теорема доказана.

8. Потребно нам је још следеће посматрање обима испупчених многоуглова. Како је према дефиницији 26.1, збир од две или више дужи опет дуж, дефинисаћемо и обим многоугла као дуж.

Дефиниција 26.9. Збир свих страница једне изломљене линије називаћемо *обимом* те изломљене линије. Ако је изломљена линија многоугао, њен обим је *обим многоугла*.

Значајна је пре свега ова теорема:

Теорема 26.21. *Обим сваке изломљене линије, чије крајње тачке су крајеви једне дужи, већи је од те дужи.*

Доказ. Нека су A и B крајње тачке изломљене линије $AP_1P_2\dots$ $\dots P_nB$, $n=1, 2, \dots$ (сл. 222). Према теореми 26.19 је $AP_1+P_1P_2>AP_2$. Ако је тачка P_3 на правој AP_2 и ако је $A-P_2-P_3$, имамо $AP_2+P_2P_3=AP_3$. Кад год није $A-P_2-P_3$, а према теореми 26.17 и кад год P_3 није на правој AP_2, увек је $AP_2+P_2P_3>AP_3$. Исто тако је $AP_3+P_3P_4\geqslant AP_4$ итд. и најзад $AP_n+P_nB\geqslant AB$.

Но из неједнакости

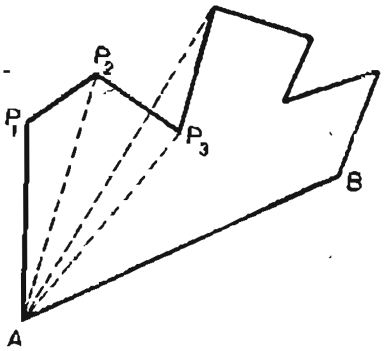
$$AP_1+P_1P_2>AP_2 \text{ и } AP_2+P_2P_3\geqslant AP_3$$

следује

$$(AP_1+P_1P_2)+P_2P_3>AP_2+P_2P_3,$$

дакле према теореми 26.5 имамо

$$AP_1+P_1P_2+P_2P_3>AP_3.$$



Сл. 222

Из неједнакости

$$AP_1+P_1P_2+P_2P_3>AP_3 \text{ и } AP_3+P_3P_4\geqslant AP_4$$

следује исто тако

$$AP_1+P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4>AP_4$$

итд. и најзад

$$AP_1+P_1P_2+\dots+P_nB>AB.$$

Тиме је ова теорема доказана.

Следећа дефиниција је особито потребна у посматрању мнофоуглова уписаних у круг и описаних око круга.

Дефиниција 26.10. Ако су p и q два проста многоугла у једној равни и ако су све тачке многоугла p садржане у многоуглу q или на њему, рећи ћемо да је многоугао p *обухваћен* многоуглом q, а да многоугао q *обухвата* многоугао p.

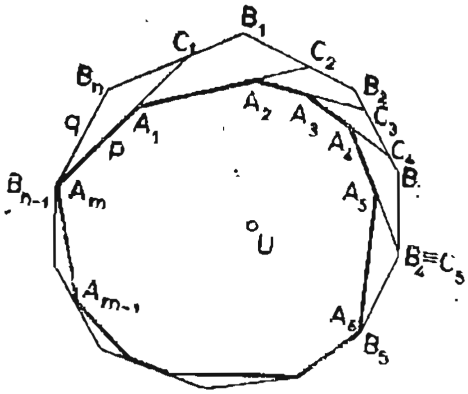
Напомена. Очигледно, многоугао p је садржан на многоугаоној површи (q), а не мора бити садржан цео у многоуглу q. Оба многоугла могу имати и заједничких темена и страница, а изузетно могу се и сасвим поклапати.

Докажимо следећу теорему, која је потребна напр. у одређивању обима круга.

Теорема 26.22. *Обим испупченог многоугла који је обухваћен другим испупченим многоуглом, мањи је од обима тога другог многоугла.*

Доказ. Нека је $p \equiv A_1A_2 \ldots A_m$ обухваћени многоугао а $q \equiv B_1B_2 \ldots B_n$ онај који га обухвата. Како је многоугао q испупчен, свака права која има с њим једну заједничку тачку, а не садржи ниједну његову страницу, има с њим према теореми 15.14 још само једну заједничку тачку, а свака полуправа која полази из једне тачке у многоуглу, има с њим само једну заједничку тачку.

Посматрајмо редом странице многоугла p и полуправе A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_{n-1}, A_n, A_nA_1, које садрже те странице (увек у том обележавању прво слово обележава исходиште те полуправе). Било да је тачка A_1 у многоуглу q или на q, полуправа A_1A_2 (која полази из A_1) има с многоуглом q само једну тачку заједничку, рецимо C_2, или је садржана на једној страници многоугла q (сл. 223). Како A_2 није изван q, не може бити $A_1-C_2-A_2$, дакле је $A_1-A_2-C_2$ или $C_2 \equiv A_2$. У оба случаја је $A_1A_2 \leqslant A_1C_2$.



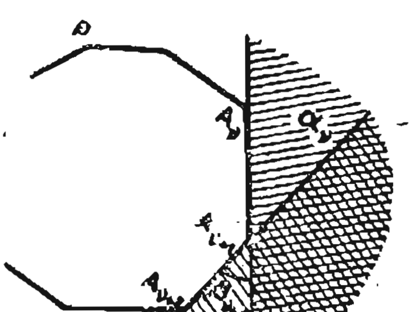
Сл. 223

Истим посматрањем налазимо за сваку страницу $A_\nu A_{\nu+1}$ многоугла p, ако је $C_{\nu+1}$ одговарајућа тачка на q, релацију

$$A_\nu A_{\nu+1} \leqslant A_\nu C_{\nu+1}, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots,\ m.$$

При томе је $A_{m+1} \equiv A_1$, $C_{m+1} \equiv C_1$. Дакле имамо $A_\nu - A_{\nu+1} - C_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$, и најзад $A_m - A_1 - C_1$. — Тачка C_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ се може поклапати не само с A_ν, већ и с извесним теменом многоугла q.

Нека је U ма која тачка у многоуглу p. Како је многоугао p испупчен, тачка U је према дефиницији 15.5 с оне стране сваке његове странице с које су сва остала темена многоугла p. Дакле за тачку која није у многоуглу p постоји у односу на бар једну страницу $A_\nu A_{\nu+1}$ или A_mA_1 то да није с оне стране те странице с које су остала темена многоугла p и с које је тачка U. Према томе, саобразно дефиницији 26.10 тачке многоугла q нису с оне стране праве $A_\nu A_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) с које је тачка U.



Сл. 224

Нека је α_ν полураван чије тачке нису с оне стране праве $A_\nu A_{\nu+1}$ с које је U. Ове полуравни се делом поклапају: полураван $\alpha_{\nu+1}$ се састоји из тачака које су уједно у полуравни α_ν и из тачака које су с оне стране праве $A_\nu A_{\nu+1}$ с које је U (сл. 224), тј. које су у удубљеном углу $\beta_{\nu+1}$ или на његову краку $A_{\nu+1}A_{\nu+2}$. Према томе укупност тачака равни, које нису у многоуглу p, састоји се из углова β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_m$ и њихових кракова A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_mA_1$. Дакле у мноштву тих углова и кракова садржан је многоугао q.

Посматрајмо тачке многоугла q, које су у углу β_ν или на њему. Тачка C_1 је на полуправој A_mA_1 а за $\nu = 2, 3, \ldots$ је C_ν на полуправој $A_{\nu-1}A_\nu$. Дакле тачка C_ν се поклапа с A_ν или је на једном краку угла β_ν. Тачка $C_{\nu+1}$ се не поклапа с A_ν, него је увек на краку $A_\nu A_{\nu+1}$ угла β_ν. Ако у углу β_ν није ниједно теме многоугла q, тачке C_ν и $C_{\nu+1}$ припадају једној његовој страници, а укупност тачака многоугла q, садржаних у β_ν је дуж $C_\nu C_{\nu+1}$, обележивши је знаком b_ν, имамо $C_\nu C_{\nu+1}=b_\nu$. Ако су пак у углу β_ν извесна темена многоугла q, укупност тачака многоугла q, садржаних у β_ν је извесна изломљена линија којој су крајеви C_ν и $C_{\nu+1}$, обележимо обим те изломљене линије опет знаком b_ν. Тада је $C_\nu C_{\nu+1} < b_\nu$. Ако се C_ν поклапа с A_ν, према теореми 26.21 је у првом случају $A_\nu C_{\nu+1}=b_\nu$, а у другом $A_\nu C_{\nu+1} < b_\nu$. Ако се C_ν и A_ν не поклапају, имамо $A_\nu C_{\nu+1} < A_\nu C_\nu + C_\nu C_{\nu+1}$, дакле тим пре $A_\nu C_{\nu+1} < A_\nu C_\nu + b_\nu$.

Ако се $A_{\nu+1}$ и $C_{\nu+1}$ поклапају имамо дакле у прва два случаја

$$A_\nu A_{\nu+1} \leqslant b_\nu,$$

а у трећем

$$A_\nu A_{\nu+1} < A_\nu C_\nu + b_\nu.$$

Ако се $A_{\nu+1}$ и $C_{\nu+1}$ непоклапају имамо $A_\nu C_{\nu+1} = A_\nu A_{\nu+1} + A_{\nu+1} C_{\nu+1}$, дакле у прва два случаја

$$A_\nu A_{\nu+1} \leqslant b_\nu - A_{\nu+1} C_{\nu+1},$$

а у трећем

$$A_\nu A_{\nu+1} < A_\nu C_\nu + b_\nu - A_{\nu+1} C_{\nu+1}.$$

Сабирањем левих и десних страна ових релација за $\nu=1,2,\ldots,m$ добијамо на левој страни обим многоугла p, а на десној се свака дуж $A_\nu C_\nu$ која се ту јавља, јавља двапут, оба пута са супротним знацима, дакле све те дужи се поништавају и остаје збир обима b_ν, тако да имамо

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_mA_1 < b_1 + b_2 + \ldots + b_m,$$

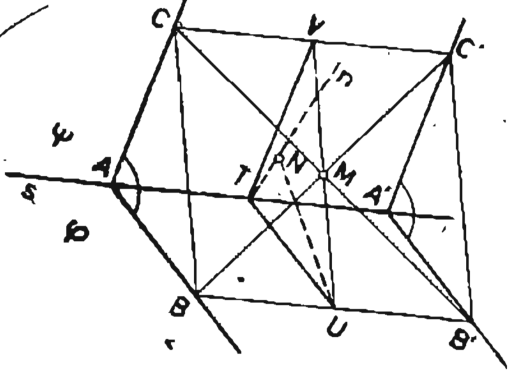
тј. обим многоугла p је мањи од обима многоугла q. — Тиме је ова теорема доказана.

27. ПОДУДАРНОСТ ДИЈЕДАРА.

1. У § 13 смо дефинисали пресечни угао диједра једном равни. Пре но што ћемо посматрати сада подударност диједара корисно је дефинисати угао пресека диједра једном равни која је управна на његовој ивици. У ту сврху треба прво доказати следећу теорему, којој дакле припада основни значај.

Теорема 27.1: *Углови по којима равни управне на ивици једног диједра секу тај диједар, јесу сви једнаки.*

Доказ. Претпоставимо да је диједар $\sphericalangle\varphi\psi$ удубљен. Нека су A и A' ма које две разне тачке на његовој ивици s (сл. 225), затим ν и ν', редом, равни управне на s и које пролазе кроз A и A'. Нека су B и B' две тачке на полуправим по којима се равни ν и ν' секу с полуравни φ, а C и C' две одговарајуће тачке у полуравни ψ и нека је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Треба доказати да су удубљени углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B'A'C'$ једнаки, тј. да је $BC = B'C'$.



Сл. 225

Нека су T, U, V редом средишта дужи AA', BB', CC'. — Како је $AT = A'T$, $AB = A'B'$ а углови $\sphericalangle BAT$ и $\sphericalangle B'A'T$ су прави, троугли BAT и

$B'A'T$ су подударни, дакле $BT=B'T$. Како је и $BU=B'U$, троугли BTU и $B'TU$ су такође подударни, дакле углови $\sphericalangle BUT$ и $\sphericalangle B'UT$ су једнаки и према томе прави, тј. праве BB' и TU су управне. — Исто тако су праве CC' и TV управне.

Из подударности троуглова BAT и $B'A'T$ следује $\sphericalangle ABT=\sphericalangle A'B'T$, а из подударности троуглова BTU и $B'TU$ следује $\sphericalangle TBU=TB'U$. Но тачка T је у удубљеним угловима $\sphericalangle ABU$ и $\sphericalangle A'B'U$, дакле према теореми 21.9 је $\sphericalangle ABU=\sphericalangle A'B'U$. Како је такође $AB=A'B'$ и $BU=B'U$, троугли BAU и $B'A'U$ су подударни, дакле $AU=A'U$. Дакле, како је и $AT=A'T$, троугли ATU и $A'TU$ су подударни и према томе углови $\sphericalangle ATU$ и $\sphericalangle A'TU$ су подударни, дакле прави, тј. права TU је управна на правој s. — Исто тако је права TV управна на s. Дакле, према теореми 24.1 права s је управна на равни TUV. Нека је то раван σ.

Докажимо да су и праве BB', CC' управне на равни σ. — Нека је n права у σ, која пролази кроз T и управна је на правој TU и нека је N ма која тачка на n, различита од T. Како је права s управна на σ, управна је и на n, дакле права n је управна на s и на TU, дакле управна је на полуравни φ. Како је у φ права BB' управна на правој TU, према теореми 24.6 права BB' је управна и на NU, дакле управна је на равни σ. Исто тако доказујемо да је и права CC' управна на σ.

Како су праве BB' и CC' обе управне на равни σ, према теореми 24.7 припадају једној равни, обележимо ову словом μ. Докажимо да се дужи BC' и $B'C$ секу на правој UV у извесној тачки M.

Пре свега, BA, $B'A'$, и UT управне на s и φ, не секу се, дакле A и B су с исте стране праве UT, и тако исто A' и B'. Дакле, како су тачке A и A' с разних страна праве UT, тачке B и B' су такође с разних страна праве UT, дакле и с разних страна тачке U, а отуд и у равни μ с разних страна праве UT. — Исто тако су тачке C и C' с разних страна праве UV.

Како су тачке B и A с исте стране праве UT, те две тачке су и с исте стране равни σ. Исто тако су и тачке A и C с исте стране равни σ, дакле тачке B и C су с исте стране равни σ, дакле и с исте стране праве UV у равни μ.

Како су тачке B и C с исте стране, а C и C' с разних страна праве UV, тачке B и C' су с разних страна обе праве. Исто тако су тачке B' и C с разних страна праве UV.

Нека је M пресек дужи BC' и праве UV. Троугли MBU и $MB'U$ су подударни, јер је $BU=B'U$, страница MU је заједничка, а углови $\sphericalangle MUB$ и $\sphericalangle MUB'$ су прави, дакле једнаки. Отуд је и $MB=MB'$ и $\sphericalangle UMB=\sphericalangle UMB'$, $\sphericalangle MBU=\sphericalangle MB'U$.

И троугли MCV и $MC'V$ су подударни, јер је $CV=C'V$, страница MV је заједничка, а углови $\sphericalangle MVC$ и $\sphericalangle MVC'$ су прави, дакле једнаки. Отуд је $MC=MC'$ и $\sphericalangle VMC=\sphericalangle VMC'$.

Углови $\sphericalangle UMB$ и $\sphericalangle VMC'$ су унакрсни, дакле једнаки. Но $\sphericalangle UMB=\sphericalangle UMB'$, $\sphericalangle VMC'=\sphericalangle VMC$, дакле и углови $\sphericalangle UMB'$ и $\sphericalangle VMC$ су једнаки, па отуд унакрсни. Дакле, праве MB' и MC се поклапају, тј. и дуж $B'C$ сече праву UV у тачки M.

Како је $MB=MB'$ и $MC'=MC$, а M је између B и B' и између C и C', према аксиоми III 3 је $BC'=B'C$. Према томе троугли BCB' и CBC' су подударни, јер им је и страница BB' заједничка, а сем тога $\sphericalangle MBU=\sphericalangle MB'U$, а $\sphericalangle MBU=\sphericalangle B'BC'$, $\sphericalangle MB'U=\sphericalangle BB'C$, дакле $\sphericalangle B'BC=\sphericalangle BB'C$. Из подударности тих троуглова следује $BC=B'C'$.

У удубљеним угловима $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B'A'C'$ је дакле $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, дакле према теореми 21.1 та два угла су једнака. Тиме је наша теорема доказана за удубљен диједар.

Ако је диједар $\sphericalangle\varphi\psi$ испупчен, посматрамо удубљен диједар с истим пљоснима. Како су за удубљен диједар сви удубљени углови његових управних пресека једнаки, једнаки су и испупчени углови с истим крацима, тј. углови управних пресека датог испупченог диједра. Тиме је став доказан.

Како су према претходној теореми сви углови по којима равни управне на ивици једног диједра секу тај диједар, међу собом једнаки, сваком диједру одговара такав угао, независно од места тог управног пресека. Отуд можемо поставити следећу дефиницију:

Дефиниција 27.1. Угао, по коме ма која раван управна на ивици једног диједра сече тај диједар, називамо *углом управног пресека диједра*, или краће, *углом диједра*.

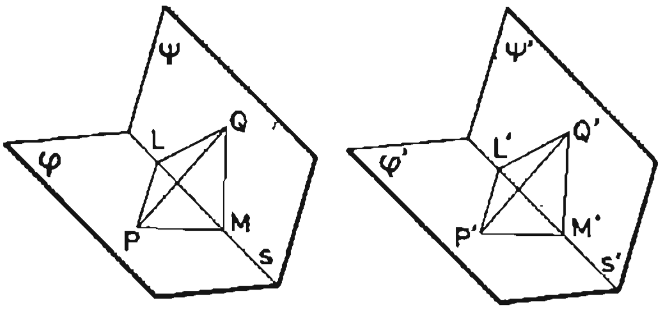
Као што из теореме 27.1 следује да сваки диједар има свој угао управног пресека, тако постоји и обрнута теорема:

Теорема 27.2. *За сваки угао постоји диједар коме тај угао припада као угао тог диједра.*

Доказ. Нека је ω угао с крацима m и n и теменом O. Како постоји права s која пролази кроз O и управна је на равни тог угла, затим полуравни μ и ν којима је s руб и које садрже полуправе m и n, постоје два диједра којима су пљосни μ и ν; један садржи тачке угла ω и њему је према дефиницији 27.1 ω угао.

2. Подударност диједара дефинишемоа налого као што смо дефинисали подударност углова.

Дефиниција 27.2. Нека су $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ два удубљена или два испупчена диједра, s и s' њихове ивице (сл. 226). Ако постоје на ивицама s и s' редом парови тачака L, M и L', M' и на пљоснима φ, ψ, φ', ψ' редом тачке P, Q, P', Q' тако да је



Сл. 226

$$\begin{aligned} &LM=L'M', \quad LP=L'P', \quad MP=M'P', \\ &LQ=L'Q', \quad MQ=M'Q', \quad PQ=P'Q', \end{aligned} \tag{1}$$

рећи ћемо да су та два диједра $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ подударна или јенднака. Изражено знацима је

$$\sphericalangle\varphi\psi \cong \sphericalangle\varphi'\psi' \text{ или } \sphericalangle\varphi\psi=\varphi'\psi'.$$

3. За диједре и њихову подударност имају особит значај ове две теореме:

Теорема 27.3. *Ако су два диједра подударна, њихови углови су једнаки.*

Доказ. Нека су диједри $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ једнаки, s и s' њихове ивице. Према дефиницији 27.2 постоје онде наведене тачке L, M, P, Q и L', M', P', Q' тако да постоји подударност (1). Докажимо да су им углови једнаки.

Ако је раван LPQ управна на ивици s, удубљени или испупчени угао $\sphericalangle PLQ$ је угао диједра $\sphericalangle\varphi\psi$. Углови $\sphericalangle PLM$ и $\sphericalangle QLM$ су прави. Како је

$$LM=L'M',\qquad LP=L'P',\qquad MP=M'P'$$

углови $\sphericalangle PLM$ и $\sphericalangle P'L'M'$ су према дефиницији 21.1 једнаки, дакле угао $\sphericalangle P'L'M'$ је прав.

Исто тако је и угао $\sphericalangle Q'L'M'$ прав. Дакле праве $L'P'$ и $L'Q'$ су управне на ивици s', према томе удубљен или испупчен угао $\sphericalangle P'L'Q'$ је угао диједра $\sphericalangle\varphi'\psi'$.

Како је

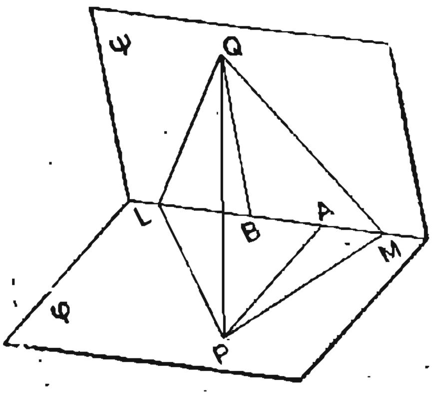
$$LP=L'P',\qquad LQ=L'Q',\qquad PQ=P'Q',$$

углови $\sphericalangle PLQ$ и $\sphericalangle P'L'Q'$, тј. углови диједра $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ су једнаки.

Исто тако доказујемо да су углови тих диједара једнаки ако тачке M, P, Q припадају равни управној на ивици s диједра.

Претпоставимо да равни LPQ и MPQ нису управне на s. Нека су тада A и B подножја управних спуштених редом из P и Q на s (сл. 227), затим A' и B' аналоге тачке на s'.

Тачке A и B се не поклапају обе заједно ни с L ни с M, јер би тада раван LPQ или MPQ била управна на s, али могу се поклапати једна с једном, друга с другом од тачака L, M. Разликујемо ова два случаја:



Сл. 227

1) Нека се тачка A поклапа с једном од тачака L, M, рецимо да је L та тачка. Обележимо тада тачку L словом A.

2) Нека се тачка A не поклапа с тачкама L и M. Тада је A на краку LM угла $\sphericalangle MLP$ или на његовом продужењу. Како је $LM=L'M'$, $LP=L'P'$ и $MP=M'P'$ према дефиницији 21.1 је такође $\sphericalangle MLP=\sphericalangle M'L'P'$. Исто тако се доказује да је $\sphericalangle MLQ=\sphericalangle M'L'Q'$.

Ако је A на краку LM угла $\sphericalangle MLP$, тачка A' је, као подножје управне спуштене из тачке P' крака $L'P'$ на s', на краку $L'M'$ угла $\sphericalangle M'L'P'$, јер су ова два угла једнака. Ако је A на продужењу крака LM и A' је дакле на продужењу крака $L'M'$. У оба случаја, како је $\sphericalangle MLP=\sphericalangle M'L'P'$ имамо $\sphericalangle ALP=\sphericalangle A'L'P'$. Исто тако имамо $\sphericalangle ALQ=\sphericalangle A'L'Q'$. Како је још и $LP=L'P'$, а углови $\sphericalangle LAP$ и $\sphericalangle L'A'P'$ су прави, дакле једнаки, углови $\sphericalangle APL$ и $\sphericalangle A'P'L'$ пак оба оштра, троугли ALP и $A'L'P'$ су подударни. Дакле $AL=A'L'$, $AP=A'P'$. Из $AL=A'L'$ и $AM=A'M'$ следује пак $AM=A'M'$.

Исто тако су троугли ALQ и $A'L'Q'$ подударни, јер је $AL=A'L'$, $LQ=L'Q'$, $\sphericalangle ALQ=\sphericalangle A'L'Q'$. Дакле је и $AQ=A'Q'$.

Према томе, у оба случаја 1) и 2) подударност датих диједара постоји према дефиницији 27.1 и на основи једнакости:

$$\begin{aligned}AM&=A'M',\quad AP=A'P',\quad MP=M'P',\\ AQ&=A'Q',\quad MQ=M'Q',\quad PQ=P'Q'.\end{aligned}$$

Дакле посматрајмо сада те дужи, као што смо досад посматрали оне које су обележене као у тој дефиницији. Ако се тачка B поклапа с тачком A, раван APQ је управна на ивици s, дакле како је $AP = A'P'$, $AQ = A'Q'$, $PQ = P'Q'$, имамо $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle P'A'Q'$, а то су тада углови датих двају диједара, дакле њихови углови су једнаки.

Ако се тачка B не поклапа с A, разликујемо опет два случаја:

1) Нека су A и B две разне тачке, али нека се тачка B поклапа с M. Обележимо тада тачку M словом B.

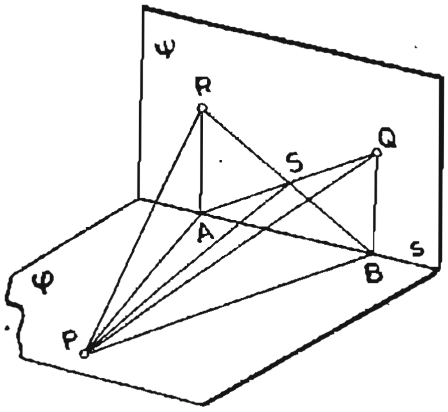
2) Нека се тачка B не поклапа с A и M. Тада, посматрајући као у претходном другом случају, но пишући B, M, A, P, Q редом уместо A, L, M, P, Q и слично за тачке другог диједра, доказујемо да имамо $BP = B'P'$, $AB = A'B'$ и $BQ = B'Q'$.

Дакле у ова два скучаја постоји подударност датих диједара и на основи једнакости

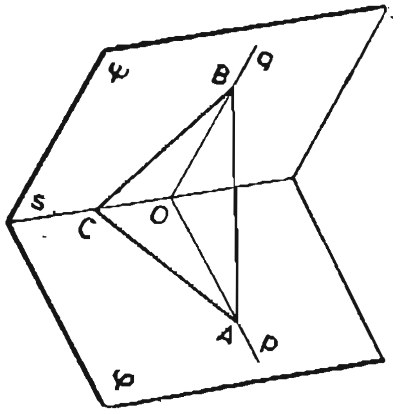
$$AB = A'B', \quad AP = A'P', \quad BP = B'P',$$
$$AQ = A'Q', \quad BQ = B'Q', \quad PQ = P'Q'.$$

Докажимо на основи тих једнакости да су углови датих диједара једнаки.

Нека је у полуравни ψ дуж AR управна на s и једнака са дужи BQ (сл. 228). Као што је доказано ради теореме 23.13 дужи AQ и BR се полове у извесној тачки S. Нека су R' и S' аналоге тачке у полуравни ψ'.



Сл. 228



Сл. 229

Из подударности троуглова ABQ и $A'B'Q'$ следује $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle B'A'Q'$, дакле је $\sphericalangle QAR = \sphericalangle Q'A'R'$. Из подударности правоуглих троуглова ABR и $A'B'R'$ следује $\sphericalangle ARB = \sphericalangle A'R'B'$. Дакле и троугли ARS и $A'R'S'$ су подударни, а отуд је $AS = A'S'$, дакле и $BS = B'S'$.

Као што смо доказали $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle P'A'Q'$, дакле према теореми 21.1 је $PS = P'S'$. Како је сем тога $BP = B'P'$, $BS = B'S'$, имамо $\sphericalangle PBR = \sphericalangle P'B'R'$. Дакле како је и $BR = B'R'$, такође је $PR = P'R'$.

На основи утврђених једнакости $AP = A'P'$, $AR = A'R'$, $PR = P'R'$, углови $\sphericalangle PAR$ и $\sphericalangle P'A'R'$ су једнаки. Но то су углови управних пресека диједара $\sphericalangle \varphi\psi$ и $\sphericalangle \varphi'\psi'$, дакле ови углови су једнаки.

Тиме је доказ ове теореме завршен.

Постоји и обрнута теорема:

Теорема 27.4. *Ако су углови двају диједара једнаки, ти диједри су подударни.*

Доказ. Нека је $\sphericalangle pq$ угао диједра $\sphericalangle \varphi\psi$ а $\sphericalangle p'q'$ угао диједра $\sphericalangle \varphi'\psi'$, и нека је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$ (сл. 229).

Нека су O и O' темена тих углова, затим A, B, C, A', B', C', редом тачке на p, q, s, p', q', s' тако да је

$$OA = O'A', \quad OB = O'B', \quad OC = O'C'.$$

Како је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$, имамо

$$AB = A'B'.$$

Како су углови $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle A'O'C'$, $\sphericalangle B'O'C'$ прави, дакле једнаки, такође је

$$AC = A'C' \text{ и } BC = B'C'.$$

Према томе диједри $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ су према дефиницији 27.2 подударни.

4. Ослањајући се на једнакост управних пресечних углова, једноставније се доказују даље теореме. Тако можемо доказати например следеће теореме. Доказ препуштамо читаоцу.

Теорема 27.5. *Ако су диједри* $\sphericalangle\varphi\psi$ и $\sphericalangle\varphi'\psi'$ *с ивицама* s *и* s' *подударни и ако су* A, B *и* A', B' *редом парови тачака на* s *и* s', *и* C, D, C', D' *редом тачке на* φ, ψ, φ', ψ' *тако да је*

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C',$$
$$AD = A'D', \quad BD = B'D',$$

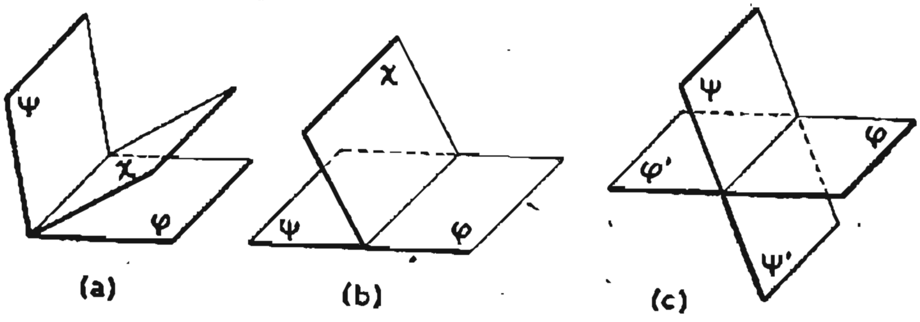
тада је и

$$CD = C'D'.$$

Теорема 27.6. *Ако је* $\sphericalangle\varphi\psi$ *удубљен или испупчен диједар, затим* φ' *која било полураван, тада постоји са дате стране оне равни која садржи* φ' *једна и само једна полураван* ψ' *тако да је удубљени односно испупчени диједар* $\sphericalangle\varphi'\psi'$ *подударан удубљеном односно испупченом диједру* $\sphericalangle\varphi\psi$.

Теорема 27.7. *Сваки диједар* $\sphericalangle\varphi\psi$ *је подударан са самим собом, и то тако да ма којој тачки* S *његове ивице одговара иста или ма која друга тачка* S' *те ивице, а да при том свакој његовој пљосни одговара та иста пљосан или пак друга његова пљосан, тј.*

$$\sphericalangle\varphi\psi \cong \sphericalangle\varphi\psi.$$



(a) (b) (c)

Сл. 230

Свакој теореми о подударности углова одговара аналогна теорема о подударности диједара. Тако би се напр. садржај § 21 могао цео пренети на диједре. Споменимо још само две дефиниције.

Дефиниција 27.3. Удубљен диједар коме су пљосни управне једна на другој називамо *правим диједром*.

Дефиниција 27.4. Ако су φ, χ, ψ три полуравни са заједничким рубом, и $\sphericalangle\varphi\chi$ и $\sphericalangle\varphi\psi$ два диједра са заједничком пљосни φ тако да је диједар $\sphericalangle\varphi\chi$ садржан у диједру $\sphericalangle\varphi\psi$ и ако су $\sphericalangle\alpha\beta$ и $\sphericalangle\gamma\delta$ два диједра тако да је $\sphericalangle\alpha\beta = \sphericalangle\varphi\chi$, $\sphericalangle\gamma\delta = \sphericalangle\varphi\psi$, кажемо да је диједар $\sphericalangle\alpha\beta$ *мањи* од диједра $\sphericalangle\gamma\delta$ или да је диједар $\sphericalangle\gamma\delta$ *већи* од диједра $\sphericalangle\alpha\beta$ (сл. 230).

Знацима

$$\sphericalangle\alpha\beta < \sphericalangle\gamma\delta, \quad \sphericalangle\gamma\delta > \sphericalangle\alpha\beta.$$

Уопште свакој дефиницији и свакој теореми о угловима одговара дефиниција односно теорема о диједрима.

28. НЕКЕ ТЕОРЕМЕ О РОГЉЕВИМА И ПОЛИЈЕДРИМА.

1. Услед аналогије напомените у § 16, између рогљева и многоуглова, а посебно између триједара и троуглова, многим теоремама о троуглима и многоуглима одговарају теореме о триједрима и вишестраним рогљевима. Али особит значај за проучавање рогљева и њихову даљу примену имају и неке теореме којима не одговара у тој аналогији никаква теорема о равним многоуглима. Такве су теореме о поларним рогљевима. Посматраћемо најпре „истотемене“ поларне рогљеве.

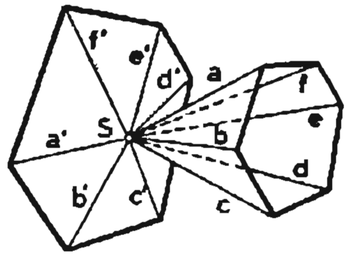
Дефиниција 28.1. *Истотеменим поларним рогљем* у односу на дат прост, једнострано раширен рогаљ $Sab\ldots h$ називамо рогаљ $Sa'b'\ldots h'$ коме је теме S заједничко с датим рогљем, а ивице $a', b', \ldots, h'$ су управне на пљоснима датог рогља и то:

a' је управна на пљосни $\sphericalangle ab$ и налази се с оне стране равни ab с које нису остале пљосни датог рогља;

b' је управна на пљосни $\sphericalangle bc$ и налази се с оне стране равни bc с које нису остале пљосни датог рогља;

итд. — и најзад

h' је управна на пљосни $\sphericalangle ha$ и налази се с оне стране равни ha с које нису остале пљосни датог рогља.



Сл. 231

Слика 231 претставља испупчен рогаљ $Sabcdef$ и истотемени поларни рогаљ $Sa'b'c'd'e'f'$.

Ограничавајући посматрање на истотемене рогљеве поларне испупченим рогљевима, доказујемо пре свега ову теорему:

Теорема 28. 1. *Истотемени поларни рогаљ испупченог рогља је такође испупчен.*

Доказ. Нека је $Sab\ldots h$ дати рогаљ $Sa'b'\ldots h'$ његов истотемени поларни рогаљ. Како је према дефиницији 28.1 ивица a' управна на равни ab, она је према дефиницији 24.1 управна и на a и на b, тј.

$$\sphericalangle a'a = \sphericalangle a'b = R.$$

Исто тако је

$$\sphericalangle b'b = \sphericalangle b'c = R, \quad \sphericalangle c'c = \sphericalangle c'd = R, \ldots, \quad \sphericalangle h'h = \sphericalangle h'a = R.$$

Према дефиницији 28.1 a' је с оне стране равни ab с које нису остале ивице $c, d, \ldots, h$. Како раван $a'c$ сече раван ab по правој p која је управна на a', а a' и c су с разних страна равни ab, дакле с разних страна праве p, угао $\sphericalangle a'c$ садржи полуправу праве p, и према томе један прав угао тј.

$$\sphericalangle a'c > R.$$

Исто тако је

$$\sphericalangle a'd > R, \ \ldots, \ \sphericalangle a'h > R.$$

Затим је

$$\sphericalangle b'd > R, \quad \sphericalangle b'e > R, \ \ldots, \ \sphericalangle b'h > R, \quad \sphericalangle b'a > R,$$

затим $\sphericalangle c'e > R$ итд.

Другим редом писано, имамо:

$$\sphericalangle aa' = \sphericalangle ah' = R, \quad \sphericalangle bb' = \sphericalangle ba' = R, \quad \sphericalangle cc' = \sphericalangle cd' = R$$

итд., а за остале односе

$$\sphericalangle ab' > R, \quad \sphericalangle ac' > R, \quad \ldots, \quad \sphericalangle bc' > R$$

итд. Према томе ивица a је управна на равни којој припада пљосан $\sphericalangle a'h'$ а налази се с оне стране равни $a'h'$ с које нису остале пљосни рогља $Sa'b' \ldots h'$, — и аналого у односу на $b, c, \ldots, h$.

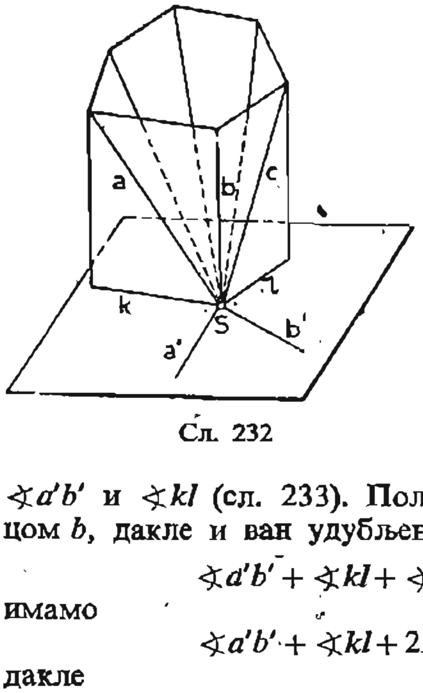
Дакле, како је a с оне стране равни $a'h'$ с које нису остале пљосни рогља $Sa'c' \ldots h'$ све пљосни овог рогља, осим $\sphericalangle a'h'$, јесу с исте стране равни $a'h'$. Аналого важи у односу на раван сваке пљосни рогља $Sa'b' \ldots h'$, дакле према дефиницији 28.1 тај рогаљ је испупчен.

Поларност рогљева је узајаман однос. Докажимо сад следећу теорему:

* **Теорема 28.2.** *Сваки испупчен рогаљ је истотемени поларни рогаљ своме истотеменом поларном рогљу.*

Доказ. Као што смо видели у доказу претходне теореме, ивица a датог рогља је управна на равни пљосни $\sphericalangle h'a'$ истотеменог поларног рогља и налази се с оне стране равни $a'h'$ с које нису остале пљосни овог рогља. Аналого је у односу на ивице $b, c, \ldots, h$. Дакле, према дефиницији 16.3 $Sab \ldots h$ је истотемени поларни рогаљ рогљу $Sa'b' \ldots h'$.

Између пљосни једног испупченог рогља и диједарских углова њему поларног истотеменог рогља постоји однос исказан у следећој теореми.



Сл. 232

* **Теорема 28.3** *Збир угла ма ког диједра испупченог рогља и угла који је истоветан са одговарајућом пљосни истотеменог поларног рогља једнак је збиру два права угла.*

И збир угла који је истоветан са једном пљосни испупченог рогља и угла одговарајућег диједра истотеменог поларног рогља једнак је збиру два права угла.

Доказ. Према дефиницији 28.1 раван $a'b'$ сече полураван ba по полуправој k, а полураван bc по полуправој l. Како је ивица a' управна на равни ab, управна је и на k, тј. $\sphericalangle a'k = R$ (сл. 232). Исто тако је $\sphericalangle b'l = R$. Посматрајмо у равни $a'b'$ удубљене углове $\sphericalangle a'b'$ и $\sphericalangle kl$ (сл. 233). Полуправе a' и b' су ван удубљеног диједра с ивицом b, дакле и ван удубљеног угла $\sphericalangle kl$. Како је дакле

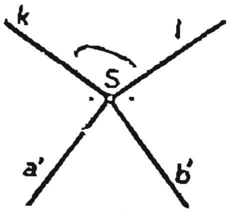
$$\sphericalangle a'b' + \sphericalangle kl + \sphericalangle a'k + \sphericalangle b'l = 4R,$$

имамо

$$\sphericalangle a'b' + \sphericalangle kl + 2R = 4R,$$

дакле

$$\sphericalangle a'b' + \sphericalangle kl = 2R.$$



Сл. 233

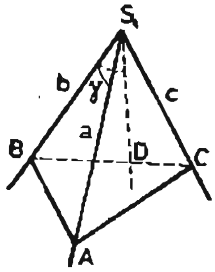
Како је раван $a'b'$ управна на ивици b, и полуправе k и l су управне на b, дакле удубљени угао $\sphericalangle kl$ је према дефиницији 27.1 угао диједра коме су равни ab и bc , тј. диједра рогља $Sab \ldots h$, који одговара пљосни $\sphericalangle a'b'$ истотеменог поларног рогља. Дакле, угао $\sphericalangle kl$ диједра датог рогља, коме је ивица b, и одговарајућа пљосан $\sphericalangle a'b'$ истотеменог поларног рогља износе заједно два права угла. То важи за све диједре датог рогља, а тиме је први део ове теореме доказан.

Обрнуто, како је $Sab\dots h$ истотемени поларни рогаљ рогља $Sa'b'\dots h'$ вреди исто у односу на угао диједра истотеменог поларног рогља и одговарајућу пљосан датог рогља, а тиме је и други део теореме доказан.

2. Докажимо сада две теореме о триједрима. Мање више свакој теореми о троуглу одговара теорема о испупченом триједру.

Теорема 28.4. *У испупченом триједру је свака пљосан мања од збира остале две пљосни а већа је од њихове разлике.*

Доказ. Нека су α, β, γ, пљосни испупченог триједра $Sabc$ (сл. 234), које су редом наспрам ивица a, b, c и нека је $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Нека су B и C ма које тачке редом на b и c. Докажимо да је $\alpha < \beta + \gamma$.



Сл. 234

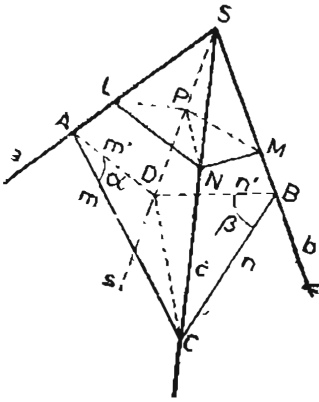
Нека је у равни SBC угао $\sphericalangle BSD$ једнак углу γ и нека му је крак SD с оне стране праве SB с које је тачка C.

Ако је $\alpha = \gamma$, значи да је $\alpha = \beta = \gamma$, а тада је, очигледно, $\alpha < \beta + \gamma$. Претпоставимо дакле да је $\alpha > \gamma$. Тада је полуправа SD у углу α. Изаберимо тачке B и C ма како на полуправим SB и SC. Нека је D (према теореми 11.7) пресек дужи BC са полуправом SD и затим A тачка на a, тако да је $SA = SD$.

Троугли SAB и SDB су подударни, јер је $SA = SD$, $SB = SB$ и $\gamma = \sphericalangle BSD$, па је и $AB = DB$. Како је D у равни ABC, а у троуглу је разлика двеју страна мања од треће стране (према теореми 26.17) имамо

$$BC - AB < AC, \text{ тј. } DC < AC.$$

У троуглима ASC и DSC је $AS = DS$, $CS = CS$, а $AC > DC$, па је према теореми 25.15 $\beta > \sphericalangle DSC$ а отуд $\beta + \gamma > \sphericalangle DSC + \gamma = \sphericalangle DSC + \sphericalangle BSD = \alpha$, тј. $\alpha < \beta + \gamma$.



Сл. 235

Имамо дакле и

$$\beta \leqslant \alpha < \beta + \gamma \leqslant \alpha + \gamma \text{ тј. } \beta < \alpha + \gamma$$

и

$$\gamma \leqslant \alpha < \beta + \gamma \leqslant \beta + \alpha \text{ тј. } \gamma < \alpha + \beta.$$

Из $\alpha < \beta + \gamma$, следује пак

$$\alpha - \beta < \gamma, \quad \alpha - \gamma < \beta,$$

а из $\beta < \alpha + \gamma$ следује $\beta - \gamma < \alpha$.

Тиме је теорема доказана.

Теорема 28.5. *У испупченом триједру су наспрам једнаких пљосни једнаки диједри и, обратно, наспрам једнаких диједара су једнаке пљосни.*

Доказ. Нека су у испупченом триједру $Sabc$ пљосни $\sphericalangle ac$ и $\sphericalangle bc$ једнаке (сл. 235). Нека је s права која полови удубљен угао $\sphericalangle ab$, затим λ и μ полуравни у равни ab, којима је права s заједнички руб, и то λ она која садржи полуправу a, а μ она која садржи полуправу b. Нека је ν полураван која садржи полуправу c, а руб јој је права s.

Удубљени диједри $\sphericalangle \lambda\nu$ и $\sphericalangle \mu\nu$ су подударни, јер ако су L, M, N, P редом тачке на a, b, c, s, тако да је $LS = MS$, из једнакости углова $\sphericalangle LSP$ и $\sphericalangle MSP$ и из теореме 21.1 следује

$$PS = PS, \quad PL = PM, \quad SL = SM,$$
$$PN = PN, \quad SN = SN, \quad LN = MN.$$

Дакле према дефиницији 27.3 раван ν, је управна на равни ab.

Нека је C ма која тачка на c, D подножје управне спуштене из C на праву s. Права SD је садржана у равни ν, дакле управна је на равни ab.

Нека су A и B подножја управних спуштених из C редом на a и b. Према теореми 24.7 је и права AD управна на a, а права BD на b. Нека су m, m', n, n', редом полуправе AC, AD, BC и BD. Удубљени углови $\sphericalangle mm'$, $\sphericalangle nn'$, припадају равнима које су управне редом на a и b, дакле су углови диједара датог триједра, коме су ивице a и b.

Како је по претпоставци $\sphericalangle ASC=\sphericalangle BSC$, правоугли троугли ACS и BCS су подударни, дакле је $AC=BC$.

Како је такође $\sphericalangle ASD=\sphericalangle BSD$, имамо $AD=BD$. Дакле, кад год се не поклапају тачке S и D, имамо

$$AC=BC,\quad AD=BD,\quad CD=CD,$$

дакле према дефиницији 21.1 углови $\sphericalangle CAD$ и $\sphericalangle CBD$ диједара датог триједра, којима су ивице a и b, једнаки су, дакле и сами ти диједри су према теореми 27.4 једнаки.

Ако се пак S и D поклапају, тј. ако је ивица s управна на равни ab, оба посматрана диједра су два права диједра, дакле опет су једнаки. — Тиме је први део доказа завршен.

Претпоставимо да обрнута теорема није тачна, дакле да су, рецимо, у триједру $Sabc$ наспрам једнаких диједара с ивицама a и b, неједнаке стране. Тада раван ν^* која садржи праву s и управна је на равни ab не садржи ивицу c, него је ова с једне или друге стране равни ν^*, рецимо с оне стране a. Тада раван ν^* сече пљосан $\sphericalangle ac$ по извесној полуправој p и доказујемо, слично као у претходном делу овог доказа, да је $\sphericalangle ap=\sphericalangle bp$.

Како су пљосни $\sphericalangle ap$ и $\sphericalangle bp$ триједра $Sabp$ једнаке, његови диједри с ивицама a и b су према првом делу ове теореме такође једнаки. Но триједрима $Sabc$ и $Sabp$ је диједар с ивицом a заједнички, а њихови диједри с ивицом b нису једнаки, јер полуправа p није у равни bc дотичне пљосни тог диједра првога триједра. Дакле диједри с ивицама a и b у триједру $Sabc$ нису једнаки, супротно претпоставци. Према томе, и други део теореме је доказан.

Лако се може доказати и следећа теорема:

Теорема 28.6. *У испупченом триједру је наспрам веће пљосни већи диједар и наспрам већег диједра већа пљосан.*

3. Подударне просте, једнострано раширене рогљеве можемо дефинисати на аналоган начин како смо дефинисали подударне многоугле.

Дефиниција 28.2. Ако су у два проста, једнострано раширена рогља $Sa_1a_2\dots a_n$ и $Tb_1b_2\dots b_n$ две по две одговарајуће пљосни и два по два одговарајућа диједра једнаки, рећи ћемо да су та два рогља *подударна*.

Полазећи од дефиниције подударности диједара лако се доказују напр. ове четири теореме о подударности триједара.

Теорема 28.7. *Ако су две стране и захваћен диједар једног триједра редом једнаки двема странама и захваћеном диједру другог триједра, ти триједри су подударни.*

Теорема 28.8. *Ако су једна страна и два налегла диједра једног триједра редом једнаки једној страни и одговарајућим налеглим диједрима другог триједра, ти триједри су подударни.*

Теорема 28.9. *Ако су све три стране једног триједра редом једнаке трима странама другог триједра, ти триједри су подударни.*

Теорема 28.10. *Ако су сва три диједра једног триједра редом једнаки одговарајућим диједрима другог триједра, ти триједри су једнаки.*

Доказе тих теорема препуштамо читаоцу.

Дефиницијом 28.1 увели смо истоимени поларни рогаљ датом рогљу. Сад можемо на темељу подударности увести поларни рогаљ у општем смислу.

Дефиниција 28.3. Сваки рогаљ који је подударан рогљу истотемено поларном у односу на дат рогаљ, називаћемо *поларним рогљем* (у општем смислу) у односу на дати рогаљ.

4. Ако хоћемо да дефинишемо подударне полиједре у аналогији с дефиницијом подударних многоуглова и рогљева, треба захтевати сада подударност одговарајућих пљосни и одговарајућих рогљева.

Дефиниција 28.4. Ако су у два проста полиједра две по две одговарајуће стране једнаке и два по два одговарајућа рогља једнака, рећи ћемо да су та два полиједра *подударна.*

Уместо да тражимо подударност рогљева, можемо захтевати да, сем ивица, одговарајуће дијагонале двају полиједара буду једнаке. Приметимо, затим, да уопште није потребно захтевати подударност свих одговарајућих страна и рогљева код два полиједра, да би се закључило о њиховој подударности. Тако настају разне теореме, које овде не износимо.

29. ПОДУДАРНОСТ МА КАКВИХ ЛИКОВА.

1. У проучавању подударности пошли смо од аксиома групе III, којима су имплицитно дефинисане подударне дужи. Те аксиоме као и њихове последице претпостављају чињеницу да су две дужи подударне већ кад им се, тако рећи, крајеви приликом преношења једне дужи на другу поклопе. Јер кад се крајеви двеју дужи поклопе, поклопе им се и све остале тачке. Како ће се при томе поставити унутарње тачке једне дужи на унутарње тачке друге дужи нисмо питали; то је, могло би се рећи, остало неодређено, произвољно. Али за подударност двеју дужи то је било довољно. Исто тако је за подударност троуглова довољно да су, у том истом смислу, одговарајуће странице подударне. На одговарајући начин се дефинишу и подударни многоугли. За подударност двеју ма каквих линија, очигледно није довољно посматрати само коначно много тачака. То вреди тим пре кад треба утврдити подударност ма каквих ликова.

Два ма каква лика сматраћемо подударним ако су сваке две дужи једног и другог лика, које спајају ма која два одговарајућа пара тачака, подударне међу собом.

И сама дуж је извесно мноштво тачака, које садржи осим крајева још и све унутарње тачке (дефиниција 5.1). Дакле, ако се обазиремо на све тачке двеју дужи, морамо рећи да су две дужи подударне (у овом другом смислу) ако одговарају не само крајевима једне дужи крајеви друге дужи, већ и свакој унутарњој тачки једне дужи једна унутарња тачка друге дужи тако да свака дуж која спаја две тачке једног мноштва буде подударна оној дужи која спаја две одговарајуће тачке другог мноштва.

Подударност у том другом смислу, дакле која се односи и на унутарње тачке двеју дужи, два угла, двеју равних троугластих површи, двеју кривих линија итд., тј. на све тачке два лика — називаћемо, за разлику од обичне (елементарне) подударности у досадањим разматрањима, *подударношћу кроз све тачке* — да бисмо уопште имали одређен назив.

Напоменимо да то разликовање двеју врста подударности постаје непотребно ако се већ у заснивању подударности пође од „подударности кроз све тачке", посматрајући прво само коначна мноштва тачака, а пре свега парове тачака уместо дужи.

Дуж AB се може (са аксиоматичког становишта) штавише дефинисати као пар тачака A и B, угао $\sphericalangle POQ$ као укупност трију тачака P, O, Q узетих тим одређеним редом, или обрнутим. С овог становишта треба разумети и Хилбертове дефиниције дужи и угла. У њега је дуж пар тачака, све тачке које су између A и B назива апстрактно „тачкама дужи AB".

Општа идеја која долази до изражаја – како у подударности „кроз све тачке", тако и у сличности ма каквих ликова, па у афином и пројективном сродству ма каквих ликова итд. – је идеја функције или трансформације, или (геометријски схваћено) пресликавања мноштава тачака. Реч је сваки пут о посебној врсти пресликавања једног мноштва на друго, тако да свакој тачки P једног мноштва одговара једна одређена тачка P' другог мноштва и обратно (тачкаста пресликавања). Можемо писати и $P' = F(P)$. Појам функције се ту јавља природно.

Лик који се састоји из тачака A, B, C, ... обележаваћемо као мноштво тачака, знаком $\{A, B, C...\}$ или пак великим грчким словом. (То сад није полигон ABC..., јер овај се не састоји само из тих тачака, већ и из дужи AB, BC, ...) Напоменимо да мноштво тачака које сачињавају лик замишљамо било коначним било бесконачним.

2. У дефиницији 22.1 захтевали смо за подударне троугле да све три странице и сва три угла једног троугла буду једнаки одговарајућим страницама и угловима другог троугла, саобразно елементарној теорији подударних многоуглова. Но довољна је подударност самих страница, као што нам теорема 22.4 казује. Према томе ћемо на тај једноставнији начин дефинисати сада подударност ма каквих ликова. Треба узети у обзир одговарајуће дужи двају ликова, које спајају ма које две тачке једног односно другог лика, дакле подударност треба спровести „кроз све тачке".

Дефиниција 29.1. Ако међу тачкама двају ликова, који садрже најмање по две тачке, постоји такав узајаман однос да је свака дуж која спаја одговарајуће две тачке другог лика, називамо та два лика *подударним* (конгруентним) *кроз све тачке*, или, кратко, *подударним* (конгруентним).

Из дефиниције следује непосредно следећа теорема:

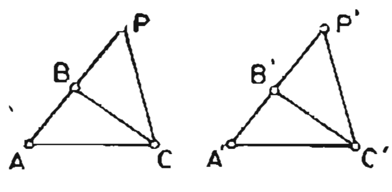
Теорема 29.1. *Ако су* Δ *и* Δ' *два лика подударна кроз све тачке и ако је* Λ *лик садржан у лику* Δ, *а* Λ' *лик који се састоји из тачака које у тој подударности одговарају свим тачкама лика* Λ, *тада су и ликови* Λ *и* Λ', *ако садрже најмање по две тачке, подударни кроз све тачке.*

Докажимо сад следеће две теореме.

Теорема 29.2. *Ако три тачке* A, B, C *једног лика припадају једној правој, тада одговарајуће три тачке* A', B', C' *другог лика, који му је подударан кроз све тачке, припадају такође једној правој и истог су распореда као прве три тачке, тј. ако је* A – B – C, *такође је и* A' – B' – C'.

Доказ. Нека су A, B, C три тачке једне праве, A', B', C' три одговарајуће тачке лика подударног кроз све тачке. Тада је према дефиницији 29.1 $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Ако је напр, $A - B - C$, имамо према дефиницији 26.1 $AB + BC = AC$, а отуд следује $A'B' + B'C' = A'C'$. Кад тачке A', B', C' не би припадале једној правој, одређивале би троугао $A'B'C'$ и према теореми 26.17 било би $A'B' + B'C' > A'C'$. Дакле, тачке A', B', C' припадају једној правој и сем тога је $A' - B' - C'$.

Теорема 29.3. *Ако тачка* P *не припада лику* Ω, *али припада правој која пролази кроз две тачке лика* Ω, *тада постоји на правој која пролази кроз одговарајуће две тачке лика* Ω' *подударног кроз све тачке једна једина тачка* P' *која не припада том лику, тако да лик који се састоји из* Ω *и* P *буде подударан кроз све тачке с ликом који се састоји из* Ω' *и* P'.



Сл. 236

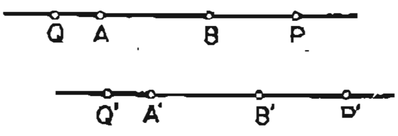
Доказ. Нека су A, B две тачке лика Ω, P тачка на правој AB, затим A', B' одговарајуће тачке лика Ω (сл. 236). Постоји једна једина тачка P' на правој $A'B'$ тако да је $AP=A'P'$, $BP=B'P'$ (према аксиоми III 1 и III 3). Ако су C и C' ма које даље две одговарајуће тачке оба лика Ω и Ω', па ако оне припадају правим AB одн. $A'B'$, имамо према томе и $PC=P'C'$; ако пак не припадају тачке C и C' тим правим, постоје троугли ABC и $A'B'C'$ и једнакости:

$$AC=A'C',\ AB=A'B',\ BC=B'C',\ AP=A'P'.$$

Дакле, према аксиоми III 5 такође је и $CP=C'P'$. Према томе свака дуж што спаја тачку P с неком тачком лика Ω једнака је дужи што спаја тачку P' с одговарајућом тачком лика Ω', дакле према дефиницији 29.1 та два лика су подударна кроз све тачке.

Из претходне теореме следује:

Теорема 29.4. *Ако су* AB *и* A'B' *две једнаке дужи на истој или на двема разним правим, свакој тачки* P *праве* AB *одговара једна једина тачка* P' *праве* A'B' *тако да су дужи* AB *и* A'B', *па и праве* AB *и* A'B' *подударне кроз све тачке а да при томе тачкама* A *и* B *одговарају редом тачке* A' *и* B'.



Сл. 237

Доказ. Докажимо теорему за праве. За дужи доказ је исти.

Нека су AB и $A'B'$ две подударне дужи, затим P ма која трећа тачка на правој AB (сл. 237). Према теореми 29.3 постоји на правој $A'B'$ једна једина тачка P' тако да су ликови A, B, P и A', B', P', који се састоје од по три тачке, подударни кроз све тачке. Нека је Q ма која четврта тачка на правој AB. Према теореми 29.3 постоји на правој $A'B'$ једна једина тачка Q' тако да су ликови A, B, P, Q и A', B', P', Q' подударни кроз све тачке. Дакле је $PQ=P'Q'$ и сем тога $AP=A'P'$, $AQ=A'Q'$, $BP=B'P'$, $BQ=B'Q'$ и $AB=A'B'$. Према дефиницији 29.1 ликови који се састоје из свих тачака правих AB и $A'B'$ су подударни кроз све тачке. При томе тачкама A и B одговарају редом тачке A' и B'.

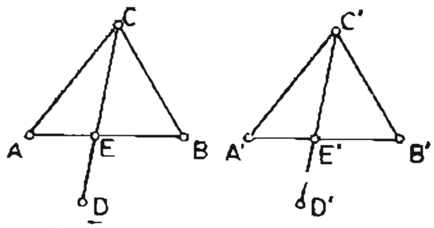
Приметимо да у том смислу права може бити на безброј начина подударна свакој другој правој и самој себи.

У претходним трима теоремама посматране су тачке које припадају извесним правим. Постоје аналогне теореме у којима је реч о тачкама у извесним равнима и затим теореме где се посматрају тачке које нису садржане у извесним равнима. То су следећих шест теорема.

Теорема 29.5. *Ако четири тачке* A, B, C, D *једног лика припадају једној равни, тада и одговарајуће четири тачке* A', B', C' D' *другог лика, који му је подударан кроз све тачке, такође припадају једној равни и истог су распореда као прве четири тачке, тј. ако су, рецимо, тачке* C *и* D *с исте стране праве* AB, *или с разних страна, такође су тачке* C' *и* D' *с исте стране праве* A'B', *односно с разних страна.*

Доказ. Нека су A, B, C, D четири тачке лика Ω које припадају једној равни и A', B', C', D' четири тачке лика Ω'. Ако тачке C и D припадају правој AB, према теореми 29.2 припадају и тачке C' и D' правој $A'B'$.

Ако тачке C и D не припадају обе правој AB, рецимо да тачке A, B, C не припадају једној правој, тада ни тачке A', B', C' не припадају једној правој. Ако тада тачка D припада равни ABC, постоји (према дефиницији равни 5.3) тачка E на дужи AB тако да D припада правој CE, или на дужи BC тако да D припада правој AE, или на дужи AC тако да D припада правој BE. Нека напр. постоји таква тачка E на дужи AB (сл. 238). Тада према теореми 29.3 постоји на правој $A'B'$ тачка E' тако да лик $\Omega+E$ (који се састоји из лика Ω и тачке E) буде кроз све тачке подударан лику $\Omega'+E'$.



Сл. 238

Ако је $E\equiv A$ (или $\equiv B$), такође је $E'\equiv A'$ (или $\equiv B'$). Ако је $A-E-B$, према теореми 29.2 је такође $A'-E'-B'$. Три тачке C, E, D лика $\Omega+E$ припадају једној правој, дакле и три одговарајуће тачке C', E', D' кроз све тачке подударног лика $\Omega'+E'$ припадају једној правој, тј. D' припада правој која спаја тачку C' с тачком E' на дужи $A'B'$, а то значи (према дефиницији 5.3) да тачка D' припада равни $A'B'C'$.

Докажимо још да је распоред тачака A, B, C, D и тачака A', B', C', D' исти. — Ако су C и D с разних страна праве AB (сл. 238), према дефиницији 10.4 права AB сече праву CD између C и D у некој тачки E. Према теореми 29.3 постоји на правој $A'B'$ тачка E' тако да је лик који садржи и тачку E подударан кроз све тачке с ликом који садржи и тачку E'. Како је $C-E-D$, према теореми 29.2 је и $C'-E'-D'$, дакле и тачке C' и D' су с разних страна праве $A'B'$.

Ако су пак тачке C и D с исте стране праве AB, према дефиницији 10.4 права AB не сече дуж CD, дакле ни права $A'B'$ не сече дуж $C'D'$ (јер иначе би по претходноме и права AB секла дуж CD). Дакле C' и D' су с исте стране праве $A'B'$.

Теорема 29.6. *Ако тачка* P *не припада лику* Ω, *нити припада правој што пролази кроз две тачке тог лика, али припада равни која је одређена трима тачкама лика* Ω, *тада постоји у равни која је одређена трима одговарајућим тачкама лика* Ω' *који му је подударан кроз све тачке једна једина тачка* P' *која не припада том лику, тако да лик који се састоји из* Ω *и* P *буде кроз све тачке подударан лику који се састоји из* Ω' *и* P'.

Доказ. Нека је ABC раван тачака A, B, C лика Ω, а A', B', C' одговарајуће тачке лика Ω' подударног кроз све тачке. Из теореме 29.2 следује да и тачке A', B', C' одређују раван. Према дефиницији равни постоји напр. на дужи AB или BC или CA тачка E тако да у та три случаја редом права CE или AE или BE садржи тачку P. Рецимо да је тачка E на дужи AB, дакле да права CE садржи тачку P. Како P не припада правој што пролази кроз две тачке лика Ω, имамо $A-E-B$.

Према теореми 29.3 постоји на правој $A'B'$ тачка E' тако да лик $\Omega+E$ буде кроз све тачке подударан лику $\Omega'+E'$, а из теореме 29.2 следује да је такође $A'-E'-B'$. Према теореми 29.3 постоји тачка P' на $C'E'$ тако да лик $\Omega+E+P$ буде кроз све тачке подударан лику $\Omega'+E'+P'$. Према теореми 29.1 следује отуда да су и ликови $\Omega+P$ и $\Omega'+P'$ подударни кроз све тачке.

Из претходне теореме следује на темељу дефиниције 5.3, аналого као што теорема 29.4 следује из теореме 29.3, ова теорема:

Теорема 29.7. *Ако су* ABC *и* A'B'C' *два подударна троугла у истој или разним равнима, свакој тачки* P *у равни* ABC *одговара једна једина тачка* P' *у равни* A'B'C' *тако да су равни* ABC *и* A'B'C' *кроз све тачке подударне, а да при томе тачкама* A, B, C, D *одговарају редом тачке* A', B', C', D'.

Теорема 29.8. *Ако су* A, B, C, D; E *пет тачака једног лика, такве да ниједне четири не припадају једној равни, тада и од одговарајућих пет тачака* A', B', C', D', E' *лика који му је подударан кроз све тачке ниједне четири не припадају једној равни.*

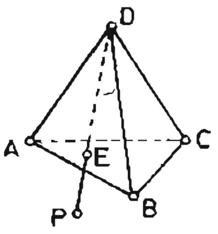
Ако су тачке D *и* E *с исте стране равни* ABC, *или с разних страна, такође су и тачке* D' *и* E' *с исте стране равни* A'B'C', *односно с разних страна.*

Доказ. Први део теореме следује непосредно из првог дела теореме 29.5. Докажимо само други део ове теореме. — Ако су D и E с разних страна равни ABC, према дефиницији 10.7 та раван сече праву DE између тачака D и E у некој тачки F. Ако је F тачка лика Ω, F' одговарајућа тачка лика Ω', према теореми 29.2 је такође $D'-F'-E'$. тј. D' и E' су с разних страна равни $A'B'C'$. Ако тачка F не припада лику Ω, али припада једној правој што спаја две тачке лика Ω у равни ABC, према теореми 29.3 постоји тачка F' која не припада лику Ω', тако да ликови $\Omega+F$ и $\Omega'+F'$ буду подударни. Тада из $D-F-E$ следује према теореми 29.2 опет $D'-F'-E'$.

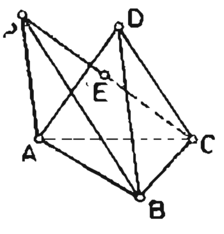
Најзад, ако F не припада ниједној правој што спаја две тачке лика Ω у равни ABC, према теореми 29.6 постоји тачка F' тако да ликови $\Omega+F$ и $\Omega'+F'$ буду кроз све тачке подударни, и опет из $D-F-E$ следује $D'-F'-E'$. Дакле у сваком случају тачке D' и E' су такође с разних страна равни $A'B'C'$, — На основи тога, ако су D и E с исте стране равни ABC, и тачке D' и E' су с исте стране равни $A'B'C'$.

Теорема 29.9. *Ако тачка* P *не припада просторном лику* Ω, *нити припада равни одређеној трима тачкама тог лика, тада постоји једна једина тачка* P' *која не припада лику* Ω' *подударном кроз све тачке лику* Ω, *тако да лик који се састоји из* Ω *и* P *буде подударан кроз све тачке лику који се састоји из* Ω' *и* P'.

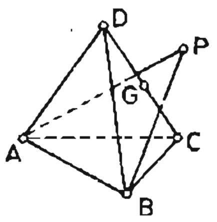
Доказ. Нека су A, B, C, D четири тачке лика Ω, које не припадају једној равни, а A', B', C', D' одговарајуће четири тачке подударног лика Ω', које као што из теореме 29.5 следује, такође не припадају једној равни.



Сл. 239



Сл. 240



Сл.241

Посматрајмо тачке D и P у односу на раван ABC. Ако су D' и P' с разних страна те равни, ова раван сече (према дефиницији 10.7) праву DP између D и P у некој тачки E (сл. 239). Према теореми 29.6 постоји у равни $A'B'C'$ тачка E' тако да ликови $\Omega+E$ и $\Omega'+E'$ буду подударни кроз све тачке. Тачка P припада правој DE. Према теореми 29.3 постоји на правој

$D'E'$ тачка P' тако да ликови $\Omega+E+P$ и $\Omega'+E'+P'$ буду подударни кроз све тачке. Дакле, према теореми 29.1 и ликови $\Omega+P$ и $\Omega'+P'$ су подударни кроз све тачке.

Ако су пак тачке D и P с исте стране равни ABC, посматрајмо тачке C и P у односу на раван ABD. Ако су C и P с разних страна равни ABD, ова раван сече праву CP између C и P у некој тачки F (сл. 240). Према теореми 29.6 постоји у равни $A'B'D'$ тачка F' тако да ликови $\Omega+F$ и $\Omega'+F'$ буду кроз све тачке подударни. Према теореми 29.3 постоји на $C'F'$ тачка P' тако да ликови $\Omega+F+P$ и $\Omega'+F'+P'$ буду кроз све тачке подударни. Дакле ликови $\Omega+P$ и $\Omega'+P'$ такође су кроз све тачке подударни.

Ако ли су тачке C и P с исте стране равни ABD како су D и P с исте стране равни ABC, тачка P је у удубљеном диједру с ивицом AB и полуравнима ABC и ABD које садрже тачке C и D. Дакле тачке C и D су с разних страна равни ABP (сл. 241). Према томе ова раван сече праву CD између C и D у некој тачки G. Према теореми 29.3 постоји на правој $C'D'$ тачка G' тако да ликови $\Omega+G$ и $\Omega'+G'$ буду кроз све тачке подударни. Тачка P припада равни ABC, дакле према теореми 29.6 постоји у равни $A'B'C'$ тачка P' тако да ликови $\Omega+G+P$ и $\Omega'+G'+P'$ буду кроз све тачке подударни, а према томе и ликови $\Omega+P$ и $\Omega'+P'$.Оваква тачка P' постоји увек. — Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 29.10. *Ако су* ABCD *и* A'B'C'D' *два подударна тетраедра (у истом простору), свакој тачки* P *одговара по једна једина тачка* P' *тако да цели простор буде кроз све тачке подударан себи самом, а да при томе тачкама* A, B, C, D, *одговарају редом тачке* A' B' C' D'.

Доказ је аналоган доказу у теореми 29.7.

Како права и раван, тако и простор може бити на безброј начина подударан кроз све тачке самом себи.

Наведимо још следећу теорему:

Теорема 29.11. *Два лика која су подударна кроз све тачке, подударна су и у смислу раније посматране подударности, уколико је ова за њих дефинисана.*

Обрнута теорема није тачна, јер за „обичну“ подударност ликова не захтева се подударност свих одговарајућих дужи што спајају тачке тих ликова.

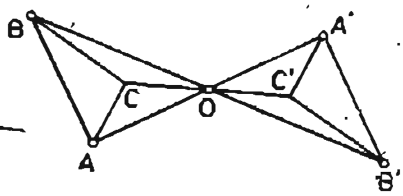
30. СИМЕТРИЈА.

1. Симетрија је подударност у којој подударни ликови имају особит узајаман положај. Као у посматрању подударности, тако се и у посматрању симетрије може разликовати обична симетрија двеју дужи или два полигона, два полиједра итд., укратко, два лика који су одређени коначним мноштвима тачака (темена) — иако се и ти ликови састоје из бесконачно много тачака — од „симетрије кроз све тачке”. Ми се ограничавамо на посматрање симетрије „кроз све тачке“ и називамо је напросто симетријом. Дефинисаћемо тако три познате врсте симетрије: средишњу (централну), осну (аксијалну) и раванску симетрију. Дефинисаћемо их редом и доказаћемо прво по једну теорему о свакој врсти симетрије.

Дефиниција 30.1. Ако међу тачкама двају ликова постоји такав однос да извесна тачка O одговара самој себи и да располовљује сваку дуж која спаја коју било другу тачку једног лика с одговарајућом тачком другог лика, та два лика називаћемо *средишње (централно) симетричним*, а тачку O *средиштем (центром) симетрије*.

Теорема 30.1. *Два средишња симетрична лика која се састоје из више од једне тачке, јесу подударна кроз све тачке.*

Доказ. Нека је O средиште симетрије и нека су A, B ма које друге две тачке неког лика Ω и A', B' одговарајуће тачке средишње симетричног лика Ω' (сл. 242). Према дефиницији 30.1 тачка O је средиште дужи AA' и BB', па је $AO = A'O$, $BO = B'O$. Ако све те тачке припадају једној правој, према аксиоми III 3 и теореми 20.7 је такође $AB = A'B'$. Ако не припадају једној правој углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'OB$ су унакрсни, дакле једнаки, а отуд следује да су троугли ABO и $A'B'O$ подударни. Према томе је $AB = A'B'$, како су A и B ма које две тачке лика Ω, ликови Ω и Ω' су према дефиницији 29.1 подударни кроз све тачке.



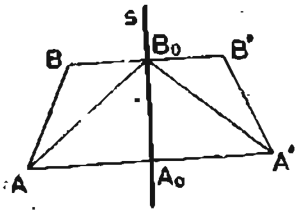
Сл. 242

Дефиниција 30.2. Ако међу тачкама двају ликова постоји такав однос да свака тачка на извесној правој s одговара себи самој, а да права s сече и располовљује сваку дуж која спаја коју било другу тачку једног лика с одговарајућом тачком другог лика, и управна је на тој дужи, та два лика називаћемо *осно (аксијално) симетричним*, а праву s *осом симетрије*.

Теорема 30.2. *Два осно симетрична лика која се састоје из више од једне тачке, јесу подударна кроз све тачке.*

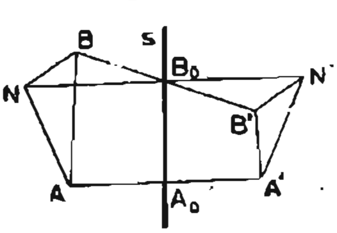
Доказ. Нека је s оса симетрије и нека су A, B ма које две тачке лика Ω и A', B' одговарајуће тачке осно симетричног лика Ω'. Ако те тачке нису на s, нека су A_0 B_0 средишта дужи AA' и BB'. Према дефиницији 30.2 дужи AA' и BB' су управне на оси симетрије s, а A_0, B_0 њихови пресеци са s. Имамо $A_0A = A_0A'$, $B_0B = B_0B'$. Ако су A, B на s, имамо $A \equiv A' \equiv A_0$ и $B \equiv B' \equiv B_0$. Докажимо да је $AB = A'B'$.

Ако се праве AA' и BB' поклапају, тачке A_0 и B_0 се поклапају и према аксиоми III 3 и теореми 20.7 имамо $AB = A'B'$. Ако се праве AA' и BB' не поклапају, претпоставимо прво да те праве AA' и BB' припадају једној равни (сл. 243). Троугли AA_0B_0 и $A'A_0B_0$ су подударни, јер њихови углови са заједничким теменом A_0 су једнаки, страница A_0B_0 је заједничка и $AA_0 = A'A_0$. Према томе је $AB_0 = A'B_0$ и $\sphericalangle AB_0A_0 = \sphericalangle A'B_0A_0$. Како су праве AA' и BB' обе управне на правој s, не секу се, дакле A и A' су с исте стране праве BB', па како су с разних страна праве s, тачка A је у правом углу $\sphericalangle A_0B_0B$, а тачка A' је у правом углу $\sphericalangle A_0B_0B'$, дакле угао $\sphericalangle A_0B_0A$ је у углу $\sphericalangle A_0B_0B$, а угао $\sphericalangle A_0B_0A'$ је у углу $\sphericalangle A_0B_0B'$. Према томе и оштри углови $\sphericalangle AB_0B$ и $\sphericalangle A'B_0B'$ су једнаки. Како је сем тога $AB_0 = A'B_0$ и $BB_0 = B'B_0$, троугли ABB_0 и $A'B'B_0$ су подударни, дакле је и $AB = A'B'$.



Сл. 243

Претпоставимо најзад да праве AA' и BB' не припадају једној равни (сл. 244). Нека су N и N' подножја управних спуштених из B и B' на раван одређену правим s и AA'. Те управне припадају према теореми 24.7 једној равни α. Ова је управна на првој равни и сече се с њом по правој NN'. Како је права s управна на NN', према теореми 24.1 управна је и на равни α. Дакле права NN' је управна на правој s.



Сл. 244

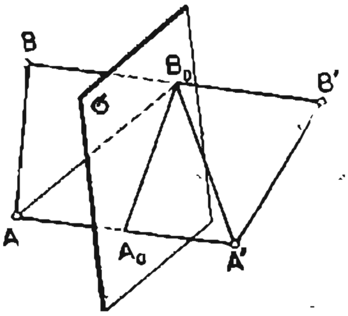
Како су углови $\sphericalangle B_0NB$ и $\sphericalangle B_0N'B'$ прави, затим $\sphericalangle BB_0N = \sphericalangle B'B_0N'$ и $B_0B = B_0B'$, троугли B_0BN и $B_0B'N'$ су подударни, дакле је и $BN = B'N'$ и $B_0N = B^0N'$.

Како су дужи AA' и NN' у једној равни и обе управне на s располовљене правом s, имамо према ономе што смо претходно доказали $AN = A'N'$. Но углови $\sphericalangle ANB$ и $\sphericalangle A'N'B'$ су прави, јер NB и $N'B'$ су управне на равни правих AA' и NN'. Дакле, како је $AN = A'N'$ и $BN = B'N'$, троуглови ABN и $A'B'N'$ су подударни, а отуд следује опет $AB = A'B'$. — Тиме је доказ ове теореме завршен.

* **Дефиниција** 30.3. Ако међу тачкама двају ликова постоји такав однос да свака тачка у извесној равни σ одговара себи самој, а да раван σ сече и располовљује сваку дуж која спаја коју било другу тачку једног лика с одговарајућом тачком другог лика, и управна је на тој дужи, називаћемо та два лика *симетричним у односу на раван* σ или *равански симетричним*, раван σ зваћемо *раван симетрије*.

* **Теорема** 30.3. *Два лика симетрична у односу на једну раван и који се састоје из више од једне тачке, јесу подударна кроз све тачке.*

Доказ. Нека је σ раван симетрије и нека су A и B ма које две тачке лика Ω и A' и B' одговарајуће тачке равански симетричног лика Ω' (сл. 245). Ако те тачке нису у σ, према дефиницији 30.3 дужи AA' и BB' су управне на равни σ и продиру ту раван у тачкама A_0 и B_0, тако да је $A_0A = A_0A'$, $B_0B = B_0B'$; ако су у σ, имамо $A \equiv A' \equiv A_0$, $B \equiv B' \equiv B_0$.



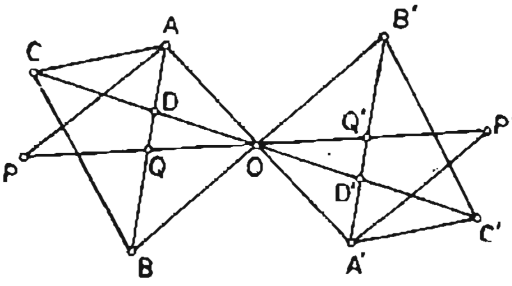
Сл. 245

Ако се тачке A и B поклапају с тачкама A' и B', дужи AB и $A'B'$ су по теореми 20.1 једнаке. Ако се напр. тачке A и A', не поклапају, троуглови AA_0B_0, $A'A_0B_0$ су подударни, јер је $A_0A = A_0A'$, страница A_0B је заједничка, а углови $\sphericalangle AA_0B_0$ и $\sphericalangle A'A_0B_0$ су прави, дакле једнаки. Отуд је и $AB_0 = A'B_0$ и $\sphericalangle A_0B_0A = \sphericalangle A_0B_0A'$. Дакле, ако се B и B' поклапају, имамо $AB = A'B'$. Нека се B и B' не поклапају. Како су и углови $\sphericalangle A_0B_0B$ и $\sphericalangle A_0B_0B'$ прави, дакле једнаки, а претходна два угла су у овима садржана — јер су то два оштра угла, тачке A_0, A, A' на њиховим крацима су пак на AA', дакле с исте стране праве BB' — оштри углови $\sphericalangle AB_0B$ и $\sphericalangle A'B_0B$ су такође једнаки, па како је $BB_0 = B'B_0$ и $AB = A'B_0$ троуглови ABB_0 и $A'B'B_0$ су подударни дакле опет је $AB = A'B'$.

2. У претходним трима теоремама доказали смо да су симетрични ликови подударни кроз све тачке. Постоје и следеће две, у извесном смислу обрнуте теореме.

Теорема 30.4. *Нека су два лика* Ω *и* Ω' *у једној равни подударна кроз све тачке и нека су* A, B, C *три тачке лика* Ω, *и* A', B', C' *три одговарајуће тачке лика* Ω'.

Ако су ликови {A, B, C} *и* {A', B', C'} *средишње симетрични, цели ликови* Ω *и* Ω' *су средишње симетрични. Ако су ликови* {A, B, C} *и* {A', B', C'} *осно симетрични, цели ликови* Ω *и* Ω' *су осно симетрични.*



Сл. 246

Доказ. Нека су подударни ликови Ω и Ω' у извесној равни α и нека је за ликове $\{A, B, C\}$ и $\{A', B', C'\}$ тачка O средиште симетрије. Тада је према дефиницији 30.1 тачка O средиште дужи AA', BB', и CC' (сл. 246). Нека је P ма која четврта тачка лика Ω и P' одговарајућа тачка лика Ω'. Докажимо да је тачка O такође средиште дужи PP'.

Како тачка O не мора припадати ликовима Ω и Ω', прво докажимо да су и ликови $\Omega+O$ и $\Omega'+O$ подударни кроз све тачке. Према дефиницији равни, тачка O је на правој која пролази кроз бар једно теме троугла ABC и једну тачку његове наспрамне странице. Рецимо да је O на правој CD која пролази кроз теме C троугла ABC и кроз тачку D његове странице AB.

Ако се D поклапа с A или B, рецимо с A, имамо $C-A-O$. Према теореми 29.3 постоји тачка O' тако да су ликови $\Omega+O$ и $\Omega'+O'$ подударни кроз све тачке, а према теореми 29.2 је такође $C'-A'-O'$ и $CO=C'O'$. Но тада се тачка O' поклапа с O, дакле ликови $\Omega+O$ и $\Omega'+O$ су подударни кроз све тачке.

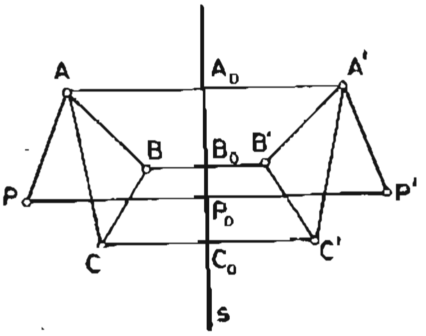
Ако је тачка D између A и B, према теореми 29.3 постоји тачка D' на правој $A'B'$ тако да су ликови $\Omega+D$ и $\Omega'+D'$ подударни кроз све тачке, а према теореми 29.2 је сем $A-D-B$ такође $A'-D'-B'$ и $AD=A'D'$. Према теореми 11.7 тачка D је у удубљеном углу $\sphericalangle AOB$, а D' у њему унакрсном углу $\sphericalangle A'OB'$. Но унутарње тачке унакрсних углова $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'OB'$ су с разних страна праве AA', дакле и тачке D и D' су с разних страна праве AA', тј. дуж DD' сече праву AA', па како су тачке D и D' на правој CC', имамо $D-O-D'$. Сем тога је $CO=C'O$, дакле према теореми 29.2 и 29.3 ликови $\Omega+D+O$ и $\Omega'+D'+O$ су подударни кроз све тачке. Отуд су према теореми 29.1 и ликови $\Omega+O$ и $\Omega'+O$ подударни кроз све тачке.

Како је тачка P у равни α, према теореми 29.3 и 29.6 постоји у равни α тачка P' тако да су ликови $\Omega+O+P$ и $\Omega'+O+P'$ подударни кроз све тачке. Ако је тачка P на равној OA, и тачка P' је према теореми 29.3 на правој OA', дакле P и P' су на правој AA' и то тачке O, A, P и тачке O, A', P' имају исти распоред. Дакле, ако је напр. $O-A-P$, такође је $O-A'-P'$, па како је $A-O-A'$, у оба случаја је и $P-O-P'$. Према дефиницији 29.1 је пак и $OP=OP'$, дакле O је средиште дужи PP'.

Ако тачка P није на правој OA, троугли OAP и $OA'P'$ су према дефиницији 29.1 подударни, дакле имамо $OP=OP'$ и $\sphericalangle AOP'=\sphericalangle A'OP'$. Докажимо да је $P-O-P'$.

Права OP сече бар једну од правих AB и AC. Нека сече праву AB у извесној тачки Q. Према теореми 29.3 постоји тачка Q' на правој $A'B'$, тако да су ликови $\Omega+O+Q$ и $\Omega'+O+Q'$ подударни кроз све тачке, а према теореми 29.2 тачке A, B, Q и тачке A', B', Q' имају исти распоред. Како су тачке B и B' с разних страна праве AA', тачке Q и Q' су дакле с разних страна праве AA', дакле је $Q-O-Q'$. Према теореми 29.2 тачке O, P, Q и O, P', Q' имају исти распоред, па како је $Q-O-Q'$, такође је $P-O-P'$.

Дакле тачка O је увек средиште дужи PP'. Како је P ма која тачка лика Ω, а P' одговарајућа тачка лика Ω', та два лика су према дефиницији 30.1 симетрична са средиштем симетрије O.



Сл. 247

Аналого се доказује други део теореме. Ако су у равни ликови $\{A, B, C\}$ и $\{A', B', C'\}$ симетрични у односу на праву s (сл. 247), затим A_0, B_0, C_0 пресеци дужи AA', BB', CC' са правом s, доказујемо прво да су и ликови $\Omega+A_0+B_0+C_0$ и $\Omega'+A_0+B_0+C_0$ подударни кроз све тачке, а затим да су за ма коју четврту тачку P лика Ω и одговарајућу тачку P' лика Ω' тачке P и P' симетричне у односу на праву s, прво у случају кад су P и P' на правој AA' или BB' или CC', а затим кад нису.

Теорема 30.5. *Нека су два лика* Ω *и* Ω' *у простору подударни кроз све тачке и нека су* A, B, C, D *четири тачке лика* Ω, *које не припадају једној равни и* A', B', C', D' *одговарајуће четири тачке лика* Ω'.

Ако су ликови {A, B, C, D} *и* {A', B', C', D'} *средишње симетрични, цели ликови* Ω *и* Ω' *су средишње симетрични. Ако су ликови* {A, B, C, D} *и* {A', B', C', D'} *осно симетрични, цели ликови* Ω *и* Ω' *су осно симетрични. Ако су ликови* {A, B, C, D} *и* {A', B', C', D'} *равански симетрични, цели ликови* Ω *и* Ω' *су равански симетрични.*

Доказ је у сва три дела ове теореме аналоган доказу првог и другог дела претходне теореме.

3. Следећа теорема произлази непосредно из дефиниције трију симетрија:

Теорема 30.6. *Ако су у једној равни или пак у простору два лика* Ω *и* Ω' *симетрична у односу на једну тачку или у односу на једну праву или у односу на једну раван и ако су друга два лика* Ξ *и* Ξ' *симетрична у односу на исту тачку, или праву или раван, тада су и ликови који се састоје, први из* Ω *и* Ξ, *други из* Ω' *и* Ξ', *такође симетрични у односу на ту тачку, или праву, или раван.*

Следећа теорема произлази непосредно из претходне, кад се за Ξ узме Ω' а за Ξ' узме Ω.

Теорема 30.7. *Ако су у једној равни или пак у простору два лика* Ω *и* Ω' *симетрична у односу на једну тачку, или у односу на једну праву или у односу на једну раван, тада је лик који се састоји из ликова* Ω *и* Ω' *симетричан самом себи у односу на исту тачку, или праву, или раван.*

31. КРУГ.

1. Права и круг (кружна линија, кружница) јесу од најстаријих времена главне линије у геометрији. Њихов значај произлази из њихове једноставности и из многобројности њихових лако уочљивих особина и примена, али такође и отуд што се круг и права могу најједноставније конструисати: напр. права лењиром а круг шестаром. Ове две справе утицале су битно на развиће геометрије у Старом веку и на утврђивање њенога садржаја. Саобразно античком схватању, које налазимо остварено особито у „Елементима", оне геометријске конструкције у равни сматрамо елементарним, које се могу извршити помоћу лењира и шестара.

У Еуклидовим „Елементима" круг — у ствари „кружна површ" — уводи се на почетку, следећом дефиницијом:

„Круг је раван лик омеђен таквом — само једном — линијом (која се зове периферија) да су све дужи повучене из једне тачке, која је у самом лику, до те линије (до периферије круга) међусобно једнаке. Ова тачка зове се ‚средиште круга."

Као што је раније речено (§ 17) Еуклид се већ у првим ставовима „Елемената" служи кругом да би конструисао подударне дужи. Сам круг је лик заснован на подударности. И дефиниција круга би се могла изрећи тако да се непосредно помињу подударне дужи:

„Укупност тачака једне равни, које су једни крајеви свих међу собом једнаких дужи, којима је други крај извесна тачка те равни, називамо кругом".

Но дефиниција је простија ако се примени израз „једнако удаљено“, који смо увели дефиницијом 20.1.

Дефиниција 31.1. Укупност тачака једне равни, које су једнако удаљене од једне тачке O те равни називамо кругом.

Тачку O називамо *средиштем* или *центром* круга, а сваку дуж која спаја средиште с ма којом тачком круга *полупречником (радиусом)* круга.

Кругове обележавамо малим латинским словима.

Дефиниција 31.2. За унутрашње тачке полупречника једног круга и за средиште круга кажемо да су у кругу, а за оне тачке у равни круга, које не припадају кругу нити су у њему кажемо да су *ван* круга.

Укупност тачака које су у једном кругу називамо унутрашњошћу тога круга.

За тачке круга кажемо и да су на кругу. За круг коме је средиште O кажемо и да је описан око тачке O.

Дефиниција 31.3. Укупност тачака на извесном кругу и тачака у њему називаћемо *равном кружном површи*, краће *кружном површи*.

Укупност тачака кружне површи, које припадају једном њеном средишњем углу називаћемо *кружним исечком*.

Укупност тачака кружне површи, које припадају једној полуравни, омеђеној дотичном сечицом круга називаћемо *кружним отсечком*.

2. Доносимо прво неколико теорема о самом кругу. Из дефиниције 31.1 следују непосредно ове две теореме:

Теорема 31.1. *Полупречници једног круга једнаки су међу собом.*

Теорема 31.2. *Ако је* O *средиште једног круга,* S *тачка у равни тог круга, а изван њега, дуж* OS *је већа од полупречника тог круга. Ако је тачка* S *у кругу, различита од* O, *дуж* OS *је мања од полупречника.*

Теорема 31.3. *Свака права која је у равни једног круга и пролази кроз његово средиште, има с тим кругом две заједничке тачке, са сваке стране средишта по једну.*

Доказ. Нека је p која било права у равни круга k, која пролази кроз његово средиште O, и нека је OA који било његов полупречник. Према теореми 20.6 постоји са сваке стране тачке O по једна једина тачка на p, дакле свега две тачке, рецимо P и P', такве да су дужи OP и OP' једнаке полупречнику OA тог круга. То су према дефиницији 31.1 тачке заједничке с кругом k. Дакле постоје на p свега две такве тачке, са сваке стране тачке O по једна.

Из претходне теореме следује непосредно:

Теорема 31.4. *На свакој правој која је у равни једног круга и која пролази кроз његово средиште постоји дуж чији су крајеви тачке тога круга, а средиште тог круга је средиште те дужи.*

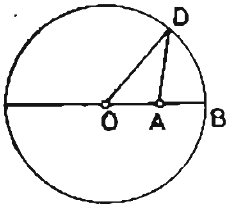
Дефиниција 31.4. Дуж која спаја две тачке круга и која садржи средиште тог круга зове се пречник.

Теорема 31.5. *Сваки пречник једног круга састоји се из два његова полупречника.*

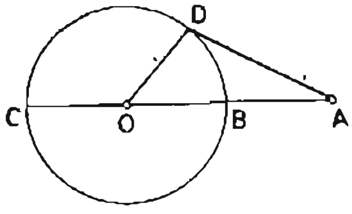
Доказ. Нека је AB пречник, O средиште круга. Како је O на дужи AB, имамо $AB = AO + OB$, при чему су AO и OB полупречници, по дефиницији 31.1.

Теорема 31.6. *Ако је* A *тачка у кругу чије је средиште* O, *но различита од* O, *или пак ако је изван круга, постоји једна тачка круга која јој* *је најближа и једна која јој је најдаља. Тачка круга која је најближа тачки* A *је на полуправој* OA *која полази из* O. *Тачка круга, која је најдаља од тачке* A *је на продужењу те полуправе.*

Доказ. Према теореми 31.3 постоје на правој OA две тачке круга, које су с разних страна тачке O а крајеви су пречника BC (сл. 251). Нека је тачка B с оне стране с које је тачка A, а C с друге стране. Нека је D ма која трећа тачка круга. Ако је тачка A у кругу, имамо $OA<OD$ (сл. 248), дакле у троуглу OAD је према теореми 26.17 $OD-OA<AD$. Како је $OD=OB$, имамо



Сл. 248



Сл. 249

$$OD-OA=OB-OA=AB,$$

а отуд

$$AB<AD.$$

Ако је тачка A ван круга, имамо $OA>OD$ (сл. 249), дакле у троуглу OAD је $AO-OD<AD$, а отуд опет

$$AB<AD.$$

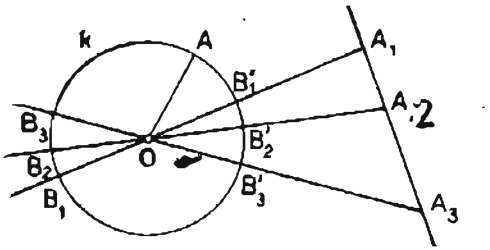
Према теореми 26.17, у оба случаја је $OA+OD>AD$, па како је $OD=OC$, а $OA+OD=OA+OC=AC$, имамо

$$AC>AD.$$

Тиме је доказ завршен.

Теорема 31.7. *Сваки круг има бескрајно много тачака.*

Доказ. Нека је k који било круг у једној равни α и O његово средиште (сл.250). Нека је a права у истој равни α, која не пролази кроз O. Према теореми 6.5 има на a бескрајно много тачака, напр. бескрајан низ тачака A_1, A_2, A_3, ... Према томе кроз тачку O постоји бескрајно много правих OA_1, OA_2, OA_3, ..., разних међу собом и које су у равни α. Према теореми 31.3 свака таква права има с кругом по две заједничке тачке и нека су то: права OA_1 две тачке B_1 и B_1', OA_2 тачке B_2 и B_2', OA_3 тачке B_3 и B_3' итд. Отуд следује да круг има бескрајно много тачака.



Сл. 250

3. Дефинишимо сада тетиву и сечицу круга, а затим донесимо неке теореме о тетиви и сечици.

Дефиниција 31.5. Дуж која спаја ма које две тачке зове се тетива.

Права која пролази кроз ма које две тачке круга зове се *сечица* (секанта) тога круга. — За сечицу кажемо да *сече* круг у оним двема тачкама које су јој заједничке са кругом.

Сл. 251

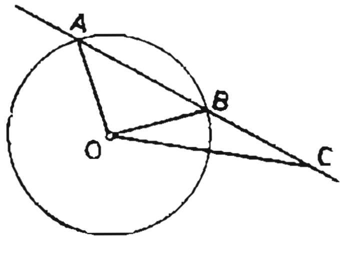
Теорема 31.8. *Пречници су највеће тетиве.*

Доказ. Према дефиницијама 31.1 и 31.3 пречници су тетиве. Нека је AB тетива круга која није пречник, тј. која не садржи средиште O круга (сл. 251).

Тада постоји према дефиницији 20.1 троугао ABO, који је једнакокрак, јер је према дефиницији 31.1 $OA = OB$. Према теореми 26.17 је $OA + OB > AB$. Но збир $OA + OB$ једнак је пречнику, дакле тетива AB је мања од пречника, и према томе пречници су највеће тетиве.

Теорема 31.9 *Свака сечица има с кругом две и само две заједничке тачке.*

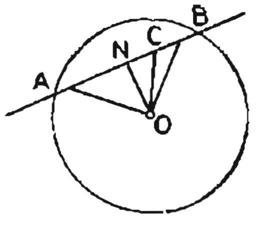
Доказ. Претпоставимо, напротив, да сечица AB (сл. 252), која има са кругом две заједничке тачке A и B, има с њим још једну заједничку тачку C. Према теореми 6.8 једна од тачака A, B, C је између остале две. Нека је напр. $A - B - C$. Како је према дефиницији $OA = OB = OC$, троугли OAB и OBC су једнакокраки, дакле према теореми 22.8 је $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$ и $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$. Ти углови су оштри, јер према теореми 25.12 троугао не може имати два права или два тупа угла. Али $\sphericalangle OBA$ и $\sphericalangle OBC$ су два напоредна угла, дакле постојала би два оштра напоредна угла, а то је према теореми 23.4 немогуће.



Сл. 252

Теорема 31.10. *Унутрашње тачке тетиве су у кругу.*

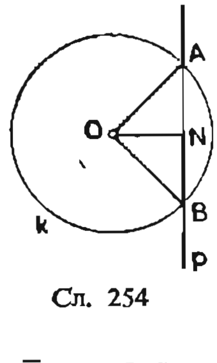
Доказ. Ако је тетива пречник круга, теорема следује непосредно из дефиниција 31.2 и 31.3. Нека је зато AB тетива мања од пречника и O средиште круга (сл. 253) и нека је ON управна из O на праву AB, N њено подножје. Нека је затим C ма која друга унутарња тачка тетиве AB. Према теореми 25.18 је $ON < OA$, дакле према дефиницији 31.2 N је у кругу. Како се дуж AB према теореми 6.23 састоји из дужи AN и BN, C је тачка једне или друге од ове две дужи, тј. имамо $A - C - N$ или $B - C - N$, дакле према дефиницији 25.1 је $CN < AN$, односно $CN < BN$, дакле према теореми 25.18 је $CO < AO$ у оба случаја, јер је $AO = BO$. Према томе C је у кругу.



Сл. 253

Теорема 31.11. *Права која је у равни једног круга, а пролази кроз крајњу тачку једног његовог полупречника и гради с њим кос угао, јесте сечица тога круга.*

Доказ. Нека је p права у равни круга k описаног око тачке O, A тачка круга кроз коју пролази p и нека су углови између p и полупречника OA коси (један оштар, други туп). Тада је (сл. 254) управна ON спуштена из O на праву p различита од OA. Нека је N њено подножје, а B тачка на p за коју је $A - N - B$ и $AN = BN$. Према теореми 22.5 троугли OAN и ONB су подударни, јер је $AN = BN$, $ON = ON$, $\sphericalangle ONA = \sphericalangle ONB$ (прави углови) дакле је и $OA = OB$. тј. према дефиницији 31.1 је и B тачка круга k. Дакле, према дефиницији 31.3 права p је сечица круга k.



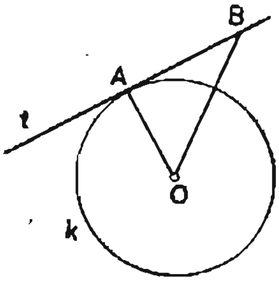
Сл. 254

4. Дефинишимо дирку и докажимо две теореме о њој.

Дефиниција 31.6. Права која је у равни једног круга, а има са њом само једну заједничку тачку назива се *дирка* (*тангента*) тога круга, а та тачка зове се *додирна тачка* или *тачка додира*.

Теорема 31.12. *Кроз сваку тачку круга пролази једна и само једна дирка. Она је управна на полупречнику који пролази кроз ту тачку а њене остале тачке су ван круга.*

Доказ. Нека је A тачка круга описаног око тачке O (сл. 255). Према теореми 23.7 постоји у равни круга једна и само једна права t управна на правој CA и која пролази кроз тачку A. Нека је B друга тачка на t. Према теореми 25.18 је $OA < OB$, дакле према дефиницији 31.2 тачка B је изван k. Према томе A је једина тачка праве t, која припада кругу, тј. t је дирка.



Сл. 255

Нека је p која било друга права која пролази кроз тачку A. Она није управна на OA у тачки A, јер t је једина таква права, дакле p гради с OA косе углове, те је према теореми 31.11 сечица, и према томе није дирка.

Дакле, кроз сваку тачку круга k пролази једна и само једна дирка. По претпоставци t је управна на полупречнику OA, која пролази кроз додирну тачку A.

Теорема 31.13. *Права која је у равни круга, а пролази кроз крајњу тачку једног његовог пречника, и гради с њим прав угао, је дирка тога круга.*

Доказ. Нека је, као у претходном доказу, t та права, A тачка круга кроз коју пролази t, O средишта круга. Ако је опет B ма која друга тачка праве t, према теореми 25.18 је $OB > OA$, дакле тачка B је ван круга, тј. A је једина тачка праве t, заједничка с кругом. Дакле, права t је према дефиницији 31.4 дирка круга k.

5. Међу најпознатијим теоремама о кругу су и теореме о централним угловима у вези с тетивама круга. Дефинишимо прво средишњи (централни) угао.

Дефиниција 31.7. Угао у равни једног круга, коме је теме средиште круга назива се *средишњи (централни) угао* тог круга.

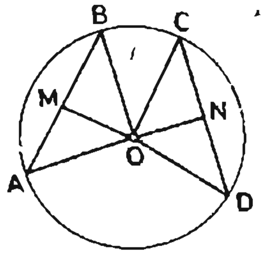
Ако су A и B оне тачке на крацима удубљеног средишњег угла, које припадају самом кругу, рећи ћемо да тетива AB и тај средишњи угао одговарају један другоме.

Теорема 31.14. *Управна спуштена из средишта круга на неку његову тетиву, располовљује ту тетиву и одговарајући средишњи угао. Располовница средишњег угла који одговара некој тетиви, располовљује ту тевиту и управна је на њој. Права која пролази кроз средиште круга и средиште неке његове тетиве, управна је на ту тетиву и располовљује одговарајући средишњи угао.*

Доказ. Троугао коме су странице два полупречника и једна тетива је једнакокрак. Отуд следује ова теорема непосредно, на основи теорема 23.9, 23.10 и 23.14.

Теорема 31.15. *Ако су две тетиве једног круга, које нису пречници, једнаке, тада су једнаке и дужи што спајају средиште тог круга са средиштима тих тетива, и обратно: ако су једнаке дужи што спајају средиште круга са средиштима двеју тетива, те тетиве су једнаке.*

Доказ. Нека су AB и CD те једнаке тетиве, M и N њихова средишта и O средиште (сл. 256). Троугли OAB и OCD су једнакокраки, дакле према теореми 23.9 OM је управно на AB, а ON је управно на CD. Та два троугла су подударна, јер су им по две одговарајуће странице једнаке, дакле је $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD$. Према теореми 25.13 су и троугли OAM и OCN подударни, јер је $OA = OC$, $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OCN$ и $\sphericalangle AMO = \sphericalangle CNO$ (као прави углови, према 23.2) па је $OM = ON$.

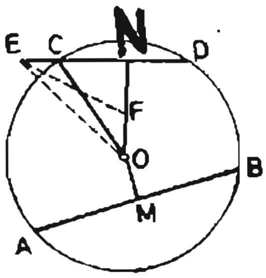


Сл. 256

Обрнуто: нека је $OM = ON$. Троугли OAM и OCN су према теореми 25.13 подударни, јер је $OA = OC$, $OM = ON$, $\sphericalangle AMO = \sphericalangle CNO$ (као прави углови). Дакле је $AM = CN$. Но исто тако је и $MB = ND$, дакле према дефиницији 26.1 је $AM + MB = CN + ND$, тј, $AB = CD$.

Теорема 31.16. *Ако су две тетиве неког круга неједнаке, неједнаке су и дужи што спајају средиште тог круга са средиштима тих тетива: за већу тетиву је та дуж мања, а за мању тетиву је та дуж већа. Обратно: ако су ове дужи неједнаке, неједнаке су и тетиве: за већу такку дуж тетива је мања, а за мању дуж тетива је већа.*

Доказ. Нека су AB и CD две тетиве и то $AB > CD$ (сл. 257) и нека су M и N њихова средишта. Докажимо прво да је $AM > CN$. Заиста, кад би било $AM = CN$, како је $AM = MB$, $CN = ND$, било би према теореми 26.12 и $MB = ND$, дакле и $AM + MB = CN + ND$ тј. $AB = CD$. Ако би пак било $AM < CN$, како је $AM = MB$, $CN = ND$, било би према теореми 26.6 $AM + MB < CN + ND$, тј. $AB < CD$. Дакле је $AM > CN$.



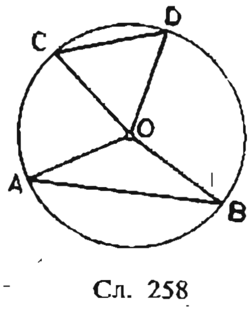
Сл. 257

Нека је на правој CD, с оне стране тачке N с које је C, тачка E таква да је $AM = NE$. Како је $AM > CN$, према дефиницији 25.1 је $N - C - E$, дакле угао $\sphericalangle OCE$ је напоредни угао угла $\sphericalangle OCN$ правоуглог троугла OCN, тј. једног оштрог угла. Дакле $\sphericalangle OCE$ је туп угао. Како је $\sphericalangle OEC$ угао правоуглог троугла OEN, ово је такође оштар угао и према томе је $\sphericalangle OCE > \sphericalangle OEC$. Дакле у троуглу OCE је према теореми 25.16 $OE > OC$.

Нека је на правој ON F тачка с оне стране тачке N с које је O, таква да је $OM = FN$. Троугли OAM и FEN су према теореми 22.5 подударни, јер је $AM = EN$, $OM = FN$ и $\sphericalangle AMO = \sphericalangle ENF$, (као прави углови) дакле је $OA = FE$. Како је $OE > OC$, $OC = OA = FE$, према теореми 25.4 је и $OE > FE$. Дакле, како је EN управна на ON према теореми 25.12 је $ON > FN$. Јер кад би било $ON = FN$, троугли OEN и FEN били би подударни, дакле било би $OE = FE$, а кад би било $ON < FN$, било би $OE < FE$ (као што смо већ показали у овом доказу, о троуглу OCE). Како је $FN = OM$, имамо $ON > OM$. Дакле, већој тетиви одговара мања управна дуж. Но према теореми 31.15 једнаким тетивама одговарају једнаке дужи, дакле мањој тетиви одговара већа дуж. Тиме је први део теореме доказан. Други део је непосредна последица првога.

Теорема 31.17. *Једнаким тетивама једног круга одговарају једнаки средишњи углови, једнаким средишњим угловима одговарају једнаке тетиве и обратно.*

Доказ. Нека су AB и CD две тетиве (сл. 256) круга описаног око тачке O и нека је $AB = CD$. Како је и $OA = OC$, $OB = OD$, троугли OAB и OCD су, према теореми 22.4 подударни, дакле је и $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$. Обратно: ако је $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, из $OA = OC$ и $OB = OD$, следује према теореми 22.5 да су троугли OAB и OCD подударни, дакле да је $AB = CD$.



Сл. 258

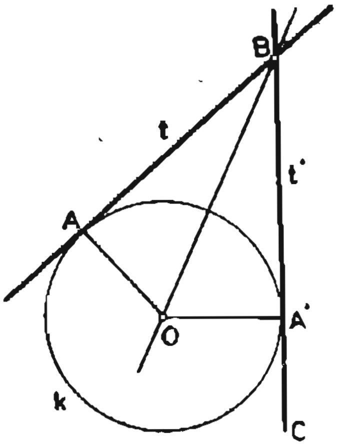
Теорема 31.18. *Већој тетиви једног круга одговара већи средишњи угао, мањој тетиви одговара мањи средишњи угао. Обратно: већем средишњем углу одговара већа тетива, мањем средишњем углу одговара мања тетива.*

Доказ. Нека су AB и CD две тетиве једног круга: O његово средиште и нека је $AB > CD$ (сл. 258). Како су у троуглима OAB и OCD две и две странице једнаке, $OA = OC$, $OB = OD$, а трећа страница AB већа од треће странице CD, према теореми 25.19 је и $\sphericalangle AOB > \sphericalangle COD$, тј. већој тетиви одговара већи средишњи угао. Но према теореми 31.17 једнаким тетивама одговарају једнаки средишњи углови и, најзад, мањој тетиви одговара мањи средишњи угао. Тиме је први део теореме доказан. Други део следује непосредно из првога.

6. О диркама имамо сад још ове две теореме.:

Теорема 31.19. *Ако су* t *и* t′ *две дирке истог круга, које пролазе кроз једну исту тачку* B *изван круга, тада су 1) дужи од тачке* B *до додирних тачака једнаке и 2) удубљени углови које образују обе дирке с полуправом која спаја тачку* B *са средиштем тог круга, једнаки,*

Доказ. Нека су додирне тачке A и A' (сл. 259). Права OB није дирка, јер према теореми 31.3. има с кругом две заједничке тачке, дакле тачке A и A' нису на правој OB и према томе постоје троугли ABO и $A'BO$. Ти троугли су према теореми 25.13 подударни, јер је $OA = OA'$, $OB = OB$ и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B$ (прави углови), а углови наспрам страница OA и OA' су оба оштра. Дакле имамо $AB = A'B$ и $\sphericalangle ABO = \sphericalangle A'BO$.



Сл. 259

Теорема 31.20. *Кроз сваку тачку дирке једног круга, различиту од додирне тачке, може се повући још једна и само једна дирка истога круга.*

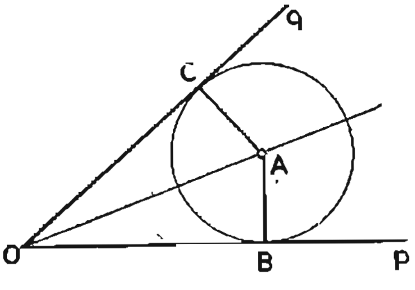
Доказ. Нека је t дирка круга k описаног око тачке O (сл. 259) и нека је A додирна тачка, а B која било друга тачка праве t. Према теореми 21.2 постоји у равни круга, с оне стране праве OB с које није A, полуправа BC са почетком B, тако да је $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC$. Нека је на полуправој BC тачка A' таква да је $AB = A'B$, према теореми 20.6 постоји само једна таква тачка. Како су A и A' са разних страна праве OB, то су две разне тачке. Троугли OAB и $OA'B$ су дакле разни, а подударни су, јер је $AB = A'B$, $OB = OB$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OBA'$, па је $OA = OA'$ и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B$. Дакле, према дефиницији 31.1 тачка A' припада кругу k. Како је t дирка, $\sphericalangle OAB$ је према теореми 31.12 прав угао, дакле и $\sphericalangle OA'B$ је прав угао, те је према теореми 31.13 и права AB дирка на k, тј. кроз тачку B постоји још једна дирка.

Праве AB и $A'B$ су једине дирке на k кроз тачку B. Заиста, претпоставимо да је $A''B$ трећа дирка с додирном тачком A''. Према теореми 31.19 је $AB = A''B$; уз то је $OA = OA''$. Дакле, ако је тачка A'' с оне стране праве OB с које је тачка A, према аксиоми III 4 је $A'' \equiv A$. Ако је пак с оне стране праве OB с које је A', тада је $A'' \equiv A'$, тј. непостоји трећа различита дирка.

Поводом последње теореме треба имати на уму да на темељу досадашњих аксиома не можемо доказати да се из тачке изван једног круга могу повући дирке на тај круг. Само кад се претпоставило да једна дирка постоји, могло се доказати да постоји још једна.

7. Следеће теореме тичу се кругова уписаних у праволинијске ликове у равни.

Теорема 31.21. *Свака тачка располовнице једног удубљеног угла је средиште круга који додирује оба крака тог угла у тачкама које су подножја управних спуштених из те тачке на краке тог угла.*

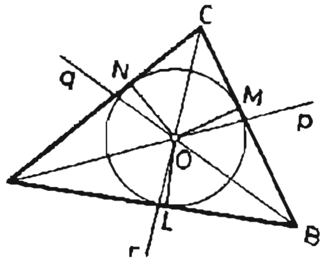


Сл. 260

Доказ. Нека је то удубљени угао $\sphericalangle pq$ (сл. 260) и нека је A тачка на његовој располовници, а O теме тог угла. Нека су AB и AC дужи управне на p и q, спуштене из A до p и q. Према теореми 25.13 троугли AOB и AOC су подударни, јер је $OA = OA$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC$, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle ACO$, дакле $AB = AC$ и према томе, по дефиницији 31.1, B и C су тачке круга са средиштем A. Но OB је управна, на AB, OC на AC, дакле, према теореми 31.13 B и C су додирне тачке двеју дирки OB и OC на тај круг.

Теорема 31.22. *Тачка у којој се секу располовнице сва три угла једног троугла је средиште круга који додирује све три странице тог троугла.*

Доказ. Нека су p, q, r редом располовнице углова $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ троугла ABC. Према теореми 23.15 те располовнице секу се у једној тачки O (сл. 261), а управне дужи OL, OM, ON, спуштене из тачке O редом на странице AB, BC, CA су једнаке. Дакле постоји круг који пролази кроз тачке L, M, N и додирује све три странице троугла ABC и коме је средиште тачка O у којој се секу располовнице углова тог троугла.



Сл. 261

На темељу ове теореме постављамо следећу дефиницију:

Дефиниција 31.8. За круг који додирује све три странице једног троугла кажемо да је *уписан* у тај троугао.

Постоје четвороугли који су уписани у круг или описани око круга.

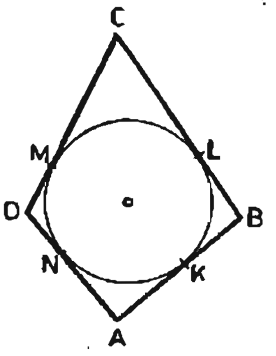
Дефиниција 31.9. Прост четвороугао чије све четири странице додирују један круг, називамо *додирним (тангентним) четвороуглом*. Четвороугао коме су сва четири темена тачке једног круга, називамо *тетивним четвороуглом*.

Теорема 31.23. У додирном четвороуглу је збир двеју наспрамних страница једнак збиру других двеју наспрамних страница.

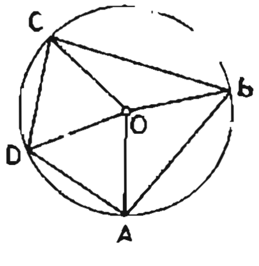
Доказ. Нека је (сл. 262) додирни четвороугао $ABCD$ круг k, његово средиште O и нека су K, L, M, N редом додирне тачке страница AB, BC, CD, DA. Према теореми 31.19 је $AK=AN$, $BK=BL$, $CL=CM$, $DM=CN$, дакле, према теореми 26.6 је $AK+BK+CM+DM=AN+BL+CL+DN$, дакле

$$AK+BK+CM+DM=AN+DN+BL+CL,$$

тј. $$AB+CD=AD+BC.$$



Сл. 262



Сл. 263

Теорема 31.24. *Збир два наспрамна угла тетивног четвороугла једнак је збиру друга два наспрамна угла.*

Доказ. Нека је $ABCD$ један тетивни четвороугао (сл. 263). Како су троугли OAB, OBC, OCD, ODA једнакокраки, имамо

$$\sphericalangle OAB=\sphericalangle OBA,\quad \sphericalangle OCB=\sphericalangle OBC,\quad \sphericalangle OCD=\sphericalangle ODC,\quad \sphericalangle OAD=\sphericalangle ODA,$$

дакле

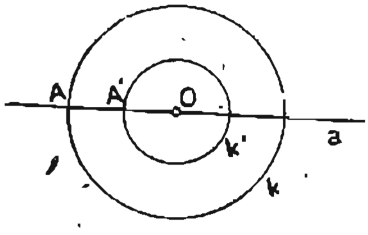
$$\sphericalangle OAB+\sphericalangle OAD+\sphericalangle OCB+\sphericalangle OCD=\sphericalangle OBA+\sphericalangle OBC+\sphericalangle ODA+\sphericalangle ODC,$$

а отуд и $$\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC+\sphericalangle ADC.$$

8. Пређимо на посматрање два круга садржана у истој равни.

Теорема 31.25. *Два разна круга у истој равни, а са заједничким средиштем, немају заједничких тачака.*

Доказ. Нека је тачка O заједничко средиште кругова k и k' (сл. 264) и нека њихови полупречници нису једнаки, јер кад би им полупречници били једнаки, кругови k и k' били би истоветни. Претпоставимо, напр. да је полупречник круга k већи од полупречника круга k'. Нека је, затим A ма која тачка круга k. Према теореми 31.3 постоје на правој OA две и само две тачке круга k'. Нека је A' ма која од њих. Како је по претпоставци $OA>OA'$, тачке A и A' су две разне тачке, дакле тачка A не припада кругу k', па како је A ма која тачка круга k, та два круга немају заједничких тачака.



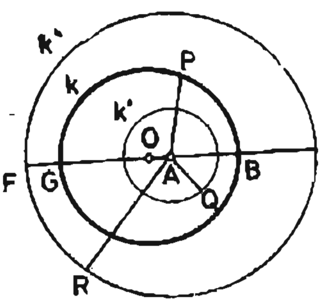
Сл. 264

Теорема 31.26. *Ако је* A *тачка у кругу* k, *различита од његова средишта* O, *постоји у равни круга* k: *1) круг* k' *са средиштем* A *и који је цео у кругу* k, *и 2) круг* k'' *са средиштем* A *и који је цео изван круга* k, *Круг* k *је изван круга* k', *а у кругу* k''.

Постоји исто тако 1) круг k' *са средиштем* A *и коме су све тачке у кругу* k, *сем једне која је на кругу* k *и 2) круг* k'' *са средиштем* A *коме су све тачке ван круга* k, *сем једне која је на кругу* k.

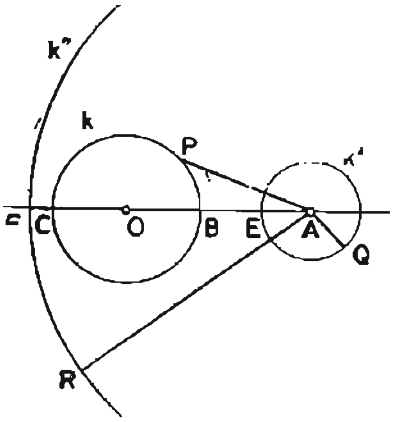
Доказ. Нека је BC пречник круга k, коме припада тачка A, и то тачка B с исте стране тачке O као A, а C са друге стране (сл. 265). Нека је P ма која тачка круга k, E тачка између A и B. Опишимо круг k са средиштем A и полупречником AE. Како је $AE<AB\leqslant AP$, а за коју било тачку Q круга k је $AQ=AE$, имамо $AQ<AP$, тј. све тачке круга k' су у кругу k, а све тачке круга k су ван k'.

Нека је F тачка тако да је $A-C-F$. Опишимо круг k'' са средиштем A и полупречником AF. Како је $AF>AC\geqslant AP$, а за коју било тачку R круга k'' је $AR=AF$, имамо $AR>AP$, тј. све тачке круга k'' су ван круга k, а све тачке круга k су у k''.



Сл. 265

Ако изаберемо $E\equiv B$, имамо $AQ<AP$, сем за $P\equiv B$, јер је $AQ=AB$. Слично, ако изаберемо $F\equiv B$, имамо $AR>AP$, сем за $P\equiv B$, јер је $AR=AB$. Дакле у та два случаја кругови k' и k'' имају с кругом k једну и само једну заједничку тачку. — Тиме је цела теорема доказана.



Сл. 266

Теорема 31.27. *Ако је* A *тачка изван круга* k, *постоји у равни круга* k *круг* k' *са средиштем* A *тако је цео круг* k *изван круга* k' *и постоји круг* k'' *са средиштем* A, *тако да је цео круг* k *у кругу* k''. *Све тачке кругова* k' *и* k'' *су изван круга* k.

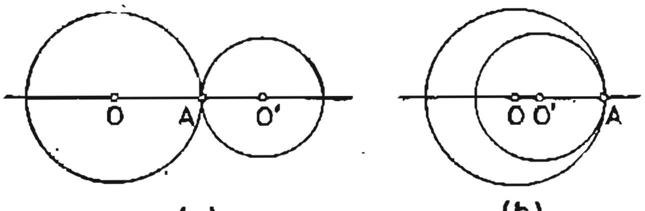
Постоји исто тако круг k' *са средиштем* A, *тако да су све тачке круга* k', *сем једне, изван круга* k *и постоји круг* k'' *са средиштем* A, *тако да су све тачке круга* k *сем једне, у кругу* k''.

Доказ (сл. 266) је потпуно аналоган доказу претходне теореме.

Теорема 31.28. *Два разна круга која су у истој равни, могу имати највише две заједничке тачке.*

Ако имају две заједничке тачке, те две тачке су с разних страна праве што спаја оба средишта тих кругова. Ако имају само једну заједничку тачку, та тачка је на правој што спаја оба средишта.

Доказ. Претпоставимо да два круга k и k' са средиштима O и O имају заједничку тачку A (сл. 267). Услед теореме 31.25 њихова средишта су две разне тачке. Ако је тачка A на правој OO', то је једина заједничка тачка. Заиста, или је $O-A-O'$, или није, већ је напр. $O-O'-A$. Ако је



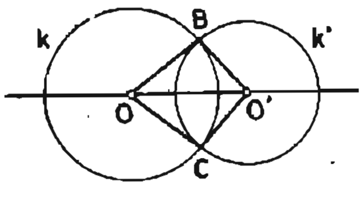
(a) (b)

Сл. 267

$O-A-O'$ (сл. 267a), нека је P која било друга тачка круга k. Према теореми 26.17 је $OP+O'P>OO'$, дакле из $OO'=OA+O'A$ следује $OP+O'P>OA+O'A$, па како је $OP=OA$, имамо $O'P>O'A$, тј. све тачке круга k су ван k': једина заједничка тачка им је A.

Ако је $O-O'-A$ (сл. 267b), нека је Q која било друга тачка круга k'. Према теореми 26.17 је $OQ-O'Q<OO'$, дакле из $OO'=OA-O'A$ следује $OQ-O'Q<OA-O'A$, па како је $O'Q=O'A$ имамо $OQ<OA$, тј. све тачке круга k' су у кругу: опет је A једина заједничка тачка кругова k и k'.

Ако кругови k и k' имају више од једне заједничке тачке, постоји заједничка тачка B ван праве OO'. За сваку другу заједничку тачку C је $OB=OC$, $O'B=O'C$, дакле $OB+O'B=OC+O'C$ (сл. 268). Према аксиоми III 4 не постоји с исте стране праве OO' с које је тачка B, таква тачка C, а постоји једна и само једна таква тачка са друге стране праве OO'. На правој OO' не постоји трећа заједничка тачка D оба круга, је-било би $OB=OD$, $O'B=O'D$, а то је према теореми 20.4 немогуће. Дакле B и C су једине заједничке тачке кругова k и k': више од две заједничке тачке не постоје.



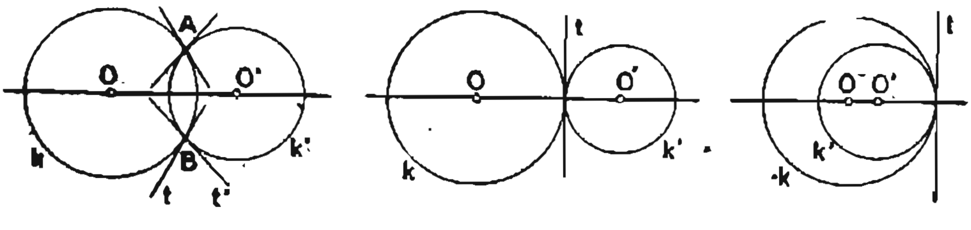
Сл. 268

Уједно смо доказали да су те заједничке тачке B и C са разних страна праве OO'.

Тиме су оба дела теореме доказана.

Теорема 31.29. *Ако два круга, који су у једној равни, имају две заједничке тачке, у свакој од тих тачака дирке на оба круга се секу. Ако имају само једну заједничку тачку, у тој тачки дирка им је заједничка.*

Доказ. Задржимо обележавање из претходне теореме. Ако кругови k и k' имају две заједничке тачке A и B (сл. 269a), према теореми 31.28 те тачке су ван праве OO', дакле праве OB и $O'B$ се секу. Но тада се и дирке t и t' у тачки B на k и k' секу, јер су, према теореми 31.12 управне на полупречницима OB одн. $O'B$, а није ни $t\equiv t'$, јер су OB и $O'B$ две разне праве, а према теореми 23.7 у једној тачки неке праве може се подићи само једна управна. — Ако кругови k и k' имају само једну заједничку тачку A (сл. 269b и c) према теореми 31.29 A је на OO' и праве OA и $O'A$ су истоветне, дакле и дирке су истоветне.



(a) (b) (c)

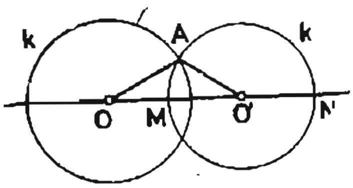
Сл. 269

⊙ **Дефиниција** 31.10. За два круга која су у истој равни а имају две заједничке тачке кажемо да се *секу* у тим двема тачкама.

За два круга која имају само једну заједничку тачку кажемо да се *додирују* у тој тачки. Ако су све остале тачке једног круга изван другог и све остале тачке другог круга изван првог, кажемо да се кругови *споља додирују*. Ако су све тачке, сем једне, једног круга изван другог, а све тачке тог другог круга, сем те једне заједничке тачке, у првом кругу, кажемо да се кругови *додирују изнутра*.

Теорема 31.30. *Ако два круга, садржана у једној равни, имају две заједничке тачке, тада на сваком од та два круга постоје тачке које су у другом кругу и тачке које су изван другог круга.*

Доказ. Нека кругови k и k' са средиштима O и O' имају две заједничке тачке (сл. 270). Према теореми 31.28 те тачке нису на правој OO'. Нека је A једна од њих. Нека су M и N пресеци круга k' с правом OO' и то M с оне стране тачке O' с које је O, а N са друге стране тачке O'.



Сл. 270

Три су могућности: $OO' < O'M$, $OO' = O'M$ и $OO' > O'M$. — Нека је $OO' < O'M$. Како су M и O с исте стране тачке O', имамо

$$OM = O'M - OO' = O'A - OO'.$$

Но према теореми 26.17 је $O'A - OO' < OA$, дакле је $OM < OA$, тј. тачка M је у кругу k.

Ако је $OO' = O'M$, тачка M се поклапа с O, јер су O и M с исте стране тачке O'. Па како је O у кругу k, тачка M је такође у k.

Ако је $OO' > O'M$, имамо

$$OM = OO' - O'M = OO' - O'A.$$

Но према теореми 26.17 је сад $OO' - O'A < OA$, дакле и сад је $OM < OA$. Дакле, у сва три случаја тачка M је у кругу k.

Посматрајмо сада тачку N. Тачке N и O су с разних страна тачке O', дакле имамо

$$ON = OO' + O'N = OO' + O'A.$$

Но према теореми 26.17 је $OO' + O'A > OA$, дакле је $ON > OA$, тј. тачка N је ван круга k. — Тиме је доказ завршен.

Следећа теорема следује из теореме 31.30 и дефиниције 31.8.

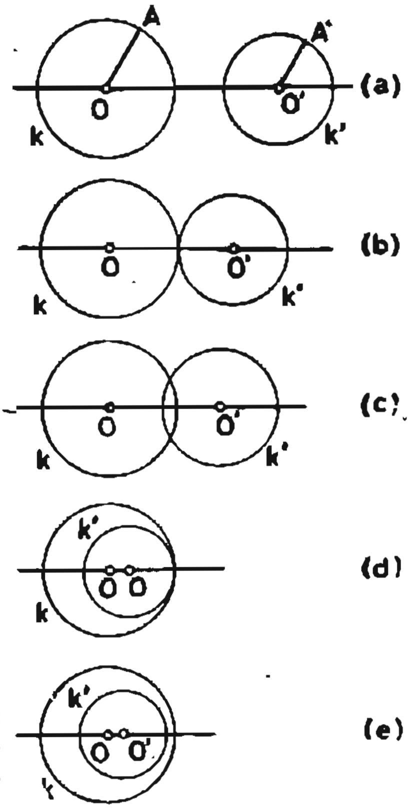
Теорема 31.31. *Нека су* k *и* k′ *два круга у једној равни,* O *и* O′ *њихова средишта,* r *и* r′ *два њихова полупречника и то* $r \geqslant r'$. *Тада постоји једна од следећих пет могућности:*

1. $OO' > r+r'$,
2. $OO' = r+r'$,
3. $OO' < r+r'$, $OO' > r-r'$,
4. $OO' = r-r'$,
5. $OO' < r-r'$.

Доказ. Према теореми 25.2 је $OO' > r+r'$ или $OO' = r+r'$ или $OO' < r+r'$. Ако је $r > r'$ имамо исто тако $OO' > r-r'$ или $OO' = r-r'$ или $OO' < r-r'$. Прва два случаја са збиром $r+r'$ су случајеви (1) и (2) у теореми. Тада имамо $OO' \geqslant r+r' > r > r-r'$, тј. $OO' > r-r'$. Дакле само у трећем случају збира могла би бити сва три случаја с разликом $r-r'$, тј. уз $OO' < r+r'$ имамо $OO' > r-r'$, а то је случај (3) у теореми, или $OO' = r-r'$ или $OO' < r-r'$, а то су случајеви (4) и (5) наше теореме.

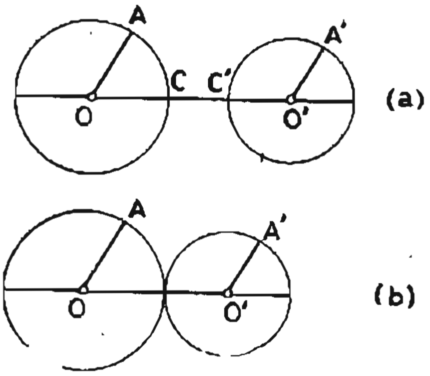
Ако је $r = r'$, разлике $r-r'$ нема и преостају само прве три могућности.

Слика 271, од a до e, претставља редом пет могућих случајева.



Сл. 271

Теорема 31.32. *Нека су* k *и* k′ *два круга у истој равни, а са два разна средишта* O *и* O′, *и нека су* r *и* r′ *два њихова полупречника. Ако је* $OO' > r+r'$, *кругови* k *и* k′ *немају заједничких тачака и оба су један изван другога. — Ако је* $OO' = r+r'$, k *и* k′ *се додирују и оба су један изван другога.*



Сл. 272

Доказ. Нека је прво $OO' > r+r'$ (сл. 270а) и нека је C тачка круга k, на OO' с оне стране тачке O с које је O', и C' тачка круга k' на OO' с оне стране тачке O' с које је O. Како је $r+r' > r$, имамо $OO' > r$ и према томе $OO' > OC$, дакле $O—C—O'$. Како је $OO' > r+r'$ и $r = OC$, $r' = O'C'$, имамо

$$OO' > OC + O'C', \text{ тј. } OC + O'C' > OC + O'C'.$$

Дакле је $O'C > O'C'$.

Нека је A која било друга тачка круга k. Или је A на OO' и тада је

$$O'A = O'O + OA > OA + O'A' + OA > O'A',$$

тј. $O'A > O'A'$, или није на OO', а тада је $O'A + OA > O'O$, дакле

$$O'A + OC > O'C + OC,$$

дакле имамо $O'A > O'C > O'C'$. У оба случаја A је ван круга k', тј. круг k је ван круга k'. Исто тако доказујемо да је k' ван k.

Ако је $OO' = r+r'$, доказујемо као у претходном делу доказа, да је свака тачка круга k, различита од C, ван круга k', тј. да је k ван k', и да је исто тако k' изван k (сл. 272b).

Теорема 31.33. *Нека су* k *и* k′ *два круга у истој равни, а са два разна средишта* O *и* O′, *и нека су* r *и* r′ *два њихова полупречника.*

Ако је $r>r'$ *и* $OO'<r-r'$, k *и* k′ *немају заједничких тачака и* k′ *је у* k. — *Ако је* $OO'=r-r'$, k *и* k′ *се додирују и* k′ *је у* k.

Доказ је аналоган претходноме.

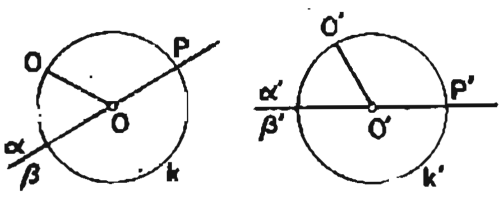
9. Завршавамо ово посматрање кругова теоремама о њиховој подударности.

Теорема 31.34. *Два круга* k *и* k′ *којима су полупречници једнаки, и само таква два круга су подударна (кроз све тачке).*

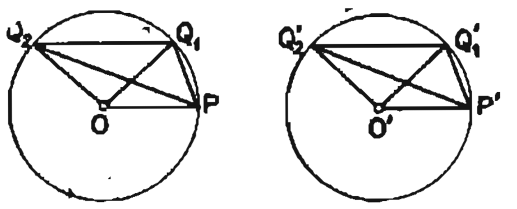
Ако су P *и* P′ *по једна тачка на сваком од та два круга, постоји њихова подударност у којој тачки* P *одговара тачка* P′, *а тачкама круга* k *које су с једне стране његова пречника што полази из* P *одговарају тачке круга* k′ *које су с дате стране његова пречника што полази из* P′.

Доказ. Нека су k и k' два круга с једнаким полупречницима, O и O' њихова средишта и нека је P ма која тачка на k и P' ма која тачка на k' (сл. 273). Нека су α и β, затим α' и β' обе полуравни у равни круга k, односно у равни круга k', којима је руб права OP, односно $O'P'$.

Нека је Q која било друга тачка на кругу k. Ако је Q други крај пречника који полази из P, нека је Q' други крај пречника круга k' који полази из P'. — Ако је Q ван праве OP, рецимо у α, постоји у α пре свега права $O'L'$ тако да су удубљени углови $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle P'O'L'$ једнаки. Полуправа $O'L'$ сече круг k, према теореми 31.3 у извесној тачки Q'. Како је $OP=O'P'$ и $OQ=O'Q'$ према теореми 22.5 је $PQ=P'Q'$. — Ако је Q у полуравни β, нека је тачка Q' одређена исто тако у β'.



Сл. 273



Сл. 274

Докажимо да су кругови k и k' при тој кореспонденцији њихових тачака подударни. За две тачке круга k, од којих је једна P, а друга ма која тачка Q и за две одговарајуће тачке на k' дужи PQ и $P'Q'$ су једнаке по начину додељивања тачака на k'.

Нека су Q_1 и Q_2 ма које две тачке у α, а Q_1' и Q_2' одговарајуће тачке у α'. Посматрањем троуглова OPQ_1, OPQ_2, OQ_1Q_2 и одговарајућих троуглова у кругу k', доказује се лако да је $Q_1Q_2=Q'_1Q_2'$.

Доказ је исти кад је једна од тачака Q_1 и Q_2 у α, друга у β. — Разним тачкама Q_1; Q_2 одговарају увек две разне тачке Q_1' и Q_2' и обратно, дакле кореспонденција је обострано једнозначна.

Према томе кругови k и k' су према дефиницији 29.1 подударни кроз све тачке и то тако да свакој тачки Q круга k која је у α одговара тачка Q' круга k' која је у α', а свакој тачки Q у β тачка Q' и β'.

Кореспонденција се могла дефинисати и тако да свакој тачки Q у α одговара тачка Q' у β', а свакој тачки Q у β тачка Q' у α'. При томе тачки P опет одговара тачка P'. — Тиме је ова теорема до краја доказана.

Из теореме 31.34 следује непосредно ова теорема:

Теорема 31.35. *Сваки круг је на безброј начина подударан себи самом.*

Слично се доказују теореме о подударности лукова на подударним круговима, захваћених једнаким средишњим угловима. Најзад, слично се могу доказати и теореме о подударности кроз све тачке кружних површи, кружних исечака и отсечака.

32. ЛОПТА.

1. Лопта или сфера је такорећи најједноставнија крива површ, као што је круг најједноставнија крива линија. Кругу одговара лопта, као што правој одговара раван, низом аналогих особина, што произлази већ из сличности њихових дефиниција. Као што напр. круг нема сингуларних тачака, тако их нема ни лопта. Ако под облом површи подразумевамо криву површ која у свим својим тачкама има одређене додирне равни, лопта је обла површ. Кружна купа и кружни ваљак имају сингуларних тачака (врх купе, рубови кружних основа купе и ваљка), дакле нису обле површи у овом смислу.

Лопта се, саобразно својим особинама после равни највише проучава од свих површи у геометрији и њеним применама. Геометрија на лопти или сферика је и поглавље елементарне геометрије, које се изводи аналого геометрији у равни. Ми ћемо се ограничити само на неке најосновније дефиниције и теореме о лопти.

Eukleides дефинише у XI књизи својих „Елемената“ сферу обртањем круга око једног његовог пречника. Но у старој грчкој геометрији наилазимо и на дефиницију каква се обично усваја данас и по којој је лопта укупност тачака у простору, једнако удаљених од једне тачке.

Дефиниција 32.1. Укупност тачака које су једнако удаљене од једне тачке O у простору називамо *лопта* или *сфера*.

Тачку O називамо *средиштем* или *центром* лопте, а сваку дуж која спаја средиште с ма којом тачком лопте *полупречником (радиусом)*. Дуж која спаја две тачке једне лопте и садржи њено средиште називамо *пречником (дијаметром)* лопте.

Дефиниција 32.2. За унутрашње тачке полупречника лопте и за њено средиште кажемо да су *у* лопти, а за оне тачке које не припадају лопти нити су у њој кажемо да су *изван* лопте.

Уместо „тачка лопте“ кажемо и „тачка на лопти“ За лопту којој је средиште O кажемо и да је описана око тачке O.

Дефиниција 32.3. Укупност тачака на извесној лопти и у њој називаћемо *телом лопте* или *куглом*.

Дефиниције слоја, исечка и отсечка тела лопте, као и одговарајућих површи, налазе се у § 65.

2. Докажимо прво неке теореме о лопти и пресецима лопте правим и равнима.

Из дефиниција 32.1 и 32.2 следује непосредно ова теорема:

Теорема 32.1. *Ако је* O *средиште лопте,* S *тачка ван лопте, дуж* OS *је већа од полупречника лопте; ако је* S *у лопти, различита од* O, *дуж* OS *је мања од полупречника.*

Теорема 32.2. *Свака права која пролази кроз средиште лопте има с лоптом две заједничке тачке, са сваке стране средишта по једну.*

Доказ. Нека је p која било права која пролази кроз средиште O лопте. Постоји према теореми 20.6 са сваке стране тачке O по једна тачка на p, рецимо P и P', тако да су дужи OP и OP' једнаке полупречнику те лопте, То су према дефиницији 32.1 тачке на лопти. Дакле постоји на p свега две такве тачке, са сваке стране тачке O по једна.

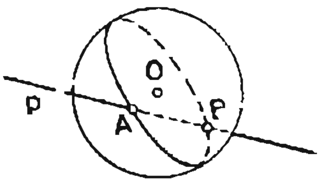
Дефиниција 32.4. Дуж којој су крајеви какве било две тачке на лопти зове се *тетива*, а права која с лоптом има две заједничке тачке зове се *сечица* лопте.

Из дефиниције круга следује непосредно и ова теорема:

Теорема 32.3. *Раван која пролази кроз средиште лопте има с њом један заједнички круг, коме је полупречник једнак полупречнику лопте.*

Теорема 32.4. *Ма која права има с лоптом највише две заједничке тачке.*

Доказ. Ако права p пролази кроз средиште лопте, она има према теореми 32.2 две заједничке тачке с њом. Ако не пролази кроз средиште O, постоји раван α која садржи тачку O и праву p (сл. 275). Према теореми 32.3 лопта има с α један заједнички круг. Права p нема с тим кругом заједничких тачака, или га додирује, или сече у двема тачкама (према теоремама 31.9, 31.12). Према томе права p или нема заједничких тачака с лоптом, или има једну заједничку тачку, или две.



Сл. 275

Теорема 32.5. *Унутрашње тачке дужи којој се крајеви налазе на лопти, јесу у лопти.*

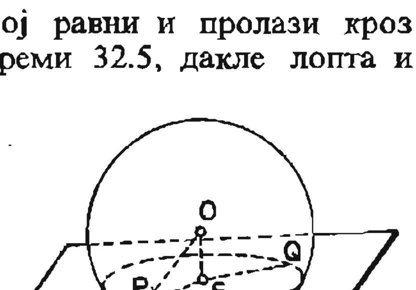
Доказ. Ако та дуж садржи средиште, теорема следује непосредно из дефиниције 32.1. Ако не пролази кроз средиште, поставимо раван кроз средиште и ту дуж. Тада теорема следује непосредно из теореме 31.8 по којој су унутрашње тачке тетиве у кругу.

Слично се доказује и следећа теорема:

Теорема 32.6. *Права има с лоптом две заједничке тачке, једну или ниједну према томе да ли је дуж спуштена из средишта лопте управно до те праве мања, једнака или већа од полупречника лопте.*

Теорема 32.7. *Раван за коју је дуж спуштена из средишта лопте управно до те равни мања од полупречника лопте, сече лопту по једном кругу. Полупречник тога круга мањи је од полупречника лопте и тим мањи што је поменута дуж већа.*

Доказ. Свака права која се налази у тој равни и пролази кроз подножје S управне дужи сече лопту, према теореми 32.5, дакле лопта и та раван се секу (сл. 276). Ако спојимо ма какве две тачке P и Q пресека с подножјем S и са средиштем O лопте, добијамо два троугла OSP и OSQ. Оба су правоугла, јер страница OS им је заједничка а странице OP и OQ су једнаке, према дефиницији 32.1. Дакле та два троугла су подударна и према томе је $SP=SQ$. Како су P и Q ма које две заједничке тачке лопте и дате равни, све те заједничке тачке сачињавају круг k са средиштем S.



Сл. 276

Из правоуглог троугла OSP следује да је $SP<OP$, тј. полупречник круга k је мањи од полупречника лопте. Ако су за две разне равни α и α' управне дужи, спуштене из средишта, OS и OS' а одговарајућа два

правоугла троугла OSP и $OS'P$, из $OP=OP'$ и $OS<OS'$ следује према теореми 25.18 $PS>PS'$. — Тиме је ова теорема доказана.

Како су највећи пресечни кругови једне лопте равнима они који припадају равнима што садрже средиште лопте, постављамо следећу дефиницију:

Дефиниција 32.5. Пресечни круг лопте ма којом равни која садржи средиште лопте зове се *главни* или *велики круг* лопте.

Теорема 32.8. *Раван која пролази кроз средиште тетиве једне лопте и управна је на тој тетиви, пролази кроз средиште лопте.*

Доказ. Спустимо из средишта O дуж OM управну на дату тетиву PQ. Према теореми 32.7 раван кроз M управна на OM сече лопту по кругу са средиштем M. Но та раван садржи тетиву PQ, дакле тетива PQ је пречник тог круга и према томе M је средиште тетиве PQ. Но према теореми 24.2 раван која пролази кроз M и управна је на PQ садржи управну OM, тј. пролази кроз средиште O лопте.

Из претходне теореме следује непосредно следећа:

Теорема 32.9. *Средишта лопти које пролазе кроз две тачке припадају једној равни. Та раван је управна на дуж одређену тим двема тачкама и полови је.*

Теорема 32.10. *Ако три тачке не припадају једној правој, средишта лопти које пролазе кроз те три тачке припадају правој која је управна на равни одређеној тим трима тачкама и пролази кроз средиште круга што пролази кроз те три тачке.*

Доказ. Нека су A,B,C те три тачке, α, β, γ равни које пролазе редом кроз средишта дужи BC, CA, AB и управне су свака на својој дужи. Те три равни секу раван ABC по симетралама тих трију дужи, дакле средиште S круга описаног око троугла ABC је заједничка тачка трију равни α, β, γ. Но равни α, β, γ су управне на равни ABC, дакле, према теореми 24.12 секу се по правим које су управне на равни ABC. Како те три праве пролазе кроз тачку S, поклапају се с правом n управном на равни ABC и која пролази кроз S. Према претходној теореми средишта лопти које садрже све три тачке A, B, C су уједно у α, β и γ, дакле на правој n. — Тиме је теорема доказана.

3. Следеће теореме односе се на дирке и додирне равни. — Многе теореме о лопти могу се доказати тек применом аксиоме упоредности.

Теорема 32.11. *Права или раван која је у крајњој тачки полупречника лопте управна на том полупречнику, има с лоптом само једну заједничку тачку, све остале тачке те праве или равни налазе се изван лопте.*

Доказ. Нека је O средиште лопте, OA ма који њен полупречник и нека је p ма која права која пролази кроз тачку A и управна је на полупречнику OA. Поставимо раван кроз O и p. Права p је дирка пресечног круга лопте и те равни (дефиниција 31.4), дакле тачка A је једина заједничка тачка праве p с лоптом, а све остале тачке праве p су изван лопте. То вреди за сваку праву p, дакле и за раван управну на OA.

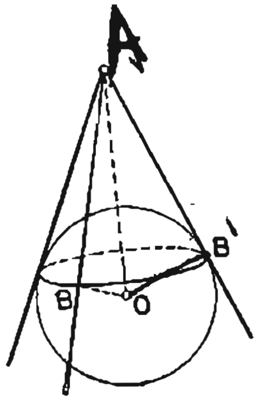
Дефиниција 32.6. Права која са лоптом има само једну заједничку тачку, зове се *дирка* или *тангента* лопте. Раван која са лоптом има само једну заједничку тачку зове се *додирна* или *тангентна раван*. Заједничка тачка зове се у оба случаја *додирна тачка*.

Теорема 32.12. *Полупречник лопте коме је крај додирна тачка дирке или додирне равни, управан је на тој дирци или на тој додирној равни.*

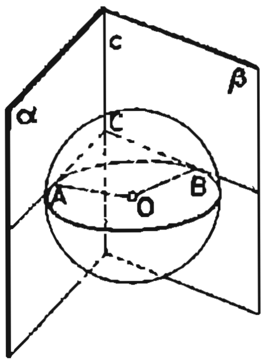
Доказ. Кад тај полупречник не би био управан на дирци или додирној равни, нека је P подножје управне спуштене из средишта O лопте на ту праву одн. раван. Дуж OP би била, према теореми 25.18 мања од полупречника, дакле према теореми 32.6 и 32.7 права одн. раван би секла лопту, те не би била по дефиницији 32.6 дирка одн. додирна раван.

Теорема 32.13. *Све дужи на диркама, које спајају извесну тачку ван лопте с одговарајућим додирним тачкама једнаке су међу собом, заклапају једнаке углове са правом која спаја прву тачку са средиштем лопте, а тачке додира образују круг.*

Доказ. Нека је A тачка ван лопте, B и B' додирне тачке двеју дирки спуштених из A на лопту и нека је O средиште лопте (сл. 277). Како је $OB=OB'$, а према теореми 32.12 углови $\sphericalangle OBA$ и $\sphericalangle OB'A$ су прави, троугли ABO и $AB'O$ су подударни правоугли троугли, дакле је $AB=AB'$, $\sphericalangle OAB=\sphericalangle OAB'$, тј. дужи на диркама једнаке су међу собом и заклапају једнаке углове са правом AO. Дакле и висине спуштене из темена B, B' на заједничку страницу AO су једнаке и припадају равни управној на AO, а према томе додирне тачке образују круг у тој равни.



Сл. 277



Сл. 278

Теорема 32.14. *Раван која спаја средиште лопте с додирним тачкама двеју додирних равни, управна је на правој по којој се те додирне равни секу.*

Доказ. Раван γ која садржи средиште O са додирним тачкама A и B двеју додирних равни α и β (сл. 278), садржи праве OA и OB које су према теореми 32.12 управне на α односно на β, дакле према теореми 24.11 сама раван γ управна је на равнима α и β, а отуда је према теореми 24.12 раван γ управна на пресечној правој равни α и β.

Теорема 32.15. *Додирне равни које садрже једну праву, имају једнаке нагибе спрам равни која спаја ту праву са средиштем лопте.*

Доказ. Нека је c та права, α и β обе додирне равни, A и B тачке додира. Раван γ, која пролази кроз средиште O и кроз тачке A и B, је према теореми 32.14 управна на правој c и сече је у извесној тачки C. Према теореми 31.17 је $\sphericalangle OCA=\sphericalangle OCB$. Равни α и β и раван δ, која спаја праву c са тачком O, јесу све три управне на γ, дакле, према дефиницији 23.6 углови $\sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OCB$ су нагиби равни α и β спрам δ, дакле су једнаки.

4. У следећим трима теоремама реч је о лоптама које додирују две, три или четири дате равни.

Теорема 32.16. *Средишта лопти које додирују две равни налазе се у равнима које располовљују диједре тих двеју равни.*

Доказ. Према теореми 32.15 средиште сваке такве лопте припада равни која пролази кроз пресек двеју датих равни, а има једнаке нагибе спрам њих тј. налази се у једној од двеју равни које располовљују диједре датих равни.

Теорема 32.17. *Средишта лопти које додирују три равни налазе се на четири праве дуж којих се секу равни које располовљују диједре тих трију датих равни.*

Доказ. Нека су α, β, γ те три равни. Постоји једна права која припада равнима што располовљују сва три унутарња диједра једног, уписаног триједра тих трију равни; постоје затим три праве које припадају равнима што располовљују по два спољна диједра тих трију равни и један унутарњи диједар, дакле свега четири такве праве. Тачке тих правих су према теореми 32.16 средишта лопти које додирују све три равни, α, β и γ.

Теорема 32.18. *Постоје у општем случају* ЈЕДАНАЕСТ ~~*једанаест*~~ *лопти које додирују четири равни.*

Доказ. Четири равни секу се у шест правих а кроз сваку од тих правих пролазе две располовне равни, дакле има свега дванаест располовних равни. Групе од по шест таквих равни секу се у по једној тачки, која је према теореми 32.16 средиште лопте што додирује дате четири равни. Једна од додирних лопти је уписана у тетраедар образован датим равнима, она додирује све четири равни унутар троуглова који претстављају стране тетраедра. Даље додирне лопте додирују једну од дате четири равни унутар једног од тих троуглова (споља), а три равни ван троуглова; број ових лопти је $\binom{4}{3} = 4$. Остале додирне лопте додирују све четири дате равни ван троуглова, оне се налазе у унакрсним диједрима диједара тетраедра и њихов број је једнак броју ивица тетраедра, тј. 6. Свега је, дакле једанаест додирних лопти.

5. Наводимо још неке теореме о двема лоптама, чији докази следују лако из самих дефиниција и теорема 31.32 и 31.33.

Теорема 32.19. *Нека су σ и σ′ две лопте са два разна средишта* O *и* O′, *и нека су* r *и* r′ *два њихова полупречника. Ако је* $OO' > r + r'$, *лопте σ и σ′ немају заједничких тачака и обе су једна изван друге. — Ако је* $OO' = r + r'$, *σ и σ′ се додирују и обе су једна изван друге.*

Теорема 32.20 *Нека су σ и σ′ две лопте са два разна средишта* O *и* O′, *и нека су* r *и* r′ *два њихова полупречника. Ако је* $r > r'$ *и* $OO' < r - r'$, *лопте σ и σ′ немају заједничких тачака и лопта σ′ је у лопти σ. — Ако је* $OO' = r - r'$, *σ и σ′ се додирују и σ′ је у σ.*

6. Напослетку споменимо теорему о подударности двеју лопти. Доказује се аналого теореми 31.34 о подударности два круга.

Теорема 32.21. *Две лопте σ и σ′, којима су полупречници једнаки, и само такве две лопте су подударне (кроз све тачке).*

Ако су P *и* P′ *по једна тачка на свакој од те две лопте, постоји порударност тих двеју лопти, при чему тачки* P *одговара тачка* P′, *а тачкама кога било датог круга* k *лопте σ, који пролази кроз* P, *одговарају тачке датог круга* k′ *лопте σ′, који пролази кроз* P′ *и, сем тога, тачкама круга* k *које су с једне стране његова пречника што полази из тачке* P *одговарају тачке круга* k′ *које су с дате стране његова пречника што полази из* P′.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ.

1. На једној правој дате су четири тачке у природном распореду: A, B, C, D или A, C, B, D, такве да је дуж AB једнака дужи CD. Доказати да је и дуж AC једнака дужи BD и да је средиште дужи AD истоветно са средиштем дужи BC.

2. Ако је O средиште дужи AB и M произвољна тачка праве AB, доказати да је дуж OM једнака полуразлици или полузбиру дужи AM и BM, према томе да ли је M тачка дужи AB или је на њеном продужењу.

3. Дате су на једној правој три тачке A, B, C. Ако су M и N средишта дужи AB и BC, доказати да је дуж MN једнака полузбиру или полуразлици дужи AB и BC.

4. Дате су четири полуправе у једној равни, у природном распореду око тачке O: OA, OB, OC, OD или OA, OC, OB, OD, такве да је угао $\sphericalangle AOB$ једнак углу $\sphericalangle COD$. Доказати да је угао $\sphericalangle AOC$ једнак углу $\sphericalangle BOD$ и да је симетрала угла $\sphericalangle AOD$ истоветна са симетралом угла $\sphericalangle BOC$, посматрајући удубљене углове.

5. Ако је OS располовница угла $\sphericalangle AOB$ и OM произвољна полуправа равни AOB, доказати да је угао $\sphericalangle SOM$ једнак полуразлици или полузбиру углова $\sphericalangle AOM$ и $\sphericalangle BOM$, према томе да ли је полуправа OM у углу $\sphericalangle AOB$ или ван њега.

6. Ако су OM и ON располовнице двају углова $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$, садржаних у једној равни, доказати да је угао $\sphericalangle MON$ једнак полузбиру или полуразлици углова $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$.

7. Доказати да су симетрале двају напоредних углова управне једна на другој.

8. Ако је M произвољна тачка у троуглу ABC, доказати да је угао $\sphericalangle AMB$ већи од угла $\sphericalangle ACB$.

9. Доказати да је троугао једнакокрак ако је:

   а) располовница једног његовог угла управна на наспрамној страници,

   б) средиште једне његове странице на располовници угла наспрам те странице,

   в) подножје једне његове висине истоветно са средиштем одговарајуће странице.

10. Ако су две висине једног троугла међу собом једнаке, доказати да је троугао једнакокрак.

11. Доказати да је збир дужи које спајају ма коју тачку у троуглу с његовим теменима већи од полуобима а мањи од обима тог троугла.

12. Доказати да је збир дужи које спајају ма коју тачку равни извесног многоугла с теменима тог многоугла већи од полуобима тога многоугла.

13. Доказати да је средишњица троугла мања од полузбира страница које се састају у истом темену, а већа од разлике између тог полузбира и половине треће странице.

14. Ако је страница AB већа од странице AC троугла ABC, а S тачка у којој располовница угла $\sphericalangle A$ сече страницу BC, доказати да је угао $\sphericalangle ASB$ већи од угла $\sphericalangle ASC$ и да је дуж SB већа од дужи SC.

15. Ако је H подножје висине троугла ABC, спуштене из темена A, S тачка у којој располовница угла $\sphericalangle A$ сече страницу BC и D средиште странице BC, доказати да је тачка S између D и H.

16. Ако је AB пречник круга k, M ма која тачка круга k и N тачка иза B у односу на A, доказати да је дуж MN већа од дужи BN, а мања од дужи AN.

17. Нека је S средиште, а M и N две тачке круга k и нека су P и Q тачке у којима произвољна дирка круга k сече дирке конструисане у тачкама M и N. Доказати да је угао $\sphericalangle PSQ$ једнак половини угла $\sphericalangle MSN$.

18. Ако је збир наспрамних углова испупченог четвороугла једнак збиру других двају углова тог четвороугла, доказати да је то тетиван четвороугао.

19. Ако је збир двеју наспрамних страница испупченог четвороугла једнак збиру других двају страница истог четвороугла, доказати да је то тангентан четвороугао.

20. Доказати да су два троугла ABC и $A'B'C'$ подударна ако је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и средишњица BD једнака средишњици $B'D'$.

21. Конструисати троугао у датој равни са двема датим страницама и захваћеним углом.

22. Конструисати триједар подударан датом триједру.

23. Конструисати раван многоугао подударан датом многоуглу, кад је број темена 4, 5, или већи.

24. Конструисати тетраедар подударан датом тетраедру,

25. Конструисати диједар подударан датом диједру.

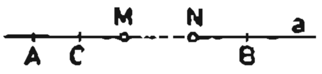
ГЛАВА ТРЕЋА

НЕПРЕКИДНОСТ

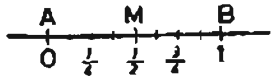
33. НЕПРЕКИДНОСТ У ГЕОМЕТРИЈИ

1. Досад нисмо уопште посматрали непрекидност геометриских облика. Праву смо, додуше, у претпоставкама замишљали као непрекидну линију, али у логичком изграђивању геометрије, полазећи од аксиома, узели смо у тим аксиомама у обзир само неке особине, из којих још не следује да је права непрекидна.

Према теореми 6,3 постоји на правој између њене две тачке и нека трећа тачка. Но тиме се још не долази до непрекидности, јер напр. и део праве *a*, који остане кад се изузме нека њена дуж *MN*, има то својство (сл. 279): између ма које две тачке *A* и *B* преосталог дела праве *a* постоји нека тачка, рецимо тачка *C*, тог истог дела праве. (Саме тачке *M* и *N* не припадају том делу, па се немогу узети за *A* и *B*.)



Сл. 279

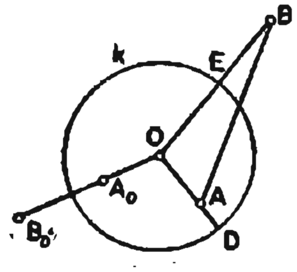


Сл. 280

Ако пођемо од средишта *M* неке дужи *AB* (сл. 280), и додамо средиште дужи *AM* и *BM*, па средишта нових четири тако насталих дужи итд. неограничено, добићемо бескрајно мноштво тачака између *A* и *B*, које не остављају на дужи *AB* ни најмању дуж празну (мноштво свуда густо на дужи *AB*), али тиме још немамо непрекидно мноштво тачака, јер још немамо **све** тачке те дужи. Ако пођемо на „бројној линији" од дужи [0,1], поменута средишта су, наиме, тачке којима одговарају бројеви

$$x = \frac{1}{2^n}, \quad \frac{2}{2^n}, \quad \frac{3}{2^n}, \quad \frac{2^n-1}{2^n}$$

и то редом за $n = 1, 2, 3, \ldots.$ Но то још нису сви бројеви између 0 и 1.

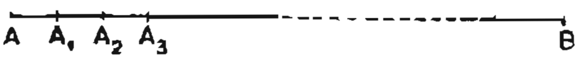


Сл. 281

2. Непрекидност се у геометрији показује напр. и у томе што дуж, којој је једна тачка у неком кругу а друга ван тог круга, мора сећи тај круг. То пак неможемо доказати на темељу досадањих аксиома. Ако је (сл. 281) A_0 тачка у кругу *k*, B_0 тачка изван круга *k* и ако права $A_0\,B_0$ пролази кроз његово средиште O, по аксиоми III 1 постоји на k тачка C која је између A и B, тј. дуж $A_0 B_0$ сече круг. Али ако права AB не пролази кроз O, то засад још не можемо доказати. Моћи ће се тек на темељу друге аксиоме непрекидности.

3. Претходне напомене тичу се непрекидности „у маломе“. Према тој непрекидности у простору нема „прекида“ између тачака, простор је, такорећи, свугде „попуњен тачкама“.

Потребно је уочити и непрекидност „у великоме“, којом се утврђује да је цео простор „из једног комада“. Ако наиме замислимо две ма како далеке тачке A и B, постоји према дефиницијама и аксиомама групе I дуж AB, која „спаја“ те тачке. Али, ако је (рецимо) тачка B врло далеко од тачке A па ако пошавши из тачке A преносимо довољан број пута извесну дуж, идући ка тачки B, као што се чини при мерењу, тј. на дужи AB одређујемо тачке A_1, A_2, A_3, . . . тако да је $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$, хоћемо ли икада стићи до тачке B? — Очигледно хоћемо, ма како далеко била тачка B, или ма како мала била дуж AA_1. Али та чињеница се не може доказати на темељу досад изнетих аксиома I — III. Потребна је засебна аксиома.



Сл. 282

Када пак та „достижност“ тачака у простору не би постојала, имали бисмо околност, очигледно немогућу, да преношењем једне дужи на описани начин не стигнемо никад у тачку B, дакле да бескрајно много тих једнаких дужи стане између A и B. Тачка B би тада од тачке A била удаљена „више него бесконачно“, дакле, могли бисмо рећи да простор не би сачињавао једну непрекидну целину, да не би био „из једног комада“.

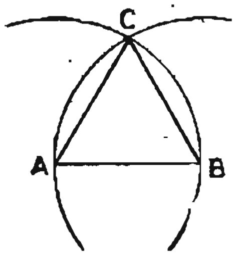
4. Непрекидност ћемо засновати на двема аксиомама: непрекидност у великоме на такозваној *Архимедовој аксиоми*, а непрекидност у маломе на такозваној *Канторовој аксиоми* (G. Cantor, 1845 — 1918). Уместо да се пође од тих двеју аксиома, може се поћи од једне теореме Дедекинда (1831—1916; од такозваног *Дедекиндова начела*) исказане за тачке на правој. На основи те теореме — која би се тада сматрала јединим аксиомом непрекидности — могу се, наиме, Архимедова и Канторова аксиома доказати као теореме. Ми ћемо напротив, поћи од двеју аксиома непрекидности, а Дедекиндову теорему ћемо из њих извести.

Хилберт има у својим „Основама геометрије“ уместо Канторове, такозвану *аксиому потпуности*, која јој је еквивалентна.

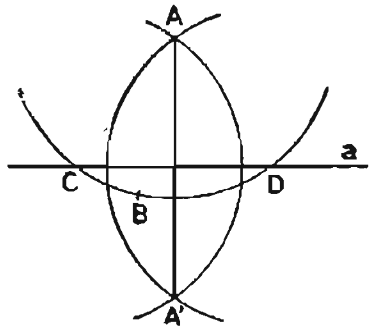
Аксиоме непрекидности омогућују и да се дефинише мерење дужи, углова и осталих геометриских величина. У овој глави посматрамо само мерење дужи, углова и круга.

5. Како у „Елементима“ Еуклида, тако и у свим другим списима и делима геометрије, свѐ до у прошло столеће, претпостављале су се чињенице непрекидности у геометрији прећутно, као нешто јасно по себи самоме. Кад напр. Еуклид почиње у „Елементима“ излагање ставова конструкцијом једнакостраног троугла, рецимо ABC, помоћу кругова описаних из A и B полупречником AB (сл. 283), он претпоставља прећутно (као очигледно) да се та два круга секу у тачки C. Али то не следује из његових постулата. Исто тако кад напр. Еуклид конструише управну из неке тачке A, која је ван праве a, на ту тачку, он се наивно ослања на очигледност: Узима прво неку тачку B (сл. 284) с оне стране праве a с које није A, па описује круг k из A, с полупречником AB. Лако се показује да k има тачака

с обеју страна праве a, али тиме још није утврђено да k сече праву a. Но по Еуклиду то је тако јасно, да преко тога прелази и полазећи од пресека C и D круга k правом a описује из њих два круга с полупречницима



Сл. 283



Сл. 284

AC и AD. Тако долази до њихова другог пресека A', а тиме и до праве AA', која је управна на a.

Тек је **Паш** (1882) јасно поставио захтев да се непрекидност мора увести у геометрију полазећи од засебних аксиома. При томе се показало да су потребне две аксиоме, које одговарају описаним основним особинама непрекидности простора. Прва казује да се коначним бројем преношења једне дужи на једну праву може стићи и престићи свака тачка те праве, ма како била удаљена. То је такозвана аксиома мерења (могло би се рећи и престижности), која се често назива Архимедовом, — а тачније Еудоксовом, по грчком геометру Еудоксу, из 4. столећа пре н.е. Друга казује да је права „испуњена" тачкама.

[illegible]. АКСИОМЕ НЕПРЕКИДНОСТИ.

Аксиоме непрекидности: Архимедова (или Еудоксова) IV 1 и Канторова, IV 2 дају потребну и довољну основу за проучавање непрекидности геометријских ликова и свих чињеница које се темеље на непрекидности. Те аксиоме гласе:

АКСИОМА IV 1. *Какве год биле две дужи* AB *и* CD, *постоји на правој* AB *коначан број тачака*

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

таквих да је

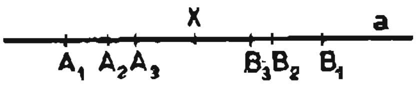
$$A-A_1-A_2, \quad A_1-A_2-A_3, \quad A_2-A_3-A_4, \ldots, \quad A_{n-2}-A_{n-1}-A_n,$$

затим да су дужи

$$AA_1, \quad A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$$

једнаке са дужи CD *и да је тачка* B *између тачака* A *и* A_n (сл. 285).

Сл. 285



Сл. 286

АКСИОМА IV 2. *Нека је*

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$$

бескрајан низ дужи на правој a, *таквих да свака од тих дужи садржи следећу дуж и да не постоји дуж коју би све дужи тог низа садржале. Тада постоји на правој* a *ипак тачка* X *која је садржана на свим дужима тог низа* (сл. 286).

35. ПРВЕ ПОСЛЕДИЦЕ АКСИОМА НЕПРЕКИДНОСТИ.

1. Полазимо од Канторове аксиоме. Али да бисмо ту аксиому и неке друге теореме могли краће изрећи, уводимо следећу дефиницију:

Дефиниција 35.1 Ако у бесконачном низу дужи

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots$$

свака дуж садржи следећу и ако не постоји дуж коју би све те дужи садржале, називаћемо тај низ *основним низом дужи.*

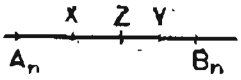
Сад можемо изрећи Канторову аксиому IV 2 овако:

За сваки основни низ дужи постоји тачка садржана у свим дужима тог низа.

Тврђење те аксиоме може се употпунити чињеницом да постоји само једна таква тачка.

Теорема 35.1 *За сваки основни низ дужи постоји једна и само једна тачка, садржана на свим дужима тог низа.*

Доказ. Нека је $A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots$ основан низ дужи, а X према аксиоми IV 2 тачка садржана на свим тим дужима. Кад би уз тачку X постојала још једна таква тачка, рецимо $У$ (сл. 287), било би за свако n: A_n-X-B_n и A_n-Y-B_n, дакле A_n-X-Y или A_n-Y-X. Не може наиме бити $X-A_n-Y$, јер би тада из A_n-X-B_n следовало $У-A_n-B_n$. Рецимо да је A_n-X-Y. Нека је Z ма која тачка између X и $У$. Из $X-Z-Y$ и A_n-X-Y следује према теореми 6.14 A_n-Z-Y, па како је A_n-Y-B, према теореми 6.14 је и A_n-Z-B_n тј. и тачка Z је садржана у свим дужима A_nB_n и према томе цела дуж XY је садржана у свим тим дужима — противно претпоставци да таква дуж XY не постоји. Дакле X је једина тачка садржана у свим дужима A_nB_n.



Сл. 287

Следеће две теореме су нам потребне за даље извођење:

Теорема 35.2. *Ако је $A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots$ бесконачан низ дужи, од којих свака садржи следећу, и ако је свака следећа дуж половина претходне, тај низ је основан низ дужи.*

Доказ. По претпоставци је

$$A_1B_1=2A_2B_2=4A_3B_3=\ \ldots 2^{n-1}A_nB_n=\ \ldots$$

Ако, супротно тврђењу да је то основан низ, постоји дуж MN која је садржана на свим дужима A_nB_n, имамо $MN\leqslant A_nB_n$, дакле је

$$2^{n-1}MN\leqslant A_1B_1$$

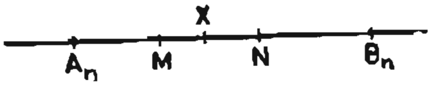
за свако n. Ако ово се противи Архимедовој аксиоми IV 1, по којој постоји природан број m довољно велики да буде $m\ MN>A_1B_1$ и према томе број n тако велики да буде $2^{n-1}>m$, дакле

$$2^{n-1}MN>A_1B_1.$$

Тиме је доказ завршен.

Теорема 35.3. *Ако је $A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots$ основан низ дужи, не постоји дуж која би била мања од свих тих дужи.*

Доказ. Како је посматрани низ основни низ, постоји једна једина тачка X, садржана на свим дужима тог низа (сл. 288). Како су крајеви сваке дужи A_nB_n с разних страна тачке X, обележимо те тачке тако да све тачке A_n буду с једне стране тачке X, а све тачке B_n дакле, с друге стране. Дуж A_nB_n састоји се из дужи A_nX и B_nX, а садржи дуж $A_{n+1}B_{n+1}$, дакле тачка A_{n+1} је на дужи A_nX, а тачка B_{n+1} на дужи B_nX.



Сл. 288

Нека је d ма која дуж. Докажимо да је за n довољно велико $A_nB_n<d$. Располовимо дуж d и одредимо с оне стране тачке X, с које је тачка A_n тачку M тако да је $MX=d/2$, и затим с оне стране тачке X с које је тачке B_n тачку N тако да је $NX=d/2$. Дакле $MN=d$.

Кад на дужи MX не би била ниједна тачка A_n, било би $A_n—M—X$, јер како су A_n и M с исте стране тачке X, не може бити $M—X—A_n$. Но како су A_n и B_n с разних страна тачке X имамо $A_n—X—B_n$, дакле дуж MX је садржана на свакој дужи A_nB_n, што је супротно претпоставци да је то основни низ. Дакле, на дужи MX постоји једна тачка A_n, па како су за свако $\nu>n$ тачке A_ν на дужи A_nX, све тачке A_n су, почев од једне, на дужи MX.

Исто вреди за тачке B_n и дуж NX. Дакле, за довољно велико n обе тачке A_n и B_n су на дужи MN, тј. дуж A_nB_n је садржана на дужи MN и према томе је $A_nB_n<d$. — Тиме је ова теорема доказана.

Постоји теорема којом се, обрнуто тврђењу аксиоме IV 2, казује да за сваку тачку X на једној правој постоје основни низови дужи:

Теорема 35.4 *Ако је X ма која тачка једне праве, постоји на тој правој основан низ дужи тако да је тачка X садржана у свим дужима тог низа.*

Доказ. Нека је a права којој припада тачка X, затим A_1 ма која друга тачка на a. Према аксиоми III 1 постоје на правој a тачка B_1 тако да је $A_1—X—B_1$ и $A_1X=B_1X$. Нека су A_2 и B_2 редом средишта дужи A_1X и B_1X, затим A_3 и B_3 редом средишта дужи A_2X и B_2X, итд. Докажимо да је $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ основан низ дужи, који садржи тачку X.

Заиста, из A_1-X-B_1 и A_1-A_2-X следује $A_1-A_2-B_1$, а из A_1-X-B_1 и $X-B_2-B_1$ следује $A_1-B_2-B_1$. Дакле A_2 и B_2 су на дужи A_1B_1 и према теореми 6.21 цела дуж A_2B_2 је садржана на дужи A_1B_1.

Исто тако доказујемо да је дуж A_3B_3 садржана на дужи A_2B_2 итд. Дакле, свака дуж A_nB_n, $n=1,2,\ldots$ садржи следећу.

Сем тога је $A_1X=A_1A_2+A_2X$, па како је $A_1A_2=A_2X$, имамо $A_1X=2A_2X$. Исто тако је $B_1X=2B_2X$. Дакле

$$A_1B_1=A_1X+B_1X=2A_2X+2B_2X=2(A_2X+B_2X),$$

тј. $A_1B_1=2A_2B_2$.

Исто тако је $A_2B_2=2A_3B_3$ итд., тј. свака дуж низа је двапут већа од следеће. Дакле, према теореми 35.2 низ A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ је основан низ. Тиме је теорема доказана.

2. У Дедекиндовој теореми за реалне бројеве реч је о подели тих бројева на две класе или мноштва, рецимо R_1 и R_2, тако да 1) сваки реални број припада једном и само једном мноштву, 2) да свако од та два мноштва има бројеве (да није празно) и 3) да је сваки број мноштва R_1 мањи од сваког броја мноштва R_2. Дедекиндова теорема казује да под тим условима постоји један број у мноштву R_1, који је највећи од свих у R_1, или пак један број у мноштву R_2, који је најмањи од свих у R_2. — Докажимо сад аналогну теорему за тачке на правој.

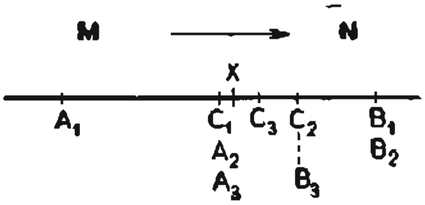
Теорема 35.3. — Дедекиндова теорема за праву. — *Ако су све тачке једне праве* а *подељене у два мноштва* M *и* N *на следећи начин:*

1) *свака тачка праве* а *припада једном и само једном мноштву,*

2) *свако од та два мноштва има тачака,*

3) *свака тачка мноштва* M *стоји испред сваке тачке мноштва* N, *тада постоји или у мноштву* M *тачка испред које стоје све остале тачке мноштва* M, *или у мноштву* N *тачка која стоји испред свих осталих тачака мноштва* N (*тачка* X).

Доказ. По услову 2) ове теореме постоји у мноштву M тачка A_1 и у мноштву N тачка B_1 (сл. 289). По услову 3) је $A_1 \prec B_1$



Сл. 289

Нека је C_1 средиште дужи A_1B_1. Према услову 1) C_1 припада мноштву M или мноштву N. Ако C_1 припада мноштву M, обележимо C_1 са A_2, а B_1 са B_2, ако ли C_1 припада мноштву N, обележимо A_1 са A_2 а C_1 са B_2. У оба случаја је A_2 у мноштву M, а B_2 у мноштву N, а дуж A_2B_2 је половина дужи A_1B_1.

Нека је C_2 средиште дужи A_2B_2. Обележимо сада две од трију тачака A_2, B_2, C_2 тако знацима A_8, B_3, да A_3 буде у мноштву M а B_3 у N и да дуж A_3B_3 буде половина дужи A_2B_2, итд.

На тај начин настаје бесконачан низ дужи A_1B_1, A_2B_2, . . . , такав да свака садржи претходну и да је

$$A_1B_1 = 2\ A_2B_2 = 4\ A_3B_3 = . . . = 2^{n-1}A_nB_n = \ . . .$$

Дакле, према теореми 35.2 то је основан низ дужи. Према аксиоми IV 2 постоји на *a* тачка X, која припада свим дужима A_nB_n. При томе A_n припада мноштву M, B_n мноштву N,*) дакле је $A_n \prec B_n$. Четири су могућности:

I. Како за свако n може бити $A_n \equiv A_{n+1}$, претпоставимо да постоји извесно $n = m$ тако да је $A_m \equiv A_{m+1} \equiv A_{m+2} \equiv$ . . . бесконачно. Тада је A_m заједничка тачка свих дужи A_nB_n $(n \geqslant m)$, и то према теореми 35.1 једина таква тачка, тј. $A_m \equiv X$. Према томе X припада мноштву M.

Обележимо са P' ма коју тачку мноштва M, различиту од X. Како је X једина тачка која припада свим дужима A_nB_n, P' не припада извесној дужи $A_{n1}\ B_{n1}$. Како су све дужи A_nB_n за $n > n_1$ садржане на $A_{n1}\ B_{n1}$, P' остаје за те бројеве n изван A_nB_n, дакле можемо претпоставити да је при томе $n \geqslant m$, тј. $A_n \equiv X$. За то n је дакле $P' - A_n - B_n$ или $A_n - B_n - P'$. У првом случају је према дефиницији 14.2 $P' \prec A_n$; у другом би било $B_n \prec P'$, дакле тачка P' би према услову 3) припадала мноштву N, супротно претпоставци. Дакле је $P' \prec A_n$, па како је $A_n \equiv X$, имамо $P' \prec X$.

Обележимо ма коју тачку мноштва N са Q. Како X припада мноштву M, по услову 3) је $X \prec Q$. — Дакле тачка X испуњава закључак теореме коју доказујемо.

II. Исто тако, може постојати m тако да је $B_m \equiv B_{m+1} \equiv B_{m+2} \equiv$ . . . бесконачно. Тада доказујемо аналого да тачка X припада мноштву N, затим да је свака тачка P мноштва M испред тачке X и да је X испред сваке друге тачке Q' мноштва N, тј. и тада тачка X испуњава услов наше теореме.

---

* A_n испред B_n (види § 13).

III. Бесконачно много тачака A_n и, тако исто, B_n су различите међу собом. Према услову 1) тачка X припада мноштву **M** или мноштву **N**. Како је $A_n \prec B_n$ и $A_n - X - B_n$, према теореми 14.7 је $A_n \prec X \prec B_n$ за све n. Претпоставимо да X припада мноштву **M**.

Нека је P' опет тачка у мноштву **M**, различита од X. Као и мало пре, закључујемо да је за довољно велико n $P' - A_n - B_n$, дакле да је $P' \prec A_n$, па како је $A_n \prec X$, имамо $P' \prec X$. С друге стране, ако је Q ма која тачка у мноштву **N**, како X припада мноштву **M**, по услову 3) је $X \prec Q$, као што тврди теорема коју доказујемо.

IV. Претпоставимо као претходно, али нека X припада мноштву **N**. На аналогни начин доказујемо да је тада (као у II) $P \prec X$ и $X \prec Q$, саобразно теореми.

Тиме је Дедекиндова теорема за праву доказана. Доказ претпоставља обе аксиоме непрекидности.

За тачку X која постоји по Дедекиндовој теореми каже се да одређује *Дедекиндов пресек праве*.

Напомена. Смисао Дедекиндове теореме можемо схватити овако: Мноштва **M** и **N** су на правој a две полуправе са заједничким исходиштем X, које према услову 1) теореме додајемо једној од тих двеју полуправих. Кад Дедекиндова теорема не би била тачна, тачка X не би уопште постојала, и према томе права би имала „празнине" које би се састојале из појединих тачака, каквих би могло бити свугде на правој a. Или би постојала у исти мах тачка X_1 на **M** испред које су све остале тачке мноштва **M**, и тачка X_2 на **N** која би била испред свих осталих тачака мноштва **N**, а тада би X_1 и X_2 биле две „суседне тачке" на a, између којих не би било тачака, тј. права линија би имала, такорећи, бесконачно мале скокове прекиде. И једно и друго је немогуће.

3. Аксиоме непрекидности односе се непосредно на дужи. Постоје аналоге теореме за углове, које се на основу тих аксиома могу доказати. Тако, теорема која одговара Архимедовој аксиоми. Ова би се могла исказати у свом општем облику потпуно анологто тој аксиоми, примењујући дефиницију угла већег од четири права угла. Докажимо је у ужем облику.

Теорема 35.6 *Каква год била два удубљена угла* $\sphericalangle pq$ *и* $\sphericalangle rs$, *постоји у равни угла* $\sphericalangle pq$ *коначан број полуправих* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n = 1,2, \ldots)$ *које полазе из темена угла* $\sphericalangle pq$ *и таквих да су парови удубљених углова*

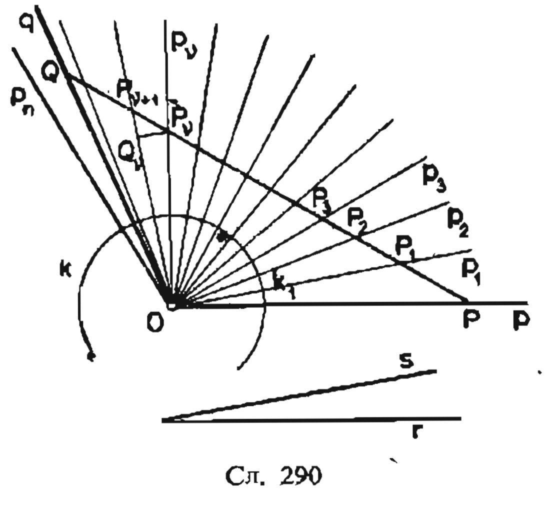
$$\sphericalangle pp_1 \text{ и } \sphericalangle p_1p_2, \quad \sphericalangle p_1p_2 \text{ и } \sphericalangle p_2p_3, \ldots,$$

$$\sphericalangle p_{n-2}p_{n-1} \text{ и } \sphericalangle p_{n-1}p_n$$

парови суседних углова, да су, затим, сви углови

$$\sphericalangle pp_1, \quad \sphericalangle p_1p_2, \ldots, \sphericalangle p_{n-1}p_n$$

једнаки удубљеном углу $\sphericalangle rs$ *и да је полуправа* q *садржана у оном углу* $\sphericalangle pp_n$ *који садржи све углове овог низа.*



Сл. 290

Доказ. Нека је O теме удубљеног угла $\sphericalangle pq$, P тачка на краку p, Q тачка на краку q (сл. 290). Нека је p_1 полуправа с оне стране крака p с које је крак q, тако да је $\sphericalangle pp_1 = \sphericalangle rs$.

Према теореми 25.6 удубљен угао $\sphericalangle pq$ је или садржан у удубљеном углу $\sphericalangle pp_1$ не поклапајући се с њим и наша теорема је доказана за $n=1$; или је угао $\sphericalangle pp_1$ садржан у углу $\sphericalangle pq$, поклапајући се с њим или не*). Нека је тада $\sphericalangle p_1p_2$ угао суседан углу $\sphericalangle pp_1$ и њему једнак.

Угао $\sphericalangle pp_2$, који садржи једнаке углове $\sphericalangle pp_1$ и $\sphericalangle p_1p_2$ је удубљен или испупчен. Ако је испупчен, у њему је садржан угао $\sphericalangle pq$, дакле наша теорема је доказана и за $n=2$. Ако је удубљен, може опет угао $\sphericalangle pq$ бити садржан у њему и теорема је опет доказана са $n=2$.

Претпоставимо дакле да је угао $\sphericalangle pp_2$ удубљен и да је садржан у углу $\sphericalangle pq$, не поклапајући се с њим. Нека је тада $\sphericalangle p_2p_3$ угао суседан углу $\sphericalangle p_1p_2$ и једнак њему.

Угао $\sphericalangle pp_3$ који садржи три једнака угла $\sphericalangle pp_1$, $\sphericalangle p_1p_2$, $\sphericalangle p_2p_3$, је удубљен или испупчен. Ако је испупчен, у њему је садржан угао $\sphericalangle pq$, дакле наша теорема је доказана са $n=3$. Ако је удубљен, али угао $\sphericalangle pq$ је садржан у њему, теорема је опет доказана са $n=3$. Претпоставимо да је угао $\sphericalangle pp_3$ удубљен и да је садржан у углу $\sphericalangle pq$, не поклапајући се с њим. Нека је тада $\sphericalangle p_3p_4$ угао суседан углу $\sphericalangle p_2p_3$ и њему једнак. Итд.

На тај начин добијамо низ углова $\sphericalangle pp_1$, $\sphericalangle p_1p_2$, . . . једнаких углу $\sphericalangle rs$, таквих да су узастопни углови тог низа суседни и да су углови $\sphericalangle pp_2$, $\sphericalangle pp_3$, . . . , који садрже одговарајуће углове првог низа, садржани у углу $\sphericalangle pq$.

Докажимо да је за n довољно велико, угао $\sphericalangle pq$ садржан у углу $\sphericalangle pp_n$, не поклапајући се с њим.

Претпоставимо супротно, тј. да су углови $\sphericalangle pp_\nu$, за $\nu=1,2, \ldots$ увек садржани у углу $\sphericalangle pq$. Тада су полуправе p_ν такође све у углу $\sphericalangle pq$ и према теореми 11.7 секу дуж PQ. Обележимо p са p_0, а пресек дужи PQ с p_ν знаком P_ν, $\nu=0,1,2, \ldots$. Како су узастопни углови првог низа суседни углови, по дефиницији 12.12 је p_1 између p и p_2 и затим, исто тако, p_2 између p_1 и p_3, p_3 између p_2 и p_4 итд. Отуд следује према теореми 12.13 да је $P-P_1-P_2$, $P_1-P_2-P_3$, $P_2-P_3-P_4$ итд. Докажимо да су дужи $P_\nu P_{\nu+1}$, $\nu=0,1,2, \ldots$, које су садржане на дужи PQ, све веће од извесне дужи.

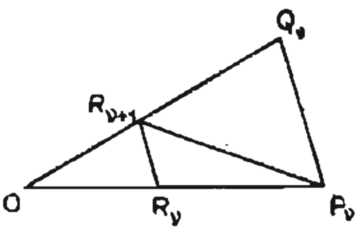
Од двеју дужи OP_ν и $OP_{\nu+1}$ једна је већа, друга мања, или су обе једнаке. Ако су једнаке, обележимо тачку $P_{\nu+1}$ са Q_ν, тако да је $P_\nu P_{\nu+1} = P_\nu Q_\nu$. Ако нису, претпоставимо да је $OP_\nu < OP_{\nu+1}$ и одредимо између O и $P_{\nu+1}$ тачку Q_ν тако да је $OP_\nu = OQ_\nu$. Како је у троуглу $OP_\nu P_{\nu+1}$ страница OP_ν мања од $OP_{\nu+1}$, према теореми 25.15 је $\sphericalangle OP_{\nu+1}P_\nu < \sphericalangle OP_\nu P_{\nu+1}$, па како у троуглу може према теореми 25.12 само један угао да не буде оштар, угао $\sphericalangle OP_{\nu+1}P_\nu$ је оштар. Троугао $OP_\nu Q_\nu$ је пак једнакокрак, дакле су оба угла при основици једнаки и оштри, дакле $\sphericalangle OQ_\nu P_\nu$ је оштар угао. Њему напоредни угао $\sphericalangle P_\nu Q_\nu P_{\nu+1}$ је дакле, према теореми 23.4 туп, дакле већи од $\sphericalangle OP_{\nu+1}P_\nu$. Према томе, на основи теореме 25.16, у троуглу $P_\nu Q_\nu P_{\nu+1}$ је $P_\nu Q_\nu < P_\nu P_{\nu+1}$. — Исто тако доказујемо то у случају кад је $QP_\nu > OP_{\nu+1}$. Дакле уопште је $P_\nu Q_\nu \leqslant P_\nu P_{\nu+1}$.

Нека је k круг са средиштем O и полупречником мањим од свих дужи OP_ν, $\nu=0,1, \ldots, n-1$, и нека је R_ν тачка у којој се круг k сече са дужи OP_ν. Докажимо да је $R_\nu R_{\nu+1} < P_\nu P_{\nu+1}$ (сл. 291).

---

*) Поклапање је особит случај садржавања.

За троугао $OP_\nu R_{\nu+1}$ је удубљени угао $\sphericalangle P_\nu R_{\nu+1} Q_\nu$ спољашњи угао, а $\sphericalangle OP_\nu R_{\nu+1}$ несуседан унутрашњи, дакле је према теореми 25.11 $\sphericalangle OP_\nu R_{\nu+1} < \sphericalangle P_\nu R_{\nu+1} Q_\nu$. У троуглима $P_\nu R_\nu R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+1} Q_\nu P_\nu$ је пак страница $P_\nu R_{\nu+1}$ заједничка, $P_\nu R_\nu = Q_\nu R_{\nu+1}$, а $\sphericalangle R_\nu P_\nu R_{\nu+1} < \sphericalangle P_\nu R_{\nu+1} Q_\nu$, дакле према теореми 25.15 је $R_\nu R_{\nu+1} < P_\nu Q_\nu$. Но $P_\nu Q_\nu \leqslant P_\nu P_{\nu+1}$, дакле је $R_\nu R_{\nu+1} < P_\nu P_{\nu+1}$. С друге стране, све дужи $R_\nu R_{\nu+1}$, $\nu = 0,1,2, \ldots$ су међу собом једнаке. Дакле је $P_\nu P_{\nu+1} > R_0 R_1$. Сем тога, како је $p_\nu - p_{\nu+1} - p_{\nu+2}$ $(\nu = 0,1,2, \ldots)$, такође је $R_\nu - R_{\nu+1} - R_{\nu+2}$. Дакле ове тачке испуњавају услове аксиоме IV 1.



Сл. 291

Но како је $P - P_1 - P_2$, $P_1 - P_2 - P_3$ итд., имамо

$$PP_1 + P_1P_2 = PP_2, \quad PP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 = PP_3$$

и уопште

$$PP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{\nu-1}P_\nu = PP_\nu,$$

па како је сваки сабирак мањи од R_0R_1 имамо $PP_\nu < \nu R_0 R_1$ за свако ν. Ово је опречно аксиоми IV 1. Дакле претпоставка да су сви углови $\sphericalangle pp_\nu$ садржани у $\sphericalangle pq$ погрешна је и према томе постоји известан број ν тако да се p_ν поклапа с q или да је крак q садржан у углу $\sphericalangle pp_\nu$. У првом случају пишемо $n-1$ уместо ν, у другом n уместо ν, дакле полуправа p_{n-1} је садржана у углу $\sphericalangle pq$ или се поклапа с q, а p_n је изван тог удубљеног угла. Дакле угао $\sphericalangle pp_n$ који садржи полуправе p_ν, дакле и углове $\sphericalangle p_\nu p_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, садржи и полуправу q. — Тиме је теорема 35.6 доказана.

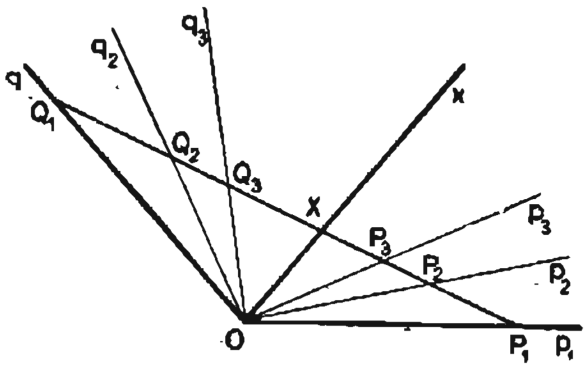
4. Теорема која одговара употпуњеној Канторовој аксиоми (тј. теореми 35.1) гласи овако:

Теорема 35.7. *Нека је*

$$\sphericalangle p_1q_1, \quad \sphericalangle p_2q_2, \quad \sphericalangle p_3q_3, \ldots$$

бескрајан низ удубљених углова у једној равни α, са заједничким теменом O, *таквих да сваки од тих углова садржи следећи угао и да не постоји угао који би био садржан у свим угловима тога низа.*

Тада постоји у α ипак једна и то само једна полуправа x *са почетком* O, *која је садржана у свим угловима тог низа.*

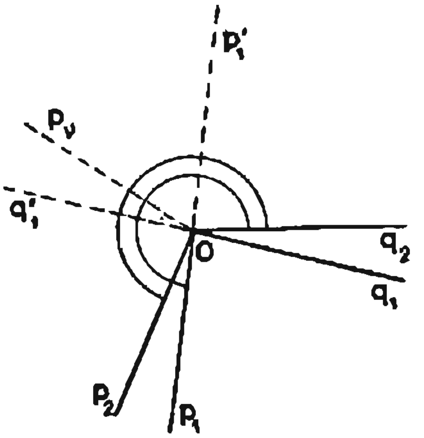


Сл. 292

Доказ. Углови $\sphericalangle p_1q_2$, $\sphericalangle p_2q_2$, $\ldots$, су, изузев можда коначно много њих, сви удубљени. Ако је, наиме угао $\sphericalangle p_nq_n$ удубљен, и угао $\sphericalangle p_{n+1}q_{n+1}$ је удубљен, јер по дефиницији 25.2 је $\sphericalangle p_nq_n \geqslant \sphericalangle p_{n+1}q_{n+1}$. Дакле, или су сви ти углови испупчени, или су пак сви, сем, највише, коначно много њих, удубљени, а тада можемо изоставити оне који нису удубљени и посматрати низ самих удубљених углова.

Кад би сви углови низа били испупчени, сви би садржали удубљени угао $\sphericalangle p_1'q_1'$, који је унакрсан у односу на удубљени угао $\sphericalangle p_1q_1$ (сл. 293). Заиста, кад би, напротив, један крак кога било угла посматраног низа, рецимо p_ν био у удубљеном углу $\sphericalangle p_1'q_1'$, био би с оне стране полуправе q_1 с које је p_1'. Но q_ν није у удубљеном углу $\sphericalangle p_1q_1$, него у истоименом испупченом углу. Дакле q_ν је према теореми 12.12 с оне стране полуправе q_1 с које је p_1' или с оне стране полуправе p_1 с које је q_1'. У оба случаја угао $\sphericalangle p_\nu q_\nu$ који је садржан у испупченом углу $\sphericalangle p_1q_1$ био би удубљен, супротно претпоставци. Дакле краци свих углова $\sphericalangle p_1'q_1'$ су изван $\sphericalangle p_1'q_1'$ и према томе овај угао је садржан у свим угловима $\sphericalangle p_\nu q_\nu$, супротно претпоставци теореме.

Дакле, сви углови не могу бити испупчени, него су, сем можда коначно много њих, удубљени и можемо претпоставити да су сви удубљени.



Сл. 293

Нека је P_1 тачка на p_1 и Q_1 на q_1. Како је угао $\sphericalangle p_2q_2$ садржан у углу $\sphericalangle p_1q_1$, према теореми 11.7 дуж P_1Q_1 сече краке p_2 и q_2, уколико се p_2 или q_2 не поклапа с p_1 одн. q_1. Нека су P_2 и Q_2 заједничке тачке кракова p_2 и q_2 са дужи P_1Q_1. Дуж P_2Q_2 је садржана на дужи P_1Q_1. Исто тако имају краци угла $\sphericalangle p_3q_3$ по једну заједничку тачку са дужи P_2Q_2. Нека су то тачке P_3 и Q_3. Дуж P_3Q_3 је садржана на дужи P_2Q_2. Итд.

Уопште, краци сваког угла $\sphericalangle p_\nu q_\nu$ имају по једну тачку заједничку са дужи P_1Q_1, крак p_ν тачку P_ν, а крак q_ν тачку Q_ν и при томе у бесконачном низу дужи $P_\nu Q_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, свака дуж садржи следећу.

Докажимо да је тај низ основни низ дужи. Кад, напротив, не би био основан, постојала би дуж $\tilde{Q}_0\tilde{P}_0$, садржана на свим тим дужима. Према теореми 11.7 сваки угао $\sphericalangle p_\nu q_\nu$ би садржао полуправе OP_0 и OQ_0, дакле према теореми 12.10 садржао би и удубљени угао $\sphericalangle P_0OQ_0$. Обележимо његове краке с p_0 и q_0. Удубљени угао $\sphericalangle p_0q_0$ би био садржан у свим угловима $\sphericalangle p_\nu q_\nu$, супротно претпоставци теореме.

Дакле, не постоји дуж P_0Q_0. Према томе низ дужи $P_\nu Q_\nu$ је основан низ. Према теореми 35.1 постоји једна и само једна тачка X на дужи P_1Q_1, која је садржана на свим тим дужима. Отуд, према теореми 11.7 постоји једна и само једна полуправа OX, коју обележавамо словом x и која је садржана у свим угловима $\sphericalangle p_\nu q_\nu$. — Тиме је доказ ове теореме завршен.

5. И за углове постоји Дедекиндова теорема у којој се посматра један угао и укупност полуправих садржаних у том углу и које полазе из његова темена. Ако су све те полуправе подељене у два мноштва, слично као у Дедекиндовој теореми за тачке на правој, постоји полуправа која врши „пресек“. Изрицање и доказивање те теореме остављамо читаоцу.

Скедећа теорема потребна је у доказивању теореме 35.10.

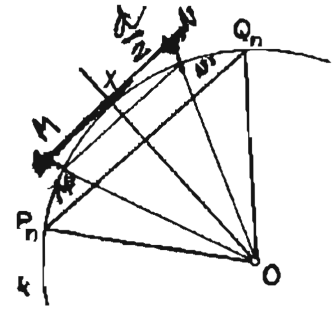
Теорема 35.8 *Нека је*

$$\sphericalangle p_1q_1,\ \sphericalangle p_2q_2,\ldots$$

бесконачан низ углова са заједничким теменом O *и садржаних у једној равни тако да сваки угао садржи следећи и да не постоји угао који би био садржан у свим тим угловима.*

Ако су P_n и Q_n за свако n пресеци кракова p_n и q_n с једним кругом коме је средиште O, тада не постоји дуж која би била мања од свих дужи P_nQ_n.

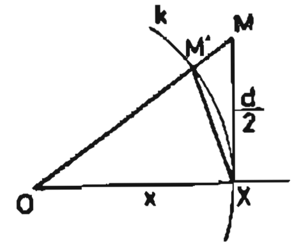
Доказ. Према теореми 35.7 постоји једна и само једна полуправа x, садржана у свим угловима $\sphericalangle p_nq_n$, $n=1,2,\ldots$ (сл. 294). Како су полуправе p_n и q_n с разних страна полуправе x, обележимо те полуправе тако да све полуправе p_n буду с једне стране полуправе x, а све полуправе q_n с друге стране. Полуправа p_{n+1} је у углу $\sphericalangle p_nx$, а q_{n+1} је у углу $\sphericalangle q_nx$, не искључујући поклапање с p_n или q_n.



Сл. 294

Нека је d ма која дуж, и k ма који круг у равни тих углова и коме је средиште O. Нека су P_n, Q_n и X редом пресеци полуправих p_n, q_n и x са k. Нека су XM и XN дужи једнаке половини дужи d и управне на x у тачки X, тако да су M и N с разних страна тачке X, дакле и праве x: тачка M с исте стране као полуправа p, а N с исте стране као полуправа q. Тачке M и N су на дирци круга k, која пролази кроз тачку X.

Како је M ван круга k, овај сече дуж OM у извесној тачки M'. У троуглу OXM је угао $\sphericalangle OMX$ оштар, јер је угао $\sphericalangle OXM$ прав, а у једнакокраком троуглу $OM'X$ угао $\sphericalangle OM'X$ је оштар, дакле њему напоредни угао $\sphericalangle MM'X$ је туп. Како је у троуглу $MM'X$ угао с теменом M оштар а с теменом M' туп, према теореми 25.10 је први мањи од другога, дакле према теореми 25.16 је $M'X < MX$. Према томе $M'X < d/2$.



Сл. 295

Исто тако, круг k сече дуж ON у извесној тачки N' и имамо $N'X < d/2$. Како су X, M', N' темена троугла, према теореми 26.17 је $M'N' < M'X+N'X$, тј. $M'N' < d$.

Докажимо да је за n довољно велико $A_nB_n < M'N'$. Заиста, за n довољно велико постоји полуправа p_n у углу $\sphericalangle M'OX$, јер кад то не би било, све полуправе p_n биле би ван $\sphericalangle M'OX$, и то с исте стране полуправе x као тачке M и M'. Дакле полуправа OM' би била у углу $\sphericalangle p_nx$. Исто тако би полуправа ON' била у углу $\sphericalangle q_nx$. Према томе полуправе OM' и ON' би биле у углу $\sphericalangle p_nq_n$, дакле угао $\sphericalangle M'ON'$ би био садржан у свим угловима $\sphericalangle p_nq_n$. Ово се противи претпоставци наше теореме.

Дакле, за довољно велико n полуправе p_n су у углу $\sphericalangle M'OX$, и тако исто, полуправе q_n у углу $\sphericalangle N'OX$. Према томе су за довољно велико n обе полуправе p_n и q_n садржане у углу $\sphericalangle M'ON'$. Дакле $\sphericalangle p_nq_n < \sphericalangle M'ON'$.

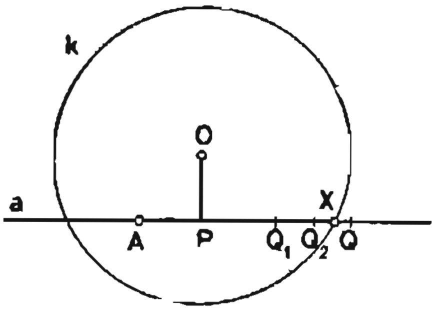
Отуд следује, по теореми 31.18 за одговарајуће тетиве да је $P_nQ_n < M'N'$. Но $M'N' < d$, дакле је $P_nQ_n < d$ за довољно велико n. Тиме је ова теорема доказана.

6. Особит значај у геометрији имају следеће две теореме. У првој се тврди да у једној равни, која има тачку у једном кругу, сече тај круг, а у другој се тврди да се под одговарајућим условима два круга у једној равни секу.

Теорема 35.9 *Ако права и круг припадају једној равни и ако та права има тачку у том кругу, та права сече тај круг у двема тачкама.*

Доказ. Нека је то круг k са средиштем O и права a, која има у кругу k тачку A (сл. 296).

Нека је P подножје управне спуштене из O на a. Према аксиоми III 1 постоји на a, са задате стране тачке P тачка Q таква да је дуж PQ једнака којем било полупречнику r круга k. Како је дуж PQ управна на правој OP, према теореми 25.16 је $OQ > PQ$, дакле $OQ > r$, тј. Q је изван k. Докажимо да a и k имају заједничку тачку која је између P и Q. Нека је Q_1 средиште дужи PQ. Ако је $OQ_1 = r$, тврђење је већ доказано. Ако је $OQ_1 < r$, ставимо $Q_1 \equiv A$, $Q \equiv B$, ако је пак $OQ_1 > r$, ставимо $P \equiv A_1$, $Q_1 \equiv B_1$. У оба случаја је $OA_1 < r$, $OB_1 > r$, а дуж A_1B_1 је пак садржана на дужи PQ и једнака њеној половини.



Сл. 296

Нека је Q_2 средиште дужи A_1B_1. Ако је $OQ_2 = r$, тврђење је доказано. Ако је $OQ_2 < r$, ставимо $Q_2 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$, ако ли је $OQ_2 > r$, ставимо $A_1 \equiv A_2$, $Q_2 \equiv B_2$. У оба та случаја је $OA_2 < r$, $OB_2 > r_2$, а дуж A_2B_2 је садржана на дужи A_1B_1 и једнака је половини ове дужи.

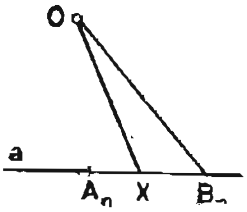
Наставимо ли овако, добићемо n-тим располовљењем тачку Q_n такву да је $OQ_n = r$ и тврђење наше теореме је доказано. Или пак то неће никад бити, а тада је за свако n дуж A_nB_n, садржана у претходној дужи A_{n-1} B_{n-1} и имамо

$$OA_n < r, \quad OB_n > r,$$

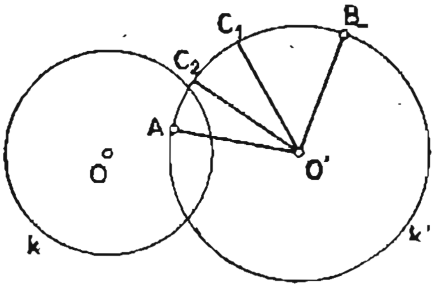
а дуж A_nB_n је садржана на дужи $A_{n-1}B_{n-1}$ и једнака је њеној половини.

Дакле, према теореми 35.2 бесконачан низ дужи A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ је основан низ и постоји једна и само једна тачка X, садржана у свим тим дужима.

Докажимо да је $OX = r$. Заиста, кад би било $OX < r$, постојала би дуж h, једнака разлици дужи r и OX. По дефиницији 26.3 је $r = OX + h$, дакле је $OX = r - h$. Како је низ дужи A_nB_n основан низ, према теореми 35.3



Сл. 297



Сл. 298

можемо изабрати n тако велико да буде $A_nB_n < h$. Онда је тим пре $XB_n < h$. Посматрајмо троугао OXB_n (сл. 297). Према теореми 26.17 је $OB_n < OX + XB_n$, дакле било би $OB_n < (r - h) + h$, тј. $OB_n < r$, а то је опречно претпоставци да је B_n изван круга k.

Аналого доказујемо да није ни $OX < r$. Дакле је $OX = r$, тј. круг k сече дуж PQ у тачки X. Тачка X је на a са које било дате стране тачке P, дакле постоје две тачке пресека праве a и круга k.

Теорема 35.10. *Ако два круга припадају једној равни и ако један од та два круга има једну тачку у другом кругу и једну ван другог круга, та два круга се узајамно секу у двема тачкама.*

Доказ. Нека су O и O' средишта кругова k и k', који припадају једној равни (сл. 298), затим r један полупречник круга k и r' један полупречник круга k', и нека су A и B тачке круга k', A у кругу k, B ван k. Према дефиницији 31.2 је $OA<r$, $OB>r$.

Посматрајмо један од углова $\sphericalangle AO'B$ (удубљени, испупчени или опружени — ако су оба опружена). Докажимо да у том углу постоји тачка заједничка за оба круга.

Нека је q_1 располовница угла $\sphericalangle AO'B$. На q_1 постоји тачка C_1 таква да је $O'C_1=O'A$, тј. C_1 је пресек полуправе q_1 кругом k'. Ако је $OC_1=r$, C_1 је већ тражена заједничка тачка оба круга. Ако је $OC_1<r$, ставимо $C_1\equiv A_1$, $B\equiv B_1$, ако је пак $OC_1>r$, ставимо $A\equiv A_1$, $C_1\equiv B_1$. У оба случаја је $OA_1<r$, $OB_1>r$, а угао $\sphericalangle A_1O'B_1$ је садржан у углу $\sphericalangle AO'B$ и једнак је његовој половини.

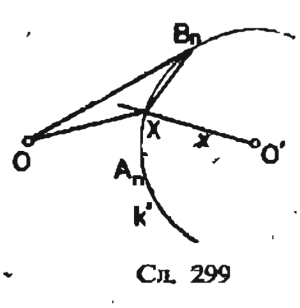
Нека је q_2 располовница угла $\sphericalangle A_1O'B_1$. На q_2 постоји тачка C_2 пресека полуправе q_2 кругом k'. Ако је $OC_2=r$, C_2 је тражена заједничка тачка. Ако је $OC_2<r$, ставимо $C_2\equiv A_2$, $B_1\equiv B_2$, ако је пак $OC_2>r$, ставимо $A_1\equiv A_2$, $C_2\equiv B_2$. У оба случаја је $OA_2<r$, $OB_2>r$, а угао $\sphericalangle A_2O'B_2$ је садржан у углу $\sphericalangle A_1O'B_1$ и једнак је његовој половини.

Наставимо ли овако, добићемо n-тим располовљавањем полуправу q_n и на њој тачку C_n, такву да је $OC_n=r$ и тврђење наше теореме је доказано. Или пак то то неће никад бити, а тада је за свако n угао $\sphericalangle A_nO'B_n$ садржан у претходном углу $\sphericalangle A_{n-1}O'B_{n-1}$ и имамо $OA_n<r$, $OB_n>r$, а угао $\sphericalangle A_nO'B_n$ је садржан у углу $\sphericalangle A_{n-1}O'B_{n-1}$ и једнак је његовој половини.

Не постоји угао који би био садржан у свим угловима бесконачног низа $\sphericalangle A_1O'B_1$, $\sphericalangle A_2O'B_2, \ldots$. Када би, наиме, такав угао, рецимо ω, постојао, било би $\sphericalangle A_nO'B_n>\omega$ за свако n. Но $\sphericalangle A_1O'B_1=2\sphericalangle A_2O'B_2$, $\sphericalangle A_2O'B_2=2\sphericalangle A_3O'B_3$ итд., дакле $\sphericalangle A_1O'B_1=2^{n-1}\sphericalangle A_nO'B_n$ и према томе било би $\sphericalangle A_1O'B_1>2^{n-1}\omega$, ма колико било n. Ово се противи аксиоми IV 1.

Дакле, према теореми 35.6 постоји једна и само једна полуправа x која је садржана у свим угловииа $\sphericalangle A_nO'B_n$.

Нека је X тачка на x, таква да је $O'X=r'$. Докажимо да је такође $OX=r$. Заиста, кад би било $OX<r$, постојала би дуж h једнака разлици дужи r и OX, дакле било би $r=OX+h$, а отуд $OX=r-h$.



Сл. 299

Како не постоји угао који би био садржан у свим угловима $\sphericalangle A_nO'B_n$, према теореми 35.8 не постоји дуж која би била мања од свих дужи A_nB_n $n=1,2,\ldots$. Дакле за довољно велико n је $A_nB_n<h$. Како је полуправа x у углу $\sphericalangle A_nO'B_n$, имамо $\sphericalangle XO'B_n<\sphericalangle A_nO'B_n$, дакле према теореми 25.20 је $XB_n<A_nB_n$, а отуд $XB_n<h$.

Посматрајмо тачке O, X, B_n (сл. 299). Ако не припадају једној правој, одређују троугао OXB_n. Према теореми 26.17 је $OB_n<OX+XB_n$, дакле $OB_n<(r-h)+h$, тј. $OB_n<r$, а то је супротно претпоставци да је B_n ван круга k. Ако тачке O, X, B_n припадају једној правој, из претпоставке да је $OX<r$, а B_n ван круга, следује $OX<OB_n$, дакле X је између O и B_n и према томе $OB_n=OX+XB_n$, а отуд опет $OB_n<r$, што је супротно претпоставци. Дакле није $OX<r$.

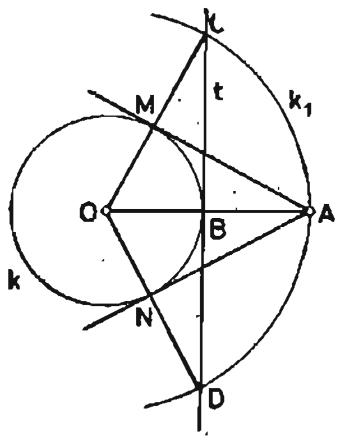
Исто тако се доказује да није ни $OX > r$. Дакле је $OX = r$, тј. тачка X је заједничка кругу k и кругу k'. Тачка X је у посматраном углу $\sphericalangle AO'B$. Исто тако постоји и у другом углу с истим крацима друга заједничка тачка кругова k и k', тј. k и k' секу се у двема тачкама.

7. Сад можемо доказати и да се у равни, из сваке тачке изван једног круга могу повући две тангенте на тај круг. (У доказу је садржана и конструкција тих тангената.)

Теорема 35.11. *Кроз сваку тачку у равни једної круīа и која је изван тоīа круīа, пролазе две дирке тої круīа.*

Доказ. Нека је O средиште круга k, A тачка у равни круга k, но изван k (сл. 300). Нека је k_1 круг у истој равни, са истим средиштем O и који има дуж OA за полупречник. Између O и A постоји, према аксиоми III 1, тачка B на кругу k.

Нека је t права управна на OA и која пролази теореми 31.12 изнад k, дакле дужи OC и OD секу кроз тачку B. Према теореми 31.13 t је дирка круга k. Тачка B је у кругу k_1, дакле према теореми 35.10 права t сече круг k_1 у двема тачкама C и D. Ове две тачке су према теореми 31.12 изван k, дакле дужи OC и OD секу круг k у двема тачкама M и N.



Сл. 300

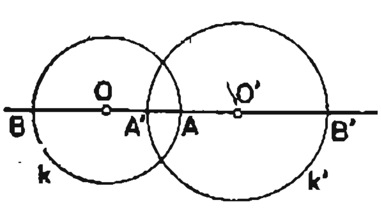
Посматрајмо троугле OBC, OMA, ONA. Како је $OB = OM = ON$, $OC = OA = OD$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle MOA = \sphericalangle NOA$, према теореми 22.2 та три троугла су подударни, дакле $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OMA = \sphericalangle ONA$. Али $\sphericalangle OBC$ је прав угао, те су углови $\sphericalangle OMA$ и $\sphericalangle ONA$ прави, дакле права AM управна је на OM, а права AN на ON, тј. према теореми 31.13 то су две дирке круга k, које пролазе кроз тачку A. — Тиме је теорема доказана.

Сад можемо доказати да постоји и једнакостраничан троугао.

Теорема 35.12. *Постоји једнакостраничан троуīао коме је свака страница једнака датој дужи.*

Доказ. Нека је AB ма која дуж у извесној равни α, затим k и k' кругови у α, којима су редом средишта A и B, а AB заједнички полупречник. Круг k' сече праву AB у тачки A и према теореми 31.3 још у једној тачки, D. Како је $A-B-D$, имамо $AB < AD$. Како је по дефиницији 31.2 тачка B у кругу k, а тачка D ван њега, кругови k и k' се, према теореми 35.10 секу у извесним тачкама C и C', које су према теореми 31.28 с разних страна праве AB.

Посматрајмо нпр. тачку C. Како је C на k, имамо $AB = AC$, а како је и на k' имамо $AB = BC$. Дакле троугао ABC је једнакостраничан троугао, коме је дата страница AB.



Сл. 301

Докажимо још следећу теорему о два круга:

Теорема 35.13. *Ако је дуж, која спаја средиште два круīа који су садржани у једнај равни, већа од разлика а мања од збира њихових полупречника, ти круīови се секу у двема тачкама.*

Доказ. Нека су то кругови k и k' са одговарајућим средиштима O и O' и полупречницима r и r' (сл. 301) и нека је $r \geqslant r'$. Према претпоставци је $r - r' < OO' < r + r'$.

Ако је $r = r'$, лева неједначина значи да је $OO' > \Theta$, тј. да се средишта не поклапају. Ако је $r > r'$, дуж OO' је према левој неједначини већа од дужи $r - r'$, дакле и тада се средишта не поклапају.

Нека је A' она тачка круга k' која је на правој OO' с оне стране тачке O' с које је тачка O и нека је B' друга тачка истог пречника круга k', тј. с оне стране тачке O' с које није тачка O.

За полупречник $O'A'$ постоје три могућности:

1) $O'-O-A'$, дакле $O'O < O'A'$. Тада је $OA' = O'A' - OO'$, па како је $OA \geqslant O'A'$, имамо $OA' \leqslant OA - OO' < OA$, тј. $OA' < OA$, дакле према дефиницији 31.2 тачка A' је у кругу k.

2) $O \equiv A'$, а то значи непосредно да је A' у кругу k.

3) $O'-A'-O$, дакле $O'O > O'A'$. Тиме је $OA' = OO' - O'A'$. Но $OO' < OA + O'A'$, дакле

$$OA' < (OA + O'A') - O'A' = OA,$$

тј. опет је тачка A' у кругу k.

Дакле, увек је тачка A' круга k' у кругу k.

Докажимо да је тачка B' изван k. — Како је тачка B' на продужењу полуправе $O'O$, имамо $O-O'-B'$, дакле $OB' = OO' + O'B'$. Но $OO' > OA - O'A'$, дакле

$$OB' > (OA - O'A') + O'B',$$

па како је $O'B' = O'A'$, имамо $OB' > OA$, а тиме је тврђење доказано.

Како круг k' има тачку A' у кругу k, а тачку B' изван круга k, кругови k и k' се према теореми 35.10 секу у двема тачкама. — Тиме је наша теорема доказана.

Сад се може лако доказати следећа теорема:

Теорема 35.14. *Нека су* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ма које три дужи тако да је збир двеју већи, а њихова разлика мања од треће дужи. Тада постоји троугао коме су странице једнаке дужима* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

8. Постоје и одговарајуће теореме о лопти, од којих доносимо само две.

Теорема 35.15. *Ако је дуж која спаја средишта двеју лопти већа од разлике а мања од збира њихових полупречника, те лопте се секу по једном кругу.*

Доказ. Нека је α која било раван која садржи средишта O и O' обеју лопти σ и σ'. Према теореми 32.5 раван α сече лопту σ по једном кругу k, а лопту σ' по једном кругу k'. Полупречници r и r' тих кругова су једнаки полупречницима одговарајућих лопти, дакле дуж OO' је по претпоставци теореме већа од $r-r'$ $(\geqslant \Theta)$ а мања од $r+r'$. Дакле, према теореми 35.14 кругови се секу у двема тачкама A и B које су симетричне у односу на праву OO'.

Нека је S тачка пресека правих OO' и AB, затим ν раван која пролази кроз S и управна је на OO', дакле садржи и тачке A и B. Нека је k_0 круг у равни ν, са средиштем S и који пролази кроз A и B. Нека је $\bar{\alpha}$ која било друга раван која садржи праву OO'. И раван $\bar{\alpha}$ сече лопте σ и σ' по круговима који се секу. Нека су $\bar{k}$ и $\bar{k}'$ ти кругови, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ њихове пресечне тачке. Очигледно $\bar{k} \cong k$, $\bar{k}' \cong k'$, јер су одговарајући полупречници једнаки. Према томе и троуглови $OO'A$ и $OO'\bar{A}$ су подударни, дакле тачке S и $\bar{S}$ поклапају се. Дакле и троуглови OAS и $O\bar{A}S$ су подударни и према томе $AS = \bar{A}S$ и $\sphericalangle OSA = \sphericalangle OS\bar{A}$, дакле и угао $\sphericalangle OS\bar{A}$ је прав, тј. и тачка $\bar{A}$ је у равни ν. Исто тако је и $\bar{B}$ у равни ν, и $BS = \bar{B}S$. Дакле и тачке $\bar{A}$ и $\bar{B}$ су на кругу k_0, тј. укупност заједничких тачака обеју лопти је круг k. Тиме је доказ завршен.

Теорема 35.16. *Кроз сваку тачку изван једне лопте, а у свакој тачки која садржи ту тачку и средиште лопте, пролазе две дирке те лопте.*

Кроз сваку праву чије тачке су све изван једне лопте, пролазе две додирне равни те лопте.

Доказ је аналоган доказу претходне теореме и ослања се на теорему 35.14.

36. БЕСКОНАЧНА МНОШТВА ТАЧАКА.

1. На темељу обеју аксиома непрекидности могу се проучавати бесконачна мноштва тачака. Њихово проучавање је предмет теорије мноштава. Но како смо геометријске ликове (у најширем смислу речи) дефинисали као мноштва тачака, можемо сматрати елементарну геометрију позваном да, на темељу аксиома непрекидности и свеколиког досадашњег излагања, које је пошло од аксиома I, II и III, изведе макар извесне основне чињенице које се темеље на непрекидности, а тичу се ма каквих ликова.

Бесконачна мноштва тачака су она која садрже бесконачно много тачака. Мноштва која садрже коначно много тачака зову се коначна мноштва тачака. Линије, површи и тела су бесконачна мноштва тачака, без обзира на то како их дефинишемо, да ли као такозвана геометријска места тачака или на други начин (напр. линију као обвојницу правих). Док теорија мноштава тачака проучава најопширније врсте бесконачних мноштава тачака, дотле математичка анализа проучава по својој методи линије и површи које су у извесном смислу најправилније, испитујући њихове особине које претпостављају непрекидност (те особине су сама непрекидност и прекиди, постојање и понашање тангената и нормала, тангентних равни итд.).

Посматраћемо прво бесконачна мноштва тачака на правој затим у равни и најзад у простору. Нешто најосновније што треба дефинисати и проучавати пре свега је тачка нагомилавања у сва три случаја. Тачка нагомилавања је, обичним речима речено, тачка око које се „нагомилава" бесконачно много тачака посматраног мноштва. За мноштва тачака на правој основу за дефиницију тачке нагомилавања даје друга аксиома непрекидности, а за мноштва тачака у равни и у простору основу сачињавају теореме аналоге тој аксиоми и које треба тек доказати.

2. Тачку нагомилавања мноштва тачака на правој дефинишемо овако:

Дефиниција 36.1. Нека је M бесконачно мноштво тачака на правој a. Ако за тачку N праве a постоји на тој правој основни низ дужи, које све садрже тачку N, такав да свака дуж тог низа садржи бар једну тачку мноштва M, различиту од N, називаћемо тачку N *тачком нагомилавања* за мноштво M, на правој a.

Напомена. Разјаснимо ту дефиницију на једном примеру, служећи се координатама на правој. Нека се мноштво M састоји из тачака M_n чије су координате $x={}^1/_{3^n}$, $n=1,2,\dots$. Посматрајмо напр. основни низ дужи d_ν којима одговарају затворени размаци $[-{}^1/_{2^\nu}, {}^1/_{2^\nu}]$, $\nu=1,2,\dots$. Једина тачка садржана на свим тим дужима је тачка O, за коју је $x=O$. Тачка M_1 је садржана на дужи d_1, јер је $-{}^1/_2<{}^1/_3<{}^1/_2$. Исто тако је тачка M_2 садржана на дужи d_2 и, уопште, тачка M_ν на дужи d_ν. — Дакле, према дефиницији 36.1 тачка O је тачка нагомилавања мноштва M.

Приметимо да тачка нагомилавања може али не мора припадати посматраном мноштву тачака.

Опречна тачки нагомилавања је изолована тачка једног мноштва.

Дефиниција 36.2. Нека је P тачка у мноштву **M** тачака на правој a. Ако на тој правој постоји дуж која тачку P садржи као унутарњу тачку, а која не садржи других тачака мноштва M, називаћемо тачку P *изолованом* или *усамљеном тачком* мноштва M.

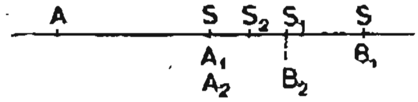
После ових двеју дефиниција, може се посматрати „изводно мноштво" датог мноштва и разне врсте бесконачних мноштава на правој, као што су затворено и перфектно мноштво, у себи густо мноштво, свуда густо мноштво на правој или на неком делу праве, итд. Ради тога и даљега упућујемо на уџбенике где се проучавају мноштва тачака.

Искажимо само још следећу дефиницију ограниченог*) мноштва тачака једне праве, а затим теорему познату као Bolzano-Weierstrass-ову теорему.

Дефиниција 36.3. Мноштво тачака на правој за које постоји дуж која га садржи, називаћемо *ограниченим мноштвом тачака* праве.

Теорема 36.1. *Свако ограничено бесконачно мноштво тачака једне праве има најмање једну тачку нагомилавања.*

Доказ. Нека је бесконачно мноштво M садржано на дужи AB. Ако је S_1 средиште дужи AB (сл. 302), бар једна од двеју дужи AS_1 и BS_1 садржи бесконачно много тачака мноштва M, јер кад би обе ове дужи садржавале само коначно много тачака мноштва M, то мноштво би било коначно. Обележимо знацима A_1, B_1 крајеве једне од двеју дужи AS и BS, која садржи бесконачно много тачака мноштва M.



Сл. 302

Поступимо са дужи A_1B_1 тако исто као што смо с дужи AB и нека је A_2B_2 једна од половина дужи A_1B_1, која садржи бесконачно много тачака мноштва M. Наставимо овај поступак бескрајно.

Добијамо тако бесконачан низ дужи AB, A_1B_1, A_2B_2, . . . ; од којих свака садржи бесконачно много тачака мноштва M. Према теореми 35.2 то је основан низ дужи, дакле постоји по аксиоми IV 1 тачка X која је садржана на свим тим дужима. Како на свакој дужи тог низа има бесконачно много тачака мноштва M, на свакој постоји по једна тачка различита од X. Дакле према дефиницији 36.1 X је тачка нагомилавања мноштва M.

3. Пређимо укратко на одговарајуће посматрање бесконачних мноштава тачака у равни. Од разних облика у којима можемо исказати теорему која у равни одговара Канторовој аксиоми (IV 2) као најпогоднији добијамо посматрањем бесконачног низа кружних површи.

Прво дефинишемо основни низ кружних површи.

Дефиниција 36.4. Ако у бесконачном низу кружних површи

$$(k_1),\ (k_2),\ \ldots ,$$

садржаних у једној равни, свака кружна површ садржи следећу, и ако не постоји кружна површ која би била садржана на свим кружним површима тог низа, назваћемо тај низ *основним низом кружних површи.*

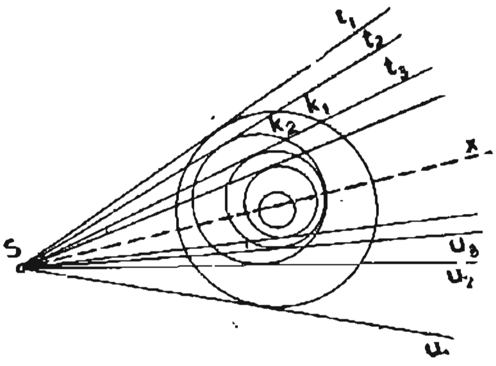
Сад можемо изрећи теорему која одговара Канторовој аксиоми, употпуњеној теоремом 35.1, овим речима:

Теорема 36.2. *За сваки основни низ кружних површи постоји једна и само једна тачка, садржана на свим кружним површима тог низа.*

---

*) beschränkt, borné.

Доказ. Нека су (k_1), (k_2), ... те кружне површи. Нека је S ма која тачка у равни тих кружних површи, а изван круга k (сл. 303). Како је S изван k_1, а сви остали кругови су у k_1, тачка S је изван свих њих, дакле према теореми 35.14. кроз тачку S пролазе по две дирке на сваки круг тог низа. Уочимо полуправе које полазе из S и садрже додирне тачке. Нека су t_1, u_1 оне од тих полуправих, које додирују круг k_1, затим t_2, u_2 оне које додирују круг k_2, итд.

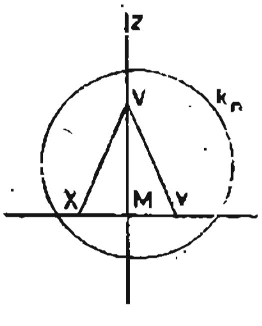


Сл. 303

Посматрајмо удубљене углове $\sphericalangle t_1u_1$, $\sphericalangle t_2u_2$, ... Удубљени угао $\sphericalangle t_nu_n$ ($n = 1,2, \ldots$) садржи тетиву круга k_n, која спаја тачке додира тог круга са t_n и u_n. Према томе свака полуправа која полази из S и садржана је у том углу, сече тетиву, дакле сече и круг k_n у двема тачкама. У испупченом углу с крацима t_n и u_n круг k_n нема, напротив, тачака. Како су све тачке кружне површи (k_{n+1}) садржане на кружној површи (k_n), полуправе t_{n+1}, u_{n+1} су садржане у удубљеном углу $\sphericalangle t_nu_n$; при томе се могу поклапати с једним или другим његовим краком. Дакле сваки удубљени угао $\sphericalangle t_{n+1}u_{n+1}$ садржан је у претходном удубљеном углу $\sphericalangle t_nu_n$, $n = 1,2, \ldots$.

Сви ти углови садрже известан удубљен угао ξ с теменом S или пак садрже према теореми 35.7 једну полуправу x која полази из S. Ако садрже угао ξ, нека је опет x ма која полуправа садржана у ξ и која полази из S. Како је у сваком случају полуправа x садржана у свим угловима $\sphericalangle t_nu_n$, она сече сваки круг k_n у по двема тачкама, рецимо A_n и B_n. Тиме је доказано да постоји права која сече све кругове датог низа.

Како су тачке A_{n+1} и B_{n+1} садржане у кругу k_n или на њему, свака дуж $A_{n+1}B_{n+1}$ је садржана на претходној дужи A_nB_n ($n = 1,2, \ldots$). Све те дужи садрже извесну дуж y, или пак садрже према аксиоми IV 2 једну тачку X. Ако садрже дуж y, нека је опет X која било тачка те дужи. Како је у оба случаја тачка X садржана на свим дужима A_nB_n, она је у сваком кругу k_n.



Сл. 304

Докажимо још да је X једина таква тачка. — Кад би, напротив, постојала дуж y, дакле још једна тачка Y на x која би била садржана на свим дужима A_nB_n, нека је M средиште дужи XY, z симетрала дужи XY (сл. 304). Круг k_n садржи тачке X, Y и сече праву z у двема тачкама, рецимо C_n и D_n. Лако се доказује да је $C_nD_n \geqslant XY$. Како свака дуж C_nD_n садржи следећу, све те дужи садрже једну дуж, рецимо VW, и $VW \geqslant XY$. Бар једна од тачака V, W, рецимо V, различита је од M, дакле постоји троугао VXY. Нека је k круг садржан у том троуглу. Како су темена тог троугла у сваком кругу k_n, све тачке троугаоне површи (VXY) су у k_n, дакле и кружна површ (k) је у сваком кругу k_n. Ово се противи претпоставци да је низ кружних површи (k_n) основни низ. Дакле X је једина тачка, садржана у свим тим круговима. — Тиме је доказ завршен.

Тачку нагомилавања и изоловану тачку у равни дефинишемо аналого као за мноштва на правој:

Дефиниција 36.5. Нека је M бесконачно мноштво тачака у равни α. Ако за тачку N равни α постоји у тој равни основан низ површи, које све тачку N, такав да свака кружна површ тог низа садржи бар једну тачку мноштва M, различиту од N, називаћемо тачку N *тачком нагомилавања* за мноштво M у равни α.

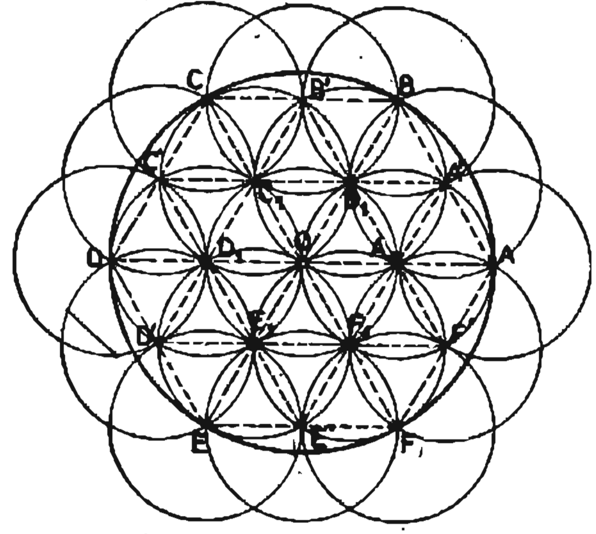
Дефиниција 36.6. Нека је P тачка у мноштву M тачака садржаних у равни α. Ако у α постоји кружна површ која тачку P садржи као унутарњу тачку, а која не садржи других тачака мноштва M, називаћемо тачку P *изолованом* или *усамљеном тачком* мноштва M.

Додајмо опет само дефиницију ограниченог мноштва тачака у равни.

Дефиниција 36.7. Мноштво тачака у равни, за које постоји кружна површ која га садржи, називаћемо *ограниченим мноштвом тачака* равни.

Ради доказа Bolzano-Weierstrass-ове теореме за мноштво тачака у равни докажимо прво следећу теорему:

Теорема 36.3. *За сваку кружну површ постоји тринаест других кружних површи, тако да је свака тачка прве кружне површи садржана бар на једној од тих других тринаест кружних површи.*



Сл. 305

Доказ. Нека је k дати круг, O његово средиште, A ма која тачка на k (сл. 305). Нека су B и F пресеци круга k кругом једнаког полупречника и коме је средиште A, затим C и A пресеци круга k кругом једнаког полупречника и коме је средиште B, итд. Добијамо низ тачака A, B, C, D итд. Како су троугли OAB, OBC, OCD итд. једнакострани и подударни, збир њихових углова $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ једнак је опруженом углу $\sphericalangle AOD$. Дакле постоје свега шест таквих тачака на кругу k, које образују шестоугао $ABCDEF$. Многоугаона површ $(AB\ldots F)$ је садржана на кружној површи (k) и разложена је на шест троугаоних површи (OAB), (OAC), ... (OFA).

Нека су $A_1, B_1, \ldots, F_1$ редом средишта дужи $OA, OB, \ldots, OF$. Како је $OA_1 = OB_1 = \ldots = OF_1$, ова средишта су на кругу k_o коме је средиште O, а полупречник половина полупречника круга k.

Нека су $A', B', \ldots, F'$ редом средишта дужи $AB, BC, \ldots, FA$. Како је $AA' = AA_1$, и троугао AA_1A' је једнакостран. Исто тако је и троугао AA_1F' једнакостран и подударан с претходним. Дакле $AA_1 = AA' = AF'$, тј. тачке A_1, A', F' су на кругу k_A, коме је средиште A, а полупречник половина полупречника круга k. Исто тако су троугли $A_1A'B$ и BB_1A' једнакострани и подударни с троуглом AA_1A', дакле $A'A = A'A_1 = A'B_1 = A'B$, тј. A, A_1, B_1, B су на кругу k_A, коме је средиште A' а полупречник половина полупречника круга k.

На тај начин доказујемо да су свих дванаест тачака $A, A', B, B', \ldots, F, F'$ средишта кругова $k_A, k_{A'}, \ldots, k_{F'}$ подударних међу собом.

Као што је шестоугаона површ $(AB \ldots F)$ садржана на кружној површи (k) и разложена на шест подударних троугаоних површи, тако је шестоугаона површ $(A_1\ B_1 \ldots F)$ садржана на кружној површи (k_o) и разложена је на шест подударних троугаоних површи. Исто вреди у односу на сваку кружну површ (k_A), $(k_{A'}), \ldots, (k_{F'})$.

Дакле, тринаест шестоугаоних површи садржаних на тим кружним површима, садрже пак све тачке кружне површи (k), а тим пре садрже тих тринаест кружних површи целу кружну површ (k). — Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 36.4. *Свако ограничено бесконачно мноштво тачака једне равни има најмање једну тачку нагомилавања.*

Доказ. Нека је бесконачно мноштво **M** тачака садржано на кружној површи (k), чије средиште је O. Одредимо према претходној теореми тринаест кружних површи, чији полупречници су једнаки половини полупречника круга k, тако да је свака тачка кружне површи (k) садржана бар на једној од тих тринаест кружних површи. Бар једна од тих тринаест кружних површи садржи бесконачно много тачака мноштва **M**. Нека је то кружна површ (k_1).

Поступајући са (k_1) као што смо поступали са (k), налазимо да бар једна од нових тринаест кружних површи садржи бесконачно много тачака мноштва **M**. Нека је то кружна површ (k_2). Итд. Тако добијамо бесконачан низ кружних површи (k), (k_1), $(k_2), \ldots$ Рецимо да су им средишта редом $O, O_1, O_2, \ldots$. Ако је r полупречник круга k, полупречник круга k_n је једнак $r/2^n$.

Нека је k' круг с истим средиштем O као круг k, а двоструког полупречника, и нека је k_n' круг с истим средиштем O_n као k_n, а двоструког полупречника, тј. који је једнак $r/2^{n-1}$.

Како је $O \equiv O_1$ или $OO_1 = r$, а полупречник круга k_1' једнак је r, имамо за све тачке P_1 круга k_1' било $OP_1 = r$, било $OP_1 \leqslant OO_1 + r$, дакле свакако $OP_1 \leqslant 2r$, тј. кружна површ (k_1') је садржана на кружној површи (k').

Исто тако закључујемо за свако $n = 1,2, \ldots$: Како је $O_n \equiv O_{n+1}$ или $O_nO_{n+1} = r/2^n$, а полупречник круга k_{n+1}' једнак је $r/2^n$, имамо за све тачке P_{n+1} круга k_{n+1}' било $O_nP_{n+1} = r/2^n$, било $O_nP_{n+1} \leqslant O_nO_{n+1} + r/2^n$, дакле свакако $O_nP_{n+1} \leqslant r/2^{n-1}$, тј. свака кружна површ (k_{n+1}') је садржана на претходној кружној површи (k_n').

Докажимо да не постоји кружна површ (k^*) која би била садржана на свим површима (k_n'). Заиста, кад би та површ постојала, нека је r^* њен полупречник. Полупречници свих кругова k_n' били би једнаки или већи од r^*, а то је немогуће, јер за $n = 2,3, \ldots$ дужи једнаке са $r/2^{n-1}$, а садржане на једној полуправој и којима је крај исходиште те полуправе, не садрже никакву дуж, дакле ни дуж једнаку дужи r^*. Према томе низ кружних површи (k'), (k_1'), (k_2'), ... је основни низ. Према теореми 36.2 постоји једна тачка X, која је садржана на свим тим кружним површима.

С друге стране, како на кружној површи (k_n) има бесконачно много тачака мноштва **M**, а кружна површ (k_n) је садржана на (k_n'), у свакој кружној површи (k_n') има бесконачно много тачака мноштва **M**. Према дефиницији 36.5 X је тачка нагомилавања мноштва **M**. — Тиме је теорема 36.4 доказана.

4. Посматрање мноштава тачака у простору потпуно је аналого. Помоћу „основних низова“ сферних тела можемо дефинисати тачку

нагомилавања, па доказати да за сваки такав низ постоји једна и само једна тачка која је садржана у свим сферним телима тог низа, доказати затим да свако ограничено мноштво има бар једну тачку нагомилавања итд. Најзад, изводно мноштво, затворено и перфектно мноштво, у себи густо и свуда густо мноштво, повезано мноштво, континуум итд. дефинишу се и проучавају како на правој тако и у равни па и у простору. Оно што се обично зове „линија“, припада нарочитој врсти линеарних континуума, а што се зове „површ“, припада нарочитој врсти површинских континуума. – Проучавање тих и сличних мноштава тачака није предмет елементарне геометрије.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ.

1. Конструисати троугао у датој равни коме су све три странице једнаке.

2. Конструисати троугао коме су странице једнаке датим дужима.

3. Конструисати троугао подударан са датим троуглом и садржан у датој равни, а са једном страницом на датој правој.

4. Конструисати угао једнак датом углу, садржан у датој равни и са једним датим краком.

5. Конструисати једнакокрак троугао коме је дата основица и крак.

6. Конструисати троугао у датој равни, коме су дате две странице и угао наспрам једне од тих датих страница.

7. Конструисати симетралу дате дужи AB.

8. Конструисати симетралу датог угла AOB.

9. Из тачке која је ван дате праве AB повући управну на AB.

10. У тачки која је на датој правој повући у датој равни управну на AB.

11. Одредити средиште датом кругу.

12. Датим полупречником описати круг који пролази кроз две дате тачке.

13. Конструисати круг који пролази кроз једну дату тачку и додирује дату праву у датој тачки.

14. Кроз дату тачку једног круга повући дирку тога круга.

15. Кроз тачку изван једног круга повући дирке на тај круг.

16. Над датом дужи као над тетивом описати кружни лук тако да је сваки периферијски угао с теменом на том луку а чији краци пролазе кроз те тетиве једнак датом углу.

17. Конструисати троугао кад је дата једна страница, један налегли угао и збир других двеју страница.

18. Конструисати круг датог полупречника који додирује дати круг и пролази кроз дату тачку.

19. Конструисати круг датог полупречника који додирује дати круг и чије средиште припада датој правој.

20. Конструисати круг датог полупречника који додирује два дата круга.

21. На датој правој одредити тачку једнако удаљену од друге две тачке ван те праве: а) кад су тачке и праве у истој равни, б) кад тачке и праве нису у истој равни.

22. Поделити прав угао на три једнака дела.

23. Кроз дату тачку која се налази у једном углу конструисати дуж којој су крајње тачке на крацима тог угла а дата тачка је средиште те дужи.

24. На датој правој одредити тачку такву да дирке повучене из те тачке на један дати круг буду једнаке датој дужи.

25. Конструисати лопту која садржи дате четири тачке.

26. Конструисати праву кружну купу којој је дата висина и једна изводница.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

УПОРЕДНОСТ

37. ПОГЛЕД У ИСТОРИЈУ.

Две праве називају се у еуклидској геометрији *упоредним* или *паралелним* ако су у истој равни а не секу се. Међу постулатима које је Еуклид ставио на чело својих „Елемената“ налазимо и следећи став, познат као Еуклидов пети постулат:

„Ако једна права пада преко две праве и чини да су на истој страни унутарњи углови [својим збиром] мањи од два права угла, те две праве губећи се у бескрај, састају се на оној страни где су та два угла [својим збиром] мања од два права угла“ (види сл. 1).

Тај Еуклидов пети постулат назива се *постулатом паралелности,* јер на њему се оснива проучавање правих у „Елементима“.

За разлику од осталих Еуклидових постулата, који се одликују својим елементарним карактером, овај пети постулат је по садржају прилично сложен и сличан каквој, не баш најпростијој теореми. Стога су још у Старом веку отпочели узалудни покушаји да се постулат паралелности докаже, тј. да се изведе из осталих Еуклидових постулата и аксиома.

Тек године 1829 и следећих показао је Николај Лобачевски (1793–1856) да се тај постулат не може доказати тако, тј. да он има вредност основног става, те да се и без њега може логички развити геометрија (тзв. хиперболна геометрија или геометрија Лобачевскога).

Погледајмо у каквом је односу Еуклидов постулат упоредности према неким, њему блиским ставовима. Споменимо пре свега из „Елемената“ став 17 (а наш 26.18): „У сваком троуглу два ма која угла заједно јесу мања од два права угла.“ Еуклидов пети постулат није, наиме, ништа друго до обрнути став: Ако три праве у једној равни граде два унутарња угла чији је збир мањи од два права угла, те три праве образују троугао.

Еуклидов став 27 казује ово: „Ако права сече две праве и чини да су наизменични углови међу собом једнаки, ове две праве су упоредне.“ За његов доказ није потребан пети постулат.

Ни за став 28 није потребан пети постулат: Ако права сече две праве и чини да су сагласни углови једнаки, или да су два супротна угла [својим збиром] једнака двама правим угловима, ове две праве су упоредне. — Тај став следује из претходнога. Но идући став може се доказати тек помоћу петог постулата.

Став 29 казује да права, која сече две упоредне праве, чини да су наизменични углови једнаки, сагласни углови једнаки, а по два супротна угла једнака су двама правим угловима.

Из става 29 следује да кроз тачку ван праве пролази само једна упоредна. Чувени астроном Старог века Птоломајос поставио је тај став на место Еуклидова петог постулата. У том облику узима се аксиома паралелности обично и данас. Тако ћемо и ми. Из тога Птоломајова става следује пак Еуклидов пети постулат као теорема: еквивалентан му је.

Из става 29 следује такође да је збир углова у троуглу једнак двама правим угловима. И тај став је еквивалентан петом постулату. Независно од аксиоме паралелности може се пак доказати следећа теорема: „Ако је у само једном, ма ком троуглу збир углова једнак збиру два права угла, тако је у сваком троуглу; ако је пак у само једном троуглу тај збир мањи од збира два права угла, мањи је у сваком троуглу. – Не користећи аксиому упоредности може се пак доказати да је збир углова у троуглу највише једнак збиру два права угла.

С обзиром на та два могућа случаја постоје две врсте геометрије, које одговарају двема врстама логички могућих простора: ако је у сваком троуглу збир углова једнак збиру два права угла, имамо нашу обичну, тзв. еуклидску или параболну геометрију; ако ли је у сваком троуглу збир углова у троуглу мањи од два права угла имамо тзв. хиперболну геометрију, у којој важи да се у равни кроз тачку ван праве може повући бескрајно много правих које не секу дату праву.

38. ТЕОРЕМЕ О УПОРЕДНОСТИ, НЕЗАВИСНЕ ОД АКСИОМЕ УПОРЕДНОСТИ.

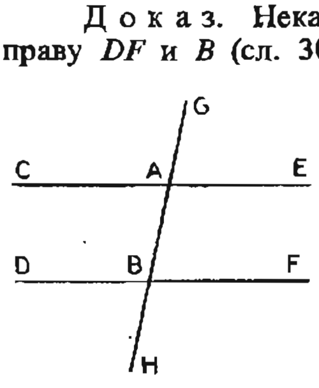
1. Почињемо дефиницијом упоредних правих:

Дефиниција 38.1. Две праве које су у једној равни а не секу се, називамо паралелним или упоредним правим.

Дефиницијом 12.7 увели смо парове углова који су образовани једном (попречном) правом, која сече две друге праве, садржане у једној равни. То су унутарњи и спољни углови, затим сагласни, супротни и наизменични углови. О самим тим угловима постоје следеће три теореме.

Теорема 38.1. *Ако у једној равни извесна права сече друге две праве и ако су два која било сагласна угла једнака, тада су свака два сагласна угла једнака, па и свака два наизменична угла су једнака и збир свака два супротна угла једнак је збиру два права угла.*

Доказ. Нека је GH попречна права, која сече праву CE у A и праву DF и B (сл. 306). Нека су тачке C и D с једне стране, а тачка E и F са друге стране праве GH. Претпоставимо да су сагласни углови $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBG$ једнаки.



Сл. 306

Други пар сагласних углова је $\sphericalangle EAG$ и $\sphericalangle FBG$. То су напоредни углови углова $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBG$, који су једнаки, дакле, према теореми 21.6 углови $\sphericalangle EAG$ и $\sphericalangle FBG$ су једнаки.

Трећи пар сагласних углова је $\sphericalangle CAH$ и $\sphericalangle DBH$. Ти су унакрсни с угловима $\sphericalangle EAG$ и $\sphericalangle FBG$, па како су ови према теореми 21.7 једнаки, и сами углови $\sphericalangle CAH$ и DBH су једнаки.

Четврти пар сагласних углова је $\sphericalangle EAH$ и $\sphericalangle FBH$. Ти су унакрсни с угловима $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBG$, па како су ови једнаки, једнаки су и углови $\sphericalangle EAH$ и $\sphericalangle FBH$. Дакле сви парови сагласних углова су једнаки.

Пар наизменичних углова је $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle FBG$. Но $\sphericalangle CAG = \sphericalangle DBG$, јер то су сагласни углови, а $\sphericalangle DBG = \sphericalangle FBH$ јер су то унакрсни углови, дакле је $\sphericalangle CAG = \sphericalangle FBH$. Исто тако доказујемо за остала три пара наизменичних углова да су једнаки.

Пар супротних углова је $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBH$. Но $\sphericalangle CAG$ и CAH су два напоредна угла, дакле њихов збир једнак је збиру два права угла. Али $\sphericalangle CAH$ и $\sphericalangle DBH$ су сагласни углови, дакле једнаки. Према томе, збир углова $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBH$ једнак је збиру два права угла. Исто тако доказујемо за остала три пара супротних углова да су једнаки.

Теорема 38.2. *Ако су два наизменична угла једнака, тада су свака два наизменична угла једнака и свака два сагласна угла су једнака и збир свака два супротна угла једнак је збиру два права угла.*

Доказ. Нека су наизменични углови $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle FBH$ једнаки. Како су $\sphericalangle FBH$ и $\sphericalangle DBG$ унакрсни углови, према теореми 21.7 једнаки су, дакле и сагласни углови $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBG$ су једнаки. Даље следују закључци непосредно из теореме 38.1.

Теорема 38.3. *Ако је збир два супротна угла једнак збиру два права угла, тада је збир свака два супротна угла једнак збиру два права угла и свака два сагласна угла једнака су, и свака два наизменична угла једнака су.*

Доказ. Нека је збир супротних углова $\sphericalangle CAG$ и $\sphericalangle DBH$ једнак збиру два права угла. Како су $\sphericalangle DBH$ и $\sphericalangle DBG$ два напоредна угла, њихов збир је такође једнак збиру два права угла, дакле је

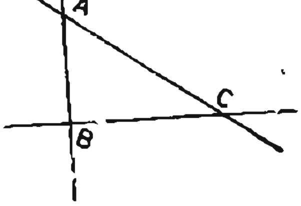
$$\sphericalangle CAG + \sphericalangle DBH = \sphericalangle DBH + \sphericalangle DBG$$

и према томе је $\sphericalangle CAG = \sphericalangle DBG$, тј. два сагласна угла су једнака. Даље следују односи непосредно из теореме 38.1.

Следеће теореме о упоредним правим доказују се на темељу досадањих аксиома, независно од аксиоме упоредности.

***Теорема** 38.4. *Ако су у једној равни две праве* a *и* b *пресечене трећом правом* c *и ако су два сагласна угла једнака, или два наизменична угла једнака, или збир два супротна угла једнак збиру два права угла, праве* a *и* b *су упоредне.*

Доказ. Нека су a и b те две праве и p трећа. Претпоставимо да да напротив праве a и b нису упоредне, него да се секу у извесној тачки C (сл. 307). Нека права p сече праве a и b редом у тачкама A и B и нека је D тачка на правој p с оне стране тачке A с које није тачка B. Удубљени угао $\sphericalangle DAC$ је спољашњи угао троугла ABC, дакле према теореми 25.11 већи је од несуседног унутарњег угла $\sphericalangle ABC$ тог троугла. Али $\sphericalangle DAC$ и $\sphericalangle ABC$ су два сагласна угла, дакле постоје два неједнака сагласна угла.



Сл. 307

Но, по једној претпоставци наше теореме, два сагласна угла су једнака, дакле према теореми 38.1 свака два сагласна угла су једнака, супротно закључку да постоје два неједнака сагласна угла.

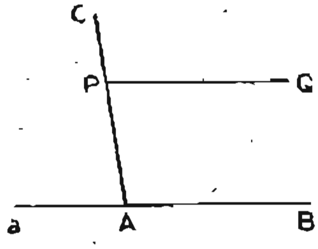
По двема идућим претпоставкама наше теореме два наизменична угла су једнака или је збир два супротна угла једнак збиру два права угла, дакле према теоремама 38.2 и 38.3 свака два сагласна угла су једнака, супротно истом закључку. Дакле обе праве не секу се у некој тачки C, тј упоредне су.

Теорема 38.5. *Праве управне на истој правој и које припадају истој равни јесу упоредне.*

Доказ. Како су ма која два сагласна угла, што образују обе управне праве са трећом правом, два права угла, ова два угла су једнака, дакле према теореми 38.4 те две праве су упоредне.

Теорема 38.6. *Нека је* a *ма која права и* P *ма која тачка праве* a. *Постоји најмање једна права упоредна правој* a *и која пролази кроз тачку* P.

Доказ. Нека су A и B ма које две тачке на правој a и нека је C тачка на правој AP, с оне стране тачке P с које није тачка B (сл. 308).



Сл. 308

Посматрајмо удубљени угао $\sphericalangle PAB$. У равни праве a и тачке P постоји према теореми 21.2 с оне стране праве AB с које је C, полуправа PQ која полази из тачке P и образује угао $\sphericalangle CPQ$ једнак углу $\sphericalangle PAB$. Тада је AB попречна права која сече праве a и PQ и та два угла су сагласна. Дакле према теореми 38.4 права PQ је упоредна с правом a, тј. постоји бар једна права упоредна датој правој a и која пролази кроз дату тачку P.

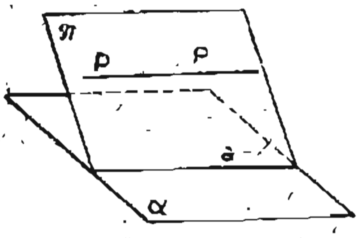
2. Прелазећи на упоредност у простору дефинишимо прво упоредност праве и равни и двеју равни.

Дефиниција 38.2. Права и раван, или две равни, које немају заједничких тачака називамо *паралелним* или *упоредним*.

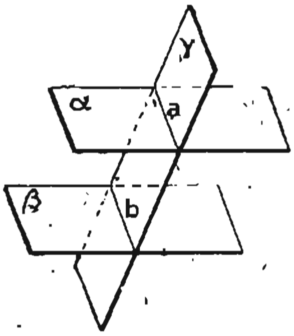
Знак за упоредност је $||$.

Теорема 38.7. Свака раван, која садржи праву упоредну с извесном равни, и сама је упоредна с том равни, или се с њом сече по правој упоредној с том правом.

Доказ. Нека је π раван која садржи праву p упоредну са равни α (сл. 309). Раван π је упоредна с α или је сече по извесној правој a. Ако је сече, праве a и p се не секу, јер кад би се секле у некој тачки T, то би била тачка продора праве p с α, супротно претпоставци да су p и α упоредне. Дакле a и p су упоредне праве.



Сл. 309



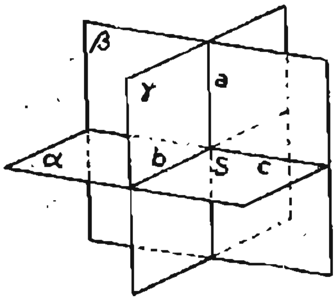
Сл. 310

Теорема 38.8. *Раван која сече две упоредне равни, сече их по двема упоредним правим.*

Доказ. Нека раван γ сече две упоредне равни α и β по правим a и b (сл. 309). Кад би се ове праве секле, тачка P њихова пресека била би заједничка тачка равни α и β, дакле ове равни не би биле упоредне. Према томе a и b су упоредне праве и равни.

Теорема 38.9. *Ако се три равни секу по трима правим, те три праве секу се у једној тачки или су међу собом упоредне.*

Доказ. Нека се равни α, β, γ (сл. 310а) секу по трима правим и то α и β по c, β и γ по a, γ и α по b. Ако се a и b секу у једној тачки, то је тачка заједничка свим трима равнима, дакле и пресечној правој c равни α и β, тј. све три пресечне праве секу се у једној тачки.



Сл. 310а

Ако се праве a и b не секу, упоредне су, јер припадају једној равни γ. Тада се ни b и c не секу, јер када би се секле, све три равни би се секле у у једној тачки. Дакле све три праве су упоредне међу собом.

Теорема 38.10. *Праве управне на једној равни, упоредне су међу собом.*

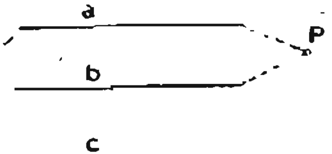
Доказ. Према теореми 24.7 две праве управне на једној равни α, припадају једној равни β, а према дефиницији 24.1 обе су управне на правој која спаја њихова подножја. Дакле, према теореми 38.5 упоредне су међу собом.

АКСИОМА УПОРЕДНОСТИ И ЊЕНЕ ПРВЕ ПОСЛЕДИЦЕ У РАВНИ

Аксиому упоредности, последњу у нашем систему аксиома, изричемо следећим речима:

АКСИОМА V. *Кроз ма коју тачку изван ма које праве пролази највише једна права упоредна тој правој.*

Теорема 39.1. *Ако су у једној равни две праве упоредне са неком трећом правом, упоредне су и међу собом.*



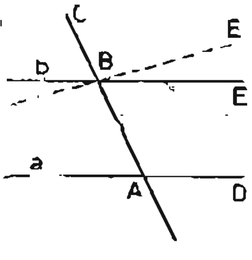
Сл. 311

Доказ. Нека су a и b две праве које припадају једној равни а управне су са правом c (сл. 311). Кад праве a и b не би биле упоредне, секле би се у извесној тачки P. То би биле две разне упоредне с правом c, садржане у равни која садржи праву c и тачку P и пролазиле би кроз исту тачку P. Ово се противи аксиоми V. Дакле праве a и b су упоредне.

На основи аксиоме V можемо доказати теорему обрнуту теореми 38.4:

Теорема 39.2. *Ако су две праве упоредне, свака попречна права образује с њима једнаке сагласне и једнаке наизменичне углове и збир свака два супротна угла једнак је збиру два права угла.*

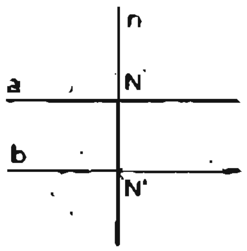
Доказ. Нека попречна права c сече упоредне праве a и b у тачкама A и B (сл. 312). Нека је C тачка на c тако да је $A-B-C$ и нека су D и E тачке редом на a и b, с исте стране праве c. Претпоставимо да није онако како тврди ова теорема. Тада су на темељу теорема 38.1 до 3 у сваком случају сагласни углови $\sphericalangle CAD$ и $\sphericalangle CBE$ неједнаки, дакле према теореми 20.2 постојала би с оне стране праве c с које су тачке E и D полуправа BE различита од полуправе b, тако да је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$. Према теореми 38.4 права BE је упоредна с правом a, дакле кроз тачку B пролазиле би две праве b и BE. Но то се противи аксиоми V, дакле онако је како тврди теорема 39.2.



Сл. 312

Теорема 39.3. *Права која је управна на једној од двеју упоредних правих, управна је и на другој.*

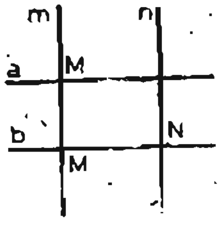
Доказ. Нека су *a* и *b* две упоредне праве, *n* права управна на *a* и која сече праву *a* у тачки *N* (сл. 313). Праве *b* и *n* нису упоредне, јер кад би биле упоредне, праве *a* и *n* би биле две праве које пролазе кроз *N* и упоредне су са *b*. Дакле праве *b* и *n* се секу у извесној тачки *N*. Како су праве *a* и *b* упоредне, према теореми 39.2 права *n* гради с њима једнаке сагласне углове. Но углови које граде праве *a* и *n* су прави, дакле и углови које граде праве *b* и *n* су прави, тј. права *n* је управна и на правој *b*.



Сл. 313

Теорема 39.4. *Нека су* a *и* b *у једној равни две упоредне праве. Ако је у тој равни* m *права управна на правој* a, *затим* n *права управна на правој* b, *тада су и праве* m *и* n *упоредне или се поклапају*

Доказ. Нека се *a* и *m* секу у тачки *M*, а *b* и *n* у тачки *N* (сл. 314). Како су праве *a* и *b* упоредне, а праве *a* и *m* управне, према теореми 39.3 су и праве *b* и *m* управне. Дакле обе праве *m* и *n* су управне на правој *b*, дакле су према теореми 38.5 међу собом упоредне, уколико се не поклапају.



Сл. 314

2. Сад можемо доказати и теорему у којој је садржан Еуклидов пети постулат.

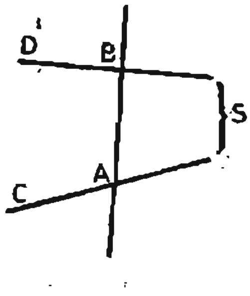
Теорема 39.5. *Ако су у једној правој две праве* a *и* b *пресечене трећом правом и ако су при томе два сагласна угла неједнака, или два наизменична угла неједнака, или збир два супротна угла није једнак збиру два права угла, тада се праве* a *и* b *секу.*

Ако је, посебно с једне стране попречне праве збир унутарњих углова мањи од збира два права угла, праве a *и* b *се секу у тачки која је с оне стране попречне праве с које је збир унутарњих углова мањи од збира два права угла.*

Доказ. Из теореме 39.2 следује непосредно да се те две пресечне праве секу. Како према теоремама 38.1 — 3 збир њихова два супротна угла није једнак збиру два права угла, а два унутарња угла с исте стране попречне праве су два супротна угла, збир два унутарња угла с једне стране попречне праве је мањи од збира два права, а с друге стране је тада већи од два права.

Заиста, ако је *AB* права која сече праве *CE* и *DE* и ако су *A* и *B* редом тачке пресека, и ако су тачке *C* и *D* с једне стране праве *AB*, а *E* и *F* с друге стране (сл. 315), унутарњи углови с једне стране праве *AB* су $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABD$, а с друге стране $\sphericalangle BAE$ и $\sphericalangle ABF$. Нека је

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABD = 2R.$$



Сл. 315

Како је

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAE = 2R, \quad \sphericalangle ABD + \sphericalangle ABF = 2R,$$

добијамо сабирањем

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAE + \sphericalangle ABF = 4R,$$

а одузимањем леве и десне стране претходне неједначине,

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle ABP < 2R,$$

тј. ако је збир унутрашњих углова с једне стране попречне праве *AB* већи од 2*R*, с друге стране је мањи од 2*R*.

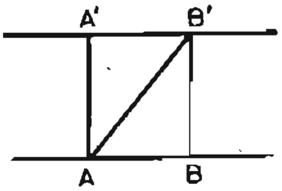
Исто тако показујемо и обратно тврђење: ако је исти збир с једне стране праве AB мањи од $2R$, с друге стране је већи од $2R$. Дакле с једне стране праве AB тај збир је свакако мањи од збира два права угла.

Како се праве CE и DF секу, нека је S тачка пресека. Оба унутарња угла с једне стране праве AB су углови троугла ABS и према теореми 26.16 њихов збир је мањи од збира два права угла, дакле тачка S је с оне стране праве AB с које је збир унутрањих углова мањи од два права угла.

3. Доносимо још неке од најосновнијих теорема.

Теорема 39.6. *Ако су у једној равни* AA' *и* BB' *две једнаке дужи, управне на правој* AB *и тачке* A *и* B *с исте стране те праве, те две дужи су управне и на правој* A'B' *и праве* AB *и* A'B' *су упоредне а дужи* AB *и* A'B' *су такође једнаке.*

Доказ. Према теореми 38.5 праве AA' и BB' су упоредне, јер су углови $\sphericalangle A'AB$ и $\sphericalangle B'BA$ прави (сл. 316). Како је права AB' попречна за праве AB и $A'B'$, углови $\sphericalangle A'AB'$ и $\sphericalangle AB'B'$ су према теореми 38.2 једнаки као наизменични углови. Према томе у троуглима $AB'B'$ и $AB'A'$ је



Сл. 316

$$AB' = B'A, \quad AA' = B'B, \quad \sphericalangle A'AB = \sphericalangle BB'A,$$

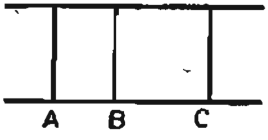
дакле та два троугла су подударна, а отуд је $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle ABB'$, дакле и $\sphericalangle AA'B'$ је прав угао.

Како су праве AA' и BB' упоредне, а права $A'B'$ је за њих попречна, збир углова $\sphericalangle AA'B'$ и $\sphericalangle BB'A'$ једнак је збиру два права угла, па како је $\sphericalangle AA'B'$ прав угао, и угао $\sphericalangle BB'A'$ је прав. Дакле дужи AA' и BB' су управне на правој $A'B'$.

Праве AB и $A'B'$ су управне на правој AA', дакле, према теореми 38.5 упоредне су. Најзад, из подударности троуглова $AB'B$ и $AB'A'$ следује да је и $AB = A'B'$. — Тиме је ова теорема у целости доказана.

Теорема 39.7. *Све тачке које су у једној равни с исте стране једне праве, а једнако удаљене од те праве, припадају извесној правој која је упоредна с датом правом.*

Доказ. Нека је A', B', C' ма које три од тих тачака, једнако удаљених од праве a (сл. 317) и нека су AA', BB', CC', ... дужи управне на a, а тачке A, B, C, ... њихова подножја. Према теореми 39.6 права $A'B'$ је упоредна с правом a; исто тако је и права $B'C'$. Према аксиоми V постоји само једна упоредна са правом a, која пролази кроз B, дакле праве $A'B'$ и $B'C'$ се поклапају, тј. тачке A', B', C' припадају једној истој правој. Како су то ма које три од посматраних тачака једнако удаљених од праве a, теорема је доказана.



Сл. 317

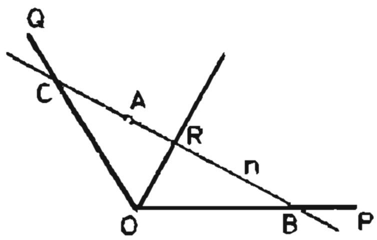
Теорема 39.8. *Праве управне на једној правој и садржане у једној равни, управне су на свакој правој у тој равни, која је упоредна с првом правом, а дужи на тим управним правим, ограничене обема упоредним правим јесу једнаке.*

Доказ. Нека су AA' и BB' две праве управне на правој AB (сл. 316) и нека је права $A'B'$ упоредна правој AB. Према теореми 39.3 углови које гради права AA' с правим AB и $A'B'$ су сви прави; исто тако и углови које гради права BB' с овим двема правим. Дакле праве AA' и BB' су управне на $A'B'$. Према теореми 38.5 праве AA' и BB' су упоредне, дакле попречна права AB' образује с њима према теореми 39.2 једнаке наизменичне углове $\sphericalangle A'AB$ и $\sphericalangle AB'B$. Према томе троугли ABA' и $AB'B$ су по теореми 25.13 подударни, јер им је, сем тога, страница AB' заједничка, а наспрамно углови $\sphericalangle AA'B'$ и $\sphericalangle ABB'$ су прави и према томе једнаки. Дакле је $AA'=BB'$.

Само уз помоћ аксиоме упоредности може се доказати и ова теорема:

Теорема 39.9. *Кроз сваку тачку садржану у једном удубљеном углу пролази права која сече оба крака тог угла.*

Доказ. Нека је то угао $\sphericalangle POQ$ с теменом O (сл. 318) и нека је A тачка у том углу. Нека је OR располовница тог угла. Удубљени углови $\sphericalangle POR$ и $\sphericalangle ROQ$ су једнаки, па како је угао $\sphericalangle POQ$ мањи од два права, ти углови су мањи од правог угла, тј. оштри.



Сл. 318

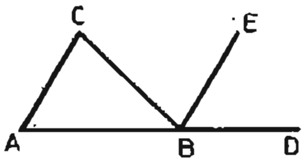
Нека је n управна на OR, која пролази кроз тачку R. С оне стране праве са које је крак OP образују праве n и OP са попречном правом OR два унутрашња и супротна угла, један прав а други оштар, дакле чији је збир мањи од збира два права угла. Према теореми 39.3 права n и полуправа OP секу се у извесној тачки B.

Исто тако доказујемо да се права n и полуправа OQ секу у извесној тачки C. Према томе, права n, која пролази кроз тачку A, сече оба крака угла $\sphericalangle POQ$.

4. Из аксиоме упоредности следују и ове две важне теореме:

Теорема 39.10. *Сваки спољни угао троугла једнак је збиру оба несуседна унутарња угла.*

Доказ. Нека је $\sphericalangle CBD$ спољашњи угао троугла ABC (сл. 319), BE права упоредна страници AC и то нека је E с оне стране праве AB с које је C. Угао $\sphericalangle BAC$ троугла ABC је према дефиницији 12.7 унутарњи угао за праве AC и BE пресечене правом AB. Како је полуправа BD по дефиницији 10.2 продужење дужи AB, тачке A и D су с разних страна тачке B, дакле према дефиницији 12.7 удубљени угао $\sphericalangle DBE$ је спољашњи угао за исте праве. Како су полуправе AC и BE с исте стране праве AB, према дефиницији 12.7 углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle DBE$ су сагласни. Како су праве AC и BE упоредне, та два угла су према теореми 39.2 једнаки.



Сл. 319

Угао $\sphericalangle ACB$ троугла и удубљени угао $\sphericalangle CBE$ су унутарњи углови за праве AC и BE пресечене правом BC. Како су C и E с исте стране праве AB, а због упоредности правих AC и BE тачке A и C су с исте стране праве BE, тачка C је у удубљеном углу $\sphericalangle ABE$, дакле на темељу теореме 11.7 A и E су с разних страна праве BC. Дакле углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle CBE$ су према дефиницији 12.7 наизменични, па како су праве AC и BE упоредне, та два угла су једнака.

Но како су A и E с разних страна праве BC и тако исто тачке A и D, тачке D и E су с исте стране праве BC. Сем тога су C и E с исте стране праве AB, дакле тачка E је у углу $\sphericalangle CBD$, а отуд према теореми 12.9 удубљени углови $\sphericalangle CBE$ и $\sphericalangle DBE$ немају ван крака BE заједничких тачака и према томе је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBE + \sphericalangle DBE$. Но $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DBE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE$, дакле

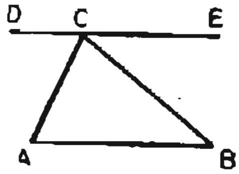
$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB.$$

Тиме је теорема доказана.

Теорема 39.11. *Збир сва три угла сваког троугла једнак је збиру два права угла.*

Доказ. Збир углова троугла ABC једнак је према теореми 39.10 збиру углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle CBD$, а овај је једнак збиру два права угла, јер су то два напоредна угла. Тиме је теорема доказана.

Доносимо и један доказ који се не ослања о претходну теорему. — Нека је DE права која пролази кроз теме C троугла ABC и упоредна је с његовом страницом AB и нека су тачке D и E с разних страна тачке C, дакле и с разних страна правих AC и BC (сл. 320). Нека је D с оне стране праве AC с које није тачка B.



Сл. 320

Како су праве AB и DE упоредне, граде према теореми 39.2 с правом AC једнаке наизменичне углове. Но угао $\sphericalangle BAC$ троугла ABC и удубљени угао $\sphericalangle ACD$ су према дефиницији 12.7 два таква угла, јер су то два унутарња угла, а њихови краци AB и CD су с разних страна праве AC. Дакле $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$.

Како су тачке B и D с разних страна праве AC и тако исто тачке E и D, тачке B и E су према теореми 10.1 с исте стране праве AC. Како се праве AB и CE не секу, тачке A и B су с исте стране праве CE. Дакле према теореми 11.2 тачка B је у удубљеном углу $\sphericalangle ACE$, а отуд су према теореми 11.7 тачке A и E с разних страна праве BC.

Упоредне праве AB и DE граде с правом BC једнаке наизменичне углове. Но угао $\sphericalangle ABC$ троугла ABC и удубљен угао $\sphericalangle BCE$ су такође два наизменична угла, јер су то два унутарња угла, а њихови краци BA и CE су с разних страна праве BC. Дакле $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE$.

Најзад, како су тачке B и C с разних страна праве AC, удубљени углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ACD$ су с разних страна праве AC, дакле ван крака AC немају заједничких тачака и према дефиницији 26.2 удубљени угао $\sphericalangle BCD$ једнак је збиру $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD$. Но тачке D и E су с разних страна тачке C, дакле углови $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle BCE$ су напоредни углови, па је $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BCE = 2R$. Отуд

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCE = 2\ R,$$

па како је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ABC$, имамо

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = 2\ R.$$

Тиме је теорема доказана.

Претходни доказ и доказ теореме 39.10 изложени су, водећи тачније рачуна о положају тачака и полуправих и зато су дужи од неких других у овом параграфу.

Из теореме 39.11 непосредно следује ова теорема:

Теорема 39.12. *У правоуглом троуглу збир двају оштрих углова једнак је правом углу.*

Додајмо теорему о збиру углова у четвороуглу.

Теорема 39.13. *Збир углова четвороугла једнак је збиру четири права угла.*

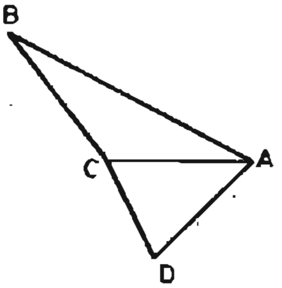
Доказ. Нека је $ABCD$ четвороугао са страницама AB, BC, CD, DA (сл. 321). Унутарњом дијагоналом AC четвороугаона површ $(ABCD)$ разложена је на две троугаоне површи (ABC) и (ACD), које су с разних страна праве AC. Према теореми 39.11 је

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 2\ R, \qquad \sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCA = 2\ R,$$

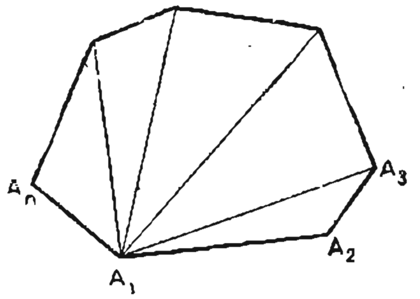
дакле

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCA = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + {}$$
$$+ \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4\ R.$$

5. На темељу разлагања ма које просте многоугаоне површи са n темена на $n-2$ троугаоне површи, помоћу самих унутарњих дијагонала произлази непосредно теорема о збиру углова простог многоугла.



Сл. 321



Сл. 322

Теорема 39.14. *Збир углова ма ког многоугла који има* n *темена износи* n − 2 *пута два права угла, тј.* (n − 2) · 2R.

Доказ следује непосредно из чињенице што је у разлагању многоугаоне површи на троугаоне површи, број ових једнак n − 2.

Извешћемо доказ укратко и независно од те чињенице за испупчен n-тоугао. Нека је $A_1A_2 \dots A_n$ испупчен многоугао (сл. 322). Према теореми 15.7 многоугаона површ $(A_1 \dots A_n)$ може се разложити на троугаоне површи, полазећи од једног темена, напр. на $(A_1A_2A_3)$, $(A_1A_3A_4)$, ..., $(A_1A_{n-1}A_n)$. Има $n-2$ таква троугла. Но како су један изван другога, према дефиницијама 15.12 и 26.2 постоје за углове многоугла односи:

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2A_1A_3 + \sphericalangle A_3A_1A_4 + \ \dots\ + \sphericalangle A_{n-1}A_1A_n,$$

затим

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_2$$

$$\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_2A_3A_1 + \sphericalangle A_1A_3A_4,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\sphericalangle A_\nu = \sphericalangle A_{\nu-1}A_\nu A_1 + \sphericalangle A_1A_\nu A_{\nu+1}$$

и најзад

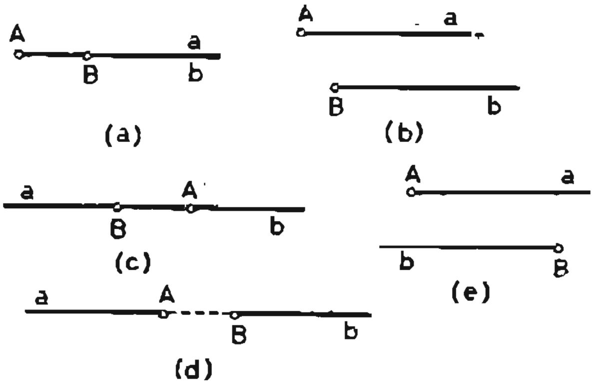
$$\sphericalangle A_n = \sphericalangle A_n.$$

Сабирањем налазимо да је збир углова многоугла једнак збиру углова тих троуглова, дакле према теореми 39.11 је

$$\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 + \dots + \sphericalangle A_n = (n-2) \cdot 2R.$$

6. Често се у геометрији посматрају упоредне полуправе и углови којима су краци упоредни.

Дефиниција 39.1. Ако две полуправе припадају упоредним правим и ако су с исте стране оне праве која пролази кроз њихове почетке, или ако обе полуправе припадају једној правој и једна је садржана у другој, рећи ћемо да су те две полуправе *сагласне*. Ако две полуправе припадају упоредним правим и ако су с разних страна оне праве која пролази кроз њихове почетке или ако обе полуправе припадају једној правој, а није једна садржана на другој, рећи ћемо да су те две полуправе *супротне*.



Сл. 323

Слике 323 *a* и *b* претстављају две сагласне полуправе *Aa* и *Bb*, а слике 323 c, d и e претстављају две супротне полуправе *Aa* и *Bb*. Две сагласне полуправе могу се и поклапати; две супротне могу имати заједнички почетак.

Из претходне дефиниције следује одмах:

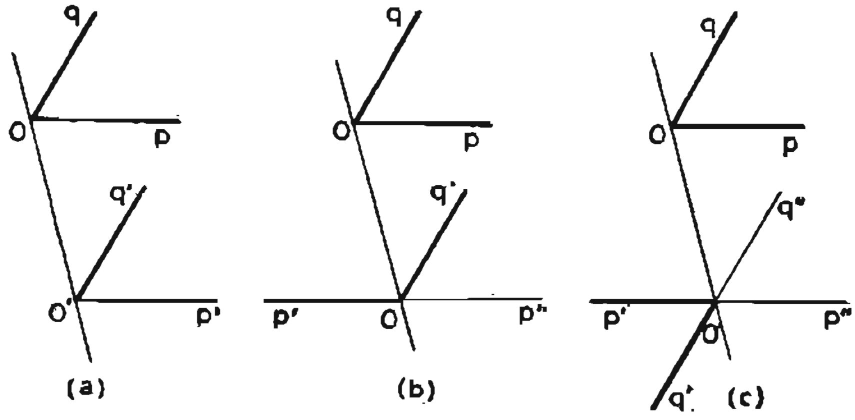
Теорема 39.15. *Ако две полуправе припадају једној правој или двема упоредним правим тада су или сагласне или супротне.*

Доказ. Ако полуправе *Aa* и *Bb* припадају једној правој и ако нису сагласне, према дефиницији 39.1 није једна садржана на другој, дакле, по истој дефиницији, оне су супротне. Ако полуправе *Aa* и *Bb* припадају упоредним правим и ако нису сагласне, према дефиницији 39.1 полуправа *Bb* није с оне стране праве *AB* с које је *Aa*, дакле је са супротне стране, тј. по истој дефиницији полуправе *Aa* и *Bb* су супротне.

Ако су краци два угла сагласни или супротни, та два угла су једнака или суплементна. Ту чињеницу исказујемо у следећој теореми.

Теорема 39.16. *Ако су у једној равни краци двају удубљених углова, два по два сагласна, или ако су два по два супротна, та два угла су једнака. Ако су два крака сагласна а два супротна, збир та два угла једнак је збиру два права угла.*

Нека су то углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ с теменима O и O' (сл. 324). Праве којима полуправе p и p' припадају јесу упоредне или истоветне. Узмимо прво да су упоредне. Ако су полуправе p и p' сагласне, сагласни углови



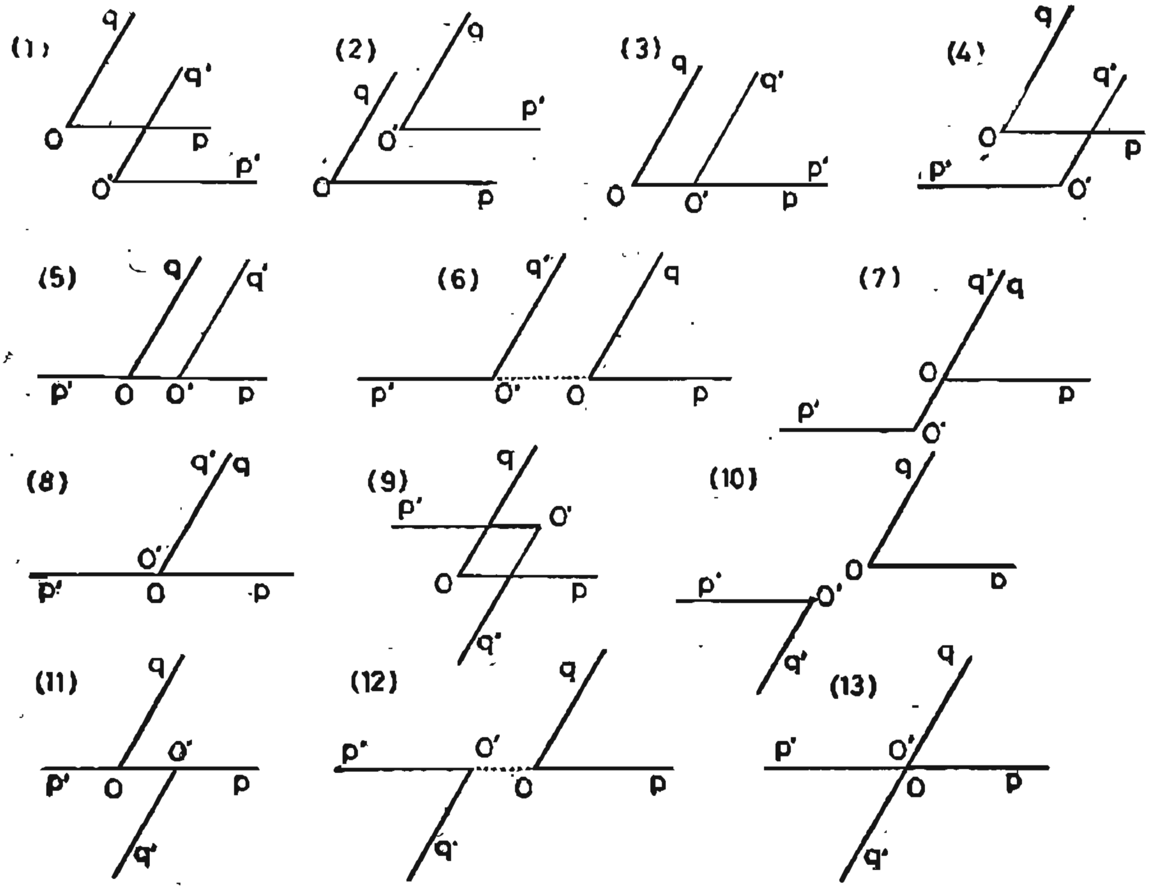
Сл. 324

што оне образују с попречницом OO' су према теореми 39.2 једнаки. Ако полуправе q и q' припадају једној правој, углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ су углови полуправих p и p' с попречницом OO', дакле једнаки су. Ако су пак праве којима припадају полуправе q и q' упоредне, опет су једнаки. Исто тако и сагласни углови полуправих q и q' с попречницом OO'. Дакле углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ су једнаки као збирови или разлике једнаких сагласних углова.

Ако су полуправе p и p' супротне, а q и q' сагласне, нека је p″ продужење полуправе p'. Тада су полуправе p и p'' сагласне, дакле удубљени углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p''q'$ су једнаки. Но удубљени углови $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle p''q'$ су два напоредна угла, дакле збир им је једнак збиру два права угла. Према томе збир углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ једнак је збиру два права угла.

Ако су оба пара кракова супротна, нека су p'' и q'' продужења полуправих p′ и q′. Тада су полуправе p и p'' сагласне и полуправе q и q'' су сагласне, дакле удубљени углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p''q''$ су једнаки. Но удубљени углови $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle p''q''$ су унакрсни, дакле једнаки. Према томе и удубљени углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ су једнаки.

Остаје случај када два крака, рецимо p и p' припадају истој правој. Тада краци q и q' образују са p и p', као упоредне с попречницом, било једнаке сагласне углове, било једнаке наизменичне, било два супротна угла којима је збир једнак збиру два права угла — према томе да ли су краци два по два сагласна или супротна, или су два крака сагласна, а два супротна.



Сл. 325

Слике 325 од (1) до (13) дају разне случаје двају углова са сагласним или супротним крацима. Слике 325 (1), (2) и (3) претстављају удубљене углове кад су краци два по два сагласни, слике 325 (4) до (8) кад су им два крака сагласна а два супротна, а слике 325 (9) до (13) кад су краци два по два супротни.

40. ПАРАЛЕЛОГРАМ И ТРАПЕЗ.

1. Паралелограм је многоугао који се после троугла понајвише посматра у геометрији. Почињемо са дефиницијама.

Дефиниција 40.1. Четвороугао коме су две по две странице упоредне (паралелне) назива се *паралелограм*. Ако две по две суседне странице образују праве углове, паралелограм ћемо називати *правоуглим паралелограмом* или *правоугаоником*. Ако ти углови нису прави, називаћемо га *косоуглим паралелограмом*.

Ако су све четири странице паралелограма једнаке, називаћемо га *једнакостраничним паралелограмом* или *ромбом*, ако нису, називамо га *разностраничним паралелограмом* или *ромбоидом*.

Правоугли једнакостранични паралелограм зове се *квадрат*.

Шта су суседне странице и узастопни углови казује се у дефиницији многоуглова. Дефинишимо још наспрамне странице и углове четвороугла:

Дефиниција 40.2. У четвороуглу називамо странице које немају заједничке тачке, *наспрамним страницама*, углове четвороугла, који немају заједничког крака називамо *наспрамним угловима*.

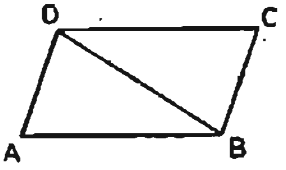
2. Доносимо низ познатих теорема о паралелограму. Докази су често упрошћени.

Теорема 40.1. *Паралелограм је прост раван четвороугао.*

Доказ. Нека је $ABCD$ паралелограм. Како две суседне странице не могу бити упоредне, странице AB и CD и странице BC и DA су парови упоредних страница (сл. 326). Како две упоредне праве припадају једној равни, дужи AB и CD су у једној равни, дакле и дужи BC и DA су у тој равни.

Две суседне странице имају само једно теме заједничко, а две несуседне странице су упоредне, дакле немају заједничких тачака. Према томе паралелограм је прост многоугао.

Сл. 326



Сл. 327

Теорема 40.2. *Наспрамне странице паралелограма су једнаке.*

Доказ. Од четири странице паралелограма $ABCD$ (сл. 327) странице AB и CD и странице BC и DA су наспрамне. Докажимо да су једнаке. Заиста, права BD је попречна спрам упоредних AB и CD, дакле према теореми 39.2 $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$. Права BD је попречна спрам упоредних BC и DA, дакле је и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$. Према томе троугли ABD и BCD су подударни, дакле $AB = CD$, $AD = BC$.

Теорема 40.3. *Збир два суседна угла паралелограма једнак је збиру два права угла.*

Доказ. Од четири угла паралелограма $ABCD$ углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ и углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$ су суседни. Докажимо да им је збир једнак збиру два права угла. Заиста, AB је попречница упоредних правих AB и CD, при томе су углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ супротни, дакле према теореми 39.2 њихов збир једнак је збиру два права угла. Исто то важи за остале парове углова.

Теорема 40.4. *Прост четвороугао коме су наспрамне странице две по две једнаке је паралелограм.*

Доказ. Нека је у простом четвороуглу $ABCD$ $AB=CD$, $BC=DA$. Како је и $BD=BD$, троугли ABD и CBD су подударни према теореми 22.4, дакле је $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD$, а то су два наизменична угла правих AB и CD с попречницом BC, дакле према теореми 38.4 странице AB и CD су упоредне и према томе четвороугао $ABCD$ је паралелограм.

Теорема 40.5. *Прост четвороугао у коме су наспрамни углови два по два једнаки, је паралелограм.*

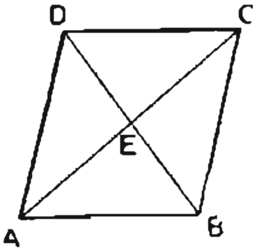
Доказ. Нека је у простом четвороуглу $ABCD$ $\sphericalangle A=\sphericalangle C$, $\sphericalangle B=\sphericalangle D$. Онда је $\sphericalangle A+\sphericalangle B=\sphericalangle C+\sphericalangle D$, па како према теореми 39.13 збир сва четири угла, $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C+\sphericalangle D$ износи четири права угла, збир $\sphericalangle A+\sphericalangle B$ једнак је збиру два права угла, дакле према теореми 38.4 праве AD и BC су упоредне; исто тако и праве AB и CD. Дакле четвороугао $ABCD$ је паралелограм.

Теорема 40.6. *Прост четвороугао у коме су две наспрамне странице једнаке и упоредне је паралелограм.*

Доказ. Нека су у простом четвороуглу $ABCD$ (сл. 327) странице AB и CD једнаке и упоредне. Онда је према теореми 39.2 $\sphericalangle ABD=\sphericalangle BDC$, па како је $AB=CD$, $BD=DB$, троугли ABD и CDB су подударни, дакле и $\sphericalangle ADB=$ $=\sphericalangle CBD$, те су према теореми 38.4 и странице AD и BC упоредне, тј. четвороугао $ABCD$ је паралелограм.

Теорема 40.7. *Дијагонале паралелограма полове се узајамно.*

Доказ. Нека су AC и BD дијагонале паралелограма $ABCD$ (сл. 328). Како су праве AD и BC упоредне, према дефиницијама 10.4 и 38.1 тачке B и C су с исте стране праве AD. Исто тако су и тачке D и C с исте стране праве AB. Дакле тачка C је у удубљеном углу $\sphericalangle BAD$. Отуд, према теореми 11.7 права AC сече дуж BD између B и D. Како и права BD сече дуж AC између A и C, дужи AC и BD, тј. дијагонале секу се у извесној тачки E.

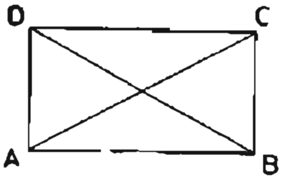


Сл. 328

Троугли ABE и CDE су подударни, јер је $AB=CD$, а $\sphericalangle BAE=\sphericalangle DCE$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle CDE$, јер су ово два пара наизменичних углова. Дакле је и $AE=CE$, $BE=DE$, тј. дијагонале се полове.

Теорема 40.8. *Четвороугао у коме се дијагонале полове је паралелограм.*

Доказ. Нека су AC и BD дијагонале (сл. 328) и нека се оне секу у тачки E, тако да је $AE=CE$, $BE=DE$. Како је сем тога $\sphericalangle AED=\sphericalangle BEC$, $\sphericalangle AEB=\sphericalangle CED$, троугли ABE и CDE су подударни и троугли BCE и DAE су подударни, па је $AB=CD$, $BC=DA$. Дакле према теореми 40.4 четвороугао $ABCD$ је паралелограм.



Сл. 329

Теорема 40.9. *Паралелограм у коме је један угао прав је правоугаоник.*

Доказ. У паралелограму $ABCD$ (сл. 329) је према теореми 40.3 збир углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ једнак збиру два права угла, па како је један од њих прав, имамо $\sphericalangle A=$ $=\sphericalangle B$. Исто тако је и $\sphericalangle B=\sphericalangle C$, $\sphericalangle C=\sphericalangle D$. Дакле сва четири угла су права. По дефиницији 40.1 то је правоугаоник.

Теорема 40.10. *Дијагонале правоугаоника су једнаке.*

Доказ. Према теореми 40.2 је $AB=CD$, $BC=AD$, па како је по теореми 40.9 и $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABC$, троугли ABC и BAD су подударни, дакле дијагонале AC и BD су једнаке.

Теорема 40.11. *Паралелограм у коме су дијагонале једнаке је правоугаоник.*

Доказ. Према теореми 40.2 је $AB=CD$, $BC=AD$, па како је и $AC=BD$, троугли ABC и BAD су подударни на основи теореме 22.4, дакле имамо $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABC$. Но то су два супротна угла између упоредних правих, дакле збир њихов једнак је збиру два права угла, а како су међу собом једнаки, морају бити оба права, а отуд следује да је паралелограм $ABCD$ правоугаоник.

Теорема 40.12. *Четвороугао у коме су дијагонале једнаке и полове се узајамно је правоугаоник.*

Доказ. Према теореми 40.8 тај четвороугао је паралелограм, према теореми 40.11 је правоугаоник.

Теорема 40.13. *Четвороугао у коме су три угла права је правоугаоник.*

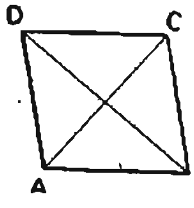
Доказ. Нека су у четвороуглу $ABCD$ углови $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ прави. Према теореми 38.5 краци AD и BC углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ су упоредни. Исто тако су и краци AB и CD углова $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$ упоредни. Како су то странице четвороугла $ABCD$, тај четвороугао је по дефиницији 40.1 паралелограм, а према теореми 40.9 је правоугаоник.

Теорема 40.14. *Паралелограм у коме су две суседне странице једнаке је ромб.*

Доказ. Нека су у паралелограму $ABCD$ странице AB и BC једнаке. Како је према теореми 40.2 $AB=CD$ и $BC=DA$, следује да су све четири странице једнаке, тј. да је једнакостран паралелограм, дакле ромб.

Теорема 40.15. *Дијагонале ромба полове његове углове и управне су једна на другој.*

Доказ. Према теореми 40.7 дијагонале паралелограма се полове, дакле је $BE=DE$ (сл. 328), па како је $AB=AD$, $AE=AE$, троугли ABE и ADE су подударни, дакле имамо $\sphericalangle BAE=\sphericalangle DAE$ тј. дијагонала AC полови угао $\sphericalangle BAD$. Сем тога је $\sphericalangle AEB=\sphericalangle AED$, а како су то два напоредна угла, то су оба права, тј. дијагонале су управне једна на другој. Исто тако се доказује да дијагонала AC полови и угао $\sphericalangle C$, а дијагонала BD углове $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle D$ ромба.



Сл. 330

Теорема 40.16. *Паралелограм у коме су дијагонале управне једна на другој је ромб.*

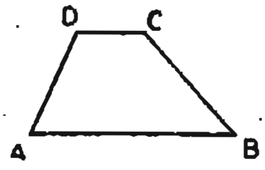
Доказ. Како је $BE=DE$, $\sphericalangle AEB=\sphericalangle AED$, $AE=AE$, троугли ABE и ADE су подударни, па је и $AB=AD$, тј. према теореми 40.14 тај паралелограм је ромб.

Теорема 40.17. *Паралелограм у коме једна његова дијагонала полови један његов угао је ромб.*

Доказ. Нека дијагонала AC полови угао $\sphericalangle BAD$ (сл. 330). Како су праве AB и CD упоредне, углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ACD$ су једнаки, па је и $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DCA$, дакле према теореми 22.9 троугао ACD је једнакокрак, те је $AD=CD$. Према теореми 40.14 паралелограм је једнакостран, тј. ромб.

Теорема 40.18. *Прост четвороугао у коме су све четири странице једнаке је ромб.*

Доказ. Како је $AB=BC$, $CD=DA$, $AC=AC$, троугли ABC и CDA су подударни, дакле $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DCA$, $\sphericalangle BCA=\sphericalangle DAC$, а ово су наизменични углови с попречницом AC и правим AB и CD. Дакле праве AB и CD су упоредне, па како је $BC=DA$, и то је пар упоредних, дакле четвороугао $ABCD$ је паралелограм, а по дефиницији 40.1 је ромб.



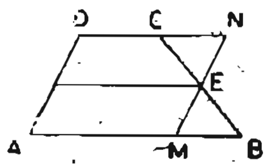
Сл. 331

3. О трапезу доносимо само дефиницију и једну теорему.

Дефиниција 40.3. Прост четвороугао у коме су две и само две странице упоредне зове се трапез. Упоредне странице зову се основице трапеза, остале две краци трапеза (сл. 331).

Теорема 40.19. *Дуж која спаја средишта кракова трапеза је упоредна с његовим основицама и једнака половини њихова збира.*

Доказ. Нека су AB и CD основице трапеза $ABCD$ (сл. 332), и нека је, E средиште странице BC, а F средиште странице AD. Нека је MN дуж упоредна са AD и која пролази кроз тачку E, а M и N тачке на основицама. Четвороугао $AMND$ је паралелограм, јер су му две и две странице упоредне. Затим је $BE=CE$, $\sphericalangle BEM=\sphericalangle CEN$, јер су два унакрсна угла и $\sphericalangle MBE=\sphericalangle NCE$, јер то су два наизменична угла за упоредне AB и CD и попречницу BC. Дакле троугли BEM и CEN су подударни и према томе $ME=NE$, $BM=CN$.



Сл. 332

Како је $AMND$ паралелограм, према теореми 40.2 је $AD=MN$, па како су E и F средишта дужи MN и AD, према дефиницији 26.14 је $AF=ME$, па како су праве AF и ME упоредне, четвороугао $AMEF$ је према теореми 40.6 паралелограм, дакле EF и AB су упоредне, па је и CD с њима упоредна.

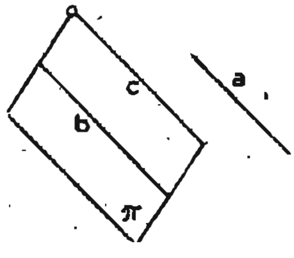
Како су $AMEF$ и $DNEF$ паралелограми, према теореми 40.2 је $EF=AM=DN$, дакле

$$2\,EF=AM+DN=AM+DC+CN=AM+DC+MB=AB+CD,$$

дакле дуж EF је половина збира дужи AB и CD.

41. УПОРЕДНОСТ ПРАВИХ И РАВНИ У ПРОСТОРУ.

1. О упоредним правим и равнима имамо од теорема које се не могу доказати без аксиоме упоредности, пре свега ову теорему:



Сл. 333

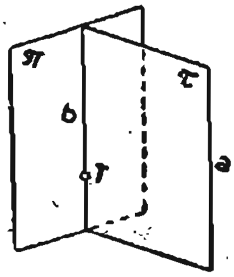
Теорема 41.1. *Ако једна права није у извесној равни, а упоредна је с једном правом у тој равни, тада је упоредна с том равни. Обрнуто: ако је права упоредна са једном равни, упоредна је и с извесним правим у тој равни.*

Доказ. Нека је a права ван равни π, b права у тој равни, упоредна с правом a (сл. 333). Кад би права a секла раван π у некој тачки P, извесна права c упоредна с правом b, пролазила би у π кроз P, према теореми 38.6, дакле кроз P би пролазиле две праве a и c упоредне с правом b, супротно аксиоми V упоредности.

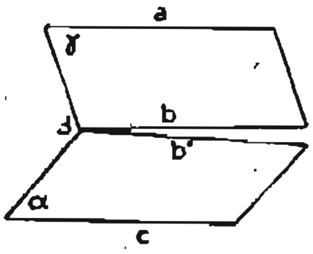
Обрнуто: нека је (сл. 334) a права упоредна с правом π. Докажимо да у π постоји права упоредна са a. Нека је T ма која тачка у π, а τ раван која садржи T и a. Равни π и τ се секу по извесној правој b, Но раван τ садржи праву a упоредну равни π, дакле према теореми 38.7 права b је упоредна с правом a. Како је T ма која тачка у равни π, има бесконачно много правих као што је права b.

За праве у равни доказано је да су две праве упоредне трећој, такође међу собом упоредне. Докажимо то сада за три праве које нису садржане у једној равни.

Теорема 41.2. *Две праве упоредне с трећом правом, упоредне су и међу собом.*



Сл. 334



Сл. 335

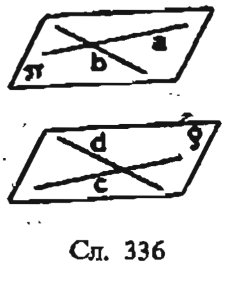
Доказ. Нека су праве a и b упоредне с правом c (сл. 335). Како је права a упоредна с правом c, она је према теореми 41.1 упоредна са равни α, која је одређена правим b и c. Нека је B тачка праве b, γ раван одређена правом a и тачком B. Равни α и γ секу се по извесној правој b', која је истоветна с правом b.

Претпоставимо, напротив, да су b и b' две разне праве. Како је права c упоредна са равни γ, она је према теореми 38.7 упоредна и са правом b', дакле b и b' су две праве упоредне са правом c, а то је по аксиоми упоредности немогуће, јер b и b' пролазе кроз исту тачку B. Дакле права b' се поклапа с правом b, тј. равни α и γ секу се по правој b.

Али, права a је према теореми 41.1 упоредна са равни α, дакле према теореми 38.7 праве a и b су упоредне.

Следеће две теореме односе се на две упоредне равни.

Теорема 41.3. *Ако се две праве у једној равни секу, а упоредне су двема правим у некој другој равни, те две равни су упоредне.*



Сл. 336

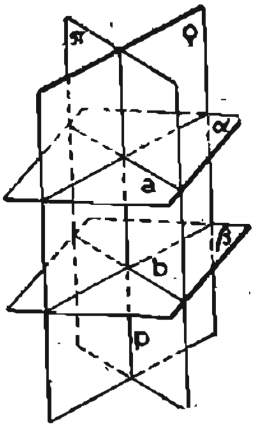
Доказ. Нека су (сл. 336) a и b две праве у равни π, које се секу, затим c и d две праве у равни ρ, такве да је c упоредна с a и d упоредна с b. Докажимо да се равни π и ρ не секу. Кад би се, напротив, секле, секле би се по извесној правој p, ова би била према теореми 38.7 упоредна правој c, јер раван ρ садржи праву c упоредну с a, дакле према теореми 41.1 и са π.

Исто тако, права p би била упоредна с d. Дакле права p би била у равни ρ, као и c и d и то упоредна с тим двема правим које се секу. Ово је по аксиоми упоредности немогуће. Дакле равни π и ρ се не секу, већ су упоредне.

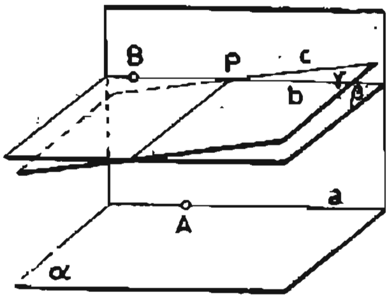
Теорема 41.4. *Равни управне на једној правој јесу упоредне.*

Доказ. Нека су (сл. 337) равни α и β управне на правој p, затим π раван која садржи праву p. Како p сече равни α и β, сече и раван π обе те равни и то по двема правим које су по дефиницији 24.1 обе управне на p, дакле су према теореми 38.5 међу собом упоредне. Нека је ρ још једна раван која садржи праву p. И она сече раван α и β по двема упоредним правим. Према томе у α и β постоје по две праве које се секу и које образују два пара упоредних правих. Дакле, према теореми 41.3 равни α и β су упоредне.

Докажимо теорему о двема упоредним равнима, која одговара аксиоми V упоредности.



Сл. 337



Сл. 338

Теорема 41.5. *Кроз ма коју тачку изван ма које равни пролази највише једна раван упоредна првој равни.*

Доказ. Претпоставимо напротив да кроз тачку P ван равни α пролазе две равни β и γ које су упоредне датој равни α (сл. 338). Нека је A која било тачка у α, B тачка у β, но ван пресека p равни β и γ. Раван ABP сече равни α, β и γ у три разне праве a, b, и c. Праве b и c се секу у тачки P. Како су равни α и β упоредне, према теореми 38.8 су и праве a и b упоредне. а како су равни α и γ упоредне, упоредне су и праве a и c. Према томе кроз P пролазе две упоредне b и c правој a, што је према аксиоми V немогуће. Дакле кроз P постоји само једна раван упоредна датој равни α.

Теорема 41.6. *Ако су две равни упоредне трећој равни, упоредне су и међу собом.*

Доказ. Нека су равни α и β упоредне равни γ. Кад би се равни α и β секле, постојале би кроз неку тачку њихова пресека две равни упоредне с γ, што се противи теореми 41.5. Дакле равни α и β су упоредне.

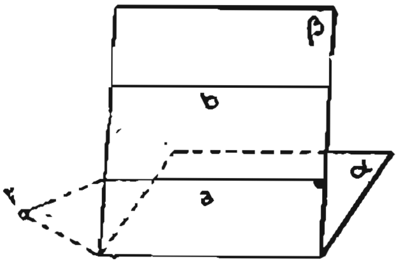
Теорема 41.7. *Ако су једна раван и једна права ван те равни упоредне с неком другом правом, упоредна је та раван и с првом правом.*

Доказ. Нека су права a и раван α упоредне с правом b (сл. 339). Према дефиницији упоредних правих, праве a и b припадају једној равни β. Кад би права a секла раван α у извесној тачки T, ова тачка би припадала пресеку p равни α и β. Како је права b упоредна с α, упоредна је према теореми 38.7 и са p, те би кроз T пролазиле две праве a и p упоредне са b, што је према аксиоми V немогуће. Дакле права a је упоредна равни α.

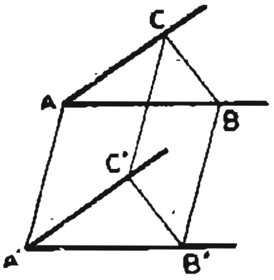
2. У следећим теоремама користе се сагласне и супротне полуправе.

Теорема 41.8. *Ако су краци двају углова који припадају двема равнима, два по два, сагласни или ако су, два по два, супротни, па два угла су једнака.*

Доказ. Нека су то углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ (сл. 340). Ако су два одговарајућа крака сагласна, а два супротна, збир та два угла једнак је збиру два права угла. Ако су краци p и p' сагласни (према дефиницији 38.1) и краци q и q' сагласни, нека су A и A' темена а B ма која друга тачка на p и C на q, затим B' на p' и C на q', тако да је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$.



Сл. 339



Сл. 340

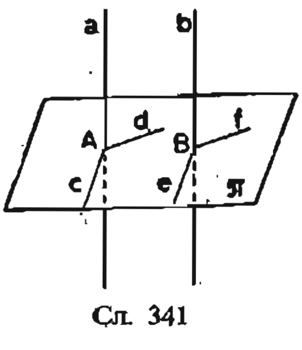
Како су краци p и p' сагласни, налазе се у равни pp' с исте стране праве AA', дакле тачке B и B' су с исте стране праве AA', па како су дужи AB и $A'B'$ упоредне, и $AB = A'B'$, четвороугао $ABA'B'$ је према теореми 40.6 паралелограм. Дакле дужи AA' и BB' су упоредне и $AA' = BB'$. Како су и полуправе q и q' сагласне, доказујемо исто тако да су и дужи AA' и CC', упоредне и да је $AA' = CC'$. Дакле и дужи BB' и CC' су упоредне и $BB' = CC'$, а отуд и четвороугао $BCB'C'$ паралелограм, дакле $BC = B'C'$. Према томе троугли ABC и $A'B'C'$ су подударни, дакле $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$.

Ако су краци p и p' углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$ супротни, и краци q и q' супротни, нека су p'' и q'' продужења кракова p' и q'. Како су краци углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p''q''$, два по два, сагласни, према претходноме је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p''q''$, па како су $\sphericalangle p'q'$ и $\sphericalangle p''q''$ унакрсни, имамо $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q'$.

Ако су краци p и p' сагласни, а краци q и q' супротни, нека је q'' продужење крака q. Како су краци углова $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q''$, два по два, сагласни, сад је $\sphericalangle pq = \sphericalangle p'q''$, па како су углови $\sphericalangle p'q''$ и $\sphericalangle p'q'$ напоредни, њихов збир је једнак збиру два права угла, дакле то вреди и за углове $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle p'q'$.

Теорема 41.9. *Ако је једна од двеју упоредних правих управна на некој равни, управна је и друга права на тој равни.*

Доказ. Нека су a и b две упоредне праве (сл. 341), и нека је права a управна на π у тачки A. Кад би права b била упоредна са π, према теореми 41.7 би и права a била упоредна с π, супротно претпоставци. Дакле, права b сече раван π у извесној тачки B.



Сл. 341

Нека је $\sphericalangle cd$ угао у равни π, коме је теме A, затим $\sphericalangle ef$ угао у π коме је теме B и нека су краци c и e и краци d и f сагласни. Ако сад под a и b подразумевамо полуправе истоимених правих, које полазе редом из A и B, а обе су с исте стране равни π, углови $\sphericalangle ac$ и $\sphericalangle ad$ су по дефиницији 23.1 прави углови, јер је a управна на π, затим је према теореми 41.8 $\sphericalangle be = \sphericalangle ac$ и $\sphericalangle bf = \sphericalangle ad$, дакле и углови $\sphericalangle be$ и $\sphericalangle bf$ су прави углови, па је према теореми 24.1 и права b управна на равни π.

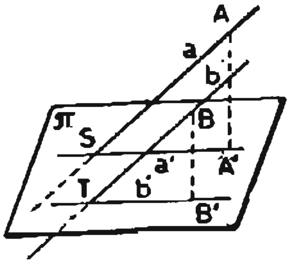
3. Права која продире кроз једну раван и није управна на њој, заклапа неједнаке углове с правим у тој равни а које пролазе кроз тачку продора. Најмањи од свих је нагибни угао.

Дефиниција 41.1. Оштри угао између праве која косо продире кроз једну раван и управне пројекције те праве на ту раван, називаћемо *нагибним углом* или *нагибом* те праве према тој равни.

Постоје напр. ове теореме о нагибу:

Теорема 41.10. *Упоредне праве које секу једну раван и нису управне на њој, имају спрам те равни једнаке нагибе.*

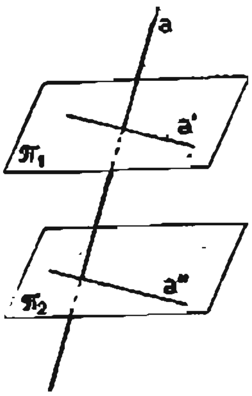
Доказ. Нека су (сл. 342) праве a и b упоредне и нека су a' и b' њихове управне пројекције на извесну раван π, коју продиру у тачкама S и T. Управне спуштене на раван π, једна из неке тачке A праве a, друга из неке тачке B праве b, јесу, према теореми 38.10 упоредне. Њихова подножја A' и B' у π су, једно на a', друго на b'. Равни ASA и BTB су према теореми 41.3 упоредне, јер садрже два пара упоредних правих. Како те равни секу раван π по a' и b', све праве су према теореми 38.8 упоредне. Према томе, краци нагибних углова правих a и b спрам π су, два по два, упоредни. Дакле, према теореми 41.8 ти нагибни углови су једнаки или је њихов збир једнак збиру два права угла. Али нагибни угао је по дефиницији 41.1 оштар, дакле збир два нагибна угла не може бити једнак збиру два права угла. Према томе нагибни углови двеју упоредних правих спрам исте равни су једнаки.



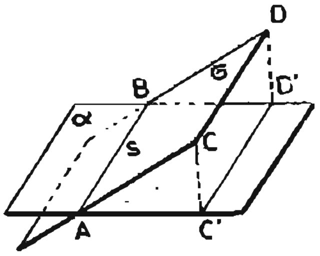
Сл. 342

Теорема 41.11. *Права која сече две упоредне равни и није на њима управна, има спрам тих равни једнаке нагибе.*

Доказ. Према дефиницији 24.3 и теореми 24.10 пројекције a' и a'' праве a на упоредне равни π_1 и π_2 (сл. 343), дакле a' и a'' су према теореми 38.8 упоредне. Отуд су према теореми 41.10 нагибни углови праве a спрам π_1 и π_2 једнаки.



Сл. 343



Сл. 344

За појам нагиба једне равни спрам друге потребно је доказати ову теорему:

Теорема 41.12. *Ако раван σ није управна на равни α, праве које припадају равни σ а управне су на њеном пресеку са равни α имају спрам равни α једнаке нагибе.*

Доказ. Нека је s пресек равни α и σ (сл. 344), затим, A и B две тачке на s, AC и BD две једнаке дужи управне на s и с исте стране праве

s, и нека су C' и D' пројекције тачака C и D на α. Тада су AC' и BD' пројекције правих AC и BD на α, дакле удубљени угао $\sphericalangle CAC'$ је нагиб прве праве, а удубљени угао $\sphericalangle DBD'$ је нагиб друге праве спрам α. Докажимо да су та два угла једнака.

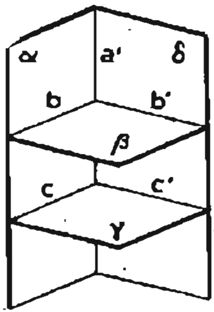
Како су праве AC и BD управне на s, према теореми 38.5 су упоредне, па како је $AC=BD$, четвороугао $ABCD$ је паралелограм, дакле је према теореми 40.2 $AB=CD$. Како су праве CC' и DD' управне на α, оне припадају према теореми 24.7 једној равни и упоредне су. И праве CD и $C'D'$ су упоредне, јер кад би се секле у тачки T, ова би припадала правој s, дакле праве CD и s би се секле, што је немогуће пошто је $ABCD$ паралелограм. Дакле и четвороугао $CDC'D'$ је паралелограм и према томе је $CC'=DD'$. Најзад, и праве $C'D'$ и AB су упоредне, па како је $AB=CD=$ $=C'D'$, четвороугао $ABC'D'$ је паралелограм, дакле је $AC'=BD'$. Према томе троугли ACC' и BDD' су подударни и отуда је $\sphericalangle CAC'=\sphericalangle DBD'$.

Дефиниција 41.2. Ако су α и σ две равни које се секу, а нису узајамно управне, нагибни угао према равни σ, оних правих у равни σ, које су управне на пресечној правој обеју равни, називаћемо *нагибним углом* или *нагибом* равни σ према равни α.

Доносимо следећу теорему:

Теорема 41.13. *Раван коса спрам упоредних равни има спрам тих равни једнаке нагибе.*

Доказ. Нека раван α сече међу собом упоредне равни β и γ по правим b и c (сл. 345). Према теореми 38.8 праве b и c су упоредне. Ако је δ ма која раван управна на b, она је према теореми 41.9 управна и на c. Нека δ сече равни β и γ по правим b' и c' и раван α по правој a'. Права b' је по дефиницији 24.1 управна на b и права c' на c.



Сл. 345

Праве b' и c' су према теореми 38.8 упоредне, дакле образују у равни δ с попречницом a' једнаке сагласне углове. Како је раван α коса према β и γ, а права b' је управна на b и права c' на c, праве b' и c' нису управне на a'. Дакле ти сагласни углови нису прави, и према томе два од тих сагласних углова су оштра. Према дефиницији 40.1 то су нагибни углови правих b' и c' према равни α, дакле нагибни углови правих b' и c' спрам α су једнаки.

Према дефиницији 41.1 нагибни углови правих b' и c' спрам α истоветни су с нагибним угловима равни β и γ спрам α, који су, према томе једнаки.

~~42.~~ МИМОИЛАЗНЕ ПРАВЕ.

Теорема 8.2 односила се у ствари већ на мимоилазне праве али их тада нисмо још дефинисали. Њихову дефиницију доносимо тек сад.

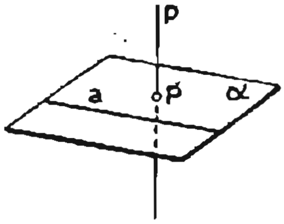
Дефиниција 42.1. Две праве које не припадају једној равни зову се *мимоилазне* праве. За две мимоилазне праве кажемо и да се *мимоилазе.*

Дефиниција 42.2. *Углом* двеју *мимоилазних правих* назива се угао, оштар или прав, двеју правих које се секу, а упоредне су с тим мимоилазним правим.

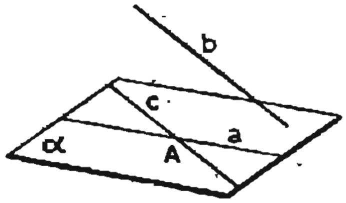
Следећом теоремом, као и теоремом 8.2, доказујемо постојање мимоилазних правих:

Теорема 42.1. *Права која продире кроз неку раван и права у тој равни, која не пролази кроз тачку продора, јесу две мимоилазне праве.*

Доказ. Нека права p продире кроз раван α у тачки P (сл. 346) и нека је a права у α која не пролази кроз P. Кад би a и p припадале једној равни, та раван би садржала праву a и тачку P, дакле би била истоветна с α. Но α не садржи праву p, дакле a и p не припадају једној равни.



Сл. 346



Сл. 347

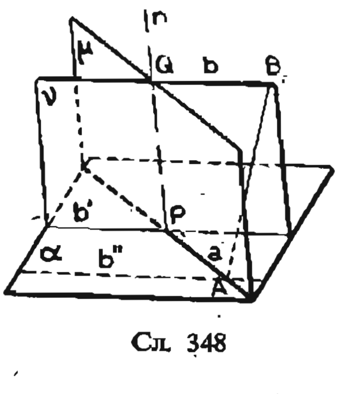
Донисимо још три теореме о мимоилазним правим.

* **Теорема 42.2.** *Постоји једна и само једна раван која садржи извесну од двеју мимоилазних правих а упоредна је другој мимоилазној правој.*

Доказ. Нека су a и b мимоилазне праве (сл. 347). Кроз тачку A на правој a пролази према аксиоми упоредности само једна права c упоредна правој b, дакле само једна раван α која садржи праве a и c. Права b је упоредна правој c, дакле према теореми 41.1 упоредна је равни α. Но α је једина упоредна правој b, јер кад би α' била још једна, нека је c' пресек равни α' и равни одређене правом b и тачком A. Према теореми 38.7 је и права c' упоредна с b, дакле кроз A пролазиле би две упоредне с b, што се противи аксиоми упоредности.

* **Теорема 42.3.** *Постоји једна и само једна права која сече две мимоилазне праве под правим угловима.*

Доказ. Нека су a и b мимоилазне праве (сл. 348). Према теореми 42.2 постоји раван α која садржи праву a и упоредна је с правом b. Нека је μ раван која садржи праву a и управна је на равни α и нека је затим ν раван која садржи праву b и управна је на равни α.



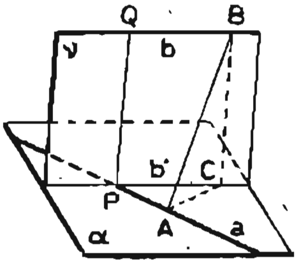
Сл. 348

Равни α и ν секу се по правој b', управној пројекцији праве b на раван α, која је према теореми 38.7 упоредна с b. Праве a и b' нису упоредне, јер како су b и b' упоредне, биле би тада и a и b упоредне, супротно претпоставци теореме. Дакле a и b' се секу у некој тачки P. Према томе се и равни μ и ν секу по извесној правој n која пролази кроз P. Права n је у равни ν права која сече праву b', дакле сече и упоредну праву b у извесној тачки Q, тј. права n сече обе мимоилазне праве a и b.

Како су равни μ и ν управне на α, и њихова пресечна права n је, према теореми 24.11 управна на α, дакле по дефиницији 24.1 права n је управна на правим a и b'. Но b и b' су упоредне, дакле из теореме 39.4 следује да је права n управна и на b, тј. права n сече праве a и b под правим углом.

Докажимо да је n једина таква права. — Кад не би била једина, постојала би још једна, која би пролазила кроз извесну тачку A праве a и извесну тачку B праве b, и бар једна од тих двеју тачака, рецимо B, не би припадала правој n. Нека је γ раван одређена правом b и тачком A. Равни α и γ се према теореми 38.8 секу по извесној правој b'' упоредној с b'. Како је права AB управна на a и b, управна је и на a и b'', дакле управна је на α. Према томе праве n и AB су обе управне на α, те према теореми 24.7 припадају једној равни, којој припада и права a. То би била раван μ, дакле тачка B би припадала равни μ. Но то је немогуће, јер права b сече раван μ у тачки Q, различитој од B. Према томе постоји само једна права која сече обе мимоилазне праве под правим угловима.

✱ **Теорема 42.4.** *Од свих дужи што спајају тачке двеју мимоилазних правих најмања је она која је управна на обема правим.*



Сл. 349

Доказ. Нека су опет a и b две мимоилазне праве (сл. 349), нека је затим α раван која садржи праву a и упоредна је с b, нека је ν раван која је управна на α и која садржи праву b и сече α по правој b' упоредној са b. Нека је затим PQ дуж која спаја тачку P праве a с тачком Q праве b и управна је на a и b. Нека је AB дуж која спаја једну тачку A праве a с једном тачком B праве b, различитом од Q. Докажимо да је AB веће од PQ.

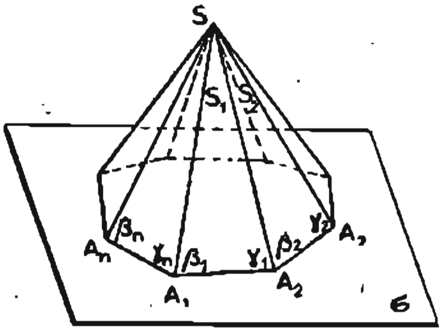
Нека је у равни ν права BC упоредна правој PQ, тачка C њен пресек са b'. Како је права PQ управна на b', према теореми 39.3 и права BC је управна на b', па пошто је раван ν управна на α, према дефиницији 40.6 и права BC је управна на α, дакле према дефиницији 24.1 права AC је управна на правој BC. Отуд је према теореми 25.18 $AB>BC$. Но како су праве b и b' и праве PQ и BC упоредне четвороугао $BCPQ$ је паралелограм. Дакле је $BC=PQ$ и отуд $AB>PQ$. — Тиме је ова теорема доказана.

Дефиниција 42.3. Праву која сече две мимоилазне праве под правим угловима, називаћемо *осом* тих мимоилазних правих.

43. НЕКЕ ТЕОРЕМЕ О РОГЉЕВИМА И ПОЛИЈЕДРИМА. ПИРАМИДА И ПРИЗМА.

1. Значајне су следеће две теореме о испупченим рогљевима:

Теорема 43.1. *У испупченом рогљу збир свих пљосни мањи је од збира четири права угла.*



Сл. 350

Доказ. Нека је на основи теореме σ раван која сече рогаљ $SA_1A_2\ldots A_n$ по многоуглу $A_1A_2\ldots A_n$ (сл. 350). Нека је α_1 угао тог многоугла, коме је теме A_1, затим α_2 угао с теменом A_2 итд.

Нека су β_1, γ_1, δ_1 углови троугла A_1A_2S, којима су темена редом A_1, A_2, S, затим β_2, γ_2, δ_2 углови троугла A_2A_3S, којима су темена редом A_2, A_3, S, итд. И најзад, нека су β_n, γ_n, δ_n углови троугла A_nA_1S, којима су темена редом A_n, A_1, S. Посматрајмо триједар с теменом A_1 и пљоснима α_1, β_1, γ_n, затим триједар с теменом A_2 и пљоснима α_2, β_2, γ_1, па триједар с теменом A_3 и пљоснима α_3, β_3, γ_2, итд. Према теореми 28.4 је

$$\alpha_1<\gamma_n+\beta_1,\quad \alpha_2<\gamma_1+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n<\gamma_{n-1}+\beta_n,$$

дакле

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n < \gamma_n+\beta_1+\gamma_1+\beta_2+\ldots+\gamma_{n-1}+\beta_n$$

и отуд

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n < \beta_1+\gamma_1+\beta_2+\gamma_2+\ldots+\beta_n+\gamma_n. \tag{1}$$

Како је збир углова троугла једнак збиру два права угла, имамо, ако прав угао обележимо словом R, посматрајући редом уочене троугле,

$$\beta_1+\gamma_1+\delta_1=\beta_2+\gamma_2+\delta_2=\ldots=\beta_n+\gamma_n+\delta_n=2R,$$

а отуд сабирањем

$$\beta_1+\gamma_1+\beta_2+\gamma_2+\ldots+\beta_n+\gamma_n+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=2nR,$$

дакле услед (1)

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+(\delta_1+\delta_2+,\ldots+\delta_n)<2nR. \tag{2}$$

На темељу теореме 39.14 је

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=(n-2)\ 2R,$$

па из (2) следује

$$2nR-4R+(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)<2nR,$$

тј.

$$\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n<4\ R.$$

Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 43.2. *Збир углова диједара* n-*тостраног испупченог рогља је већи од* 2n — 4 *правих углова, а мањи од* 2n *правих углова.*

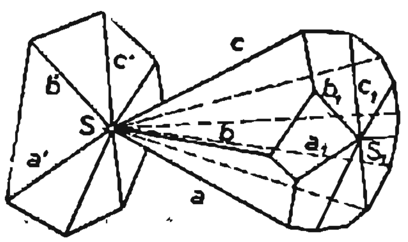
Доказ. Према теореми 28.3 збир угла сваког диједра испупченог рогља и одговарајуће пљосни поларног рогља једнак је 2R. Дакле збир ових углова диједара датог n-тостраног рогља и збир свих пљосни поларног рогља износе заједно $2nR$. Но према теореми 43.1 збир свих пљосни испупченог рогља је мањи од $4R$, дакле збир свих углова диједра датог рогља већи је од $2nR-4R$, тј. од (2n—4)R.

Како је према дефиницији 16.2 сваки диједар испупченог рогља удубљен диједар, његов угао је мањи од $2R$, дакле збир диједара n-тостраног испупченог рогља мањи је од $2nR$.

Докажимо још следећу теорему о поларним рогљевима:

Теорема 43:3 *Ако је* S_1 *тачка у испупченом рогљу* Sabc . . h, *рогаљ* $\mathrm{S_1a_1b_1c_1}\ldots\mathrm{h}_1$ *коме су ивице* $\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{h}_1$ *управне полуправе спуштене из тачке* S_1 *редом на пљосни* ∢ab, ∢bc, . . . , ∢ha *рогља* Sab . . . h *јесте рогаљ поларан рогљу* Sabc . . h.

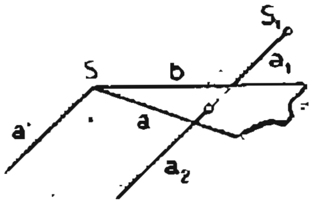
Доказ. Нека је $S'a'b'c'\ldots h'$ рогљу $Sabc\ldots h$ истотемени поларни рогаљ (сл. 351). Имамо $\sphericalangle a_1b_1=\sphericalangle a'b'$, јер краци a_1 и a' су управни на истој равни ab, дакле су упоредни. Како је полуправа a_1 управна, спуштена на раван ab, оне тачке те полуправе, које су с оне стране равни ab с које није S_1, сачињавају полуправу a_2, која је према дефиницији 39.1 сагласна са a_1 (сл. 352) Полуправа a_2 је с оне стране равни ab с које није S_1, па како је S_1 у испупченом рогљу $Sabc\ldots h$, S_1 је с оне стране равни ab с које су остале пљосни овог рогља, дакле a_2 је с оне стране равни ab с које нису остале пљосни рогља $Sabc\ldots h$. Но и a' је с оне стране равни ab с које нису остале пљосни тог рогља, дакле полуправе a_2 и a' су сагласне.



Сл. 351

Исто тако су и полуправе b_2 и b' сагласне, итд. Дакле према теореми 39.16 имамо $\sphericalangle a'b' = \sphericalangle a_2b_2$, $\sphericalangle b'c' \sphericalangle b_2c_2$, итд. и према томе $\sphericalangle a'b' = \sphericalangle a_1b_1$, $\sphericalangle b'c' = \sphericalangle b_1c_1$ итд., тј. пљосни рогљева $S_1a_1b_1c_1 \ldots h_1$ и $Sa'b'c' \ldots h'$ су једнаке.

Услед поменуте упоредности су и равни $a'b'$ и a_1b_1 упоредне, исто тако и равни $b'c'$ и b_1c_1 итд. Сем тога удубљени углови $\sphericalangle a'c$ и $\sphericalangle a_1c_1$ имају краке упоредне два по два, дакле ти углови су једнаки. Отуд следује лако да је и удубљени диједар с ивицом b' и чије пљосни садрже полуправе a' и c, тј. дотични диједар рогља $Sa'b'c' \ldots h'$, једнак удубљеном диједру с ивицом b_1, рогља $S_1a_1b_1c_1 \ldots h_1$. Исто тако су остали парови одговарајућих диједара тих двају рогљева једнаки. — Тиме је доказ завршен.



Сл. 352

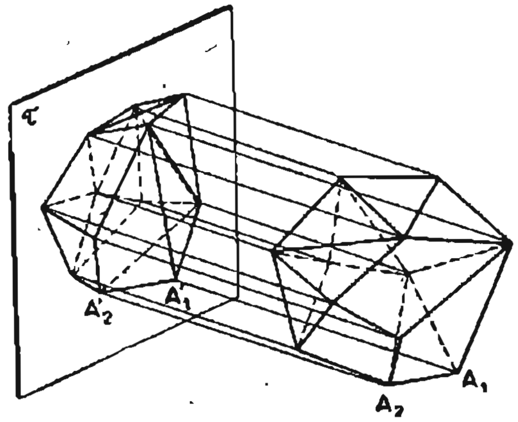
2. Следећа теорема о збиру углова испупченог полиједра (која је тачна за све просте, једноструко повезане полиједре, којима су и пљосни једноструко повезане) значајна је и по себи и ради једног доказа Еулерове теореме о полиједрима.

Теорема 43.4. *Збир свих углова испупченог полиједра који има* t *темена, износи* 4(t − 2) *правих углова.*

Доказ. Нека је опет број пљосни p, број ивица i, а S збир свих углова. Треба доказати да је

$$S = (t-2)\cdot 4R. \tag{1}$$

Пројицирајмо полиједар на такву раван да се свако теме пројицира у другу тачку, свака ивица у другу дуж, сваки полигон полиједрових пљосни у полигон (сл. 353). Нека су $a_1, a_2, \ldots a_n$ праве које пролазе кроз коју било тачку A и управне су на равнима свих пљосни полиједара, редом, и неке су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ равни које пролазе кроз A и управне су на правим што спајају ма која два темена полиједра $k = \binom{t}{2}$. Нека је T тачка која не припада равнима α_ν, затим τ раван којој припадају тачке A и T а не припадају праве a_ν. Тада раван τ није управна ни на једној правој ~~што спаја ма која два темена полиједра~~, нити на једној пљосни полиједра. Према томе, ако су $A_1, A_2, \ldots A_t$ темена полиједра $A_1', A_2', \ldots A_t'$ њихове управне пројекције на раван τ, свако теме се пројицира у другу тачку, свака ивица у дуж, сваки полигон ~~полиједровних пљосни~~ у полигон с истим бројем страница.



Сл. 353

Посматрајмо у τ полигонске површи у које се пројицирају поједине пљосни полиједра. Тачке равни τ које припадају тим површима сачињавају такође полигонску површ, чији полигон g је такође испупчен. Ако наиме не би био испупчен, дуж PQ која би спајала извесна два његова темена не би била садржана у њему, дакле ни она дуж која спаја два одговарајућа темена полиједра не би била садржана у полиједру, дакле која било раван што садржи ту дуж не би секла полиједар дуж испупченог полигона.

а то је по теореми 17.8 немогуће. Темена полигона g су тачке A_ν' и то, рецимо да их има n. Осталих $t-n$ тачака A_ν' налазе се у g.

Како је пројекција сваког полигона полиједрових пљосни опет полигон с истим бројем страница, збир његових углова је исти у пројекцији као и на полиједру, дакле је и збир свих углова ових полигона у равни τ једнак збиру S, тј. ако прво саберемо углове оних темена A_ν' који су на g, а затим остале, идући од темена до темена, имамо

$$S=2(n-2)\cdot 2R+(t-n)\cdot 4R$$

где испред $n-2$ стоји 2 зато што углове полигона g треба узети двапут, будући да је полигон g покривен површима полигона у које се пројицирају пљосни полиједра не једанпут, него двапут.

На основи претходне теореме доказује се лако Еулерова теорема о полиједрима, под претпоставком да је полиједар испупчен.

Теорема 43.5. *Укупан број пљосни и темена испупченог полиједра је за два већи од броја његових ивица.*

Доказ. Нека је, уз исте ознаке као у претходној теореми, број страница појединих пљосни (тј. страница њихових полигона) n_1, n_2, ..., n_p. Треба доказати да је

$$p+t=i+2. \tag{2}$$

Како збир углова равног испупченог полигона с n страница износи $(n—2)\cdot 2R$, имамо

$$S=(n_1-2)\cdot 2R+(n_2-2)\cdot 2R+\ldots+(n_p-2)\cdot 2R=(n_1+n_2+\ldots+n_p)\cdot 2R-4pR.$$

Последњи збир у заградама односи се на све ивице полиједра, где се свака ивица јавља опет двапут. Дакле је

$$n_1+n_2+\ldots+n_p=2i$$

и према томе

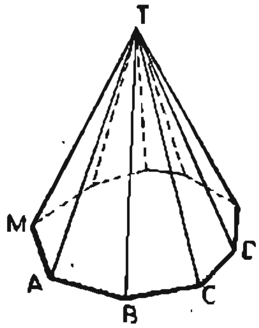
$$S=(i-p)\cdot 4R.$$

Дакле, на основи обрасца (1) претходне теореме имамо

$$(t-2)\cdot 4R=(i-p)\cdot 4R,$$

а отуд образац (2).

3. Пирамида се могла дефинисати још у §17, но због њене сродности с призмом, о којој се може говорити тек на основи аксиоме упоредности, дефинишемо је тек сада.



Сл. 354

Пре дефиниције треба доказати следећу теорему:

Теорема 43.6. *Темена простог равног полигона* ABC ... M *и нека тачка* T *изван равни тог полигона јесу темена полиједра коме су* AB, BC, ..., MA, *затим* AT, BT, CT, ..., MT *ивице, а површи омеђене поменутим полигоном и троуглима* ABT, BCT, ..., MAT *су му пљосни.*

Ако је полигон ABC ... M *испупчен, и тај полиједар је испупчен.*

Доказ. Полигон $ABC\ldots M$ и поменути троугли (сл. 354) испуњавају услове полиједра:

1. Свака страница полигона $ABC\ldots M$ је уједно страница једног од троуглова, а свака од осталих страница тих троуглова је страница још једног од њих.

2. Како је тачка T ван равни $A\ldots M$, равни ABT, BCT, MAT су различите од равни $AB\ldots M$, а како две суседне странице полигона $AB\ldots M$

припадају двема разним правим, равни суседних троуглова су међу собом различите.

3. Сваки од троуглова је суседан полигону $AB\ldots M$. Посматрајмо ма која два од троуглова, напр. ABT и FGT. AB и FG су странице полигона $AB\ldots M$, дакле постоји коначан низ дужи AB, BC, $\ldots$, FG које спајају по два суседна темена. Према томе парови узастопних троуглова ABT, BCT, $\ldots$, EGT имају заједничко теме, дакле и заједничку страницу: прва два троугла страницу BT, друга два страницу CT, итд., последња два страницу FT, тј. свака два узастопна троугла су суседна.

Исто тако испуњени су, очигледно, и остали услови дефиниције полиједра. Према томе укупност површи полигона $ABC\ldots M$ и тих троуглова је рогљаста површ. Докажимо још да је ова рогљаста површ испупчена ако је полигон $ABC\ldots M$ испупчен.

Ивице AT, BT, $\ldots$, су с исте стране равни $ABC\ldots M$, осим самих тачака A, B, $\ldots$, M. То важи и за тачке у троуглима ABT, BCT, $\ldots$, тј. цела полиједарска површ је с једне стране равни $AB\ldots M$, осим саме те полигонске површи. Ако је полигон $ABC\ldots M$ испупчен, цео је с једне стране праве AB, дакле је с једне стране равни ABT, сем тачака дужи AB, дакле и све тачке у полигону $ABC\ldots M$ су с те стране равни ABT, па и све тачке на или у троуглима $BCT\ldots, MAT$, сем тачке T и дужи BT и AT. То важи у односу на сваки такав троугао, дакле према дефиницији 17.5 посматрана полиједарска површ је испупчена, дакле и полиједар је испупчен. Тиме је ова теорема доказана.

Дефиниција 43.1. Полиједар коме су темена тачке A, B, $\ldots$, M простог равног полигона $AB\ldots M$ и тачка T изван равни тог полигона, а пљосни су му површи омеђене троуглима ABT, BCT, $\ldots$, MAT и поменутим полигоном, називамо *пирамидом*.

Површ полигона $ABC\ldots M$ зовемо *основом*, површи поменутих троуглова *бочним пљоснима*, а теме T *врхом* пирамиде. Ако основа има n страница, пирамиду зовемо *n-тостраном пирамидом*. Тетраедар је тространа пирамида.

Дуж управну на раван основе с једним крајем у врху и другим у равни основе, зовемо *висином пирамиде*. Ако је при основи полигон правилан, а подножје висине његово средиште, пирамиду зовемо *правилном пирамидом*.

Пирамиду чија основа је полигон $AB\ldots M$, а врх T, обележавамо знаком $TAB\ldots M$.

4. Аналого посматрање припада зарубљеној пирамиди:

Теорема 43.7. *Темена простог равног полигона* ABC… M *и темена полигона* A′B′C′… M′ *по коме раван упоредна равни првог полигона сече пирамиду* TABC… M, *којој је извесна тачка* T *теме, јесу темена простог полиједра, коме су* AB, BC,… MA, *затим* A′B′, B′C′,… M′A′, *и најзад* AA′, BB′, CC′,…, MM′ *ивице, а површи поменутих двају полигона и трапеза* ABB′A′, BCC′B′,…, MAA′M′ *су му пљосни:*

Ако је полигон ABC… M *испупчен, и тај полиједар је испупчен.*

Доказ је аналоган доказу претходне теореме.

Дефиниција 43.2. Прост полиједар коме су темена тачке A, B, $\ldots$, M и A', B', $\ldots$, M' простих равних полигона $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ садржаних у двема упоредним равнима, и то тако да постоји тачка T и да су тачке A', B', $\ldots$, M' редом на дужима AT, BT, $\ldots$, MT, и најзад, коме су пљосни површи омеђене поменутим полигонима $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ и трапезима $ABB'A'$, $BCC'B'$, …, $MAA'M'$ — називамо *зарубљеном пирамидом*.

Површи омеђене полигонима $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ зовемо *основама*, а површи поменутих трапеза *бочним пљоснима*, зарубљене пирамиде. Ако основа има n страница, зарубљену пирамиду зовемо *n-тостраном зарубљеном пирамидом*.

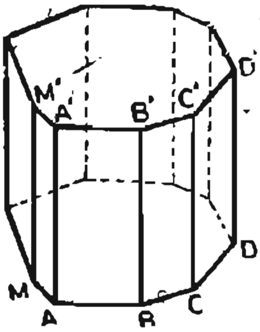
Дуж управну на равнима обеју основа и којој су крајеви у тим равнима зовемо *висином зарубљене пирамиде*. Ако је пирамида $TAB\ldots M$ правилна, одговарајућу зарубљену пирамиду зовемо *правилном*.

5. Аналого посматрамо призму.

Теорема 43.8. *Нека су* AA', BB', …, MM' *упоредне и једнаке дужи којима су једни крајеви темена простог равног полигона* $ABC\ldots M$ *а други крајеви су с исте стране равни тог полигона. Тада је и полигон* $A'B'C'\ldots M'$ *раван и прост и подударан претходном полигону, а темена оба полигона (крајеви уочених дужи) јесу темена простог полиједра коме су* AB, BC, …, MA *и* AA', BB', …, MM' *ивице. а површи омеђене поменутим полигонима и паралелограмима* $ABB'A'$, $BCC'B'$, …, $MAA'M'$ *су му пљосни.*

Ако је полигон $AB\ldots M$ *испуњен, и тај полиједар је испуњен.*

Доказ. Како је $AA'=BB'$ и $AA' \parallel BB'$, четвороугао $ABB'A'$ је према теореми 40.4 паралелограм (сл. 355), исто тако су и четвороугли $BCC'B'$, …, $MAA'M'$ паралелограми. Дакле према теореми 40.2 је $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, …, $MA=M'A'$.



Сл. 355

Исто тако је и четвороугао $ACC'A'$ паралелограм, дакле $AC=A'C'$ и према томе троугли ABC и $A'B'C'$ су подударни, а отуд $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Исто тако показујемо да су и остали одговарајући углови оба полигона једнаки, тј. $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$, …, $\sphericalangle MAB = \sphericalangle M'A'B'$. Дакле полигони $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ су подударни.

Докажимо да је $A'B'\ldots M'$ раван полигон. Из $AB \parallel A'B'$ и $BC \parallel B'C'$ следује да су равни ABC и $A'B'C'$ упоредне (према теореми 41.3). Но такође је $AD \parallel A'D'$, дакле су и равни ABD и $A'B'D'$ упоредне, па како су равни ABC и ABD истоветне, равни $A'B'C'$ и $A'B'D'$ су упоредне истој равни, дакле, према теореми 41.5 и оне су истоветне. Дакле тачка D' је у равни $A'B'C'$. Исто тако доказујемо да су сва остала темена полигона $A'B'\ldots M'$ у равни $A'B'C'$, тј. да је тај полигон раван.

Како је полигон $AB\ldots M$ прост, дужи AA', BB', …, MM' садрже једине заједничке тачке двеју паралелограмских површи, поменутих у теореми, дакле странице полигона $A'B'\ldots M'$ немају заједничких тачака, сем суседних страница у заједничком темену. Према томе и $A'B'\ldots M'$ је прост полигон.

Докажимо још да су тачке A, B, …, M и A', B', …, M' темена полиједарске површи, дакле и полиједра с поменутим ивицама и пљоснима.

Свака страница једног од двају полигона и паралелограма које посматрамо је, очигледно, страница још једног од тих полигона.

Полигон $AB\ldots M$ и паралелограм $ABB'A'$ припадају разним равнима исто тако тај исти полигон и паралелограм $BCC'B'$, или ма који други од посматраних паралелограма. Исто то важи с полигоном $A'B'\ldots M'$. Најзад и две суседне паралелограмске површи припадају двема разним равнима.

Паралелограмска површ $ABB'A'$ је суседна како полигонској површи $AB\ldots M$, тако и полигонској површи $A'B'\ldots M'$, дакле ове две полигонске површи задовољавају услов из дефиниције полиједра. Исто тако и паралелограмске површи $ABB'A', \ldots$ задовољавају поменуте услове, што се лако показује, аналого као у теореми 43.6. — Такође су испуњени и остали услови дефиниције полиједара.

Најзад, ако је полигон $ABC\ldots M$ испупчен, лако се показује да је и полиједар испупчен.

Дефиниција 43.3. Прост полиједар коме су темена крајеви упоредних и једнаких дужи AA', BB', $\ldots$, MM' а пљосни су му површи омеђене подударним испупченим равним полигонима $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ и паралелограмима $ABB'A'$, $BCC'B'\ldots$, $MAA'M'$ називамо призмом.

Површи омеђене полигонима $AB\ldots M$ и $A'B'\ldots M'$ зовемо основама, а површи омеђене поменутим паралелограмима зовемо бочним пљоснима призме. Ивице AA' и BB', $\ldots$, MM' зовемо бочним ивицама, а ивице AB, BC, $\ldots$, MA и $A'B'$, $B'C'$, $\ldots$, $M'A'$ ивицама при основи. Ако свака основа има n страница, призма се зове n-тострана призма.

Дуж управну на равнима обеју основа и коју оне отсецају зовемо висином призме. Ако су бочне ивице управне на основама, призму зовемо правом призмом, ако нису зовемо је косом призмом. Ако су при основама праве призме полигони правилни, такву призму зовемо правилном призмом.

Четворострана призма којој су основе паралелограми, зове се паралелепипед. Ако су све пљосни паралелепипеда правоугаоне површи, паралелепипед се зове правоугли паралелепипед или квадар. Ако су правоугаоници појединих пљосни квадра квадрати, квадар се зове коцка.

6. Напоменимо још само да теоремама о паралелограмима одговарају теореме о паралелепипедима, које су, разуме се, нешто сложеније. Тако напр. имамо ове теореме — подразумевајући под унутарњим дијагоналама оне дужи што спајају темена која не припадају једној истој пљосни.

Теорема 43.9. *У паралелепипеду унутарње дијагонале секу се у једној тачки и узајамно полове.*

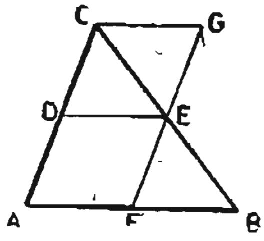
Теорема 43.10. *У правоуглом паралелепипеду унутарње дијагонале су једнаке.*

44. НЕКЕ ТЕОРЕМЕ О ТРОУГЛУ, КРУГУ, ТЕТРАЕДРУ И ЛОПТИ.

1. Доказујемо прво следећу теорему, која нам је потребна и ради даљих теорема.

Теорема 44.1. *Дуж која спаја средишта двеју страница неког троугла упоредна је с трећом страницом и једнака је њеној половини.*

Доказ. Нека су D и E средишта страница AC и BC троугла ABC (сл. 356). Права која пролази кроз тачку E и упоредна је страници AC нека сече праву AB у тачки F, а праву упоредну правој AB и која пролази кроз тачку C нека сече у тачки G. Докажимо да је дуж DE упоредна страници AB и једнака њеној половини.



Сл. 356

Троугли BEF и CEG су подударни јер су дужи BE и CE једнаке, и углови $\sphericalangle EBF$ и $\sphericalangle ECG$ су једнаки као наизменични углови за упоредне AB и CG и попречну праву BC, а углови $\sphericalangle BEF$ и $\sphericalangle CEG$ су једнаки као унакрсни. Дакле имамо и $EF=EG$, $BF=CG$.

Но четвороугао $AFGC$ је паралелограм, јер су му странице две по две упоредне, дакле према теореми 40.2 је $AC=FG$, па како је $AD=CD$ и $FE=GE$, дужи AD и FE су као половине једнаких дужи једнаке, тј. $AD=FE$.

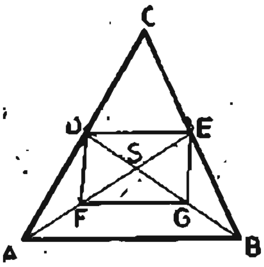
У четвороуглу $AFED$ странице AD и FE су упоредне и једнаке, дакле то је паралелограм и према томе су и странице AF и DE упоредне и једнаке. Дакле дуж DE је упоредна страници AB троугла ABC.

Како је четвороугао $AFGC$ паралелограм, према теореми 40.2 је $AF=CG$, па како је $BF=CG$, имамо $AF=BF$, тј. AF је половина странице AB. Али $AF=DE$, дакле дуж DE је половина странице AB. — Тиме је ова теорема доказана.

2. Прелазимо на кратко посматрање средишњице и тежишта једног троугла.

Дефиниција 44.1. Дуж која спаја теме троугла са средиштем наспрамне странице називамо средишњицом или медијаном.

Теорема 44.2. *Сваке две средишњице троугла секу се и то тако да је на свакој дуж од темена до пресека једнака двострукој дужи од пресека до другог краја средишњице.*



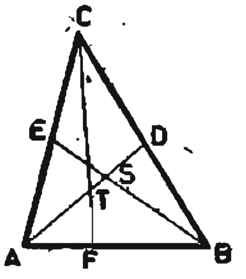
Сл. 357

Доказ. Нека су AE и BD две средишњице у троуглу ABC (сл. 357). Како је тачка E између B и C, тачка E је у удубљеном углу $\sphericalangle BAC$, дакле полуправа AE са исходиштем A сече дуж BD у извесној тачки S. Како је тачка D у удубљеном углу $\sphericalangle ABC$, права BD сече дуж AE, дакле дужи AE и BD секу се у S.

Нека је F средиште дужи AS, G средиште дужи BS. Према теореми 44.1 како FG спаја средишта страница AS и BS троугла ABS, дуж FG је упоредна страници AB и једнака њеној половини. Како DE спаја средишта страница AC и BC троугла ABC, дуж DE је такође упоредна страници AB и једнака њеној половини. Дакле, дужи DE и FG су упоредне и једнаке, па је према теореми 40.6 четвороугао $DEGF$ паралелограм.

Према теореми 40.7 дијагонале DG и EF тог паралелограма се узајамно полове, дакле је $ES=FS$, па како је $FS=AF$, тј. FS је половина дужи AS, дуж ES је половина дужи AS. Исто тако је DS половина дужи BS.

Теорема 44.3. *Све три средишњице троугла секу се у једној тачки.*



Сл. 358

Доказ. Нека су у троуглу ABC средишњице AD, BE, CF (сл. 358) и нека се секу AD и BE у тачки S. Претпоставимо да се AD и CF секу у некој другој тачки T. Како је према теореми 44.2 $AS=2\ DS$, имамо

$$AS+DS=3\ DS,$$

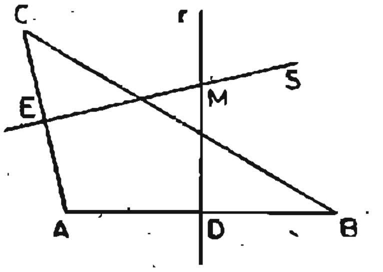
тј. $AD=3 \cdot DS$. Исто тако би било и $AD=3\ DT$, дакле $3\ DS=3\ DT$, а при томе $DS=DT$. Но како су S и T на правој AD с исте стране тачке D, ово је немогуће. Дакле AE и CH секу се у истој тачки S.

Дефиниција 44.2. Тачка у којој се секу све три средишњице троугла назива се *тежиште троугла*.

3. Пређимо сад на кратко посматрање симетрала страница једног троугла и круга описаног око троугла.

Теорема 44.4. *Три симетрале страница троугла секу се у једној тачки. Та тачка је једнако удаљена од сва три темена троугла.*

Доказ. Нека су редом D и E средишта страница AB и AC троугла ABC (сл. 359) и нека су r и s симетрале тих страница. Према дефиницији симетрале, права r пролази кроз D и управна је на AB, а права s пролази кроз E и управна је на AC.

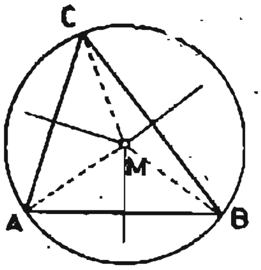


Сл. 359

Кад би праве r и s биле упоредне, биле би према теореми 39.4 и праве AB и AC, које су управне, једна на r, друга на s, међу собом упоредне или би се поклапале. Како су по дефиницији троугла праве AB и AC две разне праве које се секу у тачки A, праве r и s се дакле секу. Нека се секу у извесној тачки M.

Како је тачка M на симетрали странице AB, имамо $AM=BM$, а како је и на симетрали странице AC, имамо $AM=CM$. Отуд је и $BM=CM$, тј. је и на симетрали треће странице BC троугла ABC. Дакле све три симетрале секу се у једној тачки, која је једнако удаљена од сва три темена.

Теорема 44.5. *Кроз три темена једног троугла пролази један и само један круг. Средиште тог круга је тачка у којој се секу симетрале страница тог троугла, а све тачке тог троугла, сем његових темена, јесу у том кругу.*



Сл. 360

Доказ. Тачка M у којој се секу симетрале свих трију страница ма ког троугла ABC је према теореми 44.4 једнако удаљена од његових темена, тј. $AM=BM=CM$. Према дефиницији 31.1 круга, тачке A, B, C су на извесном кругу k коме је средиште M (сл. 360).

Како у датој равни свака дуж има само једну симетралу, то за сваки троугао постоји једна тачка у којој се секу симетрале његових страница. С друге стране, средиште круга који садржи темена троугла ABC једнако је удаљено од темена A и B, дакле припада симетрали странице AB и, тако исто, симетралама осталих двеју страница BC и AC. Дакле средиште таквог круга је тачка у којој се секу симетрале страница тог троугла и према томе постоји само једно средиште таквог круга. Према дефиницији круга, круг k је укупност тачака у равни ABC, једнако удаљених од тачке M, као тачка A, дакле постоји само један круг k.

Дефиниција 44.3. За круг који пролази кроз сва три темена једног троугла каже се да је *описан* око тог троугла. За тај троугао кажемо пак да је *уписан* у тај круг.

Из теореме 44.5 следује непосредно ова теорема:

Теорема 44.6. *Кроз сваке три тачке које не припадају једној истој правој пролази један и само један круг.*

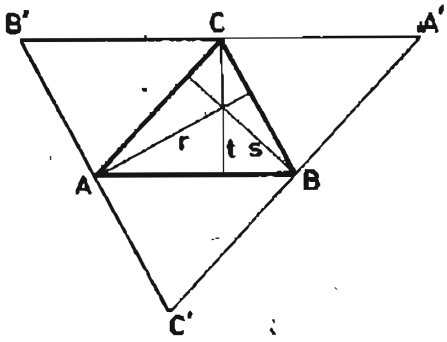
4. Прелазимо на посматрање висина и ортоцентра једног троугла.

Дефиниција 44.4. Дуж која спаја једно теме троугла са извесном тачком наспрамне странице или њеног продужења и управна је на њој, назива се *висина троугла*.

Теорема 44.7. *Све три висине троугла секу се у једној тачки.*

Доказ. Нека су r, s, t висине троугла ABC (сл. 361), спуштене редом из темена A, B, C. Нека је $A'B'$ права упоредна са AB и која пролази кроз C, затим $B'C'$ упоредна са BC кроз теме A, и најзад $C'A'$ упоредна са CA кроз теме B. Те три упоредне секу се у трима тачкама A', B', C'.

Четвороугао $ABCB'$ је паралелограм, дакле је $AB=B'C$. Исто тако је и $AB=CA'$ дакле је $B'C=CA'$, тј. C је средиште дужи $A'B'$. Исто тако је A средиште дужи $B'C'$ и B средиште дужи $C'A'$. Но права r је управна на BC, па како је права $B'C'$ упоредна са BC, права r је према теореми 39.4 управна и на $B'C'$. Исто тако је права s управна на $C'A'$ и t на $A'B'$. Дакле r, s, t су симетрале трију страница троугла $A'B'C'$, па се према теореми 44.4 секу у једној тачки. Дакле све три висине троугла ABC секу се у једној тачки.



Сл. 361

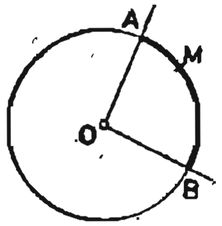
Дефиниција 44.5. Тачке у којој се секу све три висине једног троугла зовемо *ортоцентром* тог троугла.

Теорему о томе да се симетрале сва три угла једног троугла секу у једној тачки и теорему о постојању круга уписаног у троуглу доказали смо независно од аксиоме упоредности, прва је теорема 22.5, друга 31.22.

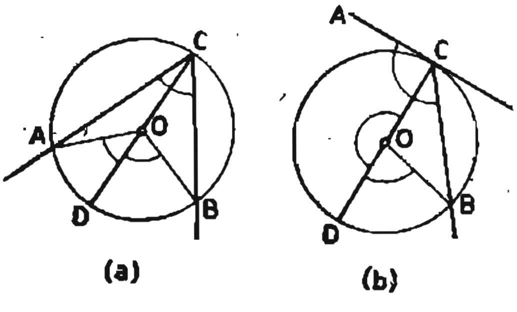
5. Додајемо још неке теореме о кругу. Пошто је реч и о кружним луковима, доносимо најпре дефиницију кружног лука.

Дефиниција 44.6. Укупност тачака круга које су било на крацима једног његовог средишњег угла или у том углу назива се *лук* круга.

Оне две тачке лука које су на тим крацима, називамо *крајевима (крајњим тачкама)* лука, а остале тачке лука његовим *унутарњим тачкама*. За сам лук кажемо и да је *захваћен* тим средишњим углом. Лук који је захваћен опруженим средишњим углом називамо *полукругом*.



Сл. 362



Сл. 363

И лукове обележавамо малим латинским словима. Ако су A и B крајеви неког лука (сл. 362), обележићемо тај лук и ознаком $\overset{\frown}{AB}$. Како постоје на датом кругу два лука АВ, ознака ће постати једнозначна тек ако узмемо у обзир и неку трећу тачку тог лука, рецимо М и пишемо $\overset{\frown}{AMB}$.

Дефиниција 44.7. Удубљен угао коме је теме на кругу, а краци секу или додирују тај круг, називамо *периферијским углом*. За лук круга, одређен периферијским углом и садржан у њему кажемо да је њиме *захваћен*.

Теорема 44.8. *Периферијски угао једног круга једнак је половини његовог средишњег угла који захвата исти лук тога круга.*

Доказ. Нека је прво $\sphericalangle ACD$ периферијски угао (сл.363а) коме краци CA и CD секу круг у тачкама A и D и нека је CD пречник и на њему O средиште круга. Средишњи угао који захвата исти лук $\overset{\frown}{AD}$ је угао $\sphericalangle AOD$, који садржи тетиву AD, дакле је удубљен угао. Према теореми 39.10, у троуглу ACO је $\sphericalangle AOD = \sphericalangle CAO + \sphericalangle OCA$. Али $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$, дакле $\sphericalangle AOD = 2\ \sphericalangle OCA$.

Ако крак CA угла $\sphericalangle ACD$ додирује круг у тачки C (сл. 363б), угао $\sphericalangle ACD$ је прав, а средишњи угао над истим луком је $\sphericalangle COD$, тј. опружен угао, дакле $\sphericalangle COD = 2\ \sphericalangle ACD$.

У оба случаја периферијски угао је половина средишњег угла који захвата исти лук. Тиме је теорема доказана кад год један крак периферијског угла садржи средиште круга.

Нека је сад $\sphericalangle ACB$ периферијски угао коме краци CA и CB секу круг у тачкама A и B, а не садрже средиште O. Ако је опет CD пречник круга, према претходноме је $\sphericalangle AOD = 2\ \sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle BOD = 2\ \sphericalangle BCD$ и према томе

$$\sphericalangle AOD \pm \sphericalangle BOD = 2\ \sphericalangle ACD \pm \sphericalangle BCD.$$

Дакле, ако су A и B са разних страна праве CD имамо

$$\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB, \qquad \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB$$

и према томе $\sphericalangle AOB = 2\ \sphericalangle ACB$. Ако су A и B с исте стране праве CD, и напр. $\sphericalangle AOD > \sphericalangle BOD$ имамо

$$\sphericalangle AOD - \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB, \qquad \sphericalangle ACD - \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB,$$

дакле опет $\sphericalangle AOB = 2\ \sphericalangle ACB$.

Нека је, најзад, $\sphericalangle ACB$ периферијски угао чији крак CA додирује круг у тачки C, а крак CB га сече у тачки B и не садржи средиште O. Ако је опет CD пречник имамо $\sphericalangle COD = 2\ \sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle BOD = 2\ \sphericalangle BCD$ и према томе

$$\sphericalangle COD \pm \sphericalangle BOD = 2\ \sphericalangle ACD \pm \sphericalangle BCD,$$

а отуд, као мало пре, у оба случаја $\sphericalangle AOB = 2\ \sphericalangle ACB$. — Тиме је ова теорема доказана.

Из претходне теореме следује непосредно следећа:

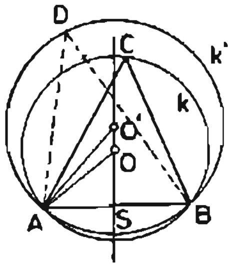
Теорема 44.9. *Сви периферијски углови који захватају исти лук једнаки су међу собом.*

Теорема 44.10. *Периферијски углови који захватају полукруг јесу прави углови.*

Доказ. Средишњи угао који захвата исти лук као дати периферијски угао је тада опружен угао, дакле ти периферијски углови су према теореми 44.8 прави углови.

Теорема 44.11. *Ако су* $\sphericalangle$ACB *и* $\sphericalangle$ADB *два једнака угла којима су темена са исте стране праве* AB, *постоји круг који садржи све четири тачке* A, B, C, D.

Доказ. Претпоставимо, напротив, да круг k, који је описан око троугла ABC, не садржи тачку D (сл. 364). Нека је затим k' круг описан око троугла ABD и нека су O и O' средишта кругова k односно k'. Претпоставимо да круг k не садржи тачку D. Кругови k и k' су тада два разна круга. По дефиницији 31.1 дуж OD није једнака полупречнику OA круга k, дакле O није средиште круга k', тј. O и O' су две разне тачке. Како су O и O' на симетрали дужи AB, имамо, посматрајући удубљене углове и обележивши са S средиште дужи AB,



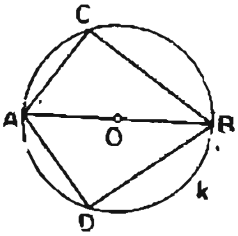
Сл. 364

$$\sphericalangle AOS = \sphericalangle BOS, \qquad \sphericalangle AO'S = \sphericalangle BO'S.$$

Како су C и D с исте стране праве AB, имамо $S-O-O'$ или $S-O'-O$. Рецимо да је $S-O-O'$. У троуглу AOO' је угао $\sphericalangle AOS$ спољашњи угао, а $\sphericalangle AO'S$ унутарњи угао, дакле је према теореми 25.1 $\sphericalangle AOS > \sphericalangle AO'S$, па отуд $\sphericalangle AOB > \sphericalangle AO'B$. Но према теореми 44.8 је $\sphericalangle OAB = 2\ \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AO'B = 2\ \sphericalangle ADB$, дакле $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADB$. Ово се противи претпоставци наше теореме, да је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Дакле круг k садржи тачку D и према томе, а по теореми 44.5, поклапа се с кругом k'.

Теорема 44.12. *Правоугли троугли који имају заједничку хипотенузу уписани су у једном истом кругу, коме је пречник хипотенуза.*

Доказ. Како су сви прави углови једнаки, темена наспрам заједничке хипотенузе свих тих правоуглих троуглова и која су с исте стране хипотенузе AB, садржана су према теореми 44.11 на једном кругу. Нека је то круг k (сл. 365). Нека је k' круг коме је AB пречник и угао $\sphericalangle ADB$ тетивни угао с исте стране праве AB. Према теореми 44.10 тај угао је прав, дакле тачка D је на кругу k, тј. према теореми 31.28 круг k' је истоветан са кругом k. Дакле AB је пречник круга k.



Сл. 365

Према томе хипотенуза AB је пречник и онога круга k'', који је описан око свих посматраних троуглова но с теменом правог угла са супротне стране праве AB. Дакле кругови k и k'' имају заједнички пречник па су према томе истоветни, тј. сви прави углови троуглова са заједничком хипотенузом налазе се на једном истом кругу.

6. Многобројним особинама које имају дужи одговарају аналоге особине кружних лукова. Задржимо се само на неколико теорема и једној дефиницији. У ствари постоји потпуна аналогија између углова и кружних лукова, при чему угловима одговарају лукови које они захватају.

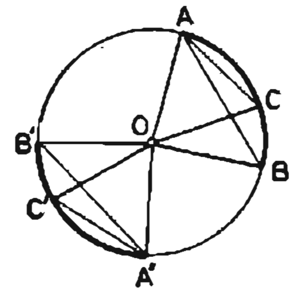
Теорема 44.13. *Ако су два лука на једном кругу или на два круга подударних полупречника захваћени једнаким угловима, та два лука су подударна кроз све тачке.*

Доказ. Нека су $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$ два лука, рецимо на једном кругу чије средиште је O (сл. 366) и нека су захваћени средишњим угловима $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'OB'$, који су једнаки.

Нека је C ма која трећа тачка на луку $\overset{\frown}{AB}$. Према дефиницији 44.6 тачка C је у углу $\sphericalangle AOB$, полуправа OC је дакле у $\sphericalangle AOB$ и према дефиницији 25.2 постоји угао $\sphericalangle AOC$ који је део угла $\sphericalangle AOB$.

Према теореми 21.2 постоји полуправа OC' с дате стране праве OA' тако да је $\sphericalangle AOC = \sphericalangle A'OC'$. Према теореми 25.8 такође је $\sphericalangle A'OB' > \sphericalangle A'OC'$. Дакле ако је OC' с једне стране праве OA, угао $\sphericalangle A'OC'$ је део угла $\sphericalangle A'OB'$, ако је с друге стране, није тако. Нека је OC' с прве стране праве OA, дакле у углу $\sphericalangle A'OB'$. Тада је по дефиницији 44.6 тачка C на луку $\overset{\frown}{A'B'}$.

Докажимо да су лукови $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$ подударни кроз све тачке, тако да тачкама A и B одговарају редом тачке A' и B' и да свакој трећој тачки C лука $\overset{\frown}{AB}$ одговара она тачка C' лука $\overset{\frown}{A'B'}$ за коју је угао $\sphericalangle AOC$, садржан у углу $\sphericalangle AOB$, једнак углу $\sphericalangle A'OC'$, садржан у $\sphericalangle A'OB'$.



Сл. 366

Пре свега, услед једнакости тих углова и подударности полупречника AO, $A'O$, BO, $B'O$ тетиве AB и $A'B'$ су једнаке. Како је затим $\sphericalangle AOC = \sphericalangle A'OC'$, такође је $AC = A'C'$. Како је $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$ и $\sphericalangle AOC = \sphericalangle A'OC'$, према теореми 21.10 је и $\sphericalangle BOC = \sphericalangle B'OC'$, дакле такође је $BC = B'C'$. Нека је D ма која четврта тачка на $\overset{\frown}{AB}$ и D' одговарајућа тачка на $\overset{\frown}{A'B'}$. Према теореми 12.9 полуправа OD је у једном од углова $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$, на које је полуправом OC разложен угао $\sphericalangle AOB$. Рецимо да је OD у углу $\sphericalangle AOC$. Тада је и OD' у углу $\sphericalangle A'OC'$ и како је $\sphericalangle AOD = \sphericalangle A'OD'$, према теореми 12.10 је такође $\sphericalangle COD = \sphericalangle C'OD'$, дакле и $CD = C'D'$.

Тиме је доказано ма за које две тачке лука $\overset{\frown}{AB}$ и одговарајуће две тачке лука $\overset{\frown}{A'B'}$, да је дуж која спаја прве две тачке једнака дужи која спаја друге две тачке. Дакле према дефиницији 29.1 лукови $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$ су подударни кроз све тачке.

Доказ је исти ако су $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$ лукови двају разних, подударних кругова. — Овим је доказ завршен.

Подударне лукове називамо и **једнаким** и пишемо за подударне лукове $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$:

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'} \text{ или } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}.$$

Као што је већ споменуто на крају §31, лукови могу бити подударни само ако припадају истом кругу или подударним круговима, тј. којима су полупречници једнаки.

Ако два лука на једном или на два разна круга нису подударни, један је већи односно мањи од другога, на темељу дефиниције:

Дефиниција 44.8. Ако је Q унутарња тачка лука $\overset{\frown}{PQ}$ и ако су $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ два лука на истом или на подударним круговима, тако да је $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{PQ}$ и $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{QR}$, кажемо да је лук $\overset{\frown}{AB}$ *мањи* од лука $\overset{\frown}{CD}$ или да је лук $\overset{\frown}{CD}$ *већи* од лука $\overset{\frown}{AB}$. Знацима: $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$.

Аналого аксиоми и теоремама о подударности имамо напр. ове теореме о кружним луковима:

Теорема 44.14. *Нека је* $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ *лук једног круга, мањи од полукруга. Ако је* A′ *тачка на истом или на другом кругу, постоји с дате стране праве која пролази кроз* A′ *и средиште тога круга једна и само једна тачка* B′ *тако да је лук* $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ *подударан с луком* $\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$ (сл. 367).

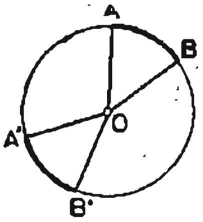
Теорема 44.15. *Ако су лукови* $\overset{\frown}{AB}$ *и* $\overset{\frown}{A'B'}$ *подударни с луком* $\overset{\frown}{A''B''}$, *тада су и међу собом подударни.*

Теорема 44.16. *Ако лукови* $\overset{\frown}{AB}$ *и* $\overset{\frown}{BC}$ *имају само тачку* B *заједничку, а лукови* $\overset{\frown}{A'B'}$ *и* $\overset{\frown}{B'C'}$ *само тачку* B′ *заједничку и ако је*

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\qquad \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'},$$

тада је и

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C'}.$$



Сл. 367

Доказе свих тих и других теорема, аналогих онима о дужима, препуштамо читаоцу.

7. Као што се у троуглу симетрале углова секу у једној тачки (у средишту круга уписаног у троуглу), симетрале страница секу у једној тачки (у средишту круга описаног око троугла), и средишњице секу у једној тачки, тако је и у тетраедру. Но прво треба дефинисати дијeдре тетраедра.

Дефиниција 44.9. Дијeдар чија ивица садржи једну ивицу тетраедра, чије стране садрже две стране тог тетраедра којима је та ивица заједничка и који садржи остале тачке тог тетраедра називаћемо *унутарњим дијeдром* тог тетраедра или, краће, његовим *дијeдром*.

Постоји следећа теорема:

Теорема 44.17. *Симетралне равни свих шест дијeдара једног тетраедра секу се у једној тачки. Дужи спуштене из те тачке управно на стране тог тетраедра једнаке су међу собом.*

Доказ. Обележимо за тетраедар $ABCD$ дијeдре чије ивице су AB, AC, итд., знацима $\Delta(AB)$, $\Delta(AC)$ итд. и обележимо оне полуравни њихових симетралних равни, које су садржане у тим дијeдрима, редом знацима $\sigma(AB)$, $\sigma(AC)$ итд. Полуравни $\sigma(AB)$ и $\sigma(AC)$ имају тачку A заједничку, а секу раван BCD по двема полуправим које су садржане редом у угловима $\sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle BCD$ троугла BCD, дакле секу се по извесној полуправој a, која пролази кроз A и кроз пресек тих двеју полуправих, садржаних у троуглу BCD.

Нека је T ма која тачка на a, различита од A. Како је тачка T садржана у полуравни $\sigma(AB)$, управне дужи спуштене из T на равни ABC и ABD су једнаке, а како је T и у полуравни $\sigma(AC)$, управне дужи спуштене из T на равни ABC и ACD су такође једнаке. Како су равни ABC и ACB истоветна раван, ове дужи су све једнаке, тј. дужи спуштене из тачке T на равни ABD и ACD су једнаке, дакле тачка T је и у полуравни $\sigma(AD)$ дијeдра $\Delta(AD)$. Према томе, све три полуравни $\sigma(AB)$, $\sigma(AC)$, $\sigma(AD)$ секу се по полуправој a.

Исто тако секу се полуравни $\sigma(BA)$, $\sigma(BC)$, $\sigma(BD)$ по извесној полуправој b, која садржи тачку B. Како су полуправе a и b садржане у полуравни $\sigma(AB)$, оне се секу или су упоредне. Но полуправа a пролази кроз тачку у троуглу BCD и, тако исто, полуправа b пролази кроз тачку у троуглу CDA, дакле секу се у једној тачки, рецимо O.

Како је тачка O у полуравнима $\sigma(AB)$, $\sigma(AC)$, $\sigma(AD)$, $\sigma(BC)$, $\sigma(BD)$, управне дужи спуштене из тачке O на све четири равни ABC, и ABD, ACD, BCD једнаке су, као што захтева други део теореме. Но како су дужи управне, спуштене из O на равни ACD и BCD једнаке, тачка O је у симетралној равни дијeдра $\Delta(CD)$, у полуравни $\sigma(CD)$. Тиме је доказано и да се симетралне равни свих шест дијeдара једног тетраедра секу у једној тачки.

Теорема 44.18. *Тачка у којој се секу симетралне равни свих диједара једног тетраедра је средиште лопте која додирује све четири стране тог тетраедра.*

Доказ. Нека је то тачка O. Како су управне дужи спуштене из O на равни којима припадају стране тетраедра једнаке, постоји лопта којој је O средиште и која додирује те четири равни. Но подножја тих управних дужи су редом на странама свих диједара тог тетраедра, дакле у троуглима његових страна, тј. ова лопта додирује све четири стране тетраедра.

Дефиниција 44.10. За лопту која додирује све четири стране једног тетраедра кажемо да је *уписана* у том тетраедру а за тај тетраедар да је *описан* око те лопте.

8. Посматрајмо слично симетралне равни ивица једног тетраедра.

Теорема 44.19. *Симетралне равни свих шест ивица једног тетраедра секу се у једној тачки. Та тачка је једнако удаљена од сва четири темена тог тетраедра.*

Доказ. Обележимо за тетраедар $ABCD$ симетралне равни ивица AB, AC, итд. знацима $\xi(AB)$, $\xi(AC)$ итд. Симетралне равни $\xi(AB)$, $\xi(AC)$ и $\xi(BC)$ секу раван ABC по трима симетралама страница троугла ABC, дакле те три симетралне равни пролазе кроз средиште S круга описаног око троугла ABC и секу се по правој s која пролази кроз S и управна је на равни ABC.

Исто тако секу се симетралне равни $\xi(AB)$, $\xi(AD)$, $\xi(BD)$ по извесној правој t, која пролази кроз средиште T круга описаног око троугла ABC и управна је на равни ABD. Праве s и t су у равни $\xi(AB)$, дакле секу се или су упоредне. Но кад би те праве биле упоредне, биле би и равни ABC и ABD упоредне или би се поклапале, што је немогуће. Дакле праве s и t секу се у извесној тачки O.

Тачка O је у равнима $\xi(AB)$, $\xi(AC)$, $\xi(BC)$, $\xi(AD)$, $\xi(BD)$, дакле имамо: $AO=BO=CO=DO$.

Но како је $CO=DO$, тачка O је и у симетралној равни $\xi(CD)$, дакле, тиме је доказано и да се у тачки O секу симетралне равни свих ивица датог тетраедра.

Теорема 44.20. *Тачка у којој се секу симетралне равни свих ивица једног тетраедра је средиште лопте која садржи сва четири темена тог тетраедра.*

Доказ. Према претходној теореми та тачка је једнако удаљена од сва четири темена тетраедра, дакле према дефиницији 32.1 је средиште лопте која пролази кроз та четири темена.

Дефиниција 44.11. За лопту која садржи сва четири темена једног тетраедра кажемо да је *описана* око тог тетраедра, а за тај тетраедар кажемо да је *уписан* у тој лопти.

9. Дефинишимо прво средишњицу тетраедра.

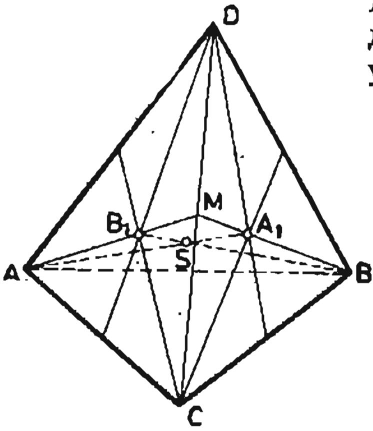
Дефиниција 44.12. Дуж која спаја теме тетраедра са тежиштем троугла наспрамне стране истог тетраедра називаћемо *средишњицом* тог тетраедра.

Теорема 44.21. *Све средишњице једног тетраедра секу се у једној тачки и то тако да је на свакој средишњици дуж од темена до пресека једнака тространој дужи од пресека до другог краја те средишњице.*

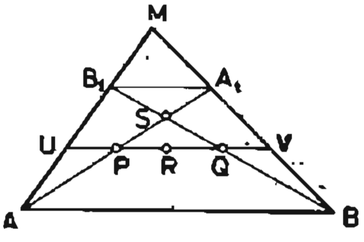
Доказ. Нека су у тетраедру $ABCD$ редом A_1, B_1, C_1, D_1 тежишта троуглова BCD, CDA, DAB, ABC (сл.368).

Како је A_1 на средишњици BM троугла BCD, а B_1 на средишњици AM троугла CDA, тачке A_1 и B_1 су на страницама троугла ABM (сл. 369). Како је $A-B_1-M$ и $B-A_1-M$, према теореми 6.13 дужи AA_1 и BB_1 секу се у извесној тачки S. Према теореми 44.2 је $AB_1=2B_1M$ и $BA_1=2A_1M$. Докажимо да је $AS=3A_1S$ и $BS=3B_1S$.

Нека су U и V редом средишта дужи AB_1 и BA_1. Како је $A-U-M$ и $B-A_1-M$, дужи AA_1 и UV се према теореми 6.13 секу у извесној тачки P. Исто тако се дужи BB_1 и UV секу у извесној тачки Q.



Сл. 368



Сл. 369

Како су на троуглу UVM тачке A_1 и B_1 редом средишта страница VM и UM, дужи UV и A_1B_1 су према теореми 44.1 упоредне и $UV=2A_1B_1$. Дакле, како је U средиште странице AB_1 троугла AA_1B_1, тачка P је средиште дужи AA_1 и $A_1B_1=2PU$. Исто тако је Q средиште дужи BB_1 и $A_1B_1=2QV$. Према томе је $PU=QV$ и $PU+QV=A_1B_1$. Но имамо

$$UV=PQ+PU+QV=PQ+A_1B_1,$$

а с друге стране је $UV=2A_1B_1$, дакле $PQ=A_1B_1$.

Како су дужи PQ и A_1B_1 једнаке и упоредне, четвороугао A_1B_1PQ је паралелограм, дакле његове дијагонале се полове, тј $A_1S=SP$. Но $AP=A_1P=2A_1S$, дакле

$$AS=AP+PS=2A_1S+SP,$$

тј. $AS=3A_1S$. — Исто тако је $BS=3B_1S$.

Као што се дужи AA_1 и BB_1 секу у S, тако се и дужи BB_1 и CC_1 секу у извесној тачки S', за коју је $BS'=3B_1S'$ и $CS'=3C_1S'$. Како је $BS=3B_1S$ и $BS'=3B_1S'$, дакле и $BB_1=4B_1S$ и $BB_1=4B_1S'$, тачка S' се поклапа с тачком S, дакле све три дужи AA_1, BB_1, CC_1 секу се у тачки S. На исти начин показујемо и за четврту средишњицу DD_1 да пролази кроз S. При томе имамо

$$AS=3A_1S,\qquad BS=3B_1S,\qquad CS=3C_1S,\qquad DS=3D_1S,$$

као што се тврди у теореми.

На темељу те теореме постављамо дефиницију:

Дефиниција 44.13. Тачка у којој се секу све четири средишњице тетраедра називаћемо *тежиштем* тог тетраедра.

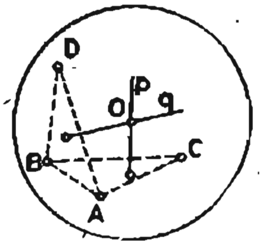
10. Докажимо овде још три теореме о лоптама које пролазе кроз две, три или четири дате тачке. Прве две теореме не зависе од аксиоме упоредности, али спадају заједно с трећом, која је тачна само кад се претпостави та аксиома.

Прва теорема следује непосредно из теореме 32.8.

Теорема 44.22. *Средишта лопти које пролазе кроз две тачке припадају једној равни. Та раван је управна на дужи одређеној тим двема тачкама и полови је.*

Теорема 44.23. *Ако три тачке не припадају једној правој, средишта лопти које пролазе кроз те три тачке припадају правој која је управна на равни одређеној тим трима тачкама и пролази кроз средиште круга што пролази кроз те три тачке.*

Теорема 44.24. *Кроз четири тачке које не припадају једној равни пролази једна и само једна лопта.*



Сл. 370

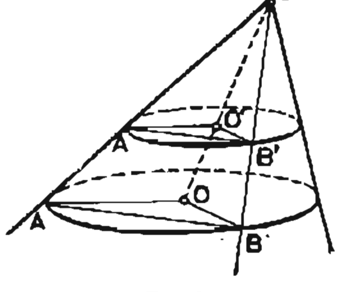
Доказ. Нека су A, B, C, D те четири тачке (сл. 370). Према теореми 44.23 средишта лопти које пролазе кроз тачке A и B припадају извесној равни α, а према теореми 44.23 средишта лопти које пролазе кроз три тачке A, B и C припадају извесној правој p, а средишта лопти које пролазе кроз тачке A, B и D припадају извесној правој q. Праве p и q припадају равни α а нису упоредне, јер равни ABC и ABD нису упоредне, дакле праве p и q секу се у једној и само једној тачки O, која је средиште лопте што пролази кроз четири тачке A, B, C и D.

45. КРУЖНА КУПА И КРУЖНИ ВАЉАК.

Под ваљком (цилиндром) и купом (конусом) подразумевају се некипут неограничене површи. Ми ћемо тако називати тела, садржана у коначном делу простора. Ограничићемо посматрање на кружни ваљак и кружну купу, тј. којима су основе кружне површи.

1. Прво посматрамо купу. Морамо разликовати неограничену „купасту површ“ од ограничене, затворене површи која је површ купе.

Дефиниција 45.1. Укупност правих које пролазе кроз тачку једног круга и кроз једну тачку ван равни тог круга називамо *отвореном кружнокупастом површи*.



Сл. 371

Те праве називамо *изводницама* купасте површи, тај круг њеном *водиљом*, а поменуту тачку ван равни тог круга *врхом* купасте површи, или краће: *купастом површи* (такође и *конусном површи*).

Праву која пролази кроз врх праве купасте површи и кроз средиште водиље зовемо њеном *осом*.

Ако је права која пролази кроз врх и кроз средиште водиље купасте површи управна на равни водиље, купасту површ зовемо *правом купастом површи*.

Докажимо прво следећу теорему:

Теорема 45.1. *Свака раван упоредна равни водиље и која не пролази кроз врх купасте површи, сече купасту површ по једном кругу.*

Доказ. Нека је круг k водиља, O његово средиште, а S теме купасте површи (сл. 371), нека су затим A и B ма које две тачке на кругу k, које нису крајеви једног пречника и A' и B' продори правих AS и SB кроз раван α', која је упоредна са равни α водиље, а не пролази кроз врх. Нека је $O-O'-S$, дакле и $A-A'-S$ и $B-B'-S$.

Дужи AO и $A'O'$ су упоредне, јер припадају пресецима упоредних равни α и α' трећом равни AOS. При томе су тачке O и O' с исте стране праве AS, дакле полуправе AO и $A'O'$ су сагласне. Исто тако су дужи AB и $A'B'$ упоредне, јер припадају пресеку равни α и α' трећом равни ABS, а при томе су B и B' с исте стране праве AS, дакле полуправе AB и $A'B'$ су такође сагласне. Према томе удубљени углови $\sphericalangle OAB$ и $\sphericalangle O'A'B'$ су једнаки.

Исто тако су једнаки углови $\sphericalangle OBA$ и $\sphericalangle O'B'A'$. Но $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, јер тачке A и B су на кругу k. Дакле је и $\sphericalangle O'A'B' = \sphericalangle O'B'A'$. Дакле троугао $O'A'B'$ је једнакокрак, са крацима $O'A'$ и $O'B'$, дакле тачке A' и B' су на извесном кругу k' равни α', коме је O' средиште, а $O'A'$ полупречник.

Ако је AA'_1 пречник круга k, посматрањем тачака A_1, B и одговарајућих A'_1, B'_1 долазимо исто тако до закључка да је такође $O'A'_1 = O'B'$, дакле $O'A' = O'A'_1$. Према томе закључак вреди за све тачке круга k', тј. пресек дате купасте површи и равни α' је круг k'.

Теорема 45.2. *Раван која пролази кроз врх кружно купасте површи нема с њом других заједничких тачака, или је додирује по једној изводници, или је сече по двема изводницама.*

Доказ. Нека је S врх површи, α раван која пролази кроз S. Та раван сече раван водиље по правој која сече круг водиље у двема тачкама, или га додирује, или нема с њим заједничких тачака. Или пак раван α не сече раван водиље и тада нема заједничких тачака с кругом водиље. У првом од три различита случаја раван α сече купасту површ по двема изводницама, у другом случају има с њом само једну заједничку изводницу (додирује је), у трећем случају нема сем S других заједничких тачака с купастом површи.

Теорема 45.3. *Нека је* а *права која пролази кроз врх купасте површи и кроз тачку у кругу водиље те површи. Свака права која сече праву* а *има с купастом површи једну или две заједничке тачке.*

Доказ. Нека је p права која сече праву a. Праве a и p одређују раван σ која садржи тачку B продора праве a кроз раван водиље α. Дакле σ и α секу се по извесној правој b. Како је тачка B у кругу водиље, права b сече тај круг у двема тачкама M и N. Изводнице m и n које пролазе кроз M и N пролазе и кроз врх V купасте површи, дакле припадају равни σ.

Према томе имамо у σ две праве m и n које се секу и праву p. Ако је права p упоредна једној од правих m и n, она сече само једну од њих, тј. једну изводницу. Ако p није упоредна с m и n, она сече обе те праве, тј. обе изводнице. С осталим изводницама p нема заједничких тачака, јер ове имају са равни σ само тачку V заједничку, а p не пролази кроз V.

Дефиниција 45.2. За тачке правих које пролазе кроз врх купасте површи и кроз тачку у кругу водиље рећи ћемо да су *у* тој купастој површи. За тачке које нису у купастој површи, нити њој припадају, рећи ћемо да су *изван* ње.

Дефиниција 45.3. Укупност тачака која се састоји из тачака кружно купасте површи, које су између двеју равни упоредних спрам равни водиље, од којих једна пролази кроз врх те површи, и из тачака кружне површи омеђене пресеком оне друге од тих двеју упоредних равни, с том купастом површи, називаћемо *затвореном кружно купастом површи* или, краће, *затвореном купастом површи.*

Дефиниција 45.4. За тачке које су у купастој површи, а између двеју равни упоредних спрам равни водиље, од којих једна пролази кроз врх те површи, рећи ћемо да су *у* тој затвореној купастој површи. За тачке које нису у затвореној купастој површи, нити јој припадају, рећи ћемо да су *изван* ње.

Дефиниција 45.5. Укупност тачака затворене кружно купасте површи и тачака у тој површи називаћемо *кружном купом* или *кружним конусом*, краће, *купом* или *конусом*.

За ту купасту површ рећи ћемо да је *површ* те *купе*. Кружну површ која припада површи купе називаћемо *основом* купе, а део отворене купасте површи, који припада површи купе називаћемо *омотачем* купе, врх купасте површи називаћемо *врхом* купе, а део изводнице отворене купасте површи, који припада површи купе, *изводницом купе*.

Ако је купаста површ права, називаћемо и купу *правом купом*, ако није називамо је *косом купом*.

Теорема 45.4. *Раван која садржи дирку основе једне купе и пролази кроз врх купе има с површи купе само тачке на једној изводници заједничке.*

Доказ. Та раван садржи целу изводницу, која пролази кроз тачку додира те дирке, јер садржи врх купе кроз који пролазе све изводнице. Кад би та раван садржала још неку тачку T омотача купе, садржавала би целу изводницу која пролази кроз T, дакле и ону тачку те изводнице која припада кругу основе. Ово је немогуће, јер уочена раван сече раван основе по дирци круга водиље.

Дефиниција 45.6. За раван која садржи само једну изводницу купе кажемо да додирује купу и зовемо је *додирном равни* купе, а праву те изводнице *додирном правом* те додирне равни.

Теорема 45.5. *Све додирне равни једне купе пролазе кроз врх купе.*

Доказ. Како по дефиницији 45.6 додирна раван садржи једну изводницу, према дефиницији 45.1 све изводнице пролазе кроз врх купе, то и све додирне равни пролазе кроз врх купе.

Теорема 45.6. *Кроз једну тачку ван купе пролазе највише две равни које додирују купу.*

Доказ. Нека је A дата тачка, V врх купе, β раван њене основе. Ако је тачка A изван купасте површи, права AV сече раван у једној тачки B или јој је упоредна. И тачка B је изван круга основе. У равни β пролазе две дирке тога круга кроз тачку B. Нека су M и N додирне тачке на кругу основе. Равни VAM и VAN су две додирне равни купе, јер садрже само по једну изводницу VM и VN. То су једине додирне равни које пролазе кроз A, јер свака друга раван кроз A, која би садржавала једну изводницу купе, садржала би неку тачку P на кругу основе, дакле извесну његову сечицу BP, те би садржала још једну изводницу и не би била додирна раван.

Ако је права AV упоредна са равни β, нека су M и N додирне тачке двеју дирки круга основе, које су упоредне са правом AV. Тада равни AVM и AVN садрже те дирке, а садрже и по једну изводницу VM и VN, дакле то су сада једине додирне равни које пролазе кроз тачку A.

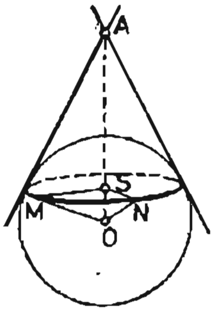
Ако тачка A припада купастој површи, а не поклапа се са V, она припада извесној изводници AV, која сече раван β у тачки C круга основе.

Дирка у равни β на тај круг, која пролази кроз тачку C, и права AV одређују једну додирну раван која пролази кроз A.

Напослетку, ако је A у купастој површи, права AV сече раван β у једној тачки која је у кругу водиље, дакле свака раван која садржи праву AV сече раван β по правој која има тачку у том кругу. Дакле кроз тачку A не пролази ниједна додирна раван. — Тиме је ова теорема у целости доказана.

Теорема 45.7. *Све дирке једне лопте, које пролазе кроз једну тачку, сачињавају праву кружно купасту површ, чија оса пролази кроз средиште лопте.*

Доказ. Нека је A тачка кроз коју пролазе дирке (сл. 372). Нека је затим O средиште лопте, праве AM и AN ма које две дирке, M и N њихове додирне тачке. Троугли AOM и AON су подударни, јер им је страница AO заједничка, $OM=ON$, а према теореми 31.12 је $\sphericalangle AMO=\sphericalangle ANO$. Дакле је и $AM=AN$ и $\sphericalangle MAO=\sphericalangle NAO$. Ако је, дакле, S подножје управне спуштене из M на AO, троугли AMS и ANS су такође подударни. Према томе све праве које спајају тачку S са додирним тачкама, као што су M и N, јесу управне на правој AO. Према теореми 24.2 оне припадају једној равни ν која је у тачки S управна на AO.



Сл. 372

У равни ν је $MS=NS$, тј. све дужи што спајају тачку S са додирним тачкама јесу међу собом једнаке. Према дефиницији 31.1 оне сачињавају круг у равни ν. Према томе дирке ове лопте, које пролазе кроз A, образују кружно купасту површ. Како је оса AS управна на равни ν, то је права кружно купаста површ.

Теорема 45.8. *Постоји бескрајно много лопти које додирују праву кружно купасту површ у по једном кругу. Њихова средишта су на оси те површи.*

Доказ. Нека је A врх кружно купасте површи, α_1 раван упоредна са равни водиље. Како је површ права, њена оса је управна на равни α_1. Према теореми 45.1 раван α_1 сече купасту површ по кругу k, а осу у средишту S тога круга. Нека је MO у равни AMS управна на правој AM. Она сече осу AS у тачки O. Спојимо O са којом било тачком N круга k. Како су троугли AMS и ANS подударни, такође су и троугли AMO и ANO подударни, дакле је $OM=ON$, тј. све тачке круга k припадају једној лопти са средиштем O. Изводнице AM и AN додирују ту лопту, јер су углови $\sphericalangle AMO$ и $\sphericalangle ANO$ прави углови. Дакле та лопта додирује купасту површ по кругу k.

2. Додајмо дефиницију зарубљене купасте површи:

Дефиниција 45.7. Укупност тачака која се састоји из тачака отворене кружно купасте површи, које су између двеју равни упоредних спрам равни њене водиље а не пролазе кроз врх те површи и које секу њене изводнице с исте стране врха, и из тачака двеју кружних површи омеђених пресецима тих двеју упоредних равни, с том купастом површи, називаћемо *зарубљеном кружном купастом површи* или, краће, *зарубљеном купастом површи*.

На ову дефиницију надовезује се дефиниција израза „у" и „ван" зарубљене купасте површи и затим дефиниција зарубљене купе, слично као за купу. — Ово препуштамо читаоцу.

3. Као што разликујемо купасту површ од купе, тако разликујемо и ваљкасту површ од ваљка.

Дефиниција 45.8. Укупност правих упоредних међу собом и које пролазе кроз тачке једног круга а не припадају равни тога круга, називамо *отвореном кружно ваљкастом површи* или, краће, *ваљкастом површи* (такође *цилиндарском површи*). Те праве називају се *изводницама* ваљкасте површи, а тај круг њеном *водиљом*.

Ако су изводнице управне на равни водиље, такву ваљкасту површ називамо *правом ваљкастом површи*. Праву која пролази кроз средиште круга водиље праве ваљкасте површи и упоредна је изводницама зовемо њеном *осом*.

Теорема 45.9. *Пресеци ваљкасте површи двема упоредним равнима које нису упоредне изводницама, јесу подударни кроз све тачке.*

Доказ. Нека су α и α' те две равни, A и B ма које две тачке пресека ваљкасте површи с α, затим a и b изводнице које пролазе кроз те две тачке, A' и B' тачке продора тих двеју изводница с α' тј. две одговарајуће тачке пресека с α' Четвороугао $AA'BB'$ је паралелограм, јер дужи AA' и BB' су упоредне и једнаке; дакле је $AB = A'B'$.

Како су A и B ма које две тачке, пресеци ваљкасте површи с α и α' су према дефиницији 29.1 подударни кроз све тачке.

Из претходне теореме следује непосредно следећа:

Теорема 45.10. *Раван упоредна равни водиље сече ваљкасту површ по кругу који је подударан са кругом водиље.*

Теорема 45.11. *Нека је а права упоредна изводницама ваљкасте површи и која пролази кроз тачку у кругу водиље те површи. Свака права која сече праву а има с ваљкастом површи тачно две заједничке тачке.*

Доказ. Нека је p права која сече праву a. Праве a и p одређују раван σ која садржи тачку продора B праве a кроз раван водиље α. Дакле σ и α секу се по некој правој b. Како је тачка B у кругу водиље, права b сече тај круг у две тачке M и N. Изводнице m и n које пролазе кроз M и N упоредне су правој a, дакле припадају равни σ.

Према томе имамо у равни σ две упоредне праве m и n и праву p која им није упоредна већ их сече у двема тачкама: то су заједничке тачке праве p и ваљкасте површи. С осталим изводницама права p нема заједничких тачака, јер права p припада равни σ, а све остале изводнице пролазе кроз тачке водиље, које су ван σ, дакле и те изводнице су ван целе равни σ.

Дефиниција 45.9. За тачку правих које су упоредне изводницама ваљкасте површи и које пролазе кроз тачку у кругу водиље рећи ћемо да су *у* тој ваљкастој површи. За тачке које нису у ваљкастој површи, нити јој припадају рећи ћемо да су *изван* ње.

Дефиниција 45.10. Укупност тачака која се састоји из тачака кружно ваљкасте површи, које су између двеју равни упоредних спрам равни водиље те површи и из тачака обеју кружних површи омеђених пресецима тих двеју упоредних равни с том ваљкастом површи називаћемо *затвореном кружном ваљкастом површи* или, краће, *затвореном ваљкастом површи*.

Те две кружне површи називаћемо основама затворене ваљкасте површи.

Дефиниција 45.11. За тачке које су у ваљкастој површи, а између двеју равни упоредних спрам равни водиље рећи ћемо да су *у* тој затвореној ваљкастој површи. За тачке које нису у затвореној ваљкастој површи нити јој припадају, рећи ћемо да су *изван* ње.

Дефиниција 45.12. Укупност тачака затворене кружне ваљкасте површи и тачака у тој површи називаћемо *кружним ваљком* или *кружним цилиндром*, краће, *ваљком (цилиндром)*.

За ту ваљкасту површ рећи ћемо да је *површ* тог *ваљка*.

Обе кружне површи које припадају површи ваљка називаћемо *основама* ваљка, а део отворене ваљкасте површи, који припада површи ваљка називаћемо *омотачем ваљка*. Део изводнице отворене ваљкасте површи, који припада површи ваљка називамо *изводницом* ваљка.

Ако је ваљкаста површ права, називаћемо и ваљак *правим*, ако није, називаћемо га *косим* ваљком.

Теорема 45.12. *Раван која садржи дирку једне основе ваљка и изводницу која пролази кроз тачку додира те дирке, има с ваљком само тачке на тој изводници заједничке.*

Доказ. Кад би извесна раван τ садржавала осим те изводнице још неку тачку T омотача ваљка, садржавала би целу изводницу која пролази кроз T, дакле и ону тачку ове изводнице која припада кругу дотичне основе, а ова је различита од додирне тачке уочене дирке. Ово је немогуће, јер раван τ садржи ту дирку.

Дефиниција 45.13. За раван која садржи само једну изводницу кажемо да *додирује* ваљак и зовемо је *додирном равни* тог ваљка, а праву те изводнице *додирном правом* те додирне равни.

Теорема 45.13. *Две додирне равни једног ваљка су или упоредне или се секу по једној правој упоредној спрам изводница тог ваљка.*

Доказ. Како те додирне равни садрже две изводнице, а ове су упоредне, према теореми 38.7 те додирне равни су и саме упоредне или се секу по правој која је упоредна према изводницама тог ваљка.

Теорема 45.14. *Кроз једну тачку могуће је поставити највише две равни које додирују ваљак.*

Доказ. Нека је k круг водиље датог ваљка, A дата тачка. Права која пролази кроз тачку A и упоредна је изводницама ваљка, продире кроз раван водиље у извесној тачки B. — Ако је тачка B изван круга k, кроз њу пролазе две дирке тога круга, које га додирују у извесним тачкама M и N. Раван ABM садржи изводницу ваљка, која пролази кроз тачку M, јер та изводница је упоредна са правом AB. Раван ABN садржи, исто тако, изводницу која пролази кроз N. Дакле ABM и ABN су две додирне равни, које садрже тачку A.

Ако је тачка B на кругу k, кроз њу пролази једна дирка тога круга. Раван која садржи ту дирку и изводницу AB је једина додирна раван, која садржи тачку A.

Ако је тачка B у кругу водиље, свака права у равни водиље, која пролази кроз тачку B, сече тај круг у двема тачкама, дакле и свака раван којој су изводнице упоредне сече ваљак по двема изводницама. Како додирна раван треба да садржи једну изводницу и да је упоредна осталим, не постоји тада ниједна додирна раван, која пролази кроз тачку A.

46. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

У овом параграфу дефинисаћемо на познати начин, полазећи од жижа, елипсу и хиперболу и полазећи од жиже и директрисе, параболу, и доказаћемо о тим линијама методом елементарне геометрије неке њихове најосновније особине. Затим ћемо доказати да је пресек праве кружно купасте површи једном равни, која не пролази кроз њен врх, елипса, хипербола или парабола и пошто дефинишемо конусни пресек као пресек кружно купасте површи једном равни, доказаћемо да су елипса, хипербола и парабола конусни пресеци.

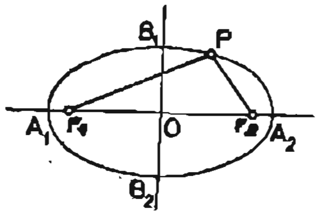
Испитивање конусних пресека и уопште решавање задатака у којима се јављају конусни пресеци, обавља се често методом аналитичке геометрије, због предности које има ова метода. Али испитивање конусних пресека, особито ради утврђивања основних чињеница, припада и елементарној геометрији.

1. Посматраћемо прво елипсу.

Дефиниција 46.1. Нека су F_1 и F_2 две тачке у једној равни. Укупност тачака P у тој равни, за које је збир дужи F_1P и F_2P једнак једној одређеној дужи c,—већој од F_1F_2 кад год се тачке F_1 и F_2 не поклапају — назива се *елипса* (сл. 373).

Средиште дужи F_1F_2 називамо *средиштем елипсе*, тачке F_1 и F_2 жижама елипсе, праву F_1F_2 *главном осом* елипсе, а управну на главној оси, која пролази кроз средиште елипсе, *споредном осом* елипсе. Дуж c називаћемо *дефиниционом дужи* елипсе.

За тачке које припадају елипси кажемо и да су на елипси. Остале тачке у равни елипсе су у елипси или ван ње.



Сл. 373

Дефиниција 46.2. За жиже F_1 и F_2 једне елипсе и за сваку тачку Q те елипсе, за коју је збир дужи F_1Q и F_2Q мањи од дужи c, рећи ћемо да је *у* тој елипси, а за сваку тачку у истој равни, која није у елипси, нити јој припада, рећи ћемо да је *изван* те елипсе.

Докажимо прво три сасвим елементарне теореме.

Теорема 46.1. *Средиште елипсе је у елипси.*

Доказ. Нека су F_1, F_2 жиже, O средиште елипсе, c дефинициона дуж, $c > F_1F_2$. Према дефиницији 46.1 тачка O је средиште дужи F_1F_2, дакле $F_1O+F_2O=F_1F_2$ и према томе $F_1O+F_2O<c$, тј. према дефиницији 46.2 тачка O је у тој елипси.

Теорема 46.2. *Ако се жиже поклапају, елипса је круг, а дефинициона дуж елипсе једнака је пречнику тог круга.*

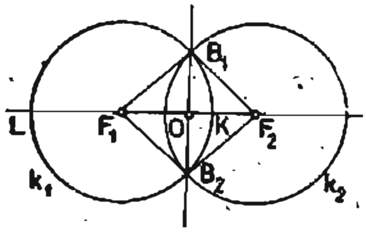
Доказ. Ако се жиже F_1 и F_2 поклапају, елипса је укупност тачака P за коју је $F_1P+F_2P=2F_1P=c$, дакле $F_1P=c/2$, тј. та елипса је круг коме је полупречник једнак $c/2$ и према томе пречник једнак c.

Теорема 46.3. *На главној и споредној оси елипсе постоје по две тачке елипсе, са сваке стране средишта по једна. Оне образују на осама две дужи којима је средиште елипсе заједничко средиште. Ако се жиже не поклапају, дуж на главној оси већа је од дужи на споредној оси.*

Доказ. Нека су опет F_1 и F_2 жиже, c дефинициона дуж и O средиште елипсе. Према аксиоми III 1 и теореми 20.6 постоји на правој F_1F_2, с оне стране тачке O с које је F_1, тачка A_1 и с оне стране тачке O, с које је F_2, тачка A_2 и само те две тачке тако да је $OA_1=OA_2=c/2$, дакле $A_1A_2=c$. Тачке A_1 и A_2 припадају елипси, јер из $OA_1=OA_2$ и $OF_1=OF_2$ следује одузимањем $F_1A_1=F_2A_2$, дакле

$$F_1A_1+F_2A_1=F_1A_1+F_2F_1+F_1A_1=A_1F_1+F_1F_2+F_2A_2=A_1A_2=c.$$

Исто тако имамо
$$F_1A_2+F_2A_2=c.$$



Сл. 374

Нека су k_1 и k_2 кругови у равни елипсе (сл. 374) са средиштима F_1 и F_2 и полупречником $c/2$, и нека су K и L пресеци круга k_1 с правом F_1F_2 и то K с оне стране тачке F_1 с које је F_2, а L са супротне стране. Имамо $F_1K=F_1L=c/2$. – Тачка K је или између F_1 и F_2 или је F_2 између F_1 и K. У првом случају је

$$KF_2=F_1F_2-F_1K<c-\frac{c}{2},$$

тј. $KF_2<\frac{c}{2}$, у другом је

$$KF_2=F_1K-F_1F_2<F_1K,$$

тј. опет је $KF_2<\frac{c}{2}$. Дакле K је свакако у кругу k. Напротив,

$$LF_2=LF_1+F_1F_2>LF_1,$$

тј. $LF_2>\frac{c}{2}$, дакле тачка L је изван круга k_2.

Отуд следује према теореми 35.10 да се кругови k_1 и k_2 секу у двема тачкама B_1 и B_2. Према теореми 31.28 те две тачке су симетричне у односу на праву F_1F_2. Како су полупречници кругова k_1 и k_2 једнаки, имамо $F_1B_1=F_2B_1$, и $F_1B_2=F_2B_2$ дакле права B_1B_2 је симетрала дужи F_1F_2, и према томе истоветна је са споредном осом елипсе. Сем тога је $OB_1=OB_2$, као што је и $OA_1=OA_2$, тј. тачка O је средиште обеју дужи A_1A_2 и B_1B_2.

Напослетку, имамо $F_1B_1+F_2B_1=c$, а $F_1B_1=F_2B_1$, дакле $F_1B_1=c/2$. Исто тако је $F_1B_2=c/2$. Дакле, кад год се жиже не поклапају, а тада се не поклапају ни са средиштем O елипсе, имамо

$$B_1B_2<B_1F_1+F_1B_2,$$

тј. $B_1B_2<c$. Али $A_1A_2=c$. Дакле $A_1A_2>B_1B_2$.

Сад можемо дефинисати велику и малу осну дуж елипсе.

Дефиниција 46.3. Дуж на главној оси елипсе, чији су крајеви тачке елипсе, називаћемо *великом осном дужи*, а дуж на споредној оси елипсе, чији су крајеви тачке елапсе, називаћемо *малом осном дужи*. Крајеви мале и велике осне дужи зову се *темена* елипсе.

Теорема 46.4. *Елипса је симетрична у односу на главну и на споредну осу.*

Доказ. Нека је P ма која тачка елипсе, с извесне стране главне осе. Према аксиоми III 4 постоји тачка P' са супротне стране те осе, тако да је

$$F_1P=F_1P',\qquad F_2P=F_2P'.$$

Отуд следује: прво,

$$F_1P+F_2P=F_1P'+F_2P',$$

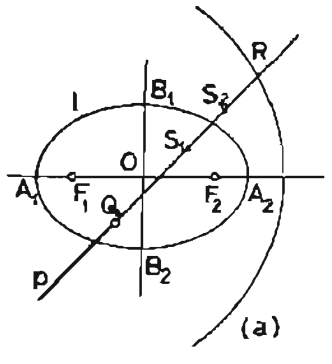
тј. да је и P' тачка елипсе; друго, да су троугли F_1F_2P и F_1F_2P' подударни, тј. тачке P и P' су симетричне у односу на главну осу. Дакле елипса је симетрична у односу на главну осу. – Исто тако доказујемо да је симетрична и у односу на споредну осу.

2. Као што права у равни круга која, има тачку у кругу, сече тај круг, тако је и с елипсом.

Теорема 46.5. *Свака права у равни елипсе, која пролази кроз тачку у елипси, сече елипсу у двема тачкама.*

Доказ. Нека су F_1 и F_2 жиже елипсе l (сл. 375а). Према дефиницији 46.1 постоји дуж c тако да је ма за коју тачку P елипсе l збир дужи F_1P и F_2P једнак дужи c. Ако је T ма која тачка, писаћемо ради краткоће $F(T)$ уместо F_1T+F_2T. Дакле имамо $F(P)=c$.

Нека је Q тачка у елипси l, а p права која пролази кроз Q. Како је Q у елипси, према дефиницији 46.2 је $F(Q)<c$.



Сл. 375а

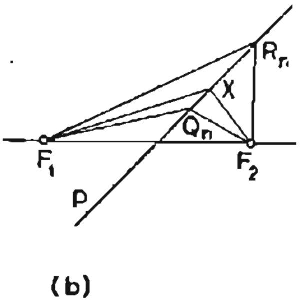
Нека је k круг са средиштем F_1 и полупречником једнаким дужи c. Како је $F_1Q \leqslant F(Q)$, имамо $F_1Q<c$, тј. Q је у кругу k. Дакле према теореми 35.9 права p сече круг k у двема тачкама R и R', које су с разних страна тачке Q. Сем тога је $F_1R=F_1R'=c$, дакле $F(R)>c$, $F(R')>c$, тј. тачке R и R' су изван елипсе l, док је тачка Q у тој елипси. Докажимо да између Q и R и између Q и R' постоји на правој p по једна тачка елипсе l.

Нека је S_1 средиште дужи QR. Ако је $F(S_1)=c$, тврђење је већ доказано. Ако је $F(S_1)<c$, ставимо $S_1 \equiv Q_1$, $R \equiv R_1$. Ако је пак $F(S_1)>c$, ставимо $Q \equiv Q_1$, $S_1 \equiv R_1$. У оба случаја је $F(Q_1)<c$, $F(R_1)>c$. Дуж Q_1R_1 је садржана на дужи QR и $Q_1R_1=\frac{1}{2}QR$.

Нека је S_2 средиште дужи Q_1R_1. Ако је $F(S_2)=c$, тврђење је доказано. Ако је $F(S_2)<c$, ставимо $S_2 \equiv Q_2$, $R_1 \equiv R_2$, ако ли је $F(S_2)>c$, ставимо $Q_1 \equiv Q_2$, $S_2 \equiv R_2$. У оба случаја је $F(Q_2)<c$, $F(R_2)>c$, дуж Q_2R_2 је садржана на дужи Q_2R_1 и $Q_2R_2=\frac{1}{4}QR$.

Наставимо ли овако, добићемо n-тим располовљењем тачку S_n такву да је $F(S_n)=c$ и тада је тврђење доказано, или пак то неће никад бити, а тада је за свако n дуж Q_nR_n садржана на претходној дужи $Q_{n-1}R_{n-1}$ и имамо

$$F(Q_n)<c, \qquad F(R_n)>c, \qquad Q_nR_n=\frac{1}{2_n}QR.$$



Сл. 375b

Према теореми 35.3 низ дужи QR, Q_1R_1, Q_2R_2, . . . је основан низ, дакле према теореми 35.1 постоји једна и само једна тачка X, садржана у свим тим дужима (сл. 375b). Докажимо да је тачка X на елипси l.

Заиста кад би било $F(X)<c$, постојала би дуж h тако да је $F(X)=c-2h$. Изаберимо n тако велико да буде $Q_nR_n<h$. Тада је тим пре $XR_n<h$. Посматрајмо троугле F_1R_nX, и F_2R_nX. Према теореми 26.17 је

$$F_1R_n<F_1X+XR_n \quad \text{и} \quad F_2R_n<F_2X+XR_n,$$

дакле

$$F_1R_n+F_2R_n<F_1X+F_2X+2XR_n<(c-2h)+2h,$$

тј. $F(R_n) < c$, супротно претпоставци да је $F(R_n) > c$. — Исто тако доказујемо да није ни $F(X) > c$. Дакле имамо $F(X) = c$, тј. постоји тачка X елипсе l на правој p, с оне стране тачке Q с које је R.

Исто тако доказујемо да постоји тачка елипсе l с оне стране тачке Q с које је R'. — Тиме је теорема доказана.

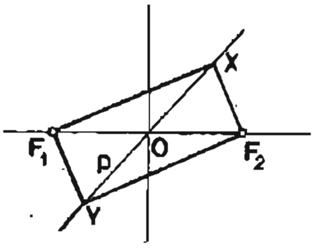
Из теореме 46.5 следује прво ова:

Теорема 46.6. *Свака права у равни елипсе, која пролази кроз њено средиште, сече је у двема тачкама, симетричним у односу на средиште елипсе.*

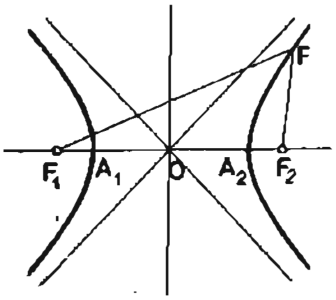
Доказ. Теорема је очигледно тачна кад је p оса елипсе. — Нека је дакле p ма која друга права у равни елипсе l, која пролази кроз средиште O те елипсе (сл. 376). Према теореми 46.5 постоји на p тачка X елипсе l, с једне стране тачке O. Нека је Y тачка на p, с друге стране тачке O, тако да је $OY = OX$.

Троугли OXF_1 и OYF_2 су подударни, јер су углови $\sphericalangle XOF_1$ и $\sphericalangle YOF_2$ унакрсни, дакле једнаки, а $OF_1 = OF_2$, $OX = OY$. Дакле $F_1X = F_2Y$. Исто тако су троугли OXF_2 и OYF_1 подударни, па је и $F_2X = F_1Y$. Према томе је $F_1X + F_2X = F_2Y + F_1Y$, па како је $F(X) = c$, такође је $F(Y) = c$, тј. Y је друга заједничка тачка елипсе l и праве p.

Како је $OX = OY$, тачке X и Y су симетричне у односу на тачку O. Тиме је доказ ове теореме завршен.



Сл. 376



Сл. 377

Из претходне теореме следује на темељу дефиниције 30.1 непосредно ова:

Теорема 46.7. *Елипса је централно симетрична у односу на своје средиште.*

3. Аналого посматрамо хиперболу.

Дефиниција 46.4. Нека су F_1 и F_2 две разне тачке у једној равни. Укупност тачака P у тој равни за које је разлика дужи F_1P и F_2P или F_2P и F_1P једнака једној одређеној дужи c, — мањој од F_1F_2 кад год се тачке F_1 и F_2 не поклапају — назива се *хипербола* (сл. 377).

Средиште дужи F_1F_2 називамо *средиштем хиперболе*, тачке F_1 и F_2 *жижама* хиперболе, праву F_1F_2 *главном осом* хиперболе, а управну на главној оси која пролази кроз средиште хиперболе називамо *споредном осом* хиперболе. Дуж c називаћемо *дефиниционом дужи* хиперболе.

Дефиниција 46.5. За жиже F_1 и F_2 једне хиперболе и за сваку тачку Q у равни те хиперболе, за коју је збир дужи $F_1Q + F_2Q$ већи од дужи c, рећи ћемо да је *у* тој хиперболи, а за тачку у тој равни, која није у хиперболи, нити јој припада, рећићемо да је *изван* те хиперболе.

Теоремама 46.1 и 46.3 одговарају следеће теореме.

Теорема 46.8. *Средиште хиперболе је изван хиперболе.*

Доказ. Како је средиште O хиперболе средиште дужи F_1F_2, разлика дужи F_1O и F_2O не постоји, дакле није ни већа од c ни једнака c и према томе тачка O није у хиперболи, нити јој припада. Дакле O је према дефиницији 46.5 изван хиперболе.

Следеће две теореме доказују се аналого као теорема 46.3 и 46.4.

Теорема 46.9. *На главној оси хиперболе постоје две тачке хиперболе, са сваке стране средишта по једна. Оне образују дуж којој је средиште хиперболе средиште.*

Теорема 46.10. *Хипербола је симетрична у односу на обе своје осе.*

Дефиниција 46.6. Дуж на главној оси хиперболе, чији су крајеви тачке хиперболе, називамо *осном дужи* („реалном осном дужи") хиперболе. Крајеви те осне дужи зову се *темена* хиперболе.

4. И за хиперболу постоји, као и за елипсу, теорема о сечењу хиперболе правом. Доказ је аналоган.

Теорема 46.11. *Свака права у равни хиперболе, која пролази кроз тачку у хиперболи, сече ту хиперболу у двема тачкама.*

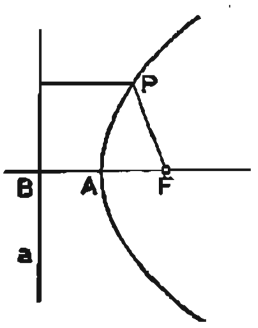
Приметимо да изван елипсе и изван хиперболе постоје праве које с кривом немају заједничких тачака, као што постоје и њихове дирке.

5. Дефинишимо сад параболу.

Дефиниција 46.7. Нека су F и a тачка и права у једној равни. Укупност тачака P у тој равни, за које је дуж FP једнака дужи одређеној тачком P и подножјем управне спуштене из P на a, назива се *парабола* (сл. 378).

Тачку F називамо *жижом*, праву a *равналицом* или *директрисом*, а праву која пролази кроз тачку F и управна је на a, зовемо *осом* параболе.

Дефиниција 46.8. За жижу параболе и за сваку тачку Q у равни те параболе, за коју је дуж одређена тачком Q и подножјем управне спуштене из Q на a већа од дужи FQ рећи ћемо да је *у* тој параболи, а за сваку тачку у тој равни, која није у параболи, нити јој припада рећи ћемо да је *изван* параболе.



Сл. 378

Теорема 46.12. *На оси параболе постоји једна и само једна тачка параболе.*

Доказ. Нека је тачка B подножје управне спуштене из жиже F параболе на њену равналицу a, затим A средиште дужи BF. Како је $AF = AB$, тачка A према дефиницији 46.7 припада тој параболи. Ни за једну другу тачку A' праве BF није $A'F \neq A'B$, дакле тачка A је на оси једина тачка параболе.

Дефиниција 46.9. Тачка параболе, која је на њеној оси, зове се теме параболе.

Теорема 46.13. *Парабола је симетрична у односу на своју осу.*

Доказ препуштамо читаоцу.

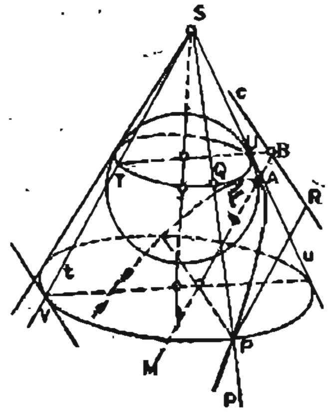
Други део следеће теореме доказује се аналого као теорема 46.5. Доказ првог дела је кратак.

Теорема 46.14. *Свака права у равни параболе која је упоредна са њеном осом, сече параболу у једној и само једној тачки. Свака друга права у равни параболе, сече параболу у двема тачкама.*

6. У следећим трима теоремама посматрамо пресеке праве кружно купасте површи једном равни. Пресек је елипса, хипербола или парабола. Посматрајмо напр. прво случај кад је пресек парабола, затим кад је хипербола и елипса.

* **Теорема** 46.15. *Свака раван упоредна једној додирној равни праве кружно купасте површи, сече ту површ по једној параболи.*

Доказ. Нека је S врх праве купасте површи, τ додирна раван која садржи изводницу t купасте површи, σ раван која садржи праву t и осу купасте површи (сл. 379). Раван σ је управна на равни τ, јер је управна на дирци круга водиље, садржаној у τ. Раван σ сече купасту површ по двема изводницама, једна је t, друга нека буде u.



Сл. 379

Нека је α која било раван упоредна равни τ. Она сече праву u у извесној тачки A, дакле постоји свакако пресек купасте површи и равни α. Докажимо да је то парабола.

Равни α и σ секу се по правој AM, упоредној према t. Од свих лопти које додирују, по теореми 45.8. купасту површ по једном кругу, једна додирује и раван α у извесној тачки F. Њено средиште је она тачка на оси купасте површи која располовљује дуж од врха S до пресека осе с α. Тачка F припада правој AM. Нека буде β раван додирног круга те лопте, затим TU пресек равни β и σ, при томе T тачка праве t, U тачка праве u, а B пресек правих AM и TU. Како су равни α и β управне на σ, управан је и њихов пресек BC на σ, дакле праве BC и AM су управне међу собом.

Нека је p ма која изводница површи, различита од t. Како је само изводница t упоредна са α, права p продире кроз α у некој тачки P. Изводница p сече додирни круг у извесној тачки Q. Нека је R тачка пресека правих TQ и BC. Праве p и TQ секу се у Q, дакле припадају једној равни. Ова сече α и τ по паралелним правим, тј. праве PR и t су упоредне. Но како су праве t и AM упоредне, праве PR и AM су такође упоредне па је према томе права PR управна на BC.

Напослетку, нека буде γ раван упоредна равни β и која пролази кроз тачку P. Она сече праву t у тачки V. Како је купаста површ права, имамо $SQ=ST$ и тако исто $SP=SV$, дакле је $PQ=VT$. Но PQ је дирка додирне лопте, а PF је друга дирка, спуштена из P и садржана у равни α. Дакле према теореми 45.7 је $PF=PQ$ и према томе $PF=VT$. Али $VT=PR$, јер су то две упоредне дужи, отсечене упоредним равнима β и γ. Према томе је $PF=PR$. Како је дуж PR управна на BC, тачка P припада, према дефиницији 46.7, параболи којој је F жижа, а BR равналица. — Лако се показује да је и обратно: свака тачка те параболе једна од ових тачака P, тј. да је пресек купасте површи и равни α једна парабола.

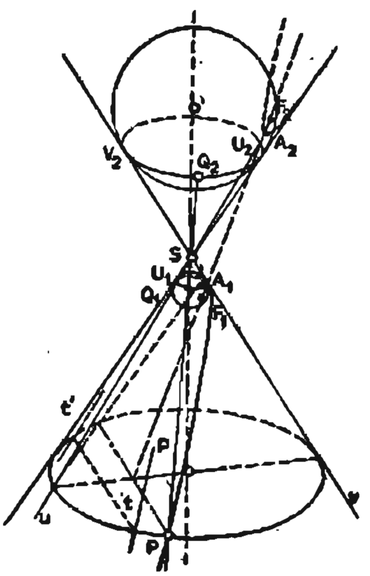
* **Теорема** 46.16. *Свака раван упоредна двема изводницама праве кружно купасте површи сече ту површ по једној хиперболи.*

Доказ. Нека су t и t' две изводнице, α раван упоредна спрам тих изводница, σ раван која садржи осу површи и управна је на α. Раван σ сече купасту површ по двема изводницама u и v. Једине изводнице упоредне с α су t и t', јер остале пролазе кроз врх S, који је у равни tt', и кроз тачке круга водиље, које су ван tt'. Дакле свака друга изводница сече раван α у једној тачки. Нека су A_1 и A_2 тачке у којима изводнице u и v секу раван α (сл. 380). Оне припадају пресеку купасте површи и равни α. Докажимо да је то хипербола.

Равни α и σ секу се по правој A_1A_2. Сваку лопту, која додирује купасту површ по неком кругу, сече раван σ по кругу. Два таква круга додирују још и праву A_1A_2: један додирује праву u с оне стране тачке S с које је тачка A_1, други праву v с оне стране тачке S с које је тачка A_2. Нека је λ_1 додирна лопта којој припада први круг k_1, а λ_2 друга, којој припада други круг k_2.

Нека су F_1 и F_2 додирне тачке лопти λ_1 и λ_2 с равни α. Како су обе те лопте, као и купаста површ, симетричне у односу на σ, тачке F_1 и F_2 су у σ, тј. на правој A_1A_2. Нека су β_1 и β_2 равни додирних кругова лопти λ_1 и λ_2, затим U_1V_1 и U_2V_2 пресеци равни β_1 и β_2 са равни σ. При томе су U_1 и U_2 тачке на изводници u, а V_1 и V_2 на v.

Нека буде p ма која изводница различита од t и t'. Како су само те две изводнице упоредне с α, права p продире кроз α у одређеној тачки P. Права p сече додирни круг k_1 у извесној тачки Q_1, други круг k_2 у извесној тачки Q_2. Како су k_1 и k_2 с разних страна врха S, тачке Q_1 и Q_2 су такође с разних страна тачке S.



Сл. 380

Права PQ_1 је дирка на λ_1, Q_1 тачка додира, а PF_1 друга дирка на λ_1 из исте тачке P. Дакле, према теореми 45.7 је $PF_1 = PQ_1$. Исто тако је PQ_2 дирка на λ_2, Q_2 тачка додира, а PF_2 друга дирка на λ_2 из исте тачке P. Дакле је $PF_2 = PQ_2$.

Тачка P може бити с оне стране тачке S с које је Q_1 или с оне с које је Q_2. Претпоставимо да је с оне стране с које је Q_1: Тада је $PQ_1 < PQ_2$ и $PQ_2 - PQ_1 = Q_1Q_2$, а отуд

$$PF_2 - PF_1 = PQ_2 - PQ_1 = Q_1Q_2.$$

Но за све изводнице p дужи Q_1Q_2 су једнаке, јер су равни β_1 и β_2 упоредне међу собом и управне на оси. Дакле према дефиницији 46.4 све тачке P припадају једној хиперболи.

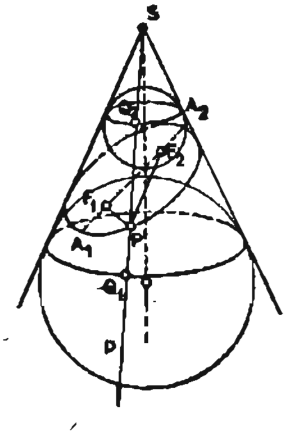
Лако се показује да је и обратно, свака тачка те хиперболе једна од тачака P, тј, да је пресек купасте површи и равни α хипербола.

Теорема 46.17. *Свака раван која није упоредна ниједној изводници праве кружно купасте површи и не пролази кроз њен врх, сече ту површ по једној елипси.*

Доказ. Ако је пресечна раван упоредна равни водиље, пресек је према теореми 46.1 круг, тј, елипса којој се жиже поклапају.

Нека је τ друга раван која пролази кроз врх S купасте површи и нема других заједничких тачака с том купастом површи. Тада раван α, упоредна с τ, сече сваку изводницу у по једној тачки. Нека су λ_1 и λ_2 лопте које додирују купасту површ по два круга и који додирују раван α

у двема тачкама F_1 и F_2 (сл. 381). Те две лопте су с разних страна равни α. Равни β_1 и β_2 тих додирних кругова су пак управне на оси купасте површи, дакле упоредне међу собом.



Сл. 381

Нека је p ма која изводница купасте површи, P њен продор кроз раван α. Како су λ_1 и λ_2 са разних страна равни α, продори Q_1 и Q_2 праве p кроз β_1 и β_2 су такође са разних страна тачке P. Према томе је

$$PF_1+PF_2=PQ_1+PQ_2=Q_1Q_2.$$

Но дужи Q_1Q_2 су једнаке за све изводнице, дакле према дефиницији 46.1 све тачке P припадају једној елипси.

Лако се показује да је и обратно, свака тачка те елипсе једна од тачака P, тј. да је пресек купасте површи и равни α елипса.

Лопте које су посматране у доказима претходних трију теорема, називају се по француском геометру Данделину који је запазио њихову улогу, *Данделиновим лоптама*.

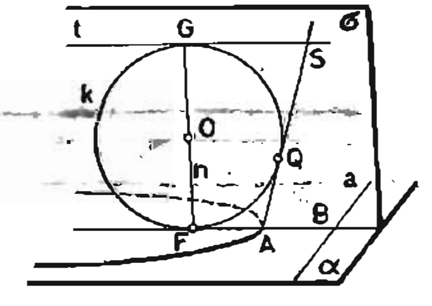
7. Сад можемо лако доказати следећу значајну теорему:

Теорема 46.18. *Свака раван која не пролази кроз врх кружно купасте површи, сече ту површ било по елипси (подразумевајући и круг), било по параболи или хиперболи.*

Доказ. Нека је α та раван, τ упоредна раван, која пролази кроз врх купасте површи. Раван τ има с купастом површи две заједничке изводнице, или додирује купасту површ по једној изводници, или нема заједничких тачака с купастом површи (теорема 45.2). У првом случају пресек равни α с купастом површи је према теореми 46.16 хипербола, у другом случају је, према теореми 46.15 парабола, у трећем случају је према теореми 46.17 елипса (у случају упоредности равни водиље и те равни α та елипса је круг).

Докажимо и обрнуте теореме:

Теорема 46.19. *Свака парабола је пресек једне праве кружно купасте површи једном равни.*



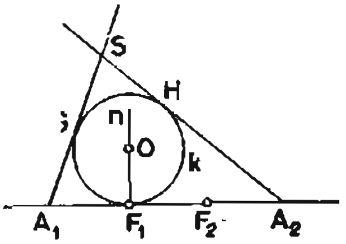
Сл. 382

Доказ. Дата је парабола у равни α, са жижом F и равналицом a (сл. 382). Нека је тачка B подножје управне из F на a, и нека је A средиште дужи FB. Према дефиницији 46.9 A је теме параболе. Поставимо кроз F праву n управну на α и кроз осу AF раван σ управну на α. Раван σ садржи праву n. Нека је O ма која тачка на n, различита од F, затим λ лопта са средиштем O и полупречником OF; она додирује раван α у F. Нека је k круг пресека те лопте са σ. Нека су AF и AQ дирке из тачке A на круг k. Нека је затим G пресек управне n и круга k. Дуж FG је један пречник тог круга k. Нека је t дирка тог круга у тачки G, упоредна са дирком AF и нека је S пресек дирке t и дирке AQ.

Све дирке на λ из тачке S образују према теореми 45.7 праву кружно купасту површ. Раван α је упоредна њеној изводници t, дакле сече ту површ, према теореми 46.15 по извесној параболи. Теме те параболе је A, жижа F, равналица a, дакле према дефиницији 46.7 то је дата парабола.

Теорема 46.20. *Свака елипса је пресек једне кружно купасте површи једном равни.*

Доказ. Нека су F_1 и F_2 жиже елипсе, A_1 и A_2 темена на главној оси, α раван елипсе (сл. 383). Нека је σ раван управна на α и која садржи праву A_1A_2, и n управна подигнута у тачки F_1 на раван α. Нека је затим O_1 тачка на n, различита од F_1, рецимо таква да је $O_1F_1 < A_2F_1$. Нека је λ_1 лопта са средиштем O_1 и полупречником O_1F_1. Она додирује раван α. Нека је k њен пресек са равни σ. Ако је G тачка додира друге дирке из A_1 на k, угао $\sphericalangle F_1A_1G$ је оштар. Како је $A_1F_1 < A_2F_1$, имамо такође $O_1F_1 < A_2F_1$, дакле и угао $\sphericalangle F_1A_2H$, где је H тачка додира друге дирке из A_2 на k, је оштар. Према томе права A_1G и A_2H секу се и извесној тачки S, с оне стране праве A_1A_2 с које је круг k. Праве SA_1 и SA_2 додирују лопту λ_1. Све дирке из S на λ_1 образују према теореми 45.7 праву кружно купасту површ. Докажимо да раван α није упоредна ниједној њеној изводници.



Сл. 383

Заиста, k је круг уписан у троугао A_1A_2S, дакле права у равни σ, која пролази кроз S и упоредна је с A_1A_2, нема заједничких тачака са k, а отуд ни раван τ која пролази кроз S и упоредна је с α, нема заједничке тачке са λ_1. Према томе ниједна изводница не припада равни τ, дакле није упоредна с α.

Дакле, према теореми 46.7 раван α сече уочену купасту површ по извесној елипси. Једна жижа јој је F_1, главна оса A_1A_2, темена на њој A_1 A_2, дакле њена друга жижа је F_2. Према дефиницији 46.1 постоји само једна таква елипса, дакле то је дата елипса.

Теорема 46 21. *Свака хипербола је пресек праве кружно купасте површи једном равни.*

Доказ је аналоган доказима претходне две теореме.

8. Ослањајући се на претходне теореме изрецимо ову дефиницију:

Дефиниција 46.10. Укупност тачака заједничких кружно купастој површи и једној равни, називамо *равним конусним пресеком*, краће *конусним пресеком*.

Ако пресечна раван не пролази кроз врх купасте површи, конусни пресек називамо *недегенерисаним*, ако пролази кроз врх, називамо га *дегенерисаним*.

Доносимо најпре следећу теорему:

Теорема 46.22. *Круг, елипса, парабола и хипербола су недегенерисани конусни пресеци.*

Доказ. Према теоремама 46.19, 46.20и 46.21 свака елипса, парабола и хипербола је пресек праве кружно купасте површи једном равни. Ова не пролази кроз врх купасте површи, дакле тај пресек је према дефиницији 46.10 недегенерисани конусни пресек.

Напомена. И пресек косе кружно купасте површи једном равни која не пролази кроз њен врх, је елипса, парабола или хипербола, дакле конусни пресек, али то нећемо доказивати, а лако се доказује методом аналитичке геометрије.

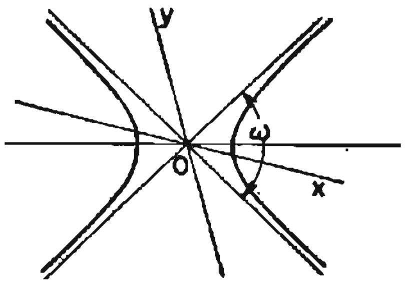
9. Докажимо још две теореме, једну о пресецима елипсе, параболе или хиперболе правом (која следује и из теорема 46.5, ~~46.14 и 46.11) и~~ другу о асимптотама хиперболе.

Теорема 46.23. *Права у равни елипсе, параболе или хиперболе сече се с њом у двема тачкама или је додирује у једној тачки или нема с њом заједничких тачака.*

Доказ. Нека је α раван елипсе, параболе односно хиперболе. Према теоремама 46.19, 46.20 и 46.21 постоји права кружно купаста површ коју сече раван α по самој тој елипси, параболи односно хиперболи. Нека је S врх те површи, β раван кроз S и кроз дату праву a. Према теореми 45.2 раван β сече ту површ по двема изводницама, или је додирује у једној изводници или нема ван S заједничких тачака с њом. Нека су у првом случају T_1 и T_2 тачке продора тих изводница кроз раван α, а у другом случају нека је то тачка T. То су једине заједничке тачке дате елипсе, параболе или хиперболе са равни β, дакле и са правом a. У трећем случају нема заједничких тачака.

Теорема 46.24. *Ма каква била права кружно купаста површ чији пресек је дата хипербола, праве које у равни хиперболе пролазе кроз њено средиште и упоредне су с оним двема изводницама које не секу хиперболу, образују два пара унакрсних углова. Оса хиперболе је располовница једног пара тих унакрсних углова и свака права садржана у том пару унакрсних углова сече хиперболу у двема тачкама; напротив, ниједна права садржана у другом пару унакрсних углова нема с хиперболом заједничких тачака.*

Доказ. Нека су t и t' изводнице упоредне спрам равни α хиперболе, O средиште хиперболе, A_1 и A_2 темена. Нека су m, m' праве које пролазе кроз O и упоредне су с t и t'. Раван σ, која садржи врх купасте површи и осу A_1A_2, сече се са равни tt' по једној правој r. Докажимо да је r располовница једног пара унакрсних углова правих t и t'.



Сл. 384

Заиста раван σ је управна на α, дакле и на равни tt'. Како је управна и на равни водиље γ, управна је на пресеку n равни tt' и γ. Осим тога раван σ сече круг водиље по једном његовом пречнику, дакле тачке пресека тог круга с n, тј. продори правих t и t' кроз γ су симетрични спрам σ, дакле су и саме изводнице t и t' симетричне спрам σ. Отуд следује да је r располовница одговарајућег угла правих t и t'. Обележимо тај угао са φ. Нека је ω угао сагласан са углом φ и коме су краци на правим m и m'. Како је оса A_1A_2 упоредна са r, она располовљује угао ω.

Нека је x ма која права кроз O, у углу ω (сл. 384), затим ξ раван кроз x и S. Равни ξ и tt' секу се по правој x' упоредној с x и која је садржана у углу φ и њему унакрсном углу, дакле продире раван γ у унутрашњости круга водиље. Према томе раван ξ сече круг водиље, дакле и купасту површ по двема изводницама z и z', различитим од t и t'. Дакле, изводнице z и z' продиру кроз раван α у двема тачкама, које према дефиницији 46.4 припадају уоченој хиперболи. То су две тачке пресека праве x са хиперболом.

Ако је, напротив, y права која пролазу кроз O, у равни α, а ван угла ω, затим η раван која пролази кроз y и S, показује се на сличан начин да тада раван η нема ван S тачке заједничке с купастом површи, дакле да ни права y нема заједничких тачака с хиперболом.

Сад можемо дефинисати асимптоте овако:

Дефиниција 46.11. Две праве у равни хиперболе, које пролазе кроз њено средиште и образују један пар унакрсних углова у коме свака права која пролази кроз средиште сече хиперболу, док у другом пару унакрсних углова ниједна права која пролази кроз средиште не сече хиперболу, зову се *асимптоте*.

47. ПРАВИЛНИ МНОГОУГЛИ.

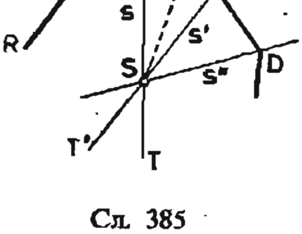
1. Правилним се зову они многоуглни, којима су све странице једнаке и сви углови једнаки. Постоје прости и сложени правилни многоугли. Странице сложеног правилног многоугла секу се међу собом и дају му звездаст облик, као што је правилни пентаграм (пет темена), правилни хептаграм (седам), правилни октограм (осам) итд. Пре проучавања ових полигона било би потребно дефинисати њихове углове (дефиниција 15. односила се само на просте многоугле). Али ми ћемо се ограничити на проучавање простих правилних многоуглова и полазимо од следеће дефиниције:

Дефиниција 47.1. Прост многоугао коме су странице једнаке и углови једнаки називаћемо *правилним простим многоуглом*.

2. Следећом теоремом се утврђује да сваки правилан прост многоугао има средиште.

Теорема 47.1. *Симетрала свих углова и свих страница правилног простог многоугла секу се у једној тачки. Та тачка је једнако удаљена од свих темена тог многоугла и једнако је удаљена од средишта свих његових страница.*

Доказ. Нека су у равни правилног многоугла $ABC \ldots QR$ праве s и s' редом симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$ тог многоугла (сл. 385). Како су та два угла према дефиницији 17.1 једнака, оба су удубљена или оба испупчена, дакле према теореми 11.5 тачке A и D су с исте стране праве BC. Симетрала s садржи располовницу удубљеног угла $\sphericalangle ABC$, а симетрала s' располовницу удубљеног угла $\sphericalangle BCD$. Нека је BT прва и CT' друга располовница. Како посматрамо сад удубљене углове $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$, удубљени углови $\sphericalangle CBT$ и $\sphericalangle BCT'$ су као њихове половине, према дефиницији 26.14 оштри, дакле њихов збир је мањи од збира два права угла. Дакле према теореми 39.5 полуправе BT и CT', тј. и праве s и s' секу се у извесној тачки S.



Сл. 385

Како је s симетрала угла $\sphericalangle ABC$ и $BA = BC$, према теореми 22.5 је $AS = CS$, а како је s' симетрала угла $\sphericalangle BCD$, и $CB = CD$, такође је $BS = DS$. Но како су углови $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$ многоугла једнаки, било да су удубљени или испупчени, истоимени удубљени углови су једнаки, дакле и њихове половине, тј. оштри углови $\sphericalangle SBC$ и $\sphericalangle SCB$ су једнаки и према томе троугао SBC је једнакокрак, тј. $BS = CS$. Дакле имамо $AS = BS = CS = DS$.

Нека је DE страница датог многоугла, суседна страници CD, а s'' симетрала угла $\sphericalangle CDE$ многоугла. И симетрале s' и s'' се секу у извесној тачки S_1, као што се s и s' секу у S. Као што је троугао SBC једнакокрак, тако је и троугао SCD једнакокрак. Но $BC = CD$ и $\sphericalangle SCB = \sphericalangle SCD$, дакле та два једнакокрака троугла су подударна и према томе је $SC = S_1C$, па како су тачке S и S_1 обе на располовници CT' удубљеног угла $\sphericalangle BCD$, тј. с исте стране тачке C, тачке S и S_1 се поклапају, тј. све три симетрале s, s', s'' секу се тачки S.

Посматрајући симетрале s' и s'' као што смо посматрали s и s' добијамо аналогo $BS = CS = DS = ES$.

Према томе, настављајући ово доказивање, налазимо да се симетрале свих углова правилног многоугла секу у једној тачки S и да су све дужи које спајају ту тачку са теменима тог многоугла међу собом једнаке.

Најзад, према теореми 23.9 управна SU спуштена из тачке S на основицу BC једнакокраког троугла SBC је симетрала дужи BC, тј. симетрале дужи BC пролазе кроз исту тачку S и према томе симетрале свих страница датог правилног многоугла пролазе такође кроз тачку S. Како су сви посматрани једнакокраки троугли међу собом подударни, њихове висине су такође међу собом једнаке, дакле тачка S је једнако удаљена од средишта свих страница датог правилног многоугла. – Тиме је цела теорема 47.1 доказана.

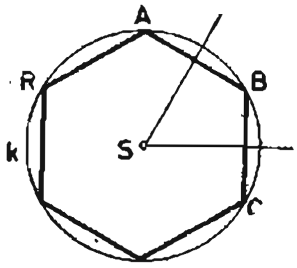
Сад можемо дефинисати средиште правилног многоугла:

Дефиниција 47.2. Тачка у којој се секу симетрале свих страница и свих углова правилног простог многоугла називаћемо *средиштем* тог многоугла.

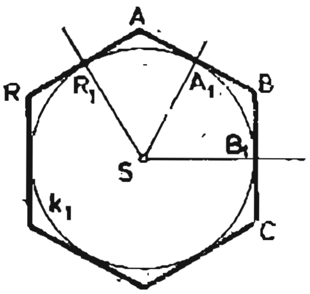
На основи теореме 47.1 може се око правилног многоугла описати круг и у тај многоугао уписати круг.

Теорема 47.2. *Сва темена правилног простог многоугла јесу на једном кругу, чије средиште је средиште тог многоугла.*

Доказ. Нека је то многоугао $AB \dots R$, а његово средиште S (сл. 386). Како је према теореми 47.1 $AS = BS = \dots = RS$, према дефиницији круга сва темена тог многоугла су на кругу k коме је S средиште а те дужи су му полупречници.



Сл. 386



Сл. 387

Теорема 47.3. *Средишта свих страница правилног простог многоугла јесу на једном кругу који додирује све његове странице у тим тачкама.*

Доказ. Нека су A_1, $B_1, \dots, R_1$ редом средишта страница AB, $BC, \dots, RA$. Како су троугли SAB; SBC итд. подударни, њихове одговарајуће висине SA_1 $SB_1, \dots, SR_1$ су једнаке, дакле тачке A_1, $B_1, \dots, R_1$ припадају кругу k_1 коме је S средиште а дужи су му полупречници. Но страница AB је управна на висини SA_1, дакле према теореми 31.13 права AB је дирка круга k_1, са тачком додира A_1. Тако и све друге странице многоугла додирују круг k_1 у својим средиштима. Дакле круг k_1 је уписан у дати правилни многоугао.

Дефиниција 47.3. За круг на коме су сва темена правилног простог многоугла рећи ћемо да је описан око тог многоугла или да је тај многоугао уписан у тај круг.

За круг који додирује све странице простог правилног многоугла рећи ћемо да је уписан у тај многоугао, или да је тај многоугао описан око тог круга.

3. Следећом теоремом утврђује се симетрија правилног простог многоугла.

Теорема 47.4. *Симетрала свакої уїла правилної простої многоуїла је уједно симетрала целої многоуїла: овај је симетричан себи самом у односу на ту праву.*

Доказ. Задржимо обележавање из доказа претходне теореме. Докажимо да је симетрала s угла $\sphericalangle ABC$ правилног многоугла $ABC \ldots QR$ симетрала тог многоугла. Како се троугли SAB и SBC не поклапају, а права SB је симетрала дужи AC, дакле подударни су, јер је $AB=BC$, $SA=SC$ и страница SB им је заједничка, ти троугли су према дефиницији 30.2 симетрични у односу на праву s.

Но и троугли SAR и SCD су подударни, јер је $AR=CD$, $SA=SC$, $SR=SD$. Ако се поклапају имамо $AR=CD$, дакле многоугао је једнакострани троугао ABC и како су му темена A и C симетрична у односу на праву s, цео троугао је симетричан у односу на праву s. Ако се троугли SAR и SCD не поклапају, уочимо четвороугле $SBAR$ и $SBCD$. Како су троугли ABC и BCD подударни, јер је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ и $AB=BC=CD$, имамо $AC=BD$, дакле ликови од по четири тачке $\{A,B,C,D\}$ и $\{B,C,D,S\}$ су подударни кроз све тачке. Како су ликови $\{B,C,S,\}$ и $\{B,A,S\}$, који су у њима садржани, међу собом симетрични, према дефиницији 30.4 су и ти ликови од по четири тачке симетрични у односу на праву s. — Ако се тачке R и D поклапају, многоугао је квадрат и s је његова симетрала. Ако се не поклапају, доказ се слично наставља.

На темељу међусобне једнакости дијагонала AC и BD и свих осталих аналогих дијагонала, као што су CE, NB, QA, доказујемо слично да су и дијагонале AD, BE, RC, QB и све остале аналоге дијагонале међу собом једнаке. Према томе ликови $\{A,B,C,D,S\}$ и $\{B,C,D,E,S\}$ су подударни кроз све тачке, па како су ликови $\{B,C,S\}$ и $\{B,A,S\}$, који су у њима садржани, међу собом симетрични, и претходна два лика су симетрична у односу на s.

Овај поступак настављамо дотле док се два нова троугла не поклопе, дакле две уочене странице не поклапају, или док се на два нова троугла два темена не поклапају. Ако су $C,D,E, \ldots, H$ сва темена многоугла која су с једне стране праве s, а $K, L, \ldots, R$ темена с друге стране праве s, ликови $\{B,C,D, \ldots, H,S\}$ и $\{B,A,R, \ldots, K,S\}$ су подударни кроз све тачке, дакле према дефиницији 30.6 симетрични су у односу на праву s. Према томе, по истој теореми изломљене линије $BCD \ldots H$ и $BAR \ldots K$ су симетричне у односу на s, дакле према теореми 30.7 многоугао је себи самом симетричан у односу на праву s.

Слично се доказује следећа теорема:

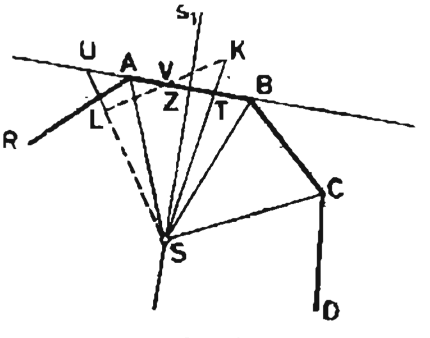
Теорема 47.5. *Симетрала сваке странице правилної простої многоуїла уједно је симетрала целої многоуїла: овај је симетричан себи самом у односу на ту праву.*

Доказ препуштамо читаоцу.

4. Основан значај има следећа теорема:

Теорема 47.6. *Правилан прост многоуїао је испупчен. У односу на коју било њеїову страницу, сва њеїова темена, која нису на тој страници, јесу с оне стране праве која ту страницу садржи, с које је средиште многоуїла.*

Доказ. Докажимо да су сва темена правилног простог многоугла $ABC\ldots R$, сем A и B, с оне стране праве AB с које је средиште S тог многоугла (сл. 388).



Сл. 388

Нека је s симетрала странице AB, а Z пресек с том страницом. Претпоставимо да многоугао има теме K с оне стране праве AB с које није тачка S. Тада дуж SK сече праву AB у извесној тачки T, дакле дуж ST је мања од дужи SK, па како је $SK = SA$, мања је од SA. Према теореми 25.18 је $ZT < SA$, дакле тачка T је на дужи AB.

Нека је L теме многоугла, суседно темену K. Како је $\sphericalangle ASB = \sphericalangle KSL$, а крак SK је у углу $\sphericalangle ASB$, крак SL је изван тог угла. Дакле према теореми 25.18, ако полуправа SL сече праву AB, сече је у извесној тачки U, таквој да је $SU > SA$, дакле $SU > SL$, тј. тачка L је с оне стране праве AB с које је S. — Дакле права AB сече дуж KL у извесној тачки V. Исто тако и обратно, права KL сече дуж AB у тачки V, дакле у тачки V се секу странице AB и KL многоугла, што је немогуће, јер је многоугао прост.

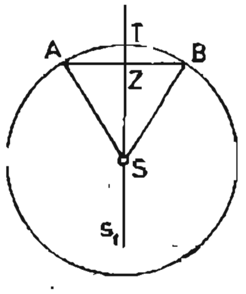
Према томе сва темена многоугла $AB\ldots R$ су с оне стране праве AB с које је тачка S, дакле према дефиницији 15.5 многоугао је испупчен.

5. О правилним простим многоуглима докажимо још четири теореме, које имају основан значај.

Теорема 47.7. *Средиште правилног простог многоугла је у том многоуглу.*

Доказ. Како је прост многоугао према теореми 47.6 испупчен, симетрала s његове странице AB сече га према теореми 15.4 у двема тачкама, Y и Z, при чему је Z средиште дужи AB. Тачка Y припада пак некој другој страници KL тог многоугла, и према теореми 47.6 тачке K, L и S су с исте стране праве AB, дакле и тачке Y и S су с исте стране праве AB, и према томе на s тачке Y и S су с исте стране тачке Z. Исто тако, тачке A, B и S су с исте стране праве KL, дакле тачке Z и S су на s с исте стране тачке Y. Дакле S је између Y и Z. Према дефиницији 15.6 тачка S је у датом многоуглу.

Полазећи од средишта, правилан прост многоугао може се разложити на подударне троугаоне површи.



Сл. 389

Теорема 47.8. *Дужи* AS, BS, $CS, \ldots, NS$, *које спајају средиште* S *правилног простог многоугла* $ABC\ldots N$ *са његовим теменима, разлажу површ тог многоугла на троугаоне површи* (ABS), $(BCS), \ldots, (NAS)$.

Доказ. Нека је P ма која тачка у датом многоуглу. Права PS пролази кроз две његове тачке, U и V. Имамо $U-P-S$ или $V-P-S$. Рецимо да је $U-P-S$. Ако се U поклапа с извесним теменом многоугла, тачка P је на оним двема од поменутих троугаоних површи, којима је страница US заједничка. Ако је U унутарња тачка извесне странице KL, према дефиницији 7.2 тачка P је у троугаоној површи KLS и само у тој једној од уочених троугаоних површи.

Докажимо да је и обратно, свака тачка, која припада једној од тих троугаоних површи, припада датој многоугаоној површи. — Ако је P тачка на једној од дужи AS, BS, $\ldots$, NS, рецимо да је на AS. Тада се тачка P поклапа с теменом A многоугла или је $A-P-S$, а тада полуправа PA, која полази из P, има с многоуглом само тачку A заједничку, дакле P је према дефиницији 15.6 у многоуглу. Ако P није на тим дужима, полуправа PT која полази из P и пролази кроз коју било тачку T на извесној страници многоугла, има с многоуглом само тачку T заједничку и опет је тачка P у многоуглу.

Дакле према дефиницији 15.9 дати многоугао је разложен на те троугаоне површи.

Основан значај има следећа теорема. Приметимо да за правилне полиједре таква теорема није тачна.

Теорема 47.9. *За сваки природни број* n, *већи од* 2, *постоји правилан прост многоугао, уписан у датом кругу и који има* n *темена.*

Доказ. Нека је у датој равни α круг k са средиштем O, затим p_1 полуправа у α, која полази из O, а права којој припада полуправа p_1 и нека су λ и μ оба опружена угла у равни α, којима је руб a. Према теореми 35. постоји у полуравни λ, полазећи од полуправе Op_1, низ полуправих Op_2, $Op_3, \ldots$ Op_n $(n \geqslant 3)$ које разлажу опружени угао λ на n једнаких удубљених углова $\sphericalangle p_1p_2$, $\sphericalangle p_2p_3, \ldots$ $\sphericalangle p_{n-1}p_n$. Исто тако постоји у опруженом углу μ низ полуправих Op_{n+1}, $Op_{n+2}, \ldots$, Op_{2n}, које разлажу угао μ на n једнаких удубљених углова $\sphericalangle p_np_{n+1}$, $\ldots$, $\sphericalangle p_{n+1}p_{n+2}$, $\ldots$, $\sphericalangle p_{2n-1}p_{2n}$.

Удубљени углови $\sphericalangle p_1p_3$, $\sphericalangle p_3p_5$, $\ldots$, $\sphericalangle p_{2k-1}p_{2k+1}$, $\ldots$, $\sphericalangle p_{2n-1}p_{2n}$ садрже по два од тих суседних удубљених углова, дакле садрже свих $2n$ удубљених углова, и према томе оба опружена угла λ и μ. Дакле разлажу раван α на n једнаких углова. Сваки од углова последњег низа садржи по два суседна угла претходних двају низова, дакле сви углови последњег низа су међу собом једнаки. Полуправе p_1, p_3, $\ldots$, p_{2n-1} секу круг k редом у извесним тачкама A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Како је $A_1O=A_2O= \ldots =A_nO$ и $\sphericalangle A_1OA_2=\sphericalangle A_2OA_3= \ldots =\sphericalangle A_nOA_1$, сви једнакокраки троугли A_1A_2O, $A_2A_3O, \ldots$, A_nA_1O су подударни, дакле

$$A_1A_2=A_2A_3= \ldots =A_nA_1 \tag{1}$$

и

$$\sphericalangle A_2A_1O=\sphericalangle A_1A_2O=\sphericalangle A_3A_2O=\sphericalangle A_2A_3O= \ldots =\sphericalangle A_nA_1O. \tag{2}$$

Како је свака од n дужи (1) у другом од оних n удубљених углова, многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ је прост. Према релацијама (1) све његове странице су једнаке. Докажимо још да су му и сви углови једнаки.

Заиста, како су углови $\sphericalangle A_nA_1O$ и $\sphericalangle A_2A_1O$ суседни, тачке A_n и A_1 су с разних страна праве A_1O, дакле удубљени угао $\sphericalangle A_nA_1A_2$ једнак је збиру претходна два угла. Исто тако је удубљени угао $\sphericalangle A_1A_2A_3$ једнак збиру два угла $\sphericalangle A_1A_2O$ и $\sphericalangle A_3A_2O$, итд. Дакле, према (2) је

$$\sphericalangle A_nA_1A_2=\sphericalangle A_1A_2A_3= \ldots =\sphericalangle A_{n-1}A_nA_1,$$

тј. и сви углови многоугла $A_1A_2\ldots A_n$ су једнаки. Према дефиницији 47.1 то је правилан прост многоугао. Према дефиницији 47.3 тај многоугао је уписан у кругу k. — Тиме је доказ ове теореме завршен.

Теорема 47.10. *Сваки угао правилног простог многоугла са* n *темена једнак је* (n — 2)·2R/n.

Доказ. Према теореми 39.14 збир углова простог многоугла једнак је $(n-2)\cdot 2R$, дакле кад је многоугао правилан, сваки угао једнак је n-том делу проширеног угла, који је једнак $(n-2)\cdot 2R$.

48. ПРАВИЛНИ РОГЉЕВИ И ПРАВИЛНИ ПОЛИЈЕДРИ.

1. Правилни рогљеви могу бити, као и правилни многоугли, прости и сложени. Правилан прост рогаљ дефинишемо слично као прост многоугао.

Дефиниција 48.1. Прост једнострано раширен рогаљ коме су све пљосни једнаке и сви диједри једнаки називаћемо *правилним простим рогљем*.

Посматрање правилних рогљева може се изводити истим путем као посматрање правилних многоуглова. Тако имамо ову теорему:

Теорема 48.1. *Симетралне равни свих диједара и свих пљосни простог правилног рогља секу се по једној полуправој. Та полуправа одређује са свим ивицама једнаке углове.*

Аналого дефиницији 47.2. имамо следећу:

Дефиниција 48.2. Полуправа по којој се секу симетрале свих диједара и свих пљосни простог правилног рогља називамо *осом* тог рогља.

Лако би се могле доказати следеће теореме:

Теорема 48.2. *Све ивице правилног простог рогља јесу на једној правој кружно купастој површи, чија оса је оса тог рогља.*

Дефиниција 48.3. За купасту површ на којој су све ивице простог правилног рогља рећи ћемо да је *описана* око тог рогља или да је тај рогаљ *уписан* у ту купасту површ.

За купасту површ која додирује све пљосни простог правилног рогља рећи ћемо да је *уписана* у тај рогаљ, или да је рогаљ *описан* око те купасте површи.

Теорема 48.3. *Симетрална раван сваког диједра простог правилног рогља уједно је симетрална раван целог рогља: овај је симетричан себи, самом у односу на ту раван.*

Теорема 48.4. *Симетрална раван сваке пљосни простог правилног рогља уједно је симетрална раван целог рогља: овај је симетричан себи самом у односу на ту раван.*

Теорема 48.5. *Правилан прост рогаљ је испупчен. У односу на коју било његову пљосан, све његове ивице, које нису на тој пљосни, јесу с оне стране равни која садржи ту пљосан, с које је оса рогља.*

Теорема 48.6. *За сваки природан број* n, *већи од 2, постоји правилан прост рогаљ, уписан у датој кружно купастој површи и који има* n *ивица.*

Погодно је доводити у везу правилне просте рогљеве с правилним простим многоуглима. Докажимо сад следећу теорему:

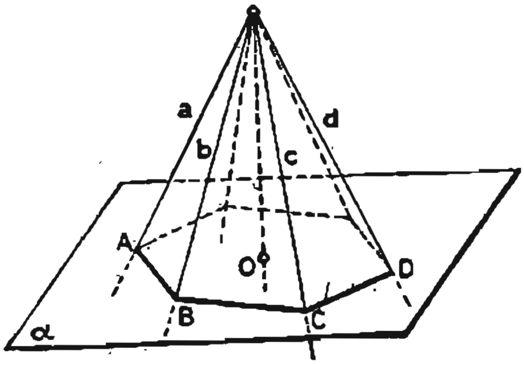
Теорема 48.7. *Тачке* A, B, . . . , M *редом на ивицама* a, b, . . . , m *правилног простог рогља* Sab . . . m *и које су једнако удаљене од врха* S, *јесу темена правилног простог многоугла* AB . . . M.

Доказ. Многоугао $AB\ldots M$ је прост, јер кад не би био прост, кроз пресечну тачку двеју његових страница пролазила би полуправа по којој би се секле две пљосни датог рогља, дакле овај не би био прост.

Како су према дефиницији 48.1. пљосни рогља $ABCD\ldots M$ једнаке, тј. $\sphericalangle ab=\sphericalangle bc=\ldots=\sphericalangle ma$, према теореми 21.2 је $AB=BC=\ldots=MA$. Докажимо да је многоугао $ABC\ldots M$ раван многоугао. Доказ доносимо у скраћеном облику.

Нека су, аналого као у доказу теореме 47.1, σ и σ' симетралне равни диједара датог рогља, којима су ивице редом b и c (сл. 390). Како су та два диједра једнака, оба су удубљена, или оба испупчена, дакле полуправе a и d су с исте стране равни BCS.

Нека је на темељу теореме 16.8 τ раван која пролази кроз тачке B и C и сече све ивице рогља, а сам рогаљ по извесном простом многоуглу $A'B' \ldots M'$, при чему је $B' \equiv B$, $C' \equiv C$. Како су a и d с исте стране равни BCS, тачке A' и D' су с исте стране те равни, дакле и с исте стране праве $B'C'$ у равни τ.



Сл. 390

Нека је σ_1 симетрална раван угла $\sphericalangle bc$. Како су диједри рогља, с ивицама b и c, једнаки, а углови $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle dc$ једнаки и с исте стране равни BCS, имамо $A'B' = D'C'$ и $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle D'C'B'$, дакле $A'C'$ и $B'D'$ секу се у извесној тачки P, која је у равни σ_1. Како су и дужи AC и BD симетричне у односу на σ_1, секу се у извесној тачки Q, дакле све четири тачке A,B,C,D припадају једној равни α. Отуд следује да је многоугао $AB \ldots M$ раван многоугао.

Нека је O подножје управне спуштене из S на раван α. Из подударности пљосни и диједара датог рогља закључујемо лако да је $AS = BS = \ldots = MS$, а отуд преко једнакокраких троуглова ABS, BCS, $\ldots$, MAS, да су и углови $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\ldots$, $\sphericalangle MAB$ једнаки. — Дакле многоугао $AB \ldots M$ је правилан прост многоугао.

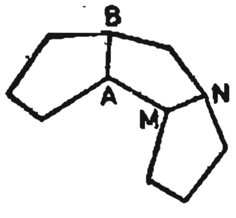
2. Пређимо на посматрање правилних полиједара.

Дефиниција 48.4. Полиједар коме су рогљеви правилни и пљосни правилне просте равне многоугаоне површи, називамо *правилним полиједром*.

Докажимо прво неке теореме које вреде за све правилне полиједре.

Теорема 48.8. *Све ивице правилног полиједра су међу собом једнаке.*

Доказ. Нека је AB ма која ивица (сл. 391). Она припада двема пљоснима, дакле двама правилним многоуглима. Све ивице које су на тим пљоснима су дакле међу собом једнаке. Нека је MN која било друга ивица на тим двема пљоснима. Она припада и некој трећој пљосни, чије ивице су такође све међу собом једнаке, дакле једнаке и претходним ивицама. Ако наставимо овако, обићи ћемо све пљосни полиједра, јер према дефиницији полиједар је повезано мноштво многоугаоних површи. Дакле све ивице правилног полиједра су међу собом једнаке.



Сл. 391

Теорема 48.9. *Сви углови правилног полиједра су међу собом једнаки.*

Доказ. Посматрајмо коју било пљосан полиједра. Њен руб је правилан многоугао с извесним бројем m страница. Сваки угао тог многоугла једнак је према теореми 47.10 $(m-2)\cdot 2R/m$. Ако је A једно теме тог многоугла, угао посматраног многоугла припада рогљу полиједра, коме је теме A, као једна пљосан тог рогља. Но према дефиницији 48.4 тај рогаљ је правилан, дакле све његове пљосни су једнаке, тј. углови свих многоуглова с теменом A су међу собом једнаки и износе $(m-2)\cdot 2R/m$. Према томе сви углови на рогљевима чија темена припадају једној пљосни, једнаки су међу собом.

Посматрајмо другу пљосан полиједра, која има заједничко теме с првом. Како су сви углови на рогљевима те друге пљосни једнаки међу собом, а обе пљосни имају бар један заједнички рогаљ, сви углови на рогљевима једне и друге пљосни једнаки су међу собом. Ако наставимо тако обићи ћемо све рогљеве полиједра. Дакле сви углови правилног полиједра једнаки су међу собом.

Теорема 48.10. *Сви рогљеви правилног полиједра су међу собом подударни.*

Доказ. Треба доказати да су на свим рогљевима правилног полиједра пљосни једнаке и диједри једнаки. Пљосни рогљева су углови полиједра, а ови су према теореми 48.9 сви једнаки. Дакле пљосни свих рогљева су једнаке међу собом.

Нека је AB ивица полиједра. Полуправа AB с почетком у тачки A, је ивица једног рогља полиједра, коме је теме A, а полуправа BA с почетком B је ивица рогља коме је теме B. Диједар првог рогља и коме је ивица AB је, очигледно, истоветан с диједром другог рогља, коме је ивица такође AB. Дакле оба та диједра тих рогљева су подударна. Но рогљеви правилног полиједра су према дефиницији 48.4 правилни, дакле сви диједри сваког од два рогља с врховима A и B једнаки су међу собом и, према томе, сви диједри тих двају рогљева једнаки су међу собом.

Посматрајући исто тако друга два рогља полиједра, од којих је теме једнога A или B, доказујемо да су сви диједри свих трију уочених рогљева једнаки. Наставимо ли овако, обићи ћемо све рогљеве полиједра. Дакле, сви диједри свих рогљева су једнаки и према томе сви рогљеви правилног полиједра су подударни.

Теорема 48.11. *Све пљосни правилног полиједра су међу собом подударне.*

Доказ. Како су пљоснима полиједра рубови правилни полигони којима су странице ивице полиједра, а углови су углови полиједра и како су према теореми 48.8 све ивице међу собом једнаке и према теореми 48.9 сви углови међу собом једнаки, сви ти полигони имају једнак број страница, и те странице су међу собом једнаке. Дакле ти полигони су подударни и према томе све пљосни правилног полиједра су подударне међу собом.

Следећом теоремом се утврђује да сваки правилан полиједар има средиште.

Теорема 48.12. *Постоји тачка у правилном полиједру, која је једнако удаљена од свих његових темена, од свих његових ивица и од свих његових пљосни.*

Доказ. Подигнимо у средиштима двеју суседних пљосни праве управне на равни тих пљосни. Те две праве се секу, јер припадају равни која је управна на заједничкој ивици обеју пљосни и која ту ивицу полови. Обе управне, узете као дужи од тачке у којој се секу до подножја, јесу једнаке, јер су средишта обеју пљосни једнако удаљена од заједничке ивице.

Према томе пресечна тачка обеју управних једнако је удаљена и од свих темена и од свих ивица обеју пљосни. Како су диједри између сваке две суседне пљосни према теореми 48.10 једнаки, једнаке су и управне дужи спуштене из исте тачке пресека на равни осталих пљосни полиједра, а подножја свих тих управних су средишта појединих пљосни. Дакле та тачка је једнако удаљена од свих пљосни, од свих темена и од свих ивица полиједра.

Дефиниција 48.5. Тачку која је једнако удаљена од свих темена и од свих ивица, и од свих пљосни правилног полиједра, називаћемо *средиштем полиједра.*

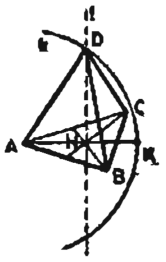
Теорема 48.13. *Правилан полиједар је испупчен полиједар.*

Доказ. Нека је O средиште полиједра, α раван једне његове пљосни π. Све његове пљосни које имају са π заједничку ивицу јесу, сем те ивице, с оне стране равни α с које је тачка O, јер су сва темена тих пљосни једнако удаљена од O. Тим пре су остале пљосни с исте стране равни α. Дакле цели полиједар, сем тачака на тој једној пљосни, јесте с исте стране равни те пљосни, па како то вреди у односу на сваку пљосан, полиједар је испупчен.

3. Пређимо сад на проучавање сваке врсте правилних полиједара засебно.

Теорема 48.14. *Постоји правилан полиједар који има четири пљосни. Те површи су пљосни једнакостраних троуглова. Такав полиједар има четири темена и шест ивица а у сваком темену састају се три његове пљосни.*

Доказ. Нека је H средиште једнакостраног троугла ABC (сл. 392), HI управна на равни ABC, k круг у равни AHI, коме је A средиште а полупречник једнак дужи AB. Како је дуж AH мања од дужи AB, круг k сече праву HI према теореми 35.9 у двема тачкама. Нека је D једна од тих тачака. Троугао ABD је једнакостран, јер је $AB=AD$ а $AD=BD$ (правоугли троугли AHD и BHD су подударни). Дакле једнакострани троугли ABC и ABD су подударни, јер им је једна страница заједничка. Исто тако доказујемо да су троугли ABC и BCD и троугли ABC и CAD подударни једнакострани троугли.



Сл. 392

Четири троугаоне површи (ABC), (ABD), (BCD), (CAD) сачињавају полиједарску површ, наиме пирамидну, с основицом (ABC) и врхом D. Дакле имамо полиједар $ABCD$ коме је то површ. Докажимо да су и рогљеви тог пилиједра правилни. Сваки рогаљ је триједар коме су пљосни једнаке (као углови једнакостраних троуглова), дакле су му према теореми 28.5 и диједри једнаки, тј. сваки рогаљ полиједра је правилан. Како су пљосни полиједра такође правилне, полиједар је према дефиницији 48.4 правилан.

Тиме смо доказали да такав полиједар постоји. Он има четири пљосни (ABC), (ABD), (BCD), (CAD), којима су рубови једнакострани троугли. Темена су A, B, C, D, дакле има их четири, а ивице су: три странице троугла ABC и још три са заједничким теменом D, дакле свега шест. У темену D састају се три пљосни: (ABD), (BCD), (CAD), дакле то важи за свако теме тог полиједра.

Дефиниција 48.6. Правилни полиједар коме су пљосни површи четири једнакострана троугла зове се *правилни тетраедар* (сл. 393).

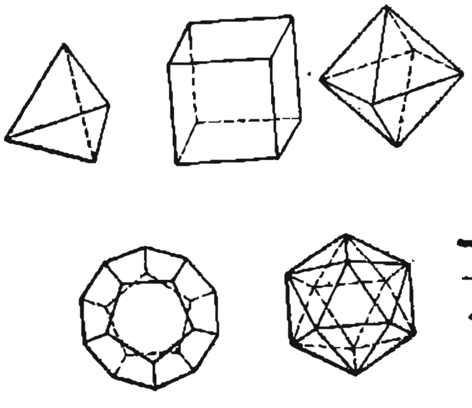
Слично претходној теореми доказују се следеће четири теореме:

Теорема 48.15. *Постоји правилан полиједар који има шест пљосни. Те пљосни су квадратне површи. Такав полиједар има осам темена и дванаест ивица, а у сваком темену састају се три његове пљосни.*

Дефиниција 48.7. Правилни полиједар коме су пљосни шест квадратних површи зове се *правилни хексаедар* или *коцка* (сл. 394).

Теорема 48.16. *Постоји правилан полиједар који има осам пљосни. Те пљосни су површи једнакостраних троуглова. Такав полиједар има шест темена и дванаест ивица, а у сваком темену састају се четири његове пљосни.*

Дефиниција 48.8. Плавилни полиједар коме су пљосни површи осам једнакостраних троуглова зове се *правилни октаедар* (сл. 395).



Сл. 393 – 397

Теорема 48.17. *Постоји правилан полиједар који има дванаест пљосни. Те пљосни су правилне петоугаоне површи. Такав полиједар има двадесет темена и тридесет ивица, а у сваком темену састају се три његове пљосни.*

Дефиниција 48.9. Правилни полиједар коме су пљосни дванаест правилних петоугаоних површи зове се *правилни додекаедар* (сл. 396).

Теорема 48.18. *Постоји правилан полиједар који има двадесет пљосни. Те пљосни су површи једнакостраних троуглова. Такав полиједар има дванаест темена и тридесет ивица, а у сваком темену састају се пет његових пљосни.*

Дефиниција 48.10. Правилни полиједар коме су пљосни двадесет једнакостраних троугаоних површи зове се *правилни икосаедар* (сл. 397).

Основни значај за правилне полиједре има следећа теорема:

Теорема 48.19. *Постоји свега пет врста правилних полиједара: правилни тетраедар, коцка, правилни октаедар, правилни додекаедар и правилни икосаедар.*

Доказ. Како је према дефиницији 48.4 сваки рогаљ правилног полиједра правилан и како се у темену сваког рогља састаје известан број правилних полигона полиједрових пљосни, постоје само следеће могућности:

1. полигони су једнакострани троугли,
2. полигони су крадрати,
3. полигони су правилни петоугли.

Не могу бити правилни шестоугли, према теореми 43.14; нити полигони са преко шест страница.

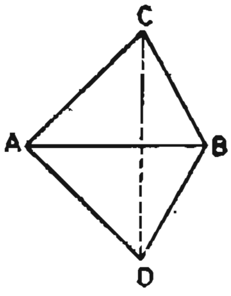
Ако су полигони троугли, у једном темену полиједра могу се састати 1. три троугла (тетраедар), 2. четири троугла (октаедар), 3. пет троуглова (икосаедар). Више од пет једнакостраних троуглова не могу се састати у једном темену, према теореми 43.14.

Ако су полигони квадрати, у једном темену могу се састати три квадрата (коцка). Више од три не могу, јер угао квадрата је прав угао, дакле збир углова у једном темену био би најмање једнак збиру четири права угла, а то је немогуће.

Ако су полигони правилни петоугли, у једном темену могу се састати три петоугла (додекаедар). Више не могу, јер је угао петоугла већи од правог угла, дакле збир углова у једном темену био би већи од збира четири права угла, а то је немогуће. — Тиме је ова теорема доказана.

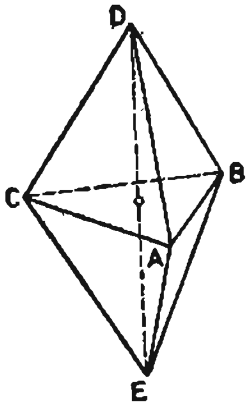
49. ПРЕМЕШТАЈНА ПОДУДАРНОСТ.

1. У подударности долазе до израза чињенице искуства које произлази из кретања. У конкретном бављењу геометријом замишљамо дужи, троугле итд., уопште ликове, како се крећу и сматрамо два лика подударним ако се један кретањем поклопи са другим. У средњошколској геометрији се тако и ради: узима се у помоћ кретање и поклапање, да би се колико-толико доказале неке теореме, као што је такозвана прва теорема о подударности троуглова. И Еуклид је у својим „Елементима" доказао ту теорему постављањем једног троугла на други, тј. кретањем и констатовањем да се тада поклапају.



Сл. 398

Али, подударност коју смо развили из аксиоме подударности, општија је од оне која произлази из самог кретања. Ово још не можемо рећи док посматрамо равне ликове. Нека су напр. ABC и ABC' два разнострана а подударна троугла у једној равни (сл.398), са заједничком страницом AB и теменима C и C' с разних страна праве AB, тј. имамо $AC = AC'$, $BC = BC'$. Ако се ограничимо на кретање ликова у самој равни, дакле при коме троугао ABC остаје у равни ABC, немогуће је довести га до поклапања са троуглом ABC'. У том смислу оба троугла нису „подударна", него само симетрична у односу на праву AB. Али ако допустимо и кретања којима би троугао ABC излазио из равни ABC, поклапање с троуглом ABC је могуће, напр. обртањем око праве AB.



Сл. 399

С ликовима који не припадају једној равни нема, опште узевши, ове могућности. Два разноивична тетраедра $ABCD$ и $ABCD'$ са заједничком пљосни ABC и теменима D и D' с разних страна равни ABC (сл.399) јесу подударна у смислу аксиома и дефиниција ако је $AD = AD'$, $BD = BD'$, $CD = CD'$. У ствари та два тетраедра су симетрична у односу на раван ABC. Но као што се лако види, преношењем тетраедра $ABCD$ немогуће је довести га до поклапања са тетраедром $ABCD'$.

Према томе треба разликовати *општу подударност*, о којој је било досад речи, од оне врсте подударности која се постиже премештањем и поклапањем. Ову, посебну врсту називаћемо *премештајном подударношћу*.

Свако премештање крутог тела у кинематици разлаже се на паралелно померање и окретање (обртање). Према томе разликоваћемо и у геометрији две врсте премештајне подударности: ону која би се конкретно могла утврдити самим паралелним померањем ликова и ону која би се могла утврдити самим окретањем око једне осе. Називаћемо их *померном (транслационом)* и *обртном (ротационом) подударношћу*. Подударни ликови који нису премештајно подударни, укључују симетрију у односу на једну раван.

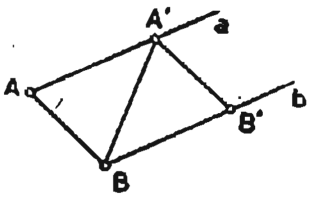
2. Пострајмо прво померну подударност и докажимо пре свега ову теорему.

Теорема 49.1. *Нека су* Aa, Bb, Cc, ... *сагласне полуправе, којима су исходишта тачке* A, B, C, ... *лика* Ω *и нека су редом на тим полуправим тачке* A', B', C', ... *лика* Ω' *такве да је*

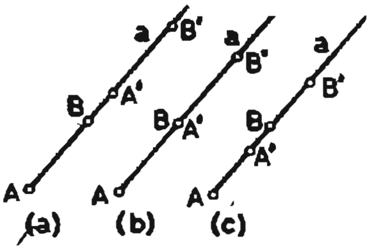
$$AA'=BB'=CC'=\dots$$

Ако на тај начин свакој тачки лика Ω *одговара тачка лика* Ω' *и обратно, оба та лика су подударна кроз све тачке.*

Доказ. Праве AA' и BB' су истоветне или упоредне (према дефиницији 23.1). Узмимо да су упоредне. Како су према истој дефиницији тачке A', B' у равни ABA' с исте стране праве AB, а AA' и BB' су упоредне и $AA'=BB'$, четвороугао $ABA'B'$ је према теореми 40.6 паралелограм и $AB=A'B'$ (сл. 400). То вреди и ма за која друга два пара одговарајућих тачака. Дакле према дефиницији 29.1 ликови Ω и Ω' су подударни кроз све тачке.



Сл. 400



Сл. 401

Ако су праве AA' и BB' истоветне, узмимо да је тачка B на полуправој Aa. Тачка B је или између A и A' или истоветна с A', или је A' између A и B (сл. 401). У првом случају је $AB=AA'-BA'$, $A'B'=BB'-BA'$, у трећем случају је $AB=AA'+A'B$, $A'B'=BB'+A'B$, дакле у оба та случаја је $AB=A'B'$. У другом случају је непосредно $AB=A'B'$.

На основи претходне теореме има смисла следећа дефиниција:

Дефиниција 49.1. Нека су Aa, Bb, Cc, ... једнако управљене полуправе, којима су исходишта тачке A, B, C, ..., лика Ω и нека су редом на тим полуправим тачке A', B', C', ... лика Ω' такве да су дужи AA', BB', CC', ... међу собом једнаке. Ако на тај начин свакој тачки лика Ω одговара тачка лика Ω' и обратно, рећи ћемо да је лик Ω *померно* или *транслационо подударан* с ликом Ω'.

Докажимо неколико теорема о померној подударности.

Теорема 49.2. *Ако је лик* Ω *померно подударан с ликом* Ω', *такође је лик* Ω' *померно подударан с ликом* Ω.

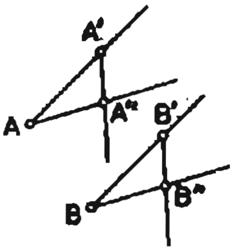
Доказ. Како су праве AA' и BB' упоредне, а A' и B' су с исте стране праве AB, тачке A, B, су такође с исте стране праве $A'B'$ тј, налазе се на сагласним полуправим с исходиштима A' и B'. Осим тога је $A'A=B'B$. Слично је и с осталим тачкама ликова Ω и Ω'. Дакле, ако су $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, ... сагласне полуправе с исходиштима A', B', C', ... и које редом садрже тачке A, B, C, ..., имамо још и $A'A=B'B=C'C=\dots$, дакле према дефиницији 49.1 лик Ω' је померно подударан с ликом Ω.

Према томе кажемо и да су ликови Ω и Ω' померно подударни међу собом. Из теореме 49.1 следује пак непосредно следећа теорема:

Теорема 49.3. *Померно подударни ликови су подударни кроз све тачке.*

Теорема 49.4. *Ако је лик Ω померно подударан с ликом Ω′ а овај померно подударан с ликом Ω″, тада је и лик Ω померно подударан с ликом Ω″.*

Доказ. Нека су A, B две тачке лика Ω и A', B' одговарајуће тачке лика Ω′, A'', B'' одговарајуће тачке лика Ω″ (сл. 402). Према дефиницији 49.1 полуправе $A'A$ и $B'B$ (с исходиштима A' и B') су сагласне, полуправе $A'A''$ и $B'B''$ исто тако, дакле према теореми 39.16 у троуглима $AA'A''$ и $BB'B''$ је $\sphericalangle AA'A'' = \sphericalangle BB'B''$. Како су и одговарајуће странице једнаке, наиме $AA' = BB'$, $A'A'' = B'B''$, такође је $AA'' = BB''$, а и полуправе AA'' и BB'' су сагласне. Дакле, према дефиницији 49.1 оба лика су померно подударна.



Сл. 402

Теорема 49.5. *Нека је* A *тачка лика* Ω, *затим* A′ *ма која друга тачка. Постоји један једини лик* Ω′, *померно подударан с ликом* Ω *тако да тачки* A *лика* Ω *одговара тачка* A′ *лика* Ω′.

Доказ. Према дефиницији 49.1 тачка B' која одговара некој другој тачки B лика Ω је она тачка за коју су полуправе AA' и BB' сагласне и $AA' = BB'$. Дакле B' је на правој која пролази кроз B и упоредна је или истоветна с AA'. Постоји само једна таква права. На њој је тачка B' с оне стране праве AB с које је A', па како је $AA' = BB'$ постоји једна једина таква тачка B'. Ово вреди ма за коју тачку B лика Ω. Дакле постоји лик Ω′ подударан лику Ω и то је једини такав лик.

3. Ради проучавања обртне подударности дефинисаћемо аналого појму сагласних и супротних полуправих (дефиниција 39.1) сагласне и супротне опружене углове, у једној равни или у паралелним равнима.

Свака полуправа неке равни одређује у тој равни два опружена угла којима је та полуправа заједнички крак — исто тако као што свака тачка неке праве одређује на тој правој две полуправе којима је та тачка заједничко исходиште.

Докажимо најпре следећу теорему:

Теорема 49.6. *Свака полуправа је у датој равни заједнички крак двају опружених углова.*

Доказ следује непосредно из дефиниције опруженог угла и чињенице да права дели раван на две полуравни.

Дефиниција 49.2. За два опружена угла у једној равни, којима је полуправа Op заједнички крак, рећи ћемо да су *одређена* полуправом Op.

Један или други опружени угао одређен у равни α полуправом Op обележаваћемо знаком $\sphericalangle(Op)\alpha$.

Дефиниција 49.3. Два опружена угла $\sphericalangle(Op)\alpha$ и $\sphericalangle(Oq)\alpha$ у равни α, одређена полуправим Op и Oq називаћемо *сагласним* у следећа три случаја:

1. ако су те две полуправе истоветне и та два опружена угла истоветна;

2. ако те две полуправе сачињавају једну праву и та два опружена угла једну раван;

3. Ако те две полуправе припадају двема разним правим и ако један од та два опружена угла садржи споменуту полуправу другога, али други не садржи споменуту полуправу првога, тј. ако $\sphericalangle(Op)\alpha$ садржи полуправу

Oq, али $\sphericalangle(Oq)\alpha$ не садржи полуправу Op, или ако $\sphericalangle(Oq)\alpha$ саджи полуправу Op, али $\sphericalangle(Op)\alpha$ не садржи Oq.

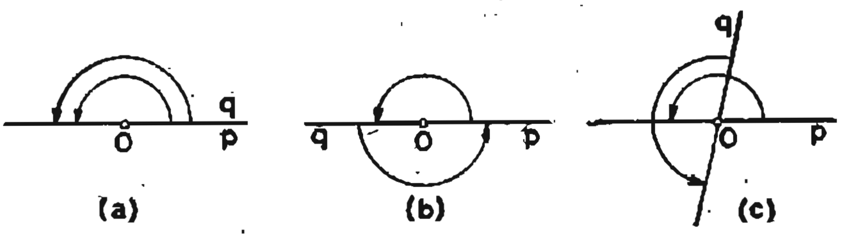
Два опружена угла $\sphericalangle(Op)\,\alpha$ и $\sphericalangle(Oq)\alpha$ у равни α називаћемо *супротним* у следећа три случаја:

1. ако су те две полуправе истоветне а та два опружена угла сачињавају целу раван;

2. ако те две полуправе сачињавају једну праву а та два опружена угла су истоветна;

3. ако те две полуправе припадају двема разним правим и ако сваки од та два опружена угла садржи поменуту полуправу другога, тј. $\sphericalangle(Op)\alpha$ садржи полуправу Oq и $\sphericalangle(Oq)\alpha$ садржи полуправу Op; или ако ниједан од та два опружена угла не садржи споменуту полуправу другога.

У сликама 403 и 404 процртани делови назначују посматране опружене углове. Слике 403 а — с претстављају сагласне опружене углове, а слике 404 а — с претстављају супротне опружене углове.

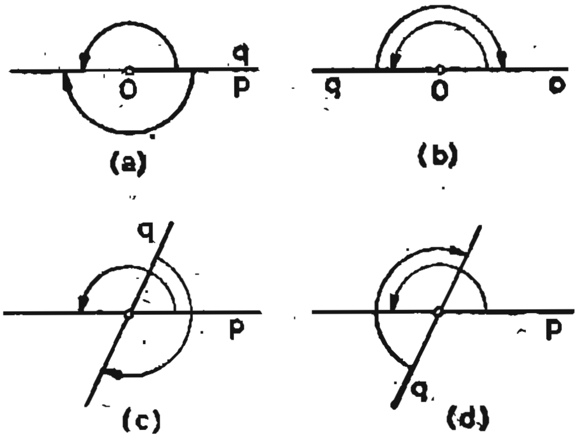


Сл. 403

На основи претходне дефиниције имамо непосредно следећу теорему:

Теорема 49.7. *Ако опружени углови* $\sphericalangle(Op)\alpha$ *и* $\sphericalangle(Oq)\alpha$ *нису сагласни, они су супротни, и обратно.*

Проширимо претходну дефиницију на опружене углове ма с којим теменима у једној или у двема упоредним равнима.



Сл. 404

Дефиниција 49.4. Нека су $\sphericalangle(Aa)\alpha$ и $\sphericalangle(Bb)\beta$ два опружена угла у истој равни ($\alpha \equiv \beta$) или у двема упоредним равнима, с разним теменима A и B; и нека је $\sphericalangle(Ab')\alpha$ опружени угао у равни првог угла, који је померно подударан с опруженим углом $\sphericalangle(Bb)\beta$.

Ако су опружени углови $\sphericalangle(Aa)\alpha$ и $\sphericalangle(Ab')\alpha$ сагласни, рећи ћемо да су и опружени углови $\sphericalangle(Aa)\alpha$ и $\sphericalangle(Bb)\beta$ сагласни. Ако ли су опружени углови $\sphericalangle(Aa)\alpha$ и $\sphericalangle(Ab')\alpha$ супротни, рећи ћемо да су и опружени углови $\sphericalangle(Aa)\alpha$ и $\sphericalangle(Bb)\beta$ супротни.

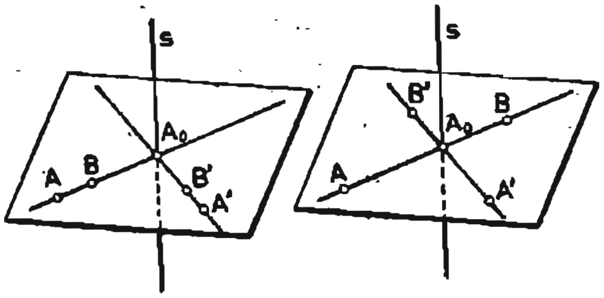
Теорема 49.8. *Нека су* $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, $\sphericalangle(B_0B)\beta$, $\sphericalangle(C_0C)\gamma, \ldots$ *једнако усмерени опружени углови чије су равни управне на извесној правој* s, *а одређени су полуправим* A_0A, B_0B, $C_0C, \ldots$ *чија исходишта су подножја* A_0, B_0, $C_0, \ldots$ *управних спуштених из тачака* A, B, C, ... *лика* Ω *на праву* s. *Нека су затим у тим опруженим угловима редом* A', B', C', ... *тачке лика* Ω', *такве да је*

$$A_0A = A_0A', \qquad B_0B = B_0B', \qquad C_0C = C_0C', \ldots$$

и да су удубљени или опружени углови $\sphericalangle AA_0A'$, $\sphericalangle BB_0B'$, $\sphericalangle CC_0C', \ldots$ *међу собом једнаки. Ако при томе свакој тачки лика* Ω *одговара тачка лика* Ω' *и обратно, ликови* Ω *и* Ω' *су подударни кроз све тачке.*

Доказ. Посматрајмо две ма које тачке лика Ω, рецимо A и B, и одговарајуће тачке A' и B' лика Ω' и докажимо да је $AB = A'B'$. Равни α и β су управне на s, дакле упоредне међу собом, или су истоветне. Претпоставимо прво да су истоветне: $\alpha \equiv \beta$. Тада је $A_0 \equiv B_0$.

Ако су и полуправе A_0A и B_0B истоветне, према дефиницији 49.3 и опружени углови $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ су истоветни, дакле обе тачке B и B' су у $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, па како су удубљени или опружени углови $\sphericalangle AA_0A'$ и $\sphericalangle BB_0B'$ једнаки, они су истоветни (сл. 405). Дакле као што су A и B на полуправој A_0A, тако су и A' и B' на полуправој A_0A'. Но $A_0A = A_0A'$, $B_0B = B_0B'$, дакле ако је напр. $A_0A > A_0B$ и према томе $A_0A' > A_0B'$, имамо $A_0A - A_0B = A_0A' - A_0B'$, тј. $AB = A'B'$.



Сл. 405 – 406

Ако полуправе A_0A и B_0B сачињавају једну праву (сл. 406), према дефиницији 49.3 опружени углови $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ сачињавају једну раван. Ако су осим тога углови $\sphericalangle AA_0A'$ и $\sphericalangle BA_0B'$ опружени, тачке A и A' су с разних страна тачке A_0, а исто тако и тачке B и B', па како су A и A' с разних страна тачке A_0, то су такође и тачке A' и B'. Дакле имамо

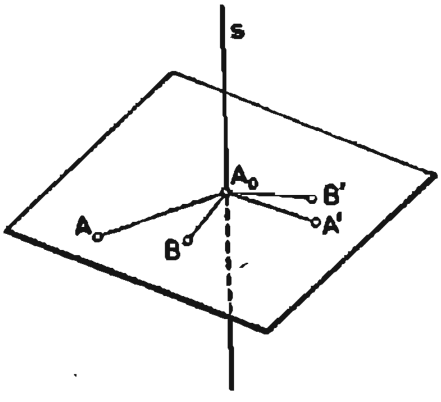
$$AB = AA_0 + A_0B, \qquad A'B' = A'A_0 + A_0B'.$$

Но $A_0A = A_0A'$, $A_0B = A_0B'$, дакле $AB = A'B'$.

Ако ли су углови $\sphericalangle AA_0A'$ и $\sphericalangle BB_0B'$ удубљени, како је A' у $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ а B' у $\sphericalangle(A_0B)\alpha$, тачке A' и B' су с разних страна праве A_0A, дакле и с разних страна тачке A_0. При томе је $\sphericalangle AA_0A' = \sphericalangle BB_0B'$, дакле то су два

два унакрсна угла и A' и B' су с разних страна тачке A_0, као и A и B. Према томе је опет $AB = AA_0 + A_0B$, $A'B' = A'A_0 + A_0B'$ и отуд $AB = A'B'$.

Остаје претпоставка да су праве A_0A и A_0B различите (сл. 407). Тада је тачка B у једном од два опружена угла, одређена полуправом A_0A. Узмимо да је тачка B у $\sphericalangle(A_0A)\alpha$. Како су $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ сагласни, из дефиниције 49.3 следује да A није у $\sphericalangle(A_0B)\alpha$.



Сл. 407

Ако би, напротив, тачка B била ван $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, била би тачка A у $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ и заменили бисмо у посматрању међу собом A, A' и B, B'. — Претпоставимо прво да су $\sphericalangle AA_0A'$ и $\sphericalangle BA_0B'$ опружени углови. Тада су A и A' с разних страна тачке A_0 а исто тако и B и B', дакле углови $\sphericalangle AA_0B$ и $\sphericalangle A'A_0B'$ су унакрсни и према томе једнаки. Осим тога је према претпоставци $A_0A = A_0A'$, $A_0B = A_0B'$, дакле троугли A_0AB и $A_0A'B'$ су подударни, а отуд $AB = A'B'$.

Претпоставимо сада да су углови $\sphericalangle AA_0A'$ и $\sphericalangle BB_0B'$ удубљени (сл. 407). Разликоваћемо три случаја: или је тачка B у удубљеном углу $\sphericalangle AA_0A'$, или је на краку A_0A', или је ван тог угла.

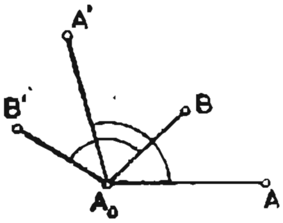
Ако је тачка B у $\sphericalangle AA_0A'$, имамо (подразумевајући увек удубљене углове, сл. 408)

$$\sphericalangle AA_0A' = \sphericalangle AA_0B' + \sphericalangle BA_0A',$$

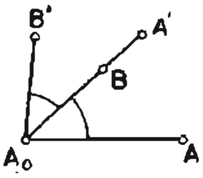
а отуд и $\sphericalangle AA_0A > \sphericalangle BA_0A'$. Како су $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ сагласни, а B припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, тачка A не припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0B)\alpha$, дакле A' припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0B)\alpha$, као и тачка B'. Но $\sphericalangle AA_0A' = \sphericalangle BA_0B'$, дакле $\sphericalangle BA_0B'$, дакле $\sphericalangle BA_0B' > \sphericalangle BA_0A'$, а отуд следује да је A' у удубљеном углу $\sphericalangle BA_0B'$ и да је према томе $\sphericalangle BA_0B' = \sphericalangle BA_0A' + \sphericalangle A'A_0B'$. Дакле

$$\sphericalangle AA_0B + \sphericalangle BA_0A' = \sphericalangle BA_0A' + \sphericalangle A'A_0B',$$

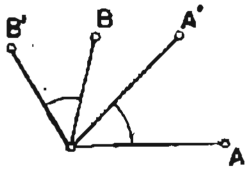
а отуд $\sphericalangle AA\,B = \sphericalangle A'A_0B'$. Уз то је и $A_0A = A_0A'$; $A_0B = A_0B'$, дакле троугли A_0AB и $A_0A'B'$ су подударни и према томе $AB = A'B'$.



Сл. 408



Сл. 409



Сл. 410

Нека је тачка B на краку A_0A' (сл. 409). Како је $\sphericalangle AA_0A' = \sphericalangle BA_0B'$, можемо писати и $\sphericalangle AA_0B = \sphericalangle A'A_0B'$. Дакле опет, троугли A_0AB и $A_0A'B'$ су подударни и $AB = A'B'$.

Ако је тачка B ван угла $\sphericalangle AA_0A'$ (сл. 410), тачке A и B су с разних страна праве A_0A', дакле A' је у $\sphericalangle AA_0B$, па имамо $\sphericalangle AA_0B = \sphericalangle AA_0A' + \sphericalangle A'A_0B$, а отуд и $\sphericalangle AA_0B > \sphericalangle AA_0A'$. Како су $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(A_0B)\alpha$ сагласни, а тачка B припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, тачка A не припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0B)\,\alpha$. Но како је A' у удубљеном углу $\sphericalangle AA_0B$, тачке A и A' су с истих страна праве A_0B, дакле ни A' не припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0B)\alpha$. Напротив, B' припада опруженом углу $\sphericalangle(A_0B)\alpha$; дакле $\sphericalangle A'A_0B' = \sphericalangle A'A_0B + \sphericalangle BA_0B'$. Но $\sphericalangle BA_0B' = \sphericalangle AA_0A'$, дакле

$$\sphericalangle A'A_0B' = \sphericalangle A'A_0B + \sphericalangle AA_0A' = \sphericalangle AA_0A' + \sphericalangle A'A_0B = \sphericalangle AA_0B,$$

тј. опет је $\sphericalangle AA_0B = \sphericalangle A'A_0B'$ а отуд троугли A_0AB и $A_0A'B'$ подударни и $AB = A'B'$. Ово последње је дакле у свим досадашњим случајима.

Најзад, претпоставимо да су α и β упоредне равни. Нека су B_1 и B_1' подножја управних из B и B' на α. Претходни део доказа примењује се непосредно ако уместо B и B' узмемо B_1 и B_1' и уместо опруженог угла $\sphericalangle(B_0B)\beta$ померно подударни опружени угао $\sphericalangle(A_0B_1)\alpha$. Дакле је $AB_1 = A'B_1'$. Но у троуглима ABB и $A'B'B_1'$ углови $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B'$ су прави, а $BB_1 = B'B_1'$, јер су то упоредне дужи отсечене упоредним равнима α и β. Како је и $AB_1 = A'B_1'$, оба та троугла су подударна, дакле је $AB = A'B'$.

Тиме је доказана последња једнакост у сваком случају. Но A и B су ма какве две тачке лика Ω. Дакле, према дефиницији 29.1 ликови Ω и Ω' су подударни кроз све тачке.

Дефиниција 49.5. Нека су $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, $\sphericalangle(B_0B)\beta$, $\sphericalangle(C_0C)\gamma, \dots$ сагласни опружени углови чије равни су управне на извесној правој s, а одређени су помоћу полуправих A_0A, B_0B, $C_0C, \dots$ чија исходишта су подножја A_0, B_0, $C_0, \dots$ управних спуштених из тачака $A, B, C, \dots$ лика Ω на праву s. Нека су затим у тим опруженим угловима редом $A', B', C', \dots$ тачке лика Ω', такве да је

$$A_0A = A_0A', \qquad B_0B = B_0B', \qquad C_0C = C_0C', \ \dots$$

и да су удубљени или опружени углови $\sphericalangle AA_0A'$, $\sphericalangle BB_0B'$, $\sphericalangle CC_0C', \dots$ међу собом једнаки. Ако при томе свакој тачки лика Ω одговара тачка лика Ω' и обратно, рећи ћемо да је лик Ω *обртно* или *ротационо подударан* с ликом Ω'. Праву s називаћемо *осом* а угао $\sphericalangle AA_0A'$ и сваки њему једнаки угао *углом* обртног подударања.

Теорема 49.9. *Ако је лик Ω обртно подударан с ликом Ω' такође је лик Ω' обртно подударан с ликом Ω.*

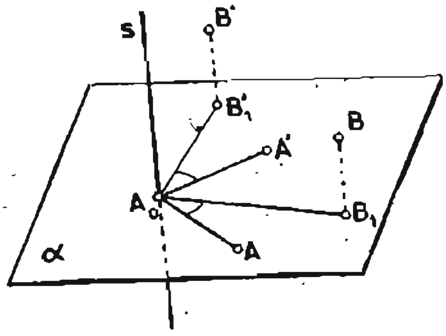
Доказ. Задржавајући исто обележавање, нека су $\sphericalangle(A_0A')\alpha$, $\sphericalangle(B_0B')\beta$, $\sphericalangle)C_0C')\gamma, \dots$ опружени углови одређени полуправим A_0A', B_0B', $C_0C', \dots$ и који су супротни у односу на одговарајуће опружене углове $\sphericalangle(A_0A)\alpha$, $\sphericalangle(B_0B)\beta$, $\sphericalangle(C_0C)\gamma, \dots$. Како ови други опружени углови садрже према дефиницији 49.5 одговарајуће тачке $A', B', C', \dots$, према дефиницији 49.3 садрже и први опружени углови одговарајуће тачке $A, B, C, \dots$ Дакле, како су други опружени углови сагласни међу собом, такође су и први опружени углови сагласни. Према томе услови дефиниције 49.5 су испуњени полазећи од $\sphericalangle(A_0A')\alpha$ итд., тј. од лика Ω'. Дакле лик Ω' је обртно подударан с ликом Ω.

Према томе кажемо и да су ликови Ω и Ω' обртно подударни међу собом. Из теореме 49.8 следује пак непосредно:

Теорема 49.10. *Обртно подударни ликови су подударни кроз све тачке.*

Теорема 49.11. *Нека су* A *и* A_0 *две тачке лика Ω, затим* A' *ма која тачка различита од* A *и тако да је* $\mathrm{A_0A} = \mathrm{A_0A'}$ *и нека је* s *права кроз* A_0, *управна на* A_0A *и на* A_0A'. *Постоји један једини лик* Ω' *обртно подударан с ликом* Ω, *тако да је* s *оса тог подударања и да тачки* A *лика* Ω *одговара тачка* A' *лика* Ω'.

Доказ. Било да је s једина могућа управна или не, нека буде α раван која пролази кроз A_0, управна на s, затим B ма која трећа тачка лика Ω. Ако тачка B није у равни α, посматрајмо њену управну пројекцију B_1 на α (сл. 411). Према теореми 21.1 постоји један једини удубљен или опружен угао $\sphericalangle B_1A_0B_1'$ који је једнак удубљеном или опруженом углу $\sphericalangle AA_0A'$ и налази се у оном опруженом углу $\sphericalangle(A_0B_1)\alpha$ који је сагласан са $\sphericalangle(A_0A)\alpha$. На краку A_0B_1 тог угла $\sphericalangle B_1A_0B'$ постоји једна једина тачка B_1' тако да је $A_0B_1 = A_0B_1'$. Ако тачка B није у равни α, нека је β упоредна раван, у којој је тачка B, затим B' управна пројекција тачке B_1' на β и B_0 подножје управне из B' на s. Постоји једна једина тачка B'. Тада су опружени углови $\sphericalangle(A_0B_1)\alpha$ и $\sphericalangle(B_0B)\beta$ померно подударни, дакле опружени углови $\sphericalangle(A_0A)\alpha$ и $\sphericalangle(B_0B)\beta$ су сагласни и сем тога је $B_0B = B_0B'$, саобразно дефиницији 49.5. Како је тачка B ма која тачка лика Ω, постоји лик Ω' који је обртно подударан с ликом Ω, и само један такав лик.



Сл. 411

4. На темељу померно и обртно подударних ликова можемо дефинисати премештајно подударне ликове.

Дефиниција 49.6. Ако су два лика Ω и Ω' померно или обртно подударна или ако за два лика Ω и Ω' постоји коначан низ ликова Ω_1, Ω_2, $\Omega_3, \ldots, \Omega_n$ $(n = 1,2, \ldots)$ тако да су парови ликова

$$\Omega \text{ и } \Omega_1,\ \Omega_1 \text{ и } \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_n \text{ и } \Omega'$$

парови померно или обртно подударних ликова рећи ћемо да је лик Ω *премештајно подударан* с ликом Ω', и то у првом случају *непосредно*, а у другом случају *преко низа подударности* ликова $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

Лако је доказати тврђења сакупљена у следећој теореми:

Теорема 49.12. *Сваки лик је премештајно подударан себи самом.*

Ако је лик Ω *премештајно подударан с ликом* Ω', *и лик* Ω' *је премештајно подударан с ликом* Ω.

Ако је лик Ω *премештајно подударан с ликом* Ω' *а овај је премештајно подударан с ликом* Ω'', *лик* Ω *је такође премештајно подударан с ликом* Ω''.

Померно и обртно подударни ликови су и премештајно подударни.

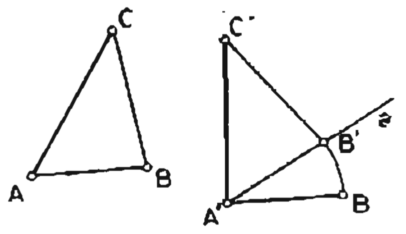
Премештајно подударни ликови су и подударни кроз све тачке.

Три следеће теореме утврђују да постоји лик премештајно подударан с датим ликом при одговарајућим условима.

Теорема 49.13. *Нека су* A, B, C *три тачке лика* Ω, *које не припадају једној правој, већ одређују раван* α *и нека је* A' *ма која тачка, различита од* A *и нека је* a' *ма која полуправа која полази из* A', *обе у равни* α.

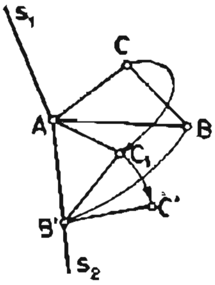
Постоји лик Ω', *премештајно подударан с ликом* Ω, *тако да тачки* A *одговара тачка* A', *тачки* B *извесна тачка* B' *на полуправој* a', *а тачки* C *извесна тачка* C' *у оном опруженом углу* $\sphericalangle(A'B')\alpha$, *који је састављен с опруженим углом* $\sphericalangle(AB)\alpha$.

Доказ. Према теореми 49.5 постоји један једини лик Ω_1 померно подударан с датим ликом Ω, тако да тачки A одговара тачка A'. При томе тачкама B и C одговарају тачке B_1 и C_1 у равни α (сл. 412). Нека е B' тачка на полуправој $A'a'$, тако да је $AB=A'B'$. Према теореми 49.11 постоји један једини лик Ω', обртно подударан с ликом Ω_1 тако да оса те подударности пролази кроз A' и управна је на α и да тачки B_1 одговара извесна тачка B'. При томе тачки C_1 одговара извесна тачка C' у опруженом углу $\sphericalangle(A'B')\alpha$ који је сагласан с опруженим углом $\sphericalangle(A'B_1)\alpha$ у коме је тачка C_1. Али овај опружени угао $\sphericalangle(A'B_1)\alpha$ и онај опружени угао $\sphericalangle(AB)\alpha$ у коме је тачка C, јесу померно подударни, дакле су према дефиницији 49.4 поменути опружени углови $\sphericalangle(AB)\alpha$ и $\sphericalangle(A'B')\alpha$ сагласни. Према томе постоји једна једина таква тачка C'; она испуњава услове теореме. Према дефиницији 49.6 ликови Ω и Ω' су премештајно подударни, а према теореми 49.4 Ω' је једини такав лик, који испуњава услове теореме.



Сл. 412

Теорема 49.14. *Нека су* A, B, C *три тачке лика* Ω, *које не припадају једној правој и нека су* B', C' *још две ма које тачке тако да су троуглови* ABC *и* AB'C' *подударни. Постоји лик* Ω', *премештајно подударан с ликом* Ω *тако да тачки* A *одговара та иста тачка, а тачкама* B *и* C *редом тачке* B' *и* C'.



Сл. 413

Доказ. Нека је s_1 права управна на AB и на AB'. Према теореми 49.11 постоји један једини лик Ω_1, обртно подударан с ликом Ω, тако да тачки A одговара иста та тачка, а тачки B тачка B'. При томе одговара тачки C извесна тачка C_1 и троуглови ABC и $AB'C_1$ су подударни. Дакле према теореми 49.11 постоји лик Ω' обртно подударан с ликом Ω_1, тако да је AB' оса обртања, дакле да тачкама A и B' одговарају исте те тачке, а да тачки C_1 одговара тачка C'.

Напомена. Може се догодити да су ликови Ω и Ω' у теореми 49.13 такође (непосредно) померно или обртно подударни, и да су у теореми 49.14 ти ликови такође обртно подударни.

Из теорема 49.5 и 49.14 и дефиниције 49.6 следује непосредно ова теорема:

Теорема 49.15. *Нека су* A, B, C *три тачке лика* Ω, *које не припадају једној правој и нека су* A', B', C' *још три ма које тачке тако да су троуглови* ABC *и* A'B'C' *подударни. Постоји лик* Ω' *премештајно подударан с ликом* Ω *тако да тачкама* A, B, C *одговарају редом тачке* A', B', C'.

5. Лако се доказују следеће три теореме. Доказе препуштамо читаоцу.

Теорема 49.16. *Ако су ликови* Ω *и* Ω' *премештајно подударни преко померне подударности ликова* Ω *и* Ω_1 *и померне подударности ликова* Ω_1 *и* Ω', *тада су премештајно подударни ликови* Ω *и* Ω' *померно подударни.*

Теорема 49.17. *Ако су ликови* Ω *и* Ω' *премештајно подударни преко обртне подударности ликова* Ω *и* Ω_1 *и обртне подударности ликова* Ω_1 *и* Ω', *тада су премештајно подударни ликови* Ω *и* Ω' *обртно подударни.*

Теорема 49.18. *Ако су ликови* Ω *и* Ω' *премештајно подударни преко померне подударности ликова* Ω *и* Ω_1 *и обртне подударности ликова* Ω_1 *и* Ω', *тада постоји лик Ω_1' тако да су ликови Ω и Ω' премештајно подударни преко обртне подударности ликова Ω и Ω_1' и померне подударности ликова Ω_1' и Ω'.*

Ако померну (транслациону) подударност обележимо знаком $\overset{T}{\cong}$, а обртну (ротациону) подударност знаком $\overset{R}{\cong}$ садржај претходне три теореме можемо симболички изразити овако:

Теорема 49.16. Из $\Omega \overset{T}{\cong} \Omega_1$ и $\Omega_1 \overset{T}{\cong} \Omega'$ следује $\Omega \overset{T}{\cong} \Omega'$.

Теорема 49.17. Из $\Omega \overset{R}{\cong} \Omega_1$ и $\Omega_1 \overset{R}{\cong} \Omega'$ следује $\Omega \overset{R}{\cong} \Omega'$.

Теорема 49.18. Ако је $\Omega \overset{T}{\cong} \Omega_1$ и $\Omega_1 \overset{R}{\cong} \Omega'$, тада постоји Ω_1' тако да је $\Omega \overset{R}{\cong} \Omega'_1$ и $\Omega_1' \overset{T}{\cong} \Omega'$.

Помоћу предходне три теореме доказује се лако следећа теорема. која има основан значај за премештајну подударност:

Теорема 49.19. *Ако су Ω и Ω' ма која два премештајно подударна лика, постоји лик Ω_1 тако да су ликови Ω и Ω_1 премештајно подударни, а ликови Ω_1 и Ω' обртно подударни.*

Доказ. Претпоставимо прво да су ликови Ω и Ω' премештајно подударни преко три подударности, с ликовима Ω_1 и Ω_2. Ако је

$$\Omega \overset{T}{\cong} \Omega_1, \quad \Omega_1 \overset{R}{\cong} \Omega_2, \quad \Omega_2 \overset{T}{\cong} \Omega',$$

према теореми 49.18 постоји лик Ω_1' тако да је

$$\Omega \overset{R}{\cong} \Omega_1' \quad \text{и} \quad \Omega_1' \overset{T}{\cong} \Omega_2.$$

Из теореме 49.16 следује $\Omega_1' \overset{T}{\cong} \Omega'$; дакле имамо

$$\Omega \overset{R}{\cong} \Omega_1' \quad \text{и} \quad \Omega_1' \overset{T}{\cong} \Omega'.$$

Отуд постоји, према теореми 49.18 лик Ω'' тако да је

$$\Omega \overset{T}{\cong} \Omega'' \text{ и } \Omega'' \overset{R}{\cong} \Omega',$$

као што тврди ова теорема.

Ако је

$$\Omega \overset{R}{\cong} \Omega_1, \quad \Omega_1 \overset{T}{\cong} \Omega_2, \quad \Omega_2 \overset{R}{\cong} \Omega'$$

према теореми 49.18 постоји лик Ω_1' тако да је

$$\Omega \overset{T}{\cong} \Omega_1' \quad \text{и} \quad \Omega_1' \overset{R}{\cong} \Omega_2.$$

Из теореме 49.17 следује $\Omega_1' \overset{R}{\cong} \Omega'$, дакле имамо

$$\Omega \overset{T}{\cong} \Omega \quad \text{и} \quad \Omega \overset{R}{\cong} \Omega,$$

као што тврди постављена теорема.

Уопште, нека су ликови Ω и Ω' премештајно подударни преко низа ликова $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ $(n \geqslant 2)$. Ако у том низу долазе две узастопне померне подударности, напр. $\Omega_i \overset{T}{\cong} \Omega_{i+1} \overset{T}{\cong} \Omega_{i+2}$, имамо према теореми 49.16 непосредно $\Omega_i \overset{T}{\cong} \Omega_{i+3}$. Исти је закључак ако долазе две узастопне обртне подударности. Дакле можемо претпоставити да у низу ликова преко којих су Ω и Ω' премештајно подударни долазе наизменце обе врсте подударности. Тада по првом делу овог доказа три узастопне подударности можемо заменити двема. На тај начин смањујемо број посредних подударности, све док не дођемо до лика Ω^* тако да је

$$\Omega \overset{T}{\cong} \Omega^* \quad \text{и} \quad \Omega^* \overset{R}{\cong} \Omega'.$$

Тиме је ова теорема доказана.

На темељу претходне теореме доказује се лако у теоремама 49.16, 49.17, и 49.18. да је лик Ω' **једини** онакав лик. — Значајна је, најзад, следећа теорема, коју доносимо без доказа:

Теорема 49.20. *Постоје подударни ликови који нису премештајно подударни. Али ако ликови* Ω *и* Ω' *нису премештајно подударни постоји лик* Ω'' *тако да су* Ω *и* Ω'' *премештајно подударни, а ликови* Ω' *и* Ω'' *симетрични у односу на извесну раван.*

Доказ се најједноставније изводи за подударне разностране тетраедре.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ.

1. Кроз дату тачку ван дате праве повући праву упоредну тој правој (помоћу лењира и шестара).

2. Кроз тачку ван дате равни конструисати упоредну раван.

3. Ако су краци OA и $O'A'$, OB и $O'B'$ двају удубљених углова, $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'O'B'$ међу собом управни, доказати да су углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'O'B'$ једнаки или суплементни и да су у првом случају њихове располовнице међу собом управне, а у другом случају упоредне.

4. Ако је S пресек симетрала углова $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$ троугла ABC, а S' пресек симетрала спољашњих углова с теменима B и C, истог троугла, доказати да је угао $\sphericalangle BSC$ једнак збиру, а угао $\sphericalangle BS'C$ једнак разлици правог угла и угла $\sphericalangle A/2$.

5. Ако су M и N тачке у којима располовнице унутрашњег и спољашњег угла с теменом A, троугла ABC секу праву BC, доказати да је угао $\sphericalangle ANM$ једнак полуразлици углова $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$.

6. Ако је N подножје управне спуштене из темена C на симетралу угла $\sphericalangle A$ троугла ABC, доказати да је угао $\sphericalangle BCN$ једнак полуразлици углова $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$.

7. Доказати да симетрале двају суседних углова испупченог равног четвороугла захватају угао једнак полузбиру других двају углова тог четвороугла.

8. Доказати да симетрале двају наспрамних углова испупченог четвороугла захватају угао једнак полуразлици других двају углова.

9. Доказати да је разлика углова које захвата симетрала једног угла троугла с наспрамном страницом једнак разлици других двају углова тог троугла.

10. Ако је средишњица AS троугла ABC једнака половини странице BC доказати да је угао $\sphericalangle BAC$ прав.

11. Ако је средишњица AS троугла ABC мања (већа) од половине странице BC, доказати да је угао $\sphericalangle BAC$ оштар (туп).

12. Ако је висина AH троугла ABC једнака половини странице BC, доказати да је угао $\sphericalangle A$ тог троугла оштар или прав.

13. Доказати да су средишта једнакостраних троуглова конструисаних над страницама ма којег троугла и то изван тог троугла, темена извесног једнакостраног троугла.

14. Доказати да су средишта квадрата конструисаних над страницама паралелограма $ABCD$ и то изван њега, темена извесног квадрата и да се његове дијагонале секу у пресечној тачки дијагонала паралелограма $ABCD$.

15. Дат је четвороугао $ABCD$ коме су наспрамни углови $\measuredangle A$ и $\measuredangle C$ прави и коме се странице AB и CD секу у извесној тачки M, а странице BC и DA у извесној тачки N. Доказати да праве које пролазе кроз тачке A и N и управне су на дијагонали AC, секу праву CD у тачкама X и Y таквим да је дуж XY једнака дужи MC.

16. У круг k уписан је једнакостраничан троугао ABC. Ако је X ма која тачка лука $\widehat{BC}$ круга k, на коме није тачка A, доказати да је дуж AX једнака збиру дужи BX и CX.

17. У круг k уписан је правилан петоугао $ABCDE$ и на малом луку AE круга k дата је тачка X. Доказати да је збир тетива AX и DX једнак збиру тетива AX, CX и EX.

18. Доказати да права која пролази кроз средишта двају датих лукова истог круга сече праве AB и AC у тачкама X и Y таквим да је дуж AX једнака дужи AY.

19. Дат је круг k и на њему тачке A, B, C, A', B', C' такве да је тетива AB упоредна тетиви $A'B'$, и да је тетива AC упоредна тетиви $A'C'$. Доказати да је тетива BC' упоредна тетиви $B'C$.

20. Доказати да се тачке симетричне ортоцентру троугла у односу на његове странице налазе на кругу описану око тог троугла.

21. Нека је O средиште описаног круга, а H ортоцентар троугла ABC. Доказати да средишта страница и подножја висина троугла ABC, затим средишта дужи AH, BH, CH припадају кругу, коме је средиште истоветно са средиштем дужи OH, а полупречник једнак половини полупречника описаног круга око троугла ABC. (Ојлеров круг троугла ABC.)

22. Нека је O средиште описаног круга око троугла ABC, S средиште уписаног круга и S_1, S_2, S_3 средишта споља уписаних кругова, садржаних редом у угловима $\measuredangle A$, $\measuredangle B$. $\measuredangle C$ тог троугла. Доказати да је средиште круга који пролази кроз тачке S_1, S_2, S_3 симетрично тачки S у односу на тачку O и да је полупречник тог круга двапут већи од полупречника круга описаног око троугла ABC.

23. Нека је S средиште круга уписаног у троугао ABC, затим S_1, S_2, S_3 средишта споља уписаних кругова који су садржани редом у угловима $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ тог троугла. Доказати да

а) круг k описан око троугла ABC пролази кроз средишта дужи SS_1, SS_2, SS_3;

b) тачке B, C, S, S_1 припадају једном кругу коме је средиште на кругу k;

c) тачке B, C, S_2, S_3 припадају једном кругу коме је средиште на кругу k.

24. Конструисати праву која сече две дате мимоилазне праве под угловима који су једнаки са два дата угла.

25. Конструисати раван која пролази кроз дату тачку P и сече ивице a, b, c, d датог четвоространог рогља у тачкама A, B, C, D таквим да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм. Одредити услове под којима је тај четвороугао правоугаоник или ромб.

26. Дат је раван четвороугао и права s. Одредити на правој s тачку S такву да тачке у којима ивице рогља $SABCD$ продиру произвољну раван која је упоредна са правим по којима се секу равни његових наспрамних пљосни, буду темена а) правоугаоника b) ромба.

27. Конструисати раван која пролази кроз две дате тачке и додирује дату сферу.

28. Конструисати раван која пролази кроз дату тачку и додирује две дате сфере.

29. Конструисати раван која додирује три дате сфере.

30. Ако су два лика Ω' и Ω'' симетрична трећем лику Ω у односу на две осе s' и s'' доказати да су ликови Ω' и Ω''

a) померно подударни кад су осе s' и s'' упоредне,

b) обртно подударни кад се осе s' и s'' секу,

c) премештајно подударни кад су осе s' и s'' мимоилазне.

31. Ако су два лика Ω' и Ω'' симетрична трећем лику Ω у односу на две равни α' и α'', доказати да су ликови Ω' и Ω''

a) померно подударни кад су равни α' и α'' упоредне,

b) обртно подударни кад се равни α' и α'' секу.

32. Конструисати осу и одредити угао обртног подударања двеју једнаких дужи AB и $A'B'$.

33. Конструисати осу и одредити угао обртног подударања двају једнаких углова $\measuredangle ASB$ и $\measuredangle A'SB'$, којима је теме S заједничко.

34. Ако су два лика Ω' и Ω'' обртно подударна трећем лику Ω у односу на две осе које се мимоилазе, доказати да су ликови Ω' и Ω'' премештајно подударни.

35. Конструисати укупност средишта свих тетива датог круга, које су једнаке датој дужи.

36. Конструисати укупност темена свих углова једнаких датом удубљеном углу и чији краци додирују један дат круг.

37. Конструисати укупност средишта кругова чији су полупречници једнаки датој дужи и који додирују дату праву.

38. Конструисати укупност тачака којима је збир или разлика отстојања од двеју датих правих једнака датој дужи.

39. Дат је круг k и две тачке A и B. Одредити на кругу k тачке C и D такве да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм.

40. Дат је круг k и две упоредне праве a, b, које додирују тај круг у тачкама A, B. Конструисати дирку круга k која сече праве a, b у тачкама X, Y таквим да је збир дужи AX и BY једнак датој дужи s.

41. Дат је круг k и ван њега тачка A. Конструисати праву која пролази кроз тачку A и сече круг k у тачкама B и C таквим да је дуж AB једнака дужи BC.

42. Конструисати круг датог полупречника и који додирује две дате праве.

43. Конструисати круг датог полупречника, који пролази кроз дату тачку и сече дату праву тако да на њој отсеца тетиву једнаку датој дужи.

44. Конструисати круг датог полупречника, који сече краке датог угла тако да отсеца тетиве једнаке датим дужима.

45. Конструисати круг датог полупречника, који сече дати круг под правим угловима и дату праву под угловима једнаким датом углу.

46. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\measuredangle A$, страницу AB и збир или разлику других двеју страница.

47. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle B$, висину спуштену из темена A и збир или разлику страница BC и CA.

48. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle B$, висину спуштену из темена A и обим.

49. Конструисати троугао кад су дата подножја његових висина.

50. Дата је права p и две тачке A и B. Одредити на правој p тачку X тако да угао $\sphericalangle AXB$ буде једнак датом углу φ.

51. Дате су четири тачке A, B, C, D и два угла λ и μ. Конструисати тачку X тако да угао $\sphericalangle AXB$ буде једнак углу λ, а угао $\sphericalangle CXD$ једнак углу μ.

52. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle A$, страницу BC и висину спуштену из темена A.

53. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle A$ и средишњице које полазе из темена A и B.

54. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle A$, висину спуштену из темена A и обим.

55. Дат је круг k и три тачке A, B, C. Одредити на кругу k тачке X и Y такве да буде $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY = \sphericalangle XCY$.

56. Дат је троугао ABC. Одредити тачку X тако да буде $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXA$.

57. Конструисати праву која пролази кроз дату тачку и сече краке датог угла $\sphericalangle BAC$ у тачкама B и C тако да обим троугла ABC буде једнак датој дужи.

58. Конструисати круг који пролази кроз две дате тачке и сече дати круг под правим угловима.

59. Конструисати круг који пролази кроз две дате тачке и сече дати круг у крајевима једног пречника.

60. Конструисати круг који пролази кроз две тачке и сечен је датим кругом у крајевима једног пречника.

61. Конструисати круг који пролази кроз дату тачку и сече два круга под правим угловима.

62. Конструисати круг који пролази кроз дату тачку и сече два дата круга у крајевима њихових пречника.

63. Конструисати круг који пролази кроз дату тачку и сече два дата круга у крајевима својих пречника.

64. Дата су три круга. Конструисати круг који их сече под правим угловима.

65. Дата су три круга. Конструисати круг који их сече у крајевима њихових пречника.

66. Дата су три круга. Конструисати круг који их сече у крајевима својих трију пречника.

ГЛАВА ПЕТА

СРАЗМЕРНОСТ

50. СРАЗМЕРНОСТ У ПОВЕСТИ.

Један део геометрије оснива се на сразмери или пропорцији четири дужи. Тај део обухвата учење о сличним ликовима, али садржи и друга проучавања, као што су она која полазе од производа двеју дужи и она која полазе од хармонијски спрегнутих парова тачака.

1. Погледајмо прво на којим се основама подиже учење о сличности у Еуклидовим „Елементима“. У књизи VI дефиниција 1. дефинише сличност овако: „Праволинијски ликови су слични ако су им углови појединце једнаки, а странице при једнаким угловима сразмерне“

Шта је *сразмера* (пропорција) четири дужи, Еуклид дефинише у књизи V, дефиницијом 5. Сматра се да та дефиниција потиче од Еудокса. Може се превести овако:

„Каже се да су величине у истој размери, прва према другој и трећа према четвртој ако, умногостручивши ма колико, но једнак број пута прву и трећу величину, и ма колико, но једнак број пута другу и четврту величину, прва једнака умногостручења једновремено превазилазе, једнака су, или изостају за другим једнаким умногостручењима свако према свакомй, узета одговарајућим редом“.

Садржај те дефиниције биће нам јаснији ако се послужимо симболима алгебре. Ако су a, b, c, d четири величине (напр. дужине) кажемо да је размера прве према другој, тј. $a:b$, једнака размери треће према четвртој, тј. $c:d$, ако постоје следећи односи: Нека су μ и ν два ма која природна броја. Образујмо производе μa, μc, и νb, νd. По Еуклидовој дефиницији треба да буде једновремено

$$\mu a>\nu b \quad \text{и} \quad \mu c>\nu d$$

или пак

$$\mu a=\nu b \quad \text{и} \quad \mu c=\nu d$$

или пак

$$\mu a<\nu b \quad \text{и} \quad \mu c<\nu d.$$

Према тој дефиницији, ако је $\frac{\nu}{\mu}\lesseqgtr\frac{a}{b}$ такође је $\frac{\nu}{\mu}\lesseqgtr\frac{c}{d}$. Другим речима, обе размере $a:b$ и $c:d$ називамо једнаким ако су једновремено мање или веће од неког, произвољно изабраног рационалног броја ν/μ.

Примера ради посматрајмо два квадрата са дијагоналама a и c и страницама b и d (сл. 414). Имамо $\frac{a}{b}>\frac{1}{1}$ и уједно $\frac{c}{d}>\frac{1}{1}$, затим $\frac{a}{b}<\frac{2}{1}$

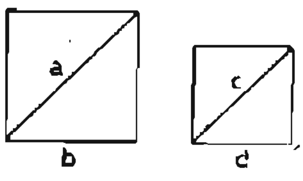
и уједно $\frac{c}{d} < \frac{2}{1}$, па $\frac{a}{b} < \frac{3}{2}$ и уједно $\frac{c}{d} < \frac{3}{2}$ итд. Уопште, кад год је

$$\frac{a}{b} < \frac{\nu}{\mu} \quad \text{увек је и} \quad \frac{c}{d} < \frac{\nu}{\mu},$$

а кад год је

$$\frac{a}{b} > \frac{\nu}{\mu} \quad \text{увек је и} \quad \frac{c}{d} > \frac{\nu}{\mu}.$$

Отуд следује по Еудоксовој дефиницији, иако дужи a и b (као што знамо) **нису самерљиве**, нити дужи c и d, да ипак постоји сразмера четири дужи a, b, c, d.



Сл. 414

Изражавајући се на начин који је увео **Dedekind** (1872), излажући своје начело, којим се дефинише који било реални број, можемо рећи:

Размером a/b рационални бројеви ν/μ су подељени у два мноштва: мноштво M_1, које се састоји из свих бројева ν/μ који нису већи од a/b и мноштво M_2, које се састоји из свих бројева који су већи од a/b. Исто тако, размером c/d рационални бројеви ν/μ су подељени у два аналога мноштва M_1' и M_2'.

Мноштва M_1 и M_2 испуњавају услове такозваног начела Дедекинда: 1) оба мноштва имају бројева у себи, 2) сваки рационални број припада једном и само једном од та два мноштва, и 3) сваки број мноштва M_1 је мањи од сваког броја мноштва M_2. Исто тако и мноштва M_1' и M_2' Тада мноштва M_1 и M_2 одређују један такозвани *пресек* у области рационалних бројева, а исто тако мноштва M_1' и M_2'.

У смислу Еудоксове дефиниције пак **размере** a/b и c/d **сматрамо једнаким** ако мноштва M_1 и M_2 и мноштва M_1' и M_2' одређују један исти *пресек* у области рационалних бројева.

Према томе, та Еудоксова дефиниција пропорције еквивалентна је савременој дефиницији којом се уводе ирационални бројеви.

Математици Старог века недостајао је појам ирационалног броја. Али Стари Грци су разликовали самерљиве и несамерљиве дужи. Размера двеју самерљивих величина изражена је односом два природна броја, дакле (како бисмо данас казали) рационалним бројем. Како за две несамерљиве величине не постоје таква два природна броја — а за проширење појма броја Стари Грци нису знали — сматрали су да не постоји никакав „број" који би изразио размеру двеју несамерљивих величина. Зато су и називане несамерљивим. Па ипак независно од самерљивости Еуклидова дефиниција пропорције обухвата све једнаке размере геометријских величина, без обзира да ли им је вредност рационална или ирационална, да ли су те величине „самерљиве" или „несамерљиве".

На темељу те дефиниције Еуклид доказује у књизи VI прво следећи помоћни став о упоређивању двеју површи:

Став 1. „Троугли и паралелограми којима је иста висина, јесу једни спрам других као њихове основице."

Затим помоћу тог става доказује следећи, који се назива *главним ставом сличности*:

Став 2. „Ако се повуче права упоредна једној страници троугла, она ће сећи странице троугла сразмерно и (обрнуто) ако се странице троугла правом секу сразмерно, права што спаја тачке пресека биће упоредна трећој страници троугла".

После овог става следују позната четири става о сличности троуглова и неки од многих ставова о сличности, који отуд проистичу.

2. У новије доба математичари су отступили од Еудоксова заснивања сличности. Тако је напр. Legendre упростио поступак тиме што је дефинисао размеру двеју геометријских величина аритметички, тј. као размеру мерних бројева тих величина.

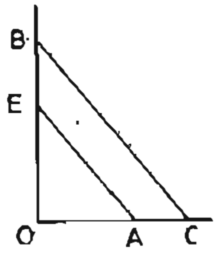
Еудоксова дефиниција сразмере је, наиме чисто геометријска. Умногостручење (мултиплум) неке дужи је дуж која се добија кад се на једну праву пренесе дата дуж више пута у истом смеру. У тој дефиницији реч је само о геометријским операцијама. — Тек при крају 19. столећа геометри су се вратили чистоти геометријске методе, коју је ова достигла још за Старих грка и поново поставили захтев да геометрији треба сразмеру и сличност поставити на чисто геометријске основе.

У току 19. столећа јављају се прво разни покушаји у том смислу. Но ти покушаји остају на Еуклидову становишту у погледу на поменуто упоређивање двеју површи и претпостављају, као и он, извесне ставове о једнакости површи. Неки се ослањају такође о извесне ставове из стереометрије, а сви још стоје на наивном становишту у погледу непрекидности не уводећи аксиоме непрекидности.

Тек је Hilbert у својим „Основама геометрије" показао да се наука о сличности може засновати тако да се једновремено одрже следећа четири начела: 1. поступак је чисто геометријски, 2. не служимо се теоремама о једнакости и упоређивању површи, 3. нити теоремама просторне геометрије, 4. не претпостављамо аксиоме непрекидности. Али кад се тако уводи сличност, потребно је применити извесну елементарну теорему, која је посебан случај једне теореме Pascala (17. столеће), но која се нашла већ у делима александријског математичара Paposa (3. столеће н.е.).

Ми ћемо се у нашем извођењу држати ових начела Хилберта, али ћемо поступити на нешто различит начин. Хилберт дефинише у почетку „производ двеју дужи"

Нека су a и b две дате дужи (сл. 415). Изаберимо произвољну дуж, која остаје иста у свим тим посматрањима и назовимо је јединицом или јединичном дужи (ово чинимо независно од дефиниције мерења). Пренесимо дужи a и b на краке једног правог угла, тако да је $a = OA$ на једном краку, а $b = OB$ на другом краку. Нека је на краку OB дуж OE једнака јединици. Повуцимо кроз B праву упоредну са AE. Нека ова сече праву OE у тачки C. Сваку дуж једнаку са дужи OC називаћемо производом двеју дужи a и b и писаћемо $c = ab$.



Сл. 415

Како ћемо увести јединичну дуж (јединицу) у вези са мерењем дужи, а овде није неопходна, дефинисаћемо производ двеју дужи без тог појма.

СРАЗМЕРА ЧЕТИРИ ДУЖИ.

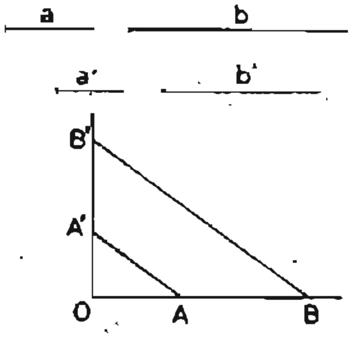
Прво постављамо дефиницију сразмерних четири дужи.

Дефиниција 51.1. Ако су четири дужи a, b, a', b' редом једнаке дужима OA, OB, OA', OB' на крацима правог угла $\sphericalangle AOA'$, при чему су тачке A и B на једном краку, тачке A' и B' на другом краку, и ако су праве AA' и BB' упоредне или истоветне, рећи ћемо да се *дуж a односи према дужи* *b као дуж a' према дужи b'*, или да су *дужи a и b сразмерне* или *пропорционалне* редом *дужима a' и b'*. Знацима:

$$a : b \;::\; a' : b'.$$

Знак „:“ чита се овде „према“, а знак „: :“ чита се „односи се као“ или само „као“.

Напомене: Чињеница дефинисана претходном дефиницијом (сл. 416) изражава се и другим речима; напр. тиме што кажемо да дужи *a*, *b* и *a'*, *b'* стоје у сразмери (или пропорцији). У сваком случају битан је и поредак којим се помињу те дужи.



Сл. 416

Четири тачке : : је старији знак за писање пропорције. Овде га уводимо да би се истакла разлика између сразмере четири дужи (или других гометријских величина) и сразмере четири броја. Разлика је велика и у садржини гометријског и аритметичког појма сразмере. Ако четири броја образују сразмеру $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, изрази $\alpha : \beta$ и $\gamma : \delta$ значе нешто за себе: то су две сразмере, а сразмера је једнакост двеју размера. Напротив, ако четири дужи образују сразмеру $a : b :: c : d$ то је јединствен исказ, а не једнакост (рецимо подударност) двају ликова, јер „$a : b$“ и „$c : d$“ не претстављају никакве ликове и не значе сами за себе ништа. Тек целом изразу „*a* према *b* односи се као *a'* према *b'*“ одговара нов геометријски појам: сразмера четири дужи.

Споменимо да се и размера двеју дужи може дефинисати као количник два броја, мерних бројева тих двеју дужи. Тада би сразмера четири дужи била једнакост двеју размера. Али ова дефиниција сразмере не би била чисто геометријска.

Напоменимо још да се, према дефиницији, сразмера четири дужи *a*, *b*, *a'*, *b'*, односи на дужи ма где у простору, а у томе посредују четири дужи *OA*, *OB*, *OA'*, *OB'*. Разуме се, прве четири дужи могу бити истоветне са друге четири дужи.

2. Пређимо на доказивање најосновнијих теорема о пропорцији.

Теорема 51.1. *Ако су дужи* a *и* b *сразмерне дужима* a' *и* b', *такође су и обрнуто: дужи* a' *и* b' *сразмерне дужима* a *и* b, *тј. из*

$$a : b :: a' : b' \quad \textit{следује} \quad a' : b' :: a : b.$$

Доказ. Нека су, као у дефиницији 51.1, на крацима правог угла $\sphericalangle AOA'$ четири дужи *OA*, *OB*, *OA'*, *OB'* редом једнаке дужима *a*, *b*, *a'*, *b'*, тако да су праве *AA'* и *BB'* упоредне или истоветне. Можемо рећи и да су дужи *A'A* и *B'B* упоредне или истоветне, а то значи према дефиницији 51.1 да је и

$$a' : b' :: a : b.$$

Теорема 51.2. *Ако су дужи* a *и* b *сразмерне дужима* a' *и* b', *такође су и дужи* b *и* a *сразмерне дужима* b' *и* a', *тј. из*

$$a : b :: a' : b' \quad \textit{следује} \quad b : a :: b' : a'.$$

Сл. 417

Доказ. Према дефиницији 51.1 дужи *AA'* и *BB'* су упоредне или истоветне (сл. 417), дакле су и дужи *BB'* и *AA'* упоредне или истоветне, а то значи да је

$$b : a :: b' : a'.$$

Теорема 51.3. *Ако су дужи* a *и* b *сразмерне дужима* a' *и* b' *и ако су дужи* a *и* c *сразмерне дужима* a' *и* c' *такође су и дужи* b *и* c *сразмерне дужима* b' *и* c', *тј. из*

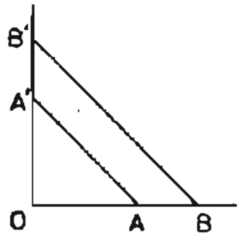
$$\mathrm{a} : \mathrm{b} :: \mathrm{a}' : \mathrm{b}' \quad \textit{и} \quad \mathrm{a} : \mathrm{c} :: \mathrm{a}' : \mathrm{c}'$$

следује

$$\mathrm{b} : \mathrm{c} :: \mathrm{b}' : \mathrm{c}'.$$

Доказ. Према дефиницији 51.1, ако су на једном краку правог угла (сл. 418) A, B, C тачке такве да је $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ и ако су на другом краку A', B', C' тачке такве да је $OA'=a'$, $OB'=b'$, $OC'=c'$, праве AA' и BB' и AA' и CC' су парови упоредних или истоветних правих, дакле су према теореми 51.1 и праве BB' и CC' упоредне или истоветне, тј. према дефиницији 51.1 је

$$\mathrm{b} : \mathrm{c} :: \mathrm{b}' : \mathrm{c}'.$$

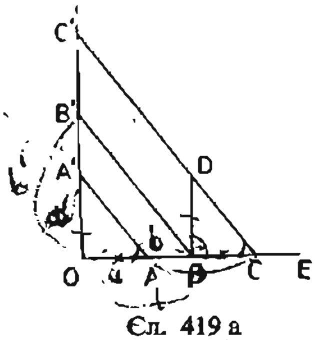


Сл. 418

Теорема 51.4. *Ако су дужи* a *и* b *сразмерне дужима* a' *и* b', *такође су и дужи* $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ *и* b *сразмерне дужима* $\mathrm{a}'+\mathrm{b}'$ *и* b', *и ако је* $\mathrm{a}>\mathrm{b}$ *и* $\mathrm{a}'>\mathrm{b}'$, *дужи* $\mathrm{a}-\mathrm{b}$ *и* b *сразмерне су дужима* $\mathrm{a}'-\mathrm{b}'$ *и* b' *тј. из*

$$\mathrm{a} : \mathrm{b} :: \mathrm{a}' : \mathrm{b}' \quad \textit{следује} \quad (\mathrm{a}\pm\mathrm{b}) : \mathrm{b} :: (\mathrm{a}'\pm\mathrm{b}') : \mathrm{b}'.$$

Доказ. Према дефиницији 51.1. прва сразмера значи да су у правом углу $\sphericalangle AOA'$ дужи AA' и BB' упоредне. Нека је на краку OA дуж $OC=OA+OB$, а BD дуж с оне стране праве OA с које је тачка A', управна на OA, а једнака дужи OA' (сл. 419а). Троугли OAA' и BCD су подударни, јер је $BC=OA$, $BD=OA'$ и $\sphericalangle CBD=\sphericalangle AOA'$, као прави углови. Дакле је $\sphericalangle OAA'=\sphericalangle OCD$, па како су то два сагласна угла са попречницом OA, праве AA' и CD су према теореми 38.4 упоредне. Како су и праве AA' и BB' упоредне, према теореми 39.1 и праве BB' и CD су упоредне.



Сл. 419 а

Посматрајмо праве OA' и CD са попречницом OC. Угао $\sphericalangle AOA'$ је прав, а $\sphericalangle OCD$ је оштар, дакле њихов збир је мањи од збира два права угла, па како су то два унутарња угла с исте стране попречнице OC, према теореми 39.5 праве OA' и CD секу се у некој тачки C'.

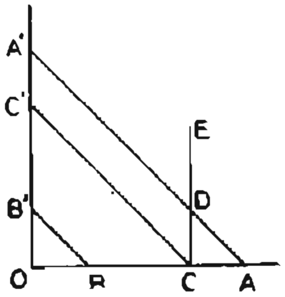
Четвороугао $B'BDC'$ је паралелограм, јер су праве $B'C'$ и BD и праве BB' и CC' парови упоредних правих. Према томе дужи $B'C'$ и BD су једнаке, па како је $OA'=BD$ имамо $OA'=B'C'$ и према томе

$$OC'=OB'+B'C'=OA'+OB'.$$

Дакле је $OC'=a'+b'$, као што је и $OC=a+b$. Из упоредности правих CC' и AA' следује према дефиницији 51.1

$$(a+b) : b :: (a'+b') : b'.$$

Обрнуто, нека су у углу $\sphericalangle AOA'$ дате упоредне дужи AA' и BB' и нека је на краку OA дуж $OC=OA-OB$, а CE дуж управна на OA, с оне стране праве OA с које је тачка A'. Како је угао $\sphericalangle CAA'$ оштар, а угао $\sphericalangle ACE$ прав, праве AA' и CE секу се с оне стране праве OA с које је A', у некој тачки D (сл. 419 б).



Сл. 419 б

Троугли OBB' и CAD су подударни, јер је $OB=AC$, а $\sphericalangle OBB'=\sphericalangle CAD$, јер ово су сагласни углови на упоредним правим AA' и BB', и $\sphericalangle BAB'=\sphericalangle ACD$, јер ово су прави углови. Дакле $OB'=CD$, па ако је C' тачка на OA' таква да је $OC'=OA'-OB'$, имамо $A'C'=OB'=CD$. Ове две дужи су и упоредне, јер су управне на правој OA, дакле према теореми 40.6, четвороугао $CC'A'D$ је паралелограм, дакле праве CC' и AA', а отуд и права CC' и BB' су упоредне, тј.

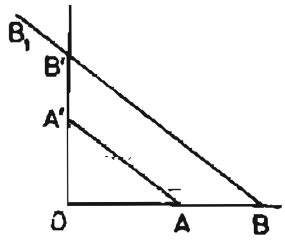
$$(a-b)\ :\ b::\ (a'-b')\ :\ b'.$$

Претходним теоремама додајмо још следеће две, пре него што проширимо могућност размењивања, и других измена, међу члановима сразмере четири дужи.

Теорема. 51.5. *Ако су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{a}'$ *и* $\mathfrak{b}'$ *и ако је* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, *имамо* $\mathfrak{a}'=\mathfrak{b}'$; *ако је* $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, *имамо* $\mathfrak{a}'<\mathfrak{b}'$, *ако ли је* $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$, *имамо* $\mathfrak{a}'>\mathfrak{b}'$.

Доказ. Ако је $a=b$, онда су у дефиницији 51.1 тачке A и B истоветне, дакле су праве AA' и BB' истоветне, дакле и тачке B и B', тј. $a'=b'$. Ако ли је $a<b$ онда је према дефиницији 25.1 $O-A-B$, тј. права AA' сече страницу OB троугла OBB', дакле она сече и страницу OB', јер су AA' и BB' упоредне дакле не сече страницу BB'. Према томе је $O-A'-B'$, тј. $a'<b'$. — Трећи део теореме следује из прва два непосредно.

Теорема 51.6. *Ма какве да су три дужи* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, *постоје дужи* $\mathfrak{d}$ *такве да су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{c}$ *и* $\mathfrak{d}$. *Све дужи* $\mathfrak{d}$ *су једнаке међу собом.*



Сл. 420

Доказ. Нека су на једном краку правог угла $\sphericalangle AOA'$ (сл. 420) тачке A и B такве да је $OA=a$, $OB=b$, на другом краку тачка A' таква да је $OA'=c$. Ако се тачке A и B не поклапају, постоји једна и само једна права BB_1 која у равни OAA' пролази кроз B и упоредна је са AA'. Како је угао $\sphericalangle AOA'$ прав, а угао $\sphericalangle OBB_1$ једнак углу $\sphericalangle OAA'$, дакле оштар, према теореми 39.5, праве OA' и BB_1 секу се у извесној тачки B'. — Ако се тачке A и B поклапају, обележимо тачку A' знаком B'.

Обележимо ма коју дуж једнаку дужи OB' словом d. Према дефиницији 51.1 је

$$a:b\ ::\ c:d,$$

дакле постоје такве дужи d. Оне су једнаке међу собом, јер $d=OB'$.

3. Теорема 51.1 и 51.2 казују да се поједине дужи у сразмери четири дужи могу међу собом размењивати на два начина:

из $a:b\ ::\ a':b'$ следује $a':b'\ ::\ a:b$,

из $a:b\ ::\ a':b'$ следује $b:a\ ::\ b':a'$.

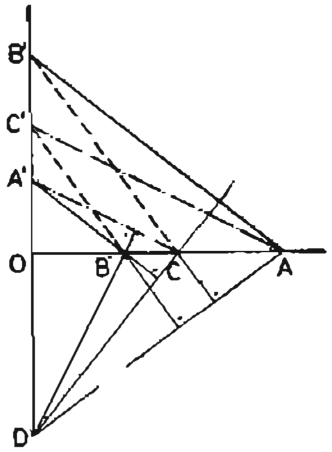
Треба доказати и могућност треће размере, наиме да

из $a:b\ ::\ a':b'$ следује $a:a'\ ::\ b:b'$.

Да би се то доказало потребна је једна теорема која потиче од Папоса, (геометра Старог века), а пронашао ју је после и француски филозоф и математичар 17. столећа, Паскал, па се теорема назива често његовим именом. Доносимо ту теорему у нешто ужем облику.

Теорема 51.7. Папосова теорема. — *Нека су* A, B, C *тачке на једном краку, а* A′, B′, C′ *на другом краку правог угла с теменом* O. *Ако су праве* AB′ *и* A′B *упоредне и праве* BC′ *и* B′C *упоредне, тада су и праве* CA′ *и* C′A *упоредне.*

Доказ. Нека је D тачка у којој права управна на $A'C$ и која пролази кроз B, сече праву OA' (сл. 421). У тачки C секу се висине троугла $BA'D$, јер BC је управна на $A'D$ а $A'C$ је управна на BD, дакле $A'B$ је управна на CD, а отуда је и AB' управна на CD.



Сл. 421

Према томе, у тачки C секу се и висине троугла $B'AD$, јер је AC управна на $B'D$, а CD управна на AB', дакле $B'C$ је управна на AD, а отуда је и BC' управна на AD.

Према томе у тачки B секу се висине троугла $AC'D$, јер је AB управна на $C'D$, а BC' на AD, дакле BD је управна на AC'.

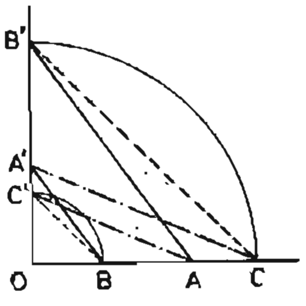
Како је права BD управна на $A'C$ и на AC', праве AC' и $A'C$ су упоредне. — Тиме је ова теорема доказана.

Овде нам је потребна следећа теорема, која следује одмах из претходне:

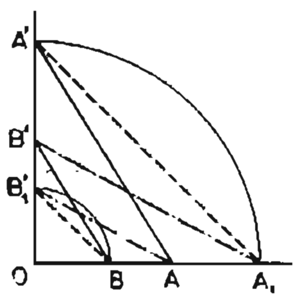
Теорема 51.8. *Нека су* A, B, C *тачке на једном краку и* A′, B′, C′ *тачке на другом краку правог угла с теменом* O. *Ако су праве AB' и $A'B$ упоредне, а дужи* OC *и* OC′ *редом једнаке дужима* OB′ *и* OB, *тада су праве* CA′ *и* C′A *упоредне.*

Доказ. Како је $OC=OB'$ и $OC'=OB$, троугли $BC'O$ и $CB'O$ су једнакокраки, дакле углови $\sphericalangle OBC'$ и $\sphericalangle OCB'$ су једнаки, дакле праве BC' и $B'C$ су упоредне (сл. 422). Према томе праве CA' и $C'A$ су на основи претходне теореме упоредне.

Сад се може доказати предложена теорема о размени средњих чланова сразмере.



Сл. 422



Сл. 423

Теорема 51.9. *Ако су дужи* a *и* b *сразмерне дужима* a′ *и* b,′ *такође су и дужи* a *и* a′ *сразмерне дужима* b *и* b′, *тј. из*

$$a:b \;::\; a':b' \quad \textit{следује} \quad a:a' \;::\; b:b'.$$

Доказ. Како су праве AA' и BB' упоредне (сл. 423), одредимо на OA тачку A_1 тако да буде $OA_1=a$, а на OB тачку B'_1, тако да буде $OB'_1=$ $=b$. Треба доказати да су дужи A_1B' и AB_1' упоредне, јер то значи да је

$$a : a' \;::\; b : b'.$$

Ставимо у претходну теорему A', B', A_1, B_1' редом уместо B', A', C, C'. Како су A, B, A_1 тачке на једном краку, а A', B', B_1' на другом краку правог угла с теменом O и како су праве AB' и $A'B$ упоредне, а дужи OA_1 и OB_1' редом једнаке дужима OA' и OB, праве A_1B' и AB_1' су према тој теореми упоредне. Дакле $a : a' :: b : b'$.

Из претходне теореме следује ова:

Теорема 51.10. *Ако су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{a}'$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{b}'$ *и сразмерне дужима* $\mathfrak{c}$ *и* $\mathfrak{c}'$, *такође су дужи* $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{b}'$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{c}$ *и* $\mathfrak{c}'$, *тј. из*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{a}' :: \mathfrak{b} : \mathfrak{b}' \quad \textit{и} \quad \mathfrak{a} : \mathfrak{a}' :: \mathfrak{c} : \mathfrak{c}'$$

следује

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{b}' :: \mathfrak{c} : \mathfrak{c}'.$$

Доказ. Према теореми 51.9 из $a : a' :: b : b'$ следује $a : b :: a' : b'$, а из $a : a' :: c : c'$ следује $a : c :: a' : c'$. Према теореми 51.3 из $a : b :: a' : b'$ и $a : c :: a' : c'$ следује $b : c :: b' : c'$, а отуд према теореми 51.9 $b : b' :: :: c : c'$.

Ако су $a_1, a_1', a_2, a_2', \ldots a_n, a_n'$ $(n = 3,4, \ldots)$ парови извесних дужи и ако су дужи a_1 и a_1' сразмерне дужима a_2 и a_2', затим сразмерне дужима a_3 и a_3', и дужима a_4 и a_4' итд., према претходној теореми сви ти парови су међу собом сразмерни, тј. из

$$a_1 : a_1' :: a_2 : a_2', \quad a_1 : a_1' :: a_3 : a_3', \ \ldots, \quad a_1 : a_1' :: a_n : a_n'$$

следује уопште

$$a_i : a_i' :: a_k : a_k', \qquad i, \ k = 1,2, \ldots, n.$$

Стога ћемо тада писати скраћено:

$$a_1 : a_1' :: a_2 : a_2' :: \ \ldots \ :: a_n : a_n'.$$

Докажимо још једну сличну теорему:

Теорема 51.11. *Ако су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{a}'$ *и* $\mathfrak{b}'$ *такође су сразмерне и дужима* $\mathfrak{a}\pm\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{b}\pm\mathfrak{b}'$, *тј. из*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} :: \mathfrak{a}' : \mathfrak{b}' \quad \textit{следује} \quad \mathfrak{a} : \mathfrak{b} :: (\mathfrak{a}\pm\mathfrak{a}') : (\mathfrak{b}\pm\mathfrak{b}').$$

Доказ. Према теореми 51.9 је $a : a' :: \mathfrak{b} : \mathfrak{b}'$, дакле је према теореми 51.4 $(\mathfrak{a}\pm\mathfrak{a}') : a :: (\mathfrak{b}\pm\mathfrak{b}') : b$, а отуд према теореми 51.9 $(a\pm a') : (\mathfrak{b}\pm\mathfrak{b}') :: :: a' : \mathfrak{b}'$, дакле према теореми 51.1 је $a' : \mathfrak{b}' :: (a\pm a') : (b\pm b')$. Како је према теореми 51.1 $(a' : b') :: a : b$ имамо према теореми 51.10 $a : b :: (a\pm a') : :(b\pm b')$.

Докажимо још следећу теорему, која је такође значајна.

Теорема 51.12. *Ако су дужи* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ *и ако су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}_1$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{c}_1$ *и* $\mathfrak{d}$, *тада су и дужи* $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{b}_1$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{c}_1$ *и* $\mathfrak{c}$, *тј. из*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} :: \mathfrak{c} : \mathfrak{d} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{a} : \mathfrak{b}_1 :: \mathfrak{c}_1 : \mathfrak{d}$$

следује

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{b}_1 :: \mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}.$$

Доказ. Према дефиницији 51.1 постоје на једном краку правог угла $\sphericalangle O$ тачке A, B, B_1 и на другом краку тачке C, D, C_1, тако да су праве AC и BD међу собом упоредне и праве AC_1 и B_1D међу собом упоредне (сл. 424). Дакле, према теореми 51.7 и праве BC_1 и B_1C су упоредне, дакле према дефиницији 51.1 је

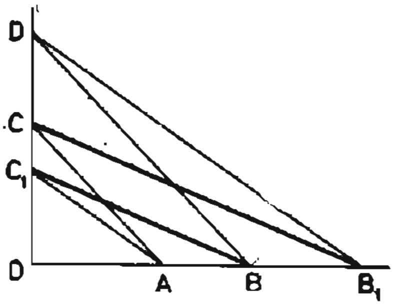
$$b : b_1 :: c_1 : c.$$

4. Докажимо још следећу теорему, која ће нам бити потребна у § 63.

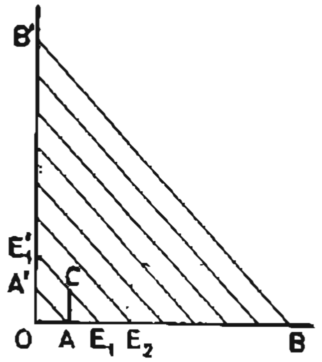
Теорема 51.13. *Ако су на једном краку праве угла* $\sphericalangle AOA'$ *таке* A *и* B *и на другом краку тачке* A' *и* B' *и ако су праве* AA' *и* BB' *упоредне, и сем тога* OB = mOA *тада је и* OB' = mOA'. *И обрнуто*: *Ако је* OB = mOA *и* OB' = mOA', *тада су праве* AA' *и* BB' *упоредне. Сем тога постоји сразмера*

$$a : ma \quad :: \quad a' : ma'.$$

Доказ. Нека је дуж OB подељена на m једнаких делова, тј. нека су тачке E_1, E_2, ... E_{m-2} на дужи OB такве да је $OA = AE_1 = E_1E_2 = \ldots = E_{m-2}B$ (сл. 425). Уочимо дужи упоредне правим AA' и BB' и које спајају те тачке с тачкама E_1', E_2', . . . , $E_m'_{-2}$ на краку OA'.



Сл. 424



Сл. 425

Нека је AC дуж управна на OA, са крајем на E_1E_1'. Тада су троугли OAA' и AE_1C подударни, јер су странице OA и AE_1 једнаке а странице OA' и AC, као странице AA' и E_1C упоредне. Дакле је $OA' = AC$. Но четвороугао $ACE_1'A'$ је паралелограм, јер су му две и две странице паралелне. Дакле је $AC = A'E_1'$, па како је $OA' = AC$, имамо $OA' = A'E_1'$.

Исто тако се показује да је $A'E_1' = E_1'E_2'$ итд., тј. да је $OA' = A'E_1' = E_1'E_2' = \ldots = E'_{m-2}B'$, дакле да је и дуж OA' подељена на m једнаких делова. Према томе је $OB' = mOA'$. Обратно ако је $OB = mOA$ имамо и $OB' = mOA'$. И ако не би биле праве AA' и BB' упоредне, тада повуцимо кроз B дуж BB'', упоредну са AA'.

Према претходном је $OB'' = mOA'$ и према томе $OB = OB''$, тј. тачка B'' је истоветна с B', супротно претпоставци. Према томе праве AA' и BB' су упоредне.

Последњи део теореме (о сразмери) следује непосредно из претходнога на основи дефиниције 51.1.

52. СЛИЧНОСТ ЛИКОВА.

1. Полазимо од дефиниције сличних многоуглова.

Дефиниција 52.1. Два многоугла $A_1A_2 \ldots A_n$ и $A_1'A_2' \ldots A_n'$ са једнаким бројем страница и којима су одговарајући углови, два по два, јенаки

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_1'A_2'A_3', \ \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle A_2'A_3'A_4', \ \ldots, \ \sphericalangle A_{n-1}A_nA_1 = A'_{n-1}A_n'A_1',$$

а одговарајуће странице сразмерне:

$$A_1A_2 : A_1'A_2' :: A_2A_3 : A_2'A_3' :: A_3A_4 : A_3'A_4' :: \ldots :: A_nA_1 : A_n'A_1',$$

називају се *сличним многоуглима*.

За два многоугла $A_1A_2 \dots A_n$ и $A_1'A_2' \dots A_n'$ која су слична писаћемо

$$A_1A_2 \dots A_n \sim A_1'A_2' \dots A_n'.$$

Из ове дефиниције следују непосредно ове две теореме:

Теорема 52.1. *Подударни многоуглови су такође слични.*

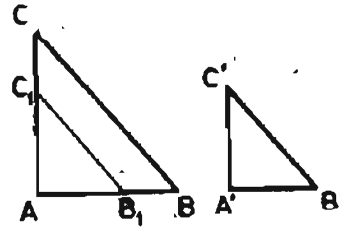
Теорема 52.2. *Ако су два многоугла слична трећем многоуглу слична су и међу собом.*

2. У проучавању сличности многоуглова потребно је посматрати прво троугле.

Према дефиницији 52.1 два троугла називаћемо сличним ако су им странице, две по две, сразмерне, а углови захваћени одговарајућим страницама једнаки.

Ради доказа теореме 52.4 потребно је доказати прво следећу, у којој се још не тврди да су два троугла слична.

Теорема 52.3. *Ако су у два правоугла троугла два оштра угла једнака, катете налегле на те углове су сразмерне насрамним катетама.*



Сл. 426

Доказ. Нека су то троугли ABC и $A'B'C'$ с правим угловима $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle A'$ и једнаким оштрим угловима $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ (сл. 426). Ако је на краку AB правог угла тачка B_1 таква да је $AB_1 = A'B'$ и на краку AC тачка C_1 таква да је $AC_1 = A'C'$, троугли $A'B'C'$ и AB_1C_1 су подударни, дакле $\sphericalangle B' = B_1$, па како је $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ имамо $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$. Али $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B_1$ су два сагласна угла што граде праве BC и B_1C_1 са попречном AB, дакле праве BC и B_1C_1 су упоредне и према томе $AB : AB_1 :: AC : AC_1$ и отуд $AB : A'B' :: AC : A'C'$.

Докажимо сад једну од четири теореме о сличности троуглова (тзв. теорема II).

✱ **Теорема** 52.4. *Два троугла су слична ако су два угла једног троугла једнака двама одговарајућим угловима другог троугла.*

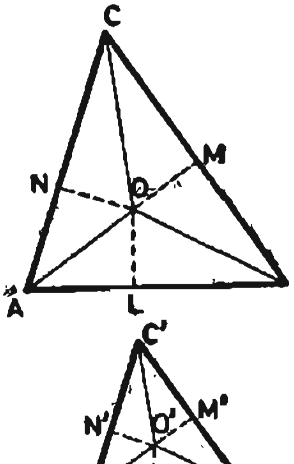
Доказ. Нека су у троуглима ABC и $A'B'C'$ (сл. 427) једнаки углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B'A'C'$ и затим углови $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle A'B'C'$. Имамо

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle B'A'C' + \sphericalangle A'B'C'.$$

Како је збир сва три угла у троуглу једнак збиру два права угла, имамо

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'C'B' + \\ + \sphericalangle B'A'C' + \sphericalangle A'B'C',$$

дакле $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, тј. и трећи углови су једнаки. Још треба доказати да су странице сразмерне две по две.



Сл. 427

Према теореми 23.15 располовнице углова првог троугла секу се у извесној тачки O, а располовнице углова другог троугла у извесној тачки O'. Располовница AO полови угао $\sphericalangle BAC$ на два једнака угла $\sphericalangle BAO$ и $\sphericalangle CAO$; аналого располовница $A'O'$ угла $\sphericalangle B'A'C'$. Како је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, а $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle BAO$ и $\sphericalangle B'A'C' = 2\sphericalangle B'A'O'$, имамо $\sphericalangle BAO = \sphericalangle B'A'O'$. Исто тако су и остали одговарајући углови, настали располовљавањем, једнаки у оба троугла.

Нека су OL, OM, ON дужи управне на страницама AB, BC CA, од тачке O до пресека са тим страницама. Аналого, нека су $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ дужи управне на страницама троугла $A'B'C'$. У правоуглим троуглима ALO и $A'L'O'$ оштри углови $\sphericalangle BAO$ и $\sphericalangle B'A'O'$ су једнаки, дакле према теореми 52.3 имамо

$$AL : A'L' :: LO : L'O'.$$

Исто вреди за све остале аналоге правоугле троугле. Дакле постоји и сразмера

$$BL : B'L' :: LO : L'O'.$$

Према томе, на основи теореме 51.10 је и

$$AL : A'L' :: BL : B'L',$$

дакле по теореми 51.4 је и

$$AL : A'L' :: (AL+BL) : (A'L'+B'L'),$$

тј.

$$AL : A'L' :: AB : A'B',$$

а отуд према теореми 51.10

$$AB : A'B' :: LO : L'O'.$$

Исто тако је и

$$BC : B'C' :: MO : M'O'$$

и

$$CA : C'A' :: NO : N'O'.$$

Али, према теореми 22.5 је $LO=MO=NO$, па је, опет према теореми 51.10

$$AB : A'B' :: BC : B'C'$$

и

$$AB : A'B' :: CA : C'A',$$

па и

$$BC : B'C' :: CA : C'A'.$$

Дакле, странице троуглова ABC и $A'B'C'$ су сразмерне две по две. Уместо последња три израза сразмере пишемо и краће

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CA : C'A'.$$

Тиме је ова теорема у целости доказана.

Сад можемо доказати тзв. главни став о сличности и њој обрнуту теорему. На основи тих двеју теорема сразмера дужи постаје независна од услова у дефиницији 51.1 да угао којим се сразмера дефинише буде прав. Упоредност двеју правих што секу оба крака ма каквог угла, одређује већ сразмеру дотичних тачака.

Теорема 52.5. *Ако две упоредне праве секу краке ма каквог угла, отсечци на једном краку су сразмерни отсечцима на другом краку и сразмерни оним отсечцима које краци отсецају на обема упоредним правим.*

Доказ. Нека је то угао $\sphericalangle AOA'$ (сл. 428), и нека су AA' и BB, упоредне праве, које секу крак OA у тачкама A и B и крак OA' у A' и B'. Посматрајмо троугле OAA' и OBB'. Углови $\sphericalangle OAA'$ и $\sphericalangle OBB'$ су, као сагласни при упоредним правим AA' и BB', једнаки. И углови $\sphericalangle AOA'$ и

$\sphericalangle BOB'$ су као истоветни једнаки. Дакле троугли OAA' и OBB' су према теореми 52.4 слични, па имамо

$$OA : OB \; : : \; OA' : OB' \; : : \; AA' : BB'.$$

Докажимо сад обрнуту теорему:

* **Теорема** 52.6. *Ако две праве секу краке ма каквог угла тако да су отсечци на једном краку сразмерни отсечцима на другом краку, те две праве су упоредне.*

Доказ. Нека праве AA' и BB' секу краке угла $\sphericalangle AOA'$ (сл. 429) тако да је

$$OA : OB \; : : \; OA' : OB'.$$

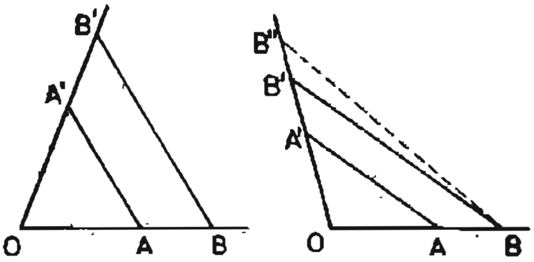
Кад праве AA' и BB' не би биле упоредне, нека је BB'' права упоредна правој AA', која пролази кроз тачку B. Она би секла крак OA' у некој другој тачки B'' и према теореми 52.5 било би

$$OA : OB \; : : \; OA' : OB''.$$

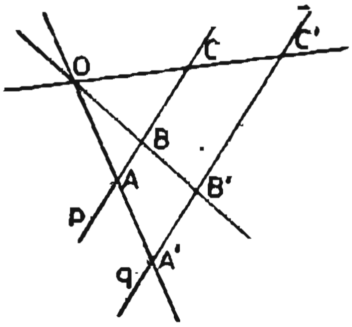
Но, према теореми 51.6 постоји само једна тачка B' или B'' за коју постоји та сразмера, дакле не постоји тачка B'' различита од B', тј. имамо

$$OA : OB \; : : \; OA' : OB'.$$

Из главне теореме о сличности, следује напр. ова:



Сл. 428 – 429



Сл. 430

Теорема 52.7. *Ако у једној равни три праве које се секу у једној тачки, секу две упоредне праве, тада су отсечци што те праве отсецају на једној упоредној правој сразмерни отсечцима што отсецају на другој упоредној правој.*

Доказ. Нека су то праве a, b, c (сл. 430) које пролазе кроз извесну тачку C и секу две упоредне праве p и q у тачкамм A, B, C, односно у A', B', C'. Према теореми 52.5 је

$$OB : OB' \; : : \; AB : A'B' \quad \text{и} \quad OB : OB' \; : : \; BC : B'C',$$

дакле је

$$AB : A'B' \; : : \; BC : B'C'$$

или

$$AB : BC \; : : \; A'B' : B'C'.$$

Следећом теоремом утврђује се постојање n-тог дела ма које дужи.

Теорема 52.8. *Ма какав био природни број* n *и ма каква била дуж* AB, *постоји на тој дужи тачка* C *тако да је дуж* AC *једнака* n-*том делу дужи* AB.

Доказ. Нека је M_1 тачка ван праве AB (сл. 431). На правој AM_1 постоје тачке $M_2, M_3, \ldots, M_n$ тако да је

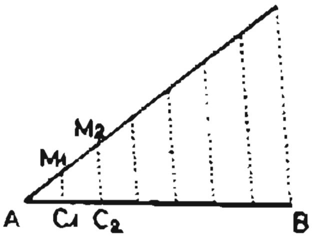
$$A - M_1 - M_2, \quad M_1 - M_2 - M_3, \quad \ldots, \quad M_{n-2} - M_{n-1} - M_n$$

и $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \ldots = M_{n-1}M_n$.

Како су B и M_n две разне тачке, права BM_n је одређена права, дакле и праве које пролазе кроз тачке $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и упоредне су са правом BM_n су одређене праве које, према теореми 7.12 секу дуж AB између A и B редом у извесним тачкама C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$.

Према главном ставу сличности (52.5) имамо

$$AC_1 : C_1C_2 :: AM_1 : AM_2,$$



Сл. 431

дакле према теореми 51.4 је

$$AC_1 : C_1C_2 :: AM_1 : M_1M_2,$$

па како је $AM_1 = M_1M_2$, према теореми 51.5 је такође $AC_1 = C_1C_2$.

Исто тако имамо

$$AC_1 : AC_3 :: AM_1 : AM_3,$$

а отуд двократном применом теореме 51.4 имамо

$$AC_1 : C_2C_3 :: AM_1 : M_2M_3,$$

па како је $AM_1 = M_2M_3$, имамо да је и $AC_1 = C_2C_3$.

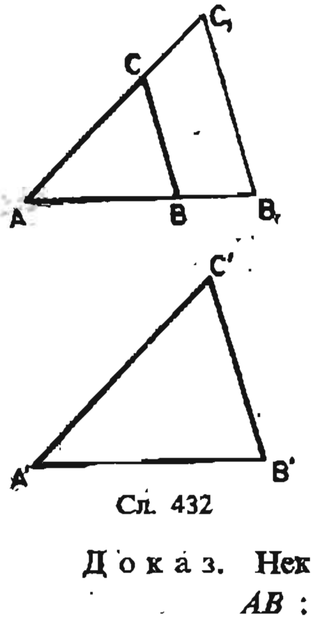
На исти начин доказујемо даље једнакости, тако да је

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_{n-1}B.$$

Ако уместо C_1 пишемо C, имамо према дефиницији 26.6 $AB = nAC$. – Тиме је ова теорема доказана.

Помоћу главне теореме о сличности можемо доказати остале три теореме о сличности троуглова, тзв. теореме I, III, и IV.

Теорема 52.9. *Два троугла су слична ако су две странице једног троугла сразмерне двема страницама другог троугла и ако су оба захваћена угла једнака.*



Сл. 432

Доказ. Нека је у троуглима ABC и $A'B'C'$ (сл. 432).

$$AB : A'B' :: AC : A'C'$$

и нека је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Ако је на краку AB угла $\sphericalangle BAC$ тачка B_1 таква да је $AB_1 = A'B'$ и на краку AC тачка C_1 таква да је $AC_1 = A'C'$, према теореми 52.6 су услед сразмере праве BC и B_1C_1 упоредне, дакле према теореми 39.2 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB_1C_1$, па како су троугли AB_1C_1 и $A'B'C'$ подударни, имамо $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle A'B'C'$, дакле $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Према томе у троуглима ABC и $A'B'C'$ су два пара углова једнака, дакле према теореми 52.4 та два троугла су слична.

Теорема 52.10. *Два троугла су слична ако су све три странице једног троугла сразмерне одговарајућим страницама другог троугла.*

Доказ. Нека је у троуглима ABC и $A'B'C'$ (сл. 432).

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CA : C'A'.$$

Ако су на крацима угла $\sphericalangle BAC$ тачке B_1 и C_1 исте као у претходној теореми, тј. ако је $AB_1=A'B'$, $AC_1=A'C'$, према теореми 52,6 су праве BC и B_1C_1 упоредне, јер је

$$AB : AB_1 :: AC : AC_1.$$

Према теореми 52.5 је и

$$AB : AB_1 :: BC : B_1C_1,$$

дакле је и

$$AB : A'B' :: BC : B_1C_1,$$

па како је

$$AB : A'B' :: BC : B'C',$$

имамо према теореми 51.6 $B_1C_1=B'C'$. Дакле у троуглима AB_1C_1 и $A'B'C$ све три странице једног троугла су једнаке одговарајућим страницама другог троугла, тј. ти троугли су подударни и према томе је $\sphericalangle BAC= = \sphericalangle B'A'C'$. Дакле, према теореми 52.9 то су два слична троугла.

✱ **Теорема** 52.11. *Два троугла су слична ако су две странице једног троугла сразмерне двема страницама другог троугла, углови наспрам двеју одговарајућих страница једнаки, а углови наспрам других двеју одговарајућих страница оба оштра, тупа или права.*

Доказ. Нека је у троуглима ABC и $A'B'C'$ (сл. 432)

$$AB : A'B' :: AC : A'C',$$

$\sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C'$, а $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle A'C'B'$ нека су оба права, оштра или тупа. Ако су на крацима угла $\sphericalangle BAC$ тачке B_1 и C_1 исте као у прошлој теореми, имамо

$$AB : AB_1 :: AC : AC_1,$$

дакле праве BC и B_1C_1 су упоредне и према томе је $\sphericalangle ABC=\sphericalangle AB_1C_1$, $\sphericalangle ACB=AC_1B_1$, па како је $\sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C'$, а $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle A'C'B'$ су оба права, оштра или тупа, имамо $\sphericalangle ABC=\sphericalangle AB_1C_1$ и сем тога углови $\sphericalangle A'B'C'$ и $\sphericalangle AC_1B_1$ су оба права, оштра или тупа, дакле према теореми 25.14 троугли $A'B'C'$ и AB_1C_1 су подударни и према томе $\sphericalangle B'A'C'=\sphericalangle B_1AC_1$, па како је $\sphericalangle B_1AC_1=\sphericalangle BAC$, имамо $\sphericalangle BAC=\sphericalangle B'A'C'$. Дакле у троуглима ABC и $A'B'C'$ је $\sphericalangle BAC=\sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C'$, тј. према теореми 52.4 то су два слична троугла.

3. Значајне су и следеће две теореме о геометријској средини у правоуглом троуглу.

Пре свега дефинишимо дуж која се назива геометријском средином или средњом пропорционалом двеју датих дужи.

Дефиниција 52.2. Ако су оба унутарња члана једне сразмере истоветна, тј. ако су напр. дужи a и b сразмерне дужима b и c, рећи ћемо да је унутарњи члан сразмере, тј. дуж b, *геометријска средина* између остала два члана.

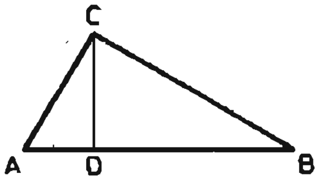
Како се унутарњи и спољашњи чланови једне сразмере могу међу собом разменити, геометријска средина је и дуж a ако су дужи a и b сразмерне дужима c и a.

Теорема 52.12. *У правоуглом троуглу је свака катета геометријска средина између хипотенузе и суседног отсечка што висина управна на хипотенузи отсеца на њој.*

Доказ. Нека је у троуглу ABC (сл. 434) угао $\sphericalangle ACB$ прав, CD висина управна на хипотенузи AB, дакле отсечци на овој су AD и BD. Троугли ABC и ACD су према теореми 52.4 слични, јер су оба права угла једнака, а оштри углови у A заједнички, дакле једнаки. Према томе, по дефиницији 52.1 имамо

$$AB : AC :: AC : AD,$$

тј. AC је геометријска средина између AB и AD.



Сл. 434

Теорема 52.13. *У правоуглом троуглу је висина која је управна на хипотенузи, геометријска средина оба отсечка што та висина отсеца на хипотенузи.*

Доказ. Како је у правоуглом троуглу збир оштрих углова једнак правом углу, имамо

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD,$$

дакле $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD$, тј. у правоуглим троуглима ACD и CBD два оштра угла су једнака и према томе та два троугла су по теореми 52.4 слична, те је

$$AD : CD :: CD : BD,$$

тј. CD је геометријска средина између отсечака AD и BD.

4. На темељу дефиниције 52.1 и до сада доказаних теорема могу се доказати теореме о сличним многоуглима који имају више од три странице.

Постоје напр. следеће теореме. Доказе препуштамо читаоцу.

Теорема 52.14. *Ако су два равна многоугла слична, одговарајуће дијагонале су сразмерне, како међу собом, тако и са одговарајућим страницама*

Теорема 52.15. *Ако су у два равна многоугла одговарајуће странице сразмерне и одговарајуће дијагонале сразмерне, та два многоугла су слична.*

Теорема 52.16. *Свака два правилна многоугла с истим бројем страница ес у слична.*

Очигледно, сама подударност одговарајућих углова није довољна да би два многоугла била слична, чим им је број страница већи од три.

5. Држећи се извесних аналогија с многоуглима, можемо проучавати сличност полиједара. Прво постављамо ову дефиницију:

Дефиниција 52.3. Два полиједра ћемо називати *сличним* ако су им одговарајући рогљеви, два по два, подударни, одговарајуће ивице, две по две, сразмерне, а многоугли одговарајућих пљосни слични.

Постоје напр. следеће теореме:

Теорема 52.17. *Ако су два полиједра слична, одговарајуће дијагонале су сразмерне, како међу собом, тако и са одговарајућим ивицама.*

Теорема 52.18. *Ако су у два полиједра одговарајуће ивице сразмерне и одговарајуће (унутарње и спољне) дијагонале сразмерне, та два полиједра су слична.*

Теорема 52.19. *Ако су у два полиједра многоугли одговарајућих пљосни слични, два по два, та два полиједра су слична.*

Подударност одговарајућих рогљева није, очигледно, довољна да би два полиједра била слична, сем ако су то два тетраедра.

Теорема 52.20. *Свака два правилна полиједра с истим бројем пљосни су слична.*

Напоменимо најзад, да се о сличности рогљева, као и углова може говорити само у смислу „сличности кроз све тачке“.

6. Аналого подударности ма каквих ликова, можемо развити посматрање сличности ма каквих ликова. Полазимо дакле од следеће дефиниције:

Дефиниција 52.4. Ако међу тачкама двају ликова, који садрже најмање по две тачке, постоји такав узајаман однос да су сваке две дужи, које спајају два пара тачака једног лика, сразмерне двема дужима, које спајају два пара одговарајућих тачака другог лика, називаћемо та два лика *сличним кроз све тачке* или, кратко, *сличним.*

Свакој теореми о подударности кроз све тачке (§ 29) одговара теорема о сличности кроз све тачке. Посматрање тих теорема изближе препуштамо читаоцу. Истакнимо само ову теорему:

Теорема 52.21. *Два лика која су слична кроз све тачке, слична су и у смислу раније дефинисане сличности, уколико је ова за њих дефинисана.*

Дакле, напр. два полиједра која су слична кроз све тачке, слична су и у смислу дефиниције 52.3. Али напр. за рогљеве сличност није дефинисана раније и зато се теорема 52.21 на њих не односи.

Имамо пак следеће теореме:

Теорема 52.22. *Сваке две дужи су сличне кроз све тачке.*

Теорема 52.23. *Свака два круга су слична кроз све тачке.*

Теорема 52.24. *Сваке две лопте су сличне кроз све тачке.*

Теорема 52.25. *Два угла која су слична кроз све тачке, такође су подударна* (у смислу дефиниције 21.1).

Теорема 52.26. *Два рогља која су слична кроз све тачке, такође су подударна.*

53. СЛИЧНИ ЛИКОВИ У СЛИЧНОМ ПОЛОЖАЈУ.

1. Посматрајмо прво равне многоугле који су у једној равни или у двема упоредним равнима.

Ради сажетијег изношења садржаја уводимо следећи начин изражавања: Уместо да за неке праве кажемо да су упоредне, рећи ћемо и да се секу у бескрајно далекој тачки. Задржавајући формално чињеницу да се две праве секу само у једној тачки, сматраћемо да свака права има само једну бескрајно далеку тачку.

Према томе можемо за сваке две праве које припадају истој равни, рећи да се секу, јер те праве се или заиста секу или у „бескрајно далекој тачки“.

Дефиниција 53.1. За два слична равна многоугла, којима су одговарајуће странице, две по две, упоредне, рећи ћемо да су у *сличном положају* или да су *перспективно слични* или *хомотетски.*

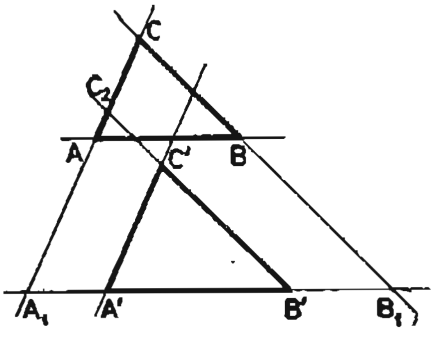
Приметимо да два многоугла са упоредним страницама не морају бити слична. Али два троугла са упоредним страницама су увек слична. Постоји дакле ова теорема:

Теорема 53.1. *Ако су два слична равна многоугла у сличном положају, онда су оба у истој равни или у двема упоредним равнима.*

Доказ. Нека су то многоугли $ABC \ldots M$ и $A'B'C' \ldots M'$, први у равни α, други у равни α'. Ако је теме A' у равни α, и теме B' је у α, јер праве AB и $A'B'$ су према дефиницији 53.1 упоредне. Према томе и теме C' је у равни α, итд., дакле раван α' је истоветна са равни α. — Нека је A' изван равни α. Праве $A'B'$ и $A'C'$ су редом упоредне са правим AB и AC, дакле према теореми 41.3 раван α' првих двеју правих упоредна је равни α других двеју правих.

Теорема 53.2. *Ако су одговарајуће странице, две по две, двају троуглова упоредне, та два троугла су слична.*

Доказ. Према теореми 53.1 равни ABC и $A'B'C'$, двају посматраних троуглова, поклапају се или су упоредне. Ако су упоредне, нека су a, b, c три упоредне праве које пролазе редом кроз A', B', C' и продиру кроз раван ABC у тачкама A^*, B^*, C^*. Како је четвороугао $A'B'B^*A^*$ паралелограм, имамо $A'B' = A^*B^*$. Исто тако је $B'C' = B^*C^*$ и $C'A' = C^*A^*$. Дакле троугли $A'B'C'$ и $A^*B^*C^*$ су подударни. Ако су троугли ABC и $A^*B^*C^*$ слични, слични су, очигледно и троугли ABC и $A'B'C'$. Писаћемо дакле у следећем излагању $A'B'C'$ уместо $A^*B^*C^*$ и претпостављајући да су троугли ABC и $A'B'C'$ у истој равни, докажимо постављену теорему.



Сл. 435

Нека су одговарајуће странице троуглова ABC и $A'B'C'$ упоредне, тј. нека су праве AB и $A'B'$ упоредне, и тако исто праве BC и $B'C'$ и праве CA и $C'A'$ (сл. 435). Претпоставимо да се три од ових шест правих не секу никад у једној истој тачки, дакле да права $A'B'$ сече праве AC и BC у двема разним тачкама A_1 и B_1. Троугли ABC и A_1B_1C су слични према теореми 53.5 и 53.7, јер су праве AB и $A'B'$ упоредне.

И права $B'C'$ сече праве AB и AC у двема разним тачкама B' и C_2. Троугли A_1B_1C и $A_1B'C_2$ су слични, јер су праве BC и $B'C_2$ упоредне.

Најзад и права $A'C'$ сече праве A_1B' и $B'C_2$ и двема разним тачкама A' и C', дакле и троугли $A_1B'C_2$ и $A'B'C'$ су слични.

Но из сличности троуглова ABC и A_1B_1C и троуглова A_1B_1C и $A_1B'_1C_2$ и троуглова $A_1B'C_2$ и $A'B'C'$ следује, према теореми 52.2 сличност троуглова ABC и $A'B'C'$.

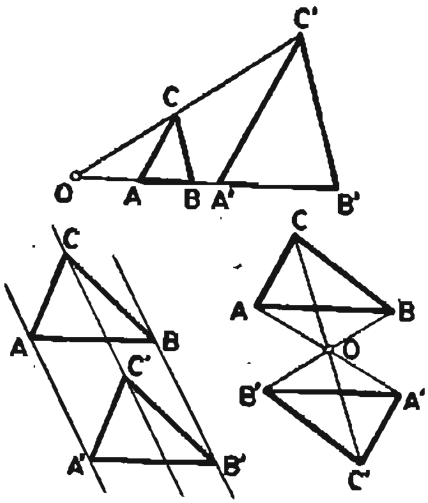
Ако би пак од датих шест правих три пролазиле кроз исту тачку, нека је $A''B''C''$ такав троугао, да се од правих $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ и датих шест правих никада три праве не секу у једној тачки. Тада су према претходном закључку троугли ABC и $A''B''C''$ слични и тако исто троугли $A''B''C''$ и $A'B'C'$, дакле и троугли ABC и $A'B'C'$ су слични. — Тиме је доказ ове теореме завршен.

Кад су два многоугла слична и у сличном положају, праве које пролазе кроз одговарајућа темена, пролазе све кроз једну исту тачку. Докажимо то прво за троугле.

Теорема 53.3. *Ако су два слична троугла у сличном положају, праве што спајају одговарајућа темена пролазе кроз једну исту тачку.*

Ако су та два троугла подударна, та тачка је бескрајно далека тачка.

Доказ. Нека су то у равнима α и α' троугли ABC и $A'B'C'$, одговарајућа темена нека су A и A', B и B', C и C'. Ако се две од правих AA', BB', CC' поклапају, равни α и α' се такође поклапају. Како сад имамо само две разне праве, ове се увек секу (у случај упоредности у бескрајно далекој тачки), дакле тада све три праве пролазе кроз једну тачку (сл. 436). Посматрајмо случајеве кад су AA', BB', CC' три разне праве.



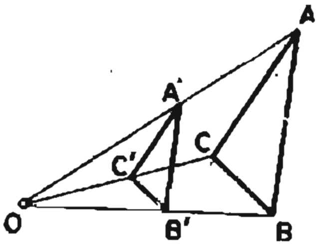
Сл. 436 — 438

Претпоставимо прво да су оба троугла подударна, тј. да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ итд. Како су дужи AB и $A'B'$ упоредне и једнаке, а углови $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B'A'C'$ једнаки, њихови краци су, према теореми 39.16, два по два, сагласни или пак супротни. Ако су сагласни, тачке B и B' су у равни упоредних правих AB и $A'B'$ с исте стране праве AA' (сл. 437), дакле четвороугао $ABB'A'$ је паралелограм, а праве AA' и BB' су упоредне. Исто тако је и права CC' упоредна с оним двема правим, дакле све три праве секу се у бескрајно далекој тачки. Ако су краци углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B'A'C'$, два по два, супротни, тачке B и B' су с разних страна праве AA', дакле праве AA' и BB' секу се у извесној тачки O. Како су дужи AB и $A'B'$ упоредне и једнаке, четророугао $ABA'B'$ је паралелограм, а дужи AA' и BB' су му дијагонале. Ове се полове узајамно у тачки O (сл. 438).

Исто тако је четвороугао $ACA'C'$ паралелограм, а д жи AA' и CC' су му дијагонале и полове се узајамно. Но средиште дужи AA' је тачка O, дакле дијагонала CC' пролази кроз O, тј. све три праве AA', BB', CC' пролазе кроз тачку O.

Претпоставимо сада да троугли ABC и $A'B'C'$ нису подударни. Како у троуглу има и оштрих углова, нека су напр. углови A и A' оштри. Праве AA' и BB' припадају једној равни, јер су праве AB и $A'B'$ упоредне, дакле праве AA' и BB' секу се у извесној тачки O, јер нису упоредне. Кад би, наиме биле упоредне, како су дужи AB и $A'B'$ упоредне, четвороугао $ABB'A'$ био би паралелограм, било би дакле $AB = A'B'$ противно претпоставци.

Тачка O је између A и A' или не. У првом случају тачке B и B' су са разних страна праве AA', а у другом случају су с исте стране те праве. Исто вреди за C и C' у равни упоредних правих AC и $A'C'$. Претпоставимо прво да O није између A и A', него да је напр. $A - A' - O$ (сл. 439).



Сл. 439

Докажимо да и права CC' пролази кроз тачку O. Нека је D' тачка пресека правих OC и $A'C'$. Како O није између A и A', тачке C и D' су с исте стране праве AA'. Даље имамо

$$AB : A'B' \; :: \; AO : A'O$$

и

$$AO : A'O \; :: \; AC : A'D',$$

дакле

$$AB : A'B' \; :: \; AC : A'D'.$$

Из сразмере

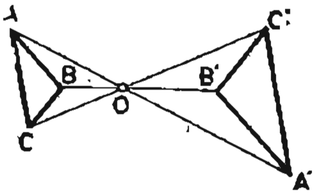
$$AB : A'B' \; :: \; AC : A'C',$$

следује према теореми 51.6 да је $A'C' = A'D'$, па како су C и C' с исте стране праве AA, а и C и D' су с исте стране те праве, тачка C' и D'

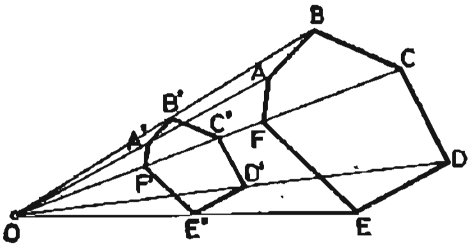
су такође с исте стране праве AA', дакле с исте стране тачке A' на правој $A'C'$. Према томе тачка D' се поклапа с C', дакле и права CC' пролази кроз тачку O.

Исто то доказујемо аналого кад је тачка O између A и A' (сл. 440). Тиме је доказ у целости завршен.

Докажимо сад исту теорему ма за какве равне многоугле.



Сл. 440



Сл. 441

Теорема 53.4. *Ако су два слична многоугла у истом положају, све праве што спајају одговарајућа темена пролазе кроз једну исту тачку — која се у случају подударности тих многоуглова своди на бескрајно далеку тачку.*

Доказ. Нека су то многоугли $ABC \ldots MN$ и $A'B'C' \ldots M'N'$ у истој равни или у двема упоредним равнима (сл. 441). Нека су затим одговарајућа темена A и A', B и B' итд. У троуглима ABC и $A'B'C'$ су странице AB и $A'B'$ сразмерне страницама BC и $B'C'$ а углови $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B'$ су једнаки, дакле према теореми 52.9 ти троугли су слични и према томе су и странице BC и $B'C'$ сразмерне страницама CA и $C'A'$ и $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$. Према теореми 53.3 праве AA', BB', CC' пролазе кроз једну тачку O.

У троуглима ACD и $A'C'D'$ је према томе

$$AC : A'C' \;::\; CD : C'D',$$

затим $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A'C'D'$, јер је угао $\sphericalangle ACD$ једнак збиру или разлици углова $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle BCA$, угао $\sphericalangle A'C'D'$ аналого, а имамо $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$ и $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$. Дакле троугли ACD и $A'C'D'$ су слични те према теореми 53.3 и права DD' пролази кроз тачку O. Сем тога је $\sphericalangle CDA = \sphericalangle C'D'A'$.

Аналогим посматрањем даљих троуглова, троуглова ADE и $A'D'E'$ итд., доказујемо и за остале праве што спајају одговарајућа темена, да све пролазе кроз O. — У случају подударности посматраних многоуглова, O је бескрајно далека тачка.

Дефиниција 53.2. Ако су два слична многоугла у сличном положају називаћемо праве што спајају одговарајућа темена *зрацима сличности*, а тачку у којој се секу сви зраци сличности *средиштем сличности*.

Значајна је следећа теорема:

Теорема 53.5. *Ако су два слична многоугла у сличном положају, средиште сличности је или између свака два одговарајућа темена, или није између ниједног пара одговарајућих темена.*

Доказ. Доказујући теорему 53.3 утврдили смо за два троугла у сличном положају да се зраци сличности секу у једној тачки O која: или није између ниједног пара одговарајућих темена, или је између свака два одговарајућа темена. Посматрајући редом троугле, као у доказу теореме 53.4, доказујемо исто то ма за какве многоугле који су у сличном положају.

Саобразно тој теореми, постављамо ову дефиницију:

Дефиниција 53.3. Ако средиште сличности двају сличних многоуглова, који су у сличном положају, није између одговарајућих темена, рећи ћемо да су та два многоугла *непосредно* (директно) *слична*, а средиште сличности називаћемо *спољним средиштем сличности.*

Ако је пак средиште сличности између одговарајућих темена рећи ћемо да су та два многоугла *обрнуто* (индиректно) слична, а средиште сличности називаћемо *унутарњим средиштем сличности.*

Докажимо сад следећу теорему:

Теорема 53.6. *Ако су два многоугла непосредно слична у односу на неки трећи многоугао, прва два многоугла су и међу собом непосредно слична.*

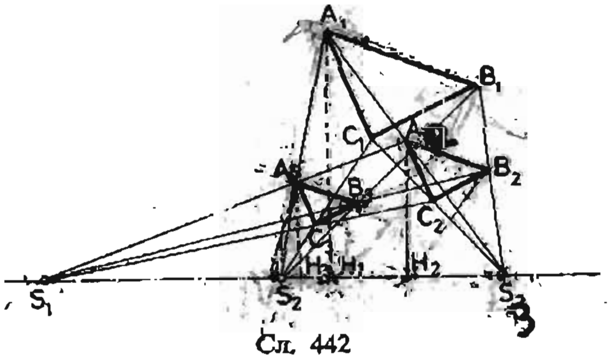
Ако су два многоугла обрнуто слична у односу на неки трећи многоугао, прва два многоугла су међу собом непосредно слична.

Ако су два многоугла један непосредно, други обрнуто слични у односу на неки трећи многоугао, прва два многоугла су међу собом обрнуто слична.

Сва три средишта сличности припадају у сва три случаја једној правој.

Доказ. Као у доказу теореме 53.4 посматраћемо троугле садржане у многоуглима. Према томе биће довољно доказати теорему у случају троуглова.

Нека су троугли $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ у сличном положају према троуглу $A_3B_3C_3$ и нека је S_2 средиште сличности првог и трећег троугла, а S_1 средиште сличности другог и трећег троугла (сл. 442). Из дефиниције сразмере следује да су и прва два троугла међу собом слична. И у сличном су положају. Нека им је средиште сличности S_3. Претпоставимо да су прве две сличности непосредне и докажимо да је тада и трећа непосредна.



Сл. 442

Посматрајмо одговарајуће странице A_1B_1, A_2B_2, и A_3B_3. Истоимене полуправе са исходиштима у A_1, A_2, A_3 су сагласне и то: полуправе A_1B_1 и A_3B_3 су сагласне зато што је S_2 спољно средиште сличности, а полуправе A_2B_2 и A_3B_3 зато што је S_1 одговарајуће средиште сличности. Зато су и полуправе A_1B_1 и A_2B_2 сагласне, дакле и S_3 је спољно средиште сличности, тј. троугли $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ су непосредно слични.

Аналого се показују следећа тврђења теореме 53.6.

Треба најзад доказати да тачке S_1, S_2 и S_3 припадају једној правој. Претпоставимо прво да сва три дата троугла нису у истој равни и докажимо да је тачка S_3 на правој S_1S_2. Раван $S_1S_2A_3$ садржи тачке A_1 и A_2. Дакле праве S_1S_2 и A_1A_2 секу се у истој тачки U (која може бити и бескрајно далека тачка). Исто тако секу се праве S_1S_2 и B_1B_2 у извесној тачки V, и праве S_1S_2 и C_1C_2 у извесној тачки W. Дакле три праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 секу се у тачкама U, V, W на правој S_1S_2. Кад би U и V биле две разне тачке, тачка S_3 би као пресек правих A_1A_2 и B_1B_2 била ван праве UV и тачка W би била у равни UVS, дакле три праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 биле би у једној равни, па би и троугли $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ били у једној равни.

Како по претпоставци троугао $A_3B_3C_3$ није у истој равни права S_1S_2 продире кроз раван UVS у једној тачки, а то се противи претпоставци да пролази кроз две разне тачке U и V. Дакле, тачке U и V се поклапају и тако исто тачке V и W, и према томе права S_1S_2 пролази кроз заједничку тачку S_3 трију правих A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

Претпоставимо сада да су сва три троугла у једној равни. Нека су H_1, H_2, H_3 подножја управних из тачака A_1, A_2, A_3 на праву S_1S_2. Како су те управне упоредне међу собом, према теореми 52.5 је

$$A_1H_1 : A_3H_3 :: A_1S_2 : A_3S_2 :: A_1B_1 : A_3B_3$$

и

$$A_2H_2 : A_3H_3 :: A_2S_1 : A_3S_1 :: A_2B_2 : A_3B_3.$$

Дакле

$$A_1H_1 : A_1B_1 :: A_3H_3 : A_3B_3$$

и

$$A_2H_2 : A_2B_2 :: A_3H_3 : A_3B_3.$$

Отуд је

$$A_1H_1 : A_1B_1 :: A_2H_2 : A_2B_2,$$

дакле

$$A_1H_1 : A_2H_2 :: A_1B_1 : A_2B_2 :: A_1S_3 : A_2S_3,$$

тј према теореми 52.5 H_1 и H_2 су пресеци упоредних правих са извесном правом која пролази кроз S. Но то је права S_1S_2, дакле S_3 је на правој S_1S_2. — Тиме је доказ завршен.

Дефиниција 53.4. Права на којој су три средишта сличности трију сличних многоуглова називаћемо *осом сличности*. Ако су сва три средишта спољна, називаћемо осу *спољном осом сличности*, ако су два средишта унутарња средишта сличности, а треће спољно, називаћемо осу *унутарњом осом сличности*.

2. Као што слични многоугли могу бити у сличном положају, тако и слични полиједри, па и ма какви ликови, који су слични „кроз све тачке“. Постављамо општу дефиницију:

Дефиниција 53.5. За два лика, слична кроз све тачке и у којима су дужи које спајају парове одговарајућих тачака, две по две, сразмерне међу собом, рећи ћемо да су у *сличном положају* или да су *перспективно слични* или *хомотетски*.

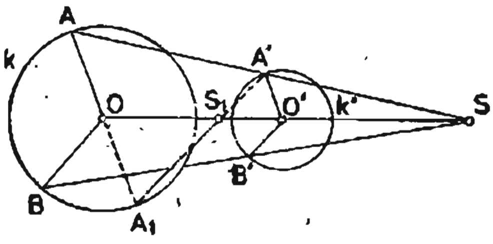
Лако је доказати за таква два лика да праве што пролазе кроз одговарајуће тачке, пролазе и кроз једну заједничку тачку. Исто као и за многоугле, дефинишемо зраке сличности и средиште сличности, затим непосредно и обрнуто сличне ликове са спољним односно унутарњим средиштем сличности, па и осе сличности.

Задржимо се само на сличности кругова и лопти. Лако се доказује прво следећа теорема:

Теорема 53.7. *Нека су* k *и* k' *два ма која круга у једној равни или у двема упоредним равнима. Праве што спајају крајеве свих одговарајућих парова њихових полупречника, који припадају сагласним полуправим што полазе из њихових средишта, секу се у једној тачки.*

Исто тако, праве што спајају крајеве свих парова њихових полупречника, који припадају супротним полуправим што пролазе кроз њихово средиште, секу се у једној тачки.

Доказ. Нека су OA и $O'A'$ два полупречника на сагласним полуправим и OB и $O'B'$ два полупречника на другим двема сагласним полуправим које полазе из O и O' (сл. 443). Углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'O'B'$ су према теореми 39.16 једнаки и према томе троугли AOB и $A'O'B'$ су слични и у сличном положају. Дакле праве OO', AA', BB' секу се у једној тачки S, која је спољно средиште сличности тих троуглова. Како су уочени полупречници произвољни, први део теореме је доказан. — Слично се доказује и други део теореме.



Сл. 443

На основи теореме 53.7. и дефиниције сличности кроз све тачке, лако се може доказати следећа теорема:

Теорема 53.8. *Свака два круга садржана у једној равни или у двема упоредним равнима, јесу слични и у сличном положају и имају како спољно тако и унутарње средиште сличности.*

Три круга садржана у упоредним равнима које се могу међу собом и поклапати, имају три спољна и три унутарња средишта сличности и према томе једну спољну и три унутарње осе сличности.

Аналоге теореме постоје за лопте и лако се доказују. Имамо напр. ову теорему:

Теорема 53.9. *Сваке две лопте јесу сличне и у сличном положају и имају како спољне тако и унутарње средиште сличности.*

Три лопте имају три спољна и три унутарња средишта сличности и према томе једну спољну и три унутарње осе сличности.

Четири лопте, чија средишта не припадају једној равни, имају 12 средишта сличности. По шест средишта сличности су у једној равни. Четири од тих равни не садрже средишта тих лопти.

Доказ прва два дела ове теореме препуштамо читаоцу. Доносимо само скраћен доказ последњег тврђења. — Нека су λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 четири лопте и S једно средиште сличности лопти λ_1 и λ_2. Нека је затим a једна оса сличности лопти λ_1, λ_2, λ_3, која пролази кроз S. На њој су још два друга средишта сличности. Нека је даље a_1 једна оса сличности лопти λ_1, λ_2, λ_4, која пролази опет кроз S. На њој су још два средишта сличности. Осе a и a_1 припадају једној равни α. У тој равни су поменутих пет средишта сличности. Но две од тих пет тачака припадају једној оси сличности лопти λ_1, λ_3, λ_4, а друге две припадају једној оси сличности лопти λ_2, λ_3, λ_4. Дакле у равни α се налазе четири осе сличности и према томе шест средишта сличности.

54. ХАРМОНИЈСКЕ ТАЧКЕ И ХАРМОНИЈСКЕ ПРАВЕ.

1. Хармонијске тачке имају особит значај не само у пројективној геометрији, где им је улога једна од основних, већ и у елементарној, еуклидској геометрији. Проучава их већ александријски геометар Папус. Дефиницију можемо изрећи овако:

Дефиниција 54.1. Четири тачке A, B и C, D на једној правој, такве да је тачка C између A и B, а да тачка D није између A и B, и да су дужи AC и BC сразмерне дужима AD и BD, називаћемо *хармонијске тачке.* Рећи ћемо и да су тачке C и D *хармонијски спрегнуте* с тачкама A и B.

Кад су тачке C и D хармонијски спрегнуте с тачкама A и B имамо дакле

$$AC : BC \;::\; AD : BD.$$

Пре свега имамо следећу теорему:

Теорема 54.1. *Ако су тачке* C *и* D *хармонијски спрегнуте с тачкама* A *и* B, *тада су и тачке* A *и* B *хармонијски спрегнуте с тачкама* C *и* D. *Сем тога може се ред тачака* A *и* B *међу собом, и ред тачака* C *и* D *међу собом мењати.*

Доказ. Ако су тачке C и D хармонијски спрегнуте с тачкама A и B, према дефиницији 54.1 имамо

$$AC : BC \;::\; AD : BD,$$

а отуд следује:

1) према теореми 51.1

$$AD : BD \;::\; AC : BC,$$

тј. тачке D и C су хармонијски спрегнуте с тачкама A и B,

2) према теореми 51.2

$$BC : AC \;::\; BD : AD,$$

тј. тачке C и D су хармонијски спрегнуте с тачкама B и A,

3) према теореми 51.9

$$AC : AD \;::\; BC : BD,$$

или

$$CA : DA \;::\; CB : DB,$$

тј. тачке A и B су хармонијски спрегнуте с тачкама C и D.

Поновном применом ових трију размера тачака налазимо још четири могуће размере, а тиме је ова теорема доказана.

На основи првог дела те теореме, кад су тачке C и D спрегнуте с тачкама A и B можемо рећи и да су парови тачака A, B и C, D узајамно хармонијски спрегнути.

Кад су парови тачака A, B и C, D хармонијски спрегнути писаћемо кратко

$$[A, B \,;\, C, D]$$

што треба читати: „тачке A и B су хармонијски спрегнуте с тачкама C и D“ или „парови A, B и C, D су хармонијски спрегнути“, или пак „A, B и C, D су хармонијске тачке“ (пазећи на поредак тачака).

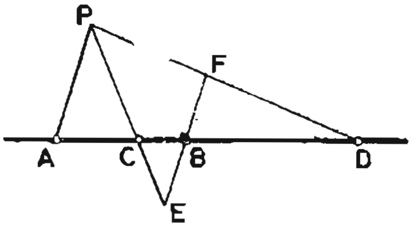
Према претходној теореми, ако је $[A, B \,;\, C, D]$ такође је $[A, B \,;\, D, C]$ и $[B, A \,;\, C, D]$ и $[C, D \,;\, A, B]$, затим $[B, A \,;\, D, C]$ и $[C, D \,;\, B, A]$ и $[D, C \,;\, A, B]$ и $[D, C \,;\, B, A]$.

Докажимо неколико теорема о хармонијским тачкама.

Теорема 54.2. *Ако су* A, B, C, D *четири тачке на једној правој и* P *тачка ван ње, па ако праве* PC *и* PD *отсецају на правој која пролази кроз*

B, *упоредној са* PA, *дуж којој је средиште* B, *тачке* A, B *и* C, D *су четири хармонијске тачке.*

Доказ. Нека су E и F пресеци правих PC и PD с правом која пролази кроз B и упоредна је са AP (сл. 444). Према теореми 52.5 је, због упоредности правих AP и EF



Сл. 444

$$AC : BC :: AP : BE, \qquad AD : BD :: AP : BF.$$

Али $BE = BF$, дакле је

$$AC : BC :: AD : BD.$$

Докажимо још да је једна од тачака C, D између A и B, а друга ван дужи AB. Претпоставимо да је тачка C између A и B. Тада је тачка C такође између P и E. Заиста кад би напр. било $P-E-C$, права EF би секла страницу PC троугла ACP, дакле секла би и страницу AC, тј. било би $A-B-C$, супротно претпоставци. Дакле није $P-E-C$ и, исто тако, није $C-P-E$. Дакле C је између P и E.

Према томе P и E су с разних страна праве AB, па како су E и F са разних страна тачке B, тачке P и F су с исте стране праве AB и према, томе, D није између P и F. Отуд следује да тачка D није ни између A и B, јер кад би била између A и B, била би, на основи истог закључка као мало пре за тачку C, да је D такође између P и F.

Исто тако доказујемо, ако је тачка C ван дужи AB, да је тачка D између A и B. — Тиме су за тачке A, B, C, D утврђени сви услови дефиниције 54.1.

Тачна је и обрнута теорема:

Теорема 54.3. *Ако су* A, B *и* C, D *четири хармонијске тачке и ако је* P *нека тачка ван праве* AB, *праве* PC *и* PD *отсецају на правој кроз* B, *упоредној са* PA, *дуж којој је средиште* B.

Доказ. Нека је C између A и B (сл. 444). Права PC и права упоредна правој PA, која пролази кроз B секу се у извесној тачки E, која је с оне стране тачке C с које није P, јер је

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle ACP \quad \text{и} \quad \sphericalangle CAP = \sphericalangle CBE,$$

дакле збир $\sphericalangle BCE + \sphericalangle CBE$ је мањи од збира два права угла, те се примењује теорема 39.5.

Према дефиницији 54.1 тачка D није између A и B. Како права BE сече страницу AD троугла ADP а не сече страницу PA, сече страницу PD, дакле P и F су с исте стране праве AB. Према томе E и F су са супротних страна праве AB, дакле B је између E и F

Како су праве PA и BE упоредне, троугли ACP и BCE су слични, дакле

$$AC : BC :: AP : BE,$$

па како су праве AP и BF упоредне, и троугли ADP и BDF су слични, дакле

$$AD : BD :: AP : BF.$$

Из сразмере

$$AC : BC :: AD : BD$$

следује дакле

$$AP : BE :: AP : BF,$$

а отуд

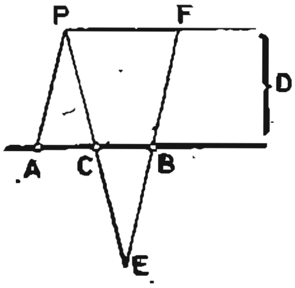
$$AP : AP :: BE : BF.$$

Према томе је $BE = BF$.

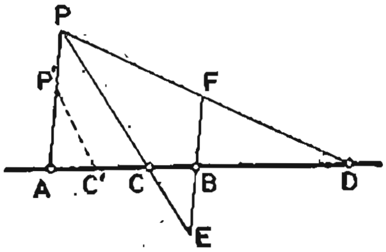
За положај четири хармонијске тачке важна је следећа теорема:

Теорема 54.4. *Ако су* A, B *и* C, D *четири хармонијске тачке и ако је* C *средиште дужи* AB, *тачка* D *је бескрајно далека тачка праве* AB. *Ако је* AC>BC, *тачка* B *је између тачака* A *и* D. *Ако је пак* BC>AC, *тачка* A *је између тачака* B *и* D.

Доказ. Нека је C средиште дужи AB, тј. $AC=BC$ (сл. 445). Троугли ACP и BCE су подударни, дакле $AP=BE$, па како је према теореми 54.3 $BE=BF$, имамо $AP=BF$. При томе су P и F с исте стране праве AB. Дакле четвороугао $ABFP$ је паралелограм, тј. праве PF и AB су упоредне: њихов пресек је бескрајно далека тачка.



Сл. 445



Сл. 446

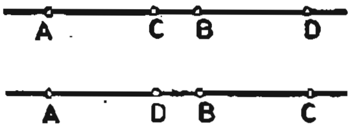
Нека је $AC>BC$ (сл. 446). Троугли ACP и BCE су слични, дакле ако је C' тачка на AB, с оне стране тачке A с које је C, таква да је $AC'=CB$ и ако је P' тачка на AP, с оне стране тачке A с које је P, таква да је $AP'=BE$, троугли $AC'P'$ и BCE су подударни. Дакле троугли ACP и $AC'P'$ су слични и према томе праве $C'P'$ и CP су упоредне, па како је $AC>AC'$, такође је $AP>AP'$, дакле $AP>BE$. Како је $BE=BF$, имамо и $AP>BF$, а отуд $AD>BD$. Дакле, према дефиницији 25.1 тачка B је између A и D. — Аналого тече доказ кад је $BC>AC$.

Основан значај има и ова теорема:

Теорема 54.5. *Ма какве да су три тачке* A, B, C *на некој правој, постоји једна и само једна тачка* D *на тој правој, таква да су парови тачака* A, B *и* C, D *хармонијски спрегнути.*

Доказ. Ако је тачка C између A и B, обележимо тачке A и B тако да буде $AC \geqslant BC$ (сл. 447). Ако је $AC>BC$, на основи дефиниције 54.1 имамо

$$AC : BC :: AD : BD,$$



Сл. 447

дакле према теореми 51.4 имамо

$$(AC-BC) : BC :: (AD-BD) : BD.$$

Како је C између A и B, према дефиницији 54.1 D није између A и B, дакле је $AD-BD=AB$ и према томе

$$(AC-BC) : BC :: AB : BD.$$

Како су дужи $AC-BC$, BC и AB три одређене дужи, и дуж BD је одређена, тј. постоји само једна тачка D таква да су парови тачака A, B и C, D хармонијски спрегнути.

Ако је $AC=BC$, према теореми 54.4 тачка D је бескрајно далека тачка праве AB, а по дефиницији бескрајно далеке тачке, постоји на свакој правој само једна таква тачка.

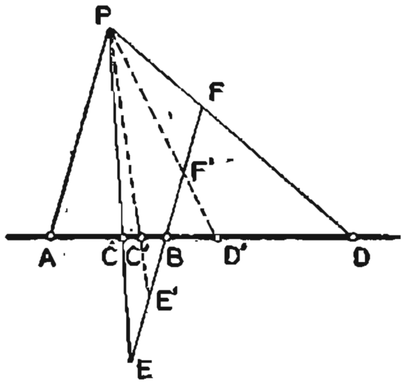
Ако C није између A и B, тада је према дефиницији 54.1 D између A и B. Ако се стави у претходни део доказа D уместо C, а C уместо D, сведен је други део доказа на претходни. – Тиме је ова теорема доказана.

Ако замислимо да се од четири хармонијске тачке A, B и C, D тачка C, остајући на дужи AB, приближује тачки B, тада се тачка D приближује, споља, тачки B. Ту чињеницу утврђује следећа теорема:

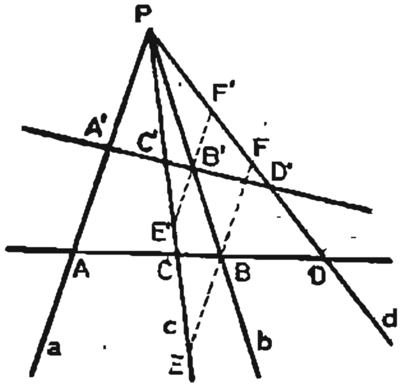
Теорема 54.6. *Ако су тачке* A *и* B *хармонијски спрегнуте с тачкама* C *и* D *и хармонијски спрегнуте с другим двема тачкама* C′ *и* D′, *и ако је тачка* B *између тачака* C *и* D, *а тачка* C′ *између тачака* B *и* C, *тада је и тачка* D′ *између* B *и* D.

Доказ. Нека је P тачка ван праве AB (сл. 448), затим на правој BE упоредној спрам PA нека су E, E', F, F' тачке пресека са правим PC, PC', PD и PD'. Према теореми 54.3 је $BE = BF$, $BE' = BF'$. Ако је дакле $B - C' - C$, како права PC' сече страницу BC троугла BCE а не сече страницу CE, она сече страницу BE, тј. имамо $B - E' - E$. Дакле је и $B - F' - F$. Како права PD' сече страницу BF троугла BDF, а не сече страницу DF, она сече страницу BD, тј. имамо $B - D' - D$.

2. Као што се говори о четири хармонијске тачке, тако се говори и о четири хармонијске праве (или четири хармонијска зрака). То су четири праве које пролазе кроз једну тачку, а свака права која их пресеца у четири разне тачке, пресеца их у четири хармонијске тачке.



Сл. 448



Сл. 449

Потребно је доказати следећу Папосову теорему:

Теорема 54.7. *Нека су* a, b, c, d *четири праве које пролазе кроз једну тачку* S. *Ако једна права сече те четири праве у четири хармонијске тачке, тада свака права, која не пролази кроз* S, *сече праве* a, b, c, d *у четири хармонијске тачке.*

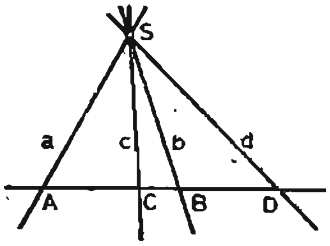
Доказ. Нека је p права која сече четири праве a, b, c, d у четири хармонијске тачке, рецимо, редом у A, B, C, D и нека је $[A, B; C, D]$. Нека је p' ма која друга права која сече дате четири праве редом у тачкама A', B', C', D' (сл. 449).

Нека је q права упоредна са a и која пролази кроз B, а q' упоредна с q и која пролази кроз B'. Нека прва сече праве c и d у тачкама E и F, а друга те исте праве у тачкама E' и F'. Према теореми 54.3 је $BE = BF$, а према теореми 52.5 дужи BE и BF су сразмерне дужима BE' и $B'F'$, дакле је $B'E' = B'F'$. Осим тога, како су тачке E и F са разних страна праве b, тачке E' и F' су такође са разних страна праве b, па како и права p' пролази кроз B', тачке E' и F' су са разних страна праве p'. Најзад, како су и праве a и q' упоредне, тачке A', B', C', D' су према теореми 54.2 четири хармонијске тачке.

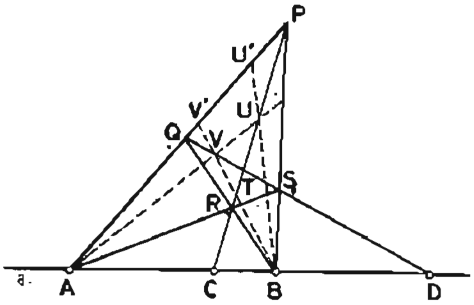
Сад можемо изрећи дефиницију хармонијских правих.

Дефиниција 54.2. Четири праве a, b, c, d у једној равни, које пролазе кроз једну тачку S и још редом кроз четири хармонијске тачке A, B, C, D називаћемо хармонијским правим. Рећи ћемо да су праве a и b хармонијски спрегнуте с правим c и d (сл. 450).

Ако су парови правих a, b, и c, d хармонијски спрегнуте писаћемо кратко: $[a, b \ ; \ c, d]$, што треба читати напр.: „праве a и b су хармонијски спрегнуте с правим c и d“.



Сл. 450



Сл. 451

Теорема 54.8. *Нека су* P, Q, R, S *четири тачке у једној равни, од којих три не припадају једној правој. Ако се праве* PQ *и* RS *секу у извесној тачки* A, *и, праве* QR *и* SP *у извесној тачки* B, *тада праве* PR *и* QS *секу праву* AB *у двема тачкама* C *и* D, *које су хармонијски спрегнуте с тачкама* A *и* B.

Доказ. Нека је T тачка пресека правих PR и QS (сл. 451). Докажимо прво да су тачке P и R хармонијски спрегнуте с тачкама C и T.

Претпоставимо напротив да уз P, R и C четврта хармонијска тачка није T, него нека друга тачка U праве PR, различита од T. Нека је V пресечна тачка правих AU и QS. Како су AB и AU две разне праве, тачке U и V нису на правој AB, дакле BU и BV су две разне праве, које секу праву AP у двема разним тачкама U' и V'. Како су на правој PR тачке P и R хармонијски спрегнуте с тачкама C и U, према дефиницији 54.2 праве BP и BR су хармонијски спрегнуте с правим BC и BU, дакле према теореми 54.7 на правој AP тачке P и Q су хармонијски спрегнуте с тачкама A и U'.

Како су тачке P и R хармонијски спрегнуте с тачкама C и U, према дефиницији 54.2 праве AP и AR су хармонијски спрегнуте с правим AC и AU. Из теореме 54.7 следује да су на правој QS тачке Q и S хармонијски спрегнуте с тачкама D и V, а отуд према дефиницији 54.2 да су праве BQ и BS хармонијски спрегнуте с правим BD и BV. Дакле, према теореми 54.7 на правој AP тачке Q и P су хармонијски спрегнуте с тачкама A и V' тј. према теореми 54.1 тачке P и Q су хармонијски спрегнуте с тачкама A и V'.

Дакле, тачке P и Q су хармонијски спрегнуте како с тачкама A и U', тако и с тачкама A и V'. Како су U' и V' две разне тачке, то је према теореми 54.5 немогуће. Према томе, тачке P и R су хармонијски спрегнуте с тачкама C и T. Одатле следује према дефиницији 54.2 да су праве QP и QR хармонијски спрегнуте с правим QC и QT, а отуд према теореми 54.7 да су тачке A и B хармонијски спрегнуте с тачкама C и D, а тиме је наша теорема доказана.

Докажимо и ову обрнуту теорему.

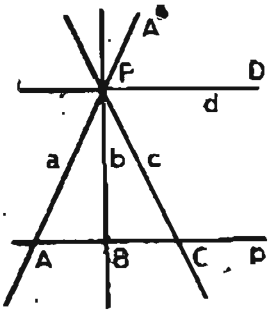
Теорема 54.9. *Ако су* A, B *и* C, D *четири хармонијске тачке и ако се две праве кроз* A *и две праве кроз* B *секу у четири тачке* P, Q, R, S, *тако да права* PR *пролази кроз тачку* C, *тада права* QS *пролази кроз четврту хармонијску тачку* D.

Доказ. Кад то не би било, права QS секла би праву AB у извесној тачки D', која би према теореми 54.8 била уз A, B и C четврта хармонијска тачка. Но то је према теореми 54.5 немогуће, јер постоји само једна четврта хармонијска тачка.

Следеће три теореме оснивају се на чињеници да су две праве које се секу и располовнице њихових углова четири хармонијске праве.

Теорема 54.10. *Две праве које се секу и симетрале углова које оне образују, јесу четири хармонијске праве.*

Доказ. Нека су то праве a и c, које се секу у тачки P (сл. 452). Нека су симетрале њихових углова b и d и нека је p која било права упоредна са d, а A, B, C њени пресеци са a, b, c. Нека је најзад A', тачка на продужењу полуправе PA и D тачка на правој d, с оне стране праве a с које је тачка B.



Сл. 452

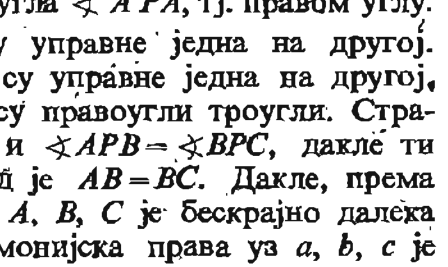
Праве PB и PD су симетрале два напоредна угла $\sphericalangle APC$ и $\sphericalangle A'PC$, дакле збир углова $\sphericalangle BPC$ и $\sphericalangle CPD$ једнак је половини опруженог угла $\sphericalangle A'PA$, тј. правом углу.

Дакле праве b и d су управне једна на другој. Према томе и праве b и p су управне једна на другој, Дакле троугли ABP и BCP су правоугли троугли. Страница BP им је заједничка и $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC$, дакле ти троугли су подударни, отуд је $AB = BC$. Дакле, према теореми 54.4 четврта хармонијска тачка D уз A, B, C је бескрајно далека тачка и према дефиницији 54.2 четврта хармонијска права уз a, b, c је права која пролази кроз P и упоредна је са p, а то је права d.

Теорема 54.11. *Ако је* S *тачка у којој располовница угла* ∢ACB *троугла* ABC *или напоредног, спољњег угла сече насрамну страницу* AB *или њено продужење, тада су дужи* AS *и* BS *сразмерне налеглим страницама* AC *и* BC *троугла* ABC.

И обратно, ако је S *тачка у којој полуправа која полази из темена* C *троугла* ABC *сече насрамну страницу* AB *или њено продужење, и ако су дужи* AS *и* BS *сразмерне налеглим страницама* AC *и* BC, *тада је полуправа* CS *располовница угла* ∢ACB *или напоредног, спољашњег угла троугла* ABC.

Доказ. Нека је CS располовница угла ACB троугла ABC, S тачка пресека са AB и нека је CT располовница спољашњег угла $\sphericalangle BCE$, T тачка њеног пресека са AB (сл. 453). Према теореми 54.10 праве AC, BC, SC и TC су четири хармонијска зрака. Нека је BD права управна на CS, која пролази кроз тачку B, а D њен пресек са AC. Онда је (као што је показано у претходном доказу) $BC = DC$ и како су располовнице CS и CT управне једна на другој, праве CT и BD су упоредне. Дакле је



Сл. 453

$$AT : BT \; : : \; AC : DC$$

и према томе

$$AT : BT \; : : \; AC : BC.$$

Како су четири праве које пролазе кроз тачку C четири хармонијска зрака, имамо према теореми 54.7

$$AT : BT \;::\; AS : BS,$$

дакле је и

$$AS : BS \;::\; AC : BC.$$

Обратни део теореме доказујемо индиректно. Ако CS није располовница угла $\sphericalangle ACB$, располовница је нека друга полуправа CS_1 и било би

$$AS_1 : BS_1 \;::\; AC : BC_1.$$

Како је и

$$AS : BS \;::\; AC : BC,$$

имали бисмо

$$AS : BS \;::\; AS_1 : BS_1,$$

а отуд према теореми 51.4

$$AB : BS \;::\; AB : BS_1,$$

дакле тачке S и S_1 се поклапају, супротно претпоставци.

Исто тако доказујемо за тачку T ван дужи AB, за коју је

$$AT : BT \;::\; AC : BC,$$

да је CT располовница спољашњег угла с теменом C троугла ABC.

Теорема 54.12 *Ако су две узајамно управне праве* c *и* d, *хармонијски спрегнуте с двема правим* a *и* b, *оне полове оба угла између правих* a *и* b.

Доказ. Нека је P заједничка тачка тих четири правих, а p права упоредна са d и нека су A, B, C њени пресеци са a, b, c (сл. 452). Како су c и d управне, управне су и c и p једна на другој, дакле троугли ACP и BCP су правоугли троугли. Ти троугли су подударни, јер CP је заједничка страница, а $AC=BC$ према теореми 54.4, јер је четврта хармонијска тачка уз A, B и C бескрајно далека тачка. Дакле је $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$, тј. c је располовница угла $\sphericalangle APB$. Зато је и d друга располовница углова између a и b.

4. Докажимо још неке теореме у вези с кругом.

Теорема 54.13. *Ако су тачке* A *и* B *хармонијски спрегнуте с тачкама* C *и* D *и ако је* R *ма која тачка на кругу коме је дуж* CD *пречник, дужи* AR *и* BR *су сразмерне дужима* AC *и* BC *и дужима* AD *и* BD.

Доказ. Из $[A, B\,;\,C, D]$ следује према дефиницији 54.2 $[AR, BR\,;\,CR, DR]$. Но према теореми 44.10 је $\sphericalangle CRD$ прав угао, тј. CR и DR су управне једна на другој, дакле према теореми 54.12 те праве располовљују углове између правих AR и BR, те је према теореми 54.11

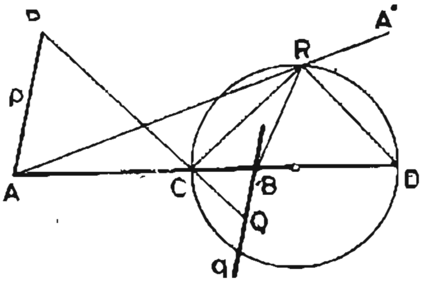
$$AR : BR \;::\; AC : BC \;::\; AD : BD.$$

Теорема 54.14. *Нека су* A *и* B *две тачке у једној равни. Све тачке* R *у тој равни, такве да су дужи* AR *и* BR *сразмерне двема датим дужима, сачињавају круг. Права* AB *сече тај круг у крајевима једног пречника и ти крајеви су хармонијски спрегнути с тачкама* A *и* B.

Доказ. Нека је p права која пролази кроз A и q упоредна права која пролази кроз B, и нека су на p и q тачке P и Q с разних страна праве AB и такве да су дужи AP и BQ једнаке двема датим дужима (сл. 454). Нека је C пресечна тачка дужи AB и PQ. Из сличности троуглова ACP и BCQ следује

$$AC : BC \;::\; AP : BQ.$$

Нека је D четврта хармонијска тачка уз тачке A, B, C. Тада су C и D обе тачке на правој AB, такве да су дужи AC и BC и, исто тако, дужи AD и BD, сразмерне датим двема дужима.



Сл. 454

Нека је R ма која тачка изван праве AB, а у датој равни, тако да је

$$AR : BR \;::\; AC : BC.$$

Према теореми 54.11 у троуглу ABR полуправе RC и RD су располовнице угла $\sphericalangle ARB$ и налеглог угла $\sphericalangle A'RD$, дакле праве RC и RD су међу собом управне, тј. угао $\sphericalangle CRD$ је прав. Из теореме 44.12 следује да је тачка R на кругу k, коме је дуж CD пречник.

Обрнуто, ако је R ма која тачка ван праве AB, а на кругу k, угао $\sphericalangle CRD$ је према теореми 44.10 прав. Кад не би било

$$AR : BR \;::\; AC : BC,$$

постојала би између A и B друга тачка C' тако да је

$$AR : BR \;::\; AC' : BC'$$

и било би $C - C' - B$ или $C' - C - B$, дакле према теореми 54.6 било би уз тачке A, B и C' за четврту хармонијску тачку D': $D - D' - B$ одн. $D' - D - B$. Тачке C' и D' биле би крајеви пречника извесног круга k' који пролази кроз R.

Но у првом случају тачке C' и D' биле би обе на дужи CD, дакле угао $\sphericalangle C'RD'$ био би оштар, а у другом случају тачке C' и D' биле би на продужењима дужи CD, дакле угао $\sphericalangle C'RD$ био би туп. Али угао $\sphericalangle C'RD'$ је прав, јер је тачка на кругу k', дакле имамо

$$AR : BR \;::\; AC : BC.$$

Круг о коме је реч у претходној теореми, назива се Аполонијев круг, по грчком геометру Аполонију из 3. столећа пре н.е.

На темељу следеће теореме дефинише се пол и полара у односу на један круг.

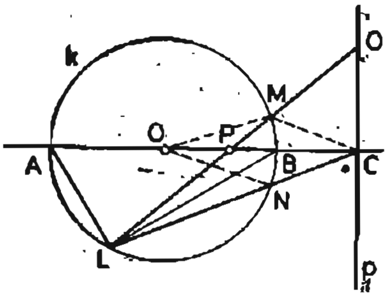
Теорема 54. 15. *Нека је* k *круг са средиштем* O *и* LM *ма која сечица тога круга, која пролази кроз извесну тачку* P *у равни тог круга и сече га у тачкама* L *и* M.

Тачка која је заједно са P *хармонијски спрегнута са тачкама* L *и* M *припада извесној правој која је управна на правој* OP.

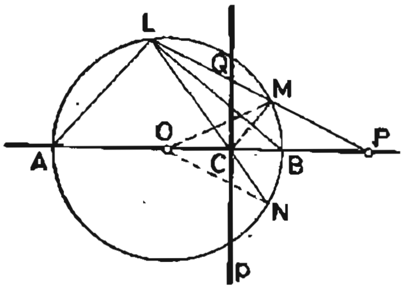
Доказ. Нека су A и B пресеци круга k с правом CP и нека је $O - B - P$ или $O - P - B$, према томе да ли је тачка P ван круга k или у њему (у сл. 455 тачка P је у кругу а у сл. 456 изван круга). Нека је C четврта хармонијска тачка уз A, B, P и нека је p управна у тачки C на AB. — Нека су пресеци ма које сечице што пролази кроз P, са кругом k и са p редом L, M, Q.

Како су A, B и P, C четири хармонијске тачке, праве LA, LB и LP, LC чу четири хармонијске праве, па како је AB пречник круга k, угао $\sphericalangle ALB$ је прав угао, дакле према теореми 54.12 LB је располовница угла

$\sphericalangle PLC$, тј. угла $\sphericalangle MLN$, где је N други пресек праве LC са кругом k. Дакле имамо $\sphericalangle BLM = \sphericalangle BLN$, а отуд према теореми 44.8 $\sphericalangle BOM = \sphericalangle BON$. Према томе тачке M и N су симетричне у односу на праву OP, дакле је и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BCN$.



Сл. 455



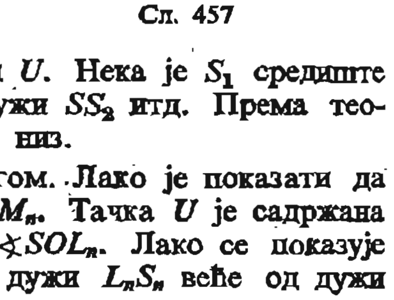
Сл. 456

То значи да су праве OP и p симетрале углова између правих MC и NC, дакле према теореми 54.10 CM, CN и CP, CQ су четири хармонијске праве, а отуд су L, M и P, Q четири хармонијске тачке. Дакле четврта хармонијска тачка уз L, M и P припада правој p. Ова права је пак управна на CP.

Дефиниција 54.3. Нека је P тачка у равни једног круга, s сечица која пролази кроз P. Права p која сваку сечицу круга k сече тако да су тачка P и та пресечна тачка хармонијски спрегнуте с пречницима круга и сечице назива се *поларом* тачке P. Тачку P називамо *полом* праве p.

Докажимо само још следеће две теореме:

Теорема 54.16 *Полара тачке која је изван круга пролази кроз тачке додира обеју дирки тога круга, које пролазе кроз ту тачку.*



Сл. 457

Доказ. Нека је P тачка изван круга, p њена полара, L и M пресеци с кругом ма које сечице која пролази кроз P, и нека је Q њен пресек са p (сл. 457). Ако је O средиште круга k, AB пречник на правој OP, четврта хармонијска тачка C уз тачке A, B и P, према дефиницији 54.1 је између A и B, дакле права r сече круг k у двема тачкама S и T. Докажимо скраћено да су праве PS и PT дирке круга k.

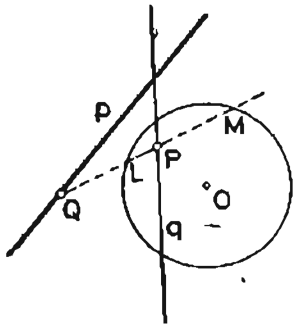
Претпоставимо да напротив, права PS није дирка, дакле да сече круг k у још једној тачки U. Нека је S_1 средиште дужи SC, S_2 средиште дужи SS_1, S_3 средиште дужи SS_2 итд. Према теореми 35.2 низ дужи SS_n $(n = 1,2, \ldots)$ је основан низ.

Нека су L_n и M_n пресеци сечице PS_n с кругом. Лако је показати да је угао $\sphericalangle SOU$ садржан у свим угловима $\sphericalangle L_nOM_n$. Тачка U је садржана у углу $\sphericalangle SOL_n$ или у $\sphericalangle SOM_n$. Речимо да је у $\sphericalangle SOL_n$. Лако се показује да је низ дужи M_nS_n основни низ, а да су све дужи L_nS_n веће од дужи US. Но то је немогуће, јер је

$$L_nS_n : M_nS_n \quad : : \quad L_nP : M_nP,$$

при чему само први чланови ових сразмера образују основни низ. (Опречност са дефиницијом 51.1 се лако доказује.) Дакле права PS је дирка круга k. Исто вреди и за праву PT.

Теорема 54.17 *Поларе свих тачака једне праве пролазе кроз пол те праве. Полови свих правих што пролазе кроз једну тачку сачињавају полару те тачке.*



Сл. 458

Доказ. Нека је q ма која права у равни посматраног круга, Q њен пол (сл. 458). Нека је P ма која тачка на q. Сечица p која пролази кроз тачку P нека сече круг у тачкама L и M. Како је Q пол праве q, тачке L, M и P, Q су хармонијске тачке, дакле Q је на полари p тачке P, тј. поларе свих тачака P праве p пролазе кроз тачку Q.

Обрнуто: нека је Q ма која тачка у равни круга, q њена полара. Нека је затим p ма која права која пролази кроз Q и њен пол нека је P. Сечица PQ сече круг у тачкама L и M. Како је P пол праве p, тачке L, M и P, Q су хармонијске тачке, па како је q полара тачке Q, тачка P је на полари q, тј. полови P свих правих које пролазе кроз тачку Q јесу на правој q.

55. ПРОИЗВОД ДВЕЈУ ДУЖИ.

1. Производ двеју дужи дефинишемо овако:

Дефиниција 55.1. Ако су a, b, c, d четири сразмерне дужи, тако да је $a : b :: c : d$, рећи ћемо да је *дуж d производ* двеју дужи b и c *у односу на дуж a*; знацима

$$d = b \,.\, c/a\,.$$

Ако су дужи чији се производ образује истоветне, производ ћемо називати *квадратом* дотичне дужи; знацима

$$d = b \cdot b/a \quad \text{или} \quad d = b^2/a\,.$$

Овај геометријски појам производа треба, разуме се, разликовати од аритметичког појма производа два броја. Ако је $d = b \cdot c/a$, постоји, као што ћемо доказати у § 63, међу мерним бројевима $\bar a, \bar b, \bar c, \bar d$ тих дужи однос $\bar a : \bar b = \bar c : \bar d$, дакле је $\bar d = \dfrac{\bar b \cdot \bar c}{\bar a}$, тј. односи

$$d = b \cdot c/a \quad \text{и} \quad \bar d = \frac{\bar b \cdot \bar c}{\bar a}$$

одговарају један другом. Тиме је оправдан назив одређен дефиницијом 55.1 и симболички начин писања.

Ма да би се особине тог геометријског производа могле извести из аритметичких особина, ми ћемо, као и за саму сразмеру, извести његове основне особине независно од мерења и аритметике.

Теорема 55.1. *Производ дужи* b *и* c *у односу на дуж* a *једнак је производу дужи* c *и* b *у односу на* a, *тј.*

$$\mathrm{b} \cdot \mathrm{c}/\mathrm{a} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{b}/\mathrm{a}.$$

Доказ следује непосредно из теореме 51.9.

Теорема 55.2. *Ако је* $d=b\cdot c/a$, *такође је* $b=a\cdot d/c$ *и* $a=b\cdot c/d$.

Доказ следује непосредно из теорема 51.1 и 51.2.

2. Основан значај за производ двеју дужи имају следеће две теореме:

Теорема 55.3. *Ако су два производа дужи једнака у односу на извесну дуж, једнака су у односу на сваку дуж.*

Доказ. Нека је

$$d=b\cdot c/a=b_1\cdot c_1/a \qquad \text{и} \qquad d'=b\cdot c/a'.$$

Докажимо да је тада

$$b\cdot c/a'=b_1\cdot c_1/a'$$

ма каква била дуж a'.

Према дефиницији 55.1 имамо

$$a:b::c:d, \qquad a:b_1::c_1:d,$$

дакле према теореми 51.12

$$b:b_1::c_1:c. \tag{1}$$

Но према дефиницији 55.1 имамо још и

$$a':b::c:d',$$

дакле према теореми 51.2

$$b:a'::d':c. \tag{2}$$

Из сразмера (2) и (1) следује према теореми 51.12

$$a':b_1::c_1:d',$$

дакле по дефиницији 55.1 имамо

$$d'=b_1\cdot c_1/a',$$

тј.

$$d'=b\cdot c/a'=b_1\cdot c_1/a'.$$

На основи претходне теореме не мора се у случају једнакости двају производа од по две дужи споменути — у односу на коју дуж су та два производа једнака (јер једнака су у односу на сваку дуж). Дакле може се тада рећи само да су два производа од по двеју *дужи* једнака, и писати уместо: $b\cdot c/a=b_1\cdot c_1/a$ само $b\cdot c=b_1\cdot c_1$.

Теорема 55.4. *Ако су четири дужи* a, b, c, d *постоји сразмера* $a:b::c:d$, *производи* $a\cdot d$ *и* $b\cdot c$ *су међу собом једнаки у односу на сваку дуж.*

Доказ. Нека је e која било дуж и нека је $b\cdot c/e=f$. Онда је

$$e:b::c:f,$$

а према теореми 51.12 из

$$c:d::a:b \qquad \text{и} \qquad c:f::e:b$$

следује

$$e:a::d:f,$$

тј. $f=a\cdot d/e$ и према томе

$$a\cdot d/e=b\cdot c/e.$$

Према теореми 55.3 ово важи за сваку дуж e.

За производе дужи постоји напр. следећи дистрибутивни закон:

Теорема 55.5. *Ма какве да су дужи* a, b, c *и* c', *имамо*

$$b\cdot(c+c')/a=b\cdot c/a+b\cdot c'/a.$$

Доказ. Нека је

$$b\cdot c/a=d, \qquad b\cdot c'/a=d'.$$

Према дефиницији 55.1 је

$$a:b::c:d, \qquad a:b::c':d',$$

дакле према теореми 51.10 и 51.11 имамо

$$c:d::c':d' \quad \text{и} \quad c:d::(c+c'):(d+d')$$

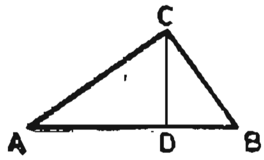
дакле $$a:b::(c+c'):(d+d'),$$

тј. $$d+d'=b\cdot(c+c')/a.$$

Отуда следује непосредно наша теорема.

3. Сад можемо доказати **Питагорину теорему** на темељу дефинисаног производа двеју дужи. Касније ћемо га доказати на темељу површи. Приметимо да су квадрати дефинисани као дужи, дакле можемо их сабирати и одузимати као дужи.

Теорема 55.6. *У правоуглом троуглу је квадрат хипотенузе једнак збиру квадрата обеју катета.*



Сл. 459

Доказ. Нека је у правоуглом троуглу ABC прав угао $\sphericalangle ACB$ (сл. 459). Висина спуштена на хипотенузу AB нека је CD. Према теореми 52.4 троугли ACD и CBD су слични, дакле

$$AD:AC::AC:AB \quad \text{и} \quad BD:BC::BC:BA,$$

дакле према теореми 55.4

$$AC^2=AD\cdot AB, \qquad BC^2=BD\cdot AB,$$

а отуд сабирајући производе (јер производи су дужи).

$$AC^2+BC^2=AB\cdot AD+AB\cdot BD.$$

Дакле према теореми 55.5 је

$$AC^2+BC^2=AB\cdot(AD+BD)=AB^2.$$

Значајна је примена производа двеју дужи на сечици једног круга. Она води до појма *моћи* једне тачке у односу на један круг, до *радикалних* оса двају кругова итд.

Теорема 55.7. *Ако се две сечице једног круга секу, производ дужи на једној сечици једнак је производу дужи на другој сечици. При томе се дужи узимају од пресека обеју сечица до њихових пресека са кругом.*

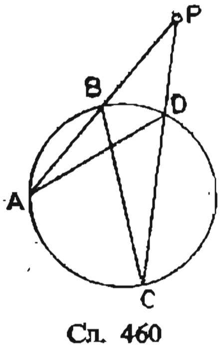
Доказ. Нека су A, B и C, D пресеци обеју сечица с кругом и P пресечна тачка обеју сечица (сл. 460). Према теореми 52.4 троугли ADP и CBP су слични, јер је $\sphericalangle APD=\sphericalangle CPD$, $\sphericalangle DAP=\sphericalangle BCP$. При томе теменима A, D и P одговарају редом темена C, B и P. Дакле

$$AP:DP::CP:BP,$$

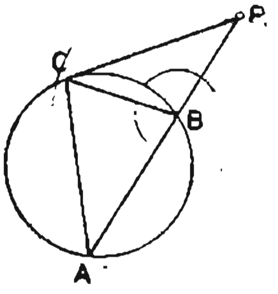
а отуд је према теореми 55.4

$$AP\cdot BP=CP\cdot DP$$

у односу на сваку дуж.



Сл. 460



Сл. 461

Теорема 55.8. *Ако се једна сечица и једна дирка неког круга секу, квадрат дужи на дирци једнак је производу дужи на сечици. При томе се* *дуж на дирци узима од пресека дирке и сечице до тачке додира са кругом, а дужи на сечици узимају се од истог пресека до пресека сечице с кругом.*

Доказ. Нека је AB сечица, CP дирка (сл. 461). Према теореми 52.4 троугли ACP и CBP су слични, јер је $\sphericalangle APC = \sphericalangle CPB$ и (према теореми 44.9) $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BCP$. При томе теменима A, C, P одговарају темена C, B, P. Дакле је

$$AP:CP::CP:BP,$$

а отуд

$$AP \cdot BP = CP \cdot CP = CP^2$$

у односу ма на коју дуж.

Теорема 55.9. *Производ дужи узетих ма на којој сечици једног круга, која пролази кроз извесну тачку* P, *од те тачке* P *до оба њена пресека с тим кругом, једнак је за све сечице, и то разлици следећих двеју дужи: квадрата дужи узете од* P *до средишта круга и квадрата полупречника тог круга, одузимајући увек мању дуж од веће дужи.*

Доказ. Нека је O средиште круга и нека су A и B његови пресеци ма са којом сечицом, која пролази кроз тачку P. Нека су затим C и D пресеци праве OP са кругом.

Ако је P ван круга (сл. 462), нека је T додирна тачка једне дирке која пролази кроз P. Како је угао $\sphericalangle OTP$ прав, према теореми 55.6 је

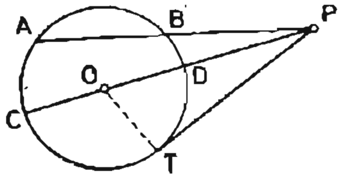
$$OP^2 = PT^2 + OT^2,$$

дакле

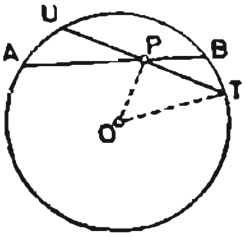
$$PT^2 = OP^2 - OT^2.$$

Но према теореми 55.8 је $AP \cdot BP = TP^2$, дакле

$$AP \cdot BP = OP^2 - OT^2.$$



Сл. 462



Сл. 463

Ако је P у кругу (сл. 463), нека је TU тетива која пролази кроз P и управна је на OP. Тада је према теореми 31.14 $PT = PU$, дакле према теореми 55.7 имамо

$$AP \cdot BP = PT \cdot PU = PT^2,$$

но како је троугао OPT правоугаон троугао, ис теореме 55.6 следује опет

$$PT^2 = OT^2 - OP^2,$$

дакле

$$AP \cdot BP = OT^2 - OP^2.$$

Тиме је ова теорема доказана.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ.

1. Ако су B' и C' подножја висина из темена B и C троугла ABC, доказати да је троугао ABC сличан троуглу $AB'C'$.

2. Дате су две упоредне праве, на првој тачке A, B, C, на другој, истим редом, тачке A', B', C' такве да је $AB : BC :: A'B' : B'C'$. Доказати да праве AA', BB', CC' пролазе кроз исту тачку или су међу собом упоредне.

3. Дате су две упоредне праве, на првој тачке A, B, C, на другој тачке A', B', C' такве да праве AA', BB', CC' пролазе кроз исту тачку или су међу собом упоредне. Доказати да је $AB : BC :: A'B' : B'C'$.

4. Ако праве које пролазе кроз парове одговарајућих темена двају сличних троуглова имају једну заједничку тачку или су међу собом упоредне, доказати да су одговарајуће странице тих троуглова међу собом упоредне.

5. Доказати да су два троугла ABC и $A'B'C'$ слична ако су им а) средишњице, б) висине сразмерне.

6. Ако су A', B', C' управне пројекције темена A, B, C на наспрамне странице троугла ABC, доказати да су троугли $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ слични троуглу ABC.

7. Доказати да су висине троугла обрнуто сразмерне одговарајућим страницама (тј. ако су a и b странице и h_a и h_b одговарајуће висине, имамо $a : b :: h_a : h_b$).

8. Ако је S средиште круга уписаног у троугао ABC, а D тачка у којој располовница угла $\sphericalangle A$ сече страницу BC доказати да је

$$(AB+AC) : BC :: AS : SD.$$

9. Доказати да ортоцентар троугла дели висине тог троугла тако да је производ отсечака на једној висини једнак производима отсечака на другим двема висинама.

10. Ако су A', B', C' управне пројекције темена A, B, C на наспрамне странице троугла ABC, доказати да је производ дужи $A'B$ и $A'C$ једнак производу дужи $A'B'$ и $A'C'$.

11. Дат је круг и на њему три тачке A, B, C. Одредити на том кругу тачку D тако да тетива AB пролази кроз средиште тетиве CD.

12. У дат четвороугао $ABCD$ уписати паралелограм чије се дијагонале секу у датој тачки.

13. Конструисати троугао ABC када знамо угао $\sphericalangle B$, страницу BC и угао образован средишњицом која полази из B и страницом AC.

14. Конструисати троугао ABC кад се зна угао $\sphericalangle C$, средишњица која полази из A и висина спуштена из B.

15. Конструисати троугао ABC кад се зна страница BC, средишњица која полази из B и висина спуштена из C.

16. Конструисати троугао ABC кад се зна угао $\sphericalangle A$, средишњица која полази из B и угао између те средишњице и странице BC.

17. Кроз пресечну тачку двају кругова садржаних у једној равни конструисати праву која их сече тако да тетиве образоване пресецима буду сразмерне двема датим дужима.

18. Конструисати троугао ABC кад знамо симетралу AS угла $\sphericalangle A$ и полупречнике кругова описаних око троуглова ABS и ACS.

19. Кроз пресечну тачку A двају кругова садржаних у једној равни и чија су средишта O_1 и O_2 конструисати праву која их сече у тачкама B и C тако да буде $AO_1B = AO_2C$.

20. Конструисати троугао ABC кад се знају странице BC и CA и средишњица која полази из C,

21. Конструисати троугао кад се знају све три средишњице.

22. Кроз дату тачку S конструисати праву која сече дати круг у тачкама A и B тако да дужи SA и SB буду сразмерне двема датим дужима.

23. Дате су три праве које пролазе кроз једну тачку и ван њих у истој равни тачка S. Конструисати праву која пролази кроз S и сече те три праве тако да отсечци буду сразмерни двема датим дужима.

24. Конструисати троугао ABC кад се зна угао $\sphericalangle A$, полупречник уписаног круга и да су странице CA и AB сразмерне двема датим дужима.

25. Конструисати троугао ABC кад се зна угао $\sphericalangle A$, полупречник описаног круга и да су странице CA и AB сразмерне двема датим дужима.

26. Конструисати троугао ABC кад се знају углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ и полупречник уписаног круга.

27. Конструисати троугао, кад се знају углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ и полупречник описаног круга.

28. Конструисати троугао ABC кад се знају висине спуштене из A и C и средишњица која полази из A.

29. Конструисати троугао кад се знају све три висине.

30. Конструисати квадрат кад се зна збир или разлика његове дијагонале и странице.

31. Одредити на страницама AB и AC датог троугла ABC тачке X и Y тако да дужи BX и CY буду једнаке.

32. У дат троугао ABC уписати правоугаоник чија су два темена на страници BC а обим је једнак датој дужи.

33. Конструисати праву која је упоредна датој правој и сече друге три дате праве тако да отсечци буду сразмерни двема датим дужима.

34. Конструисати круг који додирује две дате праве и један дат круг

35. Конструисати сферу која пролази кроз три дате тачке и додирује дату раван.

36. Конструисати сферу која пролази кроз две дате тачке и додирује две дате равни.

37. Конструисати сферу која пролази кроз дату тачку и додирује три дате равни.

38. Конструисати сферу која додирује раван ABC и ивице AD, BD, CD датог тетраедра $ABCD$.

39. Дата је сфера σ, раван α и у тој равни тачка A. Конструисати сферу која додирује сферу σ и у тачки A, раван α.

40. Дата је сфера σ, и ван ње тачка A. Одредити укупност тачака M које с тачком A хармонијски раздвајају пар тачака у којима права AM продире сферу σ.

41. Ако је α поларна раван извесне тачке A у односу на сферу σ, β поларна раван извесне тачке B у односу на исту сферу и ако тачка A припада равни β, доказати да тачка B припада равни α.

42. Дата су два круга са средиштима S_1 и S_2 и две тачке P_1 и P_2. Одредити на тим круговима тачке A_1 и A_2 тако да дужи S_1A_1 и S_2A_2 буду упоредне, а углови $\sphericalangle A_1P_1S_1$ и $\sphericalangle A_2P_2S_2$ међу собом једнаки.

43. На крацима OA и OB датог угла $\sphericalangle AOB$ одредити тачке X и Y тако да дуж XY буде једнака и упоредна датој дужи MN.

44. Дата су два круга и две тачке A и B. Одредити на круговима тачке C и D тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм.

45. Конструисати заједничке дирке двају датих кругова.

46. Конструисати паралелограм када знамо две суседне странице и угао између дијагонала.

47. Дате су две праве и тачка C ван њих. Одредити на тим правим тачке A и B тако да троугао ABC буде једнакостраничан.

48. Дата су два круга и тачка C. Одредити на тим круговима тачке A и B тако да дуж AC буде једнака дужи BC, а угао $\sphericalangle ACB$ једнак датом углу.

49. Конструисати четвороугао $ABCD$ кад се знају углови $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, страница AB и да су странице BC и AD сразмерне двема датим дужима.

50. Дате су четири праве које пролазе кроз једну тачку. Одредити на тим правим тачке A, B, C, D тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм коме су странице AB и BC једнаке двема датим дужима.

51. Дате су у равни три праве и ван њих тачка M. Конструисати тачке A, B, C тако да дате праве буду симетрале страница троугла ABC и да права BC пролази кроз тачку M.

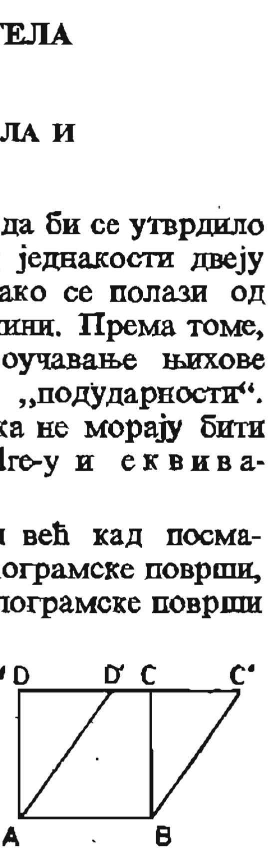
ГЛАВА ШЕСТА

УПОРЕЂИВАЊЕ ПОВРШИ У РАВНИ И ТЕЛА У ПРОСТОРУ ПО ВЕЛИЧИНИ

56. НАПОМЕНЕ О ЈЕДНАКОСТИ ПОВРШИ И ТЕЛА И ЊИХОВУ УПОРЕЂИВАЊУ ПО ВЕЛИЧИНИ.

1. Као што се полази од једнакости међу дужима, да би се утврдило која је од двеју дужи већа или мања, тако се полази од једнакости двеју површи, да би се површи упоређивале по величини и тако се полази од једнакости двају тела, да би се тела упоређивала по величини. Према томе, упоређивању површи и тела по величини претходи проучавање њихове *једнакости*. Но та „једнакост“ је шири појам од „подударности“. Два подударна лика су увек једнака, али два једнака лика не морају бити подударна. Два једнака лика називају се пак по Legendre-у *еквивалентним*.

За дужи једнакост је исто што и подударност. Али већ кад посматрамо најједноставније површи у равни, као што су паралелограмске површи, или пак најједноставнија тела, није тако. Напр. две паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABC'D')$ (сл. 464) са заједничком основицом AB и једнаким висинама, а разним угловима, јесу једнаке у том смислу што је свака разложена на трапезну површ $(ABCD')$, заједничку обема површима, и на једну троугарну површ, (ADD') и (BCC'), а ове две су подударне. Дате паралелограмске површи нису пак подударне, јер њихови углови нису једнаки. Треба дакле разликовати *једнакост* од *подударности*, како међу површима тако и међу телима.



Сл. 464

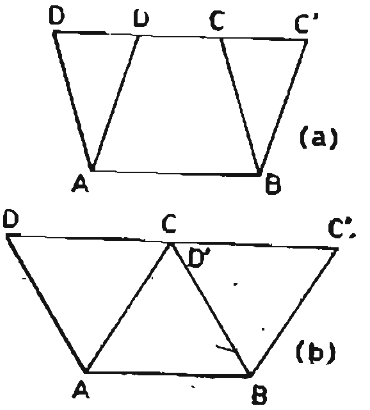
У ствари, исто вреди за линије. Дужи су изузетне у том погледу, зато што су све дужи међу собом сличне (теорема 52.22). Може се доказати општа теорема, разуме се, тек пошто се дефинише *једнакост* линија, површи и тела: Ако су два једнака лика слична, или ако су два слична лика једнака, тада су та два лика подударна. Напр. два једнака лука на подударним круговима јесу слична и према томе подударна. Али два једнака лука на два круга неједнаких полупречника нису никад слична, дакле ни подударна.

Два лика која су у томе смислу једнака, имају исту дужину, површину или запремину, уколико су то две линије које уопште имају (одређену, коначну) дужину, или две површи које имају површину или два тела која имају запремину.

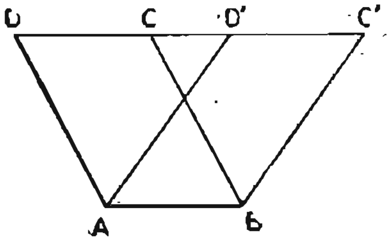
2. У доказивању поменуте једнакости паралелограмских површи са заједничком основицом и једнаким висинама треба разликовати два случаја:

оне странице оба паралелограма, које су наспрам заједничке основице имају заједничких тачака (сл. 465 а и b) или немају (сл. 466).

У првом случају свака од обе паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABC'D')$ разложена је једном страницом друге на два дела тако да сваком делу једне одговара један подударан део друге: $(ADD') \cong (BCC')$, $(ABCD') \cong (ABCD')$. Дакле у том случају паралелограмске површи могу се разложити на делове тако да одговарајући делови буду подударни. Оваква два лика називаћемо *разложиво једнаким*.



Сл. 465



Сл. 466

У другом случају (сл. 466) додајемо свакој од обе паралелограмске површи троугаону површ $(CD'E)$. Тада су петоугаоне површи $(ABED'D)$ и $(ABC'CE)$ разложиво једнаке, јер се $(ABED'D)$ може разложити на троугаоне површи (ABE) и $(AD'D)$, површ $(ABC'CE)$ на троугаоне површи (AEB) и $(BC'C)$, а троугаоне површи $(AD'D)$ и $(BC'C)$ су подударне. Дакле, паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABC'D')$ су разложиво једнаке кад се допуне троугаоном површи $(CD'E)$. Оваква два лика називаћемо *допунски једнаким*.

3. Еуклид обрађује у својим „Елементима" прво упоређивање равних површи. Ту спада и Питагорина теорема о правоуглом троуглу, кад се у њему посматрају, као обично квадрати саграђени над његовим страницама.

У Еуклидовим „Елементима" почиње упоређивање равних површи већ са теоремом 35 у Првој књизи:

„Паралелограми с истом основицом и између истих упоредних једнаки су један другом".

— тј. паралелограми с истом основицом и једнаким висинама једнаки су. О једнакости равних површи чији рубови су паралелограми и троуглови, и о њихову упоређивању реч је затим све до краја Прве књиге. Последње две теореме су Питагорина и њој обрнута теорема.

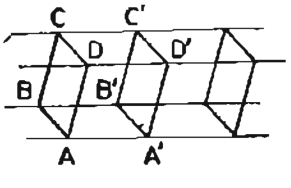
Шта су једнаке површи, Еуклид не дефинише, као ни шта су подударни ликови. Подударне ликове назива, штавише, истом речи, тј. једнаким.

Нагласимо да смо досада већ говорили о „једнакости", али не у овом смислу, него само у смислу подударности дужи и углова. Та употреба речи „једнако" не доводи до неспоразума, јер подударне дужи су једнаке и у овом ширем смислу и обратно, за углове пак постоји шири појам једнакости.

4. Уз једнакост равних (па и каквих било) површи долази њихово упоређивање кад нису једнаке, и њихово сабирање и одузимање, слично као за дужи и углове (§§ 25 и 26). У Еуклидовим „Елементима" упоређивањем неједнаких троугаоних и четвороугаоних површи и њиховим саби-

рањем бави се, сем задњих ставова Прве књиге, особито низ ставова Друге књиге. Напр. у ставовима 12 и 13 (Друге књиге) доказује се и то да је у сваком тупоуглом — односно оштроуглом — троуглу квадратна површ над страницом наспрам тупог — одн. оштрог — угла већа одн. мања од збира квадратних површи над осталим двема страницама.

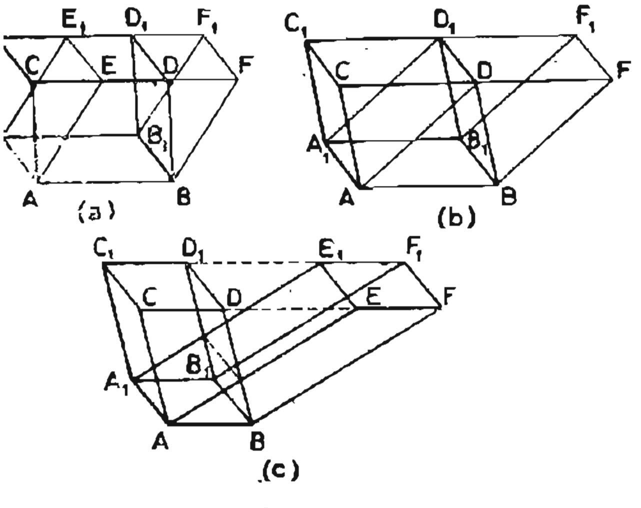
5. Једнакости и упоређивању тела по величини посвећује Еуклид неке ставове у књигама XI и XII својих „Елемената“. У књизи XI посматра прво (теорема 27) паралелепипеде којима су четири паралелне ивице на четири дате праве, а који су отсецани попречним равнима, паралелним датој равни (сл. 467). Затим (теорема 29) посматра два паралелепипеда са заједничком доњом основом и једнаким висинама, а којима су горње основе садржане између двеју паралелних правих. Тада се горње основе могу делимично поклапати, или су им само две странице, ивице тела, заједничке, или немају заједничких тачака (сл. 468 a, b, и c). Еуклид доказује просторну једнакост оба паралелепипеда само у првом случају. Тада су оба тела, с доњом основом AA_1BB_1 и горњим основама CC_1DD_1 и EE_1FF_1, разложена, свако на по две призме, које су, две по две, подударне:



Сл. 467

$$AA_1CC_1EE_1 \cong BB_1DD_1FF_1,$$

$$AA_1BB_1EE_1DD_1 \cong AA_1BB_1EE_1DD_1.$$



Сл. 468

У другом случају је слично: Како је $EE_1 = DD_1$, имамо наиме:

$$AA_1CC_1EE_1 \cong BB_1EE_1FF_1,$$

$$AA_1BB_1EE_1 \cong AA_1BB_1EE_1.$$

У трећем случају додајемо сваком од два паралелепипеда призму $PP_1DD_1EE_1$. Тако настају две призме

$$AA_1BB_1PP_1EE_1CC_1 \quad \text{и} \quad AA_1BB_1FF_1DD_1PP_1,$$

које су подударне, и тек оне могу се разложити на парове подударних призама, наиме на:

$$AA_1EE_1CC_1 \cong BB_1FF_1DD_1,$$

$$AA_1BB_1PP_1 \cong AA_1BB_1PP_1.$$

Дакле, аналого разложивој и допунској једнакости равних полигонских површи, имамо сада две врсте *просторне једнакости: разложиву* и *допунску* једнакост тела.

Еуклид се служи обема једнако, доказујући ставове о полиједрима. У посматраном ставу доказао је само разложиву једнакост (први случај).

Као што се у аналогији с једнакошћу равних површи лако увиђа, разложива једнакост у трећем од уочена три случаја става 29 може се доказати само помоћу Еудоксове аксиоме непрекидности. Према томе, и у проучавању једнакости тела претстоји слично посматрање као у равни, у коме се можемо прво ограничити на ставове који су независни од Еудоксове аксиоме.

6. Предмет XII књиге „Елемената" упоређивање тела на основи такозване *методе ексхаустије* или *исцрпљивања*. При томе је прво реч о пирамидама. По речима Архимеда знао је већ Демокритос (крајем 5. века пре н. е.) да је пирамида трећи део призме с једнаком основом и једнаком висином, али тек је Еудокс нашао у методи ексхаустије начин да то строго логички докаже.

Демокритово расуђивање, које се односило свакако на разна тела, састојало се у наивном интеграљењу, које још није имало логички исправан облик. Тело коме посматрамо запремину замишља се расеченим на безброј бескрајно танких плочица. Ако се тада померањем облик тела мења, запремина остаје иста. Оваква посматрања, која потичу вероватно још из предгрчке математике, дају очигледан, експерименту сличан начин за одређивање и упоређивање запремине разних тела. Слична посматрања су се примењивала за ликове у равни и тако се напр. утврђивало да троугли са заједничком основом и једнаким висинама имају једнаку површину.

Та античка метода интеграљења јавила се поново, по свој прилици независно, тек у 17. столећу, прво у једном делу Кеплера и у Кавалиериевој „Методи недељивих" тј. бескрајно малих величина (год. 1635). Кавалиери је видео да онако како је своју методу изложио — као сабирање бескрајно много бескрајно узаних величина (управо дужи при посматрању равних ликова, а површи при посматрању тела) — да се она не може логички одржати и стога је предложио да се она заобиђе, тиме што би се, напросто, усвојио следећи општи став без доказа тј. као аксиома:

Површи и тела су једнаки по садржини, ако пресеци у једнаким висинама дају (у случају површи) једнаке дужи или (у случају тела) једнаке површи.

То је такозвано Кавалиериево начело.

Ексхаустија је пак, у XII књизи Еуклидових „Елемената" нарочит начин посматрања конвергентних низова геометријских величина, избегавајући бескрајност низа. Најбоље ћемо је разумети ако је пренесемо из геометрије у област бројева. Тада се она своди на упоређење монотоних, рецимо узлазних конвергентних низова: $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow b$ $(n = 1,2, \ldots)$. Претпоставља се, напр. да је $a_n = k \cdot b_n$ за свако n и одређено позитивно k, а треба ексхаустијом доказати да је тада и $a = k \cdot b$. Суштина доказа је, савремено изражена, у следећем:

Претпоставимо да је, напротив, $a < k\,b$. Изаберимо позитиван број ϵ тако да је $\epsilon < b - a / k$. За довољно велико n је тада (према дефиницији конвергенције) $b - b_n < \epsilon$, дакле

$$k\,b - k\,b_n < k\,\epsilon < k\,b - a,$$

а отуд $k\,b_n > a$. Али $k\,b_n = a_n$, дакле $a_n > a$, што се против узлазној монотоности низа. Дакле није $a < k\,b$. Слично се доказује да није ни $a > k\,b$; према томе је $a = k\,b$.

Приметимо да је савремен доказ истог тврђења једноставнији и да је тада ограничавање на монотоне низове непотребно. Изаберимо наиме ма какво позитивно ε. За довољно велико n је

$$|a - a_n| < \varepsilon, \quad |b - b_n| < \varepsilon.$$

Како је $a_n = k\,b_n$, имамо

$$a - k\,b = a - a_n - k\,(b - b_n),$$

дакле

$$|a - k\,b| \leqslant |a - a_n| + k\,|b - b_n| < (1 + k)\,\varepsilon.$$

Како се заједно с ε може и $(1 + k)\,\varepsilon$ учинити колико се хоће малим, то значи да је $a = k\,b$. — Но у ексхаустији Еуклидових „Елемената“ не посматрају се нити општи узлазни низови $\{a_n\}$, него још ужа врста низова.

При томе није уопште била реч о бескрајном низу или збиру. Сваки низ или збир посматра се само до извесног члана. У претходном излагању била је реч само о „довољно великом“ n.

Ексхаустијом доказује Еуклид у XII књизи „Елемената“ прво да су две пирамиде с једнаким основама и једнаким висинама једнаке. Доказ се састоји у томе што се у обе пирамиде уписује низ призама које су, две по две, подударне, а што даље идемо у том низу тим се збирови призама разликују мање од самих пирамида. Дакле имамо два подударна низа и збира призама која у граничном поступку испуњавају обе пирамиде. Такву једнакост два тела називамо граничном једнакошћу. Противно томе, разложиву и допунску једнакост називамо коначном једнакошћу.

7. У новијој геометрији поставља се питање: јесу ли два просторно једнака полиједра увек и коначно једнака? Може ли се прилажење граници мимоићи у посматрању просторне једнакости? — П. Брикард је године 1896 поставио, али није доказао, теорему да је за разложиву једнакост два полиједра потребно да извесна линеарна функција њихових диједарских углова, с целим коефицијентима, буде мултиплум од два права угла. М. Ден је године 1900 то и доказао и показао да постоје једнаки полиједри који нису коначно једнаки. Тако напр. правилан тетраедар и правоугаони паралелепипед не могу никад бити коначно једнаки. Дакле, није свака пирамида коначно једнака некој призми. Отуд следује пак и да је једнакост пирамиде с трећим делом призме која има једнаку основу и једнаку висину, не коначна него гранична једнакост. Неизбежност бескрајног граничног процеса при упоређивању тела једна је од битних ознака тог упоређивања. Ње у равни, при упоређивању равних површи, нема.

РАЗЛОЖИВА И ДОПУНСКА ЈЕДНАКОСТ МНОГОУГАОНИХ РАВНИХ ПОВРШИ И ЊИХОВО УПОРЕЂИВАЊЕ.

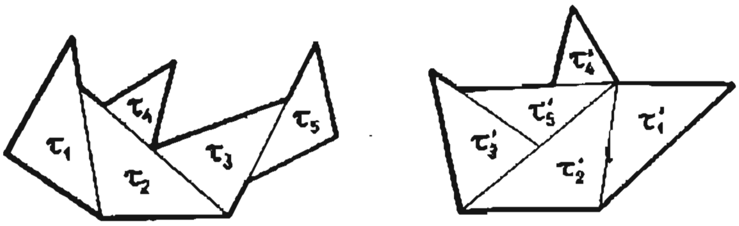
1. Проучавајући многоугле и многоугаоне површи у равни, дефинисали смо већ разлагање многоугаоних површи на многоугаоне и нарочито на троугаоне површи и, обратно, њихово слагање у веће многоугаоне површи (дефиниција 15.9). Ради лакшег израчунавања увели смо и овај израз: ако је многоугаона површ π сложена из многоугаоних површи φ и ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, кажемо да су површи ψ_i додате првој површи φ.

Тим дефиницијама додајемо сад ове две:

Дефиниција 57.1. Две многоугаоне површи називаћемо *разложиво једнаким* ако се свака може разложити на коначан и једнак број троугаоних површи које су, две по две, подударне.

Напомена. Речи „које су две по две подударне“ значе, тачније речено, да свакој троугаоној површи једне многоугаоне површи одговара једна одређена троугаона површ друге многоугаоне површи, и обратно, и да су одговарајуће троугаоне површи подударне.

Дефиниција 57.2. Две многоугаоне површи φ и ψ називаћемо *допунски једнаким* ако им се може додати коначан а једнак број многоугаоних површи које су, две по две, разложиво једнаке:

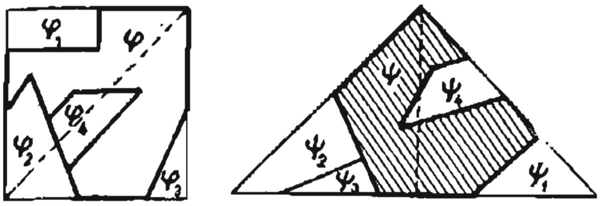


Сл. 469

$$\varphi_1 \text{ и } \psi_1,\ \varphi_2 \text{ и } \psi_2, \ldots, \varphi_n \text{ и } \psi_n,$$

тако да је многоугаона површ сложена из φ, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ разложиво једнака многоугаоној површи сложеној из ψ, ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_n$.

Слика 469 претставља две разложиво једнаке многоугаоне површи, разложене прва на троугаоне површи τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_5$, друга на троугаоне површи τ'_1, $\tau'_2, \ldots, \tau'_5$, тако да је $\tau_1 \cong \tau'_1$, $\tau_2 \cong \tau'_2, \ldots, \tau_5 \cong \tau'_5$. Слика 470



Сл. 470

претставља две допунски једнаке многоугаоне површи φ и ψ. Пошто се једној додају многоугаоне површи φ_1. φ_2, φ_3, φ_4, а другој ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, при чему су одговарајуће додате површи разложиво једнаке, настају два разложиво једнака лика: једна правоугаона и једна троугаона површ.

Дефиниција 57.3. Разложиво и допунски једнаке многоугаоне површи називаћемо кратко *једнаким**.

Ако су φ и ψ две једнаке многоугаоне површи, писаћемо: $\varphi = \psi$.

По потреби, ако треба истаћи да је једнакост разложива или допунска, можемо писати

$$\varphi \overset{r}{=} \psi \qquad \text{односно} \qquad \varphi \overset{d}{=} \psi.$$

---

*Био би оправдан и назив „коначна једнакост“, за разлику од „граничне једнакости“ која изискује гранично посматрање (тј. бескрајне низове), а која се за линије и површи јавља особито кад су то криве линије и криве површи или равне површи ограничене кривим линијама.

На темељу претходних дефиниција имамо непосредно следеће две теореме:

Теорема 57.1. *Многоугаоне површи састављене из разложиво једнаких многоугаоних површи јесу и саме разложиво једнаке.*

Теорема 57.2. *Одузмемо ли од разложиво једнаких многоугаоних површи разложиво једнаке многоугаоне површи, преостале многоугаоне површи су допунски једнаке.*

Докажимо сад следећу теорему:

Теорема 57.3. *Две подударне многоугаоне површи су такође разложиво једнаке.*

Две разложиво једнаке многоугаоне површи су такође допунски једнаке.

Доказ. Разложимо две подударне многоугаоне површи σ и τ на троугаоне површи помоћу одговарајућих (подударних) унутарњих дијагонала. Тада су одговарајуће троугаоне површи подударне, две по две, дакле према дефиницији 57.1 многоугаоне површи σ и τ су разложиво једнаке.

Нека су φ и ψ ма које две разложиво једнаке многоугаоне површи. Додајмо им две разложиво једнаке многоугаоне површи, свакој по једну. Према теореми 57.1 тако настале многоугаоне површи су разложиво једнаке, дакле по дефиницији 57.2 многоугаоне површи φ и ψ су допунски једнаке.

Докажимо још следеће две теореме:

Теорема 57.4. *Ако су две многоугаоне површи разложиво једнаке некој трећој многоугаоној површи, те две многоугаоне површи су и међу собом разложиво једнаке.*

Доказ. Нека су многоугаоне површи φ_1 и φ_2 разложиво једнаке многоугаоној површи φ_3. Према дефиницији 57.1 могу се прве две многоугаоне површи разложити на троугаоне површи, тако да је свака троугаона површ у φ_1 под дарна једној троугаоној површи у φ_3 и да је свака троугаона површ у φ_2 подударна једној троугаоној површи у φ_3.

При томе долазе два разна разлагања многоугаоне површи φ_3 на троугаоне. Изведемо ли оба разлагања једновремено, биће, опште узевши, троугаона површ једног разлагања подељена дужима другог разлагања на многоугаоне површи.

Разложимо ове многоугаоне површи на троугаоне. Додајмо све дужи разлагања, које постоје сада у φ_3, а нема их у φ_1, такође у φ_1 и додајмо све дужи разлагања, које постоје у φ_3, а нема их у φ_2, такође у φ_2. Тада је свака троугаона површ новог разлагања многоугаоне површи φ_3 подударна једној троугаоној површи у φ_1, и једној троугаоној површи у φ_2. Последње две троугаоне површи су, дакле, и међу собом подударне. Дакле многоугаоне површи φ_1 и φ_2 су разложене на троугаоне површи које су, две по две, подударне и према томе су разложиво једнаке.

Теорема 57.5. *Ако су две многоугаоне површи допунски једнаке некој трећој многоугаоној површи, те две многоугаоне површи су и међу собом допунски једнаке.*

Доказ. Нека су многоугаоне површи φ_1 и φ_2 допунски једнаке многоугаоној површи φ_3. Тада постоје према дефиницији 57.2 многоугаоне површи $\psi'_1, \psi''_1, \ldots, \psi_1^{(m)}$ и многоугаоне површи $\psi'_3, \psi''_3, \ldots, \psi_3^{(m)}$ тако да је многоугаоној површи сложеној из $\varphi_1, \psi'_1, \psi''_1, \ldots, \psi_1^{(m)}$ разложиво једнака многоугаона површ сложена из φ_3. $\psi'_3, \psi''_3, \ldots, \psi_3^{(m)}$ и постоје многоугаоне површи $\omega_2', \omega_2'', \ldots, \omega_2^{(n)}$ и многоугаоне површи $\omega_3', \omega_3'', \ldots$

$\omega_3^{(n)}$ тако да је многоугаона površ сложена из $\varphi_2, \omega'_2, \omega''_2, \ldots, \omega_2^{(n)}$ разложиво једнака многоуганој површи сложеној из $\varphi_3, \omega'_3, \omega''_3, \ldots, \omega_3^{(n)}$. Додамо ли многоугаоној површи φ_3 једновремено многоугаоне површи $\psi_3^{(i)}$ и многоугаоне површи $\omega_3^{(j)}$, било да су извесне тачке равни једновремено у оба мноштва многоугаоних површи, тј. услед обеју подела заједно додају се многоугаоној површи φ_3 три врсте многоугаоних површи:

(а) извесне многоугаоне површи $\psi_3^{(i)}$ и извесни делови тих многоугаоних површи, којима су унутарње тачке изван многоугаоних површи $\omega_3^{(j)}$.

(б) извесне многоугаоне површи $\omega_3^{(j)}$ и извесни делови тих многоугаоних површи, којима су унутарње тачке изван многоугаоних површи $\psi_3^{(i)}$.

(в) извесне многоугаоне површи $\psi_3^{(i)}$ и $\omega_3^{(j)}$ и извесни њихови делови, којима су унутарње тачке једновремено у неком од многоугаоних површи $\psi_3^{(i)}$ и у неком од $\omega_3^{(j)}$.

Сад можемо унети у многоугаоне површи $\psi_1^{(i)}$ све оне дужи које у $\psi_3^{(i)}$ потичу од многоугаоних површи $\omega_3^{(j)}$. Тада ће се многоугаоне површи уз φ_1 састојати из многоугаоних површи разложиво једнаких са многоугаоним површима (а) и из многоугаоних површи разложиво једнаких са многоугаоним површима (в).

Додајмо и у многоугаоне површи $\omega_2^{(j)}$ све оне дужи које у $\omega_3^{(j)}$ потичу од многоугаоних површи $\psi_3^{(i)}$. Тада ће се многоугаоне површи уз φ_2 састојати из многоугаоних површи разложиво једнаких многоугаоним површима (б) и из многоугаоних површи разложиво једнаких многоугаоним површима (в).

Додајмо најзад многоугаоној површи која се састоји из φ_1 и из многоугаоних површи (а) и (в) многоугаоне површи разложиво једнаке многоугаоне површи (б). Тиме су многоугаоној површи φ_1 у свему додате многоугаоне површи разложиво једнаке многоугаоним површима свих трију врста (а, б и в) и настала је многоугаона површ разложиво једнака многоугаоној површи која се образовала услед оба додавања многоугаоној површи φ_3. Исто тако, многоугаоној површи која се састоји из φ_2 и из многоугаоних површи (б) и (в) додајемо многоугаоне површи разложиво једнаке многоугаоним површима (а). Тиме су и многоугаоној површи φ_2 у свему додате многоугаоне површи разложиво једнаке многоугаоним површима свих трију врста и настала је још једна многоугаона површ разложиво једнака многоугаоној површи која је настала из φ_3. Дакле многоугаоне површи добијене тим додавањем многоугаоних површи φ_1 и φ_2 јесу разложиво једнаке, па су према дефиницији 57.2 многоугаоне површи φ_1 и φ_2 допунски једнаке.

Теореме 57.1 и 57.2 могу се изрећи и за допунски једнаке многоугаоне површи, али докази су доста сложени.

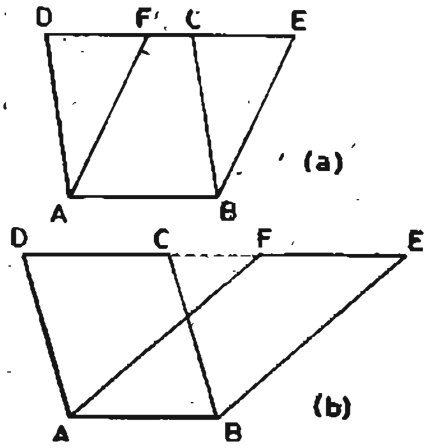
2. Прелазимо на теореме о једнакости троугаоних и четвороугаоних површи. Доказаћемо прво неке теореме које не претпостављају Еудоксову аксиому, а затим неке (у бр. 6) где је она потребна.

Две паралелограмске површи с једном заједничком страницом и којима обе наспрамне странице имају заједничких тачака, јесу разложиво једнаке (сл. 465 а и б). Но докажимо сада општију теорему, која се доказује не примењујући Еудоксову аксиому и зато је реч само о допунској једнакости.

Теорема 57.6. *Паралелограмске површи с једнаким основицама и једнаким висинама су допунски једнаке.*

Доказ. Нека су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ две дате паралелограмске површи и нека је паралелограм $ABEF$ подударан с паралелограмом $A'B'C'D'$ и нека је садржан у равни паралелограма $ABCD$, а са заједничком страницом AB и с теменима E и F с оне стране праве AB с које су темена C и D (сл. 471 a и b). Уместо за паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(A'B'C'D')$, докажимо за $(ABCD)$ и $(ABEF)$ да су разложиво, односно допунски једнаке.

Како су висине обеју паралелограмских површи једнаке, рецимо $CC' = EE'$, оне одређују правоугаону површ $CEC'E'$, дакле права CE је упоредна правој AB, и према томе странице CD и EF обеју паралелограмских површи припадају једној правој, упоредној са правом AB.



Сл. 471

Додајмо паралелограмској површи $(ABCD)$ троугаону површ (BCE) а паралелограмској површи $(ABEF)$ троугаону површ (ADF). Оба пута настаје иста четвороугаона површ $(ABDE)$, која је према теореми 57.3 разложиво једнака себи самој. Троугаоне површи (BCE) и (ADF) су подударне, дакле према теореми 57.3 и разложиво једнаке. Према томе паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABEF)$, које настају кад се од разложиво једнаких четвороугаоних површи одузму разложиво једнаке троугаоне површи (BCE) и (ADF), јесу допунски једнаке.

Основан значај има следећа теорема:

Теорема 57.7. *Свака троугаона површ је разложиво једнака паралелограмској површи с једнаком основицом, једнаким углом при основици и висином која је половина висине троугаоне површи.*

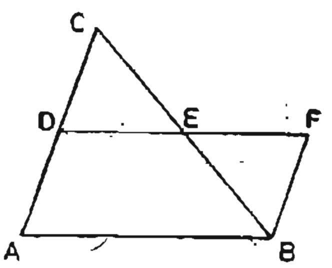
Доказ. Нека је на датом троуглу ABC (сл. 472) тачка D средиште странице AC, E средиште странице BC а F пресек праве DE и праве BF која је упоредна с AC. Тада је

$$ABED \cong ABED \qquad \text{и} \qquad DEC \cong FEB,$$

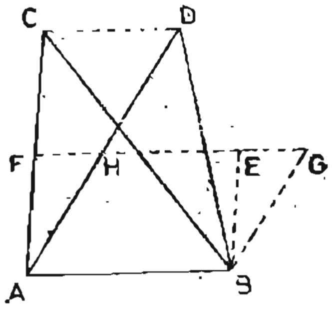
дакле, према дефиницији 57.1 троугаона површ (ABC) је разложиво једнака паралелограмској површи $(ABFD)$.

Али паралелограм $(ABFD)$ је подударан са датим паралелограмом, дакле троугаона површ је разложиво једнака датој паралелограмској површи.

Следеће три теореме односе се на допунску једнакост.



Сл. 472



Сл. 473

Теорема 57.8. *Троугаоне површи с једнаким основицама и једнаким висинама су допунски једнаке.*

Доказ. Као што смо учинили у почетку доказа теореме 57.6 посматрајмо, не сужавајући теорему, две троугаоне површи ABC и ABD

(сл. 473) са заједничком основицом AB, обе с исте стране праве AB. Како су им и висине једнаке, права CD која пролази кроз C и D је упоредна с правом AB, дакле и с правом FH која пролази кроз средиште F странице AC и средиште H странице AD оба троугла.

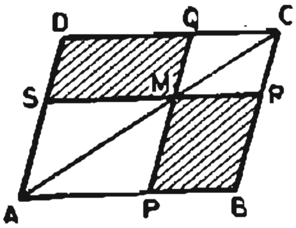
Нека су E и G пресеци праве FH са правим које пролазе кроз B и упоредне су с AC односно AD.

Посматрајмо паралелограмске површи $(ABEF)$ и $(ABGH)$. Њихова основица AB им је заједничка, а висине су им једнаке, дакле према теореми 57.6 те површи су допунски једнаке. Но површ $(ABEF)$ је према теореми 57.7 разложиво једнака троугаоној површи (ABC), а површ $(ABGH)$ је разложиво једнака троугаоној површи (ABD). Дакле према теореми 57.5 обе те троугаоне површи су допунски једнаке.

3. На основи теореме 57.8 свака испупчена многоугаона површ може се (на познати начин) претворити у допунски једнаку троугаону површ. Полази се од следеће теореме:

Теорема 57.9. *Нека је* M *унутарња тачка на дијагонали* AC *паралелограма* $ABCD$. *Две паралелограмске површи* $(ABRS)$ *и* $(APQD)$ *са заједничким теменом* A *и које настају кад се паралелограмска површ* $(ABCD)$ *разложи на две паралелограмске површи помоћу две праве које пролазе кроз* M, *јесу допунски једнаке.*

Доказ. Нека је PQ дуж упоредна са AD која пролази кроз M и спаја тачке на страницама AB и CD датог паралелограма (сл. 474) и нека је RS дуж упоредна са AB, која пролази кроз M и спаја тачке на страницама AD и BC. Петоугаоне површи $(ABCMS)$ и $(APMCD)$ су разложиво једнаке, јер је прва разложена на троугаоне површи (ABC) и (AMS), друга на троугаоне површи (ADC) и (AMP), а троугли ABC и ADC су подударни и тако исто троугли AMS и AMP. Но прва петоугаона површ је разложена на паралелограмску површ $(ABRS)$ и на троугаону (CMR), а друга на паралелограмску површ $(APQD)$ и на троугаону (CMQ). Како су троугли CMR и CMQ подударни, те две паралелограмске површи су према дефиницији 57.2 допунски једнаке.



Сл. 474

Имамо затим ову теорему:

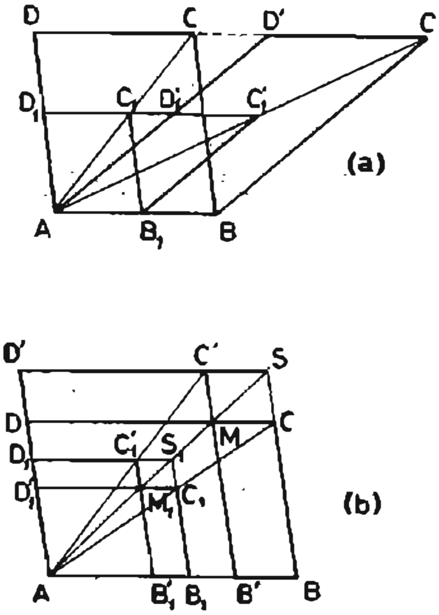
Теорема 57.10. *Нека је* M *унутарња тачка на дијагонали* AC *паралелограма* $ABCD$ *и нека је паралелограмска површ* $(ABCD)$ *разложена помоћу две праве које пролазе кроз* M *на две паралелограмске површи. Оне две од тих паралелограмских површи које нису разложене том дијагоналом, јесу допунски једнаке.*

Доказ. Задржимо ознаке из претходне теореме. Од четири поменуте паралелограмске површи, две нису разложене дијагоналом AC и то $(MPBR)$ и $(MQDS)$. Додајмо паралелограмској површи $(MPBR)$ троугаоне површи (AMP) и (CMR) и паралелограмској површи $(MQDS)$ троугаоне површи (AMS) и (CMQ). Како су троугли AMP и AMS подударни и тако исто троугли CMR и CMQ, те две паралелограмске површи су допунски једнаке.

4. Докажимо сада две теореме о допунској једнакости у вези са сличношћу.

Теорема 57.11. *Ако су паралелограмске површи* (ABCD) *и* (A'B'C'D') *допунски једнаке и ако су паралелограми* $A_1B_1C_1D_1$ *и* $A_1'B_1'C_1'D_1'$ *слични редом паралелограмима* ABCD *и* A'B'C'D' *у истој сразмери, тада су и паралелограмске површи* $(A_1B_1C_1D_1)$ *и* $(A_1'B_1'C_1'D_1')$ *допунски једнаке.*

Доказ. Претпоставимо прво да $(ABCD)$ и $(A'B'C'D')$ имају једнаке основице AB и $A'B'$ и једнаке висине. Можемо, посматрајући ликове који су подударни са датим ликовима узети: 1) да се основице AB и $A'B'$ поклапају (сл. 475 a), 2) да је паралелограм $A_1B_1C_1D_1$, који је сличан са $ABCD$, у сличном положају и да је A центар сличности и 3) исто у односу на паралелограм $A'B'C'D'$ и њему сличан. Како су $(ABCD)$ и $(A'B'C'D')$ једнаке, висине су им тада једнаке. Допунска једнакост тих површи се доказује додавањем троугаоне површи са страницом CD'. Како је лик који се састоји из та два паралелограма сличан лику који се састоји из паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ и $A_1'B_1'C_1'D_1'$ $(A_1 \equiv A_1' \equiv A)$, ова два паралелограма са заједничком основицом AB_1 имају такође једнаке висине, дакле површи $(A_1B_1C_1D_1)$ и $(A'_1B'_1C'_1D'_1)$ су допунски једнаке. Тиме је теорема доказана за овај случај.



Сл. 475

Ако паралелограми $ABCD$ и $A'B'C'D'$ немају једнаких страница, можемо на темељу претходног случаја претпоставити да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'D'$, и да су B' и D' на крацима AB и AD угла $\sphericalangle BAD$ (сл. 475 b). Према теореми 57.9 две странице тих паралелограма секу се у тачки M на дијагонали AS паралелограма $ABSD'$, који садржи сва темена тих двају паралелограма. Посматрајући лик сличан и у сличном положају, образован од сличних паралелограма $AB_1C_1D'_1$ и $AB_1'C_1'D_1$, налазимо да се две његове странице секу у тачки M_1, која је такође на дијагонали паралелограма $AB_1S_1D_1$, сличног паралелограму $ABSD'$. Отуд следује да су и паралелограмске површи $AB_1C_1D_1$ и $AB_1'C_1'D_1$ допунски једнаке. — Тиме је ова теорема уствари доказана.

Теорема 57.12. *Ако су троугаоне површи* (ABC) *и* (A'B'C') *допунски једнаке и ако су троуглови* $A_1B_1C_1$ *и* $A_1'B_1'C_1'$ *слични редом троугловима* ABC *и* A'B'C' *у истој сразмери, тада су и троугаоне површи* $(A_1B_1C_1)$ *и* $(A_1'B_1'C_1')$ *допунски једнаке.*

Доказ. Нека је $(ABFD)$ паралелограмска површ разложиво једнака троугаоној површи (ABC) (сл. 472) и, тако исто, нека је $(A'B'F'D')$ паралелограмска површ разложиво једнака троугаоној површи $(A'B'C')$. Аналого посматрајмо сличне троугаоне површи $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$. Како су прве две троугаоне површи допунски једнаке и прве две паралелограмске површи су допунски једнаке, дакле према теореми 57.11 сличне две паралелограмске површи су допунски једнаке и према томе су и троугаоне површи $(A_1B_1C_1)$ и $(A_1'B_1'C_1')$ допунски једнаке.

5. Значајне су и следеће две теореме о постојању једнаких троугаоних површи.

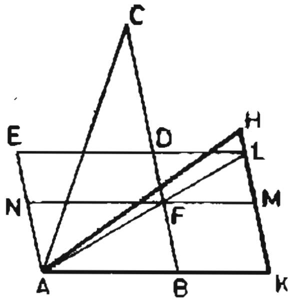
Теорема 57.13. *Уз сваку троугаону површ постоји допунски једнака троугаона површ са датом основицом или са датом висином.*

Доказ. Нека је AB основица троугла ABC (сл. 476). Нека је на полуправој AB дуж AK једнака датој основици другог троугла. Докажимо да постоји допунски једнака троугаона површ са основицом AK.

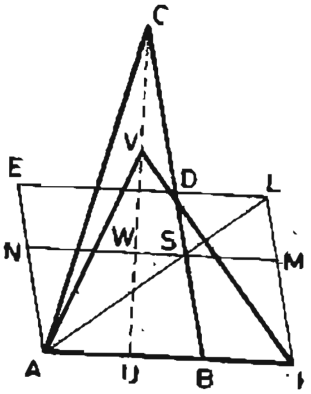
Нека је D средиште дужи BC, права DE упоредна правој AB, права AE упоредна правој BC.

Паралелограмска површ $(ABDE)$ је према теореми 57.7. разложиво једнака троугаоној површи (ABC). Нека је права KL упоредна правој BC, и нека је L тачка пресека са DE. Дијагонала AL паралелограма $AKLE$ и дуж BD секу се у тачки F, јер права BD сече страну AK а не страну KL троугла AKL. Дакле према теореми 57.10, ако је MN права која пролази кроз F и упоредна је у правој AK, а M и N тачке пресека са KL и AE, паралелограмске површи $(NFDE)$ и $(BKMF)$ су допунски једнаке, дакле према теореми 51.5 и паралелограмска површ $(ABDE)$, састављена из површи $(ABFN)$ и $(NFDE)$, допунски је једнака паралелограмској површи $(AKMN)$, састављеној из површи $(ABFN)$ и $(BKMF)$.

Нека је H тачка на правој KM, таква да је M средиште дужи KN. Тада је према теореми 57.7 троугаона површ (AKH) допунски једнака паралелограмској површи $(AKMN)$, а ова је допунски једнака троугаоној површи (ABC), дакле обе те троугаоне површи су допунски једнаке. — Тиме је доказано да постоји допунска једнакост троугаоних површи са датом основицом.



Сл. 476



Сл. 477

Докажимо још да постоји допунски једнака троугаона површ са датом висином. Нека је U подножје управне спуштене из C на AB. Дуж CU је висина троугла ABC (сл. 477). Нека је дуж UV једнака датој висини, а при томе V тачка праве UC, с оне стране тачке U с које је C.

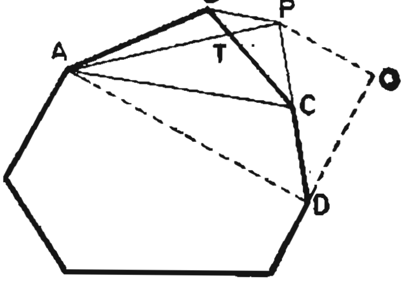
Нека је D средиште дужи BC, $ABDE$ исти паралелограм као мало пре, и нека је W средиште дужи UV, WS права упоредна правој AB, тачка S њен пресек са BC. Нека је затим L пресек правих AS и DE, а M и N пресеци праве WS са правом AE и правом KL, упоредном са BD и која пролази кроз L.

Из истог посматрања као у претходном случају закључујемо да је троугаона површ (ABC) допунски једнака паралелограмској површи $(ABDE)$, а ова допунски једнака паралелограмској површи $(AKMN)$. Ова је пак према теореми 57.7 допунски једнака троугаоној површи (AKV), којој је висина UV двострука. Дакле троугаона површ (ABC) је допунски једнака троугаоној површи (AKV) која има дату висину.

Теорема 57.14. *Уз сваку испупчену многоугаону површ постоји допунски једнака троугаона површ.*

Доказ. Нека је дат испупчен многоугао $ABCD \ldots N$ (сл. 478). Дијагоналом AC његова површ је према теореми 15.18 разложена на троугаону површ (ABC) и на испупчену многоугаону површ $(ACD \ldots N)$.

Како је дати многоугао испупчен, тачка A није на правој CD, дакле праве AC и CD су две разне праве и према томе права CD и права упоредна правој AC, која пролази кроз B, секу се у извесној тачки P. Како су тачке B и P с једне стране праве AC, а остала темена датог многоугла с друге стране те праве, троугаона површ (ACP) и многоугаона површ $(ACD \ldots N)$ сачињавају испупчену многоугаону површ $(APD \ldots N)$.



Сл. 478

Према теореми 57.8 троугаоне површи (ACB) и (ACP) су допунски једнаке. Сабразно дефиницији 57.2 ако им се додају извесне многоугаоне површи, које су, две по две, разложиво једнаке, настају разложиво једнаке многоугаоне површи. Према доказу теореме 57.8 те многоугаоне површи када се додају троугаоним површима (ACB) и (ACP) јесу с оне стране праве AC с које нису остала темена многоугла $ACD \ldots N$, дакле многоугаоне површи $(ABC \ldots N)$ и $(APD \ldots N)$ су такође допунски једнаке. Но број темена многоугла $APD \ldots N$ је за један мањи од броја темена многоугла $ABC \ldots N$.

Истим поступком налазимо да на правој DE, при чему су D и E два даља суседна темена датог многоугла, постоји тачка Q тако да је многоугаона површ $(APD \ldots N)$ допунски једнака многоугаоној површи $(AQE \ldots N)$ која има за један мањи број темена од многоугла $APD \ldots N$. Но према теореми 57.5 дата многоугаона површ је допунски једнака површи $(AQE \ldots N)$

Ако овако наставимо добићемо најзад троугаону површ која је допунски једнака датој многоугаоној површи.

6. За доказ следеће три теореме потребна је и Еудоксова аксиома (III 1).

Теорема 57.15. *Паралелограмске површи с једнаким основицама и једнаким висинама су разложиво једнаке.*

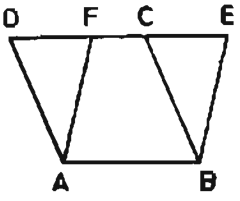
Доказ. Можемо као у доказу теореме 57.6 претпоставити да обе паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABEF)$ имају заједничку основицу AB и да су с исте стране праве AB. Тада наспрамне странице CD и EF припадају истој правој и могуће је да имају заједничких тачака или да немају.

Ако имају заједничких тачака (сл. 479) тачка F припада дужи CD и тачка C дужи EF. Разложимо паралелограмску површ $(ABCD)$ на троугаону површ (ADF) и троугаону површ или четвороугаону површ $(ABCF)$ (тачке C и F могу се и поклапати), а паралелограмску површ $(ABEF)$ на троугаону површ (BCE) и на троугаону или четвороугаону површ $(ABCF)$. Како је $ABCF \cong ABCF$, а $ADF \cong BCE$, према теореми 22.5 о подударности троуглова, паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABEF)$ су такође, према дефиницији 56.9 разложиво једнаке.

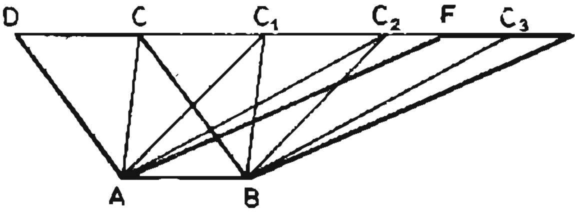
Ако странице CD и EF немају заједничких тачака (сл. 480), нека су C_1 $C_2, \ldots C_n$ тачке на правој DC такве да је C између D и C_1, C_1

између C и C_2, C_2 између C_1 и C_3, итд. и $DC = CC_1 = C_1C_2 = \dots$ Како је такође C између D и F, F између C и E, према аксиоми III 1 је тачка F за довољно велико n између D и C_n.

Према претходном делу доказа, кад наспрамне странице имају заједничких тачака, паралелограмске површи су разложиво једнаке. Дакле, како странице CD и CC_1 имају заједничку тачку C, паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABCC_1)$ су разложиво једнаке. Исто тако су и паралелограмске површи $(ABCC_1)$ и (ABC_1C_2), затим (ABC_1C_2) и (ABC_2C_3) разложиво једнаке итд. Дакле, према теореми 57.4 све те паралелограмске површи су међу собом разложиво једнаке, дакле су и паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABC_{n-1}C_n)$ разложиво једнаке.



Сл. 479



Сл. 480

Но паралелограмске површи $(ABC_{n-1}C_n)$ и $(ABEF)$ су разложиво једнаке, јер им странице $C_{n-1}C_n$ и EF имају заједничких тачака. Дакле и паралелограмске површи $(ABCD)$ и $(ABEF)$ су разложиво једнаке.

Теорема 57.16. *Троугаоне површи с једнаким основицама и једнаким висинама су разложиво једнаке.*

Доказ. Исти је као за теорему 57.8, само што се ослања о теорему 57.15 о разложивој једнакости, уместо о теорему 57.6 о допунској једнакости.

Из дефиниција 57.1 и 57.2 разложиво једнаких и допунски једнаких многоугаоних површи извели смо скоро непосредно теорему 57.3 да су разложиво једнаке многоугаоне површи такође допунски једнаке. Обрнута теорема је такође тачна, дакле обе врсте једнакости су еквивалентне, али за ту теорему потребан је дуг доказ који овде не доносимо. Теорема гласи:

Теорема 57.17 *Допунски једнаке многоугаоне површи су такође разложиво једнаке.*

7. Као што се разликују веће и мање дужи, већи и мањи углови и кружни лукови, тако се разликују такође веће и мање многоугаоне површи, и као што се дефинише збир и разлика двеју дужи и слично за углове итд., тако се дефинише и збир многоугаоних површи и њихова разлика. Сви ти појмови се могу дефинисати ма за какве линије, површи и тела, али само њихова примена на најједноставније геометријске ликове припада елементарној геометрији.

У следећој дефиницији користимо назив „прави део“ који се употребљава у теорији мноштава: Ако су сви елементи мноштва M уједно елементи мноштва N, али ако сви елементи мноштва N нису елементи мноштва M, каже се да је мноштво M прави део мноштва N, знацима $M \subset N$.

Дефиниција 57.3. Ако је многоугаона површ φ прави део многоугаоне површи ψ и ако су λ и μ две многоугаоне површи тако да су површи λ и φ (разложиво или допунски) једнаке и да су површи μ и ψ једнаке, тада ћемо рећи да је *многоугаона површ* λ мања од многоугаоне површи μ, или да је многоугаона површ μ већа од многоугаоне површи λ. Знацима·

$$\lambda<\mu \quad \text{или} \quad \mu>\lambda.$$

Како је на основи дефиниције 57.1 и 57.2 свака многоугаона површ разложиво и допунски једнака самој себи, из претходне дефиниције следује непосредно:

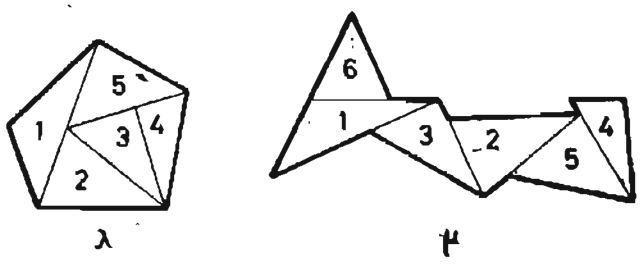
Теорема 57.18. *Ако је многоугаона површ φ прави део многоугаоне површи ψ, многоугаона површ φ је мања од многоугаоне површи ψ.*

Уопште, елементарни односи о упоређивању разних дужи, вреде и за равне многоугаоне површи и лако се доказују. Тако постоји напр. теорема:

Теорема 57.19. *Какве год биле две многоугаоне површи λ и μ, увек постоји један и само један од три односа заснована на допунској једнакости или пак на разложивој једнакости*:

$$\mu>\lambda, \quad \mu=\lambda, \quad \mu<\lambda.$$

Слика 481 претставља две многоугаоне површи λ и μ. Троугаоне површи на које је разложена површ λ подударне су редом с троугаоним површима садржаним у површи μ, које носе исти број. Нека је φ многоугаона површ која се састоји из троугаоних површи са бројевима 1 до 5, а $\psi\equiv\mu$. Тада је φ прави део од ψ. Но површи λ и φ су разложиво једнаке, а површи μ и ψ су истоветне, дакле разложиво једнаке и према томе је $\lambda<\mu$.



Сл. 481

8. И збир многоугаоних површи дефинишемо у аналогији са збиром двеју или више дужи.

Дефиниција 57.4. Ако је многоугаона површ φ разложена на многоугаоне површи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ $(n=2,3\ldots)$ називаћемо површ φ такође *збиром многоугаоних површи* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$.

Нека су $\mu_1\ \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(n=2,3,\ldots)$ ма какве равне многоугаоне површи, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ многоугаоне површи на које је разложена извесна многоугаона површ φ, такве да су површи првог низа разложиво (или допунски) једнаке редом површима другог низа. — Ако је извесна многоугаона површ μ разложиво (или пак допунски) једнака многоугаоној површи φ, рећи ћемо да је многоугаона површ μ разложиво (или допунски) *једнака збиру* многоугаоних површи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и писаћемо

$$\mu=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n.$$

Ако су два збира многоугаоних површи једнака једној истој многоугаоној површи, рећи ћемо да су та *два збира међу собом једнака.*

Ако је један збир једнак једној многоугаоној површи, други збир другој многоугаоној површи и ако је прва од те две површи мања од друге, рећи ћемо да је први збир *мањи* од другог збира или да је други *већи* од првог збира.

Ма да смо збир дефинисали тако за две или више многоугаоних површи, допуштамо ради општег важења теорема да се збир састоји и из само једне површи. Тада је збир истоветан са том једном површи.

Опет се може рећи да елементарни односи о збиру двеју или више дужи вреде и за збир многоугаоних површи. Те теореме и њихове доказе препуштамо, избегавајући непотребну опширност, читаоцу.

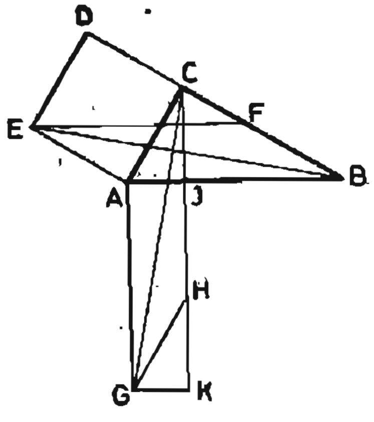
Ограничавамо се само на познату Еуклидову и Питагорину теорему о правоуглом троуглу. Доказујемо је прво само у односу на допунску једнакост.

Треба прво да уведемо дефиницијом израз „над страницом" који се јавља у следећим теоремама.

Дефиниција 57.5. За квадратну површ у равни једног троугла, којој је једна страница уједно страница тог троугла рећи ћемо да је *над* том страницом.

Теорема 57.20 — Еуклидова теорема о допунској једнакости. — *Квадратна површ над једном катетом правоуглог троугла је допунски једнака правоугаоној површи чије су странице хипотенуза и пројекција те катете на хипотенузу.*

Доказ. Нека је у троуглу ABC (сл. 482) угао $\sphericalangle ACB$ прав, $(ACDE)$ квадратна површ над катетом AC. Нека је EF права упоредна са хипотенузом AB и која пролази кроз E, а F њен пресек са правом BC, затим нека су AG и CJ управне на хипотенузи AB, и које пролазе кроз A одн. кроз C. Нека је $AG = AB$. Најзад нека је GH упоредна са AC и која пролази кроз G, а H њен пресек са CJ и нека је GK упоредна са AB која пролази кроз G, а K њен пресек са CJ.



Сл. 482

Паралелограмске површи $(ACDE)$ и $(ABFE)$ су допунски једнаке према теореми 57.6. Троугаоне површи (AEB) и (ACG) су подударне јер је $AE = AC$, $AB = AG$, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE = \sphericalangle BAG + \sphericalangle BAG - \sphericalangle CAG$, тј. $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAG$. Дакле, и паралелограмске површи $(ABFE)$ и $(ACHG)$ су допунски једнаке. Но паралелограмске површи $(ACHG)$ и $(AJKG)$ су допунски једнаке, јер им је заједничка основица AG и висине су им једнаке. Дакле квадратна површ $(ACDE)$ је допунски једнака правоугаоној површи $(AJKG)$, којој је страница AG једнака хипотенузи, а страница AJ пројекцији катете AC на хипотенузу.

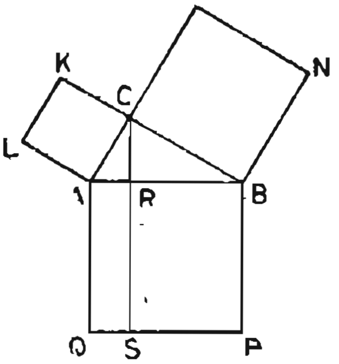
Теорема 57.21. — Питагорина теорема о допунској једнакости. — *Квадратна површ над хипотенузом правоуглог троугла је допунски једнака збиру квадратних површи над катетама.*

Доказ. Правом CR, која пролази кроз теме C троугла ABC, коме је угао $\sphericalangle ACB$ прав (сл. 483) и која је управна на хипотенузи AB, разложена је квадратна површ $(ABPQ)$ над хипотенузом на две правоугаоне површи, које су према теореми 57.20 допунски једнаке квадратним површима над катетама. Дакле збир ових квадратних површи је допунски једнак квадратној површи над хипотенузом.

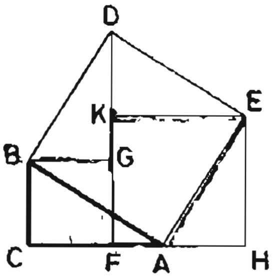
Обе претходне теореме можемо доказати (без Еудоксове аксиоме) и за разложиву једнакост. Али сад се лакше доказује питагорина теорема од Еуклидове.

Теорема 57.22. — Питагорина теорема о разложивој једнакости. — *Квадратна површ над хипотенузом правоуглог троугла је разложиво једнака збиру квадратних површи над катетама.*

Доказ. Нека је $(ABDE)$ квадратна површ над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC (сл. 484), тако да су троугаона и квадратна површ с разних страна праве AB. Нека су DF и EH управне из D и E спуштене на праву AC, затим F и H њихова подножја и нека су BG и EK управне из B и E спуштење на DF, а G и H њихова подножја. Тада је



Сл. 483



Сл. 484

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABG = \sphericalangle CBG$$

прав угао, па како је и $\sphericalangle ABD$ прав угао, а

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABG + \sphericalangle GBD,$$

имамо

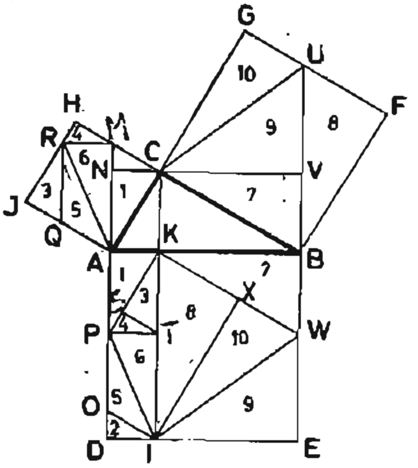
$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABG = \sphericalangle ABG + \sphericalangle GBD,$$

а отуд $\sphericalangle ABC = \sphericalangle GBD$. Дакле, правоугли троугли ABC и DBG су подударни, јер су им хипотенузе и по један угао подударни. Затим је збир $\sphericalangle BDG + \sphericalangle KDE$ једнак правом углу и збир $\sphericalangle KDE + \sphericalangle DEK$ једнак правом углу, дакле је $\sphericalangle BDG = \sphericalangle DEK$, дакле правоугли троугли DBG и EDK су подударни, јер хипотенузе и по један угао при хипотенузи су им једнаки. Најзад, збир $\sphericalangle DEK + \sphericalangle KEA$ је једнак правом углу и збир $\sphericalangle KEA + \sphericalangle AEH$ је једнак правом углу, дакле је $\sphericalangle DEK = \sphericalangle AEH$ и према томе правоугли троугли DEK и AEH су такође подударни. Дакле, четири троугла ABC, DEG, EDK и EAH су међу собом подударни.

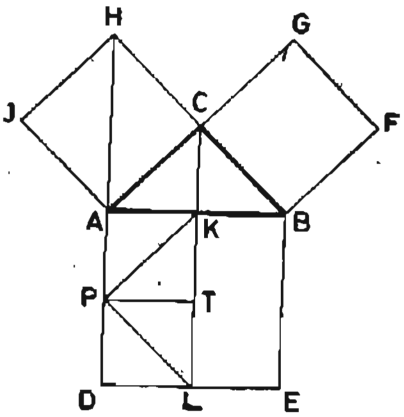
Но квадратна површ $(ABDE)$ је помоћу наведених дужи разложена на петоугаону површ $(ABGKE)$ и на две троугаоне површи (DBG) и (EDK), дакле збир те петоугаоне површи и троугаоних површи (ABC) и (EAH), тј. квадратна површ над хипотенузом $(ABDE)$, разложиво је једнака шестоугаоној површи $(CBGKEH)$, у којој је $BC = BG$, $EK = EH = AB$. Ова шестоугаона површ је пак разложена правом FG на две квадратне површи $(BCFG)$ и $(FHEK)$, којима су странице једнаке катетама троугла ABC. — Тиме је ова теорема доказана.

Теорема 57.23. — Еуклидова теорема о разложивој једнакости. — *Квадратна површ над једном катетом правоуглог троугла је разложиво једнака правоугаоној површи, чије су странице хипотенуза и пројекција те катете на хипотенузу.*

Доказ. Нека су $(ABED)$, $(BCGF)$, $(ACHJ)$ редом квадратне површи над хипотенузом AB и катетама BC и AC правоуглог троугла ABC (сл. 485). Повуцимо дуж CL управно на AB, преко пресека K са AB до пресека са DE. Дуж KL разлаже прву квадратну површ на две правоугаоне површи $(ADLK)$ и $(BELK)$ од којих прва треба да буде једнака квадратној површи $(ACHJ)$, друга квадратној површи $(BCGF)$. Дуж AD, продужена иза A до пресека M са CH или JH, разлаже квадратну површ $(ACHJ)$ на две полигонске површи (ACM) и (AJM) од којих је бар једна троугаона.



Сл. 485



Сл. 486

Ако се тачка M поклапа са H, квадратна површ $(ACHJ)$ је подељена на површи два једнакокрака правоугла троугла, дакле и дати троугао ABC је једнакокрак (сл. 486), K је средиште дужи AB и, ако су P и T средишта дужи AD и KL, дужи AH, PT, KP и PL разлажу квадратну површ $(ACHJ)$ и правоугаону површ $(ADLK)$ на по четири површи једнакокраких правоуглих троуглова који су подударни међу собом. Дакле, та квадратна и та правоугаона површ су разложиво једнаке, као што теорема тврди.

Ако се M не поклапа са H (сл. 485) нека је CN упоредна са AB, LO са CB, KP са CA. Одредимо затим $AQ = CM$, QR упоредно са AM, а $KS = RJ$ и ST упоредно са JQ. Нека је затим U на продужењу дужи EB и нека је CV упоредно са AB, KW са CB и LX са AC.

Тада су

1) троугли CBV и KBW подударни, дакле је $VB = BW$;

2) троугли UBF, ABC и KLX подударни, па је

$$BU = BA = KL = BE$$

и
$$UV = WE, \qquad UF = KX, \qquad UG = XW;$$

3) троугли CUV и LWE подударни;

4) троугли CUG и LWX подударни.

Дакле квадратна површ $(BCGF)$ је разложиво једнака правоугаоној површи $(KBEL)$. Затим су

5) троугли AKP и NCA подударни;

6) троугли ODL и MNC подударни;

7) троугли KST и RJQ подударни;

8) троугли PST и RHM подударни;

9) троугли ULP и QAP подударни, и

10) троугли PTL и RMA подударни.

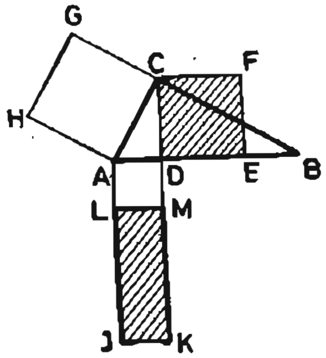
Дакле и квадратна површ $(ACHJ)$ је разложиво једнака правоугаоној површи $(AKLD)$.

Према претпоставци овог дела доказа тачка M је на правој CH, али је одговарајућа тачка U на страници FG која одговара страници HJ. Дакле и случај кад је тачка M на HJ обухваћен је доказом. Тиме је за сваку катету сваког правоуглог троугла теорема доказана.

Посматрајући производ двеју дужи може се доказати да је квадрат висине правоуглог троугла, спуштене на хипотенузу, једнак производу оба отсечка на хипотенузи. Томе одговара сада следећа теорема:

Теорема 57.24. *У правоуглом троуглу је квадратна површ над висином управном на хипотенузи допунски једнака правоугаоној површи чије су странице једнаке управним пројекцијама катета на хипотенузу.*

Доказ. У правоуглом троуглу ABC (сл. 487) нека је $(CDEF)$ квадратна површ над висином CD, затим $(ACGH)$ квадратна површ над катетом AC, $(AJKD)$ правоугаона површ чије су странице AJ и AB једнаке, а страница AD је пројекција катете AC на AB. Нека је, најзад, $(ALMD)$ квадратна површ над дужи AD. Према Еуклидовој теореми (57.20) квадратна површ $(ACGH)$ је допунски једнака правоугаоној површи $(AJKD)$.



Сл. 487

Посматрајмо правоугли троугао ACD. Квадратна површ $(ACGH)$ је по Питагориној теореми (57.21) допунски једнака збиру квадратних површи $(CDEF)$ и $(ALMD)$. Дакле, према теореми 57.5 збир квадратних површи $(CDEF)$ и $(ALMD)$ је допунски једнака правоугаоној површи $(AJKD)$, тј. збиру квадратне површи $(ALMD)$ и правоугаоне површи $(LJKM)$. Према томе по теореми 51.2 квадратна површ $(CDEF)$ је допунски једнака правоугаоној површи $(LJKM)$, тј. правоугаоној површи којој су странице једнаке пројекцијама катета AC и BC на хипотенузу AB.

Овом посматрању додајмо теореме о косоуглим троуглима који одговарају Питагориној теореми и налазе се у Еуклидовим „Елементима" (књига II, ставови 12 и 13; наша теорема 57.26 је нешто општија од Еуклидова става 13):

Теорема 57.25 *У сваком тупоуглом троуглу квадратна површ над страницом наспрам тупог угла већа је од збира квадратних површи над страницама које образују тупи угао, и то за двоструку правоугаону површ којој су странице: једна од мањих двеју страница датог троугла и управна пројекција друге од тих двеју страница на продужење прве.*

Теорема 57.26. *У сваком троуглу квадратна површ над страницом наспрам једног оштрог угла мања је од збира квадратних површи над страницама које образују тај оштри угао, и то за двоструку правоугаону површ којој су странице: једна од осталих двеју страница датог троугла и управна пројекција друге од тих двеју страница на праву која садржи прву.*

8. Као што смо дефинисали n-тоструку дуж, тако дефинишемо и n-тоструку многоугаону површ и n-ти део једне такве површи.

Дефиниција 57.6. Ако је многоугаона површ π (разложиво или допунски) једнака многоугаоној површи φ, која је сложена из n многоугаоних површи, подударних извесној многоугаоној површи δ $(n=1,2,\ldots)$, рећи ћемо да је многоугаона површ π једнака n-тострукој многоугаоној површи δ, или да је n пута већа од многоугаоне површи δ, и пишемо

$$\pi = n \cdot \delta.$$

За многоугаону површ δ рећи ћемо да је n-ти део многоугаоне површи π или да је n пута мања од површи π, и писаћемо

$$\delta = \frac{\pi}{n}.$$

58. РАЗЛОЖИВА И ДОПУНСКА ЈЕДНАКОСТ ПОЛИЈЕДАРА И ЊИХОВО УПОРЕЂИВАЊЕ

1. Разлагање рогљастих тела на два или више рогљастих тела и особито на тетраедре као и њихово слагање у већа рогљаста тела посматрано је укратко у §17 (дефиниција 17.12). Потсетимо и да у случају кад је рогљасто тело Π сложено из рогљастих тела Φ и Ψ_i ($i = 1, 2, \dots l$), кажемо такође да су телу Φ додата тела Ψ_i.

Сад имамо још следеће две дефиниције:

Дефиниција 58.1. Два полиједра називаћемо *разложиво једнаким* ако се сваки може разложити на коначан и једнак број тетраедара који су, два по два, подударни.

Дефиниција 58.2. Два полиједра Φ и Ψ називаћемо *допунски једнаким* ако им се може додати коначан и једнак број полиједара који су, два по два, разложиво једнаки:

$$\Phi_1 \text{ и } \Psi_1,\ \Phi_2 \text{ и } \Psi_2,\ \dots,\ \Phi_n \text{ и } \Psi_n,$$

тако да је полиједар сложен из $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ разложиво једнак полиједру састављену из $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$.

Отуд следују одмах следеће две теореме:

Теорема 58.1. *Два полиједра, која су сложена из разложиво једнаких полиједара јесу и сами разложиво једнаки.*

Теорема 58.2. *Одузмемо ли од разложиво једнаких полиједара разложиво једнаке полиједре, преостали полиједри су допунски једнаки.*

Следеће три теореме доказују се аналого теоремама 57.3, 57.4 и 57.5:

Теорема 58.3. *Два подударна полиједра су такође разложиво једнака.*

Два разложиво једнака полиједра су такође допунски једнака.

Теорема 58.4. *Ако су два полиједра разложиво једнака неком трећем полиједру, та два полиједра су и међу собом разложиво једнака.*

Теорема 58.5. *Ако су два полиједра допунски једнака неком трећем полиједру, та два полиједра су и међу собом допунски једнака.*

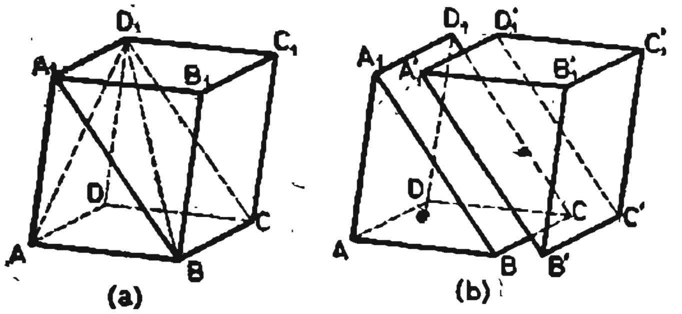
После ћемо разложивој и допунској једнакости додати трећу врсту једнакости: граничну једнакост. За разлику од граничне једнакости, разложиву или допунску једнакост рогљастих тела називаћемо коначном једнакошћу.

Дефиниција 58.3. Разложиво или допунски једнаке полиједре називамо коначно једнаким.

2. Прелазимо на теорему о коначној једнакости полиједара. Приметимо да је наше проучавање при томе ограничено на призме. Већ за проучавање једнакости пирамида потребно је увести граничну једнакост.

Докажимо прво четири теореме о паралелепипедима.

Теорема 58.6. *Свака од две тростране призме на које је разложен паралелепипед једном својом дијагоналном равни је разложиво једнака свакој од две тростране призме на које је разложен исти паралелепипед другом својом дијагоналном равни.*



Сл. 488

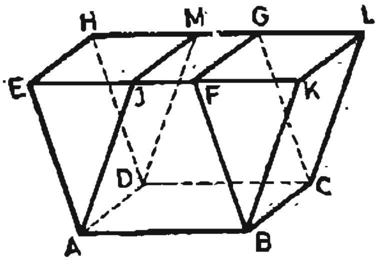
Доказ. Пралелепипед $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ (сл. 488) је разложен, како дијагоналном равни ABC_1 тако дијагоналном равни BCD_1 на парове подударних тространих призама, а обема тим равнима на четири полиједра: на тетраедре ABA_1D_1 и BCC_1D_1 и на четворостране пирамиде $ABCDD_1$ и A_1 $B_1C_1D_1B$. Оба тетраедра су међу собом подударна, обе пирамиде исто тако. Дакле према теореми 58.1 је

$$ABA_1D_1 + ABCDD_1 = ABA_1D_1 + A_1B_1C_1D_1B,$$

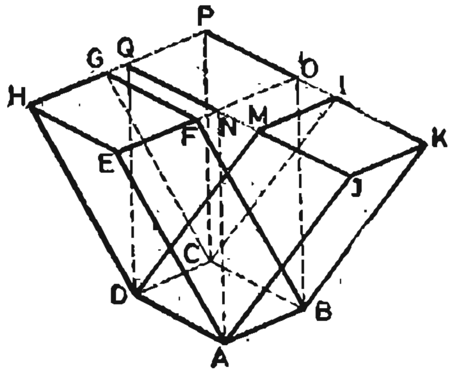
тј. тространа призма $AA_1D_1BB_1C_1$ је разложиво једнака тространој призми ABA_1DCD_1.

Теорема 58.7. *Паралелепипеди с једном заједничком страном и једнаким на њој управним висинама, а којима се темена ван те заједничке стране налазе на двема упоредним правим јесу допунски једнаки.*

Доказ. Нека су $ABCDEFGH$ и $ABCDJKLM$ два паралелепипеда са заједничком страном ($ABCD$) и нека темена E, F, J, K припадају једној правој, а темена G, H, L, M упоредној правој (сл. 489). Разложимо први на призме $AEJDHM$ и $ABFJDCGM$ а други на призме $BFKCGL$ и $ABFJDCGM$. Троугли AEJ и BFK су подударни, дакле и призме $AEJDHM$ и $BFKCGL$ су подударне. Према томе дата два паралелепипеда су према дефиницији 58.2 допунски једнака.



Сл. 489

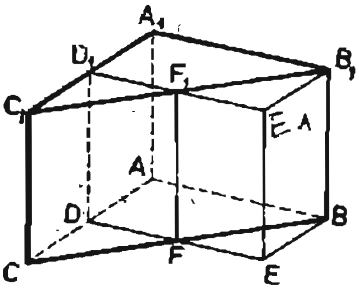


Сл. 490

Теорема 58.8. *Паралелепипеди с једном заједничком страном и једнаким на њој управним висинама су допунски једнаки.*

Доказ. Нека су опет $AB\ldots H$ и $AB\ldots M$ два паралелепипеда с истом основом $ABCD$ и једнаким висинама, но којима остала темена нису на двема паралелним правим. Тада су ивице EF, GH, JK и LM паралелне, и такође ивице FG, EH, KL и JM паралелне (сл. 490). Праве EF и GH секу се с правим KL и JM у четири тачке које одређују паралелограм $NOPQ$, подударан с паралелограмима $EFGH$ и $JKLM$. Тада су паралелепипеди с основом $(ABCD)$ и наспрамним основама $(EFGH)$ и $(NOPQ)$ према теореми 58.7. допунски једнаки, и паралелепипеди с основом $ABCD$ и наспрамним основама $(NOPQ)$ и $(JKLM)$ исто тако. Дакле, према теореми 58.4 дата два паралелепипеда су допунски једнака.

Теорема 58.9. *Тространа призма је разложиво једнака паралелепипеду с једнаком висином а чија основа има с основом призме једну заједничку ивицу и једну која се састоји из половине друге једне ивице при основи тростране призме.*



Сл. 491

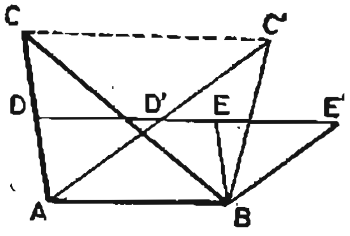
Доказ. Нека је (ABC) основа дате призме $ABCA_1B_1C_1$ (сл. 491), затим нека је D средиште странице AC троугла ABC и нека је $ABED$ паралелограм са страницама AB и AD, F пресек страница BC и DE. Троугли CDF и BEF су подударни, дакле су и призме $CDFC_1D_1F_1$ и $BEFB_1E_1F_1$ подударне. Према томе дата призма је разложиво једнака са паралелепипедом $ABEDA_1B_1E_1D_1$.

3. Основни значај има затим општа теорема да су две призме са једнаким основама и једнаким висинама допунски једнаке. Прво докажимо ту теорему за тростране призме.

Теорема 58.10. *Тростране призме с једнаким основама и једнаким висинама су допунски једнаке.*

Доказ. Докажимо прво да су обе призме $ABCA_1B_1C_1$ и $ABC'A_1B_1C_1'$ једнаке ако су им основе (ABC) и (ABC') у једној равни и ако имају заједничку страницу AB и једнаке висине, управне на тој страници (сл. 492). Нека су D и D' средишта страница AC и AC'. Права DD' је упоредна с AB и на њој су како темена D и E паралелограма $ABDE$, који је једнак троуглу ABC, тако и темена D' и E' паралелограма $ABD'E'$, који је једнак троуглу ABC'. Према теореми 58.9 призме с основама (ABC) и $(ABED)$ и једнаким висинама су допунски једнаке, исто тако и призме с основама (ABC') и $(ABE'D')$ и једнаким висинама.

Но паралелепипеди којима су стране $(ABED)$ и $(ABE'D')$ имају заједничку страну (ABB_1A_1), а темена ван те стране су на упоредним правим DE и D_1E_1. Дакле, према теореми 58.7 та два паралелепипеда су допунски једнака, и према томе обе дате тростране призме су такође допунски једнаке.



Сл. 492

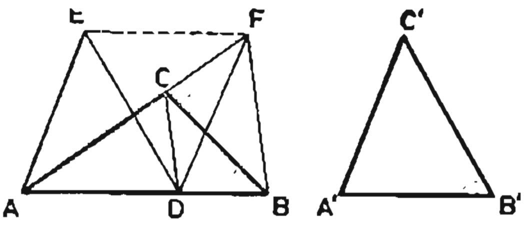
Докажимо сад једнакост тространих призама с ма каквим једнаким основама ABC и $A'B'C'$ и једнаким висинама (сл. 493). Нека је $AB>A'B'$. Тада постоји на дужи AB тачка D тако да је $A'B'=AD$. Нека је E тачка у равни ABC, с оне стране праве AB с које је тачка C, тако да су троугли ADE и $A'B'C'$ подударни. Нека је F пресек праве AC с упоредном правој

AB која пролази кроз тачку E. Троугаоне површи (ADE) и (ADF) су једнаке, јер им је страница AD заједничка, а одговарајуће висине су једнаке, дакле према претходно доказаноме призме с тим основама и једнаким висинама су допунски једнаке.

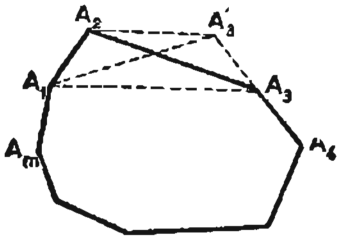
Но троугаоне површи (ABC) и (ADF) су једнаке, дакле и троугаоне површи (CDB) и (CDF) су једнаке (а отуд су праве CD и BF упоредне) па су, према претходно доказаноме, призме с једнаким висинама и с овим основама допунски једнаке. Отуд следује да су и призме с основама (ABC) и (ADF) и једнаким висинама допунски једнаке, дакле исто тако и призме с основама (ABC) и (ADE). Према томе и призме с основама (ABC) и $(A'B'C')$ и једнаким висинама су допунски једнаке.

Докажимо сад општу теорему.

Теорема 58.11. *Призме с једнаким висинама и једнаким основама чији рубови су испупчени многоугли јесу допунски једнаке.*



Сл. 493



Сл. 494

Доказ. Нека су Φ и Ψ дате две призме, $(A_1A_2\dots A_m)$ и $(B_1B_2\dots B_n)$ њихове основе, затим α раван која садржи бочне ивице прве призме, које пролазе кроз A_1 и A_3 и α' одговарајућа раван за Ψ. Ако је A_3' пресек праве A_3A_4 и упоредне правој A_1A_3 која пролази кроз A_2, троугаона површ $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_3'A_3)$ су допунски једнаке, дакле према теореми 58.10 призме с тим троугаоним основама и с једнаким висинама су допунски једнаке.

Но допунска једнакост тих призама је утврђена разлагањем и додавањем извесних призама које су све с оне стране равни α с које нису темена $A_4, \dots A_m$, дакле ништа се у тим поступцима не мења ако се тим тространим и њима једнаким призмама додаје увек призма с основом $(A_1A_3A_4\dots A_m)$. Дакле и призма с основама $A_1A_2A_3\dots A_m)$ и $(A_1A_3'A_4\dots A_m)$ и једнаким висинама су допунски једнаке. Приметимо да су и ове основе допунски једнаке.

Исто тако су аналоге призме с основама $(A_1A_3'A_4\dots A_m)$ и $(A_1A_4'A_5\dots A_m)$ и једнаким висинама допунски једнаке и њихове основе су допунски једнаке. Итд.

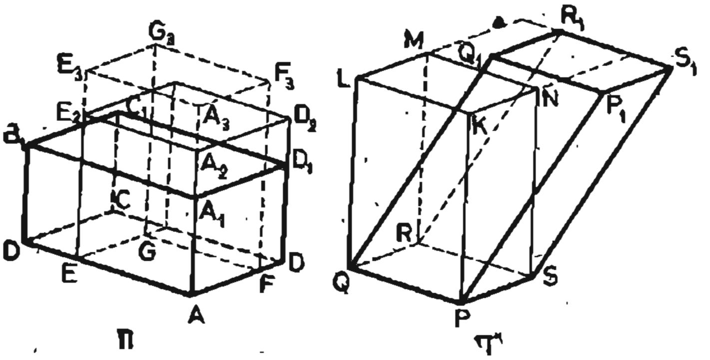
Тако долазимо најзад до тростране призме. Како су у овом низу призама две узастопне призме допунски једнаке, то према теореми 58.5 дата призма Φ је допунски једнака с извесном тространом призмом Φ'. Исто тако је дата призма Ψ допунски једнака с извесном тространом призмом Ψ''. Како су основе призама Φ и Ψ допунски једнаке, а и две по две узастопне основе у оба низа допунски једнаких призама су према теореми 57.5 допунски једнаке, основе тространих призама Φ' и Ψ'' су такође допунски једнаке. Висине свих тих призама су пак једнаке. Дакле, према теореми 58.10 призме Φ' и Ψ'' су допунски једнаке, а отуд следује по теореми 58.5 да су и дате призме Φ и Ψ допунски једнаке.

4. Следећа теорема је о постојању паралелепипеда коначно једнаког датом паралелепипеду, а са датом једном пљосни.

Теорема 58.12. *Какви год били паралелепипед* П *и паралелограм* p, *постоји паралелепипед* П' *допунски једнак паралелепипеду* П *и коме једна страна има за руб паралелограм* p.

Доказ. Нека је ($ABCD$) једна страна паралелепипеда П (сл. 495а) и AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 четири упоредне ивице. Нека су затим E и F тачке на полуправим AB и AD тако да су AE и AF странице паралелограмске површи ($AEGF$), допунски једнаке датој паралелограмској површи (p). Нека је $p=(PQRS)$ и нека је $AE=PQ$. Тада су према теореми 57.6 једнаке и висине паралелограма p и $AEGF$, које су управне на PQ односно на AE (сл. 495).

Докажимо прво да постоји паралелепипед с основом ($AEGF$), допунски једнак паралелепипеду П.



Сл. 495

Како је у случају подударности паралелограма $ABCD$ и p теорема очигледна, можемо претпоставити да дуж PQ није једнака дужи AB. Нека је напр. $PQ < AB$, дакле нека је E између A и B. Ако је E_1 тачка између A_1 и B_1 тако да је $A_1E_1=AE$, J пресек правих BB_1 и AE_1, затим A_2 и E_2 пресеци правих AA_1 и EE_1 са правом која пролази кроз J и упоредна је са AB, тада су према теореми 57.9 паралелограмске површи (ABB_1A_1) и (AEE_2A_2) допунски једнаке. Дакле, према теореми 58.11 паралелепипеди $ABB_1A_1DCC_1D_1$ и $AEE_2A_2DHH_2D_2$ су допунски једнаки. Први је дати паралелепипед П.

Ако је, исто тако, F_2 тачка на полуправој A_2D_2, тако да је $A_2F_2=AF$, и помоћу праве AF_2 одређена паралелограмска површ (AFF_3A_3), допунски једнака паралелограмској површи (ADD_2A_2), према теореми 58.11 су и паралелепипеди $ADD_2A_2EHH_2F_2$ и $AFF_3A_3EGG_3E_3$ допунски једнаки. Дакле, према теореми 58.5 паралелепипед П је допунски једнак овом последњем паралелепипеду, који обележимо словом Ф.

Нека је $PQRSKLMN$ паралелепипед подударан са паралелепипедом Ф. Најзад, обележимо знаком П' ма који паралелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ који има дату страну ($PQRS$) и коме је страна ($P_1Q_1R_1S_1$) у равни KLM. Како је у ова два паралелепипеда једна страна заједничка, а висине управне на тој страни су им једнаке, та два паралелепипеда су допунски једнака. Дакле, према теореми 58.5 паралелепипед П' је допунски једнак са датим паралелепипедом П.

5. Као што разликујемо веће и мање многоугаоне површи, тако разликујемо и већа и мања рогљаста тела.

Исказујемо следећу дефиницију тлично као дефиоицију 57.3.

Дефиниција 58.4. Ако је полиједар Φ прави део полиједра Ψ и ако су Λ и M два полиједра тако да су полиједри Λ и Φ коначно једнаки и да су полиједри M и Ψ коначно једнаки, тада ћемо рећи да је полиједар Λ *мањи* од полиједра M, или да је полиједар M *већи* од полиједра Λ, знацима:

$$\Lambda < M \quad \text{или} \quad M > \Lambda.$$

Како је на основи дефиниције 38.1 38.2 и 38.3 сваки полиједар коначно једнак себи самом, из дефиниције 58.4 следује непосредно:

Теорема 58.13. *Ако је полиједар Φ прави део полиједра Ψ, полиједар Φ је мањи од полиједра Ψ.*

Теорема да су ма која два полиједра или једнака или један је већи од другога, не може се доказати док се не уведе гранична једнакост.

6. И збир полиједара дефинишемо аналого:

Дефиниција 58.5 Ако је полиједар Φ разложен на полиједре Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n $(n=2,3,\ldots)$ називаћемо полиједар Φ такође *збиром полиједара* Φ_1, Φ_2, ... Φ_n.

Нека су Λ_1, Λ_2, ... Λ_n $(n=2,3,\ldots)$ ма какви полиједри, а Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n полиједри на које је разложен известан полиједар Φ, такви да су полиједри првог низа разложиво (или допунски) једнаки редом полиједрима другог низа. — Ако је известан полиједар Λ коначно једнак полиједру Φ, рећи ћемо да је полиједар Λ разложиво (или допунски) *једнак збиру полиједара* Λ_1, Λ_2, ..., Λ_n и писаћемо

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda + \ldots + \Lambda_n.$$

Ако су два збира полиједара једнака једном истом полиједру, рећи ћемо да су та два збира међу собом *једнака*. Ако је један збир једнак једном полиједру, други збир другом полиједру и ако је први од та два полиједра мањи од другога, рећи ћемо да је први збир *мањи* од другога збира, или да је други збир *већи* од првог збира.

О свим овим односима постоје теореме сличне теоремама о дужима. Исказивање и разматрање тих теорема препуштамо читаоцу.

59. ГРАНИЧНА ЈЕДНАКОСТ ПОЛИЈЕДАРА.

1. Ради лакшег изражавања дефинишемо „произвољно мален полиједар“.

Дефиниција 59.1. Ако, ма како велики био природни број *n*, полиједар П можемо изабрати тако да збир од *n* њему подударних полиједара буде мањи од једног одређеног полиједра, кажемо да га можемо изабрати *произвољно маленим* или да је *произвољно мален.*

Напомене. Полиједар П није, разуме се, само један одређен полиједар, него који се у току посматрања узима све мањим, неограничено. — Нисмо дефинисали произвољно малене дужи и произвољно малене многоугаоне површи, ограничавајући изложено градиво. Дуж је „произвољно малена“ ако је збир од *n* њој подударних дужи, ма како велики био број *n*, мањи од једне одређене дужи. Ако је дуж произвољно малена, можемо је изабрати мањом ма од које дужи у једном основном низу дужи.

Граничну једнакост полиједара дефинишемо овако:

Дефиниција 59.2. Ако се два полиједра Π и Π' могу разложити на коначно много полиједара, први на полиједре $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_m$ и још на неке полиједре, други на полиједре $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_m'$ и још на неке полиједре и то тако да полиједри $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ буду редом коначно једнаки полиједрима $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_m'$, а да мноштво осталих полиједара садржаних у Π и, тако исто, мноштво осталих полиједара садржаних у Π' буде садржано у произвољно маленом полиједру, рећи ћемо да су полиједри Π и Π' *гранично једнаки.*

2. И о граничној једнакости постоје извесне опште теореме, као о коначној једнакости. Тако имамо следећу теорему, која одговара теореми 58.4 (или 58.5).

Теорема 59.1. *Два полиједра, која су гранично једнака трећем полиједру, јесу и међу собом гранично једнака.*

Доказ. Ако су полиједри Π и Π' гранично једнаки полиједру Π'', може се према дефиницији 59.1

1) полиједар Π разложити на полиједре

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m \quad \text{и} \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

тако да је мноштво $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ садржано у произвољно малом полиједру Δ и

2) полиједар Π' разложити на полиједре

$$\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_m' \quad \text{и} \quad \Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_n'$$

тако да је мноштво $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_n'$ садржано у произвољно малом полиједру Δ' и

3) полиједар Π'' разложити на полиједре

$$\Gamma_1'', \Gamma_2'', \dots, \Gamma_m'' \quad \text{и} \quad \Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_n''$$

тако да је мноштво $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_n''$ садржано у произвољно малом полиједру Δ'' и да су, сем тога, како полиједри $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, тако и полиједри $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_m'$ редом коначно једнаки полиједрима $\Gamma_1'', \Gamma_2'', \dots, \Gamma_m''$.

Но тада су према теоремама 58.4 и 58.5 полиједри $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ редом коначно једнаки полиједрима $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_m'$. Дакле, према дефиницији 59.2 полиједри Π и Π' су гранично једнаки.

Слично се доказује и следећа теорема (која одговара теореми 58.1):

Теорема 59.2. *Ако су полиједри из којих је сложен полиједар* Π *и полиједри из којих је сложен полиједар* Π', *два по два, гранично једнаки, и полиједри* Π *и* Π' *су гранично једнаки.*

Доказ препуштамо читаоцу.

Постављамо следећу дефиницију:

Дефиниција 59.3. Коначно или гранично једнаке полиједре Π и Π' називаћемо кратко *једнаким* и писаћемо

$$\Pi \doteq \Pi'.$$

Из теорема 58.4, 58.5 и 59.1 следује непосредно ова теорема:

Теорема 59.3. *Два полиједра једнака трећем полиједру такође су међу собом једнака.*

Као што смо у § 57 дефинисали n-тоструку многоугаону површ и n-ти део многоугаоне површи, тако дефинишемо исте изразе за полиједре.

Дефиниција 59.3. Ако је полиједар П једнак полиједру Ф, који је сложен из n полиједара, једнаких извесном полиједру Δ ($n=1,2,\ldots$), рећи ћемо да је *полиједар* П *једнак* n*-тоструком полиједру* Δ, или да је n *пута већи* од полиједра Δ, и писаћемо

$$\Pi = n\,\Delta.$$

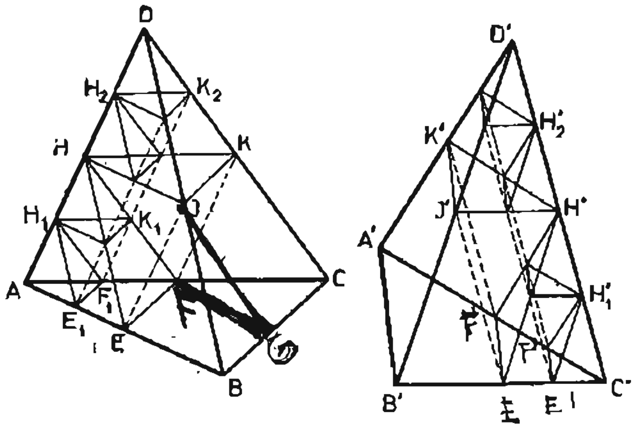
За полиједар Δ рећи ћемо да је n*-ти део* полиједра П или да је n *пута мањи* од полиједра П, и писаћемо

$$\Delta = \frac{1}{n}\,\Pi.$$

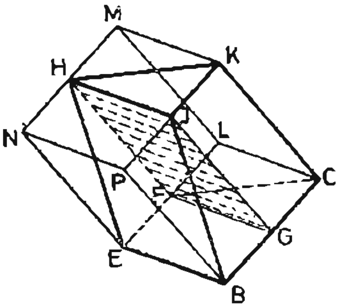
3. Основни значај има следећа теорема. На њој се оснива теорема једнакости пирамида, а затим полиједара уопште.

Теорема 59.4. *Тетраедри с једнаким основама и једнаким висинама су гранично једнаки.*

Доказ. Нека су основе (ABC) и ($A'B'C'$) тетраедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (сл. 496) једнаке и одговарајуће висине једнаке. Нека су E, F, G, H, J, К редом средишта ивица AB, AC, BC, AD, BD, CD. Равни EFH и HJK разлажу тетраедар $ABCD$ на полиједар $BCFEHJK$ и на два тетраедра $AEFH$ и $HJKD$, који су међу собом подударни.



Сл. 496



Сл. 497

Разложимо на аналоги начин тетраедар $A'B'C'D'$. Доказаћемо да су полиједри $BCFEHJK$ и $B'C'F'E'H'J'K'$ коначно једнаки.

Како су троугаоне површи (ABC) и ($A'B'C'$) једнаке, једнаке су према теореми 57.12 и троугаоне површи (AEF) и ($A'E'F'$), дакле и четвороугаоне површи ($BCFE$) и ($B'C'F'E'$) су (допунски) једнаке. Нека је L пресечна тачка упоредне правој AB, која пролази кроз C, са правом EF (сл. 497). Паралелограмска површ ($BCLE$) је основа четворостране призме којој је CK једна бочна ивица. Обележимо је са П. И паралелограмска површ $B'C'L'E'$ је основа четворостране призме којој је $C'K'$ једна бочна ивица. Обележимо је са П'. Те две четворостране призме имају једнаке основе и једнаке висине, дакле према теореми 58.11 су коначно једнаке.

Раван паралелограма $FHJG$ разлаже паралелепипед П на два подударна паралелепипеда с основама ($BGFE$) и ($GCLF$). Дијагоналном равни

BEH првог паралелепипеда разложен је овај на две подударне тростране призме, а другом дијагоналном равни *CFH*, другог паралелепипеда разложен је и овај на две подударне тростране призме. Према теореми 58.6 свака од првих двеју тространих призама је разложиво једнака свакој од других двеју, дакле је и паралелепипед с основом (*BEFG*) и бочном ивицом *GJ* према теореми 58.1 разложиво једнак полиједру *BCFEHJK*, који је сложен из тространих призама *BGJEFH* и *CFGKHJ*.

Но паралелепипед с основом (*BEFG*) је коначно једнак паралелепипеду с одговарајућом основом (*B'E'F'G'*), дакле према теореми 58.4 и 58.5 полиједри *BCFEHJK* и (*B'C'F'E'H'J'K*) су такође коначно једнаки. Обележимо их знацима Г и Г'.

Посматрајмо сад оба тетраедра *AEFH* и *HJKD* као што смо посматрали тетраедар *ABCD*. Разложимо први на полиједар $EFF_1E_1H_1J_1K_1$ и два тетраедра $AE_1F_1H_1$ и $H_1J_1K_1H$, а други на полиједар $JKF_2E_2H_2J_2K_2$ и два тетраедра $HE_2F_2H_2$ и $H_2J_2K_2D$. Тачке H_1 и H_2 су средишта дужи *AH* и *HD*, тачке E_1, J_1, E_2, J_2 су на правој која пролази кроз средиште E_1 дужи *AE* и упоредна је ивици *AD*, а тачке F_1, K_1, F_2, K_2 су на правој која пролази кроз средиште F_1 дужи *AF* и упоредна је такође ивици *AD*. Као што су полиједри Г и Г' коначно једнаки, тако су и полиједри $EFF_1E_1H_1J_1K_1$ и $JHF_2E_2H_2J_2K_2$ редом коначно једнаки полиједрима $E'F'F_1'E_1'H_1'J_1'K_1'$ и $J'K'F_2'E_2'H_2'J_2'K_2'$. Обележимо ова четири полиједра редом знацима Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{11}', Γ_{12}'.

Наставимо на описани начин. Разложимо прво преостала четири тетраедра $AE_1F_1H_1$, $H_1J_1K_1H$, $HE_2F_2H_2$, $H_2J_2K_2D$ на по један полиједар Γ_{21}, Γ_{22}, Γ_{23}, Γ_{24} и по два тетраедра, и учинимо исто у тетраедру *A'B'C'D'*. Затим разложимо осам нових тетраедара садржаних у тетраедру *ABCD*, итд. бесконачно. Као што је E_1 средиште дужи *AE*, нека је E_{11} средиште дужи AE_1, затим E_{111} средиште дужи AE_{11} итд. Нека је исто тако F_{11} средиште дужи AF_1, F_{111} средиште дужи AF_{11} итд.

Прва два тетраедра су садржана у тространој призми *AEFD* с основом (*AEF*) и бочном ивицом *AD*, друга четири тетраедра у тространој призми AE_1F_1D с основом (AE_1F_1) и бочном ивицом *AD*, следећих осам тетраедара садржано је у тространој призми AE_2F_2D с основом (AE_2F_2) и бочном ивицом *AD*, итд. Но, како се троугаона површ (*ABC*) може разложити на четири троугаоне површи подударне са (*AEF*), прва од тих трију тространих призама је четврти део тростране призме *ABCD* с основом (*ABC*) и ивицом *AD*. Исто тако је друга у низу тих тространих призама четврти део прве, трећа је четврти део друге итд. Дакле друга је шеснаести део. трећа 64-ти део итд. тростране призме *ABCD* с основом (*ABC*).

Према томе, n-тим разлагањем добијамо 2^n тетраедара, који су сви садржани у тространој призми с бочном ивицом *AD* и која је 4 n-ти део тростране призме *ABCD*, дакле према дефиницији 59.1 садржани су у произвољно малој призми. Исто тако, одговарајућих 2^n тетраедара садржаних у тетраедру *A'B'C'D'*, садржани су у другој, произвољно малој призми.

С друге стране, део тетраедра *ABCD*, који заједно с тих 2^n тетраедара, сачињава тетраедар *ABCD*, сложен је из полиједара

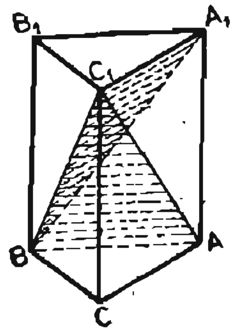
$$\Gamma,\ \Gamma_{11},\ \Gamma_{12},\ \Gamma_{21},\ \Gamma_{22},\ \Gamma_{23},\ \Gamma_{24},\ \ldots,\ \Gamma_{n1},\ \Gamma_{n2}.\ \ldots,\ \Gamma_{n2n}.$$

Сваки од ових $2^{n+1}-1$ полиједара је допунски једнак одговарајућем полиједру Г', Γ_{11}', Γ_{12}' итд., који је садржан у тетраедру *A'B'C'D'*. Дакле, према дефиницији 59.2 тетраедри *ABCD* и *A'B'C'D'* су гранично једнаки.

4. На темељу претходне теореме могу се пре свега доказати следеће теореме о граничној једнакости.

Теорема 59.5. *Свака тространа призма разложена је двема равнима које садрже дијагоналу једне бочне пљосни и по једну ивицу те призме, на три гранично једнака тетраедра.*

Доказ. Нека су AA_1, BB_1, CC_1 бочне ивице тростране призме (сл. 498). Посматрајмо напр. равни које садрже дијагоналу BC_1 пљосни BCC_1B_1 и по једну од ивица AB и A_1C_1. Оне секу тространу призму по троугаоним површима (ABC_1) и (A_1BC_1). Првом равни призма је разложена на тетраедар $ABCC_1$ и пентаедар $A_1B_1C_1AB$. Разложимо овај другом равни, која садржи троугао A_1BC_1. Добијамо још два тетраедра $A_1B_1C_1A$ и ABB_1C_1. Тетраедри $ABCC_1$ и $A_1B_1C_1A$ су гранично једнаки, јер су им основе (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ једнаке и одговарајуће висине једнаке. И тетраедри $A_1B_1C_1A$ и ABB_1C_1 су гранично једнаки, јер су им основе (AA_1B_1) и (ABB_1) једнаке и одговарајуће висине једнаке. Дакле, сва три тетраедра су гранично једнака.



Сл. 498

Теорема 59.6. *Тетраедар је гранично једнак трећем делу тростране призме с истом основом и једнаком висином.*

Доказ. Нека је дат тетраедар $ABCD$ и тространа призма $ABCA_1B_1C_1$ с једнаким висинама. Тетраедар $ABCC_1$ има исту основу и висину као тетраедар $ABCD$, дакле према теореми 59.14 они су гранично једнаки. Но тетраедар $ABCC_1$ је према теореми 59.5 и према дефиницији 58.6 трећи део тростране призме $ABCA_1B_1C_1$, дакле и тетраедар $ABCD$ је трећи део те призме.

Теорема 59.7. *Свака призма је гранично једнака трећем делу призме с истом основом и једнаком висином.*

Доказ произлази из разлагања основе помоћу дијагонала на троугаоне површи.

Узимајући у обзир коначну и граничну једнакост, може се доказати:

Теорема 59.8. *Два ма која полиједра су или једнака, или је један већи од другога.*

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ.

1. Дату троугаону површ претворити у једнакокраку троугаону површ којој је основица једна страница дате троугаоне површи.

2. Дату троугаону површ претворити у једнакокраку правоуглу троугаону површ.

3. Троугаону површ (ABC) претворити у другу која има дату основицу и с (ABC) заједнички угао $\sphericalangle A$.

4. Троугаону површ (ABC) претворити у другу, која има дату висину и заједнички угао $\sphericalangle A$ с датом површи.

5. Троугаону површ (ABC) претворити у другу која има с њом заједнички угао $\sphericalangle A$, а страница наспрам темена A је упоредна датој правој MN.

6. Правоугаону површ $(ABCD)$ претворити у квадратну површ.

7. Конструисати квадратну површ која је једнака збиру или разлици двеју датих квадратних површи.

8. Конструисати квадратну површ која је једнака збиру трију или више квадратних површи.

9. Конструисати троугаону површ која је једнака збиру трију или више троугаоних површи.

10. Претворити неправилну четвороугаону површ у правоугаону.

11. Претворити удубљену шестоугаону површ у испупчену многоугаону површ повлачењем најмањег могућег броја правих.

12. Претворити удубљену четвороугаону површ у троугаону.

13. Претворити удубљене петоугаоне површи разних врста у испупчене четвороугаоне површи.

14. Претворити квадратну површ у правоугаону површ чије странице се односе као 1 према 2.

15. Троугаону површ поделити помоћу праве која пролази кроз једно њено теме а) на две једнаке троугаоне површи, б) на две троугаоне површи које се односе као бројеви m и n.

16. Троугаону површ поделити помоћу правих које пролазе кроз једно њено теме а) на три једнаке троугаоне површи, б) на три троугаоне површи које се односе као бројеви m, n и p.

17. Троугаону површ поделити помоћу праве која пролази кроз дату тачку која је између два њена темена а) на две једнаке површи, б) на површи које се односе као бројеви. m и n.

18. Троугаону површ поделити помоћу правих које пролазе кроз дату тачку која је између два њена темена а) на три једнаке површи, б) на три површи које се односе као бројеви m, n и p.

19. Троугаону површ поделити помоћу праве упоредне једној њеној страници а) на две једнаке површи, б) на две површи које се односе као бројеви m и n.

20. Троугаону површ поделити помоћу двеју правих упоредних једној њеној страници а) на три једнаке површи, б) на три површи које се односе као бројеви m, n и p.

21. Четвороугаону површ поделити правом која пролази кроз једно њено теме на а) две једнаке површи, б) на две површи које се односе као бројеви m и n.

ГЛАВА СЕДМА

МЕРЕЊЕ

60. О ПОЈМУ МЕРЕЊА.

1. Мерење је поређивање величина исте врсте, али не остајући при констатацији да је нека величина већа, мања или једнака другој, него утврђујући тачни однос преношењем једне величине и њених делова на другу величину. Затим у мерењу не упоређујемо само величине међу собом, него и све величине исте врсте упоређујемо с једном одређеном, коју називамо јединицом.

Пре свега, ако је дуж AB садржана цео број n пута у некој дужи PQ, број n називамо мерним бројем дужи PQ, узимајући AB за јединицу, и пишемо $PQ = n\ AB$ (види дефиницију 26.6). Али ово кажемо и кад n није природан број. Будући да располажемо рационалним и ирационалним бројевима, можемо напр. за сваке две дужи одредити мерни број једне, узимајући другу за јединицу. Према томе $PQ = x \cdot AB$ можемо писати ма за које две дужи AB и PQ, независно од тога да ли је позитивни број x рационалан или ирационалан.

2. У старој грчкој геометрији особит значај имала је *самерљивост* и *несамерљивост* величина. Књига десета Еуклидових „Елемената“ садржи античку теорију несамерљивих величина. Дефиниција 1 у тој књизи гласи: „Каже се да су величине самерљиве, ако имају заједничку меру и да су несамерљиве, ако се не може одредити никаква њихова заједничка мера“.

То значи: Ако су A и B две величине (рецимо дужине) које су самерљиве, постоји трећа величина C тако да је $A = mC$ и $B = nC$, при чему су m и n цели позитивни бројеви. Тада је, дакле,

$$A : B = mC : nC = m : n$$

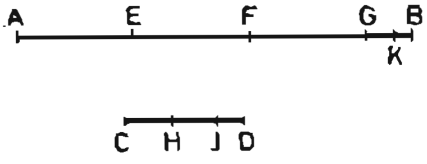
и према томе можемо писати

$$A = \frac{m}{n} B.$$

Ако уместо $\frac{m}{n}$ пишемо p, можемо рећи: Самерљиве су оне две величине A и B за које постоји позитиван рационалан број p тако да је $A = p \cdot B$.

Ако пак не постоји величина C, ако према томе не постоји рационалан број p, величине A и B се зову несамерљивим. Тада постоји ирационалан број p тако да је $A = p \cdot B$.

Одређивање заједничке „мере“ двеју самерљивих дужи изводи се у Еуклидовим „Елементима“ на познати начин (тзв. Еуклидов поступак), овако: Нека су AB и CD две неједнаке дужи. Пренесимо мању дуж CD на већу дуж ABтолико пута док не преостане извесна дуж KD, мања од дужи CD, затим пренесимо дуж KD на CD док не преостане извесна још мања дуж, LB, итд. (сл. 499). Ако тако дођемо напослетку до дужи која је цео број *n* пута мања од претходне, та мања дуж се назива највећом заједничком мером двеју дужи AB и CD. Њоме се те две дужи могу мерити у најужем смислу ове речи, изражавајући њихову величину помоћу природних бројева.



Сл. 499

У књизи десетој „Елемената“ значајан је особито став 2, који гласи: „Две дате неједнаке величине су несамерљиве, ако при непрекидном одузимању мање величине од веће ниједан остатак не мери претходни остатак.“

То значи да у претходном примеру неједнаких дужи AB и CD, преношењем мање дужи на већу, све док се не добије остатак мањи од мање дужи, па затим преношењем остатка на мању дуж све док се не добије још мањи остатак, итд. не долазимо никада до краја, него до бескрајног низа све мањих остатака.

3. Од мерења дужи може се прећи на општију теорију мерења каквих било линија за које се може дефинисати мера — дужина. Ове линије се зову ректификабилним, а одређивање мере зове се ректификација. У математичкој анализи се изводе интегрални обрасци за ректификацију широких класа кривих линија. Како античка геометрија није располагала општом методом инфинитесималног рачуна, ректификација се могла тачно изводити само за изузетне линије. Већ је ректификација круга претстављала тешко решљив, па и нерешљив проблем, и тек је Архимедес нашао прилично тачне вредности обима круга.

Аналого се могу мерити равне и криве површи и налазити њихове мере, површине, и најзад тела, налазећи њихове мере, запремине. Одређивање мере за површи зове се квадратура, а за тела кубатура. У математичкој анализи се дају и обрасци за површину и запремину широких врста кривих површи, омеђених разним линијама, или неомеђених, и тела омеђених разним површима.

У следећим параграфима изнећемо најосновније дефиниције савременије схваћене теорије мерења дужи, затим углова и, засебно, круга и кружних лукова, а потом многоугаоних равних површи и кружне равне површи и, најзад, полиједара и трију врста тзв. облих тела елементарне геометрије: кружног ваљка, кружне купе и лопте.

4. Геометријским односима међу ликовима одговарају на темељу мерења односи између мерних бројева тих ликова и њихових елемената. Теоремама и задацима геометрије може се тако дати алгебарско-аналитички облик. То је пре свега начело алгебарске методе у геометрији, условљене развојем алгебре и чији први претставници су François Viète (1540—1630) и Marin Getaldić (1568—1626). Алгебарском методом у геометрији решавају се лако многи геометријски задаци, рачунајући са познатим и непознатим дужинама, површинама, мерама углова итд.

Највећи замах дат је развоју геометрије у том, алгебарском правцу применом координатних система. Тако је настала координатна геометрија — тзв. аналитичка геометрија — чијим се оснивачем сматра *René Descartes* (Cartesius; 1596 — 1650).

Координатна геометрија се показала као најмоћније оруђе у решавању сложених геометријских задатака особито откако се алгебра развила, проучавањем функција и граничних процеса у такозвану математичку анализу.

Предмет елементарне геометрије није да развија све те гране геометрије, али оправдано је сматрати њеним задатком да полазећи од својих основа, постави њихове темеље, особито координатној (аналитичкој) геометрији.

61. МЕРЕЊЕ ДУЖИ И УГЛОВА.

1. На темељу аксиома непрекидности можемо засновати мерење дужи и дефинисати мерни број и дужину сваке дужи.

Мерни бројеви су позитивни бројеви, додељени појединим дужима. Однос између дужи и њихових мерних бројева је обухваћен појмом функције: мерни број је функција дужи.

За мерење је карактеристично то да постоји јединична дуж, да једнаке дужи имају једнаке мерне бројеве и да је мерни број збира двеју или више дужи једнак збиру мерних бројева тих дужи.

То својство уносимо у дефиницију. За дефиницију су довољна.

Дефиниција 61.1. Ако је свакој дужи додељен известан позитиван број тако да су испуњена сва три услова:

1) постоји дуж којој је додељен број 1,

2) једнаким дужима додељени су једнаки бројеви,

3) ако је нека дуж једнака збиру других двеју дужи, такође је и број додељен првој дужи једнак збиру бројева додељених другим двема дужима, рећи ћемо да сви ови бројеви у вези са дужима образују један *систем мерења дужи*. Број додељен којој било дужи називаћемо *мерним бројем* те дужи. Дуж којој је мерни број 1 називаћемо *јединичном дужи*.

За све дужи рећи ћемо пак да су *измерене* јединичном дужи.

Мерне бројеве дужи обележаваћемо водоравном цртом изнад знака за дужи, напр. $\bar{a}$ или $\overline{AB}$, а такође и малим латинским словима. Мерни број d дужи AB обележаваћемо и знаком $d\,(AB)$, изражавајући тиме уједно да је мерни број функција дужи.

Напомена. Јединичне дужи имају разна имена као: метар, центиметар, микрон, парсек, стопа, и обележавају се скраћено (м, цм, и сл.). Каже се напр. да је дужина неке дужи 5 метара или да је удаљеност или растојање двеју тачака 7 метара. То су у суштини производи мерних бројева и јединичних дужи, у смислу производа једне дужи извесним бројем (дефиниција 26.6). Дужине су мере за дужи. Усвајамо ову дефиницију:

Дефиниција 61.2. Нека је е у извесном систему мерења дужи ма која од (међу собом једнаких) јединичних дужи, а m мерни број које било дужи AB. Тада кажемо да је m е *дужина* или *дужинска мера* (или, краће, *мера*) дужи AB.

Кад су мерни бројеви при истој јединичној дужи једнаки, кажемо да су и *дужине једнаке*.

Меру дужи AB називамо такође растојањем или удаљеношћу тачака A и B.

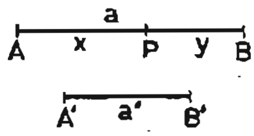
Из дефиниције 61.1 и 61.2 следује непосредно:

Теорема 61.1. *Дужина сваке дужи једнозначно је одређена јединичном дужи и мерним бројем. Дужина јединичне дужи* е *јесте* 1 е.

Теорема 61.2. *Ако је иста јединична дуж, а разни мерни бројеви, дужине су разне. Једнаке дужи имају једнаке дужине.*

2. Претпоставимо, ради једноставнијег излагања, да свим дужима можемо, изабравши јединичну дуж доделити мерни број, саобразно дефиницији 61.1. Под том претпоставком докажимо прво следеће две теореме, а затим теорему 61.5, да је тада мерни број сваке дужи једнозначно одређен.

✱ **Теорема** 61.3. *Ако је дуж* AB *већа или мања од неке дужи* A'B', *тада је и мерни број дужи* AB *већи односно мањи од мерног броја дужи* A'B'.



Сл. 500

Доказ. Нека су a и a' мерни бројеви дужи AB и $A'B'$ (сл. 500). Ако је $AB > A'B'$, постоји између A и B тачка P тако да је $AP = A'B'$. Овим дужима су додељена два броја x и y као њихови мерни бројеви. Према другом услову дефиниције 61.1 је $x = a$, па како је према трећем услову $a = x + y$, имамо $a > x$, дакле је $a > a'$.

Ако је $AB < A'B'$, тада је $A'B' > AB$, дакле $a' > a$ и према томе је $a < a'$.

✱ **Теорема** 61.4. *Ако је* M *средиште дужи* AB *и ако је* a *мерни број дужи* AB, *тада је* a/2 *мерни број како дужи* AM *тако и дужи* BM.

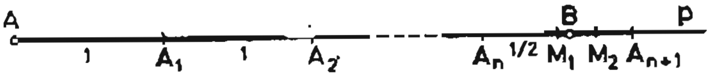
Доказ. Како је $AM = BM$, мерни бројеви ових дужи су према услову 2 дефиниције 61.1 једнаки, рецимо x. Према услову 3 је $a = 2x$, дакле имамо $x = a/2$.

✱ **Теорема** 61.5. *Претпоставимо да је у извесном систему мерења дужи свакој дужи додељен мерни број. Тада је самим избором јединичне дужи тај мерни број за сваку дуж једнозначно одређен.*

Доказ. Нека је p извесна полуправа с исходиштем A (сл. 501). Посматрајмо прво дужи садржане на тој полуправој и којима је A једна од крајњих тачака. Нека је AB ма која таква дуж, a њен мерни број. Докажимо да је a једнозначно одређен број.

Одредимо на полуправој p тачку A_1 тако да дуж AA_1 буде једнака јединичној дужи, затим тачке $A_2, A_3, \dots$ тако да буде $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3, \dots$ и да је $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$. Дакле и свака од ових дужи је јединична дуж.

Тачка B се поклапа с A_1 или је $A - A_1 - B$ или $A - B - A_1$. Претпоставимо прво да се B поклапа с A_1 или да је $A - A_1 - B$.



Сл. 501

Ако се једна од тачака A_1, A_2, $A_3, \dots$, рецимо A_n, поклапа са B, према услову 3 дефиниције 61.1 је $a = n$. Заиста, за $n = 2$ је $AA_2 = AA_1 + A_1A_2$, дакле мерни број дужи AA_2 је према услову 3 једнак 2; за $n = 3$ је $AA_3 = AA_2 + A_2A_3$, дакле мерни број дужи AA_3 једнак је 3 и тако исто, мерни број дужи AA_4 је 4, итд.; дакле за свако n мерни број дужи AA_n је n.

Ако ниједна од тачака A_ν, $\nu = 1,2,\dots$, није истоветна са B, постоји према аксиоми IV 1 тачка A_ν таква да је $AA_\nu > AB$. Нека је ν најмањи од таквих индекса, тј. нека је $AA_{\nu-1} < AB$. При томе је $\nu > 1$, јер из $A-A_1-B$ следује $AA_1 < AB$. Ставимо n уместо $\nu-1$. Добијамо тада

$$AA_n < AB < AA_{n+1},$$

тј. тачка B је између A_n и A_{n+1}, при чему је $n=1,2,\ldots$. Како су n и $n+1$ мерни бројеви дужи AA_n и AA_{n+1}, према теореми 61.3 је

$$n < a < n+1. \quad (1)$$

Дакле број a је садржан у бројном размаку $(n, n+1)$ чија је величина 1. Према теореми 20.6 тачке A_1, A_2, ... су потпуно одређене, дакле број n је једнозначно одређен број.

Нека је M_1 средиште дужи A_nA_{n+1}. Према теореми 61.4 мерни број дужи A_nM_1 и M_1A_{n+1} је $^1/_2$. Тачка B је између A_n и A_{n+1}, дакле може бити истоветна са M_1. Ако је тачка B истоветна са M_1, према услову 3 дефиниције 61.1 је $a=n+\dfrac{1}{2}$. Ако тачка B није истоветна са M_1, тада је између A_n и M_1 или између M_1 и A_{n+1}, дакле је $A_nB < A_nM_1$ или $A_nB > A_nM_1$, па како је

$$AB = AA_n + A_nB, \qquad AM_1 = AA_n + A_nM_1,$$

имамо $AB < AM_1$ или пак $AB > AM_1$. Дакле, према теореми 61.3 је

$$a < n+\frac{1}{2} \qquad \text{или} \qquad a > n+\frac{1}{2},$$

а узмемо ли у обзир и односе (1) имамо

$$n < a < n+\frac{1}{2} \tag{2}$$

или

$$n+\frac{1}{2} < a < n+1. \tag{3}$$

Оба обрасца (2) и (3) могу се скупити у један и написати

$$n+\frac{n_1}{2} < a < n+\frac{n_1+1}{2}$$

где је n_1 број 1 или 0, према томе да ли дуж AB садржи сем n јединичних дужи још и половину јединичне дужи, или не.

Дакле број a је садржан сад у мањем размаку $\left(n+\dfrac{n_1}{2},\ n+\dfrac{n_1+1}{2}\right)$, чија величина је 1/2. Тачка M_1 је одређена, а исто тако за дату тачку B одређено је да ли вреди $AB < AM_1$ или $AB > AM_1$, дакле и број n_1 је једнозначно одређен број.

Нека је M_2 средиште оне од двеју дужи A_nM_1 и M_1A_n која садржи тачку B. Ако је тачка B истоветна са M_2, према услову 3 је $a=1+\dfrac{1}{4}$ или $a=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$, према томе да ли је случај неједначина (2) или (3). Ако тачка B није истоветна са M_2, B је на једној од четвртина дужи A_nA_{n+1}, дакле у случају (2) имамо

$$n<a<n+\frac{1}{4} \quad \text{или} \quad n+\frac{1}{4}<a<n+\frac{1}{2},$$

а у случају (3)

$$n+\frac{1}{2}<a<n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \text{или} \quad n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<a<n+1.$$

У сваком од ова четири случаја можемо писати

$$n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}<a<n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2+1}{4},$$

где је сад и n_2 једнозначно одређен број, 1 или 0, према томе да ли дуж AB садржи сем n јединичних дужи и n_1 половина јединичних дужи још и једну четвртину јединичне дужи или не.

Тиме је број a затворен у размак чија је величина 1/4.

Наставимо ово посматрање. Располовимо сваки пут ону дуж коју смо добили претходним располовљењем а која садржи тачку B. Тиме настаје низ тачака M_1, M_2, M_3, . . . и низ потпуно одређених бројева n_1, n_2, n_3, . . . који су или 1 или 0, и добијамо све мањи бројни размак у коме је садржан број a. Налазимо, наиме,

$$n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^\nu}<a<n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}+\ldots+\frac{n_\nu+1}{2^\nu},$$

дакле број a је садржан у бројном размаку величине $\frac{1}{2^\nu}$.

Постоје две могућности: или ће се после извесног броја λ располовљавања дотична тачка M_λ поклопити са тачком B, или то се никад неће догодити. У првом случају је

$$a=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\ldots+\frac{n_\lambda}{2^\lambda}, \tag{5}$$

а у другом број a је одређен бескрајним збиром

$$a=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\ldots \tag{6}$$

Тада постоји бескрајан низ образаца (4) за $\nu=1,2,3,\ldots$. Ако ради краткоће ставимо

$$n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^\nu}=a_\nu, \qquad a_\nu+\frac{1}{2^\nu}=a_\nu',$$

можемо уместо (4) писати кратко

$$a_\nu<a<a_\nu', \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{7}$$

Тиме је и број a једнозначно одређен, јер низови $\{a_\nu\}$ и $\{a_\nu'\}$ су монотони, први несилазан, други неузлазан и оба имају исту граничну вредност, једнаку a.

Заиста,

$$a_\nu - a_{\nu-1} = \frac{n_\nu}{2^\nu} \geqslant 0,$$

дакле $a_{\nu-1} \leqslant a_\nu$, тј. први низ је несилазан. Исто тако

$$a'_{\nu-1} - a'_\nu = \frac{1-n_\nu}{2^\nu} \geqslant 0,$$

дакле $a'_{\nu-1} \geqslant a'_\nu$, тј. други је неузлазан. Оба низа су ограничена, јер је напр. $a_\nu < n+1$, $a'_\nu > n$, за свако ν.

Као што је познато из теорије бројних низова сваки ограничен монотон низ има одређену граничну вредност. Ставимо

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = \alpha, \qquad \lim_{\nu \to \infty} a'_\nu = \alpha'.$$

Из (7) следује

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

Но разлика одговарајућих чланова оба низа је $a'_\nu - a_\nu = \dfrac{1}{2^\nu}$, дакле $\alpha = \alpha'$ и према томе је $a = \alpha = \alpha'$, или друкчије писано,

$$a = \lim_{\nu \to \infty} a_\nu,$$

дакле

$$a = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ . \ . \ . \tag{8}$$

Како су n и сви бројеви n_ν једнозначно одређени, и број a је и сада ~~једнозначно одређен.~~

Остаје да посматрамо случај кад је $A - B - A_1$. Нека је тада B^* тачка на p тако да је $A - A_1 - B^*$, и $AB = A_1B^*$, дакле $AB^* = AA_1 + A_1B^*$ и према томе $AB^* = AA_1 + AB$. Према претходном посматрању мерни број a^* дужи AB^* је потпуно одређен број:

$$a^* = 1 + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ . \ . \ .$$

Мерни број дужи AB нека је опет a. Како је $AB^* = AA_1 + AB$, према услову 3 дефиниције 61.1 имамо $a^* = 1 + a$, дакле $a = a^* - 1$, тј.

$$a = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ . \ . \ . \tag{9}$$

дакле a је и сада потпуно одређен број.

Тиме је наша теорема доказана за сваку дуж AB на полуправој p са исходиштем A.

Нека је PQ ма која дуж, која није садржана на полуправој p тако да јој се један крај поклапа с исходиштем A полуправе p. На p постоји једна једина тачка B тако да је $PQ = AB$. Према услову 2 у дефиницији 61.1 и мерни бројеви су једнаки, тј. $\overline{PQ} = \overline{AB}$, па како је број $\overline{AB}$ потпуно одређен број и број $\overline{PQ}$ је потпуно одређен број. Дакле, мерни број сваке дужи је једнозначно одређен. Тиме је теорема 61.5 у целини доказана.

4. Ради тачнијег разумевања дефиниције 61.1 доносимо следећу теорему, која се доказује на темељу обеју аксиома непрекидности, аналого претходној теореми.

Теорема 61.6. *Ако се дужима доделе позитивни бројеви тако да:*

(a) *једнаким дужима буду додељени једнаки бројеви,*

(b) *ако је нека дуж једнака збиру других двеју дужи, и број додељен првој дужи једнак је збиру бројева додељених другим двема дужима, тада постоје самим тим и дужи којима је додељен број* 1.

Доказ. Нека је у извесној дужи AB додељен број a. Ако је $a<1$, нека су на правој AB тачке C_2, C_3, . . . , C_n такве да је

$$A-B-C_2,\quad B-C_2-C_3,\quad C_2-C_3-C_4,\ .\ .\ .\ .\ ,\quad C_{n-2}-C_{n-1}-C_n,$$

и $AB=BC_2=C_2C_3=\ .\ .\ .\ =C_{n-1}C_n$. Тада је такође

$$AC_2=AB+BC_2,\quad AC_3=AC_2+C_2C_3,\ .\ .\ .\ ,\ AC_n=AC_{n-1}+C_{n-1}C_n.$$

Према услову 2 дефиниције 61.1 је

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{C_2C_3}=\ .\ .\ .\ =\overline{C_{n-1}C_n}=a,$$

а према услову 3 је

$$\overline{AC_2}=\overline{AB}+\overline{BC_2},\quad \overline{AC_3}=\overline{AC_2}+\overline{C_2C_3},\ .\ .\ .\ ,\quad \overline{AC_n}=\overline{AC_{n-1}}+\overline{C_{n-1}C_n},$$

дакле

$$\overline{AC_2}=2\ a,\quad \overline{AC_3}=3\ a,\ .\ .\ .\ ,\quad \overline{AC_n}=n\ a.$$

Према једном ставу аритметике постоји број n тако да је или $n\cdot a=1$ или $n\cdot a<1<(n+1)\cdot a$. Ако је $n\ a=1$ теорема је доказана, јер $AC=1$. Ако није $n\ a=1$, обележимо тачку C_n словом P, а C_{n+1} словом Q. Имамо $\overline{PQ}=$a. Нека је M_1 средиште дужи PQ. Према теореми 61.4 је $\overline{PM_1}=\overline{M_1Q}=$a/2. Како је $AM_1=AP+PM_1$, према услову 3 је

$$\overline{AM_1}=\overline{AP}+\overline{PM_1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a.$$

Опет, или је $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a=1$ и теорема је доказана, јер $\overline{AM_1}=1$, или постоји један од следећа два пара неједначина

$$na<1<\left(n+\frac{1}{2}\right)a,\qquad \left(n+\frac{1}{2}\right)a<1<(n+1)\ a.$$

Обележимо у првом случају тачку P са P_1 а тачку M_1 са Q_1, у другом случају тачку M_1 са P_1 а тачку Q са Q_1. Ако n_1 означује 0 или 1, можемо за оба ова случаја писати

$$\left(n+\frac{n_1}{2}\right)a<1<\left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)a.$$

Понављаним располовљавањем одговарајућих дужи добијамо средишта M_1, M_2, . . . и низ дужи P_1Q_1, P_2Q_2, . . . , тако да свака садржи следећу и да је двапут већа од следеће. Сем тога је

$$A-P_1-Q_1,\qquad A-P_2-Q_2,\ .\ .\ .$$

и

$$AP_1\leqslant AP_2\leqslant\ .\ .\ .\ \leqslant AQ_2\leqslant AQ.$$

С друге стране добијамо низ двоструких неједначина

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^\nu}\right) a<1<\left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_1+1}{2}\right) a \tag{1}$$

и

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^2}\right) a=\overline{AP_\nu}, \qquad \left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_1+1}{2}\right) a=\overline{AQ_\nu},$$

Дакле

$$\overline{AP_\nu}<1<\overline{AQ_\nu}.$$

С друге стране, како је $AP_\nu+P_\nu Q_\nu=AQ_\nu$, имамо и $\overline{AP_\nu}+\overline{P_\nu Q_\nu}=\overline{AQ_\nu}$. Дакле

$$\overline{P_\nu Q_\nu}=\overline{AQ_\nu}-\overline{AP_\nu},$$

тј. $\overline{P_\nu Q_\nu}=a/2^\nu$.

Постоје две могућности: или је за извесно λ

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_{\lambda-1}}{2^{\lambda-1}}+\frac{n_\lambda}{2^\lambda}\right) a=1,$$

дакле $\overline{AP_\lambda}=1$ и теорема је доказана, или то није никад. Тада је бескрајан низ дужи P_1Q_1, P_2Q_2. . . . према теореми 35.2 основан низ, дакле према теореми 35.1 постоји једна и само једна тачка X садржана на свим тим дужима. Како је тада за свако ν $A-P_\nu-Q_\nu$, и $P_\nu-X-Q_\nu$, имамо $AP_\nu<AX<AQ_\nu$, дакле

$$\overline{AP_\nu}<\overline{AX}<\overline{AQ_\nu}. \tag{2}$$

Како је $\overline{P_\nu Q_\nu}=a/2^\nu$, а ова величина тежи нули кад ν бесконачно расте, низови мерних бројева $\{\overline{AP_\nu}\}$ и $\{\overline{AQ_\nu}\}$ теже истом броју. Из (2) следује да је тај број једнак мерном броју $\overline{AX}$. Дакле

$$\lim_{\nu\to\infty}\overline{AP_\nu}=\overline{AX},$$

тј.

$$\overline{AX}=n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^\nu}+\ldots$$

Но како у (1) збирови на левој и десној страни теже истој вредности, јер разлика између одговарајућа два збира је $1/2^\nu$, имамо

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\ldots+\frac{n_\nu}{2^\nu}+\ldots\right) a=1.$$

Дакле $\overline{AX}=1$, а тиме је теорема доказана.

5. Докажимо сада да се, изабравши ма коју дуж за јединичну, свакој дужи може заиста доделити једнозначно позитиван број тако да буду испуњени сви услови дефиниције 61.1.

Теорема 61.7. *Свакој дужи може се доделити извесан позитиван број тако да ти бројеви буду мерни бројеви свих дужи у извесном систему мерења дужи. После избора јединичне дужи мерни број сваке дужи је једнозначно одређен.*

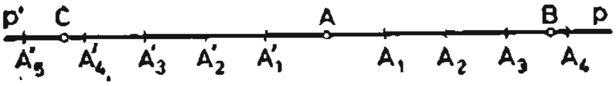
Доказ. Изаберимо ма коју дуж UV за јединичну дуж. Нека је A почетна тачка извесне полуправе p, A_1 она тачка на p за коју је $AA_1=UV$.

Доделимо дужи AA_1 број 1. Задржавајући обележавање као у доказу теореме 61.5, доделимо свакој дужи AB, где B означава ма коју трећу тачку на p, онај број a до кога смо дошли у доказу теореме 61.5. Ако је тачка B истоветна са A_n, ставимо $a=n$; ако је тачка B истоветна са извесном тачком M_λ, ставимо за a вредност из обрасца (5), допуштајући да буде и $n=0$; ако пак B није истоветно ни са једном тачком M_λ, узмимо образац (7) или (9), према томе да ли је $A-A_1-B$ или $A-B-A_1$. Најзад, ако је PQ ма која дуж (ма где) и ако је AA' дуж на p, која је једнака дужи PQ, доделимо дужи PQ број додељен дужи AA'.

Докажимо да овако додељени бројеви испуњавају услове дефиниције 61.1. Заиста, први услов је испуњен, јер постоји јединична дуж UV.

Нека су PQ и RS две једнаке дужи. Постоји на p дуж AA', једнака тим дужима. Нека је број a додељен дужи AA'. Тада је и дужима PQ и RS додељен број a. Дакле, ма којим двема једнаким дужима додељен је исти број, тј. и други услов је испуњен.

Нека је опет p полуправа с исходиштем A, а B ма која тачка на полуправој p. Нека је p' продужење полуправе p, а C ма која тачка на полуправој p' (сл. 502). Нека су a, a', s бројеви додељени редом дужима AB, AC, BC. Како је A између B и C, имамо $AB+AC=BC$. Докажимо да је за те дужи, саобразно трећем услову дефиниције 61.1, такође $b+c=s$.



Сл. 502

Нека је ν известан цео позитиван број, A_1 пак тачка на p, с оне стране тачке A с које је тачка B и таква да је сада дуж AA_1 једнака једној од оних дужи до којих смо дошли у доказу теореме 61.5 непрестаним располовљавањем дужи, почев од јединичне дужи, и то после ν узастопних располовљавања.

Према начину како смо мало пре доделили бројеве свакој дужи, овој дужи AA_1 је додељен број $1/2^\nu$.

Нека су опет A_2, A_3, . . . даље тачке на p, такве да је $A-A_1-A_2$, $A_1-A_2-A_3$, итд. и $AA_1=A_1A_2=\dots$.

Нека је A_1' тачка на p', таква да је $AA_1'=AA_1$ и нека су A_2', A_3', . . . даље тачке на p', такве да је $A-A_1'-A_2'$, $A_1'-A_2'-A_3'$ итд. и $AA_1'=$ $=A_1'A_2'=,\dots$ Нека сем тога A_0 и A_0' означава саму тачку A.

Према аксиоми IV 1 постоји за свако ν известан природан број k тако да је тачка B истоветна са A_k или између A_k и A_{k+1}. Постоји такође известан број l тако да је тачка C истоветна са A_l' или између A_l' и $A_l'{}_{+1}$, за $l=0,1,2,\dots$. Бројеви k и l зависе, разуме се, од ν. Дакле

$$AA_k \leqslant AB < AA_{k+1}$$

$$AA_l' \leqslant AC < AA_l'{}_{+1}. \tag{1}$$

Отуд је и

$$AA_k + AA_l' \leqslant AB + AC < AA_{k+1} + AA_l'{}_{+1},$$

тј.

$$A_kA_l' \leqslant BC < A_{k+1}A_l'{}_{+1}. \tag{2}$$

Ако је $k=0$ или $l=0$, леви крајеви неједначина (1) и (2) отпадају.

Но, према начину како смо доделили дужима бројеве, будући да је дужима AA_1 и AA_1' додељен број $1/2^\nu$, дужима AA_{k+1} и $AA_l'{}_{+1}$ су додељени бројеви $k/2^\nu$ и $l/2^\nu$, дужима AA_{k+1} и $AA_l'{}_{+1}$, разуме се, бројеви $\frac{k+1}{2}$ и $\frac{l+1}{2^\nu}$, а дужима A_kA_l' и $A_{k+1}A_l'{}_{+1}$ бројеви $\frac{k+l}{2^\nu}$ и $\frac{k+l+2}{2^\nu}$. Дакле, како према теореми 61.3 постоје исти односи за дужи и за бројеве који су им додељени, имамо

$$\frac{k}{2^\nu}\leqslant b<\frac{k+1}{2^\nu}, \tag{3}$$

$$\frac{l}{2^\nu}\leqslant c<\frac{l+1}{2^\nu}, \tag{4}$$

$$\frac{k+l}{2^\nu}\leqslant s<\frac{k+l+2}{2^\nu}. \tag{5}$$

Из (3) и (4) следује

$$\frac{k+l}{2^\nu}\leqslant b+c<\frac{k+l+2}{2^\nu}, \tag{6}$$

а из (5) и (6)

$$\frac{k+l}{2^\nu}-\frac{k+l+2}{2^\nu}<b+c-s<\frac{k+l+2}{2^\nu}-\frac{k+l}{2^\nu},$$

тј.

$$|\, b+c-s \,|<\frac{1}{2^{\nu-1}}. \tag{7}$$

Будући да (7) важи за свако ν, имамо $b+c-s=0$, тј. $s=b+c$. Тиме је доказано да је и трећи услов дефиниције 61.1 испуњен ма за које три дужи AB, AC, BC на правој pp'.

Нека су, најзад, PQ, RS и UV три ма које дужи такве да је $UV=PQ+RS$, и нека су b, c, s бројеви додељени редом тим дужима. Нека су затим B и C тачке редом на p и p', такве да је $AB=PQ$, $AC=RS$. Тада је с једне стране $AB+AC=BC$, а с друге стране $AB+AC=PQ+RS=UV$ дакле $BC=UV$. Како су бројеви додељени једнаким дужима једнаки (као што смо већ утврдили), бројеви b, c, s су додељени и дужима AB, AC и BC, дакле, као што смо сада доказали, имамо $s=b+c$. Тиме је доказано да трећи услов важи ма за које три дужи од којих је једна једнака збиру других двеју.

Дакле, бројеви које смо доделили дужима испуњавају сва три услова дефиниције 61.1 и према томе теорема 61.7 је доказана.

6. Према теореми 61.7 свака дуж има свој мерни број и према томе дужину. Докажимо сад и обратну теорему: да сваком позитивном броју одговара дуж којој је то мерни број. При томе ће доћи опет до примене аксиоме IV 2.

Теорема 61.8. *Ма коју дуж изабрали за јединичну дуж, сваком позитивном броју* а *одговара дуж којој је* а *мерни број.*

Доказ. Напишимо број a у облику коначног збира.

$$a=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\ldots+\frac{n_\lambda}{2^\lambda} \tag{1}$$

или бесконачног збира

$$a=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots \qquad (2)$$

где је n нула или природан број, а $n_1, n_2, \dots$ су 0 или 1. Од броја a зависи хоће ли збир бити коначан или бесконачан. Као што се у теорији низова и редова доказује, то је увек могуће, и то само на један начин.*

Посматрајмо коју било полуправу p са почетком A и одредимо на њој тачке $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ као у теореми 61.5, дакле тако да буде онај исти распоред и да је $AA_1=A_1A_2=\dots=A_nA_{n+1}=1$.

Нека је M_1 средиште дужи A_nA_{n+1}. Ако је $n_1=0$ располовимо дуж A_nM_1 и ставимо $A_n\equiv K_1$, $M_1\equiv L_1$, ако је $n=1$ располовимо дуж M_1A_{n+1} и ставимо $M_1\equiv K_1$, $A_{n+1}\equiv L_1$, тако да је у оба случаја K_1L_1 располовљена дуж. Нека је M_2 ново средиште. Ако је $n_2=0$ располовимо дуж K_1M_2 и ставимо $K_1\equiv K_2$, $M_2\equiv L_2$, ако је $n_2=1$ располовимо дуж M_2L_1 и ставимо $K_2\equiv M_2$, $L_1\equiv L_2$, тако да је у оба случаја K_2L_2 располовљена дуж. Нека је M_3 ново средиште. Ако је $n_3=0$ располовимо дуж K_2M_3, ако је $n_2=1$ располовимо дуж M_3L_2. Нека је M_4 ново средиште, итд.

Очигледно, мерни број дужи AA_n је n, мерни број дужи AK_1 је $n+\frac{n_1}{2}$, мерни број дужи AK_2 је $n+\frac{n_1{}'}{2}+\frac{n_2}{2^2}$ итд. Ако за a вреди образац (1), a је мерни број дужи AM_λ, дакле постоји дуж AM_λ којој је мерни број a. Ако за a вреди бескрајан збир (2), добијамо бескрајан низ дужи, A_nA_{n+1}, K_1L_1, $K_2L_2, \dots$, где је свака дуж половина претходне дужи, дакле свака дуж тог низа садржана је у претходној дужи. Према теореми 35.2 тај низ је основан низ дужи, дакле према аксиоми IV 2 постоји тачка X на p, која је садржана на свим дужима тог низа. Докажимо да је a мерни број дужи AX.

Мерни број AK_ν је

$$a_\nu=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots+\frac{n_\nu}{2^\nu},$$

а мерни број дужи AL_ν је

$$a_\nu{}'=a_\nu+\frac{1}{2^\nu}.$$

Према теореми 61.5 свакој дужи је додељен једнозначно њен мерни број, дакле дужи AX додељен је известан број x. Како је

$$AA_n\leqslant AK_1\leqslant AK_2\leqslant \dots < AX < \dots \leqslant AL_2\leqslant AL_1\leqslant AA_{n+1},$$

имамо према теореми 61.3

$$n\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant \dots < x < \dots \leqslant a_2{}'\leqslant a_1{}'\leqslant n+1.$$

Како разлика $a_\nu{}'-a_\nu$ тежи нули, оба низа $\{a_\nu\}$ и $\{a_\nu{}'\}$ теже ка x, дакле x је гранична вредност низа $\{a_\nu\}$. С друге стране, a је према обрасцу (2) та гранична вредност, дакле $x=a$, тј. број a, претстављен бескрајним збиром (2) је мерни број дужи AX.—Тиме је доказ завршен.

---

*Као што се сваки позитиван број може написати у облику збира целог броја и децималног разломка, тј. збира $m+\frac{m_1}{10}+\frac{m_2}{10}+\dots$, коначног или бесконачног, тако се може учинити и кад основа није 10, него ма који други природни број, као што је 2

7. При мерењу дужи јавља се задатак преласка од једне јединичне дужи ка другој. У том смислу помињемо следеће три теореме.

Теорема 61.9. *Ако су* a *и* a′ *мерни бројеви извесне дужи* AB *у два разна система мерења дужи и ако је јединична дуж* UV *првог система мерења мања од јединичне дужи* U′V′ *другог система, тада је* a>a′.

Обрнуто: ако је a>a′, *тада је јединична дуж првог система мања од јединичне дужи другог система.*

Доказ. Нека су на правој AB, полазећи од дужи UV као јединичне дужи, тачке A_ν, $\nu = 1,2, \ldots$, исто као у доказу теореме 61.5. Нека су полазећи од дужи $U'V'$ као јединичне дужи, A'_ν, $\nu = 1,2, \ldots$, аналоге тачке. Према претпоставци је $UV < U'V'$, дакле и $AA_1 < AA_1'$, $A_\nu A_{\nu+1} < A'_\nu A'_{\nu+1}$.

С првом јединицом UV је $\overline{AB} = a$, с другом је $\overline{AB} = a'$. Према теореми 61.8 постоји на правој AB, с исте стране тачке A с које је тачка B, тачка B' таква да је с новом јединицом $U'V'$ $\overline{AB'} = a$, као што је са старом $AB = a$. Како је $AA_1 < AA_1'$, $A_\nu A_{\nu+1} < A_\nu' A'_{\nu+1}$, такође је, задржавајући ознаке из доказа теорема 61.5 и 61.6, $AA_n < AA_n'$, затим $AK_1 < AK_1'$, $AK_2 < AK_2'$ итд. При томе је $AA_1' - AA_1 = A_1A_1'$ и отуд, за $\nu = 1,2, \ldots$, $A_\nu A_{\nu+1} - A_\nu' A_\nu'{}_{+1} = A_1A_1'$, дакле

$$AA_n' - AA_n = n\ A_1A_1'.$$

Затим је

$$AK_1' - AK_1 = AA_n' - AA_n + A_n'K_1' - A_nK_1,$$

па како је или $K_1 \equiv A_n$, а тада и $K_1' \equiv A_n'$, или је $A_nK_1 = AA_1/2$, $A_n'K_1' = AA_1'/2$ и отуд $A_n'K_1' - A_nK_1 = \frac{1}{2} A_1A_1'$, имамо

$$AK_1' - AK_1 \geqslant AA_n' - AA_n, \qquad \text{тј.} \qquad AK_1' - AK_1 \geqslant n\ A_1A_1'.$$

Тако доказујемо да је за свако ν $AK_\nu' - AK_\nu \geqslant n\, A_1A_1'$, а отуд је, као што се лако види, такође $AB' - AB \geqslant nA_1A_1'$. Дакле је $AB < AB'$. Према томе је, мерено новом јединицом $U'V'$, према теореми 61.3 $\overline{AB} < \overline{AB'}$, тј. $a' < a$, дакле $a > a'$.

И обрнуто, из $a > a'$ следује $AA_1 < AA_1'$. Кад би, наиме, било $AA_1 = AA_1'$, било би према дефиницији 61.1 и према теореми 61.5 $a = a'$, а кад би било $AA_1 > AA_1'$, било би $AA_1' < AA_1$ и према доказаном делу ове теореме, било би $a' > a$. Тиме је ова теорема у целости доказана.

Следеће две теореме казују више од претходне.

Теорема 61.10. *Ако, измерена извесном јединичном дужи, једна дуж* AB *има дужину* a, *тада измерена другом јединичном дужи, која је* p*-ти део прве јединичне дужи, дуж* AB *има мерни број* ap. *Ако је пак друга јединична дуж једнака* q*-тострукој првој јединичној дужи дуж* AB *има, измерена другом јединичном дужи, мерни број* a/q.

Доказ. Нека су опет тачке A_ν и A_ν' као претходно, затим a' мерни број дужи AB измерене новом јединицом. Ако је нова јединична дуж p-ти део старе јединичне дужи, тј. ако је $AA_1' = \frac{1}{p} AA_1$, или $AA_1 = p\ AA_1'$, имамо, измерено новом јединичном дужи, према теореми 61.3

$$\overline{AA_1} = p\ \overline{AA_1'} = p.$$

Као што је утврђено у доказу теореме 61.5, имамо $AA_n \leqslant AB < A_{n+1}$, па како је измерено новом јединицом

$$\overline{AA_n} = n\,\overline{AA_1} = np, \quad \overline{AA_{n+1}} = (n+1)\;p,$$

имамо, према теореми 61.3,

$$n\;p \leqslant a' < (n+1)\;p.$$

Узмемо ли у обзир и средиште M_1, дужи A_nA_{n+1}, имамо $AK_1 \leqslant AB < AL_1$, па како је

$$\overline{AM_1} = \overline{AA_n} + \overline{A_nM_1} = n\;\overline{AA_1} + \frac{1}{2}\overline{AA_1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\;\overline{AA_1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)p,$$

имамо

$$\left(n+\frac{n_1}{2}\right)p \leqslant a' < \left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)\;p,$$

при чему је n_1 број 0 или 1.

Располовимо ли дуж K_1L_1, добијамо исто тако

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}\right)p \leqslant a' < \left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2+1}{4}\right)\;p$$

и уопште

$$a_\nu p \leqslant a' < a_\nu' p \tag{1}$$

где је

$$a_\nu = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ldots + \frac{n_\nu}{2^\nu}, \qquad a_\nu' = a_\nu + \frac{1}{2^\nu}\cdot$$

С друге стране је

$$a_\nu \leqslant a < a_\nu',$$

дакле

$$a_\nu\,p \leqslant a\;p < a_\nu'\;p. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следује

$$(a_\nu - a_\nu')\;p < a' - ap < (a_\nu' - a_\nu)\;p$$

са све ν, па како $|a_\nu - a_\nu'|$ тежи ка нули, имамо $a' - ap = 0$, тј. $a' = ap$.

Ако је пак нова јединична дуж једнака q-тострукој старој јединичној дужи, тј. ако је $AA_1' = q\;AA_1$, тада је $AA_1 = \frac{1}{q}AA_1'$ и међусобном заменом новог и старог система добијамо, према претходном доказу, $a = a'q$, дакле је $a' = \frac{a}{q}\cdot$

У претходној теореми је однос између мерних бројева двеју јединичних дужи, изражених једном од њих, претстављен целим бројем p или q. У следећој, општијој теореми тај однос је претстављен којим било позитивним бројем c.

Теорема 61.11. *Ако, измерена извесном јединичном дужи једна дуж* AB *има мерни број* a, *и ако измерена другом јединичном дужи, прва јединична дуж има мерни број* c, *тада дуж* AB *има, кад се изрази другом јединичном дужи, мерни број* a c.

Доказ. Нека је опет прва јединична дуж AA_1, а друга AA_1', мерни број дужи AB измерен првом јединицом нека је a, а другом нека је a', а c мерни број дужи AA_1 мерене јединицом AA_1'.

Узмимо прво да је број c рационалан, тј. $c = \frac{p}{q}$ (несводљив разломак). Уочимо и трећу јединичну дуж, рецимо AA_1'', која је p-ти део дужи AA_1. С том трећом јединичном дужи мерни број дужи AB је према теореми 61.10 $a'' = ap$.

Сматрамо ли сада ту трећу јединицу старом и уведемо ли још и четврту јединичну дуж AA_1''', која је једнака q-тострукој дужи AA_1'', биће с овом новом јединицом AA_1''' мерни број дужи AB (према теореми 61.10) $a'''\frac{a''}{q}$. Како је $AA_1''' = q\ AA_1''$, тј. $AA_1'' = \frac{1}{q} AA_1'''$, а $AA_1'' = \frac{1}{p} AA_1$, тј. $AA_1 = p\ AA_1''$, имамо с овом новом јединицом

$$\overline{AA_1} = p\overline{AA_1}'' = \frac{p}{q}\overline{AA_1}''' = \frac{p}{q} = c.$$

Дакле јединична дуж AA_1''' је она иста која се у нашој теореми назива другом јединичном дужи, тј. $A_1''' \equiv A_1'$ и $a''' \equiv a'$. Дакле имамо

$$a' = \frac{a''}{q} = a\frac{p}{q} = a\ c$$

и тиме је за случај кад је број c рационалан, наша теорема доказана.

Узмимо сада да је број c ирационалан. Према теорији ирационалних бројева постоји бескрајан низ рационалних бројева $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ ($\nu = 1,2, \dots$) такав да је

$$\frac{p_1}{q_1} \leqslant \frac{p_2}{q_2} \leqslant \dots < c < \dots \leqslant \frac{p_2+1}{q_2} \leqslant \frac{p_1+1}{q_1}. \tag{1}$$

Нека је на полуправој AA_1 (која полази из тачке A) тачка $A_{1\nu}$ она тачка за коју је мерни број $\overline{AA_{1\nu}}$, измерен јединичном дужи AA_1, једнак $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ ($\nu = 1,2, \dots$). Нека су a и a^* мерни бројеви једне дужи, измерене јединицом AA_1 односно јединицом $AA_{1\nu}$. Тада је према доказаноме делу ове теореме $a = \frac{q_\nu}{p_\nu} a^*$, дакле дуж AA_1 (за коју је $a = 1$) има, измерена јединицом $AA_{1\nu}$ мерни број $\frac{p_\nu}{q_\nu}$, тј. $\overline{AA_1} = \frac{p_\nu}{q_\nu}$.

С новом јединицом AA_1', о којој говори ова теорема, је пак $\overline{AA_1} = c$. Како је $\frac{p_\nu}{q_\nu} < c$, према теореми 61.9 је

$$AA_{1\nu} > AA_1'. \tag{2}$$

Исто тако следује из упоређивања мера изражених јединицама с којима је $\overline{AA_1} = \frac{p_\nu}{q_\nu}$ и $\overline{AA_1} = \frac{p_{\nu+1}}{q_{\nu+1}}$, да је

$$AA_{1\nu} \geqslant AA_{1,\nu+1}. \tag{3}$$

Нека је $AA_{1\nu}'$ јединична дуж са којом је $\overline{AA_1} = \frac{p_{\nu+1}}{q_\nu}$. Тада је, аналого,

$$AA_1{}'_\nu < AA'_1 \qquad \text{и} \qquad AA'_{1\nu} \leqslant AA_1{}'_{,\nu+1}. \tag{4}$$

Но према доказаноме делу ове теореме дуж AB има, измерена јединичном дужи $AA_{1\nu}$, мерни број $a_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu} a$, а измерена јединичном дужи $AA_1{}'_\nu$ има мерни број $a_\nu{}' = \frac{p_{\nu+1}}{q_\nu} a$.

Из двеју неједначина (2) и (3) следује $a_\nu < a'$, $a_\nu \leqslant a_{\nu+1}$, а из двеју неједначина (4) следује $a_\nu{}' > a'$, $a_\nu{}' \geqslant a_\nu{}'_{+1}$. Дакле је

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots < a' < \ldots \leqslant a_2{}' \leqslant a_1{}',$$

тј.

$$\frac{p_1}{q_1} a \leqslant \frac{p_2}{q_2} a \leqslant \ldots < a' < \ldots \leqslant \frac{p_{2+1}}{q_2} a \leqslant \frac{p_{1+1}}{q_1} a. \tag{5}$$

Множењем неједначина (1) са a добијамо пак

$$\frac{p_1}{q_1} a \leqslant \frac{p_2}{q_2} a \leqslant \ldots < ac < \ldots \leqslant \frac{p_{2+1}}{q_2} a \leqslant \frac{p_{1+1}}{q_1} a, \tag{6}$$

а из (5) и (6) следује, опет, $a' = a\,c$. — Тиме је теорема у целости доказана.

8. Следећом теоремом утврђује се веза између геометријске сразмере четири дужи и аритметичке сразмере њихових мерних бројева.

Теорема 61.12. *Ако су дужи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *сразмерне дужима* $\mathfrak{a}'$ *и* $\mathfrak{b}'$, *и мерни бројеви* $\overline{\mathfrak{a}}$ *и* $\overline{\mathfrak{b}}$ *првих двеју дужи сразмерни су мерним бројевима* $\overline{\mathfrak{a}'}$ *и* $\overline{\mathfrak{b}'}$ *других двеју дужи (при истим јединицама); и обрнуто: ако су мерни бројеви четири разних дужи у сразмери, и саме те дужи су у сразмери, тј.*

из $\quad \mathfrak{a} : \mathfrak{b} : : \mathfrak{a}' : \mathfrak{b}' \quad$ *следује* $\quad \overline{\mathfrak{a}} : \overline{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}'} : \overline{\mathfrak{b}'}$

и обрнуто.

Доказ. Претпоставимо да је

$$a : b : : a' : b'$$

и докажимо да је $\overline{a} : \overline{b} = \overline{a'} : \overline{b'}$.

Нека су (као у § 51) A, B, A', B' четири одговарајуће тачке на крацима правог угла и нека су мерни бројеви тих дужи у извесном систему мерења a, b, a', b'.

Претпоставимо прво да је број $\overline{a}/\overline{b}$ рационалан, тј. да постоје два природна броја m и n тако да је $\overline{a} : \overline{b} = m : n$, дакле $\overline{a} : m = \overline{b} : n$. Према теореми 52.8 постоји на краку OA тачка E тако да је $OA = m\ OE$. Према дефиницији 61.1 је и $\overline{OA} = m\ \overline{OE}$, дакле $\overline{OA}/m = \bar{a}/m = \overline{b}/n$. Отуд имамо $\overline{OE} = \overline{\mathfrak{b}}/n$, дакле $\overline{OB} = n\ \overline{OE}$ и, према дефиницији 61.1, $OB = n\ OE$.

Исто тако постоји на краку OA' тачка E' тако да је $OA' = m\ OE'$ и према томе $\overline{OA'} = m\,\overline{OE'}$. Како је и $OA = m\,OE$, према теореми 51.13 праве AA' и EE' су упоредне. Но и праве AA' и BB' су према дефиницији 51.1 упоредне, дакле праве BB' и EE' су упоредне. Како је $OB = n\,OE$, према теореми 51.13 је и $OB' = n\,OE'$, дакле и $\overline{OB'} = n\,\overline{OE'}$.

Из $\overline{OA'} = m\ \overline{OE'}$ и $\overline{OB'} = n\,\overline{OE'}$ следује деобом

$$\overline{OA'}\,/\,\overline{OB'} = m'\,/\,n', \qquad \text{тј.} \qquad \overline{a'}\,/\,\overline{b'} = m\,/\,n,$$

па како је $\overline{a}\,/\,\overline{b} = m/n$ имамо $\overline{a}\,/\,\overline{b} = \overline{a'}\,/\overline{b'}$.

Претпоставимо сада да је број $\overline{a}/\overline{b}$ ирационалан. Према теорији ирационалних бројева постоји бесконачан низ разломака p/q, p'/q', p''/q'', ... чији именитељи расту бесконачно, такав да је

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{p'}{q'} \leqslant \frac{p''}{q''} \leqslant \dots < \frac{\overline{a}}{\overline{b}} < \dots \leqslant \frac{p''+1}{q''} \leqslant \frac{p'+1}{q} \leqslant \frac{p+1}{q}, \tag{1}$$

дакле

$$\text{лим}_{\nu \to \infty} \frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}.$$

Из односа

$$\frac{p}{q} < \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$$

следује

$$\overline{a} > \frac{p}{q}\overline{b},$$

дакле

$$\overline{OA} > p\,\frac{\overline{OB}}{q}.$$

Према теореми 52.8 постоји на краку OA тачка E тако да је $OB = q\ OE$, дакле и $\overline{OB} = q\ OE$. Тада је $\overline{OA} > p\ OE$. Постоји на OA тачка C тако да је $OC = p\ OE$, дакле $\overline{OC} = p\,\overline{OE}$. Тада је $\overline{OA} > \overline{OC}$, дакле према теореми 61.3 $OA > OC$.

Према теореми 52.8 постоји на краку OA' тачка E' тако да је $OB' = p\ OE'$, дакле и $\overline{OB'} = q\,\overline{OE'}$, и затим тачка C' тако да је $OC' = p\ OE'$, дакле $\overline{OC'} = p\,\overline{OE'}$, дакле

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB}} = \frac{p}{q}\,\frac{\overline{OE}}{\overline{OE}} = \frac{p}{q},$$

тј. $\overline{OC'} = \frac{p}{q}\overline{OB'}$.

Према теореми 51.13, како је $OC = p\ OE$, $OC' = p\ OE'$, праве CC' и EE' су упоредне и како је $OB = q\ OE$, $OB' = p\ OE'$, упоредне су и праве BB' и EE', дакле и праве BB' и CC' су упоредне. Но праве BB' и AA' су упоредне, дакле и праве AA' и CC' су упоредне, па су према теореми 38.7 тачке C и C' с исте стране праве AA'. Дакле, како је $OA > OC$, тачка C је између O и A, дакле и тачка C' је на правој OA' између O и A', тј. $OA' > OC'$. Према томе је $\overline{OA'} > \overline{OC'}$, дакле

$$\overline{OA'} > \frac{p}{q}\overline{OB'}, \quad \text{тј.} \quad \overline{a'} > \frac{p}{q}\overline{b'},$$

дакле $p/q < \overline{a'}/\overline{b'}$.

Исто тако следује из односа

$$\frac{p+1}{q} > \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$$

да је и $\frac{p+1}{q} > \frac{\overline{a'}}{\overline{b'}}$ и уопште, за свако ν, из

$$\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}} < \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad \text{и} \quad \frac{p^{(\nu)}+1}{q^{(\nu)}} > \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

следује

$$\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}} < \frac{\bar{a}'}{\bar{b}'} \quad \text{и} \quad \frac{p^{(\nu)}+1}{q^{(\nu)}} > \frac{\bar{a}'}{\bar{b}'}.$$

Према томе, из двоструког низа неједначина (1) следује исти низ неједначина за број $\bar{a}'/\bar{b}'$:

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{p'}{q'} \leqslant \ldots < \frac{\bar{a}'}{\bar{b}'} < \ldots \leqslant \frac{p'+1}{q'} \leqslant \frac{p+1}{q}.$$

То значи да је $\bar{a}/\bar{b} = \bar{a}'/\bar{b}'$ и у случају ирационалних бројева. Дакле из сразмере четири дужи $a : b : : a' : b'$ следује увек сразмера бројева

$$\bar{a}/\bar{b} = \bar{a}'/\bar{b}'.$$

Обрнуто: нека је $\bar{a}/\bar{b} = \bar{a}'/\bar{b}'$. Кад не би било

$$a : b : : a' : b'$$

постојала би према теореми 51.13 дуж b'' различита од b', таква да је

$$a : b : : a' : b'',$$

дакле постојала би на краку OA' тачка B'' таква да су праве AA' и BB'' упоредне. Но према доказаном делу ове теореме је $\bar{a}/\bar{b} = \bar{a}'/\bar{b}''$, дакле $\bar{a}'/\bar{b}' = \bar{a}'/\bar{b}''$, тј., напротив, $\bar{b}' = \bar{b}''$.

Према томе је $a : b : : a' : b'$.

Из претходне теореме и дефиниције 55.1 следује непосредно одговарајућа теорема о производу двеју дужи и производу њихових дужина.

Теорема 61.13. *Ако је дуж* d *једнака производу двеју дужи* b *и* c *у односу на извесну дуж* a, *тада је и мерни број дужи* d *једнак производу мерних бројева дужи* b *и* c, *подељену мерним бројем дужи* a, *и обрнуто, тј.*

$$\text{из} \quad \mathrm{d} = \mathrm{b}\cdot\mathrm{c}/\mathrm{a} \qquad \text{следује} \qquad \bar{\mathrm{d}} = \frac{\bar{\mathrm{b}}\cdot\bar{\mathrm{c}}}{\bar{\mathrm{a}}}$$

и обрнуто.

9. Мерење углова можемо засновати слично мерењу дужи. Доказе изостављамо ради њихове дужине и сличности с доказима одговарајућих теорема о дужима.

Постављамо дакле следеће дефиниције:

Дефиниција 61.3. Ако је сваком углу додељен известан позитиван број тако да

1. постоји угао коме је додељен број 1,
2. једнаким угловима су додељени једнаки бројеви,
3. ако је неки угао једнак збиру друга два угла, такође је и број додељен првом углу једнак збиру бројева додељених двама другим угловима

рећи ћемо да ови бројеви у вези с угловима образују један *систем мерења углова*. Број додељен коме било углу називаћемо *мерним бројем* тог угла.

Угао коме је мерни број 1 називаћемо *јединичним углом*.

И јединични углови имају разна имена као степен, минут, град и обележавају се скраћено ($^\circ$, $'$, ^{G}). Углови се мере и дужином захваћеног лука на кругу описану око темена угла и чији полупречник је јединична дуж (јединични круг); то је тзв. лучна мера угла, чија јединица се зове радијан.

Дефиниција 61.4. Нека је ε у извесном систему мерења углова ма који од (међу собом једнаких) јединичних углова, а u мерни број кога било угла α. Тада кажемо да је $u\,\varepsilon$ *угаона мера* или, краће, *мера* угла α.

За угао α се каже и да је *једнак* $u\,\varepsilon$.

Постоје следеће три теореме, аналоге теоремама 61.5, 61.7 и 61.8. Докази су аналоги доказима тих теорема.

Теорема 61.14. *Претпоставимо да је сваком углу додељен мерни број саобразно дефиницији* 61.3. *Тада је, самим избором јединичног угла тај мерни број за сваки угао једнозначно одређен број.*

Теорема 61.15. *Сваком углу може се доделити извесган број тако да ти бројеви буду мерни бројеви свих углова. После избора јединичног угла мерни број сваког угла је једнозначно одређен.*

Теорема 61.16. *Ма који угао изабрали за јединични угао, сваком позитивном броју који је мањи од оног што одговара збиру четири права угла, одговара угао коме је то мерни број.*

10. Додајемо још две теореме. Првом се доказује постојање тачака на једној дужи, које деле ту дуж на n једнаких делова, другом се доказује аналогно за углове. Теоремом 52.8 доказано је у суштини то већ за дужи, али на други начин.

Теорема 61.17. *На свакој дужи постоји* $\mathrm{n}-1$ *тачка, помоћу којих је та дуж подељена на* n *једнаких дужи* ($\mathrm{n}=2,3,\dots$).

Доказ. За $n=2$ ово је већ доказано теоремом 23.13. Докажимо сад за свако n. Нека је a мерни број посматране дужи AB. Према теореми 61.8 постоји тачка C_1 таква да је $A-C_1-B$ и да је a/n мерни број дужи AC_1, затим тачка C_2 таква да је $A-C_1-C_2$ и да је a/n мерни број дужи C_1C_2, затим тачка C_3 таква да је $C_1-C_2-C_3$ и да је a/n мерни број дужи C_1C_2, итд. Како је према дефиницији 61.1 $\dfrac{\nu}{n}\,a$ мерни број дужи AA_ν, за $\nu \leqslant n-1$ је мерни број дужи AA_ν мањи од a. Дакле је према теореми 61.3 $AA_\nu < AB$ и према томе A_ν је између A и B. Према дефиницији 26.6 тачке A_ν деле дуж AB на n једнаких дужи.

Аналого се доказује следећа теорема:

Теорема 61.18. *У сваком углу постоји* $\mathrm{n}-1$ *полуправа, помоћу којих је тај угао подељен на* n *једнаких углова* ($\mathrm{n}-2,3,\dots$).

Напомена. Ове две теореме утврђује само постојање тачака или полуправих које деле дуж одн. угао на n једнаких делова, а није у њима реч о могућности конструкције таквих тачака односно полуправих помоћу лењира и шестара. Као што је познато, оваква конструкција је за дуж увек могућа, а за углове није.

62. УВОЂЕЊЕ КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА.

1. Покажимо кратко како се на темељу изложених аксиома, теорема и дефиниција уводе координате на правој, у равни и у простору. Ограничавамо излагање на обичне праволинијске координате, засноване на подударности; у равни и простору на правоугли праволинијски координатни систем. Сличним разматрањем уводе се друге врсте координатних система.

Постављамо прво следећу дефиницију:

Дефиниција 61.5. Нека су тачкама праве *a* додељени реални бројеви на следећи начин:

1) извесној тачки *O* праве *a* додељен је број 0,

2) свакој тачки *A* на једној од полуправих на које је права *a* разложена тачком *O* додељен је мерни број дужи *OA*, измерене једном истом јединичном дужи за све те тачке,

3) свакој тачки *A'* на другој од тих двеју полуправих додељен је негативан број чија апсолутна вредност је мерни број дужи *OA'*, измерене истом јединичном дужи.

Тада те реалне бројеве, додељене тачкама праве *a* називамо *координатама* тачака праве *a*. Укупност тих координата у вези с тачкама праве *a* називамо *системом координата* на тој правој. Праву *a*, за чије тачке су тако дефинисане координате, називамо *координатном осом*.

Тачку *O* називамо *координатним почетком*; полуправу праве *a*, чије координате су позитивне називамо *позитивном полуосом*, а полуправу праве *a*, чије кординате су негативне, *негативном полуосом*.

Јединичну дуж називамо јединичном дужи те координатне осе.

Координате тачака обележавамо најчешће последњим словима латинице. Тако напр. x може претстављати координату ма које тачке на правој *a*. За тачку *O* је, дакле, $x = 0$, за сваку тачку позитивне полуосе је $x > 0$, а за сваку тачку негативне полуосе је $x < 0$.

Координатна оса са почетком *O* и чије координате су обележене словом x, обележава се обично симболом Ox. (Приметимо да овде *O* обележава тачку, а x „број".) Чињеницу да тачка *P* има координату x обележавамо знаком $P(x)$. Тиме је у ствари назначена зависност тачке *P* од променљиве x (функциони однос).

Основни значај имају следеће две теореме.

Теорема 62.1. *На координатној оси одговара свакој тачки један једини реалан број као координата те тачке, и обратно: сваком реалном броју одговара на тој правој једна једина тачка чија координата је тај број.*

Доказ. Први део теореме следује непосредно из претходне дефиниције. Што се тиче другог дела, нека је x ма који реални број. Ако је $x = 0$, према дефиницији 61.5 одговара му координатни почетак *O*. Ако је $x > 0$, према теореми 61.5 постоји на позитивној полуоси једна једина тачка *A* тако да је $\overline{OA} = x$. Према дефиницији 61.5 x је координата тачке *A*. Ако је $x < 0$, према теореми 61.5 постоји на негативној полуоси тачка *A'* тако да је $\overline{OA'} = |x|$. Тада је према дефиницији 61.5 x координата тачке *A'*. — Тиме је и други део ове теореме доказан.

Теорема 62.2. *Ако су* P *и* Q *ма које две тачке на координатној оси* Ox, *мерни број дужи* PQ *једнак је позитивној разлици координата тих тачака.*

Доказ. Нека су x_1 и x_2 редом координате тачака P и Q. Ако се једна од тих тачака поклапа с координатним почетком O, имамо, непосредно $\overline{PQ} = |x_1 - x_2|$, при чему је x_1 или x_2 једнако нули. Ако су обе тачке P и Q с исте стране координатног почетка, рецимо на позитивној полуоси, и ако је $OP > OQ$, имамо $x_1 > x_2$, и $OP = OQ + QP$, дакле према дефиницији 61.1 такође $\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$, тј. $x_1 = x_2 + \overline{QP}$, а отуд $\overline{PQ} = x_1 - x_2$.

Слично се теорема доказује ако је $OP < OQ$ или ако су P и Q на негативној полуоси, па и ако су P и Q с разних страна тачке O.

2. Координатни систем у равни дефинишемо овако:

Дефиниција 62.2. Нека су у равни α Ox и Oy две координатне осе, узајамно управне и са заједничким координатним почетком O и нека су јединичне дужи обеју оса једнаке. Нека је затим свакој тачки P равни α додељен уређен пар реалних бројева $\{x, y\}$ на следећи начин:

1) први број је координата x управне пројекције тачке P на координатну осу Ox, други број је координата y управне пројекције тачке P на координатну осу Oy.

2) ако је тачка P на координатној оси Ox, први број је сама координата x тачке P; ако је P на координатној оси Oy, други број је сама координата y тачке P.

Тада те парове реалних бројева, додељене тачкама равни α називамо *координатама* тачака равни α. Координату x називамо такође *апсцисом*, а координату y *ординатом* тачке P.

Укупност тих парова координата у вези с тачкама равни α називамо *координатним системом*, и то *правоуглим праволинијским координатним системом у равни* α.

Укупност двеју координатних оса Ox и Oy називамо *системом координатних оса у равни*, тачку O *координатним почетком*, јединичну дуж обеју координатних оса јединичном дужи тог координатног система.

Координатни систем с осама Ox и Oy обележавамо симболом Oxy.

Докажимо теорему аналогу теореми 62.1:

Теорема 62.3. *Ако је у равни α одређен правоугли праволинијски координатни систем, свакој тачки те равни одговара један једини уређен пар реалних бројева као пар њених координата, и обратно: сваком уређеном пару* $\{x, y\}$ *реалних бројева одговара у тој равни једна једина тачка чији пар координата је тај уређени пар бројева.*

Доказ. Први део теореме следује непосредно из претходне дефиниције.

Нека је $\{x, y\}$ ма који уређени пар реалних бројева. Према теореми 62.1 постоји на апсцисној оси Ox тачка A чија координата је тај број x и на ординатној оси Oy тачка B чија координата је тај број y. Права управна на оси Ox и која пролази кроз тачку A и права управна на оси Oy и која пролази кроз тачку B секу се, јер према теореми 39.4 ове две праве су узајамно управне. Нека им је P пресечна тачка. Према дефиницији 62.3 уређени пар тих бројева x и y је пар координата тачке P. — Тиме је и други део теореме доказан.

Аналого дефинишемо координатни систем у простору:

Дефиниција 62.3. Нека су у простору Ox, Oy, Oz три координатне осе, узајамно управне и са заједничким координатним почетком O и нека су јединичне дужи свих трију оса једнаке. Нека је затим свакој тачки P простора додељено уређено мноштво трију реалних бројева $\{x, y, z\}$ на следећи начин:

1) први број је координата x управне пројекције тачке P на координатну осу Ox, други број је координата y управне пројекције тачке P на осу Oy, а трећи број је управна пројекција тачке P на осу Oz;

2) ако је тачка P на координатној оси Ox, први број је сама координата x тачке P; ако је P на координатној оси Oy, други број је сама координата y тачке P, а ако је на трећој оси, Oz, трећи број је сама координата z тачке P.

Тада то уређено мноштво трију реалних бројева, додељених тачкама простора, називамо *координатама* тачака простора.

Укупност тих уређених мноштава у вези с тачкама простора називамо *координатним системом*, и то *правоуглим праволинијским координатним системом у простору*, а укупност трију координатних оса Ox, Oy, Oz називамо *правоуглим системом координатних оса у простору*. Прву координату ма које тачке називамо њеном *апсцисом*, другу *ординатом*, а трећу *апликатом* (или котом).

Прву координатну осу Ox називамо *апсцисном осом*, другу Oy *ординатном осом*, а трећу Oz *апликатном осом*, а све три заједно *системом координатних оса у простору*. Тачку O називамо *координатним почетком*, раван двеју координатних оса *координатном равни*, а јединичну дуж свих трију оса *јединичном дужи* тог координатног система.

Координатни систем с осама Ox, Oy, Oz обележавамо симболом $Oxyz$.

Постоји и у простору теорема аналогна теореми 62.1:

Теорема 62.4. *Ако је у простору одређен правоугли праволинијски координатни систем, свакој тачки простора одговара једно једино уређено мноштво трију реалних бројева, као њене координате, и обратно: сваком уређеном мноштву трију реалних бројева* $\{x, y, z\}$ *одговара једна одређена тачка у простору, чије координате сачињавају то мноштво бројева.*

Доказ је сличан доказу теореме 62.3 и препуштамо га читаоцу.

ПОВРШИНЕ МНОГОУГАОНИХ РАВНИХ ПОВРШИ.

1. Израчунавање површина неких равних ликова, као што је квадратна површ, правоугаона површ и површ правоуглог троугла, као и израчунавање запремине неких рогљастих тела, познато је од најстаријих времена историје. Неки, касније пронађени обрасци познати су из радова александријског геометра Херона.

Мерење површи, као и дужи, може се засновати на разне начине. Хилберт је дефинисао, на темељу производа двеју дужи (који је опет једна дуж), прво површину равне троугаоне површи као половину производа њене основице и висине (дакле чисто геометријски, без мерења). Потом доказује да је тако дефинисана површина независна од тога коју страницу троугла бирамо за основицу, и да је површина троугаоне површи која се састоји из мањих троугаоних површи једнака збиру површина тих мањих троугаоних површи. Потом дефинише површину многоугаоне површи као збир површина троугаоних површи на које је многоугаона површ разложена. Отуд следује и да разложиво или допунски једнаке многоугаоне површи имају једнаке површине и обратно.

Ми ћемо, аналого дефиницији мерног броја за дуж поставити следећу дефиницију површинског мерног броја и површине.

Дефиниција 63.1. Ако је свакој многоугаоној површи додељен известан позитиван број тако да су испуњена ова три услова:

1) постоји многоугаона површ којој је додељен број 1,

2) подударним троугаоним површима додељени су једнаки бројеви,

3) ако је нека многоугаона површ разложена на троугаоне површи, број додељен тој многоугаоној површи једнак је збиру бројева додељених тим троугаоним површима,

рећи ћемо да ови бројеви у вези с многоугаоним површима образују један *систем мерења многоугаоних површи*. Број додељен којој било многоугаоној површи називаћемо *мерним бројем* те површи.

Многоугаону површ којој је мерни број 1 називаћемо *јединичном површи*.

За све многоугаоне површи рећи ћемо пак да су *измерене* јединичном површи.

Мерне бројеве за површи обележаваћемо латинским словима. Тако ћемо обележавати и површине, особито словом S. Напр. површину троугаоне површи (ABC) обележаваћемо знаком S (ABC).

Као што за дужи разликујемо мерни број од дужине, тако и за површи разликујемо мерни број од површине.

Дефиниција 63.2. Нека је ε у извесном систему мерења површи ма која од (међу собом једнаких) јединичних површи, а m мерни број које било многоугаоне површи σ. Тада кажемо да је m ε *површина* или *површинска мера* (кратко *мера*) површи σ.

Ако су мерни бројеви при истој јединичној површи једнаки, кажемо да су и *површине једнаке*.

Ма да површину имају само површи, а не линије којима су површи омеђене, прихватамо, ради лакшег изражавања, изразе као „површина троугла", „површина круга", подразумевајући при томе површине равних површи омеђених троуглом, кругом итд. Дакле, уместо „површина многоугаоне површи" (па и кружне) рећи ћемо такође „површина многоугла" (одн. круга).

2. Из дефиниције 63.1 и 63.2 следују пре свега ове теореме:

Теорема 63.1. *Површина јединичне површи* ε *јесте* 1 ε. *Површина сваке многоугаоне површи једнозначно је одређена мерним бројем и јединичном површи.*

Теорема 63.2. *Ако је иста јединична површ а разни мерни бројеви, површине су разне. Подударни троуглови имају једнаке површине.*

Докажимо три теореме о површини многоугаоних површи.

Теорема 63.3. *Разложиво једнаке многоугаоне површи имају једнаке површине.*

Доказ. Према дефиницији 57.1 две разложиво једнаке многоугаоне површи могу се разложити на троугаоне површи тако да је свака троугаона површ једне многоугаоне површи подударна с једном туоугаоном површи друге многоугаоне површи. Нека су $S_1, S_2, \dots, S_r$ површине првих троугаоних површи, а $S_1', S_2', \dots, S'_r$ површине других троугаоних површи. Према другом услову дефиниције 63.1 и теореми 63.1 је

$$S_1 = S_1',\ S_2 = S_2',\ \dots,\ S_r = S_r',$$

а према трећем услову исте дефиниције површина прве многоугаоне површи је

$$S=S_1+S_2+\dots+S_r,$$

површина друге многоугаоне површи је

$$S=S_1'+S_2'+\dots+S_r'.$$

Дакле је $S=S'$.

* **Теорема** 63.4. *Допунски једнаке многоугаоне површи имају једнаке површине.*

Доказ: Нека су φ и ψ две допунски једнаке многоугаоне површи. Додајмо им према дефиницији 57.2 разложиво једнаке многоугаоне површи, а на основи дефиниције 57.1 можемо такође рећи: подударне троугаоне површи, рецимо φ_i односно ψ_i $(i=1,2,\dots,r)$ тако да је многоугаона površ

$$\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_r$$

(састављена из φ и из свих тих φ_i) разложиво једнака одговарајућој многоугаоној површи

$$\psi+\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_r.$$

Тада је, ако опет словом S означимо површине,

$$S(\varphi_i)=S(\psi_i),\quad i=1,2,\dots,r, \tag{1}$$

а према теореми 63.3 такође

$$S(\varphi+\sum_i\varphi_i)=S(\psi+\sum_i\psi_i). \tag{2}$$

Разложимо φ на троугаоне површи τ_j и φ_i на троугаоне површи τ_{ik}. Тада је

$$\varphi+\sum_i\varphi_i=\sum_j\tau_j+\sum_i\sum_k\tau_{ik},$$

дакле, према трећем услову дефиниције 63.1,

$$S(\varphi+\sum_i\varphi_i)=\sum_j S(\tau_j)+\sum_i\sum_k S(\tau_{ik})=S(\varphi)+\sum_i S(\varphi_i).$$

Исто тако је

$$S(\psi+\sum_i\psi_i)=S(\psi)+\sum_i S(\psi_i).$$

Дакле, из (2) следује

$$S(\varphi)+\sum_i S(\varphi_i)=S(\psi)+\sum_i S(\psi_i),$$

а отуд према (1) имамо $S(\varphi)=S(\psi)$.

Постоји и обрнута теорема:

Теорема 63.5. *Многоугаоне површи једнаких површина су допунски једнаке.*

Доказ доносимо за испупчене многоугаоне површи. Нека су μ_1 и μ_2 испупчене многоугаоне површи чије су површине једнаке, тј. $S(\mu_1)=S(\mu_2)$. Према теореми 57.14 постоји троугаона површ τ_1 допунски једнака површи μ_1 и троугаона површ τ_2 допунски једнака површи μ_2. Према теореми 63.4 је

$$S(\mu_1)=S(\tau_1),\qquad S(\mu_2)=S(\tau_2),$$

дакле $S(\tau_1)=S(\tau_2)$. Према теореми 57.13 можемо претпоставити да обе троугаоне површи имају једнаке основице и да су им, дакле, и висине једнаке. Дакле, према теореми 57.8 троугаоне површи τ_1 и τ_2 су допунски једнаке, те су према теореми 57.5 многоугаоне површи μ_1 и μ_2 допунски једнаке.

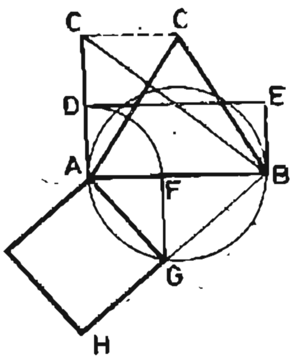
3. У дефиницији 63.1 захтева се да постоји многоугаона површ којој је додељен број 1. Докажимо да постоји увек јединична троугаона или квадратна површ.

Теорема 63.6. *Постоји троугаона или квадратна површ којој је мерни број јединица.*

Доказ. Према дефиницији 62.1 постоји многоугаона површ којој је додељен број 1. Ако то није троугаона површ, постоји према теореми 57.14 троугаона површ која јој је допунски једнака, дакле којој је према теореми 63.4 додељен број 1.

Постоји и квадратна површ допунски једнака истој многоугаоној површи. Нека је, наиме, (сл. 503) троугаона површ (ABC) допунски једнака датој многоугаоној површи, нека је затим (ABC) овој допунски једнака троугаона површ с правим углом $\sphericalangle BAC'$, дакле којој је теме C' на упоредној CC' спрам AB. Нека је D средиште странице AC', затим DE права упоредна правој AB, BE права управна на AB, а њихов пресек E. Онда је $(ABDE)$ правоугаона површ која је према теореми 57.7 допунски једнака троугаоној површи (ABC'), дакле и троугаоној површи (ABC).

Нека је на дужи AB тачка F таква да је $AD=AF$, затим FG управна на AB, тачка G у пресеку са кругом коме је пречник AB. Тада је према теореми 44.10 угао $\sphericalangle AGB$ прав, дакле ABG је правоугли троугао и према томе, по Еуклидовој теореми 57.20, правоугаона површ $(ABDE)$ је допунски једнака квадратној површи над страницом AG. Тиме смо добили квадратну површ допунски једнаку троугаоној површи (ABC), дакле и датој многоугаоној површи. Тој квадратној површи је дакле мерни број 1. — Тиме је доказ ове теореме завршен



Сл. 503

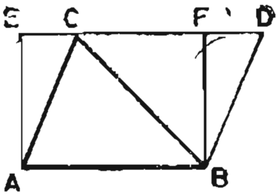
Основни значај за површине имају и следеће теореме:

Теорема 63.7. *Мерни број сваке троугаоне површи која настане кад се паралелограмска површ разложи једном својом дијагоналом, једнака је половини мерног броја те паралелограмске површи.*

Доказ. Нека је a мерни број дате паралелограмске површи, а a_1 и a_2 мерни бројеви двеју троугаоних површи реченог разлагања. Како су те две троугаоне површи подударне, према услову 2 дефиниције 62.1 је $a_1=a_2$, а према услову 3 је $a=2\ a_1=2\ a_2$, тј $a_1=a_2=a/2$.

Теорема 63.8. *Мерни број троугаоне површи једнак је половини мерног броја правоугаоне површи која има једнаку основицу и једнаку висину.*

Доказ. Према теореми 63.7 мерни број троугаоне површи (ABC) (сл. 504) једнака је половини мерног броја паралелограмске површи $(ABCD)$ која настаје кад се кроз B и C повуку упоредне страницама AB и AC, а према теореми 63.4 ова површ допунски је једнака правоугаоној површи $(ABEF)$ која настаје кад се из A и B подигну управне до праве CD, тј. правоугаона површ која има исту основицу AB и висину AE као троугао ABC. Према томе мерни број троугаоне површи (ABC) једнак је половини мерног броја ове правоугаоне површи.



Сл. 504

Теорема 63.9. *Ако је једна многоугаона површ разложена на две или више многоугаоних површи, мерни број сваке од ових многоугаоних површи мањи је од мерног броја разложене многоугаоне површи.*

Доказ. Нека је многоугаона површ π разложена на многоугаоне површи $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, а свака од ових на троугаоне површи. Тиме је и многоугаона површ π разложена на троугаоне површи. Према услову 3 дефиниције 63.1 је мерни број многоугаоне површи π једнак збиру мерних бројева тих троугаоних површи, а мерни број једне од многоугаоних површи $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ једнак је збиру мерних бројева само оних троугаоних површи које су садржане у тој многоугаоној површи, дакле мања је од мерног броја многоугаоне површи π.

4. Следећом теоремом доводи се у везу мерни број једног лика са мерним бројевима извесних дужи које му припадају.

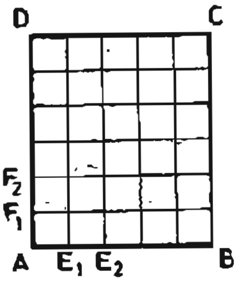
Теорема 63.10. *Нека су* a *и* b *мерни бројеви суседних страница правоугаоне површи у извесном систему мерења дужи. Тада је површина* S *те правоугаоне површи једнака производу бројева* a *и* b *са површином* S_0 *квадрата коме је страница јединична дуж, тј.*

$$S = a \cdot b\ S_0.$$

Доказ. Претпоставимо прво да су a и b цели бројеви, рецимо $a = m$, $b = n$. Нека су на правој AB (сл. 505) тачке $E_1, E_2, \dots$ с оне стране тачке A с које је тачка B, а такве да је

$$A - E_1 - E_2, \quad E_1 - E_2 - E_3, \quad \dots,$$
$$\overline{AE_1} = \overline{E_1E_2} = \overline{E_2E_3} = \dots = 1$$

и $E_m \equiv B$.



Сл. 505

Нека су, аналого, на правој AD тачке $F_1, F_2, \dots$ с оне стране тачке A с које је D, такве да је

$$A - F_1 - F_2, \quad F_1 - F_2 - F_3, \quad \dots,$$
$$\overline{AF_1} = \overline{F_1F_2} = \overline{F_2F_3} = \dots = 1$$

и $F_n \equiv D$.

Повуцимо кроз тачке E_1 $E_2, \dots$ упоредне правој AD и кроз тачке $F_1, F_2, \dots$ упоредне правој AB. Њима је правоугаона површ $(ABCD)$ разложена на квадратне површи којима су рубови следећи, међу собом подударни квадрати:

1) квадрати којима једна страница припада дужи AB и једна дужи упоредној кроз F_1. Таквих квадрата има m и њихове странице што припадају дужи AB јесу $AE_1, E_1E_2, \dots, E_{m-1}B$;

2) Квадрати којима једна страница припада упоредној кроз F_1 и једна упоредној кроз F_2. Таквих квадрата има такође m;

3) квадрати којима једна страница припада упоредној кроз F_2 и једна упоредној кроз F_3. И ових има m; итд.

Најзад, квадрати којима једна страница припада упоредној кроз F_{n-1} и једна упоредној кроз D, тј. дужи CD. Тих има такође m.

Дакле, правоугаона површ $(ABCD)$ је разложена на $m \cdot n$ квадратних површи, подударних међу собом. Како су подударне многоугаоне површи разложиво једнаке, према теореми 63.3 површина им је једнака, рецимо S_0. Према трећем услову дефиниције 63.1 мерни број правоугаоне површи $(ABCD)$ једнак је збиру мерних бројева троугаоних површи које настају кад се свака од квадратних површи разложи једном својом дијагоналом. Дакле, како тих троугаоних површи има 2 mn, а површина сваке је према теореми 63.7 једнака $S/2$ имамо

$$S = m \cdot n\ S_0 = a \cdot b\ S_0.$$

Ако један од бројева a и $б$, рецимо број a, није цео број, нека је m највећи цео број садржан у a, тј. $m<a<m+1$. Онда је посматрана правоугаона површ $(ABCD)$ разложена на mn посматраних квадратних површи и још на n правоугаоних површи којима једна страница припада упоредној кроз E_m и једна дужи BC, а које су део оних квадратних површи којима једна страница припада упоредној кроз E_m и једна упоредној кроз E_{m+1}.

Према теореми 63.9 површина ових n правоугаоних површи мања је од $n\ S_o$. Како је правоугаона површ с теменима E_m, A, F_n садржана у правоугаоној површи $(ABCD)$, а ова је садржана у правоугаоној површи с теменима E_{m+1}, A, F_{n+1}, то је површина прве правоугаоне површи мања од површине правоугаоне површи $(ABCD)$, а ова је мања од површине треће правоугаоне површи, тј.

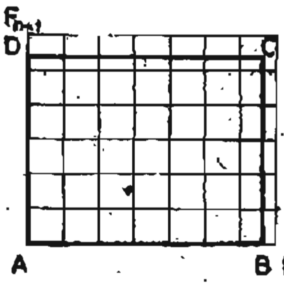
$$m \cdot n\ S_o \leqslant S < m \cdot n\ S_o + n\ S_o = (m+1) \cdot n\ S_o.$$

Слично се показује у случају кад b није цео број него $n<b<n+1$, да је

$$m\,n\ S_o < S < m\ (n+1)\ S_o,$$

а у случају кад ни a ни b нису цели бројеви (сл. 506) имамо

$$m\ n\ S_o < S < (m+1)\ (n+1)\ S_o.$$



Сл. 506

У сва три последња случаја имамо дакле образац:

$$m\ n\ S_o < S < (m+1)\ (n+1)\ S_o.$$

Располовимо тада сваку од дужи AE_1, E_1E_2, ..., E_mE_{m+1} и AF_1, F_1F_2, ..., F_nF_{n+1} и повуцимо упоредне правим AB и CD такође и кроз те нове тачке. Тиме ће свака од претходних квадратних површи бити разложена на по четири мање квадратне површи чије су странице половине страница претходних квадратних површи.

Посматрајмо ове мање квадратне површи као што смо посматрали веће. Нека је S_1 површина овакве мање квадратне површи. Тачка B је или истоветна са E_m или је између E_m и средишта E' дужи $E_m\,E_{m+1}$ или између E' и E_{m+1}, исто тако је тачка D или истоветна са F_n или је између F_n и средишта F' дужи $F_n\,F_{n+1}$ или између F' и F_{n+1}.

Саобразно томе, дуж AB садржи $2m$ или $2m+1$ страницу мањих квадрата, а дуж AD садржи $2n$ или $2n+1$ тих мањих страница. Према томе, аналогим посматрањем као са већим квадратним површима добијамо према (1):

$$2m\ 2n\ S_1 \leqslant S < (2m+1)\ (2n+1)\ S_1$$

или

$$(2m+1)\ 2n\ S_1 \leqslant S < (2m+2)\ (2n+1)\ S_1$$

или

$$2m\ (2n+1)\ S_1 \leqslant S < (2m+1)\ (2n+2)\ S_1$$

или

$$(2m+1)\ (2n+1)\ S_o \leqslant S < (2m+2)\ (2n+2)\ S_o$$

дакле, једним обрасцем за сва четири случаја:

$$(2m+m_1)\ (2n+n_1)\ S_o \leqslant S < (2m+m_1+1)\ (2n+n_1+1)\ S_o$$

где су m_1 и n_1 извесни бројеви, 0 или 1. Како је $S_1 = \frac{1}{4}\ S_o$ имамо

$$\left(m+\frac{m_1}{2}\right)\ \left(n+\frac{n_1}{2}\right)\ S_o \leqslant S < \left(m+\frac{m_1+1}{2}\right)\ \left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)\ S_o.$$

Дакле, или је

$$S=\left(m+\frac{m_1}{2}\right)\cdot\left(n+\frac{n_1}{2}\right)S_0,$$

или

$$\left(m+\frac{m_1}{2}\right)\left(n+\frac{n_1}{2}\right)S_0<S<\left(m+\frac{m_1+1}{2}\right)\left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)S_0.$$

При томе је $a=m+\frac{m_1}{2}$, $b=n+\frac{n_1}{2}$ или

$$m+\frac{m_1}{2}<a<m+\frac{m_1+1}{2},$$

$$n+\frac{n_1}{2}<b<n+\frac{n_1+1}{2}.$$

Ако поново располовимо сваку од дужи које смо добили на AB и AD као странице мањих квадрата и повучемо упоредне као досад, биће свака мања квадратна површ разложена на по четири још мање квадратне површи и сличним посматрањем добијамо сличан образац:

$$\left(m+\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{4}\right)\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}\right)S_0\leqslant S<\left(m+\frac{m_1}{2}+\frac{m_2+1}{4}\right)\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2+1}{4}\right)S_0$$

где су m_2 и n_2 опет 0 или 1. При томе је

$$m+\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{4}\leqslant a<m+\frac{m_1}{2}+\frac{m_2+1}{4},$$

$$n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{4}\leqslant b<n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2+1}{4}.$$

Настављајући овако, добијамо два коначна или бесконачна низа бројева:

$$\begin{array}{ll}
a_0=m & a_0'=a_0+1 \\[2ex]
a_1=m+\dfrac{m_1}{2} & a_1'=a_1+\dfrac{1}{2} \\[2ex]
a_2=m+\dfrac{m_1}{2}+\dfrac{m_2}{4} & a_2'=a_2+\dfrac{1}{4} \\
\text{— — — — — —} & \text{— — — — —} \\
a_\nu=m+\dfrac{m_1}{2}+\ldots+\dfrac{m_\nu}{2^\nu} & a_\nu'=a_\nu+\dfrac{1}{2^\nu}
\end{array}$$

и друга два низа

$$\begin{array}{ll}
b_0=n & b_0'=b_0+1 \\[2ex]
b_1=n+\dfrac{n_1}{2} & b_1'=b_1+\dfrac{1}{2} \\[2ex]
b_2=n+\dfrac{n_1}{2}+\dfrac{n_2}{4} & b_2'=b_2+\dfrac{1}{4} \\
\text{— — — — — —} & \text{— — — — — —} \\
b_\nu=n+\dfrac{n_1}{2}+\ldots+\dfrac{n_\nu}{2^\nu} & b_\nu'=b_\nu+\dfrac{1}{2^\nu}
\end{array}$$

тако да је за $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, затим

$$a_\nu \leqslant a < a_\nu', \qquad b_\nu \leqslant b < b_\nu' \qquad (3)$$

и

$$a_\nu b_\nu S_0 \leqslant S < a_\nu' b_\nu' S_0. \qquad (4)$$

Ако је за извесно ν, рецимо $\nu = \lambda$, испуњена једнакост $a_\lambda = a$, низ $\{a_\nu\}$ је у ствари коначан. Тада је

$$a\, b_\nu\, S_0 \leqslant S < a\, b_\nu'\, S_0, \qquad \nu = \lambda, \lambda + 1, \ldots$$

Ако је за извесно ν, рецимо $\nu = \mu$, испуњена једнакост $b_\mu = b$, имамо

$$a_\nu\, b\, S_0 \leqslant S < a_\nu'\, b\, S_0, \qquad \nu = \mu, \mu + 1, \ldots$$

Ако је пак истовремено $a_\lambda = a$, $b_\mu = b$, имамо једноставно

$$S = a_\lambda\, b_\mu\, S = a\, b\, S.$$

Кад год није ово последње, добијамо множењем одговарајућих чланова у обрасцима (3) међу собом и бројем S:

$$a_\nu\, b_\nu\, S_0 < a\, b\, S_0 < a_\nu'\, b_\nu'\, S_0, \qquad (5)$$

а из (4) и (5) следује одузимањем

$$a_\nu b_\nu S_0 - a_\nu' b_\nu' S_0 < S - ab\, S_0 < a_\nu' b_\nu' S_0 - a_\nu b_\nu S_0,$$

а отуд

$$|S - a\, b\, S_0| < |a_\nu' b_\nu' S_0 - a_\nu b_\nu S_0| = |a_\nu' b_\nu' - a_\nu b_\nu|\, S_0.$$

Како је $a_\nu' = a_\nu + \frac{1}{2^\nu}$, $b_\nu' = b_\nu + \frac{1}{2^\nu}$, имамо

$$a_\nu' b_\nu' - a_\nu b_\nu = \frac{a_\nu + b_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{2\nu}} < \frac{a_\nu + b_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^\nu},$$

дакле

$$|S - a\, b\, S_0| < \frac{1}{2^\nu}(a + b + 1),$$

па како се десна страна ове неједначине може избором довољно великог броја ν, учинити произвољно малом, имамо

$$S - a\, b\, S_0 = 0.$$

Дакле, у сваком случају је $S = a \cdot b\, S$. — Тиме је ова теорема доказана.

На основи претходне теореме можемо лако утврдити једнозначност мерног броја сваке многоугаоне површи у датом систему мерења површи.

5. Следећим теоремама утврђује се једнозначно постојање површина многоугаоних површи. При томе се у ствари ослањамо (преко теореме 63.10) о дужине. Прво треба доказати ову теорему:

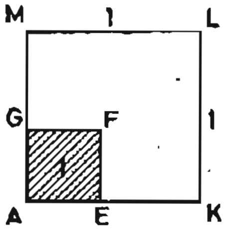
Теорема 63.11. *У датом систему мерења дужи и у датом систему мерења многоугаоних површи површина квадратне површи којој је страница јединична дуж, једнозначно је одређена.*

Доказ. Нека је $AKLM$ квадрат коме је страница јединична дуж и нека је $(AEFG)$ квадратна површ којој је мерни број 1 (сл. 507).

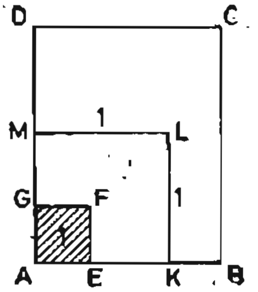
Ради израчунавања површине квадратне површи $(AKLM)$ пређимо у други систем мерења дужи, у коме је $\overline{AE} = 1$ и нека је у том систему $\overline{AK} = c$. Тада је у датом систему мерења многоугаоних површи

$$S\,(AKLM) = c^2 \cdot S\,(AEFG).$$

и то једнозначно, јер је према теореми 61.11 једнозначно $\overline{AK} = c$. Како је $S\ (AEFG)$ јединична површ, c^2 је мерни број површи $(AKLM)$. Овај је, дакле, једнозначно одређен, па је по теореми 63.1 и површина $S(AKLM)$ једнозначно одређена.



Сл. 507



Сл. 508

Теорема 63.12. *У датом систему мерења многоугаоних површи површина сваке правоугаоне површи једнозначно је одређена.*

Доказ. У коме било систему мерења дужи, мерни бројеви страница AB и AD правоугаоника $ABCD$ (сл. 508) су, према теореми 61.5 једнозначно одређени. Како је према теореми 62.11 и површина $S = S\ (AKLM)$ једнозначно одређена, према теореми 62.8 је такође површина правоугаоне површи $(ABCD)$ једнозначно одређена, наиме $S = ab\ S_0$.

Пређимо опет у онај систем мерења дужи у коме је јединична дуж страница квадратне површи $(AEFG)$ с површином једнаком јединици. У њему је $S_0 = 1$, но странице правоугаоника имају извесне друге мерне бројеве a_0 и b_0, те је $S = a_0\ b$.

Према теореми 61.15, у овом другом систему мерења дужи (у коме јединична дуж AK првог степена има мерни број c) дуж AB има дужину $a\ c$, тј. $a = a\ c$. Исто тако је $b_0 = b\ c$. Дакле, ма у ком систему мерења дужи је $a = a/c$, $b = b_0/c$, па како је у њему $S = c$ — као што је утврђено у доказу претходне теореме — имамо ма у ком систему мерења дужи

$$S = a\,b\,S = \frac{a_0}{c}\,\frac{b_0}{c}\,c^2 = a\,b\,.$$

Дакле, површина S правоугаоне површи је, независно од система мерења дужи, у сваком систему мерења површи једнозначно одређена.

Теорема 63.13. *У датом систему мерења многоугаоних површи има многоугаона површ једнозначно одређену површину.*

Доказ. Нека је многоугаона површ прво троугаона површ. Према теореми 63.8 површина троугаоне површи једнака је половини површине правоугаоне површи с истом основицом и истом висином. Како је површина правоугаоне површи у сваком систему мерења многоугаоних површи једнозначно одређена, и површина троугаоне површи је, дакле, једнозначно одређена.

Према теореми 57.14 постоји уз сваку многоугаону површ допунски једнака троугаона површ, а према теореми 62.3 имају та многоугаона површ и ова троугаона, једнаке површине. Како је површина троугаоне површи једнозначно одређена, површина те многоугаоне површи је, дакле, такође једнозначно одређена.

6. Досад смо јединицу мерења дужи и јединицу мерења многоугаоних површи сматрали саобразно дефиницијама, независно једну од друге. Ради једноставности обе те јединице бирају се зависно једна од друге, и то, претпоставивши да је јединица дужине како било изабрана, узима се да јединицу површине има она квадратна површ којој страница има дужину 1. На тај начин дужине и површине сачињавају известан шири систем. Такви системи мера разних врста величина познати су у геометрији, физици и другим наукама и називају се напросто, системима мерења. Ми ћемо их називати јединственим системима, за разлику од „система мерења“ у досадашњем, ужем смислу. Према томе можемо изрећи следећу дефиницију:

Дефиниција 63.3. Рећи ћемо да систем мерења дужи и систем мерења многоугаоних површи сачињавају *јединствен систем* мерења дужи и многоугаоних површи ако јединицу површине има квадратна површ којој страница има јединицу дужине.

7. У следећем излагању претпостављамо да дужине и површине припадају неком јединственом систему мерења (површи и дужи). Мала латинска слова обележавају при томе дужине.

Теорема 63.14. *У јединственом систему мерења дужи и многоугаоних површи површина* S *правоугаоне површи једнака је производу дужина* a *и* b *двеју његових суседних страница, тј.*

$$S = a\,b.$$

Доказ. Како је у јединственом систему мерења мерни број квадратне површи чије странице су јединичне дужи, једнак 1, из теореме 63.10 следује $S = a\,b$.

Непосредно следује ова теорема!

Теорема 63.15 *Површина* S *квадратне површи једнака је квадрату дужине* a *његове странице, тј.*

$$S = a^2.$$

Теорема 63.16. *Површина троугаоне површи једнака је половини производа дужине једне његове странице и дужине висине управне на тој страници.*

Вредност овог производа не зависи од избора те странице, тј. ако су a, b, c *дужине трију страница, а* h_a, h_b, h_c *одговарајућих висина, површина троугла је*

$$P = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}b\,h_b = \frac{1}{2}c\,h_c.$$

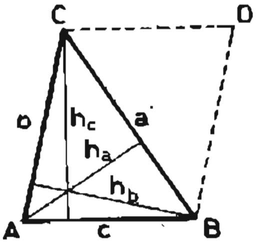
Доказ. Према теореми 62.8 површина је једнака половини површине S_1 правоугаоне површи која има једнаку основицу и једнаку висину. Ако страницу AB сматрамо основицом имамо $S_1 = ch_c$, дакле

$$S = \frac{1}{2}c\,h_c.$$

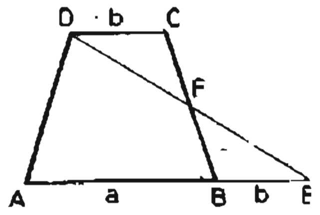
Исто тако, ако страницу AC или AB сматрамо основицом, имамо

$$S' = \frac{1}{2}b\,h_b \qquad \text{и} \qquad S'' = \frac{1}{2}a\,h_a.$$

Како је у датом систему мерења површи површина S према теореми 62.13 једнозначно одређена, сва три израза за S морају бити једнака, тј. $S' = S'' = S$.



Сл. 509



Сл. 510

Теорема 63.15. *Површина трапезне површи једнака је половини производа дужине збира његових упоредних страница с дужином његове висине, тј.*

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\,.\,h,$$

где су a *и* b *дужине упоредних страница,* h *дужина висине трапеза.*

Доказ. Нека су AB и CD упоредне странице (основице) трапеза $ABCD$ (сл. 510), тачка E на AB таква да је $BE = CD$ и $AE = AB + CD$, тачка F нека је тачка пресека дужи BC и DE. Троугли CDF и BEF су подударни, дакле трапезна површ $(ABCD)$ и троугаона површ (AED) су разложиво једнаке и према томе имају једнаке површине, па како је површина ове троугаоне површи $\frac{1}{2}(a+b)\,h$, томе је једнака и површина трапезне површи.

64. РЕКТИФИКАЦИЈА И МЕРЕЊЕ КРУГА.

1. У одређивању величине кружне линије и, тако исто, кружне површи, могу се разликовати по два проблема. Постоји чисто конструктивни проблем одређивања дужи која је по величини једнака датој кружној линији и мерење кружне линије, дакле одређивање њене дужине. Исто тако, постоји конструктивни проблем одређивања равне многоугаоне површи, напр. квадратне површи, једнаке датој кружној површи и мерење кружне површи, тј. одређивање њене површине.

Одређивање дужи једнаке датом кругу и одређивање квадратне површи једнаке датој кружној површи јесу, дословно, у првобитном смислу речи, ректификација и квадратура круга. Откако се у 17. столећу појавио инфинитезимални рачун чисто конструктивни проблем је изгубио ранији значај, јер се диференцијалним и интегралним рачуном пронашла општа метода за израчунавање дужине такорећи свих кривих линија и површине такорећи свих равних површи, омеђених тим линијама, не тражећи уопште да се претходно конструише или разматра дуж једнака кругу или многоугаона површ једнака кружној површи. Називи „ректификација“ и „квадратура“ добили су према томе значење израчунавање дужине и површине ма каквих линија и површи.

2. У Еуклидовим „Елементима“ имамо о величини круга само став да се кружне површи односе једна према другој као квадратне површи над њиховим пречницима (књига XII, став 2).

Основни значај у израчунавању дужине и површине круга има једна Архимедова расправа о мерењу круга. Расправа садржи ова три става:

1. Површина круга једнака је површини правоуглог троугла коме је једна катета једнака полупречнику а друга катета обиму круга.

2. Површина круга односи се према површини квадрата пречника приближно као 11 : 14.

3. Обим круга премашује троструки пречник за мање од 1/7 а за више од 10/71 делова пречника.

Ако обележимо дужину полупречника са r, пречника са d, обима са p, а површину круга са S имамо, дакле, по Архимеду:

1. $S = \frac{1}{2} r\, p,$

2. $S : d^2 \approx 11 : 1$

3. $\frac{10}{71} d < p - 3\, d < \frac{1}{7} d,$ тј. $3\frac{10}{71} < \frac{p}{d} < 3\frac{1}{7}.$

Размеру p/d обележавамо словом π. По Архимеду је дакле

$$3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots.$$

Тиме су утврђене прве две децимале.

Архимед је по речима Херона Александријског у једном нама непознатом спису израчунао π штавише на четири до пет децимала тачно. Пут којим до тога долази у првом спису, а вероватно и у другом, је уписивање и описивање око круга правилних многоуглова са све већим бројем страница. Тим путем можемо се приближити броју π, тј. размери p/d колико год хоћемо. Њиме ћемо и ми поћи.

3. Но да би се на тај начин измерио обим круга треба, пре свега, дефинисати шта је обим и шта дужина круга, па и кружног лука, или још боље, шта је дужина ма које линије, која има коначну и одређену дужину.

Уопштавајући низ полигона уписаних у круг, можемо дефинисати дужину лука неке криве линије као граничну вредност којој се приближује дужина које било изломљене линије уписане у тај лук, када дужине свих појединих дужи те линије опадају истовремено ка нули, а број тих дужи бескрајно расте. Та дефиниција своди се на појам интеграла.

Нека је крива у правоуглом координатном систему $Oxyz$ одређена функцијама $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ параметра t, које имају извод за вредности t за које је $a<t<b$ и нека за темена изломљене линије имамо

$$t = t_\nu, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_\nu < t_{\nu+1} < \ldots < t_n = b.$$

Тада је дужина l лука у чијим крајњим тачкама је $t = a$ и $t = b$, дата обрасцем:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[x(t_\nu) - x(t_{\nu-1})]^2 + [y(t_\nu) - y(t_{\nu-1})]^2 + [z(t_\nu) - z(t_{\nu-1})]^2}$$

при чему је $t_\nu - t_{\nu-1} < \delta_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Отуд је

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{x(t_\nu)-x(t_{\nu-1})}{t_\nu - t_{\nu-1}}\right]^2 + \left[\frac{y(t_\nu)-y(t_{\nu-1})}{t_\nu - t_{\nu-1}}\right]^2 + \left[\frac{z(t_\nu)-z(t_{\nu-1})}{t_\nu - t_{\nu-1}}\right]^2} \cdot (t \ - t_{\nu-1})$$

а према теореми о средњој вредности

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_\nu)^2 + y'(\eta_\nu)^2 + z'(\varsigma_\nu)^2} \cdot (t_\nu - t_{\nu-1})$$

где ξ_ν, η_ν, ζ припадају размаку $(t_{\nu-1}, t_\nu)$. Дакле

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt.$$

Ако је крива у равни, треба ставити $z(t) \equiv 0$ и $z'(t) \equiv 0$.

Претпостављамо, разуме се, да те граничне вредности постоје. Ако постоји коначна гранична вредност (1), лук већ има одређену дужину; ако је бесконачна или ако не постоји, лук нема одређене дужине.

1. И после Архимеда настојали су геометри да израчунају размеру p/d што тачније, но тек у новије доба продубило се наше знање о природи те размере, тј. броја π.

Споменимо да је Lambert године 1770 објавио доказ да је π ирационалан број. Тиме су отпале наде да ће се икад број π написати као разломак. Legendre је 1794 показао да је и π^2 ирационалан број, тј. да број π није ни квадратан корен рационалног броја, и наслутио да π није уопште алгебарски број, тј. корен алгебарске једначине с рационалним коефицијентима, него да је трансцендентан број. Пошто је Liouville први доказао, године 1844, постојање трансцендентних бројева, Hermite је 1873 доказао трансцендентност броја e. Најзад, Lindemann је 1882 доказао да у једначини

$$c_1 \, k^{e_1} + c_2 \, k^{e_2} + \ldots + c_m = 0$$

не могу сви коефицијенти и сви експоненти бити алгебарски бројеви и да при томе у једначини

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

која се добија из Ојлерова обрасца $e^{ix} = \cos\ x + i \sin x$, број π није алгебарски број, тј. да је трансцендентан број.

5. Обим многоугла уведен је дефиницијом 26.9. Пођимо од следеће теореме о обиму правилног простог многоугла, уписаног у круг или описаног око круга.

Теорема 64.1. *Обим сваког правилног простог многоугла, уписаног у један круг, мањи је од обима сваког правилног простог многоугла, описаног око тога круга.*

Доказ. Нека је p_m уписани, q_n описани многоугао око круга k. Према дефиницији 47.3 и теореми 31.10 све тачке уписаног многоугла p_m су у кругу k или на њему, а како су према теореми 31.12 све тачке на дирци једног круга изван тог круга, сем додирних тачака, све тачке круга k су у описаном многоуглу q_n.

Ако је, дакле, a ма која полуправа, која полази из средишта O круга k, ова има према теореми 15.15 с многоуглима p_m и q_n по једну заједничку тачку. Нека су P и Q редом те тачке. Како је тачка P у кругу k или на њему, а Q је на кругу k или изван њега, тачка P је између O и Q или се P и Q поклапају. У првом случају полуправа PQ, која полази из P и пролази кроз Q, има са q_n тачку Q, и само ту тачку заједничку, дакле тачка P је у многоуглу q_n. У другом случају тачка P је на многоуглу q_n.

Према дефиницији 26.10 многоугао p_m је обухваћен многоуглом q_n, дакле према теореми 26.22 обим многоугла p_m је мањи од обима многоугла q_n.

За постојање обима круга битне су следеће теореме:

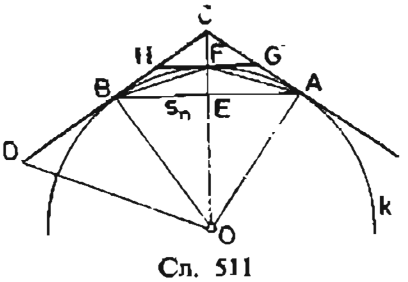
Теорема 64.2. *Какав год био природан број* m, *обим правилног простог* 2m-*тоугла уписаног у дати круг је већи од обима уписаног правилног простог* m-*тоугла.*

Обим правилног простог 2m-*тоугла описаног око круга је, напротив, мањи од обима описаног правилног* m-*тоугла.*

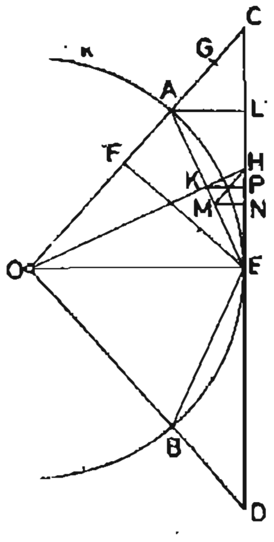
Доказ. Нека је AB страница m-тоугла p_m уписаног у круг k, са средиштем O (сл. 511), нека је затим C пресек дирки у тачкама A и B, затим D тачка на страници правилног m-тоугла q_m описаног око круга k. Нека су p_m и q_m обими оба многоугла.

Нека је F пресек дужи OC с кругом k, затим G и H пресеци дирке у F с дужима AC и BC. Тада је AF страница уписаног правилног $2m$-тоугла p_{2m}, а GH је страница описаног правилног $2m$-тоугла q_{2m}. Нека су p_{2m} и q_{2m} обими тих многоуглова.

Из $AB<AF+FB$ следује, очигледно, $p_m<p_{2m}$, а из $GC+CH>GH$ следује $AC+CB>AG+GH+HB$, а отуд, очигледно, $q_m<q_{2m}$.



Сл. 511



Сл. 512

Теорема 64.3. *Разлика између обима правилног простог многоугла с* 2^n *страница* (n = 2, 3, . . .) *описаног око датог круга и обима правилног простог многоугла с* 2^n *страница, уписаног у том кругу је за довољно велики број* n *произвољно мала дуж.*

Доказ. Нека је k круг, p_n уписани, q_n описани правилни n-тоугао ($n = 3, 4, \ldots$), O средиште круга k (сл. 512), затим AB и CD редом странице уписаног и описаног многоугла p_n и q_n.

Докажимо да разлика између обима многоугла q_n и p_n постаје мања од произвољно мале дужи кад n неограничено расте. — Нека је E средиште дужи CD, тј. AE страница уписаног $2n$-тоугла p_{2n}, F подножје управне спуштене из E на OA.

За $n = 6$ троугао OAE је једнакостран, дакле $\sphericalangle AOE = 2\ R/3$ и према томе $\sphericalangle OEF = R/3$, јер $\sphericalangle OFE = R$, дакле $\sphericalangle AOE + \sphericalangle OEF = R$. За $n>6$ је $\sphericalangle AOE<2\ R/3$, дакле $\sphericalangle OEF>R/3$ и према томе

$$\sphericalangle AOE<2\sphericalangle OEFOE \qquad (1)$$

Претпостављајући отсада да је $n>6$, нека је G тачка на полуправој FC с почетком F, тако да је $OF=FG$. У троуглу OEG је $\sphericalangle OEG=2\sphericalangle OEF$ и $EG=OE$, дакле из (1) следује на основи теореме 25.20 $EG<OG$ и отуд

$$OE<2\ OF.$$

Троугли OEF и OCE су према теореми 52.4 слични, дакле

$$OE : OF \ :: \ OC : OE.$$

Како је $OE=OA$, отуд следује према теореми 51.4

$$AF : OF \ :: \ AC : OE.$$

Но из теорема 51.5, 51.10 и 51.11 следује

$$AF : OF :: 2\,AF : 2\,OF,$$

дакле

$$2\,AF : 2\,OF \ :: \ AC : OE.$$

Како је $OE<2\,OF$, према теореми 51.5 је такође

$$AC<2\ AF. \tag{2}$$

Нека је OH управна на AE, K њен пресек са AE и H са CE, затим HM упоредна са CA, M њен пресек са AE, најзад L и N подножја управних спуштених из A и M на CE.

Како су троугли ACL и MHN слични и у сличном положају са средиштем сличности E, постоји сразмера

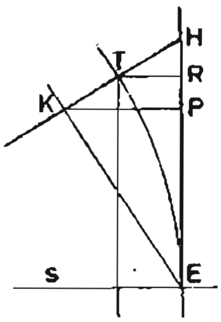
$$CL : CE \ :: \ HN : HE,$$

дакле и сразмера

$$CL : CE \ :: \ 2\ HN : 2\ HE. \tag{3}$$

Према теореми 23.9 је $AK=EK$, дакле троугли OAH и OEH су подударни, па је дуж AH управна на OC, дакле према теореми 25.18 је $AH<CH$. Но $AH=HE$, дакле $HE<CH$ и према томе $2\ HE<CH+HE$, тј. $CE<2\ HE$. На основи (3) и теореме 51.5 је такође

$$CL>2\ HN. \tag{4}$$



Сл. 513

Нека је P подножје управне спуштене из K на CE. Како су праве MN и KP упоредне и $E-M-K$, такође је $E-N-P$, па како је и $E-P-H$, јер је $EH>EK>EP$, имамо $N-P-H$, дакле $HN>HP$, а отуд према (4)

$$CL>2\ HP. \tag{5}$$

Приметимо да је дуж CL половина разлике $CD-AB$, страница описаног и уписаног многоугла. Обележимо ту дуж са u_n.

Нека је Q пресечна тачка дужи OH са кругом k, затим R и S подножја управних спуштених из T на CE и OE (сл. 513). Дуж ST је половина странице уписаног $2n$-тоугла, а HE половина странице описаног $2n$-тоугла, дакле HR је половина разлике страница тих двају многоуглова, тј. u_{2n}.

Тачкама A, C, L на троуглу OCE одговарају тачке T, H, R на троуглу OHE, дакле као што имамо однос (2), тако и

$$HT<2\ KT.$$

Из сличности троуглова KHP и THR следује сразмера

$$HP : HR \quad : : \quad HK : HT,$$

а отуд

$$(HP-HR) : HR \quad : : \quad KT : HT$$

и

$$2\,(HP-HR) : HR \quad : : \quad 2\,KT : HT,$$

па како је $2\ KT > HT$, према теореми 51.5 је и

$$2\,(HP-HR) > HR,$$

дакле $2\ HP > 3\ HR$ или

$$u_{2n} < \frac{2}{3} HP.$$

Но према (5) је $2\ HP < u_n$, дакле

$$u_{2n} < \frac{1}{3} u_n. \tag{7}$$

Разлика између обима многоуглова q_n и p_n је, очигледно,

$$d_n = 2\ n\ u_n,$$

дакле $d_{2n} = 4\ n\ u_{2n}$ и према томе, услед (7) имамо

$$d_{2n} < \frac{2}{3} d_n, \qquad n = 7,8, \ldots \tag{8}$$

Отуд имамо

$$d_{4n} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_n,$$

па како је $(2/3)^2 < 1/2$,

$$d_{4n} < \frac{1}{2}\ d_n.$$

Дакле низ дужи $\{d_n\}$ за $n = 8, 4 \cdot 8,\ 4^2 \cdot 8, \ldots$, тј. низ дужи

$$\{d_{2 \cdot 4^\nu}\}, \qquad \nu = 1,2, \ldots$$

има особину да је свака дуж, после прве, мања од половине претходне. Према теореми 35.2 такав низ дужи, ако свака садржи следећу, је основан низ, тј. ако је e произвољно мала дуж, довољно далеки чланови тога низа су мањи од e. Дакле, за довољно велико ν имамо

$$d_{2 \cdot 4^\nu} < e.$$

Тиме је доказано да је разлика између обима многоугла $q_{2 \cdot 4^\nu}$ и $p_{2 \cdot 4^\nu}$ за довољно велико ν произвољно мала.

Ако обележимо знаком $\mathfrak{s}$ обим многоугла s, према теореми 64.1 и 64.2 је

$$\mathfrak{p}_{2n} < \mathfrak{p}_{2n+1} < \mathfrak{q}_{2n+1} < \mathfrak{q}_{2n},$$

дакле за

$$d_{2n} = \mathfrak{q}_{2n} - \mathfrak{p}_{2n} \quad \text{и} \quad d_{2n+1} = \mathfrak{q}_{2n+1} - \mathfrak{p}_{2n+1}$$

имамо

$$d_{2n} < d_{2n+1}.$$

Према томе у низу многоуглова p_{2n} и q_{2n}, $n = 3,4, \dots$. разлика између обима ових многоуглова је за довољно велико n произвољно мала. — Тиме је наша теорема доказана.

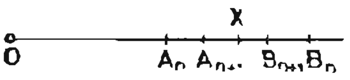
6. Сад можемо доказати следећу теорему.

Теорема 64.4. *За сваки круг постоји на датој полуправој, полазећи од њеног исходишта, једна једина дуж* $\mathbf{p}$ *тако да је обим сваког правилног простог многоугла s* 2^n *страница* ($n = 2,3, \dots$) *уписаног у тај круг, мањи од* $\mathbf{p}$, *а обим сваког правилног простог многоугла с* 2^n *страница описаног око тог круга, већи од* $\mathbf{p}$.

Доказ. Обележавајући, као претходно, претпоставимо да дужи $\mathbf{p}_{2n}$ и $\mathbf{q}_{2n}$ припадају полуправој Oa и да је $\mathbf{p}_{2n} = OA_n$, $\mathbf{q}_{2n} = OB_n$ (сл. 514). Из теореме 64.2 следује

$$OA_\mu < OA_{\mu+1}, \qquad OB_\nu > OB_{\nu+1}$$

за $\mu, \nu = 2,3, \dots$, дакле у низу дужи A_1B_1, A_2B_2, ... свака дуж садржи следећу. Сем тога, дуж $A_nB_n = \mathbf{q}_{2n} - \mathbf{p}_{2n}$. Према теореми 64.3 та дуж је за довољно велико n мања од произвољно мале дужи, дакле не постоји дуж, садржана на свим дужима A_nB_n. Према теореми 35.1 постоји једна једина тачка X, садржана на свим дужима A_nB_n и, према томе, постоји једна једина дуж $OX = \mathbf{p}$, која је већа од свих дужи $\mathbf{p}_{2n}$, а мања од свих дужи $\mathbf{q}_{2n}$.

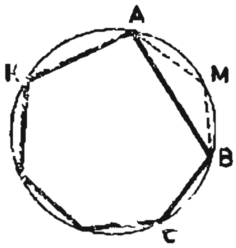


Сл. 514

У претходној теореми посматрани су само правилни многоугли $\mathbf{p}_m$, $\mathbf{q}_m$, за $m = 2^n$. У следећој теореми ослобађамо се ових ограничења.

Теорема 64.5. *За сваки круг постоји на датој полуправој, полазећи од њеног исходишта, једна једина дуж* $\mathbf{p}$ *тако да је обим сваког уписаног простог многоугла мањи од* $\mathbf{p}$ *а обим сваког описаног простог многоугла већи од* $\mathbf{p}$.

Доказ. Нека је u макакав прост многоугао, уписан у круг k, v ма какав прост многоугао описан оно круга k. Оба многоугла су испупчена, као као што се лако показује. Нека је $\mathbf{u}$ обим првога, $\mathbf{v}$ обим другога. Посматрајмо опет правилне просте уписане и описане многоугле p_{2n} и q_{2n}, задржавајући ознаке из теореме 64.4.



Сл. 515

Према теореми 64.4 је $\mathbf{u} < \mathbf{q}_{2n}$ за свако n, па како је на полуправој Oa $Ox < \mathbf{q}_{2n}$ и не постоји тачка Y тако да је и $OY < \mathbf{q}_{2n}$, према теореми 64.4 је $\mathbf{u} \leqslant OX$, тј. $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{p}$. Аналого је према теореми 64.4 $\mathbf{v} > p_{2n}$ за свако n, дакле $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{p}$.

Нека је u многоугао $ABC \dots K$ (сл. 515), M унутарња тачка оног лука $\widehat{AB}$ који не садржи остала темена многоугла u, а $\mathbf{u}_1$ обим многоугла $AMBC \dots K$. Имамо $\mathbf{u} < \mathbf{u}_1$, па како је и $\mathbf{u}_1 \leqslant \mathbf{p}$, имамо $\mathbf{u} < \mathbf{p}$ за сваки многоугао u.

Нека је v многоугао $A'B'C' \dots K'$, $\mathbf{v}_1$ обим многоугла $A'C' \dots K'$. Имамо $\mathbf{v} > \mathbf{v}_1$, па како је $\mathbf{v}_1 \geqslant \mathbf{p}$, имамо $\mathbf{v}' > \mathbf{p}$ за сваки многоугао v.

Својство дужи $\mathbf{p}$ доказано претходном теоремом, оправдава следећу дефиницију:

Дефиниција 64.3. Дуж која је већа од обима сваког многоугла уписаног у дати круг, а мања од обима сваког многоугла описаног око тог круга, називаћемо *обимом* тога круга.

Дужину обима називаћемо и дужином круга.

За обиме разних кругова постоји и ова теорема:

Теорема 64.6. *Ако су* p *и* d *обим и пречник једног круга, а* p′ *и* d′ *обим и пречник другог круга, постоји сразмера*

$$p : d :: p'\ d'.$$

Доказ. Посматрајмо опет многоугле p_{2n}, q_{2n} уписане и описане, првог круга и такве исте многоугле p'_{2n} и q'_{2n} уписане и описане, другог круга. На основи сличности многоуглова p_{2n} и p'_{2n} имамо за свако n

$$p_{2n} : d :: p'_{2n} : d',$$

дакле и с мерним бројевима

$$\overline{p}_{2n} : \overline{d} = \overline{p}'_{2n} : \overline{d}',$$

на како $\overline{p}_{2n} \to \overline{p}$, $\overline{p}'_{2n} \to \overline{p}'$, имамо и

$$\overline{p} : \overline{d} = \overline{p}' : \overline{d}',$$

а отуд $p : d :: p' : d'$.

Ради краткоће ово смо доказали прелазећи на мерне бројеве, али доказ је лако извести и остајући при самим дужима.

Према претходној теореми *обими ма која два круга сразмерни су њиховим пречницима.*

Имамо непосредно и ову теорему:

Теорема 64.7. *Размера између дужине обима и дужине пречника има за све кругове исту бројну вредност.*

По Ојлеру та бројна вредност се означава словом π. О њеном израчунавању нећемо овде говорити. Као што се зна, њена вредност је $\pi = 3{,}14159\ldots$

Теорема 64.8. *Дужина обима круга једнака је производу броја* π *с дужином његова пречника. Ако* p *означава дужину обима,* r *дужину полупречника, имамо*

$$p = 2\,\pi\,r.$$

6. Претходна посматрања се лако уопштавају на кружне лукове. После дефиниције изломљене линије уписане у један кружни лук и описане око кружног лука и дефиниције правилне, уписане или описане изломљене линије (чије странице су међу собом једнаке), могу се доказати ове теореме:

Теорема 64.9. *Збир страница изломљене линије уписане у кружни лук мањи је од збира страница изломљене линије описане око тог кружног лука.*

Теорема 64.10. *Збир страница правилне изломљене линије са* m *страница, уписане у кружни лук, мањи је од збира страница правилне изломљене линије са* 2m *страница, уписане у тај кружни лук.*

Збир страница правилне изломљене линије са m *страница, описане око кружног лука, већи је од збира страница правилне изломљене линије са* 2m *страница, описане око тог кружног лука.*

Теорема 64.11. *Разлика између збира страница правилне изломљене линије са* 2^n *страница, описане око датог кружног лука и збира страница правилне изломљене линије са* 2^n *страница, уписане у тај исти лук, је за довољно велики број* n *произвољно мала дуж.*

Затим, настављајући низ теорема као малопре доказујемо:

Теорема 64.12. *За сваки кружни лук постоји на датој полуправој, полазећи од његова исходишта, једна и само једна дуж* d *тако да је збир страница сваке уписане изломљене линије мањи од* d, *а збир страница сваке описане изломљене линије већи од* d.

Дуж d дефинишемо као дуж једнаку датом кружном луку (ректификација кружног лука), а дужину d као дужину тог кружног лука.

Основан значај имају затим теореме:

Теорема 64.13. *Дужине лукова на једном кругу сразмерне су мерним бројевима средишњих углова, који захватају те лукове.*

Теорема 64.14. *Ако је у извесном систему мерења углова мерни број опруженог угла* w, *дужина* l *кружног лука, захваћеног средишњим углом чији мерни број је* a, *износи*

$$l = \frac{a}{w}\pi r,$$

при чему је r *дужина полупречника тог круга.*

65. КВАДРАТУРА И МЕРЕЊЕ КРУЖНЕ ПОВРШИ.

1. На почетку § 64 биле су већ изнете неке напомене из историје, о „квадратури круга“ и мерењу кружне површи. Додајмо да се слично посматрање као о дужини круга јавља и о површини кружне површи. Пре свега треба дефинисати површину круга или неког дела круга (као што је кружни исечак) или још боље: површину равне површи чији руб је извесна крива линија. Површину овакве површи можемо дефинисати као граничну вредност којој се приближују површине полигонских површи омеђених, макар само с једне стране, изломљеним линијама уписаним у дотичну криву, а то се опет своди на интеграл. Ни ова гранична вредност не постоји увек. Само ако постоји, област има одређену површину.

Одређујући површину круга у смислу старе грчке геометрије, послужићемо се низом уписаних и описаних правилних полигона и добићемо површину круга као граничну вредност површина тих полигонских површи.

Тако се долази до Архимедова резултата: $S = \frac{1}{2} r\, p.$

2. Докажимо неке теореме о квадратури круга.

Теорема 65.1. *За сваки круг постоји једна једина квадратна површ* δ *чије су две странице на крацима датог правог угла, тако да је свака површ, омеђена правилним многоуглом с* 2^n *страница* (n = 2,3, . . .), *уписаним у тај круг, мања од површи* δ, *а свака површ омеђена правилним многоуглом с* 2^n *страница, описаним око тог круга, већа од површи* δ.

Доказ. Површина омеђена описаним многоуглом q_{2n} једнака је збиру површи омеђених једнокраким троуглима с врхом у средишту O круга и чије су основице странице многоугла. Дакле, једнака је троугаоној површи којој је обим q основица, а полупречник круга, r висина. Према томе површ омеђена тим многоуглом има површину

$$\frac{1}{2}\bar{q}_{2n}\cdot\bar{r}.$$

Постоји квадратна површ једнака многоугаоној површи (q_{2n}). Како $q_{2n} \to p$, такође и

$$\frac{1}{2}\bar{q}_{2n}\cdot\bar{r} \to \frac{1}{2}\bar{p}\cdot\bar{r}.$$

Дакле постоји квадратна површ којој је то површина.

Многоугаона површ (p_{2n}) једнака је пак троугаоној површи којој је p основица, а извесна дуж r_n висина; при томе $r_n \to r$. Према томе површине тих многоугаоних површи су

$$\frac{1}{2}\bar{p}_{2n}\cdot\bar{r}_n$$

и теже према $\frac{1}{2}\bar{p}\cdot\bar{r}$, дакле постоје квадратне површи којима су то површине.

Ако све квадрате првог и другог низа поставимо тако да им три темена буду на крацима правог угла, имамо следеће односе, обележавајући знаком $[s]$ квадратну површ која је једнака многоугаоној површи (s):

$$[p_4]<[p_8]<\dots<[p_{2n}]<\dots,$$
$$[q_4]>[q_8]>\dots>[q_{2n}]>\dots,$$
$$[q_{2\mu}]>[p_{2\nu}],\qquad \mu,\nu=2,3,\dots$$

и за произвољно малу површ ε у равни и довољно велико n имамо

$$[q_{2n}]-[p_{2n}]<\varepsilon.$$

Према томе постоји једна једина квадратна површ δ тако да

$$[p_{2n}]\to\delta \qquad \text{и} \qquad [q_{2n}]\to\delta.$$

Теорема 65.2. *За сваки круг постоји један једини квадрат чије две странице су на крацима датог правог угла, такав да је свака површ омеђена многоуглом уписаним у тај круг мања од површи δ омеђене тим квадратом, а свака површ омеђена многоуглом описаним око тог круга већа од квадратне површи δ.*

Доказ је аналоган доказу теореме 63.5.

Аналого дефиницији 63.3 имамо следеће две дефиниције:

Дефиниција 65.1. За квадратну површ која је већа од сваке површи омеђене многоуглом уписаним у дати круг k, а мања од сваке површи омеђене многоуглом описаним око круга k рећи ћемо да је *једнака* кружној површи (k), омеђеној кругом k.

Површину квадратне површи која је једнака кружној површи (k) називаћемо *површином кружне површи* (k) (краће, површином круга k).

Теорема 65.3. *Површина круга једнака је површини троугла коме је основица обим круга а висина полупречник.*

Доказ. Нека је a полупречник круга. Као што је у доказу теореме 63.9 показано, површине многоугаоних површи (p_{2n}) и (q_{2n}) су

$$S(p_{2n})=\frac{1}{2}\bar{\mathbf{p}}_{2n}\cdot\bar{\mathbf{a}} \qquad S(q_{2n})=\frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}_{2n}\cdot\bar{\mathbf{a}}$$

и сем тога

$$S(p_{2n})\to\frac{1}{2}\bar{\mathbf{p}}\cdot\bar{\mathbf{a}}, \qquad S(q_{2n})\to\frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}\cdot\bar{\mathbf{a}}.$$

Према дефиницији 63.4 површина кружне површи једнака је површини квадратне површи која је већа од (p_{2n}) а мања од (q_{2n}).

Теорема 65.4. *Површина* S *круга коме полупречник има дужину* r *је*

$$S = \pi r^2.$$

Доказ. Према претходној теореми је $S = \frac{1}{2} p \cdot r$, где је p дужина обима круга. Дакле према теореми 64.8 је $S = \pi r^2$.

Додајмо без доказа још две теореме о кружним исечцима:

Теорема 65.5. *Површине кружних исечака једног круга сразмерне су мерним бројевима средишњих углова који те исечке одређују.*

Теорема 65.6. *Ако је у извесном систему мерења углова мерни број опруженог угла* w, *површина* S *кружног исечка, чији средишњи угао има мерни број* a, *износи*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{w} \cdot \pi r^2.$$

66. ЗАПРЕМИНЕ ПОЛИЈЕДАРА.

Мерење запремина полиједара засноваћемо слично као што смо у §61 засновали мерење дужи и у §63 мерење површи.

Имамо пре свега две дефиниције:

Дефиниција .66.1. Ако је сваком полиједру додељен известан позитиван број тако да су испуњени ови услови:

1. постоји полиједар коме је додељен број 1,
2. подударним тетраедрима додељени су једнаки бројеви,
3. ако је неки полиједар разложен на тетраедре, број додељен том полиједру једнак је збиру бројева додељених тим тетраедрима,

рећи ћемо да је тим додељивањем образован један *систем мерења полиједара*. Број додељен коме било полиједру називаћемо *мерним бројем* тог полиједра.

Полиједар коме је мерни број 1 називаћемо *јединичним полиједром*. За све полиједре рећи ћемо да су измерени јединичним полиједром.

Запремине ћемо такође обележавати латинским словима. Запремину полиједра П обележаваћемо и знаком V(П).

Мерни број тела разликујемо од његове запремине.

Дефиниција 66.2. Нека је E у извесном систему мерења тела ма које од (међу собом једнаких) јединичних тела, а m мерни број ког било полиједра Ξ. Тада кажемо да је mE запремина или запреминска мера полиједра Ξ. За тај полиједар кажемо и да је једнак mE.

Аналого теоремама 63.1 и 63.2 доказују се следеће две теореме:

Теорема 66.1. *Разложиво једнаки полиједри имају једнаке запремине.*

Теорема 66.2. *Допунски једнаки полиједри имају једнаке запремине.*

Доносимо скраћен доказ следеће теореме:

Теорема 66.3. *Гранично једнаки полиједри имају једнаке запремине.*

Доказ. Како су полиједри П и П' гранично једнаки, могу се по дефиницији 59.2 разложити

1) П на полиједре $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, тако да је мноштво ових других полиједара садржано у произвољно малом полиједру $\Delta_и$

2) П' на полиједре $\Gamma'_1, \Gamma_2', \ldots, \Gamma_m'$ и $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta_n'$, тако да је мноштво ових других полиједара садржано у произвољно малом полиједру Δ', и да су сем тога полиједри $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ редом коначно једнаки полиједрима $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_m'$.

Према теоремама 64.2 и 64.3 запремине $V(\Gamma_1), V(\Gamma_2), \ldots, V(\Gamma_m)$ су редом једнаке запреминама $V(\Gamma_1'), V(\Gamma_2'), \ldots, V(\Gamma_m')$.

Према дефиницији 59.1 Δ се може изабрати тако да је полиједар сложен из произвољно великог броја ν полиједара подударних с Δ мањи од одређеног полиједра Ξ. Према томе

$$V(\Delta) < V(\Xi), \qquad \text{тј.} \qquad V(\Delta) < \frac{1}{\nu} V(\Xi),$$

дакле

$$V(\Delta_1) + V(\Delta_2) + \ldots + V(\Delta_n) < \frac{1}{\nu} V(\Xi),$$

$$V(\Delta_1') + V(\Delta_2') + \ldots + V(\Delta_n') < \frac{1}{\nu} V(\Xi).$$

Узмимо низ бројева n, који бескрајно расте. Тада леве стране претходних неједначина теже нули, па како је на темељу дефиниције 64.1

$$V(\Pi) = V(\Gamma_1) + V(\Gamma_2) + \ldots + V(\Gamma_m) + V(\Delta_1) + \ldots + V(\Delta_n),$$

$$V(\Pi') = V(\Gamma_1') + V(\Gamma_2') + \ldots + V(\Gamma_m') + V(\Delta_1') + \ldots + V(\Delta_n'),$$

имамо кад $\nu \to \infty$

$$V(\Pi) = V(\Pi').$$

2. Садржину теорема 64.1, 64.2 и 64.3 можемо изрећи уједно:

Теорема 66.4. *Једнаки полиједри имају једнаке запремине.*

Отуд следује на темељу теорема доказаних у § 58 и § 59 ове теореме:

Теорема 66.5. *Призме с једнаким основама и једнаким висинама имају једнаке запремине.*

Теорема 66.6. *Тетраедри с једнаким основама и једнаким висинама имају једнаке запремине.*

Теорема 66.7. *Запремина тетраедра једнака је трећини запремине тростране призме с истом основом и једнаком висином.*

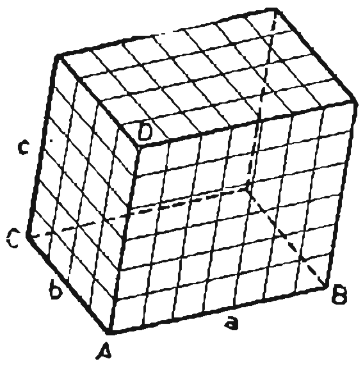
Теорема 66.8. *Запремина пирамиде једнака је трећини запремине призме с истом основом и једнаким висинама.*

3. Доказ следеће теореме аналоган је доказу теореме 63.10 у коме је доказано да је површина правоугаоника чије странице имају дужине a и b једнака $a\ b\ S_0$, где је S_0 површина квадратне површи чија страница има дужину l.

Теорема 66.9. *Нека су* a, b, c *дужине трију суседних ивица квадра у извесном систему мерења дужи. Тада је запремина* V *тога квадра једнака производу бројева* a, b, c *са запремином* V_0 *коцке чија је ивица јединична дуж тј.*

$$V = a \cdot b \cdot c\ V_0.$$

Доказ. Претпоставимо прво да су a, b, c цели бројеви, $a=m$, $b=n$, $c=p$. Нека су то дужине ивица AB, AC, AD (сл. 516).



Сл. 516

Поделимо дуж AB на m једнаких делова, дуж AC на n, а дуж AD на p једнаких делова, и кроз тачке поделе дужи AB поставимо равни упоредне с равни CAD, кроз тачке поделе дужи AC поставимо равни упоредне с равни BAD, а кроз тачке поделе дужи AD равни упоредне с равни BAC. Тим равнима квадар је разложен на $m\ n\ p$ подударних коцака чије ивице имају дужину 1, дакле услед дефиниције 64.1 (други и трећи услов) имамо

$$V=a\cdot b\cdot c\ V_o.$$

Ако a, b, c нису цели бројеви имамо, опште посматрано:

$$m\leqslant a<m+1,\quad n\leqslant b<n+1,\quad p\leqslant c<p+1.$$

Поделимо на исти начин полуправе AB, AC, AD, полазећи од заједничког исходишта A, на јединичне дужи и поставимо опет упоредне равни. Обележавајући запремину квадра чије ивице на тим полуправим имају дужине e, f, g са $V(e, f, g)$, имамо

$$V(m, n, p)\leqslant V<V(m+1,\ n+1,\ p+1),$$

дакле

$$m\ n\ p\ V_o\leqslant V<(m+1)\ (n+1)\ (p+1)V_o.$$

Расположимо ивице свих тих коцака. Добићемо коцке са запремином $V_1=\dfrac{1}{8}V_o$ и (као у доказу теореме 63.8) имамо

$$\left(m+\frac{m_1}{2}\right)\left(n+\frac{n_1}{2}\right)\left(p+\frac{p_1}{2}\right)V_o\leqslant V<\left(m+\frac{m_1+1}{2}\right)\left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)\left(p+\frac{p_1+1}{2}\right)V_o$$

где су m_1, n_1, p_1 једнаки 0 или 1.

Наставимо ли овако, добићемо низове бројева

$$\begin{array}{lll}
a_o=m & b_o=n & c_o=p\\
a_1=m+\dfrac{m_1}{2} & b_1=n+\dfrac{n_1}{2} & c_1=p+\dfrac{p_1}{2}\\
a_2=m+\dfrac{m_1}{2}+\dfrac{m_2}{2^2} & b_2=n+\dfrac{n_1}{2}+\dfrac{n_2}{2^2} & c_2=p+\dfrac{p_1}{2}+\dfrac{p_2}{2^2}\\
\text{— — — — — —} & \text{— — — — — —} & \text{— — — — — —}\\
a_\nu=m+\dfrac{m_1}{2}+\ldots+\dfrac{m_\nu}{2^\nu} & b_\nu=n+\dfrac{n_1}{2}+\ldots+\dfrac{n_\nu}{2^\nu} & c_\nu=p+\dfrac{p_1}{2}+\ldots+\dfrac{p_\nu}{2^\nu}
\end{array}$$

тако да је за свако ν

$$a_\nu\ b_\nu\ c_\nu\ V_o\leqslant V<\left(a_\nu+\frac{1}{2^\nu}\right)\left(b_\nu+\frac{1}{2^\nu}\right)\left(c_\nu+\frac{1}{2^\nu}\right)V_o \tag{1}$$

и

$$a_\nu\leqslant a<a_\nu+\frac{1}{2^\nu},\qquad b_\nu\leqslant b<b_\nu+\frac{1}{2^\nu},\qquad c_\nu\leqslant c<c_\nu+\frac{1}{2^\nu}. \tag{2}$$

Ако за извесно ν буде истовремено $a_\nu=a$, $b_\nu=b$, $c_\nu=c$, имамо у (1)

$$V=a_\nu\ b_\nu\ c_\nu\ V_o,\qquad \text{тј.}\qquad V=a\ b\ c\ V_o.$$

Ако то не буде никад, имамо бескрајан низ односа (1). Из (2) следује тада за $\nu = 1,2,\ldots$:

$$a_\nu b_\nu c_\nu V_0 < a\,b\,c\,V_0 < \left(a_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right)\left(b_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right)\left(c_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right) V_0,$$

а из (1) и (3) следује

$$|V - abc\,V_0| < \left(a_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right)\left(b_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right)\left(c_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right) - a_\nu b_\nu c_\nu.$$

Но израз на десној страни ове неједначине је

$$\frac{1}{2}\,(a_\nu b_\nu + b_\nu c_\nu + c_\nu a_\nu) + \frac{1}{2^{2\nu}}\,(a_\nu + b_\nu + c_\nu) + \frac{1}{2^{3\nu}}.$$

Кад $\nu \to \infty$ тај израз тежи нули, дакле опет је

$$V = a \cdot b \cdot c\ V_0.$$

Тиме је теорема доказана.

4. Аналого теоремама 63.9 до 63.12 доказују се следеће теореме:

Теорема 66.10. *У датом систему мерења дужи и датом систему мерења полиједара запремина* V_0 *коцке, чије висине имају дужину* 1, *једнозначно је одређена.*

Теорема 66.11. *У датом систему мерења дужи и датом систему мерења полиједара запремина сваког квадра је једнозначно одређена.*

Теорема 66.12. *У датом систему мерења дужи и датом систему мерења полиједара сваки полиједар има једнозначно одређену запремину.*

Теорема 66.13. *Сваком полиједру уопште може се доделити известан број тако да ти бројеви сачињавају систем мерења полиједара.*

5. Као што смо у § 63 дефинисали јединствен систем мерења дужи и површи, тако сад проширујемо тај систем следећом дефиницијом:

Дефиниција 66.3. Рећи ћемо да систем мерења дужи, систем мерења многоугаоних површи и систем мерења полиједара сачињавају један *јединствен систем мерења* дужи, површи и тела ако јединицу површине има квадратна површ којој страница има јединицу дужине, а јединицу запремине има коцка којој ивица има јединицу дужине.

Сад можемо изрећи следеће теореме. Прва следује непосредно из теореме 64.9:

Теорема 66.14. *У јединственом систему мерења квадар коме су* a, b, c *дужине трију суседних ивица, има запремину*

$$\mathrm{V} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \mathrm{c}_\text{\\}$$

Теорема 66.15. *У јединственом систему мерења коцка којој је* a *дужина ивице, има запремину*

$$\mathrm{V} = \mathrm{a}^3.$$

Теорема 66.16. *Запремина призме чија основа има површину* B *а висина дужину* h *је*

$$\mathrm{V} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{h}.$$

Доказ. Према теореми 58.8 призма П је допунски једнака квадру с истом основом и висином. Према теореми 66.14 запремина тог квадра је $B \cdot h$. Но према теореми 64.4 једнаки полиједри имају исту запремину, дакле је

$$V(\Pi) = B \cdot h.$$

Теорема 66.17. *Запремина пирамиде чија основа има површину* B *а висина дужину* h *је*

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h.$$

Доказ. Према теореми 59.7 пирамида Ξ је гранично једнака трећем делу призме с истом основом и једнаком висином, дакле је према теореми 66.16 и

$$V(\Xi) - \frac{1}{3} B \cdot h.$$

67. ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ВАЉКА, КУПЕ И ЛОПТЕ.

1. Површину и запремину правог кружног ваљка, праве кружне купе и лопте испитивао је још Arhimedes у свом спису „О лопти и ваљку", а у спису „О коноидима и сфероидима" посматрао је још и нека друга обртна тела. У строгом доказивању теорема служио се методом ексхаустије.

До даљег развоја тог дела геометрије долази се тек радовима Keplera (1615, „Стереометрија бурадиʻʻ) и Cavalieria (око 1630, метода „недељивихʻʻ), који претходе интегралном рачуну. До опште методе израчунавања површина кривих површи и запремина њима ограничених тела долази се тек проналаском инфинитезималног рачуна крајем 17. столећа.

Извешћемо укратко низ теорема којима се одређују површине и запремине које се односе на прав кружни ваљак, праву кружну купу, тело лопте и неке делове тела лопте. Потребна је пре свега ова дефиниција:

Дефиниција 67.1. За призму чије основе су равне многоугаоне површи уписане у круговима обеју основа извесног кружног ваљка или описане око њих рећи ћемо да је *уписана* у тај ваљак односно описана око њега.

За пирамиду чија основа је равна многоугаона површ уписана у круг основе извесне кружне купе или описана око ње, а чији врх се поклапа с врхом купе, рећи ћемо да је *уписана* у ту купу односно описана око ње.

2. Посматрајмо прво ваљак.

Дефиниција 67.2. Граничну вредност којој тежи збир површина бочних пљосни призме уписане у кружан ваљак кад број тих ивица бесконачно расте, називамо *површином омотача* тога ваљка.

Дефиниција 67.3. Граничну вредност којој тежи запремина правилне призме уписане у кружан ваљак кад ивице при основи образују правилан многоугао и кад број ивица при основи бесконачно расте, називамо *запремином* тог ваљка.

Површину омотача извешћемо само кад је ваљак прав.

Теорема 67.1. *Ако је* r *дужина полупречника круга основе правог кружног ваљка, а* h *дужина висине тога ваљка, површина* M *омотача тог ваљка је*

$$M - 2 \pi r h.$$

Доказ. Нека је s_n дужина ивице при основи, уписане n-тостране призме. Површина једне бочне пљосни је $s_n h$, дакле збир површина свих бочних пљосни је $n\, s_n h$. Кад n тежи бесконачности, обим многоугла при основи тежи обиму круга, дакле

$$ns_n \rightarrow 2\pi r$$

и према томе површина свих бочних пљосни те уписане призме тежи према $2\pi r h$.

Теорема 67.2. *Ако је* r *дужина полупречника круга основе праве или косе кружног ваљка, запремина* V *тог ваљка је*

$$V = \pi r^2 h.$$

Доказ. Површина правилног n-тоугла уписаног у круг основе је $\frac{1}{2}\, n\, s_n r_n$ где r_n тежи према r, дакле

$$\frac{1}{2}\, n\, s_n r_n \rightarrow \pi r^2.$$

Но запремина n-тостраних призама којима су то основе и h дужине висина, износе према теореми 66.16 $\frac{1}{2}\, n\, s_n r_n h$, а кад n бесконачно расте овај израз тежи ка $\pi r^2 h$.

3. Посматрајмо аналого купу.

Дефиниција 67.4. Граничну вредност којој тежи збир површина бочних пљосни пирамиде уписане у кружну купу кад ивице при основи образују правилан многоугао и кад број ивица при основи бесконачно расте, називамо *површином омотача* те купе.

Дефиниција 67.5. Граничну вредност којој тежи запремина пирамиде уписане у кружну купу кад ивице при основи образују правилан многоугао и кад број ивица при основи бесконачно расте, називамо *запремином* те купе.

Аналого теоремама 67.1 и 67.2 доказују се следеће теореме:

Теорема 67.3. *Ако је* r *дужина полупречника круга основе праве кружне купе, а* s *дужина изводнице купе, површина* M *омотача те купе једнака је*

$$M = \pi r s.$$

Теорема 67.4. *Ако је дужина полупречника круга основе кружне купе, а* h *дужина висине те купе, запремина купе је*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

4. Пошто се најпре аналого дефинише површина и запремина зарубљене кружне купе, доказују се аналого следеће теореме:

Теорема 67.5. *Ако су* r *и* r_1 *дужине полупречника кругова обеју основа зарубљене праве кружне купе, а* s *дужина њене изводнице, површина* M *омотача те зарубљене купе је*

$$M = \pi s\,(r + r_1).$$

Теорема 67.6. *Ако су* r *и* r_1 *дужине полупречника кругова обеју основа зарубљене кружне купе, а* h *дужина њене висине, запремина* V *те зарубљене купе је*

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r\, r_1 + r_1^2).$$

5. Докажимо још следеће четири теореме које ће нам бити потребне у посматрању лопте.

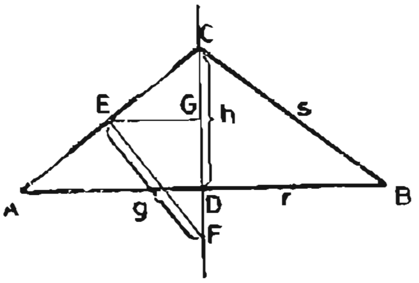
Теорема 67.7. *Нека је* h *дужина висине праве кружне купе,* g *дужина управне на изводницу, од средишта изводнице до пресека с осом купе. Површина омотача те купе је*

$$M = 2\pi g h.$$

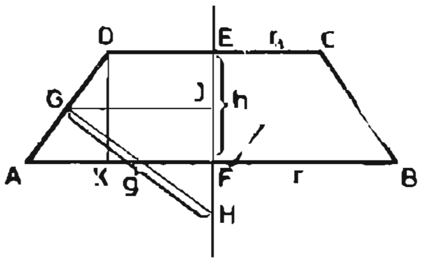
Доказ. Нека је једнакокраки троугао ABC пресек праве купе једном равни која садржи њену осу, CD та оса (сл. 517). Нека је затим E средиште дужи AC, F пресек управне подигнуте на AC у тачки E, с осом, и најзад нека је G подножје те управне подигнуте из E на осу. Имамо $EG = \frac{1}{2} AD$, а из сличности троуглова ACD и FEG следује сразмера

$$EF : EG : : AC : CD,$$

дакле $\overline{EG} \cdot \overline{AC} = \overline{EF} \cdot \overline{CD}$, тј. $\frac{1}{2} r s = g h$. Према теореми 65.3 то значи да је $2\pi g h$ површина омотача те купе.



Сл. 517



Сл. 518

Теорема 67.8. *Нека је* h *дужина висине праве кружне зарубљене купе,* g *дужина управне на изводницу, од средишта изводнице до њеног пресека с осом зарубљене купе. Тада је површина омотача те зарубљене купе*

$$M = 2\pi g h.$$

Доказ. Нека је (сл. 518) једнакокраки трапез $ABCD$ пресек такве зарубљене купе једном равни која садржи њену осу, EF та оса, G средиште дужи AD, H пресек управне подигнуте на AD у тачки G, с осом, затим J подножје управне подигнуте из G на осу. и најзад K подножје управне спуштене из тачке D на AB. Имамо

$$GJ = \frac{1}{2} (AF + DE),$$

а из сличности троуглова GHJ и DAK следује сразмера

$$GH : GJ : : AD : DK,$$

дакле $\overline{GJ} \cdot \overline{AD} = \overline{GH} \cdot \overline{DK}$, тј.

$$\frac{1}{2} s (r + r_1) = g h.$$

Према теореми 67.5 то значи да је $2\pi g h$ површина омотача.

Теорема 67.9. *Све троугаоне површи, обртно подударне с троугаоном површи* (ABC), *при чему је* AC *оса тог подударања, образују тело које се састоји из две праве купе. Нека је* S_{AB} *површина омотача купе, описаног основицом* AB *троугла* ABC, ρ *дужина одговарајуће висине тог троугла. Тада је запремина тог тела*

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\rho\, S_{AB}.$$

Доказ. Нека је D подножје управне спуштене из B на AC (сл. 519), затим r дужина дужи BD. а s дужина дужи AB. Претпоставимо да је угао ∢BAC оштар. Запремина V_{ABC} уоченог тела је према теореми 65.4

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{AD}\pm\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{CD}.$$

Знак зависи од тога да ли је угао ∢BCD оштар или туп. (Ако је прав, други члан отпада.) Дакле

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{AC}.$$

Из сличности троуглова ABD и ACE следује сразмера

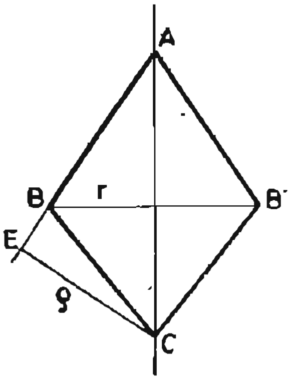
$$AB : DB : : AC : CE,$$

а отуд је $\overline{BD}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{CE}$, тј. $r\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\rho$ и даље

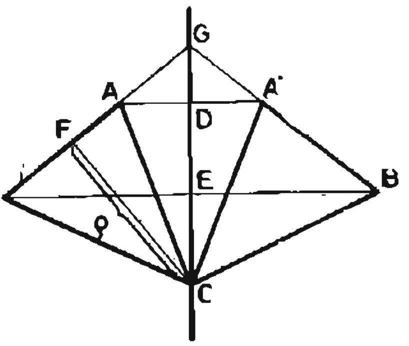
$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi r\cdot\overline{AB}\cdot\rho=\frac{1}{3}\pi r s \rho,$$

или, према теореми 65.3,

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\rho\, S_{AB}.$$



Сл. 519



Сл. 520

Теорема 67.10. *Све троугаоне површи, обртно подударне с троугаоном површи* ABC, *при чему је оса подударања права у равни троугла* ABC, *која пролази кроз теме* C *и нема других заједничких тачака с тим троуглом, образују тело. Нека је* S_{AB} *површина омотача зарубљене купе, описаног основицом* AB *троугла* ABC, *а* ρ *дужина одговарајуће висине тог троугла. Тада је запремина тога тела*

$$V_{AB}=\frac{1}{3}\rho\, S_{AB}.$$

Доказ. Нека су (сл. 520) D и E подножја управних спуштених из A и B на осу обртне подударности, затим F подножје управне спуштене из тачке C на AB, а G пресек правих AB и CD. Уочено тело и тело образовано троугаоним површима подударним с троугаоном површи (ACG), с истом осом подударности, састављају тело које је образовано троугаоним површима подударним с троугаоном површи (BCG), с истом осом подударности. Ако запремину тих трију тела обележимо редом са V_{ABC}, V_{ACG}, V_{BCG}, имамо

$$V_{ABC} = V_{BCG} - V_{ACG}.$$

Но према теореми 67.9 је

$$V_{BCG} = \frac{1}{3}\rho\ S_{BG}, \quad V_{ACG} = \frac{1}{3}\rho\ S_{AG},$$

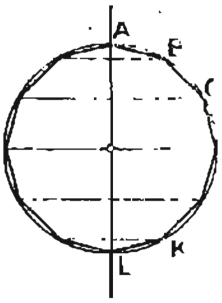
дакле

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\rho\ (S_{BG} - S_{AG}) = \frac{1}{3}\rho\ S_{AB}.$$

6. У следећој теореми реч је о обртној површи која се састоји из низа омотача зарубљених кружних купа. Помоћу те теореме одредићемо површину и затим запремину лопте.

Теорема 67.11. *Нека је у једном највећем кругу лопте уписан правилан* 2n-*тоугао. Све многоугаоне површи, обртно подударне с површи тога* 2n-*тоугла, при чему је пречник лопте, који спаја два наспрамна темена* 2n-*тоугла оса те обртне подударности, образују тело уписано у лопту и чија површ се састоји из омотача двеју правих купа и из* n − 2 *омотача правих зарубљених купа.*

Доказ. Нека је O средиште лопте (сл. 521), затим AL један њен пречник. Тачке A и L су темена уписаног $2n$-тоугла, који припада извесној равни α, која сече лопту по једном највећем кругу. Нека је изломљена линија $ABC \dots KL$ половина $2n$-тоугла, која се налази у равни α с једне стране праве AL. Све многоугаоне површи обртно подударне с $ABC \dots KL$ сачињавају тело коме се површ састоји из свих дужи које су при томе обртно подударне с AB, свих које су обртно подударне с BC, затим с CD итд., најзад с KL. Први и последњи део површи су омотачи двеју кружних купа; њихове површине су према ранијем обележавању S_{AB} и S_{KL}. Остали делови површи су омотачи од $n-2$ зарубљене купе; њихове површине су према ранијем обележавању S_{BC}, S_{CD} итд.



Сл. 521

Дефиниција 67.6. Граничну вредност површине површи уписане у лопту, образоване обртно подударним $2n$-тоуглима, посматраним у претходној теореми, када број n бесконачно расте, називаћемо *површином* те лопте (или сфере).

Теорема 67.12. *Површина лопте чији полупречник има дужину* r *једнака је*

$$S = 4\pi r^2.$$

Доказ. Нека су B_1, C_1, $\dots$, K_1 подножја управних спуштених редом из темена B, C, $\dots$, K на AL, а r_n дужине управних спуштених из O на AB, BC, $\dots$, KL од O до подножја. Према теореми 67.7 и 67.8 је

$$S_{AB} = 2\pi r_n \cdot \overline{AB_1},$$

$$S_{BC} = 2\pi r_n \cdot \overline{B_1C_1},$$

— — — — — —

$$S_{KL} = 2\pi r_n \cdot \overline{K_1L}.$$

Сабирањем левих страна следује одатле површина S_n поменуте површи:

$$S_{AB}+S_{BC}+\ \dots\ +S_{KL}=S_n,$$

а сабирањем десних страна добијамо

$$2\pi r_n\cdot(\overline{AB_1}+\overline{B_1C_1}+\ \dots\ +\overline{K_1L})=2\pi r_n\cdot\overline{AL},$$

тј.

$$S_n=4\pi r_n r.$$

Кад n бесконачно расте, тада r_n тежи према r, а по дефиницији 67.6 S_n тежи према S, дакле имамо

$$S=4\pi r^2.$$

Дефиниција 67.7. Граничну вредност запремине тела уписаног у лопту, образованог обртно подударним $2n$-тоуглима, посматраним у претходним теоремама, када n бесконачно расте, називамо *запремином* тела те лопте (или кугле).

Теорема 67.13. *Запремина тела лопте (кугле) чији полупречник има дужину* r *је*

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Доказ. Посматрајмо тела образована троугаоним површима обртно подударним с троугаоним површима (ABO), (BCO), ..., (KLO). Према теореми 67.9 и 67.10 њихове запремине су:

$$V_{ABO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{AB},$$

$$V_{BCO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{BC},$$

— — — — — —

$$V_{KLO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{KL}.$$

Одатле следује, сабирањем левих страна, запремина V_n уоченог тела:

$$V_{ABO}+V_{BCO}+\ \dots\ +V_{KLO}=V_n,$$

а десних страна

$$\frac{1}{3}r_n\ (S_{AB}+S_{BC}+\ \dots\ +S_{KL})=\frac{1}{3}r_n\ S_n,$$

тј.

$$V_n=\frac{1}{3}r_n\,S_n.$$

Кад n расте бесконачно, тада r_n тежи ка r, и S_n ка $4\pi r^2$, а према дефиницији 67.7 запремина уоченог тела уписаног у тој лопти тежи ка запремини тела те лопте, дакле

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

7. **Задржимо се најзад на површини извесних делова лопте (њене капе или калоте и појаса) и на запремини извесних делова тела лопте (његовог исечка, отсечка и слоја).**

Дефиниција 67.8. Укупност тачака лопте које су с једне стране равни која сече лопту називаћемо *капом (калотом) лопте.*

Укупност тачака тела лопте, које су с исте стране те равни називаћемо одговарајућим *отсечком тела лопте* или *отсечком кугле.*

Кружну површ по чијем рубу та раван сече лопту називаћемо *основом* те капе или тог отсечка.

Тачку у којој капу лопте додирује раван упоредна равни њене основе називаћемо *теменом* те капе (или тог отсечка). Праву која пролази кроз средиште лопте и кроз теме капе називаћемо *осом*, а дуж на оси, од темена до средишта основе називаћемо *висином* капе (или отсечка).

Дефиниција 67.9. Укупност тачака кугле које су у и на купастој површи чија основа је кружни пресек те лопте једном равни а врх средиште кугле, називаћемо *исечком кугле* или *исечком тела лопте.* Део те купасте површи који је садржан на исечку називаћемо *омотачем* исечка а део лопте који је садржан на исечку називаћемо *капом* исечка.

Дефиниција 67.10. Укупност тачака лопте, које су између двеју упоредних равни које секу лопту називаћемо *појасом (зоном) лопте.*

Укупност тачака тела те лопте, које су између тих двеју упоредних равни, називаћемо одговарајућим *слојем кугле* или *слојем тела лопте.*

Кружне површи по чијим рубовима те равни секу лопту називаћемо *основама* тог појаса или тог слоја. Праву која пролази кроз средишта обеју основа називаћемо *осом*, а дуж на оси, од једне до друге основе *висином* појаса (односно слоја).

Аналого теореми 67.11 имамо следеће две теореме:

Теорема 67.14. *Нека је у једном највећем кругу лопте, који пролази кроз теме једне њене капе, уписана изломљена линија чија два краја су теме капе и један пресек тога круга с кругом основе капе, а темена те изломљене линије су тачке које деле лук с истим крајевима (на капи) на* n *једнаких делова. Све изломљене линије обртно подударне с том изломљеном линијом, при чему је оса капе оса тог подударања, образују површ уписану у ту капу лопте и која се састоји из омотача једне купе, из* n-1 *омотача зарубљених купа и из основе те капе.*

Теорема 67.15. *Нека је на исти начин уписана изломљена линија у одговарајућем луку који припада једном појасу лопте. Све изломљене линије обртно подударне с том изломљеном линијом, при чему је оса појаса оса подударања, образују површ уписану у том појасу лопте и која се састоји из* n *зарубљених купа.*

Аналого дефиницији 67.6 имамо следеће три дефиниције:

Дефиниција 67.11. Граничну вредност површина површи уписаних у капу лопте, образованих обртно подударним изломљеним линијама, као што је описано у теореми 67.14, кад *n* бесконачно расте, називаћемо *површином* те капе лопте.

Граничну вредност запремине тела омеђеног истим површима, уписаним у капу лопте, и основом те капе, кад *n* бесконачно расте, називаћемо запремином одговарајућег отсечка кугле.

Дефиниција 67.12. Граничну вредност површина површи уписаних у појас лопте, образованих обртно подударним изломљеним линијама, као што је описано у теореми 67.15, кад n бесконачно расте, називаћемо *површином* тог појаса лопте.

Граничну вредност запремине тела омеђеног истим површима, уписаним у појас лопте, и основама тог појаса, кад n бесконачно расте, називаћемо *запремином* одговарајућег слоја кугле.

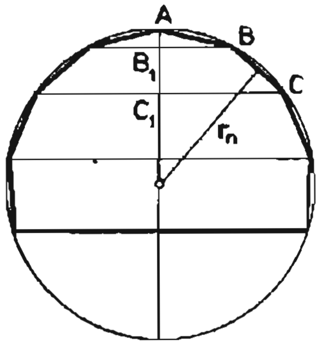
Дефиниција 67.13. Граничну вредност запремина тела омеђених површима уписаним у капу лопте, које су образоване обртно подударним изломљеним линијама, као што је описано у теореми 65.14, и омотачем купе чија основа је основа те капе, а врх средиште лопте, кад n бесконачно расте, називаћемо *запремином* исечка кугле, коме је капа та капа лопте.

У двема следећим теоремама одређује се површина капе и појаса лопте.

Теорема 67.16. *Ако је* r *дужина полупречника лопте,* h *дужина висине. једне њене капе, површина капе је*

$$S = 2\pi r h.$$

Доказ Нека је (сл. 522) полазна изломљена линија као у теореми 67.14, $ABC\dots KL$ и нека су B_1, C_1 ... L_1 подножја управних спуштених редом из B, C, ..., L на осу OA капе. Имамо, са ранијим ознакама,



Сл. 522

$$S_{AB} = 2\pi r_n \cdot \overline{AB_1},$$

$$S_{BC} = 2\pi r_n \cdot \overline{B_1C_1},$$

— — — — — —

$$S_{KL} = 2\pi r_n \cdot \overline{K_1L_1},$$

а отуд

$$S_n - S_{AB} + S_{BC} + \dots + S_{KL}$$

$$- 2\pi r_n \cdot (\overline{AB_1} + \overline{A_1C_1} + \dots + \overline{K_1L_1}),$$

тј.

$$S_n = 2\pi r_n h.$$

Кад n расте бесконачно, тада S_n тежи ка S, а r_n тежи ка r, дакле имамо

$$S = 2\pi r h.$$

Слично се доказује следећа теорема:

Теорема 67.17. *Ако је* r *дужина полупречника лопте,* h *дужина висине једног њеног појаса, површина појаса је*

$$S = 2\pi r h.$$

Докажимо још ове две теореме о запремини.

Теорема 67.18. *Ако је* r *дужина полупречника лопте,* h *дужина висине капе једног исечка лопте, запремина тог исечка је*

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Доказ. Посматрајмо (сл. 522) опет тело образовано троугаоним површима, обратно подударним с троугаоним површима (ABO), (BCO), . . . , (KLO). Према теореми 67.9 и 67.10 њихове запремине су

$$V_{ABO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{AB},$$

$$V_{BCO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{BC},$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$V_{KLO}=\frac{1}{3}r_n\ S_{KL}.$$

Отуд је

$$V_n=V_{ABO}+V_{BCO}+\ \dots\ +V_{KLO}$$

$$=\frac{1}{3}r_n\ (S_{AB}+S_{BC}+\ \dots\ +S_{KL}),$$

тј.

$$V_n=\frac{2}{3}\pi r_n^2 h.$$

Кад n бесконачно расте, тада V_n тежи ка V и r_n тежи ка r, дакле имамо

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Теорема 67.19. *Ако је* r *дужина полупречника кугле,* h *дужина висине једног њеног отсечка, запремина тог отсечка је*

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi \mathrm{h}^2(3\mathrm{r}-\mathrm{h}).$$

Доказ. Посматрајмо исечак лопте с истом капом. Ако је $h<r$, отсечак је део исечка, овај пак састављен из тог отсечка и купе с истом основом и висином дужине $r-h$. Дужина полупречника основе је

$$\rho=\sqrt{r^2-(r-h)^2},$$

а

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{1}{3}\rho^2(r-h),$$

а отуд је

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3\,r-h). \qquad (1)$$

Ако је $h>r$, исечак је део отсечка и имамо

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h+\frac{1}{3}\pi\rho^2(h-r),$$

а отуд опет добијамо једначину (1).

◆