UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Miloljub Albijanić

APSTRAKCIJA I PRIMENA MATEMATIČKE ANALIZE U NASTAVI NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, MMXVI

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Miloljub Albijanić

ABSTRACTION AND APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN TEACHING ON TECHNICAL FACULTIES

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, MMXVI

PODACI O MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE

Mentor

prof. dr Miodrag Mateljević,
redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu i
dopisni član SANU

Članovi komisije

prof. dr Miodrag Mateljević,
redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu i
dopisni član SANU

prof. dr Gradimir Milovanović
redovni član SANU

prof. dr Miloš Arsenović
redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

Datum odbrane

SADRŽAJ

REZIME

Osnovni koncept rada jeste povezanost apstraktne teorije i primenjene matematičke analize u univerzalnom matematičkom sistemu. Matematika je doživela veliku praktičnu primenu, na primer, primenu matematičke statistike, numeričke analize, primene u elektrotehnici, doprinos razvoju računarstva i dr. Istovremeno, u naučnom pogledu, uzdigla se do neslućenih apstrakcija (topološki prostori, vektorski prostori i drugo). Zbog ovih činjenica neophodno je unapređivati nastavu matematičke analize na tehničkim fakultetima ali i same metode nastave.

Rad sadrži teorijsko i empirijsko istraživanje. Teorijsko istraživanje rasvetljava pojmove apstrakcije i primene i daje primere iz sledećih nastavnih tema: Lagranžova teorema, konveksnost i posledice; Tejlorova formula; Hardijev pristup za izračunavanje površine ravne figure; Furijeovi redovi i primene; Banahova teorema o fiksnoj tački i primene. Empirijsko istraživanje sastoji se iz dva dela: upitnika i testa. Ovo istraživanje otkriva kako odnos teorije i primene doživljavaju studenti, kako vide nastavu matematike i koja nastavna sredstva koriste. Istraživanje otkriva i kako studenti rešavaju jednostavne probleme i koju vrstu zadataka uspešnije rešavaju.

Uzorak čini 429 studenata elektrotehnike, građevine i mašinstva za Upitnik i 450 studenata istih fakulteta za Test. Studenti koji su učestvovali u istraživanju pohađaju Univerzitet u Beogradu, Univerzitet u Novom Sadu i Univerzitet u Nišu.

Rezultati istraživanja su potvrdili da studenti tehničkih fakulteta imaju pozitivan odnos prema matematici i da njen značaj vide kroz primenu, odnosno njenu upotrebnu vrednost. Studenti imaju jasno definisane stavove o tome da je dobro predavanje nastavnika ono koje je razumljivo, razgovetno i koje motiviše studente da u njemu učestvuju. Ističu značaj primera koji imaju elemente primene. Vizuelna prezentacija povećava uspešnost rešavanja zadataka. Istraživanje pokazuje da studenti nisu stekli veštinu da znanje iz matematičke analize primene u rešavanju zadataka i problema.

Teorijskim rasvetljavanjem pojmova apstrakcije i primene, a zatim prikazom pet tema matematičke analize, potvrđeno je da su apstraktna teorija i primenjena matematička analiza međusobno povezane i objedinjene u univerzalnom matematičkom sistemu.

Na osnovu nalaza formulisane su preporuke koje se odnose na inovativne pristupe u nastavi kao što su planiranje nastave i unapređivanje sadržaja, postavljanje pitanja, inteligentni pogled, poboljšanje predavanja i korišćenje nastavnih sredstava.

Na ovaj način potvrđuje se da metodički dobro postavljena nastava pomaže boljem razumevanju odnosa između apstrakcije i primene matematičke analize.

Ključne reči: Matematička analiza, nastava, apstrakcija, primena, Lagranžova teorema, konveksnost, Furijeovi redovi, fiksna tačka.

RESUME

The main concept of this thesis is the connection of abstract theory and applied mathematical analysis in the universal mathematical system. The Mathematics is being applied practically in great number of cases, for example, in the application of mathematical statistics, numerical analysis, application in electrical engineering, contribution to computer developing etc. At the same time, in scientific perspective, it reached the level of incredible abstractions (topological spaces, vector spaces et al.). Due to these facts, it has become necessary to advance the teaching of mathematical analysis in technological universities, but also the very methods of teaching as well.

This thesis contains both a theoretical and an empirical research. The theoretical research sheds light onto the notions of abstraction and application and gives examples from next teaching subjects: Lagrange's Theorem, Convexity and Consequences. Taylor's Formula. Hardy's Approach to Calculating Surfaces of Flat Shapes. Fourier's Series and their Application. Banach Fixed-Point Theorem and its' Application. The empirical research consists of two parts: a questionnaire and a test. This research shows how the relation between theory and application is seen by students, how they perceive the teaching of mathematics and which learning instruments they use. The research also shows how students solve simple problems and which type of problems they solve more sucessfully.

The sample consists of 429 students of electrical engineering, construction and mechanical engineering for the Questionnaire and 450 students of the same universities for the Test. Students that participated in the research are studying at the University of Belgrade, University of Novi Sad and University of Niš.

The results of the research confirmed that students from technological universities have a favourable attitude towards mathematics and that they see its significance in its application, i.e. in its use value. Students have clearly defined attitude on the idea that a good lecture by a professor is one which can be understood, which is well articulated, and which motivates students to take part in it. They point out the significance of examples that have elements of application. Visual presentations also enhance the success in solving problems. The research shows that students did not acquire the skill to apply their knowledge of mathematical analysis in solving tasks and problems.

Theoretical clarification of notions of abstraction and application, followed by a displayfive topics of mathematical analysis confirm that abstract theory and applied mathematical analysis are interconnected and conjoint in the universal mathematical system.

On the basis of results recommendations are defined concerning innovational approaches to teaching, such as planning the lectures and meliorating the contents, asking questions, and also an intelligent prospect, lecture improvement and learning instruments application.

This way, it is confirmed that a methodically well organized lecture helps a better understanding of the relation between abstraction and application of mathematical analysis.

Key words: mathematical analysis, lectures, abstraction, application, Lagrange's theorem convexity, Fourier's series, fixed point.

UVOD

U dvadesetom veku matematika je imala veliku primenu – matematička statistika, računari, primene u elektrotehnici, pa sve do telekomunikacija i svemirskih letelica. Sa druge strane, isti period obeležen je apstrakcijom kakvu svet nije video. Na primer vektorski i topološki prostori. Područja gde se izmene u nastavi relativno brzo prate (ili bi tako trebalo da bude) jesu, na primer, tehničke i medicinske nauke. Zaostajanje u tim oblastima znači manje mogućnosti primene u očuvanju zdravlja ili života ljudi. Modernizacija tehnologije zahteva hitnu modernizaciju fundamentalnih nauka, odnosno matematike i egzaktnih i prirodnih nauka. Tako nas put vodi ka modernizaciji i same nastave.

Problem istraživanja predstavlja procena na koji način apstraktna matematička teorija utiče na primenu i kako se nastava može oplemeniti i unaprediti razumevanjem ovih pojmova. *Predmet istraživanja* je nastava matematičke analize na tehničkim fakultetima – odnosno elektrotehničkim, građevinskim i mašinskim fakultetima u Srbiji. Istraživanje odnosa između apstrakcije i primene matematičke analize veoma je značajno, aktuelno i interesantno jer obuhvata teorijski pristup i razjašnjavanje pomenutih pojmova, zatim neposredan uvid u način izvođenja nastave. Istraživanje može da doprinese poboljšanju izvođenja nastave i primene matematičke analize u nastavi.

Rad je utemeljen na dosadašnjim dostignućima naučnih stvaralaca.

Dekart je na veličanstven način povezao geometriju i algebru. Ideja uvođenja koordinata kojima se predstavljaju parovi brojeva otvorila je mogućnost crtanja grafika funkcija. U nastavi to je danas najbolji način vizualizacije teorije. Dekart smatra da je *istina ono što mi shvatimo vrlo jasno i vrlo razgovetno*. Otuda i njegov prvi princip filozofije *mislim, dakle jesam* (R. Dekart, 1636, *Rasprava o metodi* sa dodatkom *Geometrija*).

Slavni matematičari, **Njutn** i **Lajbnic**, podarili su čovečanstvu infinitezimalni račun, diferenciranje i integraciju, čiji zajednički naziv je *kalkulus*. Diferenciranje pogodne krive koje dovodi do vrednosti nagiba te krive a integracija do površine ispod te krive donose veliki matematički napredak. Njutn je svoje rezultate opisao u rukopisu *De Methodis Serierum Fluksonum* 1671, ali ga objavljuje tek 1711. Lajbnic svoje otkriće objavljuje u delu *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, 1684. Činjenice da su istovremeno došli do otkrića, a nezavisno jedna od drugog govori u prilog stavu Platonista da u *prirodi sve postoji samo još nije otkriveno*. Na ovaj način izgrađen je temelj moderne matematičke analize. Dalji razvoj teorije matematike uzdigao se u neslućene apstraktne visine ali i primene. Diferencijalni i integralni račun su temelj i ovog rada. Pisanje matematičkog teksta zahteva jednostavne simbole, a Lajbnic nam je podario oznake d za diferencijale i $\int$ za integrale. Njegove reči to jasno saopštavaju. „Sve više sam uveren u korisnost i ozbiljnost ove opšte nauke i vidim da je vrlo malo ljudi shvatilo njene razmere. Ta se karakteristika sastoji od određenog pisma ili jezika. Neznalica neće moći da upotrebljava to pismo ili će u pokušaju da se njime služi postati učen“.

Kako je rekao Kant, *lepota je najviše dobro*. Ta rečenica me je posebno inspirisala da razmišljam o matematičkoj apstrakciji i primeni koja sadrži svoju unutrašnju lepotu, sklad i harmoniju. Često sam postavljao pitanje, koju teoremu možemo smatrati lepom? Smatram da **Lagranžovu teoremu** krasi lepota. Ako se posmatra zajedno niz teorema: Rolova – Lagranžova – Tejlorova doživljava se jedan objektivan osećaj matematičkog uzdizanja. Kod prve, u određenoj tački, prava paralelna x-osi dodiruje krivu. Kod druge, to je opštije, prava paralelna sečici dodiruje krivu i kod treće, još opštije, kriva dodiruje drugu krivu. Radi se o jednom elegantnom nizu generalizacija, a tema su *dodiri*. Lagranžova teorema daje i izuzetnu vizuelnu predstavu. O lepoti neke teoreme može suditi samo onaj matematičar čije je znanje i razumevanje visoko iznad iskaza teoreme, jer lepota se uzdiže i otkriva iznad znanja i razumevanja. Ovde valja dodati da je sam Lagranž, bez obzira na veliko deo i slavu bio skroman, blagorodan i prijatan čovek. Posebnu inspiraciju za dublje izučavanje teorema diferencijalnog računa stekao sam u toku čitanja knjige *Les Structures Fondamentales de L'analyse, livre IV, Fonctions D'une Variable R'eelle*, koju su napisali **N. Bourbaki**, čuvena grupa francuskih matematičara, poznata pod pseudonimom *Burbakisti*. Po mom mišljenju to je i najbolja knjiga iz serije, koju je ova čuvena grupa napisala. Problemi koji su rešeni u radu delom su formulisani u ovoj knjizi. Valja istaći da je interesovanje za integralni oblik ostatka kod Tejlorovog polinoma nastalo čitanjem ovog dela.

Matematički tekst koji je napisan jednostavno i jasno lakše se čita i razume. U tom smislu uzor je bio **Hardi**, profesor matematike na Univerzitetu Kembridž, i njegovo delo *A Course of Pure Mathematics* (1945). Jednostavni pedagoški pristup na mene je ostavio trajni uticaj. Hardi o lepoti matematike kaže: *Matematičar je, kao i slikar ili pesnik, kreator modela... Matematički modeli moraju biti lepi.*

Prilikom razmišljanja o apstrakciji i primeni matematičke analize važno je istaći primer koji ove pojmove ilustruje. **Furije** i njegovo delo *Théorie Analytique de la Chaleur* iz 1822, postali su izvor svih savremenih metoda matematičke fizike, koje se odnose na rešavanje parcijalnih jednačina pri datim uslovima. On je ustanovio da se određena funkcija može izraziti trigonometrijskim redom. Apstraktno uzdizanje teorije Furijeovih redova ali i primene izvođenjem jednačine žice koja treperi prenose nam **A. Deitmar**, 2004, *A First Cource in Harmonic Analysis*; **Stein E.**, **Rami Shakarchi**, 2002, *Fourier Analysis, an introduction*, Princeton University Press i А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, 1977, Уравнения математической физики. Naizgled apstraktna teorija potekla je od fizičkog problema i pokazuje nam čvrstu povezanost matematike i prirode.

Važnu ulogu u kreiranju stila pisanja podarili su mi **Zorič**, **Fihtengoljc** i **Kudrjavcev**. Posebno ističem njihova dela: В. А. Зорич, Математический анализ, часть I и II; Г. М. Фихтенгољьц, Курс диференциальното и интеграљьного исчиснения, том I, II и III. Л. Д. Кудрявцев, Математический анализ, том I и II. Kod Zoriča posebno dobro je obrađena konveksnost a Fihtengolje me je naučio da obratim pažnju na detalje.

Poseban uticaj na mene i inspiraciju za pisanje rada imali su matematičari *Beograske matematičke škole*. Kada pročitate da je profesor Velike škole Dimitrije Nešić studentima prenosio *ljubav prema predmetu, imao jasno izlaganje, usmeravao je pažnju, učio ih da razlikuju glavno od sporednog, uživeo se u nauku koju je predavao* onda vas neće iznenaditi da je njegov naslednik **Mihailo Petrović**. Petrović je doktorirao pred komisijom u kojoj su bili Ermit, Pikar i Penleve. Slušao je predavanja kod Poenkarea. Svoje znanje preneo je grupi naučnika koja je zatim doktorirala kod njega i tako nastaje *Beogradska matematička škola*. To su **Karamata**, **Pejović**, **Mitrinović** i mnogi drugi. Zbog toga sam želeo da u radu prikažem nejednakosti Petrovića i Karamate jer se odnose na konveksne funkcije kojima sam se bavio. Sa druge strane Petrović se bavio diferencijalnim jednačinama i primenama, a Karamata više teorijskom matematikom što je u skladu i sa temom ovog rada.

Pripadnici Beogradske matematičke škole danas, među kojima su profesori Miodrag Mateljević (dopisni član SANU), Gradimir Milovanović (redovni član SANU), Miloš Arsenović, Miloš Čanak, Jovan Vukmirović i Dobrilo Tošić, naročito su me motivisali da pišem ovaj rad.

Profesor **Miodrag Mateljević** osnovao je seminar i predvodio čuvenu grupu, za koju piše u knjizi posvećenoj Larsu Alforsu u izdanju Američkog matematičkog društva: „Mnogo godina, sva poznata jedinstveno ekstremalna preslikavanja imala su oblik Teichmuller-ovih preslikavanja ali sa kvadratnim diferencijalom koji u opštem slučaju nije integrabilan. U svom radu Grupa (koju je predvodio M. Mateljević), *dramatično je promenila situaciju u ovoj oblasti*."[1]

Profesor Mateljević je posvećen naučnim radovima, seminaru, ali i metodici nastave matematike. Uticao je na mene da se posvetim pedagoškom pristupu i detaljima kao što

[1] American Mathematical Society, University Lecture Series, Volume 38, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Second Edition, **Lars V. Ahlfors** with additional chapters by C. J. Earle and I. Kra, M. Shishikura, J. H. Hubbard.

Božin. V., Lakić. N., Marković. V., Mateljević, M., *The unique extremality*. Journal d'Analyse 75(1998), pp 299-338.

su *Uvođenje trigonometrijskih funkcija, Izoperimetrijska nejednakost, konveksnost, kompleksne funkcije* i dr. Posebno ističem knjige *Kompleksna analiza*, tom I i tom II. Mnogi elementi zajedničkog rada utkani su u ovaj rad.

U okviru Beogradske matematičke škole značajno mesto zauzima i grupa okupljena oko Dragoslava Mitrinovića. Tu posebno izdvajam profesore **Gradimira Milovanovića** i **Dobrila Tošića**. Ako je grupa oko Matematičkog fakulteta usmerena više na teoriju za ovu grupu se može reći da je više fokusirana na primenjenu matematiku. Moram da naglasim da su me profesori Gradimir Milovanović i Miodrag Mateljević naučili kako se piše naučni rad, u duhu Mitrinovićeve edicije: *Uvođenje mladih u naučni rad*. Oni su me ohrabrili i podsticali da napišem i ovaj rad. U tom smislu, želim da izdvojim knjigu G. V. Milovanovića, *Numerička analiza i teorija aproksimacija*, monografija iz 2014.

Sa profesorom Dobrilom Tošićem zajednički sam napisao udžbenik *Elementi diferencijalnog i integralnog računa* 2012. godine. Naša zajednička saradnja odvija se u duhu Njutnovih reči: *posvećenost učenju i radu su najveće nade čovečanstva*.

Profesor **Miloš Arsenović** uputio me je u literaturu, na pristup i probleme koje su razvijali Burbakisti. Njegovi pedagoški saveti su unapredili pisanje ovog rada, a njegov rukopis sa problemima Burbakista doprineo je da ga detaljno proučim i rešavam.

Profesor **Jovan Vukmirović** mi je uzor od prvih studentskih dana. Razgovori koje sam u toku izrade vodio sa njim prevazišli su dimenzije ovog rada. Naročito smo diskutovali o Supremumu, Lagranžovoj teoremi, Nejednakostima i Fiksnoj tački. Mnogo sam iz ovih razgovora naučio. Njegov pedagoški princip je da se *kroz zadatke predmet najbolje nauči*. Knjige koje su uticale na kvalitet rada su: J. Vukmirović, *Matematička analiza I, zbirka zadataka* i M. Ašić, J. Vukmirović, *Zbirka zadataka iz matematičke analize II*.

Profesor **Miloš Čanak**, sa svojim knjigama *Matematika i muzika* i *Put u petu dimenziju*, uneo je dodatnu motivaciju da se bavim filozofijom matematike. Njega inspiriše lepota matematike i uticao je da pojedine matematičke pojmove doživim, na primer, Tejlorov polinom poredim sa stepenom dodira i bliskosti. U ovaj rad uneo je duh koji nose magijske stepenice posvećenja.

Na osnovu teorijskog istraživanja odnosa između apstrakcije i primene očekuje se pomak u razumevanju matematičkih pojmova i njihove praktične primene. Studenti su svojim odgovorima, u okviru empirijskog istraživanja, označili i probleme u procesu izvođenja nastave i metodičkom pristupu. Rešavanje zadataka ukazuje na teme koje zahtevaju bolji metodički pristup i bolje razumevanje primene matematičke analize. Istraživanje je pokazalo da postoji nerazumevanje odnosa između primene matematičke analize i teorijskog predavanja na času; da postoji problem sa korišćenjem literature i da se za pripremu ispita najviše koriste beleške i zbirke zadataka, a da se druga literatura gotovo ne koristi. Pedagoški rad je zasnovan na entuzijazmu pojedinaca i nema osmišljenog puta za približavanje matematičke teorije.

Istraživanje ima dva cilja: *naučni* i *društveni*. Naučni cilj jeste stvaranje nove naučne informacije koja doprinosi čovekovom razvoju, kao i stvaranju novog pedagoškog iskustva. Očekivani rezultat jeste jedan od pravaca unapređivanja metodike nastave matematike. Društveni cilj je primena rezultata istraživanja, doprinos razumevanju odnosa apstrakcije i primene; ali i unapređivanje metodike nastave matematike na tehničkim fakultetima. Ovo istraživanje takođe daje inspiraciju i podsticaje za dalja istraživanja u oblasti metodike nastave matematike na drugim fakultetima i univerzitetima.

Generalna hipoteza. Metodički dobro postavljena nastava matematike pomaže boljem razumevanju odnosa između apstrakcije i primene matematičke analize.

Generalna hipoteza se operacionalizuje preko *posebnih hipoteza*:

(i) Studenti tehničkih fakulteta imaju pozitivan odnos prema matematici.
(ii) Studenti tehničkih fakulteta matematici prevashodno dodeljuju upotrebnu vrednost.
(iii) Predavanje nastavnika je dobro ukoliko je razumljivo, razgovetno i ako motiviše studente da u njemu učestvuju. Istovremeno, predavanje sadrži primere sa elementima primene.
(iv) Matematička literatura je važno nastavno sredstvo ali se ona, osim zbirki zadataka koje služe za neposredno pripremanje ispita, ne koristi.
(v) Uspešnost u rešavanju zadataka ne zavisi od vrste fakulteta (ETF, GF, MF).
(vi) Vizuelna prezentacija zadataka povećava uspešnost rešavanja problema.
(vii) Studenti nisu stekli veštinu da znanje iz matematičke analize primene u rešavanju zadataka i problema.
(viii) Apstraktna teorija i primenjena matematička analiza međusobno su povezane i objedinjene u univerzalnom matematičkom sistemu.

Proces naučnog istraživanja sproveden je u nekoliko koraka:

(1) Na samom početku naučnog istraživanja formirano je *mišljenje* da metodika nastave ima važnu ulogu u razumevanju matematičkih pojmova i teorije. Zatim je izgrađena *ideja* da je veoma važno istražiti odnos između apstrakcije i primene matematičke analize. Na osnovu prethodnog znanja, takvim rasuđivanjem, postavljen je *problem*: kako u nastavi matematičke analize metodički prevazići ovu podelu i povezati apstrakciju i primenu?
(2) Induktivnom metodom prikupljena je naučna građa, izvršena je analiza i putem zaključivanja došlo se do radne pretpostavke – *hipoteze*, koja je utemeljena u prethodnom naučnom saznanju. Hipoteza je pomoću posebnih hipoteza podvrgnuta proveri.
(3) U radu se koriste kvalitativne i kvantitativne metode prikupljanja i obrade podataka. U analizi filozofskog utemeljenja matematike preovlađuje induktivna metoda, a za razmatranje određenih tema u nastavi matematike više se koristi deduktivni metod. Podaci u okviru empirijskog istraživanja obrađuju se statističkim metodama. Istraživanje je multidisciplinarno i obuhvata matematiku,

> filozofiju, pedagogiju i psihologiju. Sintezom dobijenih rezultata izveden je zaključak. Istraživanje je obavljeno na elektrotehničkim, građevinskim i mašinskim fakultetima u Novom Sadu, Beogradu i Nišu, u periodu od oktobra do decembra 2013. godine. Uzorak je na nivou druge i treće godine studija tehničkih fakulteta u Srbiji (uzeti su u obzir studenti koji su položili ispit koji obuhvata diferencijalni i integralni račun funkcija jedne promenljive. Anketom je obuhvaćeno 429 studenata, a zadatke je rešavalo 450 studenata.

Doktorski rad *Apstrakcija i primena matematičke analize u nastavi na tehničkim fakultetima* sastoji se od pet delova.

Matematika treba da odgovori na dva povezana pitanja. Imajući u vidu da uključuje merljive objekte, postavlja se pitanje kako se ona uzdiže do nivoa univerzalnosti, sigurnosti i nužnosti? Sa druge strane, kako se objašnjava sposobnost čiste matematike da opisuje i dođe u kontakt sa prirodnim svetom? Prvo pitanje vodi ka filozofiji matematike koja objašnjava matematičko rezonovanje. Drugo pitanje povezano je sa primenom matematike. To je povezanost između matematičkih osobina prirodnog sveta i našeg saznanja i spoznaje same matematike.

Euklidska geometrija je prvi primer formalizovanog deduktivnog sistema i postala je uzor za sve takve sisteme. Ima i snažnu estetsku privlačnost. Najjednostavniji od svih beskonačnih objekata je sistem prirodnih brojeva, koji označavamo sa $\mathbb{N}$, što potiče od reči *numerus*. Ukoliko skup $\mathbb{N}$ sadrži neki broj, on onda sadrži i sledbenika. To je prirodni proces. Zbog ovih činjenica u radu je dat uvid u Euklidov geometrijski sistem, a prikazane su i Peanove aksiome skupa prirodnih brojeva.

Ovo izlaganje pomoglo je da se napravi uvod u filozofsko razmatranje pojma apstrakcije, time započinje naše penjanje ka višim nivoima, ka opštosti. Svedoci smo činjenice da je takvo penjanje u matematici sasvim uobičajeno. Na primer, kada kažemo da je operacija sabiranja komutativna, to se odnosi na prirodne, cele, racionalne, realne ili kompleksne brojeve. U radu se zatim upoznajemo sa tri škole matematike: platonizam, formalizam i konstruktivizam. Otvara se čuveno pitanje da li po prirodi matematički pojmovi postoje nezavisno od našeg mišljenja? U daljem razmatranju rasvetljava se i pojam intuicije u matematici.

Penjanje stepenicama ka višim nivoima apstrakcije otvara pitanje: da li se odozgo *bolje vidi*? Odnosno, kada se matematika uzdigne do metafizičkih visina, ima li primenu u fizici ili prirodi uopšte? Ideja je da se pokaže da je ovaj put simboličkih stepenica dvosmeran, odnosno da su apstrakcija i priroda povezane matematičkim univerzalnim sistemom.

Čovek u svim vremenima i podnebljima nosi sa sobom istovetno duhovno stanje – znanje o smislu života, o prirodi, o duši, o duhu, o Bogu. Čovekovo biće počiva na sistemu drevnih istina. Na ovoj, a priori duhovnoj bazi izgrađeni su nauka, umetnost, religija, društvo, poezija, moral. Dosadašnje saznanje – baština – predstavlja temelj kulture. Matematika, kao vodeća nauka u razvoju naše civilizacije, integrisana je u kulturu.

Drugi deo *Elementi matematičke analize na tehničkim fakultetima* dragoceno su vezivno tkivo za integrisanje filozofije matematike sa konkretnim temama iz matematičke analize. Zbog toga je prikazan kratak pregled pojedinih tema iz matematičke analize. Pošto su u prvom delu dati elementi filozofije matematike, prirodno je da ih i primenjujemo u nastavi. Na primer, elementi matematičke logike daju dobar temelj za formalizam sa primerom formalnog načina dokazivanja – metodom svođenja na protivrečnost. Obrada principa matematičke indukcije ima za cilj da se uoči i objasni razlika između empirijske i matematičke indukcije. Tu će se *videti* da primeri dokazivanja metodom matematičke indukcije zapravo predstavljaju deduktivni pristup ili metodu čistog dokaza.

Matematička teorija počiva na sistemu aksioma pa su prikazane aksiome realnih brojeva. Naravno, dat je uvod, koji rasvetljava činjenicu da postoje brojevi, npr. $\sqrt{2}$ koji nisu racionalni. Funkcija predstavlja temeljni pojam matematičke analize. Prožima gotovo čitavu matematiku i zato je značajna u nastavi na različitim nivoima. Važno je navesti definiciju funkcije, jer se značenje pojma menjalo tokom istorije duže od dva veka. Kao što je Dekartova metoda uvod u moderno zasnivanje nauke, tako je i njegova analitička geometrija, koja je povezala geometriju i algebru, uvod u razvoj moderne matematičke analize. Zbog toga je važno istaći koordinatni sistem i mogućnost crtanja grafika realnih funkcija, što daje izuzetno vizuelno predstavljanje.

Čini se da je u filozofskim raspravama pojam beskonačnosti najuzbudljiviji. Tek u matematici on dobija pravu formu. Sve je počelo sa brojanjem, pa onda sa prebrojavanjem članova određenih skupova. Sa ovom temom prirodno su povezani granični procesi, razlikovanje beskonačno male i beskonačno velike veličine, shvatanje epsilon-delta formalizacije. Smatra se da onaj ko razume definicuju granične vrednosti u duhu epsilon i delta, odnosno dokaze koji zahtevaju upotrebu istih, ima smisla (osećaj, intuiciju, talenat) za matematiku. Zbog toga je dobro ukratko prikazati granične procese nizova i funkcija.

Najdublju vezu između apstrakcije i primene čini pojam izvoda funkcije. Sa druge strane, izvod i integral su međusobno inverzni operatori, pa je uveden pojam integrala. Na ovaj način matematika se uzdigla do univerzalnih visina.

Treći deo rada *Empirijsko istraživanje i rešavanje zadataka* posvećen je empirijskom istraživanju nastave matematičke analize na tehničkim fakultetima u Srbiji. Statistička analiza empirijskog istraživanja sastoji se iz dva dela. Jedan deo je prikaz rezultata Ankete, koja sadrži mišljenje studenata o matematici, nastavi matematike i korišćenju udžbenika. Anketu je radilo 429 studenata elektrotehničkih, građevinskih i mašinskih fakulteta u Srbiji. Studenti su nam otkrili svoje viđenje odnosa prema matematici i njenoj primeni u stručnim predmetima, o tome kakav treba da bude dobar nastavnik matematike i kako treba da koriste udžbenike, zbirke zadataka i druge knjige. Drugi deo sastoji se od analize rezultata rešavanja devet zadataka koji su raspoređeni u nekoliko celina: granični procesi i diferencijalni račun, integrali, Tejlorov polinom i dva teorijska zadatka. Zadatke je rešavalo 450 studenata pomenutih tehničkih fakulteta. Rezultati su zabrinjavajući. Želja da se razmatra nastava matematičke analize pretvara se u poziv na delovanje u smislu preduzimanja koraka za unapređivanje nastavnog procesa. Osim sopstvenih rezultata ovo istraživanje ima za cilj i podsticanje drugih da nastave istraživanje na ostalim poljima nastave matematike, da pišu radove iz nastave matematike na fakultetima i da nastupaju na konferencijama sa određenim saopštenjima. Istraživanje može da se proširi i na druge oblasti, poput motivacije studenata.

Četvrti deo *Pet tema iz matematičke analize* posvećen je Lagranžovoj teoremi, konveksnosti i posledicama, Tejlorovom polinomu, Hardijevom pristupu izračunavanja površine, Furijeovim redovima sa primenom i Fiksnoj tački sa dve primene. Ove teme izabrane su na osnovu rešavanja zadataka studenata. Lagranžova teorema izabrana je zbog značaja vizuelnog predstavljanja u nastavi i lepote matematičke teorije. Druge oblasti izabrane su na osnovu predloženih zadataka koje studenti nisu uspešno rešili. Ovim pristupom daje se podsticaj i drugim istraživačima da posvete pažnju različitim matematičkim oblastima i da se na taj način poboljšava sadržaj nastave matematike na tehničkim i drugim fakultetima. Sa druge strane, izabrane teme imaju jedan zavidan nivo apstrakcije a istovremeno možemo da ih primenjujemo kako u nastavi tako i u objašnjavanju prirodnih pojava. U radu je naznačeno da apstrakcija i primena nalaze jedinstvo u matematičkom univerzalnom sistemu. Ovi primeri prilog su takvom pogledu na svet.

Peti deo *Predlozi inovacija u nastavi matematičke analize na tehničkim fakultetima i zaključna razmatranja* sadrži rezultate istraživanja i predloge inovacija. Na osnovu postavljenih hipoteza, pomoću opisanog procesa naučnog istraživanja i dobijenih rezultata u doktorskom radu *Apstrakcija i primena matematičke analize u nastavi na tehničkim fakultetima* izveden je Zaključak. Preporuke koje se odnose na inovativne pristupe u nastavi obuhvataju planiranje nastave i unapređivanje kurikuluma, postavljanje pitanja, inteligentni pogled, poboljšanje predavanja i korišćenje nastavnih sredstava.

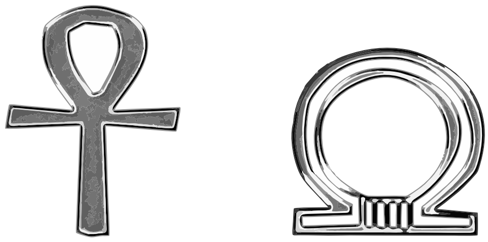
1.

ELEMENTI FILOZOFIJE MATEMATIKE

1.1. PISMO I LOGOS

Na tlu Mesopotamije, u Vavilonu, rađala se civilizacija – *pismo*, *matematika* kao praktična veština i *astronomija* (beleženje rezultata osmatranja).[1] Zora istorije osvetlila je dve vrste pisma – *piktografsko* i *fonetsko*. Piktografsko pismo (ideogramsko, hijeroglifsko) karakteristično je za egipatsku i kinesku kulturu. Sled misli ili objašnjenja počiva na jednostavnim slikovnim predstavama predmeta ili osobina. Fonetsko pismo (linearno, slogovno) koristi posebne znake – slova – za zapisivanje pojedinih glasova ili slogova i pogodno je za stvaranje složenih zapisa.

„Konačno, ta vrsta pisma je i ovladala savremenom civilizacijom. Linearno, odnosno slogovno pismo (ćirilica i latinica), koje je danas najrasprostranjenije u svetu, razvili su iz egipatskih hijeroglifa Feničani, mali narod sa obala jugoistočnog mediterana, sredinom drugog milenijuma pre naše ere. Sam naziv alfabet potiče od naziva prvih slova feničanskog pisma, *alef* i *bet*, a koji su ostali isti ili slični – *alfa* i *beta*, odnosno *a* i *b* – u svim sledećim pismima – prvo u grčkom, od kojeg se razvila *ćirilica*, a potom i u rimskom, od kojeg se razvila savremena *latinica*.“[2]



Slika 1 – Egipatski simboli večnosti

U Vavilonu se pisalo na glinenim tablicama, a u Egiptu su koristili papirus, znatno savršeniju tehnologiju, preteču današnjeg papira, dobijen od biljke istog imena. U XV

[1] Mesopotamija na grčkom znači između reka, ili preciznije, zemlja između Tigra i Eufrata.
[2] Božić, Milan, 2010, *Istorija i filozofija matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 11.

veku, tačnije 1450, pojavljuje se revolucionarno otkriće – *Gutenbregova štamparija*. Prva štampana knjiga bila je *Biblija*. Univerziteti i knjige postaju glavni nosioci saznanja. Viševekovni napredak matematike – od Lajbnica, preko Bula, pa do Tjuringa ili fon Nojmana, dovodi do revolucionarnog razvoja informacionih i komunikacionih tehnologija koje će promeniti svet.

U poređenju sa mogućnostima štamparske mašine kreiranje digitalnog sadržaja kao što su reči, muzika, numerički podaci, fotografije, video i dr., koje je moguće distribuirati nadaleko i naširoko, predstavlja revolucionarni skok. Pojedinci i institucije dobili su moć da stvaraju, oblikuju i šalju informacije. Programeri neprestano usavršavaju softvere za različite primene. Sedrik Vilani navodi primer programa $\TeX$ za pisanje matematičkog teksta. Ovaj program kreirao je 1989. godine Donald Knut, profesor Univerziteta Stenford. Njega koriste svi matemaričari da bi napisali i razmenili svoje radove.

„Knutov jezik i njegove izvedenice su slobodni softver čiji je *kod* svakom dostupan. Matematičari razmenjuju samo izvorne fajlove, čiji se tekstovi sastoje jedino od znakova ASCII (American Standard Code for Information Interchange), koji su poznati svim računarima sveta. Ti fajlovi sadrže, izražene strogim jezikom, sva uputstva potrebna da se rekonstruišu tekstovi i formule do najsitnijih pojedinosti. Zahvaljujući softveru, Knut je savremenik koji je verovatno najviše promenio svakodnevnicu matematičara.“[3]

Na primer, Ojler je dao sledeću formulu objavljenu 1774. godine

$$e-1=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}$$

Ova formula se u $\TeX$-u piše na sledeći način:

```
\begin{gather*}
e-1=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}
{4+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}
\end{gather*}
```

Matematika je nastala na starom Orijentu, u Vavilonu i Egiptu, i bila je vezana za svrhu, odnosno praktične potrebe. To matematičko nasleđe, ali i pismo i likovnu umetnost, preuzeli su Grci na početku VI veka pre nove ere i strukturno su ga preoblikovali. Drugi

[3] Sedrik Vilani, 2013, *Živa teorema*, Centar za promociju nauke i Matematički institut SANU, Beograd, str. 49.

veliki preobražaj dogodio se na Zapadu u XVII veku, kada su pronađeni slovni račun – *formula*, *analitička geometrija* i *infinitezimalni račun*.

Zapadna misao počinje sa Grcima, koji su pojedinca definisali na osnovu njegovih sposobnosti da razmišlja. Tragali su za savršenstvom, što iziskuje napor, disciplinu i inteligenciju. Grčko-helenistička *paideia* razvila je kao način razmišljanja retoriku, gramatiku i logiku.[4] U Grčkoj književna dela predstavljaju odskočnu dasku za humanizam; govorništvo je bila veština koja se negovala u pozorištima ili na političkim skupovima. Umetnost se odslikavala u skulpturama od kamena i kolosalnim građevinama. Arhitektura je tehničku veštinu stavila u službu izuzetnog senzibiliteta i težila je izražavanju duhovnih vrednosti (prefinjeni sklad razmera). Ne zaborivaimo muziku i muzičke lestvice, kao što je na primer, Pitagorejska.

„Najvažniji pojam koji prožima grčku filozofiju jeste *logos*. Taj izraz između ostalog znači *reč* i *mera*. Na taj način tesno su povezani filozofsko raspravljanje i naučno istraživanje. Etička doktrina koja se temelji na toj vezi vidi dobro u znanju koje je rezultat nepristrasnog istraživanja.“[5]

Otac grčke filozofije i matematike je Tales iz Mileta – jedan od Sedam mudraca (grčki: Sofoi); reč *sofos* označavala je mudrost. To su bile intelektualne veštine koje su više pretendovale na snalažljivost nego na spekulativnost.[6] Za Talesa se smatra da je umeo da odredi visinu egipatskih piramida (merenjem dužine senke predmeta, koristeći sličnost trouglova), kao i da proceni udaljenost broda na moru posmatrajući ga sa obale. Prema predanju, on je predvideo pomračenje Sunca i govorio je da sve stvari potiču iz vode.

1.2. PITAGORINA ŠKOLA, PRIRODA I BROJ

Pitagora je osnovao školu sa unutrašnjim krugom sledbenika – bratstvom, koje nazivamo pitagorejci ili *mathematikoi* (naziv *mathema* potiče iz Egipta, i odnosio se na vrstu zemlje koju su egipatski sveštenici koristili u ritualima), što je označavalo *ono što se uči*. Pitagorejsko društvo je preraslo u tajno bratstvo inicijacije (posvećenja), budući model većine tajnih društava. Trogodišnje iskušeništvo prethodilo je prijemu u prvi stepen, ali je tek drugom stepenu matematičarima bilo dozvoljeno da vide Majstora i razgovaraju

[4] Za Pitagoru se može reći da je prvi matematiku predstavio kao slobodnu nauku (paideia). Prema Aristotelu – čovek po prirodi teži znanju i naziv paideia označava nauku kojom se ljudi bave radi nje same, a ne radi koristi ili užitka.

[5] Rasel, Bertrand, 2003, *Mudrost Zapada*, Dereta, Beograd, str. 14. Prema rečniku (Riz, Viljem, 2004, *Filozofija i religija. Istočna i zapadna misao*, Dereta, Beograd), logos je grčki termin koji znači um, reč, govor, diskurs, definicija, princip ili racio.

[6] Sofisti – *sophists*, potiče od grčke reči *sophistes* – onaj koji obećava da će ljude učiniti mudrim. Sofisti su profesionalni učitelji koji su išli od grada do grada i druge podučavali retorici, gramatici, poeziji, gimnastici, matematici i muzici.

sa njim.[7] Sa Pitagorom rađa se novi duh. On je grčki matematičar, astronom i mistik; osnivač kulta koji se može iskazati krilaticom *suština svih stvari je broj*. U pitagorejskom načelu *Broj su sva nebesa*, dostizanje krajnje granice svođenja sveta na red i srodnost sa umom. U zanatskim procesima oni su ponovo našli otelovljenje broja, odnosa i proporcije. Pitagorejci su podešavali ritam svakodnevnog hoda po skladnim proporcijama. Broj je supstancija stvarnosti i može se najpogodnije demonstrirati u muzici. Odnosi dužina žica na liri, tada najpopularnijem muzičkom instrumentu, određuju tonske intervale koje žice proizvode kad osciluju.

Za pitagorejskog mislioca duša je harmonija, bolje reći usaglašenost, zasnovana na brojčanoj proporciji. Oblikovanje umetničke građe počinje time što razum kombinuje elemente u određenim proporcijama (elementi su boje u slikarstvu, posebni tonovi u muzičkoj lestvici, reči, sa svojim osobinama – jasnoćom i smislom, u poeziji i retorici). Red i simetrija prisutni su u svakom podražavanju jer na najdubljem nivou, svet je po prirodi matematički. „Knjiga prirode ispisana je brojevima – harmonija prirode je harmonija brojeva. Ona govori našem oku razmerama, oličenim u građevinama naših hramova, ona šapuće našem uhu zvucima lire... Takva harmonija ispoljava se u sastavu cele vasione.“[8] Izuzetna matematička otkrića pitagorejaca jesu: čuvena Pitagorina teorema – *kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad dvema katetama*, i teorema o uglovima trougla – *zbir uglova u trouglu jednak je zbiru dva prava ugla*.

NAPOMENA. Stari Egipćani i Vavilonci koristili su brojeve pre Grka, međutim, nisu računali sa brojevima kao apstraktnim pojmovima već su ih vezivali za praktične svrhe kao što je merenje količine žita, površine zemlje itd. Pojedinačni brojevi, sami za sebe, nisu imali pravog smisla već su bili povezani sa konkretnim objektima, osobama ili predmetima.

Sa razvojem ljudske civilizacije javljaju se i apstraktni pojmovi, strukture i procesi kao što su pismo ili crteži. Pojam broja dobija apstraktan smisao tek kada je uključen u skup brojeva i kada se mogu posmatrati međusobni odnosi članova tog skupa (kao što su operacije i poredak).

PRIMER 1. Neka polazni skup sadrži jedan element i to baš sam broj *jedan*, u oznaci 1. Prvi korak u apstraktnom procesu sabiranja zapravo je dodavanje polaznom skupu još jednog elementa, tj. sabiranje brojeva 1 i 1, čime se dolazi do broja *dva*, u oznaci 2, i piše $1+1=2$. Dobijenom skupu od dva elementa, sabiranjem broja dva i jedan, priključuje se broj *tri*, u oznaci 3, i piše $2+1=3$. Tako se proces može nastaviti bez kraja i dolazi se do apstraktnog *skupa svih prirodnih brojeva*, u oznaci

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ldots,n,\ n+1,\ldots\}$$

---

[7] Čanak M., 1996, *Teorija tonaliteta u svetlosti matematičke teorije muzike*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu.

[8] Milanković, Milutin, 2007, *Kroz carstvo nauka. Slike iz života velikih naučnika*, MST Gajić, Beograd, str. 43.

Operacija sabiranja pojavljaje se već pri samom apstraktnom shvatanju prirodnih brojeva i suštinski učestvuje u definisanju pojma prirodnog broja.

Ove činjenice bile su inspiracija za matematičara Peana da odredi sistem aksioma, koji predstavljamo u pojednostavljenom obliku, poznat kao *Peanove aksiome*:[9]

(i) *Prirodni brojevi čine neprazan skup* $\mathbb{N}$ *u kome svaki element* n *ima jednog jedinog neposrednog sledbenika, u oznaci* $n+1$.

(ii) *Postoji jedan jedini element u skupu* $\mathbb{N}$, *označimo ga sa 1, koji nije sledbenik nijednog elementa*.

(iii) *Aksioma matematičke indukcije. Skup (podskup) M elementa iz* $\mathbb{N}$, *za koje važi*:
a) *1 pripada skupu M*;
b) *ako m pripada skupu M, onda i njegov sledbenik pripada skupu M;*
jednak je sa skupom $\mathbb{N}$ *svih prirodnih brojeva*.

Za opšti pojam sabiranja prirodnih brojeva m i n možemo zamisliti konkretan stvarni model. Jednom skupu, koji ima m elemenata, dodajemo n elemenata drugog skupa i na taj način dobijamo novi skup koji ima s elemenata, a broj s zove se zbir brojeva m i n i označava sa $m+n=s$. Sada se jednostavno proveravaju dalje osobine sabiranja kao apstraktne matematičke operacije, kao što su:

$$m+n=n+m \quad \text{komutativnost i,}$$
$$(m+n)+k=m+(n+k) \quad \text{asocijativnost.}$$

Opšti pojam množenja prirodnih brojeva m i n shvata se kao zbir brojeva m, n puta. Recimo,

$$\begin{aligned} m+m &= m\cdot 2 \\ m+m+m &= m\cdot 3 \\ &\vdots \\ \underbrace{m+\cdots+m}_{n \text{ puta}} &= m\cdot n \end{aligned}$$

Međutim, nećemo se baviti početnim poimanjem množenja već ćemo jednostavno reći: proizvod prirodnih brojeva m i n je prirodni broj p, u oznaci

$$m\cdot n=p.$$

Za proizvod takođe važe osobine komutativnosti i asocijativnosti.

Među prirodnim brojevima postoji *prirodni poredak*, gde je 1 najmanji prirodni broj, a 2 je sledeći veći broj dobijen dodavanjem jedinice na broj 2, itd. Kao što smo videli u Peanovim aksiomama, neposredni sledbenik bilo kog prirodnog broja n je broj $n+1$, koji se dobija dodavanjem jedinice na broj n. Zato se piše

$$1<2<3<\cdots<n<n+1<\cdots$$

[9] Đuzepe Peano (Giuseppe Peano), 1858–1932.

Tako se uspostavlja relacija manje, u oznaci $<$.

Aksiomatsko apstraktno zasnivanje skupa prirodnih brojeva trajalo je vekovima, od egipatskih sveštenika do Peana.

1.3. PLATONOVA AKADEMIJA I ARISTOTELOV LIKEION

Platonova Akademija i Aristotelov Likeion bili su Oksford i Kembridž (ili Harvard i Jejl) antičkog sveta. „Platon je bio idealista, koji je stvorio prve zamišljene utopije, fundamentalne teorije oblika i besmrtnosti, uticajnu kosmogoniju, široku kritiku znanja, i čuvenu analizu ljubavi... Nasuprot njemu Aristotel je bio onaj koji je praktikovao nadahnut zdrav razum, sistematizujući znanje. Njegova enciklopedijska dela se kreću od metafizike i etike do politike, književne kritike, logike, fizike, biologije i astronomije.“[10] Platona su zaokupljale dve teme: teorija ideja i pravedna država. Platon je smatrao da su čiste ideje, poput dobrog, istinskog i lepog, savršene, večno nepromenljive tvorevine duha; one su nematerijalne. Delo *Fedon ili o duši* sadrži logičko utemeljenje učenja o idejama, gde se spoznaje samostalnost i snaga čistog mišljenja, i razdvaja se od svih drugih psiholoških instanci.[11] Nakon upoznavanja sa pitagorejskom tradicijom Platon postaje duboko ubeđen da realnost za kojom traga naučna misao mora biti izraziva putem matematičkog mišljenja, jer je *matematika najprecizniji i najpotpuniji način mišljenja za koji smo sposobni*. Ovo potvrđuje i natpis na ulazu u Akademiju: *Neka niko ko ne poznaje geometriju ovde ne ulazi*.[12] Platon razlikuje osetom opaziv krug, koji je netačan i kad je najtačnije nacrtan, od savršenog, *idealnog* kruga na koji se misli.Takođe ističe da trouglovi nisu materija već matematički zakon, simetrija i oblik.[13]

Akademiju je osnovao vođen političkim motivima. Svoju školu je zamislio kao mesto na kome će se, učenjem i vaspitavanjem, odgajati grčka politička elita. Postepeno se Akademija orijentisala na obrazovanje uopšte, a politički motiv je postao potpuno sporedan. Platon je smatrao da u obrazovanju „prvih deset godina treba posvetiti izučavanju aritmetike, geometrije, astronomije i harmonije da bi umu postala bliska saznanja do ko-

---

[10] Dejvis, Norman, 2005, *Evropa. Jedna istorija*, Vega media, Novi Sad, str. 111.

[11] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 72.

[12] Božić, Milan, 2010, *Istorija i filozofija matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 82.

[13] Sokrat, Platon i Aristotel tri su giganta grčke klasične filozofije. U osnovi Sokratove doktrine je ležalo učenje o tome da čovekova sreća, odnosno njegovo blagostanje, zavisi neposredno od čovekove duše. Međutim, kada čovek propusti svoju sreću to je zato što ne zna šta je dobro. Dobro se dakle saznaje, spoznaje. Najvažnije Sokratovo dostignuće je uvođenje hipoteze u filozofsko, pa zatim i naučno mišljenje. Sokrat je u središte pažnje uveo tvrđenja, tj. pretpostavke o činjenicama. Metod započinje onim pretpostavkama koje deluju kao najistinitija hipoteza ili postulat o određenoj temi, te se zatim razmatraju logičke posledice te hipoteze. Ako se naiđe na kontradikciju, hipoteza otpada, a u suprotnom – hipoteza se smatra okvirno potvrđenom. Tako je nastala i Sokratova sklonost ka tome da važenje iskaza podupire upečatljivim primerima, paradigmama, odnosno – induktivna argumentacija. Sokrat nije ništa pisao, ali ga Platon najčešće pominje.

jih se može doći samo razmišljanjem".[14] Zatim sledi pet godina izučavanje dijalektike, tj. veštine raspravljanja, postavljanja pitanja i davanja odgovora, čime se stiže do suštine stvari. Akademija je uspela da radi čitavih 916 godina! To vreme trajanja nadmašuje i današnje najstarije univerzitete poput Bolonje, Pariza, Oksforda i Kembridža.

Aristotel se obrazovao u Platonovoj Akademiji, da bi posle nekoliko godina postao profesor, a zatim je i sam pokrenuo rad na Asosu. Smatrao je da su zemaljska tela sačinjena od četiri elementa: *zemlje*, *vode*, *vazduha* i *vatre*. Aristotel je napisao sistematična dela iz botanike i zoologije. „Naglašavajući važnost znanja stečenog putem racionalnog ispitivanja čulnog iskustva, Aristotel je podržavao razvoj empirijskih nauka – fizike, biologije, zoologije, botanike i drugih disciplina koje se zasnivaju na posmatranju i istraživanju prirode i beleženju podataka."[15]

Kako legenda kaže, Aleksandar Makedonski, čiji je učitelj bio Aristotel, šalje ga nazad u Atinu da osnuje ustanovu po ugledu na Akademiju. Aristotel je osnovao Licej (Lyceum), u duhu evropske intelektualne i naučne tradicije, pa se mnoge škole i danas nazivaju tim imenom.

1.4. AKSIOMATSKO I DEDUKTIVNO ZASNIVANJE GEOMETRIJE

Euklid je napisao kapitalno delo – *Elemente,* knjigu koja je suvereno vladala duže od bilo koje druge, izuzev Biblije[16]. Elementi – *rukopis nad rukopisima,* sinteza je dotadašnjih znanja iz matematike. *Euklidovi elementi nesumnjivo su jedna od najvećih knjiga koja je ikada napisana i jedan od najsavršenijih spomenika grčkog uma*.[17] Prema Raselu, izgleda da geometrija što se više proučava izaziva više divljenja. Veština matematičkog dokazivanja potiče od Grka, što nam pokazuje red teorema i logička struktura Euklidovih elemenata.

Zahvaljujući Elementima geometrija je vekovima doživljavana kao savršenstvo prema kome se ravnalo svako drugo sistematizovano znanje.[18] U trinaest knjiga na *deduktivan* način izloženo je sve geometrijsko znanje onog vremena. Elementi izražavaju tada preovlađujući filozofski stav da aritmetika nije dovoljna da opiše svet, ali da geometrija jeste. Kada ga je vladar Egipta upitao da li bi geometrija mogla biti pojednostavljena, Euklid je odgovorio da *nema kraljevskog puta do matematike*.

Prvih šest knjiga odnosi se na planimetriju, sledeće četiri bave se problemima teorije brojeva i aritmetike, a poslednje tri stereometrijom. Svoje elemente je završio sa konstruisanjem tzv. Platonovih tela. Prvi zapis o tome da postoji latinski prevod datira iz 480.

---

[14] Božić, Milan, 2010, *Istorija i filozofija matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 83.

[15] Peri, Marvin, 2000, *Intelektualna istorija Evrope*, Clio, Beograd, str. 32.

[16] Euklid je živeo u Aleksandriji oko 360. p.n.e – oko 290. p.n.e. prema knjizi: C. J. Scriba, P. Schreiber, 2000, *5000 Jahre Geometrie*, Springer.

[17] Bertrand Rasel, 1998, *Istorija zapadne filozofije*, Narodna knjiga Alfa, Beograd, str. 204.

[18] Zoran Lučić, 2009, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, str. 33.

godine. Vizantijski car jednu kopiju poklonio je Arapima 760. Na arapski jezik Elementi su prevedeni oko 800. godine. Prvi latinski prevod koji još postoji uradio je Adelard od Bata 1120. godine. Na Zapadu, od tada počinje buđenje matematike, da bi u vreme renesanse dobila novi polet.

Euklid je uočio da se izvođenje i dokazivanje matematičkih saznanja sastoji od niza logičkih ispravnih zaključaka, pri čemu se istinitost konačnog zaključka zasniva na već dokazanoj istinitosti prethodnih zaključaka (tvrđenja). Očigledno je da taj niz istinskih zaključaka ima svoj početak, tj. da postoje saznanja koja ne treba dokazivati. Poželjno je da su ta saznanja jednostavna i intuitivno razgovetna, u skladu sa zdravim razumom.[19]

Euklid je formulisao *pet postulata* i *devet aksioma* iz kojih je logičkim zaključivanjem (dedukcijom) izveo gotovo sva do tada poznata geometrijska saznanja. Navodimo postulate:

(i) *Pretpostavlja se da je moguće od svake tačke do svake druge tačke konstruisati pravu liniju*.

(ii) *Pretpostavlja se da se svaka prava, sledujući njen pravac, može neograničeno produžavati*.

(iii) *Pretpostavlja se da se u nekoj ravni oko svake njene tačke može opisati krug bilo kojeg poluprečnika*.

(iv) *Pretpostavlja se da su svi pravi uglovi među sobom jednaki*.

(v) *Ako jedna prava presecajući druge dve komplanarne prave obrazuje sa njima s iste strane dva unutrašnja ugla kojima je zbir manji od zbira dva prava ugla, tada se te dve prave, neograničeno produžene, seku sa one strane sečice sa koje je taj zbir uglova manji od zbira dva prava ugla*.[20]

Definicije koje je navodio Euklid nisu bile dovoljno jasne i logički korektne. Prosto iz razloga što je pokušavao da bliže odredi pojmove kao što su tačka, prava i ravan, a to su osnovni pojmovi u geometriji, koje prihvatamo kao takve i koji se ne definišu.

Aksiomatizovati geometriju, ili neku drugu naučnu disciplinu, znači saznanje te nauke tako logički urediti i sistematizovati da se mogu, primenom određenih pravila logičkog zaključivanja, izvesti iz nekoliko temeljnih tvrđenja (aksioma i postulata) za koje se ne zahtevaju dokazi. Izbor aksioma treba da bude što manji, da budu jednostavne i intiuitivno prihvatljive.

Aksiome imaju *svojstvo nezavisnosti*, tj. nijedna od njih ne može se izvesti iz preostalih aksioma. Sistem aksioma ima *svojstvo potpunosti*, odnosno – sve tvrdnje unutar naučne discipline moguće je dokazati ili odbaciti na temelju datih aksioma. Bitno je i *svojstvo neprotivrečnosti*, tj. ne mogu se iz datog sistema aksioma dokazati suprotna tvrđenja.

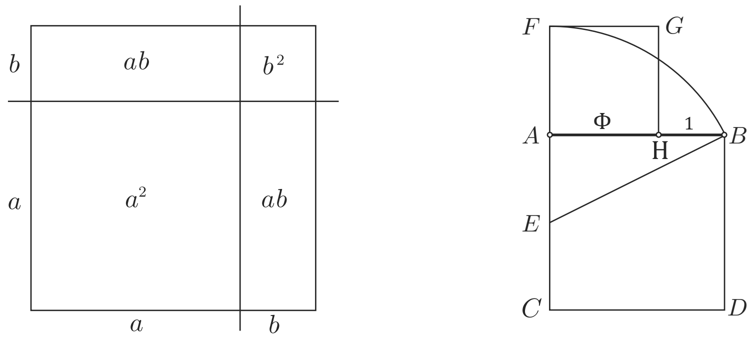
[19] Željko Pauše, 2007, *Matematika i zdrav razum*, Školska knjiga, Zagreb, str. 82.
[20] Dragomir Lopandić, 2011, *Geometrija: Žuta knjiga*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 12.

Sistem Euklidovih aksioma nije potpun. To je prvi primetio Arhimed i u svom delu *O lopti i valjku* dodao je novih pet postulata koji su omogućili da se zasnuje teorija merenja geometrijskih figura.

Euklid iz Aleksandrije, najznačajniji matematičar antičkog doba, prikazao je geometrijski, na primer, formulu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ako se pravim linijima preseče kvadrat (videti sliku), čitav kvadrat jednak je zbiru dva kvadrata i dva pravougaonika koje ove linije prave (Propozicija 4, Knjiga II).



Slika 2 – Kvadrat binoma i zlatni presek

Opisao je čuveni Zlatni presek ili Božansku srazmeru: *Duž je podeljena tako da je odnos cele duži prema većem delu isti kao odnos većeg dela prema manjem*.

Ako datu duž AB delimo nekom tačkom H tako da važi $AB \cdot BH = AH \cdot AH$. Navodimo Euklidovu konstrukciju. Za dato AB konstruiše se kvadrat $ABCD$. Neka je tačka E središte AC. Tačku F na produžetku CA dobijamo tako što konstruišemo $k(E,EB) \cap p(CA) = F$. Zatim se konstruiše kvadrat $AFGH$ i tačka H je željena tačka na duži AB i važi $AB \cdot BH = AH \cdot AH$.

Ako je manji deo duži AB duž HB jednak dužini 1, a veći deo dužini Φ, na osnovu odnosa $(\Phi+1) : \Phi = \Phi : 1$ dobija se

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Mnogo kasnije, Leonardo iz Pize – Fibonači (fillus Bonacci – Bonačijev sin, oko 1170–1250), nagoveštavajući buđenje renesanse napisao je knjigu *Liber abaci*[21] (Knjiga računanja), u kojoj se pojavljuje niz brojeva

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

danas čuveni *Fibonačijev niz*. Ako podelimo svaka dva uzastopna člana Fibonačijevog niza, približavamo se broju Φ, tj. broju koji simbolizuje *zlatni presek*. Ovakva otkrića stvorila su nevidljivu

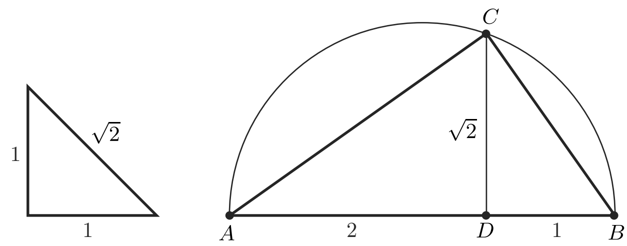
[21] Fibonači u ovoj knjizi upoznaje Evropu sa indijsko-arapskim pozicionim decimalnim sistemom beleženja brojeva. Uvodi cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i nulu; upoznaje Zapad sa standardnim postupcima množenja i deljenja.

vezu između različitih nauka i umetnosti, vezu zasnovanu na tajnom kodu ili božanskoj proporciji.[22]

PRIMER 1. Konstruisati geometrijski broj $\sqrt{2}$.

REŠENJE. Na slici je konstruisan pravougli trougao čije su katete 1 i 1 i hipotenuza $\sqrt{2}$.

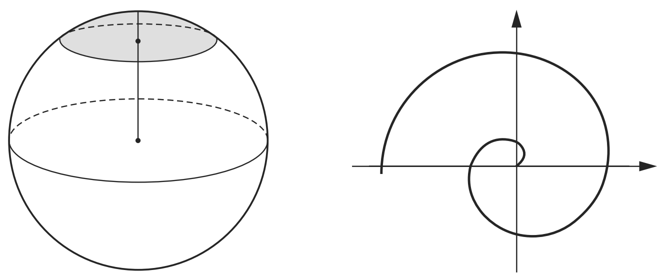
Na slici desno je konstruisan pravougli trougao ABC upisan u polukrugu. Iz tačke C spuštena je hipotenuzina visina h_c koja deli hipotenuzu AB na odsečke p i q. Važi poznati Euklidov stav $h_c^2 = pq$, tako da za $p = 1$ dobijamo $h_c = \sqrt{q}$.



Slika 3 – Euklidov stav

NAPOMENA. Ne mogu se konstruisati svi realni brojevi, na primer, brojevi π i e. S druge strane, može se konstruisati broj $\sqrt[4]{2}$, tj. najpre se konstruiše $\sqrt{2}$, a zatim $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Ovom se može dodati jedno interesantno zapažanje. U konstrukcijama je dozvoljeno korišćenje lenjira i šestar. Kada se konstruše krug poluprečnika 1, njegov obim je 2π. Tada dužinu polukruga interpretiramo kao π. Može se postaviti pitanje. Da li je ovo konstrukcija?



Slika 4 – Sfera i Arhimedova spirala

[22] Suština lepote i postojanja nalazi se u broju. „Otkriti suštinu znači biti inteligentan. Najviši proizvod inteligencije je forma. A forma je simetrija i red i određenost, jer to su bitna svojstva lepote i harmonije." (Gilbert, Katarina, Everet, Helmut Kun, 2004, *Istorija estetike: revidirana i proširena*, Dereta, Beograd, str. 64). Božansku proporciju odlikuju harmonija, sklad, stvaranje, obnavljanje i lepota. Pojavljuje se u prirodi u geometrijskim oblicima, od DNK i ljudskog embriona – do svemira. U arhitekturi zlatni presek daje građevinama izvanrednu simetriju koju možemo videti na egipatskim piramidama, na Partenonu i na evropskim gotskim katedralama. Umetnički stvaraoci slikari, muzičari i pesnici inspiraciju za stvaranje dela nalazili su u božanskoj proporciji.

Arhimed je slavni matematičar antike, koji nam je podario mnoštvo dokaza.[23] Smatra se jednim od najvećih matematičara svih vremena. U njegova izuzetna dostignuća iz čiste i primenjene matematike, fizike i mehanike, ubrajaju se dokaz o težištu trougla i četvorougla, metod iscrpljivanja (rani oblik integracije), geometrijsko rešenje kubne jednačine, dokaz o površini odsečka parabole preko opisanih i upisanih pravougaonika, ili dokaz da se približna vrednost broja π može odrediti pomoću opisanog i upisanog poligona sa 96 stranica, odnosno

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

U delu *O sferi i cilindru*, u prvoj knjizi, pokazao je da je površina sfere jednaka površini četiri velika kruga te sfere, odredio je formulu za površinu odsečka sfere i dokazao da je zapremina sfere jednaka dvema trećinama zapremine oko nje opisanog cilindra.

U drugoj knjizi najvažniji rezultat je opis konstrukcije koju Arhimed koristi da odredi ravan koja sferu deli na dva segmenta čije su zapremine u unapred zadatom odnosu.[24] Poznata je čuvena *Arhimedova spirala*. Bavio se osnovnim zakonima hidrostatike i formulisao *Arhimedov zakon*: *Svako telo koje plovi u tečnosti istiskuje onoliko tečnosti koliko je i samo teško*. Čuvene su njegove reči pred smrt izgovorene rimskom vojniku: *Ne diraj moje krugove*.

Napomena. Mnoga interesantna otkića nastala su iz praktičnih potreba. Naime, Heron Aleksandrijski u delu *Diopta* (theodolite) predstavlja problem iz geodezije kako da se pronađe razdaljina između dve tačke, od kojih je samo jedna pristupačna, ili između dve tačke koje su vidljive ali nisu pristupačne. On takođe pokazuje kako da se povuče normala od date tačke do linije koja ne može da se dosegne i kako da se pronađe površina polja bez ulaska u njega. Tako je otkrio i formulu za površinu trougla

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gde su a, b i c dužine stranice, a s je poluobim datog trougla. Ova formula pojavljuje se u delu *Geodesy*, a njen dokaz u delima *Diopta* i *Metrica*. U Diopti pokazuje kako da se prokopa tunel ispod planine na taj način što se radi istovremeno sa obe strane planine.

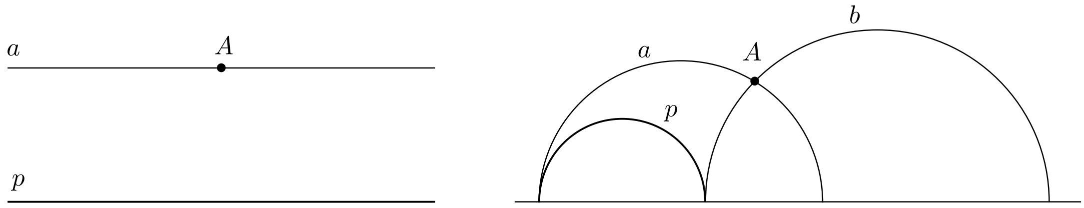
Od Euklida do danas među matematičarima i filozofima vodile su se žučne rasprave o Euklidovim aksiomama i Euklidovom *petom postulatu o paralelnosti*. To traganje dovelo je do jednog od najpoznatijih matematičkih otkrića neeuklidske geometrije. Konačno su u XIX veku Lobačevski, a nezavisno i Boljaj i Gaus, zamenili peti Euklidov postulat sledećom aksiomom:

Aksioma Lobačevskog. *Kroz tačku A van prave p postoje dve prave koje su komplanarne sa pravom p i koje sa njom nemaju zajedničkih tačaka.*

[23] Arhimed je živeo u Sirakuzi na Siciliji od 287. p.n.e – 212. p.n.e.

[24] Božić, Milan, 2010, *Istorija i filozofija matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 105.

Time je stvorena nova geometrija, kasnije nazvana *geometrijom Lobačevskog* ili *hiperboličkom geometrijom*.[25]



(i) Euklidov peti postulat (ii) Postulat Lobačevskog – Poenkareov model

Slika 5 – Peti postulat

1.5. APSTRAKCIJA I PRIMENA

1.5.1. Pojam apstrakcije

Intelektualna tradicija Zapada počivala je na antičkom modelu *sedam veština* (*septem probitates*), odnosno *trivijumu* (retorika, logika, gramatika) i *kvadrivijumu* (geometrija, aritmetika, muzika, astronomija). Pre Gutenbergovog otkrića štamparske mašine, knjige su se teško umnožavale, bile su retke i skupe. „Za svakodnevni život ljudi tog vremena čitanje nije bilo neophodno, pa ni korisno. Za većinu stanovništva, odrastanje je podrazumevalo učenje kroz oponašanje istih društvenih navika, praktičnog rada i veština starijih.“[26]

U delu *Metafizika* Aristotel ističe pitagorejski odnos brojeva prema stvarima. Jednom se kaže da su brojevi same stvari, drugi put da su u stvarima, a treći put da su stvari sastavljene od brojeva, izgleda bez pravljenja razlika između tih iskaza. Prema njemu su pitagorejci proglasili brojeve supstancijalnim bićima (*ousia*) stvari ili njihovim iskonom (*arche*), što je pojam koji se primenjuje za praelemente starih jonskih filozofa prirode. Aristotel čak pravi misaoni skok rečima *celo nebo je harmonija i broj*.[27] Smatrao je da matematički predmeti nastaju *apstrakcijom*. *Abstractio* doslovno znači *odvlačenje*, pa se može govoriti o odvučenim pojmovima. To je prvi put da se upotrebljava taj pojam. Pri tome ostaje nejasno da li je apstrakcija sama po sebi dovoljna da bi nastala neka geometrijska tvorevina ili se tome pridodaje idealizacija.[28] Latinski termin *abstractus* znači *odvojen*. Apstrakcija označava i ostavljanje po strani određenih aspekata ili osobina neke stvari, tako da preostanu samo određeni aspekti na koje se usmerava pažnja.

[25] Nikolaj Ivanovič Lobačevski, ruski matematičar, 1792–1856. Janoš Boljaji, mađarski matematičar, 1802–1860.

[26] Entoni Gidens, 2007, *Sociologija*, Ekonomski fakultet, Beograd, str. 495.

[27] Oskar Becker, 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, str. 9.

[28] Oskar Becker, 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, str. 18.

Trebješanin ističe da je apstrakcija „misaoni proces dobijanja onoga što je apstraktno, zamišljeno, opšte. Apstraktan je kvalitet koji je čulno neopaziv i odvojen od neposredne, konkretne stvarnosti. On je nastao misaonim izdvajanjem nekih bitnih od drugih, nebitnih karakteristika“[29]. Trebješanin daje i Jungovo viđenje pojma apstrakcije. „Po Jungu, to je intelektualni proces vađenja ili izdvajanja nekog sadržaja (značenja, oznake, svojstva) iz jedne konkretne, osobene, jedinstvene sinteze (spoja) različitih elemenata. U procesu apstrakcije izdvaja se bitan sadržaj, ono što je suština i oslobađa se veze sa onim što nije bitno, što je slučajno. Ukoliko je neki pojam apstraktniji utoliko ga je teže predstaviti i utoliko je on bliži *ideji*. Konkretan pojam može se lako i očigledno predstaviti.“[30]

Pojam apstrakcije uz to obuhvata i uzdizanje ka opštim pojmovima, odnosno na ono što se misli kao matematičko opšte vrste.[31] Apstraktno je znači uspinjanje u veću opštost. Zbog toga je matematika smatrana višom, duhovnijom formom nauke. Zbog ovoga se matematičar razlikuje od fizičara (filozofa prirode) koji pred sobom ima nešto konkretno, prvi osetni svet promenljivih stvari.

Naša sposobnost da primamo predstave o predmetu je čulnost. Ona nam obezbeđuje opažaje. Neposredni čulni doživljaj samo jednog, posebnog svojstva predmeta, jeste *oset*. Na primer zvuk, miris, ukus, toplota itd. *Opažanje* je osnovna kognitivna funkcija (saznajna psihička aktivnost) pomoću koje jedinka odabira, povezuje i organizuje raznovrsne osete u celovitu i smisaonu mentalnu reprezentaciju nekog dela sveta i na taj način tumači njegovo značenje. Primeri opažanja su oblik, boja, veličina, brzina, tvrdoća i sl.[32]

Razum (lat. *intelectus*, *ratio*) je sposobnost da se mišljenjem razumeju i dokuče pojmovi, značenja, odnosi i smisaone celine, kako u službi saznanja tako i praktičnog života. Pomoću razuma predmeti se zamišljaju i od njega proizilaze pojmovi. To je sposobnost logičkog i analitičkog mišljenja, kao i kritičkog i razboritog rasuđivanja. Nije podložan uticaju emocija, želja, interesa i potreba.

Um (lat. *ratio*) je najviša sposobnost shvatanja celovite, sintetičke spoznaje sveta i, prema Kantu, šira je saznajna moć u odnosu na razum jer obuhvata intuiciju, saznanje ideja i obrazovanje metafizičkih pojmova. Pomoću sintetičkih ideja um unosi viši red i jedinstvo u razumom sređene podatke.[33]

---

[29] Žarko Trebješanin, 2011, *Rečnik Jungovih pojmova i simbola*, Zavod za udžbenike, HESPERIAedu, Beograd, str. 40.

[30] Žarko Trebješanin, 2011, *Rečnik Jungovih pojmova i simbola*, Zavod za udžbenike, HESPERIAedu, Beograd, str. 40.

[31] Oskar Becker, 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, str. 82.

[32] Žarko Trebješanin, 2008, *Rečnik psihologije*, Stubovi kulture, Beograd, str. 318.

[33] Imanuel Kant (Immanuel Kant, 1724–1804) je 1784. godine opisao suštinu prosvećenosti: „Prosvećenost je za čoveka izlaz iz sopstvene nezrelosti u kojoj se našao svojom krivicom. Nezrelost je nemoć da se služimo svojim razumom bez vođstva nekog drugog. Tome smo sami krivi, pošto uzrok toj nezrelosti ne leži u nedostatku razuma, nego u nedostatku odlučnosti i hrabrosti da se njime koristimo bez pomoći drugih. Sapere aude! Imaj hrabrosti da se sam služiš svojim razumom! – predstavlja geslo prosvećenosti“.

Prema Nikoli Kuzanskom početak je analiza i tumačenje procesa opažanja u kojem se duh prvobitno pasivno određuje, ali odmah razvija specifične energije i snage. Sama duša pomoću perifernih organa šalje različite *species* koji se, na osnovu uticaja objekata i prirode primaoca, preobražavaju u raznoliko mnoštvo utisaka. Zatim se *duh* (spiritus), koji nije više vezan za razlike pojedinih čula, prilagođava sadržajima raznih oblasti, upoređuje ih i povezuje. *Ta veza, koja je u organu uobrazilje još neodređena i zamršena, konačno se u organu uma uzdiže do jasne određenosti*.[34]

Razum u sistemu Kuzanskog ima sposobnost apstrakcije u saznanju stvari. Upoređivanje datih opažanja i njihovo sređivanje po raznim vrstama sličnosti je njegovo svojstveno postignuće. Međutim, misao sada prelazi granice onog što se može opaziti i grupisati, odnosno, prelazi sa strane *razuma* na stranu *uma*, i više nije *ratio* već *intelekt*, nije *razum* nego *intelektualno gledanje* (*visus intellectualis*).[35] Intelekt svojim pogledom obuhvata jedinstvo principa, kao i neograničene raznolikosti konsekvenci koje su u njemu sadržane. Tako se stiže do egzaktnih i preciznih tvorevina. To je uzdizanje od konačnoga ka beskonačnome. „Ako duh ocrtava pojam kruga, ako on izmišlja liniju čije su tačke podjednako udaljene od jednog zajedničkog centra, onda lik koji tako nastaje nema posebno, materijalno bivstvo nigde izvan uma."[36]

Intelekt priziva, izaziva i podstiče čula; i osposobljava ih za prijem slike spoljašnjeg bivstva. Tako je on i pogonska snaga i konačni cilj ukupnog saznanja.[37] To je opšta saglasnost između matematike i prirode ili harmonija između ideje i stvarnosti. Za Leonarda i Keplera priroda je harmoničan poredak saglasan sa umom.

Za Bertranda Rasela ono što karakteriše duh jeste *svest*. Čovek na različite načine biva svestan. Prvi od tih načina je opažanje, posredstvom koga sa oseta prelazimo na stvar koju on predstavlja. Sve ono što opažamo, toga smo svesni. Drugi način je *memorija*. Zatim *mišljenje* koje predstavlja formu svesti sastavljene od ideja. Ideja je u rukama naučnika bila vazda nešto uzvišeno i apstraktno, a čija upotreba daje čoveku jedno posebno dostojanstvo. I najzad dolazimo do *verovanja*, odnosno svesti o istinitom ili lažnom.[38]

„Sa dolaskom modernog doba, mišljenje uglavnom postaje sluškinja nauke, odnosno organizovanog znanja; i premda je mišljenje tada postalo izrazito aktivno, shodno ključnom ubeđenju novog veka da možemo znati samo ono što sami pravimo, sada matematika, neempirijska nauka *par exellence* u kojoj se duh igra sa samim sobom, postaje

[34] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 36.

[35] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 45.

[36] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 37.

[37] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 60.

[38] Bertrand Rasel, 2008, *Analiza duha*, Otkrovenje, Beograd, str. 16.

nauka svih nauka, budući da ona nudi ključ za zakone prirode i univerzuma koji se kriju iza pojava... Dekart je smatrao aksiomom da postoji (do toga je došao one čuvene noći kada je doživeo otkrovenje *cogito ergo sum – mislim, dakle postojim*) temeljan sklad između zakona prirode (koji su skriveni pojavnim svetom i varljivim čulnim opažanjem) i zakona matematike.“[39] Kako navodi Hana Arent, naša sposobnost mišljenja se ne dovodi u pitanje, mi smo ono što smo oduvek bili – *bića koja misle*. Procesom mišljenja ljudi prevazilaze granice znanja ali ga ne koriste samo kao instrument znanja i delovanja.

Naučni metod obuhvata dva pristupa znanju koji se obično uzajamno upotpunjuju – *induktivni* (empirijski) i *deduktivni* (racionalni). U induktivnom pristupu, koji se koristi u deskriptivnim naukama kao što su biologija, anatomija, geologija, hemija ili fizika, opšti principi se izvode iz analiziranja podataka sakupljenih putem posmatranja i eksperimenata. Bitne osobine induktivne metode zastupao je Bekon, koji je podatke čula smatrao temeljima znanja.[40]

Kampanela smatra da je filozofija zapisana jedino i samo u knjizi prirode, koja leži otvorena pred očima svih nas: ali slova pomoću kojih treba da odgonetnemo tu knjigu za njega nisu *linije*, *trouglovi* i *krugovi* nego subjektivni kvaliteti i opažanja pojedinačnih čula. Indukcija koja teži da bude i osnova univerzalnih aksioma i principa nije ništa drugo do skup pojedinačnih posmatranja.[41]

Prema Loku čulno opažanje (senzacija) i samoopažanje u duši (refleksija) čine izvor i sadržaj našeg svekolikog saznanja.[42] Obrazovanje apstraktnog pojma utemeljeno je u sposobnosti upoređivanja, kao i spajanja i razdvajanja primitivnih elemenata opažanja. Izvesnost i evidentnost našeg znanja počiva na intuiciji, gde duh ne mora da se muči dokazivanjem i ispitivanjem, već primećuje istinu kao oko svetlost. Pravi metodski ideal u procesu saznanja je dedukcija, a eksperiment i empirijsko istraživanje su sredstva saznanja. „Ako se u toj stvarnosti nađe sadržaj za koji važe uslovi utvrđeni u matematičkoj definiciji, onda za njega nužno važe i svi zaključci, vezani za njih; ako se on ne nađe, ipak, istinitost matematičkog suda kao takvog ni najmanje nije umanjena, pošto se on odnosi na sasvim drugi objekat nego što je taj empirijski prisutan.“[43] Uzor koji tražimo dat je u samom mišljenju, pa ga mišljenje ne može promašiti. Klasični oblici empirizma vide mišljenje kao nešto što prethodi delanju, a delanje kao primenu mišljenja. Iskaz o stvarnim predmetima počiva na verovatnoći.

[39] Arent, Hana, 2010, *Život duha*, Službeni glasnik, Beograd, str. 18.
[40] Sir Fransis Bekon (Sir Francis Bacon), 1561–1626.
[41] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 184.
[42] Džon Lok, engleski filozof, živeo je od 1632–1704.
[43] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 194.

Prema Gotfridu Lajbnicu postoje izvesna *načela istine* koja ljudi univerzalno prihvataju.[44] Ona su zbog toga nazvana *opšti pojmovi*, pa se zato zaključuje da ova načela valja zasnivati na utiscima koje duše dobijaju zajedno sa postojanjem. „Izvoran dokaz naših istina potiče iz samog razuma, dok se druge istine dobijaju iz iskustva ili na osnovu čulnog posmatranja. Naš je duh sposoban da sazna i jedne i druge, ali je on izvor prvih, i ma koliko mnogobrojni bili posebni ogledi koji potvrđuju neku univerzalnu istinu, ipak indukcijom se zauvek ne bismo mogli ubediti u nju, ne prihvatimo li njenu nužnost na osnovu uma."[45] Čula mogu da sugerišu, opravdaju i potvrde te istine, ali ne i da dokažu njihovu stalnu i večnu pouzdanost. Sposobnost ljudskog duha da otkrije istinito saznanje zahteva trud i pažljivo promišljanje, mada može biti urođena, a čovek darovit. Prema Lajbnicu urođene istine kad se uzmu kao prirodno svetlo uma, nose svoje karakteristike u samima sebi, poput geometrije, pošto su sadržane u neposrednim načelima koja i vi sami smatrate neospornim.[46] Na primer, ideja broja je urođ ena, a zatim dolaze ideje celoga, ideja dela i ideja protežnosti. Stvari jednoobrazne i lišene svake raznovrsnosti, kao vreme, prostor i drugi predmeti čiste matematike, uvek su samo apstrakcije.[47] Konkretna protežnost postoji samo zahvaljujući apstraktnoj.

U deduktivnom pristupu, koji se koristi u matematici i teorijskoj fizici, istine se izvode uzastopnim koracima iz prvih principa, nesumnjivih aksioma. *Aksiome* su neposredno izvesni sintetički osnovni stavovi *a priori*. U postupku razvoja teorije određeni pojmovi se često definišu. Strogo uzev, *definisati* znači samo izložiti prosto i iscrpno pojam jedne stvari u njegovim granicama.[48] Definicije su jasno izložene ideje. Potpuno poklapanje između područja posmatranih činjenica i područja a priori dokazanih pravila predstavlja *ideal* koji se ne može smatrati potpuno ispunjenim ni na jednom stupnju razmatranja.[49]

Deduktivni postupak zaključivanja, ili dokaz (ili potpuno svedočanstvo), znači da premisa (pretpostavka) implicira zaključak. Ako pođemo od istinitih stavova, zaključak mora biti istinit. Ako gradimo teoriju od početka, premise čine neprotivrečan sistem aksioma koji je kristalno jasan i u njega nema sumnje, dakle istinit je. U daljem, pomoću dokaza (implikacija) izvodi se istinitost drugih postulata, stavova i tvrđenja. Ono što je u čistoj matematici neprotivrečan i istinit sistem aksioma, u primenjenoj matematici su izvesni stavovi istiniti na osnovu zakona, recimo, mehanike ili fizike, i iz kojih se dedukuju dalji zaključci.

---

[44] Gotfrid Lajbnic (Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz), nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, diplomata i politički savetnik, živeo je od 1646. do 1716.

[45] Gotfrid Lajbnic, 2010, *Novi ogledi o ljudskom razumu*, Dereta, Beograd, str. 18.

[46] Gotfrid Lajbnic, 2010, *Novi ogledi o ljudskom razumu*, Dereta, Beograd, str. 35.

[47] Gotfrid Lajbnic, 2010, *Novi ogledi o ljudskom razumu*, Dereta, Beograd, str. 48.

[48] Granica ovde znači tačnost koja podrazumeva upotrebu ne više oznaka već samo koliko je nužno za potpunost pojma. Reč prosto znači da za odredbu tog pojma nije potreban neki dodatni dokaz.

[49] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 382.

Prema Kantu sve naše saznanje počinje sa iskustvom ali ipak ne proističe sve saznanje iz iskustva. Saznanja koja su apsolutno nezavisna od iskustva zovu se saznanja *a priori* i razlikuju se od empirijskih saznanja, koja imaju svoje izvore *a posteriori*, tj. na osnovu iskustva. *Um* je ona moć koja pruža principe saznanja *a priori*. „Lako se može pokazati da u ljudskom saznanju zaista ima takvih nužnih i u strogom smislu opštih, tj. čistih sudova *a priori*. Ako se hoće neki primer iz nauka, onda se samo može ukazati na sve stavove matematike.“[50] Kantov drugi stav, *da se matematika bavi predmetima i saznanjima samo ukoliko se oni mogu predstaviti u opažanju*, osporen je, stvaranjem novih matematičkih teorija, poput geometrije Lobačevskog, teorije skupova, matematičke logike, teorije grupa i drugih algebarskih struktura itd. Matematika je prirodna nauka, po svojoj prirodi primenjena, jer se odnosi na svet, ali i više od toga – matematika je i nauka sama po sebi, nezavisna od primene.

Sam Kant u jednom trenutku kaže: „Slavni Lajbnic izgradio je jedan intelektualni sistem o svetu, ili je još i više, verovao da je saznao unutrašnju osobinu stvari na taj način što je upoređivao sve predmete samo sa razumom i apstraktnim formalnim pojmovima njegovoga mišljenja.“

„Platon se služio izrazom ideja tako da se jasno može videti da je on pod tim izrazom podrazumevao nešto što se ne samo nikada ne dobija od čula, već, naprotiv, nešto što daleko prevazilazi pojmove razuma kojima se bavio Aristotel, jer se u iskustvu nikada ne nalazi nešto što tome izrazu odgovara. Ideje, kod Platona, praslike su samih stvari, a ne samo ključevi za moguća iskustva, kao što su kategorije. Prema njegovom mišljenju, one su proizašle iz najvišeg uma, odakle su bile dodeljene ljudskom umu...“[51] Kant ističe da je Platon vrlo dobro primetio da naša moć saznanja ima znatno višu potrebu od saznanja iz iskustva pomoću zakona sintetičkog jedinstva. Po svojoj prirodi naš um se uzdiže do saznanja koja idu isuviše daleko od predmeta iskustva.

Prema Kantu lestvica saznanja počinje sa percepcijom (*perceptio*), koja – ako se odnosi na subjekat – čini osećaj (*sensatio*), ako je objektivna ona je saznanje (*cognitio*). Saznanje je ili opažaj ili pojam (*intuitus* vel *conceptus*). Opažaj se odnosi neposredno na predmet i pojedinačan je, pojam se odnosi na predmet posredno, posredstvom jedne oznake, koja može biti zajednička većem broju stvari. Pojam je empirijski ili čist pojam, a čist pojam ima svoje poreklo jedino u razumu (ne u slici čulnosti). Pojam koji sve ovo prevazilazi jeste *ideja* ili pojam uma. Još uzvišeniji je pojam *ideala*.

„Ono što je za nas jedan ideal, to je za Platona bila ideja božanskog razuma, jedan pojedinačni predmet u čistom opažanju toga razuma, ono što je najsavršenije u svakoj vrsti mogućih bića i što je praosnov svih praslika u pojavi. Ali ne idući tako daleko moramo priznati da ljudski um, sadrži u sebi ne samo ideje već i ideale koji, doduše, nemaju, kao platonski ideali, stvaralačke snage, ali ipak imaju praktičnu snagu (kao regulativni

[50] Imanuel Kant, 2012, *Kritika čistog uma*, Dereta, Beograd, str. 39.
[51] Imanuel Kant, 2012, *Kritika čistog uma*, Dereta, Beograd, str. 258.

principi) i leže u osnovi mogućnosti savršenstva izvesnih dela.“[52] Ideja daje pravilo, ideal je praslika, a merilo je postupanje božanskog čoveka u nama.

Na primer, vrlina i ljudska mudrost u svojoj potpunoj čistoti su ideje, a mudrac jeste jedan ideal, to jest jedan redak čovek koji postoji u mislima, ali koji se potpuno podudara sa idejom mudrosti. Upoređujemo se sa postupanjem božanskog čoveka u nama da bi sebe ocenili i popravili, ali nikada ga ne možemo dostići u svojoj savršenosti. Ideja o skupu principa svih mogućnosti stvari, data *a priori*, koja je potpuno određena, jeste ideal čistog uma ili transcedentalni ideal. Na primer beskonačnost, jedinstvo, večnost. Kant ovako stiže do najvišeg bića, ideala, koji je bez nedostatka, pojam koji celokupno ljudsko saznanje završava i kruniše, čiji se objektivni realitet zaista na ovome putu ne može dokazati.[53] Zato Kant postavlja tri pitanja: *Šta mogu da znam*? *Šta treba da činim*? *Čemu mogu da se nadam*?

Time što mišljenje postaje sve sličnije apstraktnim oblicima koje nalazi u sebi, ono razvija i stvara sigurne matematičke nauke.[54] Jedinstvo matematičkog pojma uključuje lepotu i tako u duši nastaje unutrašnje savršenstvo. Lepo, putem imaginacije, povezuje čulni i inteligibilni svet. Matematički objekti mogu da apstrahuju svaku stvarnost. Apstraktni pojam je rezultat čistog misaonog postupka, kojim stvaramo nove i samostalne sadržaje koji prelaze granice svih podataka oseta. Apstraktni temelji daju nauci sigurno saznanje.

1.5.2. Tri škole matematike

Matematika je beskrajno složen i tajnovit svet. Istraživanje tog sveta je strast. Ljudi spolja posmatraju sa čuđenjem tog matematičara i očarani su time što su takav čudan lik i tako čudna delatnost došli na svet i održali se hiljadama godina.[55]

„Unutrašnja logika razvoja matematike podseća nas mnogo više na rad jednog jedinog intelekta, koji sistematski i dosledno razvija svoju misao, služeći se mnoštvom ljudskih individualnosti samo kao sredstvom. To je slično orkestru koji izvodi simfoniju nekog kompozitora. Tema prelazi od jednog do drugog instrumenta, a kad jedan od izvođača treba da prekine svoj deo, preuzima ga drugi i svira je s besprekornom preciznošću.“[56]

---

[52] Imanuel Kant, 2012, *Kritika čistog uma*, Dereta, Beograd, str. 389.

[53] Imanuel Kant, 2012, *Kritika čistog uma*, Dereta, Beograd, str. 431.

[54] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 39.

[55] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 2.

[56] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 50.

Ako radimo matematiku svaki dan, ona nam se čini kao najprirodnija stvar na svetu. Ako zastanemo da razmislimo o tome šta radimo, čini se da je najzagonetnija stvar na svetu. Postoje tri matematička pravca: *platonizam*, *formalizam* i *konstruktivizam*.[57]

Platonisti, poput Kurta Gedela, smatraju da su brojevi apstraktni, nužno postojeći objekti, nezavisni od ljudskog uma. Matematički objekti su stvarni, postoje u prirodi nezavisno od toga znamo li za njih ili ne. Beskonačni skupovi, krive i drugi objekti matematičke teorije, potpuno su određeni i imaju određene osobine, i neki od njih su poznati dok su mnogi nepoznati. Oni postoje izvan prostora i vremena fizičke egzistencije. Svako smisleno pitanje o nekom matematičkom objektu ima svoj odgovor, bez obzira na to da li smo u mogućnosti da ga ustanovimo ili ne. Matematički objekti postoje nezavisno od uma koji ih posmatra. Racionalisti su sposobnost rasuđivanja smatrali urođenom odlikom ljudskog uma, kojom se istine mogu shvatiti a priori, nezavisno od opažanja. „Postojanje matematičkih objekata u carstvu ideja nezavisnih od ljudskog uma nije bila nikakva teškoća za Njutna i Lajbnica; kao hrišćani uzimali su samo po sebi postojanje Božanskog Uma. U takvom kontekstu postojanje idealnih objekata, kao što su brojevi i geometrijski oblici, nije bio nikakav problem."[58]

Formalisti veruju da matematičkih objekata nema. Matematika se sastoji od aksioma, definicija, i teorema – drugim rečima – od formula. Formulama se može dati fizičko tumačenje. „Teoriju skupova razvio je Kantor kao novu i fundamentalnu granu matematike samu po sebi. Činilo se da je zamisao skupa – proizvoljne kolekcije pojedinačnih objekata – tako jednostavna i fundamentalna da bi mogla biti kamen temeljac od kojeg se može izgraditi cela matematika."[59] Kasnije je Rasel (a pre njega i Kardano) došao do čuvenog paradoksa i želeo je da preformuliše teoriju skupova i da matematiku postavi na temelje logike. „Čista matematika je klasa svih iskaza oblika *p implicira q*, gde su *p* i *q* iskazi koji sadrže jednu ili više promenljivih, istih u oba iskaza, i gde ni *p* ni *q* ne sadrže druge, osim logičkih konstanti"[60] Rasel nije uspeo da čitavu matematiku svede na logiku, iako se pravila logike kao što su kontradikcija ili pravila implikacije, smatraju objektivnim i nespornim.

Konstruktivisti pravom matematikom smatraju samo ono što se može dobiti pomoću konačne konstrukcije. Brouver je smatrao da nam je prirodne brojeve dala fundamentalna intuicija, koja predstavlja ishodište sveukupne matematike. Prirodni brojevi su temelj od

[57] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 322.

Napomena. Okvirno su prikazana tri pravca. Oni se ipak međusobno prepliću. Ima i drugih mišljenja o ovom pitanju.

[58] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 330.

[59] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 334.

[60] Bertrand Russell, 1903, The *Principles of Mathematics*, W. W. Norton & Company, Inc. New York, p. 3.

koga se konstruišu svi smisleni matematički pojmovi. Ovaj pravac podržava veoma mali broj matematičara.

Pod uticajem Hilberta i Burbakista, u dvadesetom veku, u matematici prevladao je formalizam. Ali matematičari su većinom verovali, i veruju i dalje, u platonizam. U novije vreme raste protivljenje formalizmu. U novijim matematičkim istraživanjima vidljiv je zaokret prema konkretnom i primenljivom. U tekstovima i traktatima poklanja se više pažnje primerima, uz manju strogost u formalnom izlaganju.

1.5.3. Intuicija

Navodimo nekoliko određenja pojma intuicije.

(i) *Intuitivno znači vizuelno*. Objekti o kojima se radi mogu se *videti* i predstaviti grafički i vizuelno, nezavisno od stroge (formalne, apstraktne) verzije. Time intuitivno daje izvestan kvalitet strogoj verziji. Ovde treba biti oprezan jer vizuelizacija nas može navesti na zaključak da neke tvrdnje smatramo očiglednim, a u stvari su one sumnjive ili pogrešne.

(ii) *Intuitivno znači razumno i uverljivo u nedostatku dokaza*. Do toga se dolazi na osnovu iskustva stečenog u sličnim situacijama ili povezanim temama. To je slutnja i nagoveštaj za mogući dokaz.

(iii) *Intuitivno znači integrativno u odnosu na detaljno ili analitičko*. Kada o matematičkoj teoriji razmišljamo globalno, i uviđamo da su neke tvrdnje istinite jer se uklapaju, tada razmišljamo *intuitivno*.

Smatra se da je matematičar Koši imao izuzetnu intuiciju. Na primer, znao je Košijevu integralnu teoremu, iako tada još nije bio formalizovan integral kompleksne funkcije po konturi. Kako je to moguće? Koši je bio veliki matematičar i mogao je da se osloni na svoju intuiciju. Bio je takav genije da je podsvesno znao da tvrđenje važi.[61]

Intuiciju ipak treba prihvatiti uz sumnju jer može da bude jedan od nesavršenih mehanizama ljudskog mozga, što dalje može dovesti do velikih zabluda.

„Bit matematike je njena sloboda, rekao je Kantor. Sloboda da konstruiše, sloboda da pravi pretpostavke. Ti aspekti matematike priznaju se u formalizmu i konstruktivizmu. Pa ipak, Kantor je bio platonista, verovao je u matematičku stvarnost koja nadilazi ljudski um. Te konstrukcije, ti zamišljeni svetovi, nameću nam tada svoj red. Moramo priznati njihovu objektivnost; oni su delom poznati, a delom zagonetni i teško saznatljivi; delom se, možda i ne mogu saznati. To je istina koju vidi platonista.“[62]

[61] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 398.

[62] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 407.

1.5.4. Primena matematike

Kako fizičari gledaju na matematiku? Profesor Vilijam Tejlor (William F. Taylor) međunarodni je autoritet u inženjerstvu i profesionalno područje mu je u oblasti fizike, hemije i nauke o materijalima. Tejlor smatra da ne stvara matematiku već da je koristi. Po njegovim rečima, mnogo toga što je u poslednje vreme razvijeno u matematici, daleko je iza granice neposredne primene. Matematika je sama po sebi, model. Tejlor smatra da se naučna metoda može podvesti pod indukciju, dedukciju i verifikaciju. „Indukcija se odnosi na moju svest o opažanjima drugih i o postojećim teorijama. Dedukcija se odnosi na konstrukciju modela i na fizičke zaključke koji su iz njega matematički izvedeni. Eksperimentatoru je potreban model da bi mogao da pripremi svoje eksperimente. Inače ne bi znao gde da traži. Radio bi u tami. Teoretičaru je potreban eksperimentator da mu kaže šta se događa u stvarnom svetu. Inače bi njegovo teoretisanje bilo prazno. Između njih dvojice treba da postoji odgovarajuća komunikacija i mislim da zaista i postoji.“[63]

U fizici i tehnologiji matematika igra ulogu moćnog alata za rasuđivanje u kompleksnim situacijama. Znanje u tehničkom smislu, kako ga shvata Tejlor, podrazumeva da se može izraziti simbolima. Matematičke primene mogu se ostvariti i odlukom. Stvaramo različite matematičke strukture, a zatim namerno ispitujemo različite pojave fizičkog sveta u njima. Sve češće možemo čuti da se na univerzitetima predaje *matematičko modeliranje*.

Pretpostavimo da imamo primenu, recimo, teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina u matematičkoj teoriji elastičnosti. Sada može da se postavi pitanje ima li teorija elastičnosti primenu van same teorije. Pretpostavimo da je to teorijsko inženjerstvo. A da li je ta teorija zanimljiva inženjeru u praksi? Pretpostavimo da jeste – omogućava mu izvršenje analize naprezanja, na primer, automobilskih vrata da bi se zadovoljili standardi za čvrstinom. A kao što znamo, automobil ima osnovnu primenu – prevoz ljudi. Na ovaj način prati se primena matematike od apstraktnog nivoa do nivoa potrošača.

Kako smo videli u prethodnom stavu, cilj matematike jeste njena praktična primena. Neoplatonisti bi rekli da je teško poverovati da jedna superiorna (duhovna) delatnost može naći svoje opravdanje u inferiornoj (materijalnoj) delatnosti. Neki autori smatraju da je naučni ideal objedinjavanje znanja o formiranju matematičkih sistema i fizičkih zakona.

U *Uvodu matematičkih principa prirodne filozofije*, ser Isak Njutn ističe da su stari autori u istraživanjima prirodnih stvari pridavali veliki značaj mehanici, a novi, koji su odbacili supstancijalne forme i okultne sadržaje, nastojali su da prirodne pojave objasne zakonima matematike. Zanatsko umeće u mehanici povezano je sa preciznošću. „Jer se i crtanje pravih linija i krugova, na čemu se zasniva geometrija, tiče i mehanike. Geometrija ne podučava kako se povlače ove linije, ona to zahteva. Ona, naime, traži da nedovoljno upućen najpre sam izuči da ih precizno povlači, pre nego što stupi na prag geometrije,

[63] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 45.

zatim podučava kako se putem ovih operacija rešavaju problemi. Povući prave linije i nacrtati krugove jeste problem, ali ne geometrijski. Od mehanike se zahteva rešenje ovog problema, a u geometriji se uči kako da se ta rešenja koriste.“[64]

Pitanje odnosa između mogućeg i stvarnog suštinski određuje odnos između dedukcije i iskustva. Žan Pijaže[65] dodaje da je to pitanje velikog dela istorije naučne misli. Oblast mišljenja i oblast bivstva su po svom obimu različite, tako da nikad ne mogu biti dovedene do potpunog poklapanja; ipak, između njihovih sadržaja postoji opšta harmonija, usled koje se svi odnosi bivstva projektuju i predstavljaju u ljudskom duhu po merilu samog tog duha.[66] Preimućstvo i plemenitost duha su u tome što je za njega vezana ujedno sva lepota i savršenstvo univerzuma.[67] „Svekolika misleća delatnost znači samo prihvatanje i prenošenje određenja koja su, po sebi i za sebe, izvornije prisutna u svetu stvarnosti. Obličje i pokret, boja i ton, prostorni poredak tog skupa, kao i vremenski poredak uzastopnosti: sve su to stalne i gotove svojevrsnosti samih objekata; zadatak se sastoji samo u tome da se pokaže put kojim se kreće pretvaranje tih osobina stvari u duhovne osobine... Način na koji se predmeti prevode u duh pojmićemo, ako promislimo o tome da duša u sebe ne prima njihovu potpunu stvarnost nego samo njihov oblik. Same stvari u sebi sjedinjuju, ukoliko su sazdane od materije i oblika, jedan materijalan i jedan inteligibilan faktor.“[68]

„Istina je da imamo običaj da međusobne odnose nauka zamišljamo kao pravolinijski sled: matematika, fizika (u širem smislu), biologija, pa psihološke i društvene nauke tako dolaze jedna za drugom po principu hijerarhije, u čuvenom nizu sve veće složenosti i sve manje opštosti koji je zamislio Ogist Kont. Samo tada se postavljaju dva pitanja. Na prvom mestu, na čemu se zasniva matematika? Na samoj sebi, tu se svi slažu, ili na logici, koja se takođe oslanja na samu sebe. Međutim, dok se to može činiti jasnim sa jedne tačke posmatranja, bilo metafizičke, bilo usko aksiomatske, to objašnjenje prestaje da zadovoljava čim potražimo uslove pod kojima je aksiomatika moguća. Tada nužno dolazimo do toga da se pozovemo na zakone ljudskog uma, što je jedno eksplicitno (Poenkare, Brenšvik, itd.) ili implicitno pozivanje na psihologiju. Na drugom mestu, i na drugom kraju niza postavlja se pitanje čemu teže istraživanja genetičke psihologije? Upravo tome da nam objasne kako se konstruišu uvidi i pojmovi prostora, broja, reda, i tako dalje, to jest logičke i matematičke operacije. Čim napustimo jedno čisto normativno i aksiomat-

---

[64] Isak Njutn, 2011, *Matematički principi prirodne filozofije*, Akademska knjiga, str.7.

[65] Žan Pijaže, švajcarski razvojni psiholog i filozof, živeo je od 1896–1980.

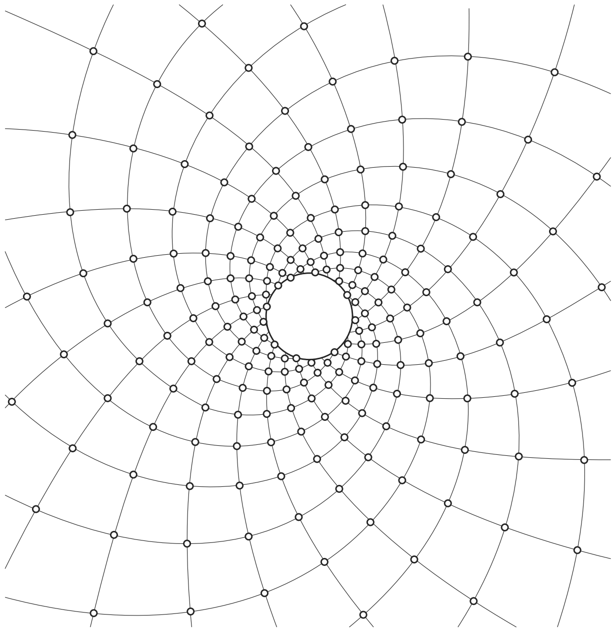
[66] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 48.

[67] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 50.

[68] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 55.

sko stanovište, linearni niz saznanja postaje kružan, jer linija koju pratimo, u početku prava, polako počinje da se zatvara prema sebi.“[69]

NAPOMENA. Međusobni odnosi nauka slikovito se mogu uporediti sa prostim linijskim i algoritamskim šemama, ali takođe i sa razgranatim linijskim šemama. Grananje je osnovna osobina međusobnih odnosa nauka.



Slika 6 – Fibonačijeve ortogonalne spirale

Po prirodi stvari, ovaj epistemološki krug je izraz kruga u naukama: objašnjenja psihologije se pozivaju na objašnjenja biologije, a ova na objašnjenja fizike i hemije; objašnjenja fizike se oslanjaju na matematiku, a matematika i logika se zasnivaju jedino na zakonima uma.[70] „Preko matematike i psihologije, nauka asimiluje stvarnost u okvire ljudskog uma i tako sledi jedan idealistički pravac. S druge strane, matematika, u stvari, asimiluje čulne datosti sa prostornim i numeričkim shemama i na taj način materiju podvodi pod sistem sve složenijih i sve koherentnijih operacija koje dedukciji omogućavaju da vlada iskustvom, pa čak i da ga objašnjava.“[71]

Pijaže postavlja pitanje: Kako je moguća matematička nauka, strogo deduktivna i istovremeno sasvim prilagođena iskustvu? To je oduvek i centralni problem epistemologije. Matematika se slaže sa fizičkom stvarnošću. Raznovrsne strukture i odnose u materi-

[69] Žan Pijaže, 1994, *Uvod u genetičku epistemologiju: I. Matematičko mišljenje*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 42.

[70] Žan Pijaže, 1994, *Uvod u genetičku epistemologiju: I. Matematičko mišljenje*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 42.

[71] Žan Pijaže, 1994, *Uvod u genetičku epistemologiju: I. Matematičko mišljenje*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 43.

jalnom svetu fizičari precizno izražavaju matematičkim jezikom. Između fizičkog univerzuma i apstraktnih okvira geometrije i analize postoji harmonija. Za tu harmoniju se može reći da je unapred uspostavljena jer do saglasnosti matematike i stvarnosti ne dolazi samo u trenutku otkrića nekog fizičkog zakona. Matematičke sheme mogu vremenski unapred anticipirati iskustveni sadržaj. Geometrijski i analitički oblici elaboriraju se bez obaziranja na stvarnost. Ukoliko su oni deduktivno koherentni, iskustvo ih neće opovrgnuti već će se tačno uklopiti.[72] „Pređi ne samo preko čulnih stvari nego i preko inteligibilnih objekata, napusti oblast razuma i uzdigni se – ljubavlju prema jedinom i najvišem dobru – do tog samog dobra, koje je iznad svekolikog bivstva, iznad sveg života i sveg razuma.“[73]

„Misliti prirodu kao inteligibilni kristal, kako se to danas usuđuju najbolji među nama, možda je put istine – put na kome sija svetlo matematike.“[74]

1.5.5. Matematika i kultura

Kultura jednog društva obuhvata kako nematerijalne aspekte – verovanja, ideje i vrednosti koji čine njen sadržaj, tako i materijalne aspekte – objekte, simbole ili tehnologiju kojima se sadržaj kulture izražava.[75] Kultura je više od medijuma za prenošenje znanja i uverenja. Ona je medijum putem kojeg osoba doživljava svet. Temeljni značaj za sve kulture imaju one ideje koje određuju šta se smatra važnim, vrednim i poželjnim.

Kultura je ukupan zbir ljudskih sistema simbola koje možemo svrstati u nekoliko grupa:[76]

- *sistem jezičkih kodova* – govorni, pisani, notni, složeni matematički izrazi, računarski algoritmi, šahovski i drugi zapisi;
- *vrednosti* – shvatanje o tome šta je dobro a šta loše;
- *uverenja* – stavovi o obrazovanju, radu, religiji itd.;
- *norme* – ponašanje ljudi;
- *zalihe znanja* – naučni rad, akademsko pisanje i iskustvo;
- *fizički predmeti* – knjige, umetničke slike i umetnički predmeti, građevine i dr;
- *tehnologija*.

Prema Karlu Poperu svet se sastoji iz tri dela:

[72] Žan Pijaže, 1994, *Uvod u genetičku epistemologiju: I. Matematičko mišljenje*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 50.

[73] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba I*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str.78.

[74] Oskar Becker, 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, str. 156. Možete se upoznati sa pojmom fraktala sa izlomljenom, a finom strukturom koja se opisuje pomoću Hausdorfove fraktalne dimenzije. Stevan Pilipović, Dora Seleši, 2012, *Mera i integral: fundamenti teoriji verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 85.

[75] Entoni Gidens, 2007, *Sociologija*, Ekonomski fakultet, Beograd, str. 24.

[76] Džonatan H. Tarner, 2009, *Sociologija*, Mediteran Novi Sad, FPN Beograd, str. 106.

Prvi svet je fizički svet, svet mase i energije, kamenja i zvezda. Drugi svet je svet svesti. Misli, osećaji, svest, sve su to nefizičke stvarnosti. Treći svet je jezik, teorije, društvena svest, nematerijalna kultura čovečanstva. To je svet u kome se nalazi matematika. Postojanje predmeta koji se zove matematika jeste činjenica, a ne pitanje.[77] Ovaj pogled zapravo je veliko trojstvo: *duh, duša i telo*.

Matematika je objektivna stvarnost koja nije ni subjektivna ni fizička. Ona je idealna (to jest, nefizička) stvarnost koja je objektivna (izvan svesti bilo koje osobe). Zapravo, primer matematike je najsnažniji, najuverljiviji dokaz postojanja takve idealne stvarnosti.[78]

Adler beleži istinsku radost umetnika. „Novi matematički rezultat, potpuno nov, koji nikad pre niko nije naslutio ili razumeo, negovan od prve privremene hipoteze, kroz lavirinte pogrešno pokušanih dokaza, pogrešnih pristupa, neobećavajućih pravaca i kroz mesece i godine teškog i delikatnog rada – nema ničega, gotovo ničega, na svetu što može pružiti takvu radost i osećaj moći i duševnog mira, da se može uporediti sa onim što oseća njegov stvaralac. A velika matematička građevina je trijumf koji šapuće o besmrtnosti.“[79]

[77] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 410.

[78] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 409.

[79] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 58.

2.

ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA

2.1. PROGRAM MATEMATIČKE ANALIZE NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA

Predavači imaju tendenciju da se oslanjaju na sopstvena sećanja na ono što su učili kad su bili u školi. Mađutim, iz mnogo razloga, situacija danas je znatno drugačija. Nastavni plan treba posmatrati u ovom trenutku.[1]

Baumslag ističe nekoliko važnih činjenica. Studenti koji dolaze iz škole nisu dovoljno pripremljeni. U srednjoj školi dokazi su dati samo kao nebitna forma i ne očekuje se da ih đaci razumeju, a kamo li da znaju. Dolaskom na univerzitet, gde saznaju da su definicije i dokazi veoma važni delovi kursa, oni shvate da su na gubitku. Promene u školama, promene u nastavnom programu, smanjen kriterijum i veći obim upisa doveli su do toga da su na fakultetima primani slabiji i manje pripremljeni studenti. Oni su manje spremni na borbu da pronađu rešenje. Radije odustaju posle kratkog pokušaja da problem reše. Istovremeno, umesto više studentima se posvećuje manje vremena, što naročito pogađa slabe studente. Finansiranje studija nije povećano srazmerno broju i potrebama. Svi ovi razlozi doprineli su olakšavanju i pojednostavljivanju nastave i samog predmeta.

Suštinska odlika modernog univerziteta jeste izvrsnost. Na univerzitetu uvek je bio cilj da studenti dobiju znanje i najviši mogući standard akademskog uspeha. Od njih se očekuje da izađu u društvo i da proizvode nove ideje i nove tehnologije. Ukoliko se standardi kurseva dramatično spuste i prilagode slabim i loše obrazovanim studentima, univerzitet neće uspeti u najvažnijoj obavezi da iznedri izvanredne diplomce, sposobne, maštovite, sa širokim opsegom znanja i veština. Teško je prilagoditi kurs dobrim studentima i može se dogoditi da će im biti dosadno. Zbog toga postoji mišljenje da treba brinuti o pametnim studentima. To će sigurno uspeti. Pametni prolaze dobro i nose se uspešno sa teškoćama. Šta je rešenje?

Ne smemo zanemarivati bolje studente i za njih treba obezbediti zahtevne kurseve. Na univerzitetu moraju da se obezbede kursevi koji odgovaraju različitim studentskim sposobnostima i interesovanjima. Pored toga treba imati u vidu kurseve koji tek

[1] Baumslag B., 2000, *Fundamentals of Teaching Mathematics at University Level*, Imperial College Press, London, p. 6.

očekuju studente. Svaka faza studija treba da bude dizajnirana prema studentima koji su prošli u narednu fazu, a gradivo da se nastavi tamo gde je prethodno završeno.[2]

Prema Posneru nastavni program sadrži više elemenata, među kojima su:

1. područje i redosled učenja – matrica ciljeva za pojedine nivoe obrazovanja koji su grupisani prema područjima;
2. silabus – plan kursa koji obično sadrži obrazloženje, teme, resurse i evaluaciju;
3. pregled sadržaja – lista obuhvaćenih tema;
4. standardi – lista znanja i veština koje poseduju studenti nakon završetka školovanja;
5. udžbenici – nastavni materijal korišćen u nastavi.[3]

Marš ističe da kurikulum čine predmeti koji su najkorisniji za savremeni život, a prema Smitu to su ishodi koje studenti treba da postignu.[4]

Termin silabus uglavnom se vezuje za univerzitetsku nastavu, odnosno univerzitetske kurseve sa značenjem nastavnog programa, programa kursa, nastavnog plana, pregleda sadržaja, pregleda i rasporeda predavanja. Drugi autori smatraju da je silabus deo kurikuluma koji je usmeren na specifikaciju nastavnih jedinica, što zavisi od specifikacije načina učenja tih jedinica, čime se bavi metodika.

Ishodi definišu ono što učenik treba da zna, razume, vrednuje, i što je u stanju da uradi... Kurikulum se ne bavi toliko pitanjem šta će se učiti, kako i kada, koliko pitanjem šta će biti naučeno. Kurikulum je u suštini program aktivnosti nastavnika i učenika usmerenih na ostvarivanje određenih ciljeva i ishoda obrazovanja.[5]

Pažnja se usmerava na ono što student čini u situacijama interakcije i organizovanog učenja, poput opažanja, rešavanja problema, razmena ideja i iskustava, razumevanja, rezonovanja, kritičkog mišljenja, konstruisanja, eksperimentisanja, stvaranja alternativa, i dr.

Za kreiranje programa nastave i njegove strukture ističu se tri dominantna pristupa:

(i) Pristup usmeren na sadržaj, odnosno program (content based/programe based). To je tradicionalni pristup u kome se popisuju oblasti ili teme koje će se predavati. Ovaj pristup opravdava se činjenicom da nije moguće predvideti koja vrsta znanja će biti potrebna u bližoj ili daljoj budućnosti. Smisao obrazovanja u tom duhu jeste da obezbedi opšte, univerzalno i strukturirano znanje koje se prezentuje putem širih principa, pojmova i teorija.

[2] Baumslag B., 2000, *Fundamentals of Teaching Mathematics at University Level*, Imperial College Press, London, p. 14–22.

[3] Miomir Despotović, 2010, *Razvoj kurikuluma u stru čnom obrazovanju*, Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, str. 21.

[4] Miomir Despotović, 2010, *Razvoj kurikuluma u stru čnom obrazovanju*, Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, str. 21.

[5] Miomir Despotović, 2010, *Razvoj kurikuluma u stru čnom obrazovanju*, Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, str. 29.

(ii) Pristup usmeren na aktivnosti i iskustvo učenja (activities based/experience based). U ovom pristupu primarni uticaj ima izbor i organizacija metoda, tehnika, strategija učenja i nastave. On omogućava razvoj opštih sposobnosti, kritičkog mišljenja, formulisanja i rešavanja problema.

(iii) Pristup usmeren na ishode (outcome based). Najvažnije je šta će biti naučeno. Obrazovanje i učenje pripremaju studenta za razumevanje konteksta, za funkcionisanje u njemu. Krajnji efekat učenja je unapred i jasno definisan i postaje primarna stvar u procesu učenja.[6]

Ideja nam je da u ovom delu prikažemo strukturu kurikuluma matematičke analize na elektrotehničkim, građevinskim i mašinskim fakultetima u Srbiji (Univerzitet u Beogradu, Univerzitet u Novom Sadu i Univerzitet u Nišu). Analiza kurikuluma izvršiće se poređenjem sa Univerzitetom u Berlinu i Univerzitetom u Štutgartu.

2.1.1. Upoređivanje kurikuluma Univerziteta u Berlinu sa elektrotehničkim fakultetima u Srbiji

Kada se uporede ciljevi učenja matematičke analize na Univerzitetu u Berlinu (Fakultet za elektrotehniku i matematiku) sa ciljevima i ishodima na elektrotehničkim fakultetima u Srbiji, uočava se sledeće: za prvi predmet u prvoj godini studija na Univerzitetu u Berlinu postoji tzv. *preporučeni preduslov* koji podrazumeva dve stvari. Prvo, *neophodno je intenzivno znanje matematike iz srednje škole*. Drugo, *preporučuje se učešće na tronedeljnom kursu pre početka zimskog semestra*. Preporučeni preduslovi nisu samo naznačeni na početku studija već za svaki matematički predmet i preporuka je da se sledeći predmet sluša ako su prethodni položeni.

Zašto su ovi preduslovi važni? Zbog toga što je za početak nastave na univerzitetu iz matematičkih predmeta važno predznanje. Tronedeljni kurs pomaže da se budući studenti prilagode zahtevima fakultetske nastave. Ovih preduslova na elektrotehničkim fakultetima u Srbiji nema. Kod nas se organizuje prijemni ispit za upis na fakultete (60 bodova) i vrednuje uspeh iz srednje škole (40 bodova). Upisom su pripreme za buduće studente završene.

Ciljevi učenja na Univerzitetu u Berlinu veoma su značajni. Interesantno je da posle prve godine studija cilj učenja podrazumeva homogenizaciju gradiva iz srednje škole. Na daljim nivoima, pored majstorstva i istraživačkog majstorstva, ciljevi sadrže elemente rezultata u primeni koji treba da se postignu. Na primer, primena matematike za modelovanje inženjerskih problema, upravljanje dinamičkim problemima i slično. Ciljevi učenja su pogodili suštinu nastave matematičke analize. U poređenju sa formalno postavljenim

[6] Miomir Despotović, 2010, *Razvoj kurikuluma u stručnom obrazovanju*, Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, str. 70.

ciljevima i ishodima na elektrotehničkim fakultetima u Srbiji, ovaj pristup sadrži značajan iskorak i može da bude uzor u izradi stranica predmeta i pripreme za nastavu.

U okviru obaveznih predmeta koje studenti pohađaju, sadržaj predmeta na Univerzitetu u Berlinu je obimniji i zahtevniji od sadržaja na elektrotehničkim fakultetima u Srbiji. To govori o značaju matematike za studije elektrotehnike i primenu. Što se literature tiče, interesantno je da se preporučuje eksterno udžbenik od istog autora za sve predmete matematike, a da su profesori u obavezi da pored udžbenika studentima pripreme i skripte u papirnom i elektronskom obliku.

Na Univerzitetu u Berlinu za Linearnu algebru za inženjere predviđeno je 60 sati predavanja i vežbi, zatim 90 sati samostalnog rada i 30 sati za pripremu ispita, što je ukupno 180 sati rada. Analiza I za inženjere obuhvata 90 sati predavanja i vežbi, zatim 120 sati samostalnog rada i 30 sati za pripremu ispita, što je ukupno 240 sati rada. U Analizi II takođe je predviđeno 240 sati rada ukupno. U planu za Integralne transformacije i parcijalne diferencijalne jednačine to je 180 sati rada ukupno, kao i za Analizu III.

Ispit na Univerzitetu u Berlinu čine pismeni ispit i urađeni domaći zadaci.

2.1.2. Upoređivanje kurikuluma Univerziteta u Štutgartu sa tehničkim fakultetima u Srbiji

Univerzitet u Štutgartu ima isti program matematike za građevinski i mašinski fakultet. Kada se uporede ciljevi učenja sa tehničkim fakultetima u Srbiji, interesantno je sledeće. Ciljevi učenja na Univerzitetu u Štutgartu su eksplicitni i glase: *Studenti će biti u stanju da samostalno primene svoje znanje na kreativan i kritički način. Studenti će posedovati matematičku osnovu za razumevanje kvantitativnih modela iz inženjerskih nauka. Studenti će biti u stanju da koriste matematiku, zajedno sa stručnjacima iz inženjerskih oblasti*.

Na tehničkim fakultetima u Srbiji ciljevi su dati kao nabrajanje oblasti kojima studenti treba da ovladaju. Što se ishoda tiče: *Ovladavanje matematičkim aparatom neophodnim za teorijske i stručne predmete* (GF, BG i NI), *Podizanje opšteg obrazovnog nivoa, formiranje radnih navika i sistematičnosti u radu, kao i izoštravanje kritičnosti. Student treba da razume gradivo u meri koja mu je dovoljna za primenu pri rešavanju konkretnih problema, i za uspešno praćenje nastave stručnih predmeta* (MF, BG). Upoređivanjem ciljeva i ishoda dolazimo do jasnog zaključka da Univerzitet u Štutgartu predviđa značajne rezultate u primeni matematike koji treba da se postignu. Tehnički fakultet, formalno, ima slične ideje za obrazovne ciljeve i ishode. Cilj: *Osposobljavanje studenata za apstraktno mišljenje, generalizaciju i sticanje matematičkog znanja za primenu u tehnici*. Ishodi: *Student je osposobljen za primenu matematičkih modela u stručnim predmetima*. Na sledećim nivoima ishodi se predviđaju za primenu matematike u struci i inženjerskoj praksi.

U sadržajnom smislu primećuje se da na MF u Beogradu, ali ni na GF u Nišu, nije predviđeno izučavanje Furijeovih redova. Što se literature tiče, na Univerzitetu u Štutgartu u ponudi je više udžbenika za navedeni predmet, od kojih se jedan poklapa sa Univerzitetom u Berlinu. Na tehničkom fakultetu u Novom Sadu ponuđeni su udžbenici koji pokrivaju različite oblasti, autora koji su predavači. Na Univerzitetu u Nišu postoji jedna specifičnost, u ponudi literature je Zbirka zadataka autora Miličića i Ušćumlića, sa preko četiri hiljade zadataka, što je neprimereno za pripremanje ispita. Na Mašinskom fakultetu u Beogradu, pored profesora koji predaju matematiku u ponudi je udžbenik Elementi diferencijalnog i integralnog računa od autora D. Tošića, M. Albijanića i D. Milenković, za Matematiku 2.

2.2. ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE

2.2.1. Matematička logika i skupovi

Težnja za objedinjavanjem matematičke teorije zasniva se na misaonim konstrukcijama na kojima bi se mogla zasnivati čitava matematička nauka. Važno je pronaći sistem aksioma, pravila zaključivanja i omogućiti deduktivnu izgranju matematičkih teorija.

Istinitost aksioma oslanja se na neposrednu intuiciju i iskustvo, a pravila zaključivanja na matematičku logiku. Logika je nauka čiji je jedan od važnih predmeta istraživanje ispravnosti potpunih svedočanstava – dokaza. Osnovna ideja, u ovom delu, jeste da se prihvate termini *istinitosnih vrednosti*, i to *tačno* $\top$ i *netačno* $\bot$. Takođe je važno da se razume *metoda svođenja na protivrečnost*. Konstante $\top$ i $\bot$, čiji operacijski deo čine četiri binarne operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ i jedna unarna operacija $\neg$ je iskazna algebra

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

p	$\neg q$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Definicija iskazne formule.

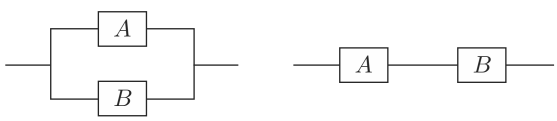
(i) *Sama iskazna slova i konstante $\top$, $\bot$ su formule*

(ii) *Ako su A i B formule onda su i $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ i $\neg A$ takođe formule.*

(iii) *Iskazne formule mogu se graditi samo konačnom primenom (i) i (ii).*

Iskazna formula A je tautologija ako i samo ako za sve vrednosti svojih iskaznih slova formula A dobije vrednost $\top$.

Iskazna slova $p, q, r, \ldots$ i njihove negacije mogu se interpretirati kao strujni relejni prekidači. Simboli $\top$, $\bot$ kao uključen, isključen. Na primer, ako su A i B iskazne formule koje su već interpretirane kao relejne prekidačke mreže (sheme) —$\boxed{A}$— i —$\boxed{B}$— tada se formule $A \vee B$, $A \wedge B$ interpretiraju kao sledeće sheme



Slika 1 – Relejne mreže

PRIMER 1. Spisak važnijih tautologija:

$p \Rightarrow p$	zakon refleksivnosti
$p \vee \neg p$	zakon isključenja trećeg
$\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow p \wedge \neg q$	zakon negiranja implikacije
$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg p \vee q$	zakon uklanjanja implikacije
$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	zakon kontrapozicije
$(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	zakon uklanjanja ekvivalencije
$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$	zakon svođenja na apsurd
$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morganov zakon
$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$	De Morganov zakon
$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	modus ponens
$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	zakon distribucije

PRIMER 2. *Metodom svođenja na protivrečnost*, dokazati da je iskazna formula *modus ponens* tautologija

$$\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q \quad \text{(modus ponens)}$$

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno da iskazna formula modus ponens nije tautologija, odnosno za neke vrednosti slova p i q formula ima vrednost $\perp$. Odnosno, $\tau(F) = \perp$.

Pošto je implikacija, to se može desiti samo u slučaju $\tau\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) = \top$ i $\tau(q) = \perp$.

Konjukcija ima vrednost tačno ako oba činioca te konjukcije imaju vrednost $\top$, odnosno

$$\tau(p) = \top \quad \text{i} \quad \tau(p \Rightarrow q) = \top.$$

Pošto je $\tau(p) = \top$ onda se iz formule

$$\tau(\top \Rightarrow q) = \top \quad \text{dobija da je} \quad \top(q) = \top \quad \text{(jer bi za } \tau(q) = \perp \text{ bilo } \top \Rightarrow \perp = \perp).$$

Ako formula nije tautologija, onda je $\tau(q) = \perp$ i $\tau(q) = \top$ što je protivrečnost ili kontradikcija. Zaključak: Navedena formula jeste tautologija.

PRIMER 3. *Metodom dovođenja na konjuktivni oblik* dokazati da je iskazna formula *modus tolens* tautologija.

$$((p \Rightarrow q) \wedge q)) \Rightarrow p \quad \text{(modus tolens)}$$

DOKAZ. Ekvivalentnim transformacija dobija se:
(eliminacijom spoljne implikacije $\Rightarrow$ na osnovu $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$)

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

(negiranjem konjukcije, primenom De Morganovog zakona $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$)

$$\Leftrightarrow (\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(\neg q)) \vee \neg p$$

(na osnovu $\neg\neg q = q$ i primenom $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$)

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p$$

(primenom distribucije $\vee$ prema $\wedge$)

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$

(distributivnost $\vee$ prema $\wedge$)

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee \neg p) \wedge ((\neg q \vee q) \vee \neg p)$$

(asocijativnost, komutativnost i asocijativnost $\vee$)

$$\Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \vee q) \wedge ((\neg q \vee q) \vee \neg p).$$

Ovde se staje jer poslednja formula jeste tautologija zbog činjenice da je vrednost

$$\tau(p \vee \neg p) = \top \quad \text{i} \quad \tau(\neg q \vee q) = \top.$$

To znači da i početna, ekvivalentna formula, jeste tautologija.

Skupovi i operacije

Pojam skupa i pojam elementa (člana) skupa, kao osnovni pojmovi koji su intuitivno jasni, ne definišu se. Oni imaju oslonac u iskustvu i zdravom razumu. Dalji sistem aksioma i definicija omogućava deduktivnu izgradnju opšte teorije. Tako se u opštoj teoriji skupova pojam skupa i njegovih elemenata uzdiže na viši nivo apstrakcije. Uz određene interpretacije skupova i njihovih elemenata i pomoću važnog pojma funkcije (preslikavanja) mogu se razviti i opisati ranije izgrađene matematičke teorije. Ideja vodilja je da se određeni skupovi organizuju kao strukture, tj. da se uvedu određeni odnosi među elementima datog skupa. Postoje različiti tipovi matematičkih struktura, pa se govori o *algebarskim strukturama* kojima se uvode i opisuju operacije među elementima skupa, zatim o *uređenim strukturama* kojima se uspostavlja poredak između elemenata skupa, pa o *metričkim strukturama* kojima se definiše položaj i međusobna udaljenost između elemenata skupa.

Kada se govori o matematičkim strukturama i uvodi osnovni tročlani skup {algebarske strukture, uređene strukture, metričke strukture}, onda je ovo istovremeno primer *Apolonijevog univerzalnog sistema* koji se može primeniti i naći u nauci, umetnosti, prirodi, kao i kod samog čoveka.[7]

Skup i njegovi elementi (*članovi, tačke*) *osnovni su pojmovi matematike.*

Skupove označavamo velikim latiničnim slovima $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, a elemente malim slovima $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ Činjenicu da element a pripada skupu A označavamo sa $a \in A$ ili $A \ni a$. U protivnom pišemo $a \notin A$. Ako $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pripadaju skupu A, onda zapisujemo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. *Prazan skup* nema nijedan element. obeležava se sa $\varnothing$.

Sa $A = \{x | P(x)\}$ *ili* $A = \{x : P(x)\}$ *označava se skup svih elemenata* x *koji imaju osobinu* P.

[7] Miloš Čanak, 2014, *Das Geheimnis der Apollonischen Berührungsprobleme*, XII Oster Symposion zur Geschichte der Mathematik, s. 44-58, Miesenbach.

Ako je n prirodan broj, skup $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ od n elemenata $x_1,\dots,x_n$ je konačan. Prazan skup je konačan (ima nula elemenata). Skup je beskonačan ako broj njegovih elemenata nije konačan.

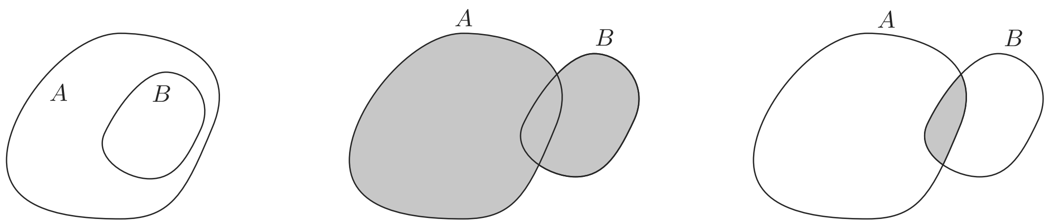
Za skup B kaže se da je **podskup** *ili deo skupa A, ako je svaki element skupa B takođe element skupa A, tj. ako iz $x\in B$ sledi $x\in A$, i označava se $B\subset A$ ili $A\supset B$.*

$$B\subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x\in B \Rightarrow x\in A).$$

Ako su A i B dva skupa, ***unija skupova*** *A i B (u oznaci $A\cup B$) jeste skup čiji su elemenati svi elementi skupa A i svi elementi skupa B, i samo oni.*

$$A\cup B=\{x|\ x\in A\vee x\in B\}$$

Unija skupova $A_1,\dots,A_n$ obeležava se sa $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

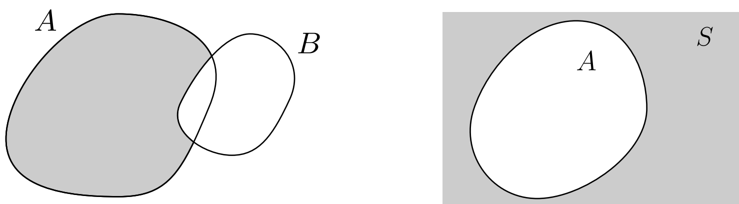


Slika 2 – Podskup skupa, unija i presek skupova

Presek *(zajednički deo) datih skupova A i B (u oznaci $A\cap B$) jeste skup svih elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B, i samo takvih.*

$$A\cap B=\{x|\ x\in A\wedge x\in B\}.$$

Za dva skupa se kaže da su *disjunktni* ako nemaju zajedničkih elemenata.



Slika 3 – Razlika skupova i komplement skupa

Razlika skupova *A i B, u oznaci $A\backslash B$, jeste skup svih elemenata koji pripadaju skupu A i ne pripadaju skupu B.*

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}.$$

Ako je $A\subset S$, ***komplement skupa*** *A u odnosu na skup S jeste skup*

$$A^C=\{x\,|\,x\notin A\wedge x\in S\},\quad \textit{odnosno}\quad A^C=S\backslash A.$$

Oznaku A^C koristimo onda kada se skup S podrazumeva (jasan je iz konteksta).

Razlika skupova A i B može se zapisati kao $A \backslash B = A \cap B^C$.

Simetrična razlika označava se $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Partitivni skup skupa S, u oznaci $P(S)$, jeste skup svih podskupova skupa S.

Kako je prazan skup podskup svakog skupa, i kako je svaki skup podskup samog sebe, iz gornje definicije sledi da $\varnothing \in P(S)$ i $S \in P(S)$.

Za skupove $A, B, C, S, P(S)$ važe sledeća tvrđenja:

$$
\begin{array}{ll}
A \cup A = A, & A \cap A = A, \\
A \cup B = B \cup A, & A \cap B = B \cap A, \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\
(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C), \\
A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, & A \subset B \Rightarrow A \cap B = A, \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
A \cup A^C = S \quad (A \subset S), & A \cap A^C = \varnothing, \quad (A \subset S), \\
(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \;\; (A, B \subset S), & (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \;\; (A, B \subset S).
\end{array}
$$

Ako su $A, B \in P(S)$, tada su $A^C, A \cup B, A \cap B$ takođe elementi skupa $P(S)$.

PRIMER 4. Dokazati da za skupove važe de *Morganova pravila*

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\
(A \cap B)^C &= A^C \cup B^C
\end{aligned}
$$

gde su $A, B \subset S$.

DOKAZ.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^C &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
&\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in A^C \wedge x \in B^C \\
&\Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C.
\end{aligned}
$$

PRIMER 5. Dokazati $A \subseteq D \wedge B \subseteq D \wedge C \subseteq D$ ako i samo ako $A \cup B \cup C \subseteq D$.

UPUTSTVO. Odgovarajuća tautologija je

$$(p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r \Rightarrow s)$$

Dekartov proizvod dva skupa X i Y jeste skup Z čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa X i drugom iz skupa Y, tj.

$$Z = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Dekartov proizvod nije u opštem slučaju komutativna operacija, tj. $X \times Y \neq Y \times X$.

Dekartov proizvod kao skupovna operacija vodi nas u više dimenzija u teoriji skupova. Dekartov proizvod n skupova $X_1, \ldots, X_n$ je

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in X_n\}.$$

Dekartovi proizvodi $X \times X, X \times X \times X, \ldots$ obeležavaju se redom sa $X^2, X^3, \ldots$

Ako su X i Y dva skupa, binarna relacija u skupu $X \times Y$ jeste svaki njegov podskup.

U specijalnom slučaju $Y = X$ binarna relacija je svaki podskup skupa $X \times X$.

Neka je ρ binarna relacija u skupu $X \times Y$. Kažemo da je x u relaciji ρ sa y (u oznaci $x \rho y$) ako je $(x, y) \in \rho$, što skraćeno pišemo $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x \rho y$.

Na primer, relacije $>, <, \geqslant, \leqslant$ su binarne relacije u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Neka je S proizvoljan skup i ρ relacija u skupu S.

ρ je REFLEKSIVNA ako i samo ako $x \rho x$,

ρ je SIMETRIČNA ako i samo ako $x \rho y \Rightarrow y \rho x$,

ρ je ANTISIMETRIČNA ako i samo ako $x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$,

ρ je TRANZITIVNA ako i samo ako $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$.

Relacija ekvivalencije (RST). *Relacija ρ zove se relacija ekvivalencije ako je* REFLEKSIVNA, SIMETRIČNA *i* TRANZITIVNA.

Relacija ekvivalencije na nekom skupu S može se poistovetiti sa podelom skupa S na disjunktne delove – *klase ekvivalencije*. Svi elementi jedne klase su u relaciji, a bilo koja dva elementa iz različitih klasa nisu ekvivalentna.

Relacija poretka (RAT). *Relacija ρ zove se relacija poretka ako je* REFLEKSIVNA, ANTISIMETRIČNA *i* TRANZITIVNA.

Aksiome skupa realnih brojeva

U nastavi matematike se izučavaju različiti skupovi brojeva i operacije nad njima.

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Skup celih brojeva $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$.

Racionalni brojevi mogu se predstaviti u obliku konačnog decimalnog zapisa ili u obliku beskonačnog periodičnog decimalnog zapisa.

Skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots\}$. Iracionalni brojevi su oblika beskonačnog neperiodičnog decimalnog zapisa.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Između ovih skupova važe relacije $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Skup racionalnih brojeva svuda je gust. Na primer, za dva racionalna broja a i b, $a < b$, racionalni broj $\dfrac{a+b}{2}$ je između njih, odnosno

$$a < \frac{a+b}{2} < b, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Algebarska struktura skupa prirodnih brojeva (dve računske operacije sabiranje i množenje) nema mogućnost rešavanja jednostavnih jednačina tipa $m + x = n$ i $mx = n$ za sve vrednosti prirodnih brojeva m i n.

Prva jednačina ima jedinstveno rešenje u skupu celih brojeva, a druga u skupu racionalnih brojeva ima: (1) jedinstveno rešenje $x = \dfrac{n}{m}$, $m \neq 0$; (2) beskonačno mnogo rešenja za $m = n = 0$ i (3) za $m = 0$ i $n \neq 0$ nema rešenja.

U skupu racionalnih brojeva postoji metrička struktura odnosno međusobne udaljenosti brojeva $d = |b - a| \geqslant 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

U Pitagorino doba pojavio se problem u vidu činjenice da dijagonala kvadrata nije samerljiva sa stranicom. Činjenica da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, prema predanju, „došla je glave“ jednom učeniku.

PRIMER 6. Dokazati da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

DOKAZ. (I način) Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ i da su p i q uzajamno prosti brojevi. Tada je $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, tj. $p^2 = 2q^2$, pa je p paran broj. Ako napišemo $p = 2r$, onda je $4r^2 = 2q^2$. Odatle je $q^2 = 2r^2$, što znači da je i q paran, tj. $q = 2s$. Činjenica da su p i q parni suprotna je sa pretpostavkom da su p i q uzajamno prosti. Kontradikcija.

DOKAZ. (II način) Posmatrajmo jednačinu $p^2 = 2q^2$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi. Zbog toga se q ne može završavati sa 0 ili 5. Ako se q završava sa 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ili 9, onda se $2q^2$ završava redom sa 2, 8, 8, 2, 2, 8, 8, 2. Međutim, ne postoji prirodan broj p čiji se kvadrat završava sa 2 ili 8, pa jednačina $p^2 = 2q^2$ nema smisla.

Aksiome skupa realnih brojeva utemeljili su Kantor, Dedekind i Vajerštras. Aksiome uključuju operacije sabiranja i množenja, poredak u skupu realnih brojeva i odnos relacija $\leqslant$ i $\geqslant$ prema sabiranju i množenju.

Posebna uloga prirodnih brojeva, kao dela racionalnih odnosno realnih brojeva, opisuje se tzv. Arhimedovom aksiomom, dok se tzv. aksiomom neprekidnosti racionalni brojevi nadopunjuju iracionalnim brojevima i tako dobija skup svih realnih brojeva.

Aksiome realnih brojeva. *Pod skupom realnih brojeva podrazumevamo skup $\mathbb{R}$ u kome su definisane dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ (koje zovemo sabiranjem i množenjem) i binarna relacija $\leqslant$ tako da važe sledeće aksiome:*

(i) ***svojstva sabiranja***

$a+b=b+a$

$(a+b)+c=a+(b+c)$

$a+0=a$

$a+(-a)=(-a)+a=0.$

(ii) ***svojstva množenja***

$a\cdot b=b\cdot a$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

$a\cdot 1=a$

$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1, \quad a\neq 0$

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(iii) ***svojstva uređenja***

$a\leqslant a$

$a\leqslant b$ *ili* $b\leqslant a$

$a\leqslant b$ *i* $b\leqslant a$ *povlači* $a=b$

$a\leqslant b$ *i* $b\leqslant c$ *povlači* $a\leqslant c$

$a\leqslant b$ *povlači* $a+c\leqslant b+c$

$0\leqslant a$ *i* $0\leqslant b$ *povlači* $0\leqslant a\cdot b.$

(iv) ***aksioma neprekidnosti***

Ako su X *i* Y *neprazni podskupovi skupa* $\mathbb{R}$*, takvi da je za sve* $x\in X$ *i* $y\in Y$ *ispunjeno* $x\leqslant y$*, onda postoji takav* $c\in\mathbb{R}$ *da važi* $x\leqslant c\leqslant y$ *za sve elemente* $x\in X$ *i* $y\in Y$*.*

Napomena. Aksioma neprekidnosti ima mnoge ekvivalente. Najčešće se koristi tzv. *aksioma supremuma* koja glasi:

Svaki neprazan i sa gornje strane ograničen podskup X *skupa* $\mathbb{R}$ *ima supremum.*

Da bi se ovo razumelo u daljem tekstu je objašnjenje pojmova *supremuma* i *infinuma*.

Definicija ograničenog skupa. *Za skup* X *koji predstavlja neki neprazan podskup skupa realnih brojeva kaže se da je ograničen sa gornje strane ako postoji realan broj* M *takav da je* $x\leqslant M$ *za svaki* $x\in X$*. Tada se* M *zove gornje ograničenje skupa* X *ili majoranta skupa* X*.*

Ako za skup X *postoji realan broj* m *takav da je* $m\leqslant x$ *za svaki* $x\in X$*, tada se kaže da je* X *ograničen sa donje strane, pa se broj* m *naziva donje ograničenje skupa* X *ili minoranta skupa* X*.*

Ako je X *ograničen i sa gornje i sa donje strane, tada kažemo da je* X *ograničen, odnosno postoje* $m,M\in X$ *takvi da je* $m\leqslant x\leqslant M$*, za svako* $x\in X$*.*

Element $A \in X$ je *najveći* ili *maksimalni element* skupa $X \subset \mathbb{R}$ ako je $x \leqslant A$ za svaki $x \in X$.

Element $a \in X$ je *najmanji* ili *minimalni element* skupa $X \subset \mathbb{R}$ ako je $a < x$ za svako $x \in X$

$$A = \max X \iff \Big(A \in X \quad \wedge \quad \forall x \in X \quad (x \leqslant A)\Big)$$
$$a = \min X \iff \Big(a \in X \quad \wedge \quad \forall x \in X \quad (a \leqslant x)\Big).$$

Oznake $\max X$ i $\min X$ čitamo *maksimum* X i *minimum* X.

Ako je M jedno gornje ograničenje skupa X, gde je X podskup od $\mathbb{R}$, to će svaki broj $b > M$ biti gornje ograničenje, pa tako postoji beskonačno mnogo gornjih ograničenja za svaki skup koji je ograničen sa gornje strane. Slično važi za donja ograničenja. Dakle, što je manje gornje ograničenje, odnosno što je veće donje, tim je ono preciznije. Najprecizije će biti (ako postoji) *najmanje gornje ograničenje* X, tj. ono gornje ograničenje M takvo da za sva druga gornja ograničenja b skupa X važi $M \leqslant b$. Slično m je *najveće donje ograničenje* skupa X ako za sva druga donja ograničenja a važi $m \geqslant a$. Najmanje gornje ograničenje skupa X (ako postoji) nazivamo *gornja međa* (ili supremum), a najveće donje ograničenje (ako postoji) *donja međa* (ili infimum) i označavamo ih sa $\sup X$ i $\inf X$

$$\sup X = \min \big\{ b \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in X \ (x \leqslant b) \big\}$$
$$\inf X = \max \big\{ a \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in X \ (a \leqslant x) \big\}.$$

Arhimedova aksioma. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x < n$.*

Drugim rečima, skup prirodnih brojeva nije ograničen odozgo. Takođe važi da skup celih brojeva nije ograničen ni odozgo ni odozdo.

Arhimedov princip. *Neka je $h > 0$ proizvoljno fiksiran broj. Za svaki realan broj x postoji jedinstveni ceo broj k takav da važi*

$$(k-1)h \leqslant x \leqslant kh.$$

DOKAZ. Skup $\mathbb{Z}$ nije ograničen ni odozgo ni odozdo. Skup

$$\left\{ n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x}{h} < n \right\}$$

je podskup skupa celih brojeva koji je ograničen odozdo. U njemu postoji minimalni element koga označavamo sa k. Tada važi

$$k - 1 \leqslant \frac{x}{h} < k.$$

Pošto je $h > 0$ dobija se

$$(k-1)h \leqslant x < kh.$$

Jedinstvenost broja $k \in \mathbb{Z}$ sledi iz jedinstvenosti minimalnog elementa.

Posledice Arhimedovog principa.

(1) *Za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *tako da važi* $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) *Ako je broj* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x \geqslant 0$ *i za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $x < \dfrac{1}{n}$ *onda je* $x = 0$.

(3) *Za svaka dva realna broja* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *postoji racionalan broj* $r \in \mathbb{Q}$ *tako da važi* $a < r < b$.

(4) *Za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *postoji jedinstveni broj* $k \in \mathbb{Z}$ *tako da važi* $k \leqslant x \leqslant k+1$.

PRIMER 7. Odrediti $\inf X$ i $\sup X$ gde je $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \ 0 < x \leqslant 1\}$.

REŠENJE. Broj 0 je minoranta (donje ograničenje) skupa $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \ 0 < x \leqslant 1\}$. Potrebno je još dokazati da je broj 0 najveće donje ograničenje.

Uzmimo $a = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Broj $a \in X$ jer je $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Ako pretpostavimo da je broj $\varepsilon > 0$ donje ograničenje skupa X, onda važi

$$\frac{1}{n} > \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde je $n < \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$, što je suprotno Arhimedovoj aksiomi da za svaki realan broj (u našem slučaju $\dfrac{1}{\varepsilon}$) postoji prirodan broj veći do njega, odnosno $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Kontradikcija!

Pošto $\varepsilon > 0$ nije minoranta onda je broj 0 najveće donje ograničenje tj. $\inf X = 0$.

Kako je broj 1 maksimum skupa X onda je

$$\max X = \sup X = 1.$$

PRIMER 8. Neka je $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in N \right\}$. Tada je $\inf A = \dfrac{1}{2}$, $\sup A = 1$.

REŠENJE.

(i) $\dfrac{n}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in N$, tj. $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in A$, pa je $\min A = \inf A = \dfrac{1}{2}$.

Broj 1 je majoranta skupa A. Potrebno je još dokazati da je 1 najmanja majoranta.

Ako je $L < 1$ majoranta skupa A, onda je $x \leqslant L$, $\forall x \in A$, tj. $\dfrac{n}{n+1} \leqslant L$, $\forall n \in N$. Sledi

$$\frac{n}{n+1} - 1 \leqslant L - 1 \Rightarrow -\frac{1}{n+1} \leqslant L - 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geqslant 1 - L \Rightarrow$$
$$n + 1 \leqslant \frac{1}{1-L} \Rightarrow n \leqslant \frac{1}{1-L} - 1, \quad \forall n \in N,$$

a prema Arhimedovoj aksiomi postoji prirodan broj veći od bilo kojeg realnog broja. Kontradikcija! Broj $L < 1$ nije majoranta pa je broj 1 najmanja majoranta. Odavde sledi da je $\sup A = 1$.

PRIMER 9. Neka je $X = \{na^n \mid 0 < a < 1 \text{ i } n \in \mathbb{N}\}$. Skup X ima maksimum i nema minimum. Dokazati. Naći $\sup X$ i $\inf X$.

DOKAZ. (max sup) Neka je $x_n = na^n$, $0 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ispitajmo kada je $x_n \leqslant x_{n+1}$, tj. $\frac{x_n}{x_{n+1}} \leqslant 1$.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}} = \frac{n}{(n+1)a} \leqslant 1.$$

Poslednja nejednakost zavisi od parametra a pa razdvajamo slučajeve:

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \;\vee\; \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \;\vee\; \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \vee \cdots$$

Ako je $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ onda je $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$

Ako je $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ onda je $x_1 \leqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant \cdots$

Ako je $a \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$ onda je $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5 \geqslant \cdots$

$\vdots$

Ako je $a \in \left(\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}\right]$ onda je $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k \geqslant x_{k+1} \geqslant \cdots$ Odavde sledi da je

$$x_k = \max X = \sup X.$$

(inf) Označimo sa $\alpha = \inf X$.

Neka je

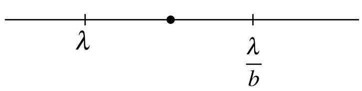
$$\begin{aligned}
na^n &= nb^{2n}, \quad \text{gde je} \quad b = \sqrt{a} \\
&= b^n \cdot nb^n \\
&= b^n \Big(\underbrace{b^n + b_n + \cdots + b_n}_{n \text{ puta}}\Big) \\
&\leqslant b^n \left(1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}\right) \\
&= b^n \cdot \frac{1 - b^n}{1 - b} \\
&\leqslant b^n \cdot \frac{1}{1 - b} \\
&= c \cdot b^n, \quad \text{gde je} \quad c = \frac{1}{1 - b} > 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$n \cdot b^{2n} \leqslant c \cdot b^n.$$

Pretpostavimo da je

$$\inf\left\{cb^n \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \lambda > 0$$



Za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $cb^n < \frac{\lambda}{b}$ jer $\frac{\lambda}{b}$ nije minoranta (jer je λ najveća minoranta). Odavde je

$$cb^{n+2} = cb^n b^2 < \frac{\lambda}{b} b^2 = \lambda b < \lambda$$

što je kontradikcija!

Sledi da je $\inf\{cb^n\} = 0$, pa je $\inf\{nb^{2n}\} = 0$, odnosno

$$\inf\{na^n\} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ili}$$
$$\inf X = 0$$

2.2.2. Matematička indukcija

Empirijska indukcija

Posmatranjem ili eksperimentisanjem u prirodnim naukama dobijaju se podaci koji se odnose na neku pojavu. Iz ovih posebnih slučajeva, u obliku radne hipoteze ili zakona, izvodi se stav za koji se očekuje da dovoljno tačno opisuje ovu pojavu u svim slučajevima. Ovako zaključivanje zove se *indukcija*.

Drugim rečima, *indukcija je zaključivanje kojim se iz stavova koji se odnose na ograničen broj pojedinih slučajeva iste vrste izvodi jedan opšti stav*, *tj. stav koji se odnosi na sve slučajeve te vrste.* Takav metod zaključivanja takođe se naziva *empirijska* ili *nepotpuna indukcija.*

Izvesnost zakona, utvrđenog navedenim putem, zavisi od broja posebnih eksperimenata (ogleda, opita, zapažanja), kao i od broja potvrda zakona o kome je reč. Ovakvim načinom se može doći do istinitih stavova, ali i do neistinitih zaključaka.

Princip matematičke indukcije

Jedan sud $P(n)$ istinit je za svaki prirodan broj n:

1° *Ako je istinit za prirodan broj* 1 *i*

2° *Ako implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ važi za svaki prirodan broj n.*

Tačka 1° često se zove *baza indukcije*, a tačka 2° *induktivni korak.*

U matematičkoj praksi se koristi i sledeća formulacija.

Jedan sud $P(n)$ istinit je za svaki prirodan broj $n \geqslant n_0$:

1° *Ako je istinit za prirodan broj $n_0 \geqslant 1$ i*

2° *Ako implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ važi za svaki prirodan broj $n \geqslant n_0$.*

Postoji uopštenje u obliku tzv. *transfinitne indukcije*:

Jedan sud $P(n)$ je istinit za svako n:

1° *Ako je istinit za $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ i*

2° *Ako iz pretpostavke da su tačni sudovi $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+k-1)$ izlazi da je tačan sud $P(n+k)$.*

Princip matematičke indukcije zasnovan je na svojstvu: *Svaki neprazan podskup od* $\mathbb{N}$ *ima najmanji element.*

Metod matematičke indukcije ima široke i raznovrsne primene. Intuicijom ili na neki drugi način naslućuju se određene formule i relacije kod kojih je argument prirodan broj. Ovom metodom dobijena formula deduktivno se dokazuje.

Po mišljenju Kolmogorova, *razumevanje i umenje pravilnog primenjivanja matematičke indukcije dobri su kriterijumi logičke zrelosti koja je sasvim neophodna matematičaru.*[8]

PRIMER 10. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(i) Za $n=1$ jednakost koju dokazujemo postaje $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ i tačna je.

(ii) Pretpostavimo da je tačna formula $P(n)$, tj. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ je tačno za neko $n\in\mathbb{N}$. Dokažimo da je tačna formula $P(n+1)$, odnosno

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad \text{pretpostavka}\\ &=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ &=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, važi $P(n+1)$. To znači da je formula $P(n)$ tačna za svako $n\in\mathbb{N}$.

NAPOMENA. Na levoj strani formule $P(n)$ je zbir aritmetičke progresije čiji je prvi član $a_1=1$ i n-ti $a_n=n$. Zbir je $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{n}{2}(1+n)$.

PRIMER 11. (*Bernulijeva nejednakost*)[9] Neka je $a>-1$ i $a\neq 0$. Dokazati da za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$ važi $(1+a)^n>1+na$.

(i) Za $n=2$ nejednakost je $(1+a)^2>1+2a$ koja je ekvivalentna sa $a^2>0$. Kako je $a\neq 0$, ova nejednakost je tačna.

(ii) Pretpostavimo $(1+a)^n>1+na$. Tada je

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1}&=(1+a)^n(1+a)\\ &>(1+an)(1+a) \qquad \text{zbog pretpostavke, kao i zbog } a>-1\\ &=1+(n+1)a+na^2\end{aligned}$$

---

[8] Mitrinović D. S. (urednik), 1963, *Matematička biblioteka: Uvođenje mladih u naučni rad* III, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, str. 110.

[9] Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli), švajcarski matematičar (1654–1705)

$$> 1+(n+1)a \qquad \text{jer je } a \neq 0,$$

što je i trebalo dokazati.

PRIMER 12. Označimo sa $P(n)$ sledeći iskaz: *Aritmetička sredina proizvoljno izabranih n pozitivnih brojeva je veća od geometrijske sredine tih n brojeva ili njoj jednaka.* Dokazati.

DOKAZ. Primenimo metod matematičke indukcije. Za $n=2$ imamo $P(2): \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Ova nejednakost je tačna jer je $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Pretpostavimo da je $P(n)$ tačno. Izaberimo proizvoljno $n+1$ pozitivan broj i označimo izabrane brojeve tako da važi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$. Neka je $a = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$; $g = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$. Po indukcijskoj pretpostavci važi $a \geqslant g$. Procenjujemo: $a \leqslant \dfrac{a_{n+1}+\cdots+a_{n+1}}{n} = a_{n+1}$, a možemo a_{n+1} prikazati u obliku $a_{n+1} = a+\delta$, za neko $\delta > 0$. Sada je

$$A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1} = \frac{na+a_{n+1}}{n+1} = \frac{na+a+\delta}{n+1} = a + \frac{\delta}{n+1},$$
$$G = \sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}} = \sqrt[n+1]{g^n(a+\delta)} \leqslant \sqrt[n+1]{a^n(a+\delta)} = \sqrt[n+1]{a^{n+1}+a^n\delta}.$$

Odavde sledi da je $G^{n+1} \leqslant A^{n+1}$, tj. $G \leqslant A$. Dakle,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad (a_1,a_2,\ldots,a_n > 0).$$

PRIMER 13. Ako je

$$(*) \qquad (a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0) \wedge (b_1 \geqslant 1, b_1b_2 \geqslant 1, \ldots, b_1b_2\cdots b_n \geqslant 1)$$

onda važi

$$\text{I(n)} \qquad b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n \geqslant a_1 + \cdots + a_n$$

DOKAZ. (i) Ako je $b_n \geqslant 1$, onda je $b_na_n \geqslant a_n$, pa iz tačnosti $I(n-1)$ sledi tačnost $I(n)$.

(ii) Pretpostavimo da je $b_n < 1$. Pošto je $b_1 \geqslant 1$, za neko $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ je $b_k \geqslant 1$, $b_{k+1} < 1$. Iz pretpostavke $(*)$ je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{k-1} \geqslant a_{k+1} \geqslant \cdots a_n > 0,$$
$$b_1 \geqslant 1,\ b_1b_2 \geqslant 1, \cdots, b_1b_2\cdots b_{k-1} \geqslant 1, b_1b_2\cdots b_{k-1}(b_kb_{k+1}) \geqslant 1,$$
$$b_1b_2\cdots b_{k+2} \geqslant 1, \ldots b_1b_2\cdots b_n \geqslant 1,$$

pa iz tačnosti $I(n-1)$ sledi

$$b_1a_1 + \cdots + b_{k-1}a_{k-1} + b_kb_{k+1}a_{k+1} + b_{k+2}a_{k+2} + \cdots + b_n \geqslant$$
$$\geqslant a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_{k+1} + \cdots + a_n$$

Kada obema stranama ove nejednakosti dodamo a_k vidimo da je za dokaz tačnosti $I(n)$ dovoljno dokazati da važi

$$a_k + b_kb_{k+1}a_{k+1} \leqslant a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1},$$

a ova nejednakost je ekvivalentna sa $(b_k-1)(a_k - a_{k+1}b_{k+1}) \geqslant 0$.

Znači, $I(n-1) \Rightarrow I(n)$ je tačno.

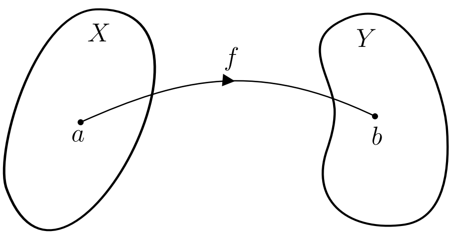
2.2.3. Funkcija

U matematici termin *funkcija* prvi je počeo da upotrebljava Lajbnic (1673. godine), koji je opisao zavisnost geometrijskih veličina. Za današnji zapis matematičke funkcije zaslužan je Leonard Ojler. Pored funkcije, termini koji se upotrebljavaju su preslikavanje, pridruživanje, transfromacija, operator i dr.

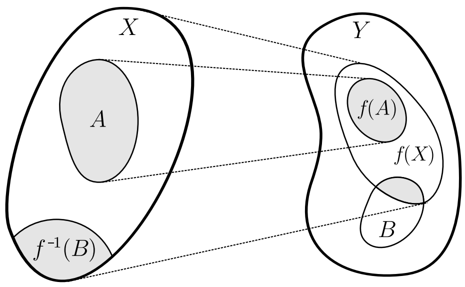
Funkcija je jedna od onih matematičkih pojmova koji prožimaju gotovo čitavu matematiku, a time i njenu nastavu na raznim nivoima. Na pitanje šta učiniti da se otklone nepravilnosti u shvatanju pojma funkcije kod studenata, prof. Stanković kaže: prvo se mora dati tačna definicija sa jasnim objašnjenjima svih reči u njoj. Mora se insistirati na tome da je funkcija definisana pomoću dva skupa (u našoj definiciji to su skupovi X i Y) i načina opredeljivanja (pridruživanja) elemenata drugog skupa elementima prvog. Posebno treba ukazati na činjenicu da se dobija druga funkcija ako se izmeni skup originala X. Ako se izmeni skup slika Y, takođe se dobije drugo preslikavanje. Neophodno je podvlačiti razliku između analitičkog izraza i funkcije. Pri radu kod svake funkcije, treba stalno insistirati na utvrđivanju sva tri elementa koji se definišu.[10]

Ako su X i Y dva skupa, funkcija (preslikavanje) f skupa X u skup Y jeste podskup skupa $X \times Y$. Preslikavanje f skupa X u skup Y, u oznaci $f : X \to Y$, predstavlja pridruživanje svakom elementu $x \in X$ tačno jednog (jednog jedinog) elementa skupa Y. X je domen funkcije f, a Y je skup vrednosti funkcije.

Koristi se notacija: (i) $(x,y) \in f$, (ii) $y = f(x), x \in X$, ili (iii) $x \mapsto f(x)$.



Slika 4 – Funkcija



Slika 5 – Opšti prikaz funkcije

Definicija funkcije. *Funkcija f jeste preslikavanje skupa X u skup Y $(X,Y \neq \varnothing)$ ako i samo ako je $f \subset \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ i ispunjeno je*

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) \quad (x,y) \in f \quad \text{(definisanost } f \text{ na čitavom } X\text{);}$$
$$(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \quad \text{(jedinstvenost druge komponente).}$$

Skup vrednosti preslikavanja označava se sa $f(X)$ i važi $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X\}$.

[10] Bogoljub Stanković, 1998, *Funkcija i njena uopštenja*, Nastava matematike XLIII, 1-2, str. 2-10.

Opštije, za $A \subset X$ uvodimo $f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subset Y$. Takođe, za $B \subset Y$ uvodimo $f^{-1}(B) = \{x \in X | \ f(x) \in B\} \subset X$.

Ako su u preslikavanju $f : X \to Y$ skupovi X i Y podskupovi skupa realnih brojeva, odnosno $X \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, takvu funkciju zovemo realna funkcija realne promenljive.

PRIMER 14. Dirihleova funkcija χ data sa

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ je racionalan broj}) \\ 0 & (x \text{ je iracionalan broj}) \end{cases}$$

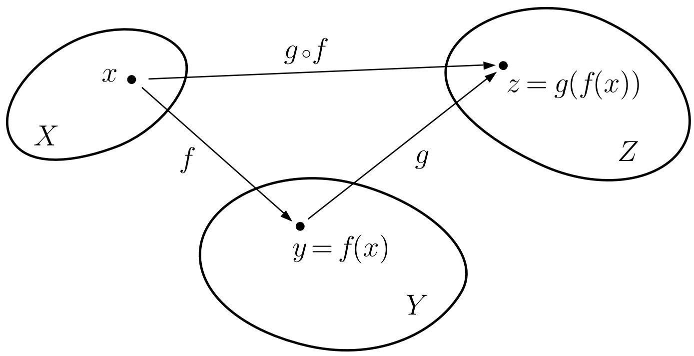
definisana je na skupu $\mathbb{R}$. Skup vrednosti preslikavanja je $R_f = \{0,1\}$.

Na primer, $\chi(2) = 1$, $\chi(4/3) = 1$, $\chi(\sqrt{2}) = 0$, $\chi(\pi/2) = 0$.

Definicija kompozicije funkcija. *Neka je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Kompozicija ili proizvod preslikavanja f i g je preslikavanje $g \circ f : X \to Z$ određeno sa*

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \quad x \in X.$$

NAPOMENA. U opštem slučaju $g \circ f \neq f \circ g$, kada su $g \circ f$ i $f \circ g$ definisane.



Slika 6 – Kompozicija preslikavanja

Ako je $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$, tada je $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, tj. za proizvod preslikavanja važi asocijativni zakon.

PRIMER 15. Date su funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, gde je $f(n) = n+1$, i $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, gde je $g(n) = r$, ako $3|(n-r)$ i $r \in \{0,1,2\}$ (funkcija g je *ostatak pri deljenju brojeva* iz $\mathbb{N}_0$ sa 3).

a) Naći $f \circ g$ i $g \circ f$.

b) Pokazati da je $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$

REŠENJE. a) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(r) = r + 1 \in \{1,2,3\}$
$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = r \in \{0,1,2\}$
Primetimo da je $f \circ g \neq g \circ f$.

b) Kompozicija funkcija

$$\begin{aligned}\big((f\circ g)\circ f\big)(n) &= (f\circ g)(f(n))\\ &= f\big(g(f(n))\big) \quad (= f\circ(g\circ f))\\ &= f\big(g(n+1)\big)\\ &= f(r) = r+1.\end{aligned}$$

Neka je $f: X\to Y$. *Ako važi implikacija* $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, *kažemo da je* f ***jedan-jedan*** *preslikavanje* (*injekcija*).

Implikacija $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ može se napisati i kao

$$x_1\neq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \quad \text{jer važi} \quad (p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p).$$

Neka je $f: X\to Y$. *Ako je* $f(X)=Y$, *kažemo da je* f *preslikavanje skupa* X ***na*** *skup* Y (*sirjekcija*).

Neka je $f: X\to Y$. *Ako je* f ***jedan-jedan*** *i* ***na*** *preslikavanje, tada je* f *bijekcija* (*obostrano jednoznačno preslikavanje*).

PRIMER 16. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data sa

$$f(x)=\max\{0,2x\}.$$

a) Ispitati da li je f *jedan-jedan* i *na*.

b) Ako je $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ ispitati da li je *jedan-jedan* i *na*.

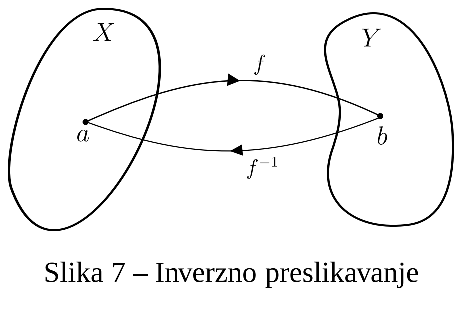
REŠENJE. a) Funkcija f nije *jedan-jedan* jer postoje x_1 i x_2 za koje $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$, na primer,

$$-2\neq -1\Rightarrow f(-2)=f(-1)=0.$$

Funkcija f nije *na* jer sve realne brojeve preslikava u pozitivne realne brojeve i nulu.

b) Za $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ funkcija nije *jedan-jedan* (isto kao pod a)), a jeste *na* jer važi

$$f(\mathbb{R})=[0,+\infty).$$



Slika 7 – Inverzno preslikavanje

Definicija inverzne funkcije. *Ako je* $f: X\to Y$ ***jedan-jedan*** *i* ***na***, *preslikavanje određeno formulom* $y=f(x)$, $x\in X$, *onda postoji inverzno preslikavanje* $f^{-1}: Y\to X$, *definisano formulom* $f^{-1}(y)=x$, $y\in Y$.

Ako funkcija $f: X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1}: Y \to X$, skupovi $f(X)$ i $f^{-1}(Y)$ su $f(X) = Y$ i $f^{-1}(Y) = X$.

Ako f ima inverznu funkciju f^{-1} pri čemu je $f(x) = y$ i $f^{-1}(y) = x$, tada važi

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i} \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Na osnovu $f(x) = y$ je $f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x$.

S druge strane, na osnovu $f^{-1}(y) = x$, važi $f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y$.

PRIMER 17. Dati su skupovi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{i} \quad B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

i funkcija $f: A \to B$ data sa

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}.$$

Ispitati da li f ima inverznu funkciju.

REŠENJE. Da bi data funkcija f imala inverznu funkciju ispitujemo da li je *jedan-jedan* i *na*? Za $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ pa je f *jedan-jedan*. Kako je $f(A) = B$ f je *na*.

Data funkcija f ima inverznu f^{-1} datu sa

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definicija monotonosti. *Neka je $X \subset \mathbb{R}$.*

Funkcija $f: X \to \mathbb{R}$ je rastuća na X ako

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big).$$

Funkcija $f: X \to \mathbb{R}$ je opadajuća na X ako

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big).$$

U slučaju da važi stroga nejednakost $<$ (ili $>$) kaže se da je funkcija strogo rastuća (strogo opadajuća). Ako je funkcija rastuća ili opadajuća na X kaže se da je monotona na X.

Važi sledeća teorema:

Teorema o monotonosti inverzne funkcije. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ i neka je $f: A \to B$ strogo monotona i na. Tada važi:*

(i) *Funkcija f ima inverznu funkciju f^{-1},*
(ii) *Ako je f strogo rastuća na A, onda je f^{-1} strogo rastuća na B,*
(iii) *Ako je f strogo opadajuća na A, onda je f^{-1} strogo opadajuća na B,*

DOKAZ. Neka je $f : A \to B$ strogo rastuća i *na*, onda za svaki x_1 i x_2 iz A važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Pošto su za različite originale, slike različite f je *jedan-jedan* i ima inverznu funkciju.

Dokažimo da je f^{-1} strogo rastuća na B, odnosno za svaki y_1 i y_2 iz B važi

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Ako bi bilo $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$ onda važi

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big)$$

pa je $y_1 \geqslant y_2$ što je suprotno sa $y_1 < y_2$. Mora biti

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

2.2.4. Dekartov pravougli koordinatni sistem

U sedamnaestom veku deduktivni metod je formulisao Rene Dekart, francuski matematičar koji se smatra osnivačem moderne filozofije.[11]

Slika 8 – Rene Dekart

U svom čuvenom delu *Rasprava o metodi* (1637) Dekart objašnjava metodu kartezijanske sumnje. Odlučuje da će sumnjati u sve u šta se sumnjati može. „Dok sam želeo da mislim da je sve lažno, bilo je nužno, da ja koji sam to mislio, budem nešto; i primećujući da je ova istina, *mislim dakle postojim*, tako pouzdana i tako izvesna da ne mogu da je obore ni sve najekstravagantnije pretpostavke skeptika, ja sam zaključio da bih je mogao prihvatiti, bez ikakve sumnje, kao prvi princip filozofije za kojim sam tragao."[12] Iz ovoga

[11] Rene Dekart (Rene Descartes), Renatus Cartesius, 1596–1650

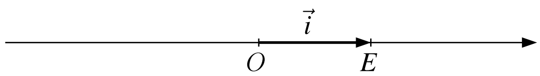
[12] Bertrand Rasel (Bertrand Rasel), 1998, *Istorija zapadne filozofije*, Narodna knjiga, Alfa, Beograd, str. 511.

proizilazi da su *sve stvari koje mi shvatamo vrlo jasno i vrlo razgovetno istinite*. Dekart mišljenje upotrebljava u širokom smislu kao sumnju, razumevanje, shvatanje, potvrđivanje, odricanje, htenje, maštu i osećanje. Misao je suština uma. Prema njemu, postoje tri vrste ideja: (1) one koje su urođene, (2) one koje dolaze spolja, (3) one koje sam ja otkrio.[13]

Dekart je pokušao da postavi temelje nauke i moderniteta, dajući im izvesnost pomoću jezika i broja, što je izrazio u analitičkoj geometriji. Analitička geometrija, poznata i kao kartezijanska, geometrijske probleme prevodi u algebarsku formu, tako da se mogu primeniti algebarske metode za njihovo rešavanje. Dekart je došao na ideju da označava koordinate (*lineae ordinatim applicatae*) kojima će predstaviti parove brojeva, što je otvorilo mogućnost za crtanje grafika funkcije. Prvi put svoje delo objavljuje 1637. godine u *Raspravi o metodi*, u dodatku pod nazivom *Geometrija*.

Brojna osa

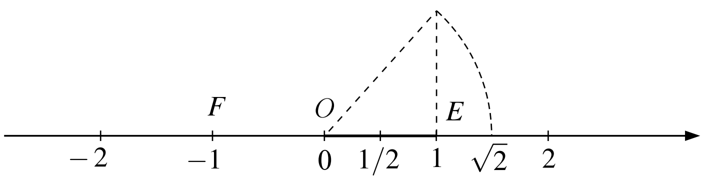
Neka je u ravni data prava i na njoj jedna tačka, u oznaci O. Neka je na pravoj data još jedna tačka E, tako da vektor $\overrightarrow{OE}$ orijentiše datu pravu i neka je $|\overrightarrow{OE}| = 1$. Vektor $\overrightarrow{OE}$ češće obeležavamo sa $\vec{i}$.



Slika 9

Na ovaj način svaka tačka prave jedinstveno je određena. Tačkama poluprave OE, u smeru vektora $\vec{i}$, pridružujemo pozitivne realne bojeve, a tačkama poluprave OF, u smeru vektora $-\vec{i}$ pridružujemo negativne realne brojeve.

Na primer,



Slika 10

Prava na kojoj je određena tačka O i vektor $\vec{i} = \overrightarrow{OE}$ definišu realnu brojnu osu.

Između tačaka brojne ose i skupa realnih brojeva postoji obostrano jednoznačno preslikavanje.

[13] Bertrand Rasel 1998, *Istorija zapadne filozofije*, Narodna knjiga, Alfa, Beograd, str. 513.

Intervali su podskupovi realnih brojeva, na primer, u oznaci

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$

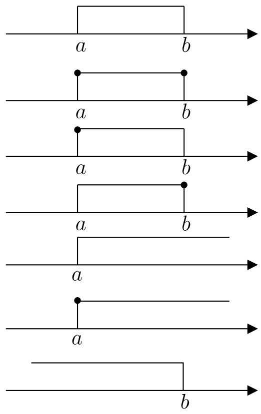
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leqslant x<b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\leqslant b\}$

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<+\infty\}$

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$

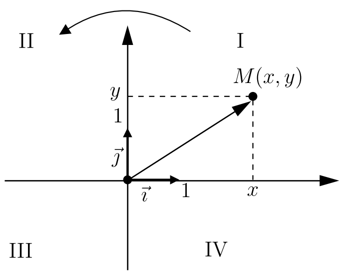
$(-\infty,\,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\infty<x<b\}$



Slika 11 – Intervali

Pravougle koordinate

U Dekartovom koordinatnom sistemu tačka $O(0,0)$ označava *koordinatni početak*. Jedinični vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ za koje važi $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j})=90^\circ$ (ugao od $\vec{i}$ ka $\vec{j}$ suprotno kretanju kazaljke na časovniku) određ uju pravce osa Ox i Oy i jedinstveno određuju koordinate tačke u ravni.



Slika 12 – Pravougle i polarne koordinate

Svakom paru realnih brojeva x u y odgovara jedinstvena tačka ravni čije su koordinate ti brojevi, i obratno, svaka tačka ravni ima definisane koordinate x i y.

Sistem odsečaka $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots[a_n,b_n],\dots$ *naziva se sistem umetnutih odsečaka ako važi* $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$, *odnosno*

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

Kantorova teorema o umetnutim odsečima. *Svaki niz* $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$ *umetnutih odsečaka ima neprazan presek.*

DOKAZ. Iz pretpostavke o nizu umetnutih odsečaka važi da je $a_n\leqslant b_m$, za sve prirodne brojeve n, m. Na osnovu aksiome neprekidnosti postoje α i β takvi da je

$$\alpha=\sup\{a_n|\ n\geqslant 1\}\quad \text{i}\quad \beta=\inf\{b_m|\ m\geqslant 1\}.$$

Tada je očito $\alpha \leqslant \beta$ jer je reč o nizu umetnutih odsečaka ili zbog $a_n \leqslant b_m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Svaka tačka ξ koja ispunjava uslov $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ pripada svim odsečcima I_n, $n \in \mathbb{N}$.

*Skup Γ_f svih uređenih parova $\big(x, f(x)\big)$ naziva se **grafik funkcije** f, u oznaci*

$$\Gamma_f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \mid x \in X \big\}, \quad \text{gde je } X \text{ domen.}$$

PRIMER 18. a) Napisati jednačinu prave linije L koja sadrži tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.

b) Nacrtati grafik linearne funkcije.

REŠENJE. a) Promenljiva tačka $M(x,y)$ pripada pravoj L. Vektori $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ i $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ su kolinearni (imaju isti pravac), pa je

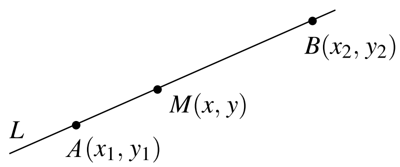
$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{odnosno}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{(jednačina prave kroz dve tačke)}$$

gde je $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ koeficijent pravca prave.



Slika 13 – Prava kroz dve tačke

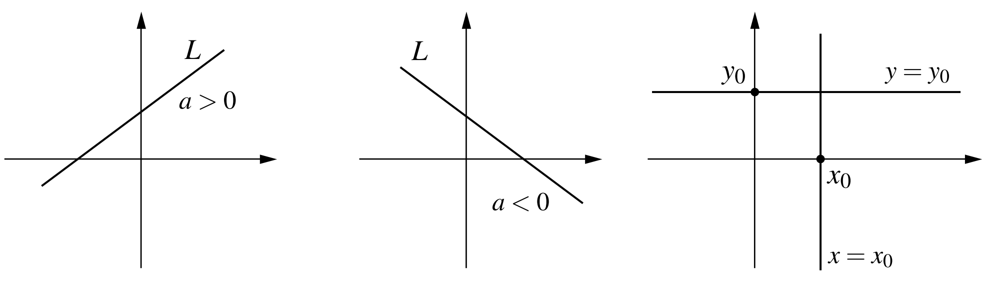
Drugi oblici jednačine prave su

$y - y_1 = a(x - x_1)$ (jednačina prave kroz jednu tačke)

$y = ax + b$ (eksplicitni oblik jednačine prave)

$Ax + By + C = 0$ (opšti oblik jednačine prave).

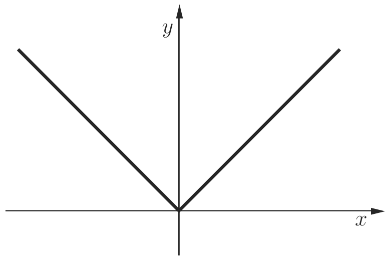
b) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data formulom $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ naziva se *linearna funkcija* (češće se kaže prava linija).



Slika 14 – Grafik linearne funkcije

PRIMER 19. Funkcija *apsolutna vrednost*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{i važi } |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x.$$



Slika 15 – Apsolutna vrednost

Za apsolutnu vrednost važi *nejednakost trougla*:
Za $a, b \in \mathbb{R}$ *važi* $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$.
Uopšteno, za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ važi

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n|.$$

PRIMER 20. Neka je $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ kvadratna funkcija i $D = b^2 - 4ac$.

a) Dokazati da važi

$$\big\{\forall x \in \mathbb{R} \;\; y \geqslant 0\big\} \iff \big\{D \leqslant 0, \;\; a > 0\big\}.$$

b) Nacrtati šest slučajeva kvadratne funkcije.

DOKAZ. Iz jednakosti

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]$$

i uslova $D \leqslant 0$ i $a > 0$ sledi da je $y \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

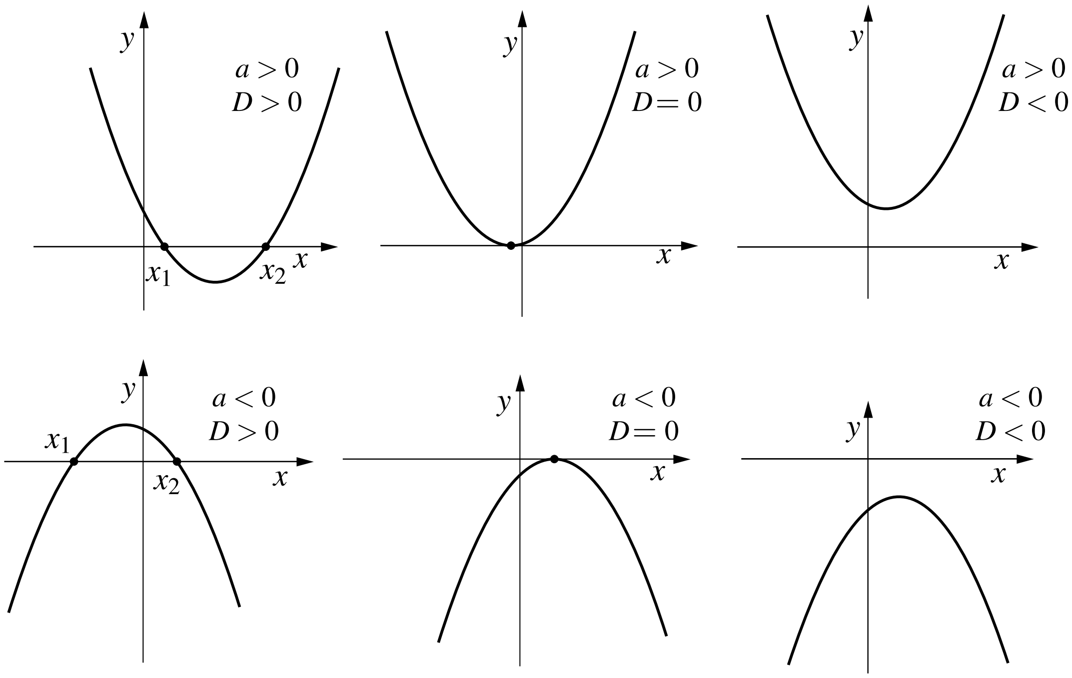
Obrnuto, neka je $y \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Potrebno je dokazati $D \leqslant 0$ i $a > 0$.

Pretpostavimo da uslov $D \geqslant 0$ nije ispunjen, tada je $D > 0$ i kvadratni trinom ima realne korene x_1 i x_2. a kvadratna funkcija menja znak pri prolasku kroz tačku x_1 i x_2. Znači da mora biti $D \leqslant 0$ i $y \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa sledi da je $a > 0$.

b) Rešenje je dato na slici 16.

NAPOMENA. Za $D > 0$ kvadratna funkcija ima dve realne i različite nule. Za $D = 0$ ima jednu realnu (dvostruku) nulu. Za $D < 0$ nema realnih korena. Za korene jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ važe Vijetove formule

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$



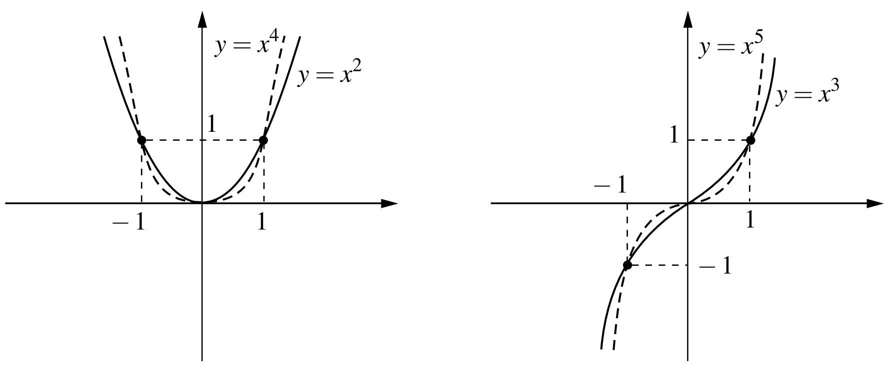
Slika 16 – Grafik kvadratne funkcije (šest slučajeva)

PRIMER 21. Nacrtati grafik

a) stepene funkcije $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$,

b) funkcije $y = \dfrac{1}{x}$ i $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

REŠENJE. Funkciji je definisana za $x \in \mathbb{R}$. Razdvajamo slučajeve za n parno i n neparno.



Slika 17 – Stepena funkcija za n parno i n neparno

Neka je $X \subset \mathbb{R}$.

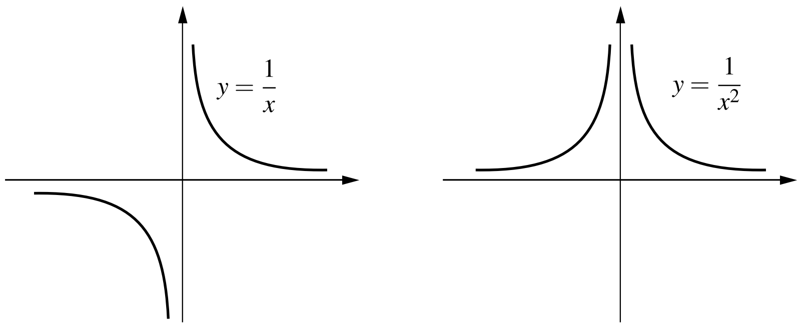
Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je parna ako važi

$$f(-x) = f(x).$$

Grafik parne funkcije je osnosimetričan u odnosu na y-osu.

Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neparna ako važi

$$f(-x) = -f(x).$$



Slika 18 – Funkcija $y = \dfrac{1}{x^2}$ i $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

Grafik neparne funkcije je centralnosimetričan u odnosu na koordinatni početak.

NAPOMENA. U primeru 21. funkcije $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ su parne,a funkcije $y = x^3$, $y = x^5$, $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ su neparne.

PRIMER 22. Nacrtati funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ i $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

REŠENJE. *Neka je* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *data sa*

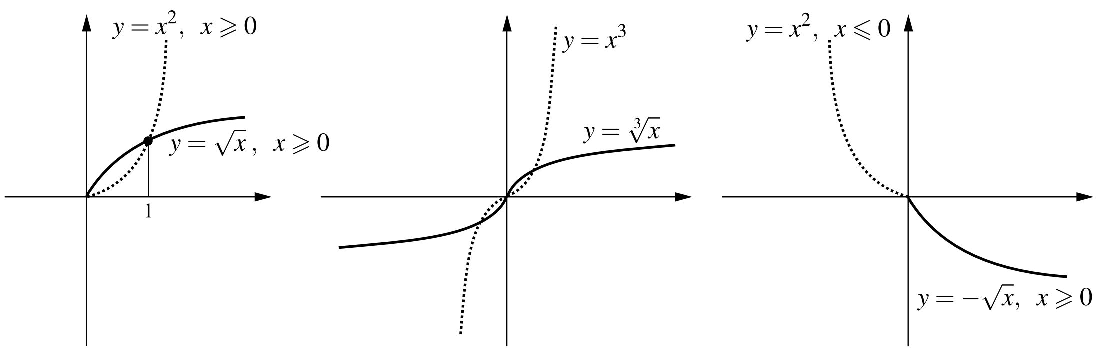
$$f(x) = x^n, \quad n \text{ je paran broj.}$$

Inverzna funkcija funkcije f *je n-ti koren iz x u oznaci* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, *n parno,* $x \geqslant 0$. U našem primeru f je $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

Slično je za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dato sa

$$f(x) = x^n, \quad n \text{ neparno.}$$

Inverzna funkcija funkciji f je n-ti koren iz x u oznaci $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, n neparno.



Slika 19 – Koren funkcije $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$; $y = \sqrt[3]{x}$ i $y = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

PRIMER 23. a) Definisati eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.

b) Nacrtati grafike funkcije $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 0$ i $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

REŠENJE. a) Eksponencijalna funkcija za $a > 1$.[14]

Za pozitivne racionalne argumente $x = \dfrac{m}{n}$ eksponencijalna funkcija definiše se kao $\sqrt[n]{a^m}$.

Za pozitivne iracionalne argumente x definiše se kao supremum skupa $\{a^r : 0 < r < x$ i r racionalno$\}$. Za $x = 0$ je $a^0 = 1$.

Za negativne argumente x je $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$. Funkcija je strogo rastuća. Skup vrednosti joj je $(0, \infty)$.

Eksponencijalna funkcija za $0 < a < 1$.

Funkcija se definiše kao

$$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$

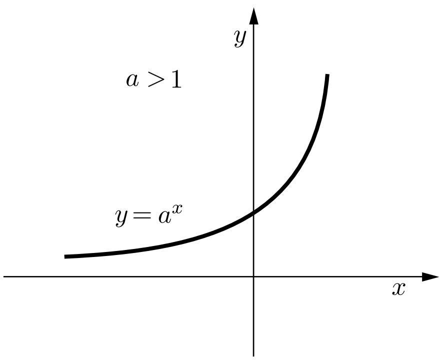
Može se dokazati da eksponencijalna funkcija za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljava

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

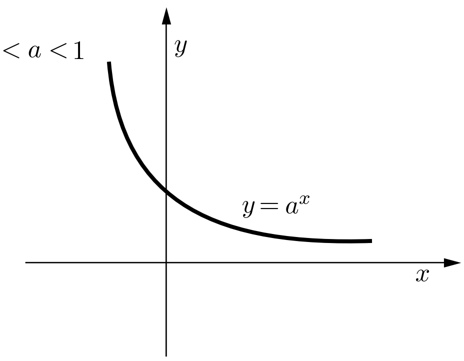
$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad (a, b > 0).$$

Grafik eksponencijalne funkcije prikazan je na slikama 20 i 21.



Slika 20



Slika 21

Logaritamska funkcija

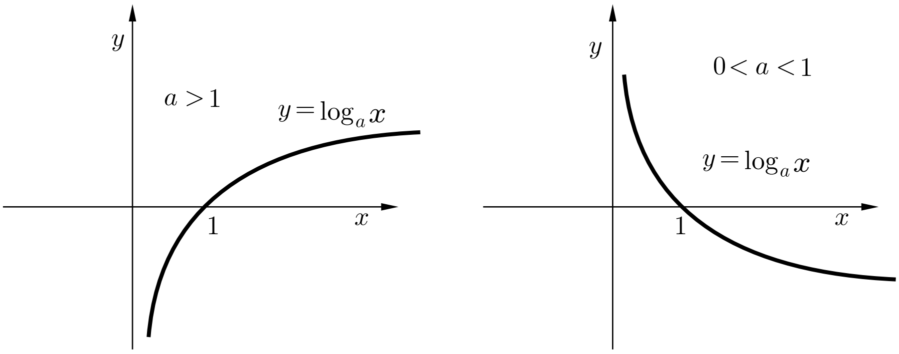
$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, \;\; a \neq 1)$$

definiše se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Grafik logaritamske funkcije prikazan je na slici 22.

Ako je $a > 0$, $a \neq 1$, onda je $y = \log_a x$ (čita se: logaritam broja x za osnovu (bazu) a) ekvivalentno sa $a^y = x$, tako da je $a^{\log_a x} = x$ i $y = \log_a a^y$. Specijalno, $1 = \log_a a$ i $0 = \log_a 1$, zbog $a^1 = a$ i $a^0 = 1$.

[14] Đ. Dugošija, 2011, *Viša matematika u devet lekcija*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 24.

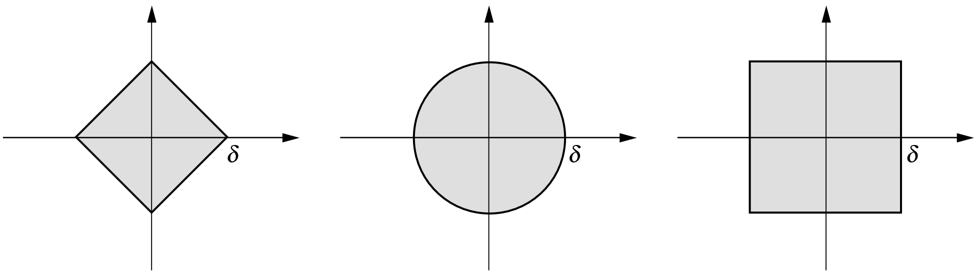


Slika 22

PRIMER 24. Dati su skupovi

$$A = \{(x,y) \mid |x| + |y| < \delta\}, \quad B = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < \delta\} \quad \text{i}$$
$$M = \big\{(x,y) \mid \max\{|x| + |y|\} < \delta\big\}.$$

Dokazati da je $A \subset B \subset M$.



Slika 23

DOKAZ. Neka je $(x,y) \in A$, to znači da je $|x| + |y| < \delta$, odnosno $x^2 + y^2 + 2|x|\,|y| < \delta^2$, a odavde sledi $x^2 + y^2 < \delta^2$ što daje $\sqrt{x^2+y^2} < \delta^2$, pa sledi da je $(x,y) \in B$.

Znači $(x,y) \in A \Rightarrow (x,y) \in B$, pa je dokazano da je $A \subset B$.

Na sličan način, ako je $(x,y) \in B$, to znači da je $|x| + |y| < \delta$, odnosno $x^2 + y^2 < \delta^2$, a odavde sledi $x^2 < \delta^2 \quad \wedge \quad y^2 < \delta$, odnosno $\max\{|x|, |y|\} < \delta$, pa sledi da $(x,y) \in M$. Dokazano je $A \subset B \subset M$.

2.2.5. Kompleksni brojevi i kompleksna ravan

Navedimo jednu od osobina skupa realnih brojeva: Ako $x \in \mathbb{R}$, tada je $x^2 \geqslant 0$, tj. ako je x realan broj, tada x^2 ne može biti negativno. Na osnovu toga jednačina

$$x^2 + 1 = 0$$

nema rešenja u skupu realnih brojeva. Da bi ova jednačina imala rešenja, a sa njom i mnoge druge algebarske jednačine, pristupa se proširenju postojećeg skupa realnih brojeva. Time se dolazi do skupa kompleksnih brojeva. Definiše se broj i takav da je $i^2 = -1$, a zatim se formiraju izrazi oblika $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, i sa njima se računa kao sa realnim brojevima. Definicija skupa kompleksnih brojeva glasi:

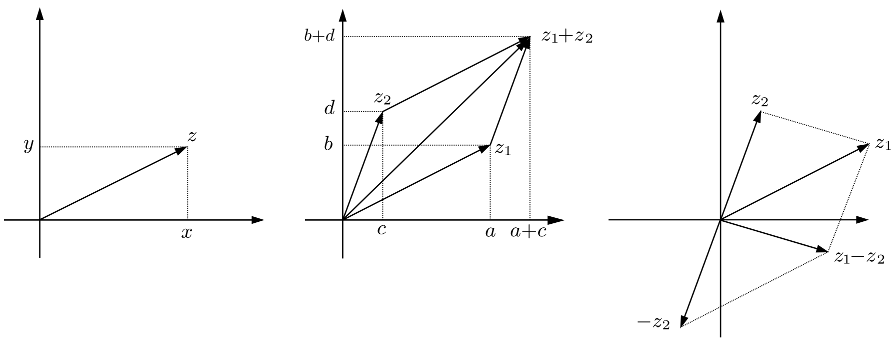
Skup svih kompleksnih brojeva *jeste skup uređenih parova realnih brojeva, u oznaci* $\mathbb{C} = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, *u kome za* $z_1 = (a,b)$ *i* $z_2 = (c,d)$ *važi*:

1° *jednakost kompleksnih brojeva* $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$,

2° *operacije sabiranja i množenja određene su pomoću sledećih jednakosti*:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d),$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Za operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva važe zakoni komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.



Slika 24 – Vektorsko predstavljanje kompleksnog broja

Za kompleksan broj $z = (x,y)$ neutralni elementi za operacije sabiranja i množenja su redom *kompleksna nula*, u oznaci $(0,0)$, i *kompleksna jedinica*, u oznaci $(1,0)$, za koje važi $z + (0,0) = (0,0) + z = z, \quad z \cdot (1,0) = (1,0) \cdot z = z.$

Suprotan broj kompleksnog broja z, u oznaci $-z$, jeste kompleksan broj takav da je $z + (-z) = (0,0)$ i važi $-z = (-x, -y)$.

Recipročan broj kompleksnog broja $z \neq (0,0)$, u oznaci $w = \dfrac{1}{z}$, jeste takav kompleksan broj za koji važi $z \cdot \dfrac{1}{z} = (1,0)$. Za $z = (x,y)$ recipročna vrednost je

$$w = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Kompleksnom broju (x,y) se dodeljuje tačka u pravouglom koordinatnom sistemu Oxy čije su koordinate x i y. *Ravan u kojoj se predstavljaju kompleksni brojevi je kompleksna ili Gausova ravan.*

Kod ovakvog načina prikazivanja brojevi oblika $(x,0)$ predstavljeni su tačkama x-ose. Ako se uzme da je ta ista x-osa brojevna prava na kojoj se predstavljaju realni brojevi, uviđa se da su realni broj x i kompleksni $(x,0)$ predstavljeni istom tačkom x-ose. Zbog toga se kompleksni broj $(x,0)$ identifikuje sa realnim x, tj. uzima se da je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ovim se ne narušavaju osnovne operacije koje važe za realne i kompleksne brojeve jer, na osnovu definicija operacija u skupu $\mathbb{C}$, važe jednakosti

$$(x,0)+(x_1,0)=(x+x_1,0); \quad (x,0)\cdot(x_1,0)=(xx_1,0).$$

Kompleksni broj $i=(0,1)$ *naziva se imaginarna jedinica i važi* $i^2=-1$.

Slika 25 – Karl Fridrih Gaus[15]

Svaki kompleksni broj $z=(x,y)$ *može se predstaviti u algebarskom obliku* $z=x+iy$, *gde je* $x=\mathrm{Re}\,z$ *realni deo i* $y=\mathrm{Im}\,z$ *imaginarni deo kompleksnog broja.*

Modul *ili apsolutna vrednost kompleksnog broja* $z=x+iy$ *je broj* $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

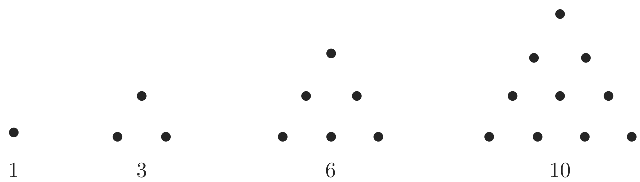
[15] Fridrih Gaus (Gauss, Johann Karl Friedrich), nemački matematičar (1777–1855).

Zajedno sa Arhimedom i Njutnom smatra se najvećim matematičarem svih vremena. Radio je na problemima iz nebeske mehanike, geodezije i elektriciteta. Dao je izuzetan doprinos u vodećim oblastima iz matematike kao što su kompleksni brojevi, teorija površi, aproksimacija, hiperbolička geometrija i dr. Među prvima razmatrao je neeuklidsku geometriju.

Svoja dragocena otkrića zabeležio je u dnevniku na 19 strana. Koristio je tajne znakove i simbole koje je bilo teško odgonetnuti. Na primer, jedna zapis izgleda ovako:

$$\text{EYPHKA! num} = \triangle + \triangle + \triangle.$$

Prva reč podseća na Arhimedov usklik *Eureka*! Zapis označava da je svaki prirodan broj zbir najviše tri trougaona broja.



Videti u: Petković M, Petković Lj, 2006, *Matematički vremeplov: prilozi za istoriju matematike*, Zmaj, Novi Sad, str. 47-51.

Neka je $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Za kompleksan broj $\bar{z} = x - iy$ kaže se da je ***konjugovan*** *broju z.*

Za sve kompleksne brojeve važi:

$$|z| \geqslant 0, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2,$$

$$|z| = |\bar{z}|, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0),$$

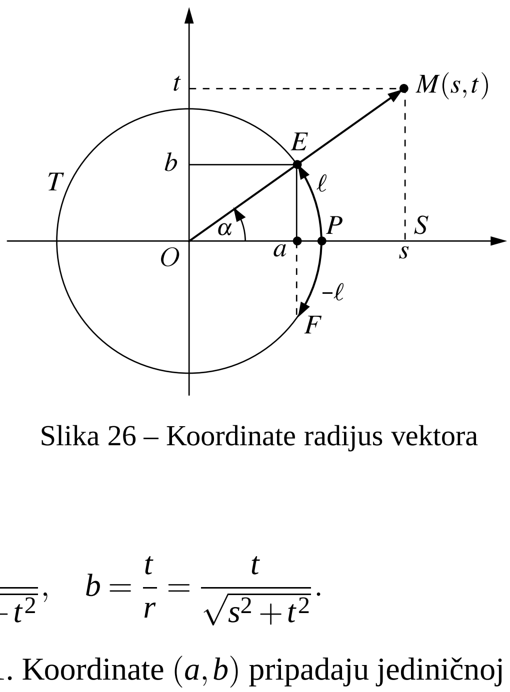
$$z = \bar{\bar{z}}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

$$z \cdot \bar{z} = |\bar{z}|^2,$$

2.2.6. Trigonometrijske funkcije i polarne koordinate

U koordinatnom sistemu posmatramo radijus vektor $\overrightarrow{OM}$, dužine $|\overrightarrow{OM}| = r$, a na osnovu Pitagorine teoreme je

$$r^2 = s^2 + t^2, \quad r = \sqrt{s^2 + t^2}.$$



Slika 26 – Koordinate radijus vektora

Neka je

$$a = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \quad b = \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}.$$

Tada je $a^2 + b^2 = 1$. Koordinate (a, b) pripadaju jediničnoj kružnici.

Posmatrajmo na jediničnoj kružnici luk $\widehat{PE}$ sa početkom P i krajem u tački E. Luk je pozitivno orjentisan. Njegova dužina je l i dodeljujemo mu broj l. Broj π definišemo tako da je dužina jedinične kružnice 2π.

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus definišemo kao koordinate tačke $E(a,b)$ *jedinične kružnice, u oznaci* $E(a,b) = E(\cos l, \sin l)$.

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus produžuju se periodično na $\mathbb{R}$, sa periodom 2π i važi $\sin(2\pi + l) = \sin l$, $\cos(2\pi + l) = \cos l$.

Na ovaj način definisane su trigonometrijske funkcije:

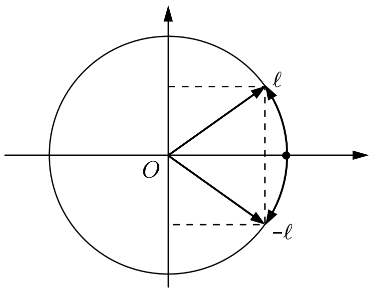
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], \qquad \cos : \mathbb{R} \to [-1,1].$$

Osnovna formula je $\sin^2 l + \cos^2 l = 1$.

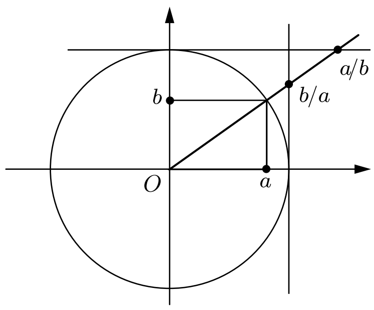
NAPOMENA. (1) Luku l odgovara ugao α pa je definicija trigonometrijskih funkcija za ugao α, $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$ istovetna sa prethodnom.

(2) Trigonometrijske funkcije za pravougli trougao $\triangle OSM$ definišu se sa

$$\sin\alpha = \frac{|MS|}{|OM|} = \frac{t}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{|OS|}{|OM|} = \frac{s}{r} \quad \text{(vidi sliku \textbf{??}.}$$



Slika 27 – Negativno orjentisan luk



Slika 28 – Čitanje vrednosti

Posmatrajmo tačku jediničnog kruga F, simetričnu tački E u odnosu na apcisnu osu. Luk $\widehat{PF}$ sa početkom u P i krajem u F ima dužinu l ali je negativno orjentisan pa mu dodeljujemo broj $-l$. Na osnovu simetrije u odnosu na apscisnu osu važi

$$\sin(-l) = -\sin l, \qquad \cos(-l) = \cos l$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{\sin l}{\cos l} \quad (\textit{tangens}), \quad \cos l \neq 0, \quad l \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

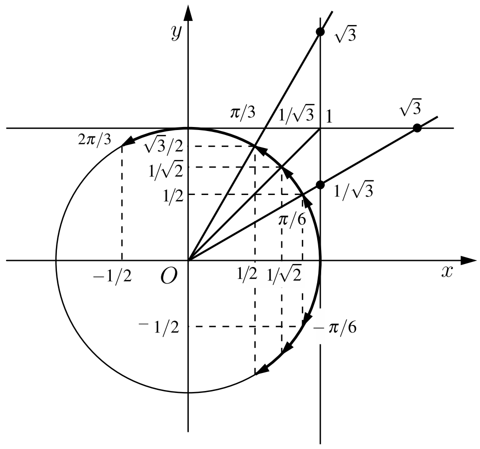
$$\operatorname{ctg} l = \frac{\cos l}{\sin l} \quad (\textit{kotangens}), \quad \sin l \neq 0, \quad l \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Grafici trigonometrijskih funkcija

Sličnost trogulova daje nam vrednosti za tangens i kotangens

$$a : b = 1 : \left(\frac{b}{a}\right); \qquad a : b = \left(\frac{a}{b}\right) : 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$$



Slika 29 – Specijalne vrednosti

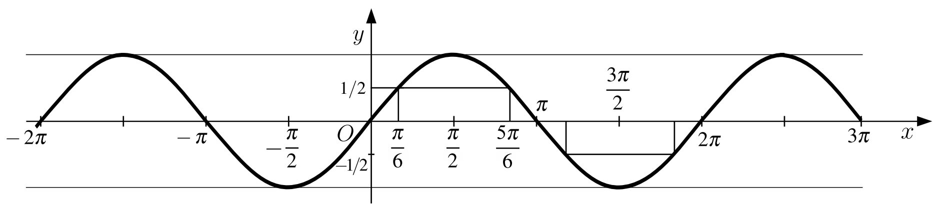
Na osnovu definicije trigonometrijskih funkcija, periodičnog produženja, parnosti i računanje vrednosti može se pristupiti crtanju grafika trigonometrisjkih funkcija

---

PRIMER 25. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

REŠENJE. Vrednosti koje uzima promenljiva x su realni brojevi $0 \leqslant x < 2\pi$ na pozitivnom delu x-ose. Vrednosti funkcije $y = \sin x$ su $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

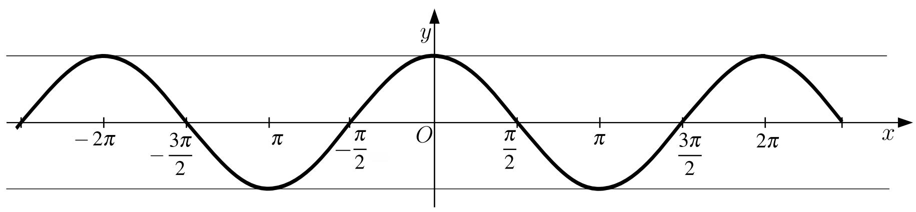
Zamislimo da „pročitane“ vrednosti za sinus prenosimo u koordinatni sistem.



Slika 30 – Sinusoida

PRIMER 26. Nacrtati grafik funkcije $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

REŠENJE. Slično, kao u prethodnom primeru dobija se grafik funkcije.



Slika 31 – Funkcija cos

PRIMER 27. Nacrtati grafik funkcije $f(x) = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

REŠENJE. Funkcije *sin* i *cos* su *na* ali nisu *jedan-jedan*. Ako sa L označimo interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i sa K interval $[0, \pi]$ tada

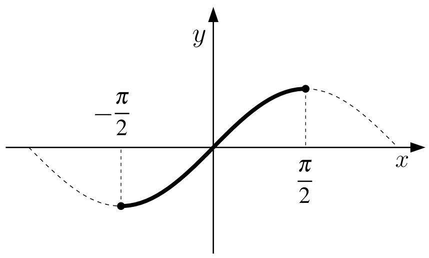
$$\sin\Big|_L : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \cos\Big|_K : [0, \pi] \to [-1, 1].$$

Funkcija $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ dato sa $f(x) = \sin x$, jeste *na* i *jedan-jedan* i ima inverznu funkciju

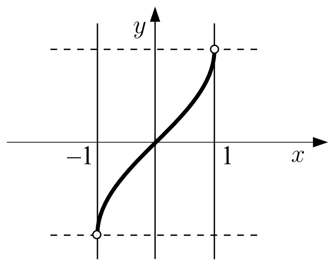
$$g = f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$g(x) = f^{-1}(x) = \arcsin x$$

i zovemo je *arkussinus*.

Važi da je $f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.



Slika 32 – $f(x) = \sin x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$

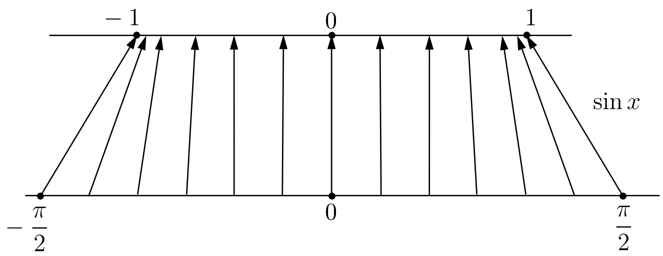


Slika 33 – $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$

PRIMER 28. Funkcije

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad y = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

grafički se mogu prikazati na sledeći način.



Slika 34 – Grafički prikaz sin i arcsin

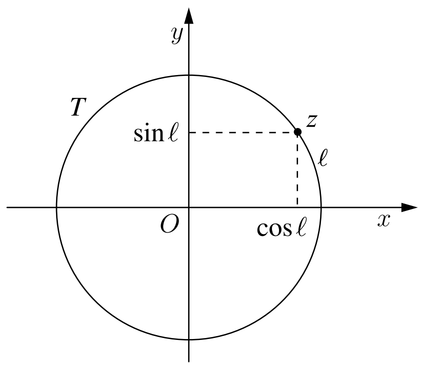
Sa slike 34 vidi se da je $f(x) = \sin x$ monotono rastuća na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. U blizini tačke $\frac{\pi}{2}$ razmaci između vrhova susednih strelica su manji nego razmaci početaka strelica

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \to 0 \quad \left(\alpha, \beta \to \frac{\pi}{2}\right),$$

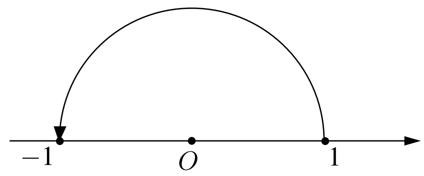
odnosno izvod teži nuli; to će biti kasnije proučavano.

Za grafičko prikazaivanje $\arcsin x$ treba strelice postaviti u suprotnom smeru. Domen od $\arcsin x$ je $[-1,1]$, a skup slika $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Jedinična kružnica u kompleksnoj ravni definiše se sa $T=\{z:\ |z|=1\}$. Dužina luka je l i zavisi od z; $l=l(z):T\to[0,2\pi)$.



Slika 35 – Jedinična kružnica



Slika 36 – Broj π

NAPOMENA. Dužina luka l definiše se kao supremum dužina upisanih poligonalnih linija.

(Broj π). *Broj π definiše se kao dužina polukružnice K^+.*

2.2.7. Polarne koordinate

Neka je T jedinična kružnica. Pogodno je uvesti funkciju cis, gde je

$$\operatorname{cis} l=\cos l+i\sin l$$
$$\operatorname{cis} l=z,\quad \operatorname{cis}:[0,2\pi)\to T,$$

Funkcija cis je inverzna funkcija od l. Preslikava uzajamno jednoznačno $[0,2\pi)$ na T i periodična je funkcija sa periodom 2π.

Teorema 1. (o cis-u)

(a) cis *peslikava $\mathbb{R}$ na T;*

(b) cis *preslikava interval $I=(-\pi,\pi]$ uzajamno jednoznačno na T.*

Za oznaku orjentisanog luka koristimo $l_z,\quad z\in T$.

Posledica 1. (Trigonometrijska polarna forma kompleksnog broja). *Svako $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$ može se predstaviti u obliku*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \textit{gde su}$$
$$r=|z|,\quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

DOKAZ. Ako $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ onda $\dfrac{z}{|z|} \in T$; na osnovu Teoreme (o cis-u)

$$\frac{z}{|z|} = \operatorname{cis}\varphi, \quad \text{odnosno}$$
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ako izdvojimo realni i imaginarni deo kompleksnog broja

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Sistem definiše *polarne koordinate* (r,φ) kompleksnog broja $z = (x,y)$.

Broj $\varphi \in \mathbb{R}$ naziva se Argument kompleksnog broja, a označava se sa $\operatorname{Arg} z$.[16]

Ako je $I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$, na osnovu Teoreme o cis-u i periodičnosti funkcije cis sa periodom 2π, cos injektivno preslikava I_α na T.

Teorema 2. (Jedinstvenost trigonometrijske forme, JTF). *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Svaki kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ može se jedinstveno predstaviti u obliku*

$$z = |z|\operatorname{cis}\varphi, \quad \varphi \in I_\alpha.$$

Za $\varphi \in I_\alpha$ kažemo da je *grana argumenta*. Ako $\varphi \in [0, 2\pi)$ ili $\varphi \in (-\pi, \pi]$ onda φ zovemo *glavna grana argumenta*, u oznaci $\varphi = \arg z$.[17]

Na osnovu JTF najčešće se koristi

$$z = |z|\operatorname{cis}\varphi, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Skalarni proizvod vektora a i b definiše se sa $\langle a,b\rangle = \operatorname{Re}(a\overline{b})$. Rotacija za ugao $\theta \in \mathbb{R}$ definiše se sa $R_\theta z = (\operatorname{cis}\theta)\cdot z$. Rotacija R_θ je izometrija.

Iz $|\operatorname{cis}\theta| = 1$ sledi

$$R_\theta z \cdot \overline{R_\theta \zeta} = (\operatorname{cis}\theta) z \overline{(\operatorname{cis}\theta)\zeta} = (\operatorname{cis}\theta)(\overline{\operatorname{cis}\theta})\cdot z\overline{\zeta} = z\overline{\zeta}$$
$$\langle R_\theta z, R_\theta \zeta\rangle = \langle z, \zeta\rangle$$

i specijalno

$$|R_\theta z - R_\theta \zeta| = \Big|(\operatorname{cis}\theta)(z-\zeta)\Big| = |z - \zeta|.$$

NAPOMENA. Rotacija za ugao θ može se predstaviti u sledećem obliku

$$\begin{aligned} R_\theta z = (\operatorname{cis}\theta) z &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

[16] Arg je višeznačna funkcija.

[17] O Argumentu videti više u M. Mateljević, *Kompleksna analiza 1*, Beograd, 2009.

Teorema 3. (Adiciona).[18]

$$\mathrm{cis}(\alpha+\beta) = \mathrm{cis}\,\alpha \cdot \mathrm{cis}\,\beta, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

DOKAZ. Kako je cis periodična funkcija dovoljno je da se pretpostavi da su $\alpha,\beta \in [0,2\pi)$.

Luk između kompleksnih brojeva a i b na jediničnoj kružnici označićemo sa

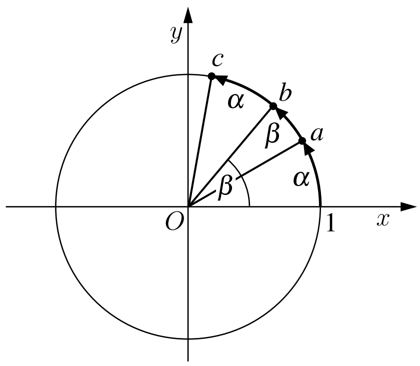
$$l_{ab} = l_{ab}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Neka su $a = \mathrm{cis}\,\alpha$, $b = \mathrm{cis}\,\beta$ i c je tačka jedinične kružnice, takva da je $c = R_\alpha b$.

Dužine lukova su $|l_{1a}| = \alpha$, $|l_{1b}| = \beta$. Kako je R_α izometrija, $R_\alpha 1 = a$ i $R_\alpha b = c$, pa je $|l_{bc}| = \alpha$.

Dužine lukova l_{1b} i l_{ac} su jednake i zbog toga je dužina $|l_{ac}| = \beta$, pa je dužina luka nastalog nadovezivanjem l_{1a} i l_{ac}

$$|l_{1c}| = \alpha+\beta, \quad \alpha+\beta < 2\pi$$
$$|l_{1c}| = \alpha+\beta-2\pi, \quad \text{za} \quad \alpha+\beta \geqslant 2\pi.$$



Slika 37 – Adiciona teorema

S obzirom na definiciju

$$c = \mathrm{cis}(\alpha+\beta), \quad \text{i kako je} \quad c = R_\alpha b = \mathrm{cis}\,\alpha\,\mathrm{cis}\,\beta \quad \text{sledi}$$
$$\mathrm{cis}(\alpha+\beta) = \mathrm{cis}\,\alpha\,\mathrm{cis}\,\beta.$$

Odavde je

$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta);$$

[18] Pedagoški pristup definiciji trigonometrijskih funkcija, uvođenju polarnih koordinata, dokazu Adicione teoreme i dr. nalazi se u M. Mateljević, *Kompleksna analiza 1*, Beograd, 2009.

Formula $\mathrm{cis}(\alpha+\beta) = \mathrm{cis}\,\alpha \cdot \mathrm{cis}\,\beta$ vodi nas do teorije funkcionalnih jednačina i pitanja: koje sve funkcije zadovoljavaju $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)\cdot f(\beta)$.

Dobijaju se tzv. *adicione formule*

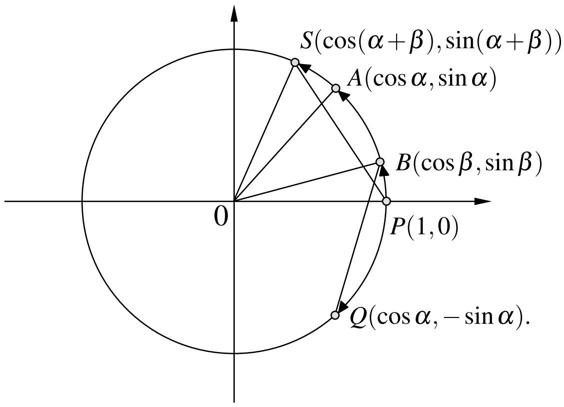
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Dokaz ove dve adicione teoreme bazira se na dve važne činjenice:

(a) R_α je izometrija

(b) Dužina luka je aditivna funkcija.

II Način. Na jediničnom krugu uočimo sledeće tačke $P(1,0)$, $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\sin\beta)$, $S(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ i $Q(\cos\alpha,-\sin\alpha)$.



Slika 38

Luk koji počinje u tački P i završava se u tački S ima dužinu $|\alpha+\beta|$. Luk koji počinje u tački Q i završava se u tački B ima dužinu $|\alpha+\beta|$ (smer je pozitivan, suprotno kretanju kazaljke na časovniku). Tetive koje odgovaraju ovim lukovima jednakih dužina imaju iste dužine pa važi

$$\overline{PS}^2 = \overline{QB}^2$$

$$\big(\cos(\alpha+\beta)-1\big)^2 + \big(\sin(\alpha+\beta)\big)^2 = (\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\sin\beta+\sin\alpha)^2$$

a odavde posle kvadriranja i korišćenja osnovnog identiteta $\cos^2 t+\sin^2 t = 1$ dobija se

$$-2\cos(\alpha+\beta) = -2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha,$$

odnosno

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Ako želimo $\cos(\alpha-\beta)$ onda je

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta))\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Za $\beta = \alpha$,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Za $\alpha = \dfrac{\varphi}{2}$,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\varphi}{2} &= \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\\
&= \cos^2\frac{\varphi}{2} - \left(1-\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\\
&= 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1; \quad \text{odnosno}\\
2\cos^2\frac{\varphi}{2} &= 1+\cos\varphi; \quad \text{slično i,}\\
2\sin^2\frac{\varphi}{2} &= 1-\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Dobijene jednakosti su *formule snižavanja stepena* (ili *formule polovine ugla*).

Teorema 4. (Moavrova formula).

$$(\operatorname{cis}\varphi)^n = \operatorname{cis} n\varphi, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$, $\operatorname{cis}\varphi = \operatorname{cis}\varphi$.

Pretpostavimo da za neko $n\in\mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned}
(\operatorname{cis}\varphi)^n &= \operatorname{cis} n\varphi \quad \text{dokažimo da važi}\\
(\operatorname{cis}\varphi)^{n+1} &= \operatorname{cis}(n+1)\varphi\\
(\operatorname{cis}\varphi)^{n+1} &= (\operatorname{cis}\varphi)^n\cdot\operatorname{cis}\varphi\\
&\overset{pp}{=} \operatorname{cis} n\varphi\cdot\operatorname{cis}\varphi\\
&\overset{at}{=} \operatorname{cis}(n\varphi+\varphi)\\
&= \operatorname{cis}(n+1)\varphi.
\end{aligned}$$

PRIMER 29. Izračunati $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^6\\
&= \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^6\\
&= \cos 10\pi + i\sin 10\pi = 1.
\end{aligned}$$

Skup rešenja jednačine $z^n = a$ *je n-ti koren kompleksnog broja a.*

Za praktično rešavanje zadataka napisaćemo

$$
\begin{aligned}
&z = \rho \operatorname{cis} \varphi, \quad a = r \operatorname{cis} \alpha \\
&z^n = \rho^n \operatorname{cis} n\varphi = r \operatorname{cis} \alpha \\
&\rho^n = r, \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
&z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}
$$

PRIMER 30.

$$
z = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi}
$$

$$
z = \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1
$$

$$
z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i; \quad z_2 = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -i
$$

PRIMER 31.

$$
z = (-8i)^{1/3}
$$

$$
z_k = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.
$$

2.2.8. Granični procesi i primene

Konačno i beskonačno

Matematički način mišljenja nije ništa drugo nego princip analizirajuće metode, i utoliko je naziv *analiza* za višu matematiku novog veka koja nastaje u XVII veku dublje opravdan. „On je povezan sa idejom *mathesis universalis*, koja je uz pomoć *algebrae speciosae* (slovnog računa koji je pronašao Vijet[19], a sam ga je Dekart poboljšao) primenljiva na sve vrste brojeva i veličina, i nadalje sa njegovim idealom matematizacije fizike, u kojoj se do svega dolazi postavljanjem aksioma i algebarskim računom. Tako je matematika Dekartov metodički izbor.“[20] Pored toga matematički način mišljenja nije samo analitičan nego i graditeljski i to metodom koja ima određena pravila i nemilosrdno

---

[19] Frensis Vijet (François Viète), francuski matematičar, živeo je od 1540–1603.

[20] Oskar Beker (Oskar Becker), 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, str. 25. Algebrae speciosae sastoji se od slovnih simbola koji imaju opšte značenje, oni mogu

dosledan postupak. Naš duh počiva na jedinstvenoj i stalnoj celini jednog apsolutnog bivstva i jednog subjektivnog postignuća mišljenja i *imaginacije* koji sadejstvuju u nastajanju matematičkih pojmova. „Ako se pojam kontinuuma prvenstveno dovodi u vezu sa prvim momentom, onda onaj drugi momenat tek stvara pojmove broja i množine, pa tako i mogućnost mere“[21]. Merenje tako postaje prvi zadatak razmatranja i otvara pitanje: Ako postoji beskrajno prostiranje da li nužno postoji i nešto najmanje u njemu? Te suprotnosti uzajamno se uslovljavaju i mogu se pretpostavljati ili zamišljati samo zajedno. Tako dolazimo do pojma tačke kao logičke suprotnosti čistog apsolutnog protezanja.

Bezgraničnost prostora i vremena pruža nam sigurno jemstvo da u njima nema posla sa stvarima već sa idejama čistog razuma. Mišljenje neprestano teži ka tome da prevaziđe svaku dostignutu tačku, te tako postaje osnova i izvor za svaku vrstu beskonačnosti.[22] Prostor i vreme su čisti apstraktni pojmovi i predstavljaju najviši rang u sistemu saznanja.

Veza između apsolutnoga i pojmova našeg saznanja, prema Kuzanskom,[23] upoređuje se odnosom koji postoji između kruga i pravilnog poligona. Krug nije ništa drugo nego mnogougao sa beskonačno mnogo strana. Granična vrednost može se dokučiti posredstvom neograničenog procesa približavanja. Nezavršenost tog procesa nije nedostatak već svedočanstvo snage i osobenosti uma, koji može samo u beskonačnom objektu doći do svesti o svojoj vlastitoj sposobnosti. Ono što je neograničeno postaje osvetljeno. „Sada beskonačnost više nije granica, nego je samopotvrda uma.“[24] Sada duh ocrtava pojam kruga kao zamišljenu liniju, čije su tačke podjednako udaljene (d) zajedničkog centra, a lik koji tako nastaje nema posebno, materijalno bivstvo nigde izvan mišljenja. Istina se dokazuje tek na ovom nivou. Tako se mišljenje uzdiže do apstraktnih pojmova i oblika i razvija siguran put matematičke nauke.

„Saglasnost do koje u području metafizike dolazi između konačnog i beskonačnog, između sveta i boga, unutar učenja o saznanju odražava se u jednom novom odnosu koji se sada stvara između čulnosti i mišljenja.“[25] Protivnici Platona se ipak slažu u uverenju da matematika ne zavisi od čulnog iskustva. Postavlja se pitanje: da li se pojam beskonačno pojavljuje u iskustvu i da li se to može dogoditi, dok se u matematici smatra neophodnim?

---

označavati čiste brojeve ili dužine, površine, vreme, težinu itd.; pred nama danas su tako dobro poznate formule. Dekart je shvatio njihovu univerzalnu primenljivost, što je izrazio u fundamentalnom pojmu mathesis universalis (Ibid, str. 56)

[21] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 196.

[22] Ernst Kasirer, 1998, Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 320.

[23] Nikola Kuzanski (lat. Nicolaus Cusanus, nem. Nikolaus von Kues, 1401–1464) nemački kardinal i filozof u doba renesanse, napisao je delo De Docta Ignorantiae (O učenom neznanju).

[24] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 29.

[25] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* I, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 31.

Prebrojiv i neprebrojiv skup

Činjenica da svaki prirodan broj ima svoje sledbenike znači da je skup prirodnih brojeva beskonačan skup, tj. da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Pojam beskonačnosti dobio je na značaju krajem XIX veka, kada je Kantor započeo sistematsku analizu matematičke beskonačnosti, što je dovelo do zasnivanja moderne teorije skupova.[26]

Osnovna podela skupova je podela na konačne i beskonačne skupove. To da li različiti konačni skupovi imaju isti broj članova definiše se na jednostavan način. U matematici to je bijektivno preslikavanje jednog skupa na drugi, ili sparivanje članova datih skupova. Postupak je završen kada se iscrpe članovi bar jednog skupa. Ako su nakon n ponavljanja postupka sparivanja istovremeno iscrpljeni članovi oba skupa, kaže se da su posmatrani skupovi istobrojni i da imaju n članova.[27]

Kada je reč o beskonačnim skupovima, postupak sparivanja nikad se ne završava, ali misaono se može izvesti. Na primer, moguće je spariti članove skupa svih prirodnih brojeva i skupa svih parnih prirodnih brojeva.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & 2n+2 & \cdots \end{array}$$

ili

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 & \cdots \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & \cdots & 2n & 2(n+1) & \cdots \end{array}$$

Na ovaj način svaki prirodan broj n sparen je sa parnim brojem $2n$. Prema pojmu istobrojnosti kod konačnih skupova možemo zaključiti da su skup svih parnih prirodnih brojeva i skup svih prirodnih brojeva istobrojni, tj. da imaju isti broj članova. To se kosi sa našom intuicijom o konačnim skupovima, i stavom da je deo manji od celine, ali imajte na umu da sada ne razmatramo konačne već beskonačne skupove!

Opisanim postupkom sparivanja pokazuje se i da skup svih neparnih prirodnih brojeva i skup svih prirodnih brojeva imaju isti broj elemenata, iako je skup svih neparnih prirodnih brojeva samo deo skupa svih priodnih brojeva. Matematičari su izdvojili termin *ekvipotentnost* dva skupa koji označava istobrojnost u smislu ranije opisanog sparivanja.

Skupovi A i B su ekvipotentni ukoliko postoji bijektivno preslikavanje skupa A u skup B.

Kod konačnih skupova pojam ekvipotentnosti poklapa se sa intuitivnom predstavom o jednakom broju elemenata skupova. Uspostavljanje bijekcije između prirodnih brojeva i nekog drugog beskonačnog skupa, ili ispitivanje ekvipotentnosti, obično se zove prebrojavanje članova tog skupa.

[26] Georg Kantor (Georg Cantor), 1845-1918. Studirao je u Cirihu i u Berlinu kod Vajerštrasa. Kreirao je teoriju skupova i razvio je transfinitnu teoriju brojeva zasnovanu na matematičkoj beskonačnosti.

[27] Željko Pauše, 2007, *Matematika i zdrav razum*, Školska knjiga, Zagreb, str. 109.

Kada se utvrdi ekvipotentnost posmatranog skupa i skupa prirodnih brojeva, kaže se da je posmatrani skup ***prebrojiv skup****.*

Navedeni primeri skupova svih parnih i neparnih prirodnih brojeva su prebrojivi skupovi. Skup svih celih brojeva je prebrojiv skup.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n & \cdots \end{array}$$

Jedno od prvih Kantorovih otkrića bilo je sledeće saznanje. *Skup racionalnih brojeva je prebrojiv skup, tj. ekvipotentan je skupu prirodnih brojeva*.

Trebalo je dokazati da se svi racionalni brojevi mogu poređati u određeni niz. Prvo ćemo poređati pozitivne racionalne brojeve na način prikazana na slici 39.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \\ \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \\ \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \\ \frac{5}{1}, \cancel{\frac{4}{2}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, \\ \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \\ \vdots \end{array}$$

Slika 39 – Niz racionalnih brojeva

Slika 40 – Georg Kantor

Zatim izbacimo (*precrtamo*) sve članove koji se ponavljaju i dobili smo traženi niz. Sada se može uspostaviti bijekcija između skupa prirodnih brojeva i ovog skupa, pa se za njega kaže da je prebrojiv. Skup svih racionalnih brojeva može se poređati u niz. Neki su pozitivni članovi racionalnih brojeva već poređani u niz koji je prethodno prikazan

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Kada dodamo negativne racionalne brojeve i nulu, dobija se niz

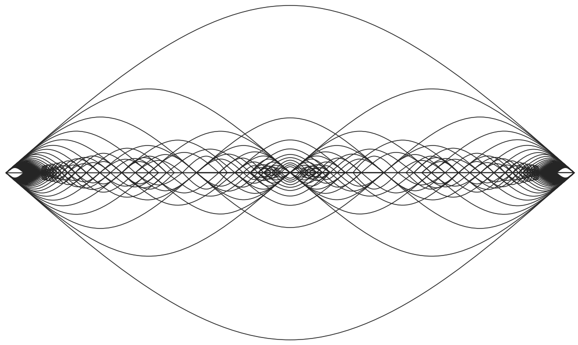
$$0, a_1, -a_1, a_2, -a_2, \ldots, a_n, -a_n, \ldots$$

Na ovaj način dobijamo da je skup svih racionalnih brojeva prebrojiv skup.

Šema racionalnih brojeva na slici zapravo predstavlja tzv. *Labdomu*, koja je vrlo starog porekla, preteča Paskalovog trougla; javlja se i u muzici, kao i u nauci o harmoniji.[28]

[28] Videti u: Čanak M., 2012, *Put u petu dimeziju*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 71–74.

Kod treperenja žice, pored treperenja cele dužine, uočavamo i treperenje pojedinih delova – dve polovine, tri trećine, četiri četvrtine itd. Ova slika potpuno odgovara brojevnoj shemi lambdome.



Slika 41 – Lambdoma

Broj elemenata konačnog skupa naziva se kardinalni broj skupa. Matematičari su se usaglasili u tome da se može govoriti i o kardinalnom broju beskonačnog skupa, pri čemu ekvipotentni skupovi imaju isti kardinalni broj. Za skupove ekvipotentne skupu prirodnih brojeva, njihov kardinalni broj označava se sa $\aleph_0$ (alef – nula).

Sada može da se kaže da postoji više vrsta beskonačnosti, tj. da prebrojiva beskonačnost nije jedina beskonačnost. Najznačajnije Kantorovo otkriće u analizi beskonačnosti bilo je saznanje da skup realnih brojeva nije prebrojiv, što znači da mu se pripisuje viši nivo beskonačnosti nego što je prebrojiva beskonačnost.

Ne može se uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje između elemenata skupa svih prirodnih brojeva i skupa svih realnih brojeva, odnosno skup realnih brojeva je beskonačan ***neprebrojiv skup****.*

Dokaz se zasniva na beskonačnom decimalnom zapisu realnih brojeva, a ako je taj zapis konačan dodaju se nule. Pretpostavimo da smo sve realne brojeve poređ ali u niz gde je m_i ceo deo realnog broja, a iza decimalnog zareza brojevi $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

$$\begin{array}{lllllll}
m_1, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
m_2, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
m_3, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\
m_4, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\
m_5, & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Dijagonalnim postupkom Kantor je pokazao da postoji realni broj koji nije u navedenom nizu, tj. takav decimalni broj koji se razlikuje od svakog broja u datom nizu. Pri njegovoj konstrukciji dovoljno je iza decimalnog zareza uzeti broj a_1 koji se razlikuje od a_{11}, a nije ni 0 ni 9. Sledeća cifra a_2 se razlikuje od a_{22} (i nije 0 ili 9), pa se a_3 razlikuje od a_{33} itd.

$m,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ldots$

Tako konstruisani broj sigurno se razlikuje od prvog člana niza pošto nemaju istu prvu decimalu; razlikuju se od drugog jer je različita druga decimala itd. Znači, razlikuje se od svih brojeva u navedenom nizu. To je suprotno pretpostavci da smo sve realne brojeve poređ ali u niz.

Prema tome, postoji i neprebrojiva beskonačnost, tj. beskonačnost višeg nivoa od prebrojive beskonačnosti. Tako je Kantor pokazao da je moguće definisati beskonačne skupove sve višeg i višeg nivoa koji imaju sve veće i veće kardinalne brojeve.[29]

Nizovi realnih brojeva

U ovom delu uvodi se stroga definicija nizova po ugledu na Košija. Teorija nizova daje nam pravi uvid u pojmove beskonačno i beskonačno malo.[30]

Slika 42 – Ogisten Koši

Definicija niza realnih brojeva. *Funkcija* $f:\mathbb{N}\to X$ *zove se beskonačni niz elemenata iz* X, *ili jednostavno niz. Vrednosti funkcije*, *u oznaci* $f(n)=x_n$, $n=1,2,\ldots$ *su članovi niza*, *a* x_n *je n-ti ili opšti član niza.*

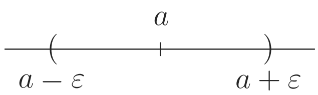
Umesto $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ niz često označamo sa (x_n).

Kada je $X\subset\mathbb{R}$, govorimo o nizu realnih brojeva.

[29] Bogoljub Stanković, 1975, *Osnovi funkcionalne analize*, Naučna knjiga, Beograd, str. 26.

[30] Ogisten Koši (Augustin Louis Caushy), rođen je 1789. u Parizu i živeo je do 1857. Bio je veliki matematičar i sa Ojlerom i Kejlijem deli titulu najproduktivnijeg matematičara svih vremena. Sa 27 godina postao je član Pariske akademije nauka. Dao je vrhunske doprinose u kompleksnoj analizi, diferencijalnim jednačinama, teoriji funkcija, nizova, graničnih vrednosti, beskonačno malih itd. Koši je u svom radu iz 1821. uveo strogost u analizu. Bavio se pitanjima funkcija, nizova i njihovim graničnim vrednostima, beskonačno malim i dr.

PRIMER 32. (*Harmonijski niz*) Niz realnih brojeva $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$, čiji je opšti član $x_n = \frac{1}{n}$ naziva se harmonijski niz. Svi članovi tog niza su u ε-okolini tačke 0, počev od nekog $n > N$.



Definicija otvorene okoline. *Otvorena okolina tačke $a \in \mathbb{R}$, u oznaci $U(a)$ ili $V(a)$, predstavlja otvoreni interval koji sadrži tačku a.*

Specijalno, otvorena epsilon[31] *okolina tačke $a \in \mathbb{R}$ jeste interval*

$$U(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \ \varepsilon > 0 \quad \textit{ili}$$
$$U(a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-a| < \varepsilon\}.$$

Definicija granične vrednosti i konvergentnog niza. *Broj $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost niza (x_n), ukoliko za svaku okolinu $V(a)$ tačke a postoji takav broj N (izabran u zavisnosti od $V(a)$) da svi članovi niza, čiji je indeks veći od N, pripadaju okolini $V(a)$ tačke a.*

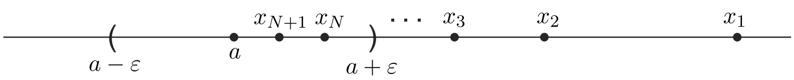
Niz realnih brojeva je konvergentan ako ima graničnu vrednost, a divergentan ako je nema.

Granična vrednost niza označava se sa

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a, \text{ odnosno } x_n \to a, \quad (n \to +\infty).$$

Logičkim simbolima se može zapisati

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$



PRIMER 33. Niz $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, konvergira i ima graničnu vrednost nula.

Neka je dato proizvoljno $\varepsilon > 0$. Na osnovu Arhimedove aksiome postoji prirodan broj $N(\varepsilon)$ veći od $\frac{1}{\varepsilon}$, odnosno $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, pa važi $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. (Može se i precizirati $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.)

Tada za sve $n > N(\varepsilon)$ važi nejednakost $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Na taj način, za sve $n > N(\varepsilon)$, ispunjeno je

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \text{ što je ekvivalentno } \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

[31] Priroda ili suština ovog broja najčešće se opisuje kao „proizvoljno mali unapred zadat broj“.

PRIMER 34. Ako je $|q| < 1$ onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Dokazati.

DOKAZ. Neka je $0 < q < 1$, onda može da se napiše da je $q = \dfrac{1}{1+h}$, $h > 0$. Na osnovu Bernulijeve nejednakosti

$$(1+h)^n > 1+nh, \quad n \geqslant 2,\ \ h > -1,$$

važi nejednakost

$$0 < q^n < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se izabrati $N = N(\varepsilon)$ tako da za svako $n > N(\varepsilon)$ važi da je $q^n < \varepsilon$.

Da bi ovo bilo ispunjeno dovoljno je da bude

$$\frac{1}{nh} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{h\varepsilon}, \quad \text{pa biramo}$$
$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{h\varepsilon}\right] + 1.$$

Pokazujemo da je za sve $n > N(\varepsilon)$ ispunjeno $q^n < \varepsilon$. Naime,

$$q^n < \frac{1}{nh+1} < \frac{1}{N(\varepsilon)h} < \frac{1}{\dfrac{1}{h\varepsilon}\cdot h} = \varepsilon.$$

Sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0, \quad 0 < q < 1.$$

Za $-1 < q < 0$, pišemo

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} (-k)^n \quad (\text{gde je } q = -k \ \text{ i } \ 0 < k < 1)$$
$$= (-1)^n \lim_{n\to+\infty} k^n = (-1)^n \cdot 0 = 0.$$

NAPOMENA. Zbir prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}, \quad |q| < 1$$

je

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Naime, pošto je $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$ onda je $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{\,n}$. Oduzimanjem, $S_n - qS_n = a - aq^n$, odnosno $S_n = a\dfrac{1-q^{\,n}}{1-q}$.

Sa S označavamo sume beskonačnog opadajućeg geometrijskog reda, pa je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

jer je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{\,n} = 0$.

PRIMER 35. Neka je $a > 1$. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

DOKAZ. Kako je $a-1>0$, koristeći Njutnovu binomnu formulu[32]

$$\begin{aligned}
a^n &= \big(1+(a-1)\big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-1)^k\\
&= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(a-1)+\binom{n}{2}(a-1)^2+\cdots+\binom{n}{n}(a-1)^n\\
&\geqslant \binom{n}{2}(a-1)^2\\
&= \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2
\end{aligned}$$

$$0\leqslant \frac{b}{a^n}\leqslant \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$$

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}=0,\quad \text{onda je}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

Osobine konvergentnih nizova

(i) *Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.*

(ii) *Ako je* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b$ *i* $a<b$, *tada postoji broj* $N(\varepsilon)$, *tako da za sve* $n>N(\varepsilon)$ *važi* $x_n<y_n$.

(iii) (Teorema o dva žandara) *Ako je* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$ *i* $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,\ n\in\mathbb{N}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$.

DOKAZ. (iii) Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$, za svako $\varepsilon>0$ postoje N' i N'' takvi da za sve $n>N'$ važi $a-\varepsilon\leqslant x_n$ i za $n>N''$ važi $y_n\leqslant a+\varepsilon$. Tada za $n>\max\{N',N''\}$ dobijamo $a-\varepsilon\leqslant x_n\leqslant z_n\leqslant y_n\leqslant a+\varepsilon$ ili $|z_n-a|<\varepsilon$, odnosno $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$.

Definicija beskonačno malih nizova. *Brojevni niz* (α_n), *čija je granična vrednost nula, naziva se beskonačno mali niz, u oznaci* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Svaka linearna kombinacija beskonačno malih je beskonačno mala.

Proizvod beskonačno malog niza i ograničenog niza jeste beskonačno mali niz.

Proizvod konačnog broja beskonačno malih nizova jeste beskonačno mali niz.[33]

Lema. *Brojevni niz* (x_n) *ima konačnu graničnu vrednost jednaku broju a ako i samo ako je* $\alpha_n=x_n-a$, $n=1,2,\dots$ *beskonačno mali niz, odnosno* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

---

[32] Njutnova binomna formula

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

može se dokazati matematičkom indukcijom.

[33] Dataljni dokazi nalaze se u Dobrilo Tošić, Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasnik, Beograd, str. 78.

DOKAZ. Neka su dati brojevni niz (x_n) i broj a. Ako je $\alpha_n = x_n - a$, $n = 1,2,\ldots$, onda uslov $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, po definiciji granične vrednosti niza, za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $N(\varepsilon)$, tako da za sve $n > N(\varepsilon)$ važi $|x_n - a| < \varepsilon$. To je ekvivalentno sa $|\alpha_n| < \varepsilon$, a što je definicija granične vrednosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, odnosno (α_n) je beskonačno mali niz.

Na osnovu leme može se reći: Broj a je granična vrednost niza (x_n) ako i samo ako se može napisati $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1,2,\ldots$, gde je (α_n) beskonačno mali niz.

Niz (x_n) je ograničen ako postoje brojevi m i M takvi da je za svako n $m \leqslant x_n \leqslant M$, tj. (x_n) je ograničen ako su svi njegovi članovi u nekom intervalu oblika $[m,M]$.

Osobine graničnih vrednosti nizova mogu se iskazati sledećim tvrđenjem:

(i) *Ako dati niz (x_n) konvergira, tada konvergira i niz $(|x_n|)$, pri čemu zapisujemo: iz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ sledi $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |a|$. Obratno ne mora da važi.*

(ii) **Algebarske kombinacije limesa.** *Ako nizovi (x_n) i (y_n) konvergiraju, odnosno $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, tada važi:*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$;

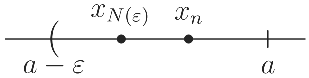
(c) Ako je $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n}$.

(iii) *Konvergentni niz (x_n) je ograničen.*

Definicija monotonog niza. *Niz (x_n) je neopadajući (nerastući) ukoliko iz $m < n$ sledi da je $x_m \leqslant x_n$ $(x_m \geqslant x_n)$. Ukoliko su ove nejednakosti striktne, tj. $x_m < x_n$ $(x_m > x_n)$, kažemo da je niz (x_n) strogo rastući (opadajući).*

Vajerštrasova teorema. *Ograničeni i monotoni niz (x_n) je konvergentan.*[34]

DOKAZ. Pretpostavimo da je niz (x_n) rastući i ograničen. Za $a = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ važi $x_n \leqslant a$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Pošto je a najmanje gornje ograničenje, $a - \varepsilon$ nije gornje ograničenje, pa postoji broj $N(\varepsilon)$ takav da je $x_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$. Pošto (x_n) raste, biće $x_n \geqslant x_{N(\varepsilon)}$ za $n > N(\varepsilon)$, pa je $a - \varepsilon < x_n \leqslant a$ za $n \geqslant N(\varepsilon)$ tj. tim pre $a - \varepsilon < x_n \leqslant a + \varepsilon$ za $n \geqslant N(\varepsilon)$,



[34] Karl Vajerštras (Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm), nemački matematičar (1815–1897).
Jedan je od vodećih nemačkih matematičara XIX veka i jedan od osnivača moderne analize. Dao je doprinos u oblasti eliptičkih i Abelovih funkcija, teoriji analitičkih funkcija, konvergenciji redova, varijacionom računu i dr. Bio je član Berlinske i Pariske akademije nauka.

što znači da su skoro svi članovi niza (x_n) u ε-okolini tačke a. Prema tome, zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

PRIMER 36. Dokazati da je niz

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

monotono rastući i ograničen, a to znači da ima konačnu graničnu vrednost.

Ako primenimo Njutnovu binomnu formulu dobija se

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots \\ &\quad \cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ukoliko umesto n stavimo $n+1$, dobija se formula za x_{n+1} i važi

$$1-\frac{s}{n} < 1-\frac{s}{n+1}, \qquad s = 1,2,\ldots,n-1;\ n = 2,3,\ldots,$$

što znači da je niz x_n rastući, odnosno $x_n < x_{n+1}$.

Važe sledeće nejednakosti:

$$1-\frac{s}{n} < 1,\ s = 1,2,\ldots,n-1 \text{ i}$$

$$2^{n-1} = 1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1 \text{ činilac}} \leqslant 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!,$$

pa je $2^{n-1} \leqslant n! \Rightarrow \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Za $n>1$ i na osnovu navedenih nejednakosti dobija se

$$\begin{aligned} x_n &\leqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3, \quad \text{odnosno } x_n < 3. \end{aligned}$$

Niz x_n je monotono rastući i ograničen odozgo, pa je konvergentan. Njegovu graničnu vrednost definišemo sa

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad e \approx 2.718\,281\,828\,459\,045\ldots \quad (2<e<3).$$

PRIMER 37. Niz $z_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!} \to e$.

DOKAZ.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{n(n-1)}{n \cdot n} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots}{n \cdot n \cdots n} \cdot \frac{1}{n!} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = z_n$$
$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} \geqslant 1 + \binom{n^2+n}{1} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n^2+n}{2} \cdot \frac{1}{n^4} + \cdots + \binom{n^2+n}{n} \cdot \frac{1}{(n^2)^n} =$$
$$= 1 + \frac{n^2+n}{n^2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{(n^2+n)}{n^2} \frac{(n^2+n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \cdots +$$
$$+ \frac{(n^2+n)}{n^2} \frac{(n^2+n-1)\cdots(n^2+1)}{n^2 \cdots n^2} \cdot \frac{1}{n!} \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = z_n$$

Znači $x_n \leqslant z_n \leqslant w_n$.

Pošto $x_n \to e$

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to e \cdot 1 = e$$

Sledi $z_n \to e$.

Košijev kriterijum konvergencije. *Niz (x_n) ima konačnu graničnu vrednost ako i samo ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}),\ \forall n > N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ ili}$$
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N(\varepsilon) \in \mathbb{N}),\ \forall m, n > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Granična vrednost funkcije i neprekidnost funkcije

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ realna funkcija.

Za funkciju $y = f(x)$, $x \in X$, u daljem tekstu, najčešće se koristi skraćena notacija, gde se izostavlja domen za koji se pretpostavlja da je maksimalni domen definisanosti podskup skupa realnih brojeva. Posebno, kada je to bitno, isticaće se domen.

Otvorena okolina tačke a, u oznaci $U(a)$, jeste otvoreni interval koji sadrži tačku a, što će se u daljem tekstu koristiti. Šuplja okolina tačke a je u $\mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Neka je $X \subset \mathbb{R}$. Tačka a za koju postoji niz različitih tačaka $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ čija je granična vrednost a, u oznaci $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, naziva se *tačka nagomilavanja* skupa X.

Ako je tačka nagomilavanja a jedna od beskonačno udaljenih tačaka, $+\infty$, ili $-\infty$ ona se naziva *beskonačno udaljena tačka nagomilavanja* skupa X.

Ako $a = +\infty$ znači da je skup X neograničen odozgo i, analogno, za $a = -\infty$ skup X je neograničen odozdo.

Tačke nagomilavanja mogu, ali ne moraju, pripadati skupu X. Na primer, za interval (a, b) tačke a i b su tačke nagomilavanja skupa (a, b) a ne pripadaju navedenom intervalu.

Napomena. *Tačka a je tačka nagomilavanja datog skupa X ako i samo ako svaka njena okolina sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa X.*

Ekvivalentan je i sledeći iskaz: *Neka tačka a je tačka nagomilavanja datog skupa X ako i samo ako svaka njena okolina sadrži bar jednu tačku skupa X različitu od tačke a.*

Hajneova definicija granične vrednosti.[35] *Tačka A je granična vrednost funkcije $f(x)$, $x \in X$ u tački a, (ili kad $x \to a$), ako za svaki niz tačaka $x_n \in X$, različitih od a, $n = 1, 2, \ldots$ koji ima graničnu vrednost a, u oznaci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ niz vrednosti $\big(f(x_n)\big)$ funkcije f u tačkama x_n, $n = 1, 2, \ldots$ ima svoju graničnu vrednost A, odnosno važi*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

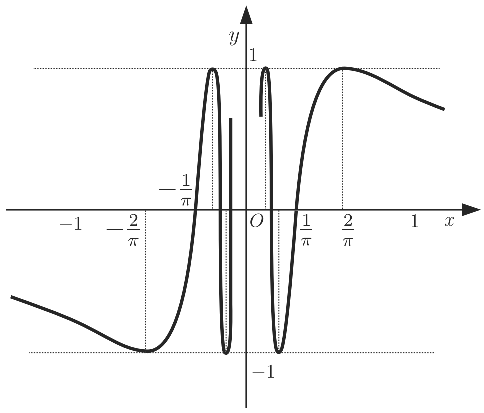
U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ili $f(x) \to A$ za $x \to a$.

Ako koristimo logičku simboliku može se napisati

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall x_n \in X\setminus\{a\},\ n=1,2,\ldots\big)\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A\Big).$$

Ako je A konačan broj, onda funkcija $f(x)$ ima konačnu graničnu vrednost.

Primer 38. Data je funkcija $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.



Slika 43 – Grafik funkcije $y = \sin\dfrac{1}{x}$

Ona je definisana na skupu $X \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Da li postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Ako se posmatraju dva niza $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ i $x_n' = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$ dobija se

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n' = 0,$$

[35] Hajne Edvard (Heine, Heinrich Edward), nemački matematičar (1821–1881). Napomena. Ovaj pristup može se naći kod: Кудрявцев Л. Д. 2005, Краткий курс математического анализа I, Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, ФИЗМАТЛИТ, str. 95.

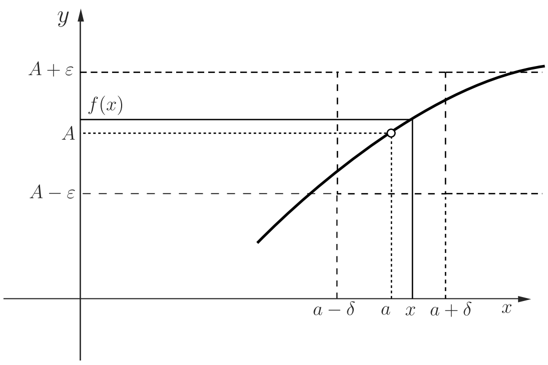
gde je $x_n \in X$, $x'_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$.

Kako je $f(x_n) = \sin \pi n = 0$, za $n = 1, 2, \dots$ i $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, za $n = 1, 2, \dots$, onda je

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = 1,$$

pa ne postoji granična vrednost funkcije u tački $a = 0$.

Košijeva definicija granične vrednosti. *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Broj A je granična vrednost funkcije $f(x)$ za $x \to a$, u oznaci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $\delta = \delta(\varepsilon)$ da za svako x koje zadovoljava nejednakost $0 < |x - a| < \delta$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.*



Slika 44 – Košijeva definicija granične vrednosti

Koristeći logičke simbole može se kraće napisati na sledeće načine:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)\big(0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall V(A)\big)\big(\exists \mathring{U}(a)\big)\big(f(X \cap \mathring{U}(a)\big) \subset V(A))$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall V(A)\big)\big(\exists \mathring{U}(a)\big)\big(\forall x \in X \cap \mathring{U}(a)\big) \Rightarrow f(x) \in V(A)).$$

NAPOMENA. *Hajneova i Košijeva definicija granične vrednosti su međusobno ekvivalentne.*

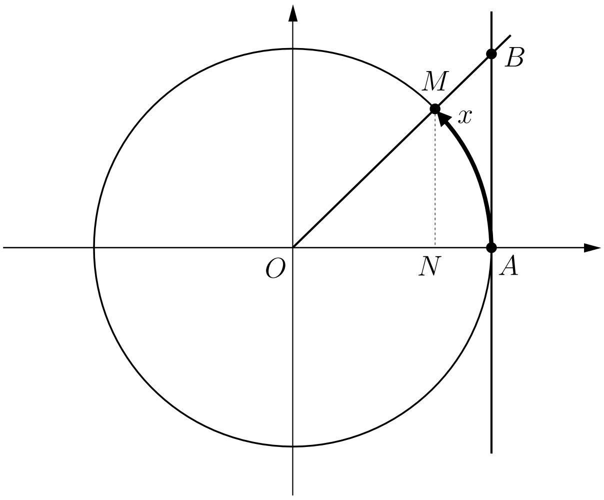
PRIMER 39. Zašto je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$?

Smatram da je ovo osnovni limes tipa „nula kroz nula". Izraz $\frac{x}{x}$ nas intuitivno navodi na to da je u pitanju neodređeni oblik „nula kroz nula". Međutim, pažljivom analizom konstatujemo da $x \neq 0$, ali da x teži nuli. Na primer, niz $0.1, 0.01, 0.001, \dots$ teži nuli kada napišemo, na primer, $\frac{0.001}{0.001} = 1$. Pošto je utvrđeno da $x \neq 0$ (iako teži nuli), može se *skratiti* navedeni izraz, pa se dobija

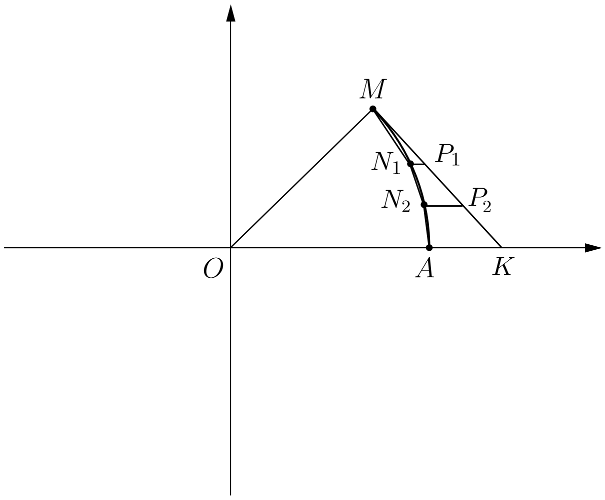
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

PRIMER 40. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Posmatra se jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku i neka je argument $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Argument x je dužina kružnog luka $\widehat{AM}$.



Slika 45 – Uz primer 6



Slika 46 – Aproksimacija luka

Dokažimo nejednakost

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Prvi deo $\sin x < x$ važi, jer je $\sin x = \overline{NN}$, a veličina duži $\overline{NM}$ je manja od dužine luka $\widehat{AM}$.

Potrebno je dokazati nejednakost

$$x \leqslant \operatorname{tg} x.$$

Dužina luka dela kružnice je supremum dužina upisanih poligonalnih linija.

Luk $\widehat{AM}$ može se aproksimirati upisanom poligonalnom linijom, pa na osnovu nagiba (ili stava: naspram većeg ugla je veća stranica trougla) važi

$$\overline{MN_1} < \overline{MP_1}$$

$$\overline{N_1N_2} < \overline{P_1P_2}$$

$$N_2A < \overline{P_2K}$$

Sabiranjem se dobija

$$\overline{MN_1} + \overline{N_1N_2} + \overline{N_2A} < \overline{MP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2K} = \operatorname{tg} x.$$

Luk možemo podeliti na n delova i potražiti graničnu vrednost kad $n \to \infty$.

Dobija se $x \leqslant \operatorname{tg} x$.

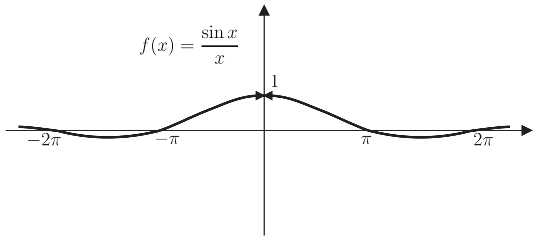
NAPOMENA. U udžbenicima je klasičan dokaz uz korišćenje površine kružnog isečka.[36]

Kako je

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x,\ \sin x > 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{onda je}$$

[36] Na osnovu definicije trigonometrijskih funkcija za $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i površina kružnog isečka $P_{i\widehat{OAM}}$ i $P_{\Delta OAB}$ važi

$$P_{i\widehat{OAM}} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2}, \quad P_{\Delta OAB} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$



Slika 47 – Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$$
\begin{aligned}
&1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}, \quad \text{odnosno}\\
&1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x \quad \big/ \cdot (-1)\\
&-1 \leqslant -\frac{\sin x}{x} \leqslant -\cos x\\
&0 \leqslant 1 - \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

Kako je $2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2 < 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}x^2$, dobija se $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{2}x^2$.

Odavde, na osnovu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}x^2 = 0$ sledi $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$, odnosno

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pošto je $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ parna funkcija jer je

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

granična vrednost važi i za $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

PRIMER 41. Dokazati

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

DOKAZ. Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, a prema Arhimedovoj aksiomi za svaki $x \in \mathbb{R}$, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $n \leqslant x < n+1$, odnosno

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}\\
&1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

---

pa je $\dfrac{x}{2} < \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{2}$, odnosno važe nejednakosti:

$$\sin x \leqslant x \leqslant \mathrm{tg}\, x,\ \sin x > 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Koristeći ponovo Arhimedovu nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Kada $n \to +\infty$ i $x \to +\infty$ krajnje granične vrednosti teže broju e (dalji dokaz se prepušta čitaocu!).

Za $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ uvodi se smena $\dfrac{1}{x} = t$.

Definicija beskonačno male. *Funkcija $\alpha(x), x \in X$ naziva se beskonačno mala kad $x \to a$ ako važi $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Simboli o i $\sim$. *Neka su date funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ i $\varphi : X \to \mathbb{R}$.*

[1] $\dfrac{f}{\varphi} \to 0$ *označava se simbolom $f = o(\varphi)$ (Peanova oznaka).*

[2] $\dfrac{f}{\varphi} \to \ell, \ell \neq 0$ *označava se simbolom $f \sim \ell\varphi$.*

Na primer, za $x^2 = o(x)$ je $x + x^2 \sim x$, kada $x \to 0$,

Često se za $x \to \infty$ uvodi smena $\dfrac{1}{x} = t$, pa $t \to 0$.

Za stepene $x, x^2, x^3, \ldots$ najčešće se upotrebljava $x^m = o(x^{m-1})$ ili $x^{m+1} = o(x^m)$, kada $x \to 0$. Takođe $\sin ax \sim ax$, $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ itd. Postavlja se pitanje zašto se uvode o i $\sim$? Zbog toga što će se, recimo Tejlorov polinom, mnogo komfornije koristiti pomoću Peanovog oblika ostatka.[37]

Definicija neprekidne funkcije. *Neka je data realna funkcija $f : X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, u oznaci $y = f(x)$. Funkcija f je neprekidna u tački $a \in X$ ako važi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

To znači sledeće: Ako za svaki niz $x_n \in X$, $x_n \to a$, sledi $f(x_n) \to f(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, odnosno da su *kod neprekidne funkcije f, limes i funkcija zamenili mesta* ili *je limes „prošao kroz“ funkciju, tj.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

Ta činjenica je još očiglednija u sledećem zapisu

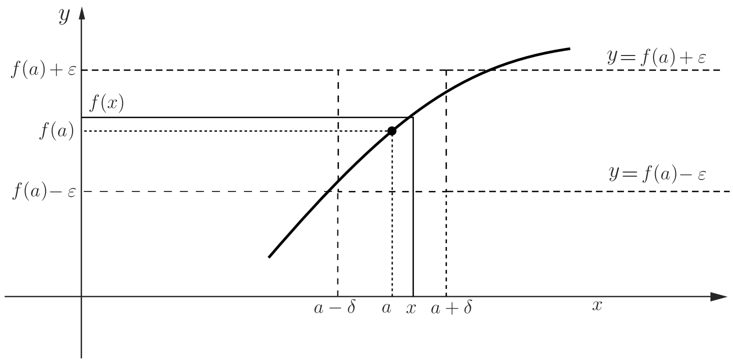
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(a).$$

(niz $x_n \to a$, niz vrednosti funkcije $f(x_n) \to f(a)$).

Koristeći se logičkim simbolima, može se zapisati

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X)\big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

[37] G. H. Hardy (M. A., F. R. S. Fellow of Trinity College Emeritus Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge Hon. Fellow of New College), 1945, *A Course of Pure Mathematics*, Oxford, Ninth edition (prevod na ruski jezik), str. 182.



Slika 48 – Ilustracija neprekidnosti funkcije $f(x)$ u tački a

Funkcija f je neprekidna u tački a ako i samo ako

$$\big(\forall V(f(a))\big)\big(\exists U(a)\big)\big(f(U(a))\subset V(f(a))\big)$$
$$\big(\forall \varepsilon>0\big)\big(\exists U(a)\big)\big(\forall x\in U(a)\big)\big(|f(x)-f(a)|<\varepsilon\big).$$

Iz jednakosti $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ sledi da je $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=0$.

Ako koristimo oznake $\Delta x=x-a$ i $\Delta y=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$, tada je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Ako je funkcija $f(x)$, $x\in X$ neprekidna sleva i neprekisna zdesna onda je za $a\in X$ i $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ funkcija $f(x)$ neprekidna u tački a.

PRIMER 42. Elementarne funkcije neprekidne su na svom domenu. Na primer:

a) $f(x)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

c) $f(x)=\sin x,\quad x\in\mathbb{R}$

d) $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

REŠENJE. a) Neka je

$$\begin{aligned}\triangle y &= f(x+\triangle x)-f(x)\\ &=(x+\triangle x)^2-x^2=x^2+2x(\triangle x)+(\triangle x)^2-x^2\\ &=\triangle x(2x+\triangle x).\end{aligned}$$

Ako $\triangle x\to 0$, onda i $\triangle y\to 0$.

b) $\triangle y=\dfrac{1}{x+\triangle x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\triangle x}{(x+\triangle x)\cdot x}$. Ako $\triangle x\to 0$ onda $\triangle y\to 0$.

c) U svakoj tački $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin x| &= \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Da bi važilo $\sin x - \sin a| < \varepsilon$ dovoljno je uzeti $|x-a| < \delta = \varepsilon$.

d) Neka je $f(x) = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Potrebno je dokazati da $f(x+h) - f(x) \to 0$, kada $h \to 0$, odnosno

$$f(x+h) \to f(x), \quad h \to 0$$

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| &= \left|a^{x+h} - a^x\right| \\ &= a^x|a^h - 1|\end{aligned}$$

Preostaje nam da pokažemo da $a^h \to 1$. Uvođenjem smene $h = \dfrac{1}{t}$, $t \to \infty$ (jer $h \to 0$) dobija se $a^{\frac{1}{h}} \to 1$, a za $n = [t]$ sledi da $a^{\frac{1}{n}} \to 1$, tj. $\sqrt[n]{a} \to 1$, $a > 1$.

Pošto važi sledeća procena

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1} \leqslant \frac{a+n-1}{n} < \frac{a+n}{n} \quad \text{(jedinice pod korenom } n-1 \text{ puta)}$$

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \frac{a}{n} + 1$$

Pošto je $\dfrac{a}{n} + 1 \to 1$, dobija se da $\sqrt[n]{a} \to 1$, $a > 1$.

Odavde sledi da $a^{x+h} - a^x \to 0$, $h \to 0$, pa je funkcija $f(x) = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, neprekidna.

Klasifikacija prekida. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$. Označimo levu i desnu graničnu vrednost sa*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) \quad i \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0).$$

Funkcija f je neprekidna u tački a ako i samo ako je definisana u tački a i važi

$$f(a-0) = f(a) = f(a+0).$$

Prekid ima različite slučajeve:

(i) *Otklonjiv prekid*. Leva i desna granična vrednost su konačne i jednake. U tački a funkcija nije definisana ili je $f(a)$ različito od $f(a-0)$ i $f(a+0)$.

PRIMER 43. Za funkciju $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ vrednost $f(0)$ ne postoji jer $f(x)$ nije definisana za $x = 0$

$$\lim_{x \to -0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

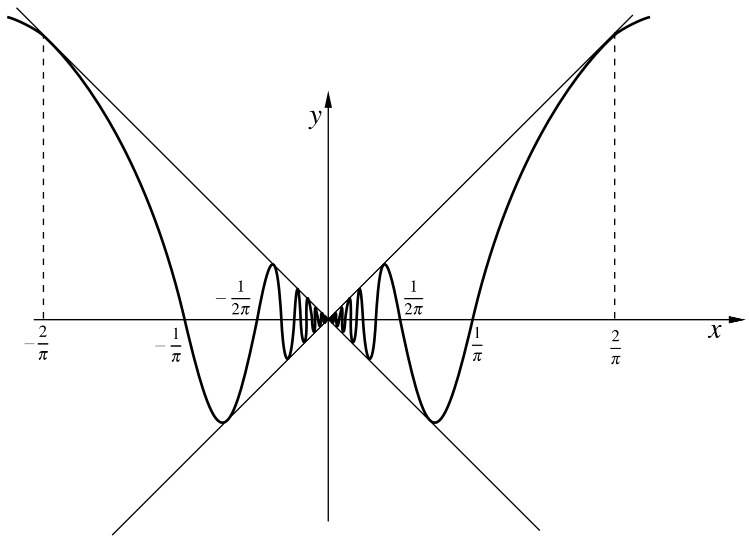
jer je

$$\left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \to 0, \quad x \to \pm 0.$$

(ii) *Prekid prve vrste*. Leva i desna granična vrednost su konačne i različite pa postoji *skok*

$$f(a+0) - f(a-0).$$

U tom slučaju $f(a)$ može biti jednako $f(a-0)$ ili $f(a+0)$, različito od njih ili funkcija u tački $x = a$ nije definisana.

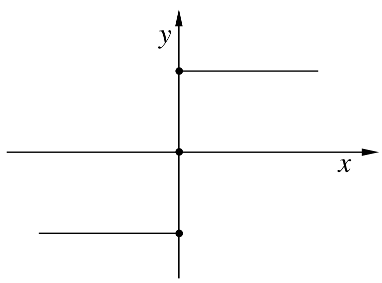


Slika 49 – Funkcija $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

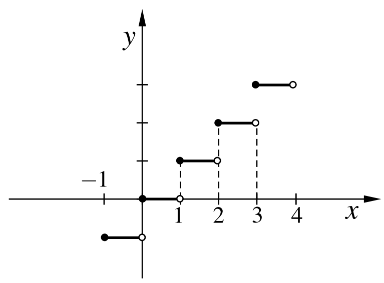
PRIMER 44. Data je funkcija

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija *signum* prekidna je u tački $x - 0$.



Slika 50 – Funkcija je signum



Slika 51 – Funkcija ceo deo

PRIMER 45. Funcija $f(x) = [x]$. Funkcija *ceo deo* prekidna je za svaki ceo broj x.

(iii) *Prekid druge vrste*. Ako za funkciju f u tački prekida a ne postoji leva\ili desna granična vrednost, odnosno

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{i/ili} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty,$$

tada funkcija f u tački a ima prekid druge vrste.

PRIMER 46. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$.

Lokalne osobine neprekidnih funkcija.

(i) Ako su funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ neprekidne u nekoj tački $a \in X$, onda su neprekidne i funkcije λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ u toj tački.

(ii) Ako je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $a \in X$, onda je f ograničena u nekoj okolini $U(a)$ tačke a.

(iii) Ako je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $a \in X$ i $f(a) \neq 0$, onda su u nekoj okolini tačke a vrednosti funkcije ili samo pozitivne ili samo negativne.

(iv) Ako je $f : X \to Y$ neprekidna u tački a i $g : Y \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $b = f(a) \in Y$, onda je kompozicija $g \circ f$ definsana i neprekidna u tački a.

Neprekidnost na intervalu. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna je na intervalu I ako je neprekidna u svakoj tači $x \in I$.*

Globalna svojstva neprekidne funkcije čine osobine, opisano govoreći, vezane za čitav domen.

Teorema o međuvrednosti (Bolcano-Koši). *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i ima na krajevima odsečka vrednosti različitog znaka odnosno ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c) = 0$.*

Koristeći logičku simboliku formulacija teoreme je

$$\big(f \in C[a,b] \ \wedge \ f(a)f(b) < 0\big) \Rightarrow \big(\exists c \in [a,b]\big)\big(f(c) = 0\big).$$

DOKAZ. Pretpostavimo da neprekidna funkcija f na krajevima odsečka $[a,b]$ uzima vrednosti raznih znakova, recimo $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Odsečak delimo na pola tačkom $\dfrac{a+b}{2}$.

Ako je u toj tački vrednost funkcije f nula, onda je to nađena tačka c. Ako nije, onda jedan od odsečaka

$$\left[a, \ \frac{a+b}{a}\right] \quad \text{ili} \quad \left[\frac{a+b}{a}, \ b\right]$$

ima svojstvo da na njegovim krajevima funkcija f ima vrednosti različitog znaka. Taj odsečak označavamo sa $[a_1, b_1]$.

Nastavljamo opisani postupak tako što ga podelimo na pola itd. Kao rezultat u nekom koraku dobićemo tačku c, takvu da je $f(c) = 0$, ili se dobija niz umetnutih odsečaka $[a_n, b_n]$ koji prema Kantorovoj teoremi ima neprazan presek. Tu tačku označavamo sa c. Pri tome važi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

i prema konstrukciji nizova $f(a_n) < 0$ i $f(b_n) > 0$. Odavde je

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geqslant 0$$

pa zbog neprekidnosti funkcije f važi

$$f\Big(\lim_{n\to+\infty} a_n\Big) \leqslant 0 \quad \text{i} \quad f\Big(\lim_{n\to+\infty} b_n\Big) \geqslant 0,$$

tj. $f(c) \leqslant 0$ i $f(c) \geqslant 0$. Sledi da mora biti $f(c) = 0$.

NAPOMENA. Opisani postupak u dokazu teoreme je jedan jednostavan algoritam za nalaženje korena $f(x) = 0$ na odsečku, u čijim krajevima neprekidna funkcija ima vrednosti različitog znaka.

Važi i uopštenje ove teoreme.

Opšta teorema o međuvrednosti (Bolcano-Koši). *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i na krajevima odsečka $f(a) = A$ i $f(b) = B$. Tada, za svaki broj C između A i B, postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c) = C$.*

Dokaz ove teoreme svodi se na dokaz prethodne primenjen na neprekidnu funkciju

$$F(x) = f(x) - C, \quad \text{na} \quad [a,b]$$

za koju je ispunjeno $F(a) \cdot F(b) = (A - C)(B - C) < 0$. Prema tome postoji tačka c, takva da je $F(c) = 0$, odnosno $f(x) - C = 0$, tj. $f(c) = C$.

Vajerštrasova teorema. *Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ tada je f ograničena na $[a,b]$.*

DOKAZ. Može se naći interval $[a, \delta_1]$ na kome je f ograničena, jer iz neprekidnosti funkcije f u tački $x = a$ sledi da za dato $\varepsilon_1 > 0$ možemo naći $\delta_1 > 0$ tako da je f ograničena, tj. vrednosti funkcije f su između $f(a) - \varepsilon_1$ i $f(a) + \varepsilon_1$.

Pretpostavimo da funkcija f nije ograničena na $[a,b]$. Tačke intervala $[a,b]$ delimo na dve klase L i D. Tačka $x \in L$, ako je na $[a,x]$ funkcija f ograničena, a pripada D ako f nije ograničena. Svako $x \in L$ je manje od svakog $y \in D$.

Neka tačka $\beta \in [a,b]$, $(\beta < b)$ deli ove dve klase tako da su sve tačke levo u klasi L i sve tačke desno u klasi D. L i D dele $[a,b]$ na dve disjunktna podintervala $[a,\beta]$ i $(\beta,b]$ ili $[a,\beta)$ i $[\beta,b]$.

Skup L postoji jer je f neprekidna u tački a i zato ograničena na $[a,\delta_1]$. U tački β funkcija f je neprekidna, pa je ograničena na intervalu $[\beta - \delta, \beta + \delta]$ za neko $\delta > 0$. Birali smo δ tako da je $a < \beta - \delta < \beta + \delta < b$.

To znači da je na intervalu $[a, \beta + \delta]$ funkcija f ograničena pa $\beta + \delta \in L$. Time smo pokazali da ne postoje tačke skupa D, tj. skup D je prazan. Kontradikcija! Pošto je D prazan i tačka $b \in L$.

Funkcija f je ograničena na $[a,b]$.

NAPOMENA. Slučaj $\beta = b$ je trivijalan.

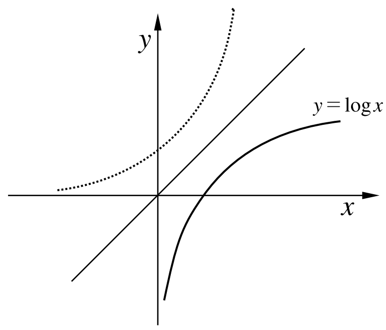
Posledica. *Neprekidna funkcija f na intervalu $[a,b]$ dostiže maksimum i minimum.*

DOKAZ. Neka je M najmanji broj za koji važi $f(x) \leqslant M$, $x \in [a,b]$.

Pretpostavimo da je $f(x) < M$ za svaki $x \in [a,b]$. Funkcija $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ nije ograničena jer imenilac može uzeti proizvoljno male vrednosti. Funkcija g je neprekidna u svakoj tački $x \in [a,b]$. Na osnovu prethodne teoreme sledi da je g ograničena. Kontradikcija!

Teorema o inverznoj neprekidnoj funkciji. *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, neprekidna i strogo monotona na $[a,b]$, tada je inverzna funkcija f^{-1} strogo monotona i neprekidna na intervalu sa krajevima $f(a)$ i $f(b)$.*

PRIMER 47. Funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, $x > 0$ je neprekidna kao inverzna funkcija funkcije $f(x) = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$.



Slika 52

NAPOMENA. Kada shvatimo suštinu pojma neprekidnosti i neprekidnost elementarnih funkcija onda se mogu izračunati i složenije granične vrednosti.

PRIMER 48. Dokazati

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

DOKAZ. Na osnovu neprekidnosti funkcije ln važi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\text{(nep ln)}}{=} \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Na osnovu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, smenom $e^x-1=t$ dobija se $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Za ovu priliku dajemo i jedan drugi dokaz za

$$\frac{e^x-1}{x}\to 1,\quad x\to 0$$

Uvodimo smenu $x=\dfrac{1}{t}$, $t\to+\infty$, $x\to+0$. Potrebno je dokazati

$$\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}\to 1.$$

Kad $t\to+\infty$, prema Arhimedovoj aksiomi postoji $n\in\mathbb{N}$, $n>t$ pa dokazujemo

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to 1,\quad n\to+\infty$$

Kako niz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\to e$ i rastući je, a niz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\to e$ i opadajući je, tj. niz $\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n}\to e$ i opadajući je, onda važi nejednakost

$$n\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<n\left(\left(\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right),\quad n\in\mathbb{N}$$

$$n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2-1\right)$$

$$1<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<n\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

Pošto i desna strana teži broju 1, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1,\quad \text{tj.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Ravnomerna neprekidnost

Neprekidnost funkcije se definiše u tački, a ravnomerna neprekidnost funkcije se definiše na intervalu.

Funkcija $f:I\to\mathbb{R}$ je ravnomerno neprekidna na intervalu I, ako za

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\Big(|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in I\Rightarrow\big|f(x')-f(x'')\big|<\varepsilon\Big).$$

PRIMER 49. $f(x)=x^2$ nije ravnomerno neprekidna na R, jer je

$$\left|f\left(n+\frac{1}{n}\right)-f(n)\right|>2,\quad \forall n\in N,$$

a za dovoljno veliko n je

$$d\left(n+\frac{1}{n},n\right)=\left|n+\frac{1}{n}-n\right|=\frac{1}{n}<\delta.$$

Znači, za $\varepsilon=2$ ne postoji δ.

PRIMER 50. $f(x)=\log x$ nije ravnomerno neprekidna na $(0,1)$ jer za $\varepsilon\in(0,1)$ ne postoji odgovarajuće $\delta>0$. Dovoljno je primetiti da

$$d(e^{-n},e^{-n-1})=e^{-n}-e^{-n-1}=\frac{e-1}{e^{n+1}}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

dok je

$$\left|f(e^{-n}-f(e^{-n-1})\right|=1.$$

PRIMER 51. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ jeste ravnomerno neprekidna na R, jer je

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|y^2-x^2|}{(x^2+1)(y^2+1)}=|y-x|\frac{|x+y|}{(x^2+1)(y^2+1)}\leqslant$$
$$\leqslant|y-x|\left(\frac{|x|}{x^2+1}+\frac{|y|}{y^2+1}\right)\leqslant|y-x|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=|y-x|.$$

Za dato $\varepsilon>0$ treba uzeti da je $\delta=\varepsilon$.

Kantorova teorema o ravnomernoj neprekidnosti. *Svaka funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ koja je neprekidna na odsečku $[a,b]$ ravnomerno je neprekidna na njemu.*

Definicija Lipšicovog uslova.[38] *Za funkciju $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$, kaže se da zadovoljava Lipšicov uslov na X ako postoji konstanta $L>0$, takva da važi*

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leqslant L|x_1-x_2| \quad (\forall x_1,x\in X).$$

Teorema. *Ako funkcija $f:X\to\mathbb{R}$ zadovoljava Lipšicov uslov, tada je ona ravnomerno neprekidna na skupu X.*

Fermaov metod

Pjer de Ferma je razvio metod pronalaženja maksimuma i minimuma funkcije.[39] Ističemo deo koji je značajan za dalji razvoj diferencijalnog računa.

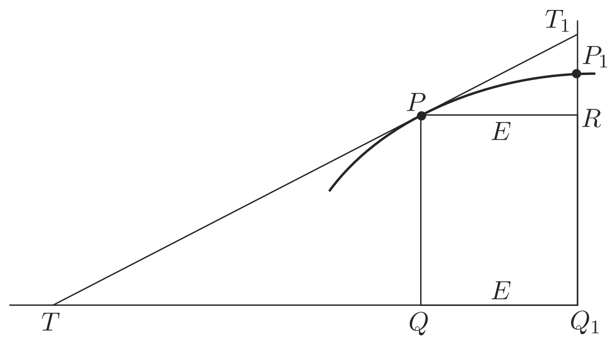
---

[38] R. D. S. Lipschitz (1832–1903), nemački matematičar.

[39] Pjer de Ferma (Pierre de Fermat), rođen je 1601. u Bomon de Lomanj u Francuskoj i živeo je do 1655, matematičar i pravnik u parlamentu u Tuluzu. On je pored Dekarta veliki matematičar XVII veka. Delo *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (Method of Finding Maxima and Minima), koji je razvio 1629, pronađeno je u njegovom rukopisu iz 1637.

Mooris Kline, 1972, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, str. 345.

Neka je PT odgovarajuća tangenta grafika funkcije $f(x)$, gde je tačka T na x-osi, a P dodirna tačka tangente i Γ_f. Projekcija tačke P na x-osu je tačka Q i TQ je projekcija duži TP na x-osu.



Fermaov plan bio je da se pronađe dužina TQ, pri čemu se zna pozicija tačke T i iz toga može da se konstruiše TP.

Neka je QQ_1 uvećanje TQ za veličinu E. S obzirom na to da je trougao TQP sličan trouglu PRT_1, sledi da je

$$TQ : PQ = E : T_1R.$$

Međutim, Ferma je primetio da su veličine T_1R i P_1R približne ili „skoro iste“, za malo E, i da zbog toga može da se piše odnos

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP).$$

Na osnovu modernog zapisa funkcije (Ojlerova oznaka) $f(x)$ važi sledeće:

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)].$$

Iz ove jednakosti dobije se

$$TQ = \frac{Ef(x)}{f(x+E) - f(x)}.$$

Ako se brojilac i imenilac podele sa E, a E teži nuli, dobija se TQ.[40]

Ferma je primenio ovaj metod na mnoge komplikovane probleme. Metod ima forme diferencijalnog računa koji se bavi komplikovanom teorijom graničnih procesa. Dekart je predstavio sličan metod u knjizi *La Géométrie*. To je bio algebarski metod i nije uključivao koncept granične vrednosti, dok Fermaov metod to sadrži. Dekartov metod odnosi se na krive oblika $y = f(x)$, gde je $f(x)$ jednostavniji polinom. Ferma je imao uopšteniji metod, ali ga je Dekart kritikovao i pokušao da ga predstavi preko svojih ideja. Ferma je tvrdio da je njegov metod superiorniji i video je prednost u malom E.

[40] Morris Kline, 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, p. 345.

Valja napomenuti da je Isak Barou takođe dao metod za pronalaženje tangente na krivu.[41] Svojim geometrijskim metodom oslobodio se velikog tereta računanja. On se 1669. povukao sa pozicije profesora, u korist mladog kolege Isaka Njutna, i okrenuo se teološkim istraživanjima.

2.2.9. Velikani teorije i primene – Njutn i Lajbnic

Isak Njutn je završio čuveni koledž Svetog Trojstva (*Trinity College*) Univerziteta u Kembridžu.[42] Danas na njegovom ulazu stoji natpis: *Tišina, ovde spava veliki ser Isak Njutn*. U naučna istraživanja odvela ga je knjiga *Tajne prirode i umetnosti*, autora Džona Bejta. Izabran je za profesora na Triniti koledžu sa 26 godina, a član Kraljevskog društva postao je tri godine kasnije. Titulu *ser* je dobio kao upravnik kovnice novca zbog zasluga u očuvanju funte. Od 1703. do 1727. godine bio je predsednik Kraljevskog društva. *Njutn je uzdizao principe vrednog rada i posvećenosti učenju kao najviše nade čovečanstva.*[43] Oni koji žele da razumeju građu sveta moraju da se potrude da svedu svoje znanje na najveću moguću jednostavnost. Na osnovu Njutnovog rada uspostavljen je naučni metod.[44]

Pretpostavlja se da je na Njutna ogroman uticaj imalo čitanje Dekartove *Geometrije*. „Njutnov najveći matematički proboj bilo je shvatanje da naročito manipulisanje pogodnom jednačinom može da dovede do tačne vrednosti nagiba krive linije koja je predstavljena tom jednačinom. Ovaj metod manipulacije je suština diferenciranja. Drugi postupak koji se izvodi sa jednačinom (postupak od tada nazvan integracija) vodi matematičara do površine ispod krive koja je predstavljena tom jednačinom. Za ova dva po-

[41] Isak Barou (Isaac Barrow), 1630–1677, profesor na Univerzitetu Kembridž, bio je dobar poznavalac grčkog i arapskog jezika; imao je priliku da prevede Euklida i Arhimeda ili da poboljša neke prevode. Njegovo najznačajnije delo je *Lectiones Geometricae*.

[42] Isak Njutn je rođen u trećem satu posle ponoći, na Božić 1642. godine. Sam Njutn je podržavao ideju da je nešto u vezi sa njegovim rođenjem bilo čudesno. Pojedini autori kao zvaničan datum njegovog rođenja u savremenoj epohi upisuju 4. januar 1643, po savremenom gregorijanskom kalendaru, pošto Britanija nije kalendarsku reformu prihvatila sve do 1752. godine. Njutn je živeo do 1727.

[43] Njutn je pokušavao da pronađe kamen mudrosti, a najvažnije mu je bilo otkrivanje univerzalne istine. Na proslavi tri stotine godina od Njutnovog rođenja Majnard Kejnz je istakao u svom čuvenom govoru da je on univerzum shvatao kao kriptogram koga je napravio Svemogući Bog. Solomonov hram, najslavljeniji simbol mudrosti i vere, izgrađen oko 1000. godine pre nove ere u Jerusalimu za Njutna je paradigma čitave budućnosti sveta. Verovao je da osnovni postulat intelektualnog života predstavlja činjenica da neke stvari nikada neće biti saznatljive.

[44] Na samom početku naučnog istraživanja postulira se ideja – često zasnovana na nadahnutom uvidu. Zatim se ona razvija u radnu pretpostavku, putem zaključivanja – ovaj postupak zove se induktivni metod. Praktične posledice ove pretpostavke moraju se matematički dedukovati i ideja eksperimentalno proveriti. Ukoliko postoje nesaglasnosti između pretpostavke i rezultata eksperimenta, ili posmatranja, pretpostavka se mora izmeniti a eksperimenti ponoviti, sve dok se ne postigne sklad između zaključivanja i posmatranja, ili dok se početna ideja ne odbaci. Ukoliko su zaključivanje i praktična verifikacija konačno u skladu, pretpostavka dobija unapređenje i postaje teorija. Dobra nauka omogućava uvođenje novih ideja koje mogu da unište staru teoriju ili da zahtevaju korenite promene. (Vajt, Majkl, 2010, *Isak Njutn. Poslednji čarobnjak*, Zavod za udžbenike, Dosije studio, Beograd, str. 35).

stupka, diferenciranje i integraciju, zajednički termin je kalkulus, ili infinitezimalni račun, a oni predstavljaju moćno oružje u rukama matematičara i naučnika.“[45] Svoje rezultate Njutn sumira u knjizi pod naslovom *De Methodis Serierum Fluksionum* (*O metodi nizova i fluksija*). Za osnovnu operaciju uzima diferenciranje i pravi niz matematičkih postupaka za izračunavanje površina, izračunavanje dužina krivih i određivanje maksimuma i minimuma funkcije. Njutn je do 1687. otkrio tri čuvena zakona i formulisao Zakon gravitacije, i svoje pronalaske sumirao u delu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematički principi prirodne filozofije*, tj. fizike).

Slika 53 – Isak Njutn i Gotfrid Lajbnic

Potpuni proboj do neograničene *mathesis universalis* usledio je sa Lajbnicom, nemačkim filozofom, matematičarem i pronalazačem.[46] On je u četrnaestoj godini upisao Univerzitet u Lajpcigu. Njegov prvi doprinos matematici razvio se iz dela *Habilitationsschrift* (druga doktorska disertacija u Nemačkoj iz filozofije). „Sanjao je o enciklopedijskom, univerzalnom umetničkom matematičkom jeziku kojim bi se moglo izraziti svako područje znanja, o pravilima izračunavanja koja bi otkrila sve logičke veze između izraženih iskaza. Konačno, sanjao je o mašinama koje mogu obavljati izračunavanja i osloboditi um za kreativno mišljenje.“[47]

Izabran je 1673. godine u Londonsko kraljevsko društvo, na osnovu toga što je uspeo da predstavi računarsku mašinu koja može da izvede četiri osnovne aritmetičke operacije. Iako je Paskal konstruisao mašinu koja može da sabira i oduzima, Lajbnicova je bila prva

[45] Vajt, Majkl, 2010, *Isak Njutn. Poslednji čarobnjak*, Zavod za udžbenike, Dosije studio, Beograd, str. 87. Njutn je pronašao revolucionarno otkriće diferencijalnog i integralnog računa skoro istovremeno sa Lajbnicem, mada nezavisno od njega. U to vreme Njutn je imao loš običaj da ne publikuje svoje radove već da pusti da rukopis kruži među prijateljima. Ovo je kasnije otvorilo nerešen spor između njega i Lajbnica o tome ko je zapravo pronašao kalkulus. Diferenciranje i integracija su uzajamno inverzne matematičke operacije i ne moraju da budu u korelaciji sa geometrijom, odnosno sa izračunavanjem bilo kakvih geometrijskih veličina.

[46] Gotfrid Lajbnic (Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz), 1646–1716.

[47] Davis, Martin, 2003, *Na logički pogon: poreklo ideje računara*, Jasenski i Turk, Zagreb, str. 16.

koja može da množi i deli. „I sada, kada konačno smemo da pohvalimo mašinu, da će ona biti korisna svima koji se bave računanjem, a to su, kao što znamo, knjigovođe, upravnici poseda, trgovci, nadzornici, geografi, pomorci, astronomi... Jer nije dostojno čoveka da kao rob gubi vreme u računanju koje se pouzdano može prepustiti bilo kome ko se služi mašinom.“[48]

Lajbnic označava intelekt kao osnovu nužnih i opštih istina, a prepoznavanje posebnog se prepušta čulima i spoljnom opažanju. U sadržaj iskustva ne može se uneti opšti ili posebni sadržaj koji nije sasvim razjašnjen u samom duhu. Sama priroda stvari je priroda duha i njegovih urođenih ideja. „Svaki stav iskustva pruža nam samo primer i ovaploćenje nekog nužnog aksioma. Tako se može reći da su sve, kako izvorne, tako i izvedene istine, u nama, zato što sve izvedene ideje i sve istine, koje iz njih slede, rezultiraju iz odnosa između izvornih ideja, koje su u nama. Iz prožimanja i sinteze opštih principa proizlazi istina posebnoga i činjeničkoga.“[49] Iz osnovnih racionalnih pojmova i načela proizlazi predmetno saznanje pojedinačnoga. Prema Lajbnicu, kod razgovetnih primitivnih predstava može da postoji samo intuitivno saznanje, dok je mišljenje kod onih složenih simboličko, koje sadržaj prikazuje znacima i njihovim povezivanjem. Složeni sadržaj raščlanjuje se do izvornih intuitivnih istina. Kad govori o definiciji, Lajbnic ističe da krajnji kriterijum za istinu jedne ideje ne treba tražiti u njenom podudaranju sa spoljnom stvari već samo u snazi i moći samog razuma. Kod razgovetnih primitivnih predstava može postojati samo intuitivno saznanje, dok se kod onih složenih mišljenje odvija putem znakova (*simbola*).[50] Lajbnic odbacuje mišljenje da je svekoliko saznanje verna kopija neke postojeće stvarnosti. On kaže da „ideje nisu *slike* nego *simboli* realnosti“. Određeni izrazi imaju stvarstveni temelj (fundamentum in natura), dok na primer reči jezika ili određeni znaci počivaju na konvenciji. Onaj ko pronikne u odnos između pojma i reči stekao je uvid u temelj saznanja. A duh ima takvu snagu mišljenja da iz svojih vlastitih delatnosti može da izvodi rezultate koji sasvim odgovaraju stvarnim posledicama u stvarima. „Večne istine važe po sebi i za sebe i sasvim nezavisno od toga da li se za njih, u svetu činjenica, može naći nekakva direktna adekvatnost.“[51] Svet pojava realan je u onoj meri u kojoj on predstavlja harmonično slaganje sa čistim pravilima uma, i istina čulnih stvari dokazuje se intelektualnim principima povezivanja i ukupnošću svih ostalih zapažanja.

Ogroman uticaj na revolucionarno otkriće diferencijalnog i integralnog računa, skoro istovremeno sa Njutnom – mada nezavisno od njega, ima Lajbnic. „Izgleda da je dovršenje

[48] Davis, Martin, 2003, *Na logički pogon: poreklo ideje računara*, Jasenski i Turk, Zagreb, str. 20.

[49] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 101.

[50] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 103.

[51] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 122.

i uzor takvog jasnog saznanja dat u analitičkoj geometriji; jer tu jednačina funkcije, koja čini definiciju jedne određene tvorevine, u jednoj jedinstvenoj računskoj formuli krije celokupno obilje svojih obeležja, koje nadmašuje svaku čulnu sposobnost razlikovanja".[52] *Lajbnicova notacija*[53] koju je razvio, koristi se i danas za integrale $\int$ i diferencijale d. Pokazuje jednu vrstu problema koji se mogu rešiti korišćenjem *limesa* – to su problemi određivanja površine ispod krivih. Druga vrsta problema koji se rešava korišćenjem limesa jeste promena brzine tela koje se kreće. Davis nam prenosi sledeće Lajbnicove reči: „Sve više sam uveren u korisnost i ozbiljnost ove opšte nauke i vidim da je vrlo malo ljudi shvatilo njene razmere. Ta se karakteristika sastoji od određenog pisma ili jezika... Neznalica neće moći da upotrebljava to pismo ili će u pokušaju da se njime služi i sam postati učen."[54]

Pojam izvoda. Neka je f data funkcija u okolini $U(x_0)$ tačke $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in U(x_0)$. Funkcija $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je definisana u okolini $\mathring{U}(x_0)$, gde je $\mathring{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Definicija izvoda. *Ako postoji granična vrednost*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ona se zove izvod funkcije u tački x_0 *i označava sa* $f'(x_0)$.

NAPOMENA. Uobičajen zapis prvog izvoda u tački x po definiciji je

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{ili} \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

PRIMER 52. Naći izvod funkcije

a) $f(x) = \sin x$
b) $f(x) = e^x$.

REŠENJE. a) Prema definiciji izvoda funkcije važi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

---

[52] Ernst Kasirer, 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba* II, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad, str. 109.

[53] Simbol za integrale $\int$ zapravo je modifikovano S od suma, a simbol d podseća na reč diferencija. Kao da notacija sve napravi sama. Lajbnicova notacija je bolja od Njutnove i brzo je prihvaćena širom Evrope. Kada se govori o Lajbnicu, vredi pomenuti da se on interesovao i za uopštenja pojma izvoda. U pismima Lopitalu (1695) i Volisu (1697) Lajbnic je učinio nekoliko napomena o mogućnosti razmatranja diferencijala i izvoda reda $\frac{1}{2}$.

[54] Davis, Martin, 2003, *Na logički pogon: poreklo ideje računara*, Jasenski i Turk, Zagreb, str. 29.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

b) Koristeći definiciju izvoda dobija se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = \\ &= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x. \end{aligned}$$

Definicija diferencijabilnosti. *Funkcija f, definisana u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke $x_0 \in \mathbb{R}$, diferencijabilna je u toj tački ako se njen priraštaj*

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),\ \Delta x = x - x_0$$

u okolini te tačke može predstaviti u obliku

$$\Delta y = A\cdot \Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0,$$

A je konstanta.

Teorema o neprekidnosti. *Ako funkcija f ima izvod u nekoj tački, onda je ona i neprekidna u toj tački.*

Ova teorema tvrdi da iz postojanja prvog izvoda funkcije f u tački x sledi neprekidnost funkcije f u tački x zbog toga što iz $\Delta x \to 0$ sledi da $\Delta y \to 0$.

DOKAZ. Ako je funkcija $y = f(x)$, $x \in X$, diferencijabilna u tački x_0, tada važi

$$\Delta y = A\cdot \Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0.$$

Odavde sledi $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, što znači da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački x_0.

NAPOMENA. *Obratno, ako je funkcija neprekidna u nekoj tački, ne znači da u toj tački ima izvod.*

Za izvod funkcije $y = f(x)$, $x \in X$, upotrebljavaju se sledeće oznake[55]

$y' = f'(x)$ (Lagranžova oznaka),

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ (Lajbnicova oznaka),

$\dot{y} = \dot{f}(x)$ (Njutnova oznaka).

Koriste se i oznake y'_x ili y'_t kada se naglašava po kojoj promenljivoj je izvod.

[55] Žozef Lagranž (Joseph–Louis Lagrange), francuski matematičar (1736–1813).

Teorema o diferencijabilnosti. *Funkcija f je diferencijabilna u nekoj tački ako i samo ako u toj tački ima konačan izvod.*

DOKAZ. Pretpostavimo da funkcija f ima konačan izvod $f'(x_0)$ u tački x_0, odnosno postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. To znači da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),\quad \alpha(\Delta x)\to 0,\ \ \Delta x\to 0.$$

(Leva strana jednakosti nije definisana za $\Delta x=0$, tako da funkcija $\alpha(\Delta x)$ nije definisana za $\Delta x=0$. Zato je potrebno da se dodefiniše $\alpha(\Delta x)$ u tački 0, i neka je $\alpha(0)=0$).

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,\quad \alpha(\Delta x)\Delta x=o(\Delta x)\ \text{kad}\ \Delta x\to 0,$$
$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\ \ \Delta x\to 0.$$

Ova formula znači da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna.

S druge strane, pretpostavimo suprotno, da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, odnosno da je ispunjeno

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x),\ \alpha(\Delta x)\to 0,\quad \alpha(\Delta x)=\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Odavde sledi da je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$.

PRIMER 53. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $y=|x|,\ x\in\mathbb{R}$.

REŠENJE. Funkcija $y=|x|$ je neprekidna u tački 0, jer je $\Delta y=|\Delta x|$ i zbog toga je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. S druge strane, $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$, pa granična vrednost količnika $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kad $\Delta x\to 0$ ne postoji.

Geometrijski smisao izvoda. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke x_0, neprekidna u toj tački i $y_0=f(x_0)$ i tačka A ima koordinate $A(x_0,y_0)$.

Neka je Δx takav priraštaj za koji $x_0+\Delta x\in U(x_0)$. Priraštaj funkcije f određen je sa $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, a tačka B ima koordinate $B\big(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)\big)$.

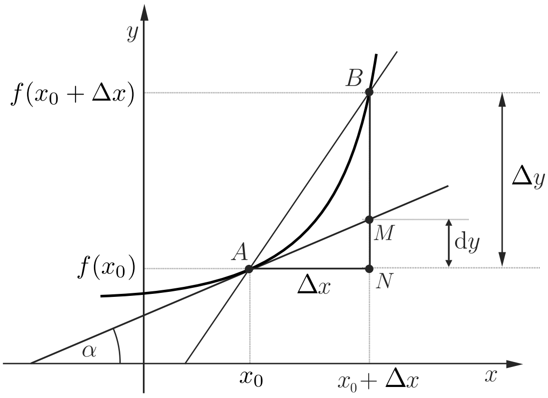
Prava koja prolazi kroz tačke A i B je sečica (prava tetive AB) i njena jednačina je

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)+y_0.$$

Da bi sečica kad $\Delta x\to 0$ težila tangentnom položaju (različitom od vertikalne prave), neophodno je i dovoljno da postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, odnosno da postoji konačan izvod.

Granični položaj sečice jeste tangenta grafika funkcije u tački A i ima jednačinu

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Slika 54 – Geometrijski smisao izvoda

Iz neprekidnosti funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 sledi da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ i na osnovu $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ sledi da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |AB| = 0$, odnosno tačka B teži tački A po grafiku Γ_f funkcije f. Pri tome je $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, gde je α ugao koji obrazuju x-osa i tangenta funkcije u tački A.

Prvi izvod se često naziva *brzina promene funkcije*. Po analogiji sa mehaničkim tumačenjem izvoda, prvi izvod je trenutna brzina promene funkcije. Naime, srednja brzina promene je $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, a trenutna se dobija kada $\Delta x \to 0$. U mehanici (kinematici) je funkcijom $s = f(t)$ opisano pravolinijsko kretanje materijalne tačke, gde je s rastojanje tačke od početka O. Izvod $s' = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ je trenutna brzina te materijalne tačke. Ove činjenice znače: izvod funkcije koristi se svuda.[56]

Važe sledeće formule:[57]

[1] $(u + v - w)' = u' + v' - w'$,

[2] $(uv)' = u'v + uv'$,

[3] $(cu)' = c \cdot u'$,

[4] $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

[56] Фихтенгольц Г.М. 2001, Курс дифференциального и интегрального исчисления I, (в 3 томах), Физматлит, str. 220.

[57] Detalji dokaza ovih formula, kao i druge teoreme diferencijalnog računa, mogu se naći u: Dobrilo Tošić, Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog ra čuna*, Službeni glasnik, Beograd, str. 195–241.

[5] *ako je funkcija f neprekidna i strogo monotona u okolini tačke x_0 i ima u tački x_0 izvod $f'(x_0) \neq 0$, tada inverzna funkcija $f^{-1}(x)$ ima izvod u tački $y_0 = f(x_0)$ i važi*

$$\frac{\mathrm{d}\, f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}}.$$

PRIMER 54. Dokazati da je

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y > 0 \quad \text{i} \quad (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1.$$

REŠENJE. Pošto je za

$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$ inverzna funkcija

$x = \ln y, \quad y > 0$ onda je

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{(f(x))'}, \quad \text{odnosno}$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Slično, kako je za $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, njene inverzane funkcije $\arcsin y = x$, $y \in [-1,1]$, onda je

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \ |y| < 1.$$

[6] *Neka je funkcija $y = g(x)$ definisana u nekoj okolini $U = U(x_0)$ tačke x_0, a funkcija $z = f(y)$ definisana u nekoj okolini $V = V(y_0)$ tačke $y_0 = g(x_0)$ i pri tome je $f(U) \subset V$.*

Ako funkcija $y = g(x)$ ima izvod u tački x_0 i funkcija $z = f(y)$ ima izvod u tački $y_0 = g(x_0)$, tada složena funkcija $z = f\big(g(x)\big)$ ima izvod u tački x_0 i važi $z'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$, odnosno $z'_x = z'_y \cdot y'_x$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

PRIMER 55. Naći izvod funkcije $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

REŠENJE. Kako je $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, onda je

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' \\ &= e^{\ln x^\alpha} \cdot \left(\alpha \frac{1}{x}\right) \\ &= \alpha \cdot x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Na osnovu definicije diferencijabilnosti, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ kad $\Delta x \to 0$.

Definicija diferencijala. *Sabirak $f'(x)\Delta x$ naziva se diferencijal funkcije f u tački x i označava se sa* $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

Dodatno, za $y = x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, tako da koristimo formulu $\mathrm{d}x = \Delta x$. Formula za diferencijal funkcije ima oblik $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$.

Geometrijski $\mathrm{d}y$ se može shvatiti kao *priraštaj po tangenti*; dve veličine Δy i dy razlikuju se onoliko koliko se razlikuju ordinata funkcije i njene tangente. Iz formule diferencijala $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ sledi da je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, pa se tako izvod funkcije može pisati i u sledećem obliku:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

PRIMER 56. Neka je funkcija f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

Da li je ovako definisana neprekidna funkcija f i diferencijabilna?

REŠENJE. Nalazimo izvod funkcije

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, \quad (x \neq 0).$$

U tački $x = 0$ mora se primeniti neposredno definicija izvoda pa je količnik

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sin\frac{1}{t} \quad (t \neq 0).$$

Za $t \to 0$, ne postoji granična vrednost od $\sin\dfrac{1}{t}$ pa $f'(0)$ ne postoji.

PRIMER 57. Neka je funkcija f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

Da li je funkcija f diferencijabilna?

REŠENJE. Izvod funkcije je

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

U tački $x = 0$, tražimo izvod po definiciji pa je

$$\left|\frac{f(t) - f(0)}{t - 0}\right| = \left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t|.$$

Za $t \to 0$ dobija se $f'(0) = 0$.

Funkcija f je diferencijabilna u svim tačkama.

Pojam integrala

U mnogim je slučajevima moguće naći izvod date funkcije, što je pokazano putem brojnih primera. Međutim, može se postaviti i obrnuto pitanje: kako naći funkciju čiji je izvod poznat.

Neka je data funkcija $y = f(x)$, $x \in X$. Zadatak je da se pronađe takva funkcija $F(x)$, za koju važi: $F'(x) = f(x)$. Rešenje tog problema ima tri dela:

(1) Prvi deo je odgovor na pitanje da li takva funkcija $F(x)$ postoji. Takva funkcija ne postoji uvek, posebno u slučaju kada je funkcija prekidna. Utvrdiće se jednostavno pravilo: Ako je f neprekidna na intervalu (a,b), tada uvek postoji funkcija F za koju važi $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. (Dokaz će kasnije biti dat).

NAPOMENA. Moguće je da funkcija nije neprekidna na nekom intervalu pa da ipak bude integrabilna. Svaka ograničena funkcija $f(x)$ u intervalu $[a,b]$ sa konačnim brojem prekidnih tačaka između a i $b$je integrabilna u tom intervalu.

(2) Drugo, da li je funkcija $F(x)$ jedinstvena? Odgovor na ovo pitanje ne predstavlja problem, svaka funkcija oblika $F(x)+C$ jeste rešenje jer je

$$\big(F(x)+C\big)' = F'(x) = f(x) \qquad (C = \text{ const}),$$

pa rešenje nije jedinstveno već se razlikuje do na konstantu.

(3) Treće, kako funkciju $F(x)$ formalno naći? Nalaženje izvoda, ako je ona kombinacija elementarnih funkcija relativno je jednostavno. Međutim, obrnuti zadatak je veoma težak, što će biti predmet daljeg razmatranja.

Definicija primitivne funkcije. *Funkcija* $F : X \to \mathbb{R}$ *gde je* X *interval, naziva se primitivna funkcija ili integral funkcije* $f : X \to \mathbb{R}$, *ako je*

$$F'(x) = f(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Na primer, za funkciju $f(x) = x$ njene primitivne funkcije su

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad F_2 = \frac{x^2}{2} + 1, \quad F_3 = \frac{x^2}{2} + 4, \text{ itd.},$$

jer važi

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \quad \left(\frac{x^2}{2}+1\right)' = x, \quad \left(\frac{x^2}{2}+4\right)' = x$$

na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Uopšte, ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$, primitivne funkcije su i sve funkcije oblika $F(x)+C$, gde je C proizvoljna konstanta, jer je

$$\big(F(x)+C\big)' = F'(x) = f(x).$$

Obratno, ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dve primitivne funkcije za $f(x)$ na intervalu X, tada je

$$F_1'(x) = f(x) \text{ i } F_2'(x) = f(x),$$

pa je

$$\big(F_1(x) - F_2(x)\big)' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0,$$

odakle sledi da je $F_1(x) - F_2(x) = C$, gde je C neka konstanta. Prema tome, ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$, tada su sve primitivne funkcije date sa $F(x) + C$, gde je C proizvoljna konstanta.

Definicija integrala. *Ako je $F'(x) = f(x), x \in (a,b)$, odnosno $\big(F(x)+C\big)' = f(x)$, tada familiju funkcija $F(x)+C$ nazivamo integral od $f(x)$, u oznaci*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Na osnovu definicije integrala je

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \text{i} \quad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

*Postupak nalaženja primitivne funkcije $F(x)$ za datu funkciju $f(x)$ naziva se **integracija**.*

Već je istaknuto da Apolonijev sistem počiva na tri stuba. Za neodređeni integral može se reći da pripada tom sistemu jer rešavanje integrala počiva na *tri moći* – tri metode integracije:

(1) *metod smene*,

(2) *metod parcijalne integracije* i,

(3) *metod integracije racionalnih funkcija*.[58]

[58] Više o metodama rešavanja integrala može se videti u: Dobrilo Tošić, Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasnik, Beograd, str. 310.

3.

EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE I REŠAVANJE ZADATAKA

3.1. ANALIZA UPITNIKA

3.1.1. O nastavi matematike

Razvoj matematike, od početka do današnjih dana motivisan je potrebom primene ali i svojim sopstvenim težnjama i istraživanjima. U starom Egiptu dominirala je praktična potreba, a u staroj Grčkoj zahtevi teorije. I danas se govori o *čistoj* ili *primenjenoj* matematici, što upućuje na to da podsticaji za razvoj matematike dolaze od nje same, ili od drugih naučnih i tehničkih disciplina.

U dvadesetom veku matematika je imala veliku primenu – matematička statistika, računari, primene u elektrotehnici, pa sve do telekomunikacija i svemirskih letelica. Sa druge strane, isti period obeležen je apstrakcijom kakvu svet nije video. Na primer vektorski i topološki prostori. Područja gde se izmene u nastavi relativno brzo prate (ili bi tako trebalo da bude) jesu, na primer, tehničke i medicinske nauke. Zaostajanje u tim oblastima smanjuje mogućnosti primene u očuvanju zdravlja ili života ljudi. Modernizacija tehnologije zahteva hitnu modernizaciju fundamentalnih nauka, odnosno matematike i egzaktnih i prirodnih nauka. Tako nas put vodi ka modernizaciji i same nastave.

Zoru srpske matematike najavio je Dimitrije Nešić, profesor Velike škole. Zahvaljujući svojim ličnim osobinama, studentima je *prenosio ljubav prema predmetu, služio se jasnoćom izlaganja, usmeravao je pažnju studenata i učio ih da razlikuju glavno od sporednog, uživeo se u nauku koju je predavao.*[1]

Mihailo Petrović je doktorirao u Parizu. Profesori su mu bili čuveni Poenkare, Pikar i dr. Doktorsku tezu iz diferencijalnih jednačina odbranio je 1894. pred komisijom u kojoj

[1] Dragan Trifunović, 1996, *Dimitrije Nešić – zora srpske matematike*, Arhimedes, Beograd, str. 19. Dimitrije Nešić (1836–1904). Studije je započeo na Liceju u Beogradu, nastavio na Velikoj tehničkoj nškoli u Beču, a završio na Politehničkoj školi u Karlsrueu. Bio je pravi posvećenik prosvetnog hrama, human, plemenit, čovek anđeoske duše. Smatran je idealnim čovekom. Njegov student i naslednik u Velikoj školi bio je Mihailo Petrović.

su bili Ermit, Pikar i Penleve. Po dolasku u Beograd izabran je za profesora namesto svog profesora Dimitrija Nešića. Njegova su predavanja bila razumljiva, održavao je nivo koji je pristupačan slušaocima. Kod onih koji su želeli šire znanje podsticao je samostalni rad. Odlikovala ga je neposrednost, skromnost i vedrina duha. Harmoniju svojih duhovnih osobina uneo je u svakodnevni život. Naučni rad je smatrao prvom dužnošću nastavnika univerziteta, jer bez nauke nema uspeha ni u nastavi, a ni napretka uopšte. Sa Milutinom Milankovićem delio je ne samo kabinet već i univerzalni matematički svet. On je predavao teorijsku matematiku, a Milanković primenjenu matematiku. *Zaslužno priznanje* dobio je 1939. godine *za svoj naučni rad u svim oblastima matematičkih nauka i stvaranje matematičke škole na Beogradskom univerzitetu*.[2]

Njegovi doktoranti uspešno su razvijali nastavu matematike na matematičkim i tehničkim fakultetima u Srbiji. Na tehničkim fakultetima, pre svega na elektrotehnici, doprinos razvoju nastave dao je Dragoslav Mitrinović, pristupom koji je povezivao teoriju i primenu. On je 1961. godine pokrenuo ediciju *Uvođenje mladih u naučni rad* u izdanju Zavoda za udžbenike.

Nastava matematike u Srbiji pripada tzv. tradicionalnoj školi (*definicija – teorema – dokaz*).

> Prema Kejt Veberu sastoji se iz niza profesorovih instrukcija, a studenti pasivno *uzimaju* beleške i materijal je raspoređen u strogom logičkom redosledu. Pojedini autori smatraju da takav *DTD pristup daje studentima pogrešnu sliku o prirodi matematike*; *da krije druge procese koji se koriste u matematičkom rezonovanju*; *da negira mogućnost korišćenja intuicije*.
>
> Tradicionalni stil DTD nije jedina pedagoška paradigma već postoje različite pedagoške tehnike. Studija učenja u učionici nepotpuna je bez istovremenog sagledavanja društvene i kulturne prakse, bez nastavnih materijala i postupaka profesora. Stil profesora iz prethodne studije pokazuje da on ima direktan uticaj na način na koji studenti pokušavaju da nauče materijale.[3]

Kolmogorov ističe važnu činjenicu koja karakteriše nastavnika matematike. „Od nastavnika matematike i u višoj i u srednjoj školi zahteva se više nego samo temeljno poznavanje nauke koju predaje. Matematiku može da predaje samo onaj čovek koji je i sam njome oduševljen i koji je shvata kao nauku koja je živa i koja se razvija. Verovatno,

[2] Mihailo Petrović (1868–1943). Školovao se u Prvoj beogradskoj gimnaziji, a diplomirao je na Prirodno–matematičkom odseku Filozofskog fakulteta u Beogradu 1889. Nastavio je školovanje u Parizu na *Ecole normale supérieure*. Doktorat je odbranio na Sorboni 1894. Petrovićevu matematičku školu (ili Beogradsku matematičku školu) osnovala je grupe koja je doktorirala matematičke nauke kod njega. To su Tadija Pejović, Radivoje Kašanin, Jovan Karamata, Miloš Radojičić, Konstantin Orlov, Dragoslav Mitrinović, Vojislav Avakumović, Dragoljub Marković i dr.

[3] Keith Weber, 2004, *Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course,* Journal of Mathematical Behavior 23 (2004) 115–133. http://www.journals.elsevier.com/the-journal-of-mathematical-behavior

mnogi srednjoškolci znaju kako kod takvih nastavnika matematika postaje zanimljiva, a blagodareći tome laka i pristupačna.“[4]

> *Nastavnik, čija ličnost ima intelektualni i emocionalni uticaj na studente kada im se obraća, predstavlja za njih odlučujući element u obrazovanju.*[5]

> Profesori, istraživači i dizajneri u okviru matematičkog obrazovanja u nastavi dele zajedničke ciljeve za razumevanje i unapređivanje nastave matematike i učenja studenata. Profesori izvode nastavu i upućuju kako treba da je uči, istraživači proučavaju kako ljudi uče i kako se izvodi nastava, a dizajneri razvijaju nastavne materijale za podršku profesorima i studentima. Svaki od navedenih stručnjaka razvija sopstveni put, metodu i stručnost. Veoma retko oni razmenjuju svoja iskustva i znanje. Svaka perspektiva može mnogo da ponudi drugima. Postoji čvrsto uverenje da mogu da se razviju bolje metode i da ih kreiraju bolji materijali za nastavu ako se znanja udruže.[6]

3.1.2. Metodologija istraživanja

Predmet istraživanja je nastava matematičke analize na tehničkim fakultetima – odnosno elektrotehničkim, građevinskim i mašinskim fakultetima u Beogradu, Novom Sadu i Nišu. Istraživanje odnosa između teorije i primene matematičke analize veoma je značajno, aktuelno i interesantno. Istraživanje može da doprinese poboljšanju izvođenja nastave i primene matematičke analize u neposrednoj nastavi. Period sprovođenja istraživanja trajao je od oktobra do decembra 2013. godine.

Cilj istraživanja i hipoteze. Istraživanje ima naučni i društveni cilj. Naučni cilj jeste stvaranje nove naučne informacije koja doprinosi širenju saznanja. Društveni cilj je primena rezultata istraživanja, doprinos razumevanju odnosa apstrakcije i primene; ali i unapređivanje metodike nastave matematike na tehničkim fakultetima. Ovo istraživanje takođe daje inspiraciju i podsticaje za dalja istraživanja u oblasti metodike nastave matematike na drugim fakultetima i univerzitetima.

Ovim istraživanjem autor je hteo da utvrdi kako studenti doživljavaju trenutni odnos apstraktne teorije i primene, tj. da li su predavači uspeli da unaprede svoja izlaganja do te mere da studenti budu zadovoljni načinom rada, ili je potrebno dodatno raditi na metodičkom pristupu. Ovaj deo istraživanja formalno bi se mogao tretirati kao utvrđivanje istinitosti generalne hipoteze: *Metodički dobro postavljena nastava matematike pomaže boljem razumevanju odnosa između apstrakcije i primene matematičke analize*.

Pomoću prethodno navedena tri dela upitnika autor utvrđuje istinitost četiri posebne hipoteze:

---

[4] Mitrinović D. S. (urednik), 1963, *Matematička biblioteka: Uvođenje mladih u naučni rad* III, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, str. 110.

[5] Šárka Hošková, 2010, *Innovation of educational process of mathematics of military officers*, Procedia Social and Behavioral Sciences 2 (2010) 4961–4965.

[6] Susan Magidson, *Building bridges within mathematics education: Teaching, research, and instructional design*, Journal of Mathematical Behavior 24 (2005) 135–169, Elsevier Ltd.

(i) Studenti tehničkih fakulteta imaju pozitivan odnos prema matematici.
(ii) Studenti tehničkih fakulteta matematici prevashodno dodeljuju upotrebnu vrednost.
(iii) Predavanje nastavnika je dobro ukoliko je razumljivo, razgovetno i ako motiviše studente da u njemu učestvuju. Istovremeno, predavanje sadrži primere sa elementima primene.
(iv) Matematička literatura predstavlja važno nastavno sredstvo ali se ona, osim zbirki zadataka koje služe za neposredno pripremanje ispita, ne koristi.

Instrument. Studenti su odgovarali na pitanja o nastavi matematike, koja se sastoji iz tri dela:

A. *Opšti stavovi o matematici*.
B. *Nastava matematike*.
C. *Nastavna sredstva*.

Za popunjavanje upitnika posebno predznanje iz matematike nije bilo potrebno.

U prvom delu studenti su imali priliku da iznesu svoj stav prema matematici kao lični doživljaj i kao ocenu nastave matematike na fakultetu.

Deo B je posvećen nastavi matematike. U nizu od sedam pitanja studenti su imali zadatak da procene primenljivost i originalnost gradiva, kao i kvalitet nastave. U ovom delu im je bilo omogućeno da se izjasne o tome šta bi po njihovom mišljenju unapredilo nastavu matematike.

Treći deo upitnika sadrži pitanja o primeni računara i internet tehnologija u nastavi, kao i pitanja o udžbenicima i literaturi koju koriste za izučavanje matematičke teorije i za pripremu ispita.[7]

Uzorak obuhvata 429 studenata druge, treće i četvrte godine studija (uzeti su u obzir studenti koji su položili ispit koji obuhvata diferencijalni i integralni račun funkcija jedne promenljive, a koje se na ovim fakultetima realizuje na prvoj godini studija u okviru jednog ili dva semestra). Struktura studenata u upitniku po starosti, univerzitetu i fakultetu koji pohađaju data je u tabeli 1.

Tabela 1 – Struktura uzorka

	Godina studija			Univerzitet			Fakultet		
	2	3	4	BG	NI	NS	ETF	GF	MG
N	71	260	93	164	162	103	122	183	113

Kao dodatna grupa ispitanika u istraživanje su uključeni studenti Matematičkog fakulteta, njih 59, kako bi poređenjem pojedinih rezultata mogli da zaključimo da li je neki stav opšte prirode ili je različit kod matematičara i kod nematematičara.

[7] Tekst upitnika može se videti u Prilogu 1.

Obrada podataka. Posle sprovedenog istraživanja odgovori su evidentirani i napravljena je odgovarajuća baza. Pomoću statističkog paketa SPSS formirane su tabele koje u sebi sadrže procentualne zastupljenosti odgovora. Pri tom, u tabelama rezultata se nalaze procenti odgovora na osnovu celokupnog uzorka, ali i zastupljenosti odgovora u odnosu na godinu studija, univerzitet i fakultet. Na osnovu upoređivanja učestalosti odgovora u sledećim odeljcima iznećemo osnovne zaključke.

3.1.3. Osnovni nalazi

A. Opšti stavovi o matematici

Da li je po mišljenju mnogih velikih naučnika matematika apstraktna i večna istina, izvan svake sumnje?

Još od Vavilona i Egipta do dostignuća modernih matematičara fond matematičkog znanja stalno se povećava. Razvoj se kreće u dva pravca. Razvijaju se postojeće teorije i dokazuju nova tvrđenja i stvaraju se nove teorije. „Taj sjaj i elegancija matematičkih teorija toliko su snažni, vitalni i neumoljivi, a uspesi njihove primene na nauku i tehnologiju toliko očigledni da se više uopšte ne pitamo u čemu je njihova stvarna vrednost i šta oni uopšte znače.“[8] Jednostavno rečeno, ako matematičko znanje prikažemo kao drvo saznanja, koren i deblo čine temeljno znanje za sve grane, grančice i listove. Što se primene tiče, vrednosno opredeljenje matematičara jeste da služi za *dobro čovečanstva*, iako znamo da je tokom istorije bilo zloupotreba poput stvaranja i korišćenja ubojitog oružja čija je namena uništavanje ljudi i stvari. Razvojni put matematike ne možemo odvojeno posmatrati jer apstrakcija donosi primenu, a iz primene su proizašle nove teorije i matematički rezultati koje njihovi osnivači nisu mogli predvideti.

> Matematika razvija logičko i apstraktno razmišljanje kod studenata. Vodi ka samostalnom mišljenju i doprinosi punom intelektualnom razvoju. Nastava se zasniva na aktivnom usvajanju rešavanja zadataka i problema, uz prihvatanje veštine primene. Matematika stvara uslove za razumevanje kvantitativnih i prostornih odnosa prema stalnom usvajanju matematičkih termina, figura, simbola i operacija. Nastava matematike značajno utiče na razvoj apstraktnog razmišljanja i logičkog rasuđivanja, dovodi do tačnosti u izražavanju, a na poseban način doprinosi formiranju voljnih osobina karaktera (tačnost, izdržljivost, konzistentnost) i na taj način stvara uslove za razumevanje i bavljenje praktičnim situacijama. Matematika kod studenata razvija intuitivno razumevanje pojma beskonačnosti, na primer kod granične vrednosti nizova i funkcija ili u geometriji.[9]

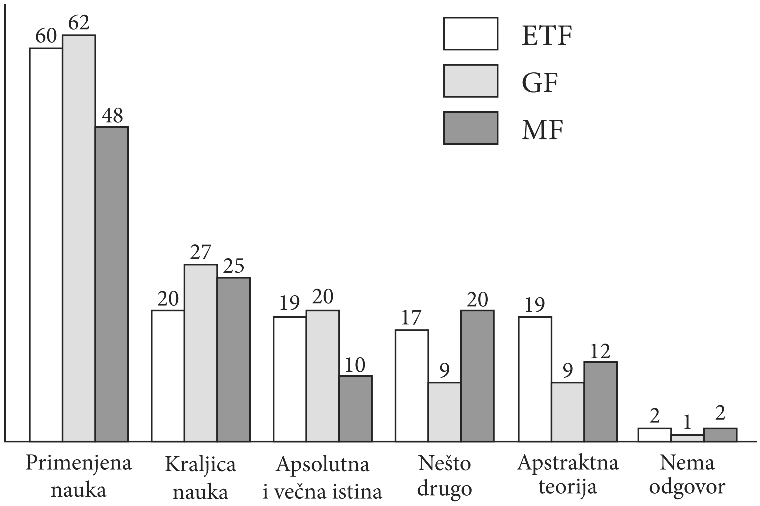
[8] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, str. 20.

[9] Šárka Hošková, 2010, *Innovation of educational process of mathematics of military officers*, Procedia Social and Behavioral Sciences 2 (2010) 4961–4965.

Na pitanje *Šta je za vas matematika?* studenti elektrotehničkih, građevinskih i mašinskih fakulteta[10] ubedljivo odgovaraju da je matematika primenjena nauka. Dodatna grupa Matematičkog fakulteta prednost daje stavu da je matematika kraljica nauka.[11]

Tabela 2 – Šta je za vas matematika?

	Ukupno	**Fakultet**		
		ETF	GF	MašF
	429	133	183	113
Primenjena nauka	57.6	60	62	48
Kraljica nauka	24.5	20	27	25
Apsolutna i večna istina	19.1	19	20	19
Nešto drugo	14.2	17	9	20
Apstraktna teorija	12.8	19	9	12
Nema odgovor	1.2	2	1	2



Slika 1 – Šta je za vas matematika?

Studenti tehničkih fakulteta naveli su i druge interesantne odgovore. Na primer: *Matematika je osnov svega, princip*. *Matematika je alat* (moćan i koristan alat, instrument, aparat) *koji rešava inženjerske probleme* (primenljiv u ostalim naukama, olakšava izučavanje drugih nauka, za rešavanje konkretnih problema u tehnici). *Matematika je aparat koji pomaže fizičarima da komuniciraju sa prirodom*. *Matematika je jezik kojim se opisuje tehnički svet ljudi*. *Nauka koja daje odgovor na sva pitanja u prirodi*. *Temelj drugih nauka*. *Produbljuje svest*. *Matematika je ljubav* (prva, jedina i najveća). *Nešto nepoznato, beskonačno i nestvarno*.

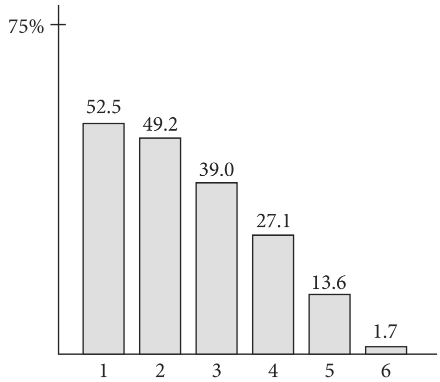
[10] Umesto naziva fakulteta koristiće se skraćenice ETF, GF i MašF. Tekst Ankete prikazan je u Prilogu 1. Odgovori studenata ETF, GF i MašF prikazani su u celini u Prilogu 3 u elektronskom obliku. Odgovori studenata Matematičkog fakulteta – dodatne grupe, prikazani su u Prilogu 4 u elektronskom obliku.

[11] Studenti su kod ovog pitanja imali mogućnost da zaokruže više ponuđenih odgovora.

Studenti matematike napisali su recimo *Matematika je pramajka prirodnih nauka*. *Matematika je vežba za razmišljanje. Matematika je lepota. Umetnost. Magija.*

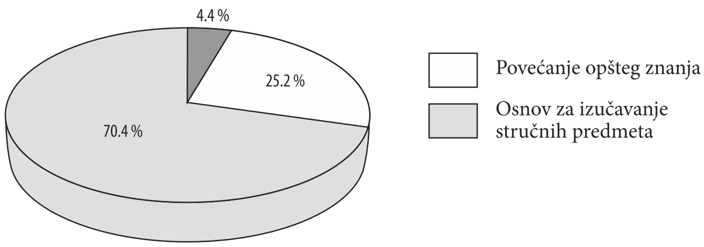
Tabela 3 – Odgovori studenata matematike

	Total
	59
Kraljica nauka	52.5
Primenjena nauka	49.2
Apsolutna i večna istina	39.0
Apstraktna teorija	27.1
Nešto drugo	13.6
Nema odgovor	01.7



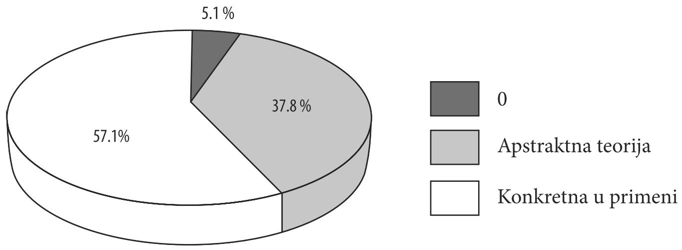
Slika 2 – Odgovori studenata matematike

Između stavova *Matematika koju izučavate na fakultetima za vas lično je*: *Povećanje opšteg znanja* ili *Osnov za izučavanje stručnih predmeta*, studenti tehničkih fakulteta ubedljivu prednost daju drugom stavu.



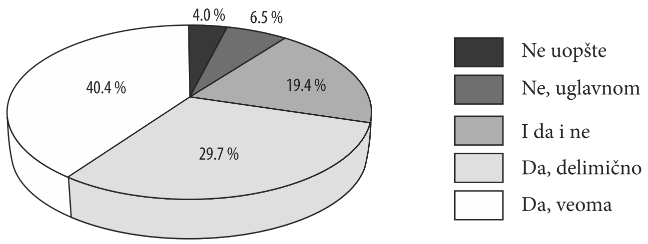
Slika 3 – Matematika kao opšte znanje ili osnov za stručne predmete

U velikoj meri studenti prepoznaju da postoji konkretna primena matematike i da ona nije samo apstraktna teorija.

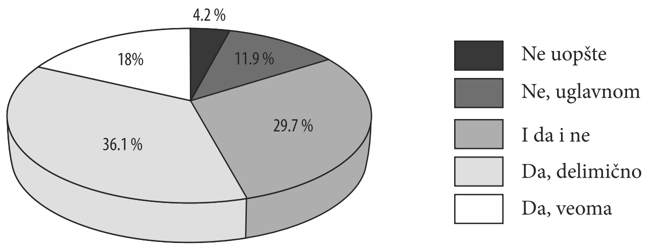


Slika 4 – Matematika na fakultetu

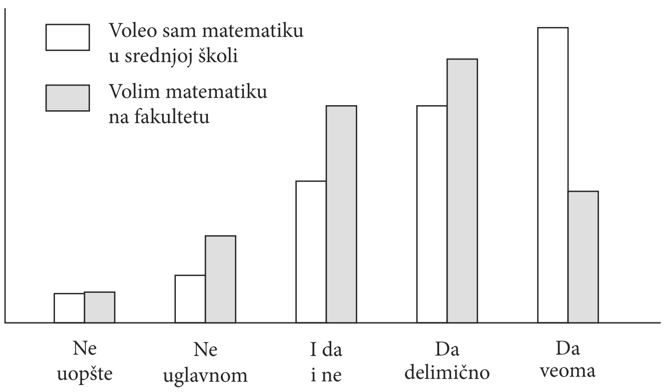
Za stavove *Voleo sam matematiku u srednjoj školi* i *Volim matematiku na fakultetu*, studenti su većinom pozitivno odgovorili, ali „vide“ se i određene blage promene smanjenja afiniteta prema matematici.



Slika 5 – Voleo sam matematiku u srednjoj školi



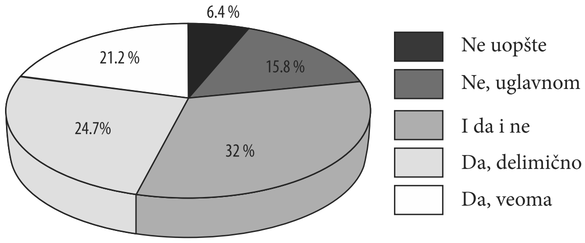
Slika 6 – Volim matematiku na fakultetu



Slika 7 – Voleo sam i volim matematiku

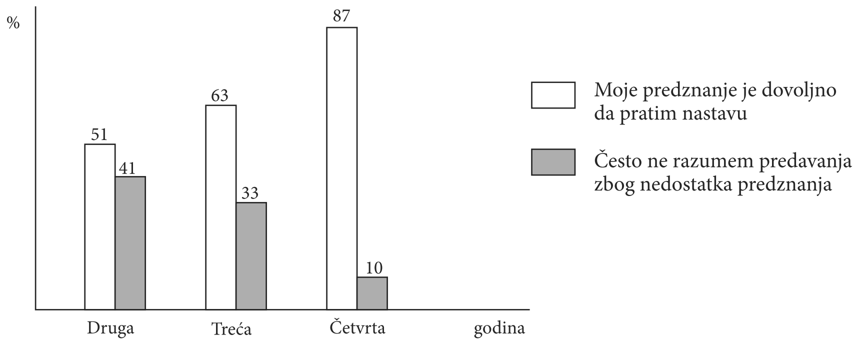
Sa slike 5 vidimo da je procenat onih koji su voleli matematiku u srednjoj školi 70.1%. Na pitanje da li im je predznanje iz srednje škole dovoljno 66.7% ispitanika odgovorilo je potvrdno.

Istovremeno studenti daju prednost stavu da je gradivo obimnije od onoga što im je potrebno. Ova dva faktora možemo navesti kao neke od razloga za smanjenje afiniteta prema matematici.



Slika 8 – Gradivo je mnogo obimnije od onoga što mi je realno potrebno

Interesantno je primetiti da studenti sa napredovanjem u studijama imaju sve manje problema zbog nedostatka predznanja. Na slici 9 vidimo da je na drugoj godini studija procenat onih koji mogu/ne mogu da prate nastavu skoro jednak, dok je na četvrtoj godini ta razlika značajnija.

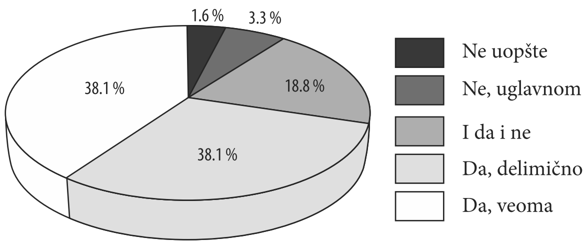


Slika 9 – Nivo predznanja po godini studija

Ovakav rezultat je očekivan predstavlja posledicu toga što studenti koji upisuju isti fakultet dolaze iz srednjih škola različitih obrazovnih profila i sa različitim predznanjem. Na fakultetu se u velikoj meri nadoknađuje propušteno, i pri završetku studija većina studenata ima ujednačeno znanje iz matematike.

Studenti su takođe saglasni sa stavom: *Znanje iz matematike olakšava mi izučavanje / polaganje stručnih predmeta*.

NAPOMENA. Studenti blagu prednost daju stavu da je gradivo obimnije od onoga što im je potrebno. Istovremeno, podeljeno je mišljenje o tome da li matematika gubi na značaju opštom upotrebom kompjutera. Male razlike primećuju se kod studenata GF, koji



Slika 10 – Matematika pomaže u stručnim predmetima

računare koriste za matematičke proračune na građevinskim objektima. Oni daju blagu prednost stavu da matematika gubi na značaju zbog upotrebe kompjutera u poređenju sa obrnutim stavom studenata ETF-a.

Matematika se uzdigla u kraljevsku umetnost, što omogućava i njeno korišćenje izvan same matematike. Platon bi rekao da je matematika *aristokratija duha i karaktera*. Vrednost učenja matematike zasniva se u usvajanju njenih metoda i rezultata, ali i u razvijanju logičkog i estetskog načina mišljenja i zaključivanja. Čar je u njenoj unutrašnjoj lepoti.

Ovim stavom upotpunjuje se važnost i značaj matematike, i matematičkih teorija kao što su diferencijalni i integralni račun ili diferencijalne i parcijalne jednačine, bez kojih danas nije moguće sagraditi most, zgradu, razmenjivati mejlove, pretražiti internet, poslati komunikacioni satelit u orbitu ili analizirati društvene pojave. Čitav niz grana matematike, od matematičke statistike preko teorije informacija, operacionih istraživanja, linearnog i nelinearnog programiranja, pa do teorije igara, duže vreme su neophodni alati ekonomista, organizatora proizvodnje ili sociologa.[12]

Matematika je uzdignuta *iznad Himalaja* i trasirala je put razvoju *čiste* matematike ili egzaktne nauke, odnosno apstraktne nauke. Na ovom mestu važno je istaći da *čista* matematika rešava probleme primenjene matematike, a sa druge strane, primenjena matematika omogućuje neočekivane uvide u prirodu – u samu bit i suštinu *čiste* matematike. Bertolino nam prenosi reči Lobačevskog: „Nema ni jedne matematičke grane, ma koliko da je apstraktna, koja se jednom ne bi mogla primeniti na pojave stvarnog sveta.“[13]

Biti na kraljevskom prestolu nauka za Davida Hilberta znači „Wir müssen wissen. Wir werden wissen“. U prevodu to je: „*Moramo znati. Znaćemo.*“[14] Gedel je na to 1931. rekao *nećemo znati*!

Matematika u sebi samoj nosi veliko bogatstvo i lepotu i nisu joj potrebna uverenja o tome da je apsolutna i večna istina, ili više vrednovanje, jer ionako zauzima najviše mesto

[12] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, str. 25.

[13] Milorad Bertolino, *Matematika u tokovima istorije*, Univerzitet Beograd, Publikacija Elektrotehničkog fakulteta, Ser. Mat. Fiz. No 602 – No 633, str. 179.

[14] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, str. 27.

među naukama. To ne isključuje mogućnost da onaj ko se njome bavi bude uspešan i u nekoj drugoj oblasti.

Matematika sama po sebi verovatno ne daje garanciju da može čoveka učiniti srećnim i blaženim, ali sigurno može doprineti zadovoljstvu, pa i sreći, čoveka koji se njome bavi, jer ona u sebi nosi istinu i lepotu koju on otkriva.

B. Nastava matematike

Glavni cilj univerzitetskog obrazovanja je da studenti budu samostalni, da su u stanju sami da uče, potpuno samostalno čitaju tekstove i knjige i samostalno rešavaju probleme. Oni treba da nauče kako da uče, da uz pomoć kurseva poboljšaju svoje metode istraživanja a predavač tako organizuje svoja predavanja da olakša studentu učenje. Veština studiranja treba da bude ugrađena u u proces obrazovanja.

Baumslag predlaže *deset pravila nastave*:[15]

Podučavajte na pravom nivou – početak kursa je podešen na nivo studentskog znanja i odražava nivo univerziteta koji je kompatibilan sa sposobnostima studenata (predavanje razume više od polovine studenata).

Grupa studenata treba da bude ujednačena ako je to moguće. Ne mogu da slušaju zajedno ekonomisti i fizičari, jer nemaju isto predznanje ni sposobnosti.

Obratite pažnju na skrivene a očigledne stvari. Nešto što može izgledati za matematičare očigledno za studente može biti prikriveno. Ovde treba obratiti pažnju na jezik.

Uveriti se da su studenti aktivni. Matematika je predmet u kome se aktivno učestvuje. Ako sluša predavanje i aktivan je, rasvetljava grubu ideju i kako stvari funkcionišu, on će razumeti i pamtiti. Stvari koje ne razume os tavlja za kasnije rešavanje. To će pitati za vreme diskusije ili će rešiti samostalno. Jedna od vrednosti predavanja je da student pravilno koristi materijale. Tempo predavanja mora da se prilagodi kako studenti ne bi sveli na puko prepisivanje sadržaja sa table, bez razmišljanja o matrerijalu. Ideja je da student ima dovoljno vremena da zapiše i razmišlja o najvažnijim tačkama. Neki predavači su pokušali da studentima daju kompletne beleške, ali to nije bilo efikasno i sledeća predavanju su bila dosadna.

Napraviti zahteve. Visok standard traži visoke zahteve. Ne preterane, razume se.

Podsticati studente i pružiti im mogućnost da postavljaju pitanja.

Motivisati studente. To mogu biti zanimljivi primeri od značaja za njihovo polje studiranja.

Učiniti predavanja intersantnim. Predavanje treba da bude uzbudljivo i prijatno.

Poštovati studente – to su ljudska bića, sa problemima, strahovima i teškoćama. Oni su vođeni strahom i zadovoljstvom. Treba im ohrabrenje. Uverite se da znaju da ste na njihovoj strani. Vaša briga i interes mogu da obezbede jaku motivaciju. Ako shvate da im profesor želi uspeh onda je veća šansa za njihovo dobro učenje. Uz to važno je da studenti razumeju da će im taj kurs pomoći da ostvare svoje potrebe.

[15] Baumslag B., 2000, *Fundamentals of Teaching Mathematics at University Level*, Imperial College Press, London, p. 83-91.

Profesori imajte na umu učenje. I profesor mora da nastavi da uči. Kad sam pokušava da reši problem mora da shvati da i učenik ima iste probleme. Tako se zadržava ljubav prema matematici. A profesor ima dovoljno znanja o temi koju predaje. Šta je glavna preporuka?

Naučiti dobro predmet. Što više znate o predmetu, čak i ako vam je metoda loša je bolje od situacije da ne znate dobro sadržaj nastave. Što se metoda tiče ne treba biti dogmata. Različite metode imaju svoje porednosti u određenim situacijama.

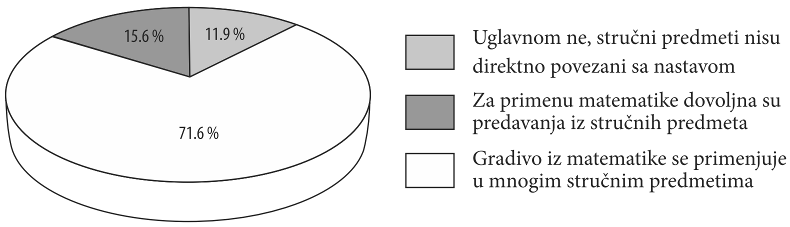
Korišćenje simbola u nastavi matematike vrlo je značajno. Simboli mogu veoma dobro i korisno da posluže za sažeto, koncizno, jasno i čisto formulisanje mnogih definicija i teorema, kao i za njihovo dokazivanje. Najčešće su to oznake za implikaciju $\Rightarrow$, ekvivalenciju $\Leftrightarrow$ i kvantifikatore $\forall$ svaki i $\exists$ postoji (bar) jedan. Na primer, definicija granične vrednosti funkcije

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x) \;\; (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon)$$

Oprez! Ovako napisanu definiciju većina studenata slabo razume. Zato je neophodno detaljnije objašnjenje uz odgovarajuću grafičku ilustraciju.

Funkcija matematičkog jezika oslanja se dobrim delom na njegovu konciznost, na njegove sažete i sugestivne notacije. „Jedna od najvažnijih osobina matematičkog jezika jeste mogućnost lakog i tačnog prevoda sa jednog prirodnog jezika na drugi.“[16]

Kao što smo već videli u analizi opštih stavova o matematici, studenti tehničkih fakulteta većinom vide matematiku kao osnov za izučavanje stručnih predmeta (70.4%). Veliki broj je takođe potvrdio da im je znanje iz matematike olakšalo izučavanje tih predmeta (76.2%). Vezano za nastavu i gradivo koje je predavano kada je trebalo da studenti procene primenljivost u stručnim predmetima, dobili smo rezultate prikazane na slici 11.



Slika 11 – Odnos matematike i stručnih predmeta

Ovde se zaključuje da kod studenata postoji svest o tome da je matematika važna za stručne predmete. Štaviše, prethodni rezultati ohrabruju jer navode na zaključak da je gradivo iz matematike u velikoj meri prilagođeno potrebama stručnih predmeta.

Ljudi uvažavaju matematičare i uzdižu matematiku zbog tačnosti i rešavanja problema putem preciznih pravila zaključivanja. Kod nekoga isti razlozi mogu izazvati odbojnost prema matematici i umanjenje priznavanja vrednosti matematičara.

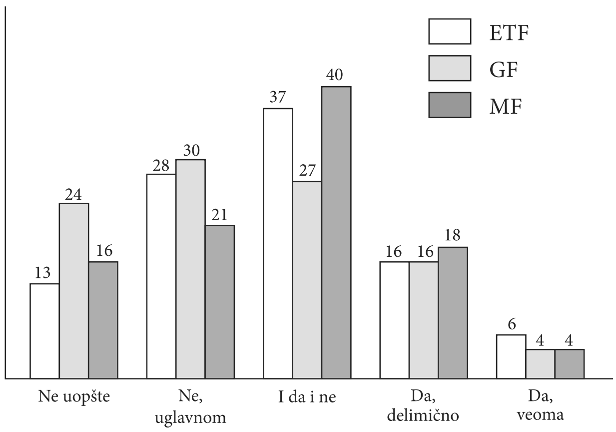
[16] Solomon Markus, 1974, *Matematička poetika*, Nolit, Beograd, str. 65.

Ispostavlja se da studenti tehnike, iako vide primenu matematike i matematičkih teorema, oni u njima ne sagledavaju lepotu i eleganciju izvođenja dokaza. Dokazi služe isključivo za teoretisanje, a ne da bi na njih ostavili utisak.

Zapravo, na pitanje Koliko ste saglasni da su dokazi teorema u matematici *elegantni i lepi?* studenti su negativno odgovorili.

Tabela 4 – Dokazi teorema su elegantni i lepi

	Ukupno	**Fakultet**		
		ETF	GF	MašF
n	417	132	173	112
Ne uopšte	18.2	13	24	16
Ne, uglavnom	27.1	28	30	21
I da i ne	33.6	37	27	40
Da, delimično	16.3	16	16	18
Da, veoma	04.8	06	04	04

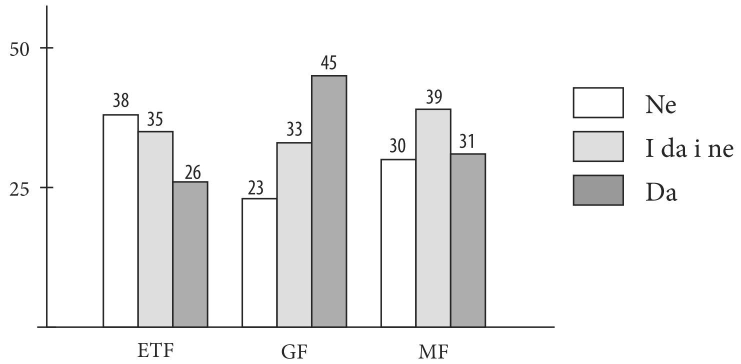


Slika 12 – Dokazi teorema su elegantni i lepi

Kada smo tražili da navedu *formulaciju jedne upečatljive teoreme*, nije odgovorilo 46,6%, a 31,9% je odgovorilo: Pitagorina teorema. Samo je jedan student dao formulaciju Lagranžove teoreme.

Naravno, Pitagorina teorema je opštepoznata još iz osnovne škole. Međutim, iz teorema više matematike nijedna se nije mogla izdvojiti kao teorema koja ostavlja utisak.

U ukupnom utisku prilično je ujednačeno mišljenje o tome da li dokazi gube na značaju zbog opšte primene kompjutera u svim oblastima. Studenti ETF-a i GF-a imaju suprotstavljene stavove, dok je na MašF zastupljenost i pozitivnog i negativnog odgovora slična.



Slika 13 – Dokazi gube na značaju opštom primenom kompjutera

Na pitanja o tome da li su dokazi teorema korisni, ili da ne znaju čemu služe, studenti mašinskih fakulteta su dali relativno ujednačene odgovore. Čak 50% njih je reklo da su im dokazi veoma korisni, a 48% nije potvrdilo da ne znaju čemu oni služe. Studenti sa ostala dva fakulteta ostali su podeljenog mišljenja o korisnosti dokaza, ali je u oba slučaja malo veći procenat onih koji znaju čemu ti dokazi služe.

Za dodatnu grupu su dokazi u matematici ubedljivom većinom *originalni* (64.9%), *elegantni i lepi* (54.4%). Interesantno je da su i *korisni* (50%). U formulaciji teorema bili su darežljiviji. Na primer, bez odgovora – 16.9%, Pitagorina teorema – 8.5%, Banahova teorema – 5.1%, Lagranžova teorema – 3.4%, Stoksova teorema – 3.4% itd.

Ne smemo zaboraviti da dodatnu grupu čine budući matematičari koji već osećaju naklonost ka matematici kao nauci.

Postavlja se pitanje ima li u matematici mesta za maštu i slobodnu kreaciju, tj. da li ima mesta ljudskom elementu, a time i umetničkom nadahnuću? U matematici nije sve jednoznačno determinisano. Vrhunski matematičari raspravljaju se o pravcima razvoja ili popravljaju dostignute rezultate. A tek teorije o metodici nastave sadrže različite pristupe. „Matematičari su ljudi i njihovo stvaranje je ljudsko – ono u sebi nosi nesigurnost, ali i lepotu, i prolaznost, ali i večnost, i naučni, ali i umetnički pogled.“[17] Umetnost pripisujemo samoj prirodi ili izrazu koji otkrivamo u umetničkim delima poput slike, kompozicije ili arhitektonskih dela. Matematika je u osnovi prirodna nauka iz koje se razvila u posebnu disciplinu. Stari Grci su tragali za skladom i harmonijom među brojevima. Takvi odnosi imaju svoje mesto u ritmu i metrici poezije, u muzici, u likovnim umetnostima i u arhitekturi. *Božanska srazmera – zlatni presek* smatra se skladnim i prijatnim za oko. Poznata je uloga perspektive u slikarstvu, naročito u periodu renesanse (npr. Rafael – Atinska škola). Veliki slikari, npr. Leonardo da Vinči i Direr, brinuli su o proporcijama ljudskog tela.[18]

Za matematiku se kaže da ima pretežno logički karakter, nasuprot pretežno intuitivnom karakteru umetnosti. U stvari, intuicija je od bitne važnosti i u matematici, a poezija

[17] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, str. 42.
[18] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, str. 45.

ima svoju unutrašnju logiku. Otkriće u matematici rezultat je čudesnih snaga u kojima, po svemu sudeći, nesvesno prepoznavanje lepote igra važnu ulogu.[19]

Matematičari kažu da je dokaz određene teoreme elegantan, lep ili skladan. To znači da dokaz, osim što je logički korektan i besprekoran, sadrži i određeni estetski kvalitet. Unutrašnja lepota može biti podstaknuta dokazom koji sadrži najbolji put. Ako se radi o teoriji, to može biti u izboru polaznih aksioma i definicija. Ovde se radi o arhitekturi matematike, o umetnosti njenog komponovanja i njene izgradnje. Prava matematika uvek je lepa, a prava umetnost istinita. Svaki oblik ljudskog delovanja teži za *Istinom* i *Lepotom*. U glavi četiri biće detaljno obrađena Lagranžova teorema koju krasi lepota sa posledicama.

Prema Devideu, jedan stari francuski matematičar je rekao da matematička teorija ne može da se smatra savršenom pre nego što se učini veoma jasnom.[20] Ovom mišljenju dodaje se strogost koja odgovara potrebi našeg razuma i uma. Osim toga, strogost nije neprijatelj jednostavnosti i jasnoći. U mnogim primerima stroga metoda je jednostavna i lako razumljiva. U matematici čujemo stalni poziv *Tu je problem, potraži rešenje. Možeš ga naći čistim razmišljanjem.*[21]

Ako teoremu nazovemo problemom, a kraj dokaza rešenjem problema, put od problema do rešenja bi bio sam dokaz. Matematička teorija je potkrepljena nizom preciznih pravila, i kao takva trebalo bi da obezbedi dobro razumevanje. Ispostavilo se da čak 27% od svih ispitanih studenata ne razume dokaze delimično ili u potpunosti. Međutim, je matematika nauka koja daje odgovor na sva pitanja, kako su neki od ispitanika prokomentarisali, odakle onda dolazi problem nerazumevanja? Kako je predznanje studenata na zavidnom nivou, ostaje da utvrdimo da li problem potiče od prezentovanja teorije.

> Kejt Veber je sproveo istraživanje na Murray State University. Tradicionalni pristup kurseva više matematike podrazumeva paradigmu koja se može opisati kao „definicija – teorema – dokaz“ (DTD). Sastoji se iz niza profesorovih instrukcija, a studenti pasivno *uzimaju* beleške i materijal je raspoređen u strogom logičkom redosledu. Pojedini autori smatraju da takav *DTD pristup daje studentima pogrešnu sliku o prirodi matematike*; *da krije druge procese koji se koriste u matematičkom rezonovanju*; *da negira mogućnost korišćenja intuicije*.
>
> Kejt Veber je vršio istraživanje izučavanja matematike na univerzitetskom nivou. Prvo što je primetio bilo je pisanje definicija, primera, dokaza i povremenog crtanja dijagrama. Studenti su prepisivali sadržaj predavanja u sveske. Pitanja su retko postavljali i retko su učestvovali u diskusijama. Profesor je zadavao domaće i pomoću definicije sugerisao kako da se oni reše. Predavanje se razlikovalo od klasičnog jedino u težnji profesora da ilustruje razloge za dokaz, da bi studenti mogli samostalno da izvedu slične dokaze. *Prvo želim da učenici shvate logiku dokaza. Ideja vodilja jeste da napišemo šta imamo i gde smo se uputili*, rekao bi profesor. Ne može svaki dokaz da se izvede putem definicija, već se mora upotrebiti neka nejednakost ili već dokazana lema, što se dodatno pojača mogućnošu korišćenja i u drugim dokazima.

[19] Solomon Markus, 1974, *Matematička poetika*, Nolit, Beograd, str. 30.
[20] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika,* Školska knjiga, Zagreb, str. 68.
[21] Vladimir Devide, 1975, *Stara i nova matematika,* Školska knjiga, Zagreb, str. 70.

Profesor pretpostavke navodi na početku table i rezultat na dnu. Između zapisuje *raspakovane* definicije koje se odnose na pretpostavke, zatim dopisuje pomoćni alat koji će nas dovesti do cilja, crta sliku i objašnjava zašto taj put dokaza ima logičku strukturu. *Želim da budem veoma jasan u svome radu, da bi studenti mogli da obavljaju korake sami*. Profesor je tokom predavanja bio je rečit i retko je pravio greške. Takođe je bio popularan među studentima i dobijao je o svom radu visoke ocene na kraju kursa.

Studentu je važno da poseduje sintaksnu veštinu i da zna da raspakuje definicije i da ih logički upotrebljava za izgradnju dokaza. Ta veština sama po sebi nije dovoljna. Od studenta se zahteva strateško znanje da bi se setio poteza koji može da bude koristan za dokaz, uz promišljanje mogućih alternativa. Ovo strateško znanje studentima se predaje eksplicitno. Kognitivna struktura za rešavanje dokaza može da se upotpuni konceptom slike.

Profesor je naveo i nekoliko instrukcija za rad sa studentima:

- Ako je studentu analiza previše teška, biće frustriran i odustaće od kursa.
- Studenti moraju imati elementarno razumevanje logike da bi mogli da prate napredni matematički kurs. Razumevanje logike i naprednih matematičkih koncepata ne može se pojaviti tek tako.
- Postoje osnovne simboličke veštine (tehnika dokaza, rad sa nejednakostima) koje studenti treba da savladaju pre rešavanja težih problema.
- Studenti ne mogu intuitivno razumeti napredne matematičke koncepte bez dovoljnog iskustva i rada sa ovim konceptima na siboličkom nivou.

Istraživanje je pokazalo da studenti uče o naprednim matematičkim konceptima na najmanje tri kvalitativno različita načina.

1. Studenti prirodnog tipa koriste svoje postojeće intuitivno razumevanje matematičkih pojmova da daju smisao – određenju koncepta i tome pridružuju formalni rad.
2. Studenti formalnog tipa izgrađuju svoju intuiciju ispitivanjem logičke strukture koncepta.
3. Studenti proceduralnog tipa ispišu dokaz na osnovu praćenja procedure i kasnije daju smisao svojim tehnikama i konceptima. Kada napišu dokaz, ne razumeju zašto su važne napisane činjenice, ali su ispunili zadatak.

Istraživanja su pokazala da studenti mogu biti uspešni ili neuspešni uz korišćenje bilo kog od ova tri načina (Pinto & Tall, 1999; Weber, 2003). Tradicionalni stil DTD nije jedina pedagoška paradigma već postoje različite pedagoške tehnike. Studija učenja u učionici nepotpuna je bez istovremenog sagledavanja društvene i kulturne prakse, nastavnih materijala i postupaka profesora. Stil profesora iz prethodne studije pokazuje da on ima direktan uticaj na način na koji studenti pokušavaju da nauče materijale.[22]

David A. Yopp istraživao je ulogu dokaza u nastavi matematike. Jedan od načina da se profesori matematike uključe u razvoj kurikuluma jeste zahtev da učestvuju na panelima gde se diskutuje o nastavi matematike. Drugi je direktan pristup, odnosno da iznose mišljenje o nastavi. Tema ima mnoštvo, a jedna od njih može da bude iznošenje stavova o korisnosti dokaza, načinima dokazivanja i o nivou potrebe dokaza. Takve

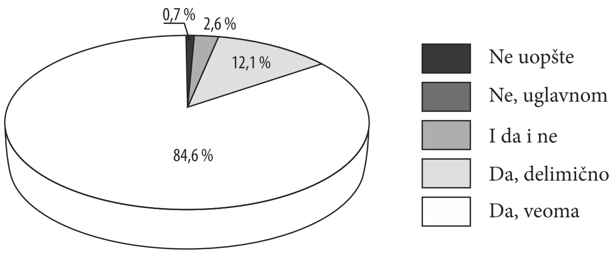
[22] Keith Weber, 2004, *Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course,* Journal of Mathematical Behavior 23 (2004) 115–133. http://www.journals.elsevier.com/the-journal-of-mathematical-behavior

diskusije otvaraju pitanja koja se prilikom pisanja naučnih tekstova *ne vide*. De Vilers (1999) postavlja pitanje o tome kakav je smisao dokaza unutar same matematike koji se potencijalno može koristiti u učionici? Analizira Belsa koji ističe

(i) verifikaciju ili opravdanje (utvrđivanje istine);
(ii) rasvetljavanje (objašnjenje zašto?) i
(iii) sistematizaciju (organizovanje u sistem aksioma i velikih rezultata).

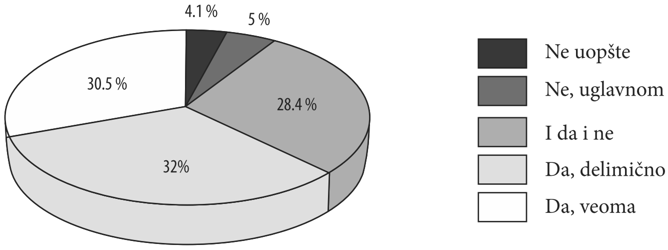
De Vilers utvrđivanje istine grupiše u *otkriće* (inovacija ili pronalazak novog rezultata), *komunikaciju* (prenos matematičkog znanja) i *intelektualni izazov* (realizacija i konstrukcija dokaza). Proces prema studentima može biti objašnjenje – otkriće – intelektualni izazov – verifikacija i sistematizacija. Šenfeld smatra da je to jasno razmišljanje, način komunikacije i razmene ideje sa drugima, način razmišljanja do dolaska na razumevanje.

Hana i Janke tvrde da postoji suštinska razlika između naučne matematike i nastave. Oni smatraju da intelektualni izazov treba ublažiti istraživanjem značenja definicija, pretpostavki i posledica i ugrađivanjem poznatih stvari u novi okvir i pogled iz sveže perspektive. Kako ističe Herš, *svrha dokaza u istraživanju jeste da ubedi, a u učionici da objasni*! Pri tome treba naći pravu meru, jer uloga dokazivanja u nastavi je izgradnja logičke veštine razmišljanja.[23]



Slika 14 – Dobro predavanje je razumljivo

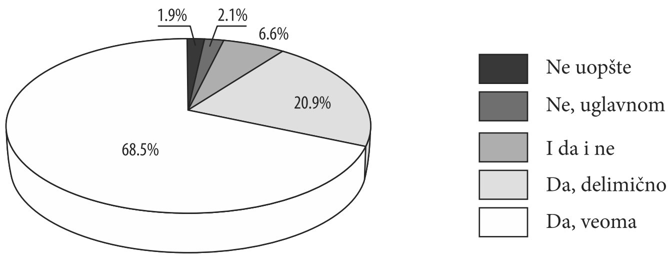
Sada dolazimo do važnog pitanja. *Šta je neophodno za dobro izvođenje nastave, dobro predavanje*? Prvi i najvažniji uslov jeste da profesor veoma dobro poznaje oblast koju predaje. To znači da zna sadržaj koji izlaže, da može da ga izloži bez korišćenja pripreme, ali da mora i pripremu imati nadohvat ruke.



Slika 15 – Dobar predavač animira većinu studenata

[23] David A. Yopp, *How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics*, Journal of Mathematical Behavior 30 (2011) 115–130.

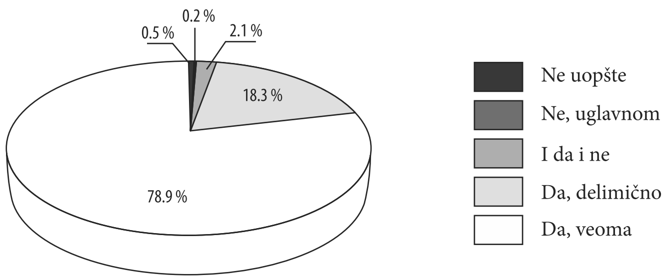
Studenti veoma dobro znaju da je predavanje dobro ako profesor nastoji da ga studenti razumeju. Međutim, i pored toga što će profesor izlagati jasnim jezikom i odgovarajućim tempom, to nije jedini faktor koji utiče na kvalitet predavanja. Sve veći broj istraživanja pokazuje da je današnja omladina pod velikim uticajem kompjutera i televizije.



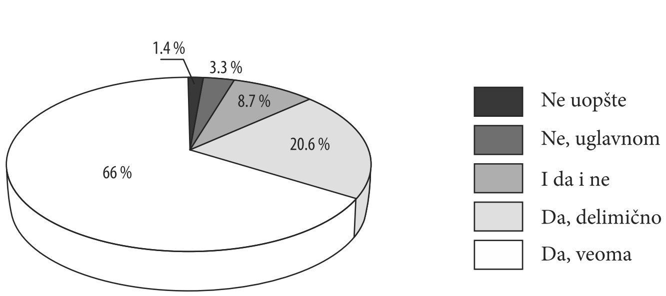
Slika 16 – Dobar predavač ima zanimljiv pristup

Za studente predavanje je dobro ukoliko profesora gradivo iznosi na zanimljiv način (89.4%). Pri tome bi trebalo da uključuje i animira studente (62.5%).

Interesantno je da se istakne da je predavanje dobro ako profesor posebno napomene da su određene oblasti važne (82.8%). Na slikam 17 i 18 predstavljeni su rezultati o povezanosti stava o dobrom predavanju sa primerima i primenama.



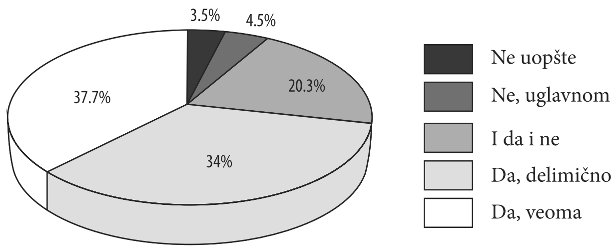
Slika 17 – Dobro predavanje sadrži primere



Slika 18 – Dobro predavanje objašnjava primenu

Dodatna grupa mladih matematičara se apsolutno slaže oko neophodnosti primera (96.6%), i uvida u primenljivost (91.5%) dok im ostali faktori znače u podjednakoj meri.

Uvođenje Bolonjske konvencije 2006. godine na fakultetima u Srbiji dovelo je do rekonstrukcije izvođenja nastave i kumuliranja ocene. Kao jedan od zahteva navodi se i aktivno učešće studenata u nastavi. Iako to od studenata iziskuje prisustvo na predavanjima, vežbama i drugim oblicima izvođenja nastave, oni to prepoznaju kao prednost u savladavanju gradiva.



Slika 19 – Dobro predavanje uključuje diskusiju studenata

Uključivanje studenata u različite diskusije naročito potpomaže da studenti interaktivno uče i da daju sebi više slobode da u direktnom dijalogu sa profesorom iznesu svoje kritičko mišljenje ili da razjasne moguće nejasnoće.

Studenti smatraju predavanje lošim ako profesor:

– prepisuje sadržinu na tablu (77%);
– koristi slajdove (62.3%);
– brzo prelazi gradivo (84.7%);
– dugo se posveti jednoj oblasti pa nema vremena za drugu (63.2%);
– u prvi plan ističe oblast kojom se sam bavi (73.1%).

Iako studenti žele da ih profesor animira, da bude zanimljiv i da uvodi nešto novo, korišćenje slajdova kao vid prezentacije matematičke teorije studenti i dalje ne vide kao dobru ideju. Neumerenost u posvećenosti bilo vremenu bilo gradivu, takođe se neće dopasti studentima. Zanimljivo je da su na stav: predavanje je loše ako profesor matematike *predavanje prilagodi isključivo ispitu*, studenti različito odgovorili. To upućuje na zaključak da su studenti preovlađujuće zainteresovani da polože ispit, u poređenju sa sticanjem znanja. O tome može da se obavi posebno istraživanje. Ovu činjenicu potvrdila je i dodatna grupa studenata matematičkog fakulteta! Bilo bi veoma interesantno obraditi temu motivacije u nastavi matematike.

Na pitanje o tome koje bi promene unapredile nastavu matematike, dobili smo veliki broj raznovrsnih odgovora. Osim želje za animiranjem, praktičnim primerima i smanjenjem obima i konkretizacijom gradiva, interesantno je da se veliki broj studenata izjasnio da bi želeo da se poveća broj časova. Time bi se tempo predavanja usporio, a studenti bi imali više vremena za utvrđivanje gradiva. Pored toga što žele da budu uključeni u diskusije i aktivniji rad na času, jedan broj njih je u upitniku čak predložilo rešenje tog problema. Naime, podela studenata na manje grupe bi po njihovom mišljenju mogla značajno da unapredi nastavu.

C. Nastavna sredstva

Studenti koji su imali nastavu uz korišćenje računara (interaktivni pristup) postigli su bolji rezultat u poređenju sa studentima koji su imali nastavu na tradicionalni način. Ovo govori o tome da interaktivni pristup može stimulativno da utiče na studente da brže i bolje razumeju u poređenju sa tradicionalnim metodama. Razlog može biti bolja vizuelna prezentacija, koja im deluje zanimljivo pa lakše apsorbuju gradivo. Računari su važni i zbog toga što živimo u tehnološkom dobu i oni se koriste za različite oblike učenja.[24]

Grupa profesora istraživala je program za učenje *Learning Units*, odnosno *Interactive Platform for Learning Calculus* (PIAC). Zaključili su da informacione i komunikacione tehnologije mogu da služe kao alat za podršku učenju. Da bi se računarski programi koristili, neophodne su odgovarajuće smernice i aktivnosti da bi se potpuno podržao proces. To je novi način učenja, uz inovativna nastavna sredstva. Takav nastavni dizajn ima četiri elementa:

1. *Sadržaj* koji obuhvata detaljan prikaz matematičkih tema. Uključuje koncepte, procedure, primere praćene odgovarajućim kontekstom.
2. *Tehnološki resursi* koji predstavljaju interaktivna učila, koja služe kao pomoć i sadrže tekst, slike, skripte, veb stranice, video, softvere i druge resurse.
3. *Aktivno učenje* pod koordinacijom nastavnika.
4. *Rešenja* za savladavanje problema sa informacijama o određenim postupcima za rešavanje problema.

Didaktička strategija uključuje korišćenje elementarne matematike i istorijski kontekst. Pored tradicionalnih elemenata kao što su kalkulus koncepti, procedure, primeri, teoreme i dokazi, ovaj pristup uključuje anagrame, matematičke igre, istorijske probleme, priče i zagonetke. Za učenje se koriste različite strategije poput studije slučaja, izgradnje modela, predstavljanja i uopštavanja. Izgradnja takvih modela zasnovana je na više elemenata.

(i) *Kompetentnost*, odnosno kognitivne sposobnosti za određenu matematičku oblast, koje obuhvataju veštine, sposobnosti i koncepte. Kod kompetentnosti profesori i studenti znaju postupke i procese potrebne da se postignu ciljevi učenja i kako da se stečeno znanje primeni na rešavanje matematičkih problema u realnom – fizičkom svetu, kako da se prilagođavaju novim situacijama i kako da uspostave relaciju sa drugim matematičkim konceptima.

(ii) *Istorijska prezentacija*. Daje se uvod o nastanku i razvoju matematičkog koncepta. Takav pristup omogućava uvid iz originalne perspektive i iskustvo u učenju (što koristi nastavi). Ovde se uključuje istorijski pogled, rasvetljava se povod za razvoj takvog matematičkog koncepta i opisuju se ljudi koji su odigrali važnu ulogu u njihovom razvoju.

(iii) *Pozadina* obuhvata dodatne materijale koji su bitni za razumevanje pojmova u analizi. Mogu biti iz raznih oblasti matematike, kao što su algebra, geometrija trigonometrija, analitička geometrija i dr.

(iv) *Sadržaj* obuhvata informacije o matematičkim temama. Uključuje definicije, matematičke procedure, teoreme, leme, dokaze, primere, kontekst, pouke. Uz

[24] Aminah Ahmada, Tan Sin Yinb, Loh Yue Fangc, Yap Hui Yend, Khoh Wee Howe, *Incorporating Multimedia as a Tool into Mathematics Education: A Case Study on Diploma Students in Multimedia University*, International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER 2010). Elsevier Ltd.

to, neophodna je izgradnja iterativnih šema da se povežu definicije, teoreme, dokazi i primeri, kao i identifikacija osnovnih komponenti i povezivanje ideja.

(v) *Nastavna sredstva za podršku*. Ovde je posebno važno da studenti poseduju računare i softvere. Interakcija je problem uz dodatne sposobnosti, da ih koriste, da manipulišu algoritmima i da analiziraju podatke.

(vi) *Aktivnosti studenata* orijentisane su ka sticanju znanja, na analizu, tumačenje, konceptualno organizovanje, komunikaciju i sistematizaciju. U modelu učenja svaki student ima svoj tempo učenja. Identifikuje se prethodno znanje, dalji razvoj i primena koncepata, jačanje i obnavljanje znanja.

(vii) *Rešenja* za svaku od aktivnosti u procesu učenja.

(viii) *Povratne informacije* o uspešnosti rešavanja zadataka.

(ix) *Evaluacija*, vrednovanje, pregledanje domaćih zadataka, ocenjivanje.

Ovakva vrsta učenja treba da bude dostupna u svakom trenutku, ali ne mora da se zasniva samo na računarima i softveru. Važno je da studenti imaju ideju šta i kako će da uče.[25]

Napomena. U pojedinim situacijama studenti treba da koriste računare u smislu da se programski provere neki rezultati i da se nacrta grafik, što ih ohrabruje u ispitivanju funkcija, rešavanju jednačina, nejednačina i dr. Važno je napomenuti da se na primer u Francuskoj matematika predaje na tradicionalan način – tabla i kreda.

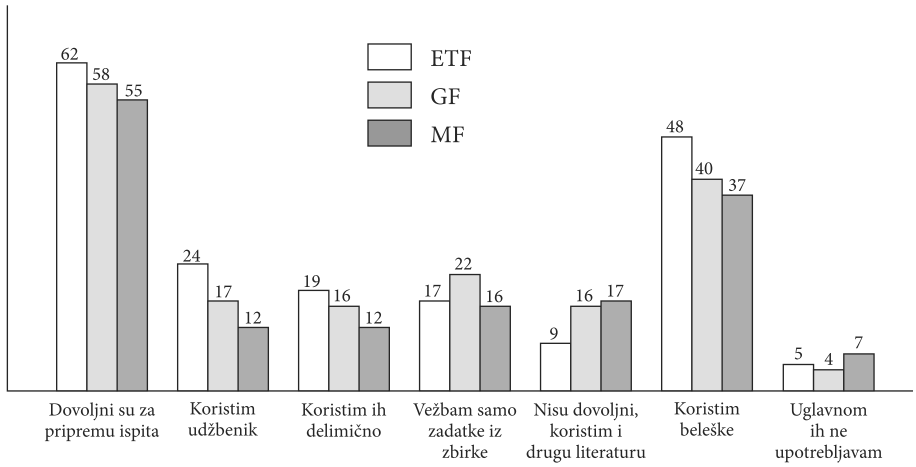
Udžbenici u nastavi treba da doprinose lakšem savladavanju pojmova i oblasti. Da li je tako u praksi? Vrlo često, udžbenici napisani uz oskudno poznavanje matematike i slabo razumevanje, mogu učiniti veliku štetu studentima.

Tabela 5 – Korišćenje udžbenika, zbirki i beleški

	Ukupno	**Fakultet**		
		ETF	GF	MašF
n	429	133	183	113
Dovoljni su za pripremu ispita	58.5%	62	58	55
Koristim udžbenik	17.9%	24	17	12
Koristim ih delimično	15.9%	19	16	12
Vežbam samo zadatke iz zbirke	18.9%	17	22	16
Nisu dovoljni, koristim i drugu literaturu	14.2%	9	16	17
Koristim beleške	41.7%	48	40	37
Uglavnom ih ne upotrebljavam	5.4%	5	4	7

Na pitanje o korišćenju udžbenika, zbirki i beleški, studenti su ubedljivo odgovorili da im je to dovoljno za pripremanje ispita (58.5%). Slične odgovore daje i dodatna grupa studenata matematike. Može se reći da studenti koriste literaturu isključivo vezanu za pripremanje ispita. Korišćenje beleški ubedljivo dominira. Ovde se postavlja ozbiljno pitanje o zatvorenosti i uskom pogledu na nastavu. Naime, to je u direktnoj korelaciji

[25] María Andrade-Aréchiga, Gilberto López, Gabriel López-Morteo, *Assessing effectiveness of learning units under the teaching unit model in an undergraduate mathematics course,* Computers & Education 59 (2012) 594–606, Elsevier Ltd.



Slika 20 – Korišćenje udžbenika, zbirki i beleški

sa činjenicom da se na katedrama matematike ne preporučuje dodatna literatura, osim udžbenika čiji pisci su sami predavači. Uz veliki napor je na ETF-u pronađen jedan izuzetak. Kao dodatna literatura predložen je jedino Demidovič.

Osim pitanja o zatvorenosti nastave i usmeravanju samo na učenje iz udžbenika, naše istraživanje je pokazalo da se računari u nastavi matematike većinom ni ne koriste (52.2%). Na pitanje o tome koji se softver koristi u nastavi matematike, u najvećem broju odgovora (nešto više od četvrtine ispitanika, a oko dve trećine onih koji su dali odgovor) naveden je Matlab.

Da je Matlab koristan u rešavanju matematičkih problema potvrdila je dodatna grupa u kojoj više od 50% ispitanika koristi ovaj program. U razgovoru sa profesorima, i proučavanjem kurikuluma pojedinih predmeta, primetili smo da dodatna grupa ima u okviru nastave iz predmeta Uvod u numeričku analizu kratku obuku za rad u Matlabu, koja se odnosi na probleme interpolacije i na rešavanje sistema jednačina. Kako ova grupa ne smatra da upotrebom računara matematika gubi na značaju, može nam poslužiti kao dobar primer unapređivanja nastave. Po iskazima studenata, van fakulteta Matlab i Mathematica koriste se u jednakoj meri.

Još jedan bitan rezultat privlači našu pažnju. Danas gotovo da nema mladih ljudi koji ne koriste internet za svoje potrebe, bilo da je to pretraga odgovarajućih informacija ili komunikacija putem elektronske pošte i društvenih mreža. Međutim, više od polovine (51.7%) se izjasnilo da retko, skoro nikad, na internetu ne pretražuju stranu literaturu. Treba napomenuti da je pretraga stranih knjiga i časopisa u bazama poput Cobson-a omogućena studentima državnih univerziteta, a koji su naši ispitanici.

Interesantno bi bilo izvršiti ispitivanje koliko su studenti uopšte upoznati sa mogućnostima korišćenja računara a zatim, posle određenog vremena, proveriti da li se korišćenje ovakvih baza povećalo.

Pisanje udžbenika zavisi od nastavnih planova i programa, ali pre svega od znanja i ličnih sposobnosti nastavnika i njegove posvećenosti pisanju. Broj udžbenika i knjiga iz oblasti matematičke analize veoma je skroman. Uočava se da studenti koriste isključivo udžbenik nastavnika koji predaje, ukoliko postoji. Nema preporučene dodatne literature, osim retkih izuzetaka. Pogledi na matematičku literaturu na taj način su ograničeni. Dodatni rad može biti posvećen analizi literature koja se koristi u nastavi, što ovde nije cilj.

3.1.4. Diskusija nalaza

Za poboljšanje nastave matematike studenti predlažu aktivniji rad profesora; animiranje studenata, bolju literaturu; da se predavanja izvode na tabli; da se navode primeri primene; da se smanji program itd. [26]

Modernizacija tehnologije povlači za sobom i hitnu modernizaciju nastave fundamentalnih nauka (matematike i egzaktnih prirodnih nauka). Rešavanje problem nastave u praksi nije tako jednostavno. Uglavnom postoje tri mogućnosti, a nijednu od njih ne smemo zanemariti. Prva: da se deo obimnog nastavnog materijala odbaci; druga: da se delovi nastavnog programa prošire novim oblastima; i treća: da se izmene metode izlaganja nastavnog materijala.

Matematičari uglavnom smatraju da se nastava neće unaprediti smanjenjem planova i programa, iako predviđeni broj sati nije dovoljan za obradu gradiva. Takođe je teško dodavati nove oblasti bez izvesnih ustupaka u smislu smanjenja. Do pomirenja ovih suprotstavljenih stavova može da dovede progres u nastavnim metodama. Na primer, na Elektrotehničkom fakultetu dobro osmišljeno predavanje iz Laplasovih transformacija može da uštedi vreme za rešavanje problema iz teorije običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Međutim, ne treba biti naivan i verovati da se takvim izlaganjem može studentu pružiti sve što mu je potrebno u inženjerskoj praksi. Takođe se može uvežbati tehnika provere rešenja zadataka na računaru, korišćenjem softvera kao što su Mathematica, Matlab, Wolfram, Derive, Geogebra što je određeni broj studenata i napisao u svojim odgovorima.

Sve su to dobra pomoćna sredstva za poboljšanje nastavnog procesa. Međutim, ključni element dobre nastave jeste *učenje kako se razmišlja* ili *izlaganje materijala uz korišćenje primera koji podstiču mišljenje*!

Na osnovu prethodne empirijske analize svih rezultata upitnika možemo doneti zaključke o prihvatanju ili odbacivanju posebnih hipoteza, a zatim i generalne hipoteze.

Na osnovu nalaza o tome da studenti vole matematiku, odnosno da se za stav *voleo sam matematiku u srednjoj školi* izjasnilo 70.1%, a da je stav *volim matematiku na fakul-*

[26] U Prilogu 3 mogu se videti i drugi predlozi studenata.

tetu potvrdilo 54.1% (i da i ne odgovorilo je 29.7%) može se zaključiti da je potvrđena hipoteza da *studenti tehničkih fakulteta imaju pozitivan odnos prema matematici*.

Na pitanje šta je za vas matematika? Većina studenata tehničkih fakulteta je odgovorila: primenjena nauka. Uzimajući u obzir da su svesni činjenice da matematika olakšava izučavanje/polaganje stručnih predmeta (76.2%) može da se zaključi da je prihvaćena hipoteza da *studenti tehničkih fakulteta matematici prevashodno dodeljuju upotrebnu vrednost*.

Najvažniji uslov za dobro predavanje jeste da *profesor veoma dobro poznaje oblast koju izlaže studentima*. To znači da oblast poznaje više od onoga što predaje i da može da je sagleda u širem kontekstu, u odnosu na druge oblasti i primene. Empirijsko istraživanje ubedljivo pokazuje da je dobro predavanje *razumljivo*, sa odgovorom *da* 96.7% (da, veoma i da, delimično); predavanje je dobro ako profesor *nastoji da ga studenti razumeju* (89.4%), da *animira* većinu studenata (62.5%) i da *uključuje studente u diskusiju* (71.7%). Ove činjenice potvrđuju hipotezu: *Predavanje nastavnika je dobro ako je razumljivo, razgovetno i ukoliko motiviše studente da u njemu učestvuju*.

Empirijsko istraživanje rasvetljava činjenicu da studenti koriste beleške i zbirke zadataka jer su im najpotrebniji za pripremanje ispita. Ovim je potvrđena hipoteza: *Matematička literatura je važno nastavno sredstvo, ali se, osim zbirki zadataka koje služe za neposredno pripremanje ispita, ne koristi.*

Preporuka autora jeste da treba dodatno upućivati studente na mogućnost učenja iz raznolike literature, koja ih može uputiti na konkretne primene u oblasti kojom se bave. Tako bi se postiglo da studenti daju apstraktnoj teoriji veći značaj i da objedine stečeno znanje, da bi u rukama imali najkvalitetniji „alat“ za rad. Takođe treba dodatno uticati na profesorski kadar da se više posvete interaktivnom radu jer se pokazalo da na studente to deluje podsticajno.

3.1.5. Zaključak i preporuke

Nastava se može poboljšati, ali ne treba biti preveliki optimista. Ne mogu se očekivati čuda, jer još niko nije došao do novog genijalnog metoda nastave. Matematika je teška nauka, uči se pojedinačno a mogućnosti za poboljšanje nastave su ograničene.

Prvo, potrebno je pažljivo izabrati i precizno opisati nastavni sadržaj koji se izučava. Takav opis je od velikog značaja i vrednosti a izuzetno teško ga je postići. Veliki deo rada treba uložiti na pripremu kursa. To se radi zbog toga što većina studenata lakše studira uz pomoć predavanja u odnosu na učenje direktno iz udžbenika. Za nastavu je potrebno da se profesor pripremi tako dobro da je u stanju da drži predavanje uz povremeni pogled na beleške. Predavači osmišljavaju, pripremaju i dostavljaju materijale, a studenti slušaju nastavu i pokušavaju da apsorbuju ideje. Da li je dovoljna samo imitacija znanja iz predmeta koji student pohađa? Takav student verovatno je pažljivo naučio kako se sprovode procedure i algoritmi ali još uvek nema pravilno razumevanje same matematike. Pored toga, neophodno je da studenti razumeju i neku drugu temu, na primer iz inženjerstva, da se pripremaju za samostalan rad i misle svojom glavom. Posvećenost održavanju standarda postiže se i održavanjem zahtevnih kurseva za bolje studente.

Šta treba da se uči? Šta sadržaj kurseva matematike treba da bude? Ovo zavisi od tipa studenata. Ako govorimo uopšte, onda je studentima kojima matematika ne utiče direktno na njihovu karijeru u budućnosti potrebno manji nivo matematike na isti način na koji nam je potrebno razumevanje politike, ekonomije i prve pomoći za naš svakodnevni život. To je tzv. *meka matematika* koja obuhvata: spisak tipičnih problema, koji se mogu rešiti korišćenjem matematike, pametno korišćenje računara, korišćenje tabela i odlučivanje između alternativa, određeno razumevanje dokaza i logike, elementi teorije brojeva, teme iz istorije matematike, malo programiranja, elemente *kalkulusa*, i dr.

Sa druge strane *kalkulus* je centralni deo matematike i fizike koji proučavaju studenti tehničkih fakulteta. Tu su metode nalaženja maksimuma i minimuma, pronalaženje površine, zapremine i dr. Tu se uključuje i vektorski račun, linearna algebra, diferencijalne jednačine, teorija transformacija, kompleksna analiza, numeričke metode, statistika, operaciona istraživanja i dr. Šteta je za studenti ove *tvrde matematike* da ne prouče *meku matematiku*, ali u praksi to se retko čini. Tako bi studentui razumeli ukupnu strukturu, pozadinu i istoriju matematike. Za inženjere nije pametno da im matematika bude samo alat koji koriste kad im je potreban. Matematika za inženjerske nauke treba da sadrži visok stepen strogosti. Ta strogost podrazumeva da koriste i dokazuju teoreme, ali i da pažljivo proveravaju uslove pod kojima ona važi. Kontekst u kome se sprovode inženjerskie aktivnosti je matematički. Sposobnost da potražite primer u knjizi i primenite ga na konkretan slučaj je veoma korisna veština. I učenje algoritama je važna veština. Pretvoriti izvestan problem u matematički je veoma važna veština koja treba da se uči. Uz sve to malo nastave istorije matematike. U suštini potreban je detaljan, svestan i pažljiv rad za dizajniranje kursa. Potrebno je da se odluči koji delovi su važni i interesantni za studente i njihove potrebe. Uz to važno je da se odredi redosled tema i problema koji će biti izloženi.

Primenjena matematika je od vitalnog značaja u mnogim oblastima. Traži se poznavanje statističkih metoda i metoda matematičkog modeliranja. Ideje i tehnike koje se nauče u jednoj temi i mogu da se prenose na više slučajeva.

3.2. ANALIZA TESTA

Opšti stavovi o odnosu apstraktne teorije i primene vrlo su jasni iz analize upitnika. Međutim, postavlja se pitanje da li studenti, iako uočavaju veliku primenu i matematiku klasifikuju kao primenjenu nauku, znaju stečeno znanje i da primene. U cilju provere odgovora na ovo pitanje za studente je pripremljen test iz matematičke analize.

Cilj istraživanja i hipoteze. Cilj ovog istraživanja jeste da se utvrdi da li su studenti osposobljeni da rešavaju jednostavne probleme, koju vrstu zadataka uspešnije mogu da reše i šta ih u tome podstiče. Ovo će biti ispitano pomoću tri posebne hipoteze,

(i) Uspešnost u rešavanju zadataka ne zavisi od vrste fakulteta (ETF, GF, MašF).

(ii) Vizuelna prezentacija zadataka povećava uspešnost rešavanja problema.

(iii) Studenti nisu stekli veštinu da znanje iz matematičke analize primene u rešavanju zadataka i problema.

Ove tri hipoteze testiraćemo kvantitativnom analizom broja osvojenih poena na testu.

Instrument. Studenti su imali na raspolaganju 45 minuta da urade test koji se sastoji iz 9 zadataka iz matematičke analize, a koji obuhvataju nekoliko celina: granični procesi, diferencijalni račun, integralni račun, Tejlorov polinom. Kompletan test može se videti iz Prilogu 2. Zadaci su od studenata zahtevali različite tipove odgovora: zaokruživanje (2 zadatka), dopunjavanje (1 zadatak), zaokruživanje i odgovor (1 zadatak), obrazloženje (2 zadatka), rešavanje sa konkretnim rezultatima (3 zadatka).

Iako se test sastoji od 9 zadataka, bilo je moguće osvojiti maksimalno 11 poena. Svaki tačan odgovor donosio je jedan poen, s tim da se na zadatku 2 moglo osvojiti 3 poena jer se on sastoji iz 3 dela.

Uzorak. U ispitivanju je učestvovalo ukupno 450 studenata sa univerziteta u Beogradu, Novom Sadu i Nišu. Kao i u slučaju upitnika, ispitivačku grupu činili su studenti elektrotehnike (133), građevine (204) i mašinstva (113). Vremenski period sprovođenja testa isti je kao i u slučaju upitnika.

Posle rešavanja testa, u bazi podataka smo imali rezultate za 450 studenta, ali i za 114 studenata Matematičkog fakulteta, koji čine dodatnu grupu. Statistička analiza podataka izvršena je u programskom paketu SPSS.

Obrada podataka. Programski paket SPSS jedan je od često korišćenih paketa za statističku analizu podataka. Prva verzija ovog programa pojavila se 1968. godine i tada je skraćenica SPSS značila Statistički paket za društvene nauke (*Statistical Package for the Social Scienciens*). Kasnije, sveopštom upotrebom programa u raznim oblastima, akronim SPSS dobio je drugo značenje (*Statistical Paroduct ande Service Solutions*). Ovaj softver u osnovi uključuje mogućnost da se računaju:

– deskriptivne statistike, tabele, frekvencije,

– dvoparametarske statistike: očekivanja, t-testovi, ANOVA, korelacije, neparametarski testovi,
– predviđanja numeričkih ishoda: linearna regresija,
– predviđanja sa identifikovanim grupama: faktor analiza, klaster analiza.

Populaciju, odnosno glavni skup koji posmatramo, čini pomenutih 450 studenta tehničkih fakulteta. Numerička karakteristika elemenata populacije, obeležje, jeste broj osvojenih poena na testu iz matematike. Za posmatranu populaciju prvo će biti izdvojene tabele frekvencija. Svaka tabela sadržaće frekvenciju odgovarajućeg broja poena, tj. broj studenata koji su osvojili posmatrani broj poena na testu. Zatim, relativnu frekvenciju koja predstavlja količnik broja studenata sa odgovarajućim brojem poena i ukupnog broja ispitanika. Kumulativna frekvencija se dobija sabiranjem frekvnecija ishoda koji posmatramo i svih frekvencija ishoda koji su mu prethodili. Na primer u našem slučaju, ako posmatramo broj osvojenih poena 3, onda bi kumulativna frekvencija predstavljala ukupan broj studenata koji su na testu osvojili 0, 1, 2 i 3 poena. Kumulativne relativne frekvencije se dobijaju kumuliranjem relativnih frekvencija ili količnikom kumulativnih frekvencija i ukupnog broja studenata. Množenjem relativnih frekvencija sa 100, dobijamo procentualno učešće odgovarajućeg obeležja u rezultatu. Ovo nam omogućava da na jednostavan način formiramo i grafički prikaz rezultata pomoću histograma raspodele obeležja.

Za dokazivanje gorenavedenih hipoteza testiraćemo rezultate različitim metodama. Radi utvrđivanja da li postoji, ili ne, razlika u postignućima među fakultetima, koristićemo metod analize varijanse (kraće ANOVA). Preciznije, ovo bi bila analiza odstupanja među uzoračkim sredinama. Postupak se sastoji u tome da se ukupna varijansa za posmatrani skup podataka podeli na komponente. Svaka od komponenti se odnosi na određeni izvor varijacije. Kako je već rečeno, poređenje rezultata želimo da izvedemo po tipovima fakulteta, zato se ova vrsta uticaja naziva faktor, a vrsta fakulteta (ETF, GF, MašF) su nivoi faktora. S obzirom na to da postoji samo jedan faktor, ovakva analiza naziva se jednofaktorska ANOVA. Ukupna varijacija, čiju ćemo dekompoziciju izvršiti, predstavlja ukupnu sumu kvadrata odstupanja realizovanih vrednosti od uzoračke sredine populacije (koja predstavlja aritmetičku sredinu svih podataka).

Dekompoziciju varijacije kod jednofaktorske analize varijansi sprovodimo pomoću dve komponente: suma kvadrata odstupanja između grupa (fakulteta) i suma kvadrata odstupanja unutar grupa. Suma kvadrata odstupanja unutar grupa naziva se i rezidualna suma kvadrata ili greška. Količnik sume kvadrata sa odgovarajućim brojem stepeni slobode daje sredinu kvadrata. Ove sredine kvadrata nam služe za određivanje F-količnika, kojim testiramo hipotezu da ne postoji razlika između grupa. Ovaj tip hipoteze se na osnovu rezultata testa prihvata ili odbacuje. Znajući vrednost test-statistike i prag značajnosti testa, donosimo odluku. Vrednost test statistike dobijamo iz rezultata, a prag značajnosti testa, koji predstavlja verovatnoću da odbacimo nultu hipotezu kada je ona tačna, biramo pre testa i uglavnom ćemo koristiti da je ta vrednost 0.05.

Veliki broj programa za obradu podataka odluku donosi na osnovu p-vrednosti testa. Ova p-vrednost testa je najmanji nivo značajnosti sa kojim se nulta hipoteza može odbaciti na osnovu podataka iz uzorka. Ukoliko je p-vrednost manja od praga značajnosti, nultu hipotezu odbacujemo, u drugim slučajevima je prihvatamo. Ukoliko rezultat pokaže da se uzoračke sredine značajno razlikuju od grupe do grupe, možemo ispitati koja se to grupa razlikuje od ostalih. U paketu SPSS za to ispitivanje koristi se test višestrukog opsega. Ovaj test se zasniva na Fišerovom testu najmanjih značajnih razlika. Za dati nivo značajnosti određuje se nivo mogućeg odstupanja. Poređenjem sa realizovanim vrednostima utvrđuje se da li je razlika među sredinama značajna ili ne.

Drugi deo analize testa odnosi se na učestalost u rešavanju konkretnih zadataka. Tako smo za svaki zadatak ponaosob sproveli istraživanje o frekvencijama, relativnim i kumulativnim, kako bismo imali uvid u to koje zadatke su studenti lakše rešavali. Neke od rezultata smo grupisali.

Posebna analiza je izvršena za uspešnost rešavanja zadataka u vezi sa diferencijalnim računom, sa rešavanjem teorijskih zadataka i zadataka 2, jer se on sastoji iz tri dela. Kod ispitivanja uspešnosti rešavanja pojedinih zadataka može se takođe proveriti i da li postoji zavisnost između vrste fakulteta i uspešnosti izrade zadatka. To se može sprovesti pomoću χ^2-testa nezavisnosti. Testira se nulta hipoteza o nezavisnosti nasuprot alternativi da postoji zavisnost između tipa fakulteta i odgovora. Velike vrednosti test statistike, odnosno male vrednosti p-vrednosti testa, navode nas na odbacivanje nulte hipoteze. Inače, hipotezu o nezavisnosti prihvatamo. U sledećim odeljcima daćemo detaljniju analizu dobijenih rezultata.

3.2.1. Računanje i rezonovanje

Današnji studenti ne znaju više da računaju. To je zamerka koju sadašnjoj nastavi matematike često upućuju fizičari i inženjeri. Treba priznati da je ona opravdana. Kad vidimo studenta druge ili treće godine (tehničkog fakulteta) kako se čitavih deset minuta muči vršeći neku smenu promenljive ili parcijalne integracije, to deluje veoma neprijatno.[27] Dijedone dodaje da je iskustvo vezano za predavanje, recimo matematičkih metoda u fizici, pokazalo da je *matematičarima više stalo do strogosti nego do efikasnosti*. Na većini fakulteta nije proisteklo skoro ništa više od nastave apstraktne analize, jedva zaslađene primenama, koja je svakako veći naglasak stavljala na principe nego na račune.[28]

[27] Dragoslav S. Mitrinović, 1988, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima* 3, Građevinska knjiga, Beograd. Dodatak: Dijedoneovo mišljenje o programu matematike za prvi stepen studija, str. 279–283.

[28] Dragoslav S. Mitrinović, 1988, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima* 3, Građevinska knjiga, Beograd. Dodatak: Dijedoneovo mišljenje o programu matematike za prvi stepen studija, str. 279–283.

Ove činjenice govore u prilog mišljenju da je najpre potrebno „znati računanje“ pa tek onda polagati pravo na pristup modernoj matematičkoj analizi. Ovim se odmah otvara pitanje A što znači „računati“? Izraz računanje (calculus) podrazumeva algebarski i približni račun. Algebarski račun karakteriše postupak čiji cilj je dobijanje jednakosti, a prototip predstavljaju formule za rešavanje jednačina. *Formule* imaju fascinantno dejstvo na korisnike matematike. *Koliko sam puta imao posla sa inženjerom ili fizičarem za koga je matematika trebalo da bude neka vrsta automatskog isporučioca formula za rešavanje problema,* kaže Dijedone.[29]

Tri međuzavisne komponente čine karakterističan sklop matematičkog uma: prijem matematičkih informacija, njihovu obradu i pamćenje matematičkih relacija i metoda rešavanja problema. Ključna komponenta je obrada matematičkih informacija koja, između ostalog, obuhvata:

1. logičko mišljenje primenjeno na kvantitativne i spacijalne odnose, brojeve i simbole;
2. brzu generalizaciju matematičkih simbola, relacija i operacija;
3. težnju ka jasnim jednostavnim i racionalnim rešenjima.

Postoje tri vrste matematičara koji se suštinski razlikuju u načinu mišljenja. U prvoj grupi su analitički umovi koje odlikuju logičko-matematičke sposobnosti i nešto slabiji prostorni faktor sposobnosti. Drugi matematičari rezonuju pre svega geometrijski i kod njih je dominantan spacijalni faktor. Naravno, postoje i harmonični matematički umovi sa ujednačenim sposobnostima. Geometrijski način razmišljanja je ređi i često neotkriven. Treba imati na umu da mnogi izuzetno nadareni pojedinci lako greše u brzom računanju jer su usmereni na planiranje rešavanja problema, a ne na tačnost u računu.[30]

Smisao za diferencijalni i integralni račun – *infinitezimalni račun*, odnosno za matematičku analizu, podrazumeva neophodnost apstraktnog mišljenja. Treba naučiti razlike između onoga što je *veliko* i *malo*, *veće* ili *manje*. To je veština rukovanja nejednakostima. Time se stiče izvesna *intuitivna* ideja o operacijama infinitezimalnog računa. Da bi se stiglo do ovog stadijuma, neophodna je sposobnost da se daju precizne definicije pojmova koji se koriste i da se one upotrebe za građenje korektnih dokaza.

Kao što vidimo, algebarski račun je prelazna faza u razvoju jedne matematičke teorije koja se ranije ili kasnije u izučavanju zamenjuje rasuđivanjem. Nastava matematike često je zapostavila pojmovna rasuđivanja. Moderni okvir obeležio je zamenu računskog rasuđivanja sa pojmovnim rasuđivanjem. Ovaj fenomen je jedan od opštih zakona razvoja matematike. Međutim, računanje je još uvek veoma značajno. Računanje danas, preko

[29] Dragoslav S. Mitrinović, 1988, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima* 3, Građevinska knjiga, Beograd. Dodatak: Dijedoneovo mišljenje o programu matematike za prvi stepen studija, str. 279–283.

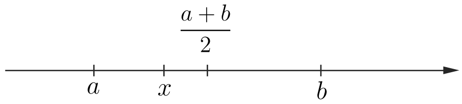
[30] Mirjana Repac, 2012, *Matematički daroviti u srednjoškolskoj klupi: kako vide sebe i svoju školu*? U knjizi: Ana Altaras Dimitrijević (priredila), *Darovitost: pogledi i ogledi,* Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, str. 187-188.

primera, vrlo lepo ilustruje datu teoriju i približava je tehnikama primene. S druge strane, *pravi* račun – približni račun, kamen je temeljac infinitezimalne analize. On se javlja u primeni, prilikom merenja raznih veličina, ili kada se procenjuje greška.

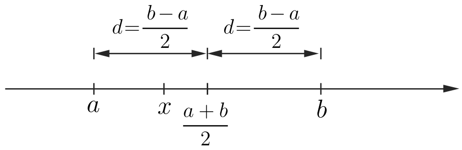
Na primer, x pripada intervalu (a,b) zapisujemo sa

$$a < x < b \quad \text{ili,} \quad \left|\frac{a+b}{2} - x\right| < \frac{b-a}{2}, \quad a < b.$$

Kako ovu činjenicu razumemo? Neka je dat interval (a,b) koji možemo i geometrijski predstaviti.



Sredina intervala je tačno $\dfrac{a+b}{2}$. Ako x pripada intervalu (a,b), tada je x baš na sredini, levo od sredine ili desno od sredine. Dužina od sredine do tačke a je $\dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2}$. Takođe, dužina od sredine intervala (a,b) do tačke b je $b - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$

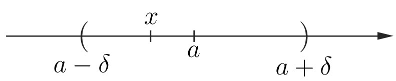


To znači, ako je x levo ili desno od sredine razlika $\dfrac{a+b}{2} - x < \dfrac{b-a}{2}$ ili $x - \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b-a}{2}$, što se zajedno može zapisati

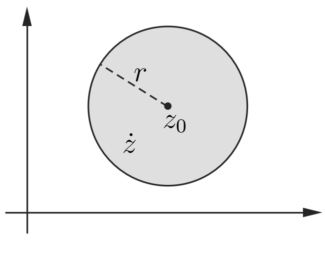
$$\left|\frac{a+b}{2} - x\right| < \frac{b-a}{2}, \quad a < b.$$

Naravno da se do ovog rezultata može doći ekvivalentnim transformacijama, ali za razumevanje pogodna je i geometrijska – *vizuelna* interpretacija, gde se *vidi* da je x u okolini tačke $\dfrac{a+b}{2}$.

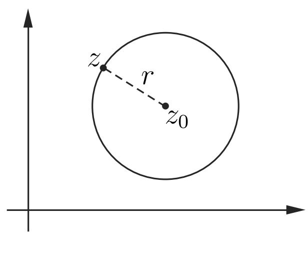
Po analogiji, studenti onda bolje razumeju pojmove iz definicije granične vrednosti funkcije, na primer $|x-a| < \delta, \quad \text{ili} \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$



ili definiciju kruga u kompleksnoj ravni $|z-z_0| < r$ ili jednačinu kružnice $|z-z_0| = r$.



Slika 21 – Krug



Slika 22 – Kružnica

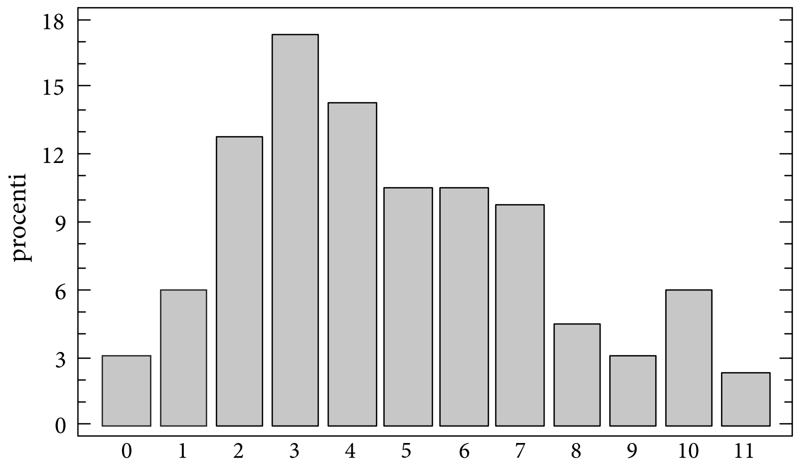
3.2.2. Analiza rešavanja zadataka

Devet zadataka rešavalo je 450 studenata Elektrotehničkog, Građevinskog i Mašinskog fakulteta u Beogradu, Novom Sadu i Nišu. Devet zadataka vrednovano je sa ukupno 11 poena.[31]

Ukupan broj poena po tipu fakulteta prikazan je u tabelama 6, 7 i 8, i to za elektrotehničke fakultete, građevinske fakultete i mašinske fakulteta, respektivno.[32]

Tabela 6 – Ukupan broj poena – ETF

Poeni	Frekvencija	Rel. frekvencija	Kum. frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	4	0.0301	4	0.0301
1	8	0.0602	12	0.0902
2	17	0.1278	29	0.2180
3	23	0.1729	52	0.3910
4	19	0.1429	71	0.5338
5	14	0.1053	85	0.6391
6	14	0.1053	99	0.7444
7	13	0.0977	112	0.8421
8	6	0.0451	118	0.8872
9	4	0.0301	122	0.9173
10	8	0.0602	130	0.9774
11	3	0.0226	133	1.0000

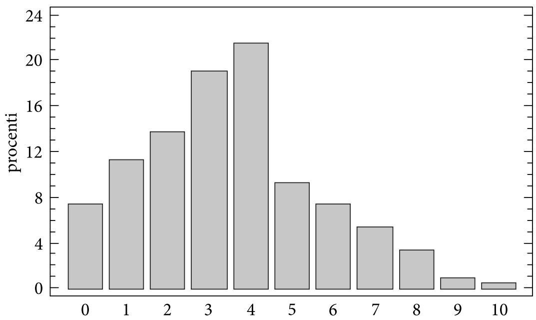


Slika 23 – Ukupan broj poena – ETF

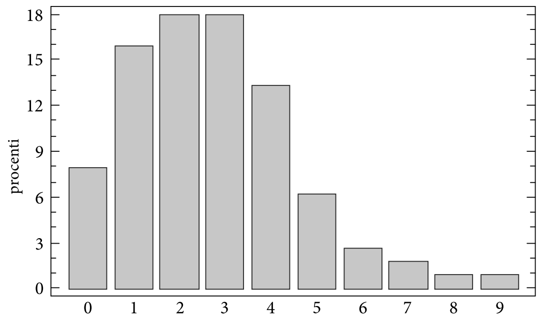
[31] Tekst zadataka za studente prikazan je u Prilogu 2.
[32] Napomena: Relativna frekvencija dobija se kada se frekvencija podeli sa ukupnim brojem. Analogno, kumulativna relativna frekvencija dobija se kada se kumulativna frekvencija podeli sa ukupnim brojem.

Tabela 7 – Ukupan broj poena – GF

Poeni	Frekvencija	Rel. frekvencija	Kum. frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	15	0.0735	15	0.0735
1	23	0.1127	38	0.1863
2	28	0.1373	66	0.3235
3	39	0.1912	105	0.5147
4	44	0.2157	149	0.7304
5	19	0.0931	168	0.8235
6	15	0.0735	183	0.8971
7	11	0.0539	194	0.9510
8	7	0.0343	201	0.9853
9	2	0.0098	203	0.9951
10	1	0.0049	204	1.0000



Slika 24 – Ukupan broj poena – GF



Slika 25 – Ukupan broj poena – MašF

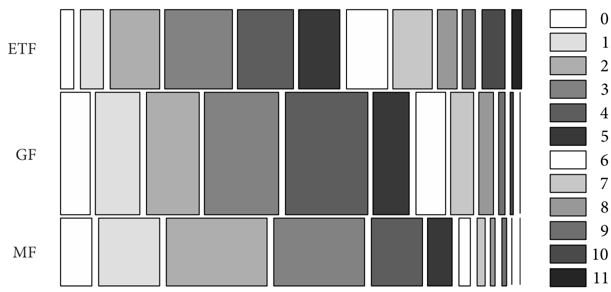
Tabela 8 – Ukupan broj poena – MašF

Poeni	Frekvencija	Rel. frekvencija	Kum. frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	9	0.0796	9	0.0796
1	18	0.1593	27	0.2389
2	30	0.2655	57	0.5044
3	27	0.2389	84	0.7434
4	15	0.1327	99	0.8761
5	7	0.0619	106	0.9381
6	3	0.0265	109	0.9646
7	2	0.0177	111	0.9823
8	1	0.0088	112	0.9912
9	1	0.0088	113	1.0000

Na osnovu svih pojedinačnih rezultata formirani su i objedinjeni rezultati. Tako u tabeli 9 možemo videti frekvenciju i procentualne relativne frekvencije za fakultete pojedinačno, ali i ove podatke na nivou celokupnog uzorka. Na prvi pogled reklo bi se da rezultati nisu baš ohrabrujući. Činjenica da nijedan od studenata sa Građevinskog, a isto tako i Mašinskog fakulteta, nije uspeo da tačno uradi celokupan test jeste zabrinjavajuća. Štaviše na Mašinskom fakultetu čak ni 10 poena niko nije osvojio. Ovo nas svakako navodi na to da izvršimo poređenje kurikuluma i našeg testa, da bi utvrdili da li se uzrok ovakvih rezultata krije u tome što se neka nastavna jedinica na ovom fakultetu ne obrađuje. Naravno, ovo ćemo proveriti i pomoću analize rezultata za zadatke pojedinačno. Treba imati na umu i to da nije u pitanju samo jedan mašinski fakultet, već tri sa različitih univerziteta, pa ćemo obratiti pažnju i na usklađenost programa. Da test nije bilo nemoguće uraditi potvrdili su studenti elektrotehničkih fakulteta. Čak tri rada su bila potpuno tačna, ali u ukupnom rezultatu 3 od 450 čini samo 0.67%.

Tabela 9 – Ukupan broj poena – svi smerovi

Broj poena	ETF	GF	MašF	Ukupno
0	4 (3.01%)	15 (7.35%)	9 (7.96%)	28 (6.22%)
1	8 (6.02%)	23 (11.27%)	18 (15.93%)	49 (10.89%)
2	17 (12.78%)	28 (13.73%)	30 (26.55%)	75 (16.67%)
3	23 (17.29%)	39 (19.12%)	27 (23.89%)	89 (19.78%)
4	19 (14.29%)	44 (21.57%)	15 (13.27%)	78 (17.33%)
5	14 (10.53%)	19 (9.31%)	7 (6.19%)	40 (8.89%)
6	14 (10.53%)	15 (7.35%)	3 (2.65%)	32 (7.11%)
7	13 (9.77%)	11 (5.39%)	2 (1.77%)	26 (5.78%)
8	6 (4.51%)	7 (3.43%)	1 (0.88%)	14 (3.11%)
9	4 (3.01%)	2 (0.98%)	1 (0.88%)	7 (1.56%)
10	8 (6.02%)	1 (0.49%)	0 (0.00%)	9 (2.00%)
11	3 (2.26%)	0 (0.00%)	0 (0.00%)	3 (0.67%)
Ukupno	133 (29.56%)	204 (45.33%)	113 (25.11%)	450 (100.00%)



Slika 26 – Ukupan broj poena – svi smerovi

Radi stvaranja bolje slike o rezultatima treba da pogledamo tabelu deskriptivnih statistika i bliže objasnimo tabele 6, 7 i 8 i slike 23, 24 i 25.

Tabela 10 – Medijana i standardna devijacija

Fakultet	Broj	Uzoračka sredina	Medijana	Moda	Standardna devijacija	Koeficijent varijacije	Min	Maks
ETF	133	**4.72932**	**4.0**	**3.0**	2.71675	57.4448%	0	11.0
GF	204	**3.51961**	**3.0**	**4.0**	2.13685	60.7127%	0	10.0
MašF	113	**2.68142**	**2.0**	**2.0**	1.72826	64.4533%	0	9.0
Ukupno	450	**3.66667**	**3.0**	**3.0**	2.35965	64.354%	0	11.0

Već smo videli da se podaci mogu predstaviti i tabelarno i grafički. Međutim, za bolje razumevanje rezultata potrebne su nam deskriptivne statistike. Kako smo videli, tabela 10 sadrži vrednosti ovih statistika za grupe pojedinačno (ETF, GF, MašF) i za celokupan uzorak. Pre same analize ove tabele treba kratko podsetiti šta koja statistika znači.

Jedna od osnovnih mera statističkog uzorka jeste uzoračka sredina. Ona predstavlja prosek, tj. aritmetičku sredinu svih podataka, i predstavlja dobru ocenu za očekivane vrednosti obeležja. Dalje, kada imamo sortirani uzorak, srednja vrednost po položaju, tj. ona koja sve vrednosti obeležja deli na dva jednaka skupa, naziva se medijana. Moda ili modus je ona vrednost koja se u uzorku javlja najčešće, tj. koja ima najveću frekvenciju. Manje korišćene u tabelarnom a više u grafičkom predstavljajnju rezultata jesu vrednosti tri kvartila koje skup realizovanih vrednosti obeležja dele na četiri jednaka dela. Naravno, medijana je jednaka drugom kvartilu. Najmanja i najveća vrednost u uzorku predstavljaju minimum i maksimum. Pored ovih vrednosti tu su i mere varijacije. Mere varijacije su pokazatelji odstupanja vrednosti obeležja od srednje vrednosti. U metodologiji smo pomenuli da je ukupna varijacija jednaka sumi kvadrata odstupanja vrednosti od uzoračke sredine, dok je varijansa (disperzija) prosečna vrednost ovih odstupanja. Standardna devijacija, kao kvadratni koren varijanse, čini prosečno odstupanje pojedinačnih vrednosti od uzoračke sredine.

Sledeća često korišćena mera varijacije jeste koeficijent varijacije. On predstavlja količnik standardne devijacije i uzoračke sredine, pa samim tim ukazuje na to koliko procenata iznosi ovo odstupanje od srednje vrednosti. Poređenjem koeficijenata varijacije zapravo poredimo varijabilnost različitih uzoraka.

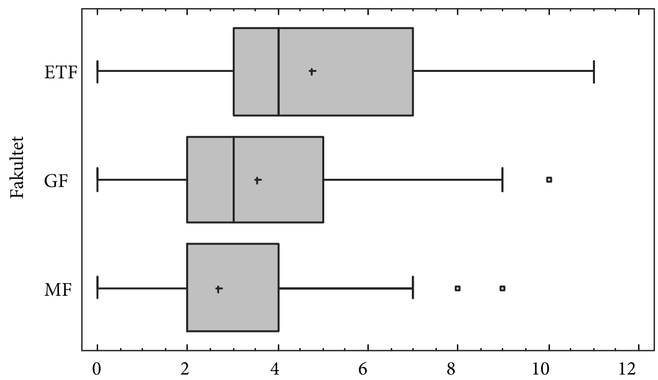
Tabela 10 sadrži najveći broj ovih statistika, pa možemo izvući neke osnovne zaključke. Kao što smo već uočili, na mašinskim fakultetima je maksimalni broj poena 9, na građevinskim 10, a studenti elektrotehnike su uspeli da reše celokupan test. Na svim fakultetima je bilo onih koji nisu bili uspešni u rešavanju ijednog od zadataka. Na osnovu uzoračke sredine osvojenih poena vidimo da su studenti elektrotehnike i u tom pogledu bili najuspešniji (4.73%), dok je test na mašinskim fakultetima urađen najlošije (2.68%). Štaviše, ako pogledamo kumulativne relativne frekvencije iz tabela 6, 7 i 8 videćemo da je na mašinskom fakultetu više od 90% studenata imalo manje od polovine mogućih poena, na građevini je bilo nešto više od 80% takvih slučajeva, a na elektrotehnici između

60% i 70%. I histogrami na slikama 23, 24 i 25 to pokazuju, pa možemo uočiti da su, osim u slučaju elektrotehnike, poeni više grupisani oko manjih vrednosti. U slučaju elektrotehničkog fakulteta osipanje je veće, a to je u skladu i sa rezultatima za standardno odstupanje.

Međutim, iako je numerička vrednost standardnog odstupanja veća u slučaju elektrotehničkih fakulteta, na osnovu koeficijenta varijacije zaključujemo da u odnosu na celokupan uzorak po fakultetima ova je varijacija najmanja. Štaviše, na osnovu koeficijenta varijacije zaključujemo i da je varijacija ocena u slučaju građevinskog fakulteta za oko 5.7% veća nego u slučaju elektrotehnike, dok je za mašinstvo ta vrednost oko 12%. U terminima varijacije poeni sa mašinskih fakulteta imaju sličnu varijaciju kao celokupna populacija. Bez obzira na to, gledajući globalnu sliku – 3.67 poena nije zavidan rezultat.

Interesantno je primetiti i to da su na različitim fakultetima najbolje urađeni zadaci sa različitim rednim brojem. O tome ćemo reći više pri pojedinačnoj analizi zadataka.

Za tumačenje rezultata nekada je zgodno pogledati i grafički prikaz. Na slici 27 dat je takozvani box-plot dijagram.



Slika 27 – Box-plot dijagram

Ovaj tip dijagrama predstavlja pravougaoni dijagram. Na osnovu kvartila računaju se unutrašnje i spoljašnje granice dijagrama. Pravougaonik se crta između prvog i trećeg kvartila i uspravnom crtom se obeležava položaj medijane. Ako je medijana blizu sredine pravougaonika, ima smisla ispitivati da li je raspodela podataka simetrična. Horizontalne linije od pravougaonika levo i desno iscrtavaju se do unutrašnjih granica. Sve vrednosti obeležja između unutrašnjih i spoljašnjih granica označavaju se kružićima.

Na slici 27 prikazani su box-plot dijagrami po fakultetima. Na sva tri dijagrama medijana je pomerena više ulevo. Tada kažemo da je raspodela poena pomerena udesno, time je i asimetričnost raspodele poena potvrđena. Zanimljivo je primetiti da u slučaju građevine i mašinstva imamo jedan, odnosno dva kružića respektivno. Ovi kružići predstavljaju vrednosti koje značajno odskaču od drugih, i u literaturi se još nazivaju autlajeri.

Iz tabele 9 vidimo da su autlajeri dva studenta mašinstva, sa više od 7 osvojenih poena, i jedan student građevine, sa 10 osvojenih poena. Ako uporedimo vrednosti za uzoračke sredine i pravougaonike dijagrama, primetićemo da oni nisu pozicionirani oko istih vrednosti, pa se prirodno nameće pitanje da li je razlika u proseku osvojenih poena značajna ili ne?

Kako smo već naveli, u metodologiji izrade zadataka u cilju provere jednakosti sredina među fakultetima, koristićemo metod analize varijansi. U ANOVA tabeli 11 prikazani su svi neophodni podaci, tj. vrednosti suma kvadrata odstupanja i njihove sredine, zatim F-količnik i p-vrednost.

Tabela 11 – ANOVA tabela

Izvor	Suma kvadrata	Df	Sredina kvadrata	F-količnik	p-vrednost
Između grupa	264.292	2	132.146	26.42	0.0000
Unutar grupa	2235.71	447	5.00158		
Ukupno (Corr.)	2500.0	449			

Kako imamo tri nivoa faktora, to će broj stepeni slobode između grupa biti $3 - 1 = 2$. Za sumu kvadrata odstupanja unutar grupa, iz istog razloga, broj stepeni slobode je $450 - 3 = 447$. Na osnovu dobijene p-vrednosti za prag značajnosti od 5% zaključujemo da postoji statistički značajna razlika između artimetičkih sredina po fakultetima. Ovaj zaključak sledi iz toga što za male vrednosti verovatnoće p odbacujemo nultu hipotezu da razlike ne postoje. Ovim testom smo utvrdili da razlike postoje, ali ne i koja se to uzoračka sredina znatno razlikuje od drugih. U SPSS-u za ispitivanje odgovora na ovo pitanje koristimo test višestrukog opsega. Rezultati dobijeni ovim testom su prikazani u tabelama 12 i 13.[33]

Tabela 12 – Metod: 95% test najmanje značajne razlike (homogenost)

Fakultet	n	Uzoračka sredina	Homogenost grupe
M	113	2.68142	X
G	204	3.51961	X
E	133	4.72932	X

Tabela 13 – Metod: 95% test najmanje značajne razlike (poređenje)

Faktor poređenja	Značajnost	Razlika	$\pm$ granica
E - G	*	1.20972	0.48984
E - M	*	2.04791	0.562319
G - M	*	0.838192	0.515413

[33] X označava da je grupa homogena.
$*$ označava statistički značajnu razliku.

Ovaj test se zasniva na proveri najmanjih značajnih razlika, pa pri pragu značajnosti od 5%, kad dobijamo 95%-ni interval poverenja, zaključili smo sledeće: postoji značajna statistička razlika između svaka dva para fakulteta. Time smo došli do zaključka da treba da odbacimo prvu pomoćnu hipotezu koja tvrdi da uspešnost u rešavanju zadataka ne zavisi od fakulteta.

U daljem tekstu prikazana je analiza rešavanja pojedinih zadataka. Ideja zadatka 1 jeste da se analizira razumevanje pojma granične vrednosti.

Zadatak 1. Da li sme da se skrati razlomak $\frac{x}{x}$ kada $x \to 0$?

Rešenje. Da. Razlomak sme da se skrati na osnovu definicije granične vrednosti. Izraz $\frac{x}{x}$ nas intuitivno navodi na to da je u pitanju neodređeni oblik „nula kroz nula“. Međutim, pažljivom analizom konstatujemo da $x \neq 0$, ali da x teži nuli. Na primer, niz $0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ teži nuli iako je, kada napišemo na primer $\frac{0.001}{0.001} = 1$. Pošto je utvrđeno da $x \neq 0$ (iako teži nuli) može se *skratiti* navedeni izraz, pa se dobija

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Prvi zadatak rešilo je 29.32% studenata ETF-a, 9.31% GF i 14.16% MašF. Rezultati su prikazani u tabeli i grafički.

Tabela 14 – Zadatak 1

	0	1	Ukupno
ETF	94 (70.68%)	39 (29.32%)	133 (29.56%)
GF	185 (90.69%)	19 (9.31%)	204 (45.33%)
MašF	97 (85.84%)	16 (14.16%)	113 (25.11%)
Ukupno	376 (83.56%)	74 (16.44%)	450 (100.00%)

Slika 28 – Zadatak 1

Zadatak su u potpunosti rešili (što je donelo 2 poena) oni studenti koji su, osim zaokruživanja potvrdnog odgovora, dali i obrazloženje.

Od studenata koji su uspešno rešili zadatak objašnjenje je dalo 24.81% studenata ETF-a, 6.86% GF-a i 7.96% MašF-a.

Uočeno je (s pravom!) da postoji problem kada se strogo definiše pojam granične vrednosti. Vizuelno predstavljanje je važno za objašnjenje. Kada se napiše

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x) \ \ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon)$$

leva strana $\lim_{x\to a} f(x) = A$ znači da funkcija f teži graničnoj vrednosti A, za x teži a. A desna strana formalne definicije znači: ako za svako dato ε možemo da nađemo δ takvo da za $0 < |x-a| < \delta$ povlači $|f(x)-A| < \varepsilon$, onda možemo da kažemo (pišemo)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A.$$

Primer $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$ je prirodni uvod za rešavanje primera

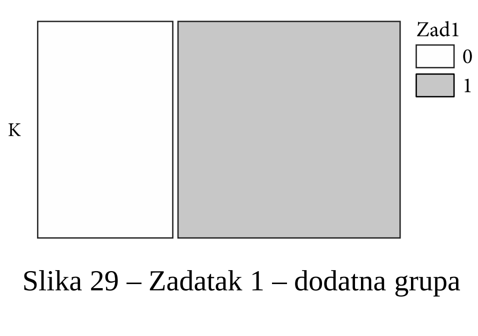
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-a^2}{x-a}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3-1}{x}, \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x((x+1)^2+(x+1)+1)}{x} = \\ = \lim_{x\to 0}(x^2+3x+3) = 3.$$

Na ovom su primeru studenti matematike pokazali zavidan nivo razumevanja, što potvrđuje 62.28% studenata koji su rešili zadatak. Naravno da zabrinjava što taj zadatak nisu rešili svi studenti Matematičkog fakulteta.

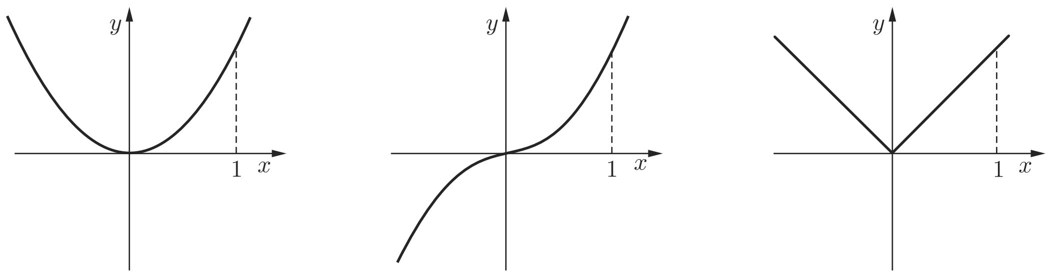
Tabela 15 – Zadatak 1 – dodatna grupa

	0	1	Ukupno
K	43 37.72%	71 62.28%	114 100.00%



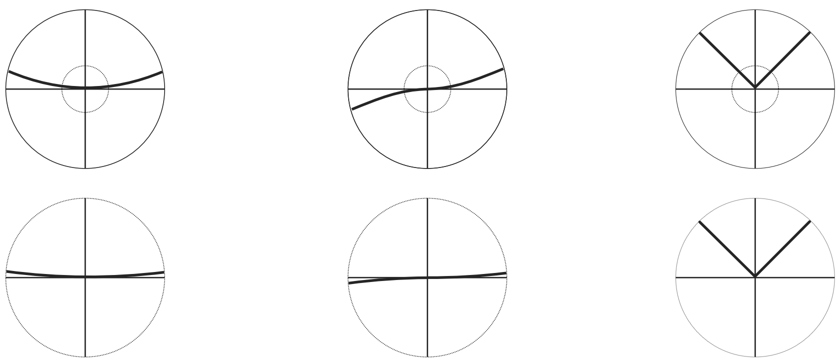
Slika 29 – Zadatak 1 – dodatna grupa

Zadatak 2. Da li su date funkcije diferencijabilne u tački $x = 0$?



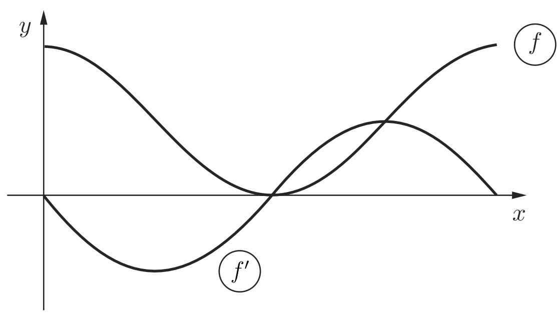
$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = x|x|$ $\qquad$ $f(x) = |x|$

Rešenje. Funkcija $f(x) = x^2$ je diferencijabilna (ima izvod) u tački 0. Diferencijabilna je i funkcija $f(x) = x|x|$. Funkcija $f(x) = |x|$ nije diferencijabilna u tački 0. Popularno se kaže da nije glatka već da ima *špic*. Ako uveličamo grafike funkcija u okolini tačke 0 to će se još bolje videti. Zamišljamo kao da posmatramo pod lupom.



NAPOMENA. Iz ovog primera sledi da proizvod dve funkcije može da bude diferencijabilna funkcija, a svaka od njih pojedinačno to ne mora da bude.

Zadatak 3. Na slici su prikazani grafici dve funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto f'(x)$. Koji grafik odgovara kojoj funkciji?



Rešenje. Ideja za rešavanje ovog zadatka jeste u razumevanju prvog izvoda, preciznije na grafiku posmatramo kada je prvi izvod jednak nuli, kada je prvi izvod veći od nule (funkcija raste), ili kad je prvi izvod manji od nule (funkcija opada). Funkcija $f = \cos x + 1$.

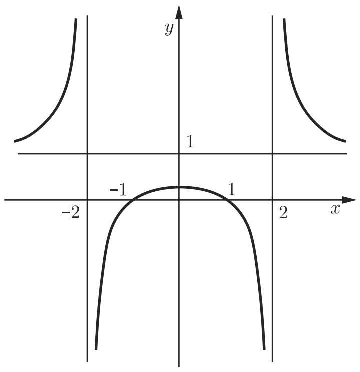
Zadatak 5. Dat je grafik racionalne funkcije. Zaokružiti tačan odgovor.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2-4}$



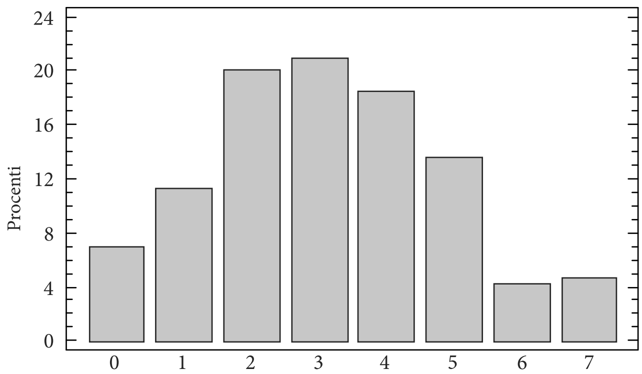
Rešenje. Tačan odgovor dobija se na osnovu poznatih osobina funkcije kao što su oblast definisanosti, nule, asimptote. Tačan odgovor je pod b).

Rezultati za 1, 2, 3 i 5 zadatak dati su zbirno i detaljnije je vrednovan zadatak 1. Naime, ukupan broj poena u ovom delu bodovanja je 7. Prvi zadatak boduje se sa 2 poena (za tačan odgovor jedan poen i obrazloženje jedan poen), drugi sa tri poena (za svaki deo pod a), b) i c) po jedan poen), treći i peti zadatak po jedan poen.

Tabela 16 – Rezultati za 1, 2, 3 i 5 zadatak

Poeni	Frekvencija	Relativna frekvencija	Kumulativna frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	31	0.0689	31	0.0689
1	51	0.1133	82	0.1822
2	90	0.2000	172	0.3822
3	94	0.2089	266	0.5911
4	83	0.1844	349	0.7756
5	61	0.1356	410	0.9111
6	19	0.0422	429	0.9533
7	21	0.0467	450	1.0000

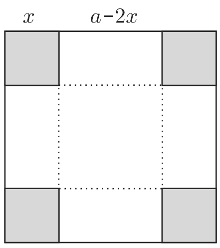
Sa histograma broja osvojenih poena u zadacima 1, 2, 3 i 5 (slika 30) vidimo da je raspodela osvojenih poena približno normalna. To je i prirodno očekivati kao željeni rezultat. Međutim, ova grupa zadataka ima još neke značajne karakteristike. Na primer, zadatak 2 jeste onaj za koji je najveći broj studenata mašinstva dobio poene. Za elektrotehnički fakultet isto važi za zadatak 3. Zadatak 3 jeste vrednost *modus* i na nivou čitave populacije, pa možemo reći da je razumevanje prvog izvoda kao pokazatelj monotonosti kod studenata na najzavidnijem nivou (u odnosu na ostalu problematiku testa). Iznenađenje u negativnom smislu predstavlja zadatak 5. Njega je bilo moguće rešiti i bez



Slika 30 – Rezultati za 1, 2, 3 i 5 zadatak

poznavanja diferencijalnog računa, metodom eliminacije odgovora. Međutim, uspešnost u rešavanju ovog zadatka je bila samo 53.11%. Ovako loš rezultat jeste posledica malog procenta tačnih odgovora 30.97% studenata mašinstva.

Zadatak 4. Od kartona oblika kvadrata stranice a treba odrezati četiri osenčena kvadrata kao na slici, tako da se od ostatka može napraviti kutija bez poklopca najveće zapremine. Odredi dimenzije kutije.



Rešenje. Ako označimo ivice kutije sa x i $a-2x$, tada je zapremina jednaka

$$V(x) = (a-2x)^2 x$$

Korišćenjem prvog izvoda za nalaženje maksimuma dobija se

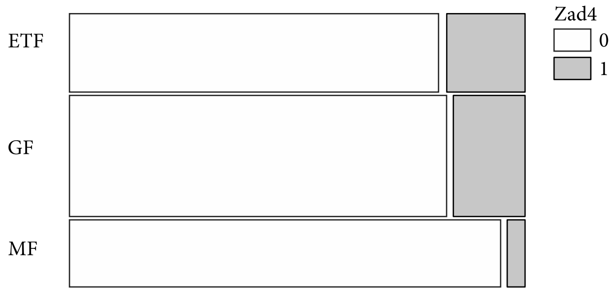
$$V'(x) = (a-2x)(a-6x),$$
$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = a/2 \quad \text{ili} \quad x = a/6.$$

Prema tome, pošto je za $x = a/2$ osnova kutije 0, dimenzije kutije imaju osnovu $2a/3$ i visinu $a/6$.

Za zadatak 4 rezultati su slabi. Ovde je, osim što primenjujemo diferencijalni račun, zahtevano postavljanje problema (nije dovoljna samo vizuelna predstava da bi se izveo zaključak). To govori u prilog činjenici da studenti imaju teškoće u pravilnom postavljanju problema. Setimo se čuvenog pitanja na predavanjima: *Čemu to služi*?

Tabela 17 – Rezultati za zadatak 4

	0	1	Ukupno
ETF	110 82.71%	23 17.29%	133 29.56%
GF	172 84.31%	32 15.69%	204 45.33%
MašF	109 96.46%	4 3.54%	113 25.11%
Ukupno	391 86.89%	59 13.11%	450 100.00%

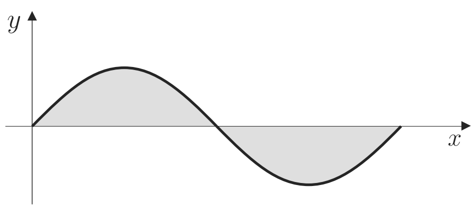


Slika 31 – Rezultati za zadatak 4

Interesantno je primetiti da dodatna grupa (Matematički fakultet) takođe pokazuje teškoće u postavljanju problema, jer je zadatak rešilo tek 23.68% studenata.

Zadatak 6. Ako je $f(x) \equiv 0$ za $x \in [a,b]$, onda je $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Da li važi obratno tvrđenje? (Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ sledi da je $f(x) \equiv 0$ za $x \in [a,b]$.) Obrazložiti.

Rešenje. Obrnuto tvrđenje ne važi, na primer $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$.



Zadatak 9. Tačka $x \in \mathbb{R}$ je *fiksna tačka* funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako važi $f(x) = x$.

Naći fiksnu tačku linearne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date sa $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rešenje.
$ax + b = x$, $a, b \in \mathbb{R}$; dobija se $ax - x = -b$, odnosno $x(a-1) = -b$
Razmatraju se jednostavni slučajevi
(1) $a \neq 1$, $x = \dfrac{b}{1-a}$ je fiksna tačka,
(2) $a = 1$, razmatramo slučajeve:
1° $b \neq 0$, nema fiksnu tačku. 2° $b = 0$, $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beskonačno mnogo rešenja.

Zadaci 6 i 9 su teorijskog tipa. U poređenju rezultati testa između studenata tehničkih fakulteta i dodatne grupe sa Matematičkog fakulteta, uočava se jasna razlika u smislu izraženo boljeg rešavanja kod studenata matematike. Naravno, ovom rezultatu ide u prilog to što se studenti matematike u znatno većoj meri bave apstraktnom teorijom, a da poznavanje kontraprimera teorema studenti doživljavaju kao teorijsko a ne kao praktično znanje.

Istovremeno zabrinjava činjenica da se nastava matematike izvodi klasičnom metodom teorema, dokaza, primera, a da studenti nisu uspešni u rešavanju teorijskih zadataka.

Tabela 18 – Rezultati za zadatke 6 i 9

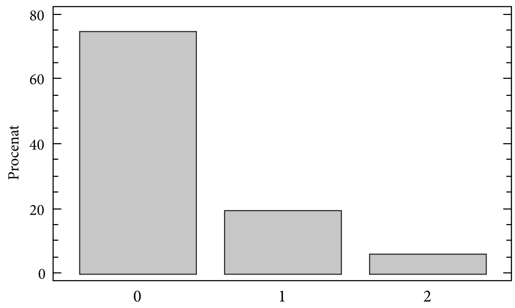
Poeni	Frekvencija	Relativna frekvencija	Kumulativna frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	336	0.7467	336	0.7467
1	87	0.1933	423	0.9400
2	27	0.0600	450	1.0000

Tabela 19 – Rezultati za zadatke 6 i 9 – dodatna grupa

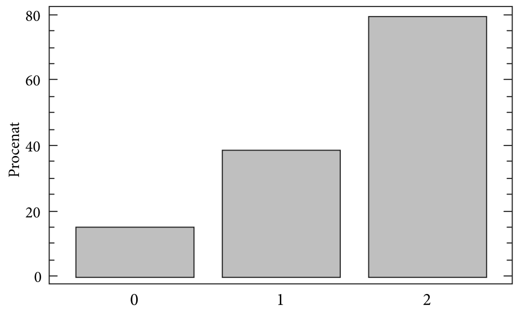
Poeni	Frekvencija	Relativna frekvencija	Kumulativna frekvencija	Kum. rel. frekvencija
0	13	0.1140	13	0.1140
1	33	0.2895	46	0.4035
2	68	0.5965	114	1.0000

Poredeći rezultate teorijskih zadataka po fakultetima, najveću uspešnost pokazali su studenti elektrotehnike, a najmanju studenti mašinstva.

Ideja sa zadatkom 7 jeste da se „vidi“ da li studenti povezuju matematičko gradivo sa elementima primene.



Slika 32 – Rezultati za zadatke 6 i 9



Slika 33 – Rezultati za zadatke 6 i 9 – K

Zadatak 7. Izračunati

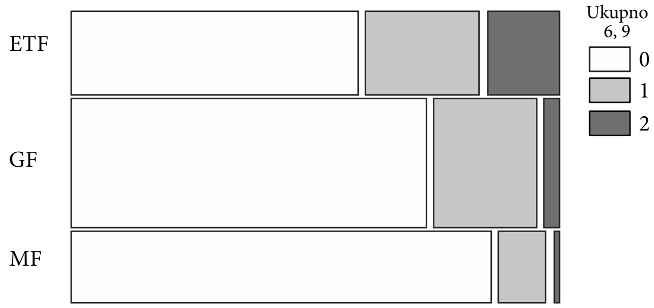
$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \neq n.$$

Rešenje. Ovaj integral se rešava rastavljanjem proizvoda sinusa na razliku kosinusa, tj.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \big) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

Tabela 20 – Rezultati za zadatke 6 i 9 po fakultetima

	0	1	2	Ukupno
ETF	81 60.90%	32 24.06%	20 15.04%	133 29.56%
GF	154 75.49%	44 21.57%	6 2.94%	204 45.33%
MašF	101 89.38%	11 9.73%	1 0.88%	113 25.11%
Ukupno	336 74.67%	87 19.33%	27 6.00%	450 100.00%



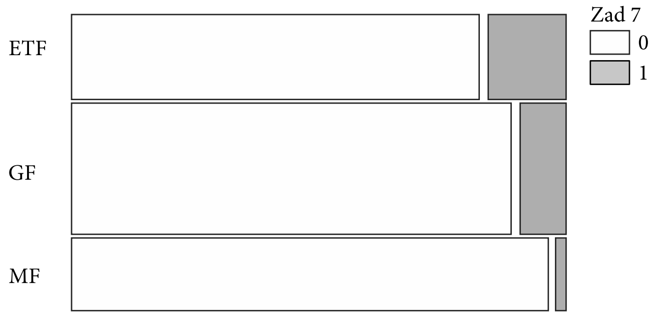
Slika 34 – Ukupno za zadatke 6 i 9

(važno je da $m \neq n$).

Ovaj integral može se rešiti pomoću trigonometrijske transformacije (što se pokazalo kao dodatna poteškoća), ili je jednostavno moglo da se napiše da je rezultat integrala 0, uz objašnjenje da je skalarni proizvod ortogonalnih funkcija 0, ukoliko su studenti upoznati sa tim pojmom.

Tabela 21 – Rezultati za zadatak 7

	0	1	Ukupno
ETF	112 84.21%	21 15.79%	133 29.56%
GF	185 90.69%	19 9.31%	204 45.33%
MašF	111 98.23%	2 1.77%	113 25.11%
Ukupno	408 90.67%	42 9.33%	450 100.00%



Slika 35 – Rezultati za zadatak 7

Zadatak 7 je dodatna grupa rešila sa 37.72%, što se takođe ne smatra ohrabrujućim, jer studenti Matematičkog fakulteta termin skalarnog proizvoda sreću u više predmeta.

Zadatak 8. Za $t \to 0$ važi Maklorenova formula:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

Odrediti a, b i c ako je

$$x \cdot e^{-1/x} = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{kada } x \to +\infty.$$

Rešenje.

Uvođenjem smene $t = -\frac{1}{x}$, $t \to 0$,

$$\begin{aligned} xe^{-1/x} &= x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Odavde sledi da su

$a = 1$, $b = -1$ i $c = \frac{1}{2}$.

Ponašanje funkcije u okolini neke tačke važno je za praktično računanje i procenjivanje greške aproksimacije. To je smisao zadatka 8, pri čemu je data formula za računanje, ali pojavio se problem rezonovanja ili problem povezan sa zadatkom 1.

Rezultati su izraženo slabi.

Tabela 22 – Rezultati za zadatak 8

	0	1	Ukupno
ETF	107 80.45%	26 19.55%	133 29.56%
GF	180 88.24%	24 11.76%	204 45.33%
MašF	110 97.35%	3 2.65%	113 25.11%
Ukupno	397 88.22%	53 11.78%	450 100.00%

Rezultati dodatne grupe veoma su dobri.[34]

[34] Svi rezultati testa za studente ETF, GF i MašF prikazani su u prilogu 5 elektronske forme, a rezultati testa za studente Matematičkog fakulteta prikazani su u prilogu 6 elektronske forme.

Slika 36 – Rezultati za zadatak 8

Tabela 23 – Zadatak 8 – dodatna grupa

	0	1	Row Total
K	17 14.91%	97 85.09%	114 100.00%
Ukupno	17 14.91%	97 85.09%	114 100.00%

Slika 37 – Zadatak 8 – dodatna grupa

Navedene značajne razlike otvaraju pitanje izučavanja ove nastavne jedinice na tehničkim fakultetima.

3.2.3. Diskusija nalaza i zaključak

Ovde ćemo izneti značajno zapažanje. Prilikom statističke analize broja dobijenih tačnih odgovora, tj. osvojenih poena po zadacima pojedinačno, dobili smo interesantan rezultat. Naime, osim frekvencija tačnih odgovora za svaki zadatak je χ^2-testom nezavisnosti proveravano da li broj tačnih odgovora, zavisi od vrste fakulteta. Zapravo, nulta hipoteza jeste hipoteza nezavisnosti, i tvrdi da broj tačnih odgovora ne zavisi od vrste fakulteta. Hipotezu o nezavisnosti odbacili smo u svim slučajevima, osim u zadatku 2 u trećem delu. Sa verovatnoćom 0.1514, koja je veća od praga značajnosti 0.05, prihvatili smo nultu hipotezu nezavisnoti. Dakle, samo u ovom slučaju studenti su davali slične odgovore.

Postavlja se pitanje zašto? Zadatke 2, 3, 4 i 5 prati vizuelna prezentacija (slika). Ako posmatramo zadatke 2, 3 i 5, uočavamo da su značajno bolje rešeni od drugih. Ovi zadaci su bolje rešeni jer studenti, koristeći sliku, lakše dolaze do rešenja. To nije slučaj za zadatak četiri, gde se zahtevao dodatni međukorak i postavljanje problema, pa rešenje. Treba naglasiti da su studenti građevinskih fakulteta bolje rešili zadatak četiri. Na ovaj način, uz sveukupnu analizu testa, potvrđena je hipoteza:

Vizuelna prezentacija zadataka povećava uspešnost njihovog rešavanja.

Rezultati u celini nisu dobri. U proseku su studenti osvojili jedva trećinu poena. Bez obzira na to što na osnovu analize upitnika studenti vide matematiku kao primenjenu nauku, nisu uspešno rešili zadatke vezane za primenu. Dodatno rezultati za zadatak četiri zabrinjavajuće loši, osim malo boljeg rezultata koji su pokazali studenti građevine. Studenti ne koriste prvi put tehnike diferencijalnog računa, a rezultat je izostao. Na osnovu ukupne analize testa, i rešavanja pojedinačnih zadataka, dokazana je hipoteza:

Studenti nisu stekli veštinu da znanje iz matematičke analize primene u rešavanju zadataka i problema.

4.

PET TEMA IZ MATEMATIČKE ANALIZE

Rešavanje zadataka i pokazani rezultati studenata obavezuju da se pitanju unapređivanja nastave matematičke analize posveti značajna pažnja. To je motivacija da se obrade četiri teme iz oblasti matematičke analize za koje su studenti pokazali loše rezultate.

I ne samo to. Tema rada jeste odnos između apstrakcije i primene. Ovih pet tema ilustruju suštinu odnosa teorijske i primenjene matematike. Da bi ovo razumeli, morali smo naporno da radimo, što bi rekao profesor Čanak, to je *put Sv. Jovana Lestvičnika*.

„Ideja Lestvice, tog stupnjevitog uzrastanja u duhovno savršenstvo, uzeta je od poznatog starozavetnog viđenja praoca Jakova. Simbolički, Jakovljeva lestvica, koja stoji na zemlji, a vrhom dotiče nebo, po kojoj se anđeli božji penju i silaze i na čijem se vrhu nalazi Gospod, treba da označi čovekov put ka visinama božanskog savršenstva i vezu između zemlje i neba“.[1]

„I prezrevši svoju slabost, smerno se latih posla“. Ovaj citat Sv. Jovana Lestvičnika naveo je matematičar Miloš Radojčić na početku svoje knjige *Jovanovo Jevanđelje*. I on je prezreo svoje slabosti, lično preveo Jevanđelje sa grčkog i napisao o njemu delo neprolazne vrednosti.

Kao što je već ranije navedeno *Lagranžovu teoremu krasi lepota*. Postavlja se pitanje šta je u njoj lepo? Za mene lepo je sledeće: Ako se posmatra zajedno niz teorema Rolova – Lagranžova – Tejlorova doživljava se jedan objektivan osećaj matematičkog uzdizanja (prof. Prešić koristio je termin *vinuće* i *vinuti se*). Kod prve, u tački ξ, prava paralelna x osi dodiruje krivu. Kod druge, to je opštije, prava paralelna sečici dodiruje krivu, a kod treće, još opštije, kriva dodiruje drugu krivu. Radi se o jednom elegantnom nizu generalizacija a tema su dodiri. Lagranžova teorema daje i izuzetnu vizuelnu predstavu. Pošto je jedna od najvažnijih teorema diferencijalnog tačuna, u ovoj glavi biće prikazana zajedno sa svojim posledicama. Motivaciju za ovu temu dala je čuvena francuska grupa *Burbakista*.

Kako je već konstatovano, na nekim fakultetima ne obrađuje se tema *Tejlorov polinom*. Dodatno, zadatak 8, imao je za cilj da student uz malo promišljanja rutinski primeni datu formulu. Može se reći da dati Maklorenov polinom nije *obična* formula već da je

[1] Čanak M., 2012, *Put u petu dimeziju*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 38.

zadatak iziskivao mali napor da se uoči smena $t = -\frac{1}{x}$. Ovo se pokazalo kao poteškoća. Ideja Tejlorove formule jeste aproksimacija funkcije u okolini neke tačke polinomom određenog stepena. Cilj je da takva aproksimacija bude doneta uz malu grešku – odstupanje. Povećavanjem stepena polinoma postiže se veće priljubljivanje i bliskost u okolini tačke dodira.

Drugi problem uočen je kod teorijskog pitanja u zadatku 6. Problem je *razumevanje definicije određenog integrala*. Zbog toga je predložena tema *Hardijev pristup za izračunavanje površine*, da bi studenti razumeli pojam određenog integrala i jednostavnim putem stigli do veličanstvene Njutn–Lajbnicove formule.

Prvo, ovaj način može biti dobar postupak jer povezuje neodređen i određen integral, odnosno teoriju i primenu. Vizuelnim predstavljanjem studenti direktno uviđaju primenu određenog integrala na izračunavanje površine. Istovremeno ćemo čitaoca dovesti do Njutn–Lajbnicove formule, pomoću koje se računa površina, uz korišćenje vrednosti funkcije neodređenog integrala u krajnjim tačkama. *To je impresivno!*

Neočekivano mnogo teškoće izazavao je integral koji se rešava trigonometrijskom transformacijom (pretvaranje proizvoda u zbir). Zadatak 7 takođe je povezan sa *pojmom ortogonalnosti*. Od studenata, posebno elektrotehnike, očekivalo se da odmah napišu rezultat. Kako to nije bio slučaj, obrađuje se tema *Furijeovi redovi i primene*.

Slika 1 – Anri Poenkare

Ovo je centralna tema u četvrtom delu. Ideja je da se ovde pokaže izgradnja matematičkog sistema i povezanost matematike i prirode. Pokazaće se da je naizgled apstraktna teorija zapravo potekla od fizičkog problema treperenja žice ili provođenja toplote. Ovde matematički model i prirodna pojava zatvaraju apstraktnu teoriju i primenjenu matematiku u jedinstven matematički sistem. Apstrakcija i primena postaju jedno. U ovom delu je prikazano to uzbudljivo putovanje.

Peti uočeni problem odnosi se na teorijski zadatak 9. U zadatku, u prvoj rečenici, data je *definicija fiksne tačke*. Zahtev je bio lagan: primeniti datu definiciju na linearnu funkciju. Studenti su odmah videli nepoznat pojam *fiksne tačke* i dalje nisu razmišljali o postavljenom problemu. Zbog toga je obrađena tema *Fiksne tačke sa dve primene*.

Smatram da se ovom temom penjemo na više nivoe apstrakcije. Da bi to uspeli, penjemo se po uputstvima Poenkarea.[2] Na prvom nivou, koji predstavlja *pripremu*, definiše se metrički prostor, zatim sledi *sazrevanje* – faza u kojoj se rešava problem, povezuju se osobine konvergencije, kompletnosti, vektorski prostori i stiže se do Banahovih prostora. Onda nastupa *prosvetljenje – kreativni proboj*. Na scenu stupa Stefan Banah sa čuvenom teoremom o fiksnoj tački. U četvrtoj fazi je *potvrda* ili prikazivanje primene fiksne tačke na rešavanju integralnih jednačina, sistema jednačina, numeričke matematike... *O presvetli tetrakisu*. Krenimo.

[2] Anri Poenkare (Jules Henri Poincaré), 1854–1912. Predavao je na Sorboni. Bavio se topologijom, eliptičkim funkcijama, diferencijalnim jednačinama, stepenim redovima, termodinamikom i mehanikom. Bio je član Pariske akademije nauka i više drugih akademija. Anri Poenkare bio je ne samo jedan od najtelentovanijih matematičara svih vremena nego je posedovao i izuzetan dar za pisanje. Kažu da ga u lepoti pisanja matematike još niko nije nadmašio. Imao je naročitu sposobnost da na jednostavan način predstavi matematiku drugima.

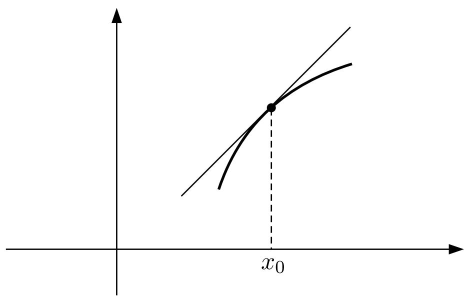
Videti u: Petković M, Petković Lj, 2006, *Matematički vremeplov: prilozi za istoriju matematike*, Zmaj, Novi Sad, str. 67–68.

4.1. LAGRANŽOVA TEOREMA, KONVEKSNOST I POSLEDICE

Za ove opšte teoreme diferencijalnog računa važnu ulogu imaju zatvoreni i otvoreni intervali: *Zatvoreni interval* $[a,b]$ *je skup vrednosti* x *za koje važi* $a \leqslant x \leqslant b$*. Otvoreni interval* (a,b) *definisan je nejednakostima* $a < x < b$.

Razmatraćemo funkcije $f(x)$ neprekidne u zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilne u otvorenom intervalu (a,b) (postoji izvod funkcije $f'(x)$ za $a < x < b$).

***Teorema* A.** *Ako je* $f'(x_0) > 0$ *onda je* $f(x) < f(x_0)$ *za sve vrednosti* $x < x_0$ *dovoljno blizu* x_0 *i* $f(x) > f(x_0)$ *za sve vrednosti* $x > x_0$ *dovoljno blizu* x_0.



Slika 2 – Rastuća funkcija

DOKAZ. Količnik
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0), \quad h \to 0.$$

Na osnovu pretpostavke $f'(x_0) > 0$ sledi da su $f(x_0+h)-f(x_0)$ i h istog znaka. Odavde, za $h < 0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0) < 0, \quad f(x_0+h) < f(x_0).$$

Dobija se

$$f(x) < f(x_0), \quad x_0-\delta < x < x_0, \quad \text{za neko} \quad \delta > 0.$$

Za x uzima se $x = x_0+h$, $h < 0$ i $h \to 0$.

Slično se dobija i za $h > 0$.

Slično ovoj, može se formulisati i teorema za slučaj $f'(x) < 0$.

Tvrđenje teoreme A. može se iskazati i na sledeći način: *Ako je* $f'(x) > 0$ *u okolini tačke* x_0 *onda* $f(x)$ *strogo raste na intervalu* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *za neko* $\delta > 0$.

Rolova teorema. *Ako je* $f(x)$ *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$*; diferencijabilna u otvorenom intervalu* (a,b) *i na krajevima intervala a i b njene vrednosti su jednake, tj.* $f(a) = f(b)$*, tada u otvorenom intervalu postoji tačka* ξ, $\xi \in (a,b)$ *u kojoj* $f'(\xi) = 0$.

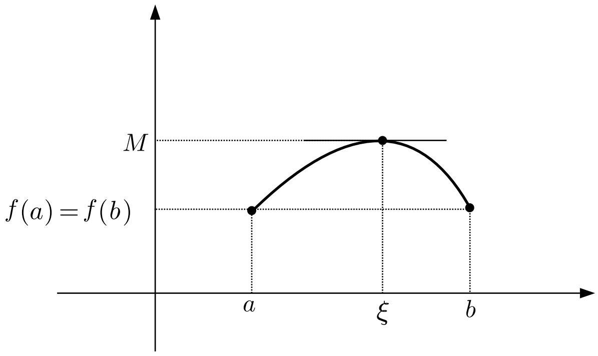
DOKAZ. Pretpostavićemo, bez umanjenja opštosti, da je

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Jer, ako je $f(a) = f(b) = k$, $k \neq 0$, može da se razmatra funkcija

$$\varphi(x) = f(x) - k.$$

Postoje dve mogućnosti. Ako je $f(x) = 0$ na intervalu (a,b) onda je $f'(x) = 0$ za $a < x < b$ i tvrđenje je očigledno.



Slika 3 – Rolova teorema

Ako $f(x)$ nije svuda jednaka nuli onda postoje vrednosti gde je pozitivna ili negativna. Pretpostavimo da postoje vrednosti gde je $f(x)$ pozitivna, $x \in (a,b)$. Tada postoji najveća vrednost funkcije $f(x)$ na (a,b) i označićemo je sa

$$M = \max_{(a,b)} f(x).$$

Neka je ta maksimalna vrednost u tački $\xi \in (a,b)$.

Ako bi $f'(\xi)$ bilo pozitivno ili negativno, po Teoremi A, onda bi u okolini tačke ξ postojala vrednost x za koje bi bilo

$$f(x) > f(\xi) = M,$$

što je suprotno određenju broja M. Sledi, mora biti

$$f'(\xi) = 0.$$

NAPOMENA. Rolova teorema otvara jedno od osnovnih pitanja matematike o razlici između egzistencije nekog objekta i njegovog efektivnog određivanja. Na primer, funkcija $y = x(e^x - 2)$ ispunjava uslove Rolove teoreme i to $f(0) = f(\ln 2) = 0$. Ali ako hoćemo da odredimo tačku $\xi \in (0, \ln 2)$ potražimo izvod $y' = (x+1)e^x - 2$ onda za rešavanje jednačine $(x+1)e^x = 2$ moramo da koristimo numeričku matematiku. Dodatna napomen je da može postojati i više vrednosti ξ što dalje širi problematiku na temeljna pitanja egzistencije i broja rešenja problema.

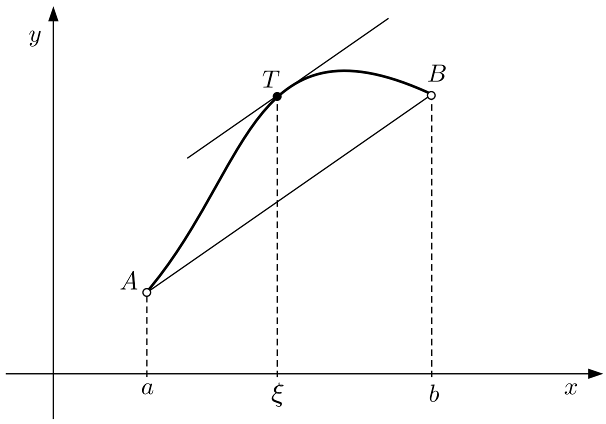
Lagranžova teorema. *Ako je $f(x)$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna u otvorenom intervalu (a,b), onda postoji $\xi \in (a,b)$ za koje važi*

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi).$$

DOKAZ. *Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti* smatra se jednom od najvažnijih teorema diferencijabilnog računa. Geometrijski, grafik funkcije $f(x)$, $x \in [a,b]$ ima sečicu AB, kao na slici 4. Teorema tvrdi da postoji tačka T u kojoj je tangenta na krivu paralelna sečici. Odnosno $f'(x)$ je tangens ugla, koji sa x-osom obrazuje tangenta, a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

je tangens ugla koji sa x-osom obrazuje sečica AB. Pojedini autori smatraju da je ovo jedna od najlepših teorema.



Slika 4 – Lagranžova teorema

Ideja dokaza jeste da obrazujemo pomoćnu funkciju $F(x)$ na koju će se primeniti Rolova teorema. Dovoljno je tačku B spustiti na pravu $y = f(a)$, a da tačku A ne pomeramo.

Posmatrajmo pomoćnu funkciju

$$F(x) = f(x) - k(x-a).$$

Potražimo k tako da važi $F(a) = F(b)$. Primetimo da je

$$F(a) = f(a) \quad \text{i} \quad F(b) = f(b) - k(b-a).$$

Odavde, prema ideji da važi

$$F(a) = F(b), \quad \text{odnosno}$$
$$f(a) = f(b) - k(b-a),$$

dobija se da je k,

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Na ovaj način, na pomoćnu funkciju

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

primenjuje se Rolova teorema i važi da postoji tačka ξ za koju je $F'(\xi)=0$, tj.

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

odnosno

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Navedena formula naziva se i *Lagranžova formula konačnih priraštaja*.[3]

Slika 5 – Žozef Lagranž

Ako se uvede smena $\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$, $a<\xi<b$, tada je $0<\theta<1$ i važi $\xi=a+\theta(b-a)$.

Lagranžova formula može se zapisati u obliku

$$f(b)-f(a)=f'\big(a+\theta(b-a)\big)(b-a),\ 0\leqslant\theta<1.$$

Ako se označi da je $b-a=\triangle x$ i $a=x$, sledi da je $b=x+\triangle x$, a formula postaje

$$f(x+\triangle x)-f(x)=f(x+\theta\triangle x)\cdot\triangle x.$$

[3] Generalizacija Lagranžove teoreme sa primenama može se naći u radu: M. Mateljevic, M. Svetlik, M. Albijanic, N. Savic: *Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications*, Filomat 2013, Filomat 27:4 (2013), 515–528 DOI 10.2298/FIL1304515M, http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2013/27-4/F27-4-1.pdf

Smatra se da Lagranžovu teoremu krasi lepota.

Može se primetiti sledeće:

a) Moguće je da nekom matematičaru ova teorema nije naročito lepa.

b) O lepoti neke teoreme može suditi samo onaj matematičar čije je znanje i razumevanje visoko iznad iskaza teoreme, jer lepota se uzdiže i otkriva iznad znanja i razumevanja, ona je kategorija iznad znanja i razumevanja.

Žozef Lagranž (Joseph Louis Lagrange), 1736–1813. Opšte je mišljenje da su Lagranž i Ojler bili najveći matematičari XVIII veka. Laganž je razvio varijacioni račun i radio je na diferencijalnim jednačinama, numeričkim jednačinama, teoriji eliptičkih funkcija, analitičkoj mehanici i dr. Bio je član Berlinske i Pariske akademije nauka. Bez obzira na veliko delo i slavu bio je skroman, blagorodan i prijatan čovek.

Jednakost ostaje i za $b < a$, što znači da važi i za $\triangle x < 0$.

PRIMER 1. Dokazati da važi:

a) $\sin x < x, \quad x > 0$,

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x > 0$,

c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad x > 0$,

d) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad x > 0$.

DOKAZ. (a) Na osnovu Lagranžove teoreme važi:

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos\xi < 1, \quad 0 < \xi < x$$

pa je $\frac{\sin x}{x} < 1$, odnosno $\sin x < x, x > 0$.

Slično se dobija i $\sin x > x, \ x < 0$.

(b) Neka je

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = -\sin\xi + \xi > 0, \quad \xi \in (0, x) \quad \text{(prema (a))}.$$

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \quad \text{pa je}$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x > 0$$

Za $x < 0$,

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x} = -\sin\xi + \xi < 0 \quad \text{(prema (a))}$$

pa se dobija $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$, jer je $x < 0$, odnosno $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Može se napisati

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0.$$

(c) i (d) se dokazuje slično, a primenom Lagranžove teoreme dolazimo do prvih članova razvoja funkcije $\log(1+x)$, e^x, $\operatorname{arc\,tg} x$ itd.

PRIMER 2. Ako je $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i $f'(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$ onda i

$$\frac{f(x)}{x} \to 0 \quad \text{kad} \quad x \to +\infty.$$

REŠENJE. Neka je $x_n \uparrow +\infty$, odnosno $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \to +\infty$. Na osnovu Štolcove i Lagranžove teoreme je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = 0, \quad (\xi_n \in (x_n, x_{n+1}),\ \xi_n \to +\infty).$$

Sledi
$$\frac{f(x)}{x} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

PRIMER 3. Ako $f : I \to \mathbb{R}$ ima ograničen izvod na intervalu I, onda je f ravnomerno neprekidna na I.

DOKAZ. Pretpostavimo da je
$$|f'(x)| \leqslant k, \quad \forall x \in I.$$
Tada je
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(\xi)| \leqslant k, \quad \forall x,y \in I, \quad \text{pa je}$$
$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|, \quad \forall x,y \in I.$$
Za dato $\varepsilon > 0$, može se izabrati $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, pa
$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \quad (\text{za } x,y \in I).$$

Košijeva teorema. *Ako su $f,g : [a,b] \to R$ neprekidne, diferencijabilne na (a,b) i g strogo monotona onda je*
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
za neko $\xi \in (a,b)$.

DOKAZ. Neka je, na primer, $g(a) < g(b)$.

Svakom $x \in (g(a),g(b))$ odgovara neko $t \in (a,b)$, tako da $g(t) = x$. Na osnovu Lagranžove teoreme
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(g^{-1}(g(b))) - f(g^{-1}(g(a)))}{g(b)-g(a)} = \frac{df(g^{-1}(x)}{dx}$$
za neko $x \in (g(a),g(b))$. Dalje je
$$\frac{df(g^{-1}(x)}{dx} = \frac{df(g^{-1}(g(t)))}{dx} = \frac{df(t)}{dx} = \frac{df(t)}{dg(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$
za neko $t \in (a,b)$.[4]

Teorema o znaku izvoda i monotonosti. *Da bi diferencijabilna funkcija f na određenom intervalu bila rastuća (opadajuća), potrebno je i dovoljno da je njen izvod u svim tačkama intervala veći ili jednak nuli, $f'(x) \geqslant 0$ (manji ili jednak nuli, $f'(x) \leqslant 0$).*

Ako je izvod funkcije f u svim tačkama intervala pozitivan (negativan), onda funkcija f strogo raste (strogo opada).

---

[4] Vukmirović J., *Matematička analiza 1, zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009, str. 105.

DOKAZ. Razmatrajmo slučaj kada je na intervalu (a,b) izvod funkcije $f'(x) \geqslant 0$ za sve (a,b). Tada funkcija raste. Neka su $x_1 \in (a,b)$ i $x_2 \in (a,b)$, pri čemu je $x_1 < x_2$. Tada po Langanžeovoj teoremi sledi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2),$$

odakle važi i $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, odnosno $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, što znači da je funkcija rastuća.

Obrnuto, pretpostavimo da funkcija f raste na intervalu (a,b) i da u tački $x_0 \in (a,b)$ ima izvod. Ako je $\Delta x > 0$, tada važi $f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$, odakle sledi

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

prelaskom na graničnu vrednost kada $\Delta x \to 0$ dobija se $f'(x_0) \geqslant 0$.

Teorema se analogno dokazuje i za opadajuće funkcije.

Neka je data funkcija f na nekom skupu $X \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$. Tačka x_0 naziva se tačka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f, ako postoji takva okolina $U(x_0)$ tačke x_0, u kojoj za sve $x \in X \cap U(x_0)$ važi nejednakost

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big).$$

Ako za sve $x \in X \cap U(x_0)$ i $x \neq x_0$ važi

$$f(x) < f(x_0) \qquad \big(f(x) > f(x_0)\big)$$

tačka x_0 naziva se tačka strogog lokalnog maksimuma (minimuma).

U daljem tekstu je uobičajeno da se kaže samo kratko *maksimum* i *minimum*. Te tačke nazivaju se *tačke ekstremuma*.

Fermaova teorema (potreban uslov za ekstremum). *Ako funkcija f u tački ekstremuma ima izvod, taj izvod je jednak nuli.*

DOKAZ. Ako f ima u c lokalni maksimum, znači da $f(x) \leqslant f(c)$ za $x \in U_\delta$.

Kako je $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ i,

$$x < c \Rightarrow f'(c) > 0, \quad x > c \Rightarrow f'(c) < 0,$$

pa mora biti $f'(c) = 0$.

Analogno se dobija i ako f u c ima lokalni minimum.

Ako je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0, i u toj tački postoji izvod koji je jednak nuli, ta tačka naziva se stacionarna tačka (ili kritična tačka).

Može se jednostavno reći da su stacionarne tačke ili tačke u kojima je $f'(x) = 0$ samo *kandidati* za ekstremum.

Dovoljan uslov za egzistenciju ekstremuma. *Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke x_0, uključujući eventualno i samu tačku x_0, i neka je funkcija f u tački x_0 neprekidna.*

Ako je u levoj okolini tačke x_0, odnosno za $x < x_0$, izvod funkcije pozitivan, a u desnoj okolini, odnosno za $x_0 < x$, izvod funkcije negativan, tada funkcija f u tački x_0 ima lokalni maksimum. Slično, ako je u okolini tačke x_0 za $x < x_0$, $f'(x) < 0$ i za $x > x_0$, $f'(x) > 0$, funkcija ima lokalni minimum. Ako izvod $f'(x)$ ima isti znak i u levoj i u desnoj okolini tačke x_0, onda f u toj tački nema lokalni ekstremum.

DOKAZ. Neka je $f'(x) > 0$ za $x < x_0$ i $f'(x) < 0$ za $x > x_0$. Na osnovu Teoreme o znaku i monotonosti sledi da je funkcija u levoj okolini tačke x_0 monotono rastuća i važi $f(x) < f(x_0)$, a u desnoj monotono opadajuća pa je $f(x) < f(x_0)$. Odavde sledi da je tačka x_0 tačka maksimuma funkcije f u okolini tačke x_0.

Znak drugog izvoda i max/min. *Neka funkcija f u tački x_0 ima prvi izvod jednak nuli i definisan drugi izvod. Ako je $f''(x_0) < 0$, onda funkcija f u tački x_0 ima lokalni maksimum, a ako je $f''(x_0) > 0$, onda funkcija f u tački x_0 ima lokalni minimum.*

DOKAZ. Po definiciji drugog izvoda je

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Na osnovu pretpostavke je $f'(x_0) = 0$, pa sledi

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Neka je recimo, $f''(x_0) < 0$, izraz $\dfrac{f'(x)}{x - x_0}$ je negativan u nekoj okolini tačke x_0.

Za $x < x_0$ sledi da je $f'(x) > 0$, a za $x > x_0$ sledi da je $f'(x) < 0$. Znači da u tački x_0 funkcija f ima lokalni maksimum.

Definicija konveksne funkcije. *Funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, definisana na $(a,b) \in \mathbb{R}$, je konveksna*[5] *ako za sve $x_1, x_2 \in (a,b)$ i realan broj $\lambda \in (0,1)$ važi nejednakost*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Ako za funkciju $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ važi obrnuta nejednakost

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

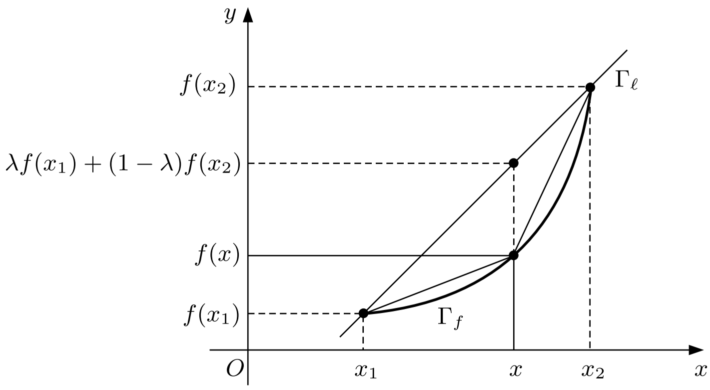
tada je funkcija konkavna.

Ako se umesto $\leqslant$ napiše $<$, kaže se da je funkcija strogo konveksna (ili umesto $\geqslant$ se napiše $>$, funkcija je strogo konkavna).

[5] Osnovno značenje konveksno-ispupčeno povezano je sa konveksnim sočivima i ogledalima. Intuitivna ideja je da konveksna funkcija okreće svoju ispupčenu stranu u negativnom smeru y ose.

Svaka tačka x koja se nalazi između x_1 i x_2, odnosno ako je $x_1 < x < x_2$, može se napisati u obliku

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \qquad (0 < \lambda < 1).$$



Slika 6 – Konveksnost

Vrednost izraza $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ se dobija kao ordinata funkcije $\ell(x)$, koja je jednačina prave kroz dve tačke $\big(x_1, f(x_1)\big)$ i $\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Iz jednakosti $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ izlazi

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Na osnovu toga nejednakost iz definicije konveksnosti postaje

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Pošto je $x_1 < x < x_2$, posle množenja poslednje nejednakosti sa $x_2 - x_1$, dobija se

$$(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2), \quad \text{odnosno}$$
$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geqslant 0.$$

Uvođenjem pogodne smene, $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ gornja nejednakost, posle elementarnih transformacija, postaje

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \big(x_1 < x < x_2, x_1, x_2 \in (a,b)\big).$$

Izvedena nejednakost je druga forma definicije konveksnosti na intervalu (a,b). Geometrijski, to znači da je koeficijent pravca tetive koja spaja tačke $\big(x_1, f(x_1)\big)$ i $\big(x, f(x)\big)$ manji ili jednak od koeficijenta pravca tetive koja spaja tačke $\big(x, f(x)\big)$ i $\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Ako pretpostavimo da je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na (a,b) i „prolaskom“ granične vrednosti kroz poslednju nejednakost kad $x \to x_1$, a zatim kad $x \to x_2$, dobija se

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \Rightarrow f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Slično, za $x \to x_2$ dobija se

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2).$$

Objedinjavanjem dobijenih nejednakosti važi

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2),$$

čime je dokazana monotonost funkcije f'.

Sa druge strane, za strogo konveksne funkcije, primenom Lagranžove teoreme dobija se

$$f'(x_1) \leqslant f'(\eta) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi) \leqslant f'(x_2)$$

za $x_1 < \eta < x < \xi < x_2$, odnosno stroga konveksnost povlači strogu monotonost (rašćenje) prvog izvoda.

Može se zaključiti: *Ako je diferencijabilna funkcija f konveksna na intervalu (a,b), tada f' raste na (a,b), a u slučaju stroge konveksnosti funkcije f njen izvod f' strogo raste na (a,b).*

S druge strane, za $a < x_1 < x < x_2$ po Lagranžovoj teoremi važi

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\eta) \quad \text{i} \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi),$$

gde $x_1 < \eta < x < \xi < x_2$ i ako važi $f'(\eta) \leqslant f'(\xi)$, tada je ispunjena nejednakost iz druge definicije konveksnosti (ili stroge konveksnosti ako je $f'(\eta) < f'(\xi)$)

Na ovaj način je dokazana sledeća teorema:

Konveksnost i rast prvog izvoda. *Da bi diferencijabilna funkcija f na intervalu (a,b) bila konveksna na (a,b), potrebno je i dovoljno da njen izvod f' raste na (a,b). (Pri tome, strogoj konveksnosti odgovara strogo rastuća funkcija f').*

Konveksnost i znak drugog izvoda. *Funkcija $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ koja na intervalu (a,b) ima drugi izvod konveksna je ako i samo ako na (a,b) važi $f''(x) \geqslant 0$ (Ako je $f''(x) > 0$ na (a,b) to odgovara formulaciji strogo konveksne funkcije).*

Analogno, f je konkavna ako je i samo ako $f''(x) \leqslant 0$.

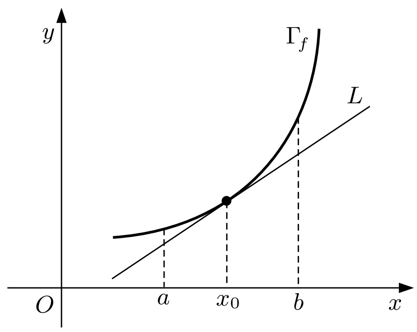
NAPOMENA. Dokaz je direktan na osnovu

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)'$$

pa se primenjuje prethodna tgeorema.

Konveksnost i tangenta. *Da bi neprekidna funkcija f na intervalu (a,b) bila konveksna potrebno je i dovoljno da tačke njenog grafika nisu ispod tačaka tangente konstruisane u proizvoljnoj tački tog grafika. Funkcija f je strogo konveksna ako su tačke njenog grafika iznad tangente.*

Analogno, f je konkavna akko tačke njenog grafika nisu iznad tačaka tangente.



Slika 7 – Konveksna funkcija

Dokaz. (*neophodnost*). Neka je $x_0 \in (a,b)$. Jednačina tangente na grafik funkcije f u tački $\big(x_0, f(x_0)\big)$ glasi:

$$y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Zbog toga je na osnovu Lagranžove teoreme

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0), \quad \xi \in (x_0, x). \end{aligned}$$

Pošto je funkcija f konveksna, onda f' ne opada na (a,b) i razlika $f'(\xi) - f'(x_0)$ je istog znaka kao i znak $x - x_0$. Zbog toga je $f(x) - L(x) \geqslant 0$, za $x \in (a,b)$. Ako je funkcija f strogo konveksna, tada je $f(x) - L(x) > 0$ za $x \in (a,b)$ i $x \neq x_0$.

(*Dovoljnost*) Ako za sve $x, x_0 \in (a,b)$ važi

$$f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0,$$

tada je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant f'(x_0) \quad \text{za} \quad x < x_0, \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'(x_0) \quad \text{za} \quad x > x_0.$$

Na taj način za sve $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$ važi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

što je druga definicija konveksnosti.

Problem (N. Bourbaki). *Neka je f diferencijabilna i konveksna na (a,b), $a \geqslant 0$.*

(1) *Pokazati da $f(x) - xf'(x)$ opada (strogo) na (a,b).*

(2) *Ako f ima konačnu graničnu vrednost s desna, onda je*

$$\lim_{x \to a+0} (x - a) f'(x) = 0.$$

(3) *Funkcija* $\dfrac{f(x)}{x}$ *na* (a,b) *ili raste ili opada ili postoji* $c\in(a,b)$ *tako da* $\dfrac{f(x)}{x}$ *opada na* (a,c) *i raste na* (c,b).

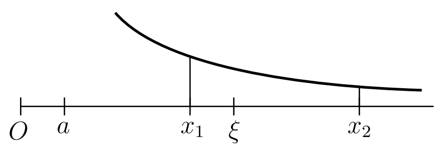
(4) *Pretpostavimo da* $b\to+\infty$. *Ako je*

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-xf'(x)\big)\quad \textit{konačan},$$

onda je konačan i limes $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. *Prava* $y=\alpha x+\beta$ *je asimptota funkcije* f *i leži ispod tog grafika.*

DOKAZ. (1) Ako f ima drugi izvod lako se dokazuje da $h(x)=f(x)-xf'(x)$ opada, jer je

$$h'(x)=f'(x)-f'(x)-xf''(x)=-x\cdot f''(x)<0.$$



Slika 8

Neka je $x_1<x_2$. Treba dokazati da $h(x)$, $x\in(a,b)$ opada i bez pretpostavke o postojanju drugog izvoda funkcije f.

$$\begin{aligned}
&h(x_2)-h(x_1)=f(x_2)-x_2f'(x_2)-f(x_1)+x_1f'(x_1)=\\
&=f(x_2)-f(x_1)-\big(x_2f'(x_2)-x_1f'(x_1)\big)=\\
&=f(x_2)-f(x_1)-x_2f'(x_2)+x_1f'(x_2)-x_1f'(x_2)+x_1f'(x_1)\\
&=f(x_2)-f(x_1)-f'(x_2)(x_2-x_1)-x_1\big(f'(x_2)-f'(x_1)\big)\\
&=f'(\xi)(x_2-x_1)-f'(x_2)(x_2-x_1)-x_1\big(f'(x_2)-f'(x_1)\big)\quad\text{(Lagranžova teorema)}\\
&=(x_2-x_1)\big(f'(\xi)-f'(x_2)\big)-x_1\big(f'(x_2)-f'(x_1)\big)<0,
\end{aligned}$$

jer, na osnovu teoreme *konveksnost i rast prvog izvoda*, važi

$$f'(\xi)-f'(x_2)<0,\quad \xi<x_2$$
$$f'(x_2)-f'(x_1)>0,\quad x_1<x_2$$

(2) Dodefinišimo funkciju f, $f(a)=f(a+0)=c$. Sledi

$$(x-a)f'(x)=\frac{f'(x)}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}\cdot(f(x)-f(a))=\frac{f'(x)}{f'(\xi)}\cdot\big(f(x)-f(a)\big).$$

I slučaj. Ako je za neko dovoljno malo $x-a$, $f'(x)<0$, onda je $f'(\xi)<f'(x)<0$ i time

$$\left|\frac{f'(x)}{f'(\xi)}\right|\leqslant 1,$$

dok $f(x) - f(a) \to c - c = 0$ kada $x \to a + 0$. Znači, $(x-a)f'(x) \to 0$.

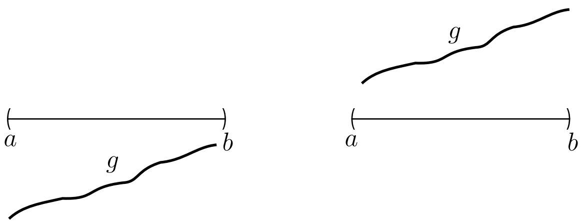
II slučaj. $f'(x) > 0$, za svako $x \in (a.b)$. Onda je f rastuća na (a,b). Neka je $c \in (a,b)$. Za $x < c$ je $0 \leqslant f'(x) \leqslant f'(c)$. Pošto $x \to a$ može se (ne umanjujući opštost dokaza pretpostaviti da je $x < c$. Znači

$$|(x-a)f'(x)| \leqslant |x-a| f'(x) \to 0.$$

(3) Označimo $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Sledi

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}.$$

U (1) je dokazano da je $g(x)$ rastuća funkcija na (a,b). Postoje tri slučaja za $g(x)$:

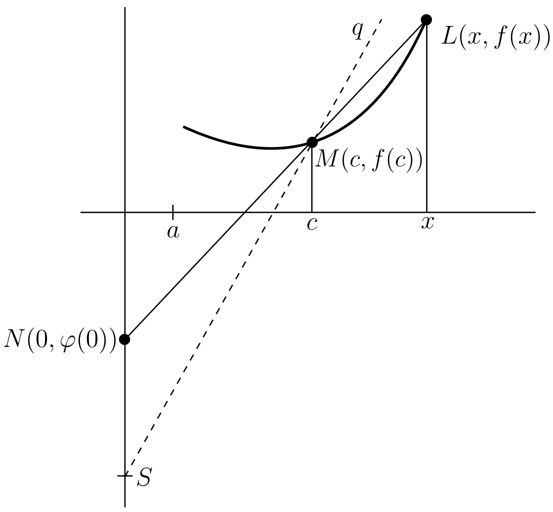


U prvom slučaju je $g(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, pa je $h'(x) > 0$, tj. $h(x)$ je rastuća, ...

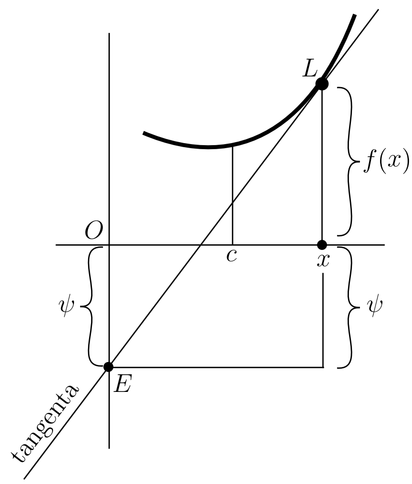
(4) $f'(x)$ je monotono neopadajuća zbog konveksnosti f (za $x > a$). Razlikujemo dva slučaja: (a) $f'(x)$ je neograničena na $(a,+\infty)$; (b) $f'(x)$ je ograničena na $(a,+\infty)$.

Prvi slučaj (a).

Kada $x \to +\infty$, onda $\varphi(x) \to -\infty$ (videti sliku 9).



Slika 9



Slika 10

Pretpostavljajući suprotno, da je za svako $x > c$ tačka N uvek iznad neke tačke S (na y osi). tj. da je φ ograničeno dolazimo do toga da je f ispod prave q koja spaja tačke M i

c, $q(x) = \gamma x + \delta$ za neke γ, δ

$$f(x) \leqslant \gamma x + \delta \quad (x \geqslant c)$$
$$f(x) - \gamma x - \delta \leqslant 0 \quad (x \geqslant c),$$

a izvod

$$\big(f(x) - \gamma x - \delta\big)' = f'(x) - \gamma \to +\infty$$

(dovoljno je samo $\geqslant 1$) da se dobije:

$$f'(x) = \frac{f(x) + \psi}{x},$$
$$f(x) - xf'(x) = f(x) - x\left(\frac{f(x) + \psi}{x}\right) = -\psi \to -\infty$$

pa postoji β u slučaju (a) ($\psi < \varphi$).

(b) Jednačina tangente u tački L je

$$y = f'(x)(t - x), \quad t > a$$

gde je t nezavisno promenljiva za $t = 0$ vrednost je ψ,

$$\psi = xf'(x) - f(x)$$
$$-\psi = f(x) - xf'(x)$$

(odsečak na y osi je $-\psi$ ako je E ispod x ose). U slučaju (b) $-\psi \to \beta$ kad $x \to +\infty$ tj.

$$\beta = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - xf'(x)) \quad \text{a} \quad -\frac{\psi}{x} = \frac{f(x)}{x} - f'(x)$$

i prelaskom na limes dobija se

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to +\infty} f'(x), \quad \text{pa je}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha.$$

Prava $y = \alpha x + \beta$ je asimptota funkcije f. Asimptota je ispod funkcije f jer je f konveksna.

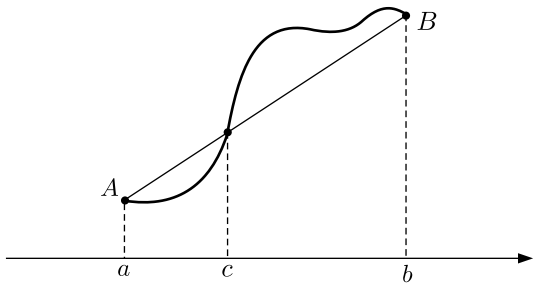
***Teorema* B.** *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b).*

Funkcija je strogo konveksna ili strogo konkavna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako α, β ($a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$) postoji tačno jedno $\xi \in (\alpha,\beta)$ (koje zavisi od α i β) takvo da je

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi).$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Neka za α, β ($a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$) postoji tačno jedno $\xi \in (\alpha,\beta)$ (koje zavisi od α i β) takvo da je

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi).$$



Slika 11 – Sečica preseca krivu

Neka je g prava linija koja sadrži tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

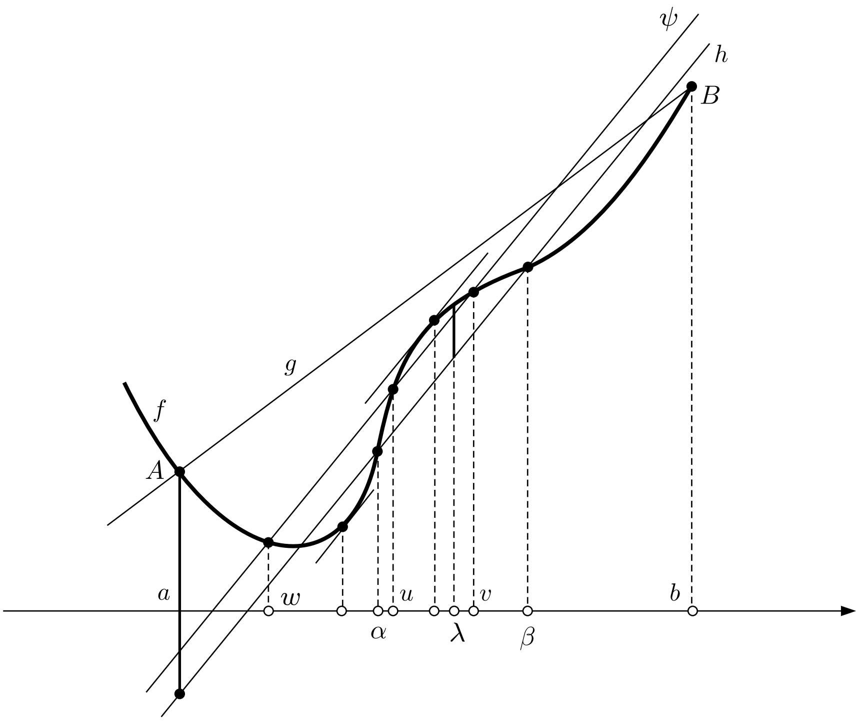
Ako je $f(c) = g(c)$ za neko $c \in (a,b)$ onda je

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{i}$$
$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sledi, za $\alpha = a$, $\beta = b$ postoje dve tačke ξ_1 i ξ_2 sa navedenim svojstvima, pa f ne ispunjava navedeni uslov. Znači,

(i) $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (a,b)$ ili

(ii) $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (a,b)$.



Slika 12 – Grafik funkcije ispod sečice

Pretpostavimo da važi uslov (i), odnosno

$$f(x) < g(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

Dokazujemo da je f konveksna.

Pretpostavimo suprotno, da f nije konveksna. Onda postoje $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ takvi da je

$$f(\lambda) > h(\lambda) \quad \text{za neko} \quad \lambda \in (\alpha, \beta),$$

gde je h linearna funkcija čiji grafik sadrži tačke $(\alpha, f(\alpha))$ i $(\beta, f(\beta))$.

Za pravu h važi da je $h(a) < f(a)$ ili $h(b) < f(b)$, jer bi u suprotnom bilo $f(\lambda) > g(\lambda)$ što je suprotno pretpostavci. (Naime, ukoliko je $h(a) \geqslant f(a) = g(a)$ i $h(b) \geqslant f(b) = g(b)$, pa važi i $h(x) \geqslant g(x),\ a \leqslant x \leqslant b$. Odatle je na osnovu $f(\lambda) > h(\lambda)$ $f(\lambda) > g(\lambda)$.)

Neka je $h(a) < f(a)$, kao na slici 12. Znači,

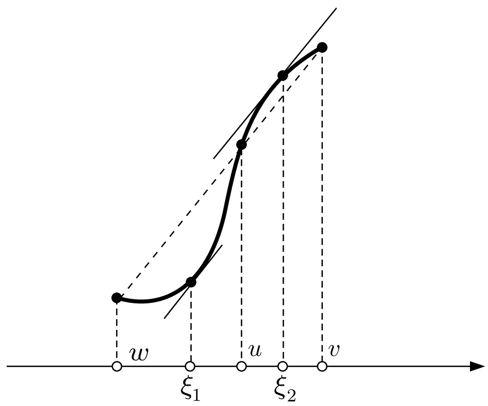
$$\delta_1 \equiv f(\lambda) - h(\lambda) > 0$$
$$\delta_2 \equiv f(a) - h(a) > 0.$$

Neka je $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Postavim pravu ψ paralelnu pravoj h takvu da je

$$\psi(\lambda) = h(\lambda) + \delta.$$

Prava ψ seče f u makar jednoj tački $(u, f(u))$ gde je $\alpha < u < \lambda$ jer je $\psi(\alpha) > f(\alpha)$, $\psi(\lambda) < f(\lambda)$. Takođe prava ψ seče f u nekoj tački $(v, f(v))$ gde je $\lambda < v < \beta$ i u nekoj tački $(w, f(w))$ gde je $a < w < \alpha$.



Slika 13

Sledi da postoje dve tačke $\xi_1 \in (w,u)$ i $\xi_2 \in (u,v)$ takve da je

$$f'(\xi_1) = \frac{f(u) - f(w)}{u - w} = \frac{f(v) - f(w)}{v - w} \quad \text{i}$$
$$f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}.$$

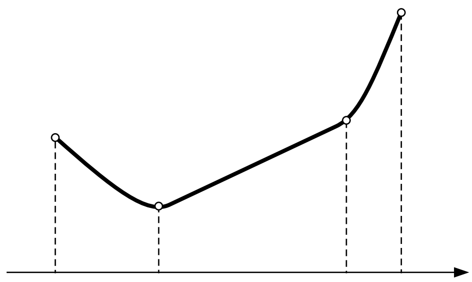
Znači, na intervalu $[w,v]$ postoje dve tačke za koje važi

$$f'(\xi_i) = \frac{f(v)-f(w)}{v-w}, \quad i = 1,2;$$

što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom da postoji samo jedno takvo ξ.

Zaključak. Funkcija f je *konveksna*.

NAPOMENA. Funkcija f je *strogo konveksna* jer za konveksnu funkciju koja nije strogo konveksna postoje tri tačke $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ koje leže na istoj pravoj pa početna pretpostavka o jedinstvenoj tački ξ ne bi bila ispunjena. Iz datog uslova sledi da je f strogo konveksna.



Slika 14 – Primer grafika konveksne funkcije

$(\Leftarrow)$ Dokažimo obrnuto. Ako je f strogo konveksna (ili strogo konkavna) onda za svako α, β $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ postoji tačno jedno ξ (koje zavise od α i β) takvo da je

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi).$$

Pretpostavimo da je f strogo konveksna i da postoje dve tačke ξ_1, ξ_2, $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$, za koje važi

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi_1) = f'(\xi_2).$$

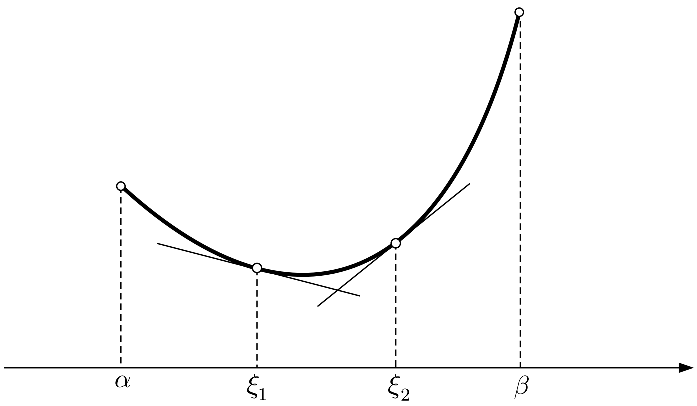
Sledi

$$f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi) \leqslant f'(\xi_2)$$

za svako $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ pa je $f'(x) = \text{const.}$ za sve $x \in [\xi_1,\xi_2]$, jer je $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Funkcija f je prava linija na intervalu (ξ_1,ξ_2). Znači, f nije strogo konveksna, što je kontradikcija.

Definicija prevojne tačke *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tačka $c \in (a,b)$ u kojoj funkcija f menja konveksnost naziva se prevojna tačka.*

***Teorema* C.** *Neka je $c \in (a,b)$ prevojna tačka funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b).*



Slika 15 – Strogo konveksna funkcija

Tada za neko α, β $(a < \alpha < \beta < b)$ postoje bar dve tačke $\xi, \eta \in (\alpha, \beta)$ $(\xi \neq \eta)$ takve da važi

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi) = f'(\eta).$$

Dokaz. Neka je prava $g(x)$ $(x \in (a,b))$ tangenta funkcije f utački c. Tada postoji $\delta > 0$ takvo da je

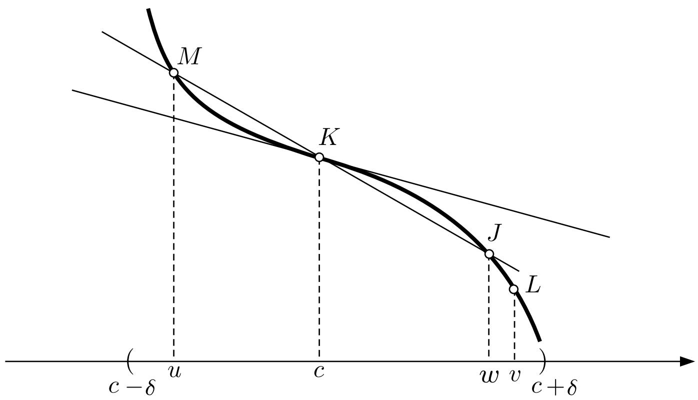
$$(1) \qquad \begin{aligned} &f(x)-g(x) > 0 \quad \big(x \in (c-\delta, c)\big) \\ &f(x)-g(x) < 0 \quad \big(x \in (c, c+\delta)\big) \end{aligned}$$

ili

$$(2) \qquad \begin{aligned} &f(x)-g(x) < 0 \quad \big(x \in (c-\delta, c)\big) \\ &f(x)-g(x) > 0 \quad \big(x \in (c, c+\delta)\big) \end{aligned}$$

gde je δ birano tako da je $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a,b)$.

Pretpostavimo da važi (1) (vidi sliku 16).



Slika 16 – Prevojna tačka

Neka su tačke u i v izabrane tako da važi

$$c-\delta < u < c < v < c+\delta.$$

Neka je h prava koja sadrži tačke $M(u, f(u))$ i $K(c, f(c))$.

(i) Ako je tačka $L(v, f(v))$ ispod prave h, tj. $f(v) < h(v)$ onda postoji $w \in (c, v)$ tako da je $f(w) = h(w)$. (Ovaj slučaj je prikazan na slici 16).

(ii) Ukoliko je $f(v) > h(v)$, onda treba postaviti pravu h tako da sadrži tačke $(v, f(v))$ i $K(c, f(c))$. U tom slučaju je $h(u) > f(u)$, pa je $h(\lambda) = f(\lambda)$ za neko $\lambda \in (u, c)$.

Pretpostavimo da važi (i).

Obrazloženje zašto postoji tačka w. Prava KL ima manji nagib nego prava koja sadrži tačke K i $(x, f(x))$ za neko $x \in (c, v)$ jer je prava $g(x)$ tangenta krive f u tački c.

Ostaje da se zaključi:

$$\frac{f(c)-f(u)}{c-u} = \frac{f(w)-f(c)}{w-c}$$

pa postoje različite tačke ξ i η gde $\xi \in (u, c)$, $\eta \in (c, w)$ za koje važi

$$\frac{f(c)-f(u)}{c-u} = f'(\xi) \quad \text{i} \quad \frac{f(w)-f(c)}{w-c} = f'(\eta)$$

na osnovu Lagranžove teoreme.

Primeri primene Lagranžove teoreme na konvergenciju stepenih redova

PRIMER 4. Neka je $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ konvergira na $(-r, r)$, onda i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} \quad \text{konvergira za } x \in (-r, r).$$

REŠENJE. Neka je $0 < x < x+h < r$. Redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x+h)^n$$

apsolutno konvegiraju.

Obrazloženje: postoji $x_1 \in \mathbb{R}$ takvo da je $x+h < x_1 < r$; iz konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_1^n \quad \text{sledi} \quad |\alpha_n x_1^n| \leqslant K, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{za neko } K.$$

Sada je

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant K \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

a red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

konvergira na osnovu Košijevog kriterijuma. Sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$$

konvergira, a slično

$$|\alpha_n(x+h)^n| \leqslant K \cdot \left|\frac{x+h}{x_1}\right|^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Prema Lagranžovoj teoremi je

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\xi_n^{n-1}, \quad \text{gde je} \quad x < \xi_n < x+h$$

pa je

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \xi_n^{n-1}$$

apsolutno konvergentan red jer apsolutno konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Iz apsolutne konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n \xi_n^{n-1}$$

sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

apsolutno konvergira, jer je $x < \xi_n$ i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|x|^{n-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|\,|\xi_n|^{n-1} < +\infty$$

(x je proizvoljno izabrano iz $(-r,r)$).

PRIMER 5. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ konvergira u intervalu $(-r,r)$ onda red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda} \alpha_n x^n \quad \text{konvergira} \quad \forall x \in (-r,r) \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

REŠENJE. Na osnovu dokazanog u prethodnom zadatku red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}$$

konvergira, a time i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}.$$

Dalje iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^n$ sledi konvergencija reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n\alpha_n)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\alpha_n x^{n-1}$$

itd. Indukcijom zaključujemo da $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \alpha_n x^n$ konvergira za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$; konvergencija je apsolutna. Za neko k je ispunjeno

$$|n^{\lambda} \alpha_n x^n| \leqslant |n^k \alpha_n x^n|.$$

PRIMER 6. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$ je neprekidna funkcija za $\forall x\in(-r,r)$, ako je definisana na tom intervalu.

REŠENJE. Neka je $0\leqslant|x|<r$, $0\leqslant|x|\leqslant|x_1|<r$, h takvo da važi $0<|x+h|<x_1<r$. Dokažimo da je

$$\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|=0;\qquad f(x+h)-f(x)=h\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n\xi_n^{n-1},$$

ξ_n je između x i $x+h$. Pošto red

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n x_1^{n-1}$$

apsolutno konvergira važi

$$\big|f(x+h)-f(x)\big|\leqslant|h|\sum_{n=1}^{\infty}n|\alpha_n x_1^{n-1}|=|h|\cdot C,$$

gde je sa C označena suma poslednjeg reda. Znači

$$\big|f(x+h)-f(x)\big|\leqslant|h|\cdot C,$$

pa je f neprekidna funkcija u tački x.

PRIMER 7. Za svako x iz $(-r,r)$ gde je

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$$

konvergentan, postoji $f'(x)$ i važi jednakost

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n x^{n-1}.$$

REŠENJE. Neka je $0\leqslant|x|<|x_1|<r$,

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n x^{n-1}.$$

Ovaj red apsolutno konvergira za $|x|<r$. Uzimamo da je h takvo da važi $|x+h|<|x_1|<r$, biće

$$\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n(x^{n-1}-\xi_n^{n-1}),$$

gde je ξ_n između x i $x+h$. Dalje je prema Lagranžovoj teoremi

$$x^{n-1}-\xi_n^{n-1}=(n-1)\eta_n^{n-2}(x-\xi_n),$$

η_n između x i ξ_n. Sledi

$$\left|\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant|h|\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)|a_n||x_1^{n-2}|\leqslant|h|\sum_{n=1}^{\infty}n^2\alpha_n|x_1|^{n-2}=|h|\cdot S_1,$$

gde smo koristili da je $|x-\xi_n|<|h|$, pa se dobija

$$\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to 0\quad\text{kad}\quad h\to 0$$

što znači da postoji $f'(x)$ i da je jednak $\varphi(x)$.

PRIMER 8. Ako je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$$

definisano $\forall x \in (-r,r)$ i ako je

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^{n+1}$$

onda je $\phi(x)$ definisano $\forall x \in (-r,r)$ i $\phi'(x) = f(x)$.

REŠENJE. Na osnovu dokazanog u prethodnom zadatku $\phi'(x)$ postoji i jednako je $f(x)$, $\forall x \in (-r,r)$. ($\phi(x)$ je definisano za $x \in (-r,r)$ jer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ apsolutno konvergira za $x \in (-r,r)$ i važi

$$\left| \frac{\alpha_n}{n+1} x^{n+1} \right| \leqslant \frac{r}{n+1} |\alpha_n x^n| \leqslant |\alpha_n x^n|, \quad (n \geqslant n_0) \quad \text{za svako } x \in (-r,r).$$

PRIMER 9. Neka je $\phi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Dokazati da za $0 < x < 1$ važi

a) $\phi(x) = -\int\limits_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt$,

b) $\phi(x) + \phi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \log(1-x)$.

REŠENJE. a) $\frac{-\log(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \cdots$ Ovaj red uniformno konvergira na $[0,x]$ jer

$$\left| \frac{t^n}{n+1} \right| \leqslant \frac{x^n}{n+1}, \quad \text{a red} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

konvergira. Sledi

$$-\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n+1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

b) Funkcija $\phi(x) + \phi(1-x) + \log x \log(1-x)$ ima izvod jednak nula, konstantna je,

$$\lim_{x \to +0} \phi(x) = 0$$

(jer je $\frac{\log(1-t)}{t}$ ograničeno),

$$\lim_{x \to +0} \phi(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

zbog uniformne konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{na} \quad [0,1].$$

Vrednost funkcije je

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4.1.1. Jensenova nejednakost i drugi problemi

Jensenova nejednakost. *Neka je* $f : I \to R$ *konveksna. Za proizvoljne* $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ *i* $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n > 0$*, takve da je*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 \quad (n \geqslant 2) \quad \textit{važi}$$
$$f(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_n t_n) \leqslant \lambda_1 f(t_1) + \cdots + \lambda_n f(t_n).$$

DOKAZ. Izvodi se indukcijom. Nejednakost važi za $n = 2$.

Neka je

$$s_1, s_2, \dots s_{n+1} \in I, \quad \gamma_1 > 0, \dots, \gamma_{n+1} > 0, \quad \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n+1} = 1.$$

Možemo pisati

$$\gamma_1 s_1 + \cdots + \gamma_{n+1} s_{n+1} = \gamma_1 s_1 + \cdots \gamma_{n-1} s_{n-1} + (\gamma_n + \gamma_{n+1}) q_n, \quad \text{gde je}$$
$$q_n = \frac{\gamma_n s_n}{\gamma_n + \gamma_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1} s_{n+1}}{\gamma_n + \gamma_{n+1}} \in I, \quad \text{jer se } q \text{ nalazi između } s_n \text{ i } s_{n+1}.$$

Koristeći indukcijsku pretpostavku dobijamo.

$$f(\gamma_1 s_1 + \cdots + \gamma_{n+1} s_{n+1}) \leqslant \gamma_1 f(s_1) + \cdots + \gamma_{n-1} f(s_{n-1}) + (\gamma_n + \gamma_{n+1}) f(q_n),$$

a iz konveksnosti f je

$$f(q_n) \leqslant \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \gamma_{n+1}} f(s_n) + \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n + \gamma_{n+1}} f(s_{n+1}).$$

PRIMER 10. Dokazati $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$, ako je

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$
$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \quad (a_1, \cdots, a_n > 0)$$

(H_n, G_n, A_n, K_n nazivaju se harmonijska, geometrijska, artitmetička i kvadratna sredina.)

REŠENJE. Nejednakost $G_n \leqslant A_n$ je direktna posledica Jensenove nejednakosti. Treba uzeti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n},$$
$$f(t) = e^t \quad (t \in I = R)$$

i $e^{t_1} = a_1, \dots, e^{t_n} = a_n$.

Nejednakost $H_n \leqslant G_n$ se svodi na $G_n \leqslant A_n$. (Uvesti smenu

$$\frac{1}{a_1} = b_1, \dots, \frac{1}{a_n} = b_n$$

i izvršiti unakrsno množenje)

Nejednakost $A_n \leqslant K_n$ je posledica Jensenove nejednakosti. (Uzeti $f(t) = t^2$).

PRIMER 11. Naći minimum funkcije

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+x+z} + \frac{z^3}{z^2+x+y}$$

na skupu $X = \{(x,y,z) \,\big|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z=1\}$.

REŠENJE. Iz uslova $x+y+z=1$, dobije se $y+z=1-x$, $x+z=1-y$ i $x+y=1-z$, pa je

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{x^2-x+1} + \frac{y^3}{y^2-y+1} + \frac{z^3}{z^2-z+1}, \quad \text{odnosno}$$

$$F(x,y,z) = g(x)+g(y)+g(z), \quad \text{gde je} \quad g(t) = \frac{t^3}{t^2-t+1}.$$

Funkcija $g(x)$ je konveksna na $[0,1]$ jer je

$$g'(t) = \frac{t^2(t^2-2t+3)}{(t^2-t+1)^2}, \quad g''(t) = \frac{6t(1-t)}{(t^2-t+1)^2} \quad \text{i} \quad g''(t) \geqslant 0 \text{ za } t \in [0,1].$$

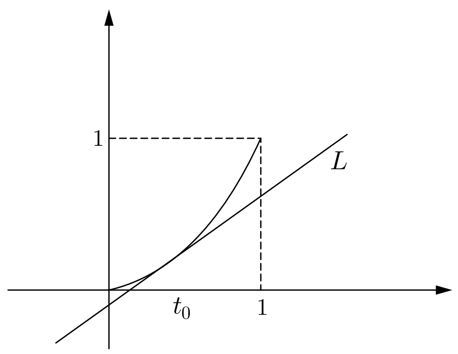
Primenom Jensenove nejednakosti, dobija se

$$\frac{g(x)+g(y)+g(z)}{3} \geqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}.$$

Za $x=y=z=\frac{1}{3}$ minimum funkcije F je $\frac{1}{7}$.

Može se prikazati i geometrijska interpretacija

$$L(x) = s(x-t_0)+g(t_0), \quad t_0 \in (0,1).$$



Slika 17

Grafik konveksne funkcije g je iznad tangente L pa važe nejednakosti

$$\begin{array}{l} g(x) \geqslant s(x-t_0)+g(t_0) \\ g(y) \geqslant s(y-t_0)+g(t_0) \\ g(z) \geqslant s(z-t_0)+g(t_0) \\ \hline g(x)+g(y)+g(z) \geqslant s(x+y+z-3t_0)+3g(t_0) = s(1-3t_0)+3g(t_0) \end{array}$$

pa je za $1-3t_0=0$, $t_0=\frac{1}{3}$

$$g(x)+g(y)+g(z) \geqslant 3g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}$$

PRIMER 12. Naći minimum funkcije

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{1+y+z-x^2} + \frac{y^3}{1+x+z-y^2} + \frac{z^3}{1+x+y-z^2}$$

na skupu

$$X = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z=1\right\}$$

REŠENJE. Kako je $y+z=1-x$, $x+z=1-y$ i $x+y=1-z$, dobija se

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{2-x-x^2} + \frac{y^3}{2-y-y^2} + \frac{z^3}{2-z-z^2}.$$

Može se napisati

$$F(x,y,z) = xg(x)+yg(y)+zg(z) \quad \text{gde je}$$

$$g(t) = \frac{t^2}{2-t-t^2}, \quad t \in (0,\ 1).$$

Funkcija $g(t)$ je konveksna na $(0,1)$ jer je

$$g'(t) = \frac{t(4-t)}{(2-t-t^2)^2}, \quad g''(t) = 2\cdot\frac{4+6t^2-t^3}{(2-t-t^2)^3}, \quad g''(t) \geqslant 0,\ t \in (0,1).$$

Primenom Jensenove nejednakosti

$$xg(x)+yg(y)+zg(z) \geqslant g(x^2+y^2+z^2), \quad x+y+z=1$$

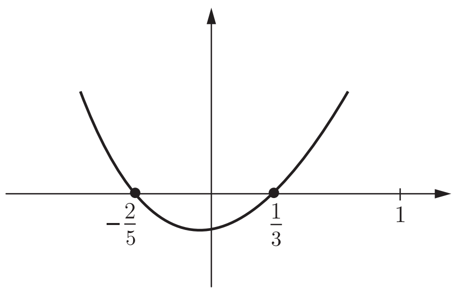
Cilj je da se dokaže da je

$$g(x^2+y^2+z^2) \geqslant \frac{1}{14}, \quad \text{odnosno}$$

$$g(t) = \frac{t^2}{2-t-t^2} \geqslant \frac{1}{14}, \quad t \in (0,1)$$

$$14t^2 \geqslant 2-t-t^2$$

$$15t^2+t-2 \geqslant 0, \quad \text{pa je} \quad t \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad t \leqslant -\frac{2}{5}$$



Slika 18

Poslednja nejednakost ispunjena je za $t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$, pa je

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3},$$

$$3x^2+3y^2+3z^2 \geqslant 1$$

$$3x^2+3y^2+3z^2 \geqslant (x+y+z)^2$$
$$2x^2+2y^2+2z^2 \geqslant 2xy+2xy+2yz, \quad \text{na osnovu}$$
$$x^2+y^2 \geqslant 2xy$$
$$x^2+z^2 \geqslant 2xz \quad \text{i}$$
$$y^2+z^2 \geqslant 2yz$$

Može i korišćenjem kvadratne i aritmetičke nejednakosti

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$$

Zašto smo procenjivali

$$g(x^2+y^2+z^2) \geqslant \frac{1}{14}?$$

Odgovor je jednostavan. Jednakost se dostiže za

$$x=y=z=\frac{1}{3}, \quad \text{a tada je}$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3} \quad \text{i}$$
$$F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{14}$$

i ova vrednost je traženi minimum funkciju F.

Nejednakost M. Petrovića. *Neka je $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija i $x_1,x_2,\ldots,x_n$ niz pozitivnih brojeva. Tada je*

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leqslant f(x_1+\cdots+x_n)+(n-1)f(0).$$

DOKAZ. Označimo sa

$$\gamma = x_1+\cdots+x_n \quad \text{i} \quad \lambda_i=\frac{x_i}{\gamma}.$$

Važi da je

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,$$
$$x_i=(1-\lambda_i)\cdot 0+\lambda_i\gamma \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

Iz konveksnosti funkcije f sledi

$$f(x_i) \leqslant (1-\lambda_i)f(0)+\lambda_i f(\gamma)$$

Sabiranjem za $i=1,2,\ldots,n$ dobija se

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leqslant (n-1)f(0)+f(\gamma).$$

Niz a **majorira niz** b. *Neka su $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ i $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ dva konačna niza realnih brojeva. Niz a majorira niz b, u oznaci $a\succ b$, ako je*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n,$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k \geqslant b_1+b_2+\cdots+b_k, \quad k=1,2,\dots,n-1$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$$

Karamatina nejednakost. *Neka su $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ i $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ nizovi brojeva iz (α,β). Ako je $a\succ b$ i ako je $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ konveksna, onda je*

$$f(a_1)+\cdots+f(a_n)\geqslant f(b_1)+\cdots+f(b_n).$$

DOKAZ. Označim sa c_i podeljenu razliku funkcije f u tačkama a_i i b_i, tj.

$$c_i=\Delta_f(a_i,b_i)=\frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}.$$

Zbog konveksnosti funkcije f sledi da je

$$c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n.$$

Označimo sa

$$A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k, \quad B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k,; \quad A_0=B_0=0.$$

Kako je $a\succ b$ dobija se

$$A_k\geqslant B_k, \quad k=1,2,\dots,n-1 \quad \text{i} \quad A_n=B_n.$$

Važi da je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(a_i)-\sum_{i=1}^n f(b_i) &= \sum_{i=1}^n\Big(f(a_i)-f(b_i)\Big)\\ &=\sum_{i=1}^n c_i(a_i-b_i)\\ &=\sum_{i=1}^n c_i(A_i-A_{i-1}-(B_i-B_{i-1})\\ &=\sum_{i=1}^n c_i(A_i-B_i)-\sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(A_i-B_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i).\end{aligned}$$

Pošto je $c_i\geqslant c_{i+1}$ i $A_i\geqslant B_i$ dobija se da je

$$\sum_{i=1}^n f(a_i)-\sum_{i=1}^n f(b_i)\geqslant 0.$$

U više posledica Lagranžove teoreme i problema konveksnosti javljaju se nejednakosti sličnog tipa, kao one koje se razmatraju u sledećem odeljku *razni problemi*, ali se on može razmatrati i sasvim samostalno.

Razni problemi

PRIMER 13. Dokazati nejednakost

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2y+x^2z+y^2z+z^2x+z^2y, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

DOKAZ. Kako je

$$x^3-x^2y-x^2z+xyz = x(y-x)(z-x),$$

data nejednakost ekvivalentna je sa

$$x(y-x)(z-x)+y(x-y)(z-y)+z(x-z)(y-z) \geqslant 0$$

Pretpostavimo da je $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Onda je

$$(*) \qquad x(y-x)(z-x)+z(z-x)(z-y) \geqslant y(y-x)(z-y)$$

Iz uslova

$$\text{(a)} \qquad y^2+xz \geqslant x^2+yz \Longleftrightarrow x(z-x) \geqslant y(z-y) \quad \text{sledi} \quad x(y-x)(z-x) \geqslant y(y-x)(z-y)$$

Iz uslova $z^2+xy \geqslant y^2+xz \Longleftrightarrow z(z-x) \geqslant y(y-x)$ sledi

$$\text{(b)} \qquad z(z-x)(z-y) \geqslant y(y-x)(z-y)$$

Kako je $z^2+xy \geqslant x^2+yz$, što je ekvivalentno sa $(z-x)(z+x) \geqslant y(z-x)$, onda važi jedan od uslova $xz+y^2 \geqslant x^2+yz$ ili $z^2+xy \geqslant y^2+xz$. Sledi da je nejednakost $(*)$ tačna, odnosno tačna je data nejednakost.

PRIMER 14. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

DOKAZ. Važe nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine pa se dobija

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \frac{2}{a+b} \quad \wedge \quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \geqslant \frac{2}{a+c} \quad \wedge \quad \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} \geqslant \frac{2}{b+c}$$

Njihovim sabiranjem dobija se tražena nejednakost.

PRIMER 15. Ako je $a>0$, $b>0$, $c>0$ i $a+b+c=1$ dokazati da važi

$$\left(\frac{1}{a}-24a^2\right)+\left(\frac{1}{b}-24b^2\right)+\left(\frac{1}{c}-24c^2\right) \geqslant 1$$

DOKAZ. Neka je $a<b<c$. Onda je

$$f(a)+f(b) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{gde je} \quad f(x)=\frac{1}{x}-24x^2.$$

$$
\begin{aligned}
& f(a)+f(b) \geqslant 2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}-24 a^2-24 b^2+12(a+b)^2 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a b(a+b)}-12(a-b)^2 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{1}{a b(a+b)}-12\right) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Ova poslednje nejednakost važi jer je

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{a b} \leqslant \frac{a+b}{2}, \quad a+b \leqslant \frac{2}{3} \quad (\text{na osnovu } a<b<c) \quad \text{pa je} \\
& \frac{1}{a b(a+b)} \geqslant \frac{27}{2}>12 .
\end{aligned}
$$

Ostaje da se dokaže

$$
2 f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(c) \geqslant 1, \quad \text{odnosno} \quad 2 f\left(\frac{1-c}{2}\right)+f(c) \geqslant 1 .
$$

Označimo $c-\frac{1}{3}=d$. Pošto je $\frac{1}{3}<c<1$, onda je $0<d<\frac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot \frac{2}{1-c}-48\left(\frac{1-c}{2}\right)^2+\frac{1}{c}-24 c^2-1 \geqslant 0, \quad 1-c=\frac{2}{3}-d, \\
& \Leftrightarrow \frac{4}{\frac{2}{3}-d}-12\left(\frac{2}{3}-d\right)^2+\frac{1}{d+\frac{1}{3}}-24\left(d+\frac{1}{3}\right)^2-1 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{12}{2-3 d}-\frac{4}{3}(2-3 d)^2+\frac{3}{3 d+1}-\frac{8}{3}(3 d+1)^2-1 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{12}{2-3 d}-6-\frac{4}{3}(2-3 d)^2+\frac{16}{3}+\frac{3}{3 d+1}-3-\frac{8}{3}(3 d+1)^2+\frac{8}{3}-1+1 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{18 d}{2-3 d}-\frac{4}{3}\left(4-12 d+9 d^2-4\right)+\frac{-9 d}{3 d+1}-\frac{8}{3}\left(9 d^2+6 d+1-1\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow d\left(\frac{18}{2-3 d}+16-12 d-\frac{9}{3 d+1}-24 d-16\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow d\left(\frac{18}{2-3 d}-36 d-\frac{9}{3 d+1}\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow d\left(\frac{18}{2-3 d}-9-36 d-\frac{9}{3 d+1}+9\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow d\left(\frac{27 d}{2-3 d}-36 d+\frac{27 d}{3 d+1}\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow 9 d^2\left(\frac{3}{2-3 d}-4+\frac{3}{3 d+1}\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow 9 d^2 \frac{3(3 d+1)-4(2-3 d)(3 d+1)+3(2-3 d)}{(2-3 d)(3 d+1)} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow 9d^2\ \frac{36d^2-12d+1}{(2-3d)(3d+1)} \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 9d^2\ \frac{(6d-1)^2}{(2-3d)(3d+1)} \geqslant 0.$$

PRIMER 16. $a>0,\ b>0,\ c>0, a+b+c=3 \Rightarrow \dfrac{2-a^3}{a}+\dfrac{2-b^3}{b}+\dfrac{2-c^3}{c} \geqslant 3$. Dokazati.[6]

DOKAZ. (I) Dokazaćemo da je $\phi(a)+\phi(b) \geqslant 2\phi\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ gde je $\phi(x)=\dfrac{2}{x}-x^2$.

Neka je $0<a<b<c$, $a+b+c=3$, tada je

$$\phi(a)+\phi(b) \geqslant 2\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{a}-a^2+\frac{2}{b}-b^2 \geqslant \frac{8}{a+b}-\frac{(a+b)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{2}{b}-\frac{8}{a+b} \geqslant a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(a-b)^2}{ab(a+b)} \geqslant \frac{(a-b)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(4-ab(a+b)) \geqslant 0$$

što je tačno jer je $a+b \leqslant 2$ i $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

(II) Dokazujemo da važi

$$2\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)+\phi(c) \geqslant 3, \quad \text{što je ekvivalentno sa}$$
$$2\phi\left(\frac{3-c}{2}\right)+\phi(c) \geqslant 3.$$

Pošto se očekuje da znak jednakosti važi za $c=1$, pogodno je označiti $c-1=x$ ili $\dfrac{c-1}{2}=t$. Treba dokazati da važi

$$2\phi(1-t)+\phi(1+2t) \geqslant 3 \quad (\text{Ovde je } 0 \leqslant t<1)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{1-t}-4\right)+\left(\frac{2}{1+2t}-2\right)-6t^2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow t\left(\frac{4}{1-t}-\frac{4}{1+2t}-6t\right) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow t\left(\frac{12t}{(1-t)(1+2t)}-6t\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow 6t^2(1-t+2t^2) \geqslant 0.$$

---

[6] XIX Juniorska balkanska matematička olimpijada

4.2. TEJLOROVA FORMULA

Razmatra se sledeći zadatak. Neka je data funkcija $y = f(x)$, $x \in X$, koja u okolini $U(a)$ tačke a ima sve izvode do reda n, što implicira da su svi izvodi do reda $n-1$ neprekidni u okolini $U(a)$. Potrebno je naći polinom $P_n(x)$, stepena ne većeg od n, takav da važi

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (k = 1,2,\dots,n),$$
$$R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a.$$

Funkcija $R_n(x)$ naziva se *ostatak*.

U slučaju $n = 1$, polinom $P_1(x)$ se može zapisati u obliku

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

jer je $P_1(a) = f(a)$, $P_1'(a) = f'(a)$ i

$$\begin{aligned} R_1(x) = f(x) - P_1(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \\ &= \Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta y - \text{đ}y = o(\Delta x), \end{aligned}$$

kad $\Delta x \to 0$, gde je $\Delta x = x - a$, $\Delta y = f(x) - f(a)$.

Neka je, po analogiji, polinom $P_n(x)$, koji zadovoljava tražene uslove, dat u sledećem obliku

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n.$$

Ako u ovu jednakost stavimo $x = a$, dobijamo $P_n(a) = C_0$. Uslov zadatka je $P_n(a) = f(a)$, pa je $C_0 = f(a)$. Nalaženjem prvog izvoda

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \cdots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

i izračunavanjem vrednosti za $x = a$, dobijamo

$$P_n'(a) = C_1, \quad \text{odnosno} \quad C_1 = f'(a).$$

Uopšte, izvod polinoma $P_n(x)$ reda k je

$$P_n^{(k)} = k!C_k + (k+1)k\cdots 2C_{k-1}(x-a) + \cdots n(n-1)\cdots\big(n-(k-1)\big)C_n(x-a)^{n-k}$$

i njegova vrednost za $x = a$ je $P_n^{(k)} = k!C_k$, odakle uz uslov zadatka sledi da je

$$C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 1,2,\dots,n).$$

Postavlja se pitanje da li polinom $P_n(x)$ sa ovim koeficijentima $C_0 = f(a)$ i $C_k = \dfrac{f^{(k)}}{k!}(a)$ zadovoljava i drugi uslov $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$. Na osnovu jednakosti $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ važi

$$R_n(a) = R_n'(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Pošto funkcije f i P_n imaju izvode do reda n, i koji su do reda $n-1$ neprekidni, može se izračunati granična vrednost količnika $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ primenom Lopitalovog pravila. Dobija se

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

To znači da se funkcija (ostatak) može napisati u obliku $R_n(x)=o\big((x-a)^n\big)$.

Na taj način je dokazana sledeća teorema:

Tejlorova teorema. *Ako funkcija $y=f(x)$, $x\in X$, ima sve izvode do reda n u okolini $U(a)$ tačke a, tada je u okolini tačke a*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\big((x-a)^n\big),\ x\to a.$$

Polinom

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

gde je $f^{(0)}(a)=f(a)$, naziva se Tejlorov polinom, a formula

$$f(x)=P_n(x)+o\big((x-a)^n\big)$$

je Tejlorova formula funkcije u tački $x=a$.

Funkcija

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

je ostatak reda n dat u Peanovom obliku, $R_n(x)=o\big((x-a)^n\big)$.

Ako je tačka $a=0$, dobija se *Maklorenova formula*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)\qquad(x\to 0).$$

Tejlorova formula u specijalnom slučaju svodi se na Lagranžovu formulu, a polinom na pravu liniju, tj. tangentu krive u tački razvoja.[7]

PRIMER 1. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x)=\sin x$.

[7] Za primere primene Tejlorovog i Maklorenovog polinoma videti u: Dobrilo Tošić, Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasnik, Beograd, str. 223–226 i 280–285. Takođe dobri primeri mogu se videti u: Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. , 2003. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. ФИЗМАТЛИТ. str. 350–364.

Bruk Tejlor (Brook Taylor), 1685–1731, bio je engleski matematičar.

Kolin Makloren (Colin Maclaurin), 1698–1746, bio je škotski matematičar.

REŠENJE. Kako je $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, sledi da je

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k), \\ (-1)^{k-1} & (n = 2k-1), \end{cases}$$

gde je $k = 0, 1, 2, \dots$ Zbog toga je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

PRIMER 2. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = \cos x$

REŠENJE. Za funkciju $f(x) = \cos x$ dobija se analogno

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k-1), \\ (-1)^k & (n = 2k). \end{cases}$$

Odavde izlazi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

PRIMER 3. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = e^x$.

REŠENJE. Za funkciju $f(x) = e^x$ je $(e^x)^{(n)} = e^x$, odakle je $f^{(n)}(0) = 1$, pa važi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Ako umesto x stavimo $-x$, dobijamo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Na osnovu dobijenih rezultata važe i formule

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

PRIMER 4. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

REŠENJE. Ako je $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, imamo

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(n-1)\big)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Zbog toga je $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(n-1)\big)$, $n = 1, 2, \dots$ i $f(0) = 1$.

Odavde sledi (kada je $|x| < 1$)

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

PRIMER 5. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x)=\ln(1+x)$.

REŠENJE. Neka je $f(x)=\ln(1+x)$. Tada se dobija

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}, \qquad f''(x)=(-1)(1+x)^{-2}.$$

Uopšte je

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n},$$

odakle je $f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$, $n=1,2,\dots$ i $f(0)=0$.

Prema tome, važi

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n), \quad x\to 0.$$

4.2.1. Tejlor-Lagranžova jednakost

Pretpostavimo da funkcija f ima neprekidne izvode do reda n u okolini $U(a)$ tačke a i da postoji $(n+1)$-vi izvod u okolini $U(a)$ tačke a.

Tejlorovu formulu možemo prikazati u obliku

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x),$$

gde je $R_n(x)$ ostatak, tj. razlika funkcije i Tejlorovog polinoma. S druge strane $R_n(x)$ je beskonačno mala reda $n+1$ u okolini tačke a, tj. oblika

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\lambda(x).$$

Na taj način Tejlorova formula postaje

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\lambda(x).$$

Ako x fiksiramo, onda je $\lambda(x)$ konstanta. Označimo je sa λ. Formirajmo pomoćnu funkciju $\varphi(t)$, gde je $a<t<x$,

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\lambda\\ &=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}}{n!}(x-t)^n-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\lambda.\end{aligned}$$

Jednostavno se dokazuje da je $\varphi(x)=\varphi(a)=0$ i da je

$$\varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n}{n!}\lambda.$$

Primenom Rolove teoreme zaključujemo da postoji takvo $t=\xi$ između a i x da je $\varphi'(\xi)=0$. Dakle,

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(x-\xi)^n}{n!}\cdot\lambda=0\Rightarrow\lambda=f^{(n+1)}(\xi).$$

Prema tome, dobili smo ostatak Tejlorove formule u Lagranžovom obliku

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \qquad (a < \xi < x), \quad \text{ili}$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Na osnovu navedenog dobija se *Tejlor-Lagranžova jednakost*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big) \quad (0 < \theta < 1).$$

PRIMER 6. Funkcija $f(x) = e^x$, u okolini tačke $x = 0$, može se aproksimirati Tejlorovim polinomom

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

gde je greška u Lagranžovom obliku

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}, \quad |\xi| < |x|.$$

Važi sledeća nejednakost

$$\big|R_n(x)\big| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

Za svako fiksirano $x \in \mathbb{R}$, ako $n \to \infty$

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{pa važi razvoj}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

za svako fiksirano $x \in \mathbb{R}$.[8]

Može se pisati

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

[8] Niz $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$, $x > 0$ je opadajući (za dovoljno veliko n, preciznije za $n > x$) i ograničen sa donje strane jer je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} < 1 \quad \text{za} \quad n > x \quad \text{i} \quad a_n > 0.$$

Kako je

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} a_n$$

odnosno $a_{n+1} = \dfrac{x}{n+1} \cdot a_n$ pa prelaskom na graničnu vrednost gde je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, dobija se $A = 0 \cdot A \Rightarrow A = 0$, odnosno $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

PRIMER 7. Funkcija $F(x) = \sin x$ ima n-ti izvod dat sa

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n =, 2, \dots$$

pa je Lagranžov oblik ostatka u Tejlorovom razvoju u okolini tačke $x = 0$ jednak

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Za fiksirano $x \in \mathbb{R}$ važi da je

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Na taj način razvoj funkcije

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

važi za svako fiksirano $x \in \mathbb{R}$.

Može se pisati

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

PRIMER 8. Funkcija $f(x) = \cos x$ ima Lagranžov oblik ostatka dat sa

$$R_n(x) = \frac{\cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

pa važi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zanimljivo je naglasiti tri moguća didaktička tipa primera.

a) Aproksimirati funkciju $x \to f(x)$ Tejlorovim polinomom datog stepena u okolini tačke $x = a$ i oceniti grešku u datom intervalu. (Traži se *greška*!)

b) Odrediti stepen k Tejlorovog polinoma za funkciju $x \to f(x)$ da bi greška aproksimacije u datom intervalu bila manja od zadatog malog broja, na primer 10^{-6}. (Traži se *stepen polinoma*!)

c) Kolika treba da bude veličina intervala $(a - \delta, a + \delta)$ da bi pri aproksimaciji funkcije $x \to f(x)$ Tejlorovim polinomom datog stepena greška bila manja od zadate? (Traži se *veličina intervala*!)

PRIMER 9. Za funkciju $f(x) = \sin x$ važi razvoj

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1} \cos(\theta x)}{(2n+1)!}.$$

Koliko članova polinoma (Maklorenovog) treba uzeti da se izračuna $\sin x$ za $\forall x \in [0, \pi/6]$ sa tačnih 8 decimala? Zatim izračunati $\sin 20^\circ$.

REŠENJE. Za grešku $R_n(x)$, pri čemu $x \in [0, \pi/6]$, imamo procenu

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{2n+1}|\cos\theta x|}{(2n+1)!} < \frac{\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Nejednakost $|R_n(x)| < 10^{-8}$ ispunjena je za $n \geqslant 5$. Ako je $n = 5$ i $x = 20^\circ$, tj. $x = \dfrac{\pi}{9}$, dobijamo $\sin 20^\circ \approx 0.3420201433$ (sve su cifre tačne). Dakle, dobili smo veću tačnost jer je argument $\pi/9$ manji od $\pi/6$.

PRIMER 10. Ako je $f[0,1] \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna i $|f''(x)| \leqslant 1$ za $x \in [0,1]$ onda postoji prava $g(x) = ax + b$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ takva da je

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{16}, \quad \forall x \in [0,1].$$

REŠENJE. Neka je $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - f(0) - (f(1) - f(0))x$; važi $\varphi''(x) = f''(x)$, $|\varphi''| \leqslant 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$. Funkcija φ dostiže $[0,1]$ apsolutni maksimum i apsolutni minimum, $\varphi(a) = M$ (apsolutni maksimum), $\varphi(b) = +m$ (apsolutni minimimum). Neka je npr. $a < b$. Postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $\varphi(c) = 0$.

Tejlorov polinom

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)\frac{(x-a)}{1!} + \varphi''(\xi)\frac{(x-a)^2}{2!},$$
$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)\frac{(x-b)}{1!} + \varphi''(\eta)\frac{(x-b)^2}{2!}.$$

Pošto je $\varphi'(a) = 0$, $\varphi'(b) = 0$ uzimajući $x = 0$, a u prvom i $x = c$ i u drugom dobijamo

$$0 = \varphi(a) + \varphi''(\xi)\frac{(0-a)^2}{2}, \quad 0 = \varphi(a) + \varphi''(\xi)\frac{(c-a)^2}{2}$$

tj.

$$|\varphi(a)| \leqslant \frac{a^2}{2}, \quad |\varphi(a)| \leqslant \frac{(c-a)^2}{2}$$

odakle sledi

$$|\varphi(a)| \leqslant \frac{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}{2}$$

i slično

$$|\varphi(b)| \leqslant \frac{\left(\dfrac{1-c}{2}\right)^2}{2};$$

znači

$$|\varphi(a)| \leqslant \frac{c^2}{8}, \quad |\varphi(b)| \leqslant \frac{(1-c)^2}{8},$$

odakle je

$$M - m = \frac{c^2}{8} + \frac{(1-c)^2}{8} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Treba uzeti pravu

$$h(x) = \frac{M+m}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Važi

$$|\varphi(x) - h(x)| \leqslant \frac{1}{16} \quad \text{za} \quad x \in [0,1]$$

odnosno

$$\left| f(x) - f(0) - (f(1) - f(0))x - \frac{M+m}{2} \right| \leqslant \frac{1}{16}, \quad \text{za} \quad x \in [0,1].$$

NAPOMENA. Navedena aproksimacija je najbolja što se vidi iz sledećeg primera. Neka je

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Pretpostavimo da je $g(x) = ax + b$ prava takva da je

$$|f(x) - g(x)| \leqslant c, \quad \forall x \in [0,1]$$

i pri tome $x < \frac{1}{16}$. Tada je

$$g(0) \geqslant f(0) - c, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) + c, \quad g(1) \geqslant f(1) - c$$

tj. $b \geqslant \frac{1}{8} - c$, $\frac{a}{2} + b \leqslant c$, $a + b \geqslant \frac{1}{8} - c$. Sledi

$$\left.\begin{aligned} b &\geqslant \frac{1}{8} - c \\ c &\geqslant \frac{a}{2} + b / \cdot 2 \\ a + b &\geqslant \frac{1}{8} - c \end{aligned}\right\}$$

Sabiranjem ove tri nejednakosti, dobija se $3c \geqslant \frac{1}{4} - 2c$, a time $c \geqslant \frac{1}{16}$. Kontradikcija!

4.2.2. Ojlerova formula i trigonometrijske funkcije

Tejlorov razvoj za funkcije cos, sin i exp dat je formulama

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija exp monotono je rastuća na $\mathbb{R}$ i izgleda potpuno različito od funkcije sin i cos. Ako zamenimo realnu promenljivu x sa kompleksnom promenljivom z, definiše se

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zamenom $z = ix$ dobija se

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Kako je $(i)^{2n} = (-1)^n$, $(i)^{2n+1} = i(-1)^n$, onda je

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Na ovaj način dobijena je *fundamentalna Ojlerova formula*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lema 1. (Eksponencijalno-polarna forma, EPF). *Svako $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ može se predstaviti u obliku* $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Kako funkcija cis injektivno preslikava $I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ na T dobija se

Teorema 1. (Jedinstvenost eksponencijalno-polarne forme, JEPF). *Svako $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ može se jedinstveno predstaviti u obliku* $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$.

Najćešće za glavnu granu argumena uzima se $\arg z \in (-\pi, \pi]$, pa se JEPF može napisati:

Svako $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ može se jedinstveno predstaviti u obliku

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Iz Ojlerove formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ sledi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ove formule su motivacija da se definiše homolomorfno produženje

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{i} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Periodične su i važi

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1;$$

$$(\cos z)' = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z.$$

4.3. HARDIJEV PRISTUP ZA IZRAČUNAVANJE POVRŠINE RAVNE FIGURE

Jedna od najvažnijih primena integrala jeste izračunavanje površine ravne figure ograničene linijama.[9] Za elementarne figure, kao što je trougao, površina se izračunava korišćenjem standardnih formula i tehnika. Ako je figura malo složenija, ali se može podeliti na trouglove, opet je računanje dosta jednostavno.

Slika 19 – Godfri Hardi

Pretpostavimo da je površina određene figure ograničena grafikom neprekidne nenegativne funkcije $y = f(x), x \in (0,K), K > 0$ (čiji grafik Γ_f je iznad x-ose), y-osom, ordinatom tačke x i x-osom. Geometrijski, problem izračunavanja navedene površine je zapravo određivanje površine krivolinijskog trapeza $P(OXMP)$ (videti sliku 20).

Pretpostavimo da tačke grafika Γ_f imaju sledeće koordinate

$$P\big(0, f(0)\big), R\big(a, f(a)\big), M\big(x, f(x)\big), M_1\big(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\big), N\big(b, f(b)\big).$$

[9] Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, Dobrilo Tošić, 2013, simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013 ,Vol. IV(1), *Hardijev pristup izra čunavanja površine*.

Godfrey Harold Hardy, 1877—1947.

Jedno od najiskrenijih priznanja šta je *čista* matematika dolazi iz Hardijevog pera:

Nikada nisam napravio ništa korisno (praktično).

Matematičari koje je Hardi učio bili su mu slični. Ipak je Hardi stvorio nešto vredno, što i jeste najviša težnja u matematici – da se postigne trajno umetničko delo.

Videti u: Davis Philip J, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 83.

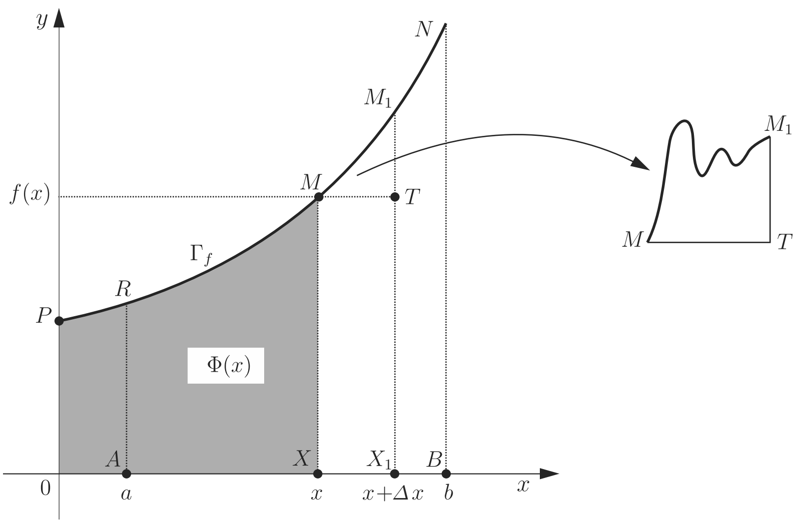
O Lepoti matematike Hardi kaže:

Matematičar je, kao i slikar ili pesnik, kreator modela... Matematički modeli, kao i slikarski ili pesnički moraju biti lepi.

Petković M, Petković Lj, 2006, *Matematički vremeplov: prilozi za istoriju matematike*, Zmaj, Novi Sad, str. 136.

Ako se posmatra krivolinijski trapez $OXMP$, njegova površina je funkcija od x, u oznaci $\Phi(x)$. Jasno je da važi

$$\begin{aligned}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) &= P(XX_1M_1M)\\ &= P(XX_1TM)+P(MTM_1)\\ &= \Delta x\cdot f(x)+P(MTM_1).\end{aligned}$$



Slika 20 – Određeni integral

Površina $P(MTM_1)$ je manja od površine $|\Delta x|\lambda(\Delta x)$, gde je $\lambda(\Delta x)$ najveće rastojanje tačke luka $\ell(MM_1)$ od prave $p(MT)$. Sa druge strane, kako je $f(x)$ neprekidna, onda $\lambda(\Delta x)\to 0$ kad $\Delta x\to 0$. Na taj način

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\Delta x\big(f(x)+\mu(\Delta x)\big),$$

gde je $|\mu(\Delta x)|\leqslant\lambda(\Delta x)$ i $\lambda(\Delta x)\to 0$, za $\Delta x\to 0$. Odavde sledi da je $\Phi(x)$ neprekidna. Važi i više od toga

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x)+\mu(\Delta x)\big)=f(x).$$

Zaključujemo da je ordinata krive $y=f(x)$ jednaka izvodu površine $\Phi'(x)$, pa površina $\Phi(x)$ predstavlja integral ordinate $f(x)$.

Sada se može formulisati pravilo za nalaženje površine krivolinijskog trapeza označenog sa $(OXMP)$. Najpre se izračuna $\Phi(x)$ kao integral od $f(x)$, pri čemu se proizvoljna konstanta C bira tako da je $\Phi(0)=0$. Tada je $\Phi(x)$ tražena površina.[10]

[10] G. H. Hardy, (M. A., F. R. S. Fellow of Trinity College Emeritus Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge Hon. Fellow of New College), 1945, *A Course of Pure Mathematics*, Oxford, ninth edition (prevod na ruski jezik), str. 263.

4.3.1. Njutn–Lajbnicova formula

Neka je f neprekidna nenegativna funkcija, i neka je figura ograničena linijama Γ_f (grafikom funkcije f), $x = a$, $x = b$ i x-osom.

$F(x)$ je integral od $f(x)$ ako je

$$F'(x) = f(x), \; F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je $f \geqslant 0$, tada je površina figure jednaka $F(b) - F(a)$.

Prema prethodnom razmatranju, figura $(OXMP)$, ograničena grafikom funkcije f, pravom $x = 0$, ordinatom x i x-osom, ima površinu $F(x)$. Analognim razmatranjem površina figure $(OARP)$ je $F(a)$ i površina figure $(OBNP)$ je $F(b)$. Razlika $F(b) - F(a)$ je površina figure $(ABNR)$. Zbog praktičnog računanja površine pogodno je imati oznaku, jer ne možemo uvek eksplicitno naći $F(x)$, pa se zato uobičajeno piše

$$P(ABNR) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Broj $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zove se određeni integral; a i b su donja i gornja granica; $f(x)$ je podintegralna funkcija, a interval (a,b), interval integracije.

Veoma je impresivno da određen integral zavisi od vrednosti funkcije F u krajnjim tačkama integracije a i b.

Funkcija $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ često se zove i neodređen integral. Povezanost određenog i neodređenog integrala data je Njutn–Lajbnicovom formulom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Kao što je pokazano, površina do ordinate a figure $(OARP)$ je $F(a)$, a površina do ordinate x figure $(OXMP)$ je $F(x)$, pa je površina između ordinata a i x figure $(AMXR)$ jednaka $F(x) - F(a)$. Na osnovu definicije određenog integrala je

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{i važi}$$

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right)' = f(x).$$

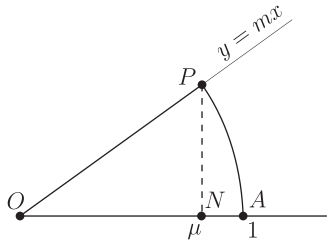
U specijalnom slučaju $f(x) \geqslant 0$ na ovaj način dokazana je *osnovna teorema integralnog računa*:

Osnovna teorema integralnog računa. *Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$. Funkcija* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *, $x \in [a,b]$, ima izvod jednak $f(x)$.*

Iz toga sledi da je F neprekidna funkcija.

PRIMER 1. Izračunati površinu dela jediničnog kruga. Pomoću primera definisati trigonometrijske funkcije.[11]

REŠENJE. Šta predstavlja x u formulama za $\sin x$ i $\cos x$? Za odgovor na to pitanje može se odrediti mera ugla. Neka je $f(AP)$ dužina luka kružne linije sa centrom u O, poluprečnika 1, odnosno $OA = OP = 1$. Tada je dužina x luka AP mera ugla AOP.



Međutim, može se uvesti mera ugla AOP kao dvostruka površina isečka AOP jediničnog kruga. Pretpostavimo da je OA na x-osi, a OP pripada pravoj $y = mx$, $m > 0$. Površina isečka je funkcija od m i biće označena sa $F(m)$. Tačka P ima koordinate $(\mu, m\mu)$ i važi $\mu^2 + (m\mu)^2 = 1$, odnosno

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \ \sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \ m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}.$$

Površina isečka je zbir površine $\triangle ONP$ i površine $P(NAP)$ krivolinijskog trougla.

$$F(m) = \frac{1}{2}\mu(m\mu) + \int\limits_\mu^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu \cdot \sqrt{1-\mu^2} - \int\limits_1^\mu \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}} - \sqrt{1-\mu^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \left(-\frac{1}{1+m^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+m^2}} \cdot 2m\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \frac{m}{(1+m^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+m^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+m^2}$$

$$F(m) = \frac{1}{2}\int\limits_0^m \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$2F(m) = \int\limits_0^m \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} m.$$

---

[11] G. H. Hardy, (M. A., F. R. S. Fellow of Trinity College Emeritus Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge Hon. Fellow of New College) 1945, *A Course of Pure Mathematics*, Oxford ninth edition. (Prevod na ruski jezik), str. 311-312.

Na osnovu navedene teorijske postavke može se definisati funkcija $\operatorname{arctg} x$ na sledeći način: $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, čije vrednosti argumenta su između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ za $x \in \mathbb{R}$.

Specijalno, $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$, pa se može definisati i broj π kao $\pi = 4\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Na sličan način $\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x,\ -1 < x < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$.

Pretpostavimo da je $f(x)$ *neprekidna funkcija i da je* $a < b$. *Za određeni integral važe sledeće osobine*:[12]

(1) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, *jer je* $F(a) - F(a) = 0$

(2) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, *jer je* $F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big)$

(3) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(4) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(6) *Ako je* $f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$ *tada je* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

(7) *Ako je* $H \leqslant f(x) \leqslant K$, $a \leqslant x \leqslant b$, *tada*

$H(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant K(b-a)$.

Za dokaz se koristi osobina (6) primenjena na funkcije $f(x) - H$ i $K - f(x)$.

(8) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$, za neko $\xi \in (a,b)$ (*Prva teorema o srednjoj vrednosti*).

[12] G. H. Hardy, (M. A., F. R. S. Fellow of Trinity College Emeritus Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge Hon. Fellow of New College), 1945, *A Course of Pure Mathematics*, Oxford, ninth edition (prevod na ruski jezik), str. 316.

Ova osobina sledi iz Lagranžove teoreme primenjene na primitivnu funkciju $F(x)$. Postoji broj $\xi \in (a,b)$ takav da je $F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi)$. Kako je $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i izvod $F'(\xi) = f(\xi)$, dobijamo (8).

(9) Ako je $g(x) > 0$ i $H \leqslant f(x) \leqslant K$ tada važi (*Opšta teorema o srednjoj vrednosti*):

$$H\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant K\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i}$$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\ \xi \in (a,b).$$

Teorema se dokazuje pomoću (6) primenjeno na integrale

$$\int\limits_a^b \big(f(x) - H\big)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int\limits_a^b \big(K - f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(10) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

(11) *Ako je* $|f(x)| \leqslant M$, *onda* $\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int\limits_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$

(12) $$\int\limits_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & \textit{ako je } f(x) \textit{ parna funkcija} \\ 0, & \textit{ako je } f(x) \textit{ neparna funkcija} \end{cases}$$

PRIMER 2.

(a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$, za $m,n \in \mathbb{N}$ i $m \neq n$.

Ovaj integral se rešava rastavljanjem proizvoda sinusa na razliku kosinusa, tj.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

(važno je da $m \neq n$).

(b) Za $m = n$ se dobija

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} 2\sin^2 mx\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2mx)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2m}\sin 2mx\Big|_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{2m}\underbrace{\sin 2m\pi}_{=0} = \pi.$$

NAPOMENA. Ovaj integral se može rešiti jednostavnije na sledeći način: Primetimo da je

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, \mathrm{d}x. \quad \text{Kako je}$$

$$I_1 + I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 mx + \cos^2 mx\right) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi,$$

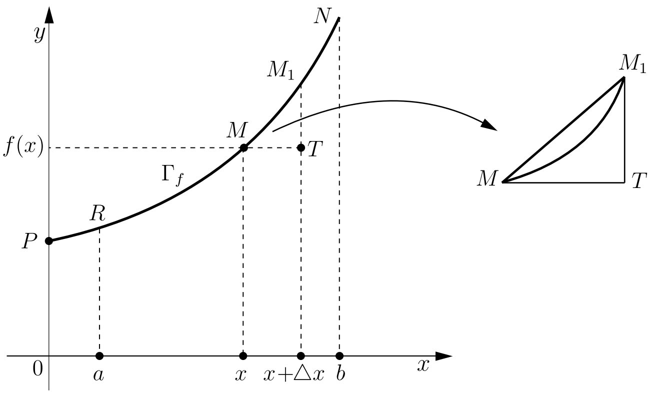
Dobija se da je $I_1 = I_2 = \pi$.

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m, n \in \mathbb{N})$.

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x$ jednak je 0 ili π u zavisnosti od toga da li je $n \neq m$ ili $n = m$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Dužina luka krive

Pretpostavimo da je data diferencijabilna funkcija $y = f(x), \ x \in (0, K), \ K > 0$, čiji grafik Γ_f je iznad x-ose i da je neprekidna od y-ose do ordinate tačke b.



Slika 21 – Dužina luka krive

Linija PM ima određenu dužinu koju ćemo označiti sa $\ell(x)$. $\ell(x)$ je neprekidna funkcija

$$\ell(x + \Delta x) - \ell(x) = \ell(MM_1) = d(MM_1) \cdot \frac{\ell(MM_1)}{d(MM_1)}$$

$$d(MM_1) = \sqrt{d(MT)^2 + d(TM_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\Delta x f'(\xi)\right)^2}$$

jer važi

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(\xi)$$

zbog toga što je funkcija $f(x)$ neprekidna i važi Lagranžova teorema

$$d(MM_1) = \Delta x\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}$$

$$\ell(x+\Delta x)-\ell(x) = \Delta x\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\cdot\frac{\ell(MM_1)}{d(MM_1)}$$

pri čemu je $\dfrac{\ell(MM_1)}{d(MM_1)} < \lambda$ i važi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ell(MM_1)}{d(MM_1)} = 1$, pa je funkcija $\ell(x)$ neprekidna i važi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ell(x+\Delta x)-\ell(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2},$$

$$\ell'(x) = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}.$$

Na ovaj način se dobija da je

$$\ell(x) = \int\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Dužina luka neprekidne funkcije na $[a,b]$ od ordinate tačke a do ordinate tačke b je broj

$$\ell = \int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Ukoliko je funkcija $f(x)$ data u parametarskom obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{đx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

odakle je

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

PRIMER 3. Izračunati dužinu luka jedinične kružnice.

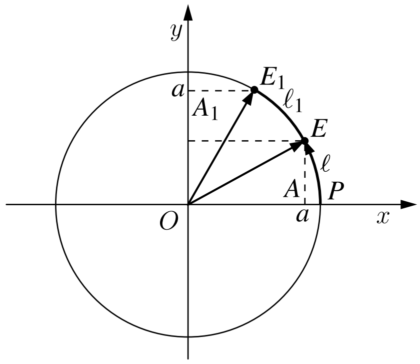
REŠENJE. Dužina luka l je integral

$$l = \int_a^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad \text{ili}$$

$$l = \int_0^b\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Broj π definiše se kao dužina polukružnice

$$\pi = \int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$



Slika 22 – Dužina luka

Interesantno je da se izračuna integral

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin 1 - \arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a.$$

Malo nas zbunjuje dobijeni rezultat jer očekujemo $\arccos a$. Na osnovu podudarnosti trouglova,

$$\triangle OAE \cong \triangle OA_1E_1$$

pa je $l = \dfrac{\pi}{2} - l_1$, odnosno $\arccos a = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin a$.

4.3.2. Tejlorova formula sa ostatkom u obliku integrala

Neka su a i b dve različite tačke intervala I i $n \in \mathbb{N}$.

Teorema o ostatku u obliku integrala. *Ako je funkcija f diferencijabilna $n+1$ puta na intervalu I, onda važi jednakost:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt, \quad a < t < x.$$

Kao što se vidi, prvi sabirak je Tejlorov polinom n-tog stepena, a drugi je ostatak (greška) u obliku integrala.

DOKAZ. Primenimo metod matematičke indukcije. Za $n = 0$ data jednakost je

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \Rightarrow f(x) = f(a) + f(t)\Big|_a^x = f(a) + f(x) - f(a) = f(x),$$

pa je formula tačna (baza indukcije).

Pretpostavimo da je data jednakost tačna za neko $n-1$ $(n \geqslant 1)$, odnosno

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt, \quad \text{za neko } n-1 \text{ je tačno.}$$

Pomoću parcijalne integracije ostatak u ovoj formuli postaje

$$\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt = -(x-t)^n\,\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Kada zamenimo dobijeni ostatak dobili smo formulu koja je tačna za $n \in \mathbb{N}$.

PRIMER 4. Funkcija $f(x) = \ln(1+x),\ x > -1$, ima Tejlorov razvoj u okolini tačke $x = 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

sa ostatkom u integralnom obliku.

Ostatak ima znak $(-1)^n$ ako je $x > 0$ i znak (-1) ako je $-1 < x < 0$.

(1) Za $x > 0,\ 1+t \geqslant 1$ jer je $0 \leqslant t \leqslant x$

(2) Za $-1 < x < 0$, uz uslov $|t| \leqslant |x|$ važi

$-t \leqslant |x|, \qquad -1 < x \leqslant t \leqslant 0$ pa je

$t \geqslant -|x|$

$1+t \geqslant 1-|x|, \ -1 < x \leqslant t \leqslant 0$

Koristeći ove nejednakosti dobija se ocena ostatka

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \leqslant \left|\int_0^x t^n dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0, \quad \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ kad } n \to +\infty$$

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-|x|}dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} \to 0, \quad \text{za } -1 < x \leqslant 0, \text{ kada } n \to +\infty.$$

Na ovaj način, dobija se

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1$$

Primetimo da je za $x = 1$

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

PRIMER 5. Funkcija $f(x) = (1+x)^\alpha,\ x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$, ima n-ti izvod

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

i u okolini tačke $x = 0$ aproksimira se Tejlorovim polinomom

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x)$$

gde je ostatak u integralnom obliku

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt.$$

Za svako $t > -1$ važi
$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|.$$
Na osnovu ove nejednakosti važi ocena
$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n \left|(1+x)^\alpha - 1\right|$$
$$= \left|(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right| |x|^n \left|(1+x)^\alpha - 1\right|$$
Za dovoljno veliko n, postoji N takvo da je $N > |\alpha|$ i za $n > N$ svi činioci u proizvodu su oblika
$$\left|\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)x\right| < 1 \quad \text{za} \quad |x| < 1.$$
Odavde sledi da $R_n(x) \to 0,\ n \to +\infty$ i $|x| < 1$. Dobija se da je
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

NAPOMENA. (1) Primetimo da je razvoj funkcije $f(x) = (1-x)^{-1},\ |x| < 1$ gometrijski red
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
(2) Za funkciju $f(x) = (1+x)^{-1},\ |x| < 1$ važi
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$
Ako koristimo ostatak u integralnom obliku
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$
Ako ovu jednakost integralimo
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt.$$
Dobijeni razvoj smo već razmatrali!

PRIMER 6. Ako u razvoj
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$
dato x zamenimo sa x^2 i integralimo od 0 do x, dobija se
$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt.$$
Kako je $1 + t^2 \geqslant 1$ za svako t, dobija se ocena
$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \to 0, \quad \text{za } |x| \leqslant 1, \text{ kada } n \to +\infty.$$

Zbog toga, može se pisati

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in [-1,1]$$

Za $x = 1$, dobija se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

PRIMER 7. U razvoju funkcije $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ dobija se

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n + R_n(x).$$

Kada umesto x stavimo $(-x^2)$, dobija se

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \\ + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n} + R_n(x)$$

gde je ocena ostatka

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Za $|x| < 1$ važi dobijeni razvoj jer tada $R_n(x) \to 0,\ n \to +\infty$.

Kada poslednji razvoj integralimo dobija se

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

gde je procena greške

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \to 0, \quad |x| < 1, \quad n \to +\infty.$$

Može se pisati jednakost

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Za $x = \dfrac{1}{2}$, dobija se

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Ova formula daje bolje računanje broja π nego prethodna.

Na ovaj način $\pi = 3,141592653\ldots$ s tačnošću $\dfrac{1}{10^9}$.

METRIČKI I VEKTORSKI PROSTORI

Metrički prostori

Mnogi pojmovi vezani za realnu pravu, kao što je pojam konvergencija niza tačaka, zasnivaju se na rastojanju između dve tačke. To omogućava da se ti pojmovi i razmatranja vezana za njih uvedu i na druge skupove, ukoliko se u ovima na odgovarajući način definiše *rastojanje*.

Ovakav pristup je karakterističan za apstrakciju. To je izdvajanje i uopštavanje.

Definicija metričkog prostora.[13] *Neka je X neprazan skup. Metrika na X (ili rastojanje na X) je preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koje ima sledeće osobine:*

(a) $d(x,y) \geqslant 0$*, za svaki $x,y \in X$, jednakost važi ako i samo ako je $x = y$;*

(b) $d(x,y) = d(y,x)$*, za svaki $x,y \in X$;*

(c) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$*, za svaki $x,y,z \in X$ (ova nejednakost poznata je kao nejednakost trougla).*

Metrički prostor je par (X,d), gde je d metrika na X.

Neka je (X,d) metrički prostor. Za svaki $a \in X$ i $r > 0$ definišemo:

(i) ***otvorenu loptu*** *sa centrom a i poluprečnikom r kao skup*

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\},$$

(ii) ***zatvorenu loptu*** *sa centrom a i poluprečnikom r kao skup*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leqslant r\}.$$

PRIMER 1. *Metrički prostor skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.*

Standardna metrika na $\mathbb{R}$ je data sa
$$d(x,y) = |x-y|.$$

PRIMER 2. *Metrički prostor* $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ puta}}$, čije elemente označavamo sa

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$\vdots$$

snabdeven metrikom

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

naziva se *euklidski metrički prostor*.

NAPOMENA. (1) U metričkom prostoru $\mathbb{R}^n$ može se uvesti metrika

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$

pa ga označavamo sa $\mathbb{R}^n_p$, $1 \leqslant p < +\infty$.

(2) U metrički prostor $\mathbb{R}^n$ može se uvesti metrika

$$d(x,y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Ovaj metrički prostor označava se sa $\mathbb{R}^n_\infty$.

Neka je S skup svih nizova sa realnim ili kompleksnim članovima. U skup S i u neke njegove podskupove moguće je uvesti metriku. Tako dobijamo *metričke prostore nizova*. Elemente iz S označavamo sa

$$x = (x_1, x_2, \ldots), \quad y = (y_1, y_2, \ldots), \quad z = (z_1, z_2, \ldots).$$

Umesto $(x_1, x_2, \ldots,)$ najćešće pišemo (x_n).

—

PRIMER 3.

(i) *Prostor* l_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. Tačke x prostora l_p su beskonačni nizovi brojeva (x_n) takvi da red $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p$ konvergira.

U l_p rastojanje je uvedeno sa

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$

(umesto l_1 oznaka je l).

(ii) *Prostor* m. Tačke x metričkog prostora m su ograničeni nizovi (x_n); rastojanje u m uvedeno je sa

$$d(x,y) = \sup_{1\leqslant n<+\infty} |x_n - y_n|.$$

(iii) *Prostor* c. Tačke x metričkog prostora c su konvergentni nizovi, a rastojanje je uvedeno kao u m.

(iv) *Prostor* c_0. Tačke x metričkog prostora c_0 su nizovi (x_n) koji konvergiraju nuli, a metrika je ista kao u m.

U sledećim primerima navodimo neke *metričke prostore funkcija*.

PRIMER 4. (i) *Prostor* $C[a,b]$. Elementi f metričkog prostora $C[a,b]$ su neprekidne funkcije $f(t)$, $t \in [a,b]$, gde je rastojanje uvedeno sa

$$d(f,g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \big| f(t) - g(t) \big|.$$

(ii) *Prostor* $\widetilde{C}[0,2\pi]$. Elementi f metričkog prostora $\widetilde{C}[0,2\pi]$ su neprekidne i periodične funkcije periode 2π, a metrika je ista kao na $C[0,2\pi]$.

*Niz (x_n) iz X **konvergira** tački $x \in X$ ako niz brojeva*

$$d(x_n,x) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Kaže se da je x granična vrednost niza (x_n) i označava $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ ili $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

*Niz (x_n) **konvergira** tački x ako svakoj okolini V_x odgovara prirodni broj n_0 tako da*

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in V_x.$$

*Niz (x_n) je **Košijev niz** ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj n_0 tako da*

$$m > n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Važe sledeća tvrđenja:

(i) Svaki Košijev niz je ograničen.

(ii) Svaki konvergentan niz je Košijev niz.

Kompletan metrički prostor. *Metrički prostor je kompletan ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

Na primer, prostor $\mathbb{R}$ je kompletan. Svi metrički prostori dati primerima 1–4 takođe su kompletni.

Neprekidno preslikavanje. *Neka su (X,d) i (Y,ρ) metrički prostori.*

Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački $a \in X$ ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\Big(d(x,a) < \delta \Rightarrow d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon\Big).$$

Navedena definicija ekvivalentna je sledećoj:

Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna i tački $a \in X$ ako je inverzna slika $f^{-1}(V)$ svake okoline V tačka $f(a)$ jedna okolina tačke a u prostoru (X,d).

Uniformna neprekidnost. *Neka su (X,d) i (Y,ρ) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je funkcija f uniformno neprekidna (ravnomerno neprekidna) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon, \quad \text{za sve } x,y \in X.$$

Kompaktan metrički prostor. *Neka je* (X,d) *metrički prostor. Prostor* (X,d) *je kompaktan ako svaki beskonačni niz prostora* X *ima konvergentan podniz.*

Ekvivalentna definicija:

(X,d) *je kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač prostora* X *ima konačan podpokrivač (familija otvorenih skupova je pokrivač prostora* X *ako svako* $x \in X$ *pripada makar jednom skupu iz te familije).*

Definicija vektorskog prostora. *Pod linearnim vektorskim prostorom, ili samo vektorskim prostorom, nad poljem* $\mathbb{K}$ *podrazumeva se svaki skup* $\mathbb{V}$ *sa dve date operacije, jednim sabiranjem*

$$(u,v) \mapsto u+v \quad (u,v \in \mathbb{V})$$

kojim se svakom paru elemenata u,v *iz* $\mathbb{V}$ *pridružuje neki element* $u+v$ *iz* $\mathbb{V}$*, i jednim množenjem skalarima*

$$(\alpha,v) \mapsto \alpha \cdot v \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ v \in \mathbb{V}),$$

kojim se svakom $\alpha \in \mathbb{K}$ *i svakom elementu* $v \in \mathbb{V}$ *pridružuje neki element* αv *iz* $\mathbb{V}$*, tako da važi:*

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$,

(2) $v+u = u+v$,

(3) $v+0 = v$ *za neki fiksiran element 0 iz* $\mathbb{V}$ *i svako* $v \in \mathbb{V}$,

(4) *za svako* $v \in \mathbb{V}$ *postoji* x *iz* $\mathbb{V}$ *za koje je* $v+x=0$,

(5) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$,

(6) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$,

(7) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$,

(8) $1u = u$.

Elemente vektorskog prostora $\mathbb{V}$ zovemo *vektorima*, a elemente iz polja $\mathbb{K}$ *skalarima* u tom prostoru.[14] Svaki vektorski prostor $\mathbb{V}$ sadrži tačno jedan *nula vektor* i tačno jedan *inverzni vektor*, za koje važi

$$v+0=v, \quad 0+v=v,$$
$$v+(-v)=0, \quad (-v)+v=0 \quad \text{i} \quad v=-(-v).$$

Jedino rešenje jednačine $x+v=u$ je

$$x = u-v = u+(-v) \quad \textit{(razlika vektora).}$$

[14] Polje $\mathbb{K}$ označava polje realnih brojeva ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$), ili označava polje kompleksnih brojeva ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Videti u: Gojko Kalajdžić, 2011, *Linearna algebra i geometrija*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 31.

NAPOMENA. Metrički prostori nizova i funkcija koje smo naveli kao primere mogu se snabdeti i strukturom vektorskog prostora.

PRIMER 5. (i) Za svako $\mathbb{K}$ i bilo koji prirodan broj n skup $\mathbb{K}^n$ svih uređenih n-torki $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa x_n-ovima iz $\mathbb{K}$, jeste i jedan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ određene sa

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

pri čemu $+$ i $\cdot$ na desnim stranama tih relacija označavaju sabiranje i množenje u samom polju $\mathbb{K}$.

(ii) Skup $\mathbb{K}[X]$ svih polinoma nad poljem $\mathbb{K}$ je jedan vektorski prostor nad tim poljem u odnosu na njihovo sabiranje i množenje konstantama iz $\mathbb{K}$.

(iii) Skup svih realnih nizova je jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na njihovo uobičajeno sabiranje $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ i njihovo množenje skalarima $\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$.

(iv) Skup neprekidnih funkcija na realnom intervalu $\mathbb{I}$ (otvorenom, poluotvorenom ili zatvorenom, konačnom ili beskonačnom), u oznaci $C(I)$, nad poljem $\mathbb{K}$ (gde je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) je vektorski prostor ako važi

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$
$$(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t)$$

gde su unutrašnje sabiranje i spoljašnje množenje operacije iz $\mathbb{K}$.

Neka je $\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n\}$ konačan skup vektora iz vektorskog prostora $\mathbb{V}$. Suma

$$a_1\mathrm{x}_1 + \cdots a_n\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathrm{x}_i, \quad a_i \in \mathbb{K} \quad \text{naziva se } \textit{linearna kombinacija}.$$

Sistem vektora $[\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n]$ je *linearno nezavisan* u vektorskom prostoru $\mathbb{V}$ ako za proizvoljne skalare $a_1, \dots a_n$ važi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathrm{x}_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definicija norme. *Neka je X vektorski prostor. Nenegativna funkcija definisana za svaki $x \in X$ naziva se norma, u oznaci $\|x\|$, takva da je*

(1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Vektorski prostor snabdeven normom je *normiran*. U normiran vektorski prostor uvodi se metrika sa

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Jednostavno se proverava da je d zaista metrika.

PRIMER 6. Vektorski prostori iz primera 1–4 mogu se normirati, ako se uvede norma, na sledeći način:

$$\mathbb{R}^k: \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\mathbb{R}^k_\infty: \quad \|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |x_i|$$

$$l_p \ \ (1 \leqslant p < +\infty): \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$m, c, c_0: \quad \|x\| = \sup_{1\leqslant i<+\infty} |x_i|, \quad 1 \leqslant i < +\infty$$

$$C[a,b]: \quad \|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|$$

$$L_p(a,b) \ \ (1 \leqslant p < +\infty): \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Definicija Banahovog prostora. *Normiran vektorski prostor koji je kompletan zove se Banahov prostor.*

Na primer, normirani prostori $\mathbb{R}^k$, l_p, m, c, c_0, C su Banahovi.

L_p nije kompletan. Primetimo da integral Rimana nije dovoljno opšti. Ako je u pitanju Lebegov integral, onda L_p jeste kompletan.[15]

Definicija skalarnog proizvoda. *Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Funkcija iz $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ u $\mathbb{K}$ je* skalarni proizvod *u $\mathbb{V}$, koji svakom paru vektora $x, y \in \mathbb{V}$ pridružuje skalar $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ i za koje važi:*

(i) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(ii) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

(iii) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$

(iv) $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

za $x, y, z \in \mathbb{V}$, $a, b \in \mathbb{K}$.

Simbol $\overline{\langle y,x\rangle}$ označava kompleksni konjugovani broj i važi

$$\langle x, ay\rangle = \langle ay, x\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle.$$

Ako je $\mathbb{V}$ nad poljem $\mathbb{R}$ tada je $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

*Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor snabdeven skalarnim proizvodom. Tada važi nejednakost **Koši–Bunjakovski–Švarc***

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle, \quad x,y \in \mathbb{V}.$$

[15] O L_p prostorima može se videti u: Stevan Pilipović, Dora Seleši, 2012, *Mera i integral: fundamenti teoriji verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd.

DOKAZ. Za $x=0$ ili $y=0$ nejednakost je tačna, pa pretpostavimo da su $x\neq 0$ i $y\neq 0$.

Nijedna strana nejednakosti neće se promeniti ako x zamenimo sa ax u slučaju $|a|=1$. Izaberemo takvo a da je $\langle ax,y\rangle$ realan broj, odnosno ako je $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|e^{i\theta}$, stavićemo $a=e^{-i\theta}$.

Zbog navedenog, bez umanjenja opštosti, možemo dokazati nejednakost u slučaju kada je $\langle x,y\rangle$ realan broj.

Koristeći osobine skalarnog proizvoda, za $t\in\mathbb{R}$, važi

$$0\leqslant \langle x+ty,\ x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle t + \langle y,y\rangle t^2.$$

Kvadratni trinom na desnoj strani dostiže minimum za $t=-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$.

Zamenom datog t u nejednakost dobija se

$$0\leqslant \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle},$$

čime je tvrđenje dokazano.

Norma vektora x, na osnovu definicije, je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Za $x,y\in\mathbb{V}$ *važe sledeće osobine:*

$\|x\|\geqslant 0$ *(nenegativnost)*

$|\langle x,x\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ *(nejednakost CBS)*

$\|x+y\|\leqslant \|x\|+\|y\|.$

DOKAZ. Kad kvadriramo normu zbira dobija se

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,\ x+y\rangle\\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Pošto je $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leqslant |\langle x,y\rangle|$ i na osnovu nejednakosti CBS, dobija se:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\\ &= \big(\|x\|+\|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

Kvadratni koren daje traženi rezultat.

Ako *rastojanje* između vektora x i y definišemo sa $\|x-y\|$, važi *nejednakost trougla*

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|x-z+z-y\|\\ &\leqslant \|x-z\|+\|z-y\|.\end{aligned}$$

Definicija Hilbertovog prostora. *Banahov prostor u kome je norma definisana preko skalarnog proizvoda zove se Hilbertov prostor.*

PRIMER 7. U $\mathbb{R}^n$ definiše se skalarni proizvod vektora $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ sa

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

što podrazumeva da je

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

U ovoj topologiji vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je poznati n-dimenzioni Euklidov prostor.

PRIMER 8. U $\mathbb{C}^n$ definiše se

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n \quad \text{i},$$
$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

PRIMER 9. Prirodni izbor za definisanje skalarnog proizvoda na $C([a,b])$ je

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in C\big([a,b]\big) \quad \text{i},$$
$$\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}.$$

NAPOMENA. Nejednakost CBS može se dokazati i direktno na prostoru $\mathbb{R}$, koristeći nejednakost

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \quad \text{gde stavimo}$$
$$a = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}, \quad b = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}.$$

Ugao $\theta \in [0, \pi]$ između vektora x i y različitih od nule u prostoru $\mathbb{R}^n$ definiše se pomoću

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\| \cos\theta.$$

Funkcija $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ je $1-1$ i na i definicija ugla θ je na $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ istovetna sa uobičajenom definicijom na tim prostorima.

Ako su $x \neq 0$ i $y \neq 0$

$$\langle x, y\rangle = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = 0,$$

što je uslov da vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$ budu ortogonalni.

Definicija ortogonalnosti. *Vektori x i y iz vektorskog prostora $\mathbb{V}$, snabdeveni skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normom $\|\cdot\|$, jesu* ortogonalni *ako važi $\langle x, y\rangle = 0$, u oznaci $x \perp y$.*

Skup $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ je ortogonalan ako je svaki par različitih vektora iz $\mathbb{S}$ ortogonalan. Ortogonalni skup $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ je *ortonormiran* ako je $\|x\| = 1$, $x \in \mathbb{S}$.

Tipičan primer ortonormiranog skupa u Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$ jeste skup

$$\begin{aligned} e_1 = &\quad (1,0,\ldots,0) \\ e_2 = &\quad (0,1,\ldots,0) \\ \vdots & \\ e_n = &\quad (0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

koji, kao što smo videli, čini bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Generalno, ako su nenula vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz vektorskog prostora $\mathbb{V}$, snabdevenog skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normom $\|x\|$ ortogonalni, onda su oni linearno nezavisni.

Iz jednakosti $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, $a_i \in \mathbb{K}$ na osnovu činjenice da su vektori x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, ortogonalni, odnosno $\langle x_i, x_k \rangle = 0$, $i \neq k$ važi $a_k \langle x_k, x_k \rangle = a_k \|x_k\|^2 = 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\Rightarrow a_k = 0$, za svako k.

Ako svaki element skupa ortogonalnih vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz $\mathbb{V}$ podelimo njegovom normom, dobijamo ortonormiran skup

$$\left\{ \frac{x_i}{\|x_i\|} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Ako je x iz Euklidskog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, on je linearna kombinacija vektora baze $[e_1, \ldots, e_n]$, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Skalarni proizvod $\langle x, e_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$ na osnovu ortogonalnosti vektora $\{e_i\}$ je

$$\langle x, e_k \rangle = a_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ovako su određeni koeficijenti a_i, pa se vektor x može napisati kao

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Vektor $\langle x, e_i \rangle e_i$ je vektor projekcije vektora x u pravcu e_i.

Uopšteno, ako su x i $y \neq 0$ vektori iz vektorskog prostora $\mathbb{V}$, snabdevenog skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normom $\| \cdot \|$, tada je vektor

$$\left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \frac{y}{\|y\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

vektor projekcije x u pravcu y.

Gram–Šmitov metod za konstrukciju ortogonalnog skupa. Ako je dat linearno nezavisan skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ iz vektorskog prostora $\mathbb{V}$, snabdeven skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normom $\| \cdot \|$, može se formirati ortogonalni skup vektora $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ od $\{x_i\}$ na sledeći način:

Prvo biramo da je $y_1 = x_1$.

Drugi vektor dobija se od x_2 tako da je

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} y_1,\\
y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\|y_2\|^2} y_2\\
&\vdots\\
y_n &= x_n - \frac{\langle x_n, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \cdots - \frac{\langle x_n, y_{n-1}\rangle}{\|y_{n-1}\|^2} y_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Na ovaj način skup vektora $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je ortogonalan.

PRIMER 10. a) Skup funkcija $e_k = \left\{e^{2\pi ikx} : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ je ortonormiran u prostoru $L^2[0,1]$.

Za $k = l$

$$\langle e_k, \ e_k\rangle = \int_0^1 e^{2\pi ikx} \cdot e^{-2\pi ikx}\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1.$$

Za $k \neq l$, neka je $m = k - l \neq 0$, onda

$$\langle e_k, e_l\rangle = \int_0^1 e^{2\pi imx}\, dx = \frac{1}{2\pi im} e^{2\pi imx}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi im}(1-1) = 0$$

$$\|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k\rangle = 1.$$

b) Skup funkcija

$$\left\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\right\}$$

je ortogonalan na $L^2[-\pi, \pi]$

$$
\begin{aligned}
\langle 1, \cos nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx, \quad n \in \mathbb{N}\\
\langle 1, \sin nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}\\
\langle \cos nx, \cos mx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\right] dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}\\
&= 0, \quad n \neq m\\
\langle \sin nx, \sin mx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big[\cos(n-m)x+\cos(n+m)x\big]\,dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\langle \cos nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx = 0, \quad n,m \in \mathbb{N}$$

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos nx\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\|\sin nx\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Skup $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ je ortonormiran u $L^2[-\pi,\pi]$.

Prostor L_2

Prostor L_2 je vektorski prostor kompleksnih neprekidnih funkcija iz $C([a,b])$ za koji skalarni proizvod i normu definišemo na sledeći način:

Za bilo koje dve funkcije f i g iz vektorskog prostora $C([a,b])$ kompleksnih neprekidnih funkcija na realnom intervalu $[a,b]$ definiše se skalarni proizvod

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

iz koga sledi da je norma određena sa

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}.$$

Za $f,g \in C([a,b])$, uz uslov $\|f\| \neq 0$, $\|g\| \neq 0$, važi

$$\left\|\frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|}\right\|^2 = \int_a^b \left[\frac{|f(x)|}{\|f\|} - \frac{|g(x)|}{\|g\|}\right]^2 dx \geqslant 0,$$

$$\int_a^b \frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|\,\|g\|}dx \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\|f\|^2}\int_a^b |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{1}{\|g\|}\int_a^b |g(x)|^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow \langle |f|,\, |g|\rangle \leqslant \|f\|\,\|g\| \quad \text{(oslabljena nejednakost CBS).}$$

Ali tada važi i CBS u punoj opštosti, na osnovu:

$$|\langle f,g\rangle| = \left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx = \langle |f|,\, |g|\rangle \leqslant \|f\|\cdot\|g\|.$$

Takođe važi *nejednakost trougla*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$$

koja sledi iz relacije

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\ &= \|f\|^2+\|g\|^2+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle \\ &= \|f\|^2+2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle+\|g\|^2 \\ &\leqslant \|f\|^2+2|\langle f,g\rangle|+\|g\|^2 \\ &\leqslant \|f\|^2+2\|f\|\,\|g\|+\|g\|^2.\end{aligned}$$

Nenegativan broj $\|f-g\|$ je mera udaljenosti funkcija f i $g \in \mathbb{C}([a,b])$.

Ako je $\|f-g\|=0$, onda je $f=g$ na $[a,b]$.

4.4. FURIJEOVI REDOVI I PRIMENE

Teorija Furijeovih redova bavi se pitanjem da li data periodična funkcija, sa periodom 1, može da se napiše kao zbir jednostavnih elementarnih funkcija oblika $c\sin(2\pi kx)$ ili $c\cos(2\pi kx)$, $k\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{C}$ (ili $\mathbb{K}$).[16]

Slika 23 – Žozef Furije

Ukoliko funkcija f može da se napiše u vidu zbira

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ix},$$

za neke konstante c_k, Ojlerova formula

$$e^{2\pi ix}=\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x$$

omogućava da funkcija f može da se napiše kao zbir prostih harmonika.

Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ je periodična sa periodom L ako za $x\in\mathbb{R}$ važi

$$f(x+L)=f(x).$$

Ako je f periodična funkcija sa periodom L, onda je funkcija $F(x)=f(Lx)$ periodična sa periodom 1. Na primer, funkcije $f(x)=\sin 2\pi x$, $f(x)=\cos 2\pi x$ i $f(x)=e^{2\pi ix}$ jesu periodične, sa periodom 1.

Svaka data funkcija na poluotvorenom intervalu $[0,1)$ može se produžiti do periodične funkcije, sa periodom 1, na jedinstven način.

[16] Anton Deitmar, 2004, *A First Course in Harmonic Analysis*, Second Edition, Springer, p. 5.

Žozef Furije (Joseph Fourier), 1768-1830. Bio je francuski matematičar i fizičar. Profesori su mu bili Laplas i Langranž. Autor je analitičke teorije toplote i njegova knjiga *Th éorie Analytique de la Chaleur*, iz 1822, postala je izvor svih savremenih metoda matematičke fizike koje se odnose na rešavanje parcijalnih jednačina pri datim uslovima. On je ustanovio da se funkcija (koja može da se predstavi lukom neprekidne krive ili zbirom takvih lukova) može izraziti trigonometrijskim redom oblika $\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos nax+B_n\sin nax)$.

Za $k \in \mathbb{Z}$,

$$e_k(x) = e^{2\pi ikx}, \quad e_k \in \widetilde{C}[0,1], \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\widetilde{C}[0,1] = \{ f \in C[0,1] : \ f(0) = f(1) \}.$$

Takve funkcije mogu se neprekidno i periodično produžiti na $\mathbb{R}$, sa periodom 1.

Često ćemo smatrati da je $f \in \widetilde{C}[0,1]$ tako već produžena na $\mathbb{R}$ i pisaćemo $f \in \widetilde{C}$.

Videli smo u primeru 4 da važi

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \qquad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Na osnovu Leme o linearnoj nezavisnosti ortogonalnih ne nula vektora, vektori e_k, za različite k, linearno su nezavisni vektori u vektorskom prostoru $\widetilde{C}[0,1]$.

Lema o koeficijentima. *Ako je*

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x), \quad \text{za neke } c_k \in \mathbb{C}, \text{ tada je}$$
$$c_k = \langle f, e_k \rangle.$$

DOKAZ.

$$\begin{aligned}\langle f, e_k \rangle &= \langle c_{-n} e_{-n} + \cdots + c_n e_n, e_k \rangle \\ &= c_n \langle e_{-n}, e_k \rangle + \cdots + c_n \langle e_n, e_k \rangle \\ &= c_k.\end{aligned}$$

Definicija Furijeovog reda. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodična, sa periodom 1, i Riman integrabilna na intervalu $[0,1]$. Brojevi*

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

nazivaju se Furijeovi koeficijenti od f. Red

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e_k(x)$$

naziva se Furijeov red funkcije f.

Niz

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

je niz parcijalnih suma Furijeovog reda.

Neka je $\widetilde{\mathcal{R}}$ kompleksni vektorski prostor periodičnih funkcija, sa periodom 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su Riman integrabilne na $[0,1]$. Svaka neprekidna funkcija na intervalu $[0,1]$ i je Riman integrabilna, pa je $\widetilde{C}[0,1]$ potprostor vektorskog prostora $\widetilde{\mathcal{R}}$. Skalarni proizvod, u smislu L_2, proširuje se na $\widetilde{\mathcal{R}}$.[17] Ideja je da se pokaže da Furijeov red funkcije $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ konvergira, u smislu L_2 prostora.

Lema o najboljoj aproksimaciji. *Neka je $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ i za $k \in \mathbb{Z}$ $c_k = \langle f, e_k \rangle$ su Furijeovi koeficijenti. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

DOKAZ. Neka je $g = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$. Tada

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \langle f, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2, \\
\langle g, g \rangle &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \langle g, e_k \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,
\end{aligned}$$

tako da se dobija

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Teorema o Beselovoj nejednakosti. *Neka je $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ sa Furijeovim koeficijentima (c_k). Tada je*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leqslant \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx.$$

DOKAZ. Na osnovu Leme, za $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Kad $n \to +\infty$, dobija se tvrđenje.[18]

---

[17] Važe aksiome (i)–(iii) skalarnog proizvoda, a umesto (iv) važi slabije svojstvo:

$$f \in \widetilde{\mathcal{R}} \quad \langle f, f \rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{skoro svuda.}$$

[18] Zapravo ovde uvek važi jednakost, što je teže dokazati.

Na osnovu Beselove nejednakosti zaključujemo da je red $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ konvergentan. Iz konvergencije reda sledi da opšti član teži nuli, odnosno $\lim_{k\to\infty} |c_k|^2 = 0$, odakle se dobija $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ ili Furijeovi koeficijenti u razvoju Furijeovog reda, za dovoljno veliko n, teže nuli.

4.4.1. Konvergencija u L_2 normi

Sada uvodimo pojam L_2 konvergencija koji je odgovarajući za pojam konvergencije Furijeovog reda.

Neka je $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ i niz $f_n \in \widetilde{\mathcal{R}}$.

Niz f_n konvergira u L_2 normi ako važi

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Oprez! Postoje primeri koji pokazuju da iz L_2 konvergencije ne sledi obična konvergencija.

Konvergencija u L_2 normi zove se srednjekvadratna konvergencija (zadata je integralnom formulom).

Postavimo pitanje: Kada u Baselovoj nejednakosti važi jednakost? Odgovor daje sledeća posledica leme o najboljoj aproksimaciji.

Posledica leme o najboljoj aproksimaciji. *Za $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ važi*:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = f \quad \text{u} \quad L_2\text{-normi} \quad \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 = \int_0^1 |f|^2\,dx$$

DOKAZ.

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \int_0^1 |f|^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_n|^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f|^2\,dx - \sum_{-n}^{n} |c_n|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_0^1 |f|^2 dx$$

Niz funkcija f_n na intervalu I ravnomerno konvergira ka funkciji f ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $n \geqslant n_0$ važi

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{za svako } x \in I.$$

Stav. *Ako niz funkcija f_n konvergira ka f ravnomerno na $[0,1]$, onda f_n konvergira ka f u L_2 normi.*

DOKAZ. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji n_0, takvo da za sve $n \geqslant n_0$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{za svaki } x \in [0,1].$$

Otuda, za $n \geqslant n_0$

$$\|f - f_n\|^2 = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2\,dx < \varepsilon^2,$$

odnosno

$$\|f - f_n\| < \varepsilon.$$

Ključni rezultat jeste činjenica da Furijeov red za svako $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ konvergira ka f u L_2 normi, što će biti dokazano.

Lema.[19] *Za* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *važi*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} = \pi^2\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Specijalno, za $x = 0$ *dobija se Ojlerova formula*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

DOKAZ. Neka su $\alpha < a < b < \beta$ realni brojevi i $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Za $k \in \mathbb{R}$v neka je

$$F(k) = \int_a^b f(x) \cdot \sin(kx)\,dx.$$

$(*)$ Tada je $\lim\limits_{|k| \to +\infty} F(k) = 0$ i konvergencija je ravnomerna za $a, b \in [\alpha,\beta]$.

Naime, za $t \neq 0$, parcijalnom integracijom dobija se

$$F(k) = -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx.$$

Pošto su f i f' neprekidne na $[\alpha,\beta]$, postoji konstanta $M > 0$, takva da je

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{i} \quad |f'(x)| \leqslant M \quad \text{za svaki } x \in [\alpha,\beta].$$

Sledi da je

$$|F(k)| \leqslant \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|}.$$

Ovo koristimo na sledeći način:

Neka je $x \in (0,1)$. Pošto je

$$2\pi \int_{1/2}^{x} \cos(2\pi kt)\,dt = \frac{\sin(2\pi kx)}{k} \quad \text{i},$$

[19] Anton Deitmar, 2004, *A First Course in Harmonic Analysis*, Second Edition, Springer, p. 12.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi kx)=\frac{\sin\big((2n+1)\pi x\big)}{2\sin(\pi x)}-\frac{1}{2}$$

dobija se

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}=2\pi\int\limits_{1/2}^{x}\frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{2\sin(\pi t)}\,dt-\pi\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Prvi sabirak sa desne strane teži nuli (na osnovu $(*)$), kada pustimo da $n\to+\infty$, i to ravnomerno po $\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ $(\delta>0)$.

To znači, za $0<x<1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}=-\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

i ovaj red konvergira ravnomerno na intervalu $[\delta,\ 1-\delta]$ za svaki $\delta>0$. Ovo koristimo da dokažemo lemu.

Neka je

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}.$$

Upravo smo videli da niz izvoda parcijalnih suma konvergira ka $\pi^2(2x-1)$ i da je ova konvergencija lokalno ravnomerna za $0<x<1$, odnosno da je

$$f'(x)=\pi^2(2x-1),\quad \text{tj.}$$
$$f(x)=\pi^2(x^2-x)+c.$$

Još treba da pokažemo da je $c=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Naime, red definisan funkcijom f ravnomerno konvergira na $[0,1]$ i važi

$$\int\limits_{0}^{1}\cos(2\pi kx)dx=0$$

i za svako $k\in\mathbb{N}$ dobijamo

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}\,dx=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,dx=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}-c,$$

odakle se dobija da je

$$c=\frac{\pi^2}{6}.$$

Korišćenjem ove pomoćne leme dokazaćemo konvergenciju Furijeovog reda za Riman integrabilne funkcije.

Za podskup A skupa $[0,1]$ definišemo *karakterističnu funkciju* χ_A na sledeći način:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\neq A\end{cases}.$$

Neka su $I_1,\ldots,I_m$ podintervali od $[0,1]$ koji mogu da budu otvoreni, poluotvoreni ili zatvoreni.

Rimanova stepenasta funkcija je oblika

$$S(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{I_j}(x), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Podsetimo se definicije Rimanovog integrala. Prvo, za Rimanovu stepenastu funkciju

$$S(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_j}(x)$$

definiše se

$$\int_0^1 S(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j d(I_j), \quad d(I_j) \text{ dužina intervala } I_j.$$

Podsetimo se: Funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je Riman integrabilna ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje stepenaste funkcije φ i ψ takve da je $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ za svaki $x \in [0,1]$ i

$$\int_0^1 \left|\psi(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon.$$

Kada se ε smanjuje, odnosno teži nuli, integrali stepenastih funkcija teže zajedničkoj granici koja se definiše kao integral funkcije f.

Svaka Riman integrabilna funkcija na $[0,1]$ je ograničena. Kompleksna funkcija je Riman integrabilna ako su takvi realni i imaginarni delovi.

Lema o konvergenciji Furijeovog reda. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija i takva da je $f\big|_{[0,1]}$ Rimanova stepenasta funkcija. Tada Furijeov red od f konvergira ka f u L_2 normi, odnosno*

$$f_n = S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$$

konvergira ka f u L_2 normi, gde je za $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi ix} dx.$$

DOKAZ. Na osnovu lema o najboljoj aproksimaciji dovoljno je dokazati da važi

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Prvo ćemo razmotriti specijalan slučaj

$$f\big|_{[0,1]} = \chi_{[0,a]} \quad \text{gde je } a \in [0,1].$$

Koeficijenti $c_0 = a$ i

$$c_k = \int_0^a e^{-2\pi ikx} dx = \frac{i}{2\pi k}\left(e^{-2\pi ika} - 1\right), \quad k \neq 0.$$

Odavde sledi da je

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2k^2}\left(e^{-2\pi ika}-1\right)\left(e^{2\pi ika}-1\right) = \frac{1-\cos(2\pi ka)}{2\pi^2k^2}.$$

Na osnovu leme $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} = \pi^2\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right)$ dobija se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 &= a^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(2\pi ka)}{\pi^2k^2}\\
&= a^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2k^2}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi ka)}{k^2}\\
&= a^2+\frac{1}{6}-\left(a^2-a+\frac{1}{6}\right)\\
&= a\\
&= \int_0^a 1^2dx = \int_0^a f^2(x)dx =\\
&= \int_0^1 |f(x)|^2\,dx\\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

Dokazali smo tvrđenje leme za funkciju $f=\chi_{[0,a]}$. Isti rezultat važi za $f=\chi_I$ gde je I proizvoljan podinterval od $[0,1]$. (Furijeovi koeficijenti i norma ne menjaju se ako se umesto zatvorenog intervala koriste poluotvoreni ili otvoreni intervali.)

Lema. *Neka su $c_k(f)$ Furijeovi koeficijenti funkcije f i označićemo*

$$f^y(x) = f(x+y).$$

Funkcija f^y je periodična i Riman integrabilna i važi $c_k(f^y) = e^{2\pi iky}c_k(f)$

$$\begin{aligned}
c_k(f^y) &= \int_0^1 f^y(x)e^{-2\pi ikx}\,dx\\
&= \int_0^1 f(x+y)e^{-2\pi ikx}\,dx \quad [\text{smena } x+y=t, \quad dx=dt]\\
&= \int_y^{1+y} f(t)e^{-2\pi ik(t-y)}\,dt\\
&= e^{2\pi iky}\int_y^{1+y} f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt\\
&= e^{2\pi iky}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx \quad \left[\begin{array}{l}\text{jer nije bitno da li se integrali}\\ \text{periodična funkcija na}\\ [y,1+y] \text{ ili } [0,1]\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$= e^{2\pi iky} c_k(f).$$

Iz ovog sledi da je

$$\begin{aligned}&\left|c_k(f^y)\right|^2 = \left|c_k(f)\right|^2, \quad \text{odnosno}\\ &\|f^y\| = \|f\|,\end{aligned}$$

tako da lema o konvergenciji Furijeovog reda važi za $f\big|_{[0,1]} = \chi_I$ za proizvoljan interval $I \subset [0,1]$.

Proizvoljna stepenasta funkcija je linearna kombinacija karakterističnih funkcija na intervalima.

$$S_n(f+g) = S_n(f) + S_n(g)$$

$$S_n(\lambda f) = \lambda S_n(f)$$

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2\pi ikx}$$

$$S_n(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m) = \lambda_1 S_n(f_1) + \cdots + \lambda_m S_n(f_m)$$

$$f_j = \chi_{I_j} \quad f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{I_j}$$

$$S_n(f) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j S_n(\chi_{I_j}) \quad n \to \infty$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(\chi_{I_j}) e^{2\pi ikx} = S_n(\chi_{I_j})$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{I_j}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j S_n(\chi_{I_j})\\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \lim_{n\to\infty} S_n(\chi_{I_j})\\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{I_j} = f\end{aligned}$$

Teorema o konvergenciji Furijeovog reda. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodična i Riman integrabilna na $[0,1]$. Tada Furijeov red funkcije f konvergira ka f u smislu L_2 norme. Takođe, ako su c_k Furijeovi koeficijenti od f, tada*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

Riman–Lebegova lema. *Za svako $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ niz $c_k(f) \to 0$, $k \to +\infty$.*

DOKAZ. Neka je $f = u + iv$ kompleksna funkcija gde su u i v realni i imaginarni deo. Parcijalne sume Furijeovog reda funkcije f su

$$S_n(f) = S_n(u) + iS_n(v).$$

Ako Furijeovi redovi od u i v konvergiraju u L_2 normi sledi tvrđenje i za f. Zbog toga je dovoljno da se razmatra slučaj realne funkcije f.

Pošto je integrabilna funkcija ograničena, možemo je pomnožiti skalarom tako da važi $|f(x)| \leqslant 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Pošto je f Riman integrabilna, postoje stepenaste funkcije φ, ψ na $[0,1]$ takve da važi

$$-1 \leqslant \varphi \leqslant f \leqslant \psi \leqslant 1 \quad \text{i,}$$

$$\int_0^1 \big(\psi(x) - \varphi(x)\big) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Neka je $g = f - \varphi$ takvo da je $g \geqslant 0$ i

$$|g|^2 = |f - \varphi|^2 \leqslant |\psi - \varphi|^2 \leqslant 2(\psi - \varphi)$$

$$\int_0^1 |g(x)|^2 \leqslant 2\int_0^1 \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Za niz parcijalnih suma S_n važi

$$S_n(f) = S_n(\varphi) + S_n(g).$$

Na osnovu leme o konvergenciji Furijeovog reda postoji $n_0 \geqslant 0$ takvo da za sve $n \geqslant n_0$

$$\|\varphi - S_n(\varphi)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na osnovu lema o najboljoj aproksimaciji važi

$$\|g - S_n(g)\|^2 \leqslant \|g\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4},$$

tako da za $n \geqslant n_0$

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \|\varphi - S_n(\varphi)\| + \|g - S_n(g)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Na osnovu posledice leme o najboljoj aproksimaciji važi Beselova jednakost za svako $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$.

PRIMER 1. Neka je $f : [a,b] \to R$ neprekidna. Dokazati da

$$c_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$[20]

[20] Vukmirović J., *Matematička analiza 1, zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009, str. 146.

REŠENJE. Uvodimo smenu

$$x = t - \frac{\pi}{n}; \quad c_n = -\int_{\alpha}^{\beta} f\left(t - \frac{\pi}{n}\right)\sin ntdt, \quad \text{gde je} \quad \alpha = a + \frac{\pi}{n}, \quad \beta = b + \frac{\pi}{n}.$$

Sledi

$$2c_n = \int_a^{\alpha} f(x)\sin nxdx + \int_{\alpha}^{b}\left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{n}\right)\right)\sin nxdx -$$

$$-\int_b^{\beta} f\left(x - \frac{\pi}{n}\right)\sin nxdx \to 0 + 0 + 0,$$

jer je f ravnomerno neprekidna, ograničena na $[a,b]$. (Označimo ova 3 integrala redom sa I_1, I_2, I_3. Procenjujemo

$$|I_1| \leqslant \int_a^{\alpha} |f(x)\sin nx|dx \leqslant \int_a^{\alpha} k\cdot 1dx = \frac{k\cdot\pi}{n} \to 0,$$

za $n \geqslant n_0$ je

$$|I_2| \leqslant \int_{\alpha}^{b} \varepsilon\cdot 1dx = \varepsilon(b-\alpha) < (b-a)\varepsilon.$$

$$|I_3| \leqslant \frac{k\pi}{n} \to 0).$$

4.4.2. Ravnomerna konvergencija Furijeovih redova

Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ neprekidna i periodična funkcija. Funkcija f je deo po deo neprekidno diferencijabilna ako postoje redni brojevi $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_j = 1$, tako da je za svako j funkcija $f\big|_{[t_{j-1},t_j]}$ neprekidno diferencijabilna.

Teorema o ravnomernoj konvergenciji Furijeovog reda. *Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ neprekidna, periodična, sa periodom 1, i deo po deo neprekidno diferencijabilna, tada Furijeov red konvergira ravnomerno ka funkciji f.*

DOKAZ. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ neprekidna, periodična, sa periodom 1, i deo po deo neprekidno diferencijabilna i neka su c_k Furijeovi koeficijenti funkcije f.

Neka je $\varphi_j:[t_{j-1},t_j]\to\mathbb{C}$ neprekidni izvod funkcije f i neka je $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periodična funkcija koja se za svako j poklapa sa φ_j na poluotvorenim intervalima $[t_{j-1},t_j)$.

Sa γ_k označićemo Furijeove koeficijente funkcije φ. Tada je

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma_k|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 < +\infty.$$

Koristeći parcijalnu integraciju dobija se

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \frac{1}{-2\pi ik} f(x)e^{-2\pi ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \frac{1}{2-\pi ik}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x)e^{-2\pi ikx}dx,$$

tako da za $k \neq 0$ dobijamo

$$c_k = \sum_{j=1}^{r} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) e^{-2\pi ikx}\, dx =$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi ik} c_k(f') \quad k \neq 0$$

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi ikx} \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi ik}\, dx = \frac{1}{2\pi ik} \gamma_k$$

Za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi $0 \leqslant (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha\beta|$ i na taj način važi

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2\big), \quad \text{tako da}$$

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi ik} \gamma_k \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi^2 k^2} + |\gamma_k|^2 \right),$$

iz čega sledi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 k^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_k|^2 \right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty.$$

Poslednji korak dokaza je značajan pa ga formulišemo kao lemu.

Lema. *Neka je f neprekidna i periodična i Furijeovi koeficijenti zadovoljavaju relaciju*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty.$$

Tada Furijeov red ravnomerno konvergira ka f. Konkretno, za svaki $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k(x).$$

DOKAZ. Lema tvrdi da Furijeov red $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ ravnomerno konvergira ka f.

Označićemo sumu reda $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ sa g. Ovaj red konvergira ravnomerno na osnovu pretpostavke $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$ i Vajerštrasovog kriterijuma konvergencije

$$c_k(g) = \int_0^1 g(x) e^{-2k\pi ix}\, dx = \int_0^1 e^{-2k\pi ix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \cdot e^{2\pi inx}\, dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 c_n(f) e^{2\pi i(n-k)x} dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i(n-k)x} dx = c_k(f).$$

Važi $c_k(f) = c_n(g)$.

Kako imaju iste Furijeove koeficijente sledi da su im isti Furijeovi redovi, pa na osnovu teoreme o konvergenciji u L_2 normi

$$\|f-g\| = 0.$$

Kako su f i g neprekidne, sledi da je $f = g$.

Na kraju ovog apstraktnog dela treba istaći važnost Furijeovih koeficijenata.

a) Furijeovi koeficijenti vode nas u teoriju Furijeovih transformacija, teorijski vrlo značajnu, sa nesagledivim mogućnostima primene.

b) Furijeovi koeficijenti izražavaju energije alikvotnih tonova na žici muzičkog instrumenta, sa kojima se Paganini tako vešto poigravao.[21]

4.4.3. Uvod u Furijeove transformacije i granične probleme

Granični problemi teorije analitičkih i drugih funkcija predstavljaju problem određivanja funkcije, ili neke njene osobine, na osnovu funkcionalnih veza koje postoje na konturi (granici oblasti). Širinom pitanja koja obrađuju i mnoštvom rezultata do kojih se došlo, oni su se nametnuli širokom krugu istraživača. Mogu se formulisati i u najrazličitijim oblastima teorije fizike, mehanike i tehnike kao što su hidrodinamika, dinamika fluida, teorija elastičnosti, teorija elektrostatičkog i magnetnog polja itd.

U nastavi matematike na fakultetima prvi susret sa graničnim problemima može biti kod razmatranja tzv. harmonijskih funkcija $u(x,y)$, definisanih kao rešenja Laplasove parcijalne diferencijalne jednačine

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Za ove funkcije formuliše se granični problem Dirihlea na prostoj, glatkoj, zatvorenoj konturi C koja ograničava oblast D. Treba naći funkciju $u(x,y)$, harmonijsku u D, koja na granici u C uzima datu vrednost $f(s)$.

Rešenje problema može se na jedinstven način predstaviti u obliku

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(s) \frac{\partial G(s,z)}{\partial n} ds,$$

[21] Može se videti u: Тихонов, А. Н. Самарский, А. А. 1977, Уравнения математической физики, Наука Москва.

gde je G funkcija Grina koja na konturi C uzima vrednost 0, a n unutrašnja normala na konturu.

U teoriji analitičkih funkcija kompleksne promenljive osnovni granični problem određivanja funkcije na osnovu datih vrednosti na konturi rešava se preko Košijeve formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^-, \end{cases}$$

gde je $f(z)$ analitička funkcija u D^+ a L glatka zatvorena kontura koja deli ravan na unutrašnju oblast D^+ i spoljašnju D^-. Ova formula omogućava izračunavanje vrednosti funkcije u svakoj tački oblasti ako su poznate njene vrednosti na granici, pa zato ona uistinu rešava granični problem za analitičke funkcije.

Furijeovi koeficijenti u eksponencijalnom obliku nas direktno vode do Furijeovog integrala i Furijeove transformacije. Zaista se Furijeov integral funkcije $f(t)$ definiše kao sledeća funkcija parametra x:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Funkcije $f(t)$ i $F(x)$ povezane su formulom

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ixt}dx, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Polaznu funkciju $f(t)$ nazivamo *originalom* a njen Furijeov integral – *slikom*.

U praksi se često srećemo sa jednostranim (desnim i levim) Furijeovim integralom

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)e^{izt}dt, \quad F^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{izt}dt.$$

Istraživač koji krene ovim putem, i najpre se upozna sa osobinama Furijeovih transformacija, biće prijatno iznenađen bogatstvom i raznovrsnošću primena. Međutim najviše će ga fascinirati kako se složeni problemi, koji se vrlo teško ili nikako ne mogu rešiti sami za sebe, primenom Furijeove transformacije preslikavaju u mnogo jednostavnije probleme, a zatim brzo rešavaju. Ovu ćemo tvrdnju ilustrovati jednim jednostavnim primerom.

PRIMER 2. **Granični problem Rimana**. Na realnoj osi date su dve funkcije: $D(x)$ – koeficijent problema i $H(x)$ – slobodan plan, koje zadovoljavaju određene opšte uslove. Treba odrediti dve funkcije $F^+(z)$ i $F^-(z)$ – analitičke respektivno u gornjoj i donjoj poluravni, koje na realnoj osi zadovoljavaju granični uslov

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x).$$

SKICA REŠENJA. Radi jednostavnosti ograničićemo se na specijalan slučaj $D(x) = 1$, i granični uslov prelazi u

$$F^{+}(x) - F^{-}(x) = H(x).$$

Primetimo da u teoriji Furijeovih transformacija važnu ulogu igraju tzv. formule Plemelja–Sohockog

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f(t) e^{ixt} dt \\ &= F^{+}(x) - F^{-}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{t-x} dt &= F^{+}(x) + F^{-}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f(t) e^{ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sgn} t e^{ixt} dt. \end{aligned}$$

Rešenje našeg problema dobijamo upravo na osnovu ove formule. Datu funkciju $H(x)$ smatramo Furijeovom slikom neke funkcije $h(t)$. Tada se tražena rešenja izražavaju jednostranim integralima

$$H^{+}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} h(t) e^{izt} dt,$$

$$H^{-}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} h(t) e^{izt} dt,$$

gde je

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-itx} dx.$$

Na taj način je za dobijanje rešenja neophodno da se sa funkcijom $H(x)$ vratimo na original $h(t)$, a zatim od njega izračunamo desni i levi Furijeov integral.

Tehnika primenjena u ovom primeru važi za slučaj kada je kontura L realna osa.

NAPOMENA. Teorija graničnih problema ima moć da se raširi i izvan granica matematike. Uporedimo za trenutak oblast D^{+} slikovito sa ljudskim telom, a tačke krive L sa tačkama površine tela. Setimo se drevne kineske veštine lečenja akupunkturom, gde se dejstvom iglama na pojedine akupunkturne tačke postiže učinak na određene unutrašnje organe.

Naši lekari na usavršavanju u Kini bili su svedoci operacija na otvorenom mozgu bez klasične anestezije, gde je pacijent bio potpuno svestan, uz primenu akupunkturnih igala. Zar nije ovo bilo rešenje jednog primenjenog graničnog problema?

Ako se teoriji graničnih problema doda teorija Furijeovih transformacija, onda se stiče nova moć da se iz jednog prostora prelazi u drugi, i teži problemi da se svode na lakše i odmah rešavaju.

Takav je slučaj integralnih jednačina sa konvolucijom koje se primenom integralnih transformacija svodi na obične algebarske jednačine. Tada nam postaju jasne reči jednog oduševljenog pesnika: *Zaista, u matematici je sve moguće!*

4.4.4. Jednačina treperenja žice

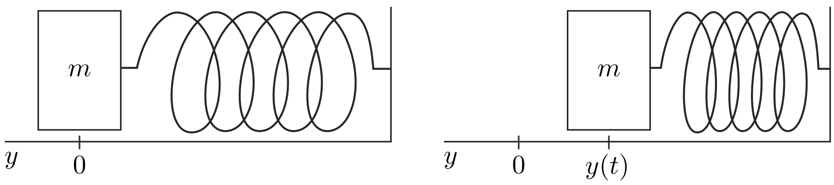
U prvom delu razmotrili smo aproksimativni pristup izučavanju teorije Furijeovih redova. To znači da smo se „podigli“ na opšti nivo teorije vektorskih prostora koji smo snabdeli skalarnim proizvodom i normom u prostoru L_2, što nam je obezbedilo strog matematički, deduktivni metod za dokazivanje konvergencije Furijeovog reda u normi L_2.

Mnogi će biti samo posmatrači ove aproksimativne teorije, zbog toga ćemo razmatrati jedan praktičan zadatak. To su za početak problemi treperenja žice, a kasnije i prenosa toplote, koji su doveli do razvoja Furijeove analize – o njoj je ovde bilo reči. Zakoni koji opisuju ove dve različite fizičke pojave izraženi su preko dve različite parcijalne diferencijalne jednačine, talasne i toplotne jednačine, čija rešenja imaju oblik Furijeovog reda.

Razmatra se problem kretanja žice fiksirane u dve krajnje tačke. Opis fizičkih fenomena obuhvata

- jednostavno harmonijsko kretanje;
- stojeće talase;
- harmonike i superpozicije tonova.

Jednostavno harmonijsko kretanje opisaćemo pomoću harmonijskog oscilatora.[22]



Slika 24 – Harmonijski oscilator

Kada se telo određene mase *m* pomeri iz ravnotežnog položaja a zatim pusti, dobije se jednostavno harmonijsko kretanje, kao na slici. Ova prirodna pojava matematički se može predstaviti diferencijalnom jednačinom koja opisuje kretanje tela.

Neka $y(t)$ označava izmeštenu poziciju tela u trenutku t. Pretpostavljamo da je opruga idealna, u smislu da zadovoljava Hukov zakon: sila F koja dejstvuje na telo mase m je

$$F = -k \cdot y(t),$$

[22] Stein Elias and Rami Shakarchi, *Fourier Analysis*, an introduction Princeton University Press, p. 2.

gde je $k > 0$ fizička veličina koja predstavlja konstantu opruge. Primenom Njutnovog zakona da je sila jednaka proizvodu mase i ubrzanja, dobija se

$$-ky(t) = my''(t).$$

Za $c = \sqrt{k/m}$ dobija se diferencijalna jednačina

$$y''(t) + c^2 y(t) = 0.$$

Njeno opšte rešenje je oblika

$$y(t) = a\cos ct + b\sin ct,$$

gde su a i b konstante.

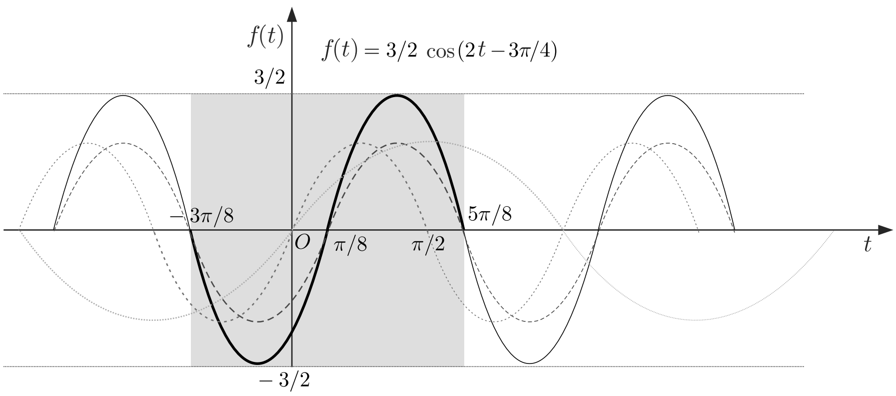
U diferencijalnoj jednačini c je poznato, a da bi u rešenju odredili a i b moraju biti poznati početni uslovi. Na primer, ako je poznata početna veličina pozicije $y(0)$ i brzina tela $y'(0)$, onda se rešenje može jedinstveno predstaviti u obliku

$$y(t) = y(0)\cos ct + \frac{y'(0)}{c}\sin ct.$$

Na osnovu trigonometrijskih transformacija pokazuje se da postoje $A > 0$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ takvi da važi

$$a\cos ct + b\sin ct = A\cos(ct - \varphi).$$

Na osnovu fizičkog tumačenja harmonijskog kretanja $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ naziva se *amplituda*, c je njegova *prirodna frekvencija*, φ je *faza*, a $\dfrac{2\pi}{c}$ je *period* kretanja. Tipičan grafik funkcije $A\cos(ct - \varphi)$ dobija se istezanjem ili sakupljanjem grafika $\cos t$.



Slika 25 – Primer grafika funkcije $A\cos(ct - \varphi)$

Prvo zapažanje: jednostavno harmonijsko kretanje matematički se opisuje trigonometrijskim funkcijama $\sin t$ i $\cos t$, a one su povezane Ojlerovom formulom u kompleksnoj formi

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

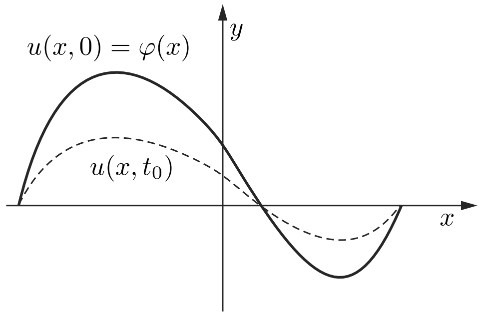
Drugo zapažanje: jednostavno harmonijsko kretanje je funkcija od vremena sa dva početna uslova – jedan je položaj, a drugi brzina.

Dalje razmatranje odnosi se na žicu koja treperi. U tim problemima javljaju se stojeći talasi. *Stojeći talasi* su pokreti opisani grafikom $y = u(x,t)$ koji se menja u vremenu t, kao na slici 27.

Postoji početni profil $y = \varphi(x)$ koji predstavlja talas u trenutku $t = 0$ i faktor pojačanja $\psi(t)$ u zavisnosti od t, tako da se $u(x,t)$ može predstaviti sa

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Priroda ovih *stojećih talasa* sugeriše ideju razdvajanja promenljivih.



Slika 26 – Stojeći talas u različitim vremenima

Konačno, fizičko zapažanje odnosi se na muziku. To je postojanje harmonika ili alikvotnih tonova. Čisti tonovi praćeni su kombinacijama dodatnih prizvuka koji su primarno odgovorni za boju zvuka na instrumentu. Ideje superpozicije tonova, matematički se sprovodi na osnovu linearnosti.[23]

Sada pažnju usmeravamo na glavni problem. Opisujemo treperenje žice. Prvo dobijamo talasnu jednačinu, odnosno diferencijalnu jednačinu koja opisuje treperenje žice.[24]

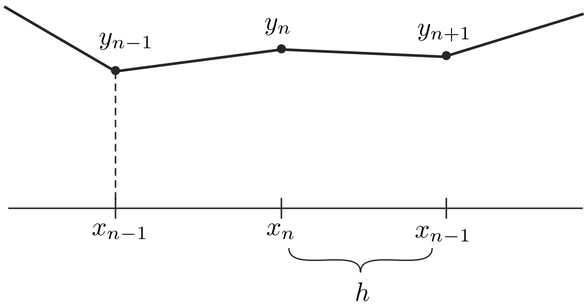
Zamislimo homogenu žicu koja se nalazi u (x,y) ravni i proteže duž x-ose, između tačaka O i L. Ako žica vibrira, položaj $y = u(x,t)$ jeste funkcija od x i t. Cilj je da se izvede diferencijalna jednačina koja opisuje ovu funkciju. U tu svrhu podelićemo žicu na N delova tako da su pojedinačne čestice ravnomerno raspoređene duž x-ose, tako da n-ta čestica ima koordinate $x_n = \dfrac{nL}{N}$. Zamislimo da žica vibrira kao složeni sistem od N delova i da svaki deo osciluje vertikalno. Za razliku od ranije navedenog prostog harmonijskog kretanja, sada svaka čestica osciluje ili zavisi od svoja dva neposredna suseda.

Neka je $y_n(t) = u(x_n,t)$ i važi

$$x_{n+1} - x_n = h, \quad h = \frac{L}{N}.$$

[23] Detaljnije može se videti u drugoj doktorskoj disertaciji kod: Miloš Čanak, 1996, *Teorija tonaliteta u svetlosti matematičke teorije muzike*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, str. 12.

[24] Stein Elias and Rami Shakarchi, *Fourier Analysis*, an introduction Princeton University Press, p. 6.



Slika 27 – Oscilovanje žice kao diskretan sistem masa

Ako pretpostavimo da žica ima konstantnu gustinu $\rho > 0$, razumno je podeliti masu na jednake delove, ρ_h je masa svake čestice. Prema Njutnovom zakonu $\rho h y_n''(t)$ je sila koja deluje na n-tu česticu.

Sada ćemo napraviti jednostavnu pretpostavku da ta sila nastaje dejstvom susednih čestica sa koordinatama x_{n-1}, x_{n+1} na x-osi. Sila koja dolazi sa desne strane n-te čestice srazmerna je

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h},$$

gde je h rastojanje između x_{n+1} i x_n, pa silu možemo napisati kao

$$\frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n),$$

gde je $\tau > 0$ koeficijent zategnutosto žice. Analogno, sila sa leve strane je

$$\frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n).$$

Ove sile deluju zajedno i u zbiru daju rezultantu

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h}\big(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)\big)$$
$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t).$$

S druge strane, za svaku funkciju koja ima drugi izvod važi

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \to F''(x), \quad h \to 0.$$

Zato, nakon deljenja sa h naša prethodna jednakost postaje

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{ili}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{gde je} \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

Ovaj odnos poznat je kao *talasna jednačina*. Koeficijent $c > 0$ zove se brzina kretanja.

Ako u talasnu jednačinu uvedemo smenu

$$\left.\begin{aligned} x &= LX \\ t &= \frac{L}{c}T \end{aligned}\right\}$$

dobija se

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{L}{c}\right)^2}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}=\frac{1}{L_2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2},\quad \text{odnosno}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial X^2},\quad 0\leqslant X\leqslant 1.$$

Talasna jednačina do koje smo došli zasniva se na dva osnovna zaključka iz prethodnih fizičkih zapažanja.[25] Kao što vidimo, to je prirodna pojava. Prema analizi stojećih talasa tražimo posebna rešenja za talasne jednačine oblika $\varphi(x)\psi(t)$. Ovaj postupak, koji funkcioniše podjednako dobro i u drugim situacijama kao što je rešavanje *jednačine provođenja toplote*, zove se *razdvajanje promenljivih*. Rešenja koja se dobiju jesu *čisti tonovi*. Možemo očekivati da se ovi čisti tonovi kombinuju u složeniji zvuk. Ova ideja navodi nas na činjenicu da je opšte rešenje talasne jednačine zbir pojedinačnih rešenja.[26]

Zamenom $U(x,t)=\varphi(x)\psi(t)$ i diferenciranjem dobija se

$$\varphi(x)\psi''(t)=\varphi''(x)\psi(t),\quad \text{odnosno}$$

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}=\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Tako se parcijalna diferencijalna jednačina svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina na sledeći način:

Leva strana zavisi od t, a desna strana zavisi od x. To se može desiti samo ako su obe strane jednake istoj konstanti, recimo λ. Odavde sledi da je

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)-\lambda\varphi(x)=0\\ \psi''(t)-\lambda\psi(t)=0\end{array}\right\}.$$

Rešavanjem prve jednačine:

[25] „Parcijalne diferencijalne jednačine su veza između priraštaja nekih veličina u funkciji raznih parametara. Reč je o najdinamičnijim i raznovrsnim oblastima matematičkih nauka koje prkose svim pokušajima unifikacije. Parcijalne diferencijalne jednačine nalaze se u svim pojavama fizike neprekidnih sredina, a tiču se svih stanja materije: gasa, fluida, čvrstih materija, plazme; kao i svih fizičkih teorija: klasičnih, relativističkih, kvantnih itd." (Sedrik Vilani, 2013, *Živa teorema*, Centar za promociju nauke i Matematički institut SANU, Beograd, str. 91.)

Vilani ističe da je veliki Furije 1811. godine postavio jednačinu provođenja toplote, koja određuje promene temperature u prostoru i vremenu u homogenom čvrstom telu u toku njegovog hlađenja.

Na primer, parcijalne jednačine prenošenja toplote u štapu dužine l je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}\quad (t\geqslant 0,\ a>0).$$

uz odgovarajuće početne uslove. Videti u: Dobrilo Tošić, 2006, *Matematika III, kratak kurs*, Akademska misao, Beograd, str. 346.

Od tada su njegove jednačine postale najdostojniji predstavnici parcijalnih diferencijalnih jednačine, jednačine koje opisuju sve povezane pojave što nas okružuju, od morskih struja do kvantne mehanike. Više videti u: Sedrik Vilani, 2013, *Živa teorema*, Centar za promociju nauke i Matematički institut SANU, Beograd, str. 140.

[26] Stein Elias and Rami Shakarchi, *Fourier Analysis*, an introduction Princeton University Press, p. 12.

(1) za $\lambda > 0$ sva rešenja su oblika

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Na osnovu $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Na osnovu početnih uslova vidimo da je jedino rešenje jednačine trivijalno rešenje

(2) Za $\lambda = 0$, $\varphi''(x) = 0$, pa je

$$\varphi(x) = ax + b$$

i ponovo samo trivijalna rešenja zadovoljavaju granične uslove.

(3) Za $\lambda < 0$ rešenja su oblika

$$\varphi(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x.$$

Zamenićemo početne uslove (žica je zategnuta između $x = 0$ i $x = 1$).

Za $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 0$ dobija se

$$\begin{aligned} A = 0 \quad \text{i} \quad A\cos\sqrt{-\lambda} + B\sin\sqrt{-\lambda} &= 0 \\ B\sin\sqrt{-\lambda} &= 0 \\ \sin\sqrt{-\lambda} &= 0 \\ \sqrt{-\lambda} &= k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\lambda &= k^2\pi^2 \\ \lambda &= -k^2\pi^2 \end{aligned}$$

Kada zamenimo dobijeno λ, rešenja su oblika

$$\varphi_k(x) = B\sin k\pi x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

S druge strane, druga jednačina ima rešenja

$$\psi(t) = \overline{A}\cos k\pi t + \overline{B}\sin k\pi t.$$

Ove jednačine prepoznajemo kao prosta harmonijska kretanja.

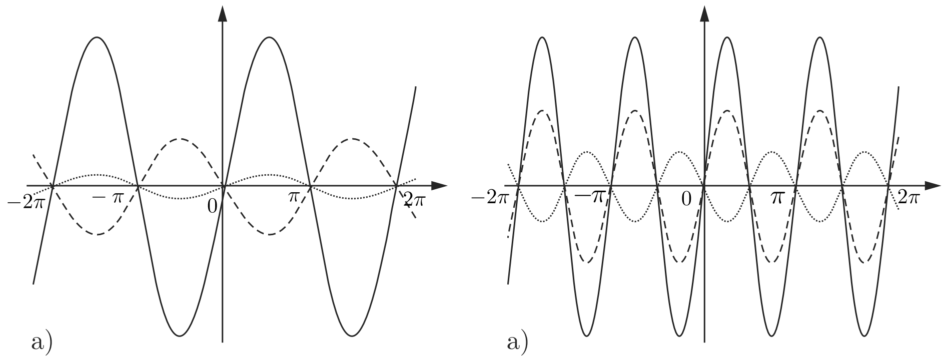
Slučaj $k = 0$, dobija se da je $U(x,t) = 0$. Za $k < 0$ konstante možemo preimenovati (parnost, odnosno neparnost funkcije cos i sin). Zbog toga možemo uzeti da je $k \geqslant 1$. Jedno rešenje talasne jednačine je

$$U(x,t) = (A_k\cos k\pi t + B_k\sin k\pi t)\sin k\pi x$$

i prepoznajemo ga kao stojeći talas.

—

Pre nego što nastavimo analizu talasne jednačine navešćemo primere za stojeće talase. Pretpostavićemo da je $k = 1$ i $U_k(x,t) = \cos t \cdot \sin t$. Na slici je prikazan grafik za različite vrednosti t.



Slika 28 – Osnovni ton (a) i viši tonovi (b) u različitom vremenskom trenutku

Slučaj $k = 1$ odgovara osnovnom tonu, ili, to je prvi harmonik u treperenju žice. Kada uzmemo da je $k = 2$, razmatramo jednačinu $U(x,t) = \cos 2t \cdot \sin 2x$ (slika desno). Imati na umu da je $U\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0$, za svako t. Tačke koje ostaju nepomične u vremenu nazivaju se čvorovi. Za veće vrednosti K dobijaju se viši tonovi ili više harmonika.

Kada k raste, povećava se frekvencija a period se smanjuje. Zbog toga osnovni ton ima nižu frekvenciju nego prizvuk.

—

Podsetimo se da je talasna jednačina linearna u smislu ako su u i v rešenja jednačine, onda je to i $\alpha u + \beta v$ za bilo koje konstante α i β.

To nam omogućava da se sabiraju rešenja kao linearne kombinacije stojećih talasa u_k.[27] Ova tehnika zove se *superpozicija* talasa i dovodi do konačnog rešenja talasne jednačine

$$U(x,t) = \sum_{K=0}^{+\infty} \big(A_k \cos k\pi t + B_k \sin k\pi t\big) \cdot \sin k\pi x \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Za red na desnoj strani važno je da konvergira, o čemu ne brinemo u ovom trenutku.

Pretpostavimo da su u ovom izrazu data sva rešenja talasne jednačine. Za početno vreme $t = 0$, naša jednačina je funkcija po x, koju označavamo sa $f(x)$, za koju važi da je $f(0) = f(1) = 0$. Zbog toga pišemo $U(x,0) = f(x)$ i važi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin k\pi x = f(x).$$

[27] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, 1977, Уравнения математической физики, Наука Москва, стр. 86.

Sada se prirodno nameće pitanje: *Kako pronaći koeficijente A_k, za datu funkciju* $f(x)$, gde je $f(0) = f(1) = 0$ i $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \sin k\pi x$?

Ovo pitanje je okvirno postavljeno i pokušaćemo da na njega odgovorimo. To je, u stvari, *osnovni problem koji je pokrenuo proučavanje Furijeove analize*. Jednostavno zapažanje nam omogućava da pogodimo formulu za koeficijente A_k. Ako obe strane jednakosti pomnožimo sa $\sin n\pi k$ i integralimo od nule do jedan, dobija se

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx &= \int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin k\pi\right) \sin n\pi x\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int\limits_0^1 \sin k\pi x \cdot \sin n\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{2}A_n,
\end{aligned}$$

gde smo koristili činjenicu da je

$$\int\limits_0^1 \sin k\pi x \cdot \sin n\pi x\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \dfrac{1}{2}, & k = n \end{cases},$$

i nismo se trudili da opravdamo zamenu poretka sume i integrala.

Na osnovu navedenog, pretpostavljamo da je n-ti Furijeov koeficijent jednak

$$A_n = 2\int\limits_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$$

te, dakle, očekujemo da imamo razvoj dunkcije f u sinusni red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin n\pi x$$

na segmentu $[0,1]$. No tada vidimo da navedena formula zadaje neparnu funkciju na $[-1,1]$, označimo je takođe sa f, štaviše, možemo je istom formulom definisati na čitavoj realnoj pravoj, kao neparnu funkciju sa periodom 2. Vidimo da je

$$A_n = \int\limits_{-1}^1 f(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Slično pitanje se postavlja i za razvoj funkcije $g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, u kosinusni red:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\pi x.$$

Ponovo, pretpostavljajući da je takav razvoj moguć, vidimo da data formula zadaje g kao parnu funkciju na čitavoj realnoj osi, sa periodom 2. Očekujemo da je, analogno prethodnom rasuđivanju

$$B_n = 2\int_0^1 g(x)\cos n\pi x\,dx = \int_{-1}^1 g(x)\cos n\pi x\,dx.$$

Proizvoljna funkcija funkcije F na $[-1.1]$ može se zapisati kao zbir $f+g$, gde je f neparna, a g parna

$$f(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}$$
$$g(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}.$$

Očekujemo da se proizvoljna funkcija F na $[-1,1]$ može zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin k\pi x + \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \cos k\pi x \\ &= B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(A_k \sin k\pi x + B_k \cos k\pi x). \end{aligned}$$

Uobičajeno se piše

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x).$$

Smenom $x \mapsto 2x$

$$f(x) = F(2x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x)$$

za opštu funkciju f koja je periodična, sa periodom 1. Koristeći Ojlerovu formulu

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

gde je $|e^{it}| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, možemo definisati trigonometrijske funkcije

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$
$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

i jednostavno pokazati sledeće tvrđenje:

Trigonometrijski polinom

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt)$$

može se izraziti u obliku

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x},$$

gde su $c_0 = A$, $c_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n)$ *i* $c_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n)$ *za* $n > 0$.

I obrnuto, svaka funkcija oblika

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx}$$

može se izraziti kao

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$$

tako što su $A_0 = c_0$, $A_n = c_n + c_{-n}$ *i* $B_n = i(C_n - C_{-n})$, $n > 0$.

Koeficijenti A_n *i* B_n *su realni ako i samo ako* $c_n = \overline{c_{-n}}$.

Teorema. *Neka je* f *Furijeov polinom*

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt),$$

tada je

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi inx} dx, \quad -N \leqslant n \leqslant N,$$

shodno tome

$$a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos 2\pi nx\, dx$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin 2\pi nx\, dx$$

DOKAZ. Dovoljno je zapaziti da je

$$\int_0^1 e^{i2\pi kt} dt = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

i uvesti jednakosti

$$a_n = c_n + c_{-n},$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Na ovaj način smo jednu prirodnu pojavu, koju smo predstavili jednačinom treperenja žice, povezali sa apstraktnom teorijom vektorskh prostora, skalarnog proizvoda, ortogonalnosti i Furijeovih redova.

Sada je jasno da ako je f Riman integrabilna da važi teorema o konvergenciji Furijeovog reda u L_2, ili, ako je f deo po deo glatka – da važi uniformna konvergencija Furijeovog reda, čime je učinjen važan korak ka opravdavanju metoda razdvajanja promenljivih u rešenje parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, odnosno, rešenja jednačine žice koja treperi. Na ovaj način pokazali smo da prikazana apstraktna teorija ima primenu u fizici i inženjerstvu.

Sada ćemo uzeti novu definiciju Furijeovih redova koja je specijalni slučaj ranije uvedene opštije definicije, ali se najčešće koristi u primerima.

4.4.5. Definicija Furijeovog reda i primeri

Teorija i primena dali su nam motivaciju da napišemo definiciju Furijeovog reda, i to onako kako taj red najčešće i srećemo.

Definicija Furijeovog reda na $[-\pi,\pi]$**.**[28] *Neka je* $f(x)$ *funkcija sa periodom* 2π*, koja na intervalu* $[-\pi,\pi]$ *ima konačan broj tačaka prekida prve vrste. Furijeov red funkcije* f *dat je sa*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

pri čemu su koeficijenti definisani sa

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

PRIMER 3. Predstaviti funkciju $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\quad 0\leqslant x<2\pi$ u obliku Furijeovog reda.

REŠENJE. Funkcija $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ može se periodično produžiti i na taj način dobije se neparna periodična funkcija za koju važi $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)d(\cos nx)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

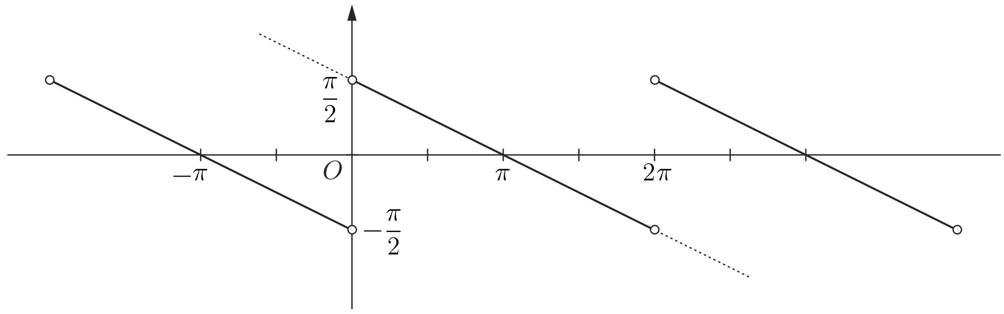
Na taj način

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad 0<x<2\pi.$$

Za $x=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\quad \text{jer je}\quad \sin 2k\frac{\pi}{2}=0\quad\text{za}\quad n=2k\quad \text{i}$$

[28] Nenad Teofanov, 2011, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, str. 73.



Slika 29

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k-1}, \quad n = 2k-1.$$

Na osnovu Parsevalove jednakosti

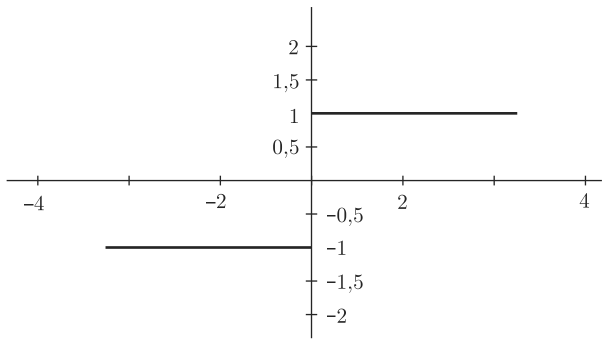
$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx \quad \text{dobija se} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

PRIMER 4. Neka je $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, odnosno

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Odrediti Furijeov red funkcije f.

DOKAZ. Grafik funkcije dat je na slici 30.



Slika 30

Očigledno da je funkcija neparna, što znači da je $a_n = 0$. Za koeficijente b_n važi:

$$b_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \sin nx \, dx = \begin{cases} 4/\pi n, & n \text{ paran}, \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

Furijeov red ove funkcije dat je sa:

$$f(x) \sin \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x.$$

Za:

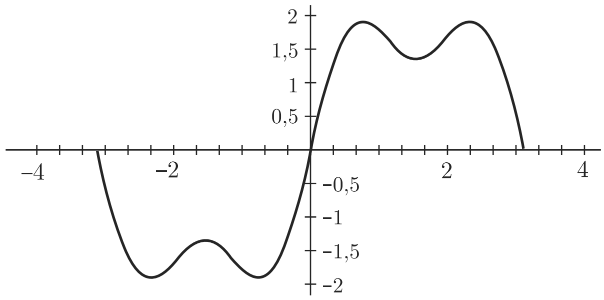
$$f = \sum_{k=1}^{m} (4 * Sin[(2*k-1)*x])/((2*k-1)*Pi);$$

$$Plot[Evaluate[f], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[1,0,0]\},$$

$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-5,5\}\{|2,2\}\}];$$

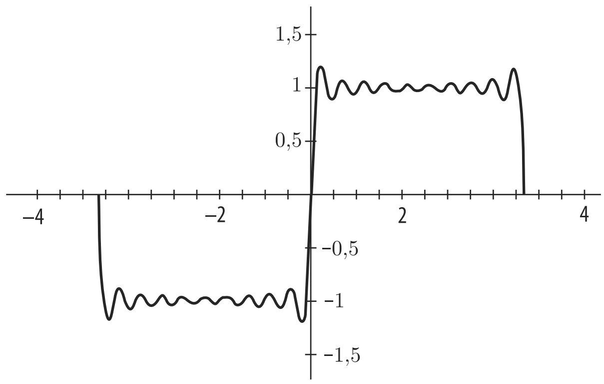
programski paket Matematika za različite vrednosti m daje:

$m = 2$:



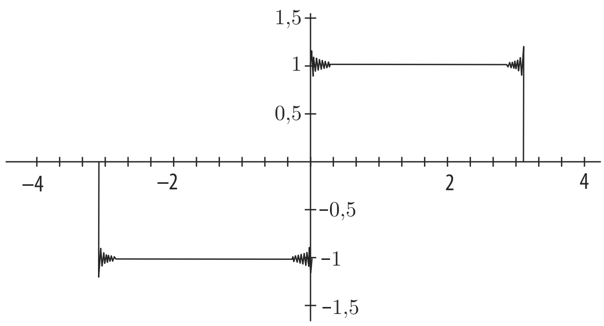
Slika 31

$m = 10$:



Slika 32

$m = 100$:

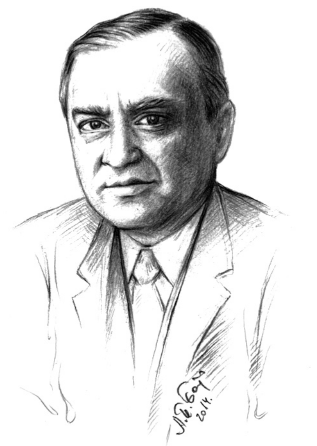


Slika 33

4.5. BANAHOVA TEOREMA O FIKSNOJ TAČKI I PRIMENE

Definicija kontrakcije. *Neka je X metrički prostor sa rastojanjem d i preslikavanjem $F : X \to X$. F je kontrakcija ako postoji realni broj K, $0 < K < 1$ tako da važi*

$$d\big(F(x),F(y)\big) \leqslant Kd(x,y).$$



Slika 34 – Stefan Banah

Banahova teorema.[29] *Neka je X kompletan metrički prostor sa rastojanjem d i neka je preslikavanje $F : X \to X$ kontrakcija. Tada postoji jedinstvena tačka $P \in X$ tako da je*

$$F(P) = P.$$

Dokaz teoreme. Prvo treba primetiti da ako su X_1 i X_2 fiksne tačke F, onda

$$d(x_1,x_2) = d\big(F(x_1),F(x_2)\big) \leqslant Kd(x_1,x_2),$$

iz čega sledi da je $d(x_1,x_2) = 0$. Zbog toga je $x_1 = x_2$. To znači da je fiksna tačka jedinstvena.

Izaberimo $x_0 \in X$ i definišimo

$$x_1 = F(x_0)$$
$$x_2 = F(x_1)$$
$$x_3 = F(x_2)$$
$$\vdots$$

Vidimo da je

$$d(x_{n+1},x_n) = d\big(F(x_n),F(x_{n-1})\big) \leqslant K \cdot d(x_n,x_{n-1})$$

[29] Stefan Banah (Stefan Banach), 1892-1945. Bio je istaknuti poljski matematičar.

$$
\begin{aligned}
&= K\cdot d\big(F(x_{n-1}),F(x_{n-2})\big)\\
&\leqslant K^2\cdot d(x_{n-1},x_{n-2})\\
&\ \vdots\\
&\leqslant K^n\cdot d(x_1,x_0).
\end{aligned}
$$

Ako $n,m\in\{1,2,\dots\}$ onda

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+m},x_n) &\leqslant d(x_{n+m},x_{n+m-1})+d(x_{n+m-1},x_{n+m-2})\\
&\quad +\cdots+d(x_{n+1},x_n)\\
&\leqslant \big(K^{n+m-1}+K^{n+m-2}+\cdots+K^n\big)d(x_1,x_0)\\
&\leqslant \frac{K^n}{1-K}d(x_1,x_0).
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da je (x_n) Košijev niz jer $K^n\to 0$ na osnovu $0\leqslant K<1$. Zato ima graničnu vrednost $\overline{x}\in X$. Kako je F neprekidna (naravno, F je neprekidna u smislu Lipšica), možemo zaključiti da je

$$F(\overline{x})=F\big(\lim_{n\to\infty}x_n\big)=\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\overline{x}.$$

Zbog toga je $\overline{x}$ fiksna tačka koju tražimo.

PRIMER 1. Neka je X Hilbertov prostor l^2 i $F:X\to X$ tako da je

$$F(x)=\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right).$$

Može se lako proveriti da je f kontrakcija sa konstantom $K=\frac{1}{2}$. Jedinstvena fiksna tačka je

$$P=\left(\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\dots\right)\qquad m=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)\in l^2$$

jer je

$$1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots<+\infty$$

$$
\begin{aligned}
d\big(F(x),F(y)\big) &= \|F(x)-F(y)\|\\
&= \left\|\frac{1}{2}x+m-\left(\frac{1}{2}y+m\right)\right\|\\
&= \frac{1}{2}\|x-y\|\\
&= \frac{1}{2}d(x,y).
\end{aligned}
$$

Na osnovu $F(P)=P$, dobija se

$$\left(\frac{1}{2}\right)P+\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)=P$$

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)=\left(\frac{1}{2}\right)P,\quad \text{odnosno}$$

$$P = \left(2, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots\right).$$

PRIMER 2. Neka je sada Hilbertov prostor $L_2([0,1])$ i neka je F preslikavanje dato sa

$$F(f) = (x+1)\int_0^1 x \cdot f(x)\,dx.$$

Može se proveriti da je

$$\begin{aligned}
\left|F(f)(x) - F(g)(x)\right| &= \left|(x+1)\int_0^1 x f(x)\,dx - (x+1)\int_0^1 x g(x)\,dx\right| \\
&= \left|(x+1)\int_0^1 x\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\right| \\
&\leqslant |x+1| \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \left|f(x)-g(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= |x+1| \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|f-g\|_{L_2}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}
\left|F(f) - F(g)\right|_{L_2} &= \left(\int_0^1 \Big(|F(f)-F(g)|\Big)^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \|f-g\|_{L_2} \left(\int_0^1 (x+1)^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{7}{9}\right)^{1/2} \|f-g\|_{L_2}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da F ima jedinstvenu fiksnu tačku.

NAPOMENA. Vredno je podvući da je kompletnost suštinska pretpostavka u teoremi. Na primer, uzimamo $\overline{X} = (0,1]$ sa uobičajenom metrikom – tada preslikavanje $F: X \to X$ dato formulom $F(x) = \dfrac{x}{2}$ jeste kontrakcija koja nema fiksnu tačku.

Bilo bi korisno da imamo nekoliko varijanti Banahove teoreme o fiksnoj tački.

Banahova teorema o fiksnoj tački sa parametrom.[30] *Neka je X kompletni metrički prostor, a Y metrički prostor. Neka je $F: X \times Y \to X$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je F kontrakcija po prvoj promenljivoj i to ravnomerno po drugoj promenljivoj. Pod tim podrazumevamo*

$$d\big(F(x_1,y), F(x_2,y)\big) \leqslant K \cdot d(x_1,x_2)$$

---

[30] Steven G. Krantz, 2013, *A Guide to Functional Analysis*, The Mathematical Association of America, p. 107.

za svaki $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ *i neki* $0 < K < 1$.

Onda, za svako fiksno $y \in Y$ *preslikavanje* $x \to F(x,y)$ *ima jedinstvenu fiksnu tačku* $\varphi(y) \in X$. *Dalje, funkcija* $y \to \varphi(y)$ *je neprekidna iz* Y *u* X.

DOKAZ. Jedino što treba da se dokaže je neprekidnost φ.

Za $y, y_0 \in Y$ imamo

$$\begin{aligned} d\big(\varphi(y), \varphi(y_0)\big) &= d\big(F(\varphi(y),y), F(\varphi(y_0),y_0)\big) \\ &\leqslant d\big(\varphi(y),y)\big), F\big(\varphi(y_0),y\big) + d\big(F(\varphi(y_0),y), F(\varphi(y_0),y_0)\big) \\ &\leqslant Kd\big(\varphi(y), \varphi(y_0)\big) + d\big(F(\varphi(y_0),y), F(\varphi(y_0),y_0)\big). \end{aligned}$$

Sledi da je

$$d\big(\varphi(y), \varphi(y_0)\big) \leqslant \frac{1}{1-K} d\big(F(\varphi(y_0),y), F(\varphi(y_0),y_0)\big).$$

S obzirom na to da desna strana teži nuli kad $y \to y_0$, dobijamo željenu neprekidnost.

Posledica Banahove teoreme.[31] *Neka je* X *kompletan metrički prostor i neka je* $F : X \to X$. *Ako je* F^n *kontrakcija za neko* $n \geqslant 1$, *onda* F *ima jedinstvenu fiksnu tačku* $\overline{x} \in X$.

F^n je kompozicija F, n puta.

DOKAZ. Neka je $\overline{x}$ jedinstvena fiksna tačka F^n (što je dato prethodnom teoremom), onda je

$$\begin{aligned} F^n\big(F(\overline{x})\big) &= F^{n+1}(\overline{x}) \\ &= F\big(F^n(\overline{x})\big) = F(\overline{x}). \end{aligned}$$

Označimo $F(\overline{x})$ sa $\overline{y}$; dobijeni rezultat je $F^n(\overline{y}) = \overline{y}$, ali pošto je $\overline{x}$ jedinstvena fiksna tačka preslikavanja F^n, važi: $F^n(\overline{x}) = \overline{x}$, pa sledi da je $\overline{y} = \overline{x}$ i na kraju

$$F(\overline{x}) = \overline{x}.$$

4.5.1. Dve primene

Prva primena odnosi se na teoremu o implicitnoj funkciji, koja predstavlja jednu od najsloženijih teorema diferencijalnog računa u $\mathbb{R}^n$. Koristeći Banahovu teoremu o fiksnoj tački sa parametrom ona se lako dokazuje, čak i u opštoj situaciji kada se konačno dimenzioni Euklidski prostori zamene Banahovim prostorima.

Koristićemo oznake: $B_X(P,r)$ je otvorena metrička kugla u Banahovom prostoru X i $\overline{B}_X(P,r)$ je zatvorena metrička kugla. Izvode u Banahovom prostoru interpretiramo uobičajeno, kako to čini Freše.[32]

[31] Steven G. Krantz, 2013, *A Guide to Functional Analysis*, The Mathematical Association of America, p. 108.

[32] Steven G. Krantz, 2013, *A Guide to Functional Analysis*, The Mathematical Association of America, p. 108.

Teorema 1. *Uzmimo da su X, Y, Z Banahovi prostori. Neka je $U \subset X \times Y$ otvoreni skup i $u_0 = (x_0, y_0) \in U$. Neka je $F : U \to Z$. Pretpostavimo da je*

(a) *F neprekidna i $F(u_0) = 0$,*

(b) *$D_y F(u)$ postoji za svako $u = (x,y) \in U$,*

(c) *$D_y F$ je neprekidan u u_0 i $D_y F(u_0)$ je invertibilan.*

Onda za $\alpha, \beta > 0$ za koje je $\overline{B}_X(x_0, \alpha) \times \overline{B}_Y(y_0, \beta) \subseteq U$ i jedinstvenu neprekidnu funkciju φ

$$\varphi : \overline{B}_X(x_0, \alpha) \to \overline{B}_Y(y_0, \beta)$$

važi relacija

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

za sve $(x,y) \in \overline{B}_X(x_0, \alpha) \times \overline{B}_Y(y_0, \beta)$.

Napomena. Dokaz ovog rezultata iznenađujuće je direktan.

Dokaz teoreme. Možemo pretpostaviti, ne gubeći na opštosti, da je $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$.

Definišemo funkciju

$$\Phi(x,y) = y - \big[D_y F(0,0)\big]^{-1} F(x,y)$$

za $(x,y) \in U$. Prema (a) Φ je neprekidna od U do Y. Vidimo da je

$$D_y \Phi(x,y) = I - \big[D_y F(0,0)\big]^{-1} \circ D_y F(x,y),$$

gde $\circ$ označava kompoziciju linearnih operatora.

Prema (c) postoji $\gamma > 0$ dovoljno malo da je

$$\|D_y \Phi(x,y)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

za sve $(x,y) \in B_X(0,\gamma) \times B_Y(0,\gamma) \subseteq U$.

Onda jednostavne procene i neprekidnost Φ podrazumevaju da je

$$\big\|\Phi(x,y_1) - \Phi(x,y_2)\big\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_Y$$

za $\|x\|_X$, $\|y_1\|_Y$, $\|y_2\|_Y$ manje ili jednako od β, a β je manje nego γ.

Ako koristimo (a), možemo odrediti $0 < \alpha < \beta$ tako da bude

$$\|\Phi(x,0)\|_Y \leqslant \frac{\beta}{2}$$

za sve $\|x\|_X \leqslant \alpha$. Onda je za $\|x\|_X \leqslant \alpha$, $\|y\|_Y \leqslant \beta$

$$\|\Phi(x,y)\|_Y = \|\Phi(x,0)\|_Y + \|\Phi(x,y) - \Phi(x,0)\|_Y \leqslant \frac{1}{2}(\beta + \|y\|_Y) \leqslant \beta.$$

Onda je neprekidno preslikavanje Φ: $\overline{B}_X(0,\alpha) \times \overline{B}_Y(0,\beta) \to \overline{B}_Y(0,\beta)$ je kontrakcija na $\overline{B}_Y(0,\beta)$ ravnomerno u $\overline{B}_X(0,\alpha)$.

Iz Banahove teoreme o fiksnoj tački sa parametrom postoji jedinstvena neprekidna funkcija φ,

$$\begin{aligned}
&\varphi:\ \overline{B}_X(0,\alpha)\to\overline{B}_Y(0,\beta) \quad \text{tako da je}\\
&\Phi(x,\varphi(x))=\varphi(x) \quad \text{tj.}\\
&F(x,\varphi(x))=0.
\end{aligned}$$

*

* *

Za našu sledeću primenu razmatraćemo Košijev problem

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) & \text{za } t\in\mathbb{I} \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}.$$

Tražimo zatvoren interval I, $t_0\in I$ i diferencijabilnu funkciju x: $I\to X$ (gde je X dati Banahov prostor) tako da je sistem zadovoljen.

Ovo je standardni problem početnih vrednosti prvog reda kod običnih diferencijabilnih jednačina.

Poznata je činjenica da je ovaj sistem ekvivalentan rešavanju integralne jednačine

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds, \quad t\in I.$$

Teorema 2. *Pretpostavimo da je*

(a) *f neprekidna*;

(b) *važi nejednakost*

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|_X\leqslant K(t)\|x_1-x_2\|_X,$$

za sve (t,x_1), $(t,x_2)\in U$, vredi za neke $K(t)\in[0,+\infty)$.

(c) *$K\in L^1(t_0-a,t_0+a)$ za neki $a>0$,*

(d) *postoji $m\geqslant 0$ i $\overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s)\subseteq U$ tako da je*

$$\|f(t,x)\|_X\leqslant m$$

za sve $(t,x)\in\overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s)$.

Onda sledi da postoji $\tau_0>0$ tako da za svako $\tau<\tau_0$ postoji jedinstveno rešenje $x\in C^1(I_\tau,X)$ za Košijev problem sa

$$I_\tau=[t_0-\tau,t_0+\tau].$$

NAPOMENA. Oni koji poznaju klasičan dokaz primetiće da su stvari ovde znatno jednostavnije. Mnoge od klasičnih procena su apsorbovane u funkcionalnu mašineriju.

Dokaz teoreme. Neke je $r=\min\{a,s\}$ i $\tau_0=\min\left\{r,\frac{r}{m}\right\}$.

Biramo $\tau < \tau_0$ i smatramo da je kompletan metrički prostor $Z = \overline{B}_{C(I_r,X)}(x_0,r)$ sa metrikom koju nameće norma od $C(I_r,X)$. Ovde je $x(t_0)$ konstantna funkcija jednaka x_0. Pošto je $\tau < r$, ako $z \in Z$, onda je

$$(t,z(t)) \in \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,r) \subseteq U,$$

za sve $t \in I_r$. Onda za $z \in Z$ definišemo da je

$$F(z)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y,z(y))dy, \quad \text{za } t \in I_r.$$

Primetimo da je

$$\sup_{t\in I_r} \|F(z)(t) - x_0\| \leqslant \sup_{t\in I_r} \left| \int_{t_0}^{t} \| f(y,z(y)\|_X dy \right| \leqslant m\tau \leqslant r.$$

Zaključujemo da F preslikava Z u Z. Naš poslednji zadatak jeste da pokažemo da je F^n kontrakcija na Z za neke $n \in \mathbb{N}$. Indukcijom po n, pokazaćemo da je za svako $t \in I_r$

$$\text{(3)} \qquad \left\|F^n(z_1)(t) - F^n(z_2)(t)\right\|_X \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int_{t_0}^{t} K(y)dy \right|^n \|z_1 - z_2\|_{C(I_r,X)}.$$

Za $n = 1$ ovo je jasno. Zbog toga pretpostavimo da je nejednakost tačna za neko $n-1$ ako je $n \geqslant 2$.

Ako uzmemo da je $t > t_0$ (razmatranje slučaja $t < t_0$, je analogno), vidimo da je

$$\begin{aligned}
&\left\|F^n(z_1)(t) - F^n(z_2)(t)\right\|_X \\
&\qquad = \left\|F\left(F^{n-1}(z_1)\right)(t) - F\left(F^{n-1}(z_2)\right)(t)\right\|_X \\
&\qquad \leqslant \int_{t_0}^{t} \left\| f\left(y,F^{n-1}(z_1)(y)\right) - f\left(y,F^{n-1}(z_2)(y)\right)\right\|_X dy \\
&\qquad \leqslant \int_{t_0}^{t} K(y)\left\|F^{n-1}(z_1)(y) - F^{n-1}(z_2)(y)\right\|_X dy \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{t_0}^{t} K(y)\left(\int_{t_0}^{y} K(\omega)\,d\omega\right)^{n-1} dy\right] \|z_1 - z_2\|_{C(I_r,X)} \\
&\qquad = \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} K(y)\,dy\right)^n \|z_1 - z_2\|_{C(I_r,X)}
\end{aligned}$$

Tako iz (3) dobijamo

$$\left\|F^n(z_1)(t) - F^n(z_2)(t)\right\|_{C(I_r,X)} \leqslant \frac{1}{n!}\|K\|^n_{L^1(I_r)}\|z_1 - z_2\|_{C(I_r,X)},$$

i to pokazuje da za n dovoljno veliko, F^n je kontrakcija.

Pomoću posledica Banahove teoreme zaključujemo da F ima jedinstvenu fiksnu tačku. To je očigledno jedino rešenje za našu integralnu jednačinu i ono rešava Košijev problem.

Teorema (uopštenje Banahove teoreme). *Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor, $T : X \to X$, tako da za svaki $x,y \in T$, $x \neq y$ važi*

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y).$$

Tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T, tj. važi $T(a) = a$ za neko $a \in X$.[33]

DOKAZ. (I način) Neka je

$$G(x) = d(T(x),x), \quad x \in X.$$

Važi

$$\begin{aligned}
&\big|G(x) - G(y)\big| = \Big|d\big(T(x), x\big) - d\big(T(y), y\big)\Big| \\
&= \Big|d\big(T(x), x\big) - d\big(T(y), x\big) + d\big(T(y), x\big) - d\big(T(y), y\big)\Big| \\
&\leqslant \Big|d\big(T(x), x\big) - d\big(T(y), x\big)\Big| + \Big|d\big(T(y), x\big) - d\big(T(y), y\big)\Big| \\
&\leqslant d\big(T(x), T(y)\big) + d(x, y) \\
&\leqslant 2d(x, y)
\end{aligned}$$

G ispunjava Lipšicov uslov pa je neprekidna.

[Korišćena je procena

$$\begin{aligned}
&\big|d(a,b) - d(a,c)\big| \leqslant d(b,c) \quad \text{što je ekvivalentno sa} \\
&-d(b,c) \leqslant d(a,b) - d(a,c) \leqslant d(b,c), \quad \text{odnosno} \\
&d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c) \land d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,d).]
\end{aligned}$$

Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže minimum.

Znači da neprekidna funkcija G dostiže minimum u nekoj tački $a \in X$ i neka je

$$G(a) = d(T(a),a) = \lambda.$$

Pretpostavimo da je $\lambda > 0$. Onda je

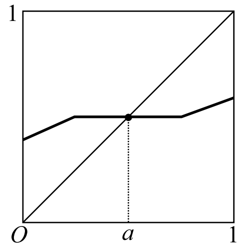
$$\begin{aligned}
&T(a) \neq a, \quad \text{pa je} \\
&d\big(T(T(a)), T(a)\big) < d\big(T(a), a\big) = \lambda
\end{aligned}$$

Kontradikcija!

Sledi da je $T(a) = a$, a to znači da je a fiksna tačka.

[33] W. A. Sutherland, 1975, *Introduction to metric and topological spaces*, Clarendon Press, Oxford.

PRIMER 3. Neka je $f:[0,1]\to[0,1]$ čiji gafik je prikazan na slici. Data funkcija na kompaktnom skupu $[0,1]$ ima fiksnu tačku.



Slika 35

(II način) U drugom dokazu koriste se dve važne činjenice. Prvo, funkcija T očigledno je neprekidna, jer je $d(T(x),T(y))\leqslant 1\cdot d(x,y)$ pa T ispunjava Lipšicov uslov; drugo, koristiće se činjenica da je X kompaktan skup na kome svaki niz ima konvergentan podniz. (Ovde nećemo koristiti neprekidnost funkcije $f(x)=d(T(x),x)$ koja nije očigledna.)

Analiziramo dva slučaja za $d>0$. Zaključićemo da nijedan nije moguć i da mora biti $d=0$.

(I) $\alpha=\inf d(T(x),x)$ se dostiže pa postoji tačka $x_0\in X$ takva da je $\alpha=d(T(x_0),x_0)$. Ali, prema uslovu teoreme

$$d\big(T(x_0),T\big(T(x_0)\big)\big)<d\big(x_0,T(x_0)\big)=\alpha,\quad x_0\neq T(x_0)$$

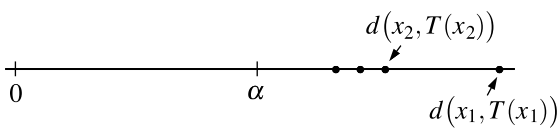
sledi infimum je manji od α. Kontradikcija!

Znači nije moguće da se realizuje infimum koji je veći od nule.

(II) $\alpha=\inf d(T(x),x)$ se ne dostiže. To znači da je za $\alpha>0$ rastojanje

$$d\big(x,T(x)\big)>\alpha\quad\forall x\in X.$$

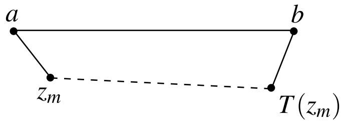
Koristeći svojstvo infimuma zaključujemo da postoji niz $x_n\in X$ takav da je niz $d(x_n,T(x_n))$ opadajući i teži α.



Pošto je (X,d) kompaktan, svaki niz ima konvergentan podniz, pa i niz (x_n) ima podniz $y_k=x_{n_k}$, $k=1,2,\dots$ gde $y_k\to a$ za neko $a\in X$.

Sada $y_k\to a$, $d(y_k,T(y_k))\downarrow\alpha$. Takođe, niz $T(y_k)$, $k=1,2,\dots$ ima konvergentan podniz, tj. postoji $z_m=y_{k_m}$, $m=1,2,\dots$ takvo da $T(z_m)$, $m=1,2,\dots$ konvergira nekom $b\in X$.

Znači $d(z_m,T(z_m))\downarrow\alpha$, gde $z_m\to a$, $T(z_m)\to b$, za neke $a,b\in X$.



Važe relacije trougla

$$d\big(z_m, T(z_m)\big) \leqslant d(z_m, a) + d(a,b) + d\big(b, T(z_m)\big), \quad \text{odnosno}$$
$$d(a,b) \leqslant d(a, z_m) + d\big(z_m, T(z_m)\big) + d\big(T(z_m), b\big).$$

Prelaskom na limes, kada $m \to \infty$ iz ovih nejednakosti sledi

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leqslant 0 + d(a,b) + 0 \\ d(a,b) \leqslant 0 + \alpha + 0 \end{array}\right\} \quad \text{pa je} \quad d(a,b) = \alpha.$$

Iz neprekidosti funkcije T (koja ispunjava Lipšicov uslov), zbog $z_m \to a,\ T(z_m) \to b$ sledi $T(a) = b$ i pri tome je $d(a,b) = \alpha$, tj. $d(a, T(a)) = \alpha$, a zatim $d(T(a), T(T(a))) < \alpha$, pa $\alpha > 0$ nije infimum. Kontradikcija! Pretpostavka da je $\alpha > 0$ nije tačna. Ostaje jedina mogućnost $\alpha = 0$.

Pošto je $y_k \to a,\ d(y_k, T(y_k)) \downarrow \alpha = 0$ iz nejednakosti

$$d\big(T(y_k), a\big) \leqslant d\big(T(y_k), y_k\big) + d(y_k, a)$$

sledi $d(T(y_k), a) \to 0$, ili to isto: $y_k \to a,\ T(y_k) \to a$ zbog neprekidnosti T je $T(a) = a$.

Teorema o fiksnoj tački metričkog prostora (A. Meir& E. Keeler)**.**[34] *Nek je* (X,d) *kompletan metrički prostor,* $T : X \to X$ *i važi sledeći uslov:*

$$(*) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x, y \in X)\Big(\varepsilon \leqslant d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d\big(T(x), T(y)\big) < \varepsilon\Big)$$

Tada za svako $x \in X$ *postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = a$, *gde* $a \in X$ *ne zavisi od* x*;* $T(a) = a$, *što znači da je* a *fiuksna tačka prostora* (X,d).

Dokaz. (i) Niz $c_n = d(T^n(x), T^{n+1}(x))$ je opadajući na osnovu $(*)$. (Uzeti u $(*)$ $T^n(x)$ umesto x, $T^{n+1}(x)$ umesto y, $d(T^n(x), T^{n+1}(x))$ umesto ε, ako je takvo $\varepsilon > 0$). Znači $c_{n+1} < c_n$.

(ii) (c_n) je monoton i ograničen niz. Treba dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Pretpostavimo suprotno, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c > 0$.

Neka je $\varepsilon = c$. Postoji $\delta > 0$ po uslovu teoreme. Pošto $c_n \to c < c + \delta = \varepsilon + \delta$, za $n \geqslant n_0$ je $c_n < \varepsilon + \delta$ pa je $c_{n+1} < \varepsilon$ na osnovu uslova $(*)$. Znači $\lim\limits_{n\to\infty} c_n < c$. Kontradikcija!

(iii) Dokazujemo da je niz $T_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Košijev, pretpostavljajući suprotno. Označimo $T_n(x) = \beta_n$.

Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za beskonačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ važi $d(\beta_n, \beta_{n+k}) > 2\varepsilon$, za neke brojeve $k = k(n)$. Broju ε odgovara broj $\delta = \delta(\varepsilon)$, takav da važi $(*)$.

[34] A. Mukherjea and K. Pothoren, 1978, Real na Functional Analysis, Plenum Press, New York, p. 71.

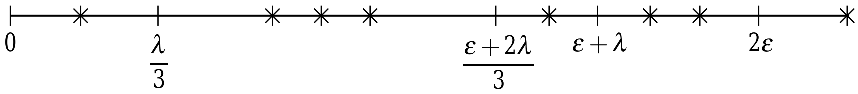
Za $n > \mathbb{N}$ je $c_n < \dfrac{\lambda}{3}$, gde je $\lambda = \min\{\delta, \varepsilon\}$. Neka je $n > \mathbb{N}$ i k takvo da važi $d(\beta_n, \beta_{n+k}) > 2\varepsilon$. Kako je $n > \mathbb{N}$

$$c_n = d(\beta_n, \beta_{n+1}) < \frac{\lambda}{3}, \quad \text{sledi}$$
$$\big(d(\beta_{n+j}, \beta_{n+j+1}\big) < \frac{\lambda}{3} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \quad \text{odnosno}$$
$$\Big|\big(d(\beta_n, \beta_{n+j}\big) - \big(d(\beta_n, \beta_{n+j+1}\big)\Big| < \frac{\lambda}{3} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Posledica nejednakosti trougla.)

Sada posmatramo konačan niz brojeva

$$\big(d(\beta_n, \beta_{n+1}\big), d(\beta_n, \beta_{n+2}\big), \ldots, d(\beta_n, \beta_{n+k}\big).$$



Razmak između svaka 2 susedna člana ovog niza je manji je od $\dfrac{\lambda}{3}$, prvi član niza manji od $\dfrac{\lambda}{3}$, poslednji član je veći od 2ε, pa s obzirom na gustinu tih brojeva bar jedan član tog niza (β_n, β_{n+j}) pripada intervalu

$$\left(\varepsilon + \frac{2\lambda}{3}, \varepsilon + \lambda\right) \quad \text{tj.} \quad \varepsilon + \frac{2\lambda}{3} < d(\beta_n, \beta_{n+1}) < \varepsilon + \lambda$$

za neko $j = \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Nalazimo bolju procenu za broj $\big(\beta_n, \beta_{n+j}\big)$,

$$d\big(\beta_n, \beta_{n+j}\big) \leqslant d\big(\beta_n, \beta_{n+1}\big) + d\big(\beta_{n+1}, \beta_{n+j+1}\big) + d\big(\beta_{n+j+1}, \beta_{n+j}\big)$$
$$< \frac{\lambda}{3} + d\big(\beta_{n+1}, \beta_{n+j+1}\big) + \frac{\lambda}{3}.$$

Na osnovu $(*)$ iz procene

$$d\big(\beta_n, \beta_{n+j}\big) < \varepsilon + \lambda \quad \text{sledi}$$
$$d\big(\beta_{n+1}, \beta_{n+j+1}\big) < \varepsilon \quad \text{jer je} \quad \varepsilon + \lambda < \varepsilon + \delta.$$

Znači

$$d\big(\beta_n, \beta_{n+j}\big) < \frac{\lambda}{3} + \varepsilon + \frac{\lambda}{3} = \varepsilon + \frac{2\lambda}{3}.$$

Kontradikcija!

(iv) Niz (β_n) je Košijev (X, d) kompletan, pa $\beta_n \to a$ za neko $a \in X$, tj. $T^n(x) \to a$. Kako je

$$d\big(T(T^n(x)), T(a)\big) \leqslant \big(T^n(x), a\big) \to 0,$$

onda

$$T^{n+1}(x) \to T(a), \quad \text{tj.} \quad T^n(x) \to T(a); \quad T(a) = a.$$

(v) Pretpostavimo da $T^n(x) \to a$ za neko x, $T^n(y) \to b$ za neko Y i da je $a \neq b$. Važi

$$\Big|d\big(T^n(x),T^n(y)\big)-d(a,b)\Big| \leqslant \Big|d\big(T^n(x),T^n(y)\big)-d\big(T^n(x),b\big)\Big|+$$
$$+\Big|d\big(T^n(x),b\big)-d(a,b)\Big| \leqslant d\big(T^n(y),b\big)+d\big(T^n(x),a\big) \to 0, \quad \text{tj.}$$
$$d\big(T^n(x),T^n(y)\big) \to d(a,b).$$

Iz uslova $(*)$ sledi da je

$$d\big(T^{n+1}(x),T^{n+1}(y)\big) < d\big(T^n(x),T^n(y)\big)$$

(Uzeti $\varepsilon = d\big(T^n(x),T^n(y)\big)$)

Dalje, ako se uzme $\varepsilon = d(a,b)$, za dovoljno veliko n je

$$\varepsilon \leqslant d\big(T^n(x),T^n(y)\big) < \varepsilon+\delta, \quad \text{pa važi}$$
$$d\big(T^{n+1}(x),T^{n+1}(y)\big) < \varepsilon = d(a,b) \quad \text{odnosno}$$
$$d\big(T^n(x),T^n(y)\big) \downarrow s, \quad \text{za neko } s;\ 0 \leqslant s < d(a,b).$$

Iz dobijene kontradikcije proizilazi da je $a = b$. To znači da je fiksna tačka jednoznačno određena; postoji $a \in X$ takvo da $T^n(x) \to a$ za proizvoljno izabrano $x \in X$ (kada $n \to \infty$).

*
* *

Banahova teorema o fiksnoj tački ima primenu u različitim oblastima: algebarske, obične diferencijalne jednačine, parcijalne jednačine, integrale jednačine, funkcionalne jednačine, numerička analiza i dr. Banahova teorema ima i izvesna ograničenja. Na primer, kod egzistencije rešenja Fredholmove integralne jednačine

$$\mathscr{K}(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt + g(s).$$

Ovaj stav obezbeđuje rešenje samo za male vrednosti parametra $|\lambda|$.

5.

PREDLOZI INOVACIJA U NASTAVI MATEMATIČKE ANALIZE NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA I ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

5.1. REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Rezultati empirijskog istraživanja i rešavanja zadatog istraživanja u odnosu na postavljene hipoteze jesu sledeći:

	Hipoteza	Rezultat
(i)	Studenti tehničkih fakulteta imaju pozitivan odnos prema matematici.	prihvaćena
(ii)	Studenti tehničkih fakulteta matematici prevashodno dodeljuju upotrebnu vrednost.	prihvaćena
(iii)	Predavanje nastavnika je dobro ukoliko je razumljivo, razgovetno i ako motiviše studente da u njemu učestvuju. Istovremeno, predavanje sadrži primere sa elementima primene.	prihvaćena
(iv)	Matematička literatura je važno nastavno sredstvo ali se ona, osim zbirki zadataka koje služe za neposredno pripremanje ispita, ne koristi.	prihvaćena
(v)	Uspešnost u rešavanju zadataka ne zavisi od vrste fakulteta (ETF, GF, MF).	odbačena
(vi)	Vizuelna prezentacija zadataka povećava uspešnost rešavanja problema.	prihvaćena
(vii)	Studenti nisu stekli veštinu da znanje iz matematičke analize primene u rešavanju zadataka i problema.	prihvaćena
(viii)	Apstraktna teorija i primenjena matematička analiza međusobno su povezane i objedinjene u univerzalnom matematičkom sistemu.	prihvaćena

Prve četiri hipoteze prihvaćene su na osnovu analize upitnika. Peta hipoteza, *uspešnost u rešavanju zadataka ne zavisi od vrste fakulteta* je odbačena, što ide u prilog činjenici da rezultat zavisi od fakulteta. Šesta i sedma hipoteza su prihvaćene.

Krajnje apstrakcije jesu pravo oruđe kojim se može kontrolisati naša misao u konkretnim situacijama. Matematička tvrđenja predstavljaju sigurnu stazu, bez obzira na to da li je utvrđeno da postoji u prirodi ili ne, jer sadrže nešto izvesno i nesumnjivo. Rezultati istraživanja nedvosmisleno potvrđuju da studenti tehničkih fakulteta smatraju da matematika treba da bude isključivo primenjena nauka. Takođe je kristalno jasno da bez teorije sama primena znači svođenje na puku veštinu, napravu i patent, bez mogućnosti naučnog usavršavanja i razvoja. Apstrahovanje, uopštavanje i izvođenje posebnih slučajeva treba dovesti u prirodan tok. Zatim slede primeri koji se navode određenim redosledom.

Prvo se navode primeri kojima se rasvetljava pojam, zatim primeri primene u matematici i na kraju primeri primene u fizici, prirodnim naukama, muzici i drugim oblastima gde postoje. Tako će primenom iz čiste teorije, složene stvari ili pojave – recimo iz fizike ili medicine, biti manje sumnjive i biće izvesnije. Drugi način je matematičko modeliranje, čime se bave teorijska fizika i druge nauke. Ovo je put približavanja apstraktne teorije i odgovarajuće primene.

Tema koja je rasvetljena na oba načina jeste tema Furijeovih redova. Prvo je na pijedestal podignuta teorija vektorskih prostora, ortogonalnih vektora do nivoa Hilbertovih prostora. O, velike li apstrakcije! Zatim je posledično objašnjena teorija Furijeovih redova. Još uvek se ne *vidi* primena ali se mogu konformno rešavati primeri i zadaci. Zatim se pogled promenio, sada se stvar posmatra kao fizički fenomen treperenja žice. Matematičkim modeliranjem ponovo se stiže do Furijeovih redova. Na taj način apstraktna matematička teorija i matematičko modeliranje prirodne pojave daju isti rezultat. Razumevanjem ovog odnosa otvara se mogućnost za mnoge primere.

Teorijskim razjašnjenjem pojmova apstrakcije i primene, a zatim i prikazom apstraktne teorije Furijeovih redova i primera primene, potvrđena je hipoteza: *Apstraktna teorija i primenjena matematička analiza međusobno su povezane i objedinjene u univerzalnom matematičkom sistemu*.

U radu *Odnos između apstrakcije i primene u nastavi matematičke analize* dat je novi pogled na metodiku nastave matematike, sa utemeljenjem u teorijskom i empirijskom istraživanju. Doprinos je dat u sagledavanju odnosa između apstrakcije i primene, ali i neposrednim primerima, sa željom da se:

(1) poboljša nastavno izlaganje,

(2) podstaknu istraživači da se posvete metodici nastave u raznim matematičkim oblastima.

U radu je naročito istaknut primer teorije Furijeovih redova kao dobar primer spajanja apstraktne matematičke teorije i primene. Pored Furijeovih redova dati su drugi primeri, u manjem obimu, ali su oni važni po značaju naše pozivne delatnosti. Na primer, Njutn–Lajbnicova formula, Lagranžova teorema, primene teoreme o fiksnoj tački, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$ i dr.

Na ovaj način se potvrđuje da metodički dobro postavljena nastava pomaže boljem razumevanju odnosa između apstrakcije i primene matematičke analize.

5.2. PREDLOZI I INOVACIJE

5.2.1. Planiranje nastave

Profesor matematike na tehničkom fakultetu suočen je sa brojnim izazovima. Za praćenje nastave više matematike, odnosno matematičke analize kao njenog integralnog dela, potrebno je *intenzivno znanje matematike iz srednje škole*.

Ovu činjenicu valja imati na umu kada se kreira plan nastave . Oslanjajući se na iskustvo kolega sa Univerziteta u Berlinu, važno je da se u okviru stranice predmeta dobro osmisle kursevi više matematike na prvoj godini studija, koji će doprineti *homogenizaciji gradiva iz srednje škole*. Ova priprema zahteva širi zahvat. Neophodno je analizirati upis studenata i osmišljavati maturski i prijemni ispit (koji pokazuje nivoe znanja). Uz ove preduslove moguće je planirati gradivo koje će studente osposobiti za dalje izazove nastave.

Važnu činjenicu predstavljaju i osmišljavanje primera za matematičko modelovanje inženjerskih problema, upravljanje dinamičkim sistemima i sl. Takav pristup treba da doprinese majstorstvu i istraživačkom majstorstvu studenata. U ovom smislu je priprema nastavnog materijala veoma zahtevna. Do poboljšanja će doći kada se o ovoj temi povede ozbiljna diskusija na tematskim konferencijama, razvije pisanje naučnih tekstova, podstakne pisanje udžbenika i knjiga.

Sadržaj nastavnih tema treba da uzme u obzir dostignuti nivo znanja studenata i željene ciljeve, kao i predviđene rezultate učenja. Kod osmišljavanja sadržaja mora se imati na umu da studenti koji su upisali fakultet nisu dovoljno pripremljeni. Za razliku od srednje škole, njih na fakultetu očekuje znatno veći izazov dokazivanja teorema. Zbog toga prelaz mora biti pažljivo pripremljen, uz elemente filozofije matematike, kombinovanje induktivne metode sa strogom dedukcijom i objašnjavanje samog postupka, uloge dokaza i sl. Težinu treba koncipirati i podizati tako da se tokom prve godine studija izoštri osećaj za strogost u matematici i dođe do neophodne pripreme za dalje izučavanje.

Planiranje udžbenika je dugoročan proces jer se udžbenici ne pišu pred samu nastavu. U nekim zemljama profesori se oslobađaju od nastave da bi se posvetili pisanju. O udžbenicima, zbirkama zadataka i nastavnim materijalima treba voditi stručnu debatu i planirati ih dugoročno.

Plan sadrži predviđanje budućnosti u smislu formulisanja ciljeva i ishoda, sadržaja rada i korišćenja nastavnih sredstava. Kada se pravi takav iskaz, mora se voditi računa o tome da bude realan – ostvarljiv i odgovarajući – a to znači da u svakom trenutku znamo šta radimo i gde želimo da stignemo. U okviru plana navode se nastavna sredstva koja će se koristiti. I najvažnije – plan nije spisak želja već je bitno njegovo ostvarivanje.

5.2.2. Pažnja, beleške i postavljanje pitanja

Obratiti pažnju znači percipirati. Pažnja jeste sposobnost da pojedinac upravlja tokom svoje svesti. Pažljiv je onaj ko brižno sluša ili gleda neku stvar. Student teži, naginje nečemu, oseća interesovanje za ono što će naći ili što je već prisutno. Paziti – znači uložiti svoju studioznost i budnost u posmatranje ili razumevanje nečega. Privlačenje apsolutne pažnje označavamo rečima zaokupirati, očarati, zaseniti, zadiviti i dr. Treba ući u ono što radiš. Koncentrisati se, sjediniti se sa predmetom rada, izraziti interesovanje, upustiti se. Obratiti pažnju znači biti svestan neke privlačnosti. Dve stvari bitno određuju pažnju: jedno je motivacija, a drugo volja. Profesor treba da motiviše studente. Može to uraditi veštim kombinovanjem poznatih i nepoznatih pojmova, a ako je gradivo potpuno novo, onda on mora da raspakuje definicije, da objasni, da navede primer koji privlači pažnju.

Za studenta je korisno da notira definicije, teoreme i primere u sažetom obliku. Poenta je u tome da student traga za metodom učenja, međutim on od nečeg mora da počne. Jedan od načina kako treba pisati u svesci je sledeći: Podeli se strana na veći i manji deo (vertikalnom crtom napravi margina). Sa desne strane sada imamo marginu za komentare. U glavnom delu piše se sadržaj, a sa strane se beleže ključne reči, važne formule ili kratki tekst koji nas upućuje i asocira na važne delove ili pojmove.

U toku pisanja određene stvari se razumeju. Međutim, neke teoreme ili definicije student ne razume. Šta se tada dešava? Profesor tokom izlaganja podstiče studente da postavljaju pitanja. Ne tek onako ili reda radi, već suštinski, i to vrednuje. Student iznova i iznova postavlja ista pitanja – šta je ovo? zašto je ovako? čemu ovo služi? zašto to radimo? Treba zapamtiti da odgovori nisu uvek isti! Smatra se da je postavljanje pitanja najviša aktivnost inteligencije. A *naučiti nekoga da postavlja pitanja najsavršeniji je obrazovni trud.*

5.2.3. Stvaralačka memorija

Čovek *vidi*, interpretira i razume iz memorije. Zna da čuva i upotrebi informacije. Inteligentna memorija je dinamički sistem. Nije suština samo u znaju već i u umeću da se upotrebi ono što se zna.

Ako bi za memoriju upotrebili kompjuterski izraz *baza podataka*, onda bi se moralo reći da čovek poseduje delotvorniju i korenito drugačiju bazu podataka od kompjuterske. Za čoveka postoje tri izvora informacija.

Prvi izvor je neposredno dostupna baza podataka, izgrađena od znanja koje posedujemo, i to je ono što uobičajeno nazivamo *pamćenjem*. Pristup toj bazi je neposredan i zahvaljujući njoj mi percipiramo, govorimo, krećemo se i tumačimo stvarnost.

Drugi izvor opredmećuju knjige, arhive, kompjuterske memorije, beleške i dr. On je posredno dostupan, i već se ovde vidi da je kompjuterska memorija deo sopstvene baze podataka.

Treći izvor je posredno dostupna svekolika stvarnost. Priroda koja nas okružuje poseduje neiscrpne informacije koje se pretvaraju u izvor saznanja i obilje podataka.

Kada hoćemo da tražimo informaciju, obraćamo se jednoj od ove tri baze. Važno je posedovati i znanje o pristupu. Ako prihvatimo stvarnost kao bazu podataka, onda se pretvaramo u istraživače stvarnosti.

Sada se nameće krunsko pitanje. Šta znači *učiti napamet*? To je fraza koja etiketira čitav obrazovni sistem. Učenje je trajna promena izazvana u organizmu putem iskustva, a pamćenje je umeće da se informacija uskladišti i potom, po potrebi, pronađe. Dakle, to su dva aspekta jedne iste sposobnosti.

Student razmišlja, percipira, postupa iz svoje memorije, koja predstavlja skup delatnih mogućnosti. Setiti se nečega jeste dovođenje informacije koja se poseduje u svesno stanje. Pojmovi, slike, planovi i veštine adekvatne su šeme koje se mogu ponavljati i koje unapred određuju šta će se dogoditi. Rezonovanje je radnja povezivanja definisanih pojmova, u skladu sa logičkim normama. Informacije koje se poseduju uključene su u aktivne planove. Upravo zbog toga se govori o stvaralačkoj memoriji. Čak i za mnogo mašte potrebno je veliko pamćenje. Kreativna aktivnost zasniva se na veštoj upotrebi memorije. Iskazno i proceduralno znanje se spajaju.

Sledi jasan zaključak. Student treba da pamti određenu količinu gradiva. Kako? Prva mogućnost (i najbolja) jeste da razume, i da na taj način lakše memoriše. Druga mogućnost jeste da neke stvari zapamti napamet, čak i ako ne razume. Na primer, ako znate određenu formulu ili tablični integral napamet, može se dogoditi da ideja za rešavanje određenog problema (zadataka) dođe odmah, odnosno da nastupi blesak razumevanja i povezivanja poznatih elemenata sa teoremom i dokazom. Najvažnije je da se radi (uči) redovno. Na primer ako student pažljivo sređuje svoje beleške on na taj način radi automatski, ali metodično. Stvar je u građenju navika, to jest, ustaljenih veština i sposobnosti koje mogu da rukovode proizvodnjom ideja. Za studente je najvažnije da budu staloženi, da imaju nadu i da shvate da ne moraju razumeti sav materijal baš u prvom pokušaju.

Za dobre i sofisticirane ideje potrebno je vreme, ponavljanje i posvećenost. Student mora uroniti u materiju i biti u stanju da je apsorbuje.

Postavlja se pitanje: Kakvo predavanje pomaže pamćenju? Ovo podrazumeva da u matematici moramo postaviti čvrsta mesta na koja ćemo se osloniti u čitavoj teoriji. U tome nam može pomoći Toma Akvinski. Prvo, pojmovi moraju biti kristalno jasni. Da bi tako i bilo, čovek treba da smisli slikovite predstave za stvari koje želi da budu zapamćene. Drugo, neophodno je dobro promisliti logički redosled izlaganja određenih stvari. Lakše se pamti ono što je dobro poređano. To je izgradnja ideja, *opštih mesta* (teorijska čvorišta), unutar kojih imamo *posebna* mesta (primeri i primene). Treće, potrebno je da čovek veoma pažljivo usmeri svoje misli i da uputi osećanja na stvari koje želi da zapamti. Pažnja čuva celovite slike simbola. Četvrto, neophodno je da često razmišlja o onome što treba zapamtiti. Razmišljanje održava pamćenje.

5.2.4. Grafičko predstavljanje i inteligentni pogled

Važna pomoćna alatka u nastavi jeste grafičko predstavljanje. To se može opisati rečju reprezentacija (lat. *repraesentare*, znači učiniti prisutnim). Reč i slika omogućavaju da ono što predstavljaju u potpunosti bude prikazano kao ono što jeste! Suština slike je ukazivanje (na pojam, pojavu, stvar) ili zastupanje (recimo oznaka i simbola).

Prva sposobnost opažanja je imaginacija koja se pretvara u sliku, a to je materijal za intelekt. Kaže se da je onome ko misaono posmatra potrebno da ima ispred sebe i sliku. Kako kaže Aristotel, pamtimo pomoću asocijacija i redosleda. Uz to su značajna i dobro osvetljena mesta na koja se slike postavljaju . Važno je imati na umu da pamćenje nije samo prirodni dar već da mnogo zavisi od veštine i marljivosti. Zato se i kaže da se razboritost sastoji od tri stvari: *memoria*, *intelligentia*, *providentia*.

Posredstvom pogleda – koji smatramo izrazitim predstavnikom sveg čulnog saznanja – crpimo podatke iz stvarnosti. Ono što vidimo upotpunjujemo onim što znamo, interpretiramo podatke dajući im značenje. Po rečima Hoze Antonija Marine, *inteligentni pogled* deluje u suprotnom smislu – *mi vidimo iz značenja*. On koristi već poznatu informaciju, iznalazi, interpretira, predviđa. Vidi iz memorije. Inteligentni pogled koristi znanje koje poseduje i upravlja aktivnostima iz zamisli. Jedna od mogućnosti tog pogleda jeste i da bude kreativan. U najjednostavnijim mentalnim aktivnostima prisutna je kreativnost. Stvaralačka aktivnost se odvija putem elementarnih ispoljavanja, preko postupaka koje obavljamo tako uobičajeno da nam se čine običnim, iako su, bez sumnje, izvanredni.

Umeti gledati – u tome je tajna. Sa jednog nivoa u drugi, iz percepcije na pojam, iz memorije na sliku, iz konkretnog u apstraktno, iz jednog prostora u drugi. Puka percepcija nas ne zadovoljava. Potrebno nam je da razumemo. Moramo postići da nam strano postane vlastito. Saznati – znači razumeti.

Ovo ćemo ilustrovati sa dva matematička primera. U prvom trenutku oba deluju teško.

PRIMER 1. Ispitati konvergenciju niza datog rekurentnom formulom

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

i naći graničnu vrednost ukoliko postoji.

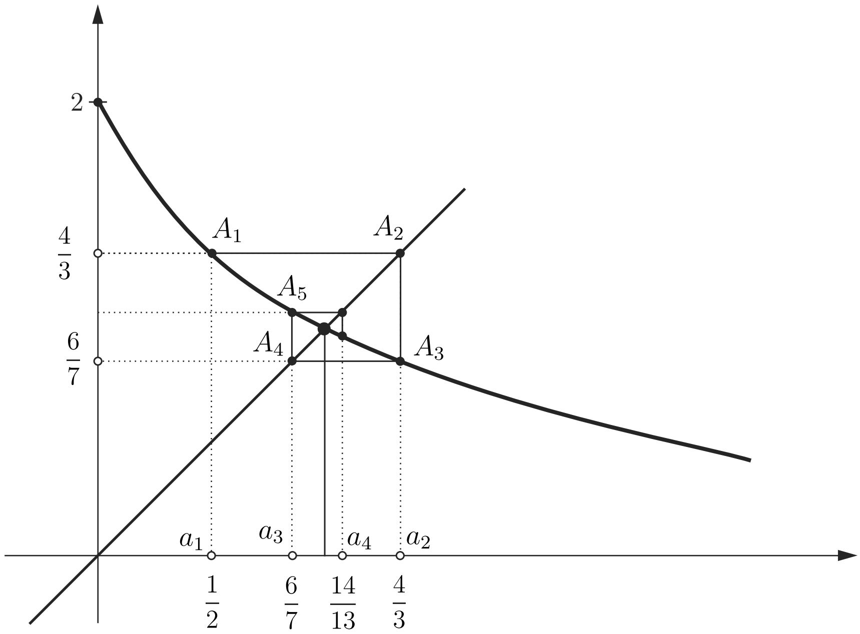
REŠENJE. (1) Analiza zadatka uz crtanje slike.

Ako dati niz konvergira, onda a_n i a_{n+1} za $n \to +\infty$ imaju istu graničnu vrednost. Zamislimo je. To znači da je leva strana rekurentne formule jednaka desnoj strani kad $n \to +\infty$. Posmatrajmo levu i desnu stranu odvojeno i predstavimo ih graficima funkcija

$$L(x) = x$$

$$f(x) = \frac{2}{1+x}.$$

To su poznati grafici linearne funkcija i funkcije obrnute proporcionalnosti.



Slika 1

Korišćenjem zapisa funkcije $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$ rekurentna formula daje sledeće članove

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = f(a_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = f(a_3) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{6}{7}$$

$$a_4 = f(a_3) = f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{14}{13}$$

Ove vrednosti nacrtaćemo pomoću već nacrtanih grafika. Počinjemo od $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Presek prave $x = \dfrac{1}{2}$ sa grafikom Γ_f funkcije $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$ je tačka A_1. To je jasno, jer je $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$. Dalje, presek prave $y = \dfrac{4}{3}$ i prave $y = x$ jeste tačka A_2. Normala iz tačke A_2 na x-osu daje tačku $\dfrac{4}{3}$, a to je a_2. Presek prave $x = \dfrac{4}{3}$ sa grafikom funkcije $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$ jeste tačka A_3, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{6}{7}$. Presek prave $y = \dfrac{6}{7}$ i prave $y = x$ jeste tačka A_4. Normala iz tačke A_4 na x-osu daje tačku $\dfrac{6}{7}$, a to je a_3, itd.

Sad nam slika pomaže da razumemo sledeće.

Neparni članovi datog niza su monotono rastući i manji od 1. To možemo napisati:

$$\frac{1}{2} = a_1 < a_3 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n+1} \leqslant 1,$$

što se skraćeno može zapisati

$$0 < a_{2n-1} < a_{2n+1} \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Parni članovi datog niza su monotono opadajući i veći od 1, što može da se zapiše

$$1 \leqslant a_{2n+2} < a_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ove nejednakosti možemo da sastavimo

$$0 < a_{2n-1} < a_{2n+1} \leqslant 1 \leqslant a_{2n+2} < a_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oprez! Ovu nejednakost intuitivno naslućujemo, ili još bolje: slika nam u tome pomaže ali moramo da je dokažemo!

(2) *Dokaz nejednakosti* izvodimo poznatom metodom matematičke indukcije.

Za $n = 1$

$$0 < a_1 < a_3 < 1 < a_4 < a_2,$$

odnosno

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{6}{7} < 1 < \frac{14}{13} < \frac{4}{3}$$

je tačna nejednakost.

Pretpostavimo da data nejednakost

$$0 < a_{2n-1} < a_{2n+1} \leqslant 1 \leqslant a_{2n+2} < a_{2n} \quad \text{važi za neko } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da važi za $n+1$:

$$0 < a_{2n+1} < a_{2n+3} < 1 < a_{2n+4} < a_{2n+2}$$

$$a_{2n+1} < a_{2n+3} \quad \text{jer je}$$

$$\frac{2}{1+a_{2n}} < \frac{2}{1+a_{2n+2}},$$

odnosno, $a_{2n+2} < a_{2n}$ iz pretpostavke.

Takođe $a_{2n+4} < a_{2n+2}$, jer je

$$\frac{2}{1+a_{2n+3}} < \frac{2}{1+a_{2n+1}},$$

odnosno, $a_{2n+1} < a_{2n+3}$, što je već dokazano.

Podnizovi

$$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$$

$$a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$$

su konvergentni na osnovu čuvene Vajerštrasove teoreme: *Monton i ogrančen niz je konvergentan*.

To znači da je $a_{2n-1} \to x$ i $a_{2n} \to y$, $0 < x \leqslant 1 \leqslant y$.

Kako je $a_{2n+1} = \dfrac{2}{1+a_{2n}}$, dobija se $x = \dfrac{2}{1+y}$.

Kako je $a_{2n} = \dfrac{2}{1+a_{2n-1}}$, dobija se $y = \dfrac{2}{1+x}$.

Rešavamo sistem

$$\left.\begin{array}{l} x(1+y) = 2 \\ y(1+x) = 2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} x(1+y) &= y(1+x) \\ x+xy &= y+yx \\ x &= y \end{aligned}$$

Pošto je $x = y$, dobija se

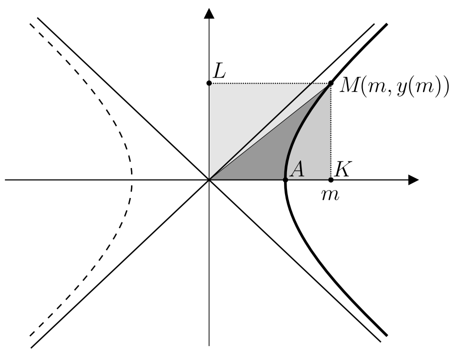
$$x = \frac{2}{1+x} \Leftrightarrow x + x^2 = 2, \quad x \neq -1,$$

$$x_1 = 1 \text{ ili } x_2 = -2, \quad \text{odnosno} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Sledeći zadatak rešava se poznatim metodama integracije, ali se direktno koristi slika jer je u pitanju primena na izračunavanje površine.

PRIMER 2. Data je hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ i na njoj tačka $M(m, y(m))$, $m > a$. Tačke K i L su projekcije tačke M na x-osu i y-osu, respektivno, a tačka A je tačka preseka hiperbole i x-ose.

Izračunati površine krivolinijskih figura $P_1(AKM)$, $P_2(OAM)$, $P_3(OAML)$.



Slika 2 – Računanje površine

Površina krivolinijske figure $\widehat{AKM}$ izračunava se pomoću određenog integrala

$$P = \int_a^m y\,dx, \quad \text{gde je} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, odnosno $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, jer je grafik funkcije iznad x-ose. Dalje je

$$P = \int_a^m \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_a^m \sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

Ovaj integral je *interesantan*. Rešava se smenom

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad t \geqslant 0.$$

$$dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$$

$$\begin{bmatrix} \text{Za} & x=a, & a = a\,\mathrm{ch}\,t, & \mathrm{ch}\,t = 1, & t = 0 \\ \text{Za} & x=m, & m = a\,\mathrm{ch}\,t, & \mathrm{ch}\,t = \dfrac{m}{a}, & t = \mathrm{arc}\,h\left(\dfrac{m}{a}\right) \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{(a\,\mathrm{ch}\,t)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\mathrm{ch}^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{sh}\,t.$$

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)} \frac{b}{a}\cdot a\,\mathrm{sh}\,t\; a\,\mathrm{sh}\,t\,dt = ab\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)} \mathrm{sh}^2 t\,dt \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)} (\mathrm{ch}\,2t - 1)dt \\
&= \frac{ab}{2}\left(\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)} \mathrm{ch}\,2t dt - \int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)} dt\right) \\
&= \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\Big|_0^{\mathrm{arc}\,h\left(\frac{m}{a}\right)} - t\Big|_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{m}{a}\right)}\right) \\
&= \frac{ab}{2}\left(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\Big|_0^{\mathrm{arc}\,h\left(\frac{m}{a}\right)} - \mathrm{arc\,ch}\left(\frac{m}{a}\right)\right) \\
&= \frac{ab}{2}\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}\;\;\mathrm{ch}\,t\Big|_0^{\mathrm{arc}\,h\left(\frac{m}{a}\right)} - \mathrm{arc\,ch}\left(\frac{m}{a}\right)\right) \\
&= \frac{ab}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 - 1}\cdot\frac{m}{a} - \ln\left(\frac{m}{a} + \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 - 1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Za $y(m) = n$,

$$P = \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right).$$

Površina krivolinijske figure je $\widehat{OAM}$

$$P = P_{\triangle OKM} - P_{\widehat{AKM}} = \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right).$$

Površina krivolinijske figure je

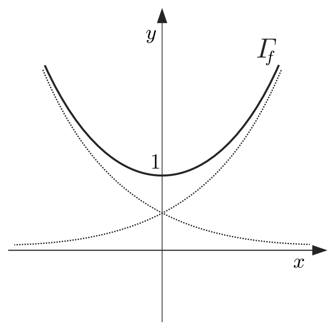
$$P = P_{\square OKML} - P_{\widehat{AKM}} = \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right).$$

Zašto se pokazuje ovaj zadatak? Iz jednostavnog razloga da se primerom pokaže kako vizualizacija pomaže rešavanje. Ovom treba dodati da je najvažniji trenutak rešavanja zadatka upravo raspakivanje definicije $y = \mathrm{ch}\,t$ i nalaženje inverzne grane, $\mathrm{arc\,ch}\,t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$.

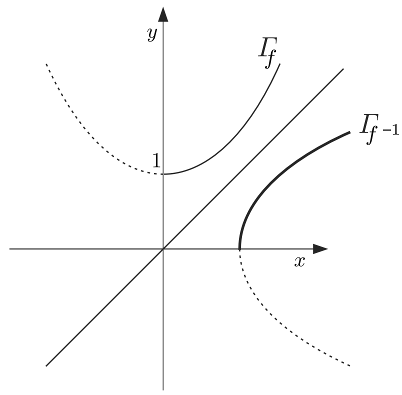
Ovde nastaje problem. Prvo hiperboličke funkcije retko se izučavaju i sama oznaka deluje apstraktno. Ako se napiše definicija

$$\mathrm{ch}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

i nacrta grafik funkcije $f(t) = \mathrm{ch}\,t$ i to sabiranjem nama poznatih elementarnih funkcija $\frac{1}{2}e^x$ i $\frac{1}{2}e^{-x}$.



Slika 3 – Hiperbolički kosinus



Slika 4 – Inverzni hiperbolički kosinus

Uz to važe formule $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, što se može potvrditi kvadriranjem ili recimo

$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} - 1\right)$$
$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 t - 1).$$

Za $t \geqslant 0$, neka je $\operatorname{ch} t = y$, $y \geqslant 1$

$$e^t + e^{-t} = 2y$$
$$(e^t)^2 - 2ye^t + 1 = 0$$
$$(e^t - y)^2 = y^2 - 1$$
$$e^t - y = +\sqrt{y^2 - 1}$$
$$e^t = y + \sqrt{y^2 - 1}$$
$$t = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Definišemo $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f(t) = \operatorname{arch} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right), \quad t \geqslant 1.$$

NAPOMENA. Integral $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$ može se rešiti i parcijalnom integracijom. To važi za one koji hoće da izbegnu hiperboličke funkcije.

5.2.5. Dobro predavanje

Dobrim se smatra predavanje ukoliko profesor oslobađa svoj kreativni duh na sledeće načine:

(i) *intuitivno* (prikazuje rezultate koristeći iskustvo);

(ii) *inovativno* (pokazuje sposobnost rešavanja problema, odgovara na pitanja i rešava probleme koje je sam pripremio ili koje su studenti postavili);

(iii) *imaginativno* (ima sposobnost vizualizacije);

(iv) *inspirativno* (motiviše slušaoce da učestvuju).

Najvažniji uslov za dobro predavanje jeste da *profesor veoma dobro poznaje oblast koju izlaže studentima*. To znači da oblast poznaje više od onoga što predaje i da je sagledava u širem kontekstu u odnosu na druge oblasti i primene.

Najviši oblici lepog – kako je rekao Aristotel, jesu red, simetrija i određenost, a matematičke nauke to naročito pokazuju. Na pitanje kako se može dobro izvoditi nastava matematike odgovor nije jednoznačan. Prvo, i najvažnije, jeste da nastavnik veoma dobro poznaje oblast koju predaje. Drugo, red izlaganja mora biti takav da student može prirodnim tokom misli da razume teoriju.

Pri izboru metode kombinuju se induktivna i deduktivna metoda. To znači da nije moguće izvoditi matematičke dokaze putem kojim su određene teorije nastajale jer uz sve obimniji materijal, za to nema vremena. Neki će dokazi biti prihvatljiviji ili prirodniji ako se izvedu intuitivno, onako kako su to i sami stvaraoci zamišljali. Određeni dokazi neće biti izvođeni već se na njih može ukazati analogijama sa izvedenim dokazima. Naravno, određen broj dokaza izvodi se deduktivnom metodom, sa svim elementima strogosti i određenosti.

Kako je najbolje izučavati matematiku? Tako što se uzdižemo do opštih pojmova i širih značenja da bi se snašli u moru sitnih utisaka. Na taj način se dolazi do većih celina, ili neophodnih apstrakcija, bez kojih nema ni modernog čoveka, ni modernog života, ni naučnog radnika, ali ni praktičara. Taj put zahteva veliki napor. Matematička analiza obiluje primerima. Oni pre svega rasvetljavaju teorijski problem. Čovek do saznanja istine dolazi ako svoju pažnju u dovoljnoj meri usredsredi na stvari koje savršeno razume i ako ove odvoji od onih koje razume tek zbrkano i nejasno.

Za razumevanje matematike potrebno je misliti tokom slušanja rečenice, čitanja rečenice, i/ili pisanja rečenice. To znači misliti rečenicom, i brže i preglednije dovoditi odnose stvari u svesno stanje. Predavanje je dobro ako umemo da se izrazimo. Ne bi vekovima postojale tolike škole iz retorike, koje su učile čoveka jednom jedinom: kako da govori. Kako bi rekao Vinaver, *a šta su drugo sve naše škole, sva naša nastava, sva naša kultura, pa i sama matematika*?

Rečenica, kojom se objašnjava određeni pojam, treba da bude pregledna i muzikalna. Tako možemo umnim pogledom obuhvatiti njene delove. Smisaona melodija daje nam uvid u odnose. Znakovi i simboli su utoliko korisniji ukoliko su bliži označenoj stvari. Cilj korišćenja jezika i simbola jeste u tome da budemo jasni, da izrazimo matematiku u najplemenitijem smislu.

Dobri profesori podstiču i motivišu studente da koriste udžbenike i drugu literaturu. Potrebno je edukovati studente kako da vrše izbor literature i kako da knjige koriste. Ali kako motivisati studente za korišćenje udžbenika ako oni sve manje čitaju? A šta ćemo ako profesor ne čita! Odgovor na to pitanje je jednostavan. Akademsko obrazovanje podrazumeva čitanje, kao što napredak društva zavisi od plodotvornog rada. To govori o tome da je u pitanju vrednosno opredeljenje. Setimo se reči Isaka Njutna: *posvećenost* *učenju i radu su najveće nade čovečanstva*. Pedagoški rad nastavnika ima temeljnu ulogu. Pravilno birati – znači izabrati dobre knjige, koje su čiste, uobličene, razgovetne. Primeri takvih knjiga mogu biti *Kurs čiste matematike* od Hardija ili *Matematička analiza* od Fihtengoljca. Naravno da izbora nema ukoliko profesor preporuči samo svoj udžbenik.

Kultura obuhvata znanje, umetnost, etiku, tehnologiju, kreativno stvaralaštvo pisaca, pesnika. Uključuje stvaralačke izraze čoveka na svim poljima ljudske delatnosti. Matematika je integralni deo kulture. Čitanje dobrih knjiga omogućava nam da budemo deo kulturnog sistema. Čitanje matematičke literature pomaže nam da razvijamo saznanje, da produbljujemo svoje uvide, da postanemo deo univerzalnog matematičkog sveta. Sa druge strane, taj svet nam otvara nove perspektive iz kojih možemo da razvijamo sopstvene potencijale i da sami dalje stvaramo i doprinosimo povećanju kulturne baštine.

Uspešno predavanje je ono koje podstiče uspeh kod drugih. Po rečima Vebera, na naučnom području *ličnost* ima čovek koji *svojoj stvari služi čisto*. Da bi se to postiglo dobrog profesora u odnosu prema studentima odlikuje poverenje. Poverenje karakterišu:

- integritet, poštenje i iskrenost;
- kompetentnost (stručno znanje, veštine, sposobnosti i vrednosti);
- doslednost, predvidljivost i dobra procena;
- želja da se slobodno podele ideje i informacije.

5.2.6. Nastavna sredstva

Standardni alat matematičara jeste tabla i kreda (ili bela tabla i flomaster). To jeste kao da se radi sa papirom i olovkom, jer se matematika predaje neposredno. Projektor ne može da zameni tablu. Na njemu je ispisano više informacija istovremeno i one se po pravilu prelaze brzo. Takvo predavanje student ne razume i postaje mu dosadno. Smatra se da je brzina razumevanja zapravo jednaka brzini pisanja na tabli i u svesci.

Ovaj trenutak nameće važno pitanje: da li se nešto promenilo u nastavi matematike sa pojavom računara? Odgovor je afirmativan. Računari nam pomažu da brzo i jednostavno vršimo izračunavanja i statističku obradu. Radeći to čovek bi trošio mnogo vremena i memorije. Sa današnjim računarima i povećanjem njihove memorije proračuni se vrše odmah i bez teškoće. Programi za matematiku kao što su Matlab, Mathematica ili Derive mogu brzo da izračunaju, korisni su za proveru određenih rezultata i daju mogućnosti vizualizacije. Oni se mogu koristiti za crtanje grafika, izračunavanje integrala i dr. Moguće je i neodređeni integral izračunati u eksplicitnom obliku. Sa druge strane, matematika je izvorište pametnih rešenja. Čovek samo treba da je upotrebi i kreira. Kako bi rekao Lajbnic, *čovekov um oslobođen je za kreativno delovanje*.

Na internetu su dostupni kursevi i koriste se interaktivne metode u nastavi. Ali to je samo početak. Recimo, hoćete da rešite diferencijalnu jednačinu i potražite odgovor na internetu. U ovoj fazi je isuviše rano o tome govoriti. Do sada smo se uverili da televizija i video nisu mogli da zamene tradicionalnu nastavu.

Mnogi naučnici smatraju da upotreba kalkulatora u matematici ima negativan uticaj na učenje. Ima i drugačijih mišljenja. Ako želite da savladate druge veštine, množenje i deljenje više nije potrebno. Za to možemo upotrebiti digitron i u deliću sekunde izračunati. Posebno ako se računari koriste za izračunavanja u numeričkoj matematici. Neki moderni autori smatraju da nam to pomaže da proširimo svoje znanje. Neka računanja ne bi nikada izveli. Smatraju da je računar bitan deo našeg života. Tradicionalista bi na to rekao da ručno množenje i deljenje pomaže razumevanju. Za njih su to algoritmi. Najjednostavniji algoritmi su dodavanje, množenje i deljenje. Treba reći da oba pogleda imaju svojih vrednosti. Može se istovremeno povećati razumevanje i brzo računati.

Da zaključimo, nove tehnologije mogu da odigraju dalekosežne promene u našoj praksi, ali je u ovom trenutku teško predvideti šta će se desiti. Univerziteti su po svojoj prirodi konzervativne institucije i promene su spore.

Kao što je već istaknuto, pisanje udžbenika zahteva umešnost i vreme. Postavlja se pitanje: da li profesor koji izvodi nastavu ima tu vrstu umešnosti? Neophodno je posvetiti posebnu pažnju pisanju udžbenika. Pre svega treba da različiti stručnjaci – profesor, istraživači, pisci udžbenika i matematičke literature udruže svoje umešnosti i započnu razgovor i debatu o ovom važnom pitanju.

Takve rasprave i konferencije treba da doprinesu prevazilaženju sadašnje situacije da udžbenike ne čitaju ni studenti ni profesori.

5.3. ZAVRŠNA REČ

Na kraju želim da saopštim svoj stav o profesuri kao našem duhovnom pozivu. Počeću sa Franklinovim moralom: *Pored marljivosti i umerenosti ništa ne doprinosi toliko napretku mladog čoveka kao tačnost i pravednost u svim njegovim poslovima*. Za profesora je najvažnija misija koja se zove *dužnost poziva* ili zanatsko umeće.

Po Veberu to je obaveza koju pojedinac oseća, i može da oseća, prema sadržaju svoje pozivne delatnosti. Za Lutera je dužnost poziva *od Boga postavljeni zadatak* koji predstavlja poštovanje ispunjavanja dužnosti u svetovnim pozivima, kao najvišeg sadržaja koji moralno samopotvrđivanje uopšte može da primi. A kada se tome doda *posvećenost*, može da dođe do svesti kao savršenstvo u smislu bezgrešnosti.

Duh dužnosti poziva naglašava i citat iz Božanstvene komedije:

svom odgovornom znanju dela, dodaj veru,

dodaj vrlinu, strpljenje, umerenost, dodaj ljubav,

koji će se jednom zvati karitas, duša

svih njih: onda ti se neće ni militi da ostaviš ovaj raj, jer ćeš imati

jedan raj u sebi, mnogo srećniji.

Zanatsko umeće označava težnju za postizanjem kvaliteta u izradi određenog predmeta, ka jasnijem pisanju ili društvenom angažovanju, tj. *obavljanju nečeg dobrog zarad same stvari na kojoj se radi*, uz samodisciplinu i samokritiku.

Obrazovanje je danas povezano sa pojmom kulture i predstavlja mogućnost da čovek, na sebi svojstven način, razvija prirodne sklonosti, talenat i sposobnosti. U unutrašnjem smislu obrazovanje je način mišljenja i sticanje saznanja, stremljenje ka aristokratiji duha i karaktera. Obrazovanje je stvaranje duhovnog bića. Završavam Franklinovim rečima: *Jesi li video čoveka postojanog u svom poslu, taj će stajati pred kraljevima*.

LITERATURA

[1] Adnađević D., Kadelburg Z., 2008, *Matematička analiza*, knjige I i II, Matematički fakultet, Beograd.

[2] Ahmada A., Tan Sin Yinb, Loh Yue Fangc, Yap Hui Yend, Khoh Wee Howe, Incorporating Multimedia as a Tool into Mathematics Education: A Case Study on Diploma Students in Multimedia University, International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER 2010). Elsevier Ltd.

[3] Albijanić, M., 2011, *Intelektualni kapital: uticaj na konkurentnost i ekonomski rast*, Službeni glasnik, Beograd.

[4] Al-Gwaiz M. A., 2008, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer.

[5] Aljančić S., 2011, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[6] Andrade-Aréchiga M., Gilberto López, Gabriel López-Morteo, *Assessing effectiveness of learning units under the teaching unit model in an undergraduate mathematics course*, Computers & Education 59 (2012) 594–606, Elsevier Ltd.

[7] Angot A., 1957, *Compléments de mathématiques a l'usage des ingéneurs de l'électrotecniques et des télécommunications*, Paris.

[8] Arent Hana, 2010, *Život duha*, Službeni glasnik, Beograd.

[9] Aristotel, 2012, *O duši*; *Parva naturalia*, Paideia, Beograd.

[10] Aristotel, 1960, *Metafizika*, Kultura, Beograd.

[11] Arsenović Mihail, 2011, *Jednačine matematičke fizike*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[12] Arsenović Miloš, Dostanić M., Jocić D., 2012, *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[13] Baumslag B., 2000, *Fundamentals of Teaching Mathematics at University Level*, Imperial College Press, London.

[14] Becker O., 1998, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb.

[15] Бермант А. Ф., 1954, Курс математического анализа, том 1 и 2, Москва.

[16] Bertolino M., *Matematika u tokovima istorije*, Univerzitet Beograd, Publikacija Elektrotehničkog fakulteta, Ser. Mat. Fiz. No 602 – No 633.

[17] Božić M., 2002, *Istorija i filozofija matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[18] Бурбаки Н., 2007, Очерки по истории математики, КомКнига, URSS, Москва.

[19] Бурбаки Н., 1965, Функции действительного переменного, Наука, Москва.

[20] Čanak M., 1996, *Teorija tonaliteta u svetlosti matematičke teorije muzike*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu.

[21] Čanak M., 2009, *Matematika i muzika. Istina i lepota. Jedna zlatna harmonijska nit*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[22] Čanak M., 2012, *Put u petu dimeziju*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[23] Cassirer E., *Descartes: osnovni problemi kartezijanstva, Descartes i njegovo stoljeće*, Demetra, Zagreb.

[24] Cigler G. 2012, *Smem li da brojim?* Matematički institut SANU, Centar za promociju nauke, Zavod az udžbenike, Beograd.

[25] David A. Yopp, *How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics*, Journal of Mathematical Behavior 30 (2011) 115–130.

[26] Davies B., 1978, *Integral transforms and their applications*, New York.

[27] Davis Philip J., Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, *Doživljaj matematike*, 2004, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb.

[28] Deitmar Anton, 2004, *A First Course in Harmonic Analysis*, Second Edition, Springer.

[29] Dekart R., 1952, *Praktična i jasna pravila rukovođenja duhom u istraživanju istine*; *Reč o metodi dobrog vođenja svoga uma u istraživanja istine u naukama*, Srpsko filozofsko društvo, Beograd.

[30] Dekart R., 2012, *Metafizičke meditacije: o prvoj filozofiji*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[31] Демидович Б. П., 1997, Сборник задач у упражнений но математическому анализу, Московский университет.

[32] Deschamps C. A. Warusfel, 2003, *Mathématiques* I, Dinod.

[33] Devide V., 1975, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb.

[34] Devide V., 1979, *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb.

[35] Diedonné J., 1960, *Fondations of modern analysis*, New York.

[36] Erdogan M. Özkan, Ünal Hasan, *Misconception in Calculus-I: Engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions*, Procedia–Social and Behavioral Sciences, Volume 1, Issue 1, 2009, p. 1792–1796

[37] Fabry E., 1927, *Problems et exercises de mathématiques générales*, Paris.

[38] Fadilah Nor Tahar, Zuriati Ismail, Nur Diana Zamani, Norshaieda Adnan, *Students' Attitude Toward Mathematics: The Use of Factor Analysis in Determining the Criteria*, Procedia–Social and Behavioral Sciences, Volume 8, 2010, Pages 476–481

[39] Fauzi A., Ayub Mohd, Mokhtar Mohd Zin, Wong Su Luan, Rohani Ahmad Tarmizi, *A comparison of two different technologies tools in tutoring Calculus*, Procedia– Social and Behavioral Sciences, Volume 2, Issue 2, 2010, p. 481–486.

[40] Фихтенгольц Г. М., 1963, Купц дифференциального интегрального исчисления I, II, III. Москва–Ленинград, Физматгиз.

[41] Gastineau A., Philippe Poitrat, 2006, *1000 exercices et corrigés de mathématiques*, Economica, Paris.

[42] Habre S., Abboud May, *Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course*, The Journal of Mathematical Behavior, Volume 25, Issue 1, 2006, p. 57–72.

[43] Hardy G. H., 1945, *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press.

[44] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*. Cambridge University Press.

[45] Hegel G., Vilhelm Fridrih, 1975, *Istorija filozofije*, knjige I, II i III, BIGZ, Beograd.

[46] Hoškováa Š., 2010, *Innovation of educational process of mathematics of military officers*, Procedia Social and Behavioral Sciences 2 (2010) 4961–4965.

[47] Irving J., Mullineux M., 1959, *Mathematics in physics and engineering*, New York–London.

[48] Jejts Franses A., 2012, *Veština pamćenja*, Mediterran Publishing, Novi Sad.

[49] Kadelburg Z, Đukić D, Lukić M, Matić I. 2014, *Nejednakosti*, Društvo matematičara Srbije, Beograd.

[50] Kalajdžić Gojko, 2011, *Linearna algebra i geometrija*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[51] Kant I., 2012, *Kritika čistog uma*, Dereta, Beograd.

[52] Kasirer E., 1998, *Problemi saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba*, knjige I, II, III i IV, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad.

[53] Kimberly S. Sofronas, Thomas C. DeFranco, Charles Vinsonhaler, Nicholas Gorgievski, Larissa Schroeder, Chris Hamelin, *What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts*, The Journal of Mathematical Behavior, Volume 30, Issue 2, June 2011, p. 131–148.

[54] Kline M., 1972, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York.

[55] Koen M., Nejgel E., 1965, *Uvod u logiku i naučni metod*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

[56] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., 1968, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва.

[57] Koplston F., 1988, *Istorija filozofije: Grčka i Rim*, BIGZ, Beograd.

[58] Koplston F., 1988, *Istorija filozofije: Moderna filozofija, Britanski filozofi*, BIGZ, Beograd.

[59] Koplston F., 1995, *Istorija filozofije: Od Dekarta do Lajbnica*, BIGZ, Beograd.

[60] Krantz S. G., 2013, *A Guide to Functional Analysis*, The Mathematical Association of America.

[61] Кудрявцев Л. Д, Кутасов А. Д., Чехлов Б. И., Шабунин М. И., 2003, Сборник задач но математическому анализу, Том I и Том II, Физматлит, Москва.

[62] Кудрявцев Л. Д., 2003, Курс математического анализа в 3 томах, Физматлит, Москва.

[63] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. 2003. Сборник задач по математическому анализу, Том 1, Физматлит, Москва.

[64] Кудрявцев Л. Д., 2005, Краткий курс математического анализа. Том 1 и 2, Физматлит, Москва.

[65] Кудрявцев Л. Д., 2005, Краткий курс математического анализа I, Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, Физматлит, Москва.

[66] Kurepa S., 1975, *Matematička analiza 3*, Školska knjiga, Zagreb.

[67] Kurepa S., 1997, *Matematička analiza*, I i II deo, Školska knjiga, Zagreb.

[68] Lajbnic G., 2010, *Novi ogledi o ljudskom razumu*, Dereta, Beograd.

[69] Larson L. C., 1983, *Problem–Solving Through Problems*, Springer.

[70] Lavrentjev M. A., Šabat B. V., 1958, *Metodi teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*, Moskva.

[71] Lefort G., 1964, *Algebre et Analyse. Exercices*, Dunod.

[72] Левин В. И., 1956, Методы математической физики, Москва.

[73] Lopandić Dragomir, 2011, *Geometrija: žuta knjiga*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[74] Magidson S., *Building bridges within mathematics education: Teaching, research, and instructional design*, Journal of Mathematical Behavior 24 (2005) 135–169, Elsevier Ltd.

[75] Mardešić S., 1974, *Matematička analiza u n-dimezionalnom realnom prostoru*, Prvi dio: *Brojevi, konvergencija, neprekidnost*, Zagreb.

[76] Marina Hose Antonio, 2011, *Teorija stvaralačke inteligencije*, Službeni glasnik, Beograd.

[77] Mateljević M., 2012, *Kompleksna analiza I*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[78] Mateljević M., 2012, *Kompleksna analiza II*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[79] Mateljević M., *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps*, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[80] Merkle M., 1996, *Matematička analiza*, Beograd.

[81] Mihailović D., Tošić D., 2012, *Elementi matematičke analize II*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[82] Milutin Milanković, 2007, *Kroz carstvo nauka. Slike izživota velikih naučnika*, MST Gajić, Beograd.

[83] Milar Dejvid, Milar J., Milar Dž., Milar M., 2003, *Kembrički rečnik. Naučnici*, Dereta, Beograd.

[84] Milovanović G. V., *Numerical Analysis and Approximation Theory – Introduction to Numerical Processes and Solving Equations*, Zavod za udzbenike, Beograd, 2014.

[85] Milovanović G., Đorđević R. Ž., 2005, *Matematička analiza* I. El. fakultet, Niš.

[86] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, 1994, Th. M. Rassias: *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ. Co., Singapore – New Jersey – London – Hong Kong.

[87] Mitrinović D. S., (urednik), 1963, *Matematička biblioteka: uvođenje mladih u naučni rad* III, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

[88] Mitrinović D. S., (urednik), 1969, *Matematička biblioteka: uvođenje mladih u naučni rad* IV, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

[89] Mitrinović D. S., 1988, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima* III deo, Građevinska knjiga, Beograd.

[90] Mitrinović D. S., 1989, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima* I i II deo, Građevinska knjiga, Beograd.

[91] Mitrinović D. S, (saradnik P. M. Vasić), 1970, *Analitičke nejednakosti*, Beograd.

[92] Mitrinović D. S., Kečkić J. D., 1987, *Matematika II*, Beograd.

[93] Mitrinović D. S., Kečkić J. D., 1994, *Jednačine matematičke fizike*, Nauka, Beograd.

[94] Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., 1978, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd.

[95] Mitrinović D. S., 1972, *Uvod u specijalne funkcije*, Beograd.

[96] Njutn I., 2011, *Matematički principi prirodne filozofije*, Akademska knjiga, Novi Sad.

[97] Orhun N., *The Relationship Between Learning Styles and Achievement in Calculus Course for Engineering Students*, Procedia–Social and Behavioral Sciences, Volume 47, 2012, p. 638-642

[98] Pauše Ž., 2007, *Matematika i zdrav razum: kako svatko od nas može otkriti ljepotu i jednostavnost matematike*, Školska knjiga, Zagreb.

[99] Petković M., Petković Lj., 2006, *Matematički vrmeplov: prilozi za istoriju matematike*, Zmaj, Novi Sad.

[100] Petronijević B., 1998, *Izabrana dela*, knjige 1–12, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

[101] Pijaže Ž., 1994, *Uvod u genetičku epistemologiju I: matematičko mišljenje*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci, Novi Sad.

[102] Pilipović S., Seleši D., 2012, *Mera i integral: fundamenti teorije verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[103] Pisot Ch., Zamansky M., 1966, *Mathématiques Générales*, Dunod.

[104] Platon, 2006, Dela: *Ijon, Gozba, Fedar, Odbrana Sokratova, Kriton, Fedon*, Dereta, Beograd.

[105] Pölya, Szegö G., 1925, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Berlin.

[106] Popović B. D., 1986, *Elektromagnetika*, Beograd.

[107] Привалов И. И., 1927, Введение в теорию функций комплексного переменного: Пособие для высшей школы, Государственное издательство.

[108] Rasel B., *Principles of Mathematics*, First published in 1903, Second edition 1937, Paperback edition first published in 1992 by Routledge, Reprinted 1997, 2002, 2004.

[109] Rasel B., 1998, *Istorija zapadne filozofije*, Narodna knjiga, Alfa, Beograd.

[110] Reddick H. W., Miller F. H., 1950, *Advanced mathematics for engineers*, New York.

[111] Романовский П. И., 1959, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специяльные функций. Преобразование Лапласа, Москва.

[112] Rot N., 2010, *Opšta psihologija*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[113] Rothe H., 1923, *Höhere Mathematik*, Wien.

[114] Rou Alan Dž., 2008, *Kreativna inteligencija*, Clio, Beograd.

[115] Rudin W., 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc.

[116] Rudin W., 1986, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Inc.

[117] Schwartz L., 1967, *Analyse mathématique*, t. I, II. Paris.

[118] Stanković Bogoljub, 1975, *Osnovi funkcionalne analize*, Naučna knjiga, Beograd.

[119] Stein E., Rami Shakarchi, 2002, *Fourier Analysis, an introduction*, Princeton University Press.

[120] Stojanović I. S., 1977, *Osnovi telekomunikacija*, Beograd.

[121] Stojić M. R., 1996, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Beograd.

[122] Strojk J. Dirk, 1991, *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenikem, Beograd.

[123] Surutka J., 2006, *Elektromagnetika*, Akademska misao, Beograd.

[124] Teofanov N., 2011, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[125] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., 1977, Уравнения математической физики, Наука, Москва.

[126] Tošić D., 2000, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Matematike III*, Beograd.

[127] Tošić D., 1997, *Uvod u numeričku analizu*, Beograd.

[128] Tošić D., 2006, *Matematika III: kratak kurs*, Akademska misao, Beograd.

[129] Tošić D., Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasnik, Beograd.

[130] Trebješanin Ž., 2011, *Psihologija: za drugi razred gimnazije*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[131] Trebješanin Ž. 2011, *Rečnik Jungovih pojmova i simbola*, Zavod za udžbenike, HESPERI-Aedu, Beograd.

[132] Vilani S., 2013, *Živa teorema*, Centar za promociju nauke, Matematički institut SANU, Beograd.

[133] Vitasari P., Tutut Herawan, Muhamad Nubli Abdul Wahab, Ahmad Othman, Suriya Kumar Sinnadurai, *Exploring Mathematics Anxiety among Engineering students*, Procedia– Social and Behavioral Sciences, Volume 8, 2010, Pages 482–489.

[134] Vukmirović J., 2009, *Matematička analiza 1*, Zbirka zadataka, Zavod za udžbenike.

[135] Ašić M., Vukmirović J., 2009, *Zbirka zadataka iz matematičke analize 2*, Zbirka zadataka, Zavod za udžbenike.

[136] Weber K., 2004, *Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course*, Journal of Mathematical Behavior 23 (2004) 115–133. http://www.journals.elsevier.com/the-journal-of-mathematical-behavior

[137] Whittaker T., Watson G. N., 1962, *A course of modern analysis*, Cambridge.

[138] Zamansky M., 1958, *Introduction à l'algebre et l'analyse modernes*, Paris.

[139] Зорич Б. А. М., 1997, Математический анализ, ФАЗИС, Наука.

MILOLJUB ALBIJANIĆ – BIOGRAFIJA

Rođen 8. jula 1967. godine u Tometinom Polju, opština Požega.

Diplomirao na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer *Numerička matematika, kibernetika i optimizacija* i stekao zvanje *Diplomirani matematičar*. Odbranio specijalistički rad na Matematičkom fakultetu na temu *Diferencne jednačine* i stekao zvanje *specijalista matematike*. Odbranio je master rad *Znanje kao izvor konkurentske prednosti* na FEFA. Doktorsku tezu *Kvantifikacija uticaja intelektualnog kapitala na konkurentnost* odbranio je na Univerzitetu Singidunum 2011.

Profesor matematike od 1995. do 2003. godine, a 2003. godine direktor Elektrotehničke škole Nikola Tesla u Beogradu. Zamenik direktora Zavoda za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja 2004. godine. Narodni poslanik u Narodnoj skupštini Republike Srbije od 2004. godine i predsednik Poslaničkog kluba od 2004. do 2006. godine. Potpredsednik Narodne skupstine Republike Srbije od 2007. do 2008. godine. Direktor Zavoda za udžbenike od 2008. do 2013. godine. Profesor Analize sa algebrom u Matematičkoj gimnaziji od 2007. Docent na Univerzitetu Singidunum od 2011.

Objavio je knjigu *Intelektualni kapital* u izdanju Službenog glasnika, a kao koautor sa Dobrilom Tošićem i Danijelom Milenković objavio je knjigu *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, u izdanju Službenog glasnika; sa Milovanom Vitezovićem i Miodragom Mateljevićem priredio je monografiju *Ljudi intelektualne vrline*: *170 godina SANU*; objavio je naučne i stručne radove iz matematike iz oblasti intelektualnog kapitala.

Oženjen Svetlanom i ima dve ćerke Tijanu i Milenu.

IZBOR IZ BIBLIOGRAFIJE RADOVA

Miloljub Albijanić, 2001, *Prava u ravni. Vektorski pristup*, Nastava matematike, s. 16–23, Društvo matematičara Srbije.

Đorđe Dugošija, Miloljub Albijanić, Marko Šegrt, 2007, *Zbirke zadataka iz matematike za prvi i drugi razred srednje škole* (u dve knjige), Društvo matematičara Srbije.

Miloljub Albijanić, 2008, *Diferencne jednačine*, specijalistički rad, Matematički fakultet, Beograd.

Miloljub Albijanić, 2008, *Znanje kao izvor konkurentske prednosti*, Studije i istraživanja br 8, Institut FEFA, Beograd.

Miloljub Albijanić, 2010, *Ljudski kapital u funkciji ekonomskog rasta i primena na Srbiju*, Kuda ide konkurentnost Srbije? str. 70–107, Urednici, Nebojša Savić, Goran Pitić, FEFA, Beograd.

Miloljub Albijanić, 2011, *Kvantifikacija uticaja intelektualnog kapitala na konkurentnost* (doktorska disertacija), Univerzitet Singidunum, Beograd.

Miloljub Albijanić, 2011, *Intelektualni kapital: uticaj na konkurentnost i ekonomski rast*, Službeni glasnik, Beograd.

Miloljub Albijanić, Milovan Vitezović, Miodrag Mateljević, 2011, *Ljudi intelektualne vrline: 170 godina SANU*, Zavod za udžbenike, Beograd

Maja Djurica, Miloljub Albijanić, Jovanka Vukmirović, *Intellectual Capital as a Internal Marketing in Serbian Companies, Quality, Innovation, Future* (zbornik radova), str. 45–53, 31 Internationale Innovation, Future and Organization, Faculty of Organizational Science, University of Maribor, 2012.

Dobrilo Tošić, Miloljub Albijanić, Danijela Milenković, 2012, *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasnik, Beograd.

Gradimir V. Milovanović, Dobrilo Đ. Tošić, and Miloljub Albijanić, *Numerical integration of analytic functions*, Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012: International Conference, Kos, Greece, DOI 10.1063/1.4756325 http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/radovi/ASCA-1046-1049.pdf

M. Mateljevic, M. Svetlik, M. Albijanic, N. Savic: *Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications*, Filomat 27:4 (2013), 515–528 DOI 10.2298/FIL1304515M http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2013/27-4/F27-4-1.pdf

M. Albijanić, D. Milenković, D. Tošić, *Hardijev pristup za izračunavanje površine*, Simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013, Vol. IV(1).

M. Arsenović, M. Albijanić, M. Knežević, S. Marek, 2014, *Miodrag Mateljević – vertikala beogradske matematičke škole*, Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Vol. V(1).

G.V. Milovanović, M. Albijanić, 2015, *A generalized Birkhoff-Young quadrature formula*, Carpathian J. Math. (u štampi).

PRILOZI

UPITNIK ZA STUDENTE – NASTAVA MATEMATIKE

A. Opšti stavovi o matematici

1. Šta je za vas matematika:
(Možete zaokružiti više odgovora)

1. Apsolutna i večna istina
2. Kraljica nauka
3. Apstraktna teorija
4. Primenjena nauka
5. Nešto drugo (navedite): ______________________________

2. U kojoj meri ste saglasni sa sledećim navodima o matematici?
(Zaokružite odgovarajući broj za svaki od navoda, u zavisnosti od vašeg stava)

		Da, veoma	**Da, delimično**	**I da i ne**	**Ne, uglavnom**	**Ne uopšte**
2.1	Voleo sam matematiku u srednjoj školi	5	4	3	2	1
2.2	Volim matematiku na fakultetu	5	4	3	2	1
2.3	Znanje iz matematike mi olakšava izučavanje / polaganje stručnih predmeta	5	4	3	2	1
2.4	Gradivo je mnogo obimnije od onoga što mi je realno potrebno	5	4	3	2	1
2.5	Opštom upotrebom kompjutera, izučavanje matematičke teorije sve više	5	4	3	2	1

3. Matematika koju izučavate na fakultetu za vas lično je:
(Zaokružite broj za svaki od navoda sa leve ili desne strane u zavisnosti od toga čemu je vaš stav više naklonjen)

		Više ←	**Više →**	
3.1	Apstraktna teorija	1	2	Konkretna u primeni
3.2	Povećanje opšteg znanja	1	2	Osnov za izučavanje stručnih predmeta
3.3	Jedan od ispita na fakultetu	1	2	Najvažniji ispit na fakultetu
3.4	Matematičke oznake i simboli su opšte poznati	1	2	Matematičke oznake i simboli zahtevaju uvodna objašnjenja
3.5	Moje predznanje je dovoljno da pratim nastavu	1	2	Često ne razumem predavanja zbog nedostatka predznanja

4. Koje su vam oblasti iz matematike bile zanimljive, korisne i teške?
(Za svaki od navedenih kriterijuma – Zanimljive, Korisne i Teške – zaokružiti najviše tri oblasti)

		Zanimljive	Korisne za izučavanje stručnih predmeta	Teške
4.1	Algebra	1	1	1
4.2	Matematička analiza	2	2	2
4.3	Analitička geometrija	3	3	3
4.4	Numerička analiza	4	4	4
4.5	Verovatnoća	5	5	5
4.6	Statistika	6	6	6

B. Nastava matematike

1. Po vašem mišljenju, matematičke oznake i simboli, koje susrećete u nastavi:
(Zaokružite odgovarajući broj)
1. Olakšavaju razumevanje pojmova i definicija
2. Suviše su apstraktni
3. Otežavaju razumevanje

2. U kojoj meri vam je nastava iz matematike pomogla u savladavanju gradiva iz stručnih predmeta:
1. Uglavnom ne, stručni predmeti nisu direktno povezani sa nastavom matematike
2. Gradivo iz matematike se primenjuje u mnogim stručnim predmetima na fakultetu
3. Za primenu matematike dovoljna su predavanja iz stručnih predmeta

3. Koliko ste saglasni da su dokazi teorema u matematici:
(Zaokružite odgovarajući broj za svaki od navoda, u zavisnosti od vašeg stava)

		Da, veoma	Da, delimično	I da i ne	Ne, uglavnom	Ne uopšte
3.1	Originalni	5	4	3	2	1
3.2	Elegantni i lepi	5	4	3	2	1
3.7	Veoma su korisni	5	4	3	2	1
3.3	Ne znam čemu služe	5	4	3	2	1
3.5	Nerazumljivi	5	4	3	2	1
3.6	Opštom primenom kompjutera u svim oblastima vremenom gube na značaju	5	4	3	2	1

4. Navesti formulaciju jedne upečatljive teoreme koja vam je ostala u sećanju.

____

____

____

5. Po vašem mišljenju, predavanje je dobro ako profesor matematike:
(Zaokružite odgovarajući broj za svaki od navoda, u zavisnosti od vašeg stava)

		Da, veoma	**Da, delimično**	**I da i ne**	**Ne, uglavnom**	**Ne uopšte**
5.1	Nastoji da ga studenti razumeju	5	4	3	2	1
5.2	Animira većinu studenata	5	4	3	2	1
5.3	Uključuje studente u diskusiju	5	4	3	2	1
5.4	Ima zanimljiv pristup	5	4	3	2	1
5.5	Navodi primere	5	4	3	2	1
5.6	Objašnjava smisao i primenljivost matematičke teorije	5	4	3	2	1
5.7	Ističe određene oblasti kao važne	5	4	3	2	1

6. Po vašem mišljenju, predavanje je loše ako profesor matematike:
(Zaokružite odgovarajući broj za svaki od navoda, u zavisnosti od vašeg stava)

		Da, veoma	**Da, delimično**	**I da i ne**	**Ne, uglavnom**	**Ne uopšte**
6.1	Prepisuje sadržinu na tablu	5	4	3	2	1
6.2	Studenti prepisuju sa table	5	4	3	2	1
6.3	Koristi slajdove	5	4	3	2	1
6.4	Brzo prelazi gradivo	5	4	3	2	1
6.5	Predavanja isključivo prilagodi ispitu	5	4	3	2	1
6.6	Dugo se posveti jednoj oblasti pa nema vremena za drugu	5	4	3	2	1
6.7	U prvi plan ističe oblast kojom se sam bavi	5	4	3	2	1

7. Koje promene bi po vašem mišljenju unapredile nastavu matematike:

____

____

____

C. Nastavna sredstva

1. Računari u nastavi matematike:
(Možete zaokružiti više odgovora)

1. Ne koriste se
2. Upotrebljavaju se za prezentacije i slajdove
3. Pomoću softvera se rešavaju određeni zadaci
4. Proveravaju se određena rešenja
5. Nešto drugo (navedite) ____________________

2. Koji softver za matematiku koristite u nastavi?

____

3. Da li vi lično, nezavisno od nastave na fakultetu, koristite neke matematičke softvere / programe?
(Navedite koje)

____

4. Korišćenje udžbenika, zbirke i beleški iz matematike je takvo da:
(Možete zaokružiti više odgovora)

1. Dovoljni su za pripremu ispita
2. Koristim udžbenik
3. Koristim ih delimično
4. Vežbam samo zadatke iz zbirke
5. Nisu dovoljni, koristim i drugu literaturu
6. Koristim beleške
7. Uglavnom ih ne upotrebljavam

5. Na koji način koristite Internet kada je u pitanju učenje / priprema ispita iz matematike i koliko često
(Zaokružite odgovarajući broj za svaki od navoda, u zavisnosti od vašeg stava)

		Veoma često	**Povremeno**	**Retko, skoro nikada**
5.1	Pratim studentske forume	1	2	3
5.2	Putem mejla razmenjujem zadatke, rešenja i sl. sa kolegama sa fakulteta	1	2	3
5.3	Preuzimam gotove skripte / zbirke	1	2	3
5.4	Pretražujem stranu literaturu (knjige / testove)	1	2	3
Kako još (navedite)				

6. Kako pripremate ispit:
(Možete zaokružiti više odgovora)

1. Samostalno
2. Radim sa kolegama sa fakulteta
3. Pomažu mi kolege sa fakulteta
4. Uzimam dodatne časove

D. Student

Na kom fakultetu studirate/mesto/godina upisa: ____________________

Koje ste ocene postigli iz matematičkih predmeta: ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Koja je vaša prosečna ocena (za do sada položene ispite): ☐

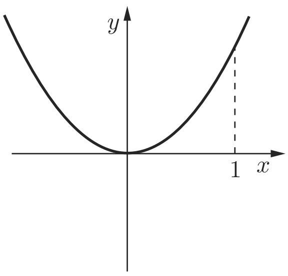
ZADACI ZA STUDENTE

1. Da li sme da se skrati razlomak $\dfrac{x}{x}$ kada $x \to 0$?

☐ DA ☐ NE

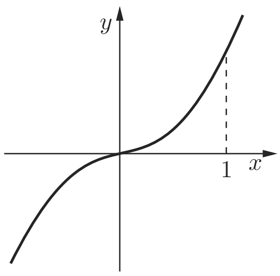
Objasni odgovor.

2. Da li su date funkcije diferencijabilne u tački $x = 0$?



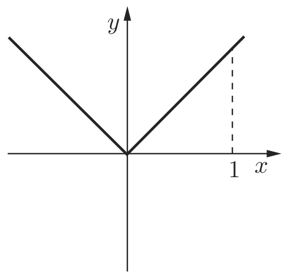
Sl. 1 $f(x) = x^2$

☐ DA ☐ NE



Sl. 2 $f(x) = x|x|$

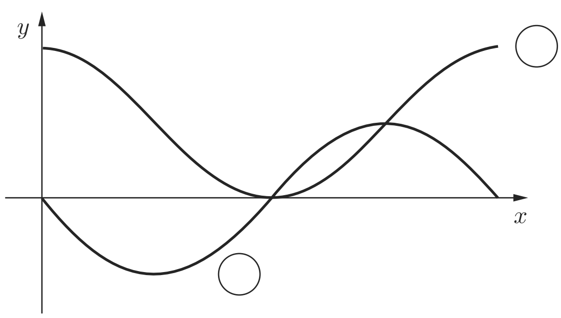
☐ DA ☐ NE



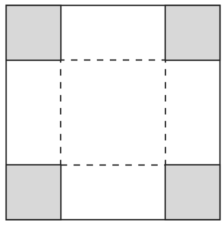
Sl. 3 $f(x) = |x|$

☐ DA ☐ NE

3. Na slici su prikazani grafici dve funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto f'(x)$. Koji grafik odgovara kojoj funkciji?



4. Od kartona oblika kvadrata stranice a teba odrezati četiri osenčena kvadrata kao na slici, tako da se od ostatka može napraviti kutija bez poklopca najveće zapremine. Odredi dimenzije kutije.



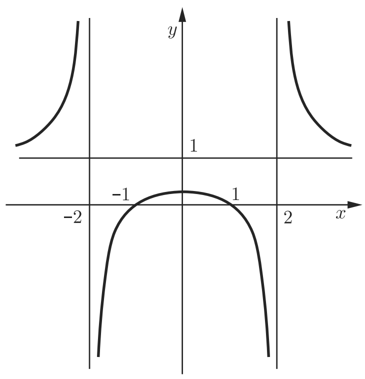
5. Dat je grafik racionalne funkcije. Zaokružiti tačan odgovor.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2-4}$



6. Ako je $f(x) \equiv 0$ za $x \in [a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Da li važi obrnuto tvrđenje? (Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i $\int_a^b f(x)dx = 0$ sledi da je $f(x) \equiv 0$ za $x \in [a,b]$.) Obrazložiti.

7. Izračunati

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \neq n.$$

8. Za $t \to 0$ važi Maklorenova formula:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

Odrediti a, b i c ako je

$$x \cdot e^{-1/x} = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{kada } x \to +\infty.$$

9. Tačka $x \in \mathbb{R}$ je *fiksna tačka* funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako važi $f(x) = x$.
Naći fiksnu tačku linearne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date sa $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Prilog 1.

Izjava o autorstvu

Potpisani-a **Miloljub Albijanić**

broj upisa **2008/2014**

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

APSTRAKCIJA I PRIMENA MATEMATIČKE ANALIZE U NASTAVI NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 12. januara 2016.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора **Miloljub Albijanić**

Број уписа **2008/2014**

Студијски програм **MATEMATIKA**

Наслов рада **APSTRAKCIJA I PRIMENA MATEMATIČKE ANALIZE U NASTAVI NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA**

Ментор **prof. dr Miodrag Mateljević**

Потписани **Miloljub Albijanić**

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 12. januara 2016.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

APSTRAKCIJA I PRIMENA MATEMATIČKE ANALIZE U NASTAVI NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 12. januara 2016.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.