Универзитет у Нишу
Електронски факултет

Љубиша М. Коцић
Градимир В. Миловановић
Слађана Д. Маринковић

ОПЕРАЦИОНА ИСТРАЖИВАЊА

Едиција: Основни уџбеници

Универзитет у Нишу

Електронски факултет

Љубиша М. Коцић

Градимир В. Миловановић

Слађана Д. Маринковић

Операциона истраживања

***Едиција:* Основни уџбеници**

2008

Др Љубиша М. Коцић, ред. проф. Електронског факултета у Нишу
Др Градимир В. Миловановић, ред. проф. Електронског факултета у Нишу
Др Слађана Д. Маринковић, доцент Електронског факултета у Нишу

ОПЕРАЦИОНА ИСТРАЖИВАЊА

Издавач:
Електронски факултет у Нишу, П. фах 73, 18000 Ниш, http://www.elfak.ni.ac.yu

Рецензенти:
Проф. др Иван Лацковић, ред. проф. Електротехничког факултета у Београду,
Др Ненад Младеновић, Научни саветник Математичког института САНУ

Главни и одговорни уредник: Проф. др Зоран Перић

Одлуком Наставно-научног већа Електронског факултета у Нишу, бр. 07/05-014/07-001 од 28.06.2007, рукопис је одобрен за штампу као основни уџбеник.

ISBN 978-86-85195-51-8

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.8 (075.8)

КОЦИЋ, Љубиша М.

Операциона Истраживања / Љубиша М. Коцић, Градимир В. Миловановић, Слађана Д. Маринковић. – Ниш : Електронски факултет, 2008 (Ниш : Униграф). – X, 204 стр. : граф. прикази, табеле ; 24 cm. – (Едиција Основни уџбеници / Електронски факултет Ниш)

На врху насловне стране: Универзитет у Нишу. – Тираж 300

ISBN 978-86-85195-51-8

1. Миловановић, Градимир В. [аутор] 2. Маринковић, Слађана Д. [аутор]

а) Операциона истраживања

COBISS.SR – ID 148028428

Штампа: “УНИГРАФ”, Ниш
Тираж: 300 примерака

Љубиша М. Коцић

Градимир В. Миловановић

Слађана Д. Маринковић

Операциона истраживања

Посвећено нашој деци,

Марији, Ирени, Даници и Лазару

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник садржи избор градива из предмета *Операциона истраживања* који је у разним облицима и у различитим временским интервалима предаван на Електронском факултету у Нишу. Аутори су настојали да овде обраде оне наставне јединице које ће пре свега бити од користи будућим инжењерима електротехнике али и другим техничким струкама као и економистима.

Текст је подељен на пет поглавља од којих је прво, *Елементи конвексне анализе* и које је теоријска основа за остала поглавља која су примењеног карактера. То су *Линеарно програмирање*, *Једнодимензионалне нелинеарне оптимизације*, *Вишедимензионалне нелинеарне оптимизације* као и *Елементи теорије игара*. Свако од ових поглавља представља целину за себе.

Други део уџбеника је методолошка збирка од близу 250 задатака који прате теорију и од којих је највећи део комплетно решен.

Рукопис је у целини прочитао Звездан Марјановић и својим сугестијама је допринео побољшању квалитета текста. Овом приликом аутори му се захваљују.

Аутори такође дугују захвалност рецензентима, Ивану Лацковићу и Ненаду Младеновићу чије су примедбе утицале на коначан изглед овог текста.

У Нишу, 24. маја 2007.

Аутори

Љубиша М. Коцић
Градимир В. Миловановић
Слађана Д. Маринковић

САДРЖАЈ

Задаци

ОПЕРАЦИОНА ИСТРАЖИВАЊА

1. ЕЛЕМЕНТИ КОНВЕКСНЕ АНАЛИЗЕ

1.1 Конвексни скупови

Нека је $\mathbb{R}^n$ n-димензионални простор. У овом простору, тачку

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

можемо поистоветити са вектором положаја тачке **x**, који ћемо такође обележавати са **x** и писати као матрицу-колону

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2 \ldots \; x_n]^{\mathrm{T}}.$$

У простору $\mathbb{R}^n$ уобичајено се дефинише Еуклидово растојање између тачака **x** и **y** са

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

што је истовремено и интензитет вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

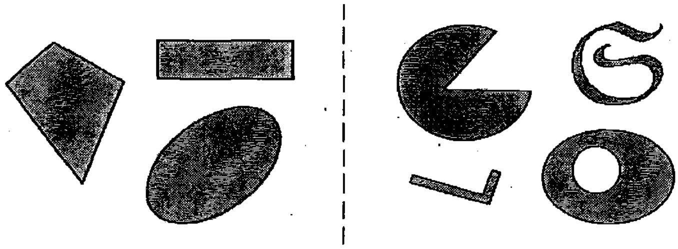
Записом $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ $(\mathbf{x} \leq \mathbf{y})$ означаваћемо чињеницу да је $x_i \geq y_i$ $(x_i \leq y_i)$ за свако $i = 1, 2, \ldots, n$.

Дефиниција 1. Нека су **x** и **y** две различите тачке простора $\mathbb{R}^n$. Тада се израз $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, назива *линеарна комбинација* тачака **x** и **y**. Линеарна комбинација код које је $\alpha + \beta = 1$ назива се *афина комбинација* **x** и **y**, а афина комбинација за $\alpha, \beta \geq 0$, тј. облика $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$, $\lambda \in [0, 1]$ је *конвексна комбинација* тачака **x** и **y**.

Скупове линеарних, афиних и конвексних комбинација тачака **x** и **y** означаваћемо са $\mathrm{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathrm{afi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathrm{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ респективно.

Геометријски, ако су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, скуп линеарних комбинација $\text{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је *раван* у $\mathbb{R}^n$ одређена тим тачкама и координатним почетком. Скуп афиних комбинација $\text{afi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је *права* кроз $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а скуп конвексних комбинација $\text{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је *линеарни сегмент* (*дуж*) са крајевима у $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Дефиниција 2. Непразан скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ је *конвексан*, ако дуж $\text{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ припада S кадгод $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ припадају S.



Слика 1. Конвексни и неконвексни скупови

Примери конвексних скупова:

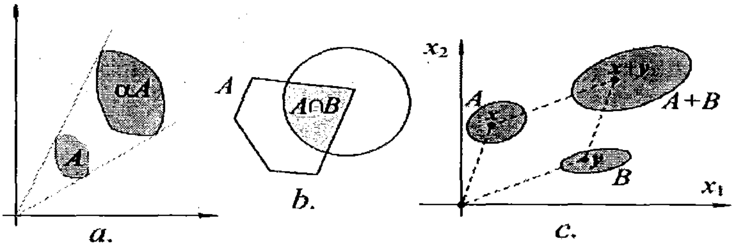
1. Раван у $\mathbb{R}^3$: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\}$. У векторском облику, ако је $\mathbf{x} = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^T$ и $\mathbf{p} = [1 \ \ 2 \ \ -1]^T$, имамо $S = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} = 4 \}$.

2. 3D-полупростор: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1 - 4x_2 + 10\, x_3 \leq 1\}$ (скуп свих тачака које леже са исте стране равни $7x_1 - 4x_2 + 10\, x_3 = 1$). Векторски, $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{q}^T\mathbf{x} \leq 1\}$, $\mathbf{q} = [7 \ \ -4 \ \ 10]^T$.

3. Пресек два 3D-полупростора: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4,\ 7x_1 - 4x_2 + 10\, x_3 \leq 1\}$ или $S = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq 4,\ \mathbf{q}^T\mathbf{x} \leq 1\}$.

4. Конус у $\mathbb{R}^2$: $S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq |x_1|\}$.

5. Кружни диск: $S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$.



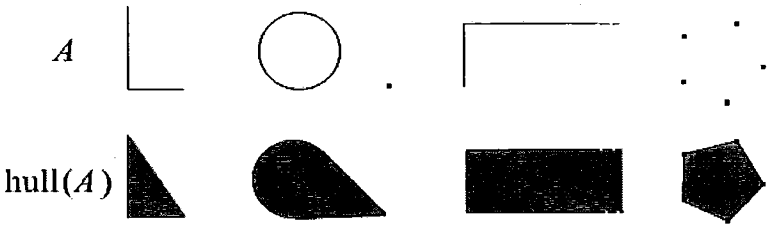
Слика 2. Операције над конвексним скуповима

Теорема 1. *Нека су A и B конвексни скупови из* $\mathbb{R}^n$. *Тада су конвексни и следећи скупови:*

a. $\alpha A,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (Слика 2a.);

b. $A \cap B$ (Слика 2b.);

c. $A + B = \{\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{y} \in B\ \}$ (Слика 2c.).



Слика 3. Конвексни омотачи

Дефиниција 3. Нека је S произвољан скуп из $\mathbb{R}^n$. *Конвексни омотач* Co(S) скупа S назива се скуп свих конвексних комбинација тачака из S (Слика 3). Другим речима, тачка $\mathbf{x}$ припада Co(S) тада и само тада, када она може бити представљена у облику

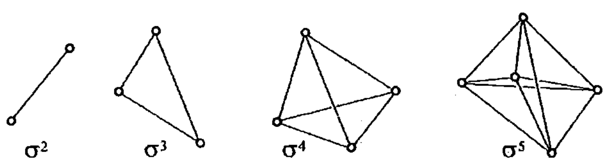
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ \mathbf{x}_j \in S,\ j = 1,\dots,k. \tag{1}$$

где је k позитиван цео број, а $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in S$.

Теорема 2. *Нека је S произвољан скуп из* $\mathbb{R}^n$. *Тада је* Co(S) *најмањи конвексан скуп који садржи S, тј.* Co(S) *је пресек свих конвексних скупова који садрже S.*

Дефиниција 4. Конвексни омотач П коначног броја тачака $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ из $\mathbb{R}^n$ назива се *полиедар*. Ако је $k = n + 1$, и ако су вектори $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1$, линеарно независни, тада се полиедар $\sigma^{n+1} = \mathrm{Co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1})$ назива *симплексом* са теменима у тачкама $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$. Такође,

$$\sigma^n = \{\mathbf{x} = [x_1\ \dots\ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1 \wedge x_i \geq 0\}.$$



Слика 4. Симплекси у $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$

Како је максималан број линеарно независних вектора у $\mathbb{R}^n$ је једнак n, у $\mathbb{R}^n$ не могу постојати симплекси са више од $n+1$ темена (Слика 4).

Теорема 3. (Каратеодори) *Нека је* S *произвољан скуп из* $\mathbb{R}^n$. *Ако* $\mathbf{x} \in \mathrm{Co}(S)$, *тада постоје тачке* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \in S$, *тако да* $\mathbf{x} \in \mathrm{Co}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1})$. *Другим речима,* $\mathbf{x}$ *се може представити у облику*

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \mathbf{x}_j, \ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0, \ \mathbf{x}_j \in S, \ j = 1, \ldots, n+1. \tag{2}$$

Дефиниција 5. Нека је S произвољан скуп у $\mathbb{R}^n$ и $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\mathbf{x} \mid |\boldsymbol{a} - \mathbf{x}| < \varepsilon\}$ сферна околина тачке $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Тачка $\boldsymbol{a}$ припада *затворењу* $\mathrm{cl}\, S$ скупа S (*cl = closure*), ако је $S \cap U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \neq \emptyset$ за произвољно $\varepsilon > 0$. Ако је $S = \mathrm{cl}\, S$, онда се скуп S назива *затворен*. Тачка $\boldsymbol{a}$ припада *унутрашњости* $\mathrm{int}\, S$ скупа S, ако је $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset S$ за неко $\varepsilon > 0$. Ако је $S = \mathrm{int}\, S$, онда скуп S називамо *отвореним*. Најзад, тачка $\boldsymbol{a}$ припада *граници* ∂S скупа S, ако за произвољно $\varepsilon > 0$, околина $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ садржи барем једну тачку из S и барем једну тачку која не припада скупу S.

Нека је S конвексан скуп са непразном унутрашношћу ($\mathrm{int}\, S \neq \emptyset$). Тада су скупови $\mathrm{int}\, S$ и $\mathrm{cl}\, S$ конвексни. Такође, важи $\mathrm{cl}\, S = \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$ као и $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) = \mathrm{int}\, S$.

Дефиниција 6. Геометријско место тачака $H = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{p}^\mathrm{T}\mathbf{x} = \alpha \,\}$, где је $\mathbf{p}$ ненулти вектор из $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, назива се *хиперраван* у простору $\mathbb{R}^n$, а вектор $\mathbf{p}$ је *нормални вектор* хиперравни H. Хиперраван H одређује два затворена *полупростора* $H^+ = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^\mathrm{T}\mathbf{x} \geq \alpha\}$ и $H^- = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^\mathrm{T}\mathbf{x} \leq \alpha\}$, а такође и два отворена *полупростора* $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^\mathrm{T}\mathbf{x} > \alpha\}$ и $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^\mathrm{T}\mathbf{x} < \alpha\}$.

Теорема 4. *Нека је* S *затворен конвексан скуп из* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{y} \notin S$. *Тада постоји јединствена тачка* $\boldsymbol{a} \in S$ *са минималним растојањем до* $\mathbf{y}$. *Ова тачка* $\boldsymbol{a}$ *налази се на минималном растојању од* $\mathbf{y}$ *тада и само тада када је* $(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})^\mathrm{T}(\boldsymbol{a} - \mathbf{y}) \geq 0$ *за свако* $\mathbf{x} \in S$ (*Слика* 5).

Доказ. Јединственост. Најближа тачка $\boldsymbol{a} \in S$ мора лежати на граници ∂S скупа S. Претпоставимо да сем тачке $\boldsymbol{a} \in \partial S$ постоји још једна тачка $\boldsymbol{b} \in \partial S$, различита од тачке $\boldsymbol{a}$, која је на истом растојању од $\mathbf{y}$. Како је S конвексан скуп, дуж $\mathrm{conv}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ лежи у S, и сем тога свака унутрашња тачка те дужи $(1-\lambda)\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b}$ $(0 < \lambda < 1)$ ближа је тачки $\mathbf{y}$ од крајњих тачака $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (последица неједнакости троугла). То значи да $\boldsymbol{a}$ не може бити различито од $\boldsymbol{b}$, тј. најближа тачка је јединствена.

Услов је довољан. Нека је $(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{y})\geq 0$ за свако $\mathbf{x}\in S$. Тада је

$$\begin{aligned}|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 &= |\mathbf{y}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-\mathbf{x})\\ &= (\mathbf{y}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{x})+2(\boldsymbol{a}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{a})\\ &= |\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}-\mathbf{x}|^2+2(\boldsymbol{a}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

тј.,

$$|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2-|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}-\mathbf{x}|^2+2(\boldsymbol{a}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{a}).$$

Будући да је $|\boldsymbol{a}-\mathbf{x}|^2\geq 0$ и, по претпоставци, $(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{y})\geq 0$, то мора бити $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2-|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2\geq 0$, тј. $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2\geq|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2$. Стога, за произвољно $\mathbf{x}\in S$ важи $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\geq|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|$, тј. $\boldsymbol{a}$ је тачка из скупа S, најближа тачки $\mathbf{y}$.

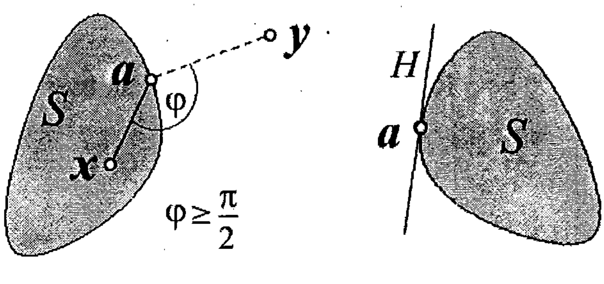
Услов је потребан. Нека је $\boldsymbol{a}\in S$ најближа тачки $\mathbf{y}$, тј. $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2\geq|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2$ за свако $\mathbf{x}\in S$. Како је $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{a}\in S$, и S је конвексан скуп, конвексна комбинација $\mathbf{z}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\mathbf{x}=\boldsymbol{a}+\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})$ лежи у скупу S за свако $0<\lambda<1$, што се може написати у облику неједнакости

(3) $$|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2=|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}-\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})|^2\geq|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2.$$

С друге стране, важи

(4) $$|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}-\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})|^2=|\mathbf{y}-\boldsymbol{a}|^2+\lambda^2|\mathbf{x}-\boldsymbol{a}|^2+2\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{y}).$$

Из (3) и (4) следује $\lambda^2|\mathbf{x}-\boldsymbol{a}|^2+2\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{y})\geq 0$. Дељењем са $\lambda\ (>0)$ и стављањем $\lambda\to 0_+$ добија се $(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\mathbf{y})\geq 0$. □



Слика 5. Најближа тачка и потпорна хиперраван

Дефиниција 7. Нека је S непразан скуп из $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a}\in\partial S$. Хиперраван $H=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})=0\}$ назива се *потпорна хиперраван* скупа S у тачки $\boldsymbol{a}$

(Слика 5), ако је или $S \subset H^+$, тј. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq 0$ за свако $\mathbf{x} \in S$, или $S \subset H^-$, тј. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \leq 0$ за свако $\mathbf{x} \in S$.

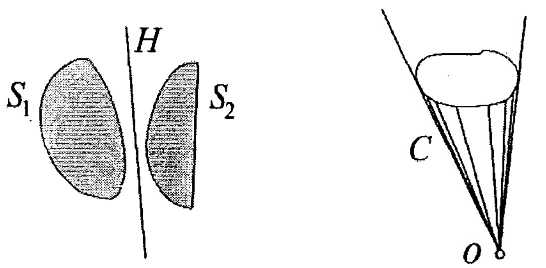
Теорема 5. (*Сепарабилност.*) *Нека су S_1 и S_2 непразни конвексни скупови у $\mathbb{R}^n$, такви да је $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Тада постоји хиперраван H, која раздваја S_1 и S_2, тј. постоји ненулти вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, такав да је*

$$\inf\{\ \mathbf{p}^T\mathbf{x}\ |\ \mathbf{x} \in S_1\} \geq \sup\{\ \mathbf{p}^T\mathbf{x}\ |\ \mathbf{x} \in S_2\}$$

(*Слика 6, лево*).

Дефиниција 8. Непразан скуп $C \subset \mathbb{R}^n$ назива се *конусом* са теменом у координатном почетку, ако из $\mathbf{x} \in C$ следи $\lambda\mathbf{x} \in C$ за свако $\lambda \geq 0$ (Слика 6, десно).

Дефиниција 9. Непразан пресек Π коначног броја затворених полупростора из $\mathbb{R}^n$ чини *полиедарски скуп*, $\Pi = \{\mathbf{x}\ |\ \mathbf{p}_i^T\mathbf{x} \leq \alpha_i,\ i = 1,\ldots, m\}$ где су $\mathbf{p}_i$ ненулти вектори, α_i скалари, $i = 1, \ldots, m$.



Слика 6. Сепарабилност конвексних скупова и конус

Сваки полиедарски скуп је затворен и конвексан. Пошто произвољна једначина може бити замењена паром неједначина, онда полиедарски скуп може бити представљен помоћу коначног броја једначина и/или неједначина.

Примери полиедарских скупова:

1. $\Pi = \{\mathbf{x}\ |\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^n$, где је $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ реална матрица, и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) $\Pi_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 4 \\ -3 & -5 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 56 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \\ 0.5 \\ 6 \end{bmatrix}$, или, у скаларном облику,

$$
\begin{aligned}
-3x+2y &\le 10,\\
9x+4y &\le 56,\\
-3x-5y &\le -4,\\
x-\ \ y &\le \ \ 4,\\
-x \qquad &\le \ \ 1,\\
-y &\le \ \ 0.5,\\
y &\le \ \ 6;
\end{aligned}
$$

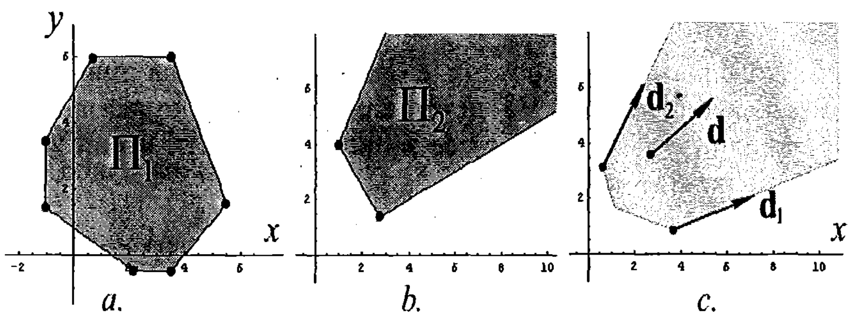
b) $\Pi_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$ или $\begin{aligned} -3x-2y &\le -11,\\ -2x+\ y &\le \ \ 2,\\ x-2y &\le \ \ 0,\\ x+\ y &\le \ 30; \end{aligned}$

Полиедарски скупови Π_1 и Π_2 су дводимензионални (Слика 7, a. и b.).

2. $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$.

3. $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$($\mathbf{A}$ - матрица типа $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$).

Дефиниција 10. Нека је S непразан конвексан скуп из $\mathbb{R}^n$. Тачка $\mathbf{x} \in S$ назива се *екстремном тачком* скупа S, ако је представљање $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, где су $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in S$, $\lambda \in (0, 1)$ тачно само за $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$. Скуп екстремних тачака скупа S означаваћемо са ex(S).



Слика 7. Полиедарски скупови у $\mathbb{R}^2$: *a*. Ограничен; *b*. Неограничен; *c*. Правац неограниченог полиедарског скупа $\mathbf{d}$ и екстремни правци $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$

Дефиниција 11. Нека је S затворен конвексан скуп из $\mathbb{R}^n$. Ненулти вектор $\mathbf{d}$ из $\mathbb{R}^n$ назива се *правцем скупа* S, ако за произвољно $\mathbf{x} \in S$ тачка $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$ такође припада S за свако $\lambda \ge 0$. Правци $\mathbf{d}$ и $\alpha\,\mathbf{d}$ за произвољно $\alpha > 0$

су једнаки. Правац $\mathbf{d}$ скупа S назива се *екстремним*, ако се он не може представити у облику позитивне линеарне комбинације два различита правца, тј. ако $\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{d}_1 + \lambda_2\mathbf{d}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, повлачи $\mathbf{d}_1 = \alpha\,\mathbf{d}_2$ за неко $\alpha > 0$ (Слика 7c).

Може се показати да је скуп екстремних тачака и екстремних праваца полиедарског скупа коначан.

1.2. Конвексне функције

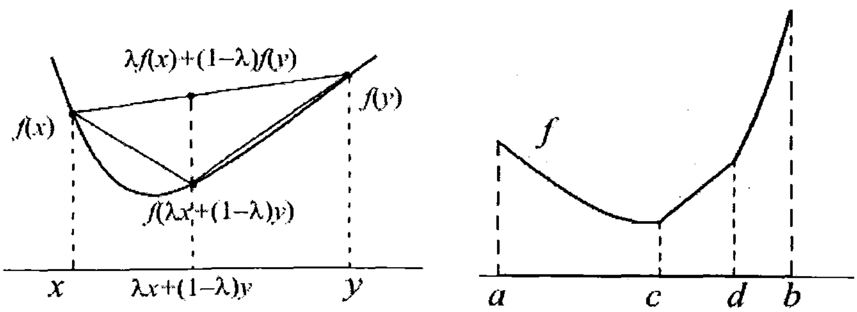
У курсевима математичке анализе, појам екстремних вредности углавном се везује за појмове непрекидних или диференцијабилних функција. На пример, непрекидна функција дефинисана на затвореном скупу достиже и максимум и минимум, а диференцијабилна има нулти извод у тачкама локалних екстрема. Међутим, за питања екстрема, далеко је важнија класа конвексних функција.

Дефиниција 12. Нека је $f\colon S\to\mathbb{R}$, где је S непразан конвексан скуп из $\mathbb{R}^n$. Кажемо да је функција f *конвексна* на S, ако за произвољне $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и $\lambda \in (0, 1)$ важи Јенсенова неједнакост

(5) $$f(\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

Функција f је *строго конвексна* на S, ако за произвољне различите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и $\lambda \in (0, 1)$ важи $f(\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$. Функција $f\colon S\to\mathbb{R}$ назива се *конкавна* (*строго конкавна*), ако је $-f$ конвексна (строго конвексна) на S.

На Слици 8 (лево) илустрована је ова неједнакост на примеру графика строго конвексне функције. На истој слици, десно, приказан је график конвексне функције, која, као што се види може имати афине сегменте, у овом случају на подинтервалу $[c, d]$.

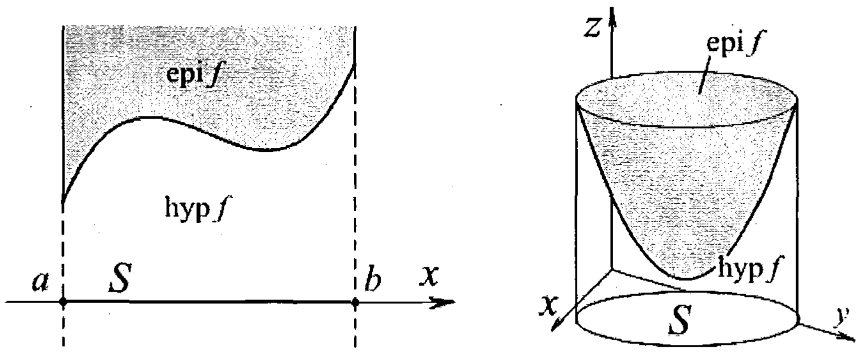


Слика 8. Строго конвексна функција (лево) и конвексна функција (десно)

Примери конвексних функција:

1. $f_1(x) = 3x + 4$;
2. $f_2(x) = |x|$;
3. $f_3(x) = x^2 - 2x$;
4. $f_4(x) = -x^{1/2},\ x \geq 0$;
5. $f_5(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$;
6. $f_6(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Дефиниција 13. Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$, и f: $S \rightarrow \mathbb{R}$. *Надграфиком*, epi f, функције f, називамо скуп epi $f = \{(\mathbf{x}, y) \mid \mathbf{x} \in S,\ y \in \mathbb{R}, y \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, док скуп hyp $f = \{(\mathbf{x}, y) \mid \mathbf{x} \in S,\ y \in \mathbb{R}, y \leq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ називамо *подграфиком* функције f (Слика 9).

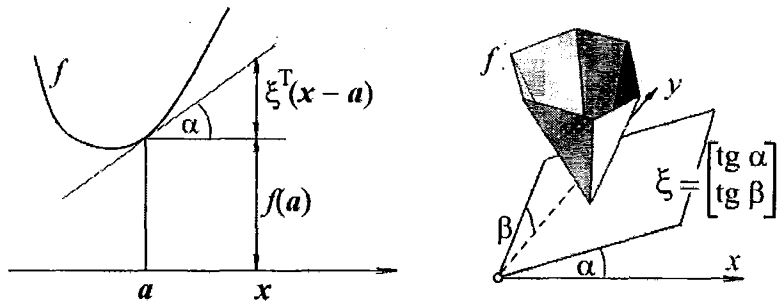


Слика 9. Надграфик и подграфик функције за $n = 1$ (лево) и $n = 2$ (десно)

Напомена. Ознака "epi" долази од *epigraph* (надграфик) а "hyp" од *hypograph* (подграфик).

Теорема 6. *Нека је S непразан конвексан скуп из* $\mathbb{R}^n$ *и* f: $S \rightarrow \mathbb{R}$. *Да би функција* f *била конвексна потребно је и довољно, да* epi f *буде конвексан скуп.*

Дефиниција 14. Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и f: $S \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна (конкавна) функција. Вектор ξ се назива *субградијентом* функције f у тачки $\boldsymbol{a} \in S$, ако важи неједнакост $f(\mathbf{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) + \xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})$ $(f(\mathbf{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) + \xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}))$ за свако $\mathbf{x} \in S$.



Слика 10. Субградијент строго конвексне функције (лево) и конвексне функције (десно)

Дакле, субградијент је вектор чије су компоненте тангенси нагибних углова према координатним осама потпорне хиперравни $H(\mathbf{x})=f(\boldsymbol{a}) + \xi^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})$ скупа epi f (у случају конвексних) или hyp f (у случају конкавних функција), Слика 10. Приметимо да је нормални вектор потпорне хиперравни H дат са $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \xi \\ -1 \end{bmatrix}$.

Уколико је f диференцијабилна функција, тада је тангентна раван у тачки $\boldsymbol{a}$ јединствена и тангенси нагибних углова су једнаки парцијалним изводима по одговарајућим координатама $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$.

Дефиниција 15. Субградијент диференцијабилне конвексне (конкавне) функције $f: S \to \mathbb{R}$ $(S(\neq \emptyset) \subseteq \mathbb{R}^n)$ у тачки $\boldsymbol{a} \in S$ назива се *градијент* функције f у тачки $\boldsymbol{a} \in S$, у ознаци $\nabla f(\boldsymbol{a})$ или $\text{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ и једнак је

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \;\; \dots \;\; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \right]^T. \tag{6}$$

Градијент диференцијабилне функције f у тачки $\boldsymbol{a} \in S$ је јединствен.

Пример. Дата је функција

$$f(x,y) = 10e^{-\frac{x^2+y^2}{5}} \sqrt{\sin^2(x^2 y) + \cos^2(xy^2)},$$

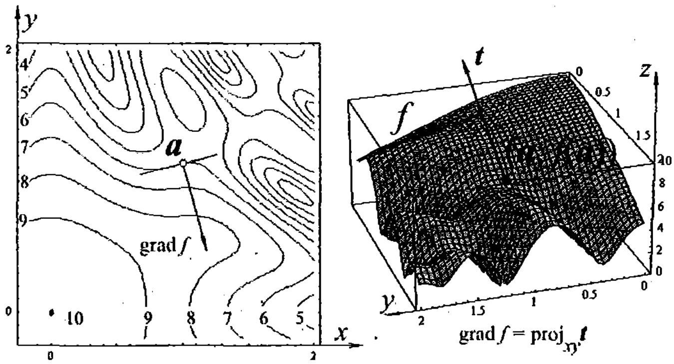
дефинисана на квадрату $S = [0, 2] \times [0, 2]$. Градијент ове функције у тачки (x, y) је

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\frac{e^{-(x^2+y^2)/5}}{\sqrt{\sin^2(x^2y)+\cos^2(xy^2)}}$$
$$\times\begin{bmatrix}-4x+2x\big(\cos(2x^2y)-\cos(2xy^2)\big)+10xy\sin(2x^2y)-5y^2\sin(2xy^2)\\ -4y+2y\big(\cos(2x^2y)-\cos(2xy^2)\big)-10xy\sin(2xy^2)+5x^2\sin(2x^2y)\end{bmatrix}.$$

Функција је ограничена на S, тако да је $0 < f(x, y) \leq 10$, и мапа њених ниво-линија је приказана на Слици 11 (лево). Изаберимо тачку $\boldsymbol{a} = [1 \quad 1.13537]^{\mathrm{T}}$, која приближно лежи на ниво-линији на којој је $f(x, y) = 6$. Градијент у тачки $\boldsymbol{a}$ је

(7) $$\nabla f(1,\ 1.13537) = [1.18637 \quad 0.465265]^{\mathrm{T}},$$

који је приказан на слици са почетком у тачки $\boldsymbol{a}$. Видимо да вектор градијента стоји нормално на тангенту у тачки $\boldsymbol{a}$ ниво-линије 6 и усмерен је према ниво-линији 7. У ствари, градијент показује правац и смер најбржег раста функције. Ако посматрамо површ, дефинисану функцијом f (Слика 11, десно), тада видимо да постоји вектор (на слици означен са $\boldsymbol{t}$) који из тачке $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ показује правац и смер најбржег успона на самој површи. Градијент (7) је пројекција вектора $\boldsymbol{t}$ на xy-раван, тј. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{proj}_{xy}\boldsymbol{t}$.



Слика 11. Ниво-линије и градијент функције две променљиве

Градијент диференцијабилне функције се може употребити за формирање критеријума конвексности.

Теорема 7. *Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и f: $S\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Да би f била конвексна на S, потребно је и довољно да за произвољно $\boldsymbol{a} \in S$ и свако $\mathbf{x} \in S$ важи неједнакост*

(8) $$f(\mathbf{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}).$$

Аналогно, за строгу конвексност функције f потребно је и довољно да је за произвољно $\boldsymbol{a}\in S$

(9) $$f(\mathbf{x}) > f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{x} \neq \boldsymbol{a}.$$

Познато је да Тејлоров развој функције n променљивих $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ у околини координатног почетка $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ има облик

(10)
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \frac{1}{1!}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2!}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(\mathbf{0}) + \cdots .$$

Ако претпоставимо да је f квадратна функција (садржи чланове x_i, x_i^2 і $x_i x_j$), сума (10) постаје коначна

(11)
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \frac{1}{1!}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2!}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(\mathbf{0}).$$

Збир $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ је, у ствари, скаларни производ векторског оператора градијента, $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}} = \nabla$ са вектором променљивих $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Тако се (11) може написати у облику

(12)
$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{0}) + \left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)^2 f(\mathbf{0}) \\ &= f(\mathbf{0}) + \left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) \\ &= f(\mathbf{0}) + \left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}\nabla^{\mathrm{T}}\right)\left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) \\ &= f(\mathbf{0}) + \left(\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Производ вектора формата $n\times 1$ и $1\times n$ тј. $\left(\nabla \cdot \nabla^{\mathrm{T}}\right) f$ представља матрицу формата $n\times n$ тј. $\mathbf{H} = \left(\nabla \cdot \nabla^{\mathrm{T}}\right) f$ која је позната као Хесеова матрица или *хесијан*. Прецизније,

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} f(\mathbf{x}) = \left[\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

Сада (12) постаје

$$\text{(14)} \qquad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{0})^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{H}(\mathbf{0}) \mathbf{x},$$

што је Тејлоров облик квадратне функције n променљивих. Приметимо да је хесијан симетрична матрица јер су мешовити изводи међусобно једнаки $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Такође, ако је f квадратна функција, елементи матрице **H** су константе, и она не зависи од тачке у којој се израчунава њена вредност.

Слично, Тејлоров развој другог степена двапут диференцијабилне функције n променљивих у околини тачке $\boldsymbol{a}$ је

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} \mathbf{H}(\boldsymbol{a})(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}).$$

Дефиниција 16. Нека је **H** квадратна матрица формата $n \times n$ и нека су $\lambda_i(\mathbf{H})$, $i = 1,\dots,n$ сопствене вредности матрице **H**. Ако су све сопствене вредности $\lambda_i(\mathbf{H}) > 0$, за матрицу **H** се каже да је *позитивно дефинитна*. Матрица **H** је *позитивно семи-дефинитна* ако су сопствене вредности $\lambda_i(\mathbf{H}) \geq 0$. Аналогно, ако је $\lambda_i(\mathbf{H}) \leq 0$ тј. $\lambda_i(\mathbf{H}) < 0$ матрица **H** је *негативно семи-дефинитна* тј. *негативно дефинитна*.

Примедба. Може се показати да је симетрична матрица **H** позитивно дефинитна (позитивно семи-дефинитна) ако за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ задовољава неједнакост $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\ \mathbf{x} > 0$ $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\ \mathbf{x} \geq 0)$. Слично тврђење важи за негативну (семи-) дефинитност.

Теорема 8. *Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и f: $S \to \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна функција на S. Тада је однос између дефинитности хесијана и конвексности функције дат у Табели 1.*

Табела 1

хесијан $\mathbf{H}(\mathbf{x})$	сопствене вредности	функција f
позитивно дефинитна	$\lambda_i(\mathbf{H})>0$	строго конвексна
позитивно семи-дефинитна	$\lambda_i(\mathbf{H})\geq 0$	конвексна
негативно семи-дефинитна	$\lambda_i(\mathbf{H})\leq 0$	конкавна
негативно дефинитна	$\lambda_i(\mathbf{H})<0$	строго конкавна

Пример 1. Нека је дата квадратна функција

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2. \tag{15}$$

Написати функцију f у Тејлоровом облику.

Решење. Како је $\nabla f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-4x_1+4x_2\\ 6+4x_1-6x_2\end{bmatrix}$, $\nabla f(0,0)=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$ и

$$\mathbf{H}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 4 & -6\end{bmatrix},$$

заменом у (14) се добија

$$f(x_1, x_2) = [2 \quad 6]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Проверити да ли је функција f из претходног примера конвексна.

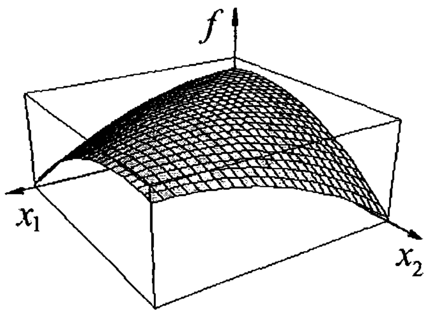
Решење. Да бисмо проверили дефинитност Хесеове матрице, израчунаћемо њене сопствене вредности решавањем карактеристичне једначине:

$$\det(\mathbf{H}-\lambda \mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix}-4-\lambda & 4\\ 4 & -6-\lambda\end{bmatrix} = (-4-\lambda)(-6-\lambda)-16 = \lambda^2+10\lambda+8=0.$$

Решења су сопствене вредности

$$\lambda_1 = -5 + \sqrt{17} \approx -0.876894, \qquad \lambda_2 = -5 - \sqrt{17} \approx -9.12311.$$

Како су λ_1 и λ_2 негативни, матрица **H** је негативно семи-дефинитна, па следи да је f строго конкавна функција (Слика 12).



Слика 12. График конкавне функције (15)

1.3. Оптимизације и конвексне функције

Дефиниција 17. Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ и f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Задатак одређивања $\min f(\mathbf{x})$ при условима $\mathbf{x} \in S$, или $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ назива се *задатак минимизације* функције f. Произвољна тачка $\boldsymbol{a} \in S$ је *допустиво решење задатка* а f је *функција циља*. Ако је $\boldsymbol{a} \in S$ и $f(\mathbf{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, за свако $\mathbf{x} \in S$, тада се $\boldsymbol{a}$ назива *оптималним решењем* (такође *глобалним оптималним решењем* или само *решењем задатка*). Ако је $\boldsymbol{a} \in S$ и постоји таква ε-околина $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ тачке $\boldsymbol{a}$ таква да да је $f(\mathbf{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, за произвољно $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a})\cap S$, тада се $\boldsymbol{a}$ назива *локалним оптималним решењем*.

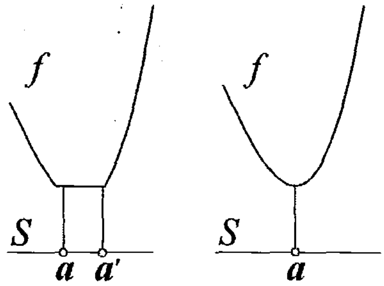
Задатак максимизације и остали одговарајући термини дефинишу се дуално.

Теорема 9. *Нека је* $S(\neq\emptyset)$ *конвексан скуп из* $\mathbb{R}^n$ *и* f: $S \to \mathbb{R}$. *Нека је тачка* $\boldsymbol{a} \in S$ *локално оптимално решење задатка* $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$.

1. Ако је f *конвексна функција, тада је* $\boldsymbol{a}$ *и глобално оптимално решење.*

2. Ако је f *строго конвексна функција, онда је* $\boldsymbol{a}$ *јединствено глобално оптимално решење.*

Слика 13, лево, приказује два различита глобална оптимална решења задатка $\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ у случају када је f конвексна функција, док Слика 13, десно, приказује јединствено оптимално решење истог задатка за строго конвексну функцију.



Слика 13. Оптимизација конвексне и строго конвексне функције једне променљиве

Теорема 10. *Нека је* f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *конвексна функција и* $S(\neq \emptyset)$ *конвексан скуп из* $\mathbb{R}^n$. *Тачка* $\boldsymbol{a} \in S$ *је оптимално решење задатка* $\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ *тада и само тада, када* $f(\mathbf{x})$ *има у тачки* $\boldsymbol{a}$ *субградијент* ξ *за који је* $\xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq 0$ *за свако* $\mathbf{x} \in S$.

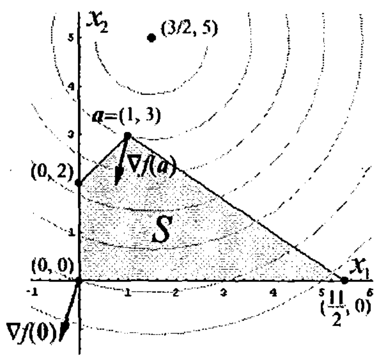
Последица 1. *Ако је* S *отворен конвексан скуп, онда је тачка* $\boldsymbol{a}$ *оптимално решење ако и само ако је субградијент функције у тачки* $\boldsymbol{a}$ *једнак нули. Специјално, ако је* $S = \mathbb{R}^n$, *тада је* $\boldsymbol{a}$ *тачка глобалног минимума ако и само ако је субградијент функције* f *у тачки* $\boldsymbol{a}$ *једнак нули.*

Последица 2. *Нека су задовољене претпоставке теореме и нека је функција* f *диференцијабилна. Тада, да би тачка* $\boldsymbol{a}$ *била оптимално решење, потребно је и довољно да је* $\nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq 0$ за свако $\mathbf{x} \in S$. *Ако је поред тога* S *отворен скуп онда је* $\boldsymbol{a}$ *оптимално решење ако и само ако је* $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.

Пример. Решити минимизациони проблем

$$\min \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - 5\right)^2$$

$$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 \leq \ 2, \\ (16) \qquad & 2x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ & -x_1 \leq 0, \\ & -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$



Слика 14. Минимизациони проблем

Решење. Очигледно је да циљна функција

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - 5)^2$$

представља квадрат растојања од тачке (3/2, 5) до тачке (x_1, x_2) и да је конвексна, са глобалним минимумом у тачки (3/2, 5). Концентрични кругови са центром у тој тачки су ниво-линије функције f (Слика 14). Сваки следећи шири круг представља све виши и виши ниво површи и највећи круг који додирне конвексан полиедарски скуп S, одређен ограничењима – неједнакостима у (16), представља решење проблема. С друге стране, тај додир мора да се догоди у тачки из скупа S која је најближа тачки (3/2, 5), а то би, према илустрацији требало да буде екстремна тачка скупа S, тачка $\boldsymbol{a}$ = (1, 3). Да ли је то заиста и оптимално решење задатка?

Одговор на ово питање даје Теорема 10. Будући да је функција циља диференцијабилна, наћи ћемо њен градијент у тачки $\boldsymbol{a}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(1, 3) = \begin{bmatrix} 2\left(x_1 - \frac{3}{2}\right) \\ 2(x_2 - 5) \end{bmatrix}_{x_1=1, x_2=3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Са слике се такође види да за свако $(x_1, x_2) \in S$ угао између вектора $\nabla f(\boldsymbol{a})$ и (x_1-1, x_2-3) не прелази 90^0, тј. да за свако $\mathbf{x} \in S$ важи $\nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq 0$, што према Последици 2 Теореме 10 значи да тачка $\boldsymbol{a}$ задовољава услове оптималности.

Проверимо сада да ли је, на пример, тачка (0, 0) оптимална. Користећи Теорему 10, лако се проверава да то није тачно. Заиста, $\nabla f(0, 0) = [-3 \quad -10]^{\mathrm{T}}$ и за произвољну ненулту тачку $\mathbf{x} \in S$ важи неједнакост $-3x_1 - 10x_2 < 0$. Следује да координатни почетак не може бити оптимална тачка.

Познато је да је задатак максимизације конвексне функције тежи за решавање од задатка минимизације. У том смислу, следећа теорема даје само потребне али не и довољне услове за оптималност решења.

Теорема 11. *Нека је $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ конвексна функција. Ако је $\boldsymbol{a} \in S$ локално оптимално решење задатка $\max\limits_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$, тада је $\xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \leq 0$, за свако $\mathbf{x} \in S$, где је ξ произвољан субградијент функције f у тачки $\boldsymbol{a}$.*

Последица. *Ако је функција f диференцијабилна, и $\boldsymbol{a} \in S$ је локално оптимално решење, тада је* $\nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \leq 0$, *за свако* $\mathbf{x} \in S$.

Теорема 12. *Нека је f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ конвексна функција и $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ ограничен и затворен конвексан полиедарски скуп из $\mathbb{R}^n$. Тада задатак максимизације* $\max\limits_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ *увек има оптимално решење $\boldsymbol{a}$, и то је нека од екстремних тачака скупа S.*

Ова теорема може бити уопштена на случај неполиедарских ограничених, затворених и конвексних скупова.

2. ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

2.1. Дефиниција задатка LP, пројекција и лифтинг

Задатак линеарног програмирања састоји се у оптимизацији линеарне функције f на конвексном полиедарском скупу. Дакле, ако је $\Pi\neq\emptyset$, конвексан полиедарски скуп из $\mathbb{R}^n$, функција циља f: $\Pi\to\mathbb{R}$ је линеарна функција n променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тј.

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \, .$$

Уобичајено је да се f пише скраћено, у облику скаларног производа

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c_1 \, c_2 \, \ldots \, c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \, . \tag{17}$$

На тај начин се задатак линеарног програмирања (у даљем тексту LP) може написати у концизном облику

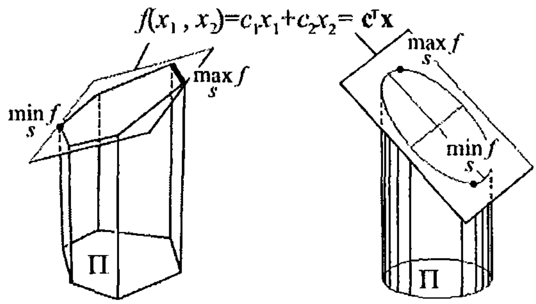
$$\begin{array}{ll} \text{минимизирати} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{при условима} & \mathbf{x} \in \Pi, \end{array}$$

или

$$\min_{\mathbf{x}\in\Pi} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \, . \tag{18}$$

Уместо задатка минимизације, може се посматрати и "дуални" задатак максимизације $\max\limits_{\mathbf{x}\in\Pi} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, при чему важе слични закључци.

Како је скуп допустивих решења полиедарски скуп $\Pi(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$, он се обично изражава системом једнакости или неједнакости за променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Линеарна функција (17) је и конвексна и конкавна (случај једнакости у Јенсеновој неједнакости (5)), тако да, на основу Теореме 12, она увек достиже екстремне вредности у екстремним тачкама ограниченог конвексаног полиедарског скупа Π (Слика 15, лево).



Слика 15. Екстреми линеарне функције на конвексном домену

Ово тврђење се може проширити на произвољне ограничене конвексне скупове, применом полиедарске апроксимације (Слика 15, десно).

Полиедарски скуп Π је дат линеарним ограничењима облика

(19) $$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},$$

(20) $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge 0,$$

или

(21) $$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge 0,$$

при чему је $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. За оваква ограничења се каже да су дата у *каноничком* облику. Лако је видети да се сваки од система (19), (20) и (21) може трансформисати у облик друга два. На пример, ако је проблем LP задат системом ограничења (21), тј. има облик

(22) $$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

он се може написати са ограничењима у облику (20) увођењем *помоћних промењљивих* x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} (обично је $m < n$)

$$\text{(23)}\qquad \begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + \ldots + 0\cdot x_{m+n} \\ & \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_1 \geq 0 \end{aligned}$$

при чему је $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_m]$, матрица добијена додавањем блока $\mathbf{I}_m$ - јединичне матрице формата $m\times m$, матрици $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}.$$

Решавањем проблема (22) решава се и проблем (23) и обратно, јер између вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_1$ постоји кореспонденција која се остварује помоћу оператора пројекције и лифтинга.

Оператор *пројекције* из простора $\mathbb{R}^{m+n}$ у $\mathbb{R}^n$, се дефинише са

$$\text{(24)}\qquad \mathbf{x} = \operatorname{proj}(\mathbf{x}_1) = \operatorname{proj}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Инверзни оператор пројекцији је *лифтинг* из простора ниже димензије $\mathbb{R}^n$ у простор више димензије $\mathbb{R}^{m+n}$

$$\text{(25)}\qquad \mathbf{x}_1 = \operatorname{lift}(\mathbf{x}) = \operatorname{lift}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Тако, можемо рећи да је проблем (23) лифтинг проблема (22) и обратно, проблем (22) је пројекција проблема (23). Символички, то пишемо

$$\{\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{b},\ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}\} = \text{lift}\,\{\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

или

$$\{\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \text{proj}\{\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{b},\ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}\}.$$

2.2. Случај неограниченог скупа допустивих решења

Размотримо задатак линеарног програмирања

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{26}$$

при чему је $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ матрица реда $m \times n$ ранга m и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (при чему је обично $m \leq n$). Претпоставимо да ограничења $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, дефинишу непразан, неограничен конвексан полиедарски скуп S, са екстремним тачкама $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ и екстремним правцима $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_l$.

Теорема 13. (*Услови оптималности задатака LP*) *Да би оптимална вредност функције циља била коначна, потребно је и довољно да је* $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_j \geq 0$, *за све* $j = 1,\ldots, l$. *Ако су ови услови испуњени, тада је међу решењима задатка бар једна екстремна тачка* $\mathbf{x}_i$.

Пример 1. Минимизирати функцију $f(x_1, x_2) = 12\,x_1 + 15\,x_2$ уз ограничења

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 3\,x_2 &\geq 12, \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 &\geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решење. Ограничења дефинишу допустиву област $S \subset \mathbb{R}^2$, и то је бесконачни конвексни полиедарски скуп (Слика 16, лево). Такође, матрица $\mathbf{A}$ има пун ранг (rang $\mathbf{A} = 2$). Скуп S има три екстремне тачке, $[5\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ и $[0\ \ 4]^{\mathrm{T}}$ на координатним осама и $[15/7\ \ 8/7]^{\mathrm{T}}$ у пресеку правих $4\,x_1 + 3\,x_2 = 12$ и $2\,x_1 + 5\,x_2 = 10$. Екстремни правци скупа S су $\mathbf{d}_1 = [1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_2 = [0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. С друге стране, градијент функције f, $\nabla f = \mathbf{c} = [12\ \ 15]^{\mathrm{T}}$, је вектор ортогоналан на њене ниво линије које су, будући да је f линеарна, паралелне праве (Слика 16, лево). Сем тога, $\mathbf{c}$ показује смер најбржег пораста функције f, тако да је најнижа ниво линија која још увек има заједничких тачака са скупом S она која пролази кроз екстремну тачку $[15/7 \quad 8/7]^T$. Лифтингом датог проблема добија се проблем облика (26)

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_1 &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

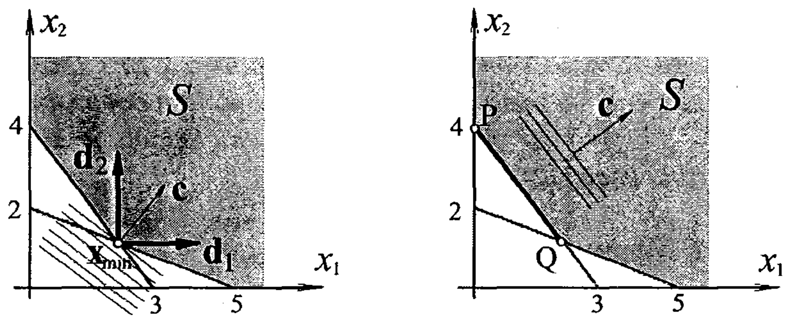
где је $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = [12\ 15\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{x}_1 = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$. Систем ограничења дефинише област у $\mathbb{R}^4$, са екстремним правцима облика

$$\mathbf{d}_1^1 = [1\ 0\ \alpha_1\ \beta_1]^T,\ \mathbf{d}_2^1 = [0\ 1\ \alpha_2\ \beta_2]^T\ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0).$$

Како је

$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{d}_1^1 = [12 \quad 15 \quad 0 \quad 0]\,[1 \quad 0 \quad \alpha_1 \quad \beta_1]^T = 12 > 0$$
$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{d}_2^1 = [12 \quad 15 \quad 0 \quad 0]\,[0 \quad 1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2]^T = 15 > 0,$$

видимо да су испуњени услови оптималности, па су $\mathbf{x}_{1\min} = [15/7 \quad 8/7 \quad 0 \quad 0]^T$ тј. $\mathbf{x}_{\min} = [15/7 \quad 8/7]^T$ решења проширеног и полазног задатка. Приметимо да лифтинг проблема не утиче на ограниченост оптималне вредности функције.



Слика 16. Оптимизација на бесконачном конвексном полиедру

Пример 2. Минимизирати функцију $f(x_1, x_2) = 8\,x_1 + 6\,x_2$ уз иста ограничења као у претходном примеру.

Решење. У овом случају вектор градијента $\mathbf{c}^T = [8 \quad 6]$ је ортогоналан на страницу PQ допустиве полиедарске области S (Слика 16, десно). То значи да се бар једна ниво-линија функције f поклапа са страницом PQ, тј. обе тачке $P = [0 \quad 4]^T$ и $Q = [15/7 \quad 8/7]^T$ су оптималне, али и свака тачка са сегмента PQ. Дакле, задатак има бесконачно много решења.

Када је допустива област неограничена, оптимално решење може бити и неограничено, као што показује следећи пример.

Пример 3. Максимизирати функцију $f(x_1, x_2) = -2\,x_1 + 6\,x_2$ уз ограничења

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

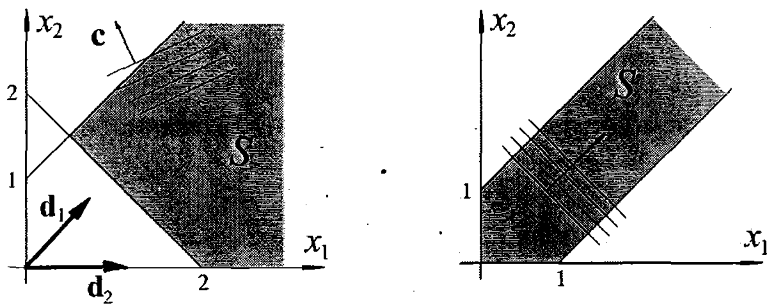
Решење. Најпре ограничења препишемо у каноничком облику

$$-x_1 - x_2 \leq -2,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

из чега се види да матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ има пун ранг, а графичком анализом утврђујемо да ограничења дефинишу допустиву област као бесконачни конвексни полиедарски скуп (Слика 17, лево). Екстремни правци су $\mathbf{d}_1 = [1\ \ 1]^T$ и $\mathbf{d}_2 = [1\ \ 0]^T$, док је $\nabla f = \mathbf{c} = [-2\ \ 6]^T$. Сада је

$$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_1 = [-2\ \ 6]\,[1\ \ 1]^T = -2 + 6 = 4 > 0,\ \ \mathbf{c}^T\mathbf{d}_2 = [-2\ \ 6]\,[1\ \ 0]^T = -2 < 0.$$

Дакле, услови за егзистенцију коначног екстремума не постоје, и у овом случају вредност функције циља неограничено расте, када се, на пример, допустива тачка креће дуж странице $-x_1 + x_2 = 1$, у правцу вектора $\mathbf{d}_1$.



Слика 17. Неограничено оптимално решење (лево) и случај када решење не постоји (десно)

Пример 4. Максимизирати функцију $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ уз ограничења

$$-x_1 + x_2 \leq -1,$$
$$x_1 - x_2 \leq -1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решење. У овом случају је $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, и како су колоне матрице линеарно зависне (друга се добија множењем прве са -1), матрица има ранг 1. Ово указује на непостојање коначног решења, што се огледа у паралелним страницама допустиве области S, која је конвексан и неограничен полиедар (Слика 17, десно). Како је вектор градијента $\nabla f = \mathbf{c} = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ паралелан са бесконачним страницама области S, не постоји одређени правац на коме би се повећавала вредност функције циља. Дакле, оптимално решење не постоји.

2.3. Метод дуалности

Дефиниција 18. Нека су за $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, дати следећи проблеми линеарног програмирања

$$\text{(27)} \qquad \text{проблем } P: \qquad \begin{aligned} \max \ & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{(28)} \qquad \text{проблем } P': \qquad \begin{aligned} \min \ & g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ако проблем P зовемо *основни проблем*, тада је P' *дуални проблем* у односу на проблем P.

Пример 5. Нека је основни проблем LP дат са

$$\text{максимизирати} \quad f(\mathbf{x}) = -3x_1 + 2x_2$$

$$\text{при условима} \quad \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}2\\ 3\\ 11\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

Тада је његов дуални проблем дат са

$$\text{минимизирати} \quad g(\mathbf{y}) = 2y_1 + 3y_2 + 11y_3$$

$$\text{при условима} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Можемо да приметимо да операција дуалности има особину инволутивности $(P')' = P$, тј. дуални проблем дуалног проблема је основни проблем. Такође, ограничења дуалног проблема се могу трансформисати у било који од каноничних ограничења (19) – (21).

Означимо са (P, S) основни проблем LP са допустивом облашћу S, а са (P', S') дуални проблем са својом одговарајућим допустивом облашћу S'. Важи следећа теорема:

Теорема 14. (*Теорема о дуалности.*)

a. *За свако* $\mathbf{x} \in S$ *и* $\mathbf{y} \in S'$, *важи* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y})$.

b. *Ако један од проблема,* P *или* P', *има оптимално решење* $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ldots x_n^*]^{\mathrm{T}}$ *или* $\mathbf{y}^* = [y_1^* \ldots y_m^*]^{\mathrm{T}}$ *респективно, тада га има и други и важи* $f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*)$.

c. *За ова оптимална решења важи*

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пример 6. Решење основног проблема из Примера 5 је $f(\mathbf{x}^*) = 27/5$, где је $\mathbf{x}^* = [7/5 \;\; 24/5]^{\mathrm{T}} \in S$. На основу Теореме 14, и дуални проблем има решење $g(\mathbf{y}^*) = f(\mathbf{x}^*) = 27/5$ при чему је $\mathbf{y}^* = [8/5 \;\; 0 \;\; 1/5]^{\mathrm{T}} \in S'$.

2.4. Симплекс метод

Директно решавање проблема LP своди се на лоцирање екстремних тачака допустиве конвексне полиедарске области и израчунавање вредности функције циља у тим тачкама. Сортирањем добијених вредности долази се до оптимума. Међутим, овај поступак је изводљив само ако је број променљивих мали. Ако је матрица **A** формата $m \times n$ тада би се за налажење екстремних тачака морало решити $\binom{m+n}{m}$ система од m једначина са n непознатих. Уколико је притом $n = m$, број једначина веоме брзо расте са порастом m, као што то показује следећа таблица:

Табела 2

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{2m}{m}$	6	20	70	252	924	3432	12870	48620	184756

Већ за $m \geq 5$, захтева се решавање неколико стотина једначина, што је замашан посао. У пракси, m може ићи и до неколико хиљада, што доводи до огромног броја једначина и чини директан поступак решавања немогућим и најмоћнијим рачунским машинама, јер би биле потребне године рада за њихово решавање. Због тога се трагало за поједностављеним алгоритмима који би брзо и ефикасно решавали такве проблеме. Проблеми економије, а пре свега транспортни проблеми америчке армије у време II Светског рата, довели су до развоја *симплекс алгоритма* који је 1947. године предложио Џорџ Данциг (George Dantzig)[1]. Последњих двадесетак година појавили су се тзв. *методи унутрашње тачке* (interior – points методи)[2].

Посматрајмо задатак (26)

$$\begin{gathered} \min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

при чему је $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Претпоставимо да је $m \leq n$, што је и најчешћи случај у пракси, а у случају да није, можемо прећи на дуални проблем, тако да ће $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ задовољити тај услов.

Као што је познато, ограничења $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, дефинишу полиедарски скуп П. Претпоставимо да је $\operatorname{rang} \mathbf{A} = m$, а ако је $\operatorname{rang} \mathbf{A} < m$, одбацујемо сувишне једнакости из система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. У случају $m < n$, матрицу **A**, могуће после премештања колона, можемо поделити на два блока **B** и **N**, тј.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}], \tag{29}$$

[1] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extension*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1963

[2] R. J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Princeton, N.J., 2001.

где је $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times m}$, матрица пуног ранга (rang $\mathbf{B} = m$) док је матрица $\mathbf{N}$ је формата $m\times(n-m)$. Тада се вектор произвољне тачке $\mathbf{x} \in \Pi$ и вектор $\mathbf{c}$ могу поделити на два дела

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{B} \\ \mathbf{x}_\mathrm{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_\mathrm{B} \\ \mathbf{c}_\mathrm{N} \end{bmatrix},$$

тако да се ограничења $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, могу написати у облику

(30) $$\mathbf{Bx}_\mathrm{B} + \mathbf{Nx}_\mathrm{N} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_\mathrm{B} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_\mathrm{N} \geq \mathbf{0}.$$

Уобичајено је да се променљиве $\mathbf{x}_\mathrm{B}$ називају *базисне,* а $\mathbf{x}_\mathrm{N}$ *слободне* променљиве, док се матрица $\mathbf{B}$ зове *базис*. Сада можемо формулисати теорему која карактерише екстремне тачке скупа S, тачке у којима се, у складу са Теоремом 12, постиже оптимум линеарне функције.

Теорема 15. *Тачка* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ *је екстремна тачка скупа* Π *ако и само ако постоји декомпозиција* (29) *матрице* $\mathbf{A}$, *таква да је* $\mathbf{x}_\mathrm{B}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_\mathrm{N}^* = \mathbf{0}$.

Нека је $\mathbf{x}^*$ ектремна тачка скупа Π за коју важи декомпозиција (29). За произвољно $\mathbf{x} \in \Pi$, из (30) следује

(31) $$\mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{N},$$

одакле се добија

(32) $$\begin{aligned} \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} &= \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{c}_\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_\mathrm{N}^\mathrm{T} - \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_\mathrm{N} \\ &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}^* + \left(\mathbf{c}_\mathrm{N}^\mathrm{T} - \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_\mathrm{N}, \end{aligned}$$

при чему је тачка $\mathbf{x}^*$ дефинисана са $\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Могућа су два случаја:

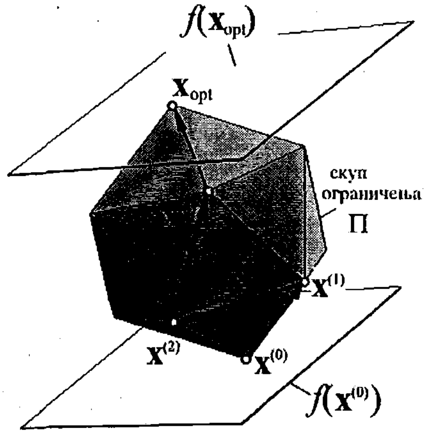
1. $\mathbf{c}_\mathrm{N}^\mathrm{T} - \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$. У овом случају, на основу (32) и ненегативности вектора $\mathbf{x}_\mathrm{N}$ за свако $\mathbf{x} \in \Pi$, важи неједнакост $\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}^*$, при чему је оптимална екстремна тачка.

2. $\mathbf{c}_\mathrm{N}^\mathrm{T} - \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \ngeq \mathbf{0}$. У овом случају су могућа два подслучаја:

   a) Може се одредити екстремни правац $\mathbf{d}_i$ у коме функција $\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}$ неограничено расте;

   b) Постоји $\lambda \geq 0$, и вектор $\mathbf{g}_j$ такав да је $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \lambda\, \mathbf{g}_j$ екстремна тачка. Том приликом се једна базисна променљива (једна од променљивих из вектора $\mathbf{x}_\mathrm{B}$) може заменити са једном слободном променљивом (компонентом вектора $\mathbf{x}_\mathrm{N}$) при чему је $\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}^*$, па је нова екстремна тачка ближе минималном решењу.

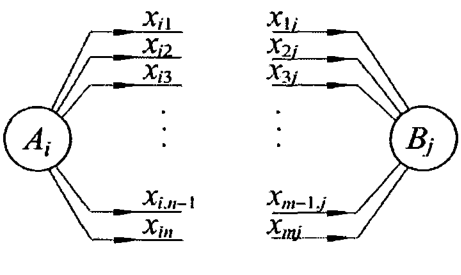
На овом разматрању се базира Данцигов *симплекс алгоритам*. Полази се од произвољне екстремне тачке $\mathbf{x}^{(0)}$ којој одговара базис **B**. Ако се догоди случај 1) решење је нађено. У случају 2-a) решење не постоји. И најзад, у случају 2-b) налази се правац кретања ка другој, повољнијој екстремној тачки $\mathbf{x}^{(1)}$ у којој функција циља има мању вредност. Сада се поступак понавља све док се не дође до оптималног решења (Слика18). Алгоритам је добио назив "симплекс" из два разлога. Прво, због своје изузетне једноставности (лат. simplex = једноставан) која допушта решавање LP са великим бројем једначина у свега неколико корака и у кратком времену, и друго, ограничења образују полиедарски скуп, а како смо већ поменули, најједноставнији полиедри су симплекси.



Слика 18. Симплекс алгоритам

2.5. Транспортни проблем

Важан случај проблема LP је тзв. *транспортни проблем*[3]. Претпоставимо да m производних центара A_1, A_2, ..., A_m, своје производе



Слика 19. Транспортни проблем

Табела 3

		B_1	B_2		B_n
	a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}
	$\vdots$				
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}

[3] F. L. Hitchcock, *The distribution of a product from several sources to numerous locations*, J. Math. Phys. 20, no. 2 (1941), 224-230.

достављају потрошачким центрима B_1, B_2, ..., B_n, тако да центар A_i доставља центру B_j x_{ij} количинских јединица (Слика 19). Притом, нека цена јединице производа из A_i у B_j буде c_{ij} новчаних јединица. Збир свих испорука из производног центра A_i нека је a_i, а збир свих достава у потрошачки центар B_j нека је b_j. Ови подаци су сумарно приказани у Табели 3. Очигледно, важе следеће једнакости:

(33) $a_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}$ $i = 1, \ldots, m$ (збир свих испорука производног центра A_i),

(34) $b_j = \sum_{k=1}^{m} x_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$ (збир свих достава у центар потрошње B_j).

Претпоставићемо такође да се ради о тзв. *затвореном проблему* чија је карактеристика да се потроши све што се произведе, тј. да важи

(35) $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{kj}.$$

Матрицу $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ зваћемо *матрица трошкова*, а матрицу $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ *план* (*стратегија*) транспорта. Циљ је минимизирати цену укупног транспорта

(36) $$\min L,$$

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

под ограничењима

(37) $$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = a_i,\ i = 1,\ldots,m,$$

(38) $$\sum_{k=1}^{m} x_{kj} = b_j,\ j = 1,\ldots,n,$$

(39) $$x_{ij} \geq 0,\quad i = 1,\ldots,m,\quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Очигледно, ово је задатак линеарног програмирања. Систем (37) има m, а (38) n једначина. Међутим, због услова (39), систем је линеарно завистан и једна једначина се може одбацити, тако да је ранг матрице система $r = m + n - 1$. Број слободних (допунских) променљивих је $k = mn - r = mn - m - n + 1$. Сваки план транспорта $X = [x_{ij}]_{m\times n}$, који задовољава услове (37) – (39) зваћемо *допустиво решење*. Решење задатка је оптимални план транспорта $X^* = [x_{ij}^*]_{m\times n}$.

Теорема 16. *Транспортни проблем* (36) – (39) *увек има оптимално решење* (*минимум*) X^*.

Практично решавање се спроводи у две основне етапе:

1. Одређивање полазног базисног решења $X^0 = [x_{ij}^0]_{m\times n}$. У наставку текста биће размотрене две методе: *Метод северозападног угла* и *Метод минималне цене*.

2. Сукцесивно побољшавање полазног решења до постизања оптимума (*Метод прерасподеле по циклусу* и *Метод потенцијала*).

Метод северозападног угла. Таблица се попуњава почев од левог горњег ("северозападног") угла стављањем $x_{11} = \min\{48, 18\} = 18$ (Табела 4).

Табела 4

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	**10** 18	**8** 27	**5** 3	**6**	**9**
30	**6**	**7**	**8** 30	**6**	**5**
27	**8**	**7**	**10** 9	**8** 12	**7** 6
20	**7**	**5**	**4**	**6**	**8** 20

Тиме смо исцрпли укупну количину ресурса који се достављају првом потрошачком центру, b_1. Такође, укупна производња првог производног центра a_1 се умањује за 18, па за расподелу остаје 30 јединица производа. Прелази се на прво суседно поље (1, 2), које сада представља нови северозападни угао. Зато стављамо $x_{12} = \min\{27, 30\} = 27$, тако да поново умањујемо a_1 за 27, па остаје $a_1 = 3$. Следеће поље је (1, 3) и сада је $x_{13} = \min\{42, 3\} = 3$, чиме се b_3 смањује на 39 а a_1 се анулира, чиме је исцрпљена прва врста. Нови северозападни угао је поље (2, 3) и $x_{23} = \min\{39, 30\} = 30$, чиме је исцрпљена производња a_2, а b_3 добија вредност 9. Даље је $x_{33} = \min\{9, 27\} = 9$, $a_3 = 18$, $b_3 = 0$; $x_{34} = \min\{12, 18\} = 12$, $a_4 = 6$, $b_4 = 0$; $x_{35} = \min\{26, 6\} = 6$, $a_4 = 0$, $b_5 = 20$. Најзад, $x_{45} = \min\{20, 20\} = 20$, $a_4 = b_5 = 0$. Почетно базисно решење је

$$X^0 = \begin{bmatrix} 18 & 27 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Број променљивих у почетном базисном решењу је

$$r = m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8.$$

Функција циља на овом решењу има вредност

$$L^0 = c_{11}x_{11}+\ldots+c_{45}x_{45}$$

(41) $$= 10\cdot18 + 8\cdot27 + 5\cdot3 + 8\cdot30 + 10\cdot9 + 8\cdot12 + 7\cdot6 + 8\cdot20$$

$$= 1039$$

Може се догодити да број променљивих у почетном базисном решењу буде мањи од $m + n - 1$. Тај случај настаје кад тражимо минимум (a_i, b_j) и притом је $a_i = b_j$. У том случају искључујемо истовремено и врсту и колону. На пример, у Табели 5, на пољу (1, 2) тражимо $x_{12} = \min\{10, 10\} = 10$, тако да исцрпљујемо и a_1 и b_2. Због тога морамо искључити прву врсту и другу колону. Тако, уместо осам базисних променљивих, добијамо само шест.

Табела 5

a_i \ b_j	10	10	20	35	20
20	10	10			
30			20	10	
25				25	
20					20

Табела 6

a_i \ b_j	10	10	20	35	20
$20+\varepsilon$	10	10	ε		
30			$20-\varepsilon$	$10+\varepsilon$	
25				$25-\varepsilon$	ε
$20-\varepsilon$					$20-\varepsilon$

Овакво решење са назива *дегенерисано*, и релативно се често јавља при решавању транспортних проблема. Дегенерација се превазилази увођењем две виртуелне базисне променљиве са вредностима $\varepsilon > 0$ (Табела 6). Прва променљива којој се додељује вредност ε је суседна последњој регуларно одређеној промељивој, $x_{12} = 10$. Имамо два таква суседна поља: (1, 3) и (2, 2). Изаберимо прво, и имамо $x_{13} = \varepsilon$. Сада се a_1 увећава за ε док се базисна променљива x_{23} умањује за ε итд. Наставља се ланчана промена променљивих све до доњег десног (југоисточног) угла. На крају се и a_m мења да би била задовољена релација (42) и постаје $a_m = 20 - \varepsilon$. Може се проверити да је једнакост (40) је такође задовољена , тј. $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 95$. Тако, добијамо полазно базисно решење (нуле су изостављене)

$$X^0 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & \varepsilon & & \\ & & 20-\varepsilon & 10+\varepsilon & \\ & & & 25-\varepsilon & \varepsilon \\ & & & & 20-\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Полазећи од овог решења, настављамо поступак до добијања „оптималног" решења које садржи параметар ε. Затим, у тако добијеном решењу ставимо $\varepsilon = 0$ и на тај начин долазимо до траженог оптималног решења.

Метод минималне цене. У сумарној таблици транспортног проблема пронађе се поље са најмањом ценом $\min\{c_{ij}\}$. Ако решење није јединствено, бира се произвољно једно од њих. У нашем примеру је $\min\{c_{ij}\} = c_{43} = 4$. У поље (4, 3) уписује се вредност $x_{43} = \min\{a_4, b_3\} = 20$ и замењује $b_3 = 42 - 20 = 22$. Како се a_4 своди на нулу, четрвта врста се искључује. Сада се од преосталих елемената $\{c_{ij}\}$ поново одређује минимални елемент. У овом случају постоје две минималне цене $c_{13} = c_{25} = 5$. Бира се произвољно, на пример, поље (1, 3) и ставља $x_{13} = \min\{a_1, b_3\} = 22$, при чему се a_1 редукује на 26. Како се b_3 анулира, трећа колона се искључује из даљег разматрања. Даље се бира поље (2, 5) и ту је $x_{25} = \min\{a_2, b_5\} = 26$, $a_2 = 4$, $b_5 = 0$, па се искључује пета колона. Сада се поново појављују три минималне цене $c_{14} = c_{21} = c_{24} = 6$. Бира се, на пример, поље (1, 4) и ставља $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{26, 12\} = 12$, $a_1 = 14$, $b_4 = 0$, што искључује четврту колону. Следује $x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{4, 18\} = 4$, што искључује другу врсту и смањује b_1 на 14. Остају још само 4 слободна поља а поље (3, 2) има минималну цену $c_{32} = 7$, што даје још једну базисну променљиву, $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{27, 27\} = 27$ и искључује трећу врсту и другу колону. Једино преостало слободно поље је (1, 1) и у њему је коначно $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{14, 14\} = 14$. Цена укупног транспорта је сада

Табела 7

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	$\boxed{10}$ 4	8	$\boxed{5}$ 22	$\boxed{6}$ 12	9
30	$\boxed{6}$ 4	7	8	6	$\boxed{5}$ 26
27	8	$\boxed{7}$ 27	10	8	7
20	7	5	$\boxed{4}$ 20	6	8

$$L^0 = 10{\cdot}14 + 6{\cdot}4 + 7{\cdot}27 + 5{\cdot}22 + 4{\cdot}20 + 6{\cdot}12 + 5{\cdot}26 = 745,$$

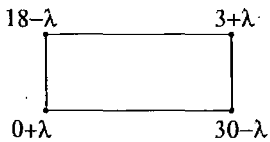
што је боље почетно решење од оног које смо добили методом северозападног угла.

Прерасподела по циклусу. Сада ћемо размотрити један од многих метода за сукцесивно побољшавање почетног базисног решења, и то је *метод прерасподеле по циклусу*. У почетној таблици (Табела 8) се уочи непаран број базисних поља (то су поља која садрже базисне променљиве) и једно слободно поље у таквом положају да се сва ова поља могу повезати затвореном полигоналном линијом која се састоји само од хоризонталних и вертикалних сегмената.

На пример, ако се вратимо на почетно базисно решење (40) добијено методом северозападног угла, видимо да базисна поља (1, 1), (1, 3) и (2, 3) леже у теменима правоугаоника чије четврто теме стоји у слободном пољу (2, 1). Ово је затворена полигонална линија која испуњава горње услове, и коју зовемо *циклус*. Ако сада базисну променљиву $x_{11} = 18$, умањимо за неку величину $\lambda > 0$, суседну променљиву у циклусу, $x_{13} = 3$ морамо повећати за исту вредност, следећу, $x_{23} = 30$, такође умањујемо тако да ће се у слободном пољу појавити вредност $x_{21} = 0 + \lambda$ (Слика 20).

Табела 8

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	**10** 18	**8** 27	**5** 3	**6**	**9**
30	**6**	**7**	**8** 30	**6**	**5**
27	**8**	**7**	**10** 9	**8** 12	**7** 6
20	**7**	**5**	**4**	**6**	**8** 20



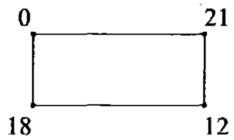
$$X^0 = \begin{bmatrix} 18 & 27 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Слика 20. Циклус у почетном базисном решењу

Вредност λ треба тако изабрати да нове вредности променљивих у теменима циклуса буду ненегативна а само једна од њих да буде једнака 0. То доводи до правила $\lambda = \min\{18, 30\}$, тј. бира се мања од почетних базисних вредности које леже на супротним угловима у правцу северозапад-југоисток. Тако добијамо нове вредности променљивих као на Слици 21. Нова вредност променљиве x_{11} је 0 чиме она постаје слободна променљива док x_{21} добија вредност 18 и улази у базисно решење X^1 (Слика 21). Нова вредност функције циља је сада

$$L^1 = 8 \cdot 27 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 18 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 9 + 8 \cdot 12 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 20 = 913,$$

док је $L^0 = 1039$ (формула (41)). Наиме, почетна вредност на циклусу $\{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 1)\}$ је 435, док је са новим вредностима променљивих вредност 309, чиме се добија боља укупна цена (Слика 21).



$$X^1=\begin{bmatrix} 0 & 27 & 21 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Слика 21. Прерасподела по циклусу

Наравно, има више могућности за избор циклуса, као што је показано на Слици 22, и њихов облик не мора да буде нужно правоугаони. Вредност λ за циклус на Слици 22, доле лево, била би $\lambda = \min\{18, 20\} = 18$, а за случај десно $\lambda = \min\{27, 20\} = 20$.

Да бисмо унапред могли да одредимо који циклус води ка смањивању вредности функције циља, за слободно поље (p, q) формирамо величину γ_{pq} коју зовемо *цена циклуса*

$$\gamma_{pq} = \sum_{par} c_{ij} - \sum_{nepar} c_{ij}\,, \tag{42}$$

при чему *парна* сума, $\sum\limits_{par}$, означава суму цена у парним чворовима циклуса почев од нултог у слободном пољу (p, q), а *непарна*, $\sum\limits_{nepar}$, суму цена у непарним чворовима циклуса. Како сваки циклус има паран број чворова, половина чворова су парни а друга половина непарни. Крећући се по циклусу почев од нултог поља, (p, q) које има знак +, знак се наизменично мења док се не стигне до последњег чвора у циклусу, са знаком $-$. На Слици 22, дати су примери цена за назначене циклусе:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11} = 6 - 8 + 5 - 10 = -7,$$
$$\gamma_{15} = c_{15} - c_{13} + c_{33} - c_{35} = 9 - 5 + 10 - 7 = +7,$$
$$\gamma_{41} = c_{41} - c_{45} + c_{35} - c_{33} + c_{13} - c_{11} = 7 - 8 + 7 - 10 + 5 - 10 = -9,$$
$$\gamma_{42} = c_{42} - c_{45} + c_{35} - c_{33} + c_{13} - c_{12} = 5 - 8 + 7 - 10 + 5 - 8 = -9,$$

тако да прерасподела по циклусу поља (2, 1) остварује смањење функције L, док прерасподела по циклусу поља (1, 5), ту функцију повећава. Сложенији циклуси γ_{41} и γ_{42}, такође воде ка минимизацији.

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	10 / 18	8 / 27	5 / 3	6	9
30	6	7	8 / 30	6	5
27	8	7	10 / 9	8 / 12	7 / 6
20	7	5	4	6	8 / 20

$\gamma_{21} = 6-8+5-10 = -7$

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	10 / 18	8 / 27	5 / 3	6	9
30	6	7	8 / 30	6	5
27	8	7	10 / 9	8 / 12	7 / 6
20	7	5	4	6	8 / 20

$\gamma_{15} = 9-5+10-7 = +7$

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	10 / 18	8 / 27	5 / 3	6	9
30	6	7	8 / 30	6	5
27	8	7	10 / 9	8 / 12	7 / 6
20	7	5	4	6	8 / 20

$\gamma_{41} = 7-8+7-10+5-10 = -9$

a_i \ b_j	18	27	42	12	26
48	10 / 18	8 / 27	5 / 3	6	9
30	6	7	8 / 30	6	5
27	8	7	10 / 9	8 / 12	7 / 6
20	7	5	4	6	8 / 20

$\gamma_{42} = 5-8+7-10+5-8 = -9$

Слика 22. Могуће алтернативне конфигурације циклуса

Метод потенцијала. Нека је дат транспортни проблем (36) – (39) затвореног типа (дакле, за који је $\sum a_i = \sum b_j$). Претпоставимо да произвођачки центар A_i за транспорт јединице производа плаћа α_i новчаних јединица а потрошачки центар B_j плаћа β_j јединица. Величине α_i и β_j се зову *потенцијалне цене* (*потенцијали*). Укупно, за транспорт јединице производа x_{ij} стоји на располагању износ од $\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij}$ новчаних јединица који ћемо звати *јединична псеудоцена* транспорта из A_i у B_j. Под условом да је задат скуп парова потенцијала

(43) $$\{(\alpha_i, \beta_j) \mid i = 1,\dots, m;\ j = 1,\dots, n\},$$

укупна *псеудоцена транспорта* ће бити

(44) $$\tau = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i + \beta_j)x_{ij}.$$

Теорема 17. *За фиксирани скуп парова* (43), *псеудоцена* τ *дата са* (44) *је константна за сваки допустиви план транспорта* $X = [x_{ij}]_{m\times n}$.

Доказ. Према (44), за псеудоцену важи

$$\tau = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i + \beta_j)x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}}_{a_i} + \sum_{j=1}^{n}\beta_j \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}}}_{b_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\, a_i + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\, b_j = \text{Const.} \ \square$$

Теорема 18. *Ако у таблици транспортног проблема за сва базисна поља (поља за која је* $x_{ij} > 0$*) важи* $\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, *а за сва слободна поља* ($x_{ij} = 0$) *важи* $\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, *план транспорта је оптималан.*

Доказ. Нека је задат транспортни план $X = [x_{ij}]$ такав да парови потенцијала (α_i, β_j) задовољавају услове

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij} &= c_{ij}, \quad x_{ij} > 0, \\ \tilde{c}_{ij} &\le c_{ij}, \quad x_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Тада, за произвољан транспортни план $X' = [x'_{ij}]$, на основу (45) важи

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x'_{ij} = \tau,$$

што је константа према Теореми 17. На основу (45) је такође

$$\tau = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}.$$

Дакле, $L \ge \tau = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x^{*}_{ij} = L_{\min}$, па је план $X^* = X$ оптималан. $\square$

Може се показати да за сваки пар потенцијала (α_i, β_j), цена (42) циклуса поља (i, j) има вредност $\gamma_{ij} = c_{ij} - \tilde{c}_{ij}$.

На основу свега наведеног можемо утврдити комплетан алгоритам за решавање транспортног проблема затвореног типа (36) – (39):

1. Одредити бар једно почетно базисно решење $X^0 = [x_{ij}^0]_{m\times n}$ у коме је $m + n - 1$ променљивих $x_{ij} > 0$;
2. За X^0 одредити (α_i, β_j) за свако базисно поље $(x_{ij} > 0)$ тако да је $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, при чему се једна од променљивих α_i или β_j бира произвољно (на пример, $\alpha_1 = 0$).
3. За слободна поља $(x_{ij} = 0)$ израчунати псеудоцене $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, а затим формирати матрицу $\gamma = [\gamma_{ij}]_{m\times n} = C - \tilde{C} = [c_{ij} - \tilde{c}_{ij}]_{m\times n}$. Уколико је $\gamma \geq \mathbf{0}$, оптимално решење је постигнуто. У противном, прећи на корак 4.
4. Одредити $\min\{\gamma_{ij}\} = \gamma_{pq} (< 0)$. Одговарајуће поље (p, q) је слободно поље на које се поставља циклус прерасподеле који доводи до новог транспортног плана. Прећи на корак 2.

Пример 1. Решити транспортни проблем

$$\boldsymbol{a} = [25 \quad 55 \quad 22]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b} = [45 \quad 15 \quad 22 \quad 20]^{\mathrm{T}}, \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решење. Како је $\sum a_i = \sum b_j = 102$, проблем је затвореног типа па можемо да применимо алгоритам 1 – 4. Почетна таблица са подацима дата је у Табели 9.

Табела 9

a_i \ b_j	45	15	22	20
25	**9**	**5**	**3**	**10**
55	**6**	**3**	**8**	**2**
22	**3**	**8**	**4**	**8**

Табела 10

a_i \ b_j	45	15	22	20
25	**9** 3	**5**	**3** 22	**10**
55	**6** 20	**3** 15	**8**	**2** 20
22	**3** 22	**8**	**4**	**8**

Почетно базисно решење X^0 налазимо методом минималне цене:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 22 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 20 \\ 22 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L^0 = 424.$$

За свако базисно поље формирамо пар потенцијала (α_i, β_j), тако да је $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, при чему бирамо $\alpha_1 = 0$. Тако је $\beta_1 = 9$, $\beta_3 = 3$. Ово даље повлачи да је $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = -6$, $\beta_2 = 6$ и $\beta_4 = 5$. Добијене вредности уписујемо у нову табелу уместо a_i и b_j (Табела 11).

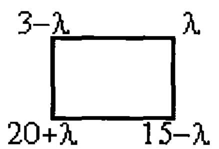
Табела 11

α_i \ β_j	9	6	3	5
0	9 3	5	3 22	10
−3	6 20	3 15	8	2 20
−6	3 22	8	4	8

Како је

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0+9 & 0+6 & 0+3 & 0+5 \\ -3+9 & -3+6 & -3+3 & -3+5 \\ -6+9 & -6+6 & -6+3 & -6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

матрица разлике је $\gamma^0 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, па је $\min \gamma_{ij} = \gamma_{12} = -1$.



Дакле, слободно поље (1, 2) постаје теме циклуса који ће садржати суседна три базисна поља, као што је приказано у Табели 11. Одређује се $\lambda = \min\{3, 15\} = 3$, тако да је нова таблица дата у Табели 12. Сада је

$$\gamma^1 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Табела 12

α_i \ β_j	8	5	3	4
0	9	5 3	3 22	10
−2	6 23	3 12	8	2 20
−5	3 22	8	4	8

Дакле, $\gamma_{ij} > 0$, тј. $\gamma^1 > 0$, па је на основу Теореме 18 план

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 22 & 0 \\ 23 & 12 & 0 & 20 \\ 22 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X^*$$

оптималан, а минимална цена транспорта је $L^1 = L_{\min} = 361$.

Пример 2. Решити транспортни проблем

$$\boldsymbol{a} = [6 \quad 1 \quad 10]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b} = [7 \quad 5 \quad 3 \quad 2]^{\mathrm{T}}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решење. Проблем је затвореног типа. Методом минималне цене добијамо полазно базно решење $X^0 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, тако да имамо нову транспортну таблицу (Табела 13). Израчунавамо матрицу псеудоцена $\tilde{C}$ и даље

$$\gamma^0 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Табела 13

α_i \ β_j	2	5	12	6
0	**2** 6	**3**	**11**	**7**
–5	**1**	**0** 1	**6**	**1**
3	**5** 1	**8** 4	**15** 3	**9** 2

Како је $\min \gamma_{ij} = \gamma_{12} = -2$, постављамо циклус у темена (1, 1), (1, 2), (3, 2) и (3, 1). За λ бирамо вредност $\lambda = \min\{6, 4\} = 4$, тако да на основу нове таблице израчунавамо

$$\gamma^1 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Табела 14

α_i \ β_j	2	3	12	6
0	**2** 2	**3** 4	**11**	**7**
–3	**1**	**0** 1	**6**	**1**
3	**5** 5	**8**	**15** 3	**9** 2

Како је $\min \gamma_{ij} = \gamma_{23} = -3$, имамо нови циклус, са полазним теменом (2, 3) и још пет темена (Табела 14). Сада је

$$\lambda = \min\{2, 1, 3\} = 1,$$

и после прерасподеле добијамо Табелу 15. Следећа матрица разлика је

$$\gamma^2 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ и}$$

$$\min \gamma_{ij} = \gamma_{13} = -1,$$

Дакле, нови циклус је постављен на поље (1, 3). Одређује се $\lambda = \min\{1, 2\} = 1$, тако да после прерасподеле добијамо нову таблицу (Табела 16). Сада је матрица разлика

Табела 15

α_i \ β_j	2	3	12	6
0	**2** 1	**3** 5	**11**	**7**
–6	**1**	**0** 1	**6** 1	**1**
3	**5** 6	**8**	**15** 2	**9** 2

Табела 16

α_i \ β_j	1	3	11	5
0	2	3 5	11 1	7
−5	1	0	6 1	1
4	5 7	8	15 1	9 2

$$\gamma^3 = C - \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$ што значи да је $X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = X^*$ оптимално решење. Оптимална вредност функције циља је $L_{\min}=100$.

3. ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНЕ НЕЛИНЕАРНЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

3.1. Унимодалност и интервал неодређености

Размотримо задатак оптимизације функције F, која зависи од једне променљиве λ. Уобичајени метод оптимизације функције F, састоји се у решавању једначине $dF/d\lambda = 0$ по λ. Међутим, у пракси овај метод се ретко користи. Разлози за то су:

1. F није диференцијабилна;

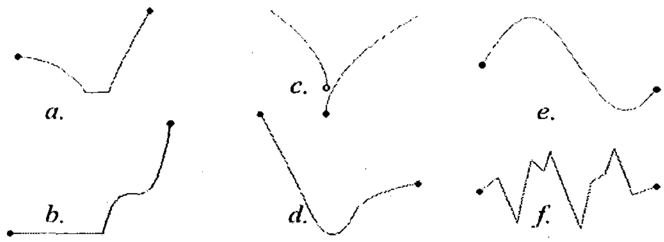
2. Код проблема вишедимензионалне оптимизације, функција F се формира од циљне функције f, тако да је $F(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d})$, $\mathbf{x},\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, па се једначина $dF/d\lambda = 0$ своди на $\mathbf{d}^T \nabla f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) = 0$, која је обично нелинеарна по λ и која се најлакше решава нумерички;

3. Функција F може да буде задата табеларно, тј. на дискретном скупу тачака.

Због свега овога једино се могу применити нумеричке процедуре за оптимизацију функције F. Од кључног значаја је појам унимодалности.

Дефиниција 19. Функција $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ је *унимодална* ако на интервалу $[a, b]$ има један и само један екстремум (максимум или минимум). Ако се овај екстремум достиже у само једној тачки из $[a, b]$, функција је *строго унимодална.* Ако функција има више екстремума на $[a, b]$ она је *мултимодална.*

Очигледно, конвексне или конкавне функције су унимодалне а строго конвексне (конкавне) су строго унимодалне.



Слика 23. Функције: унимодалне (*a.* и *b.*); строго унимодалне (*c.* прекидна; *d.* непрекидна); мултимодалне (*e.* и *f.*)

Слично методама за нумеричко израчунавање нула полинома, где се нуле најпре грубо лоцирају тј. изолују у дисјунктне интервале, и екстреми се могу изоловати тако што се из области дефинисаности S циљне функције f издвоје подобласти унимодалности $S_1, S_2, ..., S_k$, чиме се проблем налажења екстремума функције f своди на k подпроблема са унимодалним функцијама, који су лакши за решавање.

У даљем тексту, осим ако другачије није речено, сматраћемо да унимодална или строго унимодална функција достиже минимум на интервалу $\Delta_1 = [a_1, b_1]$. Уколико унимодална (строго унимодална) функција достиже максимум на Δ_1, тада ћемо уместо F посматрати функцију $-F$, која је такође унимодална (строго унимодална) али достиже минимум на Δ_1.

Теорема 19. *Нека је* f *унимодална функција на* $S(\neq\emptyset) \subset \mathbb{R}^n$, *где има минимум. Тада за произвољно* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ *и* $\lambda \in (0, 1)$ *важи неједнакост*

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}) \leq \max\,\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}.$$

У случају строге унимодалности, важи неједнакост

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}) < \max\,\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}.$$

Може се показати да је функција f унимодална са минимумом тада и само тада када је скуп $S_\alpha = \{\mathbf{x} \in S \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ конвексан за произвољно реално α.

Размотримо задатак минимизације унимодалне функције једне промењљиве $\min_{a<x<b} F(x)$. Једина информација о минимуму долази из саме поставке задатка а то је да се он налази негде у интервалу $[a, b]$. Због тога се тај интервал назива *интервал неодређености.* Методи решавања задатка који ће у даљем тексту бити наведени базирају се на смањивању дужине интервала неодређености, издвајањем из тог интервала оних његових делова који не садрже минимум. Следећа теорема даје теоријску основу овог поступка.

Теорема 20. *Нека је* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *строго унимодална функција. Нека је* $p, q \in [a, b]$ *и* $p < q$. *Ако је* $F(p) > F(q)$, *тада је* $F(x) \geq F(p)$, *за свако* $x \in [a, p)$. *Ако је* $F(p) \leq F(q)$, *тада је* $F(x) \geq F(q)$, *за свако* $x \in (q, b]$.

Последица. *Нека је* F *строго унимодална са минимумом на* (a_1, b_1) *и нека је* $a_1 < p < q < b_1$. *Тада је* $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ *нови интервал неордеђености, и притом је*

i) $a_2 = p, b_2 = b_1$ *за* $F(p) > F(q)$;

ii) $a_2 = a_1, b_2 = q$ *за* $F(p) < F(q)$.

Алгоритми за одређивање екстрема унимодалних функција се традиционално деле на оне који не користе и оне који користе изводе циљне функције. Друга подела је на *директне* (*паралелне*) и *итеративне* методе. Код директних метода сви подаци потребни за рад алгоритма су познати унапред док се код итеративних метода подаци који се користе у k-том кораку израчунавају у $(k-1)$-вом кораку.

3.2. Алгоритми претраживања без коришћења извода

i. ***Алгоритам равномерног претраживања***

Равномерно претраживање је пример директног (паралелног) претраживања, када се тачке у којима се израчунавају вредности функције, бирају унапред. Интервал неодређености $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, дужине $|\Delta_1| = b_1 - a_1$, дели се на $n + 1$ еквидистантних подинтервала дужине h, мрежом тачака $x_k = a_1 + kh$, $k = 1, \ldots, n$, где је $h = \dfrac{b_1 - a_1}{n+1} = \dfrac{|\Delta_1|}{n+1}$, $x_0 = a_1$, $x_{n+1} = b_1$.

Функција F се израчунава у свакој од n унутрашњих тачака мреже: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Нека је x_k тачка мреже са најмањом вредношћу функције F. Како је функција F строго унимодална, тачка њеног минимума (после n израчунавања) припада интервалу $\Delta_n = [x_k - h, x_k + h]$, и то је нови интервал неодређености. Дужина овог интервала је

(46) $$|\Delta_n| = 2h = \frac{2}{n+1}|\Delta_1|.$$

Однос дужине интервала на крају примене алгоритма, дакле после n–тог корака и дужине почетног интервала $E = \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_1|}$ назива се *коефицијент контракције*. Овај коефицијент карактерише *ефикасност* алгоритма. Ефикасност је утолико већа уколико је E ближе нули, тј. уколико је контракција већа.

Из (46) следује да је коефицијент контракције алгоритма равномерног претраживања $E = \frac{2}{n+1}$. Одатле се може израчунати доња граница броја подеоних тачака потребна да би се достигла контракција E, то је $n \geq \left\lceil \frac{2}{E} - 1 \right\rceil$, при чему функција $\lceil x \rceil$ означава "највеће цело" реалног броја x, тј. најмањи цели број $\geq x$.

ii. ***Алгоритам дихотомног претраживања***

Нека је F: $[a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ строго унимодална функција коју треба минимизирати на интервалу $\Delta_1 = [a_1, b_1]$. Да бисмо формирали стратегију за добијање ефикасног алгоритма претраживања, користићемо Теорему 20. Последица ове теореме је да је најмањи број израчунавања вредности функције F која су потребна за скраћивање интервала неодређености једнак два, на пример, $F(p)$ и $F(q)$ где су $p, q \in [a_1, b_1]$. После тог израчунавања, нов интервал неодређености је или $[a_1, q]$ или $[p, b_1]$. Алгоритам ће бити утолико ефикаснији уколико су ови интервали краћи. Дакле, наша стратегија би се могла састојати у минимизацији максимума дужина ова два интервала. Размотримо два екстремна случаја.

Први, да се тачке p и q бирају овако: $p = a_1$ и $q = b_1$. Тада су оба кандидата за нови интервал неодређености иста и поклапају се са полазним интервалом $[a_1, b_1]$. Овај избор није од користи јер не смањује дужину интервала, тј. нови интервал неодређености се поклапа са почетним Δ_1.

Други, да се обе тачке изаберу у средини интервала, $p = q = (a_1 + b_1)/2$. Тада су нови могући интервали неодређености лева и десна половина полазног интервала $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$. Тиме смо добили максималну контракцију али се вредности функције $F(p)$ и $F(q)$ поклапају, тако да више немамо неопходну информацију о смеру опадања функције F.

Дакле, да би нови интервали били што мањи а да се при томе очува информација о унимодалности, бирамо мало $\varepsilon > 0$ и

$$p = (a_1 + b_1)/2 - \varepsilon, \quad q = (a_1 + b_1)/2 + \varepsilon,$$

тако да нови интервал неодређености има дужину $|\Delta_2| = (b_1 - a_1)/2 + \varepsilon$. Ово је, за мало ε, блиско теоријском минимуму интервала, с тим да су вредности функције $F(p)$ и $F(q)$ још увек различите. Због тога се овај метод зове метод дихотомије, од старогрчке речи *dihotomos* = дељење на пола.

На основу овога се лако конструише алгоритам дихотомног претраживања, чији је k-ти корак садржан у израчунавању

$$p_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon, \quad q_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon,$$

и стављању

$$a_{k+1} = a_k \text{ и } b_{k+1} = q_k \text{ ако је } F(p_k) < F(q_k),$$

или

$$a_{k+1} = p_k \text{ и } b_{k+1} = b_k \text{ ако је } F(p_k) > F(q_k).$$

Итеративни поступак се зауставља ако дужина добијеног интервала неодређености $|\Delta_n|$ постане мања од неке унапред задате вредности која карактерише тачност поступка.

Приметимо да је дужина интервала неодређености на почетку n-те итерације једнака $|\Delta_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|\Delta_1| + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, тако да је коефицијент контракције дихотомног претраживања једнак

$$E = \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_1|} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2\varepsilon}{|\Delta_1|}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Теоријски, најбоља ефикасност се постиже у граничном случају, кад $\varepsilon \to 0$, али тада алгоритам неће моћи да отпочне због информационог колапса. Међутим, може се узети да је ε занемарљиво у односу на величину почетног интервала $|\Delta_1| = b_1 - a_1$, тако да се добија $E \approx (1/2)^{n-1}$ или, прецизније $E \leq (1/2)^{n-1}$. Доња граница броја итерација која обезбеђује контракцију E је $n \geq \left\lceil 1 - \frac{\ln E}{\ln 2} \right\rceil$.

iii. ***Алгоритам златног пресека***

Нека је на k-тој итерацији алгоритма претраживања интервал неодређености $[a_k, b_k]$. На основу Теореме 20, нови интервал неодређености $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ је једнак $[p_k, b_k]$, ако је $F(p_k) > F(q_k)$ и $[a_k, q_k]$ ако је $F(p_k) \leq F(q_k)$. Тачке p_k и q_k се бирају полазећи од следећих услова:

1. Дужина новог интервала неодређености $b_{k+1} - a_{k+1}$ не зависи од резултата на k-тој итерацији, тј. од тога која је од неједначина $F(p_k) > F(q_k)$ или $F(p_k) \leq F(q_k)$ задовољена. Поред тога, треба да важи једнакост $b_k - p_k = q_k - a_k$. Како тачка p_k лежи у унутрашњости интервала $[a_k, b_k]$, она се увек може написати као конвексна комбинација крајњих тачака (Каратеодоријева теорема, Теорема 3), тј. $p_k = \phi\, a_k + (1 - \phi)\, b_k$, или

(47) $$p_k = a_k + (1 - \phi)(b_k - a_k),$$

где је ϕ реалан број из интервала (0, 1). Слично, из једнакости $b_k - p_k = q_k - a_k$, следује $q_k = (1 - \phi)\, a_k + \phi\, b_k$, тј.

(48) $$q_k = a_k + \phi\,(b_k - a_k).$$

2. За нову итерацију, тачке p_{k+1} и q_{k+1} се бирају тако да се или p_{k+1} поклопи са q_k, или да се q_{k+1} поклопи са p_k. Ако је ово остварено, тада је на (k+1)-ој итерацији потребно само једно ново израчунавање функције. Да бисмо ово показали, размотримо следећа два случаја:

Случај 1. Нека је $F(p_k) > F(q_k)$. У овом случају је $a_{k+1} = p_k$ и $b_{k+1} = b_k$. Употребићемо једнакост (47) уз замену k са k+1. За $p_{k+1} = q_k$, имамо

$$q_k = p_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \phi)(b_{k+1} - a_{k+1}) = p_k + (1 - \phi)(b_k - p_k).$$

Заменом израза за p_k и q_k из (47) и (48), добијамо квадратну једначину по ϕ

(49) $$\phi^2 + \phi - 1 = 0.$$

Случај 2. Нека је $F(p_k) \le F(q_k)$. У овом случају је $a_{k+1} = a_k$ и $b_{k+1} = q_k$. Сада користимо (48) уз замену k са $k+1$. За $q_{k+1} = p_k$ имамо

$$p_k = q_{k+1} = a_{k+1} + \phi\,(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \phi\,(b_k - a_k).$$

Замењујући изразе (47) и (48) у последњој једначини добијамо поново квадратну једначину $\phi^2 + \phi - 1 = 0$, тј. једначину (49). Корени ове једначине су $\phi_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$ и $\phi_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$. Како ϕ треба да буде из интервала (0, 1) одбацујемо негативно решење па је $\phi = \phi_2 \approx 0.618$. На тај начин, ако су на k-тој итерацији q_k и p_k изабрани у сагласности са (47) и (48), где је $\phi \approx 0.618$, дужина интервала $|\Delta_k|$ се скраћује за ϕ, тј. приближно 0.618 од првобитне дужине. У првој итерацији су потребна два израчунавања функције у тачкама p_1 и q_1, али на свакој другој је потребно само једно израчунавање, пошто је или $p_{k+1} = q_k$ или $q_{k+1} = p_k$. Како су дужине сукцесивних интервала неодређености повезане релацијом

$$|\Delta_{k+1}| = b_{k+1} - a_{k+1} = \phi\,(b_k - a_k) = \phi\,|\Delta_k|,$$

ефикасност метода је одређена фактором контракције $E = |\Delta_n|/|\Delta_1| = \phi^{n-1}$.

Одатле, $n \ge \left\lceil 1 + \dfrac{\ln E}{\ln \phi} \right\rceil$ при чему је $\ln \phi \approx -0.4812$.

Примедба. Метод "златног пресека" је добио назив према броју "златног пресека" $\phi = (-1+\sqrt{5})/2$, који даје најлепши однос при подели дужи или неке друге целине на два неједнака дала (однос 1 : ϕ). Овај однос је био основа пропорцијског система који је први у својим скулптурама и грађевинама систематски користио антички вајар Фидија (*Φιδιασ*, око 490. – око 430. пне), чиме је постигао врхунске естетске резултате.

Пример. Размотримо следећи минимизациони задатак:

$$\min_{-3 \le \lambda \le 5} \lambda^2 + 2\lambda\,.$$

Циљна функција $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$ је строго конвексна на $\mathbb{R}$, а почетна дужина интервала неодређености $[-3, 5]$ је $|\Delta_1| = 8$. Методом златног пресека, редуковаћемо овај интервал неодређености до интервала Δ_n, чија је дужина $|\Delta_n| \le 0.2$. Прве две тачке се одређују на следећи начин:

$$p_1 = -3 + (1 - 0.618)(5 - (-3)) = 0.056, \qquad q_1 = -3 + 0.618(5 - (-3)) = 1.944.$$

Овде је $F(p_1) < F(q_1)$, а то значи да треба поступи као у случају 2. Сада имамо нови интервал неодређености [–3, 1.944]. Овај процес се понавља и резултати одговарајућих израчунавања наведени су у табели. Вредности функције F које се израчунавају у свакој итерацији, означене су звездицом.

Табела 17

k	a_k	b_k	p_k	q_k	$F(p_k)$	$F(q_k)$
1	–3.000	5.000	0.056	1.944	0.115*	7.667*
2	–3.000	1.944	–1.112	0.056	–0.987*	0.115
3	–3.000	0.056	–1.832	–1.112	–0.308*	–0.987
4	–1.832	0.056	–1.112	–0.664	–0.987	–0.887*
5	–1.832	–0.664	–1.384	–1.112	–0.853*	–0.987
6	–1.384	–0.664	–1.112	–0.936	–0.987	–0.996*
7	–1.384	–0.936	–1.208	–1.112	–0.957*	–0.987
8	–1.208	–0.936	–1.112	–1.032	–0.987	–0.999*
9	–1.112	–0.936				

После осме итерације која садржи девет израчунавања функције, интервал неодређености је једнак Δ_8 = [–1.112, –0.936], па се као тачка минимума може узети, на пример, средина овог интервала, тј. –1.024. Иначе, тачно решење задатка је $\lambda^* = -1$.

3.3. Алгоритми претраживања са коришћењем извода

i. ***Метод половљења интервала***

Као и у претходним одељцима, решавамо оптимизациони проблем $\min\limits_{a<\lambda<b} F(\lambda)$, с тим што је функција F унимодална и диференцијабилна. Нека је у k-тој итерацији интервал неодређености једнак $[a_k, b_k]$. Претпоставимо да је извод $F'(\lambda_k)$ познат и размотримо следећа три могућа случаја:

1. Ако је $F'(\lambda_k) = 0$, тада из строге унимодалности функције F следује да је λ_k тачка минимума.

2. Ако је $F'(\lambda_k) > 0$, тада за $\lambda > \lambda_k$ имамо $F'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) > 0$ и на основу строге унимодалности функције F значи да је $F(\lambda) \geq F(\lambda_k)$. Другим речима, минимум лежи лево од λ_k, тако да је нови интервал неодређености $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \lambda_k]$.

3. Ако је $F'(\lambda_k) < 0$, тада је $F'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) > 0$ за $\lambda < \lambda_k$ па је $F(\lambda) \geq F(\lambda_k)$. На тај начин минимум је десно од λ_k и нови интервал неодређености биће $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\lambda_k, b_k]$.

Положај λ_k на интервалу $[a_k, b_k]$ треба да буде изабран тако да би могла да се минимизира максимална могућа дужина новог интервала неодређености, тј. да се минимизира $\max\{\lambda_k - a_k , b_k - \lambda_k \}$. Очигледно, оптимални положај λ_k је средина текућег интервала $(a_k + b_k)/2$.

На тај начин, на било којој итерацији k извод F' се израчунава у средњој тачки интервала неодређености. У зависности од вредности F' процес се или прекида или се формира нови интервал неодређености, чија је дужина једнака половини дужине претходног интервала. Напоменимо да је ова процедура врло слична методи дихотомног тражења са разликом што на свакој итерацији треба извршити само једно израчунавање. Код методе дихотомног тражења потребна су два израчунавања функције.

Дужина интервала неодређености на почетку n-те итерације је $|\Delta n| = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ тако да метод конвергира ка тачки минимума са унапред задатом тачношћу. Ефикасност метода дефинисана је коефицијентом контракције $E = (1/2)^{n-1}$, док је број итерација потребан да би се постигла контракција E, $n \geq \left\lceil 1 - \frac{\ln E}{\ln 2} \right\rceil$.

Пример. Размотримо минимизациони задатак $\min\limits_{-3 \leq \lambda \leq 6} \lambda^2 + 2\lambda$, при чему треба смањити интервал неодређености тако да његова дужина не прелази 0.2. Дакле, $E = \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_1|} = 0.2/9 = 1/45$. Формула $n \geq \left\lceil -\frac{\ln E}{\ln 2} \right\rceil$ даје $n \geq 6$.

Резултати израчунавања методом поделе наведени су у табели.

Табела 18

k	a_k	b_k	λ_k	$F'(\lambda_k)$
1	–3.0000	6.0000	1.5000	5.0000
2	–3.0000	1.5000	–0.7500	0.5000
3	–3.0000	–0.7500	–1.8750	–1.7500
4	–1.8750	–0.7500	–1.3125	–0.6250
5	–1.3125	–0.7500	–1.0313	–0.0625
6	–1.0313	–0.7500	–0.8907	0.2186
7	–1.0313	–0.8907		

Последњи интервал неодређености је једнак [–1.0313, –0.8907], па за тачку минимума можемо узети средину овог одсечка, тј. –0.961.

ii. ***Њутнов метод***

Њутнов метод се заснива на коришћењу квадратне апроксимације функције F у задатој тачки λ_k, а то је Тејлоров полином другог степена за функцију F, који ћемо означити са q:

$$q(\lambda) = F(\lambda_k) + F'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{1}{2}F''(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^2.$$

За λ_{k+1} бира се тачка у којој је извод функције q једнака нули, тј.

$$q'(\lambda) = F'(\lambda_k) + F''(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) = 0,$$

што даје

(50) $$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{F'(\lambda_k)}{F''(\lambda_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Процес се прекида када је $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$ или када је $|F'(\lambda_k)| < \varepsilon$, где је ε унаред задат мали позитиван број. Наведена процедура може се применити само на двапут диференцијабилне функције. Сем тога, процедура је дефинисана само у случају када је $F''(\lambda_k) \neq 0$ за свако k.

Пример. Размотримо функцију F, дефинисану на следећи начин:

$$F(\lambda) = \begin{cases} 4\lambda^3 - 3\lambda^4, & \lambda \geq 0, \\ 4\lambda^3 + 3\lambda^4, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Функција F је свуда двапут диференцијабилна. Применимо Њутнов метод за минимизацију $F(\lambda)$, полазећи из две различите тачке.

Табела 19

k	λ_k	$F'(\lambda_k)$	$F''(\lambda_k)$	λ_{k+1}
1	0.400000	1.152000	3.840000	0.100000
2	0.100000	0.108000	2.040000	0.047059
3	0.047059	0.025324	1.049692	0.022934
4	0.022934	0.006167	0.531481	0.011331
5	0.011331	0.001523	0.267322	0.005634
6	0.005634	0.000379	0.134073	0.002807

У првом случају узмимо $\lambda_1 = 0.4$. Како је показано у Табели 19, процедура доводи до тачке 0.002807 после шест итерација. Може се лако проверити, да процес уствари конвергира ка стационарној тачки $\lambda = 0$.

Табела 20

k	λ_k	$F'(\lambda_k)$	$F''(\lambda_k)$	λ_{k+1}
1	0.600	1.728	1.440	−0.600
2	−0.600	1.728	−1.440	0.600
3	0.600	1.728	1.440	−0.600
4	−0.600	1.728	−1.440	0.600

У другом случају узмимо $\lambda_1 = 0.6$. Генерисане тачке, како је показано у Табели 20, наизменично добијају вредности 0.6 и −0.6.

Конвергенцију Њутновог метода специфицира следећа теорема.

Теорема 21. *Нека је* F: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *два пута непрекидно диференцијабилна функција. Размотримо Њутнов алгоритам* (50), *дефинисан пресликавањем*

$$G(\lambda) = \lambda - \frac{F'(\lambda)}{F''(\lambda)}.$$

Нека је λ^* *таква тачка да је* $F'(\lambda^*) = 0$ *и* $F''(\lambda^*) \neq 0$. *Препоставимо, да је почетна тачка* λ_1 *довољно блиска* λ^*, *тако да постоје реални бројеви* k_1 *и* k_2, *такви да је* $k_1k_2 < 1$ *и важи*

1. $\dfrac{1}{|F''(\lambda)|} \geq k_1$,

2. $\dfrac{|F'(\lambda^*) - F'(\lambda) - F''(\lambda)(\lambda^* - \lambda)|}{|\lambda^* - \lambda|} \leq k_2$,

за свако λ, *које задовољава* $|\lambda - \lambda^*| \leq |\lambda_1 - \lambda^*|$. *Тада алгоритам конвергира ка* λ^*.

4. ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНЕ НЕЛИНЕАРНЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

4.1. Алгоритми претраживања без коришћења извода

У овом поглављу, биће речи о методама за решавање задатака минимизације функција више промењљивих, $\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$, без коришћења извода. Готово сви познати методи се своде на следеће: полазећи од почетне тачке $\mathbf{x}^1$, крећемо се дуж неког правца $\mathbf{d}_1$ који је претходно одређен, и минимизира се функција циља f у том правцу. За минимизацију се користе методи једнодимензионалне оптимизације без коришћења извода (алгоритам равномерног претраживања, алгоритам дихотомног претраживања или алгоритам "златног пресека"). Нека је тај минимум нађен у тачки $\mathbf{x}^2$. Затим се одређује нови правац $\mathbf{d}_2$ дуж кога се наставља једнодимензионална оптимизација. Понављајући ову процедуру долазимо до низа парцијалних минимума који се постижу у тачкама $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k, \dots$, при чему је $f(\mathbf{x}^1) > f(\mathbf{x}^2) > \cdots > f(\mathbf{x}^k) > \cdots$. Процес се прекида када разлика $\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$ по модулу постане довољно мала, тј. кад је испуњен критеријум заустављања $\left|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right| < \varepsilon$.

Суштина оваквих метода је управо оптимизација у правцу, коју ћемо објаснити на примеру функције две променљиве.

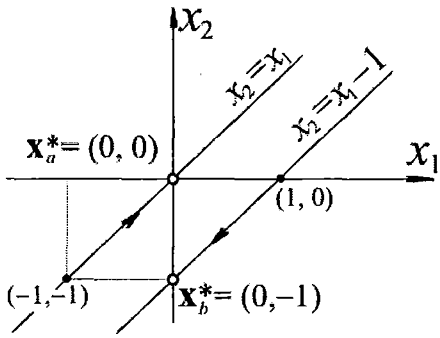
Пример. Минимизирати функцију $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 1$ у правцу $\mathbf{d} = [1 \;\; 1]^T$

a) из тачке $(-1, -1)$,

b) из тачке $(1, 0)$.

Решење. *a*) У (x_1, x_2) - равни, правцу вектора $[1 \;\; 1]^T$, одговара права са коефицијентом правца $k = 1$, а кроз тачку $(-1, -1)$ пролази само једна таква права, $x_2 = x_1$ (Слика 24). Заменом у функцију она се своди на функцију једне променљиве

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1^2 - 2x_1^2 + 1$$
$$= x_1^2 + 1,$$



Слика 24. Минимизација у правцу

која има минимум $\min_{\mathbf{d}} f(x_1, x_2) = 1$ у тачки $x_a^* = (x_1, x_2) = (0, 0)$ (Слика 24).

b) Кроз тачку $(1, 0)$ са истим коефицијентом правца пролази права $x_2 = x_1 - 1$, тако да се на тој правој функција своди на

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + (x_1 - 1)^2 - 2x_1(x_1 - 1) + 1 = x_1^2 + 2.$$

Дакле, $\min_{\mathbf{d}} f(x_1, x_2) = 2$ постиже се у тачки $x_b^* = (x_1, x_2) = (0, -1)$ (Слика 24).

i. *Метод координатног спуста*

Нека је f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ строго унимодална функција, са минимумом у тачки $\mathbf{x}^*$. Метод *координатног спуста* као правце претраживања користи векторе координатних оса, тачније ортова (јединичних вектора): $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$, где је

$\mathbf{d}_j = [0\ldots\ 0\ 1\ 0\ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$, јединични вектор x_j-осе (јединица на j-том месту). На тај начин, при кретању дуж правца $\mathbf{d}_j$ мења се само променљива $\mathbf{x}_j$, а остале компоненте остају фиксиране. Критеријум заустављања је $\left|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right| < \varepsilon$.

Алгоритам координатног спуста

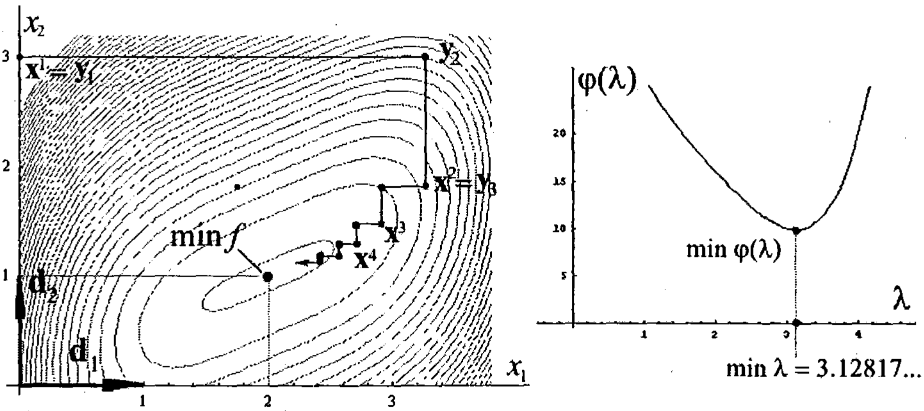
Корак 0. Изабрати број $\varepsilon > 0$ који ће се користити за заустављање алгоритма и за $\mathbf{d}_1,\ldots, \mathbf{d}_n$ узети координатне правце. Изабрати почетну тачку $\mathbf{x}^1$, ставити $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^1$, $k = j = 1$ и прећи на Корак 1.

Корак 1. Ставити $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \lambda_j\,\mathbf{d}_j$ где је λ_j оптимално решење задатка $\min f(\mathbf{y}_j + \lambda\mathbf{d}_j)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ако је $j < n$ ставити $j := j+1$ и вратити се на Корак 1. Ако је $j = n$, прећи на Корак 2.

Корак 2. Ставити $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{y}_{n+1}$. Ако је $\left|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right| < \varepsilon$ треба се зауставити. У супротном ставити $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^{k+1}$, $j = 1$, заменити k са $k+1$ и прећи на Корак 1.

Пример 1. Размотримо следећи задатак

$$\min\ f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{51}$$



Слика 25. Метод координатног спуста

Ниво-линије ове функције приказане су на Слици 25, лево. Тачно решење задатка се може видети из једнакости (51), и то је $f(2, 1) = 0$. Изаберимо почетну тачку $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^1 = [0\ \ 3]^{\mathrm{T}}$, и правац $\mathbf{d}_1 = [1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ у правцу x_1 - осе (Слика 25). Сада решавамо проблем

$$\min f(\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{d}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ставимо $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{d}_1) = f(\lambda, 3) = (\lambda - 2)^4 + (\lambda - 6)^2$, и добијамо конвексну функцију (Слика 25, десно) коју минимизирамо неким од метода једнодимензионалне оптимизације. Добијамо приближно решење $\lambda \approx 3.12817$. Сада је $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{d}_1 = [3.12817 \quad 3]^T$. Нови минимизациони проблем је $\min f(\mathbf{y}_2 + \lambda\mathbf{d}_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, са решењем $\lambda \approx -1.43591$, тако да је $\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda\mathbf{d}_2 = [3.12817 \quad 1.56409]^T$, што је нова тачка итеративног процеса, $\mathbf{x}^2$.

Ако наставимо процес, добићемо резултате који су дати о таблици, из које видимо да је после седам итерација грешка мања од $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

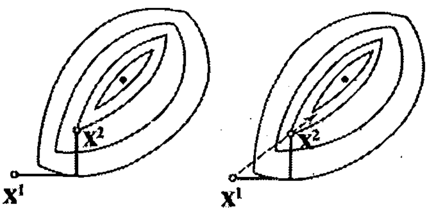
Табела 21

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}^k$	(0., 3.)	(3.13, 1.56)	(2.63, 1.31)	(2.44, 1.22)	(2.35, 1.17)	(2.29, 1.14)	(2.25, 1.12)
$f(\mathbf{x}^k)$	52.	1.63	0.16	0.04	0.015	0.007	0.004

Конвергенција алгоритма координатног спуста. Низ тачака $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$,... алгоритма координатног спуста конвергираће ка оптималној тачки $\mathbf{x}^*$ под следећим условима:

1. Минимум $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, дуж произвољног правца у $\mathbb{R}^n$ је јединствен.

2. Низ тачака $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3,...\}$ које генерише алгоритам припадају ограниченом затвореном скупу.

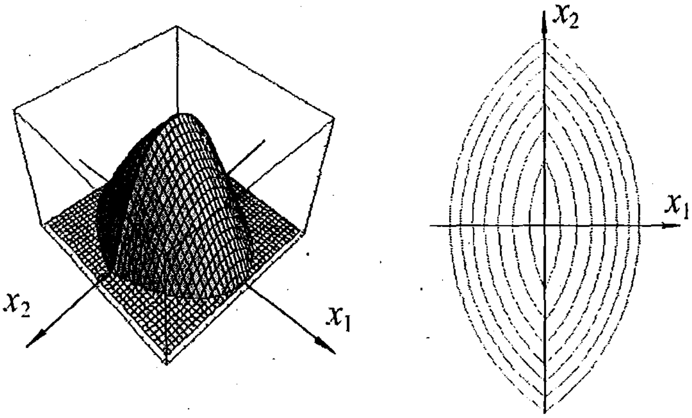


Слика 26. Превазилажење проблема "гребена"

Уколико функција f није диференцијабилна, може се десити да се алгоритам заустави у неоптималној тачки, као што то показује пример функције две променљиве чије су ниво-линије приказане на Слици 26. У овом случају, ниво линије су део по део глатке и имају "преломне" тачке које се јављају као последице постојања "гребена", тј. једнодимензионалног скупа тачака у којој f није диференцијабилна. Тако, кад алгоритам стигне до тачке $\mathbf{x}^2$ (Слика 26, лево) тада ниједан од координатних праваца не води смањењу вредности функције. Ова тешкоћа се превазилази избором новог правца $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$ (Слика 26, десно).

Појам "гребена" илустроваћемо примером функције две променљиве

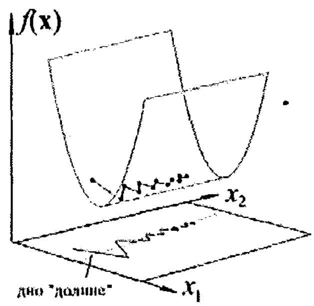
(52) $$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1-(x_1-\frac{1}{2})^2-x_2^{\,2}, & (x_1-\frac{1}{2})^2+x_2^{\,2}\le 1\wedge x_1\le 0,\\ 1-(x_1+\frac{1}{2})^2-x_2^{\,2}, & (x_1+\frac{1}{2})^2+x_2^{\,2}\le 1\wedge x_1\ge 0,\end{cases}$$



Слика 27. Функција (52) са "гребеном"(лево) и ниво-линије (десно)

чији је график приказан на Слици 27. На графику функције (Слика 27, лево) види се "гребен"- скуп тачака недиференцијабилности на површи чија је пројекција права која се поклапа са x_2-осом, тако да ниво-линије (Слика 27, десно) имају тачке "прелома" дуж те осе.

Основни проблем који утиче на брзину конвергенције оваквих метода је успоравање процеса како се приближавамо оптималној тачки. Наиме у близини минимума нагиб градијента (ако је f диференцијабилна) или субградијента (ако није) се приближава нули, или, једноставније речено, стрмина површи брзо опада. Тиме се скраћује корак, дакле напредовање постаје спорије, трајекторија добија карактеристичан "цик-цак" облик и успорава се како се приближавамо минимуму. Нарочито су спори процеси када се оптимална тачка налази у уским "долинама", као на Слици 28. У таквим случајевима, модификација правца спуштања приказана на Слици 26

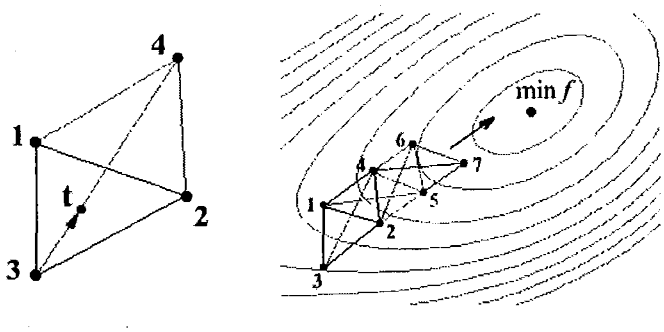


Слика 28. Цик-цак осциловање око дна "долине"

(десно) може довести до значајног убрзавања процедуре. Тада се избор новог, дијагоналног правца $\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k$, назива *убрзавајући корак.*

ii. *Метод флексибилних полиедара*

Овај метод оптимизације недиференцијабилних функција су 1964. предложили Нелдер и Мид за решење проблема $\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$. Суштина метода је избор произвољног n-димензионалног симплекса $\sigma=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}\}$ из скупа $S \subset \mathbb{R}^n$, и одређивање оног темена $\mathbf{v}_k$ симплекса на коме циљна функција f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ има максималну вредност. Очигледно, смер вектора $\mathbf{t}-\mathbf{v}_k$, који је од тог темена усмерен ка тежишту симплекса $\mathbf{t}=\dfrac{\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_{n+1}}{n+1}$ јесте смер опадања вредности функције. Сада се примењује поступак *рефлексије*: на том правцу се проналази тачка која је симетрична слика максималног темена у односу на хиперраван $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, коју дефинишу преостале тачке из σ. Та нова тачка заједно са поменутим тачкама из хиперравни чини нови симплекс на који се примењује иста процедура. Ако се после двеју узастопних рефлексија добије исти симплекс, примењује се поступак *редукције,* тј. смањивања дужина страница симплекса. Тако се добија низ симплекса који се приближава опималној тачки. Поступак је илустрован на Слици 29. На левој страни слике приказан је троугао (симплекс у $\mathbb{R}^2$) са теменима 1, 2 и 3. Нека је циљна функција $f(x_1, x_2)$ строго конвексна и има ниво-линије као на Слици 29, десно. Тада f има највећу вредност на темену 3 и описаним поступком рефлексије добија се теме 4. Затим се процедура понавља са симплексом $\{1, 2, 4\}$ из кога се добија нови симплекс $\{2, 4, 5\}$, затим $\{4, 5, 6\}$, $\{5, 6, 7\}$ итд.



Слика 29. Алгоритам флексибилних полиедара

4.2 Алгоритми претраживања са коришћењем извода

Посматраћемо проблем $\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ при чему је f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функција диференцијабилна у тачки $\mathbf{x}$ и нека је $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$. Раније је поменуто да правац и смер вектора градијента $\nabla f(\mathbf{x})$, у тачки $\mathbf{x}$ показује правац и смер најбржег пораста вредности функције f. Дакле, правац и смер најбржег опадања функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ је дат вектором

$$\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}},$$

или његовим јединичним вектором,

$$\mathbf{d}^0 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

i. ***Метод најбржег пада***

Слично методу координатног спуста, метод најбржег пада користи једнодимензионалну минимизацију али у правцу негативног градијента, у сваком од корака алгоритма.

Алгоритам најбржег пада

Корак 0. Изабрати $\varepsilon > 0$ као критеријум заустављања алгоритма. Изабрати почетну тачку $\mathbf{x}^1$, ставити $k = 1$ и прећи на Корак 1.

Корак 1. Ако је $|\nabla f(\mathbf{x}^k)| < \varepsilon$, алгоритам се зауставља. У супротном, ставити $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$ и одредити λ_k, оптимално решење задатка $\min f(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}_k)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ставити $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}_k$, k заменити са $k+1$ и вратити се на Корак 1.

Пример 2. Применимо алгоритам најбржег пада на задатак (51)

$$\min\ f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

са почетком у истој тачки $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 3]^T$, и зауставним критеријумом $\varepsilon = 0.1$. Правац претраживања је негативни градијент у полазној тачки

$$\mathbf{d}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}^1) = -\begin{bmatrix} 4(x_1-2)^3 + 2(x_1-2x_2) \\ -4(x_1-2x_2) \end{bmatrix}_{(x_1,x_2)=(0,3)} = \begin{bmatrix} 44 \\ -24 \end{bmatrix},$$

тако да долазимо до једнодимензиомналног проблема $\min f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Он се своди на $\min 16(1+22\lambda)^4 + 4(3+46\lambda)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, чије је приближно решење $\lambda \approx -0.0615348$. Тако се добија нова тачка (Слика 20)

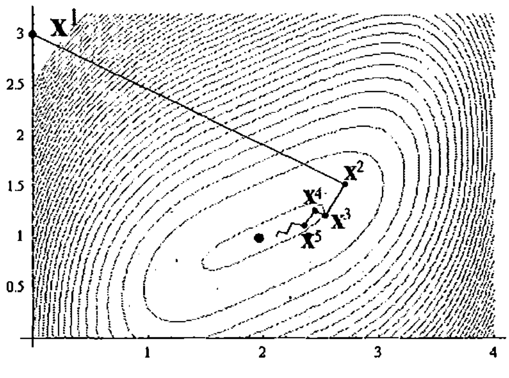
$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1 = [2.70753 \quad 1.52316]^T .$$

Настављајући даље, добијају се резултати као у табели:

Табела 22

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}^k$	(0., 3.)	(2.70, 1.51)	(2.52, 1.20)	(2.43, 1.25)	(2.37, 1.16)	(2.33, 1.18)	(2.30, 1.14)	(2.28, 1.15)
$f(\mathbf{x}^k)$	52.	0.34	0.09	0.04	0.02	0.01	0.009	0.007

при чему се, после осмог корака алгоритам зауставља јер је $|\nabla f(\mathbf{x}^8)| = 0.09 < \varepsilon$.



Слика 30. Алгоритам најбржег пада

Феномен цик-цак трајекторије. Метод најбржег пада обично ради прилично добро на почетном стадијуму процеса минимизације. Међутим, у близини оптималне тачке, метод се значајно успорава прелазећи у типичан цик-цак режим. Успорење се може објаснити ако се посматра Тејлоров развој у околини тачке $\mathbf{x}^k$ до линеарног члана (f је непрекидно диференцијабилна)

$$f(\mathbf{x}^k + \lambda\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}^k) + \lambda\nabla f(\mathbf{x}^k)^T\mathbf{d} + \lambda\,|\mathbf{d}|\,\phi(\mathbf{x}^k, \lambda\mathbf{d}),$$

где $\phi(\mathbf{x}^k, \lambda\mathbf{d}) \to 0$ када $\lambda\mathbf{d} \to 0$. У алгоритму се узима $\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$, и како се тачка $\mathbf{x}^k$ приближава оптималној тачки $\mathbf{x}^*$ (у којој је $|\nabla f(\mathbf{x}^*)| = 0$) сабирак $\lambda\nabla f(\mathbf{x}^k)^T\mathbf{d} = -\lambda|\nabla f(\mathbf{x}^k)|^2$ постаје мала величина вишег реда, чиме се знатно смањује дужина корака и метод се успорава.

ii. *Њутнов метод*

Уместо претраживања у правцу и смеру најбржег пада, тј. негативног градијента, Њутнов метод модификује овај правац множећи га са инверзном Хесеовом матрицом. Размотримо квадратну апроксимацију q функције f у задатој тачки $\mathbf{x}^k$

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k),$$

где је $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$ хесијан матрица (13) функције f у тачки $\mathbf{x}^k$. Уколико квадратна функција q има локални минимум у тачки $\mathbf{x}$, тада је $\nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ или

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{0}.$$

Претпостављајући да у тачки $\mathbf{x}^k$ постоји инверзни хесијан $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)^{-1}$, добијамо да је

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

чиме је дефинисан Њутнов оптимизациони метод. Ако је полазна тачка довољно блиска отималној тачки $\mathbf{x}^*$ и ако је $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ матрица пуног ранга, тада Њутнов метод конвергира ка $\mathbf{x}^*$.

Пример 3. Применимо сада Њутнов метод на решавање задатка

$$\min\ f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

са почетном тачком $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 3]^{\mathrm{T}}$, и критеријумом заустављања $\varepsilon = 0.05$. Хесијан функције циља је

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 6(x_1 - 2)^2 + 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

тако да је $\mathbf{H}(\mathbf{x}^1) = 2\begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, па према томе $\mathbf{H}(\mathbf{x}^1)^{-1} = \frac{1}{192}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix}$, док је $\nabla f(\mathbf{x}^1) = [-44 \quad 24]^T$. Дакле,

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{H}(\mathbf{x}^1)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{192}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -44 \\ 24 \end{bmatrix} = [2/3 \quad 1/3]^T \approx [0.67 \quad 0.33]^T.$$

Резултати првих шест корака (заокружени на две децимале) наведени су у табели.

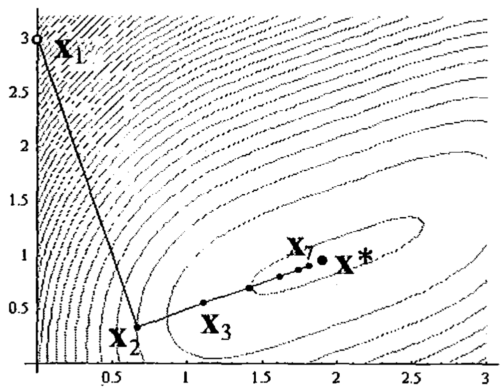
Табела 23

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}^k$	(0., 3.)	(0.67, 0.33)	(1.11, 0.56)	(1.41, 0.70)	(1.61, 0.80)	(1.74, 0.87)	(1.83, 0.91)
$f(\mathbf{x}^k)$	52.	3.13	0.63	0.12	0.02	0.005	0.0009

Након шест итерација добијена је тачка $\mathbf{x}^7 = [1.83 \quad 0.91]^T$. У овој тачки интензитет градијента је довољно мали, тј.

$$\left|\nabla f(\mathbf{x}^7)\right| = 0.04 < \varepsilon,$$

и процедура се зауставља (Слика 31). Приметно је одсуство цик-цак осциловања што је последица укључивања другог извода посредством хесијан матрице.



Слика 31. Њутнов метод

iii. ***Метод коњугованих праваца***

Дефиниција 20. Нека је $\mathbf{H}$ симетрична матрица реда $n \times n$. Линеарно независни вектори $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_j$, називају се $\mathbf{H}$–*коњугованим* (или само *коњугованим*), ако је $\mathbf{d}_i^T\mathbf{H}\,\mathbf{d}_j = 0$.

Појам $\mathbf{H}$-коњугованости је уопштење појма ортогоналности, и своди се на ортогоналност ако је $\mathbf{H}$ јединична матрица, тј. $\mathbf{d}_i^T\mathbf{H}\,\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_i^T\mathbf{d}_j = 0 \Rightarrow \mathbf{d}_i \perp \mathbf{d}_j$. Ако је један од $\mathbf{H}$-коњугованих вектора $\mathbf{d}_i$ или $\mathbf{d}_j$, задат, други се може одредити са тачношћу до мултипликативне константе.

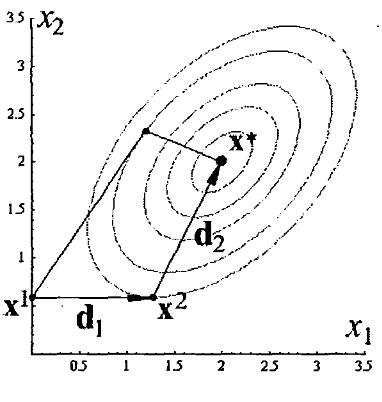
Пример 4. Дат је следећи задатак нелинеарног програмирања

(53) $$\min \quad f(x_1,\ x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 8x_1 - 8x_2 + 4.$$

Хесеова матрица циљне функције $f(x_1,\ x_2)$, гласи $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$. Изаберемо произвољну полазну тачку $\mathbf{x}^1$ и почетни правац $\mathbf{d}_1$, на пример, $\mathbf{d}_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$. Сада треба одредити вектор $\mathbf{d}_2$ коњугован вектору $\mathbf{d}_1$. Претпоставимо да је $\mathbf{d}_2 = [1 \quad b]^{\mathrm{T}}$ при чему мора бити $b \neq 0$, јер $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ морају да буду линеарно независни. Једначина коњугованости

$$\mathbf{d}_1^{T}\mathbf{H}\mathbf{d}_2^{T} = 0$$

доводи до услова $8 - 4b = 0$, одакле је $b = 2$. Дакле, $\mathbf{d}_2 = [1 \quad 2]^{\mathrm{T}}$.



Слика 32. Коњуговани правци

Ако сада минимизирамо функцију

$$f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

и добијемо као решење тачку $\mathbf{x}^2$, видећемо да тачно решење проблема (53), тј. оптимална тачка $\mathbf{x}^* = [2 \quad 2]^{\mathrm{T}}$, лежи тачно на правцу вектора $\mathbf{d}_2$ (Слика 32). Другим речима, задатак се решава само у два корака, без обзира на полазну тачку $\mathbf{x}^1$ и полазни вектор $\mathbf{d}_1$. Овај феномен решења нелинеарног задатка у коначном броју корака, јавља само ако је циљна функција *квадратна*, тј. ако до на адитивну константу има облик

(54) $$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\ \mathbf{x}, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где је $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{H}$ симетрична матрица реда $n \times n$. У том случају важи следеће тврђење.

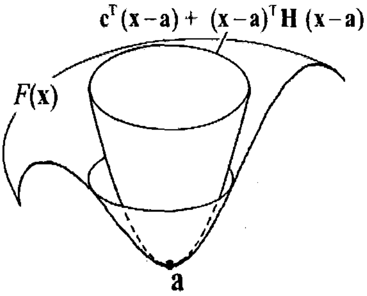
Теорема 22. *Нека је* f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *квадратна функција облика* (54). *Нека је* $\mathbf{x}^1$ *произвољна тачка из* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{d}_1$ *произвољан вектор, такође из* $\mathbb{R}^n$. *Нека је* λ_k *оптимално решење задатка* $\min f(\mathbf{x}^k + \lambda\mathbf{d}_k)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda_k \mathbf{d}_k$, $k = 1, ..., n$, *где су* $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$ $\mathbf{H}$-*коњуговани вектори. Тада важи* $\nabla f(\mathbf{x}^{n+1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, *тј. задатак се решава у n корака и* $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^*$ *је тачка минимума функције* f.

Ова погодност се користи за оптимизацију квадратних функција, али и других функција које су бар двапут диференцијабилне. Наиме, ако је функција F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ најмање двапут диференцијабилна у тачки $\boldsymbol{a}$, тада се она може апроксимирати квадратним Тејлоровим полиномом

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) + (\mathbf{x} - \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\,(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}),$$

а затим се тражи минимум те квадратне функције. На тај начин се добија

$$\min f(\mathbf{x}) \approx \min F(\mathbf{x}).$$



Слика 33. Апроксимација функције $F(\mathbf{x})$ квадратном функцијом

Једна таква квадратна апроксимација функције две променљиве приказана је на Слици 33.

5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ИГАРА

Игра у добитак је један од најважнијих модела оптимизације у окружењу супротстављених интереса и важна метода Теорије одлучивања. Решавањем разних класа игара, временом се формирала егзактна математичка теорија, *теорија игара* чији су основи дати у фундаменталној књизи Џона фон Нојмана и Оскара Моргенштерна[4], и која је убрзо постала основа читаве групе метода у Операционим истраживањима. У овом тексту бавићемо се једном уском класом игара у којима број играча не прелази два.

5.1. Матричне игре са нултом сумом

Игра новчића. Два играча, D и G истовремено показују по један новчић који може бити вредности 1, 5 и 10 динара. Ако је збир вредности показаних

---

[4] J. von Neumann, O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 2nd edition. Princeton, 1947.

новчића непаран, D узима оба новчића, а ако је паран узима их G. Игра се понавља произвољан број пута. Које новчиће треба да изаберу играчи у свакој партији, тако да њихов добитак буде максималан?

Ову игру можемо формализовати увођењем *матрице добити* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 3}$, која је приказана засенченим пољима Табеле 24.

Табела 24

		G		
		"1"	"5"	"10"
D	"1"	−1	−1	10
	"5"	−5	−5	10
	"10"	1	5	−10

Она показује добитке играча D, кога ћемо звати *добитни играч* а који су истовремено губици за играча G кога ћемо због тога звати *губитни играч*. С леве стране матрице као и изнад ње, додата је по једна колона, тј. врста, са износима вредности новчића које сваки играч показује у току игре.

Дакле, ако играч D покаже 10 динара кад G покаже 1 динар, збир је непаран и добитак за играча D је 1 динар (истовремено то је губитак за G, или негативан добитак од −1 динара). Ако играч D покаже 1 динар кад G покаже 1 динар, збир је паран и добитак за играча D је −1 динар, јер играч G добија његов динар итд.

Дефиниција 21. *Чиста стратегија играча* је избор једног од правила по којима сваки појединачни играч може да игра. Нека су компоненте вектора $\mathbf{d} = [d_1 \ldots d_m]^{\mathrm{T}}$ елементи скупа чистих стратегија играча D, а вектора $\mathbf{g} = [g_1 \ldots g_n]^{\mathrm{T}}$ елементи скупа чистих стратегија играча G. Уређени пар (d_i, g_j) се зове *стање игре,* а скуп свих стања је дат Декартовим производом $\{d_1,\ldots, d_m\}\times\{g_1,\ldots, g_n\}$, тако да је укупан број стања игре mn и поклапа се са бројем елемената матрице добити **A**.

Користећи уведену терминологију, *матричну игру* можемо дефинисати као уређену тројку (**d**, **A**, **g**), или ако је **d** = **g**, као уређени пар (**d**, **A**). Тако, "игра новчића" дата Табелом 24 је матрична игра дефинисана паром

(55) $$(\mathbf{d}, \mathbf{A}) = \left(\begin{bmatrix} "1" \\ "5" \\ "10" \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 10 \\ -5 & -5 & 10 \\ 1 & 5 & -10 \end{bmatrix} \right),$$

а стратегије играча су исте $\mathbf{d} = \mathbf{g} = [\text{“1”} \quad \text{“5”} \quad \text{“10”}]^{\mathrm{T}}$. Игра је потпуно дефинисана матрицом добити $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, док садржај стратегија можемо апстраховати. На пример уместо показивања новчића, играчи могу исписивати бројеве “1”, “5”, “10” на листу хартије, или извлачити карте из шпила који садржи три “боје”, на пример, каро, херц и пик.

С друге стране, ако бисмо желели потпунију информацију о вредности добитка сваког играча, тада бисмо у пољу (i, j) матрице добити **A** уписали уређени пар (a_{ij}, b_{ij}), где је a_{ij} добитак играча D под условом да игра стратегију d_i, а b_{ij} добитак играча G, под условом да игра стратегију g_j. Тако, потпунија таблица “игре новчића” је дата у Табели 25. Види се да је збир добитака у сваком пољу (дакле при свакој стратегији) $a_{ij} + b_{ij} = 0$. Због тога “игра новчића” спада у групу матричних игара *са нултом сумом*. У случају када имамо само два играча, овакве игре се још зову *антагонистичке*.

Табела 25

		G		
		“1”	**“5”**	**“10”**
D	**“1”**	−1, 1	−1, 1	10, −10
	“5”	−5, 5	−5, 5	10, −10
	“10”	1, −1	5, −5	−10, 10

Како играчи бирају своје стратегије? Добитни играч D разматра могуће “одговоре” свог противника на потезе “1”, “5” или “10” и уочава да је у случају “1” најнеповољнији одговор “1” и “5”, када D губи 1 динар, тј. $\min\{-1, -1, 10\} = -1$, представља најмањи добитак. У случају да D игра “5”, најнеповољнији исход је $\min\{-5, -5, 10\} = -5$, а најнеповољнији исход одговора на потез “10” је $\min\{1, 5, -10\} = -10$. Тако добијамо скуп $\min_j a_{ij} = \{-1, -5, -10\}$ минималних добитака за играча D (Табела 26, колона крајње лево). Како D може да бира своју стратегију, он ће се, наравно, одлучити за ону која максимизира овај скуп, $\max\{-1, -5, -10\} = -1$ а то је прва стратегија, или “1”. Играјући “1”, D може бити сигуран у гарантовани добитак $v_D = -1$, без обзира на понашање противника. Та се вредност гарантованог добитка, $v_D = \max_i \min_j a_{ij}$ назива *доња* (*сигурносна*) *вредност игре*, или *максимин*. С друге стране, играч G, такође играјући рационално, утврђује скуп максималних губитака при првој, другој или трећој стратегији, $\max_i a_{ij} = \{1, 5, 10\}$, што је скуп максимума сваке колоне (доњи ред Табеле 26). Минимум овог скупа даје вредност највећег могућег губитка, која се зове *горња* (*сигурносна*)

Табела 26	G			$\min_j a_{ij}$
D	−1	−1	10	**−1** $= v_D$
	−5	−5	10	−5
	1	5	−10	−10
$\max_i a_{ij}$	**1** $= v_G$	5	10	

вредност игре или *минимакс*, $v_G = \min_j \max_i a_{ij}$. У овој игри је $v_G = 1$, а одговарајућа стратегија је такође "1". Стратегије {"1", "1"} које одговарају сигурносним вредностима v_D и v_G се зову *оптималне стратегије* јер играчу D доносе добитак v_D који не може бити умањен, без обзира на игру противника, док играчу G никакав избор стратегије противника не може повећати губитак изнад вредности v_G. Може се показати да за сваку антагонистичку матричну игру важи $v_D \le v_G$.

5.2. Доминантне стратегије

Године 1950-те, Вилијем Такер[5] је предложио пример једноставне игре која нема особину нулте суме и која је позната под називом "*дилема затвореника*". Сумарни подаци о игри дати су у Табели 27, а формулација је следећа. Два провалника Ал и Боб бивају ухапшени недалеко од места провале. Пошто су раздвојени, добијају следећу понуду од полиције: свако од њих може да *призна* злочин (и самим тим оптужи и другог) или да *не призна*. Ако ниједан од њих не призна тада свако добија по годину дана затвора за недозвољено ношење оружја. Ако обојица признају и оптуже другог, добијају по 10 година затвора свако. Ако један призна а други не, онај који је признао се ослобађа а други добија 20 година. Како треба да се понашају затвореници да би минимизирали своје казне?

Табела 27		**Боб**	
		п	***н***
Ал	***п***	10,10	0, 20
	н	20, 0	1, 1

Најпре приметимо да одређивање казне није добитак већ губитак, или "негативни" добитак. Зато је матрица добити првог играча (Ал), $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -1 \end{bmatrix}$, а за другог (Боб), $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, док су вектори стратегија исти $\mathbf{d} = \mathbf{g} = [п \quad н]^{\mathrm{T}}$ ($п$ = признање, $н$ = непризнање).

Овакве игре које одређују две матрице $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се зову *биматричне игре* и генерално важи $\mathbf{A} + \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Уколико је $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$, или $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$, биматрична игра се своди на антагонистичку игру (тј. игру са нултом сумом). Биматричне игре се могу задати и једном матрицом, али која као елементе садржи парове (a_{ij}, b_{ij}),

[5] Albert William Tucker (1905 –1995), амерички математичар, један од пионира Теорије игара

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} (-10,-10) & (0,-20) \\ (-20, 0) & (-1,-1) \end{bmatrix}.$$

Како се понашају играчи? Ал размишља овако: "Могућа су два стања. Боб може да призна али може и да ћути. Шта ако призна? Тада, ако ја ћутим, добијам 20 година а 10 ако признам. Дакле у тој ситуацији је боље признати. Ако Боб не призна и ја опет ћутим, добијам годину дана, док ако признам ја сам слободан! Дакле, у сваком случају је боље признати!" И тако, Ал бира прву стратегију – *признати*.

Међутим, и Боб размишља на исти "рационалан" начин, па тако и он бира признање, што доводи до стања (n, n) – обојица признају. Тако долазимо до концепта доминантних стратегија.

Означимо са $\mathbf{v}_i = [m_{i1} \ \dots \ m_{in}]$, i-ту врсту а са $\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{mj} \end{bmatrix}$, j-ту колону матрице $[m_{ij}]_{m\times n}$. Ако је $m_{kj} > m_{ij}, i \neq k, j = 1,\dots,n$, писаћемо $\mathbf{v}_k > \mathbf{v}_i$ $(i \neq k)$, и рећи да k–та врста $\mathbf{v}_k$ *строго доминира* остале врсте. Слично, ако $\mathbf{u}_l > \mathbf{u}_j$ за $l \neq j$, тада колона $\mathbf{u}_l$ *строго доминира* остале колоне.

Дефиниција 22. У биматричној игри (**A**, **B**), стратегија d_k играча D (стратегија g_l играча G) је *доминантна* ако k-та врста матрице **A** (l-та колона матрице **B**) строго доминира остале врсте (колоне). Стање (d_k, g_l) доминантних стратегија се назива *равнотежа доминантних стратегија.*

Другим речима, доминантна стратегија је она стратегија која играчу доноси максималан добитак, без обзира на начин игре другог играча. У игри "дилема затвореника" прва врста матрице **A** доминира другу, $\begin{bmatrix}-10 & 0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}-20 & -1\end{bmatrix}$ па је прва стратегија, "*признање*" доминантна за првог играча. Слично, у матрици **B**, прва колона доминира другу, $\begin{bmatrix}-10 \\ 0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}-20 \\ -1\end{bmatrix}$, па је "*признање*" доминантна стратегија и за другог играча. Тако се у овој игри остварује равнотежа доминантних стратегија (n, n) која доноси затвореницима по 10 година затвора. Да су и један и други ишли на "ирационално" решење, а то је предвиђање да ће други затвореник изабрати признање, свако од њих би изабрао непризнавање и тако би обојица добили само по годину дана.

Уколико је игра $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ са нултом сумом, тада доминантна колона матрице $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, постаје *доминирана* колона (доминирана од осталих колона) матрице **A**, и према томе доминантна стратегија другог (G) играча. Будући да ниједан играч нема интереса да игра доминиране стратегије, њих можемо искључити, брисањем одговарајућих врста и колона, без опасности да нарушимо добитне комбинације играча. Елиминацијом доминираних стратегија добија се редукована игра ниже димензионалности која је једноставнија за анализу.

Пример 1. Игру дату матрицом

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

редуковати, искључивањем доминираних стратегија.

Решење. Како прва врста доминира другу $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$, другу врсту бришемо, тако да остаје $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Сада, друга и четврта колона доминирају прву, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_1$ (дакле прва стратегија је доминантна), тако да бришемо $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_4$, што даје $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Даље, прва колона доминира другу тако да прву колону уклањамо и добијамо матрицу $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Коначно, у њој прва врста доминира другу тако да другу врсту бришемо и остаје само матрица [2] формата 1×1. Ово је елемент на месту (1, 3) па имамо равнотежу доминантних стратегија (d_1, g_3).

5.3. Нешов еквилибријум и Парето оптималност

Вратимо се игри "дилема затвореника". Ако би се ова игра могла поновити више пута, играчи би увидели могућност да доминантну стратегију признања замене "ирационалном" стратегијом и тако би побољшали исход добивши свако по годину дана затвора. Али, ниједан од њих не би могао да поправи свој положај без "сарадње" другог, што је стање једне специфичне равнотеже.

Дефиниција 23. Стање игре (d_i, g_j) у коме ниједан од играча не може да повећа свој добитак самосталном променом стратегије, назива се *Нешов еквилибријум*[6]. Стање (d_i, g_j) је *Парето*[7] *оптимално* ако ниједно друго стање не повећава добит једног играча, уз услов да не умањи добитак другог.

У случају "дилеме затвореника" стање (*п*, *п*), дакле признање, чини Нешов еквилибријум, јер и Ал и Боб самосталном променом стратегије не могу да повећају добит (тј. да смање казну). С друге стране, супротан пар (*н*, *н*) је Парето оптималан јер прелаз на било коју другу стратегију може повећати добит једног али смањити добит другог играча.

Очигледно, ако је игра антагонистичка, свако стање је Парето оптимално.

Тест егзистенције Нешовог еквилибријума. Поље (p, q) је поље Нешовог еквилибријума ако је $a_{pq} = \max_i a_{iq}$ и $b_{pq} = \max_j b_{pj}$ у биматричној игри или $a_{pq} = \max_i a_{iq} = \max_j(-a_{pj}) = \min_j a_{pj}$ ако је игра мономатрична. На основу овога може се се утврдити једноставан тест егзистенције Нешовог еквилибријума. Формира се таблица парова (a_{ij}, b_{ij}) елемената добитних матрица **A** и **B**, биматричне игре (**A**, **B**) (у случају мономатричне игре је $b_{ij} = -a_{ij}$). Ако a_{pq} представља максимални елемент q-те колоне а b_{pq} представља максимални елемент p-те врсте, пар стратегија (d_p, g_q) представља Нешов еквилибријум. Овакав еквилибријум у игри "дилема затвореника" је стање (*п*, *п*).

Пример 2. Компанија "Алфа Консалтинг" жели да уведе најновији интранет систем. У компанији разматрају две могућности: да од произвођача, "Бета Система", набаве опрему последње генерације али још непроверену, или да набаве проверену опрему нешто старије генерације. Истовремено, компанија "Бета Системи", размишља о томе коју од ове две врсте опреме да производи. Израчунато је да би профит "Бета Система" али и "Алфа

Табела 28		*Бета Системи*	
		Нова т.	Стара т.
Алфа Консалтинг	Нова т.	20, 20	0, 0
	Стара т.	0, 0	5, 5

[6] Према Џону Нешу; John Forbes Nash Jr. (1929-), добитник Нобелове награде за економију 1994. По његовој биографији 2001. године снимљен је филм *A Beautiful Mind,* у коме улогу Неша игра Расел Кроу.

[7] Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848–1923), француско-италијански економиста и филозоф

Консалтинга", у случају да обе компаније изаберу нове технологије, био по 20 (милиона), а у случају избора старе технологије, по 5. Испитати да ли постоје доминантне стратегије и Нешов еквилибријум. Да ли постоји Парето оптималан избор стратегија?

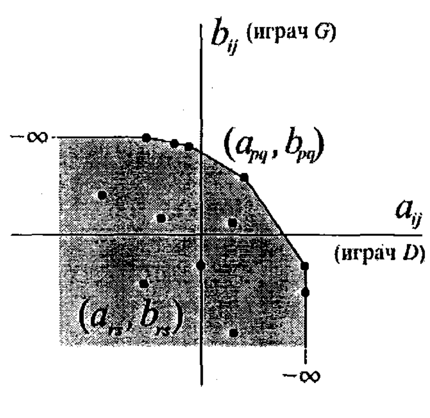
Решење. Игра се може описати једном матрицом $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, и видимо да ниједна врста (колона) не доминира другу врсту (колону) тако да игра нема доминантних стратегија. Како је $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, формирамо таблицу парова (a_{ij}, a_{ij}) (Табела 28). Видимо да је 20 максимум прве колоне а такође и максимум прве врсте, дакле поље (1, 1) је поље Нешовог еквилибријума. Али, то је и поље (2, 2), јер је 5 максимум друге колоне и друге врсте. Тако, два стратешка стања: (Нова технологија, Нова технологија) и (Стара технологија, Стара технологија) су два Нешова еквилибријума. То значи да ако би се игра нашла на пољу (2, 2), укупан профит обе компаније био би 10. Једина могућност померајa ка већем профиту је прелаз на стање (1, 1) када је укупан профит 40, али то се не може извести без сагласности обе компаније. У случају да нема договора, постоји ризик стања (1, 2) или (2, 1) које дају нулти профит. С друге стране, пар стратегија (Нова технологија, Нова технологија) је Парето оптималан, јер ниједно друго поље сем (1, 1) не даје веће профите обема компанијама истовремено.

Игре у којима постоји договор између играча зову се *коалиционе*, а оне код којих договор не постоји, *бескоалиционе игре*.

Графичко одређивање Парето оптималних стања. У координатном систему нацртамо тачке (a_{ij}, b_{ij}), које чине елементе биматричне игре

$$\begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ \vdots & & \\ (a_{m1},b_{m1}) & & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix},$$

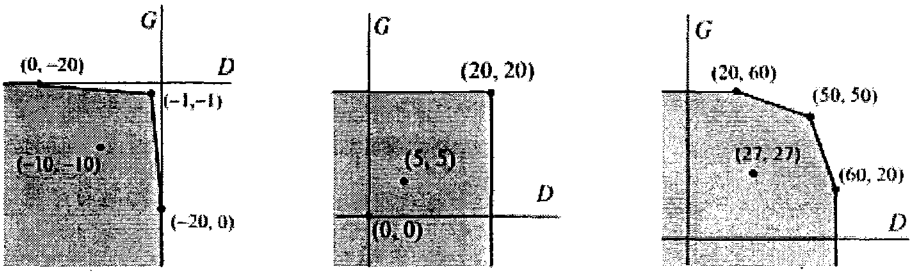
чиме добијамо скуп од $m{\cdot}n$ тачака у равни. Том скупу додамо две замишљене тачке $(-\infty, 0)$ и $(0, -\infty)$, па затим конструишемо конвексни омотач тако проширеног скупа тачака, што је неограничен полиедарски скуп, како је приказано на Слици 34. Тачке у бесконачности доводе до појаве једне



Слика 34. Конвексни омотач и Парето оптималност

хоризонталне и једне вертикалне странице полиедарског скупа које су бесконачне дужине. Сада се скуп тачака $\{(a_{ij}, b_{ij})\}$ дели на два подскупа. Први је састављен од тачака које леже у теменима или на косим страницама полиедарског скупа, на пример тачка (a_{pq}, b_{pq}), а други садржи тачке које леже унутар скупа или на хоризонталним (вертикалним) страницама, на пример тачка (a_{rs}, b_{rs}). Стања игре која одговарају првом подскупу су Парето оптимална стања.

Слика 35 илуструје примену графичког метода одређивања Парето оптималних стања за игре "дилема затвореника", затим игре из Примера 2 (увођење нове технологије), као и игру која се разматра у следећем примеру.



Слика 35. Парето оптимални елементи игара "дилема затвореника" (лево), "нова технологија" (Пример 2, средина) и "рекламна кампања" (Пример 3, десно)

Пример 3. Матрица показује профите (у милионима долара) две америчке дуванске компаније у зависности од комбинација стратегија рекламних кампања {*не рекламирати*, *рекламирати*}

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{не реклам.} & \text{реклам.} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{не рекламирати} \\ \text{рекламирати} \end{array} & \begin{bmatrix} (50, 50) & (20, 60) \\ (60, 20) & \boxed{(27, 27)} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \end{array}$$

Одредити пар стратегија Нешовог еквилибријума и Парето оптималан пар.

Решење. Како је $a_{22} = \max_i a_{i2} = 27$, $b_{22} = \max_j b_{2j} = 27$, поље (2, 2) је поље Нешовог еквилибријума, и стратегије

$$(d_2, g_2) = (\textit{рекламирати},\ \textit{рекламирати})$$

чине равнотежни пар (уоквирено), али он није Парето оптималан. С друге стране, пар стратегија

$$(d_1, g_1) = (\textit{не рекламирати},\ \textit{не рекламирати})$$

јесте Парето оптималан, али се компаније по инерцији држе равнотежног стања, иако су профити мањи од стања (d_1, g_1). Почетком 70-тих година, америчка администрација, у циљу заштите здравља грађана забрањује рекламирање цигарета и тиме компаније насилно излазе из равнотежног стања и прелазе у стање Парето оптималних стратегија (d_1, g_1), повећавши тиме профит. Само у 1971. години, на основу промене стратегије, дуванска индустрија САД бележи пораст од 91 милиона долара.

5.4. Матричне игре са седлом

Анализирајмо нову варијанту "игре новчића" (Табела 29) у којој смо матрицу **A** заменили матрицом $\mathbf{A}'=[a'_{ij}]_{3\times 3}$, тј. матричну игру са нултом сумом

$$(56)\qquad \left(\mathbf{d}=\begin{bmatrix} "1" \\ "5" \\ "10" \end{bmatrix},\ \mathbf{A}'=\begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \right).$$

Срачунавамо минималну и максималну сигурносну вредност играча D и G: $v_D=\max\limits_i \min\limits_j a'_{ij}=1$ постиже се за (i, j) = (3, 2), док се $v_G=\min\limits_j \max\limits_i a'_{ij}=1$ постиже такође за (i, j) = (3, 2). Дакле, оптималне стратегије су ("10", "5").

Табела 29

				$\min\limits_j a'_{ij}$
	10	0	−10	−10
	0	−5	5	−5
	5	$\boxed{1}$	5	1 = v_D
$\max\limits_i a'_{ij}$	10	1 = v_G	5	

Дефиниција 24. За игру са нултом сумом ($\mathbf{d}$, $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{g}$), за коју важи $v_D = v_G = v$, тј.

$$(57)\qquad v=\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{rs},$$

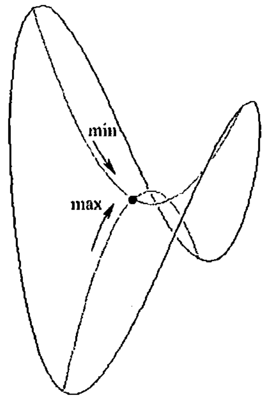
се каже да је *игра са седлом*. Тада је $v = a_{rs}$ *вредност игре*, поље (r, s) назива *седласта тачка* матрице **A**, d_r и g_s су *оптималне стратегије* играча D и G, док је тројка (d_r, g_s, v) решење игре. Ако је v = 0, игра је *равноправна* (*фер*). За v > 0 игра је *наклоњена првом играчу*, а за v < 0 игра је *наклоњена другом играчу*.

Претходна варијанта игре новчића, (55), нема седласту тачку, јер је $v_D = -1$, док је $v_G = 1$, па (57) не важи. Непостојање седласте тачке доводи до "лутања" у стратегијама, тј. до тога да ако један играч устали једну стратегију помоћу које почиње да добија, други увек може да промени своју стратегију и преокрене губитак у добитак.

Назив "седласта тачка" за елемент a_{rs}, који задовољава једнакост (57), долази од особине површи из $\mathbb{R}^3$ са седластом тачком, да за пресек у једној равни имају конвексну функцију а у ортогоналној равни конкавну. Такав је на пример, случај са познатим примером "седласте површи", хиперболичким параболоидом (Слика 36) који је дат једначином

$$z = K(x, y) = axy + bx + cy + d$$

($a \neq 0$, b, c и d су произвољне константе).



Слика 36. Седласта тачка

Из анализе је познато да услови стационарности $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ дају $\bar{x} = -c/a$, $\bar{y} = -b/a$, као и $AC - B^2 = -a^2 < 0$ за свако $a \neq 0$, тако да је $(\bar{x}, \bar{y}) = (-c/a, -b/a)$ седласта тачка. За седласту тачку важи

$$K(x, \bar{y}) \leq K(\bar{x}, \bar{y}) \leq K(\bar{x}, y), \quad \text{за свако } x, y \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Како први играч (D или максимин) максимизира добитак он у ствари максимизира $K(x, \bar{y})$ по x, или a_{ij} по i. У случају игре (56), D максимизира a_{i2} по i, и добија да је то $a_{32} = 1$. На тај начин, свако удаљавање од седла $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 2)$ за њега је неповољно. Слично томе други играч минимизира $K(\bar{x}, y)$ по y, тј. a_{3j} по j, па је и за њега неповољно удаљавање од тачке $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 2)$. Тако је елемент матрице добити **A** на месту (3, 2), $a_{32} = 1$, максималан у својој колони а

Табела 30

Ниво Теста / Припрема	**лак**	**средњи**	**тежак**
површна	6	5	5
средња	8	7	6
темељна	10	8	$\boxed{7}$

минималан у својој врсти. Ово својство тачке $(\bar{x}, \bar{y})$ назива се *равнотежа седласте тачке* која је, за разлику од Нешовог еквилибријума стабилна, јер свако одступање од стратегија седласте тачке умањује добитак сваког од играча. Будући да седласта тачка имплицира стање чистих стратегија, ова равнотежа се још назива и *равнотежа чистих стратегија.*

Пример 4. Игра се може односити на само једног играча, на пример, на студента који се припрема за испит. У табици су дате оцене које он може да добије у складу са интензитетом припрема и нивоом тежине теста на испиту. Одредити оптималну стратегију и вредност игре.

Решење. У овој игри нема другог играча јер су "стратегије" лак-средњи-тежак као квалификације тежине испитног теста унапред утврђена правила система студија, као што су и оцене резултат дугогодишње статистичке анализе. Међутим, игра се анализира на исти начин као и игра са два играча. Дакле, минимум врста даје вектор $[5 \quad 6 \quad 7]^T$, одакле се одређује максимин $a_{33} = 7$. С друге стране, максимум колона је $[10 \quad 8 \quad 7]^T$, па је минимакс такође $a_{33} = 7$. Дакле, постоји седло у пољу (3, 3), па постоји чиста стратегија $\bar{x} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, дакле темељна припрема, а вредност игре је $v = 7$. Према Дефиницији 24, излазак на испит је игра наклоњена студенту.

Пример 5. Игра може имати више седластих тачака. Тако, игра задата матрицом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

има два седла (2, 1) и (2, 2), а вредност игре је $v = a_{21} = a_{22} = 0$.

5.5. Матричне игре без седла. Мешовите стратегије

Као што смо видели, за игру (55), доња и горња вредност се не поклапају, $v_D < v_G$, тј. игра нема седласту тачку. Одсуство те тачке онемогућава играче да своје стратегије „фиксирају" на њу и тиме оптимизирају своје добитке. Међутим, ако играчи одлуче да мењају своје стратегије у току игре, они можда могу наћи законитост промене којим би сваки од играча могао да повећа добитак или бар смањи губитак. Да бисмо имали контролу над векторима стратегија $\mathbf{d} = [d_1 \ldots d_m]^T$ играча D, и

$\mathbf{g} = [g_1 \dots g_n]^{\mathrm{T}}$ играча G, увешћемо векторе $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_m]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]^{\mathrm{T}}$, такве да $\mathbf{x} \in \sigma^m$ односно $\mathbf{y} \in \sigma^n$, где су σ^m и σ^n симплекси у просторима $\mathbb{R}^m$ односно $\mathbb{R}^n$ респективно (видети Дефиницију 4, одељак 1.1.). За координате вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ важи

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad x_i \geq 0, \; y_j \geq 0, \; i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n. \tag{59}$$

Притом, темена симплекса су дефинисана векторима који имају нуле на свим местима сем на једном, на пример вектор $\mathbf{e}_k = [0\dots0 \;\; 1 \;\; 0\dots0]^{\mathrm{T}}$ са јединицом на k-том месту (који задовољава (59)), представља k-то теме симплекса. Ако скупове стратегија играча D и G представимо векторима $\mathbf{d} = [d_1 \; \dots \; d_m]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{g} = [g_1 \; \dots \; g_n]^{\mathrm{T}}$, тада скаларни производи

$$[0\dots0 \underset{i}{1} 0\dots0] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{d} = d_i \quad \text{и} \quad [0\dots0 \underset{j}{1} 0\dots0] \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_j \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{g} = g_j,$$

симболички изражавају примену стратегија d_i и g_j, тј. пара (d_i, g_j).

У случају "игре новчића" (55), $m = n = 3$, па ће стратегије "1", "5" и "10" бити представљене векторима $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; x_3]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [y_1 \; y_2 \; y_3]^{\mathrm{T}}$, при чему $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma^3$. Ако играч D одлучи да, на пример, наизменично игра прву па другу стратегију, тада се може узети да он 1/2 свих партија игра прву и 1/2 другу стратегију, па ће његов вектор стратегија бити $\mathbf{x} = [1/2 \quad 1/2 \quad 0]^{\mathrm{T}}$. Ако играч G опет, 1/2 свих партија игра трећу стратегију а по 1/4 игра прву и другу, његов вектор стратегија биће $\mathbf{y} = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/4]^{\mathrm{T}}$. На тај начин, $\mathbf{x}$ може бити произвољан вектор из $\mathbb{R}^3$ који задовољава (59) за $m = n = 3$, тј. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Слично важи за $\mathbf{y} = [y_1 \; y_2 \; y_3]^{\mathrm{T}}$.

Дефиниција 25. Стратегије $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_m]^{\mathrm{T}} \in \sigma^m$ и $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]^{\mathrm{T}} \in \sigma^n$, чији ниједан елемент није једнак јединици, називамо *мешовитим стратегијама* матричне игре **A**. Мешовите стратегије чији су сви елементи строго позитивни називају се *потпуно мешовите*.

Посматрајући геометријски, уочавамо да темена симплекса σ^m и σ^n, дефинишу m односно n чистих стратегија, тачке на граници симплекса $\partial\sigma^m$ и $\partial\sigma^n$ (сем темених тачака) сачињене су од мешовитих стратегија док су унутрашње тачке ових симплекса, потпуно мешовите стратегије играча.

Дефиниција 26. Нека су $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_m]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [y_1 \ldots y_n]^{\mathrm{T}}$ мешовите стратегије матричне игре $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$. Тада се функција

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

зове *језгро* матричне игре $(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{y})$ и представља *очекивану добит* игре (тј. I играча).

Функција језгра $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је општи појам који се дефинише за много генералније типове игара. У свим случајевима K је конвексна функција по $\mathbf{x}$ а конкавна по $\mathbf{y}$. У случају матричних игара, у Јенсеновој неједнакости (5), важи једнакост:

$$(60)\qquad \begin{aligned} &K((1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (1-\lambda)K(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \lambda\, K(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \quad 0 < \lambda < 1, \\ &K(\mathbf{x}, (1-\lambda)\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{y}_2) = (1-\lambda)K(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda\, K(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Теорема 23. (*фон Нојман*[8]) *У свакој матричној игри са два играча, увек постоје оптималне мешовите стратегије* $\bar{\mathbf{x}}$ *и* $\bar{\mathbf{y}}$ *за оба играча, тј. очекивана добит* $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *има седласту тачку* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ *за коју важи једнакост*

$$(61)\qquad \max_{\mathbf{x}\in\sigma^m}\min_{\mathbf{y}\in\sigma^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in\sigma^n}\max_{\mathbf{x}\in\sigma^m} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}).$$

Величина $v = K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{y}}$ зове се *вредност игре* и представља добитак првог играча (и губитак другог). У случају чистих стратегија важи $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_r$, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{e}_s$, тако да се v своди на седло матрице добити, a_{rs} (57).

Уређена тројка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, v)$ се зове *решење* матричне игре.

Из (61) следује

$$(62)\qquad K(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \le v = K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \le K(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\in\sigma^m, \quad \mathbf{y}\in\sigma^n,$$

што је особина седласте тачке (види (58)), тј. $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ је седло игре, које по Теореми 23 увек постоји. Дакле, кад се каже да је "игра без седла", мисли се "без седла у чистим стратегијама". Прва варијанта "игре новчића" (55), која нема седласту тачку у чистим стратегијама (дакле у теменима симплекса σ^m

[8] John von Neuman, (Neumann János) (1903 –1957), мађарско-немачки математичар

и σ''), има је у мешовитим стратегијама и то је $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, за $\bar{\mathbf{x}} = [1/2 \quad 0 \quad 1/2]^{\mathrm{T}}$ и $\bar{\mathbf{y}} = [10/11 \quad 0 \quad 1/11]^{\mathrm{T}}$. Вредност игре је

$$v = K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 10 \\ -5 & -5 & 10 \\ 1 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/11 \\ 0 \\ 1/11 \end{bmatrix} = 0,$$

што значи да се ради о "фер" игри.

Друга варијанта, игра (56), има седло у чистим стратегијама, тј. за $\bar{\mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ и $\bar{\mathbf{y}} = [0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, и њена вредност је

$$v = K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}' \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{32} = 1.$$

Дакле, игра је наклоњена добитном играчу D.

Табела 31	киша	без кише
наводњавање	–2.000	10.000
без наводњавања	7.000	1.000

Пример 6. Још један пример игре у којима је појединац у "конфликту" са окружењем, у овом случају са природом, која му је супротстављена уместо другог играча (у литератури се овакве игре зову *игре против природе*). Фармер је на свом имању инсталирао опрему за наводњавање. Предвиђајући да ли ће следеће седмице пасти киша или не, он одлучује да ли да наводњава усеве или не. Матрица добити је дата у Табели 31. У овој игри ниједна чиста стратегија није оптимална. Решење игре су потпуно мешовите стратегије $\mathbf{x} = [x \quad 1-x]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y \quad 1-y]^{\mathrm{T}}$, при чему је $0 < x < 1$ као и $0 < y < 1$ (у противном би бар једна стратегија била чиста). У решавању овог задатка помоћиће нам следећа лема.

Лема 1. *Нека је игра дата матрицом* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *под условом*

(63) $$h = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0,$$

и нека су оптималне стратегије $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x} & 1-\bar{x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{y} & 1-\bar{y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ *потпуно мешовите. Тада су вредност игре и оптималне стратегије дате изразима*

$$v = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{21}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{12}}{h} \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{12}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{21}}{h} \end{bmatrix}.$$

Доказ. На основу (62) важи

(64)

$$K(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{A}\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 1-\bar{y} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \beta + (\alpha - \beta)x \le v$$

при чему су константе α и β дате са

(65) $$\alpha = a_{12} + (a_{11} - a_{12})\bar{y}, \quad \beta = a_{22} + (a_{21} - a_{22})\bar{y}.$$

Како променљива x узима вредност из отвореног скупа (0, 1), у неједнакости (64) се ни за једно x не достиже горња граница v, без обзира на знак разлике $\alpha - \beta$, све док је $\alpha - \beta \neq 0$. Тако добијамо да мора бити $\alpha - \beta = 0$, тј. $\alpha = \beta$, што заједно са (65) даје једнакост

$$a_{12} + (a_{11} - a_{12})\bar{y} = a_{22} + (a_{21} - a_{22})\bar{y}.$$

Она је задовољена за $\bar{y} = (a_{22} - a_{12})/h$, где је $h \neq 0$ дато са (63). На сличан начин, добија се $\bar{x} = (a_{22} - a_{21})/h$. Како је $\alpha = \beta$, из (64) следује $\beta = v$, дакле, из (65) вредност игре је $v = a_{22} + (a_{21} - a_{22})\bar{y} = a_{22} + (a_{21} - a_{22})(a_{22} - a_{12})/h$ тј.

(66) $$v = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{21}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{12}}{h} \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{12}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{21}}{h} \end{bmatrix}. \ \square$$

У случају игре из Табеле 31, заменом у (66), добија се $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ са вредношћу игре $v = 4000$. Дакле, игра је наклоњена фармеру.

Теорема 24. *Скуп оптималних мешовитих стратегија сваког играча је конвексан и затворен.*

Доказ. Нека је S_D скуп оптималних стратегија играча D и нека су $\bar{\mathbf{x}}_1$ и $\bar{\mathbf{x}}_2$ произвољне оптималне стратегије, тј. $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \in S_D$. Ако је v вредност игре, на основу (62) је $K(\overline{\mathbf{x}}_1, \mathbf{y}) \geq K(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = v$, као и $K(\overline{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}) \geq v$, за свако $\mathbf{y} \in \sigma^n$. Тако, за свако **y**, на основу прве једнакости у (60) следује

$$K\left((1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}_1 + \lambda\overline{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}\right) = (1-\lambda)K(\overline{\mathbf{x}}_1, \mathbf{y}) + \lambda K(\overline{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}) \geq (1-\lambda)v + \lambda v = v,$$

дакле, $K\left((1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}_1 + \lambda\overline{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}\right) \geq v$. То значи да је конвексна комбинација оптималних стратегија $\mathbf{z} = (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}_1 + \lambda\overline{\mathbf{x}}_2$ такође оптимална, тј. $\mathbf{z} \in S_D$. Дакле, скуп S_D је конвексан. Затвореност следује из непрекидности функције K. На сличан начин се доказује конвексност и затвореност скупа S_G оптималних стратегија другог играча. □

У Примеру 8, на крају следећег одељка, показано је да су скупови S_D и S_G конвексни и затворени.

5.6. Одређивање мешовитих стратегија

Према фон Нојмановој теореми (Теорема 23) постоји бар једна оптимална мешовита стратегија матричне игре, а њено налажење се базира на примени неједнакости (62). Показаћемо да се проблем даље своди се на решавање једног директног и њему дуалног проблема линеарног програмирања при чему су вектори **x** и **y** ограничени на симплексе σ^m односно σ^n.

Теорема 25. (*Теорема о мешовитим стратегијама.*) *Нека је дата матрична игра* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$. *Оптималне мешовите стратегије добитног тј. губитног играча су решења проблема LP*:

$$\begin{aligned}
&\max\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = 1\cdot z + 0\cdot x_1 + \ldots + 0\cdot x_m \\
&-z + a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 0 \\
&\vdots \\
&-z + a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 0 \\
&x_1 + x_2 \ldots + x_m = 1 \\
&x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{67}$$

односно њему дуалног проблема

$$
(68)\qquad
\begin{aligned}
&\min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = 1\cdot w + 0\cdot y_1 + \ldots + 0\cdot y_n\\
&w - a_{11}y_1 - \ldots - a_{1n}y_n \geq 0\\
&\vdots\\
&w - a_{m1}y_1 - \ldots - a_{mn}y_n \geq 0\\
&\qquad\quad y_1 + y_2 \ldots + y_n = 1\\
&\qquad y_j \geq 0,\ \ j = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Доказ. За фиксирано **x** функција очекиване добити $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је линеарна (дакле конкавна) по **y**, и достиже минимум у једној од екстремних тачака (Теорема 12). Дакле, најпре је,

$$f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\sigma^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{1\leq j\leq n} K(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j),$$

а затим треба максимизирати $f(\mathbf{x})$ при чему $\mathbf{x}\in\sigma^m$, или, што је исто, треба максимизирати нову променљиву z, под ограничењима

$$z \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1),\ \ z \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2),\ \ \ldots,\ \ z \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n),$$

и $\mathbf{x}\in\sigma^m$ (што је еквивалентно са $x_1 + \cdots + x_m = 1$, $x_i \geq 0$, видети (59)). Како је $K(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$ и $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}$, где је $\mathbf{c} = [1\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{X} = [z\ x_1\ \ldots\ x_m]^{\mathrm{T}}$, долазимо до задатка LP (61). Решавањем овог задатка се добија $\overline{\mathbf{X}} = [z, \overline{\mathbf{x}}]$, где је z је вредност игре а $\overline{\mathbf{x}}$ оптимална стратегија добитног играча. Решавањем дуалног задатка (63) добија се пар $\overline{\mathbf{Y}} = [w, \overline{\mathbf{y}}]$, тј. поново вредност игре и оптимална стратегија губитног играча. □

На основу Теореме 25, у тачки оптимума је $z = w = v$, дакле, може се поставити следећи, нешто једноставнији скуп задатака LP чијим решавањем добијамо мешовите стратегије $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ као и вредност игре v:

$$
(69)\qquad \text{основни}\quad
\begin{aligned}&\max\ v\\ &\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \begin{bmatrix} v\\ \vdots\\ v\end{bmatrix},\ \mathbf{x}\in\sigma^m,\end{aligned}
\qquad \text{дуални}\quad
\begin{aligned}&\min\ v\\ &\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \begin{bmatrix} v\\ \vdots\\ v\end{bmatrix},\ \mathbf{y}\in\sigma^n.\end{aligned}
$$

Пример 7. Одредити мешовите стратегије игре $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Решење. У овом случају је m=2, n=3. На основу (69), стратегија добитног играча $\overline{\mathbf{x}}\in\sigma^2$ се добија решавањем задатка LP:

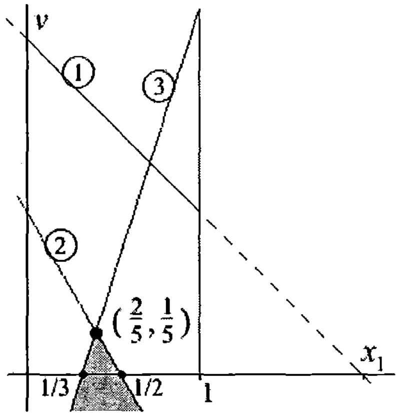
$$\max\ v,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq v,$$
$$2x_1 - x_2 \geq v,$$
$$-x_1 + x_2 \geq v,$$
$$x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Елиминацијом $x_2 = 1 - x_1$ добија се систем неједнакости

1) $v \leq 2 - x_1$,

2) $v \leq 3x_1 - 1$,

3) $v \leq 1 - 2x_1$,



Слика 37. Уз Пример 7

док услови $x_2 = 1 - x_1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ дају 4) $0 \leq x_1 \leq 1$. Неједнакости 1) - 4) дефинишу у (x_1, v) - равни неограничену полигоналну област (Слика 37) са врхом у пресеку правих 2) и 3), тј. у тачки $x_1 = 2/5$, $v = 1/5$. Тако је $x_2 = 1 - x_1 = 3/5$, па је оптимална стратегија добитног играча $\bar{\mathbf{x}} = [2/5 \quad 3/5]^T \in \sigma^2$, а вредност игре је $v = 1/5$. Дакле, игра је наклоњена првом играчу.

Решавање дуалног задатка (69) се сада своди на систем неједнакости

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \leq v,$$
$$(70) \qquad 2y_1 - y_2 + y_3 \leq v,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0,$$

а како је $v = 1/5$ и $y_3 = 1 - y_1 - y_2$, горњи систем постаје

$$2y_1 + 3y_2 \leq \frac{6}{5}, \quad y_1 - 2y_2 \leq -\frac{4}{5}, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Множењем прве неједнакости са 2 а друге са 3 и њиховим сабирањем добија се $7y_1 = 0$, тј. $y_1 = 0$, што заменом у прве две неједнакости у (70) даје $2y_2 - y_3 \leq \frac{1}{5}$, $-y_2 + y_3 \leq \frac{1}{5}$. Сабирањем ове две неједнакости добија се $0 \leq y_2 \leq \frac{2}{5}$, тако да имамо два решења $\bar{\mathbf{y}}_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ и $\bar{\mathbf{y}}_2 = [0 \quad 2/5 \quad 3/5]^T$, што су две екстремне тачке симплекса σ^3. На основу друге једначине у (60) важи

$$K(\mathbf{x}, (1-\lambda)\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{y}_2) = (1-\lambda)K(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda K(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \quad 0 < \lambda < 1.$$

У том случају, решење је свака конвексна комбинација $\bar{\mathbf{y}} = (1-\lambda)\bar{\mathbf{y}}_1 + \lambda\bar{\mathbf{y}}_2$ која иначе лежи на страници симплекса σ^3. Ово можемо проверити тако што ћемо израчунати функцију вредности игре $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ у седластој тачки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, тј.

$$\begin{aligned}
&K(\bar{\mathbf{x}}, (1-\lambda)\bar{\mathbf{y}}_1 + \lambda\bar{\mathbf{y}}_2) \\
&= (1-\lambda)K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}_1) + \lambda K(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}_2) \\
&= (1-\lambda)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \frac{\lambda}{5}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) \\
&= \frac{1}{5}((1-\lambda) + \lambda) = \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

што потврђује раније нађену вредност игре $v = 1/5$.

Пример 8. Показати да су скупови оптималних мешовитих стратегија S_D и S_G игре задате матрицом $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ затворени и конвексни.

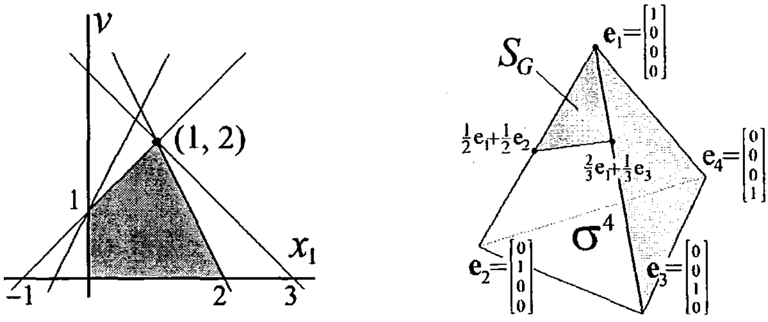
Решење. Систем неједнакости основног задатка LP (69) гласи

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\geq v, \\
2x_1 + 3x_2 &\geq v, \\
2x_1 + 4x_2 &\geq v, \\
3x_1 + x_2 &\geq v, \\
x_1 + x_2 &= 1, \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0,
\end{aligned}$$

и он се елиминацијом $x_2 = 1 - x_1$ своди на 4 неједнакости:

$$x_1 + 1 \geq v, \quad -x_1 + 3 \geq v, \quad -2x_1 + 4 \geq v, \quad 2x_1 + 1 \geq v,$$

које у (x_1, v)–равни дефинишу полигоналну област приказану на Слици 38 (лево), са максимумом $v = 2$ за $x_1 = 1$. Дакле, скуп оптималних стратегија првог играча S_D има само један елемент $\overline{\mathbf{x}} = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$.



Слика 38. Уз Пример 8

Сада дуални систем (69) за вектор $\mathbf{y} \in \sigma^4$ има облик

$$
\begin{aligned}
2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 &\le 2, \\
y_1 + 3y_2 + 4y_3 + \ \ y_4 &\le 2, \\
y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3 + \ \ y_4 &= 1, \\
y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 &\ge 0.
\end{aligned} \tag{71}
$$

Заменом $y_1 + y_2 + y_3 = 1 - y_4$ у прву неједнакост, добијамо $2(1 - y_4) + 3y_4 \le 2$, што се своди на $y_4 \le 0$. Уз задато ограничење $y_4 \ge 0$, добија се $y_4 = 0$, чиме је димензија симплекса смањена на 3. Сада тражимо вектор $[y_1 \quad y_2 \quad y_3]^{\mathrm{T}} \in \sigma^3$, који сем услова симплекса $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ и $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$, задовољава и преостале неједнакости из (71): $y_1 + y_2 + y_3 \le 1$ и $y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 2$.

Услов $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ у комбинацији са $y_1 + y_2 + y_3 \le 1$ даје $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, чиме се услови редукују на само једну неједнакост,

$$y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 2 \tag{72}$$

на симплексу σ^3, који је, као што знамо, троугао. Скуп решења, уколико није празан, мора (с обзиром на линеарна ограничења) бити полигоналан скуп. Зато, потражимо пресеке страница симплекса σ^3 које се добијају за $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, са полупростором $y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 2$.

Видимо да се за $y_1 = 0$ неједнакост (72) своди на $3y_2 + 4y_3 \le 2$, а услови симплекса на $y_2 + y_3 = 1$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$. Из $3y_2 + 4y_3 \le 2$, $y_2 + y_3 = 1$ се добија $y_3 \le -1$, што је у контрадикцији са условом ненегативности променљиве y_3.

За $y_2 = 0$ имамо систем $y_1 + y_3 = 1$ и $y_1 + 4y_3 \le 2$, одакле се уз услов $y_1 \ge 0$, $y_3 \ge 0$ добија решење $2/3 \le y_1 \le 1$ и $0 \le y_3 \le 1/3$. Овим је дефинисан линеарни сегмент чији су крајеви $[2/3\ \ 0\ \ 1/3]^T$ и $[1\ \ 0\ \ 0]^T$, или, у простору симплекса σ^4, $[2/3\ \ 0\ \ 1/3\ \ 0]^T = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$ и $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T = \mathbf{e}_1$. С друге стране, ако је $y_3 = 0$, добија се систем $y_1 + y_2 = 1$, $y_1 + 3y_2 \le 2$, чије је решење $1/2 \le y_1 \le 1$ и $0 \le y_2 \le 1/2$, што даје други линеарни сегмент дат крајњим тачкама $[1/2\ \ 1/2\ \ 0\ \ 0]^T = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$ и (поново) $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T = \mathbf{e}_1$.

Те три тачке, $\mathbf{e}_1$, $\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$ и $\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$, дефинишу троугао S_G (Слика 38, десно) и то је скуп оптималних стратегија другог играча. Скупови S_D и S_G су очигледно конвексни.

5.7. Специјалне конфигурације матричних игара

Нека је дата матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ која дефинише матричну игру са нултом сумом ($\mathbf{d}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{g}$).

Дефиниција 27. Кажемо да конвексна комбинација $\mathbf{V} \in \text{conv}(\mathbf{v}_p,\ldots,\mathbf{v}_q)$ врста $\mathbf{v}_p,\ldots,\mathbf{v}_q$ матрице $\mathbf{A}$ строго доминира врсту $\mathbf{v}_i$, $i \neq p,\ldots,q$, ако $\mathbf{V} > \mathbf{v}_i$. На сличан начин дефинише се строга доминација колоне $\mathbf{u}_j$ над конвексном комбинацијом колона $\mathbf{u}_r,\ldots,\mathbf{u}_s$, тј. $\mathbf{u}_j > \mathbf{U}$, $\mathbf{U} \in \text{conv}(\mathbf{u}_r,\ldots,\mathbf{u}_s)$.

Ако у матрици $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ постоји строга доминација над i-том врстом, $\mathbf{V} > \mathbf{v}_i$, тада се i-та врста $\mathbf{v}_i$, може искључити из матрице $\mathbf{A}$. С друге стране, ако постоји строго доминантна колона, $\mathbf{u}_j > \mathbf{U}$, тада се она искључује из $\mathbf{A}$.

Пример 9. Наћи оптималне стратегије игре $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 15 \\ 7 & 7 & 11 \\ 11 & 10 & 1 \end{bmatrix}$.

Решење. Како је $[\,7\ \ 7\ \ 11\,] < \frac{3}{4}[\,6\ \ 7\ \ 15\,] + \frac{1}{4}[\,11\ \ 10\ \ 1\,]$, имамо строгу доминацију конвексне комбинације прве и треће врсте над другом врстом. Искључујемо је и стављамо $x_2 = 0$. Остаје матрица $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 15 \\ 11 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

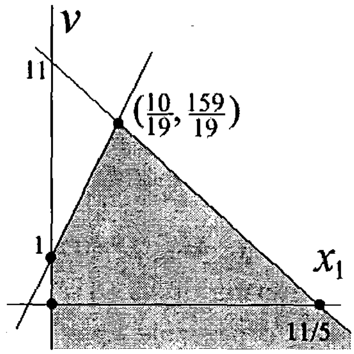
у којој друга колона строго доминира конвексну комбинацију прве и треће колоне, па се $\mathbf{u}_2$ искључује, и ставља се $y_2 = 0$. Тако, остаје матрица формата 2×2, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$, а мешовите стратегије су облика $\mathbf{x} = [x_1 \ 0 \ x_3]^T$ и $\mathbf{y} = [y_1 \ 0 \ y_3]^T$. Како је, због $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma^3$, $x_1 + x_3 = 1$ и $y_1 + y_3 = 1$, формуле (69) се своде на

$$[x_1 \ \ 1-x_1]\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix},$$

уз услов $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$. Добијају се два система нејднакости,

$$\begin{aligned} 11 - 5x_1 &\geq \text{v} \\ 1 + 14x_1 &\geq \text{v} \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} 15 - 9y_1 &\leq \text{v} \\ 1 + 13y_1 &\leq \text{v} \\ y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

са сличном графичком интерпретацијом, тако да је дата само интерпретација прве неједнакости (Слика 39). Слично као у Примеру 7, допустива област је бесконачна полигонална област са максимумом $v = 159/19$, за $x_1 = 10/19$. На тај начин се добија оптимална стратегија првог играча $\bar{\mathbf{x}} = [10/19 \ \ 0 \ \ 9/19]^T \in \sigma^3$. Сличан дијаграм даје поново $v = 159/19$, за $y_1 = 14/19$, тако да је $\bar{\mathbf{y}} = [14/19 \ \ 0 \ \ 5/19]^T \in \sigma^3$.



Слика 39. Уз Пример 9

Видимо да у овом примеру постоји равнотежа седласте тачке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = ([10/19 \ \ 0 \ \ 9/19]^T, [14/19 \ \ 0 \ \ 5/19]^T)$, док у Примеру 8 постоји равнотежа бескрајно много седластих тачака. Следећа теорема даје критеријум јединствености.

Теорема 26. *Ако матрична игра има бар једну седласту тачку потпуно мешовитих стратегија (у смислу Дефиниције 25), тада је та седласта тачка јединствена.*

Пример 10. (Игра "глава-писмо") Два играча истовремено бацају новчић од једног динара. Ако оба новчића падну на исту страну ("глава" или "писмо") први играч узима оба динара. У супротном, узима их други играч. Поставити матрицу игре и одредити оптималне стратегије.

Решење. Игра је задата следећом таблицом

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Играч II} \\ & & \begin{array}{cc} glava & pismo \end{array} \\ \text{Играч I} & \begin{array}{c} glava \\ pismo \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

и очигледно нема седласту тачку јер је $v_D = -1$, $v_G = 1$. Тако, претпостављамо да ће оптималне стратегије бити облика $\mathbf{x} = [x \;\; 1-x]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y \;\; 1-y]^{\mathrm{T}}$, при чему $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Функција очекиване добити (језгро игре) је

$$K(x, y) = [x \;\; 1-x]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = 4xy - 2x - 2y + 1, \tag{73}$$

што препознајемо као хиперболички параболоид (Слика 35). Координате седласте тачке се добијају из система $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ који се своди на $4y - 2 = 0$ и $4x - 2 = 0$ са решењем $x = 1/2$, $y = 1/2$. Дакле, оптималан пар стратегија је $\overline{\mathbf{x}} = [1/2 \;\; 1/2]^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}} = [1/2 \;\; 1/2]^{\mathrm{T}}$, и како су то потпуно мешовите стратегије, седласта тачка је јединствена. Вредност игре је

$$v = K(1/2, 1/2) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Напомена. исто решење се добија применом формула (66), јер матрица добити задовољава услов (63), $h = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 4 \neq 0$).

У претходном примеру игре "глава-писмо" се уочава да је матрица добити $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ симетрична матрица јер задовољава релацију $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Међутим, симетрија матрице добити не повлачи "симетрију" игре. Наиме, ако бисмо матрицу $\mathbf{A}$ заменили матрицом $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, тада бисмо морали да заменимо и места играчима G и D, па би сваки позитивни елемент матрице $\mathbf{A}$ сада значио добитак за G уместо губитка. Да би све остало исто, потребно је променити знак елементима матрице $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, тј. посматрати матрицу $-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Тако долазимо до појма међусобно огледалски симетричних игара као и до појма игре која има особину симетрије.

Дефиниција 28. Матрична игра $\mathbf{A}$ је *огледало* игре $\mathbf{B}$ ако је $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Матрична игра $\mathbf{A}$ је *симетрична* ако је сама себи огледало, тј. ако је $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (таква матрица се назива косо-симетрична).

Очигледно, релација огледала је симетрична, тј. ако је **A** огледало **B**, тада је и **B** огледало **A**.

Теорема 27. *Ако су игре* **A** *и* **B** *огледало једна другој, тада је* $v(\mathbf{B}) = -v(\mathbf{A})$, *а скуп оптималних стратегија добитног играча игре* **A** *је једнак скупу оптималних стратегија губитног играча игре* **B** *и обрнуто.*

Последица ове теореме је да ако је игра **A** симетрична, тада је $v(\mathbf{A}) = 0$, док су оптималне стратегије добитног и губитног играча једнаке, $S_D = S_G$. Пример игре "глава-писмо" показује да игра може имати симетричан исход иако матрица **A** није косо-симетрична.

Пример 11. Формирати игру која је огледало игри "глава-писмо" и одредити оптималне стратегије.

Решење. Матрица добити игре-огледала је

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Применом формула (66) добијамо резултате који потврђују Теорему 27:

$$v(\mathbf{B}) = \frac{1}{(-4)} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(1-1) = 0;$$

$$\overline{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-1}{-4} \\ \dfrac{-1-1}{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{y}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-1}{-4} \\ \dfrac{-1-1}{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Следећи пример даје једну познату игру која има особину симетрије.

Пример 12. Сваки од два играча показује један или два прста, истовремено изговарајући речи "један" и "два" што је његово предвиђање броја прстију које показује противник. Ако оба играча погреше или оба погоде, резултат је нерешен и нико не добија поене. Ако један погоди, он добија онолико поена колико износи збир прстију који су показани. Очигледно, постоје 4 стратегије: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) где први број у пару представља број показаних прстију, а други предвиђен број показаних прстију противника. Саставити матрицу добити игре и испитати њену симетрију. Ако је оптимална стратегија првог играча $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, одредити оптималну стратегију другог играча и испитати ком играчу је игра наклоњена.

Решење. Матрица добити је дата у следећој табели:

$$\text{Играч I} \quad \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \text{Играч II} \\ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

За матрицу игре $\mathbf{A}$ се показује да важи $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, тако да је игра симетрична. На основу последице Теореме 27, $\overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, док је вредност игре $v = 0$, дакле игра је фер.

ЗАДАЦИ

1. ЕЛЕМЕНТИ КОНВЕКСНЕ АНАЛИЗЕ

1.1. Конвексни скупови

1.1.1. Доказати да је скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ конвексан ако и само ако је испуњен услов: за свако $k \geq 2$ и произвољне $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in S$ и $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, важи

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i \in S .$$

Решење. Наведени услов је довољан за ковексност скупа S јер за $k = 2$ и произвољне $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи: $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S$. Да је услов потребан, доказаћемо применом принципа математичке индукције. Нека је S конвексан скуп. Према Дефиницији 2, тврђење важи за $k = 2$. Претпоставимо да важи за неки природан број k и докажимо да важи и за природан број k+1. Нека су $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1} \in S$ и $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i = 1$, произвољни. Ако је $\lambda_{k+1} = 1$, тада је $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, па је $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{k+1} \in S$. У супротном, $\mathbf{x}$ може да се представи у облику

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i + \lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = (1-\lambda_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \mathbf{x}_i \right) + \lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} .$$

По индукцијској претпоставци $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \mathbf{x}_i \in S$, па је и $\mathbf{x} \in S$.

1.1.2. Доказати да је скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ конвексан ако и само ако је конвексан његов пресек са произвољном правом.

Решење. Права у $\mathbb{R}^n$ има једначину $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{d}$, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Нека је скуп S конвексан и нека је $L = S \cap l$, где је l произвољна права чија је једначина $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{d}$. За произвољне елементе $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \subset S$ и произвољно $\lambda \in [0,1]$, према дефиницији конвексног скупа важи $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$. С друге стране, као тачке на правој l, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се могу представити у облику $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{d}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + t_2\,\mathbf{d}$, па је $\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\mathbf{d}$, тј. $\mathbf{z}$ такође припада правој l. Тако, $\mathbf{z} \in L$, а због произвољности $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и λ, скуп L је конвексан. Обрнуто, нека је пресек скупа S и произвољне праве конвексан. Нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и $\lambda \in [0,1]$ произвољни. Ако је је l права одређена тачкама $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и $L = S \cap l$, тада важи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$. Због конвексности скупа L важи и $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in L \subset S$. Због произвољности $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и λ скуп S је конвексан.

1.1.3. Ако су скупови $A, B \subset \mathbb{R}^n$ конвексни, конвексан је и скуп $A \times B$. Доказати.

Решење. Нека су $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$, $\mathbf{x}_A \in A$, $\mathbf{x}_B \in B$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_A, \mathbf{y}_B)$, $\mathbf{y}_A \in A$, $\mathbf{y}_B \in B$ и $\lambda \in [0,1]$ произвољни. Како су A и B конвексни скупови, важи $\lambda\mathbf{x}_A + (1-\lambda)\mathbf{y}_A \in A$ и $\lambda\mathbf{x}_B + (1-\lambda)\mathbf{y}_B \in B$. Зато важи и

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = \left(\lambda\mathbf{x}_A + (1-\lambda)\mathbf{y}_A, \lambda\mathbf{x}_B + (1-\lambda)\mathbf{y}_B\right) \in A \times B.$$

1.1.4. Ако су скупови $A, B \subset \mathbb{R}^n$ конвексни, конвексни су и скупови $\alpha A = \{\alpha\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и $A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$. Доказати.

Решење. Произвољни елементи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \alpha A$ имају облик $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in A$. Због конвексности скупа A, за произвољно $\lambda \in [0,1]$ важи $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1 \in A$, па је и

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = \alpha\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_1\right) = \alpha\mathbf{z}_1 \in \alpha A.$$

Слично, нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A + B$ произвољни. Тада је $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B$, $\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A \in A$ $\mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B \in B$. Како су скупови A и B конвексни, за произвољно $\lambda \in [0,1]$ важи

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = \left(\lambda\mathbf{x}_A + (1-\lambda)\mathbf{y}_A\right) + \left(\lambda\mathbf{x}_B + (1-\lambda)\mathbf{y}_B\right) \in A + B.$$

1.1.5. Да ли су пресек и унија конвексних скупова конвексни?

Решење. Нека су A и B конвексни скупови. За произвољне $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \cap B$ и $\lambda \in [0,1]$ важи $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A$ и $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in B$, тј. $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A \cap B$. Према томе, и $A \cap B$ је конвексан.

Унија конвексних скупова у општем случају није конвексан скуп. На пример, $A = [1, 2]$ и $B = [5, 6]$ су интервали у $\mathbb{R}$, дакле конвексни скупови. Међутим, скуп $A \cup B = [1, 2] \cup [5, 6]$ није конвексан. Заиста, тачке $\mathbf{x} = 1$ и $\mathbf{y} = 5$ припадају скупу $A \cup B$, али не и све њихове конвексне комбинације, на пример конвексна комбинација $\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} = 3 \notin A \cup B$.

1.1.6. Испитати конвексност следећих скупова:

а) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq a + bx_1\}$, $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq a + bx_1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

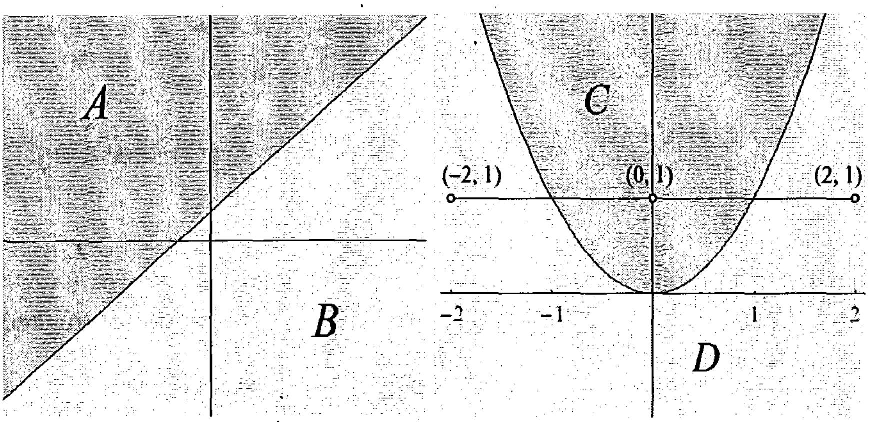
б) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^2\}$, $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq x_1^2\}$,

в) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq ax_1 + bx_2\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Решење. **а)** Нека су $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ произвољни елементи скупа A и $\mathbf{z} = (z_1, z_2) = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ њихова произвољна конвексна комбинација. Како је $x_2 \geq a + bx_1$ и $y_2 \geq a + by_1$, то је

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda(a + bx_1) + (1-\lambda)(a + by_1) \\ &= a + b(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) = a + bz_1, \end{aligned}$$

што значи да $\mathbf{z} \in A$. Према томе, скуп A је конвексан, и то је полураван (Слика 1.1.6, лево). На исти начин доказује се да је B конвексан скуп.



Слика 1.1.6

б) Произвољни елементи $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ скупа C су такви да је $x_2 \geq x_1^2$ и $y_2 \geq y_1^2$. Зато за њихову произвољну конвексну комбинацију $\mathbf{z} = (z_1, z_2) = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ важи:

$$\begin{aligned} z_2 - z_1^2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 - \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1\right)^2 \\ &\geq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)y_1^2 - \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1\right)^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_1 - y_1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

тј. $\mathbf{z} \in C$. Због произвољности елемената и конвексне комбинације, C је конвексан скуп.

Скуп D није конвексан. Заиста, тачке $\mathbf{x} = (-2, 1)$ и $\mathbf{y} = (2, 1)$ припадају скупу D, али не и њихова конвексна комбинација $\mathbf{z} = 0.5\mathbf{x} + 0.5\mathbf{y} = (0, 1)$ (Слика 1.1.6, десно).

1.1.7. Доказати да је кугла $K(\boldsymbol{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, конвексан скуп.

Решење. Нека је $\boldsymbol{a} = [a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n]^{\mathrm{T}}$ и нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K(\boldsymbol{a}, r)$, $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y_1 \;\; y_2 \;\; \dots \;\; y_n]^{\mathrm{T}}$ и $\lambda \in [0, 1]$ произвољни. Тада за $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ важи:

$$\begin{aligned} |\,\mathbf{z} - \boldsymbol{a}\,| &= |\,\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \lambda\boldsymbol{a} - (1-\lambda)\boldsymbol{a}\,| = |\,\lambda(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \boldsymbol{a})\,| \\ &\leq \lambda\,|\,\mathbf{x} - \boldsymbol{a}\,| + (1-\lambda)\,|\,\mathbf{y} - \boldsymbol{a}\,| < \lambda r + (1-\lambda)r = r, \end{aligned}$$

што значи да $\mathbf{z} \in K(\boldsymbol{a}, r)$.

1.1.8. Доказати да је скуп $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq c\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, конвексан.

Решење. Произвољни $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ испуњавају услове $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq c, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq c$. За њихову конвексну комбинацију $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ важи

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq \lambda c + (1-\lambda)c = c,$$

тј., $\mathbf{z} \in S$. Према томе, S је конвексан.

1.1.9. Испитати конвексност скупа $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c \leq 0\}$, где је $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, а $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, симетрична позитивно семи-дефинитна матрица.

Решење. Симетрична матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, је позитивно семи-дефинитна ако задовољава услов $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{z} \geq 0$ за свако $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

ıроизвољни и $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ њихова произвољна конвексна комбинација. Гада је

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}+c \\
&=(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+c \\
&=\lambda^2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y})+(1-\lambda)^2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}+\lambda\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\
&=\lambda(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+c)+(1-\lambda)(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}+c)-\lambda(1-\lambda)(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}) \\
&\le-\lambda(1-\lambda)(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\le 0,
\end{aligned}
$$

што значи да $\mathbf{z}\in S$. Према томе, S је конвексан скуп.

1.1.10. Ако су $A, B \subset \mathbb{R}^n$ непразни скупови, доказати да је

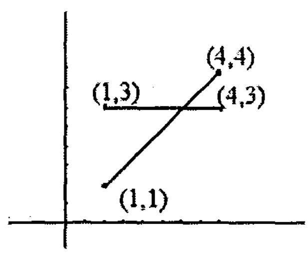
$$\mathrm{Co}(A\cap B)\subseteq \mathrm{Co}(A)\cap \mathrm{Co}(B).$$

Решење. Нека је $\mathbf{x}\in \mathrm{Co}(A\cap B)$ произвољан елемент. Тада је $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{x}_i$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ $\mathbf{x}_i\in A\cap B$, $i=1,\dots,k$. Како је $\mathbf{x}_i\in A$ и $\mathbf{x}_i\in B$, то је и $\mathbf{x}\in \mathrm{Co}(A)$, $\mathbf{x}\in \mathrm{Co}(B)$ респективно, тј. $\mathbf{x}\in \mathrm{Co}(A)\cap \mathrm{Co}(B)$.

Обрнуто не мора да важи. Заиста, нека су дати скупови A={(1, 1), (4, 4)} и B={(1, 3), (4, 3)} у $\mathbb{R}^2$ (Слика 1.1.10.). Тада је $A\cap B=\varnothing$, па је и $\mathrm{Co}(A\cap B)=\varnothing$. Међутим, конвексни омотачи

$$\mathrm{Co}(A)=\{(x_1,x_2)\mid x_2=x_1, 1\le x_1\le 4\}$$
$$\mathrm{Co}(B)=\{(x_1,x_2)\mid x_2=3, 1\le x_1\le 4\}$$

нису дисјунктни јер $(3, 3)\in \mathrm{Co}(A)\cap \mathrm{Co}(B)$.



Слика 1.1.10.

1.1.11. Представити скуп S = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1\, x_2 \ge 1\}$ као пресек полупростора.

1.1.12. Одредити граничне и екстремне тачке скупова:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\}$,

б) $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x_1 \le 2,\ x_2 = 0\}$,

в) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 4 \le x_2 \le 0\}$,

г) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \leq 3,\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

д) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}$,

ђ) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4,\ x_2 = 1\}$.

Решење. **а)** Граничне тачке скупа A су 1 и 2. То су и екстремне тачке.

б) Према Дефиницији 5, све тачке скупа B су граничне. Екстремне тачке су (1, 0) и (2,0).

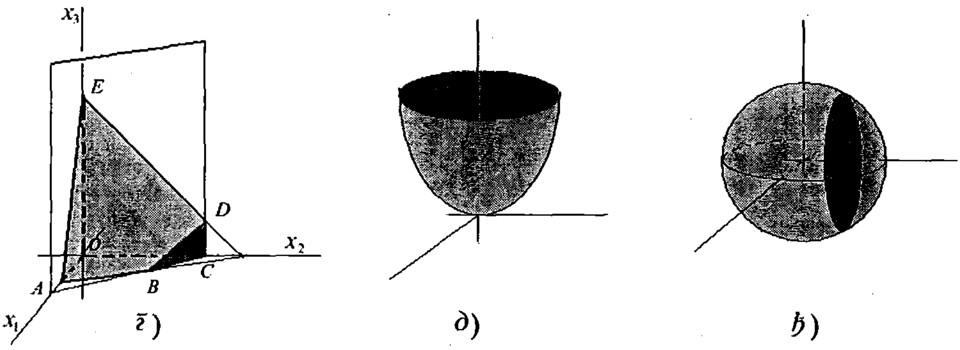
в) Скуп граничних тачака скупа C је $\partial C = C_1 \cup C_2$, где је

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 - 4,\ -2 \leq x_1 \leq 2\},$$
$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0,\ -2 \leq x_1 \leq 2\},$$

а скуп екстремних тачака

$$ex(C) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 - 4,\ -2 \leq x_1 \leq 2\}.$$

г) Граничне тачке су све оне које леже на странама полиедра $OABCDE$ (Слика 1.1.12, лево). Екстремне тачке су темена $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(0, 3, 1)$ и $E(0, 0, 4)$.



Слика 1.1.12.

д) $\partial E = ex(E) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$. (Слика 1.1.12, средина)

ђ) $\partial F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4,\ x_2 = 1\}$,

$ex(F) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,\ x_2 = 1\}$. (Слика 1.1.12, десно)

1.1.13. Одредити полиедарске скупове $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ и њихове екстремне тачке и екстремне правце, при чему је

$$\text{а)}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\qquad \text{б)}\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решење. **а)** У скаларном облику ограничења су дата неједначинама:

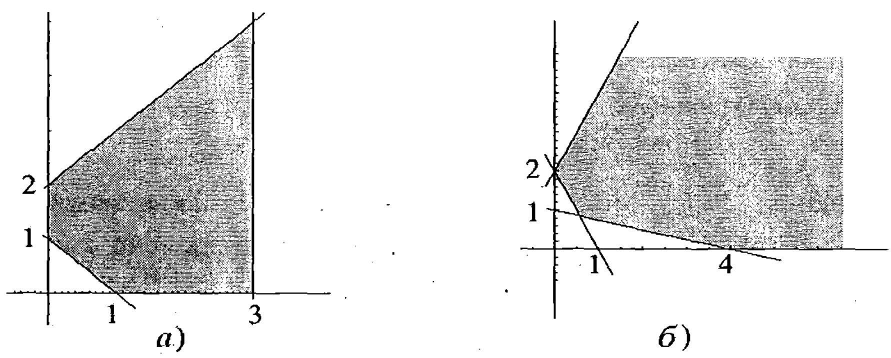
$$-x_1 + x_2 \leq 2,\quad -x_1 - x_2 \leq -1,\quad x_1 \leq 3,\quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0.$$

Екстремне тачке су (1, 0), (3, 0), (3, 5), (0, 1) и (0, 2). Екстремни правци не постоје.

б) Скуп S је описан неједнакостима:

$$-2x_1 + x_2 \leq 2,\quad -2x_1 - x_2 \leq -2,\quad -x_1 - 4x_2 \leq -4,\quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0.$$

Екстремне тачке су (4/7, 6/7), (4, 0) и (0,2), а екстремни правци су $\mathbf{d}_1 = [1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_2 = [1\ \ 2]^{\mathrm{T}}$.



Слика 1.1.13.

1.1.14. Доказати да је скуп реалних симетричних позитивно семидефинитних матрица типа 3×3 са јединичном дијагоналом конвексан.

Решење. Потребно је доказати конвексност скупа матрица облика $M = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, таквих да је $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} M \mathbf{z} \geq 0$, за свако $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

1.2. Конвексне функције

1.2.1. Доказати да је функција $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, при чему је $\|\cdot\|$ норма, конвексна функција у $\mathbb{R}^n$.

Решење. Нека су $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0,1]$ произвољни. Према познатим особинама норме важи

$$\|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\| \leq \|\lambda\mathbf{x}\| + \|(1-\lambda)\mathbf{y}\| = \lambda\|\mathbf{x}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\|,$$

дакле $f\big(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$, па је функција f конвексна.

1.2.2. Доказати да је функција $f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, где је $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \ldots\ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, конвексна у $\mathbb{R}^n$.

Решење. Нека су $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y_1\ y_2 \cdots y_n]^{\mathrm{T}}$ и $\lambda \in [0, 1]$ произвољни. Тада за свако i=1, 2,..., n важи

$$\lambda x_i \leq \max\{\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n\} = \lambda \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \lambda f(\mathbf{x}),$$

$$(1-\lambda)y_i \leq (1-\lambda)\max\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

Зато је $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$ за свако i = 1, 2,..., n, па је испуњено

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \max\{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \cdots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n\} \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

1.2.3. Функција f је афина, тј. може да се представи у облику $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \alpha$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ако и само ако је истовремено конвексна и конкавна.

Решење. Докажимо да је $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \alpha$ истовремено конвексна и конкавна функција. За произвољне $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) + \alpha = \lambda\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \alpha \\ &= \lambda(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \alpha) + (1-\lambda)(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \alpha). \end{aligned}$$

тј. $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$, што значи да је f истовремено конвексна и конкавна функција. Обрнуто, ако је функција f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и конвексна и конкавна, за произвољне $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0,1]$ важи

$f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})$. То значи да је f афина, тј. може да се представи у облику

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \alpha,$$

где је $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_n]^{\mathrm{T}}$ и $\alpha = c_{n+1}$.

1.2.4. Нека су функције $f_1, f_2, \cdots, f_k$ конвексне у $\mathbb{R}^n$. Доказати да су конвексне и функције:

а) $f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_k(\mathbf{x})\}$,

б) $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\mathbf{x}), \quad \alpha_i > 0$.

Решење. **а)** За произвољне $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$\begin{aligned} f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) &\le \lambda f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f_i(\mathbf{y}) \le \lambda \max_{1\le i\le k} f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\max_{1\le i\le k} f_i(\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned}$$

па је и $\quad f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) = \max_{1\le i\le k} f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$.

б) Због конвексности функција f_i и позитивности α_i, за свако $i = 1, 2, \ldots, k$ важи

$$\alpha_i f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda\alpha_i f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\alpha_i f_i(\mathbf{y}).$$

Сумирањем се добија

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

1.2.5. Нека су функције $f_1, f_2, \cdots, f_k$ конкавне у $\mathbb{R}^n$. Доказати да су конкавне и функције:

а) $f(\mathbf{x}) = \min\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_k(\mathbf{x})\}$,

б) $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\mathbf{x}), \quad \alpha_i > 0$.

1.2.6. Нека су дате функције $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и нека је $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ њихова композиција. Доказати:

а) Ако је f конвексна и g неопадајућа конвексна функција, функција h је конвексна.

б) Ако је f конкавна и g нерастућа конвексна функција, функција h је конвексна.

в) Ако је f конвексна и g нерастућа конкавна функција, функција h је конкавна.

г) Ако је f конкавна и g неопадајућа конкавна функција, функција h је конкавна.

Решење. С обзиром на то да се докази тврђења разликују само у избору потребних неједнакости, овде ће бити доказано само прво.

а) Нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ произвољни. Због конвексности функције f важи

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) \ ,$$

а због монотоности и конвексности функције g:

$$g(f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})) \le \mathrm{g}(\lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})) \le \lambda g(f(\mathbf{x})) + (1-\lambda) g(f(\mathbf{y})) \,.$$

Ово коначно даје неједнакост

$$h(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda h(\mathbf{x}) + (1-\lambda) h(\mathbf{y}) \ ,$$

која због произвољности $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ потврђује конвексност функције h.

1.2.7. Нека је функција g конкавна у $\mathbb{R}^n$ и $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{g(\mathbf{x})}$. Доказати да је функција f конвексна на скупу $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) > 0\}$.

Решење. Функција $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t}$, је диференцијабилна на $\mathbb{R}^+$ и важи:

$$\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0, \qquad \psi''(t) = \frac{2}{t^3} > 0, \quad t > 0.$$

Према томе, ψ је нерастућа конвексна функција. Како је $f(\mathbf{x}) = \psi(g(\mathbf{x}))$, а функција g конкавна, према тврђењу Задатка 1.2.6.б), функција f је конвексна на скупу S.

1.2.8. Ако су функције $f_1, f_2, \ldots, f_m$ конвексне, доказати да је конвексан скуп

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_j(\mathbf{x}) \le 0,\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Решење. За произвољне $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$f_j(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda f_j(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f_j(\mathbf{y}) \le 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m,$$

што значи да је $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$.

1.2.9. Нека је f конвексна функција у $\mathbb{R}^n$. Доказати да је скуп свих суб-градијената функције f у датој тачки конвексан скуп.

Решење. Претпоставимо да су ξ_1 и ξ_2 произвољни субградијенти функције f у тачки $\boldsymbol{a}$ и $\xi = \lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2$, $\lambda \in [0,1]$, њихова произвољна конвексна комбинација. Према Дефиницији 14, за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ задовољене су неједнакости

$$f(\mathbf{x}) \ge f(\boldsymbol{a}) + \xi_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \quad \text{и} \quad f(\mathbf{x}) \ge f(\boldsymbol{a}) + \xi_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}).$$

Зато је

$$\xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) = (\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) = \lambda\, \xi_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) + (1-\lambda)\, \xi_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})$$
$$\le \lambda(f(\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{a})) + (1-\lambda)(f(\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{a})) = f(\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{a}),$$

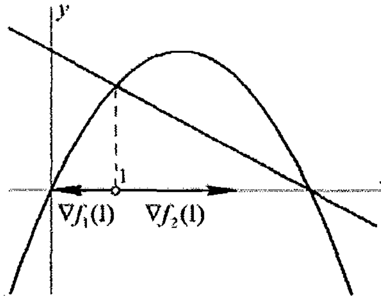
тј. $f(\mathbf{x}) \ge f(\boldsymbol{a}) + \xi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})$, што значи да је и ξ субградијент функције f у тачки $\boldsymbol{a}$.

1.2.10. Одредити субградијент функције

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & 1 \le x \le 4, \\ 4 - (x-2)^2, & x < 1 \text{ или } x > 4 \end{cases}$$

у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Функција f је конкавна и диференцијабилна на сваком од интервала $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$ и $(4, \infty)$ (Слика 1.2.8.). Зато су њени субградијенти у тачкама унутар тих интервала једнаки градијентима, тј. $\nabla f(x) = -\mathbf{e}_1$ за $x \in (1, 4)$ и $\nabla f(x) = -2(x-2)\,\mathbf{e}_1$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$. У тачкама $x = 1$ и $x = 4$ субградијент функције f није јединствен, јер у њима има



Слика 1.2.8. Субградијент као конвексна комбинација градијената

бесконачно много потпорних хиперравни скупа hyp f. Скуп субградијената функције f представља скуп конвексних комбинација градијената функција $f_1(x) = 4 - x$ и $f_2(x) = 4 - (x - 2)^2$ у тим тачкама. Тако, произвољан субградијент функције f у тачки $x = 1$ је

$$\xi_1 = \lambda\, \nabla f_1(1) + (1 - \lambda)\, \nabla f_2(1) = \lambda\, (-\mathbf{e}_1) + (1 - \lambda)\, 2\mathbf{e}_1 = (2 - 3\lambda)\, \mathbf{e}_1,$$

а у тачки $x = 4$ је

$$\xi_2 = \lambda\, \nabla f_1(4) + (1 - \lambda)\, \nabla f_2(4) = \lambda\, (-\mathbf{e}_1) + (1 - \lambda)(-4\, \mathbf{e}_1) = (3\lambda - 4)\, \mathbf{e}_1,$$

где је $\lambda \in [0, 1]$.

1.2.11. Одредити градијенте или субградијенте следећих функција:

а) $f(x) = x^{10} + 5x^5 - 1$,

б) $f(x) = |\, x\,|$,

в) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)\, e^{x_1 x_2}$,

г) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

д) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$.

Решење. Са $\nabla f(\mathbf{x})$ означићемо градијент функције f у тачки $\mathbf{x}$ ако он постоји, а са $\xi(\mathbf{x})$ субградијент функције у тачки $\mathbf{x}$, ако градијент не постоји.

а) $\nabla f(x) = (10x^9 + 25x^4)\, \mathbf{e}_1$.

б) $\nabla f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_1, & x > 0, \\ -\mathbf{e}_1, & x < 0, \end{cases}$ $\quad \xi(0) = \lambda\, \mathbf{e}_1 - (1 - \lambda)\, \mathbf{e}_1 = (2\lambda - 1)\, \mathbf{e}_1,\ \lambda \in [0, 1]$.

в)
$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= [(1 + x_1 x_2 - x_2^3)\, e^{x_1 x_2} \quad (x_1^2 - 2x_2 - x_1 x_2^2)\, e^{x_1 x_2}]^{\mathrm{T}} \\ &= e^{x_1 x_2} \left((1 + x_1 x_2 - x_2^3)\mathbf{e}_1 + (x_1^2 - 2x_2 - x_1 x_2^2)\mathbf{e}_2 \right). \end{aligned}$$

г) $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, док у тачки $(0, 0)$ постоји само субградијент $\xi(0, 0) = [2\lambda - 1 \quad 2\mu - 1]^{\mathrm{T}}$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$.

д) $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = [2x_1 \quad 8x_2 \quad 18x_3]^{\mathrm{T}}$.

1.2.12. Нека је $S \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и $f\colon S \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Функција f је конвексна ако и само ако за свако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ важи неједнакост

$$(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0.$$

Доказати.

Решење. Нека је f конвексна диференцијабилна функција и нека су $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ произвољни. Тада, према Теореми 7, важе неједнакости:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \geq \nabla f(\mathbf{y})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Њиховим сабирањем добија се

$$\nabla f(\mathbf{y})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0,$$

а једноставном трансформацијом и тражена неједнакост.
Обрнуто, нека је неједнакост

$$(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0$$

задовољена за свако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и нека су $\boldsymbol{a}, \mathbf{x} \in S$ произвољни. Развојем функције f по Тејлоровој формули у околини тачке $\boldsymbol{a}$ добија се

$$f(\mathbf{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}),$$

где је $\mathbf{c} = \boldsymbol{a} + \theta(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})$, $0 < \theta < 1$. Према претпостављеној неједнакости важи

$$(\nabla f(\mathbf{c}) - \nabla f(\boldsymbol{a}))^{\mathrm{T}} (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \geq 0,$$

тј.,

$$(\nabla f(\mathbf{c}) - \nabla f(\boldsymbol{a}))^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{a} + \theta(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}) = \theta\, (\nabla f(\mathbf{c}) - \nabla f(\boldsymbol{a}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq 0.$$

Како је θ позитивно, испуњена је неједнакост

$$\nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq \nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}),$$

а тиме и

$$f(\mathbf{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{a}).$$

Због произвољности $\boldsymbol{a}, \mathbf{x} \in S$, у складу са Теоремом 7, функција f је конвексна.

1.2.13. Испитати конвексност следећих функција:

а) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

б) $f(x_1,x_2)=4x_1^2+9x_2^2$,

в) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1+x_2),\ \ x_1+x_2>0$.

Решење. **а)** Градијент функције $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ у тачки $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\neq(0,0)$ једнак је

$$\nabla f(\mathbf{x})=\nabla f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

За произвољно $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\neq(0,0)$ и произвољно $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ важи:

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x})-f(\boldsymbol{a})-\nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})\\
&=\sqrt{x_1^2+x_2^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\begin{bmatrix}\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} & \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{bmatrix}\\
&=\sqrt{x_1^2+x_2^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\frac{a_1(x_1-a_1)+a_2(x_2-a_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\\
&=\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{a_1^2+a_2^2}-(a_1x_1+a_2x_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\\
&=\frac{\sqrt{a_1^2x_1^2+a_1^2x_2^2+a_2^2x_1^2+a_2^2x_2^2}-(a_1x_1+a_2x_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\\
&=\frac{\sqrt{(a_1x_1+a_2x_2)^2+(a_2x_1-a_1x_2)^2}-(a_1x_1+a_2x_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\geq 0,
\end{aligned}$$

тј., $f(\mathbf{x})\geq f(\boldsymbol{a})+\nabla f(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{a})$. Према Теореми 7, функција је конвексна.

б) Градијент функције је $\nabla f(\mathbf{x})=[8x_1\quad 18x_2]^{\mathrm{T}}$. За произвољне $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ важи:

$$\begin{aligned}
(\nabla f(\mathbf{y})-\nabla f(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})&=\begin{bmatrix}8(y_1-x_1) & 18(y_2-x_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-x_1\\ y_2-x_2\end{bmatrix}\\
&=8(y_1-x_1)^2+18(y_2-x_2)^2\geq 0,
\end{aligned}$$

што значи да је функција конвексна (видети Задатак 1.2.12.)

в) $\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1 + x_2} & \dfrac{1}{x_1 + x_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad x_1 + x_2 > 0.$

$$(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y_1 + y_2} - \dfrac{1}{x_1 + x_2} & \dfrac{1}{y_1 + y_2} - \dfrac{1}{x_1 + x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{y_1 + y_2} - \frac{1}{x_1 + x_2} \right)(y_1 - x_1 + y_2 - x_2)$$

$$= -\frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{(y_1 + y_2)(x_1 + x_2)} \le 0.$$

Према Задатку 1.2.12., функција је конкавна.

1.2.14. Испитати конвексност следећих функција:

а) $f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2} + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$

б) $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$

Решење. **а)** Парцијални изводи функције f су $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = ae^{ax_1 + bx_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = be^{ax_1 + bx_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = a^2 e^{ax_1 + bx_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = abe^{ax_1 + bx_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = b^2 e^{ax_1 + bx_2}$, па је њен Хесијан у произвољној тачки једнак

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 e^{ax_1 + bx_2} & abe^{ax_1 + bx_2} \\ abe^{ax_1 + bx_2} & b^2 e^{ax_1 + bx_2} \end{bmatrix} = e^{ax_1 + bx_2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} = e^{ax_1 + bx_2} \tilde{\mathbf{H}},$$

где је $\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$. Сопствене вредности матрице $\tilde{\mathbf{H}}$ добијају се решавањем једначине $\det(\tilde{\mathbf{H}} - \lambda I) = 0$, тј.

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab \\ ab & b^2 - \lambda \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - a^2 b^2 = 0.$$

Решења су $\tilde{\lambda}_1 = 0$ и $\tilde{\lambda}_2 = a^2 + b^2$. Сопствене вредности матрице **H** су тада $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = (a^2 + b^2)e^{ax_1+bx_2}$. Како су обе сопствене вредности ненегативне, матрица **H** је позитивно семидефинитна, а према Теореми 8, функција f је конвексна на $\mathbb{R}^2$ за произвољне вредности параметара $a, b \in \mathbb{R}$.

б) С обзиром на парцијалне изводе функције f

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2ax_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2bx_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2cx_3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

хесијан је константна дијагонална матрица $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$, чије су сопствене вредности $\lambda_1 = 2a$, $\lambda_2 = 2b$, $\lambda_3 = 2c$. По услову задатка важи $a, b, c > 0$, па су сопствене вредности позитивне, тј. **H** је позитино дефинитна матрица. Према Теореми 8, функција f је строго конвексна.

1.2.15. Квадратну функцију f представити у Тејлоровом облику у околини тачке **O**(0, 0) и испитати њену конвексност.

а) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2$,

б) $f(x_1, x_2) = 5 - x_1^2 - 3x_1x_2 - 5x_2^2$.

Решење. **а)** Парцијални изводи функције f су:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + x_2 - 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 1,$$

а градијент и хесијан у произвољној тачки

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 + x_2 - 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

што даје Тејлоров облик функције

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{0})+\nabla f(\mathbf{0})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{0})\mathbf{x}=[1 \quad -5]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности хесијана су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, па је $\mathbf{H}$ позитивно дефинитна матрица. Дакле, функција f је строго конвексна.

б) Градијент и хесијан функције f су

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}-2x_1-3x_2\\-3x_1-10x_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}-2 & -3\\-3 & -10\end{bmatrix},$$

а Тејлоров облик

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{0})+\nabla f(\mathbf{0})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{0})\mathbf{x}=5+\frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}-2 & -3\\-3 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

Како су обе сопствене вредности хесијана $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_1 = -11$ негативне, $\mathbf{H}$ је негативно дефинитна матрица, а функција f строго конкавна.

1.2.16. Доказати конвексност следећих скупова:

а) $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{x_1}\le x_2\le -x_1^2+x_1+6\}$,

б) $B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid |x_1-2|-4\le x_2\le 2\ln x_1\}$,

в) $C=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x_1-\pi x_2\le 2\pi,\ x_2\le\sin 2x_1, \operatorname{arctan}x_1+x_2\ge 0, x_1\ge 0\}$,

г) $D=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathrm{e}^{x_1+x_2}-10\le x_3\le 5-x_1^2-3x_1x_2-5x_2^2\}$.

Решење. **а)** Скуп A може да се представи у облику

$$A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2\ge e^{x_1}\}\cap\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2\le -x_1^2+x+6\}=\operatorname{epi} f\cap\operatorname{hyp} g,$$

где су функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисане респективно са $f(x_1)=e^{x_1}$ и $g(x_1)=-x_1^2+x_1+6$. Лако је доказати да је f конвексна, а g конкавна функција, па су, према Теореми 6, epi f и hyp g конвексни скупови. Као пресек конвексних скупова, и A је конвексан скуп (Слика 1.2.16, лево).

б) Ако се скуп B представи у облику

$$B=\operatorname{epi} f\cap\operatorname{epi} g\cap\operatorname{hyp} h,$$

где су

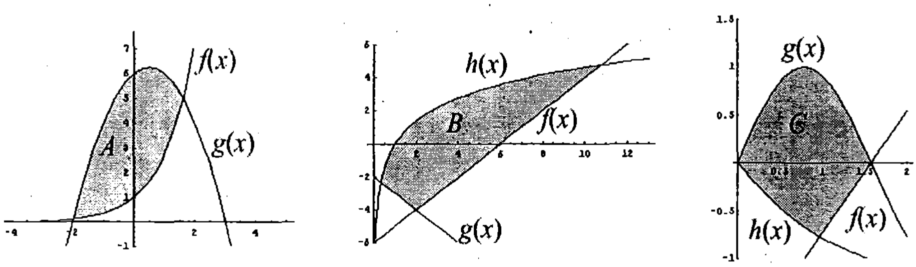
$$f(x_1)=x_1-6,\quad g(x_1)=-x_1-2,\quad h(x_1)=2\ln x_1,$$

тада из конвексности функција f и g и конкавности функције h следи конвексност одговарајућих скупова, а тиме и њиховог пресека (Слика 1.2.16, средина).

в) Скуп C је конвексан као пресек конвексних скупова

$$C = \mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hyp}\, g \cap \mathrm{epi}\, h \cap H_1 \cap H_2,$$

где је $f(x_1) = (4x_1 - 2\pi)/\pi$ конвексна функција, $h(x_1) = -\arctan x_1$ функција конвексна за $x_1 \geq 0$, $g(x_1) = \sin 2x_1$ конкавна за $0 \leq x_1 \leq \pi$, а H_1 и H_2 полупростори $H_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1 \geq 0\}$ и $H_2 = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq \pi\}$ (Слика 1.2.16, десно).



Слика 1.2.16.

г) Скуп је конвексан као пресек конвексних скупова $D = \mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hyp}\, g$, где је $f(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{x_1+x_2} - 10$ конвексна, а $g(x_1,x_2) = 5 - x_1^2 - 3x_1x_2 - 5x_2^2$ конкавна функција (видети Задатак 1.2.14. и Задатак 1.2.15)

1.2.17. Нека је f: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ непрекидна неопадајућа функција и

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt .$$

Доказати да је F конвексна функција.

Решење. Како је $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt\right) = f(x)$, то је због монотоности функције f за свако $x, y \in [0,+\infty)$ испуњена неједнакост

$$(F'(y) - F'(x))(y - x) = (f(y) - f(x))(y - x) \geq 0 .$$

Према тврђењу доказаном у Задатку 1.2.12, функција F је конвексна.

1.3. Оптимизације и конвексне функције

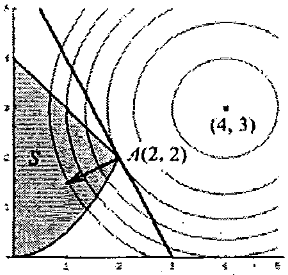
1.3.1. Решити минимизациони проблем

$$\min\,(x_1-4)^2+(x_2-3)^2,$$
$$x_1^2-2x_2\le 0,$$
$$x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

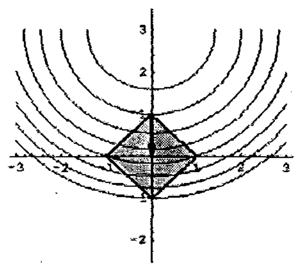
Решење. Функција $f(x_1, x_2) = (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2$ је конвексна, а област допустивих решења S дата на Слици 1.3.1 је конвексан скуп. Градијент функције циља, тј. вектор правца најбржег раста функције $\nabla f(x_1, x_2) = [2(x_1-4) \quad 2(x_2-3)]^{\mathrm{T}}$ ортогоналан је на ниво-линије. У тачки $A(2, 2)$ са вектором положаја $\mathbf{x}_A = [2 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ он има вредност $\nabla f(\mathbf{x}_A) = \nabla f(2, 2) = [-4 \quad -2]^{\mathrm{T}}$. Како је за свако $\mathbf{x}\in S$ испуњена неједнакост

$$\nabla f(\mathbf{x}_A)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_A)=[-4 \quad -2]\begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-2 \end{bmatrix}=-4x_1-2x_2+12\ge 0,$$

према Теореми 10, тачка $A(2, 2)$ је тачка у којој се достиже оптимално решење $f_{min}=5$.



Слика 1.3.1.



Слика 1.3.2.

1.3.2. Дата је функција $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-6x_2+10$. Одредити $\min\limits_{x\in S} f(x_1,x_2)$, при чему је S конвексни омотач тачака A(1, 0), B(0, 1), C(–1,0) и D(0, –1).

Решење. Ниво-линије конвексне функције циља f и скуп допустивих решења S, такође конвексан, описан неједначинама $x_1 + x_2 \le 1$, $-x_1 + x_2 \le 1$, $-x_1 - x_2 \le -1$, $x_1 - x_2 \le 1$, приказани су на Слици 1.3.2. Градијент функције f у тачки $A(0, 1)$ је

$$\nabla f(x_1,x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,1)}=[2x_1 \quad 2(x_2-3)]^{\mathrm{T}}\big|_{(x_1,x_2)=(0,1)}=[0 \quad -4]^{\mathrm{T}}.$$

Та тачка задовољава услов

$$\nabla f(\mathbf{x}_A)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_A)=[0 \quad -4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2-1 \end{bmatrix} = -4(x_2-1) \geq 0,$$

за свако $\mathbf{x} \in S$, па је решење проблема $f_{min} = f(0, 1) = 5$.

1.3.3. Решити следеће минимизационе проблеме:

а) $\min\ x_1^{\,2} + (x_2+1)^2$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$
$$x_1 - 1 \geq x_2^2,$$
$$x_1 - 1 \geq -2x_2.$$

б) $\min\ x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$

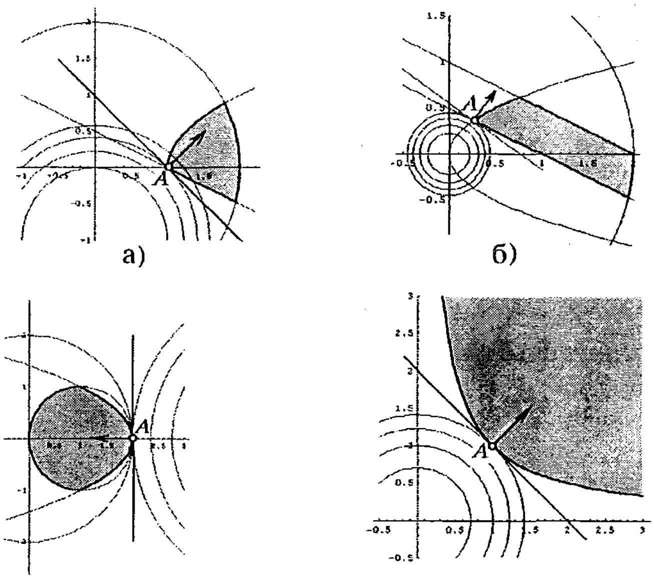
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$
$$x_1 \geq x_2^2,$$
$$x_1 - 1 \geq -2x_2,$$
$$x_1 - 2 \leq -2x_2.$$

в) $\min\ (x_1-5)^2 + x_2^{\,2}$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_1,$$
$$x_1 + x_2^2 \leq 2.$$

г) $\min\ x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$

$$x_1 x_2 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0.$$



Слика 1.3.3.

Решење. **а)** $f_{\min} = 2$ за $(x_1, x_2) = (2, 0)$;

б) $f_{\min} = \left(16 - 9\sqrt{3}\right)/2$ за $(x_1, x_2) = \left(2 - \sqrt{3}, (\sqrt{3}-1)/2\right)$;

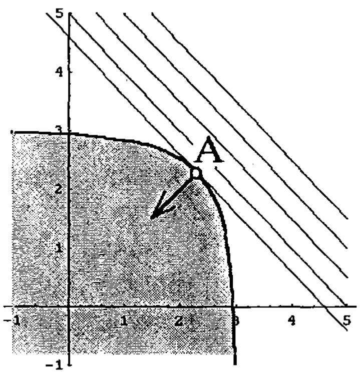
в) $f_{\min} = 9$ за $(x_1, x_2) = (2, 0)$; **г)** $f_{\min} = 2$ за $(x_1, x_2) = (1, 1)$.

Скупови допустивих решења, ниво-линије циљних функција и градијенти циљних функција у оптималним тачкама представљени су на Слици 1.3.3.

1.3.4. Решити минимизациони проблем

$$\min\ e^{-(x_1+x_2)},$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} \le 20.$$

Решење. Функција циља $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}$ је конвексна, њене ниво-линије $e^{-(x_1+x_2)} = c$ су праве облика $x_1 + x_2 = -\ln c$, $c > 0$, а градијент $\nabla f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}[-1 \quad -1]^{\mathrm{T}}$ је вектор константног правца (Слика 1.3.4.). Из графичког приказа скупа допустивих решења S види се да своју минималну вредност на S функција f достиже у оној тачки A у којој гранична крива $e^{x_1} + e^{x_2} = 20$, или, у другом облику, $x_2 = \ln(20 - e^{x_1})$ додирује неку ниво-линију $x_2 = -x_1 - \ln c$. Из услова додира закључује се да је



Слика 1.3.4.

$$\frac{d}{dx_1}\left(\ln(20 - e^{x_1})\right) = \frac{-e^{x_1}}{20 - e^{x_1}} = -1,$$

тј. $x_1 = \ln 10$. Из услова да тачка A припада кривој $x_2 = \ln(20 - e^{x_1})$ добија се $x_2 = \ln 10$. Дакле, $\mathbf{x}_A = [\ln 10 \quad \ln 10]^{\mathrm{T}}$ и $\nabla f(\mathbf{x}_A) = [-1/100 \quad -1/100]^{\mathrm{T}}$. Како за свако $\mathbf{x} \in S$ важи

$$\nabla f(\mathbf{x}_A)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) = -\frac{1}{100}[1 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 - \ln 10 \\ x_2 - \ln 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}(\ln 100 - x_1 - x_2) \ge 0,$$

тачка $A(\ln 10, \ \ln 10)$ је тачка у којој се достиже $f_{\min} = 0.01$.

1.3.5. Одредити $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$ и $\max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$ ако је

а) $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 30x_1 - 72x_2 + 549$,
S: $4x_1 + x_2 \ge 12$, $x_1 + 2x_2 \ge 12$, $x_1 + x_2 \le 12$;

б) $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 16x_1 - x_2 + 40$,
S: $x_1 + 2x_2 \le 12$, $x_1 + x_2 \le 9$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решење. **а)** Скуп допустивих решења S је конвексан, као и функција

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 30x_1 - 72x_2 + 549 = (x_1 - 15)^2 + 4(x_2 - 9)^2,$$

а њен градијент је $\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(x_1, x_2) = [2(x_1 - 15) \quad 4(x_2 - 9)]^T$. Из графичког приказа функције f, њеног градијента ∇f и скупа S (Слика 1.3.5.а) види се да најмању вредност на скупу S функција f достиже у тачки додира M неке своје ниво-линије и праве $x_1 + x_2 = 12$. У тој тачки је тангента ниво-линије $(x_1 - 15)^2 + 4(x_2 - 9)^2 = c$ управо права $x_1 + x_2 = 12$. Решавањем система једначина

$$-\frac{2x_1 - 30}{8x_2 - 72} = -1,$$
$$x_1 + x_2 = 12,$$

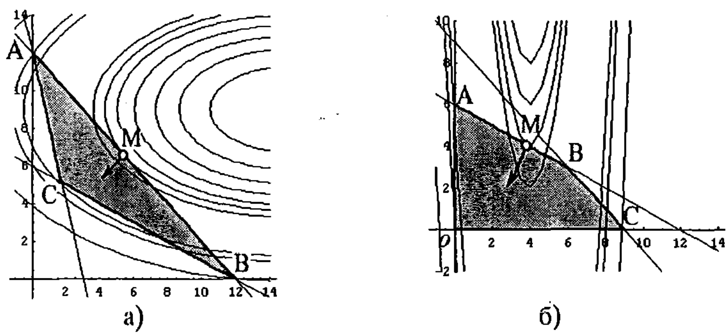
добијају се координате тачке $M(5.4, \quad 6.6)$. Јасно је да је за свако $\mathbf{x} \in S$ испуњена нједнакост

$$\nabla f(\mathbf{x}_M)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) = -19.2\,(x_1 + x_2 - 12) \geq 0,$$

па је решење минимизационог проблема $f_{\min} = 115.2$ за $(x_1, x_2) = (5.4, 6.6)$. Максималну вредност на скупу S функција f, према Теореми 12, достиже у некој од екстремних тачака. Упоређивањем вредности функције у тим тачкама

$$f(\mathbf{x}_A) = 261, \quad f(\mathbf{x}_B) = 333, \quad f(\mathbf{x}_C) = 236.02,$$

закључује се да је решење максимизационог проблема $f_{\max} = 333$ за $(x_1, x_2) = (12, 0)$.



Слика 1.3.5.

б) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 16x_1 - x_2 + 40 = 2(x_1 - 4)^2 - x_2 + 8$ (Слика 1.3.5.б),
$f_{\min} = 3.96875$ за $(x_1, x_2) = (3.875, \ 4.0625)$,
$f_{\max} = 58$ за $(x_1, x_2) = (9, 0)$.

1.3.6. Дата је функција $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Решити максимизациони проблем $\max\limits_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$, где је скуп S задат неједнакостима

а) $-3x_1 - 2x_2 + 6 \le 0, \quad -x_1 + 2x_2 - 3 \le 0, \quad 2x_1 - x_2 - 4 \le 0;$

б) $-3x_1 - 2x_2 + 6 \le 0, \quad -x_1 + 2x_2 - 3 \le 0, \quad 4(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3) \le 25;$

в) $-3x_1 - 2x_2 + 6 \le 0, \quad -x_1 + x_2 - 3 \le 0, \quad 4(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 5) \le 25.$

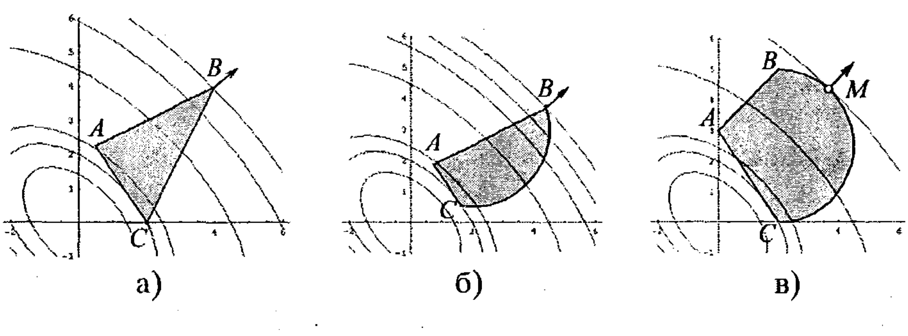
Решење. Функција циља $f(x_1, x_2)$ је конвексна а скупови допустивих решења су конвексни, затворени и ограничени. Градијент функције f је

$$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1 + x_2 \quad x_1 + 2x_2]^{\mathrm{T}}.$$

Према Теореми 12, оптимална решења задатих максимизационих проблема се достижу у екстремним тачкама.

а) Скуп допустивих решења (Слика 1.3.6.а) има 3 екстремне тачке: $A(3/4,\ 15/8)$, у пресеку правих $-3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$ и $-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $B(11/3,\ 10/3)$, у пресеку правих $-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ и $2x_1 - x_2 - 4 = 0$ и $C(2,\ 0)$, у пресеку правих $-3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$ и $2x_1 - x_2 - 4 = 0$. Упоређивањем вредности функције у тим тачкама закључује се да функција достиже максималну вредност $f_{\max} = 36.7778$ у тачки $(x_1, x_2) = (11/3, 10/3)$.

б) Екстремне тачке скупа допустивих решења су $A(3/4, 15/8)$, која се налази у пресеку правих $-3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$ и $-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, али и све тачке лука кружнице $4(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 = 25$ између тачака $B(4.4, 3.7)$, која се налази у њеном пресеку са правом $-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, и $C(1.6503, 0.5246)$, у пресеку са правом $-3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$. Због бесконачног броја екстремних тачака, упоређивање вредности функције није могуће. Из графичког приказа ниво-линија и градијента функције f и скупа допустивих решења S (Слика 1.3.6.б), види се да максималну вредност на S функција f достиже у тачки B, тј. $f_{\max} = 49.33$ за $(x_1, x_2) = (4.4, 3.7)$.



а) б) в)

Слика 1.3.6.

в) Максималну вредност на S функција f достиже у тачки M која је тачка додира неке њене ниво-линије $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = c$ и кружнице $4(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 5)^2 = 25$. Из услова додира, представљеног једначином

$$-\frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} = -\frac{8(x_1 - 2)}{2(2x_2 - 5)}$$

и услова да $M(x_1, x_2)$ лежи на кружници, добијају се њене координате $(x_1, x_2) = (3.72, 4.31)$, а $f_{\max} = 48.5$ (Слика 1.3.6.в).

1.3.7. Одредити димензије правоугаоника максималне површине који има обим 2m.

Решење. Ако се са x_1 и x_2 означе странице правоугаоника, проблем може да се представи у следећој форми:

$$\begin{gathered} \max\ x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Из првог услова ограничења може да се изрази $x_2 = 1 - x_1$ и замени у функцији циља $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, па она добија облик $g(x_1) = x_1(1 - x_1)$. Максимална вредност $g_{\max} = 0.25$ достиже се за $x_1 = 0.5$, тј. $f_{\max} = 0.25$ за $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.5$.

1.3.8. На располагању су две врсте мултивитаминских таблета, чија је цена 300 и 400 новчаних јединица респективно. Таблета прве врсте садржи по 2 јединице витамина A и C и 8 јединица витамина D, а таблета друге врсте 3 јединице витамина A и по 2 јединице витамина C и D. Применом терапије треба обезбедити најмање 36 јединица витамина A, 28 јединица витамина C и 32 јединице витамина D. Одредити комбинацију таблета која обезбеђује потребан унос витамина са минималном ценом.

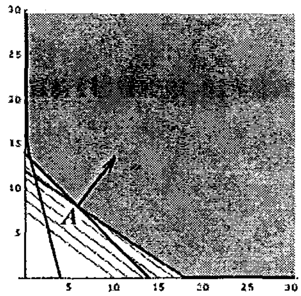
Решење. Нека x_1 и x_2 представљају број таблета прве и друге врсте у комбинацији. Проблем оптимизације који треба решити је:

$$\begin{gathered} \min\ 300x_1 + 400x_2, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 36, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 28, \\ 8x_1 + 2x_2 \geq 32, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

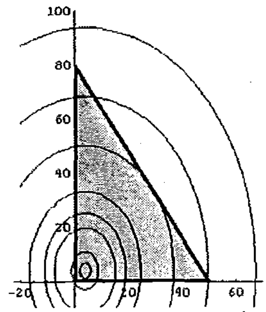
Пошто је функција циља $f(x_1,x_2)=300x_1+400x_2$ линеарна, њен градијент је константан вектор $\nabla f(x_1, x_2) = [300 \quad 400]^T$. Скуп допустивих решења S, ниво-линије функције циља f и њен градијент ∇f приказани су на Слици 1.3.8. Прва тачка скупа S на коју наилазе ниво-линије функције f је тачка $A(6, 8)$ у пресеку правих $2x_1 + 3x_2 = 36$ и $2x_1 + 2x_2 = 28$. За произвољну тачку $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S$ важи неједнакост

$$\nabla f(\mathbf{x}_A)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_A) = [300 \quad 400]\begin{bmatrix} x_1-6 \\ x_2-8 \end{bmatrix} = 300x_1+400x_2-5000 \geq 0,$$

а тачка A има целобројне координате, па је решење задатка $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.



Слика 1.3.8.



Слика 1.3.9.

1.3.9. Количина полупроводника која се може произвести у зависности од две кључне компоненте је дата изразом $q(x_1,x_2) = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$. Цена по јединици тежине прве компоненте је 80, а друге 50 новчаних јединица. За производњу је на располагању 4000 новчаних јединица. Одредити оптималан производни план, тј. максималну количину полупроводника произведену са датим буџетом.

Решење. Формулација задатог задатка оптимизације је

$$\max \; 4x_1+2x_2-0.5x_1^2-0.25x_2^2,$$
$$80x_1+50x_2 \leq 4000,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Уместо $\max q$ може се, под истим ограничењима, одредити $\min g$ при чему је функција $g(x_1, x_2) = -q(x_1, x_2) = 0.5x_1^2 + 0.25x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$ конвексна. Градијент нове функције циља је

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \nabla g(x_1, x_2) = [x_1 - 4 \quad 0.5x_2 - 2]^T,$$

и за $\mathbf{x}_A = [4 \quad 4]^T \in S$ важи $\nabla g(\mathbf{x}_A) = 0$. Зато за свако $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S$ важи неједнакост

$$\nabla g(\mathbf{x}_A)^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_A)\geq 0,$$

па, како је скуп допустивих решења S конвексан (Слика 1.3.9), према Теореми 10, решење оптимизационог проблема је $q_{\max} = -\,g_{\min} = 12$ за $x_1 = 4,\ \ x_2 = 4.$

2. ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

2.1. Дефиниција задатка LP, пројекција и лифтинг

2.1.1. Дат је задатак линеарног програмирања

$$\begin{gathered}\min 3x_1 - 4x_2 + x_3\\ -x_1 + 5x_3 = 50,\\ 2x_1 - 3x_2 \geq 12,\end{gathered}$$

при чему је

а) $x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$
б) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq -5,\ x_3 \geq 0.$

Представити задатак у свакој од каноничких форми (20) и (21).

Решење. **а)** Циљна функција је $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, где је $\mathbf{c} = [3\ \ -4\ \ \ 1]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x} = [x_1\ \ \ x_2\ \ \ x_3]^{\mathrm{T}}$. Да би се добила канонична форма (20), прво ограничење, које је дато једнакошћу, треба представити у облику две неједнакости: $-x_1 + 5x_3 \leq 50$ и $x_1 - 5x_3 \leq 50$, а другом ограничењу, датом неједнакошћу, треба променити знак: $-2x_1 + 3x_2 \leq 12$. Како додатно ограничење $x_1 \geq 4$ подразумева ненегативност променљиве x_1, систем ограничења коначно добија облик

$$\begin{aligned}
-x_1 \qquad\quad + 5x_3 &\leq\ 50,\\
x_1 \qquad\quad - 5x_3 &\leq -50,\\
-2x_1 + 3x_2 \qquad\quad &\leq -12,\\
-x_1 \qquad\qquad\qquad &\leq -4,\\
x_1, x_2, x_3 &\geq\ 0.
\end{aligned}$$

Задати задатак LP зато има каноничку форму

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & -5\\ -2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}50\\ -50\\ 12\\ -4\end{bmatrix}.$$

За каноничку форму (21) потребно је направити лифтинг проблема, тј. сва ограничења полазног задатка, дата неједнакостима, треба заменити једнакостима, уз увођење нових променљивих. Тако, друго ограничење се замењује са $2x_1-3x_2-x_4=12,\quad x_4\geq 0$, а додатно ограничење $x_1\geq 4$ са $x_1-x_5=4,\quad x_5\geq 0$. Систем ограничења сада постаје

$$\begin{aligned}-x_1 \qquad\quad + 5x_3 \qquad\qquad &= 50,\\ 2x_1-3x_2 \qquad\quad -x_4 \qquad &= 12,\\ x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad -x_5 &= 4,\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 &\geq 0,\end{aligned}$$

а оптимизациони проблем

$$\min \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1=\mathbf{b}_1,\quad \mathbf{x}_1\geq \mathbf{0},$$

где је $$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}50\\ 12\\ 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}.$$

б) У овом случају додатно ограничење $x_2\geq -5$ не подразумева ненегативност променљиве x_2, па се може сматрати да x_2 није одређеног знака. У том случају треба увести нове променљиве $x_2=x_2'-x_2''$, x_2', $x_2''\geq 0$. На тај начин, скуп допустивих решења описан је неједнакостима

$$\begin{aligned}-x_1 \qquad\qquad\qquad + 5x_3 &\leq 50,\\ x_1 \qquad\qquad\qquad - 5x_3 &\leq -50,\\ -2x_1+3x_2'-3x_2'' \qquad\quad &\leq -12,\\ -x_2'+x_2'' \qquad\quad &\leq 5,\\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Матрични облик оптимизационог задатка је

$$\min \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{A}_2\,\mathbf{x}_2\leq \mathbf{b}_2,\quad \mathbf{x}_2\geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 50 \\ -50 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Да би се добила канончка форма (21), осим променљивих x_2' и x_2'' које обезбеђују услове ненегативности, уводе се и променљиве x_4 и x_5, које неједнакости преводе у једнакости. Тако, систем ограничења постаје

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad\qquad\quad + 5x_3 \qquad\quad &= 50, \\ 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \qquad - x_4 \quad &= 12, \\ -x_2' + x_2'' \qquad\qquad + x_5 &= 5, \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Матрични облик оптимизационог задатка је:

$$\min \mathbf{c}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_3,$$

$$\mathbf{A}_3\,\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3,\ \ \mathbf{x}_3 \geq \mathbf{0},$$

где је $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 50 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$

2.1.2. Следеће задатке линеарног програмирања представити у обе каноничке форме:

а) $\max\ x_1 - 2x_2 + 3x_3,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 5, \\ x_2 - x_3 &\geq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

б) $\min\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4,$

$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &\geq 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad - 8x_4 &= -31, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 12, \\ x_1, x_3 \geq 0, x_4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Решење. **а)** Уместо задатог максимизационог проблема, могуће је посматрати минимизациони $\min -(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$ под истим ограничењима. Пошто променљива x_3 није ограниченог знака, уместо ње се уводе нове променљиве $x_3', x_3'' \geq 0$ на начин $x_3 = x_3' - x_3''$. Осим тога, два ограничења - једнакости замењују се неједнакостима

$$x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' \le -2, \quad 3x_1 + 2x_3' - 2x_3'' \le 5, \quad -4x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \le -3,$$

а четвртом ограничењу се мења знак. Тако, задатак LP може да се представи у каноничком облику

$$\min \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}_1, \;\; \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3' \\ x_3'' \end{bmatrix}.$$

За добијање друге каноничке форме одређује се лифтинг задатог проблема увођењем још две нове променљиве $x_4, x_5 \ge 0$, па се он може записати у облику:

$$\min \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{A}_2\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \;\; \mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3' \\ x_3'' \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

б) Увођењем нових променљивих $x_2 = x_2' - x_2''$ и $x_4 = -x_4'$, проблем добија облик

$$\min \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}_1, \;\; \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ -31 \\ 29 \\ 12 \end{bmatrix}, \; \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \\ x_4' \end{bmatrix}.$$

Увођењем још две нове променљиве x_5 и x_6 добија се и други канонички облик

$$\min \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \ \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -5 & -1 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2' & x_2'' & x_3 & x_4' & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T.$$

2.1.3. Графичким методом решити проблем LP

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

ако је $\mathbf{c} = [3 \quad 5]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ и

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 8 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 18 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$ **б)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 24 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$

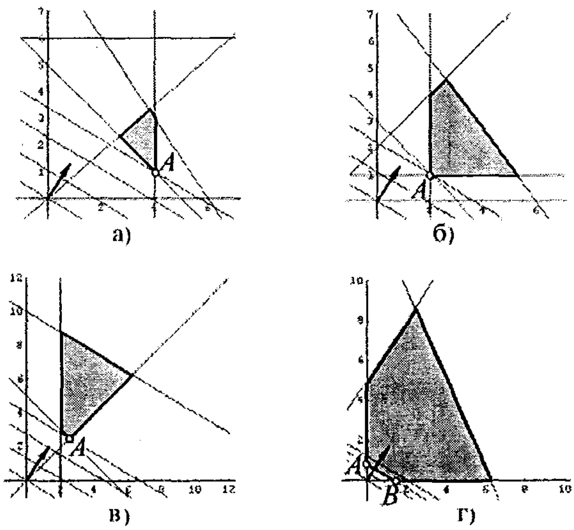
в) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$ **г)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 56 \\ -4 \end{bmatrix}.$

Решење. **а)** Скуп допустивих решења, ниво-линије циљне функције и њен градијент приказани су на Слици 2.1.3.а., одакле се види да најмању вредност $f_{\min} = 17$ функција достиже у тачки $(x_1, x_2) = (4, 1)$.

б) $f_{\min} = 11$ за $(x_1, x_2) = (2, 1)$ (Слика 2.1.3.б).

в) $f_{\min} = 18$ за $(x_1, x_2) = (2.5, 2.5)$ (Слика 2.1.3.в).

г) $f_{\min} = 4$ за $(x_1, x_2) = \lambda(0, 4/5) + (1 - \lambda)(4/3, 0)$, $\lambda \in [0,1]$ (Слика 2.1.3.г).



Слика 2.1.3

2.1.4. Графичким методом решити проблем LP

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

ако је

$$\textbf{а)}\ \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 26 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = [-4\ \ 3\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7]^{\mathrm{T}};$$

$$\textbf{б)}\ \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = [-3\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5]^{\mathrm{T}}.$$

Решење. **а)** Задати проблем може пројекцијом да се сведе на проблем

$$\min \mathbf{c}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + \alpha\ ,$$

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1,\ \ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 26 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -13.$$

Из графичког приказа представљеног на Слици 2.1.4.а види се да је решење $f_{\min} = -9$ за $(x_1, x_2) = \lambda(1, 3) + (1 - \lambda)(3, 1), \ \lambda \in [0,1]$.

б) За графичко решавање поново је потребно извршити пројекцију задатог проблема у простор $\mathbb{R}^2$, али она овде, за разлику од претходног случаја није очигледна. Зато трансформишемо систем једначина којим су задата ограничења и добијамо

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6, \\ x_1 - \ x_2 \qquad + x_4 \quad &= 3, \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9, \\ x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Трансформисани задатак је

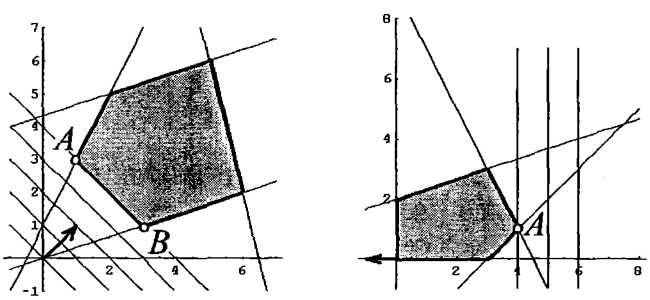
$$\min \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_1 + \alpha ,$$

$$\mathbf{A}_1 \, \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1, \ \ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -3.$$

Решење задатка је $f_{\min} = -11$ за $(x_1, x_2) = (4, 1)$. (Слика 2.1.4.б).



а) б)

Слика 2.1.4

2.2. Случај неограниченог скупа допустивих решења

2.2.1. Доказати да следећи задаци LP имају коначна решења и одредити их графичким методом:

а) $\min 2x_1 + 3x_2,$
$x_1 + 2x_2 \geq 7,$
$x_1 + x_2 \geq 5,$
$x_1 + 4x_2 \geq 6,$
$x_1, x_2 \geq 0;$

б) $\min 8x_1 + 12x_2,$
$3x_1 + x_2 \geq 9,$
$x_1 + 2x_2 \geq 8,$
$x_1 + 6x_2 \geq 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Решење. Скупови допустивих решења су неограничени и оба имају по два екстремна правца $\mathbf{d}_1 = [1 \quad 0]^T$ и $\mathbf{d}_2 = [0 \quad 1]^T$. Облик једнакости систем ограничења добија укључивањем нових променљивих $x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Преласком у нови, вишедимензионални простор решења, број екстремних праваца важних за проблем остаје исти, а њихове пројекције у $\mathbb{R}^2$ морају да буду $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. Тако, битни екстремни правци новог скупа допустивих решења су облика

$$\mathbf{d}_1' = [1 \quad 0 \quad d_{13} \quad d_{14} \quad d_{15}]^T \text{ и } \mathbf{d}_2' = [0 \quad 1 \quad d_{23} \quad d_{24} \quad d_{25}]^T, \ d_{ij} \geq 0,$$

а циљне функције

$$\mathbf{c}'^T \mathbf{x}' = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

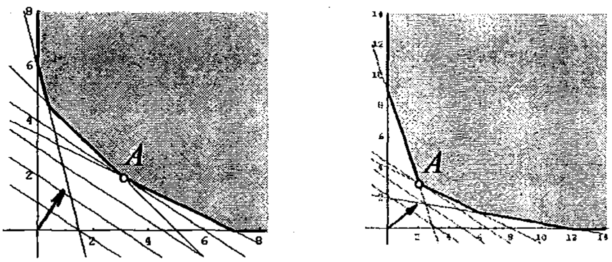
у првом, односно

$$\mathbf{c}'^T \mathbf{x}' = [8 \quad 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

у другом случају. Како су у оба случаја испуњени услови $\mathbf{c}'^T \mathbf{d}_1' \geq 0$ и $\mathbf{c}'^T \mathbf{d}_2' \geq 0$, према Теореми 13, оба задатка LP имају коначно решење.

а) Скуп допустивих решења, ниво-линије циљне функције и њен градијент приказани су на Слици 2.2.1.а. Смер вектора градијента показује да најмању вредност $f_{\min} = 12$ функција циља достиже у тачки $A(3, 2)$, која се налази у пресеку правих $x_1 + 2x_2 = 7$ и $x_1 + x_2 = 5$.

б) $f_{\min} = 52$ за $(x_1, x_2) = (2, 3)$. (Слика 2.2.1.б.)



а) б)

Слика 2.2.1

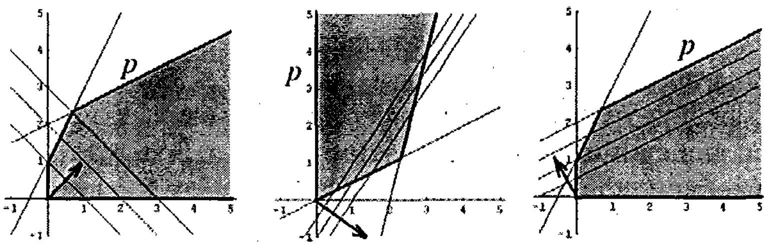
2.2.2. Графичким методом решити следеће задатке LP:

а) $\max\ x_1 + x_2,$
$2x_1 - x_2 \geq -1,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0;$

б) $\min 3x_1 - 2x_2,$
$3x_1 - x_2 \leq 8,$
$x_1 - 2x_2 \leq 0,$
$x_1, x_2 \geq 0;$

в) $\max\ -x_1 + 2x_2,$
$2x_1 - x_2 \geq -1,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Решење. Скупови допустивих решења и ниво линије и вектори градијената циљних функција представљени су на Слици 2.2.2. Ниједан од задатих задатака нема коначно, већ неограничено решење.



а) б) в)

Слика 2.2.2

а) Своју највећу вредност циљна функција достиже дуж праве p: $-x_1 + 2x_2 = 4$. Иако постоји правац дуж кога циљна функција најбрже расте, вредности циљне функције и обе променљиве су неограничене.

б) У овом случају циљна функција најмању вредност достиже дуж праве p: $x_1 = 0$. Сада су неограничене оптимална вредност циљне функције и једне променљиве, али вредност друге променљиве у решењу је коначна.

в) Циљна функција достиже максималну вредност $f_{\min} = 4$ дуж праве p: $-x_1 + 2x_2 = 4$. У овом случају неограничене су вредности обе променљиве у оптималном решењу, али је оптимална вредност циљне функције коначна.

2.2.3. Дат је задатак LP

$$\begin{aligned} \min \alpha x_1 + \beta x_2,& \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

а) За које вредности параметара $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ задати задатак има коначно решење?

б) Одредити оптимално решење за $\alpha = 1,\ \beta = 2.$

в) Одредити оптимално решење за $\alpha = 3,\ \beta = -1.$

г) Одредити оптимално решење за $\alpha = \beta = 1$.

Решење. **а)** Систем ограничења у $\mathbb{R}^2$ одређује неограничен скуп допустивих решења, приказан на Слици 2.2.3.а. Екстремни правци тог скупа су $\mathbf{d}_1 = [1 \quad 0]^T$ и $\mathbf{d}_2 = [2 \quad 1]^T$. Увођењем нових променљивих $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ систем ограничења постаје

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6, \\ x_1 + \ x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 4, \\ x_2 \qquad\qquad -x_5 &= 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Њиме описан скуп допустивих решења у $\mathbb{R}^5$ има екстремне правце $\mathbf{d}_1' = [1 \quad 0 \quad d_{13} \quad d_{14} \quad d_{15}]^T$ и $\mathbf{d}_2' = [2 \quad 1 \quad d_{23} \quad d_{24} \quad d_{25}]^T$. Циљна функција добија облик

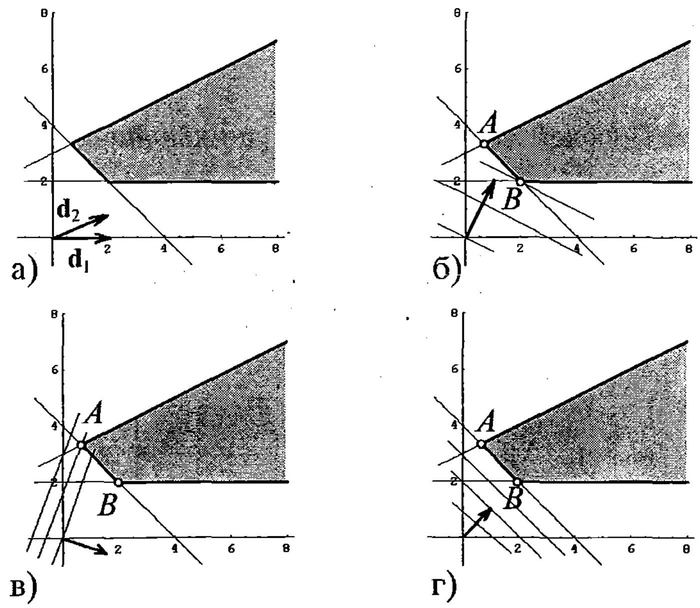
$$\mathbf{c}'^T\mathbf{x}' = [\alpha \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T,$$

па је

$$\mathbf{c}'^T\,\mathbf{d}_1' = [\alpha \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,[1 \quad 0 \quad d_{13} \quad d_{14} \quad d_{15}]^T = \alpha\,,$$

$$\mathbf{c}'^T\,\mathbf{d}_2' = [\alpha \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,[2 \quad 1 \quad d_{23} \quad d_{24} \quad d_{25}]^T = 2\alpha + \beta\,.$$

Према Теореми 13, услов који параметри α и β треба да задовољавају да би дати задатак LP имао коначно решење је $\alpha \geq 0,\ 2\alpha + \beta \geq 0$.



Слика 2.2.3

б) $f_{\min} = 6$ за $(x_1, x_2) = (2, 2)$. (Слика 2.2.3.б.)

в) $f_{\min} = -4/3$ за $(x_1, x_2) = (2/3, 10/3)$. (Слика 2.2.3.в.)

г) $f_{\min} = 4$ за $(x_1, x_2) = \lambda\,(2, 2) + (1-\lambda)\,(2/3, 10/3)$, $\lambda \in [0, 1]$. (Слика 2.2.3.г.)

2.3. Метод дуалности

2.3.1. За следеће проблеме LP одредити њихове дуалне проблеме у једној од канонвичких форми:

а) $\max \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &\le 5,\\ x_1 \qquad + 2x_3 - 5x_4 &\le 3,\\ -x_2 + x_3 + x_4 &\ge 2,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0; \end{aligned}$$

б) $\min \quad 2x_1 - x_2 + 5x_4,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5,\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2,\\ x_1 \qquad + 3x_3 - 3x_4 &= 8,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0; \end{aligned}$$

в) $\max \quad x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 3,\\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad + 2x_5 &= 8,\\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &\le 10,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0; \end{aligned}$$

г) $\min \quad -2x_1 + x_3 - 3x_4,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 8,\\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\le 2,\\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 &\ge 4,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решење. **а)** Проблем може да се посматра у каноничкој форми

$$\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Његов дуални проблем је

$$\min \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}, \ \ \mathbf{y} \ge \mathbf{0},$$

где је $\mathbf{y} = [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3]^{\mathrm{T}}$, или, у каноничкој форми:

$$
\begin{aligned}
&\min\ 5y_1 + 3y_2 - 2y_3,\\
&-2y_1 - y_2 \qquad\quad \le -1,\\
&\quad y_1 \qquad\ - y_3 \le\ 3,\\
&-3y_1 - 2y_2 + y_3 \le -2,\\
&-y_1 + 5y_2 + y_3 \le -4,\\
&\qquad y_1, y_2, y_3 \ge\ 0.
\end{aligned}
$$

б) Систем ограничења задатих једнакостима најпре преводимо у неједнакости на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\le 5,\\
2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 &\le 2,\\
x_1 \qquad + 3x_3 \ - 3x_4 &\le 8,\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad\quad &\le -15.
\end{aligned}
$$

Сада проблему

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

где је

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},
$$

одговара дуални проблем

$$\max \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c},\ \ \mathbf{y} \ge \mathbf{0},$$

где је $\mathbf{y} = [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3 \ \ y_4]^{\mathrm{T}}$, тј.

$$
\begin{aligned}
&\max\ 5y_1 + 2y_2 + 8y_3 - 15y_4,\\
&-y_1 - 2y_2 - \ \ y_3 + 4y_4 \le -2,\\
&\ \ 3y_1 - \ \ y_2 \qquad\ - 2y_4 \le\ 1,\\
&-y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 2y_4 \le 0,\\
&-2y_1 - \ \ y_2 + 3y_3 \qquad\ \le -4,\\
&\qquad y_1, y_2, y_3, y_4 \ge\ 0.
\end{aligned}
$$

в) $\min \quad 3y_1 + 8y_2 - 11y_3 + 10y_4,$

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 &\le -1, \\ 2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 &\le 2, \\ -y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 2y_4 &\le -1, \\ -5y_1 + 5y_3 - y_4 &\le -3, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 &\le 0, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

г) $\max \quad 8y_1 - 8y_2 + 2y_3 - 4y_4,$

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 &\le 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 &\le 0, \\ 3y_1 - 3y_2 - 2y_3 + y_4 &\le -1, \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 &\le 3, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

2.3.2. Методом дуалности решити задатак LP

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x},$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

при чему је:

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$

б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ -18 \\ -30 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$

Решење. **а)** Основни проблем је

$$\begin{aligned} \max \quad f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\le 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0, \end{aligned}$$

а његов дуални проблем је

$$\begin{aligned} \min \ g(y_1, y_2) &= 12y_1 + 4y_2, \\ y_1 - y_2 &\ge -1, \\ 4y_1 + 2y_2 &\ge 3, \\ 3y_1 - y_2 &\ge 1, \\ y_1, \ y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Функција циља дуалног проблема своју најмању вредност $g_{\min} = 8$ достиже у тачки $(y_1, y_2) = (1/2, 1/2)$, која се налази у пресеку правих $4y_1 + 2y_2 = 3$ и $3y_1 - y_2 = 1$ (Слика 2.3.2.а). Како је за ту тачку у првом ограничењу дуалног проблема испуњена строга неједнакост $y_1 - y_2 > -1$, према Теореми 14 мора да важи $x_1 = 0$. Према истој теореми, како је $y_1 = 1/2 > 0$ и $y_2 = 1/2 > 0$, у оба ограничења основног проблема морају да буду испуњене једнакости, тј.

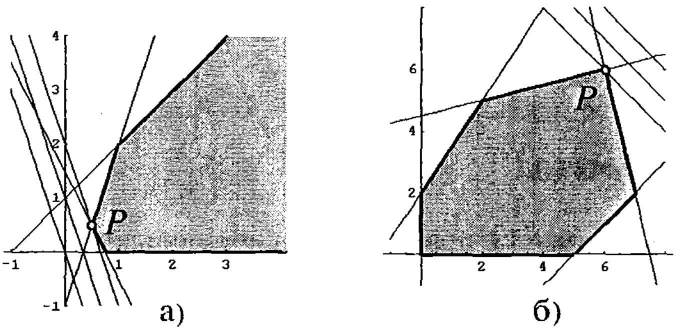
$$\begin{aligned} 4x_2 + 3x_3 &= 12, \\ 2x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Решавањем система једначина добија се $x_2 = 12/5$, $x_3 = 4/5$. Како је $f(0, 12/5, 4/5) = 8 = g_{\min}$, то је оптимална (максимална) вредност циљне функције основног задатка $f_{\max} = 8$, а достиже се у тачки $(x_1, x_2, x_3) = (0, 12/5, 4/5)$.

б) Основни и дуални проблем су:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 &\le -3, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &\le -3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min g(y_1, y_2) &= -3y_1 - 3y_2, \\ 3y_1 - 2y_2 &\ge -4, \\ y_1 - 4y_2 &\ge -18, \\ -4y_1 - y_2 &\ge -30, \\ -y_1 + y_2 &\ge -5, \\ y_1, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$



Слика 2.3.2

Графичким методом за решење дуалног проблема добија се $g_{\min} = -36$ за $(y_1, y_2) = (6, 6)$ (Слика 2.3.2.б). Оптимална тачка P дуалног проблема налази се у пресеку правих $y_1 - 4y_2 = -18$ и $-4y_1 - y_2 = -30$, што значи да за њу у првом и четвртом ограничењу дуалног проблема важе строге неједнакости, тј. $3y_1 - 2y_2 > -4$ и $-y_1 + y_2 > -5$. Због тога је, према Теореми 14, $x_1 = x_4 = 0$. С друге стране, како је $y_1 = 6 > 0$ и $y_2 = 6 > 0$, у одговарајућим ограничењима у основном задатку морају да важе једнакости, тј.

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= -3, \\ 4x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Решење добијеног система је $x_2 = 9/17$, $x_3 = 15/17$. Како је

$$f(0, 9/17, 15/17, 0) = -36 = g_{\min},$$

то је и $f_{\max} = -36$ за $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 9/17, 15/17, 0)$.

2.3.3. Преласком на дуалне проблеме решити следеће задатке LP:

а) $\max \; -2x_1 - 4x_2 - 23x_3 - 4x_4,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + x_4 &\le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\le 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0; \end{aligned}$$

б) $\min \; 2x_1 + x_2,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\ge 5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\ge 8, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0; \end{aligned}$$

в) $\max \; 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 15x_5,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 &\le 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 &\le 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0; \end{aligned}$$

г) $\max \; x_1 + 3x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решење. **а)** $f_{\text{opt}} = -46/3$, $\mathbf{x}_{\text{opt}} = [0 \;\; 0 \;\; 2/3 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$.

б) $f_{\text{opt}} = 56/5$, $\mathbf{x}_{\text{opt}} = [28/5 \;\; 0 \;\; 3/5]^{\mathrm{T}}$. **в)** $f_{\text{opt}} = 9$, $\mathbf{x}_{\text{opt}} = [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$.

г) $f_{\text{opt}} = 7/2$, $\mathbf{x}_{\text{opt}} = [0 \;\; 1 \;\; 1/2]^{\mathrm{T}}$.

2.4. Симплекс метод

2.4.1. Следеће проблеме LP припремити за примену симплекс метода:

а) $\max \; \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix};$$

б) $\max \; \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix};$$

в) $\min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x},\quad \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Решење. **а)** Уместо $\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ може се тражити $\min\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}$, где је $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}$. Систем ограничења чине једнакости, али матрица система **A** није пуног ранга. Како је ранг матрице **A** једнак 3, избацивањем из система последње две једначине добија се облик проблема погодан за примену симплекс метода:

$$\min\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1,\ \ \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

б) Поново се уместо $\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ тражи $\min\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}$, где је $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}$. Систем ограничења сада мора да се преведе у облик једнакости увођењем нових променљивих $x_5, x_6, x_7 \ge 0$. Облик новог проблема LP, погодног за примену симплекс метода, је

$$\min\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1,\ \ \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix}^T.$$

в) Пошто у овом случају променљиве нису одређеног знака, мора се свака од њих представити као разлика двеју нових ненегативних променљивих. Осим тога, уводе се и нове променљиве у циљу довођења система ограничења на облик једнакости. Тако, тражени облик проблема је

$$\min\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1,\ \ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0},$$

где је

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1' & x_1'' & x_2' & x_2'' & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2.4.2. Дат је задатак LP

$$\begin{aligned} \max\ f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2&, \\ x_1 + x_2 \leq 8&, \\ -x_1 + x_2 \leq 2&, \\ x_2 \leq 4&, \\ x_1, x_2 \geq 0&. \end{aligned}$$

а) За сваку од тачака $P_1(4, 4)$, $P_2(2, 4)$ одредити базисне и слободне променљиве, као и представљање матрице **A** у облику [**B** | **N**] у симплекс методу.

б) Да ли нека од тачака P_1 или P_2 задовољава критеријум оптималности симплекс метода?

Решење. **а)** Облик система ограничења, погодан за примену симплекс метода, је

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8, \\ -x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2, \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 4, \end{aligned}$$

или, у матричном облику, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где је

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

ачки $P_1(4, 4)$ у новом простору решења одговара тачка $\mathbf{x}_1 = [4 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0]^T$. 'осле неопходних трансформација, вектору $\mathbf{x}_1$ одговара облик $[\mathbf{x}_{B1} \quad \mathbf{x}_{N1}]^T$, ри чему је $\mathbf{x}_{B1} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{N1} = \mathbf{0}$. Зато су базисне променљиве x_1, x_2 и x_4, а слоодне x_3 и x_5. Одговарајуће матрице у представљању $\mathbf{A}$ у облику $[\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{N}_1]$ су

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

'ако је $\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, провером се добија $\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}_{B1} = [4 \quad 4 \quad 2]^T$.

'ачки $P_2(2, 4)$ у новом простору решења одговара тачка

$$\mathbf{x}_2 = [2 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T = [\mathbf{x}_{B2} \quad \mathbf{x}_{N2}]^T, \quad \mathbf{x}_{B2} \geq \mathbf{0}, \; \mathbf{x}_{N2} = \mathbf{0}.$$

'ада су базисне променљиве x_1, x_2 и x_3, а слободне x_4 и x_5. Одговарајуће ıатрице у представљању $\mathbf{A}$ у облику $[\mathbf{B}_2 \mid \mathbf{N}_2]$ су

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ıа је $\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}_{B2} = [2 \quad 4 \quad 2]^T$.

б) За одређивање максимума критеријум оптималности у симплекс ıетоду је $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$. Овај услов је испуњен за тачку $P_1(4, 4)$, па она ıредставља оптимално решење. У тачки P_1 функција циља достиже своју ıајвећу вредност $f_{max} = 12$.

'.4.3. Дат је задатак LP

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= x_1 - x_2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

а) Доказати да дати задатак има коначно решење.

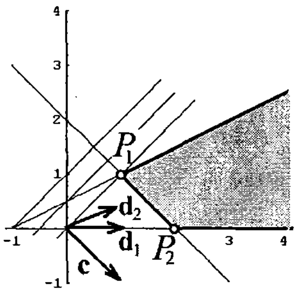
б) Графичким методом одредити решење задатка.

в) За све екстремне тачке скупа допустивих решења одредити представљање матрице $\mathbf{A}$ у облику $[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]$ у симплекс методу.

г) Применом критеријума симплекс метода доказати оптималност добијеног решења.

Решење. **а)** Скуп допустивих решења је неограничен и има два екстремна правца $\mathbf{d}_1 = [1 \quad 0]^T$ и $\mathbf{d}_2 = [2 \quad 1]^T$. Како је $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_1 = 1 \geq 0$ и $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_2 = 1 \geq 0$, према Теореми 13, задатак има коначно решење.

б) Минималну вредност на скупу допустивих решења $f_{max} = 0$ функција достиже у тачки $P_1(1,1)$ (Слика 2.4.3).



Слика 2.4.3

в) За примену симплекс метода погодна је следећа форма ограничења:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где је

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T.$$

Тачки $P_1(1,1)$ одговара тачка

$$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T = [\mathbf{x}_{B1} \quad \mathbf{x}_{N1}]^T, \ \mathbf{x}_{B1} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{x}_{N1} = \mathbf{0}.$$

Базисне променљиве су x_1 и x_2, а слободне x_3 и x_4. Одговарајуће матрице у представљању $\mathbf{A} = [\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{N}_1]$ су

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathbf{B}_1^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, то је заиста $\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{B1}$.

Тачки $P_2(2, 0)$ одговара вектор $\mathbf{x}_2 = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^T$. Из његове репрезентације $[\mathbf{x}_{B2} \ \mathbf{x}_{N2}]^T$, $\mathbf{x}_{B2} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{N2} = \mathbf{0}$, види се да су базисне променљиве x_1 и x_3, а слободне x_2 и x_4. Одговарајуће матрице у представљању $\mathbf{A}$ у облику $[\mathbf{B}_2 \mid \mathbf{N}_2]$ су

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, провером се добија $\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{B2}$.

г) За тачку $\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$ критеријум оптималности у симплекс методу је испуњен, јер важи:

$$\mathbf{c}_{N1}^{T}-\mathbf{c}_{B1}^{T}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{N}_1=[0\quad 0]+\frac{1}{3}[1\quad -1]\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=[2\quad 1]\geq[0\quad 0].$$

Приметимо да друга екстремна тачка, $\mathbf{x}_2$, не задовољава симплекс критеријум оптималности:

$$\mathbf{c}_{N2}^{T}-\mathbf{c}_{B2}^{T}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{N}_2=[-1\quad 0]-[1\quad 0]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=[-2\quad 1].$$

2.5. Транспортни проблем

2.5.1. За следеће транспортне проблеме одредити полазне планове транспорта методом северозападног угла и методом минималне цене и проценити који од добијених планова је погоднији за комплетно решавање проблема:

а) $\boldsymbol{a}=[12\quad 5\quad 18]^{T}$, $\boldsymbol{b}=[10\quad 11\quad 8\quad 6]^{T}$, $C=\begin{bmatrix}10 & 3 & 5 & 8\\ 5 & 7 & 6 & 5\\ 1 & 4 & 3 & 7\end{bmatrix}$;

б) $\boldsymbol{a}=[20\quad 110\quad 120]^{T}$, $\boldsymbol{b}=[70\quad 40\quad 30\quad 60\quad 50]^{T}$,

$$C=\begin{bmatrix}4 & 2 & 5 & 7 & 6\\ 7 & 8 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix};$$

в) $\boldsymbol{a}=[120\quad 30\quad 40\quad 60]^{T}$, $\boldsymbol{b}=[30\quad 90\quad 80\quad 20\quad 30]^{T}$,

$$C=\begin{bmatrix}2 & 8 & 4 & 6 & 3\\ 3 & 2 & 5 & 2 & 6\\ 6 & 5 & 8 & 7 & 4\\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix};$$

г) $\boldsymbol{a}=[130\quad 90\quad 100\quad 140]^{T}$, $\boldsymbol{b}=[110\quad 50\quad 30\quad 80\quad 100\quad 90]^{T}$,

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10\\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6\\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8\\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

Решење. **а)** Полазно решење добијено методом северозападног угла представљено је у Табели 1. Матрични облик тог решења је

$$X^0 = [x_{ij}^0]_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix},$$

а цена транспорта при таквом плану је $L^0 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}^0 c_{ij} = 223$. Ако се примени метод минималне цене, за полазно решење се добија

$$X^1 = [x_{ij}^1]_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

са ценом $L^1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}^1 c_{ij} = 100$ (Табела 2). Да би решење било недегенерисано, оно мора да има $3 + 4 - 1 = 6$ базисних променљивих, тј. променљивих које имају вредности различите од 0. Решење X^1 са 5 ненултих елемената је дегенерисано, па је за даље решавање проблема погодније решење X^0, иако је цена транспорта мања у случају полазног плана X^1.

Табела 1

a_i \ b_j	10	11	8	6
12	**10** 10	**3** 2	**5**	**8**
5	**5**	**7** 5	**6**	**5**
18	**1**	**4** 4	**3** 8	**7** 6

Табела 2

a_i \ b_j	10	11	8	6
12	**10**	**3** 11	**5**	**8** 1
5	**5**	**7**	**6**	**5** 5
18	**1** 10	**4** 4	**3** 8	**7**

б) Методом северозападног угла добија се полазно решење (Табела 3)

$$X^0 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 60 & 50 \end{bmatrix},$$

$L^0 = 1130.$

Табела 3

a_i \ b_j	70	40	30	60	50
20	**4** 20	**2**	**5**	**7**	**6**
110	**7** 50	**8** 40	**3** 20	**4**	**5**
120	**2**	**1**	**4** 10	**3** 60	**2** 50

Методом минималне цене могу да се добију различита полазна решења, у зависности од избора поља са истом са истом ценом. У табелама 4 и 5 представљена су два таква решења:

Табела 4

a_i \ b_j	70	40	30	60	50
20	**4**	**2**	**5**	**7**	**6** 20
110	**7**	**8**	**3** 30	**4** 60	**5** 20
120	**2** 70	**1** 40	**4**	**3**	**2** 10

Табела 5

a_i \ b_j	70	40	30	60	50
20	**4** 20	**2**	**5**	**7**	**6**
110	**7** 20	**8**	**3** 30	**4** 60	**5**
120	**2** 30	**1** 40	**4**	**3**	**2** 50

ј. $X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 30 & 60 & 20 \\ 70 & 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ и $X^2 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 30 & 60 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$, при чему

е $L^1 = L^2 = 750$. У овом случају оба метода дају недегенерисана полазна решења, па је због мање полазне цене за даље решавање проблема погодније узети једно од X^1 или X^2.

в) Решење добијено методом северозападног угла

$$X^0 = \begin{bmatrix} 30 & 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

је дегенерисано, па није погодно за даље решавање проблема. Методом минималне цене добијају се различита полазна решења са различитим ценама. Два таква решења су, на пример,

$$X^1 = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 30 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X^2 = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

са ценама $L^1 = 830$ и $L^2 = 870$. Према томе, за даље решавање проблема узима се X^1.

г) Методом северозападног угла добија се полазно решење

$$X^0 = \begin{bmatrix} 110 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 30 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 90 \end{bmatrix} \text{ са ценом } L^0 = 1400.$$

Методом минималне цене добија се, на пример, решење

$$X^1 = \begin{bmatrix} 110 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 50 & 30 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 60 & 0 \end{bmatrix} \text{ са ценом } L^1 = 1410.$$

У овом случају је цена траспорта по полазном плану X^0 мања, па је он погоднији за даље решавање проблема.

2.5.2. Дати су транспортни проблеми

а) $\boldsymbol{a} = [40 \quad 25]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = [10 \quad 35 \quad 20]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$;

б) $\boldsymbol{a} = [70 \quad 45 \quad 15]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = [40 \quad 90]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Одредити по једно недегенерисано полазно решење, а затим методом прерасподеле по циклусу одредити оптимална решења.

Решење. **а)** Методом северозападног угла добија се полазно решење транспортног проблема

$$X^0 = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}, \ L^0 = 200$$

Табела 6

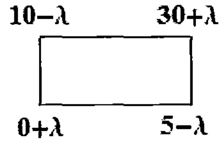
a_i \ b_j	10	35	20
40	7 10	2 30	4
25	3	8 5	9 20

представљено у Табели 6. Пошто постоје два слободна поља, (1,3) и (2,1), могуће је направити два циклуса за прерасподелу. Цене циклуса су

$$\gamma_{13}^0 = 4 - 2 + 8 - 9 = 1, \qquad \gamma_{21}^0 = 3 - 8 + 2 - 7 = -10.$$

Како је $\gamma_{13}^0 > 0$ и $\gamma_{21}^0 < 0$, само циклус одређен пољем (2,1) смањује цену транспорта, па се прерасподела врши по њему.

Величина λ одређује се тако да све вредности у пољима остану ненегативне, тј. $\lambda = 5$. Тако x_{21} постаје нова базисна променљива, x_{22} нова слободна променљива, а ново решење је



$$X^1 = \begin{bmatrix} 5 & 35 & 0 \\ 5 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{(Табела 7).}$$

Табела 7

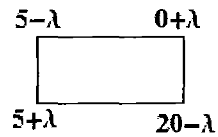
a_i \ b_j	10	35	20
40	**7** 5	**2** 35	**4**
25	**3** 5	**8**	**9** 20

У новом решењу једини неиспитани циклус је одређен пољем (1,3) и његова цена је

$$\gamma_{13}^1 = 4 - 7 + 3 - 9 = -9 < 0,$$

што значи да прерасподела по њему води бољем решењу.

Поново је $\lambda = 5$, нова базисна променљива је x_{13} уместо x_{11}, а ново решење је (Табела 8)



$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 5 \\ 10 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Табела 8

a_i \ b_j	10	35	20
40	**7**	**2** 35	**4** 5
25	**3** 10	**8**	**9** 15

Цене циклуса у овом решењу су $\gamma_{11}^2 = 9$ и

$$\gamma_{22}^2 = 8 - 9 + 4 - 2 = 1.$$

Како су обе позитивне, ниједан од могућих циклуса не води ка побољшању решења. Зато је X^2 оптимално решење, а $L^2 = 255$ је мимимална цена транспорта.

Напоменимо да би се до оптималног решења дошло у првом кораку да је полазно решење одређено методом минималне цене.

Табела 9

a_i \ b_j	40	90
70	**7**	**4** 70
45	**5** 25	**9** 20
15	**3** 15	**8**

б) Полазно решење одређено методом минималне цене је представљено у Табели 9. Цене оба могућа циклуса су позитивне:

$$\gamma_{11}^0 = 7 - 5 + 9 - 4 = 7, \qquad \gamma_{32}^0 = 8 - 9 + 5 - 3 = 1.$$

Како ниједан од могућих циклуса не води смањењу цене транспорта, оптимално решење је

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 70 \\ 25 & 20 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \text{ са ценом } L^0 = 630.$$

2.5.3. Методом потенцијала решити следеће транспортне проблеме:

а) $\boldsymbol{a} = [11 \quad 11 \quad 8]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [5 \quad 9 \quad 9 \quad 7]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$;

б) $\boldsymbol{a} = [46 \quad 34 \quad 40]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [40 \quad 35 \quad 30 \quad 15]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $\boldsymbol{a} = [6 \quad 8 \quad 10]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [4 \quad 6 \quad 8 \quad 6]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\boldsymbol{a} = [60 \quad 70 \quad 20]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = [40 \quad 30 \quad 30 \quad 50]^{\mathrm{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Решење. **а)** Методом минималне цене добија се недегенерисано полазно решење $X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Потенцијали α_i^0 и β_j^0 одређују се тако да у базисним пољима $(i, \ j)$, тј. оним пољима где је $x_{ij}^0 > 0$, важи $c_{ij} = \alpha_i^0 + \beta_j^0$. Како решавањем система од 6 линеарно независних једначина треба одредити 7 непознатих, за једну од њих се узима произвољна вредност, на пример $\alpha_1^0 = 0$, па је $\boldsymbol{\alpha}^0 = [0 \quad -4 \quad -5]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\beta}^0 = [6 \quad 8 \quad 1 \quad 7]^{\mathrm{T}}$. Формирају се матрице

$$\widetilde{C}^0 = [\alpha_i^0 + \beta_j^0]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \gamma^0 = C - \widetilde{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 6 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

:ако је $\min\{\gamma_{ij}^{0}\} = -4 = \gamma_{14}^{0}$, поље (1, 4) (у Табели 10 означено звездицом) дређује циклус по коме треба вршити рерасподелу.

$$\begin{array}{cc} 2-\lambda & 0+\lambda \\ 1+\lambda & 7-\lambda \end{array}$$

Да би вредности променљивих у пољима циклуса остале ненегативне, узима се $\lambda = 2$, па је ново, поправљено ешење

$$X^{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Табела 10

α_i^0 \ β_j^0	6	8	1	7
0	**7**	**8** 2	**1** 9	**3** *
–4	**2** 5	**4** 6	**5**	**9**
–5	**6**	**3** 1	**5**	**2** 7

/ Табели 11 приказани су нови ютенцијали $\boldsymbol{\alpha}^{1}$ и $\boldsymbol{\beta}^{1}$, одакле се добијају ıатрице $\tilde{C}^{1}$ и γ^{1}:

$$\tilde{C}^{1} = [\alpha_i^{1} + \beta_j^{1}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{1} = C - \tilde{C}^{1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Табела 11

α_i^1 \ β_j^1	6	8	1	7
0	**7**	**8**	**1** 9	**3** 2
–4	**2** 5	**4** 6	**5**	**9**
–5	**6**	**3** 3	**5**	**2** 5

Како је $\gamma^{1} \geq \mathbf{0}$, оптимално решење је X^{1}, а минимална цена транспорта је $L_{\min} = 68$.

б) Решење добијено методом минималне цене је дегенерисано, па се као полазно узима

$$X^{0} = \begin{bmatrix} 40 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 15 \end{bmatrix},$$

које се добија методом северозападног угла. Поступак добијања оптималног решења приказан је у Табелама 12 – 15.

Табела12

$\alpha_i^0 \backslash \beta_j^0$	4	3	8	3
0	**4** 40	**3** 6	**2**	**5**
–2	**1**	**1** 29	**6** 5	**4**
1	**3**	**5**	**9** 25	**4** 15

$$\widetilde{C}^0 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix},\ \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\min\{\gamma_{ij}^0\} = -6 = \gamma_{13}^0,$$

$$\lambda = 5,$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 40 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{cc} 6-\lambda & 0+\lambda \\ 29+\lambda & 5-\lambda \end{array}$$

Табела13

$\alpha_i^1 \backslash \beta_j^1$	4	3	2	–3
0	**4** 40	**3** 1	**2** 5	**5**
–2	**1**	**1** 34	**6**	**4**
7	**3**	**5**	**9** 25	**4** 15

$$\widetilde{C}^1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 11 & 10 & 9 & 4 \end{bmatrix},\ \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & 9 \\ -8 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\min\{\gamma_{ij}^1\} = -8 = \gamma_{31}^1$$

$$\lambda = 25,$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 30 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{cc} 40-\lambda & 5+\lambda \\ 0+\lambda & 25-\lambda \end{array}$$

Табела14

$\alpha_i^2 \backslash \beta_j^2$	4	3	2	5
0	**4** 15	**3** 1	**2** 30	**5**
–2	**1**	**1** 34	**6**	**4**
–1	**3** 25	**5**	**9**	**4** 15

$$\widetilde{C}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix};\ \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\min\{\gamma_{ij}^2\} = -1 = \gamma_{21}^2$$

$$\lambda = 15,$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 30 & 0 \\ 15 & 19 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{cc} 15-\lambda & 1+\lambda \\ 0+\lambda & 34-\lambda \end{array}$$

$$\widetilde{C}^3=\begin{bmatrix}3&3&2&4\\1&1&0&2\\3&3&2&4\end{bmatrix},\ \gamma^3=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&6&2\\0&2&7&0\end{bmatrix};$$

$$\min\{\gamma_{ij}^3\}\geq 0$$

$$X_{\text{opt}}=X^2=\begin{bmatrix}0&16&30&0\\15&19&0&0\\25&0&0&15\end{bmatrix};\ L_{\text{opt}}=277.$$

Табела15

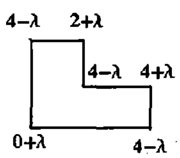
α_i^3 \ β_j^3	3	3	2	4
0	**4**	**3** 16	**2** 30	**5**
–2	**1** 15	**1** 19	**6**	**4**
0	**3** 25	**5**	**9**	**4** 15

в) Недегенерисано полазно решење добија се методом северозападног угла и гласи $X^0=\begin{bmatrix}4&2&0&0\\0&4&4&0\\0&0&4&6\end{bmatrix}$. Потенцијали и одговарајуће матрице добијени на основу овог решења су (Табела 16):

$$\widetilde{C}^0=\begin{bmatrix}2&2&1&0\\4&4&3&2\\3&3&2&1\end{bmatrix},\gamma^0=\begin{bmatrix}0&0&2&4\\2&0&6&-1\\-2&-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Табела16

α_i^0 \ β_j^0	2	2	1	0
0	**2** 4	**2** 2	**3**	**4**
2	**6**	**4** 4	**3** 4	**1**
1	**1**	**2**	**2** 4	**1** 6



Како је $\min\{\gamma_{ij}^0\}=-2=\gamma_{31}^0$, поље (3,1) одређује циклус најповољнији за прерасподелу. Да би сва поља у циклусу остала ненегативна, узима се λ=4, па се за ново, поправљено решење добија дегенерисано решење $X^1=\begin{bmatrix}0&6&0&0\\0&0&8&0\\4&0&0&6\end{bmatrix}$. Пошто су за одређивање потенцијала потребна још два поља у којима променљиве имају позитивне вредности, изабраћемо два поља са најмањом ценом, нпр., (2, 4) и (3, 2) и доделити им мале позитивне вредности ε и δ, које су занемарљиве у односу на остале величине и које ће на крају израчунавања заиста узети вредност 0. У Табели 17 представљени су потенцијали овако формираног решења, а пратеће матрице су:

Табела17

α_i^1 \ β_j^1	1	2	3	1
0	**2**	**2** 6	**3**	**4**
0	**6**	**4**	**3** 8	**1** ε
0	**1** 4	**2** δ	**2**	**1** 6

$$\widetilde{C}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Сада је $\min\{\gamma_{ij}^1\} = -1 = \gamma_{33}^1$, па се прерасподела врши по циклусу одређеном пољем (3, 3).

$$\begin{array}{cc} 8-\lambda & \varepsilon+\lambda \\ 0+\lambda & 6-\lambda \end{array}$$

Ново решење (после занемаривања ε) је $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Даљим рачунањем потенцијала и пратећих матрица добија се:

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = [0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}^2 = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 0]^{\mathrm{T}},\ \widetilde{C}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како је $\boldsymbol{\gamma}^2 \geq \mathbf{0}$, оптимално решење је X^2, а минимална цена транспорта је $L_{\min} = 40$.

г) Од полазног оптималног решења $X^0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ добијеног методом минималне цене до оптималног решења долази се на следећи начин:

$$\boldsymbol{\alpha}^0 = [0 \quad 0 \quad -7]^T,\quad \boldsymbol{\beta}^0 = [2 \quad 3 \quad 9 \quad 1]^T,\quad \widetilde{C}^0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \\ -5 & -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 8 & 0 & 15 \end{bmatrix};$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 50 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha^1 = [0 \quad -4 \quad -3]^T, \quad \beta^1 = [6 \quad 7 \quad 5 \quad 1]^T, \quad \widetilde{C}^1 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix},$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 10-\varepsilon & 50 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20-\varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha^2 = [0 \quad 0 \quad -3]^{\mathrm{T}}, \quad \beta^2 = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad \widetilde{C}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 11 \end{bmatrix},$$

$$X_{\mathrm{opt}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 50 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_{\min} = 310.$$

2.5.4. Решити транспортне проблеме:

а) $\boldsymbol{a} = [20 \quad 16 \quad 14 \quad 11]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = [16 \quad 18 \quad 12 \quad 15]^{\mathrm{T}}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix};$

б) $\boldsymbol{a} = [1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = [1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix};$

в) $\boldsymbol{a} = [30 \quad 35 \quad 40]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = [20 \quad 34 \quad 16 \quad 10 \quad 25]^{\mathrm{T}},$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix};$$

г) $\boldsymbol{a} = [60 \quad 55 \quad 40 \quad 35]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = [70 \quad 5 \quad 45 \quad 70]^{\mathrm{T}}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

Решење. **а)** $X_{\text{opt}}=\begin{bmatrix}16&4&0&0\\0&12&0&4\\0&2&12&0\\0&0&0&11\end{bmatrix}$, $L_{\min}=133$.

б) $X_{\text{opt}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $L_{\min}=8$.

в) $X_{\text{opt}}=\begin{bmatrix}14&0&16&0&0\\6&4&0&0&25\\0&30&0&10&0\end{bmatrix}$, $L_{\min}=417$.

г) $X_{\text{opt}}=\begin{bmatrix}60&0&0&0\\5&5&45&0\\5&0&0&35\\0&0&0&35\end{bmatrix}$, $L_{\min}=295$.

3. ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНА НЕЛИНЕАРНА ОПТИМИЗАЦИЈА

3.1. Унимодалност и интервал неодређености

3.1.1. Одредити интервале унимодалности функција

а) $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$,

б) $f(x)=\max\{(x-1)(x+2),-(x-3)(x+5)\}$,

в) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln^2 x-1}$,

г) $f(x)=(x-2)\sin 3x$.

Решење. **а)** Функција f је непрекидна и диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и важи $f(-5) = f(-2) = f(1) = f(3) = 0$. По Роловој теореми, на сваком од интервала $(-5, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ постоји бар по једна тачка ξ_i у којој је $f'(\xi_i) = 0$, тј. у којој функција f достиже екстремну вредност . Како је $f'(x)$ полином трећег степена, он може имати само 3 реалне нуле. Тако, на сваком од интервала $(-5, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ функција f достиже тачно једну екстремну вредност, па су то интервали унимодалности. (Слика 3.1.1а)

б) Упоређивањем функција

$$f_1(x) = (x-1)(x+2) \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = -(x-3)(x+5)$$

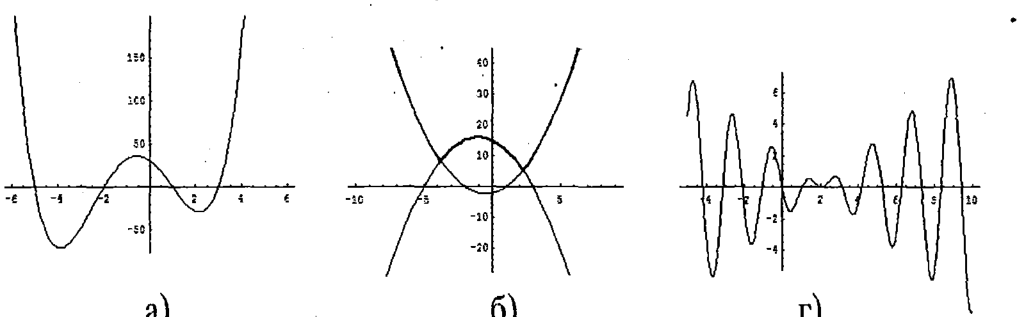
(Слика 3.1.1б) као интервали унимодалности уочавају се $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ и $(1, \infty)$.

в) Функција f је непрекидна и диференцијабилна на скупу $(0, 1/e) \cup (1/e, e) \cup (e, \infty)$. Имајући у виду њен извод

$$f'(x) = \frac{2x\,(\ln^2 x - \ln x - 1)}{(\ln^2 x - 1)^2},$$

може се закључити да постоје само две стационарне тачке, и то по једна у интервалима $\xi_1 = e^{(1-\sqrt{5})/2} \in (1/e, e)$ и $\xi_2 = e^{(1+\sqrt{5})/2} \in (e, \infty)$. Према томе, интервали унимодалности су $(1/e, e)$ и (e, ∞).

г) Функција f је непрекидна и диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и има бесконачно много простих нула у тачкама $x = 2$ и $x = k\pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$. Интервали унимодалности су $(\pi/3, 2)$, $(2, 2\pi/3)$ и $(k\pi/3, (k+1)\pi/3)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. (Слика 3.1.1 г)



а) б) г)

Слика 3.1.1

3.2. Алгоритми претраживања без коришћења извода

i. ***Алгоритам равномерног претраживања***
ii. ***Алгоритам дихотомног претраживања***
iii. ***Алгоритам златног пресека***

3.2.1. За функцију $f(x) = 0.1(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$ методом равномерног претраживања одредити приближно решење ($x_{\min}$, $f_{\min}$) минимизационог проблема $\min\limits_{1 \le x \le 3} f(x)$ тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум није удаљена више од 0.1.

Решење. Полазни интервал је $[a_1, b_1] = [1, 3]$, а тражена тачност $h = 0.1$, па је број подеоних тачака, тј. унутрашњих тачака мреже једнак

$$n = \frac{b_1 - a_1}{h} - 1 = 19.$$

Вредности функције у тачкама мреже су:

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	1.	0.	7	1.7	– 2.2559	14	2.4	– 2.735
1	1.1	– 0.3593	8	1.8	– 2.4806	15	2.5	– 2.5312
2	1.2	– 0.7142	9	1.9	– 2.6641	16	2.6	– 2.2374
3	1.3	– 1.0603	10	2.	– 2.8	17	2.7	– 1.8457
4	1.4	– 1.3926	11	2.1	– 2.8819	18	2.8	– 1.3478
5	1.5	– 1.7062	12	2.2	– 2.903 *	19	2.9	– 0.7355
6	1.6	– 1.9958	13	2.3	– 2.8565	20	3.0	0.

Најмања вредност функције у тачкама мреже је $f_{\min} = -2.903$ у $x_{12} = 2.2$, па се може закључити да се минимална вредност функције достиже у интервалу $[2.1,\ 2.3]$.

3.2.2. Методом равномерног претраживања одредити приближно решење ($x_{\min}$, $f_{\min}$) минимизационог проблема $\min\limits_{2 \le x \le 4} f(x)$ за функцију

$$f(x) = \max\{10(x^2+1)(x-2),\ -(x^2-9)(x+3)\}$$

тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум, није удаљена више од 0.01.

Решење. Да би се постигла тражена тачност у једном кораку потребно је $n = 199$ подеоних тачака, односно 199 израчунавања вредности функције у тачкама мреже. Дељењем поступка на више корака, број израчунавања може знатно да се смањи. Зато у првом кораку поделимо интервал $[a_1, b_1] = [2, 4]$ тако да тачка минимума не одступа од тачне вредности више од $h_1 = 0.5$. За то су потребне $n_1 = 3$ подеоне тачке, па се упоређивањем вредности функције закључује да је нови интервал неодређености $[a_2, b_2] = [2, 3]$. У другом кораку поставимо критеријум $h_2 = 0.05$. Сада има $n_2 = 19$ подеоних тачака и за нови интервал неодређености се добија добија $[a_3, b_3] = [2.25, 2.35]$. Коначно, у трећем кораку са траженим критеријумом тачности $h_3 = 0.01$ потребно је $n_3 = 9$ подеоних тачака и последњи интервал неодређености је $[2.3, 2.32]$. Решење проблема је $f_{\min} = 19.5419$ за $x_{\min} = 2.31$. Приметимо да је за добијање решења било потребно 31 израчунавање вредности функције.

3.2.3. За функцију $f(x) = 0.1(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$ методом дихотомног претраживања одредити приближно решење ($x_{\min}$, $f_{\min}$) минимизационог проблема $\min\limits_{1\le x\le 3} f(x)$ тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум није удаљена више од 0.05.

Решење. Нека је $\varepsilon = 0.001$. Први интервал неодређености је $[a_1, b_1] = [1, 3]$, и

$$p_1 = \frac{a_1+b_1}{2} - \varepsilon = 1.999, \qquad q_1 = \frac{a_1+b_1}{2} + \varepsilon = 2.001,$$

$$f(p_1) = -2.7989, \qquad f(q_1) = -2.8011$$

Како је $f(p_1) > f(q_1)$, за нови интервал неодређености се узима $[a_2, b_2] = [p_1, b_1] = [1.999, 3]$. Његова дужина $b_2 - a_2 = 1.001$ не задовољава критеријум заустављања, па се поступак наставља. У наредним итерацијама добијају се следећи резултати:

Табела 19

k	a_k	b_k	Δ_k	p_k	q_k	$f(p_k)$	$f(q_k)$
1	1.	3.	2.	1.999	2.001	– 2.7989	– 2.8011
2	1.999	3.	1.001	2.4985	2.5005	– 2.535	– 2.53
3	1.999	2.5005	0.5015	2.24875	2.25075	– 2.8892	– 2.8883
4	1.999	2.25075	0.25175	2.12388	2.12588	– 2.8927	– 2.8935
5	2.12388	2.25075	0.126875	2.18631	2.18831	– 2.904	–2.9039
6	2.12388	2.18831	0.0644375				

Дужина последњег интервала неодређености је мања од $2 \cdot 0.05 = 0.1$, па је постављени зауставни критеријум испуњен. Према томе, решење проблема је $f_{\min} = -2.9017$ за $x_{\min} = 2.156$.

3.2.4. За функцију $f(x) = \max\{10(x^2+1)(x-2),\ -(x^2-9)(x+3)\}$ методом дихотомног претраживања одредити приближно решење $(x_{\min}, f_{\min})$ минимизационог проблема $\min\limits_{0\le x\le 5} f(x)$, тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум није удаљена више од 0.05.

Решење. Резултати дихотомног претаживања са $\varepsilon = 0.001$ дати су у следећој табели:

Табела 20

k	a_k	b_k	Δ_k	p_k	q_k	$f(p_k)$	$f(q_k)$
1	0.	5.	5.	2.499	2.501	36.1526	36.3476
2	0.	2.501	2.501	1.2495	1.2515	31.611	36.6046
3	1.2495	2.501	1.2515	1.87425	1.87625	26.7459	26.7203
4	1.87425	2.501	0.62675	2.18663	2.18862	21.8807	26.8437
5	2.18663	2.501	0.314375	2.34281	2.34481	22.2443	22.4064
6	2.18663	2.34481	0.158187	2.26472	2.26672	20.38	20.34
7	2.26472	2.34481	0.08				

$$f_{\min} = 19.5643 \text{ за } x_{\min} = 2.3048.$$

3.2.5. За функцију $f(x) = 0.1(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$ методом златног пресека одредити приближно решење $(x_{\min}, f_{\min})$ минимизационог проблема $\min\limits_{1\le x\le 3} f(x)$ тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум није удаљена више од 0.05.

Решење. Полазни интервал неодређености је $[a_1, b_1] = [1, 3]$. Имајући у виду да је $\phi \approx 0.618$, у првој итерацији израчунава се:

$$p_1 = a_1 + (1-\phi)(b_1 - a_1) = 1.764, \qquad f(p_1) = -2.404,$$
$$q_1 = a_1 + \phi(b_1 - a_1) = 2.236, \qquad f(q_1) = -2.894.$$

Како је је $f(p_1) > f(q_1)$, нови интервал неодређености је $[a_2, b_2] = [p_1, b_1] = [1.764, 3]$. Дужина тог интервала не испуњава зауставни критеријум, па се алгоритам понавља са новим интервалом неодређености. Резултати добијени у наставку процеса су:

Табела 21

k	a_k	b_k	Δ_k	p_k	q_k	$f(p_k)$	$f(q_k)$
1	1.	3.	2.	1.764	2.236	-2.404	-2.894
2	1.764	3.	1.236	2.236	2.528	-2.894	-2.459
3	1.764	2.528	0.764	2.056	2.236	-2.853	-2.894
4	2.056	2.528	0.472	2.236	2.348	-2.894	-2.809
5	2.056	2.348	0.292	2.167	2.236	-2.903	-2.894
6	2.056	2.236	0.18	2.125	2.167	-2.893	-2.903
7	2.125	2.236	0.111	2.167	2.194	-2.903	-2.903
8	2.167	2.236	0.069				

ауставни критеријум испуњава се после 7 итерација, па је решење проблема $_{\min} = -2.902$ за $x_{\min} = 2.201$.

.2.6. Методом златног пресека одредити: **а)** $\min\limits_{2\le x\le 5} f(x)$, **б)** $\max\limits_{0\le x\le 2} f(x)$, где је

$$f(x) = \left|x^2 - 1.5\,|\,x\,| - 2\right| - x\,.$$

Іроцес зауставити када растојање између две итерације буде мање од 0.1.

Решење. **а)** Резултати добијени при решавању задатог минимизационог проблема су:

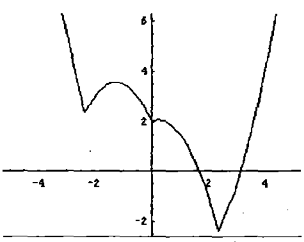
Табела 22

k	a_k	b_k	Δ_k	p_k	q_k	$f(p_k)$	$f(q_k)$
1	2.	5.	3.	3.146	3.854	0.032	3.219
2	2.	3.854	1.854	2.708	3.146	−1.436	0.032
3	2.	3.146	1.146	2.438	2.708	−2.152	−1.436
4	2.	2.708	0.708	2.271	2.438	−2.02	−2.152
5	2.271	2.708	0.438	2.438	2.541	−2.152	−1.896
6	2.271	2.541	0.271	2.374	2.438	−2.299	−2.152
7	2.271	2.438	0.167	2.334	2.374	−2.282	−2.299
8	2.334	2.438	0.103	2.374	2.398	−2.299	−2.244
9	2.334	2.398	0.064				

$$f_{\min} = -2.316 \quad \text{за} \quad x_{\min} = 2.366.$$

б) Уместо задатог максимизационог проблема решава се минимизациони $\min\limits_{0\le x\le 2} g(x)$, при чему је

$$g(x) = -f(x) = x - \left|x^2 - 1.5\,|\,x\,| - 2\right|.$$



Слика 3.2.6

Резултати решавања овог проблема су:

Табела 23

k	a_k	b_k	Δ_k	p_k	q_k	$g(p_k)$	$g(q_k)$
1	0.	2.	2.	0.764	1.236	−1.798	−1.09
2	0.	1.236	1.236	0.472	0.764	−2.013	−1.798
3	0.	1.764	0.764	0.298	0.472	−2.06	−2.013
4	0.	0.472	0.472	0.18	0.292	−2.058	−2.061
5	0.18	0.472	0.292	0.292	0.361	−2.061	−2.05
6	0.18	0.361	0.18	0.249	0.292	−2.062	−2.061
7	0.18	0.292	0.111	0.223	0.249	−2.062	−2.062
8	0.223	0.292	0.069				

$$f_{\max} = -g_{\min} = 2.062 \quad \text{за} \quad x_{\max} = 0.257.$$

График функције f приказан је на Слици 3.2.6.

3.2.7. За методе равномерног претраживања, дихотомног претраживања и златног пресека за решавање минимизационог проблема $\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ одредити број израчунавања функције потребних за постизање тачности $\varepsilon = \alpha\,\Delta_1$, где је $\Delta_1 = b - a$ дужина полазног интервала неодређености, а α узима вредности редом 0.05, 0.005, 0.0005 или 0.00005.

Решење. Нека је x^* тачно решење проблема, а $[a^{(p)}, b^{(p)}]$ интервал неодређености добијен неким од наведених метода, тако да тражена тачност ε буде задовољена. Тада је приближно решење проблема $x^{(p)} = (a^{(p)} + b^{(p)}) / 2$ и важи $|x^* - x^{(p)}| < \varepsilon$. Зато дужина коначног интервала неодређености мора да буде $\Delta^{(p)} = b^{(p)} - a^{(p)} < 2\varepsilon$.

Применом метода равномерног претраживања дужина крајњег интервала неодређености једнака је $\Delta_n = 2\,\Delta_1 / (n + 1)$. Да би била постигнута тражена тачност, мора да буде задовољена неједнакост $\Delta_n = 2\dfrac{\Delta_1}{n+1} < 2\varepsilon = 2\alpha\Delta_1$, одакле следи $n > \dfrac{1}{\alpha} - 1$. Према томе, број подеоних тачака, а тиме иброј израчунавања функције је $n = \left\lceil \dfrac{1}{\alpha} - 1 \right\rceil$, где је са $\lceil t \rceil$ означен најмањи цео број већи или једнак t.

Код метода дихотомног претраживања у свакој итерацији потребна су 2 израчунавања функције, а коначни интервал неодређености добијен после n итерација има дужину $\Delta_1 / 2^n$. За постизање тражене тачности потребно је да буде испуњена неједнакост $\dfrac{\Delta_1}{2^n} < 2\alpha\Delta_1$, тј. $n > -\dfrac{\ln\alpha}{\ln 2} - 1$. Зато је потребан рој итерација $n = \left\lceil -\frac{\ln\alpha}{\ln 2} - 1 \right\rceil$, а потребан број израчунавања функције $= 2n$.

Коначно, за метод златног пресека, у свакој итерацији се врши само едно израчунавање функције, осим у првој, када су потребна 2. Коначни интервал неодређености добијен после n итерација је дужине $\phi^n\,\Delta_1$, па за адовољење тачности треба да буде испуњена неједнакост $\phi^n\,\Delta_1 < 2\alpha\,\Delta_1$. Этуда је $n > \frac{\ln 2\alpha}{\ln\phi}$, тј. број потребних итерација је $n = \left\lceil \frac{\ln 2\alpha}{\ln\phi} \right\rceil$, а број ютребних израчунавања функције је $I = n+1$.

У Табели 24 дат је преглед броја потребних итерација n и броја ютребних израчунавања функције I при примени различитих метода за гражене вредности α.

Табела 24	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.0005$	$\alpha = 0.00005$
Метод равномерног претраживања	$n = 19$ $I = 19$	$n = 199$ $I = 199$	$n = 1999$ $I = 1999$	$n = 19999$ $I = 19999$
Метод дихотомног претраживања	$n = 4$ $I = 8$	$n = 7$ $I = 14$	$n = 10$ $I = 20$	$n = 14$ $I = 28$
Метод златног пресека	$n = 5$ $I = 6$	$n = 10$ $I = 11$	$n = 15$ $I = 16$	$n = 20$ $I = 21$

3.3. Алгоритми претраживања са коришћењем извода

i. ***Метод половљења интервала***
ii. ***Њутнов метод***

3.3.1. За функцију $f(x) = 0.1(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$ методом половљења интервала одредити приближно решење $(x_{\min}, f_{\min})$ минимизационог проблема $\min\limits_{1 \le x \le 3} f(x)$ тако да тачка $x_{\min}$ од тачке у којој се достиже егзактни минимум није удаљена више од 0.01.

Решење. Функција f је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и њен извод је

$$f'(x) = 0.1(4x^3 + 9x^2 - 30x - 19).$$

Полазни интервал неодређености је $[a_1, b_1] = [1, 3]$ и $\lambda_1 = 2$. Како је $f'(\lambda_1) = -1.1 < 0$, а дужина интервала неодређености не задовољава услов прекида, формира се нови интервал неодређености $[a_2, b_2] = [\lambda_1, b_1] = [2, 3]$. Резултати даљих израчунавања дати су у следећој табели:

Табела 25

k	a_k	b_k	Δ_k	λ_k	$f'(\lambda_k)$
1	1.	3.	2.	2.	−1.1
2	2.	3.	1.	2.5	2.475
3	2.	2.5	0.5	2.25	0.4625
4	2.	2.25	0.25	2.125	−0.3727
5	2.125	2.25	0.125	2.188	0.0312
6	2.125	2.188	0.063	2.156	−0.1742
7	2.156	2.188	0.031	2.172	−0.0724
8	2.172	2.188	0.016		

После 7 итерација испуњен је зауставни критеријум, па је решење проблема $f_{\min} = -2.904$ за $x = 2.18$, што представља средину последњег интервала неодређености.

3.3.2. За функцију $f(x) = \dfrac{x^2}{1-\ln^2 x}$ методом половљења интервала одредити:

а) $\min\limits_{1/e \le x \le e} f(x)$, **б)** $\max\limits_{e \le x \le e^2} f(x)$,

тако да грешка буде мања од 0.05.

Решење. **а)** Резултати добијени решавањем минимизационог проблема су:

Табела 26

k	a_k	b_k	Δ_k	λ_k	$f'(\lambda_k)$
1	0.368	2.718	2.35	1.543	5833
2	0.368	1.543	1.175	0.955	1.828
3	0.368	0.955	0.588	0.662	0.801
4	0.368	0.662	0.294	0.515	−0.346
5	0.515	0.662	0.147	0.588	0.428
6	0.515	0.588	0.073		

$$f_{\min} = 0.471 \quad \text{за } x = 0.552.$$

б) Максимизациони проблем замењује се минимизационим

$$\max_{e \le x \le e^2} f(x) = \min_{e \le x \le e^2} \left(-f(x)\right).$$

Табела 27

k	a_k	b_k	Δ_k	λ_k	$-f'(\lambda_k)$
1	2.718	7.389	4.67	5.054	0.018
2	2.718	5.054	2.335	3.886	−5.638
3	3.886	5.054	1.168	4.47	−1.479
4	4.47	5.054	0.584	4.761	−0.578
5	4.762	5.054	0.292	4.908	−0.252
6	4.908	5.054	0.146	4.981	−0.111
7	4.981	5.054	0.073		

$$f_{\max} = -15.719 \quad \text{за} \quad x = 5.017.$$

3.3.3. За функцију $f(x) = 0.1(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$ Њутновим методом одредити $\min\limits_{1\le x\le 3} f(x)$ са тачношћу 0.01. За стартне вредности узети

а) 1.2, **б)** 2.9.

Решење. Прва два извода функције f су

$$f'(x) = 0.1(4x^3 + 9x^2 - 30x - 19), \qquad f''(x) = 0.6(2x^2 + 3x - 5).$$

Како је $f''(x) \neq 0$ за $x \in (1, 3)$, за решавање задатог минимизационог проблема може се применити Њутнов метод, исказан формулом

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$

а) Ако је полазна тачка $x_1 = 1.2$, решење се добија после 6 итерација, као што показује табела:

Табела 28

k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
1	1.2	−3.513	0.889	5.156	3.956
2	5.156	61.38	38.18	3.548	1.608
3	3.548	16.655	18.494	2.648	0.9
4	2.648	3.891	10.178	2.265	0.382
5	2.265	0.573	7.236	2.186	0.079
6	2.186	0.023	6.671	2.183	0.003

$$f_{\min} = -2.904 \quad \text{за} \quad x = 2.183.$$

б) Полазећи од тачке $x_1 = 2.9$, за постизање тражене тачности довољне су 4 итерације:

Табела 29

k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
1	2.9	6.725	12.312	2.354	0.546
2	2.354	1.241	7.885	2.196	0.157
3	2.196	0.091	6.742	2.183	0.013
4	2.183	0.001	6.647	2.183	0.

3.3.4. Дата је функција $f(x) = x^2 + e^{-x}$. Испитати да ли се за решавање минимизационог проблема $\min\limits_{-\infty<x<\infty} f(x)$ може применити Њутнов метод, а затим решити проблем са тачношћу 0.001.

Решење. Функција $f(x)$ је диференцијабилна произвољан број пута на $\mathbb{R}$, а њена прва два извода су: $f'(x) = 2x - e^{-x}$, $f''(x) = 2 + e^{-x}$. Једначина $f'(x) = 0$ има само једно решење, па функција f има само једну екстремну вредност. Како је $f''(x) \neq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, за одређивање тог екстремума може да се примени Њутнов метод са произвољном стартном тачком. Узимајући за стартну тачку, на пример, $x_1 = 0$, добијају се следећи резултати:

Табела 30

k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
1	0.	−1.	3.	0.3333	0.3333
2	0.3333	−0.0499	2.7165	0.3517	0.0184
3	0.3517	−0.0001	2.7035	0.3517	0.

$$f_{\min} = 0.827 \quad \text{за} \quad x = 0.352.$$

3.3.5. Одредити $\min\limits_{0\le x\le 1} (x-2)\sin 3x$ са тачношћу 0.05

а) методом половљења интервала,

б) Њутновим методом.

Решење. **а)** Табела 31

k	a_k	b_k	Δ_k	λ_k	$f'(\lambda_k)$
1	0.	1.	1.	0.5	0.679
2	0.	0.5	0.5	0.25	−3.16
3	0.25	0.5	0.25	0.375	−1.2
4	0.375	0.5	0.125	0.438	−0.231
5	0.438	0.5	0.063		

$$f_{\min} = -1.511 \quad \text{за} \quad x = 0.469.$$

б) Табела 32

k	x_k	$f\,'(x_k)$	$f\,''(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
1	0.	−6.	6.	1.	1.
2	1.	3.111	−4.67	1.666	0.666
3	1.666	−1.242	−1.188	0.621	1.046
4	0.621	2.146	10.17	0.41	0.211
5	0.41	−0.657	15.496	0.452	0.042

$$f_{\min} = -1.512 \quad \text{за} \quad x = 0.452.$$

.3.6. Дата је функција $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1 - 4)^4$. Нека је $(\lambda) = f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d})$, где је $\mathbf{x}^1$ произвољна тачка и $\mathbf{d}$ произвољан правац.

а) Одредити експлицитан израз за $\varphi(\lambda)$.

б) За $\mathbf{x}^1 = [-3 \quad 1]^T$ и $\mathbf{d} = [1 \quad 1]^T$ Њутновим методом одредити $\underset{\leq\lambda\leq 2}{\text{nin}}\,\varphi(\lambda)$ са тачношћу 0.05.

в) За $\mathbf{x}^1 = [4 \quad 5]^T$ и $\mathbf{d} = [-2 \quad 1]^T$ методом половљења интервала дредити $\min\limits_{-5\leq\lambda\leq 5}\varphi(\lambda)$ са тачношћу 0.05.

Решење. **а)** Ако је $\mathbf{x}^1 = [x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)}]^T$ и $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2]^T$, тада је

$$\varphi(\lambda) = ((x_1^{(1)} + \lambda d_1)^3 + x_2^{(1)} + \lambda d_2)^2 + 2(x_2^{(1)} + \lambda d_2 - x_1^{(1)} - \lambda d_1 - 4)^4.$$

б) За $\mathbf{x}^1 = [-3 \quad 1]^T$ и $\mathbf{d} = [1 \quad 1]^T$ функција коју треба минимизирати је

$$\varphi(\lambda) = ((\lambda - 3)^3 + \lambda + 1)^2.$$

Ірименом Њутновог метода с стартном тачком $\lambda_1 = 0$ добијају се следећи езултати:

Табела 33

k	λ_k	$\varphi'(\lambda_k)$	$\varphi''(\lambda_k)$	λ_{k+1}	$\lvert\lambda_{k+1} - \lambda_k\rvert$
1	0.	−1456.	2504.	0.581	0.581
2	0.581	−466.116	1052.72	1.024	0.443
3	1.024	−144.608	457.997	1.34	0.316
4	1.34	−41.413	216.265	1.531	0.191
5	1.531	−9.494	122.791	1.609	0.077
6	1.609	−1.141	94.053	1.621	0.012

$$\varphi_{\min} = 0.007 \quad \text{за} \quad \lambda = 1.609.$$

в) За $\mathbf{x}^1 = [4 \quad 5]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d} = [-2 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ функција $\varphi(\lambda)$ постаје

$$\varphi(\lambda) = ((\lambda + 4)^3 - 2\lambda + 5)^2 + 162(\lambda + 1)^4.$$

Метод половљења интервала даје следеће резултате:

Табела 34

k	a_k	b_k	Δ_k	λ_k	$\varphi'(\lambda_k)$
1	–5.	5.	10.	0.	6996.
2	–5.	0.	5.	–2.5	–2059.94
3	–2.5	0.	2.5	–1.25	1160.66
4	–2.5	–1.25	1.25	–1.875	–10.438
5	–1.875	–1.25	0.625	–1.562	600.152
6	–1.875	–1.562	0.312	–1.719	312.307
7	–1.875	–1.719	0.156	–1.797	156.64
8	–1.875	–1.797	0.078	–1.836	74.692
9	–1.875	–1.836	0.039		

$$\varphi_{\min} = 431.744 \quad \text{за } \lambda = -1.855 .$$

4. ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНА НЕЛИНЕАРНА ОПТИМИЗАЦИЈА

4.1. Алгоритми претраживања без коришћења извода

i. ***Метод координатног спуста***
ii. ***Метод флексибилних полиедара***

4.1.1. Методом координатног спуста одредити $\min f(x_1, x_2)$, где је

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1 - 5x_2 .$$

За стартну тачку узети $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 10]^{\mathrm{T}}$, а процес зауставити када је растојање између две суседне итерације мање од 0.2.

Решење. Нека је $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^1 = [0 \quad 10]^{\mathrm{T}}$. Функција

$$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{y}_1 + \lambda \mathbf{d}_1) = \lambda^2 - 9\lambda$$

достиже минимум за $\lambda_1 = 9/2$, па је

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda_1 \mathbf{d}_1 = [0 \quad 10]^{\mathrm{T}} + \frac{9}{2}[1 \quad 0]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} .$$

Нова функција $\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{y}_2 + \lambda \mathbf{d}_2) = \frac{1}{4}(2\lambda^2 + 2\lambda - 81)$ има минимум за $\lambda_2 = -1/2$, па је

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[0 \quad 1]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Нова итерација је $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}_3 = [9/2 \quad 19/2]^{\mathrm{T}}$, а пошто је $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\| \geq 0.2$, процес се наставља са $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^2$. Сада функција $\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{y}_1 + \lambda \mathbf{d}_1) = \frac{1}{8}(8\lambda^2 + 4\lambda - 163)$ достиже минимум за $\lambda_1 = -1/4$, па је

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda_1 \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & \frac{19}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

И функција $\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{y}_2 + \lambda \mathbf{d}_2) = \frac{1}{16}(8\lambda^2 + 4\lambda - 327)$ достиже минимум за $\lambda_2 = -1/4$, па је

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & \frac{37}{4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

и $\mathbf{x}^3 = \mathbf{y}_3$. Опет је $\|\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2\| \geq 0.2$, па се процес наставља. Нове вредности су:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^3, \quad \varphi_1(\lambda) = \frac{1}{32}(32\lambda^2 + 8\lambda - 655), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{8},$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \frac{33}{8} & \frac{37}{4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{1}{64}(32\lambda^2 + 8\lambda - 1311), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{8},$$

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} \frac{33}{8} & \frac{73}{8} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}^4 = \mathbf{y}_3.$$

Како је $\|\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^3\| = 0.176777 < 0.2$, процес се зауставља и решење је $f_{\min} = -20.4922$ за $\mathbf{x} = [4.125 \quad 9.125]^{\mathrm{T}}$.

4.1.2. Методом координатног спуста са тачношћу $\varepsilon = 10^{-2}$ одредити решити максимизациони проблем

$$\max e^{-x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 - 1}.$$

Решење. Уместо задатог максимизационог проблема $\max g(x_1, x_2)$, решава се минимизациони проблем $\min f(x_1, x_2)$, где је

$$f(x_1, x_2) = \left(g(x_1, x_2)\right)^{-1} = e^{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + 1}.$$

Полазећи од тачке $\mathbf{x}^{(1)} = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ и примењујући поступак представљен у претходном задатку, добијају се следеће вредности:

Табела 35

k	$\mathbf{x}^k (=\mathbf{y}_1)$	λ_1	$\mathbf{y}_2$	λ_2	$\mathbf{y}_3$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\lVert\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k-1}\rVert$
1	$[0 \quad 0]^T$	1	$[1 \quad 0]^T$	1	$[1 \quad 1]^T$	2.7182	
2	$[1 \quad 1]^T$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}^T$	$\frac{1}{4}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}^T$	0.3678	1.414
3	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}^T$	$-\frac{1}{8}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}^T$	$\frac{1}{16}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{21}{16}\end{bmatrix}^T$	0.2691	0.559
4	$\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{21}{16}\end{bmatrix}^T$	$-\frac{1}{32}$	$\begin{bmatrix}\frac{11}{32} & \frac{21}{16}\end{bmatrix}^T$	$\frac{1}{64}$	$\begin{bmatrix}\frac{11}{32} & \frac{85}{64}\end{bmatrix}^T$	0.2639	0.140
5	$\begin{bmatrix}\frac{11}{32} & \frac{85}{64}\end{bmatrix}^T$	$-\frac{1}{128}$	$\begin{bmatrix}\frac{43}{128} & \frac{85}{64}\end{bmatrix}^T$	$\frac{1}{256}$	$\begin{bmatrix}\frac{43}{128} & \frac{341}{256}\end{bmatrix}^T$	0.2636	0.035
6	$\begin{bmatrix}\frac{43}{128} & \frac{341}{256}\end{bmatrix}^T$					0.2636	0.009

Према томе, за тачку у којој функција f достиже свој минимум $f_{\min} = 0.2636$ може се узети $\mathbf{x}^6=[0.336 \quad 1.332]^T$, а у тој тачки функција циља g достиже своју максималну вредност $g_{\max} = (0.2636)^{-1} = 3.7936$.

4.1.3. Методом координатног спуста одредити $\min f(x_1, x_2)$, где је

$$f(x_1, x_2) = \max\,(4x_1^2 + 4x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 + 32, \quad 4x_1 - 4x_2 + 16).$$

Решење. Нека је почетна тачка $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0]^T$ и $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^1$. Функција

$$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{d}_1) = \max\,(4\lambda^2 - 16\lambda + 32,\ 4\lambda + 16),$$

чији је график приказан је на Слици 4.1.3.а, достиже минимум за $\lambda_1 = 1$. Зато је $\mathbf{y}_2=[1 \quad 0]^T$. Функција

$$\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{y}_2 + \lambda\mathbf{d}_2) = \max\,(4\lambda^2 - 16\lambda + 20, -4\lambda+20)$$

достиже минимум за $\lambda_2=1$ (Слика 4.1.3.б), па је $\mathbf{x}^2= \mathbf{y}_3=[1 \quad 3]^T$. Вредности у новој итерацији су:

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}^2 =[1 \quad 3]^T$,

$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{d}_1) = \max\,(4\lambda^2 - 8\lambda + 8,\ 4\lambda + 8)$, $\min \varphi_1(\lambda) = 8$ за $\lambda_1 = 0$

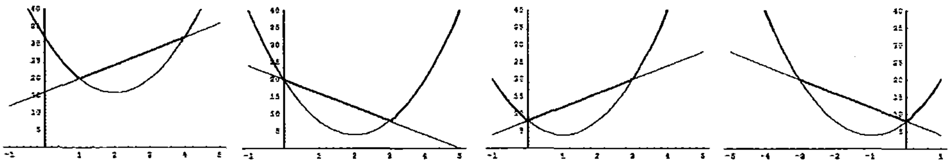
(Слика 4.1.3.в),

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda_1\mathbf{d}_1 = [1 \quad 3]^T$,

$\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{y}_2 + \lambda\mathbf{d}_2) = \max\,(4\lambda^2 + 8\lambda + 8, -4\lambda + 8)$, $\min \varphi_2(\lambda) = 8$ за $\lambda_2 = 0$

(Слика 4.1.3.г),

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda_2\mathbf{d}_2 = [1 \quad 3]^T$, $\mathbf{x}^3 = \mathbf{y}_3 = [1 \quad 3]^T$.



Слика 4.1.3

Како је $|\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2| = 0$, тачно решење минимизационог проблема је $f_{\min} = 8$ за $\mathbf{x} = [1 \quad 3]^T$.

4.1.4. Методом флексибилних полиедара одредити $\min f(x_1, x_2)$, где је

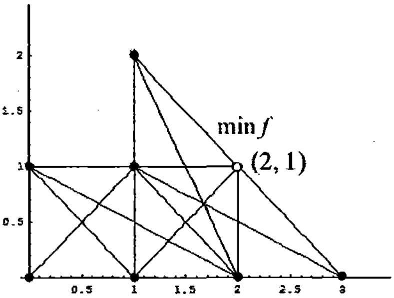
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 7\ .$$

Решење. Нека је почетни симплекс троугао са теменима $\mathbf{v}_1^{(1)} = [0 \quad 0]^T$, $\mathbf{v}_2^{(1)} = [1 \quad 0]^T$ и $\mathbf{v}_3^{(1)} = [0 \quad 1]^T$. Упоређивањем вредности функције у теменима троугла $f(\mathbf{v}_1^{(1)}) = f(0, 0) = 7$, $f(\mathbf{v}_2^{(1)}) = f(1, 0) = 4$ и $f(\mathbf{v}_3^{(1)}) = f(0, 1) = 6$ може се закључити да функција f опада од темена $\mathbf{v}_1^{(1)}$ у правцу и смеру вектора $\mathbf{t}^{(1)} - \mathbf{v}_1^{(1)}$, где је $\mathbf{t}^{(1)} = (\mathbf{v}_3^{(1)} - \mathbf{v}_2^{(1)})/2 = [0.5 \quad 0.5]^T$ средина наспрамне странице $\mathbf{v}_3^{(1)} - \mathbf{v}_2^{(1)}$. Поступком рефлексије, тј. одређивањем тачке $\mathbf{v}_1^{(2)}$ симетричне тачки $\mathbf{v}_1^{(1)}$ у односу на средину странице $\mathbf{v}_3^{(1)} - \mathbf{v}_2^{(1)}$ успоставља се нови троугао са теменима $\mathbf{v}_1^{(2)} = [1 \quad 1]^T$, $\mathbf{v}_2^{(2)} = \mathbf{v}_2^{(1)}$, $\mathbf{v}_3^{(2)} = \mathbf{v}_3^{(1)}$. Наведеним поступком у прве 4 итерације добијају се следећи резултати (симболом * означена су темена која се рефлектују у текућој итерацији):

Табела 36

k	$\mathbf{v}_1^{(k)}$	$\mathbf{v}_2^{(k)}$	$\mathbf{v}_3^{(k)}$	$f(\mathbf{v}_1^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_2^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_3^{(k)})$
1	$[0 \quad 0]^T$ *	$[1 \quad 0]^T$	$[0 \quad 1]^T$	7	4	6
2	$[1 \quad 1]^T$	$[1 \quad 0]^T$	$[0 \quad 1]^T$ *	3	4	6
3	$[1 \quad 1]^T$	$[1 \quad 0]^T$ *	$[2 \quad 0]^T$	3	4	3
4	$[1 \quad 1]^T$ *	$[2 \quad 1]^T$	$[2 \quad 0]^T$ *	3	2	3

Сада за рефлектовање темена постоје две могућности. Ако се рефлектује теме $\mathbf{v}_1^{(4)}$, добија се троугао са теменима $\mathbf{v}_1^{(5)} = [3 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_2^{(5)} = \mathbf{v}_2^{(4)}$, $\mathbf{v}_3^{(5)} = \mathbf{v}_3^{(4)}$ и вредностима функције $f(\mathbf{v}_1^{(5)}) = 4$, $f(\mathbf{v}_2^{(5)}) = 2$, $f(\mathbf{v}_3^{(5)}) = 3$. Ако се рефлектује $\mathbf{v}_3^{(4)}$, добија се троугао са теменима $\mathbf{v}_1^{(5)} = \mathbf{v}_1^{(4)}$, $\mathbf{v}_2^{(5)} = \mathbf{v}_2^{(4)}$, $\mathbf{v}_3^{(5)} = [1 \;\; 2]^T$ и вредностима функције $f(\mathbf{v}_1^{(5)}) = 3$, $f(\mathbf{v}_2^{(5)}) = 2$, $f(\mathbf{v}_3^{(5)}) = 4$. У оба случаја у новом темену вредност функције је већа него у осталима, па се новом рефлексијом поново добија троугао са теменима $\mathbf{v}_1^{(4)}$, $\mathbf{v}_2^{(4)}$, $\mathbf{v}_3^{(4)}$, што значи да је минимална вредност функције у околини темена $\mathbf{v}_2^{(4)} = [2 \;\; 1]^T$.



Слика 4.1.4

Ако се циљна функција представи у облику

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2\,,$$

види се да је решење задатка управо $f_{\min} = 2$ за $(x_1, x_2) = (2,1)$.

Троуглови коришћени за добијање решења приказани су на Слици 4.1.4.

4.1.5. Полазећи од троугла са теменима (8, 9), (10, 11) и (8, 11), методом флексибилних полиедара одредити $\min f(x_1, x_2)$, где је

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 40x_1 - 12x_2 + 136\,.$$

У случају петље смањити страницу троугла, а процес зауставити кад максимална дужина странице буде мања од 0.2.

Решење. Применом поступка рефлексије описаног у претходном задатку, у првих 5 итерација добијају се следећи резултати:

Табела 37

k	$\mathbf{v}_1^{(k)}$	$\mathbf{v}_2^{(k)}$	$\mathbf{v}_3^{(k)}$	$f(\mathbf{v}_1^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_2^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_3^{(k)})$
1	$[8 \;\; 9]^T$	$[10 \;\; 11]^T$ *	$[8 \;\; 11]^T$	45	125	63
2	$[8 \;\; 9]^T$	$[6 \;\; 9]^T$	$[8 \;\; 11]^T$ *	45	13	63
3	$[8 \;\; 9]^T$ *	$[6 \;\; 9]^T$	$[6 \;\; 7]^T$	45	13	5
4	$[4 \;\; 7]^T$	$[6 \;\; 9]^T$ *	$[6 \;\; 7]^T$	5	13	5
5	$[4 \;\; 7]^T$	$[4 \;\; 5]^T$	$[6 \;\; 7]^T$	5	5	5

Како су вредности функције у свим теменима последњег троугла једнаке, странице троугла треба смањити. Нови троугао није једнозначно одређен, како због коефицијента смањења странице, тако и због избора темена које остаје. Тако, на пример, поступак може да се настави са троуглом са еменима $\mathbf{v}_1^{(6)} = \mathbf{v}_1^{(5)} = [4 \quad 7]^T$, $\mathbf{v}_2^{(6)} = [4 \quad 6]^T$, $\mathbf{v}_3^{(6)} = [5 \quad 7]^T$. Резултати даље роцедуре су следећи:

Табела 38

k	$\mathbf{v}_1^{(k)}$	$\mathbf{v}_2^{(k)}$	$\mathbf{v}_3^{(k)}$	$f(\mathbf{v}_1^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_2^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_3^{(k)})$
6 (р)	$[4 \quad 7]^T$ *	$[4 \quad 6]^T$	$[5 \quad 7]^T$	5	4	1
7	$[5 \quad 6]^T$	$[4 \quad 6]^T$ *	$[5 \quad 7]^T$	0	4	1
8	$[5 \quad 6]^T$	$[6 \quad 7]^T$ *	$[5 \quad 7]^T$	0	5	1

ледећом рефлексијом поново би се добио троугао из претходне итерације, а се опет врши редукција странице троугла. Резултати су представљени у ледећој таблици, при чему је ознаком (р) наглашена итерација у којој је звршена редукција:

Табела 39

k	$\mathbf{v}_1^{(k)}$	$\mathbf{v}_2^{(k)}$	$\mathbf{v}_3^{(k)}$	$f(\mathbf{v}_1^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_2^{(k)})$	$f(\mathbf{v}_3^{(k)})$
9 (р)	$[5 \quad 6]^T$	$[4.5 \quad 6]^T$ *	$[5 \quad 6.5]^T$	0	1	0.25
10	$[5 \quad 6]^T$	$[5.5 \quad 6.5]^T$ *	$[5 \quad 6.5]^T$	0	1.25	0.25
11 (р)	$[5 \quad 6]^T$	$[4.75 \quad 6]^T$ *	$[5 \quad 6.25]^T$	0	0.25	0.0625
12	$[5 \quad 6]^T$	$[5.25 \quad 6.25]^T$ *	$[5 \quad 6.25]^T$	0	0.3125	0.0625
13 (р)	$[5 \quad 6]^T$	$[4.875 \quad 6]^T$	$[5 \quad 6.125]^T$	0	0.0625	0.015625

' последњем троуглу дужина највеће странице је 0.176777, што задовољава остављени критеријум за завршетак процеса. Према томе, тражено решење $f_{\min} = 0$ за $(x_1, x_2) = (5, 6)$.

.2. Алгоритми претраживања са коришћењем извода

Метод најбржег пада

i. *Њутнов метод*

ii. *Метод коњугованих праваца*

.2.1. Одредити $\min x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1 - 5x_2$ методом најбржег пада са очетном тачком $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 10]^T$ и зауставним критеријумом $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решење. Градијент функције

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2$$

у произвољној тачки је

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 + x_2 - 5 \end{bmatrix}.$$

У почетној тачки $\mathbf{x}^1 = [0 \ \ 10]^T$ правац најбржег пада је $\mathbf{d}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}^1) = [9 \ \ -5]^T$, па се нова итерација добија минимизацијом функције

$$f(\mathbf{x}^1 + \lambda\,\mathbf{d}_1) = 138.5\lambda^2 - 106\lambda.$$

Она достиже минимум за $\lambda_1 = 0.3827$, па је

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda_1\mathbf{d}_1 = [3.4440 \quad 8.0866]^T.$$

Пошто је $|\nabla f(\mathbf{x}^2)| = 0.4089$, поступак се наставља на исти начин. Добијене вредности су:

$\mathbf{d}_2 = -\nabla f(\mathbf{x}^2) = [-0.1986 \ \ -0.3574]^T$, $\quad f(\mathbf{x}^2 + \lambda\mathbf{d}_2) = 0.0323\,\lambda^2 - 0.1672\,\lambda - 20.2816$,
$\lambda_2 = 2.5854$, $\quad \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \lambda_2\,\mathbf{d}_2 = [3.9574 \quad 9.0106]^T$, $\quad |\nabla f(\mathbf{x}^3)| = 0.1097$,

$\mathbf{d}_3 = -\nabla f(\mathbf{x}^3) = [-0.0959 \quad 0.0533]^T$, $\quad f(\mathbf{x}^3 + \lambda\mathbf{d}_3) = 0.0157\,\lambda^2 - 0.0120\,\lambda - 20.4977$,
$\lambda_3 = 0.3827$, $\quad \mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^3 + \lambda_3\,\mathbf{d}_3 = [3.9940 \quad 8.9903]^T$, $\quad |\nabla f(\mathbf{x}^4)| = 0.0044$.

Због испуњености зауставног критеријума, решење задатог минимизационог проблема је $f_{\min} = -20.5$ за $(x_1, x_2) = (3.9940, 8.9903)$.

4.2.2. Методом најбржег пада са зауставним критеријумом $\varepsilon = 0.05$ решити минимизациони проблем $\min f(x_1, x_2, x_3)$, где је

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + (-x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)^2 + (x_1 + 2x_2 - x_3 - 1)^2$,

б) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1)^2 + (-x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)^2 + (x_1 + 2x_2 - x_3 - 1)^2$.

Решење. **а)** Градијент функције f је

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4 \\ -2x_1 + 12x_2 - 2x_3 - 4 \\ -2x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 4 \end{bmatrix}.$$

Нека је $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ полазна тачка. Тада је $\mathbf{d}_1 = -\nabla f(0,0,0) = [4 \quad 4 \quad 4]^T$ правац најбржег пада, а функција

$$f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1) = 192\lambda^2 - 48\lambda + 3$$

достиже минимум за $\lambda_1 = 0.125$. Нова итерација је

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda_1 \mathbf{d}_1 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T.$$

Како је $|\nabla f(\mathbf{x}^2)| = 0$, процес се завршава, па се решење проблема $f_{min} = 0$ добија за $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.5, 0.5)$.

б) Полазећи од тачке $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, добијају се следећи резултати:

Табела 40

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|$	$\mathbf{d}_k$	λ_k
1	$[0 \quad 0 \quad 0]^T$	3	6	$[4 \quad 2 \quad 4]^T$	0.155
2	$[0.621 \quad 0.310 \quad 0.621]^T$	0.2069	2.8146	$[-0.346 \quad 2.621 \quad -0.966]^T$	0.048
3	$[0.604 \quad 0.435 \quad 0.575]^T$	0.0179	0.5204	$[0.510 \quad 0.087 \quad 0.054]^T$	0.104
4	$[0.657 \quad 0.444 \quad 0.580]^T$	0.0039	0.2997	$[-0.058 \quad 0.264 \quad 0.128]^T$	0.062
5	$[0.654 \quad 0.461 \quad 0.588]^T$	0.0011	0.1371	$[0.100 \quad -0.022 \quad 0.091]^T$	0.080
6	$[0.661 \quad 0.459 \quad 0.596]^T$	0.0004	0.0883	$[0.008 \quad 0.087 \quad 0.012]^T$	0.064
7	$[0.662 \quad 0.465 \quad 0.596]^T$	0.0001	0.0458		

Због испуњености зауставног критеријума за решење проблема се може узети $f_{min}=0.0001$ за $(x_1, x_2, x_3) = (0.662, 0.465, 0.596)$.

4.2.3. Одредити $\min\, (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2$ методом најбржег пада узимајући за полазну тачку:

1° $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$,

2° $\mathbf{x}^1 = [-2.5 \quad 2 \quad -2.5 \quad 2]^T$,

3° $\mathbf{x}^1 = [10 \quad 9 \quad -1 \quad 4]^T$.

Решење. Градијент функције $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ је

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [2(x_1 - x_2) \quad -2(x_1 - x_2) \quad 2(x_3 - x_4) \quad -2(x_3 - x_4)]^T.$$

Како је $\nabla f(0,0,0,0) = 0$, то се решење проблема $f_{min} = 0$ постиже већ у првој предложеној полазној тачки $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Ако се за полазну тачку изаберу друга или трећа предложена тачка, решење $f_{min} = 0$ се добија у другој итерацији, али за различите вредности променљивих:

2° $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-0.25, -0.25, -0.25, -0.25)$,

3° $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9.5, 9.5, 1.5, 1.5)$.

Приметимо да минимум $f_{min} = 0$ функција достиже у свим тачкама $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ за које важи $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$.

4.2.4. Одредити $\min x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2$ Њутновим методом са почетном тачком $\mathbf{x}^1=[0 \quad 10]^T$.

Решење. Парцијални изводи функције

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2 \text{ су:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + x_2 - 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 1,$$

а градијент и хесијан у произвољној тачки

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 + x_2 - 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Хесијан је константна матрица и њена инверзна матрица је $\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Полазећи од тачке $\mathbf{x}^1=[0 \quad 10]^T$, применом Њутновог метода добија се следећа итерација

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{H}(\mathbf{x}^1)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Како је $\nabla f(\mathbf{x}^2) = [0 \quad 0]^T$, решење проблема је $f_{\min} = -20.5$ за $(x_1, x_2) = (4, 9)$.

4.2.5. Њутновим методом решити проблем $\min f(x_1, x_2, x_3)$, где је

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1)^2 + (-x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)^2 + (x_1 + 2x_2 - x_3 - 1)^2.$$

Решење. Градијент функције, хесијан и инверзни хесијан су

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 12x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 4 \\ -6x_1 + 18x_2 - 4x_3 - 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ -6 & 18 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Полазећи од $\mathbf{x}^1=[0 \quad 0 \quad 0]^T$ већ у другој итерацији

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{H}(\mathbf{x}^1)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^1) = [0.6667 \quad 0.4667 \quad 0.6]^{\mathrm{T}}$$

:е добија тачно решење $f_{\min} = 0$.

1.2.6. Одредити $\max\ x_1 + 2x_2 + 5x_1x_2 - x_1^2 + 3x_2^2$ применом Њутновог иетода.

Решење. Уместо задатог максимизационог проблема $\max f(x_1, x_2)$ ›ешава се одговарајући минимизациони $\min g(x_1, x_2)$, где је

$$g(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 - 5x_1x_2 + x_1^2 - 3x_2^2.$$

Независно од полазне тачке, у другој итерацији се добија тачно решење $f_{\max} = -g_{\min} = -0.2973$ за $(x_1, x_2) = (-0.1081, -0.2432)$.

1.2.7. Решити минимизациони проблем $\min f(x_1, x_2)$ Њутновим методом :а полазном тачком (1, 0) и зауставним критеријумом $\varepsilon = 0.05$, ако је

а) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^4 + (x_1 - 2)^4$,

б) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2}$.

Решење. **а)** Знајући да је за задату функцију

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 4\begin{bmatrix} (x_1 - 2x_2)^3 + (x_1 - 2)^3 \\ -2(x_1 - 2x_2)^3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 12\begin{bmatrix} (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^2 & -2(x_1 - 2x_2)^2 \\ -2(x_1 - 2x_2)^2 & 4(x_1 - 2x_2)^2 \end{bmatrix},$$

применом Њутновог метода добијају се следећи резултати:

Табела 41

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\lvert\nabla f(\mathbf{x}^k)\rvert$
1	$[1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$	2	8
2	$[1.3333 \quad 0.3333]^{\mathrm{T}}$	0.3951	2.370
3	$[1.5556 \quad 0.5556]^{\mathrm{T}}$	0.078	0.702
4	$[1.7037 \quad 0.7037]^{\mathrm{T}}$	0.0154	0.208
5	$[1.8025 \quad 0.8025]^{\mathrm{T}}$	0.003	0.062
6	$[1.8683 \quad 0.8683]^{\mathrm{T}}$	0.0006	0.018

Решење је $f_{\min} = 0.0006$ за $(x_1, x_2) = (1.8683,\ 0.8683)$.

б) $\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}1+2x_1e^{x_1^2+x_2^2}\\2y\,(2+e^{x_1^2+x_2^2})\end{bmatrix},\mathbf{H}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2(1+2x_1^2)e^{x_1^2+x_2^2} & 4x_1x_2\,e^{x_1^2+x_2^2}\\4x_1x_2\,e^{x_1^2+x_2^2} & 4+2(1+2x_2^2)e^{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$,

Табела 42

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\lvert\nabla f(\mathbf{x}^k)\rvert$
1	$[\,1\quad 0]^{\mathrm{T}}$	3.7183	6.437
2	$[\,0.6054\quad 0]^{\mathrm{T}}$	2.048	2.747
3	$[\,0.0560\quad 0]^{\mathrm{T}}$	1.0592	1.112
4	$[-0.4950\quad 0]^{\mathrm{T}}$	0.7826	0.265
5	$[-0.4254\quad 0]^{\mathrm{T}}$	0.773	0.02

$f_{\min} = 0.773$ за $(x_1, x_2) \doteq (-0.4254,\ 0)$.

4.2.8. Методом коњугованих праваца одредити

$$\min x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2 .$$

Решење. Хесијан функције $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - 5x_2$ је константна матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$. Ако је $\mathbf{d}_1 = [1\quad 0]^{\mathrm{T}}$, тада се њему $\mathbf{H}$-коњугован вектор $\mathbf{d}_2 = [1\quad b]^{\mathrm{T}}$ $(b \neq 0)$ одређује из услова

$$\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_2 = [1\quad 0]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix} = [1\quad 0]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2-b\\-1+b\end{bmatrix} = 2-b = 0 .$$

Дакле, $\mathbf{d}_2 = [1\quad 2]^{\mathrm{T}}$. Нека је полазна тачка $\mathbf{x}^1 = [0\quad 10]^{\mathrm{T}}$. Функција

$$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1) = \lambda^2 - 9\lambda$$

достиже минимум за $\lambda_1 = 9/2$ (видети задатак 4.1.1.), па је

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda_1\mathbf{d}_1 = [0\quad 10]^{\mathrm{T}} + \frac{9}{2}[1\quad 0]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\frac{9}{2} & 10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} .$$

Минимизацијом нове функције

$$\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{x}^2 + \lambda\mathbf{d}_2) = \lambda^2 + \lambda - \frac{81}{4}$$

добија се $\lambda_2 = -1/2$. Коначно, тачно решење проблема $f_{\min} = -20.5$ достиже се у тачки

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \lambda_2\mathbf{d}_2 = [4.5\quad 10]^{\mathrm{T}} - 0.5[1\quad 2]^{\mathrm{T}} = [4\quad 9]^{\mathrm{T}} .$$

Їсто се решење добија и ако се за полазну тачку узме, на пр., $\mathbf{x}^1 = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$:

$$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{d}_1) = \lambda^2 + 2\lambda - \frac{7}{2}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda_1\mathbf{d}_1 = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}},$$

$$\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{x}^2 + \lambda\mathbf{d}_2) = \lambda^2 - 8\lambda - \frac{9}{2}, \quad \lambda_2 = 4, \quad \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \lambda_2\mathbf{d}_2 = [4 \quad 9]^{\mathrm{T}}.$$

.2.9. Нека су $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ произвољни линеарно независни вектори и $\mathbf{I}=[h_{ij}]_{n\times n}$ симетрична позитивно дефинитна матрица. Доказати да су ектори $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n \in \mathbb{R}^n$ дефинисани са

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} \boldsymbol{a}_k, & k = 1, \\ \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_k}{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i}\mathbf{d}_i, & k > 1, \end{cases}$$

H-коњуговани.

Решење. Како је

$$\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\left(\boldsymbol{a}_2 - \frac{\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_2}{\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_1}\mathbf{d}_1\right) = \mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_2 - \frac{\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_2}{\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_1}\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_1 = 0,$$

ектори $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ су **H**–коњуговани. Претпоставимо да су **H**–коњуговани сви ектори $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ $(k<n)$ и докажимо да је и вектор $\mathbf{d}_{k+1}$ **H**-коњугован са ьима. Нека је $j\in\{1, \dots, k\}$ произвољно. Тада је

$$\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\left(\boldsymbol{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i}\mathbf{d}_i\right) = \mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i}\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i.$$

Їбог **H**–коњугованости вектора $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ и позитивне дефинитности ıатрице **H** важи: $\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i = 0$ за $i \neq j$ и $\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_j > 0$ за $i = j$. Зато је

$$\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_{k+1} - \frac{\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_j}\mathbf{d}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{d}_j = 0,$$

што значи да је $\mathbf{d}_{k+1}$ **H**–коњугован са произвољним вектором $\mathbf{d}_j$, $j\in\{1, \dots, k\}$. Према томе, сви вектори $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ су **H**–коњуговани.

.2.10. Методом коњугованих праваца одредити $\min f(x_1, x_2, x_3)$, где је

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1)^2 + (-x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)^2 + (x_1 + 2x_2 - x_3 - 1)^2.$$

Решење. Хесијан функције циља је (видети Задатак 4.2.5.) позитивно ефинитна симетрична матрица

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ -6 & 18 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

H-коњуговани правци $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ и $\mathbf{d}_3$ могу да се формирају применом тврђења из претходног задатка, полазећи од произвољног система линеарно независних вектора. Нека је, на пример, $\boldsymbol{a}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\boldsymbol{a}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, $\boldsymbol{a}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. Тада је

$$\mathbf{d}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{H} \boldsymbol{a}_2}{\mathbf{d}_1^T \mathbf{H} \mathbf{d}_1} \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-6}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{H} \boldsymbol{a}_3}{\mathbf{d}_1^T \mathbf{H} \mathbf{d}_1} \mathbf{d}_1 - \frac{\mathbf{d}_2^T \mathbf{H} \boldsymbol{a}_3}{\mathbf{d}_2^T \mathbf{H} \mathbf{d}_2} \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-5}{15} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Нека је полазна тачка, на пример, $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$. Најпре са врши минимизација функције f дуж правца $\mathbf{d}_1$, тј. минимизација функције

$$\varphi_1(\lambda) = f(\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{d}_1) = 6\lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Решење је $\lambda_1 = 1/3$, па је

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda_1 \mathbf{d}_1 = [1/3 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Следећа је минимизација функције f дуж правца $\mathbf{d}_2$, тј. минимизација функције

$$\varphi_2(\lambda) = f(\mathbf{x}^2 + \lambda \mathbf{d}_2) = \frac{15}{2}\lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{3}.$$

Решење овог проблема је $\lambda_2 = 4/15$, па је

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 = [7/15 \quad 4/15 \quad 0]^T.$$

Последња минимизација је дуж правца $\mathbf{d}_3$, тј. минимизација функције $\varphi_3(\lambda) = f(\mathbf{x}^3 + \lambda \mathbf{d}_3) = \frac{1}{5}(5\lambda - 3)^2$, чије је решење $\lambda_3 = 3/5$. Тачно решење задатог минимизационог проблема је $f_{\min} = 0$ за

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^3 + \lambda_3 \mathbf{d}_3 = [2/3 \quad 7/15 \quad 3/5]^T = [0.6667 \quad 0.4667 \quad 0.6]^T.$$

.2.11. Функцију $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - \sin(x_1 + x_2)$ апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена, а затим методом коњугованих праваца решити проблем $\min f(x_1, x_2)$.

Решење. Тејлоров полином другог степена функције f у околини тачке $\mathbf{0} = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ има облик

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{0})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{0})\mathbf{x}.$$

Како је

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8x_1 - \cos(x_1 + x_2) \\ 4x_2 - \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8 + \sin(x_1 + x_2) & \sin(x_1 + x_2) \\ \sin(x_1 + x_2) & 4 + \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix},$$

о је

$$T(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 4x_1^2 + 2x_2^2.$$

Хесијан квадратне функције T је константна матрица $\mathbf{H}_T = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{H}_T$–коњуговани вектори су $\mathbf{d}_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_2 = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. Полазећи од произвољне тачке, на пример од $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ минимизацијом функције T по правцима $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ редом добијају се тачке $\mathbf{x}^2 = [0.125 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^3 = [0.125 \quad 0.25]^{\mathrm{T}}$. Коначно, $T_{\min} = -0.1875$ за $(x_1, x_2) = (0.125, 0.25)$. Како је $f(x_1, x_2) \approx T(x_1, x_2)$, може се закључити да је решење задатог проблема $f_{\min} = -0.1788$ за $(x_1, x_2) = (0.125, 0.25)$.

5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ИГАРА

5.1. Матричне игре са нултом сумом

.1.1. Одредити добит првог играча у игри задатој таблицом

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Играч II} \\ & & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \text{Играч I} & \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

после серије потеза $\{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. Да ли је ова добит већа, мања или једнака збиру доње и горње вредности игре?

Решење. Добит је $-1-2+2+1+2+1 = 3$, док је

$$v_D = \max\{-1,-2,-3\} = -1\ ,\quad v_G = \min\{3,3,2\} = 2,$$

тако да је $v_D + v_G = 1$. Дакле, добит првог играча после наведене серије потеза је већа.

5.1.2. Антагонистичка игра задата је матрицом добити

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

После серије потеза {(4, 2), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 4), (3, 4)} први играч је зарадио одређени број поена. На предлог другог играча мењају игру, тако да је сада матрица добити **I** – **A**, где је **I** јединична матрица. Играчи поново примењују исту серију потеза и сада први играч губи известан број поена. Колики је биланс добити првог играча?

Решење. Број поена које је освојио први играч после наведене серије потеза је $1+3+1+4+4+2 = 15$. После замене игре другом игром са матрицом добити

$$\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

први играч губи, јер је збир поена $-1-2-1-4-4-2 = -14$. Тако је укупни биланс првог играча 1 поен.

5.1.3. Дата је антагонистичка игра $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$, где је $x \geq 0$ параметар

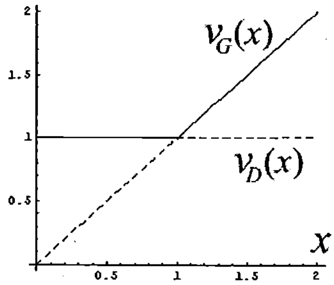
Одредити доњу и горњу сигурносну вредност игре у зависности од x, $v_D(x)$ и $v_G(x)$ и скицирати графике ових функција на интервалу [0, 2].

Решење. Доња и горња сигурносна вредност игре су

$$v_D(x) = \max\{\min\{1,x\}, \min\{x,1\}\} = \max\{\min\{1,x\}\} = \min\{1,x\},$$

и

$$v_G(x) = \min\{\max\{1,x\}, \max\{x,1\}\} = \min\{\max\{1,x\}\} = \max\{1,x\}.$$



Слика 5.1.3.

Дакле,

$$v_D(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}\quad v_G(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Графици су приказани на Слици 5.1.3, а притом је график функције $v_D(x)$ приказан испрекиданом линијом.

5.1.4. Дата је антагонистичка игра $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & x\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, где је $x\ge 0$ параметар. Одредити доњу и горњу сигурносну вредност игре у зависности од x, $v_D(x)$ и $v_G(x)$ и скицирати графике ових функција на интервалу [0, 4].

Решење. Очигледно је

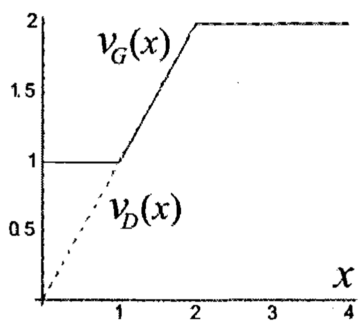
$$v_D(x)=\max\{\min\{2,x\},\min\{-1,1\}\}$$
$$=\max\{\min\{2,x\},-1\},$$

а како је за $x\ge 0$ и $\min\{2,x\}\ge 0$, то је

$$v_D(x)=\max\{\min\{2,x\}\}=\min\{2,x\}.$$

С друге стране,

$$v_G(x)=\min\{\max\{2,-1\},\max\{x,1\}\}$$
$$=\min\{2,\max\{1,x\}\}$$
$$=\begin{cases}\max\{1,x\}, & 0\le x<2,\\ 2, & x\ge 2,\end{cases}$$



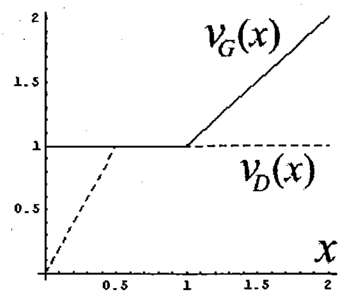
Слика 5.1.4.

тако да је коначно

$$v_D(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<2,\\ 2, & x\ge 2,\end{cases}\quad v_G(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x<2,\\ 2, & x\ge 2.\end{cases}$$

Графици су приказани на Слици 5.1.4, а притом је график функције $v_D(x)$ приказан испрекиданом линијом.

5.1.5. Матрицом $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$, где је $x \geq 0$ параметар, дефинисана је матрична антагонистичка игра. Одредити доњу и горњу сигурносну вредност игре у зависности од x, $v_D(x)$ и $v_G(x)$, и скицирати графике ових функција на интервалу [0, 2].



Слика 5.1.5.

Решење. Важи једнакост

$$v_D(x) = \max\{\min\{1, x\}, \min\{2\,x, 1\}\},$$

а како је $\min\{1, x\} \leq \min\{2\,x, 1\}$ за свако $x \geq 0$, то је доња сигурносна вредност $v_D(x) = \min\{2\,x, 1\}$. Горња сигурносна вредност је

$$v_G(x) = \min\{\max\{1, 2x\}, \max\{x, 1\}\},$$

па како је $\max\{1, 2x\} \geq \max\{x, 1\}$ за свако $x \geq 0$, то је $v_G(x) = \max\{x, 1\}$. Коначно (Слика 5.1.5),

$$v_D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & x \geq 1/2, \end{cases} \quad v_G(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

5.1.6. Нека је $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & -x \end{bmatrix}$ антагонистичка игра, где је $x \geq 0$ параметар. Одредити доњу и горњу сигурносну вредност игре $v_D(x)$ и $v_G(x)$ и скицирати графике ових функција на интервалу [0, 4].

Решење. За дату игру важи

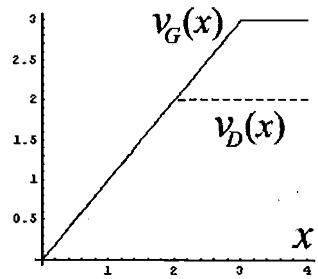
$$\begin{aligned} v_D(x) &= \max\{\min\{2, x\}, \min\{3, -x\}\} \\ &= \min\{2, x\}, \end{aligned}$$

јер је $\min\{2, x\} \geq \min\{3, -x\}$ за $x \geq 0$. Такође,

$$\begin{aligned} v_G(x) &= \min\{\max\{2, 3\}, \max\{x, -x\}\} \\ &= \min\{2, x\}, \end{aligned}$$

што је сумарно дато формулама

$$v_D(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & x \geq 2, \end{cases} \quad v_G(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 3, \\ 3, & x \geq 3. \end{cases}$$



Слика 5.1.6

Графици су приказани на Слици 5.1.6.

.2. Доминантне стратегије

.2.1. Одредити добит оба играча у биматричној игри задатој таблицом

$$\begin{array}{cc} & \text{Играч II} \\ & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \text{Играч I} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} & \begin{bmatrix} (0,-10) & (4,-4) & (1,-3) & (6,-1) \\ (2,\ 6) & (-2,0) & (4,-2) & (0,-8) \end{bmatrix} \end{array}$$

эсле серије потеза $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 3)\}$. Испитати ı ли у игри постоје доминантне стратегије?

Решење. Добит играча је

$$(0, -10)+(4, -4)+(-2, 0)+(4, -2)+(4, -2)+(6, -1)+(4, -2) = (20, -21),$$

то значи да је први играч зарадио 20 јединица а други је изгубио 21. У ри нема доминантних стратегија, јер ниједна врста/колона не доминира :тале.

2.2. Који играч је победник после серије потеза

$$\{(1, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 2)\}$$

биматричној игри

а) $\begin{bmatrix} (0,\ 3) & (-2,\ 0) \\ (-1,\ 0) & (-1, 2) \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} (2,-2) & (1,\ 3) \\ (2,\ 3) & (3, 0) \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} (2,\ 3) & (1,\ 2) \\ (3,\ 3) & (0, 4) \end{bmatrix}$; **г)** $\begin{bmatrix} (-2,\ 1) & (3,\ 2) \\ (3, -3) & (1,\ 4) \end{bmatrix}$.

:питати постојање доминантних стратегија.

Решење. **а)** $(0, 3) + (-1, 0) + (-1, 0) + (-1, 2) + (-2, 0) + (-1, 2) = (-6,7)$, кле други је победник. У игри нема доминантних стратегија.

б) $(2, -2) + (2, 3) + (2, 3) + (3, 0) + (1, 3) + (3, 0) = (13, 7)$, први је подник. У игри нема доминантних стратегија.

в) $(2, 3) + (3, 3) + (3, 3) + (0, 4) + (1, 2) + (0, 4) = (9, 19)$, други је подник. У игри нема доминантних стратегија.

г) $(-2, 1) + (3, -3) + (3, -3) + (1, 4) + (3, 2) + (1, 4) = (9, 5)$, први је победник. Стратегија g_2 другог играча је доминантна јер важи $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Први играч нема доминантних стратегија.

5.2.3. Искључивањем доминираних стратегија, редуковати игру дату матрицом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

а затим одредити оптималне стратегије.

Решење. Прва врста доминира другу $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$, па другу врсту бришемо, јер први играч нема интереса да икад укључује другу стратегију у низ својих потеза. Тако, остаје редукована игра

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Сада, трећа и четврта колона доминирају прву, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_1$, дакле прва стратегија је доминантна, тако да бришемо колоне $\mathbf{u}_3$ и $\mathbf{u}_4$, што даје

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Даље, прва колона доминира другу $\mathbf{u}_1 > \mathbf{u}_2$ тако да прву колону уклањамо и добијамо матрицу $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. У њој прва врста доминира другу тако да другу бришемо и остаје само матрица $\mathbf{A}_4 = [1]$ формата 1×1, са елементом са места $(1, 2)$ у почетној матрици $\mathbf{A}$. Овде постоји равнотежа доминантних стратегија $(\mathbf{d}_1, \mathbf{g}_2) = ([1\ \ 0\ \ 0]^T,\ [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T)$.

5.2.4. Искључивањем доминираних стратегија, редуковати игру

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ -5 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

а затим одредити равнотежне стратегије.

Решење. Прва врста доминира другу $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$, а четврта доминира трећу $\mathbf{v}_4 > \mathbf{v}_3$, па бришемо $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$, јер први играч нема интереса да користи другу и трећу стратегију. Тако, остаје редукована игра

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

у којој прва, друга и трећа колона доминирају и четврту, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 > \mathbf{u}_4$. Искључивањем $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$ добија се игра

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

у којој друга врста доминира прву $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$, па се уклањањем прве врсте добија матрица формата 1×1, $\mathbf{A}_3 = [0]$. Њен једини елемент је у почетној матрици $\mathbf{A}$ био на месту (4, 4), па је то је поље седласте тачке. Дакле, постоји равнотежа доминантних стратегија

$$(\mathbf{d}_4, \mathbf{g}_4) = ([0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T,\ [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T).$$

5.2.5. Искључивањем доминираних стратегија, редуковати игре

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; **в)** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$; **д)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Решење. **а)** $\mathbf{v}_3 > \mathbf{v}_1$, прва врста се брише; $\mathbf{u}_3 > \mathbf{u}_2$, трећа колона се брише. Игра се редукује на $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

б) Прва и четврта колона доминирају другу, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_2$, па их искључујемо. Игра се редукује на $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

в) $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_1$, а затим $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$; редукована игра је $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

г) $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_4$, затим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_2$ (или $\mathbf{u}_3$); редукована игра је $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

д) Како је $\mathbf{v}_5 > \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, бришу се трећа и четврта врста; игра се редукује на $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

5.2.6. Искључивањем доминираних стратегија, редуковати игре

а) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; **в)** $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; **д)** $\begin{bmatrix} 10 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix}$.

а затим одредити равнотежне стратегије.

Решење. **а)** $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$, па уклањамо прву и трећу врсту, чиме се игра редукује на субматрицу $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; у њој прва колона доминира другу па се она искључује. У субматрици која је преостала $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ опет прва врста доминира другу и брише је, тако да остаје [0] са места (2, 2). Равнотежне стратегије су ($[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$, $[0\ \ 1]^T$).

б) $\mathbf{v}_3 > \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, па остаје матрица-врста [4 3 5]; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 > \mathbf{u}_2$, тако да остаје [3] са места (3, 2); равнотежне стратегије су ($[0\ \ 0\ \ 1]^T$, $[0\ \ 1\ \ 0]^T$).

в) $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 > \mathbf{u}_1$, тако да се игра редукује на прву колону, у којој задња врста доминира прву, другу и трећу врсту; остаје [1] са места (4, 1), па су равнотежне стратегије ($[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$, $[1\ \ 0\ \ 0]^T$).

г) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 > \mathbf{u}_3$, па се игра редукује на $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ са седлом на месту (1, 1) што је у почетној матрици елемент $a_{13} = 4$. Одговарајуће стратегије су $([1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 1\ 0]^T)$.

д) $\mathbf{u}_1 > \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_3$, редукција на $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, затим $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$, па остаје $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; седло на месту (2, 1), или у полазној матрици $a_{32} = 3$; равнотежне стратегије $([0\ 0\ 1]^T, [0\ 1\ 0\ 0]^T)$.

5.2.7. Одредити доњу и горњу сигурносну вредност биматричне игре

$$\begin{bmatrix} (-1, 3) & (2,-1) & (5, 1) & (2,-2) \\ (-2, 2) & (3, 5) & (2,-3) & (-2,5) \\ (-3, 0) & (1,-2) & (1,-2) & (3, 1) \\ (0, 2) & (-1, 1) & (3, 0) & (1, 0) \end{bmatrix}$$

и одредити доминантне стратегије, ако постоје.

Решење. Најпре одредимо минимум првих компоненета парова у свакој врсти:

$$\min\{-1, 2, 5, 2\} = -1, \quad \min\{-2, 3, 2, -2\} = -2,$$

$$\min\{-3, 1, 1, 3\} = -3, \quad \min\{0, -1, 3, 1\} = -1.$$

Доња сигурносна вредност је $v_D = \max\{-1,-2,-3,-1\} = -1$.

Затим одредимо минимуме других компонената у свакој колони:

$$\min\{3, 2, 0, 2\} = 0, \qquad \min\{-1, 5, -2, 1\} = -2,$$

$$\min\{1, -3, -2, 0\} = -3, \quad \min\{-2, 5, 1, 0\} = -2.$$

Горња сигурносна вредност је $v_G = \max\{0, -2, -3, -2\} = 0$. Доминантне стратегије не постоје.

5.2.8. За следеће биматричне игре, одредити максимин и минимакс вредности и одредити доминантне стратегије, ако постоје.

а) $\begin{bmatrix} (0, 3) & (-2, 0) \\ (-1, 0) & (-1, 2) \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} (2,-2) & (1, 3) \\ (2, 3) & (3, 0) \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} (2,\ 3) & (1,\ 2) \\ (3,\ 3) & (0,4) \end{bmatrix}$; **г)** $\begin{bmatrix} (-2,\ 1) & (3,\ 2) \\ (3,-3) & (1,\ 4) \end{bmatrix}$.

Решење. **а)** $v_D = \max\{\min\{0,-2\},\min\{-1,-1\}\} = \max\{-2,-1\} = -1$;
$v_G = \max\{\min\{3,0\},\min\{0,2\}\} = \max\{0,0\} = 0$;
Доминантне стратегије не постоје.

б) $v_D = \max\{\min\{2,1\},\min\{2,3\}\} = \max\{1,2\} = 2$;
$v_G = \max\{\min\{-2,3\},\min\{3,0\}\} = \max\{-2,0\} = 0$;
Доминантне стратегије не постоје.

в) $v_D = \max\{\min\{2,1\},\min\{3,0\}\} = \max\{1,0\} = 1$;
$v_G = \max\{\min\{3,3\},\min\{2,4\}\} = \max\{3,2\} = 3$;
Доминантне стратегије не постоје.

г) $v_D = \max\{\min\{-2,3\},\min\{3,1\}\} = \max\{-2,1\} = 1$;
$v_G = \max\{\min\{1,-3\},\min\{2,4\}\} = \max\{-3,2\} = 2$;
Друга стратегија другог играча доминира прву $g2 > g1$, први играч нема доминантне стратегије.

5.3. Нешов еквилибријум и Парето оптималност

5.3.1. Свако од два играча бира нулу или јединицу после чега први играч добија од другог суму изабраних бројева. Саставити матрицу игре и показати да је игра наклоњена првом играчу. Одредити Парето оптимална стања.

Решење. Игра се може представити таблицом $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$ тако да је $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Како је $v_D = \max\{0,1\} = 1$ и $v_G = \min\{1,2\} = 1$, загарантовани добитак првог играча је 1 а то је истовремено и губитак другог, без обзира на стратегије. Дакле, игра је наклоњена првом играчу. Како је игра антагонистичка, сва стања су Парето оптимална.

5.3.2. Једна особа је одвојила 5000 за краткорочну инвестицију. Пред њом су две могућности: 1° да уложи новац на банковни жиро-рачун, при чему је камата мања, али новац може да подигне у било које време; 2° да уложи новац на орочену штедњу са већом каматом али са казненим процентом за

Табела 43	превремено подизање улога	подизање по истеку рока
жиро-рачун	**225**	**300**
орочена штедња	**–75**	**500**

раније подизање новца. Матрица добити дата је у таблици. Одредити максимин и минимакс вредности v_D, v_G ове игре и утврдити да ли постоји равнотежа седласте тачке. Да ли постоји чиста стратегија за улагача? Испитати да ли постоји тачка Нешовог еквилибријума.

Решење. Минимуми врста су $\{225, -75\}$, дакле $v_D = \max\{225, -75\} = 225$. Максимуми колона су $\{225, 500\}$, тако да је $v_G = \min\{225, 500\} = 225$. Дакле, (1, 1) је седласта тачка, па према томе, постоји чиста стратегија $[1 \quad 0]^T$. Тачка Нешовог еквилибријума поклапа се са седластом тачком и сем ње друга не постоји.

5.3.3. Студент има интервју са представником компаније која даје стипендије. Зависно од заинтересованости једне и друге стране, могућа су четири различита исхода, дата у Табели 44. Одредити доњу и горњу вредност v_D, v_G ове игре и утврдити да ли постоји равнотежа седласте тачке. Да ли постоји чиста стратегија за улагача? Испитати да ли постоји тачка Нешовог еквилибријума.

Табела 44		представник	
		заинтересован	незаинтересован
студент	заинтересован	**1000**	**400**
	незаинтересован	**600**	**100**

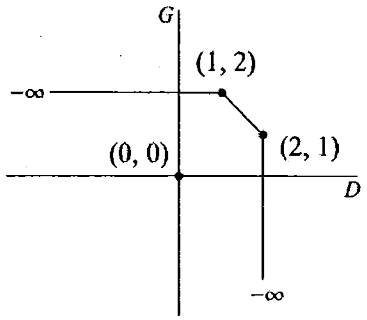
Решење. Минимуми врста су $\{400, 100\}$, дакле $v_D = \max\{400, 100\} = 400$; максимуми колона су $\{1000, 400\}$, тако да је $v_G = \min\{1000, 400\} = 400$. Дакле, седласта тачка је (1, 2), па према томе, постоји чиста стратегија за студента а то је $[1 \quad 0]^T$. Тачка Нешовог еквилибријума поклапа се са седластом тачком и сем ње друга не постоји.

5.3.4. Одредити седласту тачку игре задате матрицом $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. Како је $v_D = \max\{-1, 0, -2\} = 0$, $v_G = \min\{0, 0, 3\} = 0$, поља (2, 1) и (2, 2) су седласте тачке. Дакле, чисте стратегије $([0, 1, 0]^T, [1, 0, 0]^T)$ и $([0, 1, 0]^T, [0, 1, 0]^T)$ су оптималне и представљају равнотежу чистих стратегија.

5.3.5. (Сукоб полова) Гордана и Драган уговарају састанак на једној од два омиљена места за излазак. Драган је за боксмеч а Гордана за балет. Ако се степен сатифакције њиховим избором рангира са 0, 1 и 2, следећа таблица дефинише игру познату под именом "сукоб полова". Испитати да ли постоји Нешов еквилибријум у "сукобу полова". Да ли постоје Парето оптимална поља?

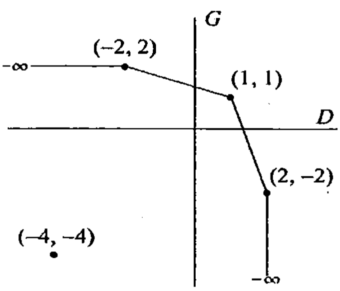
Табела 45		Гордана	
		бокс	балет
Драган	бокс	**2, 1**	**0, 0**
	балет	**0, 0**	**1, 2**



Слика 5.3.5

Решење. Елемент a_{11} је максималан у првој колони, тј. $a_{11} = 2 = \max_i a_{i1}$ а елемент b_{11} је максималан у првој врсти $b_{11} = 1 = \max_j b_{1j}$. Дакле, поље (1, 1) је поље Нешовог еквилибријума. Али то је такође и поље (2, 2) јер је $a_{22} = 1 = \max_i a_{i2}$ као и $b_{22} = 2 = \max_j b_{2j}$. График на Слици 5.3.5 приказује конвексни омотач парова матрице добити са тачкама $-\infty$ на D и G оси. Екстремне тачке (1, 2) и (2, 1) представљају Парето оптималне тачке, а њима одговарају поља (1, 1) и (2, 2) матрице добити.

5.3.6. (Двобој) Матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1,\ 1) & (-2,\ 2) \\ (2,-2) & (-4,-4) \end{bmatrix}$ даје исходе двобоја између два противника. На располагању су две стратегије $\{$*одустати, не одустати*$\}$. Ако обојица одустану, деле једнаке "добитке" (по један поен). Ако обојица наставе са двобојем, ризикују рањавање или смрт, што је најлошији могући исход (−4). Ако један одустане, биће проглашен кукавицом и суочиће се са бојкотом друштвеног окружења (−2) а други добија 2 поена. Испитати егзистенцију Нешовог еквилибријума и Парето оптималност.



Слика 5.3.6

Решење. Како је $a_{21} = \max_i a_{i1} = 2$ и $b_{21} = \max_j b_{2j} = -2$, поље (2, 1) је поље Нешовог еквилибријума. Такође, важи $a_{12} = \max_i a_{i2} = -2$ као и $b_{12} = \max_j b_{1j} = 2$, па је и поље (1, 2) поље

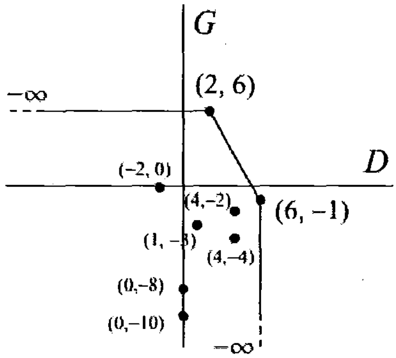
Нешовог еквилибријума. Поља (1, 1), (1, 2) и (2, 1) су Парето оптимална, јер су то поља екстремних тачака конвексног омотача парова-елемената матрице **A** (Слика 5.3.6).

5.3.7. За игру $\begin{bmatrix} (0,-10) & (4,-4) & (1,-3) & (6,-1) \\ (2,\ 6) & (-2,0) & (4,-2) & (0,-8) \end{bmatrix}$ одредити поља Нешовог еквилибријума и одредити Парето оптимално решење. Ако игра пролази кроз низ стања $u = \{(2, 4), (1, 4), (2, 3), (2, 2)\}$, одредити добит сваког играча.

Решење. Поља (1, 4) и (2, 1) су поља Нешовог еквилибријума. Обе одговарајуће стратегије $(d_1,\ g_4)$ и $(d_2,\ g_1)$ су Парето оптималне. Ово се добија из цртежа на Слици 5.3.7, где су парови (2, 6) и (6, −1) ектремне тачке конвексног омотача елемената матрице добити и $-\infty$ по обе осе. После низа стања u, добит играча је

$$(0,-8)+(6,-1)+(4,-2)+(-2,0) = (8,-11),$$

дакле, 8 за D играча и −11 за G.

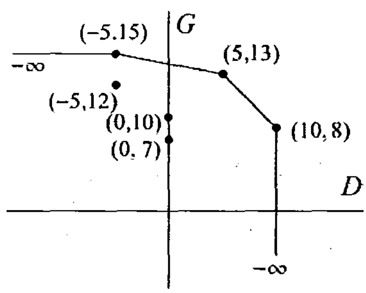


Слика 5.3.7

5.3.8. Испитати постојање Нешових еквилибријума и Парето оптималности у следећој биматричној игри

$$\begin{bmatrix} (-5,\ 12) & (5,\ 13) & (-5,15) & (5,\ 13) \\ (0,\ \ 7) & (10,8) & (0,\ 10) & (10,\ 8) \end{bmatrix}.$$

Решење. Елемент (0, 10) на месту (2, 3) је максимум колоне првих компонената и максимум врсте других тако да је то Нешов еквилибријум.



Слика 5.3.8

Конвексни омотач скупа уређених парова који су приказани у координатном систему $(D,\ G)$ на Слици 5.3.8 својим теменима одређује Парето оптималне стратегије, и то су оне које одговарају паровима (−5, 15), (5, 13) и двоструком (10, 8), дакле стратегије (d_1, g_3), (d_1, g_4), (d_2, g_2) и (d_2, g_4).

5.3.9. Две конкурентске компаније треба да одлуче да ли да своје производе рекламирају преко ТВ или преко новина. Када компанија рекламира производе преко ТВ, њена зарада се повећа за 100 новчаних јединица (НЈ) ако конкурент примени исту стратегију, а остаје непромењена ако се конкурент рекламира преко новина. Када компанија рекламира производе преко новина, зарада се смањи за 100 НЈ ако конкурент има рекламу на ТВ, а повећа за 200 НЈ ако се и конкурент рекламира преко новина. Формирати матрицу добити компанија и одредити поља Нешовог еквилибријума и Парето оптималности.

Решење. Матрица добити копманија је $\begin{bmatrix}(100,100) & (0,-100)\\ (-100,0) & (200,200)\end{bmatrix}$. Поља $(1, 1)$ и $(2, 2)$ су поља Нешовог еквилибријума, а само стање $(200, 200)$ је Парето оптимално.

5.3.10. У игри датој у Табели 46, у којој први играч има на располагању стратегије (d_1, d_2, d_3, d_4) а други стратегије (g_1, g_2, g_3, g_4), одредити поља Нешових еквилибријума и Парето оптималности.

Табела 46	g_1	g_2	g_3	g_4
d_1	0, 0	2, −2	2, −2	2, −2
d_2	−2, 2	1, 1	3, 4	3, −1
d_3	−2, 2	−1, 3	2, 2	4, 0
d_4	−2, 2	3, 3	0, 1	3, 2

Решење. Поља Нешових еквилибријума су (1, 1), (2, 3) и (4, 2), са вредностима (0, 0), (3, 4) и (3, 3) респективно. Графичка анализа показује да су Парето оптимална поља (2, 3) са вредностима (3, 4) и (3, 4) са вредностима (4, 0).

5.3.11. У игри датој у Табели 47, у којој први играч има на располагању стратегије (d_1, d_2, d_3) а други стратегије (g_1, g_2, g_3), одредити поља Нешових еквилибријума и Парето оптималности.

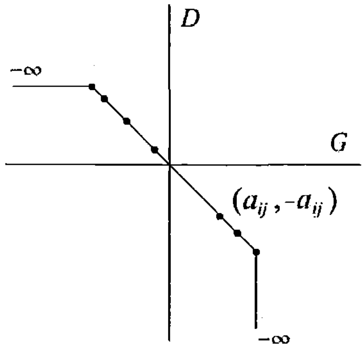
Табела 47	g_1	g_2	g_3
d_1	0, 0	25, 40	5, 10
d_2	40, 25	0, 0	5, 15
d_3	10, 5	15, 5	10, 10

Решење. Поља Нешових еквилибријума су (2, 1), (1, 2) и (3, 3), са вредностима (40, 25), (25, 40) и (10, 10). Графичком анализом добија се да су поља (1, 2) са вредностима (25, 40) и (2, 1) са вредностима (40, 25) Парето оптимална.

5.3.12. Показати да су сва поља антагонистичке матричне игре Парето оптимална.

Решење. Нека је игра задата матрицом $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Тада је биматрична варијанта игре дата матрицом парова $[(a_{ij}, -a_{ij})]_{m\times n}$.

У координатном систему у коме на x-осу наносимо добитке D играча, а на y-осу осу добитке G играча, све тачке $(a_{ij}, -a_{ij})$ задивољавају услов $y = -x$, тј. све леже на правој са нагибом -1 која пролази кроз координатни почетак, као на Слици 5.3.11. Ове тачке одређују линеарни сегмент који представља једину косу старницу неограниченог полигоналног скупа, а како сви парови $(a_{ij}, -a_{ij})$ леже на тој страници, сва стања су Парето оптимална.



Слика 5.3.11

5.4. Матричне игре са седлом

5.4.1. Одредити, уколико постоји, равнотежу чистих стратегија за игре задате матрицом **A**, као и транспонованом матрицом $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\textbf{а)}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}10 & 0 & -10\\ 0 & -5 & 5\\ 5 & 1 & 5\end{bmatrix};\qquad \textbf{б)}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

Решење. **а)** Минимуми врста матрице **A** су $\{-10, -5, 1\}$, дакле доња вредност (максимин) је $v_D(\mathbf{A}) = \max\{-10, -5, 1\} = 1$. Максимуми колона матрице **A** су $\{10, 1, 5\}$, тако да је горња вредност (минимакс) $v_G(\mathbf{A}) = \min\{10, 1, 5\} = 1$. Дакле, $v_D(\mathbf{A}) = v_G(\mathbf{A}) = v(\mathbf{A}) = 1$, па је седло на пољу (3, 2). Стање чистих стратегија $([0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ [0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}})$ је равнотежно стање игре. За транспоновану матрицу је $v_D(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \max\{0, -5, -10\} = 0$ и $v_G(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \min\{10, 5, 5\} = 5$, тако да ова игра нема седла па ни равнотеже чистих стратегија.

б) Минимуми врста матрице **A** су $\{-3, -4, 2\}$, дакле доња вредност (максимин) је $v_D(\mathbf{A}) = \max\{-3, -4, 2\} = 2$; максимуми колона матрице **A** су $\{2, 5, 2\}$, тако да је горња вредност (минимакс) $v_G(\mathbf{A}) = \min\{2, 5, 2\} = 2$. Дакле, $v_D(\mathbf{A}) = v_G(\mathbf{A}) = v(\mathbf{A}) = 2$, па је седло на пољу (3, 1); стање $([0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ [1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}})$ представља равнотежу чистих стратегија за игру **A**. За транспоновану матрицу је $v_D(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \max\{1, -3, -4\} = 1$ и $v_G(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \min\{1, 5, 3\} = 1$, тако да је $v(\mathbf{A}) = 2$, па и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ има седло на пољу

(3, 1); пар стратегија $([0\ \ 0\ \ 1]^T,\ [1\ \ 0\ \ 0]^T)$ је равнотежа чистих стратегија и за игру $\mathbf{A}^T$.

5.4.2. Показати да ако игра дата матрицом $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ има седласту тачку, она је истовремено и тачка Нешовог еквилибријума.

Решење. Ако је a_{pq} седласта тачка, тада важи

$$a_{pq}=\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}, \qquad \text{тј.} \qquad a_{pq}=\max_i a_{iq}=\min_j a_{pj}.$$

Множењем те једнакости са -1 и коришћењем идентитета $\max(x)=\min(-x)$ добија се $-a_{pq}=\min_i(-a_{iq})=\max_j(-a_{pj})$. Комбиновањем ових једнакости добијамо $(a_{pq},-a_{pq})=\left(\max_i a_{iq}, \max_j(-a_{pj})\right)$, што значи да је a_{pq} највећи елемент у својој колони а $-a_{pq}$ највећи у својој врсти у матрици $B=[-a_{ij}]_{m\times n}$. Према томе, a_{pq} је тачка Нешовог еквилибријума.

5.4.3. За антагонистичку игру задату матрицом $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{i=1,j=1}^{5\ \ 6}$, где је $a_{ij}=i-j$, $1\le i\le 5$, $1\le j\le 6$, испитати егзистенцију равнотеже чистих стратегија и наклоњеност игре. Затим урадити исто за игру задату транспонованом матрицом $\mathbf{A}^T$.

Решење. Матрица игре је

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

њена доња вредност (максимин) је $v_D(\mathbf{A})=\max\{-5,-4,-3,-2,-1\}=-1$, а горња вредност (минимакс) $v_G(\mathbf{A})=\min\{4, 3, 2, 1, 0, -1\}=-1$. Дакле, игра има седло чистих стратегија $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})=([0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T,\ [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T)$ на пољу (5, 6). Вредност игре је $v(\mathbf{A})=a_{56}=-1$, дакле, игра је наклоњена другом (губитном) играчу.

Максимин за $\mathbf{A}^T$ је $v_D(\mathbf{A}^T)=\max\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}=0$, а минимакс је $v_G(\mathbf{A}^T)=\min\{0, 1, 2, 3, 4\}=0$. Тако имамо ситуацију седла у чистим стратегијама $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = ([1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ 0]^{\mathrm{T}},\ [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}})$ на пољу (1, 1) са вредношћу $v(\mathbf{A}) = a_{11} = 0$. Ова игра је фер.

5.4.4. Ако игра $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ има седло на пољу (r, s) и вредност $v(\mathbf{A}) = a_{rs}$, тада и игра задата матрицом $\mathbf{A}_1 = \alpha\mathbf{A} + \beta = [\alpha a_{ij} + \beta]_{m\times n}$, где је $\alpha > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такође има седло (r, s), а вредност нове игре је $v(\mathbf{A}_1) = \alpha\, a_{rs} + \beta$.

Решење. Нека је $\mathbf{p} = (p_1,\ldots, p_k)$ произвољан низ. Лако се показује, да за операције min и max, за $\alpha > 0$ и произвољно β важи:

$$\min\{\alpha\,\mathbf{p} + \beta\} = \min\{\alpha\,\mathbf{p}\} + \beta = \alpha \min \mathbf{p} + \beta,$$
$$\max\{\alpha\,\mathbf{p} + \beta\} = \max\{\alpha\,\mathbf{p}\} + \beta = \alpha \max \mathbf{p} + \beta.$$

Ако се у својству низа $\mathbf{p}$ посматрају врсте $\mathbf{v}_i$ и колоне $\mathbf{u}_j$ матрице $\mathbf{A}$, из навдених једнакости следује

$$\max{}_i \{\min\{\alpha\,\mathbf{v}_i + \beta\}\} = \max{}_i\, \{\alpha \min\mathbf{v}_i + \beta\} = \alpha \max{}_i\, \{\min\mathbf{v}_i\} + \beta,$$

или,

$$v_D(\mathbf{A}_1) = \max_i \min_j \{\alpha\ \ a_{ij} + \beta\} = \alpha\ \ \max{}_i \min_j a_{ij} + \beta = \alpha\, a_{rs} + \beta,$$
$$v_G(\mathbf{A}_1) = \min_j \max_i \{\alpha\ \ a_{ij} + \beta\} = \alpha\ \ \min_j \max_i\ a_{ij} + \beta\ \ = \alpha\, a_{rs} + \beta.$$

Дакле, $\alpha\, a_{rs} + \beta$ је вредност игре $\mathbf{A}_1 = \alpha\,\mathbf{A} + \beta$, и то је елемент на месту (r, s) матрице $\mathbf{A}_1$, дакле седласта тачка.

5.4.5. Дате су игре $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ које имају седла на истом пољу (r, s), са вредностима $v(\mathbf{A}) = a_{rs}$ и $v(\mathbf{B}) = b_{rs}$. Показати да игра, дефинисана конвексном комбинацијом $(1-\lambda)\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}$, $0 \le \lambda \le 1$, такође има седло на истом пољу (r, s) и да је вредност игре $(1-\lambda)\, a_{rs} + \lambda\, b_{rs}$.

Решење. За матрице **А** и **В** важе једнакости

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{rs},$$
$$\max_i \min_j b_{ij} = \min_j \max_i b_{ij} = b_{rs}.$$

Множењем прве једнакости са $(1-\lambda)$ и друге са λ и сабирањем добијамо

$$(1-\lambda)\max_i \min_j a_{ij} + \lambda \max_i \min_j b_{ij} = (1-\lambda)\min_j \max_i a_{ij} + \lambda \min_j \max_i b_{ij}$$
$$= (1-\lambda)a_{rs} + \lambda\, b_{rs}.$$

Коришћењем особине линеарности операција $\max_i \min_j$ и $\min_j \max_i$, добијамо

$$\max_i \min_j\{(1-\lambda)a_{ij} + \lambda\, b_{ij}\} = \min_j \max_i\{(1-\lambda)a_{ij} + \lambda\, b_{ij}\} = (1-\lambda)a_{rs} + \lambda\, b_{rs},$$

што је седласти елемент матрице $(1-\lambda)\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}$ на пољу (r, s).

5.4.6. Дате су антагонистичке игре $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 5 & -5 & 3\end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

Уколико постоји равнотежа чистих стратегија ових игара, одредити вредности игара а затим одредити α тако да конвексна комбинација игара $(1-\alpha)\mathbf{A}+\alpha\,\mathbf{B}$ буде:

1° наклоњена првом играчу;
2° наклоњена другом играчу;
3° равноправна (фер).

Решење. Обе игре имају исте равнотеже чистих стратегија, $([0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, $[0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}})$ у седлима (2, 2) са вредностима

$$v(\mathbf{A})=\max\{-3,-2,-5\}=\min\{5,-2,3\}=a_{22}=-2,$$
$$v(\mathbf{B})=\max\{-2,1,-1\}=\min\{2,1,3\}=b_{22}=1.$$

Познато је да ако игре задате матрицама **A** и **B** истог формата, имају седла на истим пољима (r, s) са вредностима $v(\mathbf{A})=a_{rs}$ и $v(\mathbf{B})=b_{rs}$, тада конвексна комбинација игара $(1-\alpha)\mathbf{A}+\alpha\,\mathbf{B}$, $0\le\alpha\le 1$, такође има седло на (r, s) а вредност игре је конвексна комбинација вредности игара **A** и **B**, тј.

$$v((1-\alpha)\mathbf{A}+\alpha\,\mathbf{B})=(1-\alpha)\,v(\mathbf{A})+\alpha\,v(\mathbf{B}).$$

У овом случају, $v((1-\alpha)\mathbf{A}+\alpha\,\mathbf{B})=(1-\alpha)\,(-2)+\alpha\cdot 1=3\alpha-2$. Како је $0\le\alpha\le 1$, имамо да је

$$v\big((1-\alpha)A+\alpha B\big)\begin{cases}<0, & 0\le\alpha<\dfrac{2}{3}, \text{ игра наклоњена II играчу;}\\[2mm] =0, & \alpha=\dfrac{2}{3}, \text{ игра је неутрална (фер);}\\[2mm] >0, & \dfrac{2}{3}<\alpha\le 1, \text{ игра наклоњена I играчу.}\end{cases}$$

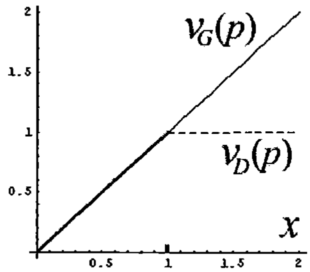
5.4.7. Одредити параметар $p>0$ у матрици $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}p & -1\\ 1 & p\end{bmatrix}$ тако да игра дефинисана матрицом **A** има равнотежу у чистим стратегијама, одредити те стратегије и наклоњеност игре.

Решење. Како је $p > 0$,

$$v_D(p) = \max\{\min\{p, -1\}, \min\{1, p\}\}$$
$$= \max\{-1, \min\{1, p\}\} = \min\{1, p\},$$

и

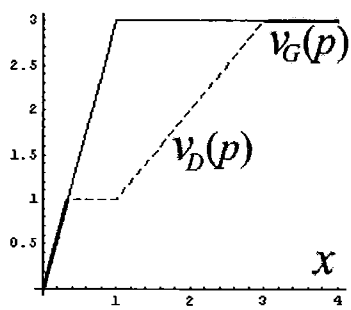
$$v_G(p) = \min\{\max\{p, 1\}, \max\{-1, p\}\}$$
$$= \min\{\max\{p, 1\}, p\} = p.$$



Слика 5.4.7.

Графици функција $v_D(p)$ и $v_G(p)$ се поклапају на интервалу $0 < p \leq 1$ (подебљана линија на Слици 5.4.7) и тада је $v_D(p) = v_G(p) = p$, што је вредност игре. Дакле, за $0 \leq p \leq 1$, игра има равнотежу у чистим стратегијама $\{[0 \;\; 1]^T, \; [0 \;\; 1]^T\}$ и наклоњена је првом играчу.

5.4.8. Одредити параметар $p > 0$ у матрици $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3p & 1 \\ p & 3 \end{bmatrix}$ тако да игра дефинисана матрицом **A** има равнотежу у чистим стратегијама, одредити те стратегије и наклоњеност игре.



Слика 5.4.8.

Решење. Како је $p > 0$, максимин је функција

$$v_D(p) = \max\{\min\{3p, 1\}, \min\{p, 3\}\},$$

чији је график полигонална линија која на интервалу $[0, 4]$ има четири сегмента (представљених испрекиданом линијом на Слици 5.4.8). Такође, минимакс је

$$v_G(p) = \min\{\max\{3p, p\}, \max\{1, 3\}\} = \min\{3p, 3\},$$

(пуна линија). Функције $v_D(p)$ и $v_G(p)$ се поклапају на подинтервалима $0 \leq p \leq 1/3$ и $p \geq 3$ (подебљана линија на Слици 5.4.8), па је вредност игре

$$v(p) = \begin{cases} 3p, & 0 \leq p \leq \dfrac{1}{3}, \text{ поље } (1, 1), \\ 3, & p \geq 3, \text{ поље } (2, 2). \end{cases}$$

Дакле, за $0 < p \leq 1/3$, игра има равнотежу у чистим стратегијама $([1\ \ 0]^T, [1\ \ 0]^T)$, а за $p \geq 3$, $([0\ \ 1]^T, [0\ \ 1]^T)$ и у оба случаја је наклоњена првом играчу.

5.4.9. Испитати да ли игре задате матрицама **A** и $\mathbf{A}^T$, где је $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 10 \\ -5 & -5 & 10 \\ 1 & 5 & -10 \end{bmatrix}$, имају равнотежна стања у чистим стратегијама.

Решење. Минимуми врста матрице **A** су $\{-1, -5, -10\}$, дакле доња вредност (максимин) је $v_D(\mathbf{A}) = \max\{-1, -5, -10\} = -1$; максимуми колона матрице **A** су $\{1, 5, 10\}$, тако да је горња вредност (минимакс) $v_G(\mathbf{A}) = \min\{1, 5, 10\} = 1$.

За транспоновану матрицу је $v_D(\mathbf{A}^T) = \max\{-5, -5, -10\} = -5$ и $v_G(\mathbf{A}^T) = \min\{10, 10, 5\} = 5$. Ниједна од игара **A** и $\mathbf{A}^T$ немају седласте тачке, према томе ни равнотежу чистих стратегија.

5.4.10. Ако са $v(\mathbf{A})$ означимо вредност матричне игре са нултом сумом задате матрицом **A**, одредити шта је веће $v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)$ или $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2)$ ако је

а) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$; **б)** $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.5 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Решење. **а)** Минимуми врста матрице $\mathbf{A}_1$ су $\{2, 1\}$, дакле $v_D(\mathbf{A}_1) = \max\{2, 1\} = 2$; максимуми колона су $\{2, 3\}$, тако да је $v_G(\mathbf{A}_1) = \min\{2, 3\} = 2$; $(1, 1)$ је седласта тачка са вредношћу игре $v(\mathbf{A}_1) = 2$. За матрицу $\mathbf{A}_2$, слично, $v_D(\mathbf{A}_2) = \max\{2, -2\} = 2$, $v_G(\mathbf{A}_2) = \min\{2, 2\} = 2$, тако да је $(1, 1)$ седласта тачка са вредношћу игре $v(\mathbf{A}_2) = 2$. Дакле, $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2) = 2 + 2 = 4$. С друге стране, $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$, па имамо $v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2) = \max\{5, 7\} = \min\{8, 7\} = 7$, седло на пољу $(2, 2)$. Према томе, $v(\mathbf{A}_1)+v(\mathbf{A}_2) < v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)$.

б) Минимуми врста матрице $\mathbf{A}_1$ су $\{1.5, 0\}$, дакле $v_D(\mathbf{A}_1) = \max\{1.5, 0\} = 1.5$; максимуми колона су $\{2, 1.5\}$, тако да је

$v_G(\mathbf{A}_1) = \min\{2,\ 1.5\} = 1.5$; $(1,\ 2)$ је седласта тачка са вредношћу игре $v(\mathbf{A}_1) = 1.5$. За матрицу $\mathbf{A}_2$, имамо $v_D(\mathbf{A}_2) = \max\{0,\ 1.5\} = 1.5$, $v_G(\mathbf{A}_2) = \min\{1.5,\ 3\} = 1.5$, тако да је $(2,\ 1)$ седласта тачка са вредношћу игре $v(\mathbf{A}_2) = 1.5$. Дакле, $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2) = 1.5 + 1.5 = 3$. С друге стране имамо, $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix}$ па је $v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2) = \max\{2,\ 2.5\} = \min\{2.5,\ 3\} = 2.5$, што је седло на пољу $(2,\ 1)$. Према томе, $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2) > v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)$.

в) Минимуми врста матрице $\mathbf{A}_1$ су $\{2,\ 1\}$, дакле $v_D(\mathbf{A}_1) = \max\{2,\ 1\} = 2$; максимуми колона су $\{2,\ 3\}$, тако да је $v_G\ (\mathbf{A}_1) = \min\{2,\ 3\} = 2$; $(1,\ 1)$ је седласта тачка са вредношћу игре $v(\mathbf{A}_1) = 2$. За матрицу $\mathbf{A}_2$, слично, имамо $v_D(\mathbf{A}_2) = \max\{2,\ -2\} = 2$, $v_G\ (\mathbf{A}_2) = \min\{2,\ 2\} = 2$, тако да игра има две седласте тачке, $(1,\ 1)$ и $(1,\ 2)$, $v(\mathbf{A}_2) = 2$. Дакле, $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2) = 2 + 2 = 4$. С друге стране, $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ па је $v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2) = \max\{4, -1\} = \min\{4,\ 5\} = 4$, седло на пољу $(1,\ 1)$. Према томе, $v(\mathbf{A}_1) + v(\mathbf{A}_2) = v(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)$.

5.5. Матричне игре без седла. Мешовите стратегије

5.5.1. Нека су $\mathbf{x} = [1-p\ \ p]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [p\ \ 1-p\,]^{\mathrm{T}}$, $0 \le p \le 1$, мешовите стратегије првог и другог играча у игри $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Одредити вредност параметра p за коју функција очекиване добити има максималну вредност.

Решење. Непосредно израчунавамо

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = [1-p\ \ p] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = -1 + 4p - 2p^2,$$

што је конкавна квадратна функција по параметру p са максимумом $\max K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, за $\overline{p} = 1$.

5.5.2. Нека су $\mathbf{x} = [1-p/2\ \ \ p/2]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [p\ \ \ 1-p\,]^{\mathrm{T}}$ $(0 \le p \le 1)$ мешовите стратегије првог и другог играча у игри $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Одредити вредност параметра p за коју функција очекиване добити има минималну вредност.

Решење. Непосредно израчунавамо функцију очекиване добити

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = [1-\frac{p}{2} \ \ \frac{p}{2}]\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \frac{1}{2}p(p-2),$$

што је конвексна квадратна функција по параметру p са минимумом $\min K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1/2$, за $\bar{p} = 1$.

5.5.3. Нека су $\mathbf{x} = [1-p \ \ p]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [p \ \ 1-p\,]^{\mathrm{T}}$, $0 \le p \le 1$, мешовите стратегије првог и другог играча у игри $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Одредити вредност параметра p за коју функција очекиване добити има максималну вредност.

Решење. Израчунавамо функцију очекиване добити

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = [1-p \ \ p]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = 1 + 2p - 3p^2,$$

што је конкавна квадратна функција по параметру p са максимумом $\max K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4/3$, за $\bar{p} = 1/3$.

5.5.4. Колика је минимална добит првог играча ако се у игри $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ примени ситуација стратегија $\{[p \ \ p \ \ 1-2p]^{\mathrm{T}}, [1-p \ \ p \ \ 0]^{\mathrm{T}}\}$, $0 \le p \le 1$?

Решење. Функција очекиване добити представља добит првог играча за дати скуп стратегија. Дакле,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = [p \ \ p \ \ 1-2p\,]\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 4p + p^2,$$

што је конвексна квадратна функција по параметру. Минималну вредност $K_{min}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -3$ функција добити достиже за $p = 2$, што је изван дозвољеног интервала $[0, \ 1]$. Ако је $p \in [0, \ 1]$, своју најмању вредност $\min\limits_{0 \le p \le 1} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2$ функција добити постиже за $\bar{p} = 1$.

5.5.5. Играчи у првој партији игре $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ примењују пар стратрегија $([p \ \ p \ \ 1-2p]^{\mathrm{T}}, \ [0 \ \ 1-p/2 \ \ p/2]^{\mathrm{T}})$, а у другој партији пар

($[p/2 \;\; 1-p/2 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$, $[1-p \;\; p/2 \;\; p/2]^{\mathrm{T}}$). Одредити параметар p тако да збир добити првог играча буде једнак нули.

Решење. Добит првог играча после примене првог пара стратегија је

$$K(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)=\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}_1=[p \;\; p \;\; 1-2p\;]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1-2p\\ p/2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(2-3p+3p^2\right),$$

а после другог пара је

$$K(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)=\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}_2=[p/2 \;\; p/2 \;\; 0]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-p\\ p/2\\ p/2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\left(-4-2p+7p^2\right).$$

Збир добитака је $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + K(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = p(13p-8)/4$ што се анулира за $\overline{p}_1=0$ и $\overline{p}_2=8/13$.

5.5.6. Одредити мешовите стратегије и наклоност игре:

а) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$; **в)** $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$; **г)** $\begin{bmatrix}4 & 12\\ 10 & -3\end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 3\end{bmatrix}$; **ђ)** $\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 5\end{bmatrix}$; **е)** $\begin{bmatrix}-120 & 150\\ 30 & -15\end{bmatrix}$; **ж)** $\begin{bmatrix}17 & -3\\ -15 & 0\end{bmatrix}$.

Решење. Према Леми 1, под условом да је $h = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0$, вредност игре и мешовите стратегије дате су изразима

$$v=\frac{1}{h}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad \overline{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{a_{22}-a_{21}}{h}\\[2mm] \dfrac{a_{11}-a_{12}}{h}\end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\dfrac{a_{22}-a_{12}}{h}\\[2mm] \dfrac{a_{11}-a_{21}}{h}\end{bmatrix}.$$

а) $h=-6$, $\overline{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $v = 1$, игра наклоњена I играчу;

б) $h=4$, $\overline{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $v = 5/2$, игра наклоњена I играчу;

в) $h=-8$, $\overline{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{5}{8}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $v = 1/2$, игра наклоњена I играчу;

г) $h=-21$, $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{13}{21} & \frac{8}{21}\end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}^T$, $v=44/7$, игра наклоњена I играчу;

д) $h=-12$, $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{7}{12} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{7}{12} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}^T$, $v=85/12$, игра наклоњена I играчу;

ђ) $h=12$, $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$, $v=-1$, игра наклоњена II играчу;

е) $h=-315$, $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{6}{7}\end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{11}{21} & \frac{10}{21}\end{bmatrix}^T$, $v=60/7$, игра наклоњена I играчу;

ж) $h=35$, $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{35} & \frac{32}{35}\end{bmatrix}^T$, $v=-9/7$, игра наклоњена II играчу.

5.5.7. Следеће игре редуковати искључивањем доминираних стратегија, а затим наћи њихове седласте тачке у мешовитим стратегијама:

а) $\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$; **в)** $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & 3 & -1\end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$; **д)** $\begin{bmatrix}1 & -4 & -5\\ -4 & 6 & 5\\ -6 & 0 & 2\end{bmatrix}$; **ђ)** $\begin{bmatrix}-2 & -3 & 8\\ 4 & 5 & 12\\ 7 & 0 & -4\\ 10 & 12 & -3\end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}$; **ж)** $\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & 5\\ 1 & 2 & -2 & -1\\ -4 & -2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

Решење. **а)** Претпоставимо да оптималне стратегије имају облик $\bar{\mathbf{x}}=[x_1\ x_2]^T$, $\bar{\mathbf{y}}=[y_1\ y_2\ y_3]^T$. Како је у матрици добити $\mathbf{u}_2>\mathbf{u}_1$, искључује се друга колона ($y_2=0$), чиме се игра своди на игру задату матрицом

$A_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Сада према формулама (66) добијамо $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 4$, и оптималне мешовите стратегије у игри A_1 $\bar{x}_1 = [1/2 \ \ 1/2\ ]^T$, $\bar{y}_1 = [3/4 \ \ 1/4]^T$. Оптималне мешовите стратегије полазне игре **A** су $\bar{x} = [1/2 \ \ 1/2\ ]^T$, $\bar{y} = [3/4 \ \ 0 \ \ 1/4]^T$, а вредност игре $v = 5/2$.

б) $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$, следује $x_1 = 0$, игра се редукује на $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. На основу формула (66), $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = -8$, $x = 3/8$, $y = 1/2$, тако да су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{x} = [0\ 3/8 \ \ 5/8\ ]^T$, $\bar{y} = [1/2 \ \ 1/2]^T$, а вредност игре $v = 1/2$.

в) Прва колона доминира другу, искључује се ($y_1=0$), а игра се редукује на $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$. Формуле (66) дају $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = -6$, $x = 2/3$, $y = 1/2$, тако да су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{x} = [2/3 \ \ 1/3\ ]^T$, $\bar{y} = [0\ 1/2 \ \ 1/2]^T$, а вредност игре $v = 1$.

г) Друга врста доминира прву, па се прва искључује ($x_1 = 0$), што даје $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$. Формуле (66) дају $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 8$, $x = 7/8$, $y = 3/8$, тако да су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{x} = [0 \ \ 7/8 \ \ 1/8\ ]^T$, $\bar{y} = [3/8 \ \ 5/8]^T$, $v = 19/8$.

д) $\mathbf{u}_2 > \mathbf{u}_3$, искључује се колона $\mathbf{u}_2$ па остаје $\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 5\\ -6 & 2\end{bmatrix}$, с тим што је $y_2 = 0$. У новој игри $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_3$, искључује се $\mathbf{v}_3$, што повлачи $x_3 = 0$, а игра се редукује на $\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 5\end{bmatrix}$. Формуле (66) дају $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 15$, $x = 3/5$, $y = 2/3$, па су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{x} = [3/5 \ \ 2/5 \ \ 0]^T$, $\bar{y} = [2/3 \ \ 0 \ \ 1/3]^T$, а вредност игре је $v = -1$.

ђ) $\mathbf{v}_4 > \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$, тако да је $x_1 = x_3 = 0$ јер се искључују прва и трећа врста па се игра редукује на $\begin{bmatrix}4 & 5 & 12\\ 10 & 12 & -3\end{bmatrix}$. Сада $\mathbf{u}_2 > \mathbf{u}_1$, што доводи до искључивања $\mathbf{u}_2$ ($y_2=0$) чиме се игра своди на $\begin{bmatrix}4 & 12\\ 10 & -3\end{bmatrix}$. У овом случају постоји бесконачно много решења, од којих једно дају формуле (66): $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = -21$, $x = 13/21$, $y = 5/7$, на основу чега су оптималне мешовите стратегије $\bar{\mathbf{x}} = [0\ \ 13/21\ \ 0\ \ 8/21]^T$, $\bar{\mathbf{y}} = [5/7\ \ 0\ \ 2/7]^T$, а вредност игре $v = 44/7$. (Може се показати да су све конвексне комбинације екстремних стратегија првог играча, $\bar{\mathbf{x}}_1 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$, и $\bar{\mathbf{x}}_2 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$, дакле $\bar{\mathbf{x}} = (1-\lambda)\bar{\mathbf{x}}_1 + \lambda\bar{\mathbf{x}}_2$, $0 \le \lambda \le 1$, оптималне.)

е) Прва и четврта колона доминирају другу и трећу, тј. $\mathbf{u}_1 > \mathbf{u}_2$, и $\mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_3$, тако да је $y_1 = y_4 = 0$, а игра се редукује на $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$. Сада друга врста доминира трећу ($x_3 = 0$). Игра се редукује на $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, па формуле (66) дају $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 9$, $x = 7/9$, $y = 2/3$. Зато су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{\mathbf{x}} = [7/9\ \ 2/9\ \ 0]^T$, $\bar{\mathbf{y}} = [0\ \ 2/3\ \ 1/3\ \ 0]^T$, а вредност игре је $v = -2/3$.

ж) $\mathbf{u}_2 > \mathbf{u}_1$, и $\mathbf{u}_4 > \mathbf{u}_3$ ($y_2 = y_4 = 0$) редукција на $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Сада $\mathbf{v}_4 > \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_1$ ($x_1 = x_3 = 0$) а даља редукција даје $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. На основу формула (66) имамо $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 7$, $x = 4/7$, $y = 5/7$, па су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{\mathbf{x}} = [0\ \ 4/7\ \ 0\ \ 3/7]^T$, $\bar{\mathbf{y}} = [5/7\ \ 0\ \ 2/7\ \ 0]^T$, а вредност игре је $v = 1/7$. Показује се, међутим, да су све конвексне комбинације екстремних стратегија $\bar{\mathbf{x}}_1 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$, и $\bar{\mathbf{x}}_2 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$ оптималне.

5.5.8. У антагонистичкој игри датој Табелом 48 играч I бира стратегије A и B у односу 80% A и 20% B, а играч II бира однос 30% A и 70% B. Колики је просечни добитак I играча у једној партији?

Табела 48

		Играч II	
		Стратегија A	Стратегија B
Играч I	Стратегија A	**800 дин**	**–300 дин**
	Стратегија B	**–200 дин**	**600 дин**

Решење. Просечни добитак I (добитног) играча у једној партији једнак је очекиваној вредности игре са стратегијама $\mathbf{x} = [1-x \quad x]^T$ и $\mathbf{y} = [1-y \quad y]^T$,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [1-x \;\; x]\begin{bmatrix} 800 & -300 \\ -200 & 600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} = 800 - 1000x - 1100y + 1900xy.$$

Стратегије које су изабрали играчи добијају се за $x = 0.2$ и $y = 0.7$, па је

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Big|_{\substack{x=0.2\\y=0.7}} = 800 - 1000x - 1100y + 1900xy\Big|_{\substack{x=0.2\\y=0.7}} = 96.$$

Дакле, у свакој партији, први играч просечно зарађује 96 дин.

5.5.9. У антагонистичкој игри датој Табелом 49 играч I бира стратегије A и B у односу 40% A и 60% B, а играч II бира однос 60% A и 40% B. Колики је просечни добитак I играча у једној партији?

Табела 49

		Играч II	
		Стратегија A	Стратегија B
Играч I	Стратегија A	**750 дин**	**–350 дин**
	Стратегија B	**–400 дин**	**550 дин**

Решење. Просечни добитак I играча у једној партији једнак је очекиваној вредности игре са стратегијама $\mathbf{x} = [1-x \quad x]^T$ и $\mathbf{y} = [1-y \quad y]^T$,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [1-x \;\; x]\begin{bmatrix} 750 & -350 \\ -400 & 550 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} = 750 - 1150x - 1100y + 2050xy,$$

коју треба срачунати за $x = 0.6$ и $y = 0.4$. Како је

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Big|_{\substack{x=0.6\\y=0.4}} = 750 - 1150x - 1100y + 2050xy\Big|_{\substack{x=0.6\\y=0.4}} = 112,$$

у свакој партији први играч просечно зарађује 112 дин.

5.5.10. Очекивани проценат пораста зарада запослених у Одељењу A и B једне фирме у зависности од тога да ли се производи фирме рекламирају на радију или на ТВ су дати у таблици (Табела 50)

Табела 50

		Одељење B	
		Радио	ТВ
Одељење A	Радио	**5 %**	**2 %**
	ТВ	**3 %**	**8 %**

а) Одељење А бира да радио рекламе буду заступљене са 60% а Одељење В са 50%;

б) Одељење А бира да радио рекалме буду заступљене са 90% а Одељење В са 50%.

Одредити очекивану вредност повећања зарада за свако одељење.

Решење. **а)** Проценат повећања зараде Одељења А биће једнак очекиваној вредности игре са стартегијама $\mathbf{x} = [0.6 \quad 0.4]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [0.6 \;\; 0.4]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 4.3 .$$

У исто време, очекује се смањење плата у Одељењу В за 4.3%.

б) Проценат повећања зарада Одељења А биће једнак очекиваној вредности игре са стартегијама $\mathbf{x} = [0.9 \quad 0.1]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = [0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [0.9 \;\; 0.1]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 3.7 .$$

Очекивано смањење плата у Одељењу В је за 3.7%.

5.6. Одређивање мешовитих стратегија

5.6.1. Одредити седласту тачку у мешовитим стратегијама дијагоналне игре

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}, \quad a_i > 0 ,$$

и показати да су оптималне стратегије потпуно мешовите.

Решење. Задатак решавамо методом LP. Према Теореми 25 и формулама (69) постављамо основни и дуални задатак

$$\text{основни} \quad \begin{array}{c} \max v \\[4pt] a_1x_1 \ge v, \\ a_2x_2 \ge v, \\ \dots \\ a_nx_n \ge v, \\ x_1 + \dots + x_n = 1, \\ x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0, \end{array} \qquad \text{дуални} \quad \begin{array}{c} \min v \\[4pt] a_1y_1 \le v, \\ a_2y_2 \le v, \\ \dots \\ a_ny_n \le v, \\ y_1 + \dots + y_n = 1, \\ y_1 \ge 0, \dots, y_n \ge 0. \end{array}$$

Дељењем неједнакости $a_i x_i \geq v$ и $a_i y_i \leq v$ са $a_i > 0$, добијамо $x_i \geq v/a_i$, $y_i \leq v/a_i$, а сумирањем ових неједнакости за $i = 1, \ldots, n$, добијамо

$$x_1 + \ldots + x_n \geq v/a_1 + \ldots + v/a_n, \qquad y_1 + \ldots + y_n \leq v/a_1 + \ldots + v/a_n,$$

$$1 \geq v(1/a_1 + \ldots + 1/a_n), \qquad 1 \leq v(1/a_1 + \ldots + 1/a_n).$$

Одатле је

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1} \leq v \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1},$$

из чега закључујемо да је $v = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1}$, што представља вредност игре.

Променљиве x_i и y_i се налазе из неједнакости $a_i x_i \geq v$ и $a_i y_i \leq v$, које се за добијено v претварају у једнакости. Тако, $x_i = v/a_i$ и $y_i = v/a_i$, па је седласта тачка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ дата са

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = v\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \ldots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \ldots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Како су сви елементи вектора $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ строго позитивни, оптималне стратегије су потпуно мешовите.

5.6.2. Одредити седласту тачку у мешовитим стратегијама дијагоналне игре

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{bmatrix}, \quad b_i < 0,$$

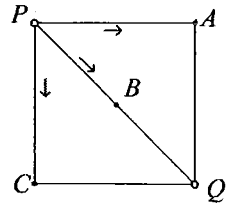
и показати да су оптималне стратегије потпуно мешовите.

Решење. Слично као у претходном задатку, вредност игре је $v = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} < 0$, а седласта тачка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ дата са

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = v\begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \ldots & \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \ldots & \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Сви елементи вектора $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ су строго позитивни, па су оптималне стратегије потпуно мешовите. Како је $v < 0$, игра је наклоњена губитном играчу.

5.6.3. На слици је приказан једноставан лавиринт са улазима у тачки P и Q. Мачка се налази у тачки P и иде ка тачки Q, а миш иде у супротном смеру, од Q ка P. Пут преко тачке A је најкраћи, и ако мачка ухвати миша на путањи PAQ, добија 5 поена, на путањи PCQ добија 3 а на PBQ, 2 поена јер је ова траса најдужа. Ако се мимоиђе са мишем, мачка добија 0 поена. Саставити матрицу игре и наћи оптималне стратегије.



Слика 5.6.3.

Решење. Матрица игре је дијагонална и дата је у табели

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Миш} \\ & & \begin{array}{ccc} PAQ & PBQ & PCQ \end{array} \\ \text{Мачка} & \begin{array}{c} PAQ \\ PBQ \\ PCQ \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

тако да се директни и дуални проблем LP који решава игру састоје од релација

(*) $\quad \max v, \quad 5x_1 \geq v, 2x_2 \geq v, 3x_3 \geq v, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0,$

(**) $\quad \min v, \quad 5y_1 \leq v, 2y_2 \leq v, 3y_3 \leq v, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1, \quad y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0.$

Из прве три неједнакости у (*) следује $x_1 \geq v/5$, $x_2 \geq v/2$, $x_3 \geq v/3$, па се сабирањем добија $x_1 + x_2 + x_3 \geq v/5 + v/2 + v/3$, или $1 \geq v(1/5 + 1/2 + 1/3)$, одакле је $v = (1/5 + 1/2 + 1/3)^{-1} = 30/31$. Како је то оптимална вредност проблема (*) и (**), неједнакости се претварају у једнакости и добијамо $x_1 = v/5 = 6/31$, $x_2 = v/2 = 15/31$, $x_3 = v/3 = 10/31$, и исте вредности за y_1, y_2 и y_3. Опималне стратегије чине седласту тачку потпуно мешовитих стратегија:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{31} & \frac{15}{31} & \frac{10}{31} \end{bmatrix}^T = \frac{30}{31}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T .$$

5.6.4. Одредити оптималне старегије антагонистичке игре $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решење. Како трећа колона матрице строго доминира другу, она се може искључити, уз анулирање треће стратегије, $y_3 = 0$. Игра се редукује на

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ тако да на основу формула (66) имамо $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 4$, $x = 3/4$, $y = 1/2$, па су оптималне мешовите стратегије седла $\bar{\mathbf{x}} = [1/4 \quad 3/4]^T$, $\bar{\mathbf{y}} = [1/2 \quad 1/2]^T$, а вредност игре је $v = 5/2$.

5.6.5. Одредити оптималне старегије првог и другог играча за антагонистичку игру дату матрицом добити

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење. Доња и горња сигурносна вредност су $v_D = -1$, $v_G = 1$, дакле не постоји седло у чистим стратегијама. Сводимо задатак на проблем LP и користимо формуле (69)

играч D

$$\begin{aligned}
&(d_1) \quad 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq v,\\
&(d_2) \quad -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq v,\\
&(d_3) \quad x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq v,\\
&(d_4) \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0,\\
&(d_5) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1;
\end{aligned}$$

играч G

$$\begin{aligned}
&(g_1) \quad 2y_1 - y_2 + y_3 \leq v,\\
&(g_2) \quad -2y_1 + y_2 - y_3 \leq v,\\
&(g_3) \quad -2y_1 + y_2 - 2y_3 \leq v,\\
&(g_4) \quad 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq v,\\
&(g_5) \quad y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0,\\
&(g_6) \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1;
\end{aligned}$$

Сабирањем неједнакости (g_1) и (g_2) добијамо $v \geq 0$. Сабирање (d_1) и $2\cdot(d_2)$ даје $-2x_4 \geq 0$, тј. $x_4 \leq 0$. Како је још из симплексног услова $x_4 \geq 0$, то је $x_4 = 0$. Сада неједнакости (d_2) и (d_3) постају

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 &\geq v,\\
x_1 - x_2 - 2x_3 &\geq v,
\end{aligned}$$

тако да сабирањем добијамо $-x_3 \geq 0$, што заједно са $x_3 \geq 0$ даје $x_3 = 0$. Тиме последње неједнакости добијају једноставнији облик

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\geq v,\\
x_1 - x_2 &\geq v,
\end{aligned}$$

и њиховим сабирањем добијамо $v \leq 0$, што уз $v \geq 0$ даје $v = 0$. Зато је $x_1 = x_2$, а уз услов симплекса (d_5) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, који уз добијене вредности $x_3 = x_4 = 0$ постаје $x_1 + x_2 = 1$, имамо $2x_1 = 1$, тј. $x_1 = x_2 = 1/2$. Тако смо добили вредност игре $v = 0$, и мешовиту стратегију првог играча $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;

Сада, из система неједнакости играча G, издвајамо неједнакости (g_1), (g_3), (g_4) и (g_5)

$$(*) \qquad \begin{aligned} 2y_1 - y_2 + y_3 &\le 0, \\ 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 &\le 0, \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\ge 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1; \end{aligned}$$

Заменом $y_3 = 1 - y_1 - y_2$, у прве две неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 &\le -1, \\ -y_1 - 5y_2 &\le -3. \end{aligned}$$

Сабирањем ове две неједнакости добија се $-7y_2 \le -4$, или $y_2 \ge 4/7$, а увођењем нове променљиве $t \ge 0$, може се писати $y_2 = 4/7 + t$. Заменом у прву неједнакост у горњем систему добијамо $y_1 \le 1/7 + 2t$, а прва неједнакост из (*) даје $y_3 \le 2/7 - 3t$. Користећи ненегативност променљивих y_1, y_2 и y_3, имамо систем неједначина

$$1/7 + 2t \ge 0, \quad 4/7 + t \ge 0, \quad 2/7 - 3t \ge 0, \quad t \ge 0,$$

чије је решење $0 \le t \le 2/21$. Дакле, решење игре је јединствена оптимална стратегија за првог и бесконачно много оптималних стратегија за другог играча:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} + 2t & \frac{4}{7} + t & \frac{2}{7} - 3t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(0 \le t \le \frac{2}{21}\right), \quad v = 0.$$

5.7. Специјалне конфигурације матричних игара

5.7.1. Наћи бар једно решење матричне игре $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, користећи строгу доминацију конвексним комбинацијама.

Решење. Испитајмо најпре могућност да друга и трећа колона матрице **A** строго доминирају конвексну комбинацију прве и четврте колоне. Како се елементи друге колоне $\mathbf{u}_2$ налазе између елемената прве и четврте колоне $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_4$, јер су задовољене неједнакости

$$4 > 2 > -1 \text{ и } -4 < 0 < 2,$$

могуће је да постоји $\lambda \in (0, 1)$, тако да важи $\mathbf{u}_2 > \mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$, тј.

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} > (1-\lambda)\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Горња неједнакост даје две неједнакости по λ: $-5\lambda < -2$ и $6\lambda < 4$. Уз симплексни услов $0 < \lambda < 1$, заједничко решење је $2/5 < \lambda < 2/3$. Дакле, за свако $\lambda \in\in (2/5, 2/3)$ важи (*). Ово значи да из матрице **A** може да се искључи друга колона, јер губитни играч нема разлога да бира другу стратегију када боље резултате (мањи губитак) постиже комбиновањем прве и четврте. Слично, елементи треће колоне $\mathbf{u}_3$, задовољавају неједнакости

$$4 > 3 > -1 \text{ и } -4 < -2 < 2.$$

На сличан начин, $\mathbf{u}_3 > \mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$, ако постоји $\lambda \in (0, 1)$, које задовољава неједнакост

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} > (1-\lambda)\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Из (**) се добијају неједнакости $1/5 < \lambda$ и $\lambda < 1/3$, што уз услов симплекса $0 < \lambda < 1$ даје $1/5 < \lambda < 1/3$. Тако из **A** искључујемо и трећу колону, и игра се редукује на $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$. Будући да је $v_D = -1$, $v_G = 2$, игра нема решење у чистим стратегијама а како је формат матрице добити 2×2, можемо користити формуле

$$v = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{21}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{12}}{h} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{12}}{h} \\ \dfrac{a_{11}-a_{21}}{h} \end{bmatrix}, \quad h = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0,$$

које дају $v_1 = 4/11$, $\bar{\mathbf{x}}_1 = [6/11 \quad 5/11]^T$ и $\bar{\mathbf{y}}_1 = [3/11 \quad 8/11]^T$, и то је решење редуковане игре у мешовитим стратегијама. Како смо из полазне матрице искључили другу и трећу колону, мешовита стратегија другог играча има на тим местима нуле, док је стратегија првог играча једнака стратегији истог играча редуковане игре. Вредност игре остаје иста. Дакле, решење полазне игре је $\bar{\mathbf{x}} = [6/11 \quad 5/11]^T$ и $\bar{\mathbf{y}} = [3/11 \quad 0 \quad 0 \quad 8/11]^T$, $v = 4/11$.

5.7.2. Решити антагонистичку игру $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

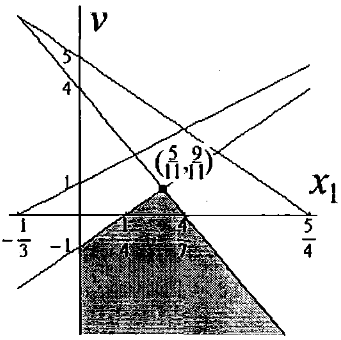
Решење. Према формулама (69), основни проблем LP за решавање матричне игре је

$$\max v,$$

$4x_1+x_2 \geq v$, $-3x_1+4x_2 \geq v$, $3x_1-x_2 \geq v$, $x_1+5x_2 \geq v$,

што уз услов $x_1+x_2=1$ даје

$$3x_1+1 \geq v,\quad -7x_1+4 \geq v,\quad 4x_1-1 \geq v,\quad -4x_1+5 \geq v.$$



Слика 5.7.2

Графички приказ ових неједнакости, заједно са условом ненегативности x_1, представљен је осенченом облашћу на Слици 5.7.2, са максимумом у тачки $x_1 = 5/11$, $v = 9/11$. Тако се добија и $x_2 = 6/11$. Ако постоји $\lambda \in [0, 1]$, тако да важи неједнакост $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} > (1-\lambda)\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, из матрице **A** може да се искључи прва колона. Лако се налази решење овог система, $\frac{3}{5} < \lambda < \frac{7}{6}$. Такође, постојање $\lambda \in [0, 1]$ за које важи неједнакост $(1-\lambda)\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ искључује последњу колону, а то је за $0 < \lambda < \frac{2}{3}$. Тиме се број колона матрице добити редукује на два, на другу и трећу, док стратегијама 1 и 4, другог играча одговарају тежине $y_1 = 0$, $y_4 = 0$. Тако се дуални систем ограничења своди на систем $-4y_2 + 3y_3 = 9/11$, $4y_2 - y_3 = 9/11$. Било решавањем овог система или заменом у једну од две једначине $y_3 = 1 - y_2$, добијају се решења $y_2 = 4/11$, $y_3 = 7/11$. Најзад, решење полазне игре је $\overline{\mathbf{x}} = [5/11 \quad 6/11]^T$ и $\overline{\mathbf{y}} = [0 \quad 4/11 \quad 7/11 \quad 0]^T$, $v = 6/11$.

5.7.3. Наћи бар једно решење антагонистичке матричне игре $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, и одредити наклоњеност игре играчима.

Решење. Одредимо $\lambda \in [0, 1]$, тако да важи неједнакост $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} > (1-\lambda)\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Добија се систем $1-5\lambda < 0$, $7\lambda-3 < 0$, одакле је $\frac{1}{5} < \lambda < \frac{3}{7}$. Дакле, прва колона се може елиминисати и остаје редукована игра $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ која се може решавати графички или помоћу формула (66):

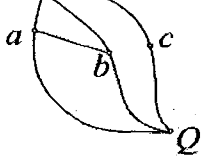
$h = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 12$, $x = 5/12$, $y = 5/12$, а решење полазне игре је $\bar{\mathbf{x}} = [7/12 \;\; 5/12]^{\mathrm{T}}$ и $\bar{\mathbf{y}} = [0 \;\; 7/12 \;\; 5/12]^{\mathrm{T}}$. Како је $v = -1/12$, игра је наклоњена другом играчу.

5.7.4. Нађи бар једно решење антагонистичке матричне игре $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ и одредити њену наклоњеност према играчима.

Решење. Постоји могућност да друга и трећа врста доминирају конвексну комбинацију прве и четврте врсте. Одредимо, дакле, $\lambda \in [0, 1]$, тако да важи $[3 \;\; 0] > (1-\lambda)[4 \;\; -2] + \lambda[-3 \;\; 3]$. Решење добијене неједначине је је $\frac{1}{7} < \lambda < \frac{2}{5}$. Затим, показује се да постоји $\lambda \in [0, 1]$, тако да важи $[-1 \;\; 4] > (1-\lambda)[4 \;\; -2] + \lambda[-3 \;\; 3]$, и то је $\frac{5}{7} < \lambda < \frac{6}{5}$. Тако, могу се искључити прва и четврта врста, чиме се матрица добити редукује на $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Према формули (66), $h = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 8$, $x = 3/8$, $y = 1/2$, па је решење полазне игре $\bar{\mathbf{x}} = [0 \;\; 5/8 \;\; 3/8 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$ и $\bar{\mathbf{y}} = [1/2 \;\; 1/2]^{\mathrm{T}}$, док је $v = 3/2$. Игра је наклоњена првом играчу.

5.7.5. Нађи бар једно решење антагонистичке матричне игре $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, и одредити њену наклоњеност играчима.

5.7.6. Ловац се креће речним рукавцима само низводно, из тачке P ка тачки Q преко тачака a, b или c, као на слици, с тим што може користити и рукавац ab на коме постији водопад.



Слика 5.7.6

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & ab & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ ab \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Плен се креће само узводно користећи исте путеве сем рукавца ab. Добит ловца од хватања плена дата је у табели.

а) Ако је равнотежа мешовитих статегија игре дата са $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, одредити наклоњеност игре играчима.

б) Одредити огледало игре и наћи њено решење.

Решење. **а)** Вредност игре је

$$v = K(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

дакле игра је подједнако наклоњена играчима.

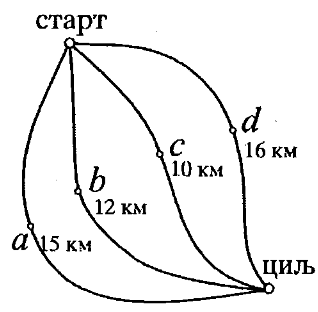
б) Огледало игре је дато матрицом $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$. На основу теореме о огледалима, седло у мешовитим стратегијама је $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ са вредношћу $v = 0$.

5.7.7. Двојица бициклиста D и G, имају на располагању 4 стазе различите дужине, које воде ка од старта до циља у складу са сликом.

Свако од њих произвољно бира стазу a, b, c или d, не знајући унапред њихову дужину. Формирати матрицу добити тркача D у зависности од тога коју стазу је изабрао, али и коју стазу је изабрао G, ако се добит изражава у броју километара његове предности, а бициклисти се крећу истом брзином.

а) Испитати симетрију игре и одредити њену вредност.

б) Испитати постојање седласте тачке у чистим стратегијама.



Слика 5.7.7

в) Одредити оптималне стратегије.

Решење. **а)** Ако и D и G изаберу стазу a, стижу на циљ истовремено, па је предност бициклисте D једнака 0. Ако и D изабере стазу a док G иде стазом b, његова предност ће бити –3 км, итд. Тако се добија матрица игре

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A},$$

која има особину симетрије, јер је $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. На основу последице теореме о огледалима, $v = 0$.

б) Минимуми врста матрице **A** су $\{-5, -2, 0, -6\}$, па је максимин $v_D(\mathbf{A}) = 0$. Максимуми колона матрице **A** су $\{5, 2, 0, 6\}$, тако да је минимакс $v_G(\mathbf{A}) = 0$. Дакле, седло у чистим стратегијама је $a_{33} = 0$.

в) Чисте стратегије оба играча су исте, $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

5.7.8. Древна кеинеска игра шоуши-линг (из периода Минг династије), која у савременој везији носи назив "*камен, папир и маказе*", састоји се у томе да два играча истовремено показују песницу (камен), отворену шаку (папир) и и два размакнута прста (маказе). По традицији, камен побеђује (ломи) маказе, папир побеђује (скрива) камен а маказе побеђују (секу) папир. Тако, ако оба играча покажу исти "предмет" игра је нерешена, а иначе играч који покаже "јачи предмет" добија један поен. Саставити матрицу игре а затим наћи оптималне стратегије.

Решење. Матрица добити **A** има облик

$$\begin{array}{c} \\ \text{камен} \\ \text{папир} \\ \text{маказе} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{камен} & \text{папир} & \text{маказе} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Доња сигурносна вредност игре је -1 а горња $+1$ тако да не постоји седло па према томе ни равнотежа чистих стратегија. Дакле седло једино може да постоји у мешовитим стратегијама. Приметимо најпре да је игра симетрична јер $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Дакле, вредност игре је $v = 0$, и оптималне стратегије играча су једнаке. Ако претпоставимо да мешовите стратегије имају облик $\mathbf{x} = \mathbf{y} = [p \quad q \quad 1-p-q]^{\mathrm{T}}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, тада је функција очекиване добити (језгро игре)

$$K(p,\, q) = [p \quad q \quad 1-p-q] \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ 1-p-q \end{bmatrix} =$$

$$(1-p-q)\,(p-q) \;+\; (1-2p-q)\,q \;+\; p\,(p+2q-1) = 0,$$

за свако p и q. Дакле, све стартегије су оптималне.