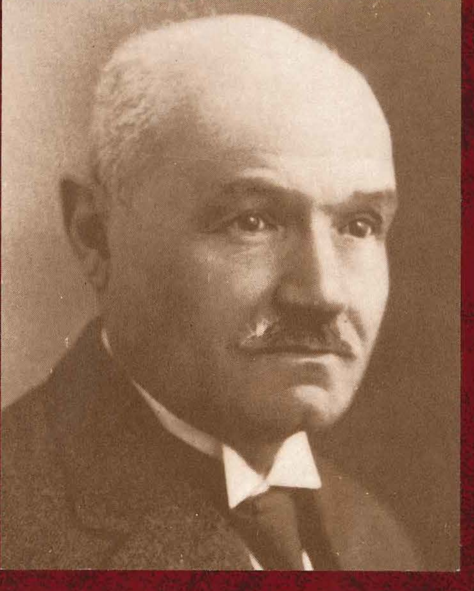
АЛГЕБРА



МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 4

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06511-7

Мих. Петровић

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

Фотографија начињена за потребе професоровог одласка у пензију,
Београд 1938. година
(аутор фотографије непознат)

МИХАИЛО
ПЕТРОВИЋ

АЛГЕБРА

Приредио

др Жарко Мијајловић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1998

Све радове са францускоḡ језика ӣревела
ИВАНА МИЈАЈЛОВИЋ

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

ТЕОРЕМА О БРОЈУ КОРЕНА АЛГЕБАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ УНУТАР ДАТЕ КРУЖНИЦЕ*

Нека је $F(x)=0$ алгебарска једначина степена m, са једнаким или различитим реалним или имагинарним коренима. Нека је затим, C дати круг полупречника r, чији је центар у координатном почетку. Опишимо са обе стране круга C кругове C_1 и C_2, чији су центри у координатном почетку, полупречника редом r_1 и r_2 (где је $r_1 < r < r_2$), и такве да прстен који они ограничавају не садржи ни један корен једначине $F(x)=0$.

Приметимо да се одређивање r_1 и r_2 за дато r своди, на пример, на одређивање горње границе негативних корена и доње границе позитивних корена одређене алгебарске једначине.

Нека је n најмањи цео број већи од увек позитивне величине

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\log(4m+1)}{\log\left(1+\dfrac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right)}-1.$$

Формирајмо трансформацију за $F(x)=0$ за $x=t\cdot\sqrt{y}$ и нека је

$$(2) \qquad \Phi(y,t)=0$$

израз добијен том трансформацијом. Формирајмо затим трансформацију једначине (2) узимајући $y=\sqrt{z_1}$, потом њену трансформацију за $z_1=\sqrt{z_2}$, даље трансформацију ове последње за $z_2=\sqrt{z_3}$ и поновимо ову операцију до трансформације степена n, коју ћемо означити са

$$(3) \qquad \Psi(z_n,t)=0,$$

где је Ψ полином по z_n и t, степена m по промењивој z_n.

---

* Наслов оригинала *Théorème sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (даље у тексту Comptes rendus или CR), Paris, 1899, t. CXXIX, 16, pp. 583–586; саопштио у Парискоj академији наука професор Шарл Ермит 16. октобра 1899.

Означимо са λ_n израз који добијамо ако изаберемо

$$z_n = 1, \quad t = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

у логаритамском изводу полинома Ψ по променљивој z_n.

Тада имамо следећу теорему:

Број корена једначине F(x) = 0, *садржаних у унуйрашњосйи круга* C, *једнак је целом делу броја* $\lambda_n + \frac{1}{2}$.

Заиста, једначина (3) није ништа друго него трансформација једначине $F(x) = 0$ за $x = tz^{\frac{1}{2(n+1)}}$. Према томе, ако означимо са α_i корене једначине $F(x) = 0$, биће

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{z_n - \left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{2(n+1)}}, \tag{4}$$

одакле

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_i}{R}\right)^{2(n+1)}}, \tag{5}$$

где смо узели краће

$$R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Нека су $1, 2, \ldots, p$ индекси унутрашњих корена, а $p+1, p+2, \ldots, m$ у односу на круг C. Број p корена који се налазе у унутрашњости круга C једнак је броју корена унутар круга полупречника R.

Нека је најпре α_1 унутрашњи реалан корен. Имаћемо

$$\frac{\alpha_1}{R} < \frac{r_1}{R} < 1$$

одакле

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^{2(n+1)}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}. \tag{6}$$

Ако су α_1 и α_2 два унутрашња имагинарна конјугована корена, ако означимо са ρ и са $\pm\theta$ њихове модуле и аргумент, биће

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^{2(n+1)}}+\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_2}{R}\right)}= \tag{7}$$
$$=\frac{2\left[1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n+1)}\cos 2(n+1)\theta\right]}{1-2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n+1)}\cos 2(n+1)\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{4(n+1)}},$$

одакле лако закључујемо да је

$$\frac{2}{1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^{2(n+1)}}+\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_2}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{2}{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n+1)}}. \tag{8}$$

С друге стране, имамо

$$\frac{\rho}{R}<\frac{r_1}{R}<1,$$

и према томе, (8) постаје

$$\frac{2}{1+\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^{2(n+1)}}+\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_2}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{2}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}. \tag{9}$$

Неједнакости (6) и (9) показују да важи

$$\frac{p}{1+\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}<\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{p}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} \tag{10}$$

Испитајмо сада спољашње корене. За један такав реалан корен α_k имамо

$$\frac{\alpha_k}{R}>\frac{r_2}{R}>1,$$

одакле

$$\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}}<\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{R}\right)^{2(n+1)}}<0. \tag{11}$$

За два спољашња имагинарна конјугована корена α_k и α_{k+1} имамо, ако са ρ означимо њихов модул,

$$(12)\qquad \frac{2}{1-\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}} < \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{R}\right)^{2(n+1)}} + \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_{k+1}}{R}\right)^{2(n+1)}} < \frac{2}{1+\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}},$$

и према томе, из (11) и (12),

$$(13)\qquad \frac{m-p}{1-\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}} < \sum_{i=p+1}^{m} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{R}\right)^{2(n+1)}} < \frac{m-p}{1+\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}}.$$

Из (5), (10) и (13) изводимо

$$\frac{p}{1+\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} + \frac{m-p}{1-\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}} < \lambda_n < \frac{p}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} + \frac{m-p}{1+\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}},$$

или

$$(14)\qquad p-\varepsilon < \lambda_n < p+\eta,$$

где

$$(15)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{p\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}{1+\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} + \dfrac{m-p}{\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}-1}, \\[2ex] \eta = \dfrac{p\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2(n+1)}} + \dfrac{m-p}{\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2(n+1)}+1}. \end{cases}$$

Дакле, лако се уверавамо да ако n изаберемо на поменути начин, сваки елемент других чланова из (15) је позитиван и мањи од $\frac{1}{4}$. Према томе биће

$$\varepsilon < \frac{1}{2}, \quad \eta < \frac{1}{2},$$

или, према (14)

$$p-\frac{1}{2} < \lambda_n < p+\frac{1}{2},$$

или слично

$$\lambda_n - \frac{1}{2} < p < \lambda_n + \frac{1}{2},$$

што доказује наведену теорему.

Ако је λ_n једнако $k + \frac{1}{2}$, где је k цео број, број p биће једнак k или $k + 1$. Тачну вредност броја p одређујемо узимајући λ_{n-1} уместо λ_n.**

** Изложена Петровићева расправа у Париској академији наука побудила је интересовање научне јавности. Реферативни часописи донели су позитивне приказе Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (даље у тексту FdM) B. 30, S. 98 u Revue générale des Sciences, t. X, 19, p. 794. Неколико математичара користило се овом Петровићевом расправом: E. Landau Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1905, t. XXXIII, pp. 251–261, L. Fejér у CR (1907), pp. 459–461, G. Mignosi, *Teoreme di Sturm e sue estensioni,* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 49 (1925), p. 160, као и Шефкија Раљевић у својој докторској дисертацији *О извјесним класама полинома и распореду њихових нула*, Математички институт САН, Зборник радова, књ. 5, Београд 1956, стр. 1–59.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА*

Проблем трансформације алгебарских једначина, који се састоји у томе, да се кад је дата једначина

$$f(x)=0 \tag{1}$$

образује друга једначина

$$\varphi(y)=0 \tag{2}$$

која ће бити таква, да између корена

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$$

једначине (1) и корена

$$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots$$

једначине (2) постоји нека унапред дата релација

$$\Phi(\beta_i,\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\ldots)=0 \tag{3}$$

решава се разним познатим методама, које се у основи своде на елиминацију промењљивих $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\ldots$ из система једначина

$$\Phi(y,\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\ldots)=0$$

$$f(\alpha_i)=0,\quad f(\alpha_j)=0,\quad f(\alpha_k)=0,\quad \text{итд.}$$

Ако је релација (3) *алгебарска,* једначина (2), као резултанта те елиминације, биће такође алгебарска.

---

* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 143, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 29, Zagreb 1900, str. 107–141; саопштено у Разреду 7. децембра 1900; расправа је пренета на ћирилични запис и језик екавице.

Али ако је поменута релација *трансцендентна* и једначина (2), добијена на поменути начин, ће да буде трансцендентна.

Међутим, дешава се да је број корена једначине (2), и ако је ова трансцендентна, ипак ограничен. Тада постоји извесна *алгебарска* једначина

$$\psi(y) = 0 \tag{4}$$

која има исте корене и истога реда, које и једначина (2). У таквоме случају ова се једначина (4) може сматрати као трансформисана једначина (1), а трансцендентна релација (3) одређује природу извршене трансформације.

Тако, ако се са алгебарском једначином (1) изврши трансформација

$$x = \arcsin y,$$

добија се трансцедентна једначина

$$f(\arcsin y) = 0 \tag{5}$$

која је таква, да између њених корена β_i и корена α_i првобитне једначине (1) постоји релација

$$\beta_i = \sin\alpha_i. \tag{6}$$

Једначина (5) решена по y имаће дакле онолико исто корена колико и првобитна једначина (1) и редови тих корена биће исти у обе ове једначине. Према томе, сигурно постоји једна алгебарска једначина истога степена као и једначина (1) која ће имати за корене вредности $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ дефинисане једначином (6) и која се може сматрати као трансформисана једначина (1).

Колико ми је познато до сад још није решен ни један проблем ове врсте: *извршити са датом алгебарском једначином неку трансцендентну трансформацију, али тако да трансформисана једначина ипак буде алгебарска*, наравно у случају кад такав проблем има неког смисла.

У овоме раду биће показано како се могу решити неки такви проблеми, а на основу следећих проблема.

Кад је дата алгебарска једначина (1) треба образовати нову алгебарску једначину (2), која ће бити таква, да између корена α_i прве и корена β_i друге једначине постоји нека унапред дата релација облика

$$\beta_i = R(e^{r\alpha_i}, e^{r\alpha_j}, \ldots),$$

или

$$\beta_i = R(\sin r\alpha_i, \sin r\alpha_j, \ldots),$$

или

$$\beta_i = R(\cos r\alpha_i, \cos r\alpha_j, \ldots),$$

или у опште

$$\beta_i = R(u_i, u_j, \ldots),$$

где је u_k ма каква тригонометријска функција корена α_k, а R означава неку алгебарску, рационалну и симетричну функцију оних израза који се у њој јављају.

Пре свега лако је схватити, да се сви проблеми ове врсте могу помоћу Euler-ових образаца свести на овај један, много простији, у коме јесте сва тешкоћа: извршити са датом једначином (1) такву трансформацију да буде

$$\beta_i = e^{r\alpha_i}$$

и да нова, тако добијена једначина буде алгебарска. Јер кад би овај проблем био решен, горњи би се компликованији проблеми свели на то, да се образује једначина, чији би корени били извесне унапред дате рационалне и симетричне функције корена дате једначине, а ово се решава познатим елементарним путем.

Задржимо се на наведеном једноставнијем проблему. Нека је

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{7}$$

дата првобитна једначина, а

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0 \tag{8}$$

из ње трансформацијом изведена једначина

$$y = e^{rx}.$$

Коефицијенти $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тражене једначине (8) зависе од коефицијената $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дате једначине (7) и могу се израчунати кад су те количине дате. Овде ће бити показано како се то израчунавање може свести на извесне остварљиве алгебарске операције и на израчунавање n одређених интеграла, тако да је сваки од тих коефицијената представљен по једним таквим интегралом.

Коефицијенти b_i могу се израчунати и у облику бесконачних редова, уређених по степенима од r, и то сваки са оноликом апроксимацијом колика се буде тражила.

Одређени интеграли, на које се, као што ће бити показано, може свести израчунавање тих чинилаца, облика су:

$$\int_0^\infty \chi(x) \cos rx \, dx$$

где је $\chi(x)$ извесна рационална функција променљиве x, која има сталан знак за све вредности x-а у границама интеграције и непрекидно опада кад x расте између тих граница, почевши од одређене вредности. За такве интеграле може се поставити једна посебна метода приближног израчунавања, помоћу које би се могли израчунавати са коликом се хоће апроксимацијом.

Једна важна особина тако трансформисане алгебарске једначине, помоћу које се, као што ће бити показано, кад је она већ образована може на веома једноставан начин одредити број корена првобитне једначине, који се у бројној равни налазе са једне или друге стране дате праве линије, даје посебну важност оваквој врсти трансцендентних трансформација. С тога би било од интереса наћи за њихово извођење једноставније методе од ових, које ће обе бити изнесене и које мада своде задатак на обичне, остварљиве алгебарске и интегралне операције, ипак су у пракси обимне и захтевају дуга рачунања. Метода, која ће овде бити изложена, заслужује пажње с тога, што је она до сада једина метода, помоћу које се може извршити каква трансцендентна трансформација алгебарских једначина.

О ЈЕДНОМЕ ОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ

Одређени интеграл

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \tag{9}$$

један је од познатих интеграла. Познато је и лако се доказује да кад је λ реалан а a реалан и позитиван број, интеграл има вредност

$$I(a) = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a} \qquad \text{ако је } \lambda > 0,$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2a} e^{\lambda a} \qquad \text{ако је } \lambda < 0.$$

Из овог проистиче да кад су r и a реалне количине израз e^{ra}, може се представити у облику

$$e^{ra} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+a^2}\,dx \qquad \text{ако је} \quad r<0, \quad a>0,$$

$$e^{ra} = -\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+a^2}\,dx \qquad \text{ако је} \quad r>0, \quad a<0.$$

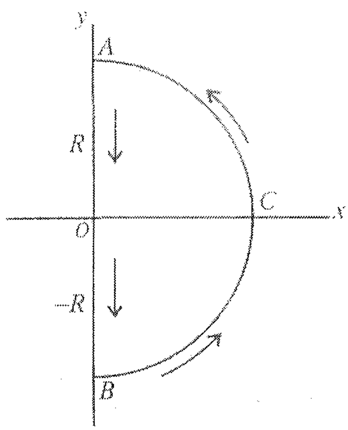
Пре свега, *показаћу како се овај резултат може проширити и на општији случај: кад је* a *ма каква комплексна а* r *ма каква реална количина.*

Тога ради разликујмо ова четири случаја:

Први случај: $\lambda > 0$, $R(a) > 0$ (где $R(a)$ по уобичајеном обележавању означава реални део комплексног броја a). Уочимо криволинијски интеграл

$$P = \int_{(C)} \frac{e^{-\lambda z}}{z-a}\,dz \tag{10}$$

узет у равни комплексних количина дуж контуре $BCAOB$, састављене из полукруга BCA и одсечка AB имагинарне оси, кад се та контура описује у правцу који је означен стрелицама (сл. 1).



Слика 1.

Ако је полупречник R полукруга довољно велики да описана контура опкољава тачку $z = a$, која се налази на десној страни осе AB, према основној Cauchy-евој теореми биће

$$\int_{(C)} \frac{e^{-\lambda z}}{z-a}\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,e^{-\lambda a}; \tag{11}$$

а пошто контура, па ма колики био полупречник R, не опкољава тачке $z = -a$, јер је ова на левој страни осе AB, то ће бити

$$\int_{(C)} \frac{e^{-\lambda z}}{z+a}\,dz = 0. \tag{12}$$

Одузимањем једначине (12) од (11) добија се да је

$$\int_{(C)} \frac{e^{-\lambda z}}{z^2-a^2}\,dz = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a}\,e^{-\lambda a}. \tag{13}$$

Поред тога интеграл (13) састоји се из збира двају интеграла, P_1 ии P_2, од којих је први узет дуж полукруга BCA, а други дуж одсечка AB, тако да је

$$(14) \qquad (13) = P_1 + P_2.$$

За први је интеграл

$$z = Re^{\theta}\sqrt{-1},$$

где аргуменат θ варира од $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ је и према томе

$$(15) \qquad P_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Re^{-R\lambda e^{\theta\sqrt{-1}}} e^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{R^2 e^{2\theta\sqrt{-1}} - a^2} d\theta;$$

а за други је $z = y\sqrt{-1}$, где y варира од R до $-R$ и отуда је

$$(16) \qquad P_2 = -\int_R^{-R} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{y^2 + a^2} dy.$$

Задржимо се најпре на интегралу P_1. Модуо количине под интегралним знаком биће

$$\frac{Re^{-R\lambda\cos\theta}}{\sqrt{R^4 + a^4 - 2R^2a^2\cos\theta}}$$

а пошто, док θ варира од $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ остаје позитиван, то кад се пусти да R бесконачно расте, интеграл P_1 тежи нули. Према томе и према обрасцу (14) написаном у облику

$$P_1 + P_2 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a} e^{-\lambda a}$$

који важи за ма какво R па и за $R = \infty$, добија се да је

$$P_2 = \sqrt{-1}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2 + a^2} dy = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a} e^{-\lambda a},$$

или

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2 + a^2} dy = \frac{\pi}{a} e^{-\lambda a}.$$

Ако изменимо

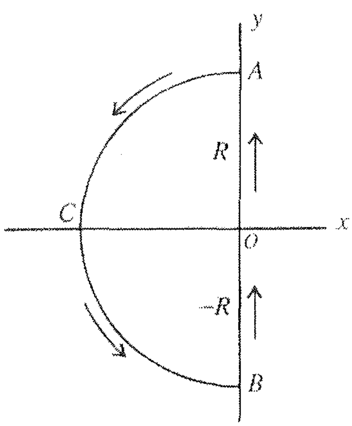
$$e^{-\lambda a\sqrt{-1}} = \cos\lambda y - \sqrt{-1}\sin\lambda y$$

и раздвојимо у добијеном резултату реални и имагинарни део, добија се

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda y}{y^2+a^2}\,dy = \frac{\pi}{a}e^{-\lambda a}$$

из чега се даље добија, пошто је функција под интегралним знаком парна,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda y}{y^2+a^2}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-\lambda a}. \tag{18}$$



Слика 2.

Други случај: $\lambda < 0$, $R(a) < 0$. Уочимо опет криволинијски интеграл

$$P = \int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z-a}\,dz$$

али узет дуж контуре $BOACB$ онако како је на слици 2 означено стрелицама. Ако је полупречник полукруга довољно велики да контура обухвата тачку $z = a$, биће

$$P = 2\pi\sqrt{-1}e^{-\lambda a}, \tag{19}$$

а пошто контура тада не обухвата тачку $z = -a$ (чији је реални део позитиван) то ће бити

$$\int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z+a}\,dz = 0. \tag{20}$$

Одузимајући (20) од (19) добија се да је

$$\int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z^2-a^2}\,dz = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a}e^{-\lambda a} \tag{21}$$

Интеграл на левој страни састоји се из два дела Q_1 и Q_2 од којих је један узет дуж одсечка BOA а други дуж полукруга.

За први је $z = y\sqrt{-1}$, где y варира од $-R$ до R и према томе

$$Q_1 = -\sqrt{-1}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2+a^2}\,dy. \tag{22}$$

За други је

$$z = Re^{\theta\sqrt{-1}},$$

где θ варира од $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ и према томе је

$$Q_2 = R\sqrt{-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{e^{-\lambda Re^{\theta\sqrt{-1}}}e^{\theta\sqrt{-1}}}{R^2e^{2\theta\sqrt{-1}}-a^2}\,d\theta.$$

Пошто док θ варира у границама интеграције $\cos\theta$ остаје негативан, то модуо количине под интегралним знаком тежи нули кад R бесконачно расте; према томе је

$$\lim Q_2 = 0 \quad \text{за} \quad R = \infty$$

и на основу обрасца

$$Q_1 + Q_2 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a}e^{-\lambda a}$$

добија се да је

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2+a^2}\,dy = -\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a}.$$

Замењује се као и пре

$$e^{-\lambda y\sqrt{-1}} = \cos\lambda y - \sqrt{-1}\sin\lambda y,$$

раздваја се реални и имагинарни део и добија се образац

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{y^2+a^2}\,dy = -\frac{2a}{\pi}e^{-\lambda a}. \tag{23}$$

Трећи случај: $\lambda > 0$, $R(a) < 0$. Нека је ρ какав реалан и позитиван број или комплексан број чији је реалан део позитиван и већи од апсолутне вредности $R(a)$. Тада ће бити

$$R(\rho + a) > 0$$

и према томе

$$(24)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda y}{y^2+(\rho+a)^2}\,dy = \frac{\pi}{2(\rho+a)}e^{-\lambda(\rho+a)}.$$

Четврти случај: $\lambda < 0,\ R(a) > 0$. Нека је ω какав реалан или комплексан број такав да је

$$R(\omega+a) < 0$$

тада ће (2) случај бити

$$(25)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda y}{y^2+(\omega+a)^2}\,dy = -\frac{\pi}{2(\omega+a)}e^{-\lambda(\omega+a)}.$$

Из образаца (18), (23), (24) и (25) изводи се овај закључак:

Нека је α каква комплексна а r каква реална количина; израз $e^{r\alpha}$ увек се може изразити помоћу једног одређеног интеграла облика

$$\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+\alpha^2}\,dx,$$

и то на овај начин:

1. ако је $r > 0,\ R(\alpha) < 0$ биће (случај 2)

$$(26)\qquad e^{r\alpha} = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+\alpha^2}\,dx,$$

2. ако је $r < 0, R(\alpha) > 0$ (случај 1) биће

$$(27)\qquad e^{r\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+\alpha^2}\,dx,$$

3. ако је $r > 0, R(\alpha) > 0$ (случај 4) биће

$$(28)\qquad e^{r\alpha} = -\frac{2(\omega+\alpha)}{\pi}e^{-r\omega}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+(\omega+\alpha)^2}\,dx,$$

где је ω такав један број да је

$$R(\omega+\alpha) < 0,$$

4. ако је $r < 0, R(\alpha) < 0$ (случај 3) биће

$$(29)\qquad e^{r\alpha} = \frac{2(\rho+\alpha)}{\pi}e^{-r\rho}\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2+(\rho+\alpha)^2}\,dx,$$

где је ρ ма какав број за који је

$$R(\rho + \alpha) > 0.$$

РЕШЕЊЕ ПОСТАВЉЕНОГ ЗАДАТКА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПОМОЋУ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

Вратимо се задатку истакнутом у почетку ове расправе и који се састоји у овоме: кад је дата алгебарска једначина n-тог степена

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{30}$$

образује се друга алгебарска једначина такође n-тог степена

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + b_n = 0, \tag{31}$$

која је таква да су њени корени (30) сразмерни логаритмима одговарајућих корена једначине (31), и где је коефицијенат те пропорционалности неки унапред дати реалан број r.

Нека су

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, & - \textit{ корени јед начине } (30) \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, & - \textit{ корени јед начине } (31), \end{array}$$

па ће према услову задатка бити

$$\beta_1 = e^{r\alpha_1}, \quad \beta_2 = e^{r\alpha_2}, \ldots, \beta_n = e^{r\alpha_n}.$$

Разликујмо ова два случаја.

Први случај: $r > 0$. Нека је ω такав један реалан или комплексан број, да су реални делови свију количина

$$\omega + \alpha_1, \quad \omega + \alpha_2, \ldots, \omega + \alpha_n$$

негативни. Ако се са једначином (30) изврши трансформација

$$x = y - \omega \tag{32}$$

резултат ће бити извесна алгебарска једначина n-тог степена

$$\Phi_1(y) = 0 \tag{33}$$

чији ће сви корени имати негативне реалне делове.

Потом се образује једначина

$$\Phi_2(y) = 0 \tag{34}$$

чији би корени били збирови два корена једначине (33); затим једначину

$$(35) \qquad \Phi_3(y) = 0$$

чији би корени били збирови три корена једначине (33) итд. Ако се означи са

$$(36) \qquad \Phi_k(y) = 0$$

образована једначина, чији би корени били збирови k корена једначине (33), имаће степен

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1),\dots,(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

Нека су $P_k(y)$ и $Q_k(y)$ реалан и имагинаран део израза

$$\Phi_k(y\sqrt{-1})$$

тако да је

$$(37) \qquad \Phi_k(y\sqrt{-1}) = P_k(y) + \sqrt{-1}Q_k(y);$$

P_k и Q_k биће очевидно полиноми по y. Помоћу ових полинома образоваће се рационална алгебарска функција

$$(38) \qquad \chi_k(y) = \frac{Q_k \dfrac{dP_k}{dy} - P_k \dfrac{dQ_k}{dy}}{P_k^2 + Q_k^2}.$$

Пошто је

$$\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = \frac{P_k - \sqrt{-1}Q_k}{P_k + \sqrt{-1}Q_k},$$

одатле је

$$(39) \quad \frac{d}{dy}\log\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = \frac{P_k' - \sqrt{-1}Q_k'}{P_k - \sqrt{-1}Q_k} - \frac{P_k' + \sqrt{-1}Q_k'}{P_k + \sqrt{-1}Q_k} = 2\sqrt{-1}\,\frac{Q_kP_k' - P_kQ_k'}{P_k^2 + Q_k^2}$$

то је идентички према (38) и (39)

$$(40) \qquad \chi_k(y) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d}{dy}\log\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})}$$

Ако означимо корене једначине (36) са $\gamma_{k,j}$ где j варира од $j=1$ до $j = \binom{n}{k}$, онда ће бити идентички

$$\frac{d}{dz}\log\Phi_k(z) = \sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} \frac{1}{z-\gamma_{k,j}}$$

и према томе

$$\frac{d}{d(-y\sqrt{-1})}\log\Phi_k(-y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\sum\frac{1}{y-\sqrt{-1}\gamma_{k,j}},$$

а отуда

$$\frac{d}{dy}\log\Phi_k(-y\sqrt{-1}) = \sum\frac{1}{y-\sqrt{-1}\gamma_{k,j}}. \tag{41}$$

Тако би исто било да је

$$\frac{d}{dy}\log\Phi_k(y\sqrt{-1}) = \sum\frac{1}{y+\sqrt{-1}\gamma_{k,j}}. \tag{42}$$

Одузимањем (42) од (41) добија се

$$\frac{d}{dy}\log\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = 2\sqrt{-1}\sum\frac{\gamma_{k,j}}{y^2+\gamma^2{}_{k,j}}, \tag{43}$$

одакле, на крају, упоређењем са (40) излази да је

$$\chi_k(y) = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}\frac{\gamma_{k,j}}{y^2+\gamma_{k,j}^2}. \tag{44}$$

Образујмо одређени интеграл

$$I_k = \int_0^\infty \chi_k(z)\cos rz\cdot dz \tag{45}$$

који се према једначини (44) може написати у облику

$$I_k = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}\gamma_{k,j}\int_0^\infty\frac{\cos rz}{z^2+\gamma^2{}_{k,j}}\,dz. \tag{46}$$

Пошто сви корени једначине (36) имају реалне делове негативне, онда је

$$r>0, \qquad R(\gamma_{k,j})<0,$$

што се према обрасцу (26) може написати да је

$$\int_0^\infty \frac{\cos rz}{z^2+\gamma_{k,j}^2}\,dz = -\frac{\pi}{2\gamma_{k,j}}\,e^{r\gamma_{k,j}}$$

и према томе је

$$I_k = -\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}}. \tag{47}$$

Корен $\gamma^{k,j}$ једнак је збиру од k корена једначине (33), а пошто су ови последњи

$$\omega+\alpha_1, \quad \omega+\alpha_2,\ldots,\omega+\alpha_n$$

то је $\gamma_{k,j}$ једнак збиру од k корена α_i дате једначине (30), пошто се овоме збиру дода $k\omega$. Према томе и према релацији

$$\beta_i = e^{r\alpha_i}$$

израз $e^{r\gamma_{k,j}}$ биће раван производу од k корена једначине (31), помноженом са $e^{kr\omega}$. Израз

$$\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}}$$

биће једнак збиру производа од k корена β_i једначине (31), помноженом са $e^{kr\omega}$ и према томе је

$$\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}} = (-1)^k e^{rk\omega} b_k. \tag{48}$$

Заменом у (47) добија се да је

$$I_k = (-1)^{k+1} e^{kr\omega}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot b_k,$$

одакле је

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{2e^{-kr\omega}}{\pi}\,I_k. \tag{49}$$

Стављајући у овоме обрасцу узастопце да је

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

добијају се обрасци

$$(50)\qquad \begin{aligned} b_1 &= -\frac{2e^{r\omega}}{\pi} I_1 \\ b_2 &= \frac{2e^{2r\omega}}{\pi} I_2 \\ b_3 &= -\frac{2e^{3r\omega}}{\pi} I_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ b_n &= (-1)^n \frac{2e^{nr\omega}}{\pi} I_n \end{aligned}$$

из којих се могу израчунати сви коефицијенти тражене једначине (31) и тиме решити постављени задатак трансформације. Приметимо само да се последњи сачинилац b_n може израчунати непосредно по обрасцу

$$(51)\qquad b_n = (-1)^n e^{ra_1} e^{ra_2} \dots e^{ra_n} = (-1)^n e^{-ra_1}.$$

Други случај: $r < 0$. Нека је ρ ма какав реалан или комплексан број такав да су реални делови свих количина

$$\rho + \alpha_1, \quad \rho + \alpha_2, \dots, \rho + \alpha_n$$

позитивни. Ако се са датом једначином (30) изврши трансформација

$$x = y - \rho$$

резултат ће бити извесна алгебарска једначина n-тог степена

$$(52)\qquad \Psi_1(y) = 0$$

чији ће сви корени имати позитивне реалне делове.

Образујмо низ једначина

$$\Psi_2(y) = 0, \quad \Psi_3(y) = 0, \dots, \Psi_n(y) = 0$$

које су такве, да су корени једначине

$$(53)\qquad \Psi_k(y) = 0$$

једнаки збировима од k корена једначине (52).

Образујмо, на начин истоветан са оним у првоме случају, рационалну алгебарску функцију $\chi_k(y)$ дефинисану једначином[1] (38), и помоћу ње одређени интеграл I_k дефинисан једначином (45), па се као и пре, пошто је у овом случају

[1] Где само треба функцију $\Phi_k(y)$ заменити функцијом $\Psi_k(y)$.

$$r < 0, \quad R(\gamma_{k,j}) > 0$$

добија да је

(54) $$b_k = (-1)^k \frac{re^{kr}}{\pi} I_k.$$

Стављајући у овоме општем обрасцу узастопно

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

добијају се посебни обрасци за израчунавање тражених коефицијената

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

једначине (31).

Као што се види, решење постављеног задатка трансформације може се свести на ова три посебна задатка.

1. *Тражење каквога броја* ω, *који кад се дода коренима дате једначине, сви такви збирови имају реалне делове негативне, и тражење каквога броја* ρ, *за који ће сви ти збирови имати реалне делове позитивне.*

2. *Образовање узастопних алгебарских једначина* $\Phi_k(y) = 0$ и $\Psi_k = 0$ *чији су корени једнаки збировима по два и два, три и три итд. корена дате једначине.*

3. *Израчунавање одређених интеграла* $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Први задатак: одређивање бројева ω и ρ.

Нека је

(55) $$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

дата једначина. Пре свега, може се десити да сви корени имају негативне реалне делове. Да би то био случај, потребно је (али не и довољно) да сви коефицијенти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ буду позитивни. G. Hurwitz је у последње време дошао до једне теореме, која даје у исто време и потребне и довољне услове за тај факт и они се састоје у следећем.

Образује се помоћу коефицијената $a_1, \ldots, a_n$ детерминанта

(56) $$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2m-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2m-3} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{2m-4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \end{vmatrix}$$

састављена по овоме правилу: идући са лева на десно по једној истој хоризонталној врсти, индекси расту са по две јединице; идући одозго наниже у једноме истом вертикалном стубу, индекси расту са по једном јединицом; поред тога, за све индексе k негативне или веће од степена n дате једначине ставља се $a_k = 0$ и $a_0 = 1$.

Да би једначина (55) *имала само корене са негативним реалним деловима, потребно је и довољно да низ вредности*

$$a_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}, a_n \tag{57}$$

буде позитиван.[2]

Детерминанте $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ израчунале би се по обрасцима

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \quad \text{итд.}$$

Ако једначина (55) задовољава ове услове, сви њени корени имају негативне реалне делове и према томе *може се узети да је* ω *равно нули или ма коме броју, чији је реални део нула или неки негативан број.*

Тако исто ако једначина добијена из (55) заменивши x са $-x$ задовољава горње услове, једначина (55) има само корена са позитивним реалним деловима и према томе *може се узети да је* ρ *равно нули или ма коме броју, чији је реални део нула или неки позитиван број.*

Претпоставимо сад најопштији случај: да један или други од ових услова, или обадва, нису задовољени. Реални делови корена једначине (55) не могу тада имати исти знак.

Да би у томе случају одредили број ω, заменимо у (55) x са

$$x = y - \xi$$

где је ξ један за сад неодређен број и нека је

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1} y + c_n = 0 \tag{58}$$

тако добијена нова једначина, где ће чиниоци $c_1 \ldots c_n$ бити извесни полиноми по ξ.

Образујмо Hurwitz-ов низ

$$c_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}, c_n \tag{59}$$

[2] Hurwitz: *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reallen Theilen besitzt,* Math. Ann. Bd. 46. 1895. S. 273–284.

за једначину (58); сваки од чланова тога низа биће известан полином по променљивој ξ тако, да ће низ (59) бити представљен једним низом полинома

$$\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi). \tag{60}$$

Пре свега лако се доказује, да ако су сви полиноми овога низа позитивни за једну реалну вредност $\xi = a$, они ће бити позитивни и за све вредности ξ мање од a. Јер пошто низ (60) за $\xi = a$ задовољава Hurwitz-ове услове, једначина (58) кад се у овој замени ξ том вредношћу, има само корене са негативним реалним деловима па је

$$R(\alpha_i + a) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а пошто је $\xi < a$ биће à fortiori

$$R(\alpha_i + \xi) < 0,$$

што значи, опет према Hurwitz-овој теореми, да низ (60) мора бити позитиван.

Према томе, *кад је нађен ма какв реалан број* а, *за који је низ* (60) *позитиван, може се за* ω *узети ма какав број чији је реални део мањи од* а. А егзистенција броја a очевидна је већ и према томе, што сваки број мањи од горње границе реалних делова једначине (55), кад се тој граници промени знак, задовољава услов тражен за a.

На истоветан би се начин поступало и при одређивању броја ρ, с том разликом, што би се на место једначине (58) имала она добијена трансформацијом из (55)

$$x = \xi - y.$$

Приметимо још да се помоћу броја ω може имати приближан појам о величинама коефицијената $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тражене једначине (31) јер из образаца

$$b_1 = -\sum e^{r\alpha_i}, \quad b_2 = \sum e^{r(\alpha_i + \alpha_j)}, \ldots$$

добијају се једначине

$$|b_1| < \sum \left| e^{r\alpha_i} \right|, \quad b_2 < \sum \left| e^{r(\alpha_i + \alpha_j)} \right|, \ldots \tag{61}$$

а пошто је

$$R(\alpha_i) + \omega < 0$$

онда је

$$R(\alpha_i) < -\omega$$

што је

$$\left| e^{r\alpha_i} \right| < e^{-r\omega}$$

и према томе

$$\left| e^{r(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)} \right| < e^{-kr\omega}.$$

Упоређењем са (61) добијају се неједначине

$$\begin{aligned} &|b_1| < \binom{n}{1} e^{-r\omega} \\ &|b_2| < \binom{n}{2} e^{-2r\omega} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|b_k| < \binom{n}{k} e^{-kr\omega} \end{aligned} \tag{62}$$

које одређују горњу границу модула тражених коефицијената b_k.

Други задатак: формација узастопних једначина $\Phi_k(y)=0$ и $\Psi_k(y)=0$.

Задатак се састоји у томе, да се, кад је дата једначина $f(x)=0$ образују узастопне једначине, чији ће корени бити збирови од два, три, четири итд. корена дате једначине.

Он се, као што је познато, решава употребом симетричних функција корена једначине $f(x)=0$, које ће бити рационалне функције сачинилаца $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Трећи задатак: израчунавање одређених интеграла $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$.

Задатак се своди на израчунавање $n-1$ интеграла облика

$$I = \int_0^\infty \chi(x) \cos rx\, dx, \tag{63}$$

где се $\chi(x)$ може написати у једноме или другом облику

$$\chi(x) = \frac{PQ' - P'Q}{P^2 + Q^2}, \tag{64}$$

$$\chi(x) = \sum_{(i)} \frac{\gamma_i}{x^2 + \gamma_i^2}. \tag{65}$$

P и Q су извесни полиноми по x са сталним и реалним коефицијентима; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ су корени извесне алгебарске једначине и њихови *реални делови имају сви исти знак.*

Функција $\chi(x)$ је алгебарска рационална функција са реалним коефицијентима, као што се види из (64). Осим тога, *та функција има исти знак за све реалне вредности* x *и по апсолутној вредности* може донекле расти кад x расте почевши од нуле, али кад x пређе једну извесну позитивну вредност, *апсолутна вредност функције стално опада и тежи асимптотно нули кад* x *бесконачно расте.*

Пошто сви корени γ_i имају реалне делове истога знака, ако су ти корени сви реални, очевидно је да ће и сви изрази

$$\frac{\gamma_i}{x^2 + \gamma_i^2}$$

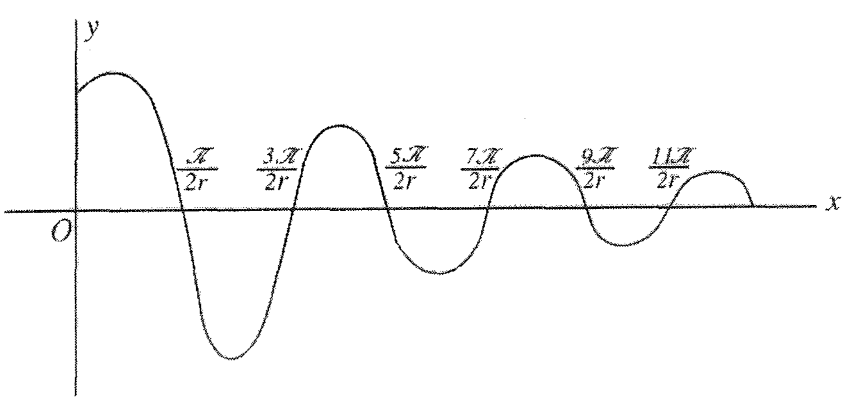
имати исти знак и да ће им апсолутна вредност стално опадати до нуле, кад x расте од 0 до ∞.

Ако има и имагинарних корена и ако је нпр.

$$\gamma_1 = p + q\sqrt{-1}, \quad \gamma_2 = p - q\sqrt{-1}$$

тим коренима одговара збир

$$\frac{\gamma_1}{x^2 + \gamma_1^2} + \frac{\gamma_2}{x^2 + \gamma_2^2} = \frac{2p(x^2 + p^2 + q^2)}{(x^2 + p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2}, \tag{66}$$



Слика 3.

а пошто за све корене p има један исти знак, тај ће према обрасцу (66) бити и знак функције $\chi(x)$, па ма каква била вредност x. У исто време из обрасца (66) види се да збир са леве стране, почевши од извесне вредности x, непрестано опада до нуле, што значи, да ће тај исти случај бити и са самом функцијом $\chi(x)$.

Из тога се лако увиђа да ће, ако се са $\theta(x)$ означи апсолутна вредност функције $\chi(x)$, крива линија

$$y = \theta(x)\cos rx$$

имати облик сл. 3., а вредност интеграла I биће равна површини између те криве линије и апсцисне осе, рачунајући од $x = 0$ до $x = \infty$.

Сама ова вредност може се израчунати са жељеном апроксимацијом на следећи начин. Нека је $\zeta(x)$ функција од x, која задовољава ова два услова:

1. да почевши од неке позитивне вредности x-а (или од $x = 0$) непрекидно опада и тежи нули кад x бесконачно расте:

2. да се вредност одређеног интеграла

$$P = \int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx\, dx \tag{67}$$

може тачно израчунати за ма какав цео и позитиван број k.

Нека су затим

$$h_1, h_2, \ldots, h_n$$

вредности које добија функција $\chi(x)$ кад се у њој узастопце смењује

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \tag{68}$$

где су x_i ма које позитивне вредности x-а. Тада се увек може одредити m коефицијената

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

тако да функција

$$\Omega(x) = A_1\zeta(x) + A_2\left[\zeta(x)\right]^2 + \ldots + A_m\left[\zeta(x)\right]^m \tag{69}$$

за вредности x-а у низу (68) добије одговарајуће вредности

$$h_1, h_2, \ldots, h_m;$$

ови би се чиниоци добили решењем система од m линеарних једначина

$$\Omega(x_1) = h_1, \ldots, \Omega(x_m) = h_m$$

са m непознатих количина $A_1,\dots,A_m$. И кад су ови коефицијенти израчунати функција $\chi(x)$ може се у интегралу

$$I = \int_0^\infty \chi(x)\cos rx\,dx$$

изменити функцијом $\Omega(x)$; грешка ће бити утолико мања уколико је већи број вредности (68) и уколико је довољно повећавање тога броја она се може учинити мањом од било кога малог броја.

Према томе, може се приближно узети да је

$$P = \int_0^\infty \Omega(x)\cos rx\,dx = \sum_{(k)} A_k \int_0^\infty [\zeta(x)]^k \cos rx\,dx. \tag{70}$$

За интеграле

$$\int_0^\infty [\zeta(x)]^k \cos rx\,dx \qquad (k = 1,2,\dots,m) \tag{71}$$

претпостављено је да се могу тачно израчунати; нека су дакле

$$H_1, H_2, \dots, H_m$$

узастопне вредности тих интеграла за $k = 1,2,\dots,m$ па ће бити

$$P = A_1H_1 + A_2H_2 + \dots + A_mH_m \tag{72}$$

и то са толико већом апроксимацијом колико је број m *вредности* (68) *већи.*

Као што се види, кад год је могућно израчунати одређене интеграле (71), посао приближног израчунавања интеграла P своди се:

1. на одређивање вредности $h_1, h_2, \dots, h_m$ које добија функција $\chi(x)$, за $x = x_1, x_2, \dots, x_m$, а ове се одређују простом заменом;

2. на одређивање коефицијената $A_1, A_2, \dots, A_m$ које се своди на решавање m линеарних једначина од m непознатих.

Могућност израчунавања интеграла (71) зависи од избора функције $\zeta(x)$, која би задовољавала горе наведене услове. Тако, на пример, може се узети да је

$$\zeta(x) = e^{-\lambda x}, \tag{73}$$

где је λ неки позитиван број; тада би имали да је

$$\int_0^\infty [\zeta(x)]^k \cos rx\,dx = \int_0^\infty e^{-k\lambda x}\cos rx\,dx = \frac{k\lambda}{r^2 + k^2\lambda^2}. \tag{74}$$

Тако исто може се узети функција

$$\zeta(x) = e^{-\lambda x^2}, \tag{75}$$

где је опет λ неки позитиван број; тада би било

$$\int_0^\infty [\zeta(x)]^k \cos rx\, dx = \int_0^\infty e^{-k\lambda x^2} \cos rx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k\lambda}} e^{-\frac{r^2}{4k\lambda}}. \tag{76}$$

Број λ би се одредио тако да се крива $y = \Omega(x)$ што боље подудара са кривом $y = \chi(x)$; уосталом избор овога броја не утиче много на степен апроксимације, који зависи углавном од броја m вредности (68).

Приметимо и то да у обрасцу (72) коефицијенти $A_1 \dots A_m$ не зависе од r које фигурише само у изразима $H_1, \dots, H_m$.

Узевши на пример за $\zeta(x)$ функцију $e^{-\lambda x}$ имали бисмо

$$P = \lambda\left[\frac{A_1}{r^2+\lambda^2} + \frac{2A_2}{r^2+4\lambda^2} + \dots + \frac{mA_m}{r^2+m^2\lambda^2}\right],$$

где би се $A_1 \dots A_m$ добили решењем линеарних једначина

$$\begin{aligned}
A_1 e^{-\lambda x_1} + A_2 e^{-2\lambda x_1} + \dots + A_m e^{-m\lambda x_1} &= h_1 \\
A_1 e^{-\lambda x_2} + A_2 e^{-2\lambda x_2} + \dots + A_m e^{-m\lambda x_2} &= h_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
A_1 e^{-\lambda x_m} + A_2 e^{-2\lambda x_m} + \dots + A_m e^{-m\lambda x_m} &= h_m.
\end{aligned}$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ КОЕФИЦИЈЕНАТА $b_1, b_2, \dots, b_m$ У ОБЛИКУ РЕДОВА

Означимо као и раније са

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ корене дате једначине (30)
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ корене трансформисане једначине (31).

Тада ће бити

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\sum \beta_i = -\sum e^{r\alpha_i} \\
b_2 &= \sum \beta_i\beta_j = \sum e^{r(\alpha_i+\alpha_j)} \\
b_3 &= -\sum \beta_i\beta_j\beta_k = \sum e^{r(\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{77}$$

Замислимо, као и раније, образоване узастопне алгебарске једначине

$$(78) \qquad \Phi_2(y)=0, \quad \Phi_3(y)=0,\ldots,\Phi_n(y)=0$$

чији би корени били једнаки збировима од два, три, четири итд. корена дате једначине и означимо генерално са $S_k^{(i)}$ збир k-тих степена корена једначине $\Phi_i(y)=0$.

Ако се експоненцијални изрази на десној страни образаца (77) развијају у бескрајне редове, добија се да је

$$(79) \qquad \begin{aligned} b_1 &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}S_k^{(1)} \\ b_2 &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}S_k^{(2)} \\ b_3 &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}S_k^{(3)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Редови на десној страни конвергентни су за све вредности броја r и дају коефицијенте $b_1, b_2, b_3\ldots$ са коликом се хоће апроксимацијом. Но, при њиховој употреби још би било важно знати на коме се члану реда можемо задржати, па да се тражени коефицијент добије са каквом унапред датом апроксимацијом, на пример са 10^{-h} тачно.

Нека је ρ горња граница модула корена α_i, па ће бити

$$(80) \qquad \left|S_k^{(i)}\right| < \binom{n}{i} i^k \rho^k,$$

где је n степен дате једначине.

Уочимо општи образац

$$(81) \qquad b_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}S_k^{(i)}$$

и задржимо само његових m првих чланова, тако да буде

$$(82) \qquad b_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{m}\frac{r^k}{k!}S_k^{(i)} + R_m,$$

где је

$$(83) \qquad R_m = \frac{r^m}{m!}S_m^{(i)} + \frac{r^{m+1}}{(m+1)!}S_{m+i}^{(i)} + \ldots$$

Водећи рачуна о неједначини (80) добија се да је

$$|R_m| < \sum_{k=m}^{\infty} u_k,$$

где је краткоће ради стављено да је

$$u_k = \binom{n}{i} \frac{[ir\rho]^k}{k!}.$$

Узмимо индекс m довољно велики да би била задовољена ова два услова:

1. да буде

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{1}{2},$$

2. да буде

$$u_m < \frac{1}{10^h}.$$

Тада ће, према познатом правилу из теорије редова бити

$$R_m < \frac{1}{10^h}.$$

Услов 1. доводи до

(84) $$m > 2ir\rho - 1,$$

а услов други до

(85) $$\binom{n}{i} \frac{[ir\rho]^m}{m!} < \frac{1}{10^h}.$$

Ранг m *члана, на коме се при израчунавању коефицијента* b_i *може зауставити да би се овај коефицијент имао са апроксимацијом већом од* 10^{-h} *биће дат најмањом вредношћу целог броја* m, *што задовољава услове* (84) *и* (85).

О ЈЕДНОЈ ОСОБИНИ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ $y = e^{rx}$

Замислимо да је са датом једначином $f(x) = 0$ извршена прво трансформација

$$x = y + t,$$

где је t какав за сад неодређен број и нека је

$$\varphi(y) = 0$$

резултат те трансформације. Извршимо затим, према ранијим упутствима, трансформацију

$$y = \frac{1}{r} \log z,$$

или

$$z = e^{ry},$$

где је r неки реалан позитиван број, и нека је

$$\psi(z) = 0 \tag{86}$$

нова тако добијена једначина.

Ако се са $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ означе корени једначине (86) биће идентични

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dz} = \sum_1^n \frac{1}{z - \gamma_i},$$

а пошто је

$$z = e^{ry} = e^{r(x-t)}$$

то ће бити

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dz} = \sum_1^n \frac{1}{z - e^{r(x-t)}}.$$

Претпоставимо да се тражи број корена првобитне једначине $f(x) = 0$, који се налазе са леве или десне стране једне дате праве $x = a$ паралелне осовини имагинарних вредности у равни комплексних количина.

Нека су a_1 и $a_2 (a_1 < a < a_2)$ две такве вредности да једначина $f(x) = 0$ нема ни један корен у простору између правих $x = a_1$ и $x = a_2$.

Нека су затим

$1, 2, 3, \ldots, p$	индекси корена са леве стране праве $x = a$
$p+1, p+2, \ldots, n$	индекси корена са десне стране те праве.

Тражени број p очевидно је у исто време раван и броју корена са леве стране праве $x = A$, где је краткоће ради стављено да је

$$x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Означимо са $\lambda(r)$ вредност израза

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dz}$$

кад се у овоме стави $z = 1$, $t = A$, па ће бити

$$\lambda(r) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{1 - e^{r(\alpha_i - A)}}, \tag{87}$$

где су α_i корени једначине $f(x) = 0$.

Уочимо прво један корен α_1 реалан и са леве стране праве $x = a$. За тај ће корен бити $\alpha_1 < a$, па дакле

$$0 < e^{r(\alpha_1 - A)} < e^{r(a_1 - A)} < 1$$

и према томе

$$\frac{1}{1 + e^{r(a_1 - A)}} < \frac{1}{1 - e^{r(\alpha_1 - A)}} < \frac{1}{1 - e^{r(a_1 - A)}}. \tag{88}$$

Уочимо затим два имагинарна конјугована корена α_1 и α_2, опет са леве стране праве $x = a$, ставимо да је

$$\alpha_1 = \xi + \eta i,$$
$$\alpha_2 = \xi - \eta i$$

па ће бити идентични

$$\frac{1}{1 - e^{r(\alpha_1 - A)}} + \frac{1}{1 - e^{r(\alpha_2 - A)}} = \frac{2\left[1 - e^{r(\xi - A)} \cos r\eta\right]}{1 - 2e^{r(\xi - A)} \cos r\eta + e^{2r(\xi - A)}}. \tag{89}$$

Пошто за реалне a и x и

$$-1 < a < +1$$
$$0 < x < 1$$

мора бити

$$0 < \frac{1}{1 + x} < \frac{1 - ax}{1 - 2ax + x^2} < \frac{1}{1 - x}$$

то је лако уверити се да је израз на десној страни једначине (89) увек већи од

$$\frac{2}{1 + e^{r(\xi - A)}},$$

а увек мањи од

$$\frac{2}{1 - e^{r(\xi - A)}},$$

а пошто је, са друге стране, $\xi < a_1$, па дакле

$$e^{r(\xi - A)} < e^{r(a_1 - A)} < 1$$

то је

$$(90)\qquad \frac{2}{1+e^{r(a_1-A)}}<\frac{1}{1-e^{r(\alpha_1-A)}}+\frac{1}{1-e^{r(\alpha_2-A)}}<\frac{2}{1-e^{r(a_1-A)}}.$$

Неједначине (88) и (90) показују да је за све корене са леве стране праве $x=a$, било да су ови реални или имагинарни

$$(91)\qquad \frac{p}{1+e^{r(a_1-A)}}<\sum_{1}^{p}\frac{1}{1-e^{r(\alpha_i-A)}}<\frac{p}{1-e^{r(\alpha_2-A)}}.$$

Уочимо сада корене са десне стране праве $x=a$; то су истовремено и корени са десне стране праве $x=a_2$.

За један такав реалан корен α_1 биће $\alpha_1>a_2$ па дакле

$$1<e^{r(a_2-A)}<e^{r(\alpha_1-A)}$$

и према томе

$$(92)\qquad \frac{1}{1-e^{r(a_2-A)}}<\frac{1}{1-e^{r(\alpha_1-A)}}<0.$$

Ако су два корена

$$\alpha_1=\xi+i\eta$$
$$\alpha_2=\xi-i\eta$$

имагинарни, имали би опет једначину (89), али са том разликом што је $\xi-A>0$ па дакле

$$e^{r(\xi-A)}>1$$

и онда пошто за a и x реалне и такве да је

$$-1<a<+1,\qquad x>1$$

мора бити

$$\frac{1}{1-x}<\frac{1-ax}{1-2ax+x^2}<\frac{1}{1+x},$$

то ће бити

$$(93)\qquad \frac{2}{1-e^{r(a_2-A)}}<\frac{1}{1-e^{r(\alpha_1-A)}}+\frac{1}{1-e^{r(\alpha_2-A)}}<\frac{2}{1+e^{r(a_2-A)}},$$

и према томе на основу неједначина (92) и (93) биће

$$(94)\qquad \frac{n-p}{1-e^{r(a_2-A)}}<\sum_{n+1}^{n}\frac{1}{1-e^{r(\alpha_i-A)}}<\frac{n-p}{1+e^{r(a_2-A)}}.$$

Из (91) и (94) добија се

$$\frac{p}{1+e^{r(a_1-A)}}+\frac{n-p}{1-e^{r(a_2-A)}}<\lambda(r)<\frac{p}{1-e^{r(a_1-A)}}+\frac{n-p}{1+e^{r(a_2-A)}}$$

или још

$$p-\varepsilon<\lambda(r)<p+\eta, \tag{95}$$

где је краткоће ради стављено да је

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{pe^{r(a_1-A)}}{1+e^{r(a_1-A)}}+\frac{n-p}{e^{r(a_2-A)}-1}, \\ \eta &= \frac{pe^{r(a_1-A)}}{1-e^{r(a_1-A)}}+\frac{n-p}{e^{r(a_2-A)}+1}. \end{aligned} \tag{96}$$

Пошто је

$$a_1-A<0, \quad a_2-A>0$$

то се из (96) лако увиђа да ε и η теже нули кад r бескрајно расте, тј. да према (95) $\lambda(r)$ *тежи траженоме броју корена* p.

Али функција $\lambda(r)$ може нам дати овај број корена а да се не мора пустити да r бескрајно расте. Потражимо најмању вредност параметра r за коју би истовремено били задовољени услови

$$\begin{aligned} \frac{e^{r(a_1-A)}}{1+e^{r(a_1-A)}} &< \frac{1}{4n}, \\ \frac{1}{e^{r(a_2-A)}-1} &< \frac{1}{4n}, \\ \frac{e^{r(a_1-A)}}{1-e^{r(a_1-A)}} &< \frac{1}{4n}, \\ \frac{1}{e^{r(a_2-A)}+1} &< \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Лако је наћи да је то онда кад је

$$r>\frac{2\log(4n+1)}{a_2-a_1} \tag{97}$$

и ако је то случај, сваки члан десних страна једначина (96) мањи је од $\frac{1}{4}$, тј. биће

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2},$$
$$0<\eta<\frac{1}{2},$$

а према томе и према (95) биће

$$p-\frac{1}{2}<\lambda(r)<p+\frac{1}{2},$$

или још

$$\lambda(r) - \frac{1}{2} < p < \lambda(r) + \frac{1}{2},$$

а то показује *да је број* p *једнак броју који се добија кад се у броју*

$$0,5 + \lambda(r)$$

занемаре сви децимални разломци и задржи само цео број.

Из тога се изводи једна важна особина трансформације, о којој је било говора у току ове расправе, *а која се може исказати у облику ове теореме.*

Нека је Δ једна област у равни комплексних количина, ограничена двема правим линијама $x = a_1$ и $x = a_2$, паралелним оси имагинарних вредности, а за коју се претпоставља да не садржи ни један корен дате једначине $f(x) = 0$.

Извршимо са овом једначином најпре просту трансформацију $x = y + t$, а затим трансцендентну трансформацију $z = e^{ry}$. Образујмо логаритамски извод по z од полинома тако добијене једначине и изменимо у овоме

$$z = 1, \quad t = \frac{1}{2}(a_1 + a_2);$$

и на крају изменимо r ма којим реалним позитивним бројем већим од вредности

$$\frac{2\log(4n+1)}{\delta},$$

где n означава степен једначине, δ ширину области Δ (тако да је $\delta = a_2 - a_1$). Нека је λ број добијен као резултат те измене.

Једначина f(x) = 0 *имаће толико корена са леве стране области* Δ, *колико има целих јединица у броју* 0,5 + λ, *а онолико корена са десне стране те области колико има целих јединица у броју* n–λ–0,5.

Ова теорема даје посебну важност оваквој врсти трансформација и истиче важност тражења што лакших метода за њихово извршење.[**]

[**] Рад је реферисан у FdM, B. 32, S. 114, а Владимир Варићак је саставио на немачком језику кратак садржај ове Петровићеве расправе што је и објављено JAZU, Izvješća o raspravama matematičko-prirodoslovnoga razreda, 1867–1914, Zagreb 1916–1917, str. 38–39.

НАПОМЕНА О НУЛАМА ТЕЈЛОРОВИХ РЕДОВА*

1. Одређујући горњу границу модула било које детерминанте, за чије елементе знамо горње границе модула, г. Hadamard је дошао до следеће теореме.[1]

Нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако означимо са $\mathrm{s_h}$ *суму квадрата модула елемената*

$$a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn}$$

врсте h, *квадрат модула од* Δ *никада неће бити већи од вредности производа*

$$s_1 s_2 s_3 \dots s_n.$$

Ова теорема, прикладно примењена, води до извесних резултата у вези са Тејлоровим редовима, а на које ћемо овде указати.

2. Размотримо ред

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \tag{1}$$

где коефицијенти $a_0, a_1, a_2, \dots$ могу бити реални или имагинари, а z представља комплексну променљиву. Увек можемо претпоставити да је коефицијент a_0 различит од нуле; ако то није случај, онда можемо испитивати ред добијен дељењем реда (1) са z^p, где је p ред нуле, $z = 0$.

---

* Наслов оригинала *Remarque sur les zéros des séries de Taylor,* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1901, t. XXIX, pp. 303–312

[1] Bulletin des Sciences mathématiques, t. XVII, 1893, pp. 240–246.

Нека је r радијус конвергенције реда (1) и ставимо

$$z = ty, \tag{2}$$

где је y нова комплексна променљива, а t позитиван реалан број мањи од r. Наш ред постаје

$$f(z) = \varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots, \tag{3}$$

где је

$$b_n = a_n t \tag{4}$$

и где је полупречник конвергенције

$$r_1 = \frac{r}{t} > 1. \tag{5}$$

Нека је

$$\frac{1}{\varphi(y)} = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots, \tag{6}$$

где су коефицијенти c_n дати са

$$c_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \Delta_n, \tag{7}$$

и где је

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Ставимо затим

$$\begin{cases} s_1 = |b_0|^2 + |b_1|^2, \\ s_2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ s_{n-1} = |b_0|^2 + |b_1|^2 + \dots + |b_{n-1}|^2, \\ P_n = |b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2 . \end{cases} \tag{9}$$

Према већ наведеној Адамаровој теореми, имаћемо

$$\Delta_n \leq \sqrt{s_1 s_2 \dots s_{n-1} P_n}. \tag{10}$$

Упоредимо ред (6) са редом

$$(11) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots,$$

чији су коефицијенти дати са

$$(12) \qquad \alpha_n = \left| \frac{1}{b_0} \right|^{n+1} \sqrt{s_1 s_2 \ldots s_{n-1} P_n}\,.$$

Према неједнакости

$$|c_n| \leq \alpha_n,$$

ред (6) ће конвергирати за сваку вредност y, за коју конвергира ред (11). Дакле, како за $n = \infty$ имамо

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \dfrac{|b_0|}{\sqrt{s_n}} \sqrt{\dfrac{P_n}{P_{n+1}}}, \\ \lim s_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n t^n|^2, \\ \lim \dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \lim \dfrac{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_n|^2}{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_{n+1}|^2} = 1, \end{cases}$$

узимајући

$$\rho = \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}},$$

имаћемо

$$(14) \qquad \rho = \frac{|a_0|}{\sqrt{\overline{\omega}(t)}},$$

где је

$$(15) \qquad \overline{\omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n t^n|^2 \,.$$

Ред (15) ће конвергирати за $t < r$. Дакле, вредност ρ ће бити различита од нуле, а како она представља радијус конвергенције реда (11), ред (6) ће конвергирати такође у кругу пречника мањег или једнаког од ρ. Отуда функција $\varphi(y)$ неће имати ни једну нулу модула мањег од ρ. Како имамо

$$z = ty,$$

функција $f(z)$ неће имати ни једну нулу модула мањег од

$$(16) \qquad \mu = \frac{|a_0 t|}{\sqrt{\overline{\omega}(t)}},$$

тако да се вредност t налази између 0 и r.

Изводимо следећи резултат.

Ако са λ означимо најмањи модул нула реда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{17}$$

и ако формирамо функцију

$$u(z) = \left|\frac{1}{z^2}\right| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|^2, \tag{18}$$

имаћемо

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}, \tag{19}$$

под условом да је вредност комплексне променљиве z *у унутрашњости области конвергенције реда* (17).

3. Претходни резултат даје могућност израчунавања доњих граница модула вредности нула датог Тејлоровог реда, када је дат закон за коефицијенте, или бар нумеричке вредности довољног броја тих коефицијената. С тога ћемо доделити променљивој z било коју вредност чији је модул мањи од r и заменићемо је у формулу (19); у специјалном случају кад су коефицијенти $a_0, a_1, a_2, \ldots$ сви реални, узећемо за z било коју реалну вредност 0 и r. Свака од тих вредности, када се замени у израз

$$\mu = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$$

одређује доњу границу модула нула разматраног реда. Оцена једне такве границе онда се проналази тачним или приближним рачунањем суме реда (18) у фиксираној форми. Тада можемо поступити на следећи начин.

1. Израчунати приближне вредности функције $u(z)$ и горње границе учињене грешке.

2. Још боље је *заменити коефицијенте* $|a_n|^2$ *реда* (18) *другим коефицијентима* e_n, *тако да је*

$$e_n \geq |a_n|^2$$

и израчунати суму тако добијеног реда

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{2n}.$$

Јасно је, према претходном, *да ако ставимо*

$$v(z) = \frac{\Phi(z)}{z^2}$$

и ако доделимо промењивој z *било коју реалну вредност између* 0 *и* r, *одговарајућа вредност*

$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(z)}} = z\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(z)}}$$

биће тражена доња граница.

Додељивањем промењивој z различитих позитивних реалних вредности мањих од r, добићемо различите вредности доње границе μ. Да би једна таква граница била највећа могућа, потребно је да одговарајућа вредност функције $v(z)$ буде најмања могућа. Испитајмо сада начин на који се ова последња функција мења ако се z увећава од 0 до r.

Уколико, ради краћег записа, под z подразумевамо модул од z, имаћемо

$$v(z) = \frac{e_0}{z^2} + e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} e_n z^{2n-2},$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{2e_0}{z^3} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)e_n z^{2n-3},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{6e_0}{z^4} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n-2)e_n z^{2n-4}.$$

За довољно мало позитивно z извод $\dfrac{dv}{dz}$ биће негативан. Ако се z увећава од $z = 0$, могу се појавити следећа два случаја.

1. Овај извод остаје стално негативан у интервалу од $z = 0$ до $z = r$ (препознаћемо овај случај тако што је извод негативан за $z = r$); или

2. Он се анулира у том интервалу (овај случај ћемо препознати тако што је извод позитиван за $z = r$). Једначина

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

неће, уосталом, имати више од једног позитивног реалног корена, пошто је извод $\dfrac{d^2v}{dz^2}$ позитиван за било коју позитивну реалну вредност променљиве z.

У првом случају, функција $v(z)$ стално опада, док се z креће између 0 и r; највећа вредност функције коју има за z биће дакле у $z = r$.

У другом случају (за довољно велико r) $v(z)$ има минимум за неку вредност, $z = \alpha$, између 0 и r и тај минимум је тада јединствен. Највећа вредност коју функција има за z биће, у овом случају, у $z = \alpha$.

Према томе, *највећа вредност* μ *коју функција има, према претходној теореми, биће*

$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(r)}} = r\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(r)}} \qquad \text{ако је} \qquad \left[\frac{dv}{dz}\right]_{z=r} < 0;$$
$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(\alpha)}} = \alpha\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(\alpha)}} \qquad \text{ако је} \qquad \left[\frac{dv}{dz}\right]_{z=r} > 0.$$

Једна таква граница је увек мања од радијуса конвергенције r, јер је $\alpha < r$ и

$$\frac{e_n}{\Phi(z)} < 1$$

за све позитивне реалне вредности променљиве z.

4. Применимо претходно разматрање на неке специјалне случајеве.

Први пример. – Размотримо ред

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \dots$$

(где је a било која позитивна реална константа), код којег је $r = 1$ полупречник конвергенције. Ако се стави

$$e_n = \frac{1}{n}, \quad e_0 = a^2,$$

биће

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \dots\right) = \frac{1}{z^2}\left[a^2 - \log(1-z^2)\right].$$

Једначина $\dfrac{dv}{dz} = 0$ овде је

$$\frac{z^2}{1-z^2} + \log(1-z^2) - a^2 = 0.$$

Она има корен у $z = \alpha$ између 0 и 1, и тај корен је јединствен у том интервалу. Доња граница модула нула разматраног реда, које се налазе у интервалу (0, 1), биће према томе дата са

$$\mu = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - \log(1-\alpha^2)}}.$$

Приметимо такође да се вредност

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0,795\ldots,$$

налази у унутрашњости области конвергенције датог реда. Ако ту вредност заменимо у израз за $v(z)$, ред се неће анулирати ни за једну вредност променљиве z чији је модул мањи од

$$\frac{0,795a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Други пример. – Размотримо ред

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{z^3}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}} + \ldots,$$

који је конвергентан у целој равни. Ако се стави

$$e_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}, \qquad e_0 = a^2,$$

биће

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1\cdot 2} + \frac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2}(a^2 - a + e^{z^2}).$$

Једначина

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

овде је

$$(z^2-1)e^{z^2} - a^2 + 1 = 0$$

и биће само један позитиван корен који се налази

$$\begin{array}{lll} \text{између } 1 \text{ и } \sqrt{1+\dfrac{a^2-1}{e}} & \text{ако је} & a > 1; \\ \text{између } 0 \text{ и } 1 & \text{ако је} & 0 < a < 1. \end{array}$$

Ако означимо тај корен са α, доња граница модула нула реда (15) биће

$$\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{\alpha^2}}}.$$

Трећи пример. – За ред

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \frac{z^5}{\sqrt{5}} + \ldots,$$

биће

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^{10}}{5} + \dots\right) = \frac{1}{z^2}\left[a^2 + \frac{1}{2}\log\frac{1+z^2}{1-z^2}\right].$$

Ако се стави, на пример, $z = \frac{1}{2}$, то је вредност која се налази у унутрашњости области конвергенције реда, добија се да вредност

$$\frac{a}{2\sqrt{a^2+k}},$$

где је

$$k = \frac{1}{2}\log\frac{5}{3} = 0{,}11092,$$

представља тражену доњу границу.

Четврти пример. – За ред

$$a + \frac{z^2}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{z^4}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} + \frac{z^6}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 6}} + \dots,$$

једна таква граница биће представљена са

$$\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}(e^{\alpha^2} + e^{-\alpha^2})}},$$

где α означава јединствени позитивни реални корен трансцендентне једначине

$$z^2(e^{z^2} - e^{-z^2}) - e^{z^2} - e^{-z^2} - 2a^2 = 0.$$

5. На крају, ево једне једноставне теореме која непосредно следи из резултата одељка **2.**

Из неједнакости

$$\sum |a_n z^n|^2 < \left[\sum |a_n z^n|\right]^2,$$

ако се стави

$$w(z) = \frac{1}{z^2}\sum |a_n z^n|^2,$$

изводи се

$$w(z) < \frac{1}{z^2}\left[\sum |a_n z^n|\right]^2.$$

Осим тога, према претходном, доња граница модула нула реда

$$\sum a_n z^n$$

биће дата са

$$\mu = \frac{|a_0|}{\sqrt{w(z)}}.$$

Према томе, ако се стави

$$\theta(z) = \frac{\sum |a_n z^n|}{|z|},$$

биће

$$\mu > \frac{|a_0|}{\theta(z)},$$

под условом да вредност променљиве z буде у унутрашњости области конвергенције разматраног реда.

Одавде следи следећа теорема.

Функција f(z) *холоморфна у кружници* C *са координатним почетком као центром, не анулира се у координатном почетку, нема ни једну нулу чији је модул мањи од израза*

$$\frac{|f(0)|}{M},$$

где M *означава највећу вредност коју модул узима по деловима мајорантне функције за функцију* f(z), *за вредности променљиве* z *које се налазе у унутрашњости кружнице* C.

У специјалном случају, где су вредности функције $f(z)$ и сви њени узастопни изводи у $z = 0$ су реални и позитивни, и ако са λ означимо најмањи од модула сингуларитета функције, *она се не анулира ни за једну реалну нити имагинарну вредност променљиве* z, *чији су модули мањи од највеће вредности коју може узети функција*

$$\frac{f(0)z}{f(z)},$$

за позитивне реалне вредности променљиве z, *које су између* 0 *и* λ.**

** Петровићеви резултати у изложеном раду били су предмет истраживања Јована Карамате *О доњој граници модула нула аналитичких функција,* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Београд 1927, стр. 101–120, Драгољуба Марковића *Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme*, Publ. de l'Inst. math., Belgrade 1948, t. II, pp. 236–242, као и у поменутој докторској дисертацији Ш. Рађевића (стр. 15). Ови Петровићеви резултати ушли су у посебну монографију E. Fonët, *Leçons elementaires sur la théorie des fonction analytiques*, Paris 1903, pp. 82 et 182. Иначе, Weltzien je u FdM, B. 32, S. 267 реферисао о овој Петровићевој радњи.

О АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА СА ИМАГИНАРНИМ КОРЕНИМА*

Већина познатих правила у теорији алгебарских једначина, која дају *довољне* услове за егзистенцију имагинарних корена таквих једначина, обухваћена су овом општом теоремом.

Кад год је ма и један од $n-1$ *израза*

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\Delta(0) &= a_{n-1}^2 - \frac{2}{1}\frac{n}{n-1}a_n a_{n-2} \\
\Delta(1) &= a_{n-2}^2 - \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_{n-1} a_{n-3} \\
\Delta(2) &= a_{n-3}^2 - \frac{4}{3}\frac{n-2}{n-3}a_{n-2} a_{n-4} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta(n-3) &= a_2^2 - \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_1 a_3 \\
\Delta(n-2) &= a_1^2 - \frac{2}{1}\frac{n}{n-1}a_0 a_2
\end{aligned}
$$

негативан, једначина

$$
(2) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0
$$

има имагинарних корена.

Теорему је формулисао Newton,[1] али оставивши је недоказану. Покушаји да јој се нађе доказ остали су безуспешни[2] све дотле, док је Sylvester није извео из једне своје теореме о броју реалних корена алгебарских једначина који се налазе између два унапред дата броја.[3]

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXI, Први разред, књ. 28, Београд 1906, стр. 12–29; саопштено у Академији природних наука 14. новембра 1905.

[1] *Arithmetica universalis* II. Cap. II. (*De forma aequationis*).

[2] „Newton hat es obne Beweis gegeben; seine Begründung ist lange Zeit hindurch von den Mathematikern vergeblich versucht worden, bis eben Sylvester es durch Erweiterung zu seinem Satze umformte und obewies“ (E. Netto: *Vorlesungen über Algebra*, Leipzig 1896. Bd. I. S. 233.)

[3] The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, III. 1866. 129–141.

*

Ја ћу овде пре свега приметити да се Newton-ова теорема може извести на сасвим елементаран начин, много простији од Sylvester--овог начина, на који се она изводи у данашњој теорији алгебарских једначина.[4]

Образујмо k-ти извод полинома

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

који се може написати у облику

$$f^{(k)}(x) = k!\, a_{n-k} + (k+1)!\, a_{n-k-1} x + \frac{1}{1\cdot 2}(k+2)!\, a_{n-k-2} x^2 + \ldots \tag{3}$$

Сменимо у овоме x са $\frac{1}{x}$, помножимо га са x^{n-k} и ставимо да је тако добијени резултат раван нули. Тако се добија једначина n–k-тог степена.

$$b_{n-k} x^{n-k} + b_{n-k-1} x^{n-k-1} + b_{n-k-2} x^{n-k-2} + \ldots = 0, \tag{4}$$

где коефицијенти b_i имају за вредности

$$\begin{aligned} b_{n-k} &= k!\, a_{n-k} \\ b_{n-k-1} &= (k+1)!\, a_{n-k-1} \\ b_{n-k-2} &= \frac{1}{1\cdot 2}(k+2)!\, a_{n-k-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Ако се образује h-ти извод леве стране једначине (4) и стави се да је раван нули, добија се једначина

$$C_{n-k-h} x^{n-k-h} + C_{n-k-h-1} x^{n-k-h-1} + C_{n-k-h-2} x^{n-k-h-2} + \ldots = 0, \tag{6}$$

где коефицијенти C_i имају за вредности

$$\begin{aligned} C_{n-k-h} &= \frac{(n-k)!}{(n-k-h)!} b_{n-k} = \frac{k!(n-k)!}{(n-k-h)!} a_{n-k} \\ C_{n-k-h-1} &= \frac{(n-k-1)!}{(n-k-h-1)!} b_{n-k-1} = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{(n-k-h-1)!} a_{n-k-h-1} \\ C_{n-k-h-2} &= \frac{(n-k-2)!}{(n-k-h-2)!} b_{n-k-2} = \frac{(k+2)!(n-k-2)!}{(n-k-h-2)!} \frac{a_{n-k-2}}{1\cdot 2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Према самоме начину постанка једначине (6) и према Rolle-овој теореми, ако ма и једна од једначина (6), што одговарају разним могу-

[4] Упоредити нпр. E. Netto, loc. cit.

ћим вредностима целих позитивних бројева k и h, има имагинарних корена, таквих ће корена имати и сама дата једначина (2).

Узевши h такво, да је

$$n-k-h=2$$

једначина (6) се своди на квадратну једначину

$$c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0, \tag{8}$$

где је

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2} k!(n-k)!\,a_{n-k}, \\ c_1 &= (k+1)!(n-k-1)!\,a_{n-k-1}, \\ c_0 &= \frac{1}{2}(k+2)!(n-k-2)!\,a_{n-k-2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Услов

$$c_1^2 - 4c_0c_2 < 0,$$

довољан за егзистенцију имагинарних корена једначине (8), овде се своди на услов

$$a_{n-k-1}^2 - \frac{(k+2)(n-k)}{(k+1)(n-k-1)} a_{n-k}a_{n-k-2} < 0, \tag{A}$$

где k може имати ма коју од вредности

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

Према томе, ако је ма и један од израза (1) негативан, једначина (2) извесно има имагинарних корена, чиме је горња теорема доказана.

*

Узмимо сад h такво да је

$$n-k-h=3.$$

Једначина (6) се своди на кубну једначину

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \tag{10}$$

где је

$$\begin{aligned} p &= \frac{c_2}{c_3} = \frac{3(k+1)}{n-k} \frac{a_{n-k-1}}{a_{n-k}}, \\ q &= \frac{c_1}{c_3} = \frac{3(k+1)(k+2)}{(n-k)(n-k-1)} \frac{a_{n-k-2}}{a_{n-k}}, \\ r &= \frac{c_0}{c_3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)} \frac{a_{n-k-3}}{a_{n-k}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Услов

$$p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 4p^3r - 27r^2 < 0$$

довољан за егзистенцију имагинарних корена једначине (10), овде се своди на услов

$$\begin{aligned}
&3(n-k-1)(n-k-2)^2(k+1)^2(k+2)\,a_{n-k-1}^2 a_{n-k-2}^2 + \\
&6(n-k)(n-k-1)(n-k-2)(k+1)(k+2)(k+3)\,a_{n-k}a_{n-k-1}a_{n-k-2}a_{n-k-3} - \\
(\mathbb{B})\quad &4(n-k)(n-k-2)^2(k+1)(k+2)^2\,a_{n-k}a_{n-k-2}^3 - \\
&4(n-k-1)^2(n-k-2)(k+1)^2(k+3)\,a_{n-k-1}^3 a_{n-k-3} - \\
&(n-k)^2(n-k-1)(k+2)(k+3)^2\,a_{n-k}^2 a_{n-k-3}^2 < 0,
\end{aligned}$$

где k може имати ма коју од вредности

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-3,$$

из чега произлази ово *ново* правило, које није обухваћено ни једним до сад познатим правилом те врсте.

Кад їод је ма и један од n − 2 *израза*

$$\begin{aligned}
\Delta(0) = \;& 6(n-1)(n-2)^2 a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 + \\
& 36n(n-1)(n-2)\,a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} - \\
& 16n(n-2)^2 a_n a_{n-2}^3 - 12(n-1)^2(n-2)\,a_{n-1}^3 a_{n-3} - \\
& 18n^2(n-1)\,a_n^2 a_{n-3}^2 \\[1ex]
\Delta(1) = \;& 36(n-2)(n-3)^2 a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 + \\
& 144(n-1)(n-2)(n-3)\,a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4} - \\
& 72(n-1)(n-3)^2 a_{n-1}a_{n-3}^3 - 64(n-2)^2(n-3)a_{n-2}^3 a_{n-4} - \\
(12)\qquad & 48(n-1)^2(n-2)\,a_{n-1}^2 a_{n-4}^2 \\[1ex]
\Delta(2) = \;& 108(n-3)(n-4)^2 a_{n-3}^2 a_{n-4}^2 + \\
& 360(n-2)(n-3)(n-4)\,a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5} - \\
& 192(n-2)(n-4)^2 a_{n-2}a_{n-4}^3 - 180(n-3)^2(n-4)a_{n-3}^2 a_{n-5} - \\
& 100(n-2)^2(n-3)\,a_{n-2}^2 a_{n-5}^2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta(n-3) = \;& 6(n-2)^2(n-1)\,a_2^2 a_1^2 + 36n(n-1)(n-2)\,a_3a_2a_1a_0 - \\
& 12(n-2)(n-1)^2 a_3 a_1^3 - 16n(n-2)^2 a_2^3 a_0 - \\
& 18n^2(n-1)\,a_3^2 a_0^2
\end{aligned}$$

негативан, једначина,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

извесно, има имагинарних корена.

Изрази (12) могу се написати и у облику детерминаната. Ако се у дискриминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 3 & 2c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 \end{vmatrix}$$

кубне једначине

$$(13) \qquad c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

смене коефицијенти

$$c_3, c_2, c_1, c_0,$$

њиховим вредностима

$$(14) \qquad \begin{aligned} c_3 &= \frac{k!(n-k)!}{1\cdot 2\cdot 3}a_{n-k} \\ c_2 &= \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{1\cdot 2}a_{n-k-1} \\ c_1 &= (k+2)!(n-k-2)!a_{n-k-2} \\ c_0 &= (k+3)!(n-k-3)!a_{n-k-3} \end{aligned}$$

тако се добијена детерминанта може упростити поделивши елементе другог стуба са

$$\frac{k!(n-k-1)!}{6},$$

елементе трећег стуба са

$$\frac{k!(n-k-2)!}{2},$$

елементе четвртог стуба са

$$(k+1)!(n-k-3)!,$$

и, на крају, елементе петог стуба са

$$(k+2)!(n-k-3)!$$

чиме се знак детерминанте не мења. Нова, тако добијена детерминанта биће

$$\text{(15)} \qquad \Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 3 & 2\beta_0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\gamma_0 & 2\gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix},$$

где су вредности елемента

$$\beta_0 = 3(k+1)a_{n-k-1} \qquad \beta_1 = 2(k+1)(k+2)a_{n-k-2}$$

$$\beta_2 = (k+2)(k+3)a_{n-k-3}$$

$$\text{(16)} \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= (n-k)a_{n-k} & \gamma_1 &= (k+1)(n-k-1)a_{n-k-1} \\ \gamma_2 &= (k+2)(n-k-2)a_{n-k-2} & \gamma_3 &= (k+3)a_{n-k-3} \\ \delta_0 &= (n-k-1)(n-k)a_{n-k} & \delta_1 &= (n-k-1)(n-k-2)a_{n-k-1} \end{aligned}$$

$$\delta_2 = (n-k-2)a_{n-k-2}.$$

Пошто је за егзистенцију имагинарних корена једначине (13) довољно да њена дискриминанта буде позитивна, то сваки од n–2 израза

$$-\Delta(0), \quad -\Delta(1), \quad -\Delta(2), \ldots, -\Delta(n-3)$$

има улогу једног од одговарајућих израза (12).

Такви би изрази били

$$\Delta(0) = -\begin{vmatrix} 1 & 3a_{n-1} & 4a_{n-2} & 6a_{n-3} & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & 2(n-2)a_{n-2} & 3a_{n-3} \\ 3 & 6a_{n-1} & 4a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3a_n & 2(n-1)a_{n-1} & 2(n-2)a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & n(n-1)a_n & (n-1)(n-2)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(1) = -\begin{vmatrix} 1 & 6a_{n-2} & 12a_{n-3} & 12a_{n-4} & 0 \\ 0 & (n-1)a_{n-1} & 2(n-2)a_{n-2} & 3(n-3)a_{n-3} & 4a_{n-4} \\ 3 & 12a_{n-2} & 12a_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3(n-1)a_{n-1} & 4(n-2)a_{n-2} & 3(n-3)a_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & (n-1)(n-2)a_{n-1} & (n-2)(n-3)a_{n-2} & (n-3)a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(2) = -\begin{vmatrix} 1 & 9a_{n-3} & 24a_{n-4} & 20a_{n-5} & 0 \\ 0 & (n-2)a_{n-2} & 3(n-3)a_{n-3} & 4(n-4)a_{n-4} & 5a_{n-5} \\ 3 & 18a_{n-3} & 24a_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 3(n-2)a_{n-2} & 6(n-3)a_{n-3} & 4(n-4)a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (n-2)(n-3)a_{n-2} & (n-3)(n-4)a_{n-3} & (n-4)a_{n-4} \end{vmatrix}$$

итд.

Исти ови изрази, написани у облику детерминанта *пешога* реда, могу се написати и у облику детерминанта *трећег* реда.

Познато је да се дискриминанта једначине трећег степена

$$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

може написти у облику детерминанте

$$-\begin{vmatrix} c_2 & 2c_3c_1 & 3c_3 \\ 2c_1 & 3c_0c_3 + c_1c_2 & 2c_2 \\ 3c_0 & 2c_0c_2 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Сменивши коефицијенте

$$c_0, c_1, c_2, c_3$$

њиховим вредностима (14), поделивши елементе првог стуба са

$$\frac{1}{2}(k+1)!(n-k-3)!,$$

елементе другог стуба са

$$\frac{1}{6}k!(k+2)!(n-k-1)!(n-k-3)!,$$

елементе трећег стуба

$$\frac{1}{2}k!(n-k-2)!$$

и изоставивши знак –, добија се детерминанта

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

чији елементи имају за вредности

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (n-k-1)(n-k-2)\,a_{n-k-1} \\
\beta_2 &= 2(n-k-2)(n-k)\,a_{n-k}a_{n-k-2} \\
\beta_3 &= (n-k)(n-k-1)\,a_{n-k} \\
\gamma_1 &= 2(k+2)(n-k-2)\,a_{n-k-2} \\
\gamma_2 &= 3(k+3)(n-k)\,a_{n-k}a_{n-k-3} + 3(+1)(n-k-2)a_{n-k-1}a_{n-k-2} \\
\gamma_3 &= 2(k+1)(n-k-1)\,a_{n-k-1} \\
\delta_1 &= 6(k+2)(k+3)\,a_{n-k-3} \\
\delta_2 &= 6(k+1)(k+3)\,a_{n-k-1}a_{n-k-3} \\
\delta_3 &= 2(k+1)(k+2)\,a_{n-k-2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Да би једначина (14) имала имагинарних корена, довољно је да ова детерминанта буде негативна. Према томе *свака од детерминанта* (17)

$$\Delta(0), \Delta(1), \Delta(2), \ldots, \Delta(n-3)$$

има улогу једнога од израза (12).

Такви би изрази, на пример, били

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} (n-1)(n-2)\,a_{n-1} & 2n(n-2)\,a_n a_{n-2} & n(n-1)\,a_n \\ 4(n-2)\,a_{n-2} & 9n\,a_n a_{n-3} + 3(n-2)\,a_{n-1}a_{n-3} & 2(n-1)\,a_{n-1} \\ 36\,a_{n-3} & 18\,a_{n-1}a_{n-3} & 4\,a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} (n-2)(n-3)\,a_{n-2} & 2(n-1)(n-3)\,a_{n-1}a_{n-2} & (n-1)(n-2)\,a_{n-1} \\ 6(n-3)\,a_{n-3} & 12(n-1)\,a_{n-1}a_{n-4} + 6(n-3)\,a_{n-2}a_{n-3} & 4(n-2)\,a_{n-2} \\ 72\,a_{n-4} & 36\,a_{n-2}a_{n-4} & 12\,a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} (n-3)(n-4)\,a_{n-3} & 2(n-2)(n-4)\,a_{n-2}a_{n-4} & (n-2)(n-3)\,a_{n-2} \\ 8(n-4)\,a_{n-4} & 15(n-2)\,a_{n-2}a_{n-5} + 9(n-4)\,a_{n-3}a_{n-4} & 6(n-3)\,a_{n-3} \\ 120\,a_{n-5} & 90\,a_{n-3}a_{n-5} & 24\,a_{n-4} \end{vmatrix}$$

....

Приметимо да се израз $\Delta(0)$, дефинисан једначином (12) за $n = 3$ и подељен са 12, своди на познати израз

$$a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0a_3^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3,$$

чија је негативност довољан услов за егзистенцију имагинарних корена кубне једначине

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Такође, за

$$a_{n-k-1} = 0, \quad a_{n-k-2} = 0$$

детерминанта (17) постаје

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\delta_1\gamma_2\beta_3 =$$

$$= -18(k+2)(k+3)^2(n-k)^2(n-k-1)\,a_{n-k}^2a_{n-k-3}^2,$$

дакле, негативна је, што непосредно даје познато правило према коме једначина има имагинарних корена кад год су јој два узастопна коефицијента равна нули итд.

*

Вратимо се неједначини (A). Претпоставимо да су сви коефицијенти дате алгебарске једначине

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{19}$$

ӣозиӣивни. Кад једначина не би имала имагинарних корена, према ранијем правилу морало би бити

$$\begin{aligned}
a_1^2 &\geq \frac{2}{1}\frac{n}{n-1}a_0a_2\\
a_2^2 &\geq \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_1a_3\\
a_3^2 &\geq \frac{4}{3}\frac{n-2}{n-3}a_2a_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{k-1}^2 &\geq \frac{k}{k-1}\frac{n-k+2}{n-k+1}a_{k-2}a_k.
\end{aligned} \tag{20}$$

Множећи ових $k-1$ неједначина међу собом (што се сме учинити пошто су им и леве и десне стране позитивне) произилази да је

$$a_1a_{k-1} \geq \frac{nk}{n-k+1}a_0a_k, \tag{21}$$

одакле је

$$a_k \leq \frac{n-k+1}{k}\frac{a_1}{na_0}a_{k-1}. \tag{22}$$

Стављајући у (22) узастопце

$$k = 1, 2, 3, \ldots, m < n+1$$

добија се низ неједначина

$$\begin{aligned}
a_1 &\leq \frac{n}{1}\frac{a_1}{na_0}a_0\\
a_2 &\leq \frac{n-1}{2}\frac{a_1}{na_0}a_1 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^2 a_0\\
a_3 &\leq \frac{n-2}{3}\frac{a_1}{na_0}a_2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^3 a_0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

и према томе је

$$a_m \leq \binom{n}{m}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^m a_0. \tag{23}$$

Према томе, правило је следеће.

Кад год су сви корени какве алгебарске једначине n-*тог степена са позитивним коефицијентима* a_i *реални, ни један од ових коефицијената не може бити већи од одговарајућег коефицијента у полиному, који се добија развијањем израза*

$$a_0\left(1+\frac{a_1 x}{na_0}\right)^n$$

по биномном обрасцу.

Ово правило даје прецизнију вредност за горње границе коефицијената a_i једначина са реалним коренима, него оно до кога доводи једна позната Laguerre-ова теорема сличне врсте.[5] Према тој теореми ако је

$$G(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

каква функција холоморфна у целој равни променљиве z, чији род (genre) није већи од јединице, чији су сви коефицијенти A_m реални и позитивни и која је таква да су сви корени једначине

$$G(z) = 0$$

реални, коефицијенти A_m мањи су по вредности од одговарајућих коефицијената у изразу који се добија развијањем функције

$$A_0 e^{\frac{Ax_1}{A_0}}$$

по степенима променљиве x.

Према овој теореми, примењеној на једначину

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

где је $f(x)$ лева страна једначине (19) и која такође има све своје корене реалне, било би

[5] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entieres*, p. 36.

$$a_m < \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^m,$$

а пошто је

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} > \binom{n}{m}\frac{1}{n_m},$$

то је горња граница за a_m, дата нашим правилом, *нижа,* па дакле и *прецизнија,* од оне до које доводи Laguerre-ова теорема.

Уосталом наше се правило подудара са Laguerre-овим за $n = \infty$. Израз

$$a_0\left(1 + \frac{a_1 x}{n a_0}\right)^n$$

тежи тада граници

$$a_0 e^{\frac{a_1 x}{a_0}};$$

правило, пак, остаје у важности и за $n = \infty$, пошто функција $G(z)$, на коју се односи Laguerre-ова теорема, испуњава услов на коме је, у последњој анализи, основано извођење свих напред изложених резултата, а то је: да кад год су корени функције $G(z)$ сви реални, такви ће бити и корени свију њених извода.

Из горње теореме се може извести и следеће правило.

Кад год су сви корени једне једначине

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

реални а њени коефицијенти сви позитивни, биће за сваку позитивну вредност x

$$f(x) \leq a_0\left(1 + \frac{a_1 x}{n a_0}\right)^n$$

која је неједначина *прецизнија* од познате неједначине

$$f(x) < a_0 e^{\frac{a_1 x}{a_0}}$$

пошто је за a_0, a_1, x, n позитивне

$$\left(1 + \frac{a_1 x}{n a_0}\right)^n < e^{\frac{a_1 x}{a_0}}.$$

Тако исто за егзистенцију имагинарних корена једне једначине n-тог степена са позитивним коефицијентима добија се следећа теорема.

Ако је ма и један коефицијенат a_m *већи од вредности*

$$a_0 \binom{n}{m} \left(\frac{a_1}{na_0} \right)^m$$

једначина има имагинарних корена.

Тако, на пример ако се стави да је

$$\frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} n^2 = \lambda_2$$
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} n^3 = \lambda_3$$
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} n^4 = \lambda_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и ако се у једначини

$$1 + x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0$$

налази ма и један коефицијент a_m такав да је производ $\lambda_m a_m$ мањи од јединице, једначина извесно има имагинарних корена.

Лако се увиђа да се може извести велики број оваквих специјалнијих практичних правила за распознавање егзистенције имагинарних корена код алгебарских једначина.**

** Рад приказан у FdM, B. 37, S. 110.

О РАСПОРЕДУ КОРЕНА ЈЕДНЕ ОПШТЕ КЛАСЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА*

Ако се у интегралу

$$\int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

за интегралне границе a и b узимају разне реалне вредности, а за функције $A(t)$ и $r(t)$ разне функције променљиве t, реалне и позитивне за све вредности t у размаку интеграције, интеграл ће се редом сводити на бескрајно многе и бескрајно разноврсне функције $\varphi(n)$ променљиве n.

Означимо једну, ма коју, од таквих функција $\varphi(n)$ са a_n и уочимо све бескрајно многе и бескрајно разноврсне алгебарске једначине свију степена а облика

$$a_0 + a_1 x + a_n x^2 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Назовимо, краткоће ради, све такве једначине, *алгебарским једначинама* $J = 0$. То су у исто време и једначине до којих се долази развијањем разноврсних функција у Маклоренове редове и стављајући да је раван нули један ограничен број првих чланова таквог једног реда.

Одређеном интегралу нпр.

$$\int_a^\infty e^{-\alpha t^2} e^{-n\beta t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta n}}$$

$(\alpha > 0, \beta > 0)$ одговарала би алгебарска једначина (пошто се скрати са $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXI, Први разред, књ. 28, Београд 1906, стр. 99–121; саопштено у Академији природних наука 27. фебруара 1906.

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta}}+\frac{x^2}{\sqrt{\alpha+2\beta}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{\alpha+n\beta}}=0;$$

интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1+t^2)^2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n dt=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\pi$$

одговара једначина (скраћена са $\frac{\pi}{2}$)

$$1+\frac{1\cdot3}{4}x+\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6}x^2+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(2n+2)}x^n=0;$$

интегралу

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^n dt=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$$

одговара једначина

$$1+1\cdot x+1\cdot2x^2+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot nx^n=0;$$

интегралу

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^k t^n dt=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}{(n+1)^{k+1}}$$

једначина

$$1+\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{x^2}{3^{k+1}}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)^{k+1}}=0;$$

интегралу

$$\int_0^{\infty}P(t)e^{-\alpha nt}dt=R(n),$$

где је $P(t)$ облика

$$P(t)=c_1e^{-h_1t}+c_2e^{-h_2t}+\ldots+c_ne^{-h_nt},$$

и где би $R(n)$ била рационална функција променљиве n, одговарала би једначина

$$R(0)+R(1)x+R(2)x^2+\ldots+R(n)x^n=0.$$

У специјалном случају кад је нпр.

$$P(t)=e^{-ht}$$

интегралу би одговарала једначина

$$\frac{1}{h}+\frac{x}{h+1}+\frac{x^2}{h+2}+\ldots+\frac{x^n}{h+n}=0;$$

у случају кад је

$$P(t)=e^{-h_1 t}-e^{-h_2 t}$$

имали би (пошто се скрати са h_2-h_1) једначину

$$\frac{1}{h_1h_2}+\frac{x}{(h_1+1)(h_2+1)}+\frac{x^2}{(h_1+2)(h_2+2)}+\ldots+\frac{x^n}{(h_1+n)(h_2+n)}=0.$$

Све ове, као и остале бескрајно многе и бескрајно разноврсне алгебарске једначине $J=0$, имају извесне заједничке особине у погледу распореда њихових корена у бројној равни. Наиме, за сваку такву једначину могућно је одредити известан број од свију страна ограничених области у бројној равни, које би имале ту особину да се ни један корен једначине не може налазити ван тих области. Одређивање оваквих области биће предмет овога рада.

*

Назовимо размацима $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, оне бројне размаке, садржане у размаку од 0 до 2π који имају ту особину да кад угао φ има ма коју вредност што се налази у таквоме једном размаку, изрази

$$\sin\varphi, \quad \sin n\varphi, \quad -\sin(n+1)\varphi$$

немају сва три један исти знак.

За $n=2$ такви би размаци били

$$\Delta_1=\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{2\pi}{0}-\frac{\pi}{3}\right),^*$$

$$\Delta_2=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right).$$

За $n=3$ то би били размаци

$$\Delta_1=\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{2\pi}{0}-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Delta_2=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\Delta_3=\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right).$$

* Ознака интервала – унија два интервала (*Примедба приређивача*).

За $n = 4$ имали би

$$\Delta_1 = \left(\frac{9\pi}{5} - \frac{2\pi}{0} - \frac{\pi}{5}\right),$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{5}\right),$$

$$\Delta_3 = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\Delta_4 = \left(\frac{7\pi}{5} - \frac{7\pi}{4}\right),$$

и лако би било образовати низ таквих размака за ма какву целу и позитивну вредност *n*.

Тада се може доказати прво следећи резултат.

Аргуменūи имаīинарних корена ма какве једначине J = 0 n-*ūоī сūеūена никад се не налазе ван размака* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Да би то доказали, уочимо једну, ма коју, алгебарску једначину $J = 0$ n-тог степена

$$J = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n n^n = 0, \tag{1}$$

где је уопште

$$a_k = \int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^k dt, \tag{2}$$

и где су $A(t)$ и $r(t)$ две функције реалне и позитивне у размаку интеграције (a, b), па се полином J може написати у облику

$$J = \int_a^b A(t)\frac{1-[xr(t)]^{n+1}}{1-xr(t)}\,dt. \tag{3}$$

Нека је

$$x = \rho e^{\varphi i}$$

један корен једначине $J = 0$; сменивши га у полиному J овај се може написати у облику

$$J = \int_a^b A(t)\frac{P - Q\cdot i}{R - T\cdot i}\,dt, \tag{4}$$

где је

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
P &= 1-\rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1}\cos(n+1)\varphi,\\
Q &= \rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1}\sin(n+1)\varphi,\\
R &= 1-\rho r(t)\cos\varphi,\\
T &= \rho r(t)\sin\varphi .
\end{aligned}
$$

Раздвојивши у интегралу (4) реални и имагинарни део, овај ће постати

$$
(6) \qquad J = U + iV,
$$

где је

$$
(7) \qquad U = \int_a^b A(t)\frac{PR+QT}{R^2+T^2}\,dt,
$$

$$
(8) \qquad V = \int_a^b A(t)\frac{PT-QR}{R^2+T^2}\,dt,
$$

и где бројиоци разломака под интегралним знаком, написани у развијеном облику, имају за вредности

$$
(9) \quad PR+QT = 1-\rho r(t)\cos\varphi-\rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1}\cos(n+1)\varphi+\rho^{n+2}\left[r(t)\right]^{n+2}\cos n\varphi
$$

$$
(10) \quad PT-QR = \rho r(t)\sin\varphi-\rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1}\sin(n+1)\varphi+\rho^{n+2}\left[r(t)\right]^{n+2}\sin n\varphi .
$$

Према дефиницији размака $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, а кад год се аргуменат φ налази ван ових размака, биће или у једно исто време

$$
(11) \qquad \sin\varphi > 0, \quad \sin(n+1)\varphi < 0, \quad \sin n\varphi > 0
$$

или у једно исто време

$$
(12) \qquad \sin\varphi < 0, \quad \sin(n+1)\varphi > 0, \quad \sin n\varphi < 0
$$

функција

$$
PT-QR
$$

дефинисана обрасцем (10) била би различита од нуле за све позитивне вредности ρ и за све вредности t што се налазе у размаку (a, b) и према томе и сам интеграл V, дефинисан обрасцем (7), имао би вредност различиту од нуле. Вредност

$$
z = re^{\varphi i}
$$

не би, дакле, могла бити корен једначине $J = 0$, чиме је горње тврђење доказано.

Из образаца (6), (7), (9) лако се изводи и ова тоерема.

Теорема. – *Корени једне, ма које, једначине* $J = 0$ *ӣарноīа сӣеӣена сви су имаīинарни.*

Јер пошто су сви коефицијенти једначина позитивни, сваки би њен реалан корен био негативан тј. имао за аргуменат $\varphi = \pi$. За такав аргуменат би се функција

$$PR + QT,$$

свела на израз

$$1 + \rho r(t) + \rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1} + \rho^{n+2}\left[r(t)\right]^{n+2},$$

који је позитиван за све вредности t између интегралних граница, према чему интеграл (7), па дакле и (6), не би могао бити раван нули.

*

Из теорије алгебарских једначина познато је да ако се стави да је

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_m}{a_n},$$

где је a_m највећи од коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, и

$$\mu_n = \frac{1}{1 + \frac{a_k}{a_0}},$$

где је a_k највећи од коефицијената $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, вредност λ_n представља једну *īорњу*, а вредност μ_1 једну *доњу* границу за модуле корена алгебарске једначине n-тог степена са реалним и позитивним коренима

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Применимо ово опште правило на једначине о којима је овде реч, водећи рачуна о специјалним особинама које их карактеришу.

Одредба броја λ_n. Уочимо следећа два случаја.

1. Нека a_n расте кад n расте. Тада је очевидно

$$a_m = a_{n-1}$$

и према томе

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{13}$$

2. Нека a_n опада кад n расте. Тада је

$$a_m = a_0$$

и према томе

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_0}{a_n}. \tag{14}$$

У овоме случају може се имати једна вредност за λ_n и онда кад је непознат експлицитан израз коефицијента a_n: овај се коефицијенат тада може у изразу за λ_n сменити једном ма којом својом доњом границом.

Тако нпр. ако се са N означи једна доња граница вредности које добија функција $A(t)$ између интегралних граница и ако се стави да је

$$b_n = \int_a^b [r(t)]^n dt$$

биће

$$a_n > N b_n$$

и према томе

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_0}{N b_n}$$

где је

$$a_0 = \int_a^b A(t)\, dt.$$

За једначину нпр.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

где је

$$a_n = \int_0^1 A(t) \left[t \log \frac{1}{t} \right]^n dt,$$

пошто је

$$b_n = \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n dt = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)^{n+1}},$$

било би

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_0 (n+1)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot nN}.$$

Тако исто ако је P једна доња граница вредности функције $\frac{A(t)}{B(t)}$ између интегралних граница и ако се стави да је

$$C_n = \int_a^b B(t)\left[r(t)\right]^n dt,$$

где је $B(t)$ каква подесно изабрана функција, биће

$$a_n > PC_n$$

и према томе

$$\lambda_n = 1 + \frac{a_0}{PC_n}$$

Тако нпр. кад је

$$a_n = \int_a^b A(t)\, e^{n\alpha t} dt,$$

узевши да је

$$B(t) = e^{\beta t},$$

биће

$$C_n = \int_a^b e^{(\beta+n\alpha)t} dt = \frac{e^{b(\beta+n\alpha)} - e^{a(\beta+n\alpha)}}{\beta+n\alpha}$$

и према томе, означивши са P једну доњу границу функције

$$e^{-\beta t}A(t)$$

за вредности t између интегралних граница a и b биће

$$\lambda_n = 1 + \frac{\beta+n\alpha}{e^{b(\beta+n\alpha)} - e^{a(\beta+n\alpha)}}\,\frac{a_0}{P}.$$

Исто тако, кад је

$$a_n = \int_a^\infty A(t)e^{-n\alpha t^2} dt,$$

може се узети

$$B(t) = e^{-\beta t^2}$$

и тада ће бити

$$\lambda_n = 1 + \frac{2a_0}{P}\sqrt{\frac{\beta+n\alpha}{\pi}},$$

где је P једна доња граница функције

$$e^{-\beta t^2} A(t)$$

за реалне и позитивне вредности t.

Одредба броја μ_n. Уочимо опет следећа два случаја.

1. Нека a_n расте кад n расте; тада је

$$a_k = a_n$$

и према томе

$$\mu_n = \frac{1}{1+\dfrac{a_n}{a_0}} = \frac{a_0}{a_0 + a_n}. \tag{15}$$

2. Нека a_n опада кад n расте; тада је

$$a_k = a_1$$

и према томе

$$\mu_n = \frac{1}{1+\dfrac{a_1}{a_0}} = \frac{a_0}{a_0 + a_1}. \tag{16}$$

У томе случају, дакле, граница μ_n не зависи од степена једначине и израчунава се из прва два њена коефицијента.

У случају, пак, **1**. једна вредност границе μ_n може се имати и онда кад се a_n не може експлицитно израчунати: овај се коефицијенат тада може у изразу за μ_n сменити једном својом *доњом* границом, добијеном нпр. на начин наведен у горњим примерима при одредби броја λ_n.

Међутим, било у првом, било у другом случају, до једне вредности за број μ_n може се доћи и на други начин, непосредном употребом израза који даје полином

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

у облику одређеног интеграла.

Уочимо алгебарску једначину $n + 2$-тог степена

$$x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1 \tag{17}$$

која, као што се лако може уверити, увек има један реалан и позитиван корен x_n, чија се вредност налази између бројева

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Овај је корен лако израчунати једном за свагда за ма какву вредност n, помоћу ма које од метода за приближно израчунавање корена. За нпр. $n = 2$ налази се да корен x_n лежи између вредности 0,618 и 0,619.

Означимо са M једну *горњу* границу функције $r(t)$ за вредност t између интегралних граница; тада се лако доказује овај резултат.

Једна доња граница за модуле свих корена једне ма које једначине $J = 0$ *дата је вредношћу* $\frac{x_n}{M}$.

Јер, кад би

$$x = \rho e^{\varphi i}$$

био један корен једначине $J = 0$ чији би модуо био мањи од $\frac{x_n}{M}$, тако да је

$$M\rho < x_n,$$

пошто је

$$x_n^{n+2} + x_n^{n+1} + x_n = 1,$$

морало би бити

$$(M\rho)^{n+2} + (M\rho)^{n+1} + M\rho < 1$$

и према томе

$$\rho^{n+2}\left[r(t)\right]^{n+2} + \rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1} + \rho r(t) < 1$$

за све вредности t у размаку интеграције. Према томе, ма коју вредност имао аргуменат φ, било би

$$\rho r(t)\cos\varphi - \rho^{n+1}\left[r(t)\right]^{n+1}\cos(n+1)\varphi + \rho^{n+2}\left[r(t)\right]^{n+2}\cos n\varphi < 1$$

и функција би $PR + QT$, дефинисана обрасцем (9), била непрестано позитивна за све вредности t у размаку (a, b). Интеграл U не би, дакле, могао бити раван нули и по томе вредност

$$x = \rho e^{\varphi i}$$

не би могла бити корен једначине $J = 0$, што је и требало доказати.

Према томе и вредност $\frac{x_n}{M}$ игра улогу једне границе μ_n; за ову границу треба, дакле, узети онај од бројева

$$\left.\begin{aligned}\mu_n &= \frac{a_0}{a_0+a_n}\\ \mu_n &= \frac{x_n}{M}\end{aligned}\right\} \quad \text{кад } a_n \text{ расте са растењем } n, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_n &= \frac{a_0}{a_0+a_1}\\ \mu_n &= \frac{x_n}{M}\end{aligned}\right\} \quad \text{кад } a_n \text{ опада са растењем } n \tag{19}$$

који у датоме случају буде већи. Овде ћемо, у рачунима који следе, под μ_n увек подразумевати онај од та два броја који буде већи.

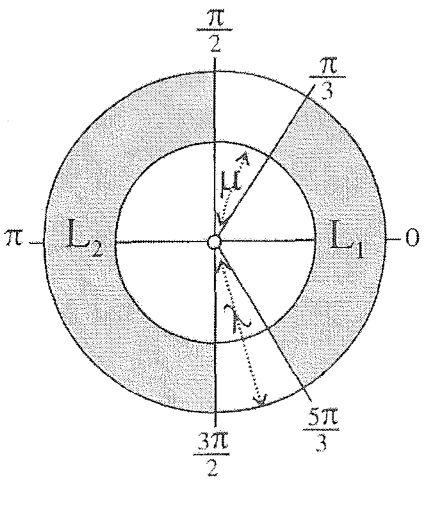
Одредивши тако бројеве λ_n и μ_n, што одговарају једној датој једначини $J = 0$, опишимо са полупречницима λ_n и μ_n два концентрична круга C_1 и C_2 са центром у тачки $x = 0$. Из ове тачке повуцимо зраке који одговарају границама размака

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n. \tag{20}$$

Означимо са

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n \tag{21}$$

оне области у равни променљиве x које су заједничке прстенастој површини између кругова C_1 и C_2 и размацима (20).



Слика 1.

Такве би области нпр. за квадратне једначине $J = 0$ биле оне означене на сл. 1.; за једначине трећег степена оне на сл. 2, а за једначине четвртог степена оне на сл. 3 итд.

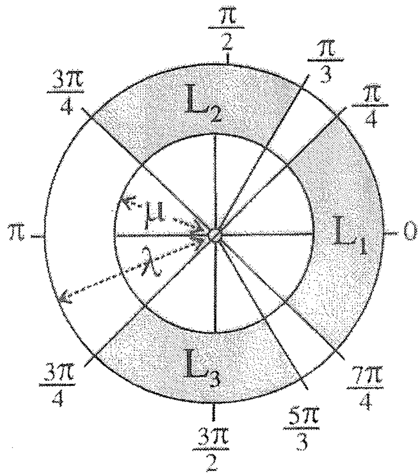
Досадашњи резултати, спојени у једну целину, доводе тада до ове теореме, која је и била циљ досадашњем извођењу.

Теорема. – *Имагинарни корени ма какве једначине* J = 0 *тако су распоређени у бројној равни, да се ни један од њих не налази ван области* (21).

И ако се, поред тога, примети да су због позитивности коефицијената a_i сви реални корени једначине $J = 0$ негативни, долази се истовремено и до следећег резултата:

Сви реални корени једне ма које једначине J = 0 *налазе се у размаку између бројева* $-\lambda_n$ и $-\mu_n$ *шшо шој једначини одговарају.*

На тај начин се, дакле, има једна пространа класа алгебарских једначина свију степена, за које се може у знатној мери прецизирати распоред корена у бројној равни.



Слика 2.

*

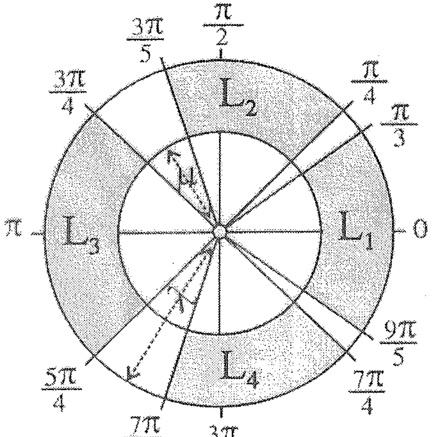
Применимо ове резултате на неколико типова алгебарских једначина $J = 0$. Пошто размаци

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$$

остају исти за све једначине истога степена и увек су тачно одређени, то се одредба области

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$$

у којима се налазе корени једне дате једначине, своди на одредбу полупречника λ_n и μ_n кругова C_1 и C_2који тој једначини одговарају.



Слика 3.

Одредимо, дакле, те полупречнике за неколико типова једначина $J = 0$.

I. Једначине облика

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{x^2}{\sqrt{\alpha+2\beta}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{\alpha+n\beta}} = 0,$$

где су α и β две позитивне константе.

Коефицијенту a_n одговара интеграл

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-n\beta t^2}\, dt,$$

тако да је

$$A(t) = \frac{2e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$B(t) = e^{-\beta t^2},$$

према чему је $M = 1$, па дакле

$$\lambda_n = 1 + \sqrt{1 + \frac{n\beta}{\alpha}},$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}}}. \\ x_n \end{cases}$$

У специјалнијем случају, кад је $\alpha = \beta$, тј. кад је једначина облика

$$1 + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

биће

$$\lambda_n = 1 + \sqrt{n+1}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 0,5858 \\ x_n . \end{cases}$$

II. Једначине облика

$$1 + \frac{3}{4}x + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}x^2 + \ldots + \frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}x^n = 0$$

коефицијенту a_n одговара интеграл

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n dt,$$

тако да је

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+t^2)^2},$$

$$r(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

према чему је $M = 1$. Пошто је a_n опадајућа функција $n-a$, то је

$$\lambda_n = 1 + \frac{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)},$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{4}} = 0,5714 \\ x_n . \end{cases}$$

III. Једначине облика

$$1 + x + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot nx^n = 0,$$

где коефицијенту a_n одговара интеграл

$$a_n = \int_{\infty}^{\infty} e^{-t} t^n dt;$$

λ_n и μ_n имаће за вредности

$$\lambda_n = \frac{n+1}{n}, \quad \mu_n = \frac{1}{1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

IV. Једначине облика

$$1 + \frac{1}{2^2} x + \frac{1 \cdot 3}{3^3} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)^{n+1}} x^n = 0$$

којима одговара интеграл

$$a_n = \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n dt$$

тако да је

$$A(t) = 1,$$

$$r(t) = t \log \frac{1}{t}.$$

Овде је

$$M = \frac{1}{e}$$

и према томе

$$\lambda_n = 1 + \frac{(n+1)^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0,8 \\ ex_n \end{cases}$$

а пошто је $x_n > \frac{1}{2}$ па дакле

$$ex_n > \frac{e}{2} > 1,359\ldots$$

то за μ_n треба узети ову другу вредност 1,359.

V. Нека је

$$a_n = \frac{k_1}{n+h_1} + \frac{k_2}{n+h_2} + \frac{k_3}{n+h_3} + \ldots, \tag{22}$$

где су $h_1, h_2, h_3, \ldots$ реални и позитивни бројеви, $k_1, k_2, k_3, \ldots$ реални бројеви такви да функција

$$A(t) = k_1 e^{-h_1 t} + k_2 e^{-h_2 t} + k_3 e^{-h_3 t} + \ldots$$

никако не постаје негативна за реалне и позитивне вредности t. Такав је нпр. случај кад су бројеви $k_1, k_2, k_3, \ldots$ сви позитивни, или кад је збир

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

позитиван, а међутим је и сам коефицијенат k_i, што одговара најмањем од бројева h_i, позитиван итд.

Оптем коефицијенту $A(t)$ одговара интеграл

$$a_n = \int_0^\infty A(t)\, e^{-nt}\, dt,$$

који представља опадајућу функцију $n - a$. Према томе, ставивши краткоће ради да је

$$a_n = R(n),$$

где $R(n)$ представља рационалну функцију (22), биће

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{k_1}{h_1} + \frac{k_2}{h_2} + \frac{k_3}{h_3} + \ldots\right)\frac{1}{R(n)},$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{\dfrac{k_1}{h_1+1}+\dfrac{k_2}{h_2+1}+\ldots}{\dfrac{k_1}{h_1}+\dfrac{k_2}{h_2}+\ldots}}, \\ \dfrac{x_n}{M} \end{cases}$$

где M представља једну доњу границу функције $A(t)$ за реалне и позитивне вредности t.

У специјалном случају, кад је дата једначина

$$\frac{1}{h}+\frac{x}{1+h}+\frac{x^2}{2+h}+\ldots+\frac{x^n}{n+h}=0$$

тј. кад је

$$A(t)=e^{-ht},$$

где је h какав позитиван број, биће

$$\lambda_n = 2+\frac{n}{h}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{h}{h+1}}. \\ x_n \end{cases}$$

Кад је дата једначина

$$\frac{1}{h_1h_2}+\frac{x}{(h_1+1)(h_2+1)}+\frac{x^2}{(h_1+2)(h_2+2)}+\ldots+\frac{x^n}{(h_1+n)(h_2+n)}=0$$

тј. кад је

$$A(t)=e^{-h_1t}-e^{-h_2t}$$

$$h_1<h_2,$$

биће

$$\lambda_n = 1+\frac{(h_2-h_1)(h_1+n)(h_2+n)}{h_1h_2}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{h_3h_2}{(h_1+1)(h_2+1)}}. \\ x_n \end{cases}$$

На исти начин би се горњи резултати применили и на једначине облика

$$B_1 + \frac{B_2}{2}x + \frac{B_3}{3}x^2 + \ldots + \frac{B_{n+1}}{n+1}x^n = 0,$$

(где B_k означава k-ти Bernoulli-јев број) којима одговара интеграл

$$a_n = \int_0^\infty A(t)\left[r(t)\right]^n dt \tag{23}$$

у коме је

$$A(t) = \frac{1}{\pi^2}\frac{t}{e^t - 1}, \quad r(t) = \frac{t^2}{4\pi^2};$$

или на једначине облика

$$\frac{3}{4}B_1 + \frac{15}{8}B_2 x + \frac{63}{12}B_3 x^2 + \ldots + \frac{4^{n+1}-1}{4(n+1)}B_{n+1}x^n = 0,$$

којима одговара интеграл облика (23) где је

$$A(t) = \frac{4t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}, \quad r(t) = t^2;$$

или на једначине облика

$$(\beta - \alpha) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}x + \frac{\beta^3 - \alpha^2}{3}x^2 + \ldots + \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}x^n = 0,$$

где је $\beta > \alpha > 0$ којима одговара интеграл

$$a_n = \int_{\log\alpha}^{\log\beta} e^t e^{nt} dt \quad \text{итд.}^{**}$$

** Рад приказан у FdM, B. 37, S. 110.

ЈЕДНА СИМЕТРИЧНА ФУНКЦИЈА КОРЕНА И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ*

Нека је $f(x)=0$ каква алгебарска или трансцендентна једначина са коренима

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

који могу бити реални или имагинарни, прости или вишеструки. Означимо са m ма какав цео позитиван број.

Симетрична функција, која ће бити предмет ове расправе, јесте рационална функција корена

$$\Delta(m,r)=\sum \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m}. \tag{1}$$

Као што ће бити показано, ова се функција израчунава рационалним операцијама помоћу логаритамског извода функције $f(x)$. Она, међутим, има интересантних особина, које доводе до нових релација између логаритамског извода једне функције и њених нула.

ФУНКЦИЈА Δ ЗА АЛГЕБАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Нека је $f(x)=0$ нека алгебарска једначина n-тог степена, са коренима $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ставимо да је

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\varphi(x), \tag{2}$$

означимо са $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ корене биномне једначине

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXV, Први разред, књ. 30, Београд 1908, стр. 75–100; саопштено у Академији природних наука 10. децембра 1907.

$$(3) \qquad x^m - 1 = 0$$

и образујмо комбинацију

$$(4) \qquad \Phi(m,r) = \frac{1}{m}\left[\varphi(\omega_1 r) + \varphi(\omega_2 r) + \ldots + \varphi(\omega_m r)\right].$$

Из обрасца

$$(5) \qquad \varphi(z) = \sum_1^n \frac{z}{z - \alpha_k}$$

добија се

$$(6) \qquad \varphi(\omega_i r) = \sum_1^n \frac{\omega_i}{\omega_i - \dfrac{\alpha_k}{r}}$$

и према томе

$$(7) \qquad \Phi(m,r) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=n} A_k(r),$$

где је

$$(8) \qquad A_k(r) = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \dfrac{\alpha_k}{r}} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - \dfrac{\alpha_k}{r}}.$$

Међутим, идентичност

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)\cdot\ldots\cdot(x - \omega_m) = x^m - 1$$

деобом са x^m и сменивши $\dfrac{1}{x}$ са t постаје

$$(1 - \omega_1 t)(1 - \omega_2 t)\ldots(1 - \omega_m t) = 1 - t^m.$$

Ако се узме логаритамски извод обеју страна по t, множећи са t и сменивши у резултату t са $\dfrac{1}{x}$ добија се идентичност

$$(9) \qquad \frac{\omega_1}{\omega_1 - x} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - x} = \frac{m}{1 - x^m}$$

која, упоређена са једначином (8) доводи до једначине

$$A_k(r) = \frac{m}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m} \tag{10}$$

а ова, са (6) до следећег резултата:

Симешрична функција $\Delta(\mathrm{m}, \mathrm{r})$ *има за аналишички израз* $\Phi(\mathrm{m}, \mathrm{r})$ *дефинисан обрасцем* (4).

То важи, очевидно, за ма какав цео и позитиван број m. Узмимо сад случај кад је m облика

$$m = 2^k,$$

где је k цео и позитиван број. Тада се функција Δ може израчунати још и на овај начин.

Означимо са

$$P_k(x) = 0 \tag{11}$$

једначину n-тог степена чији су корени 2^k-ти степени корена саме дате једначине $f(x) = 0$.

Ми ћемо назвати функцијом $N_k(x)$ једначине $f(x) = 0$ рационалну функцију

$$N_k(x) = \frac{xP_k'(x)}{P_k(x)}. \tag{12}$$

Формирање ове функције своди се на формирање полинома $P_k(x)$ n-тог степена. Међутим ово познато[1] практично правило даје начина да се из већ образованог полинома

$$P_{k-1}(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n \tag{13}$$

формира полином вишег ранга

$$P_k(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \tag{14}$$

Коефицијенат једнога ма ког члана полинома (14) раван је квадрату одговарајућег коефицијента полинома (13), мање двогубом производу два коефицијента између којих се овај налази, више двогубом производу два коефицијента између којих се налазе сва ова три коефицијента итд. док се не дође до крајњих чланова полинома (13); напо-

---

[1] Gräffe, *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen* (Zürich 1837) Carvallo: *Méthode practique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcedendantes* (Paris 1896).

слетку треба у резултату променити знак свима тако израчунатим коефицијентима B_k непарних степена. Према томе, биће

$$(15)\qquad C_k = (-1)^{n-k}\left[B_k^2 - 2B_{k-1}B_{k+1} + 2B_{k-2}B_{k+2} - \dots\right].$$

На тај начин, пошавши од полинома

$$P_0(x) = f(x)$$

може се, по томе правилу, образовати низ полинома

$$(16)\qquad P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$$

а помоћу ових и сам низ функција

$$(17)\qquad N_1(x), N_2(x), N_3(x), \dots$$

према обрасцу (12).

Тако би нпр. за једначину шестог степена

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

било

$$N_0(x) = \frac{6x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + x}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

$$N_1(x) = \frac{6x^6 + 15x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1}$$

$$N_2(x) = \frac{6x^6 - 25x^5 + 56x^4 + 91x^3 + 364x^2 + 19x}{x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1}$$

$$N_3(x) = \frac{6x^6 + 15x^5 + 3480x^4 + 12981x^3 + 63948x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1}$$

....

Пошто једначина

$$P_k(x) = 0$$

има за корене

$$\alpha_1^{2^k}, \alpha_2^{2^k}, \dots, \alpha_n^{2^k},$$

то ће бити

$$\frac{P_k'(x)}{P_k(x)} = \sum_1^n \frac{1}{x - \alpha_i^{2^k}}$$

и према томе

$$(18)\qquad N_k(x) = \sum_1^n \frac{1}{1 - \frac{\alpha_i^{2^k}}{x}},$$

из чега се, поређењем са раније нађеним обрасцем

$$(19)\qquad \Phi(m,r) = \sum_1^n \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m},$$

налази да је

$$(20)\qquad N_k(x) = \Phi(m,r) \quad \text{за} \begin{cases} r = x^{2^k} \\ m = 2^k \end{cases}$$

$$(21)\qquad \Phi(m,x) = N_k(r) \quad \text{за} \begin{cases} r = x^{2^k} \\ m = 2^k \end{cases}$$

тј. да је

$$(22)\qquad \Delta(2^k, r) = N_k(r^{2^k}).$$

У случају, дакле, кад је $m = 2^k$, *симетрична функција* $\Delta(m,r)$ *има за аналитички израз рационалну функцију* $N_k(x)$ *пошто се у овој смени* x *са* r^{2^k}.

*

Претпоставимо сад да је, било на један, било на други од ова два начина, израчуната функција $\Delta(m,r)$ за једну дату алгебарску једначину $f(x) = 0$. Нека су

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$$

корени једначине $f(x) = 0$ што се налазе у унутрашњости круга C полупречника r, описаног око тачке $x = 0$ као центра, а

$$\alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}, \ldots, \alpha_n$$

корени што се налазе ван круга C, претпостављајући да се ни један корен не налази на самој периферији тога круга.

Пошто је идентички

$$(23)\qquad \sum_{k=1}^{k=h} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m} = h + \varepsilon_1,$$

где је

$$(24) \qquad \varepsilon_1 = \sum_{k=1}^{k=h} \frac{\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m},$$

а тако исто и

$$(25) \qquad \sum_{k=h+1}^{k=n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m} = \sum_{k=h+1}^{k=n} \frac{\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^m}{\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^m - 1} = \varepsilon_2$$

то ће, према једначини

$$\Delta(m,r) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m} = \sum_{k-1}^{k+h} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m} + \sum_{k=h+1}^{k=n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m}$$

бити

$$(26) \qquad \Delta(m,r) = h + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

а неједначине

$$\left|\frac{\alpha_k}{r}\right| < 1 \quad \text{за } k = 1, 2, \ldots, h$$

$$\left|\frac{r}{\alpha_k}\right| < 1 \quad \text{за } k = h+1, \ldots, n$$

тада показују да је

$$(27) \qquad |\varepsilon_1| < \sum_{1}^{h} \frac{\left|\frac{\alpha_k}{r}\right|^m}{1-\left|\frac{\alpha_k}{r}\right|^m},$$

$$(28) \qquad |\varepsilon_2| < \sum_{h=1}^{n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m}{1-\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m}.$$

Тиме се долази до једначине

$$h = \Delta(m,r) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{29}$$

где ε_1 и ε_2 задовољавају неједначине (27) и (28).

Нека је сад C прстенаста површина између два концентрична круга описана око почетка са полупречницима R и $R+\delta$, а која у себи не садржи ни један корен α_i. Узевши за r вредност

$$r = R + \frac{\delta}{2} \tag{30}$$

број корена опкољених површином C биће h, према чему је за $k = 1, 2, \ldots, h$

$$|\alpha_k| < R = r - \frac{\delta}{2}. \tag{31}$$

а за $k = h+1, \ldots, n$

$$|\alpha_k| > r + \frac{\delta}{2} = R + \delta. \tag{32}$$

Уочимо, најпре, ове последње корене. Неједначина (32) показује да ако се стави

$$\mu = \frac{r}{R+\delta} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2R+\delta}} < 1, \tag{33}$$

биће

$$\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m < \mu^m < 1, \tag{34}$$

или

$$\frac{1}{1 - \left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m} < \frac{1}{1-\mu^m}$$

према чему је

$$\sum_{h+1}^{n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m}{1 - \left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m} < \frac{1}{1-\mu^m} \sum_{h+1}^{n} \left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m, \tag{35}$$

а пошто је

$$\sum_{h+1}^{n}\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m < (n-h)\,\mu^m$$

то неједначина (35) постаје

$$(36) \qquad |\,\varepsilon_2\,| < \frac{(n-h)\,\mu^m}{1-\mu^m}.$$

Уочимо сад корене α_k за $k = 1, 2, 3, \ldots, h$. Неједначина (31) показује да је за те корене

$$(37) \qquad \left|\frac{\alpha_k}{r}\right| < \frac{R}{r} = \frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2R}},$$

из чега се, на исти начин као и малочас, изводи неједначина

$$(38) \qquad |\,\varepsilon_1\,| < \frac{h\,\mu^m}{1-\mu^m}.$$

Ставивши, дакле, да је

$$(39) \qquad \theta = \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\delta}{2R+\delta} < 1$$

$$(40) \qquad \xi_m = \frac{n}{\theta^m - 1}$$

биће, према (36) и (38)

$$(41) \qquad |\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2\,| < |\,\varepsilon_1\,| + |\,\varepsilon_2\,| < \xi_m$$

тако, да се комбинацијом једначине (29) са неједначином (41) *долази до ове, за циљ који се овде има, основне једначине*

$$(42) \qquad h = \Delta(m, r) + \beta_m,$$

ѓде β_m *означује једну количину чији је модуо мањи од* ξ_m.

Из ове једначине се, пре свега, изводи да је

$$(43) \qquad \Delta(m, r) - \xi_m < h < \Delta(m, r) + \xi_m,$$

па ма каква била вредност целога и позитивног броја m, а пошто је за $m = \infty$

$$\lim \xi_m = 0,$$

то је

$$h = \lim \Delta(m,r). \tag{44}$$

Али слична једначина важи и за коначне вредности m.

Означимо са M_m највећи цео број садржан у $\Delta(m,r)$ а са γ_m позитиван разломљени део исте количине, тако да је

$$\Delta(m,r) = M_m + \gamma_m \tag{45}$$

$$0 < \gamma_m < 1 \tag{46}$$

па ће, према неједначини (43) за све вредности целог броја m бити

$$M_m + (\gamma_m - \xi_m) < h < M_m(\gamma_m + \xi_m). \tag{47}$$

Дајмо сад броју m најмању могућу вредност за коју ће бити

$$0 < \xi_m < 1, \tag{48}$$

према једначини (40) то ће бити онда кад је

$$\frac{n}{\theta^m - 1} < 1,$$

одакле је

$$m \geq \frac{\log(n+1)}{\log \theta}. \tag{49}$$

Треба разликовати сада следећа два случаја.

Први случај: нека је

$$\gamma_m + \xi_m \leq 1.$$

Тада не може бити $\gamma_m > \xi_m$, јер би у томе случају морало бити

$$\begin{array}{ll} \gamma_m + \xi_m = 1 - \lambda_1 & 0 \leq \lambda_1 < 1 \\ \gamma_m - \xi_m = \lambda_2 & 0 < \lambda_2 < 1 \end{array}$$

и према томе

$$M_m + \lambda_2 < h < M_m + 1 - \lambda_1,$$

што је немогуће пошто се између вредности

$$M_m + \lambda_2 \quad \text{и} \quad M_m + 1 - \lambda_1$$

не налази ни један цео број.

Може, дакле, бити само $\gamma_m \leq \xi_m$ и онда је

$$\begin{aligned} \gamma_m + \xi_m &= 1 - \lambda_1 \qquad & 0 < \lambda_1 < 1 \\ \gamma_m - \xi_m &= -1 + \lambda_2 \qquad & 0 \leq \lambda_2 < 1 \end{aligned}$$

и према томе

$$M_m - 1 + \lambda_2 < h_2 < M_m + 1 - \lambda_1,$$

што значи да је

$$h = M_m.$$

Други случај: нека је

$$\gamma_m + \xi_m > 1.$$

Тада: 1. ако је $\gamma_m > \xi_m$ биће

$$\begin{aligned} \gamma_m + \xi_m &= 1 + \lambda_1 \qquad & 0 < \lambda_1 < 1 \\ \gamma_m - \xi_m &= 1 - \lambda_2 \qquad & 0 < \lambda_2 < 1 \end{aligned}$$

и према томе

$$M_m + 1 - \lambda_2 < h < M_m + 1 + \lambda_1,$$

што значи да је

$$h = M_m + 1;$$

2. ако је $\gamma_m \leq \xi_m$ биће

$$\begin{aligned} \gamma_m + \xi_m &= 1 + \lambda_1 \qquad & 0 < \lambda_1 < 1 \\ \gamma_m - \xi_m &= 1 + \lambda_2 \qquad & 0 < \lambda_2 \leq 1 \end{aligned}$$

и према томе

$$M_m - 1 + \lambda_2 < h < M_m + 1 + \lambda_1,$$

што значи да је број h раван једноме од бројева M_m и $M_m + 1$.

Одатле следи ова теорема.

Теорема I. – *Кад какав размак* $(\mathrm{R}, \mathrm{R} + \delta)$ *не садржи модуо ни једнога корена дате алгебарске једначине* $\mathrm{f(x)} = 0$ n-*тога степена, ако се са* m *означи ма који цео број већи од вредности*

$$(50) \qquad \frac{\log(n+1)}{\log\theta},$$

где је

$$(51) \qquad \theta = 1 + \frac{\delta}{2R + \delta}$$

број корена једначине $\mathrm{f(x)} = 0$ *чији је модуо мањи од* R *биће уопште или* $\mathrm{M_m}$ *или* $\mathrm{M_m} + 1$, *где* $\mathrm{M_m}$ *означује највећи цео број садржан у вредности* $\Delta(\mathrm{m}, \mathrm{r})$.

И то, ако се са γ означи позитиван разломљени део вредности $\Delta(m,r)$ а са ξ вредност

$$\xi = \frac{n}{\theta^m - 1}$$

1. *ако је* $\gamma + \xi \leq 1$ *биће* $\mathrm{h} = \mathrm{M}_\mathrm{m}$,
2. *ако је* $\gamma + \xi > 1$ *и* $\gamma \geq \xi$ *биће* $\mathrm{h} = \mathrm{M} + 1$.

Од интереса је још и ово питање: у коме односу треба да стоје међу собом унутарњи полупречник R и дебљина δ прстенасте површине C да би била задовољена погодба (49) тј. да би горња теорема важила за једну унапред дату вредност m?

Лако се налази да тада израз

$$\sqrt[m]{n+1} \tag{52}$$

мора бити мањи од 2 и да у томе случају треба да је

$$\frac{\delta}{R} > \frac{2\sqrt[m]{n+1} - 2}{2 - \sqrt[m]{n+1}}. \tag{53}$$

Одатле произилази следећа теорема.

Теорема II. – *Давши целоме позитивном броју* m *ма какву вредност за коју је*

$$\sqrt[m]{n+1} < 2$$

кад год је релативна дебљина прстенасте површине C *већа од вредности*

$$\frac{2\sqrt[m]{n+1} - 2}{2 - \sqrt[m]{n+1}} \tag{54}$$

број h *корена дате једначине* $\mathrm{f(x)} = 0$, *опкољених површином* C, *биће уопште* M_m *или* $\mathrm{M}_\mathrm{m} + 1$; *који ће то бити од ова два броја, решава се према ранијој теореми, помоћу вредности* γ_m *и* ξ_m.

*

Уочимо сад случај који је од посебног интереса због лакости са којом се тада практично израчунава симетрична функција $\Delta(m,r)$: нека је број m облика

$$m = 2^k,$$

где је k цео и позитиван број. Тада је, као што је раније показано

$$\text{(55)} \qquad \Delta(m,r) = N_k(r^{2^k})$$

где је $N_k(x)$ k-ти члан низа функција

$$N_1(x), N_2(x), N_3(x), \ldots$$

образованих на раније показани начин.

Услов (49) тада постаје

$$\text{(56)} \qquad k > \frac{\log\log(n+1) - \log\log\theta}{\log 2}$$

и теорема I добија следећи облик.

Теорема III. – *Узевши за* k *ма какав цео број који задовољава по̄-го̄дбу* (56), *број* h *биће увек једнак једноме од бројева* $\mathrm{M_m}$ *и* $\mathrm{M_m}+1$, *го̄де* $\mathrm{M_m}$ *означава највећи цео број садржан у вредностӣ*

$$N_k(x) \quad \text{за} \quad x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^{2^k};$$

који ће то̄ битӣ од ова два броја, решава се, као и у т̄еореми I, *т̄омоћу одго̄варајућих бројева* γ_m и ξ_m.

Потврдимо теорему на већ посматраноме примеру: нека је дата једначина шестог степена

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

и потражимо за њу број корена опкољених прстенастом површином C, чији унутарњи полупречник нека је $R = 0{,}6$ а дебљина $\delta = 0{,}6$ знајући унапред да сама површина не садржи у себи ни један корен једначине.

Овде је

$$\frac{\delta}{R} = 1 \qquad R + \frac{\delta}{2} = 0{,}9 \qquad \theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\log\log(n+1) - \log\log\theta}{\log 2} = 2{,}75$$

и према томе се може узети $k = 3$. А како је, као што је напред утврђено

$$N_3(x) = \frac{6x^6 + 15x^5 + 3480x^4 + 12981x^3 + 63948x^2 + 3x}{x^6 - 3x^5 + 870x^4 - 4327x^3 + 31974x^2 + 3x - 1}$$

вредност овога израза за

$$x = (0,9)^8 = 0,4305,$$

биће

$$N_3(x) = 2,06,$$

при чему је

$$M_m = 2 \quad \gamma_m = 0,06.$$

А пошто је у исто време

$$\xi_m = \frac{6}{\left(\frac{4}{3}\right)^8 - 1} = 0,67$$

према чему је

$$\gamma_m + \xi_m = 0,73 < 1,$$

то ће тражени број корена бити

$$h = M_m = 2.$$

И заиста, једначина има три пара конјугованих имагинарних корена чије су вредности[2]

$$\begin{aligned} &-0,29008 \pm 1,49579\sqrt{-1} \\ &-1,08018 \pm 0,63904\sqrt{-1} \\ &-0,29009 \pm 0,43510\sqrt{-1} \end{aligned}$$

и чији су модули

$$\begin{aligned} r_1 &= 1,52366 \\ r_2 &= 1,25505 \\ r_3 &= 0,52294 \end{aligned}$$

па дакле, само је последњи пар корена опкољен површином C.

Остаје још питање: преко које границе треба да пређе вредност $\frac{\delta}{R}$ па да теорема III важи за једну унапред дату вредност k? У томе погледу, а претпостављајући да је задовољен потребан услов

$$\sqrt[2^k]{n+1} < 2$$

очевидно је, да ће то бити случај кад год је

$$\frac{\delta}{R} > \frac{2\left(\sqrt[2^k]{n+1} - 1\right)}{2 - \sqrt[2^k]{n+1}}. \tag{57}$$

[2] Gräffe, loc. cit. S. 28.

Из ове таблице могу се видети, за једначине разних степена n, најмање вредности броја $\frac{\delta}{R}$ за које се може тврдити да ће број h имати за вредност M_m или $M_m + 1$ према теореми III, и то специјално за вредност $k = 3$:

n	$\frac{\delta}{R}$	n	$\frac{\delta}{R}$
4	0,573	13	1,283
5	0,670	14	1,348
6	0,760	15	1,414
7	0,844	16	1,478
8	0,924	17	1,541
9	1,000	18	1,603
10	1,074	19	1,664
11	1,145	20	1,725
12	1,215	21	1,785

Кад се нпр. зна да нека прстенаста површина C релативне дебљине $\frac{\delta}{R}$ једнаке оној у таблици или веће од ове, не садржи у себи ни један корен дате једначине n-тог степена, означивши са M_m највећи цео број садржан у вредности

$$N_3(x) \quad \text{за} \quad x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^8,$$

број h корена опкољених површином C биће M или $M + 1$, према теореми III.

ФУНКЦИЈА Δ ЗА ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Нека је $f(z)$ ма каква *цела* трансцендентна функција променљиве z, чији род (genre) нека је коначан и раван броју p, а чије нуле нека су

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

Разлажући функцију на примарне факторе, биће

$$f(z) = e^{G(z)} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)} \right], \tag{58}$$

где су $G(z)$ и $Q(z)$ полиноми по z.

Нека је q степен полинома $G(z)$ а l степен полинома $Q(z)$; број p биће раван већем од ова два броја, тако да је

$$p \geq q \quad p \geq 1.$$

Из обрасца (58) је

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{(k)} \left[\frac{1}{z-\alpha_k} + P_k(z) \right] + G(z), \tag{59}$$

где је

$$P_k(z) = \frac{1}{\alpha_k} + \frac{z}{\alpha_k^2} + \ldots + \frac{z^{l-1}}{\alpha_k} \tag{60}$$

тако да, ако се стави

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi(z), \tag{61}$$

биће

$$\varphi(z) = \sum_{(k)} \left[\frac{z}{z-\alpha_k} + zP_k(z) \right] + zG'(z). \tag{62}$$

Нека је сад m ма какав цео позитиван број већи од p и нека су

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m$$

корени биномне једначине

$$z^m - 1 = 0$$

па образујмо комбинацију

$$\Phi(m,r) = \frac{\varphi(\omega_1 r) + \varphi(\omega_2 r) + \ldots + \varphi(\omega_m r)}{m}, \tag{63}$$

где је функција $\varphi(z)$ дефинисана обрасцем (61). Ова се комбинација, према обрасцу (62), може написати у облику

$$\Phi(m,r) = \frac{1}{m} \sum_{(k)} \left[A_k(r) + B_k(r) \right] + C(r), \tag{64}$$

где је

$$A_k(r) = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \frac{\alpha_k}{r}} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - \frac{\alpha_k}{r}}, \tag{65}$$

(66) $$B_k(r) = \omega_1 r P_k(\omega_1 r) + \ldots + \omega_m r P_k(\omega_m r),$$

(67) $$C(r) = \omega_1 r\, G'(\omega_1 r) + \ldots + \omega_m r\, G'(\omega_m r).$$

Раније изведена идентичност

$$\frac{\omega_1}{\omega_1 - x} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - x} = \frac{m}{1 - x^m}$$

показује да је

(68) $$A_k(r) = \frac{m}{1 - \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)};$$

осим тога, обрасци (60) и (66) показују да је

$$B_k(r) = \frac{r}{\alpha_k}\Sigma\omega_1 + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^2 \Sigma\omega_i^2 + \ldots + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^l \Sigma\omega_i^l,$$

а пошто је $l < m$, према особинама биномних једначина биће

$$\Sigma\omega_i = 0 \quad \Sigma\omega_i^2 = 0 \quad \ldots \quad \Sigma\omega_i^1 = 0$$

тако да је

(69) $$B_k(r) = 0.$$

Напослетку, пошто је $G(z)$ полином степена q, биће

$$z\,G'(z) = M_1 z + M_2 z^2 + \ldots + M_q z^q,$$

где су M_k стални коефицијенти, тако да је према обрасцу (67)

$$C(r) = M_1 r \Sigma\omega_i + M_2 r^2 \Sigma\omega_i^2 + \ldots + M_q r^q \Sigma\omega_i^q$$

и према томе (пошто је $q < m$)

(70) $$C(r) = 0$$

тако да се једначина (64) своди на

$$\Phi(m,r) = \frac{1}{m}\sum_{(k)} A_k(r) = \sum_{(k)} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m}.$$

Обрзац, дакле,

$$\Delta(m,r) = \Phi(m,r) \tag{71}$$

раније изведен за једначине чија је лева страна полином и који тада важи за ма какву целу и позитивну вредност m, *важи у исто време и за трансцендентне једначине чија је лева страна ма каква цела функција коначнога рода* p, *али под условом да број* m *има већу вредност од* p.

Приметимо још да услов $m > p$ осигурава конвергенцију реда

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^m},$$

а тиме и одређеност симетричне функције $\Delta(m,r)$.

*

Лако се увиђа да, као и у случају полинома, између функције $\Phi(m,r)$ и број h корена трансцендентне једначине $f(x) = 0$ у унутрашњости датога круга полупречника r, важи релација (в. једначину (26) са неједначинама (27) и (28))

$$h = \Phi(m,r) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{72}$$

где је

$$|\varepsilon_1| < \sum_{1}^{h} \frac{\left|\frac{\alpha_k}{r}\right|^m}{1 - \left|\frac{\alpha_k}{r}\right|^m}, \tag{73}$$

$$|\varepsilon_2| < \sum_{h+1}^{\infty} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m}{1 - \left|\frac{r}{\alpha_k}\right|^m}. \tag{74}$$

Претпоставимо да једначина $f(x) = 0$ нема ни један корен чији би се модуо налазио између два дата броја R и $R + \delta$. Као што је већ показано, ако се тада стави да је

$$r = R + \frac{\delta}{2}, \tag{75}$$

(76) $$\mu = \frac{1}{1 + \dfrac{\delta}{2R + \delta}} < 1,$$

биће

(77) $$\left| \varepsilon_1 \right| < \frac{1}{1 - \mu^m} \sum_1^h \left| \frac{\alpha_k}{r} \right|^m,$$

(78) $$\left| \varepsilon_2 \right| < \frac{1}{1 - \mu^m} \sum_{h+1}^{\infty} \left| \frac{r}{\alpha_k} \right|^m,$$

где је h број корена мањега модула од R.

Из једначине (72) и неједначина (73) и (74) добија се да је за ма какву вредност m

(79) $$h = \Phi(m,r) + \varepsilon,$$

где је

$$\left| \varepsilon \right| = \left| \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right| < \left| \varepsilon_1 \right| + \left| \varepsilon_2 \right|$$

или

(80) $$\left| \varepsilon \right| < \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \mu^m},$$

где је

(81) $$\xi_1 = \sum_1^h \left| \frac{\alpha_k}{r} \right|^m,$$

(82) $$\xi_2 = \sum_{h+1}^{\infty} \left| \frac{r}{\alpha_k} \right|^m.$$

Пошто је

$$\left| \frac{\alpha_k}{r} \right| < 1 \quad \text{за } k = 1, 2, \ldots, h$$

$$\left| \frac{r}{\alpha_k} \right| < 1 \quad \text{за } k = h+1, h+2, \ldots$$

то ξ_1 и ξ_2 теже нули за $m = \infty$, из чега се види да је

$$(83) \qquad h = \lim \Phi(m,r) \ \text{ за } \ m = \infty$$

а до тога резултата раније,[3] и на други начин дошао је и г. Vivanti. За коначне, пак, вредности *m* биће увек

$$\Phi(m,r) - \frac{\xi_1 + \xi_2}{1-\mu^m} < h < \Phi(m,r) + \frac{\xi_1 + \xi_2}{1-\mu^m}$$

тако, да би одредба једне *доње* границе, за ξ_1 и ξ_2 која је била лака за случај полинома, допустила да се прецизирају границе између којих, за једну дату вредност *m*, лежи број *h* и да се, шта више, овај број тачно и одреди на начин сличан ономе који је већ наведен за случај полинома.

ЗБИРОВИ S_m И S_{-m} ИЗРАЖЕНИ ПОМОЋУ СИМЕТРИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ $\Delta(m,r)$

Збирови

$$S_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + \ldots$$

$$S_{-m} = \frac{1}{\alpha_1^m} + \frac{1}{\alpha_2^m} + \frac{1}{\alpha_3^m} + \ldots$$

за једначину $f(x) = 0$, где је $f(x)$ било полином по *x*, било трансцендентна цела функција коначног рода, могу се на веома прост начин изразити помоћу функције $\Delta(m,r)$.

Тако, из обрасца

$$\Delta(m,r) = \sum \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\alpha_k^m}{r}\right)} = \sum \frac{r^m}{r^m - \alpha_k^m} = \Phi(m,r)$$

добија се непосредно да је

$$(84) \qquad S_{-m} = -\lim \left[\frac{1}{r^m} \Phi(m,r) \right]_{r=0},$$

и то било да је f(x) *полином, било да је трансцендентна цела функција*, под условом да у овоме последњем случају број *m* буде већи од рода *p* те функције.

---

[3] Vivanti, *Sur valor medio di Pringsheim e sulla sua applicazione alla teoria della funzioni analitiche*, Mathem. Annalen Bd. 58. S. 462.

Ако се примети да је према L' Hospital-овом правилу

$$\lim\left[\frac{1}{r^m}\Phi(m,r)\right]=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\Phi^{(m)}(m,0),$$

види се да *збир* S_{-m} *није ништа друго до коефицијенат од* r^m *у Maclaurin-овом реду у који би се развила функција* $\Phi(m,r)$ *узет са супротним знаком.*

У случају кад је $f(x)$ полином и кад је

$$m=2^k,$$

биће

$$\Phi(m,r)=N_k(x),$$

за

$$x=r^{2^k}=r^m,$$

и

$$N_k(x)=\frac{xP_k'(x)}{P_k(x)},$$

и према томе је

$$S_{-m}=-\lim\left[\frac{1}{x}N_k(x)\right]_{x=0}$$

или још

(85) $$S_{-m}=-\frac{P_k'(0)}{P_k(0)}.$$

Овај образац заслужује пажње по својој простоти. Али он има своје важности и по једноме практичном правилу, до кога он доводи, за израчунавање извесних збирова високих степена S_{-m}. Пошто $P_k(0)$ има вредност последњега коефицијента у полиному $P_k(x)$, а $P_k'(0)$ вредност претпоследњег коефицијента у истоме полиному, то би се практично правило састојало у следећем.

Треба по ранијем упутству (стр. 4) *одредити низ полинома*

$$P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots$$

па ће се уопште збир S_{-m} *за* $m=2^k$ *добити кад се претпоследњи коефицијенат полинома* $P_k(x)$ *подели последњим коефицијентом и резултату промени знак.*

Тако би нпр. имали за ранију једначину шестог степена

$$\begin{aligned}
P_1(x)&=x^6-3x^5+2x^4+3x^3+14x^2+3x+1\\
P_2(x)&=x^6-5x^5+14x^4+31x^3+182x^2+19x+1\\
P_3(x)&=x^6+3x^5+870x^4+4327x^3+31974x^2+3x+1
\end{aligned}$$

према чему би за њу било

$$\sum \frac{1}{\alpha_i^2} = -3, \quad \sum \frac{1}{\alpha_i^4} = -19, \quad \sum \frac{1}{\alpha_i^8} = -3.$$

Применом истога правила на једначину, која се из првобитне изводи сменивши у њој x са $\frac{1}{x}$, израчунали би се збирови S_m за $m = 2^k$.

Правило је, међутим, од нарочите важности у случајевима кад је k велики број, у коме се случају одговарајући збирови израчунавају помоћу њега знатно брже и лакше него применом обичних, познатих, образаца за тај посао.

О ЈЕДНОМ НИЗУ РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА ПРИДРУЖЕНИХ АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА*

ДЕФИНИЦИЈА И ФОРМИРАЊЕ ФУНКЦИЈА $N_k(x)$.

1. Нека је дата алгебарска једначина степена n

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

са реалним коефицијентима. Означимо са

$$P_k(x) = 0 \tag{2}$$

једначину реда n чији корени степеновани бројем 2^k јесу корени једначине (1).

За следећу рационалну функцију, $N_k(x)$, кажемо да је *функција придружена једначини* (1)

$$N_k(x) = \frac{xP_k'(x)}{P_k(x)}. \tag{3}$$

Формирање функције $N_k(x)$ своди се на конструкцију полинома $P_k(x)$ степена n. Дакле, примена следећег правила[1] омогућава конструкцију полинома

$$P_k(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \tag{4}$$

полазећи од полинома

$$P_{k-1}(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n, \tag{5}$$

---

* Наслов оригинала *Sur une suite des fonctions rationnelles ratachées aux équations algébriques*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1908, t. XXXVI, pp. 141–150.

[1] Gräffe, *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen* (Zurich, 1837). Carvallo, *Méthode practique pour la resolution numerique complète des équations algebriques ou transcendantes* (Paris, 1896).

за који се претпоставља да је већ формиран.

Коефицијент уз било који члан из (4) једнак је квадрату одговарајућег члана из (5), умањеном за двоструки производ њему суседних коефицијената из (5), увећаном за двоструки производ оних коефицијената који су њима суседни, и тако даље, док се не дође до једног од последњих чланова једначине (5); на крају, тако израчунатим коефицијентима из (4) мењамо знак уз непарне степене променљиве x.

Другим речима, имаћемо

$$C_k = (-1)^{n-k}(B_k^2 - 2B_{k-1}B_{k+1} + 2B_{k-2}B_{k+2} - \ldots). \tag{6}$$

Дакле, полазећи од

$$P_0(x) = f(x),$$

формирамо корак по корак низ полинома

$$P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots, \tag{7}$$

уз помоћ којих се образује низ функција

$$N_1(x), N_2(x), N_3(x), \ldots \tag{8}$$

применом формуле (3). Тако, на пример, за једначину шестог степена

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \tag{9}$$

(разматрао Gräffe), налазимо низ

$$\tag{10} \begin{cases} N_0(x) = \dfrac{6x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + x}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1}, \\[2ex] N_1(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1}, \\[2ex] N_2(x) = \dfrac{6x^6 - 25x^5 + 56x^4 + 91x^3 + 361x^2 + 19x}{x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1}, \\[2ex] N_3(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 3480x^4 + 12981x^3 + 63918x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1}. \end{cases}$$

2. Експлицитан израз функције $N_k(x)$ је могуће добити у облику комбинације полинома $f(x)$ и његовог првог извода. У том циљу, приметимо да, ако са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ означимо корене једначине (1), добијамо

$$\frac{P_k'(x)}{P_k(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i^{2^k}},$$

или

$$(11)\qquad N_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{\alpha_i^{2^k}}{x}}.$$

Размотримо, с друге стране, израз

$$(12)\qquad \Phi_m(r)=\frac{r}{m}\left[\frac{\omega_1 f'(\omega_1 r)}{f(\omega_1 r)}+\ldots+\frac{\omega_m f'(\omega_m r)}{f(\omega_m r)}\right],$$

где $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m$ означавају примитивне корене једначине

$$x^m-1=0,$$

где је m ма који позитиван цео број. Како је

$$\frac{\omega_j r f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_j}{\omega_j-\dfrac{\alpha_i}{r}},$$

може се написати

$$(13)\qquad \Phi_m(r)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}A_i(r),$$

где је

$$(14)\qquad A_i(r)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_j}{\omega_j-\dfrac{\alpha_i}{r}}.$$

Даље, из идентитета

$$(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_m)=x^m-1$$

лако се изводи једнакост

$$\frac{\omega_1}{\omega_1-x}+\frac{\omega_2}{\omega_2-x}+\ldots+\frac{\omega_m}{\omega_m-x}=\frac{m}{1-x^m},$$

одакле се добија

$$A_i(r)=\frac{m}{1-\left(\dfrac{\alpha_i}{r}\right)^m},$$

или према (13)

$$\Phi_m(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}. \tag{15}$$

Поређењем (11) и (15) долазимо до релација

$$N_k(x) = \Phi_m(r) \quad \text{за} \quad r = x^{2^{-k}}, \quad m = 2^k, \tag{16}$$

$$\Phi_m(x) = N_k(r) \quad \text{за} \quad r = x^{2^k}, \quad m = 2^k. \tag{17}$$

Имамо, дакле, експлицитан израз за $N_k(x)$ *у облику суме од* 2^k *израза*

$$2^{-k}\omega_j r \frac{f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)}, \tag{18}$$

где треба ставити

$$r = x^{2^{-k}} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, 2^k).$$

РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ФУНКЦИЈА $N_k(x)$ И БРОЈА КОРЕНА ДАТЕ ЈЕДНАЧИНЕ ОБУХВАЋЕНЕ УНУТРАШЊОШЋУ ДАТЕ КРУЖНИЦЕ

1. Већ смо се упознали са улогом коју имају полиноми $P_k(x)$ у Gräffe-овој методи за нумеричко решавање једначина. Овде ћемо указати на постојећу релацију између рационалних функција $N_k(x)$, придружених полиномима $P_k(x)$ и броја корена h дате једначине (1), чији су модули одозго ограничени датим бројем.

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ корени обухваћени унутрашњошћу кружнице C полупречника r, са центром у координатном почетку; $\alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}, \ldots, \alpha_n$ корени ван C, претпостављајући да се ни један не налази на кружници. Како је

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = h + \varepsilon_1, \tag{19}$$

где је

(20)
$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{h} \frac{\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}.$$

За

(21)
$$\varepsilon_2 = \sum_{i=h+1}^{n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m}{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m - 1},$$

неједнакости

(22)
$$\left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1 \qquad \text{за} \quad i = 1, 2, \ldots, h,$$
$$\left|\frac{r}{\alpha_i}\right| < 1 \qquad \text{за} \quad i = h+1, \ldots, n,$$

комбиноване са релацијама (11), (15), (17), дају

(23)
$$h = N(r^{2^k}) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

с обзиром да је

(24)
$$|\varepsilon_1| < \sum_{i=1}^{h} \frac{\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m}{1-\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m},$$

(25)
$$|\varepsilon_2| < \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1-\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}.$$

У претходном извођењу ставили смо $m = 2^k$.

2. Изведимо следећу последицу.

Претпоставимо да дата једначина $f(x) = 0$ нема ниједан корен чији модул припада интервалу $(R, R+\delta)$. Нека r има вредност

$$r = R + \frac{\delta}{2}. \tag{26}$$

Тада број корена чији су модули мањи од R биће опет h, тако да се за $i = 1, 2, \ldots, h$ добија

$$|\alpha_i| < R = r - \frac{\delta}{2}, \tag{27}$$

и за $i = h+1, \ldots, n$

$$|\alpha_i| > R + \delta = r + \frac{\delta}{2}. \tag{28}$$

Размотримо прво његове корене за које важи (28). Према овој неједнакости, ако уведемо λ на следећи начин

$$\lambda = \frac{r}{R+\delta} = \frac{1}{1 + \dfrac{\delta}{2R+\delta}} < 1, \tag{29}$$

имамо

$$\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < \lambda^m < 1, \tag{30}$$

одакле

$$\frac{1}{1 - \left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|} < \frac{1}{1-\lambda^m}.$$

Према томе

$$\sum_{i=h+1}^{n} \frac{\left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1 - \left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|^m} < \frac{1}{1-\lambda^m} \sum_{i=h+1}^{n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m;$$

одакле, користећи

$$\sum_{i=h+1}^{n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < (n-h)\lambda^m,$$

изводимо

$$|\varepsilon_2| < \frac{(n-h)\lambda^m}{1-\lambda^m}. \tag{31}$$

Осим тога, за корене α_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ неједнакост (27) даје

$$\left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < \frac{R}{r} = \frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2R}} < \lambda; \tag{32}$$

одакле одмах изводимо,

$$|\varepsilon_1| < \frac{h\lambda^m}{1-\lambda^m}. \tag{33}$$

Отуда ако ставимо

$$\theta = \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{\delta}{2R+\delta} > 1, \tag{34}$$

$$\xi_m = \frac{n}{\theta^m - 1}, \tag{35}$$

имамо

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \xi_m. \tag{36}$$

Комбиновањем (31), (33), (36) и (23) долазимо до једнакости

$$h = N(r^{2^k}) + \beta_k, \tag{37}$$

где је β_k *величина чији је модул мањи од* ξ_m.

3. Из претходног најпре закључујемо да се *за све вредности позитивног целог броја* k *добија*

$$N_k(r^{2^k}) - \xi_m < h < N_k(r^{2^k}) + \xi_m, \tag{38}$$

и како се за $k = \infty$ добија

$$\lim \xi_m = 0,$$

биће

$$h = \lim N_k(r^{2^k}). \tag{39}$$

Исто се могу добити сличне једнакости и за коначне вредности целог броја k.

Означимо са M_m цео део, а са γ_m разломљени део броја $N_k(r^m)$, тако да

$$N_k(r^m) = M_m + \gamma_m, \tag{40}$$

где је

$$(41) \qquad 0 < \gamma_m < 1;$$

према (38), за све вредности k, добија се

$$(42) \qquad M_m + (\gamma_m - \xi_m) < h < M_m + (\gamma_m + \xi_m).$$

Нека сада k има најмању могућу вредност за коју је

$$(43) \qquad 0 < \xi_m < 1.$$

Према (35), овај услов ће бити задовољен ако важи

$$(44) \qquad \frac{n}{\theta^m - 1} < 1,$$

одакле изводимо

$$(45) \qquad k > \frac{\log\log(n+1) - \log\log\theta}{\log 2}.$$

Разликујемо два случаја:

Први случај. – Нека је

$$\gamma_m + \xi_m \leq 1.$$

У овом случају не може бити $\gamma_m > \xi_m$, јер би онда имали

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \quad \gamma_m - \xi_m = \theta_2,$$

где је

$$0 \leq \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

и према томе,

$$M_m + \theta_2 < h < M_m + 1 - \theta_1,$$

што је немогуће, јер се између првог и трећег члана ове неједнакости не налази ни један цео број.

Дакле, не може бити $\gamma_m \leq \xi_m$, то јест

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \quad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

где је

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 \leq \theta_2 < 1,$$

што даје

$$h = M_m.$$

Други случај. – Нека је

$$\gamma_m + \xi_m > 1.$$

Тада: 1. Ако је $\gamma_m > \xi_m$, добија се

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \quad \gamma_m - \xi_m = 1 - \theta_2,$$

где је

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

што даје

$$h = M_m + 1.$$

2. Ако је $\gamma_m \leq \xi_m$, добија се

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \quad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

где је

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 \leq 1,$$

одакле видимо да је h једнако M_m или $M_m + 1$.

Отуда долазимо до следеће теореме.

Нека је даш кружни ūрсшен C *са ценшром у координашном ūочешку унушрашњеī ūолуūречника* R *и дебљине* δ, *који не садржи ни један корен даше алīебарске једначине сшеūена* n. *Ако цео број* k *има било коју вредносш већу од*

$$(46) \qquad \frac{1}{\log 2}\left[\log\log(n+1) - \log\log\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right],$$

број h *корена окружених кружним ūрсшеном* C *биће једнак* M *или* M+1, *īде је са* M *означен цео део броја* $\mathrm{N_k(x)}$ за

$$(47) \qquad x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^{2^k}.$$

Специјално, ако са γ означимо разломљени део од $N_k(x)$ за (47), и са ξ вредност

$$(48) \qquad \xi = \frac{n}{\left(\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right)^{2^k} - 1},$$

добијамо

1. ако је $\gamma + \xi \leq 1$, онда је

$$h = M;$$

2. ако је $\gamma + \xi > 1$ и $\gamma \leq \xi$, онда је

$$h = M + 1.$$

Размотримо, као пример, једначину шестог степена (9) одељка 1 и пронађимо број корена окружених кружним прстеном C чији је унутрашњи пречник $R = 0{,}6$ и дебљина $\delta = 0{,}6$, знајући да C не садржи ни један корен.

Израз (46) има вредност 2,75 и може да буде $k = 3$. Израз $N_3(x)$ тако рачунат, узима за

$$x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^8 - (0{,}9)^8 = 0{,}4305$$

вредност 2,06 и добија се

$$M = 2, \quad \gamma = 0{,}06.$$

Како је према (48) $\xi = 0{,}67$ добија се

$$\gamma + \xi = 0{,}73 < 1,$$

што показује да једначина има тачно два корена окружена кружним прстеном C. Ово се проверава директно, јер једначина има три пара имагинарних конјугованих корена, чији су модули (Gräffe, loc. cit., стр. 28)

$$\rho_1 = 1{,}52366,$$
$$\rho_2 = 1{,}25505,$$
$$\rho_3 = 0{,}52294,$$

од којих је последњи пар окружен са C.**

** Изложен Петровићев рад коришћен је у поменутој докторској дисертацији Ш. Ралевића (стр. 15).

ТЕОРЕМА О МАКСИМАЛНОМ МОДУЛУ ДЕТЕРМИНАНТЕ И НЕКОЛИКЕ ЊЕНЕ АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ*

Нека је дата детерминанта n-тог реда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

са реалним или комплексним елементима a_{ik}, и нека се стави, да је

$$S_k = |a_{1k}|^2 + |a_{2k}|^2 + \ldots + |a_{nk}|^2, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{2}$$

тако да S_k представља збир квадрата модула свих елемената k-те врсте у детерминанти Δ.

Позната Hadamard-ова теорема о максималноме модулу детерминанте[1] састоји се у томе, *да је увек, и за ма какву детерминанту* Δ,

$$|\Delta| \leq \sqrt{S_1 S_2 \ldots S_n}\,. \tag{3}$$

Кад се зна једна горња граница λ елемената a_{ik}, неједначина (3) доводи до једне горње границе за модуо саме детерминанте: та је граница одређена неједначином

$$|\Delta| \leq \lambda^n \sqrt{n^n}\,. \tag{4}$$

---

* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 200, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 55, Zagreb 1913, str. 1–18; саопштено у Разреду 21. маја 1913.

[1] Bull. des Sciences mathématiques, 1893, pp. 240–246.

Модуо ни једне детерминанте не може прећи ту границу, а само је поједине, специјалне, детерминанте могу достићи. Такав је случај нпр. са Vandermonde-овом детерминантом, којој су елементи корени биномне једначине n-тог степена. Од детерминаната са реалним елементима могу, и то опет само у појединим специјалним случајевима, достићи горњу максималну вредност само оне, за које је ред n дељив са 4.

Из горње теореме може се извести друга једна, која такође даје горњу границу модула детерминанте; та је у многим случајевима подеснија за примене, а при томе је горња граница, до које она доводи, довољна за циљ, који се има пред очима.

Пошто су сви S_k позитивни, то је према познатој неједнакости за аритметичку и геометријску средину

$$\sqrt[n]{S_1 S_2 \ldots S_n} \leq \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}, \tag{5}$$

чиме се неједначина (3) претвара у

$$|\Delta| \leq \left(\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Збир

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

има за вредност суму квадрата модула свих елемената детерминанте Δ, тако да ће, ако се та сума означи са A, бити

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum |a_{ik}|^2 = A$$

и према томе

$$|\Delta| \leq \left(\frac{A}{n} \right)^{\frac{n}{2}}, \tag{6}$$

из чега произлази ова теорема.

Теорема. *– Модуо једне детерминанте* n*-тог реда не може никад прећи величину*

$$\frac{B^n}{\sqrt{n^n}}, \tag{7}$$

где B *означава квадратни корен из суме квадрата модула свих елемената детерминанте.*

Било у Hadamard-овом, било у овом последњем облику, који је у многим случајевима подеснији од првога, теорема о максималноме модулу детерминанте налази пространо поље примена у проблемима математичке анализе. Овде ће се извести неколико таквих примена.

ТЕОРЕМЕ О ЗБИРОВИМА ЈЕДНАКИХ СТЕПЕНА КОРЕНА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

Нека је дата алгебарска једначина n-тог степена

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{8}$$

са реалним или комплексним коефицијентима a_i, и нека је уопште

$$S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k,$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ корени једначине (8).

Познато је, да је за $k = 1, 2, \ldots, n$ збир S_k представљен детерминантом k-тога реда,

$$S_k = \begin{vmatrix} ka_k & a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} \\ (k-1)a_{k-1} & 1 & a_1 & \ldots & a_{k-2} \\ (k-2)a_{k-2} & 0 & 1 & \ldots & a_{k-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 \cdot a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Ако се са λ_k означи збир квадрата елемената k-тога стуба ове детерминанте, а са ρ_i модуо коефицијента a_i, биће

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \rho_1^2 + 4\rho_2^2 + 9\rho_3^2 + \ldots + k^2\rho_k^2 \\ \lambda_2 &= 1 + \rho_1^2 \\ \lambda_3 &= 1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_k &= 1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_{k-1}^2, \end{aligned} \tag{9}$$

и теорема о максималноме модулу детерминанте, у Hadamard-овоме облику, доводи до овога резултата: *модуо збира* S_k $(k \leq n)$ *никад не прелази границу*

$$\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}. \tag{10}$$

Други пак, горе изведени, облик теореме о максималноме модулу доводи до овога резултата: *модуо збира* S_k $(k \leq n)$ *никад не прелази границу*

$$\left(\frac{M}{k}\right)^{\frac{k}{2}}, \tag{11}$$

где M *има за вредност*

$$M = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = \sum_{i=0}^{k} \left[i^2 + (k-i) \right] \rho_i^2 . \tag{12}$$

Од већега су интереса сличне теореме за збирове S_p у случајевима, кад је $p > n$. Низ линеарних једначина

$$\begin{array}{lcl}
S_1 & = & -a_1 \\
a_1 S_1 + S_2 & = & -2a_2 \\
a_2 S_1 + a_1 S_2 + S_3 & = & -3a_3 \\
a_3 S_1 + a_2 S_2 + a_1 S_3 + S_4 & = & -4a_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\
a_{n-1} S_1 + a_{n-2} S_2 + \ldots + S_n & = & -na_n \\
a_n S_1 + a_{n-1} S_2 + \ldots + a_1 S_n + S_{n+1} & = & 0 \\
\qquad a_n S_2 + a_{n-1} S_3 + \ldots + a_2 S_n + a_1 S_{n+1} + S_{n+2} & = & 0 \\
\qquad\qquad a_n S_3 + \ldots + a_2 S_{n+1} + a_1 S_{n+2} + S_{n+3} & = & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 S_{p-2} + a_1 S_{p-1} + S_p & = & 0,
\end{array}$$

које служе за одредбу збирова S_p, показује, да је

$$S_p = -\Delta ,$$

где је Δ детерминанта p-тога реда формирана на начин:

а) њен се k-ти стуб $(k = 1, 2, 3, \ldots, p-1)$ састоји од низа

$$1, a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{13}$$

распрострта одозго наниже у томе истоме поретку и допуњена са $p-n-1$ нула, од којих се $k-1$ налазе над низом, а $p-n-k$ под низом (13);

б) последњи, p-ти стуб састоји се од низа

$$a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, na_n \tag{14}$$

распрострта одозго наниже у томе истоме поретку и допуњена са $n-p$ нула, које се све налазе под низом (14).

Сума λ_k квадрата модула k-тога стуба детерминанте Δ, за $k = 1, 2, \ldots, p-1$ има дакле за вредност

$$\lambda_k = 1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2 = \sum_{1}^{n} \rho_i^2 \tag{15}$$

једну исту за свих $p-1$ првих стубова; сума λ_p има за вредност

$$(16)\qquad \lambda_p = \rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 9\rho_3^2 + \ldots + n^2\rho_n^2 = \sum_0^n i^2\rho_i.$$

Према теореми о максималноме модулу детерминанте биће даље

$$(17)\qquad \left| S_p \right| \leq \sqrt{\lambda_1^{p-1}\lambda_p}$$

или

$$(18)\qquad \left| S_p \right| \leq \mu\lambda^p,$$

где је

$$(19)\qquad \lambda = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2},$$

$$(20)\qquad \mu = \sqrt{\frac{\lambda_p}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2}{\rho_1^2 + 4\rho_2^2 + \ldots + n^2\rho_n^2}},$$

из чега се добија ова теорема.

Теорема. *– Величина збира* S_p (*за* $p \geq n$) *увек се налази у унутрашњости круга описана у равни комплексних количина око почетка са полупречником* $\mu\lambda^p$, *где су* λ *и* μ *константе независне од* p, *и којима су вредности представљене обрасцима* (19) *и* (20).

Збирови

$$S_{-p} = \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p + \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^p + \ldots + \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^p$$

степена изврнутих вредности корена дате алгебарске једначине добијају се сменивши у обрасцима за S_p коефицијенте

$$\begin{array}{lcl} a_1 & \text{са} & a_{n-1} \\ a_2 & \text{са} & a_{n-2} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_n & \text{са} & 1; \end{array}$$

тиме се долази до ове теореме.

Теорема. *– Величина збира* S_{-p} (*за* $p \geq n$) *увек се налази у унутрашњости круга описана у равни комплексних количина око почетка са полупречником* $\nu\lambda^p$, *где су* λ *и* ν *константе независне од* p, *од којих је* λ *дато обрасцем* (19), *а* ν *обрасцем*

$$(21)\qquad \nu = \sqrt{\frac{1 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2}{\rho_n^2 + 4\rho_{n-1}^2 + \ldots + n^2\rho_1^2}}.$$

Ове три константе λ, μ, ν остају, као што се види, исте за све збирове S_p и S_{-p} $(p \geq n)$ исте алгебарске једначине, а то чини, да се горње теореме врло лако практички примењују.

Теореме налазе практичне примене нпр. *при апроксимативном израчунавању симетричких (алгебарских или трансцендентних) функција корена дате једначине.*

Нека је $\varphi(z)$ ма каква функција променљиве z, холоморфна у унутрашњости круга C у равни те променљиве, који је описан око почетка и који опкољава све корене дате алгебарске једначине. Нека је

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots \tag{22}$$

Maclaurin-ов ред, што одговара тој функцији за све вредности z у унутрашњости круга C.

Нека је

$$\Phi = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \ldots + \varphi(\alpha_n) \tag{23}$$

симетрична функција корена, коју треба израчунати. Пошто су сви ти корени у унутрашњости круга C, биће

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1) &= C_0 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_1^2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(\alpha_n) &= C_0 + C_1\alpha_n + C_2\alpha_n^2 + \ldots \end{aligned} \tag{24}$$

тако да је

$$\Phi = nC_0 + C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3 + \ldots \tag{25}$$

где је уопште

$$S_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p.$$

Помоћу обрасца (25), знајући довољан број првих коефицијената C_i функције $\varphi(z)$ и одговарајући број збирова S_p, може се, пошто је ред конвергентан, израчунати симетрична функција Φ са апроксимацијом, каква се жели. За тај циљ потребно је решити овај проблем: *одредити једну горњу границу грешке* $\mathrm{R_p}$, *која се чини зауставивши се, при употреби обрасца* (25), *на његовом члану* $\mathrm{C_p S_p}$. Проблем се лако решава помоћу горње теореме о збировима S_p.

Пошто је

$$R_p = C_{p+1}S_{p+1} + C_{p+2}S_{p+2} + \ldots \tag{26}$$

биће

$$|R_p| < |C_{p+1}||S_{p+1}| + |C_{p+2}||S_{p+2}| + \ldots \tag{27}$$

Неједначина

$$(28) \qquad |S_p| < \mu\lambda^p \qquad (p \geq n)$$

тада показује да је

$$(29) \qquad |R_p| < \mu\lambda^{p+1}(|C_{p+1}| + |C_{p+2}|\lambda + |C_{p+3}|\lambda^2 + \ldots),$$

тако да се *горња граница грешке* R_p *може израчунати помоћу констаната* λ, μ *и оних коефицијената* C_i, *што долазе после задржаног коефицијента* C_p.

Кад је познат израз остатка реда

$$(30) \qquad \Psi(z) = |C_0| + |C_1|z + |C_2|z^2 + \ldots,$$

неједначини (29) се може дати овај облик: *модуо учињене грешке* R_p *увек је мањи од израза*

$$\mu T(\lambda),$$

где је $T(z^p)$ *остатак реда* (30) *после његова члана* $|C_p|z^p$.

А пошто је

$$T(z) = \frac{z^{p+1}}{(p+1)!}\Psi^{(p+1)}(\theta \cdot z),$$

где је θ један позитиван број мањи од јединице, то из горњега правила излази ово: ако се са A означи једна горња граница израза

$$\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\Psi(z)$$

за позитивне вредности z мање од λ, *модуо грешке* R_p *биће мањи од вредности*

$$(31) \qquad \frac{\mu A\lambda^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Уочимо, као конкретну примену, проблем: израчунати са датом апроксимацијом симетричну функцију

$$(32) \qquad \Phi = e^{h\alpha_1} + e^{h\alpha_2} + \ldots + e^{h\alpha_n}$$

корена $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ дате алгебарске једначине, где је h једна унапред дата реална константа. Према обрасцу (25) биће

$$(33) \qquad \Phi = n + \frac{hs_1}{1!} + \frac{h^2 s_2}{2!} + \frac{h^3 s_3}{3!} + \ldots$$

Извод $(p+1)$-ога реда функције e^{hr} има за израз

$$h^{p+1}e^{hr}$$

и он за $0 \leq r \leq \lambda$ има за горњу границу A вредност

$$A = h^{p+1}e^{h\lambda}.$$

Према томе, ако се при рачунању функције Φ помоћу реда (33) буде зауставило на члану

$$\frac{h^p s_p}{p!}, \quad (p \geq n) \tag{34}$$

учињена грешка биће, по апсолутној вредности, мања од вредности

$$\frac{\beta\gamma^{p+1}}{(p+1)!}, \tag{35}$$

где су β и γ константе, независне од p, чије су вредности

$$\beta = \mu e^{h\lambda}, \quad \gamma = h\lambda. \tag{36}$$

Ако се, дакле, тражи да учињена грешка при употреби обрасца (33) буде мања од једнога унапред датога позитивног броја ε, треба се зауставити на члану (34) толико великог ранга p, да буде

$$\frac{\gamma^{p+1}}{(p+1)!} \leq \frac{\varepsilon}{\beta}. \tag{37}$$

То се увек може учинити, будући да израз на левој страни ове неједначине, почевши од извесне позитивне вредности p, стално опада и тежи ка нули, кад p бескрајно расте.

ТЕОРЕМА О СИСТЕМИМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Нека је дат систем од n линеарних једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n &= k_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n &= k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= k_n \end{aligned} \tag{38}$$

са n непознатих $x_1, \ldots, x_n$, са коефицијентима a_{ik} реалним или комплексним, па означимо са Δ детерминанту система

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а са D_i детерминанту, која се добија кад се у овој елементи i-тога стуба смене вредностима $k_1, k_2, \dots, k_n$. Решења система су дата познатим низом образаца

$$x_i = \frac{D_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{39}$$

Али у великом броју случајева није од интереса знати тачне бројне вредности непознатих $x_1, \dots, x_n$, већ само границе, међу којима се, кад су решења система реална, ова насигурно налазе, или полупречник круга описаног у равни комплексних количина око почетка, у којем се налазе сва та решења, кад су ова имагинарна. Како ће се видети, у таквим случајевима отпада израчунавање детерминаната n-тог реда

$$D_1, D_2, \dots, D_n,$$

па је за решење задатка довољно израчунати само детерминанту Δ (односно њен модуо) и n алгебарских израза много простијих од детерминаната D_i.

Означимо са λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ збир квадрата модула елемената i-тог стуба детерминанте Δ, са λ – најмањи између ових збирова, са M – продукат

$$M = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

а са K збир квадрата модула количина $k_1, k_2, \dots, k_n$. Према обрасцу (39) и теореми о максималноме модулу детерминанте биће за $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i \leq \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{\frac{MK}{\lambda}},$$

тиме се долази до следеће теореме.

Теорема. – *Сва се решења система* (38) *налазе у унутрашњости круга описана у равни комплексних количина око почетка са полупречником*

$$R = \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{\frac{MK}{\lambda}}, \tag{40}$$

а у случају, кад су коефицијенти система сви реални, та се решења налазе сва међу $-R$ *и* $+R$.

Други облик теореме о максималноме модулу детерминанте доводи до друге једне теореме о системима решења система (38), која даје нешто пространије границе за модуле тих решења, али која је практично подеснија за примену. Теорема је следећа.

Сва се решења система (38) налазе у унутрашњости круга описана у равни комплексних количина око почетка са полупречником

$$\rho = \frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{L+K-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{41}$$

где K и λ имају горње значење, а L означава збир квадрата модула свих коефицијената a_{ik} датога система.

Када су коефицијенти система сви реални, та се решења налазе сва међу $-\rho$ и $+\rho$.

ТЕОРЕМА О ДЕТЕРМИНАНТАМА, КОЈИМА РЕД БЕСКРАЈНО РАСТЕ

Нека је дата детерминанта

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

којој ред n бескрајно расте, а елементи су му a_{ik} при томе такви да је двојни ред

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \tag{42}$$

униформно конвергентан.

Означивши са B квадратни корен из збира реда (42), други облик теореме о максималноме модулу детерминанте доводи до неједначине

$$|\Delta_n| \leq \frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}}, \tag{43}$$

у којој је исказана следећа теорема.

Теорема. – *Кад у једној детерминанти са реалним или комплексним елементима, чији ред бескрајно расте, двојни ред формиран од* *квадраша модула њених елеменаша униформно конверīира, дешерминанша йри бескрајном рашћењу реда* n *шежи ка нули, и шо брже неīо израз*

$$\frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}},$$

(īде је B *квадрашни корен из збира двојноīа реда) или исшом брзином као и шај израз.*

Лако је увидети, колико је важна ова теорема при испитивању Maclaurin-ових редова, чији се коефицијенти јављају у облику детерминаната. Један ће се пример те врсте видети у следећем одељку.

MACLAURIN-ОВИ РЕДОВИ, КОЈИХ СУ КОЕФИЦИЈЕНТИ ДЕТЕРМИНАНТЕ

Нека је дат ред

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \tag{44}$$

где је општи коефицијенат a_n детерминанта n-тога реда са елементима таквима, да је двојни ред, формиран од квадрата њихових модула, при бескрајном рашћењу ранга n униформно конвергентан. Такав би се један случај нпр. имао, кад је двојни ред, формиран од елемената детерминанте a_n, апсолутно и униформно конвергентан; тада ће, и у толико пре, и двојни ред формиран од квадрата модула тих елемената бити униформно конвергентан.

Према ономе, што је утврђено у одељку 3, ако се са B означи квадратни корен из збира тога двојног реда, општи коефицијенат a_n, кад n бескрајно расте, тежи ка нули, и то с истом брзином као и израз

$$\frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Кад се тај факат доведе у везу са познатим Hadamard-овим теоремама, које исказују релацију између начина опадања коефицијената Maclaurin-ових редова са њиховим рангом и особина функција везаних за начин тих опадања, види се следеће.

Функција (44) *увек је цела функција йроменљиве* x, *чији је род (genre) увек једнак нули или јединици; ша функција има бескрајно много нула, и модули ових расшу, са рашћењем њиховоīа ранīа, брже неīо квадрашни корен шоīа ранīа, или бар с исшом брзином као и овај.*

Неједначина

$$|a_n| < \frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}}, \tag{45}$$

као последица неједначине (43), показује да специјална трансцендента

$$\theta(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{n^n}} \tag{46}$$

има *улогу једне горње границе за све функције* f(x) *дефинисане редом (44); модуо функције* f(x), *за ма какву вредност* x *модула* r *увек је мањи од вредности* θ(Br).

Из тога се може извести једна горња граница и за све функције облика

$$\varphi(x) = a_0 + a_p x + a_{2p} x^2 + a_{3p} x^3 + \dots, \tag{47}$$

где је a_{np} детерминанта np-ог реда са напред наведеним особинама: да је двојни ред, формиран од квадрата модула њених елемената, униформно конвергентан при бескрајном рашћењу ранга n.

Неједначина (45), примењена на функцију (47), даје

$$|a_{np}| < \frac{B^n}{\sqrt{(np)^{np}}}, \tag{48}$$

или

$$|a_{np}| < \frac{\gamma^n}{\sqrt{n^{np}}}, \tag{49}$$

где је

$$\gamma = Bp^{-\frac{p}{2}}, \tag{50}$$

а где B има исто значење као и пре.

Према томе, *улогу једне горње границе за све функције* φ(x), *што одговаају једноме датом броју* p, *има специјална трансцендента*

$$\theta_p(x) = \sum_0^\infty \frac{x^w}{\sqrt{n^{np}}} \tag{51}$$

у томе смислу, што је модуо функције $\varphi(x)$, за ма какву вредност x модула r, *увек мањи од вредности*

$$\theta_p(\gamma x).$$

У специјалном случају кад је $p = 2$, функција се $\varphi(x)$ своди на

$$\varphi(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + a_6 x^3 + \dots \tag{52}$$

а трансцендента $\theta_p(x)$ на функцију

$$\theta_2(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n^n}, \tag{53}$$

којој су особине проучене у ранијим ауторовим радовима.[2] Компарацијом функција $\varphi(x)$ и $\theta_2(x)$ долази се тада нпр. до ових резултата за све функције $\varphi(x)$, што одговарају вредности $p = 2$:

1) $\varphi(x)$ је увек цела функција променљиве x, чији је род једнак нули или јединици;

2) она има бескрајно много нула, и модули ових расту са рашћењем њихова ранга, бар с истом брзином као и овај;

3) модуо функције $\varphi(x)$ за ма какву вредност x, ако јој је модуо r, увек је мањи од вредности

$$1 + \gamma r e^{\gamma r},$$

где је

$$\gamma = \frac{B}{2};$$

4) кад x бескрајно расте у једноме ма коме правцу са леве стране осовине имагинарних вредности, модуо функције $\varphi(x)$ тежи ка једној граници која се налази између 0 и 1;

5) кад x бескрајно расте у правцу реалних позитивних вредности, модуо функције $\varphi(x)$ има своју асимптотну вредност увек мању од вредности

$$h e^{\frac{\gamma x}{2}} \sqrt{x},$$

где је h константа, којој је вредност

$$h = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{e}}.$$

Нека је, напослетку, наведен још један интересантан резултат о редовима, којих су коефицијенти детерминанте истога реда, кога им је

[2] М. Петровић, *Једна специјална трансцендента и њена улога у математичкој анализи*, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXVII, Београд 1909, стр. 1–44; M. Petrovitch, *Allure d'une transcendante entière*, Comptes rendus, Paris 1912, t. CLIV, 8, pp. 499–501.

и ранг, а који се опет добија као једна од последица горње теореме о детерминантама.

Сменимо у реду (44) сваки коефицијенат a_n – који је, као што је напред претпостављено, детерминанта n-тог реда – његовом *адјунгованом* детерминантом A_n, па ће резултат бити известан, одређен, Maclaurin-ов ред

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \tag{54}$$

Према правилу, по коме је адјунгована детерминанта једне детерминанте n-тог реда једнака $(n-1)$-ому степену ове саме, биће

$$A_n = a_n^{n-1}.$$

А пошто је, према ономе што је напред казано,

$$|a_n| < \frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}},$$

где је B константа независна од n, којој је вредност квадратни корен из збира квадрата модула свих елемената детерминанте a_n, добија се, да је

$$|A_n| < \left(\frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}}\right)^{n-1},$$

или

$$|A_n| < \frac{B^{n^2}}{n^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{1}{B}\right)^n. \tag{55}$$

Пошто израз

$$\sqrt[n]{|A_n|},$$

при бескрајном рашћењу n, тежи ка нули брже него израз

$$\frac{B^n}{n^{\frac{n-1}{2}}}, \tag{56}$$

према познатим правилима из теорије целих функција види се да је $F(x)$ увек цела функција променљиве x и да *специјална трансцендента*

$$\chi(x) = \sum_0^\infty \frac{B^{n^2}}{\sqrt{n^{n(n-1)}}} \chi^n \tag{57}$$

има улогу једне горње границе за све функције $F(x)$. Модуо функције $F(x)$, за ма какву вредност x, ако јој је модуо r, *увек је мањи од вредности*

$$\chi\left(\frac{x}{B}\right). \tag{58}$$

Из особина трансценденте $\chi(x)$ могао би се, дакле, компарацијом извести известан број општих особина самих функција $F(x)$.

ТЕОРЕМА О ДОЊОЈ ГРАНИЦИ ЗА МОДУЛЕ НУЛА MACLAURIN-ОВИХ РЕДОВА

Теорема, о којој је реч, доказана је у мојим ранијим радовима,[3] и овде ће бити наведена само потпуности ради као једна од аналитичких примена теореме о максималноме модулу детерминанте. Она гласи:

Ако се са λ означи најмањи модуо нула датога Maclaurin-ова реда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{59}$$

и ако се формира функција

$$u(z) = \frac{1}{|z|^2} \sum_0^\infty |a_n z^n|^2, \tag{60}$$

биће

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}, \tag{61}$$

па ма коју вредност имала промењива z у унутрашњости круга конвергенције реда (59).

Њен се најподеснији облик за примене састоји у овоме практичном правилу, које јој је непосредна последица.

Сменимо коефицијенте $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ма каквим низом реалних позитивних бројева

$$e_0, e_1, e_2, \ldots$$

изабраних тако да је

$$e_k \geq |a_k|^2$$

[3] Нпр. М. Петровић, *О представљању функција одређеним интегралима,* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXII, Београд 1902, стр. 209–227.

и да је могућно израчунати збир реда

$$e_0 + e_1 z^2 + e_2 z^4 + \ldots = \Phi(z). \tag{62}$$

Узевши за z једну, ма коју, реалну и позитивну вредност мању од полупречника круга конвергенције реда (59), израчунајмо одговарајућу вредност израза

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = v(z) \tag{63}$$

и

$$\mu = \frac{|a_0|}{\sqrt{v(z)}}. \tag{64}$$

Ред (59) нема ни једну нулу у унутрашњости круга, описанога у равни променљиве z, око почетка са полупречником μ.

Теорема је први пут изведена у наведеним мојим радовима, и то као аналитичка последица теореме о максималноме модулу детерминанте. Доцније је ***E. Landau***[4] *извео исту теорему на сасвим други начин; али овај, иако је краћи, претпоставља за већ доказане извесне теореме из теорије функција, које при томе служе као полазна тачка, а које треба такође посебно доказивати. Начин извођења, изнесен први пут у мојим расправама, претпоставља као познате само најосновније резултате из теорије функција и чисто алгебарску теорему о максималноме модулу детерминанте, која му је права и природна основица.*[**]

[4] Bull. de la Soc. math. de France, t. 33. 1905.

[**] Петровићеви главни резултати у овом раду преведени су на француски језик *Quelques conséquences du théorème sur le maximum du déterminant* и објављени у JAZU, Izvješća o raspravama matematičko-prirodoslovnoga razreda, sv. 1, Zagreb 1914, pp. 65–67. Нешто доцније, о овим резултатима је саопштено у FdM, B. 47, S. 90–91 (Szegö), а истима се користио Јован Карамата у раду О *доњој граници модула нула аналитичких функција*, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Београд 1927, стр. 101–120.

ОДСЕЧЦИ КРИВИХ ЧИЈЕ ДУЖИНЕ ПРЕДСТАВЉАЈУ НИЗОВЕ ПРОСТИХ БРОЈЕВА*

1. Може се конструисати на следећи начин класа C кривих проширених на раван са следећим значајним својством: да секу фиксирану праву (за коју ћемо узети осу x) у тачкама *чије айсцисе формирају један низ йозитивних йростих бројева.*

Нека је $\theta(x,u)$ реална функција две променљиве x и u, која се не анулира ни за један пар рационалних бројева који су различити од целобројних (x, u), а анулира се за све парове целих вредности ових променљивих.

Таква ће бити, на пример, функција

$$a\cos 2\pi x + b\cos 2\pi u - (a+b),$$

или функција

$$a\sin^m \pi x + b\sin^m \pi u,$$

(где је m позитиван паран цео број, a и b две позитивне константе), и, још општије, функција

$$\varphi_1(\sin \pi x) + \varphi_2(\sin \pi u),$$

где су $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ две позитивне, парне, реалне функције, које се анулирају за $z = 0$. Иначе, било који позитиван степен функције $\theta(x,u)$ је такође функција са истим својством.

Нека је $\Phi(x)$ било која међу функцијама добијених заменом у некој функцији $\theta(x,u)$ променљиве u функцијом

$$u = \frac{1+\Gamma(x)}{x}. \tag{1}$$

---

* Наслов оригинала, *Courbes découpant sur une droite fixe les longueurs représentant la suite indéfinie des nombres premiers*, Nouvelles annales de mathématiques. Paris, 1913, 4° série, t. XIII, 4–9, pp. 406–409.

Према Waring-Wilson-овој теореми из аритметике, коју је комплетирао Лагранж, и према основним својствима функције $\Gamma(x)$, да би израз (1), где је *x цео број*, имао такође *целобројну* вредност, потребно је и довољно да x буде позитиван прост број.

Свака крива

$$y = \Phi(x) \tag{2}$$

је онда једна крива класе C.

Тако крива

$$y = (a+b) - a\cos 2\pi x - b\cos 2\pi u$$

има неограничени број осцилација десно од осе y и испод осе x, променљивих амплитуда мањих од $2(a + b)$, и *додирује* осу x у тачкама чије су апсцисе прости бројеви. Све тачке осе x, чије су апсцисе позитивни прости бројеви, су тачке додира криве и те осе.

Крива

$$y^2 = (a+b) - a\cos 2\pi x - b\cos 2\pi u$$

сече, осцилирајући, осу x у тачкама чије апсцисе формирају један низ позитивних простих бројева.

2. Истаћи ћемо једно питање које се појављује у истом низу идеја и које неће бити лишено извесног аритметичког интереса.

Постоје функције такве да су и оне саме и њихови други изводи реални, коначни и непрекидни за позитивне вредности променљиве x, које имају низове позитивних *целих* бројева као *просте* нуле, и које се не анулирају ни за једну другу позитивну вредност променљиве x. Таква је, на пример, елементарна функција $\sin \omega x$.

Можемо ли конструисати функцију $\Phi(\mathrm{x})$ *такву да и она сама и њен други извод буду реални, коначни и непрекидни за позитивне вредности променљиве* x *и који имају низове позитивних простих бројева као просте нуле, и које се не анулирају ни за једну другу позитивну вредност променљиве* x*?*

Ако претпоставимо да је конструисана једна таква функција Φ, израз

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx^2} \tag{3}$$

биће реалан, коначан, непрекидан и различит од нуле за све позитивне вредности x. Чак и више, он ће обавезно бити *негативан* за x између 0 и ∞. Јер, ако то не би било, како овај израз не мења знак у том интервалу, он би био константно позитиван, и према познатој теореми о линеарним једначинама другог реда, функција Φ би имала највише једну позитивну просту нулу, што није случај.

Крива (2), која представља једну такву функцију Φ, понашаће се за позитивне вредности x синусоидално, константно окрећући своју конкавност ка x оси и сећи ће ту осу (никад је не додирујући) у тачкама чије су апсцисе прости бројеви. То је у оним тачкама у којима ордината криве и њена конкавност истовремено мењају знак, и то су једине превојне тачке криве.

Ако означимо са –M *и* –N *доњу и горњу границу израза (3), број простих бројева, садржаних у датом позитивном интервалу* (a, b), *биће садржан у интервалу између вредности*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} \quad \text{и} \quad \frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}+2.$$

Према ономе што знамо о простим нулама осцилаторних интеграла линеарних једначина другог реда,[1] *постојаће такође један начин значајног сужавања ових граница.*[**]

[1] *Видети* на пример моје предавање *Fonctions implicites oscillantes, Proceedings of the Fifth Congress of mathematicians*, Cambridge, 1912, vol. I, pp. 295–302.

[**] Под псеудонимом I 9b, M4m, ова Петровићева расправа је приказана у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXII, 1913.

АЛГЕБАРСКЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ БЕЗ РЕАЛНИХ КОРЕНА*

АЛГЕБАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЧИЈИ СУ СВИ КОРЕНИ ИМАГИНАРНИ

1. Laguerre је више пута[1] разматрао проблем: одредити низ величина

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \tag{1}$$

таквих да ако алгебарска једначина

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{2}$$

има све корене реалне онда једначина

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 z + \ldots + \omega_n a_n z^n = 0 \tag{3}$$

такође има све корене *реалне*. Многа партикуларна решења овог проблема су већ дата, као што су, на пример, низови ω_n.

1. Вредности полинома од n који имају само негативне реалне нуле.

2. Вредности целих функција од n, рода нула или један, које имају само негативне реалне нуле.

3. Низови $e^{-\alpha n^2}$, где је α негативан реалан број.

---

* Наслов оригинала *Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réeles*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1913, t. XLI, 3–4, pp. 194–206.

[1] *О теорији нумеричких једначина,* Journal de Math. pures et appliquées, 3° série, t. IX, 1883; *Oeuvres*, pp. 4–47; *О неким тачкама теорије нумеричких једначина,* Acta mathematica, t. IV, 1884; *Oeuvres,* p. 185–206.

4. Производ произвољног броја функција 1, 2, 3.

Можемо поставити дуално питање: *одредити низове* (1) *такве да ако алгебарска једначина* (2) *има све корене* ***имагинарне*** *онда и једначина* (3) *такође има све корене* ***имагинарне.***

Налазим следеће једноставно и довољно опште решење.

Означимо са λ_{kn} одређени интеграл

$$\lambda_{kn} = \int_{a_k}^{b_k} u_k r_k^n dt, \tag{4}$$

где су границе a_k и b_k произвољне, али реалне и не зависе од n; u_k и r_k су две произвољне функције променљиве t, које не зависе од n, реалне у интервалу (a_k, b_k) и u_k не мења знак у том интервалу.

Производ

$$\omega_n = \lambda_{1n}\lambda_{2n}\ldots\lambda_{pn}, \tag{5}$$

произвољног броја интеграла λ_{kn} *даје једно решење проблема.*

Очигледно, довољно је видети да је

$$\omega_n = \lambda_{kn} \tag{6}$$

једно решење. Дакле, у овом случају, први члан из (3) се може написати у облику

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k P(r_k x) dt, \tag{7}$$

где је $P(x)$ први члан из (2), што уједно доказује теорему, с обзиром да функције u_k и $P(r_k x)$ не мењају знак ни за једну реалну вредност t, између граница интеграције, нити за иједну реалну вредност променљиве x.

У изразу за λ_{kn} одређујемо елементе u_k, r_k, a_k, b_k. Ако ове елементе учинимо променљивим, као параметре који ту могу фигурирати, имаћемо неограничен број низова λ_{kn}, који, као и њихови произвољни производи, имају најављену особину и омогућавају проналажење низова (1).

Ево неких израза који могу да играју улогу λ_{kn}:

$$
(8)\qquad \begin{cases}
\dfrac{r}{a+n} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-nt}dt, \\
\dfrac{\Gamma(a)}{(n+1)^{a+1}} = \displaystyle\int_0^{1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{a} t^{n}dt, \\
\dfrac{b-a}{(a+n)(b+n)} = \displaystyle\int_0^{\infty}(e^{-bt}-e^{at})e^{-nt}dt, \\
1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{n}dt, \\
\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+4)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{n}dt, \\
\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+bn}} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at^2}e^{-bnt^2}dt,
\end{cases}
$$

где су a и b позитивне реалне константе.

2. У једном од ранијих радова[2] дао сам неопходне и довољне услове које морају задовољавати коефицијенти a_i алгебарске једначине

$$(9)\qquad a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

произвољног степена да би једначина имала следећа својства.

1. Сви њени корени су *реални*.

2. Ако се занемари *произвољан* број последњих чланова у њеном првом делу, преостала једначина има и даље све корене *реалне*.

На основу претходног постоји могућност формирања опште класе алгебарских једначина *произвољног* парног реда, која имају следећа својства, обрнута претходним.

1. Сви корени једначине су *имагинарни*.

2. Ако се занемари *произвољан* паран број последњих чланова, преостала једначина ће и даље имати све корене *имагинарне*.

Такве су, на пример, једначине

$$(9')\qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n} = 0,$$

$$(10)\qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2n} = 0.$$

[2] *Једна значајна класа целих редова,* Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma, 1908, pp. 36–43.

Генерално, нека је E_{2n} скуп свих алгебарских једначина, које имају својства 1 и 2, *свака једначина*

$$(11) \qquad \omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{2n} x^{2n} = 0,$$

где је ω_n *израз* (5), је из E_{2n}.

То можемо видети, ако узмемо

$$(12) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

за једначину (9). Такве су, на пример, једначине

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \ldots + \frac{x^{2n}}{a+2n} = 0,$$
$$1 + \frac{x}{2^{a+1}} + \frac{x^2}{3^{a+1}} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{a+1}} = 0,$$
$$\frac{1}{ab} + \frac{x}{(a+1)(b+1)} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(a+2n)(b+2n)} = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x}{\sqrt{a+b}} + \ldots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{a+2nb}} = 0,$$

где су a и b позитивне реалне константе.

Исто тако *свака једначина*

$$(13) \qquad \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{\omega_n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n} = 0,$$

је из E_{2n}. То видимо узимајући, на пример, за (12) једначину (10).

Уопште, *ако је једначина*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^{2n} = 0,$$

из E_{2n}, *онда је то и једначина*

$$(14) \qquad \omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \ldots + \omega_{2n} a_{2n} x^{2n} = 0.$$

3. У случају где r_k не мења знак, за t између a_k и b_k, једначине E_{2n} облика

$$(15) \qquad \lambda_{k0} + \lambda_{k1} x + \ldots + \lambda_{k,2n} x^{2n} = 0,$$

имају посебну расподелу својих корена у области променљиве x.

Даље, нека је r_k позитивна величина и означимо са $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ бројне интервале садржане у интервалу $[0, 2\pi]$, независне од коефицијената једначине, и тако да за све вредности θ садржане у δ_k, производ

(16) $$\sin\theta\sin 2n\theta$$

буде позитиван и да производ

(17) $$\sin\theta\sin(2n+1)\theta$$

буде негативан. Тада се

аргументи корена једначине (15) *увек налазе изван интервала* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$.

На крају, први члан једначине (15) се може ставити у форму

(18) $$\int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1-(r_k x)^{2n+1}}{1-r_k x}\,dt,$$

и његов имагинарни део за $x = \rho e^{\theta i}$ биће

(19) $$\int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{\Phi dt}{P^2+Q^2},$$

где

(20) $$\begin{cases} P = 1 - r_k\rho\cos\theta \\ Q = r_k\rho\sin\theta, \end{cases}$$

$$\Phi = r_k\rho\sin\theta - (r_k\rho)^{2n+1}\sin(2n+1)\theta + (r_k\rho)^{2n+2}\sin 2n\theta.$$

Тај имагинарни део не може се анулирати ни за једну позитивну вредност промењиве ρ када је θ садржано у једном од интервала δ_k, што доказује теорему.

У случају кад је r_k негативан, интервали δ_k морају бити замењени онима у којима је производ (16) *негативан* и производ (17) *позитиван*.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ БЕЗ РЕАЛНИХ КОРЕНА

4. Постоје степени редови

(21) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

који имају то значајно својство да имају све нуле *реалне* и да, сем тога, полиноми формирани од произвољног броја њихових првих чланова имају такође све нуле *реалне*.

У већ навођеном раду, дао сам неопходне и довољне услове које морају задовољавати коефицијенти a_i реда (21) за које важе слична правила.

Постоје, исто тако, редови (21) са особином супротном претходној – *да немају, ни они сами а ни полиноми формирани од произвољног непарног броја њихових првих чланова, ни једну реалну нулу*, и то ред у својој области конвергенције, а полином у целој области променљиве x.

Најједноставнији пример су елементарни редови

(22) $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

(23) $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Ако *редове* ове врсте означимо са S, већ помињани низови

(24) $$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$$

дају могућност њиховог формирања у неограниченом броју.

Ако је

(25) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

један S*-ред, ред*

(26) $$a_0\omega_0 + a_1\omega_1 x + a_2\omega_2 x^2 + \ldots,$$

у случају да конвергира у одређеном кругу, је такође један такав ред.

Јер, полазећи од једног одређеног реда врсте S, на пример од (22) или (23), или, уопштено од реда (25), ред

(27) $$\lambda_{k0} - \lambda_{k1} x + \lambda_{k2} x^2 + \ldots,$$

где је λ_{ku} израз (4), може се изразити одређеним интегралом

(28) $$\int_{a_k}^{b_k} u_k f(r_k x) dt.$$

Како се u_k и $f(r_k x)$ не анулирају ни за једну вредност променљиве t између граница интеграције, као ни за једну вредност променљиве x, за коју ред $f(r_k x)$ конвергира и интеграл (28) има смисла, ред (27), па према томе и ред (26), су редови врсте S.

Ако се са M_k означи највећа апсолутна вредност коју узима функција r_k, када t пролази кроз интервал $[a_k, b_k]$ добија се

$$\lambda_{kn} < \lambda_{k0} M_k^n, \tag{29}$$

па ће према томе ред (27) имати полупречник конвергенције мањи или једнак од

$$\frac{R}{M_k}, \tag{30}$$

где је са R означен радијус конвергенције реда (25). Одавде следи да је *радијус конвергенције реда* (26) *мањи или једнак*

$$\frac{R}{M}, \tag{31}$$

где M *означава производ* $\mathrm{M_1 M_2 \ldots M_p}$ и да је његов коефицијент уз x^n мањи од апсолутне вредности

$$\mu \alpha_n M^n. \tag{32}$$

Овде α_n означава апсолутну вредност коефицијента a_n, и μ је константа једнака апсолутној вредности величине ω_0. Модул реда (26), за све вредности променљиве x модула ρ мањег од (31), је мењи од

$$\mu F(M\rho), \tag{33}$$

где

$$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots . \tag{34}$$

Дакле, сваки ред врсте S облика

$$\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \ldots \tag{35}$$

има радијус конвергенције мањи или једнак од $\dfrac{1}{M}$ и модула је мањег од

$$\frac{\mu}{1 - M\rho}.$$

Сваки ред врсте S облика

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots \tag{36}$$

конвергира у целој области променљиве x и има модул мањи од

$$\mu e^{M\rho}.$$

5. Доња граница модула нула било којег Тејлоровог реда

(37) $$\phi(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$$

добија се из вредности

(38) $$\xi = \frac{|A_0|}{\sqrt{N}},$$

где је N најмања вредност коју има функција

(39) $$v(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{2n},$$

када промењива x има све реалне вредности од 0 до полупречника конвергенције реда (37), где су e_n позитивне вредности веће или једнаке од квадрата модула одговарајућих коефицијената A_n.[3]

Према претходном, за ред врсте S

(40) $$\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots,$$

можемо узети

(41) $$e_n = \mu^2 M^{2n}.$$

Функција $v(x)$ ће бити

(42) $$\frac{\mu^2}{(1 - M^2x^2)\,x^2},$$

и она постиже минимум за вредност

$$z = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

која је мања од полупречника конвергенције $\frac{1}{M}$ реда (40). Како је њен минимум

$$4\mu^2 M^2,$$

добија се

$$\xi = \frac{1}{2M}.$$

---

[3] M. Petrovitch, Bull. de la Soc. math. de France, t. XXIX, 1902. – Овај рад је изложен у овој књизи на стр. 45–53.

Дакле, ни један ред (40) нема нуле у унутрашњости кружнице радијуса $\frac{1}{2M}$ *описане око* x = 0.

За полиноме S_{2n}, добијене из реда (40) узимањем чланова до степена $2n$, функција $v(x)$ ће бити

$$v(x) = \frac{\mu^2}{x^2}\frac{1-(Mx)^{2n+1}}{1-M^2x^2}, \tag{43}$$

тако да је доња граница модула нула полинома S_{2n} дата са

$$\frac{\mu}{\sqrt{N}},$$

где је N минимум од (43).

6. За посебне редове, облика

$$\phi(x) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1}x + \lambda_{k2}x^2 + \dots, \tag{44}$$

може се доказати да *они немају нула, ни реалних ни имагинарних, мањих по модулу од вредности* $\frac{1}{M_k}$.

Заиста, ред се може написати у облику

$$\varphi(x) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{u_k}{1-r_k x}\,dt, \tag{45}$$

и његов реални део за $x = \rho e^{\theta i}$ биће

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1-r_k\rho\cos\theta}{P^2+Q^2}\,dt, \tag{46}$$

где су P и Q раније уведене вредности (20).

За апсолутну вредност од

$$r_k\rho\cos\theta, \quad \text{за} \quad \rho < \frac{1}{M_k},$$

мању од 1, интеграл (46), па према томе и функција $\varphi(z)$, се не анулира ни за једну вредност чији је модул мањи од $\frac{1}{M_k}$.

Одавде следи да се функције

$$\frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \log\varphi(x)$$

такође могу развити у конвергентан степени ред области конвергенције мање или једнаке од $\dfrac{1}{M_k}$.

Такви ће бити, на пример, редови

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a+n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^a},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(a+n)(b+n)},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{a+bn}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}x^n.$$

Класа (44) редова врсте S добија се редукцијом за одређене интеграле

$$\int_a^b R(t,x)\,dt, \tag{47}$$

где је R нека рационална функција од x са коефицијентима, који су функције од t.

Ако означимо са

$$\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \ldots$$

различите интеграле

$$\theta_k(x)=\int_a^b \frac{u_k}{1-r_k x}\,dt,$$

који имају улогу простих разломака добијених декомпозицијом рационалне функције $R(t,x)$, интеграл (47) се увек може ставити у форму суме полинома од x и линеарне и хомогене комбинације чланова

$$\begin{array}{llll}
\theta_1(x), & x\dfrac{d\theta_1}{dx}, & x^2\dfrac{d^2\theta_1}{dx^2}, & \ldots,\\
\theta_2(x), & x\dfrac{d\theta_2}{dx}, & x^2\dfrac{d^2\theta_2}{dx^2}, & \ldots,\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

у ограниченом броју.[4]

[4] M. Petrovitch, *Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1904, t. XXXII, pp. 3–39.

Увек кад простом разломку одговарају функције u_k *и* r_k *реалне у интервалу* (a, b) *и* u_k *чува знак у том интервалу, одговарајућа функција* $\theta_k(x)$ *представља један ред врсте* S *класе* (44). Дакле, редови (44) представљају просте елементе за интеграле (47).

На пример, као што ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{a+bn}}$$

има улогу простог елемента за сваки интеграл

$$\int_0^{\infty} R(t,x)\,dt,$$

за који постоји прости разломак, где је

$$u_k = e^{at^2}, \quad r_k = e^{bt^2},$$

где су a и b позитивне константе. Као што ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^a} \qquad (a>0)$$

има ту улогу за интеграле

$$\int_0^1 R(t,x)\,dt,$$

за које постоји прост разломак, где је

$$u_k = \log\frac{1}{t}, \quad r_k = t, \ \ldots$$

7. Редови врсте S облика

$$\chi(x) = \lambda_{k0} + \frac{\lambda_{k1}}{1}x + \frac{\lambda_{k2}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\lambda_{k3}}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{48}$$

могу се представити интегралима

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k x}\,dt,$$

и представљају *целе* функције од x које немају реалне нуле. Општије, како се реални део од $\chi(\alpha+\beta i)$, а то је

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k \alpha} \cos r_k \beta dt$$

не анулира ни за једну вредност β између

$$-\frac{\pi}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{M_k},$$

функција $\chi(x)$ нема ни једну нулу у траци, у равни променљиве x, између две праве

$$\beta+\frac{\pi}{M_k}=0, \quad \beta-\frac{\pi}{M_k}=0.$$

На пример, ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}=\int_0^{\infty} e^{xt\log\frac{1}{t}}dt, \tag{49}$$

који припада класи (48) нема нула у траци одређеној двема правама

$$\beta+\pi e=0, \quad \beta-\pi e=0.$$

Редови (48) имају својства, која су у аналогији са онима за елементарне функције $e^{\alpha x}$, и аутор је имао два рада[5] о томе, а њима ће се бавити и у раду који ће ускоро бити објављен.[**]

---

[5] *О целим трансцендентима који уопштавају експоненцијалне и тригонометријске функције,* Comptes rendus, Paris 1913, t. CLVI, 16, pp. 1213–1215. *Хипертригонометријски редови,* Comptes rendus, Paris 1913, t. CLVI, 24, pp. 1823–1825.

[**] Под псеудонимом АЗЕ ова Петровићева расправа је приказана у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXII, 1913. и била је предмет анализе у докторској дисертацији Ш. Раљевић (стр. 15).

ТЕОРЕМА О АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПАРНОГ СТЕПЕНА*

Свака се алгебарска једначина парнога степена $2n$

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

са реалним коефицијентима може, и то на бескрајно много начина, написати у облику

$$P^2 + Q^2 - M^2 = 0, \tag{2}$$

где су P, Q, M реални полиноми по x, чији степен не прелази n. Целокупни број коефицијената тих трију полинома, кад су сва три n-тога степена, износи $3(m + 1)$, и очевидно је, да се толиким бројем коефицијената може располагати тако, да се задовоље погодбе за једнакост левих страна у једначинама (1) и (2) (број тих погодаба никад не прелази $2n + 2$) као и за реалност коефицијената у P, Q, M.

Један или два од тих полинома могу, према облику једначине (1), бити и степена нижега од n, као што је нпр. случај са квадратном једначином са реалним коренима

$$x^2 + px + q = 0,$$

која се може написати и у облику

$$\frac{1}{2}(x+a)^2 + \frac{1}{2}(x+b)^2 - \mu^2 = 0,$$

где су a и b корени квадратне једначине

$$t^2 - pt + \left(\frac{p^2}{2} - q - \mu^2\right) = 0,$$

---

* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 202, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 56, Zagreb 1914, str. 124–131; саопштено у Разреду 19. јануара 1914.

а μ ма каква реална константа, којој апсолутна вредност није већа од

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Једначини четвртога степена

$$\begin{gathered} x^4 - px^2 + qx + r = 0 \\ p > 0 \qquad q^2 + 4rp > 0 \end{gathered}$$

може се дати облик (2), где је

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{\sqrt{p}} \\ Q &= \frac{1}{2p}\sqrt{q^2 + 4rp} \\ M &= x - \frac{q}{2p}\,. \end{aligned}$$

Једначина шестога степена

$$\begin{gathered} x^6 + px^5 + qx^4 - hx^2 + kx + m = 0 \\ h > 0 \quad p^2 - 4q < 0 \quad k^2 + 4mh = 0 \end{gathered}$$

може се написати у облику (2), где је

$$\begin{aligned} P &= x^2\left(x + \frac{q}{2}\right) \\ Q &= x^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \\ M &= \sqrt{h}\left(x - \frac{k}{2h}\right) \qquad \text{итд.} \end{aligned}$$

Кад је једначина (1) на било који начин написана у облику (2), може се доказати ова теорема.

Сваки реални корен једначине (1) *задовољава једну од једначина* n-*тог степена*

$$\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 Q - \lambda M = 0, \tag{3}$$

где ε_1 *и* ε_2 *означују* +1 *или* −1, *а где је* λ *један бројни коефицијенат, којега вредност увек лежи међу границама*

$$1 \quad \text{и} \quad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \tag{4}$$

Да би се теорема доказала, означимо са $|a|$ апсолутну вредност реалне количине a и ставимо да је

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{|P|+|Q|} = \frac{\sqrt{|P|^2+|Q|^2}}{|P|+|Q|} = \theta, \tag{5}$$

па ће бити

$$\theta = \frac{\sqrt{1+\left|\frac{Q}{P}\right|^2}}{1+\left|\frac{Q}{P}\right|} \tag{6}$$

тако да, ако се стави да је

$$\left|\frac{Q}{P}\right| = \operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

биће

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}}. \tag{8}$$

Пошто је израз (7) позитиван, α лежи међу 0 и $\frac{\pi}{2}$ тако да θ заиста увек лежи међу границама 1 и $\frac{1}{\sqrt{2}}$. О томе се, уосталом, лако можемо уверити ако се стави да је

$$\left|\frac{Q}{P}\right| = t,$$

чиме θ постаје

$$\theta = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t};$$

тај израз и његов извод

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{t-1}{(1+t)^2\sqrt{1+t^2}}$$

показују да док t расте од 0 до $+\infty$, функција θ непрестано опада од $\theta = 1$ до $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а затим непрестано расте до $\theta = 1$.

Тиме је дакле, доказано да је увек

$$\sqrt{P^2+Q^2} = (|P|+|Q|)\theta, \tag{9}$$

где се θ налази међу наведеним границама. Међутим, према знаку резултата, који се добијају сменивши у полиномима P и Q промењљиву x

једним уоченим реалним кореном α дате алгебарске једначине (1), имаће се увек или

$$|P(\alpha)| = P(\alpha), \tag{10}$$

или

$$|P(\alpha)| = -P(\alpha), \tag{11}$$

а тако исто

$$|Q(\alpha)| = Q(\alpha), \tag{12}$$

или

$$|Q(\alpha)| = -Q(\alpha). \tag{13}$$

Према томе, израз

$$\sqrt{P(\alpha)^2 + Q(\alpha)^2} \tag{14}$$

ће имати једну од следеће четири комбинације

$$\begin{matrix} (P(\alpha)+Q(\alpha))\theta \\ (P(\alpha)-Q(\alpha))\theta \\ (-P(\alpha)+Q(\alpha))\theta \\ (-P(\alpha)-Q(\alpha))\theta; \end{matrix} \tag{15}$$

према чему, ако се стави да је

$$\frac{1}{\theta} = \lambda,$$

непосредно се добија резултат исказан горњом теоремом.

Теорема је важна јер једну дату алгебарску једначину парнога степена своди на једну од четири могуће једначине, које су два пута мањега стпена; у овима фигурише један неодређени бројни коефицијенат, али је од важности то, што његова вредност никада не излази изван уских граница бројнога размака од 1 до 1,4142.

Теореми се може дати и облик подесан за практичну примену.

Сви реални корени једначине (1) *налазе се у оним размацима променљиве* x, *за које се вредност функције*

$$\frac{\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 Q}{M} \tag{16}$$

налази међу границама 1 *и* 1,4142; *ако то не бива ни за какву реалну вредност* x, *сви су корени једначине* (1) *имагинарни.*

У случајевима кад P или Q не мењају знак ни за какву реалну вредност x, коефицијенат ε, што стоји пред том функцијом у једначини (2), односно у изразу (16), има се сменити са $+1$ или са -1, према томе, да ли је непроменљив знак функције P или Q позитиван или негативан. Тако нпр. кад једначина

$$Q(x) = 0$$

нема реалних корена, а коефицијенат је највишега степена у полиному Q позитиван, израз (16) је један или други од израза

$$\frac{P+Q}{M}, \quad \frac{Q-P}{M}.$$

Кад ни једна од једначина

$$P(x) = 0, \quad Q(x) = 0$$

нема реалних корена, а коефицијенти су највиших степена позитивни, израз (16) је

$$\frac{P+Q}{M};$$

кад су оба коефицијента негативна, тај је израз

$$-\frac{P+Q}{M} \quad \text{итд.}$$

Применимо теорему на једначину четвртога степена

$$\begin{aligned} &x^4 - px^2 + qx + r = 0 \\ &p > 0, \quad q^2 - 4rp > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

За одговарајуће изразе P и M може се узети

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{p}} \quad \text{и} \quad M = x - \frac{q}{2p},$$

и тада је Q константа

$$Q = \sqrt{\frac{q^2}{4p} + r}.$$

Пошто су P и Q позитивни за све реалне вредности x, израз (16) је

$$\frac{P+Q}{M} = \frac{Ax^2 + B}{x + C},$$

где су A, B, C константе, којима су вредности

$$A = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad C = -\frac{1}{2p}, \quad B = \sqrt{r^2 + \frac{q^2}{4p}}.$$

Сви се реални корени једначине (17) налазе, дакле, у оним размацима апсциса у којима се ордината хиперболе

$$Ax^2 - (C + x)\,y + B = 0$$

налази међу правама

(18) $$y = 1 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{2};$$

онда када хипербола нема ни једне тачке између тих правих, сви су корени једначине (17) имагинарни.

Применимо исту теорему на једначину четвртога степена написану у облику

(19) $$(a + bx + cx^2)^2 + (a' + b'x + c'x^2)^2 - h^2 = 0,$$

где је

$$b^2 - 4ac < 0$$
$$b'^2 - 4a'c' < 0,$$

и разликују се ови случајеви:

1. $c > 0, c' > 0$; израз (16) је

$$\frac{P+Q}{M} = \frac{1}{h}[(a + a') + (b + b')\,x + (c + c')\,x^2],$$

и сви се реални корени једначине (19) налазе у ономе размаку вредности x у коме је парабола

$$hy = (a + a') + (b + b')\,x + (c + c')\,x^2$$

међу правама (18);

2. $c > 0, c' < 0$ парабола има за једначину

$$hy = (a - a') + (b - b')\,x + (c - c')\,x^2;$$

3. $c < 0, c' > 0$ парабола је

$$hy = (a' - a) + (b' - b)\,x + (c' - c)\,x^2;$$

4. $c < 0, c' < 0$ парабола је

$$hy = -(a + a') - (b + b')\,x - (c + c')\,x^2.$$

Кад одговарајућа парабола нема ни једне тачке између сталних правих (18), једначина (19) нема реалних корена; кад парабола постоји међу тим правама, одговарајуће вредности апсцисе x одређују размаке, у којима се морају налазити сви реални корени једначине (19).

На исти начин се теорема лако примењује и на једначине шестог, осмог итд. степена, пошто се ове напишу у горњем облику. За једначину шестога степена, написану нпр. у облику сличном ономе у једначини (19), улогу горње параболе имала би извесна парабола трећега степена

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3;$$

за једначине осмог степена то би била извесна парабола

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4.$$

Разни могући начини писања једначине у облику (2), доводили би до разних кривих, које одређују размаке, што садрже реалне корене дате једначине. Те све криве јесу облика

$$y = R(x), \tag{20}$$

где је R рационална функција, и увек су n-тог или $n+1$-ога степена, где $2n$ означава степен саме дате једначине.

За питање, о коме је овде реч, од интереса су само ови делови кривих (20), који се налазе међу правама

$$y = 1 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{2}.$$

Те је делове лако конструисати помоћу једначине (20), која је и по своме облику нарочито подесна за конструкцију.

ВЕЗА ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА И ПРОСТИХ БРОЈЕВА*

Претпоставимо да је функција променљиве t реална, коначна непрекидна и сталног знака за t које припада реалном, позитивном и коначном интервалу (a, b). Ако у одређеном интегралу

$$(1) \qquad \alpha_n = \int_a^b u t^n dt$$

u заменимо различитим функцијама са наведеним својствима можемо формирати бесконачно много степених редова

$$(2) \qquad F(x) = \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \dots .$$

Ове функције представљају једну класу *целих функција* променљиве x, рода *нула* или *један*, а које спадају у оне које је аутор већ разматрао.[1] То су осцилаторне функције реалне променљиве x, са неограниченим бројем осцилација. Оне не премашују, по апсолутној вредности, једну одређену коначну границу, ни за једну *реалну*, коначну или бесконачну, вредност променљиве x. Ове функције осцилирајући теже нули, када x неодређено расте и има реалне позитивне или негативне вредности. Њихово опадање је, за довољно велико x, брзо бар колико и опадање функције $\frac{h}{x}$, где је h коначна величина. Ове функције имају неограничен број позитивних и негативних реалних нула. Нека од њихових функционалних својстава уопштавају својства елементарних тригонометријских функција.

---

* Наслов оригинала *Fonctions entières se rattachant aux nombres premiers*, Comptes rendus, Paris, 1919, t. CLXVIII, 11, pp. 542–544; у Париској академији наука расправу је саопштио професор Жак Адамар 17. марта 1919.

[1] Comptes rendus, t. 156, 1913, pp. 1213–1215, (то је рад наведен на 144. стр.); Српска краљевска академија, Глас, књ. XCI, Београд 1913, стр. 1–70.

У овом раду истичем оне функције, међу функцијама облика (2), које припадају једној класи трансцендената, а које се, према значајном аритметичком својству, придружују простим бројевима.

Размотримо оне функције облика (2), у којима су a и b позитивни бројеви који *нису цели*, при чему је $4 < a < b$ и где је

$$(3) \qquad u = f(t)\theta(t),$$

$f(t)$ је произвољна реална функција, холоморфна дуж сегмента $a \le t \le b$ реалне осе Ot и која чува знак дуж тог сегмента. Знаком θ је означена функција

$$\theta(t) = \left(\frac{\sin\frac{\pi\Gamma(t)}{t}}{\sin\frac{\pi}{t}}\right)^2 .$$

Функција $\theta(t)$, чију везу са простим бројевима знамо, захваљујући H. Laurent-у,[2] холоморфна је у позитивном реалном делу полуравни и када се t налази између a и b, константно је позитивна и мања од вредности $\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{b}}$.

Својство које ћемо овде размотрити је следеће.

Peg

$$(4) \qquad S_{a,b} = \sum_{n=1}^{\infty} F((2n-1)\pi)$$

конвергира и сума му је $\frac{-1}{2}\sum f(p_i)$, *где* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *означавају просте бројеве који се налазе између* a *и* b.

Заиста, нека су λ и μ два позитивна цела броја, таква да $\lambda - 1 < a < \lambda$, $\mu < b < \mu + 1$. Може се нацртати четвороугао C симетричан у односу на осу O_t, чије су вертикалне стране одређене редом правама $t = a$ и $t = b$, висине довољно мале да би функција (3) била холоморфна у унутрашњости C и на C. Према познатој сумирајућој формули, која важи под наведеним условима,[3] биће

[2] Comptes rendus, t. 126. 1898, p. 809.

[3] Lindelöf, *Calcul de résidus*, p. 82.

(5) $$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u(t)\cos(2n-1)\pi t dt = 2\mathrm{S}_{a,b} = \sum_{n=\lambda}^{\mu}(-1)^n u(n).$$

Дакле, на основу Wilson-ове теореме,[4] функција $\theta(n)$ узима за $n > 4$ вредност нула ако је n сложен број, а вредност један ако је n прост, чиме се доказ завршава.

Сумирајућа формула

(6) $$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u(t)\cos 2n\pi t dt = \sum_{n=\lambda}^{\mu} u(n) - \int_a^b u(t)\,dt,$$

која важи под истим условима као и формула (5), (Lindelöf, loc. cit., p. 80), води до следећег резултата.

Ред

$$T_{a,b} = \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(2n\pi)$$

конвергира и сума му је

$$\frac{1}{2}\left[\sum f(p_i) - f(0)\right].$$

Специјална цела функција облика (2), *која одговара интегралу*

$$\alpha_n = \int_a^b \theta(t)t^n dt$$

има такође својство да ред (4) *конвергира и његов полузбир је број простих бројева који се налазе између* a *и* b.**

---

[4] Видети H. Laurent, loc. cit.

** Рад је реферисан под псеудонимом I9bc у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXVIII, 1920, као и Heder-ов приказ у FdM, B. 47, S. 924–925.

ОПШТА ТЕОРЕМА О АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА*

Нека је дата алгебарска једначина најопштијег облика

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

(тако да коефицијенти и корени нису подвргнути никаквој рестрикцији). Могуће је, користећи извесне, данас познате резултате о Тејлоровим редовима и једначинама (1), утврдити у равни кружни прстен C који сигурно садржи корен једначине (1).

Претпоставимо $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 1$ (што не нарушава општост) и нека је α корен једначине (1) најближи координатном почетку (или један од таквих корена, чији модули имају исте вредности). Ако конструишемо функцију

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \, r^{2k}, \tag{2}$$

имаћемо, према једној општој теореми о Тејлоровим редовима коју је аутор доказао у једном од ранијих радова[1]

$$|\alpha| = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}}, \tag{3}$$

где је r било која позитивна вредност.

Када r расте, узимајући реалне вредности од 0 до ∞, реална функција $u(r)$ најпре опада, затим достиже позитиван минимум L, потом константно расте. Према томе, према (3), корен α се никада не налази у унутрашњости круга C_1 који има центар у координатном почетку и пречник

---

* Наслов оригинала *Théorème général sur les équations algébriques,* Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1919, 4° série, t. XIX, 9–12, pp. 281–284.

[1] M. Petrovitch, Bull. de la Soc. math. de France, t. XXIX; то је рад објављен у овој књизи, стр. 45–53.

(4) $$R_1 = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}.$$

С друге стране, према резултату који је доказао г. Fejér,[2] корен најмањег модула једначине (1), никада се не налази изван круга C_2, који има центар у координатном почетку и пречник

(5) $$R_2 = n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Два става су резимирана у следећој теореми.

Алгебарска једначина има бар један корен у кружном прстену C ограниченом са два круга C_1 и C_2 (или на границама прстена) и нема корена окружених прстеном.

Границе, спољашњост и унутрашњост прстена C, представљени круговима C_1 и C_2, обезбеђују *најпрецизније* границе, које је могуће доделити прстену, због чега теорема важи у најопштијем случају. Заиста, спољашњу границу C_2 прстена C којој одговара једначина

(6) $$a_0\left(1+\frac{a_1 x}{na_0}\right)^n = a_0 + a_1 x + \frac{n-1}{2na_0}a_1^2 x^2 + \ldots = 0$$

(овај случај изнео је М. Fejér) ефективно достижу n једнаких корена једначине (6). Осим тога, једначина

(7) $$-1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 0$$

узима за минимум L вредност која тежи 4 и један корен α који тежи $\frac{1}{2}$ када се њен степен n неодређено повећава: граничној вредности $L = 4$ одговара круг C_1 полупречника $\frac{1}{2}$ којој се неодређено приближава корен α, када се n приближава бесконачности (гранични случај $\frac{-1+2x}{1-x} = 0$ једначине (7) је разматрао М. Landau *loc. cit.*).

Ширина D кружног прстена C је

(8) $$D = R_2 - R_1 = |a_0|\left(\frac{n}{|a_1|} - \frac{1}{\sqrt{L}}\right),$$

[2] L. Fejér: C. R. de l'Acad. des Sc., 1907, t. II, pp. 459–461.

и немогуће је сузити прстен у било ком смислу, тако да он садржи корен α у свим могућим случајевима. Како је

$$L \geq |a_1|^2,$$

тако одређена вредност D је већа или једнака од $(n-1)\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

Уколико је корен α реалан, тада се α налази у интервалу $(-R_2, -R_1)$ или (R_1, R_2) у зависности да ли је α негативан или позитиван (с могућношћу да се поклопи са границом тог интервала).

Очигледно, у претходној теореми можемо L заменити горњом границом те вредности. Једна таква граница биће, на пример, вредност коју узима функција $u(r)$ за произвољну позитивну вредност r.

На крају, подсетимо се једне теореме на неки начин супротне претходној: док се претходна теорема односи на корене једначине (1) садржане у кружном прстену који не окружује ни један корен те једначине, ова друга теорема (теорема коју ћемо овде видети) односи се на корене окружене прстеном, али који не садржи ни један од њих. Теорема, у којој се претпоставља само да су коефицијенти једначине (1) реални, даје поступак за тачно одређивање броја корена окружених једном таквом кружницом. Тај број се добија[3] као цео део одређеног нумеричког израза који се алгебарски изражава помоћу коефицијената a_k, полупречника и ширине прстена.**

[3] M. Petrovitch, Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXVI, 1908, pp. 141–150; овај рад је изложен у овој књизи на стр. 104–113.

** Рад је приказан под псеудонимом Азе у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXXIII, 1927, као и Szegö-ов приказ у FdM, B. 47, S. 73.

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ ЧИЈИ СЕ ДЕЦИМАЛНИ ДЕО ИЗРАЖАВА ПОМОЋУ ПРОСТИХ БРОЈЕВА*

1. Размотримо двојни интеграл

$$I(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty (v^q-v^p)\,udzdt, \tag{1}$$

где су u и v две функције променљивих z и t

$$u=\frac{e^{-t}}{(te^{-z}-1)t}, \qquad v=te^{-z} \tag{2}$$

и p, q два дата цела броја $(q>p>4)$. Добија се

$$v^q-v^p=\sum_{n=1}^{q-1}(te^{-z})^n e^{-t}-\sum_{n=1}^{p-1}(te^{-z})^n e^{-t}=\sum_{n=p}^{q-1}(te^{-z})^n e^{-t},$$

и како је

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt=n!, \qquad \int_0^\infty e^{-nz}dz=\frac{1}{n}, \tag{3}$$

то ће бити

$$I(p,q)=\sum_{n=p}^{q-1}\frac{(n-1)!}{n}. \tag{4}$$

---

* Наслов оригинала *Intégrales définies dont la partie décimale s'exprime à l'aide de nombres premiers*, Comptes rendus, Paris, 1919, t. CLXIX, 16, pp. 683–685; у Парискоj академиjи наука саопштио професор Пол Апел 20. октобра 1919.

Према Wilson-овој теореми, вредност $\frac{(n-1)!}{n}$ је, за $n > 4$, цео број, увек када је n сложен цео број, и једнак је $M - \frac{1}{n}$ (где је M цео број) увек када је n прост број. Имамо дакле,

$$I(p,q) = N - \sum \frac{1}{n_i}, \tag{5}$$

где су n_i *прости бројеви из интервала* (p, q – 1), и N означава цео број. Како је интеграл $I(p, q)$ позитиван, добија се тако следећи резултат.

Децимални део интеграла $I(p, q)$ *једнак је* $1 - \delta$, *где* δ *означава децимални део суме* $\sum \frac{1}{n_i}$.

Децимални део суме $\sum \frac{1}{n_i}$ може се дакле израчунати помоћу интеграла $I(p,q)$. Посебну занимљивост у овом резултату представља чињеница да интеграл I садржи, што се тиче параметара, само две границе између којих се налазе разматрани прости бројеви.

Да би интеграл $I(p, q)$ *био цео број, потребно је и довољно да интервал* (p, q – 1) *не садржи ниједан прост број.* Тако ће бити, на пример, за

$$p = k!+2, \qquad q = k!+k+1,$$

где k означава произвољан цео број.

2. Како је

$$I(p,q) = \int_0^\infty P(t,p,q-1)\, e^{-t} dt, \tag{6}$$

где $P(t,p,q)$ означава полином

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{p+1}}{p+1} + \ldots + \frac{t^q}{q}, \tag{7}$$

прости одређени интеграл (6) такође има претходно аритметичко својство. Ово је, уосталом, само посебан случај следећег аритметичког својства интеграла

$$H(k,m) = \int_0^\infty P(t)\, t^k e^{-t} dt, \tag{8}$$

где је $P(t)$ полином

(9) $$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m$$

и k је дати позитиван цео број већи од 4.

Означимо са h децимални део суме Σa_n где се сумирање врши по индексима n једнаким простим бројевима који се налазе у интервалу $(k, m + k - 1)$.

Увек када је производ $(\mathrm{n}+\mathrm{k})\mathrm{a}_\mathrm{n}$, *за сваки коефицијент* a_n, *цео број (позитиван или негативан), децимални део интеграла* $\mathrm{H}(\mathrm{k},\mathrm{m})$ *једнак је децималном делу од* h *или* $1-\mathrm{h}$, *зависно од тога да ли је интеграл позитиван или негативан.*

Приметимо такође да интеграл

$$L(k,m) = \int_0^\infty P(w)\, w^k dt,$$

где је $w = te^{-t}$ (k је дати цео број већи од 4) и где је $P(t)$ полином (9), има следеће својство.

Нека је g децимални део суме

$$\sum (n+k)^{-(n+k+1)} a_n$$

где се сумирање врши по индексима n једнаким простим бројевима који се налазе у интервалу $(k, m + k - 1)$.

Увек када је производ $(\mathrm{n}+\mathrm{k})^{-(\mathrm{n}+\mathrm{k})}\mathrm{a}_\mathrm{n}$ *за сваки коефицијент* a_n, *цео број (позитиван или негативан), децимални део интеграла* $\mathrm{L}(\mathrm{k},\mathrm{m})$ *једнак је децималном делу од* g *или* $1-\mathrm{g}$, *у зависности од тога да ли је интеграл негативан или позитиван.*

Ова чињеница је такође директна последица формуле

$$\int_0^\infty (te^{-t})^n dt = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

и Вилсонове теореме.**

** Рад је приказао Neder у FdM, B. 47, S. 907–908, аноним (I 5) у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXVIII, 1920. у Bulletin des Sciences mathématiques, t. XLV, 1921, p. 13.

АРИТМЕТИЧКА СВОЈСТВА ЈЕДНЕ КЛАСЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА*

Означимо са 9_k цео број који добијамо написавши цифру 9 k пута заредом, на пример

$$9_1 = 9, \quad 9_2 = 99, \quad 9_3 = 999, \quad \text{итд.}$$

Елементарна аритметика даје занимљива својства тако састављених бројева и њихових комбинација. Овде ће бити размотрена нека нова својства.

1. Нека су

$$(1) \qquad a, b, c, \ldots, g,$$

$$(2) \qquad m, n, p, \ldots, s$$

два низа датих позитивних целих бројева, где су цели бројеви (1) прости међу њима, и нека је h позитивна цела промењива. Израз

$$(3) \qquad N = \frac{9_{(m+1)ah}}{9_{ak}} \cdot \frac{9_{(n+1)bh}}{9_{bk}} \cdot \ldots \cdot \frac{9_{(s+1)gh}}{9_{gh}}$$

представља цео број од λh цифара, где

$$(4) \qquad \lambda = ma + nb + \ldots + sg$$

има следеће својство.

Означимо са $P(k)$ позитиван цео број који указује на колико начина се цео број k може написати у облику

$$(5) \qquad k = ax + by + \ldots + gt,$$

уколико $x, y, \ldots, t$ пролазе низом вредности:

---

* Наслов оригинала *Propriétés arithmétiques d'une classe de nombres rationnels*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1920, t. XLVIII, 1–4, pp. 27–32.

$$(6)\qquad \begin{cases} x = 0,1,2,\dots,m, \\ y = 0,1,2,\dots,n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t = 0,1,2,\dots,s. \end{cases}$$

Уколико h *надмаши извесну границу одређену низом (1), цео број формиран од групе значајних цифара броја* N, *почевши од* (kh + 1)*-ве а завршивши са* (k + 1)h*-том цифром броја* N, *поклапа се са бројем* P(k), *и то за сваку вредност* k *која не прелази* λh.

Да би то било доказано, разматра се полином

$$(7)\qquad V(x,\alpha,\mu) = \frac{x^{(\mu+1)\alpha}-1}{x^{\alpha}-1} = 1 + x^{\alpha} + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha},$$

где су μ и α два произвољна позитивна цела броја. Добија се

$$(8)\qquad V(10^{-h},\alpha,\mu) = 10^{-\mu\alpha h}\,\frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}}$$

и, према томе

$$(9)\qquad N = 10^{\lambda h} W(10^{-h}),$$

где $W(x)$ означава полином степена λ

$$(10)\qquad W(x) = V(x,a,m)\cdot V(x,b,n)\cdot \ldots \cdot V(x,g,s).$$

Дакле, коефицијент уз x^{α} у полиному $W(x)$ је тачно број означен са $P(k)$. Ако се даље, са λ_k означи број цифара целог броја $P(k)$, и ако за h узмемо било коју од горњих граница за $\log P(k)$, добиће се

$$(11)\quad W(10^{-h}) = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1}P(0)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2}P(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3}P(2)\ldots0\ldots0P(\lambda h),$$

и како је $h - l_k \geq 0$ најављени резултат је доказан.

Laguerre[1] је увео општу формулу која даје приближну вредност броја $P(k)$ за дати систем $(k,a,b,c,\dots,g)$ као и за све могуће системе $(x,y,\dots,t)$. При томе је одредио горњу границу грешке која *не зависи* од k.

У случају, на пример, једначине од две непознате

$$k = ax + by,$$

[1] *Sur la partition des nombres*, Bulletin de la Soc. math. de France t. V, 1887; *Oeuvres*, t. I, pp. 218–220.

Laguerre-ова формула даје

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

где је апсолутна вредност од λ мања од 1. За једначину од три непознате

$$k = ax + by + cz,$$

она даје

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

где додати члан δ има апсолутну вредност мању од одређене величине фиксиране за све k.

Ове формуле допуштају да промењивој h доделимо једну од вредности које претпоставља претходна теорема.

Приметимо да је

$$\frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}} \tag{12}$$

цео број сачињен од $\mu\alpha h$ цифара, заправо тај број је

$$1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h-1}1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h-1}1\underbrace{00\ldots0}_{\alpha h-1}10\ldots, \tag{13}$$

где се група цифара 00...01 понавља μ пута. То омогућава израчунавање броја N додавањем подесно распоређених јединица и замишљање једноставног апарата који би брзо извршавао овај рачун.

На пример, за једначину

$$3x + 2y = k,$$
$$0 \le x \le 10, \qquad 0 \le y \le 9,$$

где је број

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{ab}\right) = \log\left(1 + \frac{48}{6}\right) = \log 9$$

мањи од 1, може се ставити $h = 1$, што даје

$$N = 1011112122223233334343343343334\ldots$$

и број $P(k)$ се поклапа са $(k+1)$-вом цифром броја N. Тако, једначина

$$3x + 2y = 19$$

има тачно три решења за $x \le 10$ и $y \le 9$. Тај број је означен двадесетом цифром броја N.

2. Размотримо рационалан број

$$S_{m,h} = M_{m,h}Q_h, \tag{14}$$

где је

$$M_{m,h} = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}}, \tag{15}$$

$$Q_h = 10^{-h}\frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h}, \tag{16}$$

и где су m и h два произвољна позитивна цела броја. Конвертован у децималне разломке, $M_{m,h}$ је *прост* периодични разломак са периодом од mh цифара, и Q_h је *мешовит* периодични разломак чији и непериодични део и периода имају по h цифара. Сам број $S_{m,h}$, конвертован у децимални разломак, биће мешовити периодични разломак чији непериодични део има h цифара, а периода mh цифара. Поделимо низ S сачињен од децимала броја $S_{m,h}$ који формира скуп његовог непериодичног дела и прве периоде, на сукцесивне делове $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ од по h цифара, тако да део T_k $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$ почиње од $[(k-1)h+1]$-ве а завршава се са kh-том децималом броја $S_{m,h}$, и размотримо делове $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Уколико h *надмаши одређену вредност, цео број формиран од групе значајних цифара дела* T_k *поклопиће се са бројем делилаца броја* k *различитих од* 1 *и* k, *и то за сваку вредност* k ≤ m.

Да бисмо то доказали, видимо да $S_{m,h}$ представља нумеричку вредност коју за $x = 10^{-h}$ узима рационални разломак

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),$$

где је $f(x)$ ограничени Lambert-ов ред

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^m}{1-x^m}$$

и

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots). \tag{17}$$

Према добро познатом својству Lambert-ових редова, коефицијент $N(k)$ развоја

$$F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \ldots \tag{18}$$

поклопиће се са бројем делилаца броја k различитих од 1 и k.

Нека је h било који цео број такав да 10^h не буде мањи од броја делиоца и једног целог броја $k < m$. Производ $10^{-hk} N(k)$ биће тада број $0,00\ldots 0N(k)$, где значајном делу броја $N(k)$, састављеном од l_k цифара, претходи један број нула, једнак $h - l_h$, и увек је позитиван за $k = 1, 2, ..., m$. Одавде следи

$$(19) \qquad F(10^{-h}) = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1}N(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2}N(2)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3}N(3)0\ldots,$$

што доказује најављени резултат.

Ако се означи као *руūа* сваки део T_k формиран искључиво од нула, изводи се следећа последица.

Број руūа који ūредсūавља скуū од k *ūрвих делова* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *ūериоде броја* $S_{m,a}$, *једнак је броју ūросūих бројева мањих од* k, *и ūо важи за сваку вредносū броја* k *мању или једнаку* m.

Ако се уочи да је

$$\frac{1}{9_{kh}} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{00\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{00\ldots0}_{kh-1}1,$$

$$10^{-h}\frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-1}1\underbrace{00\ldots0}_{h-1}2\underbrace{00\ldots0}_{h-1}2\underbrace{00\ldots0}_{h-1}2\ldots,$$

види се да се низ S израчунава, за све дате вредности m и h, једноставним додавањем јединица, на пример помоћу просте имагинарне машине.

Број h који испуњава претходне услове може бити одређен на разне начине. Како је

$$N(k) < k < m,$$

можемо узеūи за h *било који цео број већи или једнак* m.

Тај се број може такође изабрати на следећи начин: узимајући за m неки факторијел

$$m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \lambda,$$

уверавамо се елементарним аритметичким разматрањима да број делиоца (различитих од 1 и k) целог броја $k \leq m$ не прелази никад вредност $2^{\lambda-1}$. Даље, како је

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

може се узеūи за h *било који цео број већи или једнак* $\dfrac{\lambda-1}{3}$.

Указујемо такође на неједнакост г. Wigert-а

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

која важи за произвољно $\varepsilon > 0$, за довољно велико k.

На пример, за $m = 100$ (што даје $h \leq 2$)

$$S_{100,2} = 0{,}000000010002000201020004000202030004000400020006 01\ldots.$$

Првих 20 делова од по две цифре садрже 9 рупа, првих 100 делова садрже 26 рупа, што указује да има 9 простих бројева мањих од 20, да их има 26 мањих од 100, итд.

Иста процедура, примењена на различите рационалне функције аналогне претходним, води до других целих или рационалних бројева, састављених од цифре 9 а који имају интересантна аритметичка својства.**

** Приказ овог рада дао је Rademacher у FdM, B. 47, S. 169 и аноним (I10) u Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXXI, 1924.

ПРОДУКТИ ЈЕДНАКИ ЗБИРУ СВОЈИХ ЧИНИЛАЦА*

1

Продуктом P_n зваће се сваки продукат од $n+1$ чинилаца

$$u_0u_1u_2\dots u_n \tag{1}$$

који су такви да је

$$\begin{aligned} u_0u_1 &= u_0+u_1 \\ u_0u_1u_2 &= u_0+u_1+u_2 \\ u_0u_1u_2u_3 &= u_0+u_1+u_2+u_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_0u_1u_2\dots u_n &= u_0+u_1+u_2+\dots+u_n \end{aligned} \tag{2}$$

тако да је за ма колики број узастопних таквих чинилаца *логаритам збира једнак збиру логаритама.*

Чиниоци u_k могу уосталом, бити ма какви – реални или имагинарни, позитивни или негативни, цели бројеви или разломци. Треба пре свега, поставити и решити следећи проблем.

Формирати све продукте P_n *тј. наћи општи закон формације за све чиниоце* u_k *чији продукат саставља један продукат* P_n.

У томе циљу приметимо да се из (2) добија да је

$$u_k=\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{u_0u_1u_2\dots u_{k-1}-1}, \tag{3}$$

а у исто време и да је

$$u_k=\frac{u_0u_1u_2\dots u_{k-1}}{u_0u_1u_2\dots u_{k-1}-1}, \tag{4}$$

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXVI, Први разред, књ. 52, Београд 1925, стр. 1–9; саопштено у Академији природних наука 22. децембра 1924.

одакле је

(5) $$u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} = \frac{u_k}{u_k - 1}.$$

Множењем са u_k добија се из (5)

(6) $$u_0 u_1 u_2 \dots u_k = \frac{u_k^2}{u_k - 1} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

одакле је, сменивши k са $k-1$

(7) $$u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1} - 1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n),$$

(8) $$u_k = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n),$$

(9) $$u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1},$$

из чега се види *да је ойшши закон формације чинилаца* u_k *даш рекуреншним обрасцем* (8).

У томе се закону јавља једна произвољна количина u_0, која, ако се означи са x, добија низ образаца који дају узастопне чиниоце $u_0, u_1, u_2, \dots$

(10)
$$u_1 = \frac{x}{x-1}$$
$$u_2 = \frac{x^2}{x^2 - x - 1}$$
$$u_3 = \frac{x^4}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$
$$u_4 = \frac{x^8}{x^8 - x^7 + 3x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}$$
$$u_5 = \frac{x^{16}}{x^{16} - x^{15} + 4x^{14} - 12x^{13} + 30x^{12} - 64x^{11} + 118x^{10} - 188x^9 +}$$
$$\frac{x^{16}}{+258x^8 - 302x^7 + 298x^6 - 244x^5 + 162x^4 - 84x^3 + 32x^2 - x + 1}$$
. . . .

За специјалну вредност нпр. $x = 2$ добило би се

$$(11)\qquad \begin{array}{ll} u_1 = 2 & u_2 = \dfrac{4}{3} = 1,33333 \\ u_3 = \dfrac{16}{13} = 1,230869 & u_4 = \dfrac{256}{217} = 1,17972 \\ u_5 = \dfrac{65536}{57073} = 1,14828 & u_6 = \dfrac{4294966}{3921955} = 1,09518 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Као што се види, *сви су чиниоци* u_k *рационалне функције једне променљиве количине* x *са коефицијентима који су цели бројеви.* Функција, што представља чинилац u_k једнога датог ранга k *иста је за све продукте* P_n; оно што се мења од једног продукта P_n до другог, јесте вредност броја x и целокупан број n фактора што састављају посматрани продукат P_n.

Тако се исто лако налази и општи закон формације свих продуката P_n, јер се из једначине

$$(12)\qquad u_k = P_k - P_{k-1}$$

и једначине (3) написане у облику

$$(13)\qquad u_k = \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} - 1}$$

добија

$$(14)\qquad P_k = \frac{P_{k-1}^2}{P_{k-1} - 1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

То је рекурентни образац који даје P_k помоћу P_{k-1}.

Али се може ићи и даље. Ако се, као и малочас, стави да је $u_0 = x$, образац (14) показује да је P_n *рационална* функција променљиве x

$$(15)\qquad P_n = \frac{f_n}{\varphi_n},$$

где су f_n и φ_n полиноми по x са коефицијентима који су *цели* бројеви.

Из (14) и (15) добија се тада да је

$$(16)\qquad P_n = \frac{f_{n-1}^2}{f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2},$$

из чега се види да су полиноми f и φ међусобно повезани рекурентним релацијама

$$f_n = f_{n-1}^2 \tag{17}$$

$$\varphi_n = f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2, \tag{18}$$

а пошто је

$$f_0 = x$$

из (17) и (18) добија се поступно

$$f_n = x^{2^{n-1}} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \varphi_n = x^{2^{n-1}}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 \\ \varphi_0 = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Општи закон формације продуката P_n дат је рекурентним обрасцима (19) и (20) у вези са обрасцем (15). На тај начин се добија низ образаца који дефинишу узастопне такве продукте

$$\begin{aligned} P_0 &= x \\ P_1 &= \frac{x^2}{x-1} \\ P_2 &= \frac{x^4}{x^3-2x^2+2x-1} \\ P_3 &= \frac{x^8}{x^7-3x^6+6x^5-9x^4+10x^3-8x^2+4x-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Када променљива x има једну одређену вредност, добиће се бројне вредности продуката P_n састављених из чинилаца u_k који се добијају кад се у обрасцима (10) да променљивој x та иста вредност.

Навешћемо и ову везу између продуката P_n и њихових чинилаца u_k. Ако се уоче функције двеју променљивих x и Z, представљене редовима

$$F(x,Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n Z^n,$$

$$\phi(x,Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n Z^n,$$

оне ће, за све вредности x и Z у области конвергенције ових редова, бити везане релацијом

$$F(x,Z) - (1-Z)\phi(x,Z) = 0$$

што произлази из обрасца

$$P_n = u_0 u_1 u_2 \ldots u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

и познатог фактора да су две функције

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n Z^n,$$

$$\varphi(Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) Z^n,$$

везане релацијом

$$\varphi(Z) = \frac{f(Z)}{1-Z}.$$

2.

Изрази u_k, као што се види, представљају једну *интересантну класу рационалних функција* које имају ту особину да је продукат од ма коликог броја узастопних таквих функција једнак њиховом збиру, тако да им је логаритам збира једнак збиру логаритама.

Међутим, за извесне просте комбинације тих функција добијају се рекурентни закони формације још простији од напред наведених. Тако, ако се на место u_k уведу нове функције w_k дефинисане релацијом

$$u_k = \frac{1}{1+w_k} \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots) \tag{22}$$

имаће се за њих рекурентна релација

$$\begin{aligned} w_k &= w_{k-1} + w_{k-1}^2, \\ w_1 &= -\frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{23}$$

тако да, ако се стави

$$-\frac{1}{x} = t,$$

биће

$$w_k = t(1+w_1)(1+w_2)\cdot\ldots\cdot(1+w_{k-1}) = t\prod_{n=1}^{n=k-1}(1+w_n). \tag{24}$$

Изрази w_k су *полиноми* по промењивој t, и то w_k је полином 2^{k-1}-ог степена. Тако се налази да је

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
w_1 &= t\\
w_2 &= t + t^2\\
w_3 &= t + 2t^2 + 2t^3 + t^4\\
w_4 &= t + 3t^2 + 6t^3 + 9t^4 + 10t^5 + 8t^6 + 4t^7 + t^8\\
w_5 &= t + 4t^2 + 12t^3 + 30t^4 + 64t^5 + 118t^6 + 88t^7\\
&\quad + 258t^8 + 302t^9 + 298t^{10} + 244t^{11} + 162t^{12} +\\
&\quad + 84t^{13} + 32t^{14} + 9t^{15} + t^{16}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Ови полиноми постају једнаки нули за

$$t = 0 \quad \text{и} \quad t = -1$$

а не постају једнаки нули ни за коју другу реалну вредност t.

На сличан начин се може упростити и рекурентни образац за формацију продуката P_n. Ако се на место ових уведу нови изрази Q_n дефинисани релацијом

$$(26)\qquad Q_k = -\frac{1}{P_k} \qquad Q_0 = -\frac{1}{x} = t$$

добија се

$$(27)\qquad Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-1}^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

из чега се види *да је закон формације функција* Q_k *исти као и за функције* w_k. А пошто је

$$(28)\qquad Q_0 = w_1 = t$$

то се добија образац

$$(29)\qquad Q_k(t) = w_{k+1}(t)$$

тако, да су и Q_k *полиноми* по промењљивој t. Према (15) и (27) добија се тада образац

$$(30)\qquad P_k(x) = \frac{u_{k+1}(x)}{u_{k+1}(x) - 1}$$

који се добија и непосредно из једначине (13).

Као што се, дакле, види, *испитивање продуката* P_n *и њихових чинилаца* u_k *може се свести на испитивање полинома* Q_n *или полинома* w_n дефинисаних рекурентним обрасцима (16), (27) и (29).

3

У случају кад су чиниоци u_k сви *реални и позитивни* бројеви, из прве једначине (10) и (13) види се да мора бити

$$u_0 > 1 \qquad u_k > 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{31}$$

што показује да је тада

$$P_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n > n, \tag{32}$$

као и да је

$$P_n > P_{n-1}, \tag{33}$$

тј. да P_n расте са рашћењем ранга n.

Из неједначине (32) види се у исто време и то да је тада бескрајни ред

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

дивергентан. У исто време из обрасца (13) види се да чиниоци u_k не могу сви бити цели бројеви.

Од интереса је још и аритметички проблем – *представити један дати број* M *као продукат* $\mathrm{P_n}$ *са датим бројем* n *чинилаца* $\mathrm{u_k}$, тј. раставити га на збир чланова u_k

$$M = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

тако да буду испуњене погодбе (2). Пошто тада треба да је

$$P_n - M = 0, \tag{34}$$

где је P_n рационална функција променљиве x, дата одговарајућим обрасцем (21), то свакоме броју M одговара одређена вредност x која се добија решењем алгебарске једначине 2^n-тог степена (34); кад би се та вредност сменила у обрасцима (10), добиле би се одговарајуће вредности чланова $u_1, u_2, \ldots, u_n$, чиме би задатак био решен.

Међутим *решење проблема може се свести на решавање једнога система од* n + 1 *квадратних једначина*. Јер из једначина

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= M = u_0 u_1 \ldots u_n \\ u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} &= u_0 u_1 \ldots u_{n-1} \end{aligned} \tag{35}$$

добија се

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = M - u_n = u_0 u_1 \ldots u_{n-1} = \frac{M}{u_n}$$

тако да је

$$M - u_n = \frac{M}{u_n}, \tag{36}$$

што значи да се u_n добија као корен квадратне једначине

$$u_n^2 - M(u_n - 1) = 0. \tag{37}$$

Знајући u_n, знаће се и вредност

$$M - u_n = M_1, \tag{38}$$

па ће се из једначине

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-2} = u_0 u_1 \ldots u_{n-2} = M_1 - u_{n-1} = \frac{M}{u_n u_{n-1}} = \frac{M_1}{u_{n-1}}$$

имати u_{n-1} као корен квадратне једначине

$$u_{n-1}^2 - M_1(u_{n-1} - 1) = 0. \tag{39}$$

Знајући u_{n-1}, знаће се и вредност

$$M_1 - u_{n-1} = \frac{M_1}{u_{n-1}} = M_2, \tag{40}$$

па ће се из једначине

$$M_2 - u_{n-2} = \frac{M}{u_n u_{n-1} u_{n-2}} = \frac{M_2}{u_{n-2}} \tag{41}$$

имати u_{n-2} као корен квадратне једначине

$$u_{n-2}^2 - M_2(u_{n-2} - 1) = 0. \tag{42}$$

Према томе, генерално се чинилац

$$u_{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

добија као корен квадратне једначине

$$u_{n-k}^2 - M_k(u_{n-k} - 1) = 0, \tag{43}$$

где је

$$
(44) \qquad
\begin{aligned}
M_0 &= M \\
M_1 &= \frac{M_0}{u_n} \\
M_2 &= \frac{M_1}{u_{n-1}} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
M_k &= \frac{M_{k-1}}{u_{n-k+1}} .
\end{aligned}
$$

Ако се тражи да сви чиниоци u_k буду *реални*, треба да буде

$$M \geq 4,$$

а тако исто и

$$M_k \geq 4 \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и у томе су случају сви чиниоци u_k у исто време и *позитивни*. И број n фактора u_k, што одговарају једноме датоме броју M, ограничен је погодбом да су u_k реални. Тако се нпр. број

$$M_0 = 10$$

може раставити на највише 5 фактора u_k, при чему се налази (са пет децимала тачно) да је

$$
\begin{aligned}
M_0 &= 10 & u_5 &= 1{,}12701 \\
M_1 &= 8{,}872299 & u_4 &= 1{,}15044 \\
M_2 &= 7{,}72255 & u_3 &= 1{,}18047 \\
M_3 &= 6{,}54209 & u_2 &= 1{,}23203 \\
M_4 &= 5{,}31006 & u_1 &= 1{,}34629 \\
M_5 &= 3{,}96377 & u_0 &= 3{,}96377
\end{aligned}
$$

Ови фактори су такви да је

$$10 = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$$

и да међу њима постоје релације (2) где је $n = 5$.**

** Рад је приказао Јован Карамата у FdM, B. 51, S. 91, као и аноним (I 25 b) у Revue sémestrielle des publications mathématiques, t. XXXIII, 1927.

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ДЕТЕРМИНАНАТА*

Нека елементи детерминанте

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

имају следећу особину:

$$a_{ki} = \alpha_k + r_k g_i \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

где су α_k, r_k, g_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ три низа било каквих бројева. Тада Δ_n има следеће својство.

Детерминанта је идентички једнака нули за n > 2; *генерално* Δ_n *је различита од нуле за* n = 2.

С обзиром да детерминанта Δ_n има за миноре првог реда детерминанте Δ_{n-1} исте врсте као и Δ_n, довољно је показати да је Δ_3 идентички једнака нули. Дакле, Δ_3 се може раставити на суму од осам детерминаната трећег реда. Свака од ових детерминаната, после извлачења одговарајућег броја α_k или r_k који множи елементе једне исте колоне, има две идентичне колоне, па је према томе једнака нули.

Али за $n = 2$ биће

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 + r_1 g_1 & \alpha_2 + r_2 g_1 \\ \alpha_1 + r_1 g_2 & \alpha_2 + r_2 g_2 \end{vmatrix} = (g_1 - g_2)(r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1)$$

генерално различита од нуле.

---

* Наслов оригинала *Sur une classe de déterminants,* Comptes rendus du Congrès de l'Association français pour l'avancement des sciences, s. Mathématiques, La Rochelle, 1928, pp. 1–3.

Ово својство детерминаната Δ_n *има интересантну примену у квантитативним хемијским анализама*, што доводи до једног довољно занимљивог резултата који има практичан значај.

Претпоставимо да уместо одвајања и индивидуалног мерења n тела $A_1, A_2, \ldots, A_n$ која тражимо да би их квантитативно одредили у анализираној смеси (E), извршавамо низ хемијских операција над смесом, једнаких за сва тела A_k, и да је при том број операција једнак броју тела. Подаци добијени заједничким мерењем исхода сваке операције, граде један систем једначина чији је број једнак броју тела A_k. То омогућава израчунавање величина тела садржаних у (E).

Претпоставили се случај у којем n метала $A_1, A_2, \ldots, A_n$ учествује у смеси (E); трансформишу се најпре на компоненте $B_1^1, B_2^1, \ldots, B_n^1$ исте хемијске врсте (на пример хлориде), тако да индекс компоненте указује на одговарајући метал A_k. Нека су

$$m_1^1, m_2^1, \ldots, m_n^1$$

молекулске масе компоненти B_k^1, q_1 укупна маса компоненти и x_k^1 непознат број који указује на то, колико пута је маса m_k^1 садржана у смеси (E). Имаћемо једначину

$$m_1^1 x_1^1 + m_2^1 x_2^1 + \ldots + m_n^1 x_n^1 = q_1.$$

Затим, трансформишимо компоненте B_k^1 на компоненте

$$B_1^2, B_2^2, \ldots, B_n^2$$

друге хемијске врсте (на пример сулфате) и нека су m_k^2, x_k^2, q_2 одговарајуће величине аналогне претходним. Добиће се једначина

$$m_1^2 x_1^2 + m_2^2 x_2^2 + \ldots + m_n^2 x_n^2 = q_2.$$

Ако се изврши на тај начин n различитих операција, добиће се систем линеарних једначина:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &m_1^1 x_1^1 + m_2^1 x_2^1 + \ldots + m_n^1 x_n^1 = q_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_1^n x_1^n + m_2^n x_2^n + \ldots + m_n^n x_n^n = q_n \end{aligned}$$

Ако се даље уведу ознаке:

1. μ_k апсолутан број који указује колико је атомских маса метала A_k садржано у молекулској маси компоненте B_k^1 (број који се одређује помоћу хемијске формуле компоненте B_k^1);

2. ρ_k апсолутан број који показује колико је атомских маса метала A_k садржано у смеси (E).

Добићемо

$$x_k = \frac{\rho_k}{\mu_k^1}.$$

Осим тога, количник

$$\frac{\mu_k^1}{m_k^1} = a_{ki}$$

представља редуковане молекулске масе компонената B_k^1, тако да масе $M_k^1, M_k^2, \ldots, M_k^n$ редом компонената $B_k^1, B_k^2, \ldots, B_k^n$ садрже исту количину метала A_k, знајући атомску масу тог метала.

На крају: 1. означена су са α_k атомска маса метала A_k; 2. са r_k цео број који дефинише хемијску валенцу метала A_k; 3. са h_k^1 масу хемијске групе везану у компоненти B_k^1 за атомску масу метала A_k.

Однос h_k^1 има очигледно једну исту вредност g_1 за све метале A_k. Како важи

$$a_{k1} = \alpha_k + h_k^1$$

биће

$$a_{k1} = \alpha_k + r_k g_1.$$

Детерминанта система

$$(3) \qquad \begin{array}{l} a_{11}\rho_1 + a_{21}\rho_2 + \ldots + a_{n1}\rho_n = q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\rho_1 + a_{n2}\rho_2 + \ldots + a_{nn}\rho_n = q_n \end{array}$$

на који се своди систем (1), је дакле детерминанта Δ_n, што нас директно доводи до следећег закључка.

Анализа је изводљива само ако је број метала $\mathrm{A_k}$ *једнак* 2. У случају када је тај број већи од 2, вредност детерминанте Δ_n је нула и израчунавање величине ρ_k постаје илузорно.

Али можемо извршити додатан број λ *хомогених* хемијских операција над металима A_k (тј. да колективно трансформишемо A_k на компоненте једне исте врсте, на пример хлориде), и известан број μ *хетерогених* операција (тј. да трансформишемо A_k на компоненте различитих врста – једне на пример на хлориде, друге на карбонате, итд.).

Анализа је изводљива само ако је $\lambda \leq 2$, *тј. ако је* $\mu \geq \mathrm{n} - 2$.

О РЕДОВИМА ПОЛИНОМА ИСТОГ СТЕПЕНА*

Размотрили се ред

$$S(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots \tag{1}$$

полинома истог степена p, који се анулира за $x = 0$ и чији су коефицијенти алгебарски бројеви.

Доказаће се следеће.

Уколико у полиному $P_n(x)$ *производ коефицијента уз* x^k *и* n^{2k} *зависи само од* k, *сума* $S(x)$ *биће, за сваки алгебарски број* x, *полином степена* p *од* π^2. *Коефицијенти полинома* $S(x)$ *су алгебарски бројеви.*

Заиста, нека је

$$P_n(x) = \alpha_{n1}x + \alpha_{n2}x^2 + \ldots + \alpha_{np}x^p. \tag{2}$$

Како производ

$$n^{2k}\alpha_{nk}$$

зависи једино од k, ако се та вредност означи са a_k, добиће се

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{a_1}{1^2}x + \frac{a_2}{1^4}x^2 + \ldots + \frac{a_p}{1^{2p}}x^p, \\ P_2(x) &= \frac{a_1}{2^2}x + \frac{a_2}{2^4}x^2 + \ldots + \frac{a_p}{2^{2p}}x^p, \\ P_3(x) &= \frac{a_1}{3^2}x + \frac{a_2}{3^4}x^2 + \ldots + \frac{a_p}{3^{2p}}x^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Одавде следи

$$S(x) = a_1s_1x + a_2s_2x^2 + \ldots + a_ps_px^p \tag{4}$$

---

* Наслов оригинала *Sur les séries de polynômes de même degré*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1933, t. II, pp. 82–84.

где је

(5) $$s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Али према познатој формули биће

(6) $$s_k = A_{2k} B_{2k} \pi^{2k},$$

где су $B_2, B_4, B_6, \ldots$ Бернулијеви бројеви, док је A_{2k} рационалан број

$$A_{2k} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}.$$

Сума $S(x)$ може се дакле записати на следећи начин:

(7) $$S(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_p x^p,$$

где је

(8) $$C_k = A_{2k} B_{2k} a_k \pi^{2k} = M_k \pi^{2k}.$$

С обзиром да је M_k алгебарски број, овим је теорема доказана.

Одавде такође следи да алгебарска једначина непознате x

$$S(x) = 0$$

нема ни један корен једнак неком алгебарском броју.

За $x = 1$ биће

$$S(1) = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_p s_p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где

(9) $$u_n = \frac{a_1}{n^2} + \frac{a_2}{n^4} + \ldots + \frac{a_p}{n^{2p}},$$

одакле се добија следећа теорема.

Нека је $u_n(x)$ *низ полинома фиксираног степена* p, *и претпоставимо да су коефицијенти полинома* $u_n(x)$ *алгебарски бројеви. Сума конвергентног реда*

(10) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

једнака је вредности неког полинома у π^2. *Овај полином такође је степена* p *и његови коефицијенти су алгебарски бројеви.*

Сума реда (10) је различита од нуле, уколико су коефицијенти било који алгебарски бројеви a_n.

Позната формула

$$\frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^\infty e^{-nt}t^{2k-1}dt$$

доводи тада до аналогног резултата у вези са одређеним интегралом

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{Q(xt^2)}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t},$$

где је $Q(z)$ полином променљиве z.

Нека је Q *било који полином чији су коефицијенти алгебарски бројеви, који се анулира за* z = 0. *Вредност коју узима* I(x), *уколико је* x *једнак било ком алгебарском броју, је полином од* π^2, *чији су коефицијенти такође алгебарски бројеви.***

** Приказ овог рада: Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (даље у тексту Zbl), B. 8, S. 348 y FdM, B. 59, S. 965 (Hahn Wolfgang).

ЈЕДАН НАЧИН ПРЕДСТАВЉАЊА ПОЗИТИВНИХ БРОЈЕВА*

1. Познато је да се сваки позитиван број може представити као сума реда

$$(1) \qquad m_0 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \ldots = m_0 + \sum \frac{1}{m_i},$$

где су m_i позитивни цели бројеви.

Овај резултат може се уопштити у облику следеће теореме.

Нека је дат низ позитивних целих бројева

$$(2) \qquad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \qquad (\lambda_0 = 1).$$

Сваки позитиван број се може представити као сума конвергентног реда чији су чланови разломци облика

$$(3) \qquad \frac{\lambda_k}{n_k},$$

где су n_k позитивни цели бројеви, при чему λ_k не дели n_k.

Заиста, ако је број N представљен редом (1), општи члан тог реда се може написати у облику

$$(4) \qquad \frac{1}{m_k} = \frac{\lambda_k^r}{m_k(m_k + \lambda_k^r)} + \frac{1}{m_k + \lambda_k^r},$$

где је r произвољан позитиван цео број.

Ако m_k није дељив са λ_k, онда је $r = 1$. Ако је λ_k фактор реда s броја m_k, узећемо $r = s + 1$. У оба ова случаја биће

---

* Наслов оригинала *Un mode de représentation des nombres positifs.* Věstnik Král. České společnosti náuk, Praha, 1934, Trida math. prirodovědecká t. II, pp. 1–7; саопштено у Чешкој академији наука 11. априла 1934.

$$\frac{1}{m_k} = \frac{\lambda_k}{n_k} + \frac{1}{q_k}, \tag{5}$$

где су n_k и q_k позитивни цели бројеви, при чему n_k није дељиво са λ_k. Теорема је дакле доказана.

Специјално, сваки позитиван број N се може представити као сума конвергентног реда чији су чланови несводљиви разломци облика

$$\frac{p_k}{n_k}, \tag{6}$$

где је $p_1, p_2, p_3, \ldots$ низ позитивних простих бројева, и $n_1, n_2, n_3, \ldots$ позитивни цели бројеви.

2. Уопштено, да би се могао ефективно да декомпонује дати број N на суму несводљивих чланова (3), потребно је да експлицитно знамо чланове λ_k низа (2).

Дакле, када је реч о декомпозицији суме чији су чланови облика (6), постоји бесконачно много бројева N које можемо тако декомпоновати, при чему та декомпозиција не захтева експлицитно познавање низа простих бројева.

Тако, нека је $f(x)$ било која функција, која за $x = 0$ узима вредност која је, ако је различита од нуле, једнака неком позитивном целом броју, и чији изводи сваког реда за $x = 0$ имају вредност која је, ако је различита од нуле, инверз позитивног целог броја.

Такве ће бити, на пример, елементарне функције

$$e^{\frac{x}{k}}, \quad z^m e^{\frac{x}{k}} \qquad (k \text{ је позитиван цео број})$$

и њихове различите линеарне комбинације, затим Беселови трансценденти

$$J_0(2i\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \ldots$$

$$J_1(2i\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} + \frac{x^3}{3!\,4!} + \ldots$$

....

Развој функције $f(x)$ биће

$$f(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{M_n \cdot n!},$$

где су M_i позитивни цели бројеви, и ако је

$$\frac{d}{dx}[x\,f(x)] = \varphi(x)$$

добија се

$$\varphi(x) = M_0 + \frac{2x}{M_1 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{M_2 \cdot 2!} + \ldots$$

то јест

(7) $$\varphi(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{M_{n-1} \cdot (n-1)!}.$$

Када је

$$x = \frac{1}{p},$$

p означава фиксиран али произвољно изабран прост број. Како ред (7) конвергира за сваку вредност промењиве x, биће

(8) $$\varphi\left(\frac{1}{p}\right) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n,$$

где

(9) $$\lambda_n = \frac{n}{(n-1)!\,M_{n-1}p^{n-1}}.$$

Факторијал $(n-1)!$ није дељив бројем n, ако је n прост. Осим тога, ако је n сложен, онда је дељив са n, осим за $n = 4$. Тада, да би λ_n био облика $\frac{1}{m_i}$ где је m_i цео број, потребно је и довољно: 1. и да n дели M_{n-1}; 2. и да је n сложен број различит од 4.

Да би λ_n био несводљивог облика

$$\lambda_n = \frac{p_i}{m_i}$$

потребно је и довољно да n буде прост број различит од p, који не дели M_{n-1}.

У сваком случају, број $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ биће декомпонован у суму чији су чланови $\frac{p_k}{m_k}$ несводљиви, где су p_k прости бројеви и m_k позитивни цели бројеви.

У случају да M_{n-1} није дељив са n, број $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ се може представити сумом два реда од којих је један облика

$$m_0 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots,$$

а други је облика

$$\frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3} + \frac{p_4}{m_4} + \ldots,$$

где су разломци сведени на најпростије изразе, при чему је

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

низ простих бројева 3, 5, 7, 11, 13,...

На пример, за

$$f(x) = e^x,$$

добија се

$$\varphi(x) = (x+1)e^x.$$

Тада ће бити

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p+1}{p}\sqrt[p]{e}$$

и

$$\lambda_n = \frac{n}{(n-1)!\,p^{n-1}},$$

тако да је

$$\frac{p+1}{p}\sqrt[p]{e} = S_1 + S_2,$$

где је

$$S_1 = 1 + \frac{1}{20p^5} + \frac{1}{630p^7} + \ldots$$

$$S_2 = \frac{2}{p} + \frac{3}{2p^2} + \frac{2}{3p^3} + \frac{5}{24p^4} + \frac{7}{720p^6} + \ldots$$

За $p = 1$, ако $\varphi(1) = 2e$ поделимо са 2, добија се

$$e = S_1 + S_2,$$

где је

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{40} + \frac{1}{1260} + \frac{1}{8960} + \ldots$$

$$S_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{48} + \frac{7}{1440} + \frac{11}{7257600} + \ldots$$

За $p = 2$ добија се

$$\frac{3}{2}\sqrt{e} = S_1 + S_2,$$

где је

$$S_1 = 2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{640} + \frac{1}{80640} + \frac{1}{1146880} + \ldots$$
$$S_2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{384} + \frac{7}{46080} + \frac{11}{715891200} + \ldots$$

3. Бројеви $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ који имају малопре наведено аритметичко својство изражавају се на различите начине одређеним интегралима.

Размотримо функцију

$$f(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{M_n},$$

где је $M_0, M_1, M_2, \ldots$ низ позитивних целих бројева. Формирајмо одређене интеграле

$$(10) \qquad L_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos(x\sin t)\,\Phi_1(r,t)dt$$

$$(11) \qquad L_2(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos t}\sin(x\sin t)\,\Phi_2(r,t)dt,$$

где Φ_1 и Φ_2 означавају реални део и коефицијент уз i у

$$\frac{d}{dz}[zf(z)] = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} z^{n-1}, \qquad z = re^{ti}.$$

Добиће се

$$(12) \qquad \Phi_1(r,t) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} r^{n-1}\cos(n-1)t$$

$$(13) \qquad \Phi_2(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} r^{n-1}\sin(n-1)t$$

тако да

$$L_1(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^{n-1}}{M_{n-1}} U_n \tag{14}$$

$$L_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^{n-1}}{M_{n-1}} V_n, \tag{15}$$

где је

$$U_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos t} \cos(x \sin t) \cos(n-1)t dt \tag{16}$$

$$V_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos t} \sin(x \sin t) \sin(n-1)t dt. \tag{17}$$

Према формулама познатих интеграла, интеграли (19) и (20) имају заједничку вредност

$$U_n = V_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Две суме других чланова (17) и (18) се тада могу написати

$$L_1(x) = M_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n (rx)^{n-1}$$

$$L_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n (rx)^{n-1}$$

где је

$$\mu_n = \frac{n}{(n-1)!\, M_{n-1}}.$$

Како су функције $L_1(x)$ и $L_2(x)$ целе, ако се стави

$$r = 1, \qquad x = \frac{1}{p}$$

где је p произвољно изабран прост број, тада су

$$L_1\left(\frac{1}{p}\right) \text{ и } L_2\left(\frac{1}{p}\right)$$

бројеви врсте на коју је малопре указано.

Добиће се други изрази за бројеве $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ користећи на аналоган начин формуле познатих интеграла

$$\int_0^\infty \frac{(r+ti)^{-n}+(r-ti)^{-n}}{2}\cos xtdt = \frac{\pi}{2}e^{-xt}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(x и r су позитивни реални бројеви), и

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{xti}}{(a+ti)^n}dt = 2\pi e^{-ax}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(x је реалан позитиван број, реални део позитивног броја a), што важи за $n > 1$.**

** Приказ ове Петровићеве расправе: Heilbronn Hans, Zbl, B. 10, S. 390 и H. Rothe-Ilie, FdM, B. 60, S. 954.

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ВИЛСОНОВЕ ТЕОРЕМЕ*

1. Размотримо лук криве

$$y = (\log x)^{2k} \qquad (k \text{ је позитиван цео број})$$

који се налази између две праве $x = 0$ и $x = 1$ (слика 1).

Означимо са:

A површину $QPMNOQ$ ограничену ти луком, асимптотом $x = 0$ и страницама QP PM, једнаким јединици, квадрата $OMPQ$;

B површину правоугаоника $QPTS$ чија страница OS једнака $2k+1$.

Тада важи

Да би површина A *била целобројни у ножак површине* B, *потребно је и довољно* 2k + 1 *буде прост број.*

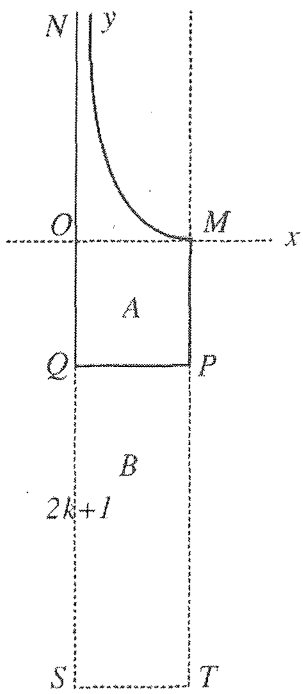
Наиме, криволинијска површина OM има вредност

$$\int_0^1 y dx = \int_0^1 (\log x)^{2k} dx = (2k)!$$

и према томе

$$A = (2k)! + 1.$$

Осим тога, површина B има вреднос $2k + 1$. Дакле, да би A била целобројни умн жак површине B, потребно је и довољно д $2k + 1$ буде прост.



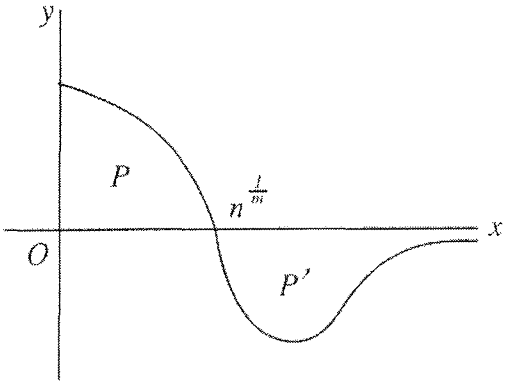
Слика 1.

---

* Наслов оригинала *Interprétations géométriques du théorème de Wilson*. Sphynx, Bruxelles, 1936, t. VI, 7, pp. 110–111.

2. Једна друга интерпретација Вилсонове теореме добија се из површине криве**

$$y = (n - x^m)e^{-x} \quad (m, n \text{ су позитивни цели бројеви}),$$



Слика 2.

која се налази десно од осе Oy и има облик као на слици 2. Ова површина састоји се из два дела, од којих је један изнад, а други испод осе Ox.

У мноштву случајева, ова два дела су међусобно једнака. Ако се узме (m, n) за пар вредности m, n за које једнакост има смисла, може се утврдити следеће.

Да би дужина n + 1 *била целобројни умножак дужине* m + 1, *потребно је и довољно да* m + 1 *буде прост број.*

Заиста, површина криве има вредност:

$$\int_0^\infty y\,dx = n\int_0^\infty e^{-x}dx - \int_0^\infty x^m e^{-x}dx = n - m!.$$

Да би она била једнака нули, потребно је и довољно да буде $n = m!$, односно

$$n + 1 = m! + 1,$$

одакле се доказ лако изводи.

** *Примедба приређивача:* површина коју ограничава крива и O_x оса.

ВЕЗА ТЕЈЛОРОВИХ РЕДОВА И ПРОСТИХ БРОЈЕВА*

Редом A назваћу сваки Тејлоров ред

$$\sum a_n x^n \tag{1}$$

који има следеће аритметичко својство.

Када индекс n пролази природним низом позитивних целих бројева, прелазећи фиксирани цео број M, апсолутна вредност реалног коефицијента a_n биће рационални број који ће, када се сведе на најпростији израз, имати следеће својство.

Његов бројилац пролазиће низом чије су вредности 1 *или прости бројеви већи од* M. *При томе, овај низ неће пропустити ни један прост број већи од* M *и вредност сваког таквог простог броја узеће се само једном. Низ ће имати вредност један на местима која одговарају сложеним бројевима.*

Такав је, на пример, случај реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n, \tag{2}$$

који представља Тејлоров развој функције

$$\lambda(x) = (x + x^2)e^x - x. \tag{3}$$

У овом случају за $n > 4$ биће

$$a_5 = \frac{5}{24}, \quad a_6 = \frac{1}{20}, \quad a_7 = \frac{7}{720}, \quad a_8 = \frac{1}{630}, \quad a_9 = \frac{1}{4480},$$
$$a_{10} = \frac{1}{36288}, \quad a_{11} = \frac{11}{3628800}, \quad \text{итд.}$$

---

* Наслов оригинала *Séries Tayloriennes en rapport avec les nombres premiers*, Boletin matematico, Buenos Aires, 1938, t. X, 13, pp. 177–178.

Такав је такође случај реда

$$(4) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[(n-1)!]^2} x^n,$$

који представља развој функције

$$(5) \qquad \lambda(x) = x\mu(x) + x^2\mu'(x) - x,$$

где $\mu(x)$ означава Беселов трансцендент

$$(6) \qquad \mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

У овом случају за $n > 4$.

$$a_5 = \frac{5}{24^2}, \quad a_6 = \frac{1}{20 \cdot 120}, \quad a_7 = \frac{7}{720^2}, \quad a_8 = \frac{1}{630 \cdot 5040},$$
$$a_9 = \frac{1}{4480 \cdot 40320}, \quad a_{10} = \frac{1}{36288^2 \cdot 10}, \quad a_{11} = \frac{11}{3628800^2}, \quad \text{итд.}$$

Функције $\lambda(x)$ представљене редовима (2) и (4) су облика

$$(7) \qquad \lambda(x) = x\frac{d(x\mu)}{dx} - x,$$

где је функција μ у првом случају e^x, док је у другом одговарајући трансцендент из (6). У овим примерима функција μ има својство да сваки од њених извода за $x = 0$ узима вредност једнаку реципрочној вредности целог броја. Тај је број 1 у примеру (2). У примеру (4) једнак је $k!$ за k-ти извод.

Да би запис био краћи, означимо помоћу $\lambda(x)$ сваку функцију којој, према формули (7), одговара функција $\mu(x)$ чији изводи, почев од одређеног реда, имају ово својство. Цео број чија је реципрочна вредност једнака вредности k-тог извода функције $\mu(x)$ за $x = 0$ означићемо са M_k.

Развоји у редове облика A придружују се у бесконачности функцији $\lambda(x)$. Сви ови случајеви су обухваћени следећом општом теоремом.

За функцију $\lambda(\mathrm{x})$, *чији је Тејлоров развој ред* A, *довољно је да придружени цео број* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}-1}$ *није дељив са* n *ако је* n *прост број.*

Заиста, ако је α_n коефицијент уз x^n развоја функције $\mu(x)$, коефицијент a_n развоја функције $\lambda(x)$ биће

$$a_n = n\alpha_{n-1}.$$

Дакле, добија се

$$\alpha_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{M_k}$$

и одатле

$$a_n = \frac{n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{M_{n-1}}. \tag{8}$$

Факторијел $(n-1)!$ није дељив са n, ако је n прост број и $n > 4$. Осим тога, дељив је са n ако је n сложен број и $n > 4$. Значи,

1. да би бројилац апсолутне вредности другог члана формуле (8) био прост број, потребно је и довољно да не дели M_{n-1};

2. да би бројилац био једнак 1, потребно је и довољно да n буде сложен број, што доказује теорему.

У случају да прост број n дели M_{n-1}, природни низ простих бројева којим пролази апсолутна вредност бројиоца коефицијента a_n, када n пролази природан низ позитивних целих бројева, представља рупу. Члан који овде недостаје биће управо овај прост број n.[**]

[**] Приказ ове Петровићеве расправе у Zbl, B. 18, S. 139 и FdM, B. 64, S. 989, а њоме се користио I. B. Baidaff, *Cosas que los talentos no descubren a primera vista, was después,...*, Boletin matematico, Buenos Aires 1957, t. XXX, 2(321), pp. 9–14.

ЕЛЕМЕНТАРНА ПОСМАТРАЊА О РАСПОРЕДУ ОМАЊИХ ПРОСТИХ БРОЈЕВА*

ПРОБЛЕМ РАСПОРЕДА ОМАЊИХ ПРОСТИХ БРОЈЕВА

Вековни општи проблем тоталитета простих бројева који не премашују дати број ω за данас је још нерешив. Постоје приближни обрасци (нпр. *Legendre*-а, *Чебышев-а* и др.) који дају *приближну* вредност броја $P(\omega)$ простих што не премашују ω, са приближношћу која је утолико већа уколик је веће ω.

Постоји и тачан асимптотски образац

$$P(\omega) \sim \frac{\omega}{\log \omega}$$

(логаритам по основици e) који изражава асимптотско понашање броја $P(\omega)$ при бескрајном рашћењу броја ω.

Али, било би од неоспорног интереса имати ма и делимично решење проблема, нпр. у следећем суженом облику.

Одредити једним простим регуларним аритметичким поступком тачан број $\mathrm{P}(\omega)$ *не ма за какво* ω *што се налази између* 0 *и* ∞, *него за било који број* ω *што се налази између* 0 *и утврђеног броја* a.

Другим речима, наћи *закон распореда омањих простих бројева*, нпр. оних што леже између $\omega = 0$ и $\omega = 100$, или оних између $\omega = 0$ и $\omega = 200$ итд.

Овде ће бити изведен такав један поступак, заснован на једној елементарној особини сложених бројева облика $6m - 1$ и $6m + 1$. Посту-

---

* Српска академија наука, Глас, књ. CLXXXIX, Први разред, књ. 95, Београд 1946, стр. 3–45; саопштено у Академији природних наука 15. јуна 1942.

пак даје *тачан* број $P(\omega)$ за случајеве кад, на пример, ω није веће од 200, али се он, на један посебан, а опет елементаран, начин проширује и на много веће вредности ω. Осим тога, кад се и пређе граница употребљивости поступка, овај продужује давати врло повољне *доње границе* за број $P(\omega)$.

Напослетку, исти поступак доводи и до решења проблема сличне врсте, посебно:

1. за просте бројеве облика $6m-1$;
2. за просте бројеве облика $6m+1$.

А оно што би требало посебно нагласити је то да су ставови и обрасци на које ће се наићи у овоме раду изведени као логичке и неминовне последице основних особина простих или сложених бројева, и да ту нема ни трага од какве емпирије која се, при таквим истраживањима, често узима у помоћ.

ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЈЕВИ ОБЛИКА $6m-1$ И $6m+1$

Сваки сложен број M облика $6m-1$ је производ два чиниоца од којих ниједан није дељив ни са 2, ни са 3. Према томе M је производ два чиниоца од којих је сваки облика

$$\text{или } 6i+1, \quad \text{или } 6i+5,$$

тј. облика

$$\text{или } 6i+1, \quad \text{или } 6j-1.$$

Али M не може бити облика

$$\text{ни } (6i+1)(6j+1), \quad \text{ни } (6i-1)(6j-1),$$

јер би у првоме случају било

$$M=6m'+1, \quad \text{где је} \quad m'=6ij+i+j,$$

а у другом

$$M=6m'+1, \quad \text{где је} \quad m'=6ij-i-j.$$

Међутим, ниједан број $6m-1$ не може бити једнак неком броју $6m'+1$, јер би тада морало бити

$$3(m-m')=1,$$

што је немогуће.

Може, дакле, бити само

$$M=(6i-1)(6j+1),$$

а у томе случају је M заиста у облику $6m-1$, где је

$$m = 6ij + i - j.$$

Значи:

Кад год је број 6m – 1 *сложен, број* m *је облика*

$$m = 6ij + i - j. \tag{1}$$

Уочимо сад сложен број N облика $6m+1$. Пошто је такав број производ два чиниоца од којих ни један није дељив ни са 2 ни са 3, то је N производ два чиниоца од којих је сваки облика

$$\text{или } 6i+1, \quad \text{или } 6i+5,$$

тј. облика

$$\text{или } 6i+1, \quad \text{или } 6j-1.$$

Али не може бити

$$N = (6i+1)(6j-1)$$

јер би у таквом случају било

$$N = 6m'-1, \quad \text{где је} \quad m' = 6ij + i - j,$$

што је немогуће, пошто не може бити

$$6m+1 = 6m'-1.$$

Број N може, дакле, бити изражен само у једном или другом од облика

$$N = (6i+1)(6j+1)$$
$$N = (6i-1)(6j-1).$$

У првом случају је

$$N = 6m+1, \quad \text{где је} \quad m = 6ij + i + j$$

а у другом

$$N = 6m+1, \quad \text{где је} \quad m = 6ij - i - j.$$

Значи:

Кад год је неки број 6m + 1 *сложен, број* m *је облика*

$$m = 6ij + i + j, \tag{2}$$

или

$$m = 6ij - i - j. \tag{3}$$

Из тога се могу извести и ови закључци о простим бројевима.

Кад би број

$$M = 6m-1$$

био сложен, m би морао имати облик (1); кад нема тај облик, број M би морао бити прост, што значи да:

Кад год неодређена једначина

$$6xy + x - y = m \tag{4}$$

нема решења у позитивним целим бројевима, број $6m-1$ *је прост.*

Тај услов, довољан да би број M био прост, у исто време је и потребан. Јер кад би једначина (4) имала које решење $(x = i, y = j)$ у позитивним целим бројевима, број M би се могао написати у облику

$$M = 6m - 1 = (6i - 1)(6j + 1)$$

и био би сложен.

Исто тако, кад би број

$$N = 6m + 1$$

био сложен, m би морао имати један од облика (2) или (3); ако није таквог облика, закључује се, као и за број M, да N мора бити прост број, па то значи:

Кад год ни једна ни друга од једначина

$$6xy + x + y = m \tag{5}$$

$$6xy - x - y = m \tag{6}$$

немају решења у позитивним целим бројевима, број $6m+1$ *је прост.*

Пошто је за сваки прост број p било $p + 1$, било $p - 1$ дељиво са 6, значи:

Да би дати број p *био прост, потребно је и довољно да буде испуњен један или други од ова два услова:*

1. *или да је* p + 1 *дељиво са* 6 *и да једначина*

$$6xy + x - y = \frac{p+1}{6}$$

нема решења у позитивним целим бројевима x, y;

2. *или да је* p – 1 *дељиво са* 6 *и да ни једна ни друга од једначина*

$$6xy + x + y = \frac{p-1}{6},$$

$$6xy - x - y = \frac{p-1}{6},$$

немају решења у позитивним целим бројевима x, y.

ГЕОМЕТРИЈСКО ЗНАЧЕЊЕ ГОРЊИХ АРИТМЕТИЧКИХ ЧИЊЕНИЦА

Назваћемо тачком E сваку тачку координатне равни xOy која има за правоугле координате x и y неки позитиван цео број. Кад је у тој равни нацртана мрежа квадрата чија је страна једнака јединици дужине, а те су стране паралелне координатним осовинама, са теменом једнога од квадрата у координатном почетку, онда су тачке E темена тих квадрата.

Посматрајмо једнакостране хиперболе чије се једначине, избором координатног система и јединице за дужину, могу написати у једном од облика

$$6xy + x - y = m, \tag{7}$$

$$6xy + x + y = m, \tag{8}$$

$$6xy - x - y = m, \tag{9}$$

где је m позитиван цео број.

Те хиперболе имају за асимптоте

прва: праве $x = \dfrac{1}{6}$ и $y = -\dfrac{1}{6}$;

друга: праве $x = -\dfrac{1}{6}$ и $y = -\dfrac{1}{6}$;

трећа: праве $x = \dfrac{1}{6}$ и $y = \dfrac{1}{6}$.

Помоћу тих асимптота и по једне од њихових тачака оне се могу, на познати начин, врло лако тачку по тачку конструисати.

Утврђене аритметичке чињенице имају тада следеће геометријско значење.

1. Кад год је параметар m хиперболе (7) такав, да је $6m-1$ *сложен* број, хипербола пролази бар кроз једну тачку E дуж свога лука s, чије су крајње тачке она чија је апсциса $x = 1$ и она чија је ордината $y = 1$. Обрнуто: кад год иста хипербола пролази бар кроз једну тачку E, њен параметар m је такав, да је $6m-1$ сложен број.

2. Кад год је m такво, да је $6m+1$ *сложен* број, једна од двеју хипербола (8) и (9), дуж свога лука s чије су крајње тачке она која има за апсцису $x = 1$ и она чија је ордината $y = 1$, пролази бар кроз једну тачку E. Обрнуто, кад год једна или друга од тих двеју хипербола пролази дуж свога лука s бар кроз једну тачку E, број $6m+1$ је сложен.

3. Кад је m такво, да је $6m-1$ *прост* број, хипербола (7) не пролази дуж свога лука s ни кроз једну тачку E. Обрнуто, кад та хипербола дуж s не пролази ни кроз једну тачку E, број $6m-1$ је прост.

4. Кад је m такво да је $6m+1$ *прост* број, ни једна ни друга од хипербола (8) и (9) не пролазе, дуж свога лука s, ни кроз једну тачку E. Обрнуто, кад ниједна од тих двеју хипербола не пролази дуж s ни кроз једну тачку E, број $6m+1$ је прост.

Нека је ω дати позитиван број, па се означи са

$$\alpha = E\left(\frac{\omega+1}{6}\right)$$

број *целих* бројева $6m-1 \le \omega$; са

$$\alpha' = E\left(\frac{\omega-1}{6}\right)$$

број целих бројева $6m+1 \le \omega$; са

C_1 број *сложених* бројева облика $6m-1 \le \omega$;

C_2 број *сложених* бројева облика $6m+1 \le \omega$;

па се на основу тога изводе следећи закључци.

I. Сложених бројева $6m-1 \le \omega$ има тачно онолико колико има целих бројева $m \le \alpha$ изражених у облику

$$m = 6xy + x - y,$$

тј. онолико колико има хипербола (7) чији параметри n леже у размаку $(1, \alpha)$ (рачунајући ту и крајеве размака), а које пролазе бар кроз по једну тачку E на своме луку s, чије су крајње тачке оне што имају за апсцисе

$x_1 = 1$

$x_2 =$ апсциси оне тачке хиперболе за коју је $y = 1$, а то је

$$x_2 = \frac{\alpha+1}{7}.$$

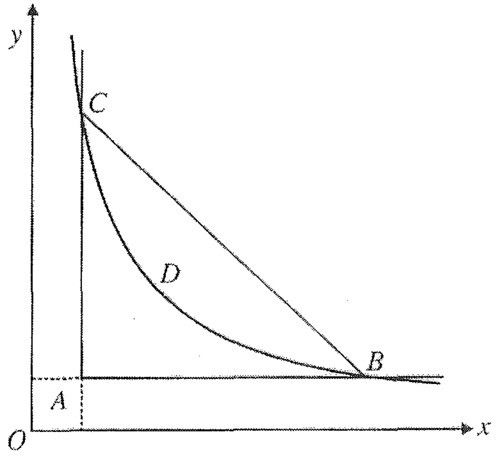
Само што при том, у случају кад једна иста хипербола пролази кроз више од једне тачке E, све се те тачке требају рачунати као једна, јер оне све дају једно исто m, па дакле и један исти сложен број $6m-1$. Према томе, број C_1 никад није већи од броја e_1 тачака E кроз које, на наведеној дужини њихових лукова s, пролазе поједине хиперболе (7). Такве тачке E леже у троугластој криволиниској области Q_1 (подразумевајући ту и руб те области) чија су темена (сл. 1) тачке

$$A(x=1,\ y=1),$$
$$(10)\qquad B\left(x=\frac{\alpha+1}{7},\ y=1\right),$$
$$C\left(x=1,\ y=\frac{\alpha-1}{5}\right).$$

Број e тих тачака увек је, дакле, или већи од броја C_1, или је бар једнак овоме.

II. Сложених бројева облика $6m+1\leq\omega$ има тачно онолико колико има целих бројева $m\leq\alpha'$ изражених у једноме или другом од облика

$$m=6xy+x+y,$$
$$m=6xy-x-y,$$



Слика 1.

тј. онолико колико укупно има хипербола (8) и (9) чији се параметри n и n налазе у размаку $(1,\alpha')$ (рачунајући ту и крајеве размака), а које пролазе кроз бар по једну тачку E на њиховим луцима s, чије су апсцисе крајњих тачака

за хиперболе (8) $\qquad x=1,\quad y=\dfrac{\alpha'-1}{7}$,

за хиперболе (9) $\qquad x=1,\quad y=\dfrac{\alpha'+1}{7}$.

Само што при том, као и у случају I кад хипербола пролази кроз више од једне тачке, све ове треба сматрати као једну, пошто све оне дају исто m, па дакле и исти сложен број $6m+1$.

Према томе, број C_2 никад није већи од броја e_2+e_3 тачака E кроз које, на наведеној дужини њихових лукова s, пролазе поједине хиперболе (8) и (9). Такве тачке се налазе у троугластим криволинијским областима Q_2 и Q_3 (подразумевајући ту и рубове тих области чија су темена (сл. 1) за хиперболе (8) тачке

$$A(x=1,y=1),$$
$$(11)\qquad B\left(x=\frac{\alpha'-1}{7},y=1\right),$$
$$C\left(x=1,y=\frac{\alpha'-1}{7}\right).$$

За хиперболе (9) тачке су

$$A(x=1, y=1),\quad B\left(x=\frac{\alpha'+1}{5}, y=1\right),\quad C\left(x=1, y=\frac{\alpha'+1}{5}\right). \tag{12}$$

Укупан број e_2+e_3 тих тачака E увек је, дакле, већи од броја C_2 или је једнак овоме.

Уосталом за e_1, e_2, e_3 може се наћи и по једна лако одредљива горња граница e'_1, e'_2, e'_3: *што је број тачака* E *у праволинијском троуглу* ABC *(и на странама овога), чија су темена: за хиперболе* (7) *тачке* (10), *за хиперболе* (8) *тачке* (11), *а за хиперболе* (9) *тачке* (12) (сл. 1).

Закључци под I и II могу се представити и у овоме облику.

1. *У области* Q_1 *хиперболе*

$$6xy+x-y=\alpha \qquad \alpha=E\left(\frac{\omega-1}{6}\right) \tag{13}$$

има најмање онолико тачака E *колико има сложених бројева облика* $6m-1$ *који нису већи од датог броја* ω.

2. *У области* Q_2 *и* Q_3 *хипербола*

$$6xy+x+y=\alpha',\quad \alpha'=E\left(\frac{\omega+1}{6}\right) \tag{14}$$

$$6xy-x-y=\alpha' \tag{15}$$

укупно има најмање онолико тачака E *колико има сложених бројева облика* $6m+1$ *који нису већи од броја* ω.

3. *Има највише онолико сложених бројева* $6m-1 \le \omega$ *колико има тачака* E *у области* Q_1 *хиперболе* (13).

4. *Има највише онолико сложених бројева* $6m+1 \le \omega$, *колико укупно има тачака* E *у областима* Q_2 *и* Q_3 *хипербола* (14) *и* (15).

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ТАЧНОГ БРОЈА ТАЧАКА E У ОБЛАСТИМА Q_1, Q_2, Q_3

Тачан број тачака E, садржаних у криволинијским троугластим областима хипербола (7), (8), (9), може се одредити на аритметички начин, помоћу коначног броја елементарних рачунских радњи.

То ће бити показано у овоме што следи.

А) **Број тачака E у области Q_1**

Сваки позитиван систем решења неодређене неједначине са целим коефицијентима

$$6xy + x - y \leq \alpha \tag{15'}$$

представља у равни xOy по једну тачку E и обратно: свакој тачки E одговара по један такав систем решења те неједначине. Број λ_1 тих тачака што се налазе у области Q_1 тачно је једнак броју позитивних система решења у границама промењивих x и y које прецизира та област.

Према неједначини (15) треба да је

$$y \leq \frac{\alpha - x}{6x - 1}, \tag{16}$$

па пошто треба да буде $y \geq 1$, то мора бити

$$\alpha - x \geq 6x - 1, \quad \text{тј.} \quad x \leq \frac{\alpha + 1}{7}.$$

Ако се, дакле, стави да је

$$E\left(\frac{\alpha + 1}{7}\right) = h, \tag{17}$$

где $E(z)$ означава највећи цео број садржан у z, тј. цели део разломка z, број x може бити ма који цео број од 1 до h. Према неједначини (13) тада

броју $x = 1$ одговара $E\left(\dfrac{\alpha - 1}{5}\right) = \beta_1$ вредности y;

броју $x = 2$ одговара $E\left(\dfrac{\alpha - 2}{11}\right) = \beta_2$ вредности y;

броју $x = 3$ одговара $E\left(\dfrac{\alpha - 3}{17}\right) = \beta_3$ вредности y;

. . . .

броју $x = h$ одговара $E\left(\dfrac{\alpha - h}{6h - 1}\right) = \beta_h$ вредности y.

Према томе:

Број йозийивних сисшема решења (x, y) *неједначине* (13), *йа дакле и број шачака* E *садржаних у обласши* Q_1, *износи шачно*

$$(18)\qquad \lambda_1 = \sum_{i=1}^{h} \beta_i ,$$

ӷде је

$$(19)\qquad \beta_i = E\left(\frac{\alpha - i}{6i - 1}\right).$$

Пракшично израчунавање броја λ_1. Да би се израчунао број λ_1 што одговара датоме броју ω, најпре треба израчунати целе бројеве

$$(20)\qquad \alpha = E\left(\frac{\omega+1}{6}\right) \quad \text{и} \quad h = E\left(\frac{\alpha+1}{7}\right),$$

а затим помоћу њих израчунати узастопне сабирке

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$$

и то на тај начин што се, почевши од почетног разломка $\frac{\alpha-1}{5}$ бројилац поступно *смањује* за по једну јединицу, а именилац се поступно *йовећава* за по шест јединица све дотле, док се не дође до једног разломка мањег од 2. Ако је тада k број тако изведених разломака, пошто сабирака β_i има свега h, а неизрачунати сабирци до h-тога су они β_i што су мањи од 2, па дакле једнаки јединици, то њих има свега $h - k$. Па ако су

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$$

цели делови израчунатих сабирака β_i, биће

$$(21)\qquad \lambda_1(\omega) = \sum_{i=1}^{k} m_i + (h-k).$$

I *пример*: ω = 50, па је (водећи рачуна само о целим деловима разломака)

$$\alpha = 8, \qquad h = 1,$$

па дакле

$$\frac{\alpha-1}{5} = \frac{7}{5} < 2 \qquad k = 0,$$

и према томе

$$\lambda_1(50) = 1.$$

II *пример*: $\omega = 100$, па је

$$\alpha = 16 \qquad h = 2,$$
$$\frac{\alpha - 1}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad \frac{14}{11} < 2 \qquad k = 1,$$

и према томе

$$\lambda_1(100) = 4.$$

III *пример*: $\omega = 200$, па је

$$\alpha = 33 \qquad h = 4,$$
$$\frac{\alpha - 1}{5} = \frac{32}{5} = 6 \qquad \frac{31}{11} = 2 \qquad \frac{30}{17} < 2 \qquad k = 2,$$

и према томе

$$\lambda_1(200) = 10.$$

IV *пример:* $\omega = 500$, па је

$$\alpha = 83 \qquad h = 12,$$
$$\frac{\alpha - 1}{5} = \frac{82}{5} = 16 \qquad \frac{81}{11} = 7 \qquad \frac{80}{17} = 4 \qquad \frac{79}{23} = 3,$$
$$\frac{78}{29} = 2 \qquad \frac{77}{35} = 2 \qquad \frac{76}{41} < 2 \qquad k = 6,$$

и према томе

$$\lambda_1(500) = 40.$$

V *пример*: $\omega = 1000$, па је

$$\alpha = 166 \qquad h = 23,$$
$$\frac{\alpha - 1}{5} = \frac{165}{5} = 33 \qquad \frac{164}{11} = 14 \qquad \frac{163}{17} = 9 \qquad \frac{162}{23} = 7,$$
$$\frac{161}{29} = 5 \qquad \frac{160}{35} = 4 \qquad \frac{159}{41} = 3 \qquad \frac{158}{47} = 2,$$
$$\frac{157}{53} = 2 \qquad \frac{156}{59} = 2 \qquad \frac{155}{65} = 2 \qquad \frac{154}{71} = 2,$$
$$\frac{153}{77} < 2 \qquad k = 12,$$

и према томе

$$\lambda_1(1000) = 97.$$

Б) **Број тачака E у области Q_2**

Сваки позитиван систем решења неједначине са целим коефицијентима

$$6xy + x + y \leq \alpha'$$

представља у равни xOy по једну тачку E и обратно: свакој тачки E одговара по један такав систем решења те неједначине. Број λ_2 тачака што се налазе у области Q_2 једнак је броју позитивних система решења у границама променљивих x и y које одређује та област.

Према неједначини (15′) треба да је

$$y \leq \frac{\alpha' - x}{6x + 1}, \tag{22}$$

па пошто треба да буде $y \geq 1$, то мора бити

$$\alpha' - x \geq 6x + 1 \quad \text{тј.} \quad x \leq \frac{\alpha' - 1}{7}.$$

Дакле, ако је

$$E\left(\frac{\alpha' - 1}{7}\right) = h',$$

број x може бити ма који цео број од 1 до h'. Према неједначини (22)

броју $x = 1$ одговара $E\left(\frac{\alpha' - 1}{7}\right) = \beta_1'$ вредности y;

броју $x = 2$ одговара $E\left(\frac{\alpha' - 2}{13}\right) = \beta_2'$ вредности y;

. . . .

броју $x = h'$ одговара $E\left(\frac{\alpha' - h'}{6h' + 1}\right) = \beta_{h'}'$ вредности y.

Према томе:

Број позитивних система решења (x, y) *неједначине* (21), *па дакле и број тачака* E *које се налазе у области* Q_2, *износи тачно*

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{h'} \beta_i', \tag{23}$$

где је

$$\beta_i' = E\left(\frac{\alpha' - i}{6i + 1}\right). \tag{24}$$

Практично обрачунавање броја λ_2. Да би се израчунао број λ_2, што одговара датоме броју ω, најпре треба израчунати целе бројеве

$$(25)\qquad \alpha' = E\left(\frac{\omega-1}{6}\right) \quad \text{и} \quad h' = E\left(\frac{\alpha'-1}{7}\right),$$

а помоћу њих рачунају се узастопни сабирци

$$\beta_1', \beta_2', \beta_3', \ldots,$$

и то на тај начин што се, почевши од почетног разломка $\frac{\alpha'-1}{7}$ његов бројилац постепено *смањује* за по једну јединицу, а именилац поступно *повећава* за по шест јединица, све дотле док се не дође до једног разломка мањег од 2. Ако је тада k' број тако изведених разломака, пошто сабирака β_i' има свега h', а неизрачунати сабирци до h'-тог су они β_i' што су мањи од 2, па дакле једнаки јединици, то њих има свега $h'-k'$. Па ако су

$$m_1', m_2', m_3', \ldots, m_k'$$

цели делови израчунатих сабирака β_i', биће

$$(26)\qquad \lambda_2(\omega) = \sum_{i=1}^{k'} m_i' + (h'-k').$$

I *пример*: $\omega = 50$, па је

$$\alpha = 8 \qquad h' = 1,$$
$$\frac{\alpha'-1}{7} = \frac{15}{7} = 2 \quad \frac{14}{13} < 2 \quad k' = 1,$$

и према томе $\lambda_2(50) = 1$.

II *пример*: $\omega = 100$, па је

$$\alpha' = 16 \qquad h' = 2,$$
$$\frac{\alpha'-1}{7} = \frac{15}{7} = 2 \quad \frac{14}{13} < 2 \quad k' = 1,$$

и према томе $\lambda_2(100) = 3$.

III *пример*: $\omega = 200$, па је

$$\alpha' = 33 \qquad h' = 4,$$
$$\frac{\alpha'-1}{7} = \frac{32}{7} = 4 \quad \frac{31}{13} = 2 \quad \frac{30}{19} < 2 \quad k' = 2,$$

и према томе $\lambda_2(200) = 8$.

IV *пример*: $\omega = 500$, па је

$$\alpha' = 83 \qquad h' = 11,$$
$$\frac{\alpha'-1}{7} = \frac{82}{7} = 11 \quad \frac{81}{13} = 6 \quad \frac{80}{19} = 4 \quad \frac{79}{25} = 3,$$
$$\frac{78}{31} = 2 \quad \frac{77}{37} = 2 \quad \frac{76}{43} < 2 \quad k' = 6,$$

и према томе $\lambda_2(500) = 33$.

V *пример*: $\omega = 1000$, па је

$$\alpha' = 166 \qquad h' = 23,$$
$$\frac{\alpha'-1}{7} = \frac{165}{7} = 23 \quad \frac{164}{13} = 12 \quad \frac{163}{19} = 8 \quad \frac{162}{25} = 6,$$
$$\frac{161}{31} = 5 \quad \frac{160}{37} = 4 \quad \frac{159}{43} = 3 \quad \frac{158}{49} = 3,$$
$$\frac{157}{55} = 2 \quad \frac{156}{61} = 2 \quad \frac{155}{67} = 2 \quad \frac{154}{73} = 2,$$
$$\frac{153}{79} < 2 \quad k' = 12,$$

и према томе $\lambda_2(1000) = 73$.

В) Број тачака E у области Q_3

Број λ_3 тачака E што се налазе у области Q_3 једнак је броју позитивних система решења (x, y) неједначине

$$6xy - x - y \leq \alpha' \tag{27}$$

у границама промењљивих x и y које одређује та област.

Према тој неједначини треба да је

$$y \leq \frac{\alpha' + x}{6x - 1}, \tag{28}$$

па пошто треба да буде $y \geq 1$, то мора бити

$$\alpha' + x \geq 6x - 1 \quad \text{тј.} \quad x \leq \frac{\alpha'+1}{5}.$$

Дакле, ако је

$$E\left(\frac{\alpha'+1}{5}\right) = h'',$$

x може бити ма који цео број од 1 до h''. Према неједначини (28)

броју $x = 1$ одговара $E\left(\frac{\alpha'+1}{5}\right) = \beta_1''$ вредности y;

броју $x = 2$ одговара $E\left(\frac{\alpha' + 2}{11}\right) = \beta_2''$ вредности y;

. . . .

броју $x = h''$ одговара $E\left(\frac{\alpha' + h''}{6h'' - 1}\right) = \beta_{h''}''$ вредности y.

Према томе:

Број позитивних система решења (x, y) *неједначине* (26) *па дакле и број тачака* E *садржаних у области* Q_3, *износи тачно*

$$\lambda_3 = \sum_{i=1}^{h''} \beta_i'', \tag{29}$$

где је

$$\beta_i'' = E\left(\frac{\alpha' + 1}{6i - 1}\right). \tag{30}$$

Практично израчунавање броја λ_3. Да би се израчунао број λ_3, што одговара датоме броју ω, најпре се израчунају цели бројеви

$$\alpha' = E\left(\frac{\omega - 1}{6}\right) \quad \text{и} \quad h'' = E\left(\frac{\alpha' + 1}{5}\right),$$

па се помоћу њих израчунавају узастопни сабирци

$$\beta_1'', \beta_2'', \beta_3'', \ldots,$$

а то бива на тај начин што се, почевши од почетног разломка $\frac{\alpha' + 1}{5}$, његов бројилац поступно *повећава* за по једну јединицу, а именилац поступно *повећава* за по шест јединица све дотле, док се не дође до једног разломка мањег од 2. Ако је тада k'' број тако изведених разломака, пошто сабирака β'' има свега h'', а неизрачунати сабирци су они β_i'' што су мањи од 2, па дакле једнаки јединици, то њих има свега $h'' - k''$. Па ако су

$$m_1'', m_2'', m_3'', \ldots, m_k''$$

цели делови израчунатих сабирака β_i'', биће

$$\lambda_3(\omega) = \sum_{i=1}^{h''} m_i'' + (h'' - k''). \tag{31}$$

I *пример*: $\omega = 50$, па је

$$\alpha' = 8 \quad h'' = 1,$$
$$\frac{\alpha'+1}{5} = \frac{9}{5} < 2 \quad k'' = 0,$$

и према томе $\lambda_3(50) = 1$.

II *пример*: $\omega = 100$, па је

$$\alpha' = 16 \quad h'' = 3,$$
$$\frac{\alpha'+1}{5} = \frac{17}{5} = 3 \quad \frac{18}{11} < 2 \quad k'' = 1,$$

па дакле $\lambda_3(100) = 5$.

III *пример*: $\omega = 200$, па је

$$\alpha' = 33 \quad h'' = 6,$$

и према томе $$\frac{\alpha'+1}{5} = \frac{34}{5} = 6 \quad \frac{35}{11} = 3 \quad \frac{36}{17} = 2$$

$$\frac{37}{23} < 2 \quad k'' = 3,$$

па дакле $\lambda_3(200) = 14$.

IV *пример*: $\omega = 500$, па је

$$\alpha' = 83 \quad h'' = 16,$$
$$\frac{\alpha'+1}{5} = \frac{84}{5} = 16 \quad \frac{85}{11} = 7 \quad \frac{86}{17} = 5$$
$$\frac{87}{23} = 3 \quad \frac{88}{29} = 3 \quad \frac{89}{35} = 2 \quad \frac{90}{41} = 2$$
$$\frac{91}{47} < 2 \quad k'' = 7,$$

па дакле $\lambda_3(500) = 47$.

V *пример*: $\omega = 1000$, па је

$$\alpha' = 166 \quad h'' = 33,$$

$$\frac{\alpha'+1}{5} = \frac{167}{5} = 33 \quad \frac{168}{11} = 15 \quad \frac{169}{17} = 9 \quad \frac{170}{23} = 7$$
$$\frac{171}{29} = 5 \qquad \frac{172}{35} = 4 \quad \frac{173}{41} = 4$$
$$\frac{174}{47} = 3 \qquad \frac{175}{53} = 3 \quad \frac{176}{59} = 2$$
$$\frac{177}{65} = 2 \qquad \frac{178}{71} = 2 \quad \frac{179}{76} = 2$$
$$\frac{180}{83} = 2 \qquad \frac{181}{89} = 2 \quad \frac{182}{95} < 2 \quad k'' = 15,$$

па дакле $\lambda_3(1000) = 113$.

ДОЊЕ И ГОРЊЕ ГРАНИЦЕ ЗА БРОЈЕВЕ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ИЗРАЖЕНЕ ПОМОЋУ ЛОГАРИТАМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Свака од трију аритметичких функција

$$\lambda_1(\omega) = \sum_{i=1}^{h} \beta_i, \tag{32}$$

$$\lambda_2(\omega) = \sum_{i=1}^{h'} \beta_i', \tag{33}$$

$$\lambda_3(\omega) = \sum_{i=1}^{h''} \beta_i'', \tag{34}$$

где је

$$\beta_i = E\left(\frac{\alpha - i}{6i - 1}\right), \tag{35}$$

$$\beta_i' = E\left(\frac{\alpha' - i}{6i + 1}\right), \tag{36}$$

$$\beta_i'' = E\left(\frac{\alpha' + i}{6i - 1}\right), \tag{37}$$

састављена је од сабирака чији је број тачно h, односно h' или h''.

Кад се узме у обзир да ти сабирци треба да се израчунавају дотле док се не дође до оних који су мањи од 2, број сабирака за израчунавање је

$$h - d \quad (\text{односно } h' - d' \text{ или } h'' - d''),$$

где d (односно d' или d'') означава број тих сабирака који су једнаки јединици. А пошто се без осетне грешке у резултату може узети да је

$$h = h' = \frac{\alpha}{7} = \frac{\alpha'}{7} = \frac{\omega}{42}, \tag{38}$$

$$h'' = \frac{\alpha'}{5} = \frac{\omega}{30}, \tag{39}$$

па за функције (32) и (33) број сабирака за израчунавање износи

$$\frac{\omega}{42} - d, \text{ односно } \frac{\omega}{42} - d',$$

а за функцију (34) то износи $\frac{\omega}{30} - d''$.

Међутим, кад се не тражи апсолутно тачна већ само која приближна вредност тих функција, може се на много краћи начин одредити за сваку од њих по један бројни размак у коме ће се она налазити. А то може бити на следећи начин.

Пошто је уопште

$$E(a) = a - \theta, \quad 0 \le \theta < 1$$

то, ако се стави да је

$$U_1 = \sum_{i=1}^{h} \frac{\alpha - i}{6i - 1} \tag{40}$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^{h'} \frac{\alpha' - i}{6i + 1}, \tag{41}$$

$$U_3 = \sum_{i=1}^{h''} \frac{\alpha' + 1}{6i - 1}, \tag{42}$$

биће

$$\lambda_1 = U_1 - \theta_1 h, \quad 0 \le \theta_1 < 1 \tag{43}$$

$$\lambda_2 = U_2 - \theta_2 h', \quad 0 \le \theta_2 < 1 \tag{44}$$

$$\lambda_3 = U_3 - \theta_3 h'', \quad 0 \le \theta_3 < 1. \tag{45}$$

Према томе је

$$U_1 - h \le \lambda_1 \le U_1, \tag{46}$$

$$U_2 - h' \le \lambda_2 \le U_2, \tag{47}$$

$$U_3 - h'' \le \lambda_3 \le U_3, \tag{48}$$

тако да се доње и горње границе за бројеве $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ добијају израчунавањем бројева U_1, U_2, U_3, или њихових доњих и горњих граница.

Ако се стави да је

$$\frac{1}{6i} = t,$$

биће

$$U_1 = \alpha \sum_{t=1}^{h} \frac{t}{1-t} - \frac{1}{6} \sum_{t=1}^{h} \frac{1}{1-t}, \tag{49}$$

па се према обрасцу

$$\sum_{t=1}^{h} \frac{t}{1-t} = \sum_{t=1}^{h} t + \sum_{t=1}^{h} t^2 + \ldots,$$

добија да је

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{6i-1} = \frac{1}{6} S_{1,h} + \frac{1}{6^2} S_{2,h} + \frac{1}{6^3} S_{3,h} + \ldots,$$

где је

$$S_{k,h} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{h^k},$$

па је према томе

$$\alpha \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{6i-1} = \frac{\alpha}{6} S_{1,h} + \alpha f(h), \tag{50}$$

где је

$$f(h) = \frac{1}{6^2} S_{2,h} + \frac{1}{6^3} S_{3,h} + \frac{1}{6^4} S_{4,h} + \ldots \tag{51}$$

На исти начин се налази да је

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{i}{6i-1} = \frac{1}{6}\left[h + \frac{1}{6} S_{1,h} + f(h)\right], \tag{52}$$

па се из (49), (50), (51) добија да је

$$U_1 = \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{1}{36}\right) S_{1,h} + \left(\alpha - \frac{1}{6}\right) f(h) - \frac{h}{6}. \tag{53}$$

Поступајући исто тако са U_2 и U_3, налази се да је

$$U_3 = \left(\frac{\alpha'}{6} + \frac{1}{36}\right) S_{1,h''} + \left(\alpha' + \frac{1}{6}\right) f(h'') - \frac{h''}{6}, \tag{54}$$

док се за U_2 налази да је

$$U_2 = \left(\frac{\alpha'}{6} + \frac{1}{36}\right) S_{1,h'} - \left(\alpha' + \frac{1}{6}\right) \varphi(h') - \frac{h'}{6}, \tag{55}$$

где је

$$\varphi(h') = \frac{1}{6^2} S_{2,h'} - \frac{1}{6^3} S_{3,h'} + \frac{1}{6^4} S_{4,h'} - \ldots \tag{56}$$

Бројеви $f(h)$, $f(h'')$, $\varphi(h')$ у обрасцима за U_1, U_2, U_3 могу се са довољном приближношћу одредити на овај начин.

Ако је

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i^k} = S_k,$$

сигурно ће да буде

$$1 < S_{k,h} < S_k.$$

За број

$$S_{1m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$$

зна се (E. Cesaro: Mathesis 1881 p. 51–53) да за све вредности m постоји двострука неједнакост

$$\log\left(m + \frac{1}{2}\right) + 0,57 < S_{1,m} < \log\left(m + \frac{1}{2}\right) + 0,60 \tag{57}$$

(логаритам по основици e).

За бројеве $S_k(<1)$ може се искористити Legendre-ова таблица (овде узета од $k = 2$ до $k = 11$):

$$\begin{array}{ll} S_2 = 1,644934 & S_7 = 1,008349 \\ S_3 = 1,202057 & S_8 = 1,004077 \\ S_4 = 1,082323 & S_9 = 1,002008 \\ S_5 = 1,030928 & S_{10} = 1,000995 \\ S_6 = 1,017343 & S_{11} = 1,000494 \end{array} \tag{58}$$

Пошто је (са грешком мањом од јединице)

$$\alpha = \alpha' = \frac{\omega}{6} \qquad h = h' = \frac{\omega}{42} \qquad h'' = \frac{\omega}{30}, \tag{59}$$

то се неједначине (57) промењене на $m = h$ могу написати у облику

$$\log(\omega + 21) - \log 42 + 0,57 < S_{1,h} < \log(\omega + 21) - \log 42 + 0,60,$$

или

$$\log(\omega + 21) - 3,167 < S_{1,h} < \log(\omega + 21) - 3,138, \tag{60}$$

а тако исто и

$$\log(\omega + 21) - 3,167 < S_{1,h'} < \log(\omega + 21) - 3,138, \tag{61}$$

док се за $S_{1,h''}$ добија да је

$$\log(\omega + 15) - 2,83 < S_{1,h''} < \log(\omega + 21) - 2,80. \tag{62}$$

А према томе, и водећи још рачуна и о двострукој неједначини

$$1 < S_{k,h} < S_k,$$

налази се да је

$$(63)\quad \begin{aligned} f(h) &> \frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\ldots = 0,0333 \\ f(h) &< \frac{S_2}{6^2}+\frac{S_3}{6^3}+\frac{S_4}{6^4}+\ldots = 0,0523 \\ \varphi(h') &> \frac{1}{6^2}-\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}-\ldots = 0,0238 \\ \varphi(h') &< \frac{S_2}{6^2}-\frac{S_3}{6^3}+\frac{S_4}{6^4}-\ldots = 0,0409, \end{aligned}$$

према чему је

$$\begin{aligned} 0,033 &< f(h) < 0,052, \\ 0,033 &< f(h'') < 0,052, \\ 0,024 &< \varphi(h') < 0,041. \end{aligned}$$

Према обрасцима (53), (54), (55) изрази U_1, U_2, U_3 могу се тада написати у облику (изоставивши занемарљиве сабирке ван заграде)

$$\begin{aligned} U_1 &= (\omega-1)\left[\frac{S_{1,h}}{36}+\frac{f(h)}{6}-\frac{1}{252}\right], \\ U_2 &= (\omega+1)\left[\frac{S_{1,h'}}{36}-\varphi(h')-\frac{1}{252}\right], \\ U_3 &= (\omega+1)\left[\frac{S_{1,h''}}{36}+f(h'')+\frac{1}{180}\right]. \end{aligned}$$

Водећи тада рачуна о неједнакостима (62) и (63) налази се да

1. вредност U_1 је између

$$U_1' = \frac{\omega-1}{36}[\log(\omega+21)-3,1058]$$

и

$$U_1'' = \frac{\omega-1}{36}[\log(\omega+21)-2,9628];$$

2. вредност U_2 је између

$$U_2' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+21)-3,5498]$$

и

$$U_2'' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+21)-3,4188];$$

3. вредност U_3 је између

$$U_3' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+15) - 2{,}8366]$$

и

$$U_3'' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+15) - 2{,}6896].$$

А кад се при том узму у обзир и неједнакости (46), (47), (48), долази се до ових закључака.

I. *Вредност* $\lambda_1(\omega)$ *је између граница*

$$U_1' - h = \frac{\omega-1}{36}[\log(\omega+21) - 3{,}9636]. \tag{64}$$

и

$$U_1'' = \frac{\omega-1}{36}[\log(\omega+21) - 2{,}9628]. \tag{65}$$

II. *Вредност* $\lambda_2(\omega)$ *је између граница*

$$U_2' - h' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+21) - 4{,}4064] \tag{66}$$

и

$$U_2'' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+21) - 3{,}4188]. \tag{67}$$

III. *Вредност* $\lambda_3(\omega)$ *је између граница*

$$U_3' - h'' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+15) - 4{,}0336] \tag{68}$$

и

$$U_3'' = \frac{\omega+1}{36}[\log(\omega+15) - 2{,}6896]. \tag{69}$$

Из тога се види да се за велике вредности ω понашају

$$\lambda_1(\omega) \text{ као функција } \frac{\omega-1}{36}\log(\omega+21),$$
$$\lambda_2(\omega) \text{ као функција } \frac{\omega+1}{36}\log(\omega+21),$$
$$\lambda_3(\omega) \text{ као функција } \frac{\omega+1}{36}\log(\omega+15).$$[1]

[1] Бројни коефицијенти, у свим овим обрасцима, срачунати су са тачношћу довољном за вредности ω у оквиру овде наведених примера; за веће вредности ω требало би их израчунати са већом тачношћу.

Заједничка асимйшошна вредносш свих шрију функција је

$$\frac{\omega \log \omega}{36},$$

ђде је лоіаришам узеш йо основици e.

I *йример*: $\omega = 50$, па је

$$U_1' - h = \frac{49}{36}(\log 71 - 3,9636) = 0,38,$$
$$U_1'' = \frac{49}{36}(\log 71 - 2,9628) = 1,76,$$

што показује да је број $\lambda_1(50)$ у размаку између 0,38 и 1,76, па дакле може бити само 1; тачан број је $\lambda_1(50) = 1$.

Тако исто је

$$U_2' - h' = \frac{51}{36}(\log 71 - 4,4064) = -0,19,$$
$$U_2'' = \frac{51}{36}(\log 71 - 3,4188) = 1,17,$$

што значи да $\lambda_2(50)$ може бити само 1, а у ствари и јесте $\lambda_2(50) = 1$.

Тако исто је

$$U_3' - h'' = \frac{51}{36}(\log 65 - 4,0336) = 0,19,$$
$$U_3'' = \frac{51}{36}(\log 65 - 2,6896) = 2,07,$$

што показује да $\lambda_3(50)$ може бити само 1 или 2, а у ствари је $\lambda_3(50) = 1$.

II *йример*: $\omega = 100$, па је

$$U_1' - h'' = \frac{99}{36}(\log 121 - 3,9636) = 2,28,$$
$$U_1'' = \frac{99}{36}(\log 121 - 2,9628) = 5,03,$$

што показује да $\lambda_1(100)$ може бити само 3, 4 или 5, а у ствари је $\lambda_1(100) = 4$.

Тако исто је

$$U_2' - h' = \frac{101}{36}(\log 121 - 4,4064) = 1,09,$$
$$U_2'' = \frac{101}{36}(\log 121 - 3,4188) = 3,83,$$

што показује да $\lambda_2(100)$ може бити само 2 или 3, а тачно је $\lambda_2(100) = 3$.

Тако исто је

$$U_3' - h'' = \frac{101}{36}(\log 115 - 4{,}0336) = 1{,}98,$$
$$U_3'' = \frac{101}{36}(\log 115 - 2{,}6896) = 5{,}74,$$

што показује да $\lambda_3(100)$ може бити само један од бројева 2 до 5, а тачно је $\lambda_3(100) = 5$.

III *пример*: $\omega = 200$, па је

$$U_1' - h' = \frac{199}{36}(\log 221 - 3{,}9636) = 7{,}92,$$
$$U_1'' = \frac{199}{36}(\log 221 - 2{,}9628) = 13{,}42,$$

што показује да $\lambda_1(200)$ може да буде неки од бројева од 8 до 13, а тачно је $\lambda_1(200) = 10$.

Тако исто је

$$U_2' - h = \frac{201}{36}(\log 221 - 4{,}4064) = 6{,}05,$$
$$U_3'' = \frac{201}{36}(\log 221 - 4{,}4188) = 10{,}94,$$

што показује да $\lambda_2(200)$ може да буде неки од бројева од 7 до 10, а тачно је $\lambda_2(200) = 8$.

Тако исто је

$$U_3' - h'' = \frac{201}{36}(\log 215 - 4{,}0336) = 5{,}33,$$
$$U_3'' = \frac{201}{36}(\log 215 - 2{,}6896) = 14{,}74,$$

што показује да $\lambda_3(200)$ може бити један од бројева 6 до 14, а тачно је $\lambda_3(200) = 14$.

ВЕЗЕ ФУНКЦИЈА $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ СА РАСПОРЕДОМ ПРОСТИХ И СЛОЖЕНИХ БРОЈЕВА

Напред је наговештена веза између броја тачака E садржаних у областима Q_1, Q_2, Q_3 трију хипербола

$$6xy + x - y = \alpha,$$
$$6xy + x + y = \alpha',$$
$$6xy - x - y = \alpha',$$

где су α и α' цели позитивни бројеви што зависе од датога броја ω, према обрасцима

$$\alpha = E\left(\frac{\omega - 1}{6}\right),$$
$$\alpha' = E\left(\frac{\omega + 1}{6}\right),$$

и сложених бројева облика $6m+1 \leq \omega$ и $6m-1 \leq \omega$.

Те се везе, као што ће се видети из даљег излагања, могу искористити за закључке о броју сложених (па према томе и простих) бројева који нису већи од ω.

А) **Број сложених и простих бројева** $6m - 1 \leq \omega$

На основу већ реченог, ако свака од хипербола

(70) $$6xy + x - y = n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, \alpha)$$

пролазила само кроз по једну, или не пролази ни кроз једну тачку E дуж свога лука s који граничи њену област Q_1, тј. ако свакој од неодређених неједначина

(71) $$6xy + x - y \leq \alpha$$

одговара само по један, или ниједан позитиван систем решења (x, y), број C_1 сложених бројева $6m - 1 \leq \alpha$ био би тачно једнак броју тачака E у области Q_1 тј. броју $\lambda_1(\omega)$.

Али то није увек случај, пошто међу хиперболама (70) може их бити и таквих које пролазе, у границама области Q_1, кроз више тачака E.

Тако нпр. хипербола (70) пролази

за $n = 41$ кроз две тачке: $M_1(6, 1)$ и $M_2(1, 8)$;
за $n = 46$ кроз две тачке $M_1(2, 4)$ и $M_2(1, 9)$;
за $n = 76$ кроз три тачке: $M_1(11, 1)$, $M_2(6, 2)$ и $M_3(1, 15)$.

Ако се са u_k означи број тих хипербола од којих свака пролази кроз k тачака E, биће

(72) $$\lambda_1 = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots,$$

док је

$$C_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{73}$$

и према томе је

$$C_1 = \lambda_1 - \rho_1, \tag{74}$$

где је

$$\rho_1 = u_2 + 2u_3 + 3u_4 + \ldots = \sum_k (k-1)\, u_k, \tag{75}$$

а из тога следе следећи ставови.

Став I: *Број сложених бројева облика* 6m – 1, *који не премашују дати број* ω, *никад не премаша* $\lambda_1(\omega)$, *а тачно износи* $\lambda_1(\omega) - \rho_1(\omega)$.

А пошто укупан број целих бројева облика $6m-1 \leq \omega$ износи тачно α, добија се

Став II: *Има најмање онолико простих бројева облика* 6m – 1 *који нису већи од датог броја* ω, *колико износи разлика*

$$\alpha - \lambda_1(\omega),$$

а тачно их има

$$\alpha - \lambda_1(\omega) + \rho_1(\omega).$$

Кад се узму у обзир и већ показане граничне вредности (64) и (65) за број λ_1, добијају се још и ови ставови.

Став III: *Број сложених бројева* $6m-1 \leq \omega$ *никад није већи од броја*

$$\frac{\omega - 1}{36}[\log(\omega + 21) - 2{,}9628]. \tag{76}$$

Став IV: *Има најмање онолико простих бројева* $6m-1 \leq \omega$ *колико има целих јединица у броју*

$$\alpha - \frac{\omega - 1}{36}[\log(\omega + 21) - 2{,}9628] \tag{77}$$

1. *пример*: $\omega = 50$; по ставу I број сложених бројева $6m-1 \leq 50$ износио би највише $\lambda_1(50) = 1$, а у ствари и има их тачно 1. Према ставу III било би их највише

$$\frac{49}{36}[\log 71 - 2{,}9628] = 1{,}76 \quad \text{тј.} \quad 1.$$

Према ставу II има најмање онолико простих бројева $6m-1 \leq 50$ колико износи разлика

$$\alpha-\lambda_1(50)=8-1=7,$$

а стварно их и има свега 7. По ставу IV било би их најмање 7.

2. *пример*: $\omega = 100$; по ставу I број сложених бројева $6m-1\leq 100$ износио би највише $\lambda_1(100)=4$, а стварно их и има само 4. Према ставу III било би их највише

$$\frac{99}{36}(\log 121-2{,}9628)=5{,}03, \quad \text{тј. } 5.$$

Према ставу II има најмање онолико простих бројева $6m-1\leq 100$ колико износи разлика

$$\alpha-\lambda_1(100)=16-4=12,$$

а стварно их и има свега 12. Према ставу IV било би их најмање

$$16-5{,}03=10{,}97 \quad \text{тј. } 11.$$

3. *пример*: $\omega = 200$; по ставу I број сложених бројева $6m-1\leq 200$ износио би највише $\lambda_1(200)=10$, а стварно их и има тачно 10. Према ставу III било би их највише

$$\frac{199}{36}[\log 221-2{,}9628]=13{,}42, \quad \text{тј. } 13.$$

Према ставу II има најмање онолико простих бројева $6m-1\leq 200$ колико износи разлика

$$\alpha-\lambda_1(200)=33-10=23,$$

а стварно их и има тачно 23. Према ставу IV било би их најмање

$$33-13{,}42=19{,}58, \quad \text{тј. } 20.$$

Б) Број сложених бројева $6m+1\leq\omega$

Према ономе што је већ речено, сложени бројеви $6m+1$ могу се поделити на две класе.

Прва класа су они ω таквих бројева за које је m облика

(78) $$m=6ij+i+j.$$

Друга класа су они за које је m облика

(79) $$m=6ij-i-j.$$

Кад би свака од хипербола

$$(80)\qquad 6xy + x + y = m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, \alpha')$$

пролазила само кроз по једну, или не би уопште пролазила кроз тачку E дуж свога круга s што ограничава њену област Q_2, тј. кад би свакој од α једначина (80) одговарао само по један, или ниједан позитиван систем решења (x, y), број C_2' сложених бројева $6m+1 \leq \omega$ *прве класе* био би једнак броју тачака E у области Q_2, тј. броју λ_2.

Али, међу хиперболама (80) може да буде и оних које, у границама области Q_2, пролазе кроз више тачака E. Тако, на пример хипербола (80) пролази

за $m = 15$ кроз две тачке: $M_1(2, 1)$ и $M_2(1, 2)$;

за $m = 80$ кроз две тачке: $M_1(6, 2)$ и $M_2(2, 6)$;

за $m = 155$ кроз три тачке: $M_1(22, 1)$, $M_2(1, 22)$, $M_3(8, 3)$.

Ако се са v_k означи број хипербола (80) од којих свака пролази кроз k тачака E_1 биће

$$(81)\qquad \lambda_2 = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \ldots,$$

док је

$$(82)\qquad C_2' = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

Број v_1 може се одредити као функција броја ω. Јер, пошто се лева страна једначине (80) не мења кад се x и y међу собом пермутују, то сваком решењу (x, y) исте једначине одговара по једно решење (y, x), што значи да за свако m постоје бар по две тачке E кроз које пролази посматрана хипербола; изузетак чине само оне тачке E, за које је $x = y$, јер оне дају само по једно решење једначине (80). Према томе, број v_1 једнак је броју оних сложених бројева $6m+1 \leq \omega$ прве класе, за које је $i = j$, тј. бројева

$$6m+1 = (6i+1)(6j+1) \leq \omega,$$

за $i = j$; v_1 је, дакле, једнако броју бројева i за које је

$$(6i+1)^2 \leq \omega,$$

а томе одговара

$$i \leq \frac{\sqrt{\omega}-1}{6},$$

па према томе је

(83) $$v_1 = E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right).$$

Са том вредношћу, а из образаца (81) и (82) добија се да је

$$C_2' = \frac{\lambda_1 + v_1}{2} - \rho_2,$$

где је

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(v_3 + 2v_4 + 3v_5 + \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{k=3}(k-2)\,v_k,$$

из чега следи:

Став V: *Број сложених бројева* $6\mathrm{m}+1 \le \omega$ *прве класе није већи од броја*

(84) $$\frac{\lambda_2}{2} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right),$$

а тачно износи

(85) $$C_2' = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right) - \rho_2.$$

Кад се узму у обзир и већ показане граничне вредности (66) и (67) за број λ_2, добија се још и

Став VI: *Број сложених бројева* $6\mathrm{m}+1 \le \omega$ *прве класе није већи од броја*

$$\frac{\omega+1}{72}[\log(\omega+21) - 3{,}4188] + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right).$$

*

Размотримо случај сложених бројева $6m+1 \le \omega$ *друге класе.*

Кад би свака од хипербола

(86) $$6xy - x - y = m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, \alpha')$$

пролазила само кроз једну тачку E (или ни кроз једну) дуж свога лука s што ограничава њену област Q_3, тј. кад би свакој од α' једначина (86) одговарао само по један, или ниједан позитиван систем решења (x, y), број C_2'' сложених бројева $6m+1 \le \omega$ *друге класе* био би једнак броју тачака E у области Q_3, тј. броју λ_3.

Али, међу хиперболама (86) може их бити и таквих које, у границама области Q_3, пролазе кроз више тачака E. Тако, на пример, хипербола (86) пролази

за $m = 9$ кроз две тачке: $M_1(2, 1)$ и $M_2(1, 2)$;

за $m = 31$ кроз две тачке: $M_1(3, 2)$ и $M_2(2, 3)$;

за $m = 64$ кроз четири тачке: $M_1(13, 1)$ $M_2(1, 13)$, $M_3(6, 2)$, $M_4(2, 6)$.

Ако се са w_k означи број хипербола (86), од којих свака пролази кроз k тачака E, биће

(87) $$\lambda_3 = w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \ldots,$$

док је

(88) $$C_2'' = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

Број w_1 може се одредити као функција броја ω. Јер, свакоме решењу (x, y) једначине (86) одговара по једно решење (y, x); изузетак чине само они системи у којима је $x = y$, а који дају само по једно решење. Према томе, број w_k једнак је броју оних сложених бројева $6m+1 \leq \omega$ друге класе, за које је $i = j$, тј. бројева

$$6m+1 = (6i-1)(6j-1) \leq \omega,$$

за $i = j$; w_1 је дакле једнако броју бројева i за које је

$$(6i-1)^2 \leq \omega,$$

а томе одговара

$$i \leq \frac{\sqrt{\omega}+1}{6},$$

па према томе је

(89) $$\omega_1 = E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right).$$

Са том вредношћу, а из образаца (87) и (88) добија се да је

(90) $$C_2'' = \frac{\lambda_3 + w_1}{2} - \rho_3,$$

где је

(91) $$\rho_3 = \frac{1}{2}(w_3 + 2w_4 + 3w_5 + \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{k=3}(k-2)w_k.$$

Из досадашњег следује

Став VII: *Број сложених бројева* $6m+1 \le \omega$ *друге класе није већи од броја*

$$(92) \qquad \frac{\lambda_3}{2}+\frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right),$$

а тачно износи

$$(93) \qquad C_2'' = \frac{\lambda_3}{2}+\frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right)-\rho_3.$$

А кад се узму у обзир и напред показане граничне вредности (68) и (69) за λ_3, следује и

Став VIII: *Број сложених бројева* $6m+1 \le \omega$ *друге класе није већи од броја*

$$(94) \qquad \frac{\omega+1}{72}[\log(\omega+15)-2{,}6896]+\frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right).$$

В) **Број сложених и простих бројева који не премашују дати број** ω

Кад осим већ наведених понављања бројева m не би било и других каквих понављања, која до сада нису узета у обзир, целокупан број C_2 сложених бројева $6m+1 \le \omega$ прве и друге класе био би збир $C_2'+C_2''$. Али у ствари има још и других понављања. Тако, има нпр. сложених бројева $6m + 1$ *прве класе* који се подударају са понеким сложеним бројевима $6m + 1$ *друге класе*. Другим речима, једна хипербола (80) може имати исти параметар m који има и једна хипербола (86), а да у исти мах и једна и друга пролазе кроз по једну или по више тачака E дуж својих лукова s. Одговарајући или заједнички параметар m може се за поједине парове (x, y) и (x', y') представити и у једном и у другом од облика

$$m = 6xy + x + y = 6x'y' - x' - y'.$$

Тако је, на пример,

$$\begin{aligned} m = 64 &= 6xy + x + y \text{ за тачку } x = 9,\ \ y = 1 \\ &= 6x'y' - x - y \text{ за тачку } x' = 1,\ \ y' = 9, \\ m = 79 &= 6xy + x + y \text{ за тачку } x = 3,\ \ y = 4 \\ &= 6x'y' - x' - y' \text{ за тачку } x' = 1,\ \ y' = 16. \end{aligned}$$

Пошто се у свакоме таквом случају један исти сложен број $6m+1$ јавља у исто време и као број прве, и као број друге класе, па се према томе у скупу сложених бројева $6m+1$ јавља више од једанпут, то да би се добио број C_2 у коме ће сваки такав број бити урачунат свега по једанпут, треба од збира $C_2' + C''$, а на рачун таквих понављања, одузети известан позитиван цео број Δ, па ће тачан број C_2 бити

$$C_2 = C_2' + C_2'' - \Delta. \tag{95}$$

А пошто је

$$C_2' \le \frac{\lambda_2 + v_1}{2},$$
$$C_2'' \le \frac{\lambda_3 + w_1}{2},$$

добија се

Став IX: *Укуӣан број сложених бројева* $6m+1 \le \omega$ *није већи од*

$$D = \frac{1}{2}\left[\lambda_2 + \lambda_3 + E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right) + E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right)\right], \tag{96}$$

а ӣачно износи

$$C_2 = D - (\rho_2 + \rho_3 + \Delta). \tag{97}$$

Па пошто број *ӣросӣих* бројева $6m+1 \le \omega$ износи онолико колико износи разлика између броја α' свих *целих* бројева $6m+1 \le \omega$ и свих *сложених* бројева $6m+1 \le \omega$, добија се

Став X: *Има најмање онолико ӣросӣих бројева* $6m+1$ *који нису већи од даӣоӣ броја* ω, *колико износи* $\alpha' - D$, *а има их ӣачно*

$$P_2 = \alpha' - D + (\rho_2 + \rho_3 + \Delta). \tag{98}$$

1. *ӣример*: $\omega = 50$; по ставу IX укупан број *сложених* бројева $6m+1 \le 50$ износи највише

$$D = \frac{1}{2}(1+1+1+1) = 2,$$

а стварно их има свега 2.

По ставу X има најмање онолико *ӣросӣих* бројева $6m+1 \le \omega$, колико износи разлика

$$\alpha' - D = 8 - 2 = 6,$$

а стварно их и има свега 6.

2. *ӣример*: $\omega = 100$; по ставу IX било би

$$D = \frac{1}{2}(3+5+1+1) = 5,$$

а стварно толико и има *сложених* бројева $6m+1 \leq 100$.

По ставу X има најмање

$$\alpha' - D = 16 - 5 = 11$$

простих бројева $6m+1 \leq 100$, а стварно толико их и има.

3. *пример*: $\omega = 200$; по ставу IX било би

$$D = \frac{1}{2}(8+14+2+2) = 13,$$

а стварно толико и има *сложених* бројева $6m+1 \leq 200$.

По ставу X има најмање

$$\alpha' - D = 33 - 13 = 20$$

простих бројева $6m+1 \leq 200$, а стварно толико их и има.

4. *пример*: $\omega = 500$; број *сложених* бројева $6m+1 \leq 500$, по ставу IX, износи највише

$$D = \frac{1}{2}(33+47+3+3) = 43,$$

а стварно их има свега 39.

По ставу X *простих* бројева $6m+1 \leq 500$ има најмање

$$\alpha' - D = 83 - 43 = 40,$$

а стварно их има свега 44.

Кад се узму у обзир граничне вредности (66), (67), (68), (69), за бројеве λ_2 и λ_3, добија се

Став XI> *Укупан број сложених бројева* $6\mathrm{m}+1 \leq \omega$ *не премашује број*

$$H = \frac{\omega+1}{72}[\log(\omega+21) + \log(\omega+15) - 6{,}1084] + \tag{99}$$

$$+\frac{1}{4}\left[E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right) + E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right)\right],$$

а тако исто и

Став XII: *Има најмање онолико простих бројева* $6\mathrm{m}+1 \leq \omega$ *колико износи разлика* $\alpha' - \mathrm{H}$.

1. *пример*: $\omega = 100$; према ставу XI број сложених бројева $6m+1 \leq 100$ није већи од броја

$$H = \frac{101}{72}(\log 121 + \log 115 - 6{,}1084) + \frac{1}{2}(1+1) = 5{,}78,$$

а стварно таквих бројева има свега 5.

2. *пример*: $\omega = 200$; према ставу XI број сложених бројева $6m+1 \leq 200$ није већи од броја

$$H = \frac{201}{72}(\log 221 + \log 215 - 6{,}1084) + \frac{1}{2}(2+2) = 14{,}02,$$

а стварно таквих бројева има свега 12.

*

Уочимо сад *укупан број простих бројева који не премашују дати број* ω.

Тај број је

$$P = P_1 + P_2 + 2, \tag{100}$$

где је

P_1 = броју простих бројева $6m-1 \leq \omega$;
P_2 = броју простих бројева $6m+1 \leq \omega$;

сабирак 2 у обрасцу (100) долази отуда, што у бројеве P_1 и P_2 нису урачуната два проста броја 2 и 3.

Међутим, према већ показаноме је:

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha - C_1, \\ C_1 &= \lambda_1 - \rho_1, \\ P_2 &= \alpha' - C_2, \\ C_2 &= C_2' + C_2'' - \Delta, \end{aligned}$$

и према томе је

$$P = (\alpha + \alpha' + 2)(C_1 + C_2' + C_2'') + \Delta \tag{101}$$

па кад се у томе обрасцу смене C_1, C_2', C_2'' својим већ нађеним вредностима (74), (85), (93) добија се

Став XIII: *Има најмање онолико простих бројева који нису већи од датог броја* ω *колико износи вредност*

$$P' = (\alpha + \alpha' + 2) - \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}-1}{6}\right) + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega}+1}{6}\right)\right], \tag{102}$$

а тачно их има онолико колико износи вредност

$$P = P' + \Omega, \tag{103}$$

где је

(104) $$\Omega = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \Delta.$$

1. *пример:* $\omega = 50$, па је

$$\alpha = 8 \qquad \alpha' = 8$$
$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1 \quad \sqrt{a} = 7{,}07$$

и према томе $P' = 15$, што је у исти мах и тачан број P.

2. *пример*: $\omega = 100$, па је

$$\alpha = 16 \qquad \alpha' = 16$$
$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 5 \quad \sqrt{\omega} = 10,$$

и према томе $P' = 25$, а то је стварно и тачан број P.

3. *пример*: $\omega = 200$, па је

$$\alpha = 33 \qquad \alpha' = 33$$
$$\lambda_1 = 10 \quad \lambda_2 = 8 \quad \lambda_3 = 14 \quad \sqrt{\omega} = 14{,}14,$$

што даје $P' = 45$, а тачан број $P = 46$

4. *пример*: $\omega = 500$, па је

$$\alpha = 83 \qquad \alpha' = 83$$
$$\lambda_1 = 40 \quad \lambda_2 = 33 \quad \lambda_3 = 47 \quad \sqrt{\omega} = 22{,}36$$

и према томе $P' = 85$, а тачан број је $P = 95$.

Ако се узму у обзир обрасци од (64) до (69), за граничне вредности функција $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, добија се

Став XIV: *Ако се означи да је*

(105) $$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{\omega - 1}{36}[\log(\omega + 21) - 2{,}9628],\\ \mu_2 &= \frac{\omega + 1}{36}[\log(\omega + 21) - 3{,}4188],\\ \mu_3 &= \frac{\omega + 1}{36}[\log(\omega + 15) - 2{,}6896],\end{aligned}$$

има најмање онолико простих бројева који нису већи од ω колико износи вредност

(106) $$(\alpha + \alpha' + 2) - \left[\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega} - 1}{6}\right) + \frac{1}{2}E\left(\frac{\sqrt{\omega} + 1}{6}\right)\right].$$

1. *пример*: $\omega = 100$, па је

$$\mu_1 = \frac{99}{36}(\log 121 - 2,9628) = 5,03,$$
$$\mu_2 = \frac{101}{36}(\log 121 - 3,4188) = 3,83,$$
$$\mu_3 = \frac{101}{36}(\log 115 - 2,6896) = 5,74,$$

па пошто је

$$\alpha = 16 \qquad \alpha' = 16 \qquad \sqrt{\omega} = 10,$$

то се налази да број простих бројева мањих од 100 износи најмање 23,19, док он у ствари износи 25.

2. *пример*: $\omega = 200$, па је

$$\mu_1 = \frac{199}{36}(\log 221 - 2,9628) = 13,46,$$
$$\mu_2 = \frac{201}{36}(\log 221 - 3,4188) = 11,05,$$
$$\mu_3 = \frac{201}{36}(\log 215 - 2,6896) = 20,55,$$

па пошто је

$$\alpha = 33 \qquad \alpha' = 33 \qquad \sqrt{200} = 14,14$$

налази се да број простих бројева мањих од 200 износи најмање 37, док он у ствари износи 46.

3. *пример*: $\omega = 500$, па је

$$\mu_1 = \frac{499}{36}(\log 521 - 2,9628) = 45,64,$$
$$\mu_2 = \frac{501}{36}(\log 521 - 3,4188) = 39,48,$$
$$\mu_3 = \frac{501}{36}(\log 515 - 2,6896) = 49,46,$$

па пошто је

$$\alpha = 83 \qquad \alpha' = 83 \qquad \sqrt{500} = 22,36$$

налази се да број простих бројева мањих од 500 износи најмање 75 док он у ствари износи 95.

РАСПОРЕД ПРОСТИХ ОМАЊИХ БРОЈЕВА

Напред су за бројеве

P_1 = број простих бројева $6m - 1 \leq \omega$,

P_2 = број простих бројева $6m+1 \leq \omega$,

P = укупан број простих бројева који није већи од ω,

доказани обрасци за њихове *доње границе* P_1', P_2', P'

$$P_1' = \alpha - \lambda_1,$$

$$(107) \qquad P_2' = \alpha' - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 + v_1 + w_1),$$

$$P' = (\alpha + \alpha' + 2) - \left[\lambda_1 + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 + v_1 + w_1)\right].$$

Кад се помоћу њих израчунате границе P_1', P_2', P' упореде са тачним вредностима бројева P_1, P_2, P (в. таблице I, II, III) запажа се следеће.

Таблица 1

ω	P_1	P_1'	$P_1 - P'$	ω	P_1	P_1'	$P_1 - P_1'$
50	7	7	0	550	51	45	6
100	12	12	0	600	57	50	7
150	18	18	0	650	60	52	8
200	23	23	0	700	64	54	10
250	26	25	1	750	67	56	11
300	32	30	2	800	70	59	11
350	35	33	2	850	74	61	13
400	39	37	2	900	78	63	15
450	44	41	3	950	82	65	17
500	48	43	5	1000	86	69	17

Таблица 2

ω	P_2	P_2'	$P_2 - P_2'$	ω	P_2	P_2'	$P_2 - P_2'$
50	6	6	0	550	48	43	5
100	11	11	0	600	50	43	7
150	15	15	0	650	56	47	9
200	21	20	1	700	59	50	9
250	25	24	1	750	63	52	11
300	28	27	1	800	67	55	12
350	33	31	2	850	70	55	15
400	37	33	4	900	74	59	15
450	41	37	4	950	77	60	17
500	45	40	5	1000	80	63	17

Таблица 3

ω	P	P'	$P - P'$	ω	P	P'	$P - P'$
50	15	15	0	550	101	90	11
100	25	25	0	600	109	95	14
150	35	35	0	650	118	101	17
200	46	45	1	700	125	106	19
250	53	51	2	750	132	110	22
300	62	59	3	800	139	116	23
350	70	66	4	850	146	118	28
400	78	72	6	900	154	124	30
450	87	80	7	950	161	127	34
500	95	85	10	1000	168	134	34

1. Постоји један број a који се, према таблицама, налази

за просте бројеве $6m-1$ између 200 и 250,

за просте бројева $6m+1$ између 150 и 200,

за просте бројеве уопште између 150 и 200,

а који се одликује тиме што, *за сваки број* ω *што је између* 0 *и* a, *обрасци* (107) *дају тачан број простих бројева сваке од трију категорија.*

Тачнија одредба броја a даје

за просте бројеве $6m-1$ $\quad a=244$,

за просте бројева $6m+1$ $\quad a=180$,

за просте бројеве уопште $\quad a=190$.

2. У току рашћења броја ω преко границе a, бројеви (107) постепно и у почетку помало одступају од бројева P_1, P_2, P, најпре за једну јединицу, затим за две, за три итд. јединица. Одступање је утолико веће уколико ω више расте, али при свем томе бројеви (107) стално остају као доње границе бројева P_1, P_2, P. Само што те границе престају од тада бити од интереса као сувише ниске, тј. кад ω постане веће од извесне довољно велике вредности. А о томе колико треба да је ω па да тако буде, може се добити идеја на овај начин.

Кад се у обрасцим (107) води рачуна о понашању функција $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ за велике вредности ω, види се да се све три функције асимптотски понашају као функција

$$\theta(x) = -\frac{\omega\log\omega}{36}$$

(логаритам по основици e). Па пошто се α и α' понашају као $\frac{\omega}{6}$, а v_1 и w_1 као $\frac{\sqrt{\omega}}{6}$, то се за довољно велике вредности ω

$$P_1' \text{ понаша као } \frac{\omega}{36}(6-\log\omega),$$

$$P_2' \text{ понаша као } \frac{\omega}{36}(6-\log\omega)-\frac{\sqrt{\omega}}{6},$$

$$P \text{ понаша као } \frac{\omega}{18}(3-\log\omega)-\frac{\sqrt{\omega}}{6}.$$

Та су три броја најпре позитивна и не разликују се од тачних вредности броја простих бројева одговарајуће категорије, мањих од ω; затим се почињу од ових све више разликовати, али остају позитивни.

Пошто је ω веће од извесне вредности (која је према наведеним обрасцима већа од 5 000), ти бројеви пролазе кроз нулу, постају од тада негативни и све више расту у негативном правцу, престајући да имају икакав интерес за проблем одредбе бројева $P_1(\omega), P_2(\omega), P(\omega)$.

Па ипак, поред свега тога, ставови о доњим границама бројева P_1, P_2, P дају за *омање*, тј. довољно мале вредности ω оно што не даје ниједан до данас познат аритметички став: они дају тачно аритметичко решење проблема распореда омањих простих бројева.

Међутим, исти ставови могу се искористити и за закључке који проширују област важења самих тих ставова. А то ће бити предмет другога рада.**

** Приказ H. D. Lehmer-а у Mathematical Reviews, XI, 4, p. 233.

Успомена
са
Првог конгреса математичара словенских земаља Варшава, 23–27. септембар 1929.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ *и* ***ЈОВАН КАРАМАТА*** *пред улазак на седницу III секције* ***Алгебра.*** *– Од 1926. године, када је Јован Карамата докторирао, професор Петровић је често одлазио ван земље на научне скупове са младим Караматом. Према грађи, дознајемо да је на овом конгресу од наших математичара био и Никола Салтиков.*

ПРИЛОЗИ

ТЕОРИЈА
АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

По предавањима
Г. Г. Др. М. Петровића и Др. Н. Салтикова

ЛИТОГРАФИЈА
Костс М Бојковића Поенкареова улица број 21
у (дворишту) — Београд —

Насловна страна скрипти из теорије алгебарских једначина које су написали Михаило Петровић и Никола Салтиков (Београд, 1927). Као извори, у скриптама су коришћена дела страних аутора: Abel-a, Wanstel-a, Laurent-a, Comberousse-a, Camberome-a, али и српског математичара 19. века, Димитрија Нешића

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РЕЗУЛТАТИМА У АЛГЕБРИ*

Алгебарске једначине

1. У области теорије алгебарских једначина, М. Петровић се нарочито бавио дистрибуцијом корена у равни непознате. Поступке које примењује у својим истраживањима, карактерише коришћење извора који нуде у том домену истраживања општу теорију функција и својства одређених интеграла.

Тако, ако је дата *најопштија* алгебарска једначина

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

(коефицијенти и корени нису подвргнути *никаквој рестрикцији*), М. Петровић показује да је могуће, користећи извесне познате резултате о степеним редовима, одредити у равни непознате x кружни прстен *C који сигурно садржи један корен једначине* (1). Ако формирамо функцију

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}$$

када r узима реалне вредности од нула до бесконачно, реална функција $u(r)$ почиње да опада, достиже позитиван минимум L, затим константно расте. Ако ставимо

$$R_1 = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}, \qquad R_2 = n \left| \frac{a_0}{a_1} \right|,$$

имамо општу теорему М. Петровића:

Алгебарска једначина (1) *има најмање један корен у кружном прстену* C *(или на граници тог прстена) ограниченом двома концентричним круговима* C_1 *и* C_2 *чији су центри у координатном почетку и чији су полупречници респективно* R_1 и R_2, *и нема ниједан корен окружен тим прстеном.*

---

* У књизи *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894–1921).* Académie royale de Serbie, Editions spéciales, t. XLIII, Sciences mathématiques et naturelles, 1, 10, Paris, 1922, p. IX+152, Петровић је описао своје резултате до 1922. године, те је у посебном поглављу изложио свој рад из алгебре. Професор је о себи писао у трећем лицу.

Рубови, спољашњост и унутрашњост прстена C, представљени круговима C_1 и C_2, чине најпрецизније границе које је могуће доделити прстену, због чега теорема важи у најопштијем случају. Заиста, ове две границе се ефективно добијају помоћу две посебне једначине од којих је прву дао M. E. Landau,[1] а другу M. L. Féjer.[2]

М. Петровић доказује и теорему на неки начин обрнуту претходној: док се прва односи на корене једначине (1) *садржане* у кружном прстену који не окружује ни један корен те једначине, друга теорема односи се на корене *окружене* прстеном који не садржи ни један корен.

Наиме, нека је дата алгебарска једначина $f(x)=0$ степена n, чији су коефицијенти реални. Означимо са $P_k(x)=0$ једначину степена n чији су корени, корени једначине $f(x)=0$ степеновани са 2^k, и формирајмо рационалну функцију

$$N_k(x)=\frac{xP_k'(x)}{P_k(x)}.$$

Полиноми $P_k(x)$ степена n се израчунавају постепено, полазећи од $P_0=f(x)$, помоћу правила које дугујемо Gräffe-у. М. Петровић је дао, међутим, *експлицитан* и директан израз функције $N_k(x)$ у облику суме од 2^k чланова

$$2^{-k}\omega_j r\frac{f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)} \qquad (j=1,2,\dots,2^k),$$

где су ω_j примитивни корени једначине

$$x^{2^k}-1=0 \quad \text{и где} \quad r=x^{2^{-k}}.$$

Теорема М. Петровића онда гласи:

Нека је дат кружни прстен с центром у координатном почетку, унутрашњег полупречника R *и ширине* δ, *који не садржи ни један корен дате алгебарске једначине* f(x) = 0 *степена* n. *Ако целом броју* k *доделимо било коју вредност мању од*

$$\frac{1}{\log 2}\left[\log\log(n+1)-\log\log\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right],$$

број корена h *окружених прстеном биће једнак* M *или* M + 1, *где* M *означава цео део нумеричке вредности од* $N_k(x)$ *за*

$$x=\left(R+\frac{\delta}{2}\right)^{2^k}.$$

Ако са γ означимо разломљени део израза $N_k(x)$ за ту вредност променљиве x и са ξ вредност

[1] Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXIII, 1905, pp. 251–261.

[2] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. II, 1907, pp. 459–461.

$$\xi = \frac{n}{\left(\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right)^{2^k} - 1},$$

ако је $\gamma + \xi \leq 1$, биће $h = M$, а ако је $\gamma + \xi > r$ и $\gamma \geq \xi$, биће $h = M + 1$.

Оно што је значајно у овој теореми је да се број тражених корена добија као *цео* део нумеричког израза који се *рационално* добија помоћу коефицијената једначине, полупречника и ширине прстена.

Нумерички пример који је дао М. Петровић показује лакоћу са којом се теорема практично примењује на одређивање броја корена неке алгебарске једначине чији су модули корена мањи од неког унапред датог броја.

2. Према Лагеровој теореми за целе полиноме (која се такође може применити на целе функције реда нула или један), ако једначина са позитивним коефицијентима,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

има све корене *реалне*, сваки коефицијент a_k је мањи од одговарајућег коефицијента развоја функције

$$\varphi = a_0 e^{\frac{a_1 x}{a_0}}.$$

М. Петровић показује да су коефицијенти a_k ограничени одозго кореспондентним коефицијентима развоја

$$F(x) = a_0 \left(1 + \frac{a_1 x}{n a_0}\right)^n.$$

Границе коефицијената a_k добијене помоћу ове теореме су очигледно прецизније одређене него границе које се добијају применом Лагерове теореме и поклапају се са њима за довољно велико n. Оне се ефективно могу наћи помоћу коефицијената једначине $F(x) = 0$.

Такође изводимо неједнакост

$$f(x) \leq F(x) \quad \text{за} \quad x > 0$$

прецизнију од познате неједнакости

$$f(x) < \varphi(x) \quad \text{за} \quad x > 0.$$

М. Петровић овде изводи истовремено различита једноставна практична правила за одређивање егзистенције имагинарних корена једначине $f(x) = 0$ са позитивним коефицијентима. Такво једно правило је, на пример, следеће:

Узимајући

$$\lambda_k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot kn^k}{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

и два прва коефицијента a_0 *и* a_1 *једначине* $f(x)$, *који су сведени на 1, ако је један од коефицијената* a_k *такав да је производ* $\lambda_k a_k$ *већи од један, једначина сигурно има имагинарних корена.*

3. Лагер се често бавио проблемом одређивања низа величина $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ таквих да ако је

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{2}$$

било која алгебарска једначина са свим коренима *реалним*, једначина

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \ldots + \omega_n a_n x^n = 0 \tag{3}$$

има исто све корене *реалне*. Овде су дата многа партикуларна решења.

М. Петровић је себи поставио аналоган проблем: одредити низове ω_k такве да ако је (2) *било која* алгебарска једначина са свим коренима *имагинарним*, једначина (3) има такође све корене *имагинарне*. И он налази, помоћу интегралног рачуна, једноставно решење

$$\omega_k = \int_a^b u r^k dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где су границе a и b произвољне али реалне, u и r су произвољне функције променљиве t која пролази кроз интервал (a, b) и u чува знак у том интервалу.

Исти низови (4) пружају могућност формирања класа добијених од алгебарских једначина *произвољног* парног степена, а које имају следеће својство: да једначина има све корене *имагинарне* и више, да ако занемаримо у њеном првом члану *произвољан* паран број последњих елемената, тако добијена једначина такође има све корене *имагинарне*.

Ако је једначина

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n} = 0$$

једначина такве врсте, једначина

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \ldots + \omega_{2n} a_{2n} x^{2n} = 0$$

је такође таква.

Такав је, на пример, случај свих једначина

$$\omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{2n} x^{2n} = 0 \tag{5}$$

или случај свих једначина облика

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{\omega_{2n}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n} = 0, \tag{6}$$

где је ω_k израз облика (4).

У случају да ни r не мења знак за t које узима вредности од a до b, једначине (5) те врсте имају партикуларну дистрибуцију својих корена у области променљиве x. Претпоставимо, на пример, да је r позитиван и означимо са $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ нумеричке интервале, садржане у интервалу од 0 до 2π и такве да је за сваку вредност θ садржану у интервалу δ_k, производ $\sin\theta \cdot \sin 2\theta$ *позитиван* а производ $\sin\theta \cdot \sin(2n+1)\theta$ *негативан*. М. Петровић показује *да се аргументи корена једначине* (5) *увек налазе изван интервала* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$.

Подсетимо се још да је М. Петровић дао комплетно решење проблема:

Наћи неопходне и довољне услове под којима алгебарска једначина

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \tag{7}$$

са реалним коефицијентима има све корене реалне и да, шта више, једначина добијена занемаривањем произвољног броја последњих чланова у (7) *има такође све корене реалне.*

Ови услови се изражавају на следећи начин:

Потребно и довољно је да

$$a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0}$$

и да је, шта више, сваки коефицијент $\mathrm{a_k}$ $(2 < \mathrm{k} \leq \mathrm{n})$ *садржан између најмањег и највећег корена алгебарске једначине променљиве* x

$$\Delta_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x), \tag{8}$$

где $\Delta_\mathrm{n}(\mathrm{a_0}, \mathrm{a_1}, \mathrm{a_2}, \dots, \mathrm{a_{n-1}}, \mathrm{a_n})$ *означава дискриминанту првог члана једначине* (7).

G. Pólya се тада бавио једном дубљом студијом о једначинама које задовољавају услове М. Петровића.[3]

4. Нека је дата *алгебарска* једначина $y(x)$ дефинисана релацијом $f(x,y) = 0$, одређена на различите начине

$$y_1 = \varphi_1(x), \;\; y_2 = \varphi_2(x), \;\; \dots, \;\; y_m = \varphi_m(x).$$

М. Петровић указује на општи и практичан поступак.

1° За развијање симетричне функције

$$\Phi(x) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + \dots + F(\varphi_m) \tag{9}$$

(где је $F(u)$ рационална функција од e^{au}) у ред рационалних разломака по x, конвергентан за све вредности променљиве x различите од оних које се поклапају са нулама коефицијената највећег степена променљиве y у $f(x,y) = 0$;

---

[3] Видети: М. Петровић, *О утицају нетачних података на резултате квантитативних хемијских анализа,* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXVII, Први разред, књ. 26, Београд 1903, стр. 69–151.

2° За развијање израза (9), у случају да је Φ мероморфна дупло периодична функција, у ред рационалних разломака са два улаза.

Нека је дата алгебарска једначина $f(x)=0$ (где је f полином променљиве x са реалним коефицијентима) и нека је $\varphi(t)$ реална функција променљиве t, непрекидна у датом реалном интервалу (a, b) и таква да је интеграл

$$\int_a^b \varphi(t)\cos nt\,dt$$

константно једнак нули за $n = 1, 2, 3, \ldots$, док за $n = 0$ има неку одређену вредност α. М. Петровић доказује следећу теорему:

Број корена једначине $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$, *садржаних у унутрашњости круга* C *полупречника* r, *са центром у координатном почетку, једнак је вредности одређеног интеграла*

$$\frac{1}{\alpha}\int_a^b \varphi(t)\,\Phi(r,t)\,dt, \tag{10}$$

где $\Phi(\mathrm{r},\mathrm{t})$ *означава реални део израза*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

за $\mathrm{z}=\mathrm{re}^{\mathrm{ti}}$.

Дакле, тај број одређен је интегралом

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi(r,t)\frac{\sin t}{t}\,dt$$

или интегралом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(r,t)dt$$

који се може одредити у тако уопштеном облику помоћу интеграла (10).

Ако узмемо

$$M(r,t)=\log|f(z)| \quad \text{за} \quad z=re^{ti},$$

одређени интеграл

$$\frac{1}{\alpha}\int_a^b \varphi(t)\,M(r,t)dt$$

има вредност

$$\log\left|\frac{f(0)\,r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|,$$

где су a_k *корени једначине* $f(x)=0$ *садржани у унутрашњости круга* C.

Ова теорема уопштава Јенсенову теорему у случају алгебарских једначина са реалним коефицијентима.

М. Петровић је такође увео формуле којима се изражавају симетричне функције корена једначине $f(x)=0$ помоћу реалних одређених интеграла претходног облика. Добијени резултати се проширују на мероморфне функције у унутрашњости круга C.

Алгебарске неједнакости[4]

5. Нека су величине $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *реалне и позитивне* и нека је p било који *реалан* број. М. Петровић полази од чињенице да је вредност

$$\rho=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^p}{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p} \tag{11}$$

увек садржана између граница 1 и n^{p-1}. Прва граница се достиже када су, ако је p произвољан, x_i занемарљиви у односу на један од њих, или када, ако су x_i произвољни, тада је $p=1$. Друга граница се достиже ако су x_i међусобно једнаки.

Нека је $f(x)$ функција која се може развити у околини тачке $x=0$ у степени ред

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

где је сваки коефицијент a_k реалан и позитиван или једнак нули, при чему прва два коефицијента a_0 и a_1 могу имати произвољне реалне вредности.

Означимо са

$$\mu=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \quad \text{и} \quad M=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \tag{12}$$

аритметичку средину μ величина x_i и аритметичку средину M одговарајућих вредности функције $f(x)$.

---

[4] Петровић је ово поглавље саставио на основу следећих радова:

Елементарна релација између правих и кривих дужи, Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, стр. 67–74.

Relations d'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géometriques. Comptes rendus, Paris, 1916, t. CLXIII, 4. pp. 81–84.

Sur quelques expressions numériques remarquables. Comptes rendus, Paris, 1917, t. CLXIV, 19, pp. 716–718.

Théoréme sur la moyenne arithmétique de quantités positives. L'Enseignement mathématique, Genève, 1916. t. XVIII, 3–4, pp. 163–176.

Module d'une somme. L'Enseignement mathématique, Geneve, 1917, t. XIX, 1–2, pp. 53–56.

Примењујући горе наведену теорему, М. Петровић долази до двоструке неједнакости

$$f(\mu) \leq M \leq \frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} \tag{13}$$

која даје *најуже могуће границе* које садрже аритметичку средину M изражену у функцији аритметичке средине μ и која се у горе наведеном случају може *ефективно достићи.*

М. Петровић је изражава у облику теореме о средњој вредности, која исказује једну од фундаменталних чињеница елементарне алгебре.

Аритметичке средине μ *и* M *су повезане релацијом облика*

$$M = \Phi(\mu) + \theta\Psi(\mu), \tag{14}$$

где је

$$\Phi(\mu) = f(\mu), \quad \Psi(\mu) = \frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} - f(\mu), \tag{15}$$

и где је θ *чинилац који је увек садржан између* 0 *и* 1. *Границе* $\theta = 0$ *и* $\theta = 1$ *се могу достићи, и то прва ако су сви* x_i *међусобно једнаки, а друга ако су сви* x_i *занемарљиви у односу на један од њих.*

Можемо такође потврдити да се вредност израза

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

увек налази између две границе

$$[f(x_1) + \ldots + f(x_n)] - (n-1)f(0)$$

и

$$\frac{1}{n}[f(nx_1) + \ldots + f(nx_n)],$$

и може достићи једну од ових граница.

То такође показује да је симетрична функција

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n)$$

од n позитивних величина, чија је вредност суме s, *увек садржана између вредности*

$$nf\left(\frac{s}{n}\right) \quad \text{и} \quad f(s) + (n-1)f(0)$$

и може достићи једну или другу границу.

Ове неједнакости изражавају неку врсту опште теореме сабирања за функције f(x) *са позитивним, реалним тејлоровским коефицијентима.*

Такође изводимо релације неједнакости између аритметичке и геометријске средине величина већих од 1. Нека је $z_1, z_2, \ldots, z_n$ један низ таквих величина и нека је

$$\mu = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}, \quad P = \sqrt[n]{z_1 z_2 \ldots z_n}.$$

Геометријска средина P *је увек садржана између двеју граница*

$$(n\mu - n + 1)^{\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad \mu.$$

Те границе су *најуже могуће*, при чему се прва достиже ако су сви z_i, осим једног међу њима, једнаки 1, а друга ако су сви z_i међусобно једнаки.

6. Међу бројним и различитим применама резултата М. Петровића, овде ћемо указати на неке у виду примера.

1° *Модул суме* $\Sigma \mathrm{u}_k$ *позитивних величина* u_k *има вредност* $\theta(P+Q)$, где P означава апсолутну вредност суме реалних делова величина u_k, Q означава апсолутну вредност суме коефицијената уз i од u_k, при чему је θ фактор чија је вредност *увек садржана између* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1. Граница $\frac{1}{\sqrt{2}}$ се ефективно може достићи ако је $P = Q$, а граница 1 ако су u_k сви реални или сви имагинарни.

Ако су у суми Σu_k реални делови величина u_k истог знака и ако истовремено коефицијенти уз i у изразима за u_k сви имају исти знак, биће

$$\operatorname{mod} \Sigma u_k = \lambda \Sigma \operatorname{mod} u_k,$$

где је λ чинилац *увек садржан између* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1. Прва граница се може ефективно достићи ако је сваки члан u_k реалан или чисто имагинаран и ако су, шта више, сума реалних чланова u_k и сума чисто имагинарних коефицијената уз i из u_k једнаке по апсолутној вредности. Друга граница се достиже ако су чланови или сви реални или сви чисто имагинарни.

2° Нека је дата алгебарска једначина

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

чији су корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сви реални и позитивни (једнаки или различити), и нека је $f(x)$ произвољна функција која се у унутрашњости кружнице C која садржи све корене α, може развити у Тејлоров ред са реалним и позитивним коефицијентима. *Вредност*

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_n)$$

је увек садржана између

$$nf\left(-\frac{a_1}{n}\right) \quad \text{и} \quad f(-a_1) + (n-1) f(0),$$

тако да је, на пример, вредност симетричне функције

$$e^{r\alpha_1} + \ldots + e^{r\alpha_n} \quad (r > 0)$$

увек садржана између границе $ne^{-\frac{r\alpha_1}{n}}$ која се достиже у случају да важи једнакост

$$\left(x + \frac{a_1}{n}\right)^n = 0,$$

и границе $e^{-r\alpha_1} + n - 1$ која се достиже у случају да важи једнакост

$$x^n + a_1 x^{n-1} = 0.$$

3° Трећа страница неког троугла, код којег су нам познати само збир $a + b$ двеју страница и туп угао γ који оне захватају, има вредност

$$c = (a+b)\cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4}(1 \pm \varepsilon),$$

где релативна грешка ε *не прелази величину* $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \gamma}{4}$ и строго опада ако угао γ тежи 180°. Узимајући

$$c = (a+b)\cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4},$$

начинићемо релативну грешку која, за углове γ веће од 140°, не достиже 4 од 100; за углове веће од 150°–1,8 од 100; за углове веће од 160°–0,7 од 100; за углове веће од 170°–0,2 од 100, итд.

Ако су странице произвољног троугла a, b, c биће

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \lambda(a + b + c),$$

где је λ чинилац увек садржан између

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774\ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots$$

Прва граница се достиже за једнакокраке троуглове, друга ако је $a = b,\ c = 0$.

Општије, ако је $f(x)$ произвољна функција са тејлоровским позитивним и реалним коефицијентима (који задовољавају услове конвергенције), *вредност*

$$f(a) + f(b) + f(c)$$

је увек садржана између граница

$$3f\left(\frac{s}{3}\right) \quad \text{и} \quad f(s) - 2f(0),$$

где s означава обим троугла. Ове границе се достижу у горе наведеном случају.

Ако су α, β, γ углови произвољног троугла (изражени у радијанима), *вредности*

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$$

је увек садржана између граница

$$3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad f(\pi)-2f(0).$$

Прва граница се достиже за једнакокраки троугао, а друга за једнакостранични троугао са тупим углом који тежи π.

Дијагонала правоуглог паралелопипеда чије су странице средње линије неког троугла, једнака је обиму тог троугла помноженом чиниоцем који је *увек садржан између* $\frac{1}{2}$ *и* $\sqrt{3}$.

Резултанта три вектора која могу формирати троугао и који имају скаларну суму S, има вредност λS, где је λ фактор *увек садржан између* $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *и* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ове алгебарске неједнакости се потврђују у бројним применама на одређене интеграле и на њих ће бити указано у другом делу овог дела.

7. М. Петровић изводи још један низ алгебарских неједнакости из Адамарове теореме о максимуму детерминанте. Помоћу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, он прво изводи следећу последицу, нарочито корисну у применама: модул детерминанте реда n никада не прелази вредност $A_n n^{-\frac{n}{2}}$, где A означава квадратни корен суме квадрата модула елемената детерминанте.

Ако означимо са ρ_k модул коефицијента a_k алгебарске једначине са реалним или имагинарним коефицијентима

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

и узимајући

$$M = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + p - k)\rho_k^2,$$

сума S_p корена једначине (16) степенованих бројем p за $p \le n$ је, према претходној теореми, *увек садржана у унутрашњости кружнице чији је центар у координатном почетку а полупречник вредности* $\left(\frac{M}{p}\right)^{\frac{p}{2}}$. У случају да је $p > n$, овај полупречник се замењује вредношћу $\mu\beta^p$, где је

$$\beta = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}{p_1^2 + 4p_2^2 + \ldots + n^2 p_n^2}}.$$

М. Петровић указује на примене које налази ова теорема у приближном рачуну, са траженом апроксимацијом, код симетричних функција, алгебарских или трансцендентних, код корена алгебарске једначине.

Примењујући ову теорему на системе једначина, М. Петровић долази до следеће теореме:

Нека је дат систем n *линеарних једначина са* n *непознатих и са реалним или имагинарним коефицијентима. Систем решења је увек садржан у унутрашњости кружнице чији је центар у координатном почетку и полупречника вредности*

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{L - K - \lambda}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

где је Δ *детерминанта система,* L *сума квадрата свих елемената* Δ, K *сума квадрата модула чланова једначина независних од* x_i, λ *најмања међу сумама* λ_i, *где* λ_i *означава суму квадрата модула елемената* i*-те колоне детерминанте* Δ.

Михаило Петровић

О ЈЕДНОЈ МОДИФИКАЦИЈИ ГРЕФЕОВОГ МЕТОДА ЗА РЕШАВАЊЕ ВИШИХ БРОЈНИХ ЈЕДНАЧИНА

Београд, 1886

Лик Михаила Петровића као студента прве године Природно-математичког одсека Филозофског факултета Велике школе у Београду (школска 1885/86. година).
Било му је 18 година када је радио на Грефеовој методи (Београд 1886, аутор фотографије није познат)

ПРВИ ПЕТРОВИЋЕВ МАТЕМАТИЧКИ ТЕКСТ

Грефеова метода представља један алгоритам за нумеричко решавање алгебарских једначина. У основи овог поступка почива следећа идеја Д. Бернулија: Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални корени полинома

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

који се међусобно знатно разликују, тада се корени x_i могу приближно али једноставно израчунати помоћу коефицијената a_i. Прецизније, ако је

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n| > 1,$$

где ознака $x \gg y$ значи да је x знатно веће од y, онда

$$x_i \approx -\frac{a_i}{a_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

уз претпоставку да су $a_i \neq 0$. Ова чињеница непосредно следи на основу Вијетових формула, на пример

$$-\frac{a_2}{a_1} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \frac{(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + (x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)/x_1}{1 + (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)/x_1} \approx$$

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n \approx x_2 .$$

Три математичара, Грефе (1837), Данделин (1826) и Лобачевски (1834) независно су приметили да се процесом узастопног квадрирања различити корени алгебарске једначине међусобно убрзано раздвајају. Развијајући ову идеју, предложили су поступак за одређивање низа полинома $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x), f_2(x), \ldots$ са особином да су корени полинома f_i квадрати нула полинома f_{i-1}, док се коефицијенти полинома f_i једноставно одређују помоћу рекурентних формула. За довољно велико k, ако су корени полазног полинома $f(x)$ међусобно различити и већи од 1, корени $z_1, z_2, \ldots, z_n$ полинома $f_k(x)$ биће довољно раздвојени, тј. важиће $|z_1| \gg |z_2| \gg \ldots \gg |z_n|$. Дакле, на њих се може применити Бернулијева идеја, и тако срачунати њихова вредност. Нуле полазног полинома тада се једноставно одређују на основу формуле

$$x_i^m = z_i, \quad m = 2^k$$

Данас овај поступак за нумеричко решавање алгебарских једначина најчешће носи назив ***Данделин–Лобачевски–Грефеова метода***.

Наравно, уместо квадрирања могу се узети и неке друге функције које би брзо раздвајале корене датог полинома. Управо ову чињеницу приметио је Петровић већ као студент прве године математике и ту идеју исцрпно развио у свом рукопису којег овде доносимо у оригиналној фотокопији (ДТР). За „раздвајајућу" функцију сада је узео експоненцијалну функцију $y = a^x$, и доследно развио одговарајући нумерички поступак у овако модификованој Грефеовој методи и детаљно извео његову анализу. У том свом првом рукопису, семинарском раду, Петровић је испољио несвакидашњи таленат и најавио да се од њега у будућности могу очекивати велика дела. Било му је 19 година.

Мада овај рукопис никада није објавио, основна идеја, примена трансформација на алгебарске једначине, било да су оне алгебарског или трансцендентног карактера, појавиће се касније у његовим радовима, на пример у ДТ39, ДТ53 и ДТ90, где се Петровић и експлицитно позива на Грефеову методу.[1] У тим радовима, Петровић користи ову идеју у расправљању далеко дубљег и тежег проблема, да се одреди распоред нула полинома у комплексној равни. Овим је Петровић дао не само значајан прилог геометрији полинома већ и један сасвим нов поглед на методу коју су предложили Данделин, Лобачевски и Грефе.

Рецимо да су о првом Петровићевом рукопису Мирко Стојаковић и Драган Трифуновић написали детаљан и леп чланак.[2] Сама Грефеова метода опширно је представљена у књизи Ђуре Курепе.[3] Иста метода и њене модификације приказани су у Методы вычислений, И. С. Березин, Н. П. Жидков, ФМ, Москва 1962.[4]

---

[1] Изузетак је књига Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969. у којој је овај Петровићев први математички текст објављен и коментарисан (стр. 52–60).

[2] М. Стојаковић – Д. Трифуновић, *Петровићева модификација Грефеове методе за решавање алгебарских једначина*, Мат. весник 20 (1968), 4, стр. 439–446; *Исто*, Споменица Михаила Петровића, Београд 1968, стр. 95–102.

[3] Đ. Kurepa, *Viša algebra*, knjiga druga , Beograd 1969, str. 1071–1077.

[4] Приметимо да је Димитрије Нешић у својој књизи *Алгебарска анализа,* књига друга, Београд 1883, стр. XII+670 навео ову методу. У додатку ове књиге Нешић је изложио *Gräffe-ова метода решавања бројних једначина* (стр. 643–667), веома опширно и критички за случајеве када су два реална корена веома блиска. Очигледно, Нешић се користио оригиналним Грефеовим делом *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen* из 1837. године. Треба навести да је пре Нешића у српској математичкој књижевности Грефеову методу унео Димитрије Стојановић у расправи *Штурмова теорема,* објављена 1869. године у Гласнику Српског ученог друштва (књ. 25). – О Грефеовој методи у делу Димитрија Нешића и Димитрија Стојановића погледати књиге Д. Трифуновић, *Димитрије Нешић зора српске математике,* Београд 1996, стр. 112 и Д. Трифуновић – П. Перишић, *Математичар Петар Вукићевић*, Грађевинска књига, Београд 1997, стр. 214.

О једној модификацији Грефеовог метода за решавање виших бројних једначина.

Сама Грефеова мисао, да се једна једначина вишега степена може разрешити без претходнога познавања броја и граница стварних и уображених корена њених, трансформацијом исте у другу једначину чији мањи корени исчезавају према већима, може се остварити не само на начин којим је Грефе основао свој метод решавања виших бројних једначина, но и на ма какав други начин којим би се постигло то исчезавање мањих корена према већима. Као што је познато, код Грефеове методе та се идеја постиже тиме, што се дата једначина претвара у другу чији су корени извесни степени корена дате једначине, па тачност исчезавања мањих корена према већима зависи од величине степена. Но ова метода само је један специјалан случај између више начина на које се може поменута идеја остварити; а могућност остварења њенога на више начина може се увидети на овај начин:

Нека је дата једначина

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

са коренима: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$, претворена у једначину:

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

чији су корени: $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots \xi_n$, и то тако, да између корена дате и нове једначине постоји релација:

$$\xi_k = \Delta(\alpha_k)$$

где Δ означава ма какву познату функцију, па се из познатог обрасца:

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1 + \frac{\Delta(\alpha_1)\cdots\Delta(\alpha_{k-1})\Delta(\alpha_{k+1}) + \cdots + \Delta(\alpha_{n-k})\Delta(\alpha_{n-k+1})\cdots\Delta(\alpha_n)}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)}$$

а у претпоставци да су функције Δ такве природе, да кад се у њима променљиве количине смене коренима дате једначине, функције мањих корена исчезавају према функцијама већих, добијамо образац:

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1$$

Стављајући у овај образац $k = 1, 2, 3 \cdots n$, добија се систем једначина:

$$-b_1 = \Delta(\alpha_1)$$
$$b_2 = \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)$$
$$-b_3 = \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^n b_n = \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3)\cdots\Delta(\alpha_n)$$

Ако су сад функције Δ такве, да се из њих на елементаран начин одакле се на елементаран начин могу израчунати количине $\Delta(\alpha_1) \cdots \Delta(\alpha_n)$. Ако су сад функције Δ такве, да се из њих на какав прост начин могу израчунати и сами корени $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, онда би тиме очевидно и горња цељ била остварена.

Тражење оваквих функција Δ које задовољавају поменута два услова, и трансформација дате једначине према узетој функцији, није лак посао; такве функције врло су ретке. Графе је усвојио алгебарску функцију $\Delta(x) = x^k$, пошто та функција за извесну довољно велику вредност степена k задовољава оба услова. Но да ли би се у место ова могла употребити трансцедентна функција:

$$\Delta(x) = a^x$$

која се од горње функције разликује тиме, што је у првој произвољна позната количина у изложиоцу x-a, а у овој је обратно x у изложиоцу те произвољне, познате количине? Уводивши ову функцију, како би се могла корисно користити? То су питања на која ћу овде покушати да одговорим.

Нека је дата једначина $f(x)=0$ са коренима $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ претворена у једначину $\varphi(y)=0$, чији су корени $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3 \cdots \xi_n$, са претпоставком да је

$$y = a^x$$

где је a произвољна количина, па се из образаца:

$$\xi_1 = a^{\alpha_1}$$
$$\xi_2 = a^{\alpha_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\xi_n = a^{\alpha_n}$$

лако добија ова релација:

$$\frac{\xi_{k+i}}{\xi_k} = \frac{1}{a^{\alpha_k - \alpha_{k+i}}}$$

Претпоставивши да је $\xi_k > \xi_{k+i}$, у коме је случају и $\alpha_k > \alpha_{k+i}$ (, и по томе је разлика у изложиоцу имениоца на десној страни позитивна. Тада је лако увидети: да дајући количини a извесну довољно велику вредност, може се постићи да мањи корен ξ_{k+i} са врло великом приближношћу исчезава према већем корену ξ_k, и да тачност тога исчезавања зависи једино од вредности које будемо давали тој произвољној количини. Са теоријске стране било би занимљиво сазнати које вредности треба дати количини a па да би се постигла извесна захтевана тачност у исчезавању мањих корена према већима. То би се могло учинити овако. Нека је $\frac{1}{10^r}$ захтевана тачност, па ће према обрасцу () постојати однос:

$$\frac{1}{a^{\alpha_k-\alpha_{k+1}}} < \frac{1}{10^r} \quad \text{или:}$$

$$a^{\alpha_k-\alpha_{k+1}} > 10^r$$

Ако је сад δ број мањи од најмање разлике двају корена једначине $f(x)=0$, то ће последњи услов очевидно бити задовољен ако је

$$a^{\delta} \geq 10^r \quad \text{или:}$$

$$\log a \geq \frac{r}{\delta}$$

Број δ може се наћи по Лагранжу претварајући једначину $f(x)=0$ у једначину њених квадратних разлика, и извлачити квадратни корен из доње границе позитивних корена њених, у коме би случају од два знака пред кореном ваљало задржати само позитиван, као што се даје увидети из ова обрасца ( ).

Из овога се већ увиђа, да функција $\Delta(x)=a^x$ потпуно задовољава услов о испитивању корена, па како се из ње на врло прост начин израчунава и само x, то се она са теоријске стране потпуно може применити у место функције x^k при решавању виших једначина.

Остаје сад да се изврши трансформација једначине $f(x)=0$ у једначину $\Phi(y)=0$, где је $y=a^x$. Како је ово трансцедентна функција, то је једини начин којим би се остварила трансформација, је разлагање те трансцедентне функције у бесконачни збир алгебарских функција употребом познатих бесконачних редова. Помоћу тих редова најзгодније је трансформацију извршити на овај начин.

Означимо збирове корених степена нове и старе једначине са:

$$S_k = \alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$$

$$S'_k = a^{k\alpha_1}+a^{k\alpha_2}+\cdots+a^{k\alpha_n}$$

и разложимо сабирке у последњем обрасцу по познатом експоненцијалном реду:

$$a^z = 1+z\frac{la}{1}+z^2\frac{(la)^2}{1\cdot 2}+\cdots+z^p\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p}+\cdots$$

па се добија:

$$a^{k\alpha_1} = 1+k\alpha_1\frac{la}{1}+k^2\alpha_1^2\frac{(la)^2}{1\cdot 2}+\cdots+k^p\alpha_1^p\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p}+\cdots$$

$$a^{k\alpha_2} = 1+k\alpha_2\frac{la}{1}+k^2\alpha_2^2\frac{(la)^2}{1\cdot 2}+\cdots+k^p\alpha_2^p\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p}+\cdots$$

$$\text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --}$$

$$a^{k\alpha_n} = 1+k\alpha_n\frac{la}{1}+k^2\alpha_n^2\frac{(la)^2}{1\cdot 2}+\cdots+k^p\alpha_n^p\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p}+\cdots$$

Сабирањем ових једначина добија се образац:

$$S'_k = n+k\frac{la}{1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+k^2\frac{(la)^2}{1\cdot 2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)+\cdots+k^p\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p}(\alpha_1^p+\alpha_2^p+\cdots+\alpha_n^p)+\cdots$$

или

$$S'_k = n + \frac{k(la)}{1} S_1 + \frac{k^2(la)^2}{1\cdot 2} S_2 + \cdots + \frac{k^p(la)^p}{1\cdot 2\cdots p} S_p + \cdots$$

а одавде стављајући $k = 1, 2, 3 \cdots n$ означујући краткоће ради

$$\frac{(la)^p}{1\cdot 2\cdots p} = q_p$$

добијају се ови обрасци за свих n збирова корена степена нове једначине:

$$S'_1 = n + q_1 S_1 + q_2 S_2 + \cdots + q_p S_p + \cdots$$
$$S'_2 = n + 2q_1 S_1 + 2^2 q_2 S_2 + \cdots + 2^p q_p S_p + \cdots$$
$$S'_3 = n + 3q_1 S_1 + 3^2 q_2 S_2 + \cdots + 3^p q_p S_p + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S'_n = n + nq_1 S_1 + n^2 q_2 S_2 + \cdots + n^p q_p S_p + \cdots$$

из којих се помоћу збирова корена степена дате једначине и констаната q могу израчунавати збирови корена степена нове једначине.
А збирови: $S_1, S_2, S_3 \cdots S_n$ лако се израчунавају из сачинилаца дате једначине, помоћу познатих Њутнових образаца:

$$S_1 + a_1 = 0$$
$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0$$
$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n + a_1 S_{n-1} + \cdots + a_{n-1} S_1 + n a_n = 0.$$

или повратнога обрасца:

$$S_{n+r} + a_1 S_{n+r-1} + \cdots + a_{n-1} S_{r+1} + a_n S_r = 0$$

у коме треба узастопце стављати $r = 1, 2, 3 \cdots$ и тај посао продужити све дотле, док најзад један од сабирака $\underline{n^r q_r S_r}$ у обрасцу за S'_n не постане врло приближно нули раван, што мора наступити, пошто је сваки од редова ( ) збирљив.

Сам тај рад при израчунавању збирова S' могао би се на овај начин знатно олакшати. Пошто је $\underline{a}$ произвољна количина, од чије све веће и веће вредности долази све већа и већа тачност у овоме раду, то се тој може дати једна извесна довољно велика, у свима случајевима стална вредност, и према тој узетој вредности саставити таблицу вредности констаната $\underline{q}$, по обрасцу:

$$\log q_p = \log q_{p-1} + \log la - \log p,$$

који је последица образаца:

$$q_p = \frac{(la)^p}{p!} \quad \text{и} \quad q_{p-1} = \frac{(la)^{p-1}}{(p-1)!}$$

и у коме треба стављати $p = 1, 2, 3 \cdots$ И уколико се овај посао буде више продужавао, у толико ће бити све већи и већи број случајева за које ће моћи послужити оваква таблица. Помоћу тако добивених вредности

За q могле би се израчунати и вредности:

$$
\begin{array}{llll}
2q_1 & 2^2q_2 & 2^3q_3 & \cdots 2^r q_r \cdots \\
3q_1 & 3^2q_2 & 3^3q_3 & \cdots 3^r q_r \cdots \\
- - - & - - - & - - - & - - - \\
K^1q_1 & K^2q_2 & K^3q_3 & \cdots K^r q_r \cdots
\end{array}
$$

на основу те таблице, сталне за све случајеве, и основу израчунатих збирова $S_1, S_2, S_3 \cdots S_p \cdots$ израчунавали би се и збирови: $S'_1, S'_2, S'_3 \cdots S'_n$. Како се пак из ових збирова израчунавају и сами сачиниоци $b_1, b_2, b_3 \cdots b_n$ нове једначине, позната је ствар из теорије виших једначина. —

Кад је на тај начин извршена трансформација једначине, треба приступити израчунавању корена $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots \xi_n$ дате једначине $\varphi(y)=0$. Но много је удесније израчунавати из сачинилаца те једначине непосредно саме корене $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ дате једначине $f(x)=0$. Кад би сви корени њени — па дакле и једначина $\varphi(y)=0$ — били стварни и један од другога различни, онда би се они врло лако израчунавали из образаца:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \xi_1 \\
b_2 &= \xi_1\xi_2 = b_1\xi_2 \\
b_3 &= \xi_1\xi_2\xi_3 = b_2\xi_3 \\
&- - - - - - - \\
b_n &= \xi_1\xi_2 \cdots \xi_{n-1}\xi_n = b_{n-1}\xi_n
\end{aligned}
$$

јер је тада (на знаке у овим обрасцима не треба се освртати, јер ми тражимо само апсолутне вредности корена)

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\log b_1}{\log a} \\
\alpha_2 &= \frac{\log b_2 - \log b_1}{\log a} \\
&- - - - - - - \\
\alpha_n &= \frac{\log b_n - \log b_{n-1}}{\log a}
\end{aligned}
$$

Које би вредности још само ваљало заменити у дату једначину $f(x)=0$ да би дознали који знак одговара коме корену. Али ако се при тој замени примети, да нека на овај начин добивена вредност корена, ни положна ни одречна не задовољава једначину, онда је то јасан знак да (ако нисмо у раду погрешили) међу коренима једначине има једнаких или уображених корена или и једних и других. У томе случају ваља овако радити. Пошто смо израчунавајући корене на поменути начин, дошли до такве вредности корена ξ_k која ни положна ни одречна не задовољава једначину, треба испитати да ли не постоји још који корен једнак са кореном ξ_k, а то ћемо учинити на овај начин: према обрасцима () увиђамо се, да ако једначина има два корена α_h и α_{h+1} једнака, $(h+1)$ сачинитељ може се представити обрасцем:

$$b_{h+1}=\xi_1\xi_2\cdots\xi_{h-1}\xi_h^2=b_{h-1}\xi_h^2 \;;$$

ако су три корена једнака $(\xi_h=\xi_{h+1}=\xi_{h+2})$, онда је

$$b_{h+2}=\xi_1\xi_2\cdots\xi_{h-1}\xi_h^3=b_{h-1}\xi_h^3$$

и у опште ако су k корена једнаки $(\xi_h=\xi_{h+1}=\xi_{h+2}=\cdots=\xi_{h+k-1})$, онда је:

$$b_{h+k-1}=b_{h-1}\xi_h^k$$

образац из кога се израчунава k-струки корен α_h једначине $f(x)=0$, пред којим се налазе $(h-1)$ корена, и за који се налази образац:

$$\alpha_h=\frac{1}{k\log a}\left(\log b_{h+k-1}-\log b_{h-1}\right)$$

где за сачинитеље b_{h+k-1} и b_{h-1} треба стављати њихове апсолутне вредности. Према индексу првога сачинитеља лако се увиђа да је највећа вредност коју k може добити $k=n-h+1$ јер $(h+k-1)$ може највише бити равно степену n. Према томе ако би сад у обрасцу ( ) стављали за k све целе бројеве између 1 и $(n-h+1)$, па једна од добивених вредности α_h задовољава – тачнија или обрнута – дату једначину, онда је α_h корен те једначине који се јавља k пута: једначина $f(x)=0$ има дакле k једнаких корена по апсолутној вредности равни α_h.

Али ако ни за једну од вредности k између граница 1 и $(n-h+1)$ израчунато α_h не задовољава једначину, то је онда сигуран и непобитан доказ да корени α_h и најближи до њега α_{h+1} морају бити уображени. Сада ћемо радити овако. Из релације:

$$\xi_h\xi_{h+1}=a^{\alpha_h+\alpha_{h+1}} \quad \text{или:} \quad \rho_1^2=a^{2\rho\cos\varphi}$$

где је ρ_1 модул уображених корена једначине $\varphi(y)=0$, а ρ = модул уображених корена једначине $f(x)=0$, а $\cos\varphi$ њихов аргуменат – добија се:

$$\rho\cos\varphi=\frac{\log\rho_1}{\log a}$$

Но из једначине:

$$b_{h+1}=b_{h-1}\xi_h\xi_{h+1}\,,\quad \text{или}:\quad b_{h+1}=b_{h-1}\rho_1^2$$

добија се:

$$\log\rho_1=\frac{1}{2}\left(\log b_{h+1}-\log b_{h-1}\right)$$

са заменом ове једначине у горњу, добија се:

$$\rho\cos\varphi=\frac{1}{2\log a}\left(\log b_{h+1}-\log b_{h-1}\right)$$

одакле треба израчунати вредност $\rho\cos\varphi$, па заменом ове у образац

$$\log b_{h+2}=\log b_{h-1}+\log\xi_h\xi_{h+1}+\alpha_{h+2}$$

~~наставити~~ у изразу $\log\xi_h\xi_{h+1}$ продужити израчунавање корена по истом начину као и до сад.

Радње на овај начин добијају се дакле узгред састојни делова уображених Корена: $\rho\cos\varphi$, $\rho'\cos\varphi'$, $\rho''\cos\varphi''$... Но сад остаје још да се израчунају и састојци: $\rho\sin\varphi$, $\rho'\sin\varphi'$, $\rho''\sin\varphi''$; да могли израчунати уображени Корени.
Из познатога обрасца:

$$(-1)^n a_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$$

а у претпоставци да су неколико Корена уображени, добија се:
(не пазећи на знак $(-1)^n$)

$$a_n = P\rho^2\rho'^2\rho''^2\cdots\cdots \quad \text{или}$$

$$\rho\rho'\rho''\cdots = \sqrt{\frac{a_n}{P}}$$

где су ρ, ρ', ρ'' модули уображених Корена, a_n последњи сачинилац једначине $f(x)=0$, а P производ свију реалних Корена исте једначине, који су већ израчунати. Ако једначина има само два уображена Корена, онда се врло лако израчунати њихов модул ρ по обрасцу:

$$\rho = \sqrt{\frac{a_n}{\rho}},$$

па добивену вредности заменити у изразу $\rho\cos\varphi$, из кога би се тада могао израчунати и аргумент $\sin\varphi$ по обрасцу

$$\rho\sin\varphi = \sqrt{\rho^2-(\rho\cos\varphi)^2},$$

чиме би уображени Корени били потпуно одређени. Но ако једначина има више пари уображених Корена, онда би се из обрасца ( ) могао израчунати само производ модула, а не и сами модули тих уображених. Како би се пак и сами модули могли израчунати, нисам могао до сад решити.

На Аранђелов-дан 1886 год.
Београд

Мих. N. Петровић
фил. I. год.

Изложен рукопис Михаила Петровића налази се и уредно чува у Музеју града Београда у ***Заоставштини Михаила Петровића*** *коју је проф. др Драган Трифуновић доставио Музеју на чување. Овај изузетно вредан документ на два арака, односно осам страна Петровићевог рукописа води се у Музеју града Београда под насловом* ***Семинарски рад Михаила Петровића у првој години филозофије, 1886.*** *и инв. бројем KI–I, 3022.*

РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА У АЛГЕБРИ

Главни доприноси Михаила Петровића у математици налазе се у области диференцијалних једначина, затим у реалној и комплексној анализи. Мада је скоро четвртина његовог научног опуса класификовано у алгебру и од тога више од половине је објављено у иностранству, углавном у француским часописима, ови радови такође су прожети идејама и методама математичке анализе и теорије диференцијалних једначина.[1] Скоро да нема радова чисто алгебарског карактера. Ипак, први Петровићев рад *О једној модификацији Грефеовог метода решавања виших бројних једначина*, има алгебарско обележје. Споменимо да је Петровић овај рад написао већ у деветнаестој години, као студент прве године Велике школе у Београду 1886. године. Рад није објављен и постоји само у рукопису.[2] И један од његових последњих радова *Елементарна посматрања о распореду омањих простих бројева* који је саопштио пред Академијом природних наука 15. јуна 1942. је из теорије бројева – дисциплини блиској алгебри. Рад је штампан тек после Петровићеве смрти, 1946. године.

За избор радова у овој књизи може се рећи да условно припадају алгебри. Неке од ових радова уврстио сам у књигу радова из алгебре, мада технички припадају анализи, с обзиром да разматрани проблеми имају алгебарску формулацију, или се са данашњег, или ондашњег становишта сматрало да припадају алгебри. С друге стране, неки од радова који су према већ поменутој класификацији смештени у област алгебре читалац може наћи у другим књигама овог издања *Сабраних дела Михаила Петровића*. У овој књизи такође се налази избор Петровићевих радова из теорије бројева.

Петровићеви радови из алгебре могу се разврстати у три области: *теорију полинома*, *теорију бројева* и *теорију детерминаната*. У оквиру теорије полинома занимао се за неколико тема – геометрију полинома, тј. распоред нула полинома (са реалним и комплексним коефицијентима) у комплексној равни, опште проблеме у вези са алгебарским једначинама, теорију симетричних функција и нумеричко решавање алгебарских једначина. У теорији бројева Петровић је имао нарочито интересовање за својства простих бројева и

---

[1] Видети Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића,* САНУ, Београд 1969, стр. 629.

[2] Изузетак је наведена књига Д. Трифуновића у којој је објављен овај Петровићев рукопис и коментарисан (стр. 52–60).

Вилсонову теорему. Из теорије детерминаната има заправо пар радова који се углавном односе на њихову примену, пре свега у теорији полинома, али и ван математике, на пример у хемији.

Далеко најзначајнији и најдубљи Петровићеви радови из алгебре припадају области *геометрија полинома*. Погледајмо на шта се тачно односе ови Петровићеви радови. Најбоље објашњење наћи ћемо у краћем опису ове области. Геометрија полинома препозната је и под другим називима, као што су *геометрија нула полинома комплексне променљиве*, затим *аналитичка теорија полинома*, или *аналитичка теорија једначина*. Реч „аналитичка" овде се користи да би се нагласило да се једначине полиномног типа изучавају са неалгебарског становишта, односно методама теорије функција. Ипак, преовладао је једноставан назив геометрија полинома с обзиром да главно место у изучавању ових једначина има геометријска теорија функција комплексне променљиве. Проблеми ове теорије углавном се односе на разматрање распореда нула у комплексној равни полиномне функције $f(z)$, као функције неких унапред изабраних параметара. Ови параметри најчешће су коефицијенти полинома $f(z)$ или нуле, или коефицијенти неког придруженог полинома добијеног алгебарском трансформацијом из $f(z)$, на пример применом оператора диференцирања. Ако параметри варирају у некој области комплексне равни, централни је проблем одредити геометријско место тачака G нула полинома $f(z)$. Скуп G се може састојати из неколико дисјунктних региона $G_1, G_2, \ldots, G_m$, и тада се може поставити питање одређивања скупова G_i , као и броја нула у сваком региону G_i. Друго питање од интереса је, на пример, одређивање региона који садржи унапред задати број нула, или нула најмањег модула полинома $f(z)$. Може се десити да је одређивање региона G исувише компликовано и у том случају G се апроксимира неким једноставнијим скупом, на пример кругом или кружним прстеном S који садржи G. Тада тачно одређивање полупречника круга S даје горњу границу модула нула полинома $f(z)$, док се у случају прстена добија оцена горњих и доњих граница модула нула.

Методе истраживања укључују геометријске операције над комплексним бројевима, примену разних неједнакости и оцена, затим примену извесних принципа на којима су ове конструкције базиране. Међу овим најпознатији је такозвани *Принцип аргумента и његове последице*: Rouché-ова теорема, Caushy-ева индексна теорема, теорема о непрекидности нула и Hurwitz-ова теорема. Дакле, не само по природи проблема, већ и по методама ова област највећим делом припада геометријској теорији функција.

Историјски гледано, почетак ове области настаје пре два века, у време када Гаус, један од највећих математичара свих времена, уводи геометријску репрезентацију комплексних бројева (Гаусова раван). Први прилози потичу од Гауса и Кошија. Гаус у својој дисертацији (1799. године) доказује *Основни став алгебре*: сваки полином са комплексним коефицијентима степена ≥ 1 има нулу у комплексној равни, као и да полином

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_0$$

нема нула ван одређеног круга $|z| = R$. Истовремено доказује да уколико су сви коефицијенти a_i реални, тада се може узети да је $R = \max(1, \sqrt{2S})$, где је S сума позитивних коефицијената a_i. Много касније, 1849. године, Гаус доказује да се за случај комплексних коефицијената за R може узети позитиван корен једначине $z^n - \sqrt{2}(|a_1|z^{n-1} + \ldots + |a_n|) = 0$. Колико је велико било Гаусово занимање за ову област може се видети из једног његовог писма које је упутио Schumacher-у 1833. У њему Гаус пише да је о овој теми написао довољно да се испуни неколико томова књига. Многе од ових резултата Гаус никад није објавио, а могле су се наћи спорадичне белешке у његовим свескама, иначе посвећеним астрономији. Споменимо да је Гаус увео термин *комӣлексни* број. Од Argand-а потиче други назив, *имаīинарни* број, који је Петровић углавном користио.

Коши је такође дао неке од најзначајнијих прилога овој области. Тако је, на пример, 1829. извео прецизније оцене модула нула полинома од Гауса. Такође, Коши је увео теорију индекса и доказао фундаментални Принцип аргумента.

Осим Гауса и Кошија, низ других математичара развијало је ову област. Многи резултати из геометрије полинома настају из покушаја да се Ролова теорема, Декартова теорема и Кошијева теорема пренесу из поља реалних бројева на комплексни домен. Споменимо само неколико имена математичара који су дали важне доприносе овој области: Van Vleck, Marden, Bieberbach, Hermite, Póllya-Scegö, Dieudonné, Hadamard.

Велики број резултата који се односе на полиноме успешно је пренет на важне класе других функција, као што су на пример, целе и мероморфне функције, и уопште функције комплексне променљиве представљене Тејлоровим редовима. Петровић је управо у овој области испољио велики таленат и оригиналност. Рад у области геометрије полинома и генерално у теорији функција започиње под утицајем Ермита и Адамара. Петровићеви радови из геометрије полинома додирују велики број напред описаних тема и метода. Размотримо укратко Петровићеве радове из ове области.

Један од првих радова из геометрије полинома је ДТ39 [1899].[3] Рад се односи на распоред корена у комплексној равни алгебарске једначине $f(x) = 0$ у односу на дату кружницу C са центром у координатном почетку O. Овде Петровић одређује услове за спољашњи и унутрашњи полупречник кружног прстена P, такође са центром у O, а који садржи кружницу C. На основу полупречника кружнице којим је дефинисан прстен P налази алгебарски израз одакле одређује тачан број p „унутрашњих" корена ове једначине, тј. нула садржаних унутар кружнице C. Овај израз је логаритамски извод трансформисаног полинома $f(x)$. Трансформација коју примењује на полином добија се итерацијом алгебарског пресликавања $x \mapsto \sqrt{x}$. Споменимо да је рад презентовао Ермит у оквиру секције геометрија у часопису у којем је објављен.

[3] Ознака за Петровићеве расправе наведене у поглављу *Објављени радови Михаила Пеӣровића – Алīебра* у овој књизи (стр. 274–277).

У раду ДТ58 [1901], штампан у Билтену француског математичког друштва, Петровић се бави одређивањем доњих граница модула нула датог Тејлоровог рада уз претпоставку да постоји зависност у низању коефицијената реда, или бар нумеричке вредности довољног броја тих коефицијената. У одређивању ове оцене полази од Адамарове неједнакости која се односи на норму детерминанте и модула вектора врсте исте детерминанте. Такође наводи више примера на којима су те оцене илустроване. Овим радом Петровић заправо наставља истраживање понашања функција представљених Тејлоровим редовима које је започео Адамар. Нарочито је занимљив Петровићев резултат о кругу у којем такве функције немају нула. Не само резултат већ и идеја доказа су Петровићева оригинална замисао. Рад је привукао пажњу неколико познатих математичара оног времена. На пример, немачки математичар Е. Ландау (Landau) изучава овај рад и четири године касније у истом часопису детаљно анализира поменути Петровићев резултат. Тако, доказује да је он последица Јенсенове неједнакости. Занимљиво је да је Јенсен доказао своју неједнакост исте године када је Петровић објавио овај рад. И други познати математичари се надовезују и допуњују Петровићев рад: Фејер (Fejer), Харди (G. H. Hardy), Монтел (P. Montel).

У раду ДТ82 [1906], Петровић утврђује за једну широку класу полинома S област комплексне равни која садржи све нуле полинома из те класе. Реч је о полиномима $J(x)=\sum_{k\le n} a_k x^k$, где су коефицијенти представљени интегралом

$$a_k=\int_a^b A(t)\,r(t)^n\,dt.$$

Област се састоји из пресека сектора и кружних прстена, а углови сектора и пречници кружних прстена се прецизно описују утврђивањем аргумената и оцене модула полинома $p(x)$. Занимљиво је да се оцене вредности аргумената једноставно одређују на основу промене знака три функције $\sin(x)$, $\sin(nx)$ и $\sin((n+1)x)$. Рад садржи велики број интересантних примера за које су изведене оцене конкретизоване, тј. тачно су описане области комплексне равни наведене врсте. Такође утврђује реалан интервал који садржи све реалне корене полинома $J(x)$.

Први део рада ДТ97 [1908] делимично се преплиће са једним претходним Петровићевим радом (ДТ90) и односи се на симетричне функције. При томе уводи низ рационалних функција $N_k(x)$ придружених датом полиному применом логаритамског извода на претходне чланове низа. У другом делу рада бави се распоредом нула у комплексној равни дате алгебарске једначине. Утврђује природну везу између низа $N_k(x)$ и броја корена једначине чији модул је ограничен неким позитивним реалним бројем ρ. Као и остали радови и овај је илустрован бројним нумеричким примерима.

У раду ДТ119 [1913] Петровић најпре изводи, полазећи од основне Адамарове неједнакости, неколико нових неједнакости – оцена максималног модула детерминанте D n-тог реда над пољем комплексних бројева. Тако, користећи однос аритметичке и геометријске средине налази:

$$|D| \leq B^n / \sqrt{n^n},$$

где је B квадратни корен из суме квадрата модула свих елемената детерминанте. Потом користи ове неједнакости за разне оцене решења алгебарских једначина и система линеарних једначина. На пример, изводи оцену модула основне симетричне функције $s_n = \alpha_1^k + \ldots + \alpha_n^k$ корена α_i алгебарске једначине n-тог реда. Надовезујући се на Адамарове теореме даје оцене нула целих функција. На крају, користећи само цитирану неједнакост о модулу детерминанте, даје директан и у основи елементаран доказ теореме која се односи на нуле најмањег модула Тејлоровог реда. Овај доказ посебно је занимљив с обзиром да је Ландау доказао исту теорему на сасвим други (и тежи) начин користећи апарат аналитичких функција.

У раду ДТ134 [1913] Петровић се бави следећим проблемом.

Одредити низове $\omega_0, \omega_1, \ldots$ *реалних бројева такве да ако алгебарска једначина* $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ *има све корене имагинарне, онда и једначина*

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \ldots + \omega_n a_n x^n = 0$$

такође има све корене имагинарне.

Сличан задатак, али за реалан случај, расправљао је Laguerre. Петровић даје опште решење проблема у виду производа релативно једноставних интеграла. Затим наводи више занимљивих примера бирајући конкретне примере интеграла. Исти проблем варира, да својство реалности, односно имагинарности корена буде одржано у случају да се испусти одређен број чланова полинома. У другом делу рада расправља сличне проблеме, али сад у случају степених редова. Све ове резултате користи у одређивању распореда нула ових функција, на пример, у налажењу доње границе модула нула функција представљених Тејлоровим редом. Рад је богато илустрован занимљивим примерима. Делове овог рада Петровић је саопштио на Међународном конгресу у Риму 1908. и резултати рада имали су запажен одјек. На пример, даља проширења и генерализације дао је Полиа, док Р. Јенч (R. Jench) наводи исти рад у својој тези. Према речима академика М. Томића, Јенчова теорема да одсечци Тејлоровог реда имају тачке нагомилавања на целој периферији круга конвергенције представља само крајњи домет ове врсте ставова.

Један од последњих Петровићевих списа посвећен у потпуности геометрији полинома је рад ДТ162 [1919]. И овде се Петровић бави распоредом нула алгебарске једначине $f(x) = 0$ у комплексној равни. Наиме, одређује кружни прстен C у којем полином $f(x)$ има бар један корен и то најмањег модула. Дакле, $f(x)$ нема нула окружених прстеном C. Примерима полинома показује да је тако добијен прстен C најбоље одређен. Овај рад је у вези са резултатима неколико других математичара који су се бавили истим питањем, између осталих Л. Фејера и Е. Ландауа.

У једном броју радова Петровић се бави разним питањима из теорије алгебарских једначина која нису у непосредној вези са геометријом полинома. Ови проблеми најчешће су везани за разне алгебарске и трансцендентне трансформације алгебарских једначина, симетричне функције, неједнакости и сумационе формуле из анализе. Занимљиво је да у основи неколико радова лежи Грефеова (Gräffe) трансформациона метода за издвајање нула највећег модула дате алгебарске једначине. Подсетимо се да је Петровић први пут о томе писао (рукопис ДТР) још као студент и већ у њему имао оригиналних доприноса. Детаљну анализу овог рукописа урадили су М. Стојаковић и Д. Трифуновић у чланку *Пeтровићева модификација Грефеове мeтоде за решавање алгебарских једначина* који је објављен у књизи поводом стогодишњице Петровићевог рођења *Споменица Михаила Петровића, 1868–1968*. Стога се овом приликом нећу детаљно бавити овим рукописом, али зато погледајмо о чему је Петровић писао у осталим радовима из ове области.

У доста опсежном раду ДТ53 (1899) Петровић примењује трансцендентне трансформације на алгебарске једначине, али тако да трансформисана једначина остаје алгебарска. Петровић заправо решава следећи проблем: образовати нову алгебарску једначину J' из дате алгебарске једначине J такву да између корена α_i једначине J и корена β_i једначине J' постоји веза облика

$$\beta_i = R(e^{r\alpha_i}, e^{r\alpha_j}, \ldots),$$

или

$$\beta_i = R(\sin(r\alpha_i), \sin(r\alpha_j), \ldots),$$

или

$$\beta_i = R(\cos(r\alpha_i), \cos(r\alpha_j), \ldots),$$

где R означава некакву алгебарску, рационалну или симетричну функцију. Као што видимо, у овом раду се појављује одсјај идеја из првог Петровићевог рукописа ДТР. Истина, овде се не бави поступцима за нумеричко израчунавање корена полинома већ ове трансформације уводи са циљем да утврди распоред и број нула датог полинома у комплексној равни. Дакле, овде најављује тему којом ће се са великим успехом бавити у следеће две деценије. У самом раду решава неколико проблема. Први је у вези са Хурвицовом теоремом, да се одреди број комплексних корена алгебарске једначине чији је реални део мањи од нуле. Други задатак који решава је да се за дату алгебарску једначину одреди полином чије су нуле једнаке парцијалним збировима корена полазне једначине. Најзад, у трећем делу, користећи већ добијене резултате, даје метод за израчунавање једне класе интеграла. Споменимо да је Петровић овај рад објавио у Rad-у JAZU, непосредно по пријему у чланство JAZU.

У раду ДТ81 [1906] Петровић даје нов и у основи елементаран доказ једне Њутнове теореме која даје довољне услове за коефицијенте полинома да дата алгебарска једначина има корен који није реалан. Мада је Њутн ову теорему формулиса, доказ није објавио, нити је оставио наговештај доказа у било којем виду. Први доказ Њутнове теореме потиче од енглеског математичара Силвестера из 1866. године. Заправо ова теорема је последица једне општије Силвестерове теореме о броју реалних корена алгебарске једначине у датом интервалу. У свом доказу Петровић уводи низ алгебарских трансформација да би на крају применио Ролову теорему. У другом делу рада детаљно анализира примену теореме у случају кубне једначине. На крају изводи применом Њутнове теореме занимљиву неједнакост за реални полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, степена n, са позитивним коефицијентима и чије су све нуле реалне

$$f(x)\le\left(1+\frac{a_1x}{na_0}\right)^n.$$

У раду ДТ90 [1907] Петровић налази аналитички израз за једну симетричну функцију корена датог полинома. Овај образац Петровић изводи на два начина. У првом користи својства логаритамског извода, док у другом извођењу примењује Грефеову методу, вршећи трансформације на полазној једначини тако да су корени трансформисаног полинома добијени применом итерације корене функције на нуле првобитног полинома. Сличним поступком изводи одговарајућу формулу за симетричне функције целих функција. Један део рада односи се на проблем раздвајања нула полинома у комплексној равни. Рад садржи неколико детаљних примера који илуструју Петровићеве методе.

Преостала два рада у овом изобру из теорије алгебарских једначина немају исту тежину као остали радови на ову тему. Ипак и ови чланци илуструју одређене Петровићеве идеје. Тако, у раду ДТ135 [1914] Петровић је уочио да се полином $f(x)$ парног степена $2n$ може представити у облику

$$f(x)=P^2+Q^2-M^2,$$

где су P, Q и M полиноми степена n. Користећи ово својство даје поступак свођења алгебарских једначина парног степена на алгебарске једначине двоструко мањег степена. Овај поступак примењује и детаљно анализира у случају алгебарских једначина степена 4 и 6. У раду ДТ275 [1933], Петровић се бави бесконачним сумама S низа полинома истог степена. Уз претпоставку да производ коефицијената полинома уз x^{2k} и броја n^{2k} зависи једино од k, доказује да је сума S једнака вредности једног полинома $f(x)$ за $x=\pi^2$. У основи доказа лежи позната формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=A_{2k}B_{2k}\pi^{2k},$$

где је A_{2k} одређена рационална константа и B_{2k} је Бернулијев број.

Поред математике, Петровић је завршио и студије физике. Ово његово занимање и за природне науке има одраза у раду ДТ230 [1928]. Наиме Петровић разматра детерминанту

$$\Delta_n=\left\| a_{ij}\right\|_{n\times n},$$

где су елементи детерминанте одређени формулом $a_{ki} = \alpha_k + r_k g_i$, $1 \le i,\ k \le n$. Као што се одмах види, ова детерминанта је идентички једнака нули за $n > 2$, и у том смислу она није од неког интереса. Али Петровић налази једну занимљиву примену ове детерминанте у квантитативној хемијској анализи у одређивању састојака неке хемијске смесе. Наиме, ако се смеса састоји из n елемената, на пример метала A_i, $1 \le i \le n$, мерењем се утврђују величине везане за ту смесу. На тај начин се добија систем линеарних једначина и детерминанта система је управо Δ_n. Одатле Петровић закључује да је анализа смесе једнозначно изводљива само ако је број метала који чине смесу једнак два, док је „израчунавање величине ρ_k (апсолутан број који показује колико је атомских маса метала A_k садржано у смеси) илузорно".

Магија простих бројева привлачила је већ математичаре античке Грчке. Многе дефиниције, теореме и поступци који се тичу ових бројева воде порекло из древних времена. Петровића је очигледно занимала теорија бројева, нарочито особине простих бројева. Објавио је већи број радова из ове области у познијем делу живота. Добар део тих радова односи се на просте бројеве и Вилсонову теорему из елементарне теорије бројева:

Ако је p *прост број онда* $(p-1)! = -1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Ови Петровићеви чланци немају исту дубину као, на пример, његови радови из геометрије полинома. Са данашњег становишта, методе у овим радовима углавном су елементарне, а идеје једноставне. Ако бисмо његове најбоље радове из геометрије полинома поредили са бриљантним шаховским партијама, онда су чланци из теорије бројева често били само двопотезни шаховски проблеми. Ипак, и они садрже одређену математичку духовитост, а Петровићева оригиналност огледала се у томе што је просте бројеве проналазио у оним математичким ситуацијама, нарочито у анализи, које можда други не би видели.

У раду ДТ129 [1913] Петровић, полазећи од Вилсонове теореме и особина Г-функције конструише класу функција чије су нуле тачно прости бројеви. Један пример такве функције, заправо главни пример у раду, добија се супституцијом $u = (1+\Gamma(x))/x$ у изразу $a\cos(2\pi x) + \sin(2\pi u) - (a+b)$, $a, b > 0$.

У раду ДТ159 [1919] Петровић дефинише једну класу целих функција $F(x)$ представљених Тејлоровим редом, где су коефицијенти реда одређени једним низом одређених интеграла. Главно својство ових функција је да се сума $\Sigma F((2n-1)\pi)$ изражава помоћу низа простих бројева, док кључно место у доказу има Вилсонова теорема. Као један пример примене добијених резултата, Петровић изводи Линделефову (Lindelöf) теорему да ред $\Sigma\Gamma(2n\pi)$ конвергира, да би затим одредио суму тог реда.

У раду ДТ163 [1919] примењује Вилсонову теорему у одређивању целобројних вредности неких одређених интеграла. Главни пример у раду је интеграл

$$I(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty (v^p - v^q)\,udzdt\,,\quad (p>q>4),$$

где је $u=e^{-t}/((te^{-z}-1)t)$, $v=te^{-z}$, чија је вредност $\sum_{n=p}^{q-1}\frac{(n-1)!}{n}$. Применом Вилсонове теореме налази да је $I(p,q)$ цео број ако и само ако интервал $(p,q-1)$ не садржи ни један прост број. Други део чланка је сличне природе, с тим да се уместо конкретних функција u и v разматра класа функција полиномно-експоненцијалног типа.

За садржај рада ДТ168 [1920] можемо рећи да је смештен негде између области диофантовских апроксимација и комбинаторне теорије бројева. Наиме, Петровић утврђује тачну везу између броја решења диофантовске једначине

$$ax+by+\ldots+gt=k,\quad a,b,\ldots,g \text{ су прости бројеви.}$$

$$0\le x\le m,\ 0\le y\le n,\ 0\le t\le s,$$

и облика децималног развоја броја

$$N=\frac{9_{(m+1)ah}}{9_{ak}}\cdot\frac{9_{(m+1)bh}}{9_{bk}}\cdot\frac{9_{(m+1)ch}}{9_{ck}},$$

где 9_n означава природан број записан у декадном систему са n деветки. У чланку Петровић наставља Laguerre-ов рад на исту тему. У чланку се такође налази већи број нумеричких примера.

У раду ДТ191 [1925] Петровић решава следећи проблем. Одредити низ реалних бројева $u_0,u_1,\ldots,u_n$ таквих да је производ првих k узастопних бројева низа једнак њиховој суми. У вези са тим задатком налази рекурентне формуле за низ u_n. Исте, али и неке друге рекурентне формуле разматра и над прстеном реалних полинома и показује како се први, аритметички проблем, може свести на изучавање једне класе полинома.

За рад ДТ289 [1934] такође се може рећи да припада области диофантовских апроксимација. Овде се Петровић бави следећим проблемом. Нека је $\lambda_0=1,\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ низ позитивних целих бројева. Тада се сваки позитиван реалан број може представити као сума конвергентног реда чији су чланови несводљиви разломци који за имениоце имају позитивне целе бројеве, а за бројиоце чланове низа λ_i. У општем случају ефективно представљање броја N помоћу таквог реда претпоставља експлицитно познавање чланова низа λ_i. Петровић доказује да ако је λ_i низ простих бројева, онда за овакво разлагање реалних бројева није обавезно експлицитно познавање чланова низа λ_i. У том доказу опет користи Вилсонову теорему. Рад је илустрован већим бројем примера, углавном су то елементи алгебарског раширења поља $Q(e)$.

У раду ДТ313 [1936] Петровић разматра криву $y=(\log x)^{2k}$ (k је природан број) и два геометријска лика која ограничавају та крива и координатне осе. У израчунавању површине ових ликова јавља се интеграл

$$\int_0^1 (\log x)^{2k} dx = (2k)!.$$

Да би однос између површина ликова био цео број, Петровић доказује уз помоћ Вилсонове теореме да $2k+1$ мора бити прост број. Поред ове, у раду се налази још једна геометријска интерпретација Вилсонове теореме сличне врсте.

У раду ДТ344 [1938] Петровић проучава степене редове вида $\Sigma a_n x^n$ код којих су коефицијенти a_n рационални бројеви облика p_n / q_n, где су p_n и q_n узајамно прости и при томе низ p_n има својство: $p_n = 1$ ако и само ако је n прост број. Пример таквог реда је Тејлоров развој функције $\lambda(x) = (x+x^2)e^x - x$. Петровић налази једну класу таквих функција $\lambda(x)$, одређених са

$$\lambda(x) = x\mu(x) + x^2\mu'(x) - x,$$

где коефицијенти Тејлоровог развоја функције $\mu(x)$ задовољавају одређене услове. У основи целе конструкције налази се једноставна чињеница да за $n > 4$, n дели $(n-1)!$ ако и само ако n није прост број.

Један од последњих Петровићевих списа из математике уопште је рад ДТ388. Рад је Петровић изложио пред Академијом 1942, а сам рад је штампан тек после Петровићеве смрти 1946. У овом доста великом раду, Петровић се бави одређивањем тачне расподеле малих простих бројева, тј. израчунавањем функције $\pi(x)$ помоћу аритметичких израза за мало x. У његовом примеру $x \approx 1000$. У својим разматрањима полази од чињенице да је сваки прост број ≥ 5 облика $6m \pm 1$ и анализом фактора ових бројева повезује постављен проблем са решењима одређених диофантовских једначина. На пример, доказује да диофантовска једначина

$$6xy + x - y = m$$

нема решења у скупу природних бројева ако и само ако је $6m-1$ прост број. За решења ових диофантовских једначина такође даје геометријску интерпретацију. Наиме конструише целобројну мрежу и пребрајањем тачака ове мреже кроз које пролази хипербола $6xy + x - y = m$ налази тачне оцене за број простих, односно сложених бројева мањих или једнаких од датог броја n. Рад је илустрован већим бројем нумеричких примера. Исто тако, овде се налази више занимљивих оцена и формула. На пример, доказује да сложених бројева облика $6m-1$, а мањих од n, има највише

$$\frac{n-1}{36}[\ln(n+21) - 2{,}9628].$$

Или, на пример, приближна формула за број простих бројева $\leq n$ (за мало n) изгледа

$$\pi(n) \approx \frac{n}{18}(3 - \ln n) - \frac{\sqrt{n}}{6}.$$

Петровић није био само велики математичар, светски путник и алас, већ и изврстан универзитетски професор. Као професор Филозофског факултета за своје студенте написао је неколико уџбеника и скрипти. Тако је заједно са својим колегом Николом Салтиковом, исто професором Филозофског факултета, написао обимна скрипта из теорије алгебарских једначина. Ова скрипта са аналитичким приступом, написана по њиховим предавањима, односе се углавном на теорију реалних и комплексних полинома. Не улазећи у детаље, рецимо да су поред основних особина полинома овде представљене области и теме за које се Петровић занимао у својим научним радовима. Изложене су основне теореме о раздвајању и оценама реалних и комплексних корена полинома, алгебарске трансформације полинома, затим основе теорије симетричних функција, као и преглед нумеричких метода за решавање алгебарских једначина. Скрипта садржи велики број примера и задатака. Мада су данас ретка, бољи студенти математике их и сада радо користе, не само због доброг избора задатака, већ да би се упознали са оним деловима алгебре који су делом запостављени у савременим курсевима математике.

Ако говоримо о Петровићевом раду на Универзитету морамо рећи да је заједно са својим другом и нешто старијим колегом, професором Богданом Гавриловићем, унапредио српску математику до европског нивоа. Деловање ова два наша научника, који се могу сматрати творцима савремене српске математике, заслужује посебну пажњу и анализу. Не упуштајући се у дубљу анализу, споменимо неколико детаља. Петровић је био изразити представник Француске математичке школе с краја XIX века, док је Гавриловић, Вајерштрасов ученик, био под утицајем пре свега немачких и енглеских математичара који су у то време развијали апстрактну алгебру и примене алгебре у геометрији. Док је тежиште Петровићевог рада лежало у аналитичким методама, Гавриловић се више бавио линеарном алгебром и геометријом. Петровић је углавном објављивао научне радове, док је Гавриловић писао вредне уџбенике из алгебре и геометрије монографског карактера. Рецимо да су од 1894. до 1909, дакле пуних петнаест година и у пуном њиховом научном успону њих двојица били једини професори београдске Високе школе и касније (од 1905) Београдског универзитета, истина захваљујући онда владајућем правилу *numerus clausus*. Тек 1909, захваљујући њиховом ангажовању, из Беча у Београд долази Милутин Миланковић који тако постаје трећи професор (примењене) математике на Универзитету. У сваком случају, и Петровић и Гавриловић, сваки на свој начин, допринели су развоју математике код нас и стварању посебне атмосфере захваљујући којој од провинцијског града Београд постаје један од центара научног рада.

Петровић је био веома плодан и разноврстан математичар. Објавио је пар стотина радова, већином у најпознатијим страним часописима. Изнео је нове и оригиналне идеје и учинио значајне продоре у светској науци. Ова чињеница мора се нарочито ценити имајући у виду околности и време у Србији када је Михаило Петровић стварао. Његови резултати из алгебре који су тесно везани за теорију функција, били су препознати, цитирани и даље развијени од стране водећих математичара: Ермита, Ландауа, Полиа, Фејера, Хардија, Монтела и других. Тридесетак Петровићевих радова, четири из алгебре и теорије бројева приказани су у немачком реферативном журналу из математике Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete. Треба имати у виду да су то само радови објављени после 1930, од када овај журнал излази. Његове теореме и радови из геометрије полинома забележени су у најпознатијој монографији из ове области, у књизи Morrisa Mardena *Geometry of polynomials*. У овом издању Америчког математичког друштва (књига је доживела два издања, 1949. и 1966) цитирана су четири Петровићева рада: ДТ39, ДТ58, ДТ97 и ДТ134. Споменимо да је у овој монографији цитирано и неколико других наших математичара: Ј. Карамата, М. Томић, Б. Рајшајски, Д. Марковић и Ш. Раљевић. Марковић овде има највећи број цитираних радова (шест) и може се сматрати правим настављачем Петровићевог рада у области геометрије полинома код нас. У новије време у истој области значајне прилоге дао је С. Прешић. Стога се са разлогом може прихватити мишљење академика Томића, да је геометрија полинома, заједно са теоријом функција (области које се тешко могу раздвојити), можда најзначајнија Петровићева област и да је у њој постигао највеће достигнуће. Такође видимо да је Петровић донео ову област код нас и да је захваљујући његовом утицају неколико значајних српских математичара радило и ту имало препознатљиве и вредне прилоге.

Жарко Мијајловић

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА
– АЛГЕБРА –

Као што је већ поменуто, Петровићев наставнички и научни опус из алгебре садржи приближно четвртину целокупне професорове научне делатности. То су разноврсни радови са чисто алгебарским темама, али има и оних расправа које су на граници алгебре и анализе, како реалне тако и комплексне промењиве.

Овде доносимо наслове објављених Петровићевих радова из алгебре. Шира библиографска обрада наведених наслова изложена је у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

Знаком Δ на крају наслова обележен је рад који је објављен у овој, 4. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*. Сви изложени наслови Петровићевих радова носе и своју ознаку у поменутој широј библиографији (нпр. **ДТ 81**).

1Δ О ЈЕДНОЈ МОДИФИКАЦИЈИ ГРЕФЕОВОГ МЕТОДА ЗА РЕШАВАЊЕ ВИШИХ БРОЈНИХ ЈЕДНАЧИНА, Велика школа у Београду, Београд, 1886, стр. 7 (**ДТ R**).

2Δ THÉORÈME SUR LE NOMBRE DE RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUES COMPRISES À L'INTÉRIEUR D'UNE CIRCONFÉRENCE DONNÉE, CR, t. CXXIX, 16, pp. 583–586 (**ДТ 39**).

3 SUR UNE MANIÈRE D'ÉTENDRE LE THÉORÈME DE LA MOYENNE AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, Math. Annalen, Leipzig, 1899, 54, 3, pp. 417–436 (**ДТ 40**).

4 SUR LE NOMBRE DE RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE COMPRISES À L'INTÉRIEUR D'UNE CIRCONFÉRENCE DONNÉE, CR, t. CXXIX, 22, pp. 873–875 (**ДТ 41**).

5Δ ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА, Рад 143 (29), стр. 107–141 (**ДТ 53**).

6Δ REMARQUE SUR LES ZÉROS DES SÉRIES DE TAYLOR, Bulletin SMF, t. XXIX, pp. 303–312 (**ДТ 58**).

7Δ О АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА СА ИМАГИНАРНИМ КОРЕНИМА, Глас LXXI, (I, 28), стр. 12–29 (**ДТ 81**).

8^Δ О РАСПОРЕДУ КОРЕНА ЈЕДНЕ ОПШТЕ КЛАСЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА, Глас LXXI (I, 28), стр. 99–120 (**ДТ 82**).

9 НЕПОСРЕДНА ПРИМЕНА РЕАЛНИХ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА НА АЛГЕБАРСКЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Глас LXXIII (I, 29), стр. 1–76 (**ДТ 88**).

10^Δ ЈЕДНА СИМЕТРИЧНА ФУНКЦИЈА КОРЕНА И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ, Глас LXXV (I, 30), стр. 75–100 (**ДТ 90**).

11 PROCÉDÉ ÉLÉMENTAIRE D'APPLICATION DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES AUX EQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES, Nouv. ann. de math., 4° s., t. VIII, pp. 1–15 (**ДТ 93**).

12 SUR UNE CLASSE REMARQUABLE DE SÉRIES ENTIÈRES, Atti del IV Congresso intern. dei Mat., Roma, 1908, s. 1, II, pp. 36–43 (**ДТ 96**).

13^Δ SUR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES RATTACHÉES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, Bulletin SMF, t. XXXVI, pp. 141–150 (**ДТ 97**).

14 SUR DES TRANSCENDANTES ENTIÈRES GÉNÉRALISANT LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET TRIGONOMÉTRIQUES, CR, t. CLVI, 16, pp. 1213–1215 (**ДТ 117**).

15^Δ ТЕОРЕМА О МАКСИМАЛНОМ МОДУЛУ ДЕТЕРМИНАНТЕ И НЕКОЛИКЕ ЊЕНЕ АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ, Рад 200 (55), стр. 1–18 (**ДТ 119**).

16^Δ COURBES DÉCOUPANT SUR UNE DROITE FIXE LES LONGUEURS REPRÉSENTANT LA SUITE INDÉFINIE DES NOMBRES PREMIERS, Nouv. ann. de math., 4° s., t. XIII, pp. 1–4. (**ДТ 129**)

17^Δ ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES DÉPOURVUES DE RACINES RÉELLES, Bulletin SMF, XLI, pp. 194–206 (**ДТ 134**).

18^Δ ТЕОРЕМА О АЛГЕБАРСКИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПАРНОГА СТЕПЕНА, Рад 202 (56), стр. 124–131 (**ДТ 135**).

19 QUELQUES FORMES SPÉCIALES DU THÉORÈME DE LA MOYENNE, Nouv. ann. de math., 4° s., t. XIV, pp. 179–184 (**ДТ 138**).

20 THÉORÈME DE LA MOYENNE RELATIF AUX INTÉGRALES DES ARCS, Jahresbericht der deutschen Mathematiker–Vereinigung, Leipzig, 1914, 23, pp. 91–97 (**ДТ 140**).

21 SUR QUELQUES FONCTIONS DES CÔTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE, Enseig. math., XVIII, 3–4, pp. 153–163 (**ДТ 143**).

22 THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES, Enseignm. math., XVIII, 3–4, pp. 163–176 (**ДТ 144**).

23 RELATIONS D'INÉGALITÉ ENTRE LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMETRIQUES, CR, t. CLXIII, 4, pp. 81–84 (**ДТ 146**).

24 MODULE D'UNE SOMME, Enseignm. math., XIX, 1–2, pp. 53–56 (**ДТ 149**).

25 SUR QUELQUES EXPRESSIONS NUMÉRIQUES REMARQUABLES, CR, t. CLXIV, 19, pp. 716–718 (**ДТ 151**).

26^Δ FONCTIONS ENTIÈRES SE RATTACHANT AUX NOMBRES PREMIERS, CR, t. CLXVIII, 11, pp. 542–544 (**ДТ 159**).

27$^{\Delta}$ THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES ÉQUATOINS ALGÉBRIQUES, Nouv. ann. de math., 4° s., t. XIX, pp. 1–4 (**ДТ 162**).

28$^{\Delta}$ INTÉGRALES DÉFINIES DONT LA PARTIE DÉCIMALE S'EXPRIME À L'AIDE DE NOMBRES PREMIERS, CR, t. CLXIX, 16, pp. 683–685 (**ДТ 163**).

29$^{\Delta}$ PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE CLASSE DE NOBRES RATIONNELS, Bulletin SMF, XLVIII, pp. 27–32 (**ДТ 168**).

30 ЕЛЕМЕНТАРНА РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ПРАВИХ И КРИВИХ ДУЖИ, Глас XCIII (I, 39), стр. 62–74 (**ДТ 170**).

31 PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, Bulletin SMF, LII, pp. 514–519 (**ДТ 184**).

32$^{\Delta}$ ПРОДУКТИ ЈЕДНАКИ ЗБИРУ СВОЈИХ ЧИНИЛАЦА, Глас CXVI (I, 52), стр. 1–9 (**ДТ 191**).

33 ВЕЗА ИЗМЕЂУ ПРОСТИХ БРОЈЕВА И ЈЕДНЕ КЛАСЕ ТРАНСЦЕНДЕНАТА, Глас CXX (I, 55), стр. 1–17 (**ДТ 206**).

34 LOGARITHME D'UNE SOMME ET D'UNE DIFFÉRENCE, Enseignm. math., XXVI, 4–5–6, pp. 300–302 (**ДТ 222**).

35 ЈЕДНО ПИТАЊЕ ИЗ НАСТАВЕ О ЛОГАРИТМИМА, Гласник проф. друштва, VIII, 1, стр. 42–45 (**ДТ 227**).

36$^{\Delta}$ SUR UNE CLASSE DE DÉTERMINANTS. CR, du Congrès de l'Assoc. Française pour l'avanc. des sciences, La Rochelle, 1928, pp. 1–3 (**ДТ 230**).

37 РАЧУНАЊЕ СА БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА, Београд, 1932, стр. II + 193; 15,9 × 23,7 (**ДТ 262**)*.

38 SUR UNE FONCTIONNELLE, Publications, 1932, I, pp. 149–156 (**ДТ 264**).

39$^{\Delta}$ SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES DE MÊME DEGRÉ, Publications, 1933, II, pp. 82–84 (**ДТ 275**).

40$^{\Delta}$ UN MODE DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES POSITIFS, Věstnik, Praha, 1934, T. II, pp. 1–7 (**ДТ 289**).

41 REMARQUES ARITHMÉTIQUES SUR LES INTÉGRALES ABELIENNES À COEFFICIENTS TAYLORIENS COMMENSURABLES, Publications, 1934, III, pp. 1–12 (**ДТ 292**).

42 ЈЕДАН ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ И ЊЕГОВЕ ПРИМЕНЕ, Српска краљевска академија, Београд, 1936, стр. V + 235; 16 × 24,3 (**ДТ 307**)**

43 НЕОДРЕЂЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Глас CLXXIII (I, 85), стр. 171–180 (**ДТ 312**).

44$^{\Delta}$ INTERPRÉTATOINS GÉOMÉTRIQUES DU THÉORÈME DE WILSON, Sphinx, Bruxelles, 1936, VI, 7, pp. 110–111 (**ДТ 313**).

45 RÔLE DES DÉCIMALES DANS CERTAINS PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE, Publications, 1936, V, pp. 1–9 (**ДТ 316**).

---

* Објављено у 8. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*.

** Исто.

46 ЈЕДНА ВРСТА БРОЈНИХ КВАЗИ-ИНВАРИЈАНАТА, Глас CLXXV (I, 86), стр. 137–174 (**ДТ 325**).

47 INTÉGRALES ABÉLIENNES A BORNE ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES, Bulletin des Sciences math., 2° s., LXI, pp. 290–295 (**ДТ 331**).

48 SÉRIES DE PUISSANCES À COEFFICIENTS NOMBRES ENTIÈRS COMME INVERSIONS DES INTÉGRALES ABELIENNES, Revista de Ciencias, Lima–Peru, 1937, XXXVIII, 421, pp. 1–6 (**ДТ 333**).

49 ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES ALGÉBRIQUES À DEUX INCONNUES, Mathesis, Bruxelles, 1937, t. LI, pp. 183–187 (**ДТ 334**).

50 LE POSTULATUM DE BERTRAND COMME CONSÉQUENCE DU THÉORÈME DE GOLDBACH, Sphinx, Bruxelles, 1938, VII, 2, pp. 19–20 (**ДТ 339**).

51 SÉRIES TAYLORIENNES FOURNISSANT LE NOMBRE DE NOMBRES PREMIERS NE SURPASSANT PAS UN NOMBRE DONNÉ, Bulletin des Siences math., 2° s., LXII, pp. 140–148 (**ДТ 343**).

52$^{\Delta}$ SÉRIES TAYLORIENNES EN RAPPORT AVEC LES NOMBRES PREMIERS, Bolletin matematico, Buenos Aires, 1938, t. X, 13, pp. 177–178 (**ДТ 344**).

53 À PROPOS D'UN THÉORÈME DE M. POMPEÏU, Bulletin Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, 1938, XL, 1–2, pp. 205–208 (**ДТ 355**).

54 ПОТЕНЦИЈАЛНИ РЕДОВИ ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ АРИТМЕТИЧКУ СТРУКТУРУ, Глас, CLXXVIII (I, 88), стр. 245–256 (**ДТ 359**).

55 ОСЕТЉИВА МЕСТА ОБИЧНИХ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, Математички весник, Београд, 1939, 5–6, стр. 8–11 (**ДТ 363**).

56 ПРОСТИ БРОЈЕВИ, Српска краљевска академија, Саопштења АПН, Београд, 1943, 13 шт. табака (**ДТ 387**).

57$^{\Delta}$ ЕЛЕМЕНТАРНА ПОСМАТРАЊА О РАСПОРЕДУ ОМАЊИХ ПРОСТИХ БРОЈЕВА, Глас CLXXXIX (I, 95), стр. 3–45 (**ДТ 388**).

58 СТЕРЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ, Српска академија наука, Зборник радова, т. XXXV, Математички институт, књ. 3, Београд, 1953, стр. 1–4 (**ДТ 391**).

О ОВОМ ИЗДАЊУ

У овој књизи сабрани су чланци Михаила Петровића из алгебре и теорије бројева. Један део изабраних радова условно припада алгебри, с обзиром да по методама и начину разматрања више припадају области анализе. Ипак сам се одлучио да их уврстим у књигу из алгебре, с обзиром да су разматрани проблеми имали алгебарску формулацију, али и зато што се у време њиховог настанка сматрало да припадају алгебри. Петровић је и сам ове радове класификовао у област алгебре у свом мемуару *Радови Михаила Петровића објављени од 1894–1921.* Исту класификацију прихватио је Петровићев биограф, Драган Трифуновић, у својој књизи *Летопис живота и рада Михаила Петровића.* У референцама на Петровићеве радове користио сам номенклатуру према овој класификацији, у ознаци ДТXY. Овде XY означава редни број Петровићевог чланка у Трифуновићевој класификацији из *Летописа.* Неколико радова у којима је анализа сасвим преовладала, док према овој класификацији припадају области алгебре, читалац може наћи у другим књигама овог издања сабраних дела Михаила Петровића.

О радовима Михаила Петровића у математици писало је више страних и домаћих аутора па и сам Петровић. Од наших аутора споменимо Јеленка Михаиловића, Милутина Миланковића, Миодрага Томића и Драгана Трифуновића. У овим радовима, као и Петровићевом мемуару, могу се наћи детаљнија излагања о темама које су овом приликом испуштене или су само овлаш додирнуте у мом приказу Петровићевог рада у алгебри. Посебно бих истакао књигу *Geometry of polynomials* Morrisa Mardena у издању Америчког математичког друштва (прво издање из 1949. и друго из 1966) у којој се може сагледати са одређене временске дистанце Петровићево достигнуће, али и других наших аутора, у области геометрије полинома.

Овај избор чланака садржи 14 превода радова са француског и девет радова на српском. Језик аутора је дословно поштован. У текстове су унете само правописне исправке и замењени су само поједини архаични изрази. Радове са француског превела је моја кћерка Ивана Мијајловић, студент математике, док је редакцију извршио приређивач ове, 4. књиге *Сабраних дела Михаила Петровића.* Желим да Ивани овом приликом изразим захвалност за учињен труд и добар стручни превод. Такође дугујем захвалност проф. Драгану Трифуновићу, за подстицај и помоћ око избора неких радова. Професор

Трифуновић је у овој књизи саставио за већину расправа Михаила Петровића по две спуштенице (фусноте) обележене са * и **, те оне кориснику ове књиге дају ширу информацију о Петровићевим радовима. [У анализи *Првоī Пеīро-вићевоī маīемаīичкоī īексīа* фусноту 4 написао је проф. Д. Трифуновић, те му се и за овај труд посебно захваљујем.] Уреднику Жарку Јовићу захваљујем на помоћи у налажењу оригиналних чланака на француском и стрпљењу у испуњавању рокова, проф. Драгољубу Аранђеловићу за стручне примедбе, студенту математике Златку Филиповићу који ми је указао на скрипте из алгебре које су написали Петровић и Салтиков, и Музеју града Београда од којег сам добио копију првог Петровићевог рукописа из студентских дана.

Београд, 20. јул 1998.

Жарко Мијајловић

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 4

АЛГЕБРА

Прво издање, 1998. година

Издавач
Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник
АИДА СПАСИЋ

Лектор
ДУШИЦА ТРИФУНОВИЋ

Корице
АИДА СПАСИЋ

Графички уредник
ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректор
ЈЕЛЕНА БОШКОВИЋ

Обим: 18 штампарских табака
Формат: 17 × 24 cm
Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу августа 1998. године.
Штампање завршено августа 1998. године.

Штампа
БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

512

ПЕТРОВИЋ, Михаило
Алгебра / Михаило Петровић ; приредио Жарко Мијајловић ; [радове са француског језика превела Ивана Мијајловић]. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1998 (Београд : БИГЗ). – 284 стр. : илустр. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 4)

Тираж 500. – Стр. 262–273: Радови Михаила Петровића у алгебри / Жарко Мијајловић. – Објављени радови Михаила Петровића – алгебра: стр. 275–278. Регистар.

ISBN 86-17-06511-7

929:51 Петровић М.
а) Петровић, Михаило (1868–1943) – Алгебра
б) Алгебра
ИД=67229196

9 788617 346735

ISBN 86-17-06511-7

К. Б. 34673