ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ПРВИ ДЕО

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 1

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06409-9

Мих. Петровић

Докторску дисертацију Михаила Петровића *О нулама и бесконачностима интеграла алгебарских диференцијалних једначина*, као и расправу *О алгебарским диференцијалним једначинама првога реда које производе целе функције* превео је са француског језика

др **БОГОЉУБ СТАНКОВИЋ**, проф. унив.

Остале радове у Књизи превео је са француског језика

др **ДУШАН АДАМОВИЋ**, проф. унив.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ И ЊЕГОВ ДОПРИНОС У РАЗВОЈУ МАТЕМАТИЧКИХ НАУКА

Србија је у двадесети век ушла са створеном државом. Али она је пре многих држава које су своје друштвено уређење раније учврстиле, ушла и у културну и научну историју овог века. Последња деценија прошлога века није само обележена уставним борбама за друштвени преображај Србије, већ и њеним великим напретком на културном и научном пољу.

Успех на пољу природних и математичких наука је дело неколицине професора оновремене Велике школе – доцније Филозофског факултета Универзитета у Београду: Јована Жујовића, Симе Лозанића, Михаила Петровића, Јована Цвијића и нешто млађих Милутина Миланковића и Ивана Ђаје. Њихово дело, не само да остаје присутно у нашој и светској науци, већ оно припада и нашој националној баштини. Они су својим научним радом, али и целим својим животом, обележили један део културног и научног напретка Србије.

Михаило Петровић је оснивач наше математичке науке, али и учитељ и васпитач читавих нараштаја наших математичара. Ако се то на први поглед и не види, његов утицај се осећао и много година после његове смрти. До Петровића се могло говорити само о доброј настави и покушају научног рада у области математике. *Са његовим доласком на Велику школу почиње развој наше математичке науке, већ на почетку са запаженим успехом од вредности и гласа.*

Петровић је ступио на Велику школу у доба када је интелигенција Србије већ раскрстила са омладинским романтизмом. Тимочка буна и Српско-бугарски рат отворили су очи новом нараштају и помогли му да се ослободи многих предрасуда. Више него икад до тада нови нараштај је схватио да истина и објективност морају бити изнад лажног националног заноса. Научни рад добија тада посебну вредност, али и уверење да мора бити оцењиван европским мерилима.

После завршене Велике школе Петровић одлази у Париз и постаје ученик чувене Више нормалне школе (École Normale Superieure). До тада су наши стипендисти природне и техничке науке учили на аустро-угарским школама. У време када се Петровић школовао у Паризу, *француска математичка школа* била је на гласу и по резултатима који су отварали нове проблеме и нове области али и по обиљу нових идеја. Један од твораца савремене математичке науке, Анри Поенкаре, ишао је скоро 20 година испред математике свога доба. Он је јасно видео не само будућност математике, њен утицај на остале науке, већ и њене нове путеве. Петровићев професор Пол Пенлеве међу првима је схватио значај нових идеја и можда једини у Француској пратио Поенкареове идеје. Али и остали Петровићеви професори – Пикар, Ермит, Апел, Дарбу и други – дали су резултате од трајне научне вредности, који су отварали нову еру у математици. У такву једну средину, пуну научног заноса и стваралачког замаха, научних открића и нових проблема које су она отварала, дошао је млади Петровић.

Већ сама чињеница да је Петровић ушао у Вишу нормалну школу представља подухват ако се зна како су изгледали испити за улаз у ту Школу. У време Петровићевог школовања Виша нормална школа, заједно са Политехничком школом у Паризу, представљала је врхунац математичке наставе тога времена, и то не само због својих професора већ и због својих ученика, будућих славних имена француске и светске науке. Петровић је завршио Вишу нормалну школу као један од најбољих у својој класи. Ово показује не само његов дар већ и изузетну вредноћу и савесност. На првим корацима у науци види се његова дубока оданост научном раду. Он је на последњој години студија у Француској већ започео свој научни рад, који неће оставити до последњих дана свога живота.

И пре него што кажемо нешто више о његовом научном раду, наведимо неколико карактеристичних обележја тога рада која га издвајају од многих научника онога времена. Пре свега, он је врло *плодан писац*. За првих десет година научног рада он је објавио преко педесет радова. Он дела у разним областима математике. Његова саопштења на међународним конгресима привлаче пажњу многих научника. Његове радове други уопштавају и она су често подстицај за даља истраживања и то од стране научника од вредности. Глас Српске академије наука се пуни његовим радовима у којима детаљно излаже резултате својих кратких саопштења из Извештаја париске академије. Његово име се појављује у водећим иностраним математичким часописима. Први научни резултат, који је Петровић објавио док је још био ђак на последњој години Више нормалне школе, његов професор Емил Пикар уноси у свој уџбеник из анализе. Појава Петровићевог резултата у том чувеном уџбенику, који се сматрао тада библијом оновременог математичког знања, учинила је познатим Петровићево име и у најширим математичким круговима.

Београд није остао равнодушан на овај научни успех Михаила Петровића. У својој 31. години он постаје редовни члан Српске краљевске академије наука.

Оно што карактерише тај први, сигурно и најзначајнији период његовог научног рада је *оригиналност* његових идеја. Он је математичар идеја и проблема који су извирали из тих идеја. Многи његови радови су били подстицај за даља истраживања. Са извора велике науке, француске математике са краја 19. века, он је примио неке од њених најлепших особина: једна од њих је *да само нове идеје воде ка стварном напретку науке*. За пажљива, дуготрајна и систематска истраживања, везе између појединих проблема, генерализације познатих резултата, прецизне доказе и њихова упрошћења Петровић није имао стрпљења. Поенкареова реч: мисао је муња у мрачној ноћи, огледа се сигурно и у математичком истраживању. Без те муње нема стварног открића али та муња ипак није све. Тек онда када се наслути решење, настаје тежак пут ка циљу. Тада настају и нови проблеми, а често крајњи резултат није оно што се очекивало у почетку. Када је рад завршен, нико сем аутора и не зна које су тешкоће биле на том путу и колико је времена то трајало. Петровић је имао врло често срећну, оригиналну, неочекивану, па чак и изванредну мисао. Његове идеје нису биле просте имитације. И скоро увек је у његовим радовима основна мисао била најлепши и најдубљи део његова остварења.

*

Михаило Петровић је започео свој научни ***рад са диференцијалним једначинама***. Његов последњи рад, који се појавио после његове смрти, пола века касније, био је исто тако из диференцијалних једначина.

Основна идеја његове тезе коју је одбранио 1894. године на Сорбони, пред комисијом у којој су били Ермит, Пикар и Пенлеве, састоји се у тврђењу да начин како улазе константе интеграције у општи интеграл алгебарске диференцијалне једначине зависи у суштини само од начина како функција и њени изводи улазе у алгебарску диференцијалну једначину, другим речима – битно зависи само од групе експонената различитих чланова у том алгебарском склопу који чини диференцијалну једначину. Помоћу ових група експонената – целих позитивних бројева он образује геометријске фигуре – фигуративне полигоне, како их је он назвао. Облик ових полигона, нагиб њихових страна, већ даје низ особина из којих се види како константе улазе у општи интеграл. Из тих полигона он изводи особине нула, полова и екстремних вредности општег интеграла. Тако, на пример, да би општи интеграл алгебарске диференцијалне једначине првога реда имао покретне нуле реда k, потребно је и довољно да полигон има једну страну са нагибом једнаким k. За полове овај пад мора бити k. Из ових фигуративних полигона он изводи и особину – колико једноставну толико и важну – даје услов: да нуле и полови општег интеграла алгебарске диференцијалне једначине првог реда не варирају са константама. На проблему само по изгледу сличном – о положају и утицају критичких тачака и трансцендентним сингуларитетима, раде тада најпознатији математичари онога времена: Поенкаре, Фукс, Пикар и Пенлеве. Природа њихових резултата захтева читаве теорије, па чак и нове области, као што је то показао Поенкаре. Петровићеви резултати следе из особина простих геометријских фигура. Али из овога се види и *да је у то време Петровић радио савремену математику*. Његови професори Емил Пикар и Пол Пенлеве, тада већ славни математичари, који су били и у комисији за оцену његове тезе, сигурно су запазили неке основне особине тога рада: једноставност, пресликавање аналитичког проблема на распоред геометријских фигура, могућност исказа потребних и довољних услова макар и у преносном значењу. Сигурно је да су Пикар и Пенлеве, који су и сами дали значајне резултате у области диференцијалних једначина, уочили нов допринос у развоју квалитативне интеграције, који се огледа пре свега у растављању једног аналитичког израза на линеарне комбинације које представљају праве линије и одређивању њихове заједничке непокретне тачке. Тај проблем који се наслућивао и овде, макар само у деловима, биће у општем облику једно од најзначајнијих открића математике првих година 20. века.

Као што смо поменули, међу најзначајније Петровићеве радове долази резултат који је Емил Пикар унео у свој уџбеник из анализе, где је и предмет читаве једне главе. То је студија о партикуларним униформним интегралима. Тај лепи и значајни резултат даје услов да алгебарска диференцијална једначина има униформне трансцендентне интеграле. Штавише, на основу тог услова извршена је и класификација алгебарских диференцијалних једначина првог реда, према томе да ли она има један, два или три таква интеграла. Једноставан услов, изражен у чињеници да десна страна диференцијалне једначине буде рационална функција по x и y, као и резултат, да ако та једначина има три различита униформна интеграла да је она тада неопходно Рикатијева једначина, сигурно је у то време био колико леп толико и неочекиван резултат. За диференцијалну једначину n-тог реда Петровић даје горњу границу броја униформних интеграла. У низу радова он уводи нове трансценденте, стављајући у општи интеграл да промењљива има константну вредност и посматрајући овај интеграл као функцију параметра, а затим даје услов када се те нове трансценденте могу појавити. Из низа Петровићевих радова из области квалитативне интеграције диференцијалних једначина поменимо: радове о раздвајању нула у датом интервалу, ограничења интеграла у размаку одређеним кривама. За диференцијалне једначине првога реда ове криве су партикуларни интеграли једноставних диференцијалних једначина које се изводе из дате једначине. Овај поступак је користио Петровићев школски друг са Више нормалне школе Емил Котон у своме раду о приближној интеграцији диференцијалних једначина. Тиме је Котон започео једну област која ће имати велике примене. Петровић је према томе присутан и у приближној интеграцији диференцијалних једначина. Нови проблеми увек привлаче пажњу Петровића: свођење диференцијалних једначина на простије облике, инваријантност интегралних кривих, биномне диференцијалне једначине. Запажен је био и Петровићев рад у коме је показао да се Кошијеви остаци (резидууми) могу израчунати и онда када функција није дата експлицитно, већ као решење диференцијалне једначине.

Петровић је за своје време био европски образовани математичар. Он је пратио савремену литературу и био упућен у најновија и најзначајнија открића у математици онога времена. Он је умео те нове резултате да искористи и да их повеже са својим оригиналним идејама. У раду објављеном у познатом шведском часопису Acta mathematica 1898. године он користи метод својих фигуративних полигона и један познати став Пикара да би доказао својства диференцијалних једначина реда n које се могу интегрисати помоћу двопериодичних мероморфних функција. Па ипак ове побројане области не садрже све проблеме из диференцијалних једначина на којима је Петровић радио.

Петровић је отварао нове проблеме, имао обиље математичких идеја, али како је био плодан писац, често и изнад граница дозвољеног, он је исто тако лако прелазио преко проблема које је отворио или наслутио. Већ његов први рад, који је привукао пажњу, био је предмет изучавања познате школе И. Бендиксона, И. Малмквиста и других. Они су, полазећи од тог проблема, од почетних Петровићевих резултата створили читаву теорију. Проста природа Петровићевих резултата захтевала је и дубља истраживања за која он није имао ни времена ни стрпљења. Он се никад није упуштао у трагању за свим последицама и резултатима који су потицали из основног става. Они који су се заинтересовали за његов резултат видели су после дуже студије тог проблема и његову праву природу, а често и неслућени извор нових резултата. Његов рад је пре указивао на место где се налази благо него на начин како да се благо извади. Из тог разлога потоњи истраживачи скоро и да нису обраћали пажњу на онога који је први указао или наслутио где се налази проблем. Петровић је врло често у најједноставнијем примеру из диференцијалних једначина видео општу особину, али када би то исказао – задовољио би се још само да укаже да је та особина последица неколико других једноставних чињеница. Када је требало ту особину која је отворила проблем извести као теорему са најмањим бројем услова, он је то препуштао другима. Свакоме који дуго ради у једној области, на неком проблему, потребна је на путу истраживања, и то онда када све стане, само једна нит да би кренуо даље. Понекад, само неки пример је довољан да би се видело зашто ствар не иде. Петровић је другима отварао врата и прелазио на нове проблеме, не водећи много рачуна о вредности проблема који је сам створио. Али то је све учинило да се његов први занос за новим открићима полако гасио, његов лепи дар, замах и полет су се дробили у мозаик и минијатуре. Рад се тај на пољу диференцијалних једначина у времену између два рата свео на интеграцију помоћу квадратура и бројне примене таквих интеграција. Па ипак у многим од тих радова осећала се његова некадашња ингениозност. Осећало се да он пише само кад има нешто ново да каже, и да је то плод његовог размишљања а не литературе.

*

Нешто слично се десило и са облашћу у којој је постигао најлепша достигнућа и најоригиналнија остварења – са ***аналитичком теоријом функција***. Петровић је започео рад у тој области вероватно под утицајем Ермита. Он је и овде испољио оригиналност, и то не само у резултатима већ и у њиховим доказима. Пример таквог рада пружа нам његова расправа из 1900. године, о кругу у коме функција представљена Тејлоровим редом нема нула. Познати немачки математичар Едмунд Ландау је четири године касније детаљно студирао овај Петровићев резултат и показао да се он може доказати и помоћу такозваног Јенсеновог става, који се појавио после Петровићевог рада, и који представља једну од централних теорема класичне теорије функција. И поред тога Петровићев резултат није директна последица тога става. Тај Петровићев рад и проблеми у вези са њиме били су доцније предмет истраживања неколико математичара: Хардија, Фејера, Монтела. Не само да је резултат од значаја већ, како Ландау каже, и сам доказ је леп. Још лепше илуструје једноставност, оригиналност али и вредност његових резултата рад у коме се дају услови да би сви делимични збирови Тејлоровог реда имали све своје нуле реалне. Мало је тако лепих резултата који су, исто тако, доказани једноставно и елегантно. Тај рад, приказан на конгресу у Риму 1908. године, заинтересовао је многе математичаре, као што су Пољa, Линдварт и други. Крајњи домет из тог круга проблема започетог Петровићем била је знаменита теза Роберта Јенча. У уводу своје тезе Јенч наводи Петровићеву идеју из ове групе истраживања, и то међу првима. Специјалне целе функције које је увео и испитао Петровић представљају граничне функције за класу целих функција које имају бескрајно много реалних негативних нула, и чији раст иде одређеном брзином. Независно од Петровића, такве функције је посматрао и Georg Poly-a и створио читаву теорију целих функција назначене класе. Поменимо и рад где се из распореда нула целе функције може установити брзина раста функције у неком правцу. То је проблем којим су се доцније много занимали математичари Данжоа и Алфорс. Много касније, у Гласу, Петровић се осврнуо на запажене и значајне резултате Алфорса, помињући свој давно заборављени рад у коме је овај савремени проблем био предмет и његовог истраживања. И ту је први и последњи пут он поменуо да је пре свих, и то давно, уочио један проблем, али да је то остало непримећено.

*

Од бројних Петровићевих радова из теорије алгебарских једначина, или како се данас назива та област – *геометрија нула полинома*, издваја се рад који се и данас наводи, и који је у своје време био предмет даљих уопштења од стране неколико математичара: Ландауа, Фејера, Монтела. То је прстен у коме алгебарска једначина има бар један корен. Петровић је први посматрао овај проблем као проблем математичке анализе независно од Рушеове теореме. Његов рад из 1899. године, објављен у Извештају париске академије, први је рад који одређује број корена садржаних у датом кругу. Проширење овог проблема, где се место круга посматра полураван, и које је уследило после Петровића, имало је и велике примене. У ову област долази и аналогон једног Лагеровог става: одредити низ фактора којим треба умножити коефицијенте да би једначина са имагинарним коренима имала опет све корене имагинарне.

*

Више од десет радова Петровић је посветио такозваном свођењу одређених интеграла са произвољном функцијом (параметром). У тим радовима он је извео опште обрасце који своде та испитивања на познате случајеве. На тај начин добијају се вредности многих одређених интеграла. Његови општи обрасци за израчунавање одређених интеграла у коначном облику или преко потенцијалних редова садрже познате Стилтјесове обрасце. Међу сличним проблемима долази и одређивање Борелове трансформације за широку класу потенцијалних редова.

Из свега овога се види да велики број разноврсних проблема није дозвољавао Петровићу да се систематски посвети једној области, а још мање једном проблему у тој области. Петровић је био француски ђак. Немачке школе и њихове математичаре он је познавао само из литературе. Баш у време када је он интензивно радио на теорији функција и геометрији нула полинома, низ немачких математичара радило је на сличним проблемима, али много систематичније, и у сталном међусобном контакту и кореспонденцији. Петровић је био усамљен, далеко од научних центара и од људи од струке са којима би могао да дискутује. У то време, у Београду, он је једини и радио математику. Можда се много шта из живота Петровића као научника може објаснити том потпуном научном усамљеношћу. Он је доцније, како нам је казивао проф. Тадија Пејовић, зажалио што је радио у више области, можда је зажалио што није дуже окретао проблем са свију страна, што није из њега извукао све последице, што је тако расипао свој лепи дар. Ако је истина да има ствараоца који су своје благо исковали у ситан новац и тако га растурили – онда то важи и за Петровића. Али и тако како је дато оно вреди више него дело многих који су стрпљиво и пажљиво радили. Такав начин рада можда најбоље обележава и то да је било радова који су написани у току једне ноћи и није без разлога он рекао својим ученицима касније: како напишете свој први рад тако ћете написати и све остале.

*

Немогуће је говорити о Петровићу а да се не помене његова *Феноменологија*, последње значајно дело из прве фазе његовог стваралачког рада, 1894–1914. године. Али овога пута, за разлику од многих других радова, Петровић је на овоме проблему дуго радио и још дуже размишљао. Он познаје добро математику тога времена, он види њена стремљења и осећа значај уопштавања које приближава разне теорије и тиме упрошћава математичку мисао. Он познаје Поенкареове идеје о вредности науке и њеног значаја не само са гледишта примене већ и њене филозофске последице. На београдској Великој школи за професора филозофије Петровић је имао умнога Љубомира Недића. И на Вишој нормалној школи он је слушао неколико познатих имена оновремене француске филозофске школе. Можда је то разлог да је он врло рано почео да размишља о примени математичких принципа на многобројне природне феномене. Већ у својој приступној академској беседи, 1900. године, *О математичкој теорији активности узрока*, он уводи један нов појам, који се до тада, како он каже, јављао само у логици: ***активитет узрока***. „То је сваки феномен који тежи да мења какво стање или уноси пертурбације у какав други феномен. Његов активитет је његова динамичка страна оличена у тој тежњи апстрахована од свог супстрата и дефинисана као у аналитичкој динамици својим смислом и интензитетом." Да би могао да посматра природне и не само природне феномене, он уводи појам *математичке аналогије*, и то илуструје поређењем разноликих појава приказаних истим математичким језиком. Основни постулат те нове теорије гласи: „Кад је дат какав физички феномен *F* ако се у овоме знају улоге појединих фактора или врсте акције узрока, што га производе, па ма узроци и не били познати по својој интимној природи могуће је наћи такав механизам за чије ће кретање важити исти математички закон што важи и за феномен *F*." Између кретања таквог система и феномена *F* постоји тада потпуна математичка аналогија. О овоме проблему, на коме је интензивно радио пуне три године, Петровић је објавио обимно дело преко 700 страна – у издању Академије наука: *Елементи математичке феноменологије* (1911. године). Из основне формулације се види да је Петровић хтео да *Феноменологију* сведе на *Аналитичку динамику* и на њену основну математичку интерпретацију – на систем диференцијалних једначина. Његов активитет узрока по јачини и смислу одговара механичком појму силе. Према Петровићу, свака аналогија састоји се у егзистенцији једног минималног скупа *F* чињеница које у потпуности репрезентују шири скуп *G* чињеница. Тај минимални скуп је језгро аналогије. Постоји начин да се униформизирају језгра аналогија, тј. да се изрази тај основни скуп у облику који би био исти за све различите феномене садржане у једној аналогији. На тај начин, ма какав био феномен, његово понашање се одсликава у начину кретања једне фигуративне тачке феномена. Сличност понашања групе феномена огледа се у јединственом кретању фигуративне тачке. Еволуција феномена ка дефинитивном стационарном стању изражава се приближавању фигуративне тачке асимптотском положају; периодичност феномена – пролазу фигуративне тачке кроз исти положај у једнаким интервалима времена.

Петровићеве феноменолошке диференцијалне једначине су у ствари Хамилтонове једначине, а крајњи математички апарат су диференцијалне једначине динамике према Апеловој формулацији. Примери који треба да покажу разне аналогије су проблеми механике, термодинамике, електрицитета, хемијских реакција. Неколико наших аутора (М. Стојаковић, Д. Трифуновић, Б. Поповић), а и неки совјетски историчари наука, налазе да је ***Петровићева Феноменологија претеча***

Винерове Кибернетике. По општим идејама, Петровићева Феноменологија, са применама од економије до филозофског феноменолошког пресликавања и алегорија, далеко је општија. Али по конкретној реализацији и математичкој интерпретацији она није дефинитивно математички уобличена. Такав математички апарат тада није ни постојао. Најопштији систем диференцијалних једначина аналитичке динамике изгледа да није довољан за такво тумачење појава, изузев код изолованих примера. Творац савремене кибернетике, Норберт Винер, полази од сличног проблема: да делимичне информације које познајемо могу у многим случајевима да дају и целокупну слику појаве. Винер је пред собом стално имао слику хармонијске анализе, у којој је дао значајне резултате и коју је изванредно познавао. Карактеристично је да је Винер имао за пример нервни систем и његову трансмисију делимичних информација. Математички апарат који је он користио: Хевисајдов симболички рачун и Винер-Хопфова интегрална једначина, дао је одговор на питање математичког представљања појава и њихових последица. Сужавање проблема уз адекватан математички апарат довело је до научне теорије. И поред свега Петровић је имао смелости и математичке интуиције да 1900. године наслути нову еру у будућности математичких наука. Он је предвидео, и то на потпуно исправан начин, употребу математике у областима за које се тада није могло ни наслутити да ће је користитит. Најсавременији данашњи научно-филозофски погледи иду у једном правцу тако далеко да тврде да ако се природа схвати као један савршен рачунар – тада природни закони постају прости алгоритми. Петровић није знао за савремене рачунаре и њихову революционарну примену, али је врло давно предвидео овакву могућност униформизације природних закона. Неколико критичара његове феноменологије са филозофског гледишта, и то са метаријалистичким схватањем, означили су оваква Петровићева разматрања као механицистички поглед на свет. Данас су таква Петровићева схватања поново актуелна.

Петровић је сувише рано, нажалост, и пре него што је математички апарат и био створен дошао до визије математичке будућности описивања појава, па чак и пре него што су се многе науке и развиле. У време постанка Петровићеве *Феноменологије* сигурно је изгледала као бесмислена игра мисао о аналогији између термодинамике и њених елемената: притиска, температуре, количине топлоте и енергије, са једне стране, и – економије са понудом, потражњом, капиталом и финансијском снагом, са друге стране. И како се могло и помислити на аналогију са познатим Геј-Лисаковим законом када се економија сводила на науку о финансијама са неколико друштвених закона? Али се данас види да је Петровићева замисао о примени математике на бројне феномене, како природне тако и друштвене, била исправна. Он се тада, 1911. године, налазио у предворју научне будућности коју је јасно сагледао, али време за њу још није било дошло. Сем тога, он је то писао на нашем језику. Његова француска, скраћена верзија *Феноменологије* била је више популарна него егзактна и зато није доживела онај успех који је заслужила. Она је у иностранству више посматрана са филозофског становишта него као математичка теорија са својим бројним применама.

*

И друге Петровићеве идеје нашле су много доцније оправдање ако не и примену. Данас се у Сједињеним Америчким Државама при прелазу у разне рачунарске системе, при грубој оцени непотребних децимала, много користе просте неједнакости повезане линеарним везама. Пре више од пола века у Београду се појавио Петровићев *Рачун са бројним размацима* (Београд 1932) који тачно садржи све ове чињенице. Истина, нико од оних ко то данас користи и не слути да је то давно у Београду Петровић објавио и не мислећи да то представља неки допринос науци... Неоспорно, Петровић је оснивач посебне области, *интервалне математике*, данас неопходне рачунарству. И овим не би био исцрпен опис његове плодне стваралачке делатности у области теоријске математике.

*

На Вишој нормалној школи, осим математике, сви ученици морали су да слушају и предавања из механике, физике и хемије. Чак и при одбрани тезе усмени део испита састојао се из механике или физике. Петровић је у Вишој нормалној школи био одличан из ових наука што сведочи и о његовој вредноћи, будући да из Београда сигурно није понео велико знање из физике и хемије. У првој фази свог научног рада Петровић је написао и неколико радова из ових наука, као што су својства једначина динамике, акција дуж различитих трајекторија, принцип минимума у електродинамици, пражњење кондензатора, хемијска динамика, рачун грешака у квантитативним хемијским анализама. Сви ови радови објављени су у иностраним часописима. Оно што нас нарочито изненађује је чињеница да Петровић често једновремено ради више проблема не само из више области математике већ и из више наука. Из тих првих година његовог научног рада он једне године скоро једновремено пише радове о диференцијалним једначинама, о механичкој интеграцији, аналитичкој динамици, о пражњењу кондензатора, коренима алгебарских једначина садражним у датом кругу. Кад ово помињемо, треба се подсетити да је Петровић радио увек сам. Данас је тешко замислити чак и промену проблема, још теже прелаз из једне области у другу, а камоли једновремени рад на више проблема у тако диспаратним областима. Најзначајнији Петровићев рад из примењене математике без сумње је његов механички интегратор за диференцијалне једначине, детаљно описан у познатом *Америчком журналу за математику* из 1898. године. Прост принцип по коме се ниво течности мења у зависности од облика суда и потопљеног тела послужио је Петровићу за оригиналну замисао да успостави везу између висине нивоа течности и висине потопљеног тела помоћу диференцијалне једначине. Већ и овде се види његова идеја о аналогији различитих феномена, његово феноменолошко пресликавање. Апарат израђен на том принципу био је предмет изучавања више аутора: В. Прајса, Х. Морена, Л. Јакоба, а био је приказан и награђен на изложбама у Паризу 1900. и Лондону 1907. године.

*

Тај човек са богатим математичким даром, који је расипао своје мисли и идеје, био је скроман, чак врло скроман човек. За доба у коме је живео он је био имућан човек али се то није видело ни на њему ни у његовом понашању. Скроман и повучен, он је био врло савестан као наставник. Нараштаји који су студирали математику на Београдском универзитету пре Првог светског рата и између два рата памтили су пут увођења у вишу наставу, тај прелаз од елементарне до више математике. А колики је то био напор и труд види се и из тога да је дуги низ година, до Првог светског рата, Петровић држао сам целокупну наставу математике.

Његово велико задовољство била су путовања. Са тих путовања остали су у Српској књижевној задрузи његови путописи из поларних области, са далеких океанских острва, из некадашњег царства гусара. У тим путописима једино се не види његова личност. Дани и ноћи које је провео са рибарима на Дунаву били су само привидно време одмора. У мислима, у подсвести, он је и тада био са математиком, која је била једини смисао његовог живота.

У Петровићево време наука није имала такав значај као данас. Математичке науке развијале су се тада скоро као уметност. Развој тај био је дело појединих научника који су своје мисли и идеје, своја открића и резултате саопштавали у релативно малом броју часописа. Настава је имала одређен правац, где се излагало градиво старо скоро један век. То је нарочито био случај са техничким вишим школама. И природно је што су наши математичари пре Петровића, ученици таквих школа – Нешић, Клерић, Гавриловић, имали велико знање, али оно је код њих била једна затворена целина. Петровић је био ђак једне од највећих математичких школа онога времена, и то школе са новим погледима, идејама, и новим путевима развоја. Али то је била школа индивидуалних талената. Сваки ученик те школе сам је тражио пут, сам се борио са тешкоћама. Угледање и имитација није била особина ученика те школе. И то је било научно обележје и младог Петровића. Али, за разлику од својих другова из Француске, он дела у једној средини где егзактне науке скоро и да нема. Дубоко одан тој средини, његова научна мисао је изван ње, а његово дело има вредност само ако га цени светска наука. И у тој средини он научно напредује и улаже напор за још веће подухвате, а које је прекинуо Први светски рат. И он мора да је био велики таленат кад није потонуо у тој средини и када је за кратко време ушао у светску науку.

Петровић је не само најплоднији већ и најоригиналнији наш математичар. Он је учинио и највећи продор у науку, који треба ценити и по времену када се појавио. Он је створио углед нашој математичкој науци у свету и на тај начин, са још неколико исто тако познатих наших имена, делом, и углед Србије у свету. Ако је стварање наше математичке науке његова прва заслуга, не мања је заслуга што се постарао да у нашу математику дође нов нараштај научних прегалаца. За разлику од неких својих савременика, он је сматрао да наша математика не треба са њим да се заврши. А пут ка том циљу није био лак. Године 1919. он је остао сам на математици са преко 100 студената на четири године студија, без и једног асистента. Па ипак, он је обновио наставу, обновио Глас Академије наука, тада наш једини научни часопис.

*Михаило Петровић је значајна личност не само наше научне већ и културне историје са краја 19. и прве половине 20. века. Његов живот и његово дело оставили су виднога трага на Београдски универзитет, на нараштаје наших математичара. Његов дар, напор и успех учинили су да је наша математичка наука прешла границе наше земље. Ако су први кораци у науци најтежи, они су и најзначајнији. Он је запалио онај пламен који ни ратови нису могли да угасе. Његов пример следили су и многи његови ученици, а то је оно што чини напредак науке, и та невидљива заслуга Петровићева исто је тако значајна као и његово дело.** [*]

Миодраг Томић

[*] Зборник Филозофског факултета Универзитета у Београду, Београд 1990, стр. 11–20.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

У првој књизи радова Михаила Петровића из области диференцијалних једначина докторска дисертација има посебно место. Уз фототипско издање оригинала на француском језику, први пут се објављује у преводу на српски језик. То је учињено из више разлога. Наведимо само три.

Резултати објављени у дисертацији представљају важне карике аналитичке теорије диференцијалних једначина, без којих та теорија не би била комплетна.

Дисертација верно одсликава идеје, методе истраживања и резултате талентованог младог математичара који му широм отварају сва врата у то време водећег математичког центра – Париза.

Немогуће је разумети и пратити научни рад Михаила Петровића без познавања његове дисертације. У њој су сажети сви корени даљег његовог рада из области математике.

Нажалост, сачувано је само неколико примерака Петровићеве дисертације, до којих је тешко и доћи. Верујемо да ће се њеним објављивањем у овој књизи допринети бољем разумевању и коришћењу резултата и метода рада Михаила Петровића.

Бр. налога
823

ТЕЗЕ

која је

Господин

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ,

ученик Више школе,
дипломирани студент математичких наука и физичких наука,
поднео

ФАКУЛТЕТУ НАУКА У ПАРИЗУ

ради стицања
степена доктора математичких наука

---

1. теза

О НУЛАМА И БЕСКОНАЧНОСТИМА ИНТЕГРАЛА АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

2. теза

ЗАДАТАК КОЈИ ЈЕ ДАО ФАКУЛТЕТ САВРЕМЕНИ РАДОВИ О ПРИНЦИПУ НАЈМАЊЕГ ДЕЈСТВА

Одбрањено 29. јуна 1894. пред Испитном комисијом

Господа

ЕРМИТ (председник), ПИКАР и ПЕНЛЕВЕ (испитивачи)

Париз, 1894

НАСТАВНО ОСОБЉЕ НАУЧНОГ ФАКУЛТЕТА

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

21022 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Господи Ж. ТАНЕРИЈУ и П. ПЕНЛЕВЕУ

као знак захвалности
М. ПЕТРОВИЋ

ПРВА ТЕЗА

О НУЛАМА И БЕСКОНАЧНОСТИМА ИНТЕГРАЛА АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

УВОД

У овом раду разматрам неколико питања која се односе на непосредно изучавање нула, бесконачности, максимума, минимума итд. интеграла (решења, прим. прев.) алгебарских диференцијалних једначина и нађене резултате примењујем на изучавање интеграла са становишта опште теорије функција.

Када се у општем интегралу $y(x, C_1, \ldots, C_p)$ диференцијалне једначине p-тог реда мењају интеграционе константе $C_1, \ldots, C_p$, са њима се, у општем случају, *мењају* вредности за x, које анулирају овај интеграл, које га чине бесконачним, које му дају максималну или минималну вредност итд. Уопште, када се мења било која константа C_i која се јавља у изразу општег интеграла, мењаће се такође вредности $x = x_0$ које анулирају дату везу $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ независно променљиве x, интеграла y и више његових извода. Датој кривој Γ_i у равни константе C_i одговара једна или више кривих Δ_i у равни x_0, тако да ако константа C_i опише криву Γ_i, једна вредност x_0 описаће једну од кривих Δ_i.

Може се поставити задатак да се нађу услови да се криве сведу на изоловане тачке, то јест услови да се вредности x_0 не мењају са константама интеграције, и да се у том случају све израчунају.

Овај проблем, када је дата веза ψ, своди се на тражење *услова да се нуле или бесконачности општег интеграла диференцијалне једначине не мењају са интеграционим константама* и на непосредно израчунавање нула или бесконачности овог општег интеграла, што су све проблеми већ сами по себи интересантни. Господа Фукс (Fuchs), Поенкаре (Poincaré), Пикар (Picard) и Пенлеве (Painlevé) бавили су се аналогним проблемима који се односе на алгебарске критичне тачке и трансцендентне сингуларитете општег интеграла. Ако је чињеница о непокретности сингуларитета од битног значаја са становишта теорије функција, није мање тачно да чињеница о непокретности вредности означених са x_0, додатих оној о непокретности трансцендентних сингуларитета, може да има великог значаја у применама диференцијалних једначина. Заиста, у овим применама извесне особености, као максимуми, минимуми, нуле, асимптоте криве која представља физички или механички феномен, оно је што је најзначајније да се упозна.

Дајем потпуно решење проблема у случају алгебарских једначина првог реда. Потребни и довољни услови да се нуле или бесконачности општег интеграла не мењају са интеграционом константом су врло једноставни и увек је лако утврдити да ли су они испуњени за дату једначину. Ако су нуле (или бесконачности) непокретни, указујем на начин да се све израчунају, а тада методе Бриоа (Briot) и Букеа (Bouquet) омогућују да им се нађе ред, у случају када ред постоји, и да се изучи интеграл у њиховој околини. Ако су покретне, омогућавам да им се одреде редови, који су увек самерљиви. Овај се рачун врши графички, на врло погодан начин, помоћу одређеног полигона чија конструкција захтева само познавање степена од y и y' на левој страни једначине која је дата у облику полинома по y и y'. Разматрање овог полигона у овом изучавању уводи се на природан начин, што се види из следећих теорема:

Да би интеграл имао покретних нула реда λ, потребно је и довољно да тај полигон има страницу коефицијента правца λ; да би имао покретних бесконачности реда λ, потребно је и довољно да полигон има страницу коефицијента правца $-\lambda$.

У случају једначина вишег реда било ми је немогуће да дам исто такво потпуно решење проблема. Ипак, дајем *довољне* услове када су нуле или бесконачности непокретне, претпостављајући да су непокретни трансцендентни сингуларитети посматраних интеграла; овако изражене теореме имају примену, на пример, при израчунавању мероморфних интеграла једначине за коју се неће јавити тешкоће што се тиче трансцендентних сингуларитета. Тако наведени *довољни услови* компликованији су него у случају једначина првог реда, али је увек лако на самој диференцијалној једначини утврдити да ли су они испуњени или нису. Ово утврђивање своди се на конструкцију полигона који је аналоган оном у случају једначина првог реда и на тражење корена алгебарске једначине (која зависи од дате диференцијалне једначине), који се налазе у датом реалном интервалу или у појасу ограниченом са две праве у имагинарној (комплексној, прим. прев.) равни. Коефицијенти правца страница полигона и неки корени ове алгебарске једначине представљају једино могуће редове покретних нула и бесконачности интеграла.[1] Ови редови могу бити непромењиви (са-

[1] Али се тада, у општем случају, не зна не постоје ли покретне тачке x у којима се y анулира када је $\frac{dy}{dx}$ неодређено.

мерљиви или несамерљиви) или чак имагинарни (комплексни, прим. прев.) или зависити од интеграционих константи; показујем довољне услове да сви они буду непроменљиви, као у случају првог реда.

Могуће примене тако добијених резултата су бројне и различите. Неке од њих наводим у овом раду.

Рад је подељен на два дела: први, који се односи на једначине првог реда, и други, на једначине вишег реда.

У Првој глави Првог дела утврђујем потребне и довољне услове да нуле или бесконачности општег интеграла буду независне од интеграционе константе и у случају када су оне покретне, дајем начин да се израчунају њихови редови.

У Другој глави наводим неколико примена претходних принципа.

Најпре долазе неке примене теорема прве главе на сингуларитете општег интеграла. Трансцендентни сингуларитети интеграла не мењају се никада са интеграционом константом, према теореми господина Пенлевеа. Господин Фукс је дао услове да то исто буде и са алгебарским критичним тачкама и довољно је да се мало промене услови господина Фукса да бисмо имали услове за непокретност свих могућих сингуларитета, рачунајући и полове. Када су ови услови испуњени, једначина се интегрише (решава, прим. прев.) алгебарским операцијама или највише са две квадратуре (интеграције прим. прев.)

Ове услове примењујем на извесне опште типове једначина, тражећи све једначине које припадају типовима чији интеграли имају све сингуларитете непокретне.

Резултати прве главе такође омогућују неколико примедаба на поларне периоде интеграла једначине $F(y, y', y'') = 0$ када је она дефинисана инверзијом Абеловог интеграла.

Друга глава завршава се применом на униформне партикуларне интеграле; нарочито наводим обимне класе једначина код којих сваки униформни интеграл треба да је рационална функција. У случају када постоје трансцендентни униформни интеграли, одређујем горњу границу бројева тих *йосебних* интеграла и указујем на алгебарске везе које постоје између два или три ма која од ових интеграла. Глава се завршава примедбом на резидууме интеграла који одговарају помичним простим половима.

У другом делу, где се испитују једначине вишег реда, најпре наводим довољне услове (претпостављајући да су трансцендентни сингуларитети посматраних интеграла непокретни) за непокретне нуле и бесконачности интеграла. У случају када су ти услови испуњени, указујем на начин на који се могу израчунати те нуле или те бесконачности. У случају када су покретне одређујем њихове могуће редове.

Потом (у Другој глави овог дела) наводим неколико примена униформних интеграла.

Када полигон који одговара једначини испуњава извесне услове, изучавање униформних интеграла своди се на изучавање холоморфних интеграла једне друге једначине. Скрећем пажњу на генерализацију особине, на коју је указао господин Пикар, мероморфних интеграла алгебарских једначина другог реда у којима се x не јавља експлицитно. Ова се особина састоји у томе што је интегралу могуће дати облик количника две целе функције које задовољавају познате диференцијалне једначине.

Али најважнија примена је следећа: у многобројним случајевима могуће је наћи *прве интеграле за униформне интеграле* једначине. Тако називам (односи се на прве интеграле, прим. прев.) функције по x, y и по неким њиховим изводима, које се своде на константу или на рационални разломак по x, када се у њој y замени једним *униформним* интегралом дате диференцијалне једначине. Познавање таквих првих интеграла упрошћава тражење униформних интеграла сводећи га на посматрање једначина нижег реда. Ова чињеница допушта да се у бројним случајевима препозна да ли једначина има или нема униформних интеграла и да се сви они израчунају, у случају да постоје. Указујем како се a priori могу саставити типови једначина за које ће се знати њихови први интеграли и за које је могуће одредити све униформне интеграле.

ПРВИ ДЕО

ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

ПРВА ГЛАВА

О НУЛАМА И БЕСКОНАЧНОСТИМА ОПШТЕГ ИНТЕГРАЛА

1. Нека је

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} \cdot y'^{n_i}$$

полином по y и $y' = \dfrac{dy}{dx}$, где су m_i и n_i позитивни цели бројеви такви да није истовремено $m_i = m_j$, $n_i = n_j$ за $i \neq j$ и где су φ_i било какве функције од x.

Саставимо двострану таблицу од $2s$ следећих позитивних целих бројева

$$M_i = m_i + n_i, \quad N_i = n_i$$

и повуцимо у равни две осе: на једној ћемо рачунати M_i, а на другој N_i, и убележимо s тачака (M_i, N_i), водећи рачуна да поред сваке од њих упишемо њен индекс i.

Нека је (M_α, N_α) тачка најудаљенија од осе ON; ако их има више, које су на истом растојању од ON, посматраће се она међу њима која је најудаљенија од осе OM. Нека је, исто тако, (M_β, N_β) тачка најближа оси ON. У случају да постоји више тачака на истој правој паралелној оси ON која пролази кроз тачку (M_β, N_β), поштоваћемо исти договор као за тачку (M_α, N_α).

Од тачке (M_α, N_α) повуцимо полуправу паралелну и истог смера са ON. Обрћимо је око (M_α, N_α) у смеру супротном сказаљци на сату, здесна налево, све док не сретне неку тачку $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ и тада се ту зауставимо. Нека је $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ тачка у којој се полуправа зауставила; ако би их било више на истој правој, узела би се најудаљенија од (M_α, N_α).

Спојимо тачке (M_α, N_α) и $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ помоћу дужи, продужимо неограничено ову дуж у смеру од (M_α, N_α) према $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ и обрћимо овај продужетак око $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ док не сретне нову тачку $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$; спојимо тачке $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ и $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$ помоћу дужи и понављајмо претходну радњу све док се не сретне тачка (M_β, N_β), што ће се неопходно догодити. Тако ће се уобличити полигонална конвексна линија која полази од (M_α, N_α) и допире до (M_β, N_β); затварајући је двема паралелама са осом ON које полазе од врхова (M_α, N_α) и (M_β, N_β) и делом OM обухваћеним између ове две паралеле, добиће се полигон који ћу, краткоће ради, назвати полигон Π од F.

Према самом начину на који је конструисан, овај ће полигон имати следеће особине.

1. Ако се кроз једну тачку, ма коју међу тачкама (M_i, N_i), повуче паралела са једном од страница полигона која не пролази кроз тачку (M_i, N_i), ордината у координатном почетку (одсечак на оси ON, прим. прев.) добивене праве увек је мања но ордината у координатном почетку посматране странице. И више, међу свим правим које се могу повући спајајући две и две тачке (M_i, N_i), странице полигона су једине праве које имају својство да ако се кроз ма коју тачку (M_i, N_i) повуку њима паралеле, ордината у координатном почетку сваке од ових паралела је мања од оне странице полигона.

2. Ако се кроз ма коју тачку (M_i, N_i) која није теме полигона повуче права D ма ког правца, увек постоји бар једно теме полигона такво да ако се кроз тај врх повуче паралела Δ са D, ордината у координатном почетку праве Δ биће већа од оне D. И више, темена полигона су једине тачке (M_i, N_i) које имају ово својство.

Договоримо се, краткоће ради, о следећем:

a. тачку (M_i, N_i) означићемо са (i);

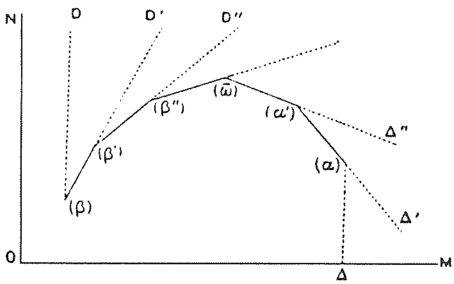
b. дуж која спаја две тачке (i) и (j) означићемо са (i, j);

c. ординату у координатном почетку праве која пролази кроз тачку (i) и која има коефицијент правца λ означићемо са $S_{i,\lambda}$;

d. темена (α) и (β) назваћемо *екстремна темена*, а остала *уметнута темена*;

e. највише издигнуто теме полигона назваћемо *теме* $\tilde{\omega}$; ако их има два на истој паралели са OM, разликоваћемо теме $\tilde{\omega}$ лево и десно;

f. најзад, *област* тачке (M_i, N_i) (слика 1) назваћемо највећи интервал (λ_1, λ_2), такав да, ако λ варира у том интервалу, права коефицијента правца λ и која пролази кроз тачку (M_i, N_i) има ординату у координатном почетку стално већу од оне која припада правој која има исти правац и пролази кроз ма коју другу тачку (M_i, N_i).



Слика 1

Према особини полигона, област тачке (M_i, N_i) која није теме је нула. Напротив, лако се види да је:

1° област темена (β), најближег OM, интервал од

$$\lambda = \frac{N_\beta - N_{\beta'}}{M_\beta - M_{\beta'}} \quad \text{до} \quad \lambda = +\infty;$$

2° област темена (α), најудаљенијег од OM, интервал од

$$\lambda = \frac{N_\alpha - N_{\alpha'}}{M_\alpha - M_{\alpha'}} \quad \text{до} \quad \lambda = -\infty;$$

3° област уметнутог темена (i), обухваћеног теменима (i') и (i'') је интервал од

$$\lambda = \frac{N_i - N_{i'}}{M_i - M_{i'}} \quad \text{до} \quad \lambda = \frac{N_i - N_{i''}}{M_i - M_{i''}}.$$

На слици се област врха (β) може представити углом $D\beta D'$, она врха (β′) са $D'\beta'D''\ldots$, најзад, она врха (α) углом $\Delta\alpha\Delta'$.

Рећи ћу да је неко теме *позитивне* или *негативне области* према томе да ли су све вредности за λ обухваћене у његовој области позитивне или негативне. Сва темена лево од темена $\tilde{\omega}$ лево су у позитивној области; сва она десно од $\tilde{\omega}$ десно су у негативној области. Ако се два темена $\tilde{\omega}$ поклапају, једно такво теме $\tilde{\omega}$ има један део своје области позитиван, а други негативан; то је једини случај када област једног темена може бити подељена на два дела различитих предзнака. Најзад, ако полигон има само једно теме (што наступа када се он сведе на паралелу са ON), то ће бити јединствено $\tilde{\omega}$, а његова област је интервал од $\lambda = \infty$ до $\lambda = -\infty$.

Конструкција полигона који се односи на дати полином F врши се врло лако помоћу коцкастог папира. Исто је тако лако наћи облик полинома F који одговара датом систему тачака (M_i, N_i); треба само, да би ово имало смисла, да систем (M_i, N_i) буде сав у углу који чини позитивни део од OM и део симетрале угла NOM који је обухваћен тим углом.

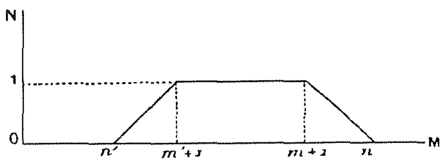
Сваки полином степена μ по y' има свој полигон цео смештен у траци обухваћеној осом OM и паралелом са осом OM постављеном на растојању μ од OM; осим тога, он је постављен у углу који чине симетрала угла NOM и оса OM, а постоји бар једно теме на паралели μ са OM. Обратно: сваком систему (M_i, N_i) који је садржан у претходном углу и који је постављен сав између OM и паралеле са OM на растојању μ од OM, а који има теме на тој паралели, одговара полином по y и y' степена μ по y'.

Полигон полинома F степена 0 по y' своди се на део осе OM.

Ако су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ два полинома по y, највећи степени по y нека су m и n, а најмањи m' и n', општи облик полигона за

$$F = P(x,y)y' + Q(x,y)$$

представљен је на слици 2.

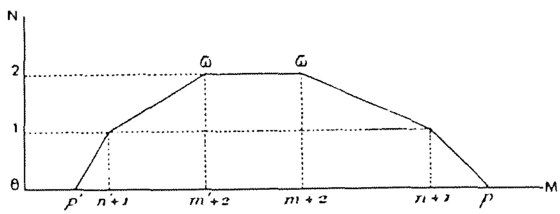


Слика 2

За полином

$$F = P(x,y)y'^2 + Q(x,y)y' + R(x,y),$$

где је p највећи степен од R по y, а p' најмањи, општи облик полигона представљен је на слици 3 итд.



Слика 3

Најзад, додаћу две примедбе које ћу после искористити.

1. Да би полигон Π_P за $P(x,y,y')$ у исто време био полигон за $P(x,y,y') + Q(x,y,y')$, потребно је и довољно да полигон Π_Q за Q нема ниједно теме изван полигона Π_P. Тако, када Q не садржи y', услов се своди на то да највећи и најмањи степен од Q по y буде садржан у интервалу апсциса два екстремна темена од Π_P.

2. Када се $y = \frac{1}{z}$ стави у

$$F(x,y,y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} \cdot y'^{n_i},$$

овај ће полином постати

$$\Phi(x,z,z') = \frac{1}{z^{\delta}} \psi(x,z,z'),$$

где је δ највећа вредност збира $M_i + N_i$ који се односи на F и где је ψ полином по z и z' облика

$$\psi(x,z,z') = \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{\delta-(m_i+2n_i)} z'^{n_i}.$$

Свака тачка (M_i', N_i') која се односи на ψ симетрична је одговарајућој тачки (M_i, N_i) која се односи на F у односу на праву $M = \delta$, јер

$$M_i' = \left[\delta - (m_i + 2n_i)\right] + n_i = \delta - M_i, \quad N_i' = n_i = N_i;$$

према томе, полигон Π_ψ од ψ симетричан је полигону Π_P од F у односу на праву $M = \delta$.

2. Пошто је ово сређено, посматрајмо диференцијалну једначину

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0; \tag{1}$$

нека је $x = a$ вредност за x таква да, када је y интеграл за (1) и λ константа коначна и различита од нуле, однос

$$\frac{x}{(x-a)^{\lambda}}$$

и његов први извод по x теже одређеним и коначним границама када x тежи a. То ће се увек догодити када је a вредност која анулира или чини бесконачним интеграл y, сем ако се ова вредност не поклопи са неким од трансцендентних сингуларитета интеграла, сингуларитета који су непокретни и унапред познати. Стављајући

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

одакле је

$$y' = \lambda(x-a)^{\lambda-1} f(x) + (x-a)^{\lambda} f'(x),$$

општи члан ће постати

$$\varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}\left[\lambda^{n_i} f^{m_i+n_i}(x) + \theta_i(x)\right],$$

где је $\theta_i(x)$ полином по $f(x)$ и $(x-a)f'(x)$ са константним коефицијентима, али у коме нема члана који зависи само од $f(x)$. Биће, дакле,

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}\left[\lambda^{n_i} f^{m_i+n_i}(x) + \theta_i(x)\right].$$

Посматрајмо у овом збиру скуп T чланова за које је експонент $\lambda(m_i+n_i)-n_i$ за $(x-a)$, степена који стоји као чинилац, најмањи. Према вредностима за m_i, n_i, λ, скуп T биће састављен од само једног члана, од два или више чланова, а ја ћу тражити потребне и довољне услове који одговарају овим различитим случајевима.

Уопште, да би чланови индекса $i', i'', i''', \ldots$ чинили део од T, потребно је и довољно да су симултано испуњени следећи услови:

$$(1) \qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'} = \lambda(m_{i''}+n_{i''})-n_{i''} = \ldots;$$

$$(2) \qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'} < \lambda(m_i+n_i)-n_i;$$

пошто се припишу индексу i на десној страни неједнакости сви цели бројеви од 1 до s, различити од $i', i'', i''', \ldots$, услов (1) може се написати

$$(3) \qquad \lambda = \frac{N_{i'}-N_{i''}}{M_{i'}-M_{i''}} = \frac{N_{i''}-N_{i'''}}{M_{i''}-M_{i'''}} = \ldots$$

Види се, дакле, да λ мора бити једнако коефицијенту правца праве (i', i'') и да све тачке које одговарају различитим члановима из T треба да су на овој правој.

Са друге стране, величина $\lambda M_i - N_i$, пошто се у њој λ замени вредношћу (3), представља ординату у координатном почетку, промењеног знака, праве која пролази кроз тачку (i) и коефицијента правца λ, ордината коју смо обележили са $S_{i,\lambda}$.

Према томе, да би чланови индекса i', i'', i''' били део скупа T, потребно је и довољно:

1° да су тачке индекса $i', i'', i''', \ldots$ на истој правој и да је λ једнако коефицијенту правца ове праве;

2° да је $S_{i',\lambda} > S_{i,\lambda}$ за све вредности i од 1 до s, различите од $i', i'', i''', \ldots$, то ће рећи да ордината у координатном почетку праве (i', i'') буде већа но она ма које праве паралелне са (i', i''), а која пролази кроз тачку (i) која се не налази на правој (i', i'').

Да би чланови који одговарају двема тачкама (i') и (i'') припадали T, коефицијент правца λ праве (i', i'')треба да има вредност из релације (3). Обратно, нека је λ погодно изабрано, ма какве да су две тачке $(i'), (i'')$, услов (1) се увек може задовољити само ако те тачке нису на истој правој паралелној са OM или ON, јер се претпоставља да је λ ограничено и различито од нуле.

Остаје још да се задовољи услов (2). Дакле, према особинама полигона, да би овај услов био испуњен, потребно је и довољно да дуж $(i'), (i'')$ буде страница полигона која није паралелна са осама. Види се да је, да би T било састављено од најмање два члана, потребно и довољно да λ буде коефицијент правца ма које странице полигона која није паралелна са осама; индекси чланова који се јављају у T су од темена полигона који се налазе на страници чији је коефицијент правца једнак са (3).

Сада се овај резултат може употребити да би се за T дали извесни облици који ће нам у даљем користити.

A. Претпоставимо да полигон за F нема ниједне странице која није паралелна са осама или, ако их има, да дати број λ није једнак ни са једним коефицијентом правца ових страница. Скуп T је, тада, састављен од једног јединог члана, а индекс овог члана једнак је индексу темена у чијој се области налази λ.

Нека је (h) то теме и ставимо, краткоће ради

$$\varphi_i(x)[\lambda^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \theta_i(x)] = \Omega_i(x);$$

тада се F може написати у облику

$$\text{I} \qquad F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}}[\Omega_h(x) + \Sigma(x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)];$$

знак Σ простире се на све тачке (i) различите од (h). Сви експоненти $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ који се јављају на десној страни су позитивни, јер, према самој дефиницији члана индекса, h је $S_{h,\lambda} > S_{i,\lambda}$ (у оригиналу стоји $S_{h,\lambda} < S_{i,\lambda}$, прим. прев.) за све тачке (i) различите од (h).

B. Претпоставимо да полигон има страница које нису паралелне са осама и да је λ једнако коефицијенту правца једне од тих страница.

T ће тада бити збир свих чланова који одговарају индексима тачака које се налазе на страници чији је коефицијент правца λ.

Договоримо се да обележимо са:

$\sum\limits_{(i,j)}$ сабирање које се простире на индексе свих тачака (i) које леже на правој (i, j);

$\sum\limits_{-(i,j)}$ сабирање које се простире на индексе свих тачака (i) које не леже на правој (i, j).

Нека је (γ, δ) ма која страница полигона која није паралелна са осама; када је λ једнако коефицијенту правца ове странице, тада је

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x)$$

и F ће се моћи написати у облику

$$\text{II} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} [\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x)],$$

где су сви степени $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ позитивни.

Али ма који облик, I или II, који ће F узети, треба да је $F = 0$ идентички у (некој прим. прев.) околини од $x = a$ за ма коју вредност a; дакле, у тој околини биће идентични или

$$\Omega_h(x) + \Sigma (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

или

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

према томе да ли у околини $x = a$, F узима облик I или II, тј. према томе да ли је испуњен услов А или В.

3. Претпоставимо сада да x тежи a; функција $f(x)$ која је дата односом y са $(x-a)^{\lambda}$, као и њен извод $f'(x)$, тежиће коначним и одређеним границама, а како су сви $\theta_i(x)$ полиноми по $f(x)$ и по $(x-a)f'(x)$ у којима недостају чланови који зависе само од $f(x)$, за $x = a$ биће

$$\lim \theta_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Дакле, за све вредности a, сем можда за извесне вредности a' које су посебне и које се могу препознати из саме диференцијалне једначине, за које функције $\varphi_i(x)$ постају бесконачне, биће

$$\lim \Omega_i(x) = \lambda^{n_i} \varphi_i(a) \rho \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s),$$

где је ρ граница $f(x)$ за $x = a$.

Водећи рачуна да су експоненти $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ позитивни, види се, дакле, да за сваку вредност a која се не поклапа ни са једном од посебних вредности a':

A. ако полигон нема страница које нису паралелне са осама, или (у супротном случају) ако λ није једнако ни са једним коефицијентом правца страница полигона, биће:

$$\lambda^{n_h} \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0,$$

а како је ρ различито од нуле, a мора да је корен од $\varphi_h(a) = 0$, што показује да a не зависи од константе интеграције. Што се тиче индекса h, то је индекс темена у чијој се области налази λ;

B. ако полигон има страница које нису паралелне са осама и ако је λ једнако са коефицијентом правца такве странице (γ, δ), биће:

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \lambda^{n_i} \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0,$$

где се сумирање протеже на све тачке (i) на страници (γ, δ). Ма каква била вредност приписана за a, ова једначина, коју ћу назвати *једначина ӣо* ρ за страницу (γ, δ), има бар један корен ρ коначан и различит од нуле, јер сви M_i који се јављају у збиру $\sum\limits_{(\gamma,\delta)}$ су различити и вредност за a може зависити од интеграционе константе.

Из тога се могу извући следећи закључци.

1. Кад год општи интеграл има покретне бесконачности, полигон од F има једну или више страница са негативним коефицијентом правца и ред ма које од ових бесконачности једнак је једном од ових коефицијената правца.

2. Кад год општи интеграл има покретних нула, полигон од F има једну или више страница са позитивним коефицијентом правца и ред ма које од тих нула једнак је једном од тих коефицијената.

Следи најпре да је ред покретне бесконачности или нуле увек самерљив, што се могло предвидети према теореми господина Пенлевеа о непокретности трансцендентних сингуларитета интеграла.

Као друго, из овога се закључује и следеће.

3. Ако десно од темена $\tilde{\omega}$ десно полигон нема темена, бесконачности интеграла су непокретне и истовремено морају бити било трансцендентни сингуларитети интеграла, било нуле функције $\varphi_h(x)$ (h означава индекс темена $\tilde{\omega}$ десно), било, најзад, бесконачности неке функције φ_i различите од φ_h.

4. Ако лево од темена $\tilde{\omega}$ лево полигон нема темена, нуле интеграла су непокретне и налазе се међу одговарајућим вредностима оних из претходног случаја.

4. Тако смо добили довољне услове за непокретност бесконачности и нула општег интеграла. Али тврдим да су услови и потребни, тј. ако десно од темена $\tilde{\omega}$ десно постоје друга темена, општи интеграл има сигурно покретне бесконачности, а ако лево од темена $\tilde{\omega}$ лево постоје темена, интеграл има покретне нуле.

Покажимо то, на пример, за бесконачности. Претпоставимо да има других темена десно од $\tilde{\omega}$ десно; да би тако било, потребно је и довољно да, ако се диференцијална једначина напише у облику

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=\mu} f_k(x,y)\, y'^{\mu-k} = 0,$$

где су f_k полиноми по y, ту постоји бар један полином f_k такав да, ако се обележи са ν_k степен по y од f_k, важи $\nu_k - \nu_0 > k$.

Стварно, ако се једначина (1) напише у облику

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

тачке (M_i, N_i)дефинисане су координатама

$$M_i = m_i + n_i, \quad N_i = n_i.$$

Теме $\tilde{\omega}$ десно које има максималну ординату μ долази од члана полинома $f_0(x,y)\, y'^{n_i}$ који има највиши степен по y; долази, дакле, од члана $y^{\nu_0} y'^{\mu}$, ν_0 је степен f_0 по y.

Да би постојала темена десно од тог темена $\tilde{\omega}$, потребно је и довољно да бар једна права Δ која спаја тај врх са другим тачкама (i) има негативан коефицијент правца; ова права не може да пролази ни кроз једну тачку (i) која долази од чланова полинома $f_0(x,y)\, y'^{\mu}$, јер су све те тачке на истој правој паралелној са OM, а која пролази кроз теме $\tilde{\omega}$ десно. Претпоставимо, дакле, да пролази кроз неку тачку која долази од чланова полинома $f_k(x,y)\, y'^{\mu-k}$. Ако је m степен од y у посматраном члану тог полинома, коефицијент правца праве Δ је

$$\frac{(\nu_0 - \mu) - (m - \mu + k)}{\mu - (\mu + k)} = \frac{\nu_0 - m + k}{k}.$$

Да би он био негативан, потребно је и довољно да је $m - \nu_0 > k$ и, пошто је $m \le \nu_k$, треба, *a fortiori*, да је $\nu_k - \nu_0 > k$.

Овај је услов такође довољан да десно од темена $\tilde{\omega}$ десно постоје друга темена; јер, на пример, коефицијент правца праве која спаја теме $\tilde{\omega}$ десно са тачком која следи из члана $y^{\nu_k} y'^{\mu-k}$, тада је негативан.

Претпоставимо, дакле, да на левој страни једначине (1) постоји један или више чланова $f_h(x,y)\,y'^{\mu-h}$ таквих да је $v_h - v_0 > h$ и ставимо $y = \frac{1}{z}$; једначина ће постати

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x,z)\,z'^{\mu-i}}{z^{2(\mu-i)+v_i}} = 0, \tag{2}$$

где су $\varphi_i(x,z)$ полиноми по z који не садрже z као фактор. Тврдим да се општи интеграл z од (2) анулира за коначне вредности x и да се ове вредности мењају са интеграционом константом.

Да то покажемо, ставимо $z' = \frac{z}{t}$; једначина (2) постаје

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x,z)}{t^{\mu-1} z^{\mu-1+v_i}} = 0, \tag{3}$$

а када помножимо са $z^{\mu+v}\cdot t^{\mu}$,

$$\varphi_0(x,z) + \sum_{i=1}^{i=\mu} \varphi_i(x,z)\, z^{i+v_0-v_i} t^i = 0. \tag{4}$$

Како међу експонентима $i + v_0 - v_i$ има најмање један негативан (захваљујући чињеници да има бар један индекс h такав да $v_h - v_0 > h$) и како ниједна функција φ_i не садржи z као фактор, ова једначина (4), алгебарска по t и z, допушта један или више корена t који се анулирају са z. Ови корени чине један или више кружних система, а корени једног истог кружног система биће, у околини $x = x_0$, представљени развојем облика

$$t = Az^{\frac{\alpha}{n}} + Bz^{\frac{\alpha+1}{n}} + Cz^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots,$$

где су α и n позитивни цели бројеви бар једнаки јединици; A, B, C,... су функције од x и A није идентички једнако нули.

Посматрајмо један од тих корена. Последња једначина, у односу на овај корен, може се написати

$$\frac{1}{t} = \frac{z'}{z} = \frac{1}{Az^{\frac{\alpha}{n}} + Bz^{\frac{\alpha+1}{n}} + Cz^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots},$$

а стављајући $z = u^n$, она постаје

$$(5) \qquad n\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^{\alpha-1}(A+Bu+Cu^2+\ldots)}.$$

Обележимо са (P) скуп сингуларитета (полова, алгебарских критичних тачака, трансцендентних тачака) функција A, B, C,..., сингуларитети који се очигледно не мењају са интеграционом константом, и разликујмо два случаја према томе да ли је $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$.

Први случај: $\alpha = 1$. – Тада је $\frac{du}{dx}$ холоморфно у околини $x = x_0$, $u = 0$, и то ма каква да је вредност x_0, само да се не поклопи са неком вредношћу (P). Према томе, једначина (5) допушта један и само један интеграл који је холоморфан и који за $x = x_0$ узима вредност $u = 0$; и више, овај интеграл не може бити идентички једнак нули, јер A није идентички једнако нули, и остаје коначан за $x = x_0$. Дакле, и сама једначина (2) допушта један интеграл z који се анулира за $x = x_0$, а који се не своди идентички на нулу. Како је x_0 произвољно, нуле од z се мењају са интеграционом константом и према томе, бесконачности од y су покретне.

Пошто се интеграл u анулира за $x = x_0$ и пошто је холоморфан у околини ове вредности, то је x_0 пол интеграла y, а како је $x = x_0$ проста нула од u (јер се $\frac{du}{dx}$ не анулира), то је нула n-тог реда за z и пол n-тог реда за y.

Други случај: $\alpha > 1$. – Тада $\frac{du}{dx}$ постаје бесконачно за $u = 0$, али је његова обрнута вредност $\frac{dx}{du}$ холоморфна у околини $x = x_0$, $u = 0$ само ако се x_0 не поклапа са неком вредношћу обухваћеном у скупу (P). Како се сви узастопни изводи $\frac{dx}{du}$ по x (по u, прим. прев.) све до реда $\alpha - 1$ анулирају за $x = x_0$, $u = 0$, једначина (5) има интеграл u који се анулира за $x = x_0$ и за који је ова вредност нула реда $\frac{1}{\alpha}$. Према томе, $x = x_0$ биће бесконачност реда $\frac{n}{\alpha}$ за y, а ова се бесконачност мења са интеграционом константом.

Према томе, да би бесконачности интеграла y биле непокретне, треба да је испуњен услов

$$\nu_k - \nu_0 \leq k \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

или бар треба (што се видело у претходном) да полигон који се односи на леву страну једначине нема ниједно теме десно од темена $\tilde{\omega}$ десно.

Исказани услов о непокретности бесконачности је, дакле, неопходан; видели смо, са друге стране, да је он и довољан. У то се може уверити и на други, следећи начин. Када десно од темена $\tilde{\omega}$ десно нема других темена, ниједан експонент $i + v_i - v_0$ у једначини (4) није негативан и једначина не допушта ниједан корен t који се анулира са z. Из овога следи да је $\frac{1}{t}$ холоморфна функција било по z, било по $u = z^{\frac{1}{n}}$ (где је n број корена једначине (4) који припадају истом кружном систему, када z тежи нули) у околини $z = 0$ (или $u = 0$) и за сваку вредност x_0 која се не поклапа ни са једном вредношћу обухваћеном скупом (P). Према познатој теореми, једини интеграл z (или u) који се анулира за такве вредности x_0 је $z = 0$ ($u = 0$), тј. $y = \infty$; општи интеграл y задате једначине не може, дакле, постати бесконачан до за извесне утврђене вредности x које припадају скупу (P).

Може се, према томе, изрећи следећа теорема:

Теорема I. – *Да се бесконачности општег интеграла алгебарске једначине првог реда* $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}') = 0$ *не мењају са интеграционом константом, потребно је и довољно да полигон од* F *нема ниједно теме десно од свог темена* $\tilde{\omega}$ *десно.*

Ако је једначина $F = 0$ написана у облику

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x,y)\, y'^{\mu-i} = 0,$$

где су f_i полиноми по y и где је степен од $f_i = v_i$, овај услов постаје

$$v_i - v_0 \leq i \quad (i = 0,1,2,\ldots,\mu).$$

5. Пошто се видело да интеграл од $F = 0$ допушта покретне бесконачности, сада се ради да се нађе ред вишеструкости ових бесконачности.

Видели смо да када постоје покретне бесконачности, тада је $\alpha > 0$ и да

1° ако је $\alpha = 1$, $x = x_0$ је пол реда n за y;

2° ако је $\alpha > 1$, $x = x_0$ је бесконачност реда $\frac{n}{\alpha}$ за y.

Према томе, у општем случају x_0 је бесконачност реда $\frac{1}{\tau}$ за y, τ обележава инфинитезималан ред корена t у односу на z у једначини (3). Обратно, свакој вредности τ која представља инфинитезимални ред једног кружног система корена t једначине (3) у односу на z одговарају покретне бесконачности за y које имају ред вишеструкости $\frac{1}{\tau}$.

Потражимо, дакле, ове вредности τ. Оне се могу добити класичном Пуизеовом (Puiseux) конструкцијом применом на једначину (3), али полигон који смо ми претходно користили даје директно ове вредности. Стварно, ако се једначина $F(x, y, y') = 0$ доведе на облик

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i} = 0$$

и ако се стави $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{1}{zt}$, које користи да се оствари ранија смена $y = \frac{1}{z}$, $z' = \frac{z}{t}$, добија се једначина

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x)\, z^{-(m_i+n_i)} t^{-n_i} = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x)\, z^{-M_i} t^{-N_i} = 0. \tag{6}$$

Ако се стави

$$\alpha_i = M_{\tilde{\omega}} - M_i, \quad \beta_i = N_{\tilde{\omega}} - N_i,$$

где су $M_{\tilde{\omega}}$ и $N_{\tilde{\omega}}$ координате темена $\tilde{\omega}$ десно полигона Π од F, једначина (6) постаје

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x)\, z^{\alpha_i} t^{\beta_i} = 0, \tag{7}$$

где су α_i и β_i цели позитивни бројеви.

Једначина (7), према поступку како је састављена, је једначина (3). Обележавајући са τ инфинитезимални ред од t за z, општи члан од (7) биће инфинитезималног реда $\alpha_i + \beta_i\tau$, а добиће се све могуће вредности за τ изједначавајући (упоређујући, прим. прев.) $\alpha_i + \beta_i\tau$ са једним другим, аналогним изразом $\alpha_j + \beta_j\tau$ и бирајући међу свим тако добијеним вредностима за τ оне који задовољавају услове

$$\alpha_i + \beta_i\tau \geq \alpha_j + \beta_j\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, s, \ \ j = 1, 2, \ldots, s).$$

Пошто је

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_i - \beta_j} = \frac{M_i - M_j}{N_i - N_j},$$

претходни услови показују да су вредности за τ инверзне и промењеног знака у односу на коефицијенте правца страница са негативним коефицијентом правца полигона П од F и да, обратно, свакој страници од П са негативним коефицијентом правца одговара једна вредност за τ. Према томе, ред λ помичне бесконачности од y једнак је коефицијенту правца промењеног знака једне странице од П десно од темена $\tilde{\omega}$ десно и обратно: свакој од ових страница одговарају помичне бесконачности од y чији је ред вишеструкости коефицијент правца ове странице промењеног знака. Може се, дакле, изрећи следећа теорема:

Теорема II. – *Да би ойшūи инūеīрал од* $\mathrm{F}(x,y,y')=0$ *имао йокреūне бесконачносūи које имају даūи број* λ *као ред, йоūребно је и довољно да йолиīон* П *од* F *има сūраницу десно од своī ūемена* $\tilde{\omega}$ *десно коефицијенūа йравца* $-\lambda$.

Увек када ред бесконачности од y није једнак са коефицијентом правца такве странице, та се бесконачност поклапа било са трансцендентном сингуларном тачком од y, било са неком од нула или бесконачности функција $\varphi_i(x)$. *То ће биūи, йре свеīа, нула од* $\varphi_\mathrm{h}(\mathrm{x})$ *или бесконачносū друīих* $\varphi_i(\mathrm{x})$, *īде* h *означава индекс ūемена йолиīона* П, *чијом је облашћу* $-\lambda$ *обухваћено*, као што следи из оног што смо видели на почетку ове главе. Ако су, у посебном случају, све функције $\varphi_i(x)$ холоморфне, x_0 је нула од $\varphi_h(x)$, а ако је $\varphi_h(x)$ константа или, општије, функција која се не анулира ни за једну коначну вредност од x, интеграл y не може постати бесконачан ни за једну коначну вредност од x.

Из свега се изводи и следећа теорема:

Теорема III. – *Кад īод инūеīрал једначине* $\mathrm{F}(x,y,y')=0$ *која је алīебарска йо* x,y,y' *има своје бесконачносūи независне од инūеīрационе консūанūе, ūе бесконачносūи су у коначном броју.*

Најзад, Бриоове (Briot) и Букеове (Bouquet) методе увек ће дозволити да се реши да ли је нека од датих нула за $\varphi_h(x)$ бесконачност само једног интеграла или бесконачност заједничка коначном или бесконачном броју интеграла.

6. Примењујући резултате који претходе на трансформацију по $\dfrac{1}{y}$ од $F(x,y,y')=0$ и подсећајући се да је полигон ове трансформације симетричан, у односу на извесну паралелу са ON, са полигоном од F, постоје за нуле интеграла y искази аналогни претходно наведеним за његове бесконачности.

Теорема IV. – *Да би нуле инѿеграла* $F(x,y,y')=0$ *биле неѿокреѿне, ѿоѿребно је и довољно да ѿеме* $\tilde{\omega}$ *лево ѿолиīона* Π *од* F *буде лево ексѿремно ѿеме овоī ѿолиīона.*

Теорема V. – *Да би инѿеīрал имао ѿокреѿне нуле даѿоī реда* λ, *ѿоѿребно је и довољно да ѿолиīон* Π *има лево од ѿемена* $\tilde{\omega}$ *лево сѿраницу коефицијенѿа ѿравца* λ.

Теореми IV могу се дати различити облици. Ако се, на пример, $F=0$ напише у облику

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x,y)\, y'^{\mu-i}=0,$$

где су f_i полиноми по y, *ѿоѿребан и довољан услов за неѿокреѿносѿ нула за* y *је да, ѿошѿо се укину сви факѿори заједнички за све* $f_i(x,y)$, *свако* f_i *садржи факѿор* y^h, *īде је* $h \geq i$.

Међутим, до ове теореме долази се лако следећим непосредним расуђивањем.

Да би нуле од y биле непокретне, потребно је и довољно да се све вредности од y' анулирају за $y=0$ ма какво било x и, осим тога, да сва развијања за y' по степенима од y почињу чланом реда бар једнаким 1.

Стварно, пре свега треба све вредности за y' да се анулирају за $y=0$; иначе би било интеграла који секу праву $y=0$ за ма какво x.

Пошто је ово утврђено, развијмо једну од грана од $y'=f(\bar{x},y)$ по степенима од y према Пуизеовом правилу:

$$y=A(x)\,y^{\frac{\lambda}{\mu}}+\ldots;$$

ако се стави $z=y^{\frac{\lambda}{\mu}}$

$$\mu z'=A(x)\,z^{\lambda-\mu+1}+\ldots$$

Овај развој показује да има интеграла $z(x)$ који нису идентички нула и који се анулирају за неку произвољну вредност x_0 од x само ако је $\lambda-\mu+1>0$, или пак ако је $\dfrac{\lambda}{\mu}\geq 1$, одакле одмах следи претходна теорема.

Кад год ред λ неке нуле од y није једнак коефицијенту правца неке странице полигона, ова нула се поклапа било са сингуларном трансцендентном тачком интеграла, било са нулом од $\varphi_h(x)$ (h означава индекс темена у чијој је области λ обухваћено), било, најзад, са бесконачношћу других коефицијената $\varphi_i(x)$. Следи да ако интеграл једначине $F=0$ која је алгебарска по x, y, y' има нуле које не зависе од константе интеграције, те нуле су у ограниченом броју.

Наводим као пример једначину на којој је лако потврдити све што претходи

$$[y' + f(x)y]^m + \varphi(x)y^n = 0$$

(где су m и n позитивни цели бројеви), чији је општи интеграл

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[C + \frac{m-n}{m}\int \sqrt[m]{-\varphi(x)}\, e^{(m-n)\int f(x)dx}dx\right]^{\frac{m}{m-n}},$$

где је C интеграциона константа.

7. Може се десити да интеграл неке једначине истовремено има непокретне и нуле и бесконачности. Према ономе што претходи, може се изрећи следећа теорема:

Теорема VI. – *Да би општи интеграл од* F(x,y,y′) = 0 *истовремено имао непокретне и нуле и бесконачности, потребно је и довољно да полигон* П *од* F *буде правоугаоник, или да се сведе на паралелу са* ON.

Да би се полигон П свео на праву паралелну са ON, потребно је и довољно да једначина буде хомогена по y и y' и, према томе, сводљива на линеарне једначине првог реда. Што се тиче случаја када је П правоугаоник, на њега ћу указати са неколико примера.

У случају једначине првог реда

$$P(x,y)y' + Q(x,y) = 0$$

потребни и довољни услови да се полигон сведе на правоугаоник су

$$n' \le m' + 1 \quad \text{и} \quad n \ge m + 1$$

(знаци неједнакости треба да су обратни, прим. прев.); први је услов потребан и довољан за непокретност нула, а други за непокретност бесконачности.

За једначину

$$P(x,y)y'^2 + Q(x,y)y' + R(x,y) = 0$$

услови да полигон буде правоугаоник су следећи:

$$p' \le n' + 1 \le m' + 2 \quad \text{и} \quad p \ge n + 1 \ge m + 2$$

(и овде знаци неједнакости треба да су обратни, прим. прев.), што се види из општег облика полигона једначине (слика 3).

Завршићу са примедбом да се на претходне проблеме лако могу свести проблеми изучавања пресецања интегралних кривих са унапред датом утврђеном кривом, максимуми и минимуми интегралних кривих, њихове превојне тачке итд.

ДРУГА ГЛАВА

НЕКОЛИКО ПРИМЕНА ПРЕТХОДНИХ ТЕОРЕМА

ЈЕДНАЧИНЕ СА НЕПОКРЕТНИМ СВИМ СИНГУЛАРИТЕТИМА

1. Сингуларитети који се могу јавити код интеграла алгебарске једначине првог реда су:

1° алгебарски сингуларитети (полови и алгебарске критичне тачке);

2° трансцендентни сингуларитети (логаритамске критичне тачке и есенцијалне тачке).

Ови се последњи не мењају са интеграционом константом, док се први, у општем случају, мењају. Али има случајева када су сви могући сингуларитети интеграла непокретни, као што се то дешава, на пример, код линеарне једначине; из теорема прве главе и теореме господина Фукса, које изражавају услове да алгебарске критичне тачке интеграла буду непокретне, лако се изводе потребни и довољни услови да се ова околност појави.

Да критичне тачке буду непокретне, потребно је и довољно, како се зна, да:

1° извод y', одређен датом једначином, не постане бесконачан ни за једну вредност од y и да овај услов буде задовољен и за једначину трансформисану са $\frac{1}{y}$;

2° сваки систем (x_0, y_0) за који се две вредности од y' измењују одговара обичној тачки интеграла који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$.

Први услов се враћа на: када се диференцирана једначина доведе на облик

$$F(x,y,y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x,y)\, y'^{\mu-i} = 0,$$

степен сваког полинома $f_k(x,y)$ по y не надмашује $2k$.

Други услов се може изразити различитим облицима, на пример у следећем облику, који је дао господин Поенкаре.

a. Једначине

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

одређују сингуларне интеграле једначине $F = 0$.

b. Идентички је

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = PF + Q\frac{\partial F}{\partial y},$$

где су P и Q полиноми по y и y' са коефицијентима који су било какве функције од x.

Овим условима је довољно додати оне из Теореме I, Прве главе да бисмо имали потребне и довољне услове да су сви сингуларитети интеграла непокретни. Ови услови су следећи.

A. *Степен полинома* $\mathrm{f_k(x,y)}$ $(\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots,\mu)$ *по* y *не премаша* k.

То ће рећи да се теме $\tilde{\omega}$ полигона од F налази на симетрали угла NOM и да десно од њега нема ниједно теме.

B. Услови (*a*) и (*b*) су испуњени.

Обележимо са p род за $F(x,y,y') = 0$ по y, y'. Господин Поенкаре је показао да, ако једначина $F = 0$ има непокретне критичне тачке:

1° па је $p = 0$, y је рационална функција од u (са коефицијентима који су алгебарске функције коефицијената $\varphi_i(x)$ из $F = 0$), где је u општи интеграл Рикатијеве (Riccati) једначине са коефицијентима који су алгебарске функције од $\varphi_i(x)$;

2° па је $p = 1, y$ је рационална функција од $\lambda\left[\int \chi(x)dx + C\right]$ (са алгебарским коефицијентима по φ_i), где је λ симбол за двопериодичну мероморфну функцију, а $\chi(x)$ алгебарска функција од φ_i;

3° па је $p > 1$, y је алгебарска функција од φ_i.

Следи:

1° ако су услови A и B испуњени, тада је $p \lesseqgtr 1$;

2° ако је $p = 0$, Рикатијева једначина коју задовољава u своди се на линеарну једначину првог реда (претпоставља се да су услови A и B испуњени).

Одакле имамо следећу теорему:

Увек када су услови A *и* B *испуњени, једначина* F = 0 *се алгебарски интеграли или са највише две квадратуре.*

Ако је, на пример, једначина $F(x,y,y') = 0$ алгебарска у односу на x, y, y' и ако су задовољени алгебарски услови, општи интеграл y је алгебарска функција од x и рационална од

$$e^{\int \tilde{\omega}(x)dx}, \int \chi(x) e^{\int \tilde{\omega}(x)dx} dx,$$

где су $\tilde{\omega}(x)$ и $\chi(x)$ алгебарске функције од x.

Додаћу примедбу која се односи на алгебарске функције $\tilde{\omega}(x)$ и $\chi(x)$, под претпоставком да је $F(x,y,y')$ несводљив полином по x,y,y'. Нека је m степен тога полинома по y'. Ако се интеграл добије помоћу претходне две квадратуре, то је када је једначина по y и y' нултог рода. Изразимо y и y' рационалном функцијом параметра λ.

$$y = R_1(x,\lambda), \quad y' = R_2(x,\lambda),$$

R_1 и R_2 су рационалне функције по λ и алгебарске по x. Познато је, према важној теореми господина Нетера(Nöther)[1], да:

1. Ако је m непарно, може се изабрати параметар λ тако да претходно параметарско представљање не уводи никакву ирационалност у односу на коефицијенте φ_i у F, тј. да су R_1 и R_2 рационалне функције не само по λ већ и по x.

2. Ако је m парно, увек постоји параметарско представљање које не уводи ирационалности у односу на коефицијенте $\varphi_i(x)$ у F различите од квадратног корена полинома по $\varphi_i(x)$.

Са друге стране, коефицијенти по x у линеарној једначини првог реда, коју задовољава λ, јесу рационалне функције коефицијената по x који се јављају у R_1 и R_2. Дакле, ако је m непарно, две функције $\tilde{\omega}(x)$ и $\chi(x)$ биће рационални разломци по x; ако је m парно, оне су облика

$$S_1(x) + S_2(x)\sqrt{P(x)},$$

где су S_1 и S_2 рационални разломци, а P полином по x.

---

[1] Math. Annalen, T. III.

Следи да, ако је m непарно, интеграл $\int \tilde{\omega}(x)dx$ се изражава алгебарским и логаритамским функцијама; ако је m парно, то је Абелов хиперелиптични интеграл.

2. Потражимо, сада, међу једначинама које припадају општим типовима једначина оне чији интеграл има све сингуларитете непокретне.

Одмах је јасно да међу свим једначинама облика

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

једино линеарна једначина има ту особину.

Потражимо услове да општи интеграл биномне једначине

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

има све сингуларитете непокретне.

Најпре, Q не може да садржи y, а степен од P по y је највише једнак m. Нека је $y = \eta$ корен од $P(x,y) = 0$ за који се y', дефинисано са (1), разграњава. Према условима господина Фукса, $y = \eta$ треба да је интеграл од (1) и још треба да је

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx},$$

где је са ζ обележен заједнички корен по y' за две једначине

$$y'^m - P(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y'}\left[y'^m - P(x,y)\right] = 0,$$

а пошто је тај заједнички корен $y' = 0$, биће

$$\frac{d\eta}{dx} = 0,$$

тј. $\eta = \text{const.}$

Према томе, кад год полином $P(x, y)$ садржи чиниоце облика $y - \eta$, где је η функција од x, тачка $y = \eta$ (где се x посматра као константа) није тачка гранања од y' дефинисаног са (1). Следи да, ако постоје такви чиниоци, сваки од њих треба да је степена m или вишеструко m; али како степен од P по y не може да пређе m, ако би постојао такав чинилац, он је јединствен и P је облика

$$P(x,y) = \chi(x)(y-\eta)^m,$$

У том случају једначина (1) се своди на линеарну једначину

$$y' = \sqrt[m]{\chi(x)}(y-\eta).$$

Да то неби било тачно, треба, дакле, да је P облика

$$P(x,y) = \chi(x)S(y),$$

где је S полином по y константних коефицијената чији степен не прелази m и, стављајући

$$\sqrt[m]{\chi(x)}dx = dz,$$

једначина (1) постаје

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dz}\right)^m = S(y).$$

Да би критичне тачке од y, који посматрамо као функцију од x, биле непокретне, потребно је и довољно да општи интеграл $y(z)$ од (2) буде униформан. Дакле, за биномне једначине облика (2) Брио и Буке[1] су указали на све типове који се могу интегралити униформним функцијама. Међу њима има 11 типова који се могу интегралити помоћу двопериодичних мероморфних функција, које треба оставити по страни, јер интеграл y који им одговара има полова променљивих са интеграционом константом, а типови који тада преостају су:

I $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)^2,$$

II $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-a)^{m+1}(y-b)^{m-1},$$

III $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)(y-b),$$

IV $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-a)^2(y-b)(y-c)$$

(где је g константа) и њихови трансформати који се добијају стављајући $y = \alpha + \frac{1}{u}$, где је α константа. Прве две једначине, као и оне које се добијају њиховом трансформацијом, интеграбилне су помоћу рацио-

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, 1875, p. 389.

налних функција, а две последње помоћу простопериодичних функција. Али се лако види да су међу свим тим једначинама једине које задовољавају услове проблема којим се бавимо:

1° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-\beta)^{m-1},$$

2° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-\beta)(y-\gamma);$$

прва је изведена из II, а друга из IV када се y замени са $a+\frac{1}{y}$.

Тако имамо следећи резултат:

Међу свим једначинама облика

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = R(x,y),$$

где је R *рационална функција по* y, *а било каква по* x, *једине једначине чији интеграли имају све сингуларитете непокретне су линеарна и следеће две*:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \chi(x)(y-a)^{m-1},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \chi(x)(y-a)(y-b),$$

где су a *и* b *константе, а* $\chi(x)$ *било каква функција по* x.

Интеграл прве једначине је

$$y = a + \left[C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\chi(x)}dx\right]^m,$$

а друге

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + Ce^{\int \frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}} + \frac{(a-b)^2}{4C}e^{-\int \frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}}.$$

Посматрајмо још једначину

(3) $$p(x,y)y'^2 + q(x,y)y' + s(x,y) = 0,$$

где су p, q, s полиноми по y.

Да би критичне тачке интеграла биле непокретне, потребно је и довољно да су испуњени следећи услови.

1° p, q, s су респективно највише степена 0, 2, 4 по y.

2° Дискриминанта $\Delta(x,y) = q^2 - 4ps$ од (3) у односу на y', посматрана као полином по y, јесте: или потпун квадрат (и тада се једначина (3) раставља на две Рикатијеве једначине), или таква да једначина $\Delta(x,y) = 0$ има двоструки корен по y и два друга различита (једначина (3) је нултог рода), или таква да $\Delta(x,y) = 0$ има четири различита корена (једначина (3) је рода 1).

3° Сви корени од Δ су интеграли од (3).

Када су полови од y такође непокретни, q и s су највише степена 1 и 2, респективно; дискриминанта $\Delta(x,y)$ је полином другог степена по y и једначина (3) је нултог рода; услов 2° је тада увек испуњен. Према томе, потребни и довољни услови да би сви сингуларитети интеграла били непокретни су следећи.

1. p, q, s су респективно највише степена 0, 1, 2 по y.
2. Крива $\Delta(x,y) = 0$ је интеграл од (3).

Ако су два корена по y од $\Delta = 0$ једнака, једначина (3) се раставља на две линеарне једначине; ако су корени различити, она се своди на линеарну једначину трансформацијом облика:

$$y = R_1(x,\lambda), \quad y' = R_2(x,\lambda),$$

где су R_1 и R_2 рационални разломци по λ.

На једначину (3) се, како је познато, наилази када се траже асимптотске линије или линије кривине површина чије се координате изражавају као рационалне функције параметра u (и на ма који начин другог параметра v). Ако су ранији услови A и B испуњени, ове се криве добијају, дакле, са највише две квадратуре.

3. Даћу овде примену теорема из Прве главе на асимптотске правце општег интеграла од $F(x,y,y') = 0$, где је F полином по x, y, y', која примена може бити корисна при изучавању ових интеграла.

Потражимо потребне и довољне услове да се ови правци не мењају са интеграционом константом и да, у том случају, израчунамо њихове коефицијенте правца. Ако се стави $\lambda = \dfrac{y}{x}$, коефицијенти правца асимптота које нису паралелне са y-осом, су коначне вредности за λ за које x постаје бесконачно када се у једначини $y = \lambda\, x, y$ замени општим интегралом од $F = 0$. Дакле, замењујући у $F = 0$, y са $\lambda\, x$ и y' са

$$\lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}},$$

добија се једначина

$$\psi\left(\lambda, x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = 0,$$

а потребан и довољан услов који се тражи је да се бесконачности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ од x које се сматра општим интегралом од $\psi = 0$ не мењају са интеграционом константом. Према томе:

Да се асимптотски правци не мењају са интеграционом константом, потребно је и довољно да полигон од $\psi = 0$ нема ниједну страницу десно од темена ϖ десно. Ако се са $\varphi(\lambda)$ обележи коефицијент члана одговарајућег томе темену, коефицијенти правца асимптота које нису паралелне са Oy *су корени једначине* $\varphi(\lambda) = 0$.

Показаћу, узгред, примену ове теореме на алгебарске једначине $F(y, y', y'') = 0$ (где се x не јавља) у случајевима када је њен општи интеграл простопериодична или двопериодична алгебарска функција са коначним бројем вредности (што се може препознати помоћу метода господе Пикара и Пенлевеа). У овом случају, једначина првог реда

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{2}$$

има општи алгебарски интеграл $\chi(y, p, C) = 0$ и добија се инверзијом Абеловог интеграла

$$x = \int \frac{dy}{p}.$$

Посматрајмо p и y као апсцису и ординату тачке; асимптотски правци који нису паралелни са осама криве $\chi(y, p, C) = 0$ су

$$\alpha_i = \lim \frac{y}{p} \quad \text{за} \quad y = \infty;$$

коефицијенти правца (коначни и различити од нуле) тангената на тој кривој у реалним и имагинарним тачкама у којима се она сусреће са y осом су

$$\beta_i = \lim \frac{dy}{p} \quad \text{за} \quad p = 0.$$

У теорији Абелових интеграла је познато да су вредности

$$2\pi i\alpha_i \quad \text{и} \quad 2\pi i\beta_i,$$

до на фактор цео број, поларне периоде Абелових интеграла $x = \int \frac{dp}{p}$ $\left(x = \int \frac{dy}{p},\ \text{прим. прев.}\right)$ које одговарају простим логаритамским бесконачностима, тј. вредностима $y = a$ за које x постаје бесконачно и његов извод је реда као и $\frac{1}{y-a}$. Дакле, ако је интеграл y алгебарски или двопериодичан, не постоје вредности α_i и β_i коначне и различите од нуле; ако је y простопериодично, вредности α_i и β_i чине низ међусобно самерљивих бројева, а периода од y је тада, до на један цео број као фактор, једнака највећем заједничком делитељу за α_i и β_i помноженим са $2\pi i$.

Када је то тако, ставимо у (2)

$$p = \lambda y, \qquad \frac{dp}{dy} = \lambda + \frac{y}{\frac{dy}{d\lambda}}$$

и нека је

$$\text{(3)} \qquad \psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = 0$$

трансформисана једначина која се тако добије, где је ψ дато у облику полинома. Ако се са λ_i обележе вредности за λ, коначне и различите од нуле, које чине интеграл $y(\lambda)$ од (3) бесконачним, биће

$$\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Дакле: *да би интеграл* y *од* F(y,y′,y″) = 0 *могао бити алгебарски или двопериодичан, потребно је да полигон од* (3) *нема ниједно теме десно од* $\tilde{\omega}$ *десно и да се коефицијент члана који одговара том темену своди на константу.*

Претпоставимо да полигон од (3) нема ниједно теме десно од темена $\tilde{\omega}$ десно и да је коефицијент члана ψ који одговара том темену функција $\varphi(\lambda)$ од λ. Тада:

Да би y *могло бити простопериодична функција од* x, *потребно је да корени* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *једначине* $\varphi(\lambda) = 0$ *чине низ међусобно самерљивих бројева.*

Слична тврђења добијају се када се посматрају вредности β_i; када се једначина (2) напише у облику

$$\sum_{k=0}^{k=\mu} f_k\left(y, \frac{dp}{dy}\right) p^{\mu-k} = 0,$$

β_i су корени једначине

$$f_\mu\left(y_0, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0, \tag{4}$$

где је y_0 ма која нула општег интеграла $p(y)$ једначине (2).

Ако је y(x) *алгебарски или двопериодичан интеграл, једначина* (4) *не може имати ниједан корен* β_i *коначан и различит од нуле.*

Претпоставимо да ова једначина допушта коначне корене β_i независне од y_0 или пак ако би они од њега зависили, да полигон од (2) има теме $\tilde{\omega}$ лево као лево екстремно теме (у ком се случају y_0 не мења са интеграционом константом) и нека је $\Theta(y)$ коефицијент члана који одговара том темену. Означимо са (β_i, y_j) различите системе корена заједничких двема једначинама:

$$f_\mu\left(y, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0, \quad \Theta(y) = 0;$$

ако је интеграл y(x) *простопериодичан, вредности* β_i *чине низ бројева који су самерљиви међусобно и са коренима* λ_i *од* $\varphi(\lambda) = 0$; *периода је тада једнака* $2\pi i\rho$ *до на фактор који је цео број, где је* ρ *највећи заједнички делилац за* β_i *и* λ_i.

Потврдимо све то на простом примеру

$$yy'' + ay'^2 + byy' = 0,$$

где су a и b константе.

Овде је:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = y\frac{dp}{dy} + ap + b,$$

$$\psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = \left[\lambda(1+a) + b\right]\frac{dy}{d\lambda} + y,$$

$$\alpha_i = -\frac{1+a}{b}, \quad \beta_i = -\frac{1}{b}.$$

Према претходном, ако је y алгебарско, тада је $b = 0$; ако је y простопериодична функција, a је нула или самерљиво и периода је тада једнака $\frac{2\pi i}{b}$ до на фактор који је цео број.

Ово се потврђује самим посматрањем општег интеграла, који је или

$$y = C(1 + C'e^{bx})^{\frac{1}{1+a}}$$

или

$$y = C(1 + C'x)^{\frac{1}{1+a}},$$

према томе да ли је $b \neq 0$ или $b = 0$.

Неколико примена у изучавању униформних интеграла

1. Нека је $F(x, y, y') = 0$ једначина првог реда, где је F полином по y, y', алгебарска по x.

Када хоћемо да дознамо да ли је општи интеграл такве једначине униформан, најпре утврђујемо да ли су испуњени потребни и довољни услови господина Фукса да алгебарске критичне тачке интеграла буду непокретне. Ако је тако, једначина се алгебарски интеграли помоћу теорије бирационалних трансформација алгебарских кривих у њих саме, или помоћу једне квадратуре, или се своди на Рикатијеву једначину, према томе да ли је $p > 1$, $p = 1$ или $p = 0$, где је p род од $F = 0$ по y, y'. Када се то учини, само остаје да се испита да ли тако добијен интеграл има стварно критичне тачке. Што се тиче аналитичке природе униформних функција које се јављају при интеграцији једначине као што је $F = 0$, следи:

1° ако је $p > 1$, то су рационалне функције по x;

2° ако је $p = 1$, то су рационалне функције по x и то $\lambda(J)$, где је λ симбол за мероморфну двопериодичну функцију, а J је Абелов интеграл;

3° ако је $p = 0$, то су трансценденте дефинисане Рикатијевом једначином која има алгебарске коефицијенте по x.

Када x не фигурише експлицитно у једначини, униформне функције које се јављају при њеној интеграцији могу бити рационалне функције било по x, било по e^{ax}, било по $\operatorname{sn}(ax)$ и $\operatorname{cn}(ax)\operatorname{dn}(ax)$.

Ако је општи интеграл од $F = 0$ *холоморфан* у целој равни, *род* p *је различит од јединице* (иначе би било покретних полова) и тада:

1° ако је $p > 1$, интеграл је полином по x;

2° ако је $p = 0$, то је полином по x, $e^{J(x)}$, $e^{-J(x)}$, $\int x^n e^{J(x)} dx$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, где је $J(x)$ Абелов интеграл. И водећи рачуна о ономе што смо рекли о природи интеграла $J(x)$ (*погледај* параграф о сингуларитетима интеграла), лако се види:

a. ако је степен m од $F = 0$ по y' непаран, интеграл је полином по x, $e^{P(x)}$, $e^{-P(x)}$, $\int x^n e^{P(x)} dx$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, где је $P(x)$ полином по x;

b. ако је степен m паран, Абелов интеграл $J(x)$ је хиперелиптичног типа.

2. Али, чак и у случају да општи интеграл није униформан, једначина може имати један или више партикуларних униформних интеграла. Методе које служе да се утврди да ли је општи интеграл униформан уопште нису примењиве када се испитује да ли једначина допушта партикуларне униформне интеграле, проблем, уопште узев је, компликованији но први. Исто тако, може се препознати аналитичка природа општег интеграла, за који се претпоставља да је униформан, дате једначине, а да се не зна решити аналоган проблем за партикуларне интеграле.

Одатле интерес да се траже типови једначина које имају одређену општост, а у вези с којима се могу разматрати слична питања. Тако из теореме господина Пенлевеа[1] следи да, ако у једначини

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где су P и Q полиноми по x и y, именилац Q не садржи ниједан фактор облика $x - a$, a је константа и, ако још и степен од Q по x прелази најмање за две јединице одговарајући степен бројиоца P, сваки униформни интеграл једначине је рационална функција од x.

Општије, нека је дата једначина

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x,y) y'^{\mu-1} = 0,$$

ако $f_0(x,y)$ не садржи фактор облика $x - a$, a је константа и, ако још и степен од $f_0(x,y)$ по x прелази за најмање $2k$ јединица одговарајући степен коефицијента $f_{\mu-k}(x,y)$ $(k = 1,2,\ldots,\mu)$, сваки униформни интеграл је рационалан.

[1] Annales de la Faculté de Toulouse, (1888), p. 43.

Партикуларни униформни интеграли једначине $F(x,y,y')=0$, алгебарске по x,y,y', могу бити алгебарски или трансцендентни; у овом другом случају кажемо да су два или више униформних интеграла $y_1, y_2, \ldots$ *различити* ако међу њима не постоји никаква алгебарска релација са алгебарским коефицијентима по x.

Намеравам да покажем, комбинујући поступак који је употребљавао господин Пенлеве у изучавању рационалних интеграла са познатим теоремама господина Пикара о нулама униформних функција и о раду алгебарских кривих чије се координате изражавају помоћу униформних функција једног параметра, како се за широку класу једначина може прецизирати *горња граница броја различитих униформних интеграла*, као и облик једначине у случају када она допушта трансцендентне интеграле; у овом последњем случају указаћу такође на алгебарске релације које постоје међу таквим интегралима који нису различити.

3. Докажимо најпре општу теорему за униформне интеграле једначине $F(x,y,y')=0$, где је F несводљив полином по y и y' са алгебарским коефицијентима по x. Таква једначина увек се може написати у облику

$$F(x,X,y,y')=0, \tag{1}$$

где је F несводљив полином по x, X, y, y', а x и X нека су везани алгебарском релацијом

$$G(x,X)=0.$$

Истичући степене по X, једначина (1) може се написати

$$F_0(x,y,y')+F_1(x,y,y')X+\ldots+F_{m-1}(x,y,y')X^{m-1}=0, \tag{2}$$

где је m степен од G по X. Кажем:

Сваки униформни интеграл од (1) *је заједнички за* m *диференцијалних једначина*

$$F_0=0, \quad F_1=0,\ldots, \quad F_{m-1}=0. \tag{3}$$

Стварно, заменимо у (2) y и y' посматраним униформним интегралом и његовим изводом, тако се добија релација $H(x,X)=0$ између X и x степена највише $m-1$ по X. Ако коефицијенти од $H=0$ нису идентички нула, два полинома G и H по X треба да имају заједнички фактор $K(x,X)$, полином по x и X, јер он дели G. Дакле, једначина $G(x,X)=0$ неће бити несводљива. Према томе, треба да су идентички $F_i=0$.

Како F_i не допуштају заједничке факторе (иначе би једначина (1) била сводљива), једначине (3) или су несагласне (у ком случају нема униформних интеграла), или дефинишу алгебарску релацију међу x и y. Одакле следећа теорема:

Нека је дата једначина $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}')=0$, *где је* F *несводљив полином по* y *и* y′, *а алгебарски по* x; *да би она могла имати трансцендентне униформне интеграле, треба да је* F *рационална по* x.

Ако овај услов није испуњен, сваки униформни интеграл од $F=0$ је рационалан и ти интеграли се увек могу израчунати јер су они заједнички једначинама (3).

4. Када је то тако, разликујмо следећа два случаја.

1. **Случај**: *Једначина* $\mathrm{F}=0$ *има непокретне критичне тачке.* – Обележимо са p род за $F=0$ по y и y'. Тада

1° ако је $p>1$, сваки униформни интеграл је рационалан;

2° ако је $p=1$, стављајући

$$Y=R(y,y',\bar{x})$$

(где је R рационално по y, y', а алгебарско по $\bar{x}$), $F=0$ своди се на облик

$$\frac{dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-k^2Y^2)}}=H(x)dx, \tag{4}$$

где је k константа, а $H(x)$ алгебарска функција по x. Ако је један интеграл $y_1(x)$ од $F=0$ униформан, интеграл $Y_1(x)$ који одговара за (1) има само коначан број вредности. Да би тако било, треба да су периоде Абеловог интеграла $\int H(x)dx$ периоде $\mathrm{sn}(x,k^2)$; када је тако, општи интеграл $Y(x,C)$ од (4) имаће само коначан број вредности, као и $y(x)$, али остаје да се одреди да ли међу овим интегралима има таквих који ће бити униформни. Ако их има више, они нису различити; *они се изражавају алгебарски у функцији од* x *и једног од њих.*

Стварно, $Y(x,C)$ алгебарски се изражава у функцији од $Y_1(x)$ према адиционој теореми елиптичних функција

$$Y=\frac{Y_1\sqrt{\rho(C)}+C\sqrt{\rho(Y_1)}}{1-k^2C^2Y_1^2},$$

где је $\rho(Y)=(1-Y^2)(1-k^2Y^2)$ и, према томе, $y(x)$ се изражава алгебарски по $y_1(x)$ и по C.

Дакле, *ако је* р = 1, *не би никада требало да постоји више но један различит униформни интеграл.*

3° Ако је $p = 0$, једначина $F = 0$ алгебарски се своди на Рикатијеву једначину по Y, стављајући $Y = R(y, y', x)$, где је R рационално по y, y', а x се јавља рационално или под квадратним кореном. Ако је $y_1(x)$ униформно, одговарајући интеграл $Y_1(x)$ Рикатијеве једначине има коначан број значења. За Рикатијеву једначину се зна како наћи алгебарске интеграле или са датим бројем значења, али се не зна, у општем случају, препознати да ли има униформних интеграла или да ли је њен општи интеграл униформан. Како год било, може се десити да Рикатијева једначина има један, два или три униформна интеграла (или са n-значења); ако их има три, општи интеграл $Y(x)$ је униформан и изражава се рационално у функцији три партикуларна интеграла.

Првобитна једначина $F = 0$ може, дакле, допуштати 0, 1, 2 или 3 различита униформна интеграла, али не и више.

2. **Случај**: *Једначина* F = 0 *има покретне критичне тачке.* – У том случају постоји одређен број значења

$$(5) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x),$$

таквих да најмање једна од одговарајућих вредности за y' (на пример y_1') буде нерегуларна (бесконачна или критична) и интеграл $y(x)$, који за $x = x_0$ узима вредност $y_1(x_0)$ и има извод $y_1'(x)$, допушта $x = x_0$ као критичну тачку. Ограничићемо се да посматрамо једначине за које се све вредности од y' понашају као y_1' за одређену детерминацију (5). Другачије речено, претпоставићемо да постоје функције (5) такве да сваки интеграл који за $x = x_0$ узима вредности $y_1(x_0)$ допушта $x = x_0$ као критичну тачку, осим за одређене партикуларне тачке које задовољавају одређени алгебарски услов. То ће се увек догодити за једначину првог степена по y' (која није Рикатијева или линеарна једначина)

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где су P и Q полиноми по y, а алгебарски по x; стварно, свака вредност $y_i = \varphi_i(x)$ која анулира Q има претходне особине. То ће се још догодити за једначину другог степена по y'

$$y' = \frac{A(x,y) + \sqrt{B(x,y)}}{C(x,y)},$$

где су A, B, C полиноми по y, а алгебарски по x. Стварно, вредности $y_i = \varphi_i(x)$ које анулирају B, а које нису ни двоструки корени, нити сингуларни интеграли, имају особину о којој је реч. Кад год су сви корени непарног реда $y_i = \varphi_i(x)$ од $B = 0$ сингуларна решења, више није тако и једначина више не спада у посматрану класу, сем ако пак вредности $y_k = \varphi_k(x)$, корени од $C = 0$, не чине бесконачним две вредности од y'.

Исто ће тако биномна једначина

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

имати особине о којима је реч за све вредности $y_i = \varphi_i(x)$ које су корени од $P = 0$ или од $Q = 0$ чија вишеструкост није цео број помножен са m.

Уопште, услов који је у питању биће испуњен када постоје вредности $y_i = \varphi_i(x)$ које чине бесконачним или су критичне тачке за *све* детерминације од y', а да нису сингуларни интеграли једначине. У свим тим случајевима функције $y_i = \varphi_i(x)$ *биће алгебарске по* x. Стварно, оне задовољавају добијену једначину анулирајући коефицијент највишег степена по y' у $F = 0$, или пак дискриминанту од $F = 0$ у односу на y'.

Расправимо најпре једначину првог степена по y'.

Једначина првог степена

Нека су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ два полинома по y степена m и m', респективно са алгебарским коефицијентима по x, и посматрајмо диференцијалну једначину

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{6}$$

Да би једначина имала униформних трансцендентних интеграла, потребно је да су P и Q рационалне функције по x; може се претпоставити да су полиноми по x. И више, једном хомографском трансформацијом једначина се увек може довести да задовољава услов $m = m' + 2$, који ћемо, дакле, сматрати испуњеним. Вредност $y = \infty$ је, дакле, обична вредност; тј. ако се стави $y = \dfrac{1}{z}$, интеграл $z(x)$ који за $x = x_0$ узима вредност $z = 0$ је холоморфан у околини $x = x_0$ (узето насумице). Разликујмо следећа четири случаја:

1° $Q = 0$ *допушта више од два различита корена* $y_i = \varphi_i(x)$ и нека су

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad y_3 = \varphi_3(x)$$

три ма која од ових корена; они, уосталом, могу бити гране исте алгебарске функције.

Тврдим: *Сваки униформни интеграл* (φ) *је рационалан.*

Стварно, он може имати само извесне унапред познате есенцијалне тачке; нека је $x = a$ таква тачка. Ако је $x = a$ критична тачка за φ_1, φ_2 или φ_3, увек можемо ставити $x - a = \xi^{\nu}$ тако да $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ постану три униформне функције по ξ у околини $\xi = 0$. Можемо, дакле, увек претпоставити да су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ униформне у околини $x = a$. Пошто је то тако, заменимо променљиву y са променљивом z, дату са

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)}.$$

Када је $y = \varphi_1(x)$, тада је $z = 0$; када је $y = \varphi_2(x)$, тада је $z = 1$ и када је $y = \varphi_3(x)$, тада је $z = \infty$. Са друге стране, интеграл за *који се претпоставља да је униформан* може се изједначити са φ_1, φ_2 или φ_3 само *за коначан број* посебних вредности x. Функција $z(x)$ биће, дакле, функција за коју је $x = a$ есенцијална тачка, која је униформна у области ове тачке и која у околини $x = a$ узима три вредности 0, 1, ∞ само коначан број пута. Униформна функција $y(x)$ не може, дакле, имати есенцијалних тачака (на коначном или бесконачном растојању): *она је, дакле, рационална функција по* x.

2° $Q = 0$ *допушта два различита корена* $y_1 = \varphi_1(x)$ *и* $y_2 = \varphi_2(x)$.

Ставимо

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

Функција $z(x)$ није неопходно униформна, пошто φ_1 и φ_2 нису неопходно алгебарске; али ако је $x = a$ критична тачка од z, а то ће бити ако је она алгебарска критична тачка од φ_1 или φ_2 и, према томе, стављајући $x - a = \xi^{\nu}$ (ν је цео број), сигурно је да ће z бити униформно у околини $z = 0$.

Претпостављајући ово, саставимо једначину по z и нека су z_1 и z_2 две функције од x одговарајуће за два интеграла једначине (6). *Тврдим да је количник* $\frac{z_2}{z_1}$ *алгебарска функција од* x. Стварно, то је функција са коначним бројем вредности која нема есенцијалних тачака на коначном или бесконачном растојању. Јер, ако је $x = a$ есенцијална тачка од $\frac{z_2}{z_1}$, помоћу смене $x - a = \xi^{\nu}$ увек се може претпоставити да је овај израз униформан око $x = a$. Са друге стране, $\frac{z_2}{z_1}$ може бити једнако 0, 1, ∞

само за коначан број вредности x у околини $x = a$. Дакле, $x = a$ није есенцијална тачка од $\frac{z_2}{z_1}$ и, према томе, тај израз је алгебарска функција од x.

Следи да једначина (6) *не може имати два различита униформна трансцендентна интеграла.*

3° $Q = 0$ има само један корен $y_1 = \varphi_1(x)$. Функција $\varphi_1(x)$ је тада неопходно рационална. И стављајући

$$z = \frac{1}{y - \varphi_1},$$

једначина (6) се своди на облик

$$z' = T(x, z), \tag{7}$$

где је T полином по z. У овом случају једначина (6) *не може имати више од два различита униформна интеграла и, чак да допушта више од два униформна интеграла, сваки униформни интеграл је рационалан.*

Да бисмо то доказали, претпоставимо да једначина (6), а према томе и једначина (7), има три униформна интеграла и нека су z_1, z_2, z_3 одговарајући интеграли за (7). Када саставимо израз

$$v(x) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3};$$

одмах се види да је функција $v(x)$ униформна функција без прекида и таква да три једначине

$$v(x) = 0, v_1(x) = 1, v(x) = \infty$$

имају само коначан број корена; према Пикаровој теореми, $v(x)$ је тада рационална функција по x.

Из тога се закључује да *су три интеграла* z_1, z_2, z_3 *повезана релацијом облика*

$$S_1 z_1 + S_2 z_2 + S_3 z_3 = 0, \tag{8}$$

где су S_1, S_2, S_3 *полиноми по* x *и они повезани односом*

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0. \tag{8'}$$

Диференцирајмо везу (8) два пута по x, замењујући $\frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}, \frac{dz_3}{dx}$ са

$$T(x,z_1), T(x,z_2), T(x,z_3),$$

имаћемо две везе

$$U_1(x,z_1)+U_2(x,z_2)+U_3(x,z_3)=0, \tag{9}$$

$$V_1(x,z_1)+V_2(x,z_2)+V_3(x,z_3)=0, \tag{10}$$

са

$$U_k = \frac{dS_k}{dx} z_k + S_k T(x,z_k),$$

$$V_k(x,z_k) = \frac{d^2 S_k}{dx^2} z_k + 2\frac{dS_k}{dx} T(x,z_k) + S_k\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} T\right)_{z=z_k}.$$

Лако је видети да су везе (8), (9), (10) увек међусобно различите. Стварно, стављајући

$$S_k z_k = \eta_k,$$

из веза (8) и (9) добијамо

$$U_1\left(x, -\frac{\eta_2+\eta_3}{S_1}\right) + U_2\left(x, \frac{\eta_2}{S_2}\right) + U_3\left(x, \frac{y_3}{S_3}\right) = 0,$$

везу која се може свести на идентитет само:

1. ако је $U_k(x,z_k)$ линеарно по z_k, што је немогуће ако T није линеарно по z;

2. ако би један од полинома S_k био идентички нула, што је немогуће на основу везе (8) и (8′) ако су три интеграла z_1, z_2, z_3 различита.

На исти начин би се видело да су везе (8) и (10), а затим и (9) и (10) исто тако међусобно различите. Следује да ове релације дефинишу z_1, z_2, z_3, а према томе одговарајуће интеграле од (6) као рационалне функције од x.

4° Q *не садржи* y. Једначина (6) је тада Рикатијева или линеарна. Рикатијева једначина може имати 1, 2 или 3 различита униформна интеграла; линеарна једначина их може имати 1 или 2.

Тако долазимо до следеће теореме:

Свака једначина y′ = R(x, y), *где је* R *рационална по* x *и* y, *не може имати више од* 3 *различита униформна интеграла.*

Ако их има 3, *онда је Рикатијева једначина.*

Ако их има 2, *онда је линеарна или Рикатијева, или се пак своди на облик*

$$y' = \frac{P(x,y)}{[y-\varphi_1(x)]^m},$$

где је P *полином по* x *и* y *степена* m + 2 *по* y, *а* φ_1 *рационалан разломак по* x.

Ако има 1, *она се своди на један од ранијих облика, или на облик*

$$y' = \frac{P(x,y)}{(y-\varphi_1)^k (y-\varphi_2)^{k'}},$$

где су φ_1 *и* φ_2 *алгебарске функције по* x *и* P *полином по* x *и* y *степена* k + k′ + 2 *по* y.

Ова последња чињеница је јасна када се примети да ако би степен од P по y био већи од $k+k'+2$, вредност $y=\infty$ имала би улогу $y_i = \varphi_i(x)$, то ће рећи, када се стави $y = \frac{1}{z}$ (претпостављајући да φ_1 и φ_2 нису идентички нуле), постојале би три вредности

$$z = 0,\ z = \frac{1}{\varphi_1},\ z = \frac{1}{\varphi_2},$$

које играју улогу $y_i = \varphi_i$. Ако би, напротив, овај степен био мањи од $k+k'+2$, $y=\infty$ био би интеграл, што ће рећи да би у једначини по $z = \frac{1}{y}$ $z=0$ био интеграл и да општи интеграл z може имати вредност $z=0$ само за коначан број посебних вредности за x; $z=0$ била би, дакле, и трећа вредност која игра улогу $y_i = \varphi_i(x)$.

Све што смо сада рекли за једначину првог степена важи за све једначине F(x,y,y′) = 0, *где је* F *несводљив полином по* x,y,y′ *и нултог рода по* y *и* y′.

Предложимо сада много општији проблем од претходног. Посматрајмо једначину

(11) $$y' = \frac{D(x,X,y)}{Q(x,X,y)},$$

где су P и Q полиноми по x, X, y, а x и X су везани алгебарском везом $G(x,X)=0$. Видели смо да ако степен од G по X прелази 1, сваки је униформни интеграл (по x) од (11) рационалан по x; *али могу постојати трансцендентни интеграли од* (11) *униформни по* x *и* X. То су интеграли којима ћемо се сада бавити.

Претходна резоновања могу се поновити претпостављајући да за сваки пар вредности (x, X), постоје узастопно три, две или једна вредност $y_i = \varphi_i(x)$ које имају наведене особине, то ће рећи такве да y' постаје бесконачно за $y_i = \varphi_i$ и да, и више, интеграл $y(x,X)$, који је за

(x_0, X_0) једнак са $\varphi_i(x_0, X_0)$, има x_0 као критичну тачку, сем за извесне вредности x_0 које су посебне и у коначном броју.

Под овим условима, ако постоје 3 вредности $y_i = \varphi_i$, *интеграл* y *је рационалан по* (x, X), и то према истом резоновању као у претходном случају: он не може имати есенцијалних тачака $x = a$ на коначном или бесконачном растојању. Стављајући $x - a = \xi^{\nu}$, ако је a била критична тачка од φ_i или од $X(x)$, тако да z постане униформна у околини $\xi = 0$, где је

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

доказ се довршава као у претходном случају.

Исто је у случају када има два или једну вредност $y_i = \varphi_i(x, X)$.

Закључци који су се односили на униформне интеграле по x могу се, дакле, поновити за униформне интеграле по (x, X). *Не постоје никада више но три таква различита интеграла.* Ако их постоји три, једначина (11) је Рикатијева једначина итд.

Исти метод и закључци примењују се при изучавању униформних интеграла по (x, X) *једначине* $F(x, X, y, y') = 0$, *где је* F *полином рода нула по* y, y', *а рационалних коефицијената по* (x, X), *где су* x *и* X *везани алгебарским односом* G(x, X) = 0.

Једначина другог степена

Таква се једначина увек може написати у облику

$$y' = \frac{A(x, X, y) + B(x, X, y)\sqrt{R(x, X, y)}}{C(x, X, y)}, \tag{12}$$

где су A, B, C, R полиноми по x, X, а x и X су везани алгебарском везом $G(x, X) = 0$. Обележимо са λ степен од R по y и претпоставимо да једначина (12) нема сингуларних интеграла.

Најпре, када је $\lambda \leq 2$, једначина по y и y' је нултог рода и враћамо се на претходни случај.

Ако је $\lambda > 2$, *сваки униформни интеграл по* (x, X) *је рационалан по* (x, X). Стварно, $R = 0$ тада има бар три корена $y_i = \varphi_i(x, X)$, таква да сваки интеграл који за $x = x_0$ (x_0 је узето насумице, сем одређених посебних вредности којих има у коначном броју) добија вредност $\varphi_i(x_0, X_0)$, има критичну тачку $x = x_0$. Ако се успостави веза

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

ова функција не би смела да има есенцијалних тачака (на коначном или бесконачном растојању) и, према томе, y је рационално под претпоставком да је униформно по (x, X) (размишљање је аналогно оном из случаја првог степена).

Једначина (12) (рода већег од нуле) могла би да има трансцендентних униформних интеграла по (x, X) само када су вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ *које анулирају* R *сингуларни интеграли, изузев, може бити, највише два.*

На случај једначине другог степена своде се све једначине рода 1 *или* 2 *по* y, y′ *и, општије, све једначине хиперелиптичке врсте*; претходни резултати важе, дакле, за све ове једначине.

Приметимо да када постоје само две вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ које нису сингуларне, не може се више поновити размишљање као у случају првог степена, јер ово последње размишљање почива на чињеници да ма која два интеграла могу бити једнака само за коначан број константних вредности за x; чињеница која не важи у случају другог степена.

Приметимо још да корени $y_i = \chi_i(x, X)$ од $C = 0$ не могу имати исту улогу, у општем случају, као корени од $Q = 0$ у случају једначине првог степена, јер обично само једна вредност од y' постаје бесконачна за корене $C = 0$. Стварно, када се једначина (12) напише у облику

$$Cy'^2 + Dy' + E = 0$$

(где су C, D, E функције од x, X, y) за $C = 0$, D је обично различито од нуле и само једна вредност од y' постаје бесконачна. Кад год C и D имају заједнички фактор $K(x, X, y)$ и када овај фактор има три различита корена по y, *сваки униформни интеграл по* (x, X) *је рационалан.*

Биномна једначина другог степена

Можемо је написати у облику

$$y' = \frac{B(x, X, y)\sqrt{R(x, X, y)}}{C(x, X, y)}, \tag{13}$$

где су B, R и C полиноми по x, X, y. Сваки сингуларни интеграл $y_i = \varphi_i(x, X)$ који анулира R, па према томе и y', мора да је константа и обратно. Ако би пак $y_i = \varphi_i$ анулирало R и C, то би било место критичних тачака интеграла.

Када је то тако, ако укупни број различитих вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ које или анулирају C или пак R, а које нису константе, прелази две, *сваки униформни инш̄еграл ӣо* (x, X) *је рационалан.* Стварно, сваком интегралу који за $x = x_0$ има вредност $\varphi_i(x_0, X_0)$, x_0 је критична тачка, сем за извесне посебне тачке којих има коначан број, и размишљање би се завршило као у случају првог степена.

Разликујмо, дакле, више случајева, примећујући да се увек може претпоставити да је степен λ од R по y паран (помоћу хомографске трансформације), $\lambda = 2\mu$.

Ако је $\mu \leq 1$, једначина је рода нула и своди се на случај првог степена.

Ако је $\mu > 1$, разликујемо корене од R, и то μ' константних корена и μ'' корена који су функције од x. Да ниједан униформни интеграл по (x, X) не буде рационалан, треба, према претходном, да је $\mu'' = 0, 1$ или 2.

Нека је, најпре, $\mu'' = 0$. Тада се може претпоставити да је R полином по y са константним коефицијентима, обележимо га са $\rho(y)$. Ако је y униформни интеграл по (x, X) од (13), исто тако је униформан интеграл и корен

$$\sqrt{\rho(y)} = \frac{C(x, X, y)y'}{B(x, X, y)}.$$

То је могуће само ако је полином $\rho(y)$ *чеш̄вршог̄ сш̄еӣена ӣо* y. Стварно, y (за који се претпоставља да није рационалан) има најмање једну есенцијалну тачку $x = a$. Ако $X(x)$ није униформно по x у околини a, ставља се $x - a = \xi^{\nu}$ и тада су y и $\sqrt{\rho(y)}$ две униформне функције од ξ у околини $\xi = a$ и имају есенцијалну тачку $\xi = 0$. Према теореми господина Пикара, однос између y и $\sqrt{\rho(y)}$ је неопходно нултог или првог рода. Дакле, $\rho(y)$ је четвртог степена.

Да би једначина (13) имала униформних интеграла по (x, X) који нису рационални, треба да је облика

$$y' = \frac{B(x, X, y)\sqrt{\rho(y)}}{(y - \varphi_1)^k (y - \varphi_2)^{k'}},$$

где је степен од B по y једнак са $k + k'$ и где је $\rho(y)$ полином четвртог степена по y константних коефицијената.

У случају да је $\mu'' = 1$ или $\mu'' = 2$, више се не може одредити степен поткореног полинома, али ће се добити однос између степена по y бројиоца и имениоца, водећи рачуна о услову да би могао постојати трансцендентни униформни интеграл по (x, X) $z = 0$ не сме да буде интеграл једначине по $z = \dfrac{1}{y}$, без чега ће (ако род једначине није нула) постојати најмање три вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ (рачунајући $y = \infty$ за једну такву вредност).

Ово што претходи може се допунити у специјалним случајевима, и то када $B = 0$ има константне корене $y_i = \alpha_i$, јер тада интеграл различит од $y_i = \alpha_i$ може узети вредности α_i само за коначан број посебних вредности x. Таква једна вредност α_i има улогу φ_i и размишљање се завршава без муке.

Додајем на крају *да се исте методе и закључци примењују на општу биномну једначину ма којег реда по* y'.

5. Ево сада теореме која омогућава да се конструишу општи типови једначина првог реда за које је сваки униформни интеграл рационална функција по x.

Нека су $\varphi(x, y, y')$ и $\psi(x, y, y')$ два полинома по x, y, y', такви да су темена $\tilde{\omega}$ десно њихових одговарајућих полигона постављена на истој правој нормалној на OM и да десно од те праве ни један ни други полигон немају темена.

Нека је, најзад:

$P(x, y, y')$ ма какав полином по x, y, y';

$\tilde{\omega}(a, b)$ полином хомоген по a и b са константним коефицијентима;

$\chi(x, a, b)$ полином хомоген по a и b, истог степена хомогенитета μ као и $\tilde{\omega}(a, b)$, са коефицијентима који су алгебарске функције од x и посматрајмо једначину првог реда

$$\tilde{\omega}(\varphi, \psi)P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, \psi) = 0. \tag{1}$$

Хоћу да покажем следеће.

Ако број корена a *који су различити и различити од нуле, једначине* $\tilde{\omega}(a, 1) = 0$ *прелази два, сваки униформни интеграл од* (1) *је рационалан.*

Да бисмо то доказали, напишимо једначину (1) у облику

$$\left[\tilde{\omega}\left(\frac{\varphi}{\psi}, 1\right)P(x, y, y') + \chi\left(x, \frac{\varphi}{\psi}, 1\right)\right]\psi^{\mu} = 0. \tag{2}$$

Ако би униформни интеграл од (1) био заједнички за (1) и за $\psi = 0$, он би се добио елиминацијом y' из $\psi = 0$ и

$$\tilde{\omega}(\varphi, 0)P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, 0) = 0$$

и доказ би био завршен. Претпоставимо, дакле, да наш интеграл y не задовољава $\psi = 0$, он ће тада задовољавати

$$\text{(3)} \qquad \tilde{\omega}\left(\frac{\varphi}{\psi},1\right)P(x,y,y')+\chi\left(x,\frac{\varphi}{\psi},1\right)=0.$$

Нека је a корен једначине $\tilde{\omega}(a,1)=0$; најпре тврдим да има коначан број корена $x=\alpha$ једначине

$$\frac{\varphi(x,y,y')}{\psi(x,y,y')}-a=0,$$

када се у њој y замени посматраним униформним интегралом. Јер, према (3), вредности као $x=\alpha$ треба да се поклопе: 1° или са половима интеграла y; 2° или са трансцендентним сингуларитетима од y; 3° или са бесконачностима коефицијената по x у P; 4° или са коренима по x алгебарске једначине $\chi(x,a,1)=0$. У последња три случаја има их сигурно коначан број, али ја хоћу да докажем да их је исто толико и у првом случају. За то је довољно да се покаже да израз $\frac{\varphi}{\psi}$ може да тежи граници a само за коначан број полова од y.

У околини пола $x=\alpha$ од y биће

$$y=(x-\alpha)^{\lambda}f(x),$$

где је λ цео негативан број, а $f(x)$ функција од x која није ни нула ни бесконачна за $x=\alpha$. Ако се φ и ψ напишу у облику

$$\varphi=\sum_{i=1}^{i=s}\varphi_i(x)y^{m_i}y'^{n_i},$$

$$\psi=\sum_{i=1}^{i=t}\psi_i(x)y^{m'_i}y'^{n'_i},$$

у околини $x=\alpha$ биће, према обележавању у Првој глави, и када се означи са $(\tilde{\omega}')$ десно теме од ψ

$$\varphi=(x-a)^{S_{\tilde{\omega},\lambda}}\left[\Omega_{\tilde{\omega}}(x)+\sum_{-(\tilde{\omega})}(x-a)^{S_{\tilde{\omega},\lambda}-S_{i,\lambda}}\,\Omega_i(x)\right];$$

$$\psi=(x-a)^{S'_{\tilde{\omega}'}}\left[\Omega'_{\tilde{\omega}'}(x)+\sum_{-(\tilde{\omega}')}(x-a)^{S'_{\tilde{\omega}',\lambda}-S'_{i,\lambda}}\,\Omega'_i(x)\right].$$

Дакле, у Првој глави смо видели да је, када x тежи ка α

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s, \ \text{сем } i = \tilde{\omega}),\\
&\lim \Omega_i'(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, t, \ \text{сем } i = \tilde{\omega}'),\\
&\lim \Omega_{\tilde{\omega}}(x) = \lambda^{n_{\tilde{\omega}}} \varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha) f(\alpha),\\
&\lim \Omega_{\tilde{\omega}'}(x) = \lambda^{n'_{\tilde{\omega}'}} \psi_{\tilde{\omega}'}(\alpha) f(\alpha)
\end{aligned}$$

(где $n_{\tilde{\omega}}$ и $n'_{\tilde{\omega}'}$ означавају експоненте од y' у члановима од φ и ψ респективно, а који одговарају теменима $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$).

Разликујмо три следећа случаја.

1. **случај**: *Теме* $\tilde{\omega}'$ *је испод темена* $\tilde{\omega}$. – Како $S_{i,\lambda}$ и $S'_{i,\lambda}$ представљају ординату у координатном почетку правих које имају коефицијенте правца λ, а које пролазе респективно кроз тачке (M_i, N_i) које припадају φ и ψ, види се да је $S_{\tilde{\omega},\lambda} > S_{\tilde{\omega}',\lambda}$ за све негативне λ. Према томе, ако λ није корен алгебарске једначине

$$\varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha) = 0$$

(а ако би било такво, број вредности α био би коначан и доказ би био завршен), када x тежи ка α, израз $\dfrac{\varphi}{\psi}$ тежи ка нули, а не ка граници a. Овај израз може, дакле, тежити корену a од $\tilde{\omega}(a,1) = 0$ за пол $x = \alpha$ од y само ако је тај пол корен једначине $\psi_{\tilde{\omega}'}(\alpha) = 0$; дакле, број таквих полова је ограничен.

2. **случај**: Теме $\tilde{\omega}$ је изнад темена $\tilde{\omega}$. – Тада је $S_{\tilde{\omega},\lambda} < S_{\tilde{\omega}',\lambda}$ за све негативне вредности λ; према томе, ако α није корен $\varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha) = 0$, однос $\dfrac{\varphi}{\psi}$ се повећава неограничено када x тежи ка α. Овај однос, дакле, може тежити граници a само када се посматрани пол од y поклопи са кореном алгебарске једначине

$$\varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha) = 0,$$

што показује да је број вредности за α ограничен.

3. **случај**: *Темена* $\tilde{\omega}$ *и* $\tilde{\omega}'$ *се поклапају*. – Тада је $M_{\tilde{\omega}} = M'_{\tilde{\omega}'}$, $N_{\tilde{\omega}} = N'_{\tilde{\omega}'}$ и, према томе, $S_{\tilde{\omega},\lambda} = S_{\tilde{\omega}',\lambda}$ за било које λ; дакле

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \lambda^{n_{\tilde{\omega}} - n'_{\tilde{\omega}'}} \frac{\varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha)}{\psi_{\tilde{\omega}}(\alpha)}.$$

Ова граница треба да је a и, према томе, α треба да је корен алгебарске једначине

$$\lambda^{n_{\tilde{\omega}} - n'_{\tilde{\omega}'}} \varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha) - a\, \psi_{\tilde{\omega}}(\alpha) = 0;$$

број вредности α тада је такође ограничен. Једини случај када би ово могло бити нетачно је посебан случај када је величина

$$\sqrt[n_{\tilde{\omega}}-n'_{\tilde{\omega}}]{\frac{a\,\psi_{\tilde{\omega}}(\alpha)}{\varphi_{\tilde{\omega}}(\alpha)}}$$

цео број независан од α и када је λ једнако томе броју.

Као закључак следи да једначина

$$\frac{\varphi(x,y,y')}{\psi(x,y,y')}=-a=0,$$

када се у њој замени y униформним интегралом једначине (1) и a ма којим кореном једначине $\tilde{\omega}(a,1)=0$ различитим од нуле, може имати само коначан број корена x. И пошто је, када је y униформно, израз $\frac{\varphi}{\psi}$ такође униформна функција од x, следи да, ако број различитих корена a који нису нуле прелази два, $\frac{\varphi}{\psi}$ треба да је рационалан разломак, као што је и y (претпостављајући да оно што следи из (1) и из $\frac{\varphi}{\psi}=R(x)$ у односу на y' није идентички нула).

Ако, на пример, φ,ψ и χ не садрже x експлицитно и ако је P полином по x,y,y', једначина $\frac{\varphi}{\psi}-a=0$ не може имати корене на коначном растојању и, ако број корена a једначине $\tilde{\omega}(a,1)=0$ прелази два, тада је

$$\frac{\varphi(x,y,y')}{\psi(x,y,y')}=\text{const.}=C.$$

Интеграл y, за који се претпоставља да је униформан, може бити само рационалан и добиће се елиминацијом y' из две једначине

$$\varphi(y,y')-C\psi(y,y')=0,$$
$$P(x,y,y')+C'=0,$$

где су константе C и C' везане односом

$$\tilde{\omega}(C,1)C'-\chi(C,1)=0.$$

Може се, на пример, узети да је $\varphi=y'$, $\psi=y$ и једначина (1) ће бити облика

$$\tilde{\omega}(y,y')P(x,y,y')+\chi(x,y,y')=0,$$

где су $\tilde{\omega}$ и χ хомогени полиноми по y и y' истог степена хомогенитета.

6. У неколико честих случајева које смо претходно посматрали, рационални интеграли су једини могући униформни интеграли једначине и, када се они израчунају, сигурно је да су тада то сви униформни интеграли једначине или се може констатовати да таквих интеграла нема.

Питање да ли је општи интеграл алгебарске једначине првог реда рационалан своди се, према методи господина Поенкареа, на алгебарске операције, или на квадратуру, или на питање да се препозна да ли је интеграл Рикатијеве једначине рационалан, што се увек зна утврдити.

Али, када се ради о партикуларним рационалним интегралима, проблем је тежи и захтева специјалне методе. Господин Пенлеве[1] је дао једну која омогућава да се са сигурношћу одреде сви рационални интеграли за врло опште класе једначина првог реда и која се може применити на све случајеве које смо претходно разматрали.

Додаћу само неколико примедаба које се односе на упрошћавања, а које се често могу користити посматрањем полигона П дате једначине.

Претпоставимо да полигон нема ниједну страницу са коефицијентом правца који је цео позитиван број. Тада ће се знати низ вредности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таквих да ниједан рационалан интеграл не може имати нула различитих од α_i. Ако се стави

$$\tilde{\omega}(x) = (d - d_1)(d - d_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

постојаће цео позитиван број μ такав да функција

$$u = \frac{1}{y}\left[\tilde{\omega}(x)\right]^{\mu}$$

буде полином по x и, ако би се знала горња граница од μ, тражење свих рационалних интеграла свело би се на тражење полинома који задовољава диференцијалну једначину по u, што је релативно лакше. Горња граница овог броја може се одредити на следећи начин. Брио--Букеовом методом може се познати да ли дата једначина има холоморфних интеграла који, на пример за $x = \alpha_i$, имају вредност $y = 0$ и за ове интеграле одредити развој за y по степенима од $(x - a)$; одатле ће се извести закључак о могућем максималном реду λ_i нуле a_i од y. Када се изврши овај рачун за све нуле $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и када се са λ_h означи највећи од целих бројева, λ_i, λ_h ће бити горња граница од μ.

[1] Annales de l'École Normale (1892), p. 305; Comptes rendus, T. CX, p. 34.

Када низ $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не постоји, $\frac{1}{y}$ је полином по x.

Ако полигон једначине нема ниједну страницу чији је коефицијент правца цео негативан број, претходни рачун ће се применити на једначину трансформисану помоћу $\frac{1}{y}$ и тада ће се тражење рационалних интеграла свести на тражење целих интеграла.

Ако полигон нема ниједну страницу чији је коефицијент правца цео број, истовремено ће се знати све могуће нуле и полови рационалних интеграла; нека су α_i њихове нуле, а β_i њихови полови.

Пошто формирамо једначину $\varphi(x,u,u')=0$, која се добије када се дата једначина $F=0$ трансформише помоћу $u=\frac{y'}{y}$, потражићемо рационалне интеграле те једначине на следећи начин. Полови ма ког од ових интеграла u су увек прости полови и, када се стави

$$\tilde{\omega}(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

$$\chi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m),$$

биће

$$\mu=\frac{v}{\tilde{\omega}(x)\chi(x)},$$

где је v полином по x. Када се једном сви ови полиноми $v_1,v_2,\ldots,v_k$ нађу и када се скрате фактори $(x-\alpha_i)$ и $(x-\beta_i)$ који су заједнички за v и за $\tilde{\omega}(x)\chi(x)$, имаћемо све рационалне интеграле $u_1,u_2,\ldots,u_k$ за $\varphi(x,u,u')=0$. Да би једначина $F=0$ имала рационалних интеграла, потребно је и довољно да међу разломцима u_i постоји бар један који задовољава следеће услове.

1° Степен бројиоца од u_i мањи је но степен имениоца.

2° Резидууми од u_i за њихове полове (који су сви очевидно прости полови) сви су цели бројеви.

Када су сви ови услови испуњени, сви рационални интеграли за $F=0$ дати су формулом

$$y_i=e^{\int u_i dx}.$$

7. Посматрање полигона П једначине може користити не само при израчунавању рационалних интеграла већ и, општије, при изучавању трансцендентних мероморфних интеграла, дозвољавајући да се овај рачун сведе на онај, релативно лакши, холоморфних интеграла у целој равни.

Тако, када полигон нема ниједну страницу чији је коефицијент правца цео и позитиван број, знаћемо низ вредности $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ таквих да ниједан *мероморфни* интеграл једначине не може имати нула различитих од α_i. Према теореми о разлагању мероморфних функција на примарне чиниоце, може се писати

$$y=\frac{\left[\Pi(x-\alpha_i)\right]^{\mu}e^{G(x)}}{\Pi(x-\beta_i)},$$

где β_i означава полове од y и оне од α_i који нису стварно нуле реда μ од y; μ је цео позитиван број једнак или већи од највећег реда нуле α_i од y; $G(x)$ је холоморфна функција у целој равни.

Према томе, када се стави

$$u=\frac{1}{y}\left[\Pi(x-\alpha_i)\right]^{\mu},$$

u ће бити холоморфна функција у целој равни, која ће задовољавати диференцијалну једначину која се лако саставља помоћу дате једначине, а познавање ове функције u повлачи за собом познавање функције за y. Број μ се може израчунати на исти начин који смо раније изнели за рационалне интеграле.

Исто тако ће се, на начин који смо претходно изнели, поступити и када је ма који од следећих услова испуњен.

1° Полигон нема ниједну страницу коефицијента правца који је цео негативан број.

2° Полигон нема ниједну страницу која за коефицијент правца има цео број.

8. Завршићу овај низ примена примедбом на *резидууме општег интеграла који се односе на просте покретне полове.*

Када општи интеграл од $F(x,y,y')=0$ има простих покретних полова, полигон П од F има страницу коефицијента правца (-1). Граница ρ производа $(x-a)y$, када x тежи ка a, јесте корен који није нула алгебарске једначине по ρ за страницу коефицијента правца (-1); према томе, резидууми општег интеграла простих помичних полова су корени ове једначине по ρ. *Ако су коефицијенти* $\varphi_i(x)$ *у* $F=0$ *чланова који одговарају овој страници константе, ови се резидууми не мењају са интеграционом константом.*

Нека је $F(x,y,y')=0$ једначина са непокретним критичним тачкама. Увек се може распознати да ли је или није општи интеграл такве једначине мероморфан у унутрашњости дате контуре Г комплексне равни; претпоставимо да је тако. Ако полигон од $F = 0$ има само једну страницу десно од свог темена $\tilde{\omega}$ десно и ако су услови од малопре (који се односе на ову страницу и на једначину по ρ, која њој одговара) испуњени, *интеграл*

$$\int y(x, C)dx$$

(где је y општи интеграл једначине), *узет дуж контуре* Г, *једнак је нули или многострукости једне од утврђених количина*

$$2\pi\rho_1 i,\ 2\pi(\rho_1 + \rho_2)i,\ 2\pi(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)i, \ldots,$$

где су $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *корени који нису нуле једначине по* ρ *за страницу* $\lambda = -1$.

Ако је, на пример, $y(x, C)$ општи интеграл Рикатијеве једначине

$$\frac{dy}{dz} = ay^2 + f(z)y + \varphi(z)$$

(где су f и φ полиноми по z, а a константа), интеграл $\int y(z, C)dz$, узет дуж ма које контуре у равни z, јесте нула или вишеструка вредност $2\pi i$, што се може потврдити примећујући да је функција

$$u = e^{-a\int ydx}$$

интеграл једначине

$$\frac{d^2u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} - a\varphi(z)u = 0$$

и, према томе, да је холоморфна у целој равни; интеграл $\int ydz$ може имати само периоду $\dfrac{2\pi i}{a}$.

ДРУГИ ДЕО

ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

ПРВА ГЛАВА

О НУЛАМА И БЕСКОНАЧНОСТИМА ИНТЕГРАЛА

1. Расуђивање које нам је помогло да дођемо до потребних и довољних услова да нуле и бесконачности интеграла једначине првог реда буду непокретне не проширују се у својој потпуности на једначине вишег реда. Са једне стране, то је због тога јер се трансцендентни сингуларитети једначине вишег реда мењају са интеграционим константама, што није био случај с једначинама првог реда. Са друге стране, у случају једначина првог реда, све су детерминације извода y' биле познате алгебарске функције од y за које се могао наћи кружни систем корена који се анулирају са y и изучити како се сваки од тих корена понаша у околини $x = x_0$, $y = y_0$.

У општем случају то више не важи за једначине вишег реда. Интеграл такве једначине, као и његов извод, могу бити неодређени за ма коју вредност x_0. Он може имати и прекиде који се мењају са интеграционим константама, или још и сингуларне неаналитичке криве, које се такође мењају са константама (интеграције, прим. прев.). Ове тешкоће и многе друге околности спречавају проширење методе која је успевала за једначине првог реда.

Али метода допушта извесно проширење у неким од следећих случајева:

1° када се из саме дате диференцијалне једначине може познати да се трансцендентне тачке интеграла и његових извода не мењају са интеграционим константама;

2° када се ограничи на изучавање интеграла (партикуларних или који зависе од произвољних константата) који имају есенцијалне сингуларитете дате унапред, на пример, мероморфне функције;

3° уопште, када се изучавају ма који интеграли, али када се ограничи на нуле и бесконачности, и то оне код којих су интеграл и његови изводи до p-тог реда одређеног инфинитезималног реда у њиховој околини (p је ред једначине).

Што се тиче услова 1°, подсетићу на неке резултате господина Пенлевеа[1] који се односе на једначину другог реда

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

а који се проширују на једначину ма кога реда.

Једначина (1), узета насумице, нема покретних есенцијалних тачака; да би их могла имати, потребно је да су извесни услови испуњени, од којих су следећи најпростији. Нека је $S(x, y, y') = 0$ услов да вредност од y'', дефинисана са (1), буде бесконачна или да се размењују две вредности за y''. Ако интеграл од (1) има покретних есенцијалних тачака:

1° полином S садржи фактор облика $S_1(x, y)$, где се y сигурно јавља;

2° једначина (1), где се x посматра као функција, за ма које x_0 има интеграл $x = x_0$.

Ако ниједан од ових услова није испуњен, *есенцијалне тачке интеграла и свих његових извода су непокретне.* Постоје аналогни резултати за једначине реда вишег од 2.

2. Посматрајмо полином по $y, y', y'', \dots, y^{(p)}$

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} y''^{m_{2i}} \dots y^{(p)m_{pi}},$$

где су m позитивни цели бројеви такви да није истовремено за два различита индекса i и j

$$m_{0i} = m_{0j}, m_{1i} = m_{1j}, \dots, m_{pi} = m_{pj},$$

а $\varphi_i(x)$ су произвољне функције од x.

Формирајмо двоструку таблицу од $2s$ следећих позитивних целих бројева

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \dots + m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki},$$

$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \dots + pm_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} km_{ki}.$$

Повуцимо у равни две осе, једну за M, а другу за N, и обележимо s тачака (M_i, F_i) ((M_i, N_i), прим. прев.), водећи рачуна да поред сваке од

[1] Comptes rendus, T. CXVI, (1893), p. 362 et. pp. 566–569.

њих ставимо њен индекс. Може се десити да се две или више тачака (M_i, N_i) поклопе; тада ће се поред сваке такве вишеструке тачке ставити индекси свих оних тачака које су се у њој сјединиле.

Конструишимо полигон који је конкаван према OM и који у својој унутрашњости или на свом рубу садржи све тачке (M_i, N_i), исто онако као што смо га конструисали за једначину првог реда, задржавајући исте конвенције и исте дефиниције, само са следећом разликом: може се десити да се више тачака (M, N) поклопи у истом темену полигона; ако је број ових тачака h, то ће бити *вишеструко теме реда* h.

Одмах се види да је цео полигон обухваћен углом који чине позитивни део осе OM и део праве која пролази кроз координатни почетак, чији је коефицијент правца p (p је ред диференцијалне једначине), и то онај део који је обухваћен углом NOM. Надаље ћемо ту праву звати *гранична права.*

Назначићу неколико облика полигона који се односе на извесне опште типове једначина.

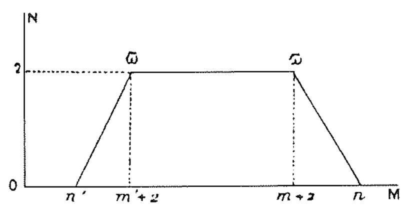
Први пример: Нека је

$$F = P(x, y)y'' + Q(x, y),$$

где су P и Q полиноми по y и нека су m и m' највећи и најмањи степен од y у P, а n, n' аналогне величине за Q. Полином F тада садржи две врсте чланова:

1° чланове облика $y^i y''(i = m', m'+1, \ldots, m-1, m)$ из којих добијамо тачке $M_i = i+2, N_i = 2$, које се налазе на правој $N = 2$;

2° чланове облика $y^k(k = n', n'+1, \ldots, n-1, n)$ из којих добијамо тачке $M_k = k, N_k = 0$, које се налазе на оси OM.



Слика 4

Дакле, на слици 4 дат је општи облик полигона. На правој $N = 2$ постоји најмање једно теме; међутим, распоред, број темена и облик полигона могу се мењати. Ако је $m = m'$, теме $\tilde{\omega}$ ће бити двоструко; види се исто тако да полигон не може имати више од једног вишеструког темена.

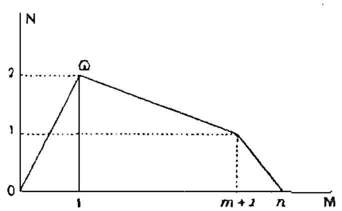
Други пример: Да бисмо добили полигон П од

$$F = y''^{\nu} + P(x, y, y'),$$

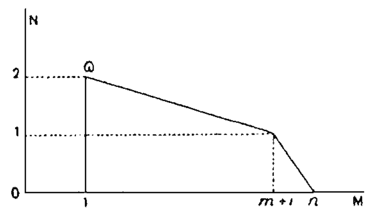
конструисаће се полигон П′ од $P(x,y,y')$; спојиће се правом D теме $\tilde{\omega}$ десно овог полигона са тачком $S(M = \nu, N = 2\nu)$ и из S спустиће се нормала Δ на OM. Ако је лево екстремно теме од П′ лево од Δ или на Δ, полигон чине праве Δ, D, страница негативне области од П′ и један део осе OM; ако је лево крајње теме десно од Δ, замениће се страница Δ са страницом која спаја тачку S са тим крајњим врхом. Када је, на пример, $\nu = 1$ и

$$P(x, y, y') = P(x, y)y' + Q(x, y),$$

а m, m', n, n' имају претходна значења, полигон ће имати један од облика (сл. 5 и 6),



Слика 5



Слика 6

према томе да ли је $n' > 0$ или $n' = 0$. Види се да полигон не може имати вишеструких тачака. Облик полигона може се мењати, али теме $\tilde{\omega}$ остаје увек на правој $N = 2$.

Трећи пример: Нека је

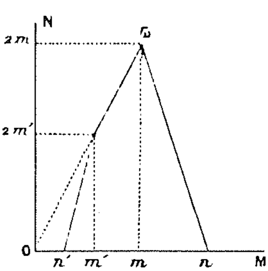
$$F = P(x, y'') + Q(x, y).$$

Постоје две врсте чланова:

1° чланови по $y''^{i} (i = m', \ldots, m)$, од којих се добијају тачке $M_i = i$, $N_i = 2i$, које леже на граничној линији $\lambda = 2$;

2° чланови по $y^k (k = n', \ldots, n)$ од којих се добијају тачке $M_k = k$, $N_k = 0$, које леже на оси OM.

Општи облик полигона је на слици 7; он се може мењати али се теме $\tilde{\omega}$ налази увек на правој $N = 2m$.



Слика 7

Четврти пример: Полигон линеарне једначине реда p без слободног члана своди се на праву паралелну са ON, а координате темена $\bar{\omega}$ су (p, p); за једначине са слободним чланом полигон је правоугли троугао чије су координате темена $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, p)$.

За састављање примера (за оно што следи), важно је знати наћи диференцијалне једначине датог реда које одговарају датом систему тачака (M_i, N_i). То доводи до решења система линеарних једначина у целим и позитивним бројевима. Да би се нашао члан једначине реда p који одговара датој тачки (M_i, N_i) потребно је решити систем од две једначине

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi},$$

$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi}$$

у целим, позитивним бројевима, а да би проблем био могућ, потребно је и довољно да $pM_i - N_i \geq 0$. Може постојати више система решења који одговарају једној истој тачки (M_i, N_i), али је број ових система ограничен и сваки од њих даје начин за састављање члана једначине који одговара датој тачки. Када се конструишу h чланова једначине који одговарају различитим системима решења за једну исту тачку (M_i, N_i), ова ће тачка бити вишеструка, реда h, за тако конструисану једначину.

Да би се олакшало тражење примера, дајем овде таблицу тих решења за једначине реда мањег од 5, а коју треба применити на сваку тачку (M_i, N_i) која је дата у равни NOM (индекси i су изостављени).

$p = 2$:

$$N - M \leq m_2 \leq \frac{1}{2} N,$$

$$m_1 \leq N - 2m_2, \quad m_0 = M - N + m_2$$

или пак

$$M - N \leq m_0 \leq M - \frac{1}{2} N, \quad m_1 = 2M - N - 2m_0, \quad m_2 = N - M + m_0.$$

$p = 3$:

$$N - 2M \leq m_3 \leq \frac{1}{3} N,$$

$$N - M - 2m_3 \leq m_2 \leq \frac{1}{2}(N - 3m_3),$$

$$m_1 = N - 2m_2 - 2m_3, \quad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3$$

или пак

$$M - N \leq m_0 \leq M - \frac{1}{3} N,$$

$$2M - N - 2m_0 \leq m_1 \leq \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}N - \frac{3}{2}m_0,$$

$$m_2 = 3M - N - 3m_0 - 2m_1, \quad m_3 = \frac{1}{2}(N - M + m_0 - m_2).$$

$p = 4$:

$$N - 3M \leq m_4 \leq \frac{1}{4}N,$$

$$N - 2M - 2m_4 \leq m_3 \leq \frac{1}{3}(N - 4M),$$

$$N - M - 2m_3 - 3m_4 \leq m_2 \leq \frac{1}{2}(N - 4m_4 - 3m_3),$$

$$m_1 = N - 2m_2 - 3m_3 - 4m_4, \quad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3 + 3m_4.$$

3. Када је то тако, ставимо у претходни полином F

$$y = (x-a)^\lambda f(x),$$

где су a и λ две константе које су коначне и различите од нуле, а $f(x)$ функција од x. После узастопних диференцирања добијамо:

$$\begin{aligned} y' &= \lambda(x-a)^{\lambda-1} f + (x-a)^\lambda f' \\ y'' &= \lambda(\lambda-1)(x-a)^{\lambda-2} f + 2\lambda(x-a)^{\lambda-1} f' + (x-a)^\lambda f'' \\ y''' &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(x-a)^{\lambda-3} f + 3\lambda(\lambda-1)(x-a)^{\lambda-2} f' \\ &\quad + 3\lambda(x-a)^{\lambda-1} f'' + (x-a)^\lambda f''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ако се, краткоће ради, стави

$$\begin{aligned} \gamma_{0i} &= m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi} \\ \gamma_{1i} &= m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{hi} &= m_{h+1,i} + \ldots + m_{pi} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

општи члан од F имаће облик

$$\varphi_i(x)(x-a)^{\lambda M_i - N_i}\left[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)\right],$$

где је $\theta_i(x)$ полином по

$$f(x), (x-a)f'(x), (x-a)^2 f''(x), \dots, (x-a)^p f^{(p)}(x),$$

у коме нема члана који зависи само од f, најзад

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda-1)^{\gamma_{1i}}(\lambda-2)^{\gamma_{2i}}\dots(\lambda-p+1)^{\gamma_{p-1,i}}.$$

Биће, дакле,

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)(x-a)^{\lambda M_i - N_i}\left[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)\right].$$

Посматрајмо у овом збиру скуп T чланова за које је експонент $\lambda M_i - N_i$ од $(x-a)$, стављених као чинитељ, најмањи. Према вредностима за M_i, N_i, λ, скуп T ће бити састављен од само једног члана, од два или више, а ја ћу тражити потребне и довољне услове који одговарају за те различите случајеве.

Уопште, да би чланови индекса $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ били део од T, потребно је и довољно да су следећи услови симултано испуњени:

$$\text{(1)} \qquad \lambda M_\gamma - N_\gamma = \lambda M_\delta - N_\delta = \lambda M_\varepsilon - N_\varepsilon = \dots,$$

$$\text{(2)} \qquad \lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i$$

за све целе вредности индекса i од 1 до s различите од индекса чланова који су део од T.

Услов (1) се може написати

$$\text{(3)} \qquad \lambda = \frac{N_\gamma - N_\delta}{M_\gamma - M_\delta} = \frac{N_\delta - N_\varepsilon}{M_\delta - M_\varepsilon} = \dots$$

Види се, дакле, да λ треба да је коефицијент правца праве (γ, δ) и да тачке које одговарају различитим члановима од T морају бити на тој правој.

Са друге стране, количина $\lambda M_i - N_i$, када се у њој λ замени вредношћу (3), представља ординату у координатном почетку, $S_{i,\lambda}$, промењеног знака, праве која пролази кроз (i) коефицијента правца λ.

Према томе, да би чланови индекса $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ били део од T потребно је и довољно:

1° да су тачке индекса $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ на истој правој и да је λ коефицијент правца те праве;

2° да је $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ за све индексе i од 1 до s који су различити од $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$, тј. да је ордината у координатном почетку праве (γ, δ) већа но она ма које праве паралелне са (γ, δ) и која пролази кроз тачку (i) која није на правој (γ, δ).

Ако су све тачке (M_i, N_i) једноструке, правац сваке праве (γ, δ) је потпуно одређен и, према томе, за те тачке услов 1° је задовољен само за једну вредност λ. Али ако је тачка (M_i, N_i) вишеструка и одговара, на пример, индексима i, j, k, ..., правац правих (i, j), (j, k),... биће потпуно неодређен и може бити ма какав; према томе, за вишеструке тачке услов 1° увек је испуњен, ма каква била вредност за λ, реална или имагинарна (комплексна, прим. прев.); за ове тачке остаје само да се покаже да су неједначине 2° задовољене.

Разликоваћу, дакле, два случаја, да ли су све тачке (M, N) једноструке или их има вишеструких.

1. **случај**: *Све су тачке* $(\mathrm{M_i}, \mathrm{N_i})$ *просте*. – Да би чланови који одговарају тачкама (γ) и (δ) били део од T, коефицијент правца праве (γ, δ) треба да има вредност из (3). Обратно, нека је λ подесно изабрано, ма какве да су две тачке (γ) и (δ), услов (1) се увек може задовољити, само ако ове тачке нису на истој правој паралелној са OM или са ON.

Остаје још да се задовољи услов 2°. Дакле, за ово, према особинама полигона, потребно је и довољно да права (γ, δ) буде страница полигона која није паралелна са координатним осама. Види се, дакле, да би T било састављено од најмање два члана, потребно је и довољно да је λ коефицијент правца ма које странице полигона која није паралелна са осама; индекси чланова који тада фигуришу у T су они од темена полигона који се налазе на страници коефицијента правца датог у (3).

2. **случај**: *Постоје вишеструке тачке* $(\mathrm{M_i}, \mathrm{N_i})$. – За те је тачке услов 1° испуњен ма какво да је λ, реално или имагинарно, и да би чланови са индексима $\gamma, \delta, \ldots$ вишеструке тачке (M_γ, N_γ) чиниле део од T, потребно је и довољно да λ добије вредност која ће задовољавати услов 2°.

Најпре се лако види да, ако вишеструка тачка (M_γ, N_γ) није теме полигона, ма какву реалну вредност дали λ, услов 2° се не може никада задовољити. Заиста, да би услов $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ могао бити задовољен за све индексе i различите од индекса вишеструке тачке (γ), треба да је λ у области тачке (γ), а како је домен ма које тачке која није теме полигона нула, услов 2° је испуњен само за теме полигона. Међутим, свако теме полигона задовољава 2° ако се за λ узме ма која вредност која припада његовој области.

Ако је пак λ имагинарно, рећи ћу да је експонент $\lambda M_\gamma - N_\gamma$ већи, једнак или мањи од $\lambda M_i - N_i$ према томе да ли

$$\mathrm{mod}(x-a)^{(\lambda M_\gamma - N_\gamma)-(\lambda M_i - N_i)}$$

тежи нули, коначној граници или се повећава бесконачно када x тежи ка a. Према тој дефиницији, ако се са $R(\lambda)$ означи реални део од λ, да би било

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i,$$

потребно је и довољно да

$$R(\lambda)M_\gamma - N_\gamma < R(\lambda)M_i - N_i,$$

а видели смо да, да једна таква једначина буде задовољена за све индексе i различите од оних који припадају вишеструкој тачки (γ), потребно је и довољно да та тачка γ буде теме полигона и да се $R(\lambda)$ налази у области тога темена. Дакле, та област није никада нула и представљена је коначним интервалом ако је теме уметнуто, бесконачним у једном правцу ако је теме екстремно или дата интервалом од $\lambda = -\infty$ до $\lambda = \infty$ ако је то једино теме полигона.

Може се, дакле, уопштено рећи: да би члан индекса који припада вишеструкој тачки (M_γ, N_γ) био део од T, потребно је и довољно да ова вишеструка тачка буде теме полигона и да реални део од λ буде у области тога темена. Ако су ови услови испуњени, T ће бити збир свих чланова који одговарају индексима вишеструке тачке, и то када $R(\lambda)$ није нека од граничних вредности интервала која дефинише област темена; а уз ове чланове доћи ће и они који одговарају индексима оближњег темена, када је $R(\lambda)$ гранична вредност тог интервала; у овом случају пак λ је коефицијент правца странице која посматрано вишеструко теме спаја са оближњим теменом.

Претходно се може сажети у две следеће леме.

Лема I. – Да би се T састојало само од једног члана, потребно је и довољно:

1° да полигон нема ниједну страницу која није паралелна са осама или, ако их има, да λ није коефицијент правца ниједне од тих страница;

2° да полигон нема вишеструких темена или, ако их има, да $R(\lambda)$ не буде у области ниједног од тих темена.

Лема II. – Да би се Т састојало од два или више чланова, потребно је и довољно да је бар један од следећих услова задовољен:

1° полигон има непаралелних страница са осама и λ је једнако коефицијенту правца једне од тих страница; T ће тада бити збир чланова од F који одговарају индексима тачака на правој чији је коефицијенат правца λ;

2° полигон има вишеструких темена, а $R(\lambda)$ је у области једног од ових темена; T ће тада бити збир свих чланова који одговарају индексима посматраних темена.

4. Искористимо сада ове две леме да бисмо за F дали облике који ће нам касније користити.

А. *Претпоставимо да су испуњени услови* 1° *и* 2° *Леме* I – Скуп T је тада састављен само од једног члана, а индекс овог члана биће индекс простог темена у чијој је области $R(\lambda)$. Нека је h тај индекс и ставимо, краткоће ради,

$$\varphi_i(x)\left[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)\right] = \Omega_i(x);$$

тада се F може написати у облику

$$\text{(I)} \qquad F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}}\left[\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}}\,\Omega_i(x)\right],$$

знак Σ се простире на све тачке (M_i, N_i) различите од (M_h, N_h); треба још приметити да су сви експоненти $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ позитивни, јер је, према самој дефиницији члана индекса h, $S_{h,\lambda} > S_{i,\lambda}$ за све тачке (M_i, N_i) различите од (M_h, N_h).

В. *Претпоставимо да је испуњен услов* 1° *Леме* II – Скуп T је тада збир свих чланова који одговарају индексима тачака на страници коефицијента правца λ.

Договоримо се да са $\sum\limits_{(i,j)}$ представимо сабирање по свим индексима оних тачака (M_i, N_i) које су на правој (i, j); са $\sum\limits_{-(i,j)}$ сабирање по индексима свих оних тачака различитих од оних који леже на правој (i, j).

Нека је (γ,δ) ма која страница полигона која није паралелна са осама; тада је, када је λ коефицијент правца те странице,

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x)$$

и F се може написати у облику

$$F = T + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}}\,\Omega_i(x)$$

или

$$\text{(II)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}}\left[\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda}-S_{i,\lambda}}\,\Omega_i(x)\right],$$

где су сви експоненти $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ позитивни.

C. *Претпоставимо да је испуњен услов* 2° *Леме* II – T ће бити збир свих чланова који одговарају индексима вишеструког темена у чијем је домену $R(\lambda)$. Договоримо се да са $\sum\limits_{(\gamma)}$ представимо сабирање по индексима свих тачака сакупљених у вишеструко теме чији је један индекс γ; са $\sum\limits_{-(\gamma)}$ сабирање по свим индексима i од 1 до s различитих од оних тачака које су сакупљене у теме (γ).

Дакле, ако је $R(\lambda)$ у области врха (γ) биће

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma)} \Omega_i(x),$$

$$F = T + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \Omega_i(x)$$

или

$$\text{(III)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

са свим позитивним експонентима $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$.

Може се још приметити, пошто сума $\sum\limits_{(\gamma)}$ треба да се односи на све индексе свих тачака сакупљених у (γ) и пошто све ове тачке имају исте координате, а посебно исте апсцисе, да ће, ако се ова апсциса обележи са μ, бити

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) = f(x)^{\mu} \sum_{(\gamma)} A_i \varphi_i(x) + \sum_{(\gamma)} \varphi_i(x) \theta_i(x).$$

5. Претпоставимо сада да је $x = a$ нула или бесконачност интеграла y једначине $F = 0$, и то таква да за одређену вредност λ

$$\frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$$

тежи ка одређеној граници, коначној и различитој од нуле када x тежи ка a. Ако је $R(\lambda)$ позитивно, a ће бити нула интеграла реда $R(\lambda)$; ако је $R(\lambda)$ негативно, a ће бити бесконачност интеграла реда $-R(\lambda)$.

У околини $x = a$ може се написати

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

где је $f(x)$ функција која тежи одређеној граници ρ, коначној и различитој од нуле када x тежи ка a.

Заменимо y у F; F ће бити облика (I), (II) или (III), према томе да ли су услови (A), (B) или (C) испуњени. Ма какав облик да узме F резултат замене y у F треба да је идентички нула, ма какво x било у околини $x = a$, јер је y интеграл од $F = 0$. Према томе, у околини $x = a$ биће идентички или

$$\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

или

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

или

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

према томе да ли је F у околини $x = a$ облика (I), (II) или (III).

Претпоставимо да x тежи ка a. У случају једначине првог реда могли смо тврдити да ће $f(x)$ тежити коначној и одређеној граници ρ и да ће бити

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \lim\left[(x-a)f'(x)\right] = 0 \\ \lim\left[(x-a)^2 f''(x)\right] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

за све вредности $x = a$ од x, сем можда за известан број утврђених и унапред познатих вредности које су трансцендентни сингуларитети интеграла. У општем случају, то није тако за случај једначине вишега реда.

У свему овом што следи претпоставићемо прећутно да су трансцендентни сингуларитети посматраног интеграла и његових извода, све до реда p, непокретни. У случају када то није тако, оно што ћемо рећи односиће се само на партикуларне интеграле (или који зависе од констаната), а који имају само унапред дате трансцендентне сингуларитете, на пример, на мероморфне интеграле једначине или на интеграле који имају, што се тиче покретних сингуларитета, само полове и алгебарске критичне тачке (као и њихови изводи) и, уопште, *на интеграле који су (као и њихови изводи до реда* p) *одређеног инфинитезималног реда у околини покретних вредности* x *које их анулирају или чине бесконачним,* тако да, ако је интеграл y инфинитезималног реда λ, његов k-ти извод је реда $\lambda - k\,(k = 1, 2, \dots, p)$.

У овим случајевима услови (E) биће испуњени а да се не учини никаква додатна претпоставка, а како су θ_i полиноми по

$$f, (x-a)f', (x-a)f'', \ldots, (x-a)^p f^{(p)}$$

у којима недостају чланови који зависе само од f, за $x = a$ биће

$$\lim \theta_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Дакле, за све вредности a, сем за извесне партикуларне вредности a' за које функције $\varphi_i(x)$ постају бесконачне, а које ће се увек унапред препознати, биће

$$\lim \Omega_i(x) = A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Према томе, када се зна да су сви експоненти $S_{k,\lambda} - S_{i,\lambda}$ и $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ позитивни, види се да ће за све вредности a које нису партикуларне вредности a':

A. ако су услови 1° и 2° Леме I испуњени, бити

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0;$$

B. ако је услов 1° Леме II испуњен, бити

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0,$$

где треба ставити

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0,i}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1,i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}},$$

а λ заменити коефицијентом правца посматране странице (γ, δ). *Називаћу ову једначину једначина по* ρ *за страницу* (γ, δ).

C. Нека је услов 2° Леме II испуњен, биће

$$\sum_{(\gamma)} A_i \varphi_i(a) = 0.$$

Пошто се A_i замени њеним изразом по λ, добија се алгебарска једначина по λ

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + S_1 \lambda^{m-1} + S_2 \lambda^{m-2} + \ldots + S_{m-1}\lambda + S_m = 0$$

(са коефицијентима S_i који су функције од a), коју ћу назвати: *једначина по* λ *за вишеструко теме* (γ).

Једначина по λ за просто теме (i) своди се на $A_i = 0$ или

$$\lambda^{\gamma_{0,i}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1,i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}} = 0.$$

6. До сада нисам прецизирао да ли је a нула или бесконачност интеграла; разликујмо сада та два случаја.

I. – **Вредност** a **је бесконачност интеграла**

A. Најпре претпоставимо да су испуњена следећа два услова:

1° полигон нема ниједне странице негативног коефицијента правца или, ако их има, λ није ниједан од тих коефицијената;

2° полигон нема ниједно вишеструко теме негативне области или, ако их има, $R(\lambda)$ није у таквој области.

Тада се види, узимајући у обзир Лему I и да λ треба да је негативно, да једначина

$$A_h\varphi_h(a)\rho^{M_h} = 0$$

мора постојати за све вредности a које нису бесконачности a' функција $\varphi_i(x)$; и, како је ρ различито од нуле, а једначина $A_h = 0$, која је

$$\lambda^{\gamma_{0,h}}(\lambda-1)^{\gamma_{1,h}}\ldots(\lambda-p+1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0,$$

нема негативног корена по λ, a је корен једначине

$$\varphi_h(a) = 0.$$

Одатле се закључује: ако су услови 1° и 2° испуњени, a не зависи од интеграционе константе и анулира или чини бесконачном бар једну од функција $\varphi_i(x)$.

B. Претпоставимо, затим, да полигон има страница са негативним коефицијентима правца и да је λ један од тих коефицијената.

Ако су (γ) и (δ) два темена која ограничавају страницу чији је коефицијент правца λ и ако a није ниједна вредност a', тада бисмо имали

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i\varphi_i(a)\rho^{M_i} = 0.$$

Ма какву вредност имало a, ова једначина има најмање један корен по ρ, коначан и различит од нуле, јер су све вредности M_i које се јављају на левој страни једначине различите, и бесконачност a може зависити од интеграционих констаната. Види се, такође, да је граница ρ од $f(x)$, када x тежи ка a, алгебарска функција од $\varphi_i(a)$. Посебно, када је једначина $F = 0$ алгебарска не само у односу на y и на његове изводе већ и по x, ова граница је алгебарска функција од a. Најзад, ако су $\varphi_i(x)$ константе B_i (ако, на пример, $F = 0$ не садржи x експлицитно), граница ρ се не мења са интеграционим константама и она је корен алгебарске једначине

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_iB_i\rho^{M_i} = 0,$$

из које најпре треба изоставити све корене који су нуле.

C. Претпоставимо, најзад, да полигон има вишеструка темена са негативном облашћу и да је $R(\lambda)$ у једној таквој области.

Тада, имајући у виду Лему II, за све вредности a које се не поклапају са a' биће

$$\sum_{(\gamma)} A_i \varphi(a) = 0 \quad \left(\sum_{(\gamma)} A_i \varphi_i(a) = 0, \text{ пимр. прев.} \right);$$

сабирање се односи на све индексе вишеструког темена чији је γ један од индекса. У претходном смо ову једначину назвали једначина по λ за вишеструко теме (λ) ((γ)прим. прев.); напишимо је у облику

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + S_1(a)\lambda^{m-1} + S_2(a)\lambda^{m-2} + \ldots + S_{m-1}(a)\lambda + S_m(a) = 0.$$

Ако сви корени λ ове једначине зависе од a, када се a мења са интеграционим константама, мењаће се и λ; али то није неопходно када су један или више корена независни од a. Ако, у посебном случају, ниједан корен не зависи од a, ред λ бесконачности a сигурно се не мења са интеграционим константама. То се дешава, на пример, у једначинама у којим x не фигурише експлицитно и за те једначине (нека су услови за трансцендентне сингуларитате испуњени) ред ма које покретне бесконачности једнак је корену, увек утврђеном, једначине по λ (када се та једначина не сведе на идентитет) чији је реални део негативан и у области вишеструког темена (γ).

Уопште, може се рећи, да би бесконачност a могла бити покретна и њен ред λ непокретан и обухваћен у области вишеструког темена (γ), потребно је да једначина по λ за то теме има бар један корен чији је реални део независан од a и у области овог темена; λ је тада реални део једног од тих темена.

Ако се полином (полигон, прим. прев.) сведе на једно једино вишеструко теме (праву), област тог темена је интервал од $\lambda = -\infty$ до $\lambda = \infty$; у том случају, да би бесконачност a могла бити покретна а њен ред λ непокретан, једначина по λ за то теме треба да има бар један корен чији је реални део негативан и независан од a.

Из претходног се могу извући следеће теореме.[1]

Теорема I. – *Кад год интеграл од* F $= 0$ *има покретних бесконачности, бар један од следећих услова је испуњен:*

[1] У свим овим теоремама радиће се, разуме се, о бесконачностима (или нулама), таквим да посматрани интеграл (као и његови изводи реда p) буде одређеног инфинитезималног реда у његовој околини.

1° полигон има једну или више страница негативног коефицијента правца и λ је један од тих коефицијената;

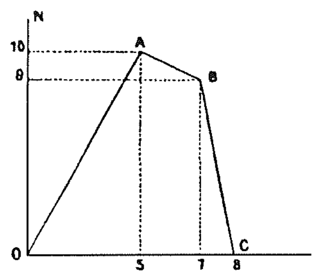
2° полигон има једно или више вишеструких темена са негативном облашћу и постоји део S равни a, који се не своди на изоловане тачке, ограничен или неограничен и такав да за све вредности a које се налазе у овом делу једначина по λ за једно такво теме има бар један корен чији је реални део негативан и у области тога темена; λ је тада реални део једног од таквих корена и бесконачност a припада делу S.

Да би се боље разумео смисао ове теореме, применимо је, на пример, у

$$F = y'^5 y''^2 + \varphi_1(x) y y'^3 y''^3 + \varphi_2(x) y^8 + \varphi_3(x) y''^5 + \varphi_4(x) = 0.$$

Полигон од F је на слици 8; теме B је двоструко, индекса 1 и 2, а темена A и C, индекса 3 и 4, проста су темена.

Коефицијент правца странице AB је $-\frac{1}{2}$, од BC је -9. Област темена B је интервал од $\lambda = -9$ до $\lambda = -\frac{1}{2}$.



Слика 8

Једначина по λ за то теме је

$$\lambda^7(\lambda-1)^2 + \varphi_1(a)\lambda^6(\lambda-1)^3 = 0,$$

која има корене

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = \frac{1}{1+\varphi_1(a)}.$$

Ако покретна бесконачност a интеграла није реда $-\frac{1}{2}$ или -9, реални део од $\frac{1}{1+\varphi_1(a)}$ је негативан и обухваћен интервалом $\left(-9, -\frac{1}{2}\right)$; ако није тако, бесконачност a је непокретна. Ставимо

$$a = \xi + \eta i, \qquad \frac{1}{1+\varphi_1(\xi+\eta i)} = \tilde{\omega}(\xi,\eta) + i\chi(\xi,\eta);$$

покретна бесконачност a (ако није реда $-\frac{1}{2}$ или -9) остаје стално у делу равни (ξ,η), заједничком за два дела

$$\tilde{\omega}(\xi,\eta) > -9 \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}(\xi,\eta) < -\frac{1}{2}.$$

Ван овог дела равни свака је бесконачност од y која није реда $-\frac{1}{2}$ или -9 непокретна.

Теорема II. – *Кад год интеграл има помичних бесконачности које имају непокретан ред λ, бар један од следећих услова је испуњен*:

1. полигон има једну или више страница негативног коефицијента правца и λ је један од тих коефицијената;

2. полигон има један или више вишеструких темена са негативном облашћу, и то таквих да једначина по λ за то теме има бар један корен чији је реални део независан од a, негативан и обухваћен облашћу тога темена; λ је тада реални део једног од тих корена.

Из Теореме I изводи се као закључак следеће:

Теорема III. – *Кад год је теме $\tilde{\omega}$ десно полигона у исто време екстремно десно теме и када је то теме просто, или пак ако је вишеструко, а да му у равни* а *не одговара ниједан део* S *дефинисан као у Теореми I, бесконачности интеграла не мењају се са интеграционим константама*.

Осим тога, ако је h индекс темена $\tilde{\omega}$ десно и ако је то просто теме, свака је бесконачност интеграла било корен једначине $\varphi_h(x) = 0$, било бесконачност других функција $\varphi_i(x)$; ако је то вишеструко теме, свака је бесконачност интеграла било бесконачност функција $\varphi_i(x)$ различитих од оних што одговарају том темену, било нека од изолованих тачака на коју се своде делови S који одговарају темену, у случају да такве тачке постоје.

То је лако видети примећујући да се за ма коју вредност λ која има реални део негативан скуп T своди на члан индекса h, ако је теме просто, а збир је свих чланова који одговарају свим индексима темена, ако је овај вишеструк. У овом последњем случају, за изоловане тачке на које се своде делови S који одговарају темену, једначина по λ не допушта ниједан корен чији је реални део негативан и у области темена, ма каква била вредност додељена за a.

Теорема IV. – *Чак и када теме* $\widetilde{\omega}$ *десно није десно екстремно теме, ако* λ *није коефицијент правца неке од страница полигона десно од врха* $\widetilde{\omega}$ *десно, или ако једначине по* λ *за темена десно од тог темена* $\widetilde{\omega}$ *имају корене по* λ *независне од* a *који се не поклапају са датим* λ *посматране бесконачности, ова бесконачност мора анулирати* $\varphi_h(x)$ *(или учинити да једна од других функција* $\varphi_h(x)$ *постане бесконачна), где* h *означава индекс темена у чијој области је* $-\lambda$.

Из претходног се види да, једино изузев случаја када се полигон своди на једно једино вишеструко теме, и то такво да је лева страна једначине по λ за то теме идентички нула, ма какво да је a и λ, *кад год је ред покретне бесконачности утврђен, он је алгебарска функција нумеричких констаната које се јављају на левој страни диференцијалне једначине.* Посебно, пошто су те константе алгебарски бројеви, ред λ је такође алгебарски број. Најзад, кад год услов 2° Теореме I није испуњен, ред сваке покретне бесконачности је број који се не мења са интеграционим константама, и више, он је самерљив.

Из Теореме I може се извући и следећа примедба:

Претпоставимо да је теме полигона $\widetilde{\omega}$ десно у исто време десно екстремно теме, а и да је вишеструко теме; претпоставимо још да део S, који је дефинисан у Теореми I и који се односи на то теме, не садржи целу раван a, и обележимо са $-S$ цео део равни a који се не садржи у S. Из Теореме I следи да интеграл у делу $-S$ може да има само изолованих бесконачности које се не мењају са интеграционим константама. Ако, у посебном случају, овај део $-S$ на реалној оси хвата ограничене или неограничене делове ове осе, *ни у једном од ових делова интеграл не може имати реалних помичних бесконачности.* И ако се цела реална оса налази у делу $-S$, све су реалне бесконачности интеграла непокретне и поклапају се са бесконачностима функција $\varphi_i(x)$, различитих од оних које одговарају индексима темена $\widetilde{\omega}$ десно. *Постоје, тако, довољни услови да су реалне бесконачности интеграла непокретне и, ако су ови услови испуњени, ове бесконачности се могу сматрати датим.* У великом броју случајева моћи ће се распоредити коефицијенти који фигуришу на левој страни једначине тако да су све реалне бесконачности непокретне. Најзад, лако се конструишу општи типови једначина у којима су претходне околности реализоване.

Применимо ове резултате *на једначине у којима се* x *не јавља експлицитно.*

За ове једначине ниједан корен једначине по λ за неко вишеструко теме не зависи од a; према томе, ред покретне бесконачности интеграла не мења се са a. Са друге стране, како се у општем интегралу увек јавља адитивна константа уз x, свака се бесконачност интеграла, у случају да такве бесконачности постоје, мења са интеграционим константама. Према томе, за ове једначине, *кад год је неки интеграл бесконачан за коначну вредност од* x, *бар један од услова* 1° *и* 2° *Теореме* II *је испуњен.*

Најзад, изузев јединог случаја када се полигон своди на вишеструко теме, и то такво да се лева страна једначине по λ за то теме идентички анулира за ма какво λ, ред ма које бесконачности интеграла увек је корен алгебарске једначине чији су коефицијенти линеарне и хомогене функције коефицијената који се јављају на левој страни диференцијалне једначине, или је пак коефицијент правца странице полигона. Када су бројне константе које фигуришу у диференцијалној једначини алгебарски бројеви, ред ма које бесконачности је такође алгебарски број.

II. – **Вредност** a **је нула интеграла**

Довољно је да применимо претходна тврђења на $F = 0$ трансформисану помоћу $\frac{1}{y}$ да бисмо добили тврђења која се односе на нуле интеграла. У свим овим тврђењима посматрају се само странице са негативним коефицијентом правца и темена која су са негативним областима; али обавештења о нулама могу се добити посматрајући странице са позитивним коефицијентом правца и темена која су са позитивним областима полигона П од $F = 0$ а да се не мора конструисати полигон трансформисане једначине.

Претпоставимо, на пример, да су испуњена следећа два услова:

1° полигон нема ниједну страницу позитивног коефицијента правца или, ако га има, λ није ниједан од тих коефицијената;

2° полигон нема ниједно вишеструко теме са позитивном области или, ако га има, λ није у тој области.

Тада, водећи рачуна да λ треба да је позитивно и о Леми I, види се да је једначина

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0$$

задовољена за све вредности a које нису бесконачности од $\varphi_i(x)$. Ова једначина је задовољена било вредностима a – коренима за $\varphi_h(a) = 0$, било вредностима λ – коренима једначине

$$A_h = \lambda^{\gamma_{0,h}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1,h}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0 .$$

Према томе: *Ако су услови* 1° *и* 2° *испуњени и ако* λ *није један од целих бројева* 1, 2, 3, ..., (p–1), а *је непокретно и анулира или чини бесконачном бар једну функцију* φ_i(x).

Сваком ранијем тврђењу које се односи на бесконачности одговара тврђење за нуле интеграла у које улазе странице позитивног коефицијента правца или темена позитивне области; само, ова тврђења имаће карактер мање прецизиран но прва, јер се овде коефицијенти A_i, у општем случају, анулирају за целе позитивне вредности λ, а ред λ посматране нуле може бити једнак тачно једном од тих целих бројева, у ком случају се не може ништа рећи о непокретности такве нуле.

Али, потребно је додати још услов да би странице са позитивним коефицијентом правца и темена позитивне области дали еквивалентне резултате онима које смо нашли у случају бесконачности.

Нека је δ_k индекс темена у чијој је области правац

$$\lambda = k \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

где је p ред дате једначине $F = 0$.

Назовимо ова темена δ_k; може се десити да исто теме истовремено задовољава више ових услова (да његова област обухвата више целих бројева 1, 2, ..., p), па чак да једно одговара свима. *Претпоставимо да у* F *скуп чланова који одговарају индексима* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ *садржи само* x, y, y'. Тврдим да:

Кад год су услови Леме I *испуњени, нула* a *је непокретна и анулира једну од функција*

$$\varphi_{\delta_1}(x), \varphi_{\delta_2}(x), \dots, \varphi_{\delta_p}(x)$$

или чини бесконачном једну од других функција $\varphi_i(x)$.

Стварно, T се тада своди на један члан и биће, ако је h индекс тога члана,

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0. \tag{1}$$

Најпре, јасно је да ако λ није један од целих бројева 1, 2,..., p, последња једначина захтева да a анулира $\varphi_h(a)$. Али је то исто тако и када је λ један од тих целих бројева; јер је тада индекс h неопходно један од индекса $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ (јер је, према самој дефиницији темена, δ_k, $S_{\delta_{k,\lambda}} > S_{i,\lambda}$), а како се у члановима који имају ове индексе јављају само x, y, y', за ове чланове је

$$A_{\delta_1} = \lambda^{\gamma_{0,\delta_1}}, \quad A_{\delta_2} = \lambda^{\gamma_{0,\delta_2}}, \dots, A_{\delta_p} = \lambda^{\gamma_{0,\delta_p}}$$

и једначина $A_h = 0$ може бити задовољена само за $\lambda = 0$, дакле $\varphi_h(a) = 0$.

Следи да ће за све једначине у којима чланови који одговарају индексима темена δ_k садрже само x, y, y' постојати, на основу посматрања темена лево од темена $\tilde{\omega}$, тврђења аналогна онима које нам је дало посматрање темена десно од темена $\tilde{\omega}$. Некорисно је да се овде наводе тврђења која су потпуно аналогна онима које се односе на бесконачности интеграла и која се врло лако исказују. Да би се она добила, у тврђењима која се односе на бесконачности треба само заменити негативне коефицијенте правца позитивним, вишеструка темена негативних области онима позитивних области итд.

ДРУГА ГЛАВА

НЕКОЛИКО ПРИМЕНА НА УНИФОРМНЕ ИНТЕГРАЛЕ

1. Методе господина Поенкареа, које допуштају да се тачно одреди аналитичка природа униформних трансцендената датих општим интегралом алгебарске једначине првог реда, не преносе се непосредно на једначине вишег реда. Узрок за ово, како га је изнео господин Пенлеве, јесте што су трансцендентни сингуларитети једначина првог реда непокретни и, према томе је биуниформна трансформација криве

$$F(\bar{x}, y, y') = 0 \quad \text{у} \quad F(\bar{x}_0, y_0, y_0') = 0$$

неопходно бирационална – чињеница која не важи за једначине вишег реда, што потпуно мења карактер ове теорије. И поред тога ове методе се проширују на случај другог реда када је одговарајућа биуниформна трансформација бирационална, што придодато другим разматрањима господе Пикара и Пенлевеа чини да је данас теорија униформних трансцендената, произведена интеграцијом алгебарских једначина другог реда, потпуна из више разлога.

Подсетићу на неке основне познате резултате о општем интегралу једначине другог реда, алгебарске по x, y, y', y'', када је тај интеграл униформна функција од x.

Ови интеграли, што се тиче сингуларитета, могу имати полове и непокретне и покретне есенцијалне тачке, али никада немају прекиде.[1] То је та огромна разлика која дели једначине другог реда од оних вишег реда. Тако, униформни интеграли врло простих једначина трећег

[1] Painlevé, Comptes rendus, T. CXVI, (1893), pp. 362–365.

реда имају прекиде и чак се ови прекиди мењају са интеграционим константама.

У својим радовима о једначинама $F(y,y',y'')=0$, алгебарским по x,y',y'' и где се x не јавља експлицитно, господин Пикар[1] је показао да, када је општи интеграл униформан и алгебарски зависи од две интеграционе константе, алгебарска површ која је представљена једначином, допушта бирационалну трансформацију у саму себе и тада се може распознати природа општег интеграла. Аналитички облик тог интеграла биће различит већ према природи бирационалне трансформације. Интеграл за који се претпоставља да је униформан рационалан је било по x, било по e^{ax}, било по $\mathrm{sn}(ax)$ и $\mathrm{cn}(ax)$, $\mathrm{dn}(ax)$ или је пак четвороструко периодична функција од две променљиве $ax+C_1$, $bx+C_2$, где су a и b погодно одређене константе, а C_1,C_2 две интеграционе константе. У овом последњем случају интеграл може да се сведе на рационалну функцију било по e^{ax} и e^{bx}, било по x и e^{ax}.

У случају када се не допушта да интеграл за који се претпоставља да је униформан алгебарски зависи од интеграционих констаната, питање да се позна да ли је општи интеграл униформан и да се прецизира његов аналитички израз показује се много тежим. Господин Пикар је уобличио потребне услове за све случајеве (али који нису довољни) за униформност интеграла. Он је нарочито посматрао случај $y''=R(y,y')$, где је R рационално по y и y', и показао да, кад год је општи интеграл униформан, он се може написати у облику количника две униформне функције, које су без полова и које задовољавају диференцијалне једначине, које се лако састављају помоћу дате једначине.

Недавно је господин Пенлеве[2] дошао до резултата за једначину $y''=R(y,y')$, где је R рационално по y' и алгебарско по y, да је општи интеграл, када је униформан, комбинација рационалних функција, експоненцијалних, двопериодичних или да зависи од Рикатијеве једначине са периодичним коефицијентима. Осим тога (када је интеграл униформан), интеграционе константе се увек могу тако изабрати да интеграл алгебарски зависи бар од једне од тих констаната. Метода која уосталом, допушта да се препозна да ли је општи интеграл дате једначине стварно униформан је осетљива да би се могла проширити на све алгебарске једначине по y,y',y'' и да би дозволила да се предвиди да теорема слична претходној важи за све једначине.

[1] *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, 1889

[2] Comptes rendus, T. CXVII, (1893), pp. 211–214

Ако се x у $F(x,y,y',y'')=0$ јавља експлицитно и ако се претпостави да је биуниформна трансформација која трансформише површину

$$F(\bar{x},y,y',y'')=0 \quad \text{у} \quad F(\bar{x}_0,y_0,y_0',y_0'')=0,$$

у исто време и *бирационална,* господин Пикар је показао да се методе господина Поенкареа за први ред генералишу и омогућују да се прецизира природа интеграла који се претпоставља да је униформан (или општије, са непомичним критичним тачкама). Тада се овај интеграл своди на униформне трансценденте које дефинишу алгебарске једначине првог реда, линеарне једначине и четвороапериодичне функције од две променљиве.

Господин Пенлеве је показао да ће то бити кад год се могу изабрати интеграционе константе тако да униформни интеграл алгебарски зависи од једне или од обе константе. Када је y трансцендентна функција једне једине интеграционе константе, диференцијална једначина се своди, у најнеповољнијем случају, на Рикатијеву једначину чији коефицијенти и сами зависе од Рикатијеве једначине са алгебарским коефицијентима.[1] Ако две константе алгебарски улазе у y, једначина $F = 0$ се интеграли или алгебарски или квадратуром, или се пак своди на линеарну једначину трећег реда.[2] Међутим, методе господина Пенлевеа, када је дата једначина

$$F(x,y,y',y'')=0,$$

омогућују да се позна да ли је општи интеграл униформна функција од x која алгебарски зависи од интеграционих константана.

Долази се тако до овог општег закључка: док y на трансцендентан начин не садржи две интеграционе константе (ма како их изабрали), општи интеграл, када је униформан, изражава се познатим трансцендентама до којих доводе теорија једначина првог реда и линеарне једначине. Али није више исто када је интеграл трансцендентна функција две константе; једначина $F(x,y,y',y'')=0$ тада може да дефинише нове трансценденте, што показују извесни примери које је недавно саставио господин Пенлеве.

2. Компликације се још повећавају када се прелази са другог на виши ред. То је зато јер модуларне и Фуксове функције, интеграли врло простих једначина трећег реда (где x не улази експлицитно) имају прекиде који су променљиви са интеграционим константама. Тако

[1] Comptes rendus, T. CXVI, (1893), p. 566.

[2] Ibid., T. CXVI, (1893), p. 173.

једначине трећег реда уводе, дакле, суштински нове трансценденте, што се не јавља код другог реда.

Разлика је још много већа када се x јавља експлицитно у једначини. Ипак, када се ограничи на ма који ред једначине у којој x може да се јавља, интеграл које једначине је униформан и алгебарски зависи од констаната, горе наведене теореме, лако се проширују у случају једначина другог реда.

Али, сви резултати које смо до сада навели тичу се само *општег* интеграла, а не казују ништа о *партикуларним* униформним интегралима. Одређивање ових интеграла и њихове аналитичке природе компликованији је проблем но аналогни проблем за општи интеграл. То даје неки интерес за резултате који следе.

Показаћу нека упрошћавања која омогућују да се претходне теореме о нулама и половима интеграла користе при изучавању униформних интеграла (општих или партикуларних) обимних класа диференцијалних једначина било ког реда. Помоћу ових теорема и неких теорема опште теорије функција изучавање униформних интеграла за доста опште врсте једначина, моћи ћемо свести на аналогно изучавање једначина нижег реда или на изучавање холоморфних интеграла других једначина. Указаћу на опште облике једначина ма ког реда за које ће бити сигурно да униформни трансценденти који су настали интеграцијом нису различити од познатих трансцендената и за које ће се знати распознати да ли има униформних интеграла или не.

У свему овом што следи реч је о униформним интегралима који имају само унапред дате есенцијалне тачке које су изоловане и у коначном броју, а посебно о мероморфним функцијама.

О нулама и половима мероморфних функција

1. Ред ма које бесконачности или нуле, непокретне или покретне, униформног интеграла увек је утврђен и цео број. Према томе, водећи рачуна о претходним теоремама, може се исказати следеће тврђење:

I. Ако униформни интеграл од $F = 0$ који садржи једну или више интеграционих константи има покретних бесконачности, бар један од следећих услова је испуњен.

1° Полигон од F има једну или више страница коефицијента правца који је цео негативан број и λ је један од тих целих бројева.

2° Полигон има бар једно вишеструко теме чија област садржи један или више целих негативних бројева $n_1, n_2, n_3, \ldots$, тако да једначина по λ за то теме има бар један корен независан од a и једнак једном од целих бројева $n_1, n_2, n_3, \ldots$; ред λ је један од тих бројева.

II. Ако је y униформни интеграл од $F = 0$, било да садржи или не интеграционе константе и када није испуњен ниједан од услова 1° и 2° из тврђења I, сваки пол од y је: било корен, било пол бар једне од функција $\varphi_i(x)$ или пак корен одређене једначине по λ. Ево како се још могу тачно одредити ове вредности.

Нека је h индекс темена $\widetilde{\omega}$ десно, $h_1, h_2, \ldots$ индекси оних темена који су десно од темена (h) и који сваки у својој области обухвата бар један негативан цео број, ако таква темена постоје. Тада:

1° Кад год је λ цео негативан број који је у области неког од *простих* темена $h_1, h_2, \ldots$ или у области темена h за које се претпоставља да је *просто*, пол a анулира ону функцију $\varphi_i(x)$ чији је индекс једнак индексу темена у чијој је области λ или чини бесконачним једну од осталих функција $\varphi_i(x)$.

2° Кад год је λ негативан цео број који се налази у области једног од *вишеструких* темена $h_1, h_2, \ldots$, или у области темена h за које се претпоставља да је *вишеструко,* пол a је: било корен једначине по λ за то теме (у чијој области је λ), када се у тој једначини λ замени негативним целим бројем који је у области темена, било бесконачност функција $\varphi_i(x)$ које не одговарају том врху.

Претпоставимо да једначина $F = 0$ не садржи x експлицитно.

Ако има један униформни интеграл, има их бесконачно много који зависе бар од једне интеграционе константе. Да би неки од тих интеграла могао постати бесконачан за коначну вредност x, потребно је да полигон има бар једну страницу коефицијента правца који је цео негативан број и да је λ један од тих коефицијената, или пак да постоје једно или више вишеструких темена, и то таквих да једначина по λ има негативне целе корене који су у области темена; тада је λ један од тих корена. Ако ниједан од тих услова није испуњен, *сваки мероморфни интеграл је холоморфан у целој равни.*

Најзад, сва ова тврђења је лако претворити у аналогна тврђења за нуле униформних интеграла.

2. Ставимо у датој једначини

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{1}$$

$y = \dfrac{1}{z} + \alpha$, где је α неодређена константа; једначина се трансформише у

$$\Phi(x, z, z', \ldots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x, \alpha) z^{S_{0,i}} z'^{S_{1,i}} \ldots z^{(p)^{S_{p,i}}} = 0,$$

где су $S_{i,j}$ цели позитивни бројеви, а $\psi_i(x,\alpha)$ полином по α чији су коефицијенти функције од x.

Претпоставимо да је конструисан систем (M_i, N_i) за Ф. У овом ће систему бити најмање један скуп тачака (M_i, N_i) таквих да, када се уклоне, полигон П од преосталог система не испуњава услове 1° и 2° претходног тврђења I. Нека је

$$(M_{h_1}, N_{h_1}), (M_{h_2}, N_{h_2}), \ldots, (M_{h_k}, N_{h_k})$$

један такав скуп. *Ако* k *једначина*

$$\text{(A)} \qquad \psi_{h_1}(x,\alpha) = 0, \psi_{h_2}(x,\alpha) = 0, \ldots, \psi_{h_k}(x,\alpha) = 0$$

имају заједнички корен α *који не зависи од* x, *вредности за* x *које су корени једначине* $y(x) - \alpha = 0$ (где је y било који униформни интеграл) *утврђене су и унапред познате.*

Ако је број ових корена α већи од 2 и ако се x јавља алгебарски у $F = 0$, *сваки мероморфни интеграл (или, општије, са коначним бројем есенцијалних тачака) јесте рационалан разломак по* x.

Ставимо у једначини (1) $y = \dfrac{1}{z} + u$, где је u неодређена функција од x; ова ће једначина постати:

$$\psi(x, z, z', \ldots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \Omega_i z^{S_{0,i}} z'^{S_{1,i}} \ldots z^{(p)S_{p,i}} = 0,$$

где су $S_{i,j}$ цели позитивни бројеви, а Ω_i полиноми по $u, u', \ldots, u^{(p)}$ чији су коефицијенти функције од x. Нека су индекси $h_1, h_2, \ldots, h_k$ дефинисани као малопре, *ако* k *диференцијалних једначина*

$$\Omega_{h_1} = 0, \Omega_{h_2} = 0, \ldots, \Omega_{h_k} = 0$$

имају заједнички мероморфни интеграл $u = \chi(x)$, *корени по* x *једначине* $y(x) - \chi(x) = 0$ (*где је* y *било који мероморфни интеграл од* (1)) *утврђени су и унапред познати.*

3. Нека је $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ једначина у којој се x не јавља експлицитно; ако она има један мероморфни интеграл, има их тада бесконачно много. Ако полигон од $F = 0$ нема странице коефицијента правца који је цео негативан број и ако једначина по λ за теме $\tilde{\omega}$ десно нема за корен цео негативан број, *сваки мероморфни интеграл је холоморфан у читавој равни.*

Претпоставимо сада да су испуњени следећи услови

A. *Полигон има једну и само једну страницу негативног коефицијента правца који је цео број и овај коефицијент је једнак* -1; *и више, међу теменима са негативном облашћу нема таквих да једначина по* λ *за то теме има целих негативних корена и да се они налазе у области тог темена.*

Тада, ако мероморфни интеграл y има полова, то су прости полови. Граница ρ израза $\dfrac{y}{x-a}$ за $x = a$ је *резидуум* од y за такав пол и тај резидуум је један од корена ρ који није нула једначине по ρ

$$(1) \qquad \sum_{(\gamma,\delta)} A_i B_i \rho^{M_i} = 0$$

за страницу коефицијента правца -1, где у A_i треба ставити $\lambda = -1$. Према томе, *ови резидууми су независни од интеграционих константи и увек ће бити познати.*

B. Једначина по ρ (претпоставља се да је испуњен услов **A**) има само један корен који није нула или, ако их има више, сви њихови односи два по два су увек позитивни и самерљиви.

Приметимо да је лако уверити се да ли је тако, а да се не решава једначина по ρ, јер када се напише у облику

$$\rho^m + T_1\rho^{m-1} + T_2\rho^{m-2} + \ldots + T_m = 0,$$

ниједан од коефицијената $T_1, \ldots, T_m$ не може бити нула и, ако се ова једначина трансформише са $\sigma = \dfrac{\rho}{T_1}$, ова трансформација мора имати све корене $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ реалне, негативне и самерљиве, јер ако се са $\tilde{\omega}_{i,1}, \tilde{\omega}_{i,2}, \ldots, \tilde{\omega}_{i,m}$ означе односи, сви самерљиви и позитивни, корена $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ са ρ_i, биће

$$\sigma_i = \frac{\rho_i}{T_1} = \frac{\rho_i}{-\sum\limits_{k=1}^{k=m} \rho_k} = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{k=m} \tilde{\omega}_{i,k}} = \text{број који је негативан и самерљив.}$$

Лако ће се израчунати сви корени једначине по σ и, према томе, и они једначина по ρ, или ће се пак констатовати да услов **B** није испуњен.

Нека су испуњени услови **A** и **B**, постојаће број T реалан или имагинаран, такав да

$$\rho_1 = \mu_1 T, \rho_2 = \mu_2 T, \ldots, \rho_m = \mu_m T,$$

где су μ_i позитивни цели бројеви, међусобно прости. Интеграл $\frac{1}{T}\int y dx$ тада може имати само поларне периоде које су производи целих бројева са $2\pi i$ и функција

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int y dx}$$

ће бити цела функција од x. Мероморфни интеграл y тада се може написати у облику

$$y = T\frac{d}{dx}\log G(x),$$

где је $G(x)$ цела функција која *уопштава* (*у случају када је интеграл стварно мероморфан*) *функције* Al(x) *господина Вајерштраса* (*Weierstrass*) *или функције* θ *из теорије елиптичких функција.* Тако имамо представљање интеграла y количником две целе функције, а $G(x)$ задовољава једначину реда $p + 1$, која се лако саставља помоћу дате једначине по y.

Да то проверимо на простом примеру

$$y''^2 - 4y'(1 - y')(1 - k^2 y') = 0;$$

лако је потврдити да су испуњени услови **A** и **B** и да једначина по ρ за једину страницу негативног коефицијента правца, чији је коефицијент правца -1, има једини корен $\rho = -\frac{1}{k^2}$. Према томе, функција

$$G(x) = e^{-k^2\int y dx}$$

је цела функција од x ако је y мероморфно, што је овде случај, јер је општи интеграл једначине

$$y = \int\left[\operatorname{sn}(x + C_1, k)\right]^2 dx + C_2$$

и функција $G(x)$ је баш, до константног фактора, функција

$$Al(x) = e^{-k^2\int\limits_0^x\int\limits_0^x sn^2 x\, dx^2}$$

господина Вајерштраса, која је стварно цела функција од x.

4. Може се десити да једначина $F = 0$ не задовољава услове **А** и **В**, али када се стави

$$z = R(y, y', \ldots, y^{(q)}),$$

где је R рационална функција од $y, y', \ldots, y^{(q)}$ са константним и неодређеним коефицијентима a_i, ови коефицијенти се могу тако уредити да буду испуњени услови **А** и **В** за диференцијалну једначину по z која се добије овом сменом функције. А како је, када је y мероморфно, z такође мероморфно, то ће се увек моћи наћи константа T таква да функција

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int R(y, y', \ldots, y^{(q)})dx},$$

пошто се у њој y замени било којим мероморфним интегралом од $F = 0$, *постане цела функција од* x која задовољава једначину реда $p + q$, а која се изводи из предложене једначине по y.

Ове функције G(x) *уопштавају оне на које је указао господин Пикар*[1], *а које се односе на једначину*

$$y'' = R(y, y')$$

када јој је интеграл мероморфан.

Господин Пикар је показао и то да се, када је интеграл y једначине

$$(3) \qquad y'' + ay^3 + by^2 + cy + d + kyy' = 0$$

(где су a, b, ..., k константе) мероморфан, може одредити девет констаната $A, B, C, m, n, p, q, r, s$, и то тако да, када се стави

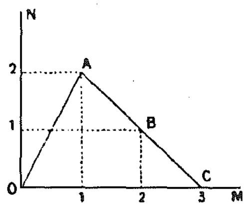
$$\begin{aligned} Y &= Ay^2 + By + Cy', \\ F &= mY^3 + nY^2 + pY + q(Y + r)Y' + sY'^2, \end{aligned}$$

израз

$$G(x) = e^{\int F dx}$$

буде цела функција од x која задовољава једначину трећег реда, која се лако састављa, а која у том случају треба да има целу функцију за општи интеграл.

[1] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1889, pp. 283–287.



Слика 9

До овога резултата може се доћи и помоћу оног што претходи, а може се још додати следећа примедба за једначину (3). Полигон једначине је као на слици 9, где темена A, B, C имају индексе респективно $i = 1, 6, 2$. Услов **A** је дакле испуњен, а једначина по ρ која се односи на страницу AC, пошто се изоставе корени који су нуле, постаје .

$$a\rho^2 - k\rho + 2 = 0.$$

Према томе, *кад год је величина*

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 8a}}{k + \sqrt{k^2 - 8a}}$$

реалан позитиван и самерљив број, може се наћи константа K *таква да* $G(x) = e^{K\int y dx}$ *буде цела функција од* x *када се у њој* y *замени било којим мероморфним интегралом од* y (од x, прим. прев.).

Посматрајмо једначину

$$(4) \qquad y'' + P(y)y' + Q(y) = 0,$$

где су P и Q полиноми по y степена m и n. Видеће се лако да је, ако је $n = m + 2, m > 1$ и када се са a_0, b_0 означе коефицијенти степена y^m и y^n у P и Q, израз $e^{\frac{b_0}{a_0}\int y dx}$ цела функција од x за све мероморфне интеграле од (4).

Ако је $m = 1$, имали бисмо претходно наведени пример господина Пикара. Ако је $m \neq 1$ и $n \neq m + 2$, полигон од (4) нема ниједну страницу коефицијента правца који је цео и негативан број; у овом случају интеграл y, ако је мероморфан, цела је функција.

О једној класи првих интеграла

1. Зовемо, у општем случају, *први интегралом* за дату диференцијалну једначину $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ функцију независно променљиве x, општег интеграла y и неких његових извода, која остаје константна у односу на једначину $F = 0$ и таква да се, када се диференцира овај израз по x, добија једначина $F = 0$. Таква функција се своди на константу ма какав био партикуларни интеграл који се посматра, а вредност ове константе се мења са овим партикуларним интегралом. Ове су функције нека врста инваријаната за интеграле једначине, вреде за све њене интеграле ма каква била њихова аналитичка природа.

Али, осим ових првих интеграла, могу се посматрати други, *који важе само за интеграле одређене аналитичке природе.* Тако постоје обимне класе једначина било каквог реда за које се, на основу општих особина функција одређене аналитичке природе, може закључити да функција $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ треба да се сведе на константу, на алгебарску функцију од x итд., када се у њој y замени не *ма којим интегралом једначине* $F = 0$, *већ интегралом дате природе.* Такви ће интеграли, на пример, бити интеграли са n вредности, униформни или периодични итд., било да су интеграли партикуларни или да зависе од одређеног броја интеграционих констаната.

Обични први интеграли могу се посматрати као нека врста инваријаната за све интеграле једначине ма какве били природе. Први интеграли, такви као Φ, били би тада инваријанте за одређену класу интеграла. Са те тачке гледишта, разлика између ове две врсте инваријаната подсећа на разлику која постоји између две врсте инваријаната у теорији линеарних једначина, међу којима су оне које је посматрао Алфен (Halphen), које важе *ма каква била природа* функција које улазе у смену, и инваријанте много особеније природе, које је посматрао господин Поенкаре, где, напротив, функције које улазе у смену нису ма какве, већ *рационалне* по x.

Намеравам да укратко покажем како претходно изнете теореме о нулама и половима униформних интеграла, заједно са неким тврђењима из опште теорије функција, дозвољавају да се у распрострањеним случајевима нађу први интеграли за униформне интеграле једначине (који могу бити партикуларни или да зависе од одређеног броја интеграционих констаната), да се упрости тражење униформних интеграла, па чак и да се потпуно израчунају, у извесним посебним случајевима када постоје.

Све што следи почива на следеће две леме, од којих ће прва омогућити налажење мероморфних двопериодичних интеграла, а друга, у општем случају, униформних интеграла који имају, као и њихови изводи, само коначан број есенцијалних сингуларитета.

Лема I. – Нека је $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ алгебарска једначина по $y, y', \ldots, y^{(p)}$ константних коефицијената; y двопериодични мероморфни интеграл од $F = 0$, а $R(y, y', \ldots, y^{(q)})$ рационална функција по $y, y', \ldots, y^{(q)}$ константних коефицијената.

Ако се функција R не анулира ни за једну коначну вредност од x или ако и нема полова на коначном растојању, посматрани интеграл y је заједнички за две једначине

$$F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(y, y', \ldots, y^{(q)}) = C,$$

где је C произвољна или прикладно изабрана константа.

Ово произлази из Лиувилове (Liouville) теореме о нулама и половима мероморфних двопериодичних функција.

Лема II. – Нека је $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ алгебарска функција по $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$, y униформни интеграл од $F = 0$ који нема прекида, а $R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})$ рационална функција од $x, y, y', \ldots, y^{(q)}$. Ако се могу наћи три константе a, b, c, и то такве да три једначине

$$(1) \qquad R - a = 0, \; R - b = 0, \; R - c = 0$$

(пошто се у R смени y са посматраним интегралом) имају само коначан број корена, интеграл y је заједнички за две једначине

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x),$$

где је $r(x)$ рационална функција по x.

Ако три једначине (1) немају корена, y је заједничко за

$$F = 0, \quad R = \text{const.}$$

Ово следи из познате теореме господина Пикара о нулама униформних функција које немају прекид.

Примена ове две леме довешће, дакле, до првих интеграла $R = \text{const.}$ или $R = r(x)$; када су ти интеграли једном познати, тражење униформних интеграла једначине $F = 0$ своди се на тражење заједничких решења за две диференцијалне једначине, што се врши диференцирањем и елиминисањем сукцесивних извода од y. Ако је, на пример, $p > q$, диференцираће се једначина $R = r(x)$ (или $R = \text{const.}$) $p - q$ пута по x и када се $y^{(p)}$ елиминише из

$$(1) \qquad F = 0$$

и

$$(2) \qquad \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}}(R - r) = 0,$$

добиће се једначина (3) реда мањег од p, која допушта сва заједничка решења за (1) и (2). Када се са (2) и (3) поступи као са (1) и (2), једна од тих једначина замениће се другом нижег реда и тако даље. Добиће се тако један низ

$$(\Delta) \qquad (1), (2), (3), \ldots, (m-2), (m-1), m, \ldots$$

диференцијалних једначина и тада се могу јавити два случаја.

Први случај. – Ма какав да је рационални разломак $r(x)$ (или C), све се завршава добијањем једначина нултог реда. Своди се, тако, на следећи елементарни проблем: Наћи заједничка решења за две алгебарске једначине; та решења су тада неминовно алгебарска по x. Да би $F = 0$ имало униформних интеграла, потребно је и довољно да међу овим алгебарским решењима има бар један рационалан који задовољава једначину $F = 0$. Тада је сваки униформни интеграл рационалан. Ако, у посебном случају, F и R не садрже x експлицитно, могу постојати само униформни интеграли $y = \text{const}$.

Други случај. – Може се изабрати неодређен рационални размак (или C) тако да се једначине из низа (Δ), почев од одређеног ранга, сведу на идентитете. Нека је (m) прва од једначина овог низа која се своди на идентитет. Сваки интеграл заједнички за $F = 0$ и $R = r(x)$ тада је интеграл једначине (m–1); дакле, $P = 0$ *не може имати униформних интеграла, сем оних дефинисаних са* (m–1). *Да би* F = 0 *допуштало такве интеграле, потребно је и довољно да их допушта једначина* (m–1) *и да међу овим интегралима има оних који задовољавају једначину* F = 0. Тражење униформних интеграла предложене једначине *сведено је, дакле, на изучавање једначине нижег реда*.

Ако, на пример, једначина (m–1) садржи само x, y, y', дата једначина за интеграле од униформних трансцендената може имати само оне који су дефинисани првим редом.

Знаће се, на пример, препознати да ли $F = 0$ има униформан интеграл који зависи од интеграционе константе и израчунати тај интеграл у случају да он постоји. Такав интеграл је рационална функција било по x и по $\varphi[J(x)]$ (где је φ двопериодична мероморфна функција, а $J(x)$ Абелов интеграл), било по x и u, где је u интеграл Рикатијеве једначине алгебарских коефицијената по x.

Ако једначина (m–1) садржи само x, y, y', y'', знаће се, на пример, препознати методама господина Пенлевеа за једначине другог реда, да ли $F = 0$ има униформни интеграл који алгебарски зависи од две интеграционе константе; у овом ће се случају израчунати овај интеграл било алгебарски, било квадратурама, или пак интеграцијом линеарне једначине трећег реда.

Уопште, познавање првог интеграла, као што је $R = r(x)$или $R = \text{const.}$ за интеграл одређене аналитичке природе, упрошћава изучавање његових интеграла и често дозвољава да се потпуно израчунају.

2. Указаћу овде како је дошло до посматрања таквих првих интеграла и показати како се могу саставити општи типови једначина за које ће се знати сви интеграли.

Нека је $R(x,y,y',\dots,y^{(q)})$ дата рационална функција од x, y, y', $\dots,y^{(q)}$ константних и неодређених коефицијената $a_1,a_2,\dots,a_k$ и у датој једначини $F(x,y,y',\dots,y^{(q)})=0$ извршимо смену

$$z=\frac{1}{R(x,y,y',\dots,y^{(q)})-\alpha}$$

(где је α неодређена константа), узимајући z за нову функцију.

Нова ће једначина бити

$$(2)\quad \psi(x,z,z',\dots,z^{(p+q)})=\sum_{i=1}^{i=t}\psi_i(x,\alpha,a_1,\dots,a_k)z^{n_{0i}}z'^{n_{1i}}\dots z^{(p+q)n_{(p+q)i}}=0,$$

где су ψ_i полиноми по $x,\alpha_1,\dots,\alpha_k$ (по $x,a_1,\dots,a_k$, прим. прев.).

Претпоставимо да је састављен систем (M_i,N_i) за (2) и нека је

$$(3)\qquad (M_{h_1},N_{h_1}),(M_{h_2},N_{h_2}),\dots,(M_{h_j},N_{h_j})$$

скуп тачака овога система такав да када се оне изоставе полигон П система који остаје не испуњава ниједан од услова 1° и 2° из Тврђења I. Тада:

Ако j једначина

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\psi_{h_1}(x,\alpha,a_1,\dots,a_k)=0,\\ &\psi_{h_2}(x,\alpha,a_1,\dots,a_k)=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\psi_{h_j}(x,\alpha,a_1,\dots,a_k)=0,\end{aligned}$$

за три вредности $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ за α допуштају исти систем решења

$$(5)\qquad a_1,a_2,\dots,a_k$$

(неке од a_i могу бити произвољне) независних од x, дата једначина $F=0$ као први интеграл за све мероморфне интеграле има

$$R(x,y,y',\dots,y^{(q)})=r(x),$$

где је $r(x)$ рационални разломак по x.

Јер, нека је y мероморфни интеграл од $F=0$, интеграл z од $\psi=0$, који му одговара, такође је мероморфна функција и ако α добије неку од вредности $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ и неодређени коефицијенти a_i у R добију вредности из (5), чланови од $\psi=0$, који одговарају скупу (3), нестају. Полигон П система (M_i,N_i) од $\psi=0$ не задовољава услове 1° и 2° који су мало пре цитирани, што показује да су полови интеграла z непокретни и да анулирају или чине бесконачном бар једну функцију ψ_i; одакле се закључује да су ови полови у коначном броју. Следи да три једначине

$$R - \alpha_1 = 0, \quad R - \alpha_2 = 0, \quad R - \alpha_3 = 0,$$

имају само коначан број корена. Према томе, $R(x, y, \ldots, y^{(q)})$ своди се на рационалан разломак по x када се y смени са мероморфним интегралом једначине $F = 0$, што је требало показати.

Ако ни F ни R не садрже x експлицитно, а систем (5) постоји, тада је први интеграл

$$(7) \qquad R(x, y, \ldots, y^{(q)}) = \text{const}.$$

Претпоставимо, у посебном случају, да се ради о двопериодичним мероморфним интегралима y. Тада, ако једначине (4) имају систем решења

$$\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_k,$$

(7) ће бити први интеграл. Тражење интеграла y упрошћава се, тада, и често се потпуно остварује. Тако, на пример, ако једначина (m–1) низа (Δ) (стр. 116) садржи само y и y', ово се тражење потпуно остварује.

Показаћу сада један од начина за састављање општих типова једначина за које ће се знати први интеграли онакви какви су мало пре дефинисани.

3. Нека су $\varphi(y, y', y'', \ldots)$ и $\psi(y, y', y'', \ldots)$ два полинома таква да темена $\tilde{\omega}$ десно њихових полигона имају исте координате, да су проста темена и да десно од тога темена ни један ни други полигон немају темена.

Нека је, најзад, $f(z, z', z'', \ldots)$ такав полином да лево од темена $\tilde{\omega}$ лево нема ниједно теме и да једначина по λ за то теме $\tilde{\omega}$ нема ниједан цео и позитиван корен.

Заменимо у f неке или све константне коефицијенте уз $z, z', z'', \ldots$ потпуно неодређеним полиномима по $y, y', y'', \ldots$ сем коефицијената уз чланове који одговарају темену $\tilde{\omega}$ десно, који ће остати константни. Нека је $F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots)$ полином који се тако добије. Тврдим да је *сваки мероморфни двопериодичан интеграл система*

$$F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$

$$z = \frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)},$$

истовремено је заједнички за две једначине

$$F(C,0,0,0,\dots;y,y',y'',\dots)=0,$$

$$\frac{\varphi(y,y',y'',\dots)}{\psi(y,y',y'',\dots)}=C,$$

где је C *константа.*

Да бисмо то доказали, посматрајмо једначину

$$F(z,z',z'',\dots;y,y',y'',\dots)=0,$$

у којој се, према претпоставци, $y,y',y'',\dots$ не јављају у члановима који одговарају темену $\tilde{\omega}$; једначина по λ за то теме имаће, према томе, све константне коефицијенте уз степене по λ. Како лево од темена $\tilde{\omega}$ од f (па према томе и F) нема темена и једначина по λ за то теме нема ниједан цео и позитиван корен, према Тврђењу II (стр. 109), нуле од $z(x)$ треба да учине бесконачним бар један коефицијент уз $z,z',z'',\dots$ у F који не одговара темену $\tilde{\omega}$; а како су ови коефицијенти полиноми по $y,y',y'',\dots$ константних коефицијената, свака нула од $z(x)$ је пол од $y(x)$.

Али је

$$z=\frac{\varphi(y,y',y'',\dots)}{\psi(y,y',y'',\dots)}=\frac{\sum a_i y^{m_{0i}}y'^{m_{1i}}\dots}{\sum b_i y^{n_{0i}}y'^{n_{1i}}\dots},$$

где су a_i и b_i константе. Ставимо

$$y=(x-a)^{\lambda}\chi(x)$$

и договоримо се да снабдемо индексом $\tilde{\omega}$ све величине a_i,b_i,M_i,N_i итд. које се односе на теме $\tilde{\omega}$. Како десно од темена $\tilde{\omega}$ од φ и ψ, која су проста темена, нема других темена и како ова два темена имају исте координате $(M_{\tilde{\omega}},N_{\tilde{\omega}})$ у околини $x=a$ и за ма какво λ цело и позитивно, према обележавању из Друге главе, биће

$$z=\frac{(x-a)^{-S_{\cdot,\lambda}}\left[\Omega_{\cdot}(x)+\sum(x-a)^{S_{\tilde{\omega},\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)\right]}{(x-a)^{-S_{\cdot,\lambda}}\left[\Omega'_{\cdot}(x)+\sum(x-a)^{S'_{\tilde{\omega},\lambda}-S'_{i,\lambda}}\Omega'_i(x)\right]}.$$

Познато је (Прва глава) да је за $x=a$

$$\lim\Omega_{\tilde{\omega}}(x)=A_{\tilde{\omega}}a_{\tilde{\omega}}\chi(a)^{M_{\tilde{\omega}}},$$
$$\lim\Omega'_{\tilde{\omega}}(x)=A'_{\tilde{\omega}}b_{\tilde{\omega}}\chi(a)^{M_{\tilde{\omega}}},$$
$$\lim\Omega_i(x)=0,$$
$$\lim\Omega'_i(x)=0$$

за све индексе i различите од $i = \tilde{\omega}$. Дакле, за $x = a$

$$\lim z = \frac{A_{\tilde{\omega}} a_{\tilde{\omega}}}{A'_{\tilde{\omega}} b_{\tilde{\omega}}} \tag{1}$$

и, како је ова вредност различита од нуле, види се да се $z(x)$ не може анулирати за пол од $y(x)$. Дакле, треба да је $z = \text{const.}$; вредност ове константе дата је једначином (1), што даје први интеграл

$$\frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)} = \frac{A_{\tilde{\omega}} a_{\tilde{\omega}}}{A'_{\tilde{\omega}} b_{\tilde{\omega}}}.$$

Тврђење је на тај начин доказано.

Посматрајмо, на пример, једначину

$$F = P\varphi + \psi = 0,$$

где је P ма какав полином по $y, y', y'', \ldots$, а φ и ψ претходни полиноми. Може се писати

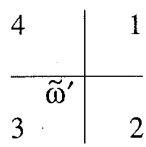
$$F = \psi(P\frac{\varphi}{\psi} + 1)$$

и сваки мероморфни интеграл од $F = 0$ је заједнички било за $\varphi = 0$, $\psi = 0$, било за $P = 0$, $\psi = 0$, било за

$$P + \frac{1}{C} = 0, \varphi - C_{\psi} = 0,$$

где је C константа. У претходном сам показао колико ова околност упрошћава тражење таквих интеграла.

4. Нека су $\varphi(x, y, y', \ldots)$ и $\psi(x, y, y', \ldots)$ два полинома по $x, y, y', \ldots$, и то такви да њихови одговарајући полигони немају десно од темена $\tilde{\omega}$ десно странице чији су коефицијенти правца цели бројеви и, више, да се ова два темена $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ поклапају или да права која их спаја нема коначан, различит од нуле и негативан коефицијенат правца. Овај последњи услов претпоставља да ако се, на пример, кроз једно од темена $\tilde{\omega}$ десно (који одговара за φ и ψ) повуку паралеле са OM и ON које деле раван NOM на четири квадранта, друго теме $\tilde{\omega}$ десно не налази се у квадрантима (2) и (4)



Слика 10

Нека је $f(z,z',z'',\dots)$ полином по $z,z',z'',\dots$ константних коефицијената, такав да његов полигон нема лево од његовог темена $\tilde{\omega}$ лево других темена и да једначина по λ за то теме $\tilde{\omega}$ нема целих и позитивних корена.

Заменимо у f више или све константне коефицијенте уз $z,z',\dots$ потпуно произвољним полиномима по $y,y',y'',\dots$ чији су коефицијенти константни или алгебарске функције по x, али оставимо константним коефицијенте уз чланове који одговарају темену $\tilde{\omega}$ лево. Означимо са $F(x,y,y',\dots,z,z',\dots)$ полином који се тако добије.

Нека је, најзад, $\theta(\alpha)$ ма какав полином по α који има више од два корена различита од нуле и која нису нула. Може се изрећи следећа теорема:

Сваки униформни интеграл у *који има само коначан број есенцијалних тачака система*

$$(1) \qquad F(x,y,y',\dots,z,z',z'',\dots)=0,$$

$$(2) \qquad z-\theta\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)=0$$

истовремено је заједнички интеграл за две једначине

$$(3) \qquad F\left(x,y,y',\dots,R_1(x),\frac{dR_1}{dx},\dots\right)=0, \qquad \frac{\varphi}{\psi}=R(x),$$

где су R_1 *и* R_2 (R, прим. прев.) *два рационална разломка по* x *везана релацијом*

$$(4) \qquad R_1(x)=\theta[R(x)].$$

Да бих то показао, тврдим прво да су, ако је α корен од $\theta(\alpha)=0$, корени $x=a$ једначине

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x,y,y',\dots)}{\psi(x,y,y',\dots)}-\alpha=0$$

(када се ту y замени интегралом дефинисаним мало пре) *у коначном броју*. Да то покажемо посматрајмо једначину (1) и приметимо да је сваки корен $x=a$ од (5) и корен једначине $z(x)=0$ и обратно.

За једначину (1) посматрану као једначину по z полигон је исти као за $f(z,z',z'',\dots)$ и још више, једначина по λ за теме $\tilde{\omega}$ лево за F је иста као за f. Како лево од темена $\tilde{\omega}$ лево од f нема ниједно теме и како ова једначина по λ нема ниједан позитиван и цео корен, корени од

$z(x)=0$ треба (према једном тврђењу Прве главе) да учине бесконачним бар један коефицијенат из $z, z', \ldots$ у F, који су полиноми по $y, y', \ldots$ алгебарских коефицијената по x. Дакле, сваки од ових корена треба да је или бесконачност ових алгебарских функција по x, или пол по y. У првом случају вредности $x=a$ су сигурно у коначном броју; показаћу да их је исто и у другом случају.

У близини пола $x=a$ од y биће

$$y=(x-a)^{\lambda}\chi(x),$$

где је λ цео негативан број, а $\chi(x)$ не постаје ни нула ни бесконачно за $x=a$. Нека се φ и ψ напишу у облику

$$\varphi=\sum_{i=1}^{i=s}\varphi_i(x)y^{m_{0i}}y'^{m_{1i}}\ldots y^{(p)m_{pi}},$$
$$\psi=\sum_{i=1}^{i=t}\psi_i(x)y^{n_{0i}}y'^{n_{1i}}\ldots y^{(q)n_{qi}},$$

у околини $x=a$ (према ономе што је изнето у Првој глави и када се са $\tilde{\omega}'$ обележи теме $\tilde{\omega}$ десно од ψ) биће

$$\varphi=(x-a)^{-S_{\tilde{\omega},\lambda}}\left[\Omega_{\tilde{\omega}}(x)+\sum_{-(\tilde{\omega})}(x-a)^{S_{\tilde{\omega},\lambda}-S_{i,\lambda}}\,\Omega_i(x)\right],$$
$$\psi=(x-a)^{-S'_{\tilde{\omega}',\lambda}}\left[\Omega'_{\tilde{\omega}'}(x)+\sum_{-(\tilde{\omega}')}(x-a)^{S'_{\tilde{\omega}',\lambda}-S'_{i,\lambda}}\,\Omega'_i(x)\right].$$

Када x тежи ка a, тада је (погледати Прву главу)

$$\begin{aligned}
&\lim\Omega_{\tilde{\omega}}(x)=A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}(a)\chi(a)^{M_{\tilde{\omega}}},\\
&\lim\Omega'_{\tilde{\omega}'}(x)=A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}(a)\chi(a)^{M'_{\tilde{\omega}'}},\\
&\lim\Omega_{\tilde{\omega}}(x)=0 \quad (i=1,2,\ldots,s,\ \text{сем}\ \ i=\tilde{\omega}),\\
&\lim\Omega'_{\tilde{\omega}}(x)=0 \quad (i=1,2,\ldots,t,\ \text{сем}\ \ i=\tilde{\omega}').
\end{aligned}$$

Разликујмо сада три следећа случаја:

1. **случај**: *Теме $\tilde{\omega}$ је, у односу на $\tilde{\omega}'$, у квадрату* (1) *или на правама које га ограничавају.* – Тада је $S_{\tilde{\omega},\lambda}>S'_{\tilde{\omega}',\lambda}$ за све негативне правце λ; према томе, како једначина $A_{\tilde{\omega}}=0$ нема негативних корена λ, ако $x=a$ није корен од $\varphi_{\tilde{\omega}}(a)=0$, однос $\dfrac{\varphi}{\psi}$ се повећава неограничено када x те-

жи ка a. Овај однос може, дакле, да тежи граници λ само ако се пол a од y поклапа са кореном од $\varphi_{\tilde{\omega}}(a) = 0$: *број таквих полова је, дакле, ограничен.*

2. **случај**: *Теме* $\tilde{\omega}$ *је, у односу на* $\tilde{\omega}'$, *у квадрату* (3) *или на правама које га ограничавају.* – Тада је $S_{\tilde{\omega},\lambda} < S'_{\tilde{\omega}',\lambda}$ за све негативне правце λ.

Пошто једначина $A'_{\tilde{\omega}} = 0$ нема ниједан негативан корен λ, однос $\dfrac{\varphi}{\psi}$ не може тежити граници α када x тежи једном полу a од y, сем ако се a поклопи са једним кореном од $\psi_{\tilde{\omega}'}(a) = 0$; *број таквих полова је, дакле, исто ограничен.*

3. **случај**: Врхови $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ се поклапају. Тада је $M_{\tilde{\omega}} = M'_{\tilde{\omega}'}, N_{\tilde{\omega}} = N'_{\tilde{\omega}'}$ и, према томе, $S_{\tilde{\omega},\lambda} = S_{\tilde{\omega}',\lambda}$ ($S'_{\tilde{\omega}',\lambda}$ прим. прев.) за било које λ; дакле

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}(a)}{A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}(a)}.$$

Ова граница треба да је једнака корену α од $\theta(\alpha) = 0$, дакле, a треба да је корен алгебарске једначине

$$A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}(a) - \alpha A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}(a) \equiv 0, \tag{6}$$

што показује да је *број вредности за* а *ограничен.* Једини случај када ово може бити нетачно је када једначина (6), пошто се $A_{\tilde{\omega}}$ и $A'_{\tilde{\omega}'}$ смени изразима по λ, има корен λ_1 који не зависи од a, који је цео негативан број и када је ред λ пола a од y овај корен.

Укратко, једначина (5) може имати само коначан број корена. Према томе, ако једначина $\theta(\alpha) = 0$ има више но два корена који нису нуле, а који су међусобно различити, постојаће први интеграл

$$\frac{\varphi(x, y, y', \ldots)}{\psi(x, y, y', \ldots)} = R(x),$$

где је $R(x)$ рационални разломак по x.

Теорема је, дакле, доказана.

Ако φ, ψ и F не садрже x експлицитно, једначина (5) нема корена на коначном растојању; биће, дакле, $\dfrac{\varphi}{\psi} = \text{const.} = \dfrac{A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}}{A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}}$ први интеграл и сваки униформни интеграл система (1) који нема коначан број есенцијалних сингуларитета је заједнички интеграл за две једначине

$$F\left(x, y, y', \ldots, \frac{A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}}{A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}}, 0, 0, 0, \ldots\right) = 0,$$

$$\frac{\varphi(x,y,y',\ldots)}{\psi(x,y,y',\ldots)}=\frac{A_{\tilde{\omega}}\varphi_{\tilde{\omega}}}{A'_{\tilde{\omega}'}\psi_{\tilde{\omega}'}}.$$

Може се још приметити, у овом последњем случају, да ако се темена $\tilde{\omega}$, и $\tilde{\omega}'$ не поклапају, *сваки мероморфни интеграл од* (1) *је холоморфан у целој равни*. Ово садржи чињеницу да, ако је разлика $S_{\tilde{\omega},\lambda}-S_{\tilde{\omega}',\lambda}$ ($S'_{\tilde{\omega}',\lambda}$ прим. прев.) различита од нуле, однос $\frac{\varphi}{\psi}$, када x тежи једном полу a од y, и сам тежи или ка нули или ка бесконачности, а никада ка коначној граници различитој од нуле. Како је $\frac{\varphi}{\psi}=C$ први интеграл где је C константа коначне вредности и различита од нуле, y не може имати полова.

Претходни принципи обухватају велики број резултата које ми је немогуће овде да изнесем. Додаћу само да је лако, на основу примедаба у почетку прве главе, да се оформе општи случајеви на које се могу применити претходне теореме.

Видео и одобрио
Париз, 21. мај 1894.
Декан Факултета наука
Г. Дарбу (G. Darboux)

Видео и одобрио за штампу
Париз, 21. мај 1894.
Проректор Париске академије
Греар (Gréard)

ДРУГА ТЕЗА*

ЗАДАТАК КОЈИ ЈЕ ДАО ФАКУЛТЕТ

Савремени радови о принципу најмањег дејства

Видео и одобрио
Париз, 21. мај 1894.
Декан Факултета наука
Г. Дарбу

Видео и одобрио за штампу
Париз, 21. мај 1894.
Проректор Париске академије
Греар

---

* *Према пропозицијама Faculté des Sciences у Паризу, при одбрани докторске дисертације кандидат је био дужан да изложи и своје познавање и виђење дела неке научне области коју задаје Факултет. Обе тезе (Première thèse i Seconde thèse) Испитна комисија оцењује. Михаило Петровић је добио највишу могућу оцену – toutes boules blanches (све беле кугле)* (пр. Д. Т.).

N° D'ORDRE

823.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. MICHEL PETROWITCH,

Élève de l'École Normale supérieure,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

1re THÈSE. — SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1894 devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
PICARD, PAINLEVÉ, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

21022 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

MESSIEURS J. TANNERY ET P. PAINLEVÉ.

Hommage reconnaissant.

M. PETROWITCH.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, je traite quelques questions concernant l'étude directe des zéros, des infinis, des maxima, des minima, etc., des intégrales des équations différentielles algébriques, et j'applique les résultats trouvés à l'étude des intégrales en me plaçant au point de vue de la théorie générale des fonctions.

Lorsque dans l'intégrale générale $y(x, C_1, \ldots, C_p)$ d'une équation différentielle d'ordre p, on fait varier les constantes d'intégration $C_1, \ldots, C_p$, les valeurs de x qui annulent cette intégrale, celles qui la rendent infinie, celles qui la rendent maxima ou minima, etc., *varient généralement avec les constantes d'intégration*. D'une manière générale, lorsqu'on fait varier une constante quelconque C_i figurant dans l'expression de l'intégrale générale, les valeurs $x = x_0$ qui annulent une combinaison donnée $\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ de la variable indépendante x, de l'intégrale y et de plusieurs de ses dérivées, varieront aussi. A une courbe donnée quelconque Γ_i dans le plan de la constante C_i correspondent une ou plusieurs courbes Δ_i dans le plan des x_0, de telle sorte que, si la constante C_i décrit la courbe Γ_i, une valeur x_0 décrira l'une des courbes Δ_i.

On peut se proposer de chercher les conditions pour que ces courbes Δ_i se réduisent à des points isolés, c'est-à-dire les conditions pour que les valeurs x_0 ne varient pas avec les constantes d'intégration, et dans ce cas les calculer toutes.

Ce problème, une fois la combinaison Ψ donnée, se ramène à la recherche des *conditions pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale d'une équation differentielle ne varient pas avec les constantes d'intégration*, et au calcul direct des zéros ou des infinis de cette intégrale générale, problèmes déjà suffisamment intéressants par eux-mêmes. MM. Fuchs, Poincaré, Picard et Painlevé se sont occupés de problèmes analogues concernant les points critiques algébriques et les singularités transcendantes de l'intégrale générale. Si le fait de la fixité des singularités est d'une importance capitale au point de vue de la théorie des fonctions, il n'en est pas moins vrai que le fait de la fixité des valeurs désignées par x_0, joint à celui de la fixité des singularités transcendantes, peut avoir une grande importance dans les applications des équations différentielles. Dans ces applications, en effet, certaines particularités telles que les maxima, les minima, les zéros, les asymptotes de la courbe qui représente un phénomène physique ou mécanique, sont souvent ce qu'il importe le plus de connaître.

Je donne la solution complète du problème dans le cas des équations algébriques du premier ordre. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale ne varient pas avec la constante d'intégration, sont très simples, et il est toujours facile de vérifier si elles sont remplies pour une équation donnée. Si les zéros (ou les infinis) sont fixes, j'indique le moyen de les calculer tous, et les méthodes de Briot et Bouquet permettent alors de trouver leurs ordres dans le cas où ces ordres existent et d'étudier l'intégrale dans leur voisinage. S'ils sont mobiles, je donne le moyen de trouver leurs ordres, qui sont toujours des nombres commensurables. Ce calcul se fait graphiquement, d'une manière très commode, au moyen d'un certain polygone dont la construction n'exige que la connaissance des exposants de y et y' dans le premier membre de l'équation, mis sous la forme d'un polynome en y et y'. La considération de ce polygone s'introduit d'une façon naturelle dans cette étude, comme on peut s'en rendre compte par les théorèmes suivants :

Pour que l'intégrale ait des zéros mobiles d'ordre λ, *il faut et il suffit que ce polygone ait un côté de coefficient angulaire* λ; *pour qu'elle ait des infinis mobiles d'ordre* λ, *il faut et il suffit que le polygone ait un côté de coefficient angulaire* $-\lambda$.

Dans le cas des équations d'ordre supérieur, il m'a été impossible de donner une solution aussi complète du problème. Néanmoins, je donne des conditions *suffisantes* pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale soient fixes, en supposant les singularités transcendantes des intégrales envisagées fixes; les théorèmes ainsi énoncés trouvent, par exemple, leur application dans l'étude des intégrales méromorphes de l'équation, pour lesquelles les difficultés relatives aux singularités transcendantes ne se présenteront pas. Les *conditions suffisantes* ainsi trouvées sont plus compliquées que dans le cas des équations du premier ordre, mais il est toujours facile de vérifier sur l'équation différentielle elle-même si elles sont remplies ou non. Cette vérification se réduit à la construction d'un polygone analogue à celui du cas des équations du premier ordre et à la recherche des racines d'une équation algébrique (dépendant de l'équation différentielle donnée), compris dans un intervalle réel donné ou dans une bande limitée par deux droites dans le plan des imaginaires. Les coefficients angulaires des côtés du polygone et certaines racines de cette équation algébrique représentent les seuls ordres possibles des zéros et des infinis mobiles de l'intégrale [1]. Ces ordres peuvent être invariables (commensurables ou incommensurables), ou même imaginaires, ou dépendre des constantes d'intégration; j'indique des conditions suffisantes pour qu'ils soient tous invariables, comme dans le cas du premier ordre.

Les applications que l'on peut faire des résultats ainsi obtenus sont nombreuses et variées. J'en donne quelques-unes dans ce travail.

Le travail est partagé en deux Parties, la première concernant les

---

(1) Mais on ne sait pas alors en général s'il n'existe pas des points x mobiles où y s'annule, $\frac{dy}{dx}$ étant indéterminée.

équations du premier ordre et la seconde les équations d'ordre supérieur.

Dans le premier Chapitre de la première Partie, j'établis les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale soient indépendants de la constante d'intégration, et, dans le cas où ils sont mobiles, je donne le moyen de calculer leurs ordres.

Dans le second Chapitre, j'expose quelques applications des principes précédents.

En premier lieu, viennent quelques applications des théorèmes du premier Chapitre aux singularités de l'intégrale générale. Les singularités transcendantes de l'intégrale ne varient jamais avec la constante d'intégration, d'après un théorème de M. Painlevé. M. Fuchs a donné les conditions pour qu'il en soit de même des points critiques algébriques, et il suffit de modifier légèrement les conditions de M. Fuchs pour avoir celles de la fixité de toutes les singularités possibles, y compris les pôles. Lorsque ces conditions sont remplies, l'équation s'intègre par des opérations algébriques ou par deux quadratures au plus.

J'applique ces conditions à certains types généraux d'équations, en cherchant toutes les équations appartenant à ces types, dont les intégrales ont toutes leurs singularités fixes.

Les résultats du premier Chapitre donnent aussi lieu à quelques remarques relatives aux périodes polaires de l'intégrale de l'équation $F(y, y', y'') = 0$, quand elle est définie par l'inversion d'une intégrale abélienne.

Ce second Chapitre se termine par une application à l'étude des intégrales particulières uniformes; je cite notamment des classes étendues d'équations où toute intégrale uniforme doit être une fonction rationnelle. Dans les cas où il y a des intégrales uniformes transcendantes, je détermine la limite supérieure du nombre de telles intégrales *distinctes*, et je signale les relations algébriques qui existent entre deux ou trois quelconques de ces intégrales. Le Chapitre se termine par une remarque relative aux résidus des intégrales correspondant aux pôles simples mobiles.

Dans la seconde Partie, ayant pour objet l'étude des équations d'ordre supérieur, je donne en premier lieu les conditions suffisantes (en supposant les singularités transcendantes des intégrales considérées fixes), pour que les zéros ou les infinis des intégrales soient fixes. Dans le cas où ces conditions sont remplies, j'indique le moyen de calculer ces zéros ou ces infinis. Dans le cas où ils sont mobiles, je détermine leurs ordres possibles.

Je donne en second lieu (dans le second Chapitre de cette Partie) quelques applications à l'étude des intégrales uniformes.

Lorsque le polygone correspondant à l'équation remplit certaines conditions, l'étude des intégrales uniformes se réduit à celle des intégrales holomorphes d'une autre équation. Je signale une généralisation d'une propriété, indiquée par M. Picard, des intégrales méromorphes des équations algébriques du second ordre, où x ne figure pas explicitement. Cette propriété consiste en la possibilité de mettre l'intégrale sous la forme du quotient de deux fonctions entières, satisfaisant à des équations différentielles connues.

Mais l'application la plus importante est la suivante : on peut dans des cas étendus trouver des *intégrales premières relatives aux intégrales uniformes* de l'équation. J'appelle ainsi une fonction de x, de y et de quelques-unes de ses dérivées, qui se réduit à une constante ou à une fraction rationnelle en x, lorsqu'on y remplace y par une intégrale *uniforme* de l'équation différentielle donnée. La connaissance de telles intégrales premières simplifie la recherche des intégrales uniformes, en la ramenant à la considération d'équations d'un ordre moins élevé. Ce fait permet, dans des cas étendus, de reconnaître si l'équation différentielle admet ou non des intégrales uniformes, et de les calculer toutes dans le cas où elles existent. J'ai indiqué le moyen de construire *a priori* des types d'équations où l'on connaîtra ces intégrales premières, et où la détermination de toutes les intégrales uniformes est possible.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE I.

SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

1. Soit

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i}$$

un polynome en y et en $y' = \dfrac{dy}{dx}$, où les m_i et n_i sont des entiers positifs tels qu'on n'ait pas à la fois $m_i = m_j$, $n_i = n_j$ pour $i \neq j$, et où les φ_i sont des fonctions quelconques de x.

Formons le double tableau de $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i,$$

et traçons dans le plan deux axes : sur l'un, nous compterons les M_i et sur l'autre les N_i, et marquons les s points (M_i, N_i) en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice i. Soit (M_α, N_α) le point le plus éloigné de l'axe ON; s'il y en a plusieurs situés à la même distance de ON, on envisagera celui d'entre eux qui est le plus éloigné de l'axe OM. Soit de même (M_β, N_β) le point le plus rapproché de ON; nous ferons la même convention que pour le point (M_α, N_α) dans le cas où il y aurait plusieurs points sur une même parallèle à ON passant par le point (M_β, N_β).

Par le point (M_α, N_α) faisons passer une demi-droite parallèle à ON et de même sens. Faisons-la tourner autour de (M_α, N_α) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, de droite à gauche, jusqu'à ce qu'elle vienne rencontrer un point quelconque $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et arrêtons-la alors. Soit $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ le point où l'on s'est arrêté; s'il y en avait plusieurs sur une même droite, on prendra le plus éloigné de (M_α, N_α). Joignons les points (M_α, N_α) et $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ par une portion de droite, prolongeons cette droite indéfiniment dans le sens de (M_α, N_α) vers $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et faisons tourner ce prolongement autour de $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ jusqu'au moment où il vient rencontrer un nouveau point $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$; joignons les deux points $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$ par une portion de droite et répétons l'opération précédente jusqu'à ce qu'on rencontre le point (M_β, N_β), ce qui arrivera nécessairement. On aura formé alors une ligne polygonale convexe partant de (M_α, N_α) et aboutissant à (M_β, N_β); en la fermant par deux parallèles à ON menées par les sommets (M_α, N_α) et (M_β, N_β), et la portion de OM comprise entre ces deux parallèles, on aura un polygone, que j'appellerai, pour abréger le langage, *le polygone* Π *de* F.

Par la manière même dont il a été construit, ce polygone jouira des propriétés suivantes :

1° Si par un point quelconque parmi les points (M_i, N_i) on mène une parallèle à un des côtés du polygone, ne passant pas par le point (M_i, N_i), l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue est toujours plus petite que l'ordonnée à l'origine du côté considéré. De plus, parmi toutes les droites qu'on peut tracer en joignant deux à deux les points (M_i, N_i), les côtés du polygone sont les seules droites jouissant de cette propriété que, si par un quelconque des points (M_i, N_i) on leur mène des parallèles, l'ordonnée à l'origine de chacune de ces parallèles est plus petite que celle du côté;

2° Si par un point quelconque (M_i, N_i) qui ne soit pas un sommet du polygone, on mène une droite D de direction quelconque, il existe toujours au moins un sommet du polygone tel que, si par ce sommet on mène une parallèle Δ à D, l'ordonnée à l'origine de la droite Δ soit plus grande que celle de D. De plus, les sommets du polygone sont les seuls points (M_i, N_i) jouissant de cette propriété.

Faisons, pour abréger le langage, les conventions suivantes :

a. Le point (M_i, N_i) sera désigné par (i);

b. La droite joignant deux points (i) et (j) sera désignée par (i, j);

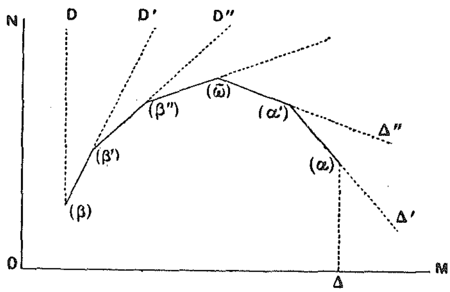
c. L'ordonnée à l'origine de la droite passant par le point (i) et ayant le coefficient angulaire λ sera désignée par $S_{i,\lambda}$;

d. Les sommets (α) et (β) seront appelés *sommets extrêmes*, les autres *sommets intermédiaires;*

e. Le sommet le plus élevé du polygone sera appelé *sommet* ϖ; s'il y en a deux sur une même parallèle à OM, on distinguera les sommets ϖ *en droit* et *gauche;*

f. Enfin, j'appellerai *domaine* d'un point (M_i, N_i) (*fig.* 1) le plus grand intervalle (λ_1, λ_2) tel que, si λ varie dans cet intervalle, la droite

Fig. 1.



de coefficient angulaire λ et passant par le point (M_i, N_i) a son ordonnée à l'origine constamment plus grande que celle d'une droite ayant la même direction et passant par l'un quelconque des autres points (M_i, N_i).

D'après les propriétés du polygone, le domaine d'un point (M_i, N_i), autre qu'un sommet, est nul. Au contraire, on voit facilement que :

1° Le domaine du sommet (β), le plus rapproché de OM, est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_\beta - N_{\beta'}}{M_\beta - M_{\beta'}} \qquad \text{à} \qquad \lambda = +\infty.$$

2° Le domaine du sommet (α) le plus éloigné de OM est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_\alpha - N_{\alpha'}}{M_\alpha - M_{\alpha'}} \qquad \text{à} \qquad \lambda = -\infty.$$

3° Le domaine d'un sommet intermédiaire (i), compris entre les sommets (i') et (i'') est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_i - N_{i'}}{M_i - M_{i'}} \qquad \text{à} \qquad \lambda = \frac{N_i - N_{i''}}{M_i - M_{i''}}.$$

Sur la figure, le domaine du sommet (β) peut être représenté par l'angle $D\beta D'$, celui du sommet (β') par $D'\beta' D''$, ..., enfin celui du sommet (α) par l'angle $\Delta\alpha\Delta'$.

Je dirai qu'un sommet est *à domaine positif* ou *négatif*, suivant que toutes les valeurs de λ comprises dans son domaine sont positives ou négatives. Tous les sommets à gauche du sommet ϖ gauche sont à domaine positif; tous ceux à droite du sommet ϖ droit sont à domaine négatif. Si les deux sommets ϖ coïncident, un tel sommet ϖ a une partie de son domaine positive et une autre négative; c'est le seul cas où le domaine d'un sommet peut être partagé en deux parties de signes différents. Enfin, si le polygone n'a qu'un seul sommet (ce qui arrive quand il se réduit à une parallèle à ON), ce sera le sommet ϖ unique, et son domaine est l'intervalle de $\lambda = +\infty$ à $\lambda = -\infty$.

La construction du polygone relatif à un polynome F donné se fait très facilement au moyen d'un papier quadrillé. Il est facile également de trouver la forme du polynome F correspondant à un système de points (M_i, N_i) donné; il faut seulement, pour que ceci ait du sens, que le système (M_i, N_i) soit tout entier compris dans l'angle formé par la partie positive de OM et la partie de la bissectrice de l'angle NOM qui est comprise dans cet angle.

Tout polynome de degré μ en y' a son polygone situé tout entier dans la bande comprise entre OM et la parallèle à OM située à la distance μ de OM; il est situé en outre dans l'angle formé par la bissectrice de l'angle NOM et l'axe OM, et il y a un sommet au moins sur la parallèle μ à OM. Inversement : à chaque système (M_i, N_i) compris dans l'angle précédent, situé tout entier entre OM et une parallèle à OM à la distance μ de OM, et ayant un sommet sur cette parallèle, correspond un polynome en y et y', de degré μ en y'.

Le polygone d'un polynome F de degré o en y' se réduit à une portion de l'axe OM.

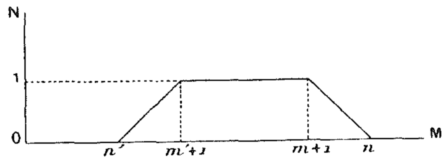
Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux polynomes en y, les plus grands exposants de y étant m et n, et les plus petits m' et n', la forme générale du polygone de

$$F = P(x, y)y' + Q(x, y)$$

est celle de la *fig.* 2. Pour le polynome

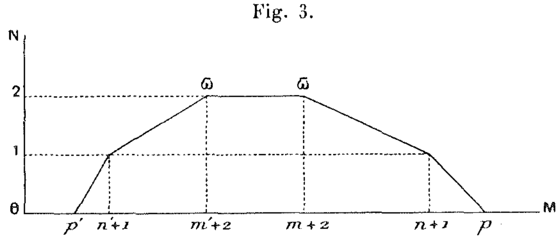
$$F = P(x, y)y'^2 + Q(x, y)y' + R(x, y)$$

Fig. 2.



où le plus grand exposant de R en y est p et le plus petit p', la forme générale du polygone est celle de la *fig.* 3, etc.

Fig. 3.



J'ajoute enfin les deux remarques suivantes, dont j'aurai à faire usage dans la suite.

1° Pour que le polygone Π_P de $P(x, y, y')$ soit en même temps le polygone de $P(x, y, y') + Q(x, y, y')$, il faut et il suffit que le polygone Π_Q de Q n'ait aucun sommet en dehors du polynôme Π_P. Ainsi, lorsque Q ne contient pas y', la condition se réduit à ce que le plus grand et le plus petit exposant de Q en y soient compris dans l'intervalle des abscisses des deux sommets extrêmes de Π_P.

2° En posant $y = \frac{1}{z}$ dans

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i},$$

ce polynome deviendra

$$\Phi(x, z, z') = \frac{1}{z^{\delta}} \Psi(x, z, z'),$$

où δ est la plus grande valeur de la somme $M_i + N_i$ relative à F, et où Ψ est un polynome en z et z' de la forme

$$\Psi(x, z, z') = \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{\delta-(m_i+2n_i)} z'^{n_i}.$$

Chaque point (M'_i, N'_i) relatif à Ψ est symétrique du point (M_i, N_i) correspondant de F par rapport à la droite $M = \delta$, car

$$M'_i = [\delta - (m_i + 2n_i)] + n_i = \delta - M_i, \qquad N'_i = n_i = N_i;$$

par conséquent *le polygone* Π_Ψ *de* Ψ *est symétrique du polygone* Π_F *de* F *par rapport à la droite* $M = \delta$.

2. Ceci posé, envisageons l'équation différentielle

$$(1) \qquad F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0;$$

et soit $x = a$ une valeur de x telle que, y étant l'intégrale de (1) et λ une constante finie et différente de zéro, le rapport

$$\frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$$

et sa dérivée première par rapport à x tendent vers des limites finies et déterminées, lorsque x tend vers a. Il en sera ainsi toutes les fois que a est une valeur qui annule ou rend infinie l'intégrale y, pourvu que cette valeur ne coïncide pas avec une des singularités transcendantes de l'intégrale, singularités qui sont fixes et connues à l'avance. En posant

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

d'où

$$y' = \lambda(x-a)^{\lambda-1} f(x) + (x-a)^{\lambda} f'(x),$$

le terme général de F deviendra

$$\varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}[\lambda^{n_i} f^{m_i+n_i}(x)+\theta_i(x)],$$

où $\theta_i(x)$ est un polynome en $f(x)$ et $(x-a)f'(x)$ à coefficients constants, mais dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de $f(x)$. On aura donc

$$F=\sum_{i=1}^{i=s}\varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}[\lambda^{n_i} f^{m_i+n_i}(x)+\theta_i(x)].$$

Envisageons dans cette somme l'ensemble T de termes pour lesquels l'exposant $\lambda(m_i+n_i)-n_i$ de la puissance de $(x-a)$ mise en facteur est le plus faible. Suivant les valeurs des m_i, n_i, λ, l'ensemble T sera composé d'un seul terme, de deux ou de plusieurs termes, et je vais chercher les conditions nécessaires et suffisantes correspondant à ces divers cas.

En général, pour que les termes d'indices i', i'', i''', ... fassent partie de T, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément :

$$(1)\qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'}=\lambda(m_{i''}+n_{i''})-n_{i''}=\ldots,$$

$$(2)\qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'}<\lambda(m_i+n_i)-n_i;$$

lorsqu'on attribue à l'indice i dans le second membre toutes les valeurs entières de 1 à s, autres que i', i'', i''', ...

La condition (1) peut s'écrire

$$(3)\qquad \lambda=\frac{N_{i'}-N_{i''}}{M_{i'}-M_{i''}}=\frac{N_{i''}-N_{i'''}}{M_{i''}-M_{i'''}}=\ldots.$$

On voit donc que λ doit être égal au coefficient angulaire de la droite (i', i''), et que les points correspondant aux divers termes de T doivent être tous sur cette droite.

D'autre part, la quantité $\lambda M_i - N_i$, lorsqu'on y remplace λ par la valeur (3), représente l'ordonnée à l'origine, changée de signe, de la droite passant par le point (i) et de coefficient angulaire λ, ordonnée que nous avons désignée par $S_{i,\lambda}$.

Par conséquent, pour que les termes d'indice i', i'', i''' fassent partie de T, il faut et il suffit :

1° Que les points d'indice i', i'', i''', ... soient sur une même droite, et que λ soit égal au coefficient angulaire de cette droite ;

2° Que $S_{i',\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les indices i de 1 à s autres que i', i'', i''', ..., c'est-à-dire que l'ordonnée à l'origine de la droite (i', i'') soit plus grande que celle d'une quelconque des droites parallèles à (i', i'') et passant par les points (i) non situés sur la droite (i', i'').

Pour que les termes correspondant aux deux points (i') et (i'') fassent partie de T, il faut que le coefficient angulaire λ de la droite (i', i'') ait pour valeur la valeur tirée de la relation (3). Réciproquement, λ étant convenablement choisie, quels que soient les deux points (i'), (i''), on peut toujours satisfaire à la condition (1), pourvu que ces points ne soient pas situés sur une même droite parallèle à OM et ON, car on a supposé la valeur de λ finie et différente de zéro.

Il reste encore à satisfaire à la condition (2). Or, d'après les propriétés du polygone, pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que la droite (i', i'') soit un côté du polygone non parallèle aux axes. On voit donc que, pour que T soit composé d'au moins deux termes, il faut et il suffit que λ soit égal au coefficient angulaire d'un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; les indices des termes qui figurent dans T sont ceux des sommets du polygone qui se trouvent sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à (3).

On peut maintenant utiliser ce résultat pour donner à T certaines formes qui nous seront utiles dans la suite.

A. Supposons que dans le polygone de F il n'y ait aucun côté non parallèle aux axes, ou, s'il y en a, que le nombre donné λ ne soit égal à aucun des coefficients angulaires de ces côtés. L'ensemble T est alors composé d'un terme unique, et l'indice de ce terme est égal à l'indice du sommet dont le domaine comprend λ.

Soit (h) ce sommet et posons, pour abréger,

$$\varphi_i(x)[\lambda^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \theta_i(x)] = \Omega_i(x);$$

on peut alors écrire F sous la forme

$$\text{I.} \qquad F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}}\left[\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)\right],$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les points (i) autres que le point (h). Tous les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ figurant dans le second membre sont positifs, car, par suite de définition même du terme d'indice h, on a $S_{h,\lambda} < S_{i,\lambda}$ pour tous les points (i) autres que (h).

B. Supposons que le polygone ait des côtés non parallèles aux axes, et que λ soit égal au coefficient angulaire d'un de ces côtés. T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices des points situés sur le côté de coefficient angulaire λ.

Convenons de représenter par :

$\sum\limits_{(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (i) situés sur la droite (i,j);

$\sum\limits_{-(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (i) non situés sur la droite (i,j).

Soit (γ, δ) un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; on a, lorsque λ est égal au coefficient angulaire de ce côté,

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x),$$

et F pourra s'écrire

II. $$F = (x-a)^{-S_{\gamma\lambda}} \left[\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma\lambda} - S_{i\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

où tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs.

Mais, quelle que soit celle des formes I et II que F prendra, on doit avoir identiquement, dans le voisinage de $x = a$, $F = 0$, quelle que soit la valeur de a; par conséquent, dans ce voisinage, on aura identiquement, soit

$$\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h\lambda} - S_{i\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

soit

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{h\lambda} - S_{i\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

suivant que, dans le voisinage de $x = a$, F prend la forme I ou II, c'est-à-dire suivant que la condition remplie est A ou B.

3. Supposons maintenant que x tende vers a; la fonction $f(x)$, qui est le rapport de y à $(x-a)^\lambda$, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, tendront vers des limites finies et déterminées, et comme tous les $\theta_i(x)$ sont des polynomes en $f(x)$ et en $(x-a)f'(x)$, dans lesquels les termes dépendant uniquement de $f(x)$ manquent, on aura, pour $x=a$,

$$\lim \theta_i(x) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Donc, pour toutes les valeurs de a, sauf peut-être pour certaines valeurs a' particulières et reconnaissables sur l'équation différentielle elle-même, pour lesquelles les fonctions $\varphi_i(x)$ deviennent infinies, on aura

$$\lim \Omega_i(x) = \lambda^{n_i}\varphi_i(a)\rho \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, s),$$

où ρ est la limite de $f(x)$ pour $x=a$.

En tenant compte de ce que les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, on voit, par conséquent, que, pour toute valeur de a ne coïncidant avec aucune des valeurs particulières a' :

A. Si le polygone n'a aucun côté non parallèle aux axes, ou (dans le cas contraire) si λ n'est égal à aucun des coefficients angulaires des côtés du polygone, on aura

$$\lambda^{n_h}\varphi_h(a)\rho^{M_h} = 0,$$

et, comme ρ est différent de zéro, a doit être racine de $\varphi_h(a)=0$, ce qui montre que a ne dépend pas de la constante d'intégration. Quant à l'indice h, c'est l'indice du sommet dans le domaine duquel se trouve λ;

B. Si le polygone a des côtés non parallèles aux axes, et si λ est égal au coefficient angulaire d'un tel côté (γ, δ), on aura

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \lambda^{n_i}\varphi_i(a)\rho^{M_i} = 0,$$

où la sommation s'étend à tous les points (i) sur le côté (γ, δ). Quelle que soit la valeur attribuée à a, cette équation, que j'appellerai l'*équation en* ρ relative au côté (γ, δ), a au moins une racine ρ finie et différente de zéro, car tous les M_i figurant dans la somme $\sum_{(\gamma,\delta)}$ sont distincts, et la valeur a peut dépendre de la constante d'intégration.

On peut en déduire les conséquences suivantes :

1° Toutes les fois que l'intégrale générale a des infinis mobiles, le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et l'ordre d'un quelconque de ces infinis est égal à l'un de ces coefficients angulaires.

2° Toutes les fois que l'intégrale générale a des zéros mobiles, le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire positif, et l'ordre d'un quelconque de ces zéros est égal à l'un de ces coefficients.

Il s'ensuit d'abord que l'ordre d'un infini ou d'un zéro mobile est toujours commensurable, ce qui était à prévoir d'après le théorème de M. Painlevé sur la fixité des singularités transcendantes de l'intégrale.

En second lieu, on en conclut que :

3° Si à droite du sommet ϖ droit le polygone n'a aucun sommet, les infinis de l'intégrale sont fixes et doivent être en même temps, soit singularités transcendantes de l'intégrale, soit zéros de la fonction $\varphi_h(x)$ (h désignant l'indice du sommet ϖ droit), soit enfin infinis d'une fonction φ_i autre que φ_h.

4° Si à gauche du sommet ϖ gauche le polygone n'a aucun sommet, les zéros de l'intégrale sont fixes et se trouvent parmi les valeurs analogues à celles du cas précédent.

4. On a ainsi des conditions suffisantes pour la fixité des infinis et des zéros de l'intégrale générale. Mais je dis que les conditions sont aussi nécessaires, c'est-à-dire, si à droite du sommet ϖ droit il y a d'autres sommets, l'intégrale générale a certainement des infinis mobiles, et si à gauche du sommet ϖ gauche il y a des sommets, l'intégrale a des zéros mobiles.

Démontrons-le, par exemple, pour les infinis. Supposons qu'il y ait à droite du sommet ϖ droit d'autres sommets; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si l'on écrit l'équation différentielle sous la forme

$$\sum_{k=0}^{k=\mu} f_k(x,y)\,y'^{\,\mu-k} = 0, \tag{1}$$

où les f_k sont des polynomes en y, il y ait au moins un des polynomes

f_k tel que, si l'on désigne par ν_k le degré de f_k en y, on ait

$$\nu_k - \nu_0 > k.$$

En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

les points (M_i, N_i) sont définis par les coordonnées

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i.$$

Le sommet ϖ droit, ayant l'ordonnée maxima μ, provient du terme du polynome $f_0(x,y)\,y'^{\mu}$ ayant le plus grand exposant en y; il provient donc du terme en $y^{\nu_0}y'^{\mu}$, ν_0 étant le degré de f_0 en y.

Pour qu'il y ait des sommets à droite de ce sommet ϖ, il faut et il suffit qu'au moins une droite Δ joignant ce sommet aux autres points (i) ait son coefficient angulaire négatif; cette droite ne peut passer par aucun des points (i) provenant des termes du polynome $f_0(x,y)\,y'^{\mu}$, car tous ces points sont sur une même droite parallèle à OM et passant par le sommet ϖ droit. Supposons donc qu'elle passe par un des points provenant des termes du polynome $f_k(x,y)\,y'^{\mu-k}$. Si m est l'exposant de y dans le terme considéré de ce polynome, le coefficient angulaire de la droite Δ est

$$\frac{(\nu_0 - \mu) - (m - \mu + k)}{\mu - (\mu + k)} = \frac{\nu_0 - m + k}{k}.$$

Pour qu'il soit négatif, il faut et il suffit que $m - \nu_0 > k$, et, comme on a $m \leqq \nu_k$, il faut, *a fortiori*, que $\nu_k - \nu_0 > k$.

Cette condition est aussi suffisante pour qu'à droite du sommet ϖ droit il y ait d'autres sommets; car, par exemple, le coefficient angulaire de la droite joignant le sommet ϖ droit au point provenant du terme en $y^{\nu_k}y'^{\mu-k}$ est alors négatif.

Supposons donc que, dans le premier membre de l'équation (1), il y ait un ou plusieurs termes $f_h(x,y)\,y'^{\mu-h}$, tels que $\nu_k - \nu_0 > h$, et faisons $y = \frac{1}{z}$; l'équation deviendra

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x, z) z'^{\mu-i}}{z^{2(\mu-i)+\nu_i}} = 0,$$

où les $\varphi_i(x, z)$ sont des polynomes en z ne contenant pas z en facteur. Je dis que l'intégrale générale z de (2) s'annule pour des valeurs finies de x, et que ces valeurs varient avec la constante d'intégration.

Pour le montrer, posons $z' = \frac{z}{t}$; l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x, z)}{t^{\mu-1} z^{\mu-1+\nu_i}} = 0$$

et, en multipliant par $z^{\mu+\nu_0} t^{\mu}$,

$$(4) \qquad \varphi_0(x, z) + \sum_{i=1}^{i=\mu} \varphi_i(x, z) z^{i+\nu_0-\nu_i} t^i = 0.$$

Comme parmi les exposants $i + \nu_0 - \nu_i$ il y en a au moins un de négatif (grâce à ce fait qu'il y a au moins un indice h tel que $\nu_h - \nu_0 > h$), et comme aucune fonction φ_i ne contient z en facteur, cette équation (4), algébrique en t et en z, admet une ou plusieurs racines t s'annulant avec z. Ces racines forment un ou plusieurs systèmes circulaires, et les racines d'un même système circulaire seront, dans le voisinage de $x = x_0$, représentées par un développement de la forme

$$t = A z^{\frac{\alpha}{n}} + B z^{\frac{\alpha+1}{n}} + C z^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots,$$

où α et n sont des entiers positifs au moins égaux à l'unité; A, B, C, ... sont des fonctions de x, et A n'est pas identiquement nulle.

Envisageons l'une de ces racines. La dernière équation relative à cette racine peut s'écrire

$$\frac{1}{t} = \frac{z'}{z} = \frac{1}{A z^{\frac{\alpha}{n}} + B z^{\frac{\alpha+1}{n}} + C z^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots},$$

et, en posant $z = u^n$, elle devient

$$n\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^{\alpha-1}(\mathrm{A} + \mathrm{B}u + \mathrm{C}u^2 + \ldots)}. \tag{5}$$

Désignons par (P) l'ensemble de singularités (pôles, points critiques algébriques, points transcendants) des fonctions A, B, C, ..., singularités qui, évidemment, ne varient pas avec la constante d'intégration, et distinguons deux cas, suivant que $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.

Premier cas : $\alpha = 1$. — Alors $\frac{du}{dx}$ est holomorphe dans le voisinage de $x = x_0$, $u = 0$, et cela quelle que soit la valeur x_0, pourvu qu'elle ne coïncide avec aucune des valeurs (P). Par conséquent, l'équation (5) admet une intégrale, et une seule, holomorphe elle-même, qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $u = 0$; de plus, cette intégrale ne peut pas être identiquement nulle, car A n'est pas identiquement nulle et reste finie pour $x = x_0$. Donc l'équation (2) elle-même admet une intégrale z s'annulant pour $x = x_0$ et ne se réduisant pas identiquement à zéro. Comme x_0 est arbitraire, les zéros de z varient certainement avec la constante d'intégration, et, par suite, les infinis de y sont mobiles.

L'intégrale u s'annulant pour $x = x_0$ et étant holomorphe dans le voisinage de cette valeur, x_0 est un pôle de l'intégrale y, et, comme $x = x_0$ est un zéro simple de u $\left(\text{car } \frac{du}{dx} \text{ ne s'annule pas}\right)$, c'est un zéro d'ordre n pour z et, par suite, un pôle d'ordre n pour y.

Deuxième cas : $\alpha > 1$. — Alors $\frac{du}{dx}$ devient infinie pour $u = 0$, mais son inverse $\frac{dx}{du}$ est holomorphe dans le voisinage de $x = x_0$, $u = 0$, pourvu que x_0 ne coïncide avec aucune valeur comprise dans l'ensemble (P). Comme toutes les dérivées successives de $\frac{dx}{du}$ par rapport à x jusqu'à celle d'ordre $\alpha - 1$ inclusivement s'annulent pour $x = x_0$, $u = 0$, l'équation (5) admet une intégrale u s'annulant pour $x = x_0$ et ayant cette valeur comme zéro d'ordre $\frac{1}{\alpha}$. Par conséquent $x = x_0$

sera un infini d'ordre $\frac{n}{\alpha}$ pour y, et cet infini varie avec la constante d'intégration.

Par conséquent, pour que les infinis de l'intégrale y soient fixes, il faut que la condition

$$\nu_k - \nu_0 \leqq k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \mu)$$

soit remplie ou encore (comme on l'a vu plus haut), il faut que le polygone, relatif au premier membre de l'équation, n'ait aucun sommet à droite du sommet ϖ droit.

La condition énoncée pour la fixité des infinis est donc nécessaire; nous avons vu d'autre part qu'elle est aussi suffisante. On peut s'en rendre compte d'une autre façon de la manière suivante. Lorsque, à droite du sommet ϖ droit, il n'y a pas d'autres sommets, aucun exposant $i + \nu_i - \nu_0$ dans l'équation (4) n'est négatif, et l'équation n'admet aucune racine t s'annulant avec z. Il en résulte que $\frac{1}{t}$ est une fonction holomorphe, soit en z, soit en $u = z^{\frac{1}{n}}$ (où n est le nombre des racines t de l'équation (4) appartenant à un même système circulaire lorsque z tend vers zéro) dans le voisinage de $z = 0$ (ou $u = 0$) et de toute valeur x_0 ne coïncidant avec aucune valeur comprise dans l'ensemble (P). D'après un théorème connu, la seule intégrale z (ou u) s'annulant pour de telles valeurs x_0 est $z = 0$ ($u = 0$), c'est-à-dire $y = \infty$; l'intégrale générale y de l'équation proposée ne peut donc devenir infinie que pour certaines valeurs fixes de x, appartenant à l'ensemble (P).

On peut, d'après cela, énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Pour que les infinis de l'intégrale générale de l'équation algébrique du premier ordre* $F(x, y, y') = 0$ *ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le polygone de* F *n'ait aucun sommet à droite de son sommet* ϖ *droit.*

Si l'équation $F = 0$ est écrite sous la forme

$$\sum_{i=0}^{=\mu} f_i(x, y)\, y'^{\mu - i} = 0,$$

où les f_i sont des polynomes en y, et où le degré de f_i est ν_i, cette condition devient

$$\nu_i - \nu_0 \leqq i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \mu).$$

5. Il s'agit maintenant, après avoir reconnu que l'intégrale de $F = 0$ admet des infinis mobiles, de trouver les ordres de multiplicité de ces infinis.

Nous avons vu que, lorsqu'il y a des infinis mobiles, on a $\alpha > 0$, et que :

1° Si $\alpha = 1$, $x = x_0$ est un pôle d'ordre n de y;

2° Si $\alpha > 1$, $x = x_0$ est un infini d'ordre $\frac{n}{a}$ de y.

Par conséquent, d'une façon générale, x_0 est un infini d'ordre $\frac{1}{\tau}$ de y, τ désignant l'ordre infinitésimal de la racine t par rapport à z dans l'équation (3). Inversement, à toute valeur τ, représentant l'ordre infinitésimal d'un système circulaire de racines t de l'équation (3) par rapport à z, correspondent des infinis mobiles de y ayant $\frac{1}{\tau}$ comme ordre de multiplicité.

Cherchons donc ces valeurs τ. On peut les obtenir par la construction classique de Puiseux, appliquée à l'équation (3), mais le polygone dont nous nous sommes servi précédemment donne directement ces valeurs. En effet, si l'on met l'équation $F(x, y, y') = 0$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

et si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{1}{zt}$, ce qui revient à effectuer les changements précédents $y = \frac{1}{z}$, $z' = \frac{z}{t}$, on obtient l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{-(m_i+n_i)} t^{-n_i} = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{-M_i} t^{-N_i} \qquad = 0. \tag{6}$$

Si l'on pose

$$\alpha_i = M_\varpi - M_i, \qquad \beta_i = N_\varpi - N_i,$$

où M_ϖ, N_ϖ sont les coordonnées du sommet ϖ droit du polygone Π de F, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{\alpha_i} t^{\beta_i} = 0,$$

où α_i et β_i sont des entiers positifs.

L'équation (7), d'après sa formation, n'est autre que l'équation (3). En désignant par τ l'ordre infinitésimal de t par rapport à z, le terme général de (7) sera d'ordre infinitésimal $\alpha_i + \beta_i\tau$, et l'on aura toutes les valeurs possibles de τ en égalant $\alpha_i + \beta_i\tau$ à une autre expression analogue $\alpha_j + \beta_j\tau$, et en choisissant parmi toutes les valeurs de τ ainsi obtenues celles qui remplissent les conditions

$$\alpha_i + \beta_i\tau \geqq \alpha_j + \beta_j\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \; j = 1, 2, \ldots, s).$$

Comme l'on a

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_i - \beta_j} = \frac{M_i - M_j}{N_i - N_j},$$

les conditions précédentes font voir que les valeurs de τ sont les inverses des coefficients angulaires des côtés à coefficient angulaire négatif du polygone Π de F, changés de signe, et que réciproquement à chaque côté de Π, à coefficient angulaire négatif, correspond une valeur de τ. Par conséquent, l'ordre λ d'un infini mobile de y est égal au coefficient angulaire, changé de signe, d'un côté de Π à droite du sommet ϖ droit, et inversement : à chacun de ces côtés correspondent des infinis mobiles de y ayant le coefficient angulaire de ce côté, changé de signe, comme ordre de multiplicité.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Pour que l'intégrale générale de* $F(x, y, y') = 0$ *ait des infinis mobiles ayant un nombre donné* λ *comme ordre, il faut et il suffit que le polygone* Π *de* F *ait un côté, à droite de son sommet* ϖ *droit, de coefficient angulaire égal à* $-\lambda$.

Toutes les fois que l'ordre d'un infini de y n'est pas égal au coefficient angulaire d'un tel côté, cet infini coïncide, soit avec un point singulier transcendant de y, soit avec un des zéros ou des infinis des fonctions $\varphi_i(x)$. *Ce sera notamment un zéro de* $\varphi_h(x)$ *ou un infini des autres* $\varphi_i(x)$, *h désignant l'indice du sommet du polygone* π *dans le domaine duquel* $-\lambda$ *est compris*, comme il résulte de ce que nous avons vu au commencement de ce Chapitre. Si, en particulier, tous les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions holomorphes, x_0 est un zéro de $\varphi_h(x)$, et si $\varphi_h(x)$ est une constante, ou plus généralement une fonction ne s'annulant pour aucune valeur finie de x, l'intégrale y ne peut devenir infinie pour aucune valeur finie de x.

On en déduit aussi le théorème suivant :

Théorème III. — *Toutes les fois que l'intégrale d'une équation* $F(x, y, y') = 0$, *algébrique en* x, y, y' *a ses infinis indépendants de la constante d'intégration, ces infinis sont en nombre fini.*

Enfin, les méthodes de Briot et Bouquet permettront toujours de décider si un zéro de $\varphi_h(x)$ donné est un infini d'une seule intégrale ou un infini commun à un nombre fini ou à une infinité d'intégrales.

6. En appliquant les résultats qui précèdent à la transformée en $\frac{1}{y}$ de $F(x, y, y') = 0$ et en se rappelant que le polygone de cette transformée est symétrique, par rapport à une certaine parallèle à ON, du polygone de F, on a pour les zéros de l'intégrale y des propositions analogues aux propositions précédentes relatives à ses infinis :

Théorème IV. — *Pour que les zéros de l'intégrale de* $F(x, y, y') = 0$ *soient fixes, il faut et il suffit que le sommet* ϖ *gauche du polygone* Π *de* F *soit le sommet extrême gauche de ce polygone.*

Théorème V. — *Pour que l'intégrale ait des zéros mobiles d'un ordre donné* λ, *il faut et il suffit qu'à gauche du sommet* ϖ *gauche le polygone* Π *ait un côté de coefficient angulaire* λ.

Au théorème IV on peut donner différentes formes. Si l'on écrit, par exemple, $F = 0$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y)\, y'^{\mu-i} = 0,$$

où f_i sont des polynomes en y, *la condition nécessaire et suffisante pour la fixité des zéros de y est, qu'après avoir supprimé tous les facteurs communs aux $f_i(x, y)$, chaque f_i contienne en facteur y^h où $h \geqq i$.*

On arrive d'ailleurs facilement à ce théorème par le raisonnement direct suivant.

Pour que les zéros de y soient fixes, il faut et il suffit que toutes les valeurs de y' s'annulent pour $y = 0$ quel que soit x, et, en outre, que les développements de y' suivant les puissances de y commencent tous par un terme d'ordre au moins égal à 1.

En effet, il faut d'abord que toutes les valeurs de y' s'annulent pour $y = 0$; sinon il y aurait des intégrales coupant la droite $y = 0$ pour x quelconque.

Ceci posé, développons une des branches $y' = f(x, y)$ suivant les puissances de y, d'après la règle de Puiseux :

$$y = \mathrm{A}(x) y^{\frac{\lambda}{\mu}} + \ldots;$$

si l'on pose $z = y^{\frac{\lambda}{\mu}}$, on trouve

$$\mu z' = \mathrm{A}(x)\, z^{\lambda - \mu + 1} + \ldots.$$

Ce développement montre qu'il y a des intégrales $z(x)$ qui ne sont pas identiquement nulles et qui s'annulent pour une valeur x_0 quelconque de x, à moins que $\lambda - \mu + 1 > 0$, ou bien que $\frac{\lambda}{\mu} \geqq 1$, d'où s'ensuit immédiatement le théorème précédent.

Toutes les fois que l'ordre λ d'un zéro de y n'est pas égal au coefficient angulaire d'un côté du polygone, ce zéro coïncide soit avec un point singulier transcendant de l'intégrale, soit avec un zéro de $\varphi_h(x)$ (h désignant l'indice du sommet dans le domaine duquel est compris λ), soit enfin avec un infini des autres coefficients $\varphi_i(x)$. Il s'ensuit que, si l'intégrale d'une équation $\mathrm{F} = 0$ algébrique en x, y, y' a ses zéros indépendants de la constante d'intégration, ces zéros sont en nombre limité.

Je cite, à titre d'exemple où l'on vérifie facilement tout ce qui précède, l'équation

$$[y' + f(x) y]^m + \varphi(x) y^n = 0$$

(où m et n sont des entiers positifs), dont l'intégrale générale est

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[C + \frac{m-n}{m}\int \sqrt[m]{-\varphi(x)}\, e^{(m-n)\int f(x)\,dx}\,dx\right]^{\frac{m}{m-n}},$$

C étant la constante d'intégration.

7. Il peut arriver que l'intégrale d'une équation ait à la fois ses zéros et ses infinis fixes. D'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Pour que l'intégrale générale de* $F(x, y, y') = 0$ *ait ses zéros et ses infinis fixes à la fois, il faut et il suffit que le polygone* Π *de* F *soit un rectangle ou qu'il se réduise à une droite parallèle à* ON.

Pour que le polygone Π se réduise à une droite parallèle à ON, il faut et il suffit que l'équation soit homogène en y et y' et, par conséquent, réductible aux équations linéaires du premier ordre. Quant au cas où Π est un rectangle, j'en indiquerai quelques exemples.

Dans le cas de l'équation du premier degré

$$P(x, y)\,y' + Q(x, y) = 0$$

(se reporter à la 10 page pour la forme générale du polygone), les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polygone se réduise à un rectangle sont

$$n' \leqq m' + 1 \qquad \text{et} \qquad n \geqq m + 1;$$

la première condition est nécessaire et suffisante pour la fixité des zéros, et la seconde pour la fixité des infinis.

Pour l'équation

$$P(x, y)\,y'^2 + Q(x, y)\,y' + R(x, y) = 0,$$

les conditions pour que le polygone soit un rectangle sont les suivantes :

$$p' \leqq n' + 1 \leqq m' + 2 \qquad \text{et} \qquad p \geqq n + 1 \geqq m + 2,$$

comme on le voit d'après la forme générale du polygone de l'équation (*fig.* 3).

Je terminerai par la remarque qu'on ramène facilement aux problèmes précédents le problème de l'étude de l'intersection des courbes intégrales avec une courbe fixe donnée à l'avance, des maxima ou des minima des courbes intégrales, de leurs points d'inflexion, etc,

CHAPITRE II.

QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

ÉQUATIONS A TOUTES LES SINGULARITÉS FIXES.

1. Les singularités que peut présenter l'intégrale d'une équation algébrique du premier ordre sont :

1° Singularités algébriques (pôles et points critiques algébriques);

2° Singularités transcendantes (points critiques logarithmiques, points essentiels).

Ces dernières ne varient pas avec la constante d'intégration, tandis que les premiers varient généralement. Mais il y a des cas où toutes les singularités possibles de l'intégrale sont fixes, comme cela arrive par exemple pour l'équation linéaire; des théorèmes du Chapitre I et du théorème de M. Fuchs exprimant les conditions pour que les points critiques algébriques de l'intégrale soient fixes, on déduit facilement les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette circonstance se présente.

Pour que les points critiques soient fixes, il faut et il suffit, comme on sait, que :

1° La dérivée y' définie par l'équation différentielle donnée ne devienne infinie pour aucune valeur finie de y, et que cette condition soit aussi remplie pour la transformée en $\frac{1}{y}$ de l'équation;

2° Tout système (x_0, y_0) pour lequel deux valeurs de y' s'échangent correspond à un point ordinaire de l'intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $y = y_0$.

La première condition revient à celle-ci : l'équation différentielle étant mise sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu-i} = 0,$$

le degré de chaque polynome $f_k(x, y)$ en y ne surpasse pas $2k$.

La seconde condition peut s'exprimer sous différentes formes, par exemple sous la forme suivante, donnée par M. Poincaré :

a. Les équations

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

définissent les intégrales singulières de l'équation $F = 0$;

b. On a identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = PF + Q \frac{\partial F}{\partial y},$$

où P et Q sont des polynomes en y et y' à coefficients fonctions quelconques de x.

Il suffit d'ajouter à ces conditions celle du théorème I du Chapitre I pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les singularités de l'intégrale soient fixes. Ces conditions sont les suivantes :

A. *Le degré du polynome $f_k(x, y)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$ en y ne surpasse pas k.*

Ceci revient à dire que le sommet ϖ du polygone de F se trouve sur la bissectrice de l'angle NOM et qu'à sa droite il n'y a aucun sommet.

B. *Les conditions* (*a*) *et* (*b*) *sont remplies.*

Désignons par p le genre de $F(x, y, y') = 0$ en y, y'. M. Poincaré a montré que si l'équation $F = 0$ est à points critiques fixes :

1° Si $p = 0$, y est une fonction rationnelle [à coefficients fonctions algébriques des coefficients $\varphi_i(x)$ dans $F = 0$] de u, u étant l'intégrale générale d'une équation de Riccati à coefficients fonctions algébriques des $\varphi_i(x)$;

2° Si $p = 1$, y est une fonction rationnelle (à coefficients algébriques en φ_i) de $\lambda[\int \chi(x)\,dx + C]$, λ étant le symbole d'une fonction méromorphe doublement périodique, et $\chi(x)$ une fonction algébrique des φ_i;

3° Si $p > 1$, y est une fonction algébrique des φ_i.

Il s'ensuit que :

1° Si les conditions A et B sont remplies, on a $p \lesseqgtr 1$;

2° Si $p = 0$, l'équation de Riccati à laquelle satisfait u se réduit à une équation linéaire du premier ordre (les conditions A et B étant supposées remplies).

D'où le théorème suivant :

Toutes les fois que les conditions A *et* B *sont remplies, l'équation* $F = 0$ *s'intègre algébriquement ou par deux quadratures au plus.*

Si, par exemple, l'équation $F(x, y, y') = 0$ est algébrique en x, y, y', et les conditions algébriques remplies, l'intégrale générale y est une fonction algébrique de x et rationnelle en

$$e^{\int \varpi(x)\,dx}, \qquad \int \chi(x)\, e^{\int \varpi(x)\,dx}\,dx,$$

où $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions algébriques de x.

J'ajouterai une remarque relative à ces fonctions algébriques $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ en supposant que $F(x, y, y')$ soit un polynome irréductible en x, y, y'. Soit m le degré de ce polynome en y'. Si l'intégrale s'obtient par les deux quadratures précédentes, c'est que le genre de l'équation en y et y' est égal à zéro. Exprimons y et y' en fonction rationnelle d'un paramètre λ

$$y = R_1(x, \lambda), \qquad y' = R_2(x, \lambda),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles de λ et algébriques en x. On sait, d'après un important théorème de M. Nöther [1], que :

1° Si m est impair, on peut choisir un paramètre λ de telle sorte

[1] *Math. Annalen*, t. III.

que la représentation paramétrique précédente n'introduise aucune irrationnalité par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F, c'est-à-dire que R_1 et R_2 soient des fonctions rationnelles non seulement en λ, mais aussi en x.

2° Si m est pair, il existe toujours une représentation paramétrique n'introduisant des irrationnalités par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F autres qu'une racine carrée d'un polynome en coefficients $\varphi_i(x)$.

D'autre part, les coefficients en x dans l'équation linéaire du premier ordre à laquelle satisfait λ sont fonctions rationnelles des coefficients en x figurant dans R_1 et R_3. Par conséquent, si m est impair, les deux fonctions $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ seront des fractions rationnelles en x; si m est pair, elles sont de la forme

$$S_1(x) + S_2(x)\sqrt{P(x)},$$

où S_1 et S_2 sont des fractions rationnelles et P un polynome en x.

Il s'ensuit que, si m est impair, l'intégrale $\int \varpi(x)\,dx$ s'exprime par des fonctions algébriques et logarithmiques; si m est pair, c'est une intégrale abélienne du genre hyperelliptique.

2. Cherchons maintenant, parmi les équations appartenant à quelques types généraux d'équations, celles dont l'intégrale a toutes ses singularités fixes.

Il est d'abord évident que, parmi toutes les équations de la forme

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

l'équation linéaire est la seule jouissant de cette propriété.

Cherchons les conditions pour que l'intégrale générale de l'équation binome

$$(1) \qquad y'^m = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

ait toutes ses singularités fixes.

D'abord Q ne peut pas renfermer y, et le degré de P en y est au plus égal à m. Soit $y = \eta$ une racine de $P(x, y) = 0$, pour laquelle y' définie par (1) se ramifie. D'après les conditions de M. Fuchs, $y = \eta$ doit être une intégrale de (1), et, de plus, on doit avoir

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx},$$

en désignant par ζ la racine commune en y' aux deux équations

$$y'^m - \mathrm{P}(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y'}[y'^m - \mathrm{P}(x, y)] = 0,$$

et, cette racine commune étant $y' = 0$, on aura

$$\frac{d\eta}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire $\eta = \text{const.}$

Par conséquent, toutes les fois que le polynome $\mathrm{P}(x, y)$ renferme des facteurs de la forme $y - \eta$, où η est une fonction de x, le point $y = \eta$ (où l'on considère x comme constant) n'est pas un point de ramification de y' définie par (1). Il s'ensuit que, s'il existe de tels facteurs, chacun d'eux doit être élevé à une puissance égale à m ou à un multiple de m; mais, comme le degré de P en y ne peut pas surpasser m, s'il existe un tel facteur, il est unique, et P doit être de la forme

$$\mathrm{P}(x, y) = \chi(x)(y - \eta)^m,$$

dans quel cas l'équation (1) se réduit à l'équation linéaire

$$y' = \sqrt[m]{\chi(x)}\,(y - \eta).$$

Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut donc que P soit de la forme

$$\mathrm{P}(x, y) = \chi(x)\,\mathrm{S}(y),$$

où S est un polynome en y à coefficients constants, dont le degré ne surpasse pas m, et en posant

$$\sqrt[m]{\chi(x)}\,dx = dz,$$

l'équation (1) devient

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = \mathrm{S}(y). \tag{2}$$

Pour que les points critiques de y, considéré comme fonction de x, soient fixes, il faut et il suffit que l'intégrale générale $y(z)$ de (2) soit uniforme. Or, pour les équations binomes de la forme (2), Briot et Bouquet ont indiqué tous les types intégrables par les fonctions uniformes [1]. Parmi eux, il y a onze types intégrables par des fonctions méromorphes doublement périodiques, qu'il faut laisser de côté, car l'intégrale y qui leur correspond a des pôles variant avec la constante d'intégration, et alors les types restants sont

I. $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)^2,$$

II. $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-a)^{m+1}(y-b)^{m-1},$$

III. $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)(y-b),$$

IV. $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-a)^2(y-b)(y-c)$$

(g étant une constante) et leurs transformées obtenues en posant

$$y = \alpha + \frac{1}{u},$$

où α est une constante. Les deux premières équations, ainsi que leurs transformées, sont intégrables par des fonctions rationnelles, et les deux dernières par des fonctions simplement périodiques. Mais on voit facilement que, parmi toutes ces équations, les seules satisfaisant aux conditions du problème qui nous occupe sont :

1° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-\beta)^{m-1},$$

2° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-\beta)(y-\gamma);$$

la première est déduite de II et la seconde de IV en changeant y en $a + \frac{1}{y}$.

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 389; 1875.

On a ainsi le résultat suivant :

Parmi toutes les équations de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \mathrm{R}(x, y),$$

où R *est une fonction rationnelle en* y *et quelconque en* x, *les seules équations dont les intégrales ont toutes leurs singularités fixes sont l'équation linéaire et les deux équations suivantes :*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \chi(x)(y-a)^{m-1},$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \chi(x)(y-a)(y-b),$$

où a *et* b *sont des constantes et* $\chi(x)$ *une fonction quelconque de* x.

L'intégrale de la première équation est

$$y = a + \left[\mathrm{C} + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\chi(x)}\,dx\right]^m,$$

et celle de la seconde

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{C}e^{\int \frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}} + \frac{(a-b)^2}{4\mathrm{C}} e^{-\int \frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}}.$$

Envisageons encore l'équation

$$p(x, y)y'^2 + q(x, y)y' + s(x, y) = 0, \tag{3}$$

où p, q, s sont polynomes en y.

Pour que les points critiques de l'intégrale soient fixes, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

1° Les degrés respectifs de p, q, s en y sont au plus égaux à 0, 2, 4;

2° Le discriminant $\Delta(x,y) = q^2 - 4ps$ de (3) par rapport à y', considéré comme polynome en y, est : soit un carré parfait [et alors l'équation (3) se décompose en deux équations de Riccati], soit tel que l'équation $\Delta(x,y) = 0$ ait une racine double en y et deux autres distinctes [l'équation (3) est du genre 0], soit tel que $\Delta(x, y) = 0$ ait ses quatre racines distinctes [l'équation (3) est du genre 1].

3° Toutes les racines de $\Delta = 0$ sont des intégrales de (3).

Lorsque les pôles de y sont également fixes, les degrés respectifs de q et s sont au plus égaux à 1 et 2; le discriminant $\Delta(x,y)$ est un polynome du second degré en y et l'équation (3) est du genre 0; la condition 2° est alors toujours remplie. Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les singularités de l'intégrale soient fixes sont les suivantes :

1° Les degrés respectifs de p, q, s en y sont au plus égaux à 0, 1, 2;

2° La courbe $\Delta(x,y) = 0$ est une intégrale de (3).

Si les deux racines en y de $\Delta = 0$ sont égales, l'équation (3) est décomposable en deux équations linéaires; si ces racines sont distinctes, elle se ramène à une équation linéaire par une transformation de la forme

$$y = R_1(x, \lambda), \qquad y' = R_2(x, \lambda),$$

où R_1 et R_2 sont des fractions rationnelles en λ.

L'équation (3) se rencontre, comme l'on sait, quand on cherche les lignes asymptotiques ou les lignes de courbure des surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre u (et d'une façon quelconque d'un autre paramètre v). Si les conditions A et B précédentes sont remplies, ces lignes s'obtiennent donc par deux quadratures au plus.

3. J'ajouterai ici une application des théorèmes du Chapitre I relative aux directions asymptotiques de l'intégrale générale de $F(x, y, y') = 0$, où F est un polynome en x, y, y', qui peut être utile dans l'étude de ces intégrales.

Proposons-nous de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces directions ne varient pas avec la constante d'intégration, et de calculer dans ce cas leurs coefficients angulaires. Si l'on pose $\lambda = \frac{y}{x}$, les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à l'axe des y sont les valeurs finies de λ pour lesquelles x devient infini, lorsque dans l'équation $y = \lambda x$ on remplace y par l'intégrale générale de $F = 0$. Or, en remplaçant, dans $F = 0$, y par λx et y' par

$$\lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}},$$

on obtient une équation

$$\Psi\left(\lambda, x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = 0,$$

et la condition nécessaire et suffisante cherchée est que les infinis λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ de x, considéré comme intégrale générale de $\Psi = 0$, ne varient pas avec la constante d'intégration. Par conséquent :

Pour que les directions asymptotiques de y ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le polygone de $\Psi = 0$ n'ait aucun côté à droite de son sommet ϖ droit. Si l'on désigne par $\varphi(\lambda)$ le coefficient du terme correspondant à ce sommet, les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à Oy sont racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$.

Je signale, en passant, une application de ce théorème, relative à l'équation algébrique $F(y, y', y'') = 0$ (où x ne figure pas) dans les cas où son intégrale générale est une fonction algébrique, simplement périodique ou doublement périodique à un nombre fini de valeurs (ce que les méthodes de MM. Picard et Painlevé permettent de reconnaître). Dans ce cas, l'équation du premier ordre

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{2}$$

a son intégrale générale $\chi(y, p, C) = 0$ algébrique, et y s'obtient par l'inversion de l'intégrale abélienne

$$x = \int \frac{dy}{p}.$$

Considérons p et y comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point; les directions asymptotiques, non parallèles aux axes de la courbe $\chi(y, p, C) = 0$, sont

$$\alpha_i = \lim \frac{y}{p} \qquad \text{pour} \qquad y = \infty;$$

les coefficients angulaires (finis et différents de zéro) des tangentes à cette courbe aux points réels ou imaginaires où elle rencontre l'axe des y sont

$$\beta_i = \lim \frac{dy}{dp} \qquad \text{pour} \qquad p = 0.$$

Il est connu dans la théorie des intégrales abéliennes que les valeurs

$$2\pi i\alpha_i \quad \text{et} \quad 2\pi i\beta_i$$

sont, à un facteur entier près, les périodes polaires de l'intégrale abélienne $x = \int \frac{dp}{p}$, correspondant aux infinis logarithmes simples, c'est-à-dire aux valeurs $y = a$, pour lesquelles x devient infini et sa dérivée est de l'ordre de $\frac{1}{y-a}$. Par conséquent, si l'intégrale y est algébrique ou doublement périodique, il n'y a pas de valeurs α_i et β_i finies et différentes de zéro; si y est simplement périodique, les valeurs α_i et β_i forment une suite de nombres commensurables entre eux, et la période de y est alors, à un facteur entier près, égale au plus grand diviseur commun aux α_i et β_i multiplié par $2\pi i$.

Ceci étant, posons dans (2)

$$p = \lambda y, \qquad \frac{dp}{dy} = \lambda + \frac{y}{\frac{dy}{d\lambda}},$$

et soit

$$\Psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = 0 \tag{3}$$

la transformée ainsi obtenue, Ψ étant mis sous la forme d'un polynome. Si l'on désigne par λ_i les valeurs, finies et différentes de zéro, de λ qui rendent infinie l'intégrale $y(\lambda)$ de (3), on aura

$$\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par conséquent : *pour que l'intégrale y de $F(y, y', y'') = 0$ puisse être algébrique ou doublement périodique, il faut que le polygone de* (3) *n'ait aucun sommet à droite de son sommet ϖ droit et que le coefficient du terme correspondant à ce sommet se réduise à une constante.*

Supposons que, le polygone de (3) n'ayant aucun sommet à droite du sommet ϖ droit, le coefficient du terme dans Ψ correspondant à ce sommet soit une fonction $\varphi(\lambda)$ de λ. Alors :

Pour que y puisse être une fonction simplement periodique de x, il *faut que les racines λ_1, λ_2, ... de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ forment une suite de nombres commensurables entre eux.*

On obtient des propositions analogues en considérant les valeurs β_i; en écrivant l'équation (2) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{k=\mu} f_k\left(y, \frac{dp}{dy}\right) p^{\mu-k} = 0,$$

les β_i sont racines de l'équation

$$f_\mu\left(y_0, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0, \tag{4}$$

où y_0 est un zéro quelconque de l'intégrale générale $p(y)$ de l'équation (2).

Si l'intégrale $y(x)$ est algébrique ou doublement périodique, l'équation (4) ne peut avoir aucune racine β_i finie et différente de zéro.

Supposons que cette équation admette des racines finies β_i, indépendantes de y_0, ou encore, si elles en dépendaient, que le polygone de (2) ait son sommet ϖ gauche comme sommet extrême gauche (dans quel cas y_0 ne varie pas avec la constante d'intégration), et soit $\theta(y)$ le coefficient du terme correspondant à ce sommet. Désignons par (β_i, y_j) les différents systèmes de racines communes aux deux équations

$$f_\mu\left(y, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0, \qquad \theta(y) = 0;$$

si l'intégrale $y(x)$ est simplement périodique, les valeurs β_i forment une suite de nombres commensurables entre eux et avec les racines λ_i de $\varphi(\lambda) = 0$; la période est alors, à un facteur entier près, égale à $2\pi i \rho$, ρ étant le plus grand diviseur commun aux β_i et λ_i.

Vérifions tout ceci sur l'exemple simple

$$yy'' + ay'^2 + byy' = 0,$$

où a et b sont des constantes. On a ici

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = y\frac{dp}{dy} + ap + b,$$

$$\Psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = [\lambda(1+a)+b]\frac{dy}{d\lambda} + y,$$

$$\alpha_i = -\frac{1+a}{b}, \qquad \beta_i = -\frac{1}{b}.$$

D'après ce qui précède, si y est algébrique, on a $b = 0$; si y est une fonction simplement périodique, a est nul ou commensurable, et alors la période est égale à $\frac{2\pi i}{b}$, à un facteur entier près.

Ceci se vérifie à la seule inspection de l'intégrale générale qui est, soit

$$y = C(1 + C' e^{bx})^{\frac{1}{1+a}},$$

soit

$$y = C(1 + C'x)^{\frac{1}{1+a}},$$

suivant que $b \neq 0$ ou $b = 0$.

Quelques applications à l'étude des intégrales uniformes.

1. Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation du premier ordre, où F est un polynome en y, y', algébrique en x.

Quand on veut reconnaître si l'intégrale générale d'une telle équation est uniforme, on vérifie d'abord si les conditions nécessaires et suffisantes de M. Fuchs, pour que les points critiques algébriques de l'intégrale soient fixes, sont remplies. S'il en est ainsi, l'équation s'intègre algébriquement au moyen de la théorie des transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes, ou par une quadrature, ou se ramène à une équation de Riccati, suivant que $p > 1$, $p = 1$ ou $p = 0$, p étant le genre de $F = 0$ en y, y'. Ceci fait, il ne reste qu'à vérifier si l'intégrale ainsi obtenue n'a réellement pas des points critiques. Quant à la nature analytique des fonctions uniformes qu'engendre l'intégration d'une équation telle que $F = 0$,

1° Si $p > 1$, ce sont des fonctions rationnelles en x;

2° Si $p = 1$, ce sont des fonctions rationnelles en x et en $\lambda(J)$, λ étant le symbole d'une fonction méromorphe doublement périodique et J étant une intégrale abélienne;

3° Si $p = 0$, ce sont les transcendantes définies par une équation de Riccati à coefficients algébriques en x.

Lorsque x ne figure pas explicitement dans l'équation, les fonctions uniformes engendrées par son intégration peuvent être des fonctions rationnelles soit en x, soit en e^{ax}, soit en $\operatorname{sn}(ax)$ et $\operatorname{cn}(ax)\operatorname{dn}(ax)$.

Si l'intégrale générale de $F = 0$ est *holomorphe* dans tout le plan, *le genre p est différent de l'unité* (sans quoi il y aurait des pôles mobiles) et alors :

1° Si $p > 1$, l'intégrale est un polynome en x;

2° Si $p = 0$, c'est un polynome en x, $e^{J(x)}$, $e^{-J(x)}$, $\int x^n e^{J(x)} dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, où $J(x)$ est une intégrale abélienne. Et en tenant compte de ce que nous avons dit relativement à la nature de l'intégrale $J(x)$ (*voir* le paragraphe sur les singularités de l'intégrale), on voit facilement que :

a. Si le degré m de $F = 0$ en y' est impair, l'intégrale est un polynome en x, $e^{P(x)}$, $e^{-P(x)}$, $\int x^n e^{P(x)} dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, où $P(x)$ est un polynome en x.

b. Si le degré m est pair, l'intégrale abélienne $J(x)$ est du genre hyperelliptique.

2. Mais, même dans le cas où l'intégrale générale n'est pas uniforme, l'équation peut admettre une ou plusieurs intégrales particulières uniformes. Les méthodes servant à reconnaître si l'intégrale générale est uniforme ne s'appliquent point lorsqu'il s'agit de reconnaître si l'équation admet des intégrales particulières uniformes, problème généralement plus compliqué que le premier. De même on sait reconnaître la nature analytique de l'intégrale générale supposée uniforme d'une équation donnée, mais on ne sait pas résoudre le problème analogue pour les intégrales particulières.

De là l'intérêt de chercher des types d'équations ayant une certaine généralité, pour lesquels on peut traiter de pareilles questions. Ainsi, il résulte d'un théorème de M. Painlevé ([1]) que, si dans l'équation

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont polynomes en x et y, le dénominateur Q ne renferme aucun facteur de la forme $x - a$, a étant une constante, et si, de plus, le degré de Q en x surpasse d'au moins deux unités le degré correspondant du numérateur P, toute intégrale uniforme de l'équation est une fonction rationnelle de x.

Plus généralement, étant donnée l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu-i} = 0,$$

si $f_0(x, y)$ ne contient aucun facteur de la forme $x - a$, a étant une constante, et si, de plus, le degré de $f_0(x, y)$ en x surpasse d'au moins $2k$ unités le degré correspondant du coefficient $f_{\mu-k}(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$, toute intégrale uniforme est rationnelle.

Les intégrales particulières uniformes d'une équation $F(x, y, y') = 0$, algébrique en x, y, y', peuvent être rationnelles ou transcendantes; dans ce dernier cas nous dirons que deux ou plusieurs intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots$ sont *distinctes* s'il n'existe entre elles aucune relation algébrique à coefficients algébriques en x.

Je me propose de montrer, en combinant un procédé employé par M. Painlevé dans l'étude des intégrales rationnelles avec les théorèmes connus de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes et sur le genre des courbes algébriques dont les coordonnées s'expriment en fonction uniforme d'un paramètre, comment on peut, pour des classes étendues d'équation, préciser la *limite supérieure du nombre des intégrales uniformes distinctes* et la forme de l'équation dans le cas où elle admet des intégrales uniformes transcendantes; dans ce dernier cas, je signalerai aussi les relations algébriques qui existent entre telles intégrales non distinctes.

([1]) *Annales de la Faculté de Toulouse*, p. 43; 1888.

3. Démontrons d'abord un théorème général relatif aux intégrales uniformes des équations $F(x, y, y') = 0$, où F est un polynome irréductible en y et y', à coefficients algébriques en x. On peut toujours écrire une telle équation sous la forme

$$(1) \qquad F(x, X, y, y') = 0,$$

F étant un polynome irréductible en x, X, y, y', et x et X étant liés par une relation algébrique

$$G(x, X) = 0.$$

En mettant en évidence les puissances de X, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad F_0(x, y, y') + F_1(x, y, y')X + \ldots + F_{m-1}(x, y, y')X^{m-1} = 0,$$

m étant le degré de G en X. Je dis que :

Toute intégrale uniforme de (1) *est commune à m équations différentielle*

$$(3) \qquad F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{m-1} = 0.$$

En effet, remplaçons dans (2) y et y' par l'intégrale uniforme considérée et sa dérivée, on obtient ainsi une relation $H(x, X) = 0$, entre X et x, de degré au plus égal à $m - 1$ en X. Si les coefficients de $H = 0$ ne sont pas identiquement nuls, les deux polynomes G et H en X doivent avoir un facteur commun $K(x, X)$, polynome en x et X, puisqu'il divise G. Donc l'équation $G(x, X) = 0$ ne serait pas irréductible. Par conséquent, on doit avoir identiquement les $F_i = 0$.

Comme les F_i n'admettent pas de facteurs communs [sans quoi l'équation (1) serait réductible], les équations (3), ou bien sont incompatibles (dans quel cas il n'y a pas d'intégrales uniformes), ou bien définissent une relation algébrique entre x et y. D'où le théorème suivant :

Étant donnée une équation $F(x, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome irréductible en* y *et* y', *et algébrique en* x, *pour qu'elle puisse admettre des intégrales uniformes transcendantes, il faut que* F *soit rationnel en* x.

Si cette condition n'est pas remplie, toute intégrale uniforme de $F=0$ est rationnelle, et l'on saura toujours calculer ces intégrales, car elles sont communes aux équations (3).

4. Ceci étant, distinguons les deux cas suivants :

1^er^ CAS : *L'équation* $F=0$ *est à points critiques fixes.* — Désignons par p le genre de $F=0$ en y et y'. Alors

1° Si $p>1$, toute intégrale uniforme est rationnelle;

2° Si $p=1$, en posant

$$Y=R(y, y', \bar{x})$$

(où R est rationnel en y, y' et algébrique en x), $F=0$ se ramène à la forme

$$\frac{dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-k^2Y^2)}}=H(x)\,dx, \tag{4}$$

où k est une constante et $H(x)$ algébrique en x. Si une intégrale $y_1(x)$ de $F=0$ est uniforme, l'intégrale $Y_1(x)$ correspondante de (1) n'a qu'un nombre fini de valeurs. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les périodes de l'intégrale abélienne $\int H(x)\,dx$ soient les périodes de $\operatorname{sn}(x, k^2)$; quand il en est ainsi, l'intégrale générale $Y(x, C)$ de (4) n'aura qu'un nombre fini de valeurs $y(x)$ également, mais il restera à vérifier si, parmi ces intégrales, il y en a qui seront uniformes. S'il en existe plusieurs, elles ne sont pas distinctes : *elles s'expriment algébriquement en fonction de x et de l'une d'entre elles.*

En effet, $Y(x, C)$ s'exprime algébriquement en fonction de $Y_1(x)$ d'après le théorème d'addition des fonctions elliptiques

$$Y=\frac{Y_1\sqrt{\rho(C)}+C\sqrt{\rho(Y_1)}}{1-k^2C^2Y_1^2}$$

avec $\rho(Y)=(1-Y^2)(1-k^2Y^2)$, et, par suite, $y(x)$ s'exprime algébriquement en $y_1(x)$ et en C.

Donc, *si $p=1$, il ne saurait jamais exister plus d'une intégrale uniforme distincte.*

3° Si $p=0$, l'équation $F=0$ se ramène algébriquement à une équation de Riccati en Y, en posant $Y = R(y, y', x)$, où R est rationnel en y, y' et x figurant rationnellement ou par un radical carré. Si $y_1(x)$ est uniforme, l'intégrale correspondante $Y_1(x)$ de l'équation de Riccati est à un nombre fini de valeurs. Pour une équation de Riccati, on sait trouver des intégrales algébriques ou à un nombre donné de valeurs, mais on ne sait pas, en général, reconnaître si elle a des intégrales uniformes, ou si son intégrale générale est uniforme. Quoi qu'il en soit, il peut arriver que l'équation de Riccati ait une, deux ou trois intégrales uniformes (ou à n valeurs); s'il y en a trois, l'intégrale générale $Y(x)$ est uniforme et s'exprime rationnellement en fonction de trois intégrales particulières.

L'équation primitive $F = 0$ *peut donc admettre* 0, 1, 2 *ou* 3 *intégrales uniformes distinctes, mais pas davantage.*

2ᵉ CAS : *L'équation* $F = 0$ *est à points critiques mobiles.* Dans ce cas, il existe un certain nombre de valeurs

$$(5) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varphi_n(x),$$

telles que l'une au moins des valeurs correspondantes de y' (par exemple y'_1) soit irrégulière (infinie ou critique), et l'intégrale $y(x)$ qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $y_1(x_0)$ et admet pour dérivée $y'_1(x)$, admet $x = x_0$ comme point critique. Nous nous bornerons à considérer les équations pour lesquelles toutes les valeurs de y' se comportent comme y'_1 pour certaines des déterminations (5). Autrement dit, nous supposerons qu'il existe des fonctions (5) telles que toute intégrale qui, pour $x = x_0$ prend la valeur $y_1(x_0)$, admet $x = x_0$ comme point critique, sauf pour certains points particuliers, satisfaisant à une certaine condition algébrique. C'est ce qui arrivera toujours pour une équation du premier degré en y' (n'étant pas une équation de Riccati ou linéaire)

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont polynomes en y, algébriques en x; en effet, toute valeur $y_i = \varphi_i(x)$ annulant Q jouit de la propriété précédente. C'est ce qui arrivera encore pour une équation du second degré en y'

$$y' = \frac{A(x,y) + \sqrt{B(x,y)}}{C(x,y)},$$

A, B, C étant des polynomes en y, algébriques en x. En effet, les valeurs $y_i = \varphi_i(x)$ qui annulent B sans être ni racines doubles ni intégrales singulières, jouissent de la propriété en question. Toutefois, quand toutes les racines d'ordre impair $y_i = \varphi_i(x)$ de $B = 0$ sont solutions singulières, il n'en est plus ainsi, et l'équation ne rentre plus dans la classe considérée, à moins pourtant que des valeurs $y_k = \varphi_k(x)$ racines de $C = 0$ ne rendent infinies les deux valeurs de y'.

De même l'équation binome

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

jouira des propriétés en question pour toutes les valeurs $y_i = \varphi_i(x)$, racines de $P = 0$ ou de $Q = 0$, dont la multiplicité n'est pas un multiple entier de m.

D'une manière générale, la condition en question sera remplie quand il existera des valeurs $y_i = \varphi_i(x)$ rendant infinies ou critiques *toutes* les déterminations de y' sans être des intégrales singulières de l'équation. Dans tous ces cas, les fonctions $y_i = \varphi_i(x)$ *seront des fonctions algébriques de* x. En effet, elles satisfont à l'équation obtenue en annulant le coefficient de la plus haute puissance de y' dans $F = 0$, ou bien le discriminant de $F = 0$ par rapport à y'.

Traitons d'abord le cas de l'équation du premier degré en y'.

Équation du premier degré.

Soient $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux polynomes en y des degrés respectifs m et m' à coefficients algébriques en x, et envisageons l'équation différentielle

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{6}$$

Pour que l'équation puisse admettre des intégrales uniformes transcendantes, il faut que P et Q soient rationnels en x; on peut les supposer polynomes en x. De plus, par une transformation homographique, on peut toujours ramener l'équation à satisfaire à la condition $m = m' + 2$, que nous supposerons donc remplie. La valeur de $y = \infty$ est alors une valeur ordinaire; c'est-à-dire que, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, l'intégrale $z(x)$ qui pour $x = x_0$ prend la valeur $z = 0$ est holomorphe au voisinage de $x = x_0$ (pris au hasard). Distinguons les quatre cas suivants :

1° $Q = 0$ *admet plus de deux racines* $y_i = \varphi_i(x)$ *distinctes*, et soient

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad y_3 = \varphi_1(x)$$

trois quelconques de ces racines; elles peuvent d'ailleurs être des branches d'une même fonction algébrique.

Je dis que : *toute intégrale uniforme de* (6) *est rationnelle.*

En effet, elle ne peut avoir que certains points essentiels connus à l'avance; soit $x = a$ un tel point. Si $x = a$ est un point critique de φ_1, φ_2 ou φ_3, nous pouvons toujours poser $x - a = \xi^\nu$, de façon que φ_1, φ_2, φ_3 deviennent trois fonctions uniformes de ξ dans le voisinage de $\xi = 0$. Nous pouvons donc toujours supposer φ_1, φ_2, φ_3 uniformes dans le voisinage de $x = a$. Ceci posé, à la variable y substituons la variable z donnée par

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)}.$$

Pour $y = \varphi_1(x)$, on a $z = 0$; pour $y = \varphi_2(x)$, on a $z = 1$, et pour $y = \varphi_3$, on a $z = \infty$. D'autre part, une intégrale y *supposée uniforme* ne peut être égale à φ_1, φ_2 ou φ_3 que pour les valeurs exceptionnelles de x *en nombre fini*. La fonction $z(x)$ serait donc une fonction admettant $x = a$ comme point essentiel, étant uniforme dans le domaine de ce point et ne prenant dans le voisinage de $x = a$ les trois valeurs 0, 1, ∞ qu'un nombre fini de fois. La fonction uniforme $y(x)$ ne peut donc admettre de points essentiels (à distance finie ou infinie) : *c'est donc une fonction rationnelle de x.*

2° $Q = 0$ *admet deux racines* $y_1 = \varphi_1(x)$ et $y_2 = \varphi_2(x)$ *distinctes.* Posons

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

La fonction $z(x)$ n'est pas nécessairement uniforme, puisque φ_1 et φ_2 ne sont pas nécessairement algébriques; mais si le point $x=a$ est un point critique de z, c'est que c'est un point critique algébrique de φ_1 ou de φ_2, et, par suite, en posant $x-a=\xi^\nu$ (ν étant un entier), on est sûr que z sera uniforme dans le voisinage de $z=0$.

Cela supposé, formons l'équation en z, et soient z_1 et z_2 les deux fonctions de x qui correspondent à deux intégrales uniformes de l'équation (6). Je dis que *le rapport* $\frac{z_2}{z_1}$ *est une fonction algébrique de* x. En effet, c'est une fonction à un nombre fini de valeurs n'ayant pas de points essentiels à distance finie ou infinie. Car, si $x=a$ était un point essentiel de $\frac{z_2}{z_1}$, à l'aide du changement $x-a=\xi^\nu$ on peut toujours supposer ce rapport uniforme autour de $x=a$. D'autre part, $\frac{z_2}{z_1}$ ne peut être égal à 0, 1, ∞ que pour un nombre fini de valeurs de x dans le voisinage de $x=a$. Donc $x=a$ n'est pas un point essentiel de $\frac{z_2}{z_1}$, et, par suite, ce rapport est une fonction algébrique de x.

Il s'ensuit que l'équation (6) *ne peut avoir deux intégrales uniformes transcendantes distinctes.*

3° $Q=0$ *n'a qu'une racine* $y_1=\varphi_1(x)$. La fonction $\varphi_1(x)$ est alors nécessairement rationnelle. En posant

$$z=\frac{1}{y-\varphi_1},$$

on ramène l'équation (6) à la forme

$$z'=\mathrm{T}(x,z), \tag{7}$$

où T est un polynome en z. Dans ce cas l'équation (6) *ne peut admettre plus de deux intégrales uniformes distinctes, et, de plus, si elle admet plus de deux intégrales uniformes, toute intégrale uniforme est rationnelle.*

Pour le montrer, admettons que l'équation (6), et par suite aussi l'équation (7), admette trois intégrales uniformes, et soient z_1, z_2, z_3 les intégrales correspondantes de (7). En formant l'expression

$$v(x)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3},$$

on voit aussitôt que la fonction $\varphi(x)$ est une fonction uniforme sans coupure et telle que les trois équations

$$\varphi(x)=0, \qquad \varphi(x)=1, \qquad \varphi(x)=\infty$$

n'ont qu'un nombre fini de racines; en vertu du théorème de M. Picard, $\varphi(x)$ est donc une fonction rationnelle de x.

On en conclut que *les trois intégrales* z_1, z_2, z_3 *sont liées par une relation de la forme*

$$S_1 z_1 + S_2 z_2 + S_3 z_3 = 0, \tag{8}$$

où S_1, S_2, S_3 *sont des polynomes en* x *liés eux-mêmes par la relation*

$$S_1 + S_2 + S_0 = 0. \tag{8'}$$

Différentions la relation (8) deux fois par rapport à x, en remplaçant $\frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}, \frac{dz_3}{dx}$ respectivement par

$$T(x, z_1), \quad T(x, z_2), \quad T(x, z_3);$$

on aura les deux relations

$$U_1(x, z_1) + U_2(x, z_2) + U_3(x, z_3) = 0, \tag{9}$$

$$V_1(x, z_1) + V_2(x, z_2) + V_3(x, z^3) = 0 \tag{10}$$

avec

$$U_k = \frac{dS_k}{dx} z_k + S_k T(x, z_k),$$

$$V_k(x, z_k) = \frac{d^2 S_k}{dx_k} z_k + 2\frac{dS_k}{dx} T(x, z_k) + S_k\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} T\right)_{z=z_k}$$

Il est facile de voir que les trois relations (8), (9), (10) sont toujours distinctes entre elles. En effet, en posant

$$S_k z_k = \eta_k,$$

on tire des relations (8) et (9)

$$U_1\left(x, -\frac{\eta_2+\eta_3}{S_1}\right) + U_2\left(x, \frac{\eta_2}{S_2}\right) + U_3\left(x, \frac{y_3}{S_3}\right) = 0,$$

relation qui ne peut se réduire à une identité que :

1° Si $U_k(x, z_k)$ est linéaire en z_k, ce qui est impossible si T n'est pas linéaire en z;

2° Si l'un des polynomes S_k était nul identiquement, ce qui est impossible en vertu de deux relations (8) et (8') si les trois intégrales z_1, z_2, z_3 sont distinctes.

On verrait de la même façon que les relations (8) et (10), et ensuite (9) et (10) sont également distinctes entre elles. Il s'ensuit que ces relations définissent z_1, z_2, z_3, et, par suite, les intégrales correspondantes de (6) comme fonctions rationnelles de x.

4° Q *ne contient pas* y. L'équation (6) est alors une équation de Riccati ou linéaire. Pour l'équation de Riccati, il peut exister 1, 2 ou 3 intégrales uniformes distinctes ; pour l'équation linéaire, il peut y en avoir 1 ou 2.

On arrive ainsi à ce théorème :

Toute équation $y' = R(x, y)$, où R *est rationnel en x et y, ne peut admettre plus de trois intégrales uniformes distinctes.*

Si elle en admet 3, c'est une équation de Riccati.

Si elle en admet 2, c'est une équation de Riccati ou linéaire, ou bien se ramène à la forme

$$y' = \frac{P(x, y)}{[y - \varphi_1(x)]^m},$$

où P *est un polynome en x et y de degré $m + 2$ en y, et φ_1 une fraction rationnelle en x.*

Si elle en admet 1, elle se ramène soit à l'une des formes précédentes, soit à la forme

$$y' = \frac{P(x, y)}{(y - \varphi_1)^k (y - \varphi_2)^{k'}},$$

où φ_1 et φ_2 sont algébriques en x et P *un polynome en x et y, de degré $k + k' + 2$ en y.*

Ce dernier fait est évident en remarquant que, si le degré de P en y était supérieur à $k + k' + 2$, la valeur $y = \infty$ joue le rôle de $y_i = \varphi_i(x)$, c'est-à-dire qu'en posant $y = \frac{1}{z}$ (en supposant φ_1 et φ_2 pas identiquement nuls), on aurait trois valeurs

$$z = 0, \qquad z = \frac{1}{\varphi_1}, \qquad z = \frac{1}{\varphi_2},$$

jouant le rôle de $y_i = \varphi_i$. Si, au contraire, ce degré était inférieur à $k + k' + 2$, $y = \infty$ serait une intégrale, c'est-à-dire dans l'équation en $z = \frac{1}{y}$, $z = 0$ serait une intégrale, et l'intégrale générale z ne peut prendre la valeur $z = 0$ que pour des valeurs exceptionnelles de x en nombre fini; $z = 0$ serait donc encore une troisième valeur jouant le rôle de $y_i = \varphi_i$.

Tout ce que nous venons de dire pour l'équation du premier degré est valable pour toutes les équations $F(x, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome irréductible en* x, y, y' *et du genre zéro en* y, y'.

Proposons-nous maintenant un problème plus général que le précédent. Envisageons l'équation

$$y' = \frac{P(x, X, y)}{Q(x, X, y)}, \tag{11}$$

où P et Q sont des polynomes en x, X, y, et x et X étant liés par une relation algébrique $G(x, X) = 0$. Nous avons vu que si le degré de G en X surpasse 1, toute intégrale uniforme (en x) de (11) est rationnelle en x; *mais il peut y avoir des intégrales transcendantes de* (11) *uniformes en x et en* X. C'est de telles intégrales que nous allons nous occuper maintenant.

On peut répéter les raisonnements précédents, en supposant successivement qu'il existe pour chaque couple de valeurs (x, X) 3, 2 ou 1 valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ jouissant de la propriété indiquée, c'est-à-dire telles que y' devienne infinie pour $y_i = \varphi_i$ et que de plus l'intégrale $y(x, X)$, qui pour (x_0, X_0) est égale à $\varphi_i(x_0, X_0)$, admet x_0 comme point critique, sauf pour certaines valeurs x_0 exceptionnelles et en nombre fini.

Dans ces conditions, s'il existe 3 valeurs $y_i = \varphi_i$, *l'intégrale y est rationnelle en* (x, X), et cela par la même raison que précédemment : elle ne peut admettre de points essentiels $x = a$ à distance finie ou infinie. En posant $x - a = \xi^\nu$, si a était point critique des φ_i ou de $X(x)$, de manière à rendre z uniforme dans le voisinage de $\xi = 0$, où

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

on achèvera la démonstration comme précédemment.

De même dans le cas où il y a 2 ou 1 valeur $y_i = \varphi_i(x, X)$.

Les conclusions énoncées pour les intégrales uniformes en x peuvent donc se répéter pour les intégrales uniformes en (x, X). *Il n'existe jamais plus de 3 telles intégrales distinctes.* S'il en existe 3, l'équation (11) est une équation de Riccati, etc.

Les mêmes méthodes et conclusions s'appliquent à l'étude des intégrales uniformes en (x, X) *relatives aux équations* $F(x, X, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome du genre zéro en* y, y', *à coefficients rationnels en* (x, X), x *et* X *étant liés par une relation algébrique* $G(x, X) = 0$.

Équation du second degré.

Une telle équation peut toujours être mise sous la forme

$$y' = \frac{A(x, X, y) + B(x, X, y)\sqrt{R(x, X, y)}}{C(x, X, y)}, \tag{12}$$

où A, B, C, R sont des polynomes en x, X, y et x et X étant liés par une relation algébrique $G(x, X) = 0$. Désignons par λ le degré de R en y, et supposons que l'équation (12) n'admette pas d'intégrales singulières.

Tout d'abord, si $\lambda \leqq 2$, le genre de l'équation en y et y' est nul, et l'on rentre dans le cas précédent.

Si $\lambda > 2$, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle en* (x, X). En effet, $R = 0$ admet alors au moins trois racines $y_i = \varphi_i(x, X)$ telles que toute intégrale qui, pour $x = x_0$ (x_0 étant pris au hasard, sauf certaines valeurs exceptionnelles de x en nombre fini), prend la valeur $\varphi_i(x_0, X_0)$, admet $x = x_0$ comme point critique. Si donc on forme la combinaison

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

cette fonction $z(x)$ ne saurait admettre de points essentiels (à distance finie ou infinie), et, par conséquent, y, supposée uniforme en (x, X), est rationnelle (le raisonnement analogue à celui du cas du premier degré).

L'équation (12) (d'un genre plus grand que zéro) ne saurait donc admettre d'intégrales uniformes transcendantes en (x, X) *que si les va-*

leurs $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$ *qui annulent* R *sont des intégrales singulières,* à l'exception peut-être de deux au plus.

Au cas de l'équation du second degré se ramènent toutes les équations du genre 1 *ou* 2 *en* y, y' *et, plus généralement, toutes les équations de l'espèce hyperelliptique;* les résultats précédents sont donc valables pour toutes ces équations.

Observons que, quand il existe seulement deux valeurs $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$ non singulières, on ne peut plus répéter le raisonnement fait dans le cas du premier degré, car ce dernier raisonnement repose sur ce fait que deux intégrales quelconques ne peuvent devenir égales que pour les x fixes en nombre fini, fait qui ne subsiste pas dans le cas du second degré.

Observons encore que les racines $y_i = \chi_i(x, \mathrm{X})$ de $\mathrm{C} = 0$ ne peuvent plus jouer le même rôle, en général, que les racines de $\mathrm{Q} = 0$ dans le cas du premier degré, car, généralement, une seule valeur de y' devient infinie pour les racines de $\mathrm{C} = 0$. En effet, en écrivant l'équation (12) sous la forme

$$\mathrm{C}y'^2 + \mathrm{D}y' + \mathrm{E} = 0$$

(où C, D, E sont des fonctions de x, X, y), pour $\mathrm{C} = 0$, D, généralement, est différent de zéro et une seule valeur de y' devient infinie. Toutefois, si C et D ont un facteur commun $\mathrm{K}(x, \mathrm{X}, y)$, et si ce facteur a trois racines distinctes en y, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle.*

Équation binome du second degré.

On peut la mettre sous la forme

$$(13) \qquad y' = \frac{\mathrm{B}(x, \mathrm{X}, y)\sqrt{\mathrm{R}(x, \mathrm{X}, y)}}{\mathrm{C}(x, \mathrm{X}, y)},$$

où B, R et C sont polynomes en x, X, y. Toute intégrale singulière $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$, annulant R et, par suite, y', doit être une constante, et réciproquement. Si toutefois $y_i = \varphi_i$ annulait R et C, ce serait un lieu de points critiques des intégrales.

Ceci étant, si le nombre total de valeurs distinctes $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$ qui, ou bien annulent C ou bien annulent R sans être des constantes, dépasse 2, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle.* En effet, toute intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $\varphi_i(x_0, X_0)$ admet x_0 comme point critique, sauf pour certains points x_0 exceptionnels en nombre fini, et le raisonnement s'achèverait comme dans le cas du premier degré.

Distinguons donc plusieurs cas, en observant qu'on peut toujours supposer le degré λ de R en y pair (à l'aide d'une transformation homographique), $\lambda = 2\mu$.

Si $\mu \leqq 1$, le genre p de l'équation est nul, et l'on est ramené au cas du premier degré.

Si $\mu > 1$, distinguons les racines de R en μ' racines constantes et μ'' racines fonctions de x. Pour que toute intégrale uniforme en (x, X) ne soit pas rationnelle, il faut, d'après ce qui précède, que $\mu'' = 0$, 1 ou 2.

Soit d'abord $\mu'' = 0$, R peut alors être supposé polynome en y à coefficients constants, soit $\rho(y)$. Si y est une intégrale uniforme en (x, X) de (13), le radical

$$\sqrt{\rho(y)} = \frac{C(x, X, y)\, y'}{B(x, X, y)}$$

l'est également. Ceci n'est possible que si le polynome $\rho(y)$ *est du quatrième degré en* y. En effet, y (supposée non rationnelle) admet, au moins, un point essentiel $x = a$. Si $X(x)$ n'est pas uniforme en x autour de a, on pose $x - a = \xi^\nu$ et alors y et $\sqrt{\rho(y)}$ sont deux fonctions de ξ uniformes autour de $\xi = 0$ et admettent $\xi = 0$ comme point essentiel. Or, d'après un théorème de M. Picard, la relation entre y et $\sqrt{\rho(y)}$ est nécessairement du genre zéro ou un. Donc $\rho(y)$ est du quatrième degré.

L'équation (13), pour qu'elle puisse admettre des intégrales uniformes en (x, X) non rationnelles, doit donc être de la forme

$$y' = \frac{B(x, X, y)\sqrt{\rho(y)}}{(y - \varphi_1)^k (y - \varphi_2)^{k'}},$$

où le degré de B en y est égal à $k + k'$, et où $\rho(y)$ est un polynome du quatrième degré en y à coefficients constants.

Dans le cas où $\mu'' = 1$ ou $\mu'' = 2$, on ne peut plus préciser le degré du polynome sous le radical, mais on aura une relation entre les degrés en y du numérateur et du dénominateur, en tenant compte de la condition que, pour qu'il puisse exister des intégrales uniformes en (x, X) transcendantes, il faut que $z = 0$ ne soit pas une intégrale de l'équation en $z = \frac{1}{y}$, sans quoi (si le genre de l'équation n'est pas nul) il y aura au moins trois valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ (en comptant $y = \infty$ comme une telle valeur).

On peut compléter ce qui précède dans certains cas particuliers, notamment quand $B = 0$ admet des racines $y_i = \alpha_i$ constantes, car alors une intégrale autre que $y = \alpha_i$ ne peut prendre les valeurs α_i que pour les valeurs exceptionnelles de x, en nombre fini. Une telle valeur α_i joue donc le rôle des φ_i et le raisonnement s'achève sans peine.

J'ajoute, enfin, que *les mêmes méthodes et conclusions s'appliquent à l'équation binome générale, d'un degré quelconque en* y'.

5. Voici maintenant un théorème permettant de construire des types généraux d'équations du premier ordre pour lesquelles toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle en x.

Soient $\varphi(x, y, y')$ et $\psi(x, y, y')$ deux polynomes en x, y, y', tels que les sommets ϖ droits de leurs polygones respectifs soient situés sur une même perpendiculaire à OM, et qu'à droite de cette perpendiculaire ni l'un ni l'autre des polygones n'aient de sommets.

Soient ensuite :

$P(x, y, y')$ un polynome quelconque en x, y et y';
$\varpi(a, b)$ un polynome homogène en a et b à coefficients constants;
$\chi(x, a, b)$ un polynome homogène en a, b, de même degré d'homogénéité μ que $\varpi(a, b)$, à coefficients fonctions algébriques de x,

et envisageons l'équation du premier ordre :

$$\varpi(\varphi, \psi) P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, \psi) = 0. \tag{1}$$

Je me propose de démontrer que :

Si le nombre de racines a *distinctes et différentes de zéro de l'équation* $\varpi(a, 1) = 0$ *surpasse* 2, *toute intégrale uniforme de* (1) *est rationnelle.*

Pour le montrer, écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \left[\varpi\left(\frac{\varphi}{\psi}, 1\right) P(x, y, y') + \chi\left(x, \frac{\varphi}{\psi}, 1\right)\right] \psi^{\mu} = 0.$$

Si une intégrale uniforme de (1) était commune à (1) et à $\psi = 0$, on l'obtiendrait par l'élimination de y' entre $\psi = 0$ et

$$\varpi(\varphi, 0) P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, 0) = 0,$$

et la démonstration serait achevée. Supposons donc que notre intégrale y ne satisfasse pas à $\psi = 0$; elle satisfera alors à

$$(3) \qquad \varpi\left(\frac{\varphi}{\psi}, 1\right) P(x, y, y') + \chi\left(x, \frac{\varphi}{\psi}, 1\right) = 0.$$

Soit a une racine de l'équation $\varpi(a, 1) = 0$; je dis d'abord que les racines $x = \alpha$ de l'équation

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} - a = 0,$$

lorsqu'on y remplace y par l'intégrale uniforme considéré, sont en nombre fini. Car, d'après (3), les valeurs telles que $x = \alpha$ doivent coïncider : 1° soit avec les pôles de l'intégrale y; 2° soit avec les singularités transcendantes de y; 3° soit avec les infinis des coefficients en x dans P; 4° soit avec les racines en x de l'équation algébrique $\chi(x, a, 1) = 0$. Dans les trois derniers cas leur nombre est certainement fini, mais je vais montrer qu'il en est de même dans le premier cas. Pour cela, il suffit de montrer que l'expression $\frac{\varphi}{\psi}$ ne peut tendre vers la limite a que pour un nombre fini de pôles de y.

Dans le voisinage d'un pôle $x = \alpha$ de y, on aura

$$y = (x - \alpha)^{\lambda} f(x),$$

où λ est un entier négatif et $f(x)$ une fonction de x ne devenant ni nulle ni infinie pour $x = \alpha$. Si l'on met φ et ψ sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i},$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x) y^{m'_i} y'^{n'_i},$$

on aura dans le voisinage de $x = \alpha$, d'après les notations du Chapitre I, et en appelant (ϖ') le sommet droit de ψ,

$$\varphi = (x-\alpha)^{S_{\varpi,\lambda}}\left[\Omega_{\varpi}(x) + \sum_{-(\varpi)} (x-\alpha)^{S_{\varpi,\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)\right],$$

$$\psi = (x-\alpha)^{S'_{\varpi'}}\left[\Omega'_{\varpi'}(x) + \sum_{-(\varpi')} (x-\alpha)^{S'_{\varpi',\lambda}-S'_{i,\lambda}}\Omega'_i(x)\right].$$

Or, nous avons vu dans le Chapitre I que, lorsque x tend vers α, on a

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \ \text{sauf}\ i = \varpi),\\
&\lim \Omega'_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t, \ \text{sauf}\ i = \varpi'),\\
&\lim \Omega_{\varpi}(x) = \lambda^{n_{\varpi}}\varphi_{\varpi}(\alpha)f(\alpha),\\
&\lim \Omega_{\varpi'}(x) = \lambda^{n'_{\varpi'}}\psi_{\varpi'}(\alpha)f(\alpha)
\end{aligned}$$

(où n_{ϖ} et $n'_{\varpi'}$ désignent les exposants de y' dans les termes respectifs de φ et ψ correspondant aux sommets ϖ et ϖ').

Distinguons maintenant les trois cas suivants :

1er cas : *Le sommet ϖ' est au-dessous du sommet ϖ.* — Comme $S_{i,\lambda}$ et $S'_{i,\lambda}$ met les ordonnées à l'origine des droites ayant le coefficient angulaire λ et passant respectivement par les points (M_i, N_i) appartenant à φ et à ψ, on voit que $S_{\varpi,\lambda} > S_{\varpi',\lambda}$ pour tous les λ négatifs. Par conséquent, si λ n'est pas une racine de l'équation algébrique

$$\varphi_{\varpi}(\alpha) = 0$$

(et s'il en était ainsi, le nombre des α serait fini et la démonstration achevée), le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ tend vers zéro, et non pas vers la limite a, lorsque x tend vers α. Ce rapport ne peut donc tendre vers la racine a de $\varpi(a, 1) = 0$ pour un pôle $x = \alpha$ de y, que si ce pôle coïncide avec une racine de l'équation $\psi_{\varpi'}(\alpha) = 0$; donc le nombre de tels pôles est limité.

2e cas : *Le sommet ϖ' est au-dessus du sommet ϖ.* — Alors $S_{\varpi,\lambda} < S_{\varpi',\lambda}$ pour tous les λ négatifs; par conséquent, si α n'est pas une racine de $\varphi_{\varpi}(\alpha) = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ augmente indéfiniment lorsque x tend vers α. Ce rapport ne peut donc tendre vers la limite a que si le pôle considéré de y coïncide avec une racine de l'équation algébrique

$$\varphi_\varpi(\alpha) = 0,$$

ce qui montre que le nombre des α est limité.

3ᵉ CAS : *Les sommets ϖ et ϖ' coïncident.* — On a alors $M_\varpi = M'_{\varpi'}$, $N_\varpi = N'_{\varpi'}$, et par conséquent $S_{\varpi,\lambda} = S_{\varpi',\lambda}$ quel que soit λ; donc

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \lambda^{n_\varpi - n'_\varpi} \frac{\varphi_\varpi(\alpha)}{\psi_\varpi(\alpha)}.$$

Cette limite doit être égale à a, et par suite α doit être une racine de l'équation algébrique

$$\lambda^{n_\varpi - n'_{\varpi'}} \varphi_\varpi(\alpha) - a\,\psi_{\varpi'}(\alpha) = 0;$$

le nombre des α est donc encore limité. Le seul cas où ceci puisse tomber en défaut est le cas exceptionnel où la quantité

$$\sqrt[n_\varpi - n'_{\varpi'}]{\frac{a\,\psi_\varpi(\alpha)}{\varphi_\varpi(\alpha)}}$$

est un nombre indépendant de α et entier, et lorsque λ est égal à ce nombre.

En résumé, l'équation

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} - a = 0,$$

après y avoir remplacé y par une intégrale uniforme de (1) et a par une racine quelconque non nulle de $\varpi(a, 1) = 0$, ne peut avoir qu'un nombre limité de racines x. Et comme, y étant uniforme, ce rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ est aussi une fonction uniforme de x, il s'ensuit que, si le nombre de racines a distinctes et non nulles surpasse deux, $\frac{\varphi}{\psi}$ doit être une fraction rationnelle, ainsi que y [en supposant que le résultant de (1) et de $\frac{\varphi}{\psi} = R(x)$ par rapport à y' n'est pas identiquement nul].

Si, par exemple, φ, ψ et χ ne contiennent pas x explicitement, et si P est un polynome en x, y, y', l'équation $\frac{\varphi}{\psi} - a = 0$ ne peut pas avoir de racines à distance finie, et si le nombre de racines a de l'équation $\varpi(a, 1) = 0$ surpasse deux, on a

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} = \text{const.} = C.$$

L'intégrale y, supposée uniforme, ne peut être que rationnelle et s'obtiendrait par l'élimination de y' entre les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi(y, y') - C\psi(y, y') &= 0, \\ P(x, y, y') + C' \quad &= 0, \end{aligned}$$

où les constantes C et C′ sont liées par la relation

$$\varpi(C, 1)C' - \chi(C, 1) = 0.$$

On peut, par exemple, prendre $\varphi = y'$, $\psi = y$, et l'équation (1) aurait la forme

$$\varpi(y, y')P(x, y, y') + \chi(x, y, y') = 0,$$

où ϖ et χ sont des polynomes homogènes en y, y' de même degré d'homogénéité.

6. Dans quelques cas étendus considérés précédemment, les intégrales rationnelles sont les seules intégrales uniformes possibles de l'équation, et, en les calculant, on sera certain d'avoir ainsi toutes les intégrales uniformes de l'équation, ou de constater qu'elle n'admet pas de telles intégrales.

La question de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre est rationnelle se ramène, par la méthode de M. Poincaré, à des opérations algébriques ou à une quadrature ou à la question de reconnaître si l'intégrale d'une équation de Riccati est rationnelle, ce qu'on saura toujours reconnaître.

Mais, quand il s'agit des intégrales particulières rationnelles, le problème est plus difficile et exige des méthodes spéciales. M. Painlevé [1] en a donné une qui permet de déterminer sûrement toutes les intégrales rationnelles pour des classes très générales d'équations du

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 1892, p. 305; *Comptes rendus*, t. CX, p. 34.

premier ordre, et qui peut s'appliquer dans tous les cas que nous avons considérés précédemment.

J'ajouterai seulement quelques remarques relatives aux simplifications qu'on peut tirer assez souvent par la considération du polygone Π de l'équation donnée.

Supposons que le polygone n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier et positif. On connaîtra alors une suite de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles qu'aucune intégrale rationnelle ne puisse avoir de zéros différant des α_i. Si l'on pose

$$\varpi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

il existera un nombre entier positif μ tel que la fonction

$$u = \frac{1}{y}[\varpi(x)]^\mu,$$

soit un polynome en x, et, si l'on connaissait une limite supérieure de μ, on ramènerait la recherche de toutes les intégrales rationnelles à celle, relativement plus facile, des polynomes satisfaisant à l'équation différentielle en u. On peut déterminer une limite supérieure de ce nombre par la méthode suivante. On sait reconnaître par les méthodes de Briot et Bouquet si l'équation donnée admet des intégrales holomorphes prenant, par exemple, pour $x = \alpha_i$ la valeur $y = 0$ et déterminer pour ces intégrales le développement de y, suivant les puissances de $(x-a)$; on en déduira l'ordre maximum possible λ_i du zéro a_i de y. En faisant ce calcul pour tous les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et en désignant par λ_h le plus grand des entiers λ_i, λ_h sera une limite supérieure de μ.

Lorsque la suite $\alpha, \ldots, \alpha_n$ n'existe pas, $\frac{1}{y}$ est un polynome en x.

Si le polygone de l'équation n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, on appliquera les calculs précédents à la transformée en $\frac{1}{y}$ de l'équation, et l'on réduira encore la recherche des intégrales rationnelles à celle des intégrales entières.

Si le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier, on connaîtra en même temps tous les zéros et tous les pôles possibles des intégrales rationnelles; soient α_i ces zéros et β_i ces pôles. Après avoir formé l'équation $\varphi(x, u, u') = 0$, transformée en $u = \frac{y'}{y}$ de l'équation donnée $F = 0$, on cherchera les intégrales rationnelles de cette équation de la façon suivante. Les pôles de l'une quelconque de ces intégrales u sont toujours des pôles simples et, en posant

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n), \\ \chi(x) &= (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_m), \end{aligned}$$

on aura

$$u = \frac{v}{\varpi(x)\chi(x)},$$

v étant un polynome en x. Une fois tous ces polynomes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ trouvés et après avoir supprimé les facteurs $(x - \alpha_i)$ et $(x - \beta_i)$ communs aux v et à $\varpi(x)\chi(x)$, on aura toutes les intégrales rationnelles $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de $\varphi(x, u, u') = 0$. Pour que $F = 0$ admette des intégrales rationnelles, il faut et il suffit que, parmi les fractions u_i, il y ait au moins l'une satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Le degré du numérateur de u_i est moindre que celui du dénominateur;

2° Les résidus de u_i relatifs à ses pôles (qui sont évidemment tous des pôles simples) sont tous des entiers.

Ces conditions remplies, toutes les intégrales rationnelles de $F = 0$ sont données par la formule

$$y_i = e^{\int u_i dx}.$$

7. La considération du polygone Π de l'équation peut être utile non seulement dans le calcul des intégrales rationnelles, mais aussi à celui plus général des intégrales transcendantes méromorphes, en permettant de ramener ce calcul à celui, relativement plus facile, des intégrales holomorphes dans tout le plan.

Ainsi, lorsque le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier positif, on connaîtra une suite de valeurs $\alpha, \ldots, \alpha_n$ telles qu'aucune intégrale *méromorphe* de l'équation ne puisse avoir de zéros différant des α_i. D'après le théorème sur la décomposition des fonctions méromorphes en facteurs primaires, on peut alors écrire

$$y = \frac{[\Pi(x - \alpha_i)]^{\mu} e^{G(x)}}{\Pi(x - \beta_i)},$$

où les β_i désignent les pôles de y et ceux parmi les α_i qui ne sont pas effectivement les zéros d'ordre μ de y; μ est un entier positif, égal ou supérieur au plus grand ordre des zéros α_i de y; $G(x)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan.

Par conséquent, en posant

$$u = \frac{1}{y}[\Pi(x - \alpha_i)]^\mu,$$

u sera une fonction holomorphe dans tout le plan, satisfaisant à une équation différentielle facile à former au moyen de l'équation donnée, et la connaissance de cette fonction u entraînerait celle de y. On peut calculer le nombre μ d'une manière identique à celle indiquée plus haut dans le cas des intégrales rationnelles.

On procédera aussi d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée précédemment, lorsque l'une quelconque des conditions sui vantes est remplie :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif;

2° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier.

8. Je terminerai cette série d'applications par une remarque concernant *les résidus de l'intégrale générale relatifs à ses pôles simples mobiles*.

Lorsque l'intégrale générale de $F(x, y, y') = 0$ admet des pôles simples mobiles, le polygone Π de F a un côté à coefficient angulaire égal à -1. La limite ρ du produit $(x - a)y$, lorsque x tend vers a, est une racine non nulle de l'équation algébrique en ρ, relative au côté à coefficient angulaire -1; par conséquent, les résidus de l'intégrale générale, relatifs aux pôles mobiles simples, sont racines de cette équation en ρ. *Si les coefficients $\varphi_i(x)$ dans les termes de* $F = 0$ *correspondant à ce côté sont constants, ces résidus ne varient pas avec la constante d'intégration.*

Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation à points critiques fixes. On sait toujours reconnaître si l'intégrale générale d'une telle équation est ou non méromorphe à l'intérieur d'un contour donné Γ, dans le plan des imaginaires, et supposons qu'il en est ainsi. Si le polygone de $F = 0$ n'a qu'un seul côté à droite de son sommet ϖ droit, et si les conditions de tout à l'heure (relatives à ce côté et à l'équation en ρ qui lui correspond) sont remplies, *l'intégrale*

$$\int y(x, \mathrm{C})\, dx$$

(où y est l'intégrale générale de l'équation), *prise le long d'un tel contour* Γ, *est égale à zéro ou à un multiple de l'une des quantités fixes*

$$2\pi\rho_1 i, \quad 2\pi(\rho_1 + \rho_2)i, \quad 2\pi(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)i, \quad \ldots,$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *étant les racines non nulles de l'équation en* ρ *relative au côté* $\lambda = -1$.

Si, par exemple, $y(x, \mathrm{C})$ est l'intégrale générale de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dz} = ay^2 + f(z)y + \varphi(z)$$

(où f et φ sont des polynomes en z et a une constante), l'intégrale $\int y(z, \mathrm{C})\, dz$, prise le long d'un contour quelconque dans le plan des z, est nulle ou égale à un multiple de $\frac{2\pi i}{a}$, ce qu'on vérifie en remarquant que la fonction

$$u = e^{-a\int y\, dx}$$

est l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} - a\varphi(z)u = 0,$$

et, par suite, qu'elle est holomorphe dans tout le plan; l'intégrale $\int y\, dz$ ne peut donc avoir d'autres périodes que $\frac{2\pi i}{a}$.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

CHAPITRE I.

SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES.

1. Le raisonnement qui nous a servi à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros et les infinis de l'intégrale d'une équation du premier ordre soient fixes ne s'étend pas dans tout son ensemble aux équations d'ordre supérieur. C'est que, d'une part, pour les équations d'ordre supérieur les singularités transcendantes varient avec les constantes d'intégration, ce qui ne se présente pas pour les équations du premier ordre. D'autre part, dans le cas du premier ordre, toutes les déterminations de la dérivée y' étaient des fonctions algébriques connues de y, pour lesquelles on pouvait trouver les systèmes circulaires de racines s'annulant avec y et étudier la façon dont chacune de ces racines se comportait dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$.

Généralement, ceci ne subsiste pas pour les équations d'ordre supérieur. L'intégrale d'une telle équation, ainsi que sa dérivée, peut devenir indéterminée pour des valeurs x_0 quelconques; elle peut avoir aussi des coupures variables avec les constantes d'intégration, ou encore des lignes singulières non analytiques, variables également avec les constantes. Ces difficultés empêchent, comme dans bien d'autres circonstances, l'extension de la méthode qui nous a réussi pour les équations du premier ordre.

Mais la méthode permet une certaine extension dans un quelconque des cas suivants :

1° Lorsqu'on peut reconnaître sur l'équation différentielle donnée elle-même que les points transcendants de l'intégrale et de ses dérivées ne varient pas avec les constantes d'intégration ;

2° Lorsqu'on se borne à étudier les intégrales (particulières ou dépendant des constantes arbitraires) ayant les points essentiels donnés à l'avance, par exemple les intégrales méromorphes ;

3° D'une manière générale, en étudiant les intégrales quelconques, mais en se bornant aux zéros, et les infinis tels que l'intégrale et ses dérivées, jusqu'à l'ordre p, soient d'un ordre infinitésimal déterminé dans leur voisinage (p étant l'ordre de l'équation).

A l'égard de la condition 1°, je rappelle quelques résultats dus à M. Painlevé [1], relativement à l'équation du second ordre

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

et qui s'étendent aussi aux équations d'un ordre quelconque.

Une équation (1), prise au hasard, n'a pas de points essentiels mobiles; pour qu'elle puisse en avoir, il faut que certaines conditions soient remplies, dont les plus simples sont les suivantes. Soit $S(x, y, y') = 0$ la condition pour qu'une valeur de y'', définie par (1), soit infinie, ou pour que deux valeurs de y'' se permutent. Si l'intégrale de (1) a des points essentiels mobiles,

1° Le polynome S contient un facteur de la forme $S_1(x, y)$, où y figure certainement;

2° L'équation (1), où l'on regarde x comme la fonction, admet, quel que soit x_0, l'intégrale $x \equiv x_0$.

Si aucune de ces conditions n'est remplie, *les points essentiels de l'intégrale et toutes ses dérivées sont fixes.* On a des résultats analogues pour les équations d'un ordre supérieur à 2.

2. Envisageons un polynome en $y, y', y'', \ldots, y^{(p)}$

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} y''^{m_{2i}} \ldots y^{(p)m_{pi}},$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 362-365 et p. 566-569; 1893.

où les m sont des entiers positifs, tels qu'on n'ait pas à la fois pour deux indices i et j différents

$$m_{0i} = m_{0j}, \qquad m_{1,i} = m_{1j} \ldots m_{pi} = m_{pj},$$

et les $\varphi_i(x)$ étant des fonctions quelconques de x.

Formons le double tableau de $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$M_i = m_{0i} + \quad m_{1i} + \ldots + \quad m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki},$$

$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} km_{ki}.$$

Traçons dans le plan deux axes, celui des M et des N, et marquons les s points (M_i, F_i) en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice. Il peut arriver que deux ou plusieurs points (M_i, N_i) coïncident; on mettra alors à côté d'un tel point multiple les indices de tous les points qui y sont confondus.

Construisons le polygone, concave vers OM et contenant dans son intérieur ou sur sa périphérie tous les points (M_i, N_i), comme nous l'avons fait pour les équations du premier ordre, en adoptant les mêmes conventions et les mêmes définitions, avec la seule différence suivante : il pourra arriver que plusieurs points (M, N) soient confondus en un même sommet du polygone; si le nombre de ces points est h, ce sera un *sommet multiple d'ordre h*.

On voit aisément que le polygone tout entier est compris dans l'angle formé par la partie positive de l'axe OM et la partie de la droite passant par l'origine et ayant le coefficient angulaire égal à p (p étant l'ordre de l'équation différentielle), qui est comprise dans l'angle NOM. Cette droite sera appelée dans la suite *la droite limite*.

J'indiquerai les formes des polygones relatifs à quelques types généraux d'équation.

Premier exemple. — Soit

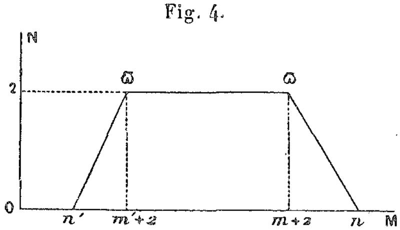
$$F = P(x, y)y'' + Q(x, y),$$

où P et Q sont deux polynomes en y, et soient m et m' le plus grand et le plus petit exposant de y dans P, et n, n' les quantités analogues relatives à Q. Le polynome F présente deux sortes de termes :

1° Les termes de la forme $y^i y''$ $(i = m', m'+1, \ldots, m-1, m)$, qui donnent les points $M_i = i + 2$, $N_i = 2$, situés sur la droite $N = 2$;

2° Les termes de la forme y^k $(k = n', n'+1, \ldots, n-1, n)$, qui donnent les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

Fig. 4.



Par conséquent, la forme générale du polygone est celle de la *fig.* 4. Sur la droite $N = 2$ il y a au moins un sommet; la disposition, le nombre de sommets et la forme du polygone peuvent d'ailleurs varier. Si $m = m'$, le sommet ϖ sera double; on voit également que le polygone ne peut pas présenter plus d'un sommet multiple.

Deuxième exemple. — Pour obtenir le polygone Π de

$$F = y''^{\nu} + P(x, y, y'),$$

on construira le polygone Π' de $P(x, y, y')$; on joindra le sommet ϖ droit de ce polygone au point $S(M = \nu, N = 2\nu)$ par une droite D, et l'on abaissera de S une perpendiculaire Δ sur OM. Si le sommet extrême gauche de Π' est à gauche de Δ ou sur Δ, le polygone Π est celui composé des droites Δ, D, du côté à domaine négatif de Π' et d'une portion de l'axe OM; si le sommet extrême gauche est à droite de Δ, le côté Δ sera remplacé par la droite joignant le point S à ce sommet extrême. Lorsque, par exemple, $\nu = 1$ et

$$P(x, y, y') = P(x, y)y' + Q(x, y),$$

et en donnant à m, m', n, n' les significations précédentes, on aura l'une ou l'autre forme du polygone (*fig.* 5 et 6) suivant que $n' > 0$ ou $n' = 0$. On voit que le polygone ne peut pas présenter de points multiples. La forme du polygone peut varier, mais le sommet ϖ reste toujours sur la droite $N = 2$.

Fig. 5.

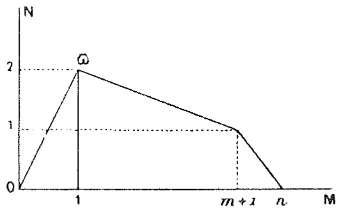
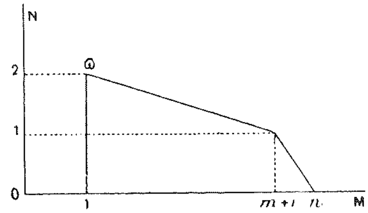


Fig. 6.



Troisième exemple. — Soit

$$F = P(x, y'') + Q(x, y).$$

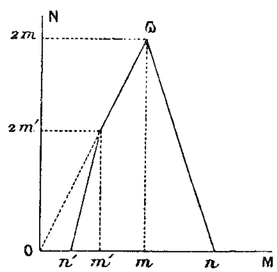
Il y a deux sortes de termes :

1° Les termes en $y''^{i}(i = m', \ldots, m)$, donnant les points $M_i - i$, $N_i = 2i$ situés sur la droite limite $\lambda = 2$;

2° Les termes en $y^k(k = n', \ldots, n)$, donnant les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

La forme générale du polygone est celle de la *fig.* 4; elle peut varier, mais le sommet ϖ se trouve toujours sur la droite $N = 2m$.

Fig. 7.



Quatrième exemple. — Le polygone d'une équation linéaire d'ordre p sans second membre se réduit à une droite parallèle à ON, et les coordonnées du sommet ϖ sont (p, p); pour les équations avec le second membre c'est un triangle rectangle, dont les coordonnées des sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, p)$.

Pour la construction des exemples (relatifs à ce qui va suivre), il importe de savoir trouver les équations différentielles d'un ordre donné, correspondant à un système de points (M_i, N_i) donné. Ceci revient à la résolution d'un système d'équations linéaires en nombres entiers et positifs. Pour trouver le terme de l'équation d'ordre p correspondant au point donné (M_i, N_i), il faut résoudre le système de deux équations

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi},$$
$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + p\,m_{pi},$$

en nombres entiers positifs, et, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que $pM_i - N_i \geqq 0$. Il peut y avoir plusieurs systèmes de solutions correspondant à un même point (M_i, N_i), mais le nombre de ces systèmes est limité et chacun d'eux donne un mode de construction du terme de l'équation correspondant au point donné. En construisant h termes de l'équation correspondant aux différents systèmes de solutions relatifs à un même point (M_i, N_i), ce point sera un point multiple d'ordre h pour l'équation ainsi construite.

Pour faciliter la recherche des exemples, je donne ici le Tableau de ces solutions pour les équations d'un ordre inférieur à 5, et qu'il faut appliquer à chacun des points (M_i, N_i) donnés dans le plan NOM (les indices i sont supprimés).

$p = 2$:

$$N - M \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2} N,$$
$$m_1 = N - 2m_2, \qquad m_0 = M - N + m_2$$

ou encore

$$M - N \leqq m_0 \leqq M - \tfrac{1}{2} N, \qquad m_1 = 2M - N - 2m_0, \qquad m_2 = N - M + m_0.$$

$p = 3$:

$$N - 2M \leqq m_3 \leqq \tfrac{1}{3} N,$$
$$N - M - 2m_3 \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2}(N - 3m_3),$$
$$m_1 = N - 2m_2 - 2m_3, \qquad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3$$

ou encore

$$M - N \leqq m_0 \leqq M - \tfrac{1}{3} N,$$
$$2M - N - 2m_0 \leqq m_1 \leqq \tfrac{3}{2} M - \tfrac{1}{2} N - \tfrac{3}{2} m_0,$$
$$m_2 = 3M - N - 3m_0 - 2m_1, \qquad m_3 = \tfrac{1}{2}(N - M + m_0 - m_2).$$

$p = 4$:

$$N - 3M \leqq m_4 \leqq \tfrac{1}{4} N,$$
$$N - 2M - 2m_4 \leqq m_3 \leqq \tfrac{1}{3}(N - 4M),$$
$$N - M - 2m_3 - 3m_4 \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2}(N - 4m_4 - 3m_3),$$
$$m_1 = N - 2m_2 - 3m_3 - 4m_4, \qquad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3 + 3m_4.$$

3. Ceci étant, posons dans le polynome précédent F

$$y = (x - a)^\lambda f(x),$$

où a et λ sont deux constantes finies et différentes de zéro, et $f(x)$ une fonction de x. Par les différentiations successives on trouve

$$y' = \lambda(x - a)^{\lambda-1} f + (x - a)^\lambda f',$$
$$y'' = \lambda(\lambda - 1)(x - a)^{\lambda-2} f + 2\lambda(x - a)^{\lambda-1} f' + (x - a)^\lambda f'',$$
$$y''' = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(x - a)^{\lambda-3} f + 3\lambda(\lambda - 1)(x - a)^{\lambda-2} f' + 3\lambda(x - a)^{\lambda-1} f'' + (x - a)^\lambda f''',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\gamma_{0i} = m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi},$$
$$\gamma_{1i} = m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\gamma_{hi} = m_{h+1,i} \quad + \ldots + m_{pi},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le terme général de F prendra la forme

$$\varphi_i(x)(x - a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)],$$

où $\theta_i(x)$ est un polynome en

$$f(x), \quad (x - a) f'(x), \quad (x - a)^2 f''(x) \ldots (x - a)^p f^{(p)}(x),$$

dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de f, ensuite

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}}(\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}}.$$

On aura donc

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)(x - a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)].$$

Envisageons dans cette somme l'ensemble T de termes pour lesquels l'exposant $\lambda M_i - N_i$ de la puissance $(x-a)$ mise en facteur est le plus faible. Suivant les valeurs des M_i, N_i, λ l'ensemble T sera composé d'un seul terme, de deux ou de plusieurs termes, et je vais chercher les conditions nécessaires et suffisantes correspondant à ces divers cas.

En général, pour que les termes d'indices γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément :

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma = \lambda M_\delta - N_\delta = \lambda M_\varepsilon - N_\varepsilon = \ldots, \tag{1}$$

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i, \tag{2}$$

lorsqu'on attribue à l'indice i toutes les valeurs entières de 1 à s autres que celles des indices des termes faisant partie de T.

La condition (1) peut s'écrire

$$\lambda = \frac{N_\gamma - N_\delta}{M_\gamma - M_\delta} = \frac{N_\delta - N_\varepsilon}{M_\delta - M_\varepsilon} = \ldots. \tag{3}$$

On voit donc que λ doit être égal au coefficient angulaire de la droite (γ, δ) et que les points correspondant aux divers termes de T doivent être sur cette droite.

D'autre part, la quantité $\lambda M_i - N_i$ lorsqu'on y remplace λ par la valeur (3), représente l'ordonnée à l'origine $S_{i,\lambda}$, changée de signe, de la droite passant par (i) et de coefficient angulaire λ.

Par conséquent, pour que les termes d'indice γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit :

1° Que les points d'indices γ, δ, ε, ... soient sur une même droite, et que λ soit égal au coefficient angulaire de cette droite;

2° Que $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les indices i de 1 à s autres que $\gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, c'est-à-dire que l'ordonnée à l'origine de la droite (γ, δ) soit plus grande que celle d'une quelconque de droites parallèles à (γ, δ) et passant par les points (i) non situés sur la droite (γ, δ).

Si tous les points (M_i, N_i) sont simples, la direction de toute droite (γ, δ) est bien déterminée, et, par conséquent, pour ces points la condition 1° ne peut être vérifiée que pour une seule valeur de λ. Mais si le point (M_i, N_i) était multiple et correspondait, par exemple, aux indices $i, j, k, \ldots$, la direction des droites (i, j), (j, k), ... serait complètement indéterminée et pourrait être quelconque; par conséquent, pour les points multiples, la condition (1°) est toujours vérifiée, quelle que soit la valeur de λ, réelle ou imaginaire; pour ces points il ne reste que les inégalités 2° à vérifier.

Je distinguerai donc deux cas, suivant que tous les points (M, N) sont simples, ou qu'il y en ait de multiples.

1er CAS : *Tous les points* (M_i, N_i) *sont simples.* — Pour que les termes correspondant aux deux points (γ) et (δ) fassent partie de T, il faut que le coefficient angulaire λ de la droite (γ, δ) ait la valeur tirée de (3). Réciproquement, λ étant convenablement choisi, quels que soient les deux points (γ) et (δ), on peut toujours satisfaire à la condition (1), pourvu que ces points ne soient pas situés sur une même droite parallèle à OM ou à ON.

Il reste encore à satisfaire à la condition 2°. Or, pour cela, d'après les propriétés du polygone, il faut et il suffit que la droite (γ, δ) soit un côté du polygone non parallèle aux axes. On voit donc que, pour que T soit composé d'au moins deux termes, il faut et il suffit que λ soit égal au coefficient angulaire d'un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; les indices des termes qui figurent alors dans T sont ceux des sommets du polygone qui se trouvent sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à (3).

2e CAS : *Il y a des points* (M_i, N_i) *multiples.* — Pour ces points la condition 1° est satisfaite, quel que soit λ, réel ou imaginaire, et pour que les termes aux indices γ, δ, ... du point multiple (M_γ, N_γ) fassent partie de T, il faut et il suffit que l'on donne à λ une valeur qui permette de satisfaire à la condition 2°.

Il est d'abord facile de voir que si un point multiple (M_γ, N_γ) n'est pas un sommet du polygone, quelle que soit la valeur réelle qu'on attribue à λ, on ne peut jamais satisfaire à la condition 2°. En effet, pour que la condition $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ puisse être satisfaite pour tous les indices i autres que ceux qui appartiennent au point multiple (γ), il faut que λ soit compris dans le domaine du point (γ), et, comme le domaine d'un point quelconque qui n'est pas un sommet du polygone est nul, la condition 2° ne peut être satisfaite que pour un sommet du polygone. D'ailleurs chaque sommet du polygone satisfait à 2° si l'on donne à λ une valeur quelconque comprise dans son domaine.

Si maintenant λ était imaginaire, je conviendrais de dire que l'exposant $\lambda M_\gamma - N_\gamma$ est supérieur, égal ou inférieur à l'exposant $\lambda M_i - N_i$, suivant que

$$\operatorname{mod}(x-a)^{(\lambda M_\gamma - N_\gamma)-(\lambda M_i - N_i)}$$

tend vers zéro, vers une limite finie, ou augmente indéfiniment lorsque x tend vers a. D'après cette définition, si l'on désigne par $R(\lambda)$ la partie réelle de λ, pour que l'on ait

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i,$$

il faut et il suffit que

$$R(\lambda) M_\gamma - N_\gamma < R(\lambda) M_i - N_i,$$

et nous avons vu que pour qu'une telle équation soit satisfaite pour tous les indices i autres que ceux qui appartiennent au point multiple (γ), il faut et il suffit que ce point γ soit un sommet du polygone et que $R(\lambda)$ soit comprise dans le domaine de ce sommet. Or, ce domaine n'est jamais nul et il est représenté par un intervalle fini si le sommet est un sommet intermédiaire, par un intervalle indéfini dans un sens si c'est un sommet extrême, et par l'intervalle de $\lambda = -\infty$ à $\lambda = +\infty$ si ce sommet est l'unique sommet du polygone.

On peut donc dire d'une façon générale que : pour qu'un terme ayant un indice qui appartient à un point multiple (M_γ, N_γ) fasse partie de T, il faut et il suffit que ce point multiple soit un sommet du polygone, et que la partie réelle de λ soit comprise dans le domaine de ce sommet. Si ces conditions sont remplies, T sera la somme de tous les termes correspondant aux indices du point multiple, lorsque $R(\lambda)$ n'est égale à aucune des valeurs limites de l'intervalle qui définit le domaine du sommet; et à tous ces termes s'ajouteront encore les termes correspondant aux indices du sommet voisin, lorsque $R(\lambda)$ prend une des valeurs limites de cet intervalle; dans ce cas, d'ailleurs, λ devient égal au coefficient angulaire du côté joignant le sommet multiple considéré au sommet voisin.

On peut résumer ce qui précède en deux lemmes suivants :

Lemme I. — Pour que T se compose d'un seul terme, il faut et il suffit :

1° Que le polygone n'ait aucun côté non parallèle aux axes, ou, s'il en a, que λ ne soit égal à aucun des coefficients angulaires de ces côtés;

2° Que le polygone n'ait aucun sommet multiple, ou, s'il en a, que $R(\lambda)$ ne soit comprise dans le domaine d'aucun de ces sommets.

Lemme II. — Pour que T se compose de deux ou de plusieurs termes, il faut et il suffit que l'une au moins des conditions suivantes soit remplie :

1° Le polygone a des côtés non parallèles aux axes et λ est égal au coefficient angulaire d'un de ces côtés; T sera alors la somme de tous les termes de F correspondant aux indices des points situés sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à λ.

2° Le polygone *a* des sommets multiples, et $R(\lambda)$ est comprise dans le domaine d'un de ces sommets; T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices du sommet considéré.

4. Utilisons maintenant ces deux lemmes pour donner à F certaines formes qui nous seront utiles dans la suite.

A. *Supposons remplies les conditions* 1° *et* 2° *du lemme I.* — L'ensemble T sera alors composé d'un terme unique, et l'indice de ce terme sera celui du sommet simple dans le domaine duquel $R(\lambda)$ est comprise. Soit h cet indice et posons, pour abréger,

$$\varphi_i(x)[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)] = \Omega_i(x);$$

on peut alors écrire F sous la forme

$$\text{(I)} \qquad F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}} \left[\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les points (M_i, N_i) autres que (M_h, N_h); il faut encore remarquer que tous les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, car d'après la définition même du terme d'indice h on a $S_{h,\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les points (M_i, N_i) autres que (M_h, N_h).

B. *Supposons remplie la condition* 1° *du lemme II.* — L'ensemble T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices des points situés sur le côté de coefficient angulaire λ.

Convenons de représenter par

$\sum\limits_{(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (M_i, N_i) situés sur la droite (i, j); par

$\sum\limits_{-(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points autres que ceux situés sur la droite (i, j).

Soit (γ, δ) un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; on a, lorsque λ est égal au coefficient angulaire de ce côté,

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x),$$

et F peut s'écrire

$$F = T + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x)$$

ou

$$\text{(II)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

où tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs.

C. *Supposons remplie la condition 2° du lemme II.* — T sera la somme de tous les termes correspondant aux indices du sommet multiple dans le domaine duquel $R(\lambda)$ est comprise. Convenons de représenter par

$\sum\limits_{(\gamma)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points confondus au sommet multiple dont γ est l'un des indices; par

$\sum\limits_{-(\gamma)}$ la sommation étendue à tous les indices i de 1 à s autres que ceux des points confondus au sommet (γ).

On aura donc, lorsque $R(\lambda)$ est comprise dans le domaine du sommet (γ),

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma)} \Omega_i(x),$$

$$F = T + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x)$$

ou

$$\text{(III)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

avec tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ positifs.

Il est encore à remarquer que, puisque la somme $\sum\limits_{(\gamma)}$ doit être étendue aux indices de tous les points confondus au sommet (γ), et que tous ces points ont les mêmes coordonnées et, en particulier, la même abscisse, si l'on désigne cette abscisse par μ, on aura

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) = f(x)^{\mu} \sum_{(\gamma)} A_i\, \varphi_i(x) + \sum_{(\gamma)} \varphi_i(x)\, \theta_i(x).$$

5. Supposons maintenant que $x = a$ soit un zéro ou un infini de l'intégrale y de l'équation $F = 0$, et tel que, pour une valeur déterminée de λ, le rapport

$$\frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$$

tende vers une limite déterminée, finie et différente de zéro, lorsque x tend vers a. Si $R(\lambda)$ est positive, a sera un zéro de l'intégrale d'ordre $R(\lambda)$; si $R(\lambda)$ est négative, a sera un infini de l'intégrale d'ordre $-R(\lambda)$.

Dans le voisinage de $x = a$, on peut écrire

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction tendant vers une limite déterminée ρ, finie et différente de zéro, lorsque x tend vers a.

Remplaçons y dans F; F prendra l'une des formes (I), (II), (III) suivant que les conditions (A), (B) ou (C) seront remplies. Quelle que soit celle des formes que F prendra, le résultat de la substitution de y dans F doit être identiquement nul quel que soit x dans le voisinage $x = a$, car y est l'intégrale de $F = 0$. Par conséquent, dans le voisinage de $x = a$, on aura identiquement, soit

$$\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

soit

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{s_{\gamma,\lambda}-s_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

soit

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{s_{\gamma,\lambda}-s_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

suivant que, dans le voisinage de $x = a$, F prend la forme (I), (II) ou (III).

Supposons que x tende vers a. Dans le cas du premier ordre, nous avons pu affirmer que $f(x)$ tendra vers une limite ρ finie et déterminée, et que l'on aura

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lim[(x-a)\, f'(x)] = 0, \\ \lim[(x-a)^2 f''(x)] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

pour toute valeur $x = a$ de x, sauf peut-être pour un certain nombre de valeurs fixes et connues à l'avance, qui coïncident avec les singularités transcendantes de l'intégrale. Il n'en est plus, en général, ainsi dans le cas des équations d'ordre supérieur.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons implicitement que les singularités transcendantes de l'intégrale considérée et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p soient fixes. Dans le cas où il n'en est pas ainsi, ce que nous dirons s'appliquera seulement aux intégrales particulières (ou dépendant des constantes) n'ayant que des singularités transcendantes données à l'avance, par exemple aux intégrales méromorphes de l'équation ou aux intégrales n'ayant, en fait de singularités mobiles, que des pôles et des points critiques algébriques (ainsi que leurs dérivées), et, d'une façon générale, *aux intégrales qui sont (ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre p) d'un ordre infinitésimal déterminé dans le voisinage d'une valeur de x mobile, qui les annule ou qui les rend infinies*, de telle sorte que, si l'intégrale y est d'ordre infinitésimal λ, sa dérivée d'ordre k est d'ordre $\lambda - k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$).

Dans ces cas, les conditions (E) seront remplies sans faire aucune hypothèse de plus, et comme les θ_i sont des polynomes en

$$f, \quad (x-a)f', \quad (x-a)^2 f'', \quad \ldots, \quad (x-a)^p f^{(p)},$$

dans lesquels les termes dépendant uniquement de f manquent, on aura, pour $x = a$,

$$\lim \theta_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Donc, on aura pour toute valeur de a, sauf pour certaines valeurs particulières a', pour lesquelles les fonctions $\varphi_i(x)$ deviennent infinies et que l'on reconnaîtra toujours d'avance,

$$\lim \Omega_i(x) = A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Par conséquent, on voit, en tenant compte de ce que tous les exposants $S_{k,\lambda} - S_{i,\lambda}$ et $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, que, pour toute valeur de a, ne coïncidant avec aucune des valeurs particulières a':

A. Si les conditions 1° et 2° du lemme I sont remplies, on aura

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0.$$

B. Si la condition 1° du lemme II est remplie, on aura

$$\sum_{(\gamma, \delta)} A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0,$$

où il faut poser

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1i}},$$

et remplacer λ par le coefficient angulaire du côté (γ, δ) considéré. J'appellerai cette équation *l'équation en* ρ *relative au côté* (γ, δ).

C. Si la condition 2° du lemme II est remplie, on aura

$$\sum_{(\gamma)} A_i \varphi_i(a) = 0.$$

En y remplaçant A_i par son expression en λ, on aura une équation algébrique en λ

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + s_1 \lambda^{m-1} + s_2 \lambda^{m-2} + \ldots + s_{m-1}\lambda + s_m = 0$$

(à coefficients s_i fonctions de a) que j'appellerai : *l'équation en* λ *relative au sommet multiple* (γ).

L'équation en λ relative à un sommet simple (i) se réduit à $A_i = 0$ ou

$$\lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1i}} = 0.$$

6. Jusqu'à présent je n'ai pas spécifié si a était un zéro ou un infini de l'intégrale ; distinguons maintenant ces deux cas.

I. — La valeur a est un infini de l'intégrale.

A. Supposons d'abord les deux conditions suivantes remplies :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire négatif, ou, s'il en a, λ n'est égal à aucun de ces coefficients.

2° Le polygone n'a aucun sommet multiple à domaine négatif, ou, s'il en a, $R(\lambda)$ n'est pas comprise dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard au lemme I et à ce que λ doit être négatif, on voit que l'équation

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0$$

doit avoir lieu pour toutes les valeurs de a qui ne coïncident pas avec les infinis a' des fonctions $\varphi_i(x)$; et, comme ρ est une quantité différente de zéro et que l'équation $A_h = 0$, qui est la suivante

$$\lambda^{\gamma_{0h}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1h}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0,$$

n'a aucune racine en λ négative, a doit être une racine de l'équation

$$\varphi_h(a) = 0.$$

On en conclut que : si les conditions 1° et 2° sont remplies, a ne dépend pas des constantes d'intégration et annule ou rend infinie au moins l'une des fonctions $\varphi_i(x)$.

B. Supposons ensuite que le polygone ait des côtés à coefficient angulaire négatif, et que λ soit égal à un de ces coefficients.

On aurait alors, si (γ) et (δ) sont les deux sommets qui limitent le côté dont le coefficient angulaire est égal à λ, et si a ne coïncide avec aucune des valeurs a'

$$\sum_{(\gamma, \delta)} A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à a, cette équation a au moins une racine en ρ finie et différente de zéro, car tous les M_i figurant dans le premier membre de l'équation sont distincts, et l'infini a peut dépendre des constantes d'intégration. On voit aussi que la limite ρ de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est une fonction algébrique des $\varphi_i(a)$. En particulier, lorsque l'équation $F = 0$ est algébrique non seulement par rapport à y et à ses dérivées, mais aussi, par rapport à x, cette limite est une fonction algébrique de a. Enfin, si ces $\varphi_i(x)$ sont des constantes B_i (par exemple si $F = 0$ ne contient pas x explicitement), la limite ρ ne varie pas avec les constantes d'intégration, et elle est une racine de l'équation algébrique

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i B_i \rho^{M_i} = 0,$$

dans laquelle il faut d'abord supprimer toutes les racines nulles.

C. Supposons enfin que le polygone ait des sommets multiples à domaine négatif et que $R(\lambda)$ soit comprise dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard au lemme II, pour toutes les valeurs a ne coïncidant pas avec les a', on aura

$$\sum_{(\gamma)} A_i \varphi(a) = 0,$$

la sommation s'étendant à tous les indices du sommet multiple dont γ est un des indices. Nous avons appelé précédemment cette équation : l'équation en λ relative au sommet multiple (λ); écrivons-la sous la forme

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + s_1(a)\lambda^{m-1} + s_2(a)\lambda^{m-2} + \ldots + s_{m-1}(a)\lambda + s_m(a) = 0.$$

Si toutes les racines λ de cette équation dépendent de a, lorsque a varie avec les constantes d'intégration, λ variera aussi; mais il n'en est pas nécessairement ainsi lorsqu'une ou plusieurs racines sont indépendantes de a. Si, en particulier, aucune racine ne dépend de a, l'ordre λ de l'infini a ne varie certainement pas avec les constantes d'intégration. Ceci arrive, par exemple, pour les équations où x ne figure pas explicitement, et pour ces équations (les conditions relatives aux singularités transcendantes étant remplies), l'ordre d'un infini mobile quelconque est égal à une racine, toujours fixe, de l'équation en λ (lorsque cette équation ne se réduit pas à une identité), dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine du sommet multiple (γ).

On peut dire, d'une façon générale, que, pour que l'infini a puisse être mobile et son ordre λ fixe et compris dans le domaine d'un sommet multiple (γ), il faut que l'équation en λ, relative à ce sommet, admette au moins une racine dont la partie réelle soit indépendante de a et comprise dans le domaine de ce sommet; λ est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines.

Si le polynome se réduit à un seul sommet multiple (une droite), le domaine de ce sommet est représenté par l'intervalle de $\lambda = -\infty$ à $\lambda = +\infty$; dans ce cas, pour que l'infini a puisse être mobile et son ordre λ fixe, il faut que l'équation en λ relative à ce sommet admette au moins une racine dont la partie réelle soit négative et indépendante de a.

De ce qui précède on déduit les théorèmes suivants [1] :

Théorème I. — *Toutes les fois que l'intégrale de* $F = 0$ *a des infinis mobiles, une au moins des conditions suivantes est remplie :*

1° *Le polygone a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et* λ *est égal à un de ces coefficients ;*

2° *Le polygone a un ou plusieurs sommets multiples à domaine négatif, et il existe une région* S *du plan des* a, *ne se réduisant pas à des points isolés, limitée ou illimitée et telle que pour toute valeur de* a *comprise dans cette région, l'équation en* λ *relative à un tel sommet admet au moins une racine dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine de ce sommet;* λ *est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines, et l'infini* a *appartient à la région* S.

Pour mettre bien évidence le sens de ce théorème, appliquons-le à l'exemple

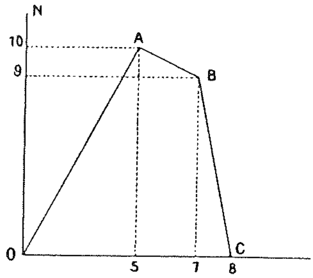
$$F = y'^5 y''^2 + \varphi_1(x) y y'^3 y''^3 + \varphi_2(x) y^8 + \varphi_3(x) y''^5 + \varphi_4(x) = 0.$$

Le polygone de F (*fig.* 8) est celui de la figure; le sommet B est double et d'indices 1 et 2, et les sommets A et C, d'indices 3 et 4, sont des sommets simples.

[1] Dans tous ces théorèmes il s'agira, bien entendu, des infinis (ou des zéros) tels que l'intégrale considérée (ainsi que ses dérivées d'ordre p) soit d'un ordre infinitésimal déterminé dans leur voisinage.

Le coefficient angulaire du côté AB est $-\frac{1}{2}$, celui de BC est -9.
Le domaine du sommet B est l'intervalle de $\lambda = -9$ à $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Fig. 8.



L'équation en λ relative à ce sommet est

$$\lambda^7(\lambda - 1)^2 + \varphi_1(a)\lambda^6(\lambda - 1)^3 = 0,$$

ayant pour racines

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{1 + \varphi_1(a)}.$$

Si un infini mobile a de l'intégrale n'est pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9, la partie réelle de $\frac{1}{1+\varphi_1(a)}$ est négative et comprise dans l'intervalle $(-9, -\frac{1}{2})$; s'il n'en est pas ainsi, l'infini a est fixe. Posons

$$a = \xi + \eta i, \qquad \frac{1}{1 + \varphi_1(\xi + \eta i)} = \varpi(\xi, \eta) + i\chi(\xi, \eta);$$

l'infini mobile a (s'il n'est pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9) reste constamment compris dans la portion du plan (ξ, η) commune aux deux régions

$$\varpi(\xi, \eta) > -9 \qquad \text{et} \qquad \varpi(\xi, \eta) < -\tfrac{1}{2}.$$

En dehors de cette portion du plan, tout infini de y n'étant pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9 est fixe.

Théorème II. — *Toutes les fois que l'intégrale a des infinis mobiles* *ayant un ordre λ fixe, une au moins des conditions suivantes est remplie :*

1° *Le polygone a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et λ est égal à un de ces coefficients ;*

2° *Le polygone a un ou plusieurs sommets multiples à domaine négatif et tels que l'équation en λ relative à ce sommet ait au moins une racine dont la partie réelle est indépendante de a, négative et comprise dans le domaine de ce sommet ; λ est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines.*

Du théorème I on déduit comme corollaire le suivant :

Théorème III. — *Toutes les fois que le sommet ϖ droit du polygone est en même temps le sommet extrême droit, et lorsque ce sommet est simple, ou bien, si lorsqu'il est multiple il ne lui correspond dans le plan des a aucune région* S *définie comme dans le théorème I, les infinis de l'intégrale ne varient pas avec les constantes d'intégration.*

De plus, si h est l'indice du sommet ϖ droit, et si c'est un sommet simple, tout infini de l'intégrale est, soit une racine de l'équation $\varphi_h(x) = 0$, soit un infini des autres fonctions $\varphi_i(x)$; si c'est un sommet multiple, tout infini de l'intégrale est, soit un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ autres que celles correspondant à ce sommet, soit un des points isolés auxquels se réduisent les régions S correspondant au sommet, dans le cas où de tels points existent.

On le voit facilement en remarquant que pour une valeur quelconque de λ, ayant sa partie réelle négative, l'ensemble T se réduit au terme d'indice h, si le sommet est simple, et qu'il soit égal à la somme des termes correspondant à tous les indices du sommet, si celui-ci est multiple. Dans ce dernier cas, à part les points isolés auxquels se réduisent les régions S correspondant au sommet, l'équation en λ n'admet aucune racine dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine du sommet, quelle que soit la valeur attribuée à a.

Théorème IV. — *Même lorsque le sommet ϖ droit n'est pas le sommet extrême droit, si λ n'est pas égal au coefficient angulaire d'un des côtés du polygone à droite du sommet ϖ droit, ou si les équations en λ relatives aux sommets à droite de ce sommet ϖ ont leurs racines en λ indépen-*

dantes de a, *ne coïncidant pas avec* λ *donné de l'infini considéré, cet infini doit annuler* $\varphi_h(x)$ [ou rendre infinie l'une des autres fonctions $\varphi_i(x)$], *h désignant l'indice du sommet dont le domaine comprend* $-\lambda$.

Ce qui précède fait voir que, excepté le seul cas où le polygone se réduit à un seul sommet multiple et tel que le premier membre de l'équation en λ relative à ce sommet est identiquement nul, quels que soient a et λ, *toutes les fois que l'ordre d'un infini mobile est fixe, il est une fonction algébrique des constantes numériques figurant dans le premier membre de l'équation différentielle*. En particulier, lorsque ces constantes sont des nombres algébriques, l'ordre λ est aussi un nombre algébrique. Enfin, toutes les fois que la condition 2° du théorème I n'est pas remplie, l'ordre de tout infini mobile est un nombre ne variant pas avec les constantes d'intégration et, de plus, commensurable.

On peut tirer du théorème I encore la remarque suivante :

Supposons que le sommet ϖ droit du polygone soit en même temps le sommet extrême droit et que ce soit un sommet multiple ; supposons de plus que la région S définie dans le théorème I et relative à ce sommet ne comprenne pas le plan des a tout entier, et désignons par $-$S toute région du plan des a non comprise dans S. Il résulte du théorème I que dans la région $-$S l'intégrale ne peut avoir que des infinis isolés, ne variant pas avec les constantes d'intégration. Si, en particulier, cette région $-$S intercepte sur l'axe des réels des portions limitées ou illimitées de cet axe, *dans aucune de ces portions l'intégrale ne peut avoir des infinis réels mobiles*. Et si l'axe des réels se trouve tout entier dans la région $-$S, tous les infinis réels de l'intégrale sont fixes et coïncident avec un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ autres que celles correspondant aux indices du sommet ϖ droit. *On a ainsi des conditions suffisantes pour que les infinis réels de l'intégrale soient fixes et, si ces conditions sont remplies, on peut considérer ces infinis comme donnés*. Dans un grand nombre de cas on pourra disposer des coefficients figurant dans le premier membre de l'équation, de sorte que tous les infinis réels soient fixes. Enfin on peut facilement construire des types généraux d'équations où les circonstances précédentes s'y réalisent.

Appliquons ces résultats *aux équations où* x *ne figure pas explicitement*.

Pour ces équations, aucune racine de l'équation en λ relative à un sommet multiple quelconque ne dépend de a; par conséquent, l'ordre d'un infini mobile de l'intégrale ne varie pas avec a. D'autre part, comme dans l'intégrale générale il y a toujours une constante additive à x, tout infini de l'intégrale, dans le cas où ces infinis existent, varie certainement avec les constantes d'intégration. Par conséquent, pour ces équations :

Toutes les fois qu'une intégrale devient infinie pour une valeur finie de x, une au moins des conditions 1° *et* 2° *du théorème II est remplie.*

Enfin, excepté le seul cas où le polygone se réduit à un seul sommet multiple et tel que le premier membre de l'équation en λ relative à ce sommet est identiquement nul quel que soit λ, l'ordre d'un infini quelconque de l'intégrale est toujours racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions linéaires et homogènes des coefficients figurant dans le premier membre de l'équation différentielle, ou bien égal au coefficient angulaire d'un côté du polygone. Lorsque les constantes numériques figurant dans l'équation différentielle sont des nombres algébriques, l'ordre d'un infini quelconque est également un nombre algébrique.

II. — La valeur a est un zéro de l'intégrale.

Il suffit d'appliquer les propositions précédentes à la transformée de $F = 0$ en $\frac{1}{y}$ pour obtenir des propositions concernant les zéros de l'intégrale. Dans toutes ces propositions, les côtés à coefficient angulaire négatif et les sommets à domaine négatif sont seuls à considérer; mais on peut aussi avoir des renseignements sur les zéros par la considération des côtés à coefficient angulaire positif et des sommets à domaine positif du polygone II de $F = 0$ sans être obligé de construire le polygone de la transformée.

Supposons, par exemple, les deux conditions suivantes remplies :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire positif, ou, s'il en a, λ n'est égal à aucun de ces coefficients;

2° Le polygone n'a aucun sommet multiple à domaine positif, ou, s'il en a, λ n'est pas compris dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard à ce que λ doit être positif et au lemme I, on voit que l'équation

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0$$

doit être satisfaite pour toute valeur de a ne coïncidant pas avec les infinis à des $\varphi_i(x)$. Cette équation est satisfaite soit par les valeurs de a racines de $\varphi_h(a) = 0$, soit par les valeurs de λ racines de l'équation

$$A_h = \lambda^{\gamma_{0h}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1h}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0.$$

Par conséquent : *Si les conditions* 1° *et* 2° *sont remplies, et si λ n'est pas égal à un des entiers* 1, 2, 3, ..., $(p-1)$, *a est fixe et annule ou rend infinie au moins une des fonctions $\varphi_i(x)$.*

A chacune des propositions précédentes relatives aux infinis correspond une proposition relative aux zéros de l'intégrale et dans laquelle interviennent les côtés à coefficient angulaire positif ou les sommets à domaine positif; seulement ces propositions auraient un caractère moins décisif que les premières, car ici les coefficients A_i généralement s'annulent pour des valeurs de λ entières et positives, et l'ordre λ du zéro considéré peut être égal précisément à un de ces entiers, auquel cas on ne peut rien dire sur la fixité d'un tel zéro.

Mais il suffit d'ajouter encore une condition pour que les côtés à coefficient angulaire positif et les sommets à domaine positif donnent des résultats équivalents à ceux que nous avons trouvés dans le cas des infinis.

Soit δ_k l'indice du sommet dont le domaine comprend la direction

$$\lambda = k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

p étant l'ordre de l'équation différentielle donnée $F = 0$.

Appelons δ_k ces sommets; il peut arriver qu'un même sommet satisfera à la fois à plusieurs de ces conditions (que son domaine comprend plusieurs entiers 1, ..., p) et même qu'un seul sommet satisfasse à toutes. *Supposons que dans* F *l'ensemble des termes qui correspondent aux indices $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ ne contienne que x, y, y'.* Je dis que :

Toutes les fois que les conditions du lemme I (p. 70) *sont remplies, le* *zéro a est fixe et annule une des fonctions*

$$\varphi_{\delta_1}(x), \quad \varphi_{\delta_2}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{\delta_p}(x)$$

ou rend infinie une des autres fonctions $\varphi_i(x)$.

En effet, T se réduit alors à un seul terme et l'on aura, si h est l'indice de ce terme,

$$(1) \qquad A_h\,\varphi_h(a)\rho^{M_h} = 0.$$

D'abord, il est évident que, si λ ne coïncide avec aucun des entiers positifs $1, 2, \ldots, p$, la dernière équation exige que a annule $\varphi_h(a)$. Mais il en est ainsi même si λ est égal à un de ces entiers; car alors l'indice h est nécessairement égal à un des indices $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ (puisque d'après la définition même des sommets δ_k on a $S_{\delta_k,\lambda} > S_{i,\lambda}$), et comme, dans les termes qui ont ces indices ne figurent que x, y, y', pour ces termes on a

$$A_{\delta_1} = \lambda^{\gamma_0 \delta_1}, \qquad A_{\delta_2} = \lambda^{\gamma_0 \delta_2}, \qquad \ldots, \qquad A_{\delta_p} = \lambda^{\gamma_0 \delta_p},$$

et l'équation $A_h = 0$ ne peut être satisfaite que pour $\lambda = 0$. Donc on a $\varphi_h(a) = 0$.

Il s'ensuit que pour toutes les équations dans lesquelles les termes correspondant aux indices des sommets δ_k ne contiennent que x, y, y', on aura par la considération des sommets à gauche du sommet ϖ des propositions analogues à celles que nous a fournies la considération des sommets à droite du sommet ϖ. Il est inutile d'écrire ici ces propositions, tout à fait analogues à celles relatives aux infinis de l'intégrale et très faciles à énoncer. Pour les obtenir il n'y a qu'à remplacer, dans les propositions concernant les infinis, les coefficients angulaires négatifs par les positifs, les sommets multiples à domaine négatif par ceux à domaine positif, etc.

CHAPITRE II.

QUELQUES APPLICATIONS AUX INTÉGRALES UNIFORMES.

1. Les méthodes de M. Poincaré, permettant de préciser la nature analytique des transcendantes uniformes représentées par l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre, ne s'étendent pas immédiatement aux équations d'ordre supérieur. La raison de ce fait, mise en évidence par M. Painlevé, est que pour les équations du premier ordre les singularités transcendantes sont fixes et que, par suite, la transformation biuniforme de la courbe

$$F(\overline{x}, y, y') = 0 \qquad \text{en} \qquad F(\overline{x_0}, y_0, y'_0) = 0$$

est nécessairement birationnelle, fait qui ne subsiste pas pour les équations d'ordre supérieur, ce qui change complètement le caractère de cette théorie. Néanmoins ces méthodes s'étendent au cas du second ordre lorsque la transformation biuniforme correspondante est birationnelle et ceci, joint à d'autres considérations dues à MM. Picard et Painlevé, a fait que la théorie des transcendantes uniformes, engendrées par l'intégration des équations algébriques du second ordre est aujourd'hui complète sur plusieurs points.

Je rappellerai quelques résultats fondamentaux connus, relatifs à l'intégrale générale d'une équation du second ordre, algébrique en x, y, y', y'', lorsque cette intégrale est une fonction uniforme de x.

Ces intégrales peuvent présenter, en fait de singularités, des pôles et des points essentiels fixes ou mobiles, mais elles ne présentent jamais de coupures [1]. C'est là une profonde différence qui sépare le cas du second ordre de celui des ordres supérieurs. Ainsi les intégrales uniformes des équations très simples du troisième ordre présentent

---

[1] PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 362-365; 1893.

des coupures, et de plus ces coupures varient avec les constantes d'intégration.

Dans ses travaux sur les équations $F(y, y', y'') = 0$, algébriques en y, y', y'' et où x ne figure pas explicitement, M. Picard [1] a montré que quand l'intégrale générale est uniforme et dépend algébriquement de deux constantes d'intégration, la surface algébrique représentée par l'équation admet une transformation birationnelle en elle-même et on peut alors reconnaître la nature de l'intégrale générale. La forme analytique de cette intégrale sera différente suivant la nature de la transformation birationnelle. L'intégrale, supposée uniforme, est rationnelle soit en x, soit en e^{ax}, soit en $\operatorname{sn}(ax)$ et $\operatorname{cn}(ax)$, $\operatorname{dn}(ax)$, ou bien est une fonction quadruplement périodique de deux variables $ax + C_1$, $bx + C_2$, où a et b sont deux constantes convenablement déterminées et C_1, C_2 les deux constantes d'intégration. Dans ce dernier cas l'intégrale peut se réduire à une fonction rationnelle soit de e^{ax} et e^{bx}, soit de x et e^{ax}

Dans le cas où l'on n'admet pas que l'intégrale, supposée uniforme, dépende algébriquement des constantes d'intégration, la question de reconnaître si l'intégrale générale est uniforme et de préciser sa nature analytique apparaît comme beaucoup plus difficile. M. Picard a formé des conditions nécessaires dans tous les cas (mais non suffisantes), pour que l'intégrale fût uniforme. Il a notamment considéré le cas $y'' = R(y, y')$, où R est rationnel en y, y', et montré que, toutes les fois que l'intégrale générale y est uniforme, on peut la mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions uniformes, mais n'ayant pas de pôles, et satisfaisant à des équations différentielles faciles à former au moyen de l'équation donnée.

Plus récemment M. Painlevé [2] est arrivé à ce résultat, relativement à l'équation $y'' = R(y, y')$, où R est rationnel en y' et algébrique en y, que l'intégrale générale, quand elle est uniforme, est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles, doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques. De plus, on peut toujours (lorsque l'intégrale est uniforme) choisir les

---

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables;* 1889.
(2) *Comptes rendus,* t. CXVII, p. 211-214; 1893.

constantes d'intégration de façon que l'intégrale dépende algébriquement de l'une au moins de ces constantes. La méthode qui permet d'ailleurs de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation donnée est effectivement uniforme est susceptible d'être étendue à toutes les équations algébriques en y, y', y'' et permet de prévoir qu'un théorème analogue au précédent s'applique à ces équations.

Si x figure explicitement dans $F(x, y, y', y'') = 0$, et si l'on suppose que la transformation biuniforme qui transforme la surface

$$F(\bar{x}, y, y', y'') = 0 \qquad \text{en} \qquad F(\bar{x}_0, y_0, y'_0, y''_0) = 0$$

soit en même temps *birationnelle*, M. Picard a montré que les méthodes de M. Poincaré, relatives au cas du premier ordre, se généralisent et permettent de préciser la nature de l'intégrale supposée uniforme (ou plus généralement à points critiques fixes). Cette intégrale se ramène alors aux transcendantes uniformes que définissent les équations algébriques du premier ordre, les équations linéaires et les fonctions de deux variables quadruplement périodiques.

M. Painlevé a montré qu'il en sera ainsi toutes les fois que l'on peut choisir les constantes d'intégration de sorte que l'intégrale uniforme dépende algébriquement d'une constante ou de toutes les deux. Lorsque y est fonction transcendante d'une seule constante d'intégration, l'équation différentielle se ramène, dans le cas le plus défavorable, à une équation de Riccati, dont les coefficients dépendent eux-mêmes d'une équation de Riccati à coefficients algébriques (1). Si les deux constantes entrent algébriquement dans y, l'équation $F = 0$ s'intègre soit algébriquement, soit par quadrature, ou bien se ramène à une équation linéaire du troisième ordre (2). Les méthodes de M. Painlevé permettent d'ailleurs, étant donnée une équation

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

de reconnaître si l'intégrale générale est une fonction uniforme de x, dépendant algébriquement des constantes d'intégration.

---

(1) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 566; 1893.
(2) *Ibid.*, t. CXVI, p. 173; 1893.

On arrive ainsi à cette conclusion générale : tant que y ne renferme pas d'une façon transcendante les deux constantes d'intégration (de quelque manière qu'on les choisisse), l'intégrale générale, quand elle est uniforme, s'exprime au moyen des transcendantes connues, auxquelles conduisent la théorie des équations du premier ordre et celle des équations linéaires. Mais il n'en est plus de même lorsque l'intégrale est fonction transcendante des deux constantes ; l'équation $F(x, y, y', y'') = 0$ peut alors définir des transcendantes nouvelles, comme le montrent certains exemples formés récemment par M. Painlevé.

2. Les complications s'accroissent encore quand on passe du second ordre aux ordres supérieurs. C'est ainsi que les fonctions modulaires et fuchsiennes, intégrales d'équations du troisième ordre très simples (où x ne figure pas explicitement) admettent des coupures variables avec les constantes d'intégration. De telles équations du troisième ordre introduisent donc des transcendantes essentiellement nouvelles, ce qui n'a pas lieu dans le cas du second ordre.

La différence est encore bien plus grande lorsque x figure explicitement dans l'équation. Néanmoins, quand on se borne à considérer les équations d'ordre quelconque, où x peut figurer, dont l'intégrale est uniforme et dépend algébriquement des constantes, les théorèmes énoncés plus haut, dans le cas du second ordre, s'étendent sans peine.

Mais tous les résultats que nous avons énumérés jusqu'ici ne concernent que l'intégrale *générale*, et n'indiquent rien sur la recherche des intégrales uniformes *particulières*. La détermination de ces intégrales et de leur nature analytique est un problème plus compliqué que le problème analogue relatif à l'intégrale générale. C'est ce qui donne quelque intérêt aux résultats qui suivent.

Je vais indiquer quelques simplifications que les théorèmes précédents sur les zéros et les pôles des intégrales permettent d'apporter à l'étude des intégrales uniformes (particulières ou générales) de classes étendues des équations différentielles d'un ordre quelconque. A l'aide de ces théorèmes et de quelques théorèmes de la théorie générale des fonctions, nous pourrons réduire, pour des types assez généraux d'équations, l'étude des intégrales uniformes à l'étude analogue relative à des équations d'ordre inférieur, ou à l'étude des intégrales holomorphes des autres équations. J'indiquerai des types généraux d'équations d'ordre quelconque, pour lesquelles on sera certain que les transcendantes uniformes engendrées par l'intégration ne sont pas distinctes des transcendantes connues, et pour lesquelles on saura reconnaître s'il y a des intégrales uniformes ou non.

Dans tout ce qui va suivre, il s'agira des intégrales uniformes n'ayant que des points essentiels donnés à l'avance, isolés et en nombre fini, et en particulier, des intégrales méromorphes.

SUR LES ZÉROS ET LES PÔLES DES INTÉGRALES UNIFORMES.

1. L'ordre d'un infini ou d'un zéro quelconque, mobile ou fixe, d'une intégrale uniforme est toujours fixe et égal à un nombre entier. Par conséquent, en tenant compte des théorèmes précédents, on peut énoncer les propositions suivantes :

I. Si une intégrale uniforme de $F = 0$, contenant une ou plusieurs constantes d'intégration, a des infinis mobiles, une au moins des conditions suivantes est remplie :

1° Le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif, et l'ordre λ est égal à un de ces entiers;

2° Le polygone a au moins un sommet multiple, dont le domaine comprend un ou plusieurs nombres entiers négatifs $n_1, n_2, n_3, \ldots$, et tel que l'équation en λ relative à ce sommet admet au moins une racine indépendante de a et égale à un des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots$; l'ordre λ est alors égal à un de ces entiers.

II. Si y est une intégrale uniforme de $F = 0$, contenant ou non des constantes d'intégration, et lorsque aucune des conditions 1° et 2° de la proposition I n'est remplie, tout pôle de y est : soit une racine, soit un pôle d'au moins une fonction $\varphi_i(x)$, ou bien une racine d'une certaine équation en λ, et voici comment on peut préciser davantage ces valeurs.

Soient h l'indice du sommet ϖ droit, $h_1, h_2, \ldots$ les indices de ceux des sommets qui sont à droite du sommet (h) et qui comprennent chacun dans leur domaine au moins un nombre entier négatif, s'il existe de tels sommets. Alors :

1° Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *simples,* ou du sommet h supposé *simple,* le pôle a annule celle des fonctions $\varphi_i(x)$ dont l'indice est égal à celui du sommet dans le domaine duquel λ est compris, ou rend infinie l'une des autres fonctions $\varphi_i(x)$.

2° Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *multiples,* ou du sommet h supposé *multiple,* le pôle a est : soit une racine de l'équation en λ relative à ce sommet (dont le domaine comprend λ), lorsque dans cette équation on remplace λ par un des entiers négatifs qui se trouvent compris dans le domaine du sommet, soit un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ ne correspondant pas à ce sommet.

Supposons que l'équation $F = 0$ ne contienne pas x explicitement. Si elle admet une intégrale uniforme, elle en admet alors une infinité, dépendant d'au moins une constante arbitraire. Pour qu'une telle intégrale puisse devenir infinie pour une valeur finie de x, il faut que le polygone ait au moins un côté à coefficient angulaire égal à un entier négatif, et que λ soit égal à un de ces coefficients; ou bien qu'il y ait un ou plusieurs sommets multiples tels que l'équation en λ admette des racines entières négatives et comprises dans le domaine du sommet; alors λ est égal à l'une de ces racines. Si aucune de ces conditions n'est remplie, *toute intégrale méromorphe de l'équation est holomorphe dans tout le plan.*

Enfin, il est facile de transformer toutes ces propositions en propositions analogues concernant les zéros des intégrales uniformes.

2. Posons dans l'équation donnée

$$F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0 \tag{1}$$

$y = \frac{1}{z} + \alpha$, où α est une constante indéterminée; l'équation se transforme en

$$\Phi(x, z, z', \dots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \Psi_i(x, \alpha) z^{s_{0i}} z'^{s_{1i}} \dots z^{(p)s_{pi}} = 0,$$

où les $s_{i,j}$ sont des entiers positifs et les $\psi_i(x, \alpha)$ des polynomes en α dont les coefficients sont fonctions de x.

Supposons construit le système (M_i, N_i) de Φ. Dans ce système il y aura au moins un ensemble de points (M_i, N_i) tels, qu'en les supprimant, le polygone Π du système qui reste ne remplisse pas les conditions 1° et 2° de la proposition précédente I (p. 89). Soit

$$(M_{h_1}, N_{h_1}), \qquad (M_{h_2}, N_{h_2}), \qquad \ldots, \qquad (M_{h_k}, N_{h_k})$$

un tel ensemble. *Si les k équations*

$$\text{(A)} \qquad \Psi_{h_1}(x, \alpha) = 0, \qquad \Psi_{h_2}(x, \alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi_{h_k}(x, \alpha) = 0$$

ont une racine α, commune et indépendante de x, les valeurs de x, racines de l'équation $y(x) - \alpha = 0$ [où y est une intégrale uniforme quelconque], *sont fixes et connues à l'avance.*

Si le nombre de ces racines α surpasse 2, et si x figure algébriquement dans $F = 0$, *toute intégrale méromorphe (ou plus généralement à un nombre fini de points essentiels) est une fraction rationnelle en x.*

Posons dans l'équation (1) $y = \frac{1}{z} + u$, u étant une fonction de x indéterminée; cette équation deviendra

$$\Psi(x, z, z', \ldots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \Omega_i z^{s_{0,i}} z'^{s_{1,i}} \ldots z^{(p)s_{p,i}} = 0,$$

où les $s_{i,j}$ sont des entiers positifs et les Ω_i des polynomes en u, u', ..., $u^{(p)}$ dont les coefficients sont fonctions de x. Les indices h_1, h_2, ..., h_k étant définis comme tout à l'heure, *si les k équations différentielles*

$$\Omega_{h_1} = 0, \qquad \Omega_{h_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{h_k} = 0$$

ont une intégrale méromorphe $u = \chi(x)$ commune, les racines en x de l'équation $y(x) - \chi(x) = 0$ [où y est une intégrale méromorphe quelconque de (1)] *sont fixes et connues à l'avance.*

3. Soit $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une équation où x ne figure pas explicitement; si elle admet une intégrale méromorphe, elle en admet une infinité. Si le polygone de $F = 0$ n'a aucun côté à coefficient angu-

laire entier négatif, et si l'équation en λ relative au sommet ϖ droit n'a aucune racine entière et négative, *toute intégrale méromorphe est holomorphe dans tout le plan.*

Supposons maintenant que les conditions suivantes soient remplies :

A. *Le polygone à un, et un seul, côté à coefficient angulaire entier et négatif, et ce coefficient est égal à* -1; *de plus, parmi les sommets à domaine négatif, il n'y en a aucun tel que l'équation en* λ *relative à ce sommet ait des racines entières, négatives et comprises dans le domaine de ce sommet.*

Alors, si une intégrale méromorphe y a des pôles, ce sont des pôles simples. La limite ρ du rapport $\frac{y}{x-a}$ pour $x = a$ est le *résidu* de y relatif à un tel pôle, et ce résidu est égal à une des racines ρ non nulles de l'équation en ρ

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i B_i \rho^{\mu_i} = 0, \tag{1}$$

relative au côté à coefficient angulaire -1, où il faut poser dans les A_i $\lambda = -1$. Par conséquent, *ces résidus sont indépendants des constantes d'intégration et seront toujours connus.*

B. *L'équation en* ρ (*la condition* A *étant supposée remplie*) *n'a qu'une seule racine non nulle, ou, s'il y en a plusieurs, leurs rapports deux à deux sont tous positifs et commensurables.*

Remarquons qu'il est facile de s'assurer s'il en est ainsi sans résoudre l'équation en ρ, car en la mettant sous la forme

$$\rho^m + T_1\rho^{m-1} + T_2\rho^{m-2} + \ldots + T_m = 0,$$

aucun des coefficients $T_1, \ldots, T_m$ ne peut être nul, et si l'on forme la transformée en $\sigma = \frac{\rho}{T_1}$ de cette équation, cette transformée doit avoir toutes ses racines $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ réelles, négatives et commensurables, car si l'on désigne par $\varpi_{i,1}, \varpi_{i,2}, \ldots, \varpi_{i,m}$ les rapports, tous commensurables et positifs, des racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ à la racine ρ_i, on aura

$$\sigma_i = \frac{\rho_i}{T_1} = \frac{\rho_i}{-\sum\limits_{k=1}^{k=m} \rho_k} = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{k=m} \varpi_{i,k}} = \text{nombre négatif et commensurable.}$$

On calculera donc facilement toutes les racines de l'équation en σ, et par suite celles de l'équation en ρ; ou bien on constatera que la condition B n'est pas remplie.

Les conditions A et B étant remplies, il existera un nombre T (réel ou imaginaire), tel que

$$\rho_1 = \mu_1 T, \qquad \rho_2 = \mu_2 T, \qquad \ldots, \qquad \rho_m = \mu_m T,$$

les μ_i étant des entiers positifs, premiers entre eux. L'intégrale $\frac{1}{T}\int y\,dx$ ne peut alors avoir que des périodes polaires, qui sont des multiples entiers de $2\pi i$, et la fonction

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int y\,dx}$$

sera une fonction entière de x. L'intégrale méromorphe y peut alors être mise sous la forme

$$y = T\frac{d}{dx}\log G(x),$$

$G(x)$ étant une fonction entière *généralisant (dans les cas où l'intégrale est effectivement méromorphe) les fonctions* $\mathrm{Al}(x)$ *de M. Weierstrass ou les fonctions* Θ *de la théorie des fonctions elliptiques*. On a ainsi la représentation de y par un quotient de deux fonctions entières, et $G(x)$ satisfait à une équation d'ordre $p+1$ facile à former au moyen de l'équation donnée en y.

Vérifions-le sur l'exemple simple

$$y''^2 - 4y'(1-y')(1-k^2y') = 0;$$

on vérifie facilement que les conditions A et B sont remplies et que l'équation en ρ relative au seul côté à coefficient angulaire négatif, lequel coefficient est égal à -1, a une seule racine $\rho = -\frac{1}{k^2}$. Par conséquent, la fonction

$$G(x) = e^{-k^2 \int y\, dx}$$

est une fonction entière de x, si y est méromorphe, ce qui est ici le cas, car l'intégrale générale de l'équation est

$$y = \int [\operatorname{sn}(x + C_1, k)]^2\, dx + C_2,$$

et la fonction $G(x)$ n'est autre, à un facteur constant près, que la fonction

$$\mathrm{Al}(x) = e^{-k^2 \int_0^x \int_0^x \operatorname{sn}^2 x\, dx^2}$$

de M. Weierstrass, laquelle est bien une fonction entière de x.

4. Il peut arriver que l'équation $F = 0$ ne satisfasse pas aux conditions A et B, mais qu'en posant

$$z = R(y, y', \ldots, y^{(q)}),$$

où R est une fonction rationnelle de y, y', ..., $y^{(q)}$ à coefficients a_i constants et indéterminés, on puisse disposer de ces coefficients, de sorte que les conditions A et B soient remplies pour l'équation différentielle en z, obtenue par ce changement de fonction. Et comme, y étant méromorphe, z l'est aussi, on pourra trouver une constante T telle que la fonction

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int R(y, y', \ldots, y^{(q)})\, dx},$$

après y avoir remplacé y par une intégrale méromorphe quelconque de $F = 0$, *devienne une fonction entière de* x, satisfaisant à une équation d'ordre $p + q$ qui se déduit de l'équation proposée en y.

Ces fonctions $G(x)$ *généralisent ainsi celles signalées par M. Picard* (¹) *et relatives à l'équation*

$$y'' = R(y, y'),$$

lorsque son intégrale est méromorphe.

(¹) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 283-287; 1889.

M. Picard a montré, notamment, que lorsque l'intégrale y de l'équation

$$(3) \qquad y'' + ay^3 + by^2 + cy + d + kyy' = 0$$

(où a, b, ..., k sont des constantes) est méromorphe, on peut déterminer neuf constantes A, B, C, m, n, p, q, r, s, de telle sorte qu'en posant

$$\begin{aligned} Y &= Ay^2 + By + Cy', \\ F &= mY^3 + nY^2 + pY + (qY + r)Y' + sY'^2, \end{aligned}$$

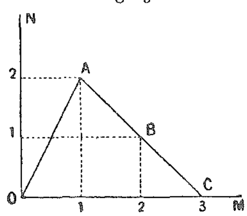
l'expression

$$G(x) = e^{\int F\,dx}$$

soit une fonction entière de x, satisfaisant à une équation du troisième ordre facile à former, et qui doit avoir, dans ce cas, pour intégrale générale, une fonction entière.

On retrouve ce résultat aussi par ce qui précède, et l'on peut, de plus, ajouter la remarque suivante, relativement à l'équation (3). Le polygone de l'équation est celui de la *fig.* 9, où les sommets A, B, C

Fig. 9.



ont pour indices respectifs $i = 1, 6, 2$. La condition A est donc remplie, et l'équation en ρ, relative au côté AC, après la suppression de la racine nulle, est

$$a\rho^2 - k\rho + 2 = 0.$$

Par conséquent, *toutes les fois que la quantité*

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 8a}}{k + \sqrt{k^2 - 8a}}$$

est un nombre réel, positif et commensurable, on peut trouver une con-

stante K *telle que* $G(x) = e^{K\int y\,dx}$ *soit une fonction entière de* x, *quand on* y *remplace* y *par une intégrale méromorphe quelconque de* y.

Considérons l'équation

$$(4) \qquad y'' + P(y)y' + Q(y) = 0,$$

où P et Q sont des polynomes en y de degré m et n. On verra sans peine que si $n = m + 2$, $m > 1$, et en désignant par a_0 et b_0 les coefficients des puissances y^m et y^n dans P et Q, l'expression $e^{\frac{b_0}{a_0}\int y\,dx}$ est une fonction entière de x pour toutes les intégrales y méromorphes de (4).

Si $m = 1$, on aurait l'exemple précédemment cité de M. Picard. Si $m \neq 1$ et $n \neq m + 2$, le polygone de (4) n'a aucun côté à coefficient angulaire entier et négatif; dans ce cas, l'intégrale y, si elle est méromorphe, est entière.

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES PREMIÈRES.

1. On appelle généralement *intégrale première* relative à une équation différentielle donnée $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une fonction de la variable indépendante x, de l'intégrale générale y et de quelques-unes de ses dérivées, qui reste constante en vertu de l'équation $F = 0$ et telle que, par la différentiation de cette expression par rapport à x, on retrouve l'équation $F = 0$. Une telle fonction se réduit à une constante, quelle que soit l'intégrale particulière considérée, et c'est la valeur seule de cette constante qui varie avec cette intégrale particulière. Ces fonctions sont une sorte d'invariants relatifs aux intégrales de l'équation, valables pour toutes ses intégrales, quelle que soit leur nature analytique.

Mais, outre ces intégrales premières, on peut en considérer d'autres *valables seulement pour les intégrales d'une certaine nature analytique.* Ainsi, il y a des classes étendues d'équations d'un ordre quelconque, où l'on peut conclure, en vertu des propriétés générales des fonctions d'une certaine nature analytique, qu'une fonction $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ doit se réduire à une constante, à une fonction algébrique de x, etc., lorsqu'on y remplace y, *non pas par une intégrale quelconque* de l'équation $F = o$, mais *par les intégrales d'une nature donnée*. Ces intégrales seront, par exemple, les intégrales à n valeurs, les intégrales uniformes ou périodiques, etc., qu'elles soient intégrales particulières ou qu'elles dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration.

Les intégrales premières ordinaires peuvent être considérées comme une sorte d'invariants relatifs à toutes les intégrales de l'équation, quelle que soit leur nature. Les intégrales premières telles que Φ seraient alors des invariants relatifs à une classe déterminée d'intégrales. A ce point de vue, la différence entre ces deux sortes d'invariants rappelle la différence qui existe entre les deux sortes d'invariants dans la théorie des équations linéaires, entre ceux considérés par Halphen, valables *quelle que soit la nature* des fonctions entrant dans la substitution, et les invariants d'une nature plus spéciale, considérés par M. Poincaré, où, au contraire, les fonctions qui entrent dans la substitution ne sont pas quelconques, mais *rationnelles en x*.

Je me propose de montrer brièvement comment les théorèmes exposés précédemment sur les zéros et les pôles des intégrales uniformes joints à quelques propositions de la théorie générale des fonctions permettent, dans des cas étendus, de trouver des intégrales premières relatives aux intégrales uniformes de l'équation (qu'elles soient particulières ou qu'elles dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration), de simplifier la recherche de ces intégrales uniformes, et même de les calculer toutes complètement, dans certains cas particuliers quand il en existe.

Tout ce qui va suivre repose sur les deux lemmes suivants, dont le premier nous permettra la recherche des intégrales méromorphes doublement périodiques, et le second la recherche des intégrales uniformes en général, n'ayant, ainsi que leurs dérivées, qu'un nombre fini de singularités essentielles.

Lemme I. — Soient $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = o$ une équation algébrique en $y, y', \ldots, y^{(p)}$ à coefficients constants; y une intégrale méromorphe doublement périodique de $F = o$ et $R(y, y', \ldots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle en $y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants.

Si la fonction R ne s'annule pour aucune valeur finie de x, ou encore si elle n'a pas de pôles à distance finie, l'intégrale considérée y est commune aux deux équations

$$F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(y, y', \ldots, y^{(q)}) = C,$$

où C est une constante arbitraire ou convenablement choisie.

Ceci résulte immédiatement du théorème de Liouville sur les zéros et les pôles des fonctions méromorphes doublement périodiques.

Lemme II. — Soient $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une équation algébrique en x, y, y', ..., $y^{(p)}$; y une intégrale uniforme de $F = 0$ et sans coupures, et $R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}$ une fonction rationnelle de x, y, y', ..., $y^{(q)}$. Si l'on peut trouver trois constantes a, b, c telles que les trois équations

$$(1) \qquad R - a = 0, \qquad R - b = 0, \qquad R - c = 0$$

(après avoir remplacé dans R y par l'intégrale considérée) n'aient qu'un nombre fini de racines, l'intégrale y est commune aux deux équations

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x),$$

où $r(x)$ est une fonction rationnelle de x.

Si les trois équations (1) n'ont pas de racines, y est commune à

$$F = 0, \qquad R = \text{const.}$$

Ceci résulte du théorème connu de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes sans coupure.

L'application de ces deux lemmes conduira donc aux intégrales premières $R = \text{const.}$ ou $R = r(x)$; une fois ces intégrales premières connues, la recherche des intégrales uniformes de l'équation $F = 0$ se ramène à celle des solutions communes à deux équations différentielles, ce qu'on fera par différentiations et éliminations des dérivées successives de y. Si, par exemple, $p > q$, on différentiera l'équation

$R = r(x)$ [ou $R = \text{const.}$] $p - q$ fois par rapport à x, et en éliminant $y^{(p)}$ entre

$$(1) \qquad F = 0$$

et

$$(2) \qquad \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}}(R - r) = 0,$$

on aura une équation (3) d'un ordre inférieur à p, admettant toutes les solutions communes à (1) et (2). En opérant sur (2) et (3) comme sur (1) et (2), on remplacera l'une de ces équations par une autre d'un ordre moindre, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite

$$(\Delta) \qquad (1), \quad (2), \quad (3), \quad \ldots, \quad (m-2), \quad (m-1), \quad m, \quad \ldots$$

d'équations différentielles, et deux cas peuvent alors se présenter.

Premier cas. — Quelle que soit la fraction rationnelle $r(x)$ (ou C), on finit par tomber sur des équations d'ordre zéro. On est ramené alors au problème élémentaire suivant : Trouver les solutions communes à deux équations algébriques; ces solutions sont alors nécessairement algébriques en x. Pour que $F = 0$ admette des intégrales uniformes, il faut et il suffit que parmi ces solutions algébriques il y en ait au moins une de rationnelle et satisfaisant à $F = 0$. *Toute intégrale uniforme est alors rationnelle.* Si, en particulier, F et R ne contiennent pas x explicitement, il ne peut y avoir d'intégrales uniformes autres que $y = \text{const.}$

Deuxième cas. — On peut choisir la fraction rationnelle indéterminée (ou C) de sorte que les équations de la suite (Δ) à partir d'un certain rang se réduisent à des identités. Soit (m) la première des équations de cette suite se réduisant à une identité. Toute intégrale commune à $F = 0$ et $R = r(x)$ est alors intégrale de l'équation ($m - 1$); par conséquent, $P = 0$ *ne peut avoir d'intégrales uniformes autres que celles définies par* ($m - 1$). *Pour que* $F = 0$ *admette de telles intégrales, il faut et il suffit que l'équation* ($m - 1$) *en admette, et que parmi ces intégrales il y en ait qui satisfassent à* $F = 0$. La recherche des intégrales uniformes de l'équation proposée se trouve donc *ramenée à l'étude d'une équation d'un ordre moindre.*

Si, par exemple, l'équation $(m-1)$ ne contient que x, y, y', l'équation proposée $F=0$ ne peut admettre d'autres transcendantes uniformes comme intégrales que celles définies par le premier ordre.

On saura, par exemple, reconnaître si $F=0$ admet une intégrale uniforme dépendant d'une constante d'intégration, et de calculer cette intégrale dans le cas où elle existe. Une telle intégrale est une fonction rationnelle : soit en x et en $\varphi[J(x)]$ [où φ est une fonction méromorphe doublement périodique, et $J(x)$ une intégrale abélienne], soit en x et en u, u étant intégrale d'une équation de Riccati à coefficients algébriques en x.

Si l'équation $(m-1)$ ne contient que x, y, y', y'', on saura, par exemple, reconnaître, par les méthodes de M. Painlevé relatives aux équations du second ordre, si $F=0$ admet une intégrale uniforme dépendant algébriquement de deux constantes d'intégration; on calculera, dans ce cas, cette intégrale soit algébriquement, soit par quadratures, ou bien par l'intégration d'une équation linéaire du troisième ordre.

D'une manière générale, la connaissance d'une intégrale première, telle que $R=r(x)$ ou $R=$ const., relative aux intégrales d'une certaine nature analytique, simplifie l'étude de ces intégrales et souvent permet de les calculer complètement.

2. Je vais indiquer ici comment on est conduit à considérer de telles intégrales premières et montrer comment on peut former des types généraux d'équations pour lesquelles on connaîtra ces intégrales.

Soit $R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle donnée de $x, y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants et indéterminés $a_1, a_2, \ldots, a_k$, et effectuons dans l'équation donnée $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})=0$ le changement

$$z=\frac{1}{R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})-\alpha}$$

(où α est une constante indéterminée), en prenant z comme nouvelle fonction.

La nouvelle équation sera

$$(2)\qquad \Psi(x, z, z', \ldots, z^{(p+q)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k)\, z^{n_0} z'^{n_{1i}} \ldots z^{(p+q)n_{p+q,i}} = 0,$$

où les ψ_i sont des polynomes en x, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Supposons construit le système (M_i, N_i) relatif à (2) et soit

$$(3)\qquad (M_{h_1}, N_{h_1}),\quad (M_{h_2}, N_{h_2}),\quad \ldots,\quad (M_{h_j}, N_{h_j}),$$

un ensemble de points de ce système, tel qu'en les supprimant le polygone Π du système qui reste ne remplisse aucune des conditions 1° et 2° de la proposition I (p. 89). Alors :

Si les j équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \psi_{h_1}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \\ \psi_{h_2}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{h_j}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \end{cases}$$

pour trois valeurs α_1, α_2, α_3 *de* α, *admettent un même système de solutions*

$$(5)\qquad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_k$$

(quelques-uns des a_i pouvant être arbitraires) *indépendantes de* x, *l'équation proposée* $F = 0$ *admet comme intégrale première relative à toutes ses intégrales méromorphes*

$$(6)\qquad R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x),$$

où $r(x)$ *est une fraction rationnelle en* x.

Car, y étant une intégrale méromorphe de $F = 0$, l'intégrale z de $\Psi = 0$ qui lui correspond est aussi une fonction méromorphe, et si l'on donne à α l'une des valeurs α_1, α_2, α_3 et aux coefficients indéterminés a_i dans R les valeurs (5), les termes de $\Psi = 0$ correspondant à l'ensemble (3) disparaissent. Le polygone Π du système (M_i, N_i) de $\Psi = 0$ ne satisfait pas aux conditions 1° et 2° citées tout à l'heure, ce qui montre que les pôles de l'intégrale z sont fixes et annulent ou rendent infinie l'une au moins des fonctions ψ_i; d'où l'on conclut que ces pôles sont en nombre limité. Il s'ensuit que les trois équations

$$R - \alpha_1 = 0, \qquad R - \alpha_2 = 0, \qquad R - \alpha_3 = 0$$

n'ont qu'un nombre limité de racines. Par conséquent, $R(x, y, \ldots, y^{(q)})$ se réduit à une fraction rationnelle en x lorsqu'on y remplace y par une intégrale méromorphe quelconque de $F = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Si ni F ni R ne contiennent x explicitement, et si le système (5) existe, on a, comme intégrale première,

$$R(y, y', \ldots, y^{(q)}) = \text{const.} \tag{7}$$

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse des intégrales y méromorphes et doublement périodiques. Alors, si les équations (4) ont un système de solutions

$$\alpha, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k,$$

on aura (7) comme l'intégrale première. La recherche des intégrales y se simplifie alors et souvent s'effectue complètement. Ainsi, par exemple, si l'équation $(m-1)$ de la suite (Δ) (page 99) ne contient que y et y', cette recherche s'effectue complètement.

J'indiquerai maintenant une des manières de former des types généraux d'équations, pour lesquelles on connaîtra des intégrales premières telles qu'on les a définies précédemment.

3. Soient $\varphi(y, y', y'', \ldots)$ et $\psi(y, y', y'', \ldots)$ deux polynomes tels que les sommets ϖ droits de leurs polygones aient mêmes coordonnées, qu'ils soient des sommets simples, et qu'à droite de ce sommet ni l'un ni l'autre polygone n'aient des sommets.

Soit ensuite $f(z, z', z'', \ldots)$ un polynome tel qu'à gauche de son sommet ϖ gauche il n'y ait aucun sommet, et que l'équation en λ, relative à ce sommet ϖ, n'ait aucune racine entière et positive.

Remplaçons dans f plusieurs ou tous les coefficients constants de $z, z', z'', \ldots$ par des polynomes absolument arbitraires en $y, y', y'', \ldots$, sauf les coefficients des termes correspondant au sommet ϖ droit, qui resteront constants. Soit $F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots)$ le polynome ainsi obtenu. Je dis que :

Toute intégrale méromorphe doublement périodique du système

$$F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$
$$z = \frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)},$$

est en même temps commune aux deux équations

$$F(C, 0, 0, 0, \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$
$$\frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)} = C,$$

où C *est une constante.*

Pour le démontrer, considérons l'équation

$$F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$

dans laquelle, par hypothèse, $y, y', y'', \ldots$ ne figurent pas dans les termes correspondant au sommet ϖ; l'équation en λ relative à ce sommet aura par conséquent tous les coefficients des puissances de λ constants. Comme à gauche du sommet ϖ de f (et par suite de F), il n'y a aucun sommet, et que l'équation en λ relative à ce sommet n'admet aucune racine entière et positive, d'après la proposition II (p. 89), les zéros de $z(x)$ doivent rendre infini au moins un des coefficients de $z, z', z'', \ldots$ dans F, ne correspondant pas au sommet ϖ; et, comme ces coefficients sont des polynomes en $y, y', y'', \ldots$ à coefficients constants, *tout zéro de $z(x)$ est un pôle de $y(x)$.*

Mais on a

$$z = \frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)} = \frac{\Sigma a_i y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} \ldots}{\Sigma b_i y^{n_{0i}} y'^{n_{1i}} \ldots},$$

où a_i et b_i sont constants. Posons

$$y = (x - a)^\lambda \chi(x),$$

et convenons d'affecter de l'indice (ϖ) toutes les quantités a_i, b_i, M_i, N_i, etc., relatives au sommet ϖ. Comme à droite des sommets ϖ de φ et ψ, qui sont des sommets simples, il n'y a pas d'autres sommets, et comme ces deux sommets ont les mêmes coordonnées (M_ϖ, N_ϖ), on aura, dans le voisinage de $x = a$ et quel que soit λ entier et positif,

$$z = \frac{(x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}}\left[\Omega_\varpi(x) + \Sigma(x-a)^{S_{\varpi,\lambda}-S_{i,\lambda}}\,\Omega_i(x)\right]}{(x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}}\left[\Omega'_\varpi(x) + \Sigma(x-a)^{S'_{\varpi,\lambda}-S'_{i,\lambda}}\,\Omega'_i(x)\right]},$$

d'après les notations du Chapitre II. On sait (Chap. I) que, pour $x = a$,

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_\varpi(x) = A_\varpi\, a_\varpi\, \chi(a)^{M_\varpi},\\
&\lim \Omega'_\varpi(x) = A'_\varpi\, b_\varpi\, \chi(a)^{M_\varpi},\\
&\lim \Omega_i(x) = 0,\\
&\lim \Omega'_i(x) = 0
\end{aligned}$$

pour tous les indices i autres que $i = \varpi$. Par conséquent, on a, pour $x = a$,

$$\lim z = \frac{A_\varpi\, a_\varpi}{A'_\varpi\, b_\varpi}, \tag{1}$$

et, comme cette quantité est différente de zéro, on voit que $z(x)$ ne peut s'annuler pour un pôle de $y(x)$. On doit donc avoir $z = \text{const.}$; la valeur de cette constante est donnée par l'équation (1), ce qui donne l'intégrale première

$$\frac{\varphi(y, y', y'' \ldots)}{\psi(y, y', y'' \ldots)} = \frac{A_\varpi\, a_\varpi}{A'_\varpi\, b_\varpi}.$$

La proposition est ainsi démontrée.

Considérons, par exemple, l'équation

$$F = P\varphi + \psi = 0,$$

où P est un polynome quelconque en $y, y', y'', \ldots$ et φ et ψ les polynomes précédents. On peut écrire

$$F = \psi\left(P\,\frac{\varphi}{\psi} + 1\right) = 0,$$

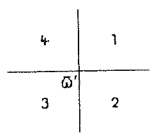
et toute intégrale méromorphe doublement périodique de $F = 0$ est commune soit à $\varphi = 0$, $\psi = 0$, soit à $P = 0$, $\psi = 0$, soit à

$$P + \frac{1}{C} = 0, \qquad \varphi - C\psi = 0,$$

où C est une constante. J'ai indiqué précédemment combien cette circonstance simplifie la recherche de telles intégrales.

4. Soient $\varphi(x, y, y', \ldots)$ et $\psi(x, y, y', \ldots)$ deux polynomes en $x, y, y', \ldots$ tels que leurs polygones respectifs n'aient pas à droite de leurs sommets ϖ droits des côtés à coefficient angulaire entier, et, de plus, que ces deux sommets ϖ et ϖ' coïncident, ou que la droite qui les joint n'ait pas son coefficient angulaire fini, différent de zéro et négatif. Cette dernière condition revient à supposer que si, par exemple, par l'un des sommets ϖ droits (correspondant à φ et à ψ) on mène des parallèles à OM et ON, qui partagent le plan NOM en quatre quadrants, l'autre sommet ϖ droit ne se trouve pas dans les quadrants (2) et (4).

Fig. 10.



Soit $f(z, z', z'', \ldots)$ un polynome en $z, z', z'', \ldots$ à coefficients constant, tel que son polygone n'ait à gauche de son sommet ϖ gauche d'autres sommets, et que l'équation en λ relative à ce sommet ϖ n'ait aucune racine entière et positive.

Remplaçons dans f plusieurs ou tous les coefficients constants de $z, z', \ldots$ par des polynomes absolument arbitraires en $y, y', y'', \ldots$ à coefficients constants ou fonctions algébriques de x, mais en laissant constants les coefficients des termes correspondant au sommet ϖ gauche. Désignons par $F(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$ le polynome ainsi obtenu.

Soit enfin $\theta(\alpha)$ un polynome quelconque en α, ayant plus de deux racines distinctes et non nulles. On peut énoncer le théorème suivant :

Toute intégrale uniforme y, n'ayant qu'un nombre fini de points essentiels, du système

$$(1) \qquad F(x, y, y' \ldots z, z', z'' \ldots) = 0,$$

$$(2) \qquad z - \theta\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = 0,$$

est en même temps une intégrale commune aux deux équations

$$(3)\qquad F\left(x, y, y', \ldots, R_1(x), \frac{dR_1}{dx}, \ldots\right) = 0, \qquad \frac{\varphi}{\psi} = R(x),$$

où R_1 *et* R_2 *sont deux fractions rationnelles en* x *liées par la relation*

$$(4)\qquad R_1(x) = \theta[R(x)].$$

Pour le montrer, je dis d'abord que, si α est une racine de $\theta(\alpha) = 0$, les racines $x = a$ de l'équation

$$(5)\qquad \frac{\varphi(x, y, y' \ldots)}{\psi(x, y, y' \ldots)} - \alpha = 0$$

(lorsqu'on y remplace y par l'intégrale définie tout à l'heure) *sont en nombre limité*. Pour le montrer, envisageons l'équation (1), et remarquons que toute racine $x = a$ de (5) est aussi une racine de l'équation $z(x) = 0$, et inversement.

Pour l'équation (1), considérée comme équation en z, le polygone est le même que celui de $f(z, z', z'', \ldots)$, et, de plus, l'équation en λ relative au sommet ϖ gauche pour F est la même que pour f. Comme à gauche du sommet ϖ gauche de f il n'y a aucun sommet, et que cette équation en λ n'admet aucune racine entière et positive, les racines de $z(x) = 0$ doivent (d'après une proposition du Chapitre I) rendre infini au moins un des coefficients de $z, z', \ldots$ dans F, qui sont polynomes en $y, y', \ldots$ à coefficients algébriques en x. Par conséquent, chacune de ces racines doit être soit un infini de ces fonctions algébriques en x, soit un pôle en y. Dans le premier cas, les valeurs $x = a$ sont certainement en nombre limité; je vais montrer qu'il en est de même dans le second cas.

Dans le voisinage d'un pôle $x = a$ de y, on aura

$$y = (x - a)^\lambda \chi(x),$$

où λ est un entier négatif et $\chi(x)$ ne devenant ni nulle ni infinie pour

$x = a$. Si l'on met φ et ψ sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} \ldots y^{(p)m_{pi}},$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x) y^{n_{0i}} y'^{n_{1i}} \ldots y^{(q)n_{qi}},$$

on aura (d'après les notations du Chapitre I et en appelant ϖ' le sommet ϖ droit de ψ), dans le voisinage de $x = a$,

$$\varphi = (x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}} \Big[\Omega_\varpi(x) + \sum_{-(\varpi)} (x-a)^{S_{\varpi,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \Big],$$

$$\psi = (x-a)^{-S'_{\varpi',\lambda}} \Big[\Omega'_{\varpi'}(x) + \sum_{-(\varpi')} (x-a)^{S'_{\varpi',\lambda} - S'_{i,\lambda}} \Omega'_i(x) \Big].$$

Lorsque x tend vers a, on a (*voir* le Chapitre I)

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_\varpi(x) = A_\varpi\, \varphi_\varpi(a)\, \chi(a)^{M_\varpi},\\
&\lim \Omega'_{\varpi'}(x) = A'_{\varpi'}\, \psi_{\varpi'}(a)\, \chi(a)^{M'_{\varpi'}},\\
&\lim \Omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \text{ sauf } i = \varpi),\\
&\lim \Omega'_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t, \text{ sauf } i = \varpi').
\end{aligned}$$

Distinguons maintenant les trois cas suivants :

1[er] CAS : *Le sommet ϖ est, par rapport à ϖ', dans le quadrant* (1) *ou sur les droites qui le limitent.* — On a alors $S_{\varpi,\lambda} > S'_{\varpi',\lambda}$ pour toutes les directions λ négatives; par conséquent, comme l'équation $A_\varpi = 0$ n'a aucune racine λ négative, si $x = a$ n'est pas une racine de $\varphi_\varpi(a) = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ augmente indéfiniment lorsque x tend vers a. Ce rapport ne peut donc tendre vers la limite α, que si le pôle a de y coïncide avec une racine de $\varphi_\varpi(a) = 0$: *le nombre de tels pôles est donc limité.*

2[e] CAS : *Le sommet ϖ est, par rapport à ϖ', dans le quadrant* (3) *ou sur les droites qui le limitent.* — On a alors $S_{\varpi,\lambda} < S'_{\varpi',\lambda}$ pour toutes les directions λ négatives. Comme l'équation $A'_\varpi = 0$ n'a aucune racine λ

négative, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ ne peut tendre vers la limite α lorsque x tend vers un pôle a de y, que si a coïncide avec une racine de $\psi_{\varpi'}(a) = 0$; *le nombre de tels pôles est donc encore limité.*

3^{e} CAS : *Les sommets ϖ et ϖ' coïncident.* On a alors $M_{\varpi} = M'_{\varpi'}$, $N_{\varpi} = N'_{\varpi'}$, et, par conséquent, $S_{\varpi,\lambda} = S_{\varpi',\lambda}$ quel que soit λ; donc

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A_{\varpi}}{A'_{\varpi'}} \frac{\varphi_{\varpi}(a)}{\psi_{\varpi'}(a)}.$$

Cette limite doit être égale à la racine α de $\theta(\alpha) = 0$; donc a doit être égal à une racine de l'équation algébrique

$$A_{\varpi}\, \varphi_{\varpi}(a) - \alpha\, A'_{\varpi'} \psi_{\varpi'}(a) \equiv 0, \tag{6}$$

ce qui montre que *les a sont en nombre limité*. Le seul cas où ceci peut tomber en défaut est celui où l'équation (6), après avoir remplacé A_{ϖ} et $A'_{\varpi'}$ par les expressions en λ, admet une racine λ_1 indépendante de a, entière et négative, et lorsque l'ordre λ du pôle a de y est égal à cette racine.

En résumé, l'équation (5) ne peut avoir qu'un nombre fini de racines. Par conséquent, si l'équation $\theta(\alpha) = 0$ a plus de deux racines non nulles et distinctes entre elles, on aura comme intégrale première

$$\frac{\varphi(x, y, y', \ldots)}{\psi(x, y, y', \ldots)} = R(x),$$

où $R(x)$ est une fraction rationnelle en x.

Le théorème est donc démontré.

Si φ, ψ et F ne contiennent x explicitement, l'équation (5) n'a pas de racines à distance finie; on aura donc comme intégrale première $\frac{\varphi}{\psi} = \text{const.} = \frac{A_{\varpi}\varphi_{\varpi}}{A'_{\varpi'}\psi_{\varpi'}}$, et toute intégrale uniforme n'ayant pas un nombre infini de singularités essentielles du système (1) est une intégrale commune aux deux équations

$$F\left(x, y, y', \ldots, \frac{A_{\varpi}\varphi_{\varpi}}{A_{\varpi'}\psi_{\varpi'}}, 0, 0, 0, \ldots\right) = 0,$$

$$\frac{\varphi(x, y, y', \ldots)}{\psi(x, y, y', \ldots)} = \frac{A_{\varpi}\varphi_{\varpi}}{A'_{\varpi}\psi_{\varpi'}}.$$

On peut encore remarquer, dans ce dernier cas, que, si les sommets ϖ et ϖ' ne coïncident pas, *toute intégrale méromorphe de* (1) *est holomorphe dans tout le plan*. Ceci tient à ce fait que, si la différence $S_{\varpi,\lambda} - S_{\varpi',\lambda}$ est différente de zéro, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$, lorsque x tend vers un pôle a de y, tend lui-même soit vers zéro, soit vers l'infini, et jamais vers une limite finie et différente de zéro. Et comme on a l'intégrale première $\frac{\varphi}{\psi} = C$, où C est une constante finie et différente de zéro, y ne peut pas avoir de pôles.

Les principes qui précèdent embrassent un assez grand nombre de résultats qu'il m'est impossible de développer ici. J'ajoute seulement qu'il est facile, d'après les remarques du commencement du premier Chapitre, de former des cas généraux où les théorèmes précédents sont applicables.

Vu et approuvé :
Paris, le 21 mai 1894.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 21 mai 1894.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Des travaux récents sur le principe de la moindre action.

Vu et approuvé :
Paris, le 21 mai 1894.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 21 mai 1894.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

21022 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

О УНИФОРМНИМ ИНТЕГРАЛИМА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА И НУЛТОГ РОДА*

Посматрајмо најпре једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{1}$$

где су P и Q полиноми по y респективно степена m и n и алгебарске функције по x. Увек се може, захваљујући погодној хомографској трансформацији, претпоставити да је

$$m = n + 2,$$

тако да је $y = \infty$ обична тачка интеграла.

Може се десити да једначина има униформне партикуларне интеграле, рационалне или трансцендентне; у овом последњем случају, рећи ћу да су два таква интеграла, или више њих, *различити* ако између њих не постоји никаква алгебарска релација са коефицијентима алгебарским по x.

Пре свега, може се доказати следећи резултат:

Да би једначина (1) *имала трансцендентне униформне интеграле, потребно је да функције* P *и* Q *буду рационалне по* x.

Под претпоставком да је тај услов испуњен, имам намеру да покажем како поступак који је г. Пенлеве[1] употребио у проучавању рационалних интеграла једначине (1), једнако као и једна позната теорема г. Пикара о нулама униформне функције у околини есенцијалне тачке,

---

* Наслов оригинала: *Sur les intégrales uniformes des équations [différentielles] du premier ordre et du genze zéro*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1894, t. CXVIII, 22, pp. 1190–1193; приказао у Парискоj академији науке 28. маја 1894. професор Емил Пикар.

[1] Comptes rendus, T. CX, p. 1890. и Annales de l'École Normale Superieure 1892, p. 305.

омогућује прецизно одређивање једне горње границе броја различитих униформних трансцендентних интеграла једначине (1).

1. $Q = 0$ *има више од два различита корена* $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Тада је *сваки униформни интеграл рационалан.* Заиста, кад би једначина имала есенцијални сингуларитет $x = a$, могло би се увек претпоставити да су функције φ_1, φ_2, и φ_3 униформне у околини тачке a, јер ако би тачка a била критична за функције φ_i, тада би се оне, будући да су алгебарске по x, могле учинити униформним у околини тачке a, стављајући $x = \xi^{\nu}$, где је ν цео број. Посматрајмо израз

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_2)}.$$

За $y = \varphi_1(x)$ имамо $z = 0$; за $y = \varphi_2$, $z = 1$; за $y = \varphi_2$, $z = \infty$. С друге стране, уколико се претпостави да је y униформна функција, она може бити једнака функцијама φ_1, φ_2 или φ_3 само за изузетне вредности, у коначном броју, променљиве x. Дакле, $z(x)$ је функција са ограниченим бројем вредности, има есенцијалну тачку $x = a$, униформна је у околини те тачке и три вредности 0, 1 и ∞ узима само коначан број пута. Функција y не може, дакле, имати есенцијалних сингуларитета (на коначном или бесконачном растојању); она је, према томе, рационална функција од x.

2. $Q = 0$ *има два различита корена* $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2)$. Ставимо

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

За однос $\frac{z_1}{z_2}$ два интеграла једначине по z који одговарају двама униформним интегралима једначине (1) може се претпоставити да је униформна функција у околини неке есенцијалне тачке и овај однос може, у околини те тачке, узети вредности 0, 1 и ∞ само ограничен број пута; y, дакле, не може имати есенцијалних сингуларитета. Према томе, (1) *не може имати два различита униформна интеграла.*

3. $Q = 0$ *има само један корен* $y = \varphi(x)$. Тада је $\varphi(x)$ нужно рационална функција. Ставимо да је $z = \dfrac{1}{y - \varphi_1}$ и нека су z_1, z_2 и z_3 три униформна интеграла једначине по z који одговарају трима различитим униформним интегралима једначине (1). Израз

$$v(x) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

је тада у читавој равни, без засека, униформна функција и вредности 0, 1 и ∞ може узети само ограничен број пута; она је, дакле, рационална функција од x. Према томе, (1) *не може имати више од два различита униформна интеграла.*

4. Q *не зависи од* y. Тада имамо Рикатијеву или линеарну једначину. Рикатијева једначина има највише три, а линеарна једначина највише два различита униформна интеграла.

Може се, дакле, формулисати следећа теорема:

Једначина (1) *не може никад имати више од три различита униформна интеграла.*

Ако их има 3, *она је Рикатијева једначина. Ако је њихов број* 2, *по среди је Рикатијева или линеарна једначина, или једначина облика*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{(y-\varphi)^n},$$

где је P *полином по* y *степена* n + 2, *рационалан по* x, *док је* φ(x) *функција рационална по* x.

Ако има само један униформни интеграл, она има један од претходних облика, или пак облик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{(y-\varphi_1)^k (y-\varphi_2)^{k'}},$$

где су φ_1 *и* φ_2 *алгебарске функције од* x, *а* P *је степена* k + k′ + 2 *по* y.

У случају кад су P и Q алгебарске (али не рационалне) функције по x, једначина (1) не може имати униформних и трансцендентних интеграла.

Једначина (1) тада се може написати у облику

$$F\left(x, X, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где је F по x, X, y и y' несводљив полином и где су величине x и X везане једном алгебарском једначином $G(x, X) = 0$. *Тада могу постојати униформни по* x *и* X *трансцендентни интеграли*; расуђивање слично претходном доводи до једне теореме сличне оној коју смо управо формулисали: број различитих униформних по (x, X) интеграла никад не може бити већи од 3 итд.

Најзад, *претходне методе и закључци могу се применити на било коју једначину првог реда која је алгебарска по* x, y *и* y′ *и нултог рода по* (y, y′).**

** Ова Петровићева расправа у Париској Академији наука, као и докторска дисертација, одмах је скренула пажњу научне јавности. Прво је Хамбургер у Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (FdM), B. 24, S. 557–558 пружио неопходно саопштење о расправи. Нешто доцније, Емил Пикар у свом познатом делу *Fraité d'Analyse* (Paris 1896, pp. 356–359) уноси ове Петровићеве резултате. У Revue générale des Sciences (Paris 1896, p. 106) Отон експозиторно излаже кратак увид у Петровићеве униформне интеграле. У кругу берлинских математичара Валенберг је анализовао Петровићеву тезу, па и овај рад у ПАН са поређењима у радовима Фукса, Пенлевеа, Поенкареа, па и Алфена (Communication à la Berliner math. Gesellschaft, Sitzung, am 26. feb. 1902). Ова успела Валенбергова анализа методе фигуративних полигона објављена је у Archiv der Math. und Physik, Berlin 1902, B. III. – Поменимо, да је под Петровићевим утицајем Младен Берић докторирао у Београду (1912. г.) на фигуративним полигонима: *Фигуративни полигони диференцијалних једначина првог реда и њихова веза са особинама интеграла* стр. 99 (пр. Д. Т.).

О АСИМПТОТНИМ ВРЕДНОСТИМА ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА*

Више пута је у применама диференцијалних једначина од важности знати не сам интеграл једначине већ *асимптотне вредности* његове, тј. границу којој тај интеграл тежи кад прапромењљива бесконачно расте. Често се у механичким или физичким проблемима који се своде на решавање диференцијалних једначина, услед каквих нарочитих услова исказаних у проблему, овај може сматрати као решен кад се знају асимптоте интегралних кривих које представљају механички или физички феномен, мада се исте криве и не могу наћи. Па баш и у случајевима кад се једначина може интегралити, посао интеграције обично је врло тегобан и било би од интереса имати једну методу која би допуштала директно израчунавање поменутих граница а да се не мора проћи кроз теретне интеграционе операције.

У једноме своме ранијем раду (*Sur les zèros et les infinis des intégrales de équations différentielles algébriques,* Paris 1894) ја сам се бавио сличним питањима, али која се односе на вредности које поништавају интеграле дате диференцијалне једначине, или их чине бесконачним, или за које ови постају максимум или минимум итд. Теореме на које сам том приликом наишао могу се применити на решење неколиких питања из теорије асимтотних вредности интеграла, а која су предмет овога рада.

Општи интеграл y једне диференцијалне једначине првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. L, Први разред, књ. 17, Београд 1895, стр. 43; 16,2×23,5; саопштио у Академији природних наука 1. маја 1895. професор Димитрије Нешић.

је извесна функција прапромењиве x и једне интеграционе константе, која функција, стављена наместо y-а у диференцијалној једначини, своди ову на идентитет ма какве биле вредности x-а и интеграционе константе. Асимтотне вредности интеграла y варирају уопште са варијацијом интеграционе константе и закон те варијације уопште не може бити познат док се једначина потпуно не интеграли. Али, има значајних случајева у којима те асимтотне вредности не зависе од интеграционе константе; тада те вредности остају једне и исте за све посебне интеграле добијене спецификовањем те константе у општем интегралу.

Тако, нпр., за диференцијалну једначину

$$\left[ax^2(y+\alpha)-x\right]\frac{dy}{dx}-y-\alpha=0,$$

(где су a и α стални бројеви), чији је општи интеграл представљен обрасцем

$$\alpha(y+\alpha)\left[C-a\log(y+\alpha)\right]-1=0$$

(C означује интеграциону константу), границе којима тежи y при бесконачном рашћењу x-а очевидно су

$$y=-\alpha \quad \text{и} \quad y=e^{\frac{C}{a}}-\alpha,$$

па дакле варирају са варијацијом константе C.

Напротив, за једначину

$$\left[a(y+\alpha)-x\right]\frac{dy}{dx}-y-\alpha=0,$$

чији је општи интеграл

$$a(y+\alpha)-a\log(y+\alpha)+C=0$$

y може тежити само граници $-\alpha$, која је независна од C.

Намеран сам показати у овоме раду како се уопште та околност, независност асимтотних вредности општега интеграла од интеграционе константе, може распознати на самој датој диференцијалној једначини кад је ова *алгебарска* у односу на $x, y, \frac{dy}{dx}$, и како се у томе случају могу израчунати те вредности. Затим ћу применити исту методу за решавање сличних питања која се односе на асимтоте опште интегралне криве.

*

Нека је дата алгебарска диференцијална једначина првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

где је F дата алгебарска функција x-а, y-а и извода $\frac{dy}{dx}$. Таква једначина може се увек написати у облику

$$f_0(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + f_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(x,y)\frac{dy}{dx} + f_m(x,y) = 0, \tag{2}$$

где су $f_0, f_1, \ldots, f_m$ полиноми по y са сачиниоцима који су алгебарске функције x -а, и које не постају бесконачне ни за коју коначну вредност x-а.

У поменутоме своме раду ја сам доказао, између осталих, ове две теореме (које важе и у оштијем случају кад је F ма каква трансцендентна функција x-а):

Теорема 1. – *Да би вредности* x-а, *које поништавају општи интеграл диференцијалне једначине* (1), *биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно: да свака од функција* $f_k(x,y)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, *осим* $f_0(x,y)$, *садржи као чиниоца у подигнут на степен раван индексу* k *или већи од овога*.

Теорема 2. – *Кад год поменуте вредности не зависе од интеграционе константе, оне морају бити: или* $x = \infty$, *или корени једначине*

$$f_0(x,y) = 0 \tag{3}$$

решене по x.

Пошто су те две теореме основа свих резултата овога рада, то наводим укратко њихов доказ основан на извесним теоремама из теорије алгебарских функција и диференцијалних једначина првога реда.

Замислимо једначину (2) решену по изводу $\frac{dy}{dx}$; према познатој Пуизеовој теореми, свако од тих решења може се написати у облику

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^{\frac{\lambda}{\mu}} + B(x)y^{\frac{\lambda+1}{\mu}} + C(x)y^{\frac{\lambda+2}{\mu}} + \ldots, \tag{a}$$

где су $A(x), B(x), C(x), \ldots$ функције x-а, које алгебарски зависе од сачинилаца десне стране једначине (2), и A (x) није идентички равна нули; λ и μ су цели и положни бројеви, од којих λ може бити раван и нули. Ставимо

$$z = \sqrt[\mu]{y};$$

једначина (a) постаје

$$\text{(b)} \qquad \mu \frac{dz}{dx} = A(x) z^{\lambda-\mu+1} + B(x) z^{\lambda-\mu+2} + C(x) z^{\lambda-\mu+3} + \ldots$$

Означимо са (P) скуп свих вредности x-а у близини којих се функције $A, B, C, \ldots$ не могу развити у бесконачан ред по Тејлоровом (Taylor) обрасцу. Такве вредности x-а очевидно не зависе од интеграционе константе. Разликујмо ова два случаја.

Први случај: $\lambda - \mu + 1 = 0$. Једначина (b) тада постаје

$$\text{(c)} \qquad \mu \frac{dz}{dx} = A(x) + B(x) z + C(x) z + \ldots$$

Десна страна једначине (c) може се развити у бесконачан ред уређен по степенима x-а и z-а и збирљив у близини вредности $z = 0$, $x = \alpha$, где је α ма каква повољна вредност x-а, али која не припада скупу (P). Према томе и према познатој основној теореми из теорије диференцијалних једначина првога реда, једначину (c) извесно задовољава један, и само један посебни интеграл (добијен спецификовањем интеграционе константе у општем интегралу), који тежи нули кад x тежи граници α. Тај интеграл не може бити идентички раван нули, пошто функција $A(x)$ није идентички равна нули. Дакле, ма каквој, повољно узетој, вредности x-а одговара по један посебни интеграл који није идентички раван нули и који постаје раван нули за $x = \alpha$. А то показује да вредности x-а које поништавају општи интеграл једначине (c), и према томе такође и општи интеграл једначине (2), извесно варирају са варијацијом интеграционе константе.

Други случај: $\lambda - \mu + 1 < 0$. Тада извод $\dfrac{dz}{dx}$ постаје бесконачан за $z = 0$ и не може се развити у бесконачан ред у близини вредности $z = 0$, али његова изврнута вредност $\dfrac{dz}{dx}$ извесно се може развити у такав ред, збирљив у близини вредности $z = 0$ и $x = \alpha$, где је α, као и малочас, ма каква вредност x-а, али која не припада скупу (P). Према томе и према једној познатој Брио-Букеовој теореми, извесно постоји један интеграл (но који има више грана) који тежи нули кад x тежи граници α. Из тога се изводи, као и у првоме случају, да вредности x-а које поништавају општи интеграл једначине (2) зависе од интеграционе константе.

Према томе, да би те вредности биле независне од константе, *потребно* је да буде $\lambda - \mu + 1 > 0$ или $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$. Но, лако је доказати да је то у исти мах и *довољан* услов. Јер кад је он испуњен, једначина (b) може се написати у облику

$$\text{(d)} \qquad \mu \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = A(x) z^{\lambda-\mu} + B(x) z^{\lambda-\mu+1} + C(x) z^{\lambda-\mu+2} + \ldots,$$

где су сви изложиоци z-а на десној страни положни. Замислимо да је на десној страни једначине z замењено општим интегралом саме те једначине и означимо са $x = \alpha$ једну од вредности које поништавају тај интеграл; тада ће бити

$$\text{(e)} \qquad z^{\mu} = e^{\int_{\alpha}^{x} \left[A(x) z^{\lambda-\mu} + B(x) z^{\lambda-\mu+1} + \ldots \right] dz}.$$

Пустимо да x тежи граници α. Лева страна једначине (e) тежи нули, а да би тако исто могло бити и са десном страном, потребно је, пошто су сви изложиоци z-а положни, да бар један од услова

$$\text{(f)} \qquad A(\alpha) = \infty, \quad B(\alpha) = \infty, \quad C(\alpha) = \infty, \ldots$$

буде испуњен. А пошто су корени ма које од једначине (f) независни од интеграционе константе, тако ће исто бити и са вредностима $x = \alpha$. Услов је, дакле, довољан.

Према томе, да би вредности x-а које поништавају општи интеграл једначине (2) биле независне од константе, потребно је и довољно да за сва решења те једначине по $\frac{dy}{dx}$ буде испуњен услов $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$.

Из овога непосредно следује теорема 1.

Теорема 2 такође постаје очевидна, јер сви коначни корени α ма које од једначина (f) извесно задовољавају једначину

$$\text{(g)} \qquad f_0(x, 0) = 0$$

према особини корена алгебарских једначина са промењљивим сачиниоцима да остају коначни све дотле док сачинилац највишега степена у једначини не постане раван нули.

Претходне теореме чине могућим потпуно решење проблема:

Наћи потребне и довољне услове да би асимптотне вредности општега интеграла једначине (1) *биле независне од интеграционе константе и у томе случају израчунати те вредности без претходнога познавања општега интеграла те једначине.*

Јер, ако се стави

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}$$

и ако се, после те смене, једначина (1) напише у облику

$$(4) \quad \varphi_0(y,\xi)\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^m + \varphi_1(y,\xi)\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^{m-1} + \ldots + \varphi_{m-1}(y,\xi)\frac{d\xi}{dy} + \varphi_m(y,\xi) = 0,$$

где су $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ полиноми по ξ са сачиниоцима који су алгебарске функције y-а и које не постају бесконачне ни за коју коначну вредност y-а, границе којима тежи y кад x расте бесконачно, јесу вредности y-а које поништавају општи интеграл једначине (4) кад се у овој y сматра као прапроменљива, а ξ као његова функција.

Применом теорема 1 и 2 долази се тада до ових резултата:

Теорема 3. – *Да би границе којима тежи општи интеграл у једначини* (1), *кад* x *бесконачно расте, биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да свака од функција* φ_k *осим* φ_0 *садржи као чиниоца* ξ^h, *где је* $h \geq k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$.

Теорема 4. – *Кад год су поменуте границе независне од интеграционе константе, одређене и коначне, оне су корени алгебарске једначине* $\varphi_0(y, 0) = 0$ *решене по* y[1] .

Потврдимо те две теореме, нпр., на диференцијалној једначини

$$\text{(h)} \qquad \left[xf(y)\frac{dy}{dx} - \varphi(y)\right]^m - x^p\left[\varphi(y)\frac{dy}{dx}\right]^m = 0,$$

где су $f(y)$ и $\varphi(y)$ полиноми по y. Ако се стави

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}$$

једначина се претвара у

[1] *Примедба:* Наглашавам да ове теореме важе само онда ако интеграл одиста има одређену границу, коначну или бесконачну, јер се може десити да је он у близини вредности $x = \infty$ потпуно неодређен, као што је, нпр., случај са тригонометријским функцијама. У томе је случају вредност $x = \infty$ есенцијални сингуларитет интеграла и познате методе у аналитичкој теорији диференцијалних једначина првога реда дају начина да се та околност још унапред распозна на датој диференцијалној једначини.

$$\text{(i)} \qquad \left[\varphi(y)\frac{d\xi}{dy}+f(y)\xi\right]^m-\left[\varphi(y)\right]^m\xi^{2m-p}=0.$$

Да би асимтотне вредности y-а биле независне од интеграционе константе, према теореми 3 потребно је и довољно да буде $p \geq m$, и кад год су те вредности независне од константе, оне морају бити корени алгебарске једначине $\varphi(y)=0$. А то се може потврдити и непосредно на изразу општега интеграла једначине (h), који се добија на овај начин: једначина (i) написана у облику

$$\frac{d\xi}{dy}+\frac{f(y)}{\varphi(y)}\xi=\varphi(y)\xi^{\frac{2m-p}{m}},$$

припада типу Бернулијеве (Bernoulli) диференцијалне једначине

$$z'+P(x)z=Q(x)z^n,$$

чији је општи интеграл

$$z=e^{-\int Pdx}\left[C-(n-1)\int dx\cdot Qe^{(1-n)\int Pdx}\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Општи интеграл једначине (i) биће, дакле,

$$\xi=e^{-\int\frac{f(y)}{\varphi(y)}dy}\left[C+\frac{p-m}{m}\int\varphi(y)e^{\frac{p-m}{m}\int\frac{f(y)}{\varphi(y)}dy}dy\right]^{\frac{m-p}{m}},$$

а интеграл једначине (h)

$$\text{(5)} \qquad x=e^{\int\frac{f(y)}{\varphi(y)}dy}\left[C+\frac{p-m}{m}\int dy\cdot e^{\frac{p-m}{m}\int\frac{f(y)}{\varphi(y)}dy}\right]^{\frac{m}{p-m}}.$$

За $p<m$ границе којима тежи y при бесконачном рашћењу x-а корени су алгебарске једначине $\varphi(y)=0$ и трансцендентне једначине

$$\text{(6)} \qquad C+\frac{p-m}{m}\int dy\cdot\varphi(y)e^{\frac{p-m}{m}\int\frac{f(y)}{\varphi(y)}dy}=0$$

решених по y. Оне, дакле, варирају са варијацијом константе C. Напротив, ако је $p \geq m$, те границе могу бити само корени алгебарске једначине $\varphi(y)=0$. Оне су, дакле, независне од C.

*

Претходне теореме дају потпун одговор на постављено питање. Но, у појединим случајевима могуће је ићи још даље и решити проблем и у случају кад су сачиниоци од y и $\frac{dy}{dx}$ у датој једначини ма какве трансцендентне функције x-а. Као један од многобројних таквих случајева навешћу чувену Рикатијеву једначину, на коју се тако често наилази како у аналитичкој теорији диференцијалних једначина, тако и у њиховим геометријским, механичким и физичким применама. Та је једначина

$$\frac{dy}{dx} + \varphi_1(x)y^2 + \varphi_2(x)y + \varphi_3(x) = 0, \tag{7}$$

где су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ функције x-а, за које ћу, да би докази били простији, претпоставити да су униформне функције.

Сменом функције

$$y = \frac{u}{\varphi_1(x)},$$

једначина (7) прелази у

$$\frac{du}{dx} + u^2 + f_1(x)u + f_2(x) = 0, \tag{8}$$

где је

$$\begin{cases} f_1(x) = \varphi_2(x) - \dfrac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}, \\ f_2(x) = \varphi_1(x)\varphi_3(x). \end{cases}$$

Ограничимо се на реалне вредности x-а, пустимо да x расте бесконачно и разликујмо два случаја.

Први случај: $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *теже коначним и од нуле различним границама.* Нека су

$$\begin{cases} \lim f_1(x) = a_1 \\ \lim f_2(x) = a_2 \end{cases}$$

те границе; ја велим да, *кад* x *бесконачно расте, граница којој тежи општи интеграл једначине* (8) *не зависи од интеграционе константе: она је или потпуно неодређена, па ма какву вредност дали константи, или је равна једној од вредности*

$$(9) \qquad -\frac{1}{2}\left(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2}\right).$$

Јер, кад се у једначини (8) стави $x=\dfrac{1}{\xi}$ и кад се узме за прапроменљиву u а за нову функцију ξ, иста се једначина може написати у облику

$$(10) \qquad \frac{d\xi}{du}=\frac{\xi^2}{u^2+f_1\left(\dfrac{1}{\xi}\right)u+f_2\left(\dfrac{1}{\xi}\right)}.$$

Нека је $\xi=\psi(u)$ општи интеграл ове последње једначине. Асимтотне вредности функције u за $x=+\infty$ нису ништа друго до вредности које та функција добија за $\xi=0$ и, према томе, могућна су ова два случаја:

1. Функција u, дефинисана диференцијалном једначином (10) нема никакву одређену вредност за $\xi=0$, тј. вредност $\xi=0$ представља есенцијални сингуларитет функције $u(\xi)$ дефинисане једначином (10). У томе случају и асимтотна вредност те функције потпуно је неодређена: интеграл не тежи никаквој одређеној граници.

Такав је, нпр., случај са Рикатијевом једначином

$$(*) \qquad \frac{du}{dx}+u^2+1=0;$$

једначина (10) овде је

$$\frac{d\xi}{du}=\frac{\xi^2}{u^2+1},$$

чији је општи интеграл

$$u=-\operatorname{tang}\left(\frac{1}{\xi}+C\right),$$

где је C интеграциона константа. Вредност $\xi=0$ есенцијални је сингуларитет функције u и вредност tang $(+\infty)$, тј. асимтотна вредност оптега интеграла једначине (*), потпуно је неодређена.

Наводим, узгред, да се, по познатим методама из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, може увек на самој датој једначини и без претходне интеграције распознати да ли је вредност $\xi=0$ есенцијални сингуларитет оптега интеграла или не, па према томе и то да ли дата једначина потпада под случај 1 или под идући случај.

2. Вредност $\xi=0$ није есенцијални сингуларитет функције и (ξ) дефинисане једначином (10). Асимтотне вредности интеграла u тада нису ништа друго до корени r_i једначине $\varphi(r) = 0$ решене по r. Нека је r такав један корен.

Напишимо једначину (10) у облику

$$(11) \qquad \psi(u) = e^{\int_r^u \frac{\psi(u)du}{u^2 + f_1\left(\frac{1}{\psi}\right)u + f_2\left(\frac{1}{\psi}\right)}}$$

и пустимо да u тежи граници r. Тада ће лева страна једначине (11) тежити нули, да би тако исто било и са десном страном, потребно је да буде

$$(12) \qquad \lim\left[u^2 + f_1\left(\frac{1}{\varphi}\right)u + f_2\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right] = 0; \quad \psi = 0, u = r.$$

Услов (12) захтева да r буде корен алгебарске једначине другога степена

$$(E) \qquad r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

и став је тиме доказан: u извесно тежи једној од граница (9). И према томе: асимтотне вредности интеграла y дате једначине (7) не зависе од интеграционе константе и добијају се кад се једна од вредности (9) подели границом којој тежи $\varphi_1(x)$ при бесконачном рашћењу x-а.

Али се може ићи још даље.

Кад је $a_1^2 - 4a_2 = 0$ две вредности (9) једнаке су и интеграл u тежи њиховој заједничкој вредности. Но, ако је $a_1^2 - 4a_2 \leq 0$, те су две вредности различне међу собом и у томе случају могу се доказати неколике значајне теореме, од којих је на неке први наишао г. Поенкаре (*Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux differences finies*, штампано у American Journal of Mathematics, Vol. VII, № 3) и за које ћу овде, допунивши у исти мах саме теореме, изнети нове и простије доказе, али претпоставивши да су вредности сачинилаца $f_1(x)$ и $f_2(x)$ реалне за довољно велике и положне вредности x-а и ограничивши се на реалне интеграле, који су, уосталом, од највећега интереса у применама.

Разликујмо ова два подслучаја.

Први подслучај: $a_1^2 - 4a_2 > 0$.

Тада су корени квадратне једначине (E) реални. Означимо их са α_1 и α_2, претпоставивши да је $\alpha_1 > \alpha_2$. Уочимо затим квадратну једначину

$$u^2 + f_1(x)u + f_2(x) = 0$$

решену по u, и нека су

$$u = \Theta_1(x), \quad u = \Theta_2(x)$$

њени корени, који ће бити функције прапромењиве x. Тада, претпостављајући да је, почевши од једне извесне, довољно велике вредности x-а непрестано

$$\Theta_1(x) > \Theta_2(x),$$

биће

$$\begin{array}{l} \lim \Theta_1(x) = \alpha_1 \\ \lim \Theta_2(x) = \alpha_2 \end{array}, \quad x = +\infty.$$

Али, ове две функције Θ_1 и Θ_2, тежећи при рашћењу x-а границама α_1 и α_2, могу то чинити на два начина: растући или опадајући. Испитајмо засебно сваки од ових случајева.

Претпоставимо најпре да је за велике положне вредности x-а.

$$\Theta_1(x) > \alpha_1$$

дакле да Θ_1 тежи граници α_1 опадајући. Уочимо један посебан интеграл u (x) једначине (8), који за једну довољно велику, вредност $x = x_0$ задовољава услове

$$u(x_0) > \Theta_1(x_0), \quad u(x_0) > \Theta_2(x_0)$$

и пустимо да x расте од $x = x_0$ до $x = +\infty$. Из једначине (8), написане у облику

$$\frac{du}{dx} = -\big[u(x) - \Theta_1(x)\big]\big[u(x) - \Theta_2(x)\big] \tag{13}$$

види се да ће за то време први извод $\frac{du}{dx}$ бити негативан, тј. да функција $u(x)$ опада. Но, у томе опадању њене вредности непрестано остају веће од одговарајућих вредности функција Θ_1 и Θ_2, јер чим би наступио моменат у коме би било

$$\Theta_2(x) < u(x) < \Theta_1(x)$$

извод $\frac{du}{dx}$ постао би позитиван, тј. функција $u(x)$ отпочела би да расте, што би било апсурдно пошто би она одмах, чим почне да расте, наново достигла вредност функције $\Theta_1(x)$, престигла је и од тога тренутка наново опадала (јер извод наново постаје негативан): функција би, дакле, наизменце и за бесконачно блиске вредности x-а опадала и расла.

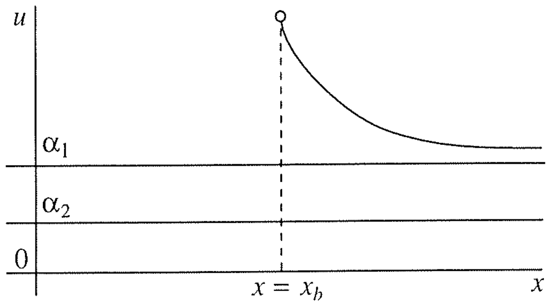
Функција $u(x)$, дакле, непрестано опада, али остајући непрестано по вредности већа од $\Theta_1(x)$, па дакле не прелазећи границу α_1. То већ показује да $u(x)$, при бесконачном рашћењу x-а, тежи извесној граници која не може бити мања од α_1. Али, пошто према теореми коју смо малочас доказали, а и према једначини (8) написаној у облику

$$(14) \qquad x - x_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2 + f_1(x)u + f_2(x)}$$

та граница мора бити или α_1 или α_2 (без чега би лева страна једначине (14) била бесконачна, а десна не) и пошто је према претпоставци $\alpha_1 > \alpha_2$, то је

$$\lim u(x) = \alpha_1.$$

*Интеграл, дакле, тежи већем корену квадратне једначине (*E*),* и то на начин показан сликом (1).



Слика 1

Тако ће исто бити и ако је за довољно велике позитивне вредности x-а $\Theta_1(x) < \alpha_1$, дакле ако Θ_1 тежи граници α_1 растући. Јер, ако као и малочас уочимо један посебан интеграл $u(x)$, који за једну довољно велику вредност $x = x_0$ задовољава услове

$$u(x_0) > \Theta_1(x_0), \quad u(x_0) > \Theta_2(x_0)$$

из једначине (13), види се да док x расте од x_0 до $+\infty$, извод $\frac{du}{dx}$ остаје негативан, тј. функција $u(x)$опада. Но, у томе опадању њена вредност не може постати мања од одговарајуће вредности функције $\Theta_1(x)$, јер би у томе случају извод постао позитиван, тј. функција u почела би да расте, што би било немогуће из истих разлога као и малочас. Ова функција, дакле, непрестано опада, али остајући при томе непрестано већа од одговарајуће вредности функције $\Theta_1(x)$, која је опет и сама, по претпоставци, већа од α_1. Из тога се већ увиђа, као и малочас, да $u(x)$ тежи граници α_1.

Дакле, сви интеграли који су, почевши од једне извесне вредности x_0 на до $x = +\infty$, већи од одговарајућих вредности функције $\Theta_1(x)$, извесно теже граници α_1 кад x тежи граници $+\infty$.

Ја велим да ће исти резултат важити и за оне интеграле који не задовољавају поменути услов, али који су такви да њихова вредност, за довољно велике вредности x-а лежи између $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$, само што ће тада такви интеграли тежити граници α_1 растући. Јер, према једначини (13), за такве вредности x-а извод $\frac{du}{dx}$ биће позитиван, дакле функција u расте. Па пошто је њена првобитна вредност $u(x_0)$ већа од одговарајуће вредности функције $\Theta_2(x)$, то она при своме рашћењу не може тежити граници α_2, а пошто, према ранијој теореми, граница функције u, која у овоме случају извесно постоји, мора бити или α_1 или α_2, то је очевидно

$$\lim u(x) = \alpha_1,$$

као што је и требало доказати, а ток функције за велике вредности x-а биће претпостављен сликом (2).

Остају нам, напослетку, они интеграли $u(x)$за које је, почевши од једне извесне, довољно велике, вредности x-а, непрестано

$$u(x) < \Theta_1(x)$$

$$u(x) \leq \Theta_2(x).$$

Тада има само један изузетан случај у коме $u(x)$ може опадати док x варира од x_0 до $+\infty$: то је онда кад је у исти мах

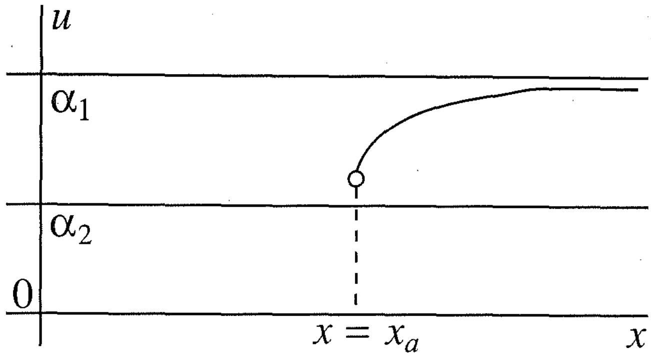
$$\Theta_2(x) = \alpha_3,$$

тј. кад Θ_2 тежи својој граници α_2 опадајући и кад је

$$\alpha_2 \leq u(x_0) \leq \Theta_2(x_0).$$

Тада је, пошто је већ по претпоставци

$$u(x_0) < \Theta_1(x_0),$$



Слика 2

на основу једначине (13), извод $\frac{du}{dx}$ негативан, дакле $u(x)$ опада. У томе опадању могућна су два случаја: или $u(x)$ опадајући непрестано тежи граници α_2, или прелази ту границу, и у томе случају мора опадати до $-\infty$, пошто због знака извода не може никако отпочети да расте, а међутим, по ономе што претходи не може имати друге границе између $\alpha_2 u - \infty$. У овоме последњем случају, кад функција $u(x)$ опадајући пређе границу α_2, она опада, дакле, до $-\infty$, а образац (13) показује да ће она добити ту вредност за извесну коначну вредност x-а. Но, из истога се обрасца види да ће за ту исту коначну вредност x-а функција $u(x)$ у исти мах имати и вредност $+\infty$. Претпоставка $u(x) < \Theta_1(x)$ и $u(x) < \Theta_2(x)$ захтева тада да и функције Θ_1 и Θ_2 постану бесконачне за ту вредност x-а.

Пошто је, почевши од те вредности, извод $\frac{du}{dx}$ опет негативан, то $u(x)$ опада од $+\infty$ до извесне границе, али у томе опадању не може прећи границу α_1, пошто би у томе моменту извод постао позитиван и функција би наново расла до извесне границе; ако би ова граница била $+\infty$ (за $x=\infty$), то би било у супротности са једначином (14), чија би лева страна била бесконачна, а десна не; тако би исто било и кад би та граница била коначна, јер би она тада очевидно била различна од α_1 и α_2, које су једине вредности за које десна стране може бити бесконачна.

Функција $u(x)$ не може, дакле, у своме опадању прећи границу α_1. Из тога се, као и малочас, закључује да $u(x)$ тежи граници α_1, и то на начин означен сликом (3).

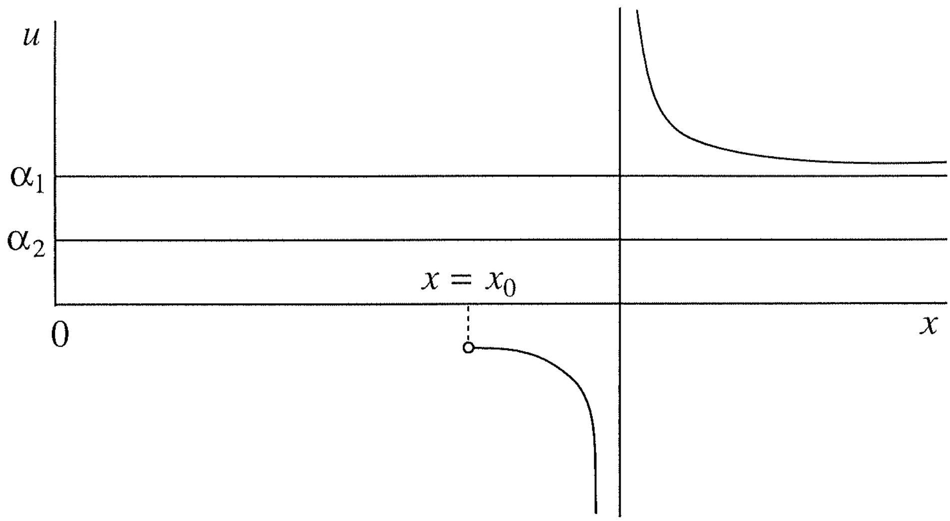
За интеграле пак који расту док x варира од x_0 до $+\infty$, лако се доказује, као и досад, да у томе рашћењу не могу прећи границу α_1 и да теже самој тој граници.

Из свега овога изводи се ова теорема:

Кад год је $a_1^2 - 4a_2 > 0$, *асимптотна вредност општега интеграла и једначине* (8) *равна је, уопште, већем корену квадратне једначине* (E); *изузетно, и за извесне специјалне интеграле, та асимптотна вредност може бити равна мањем корену исте једначине.* За које пак интеграле, и под којим условима може наступити овај последњи случај, види се из овога што претходи.

Други подслучај: $a_1^2 - 4a_2 < 0$.

Тада су корени квадратне једначине (E) имагинарни и, према томе, за ма какву реалну вредност x-а, позитивну и довољно велику, полином



Слика 3

$$u^2 + f_1(x)u + f_2(x)$$

мора имати позитиван знак, што показује, према једначини (8), да функција $u(x)$, почевши од извесне довољно велике вредности x-а, непрестано опада. Но, у томе своме опадању она не може имати никакву одређену и коначну границу. Јер, пошто имамо посла са реалним интегралима, та би граница морала бити стварна и ако је ρ таква граница, према једначини (14), морало би бити

$$\rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0,$$

што је немогуће пошто иста квадратна једначина нема реалних корена. Та граница не може бити ни $u = -\infty$, за $x = \infty$, јер би то било у супротности са обрасцем (14), који се за врло велике вредности x-а своди на

$$x - x_0 = -\int_{z_0}^{z} \frac{du}{u^2 + a_1 u + a_2},$$

или на

$$x + C = \frac{1}{q} \operatorname{arctang} \frac{p-u}{q},$$

где су p и q реални и имагинарни део имагинарних корена квадратне једначине (E), а C интеграциона константа. За $x = \infty$, $u = -\infty$, лева страна једначине постала би бесконачно велика, док би десна остала коначна.

Та је граница, дакле, потпуно неодређена, што може доћи само отуда ако је вредност $x = \infty$ есенцијални сингуларитет функције $u(x)$, дефинисане једначином (8), и тада, пошто та функција, као што је примећено, непрестано опада за велике вредности прапроменљиве, то ће варијација њена за велике вредности x-а бити представљена сликом (4).

Но, о томе се можемо уверити још на један интересантан начин, помоћу извесних особина линеарних диференцијалних једначина другога реда, помоћу којих се могу унеколико прецизирати и саме вредности x-а за које функција $u(x)$ има скокове од $-\infty$ на $+\infty$.

Ако се у једначини (8) стави

$$u = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} f_1(x), \tag{15}$$

ова се претвара у линеарну једначину

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \tilde{\omega}(x) v = 0,$$

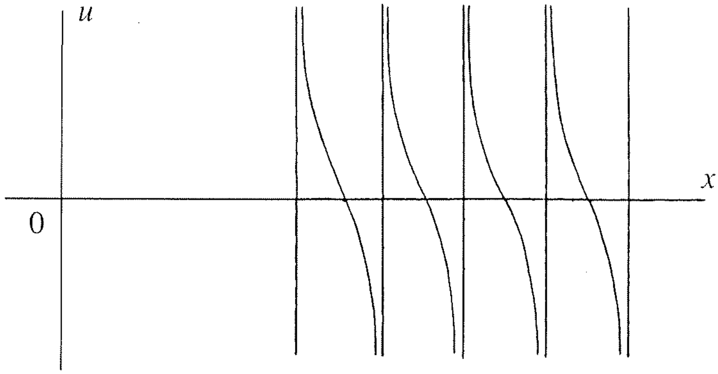
где је

$$\tilde{\omega}(x) = f_2(x) - \frac{1}{2}\frac{df_1}{dx} - \frac{1}{4} f_1^2(x).$$

Почевши од једне извесне, позитивне и довољно велике вредности $x = x_0$, функција $\tilde{\omega}(x)$ биће коначна и имаће константно један и исти знак, и то знак константе $a_2 - \frac{a_1^2}{4}$, пошто је

$$\lim f_1(x) = a_1, \quad \lim f_2(x) = a_2, \quad \lim f_1'(x) = 0$$

и тај знак биће позитиван, пошто је $a_1^2 - 4a_2 < 0$.



Слика 4

У исто време, пошто за те вредности x-а функција $\tilde{\omega}(x)$ остаје коначна, према особинама линеарних једначина и сам интеграл v остаје у томе интервалу коначан.

Послужимо се сад једном познатом Штурмовом (Sturm) теоремом, односно теоремом линеарних једначина другога реда, која се састоји у овоме:

Нека су дате две једначине

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \tilde{\omega}(x)v = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2w}{dx^1} + \chi(x)w = 0,$$

где су функције $\tilde{\omega}(x)$ и $\chi(x)$ холоморфне за све вредности x-а у једноме датом интервалу од $x = a$ до $x = b$, и такве да је за све те вредности x-а непрестано

$$\text{(C)} \qquad \tilde{\omega}(x) = \chi(x).$$

Тада између две вредности x-а које поништавају интеграл једначине (B) мора лежати бар једна вредност x-а која поништава интеграл једначине (A). (Штурм: *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, Journal de Liouville, t. I, 1836.)

Пошто функција $\tilde{\omega}(x)$ при бесконачном рашћењу x-а тежи позитивној и од нуле различној граници $a_2 - \frac{a_1^2}{4}$, то се увек може изабрати вредност x_0, тако да је у интервалу од $x = x_0$ до $x = \infty$ најмања вредност те функције различна од нуле и позитивна. Означимо са N ту њену најмању вредност и применимо горњу Штурмову теорему на једначине (A) и

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + Nw = 0$$

Пошто је у интервалу $(x_0 \ \infty)$ непрестано

$$\tilde{\omega}(x) > N,$$

то између две узастопне вредности x-а које поништавају функцију w, мора лежати бар једна вредност која поништава функцију v. Али, општи је интеграл једначине (D), пошто је $N > 0$,

$$w = C_1 \sin\left(x\sqrt{N} + C_2\right),$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе, и тај интеграл постаје у интервалу $(x = x_0, x = \infty)$ бесконачно много пута раван нули, за вредност x-а чија је узастопна разлика стална и равна броју $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$. Према томе, и функција v мора постати бесконачно много пута равна нули у истоме интервалу, и узастопна разлика између две такве вредности које је поништавају очевидно мора бити мања од $\frac{2\pi}{\sqrt{N}}$. А из тога, према обрасцу (15), излази да функција $u(x)$ постаје бесконачно много пута бесконачна у интегралу $(x_0 \ \infty)$, и то за вредности x-а чија је узастопна разлика мања од $\frac{2\pi}{\sqrt{N}}$.

У исти мах очевидно је и то да, пошто логаритамски извод $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ за $x = x_1 - \varepsilon$ (где x_1 означава једну, ма коју од вредности која поништава v_1 а ε бесконачно мали позитиван број) има вредност $-\infty$, а за $x = x_1 + \varepsilon$ има вредност $+\infty$, функција u осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ до $+\infty$, са скоковима од $-\infty$ на $+\infty$.

Из свега тога изводи се ова теорема:

Кад год је $a_2^2 - 4a_2 < 0$, *асимптотна вредност интеграла и потпуно је неодређена; интеграл осцилује бесконачно много пута од* $-\infty$ *до* $+\infty$, *са скоковима од* $-\infty$ *на* $+\infty$.

Као прост пример у коме се може видети како се и кад напред све поменуте околности јављају, наводим једначину

$$\frac{du}{dx} + u^2 + au + b = 0,$$

где су a и b реалне константе. Квадратна једначина (E) овде је

$$u^2 + au + b = 0,$$

чији корени нека су α_1 и α_2, са претпоставком да је $\alpha_1 > \alpha_2$.

Према горе изведеним теоремама, ако је $a^2 - 4b > 0$, интеграл $u(x)$ тежи граници α_1, а само извесни интеграли могу изузетно тежити граници α_2. Ако је, напротив, $a^2 - 4b < 0$, интеграл не тежи никаквој одређеној граници, већ осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ ка $+\infty$.

А све се то потврђује на општем интегралу једначине, који је

$$u = \frac{\alpha_1 + C\alpha_2 e^{(\alpha_2 > \alpha_1)x}}{1 + Ce^{(\alpha_2 > \alpha_1)x}},$$

где је C интеграциона константа.

Ако је $a^2 - 4b > 0$, корени α_1 и α_2 су реални, разлика $\alpha_2 - \alpha_1$ негативна и интеграл очевидно тежи граници α_1. Граници α_2 тежи само један једини посебни интеграл, који одговара вредности интеграционе константе $C = \infty$ и који се идентички своди на $u = \alpha_2$.

Напротив, ако је $a^2 - 4b < 0$, тј. корени α_1 и α_2 имагинарни и равни $p \pm q\sqrt{-1}$, општи интеграл једначине може се написати у облику

$$u = p - q\,\mathrm{tang}(qx - C'),$$

који израз очевидно не тежи никаквој одређеној граници, имајући вредност $x = \infty$ као есенцијални сингуларитет. У исти мах се види да интеграл осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ ка $+\infty$, и то за вредности x-а чији је узастопни размак раван броју

$$\frac{\pi}{q} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 4b}},$$

што све потврђује горње теореме.

Најзад, навешћу једну доста општу, интересантну класу Рикатијевих диференцијалних једначина у којима се поменуте теореме могу такође непосредно потврдити: то је случај кад су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рационалне функције x-а и кад је општи интеграл једначине раван логаритамском изводу какве униформне функције.

Ако се та униформна функција означи са U, онда је

$$u = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

и функција U биће интеграл линеарне диференцијалне једначине другога реда

$$\text{(16)} \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + f_1(x)\frac{dU}{dx} + f_2(x) = 0.$$

Послужимо се сад једном теоремом коју је доказао Алфен (Halphen) 1886 г. (Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, T. 101, p. 1238) и која се састоји у следећем.

Нека је дата линеарна диференцијална једначина n-тог реда

$$\frac{d^n y}{dx^n}+S_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+S_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+S_n(x)y=0,$$

где су $S_1, S_2, S_3, \ldots$ рационалне функције x-а, од којих ниједна не расте бесконачно при бесконачном рашћењу x-а. Кад год је општи интеграл такве једне једначине униформна функција, он мора бити оваквог облика

$$y=R_1(x)e^{\alpha x}+R_2(x)e^{\beta x}+\ldots+R_n(x)e^{\delta x},$$

где су $R_1, R_2, \ldots, R_n$ рационалне функције x-а, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ корени алгебарске једначине n-тог степена

$$\text{(F)} \qquad x^n+A_1x^{n-1}-A_2x^{n-2}+\ldots+A_n=0,$$

у којој је уопште

$$A_k=\lim S_k(x), \qquad x=+\infty.$$

Применимо ову теорему на нашу функцију U. Пошто су f_1 и f_2 по претпоставци рационалне функције x-а које теже коначним границама a_1 и a_2 и пошто се Алфенова алгебарска једначина (F) у томе случају своди на нашу ранију квадратну једначину (E), чији су корени α_1 и α_2, то мора бити

$$U=R_1(x)e^{\alpha_1 x}+R_2(x)e^{\alpha_2 x},$$

где су R_1 и R_2 извесне рационалне функције $x-a$.

Општи интеграл Рикатијеве једначине (8) може се тада написати у облику

$$u=\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}=\frac{\alpha_1 R_1+\frac{dR_1}{dx}+\left(\alpha_2 R_2+\frac{dR_2}{dx}\right)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}}{R_1+R_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}}.$$

Пустимо да x бесконачно расте. Ако су корени α_1 и α_2 реални, разлика $\alpha_2-\alpha_1$ је одречна и према томе је

$$\lim\left(\alpha_2 R_2+\frac{dR_2}{dx}\right)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}=0,$$

$$\lim R_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} = 0.$$

Тако исто логаритамски извод $\frac{1}{R_1}\frac{dR_1}{dx}$, који се увек може представити као збир извеснога коначног броја израза

$$\frac{B_k}{x-a_k},$$

тежи нули, па дакле *u* тежи граници α_1. Међутим, може се десити да се за једну извесну, специјалну, вредност интеграционе константе рационална функција $R_1(x)$ сведе идентички на нулу; за такве специјалне интеграле асимтотна ће вредност бити α_2.

Ако су корени α_1 и α_2 имагинарни, експоненцијална функција $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$ своди се на синус и косинус реалних количина и функција $u(x)$ нема никакву одређену вредност за $x=\infty$.

*

Претходним теоремама одређена је граница којој тежи *u* (у случају кад та граница постоји). Граница функције *y*, дефинисане диференцијалном једначином (7), биће

$$\lim y = \frac{\lim u(x)}{\lim \varphi_1(x)}.$$

У случају кад *u* тежи граници α_1, ако φ_1 тежи извесној коначној граници *b*, *y* тежи граници $\frac{\alpha_1}{b}$; ако то није случај, општа интегрална крива (7) има као своју асимтотну криву

$$\varphi_1(x)y-\alpha_1=0.$$

Слични резултати вреде и за оне специјалне интеграле који теже граници α_2.

Ако пак *u* нема одређене границе, тако ће исто бити, уопште, и са интегралом *y*.

Други случај: $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *не теже обе коначним границама, или ако теже, те су обе границе равне нули.* Кад је једна од тих граница бесконачна, граница интеграла *u* извесно је бесконачна. Кад су обе границе равне нули, у општем случају не може се наћи граница интеграла *u*, али у специјалним случајевима то је често могућно.

Тако, кад су $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ алгебарске функције x-а ваља једначину (7) написати у облику

$$\sum_{k=0}^{k=m} \psi_k(y_1 x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^{m-k} = 0,$$

где су $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ полиноми по x и y, са сачиниоцима који не постају бесконачни ни за коју коначну вредност y-а, и на тако уређену једначину применити теореме 1 и 2.

*

Теоремама 3 и 4 решен је проблем о сталности асимтота паралелних x-ној оси за једначину

$$\text{(A)} \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

исти принцип очевидно важи и за асимтоте паралелне y-ској оси: довољно је учинити у једначини смену $y = \frac{1}{z}$ и применити теореме 1 и 2 на тако добијену једначину

$$\Psi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Остаје нам још да решимо овај проблем:

Расйознаши на дашој диференцијалној једначини (A) *да ли асимшоше ойшше иншеїралне криве, које нису йаралелне координашним* осама x *и* y, *варирају са варијацијом иншеїрационе консшанше или не, и наћи ше асимшоше у случају кад су оне сшалне.*[2]

Ради тога ставимо

$$\lambda = \frac{y}{x}$$

и учинимо у датој једначини (A) ову смену променљивих: сматрајмо λ као нову прапроменљиву а x као функцију од λ. Ако се у (A) стави

$$y = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}},$$

[2] Примедба о есенцијалним сингуларитетима, учињена раније код теорема о асимтотним вредностима интеграла, очевидно важи и овде, као и свуда при сличним истраживањима.

добија се нова једначина

$$(16) \qquad \Psi\left(\lambda, y, \frac{dx}{d\lambda}\right) = 0.$$

Угаони сачиниоци асимтота опште интегралне криве y (једначине А), које нису паралелне координатним осама, нису ништа друго до коначне вредности λ за које општи интеграл x диференцијалне једначине (16) постаје бесконачан. Означимо са λ_i те угаоне сачиниоце; ако се у једначини (16) стави

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

и ако је

$$(17) \qquad \Phi\left(\lambda, z, \frac{dz}{d\lambda}\right) = 0$$

нова једначина тако добијена, вредности λ_i нису ништа друго до вредности λ које поништавају општи интеграл z диференцијалне једначине (17), и ако се иста једначина напише у облику (што је увек могуће)

$$\varphi_0(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^m + \varphi_1(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^{m-1} + \ldots + \varphi_{m-1}(\lambda, z)\frac{dz}{d\lambda} + \varphi_m(\lambda, z) = 0,$$

где су $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ полиноми по z са сачиниоцима који не постају бесконачни ни за какву коначну вредност x-а, примена теорема 1 и 2 доводи до овога резултата:

Теорема 5. – *Да би уīаони сачиниоци* λ_i *били независни од инūеīрационе консūанūе, йоūребно је и довољно да свака од функција* $\varphi_k(\lambda, z)$, *осим* $\varphi_0(\lambda, z)$, *садржи као чиниоца* z_h, *īде је* $h \geq k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Теорема 6. – *Кад īод су уīаони сачиниоци* λ_i *независни од инūеīрационе консūанūе, они су корени алīебарске једначине*

$$\varphi_0(\lambda, 0) = 0$$

решене ūо λ.

Потврдимо ове теореме на једноме простом примеру: нека је дата диференцијална једначина

$$(p) \qquad x^2\frac{dy}{dx} - xy - (ay + bx)^2 = 0.$$

Ставивши узастопце

$$y = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}},$$

$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

једначина (17) је у овоме случају

$$(a\lambda + b)\frac{dz}{d\lambda} + z = 0.$$

Услови теореме 5 испуњени су, што значи да угаони сачиниоци асимтота не зависе од интеграционе константе, а према теореми 6 ти су угаони сачиниоци равни једноме *и* истоме броју

$$\lambda = -\frac{b}{a},$$

што значи да су асимтоте свих посебних интегралних кривих паралелне међу собом. А све се то потврђује непосредно на општем интегралу једначине (p), који је

$$y = \left(\frac{1}{a \log x + C} - b\right)\frac{x}{a}.$$

Теореме 5 и 6 тичу се угаоних сачинилаца асимтота; но да асимтоте не би зависиле од интеграционе константе, потребно је да и ординате од почетка тих асимтота буду независне од C. Проблем да се на датој диференцијалној једначини распозна да ли је тако или не, решава се лако применом теорема 1, 2, 5 и 6.

Нека је λ ма који од корена малопређашње једначине $\varphi_0(\lambda, 0) = 0$; ордината од почетка асимтоте, чији је угаони сачинилац λ, равна је граници којој тежи израз

$$\eta = y - \lambda x,$$

кад се у њему y замени општим интегралом дате једначине (15) и кад се затим пусти да x бесконачно расте.

Ако се, дакле, у једначини (15) стави узастопце

$$y = \eta + \lambda x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dx} + \lambda,$$
$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

и ако је

(19)
$$\Delta\left(\eta, z, \frac{dz}{d\eta}\right) = 0,$$

где се η сматра као прапроменљива а z као његова функција – тако добијена једначина, ординате η нису ништа друго до вредности η које поништавају општи интеграл z једначине (19). Примена теорема 1 и 2 решиће тада потпуно проблем.

Интеграли оних једначина (15) чије трансформисане једначине (19) задовољавају услове теорема 1 и 2, имају врло интересантне геометријске особине, које заслужују дубљега испитивања и које мислим извести у другоме једном раду. Тако, за те једначине, баш и кад су вредности λ променљиве, а вредности η које поништавају z не зависе од λ, што се све може распознати непосредно на једначини, асимтоте свих посебних интеграла пролазе кроз извесне сталне тачке (које се увек могу наћи) на y-ској оси, и кад се пусти да интеграциона константа варира, *асимтоте се обрћу око тих сталних тачака.* А из тога се факта може извести више интересантних особина.

*

Наводим једну важну примену коју претходни резултати налазе у аналитичкој теорији алгебарских диференцијалних једначина другога реда

(20)
$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

у којима x не фигурише експлицитно.

Уочимо случајеве кад је општи интеграл једначине (20) *алгебарска, простопериодична* или *двогубопериодична* функција x-а, али са коначним бројем вредности за сваку дату вредност x-а. Пошто таква једна функција, као што је познато, има ту особину да између ње и њенога првог извода мора постојати алгебарска релација, то ће се у тим случајевима, ако се у једначини (20) узме y као прапроменљива, а $\frac{dy}{dx}$ као функција те прапроменљиве

$$\frac{dy}{dx} = p(y),$$

једначина (20) претворити у

(21)
$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

једначину првога реда, чији општи интеграл

$$p = \chi(y, C) \tag{22}$$

мора дефинисати p као алгебарску функцију y-а. Тада ће се општи интеграл y једначине (20) добити као инверзија Абеловог интеграла

$$x = \int \frac{dy}{\chi(y, C)}. \tag{23}$$

Замислимо конструисану алгебарску криву (22), сматрајући p као апсцису, а y као ординату једне тачке; та крива ће се деформисати варијацијом интеграционе константе C.

У теорији Абелових интеграла познати су ови ставови.[3]

1. Ако се означе са

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \tag{24}$$

угаони сачиниоци асимтота криве (22) које нису паралелне координатним осама; са

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \tag{25}$$

угаони сачиниоци тангената (такође непаралелних осама) на исту криву у оним тачкама (реалним или имагинарним) у којима она сече ординатну y-ску осу, онда вредности

$$\begin{gathered} 2\pi\alpha_1\sqrt{-1},\ \ 2\pi\alpha_2\sqrt{-1}, \ldots, 2\pi\alpha_i\sqrt{-1}, \\ 2\pi\beta_1\sqrt{-1},\ \ 2\pi\beta_2\sqrt{-1}, \ldots, 2\pi\beta_k\sqrt{-1} \end{gathered}$$

помножене каквим целим бројем, представљају поларне периоде Абеловог интеграла (23).

2. Ако је инверзија y истога Абеловог интеграла алгебарска или двогубопериодична функција x-а, вредности (24) и (25) не постоје; ако је y простопериодична функција са коначним бројем вредности, вредности (24) и (25) постоје и имају један и исти заједнички делилац, тако да, ако се овај означи са ρ, мора бити

$$\begin{gathered} \alpha_1 = m_1\rho,\ \ \alpha_2 = m_2\rho, \ldots, \alpha_i = m_i\rho \\ \beta_1 = n_1\rho,\ \ \beta_2 = n_2\rho, \ldots, \beta_k = n_k\rho \end{gathered}$$

---

[3] В. нпр., Raffy: *Recherches algébriques sur les intégrales abeliennes*, Annales de l'Ecole Normale Superiéure, 2[me] série, T. XII.

где $m_1, \ldots, m_i$ и $n_1, \ldots, n_k$ означују целе бројеве. Периода простопериодичне функције y мора тада бити

$$2M\pi\rho\sqrt{-1},$$

где M означава какав цео број.

Послужимо се тим ставовима и теоремама 5 и 6. Ставимо у једначини (21) узастопце: прво

$$p = \lambda y, \quad \frac{dp}{dy} = \lambda + \frac{y}{\frac{dy}{d\lambda}},$$

а затим

$$y = \frac{1}{z}, \quad dy = -\frac{dz}{z^2},$$

и нека је

$$(26)\quad \varphi_0(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^m + \varphi_1(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^{m-1} + \ldots + \varphi_{m-1}(\lambda, z)\frac{dz}{d\lambda} + \varphi_m(\lambda, z) = 0,$$

нова тако добијена једначина, у којој се z сматра као функција прапроменљиве λ. Ако се са $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ означе вредности коначне и различне од нуле, које поништавају општи интеграл $z(\lambda)$ једначине (26), онда је уопште

$$\lambda_j = \lim \lambda \quad (j = 1, 2, \ldots, i) \;\text{ за }\; z = 0, \;\text{ тј. за }\; y = \infty,$$

или, из релације $p = \lambda y$

$$\lambda_j = \lim \frac{p}{y}, \quad y = \infty.$$

Са друге стране, угаони сачиниоци $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ могу се дефинисати општим обрасцем

$$\alpha_j = \lim \frac{y}{p} \quad (j = 1, 2, \ldots, i), \quad y = \infty$$

па је, дакле

$$\alpha_j = \frac{1}{\lambda_i} \quad (j = 1, 2, \ldots, i).$$

Према теоремама 5 и 6, закључује се онда ово: да вредности α_j не би зависиле од интеграционе константе, потребно је и довољно да сваки од полинома $\varphi_h(\lambda, z)$, осим $\varphi_0(\lambda, z)$, садржи као чиниоца z^n, где је

$n \geq h$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ и, кад год је тај услов испуњен, вредности α_j биће корени алгебарске једначине

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) \tag{27}$$

решене по α.

На основу тога и узевши у обзир малочас поменута два става о Абеловим интегралима, може се извести ова теорема:

Да би општи интеграл једначине (20) *могао бити алгебарска или двогубопериодична функција* x*-а, потребно је да се функција* $\varphi_0(\lambda, 0)$ *своди на једну константу, различну од нуле и независну од* λ, *и да свака од функција* $\varphi_h(\lambda, z)$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ *садржи као чинилац* z^n, *где је* $n \geq h$.

Претпоставимо да је овај последњи услов испуњен, али да се функција $\varphi_0(\lambda, 0)$ не своди на константу независну од λ. Тада општи интеграл y не може бити алгебарска или двогубопериодична функција, али може бити простопериодична функција x-а. Тада једначина $\varphi_0(\lambda, 0) = 0$ решена по λ има известан број корена и, према овоме што претходи, може се за тај случај извести ова теорема:

Да би y *могао бити простопериодична функција* x*-а са коначним бројем вредности, потребно је да корени* α_j *једначине* (27) *решене по* α *имају заједнички делилац.*

До сличних се теорема долази и посматрањем вредности угаоних сачинилаца β_j. Те се вредности могу дефинисати општим обрасцем

$$\beta_j = \lim \frac{dy}{dp} \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{за} \quad p = 0.$$

Према томе, ако се једначина (21) напише у облику

$$\sum_{h=0}^{h=\mu} f_h\left(y, \frac{dp}{dy}\right) p^{\mu - h} = 0$$

тако да лева страна буде уређена по степенима p-а, угаони сачиниоци корени су алгебарске једначине

$$f_\mu\left(\Theta, \frac{1}{\beta}\right) = 0 \tag{28}$$

решене по β, где Θ представља ма коју од вредности y-а које поништавају општи интеграл $p(y)$ једначине (24). Дакле:

Да би y *могло бити алгебарска или двогубопериодична функција, једначина* (28) *решена по* β *не може имати ниједан корен коначан и различан од нуле.*

Ако једначина (28) има корена β_j који не зависе од Θ, али су коначни и различни од нуле, општи интеграл y не може бити алгебарски или двогубопериодична функција.

Да би y *могло бити простопериодична функција* x*-а са коначним бројем вредности, потребно је да такви корени* β_j *једначине* (28) *имају један заједнички делилац* ρ, *који би у исто време био и заједнички делилац корена* α_j *једначине* (27); *периода функције* y *биће тада*

$$2N\pi\rho\sqrt{-1},$$

где N *означава какав цео број.*

Услови исказани у овим теоремама такве су природе да се увек на датој диференцијалној једначини може распознати да ли су они испуњени или не. Исте теореме могу бити од велике користи при решавању питања о аналитичкој природи оптшега интеграла, као и за тражење интегралних периода. Потврдимо их бар на једноме простом примеру.

Нека је дата диференцијална једначина

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+by\frac{dy}{dx}=0, \tag{29}$$

где a и b означују две константе. Једначина (21) постаје овде

$$y\frac{dp}{dy}+ap+by=0,$$

а једначина (26)

$$[\lambda(1+a)+b]\frac{dz}{d\lambda}-z=0.$$

Једначина (27) овде је

$$\frac{1+a}{\alpha}+b=0,$$

чији је једини корен

$$\alpha=-\frac{1+a}{b},$$

а једначина (28)

$$\left(\frac{1}{\beta}+b\right)\Theta=0,$$

чији је једини корен

$$\beta = -\frac{1}{b}.$$

Према претходним теоремама, да би y било алгебарска функција x-а, мора бити $b = 0$; да би било простопериодична функција са коначним бројем вредности, мора бити или $a = 0$ или

$$-\frac{1+a}{b} = mp, \qquad \frac{1}{b} = np,$$

где су m и n цели бројеви и одакле је

$$-a = -\frac{m+n}{n},$$

тј. a мора бити рационалан број; периода тада мора бити

$$\frac{2M\pi\sqrt{-1}}{nb},$$

где M означава такође какав цео број.

А све се то потврђује непосредно на изразу општега интеграла једначине (29), који је

или $$y = C(1 + C'e^{bx})^{\frac{1}{1+u}}$$

или $$y = C(1 + C'x)^{\frac{1}{1+a}},$$

према томе да ли је $b \lessgtr 0$ или $b = 0$; C и C' означују интеграционе константе.

*

Претходне теореме могу наћи интересантних примена и у рационалној механици.

Уочимо, нпр., праволинијско кретање једне тачке под утицајем какве силе која је алгебарска функција брзине и времена. Брзина коју ће тачка имати у једноме даноме тренутку зависи уопште од њене почетне брзине и мењаће се са варијацијом ове последње. Али, има значајних случајева у којима, ма са којом се почетном брзином покренула тачка, она ће по истеку једнога извесног интервала времена задобити увек једну и исту брзину, факт аналоган ономе са којим се има посла у класичном проблему таутохронизма. Исто тако, има случајева у којима брзина, кад време бесконачно расте, тежи једној извесној и сталној граници, која ће увек бити једна и иста ма са каквом се почетном брзином тачка покренула.

Претходне теореме дају начина да се те значајне околности у датоме проблему предвиде још пре његовога потпуног решења, па и онда кад је то решење немогуће због несавладљивих интеграционих тешкоћа. Јер, ако се брзина покретне тачке означи са v, њена маса са m, а сила која је креће са F, и ако је та сила дата алгебарска функција $\Phi(t,v)$ времена и брзине, решење проблема своди се на интеграцију алгебарске диференцијалне једначине првога реда

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = \Phi(t,v),$$

која се увек може написати у облику

$$f\left(t, v, \frac{dv}{dt}\right) = 0,$$

где је f полином у односу на v и $\frac{dv}{dt}$. Лако се увиђа да у проблему улогу интеграционе константе игра сама почетна брзина покретне тачке и да, према томе, наше теореме дају начина да се изнађу они елементи кретања који остају стални, независни од почетне брзине.**

** Београдски математичар Милорад Бертолино проучавао је овај Петровићев обиман рад и користио се њиме у раду *Théorèmes sur le compartement asymtotique des solutions de certaines équations differentielles*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, Београд 1961, vol. XIII, 1–2, стр. 23–33. У својој књизи *Diferencijalne i integralne jednačine u Jugoslaviji*, Beograd 1979, Бертолино наставља са анализом ове Петровићеве расправе, а што је видно пренела и совјетска наука – професор Јеругин у часопису Дифф. уравнения (пр. Д. Т.).

О БИНОМНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ПРВОГ РЕДА*

Посматрајмо једначину

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = R(x, X, y),$$

где је R рационална функција од x, X и y, при чему се претпоставља да су величине x и X везане алгебарском једначином $G(x, X) = 0$. Једначина се, уосталом, може свести на облик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x, X, y)\sqrt[m]{P_2(x, X, y)}}{P_3(x, X, y)}, \tag{1}$$

где су P_1 P_2 и P_3 полиноми по x, X и y. Униформни и трансцендентни интеграли по x не могу постојати сем уколико је полином G по x и X степена 1 по X; ако то није случај, сваки интеграл униформан по x је рационалан, *али могу постојати униформни и трансцендентни* интеграли по x и X, па чак и општи интеграл може бити такве природе.

Позабавимо се најпре случајем кад је општи интеграл једначине (1) униформан по (x, X). Ако је тако, једначина (1) има сталне критичне тачке. Кад се на њу примени теорема г. Фукса, долази се до резултата према коме једначина (1), под претпоставком да је несводљива, мора бити или степена $m < 3$ и облика

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(y - \lambda_2), \tag{2}$$

---

* Наслов оригинала *Sur l'équation différentielle binôme du premier ordre*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1895, t. CXXI, 19, pp. 632–635. Овај рад је приказао у Парискoj академији наука професор Емил Пикар 4. новембра 1895.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(y-\lambda_2)(y-\lambda_3), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(y-\lambda_2)^2(y-a)(y-b), \tag{4}$$

где су λ_1, λ_2 и λ_3 функције само од x, а a и b су константе, или, уколико је $m \geq 3$, облика

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = f(x)R(y), \tag{5}$$

где је $R(y)$ полином по y. Штавише, кад се једначина (5) сведе на облик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = R(y), \tag{6}$$

може се приметити да је, ако општи интеграл једначине (5) има сталне критичне тачке, тада је општи интеграл једначине (6) униформан, па се, према Бриоу и Букеу, могу знати сви типови једначина (6) који се могу интегралити преко униформних функција. Тако ће се добити следећа таблица једначина [којој треба додати (2), (3) и (4)] чији општи интеграл може бити униформан по (x, X):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda(y-a)(y-b)(y-c)(y-d), \tag{7}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \lambda(y-a)^2(y-b)^2(y-c)^2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \lambda(y-a)^2(y-b)^3(y-c)^3, \tag{9}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = \lambda(y-a)^2(y-b)^4(y-c)^5, \tag{10}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \lambda(y-a)^{m-1}(y-b)^{m-1}, \tag{11}$$

λ је функција од x, а a, b, c и d су константе. Ови облици су међусобно различити; може се, уосталом, добити и други помоћу хомографских трансформација.

Једначина (2) је линеарна; (3) је Рикатијева; (4) се своди на једну Рикатијеву једначину и на једну квадратуру; све једначине (7), (8), (9), (10) и (11) интеграле се квадратурама.

Претпоставимо сада да општи интеграл није униформан по (x, X), мада партикуларни интеграли могу бити такве природе. Пређимо на прецизирање типова једначина (1) који могу имати такве интеграле.

Сваки сингуларни интеграл $y = \varphi(x, X)$ који анулира P_2, па стога и y, мора бити константа, и обрнуто. Ако би ипак $y = \varphi$ анулирало P_2 или P_3, одговарајућа крива би била геометријско место критичних тачака интеграла.

С обзиром на изложено, ако је укупан број различитих вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ које или анулирају P_3, или анулирају P_2 а нису константе – већи од два, *тада је сваки по* (x, X) *униформни интеграл рационалан по* (x, X). Заиста, сваки интеграл који за $x = x_0$ узима вредност $\varphi_i(x_0, X_0)$ има x_0 као критичну тачку, сем за извесне изузетне вредности x_0 у коначном броју. Интеграл y, под претпоставком да је униформан по (x, X), може, дакле, бити једнак са φ_1, φ_2 или φ_3 само за изузетне вредности променљиве x у коначном броју, па се расуђивање завршава као у случају једначине првог степена, којим смо се бавили у једној ранијој ноти.[1]

Означимо са λ број вредности $y_i = \varphi_i(x, X)$ које анулирају P_2 а нису константе. Да би интеграл био униформан и трансцендентан по (x, X), потребно је, према претходно изложеном, да буде $\lambda = 0, 1, 2$.

Нека је, најпре, $\lambda = 0$. Тада је P_2, који ћемо означити са $\tilde{\omega}(y)$, полином по y са константним коефицијентима. Ако је y трансцендентан и по (x, X) униформан интеграл, корен

$$\sqrt[m]{\tilde{\omega}(y)} = \frac{P_3(x, X, y)}{P_1(x, X, y)}$$

такође је такав. Да би то било тако, потребно је, према једној теореми г. Пикара, *да крива* $z^m = \tilde{\omega}(y)$ *буде рода* 0 *или* 1. (Специјално, ако је $m = 2$, степен полинома $\tilde{\omega}(y)$ мора бити мањи од 5.) С друге стране, број вредности променљиве y које чине количник бесконачним (укључујући и вредност $y = \infty$) не може бити већи од 2. Стога једначина мора бити облика

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x, X, y)\sqrt[m]{\tilde{\omega}(y)}}{(y - \varphi_1)^{k_1}(y - \varphi_2)^{k_2}},$$

[1] M. Petrovitch, *Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zero*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1894, t. CXVIII, 22, pp. 1190–1193.

па ћемо имати једну релацију између степена бројиоца и имениоца, при чему треба водити рачуна да $z = 0$ не може бити интеграл једначине по $z = \frac{1}{y}$, јер бисмо иначе имали најмање три вредности $y_i = \varphi_i$ (рачунајући и $y = \infty$ као такву једну вредност).

Ако је $\lambda = 1$, једна од вредности φ_1 и φ_2 мора акумулирати P_2.

Ако је $\lambda = 2$, обе вредности φ_1 и φ_2 (уколико постоје) морају акумулирати P_2.

Најзад, ако једначина $P_1 = 0$ има решења $y = \text{const.}$, та решења играју исту улогу као решења $y_i = \varphi_i$, тако да се може рећи да, уопште узевши, укупан број тачака бесконачности $y_i = \varphi_i(x, X)$, *неконстантних нула полинома* P_2 *и константних нула полинома* P_1 *мора бити мањи од* 3.

Додајем напомену да је довољно претпоставити рационалност функције X да би се све што претходи могло применити на интеграле биномне једначине који су униформни по x.**

** Ову Петровићеву расправу реферисао је Hamburger у FdM, B. 26, S. 372–373, а сâм професор је често користио у потоњим својим радовима (пр. Д. Т.).

О РЕЗИДУУМИМА ФУНКЦИЈА ДЕФИНИСАНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА*

Циљ ми је да покажем како се на једноставан начин могу израчунавати остаци (резидууми) функција које задовољавају алгебарске диференцијалне једначине првог реда када једна таква једначина задовољава неки општи услов који је могуће препознати на свакој једначини. Одатле ће произићи један ефикасан и удобан начин израчунавања различитих вредности које извесни општи криволинијски интеграли могу узети дуж дате контуре.

Полови општег интеграла неке диференцијалне једначине првог реда могу варирати са интеграционом константом или бити стални. Остаци таквог интеграла, који се односе на непокретне или покретне полове, могу и сами бити стални или мењати се са интеграционом константом од интеграла до интеграла. Намера ми је, на првом месту, да покажем како се резидууми мењају кад су полови на које се они односе *прости* полови општег интеграла који варирају са интеграционом константом и како се може препознати да ли су сами ти резидууми стални или зависе од вредности додељених тој константи.

Почећемо подсећањем на један општи и практичан поступак којим се установљава да ли општи интеграл алгебарске једначине првог реда

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \rho_i(x) y^{m_i} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n_i} = 0$$

има или нема просте полове који се мењају са интеграционом константом.

---

* Наслов оригинала: *Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles*, Mathematische Annalen, Leipzig 1896, t. 48, pp. 75–80.

Формирајмо табелу од $2s$ позитивних целих бројева

$$\xi_i = m_i + n_i, \quad \eta_i = n_i;$$

повуцимо у равни две осе $O\xi$ и $O\eta$ и обележимо у њој s тачака (ξ_i, η_i). Спојимо потом, оси $O\eta$ најближу и од ње најдаљу тачку полигоналном линијом чије је свако теме једна од тачака (ξ_i, η_i) таква да нема ниједне од тих тачака изнад ње.

У својој докторској дисертацији (Париз 1894) доказао сам следећу општу теорему:

Да би интеграл имао покретне тачке бесконачности реда λ, ***потребно је и довољно да претходна полигонална линија има страну чији је коефицијент правца једнак*** $-\lambda$.

Да би интеграл имао покретне просте полове, потребно је и довољно, дакле, да полигонална линија има страну чији је коефицијент правца једнак -1.

Околност коју имамо у виду: постојање покретних простих полова, препознаје се, дакле, врло лако на датој једначини само помоћу експонената степена променљивих y и y' на њеној левој страни.

Нека је $x = a$ један такав пол; у његовој околини биће

$$y = \frac{A}{x-a} + \psi(x),$$

где је A тражени остатак а $\psi(x)$ у околини тачке $x = a$ холоморфна функција. Ако се стави

$$f(x) = A + (x-a)\psi(x),$$

имаће се

$$y = (x-a)^{-1} f(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-a)^{-1} f'(x) - (x-a)^{-2} f(x),$$

па општи члан израза F добија облик

$$\varphi_i(x)(x-a)^{-(m_i+2n_i)\left[(-1)^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \theta_i(x)\right]},$$

где је $\theta_i(x)$ полином по $f(x)$ и $(x-a)f'(x)$, са константним коефицијентима и без члана који би зависио само од $f(x)$.

Скуп чланова израза F у којима је експонент $-(m_i + 2n_i)$ најмањи управо је збир свих чланова дате једначине који одговарају индексима тачака (ξ_i, η_i) на страни са коефицијентом правца -1. Одатле излази да, ако се усвоји означавање са:

Σ_1 сабирања преко индекса свих тачака које леже на страни са коефицијентом правца -1,

Σ_2 сабирања преко свих осталих тачака,

F се може написати у облику

$$F = (x-a)^M \left[\Sigma_1 \Omega_i(x) + \Sigma_2 (x-a)^{N_i} \Omega_i(x) \right], \tag{1}$$

где су M и N_i цели, позитивни и сви од нуле различити експоненти и где је

$$\Omega_i(x) = \varphi_i(x) \left[(-1)^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \theta_i(x) \right].$$

Како је функција y интеграл једначине $F = 0$, израз у загради у формули (1) мора идентички бити једнак нули; дакле,

$$\Sigma_1 \Omega_i(x) + \Sigma_2 (x-a)^{N_i} \Omega_i(x) = 0. \tag{2}$$

Претпоставимо сада да x тежи ка a. Сви изрази $\theta_i(x)$, према њиховој дефиницији, теже нули, а функција $f(x)$ тежи ка A, па имамо

$$\lim \Omega_i(x) = (-1)^{n_i} \varphi_i(a) A^{m_i+n_i}.$$

Формула (2) постаје, стога, при прелазу на границу

$$\Sigma_1 (-1)^{n_i} \varphi_i(a) A^{m_i+n_i} = 0, \tag{3}$$

тако да је *тражени остатак* A *корен алгебарске једначине* (3) *из које су претходно искључени корени једнаки нули.* Очигледно је, уосталом, да једначина има бар један корен различит од нуле, јер су експоненти $m_i + n_i$, који одговарају индексима тачака што леже на страни са коефицијентом правца -1, сви међусобно различити.

Тако, пошто је установљено да општи интеграл има покретне просте полове, имамо следеће просто практично правило за израчунавање остатака који одговарају тим половима.

Претпоставимо да је полигонална линија која се односи на леву страну једначине конструисана и нека су

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$$

индекси чланова који одговарају тачкама (ξ_i, η_i) на страни са коефицијентом правца -1; тражени остаци су од нуле различити корени алгебарске једначине

$$(-1)^{n_\alpha} \varphi_\alpha(a) A^{m_\alpha+n_\alpha} + (-1)^{n_\beta} \varphi_\beta(a) A^{m_\beta+n_\beta} + \ldots + (-1)^{n_\kappa} \varphi_\kappa(a) A^{m_\kappa+n_\kappa} = 0$$

решене по A.

Ти остаци су, дакле, алгебарске функције функција $\varphi_i(a)$ које одговарају индексима тачака што леже на страни са коефицијентом правца -1; да би они били алгебарске функције ових покретних полова, потребно је и довољно да однос било које две од ових функција $\varphi_i(\alpha)$ буде алгебарска функција од x. *Да резидууми у питању не варирају са интеграционом константом, потребно је и довољно да сви ови односи буду независни од* x.

Оно што претходи често омогућава да се израчунају различите вредности које криволинијски интеграл $\int y(z,C)dz$ (где је y општи интеграл неке једначине првог реда, а C је интеграциона константа) може узети дуж дате контуре, а да при том не буде потребно експлицитно познавање функције y и њених полова.

Нека је, тако

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

једначина са утврђеним критичним тачкама. Увек ће се моћи установити да ли општи интеграл такве једне једначине јесте или није мероморфан у унутрашњости дате контуре Γ у комплексној равни; претпоставимо да је то случај. Ако су, сем тога, полови функције y прости (што се, на основу претходног, лако може утврдити), интеграл

$$\int y(z,C)dz,$$

узет дуж једне такве контуре Γ, једнак је нули или целом умношку једне од количина

$$2\pi A_1\sqrt{-1}, \quad 2\pi(A_1 + A_2)\sqrt{-1}, \quad 2\pi(A_1 + A_2 + A_3)\sqrt{-1}, \ldots,$$

где су $A_1, \ldots, A_n$ од нуле различити корени алгебарске једначине (4). А ако су, специјално, односи било која два од коефицијената $\varphi_i(x)$ који одговарају страни полигоналне линије функције F са коефицијентом правца -1 независни од x, тада су остаци A_i стални и вредност претходног криволинијског интеграла дуж Γ неће се мењати са интеграционом константом. Тако ће нам, дакле, бити познате све вредности које интеграл може узети дуж контуре Γ.

Ако је, на пример, $y(z,C)$ општи интеграл Рикатијеве једначине

$$\frac{dy}{dz} = \alpha y^2 + f(z)y + \varphi(z),$$

где је α константа, а f и φ су полиноми по x, једначина (4) своди се на $\alpha A - 1 = 0$; претходни криволинијски интеграл, узет дуж било какве контуре у z-равни, једнак је нули или неком умношку броја $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\alpha}$; ово се, уосталом, може проверити кад се примети да је функција

$$u = e^{-\alpha\int udz},$$

интеграл једначине

$$\frac{d^2u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} - \alpha\varphi(z) = 0,$$

због чега интеграл $\int ydz$ може имати само период

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\alpha}.$$

Узмимо за други пример функцију

$$y = \mathrm{sn}\left[f(x) + C\right],$$

која задовољава једначину

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left[f'(x)\right]^2(1-y^2)(1-k^2y^2) = 0.$$

Полигонална линија има само једну страну са негативним коефицијентом правца и тај коефицијент је -1; сви покретни полови су, дакле, прости. Једначина (4) овде је

$$A^2k^2\left[f'(x)\right]^2 - 1 = 0,$$

где је a покретан пол, што даје два остатка

$$A = \pm\frac{1}{k\,f'(a)},$$

при чему је a, као функција константе C, дато формулом

$$f(a) + C = \text{ пол од sn.}$$

Али, нарочито кад се траже остаци мероморфних и једноструко или двоструко периодичних функција *које имају само просте полове*, претходно правило је од користи. Тада се формира једначина

$$F\left(y, \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

коју задовољава таква функција, и на њу се непосредно примењује правило. Полови општег интеграла те једначине биће сви покретни и прости; коефицијенти $\varphi_i(a)$ који фигуришу у једначини (4) тада су константни, па су стога остаци независни од интеграционе константе и дати као корени једначине (4). Штавише, за те рачуне није потребно знати полове функције.

Потражимо, на пример, остатке функције

$$y = \frac{\frac{1}{2g}\operatorname{sn}^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x - \frac{g}{2}}{\operatorname{sn} x},$$

где је $\operatorname{sn} x$ дефинисано са

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g(1-u^2)(1-k^2u^2).$$

Бирајући на погодан начин g и k постиже се да функција y задовољава једначину

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^6 - 4 = 0.$$ [1]

Полигонална линија има темена са координатама

$$(\xi_1 = 3, \eta_1 = 3),$$
$$(\xi_3 = 6, \eta_3 = 0),$$
$$(\xi_4 = 0, \eta_4 = 0),$$

па стога y нема простих полова. Темена која се налазе на страни са коефицијентом правца -1 имају индексе 1 и 3. Једначина (4) овде је, дакле,

$$A^3 - 1 = 0,$$

те су зато остаци функције y кубни корени јединице.**

---

[1] Видети Briat et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, cahier 36, Tome XXI, (1856), p. 239.

** Ову Петровићеву расправу реферисао је анонимни аутор са псеудонимом (H1g3) у Revue sémestrielle des publications mathématiques (5(1896)), а Хурвиц у FdM, B. 27, S. 308. У књизи J. Hadamard, *Série de Taylor et son prolongement analytique*, „Scientia“, E. Phys. math., № 12, на стр. 67 цитиран је овај Петровићев рад, а посебно услов „да остаци не варирају са променом интеграционе константе“ (пр. Д. Т.).

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ СИНГУЛАРНИХ РЕШЕЊА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА*

Посматрајмо алгебарску диференцијалну једначину првог реда

$$F(x,y,y')=0, \tag{1}$$

где је F полином по y и y' и уочимо неку функцију $y(x)$ која ову једначину задовољава. Ако је, за једну вредност x-а и одговарајућу вредност y-а, извод y' дефинисан једначином (1) униформна и непрекидна функција од x и y у околини тих вредности, решење које нас занима добиће се у околини посматране вредности променљиве x применом фундаменталне теореме о егзистенцији интеграла и биће један партикуларни интеграл једначине. Али ако, за вредности (x, y) које одговарају једном решењу, извод y' дефинисан једначином (1) није нигде униформна и непрекидна функција од (x, y), применом фундаменталне теореме ова функција неће се моћи развити у ред ни за једну вредност променљиве x.

Таква решења добијају се кад се напише услов да једначина (1), посматрана као једначина по y', има двоструки корен, тј. кад се елиминише y' из две једначине

$$F(x,y,y')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

Нека је

$$Q(x,y)=0 \tag{2}$$

тако добијени резултат. Ако функција $y(z)$ задовољава једначину (2) а не задовољава једначину $F=0$, доказује се да крива (2), уопште узев, представља геометријско место повратних тачака интегралних кривих које се односе на једначину (1). Ако, напротив, крива (2) задовољава

* Наслов оригинала: *Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre*, Mathematische Annalen, Leipzig 1896, t. 50, 1–3, pp. 103–112.

једначину (1), доказује се да она, *у општем случају*, представља сингуларни интеграл те једначине и обвојницу њених интегралних кривих.

Међутим, може се десити да крива (2), мада задовољава једначину (1), није ни сингуларни интеграл, ни обвојница њених интегралних кривих. Такав је случај, на пример, једначина

$$(2x-y')^2+x(y-x^2)(2x-y')+(y+x^2)^3=0;$$

крива $y=x^2$ истовремено задовољава обе једначине

$$F=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

а она ипак није ни сингуларни интеграл једначина $F=0$, јер се добија из општег интеграла

$$y=\frac{x^2+Cx^3+C^2}{1+Cx}$$

за $C=0$, ни обвојница партикуларних интеграла, будући да ниједна друга интегрална крива нема са њом заједничких тачака на коначном растојању.

Намера ми је да овде докажем једну општу теорему која се односи на ове случајеве изузетака и да из ње изведем неколико последица које се тичу интеграције неколико типова једначина првог реда, или тражења интеграла извесне аналитичке природе.

У том циљу позовимо се најпре на доказ теореме према којој, ако нека функција $y(x)$, дефинисана једначином, истовремено задовољава једначине $F=0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, она је тада *у општем случају* сингуларно решење и обвојница интегралних кривих једначина $F=0$.[1]

Уочимо произвољну тачку $x=\alpha,\ y=\beta$ криве $Q(x,y)=0$. За ове вредности једначина $F=0$, посматрана као једначина по y', има вишеструки корен; претпоставићемо да је тај корен *двострук*. Једначина $F=0$ има, дакле, за $x=\alpha,\ y=\beta$ двоструки корен и два корена те једначине пермутују се око тих вредности x и y.

Како су збир и производ тих корена униформне функције од x и y у околини тачке (α,β), y' се може сматрати као корен једне једначине другог степена чији су коефицијенти холоморфне функције од (x, y) у околини тачке (α,β). Може се стога писати

$$(3) \qquad y'=A(x,y)+C(x,y)\sqrt{B(x,y)},$$

где су A, B и C редови одређени по степенима величина $x-\alpha$ и $y-\beta$.

[1] Picard, *Traite d'Analyse*, Paris 1896, T. III, Chap. 8.

Потражимо интеграле једначине (3) који за $x = \alpha$ узимају вредност $y = \beta$. Међу тим интегралима налази се, прво, функција $y_1(x)$, дефинисана једначином (2), која се може развити по степенима од $x - \alpha$. Онда се доказује да, сем тог решења, у општем случају постоји и друго решење

$$y = y_1 + z,$$

које додирује ово решење.

Најпре, како за решење $y = y_1(x)$ имамо

$$B(x, y_1) = 0, \quad y_1' = A(x, y_1),$$

то, ако се у једначини (3) стави

$$y = y_1 + z,$$

она постаје

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^2\varphi_2(x) + \ldots + C(x, y_1 + z)\sqrt{z\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \ldots},$$

где су функције φ_i, ψ_i редови уређени по степенима од $x - \alpha$, и при том се $\psi_1(x)$, *уопште узев*, не анулира за $x = \alpha$; сем тога, вредност $C(\alpha, \beta)$ *генерално* је различита од нуле.

Међу интегралима z једначине (4) који се акумулирају за $x = \alpha$ увек се налази очигледно решење $z = 0$; али поред њега, у општем случају, постоји још једно. Да би се то увидело, ставимо

$$z = u^2,$$

што доводи до једначине

$$(5) \quad 2\frac{du}{dx} = u\varphi_1(x) + u^3\varphi_2(x) + \ldots + C(x, y_1 + u^2)\sqrt{\psi_1(x) + u^2\psi_2(x) + \ldots},$$

па како је, *уопште*

$$(6) \qquad C(\alpha, \beta) \neq 0, \quad \psi_1(a) \neq 0,$$

десна страна је холоморфна у околини тачке $x = \alpha$, $a = 0$, те једначина (4), према фундаменталној теореми, даје интеграл u као ред уређен по степенима од $x - \alpha$, тако да добијамо

$$u = p(x - \alpha) + q(x - \alpha)^2 + \ldots$$

и одатле

$$z = a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)^3 + \ldots,$$

тј.

$$y = y_1 + a(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha)^3 + \dots, \tag{7}$$

онда је очигледно да крива $Q(x, y_1) = 0$ у тачки (α, β) додирује криву представљену једначином (7), што је и требало доказати.

Али, ово расуђивање битно претпоставља да су услови (6) испуњени за произвољну тачку (α, β) криве $Q(x, y) = 0$. Резултат је сасвим друкчији ако један или други од услова (6) није испуњен. Јер у том случају десна страна једначине (5) садржи u као фактор, тако да се та једначина може довести у облик

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \Phi(x, u),$$

где је функција $\Phi(x, u)$ коначна за $x = \alpha$, $u = 0$. За те вредности променљивих x и u, логаритамски извод на левој страни постаје бесконачан, док десна страна остаје коначна. Функција u, уколико није идентички једнака нули, не може се анулирати за $x = \alpha$, па стога кроз тачку (α, β) пролази само крива y_1, дефинисана са $Q(x, y_1) = 0$.

Тако се, у претходно наведеном примеру, решавајући једначину по y', добија

$$y' = 2x + \frac{x(y - x^2)}{2} \pm \frac{y - x^2}{2}\sqrt{3x^2 - 4y},$$

а функција

$$C(x, y) = \frac{y - x^2}{2}$$

анулира се у свим тачкама криве $y = x^2$, која се добија као заједничко решење једначина $F = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

Из онога што претходи види се да нека крива $Q(x, y) = 0$, мада је добијена елиминацијом променљиве y' из једначина $F = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ и уз то задовољава једначину $F = 0$, не мора бити сингуларно решење једначине $F = 0$ ни обвојница њених интегралних кривих, а одатле излази следећи резултат.

Када једначина $F = 0$, која се решава по y', има двоструки корен, крива $Q(x, y) = 0$ је: или сингуларно решење једначине $F = 0$ и уједно обвојница партикуларних интегралних кривих, или крива која пресеца ове интегралне криве у утврђеним тачкама, које се не мењају са интеграционом константом.

Међутим, може се десити да корен y' једначине $F = 0$ буде трострук, четворострук итд. Поставимо стога себи следећи општи проблем:

Установити да ли за дату алгебарску диференцијалну једначину првог реда постоје у равни (x, y) *криве* Γ *које интеграли једначине* F = 0 *секу само у утврђеним тачкама и наћи те криве у случајевима кад оне постоје.*

Пре свега, јасно је да је једна таква крива Γ увек партикуларни интеграл једначине $F = 0$. Наиме, кроз сваку тачку (x, y) пролази најмање један партикуларни интеграл ове једначине, па онда, будући да кроз тачке криве Γ (стављајући на страну неке фиксиране тачке) не пролази ниједна интегрална крива различита од Γ, сама та крива Γ мора бити једна интегрална крива једначине $F = 0$.

Потрудимо се да установимо да ли једначина $F = 0$ ефективно допушта такве криве Γ.

Проблем се може решити помоћу фундаменталне теореме о постојању интеграла; али он се једноставније решава коришћењем резултата до кога сам дошао у једном ранијем раду.[2]

Нека је

$$F(x,y,y') = 0$$

дата једначина, у којој је F доведено у облик несводљивог полинома по y и y' и чији су коефицијенти било какве функције од x, и означимо са m и n највеће експоненте са којима y и y' фигуришу у F. Нека је $y_1 = u(x)$ крива која има разматрано својство у односу на интеграле једначине $F = 0$. Кад се стави

$$F = u(x) + z,$$

једначина $F = 0$ постаје

$$(9) \qquad \sum \frac{\theta_{m_i,n_i}(x,u,u')}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m_i\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n_i} z^{m_i} z'^{n_i} = 0 \qquad \begin{cases} m_i = 0,1,2,\ldots,m \\ n_i = 0,1,2,\ldots,n, \end{cases}$$

где је

$$(10) \qquad \theta_{m_i,n_i}(x,u,u') = \frac{\partial^{m_i+n_i} F(x,y,y')}{\partial^{m_i} u \partial^{n_i} u}.$$

Да би крива $y_1 = u(x)$ имала особину о којој је реч, потребно је и довољно да се вредности $x = a_i$ које анулирају општи интеграл $z(x,C)$ једначине (9) не мењају са константом интеграције C. Но, у наведеном раду доказао сам једну општу теорему с овим у вези, теорему којој се може дати следећи облик.

Да се нуле општег интеграла једначине првог реда, доведене у облик

---

[2] *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques*, Paris 1894.

$$(11) \qquad \sum \varphi_i(x) z^{m_i} z'^{n_i} = 0,$$

не мењају са интеграционом константом, потребно је и довољно да, уколико се са m и n означе највећи експоненти степена од z и z' (11), буде

$$(12) \qquad m_i + n_i \geq n,$$

за све вредности

$$m_i = 0, 1, 2, \ldots, m,$$
$$n_i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

које одговарају истим индексима i.

С друге стране, ако вредности променљиве x које анулирају z не зависе од интеграционе константе, оне се и подударају:

1. било са тачкама бесконачности коефицијената $\varphi_i(x)$,

2. било са нулама коефицијента уз члан z'^n, пошто је у њему стављено $z = 0$.

Применимо ове резултате на проблем којим се бавимо. Приметимо најпре да члан са z'^n увек постоји у једначини (9), на било који начин да се изабере функција $u(x)$. Јер, ако је $m_i = \mu$ највећи експонент степена непознате y који се налазе у скупу чланова који садрже z'^n, једначина ће садржати члан

$$\frac{\partial^{n+m} F(x, u, u')}{\partial u^{\mu} \partial u'^{n}},$$

који се своди на функцију само од x или на константу, ма шта била функција $u(x)$.

Онда се види следеће: да би вредности $x = a_i$ биле непокретне, потребно и довољно изабрати функцију $u(x)$ тако да коефицијенти

$$\theta_{m_i, n_i}(x, u, u')$$

свих оних чланова једначине $F = 0$ за које услов (12) није испуњен постану идентички једнаки нули. Функција $u(x)$ треба, дакле, да буде заједничко решење свих једначина

$$\frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, u, u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}} = 0$$

у којима је

$$m_i + n_i < n.$$

Кад се функција $u(x)$ изабере тако да у (9) остану само чланови у којима је

$$m_i + n_i \geq n,$$

вредности $x = a_i$ биће непокретне и подудариће се: било са тачкама бесконачности α_i коефицијената у једначини $F = 0$, било са тачкама бесконачности β_i функције $u(x)$, било са нулама γ_i функције $\theta_{0,n}(x,u,u')$ кад се у њој u замени управо нађеном функцијом.

Имамо, међутим,

$$\theta_{0,n}(x,u,u') = \frac{\partial^n F}{\partial u'^n},$$

па се стога полином $\theta_{0,n}$ своди на полином $P(x,u)$ по u, који представља скуп $f(x,u)$ чланова израза $F(x,u,u')$ који као фактор садрже степен u'^n. Вредности γ_i су корени по x једначине

$$f\left[x,u(x)\right] = 0. \tag{13}$$

Из свега овога изводи се следећа теорема:

Да би дата једначина F = 0 *допуштала криве* Г, *потребно је и довољно да једначине*

$$\frac{\partial^{m_i+n_i} F(x,y,y')}{\partial y^{m_i} \partial y'^{n_i}} = 0 \tag{14}$$

у којима је $m_i + n_i < n$ *имају заједничка решења. Ако је* u(x) *такво једно решење, крива* y = u(x) *је тражена крива* Г. *Непокретне тачке пресека ове криве са интегралним кривама могу бити само*: 1. *било вредности* α_i; 2. *било вредности* β_i; 3. *било вредности* γ_i.

Ова теорема у потпуности решава постављени проблем и своди тражење кривих Г на тражење заједничких решења неколико једначина првог реда, што захтева само алгебарске операције.

Приметимо да ако је $n = 1$, једначине (14) своде се на $F = 0$, што значи да све интегралне криве ове једначине играју улогу кривих Г, што је, уосталом, очигледно, као што је очигледан и реципрочни резултат.

Ако је, сада, $n > 1$, међу једначинама (14) увек се налазе две следеће

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Ако у том случају једначине (14) имају заједничко решење, оно није сингуларно решење, као што то захтева општа теорија таквих решења, него крива која остале интегралне криве једначине $F = 0$ сече само у фиксираним тачкама.

Лако је, на пример, у претходно наведеном примеру уверити се да крива $y = x^2$ истовремено задовољава три једначине,

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

и стога је, због претходне теореме, једна од кривих Г у односу на остале интеграле, што се и непосредно проверава на њеном општем интегралу, чију смо формулу горе записали.

Из претходне теореме изводи се, такође, следећа последица.

Ако је $n > 1$ и ако су коефицијенти у F алгебарске функције од x, криве Г су, уколико постоје, алгебарске и број њихових пресечених тачака са интегралним кривама увек је коначан.

Постојање кривих Г за дату диференцијалну једначину често олакшава испитивање њених интеграла. У неким општим случајевима оно омогућује потпуно решавање дате једначине; у другим случајевима оно даје могућност одређивања партикуларних интеграла са датом аналитичком природом. Имам намеру да ово укратко покажем.

Нека је $F(x,y,y') = 0$ једначина *са непокретним критичним тачкама*, која уз то, у односу на своје интеграле има криву Г, чија је једначина $y = u(x)$. Ако се стави

$$y = u(x) + \frac{1}{z},$$

одакле је

$$y' = u'(x) + \frac{z'}{z^2},$$

једначина $F = 0$ постаје

$$\Phi(x,z,z') = 0.$$

Према самој дефиницији криве $y = u(x)$, корени једначине

$$y(x,C) - u(x) = 0$$

независни су од интеграционе константе, што значи да вредности промењиве x за које општи интеграл $z(x,C)$ једначине $\Phi = 0$ постаје бесконачан не зависе од C. Сви сингуларитети овог интеграла су, дакле, непокретни.

Али тада, према ономе што се зна о природи интеграла једначина са непокретним критичним тачкама:

1. род једначине $\Phi = 0$ не може бити једнак 1;

2. ако је род једнак нули, Рикатијева једначина, на коју се одговарајућом бирационалном трансформацијом своди једначина $\Phi = 0$, мора се редуковати на линеарну једначину првог реда;

3. ако је род већи од 1, једначина се решава помоћу алгебарских операција.

Но, родови једначина $F = 0$ по (y, y') и $\Phi = 0$ по (z, z') једнаки су, јер се променљиве (y, y') изражавају рационално помоћу (z, z'), формулама

$$y = u + \frac{1}{z}, \quad y' = u' - \frac{z'}{z^2},$$

а такође се променљиве (z, z') могу рационално изразити помоћу (y, y').

Тако се може извести следећа теорема:

Свака алгебарска једначина првог реда са непокретним критичним тачкама која допушта криве Γ *интеграли се било алгебарски, било помоћу две квадратуре.*

Претпоставимо да је дата једначина $F = 0$ алгебарска не само у односу на y и y' него и у односу на x. *Њен општи интеграл биће тада: било алгебарска функција од* x, *било рационална функција по*

$$e^{\int f(x)dx}, \quad \int \varphi(x) e^{\int f(x)dx}$$

(где су φ и f алгебарске функције од x) *са коефицијентима алгебарским по* x.

Ако је $F(x, y, y')$ полином који је несводљив не само по y и y' него и по x, може се још више прецизирати аналитичка природа функција које представљају општи интеграл, служећи се једном значајном теоремом госпође Нетер (Noether) која се односи на параметарско приказивање уникурзалних кривих. Ако се општи интеграл једначине $F = 0$ добија квадратурама, тада род те једначине мора бити једнак нули. Изразимо y и y' као рационалне функције једног параметра λ, тј. нека је

$$y = R_1(x, \lambda),$$
$$y = R_2(x, \lambda)$$

и нека n означава степен једначине $F = 0$ у односу на y'. Гђа Нетер је доказала да:

1. ако је n непарно, параметар λ може се изабрати тако да претходно параметарско приказивање у једначину $F = 0$ не уведе никакву ирационалност у односу на коефицијенте $\varphi_i(x)$, што ће рећи да су R_1 и R_2 рационалне функције не само по λ него и по x;

2. ако је n парно, увек постоји параметарско приказивање које у једначину $F = 0$ не уводи никакве друге ирационалности у односу на коефицијенте $\varphi_i(x)$ сем једног квадратног корена неког полинома по коефицијентима $\varphi_i(x)$.

С друге стране, коефицијенти уз x у линеарној једначини по x коју задовољава λ рационалне су функције коефицијената уз x који фигуришу у R_1 и R_2. Према томе, ако је m непарно, обе функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ су рационалне по x; ако је m парно, оне су облика

$$S_1(x)+S_2(x)\sqrt{P(x)},$$

где су S_1 и S_2 разломљени рационални изрази, а P је полином по x.

Одатле излази да се, ако је m непарно, интеграл $\int f(x)dx$ изражава помоћу алгебарских и логаритамских функција; ако је m парно, то је Абелов интеграл хиперелиптичког рода.

Показаћу, најзад, како постојање криве Γ облика

$$y=r(x),$$

где је $r(x)$ рационална функција од x, за дату једначину

$$F(x,y,y')=0$$

поједностављује проблем установљавања да ли ова једначина има рационалне или, општије, мероморфне партикуларне интеграле.

Означимо са $C_1,C_2,\dots,C_k$ различите вредности за x које се подударају са вредностима $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ дефинисаним у претходној теореми. Како се, према тој теореми, нула разлике $y-r(x)$ морају поклопити са вредностима C_i, то, уколико се стави

$$\tilde{\omega}(x)=(x-C_1)(x-C_2)\dots(x-C_k),$$

постоји позитиван цео број μ такав да је, уколико је партикуларни интеграл $y_1(x)$ једначине $F=0$ рационалан по x, функција

$$u=\frac{[\tilde{\omega}(x)]^{\mu}}{y_1(x)-r(x)} \tag{15}$$

полином по x, а ако би се познавала нека горња граница броја μ, тражење свих рационалних интеграла могло би се свести на, релативно лакше, испитивање полинома који задовољавају диференцијалну једначину по u. Једна горња граница тог броја може се одредити на следећи начин.

Стављајући у датој једначини $F=0$

$$y=z+r(x),$$

добиће се нова једначина по z

$$\psi(x, z, z') = 0.$$

Брио–Букеовим методама може се установити да ли ова једначина има холоморфне интеграле који за $x = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ узимају вредност $z = 0$ и за те интеграле одредити развој функције z по степенима од $x = c_i$. Одатле се може извести максимални ред λ_i нуле C_i од z. Ако се тај рачун изврши за све нуле $C_1, \ldots, C_k$ и са λ_h означи највећи од целих бројева $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, тај број λ_h ће бити једна горња граница од μ.

Иста разматрања примењују се на проблем свођења одређивања мероморфних партикуларних интеграла на, релативно лакши, проблем налажења интеграла холоморфних у целој равни. Ако је $y_1(x)$ мероморфни интеграл дате једначине, претходна функција u, дефинисана са (15), биће, према теореми о разлагању мероморфне функције на примарне факторе, холоморфна функција, уколико је μ погодно изабрано. Заиста, будући да се разлика $y_1(x) - r(x)$ може анулирати само за једну од вредности C_i, имамо

$$y_1(x) - r(x) = \frac{\left[\Pi(x - c_i)^{\lambda_i}\right] e^{G(x)}}{\Pi(x - b_i)^{v_i}},$$

где је $G(x)$ у читавој равни холоморфна функција; бројеви b_i су полови функције $y_1(x) - r(x)$, а λ_i и v_i су редови нула и полова те функције. Одатле непосредно излази да је, за погодно изабрано μ, функција u, дефинисана са (15), холоморфна у читавој равни; она, уосталом, задовољава једну једначину првог реда коју је лако формирати помоћу дате једначине, а познавање те функције u повукло би познавање функције y. Број μ би се могао израчунати на начин истоветан оном који смо претходно, у случају рационалних интеграла, изложили.**

** Рад је реферисан у FdM, B. 28, S. 281–282 (Hamburger) и у Revue sémestrielle des publications mathématiques 1897, t. VI (H2b, c). Познати математичар Хадсон посветио је доста позитивне пажње Петровићевом прилогу теорије сингуларних решења (R. W. H. T. Hudson, Proceedings of the London Mathematical Society, t. 36, pp. 761–763; t. 37, pp. 380–403). – Занимљиво је приметити да је познати београдски часопис Дело донео приказ ове Петровићеве расправе, Београд 1898, t. XVII, стр. 519 (пр. Д. Т.).

О КАРАКТЕРИСТИЧНИМ КРИВИМ ЛИНИЈАМА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА*

Нека је дата општа диференцијална једначина првога реда

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где је F полином по y и y' са сачиниоцима који могу бити ма какве функције $x - a$ и нека је

$$(2) \qquad f(x, y, C) = 0$$

њен општи интеграл, где је C интеграциона константа. Варијацијом ове константе добијају се бесконачно многи партикуларни интеграли који састављају прамен интегралних кривих.

Замислимо у равни (α, y) конструисану једну дату криву

$$(3) \qquad \varphi(z, y) = 0$$

и уочимо њене пресеке са бесконачно многим кривима поменутога прамена.

Ако је крива (3) ма каква произвољна крива, ови пресеци варирају од једне криве прамена до друге, мењајући се са мењањем интеграционе константе C и свака тачка криве (3) може се сматрати као пресек ове криве са једном од интегралних кривих.

Али, може се десити, према природи дате једначине (1), да у равни (x, y) постоји таква једна стална крива (3) да ова сече све интегралне криве у сталним тачкама, које се не мењају од једног интеграла до другог, варијацијом интеграционе константе; ове сталне тачке,

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LIV, Први разред, књ. 19, Београд 1897, стр. 105–142; саопштио у Академији природних наука 18. фебруара 1897. професор Димитрије Нешић.

уосталом, могу се налазити на коначној даљини, или бити у бесконачности.

Тако, нпр., парабола $y = z^2$ сече све интегралне криве диференцијалне једначине

$$(2x - y')^2 + (y - x^2)^2(2x^2 - xy') + (y - x^2)^3 = 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = \frac{C^2x^2 + Cx^3 + 1}{C^2 + Cx}$$

у бесконачно удаљеној тачки, и то је једина тачка пресека.

Та иста парабола сече све интегралне криве једначине

$$xy' + y^2 - (2x^2 + 1)y + x^2(x^2 - 1) = 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = \frac{Cx^2 + x^3 + x}{C + x}$$

у једној сталној тачки и та је у координатном почетку.

Овакве сталне криве (3), које секу интегралне криве само у сталним тачкама, не постоје за ма какву дату диференцијалну једначину (1), већ само за једначине које задовољавају извесне услове. Међутим, егзистенција такве криве, коју ћу у овоме раду краткоће ради назвати *карактеристичном кривом* дате једначине (1), од значаја је за ближе упознавање интеграла, нарочито у ономе великоме броју случајева у којима се једначина не може интегралити.

Ја сам намеран потпуно решити у овоме раду задатак.

Распознати на датој диференцијалној једначини (1) *да ли ова има карактеристичних кривих и наћи ове у случају ако их има а да се једначина не мора претходно интегралити.*

Пре свега, лако се увиђа да *карактеристична крива једне једначине мора и сама бити један партикуларан интеграл ове последње.* Јер, према једној основној теореми из теорије диференцијалних једначина првога реда, кроз сваку тачку (x, y) у равни (x, y) пролази бар по једна интегрална крива једначине (1). И, према томе, пошто кроз тачке које припадају карактеристичној кривој те једначине, изузимајући оне сталне тачке на њима кроз које пролази прамен интегралних кривих, не пролази никаква интегрална крива дате једначине, карактеристична крива мора сама бити један интеграл ове последње.

Потражимо сад услове које треба да испуњава једначина (1) па да има карактеристичних кривих и покажимо како се оне налазе у случају кад их има.

Ставимо да је

$$y = z + u; \tag{4}$$

апсцисе тачака у којима интегралне криве секу криву $y = u(x)$ могу бити: или вредности x-а које поништавају функцију $z(x)$, или вредности x-а за које функције $y(x)$ и $u(x)$ постају у исти мах бесконачне. О овим последњим вредностима нећемо водити рачуна пошто се траже пресеци поменутих кривих на коначној даљини.

Сменивши у једначини (1) y његовом вредношћу (4), једначина се претвара у

$$F(x, z+u, z'+u') = \Phi(x, z, z') = \sum \frac{\Theta_{m_i, n_i}(x, u, u')}{m_i! n_i!} z^{m_i} z'^{n_i},$$

где је уопште

$$\Theta_{m_i, n_i}(x, u, n') = \frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, u, u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}}$$

и где m_i, u_i имају целе вредности

$$\begin{aligned} m_i &= 0, 1, 2, \ldots, m \\ n_i &= 0, 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{5}$$

m и n означујући највише степене полинома F у једначини (1) по y и y'.

У једноме своме ранијем раду[1] ја сам доказао ову теорему.

Да би вредности z-а које поништавају општи интеграл z какве једначине

$$\sum \varphi_i(x, z) z'^{n-1} = 0,$$

где су φ_i полиноми по z, биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да, пошто се скрате сви заједнички чиниоци сабирака на левој страни једначине, сваки полином $f_1(x, y)$ садржи као чиниоца y^h, где је $h \geq i$.

Узмимо диференцијалну једначину

$$\Phi(x, z, z') = 0$$

или

$$\sum \frac{\Theta_{m_i, n_i}(x, u, u')}{m_i! n_i!} z^{m_i} z'^{n_i} = 0,$$

где је m_i, n_i из (5).

---

[1] *Sur les zéros et les infinis des integrales des équations différentielles algebriques*, Paris 1894.

Да би вредности $x = a_j$, које поништавају њен општи интеграл $z(x)$, биле независне од интеграционе константе, према горњој теореми потребно је и довољно да, означивши са m и n највише степене једначине по (z, z') буде

$$(7) \qquad m_i + n_i \geq n$$

кад се m_i и n_i буду смењивали вредностима (5).

Приметимо да члан са z'^n мора увек постојати у једначини (6) и да, ма како изабрали функцију $u(z)$, сачинилац тога члана не може бити идентички раван нули. Јер, ако је $m_i = \mu$ највећи изложилац променљиве y који фигурише у скупу чланова полинома $F(x, y, y') = 0$ што садрже y'^n као чиниоца, у једначини (6) биће један члан облика

$$\Theta_{\mu,n}(x, u, u') z^{\mu} z'^{n},$$

где је

$$\Theta_{\mu,n}(x, u, u') = \frac{\partial^{\mu+n} F(x, u, u')}{\partial u^{\mu} \partial u^{n}}$$

и ова функција Θ очевидно се своди или на једну функцију, што зависи само од $x - a$, или на какву сталну количину, па ма каква била функција $u(x)$.

А, из тога и из горње теореме изводи се ово: да би вредности $x = a_j$ биле сталне, потребно је и довољно да функција $u(x)$ буде тако изабрана да сачиниоци

$$\Theta_{n_i, m_i}(x, u, u')$$

свих оних чланова за које услов (7) није задовољен буду идентички равни нули. Функција u треба, дакле, да је тако изабрана да буде заједнички интеграл свих диференцијалних једначина

$$(8) \qquad \frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, u, u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}} = 0$$

које се добијају кад се m_i и n_i смене свима могућим целим вредностима за које услов (7) није задовољен.

Са друге стране, у поменутоме своме раду ја сам доказао да кад год су вредности променљиве x које поништавају општи интеграл једне једначине првога реда написане у облику

$$\sum \psi_{m_i, n_i}(x) = z^{m_i} z'^{n_i} = 0$$

независне од интеграционе константе, оне се поклапају:

1. или са вредностима x-а за које један од сачинилаца ψ постаје бесконачан;

2. или са вредностима x-а за које сачинилац $\psi_{0,n}(z)$ највишега степена по изводу z' постаје раван нули.

Применимо овај резултат на диференцијалну једначину (6). Према њему, вредности $x = a_j$ морају бити или корени једначина

$$\frac{1}{\Theta_{m_i,n_i}(z,u,u')} = 0, \tag{9}$$

где m_i и n_i ваља сменити свима целим вредностима за које је $m_i + n_i, \ldots, n$, кад се у њима смени u поменутим заједничким интегралом једначина (8), или корени једначине

$$\Theta_{0,n}(x,u,u') = 0, \tag{10}$$

кад се у њој u смени тако нађеним заједничким интегралом.

Функције

$$\Theta_{m_i,n_i}(x,u,u') = \frac{\partial^{m_i+n_i} F(x,u,u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}}$$

јесу извесни полиноми по u, u', са сачиниоцима који су равни са чиниоцима промењљивих y и y' у једначини (1), помноженим са извесним сталним и целим бројевима.

Према томе, једначине (9) могу имати као корене:

1. вредности $x = b_j$ за које сачиниоци од y и y' у једначини (1) постају бесконачни;

2. вредности $x = c_j$ за које функције $u(x)$ или њен извод $u'(x)$ постају бесконачни.

Но, пошто је овде реч само о пресецима интеграла и карактеристичне криве на коначној даљини, то се ове вредности $z = c_j$ имају одбацити.

Лева пак страна једначине (10), која се може написати у облику

$$\frac{\partial^{n_i} F(x,u,u')}{\partial u'^{n_i}} = 0,$$

своди се на један известан полином $P(x,u)$ по промењљивој u, и овај полином није ништа друго до скуп чланова $f(x,u)$ полином $F(x,u,u')$, који садрже као заједнички чинилац u^n, пошто се $f(x,u)$ помножи факторијелом

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n_i$$

и u смени малопређашњим заједничким интегралом. Једначина (10) своди се, дакле, на

(11) $$f[x,u(z)] = 0$$

и њене ћемо корене означити са $x = e_j$.

Тиме се долази до ове опште теореме која потпуно решава постављени задатак:

Теорема 1. – *Да би једначина* (1) *имала карактеристичних кривих, потребно је и довољно да диференцијалне једначине*

(12) $$\frac{\partial^{m_i+n_i} F(x,u,u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}} = 0,$$

које се добијају кад се m_i и n_i *смене свима могућим целим вредностима; за које је* $m_i + n_i < n$, *имају бар један заједнички интеграл* $u(x)$. *Криве* $y = u(x)$ *јесу тада тражене карактеристичне криве. Сталне тачке пресека интегралних кривих са карактеристичном кривом могу се налазити само у пресецима карактеристичне криве*:

1. *или са правама* $x = b_j$, *где су* b_j *вредности* x*-а за које сачиниоци од* y *и* y' *у једначини* (1) *постају бесконачни*;

2. *или са правама* $x = e_j$, *где су* e_j *корени једначине* (11), *решене по* x, *пошто се у њој* $u(x)$ *смени претходно нађеним заједничким интегралом диференцијалне једначине* (12).

Тражење карактеристичних кривих за дату једначину своди се, дакле, на израчунавање заједничких интеграла двеју или више једначина. Ово је израчунавање, као што се зна, веома просто. Ако је p број диференцијалних једначина (12), ваља елиминацијом извода u' из њих образовати $p-1$ једначина, које садрже само x и u, па затим испитати, да ли оне могу све у исто време постојати. Ако то није случај, онда једначине (12) немају заједничких интеграла; ако могу све у исто време постојати, онда ће тражени заједнички интеграл, у случају кад постоји, бити представљен ма којом од тих $p-1$ једначина. А да би се видело да ли тај интеграл одиста постоји, треба испитати да ли је ма која од једначина (12) идентички задовољена кад се у њој u смени својом вредношћу добијеном из ма које од поменутих $(p-1)$ једначина.

Као пример за примену ових резултата потражимо потребне и довољне услове да би диференцијална једначина првога реда

(13) $$\varphi_1 y'^2 + \varphi_2 y' + \varphi_3 y^4 + \varphi_4 y^3 + \varphi_5 y^2 + \varphi_6 y + \varphi_7 = 0,$$

где су $\varphi_1, \varphi_{2,\ldots,}\varphi_7$, дате функције промењиве x, имала карактеристичних кривих и нађимо ту криву у случају кад она постоји.

Овде је $m = 4$, $n = 2$ и услов $m_i + n_i < 2$ задовољавају ови парови вредности $(m_i\ n_i)$

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

којима одговарају диференцијалне једначине

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

тј.

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi_1 u'^2 + \varphi_2 u' + \varphi_3 u^4 + \varphi_4 u^3 + \varphi_5 u^2 + \varphi_6 y + \varphi_7 = 0, \\ 2\varphi_1 u' + \varphi_2 = 0, \\ 4\varphi_3 u^3 + 3\varphi_4 u^2 + 2\varphi_5 u + \varphi_6 = 0. \end{cases}$$

Да би једначине (14) имале карактеристичних кривих, потребно је и довољно да крива дефинисана трећом једначином (14) буде заједнички интеграл прве и друге једначине и тада сама та крива представља тражену карактеристичну криву. Потражимо какви услови морају постојати између сачинилаца $\varphi_1, \varphi_{2,\dots,}\varphi_7$ па да ови услови буду задовољени. Из друге од једначина (14) добија се да је

$$u' = -\frac{\varphi_2}{2\varphi_1} \quad \text{и} \quad u = -\int \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} dx$$

и ова вредност мора задовољавати прву и трећу од једначина (14). Написавши да су ове једначине задовољене, добијају се два односа који тада морају постојати између сачинилаца $\varphi_1, \varphi_{2,\dots,}\varphi_7$ и, кад је то случај, тражена карактеристична крива дате једначине (13) биће

$$y = -\int \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} dx.$$

Тако, нпр., у случају кад је

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x^2, \\ \varphi_2 &= 2x^6(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi_3 &= -\beta, \\ \varphi_4 &= \alpha + 4\beta(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi_5 &= -6\beta(a^2 - x^2) - 3\alpha(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi_6 &= 3\alpha(a^2 - x^2) + 4\beta(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}, \\ \varphi_7 &= x^4(a^2 - x^2)^{-1} - \beta(a^2 - x^2) - \alpha(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

где су α, β, a сталне количине, горњи су услови задовољени и једначина има за карактеристичну криву круг

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

који партикуларне интегралне криве исте једначине могу сећи само у сталним тачкама $x = 0$, $y = \pm a$.

Ово се, уосталом, потврђује и непосредно на изразу општега интеграла, који је у овоме случају дат обрасцем

$$\left(y - \frac{1}{Y}\right)^2 + x^2 - a^2 = 0,$$

где је, краткоће ради, стављено да је

$$Y = C\left(1 - 2\sqrt{\beta}\log x\right) - \frac{C^2\alpha}{4\beta} - \left(\sqrt{\beta} + \frac{\alpha}{4}\log x\right)\log x.$$

Вратимо се теореми 1.

Раније је показано како се из једне основне теореме из теорије диференцијалних једначина првога реда може извести да карактеристична крива једне једначине (1) мора и сама бити интеграл те једначине. Добро је приметити да исти резултат излази и као последица теореме 1. Јер, међу оним паровима вредности (m_i, n_i) који задовољавају услов $m_i + n_i < n$ увек се налази и пар (0, 0), коме одговара диференцијална једначина

$$\Theta_{0,0}(x, u, u') = 0,$$

а ова није ништа друго до дата диференцијална једначина

$$F(x, y, y') = 0,$$

кад се у овој y и y' смене функцијом u и њеним изводом u'. Карактеристична крива, дакле, у случају кад постоји, мора се налазити међу интегралним кривим ове последње.

Приметимо и то да ако је дата једначина (1) линеарна по изводу y', а ма кога степена по y, свака њена партикуларна интегрална крива игра улогу карактеристичне криве за ту једначину, тј. да тачке пресека (на коначној даљини) свих интегралних кривих са једном, произвољно узетом, али тада утврђеном интегралном кривом Г, не варирају од једнога интеграла до другога, са варијацијом интеграционе константе, већ да зависе једино од узете криве Г и да су сталне, кад је ова утврђена.

Јер, тада од свих парова вредности (m_i, n_i) једино пар (0, 0) задовољава услов (7), који је у овоме случају

$$m_i + n_i < 1,$$

томе пару одговара диференцијална једначина

$$F(x,u,u')=0,$$

дакле сама дата једначина, и онда, према теореми 1, сваки њен партикуларни интеграл игра улогу карактеристичне криве за остале партикуларне интеграле.

И обратно, да би свака партикуларна интегрална крива једне дате једначине (1) играла улогу карактеристичне криве за ту једначину, потребно је да једначина (1) буде линеарна по изводу y'. Јер, ако је n највиши степен полинома F по изводу y', међу паровима вредности (m_i, n_i) који задовољавају услов $m_i + n_i < n$ увек ће се налазити и ови:

$$(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(n-1,0)$$

којима одговарају диференцијалне једначине

$$(15) \qquad F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial u'}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial u'^2}=0,\ldots,\frac{\partial^{n-1}F}{\partial u'^{n-1}}=0.$$

Пошто се за једначину $F=0$ претпоставља да је несводљива, то, по самој дефиницији несводљивости, једначине (15) не могу имати *све* интеграле заједничке ако је број тих једначина већи од 1. Из тога, и пошто, да би све интегралне криве једначине $F=0$ биле карактеристичне криве за ту једначину, једначине (15) морају имати као заједничке све партикуларне интеграле једначине $F=0$, види се да мора бити $n=1$.

Може се, дакле, сматрати као доказана ова теорема:

Теорема 2. – *Између свих алгебарских диференцијалних једначина првога реда једине једначине чије све интегралне криве играју улогу карактеристичних кривих јесу оне облика*

$$P(x,y)\frac{dy}{dx}+Q(x,y)=0,$$

где су P *и* Q *полиноми по* y *са сачиниоцима који могу бити ма какве функције променљиве* x.

Вратимо се општем случају, кад је степен једначине (1) по изводу већи од јединице. Тада је, према теореми 1, број карактеристичних кривих ограничен и ове се криве добијају као заједнички интеграли више диференцијалних једначина. А пошто се овакви интеграли увек добијају елиминацијом првога извода из датих једначина, дакле помоћу чисто алгебарских операција, то је тиме доказана ова теорема:

Теорема 3. – *Кад год је степен дате једначине* (1) *по изводу* y′ *већи од јединице карактеристичне криве за ту једначину могу се добити алгебарским радњама без икаквих интеграционих операција.*

Према томе, кад год су сачиниоци од y и y' у једначини (1) алгебарске функције x-а, и карактеристичне криве те једначине увек су алгебарске функције x-а. А пошто су тада и вредности $x = b_i$, за које ти сачиниоци постају бесконачни у коначном броју и пошто је једначина

$$f[x, u(x)] = 0$$

тада алгебарска по промењивој x, дакле број њених корена $x = e_i$ такође је коначан, то се, према теореми 1, види да:

Кад год је степен једначине (1) *по* y′ *већи од јединице, а сачиниоци од* y *и* y′ *су алгебарске функције променљиве* x, *број пресечних тачака карактеристичне криве са партикуларним интегралним кривим увек је коначан.*

У специјалном случају, кад су сачиниоци од y и y' у датој једначини (1) стални, независни од x, карактеристичне се криве своде на извесне праве, паралелне апсцисној осовини и њих не сече ниједна интегрална крива на коначној даљини. Ове се праве добијају решењем извесне алгебарске једначине, коју је лако образовати на основу теореме 1.

Задржимо се овде на једноме питању које је од великога значаја и за теорију о којој је овде реч, и за теорију сингуларних интеграла диференцијалних једначина првога реда. Пре свега, очевидно је, према самој дефиницији карактеристичних кривих, да таква једна крива никад не може бити сингуларни интеграл дате једначине, пошто је крива што представља сингуларни интеграл обвојнице кривих што представљају партикуларне интеграле, а међу тим карактеристична крива додирује или сече партикуларне интегралне криве само у извесним сталним тачкама. Међутим, из теорије сингуларних интеграла једначине $F = 0$ зна се да се ови добијају као заједнички интеграли двеју једначина

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{16}$$

а, са друге стране, према теореми 1, кад год је степен полинома F по y већи од јединице, карактеристичне криве добијају се као заједнички интеграли једначина

$$\frac{\partial^{m_i + n_i} F}{\partial y^{m_i} \partial y'^{n_i}} = 0 \tag{17}$$

што одговарају вредностима (m_i, n_i) за које је $m_i + n_i < n$. Међу једначинама (17) увек се налазе и једначине (16) које одговарају паровима

(0, 0) и (0, 1) вредности (m_i, n_i)и, према томе, изгледало би да се међу заједничким интегралима једначина (17), дакле међу карактеристичним кривим дате једначине, налази и њен сингуларни интеграл, што је очевидно немогуће. Случај је веома интересантан и *он указује на једну празнину у обичној теорији сингуларних интеграла*, поред свега тога што је ова теорија веома простране разрађена. Стога ћу се мало више на њему задржати.

У теоријама сингуларних интеграла, па и у најбољим[2] и најпотпунијим, сматра се као основна дефиниција сингуларних интеграла и полазна тачка за целокупну теорију следећа дефиниција.

За једну функцију $y(x)$, дефинисану једном датом релацијом

$$P(x, y) = 0, \tag{18}$$

каже се да је сингуларни интеграл једне диференцијалне једначине првога реда

$$F(x, y, y') = 0$$

ако та функција задовољава у исто време две диференцијалне једначине

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = 0. \tag{19}$$

За такве функције $y(x)$ доказује се да се не могу извести из општега интеграла спецификовањем интеграционе константе и да је интегрална крива коју оне представљају обвојница прамена партикуларних интегралних кривих једначине $F = 0$.

Као што је познато, једначина $P(x, y) = 0$ добијена елиминацијом извода y' из једначина (19), не мора бити сингуларни интеграл једначине $F = 0$, и у томе случају доказује се да она представља геометријско место завратних тачака партикуларних интегралних кривих једначине $F = 0$. Али се, тако исто, доказује и то да кад год функција $y(z)$, дефинисана једначином $P = 0$, задовољава дату једначину $F = 0$, она је увек сингуларни интеграл те једначине и конструисана представља обвојницу интегралних кривих исте једначине.

Ја сам намеран овде показати у чему лежи непотпуност и нетачност ових основних резултата и како их треба допунити па да они буду апсолутно тачни. Тога ради, доказаћу, прво, *да једна функција* y(x) *дефинисана релацијом може у исти мах задовољавати обе једначине* (19) *па ипак не бити сингуларни интеграл једначине* F = 0, тј.

[2] В., нпр., Picard, *Traité d'Analyse*, Paris 1896, T. III, pp. 44–52.

да се ипак може извести из оппттега интеграла спецификовањем интеграционе константе и да не буде обвојница партикуларних интегралних кривих ове једначине.

Уочимо методу којом се најдубље улази у теорију сингуларних интеграла, методу која се састоји у томе да се докаже да ако за један систем вредности (x, y) који задовољава једначину (18) диференцијална једначина $F = 0$, решена по изводу y', има један вишеструки корен, онда функција $y(x)$, дефинисана једначином (18), мора бити сингуларни интеграл једначине $F = 0$ и обвојница њених партикуларних интегралних кривих.[3]

Нека је $x = \alpha$, $y = \beta$ једна произвољна тачка криве

$$P(x, y) = 0, \tag{18}$$

потражимо облик оних интеграла једначине $F = 0$ који за $x = \alpha$ добијају вредност $y = \beta$ и који су такви да вредност извода y' што им одговара за $x = \alpha$, $y = \beta$ буде баш равна вишеструком корену једначине $F = 0$ решене по y'. За овај корен ради скраћења доказа узећемо да је двојни корен. Тада се тај корен y' може сматрати као дефинисан извесном једначином облика

$$y' = A(x, y) + B(x, y)\sqrt{C(x, y)}, \tag{19}$$

где су A, B, C извесне функције које се могу развити у ред по степенима разлика $x - \alpha$ и $y - \beta$. Функција $C(x, y)$ мора бити идентички равна нули за $x = \alpha$, $y = \beta$, пошто се за ове вредности обадве вредности извода y' дефинисане једначином (19) морају поклопити у једну. Са друге стране, пошто је функција y интеграл једначине (19), која није ништа друго до једначина $F = 0$ написана у другом облику, то за ма коју тачку криве $P(x, y) = 0$ морају бити задовољене ове две једначине

$$C(x, y) = 0, \quad y' = A(x, y). \tag{20}$$

Помоћу ових резултата доказује се да, поред интеграла $y(x)$ дефинисаног једначином (18), кроз тачку ($x = \alpha$, $y = \beta$,) пролази још један интеграл једначине $F = 0$ који је партикуларни интеграл те једначине и који додирује криву $P(x, y) = 0$ у тој тачки. Доказ се састоји у овоме.

Ставимо да је

$$Y = y + z, \tag{21}$$

---

[3] Picard, loc. cit.

где је y функција $x - a$ дефинисана једначином (18) и покушајмо одредити облик променљиве z тако да функција Y буде интеграл једначине $F = 0$ и да за $x = \alpha$ добије вредност $Y = \beta$. Сменом променљиве y функцијом Y у једначини (19), ова постаје

$$(22) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = A(x, y+z) + B(x, y+z)\sqrt{C(x, y+z)}.$$

Ако развијемо функције A и C у ред уређен по степенима променљиве z, добија се

$$(23) \qquad A(x, y+z) = A(x,y) + A_1(x,y)z + A_2(x,y)z^2 + \ldots,$$

$$(24) \qquad C(x, y+z) = C(x,y) + C_1(x,y)z + C_2(x,y)z^2 + \ldots,$$

где су $A_1, A_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ холоморфне функције x-а и y-а за $x = \alpha$, $y = \beta$, изузимајући, можда, извесне сталне вредности тих променљивих. Заменом ових вредности и водећи рачуна о једначинама (20), једначина (22) своди се на

$$(25) \quad \frac{dz}{dx} = A_1(x,y)z + A_2(x,y)z^2 + \ldots + B(x, y+z)\sqrt{C_1(x,y)z + C_2(x,y)z^2 + \ldots}.$$

Ставимо затим да је

$$(26) \qquad z = u^2;$$

једначина (25) постаје

$$(27)\; 2\frac{du}{dz} = A_1(x,y)u + A_2(x,y)u^2 + \ldots + B(x, y+u^2)\sqrt{C_1(x,y) + C_2(x,y)u^2 + \ldots}$$

Пошто је већ $y = \beta$ за $x = \alpha$, то да би било $Y = \beta$, за $x = \alpha$, потребно је и довољно да интеграл $y(x)$ једначине (27) постане раван нули за $x = \alpha$. Ако је

$$B(\alpha, \beta) \neq 0, \quad C_1(\alpha, \beta) \neq 0,$$

онда десна страна једначине (27) представља извесну холоморфну функцију променљивих x и u у близини вредности $x = \alpha$, $u = 0$, што, према једној основној теореми из теорије диференцијалних једначина, значи да једначина (27) има један партикуларан интеграл $u(x)$, који постаје раван нули за $x = \alpha$ и који се може развити у Тејлоров ред облика

$$u = p(x-\alpha) + q(x-\alpha)^2 + r(x-\alpha)^3 + \ldots$$

Према обрасцу (26), тада је

$$z = a(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha)^3 + c(x-\alpha)^4 + \ldots$$

и, према обрасцу (21), биће

$$(28) \qquad Y = y + a(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha)^3 + c(x-\alpha)^4 + \ldots$$

На тај начин кроз тачку $(x=\alpha, y=\beta)$ пролазе два, један од другога различна интеграла једначине $F=0$, и то:

1. интеграл $y(x)$ дефинисан релацијом $P(x,y)=0$;
2. интеграл $Y(x)$ дефинисан обрасцем (28).

А, из обрасца (28) јасно се види да се две интегралне криве што представљају те интеграле додирују у тачки (α,β). Па пошто је та тачка произвољна тачка криве $P(x,y)=0$, то је у свакој тачки додирује по један партикуларни интеграл једначине $F=0$. Тиме је доказано да крива $P(x,y)=0$ представља сингуларни интеграл једначине $F=0$ и да је она обвојница партикуларних интегралних кривих те једначине.

Али, за извођење ових резултата било је претпостављено да је

$$B(x,y) \neq 0, \qquad C_1(x,y) \neq 0$$

за све тачке (α,β) што припадају кривој $P(x,y)=0$. Лако је уверити се – а *ту баш лежи непотпуност обичне теорије – да крива* $\mathrm{P}(x,y)=0$ *није тада сингуларни интеграл једначине* $\mathrm{F}=0$, *нити обвојница партикуларних интегралних кривих, већ да кроз ма коју тачку те криве – изузимајући, можда, извесне сталне тачке на њој – не пролази ниједна интегрална крива те једначине, осим саме те криве* $\mathrm{P}(x,y)=0$.

Да бисмо се у то уверили, уочимо опет диференцијалну једначину (27) и претпоставимо да је за све тачке (α,β) криве $P(x,y)=0$ у исто време и

$$(29) \qquad B(x,y)=0.$$

Ако се тада функција $B(x,y+u^2)$ развије у ред уређен по степенима променљиве u, водећи рачуна о једначини (29), добија се да је

$$(3) \qquad B(x,y+u^2) = B_1(x,y)u^2 + B_2(x,y)u^4 + \ldots = u\Psi(x,y,u),$$

где је $\Psi(x,y,u)$ извесан полином по y и u, и једначина (27) постаје

$$2\frac{du}{dz} = A_1(x,y)u + A_2(x,y)u^3 + \ldots + \Psi(x,y+u)u^2\sqrt{C_1(x,y)+C_2(x,y)u^3+\ldots}.$$

Деобом са u добија се

$$2\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \Phi(x,y,u) + u\Psi(x,y,u)\sqrt{\Omega(x,y,u)},$$

где су Φ, Ψ, Ω полиноми по y и u.

За $x = \alpha$, $u = 0$, логаритамски извод на левој страни последње једначине постаје бесконачан, док израз на десној страни задржава коначну вредност, што значи да интеграл $u(x)$ једначине (27) не може бити раван нули за $x = \alpha$ (изузимајући известан број сталних вредности $x - a$, за које се може десити да који од сачинилаца, који су функције променљиве x, у полиномима Φ и Ψ постане бесконачан). А то показује да, осим интеграла $y(x)$ дефинисаног кривом $P(x,y) = 0$ никакав други интеграл не пролази кроз тачку (α,β). Крива $P(x,y) = 0$ није, дакле, обвојница партикуларних кривих једначине $F = 0$ и није сингуларни интеграл; интегралне криве могу је сећи или додиривати само у извесним сталним тачкама.

Такав ће исти бити случај и онда ако је за све тачке криве $P(x,y) = 0$ у исто време и

$$C_1(x,y) = 0.$$

Јер, тада једначина (27) постаје

$$2\frac{du}{dx} = A_1(x,y)u + A_2(x,y)u^2 + \ldots + B(x,y+u^2)u\sqrt{C_2(x,y) + C_3(x,y)u^2 + \ldots}$$

или деобом са u

$$\frac{2}{u}\frac{du}{dx} = P_1(x,y,u) + Q_1(x,y,u)\sqrt{Q_2(x,y,u)},$$

где су P_1, Q_1, Q_2 полиноми по y и u. Логаритамски извод на левој страни постаје бесконачан за $x = \alpha$, $u = 0$, док израз на десној страни остаје коначан, што значи да u не може бити раван нули за $x = \alpha$. А то значи, као и малочас, да крива $P(x,y) = 0$ није сингуларни интеграл једначине $F = 0$.

Тако, у раније наведеном примеру, кад је дата диференцијална једначина

$$(2x - y')^2 + (y - x^2)^2(2x^2 - xy') + (y - x^2)^3 = 0,$$

решењем по изводу y' добија се да је

$$y' = 2x - \frac{x(y - x^2)}{2} \pm \frac{y - x^2}{2}\sqrt{x^2(y - x^2)^2 - 4(y - x^2)}.$$

Малопређашња функција $B(x,y)$ овде је

$$B(x,y) = \frac{y - x^2}{2},$$

а
$$C(x,y) = x^2(y - x^2)^2 - 4(y - x^2).$$

Крива $y = x^2$, за коју се лако налази да представља заједнички иннтеграл двају једначина

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

идентички задовољава једначине

$$C(x,y) = 0, \quad B(x,y) = 0$$

и онда, према овоме што претходи, није сингуларни интеграл дате једначине. У то се, уосталом, непосредно уверавамо из тога што се интеграл $y = x^2$ добија из општега интеграла једначине, који је

$$y = \frac{x^2 + Cx^3 + C^2}{1 + Cx}$$

спецификовањем интеграционе константе C, и то за $C = 0$.

А из свега овога јасно се види да иако једна крива $P(x,y) = 0$ у исти мах задовољава две једначине (19), дакле, добија се елиминацијом извода y' из тих двеју једначина и, поред тога, опет задовољава једначину $F = 0$, ипак не мора бити сингуларни интеграл једначине $F = 0$, она представља геометријско место тачака у равни кроз које (изузимајући известан број сталних тачака на њој) пролази само један једини интеграл једначине $F = 0$, и тај интеграл јесте сама крива $P(x,y) = 0$.

Тиме је попуњена празнина у теорији сингуларних интеграла о којој је била реч и објашњен поменути привидни парадокс на који се наилази поређењем наших претходних резултата са онима који су познати у теорији сингуларних интеграла. И као што се види из свега овога што претходи, може се извести ова општа теорема, којом се допуњује та теорија.

Кад год једна функција $y(x)$ задовољава једначине

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

али у исто време и све диференцијалне једначине

$$\frac{\partial^{m_i + n_i} F}{\partial^{m_i} \partial y'^{n_i}} = 0$$

што одговарају вредностима (m_i, n_i), за које је $m_i + n_i < n$ (где n означава степен једначине $F = 0$ по изводу y'), та функција није сингуларни интеграл једначине $F = 0$, већ конструисана представља геометријско место тачака у равни кроз које (изузимајући известан број сталних тачака на њој) пролази само један интеграл једначине $F = 0$, и тај интеграл јесте сама крива представљена том функцијом.

Тако, у горњем примеру услов $m_i + n_i < n$ задовољавају парови (0, 0), (1, 0), (0, 1), којима одговарају диференцијалне једначине

$$F = (2x - y')^2 + (y - x^2)^2(2x^2 - xy') + (y - x^2)^3 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2x(y - x^2) + (2x - y') + 3(y - x^2)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2(2x - y') - x(y - x^2) = 0,$$

и пошто функција $y = x^2$ задовољава све три ове једначине, то она није сингуларни интеграл једначине $F = 0$, о чему смо се и другим путем уверили.

Објаснивши на тај начин поменути привидни парадокс, вратимо се теореми 1.

Приметимо да та теорема даје услове и за сталност оних вредности x-а за које општи интеграл једначине $F = 0$ постаје раван нули или, уопште, за које овај општи интеграл добија извесне сталне унапред дате вредности, нпр. $y = \alpha$. Јер, да би такве вредности x-а биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да права $y = \alpha$ игра улогу карактеристичне криве за једначину (1). А, према теореми 1, за ово је потребно и довољно да једначине (12) имају $y = \alpha$ као заједнички интеграл.

Може се десити да једначине (12) имају више од једног заједничког интеграла облика $y = \alpha$, нпр.

$$y = a, \quad y = b, \tag{31}$$

где ћемо представити да су a и b реални бројеви и $a < b$. Тада, кад год не постоји ниједна реална и коначна вредност $x = b_i$ за коју бар један од сачинилаца од y и y' у датој једначини $F = 0$ постаје бесконачан и кад год једначине (11), које су у овоме случају

$$f(x, a) = 0, \quad f(x, b) = 0,$$

немају реалних коначних корена, ниједна интегрална крива не сече праве (31) на коначној даљини.

Поделимо тада раван (x, y) на три области: једну испод праве $y = a$, другу која се налази између правих $y = a$ и $y = b$, и трећу изнад праве $y = b$. Тада није могућно, идући по једној, ма којој, интегралној кривој једначини $F = 0$, прећи из једне од ових области у другу и једно тело, које би се кретало по таквим условима да му је трајекторија дефинисана датом диференцијалном једначином $F = 0$, за све време кретања мора остати у једној истој области. За све партикуларне интегралне криве које имају једну тачку у другој области, оној која се налази између правих $y = a$ и $y = b$, може се тврдити да њихове ординате могу варирати само у границама a и b, кад x варира од $-\infty$ до $+\infty$, а познато је од колике користи може бити такав један податак за израчунавање самих интеграла по апроксимативним методама.

Може се, такође, десити да једначине (12) имају као заједнички интеграл једну реалну затворену криву $y = u(x)$.

Тада, кад год не постоји ниједна реална и коначна вредност $x = b_i$ за коју бар један од сачинилаца од y и y' у датој једначини постаје бесконачан и кад год једначина (11) решена по x нема коначних реалних корена, ниједна интегрална крива не сече криву $y = u(x)$. И ако тада поделимо раван (x, y) на две области: унутрашњу и спољну област те криве, један, ма који, интеграл који има једну своју тачку у унутрашњој области мора имати све своје тачке у тој области. Једно покретно тело које би се кретало под таквим условом да му трајекторија буде дефинисана датом једначином $F = 0$, а почетни положај да му је ма где у унутрашњој области криве $y = u(x)$, мора за све време кретања остати у тој области. Оно ће, дакле, увек остати у близини свога првобитнога положаја и на тај начин његово ће кретање имати карактер нарочитога кретања, познатог у рационалној механици и астрономији под именом *стабилног* кретања. Резултати што претходе дају начина да се конструишу читаве класе диференцијалних једначина првога реда које имају за карактеристичну криву такву затворену криву, а ја ћу овде навести један принцип на основу кога се могу образовати читаве класе различних кретања по кривим површинама које ће имати карактер стабилних кретања.

Нека је

(32) $$F(x, y, y') = 0$$

једна, ма каква, једначина првога реда која задовољава ове, малочас наведене, услове и има једну затворену карактеристичну криву $y = u(x)$. Замислимо да се једна материјална тачка креће по сталној површини

(33) $$F(x, y, z) = 0$$

под утицајем сила чија резултанта има као компоненте у правцу $x-y-z$ – осовине силе X, Y, Z, које по оваквим законима зависе од координата (x, y, z) покретне тачке:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial z} + z\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial z}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + z\,\frac{\partial F}{\partial y}\right),\\
(34)\quad Y &= \frac{\partial F}{\partial z}\left(z^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial z} + z\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial z} - z\,\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) - z\,\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,z + \frac{\partial F}{\partial y}\right),\\
Z &= \frac{\partial F}{\partial z}\left(z\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2z\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + z\,\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

Свакој површини (33) одговара по један систем компонената (X, Y, Z) дефинисаних једначинама (34) и тада се може доказати да ће под утицајем таквих сила кретање покретне тачке, ако јој је првобитни положај у унутрашњости карактеристичне криве $y = u(x)$, имати карактер стабилнога кретања.

Јер, пошто је према основним једначинама динамике, узевши да је маса покретне тачке равна јединици

$$
(35)\qquad X = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2z}{dt^2},
$$

то ће једначине (34) бити идентички задовољене ако се стави да је

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial z},\\
\frac{dy}{dt} &= -z\,\frac{\partial F}{\partial z},\\
\frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x} + z\,\frac{\partial F}{\partial y},
\end{aligned}
$$

пошто се једначине (34) добијају, што се лако може проверити, диференцијалећи једначине (36) и водећи рачуна о једначинама (35) и (36).

Једначине (36) дефинишу законе по којима компонентне брзине варирају са координатама покретне тачке и, ако брзина варира по тим законима, деобом прве и друге једначине (36) добија се да је

$$
\frac{dy}{dx} = Z,
$$

што значи да се трајекторија пројекције покретне тачке у равни (x, y) добија као интеграл диференцијалне једначине првога реда

(37) $$F(x, y, y') = 0.$$

Исти резултат излази и деобом треће и прве једначине (36), чиме се добија да је

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + z\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};$$

ова је једначина идентички задовољена ако се узме да је $z = y'$ а да y задовољава једначину (37), пошто је тада идентички

$$\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}F(x, y, y') - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dz},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy'}{dx},$$

што значи да се једначине $z = y'$ и $F(x, y, y') = 0$ могу сматрати као решења диференцијалне једначине (34) и та решења дефинишу трајекторије покретне тачке.

Уочимо цилиндар чије су генератрисе паралелне z-осовини и чија је основица поменута карактеристична крива $y = u(x)$. Он ће на површини $F(x, y, z) = 0$ одсецати једну затворену површину и покретна тачка, ако је њен првобитни положај у тој затвореној површини, остаће једнако у њој. Координата z биће у свакоме тренутку равна угаоном сачиниоцу дирке на пројекцији трајекторије у равни (x, y).

Напослетку, завршујући овај рад, остаје ми да покажем какве се користи могу извући из познавања карактеристичних кривих извесне класе диференцијалних једначина првога реда за саму њихову интеграцију.

Нека је дата диференцијална једначина

$$F(x, y, y') = 0$$

са сталним критичним тачкама. По познатим методама г. Фукса, за дату једначину увек се може унапред распознати да ли су јој те тачке сталне или се померају са варијацијом интеграционе константе.

Нека је $y = u(x)$ карактеристична крива ове једначине. Ако се стави да је

$$y = u(x) + \frac{1}{z}, \tag{38}$$

одакле је

$$y' = u'(x) - \frac{z'}{z^2};$$

једначина $F = 0$ постаје

$$\Phi(x, z, z') = 0.$$

Пошто, према самој дефиницији функције $u(x)$, корени једначине

$$y(x, C) - u(x) = 0$$

не зависе од интеграционе константе што фигурише у општем интегралу $y(x, C)$, то према обрасцу (38), вредности x-а за које функција z постаје бесконачна, такође не зависе од ове константе. Са друге стране, из истога је обрасца очевидно да пошто интеграл y има сталне критичне тачке, тај исти случај мора бити и са интегралом z. Општи интеграл $z(x, C)$ једначине $\Phi = 0$ мора, дакле, имати све интегралне сингуларитете сталне.

Али, у поменутоме своме раду ја сам доказао ову теорему:

Кад год једна алгебарска диференцијална једначина првога реда има све своје сингуларитете сталне, она се може интегралити или само помоћу алгебарских операција, или се помоћу таквих операција своди на једну линеарну једначину првога реда и, према томе, може се интегралити помоћу једне или две квадратуре.

Из ове се теореме непосредно изводи да се једначина $\Phi = 0$ увек може на тај начин интегралити. А кад је извршена та интеграција и нађен њен општи интеграл $z(x, C)$, општи интеграл једначине $F = 0$ биће

$$y(x, C) = u(x) + \frac{1}{z(x, C)}. \tag{39}$$

И отуда ова теорема:

Кад год једна диференцијална једначина првога реда са сталним критичним тачкама има карактеристичних кривих линија, она се може интегралити помоћу алгебарских операција или помоћу једне или две квадратуре.

У овој се теореми јасно огледа важност карактеристичних кривих за интеграцију диференцијалних једначина. Али се може ићи још даље и прецизирати и сам облик интеграла једначина о којима је реч.

У своме ранијем раду ја сам доказао и ову теорему:

Кад год једна алгебарска диференцијална једначина има све своје сингуларитете сталне, њен *род* (genre, Gattung) мора бити или раван нули, или већи од јединице.

А према познатој теореми г. Поенкареа, кад год једна алгебарска диференцијална једначина има сталне критичне тачке а род јој је већи од јединице, њен је општи интеграл алгебарска функција сачинилаца од y и y' што фигуришу у самој диференцијалној јединачини.

Применимо ове резултате за једначину $F=0$ са сталним критичним тачкама и претпоставимо да је лева страна једначине какав полином по y и y' са сачиниоцима који су алгебарске функције променљиве x. Тада, ако она има карактеристичну криву $y=u(x)$, та крива, према једној малочас доказаној теореми, мора бити алгебарска. Лева страна једначине $\Phi=0$ тада ће бити известан полином по z и z' са сачиниоцима који су алгебарске функције x-а. Род једначине $\Phi=0$ раван је роду једначине $F=0$ пошто се, према обрасцима (38), променљиве y и y' изражавају као рационалне функције променљиве z и z' по обрасцима

$$y=u+\frac{1}{z}, \quad y'=u'-\frac{z'}{z^2},$$

и обратно, променљиве z и z' изражавају се рационално помоћу y и y' по обрасцима

$$z=\frac{1}{y-u}, \quad z'=-\frac{y'-u'}{(y-u)^2},$$

а, према познатој Клебшовој (Clebsch) теореми, родови кривих (y,y') и (z,z') у таквом случају једнаки су. Са друге стране, пошто једначина $\Phi=0$ има све интегралне сингуларитете сталне, то по горе наведеној теореми њен род мора бити или раван нули, или већи од јединице. Отуда теорема:

Род једне диференцијалне једначине првога реда са сталним критичним тачкама, која има карактеристичних кривих линија, не може бити раван јединици.

Претпоставимо, прво, да је род једначине $F=0$ по (y,y') већи од јединице. Тада је и род једначине $\Phi=0$ по (z,z') већи од јединице и, према горњој теореми г. Поенкареа, њен општи интеграл $z(x,C)$ мора бити алгебарска функција x-а. Образац (38) показује да ће тада и општи интеграл $y(x,C)$ једначине $F=0$ бити алгебарска функција x-а.

Претпоставимо, затим, да је род једначине $F=0$ по (y,y') раван нули. Тада је и род једначине $\Phi=0$ по (z,z') раван нули и, као што је познато за уникурсалне криве, координате z и z' могу се изразити као функције једнога параметра λ, са сачиниоцима који ће бити алгебарске функције променљиве x, тако да ће бити

$$z = R_1(x,\lambda), \quad z' = R_2(x,\lambda), \tag{40}$$

где су R_1 и R_2 рационалне функције параметра λ а алгебарске функције променљиве x. Из прве од једначина (40) добија се да је

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dx},$$

одакле се, поређењем са другом једначином (40) налази да је

$$\frac{d\lambda}{\mu x} = \frac{R_2 - \dfrac{\partial R_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial R_1}{\partial \lambda}} = R_3(x,\lambda),$$

где је R_3 извесна рационална функција параметра λ, алгебарска по променљивој x. Но, ја сам раније доказао (loc. cit.) да кад год једна једначина $\Phi = 0$ има све интегралне сигуларитете сталне, функција $R_3(x,\lambda)$ што јој одговара, мора бити линеарна по параметру λ, тако да је

$$\frac{d\lambda}{dx} = f(x)\lambda + \varphi(x), \tag{42}$$

где су $f(x)$ и $\varphi(x)$ алгебарске функције променљиве x. Интеграцијом једначине (42) добија се да је

$$\lambda = e^{\int f(x)dx}\left[C + \int \varphi(x)e^{\int f(x)dz}dx\right]. \tag{43}$$

Са друге стране, из образаца (38) и (40) добија се да је

$$y = u(x) + \frac{1}{R_1(x,\lambda)}$$

и упоређењем са обрасцем (43) долази се до ове теореме:

Кад год једна диференцијална једначина првога реда, алгебарска по z, y, y′, *са сталним критичним тачкама, има карактеристичних кривих линија, њен општи интеграл увек је или алгебарска функција променљиве* x *или је рационална функција израза*

$$e^{\int f(x)dx} \quad \text{и} \quad \int \varphi(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

(*где су* f *и* φ *алгебарске функције* x-*а*) *са сачиниоцима који су алгебарске функције* x-а.

У случајевима кад је у једначини $F = 0$ лева страна полином не само по y и y' већ и по x, може се још дубље прецизирати облик општега интереса y користећи се једном примедбом коју је учинио г. Noether у својим радовима о уникурсалним кривим линијама.[4]

Означимо са m степен једначине

$$F(x,y,y') = 0$$

по изводу y'. Координате y и y' криве, представљене том једначином, могу се на бесконачно много начина изразити у облику (40), тако да оне буду рационалне функције параметра λ, али функције R_1 и R_2 биће уопште алгебарске ирационалне функције променљиве x. Г. Нетер је доказао да

1. ако је m непарно, увек је могућно представити y и y' у таквоме облику да функције R_1 и R_2, које фигуришу у обрасцима (40), буду рационалне не само по параметру λ већ и по променљивој x;

2. ако је m парно, увек је могућно учинити тако да функције R_1 и R_2 буду рационалне по λ, x и $\sqrt{P(x)}$ где је $P(x)$ какав полином по x.

Применимо ове примедбе на случај о коме је реч и разликујмо два случаја.

1. Ако је m непарно, сачиниоци $f(x)$ у диференцијалној једначини (42) рационалне су функције променљиве x. Према томе, интеграл

$$T = \int f(x)dx$$

биће раван збиру алгебарских логаритамских функција $x-a$, тако да је

$$T = R(x) + \sum A_k \log(x-\alpha_k),$$

где је $R(x)$ рационална функција $x-a$, A_k и α_k извесне константе.

Отуда је

$$e^{\int f(x)dx} = (x-\alpha_1)^{A_1}(x-\alpha_2)^{A_2}\ldots(x-\alpha_k)^{A_k}e^{R(x)}, \tag{44}$$

а из тога

$$\int \varphi(x)e^{\int f(x)dx}dx = \int \varphi(x)(x-\alpha_1)^{A_1}(x-\alpha_2)^{A_2}\ldots(x-\alpha_n)^{A_n}e^{R(x)}dx. \tag{45}$$

Општи интеграл y једначине $F = 0$ биће, дакле, рационална функција променљиве x и израза (44) и (45).

---

[4] Mathematische Annalen, T. III.

2. Ако је m парно, функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ биће рационалне функције променљиве x и израза $\sqrt{P(x)}$, где је $P(x)$ какав полином по x. А такве се функције на познати начин увек могу свести на облике

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x)\sqrt{P(x)},$$
$$\varphi(x) = S_3(x) + S_4(x)\sqrt{P(x)},$$

где су S_1, S_2, S_3, S_4 полиноми по x.

Из тога се лако изводи да ће интеграл $y(x)$ бити рационална функција променљиве x и израза

$$e^L \quad \text{и} \quad \int \varphi(x) e^L dx,$$

где је L известан *хиперелиптички* интеграл, који се у специјалним случајевима може свести и на елиптични интеграл или и на саме циклометријске функције.

А из свега овога јасно се види колико сам факт да дата једначина са сталним критичним тачкама има карактеристичних кривих линија, упрошћава интеграцију и од колике је он користи за дубље познавање аналитичке природе функција које се добијају интеграцијом таквих једначина.

Једначине са сталним критичним тачкама нису једине код којих егзистенција карактеристичних кривих олакшава интеграцију. Такве криве, као што ћу другом приликом показати, у великоме броју случајева дају начина да се потпуно реше ова питања:

1. распознати да ли дата једначина има партикуларних рационалних интеграла и, у случају ако их има, израчунати их;

2. распознати да ли једначина има мероморфних интеграла и израчунати их ако их има.**

** Кратак садржај ове обимне расправе, Петровић је објавио у Годишњаку Српске краљевске академије за 1897. годину, књ. XI, Београд 1899, стр. 150 (пр. Д. Т.).

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГА РЕДА*

Једначине о којима ће бити говора у овоме раду су облика

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

где y' и y'' означују изводе

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

непознате функције y по независно промењивој x, а F означује ма какав полином по изводима y' и y'', *хомоген у односу на те изводе*, са сачиниоцима који могу бити ма какве *алгебарске* функције y-а.

Општи интеграл једначине (1) биће облика

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{2}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе, од којих је једна адитивна, тј. додаје се промењивој x.

Једначина (1) своди се, као што је познато, на једну једначину првога реда ако се стави да је $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, па се p сматра као нова непозната функција, а y као независно промењива функција, јер тада је

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy},$$

и једначина (1) се своди на једначину првога реда

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LIV, Први разред, књ. 19, Београд 1897, стр. 143–194; саопштено у Академији природних наука 18. фебруара 1897.

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

или на

(3) $$F\left(y, 1, \frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

која се добија деобом последње једначине са p^n, где је n степен хомогености полинома F.

Кад је једначина (3) интеграљена, и ако је

(4) $$p = C_1 + f(y)$$

њен општи интеграл, интеграл (2) дате једначине (1) биће представљен инверзијом Абеловог интеграла

(5) $$x + C_2 = \int \frac{dy}{C_1 + f(y)}.$$

То би био обичан начин на који се поступа при интеграцији једначине (1). Али, лако се увиђају тешкоће на које се наилази при оваквој интеграцији и које су, изузимајући веома мали број случајева, у пракси несавладљиве. Израчунавање и функције p из једначине (3) и функције y из једначине (5) своди се на израчунавање инверзије Абелових интеграла, које је инверзије у већини случајева немогуће добити у експлицитном облику. Међутим, тражени општи интеграл у великоме броју случајева може бити релативно простога облика, тј. могућно га је експлицитно изразити помоћу данашњих обичних трансцендената; тада је од важности умети то распознати и у датој једначини израчунати сам општи интеграл у експлицитном облику помоћу тих трансцендената.

Уочимо, нпр., оне случајеве у којима је интеграл y униформна функција променљиве x. У својим радовима о једначинама облика (1), где је F ма каква алгебарска функција променљивих y, y', y'', г. Пикар[1] је дао неколико општих и основних теорема о аналитичкој природи општега интеграла за случај кад је овај униформна функција x-а. Према овим теоремама, кад год је могућно изабрати интеграционе константе тако да оне на алгебарски начин фигуришу у изразу општега интеграла, овај је

1. или рационална функција променљиве x;

2. или просто-периодична функција x-а и може се изразити као рационална функција израза e^{ax}, где је a какав сталан број;

[1] *Memoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables,* Paris 1889.

3. или двогубо-периодична функција x-а и може се изразити као рационална функција израза $\operatorname{sn}(ax)$, $\operatorname{dn}(ax)$, где је a какав сталан број;

4. или рационална функција два израза e^{ax} и e^{bx}, где су a и b стални бројеви, чија је размера рационална;

5. или рационална функција променљиве x и израза e^{bx};

6. или је четворогубо-периодична функција двају израза $ax + C_1$ и $bx + C_2$, где су a и b извесне одређене константе, а C_1 и C_2 интеграционе константе.

За случај пак кад обе константе не фигуришу алгебарски у општем интегралу, г. Пенлеве[2] је доказао ову основну теорему, која уосталом обухвата као специјалне случајеве горње г. Пикарове теореме:

кад год је оӣшӣи инӣеīрал једначине F = 0 *униформна функција* x-a, *он се своди на комбинације рационалних, ӣросӣо-ӣериодичних и двоīубо-ӣериодичних функција* x-a, *или се једначина може свесӣи на извесну линеарну диференцијалну једначину другоīа реда са сачиниоцима који су ӣериодичне функције ӣроменљиве* x.

Ове су теореме, по својој генералности, од врло великог значаја, јер је њима данас решено питање о томе какве униформне функције могу уопште задовољавати једначине облика (1). Али, питање да се у датом конкретном случају, у датој једначини, распозна да ли је њен општи интеграл униформна функција x-а, и, ако је, који ће од поменутих разних аналитичких облика имати, па кад се тај облик нађе, да се и сама једначина потпуно интеграли, веома је заметно не само због великога броја трансформација и рачуна са којима је оно скопчано, већ, и то понајвише, стога што још нема детаљно разрађених метода које са сигурношћу воде циљу.

И ту ваља додати још и ово. Методе г. Пикара и Пенлевеа, не узимајући у обзир заметност посла и веома велику компликованост рачуна на које оне наводе, дају начина да се реши постављено питање о аналитичкој природи интеграла *једино за оӣшӣи инӣеīрал,* који зависи од две интеграционе константе. Од ових констаната, једна је адитивна и додаје се променљивој x, тако да ако је $y = \varphi(x)$ један интеграл дате једначине, функција $y = \varphi(x + C)$ такође је њен интеграл. Друга пак константа C_2 може фигурисати у интегралу на ма какав начин. И онда, може се десити да општи интеграл не буде униформна функција променљиве x, али да се спецификовањем интеграционе константе C_2 добије једна класа униформних партикуларних интеграла у којима фигурише само једна интеграциона константа C_1.

Тако, нпр., општи интеграл једначине

---

[2] Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, T. CXVII. (1893), pp. 211–214.

$$yy'' + y'^2 - 4ayy' + 2a^2y^2 = 0,$$

који је

$$y = e^{a(x+C_1)}\sqrt{1+C_2x}, \quad \text{тј.} \quad y = C'e^{ax}\sqrt{1+C_2x},$$

није униформна функција x-а, али за $C_2 = 0$ добија се једна класа партикуларних униформних интеграла, представљених општим обрасцем $y = C'e^{ax}$ и који зависе од једне интеграционе константе C'.

Од интереса би, дакле, било умети распознати на датој једначини (1) да ли је са њом такав случај, тј. да ли за њу постоје партикуларни униформни интеграли. А очевидно је да ако постоји један такав интеграл, постоји их бесконачно много, који се добијају додајући промењљивој x једну интеграциону константу C и пуштајући да се ова мења.

Ја сам намеран у овоме раду, користећи се оним што је до данас познато о инверзијама Абелових интеграла, детаљно разрадити једну методу за решавање сличних питања, која се односе на један специјални тип једначина (1), на тип једначина у којима је функција F хомоген полином по изводима y' и y'' са сачиниоцима који су ма какве алгебарске функције y-а, и показати како се за те једначине једино помоћу онога што се зна из теорије Абелових интеграла могу свагда у датом конкретном случају решити ова питања:

1. *распознати да ли је општи интеграл такве једне једначине рационална или униформна и периодична функција променљиве* x;

2. *у случају кад општи интеграл то није, распознати да ли је он алгебарска функција променљиве* x;

3. *распознати да ли дата једначина има партикуларних интеграла овакве аналитичке природе*;

4. *у случају кад је испуњен један од услова наведених у* 1., 2., 3., *израчунати сам интеграл.*

*

Пре свега, између ма какве рационалне или униформно периодичне функције и њенога првога извода постоји увек алгебарски однос. Према томе, ако је општи интеграл y таква једна функција, општи интеграл

(6) $$\varphi(y, p + C_1) = 0$$

једначине (3), коју ћу написати у облику

(7) $$f\left(y, \frac{dy}{dp}\right) = 0,$$

где је f полином по y и изводу $\frac{dy}{dp}$, мора дефинисати y као алгебарску функцију променљиве p.

Потражимо, дакле, како се на датој једначини (7) може распознати да ли је њен општи интеграл (6) алгебарска функција променљивих p и y. То ћемо учинити одредивши *род* (genre, Gattung) алгебарске криве дефинисане једначином (6), кад се p и y сматрају као координате ма какве њене тачке, затим одредивши највише степене променљивих p и y са којима они фигуришу у једначини (6) и, напослетку, израчунавајући сачиниоце те једначине из услова да једначина (7) мора бити индентички задовољена кад се у њој смени y својом вредношћу израчунатом из једначине (6).

У теорији Абелових интеграла позната је теорема да кад год је интеграл

$$z = \int \frac{du}{U},$$

где су u и U везани датом алгебарском релацијом

$$f(u, U) = 0,$$

алгебарска функција променљиве u, тако да између променљивих z и u постоји алгебарски однос

$$\varphi(u, z) = 0,$$

род алгебарске криве $\varphi = 0$ раван је роду криве $f = 0$.

Из једначине (7) добија се да је

$$p = \int \frac{dy}{Y},$$

где су y и Y везани алгебарском релацијом

$$f(y, Y) = 0, \tag{8}$$

која се добија из (7) стављајући да је

$$Y = \frac{dy}{dp}.$$

И онда, применом горње теореме налази се да ако је крива (6) алгебарска, њен род мора бити раван роду криве (8) кад се у једначини (8) y и Y сматрају као координате једне тачке. Али, пошто се једначина (8) добија из једначине (1) пошто се ова напише у облику (3), бирационалном трансформацијом

$$y = y, \quad \frac{dy}{dp} = \frac{1}{Y},$$

које трансформације не мењају род, то се изводи ова теорема:

Кад год је интеграл (6) алгебарски, род криве представљене једначином (6) раван је роду криве (1), кад се у њој y′ *сматра као стално, а* y *и* y″ *као координате покретне тачке.*

Тиме је решен задатак, односно род криве (6). Али, за саму одредбу криве (6) од највеће је важности умети унапред одредити највише степене m и n једначине (6) по променљивим y и p јер, кад су ови степени познати, да би се видело да ли је интеграл (6) алгебарски, довољно је написати најопштију алгебарску једначину m-тог степена по y и n-тог степена по p, па одредити у њој сачиниоце тако да диференцијална једначина (7) буде задовољена, или доказати да је то немогућно, из чега би се закључило да интеграл (6) није алгебарски.

У томе погледу, уопште за Абелове интеграле облика

$$p = \int \frac{dy}{Y},$$

где су y и Y везани алгебарском релацијом (8), зна се да ако између променљивих p и y постоји алгебарски однос (6), степен једначине (6) по променљивој p раван је степену једначине (8) по променљивој Y. Теорема је, уосталом, непосредна последица тога што интеграл

$$\int \frac{dy}{Y},$$

апстрахујући његове вредности које долазе од интегралних периода, за сваку вредност променљиве y мора имати онолико вредности колики је број корена једначине (8) решене по Y, тј. колики је степен полинома f по Y, претпостављајући, очевидно, да је последња једначина несводљива.

Потражимо још степен по y.

Ставимо у једначини (7) да је

$$\frac{dy}{dp} = Y$$

и образујмо затим ове две алгебарске једначине

$$f(y, \lambda y) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial f}{\partial Y} = 0, \tag{10}$$

са

$$(11) \qquad f(y,Y)=0.$$

Елиминишимо из једначина (10) и (11) промењљиву Y и нека је

$$(12) \qquad \Phi(y,\mu)=0$$

тако добијена једначина. Означимо са k број заједничких корена (коначних или бесконачних) двеју једначина (9) и (12), решених по y, за $\lambda=0$, $\mu=0$. Тада је, као што се зна из теорије Абелових интеграла: *сшейен једначине (6) йо* у *раван броју* k. Теорема би се могла извести непосредно из примедбе да је, кад је дат један алгебарски однос $\varphi(y,p)=0$ између промењљивих y и p, степен једначине $\varphi=0$ по y раван броју вредности промењљиве y (које могу бити коначне или бесконачне), што одговарају једној, ма којој, вредности промењљиве p за коју бисмо вредност изабрали $p=\infty$. Али се она може најлакше извести из једне већ доказане теореме у теорији Абелових интеграла[3], која се може исказати на овај начин:

Кад год је интеграл

$$z=\int\frac{du}{U},$$

где су u и U везане алгебарском релацијом $f(u,U)=0$, алгебарска функција промењљиве u, степен по u релације која тада постоји између u и z, уређене тако да је њена лева страна полином, раван је броју вредности (коначних или бесконачних) које у исти мах задовољавају две једначине

$$(13) \qquad \frac{u}{U}=\infty, \qquad \frac{du}{dU}=\infty.$$

Применом ове теореме на наш случај, ако се стави да је

$$Y=\lambda y, \qquad \frac{dY}{dy}=\mu,$$

и ако се узме у обзир то да су y и Y везани релацијом (8) из које се диференцијаљењем добија

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dy}=0,$$

[3] Raffy: *Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes*, Ann. de l'Ec. Norm., 1882.

лако се увиђа да се једначине (13) своде на (9) и (12), кад се у овима стави да је $\lambda = 0$, $p = 0$, и број заједничких корена тих једначина биће по горњој теореми раван степену интеграла (6) по промењљивој y.

Према томе, степен тога интеграла и по p и по y може се увек унапред наћи помоћу врло простих алгебарских операција. Због важности овога истраживања степена за израчунавање самога интеграла, ја ћу овде истаћи практично правило, које се изводи из претходних теорема:

Ако је ойшѿи инѿеѓрал (6) *једначине* (7) *алѓебарски, сѿейен релације* (6) *йо* p *раван је сѿейену једначине* (7) *йо изводу* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dp}}$, *а сѿейен исѿе релације йо* y *раван је броју заједничких корена (коначних или бесконачних) једначина* (9) *и* (12) *решених йо* y, *за* $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Приметимо и то да ако су сачиниоци извода y' и y'' у једначини (1) рационалне функције y-а, степен једначине (7) по изводу $\frac{dy}{dp}$ раван је степену хомогености функције F и, према томе, у томе случају степен релације (6) по p раван је степену хомогености функције F.

Кад су на тај начин одређени и степени m и n интегралне једначине (6) по промењљивим y и p, посао распознавања да ли је интеграл (6) одиста алгебарски и тражење самога интеграла своди се на ово: ваља написати најопштију алгебарску релацију између y и p, и то m-тога степена по y а n-тога степена по p, са неодређеним сачиниоцима, па затим одредити ове сачиниоце тако да диференцијална једначина (7) буде идентички задовољена кад се у њој смени y својом вредношћу добијеном из једначине (6), или доказати немогућност ове одредбе, а тиме и то да интеграл (6) није алгебарски. Ово је одређивање сачинилаца доста заметан посао, али неизбежан у рачунима овакве врсте.

Наводим да често у пракси може упростити посао теорема коју је дао г. Рафи (Raffy). Кад год је интеграл

$$p = \int \frac{dy}{Y}$$

алгебарски, крива представљена једначином

$$f\left(y, \frac{dy}{dp}\right) = 0,$$

кад се у овој сматрају вредности извода $\frac{dy}{dp}$ као апсцисе, а вредност функције y као ординате, мора имати бар једну асимптоту паралелну ординатној осовини или бар једну дирку у тачкама у којима сече апсцисну осовину паралелну ординатној осовини. Стога је корисно пре израчунавања поменутих сачинилаца испробати на датој једначини (8) да ли је овај услов испуњен или није; ако није, интеграл (6) извесно није алгебарски и задатак је тиме решен, јер је на тај начин доказано да интеграл $y(x)$ дате једначине другога реда (1) не може бити ни униформна и периодична, ни алгебарска функција независно променљиве x. Ако су пак услови горње теореме испуњени, онда ваља приступити одређивању степена интегралне једначине и израчунавању самога интеграла (6) на раније показани начин.

Приметимо и то да би ово одређивање било још простије кад би се претходно одредио и *ред* алгебарске криве дефинисане једначином (6), подразумевајући под *редом* једне алгебарске криве (6) степен једначине по t, која се добија кад се у једначини криве стави да је $y = \alpha t$, $p = \beta t$, где су α и β сталне, од t независне величине. Познавање реда криве (6) зато олакшава израчунавање сачинилаца који у њој фигуришу, што, ако се напише најопштија релација m-тог степена по y и n-тог степена по p [где су m и n највиши степени променљивих y и p у једначини (6), који се одређују по напред наведеним методама], и ако се у њој стави да је $y = \alpha t$, $p = \beta t$, сачиниоци свих оних степена променљиве t који су већи од реда криве (6), морају бити равни нули. Тиме је број сачинилаца који се имају израчунати знатно смањен и одређивање осталих утолико олакшано.

Одређивање реда једне алгебарске криве

$$\varphi(u,z) = 0,$$

дефинисане инверзијом Абеловог интеграла

$$z = \int \frac{du}{U},$$

где су u и U везани алгебарском релацијом $F(u,U) = 0$, било је предмет једнога рада г. Цејтена (Zeuthen)[4], који је дао једну методу за то одређивање. Метода је теоријски савршена, али је у пракси доста заметна.

Г. Рафи је у поменутоме своме раду показао да: *кад год су сви угаони сачиниоци тангената криве*

$$f(u,U) = 0$$

у тачкама у којима она сече U*-осовину равни нули, ред алгебарске криве*

---

[4] Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, T. XC (1880), p. 114.

$$\varphi(u, z) = 0$$

*раван је највишем ст*е*пену једначине* f = 0 *по променљивој* U.

Овом се теоремом треба увек послужити кад год су на датој једначини задовољени услови њене употребљивости и тек онда приступити одређивању сачинилаца једначине $\varphi(y, p+C) = 0$ по методи неодређених сачинилаца.

Ако се при томе израчунавању покаже да интеграл $\varphi = 0$ није алгебарски, задатак је довршен и резултат је негативан: тражени општи интеграл $y(x)$ једначине (1) није онакве аналитичке природе каква је претпостављена.

Али, ако $\varphi = 0$ буде алгебарски интеграл, функција $y(x)$, сматрана као функција x-а дефинисана једначином (1), може бити такве природе, што се има решити дубљим испитивањем, и то на овај начин.

Сменимо у једначини

$$\varphi(y, p+C) = 0$$

променљиву p њеном вредношћу $p = \dfrac{dy}{dx}$, па се опет добија диференцијална једначина првога реда

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx} + C\right) = 0, \tag{14}$$

за коју сад ваља испитати да ли јој је интеграл (општи или партикуларни) униформна и рационална, или униформна и периодична, или неуниформна и алгебарска функција независно променљиве x. Испитивања овакве врсте била су предмет класичних радова Бриоа и Букеа; ја ћу због примене у задатку што нас овде занима навести само крајњи резултат досадашњих истраживања у томе правцу, давши му онакав облик какав ми изгледа да је најпогоднији за непосредну примену у пракси.

Сматрајмо у једначини (14) y и вредности извода $\dfrac{dy}{dx}$ као координате једне покретне тачке, и то извод $y' = \dfrac{dy}{dx}$ као апсцису, а y као ординату, и замислимо конструисану алгебарску криву $\varphi(y, y' + C) = 0$.

Означимо са:

– q род те криве, опоменувши се да је према претходном род q раван роду алгебарске криве (1) кад се у овој y и други извод y'' сматрају као координате покретне тачке;

– $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ угаоне сачиниоце (реалне или имагинарне) њених асимптотних праваца;

– $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ угаоне сачиниоце њених тангената у тачкама (реалним или имагинарним) у којима она сече ординатну осовину.

Сачиниоци α_i и β_i добијају се у пракси на овај начин.

Сачиниоци α_i јесу корени алгебарске једначине

$$f\left(y, \frac{y}{\alpha}\right) = 0, \quad \text{за } y = \infty \tag{15}$$

решене по α; сачиниоци пак β_i јесу корени једначине

$$\chi(y', \beta) = 0, \quad \text{за } y' = 0 \tag{16}$$

која се добија елиминацијом променљиве y из двеју једначина

$$f(y, y') = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Ако је ова елиминација у датом специјалном случају заметна, може се из ових двеју последњих једначина елиминисати извод y' и, ако је

$$\theta(y, \beta) = 0 \tag{18}$$

резултат те елиминације, сачиниоци β_i биће корени једначине (18) кад се у овој y буде смењивало коренима једначине $f(y, 0) = 0$ решене по променљивој y.

Поред ових једначина, уочимо још и малопређашње две једначине (9) и (12), где је (12) резултат елиминације променљиве Y из двеју једначина

$$f(y, Y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\mu = 0.$$

Критеријум за распознавање аналитичке природе униформних интеграла једначине (1) састоји се тада у овоме:

1. *Да би интеграл* y(x) *био рационална функција променљиве* x, *потребно је и довољно да буду испуњени ови услови*:

а) Најмање један од сачинилаца α_i и β_i бесконачан је, а ниједан од њих није коначан и различан од нуле.

б) За $\lambda = 0$, $\mu = 0$, једначине (9) и (12) решене по y, имају само један заједнички корен.

в) Тај корен може бити коначан или бесконачан. Ако је коначан, нпр. $y = a$, и ако k корена једначине (14) решене по изводу y', теже нули кад y тежи граници a и имају инфинитезимални ред већи од 1, тих k

корена образују један Пуизеов (Puiseux) кружни систем (systeme circulaire), и кад се сваки од њих, по познатој Пуизеовој методи развије у бесконачан ред облика

$$A_0 + A_1(y-b)^{\frac{1}{k}} + A_2(y-b)^{\frac{2}{k}} + \dots,$$

сачиниоци $A_0, A_1, \dots, A_k$ морају бити равни нули, као и сачинилац A_{k+2}, а, међутим, сачинилац A_{k+1} мора бити различит од нуле.

Ако је, напротив, корен $y = a$ бесконачан, онда решивши једначину

$$\varphi\left(\frac{1}{v} - \frac{v'}{v^2} + C\right) = 0 \tag{19}$$

по v, ако s корена те једначине теже нули, кад v тежи нули и имају инфинитезимални ред већи од јединице, тих s корена образују један Пуизеов кружни систем и, ако се сваки од њих развије у Пуизеов ред

$$B_0 + B_1 v^{\frac{1}{s}} + B_2 v^{\frac{2}{s}} + B_3 v^{\frac{3}{s}} + \dots,$$

мора бити

$$B_0 = 0, B_1 = 0, \dots, B_s = 0, B_{s+2} = 0 \quad \text{и} \quad B_{s+1} \neq 0.$$

г) Мора бити $q = 0$, тј. крива $\varphi(y, y') = 0$ мора бити уникурсална.

2. *Ако је интеграл униформна и периодична функција* x-а, *ова може бити просто или двогубо-периодична.* И онда

А) *Да би интеграл био просто-периодична функција* x-а, *потребно је и довољно:*

а) да ниједан од сачинилаца α_i и β_i није бесконачан;

б) да корени једначине $\varphi(y, y' + C) = 0$, решене по y који теже нули, за неке коначне вредности y-а чији би инфинитезимални ред био раван јединици, и корени једначине (19), решене по v', који теже нули кад v тежи нули и имају инфинитезимални ред раван јединици, образују свега два кружна система;

в) да род q буде раван нули.

Б) *Да би интеграл био двогубо-периодична функција* x-а, *потребно је и довољно:*

а) да сви сачиниоци α_i и β_i буду равни нули;

б) да род q буде раван јединици.

Може се десити да ниједан од услова, исказаних у овим теоремама не буде задовољен за ма какву вредност константе C која фигурише у интегралној једначини (14), али да један од њих буде испуњен за једну извесну вредност ове константе. У томе случају једначина (1) извесно има једну класу партикуларних униформних интеграла чија је аналитичка природа одређена природом оних претходних услова које једначина (1) буде задовољавала.

Овим правилима и ранијим теоремама потпуно је решен проблем: распознати да ли је општи интеграл једначине (1) униформна и рационална, или униформна и периодична функција x-а и, ако то није, да ли једначина има партикуларних интеграла овакве природе. Приметимо да према претходним теоремама *једначина* F = 0 *може само онда имати таквих интеграла ако је њен род по* y *и* y″ *раван нули или јединици.* О томе се, уосталом, уверавамо и на овај начин.

Напишимо једначину $F = 0$ у облику

$$F\left(y, 1, \frac{y''}{y'}\right) = 0 \tag{20}$$

и претпоставимо да је y униформна функција x-а; тада ће то исто бити случај и са количником $\frac{y''}{y'}$. Према последњој једначини, између ових двеју униформних функција y и $\frac{y''}{y'}$ постоји алгебарски однос (20), а према једној познатој Пикаровој теореми, кад год између двеју униформних функција постоји алгебарски однос, род алгебарске релације која тада између њих постоји раван је нули или јединици. Са друге стране, род криве (20), кад се y и $\frac{y''}{y'}$ сматрају као координате, раван је роду криве $F(y, y', y'') = 0$ кад се y и y'' сматрају као координате, чиме је теорема доказана.

Покажимо сад како се израчунава сам интеграл кад је задовољен један од услова (1), (2, А), (2, Б). Разликујмо ове случајеве.

1. Претпоставимо да су задовољени услови 1. Пошто је $q = 0$, то се координате y и $\frac{dy}{dx}$ криве (14) могу изразити као рационалне функције једнога параметра t, тако да је

$$y = \frac{C(t)}{Q(t)}, \tag{21}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1(t)}{Q_1(t)}, \tag{22}$$

где су P, Q, P_1, Q_1 полиноми по t. Из (21) добија се диференцијаљењем да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} \cdot \frac{dt}{dx},$$

а одатле, поређењем са (22),

(23) $$\frac{dx}{dt} = \frac{S(t)}{R(t)},$$

где су S и R полиноми по t. Интеграцијом се добија да је

(24) $$x = \int \frac{S(t)}{R(t)}\, dt$$

и пошто једначина (14) задовољава услове из 1, то интеграл (24) мора бити облика

(25) $$x = r(t),$$

где је $r(t)$ рационална функција параметра t, а елиминацијом овога параметра из једначине (21) и (25) мора се добити једна једначина облика

(26) $$y = R_1(x),$$

где је $R_1(x)$ рационална функција x-а. Функција y, дефинисана једначином (26), јесте тражени интеграл дате једначине (1).

2. Претпоставимо да дата једначина (14) задовољава услове (2, А). Тада је такође $q = 0$ и имали бисмо исте рачуне као и малочас, само са том разликом што интеграл (25) тада мора бити облика

(27) $$x = a \log A(t),$$

где је a стална величина, а $A(t)$ каква алгебарска функција параметра t, и елиминацијом тога параметра из једначина (21) и (27) мора се добити једна једначина облика

(28) $$y = R_2(e^{\frac{x}{a}}),$$

где је R_2 рационална функција израза $e^{\frac{x}{a}}$. Функција y дефинисана једначином (28) јесте тражени интеграл једначине $F = 0$.

3. Претпоставимо, напослетку, да дата једначина (14) задовољава услове (2, Б). Тада се, према једној познатој Клебшовој теореми, пошто је тада род $q = 1$, координате y и $\frac{dy}{dx}$ криве (14) могу изразити као рационалне функције једнога параметра t и једнога квадратнога корена облика

$$\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

тако да је

$$y = \psi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right], \tag{29}$$

$$\frac{dy}{dx} = \eta\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right], \tag{30}$$

где ψ и η означују рационалне функције. Из (22) добија се диференцијаљењем да је

$$\frac{dy}{dx} = R\left(t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right)\frac{dt}{dx}$$

и поређењем са (30) налази се да је

$$\frac{dx}{dt} = \xi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right],$$

где R и ξ такође означују извесне рационалне функције, а одатле је

$$x = \int \xi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right]dt. \tag{31}$$

Пошто је претпостављено да су задовољени услови (2, Б), то интеграл $y(x)$ једначине (14) мора бити униформна и двогубо-периодична функција x-а, а да би то било, према познатим теоремама из теорије елиптичних функција и према обрасцима (31) и (29), функција ξ мора бити облика

$$\xi\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right] = \frac{a}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

где је a стална величина. Из обрасца (31) добија се тада да је

$$t = \operatorname{sn}\left(\frac{x}{a}\right),$$

и заменом у обрасцу (29) налази се да је

$$y = \psi\left[\operatorname{sn}\left(\frac{x}{a}\right), \frac{d}{dx}\operatorname{sn}\left(\frac{x}{a}\right)\right]. \tag{32}$$

Функција (32) биће тада тражени интеграл једначине $F = 0$.

Покажимо ове резултате на неколико примера.

Први пример: Нека је дата једначина другога реда

$$64\,y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 27\left(\frac{dy}{dx} - a\,\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3 = 0; \tag{33}$$

пита се да ли има интеграла који су рационалне или униформне и периодичне функције промењиве x.

Једначина (14) овде је

$$64\,y\left(\frac{dy}{dp}\right)^3 - 27\left(\frac{dy}{dp} - a\right)^3 = 0; \tag{34}$$

да би интеграл $y(x)$ једначине (32) био тражене аналитичке природе, потребно је, пре свега, да интеграл $y(p)$ једначине (34) буде алгебарски. Према ранијој теореми, степен релације $\varphi(y,p) = 0$ по промењивој p биће 3, јер је толики степен једначине (34) по изводу $\dfrac{dy}{dp}$. Да бисмо одредили њен степен по y, ваља образовати једначине (9) и (12), за које се у овоме случају налази да за $\lambda = 0$, $\mu = 0$, имају четири заједничка корена $y = \infty$.

Интегрална једначина $\varphi = 0$ мора, дакле, бити трећега степена по изводу $\dfrac{dy}{dp}$, а четвртог степена по y. А одређујући саму ову једначину по напред показаноме начину, налази се да је она облика

$$y^4 + (ap - y)^3 = 0, \tag{35}$$

где још треба p смањити са $p - C$, чиме се добија

$$y^4 + (ap + aC - y)^3 = 0. \tag{36}$$

Род криве (36) раван је нули, јер се координате y и p могу изразити као рационалне функције једнога параметра t по обрасцима

$$y = t^3, \quad p = \frac{t^3 - t^4}{a} - C,$$

што показује да интеграл $y(x)$, ако је униформна функција x-а, мора бити или рационална или просто-периодична функција x-а.

За угаоне сачиниоце α_i асимптотних праваца криве (36) налази се да су сви равни нули.

Сачиниоци β_i, тј. угаони сачиниоци тангената криве (36) у тачкама у којима она сече ординатну осовину (y-ску осовину), добијају се као корени једначине

$$27(\beta - a)^3 - 64y\beta^3 = 0$$

кад се у овој y смени коренима једначине $\varphi(y, 0, C) = 0$, која је у овом специјалном случају

$$y^4 + (Ca - y)^3 = 0.$$

Сачиниоци су β_i, дакле коначни, што показује да интеграл не може бити рационалан.

Да бисмо довршили дискусију и доказали да за једначину (36) ефективно постоји једна класа партикуларних интеграла, који су униформне и просто-периодичне функције x-а, упростимо је, претпоставивши да је прва интеграциона константа C равна нули. Једначина (36) своди се тада на (35), а сачиниоци β биће тада корени једначине трећега степена

$$27(\beta - a)^3 - 64y\beta^3 = 0,$$

кад се у овој y смени коренима једначине $y^4 - y^3 = 0$, који су

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0, \quad y_4 = 1. \tag{37}$$

Првим трима вредностима одговарају сачиниоци $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = a$, а четвртој $\beta_4 = -3a$.

Из једначине (25), написане у облику

$$p = \frac{y(1 - y^{\frac{1}{3}})}{a},$$

види се да извод $p = \dfrac{dy}{dx}$ постаје раван нули за вредности y-а представљене обрасцима (37) и да за прве три од тих вредности једначина (35) има три корена, чији је инфинитезимални ред раван јединици и који образују један кружни систем; за вредност пак $y = y_4 = -3a$ једначина (35) има само један корен $p = 0$, и то првога реда.

Једначина (19), која је у овоме случају

$$\frac{1}{v^4} - \left(\frac{av' + v}{v^2}\right)^3 = 0$$

или

$$v' = \frac{1}{a} v^{\frac{2}{3}} (1 - v^{\frac{1}{3}}),$$

показује да ниједна вредност променљиве v' која тежи нули кад v тежи нули, нема инфинитезимални ред раван јединици.

Из целе ове дискусије види се да једначина (35) задовољава све потребне и довољне услове за егзистенцију униформних просто-периодичних интеграла и, према томе, дата једначина (33) мора имати једну класу партикуларних интеграла који садрже једну интеграциону константу и који су униформне просто-периодичне функције x-а. И одиста, лако је верификовати да једначина (33) има једну класу таквих интеграла представљених једначином

$$y = \frac{K^3 e^{\frac{x}{a}}}{\left(a + K e^{\frac{x}{3a}}\right)^3},$$

где је K интеграциона константа.

Други пример: Нека је дата једначина

$$64 a^3 y^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 27(1 - ay^2)\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 = 0; \tag{38}$$

једначина (14) овде је

$$64 a^3 y^3 \left(\frac{dy}{dp}\right)^3 + 27(1 - ay^2) = 0. \tag{39}$$

Према ранијим упутствима, налази се да, ако је у овоме случају једначина (14) алгебарска, њен степен по p мора бити 3, а степен по y мора бити 4. А, одређујући ову једначину, налази се да је она у овоме случају облика

$$p^3 - (1 - ay^2)^2 = 0, \tag{40}$$

где још ваља сменити p вредношћу $p + C$, чиме се добија

$$(p + C)^3 - (1 - ay^2)^2 = 0. \tag{41}$$

Алгебарска крива четвртог степена (41) има две сингуларне (завратне) тачке, дефинисане координатама

$$\begin{cases} p = -C, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{a}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -C, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \end{cases}$$

и, према томе, њен род $q = 1$. То показује да њен интеграл $y(x)$ не може бити рационалан и да, ако је он униформна и периодична функција x-а, та функција мора бити двогубо-периодична.

Потражимо угаоне сачиниоце α_i и β_i.

Угаони сачиниоци α_i биће корени једначине

$$\left(\frac{y}{\alpha} + C\right)^3 - (1 - ay^2)^2 = 0, \quad \text{за } y = \infty$$

или, ако се стави да је $y = \dfrac{1}{v}$, корени једначине

$$\left[C^3 v^4 - (v^2 - a)^2\right]\alpha^3 + \left[3C^2\alpha^2 v + 3C\alpha + 1\right] = 0$$

за $v = 0$ и, према томе, ма каква била вредност константе C, сачиниоци α_i сви су равни нули.

Сачиниоци пак β_i добијају се као корени једначине (18), која је у овом специјалном случају

$$(42) \qquad 64a^3y^3\beta^3 + 27(1 - ay^2) = 0,$$

пошто се овде смени y коренима једначине (41) за $p = 0$, а ови су корени

$$y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{C^3}}.$$

Заменом ова се једначина (42) своди на

$$\pm 64a^3\left(1 \pm \sqrt{C^3}\right)^{\frac{3}{2}}\beta^3 + C^{\frac{3}{2}} = 0,$$

из чега се види да ће сачиниоци β_i само онда бити равни нули ако је $C = 0$.

Према томе, и ако се узме у обзир све ово што претходи, за $C = 0$ интеграл једначине (38) мора бити униформна и двогубо-периодична функција x-а, а за $C \gtrless 0$ њен интеграл не може бити униформан. Општи интеграл, дакле, једначине (38) није униформан, али једначина мора имати једну класу партикуларних униформних интеграла који су двогубо-периодичне функције x-а и у којима фигурише једна интеграциона константа.

А ово је последње лако и емпирички верификовати, јер Брио и Буке[5] су интегралили диференцијалну једначину првога реда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (1-ay^2)^2 = 0 \tag{43}$$

и нашли да је њен општи интеграл облика

$$y = A\,\mathrm{sn}^3(x) + B\,\mathrm{sn}(x) + D\,\mathrm{sn}(x)\cdot\frac{d}{dx}\mathrm{sn}(x), \tag{44}$$

где су A, B, D извесне, одређене константе и где променљивој x ваља додати једну интеграциону константу. Једначина (43), идентична једначини (40), јесте први интеграл дате једначине (38) и, према томе, ова одиста има једну класу униформних двогубо-периодичних интеграла дефинисаних обрасцем (44), као што је било предвиђено.

*

Претпоставимо сад да се претходним испитивањем за једну дату једначину нашло да јој интеграл није ни рационалан ни униформно-периодичан. Тада се може десити да је он *алгебарска* функција x-а, а испитивање тога да ли је он одиста такав садржано је већ у овоме што претходи. Да би интеграл дате једначине (1) био алгебарски, потребно је и довољно да интеграл

$$\varphi(y, p+C) = 0$$

једначине првога реда (3) буде алгебарски и да, такође, интеграл

$$\psi(x, y, C, C') = 0$$

једначине првога реда

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx} + C\right) = 0$$

буде алгебарски. Ако је последњи интеграл такав за ма какву вредност константе C, онда је општи интеграл једначине $F = 0$ алгебарски; ако је то случај само за извесну специјалну вредност ове константе, онда једначина $F = 0$ има једну класу алгебарских интеграла што зависе од једне интеграционе константе. А о томе како се распознаје да ли једна диференцијална једначина првога реда у којој независно променљива

[5] Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier XXXVI.

не фигурише експлицитно, има алгебарски интеграл или не, било је говора у овоме што претходи.

Приметимо само да кад су сачиниоци извода y' и y'' у једначини $F = 0$ рационалне функције y-а, ако је

$$\psi(x, y) = 0$$

алгебарски интеграл те једначине написан у таквоме облику да је ψ полином по x, y, лако се доказује да је *степен једначине* $\psi = 0$ *по* x *раван степену хомогености полинома* F. Теорема излази као непосредна последица тога што је степен релације $\varphi = 0$ по p раван степену једначине (3) по изводу $\frac{dp}{dy}$, а овај је очевидно раван степену хомогености дате једначине другога реда $F = 0$. Са друге стране, степен интегралне једначине $\psi = 0$ по x раван је степену једначине $\varphi = 0$ по изводу $\frac{dy}{dp}$, чиме је теорема доказана.

*

У доста великом броју случајева може се за једначину (1) решити и ово питање:

Распознати да ли је њен интеграл (општи или који партикуларни) мултиформна просто-периодична функција x-а *са ограниченим бројем вредности за једну и исту вредност* x-а.

Ако је интеграл $y(x)$ такав, онда се он може представити као корен какве алгебарске релације

$$\psi(y, e^{ax}) = 0, \tag{45}$$

где је ψ полином по променљивим y и e^{ax} и a извесна одређена константа. Елиминацијом променљиве e^{ax} из једначине (45) и

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + aY\frac{\partial\psi}{\partial Y} = 0,$$

где је $Y = e^{ax}$, и која се добија диференцијаљењем једначине (45), добија се извесна алгебарска релација

$$\varphi(y, p) = 0$$

$\left(\text{где је } p = \frac{dy}{dx}\right)$ између функције y и њенога извода p. А то показује да у томе случају интеграл

$$\varphi(y, p) = 0 \tag{46}$$

једначине

$$F\left(y, 1, \frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{47}$$

мора бити алгебарски и да интеграл једначине

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx} + C\right) = 0 \tag{48}$$

мора бити облика (45). Први део задатка, тј. испитивање да ли је интеграл (46) алгебарски, решен је претходним резултатима. Уочимо, дакле, једначину (48) и испитајмо, за случајеве кад је то могућно, услове под којима ће њен интеграл бити облика (45), користећи се, као и досад, познатим резултатима из теорије Абелових интеграла.

У својим радовима: *Recherches algébriques sur les integrales abéliennes*[6] и *Sur les quadratures algébriques et logarithmiques*[7] г. Рафи је решавао овај проблем из теорије Абелових интеграла:

Кад је дата једна несводљива алгебарска једначина

$$f(u, U) = f_0(u)U^m + f_1(u)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0, \tag{49}$$

где су $f_1, f_2, \ldots, f_m$ полиноми по u, наћи под којим ће условима функција z, дефинисана као Абелов интеграл

$$z = \int \frac{du}{U}, \tag{50}$$

бити облика

$$z = A \log F(u), \tag{51}$$

где је A каква констана а $F(u)$ каква алгебарска функција променљиве u.

Једначина

$$f(u, U) = 0$$

мора тада, по г. Рафију, задовољавати ове услове:

1. Ако се са ρ_k означи степен полинома $f_k(u)$ по променљивој u, мора бити

$$\delta_m \geq -k + \delta_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

---

[6] Annales de l'Ecole Normale, 1882.

[7] Annale de l'Ecole Normale, 1885.

2. Ако је $u=\lambda$ један, ма који, корен p-тога реда једначине $f_m(u)=0$, он мора бити у исти мах корен најмање $(p-1)$-вог реда за једначину $f_{m-1}(u)=0$ итд. и, уопште, корен најмање $(p-h-1)$-ог реда за једначину $f_{m-h}(u)=0$.

3. Ако се са α_i означе угаони сачиниоци асимптота криве $f(u,U)=0$ (кад се у овој U и u сматрају као апсциса и ордината), а са β_i угаони сачиниоци тангената ове криве у тачкама у којима ова сече ординатну осовину, онда сачиниоци α_i и β_i морају сви бити коначни и међу собом мерљиви, тј. мора постојати такав један број ρ (реалан или имагиниран, рационалан или ирационалан, који може, уосталом, бити раван и јединици) да сви количници

$$\frac{\alpha_1}{\rho},\frac{\alpha_2}{\rho},\ldots;\quad \frac{\beta_1}{\rho},\frac{\beta_1}{\rho},\ldots$$

буду рационални, позитивни или негативни, бројеви.

Ови су услови увек *потребни* да би Абелов интеграл (50) био облика (51), а г. Рафи је показао *да су ови услови и довољни ако је крива* $\mathrm{f(u,U)}=0$ *уникурсална*. У случају пак кад крива није уникурсална, питање је у погледу довољних услова за данас нерешљиво.

Применимо ове резултате на задатак о коме је овде реч: на тражење услова под којим ће интеграл једначине (48) бити облика (45).

Ако се једначина (45) реши по e^{ax} тако да је из ње

$$e^{ax}=\Phi(y),$$

где је $\Phi(y)$ извесна алгебарска функција променљиве y, онда је

$$x=\int\frac{dy}{Y}, \tag{53}$$

где су y и Y везани релацијом

$$\varphi(y,Y+C)=0. \tag{54}$$

Проблем на који је сведено питање што нас овде занима јесте, дакле, управо онај чије је решење (односно потребни услови) садржано у горњим условима 1, 2, 3. *Претпоставимо да је крива* $\mathrm{F(y,y',y'')}=0$, *кад се* y *и* y'' *сматрају као координате, уникурсална;* тада ће, према једној ранијој примедби, и крива (54) бити уникурсална.

Уредимо једначину (54) по степенима променљиве Y тако да она буде написана у облику

$$Y^m f_0(y,C)+Y^{m-1}f_1(y,C)+\ldots+Yf_{m-1}(y,C)+f_m(y,C)=0,$$

па означимо са δ_k степен полинома $f_k(y,C)$ за $k = 1, 2, 3, ..., m$.

Тада, према овоме што претходи, да би интеграл $y(x)$ једначине (1) био облика (45), потребно је и довољно да буду испуњени ови услови:

А) да је

$$\delta_m \geq m - k + \delta_k; \quad k = 0,1,2,3,\ldots,m-1;$$

Б) да, ако је $y = \lambda$ ма који корен p-тога реда за једначину $f_m(y) = 0$, та вредност буде у исто време корен најмање $(p - k - 1)$-ог реда за једначину $f_{m-k}(y) = 0$ $(k = 0, 1, 2, ..., m - 1)$.

В) да сачиниоци α_i и β_i који се односе на криву (53) буду сви коначни и међу собом мерљиви.

Услови А) и Б) такви су да се одмах на датој једначини $F = 0$ може распознати да ли су они задовољени или не. За услов В) потребна је мало дубља дискусија, која се своди на овај задатак:

Коначни сачиниоци α_i биће корени извесне алгебарске једначине

$$z^m + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0 \tag{55}$$

(за коју је раније показано, како се образује) решене по z, где су $a_1, a_2, \ldots$ стални и познати сачиниоци; коначни сачиниоци β_i биће корени извесне једначине

$$u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots + b_{n-1} u + b_n = 0 \tag{56}$$

решене по u, где су $b_1, b_2, \ldots$ такође стални и познати сачиниоци. И онда услов В) тражи да корени једначина (55) и (56) буду сви међу собом мерљиви. А испитивање тога бива на овај начин.

Означимо са $z_1, z_2, \ldots, z_m$ корене једначине (55), за коју можемо претпоставити да је ослобођена од корена који су равни нули. Ако су сви они међу собом мерљиви, онда постоји такав један број ρ да је

$$z_1 = \lambda_1 \rho, \; z_2 = \lambda_2 \rho, \ldots, \; z_m = \lambda_m \rho,$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ рационални бројеви.

Претпоставимо, прво, да је $a_1 \gtrless 0$. Онда је

$$-a_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_m = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m)\rho$$

и ако се у једначини (55) стави да је

$$z = -a_1 t, \tag{57}$$

тако да се једначина (55) претвори у извесну алгебарску једначину

$$\chi(t) = 0, \tag{58}$$

онда ова једначина (58) има све своје корене рационалне јер према обрасцу (57) њени су корени

$$t_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

а из алгебре је познато како се решавају једначине са рационалним коренима.

Претпоставимо сад да је $a_1 = 0$. Трансформација (57) тада је немогућна, али ако се у једначини (55) стави да је

$$z = \sqrt{t},$$

у новој једначини

$$\xi(t) = 0 \tag{59}$$

збир корена $t_1 + t_2 + \ldots + t_m$ не може бити раван нули, пошто је

$$t_1 = \lambda_1^2\rho^2,\ t_2 = \lambda_2^2\rho^2, \ldots, t_m = \lambda_m^2\,\rho^2,$$

одакле је

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2)\,\rho^2.$$

У једначини, дакле (59), сачинилац другога члана не може бити раван нули, и онда се са том једначином може учинити оно исто што је малочас учињено са једначином (55), у случају кад је $a_1 \gtrless 0$. Једначина (59) истога је степена кога и (55), а пошто је $t = z^2$, то и њени корени морају бити међу собом мерљиви ако је то случај са коренима једначине (55). Али, не вреди и обрнути закључак, већ кад су израчунати корени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ једначине (59), ваља према обрасцима

$$z_1 = \pm\sqrt{t_1},\ z_2 = \pm\sqrt{t_2}, \ldots,\ z_m = \pm\sqrt{t_m}$$

за тако нађене корене $z_1, z_2, \ldots, z_m$ испитати да ли су међу собом мерљиви или не.

Према томе, увек се може распознати да ли су корени једначине (55), а тако исто и они једначине (56), међу собом мерљиви. Ако је то случај, онда још ваља деобом ма кога корена једначине (55) са ма којим кореном једначине (56) испитати да ли су први мерљиви са другима или не и тиме је онда испитано да ли је горњи услов В) задовољен за дату једначину. Приметимо да, као и досад, ако су услови А), Б), В) испуњени за ма какву вредност константе C, општи је интеграл једначине $F = 0$ облика (45); ако је то случај само за извесну вредност те константе, онда једначина $F = 0$ има једну класу партикуларних интеграла облика (45), у којима фигурише само једна интеграциона константа.

Вредно је узгред напоменути да се на услов В) наилази у доста великоме броју питања из интегралнога рачуна. Тако, на распознавање тога да ли једна дата алгебарска једначина има све своје корене међу собом мерљиве, своде се ови општи проблеми:

1. распознати да ли каква линеарна диференцијална једначина Legendre-овог облика има алгебарски интеграл;

2. распознати да ли су интеграли двеју линеарних једначина са сталним сачиниоцима везани међу собом каквом алгебарском релацијом;

3. распознати да ли каква линеарна диференцијална једначина са промењивим сачиниоцима има за интеграл какав полином по e^{ax}, или по $\sin ax$ и $\cos ax$, са сачиниоцима који су рационалне функције x-а итд.

Но, вратимо се једначини (1) и претпоставимо да она задовољава све побројане услове који се траже да би интеграл био облика

$$\Psi(y, e^{ax}) = 0. \tag{45}$$

Израчунавање самога интеграла бива тада на онај исти начин који смо навели при израчунавању интеграла у случају кад је он униформна и просто-периодична функција x-а. Ваља изразити y и $\frac{dy}{dx}$ везане релацијом

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx} + C\right) = 0$$

као рационалне функције једнога параметра t; из тако добијених образаца образовати једначину

$$\frac{dx}{dt} = \frac{S(t)}{R(t)},$$

где су S и R полиноми по t и интегралити је, тако да је

$$x = \int \frac{S(t)}{R(t)}\, dt. \tag{60}$$

Пошто интеграл $y(x)$ мора задовољавати једначину облика (45), то интеграл на десној страни обрасца (60) мора бити облика

$$\rho \log \chi(t),$$

где је $\chi(t)$ каква алгебарска функција параметра t, а ρ стална величина. Ваља, дакле, извршити интеграцију рационалне функције

$$\frac{S(t)}{R(t)}$$

и на тај начин одредити функцију $\chi(t)$ и сталну величину ρ. Кад су оне познате, онда из обрасца

$$x = \rho \log \chi(t),$$

написаног у облику

$$t = \xi(e^{\frac{x}{\rho}}),$$

где је $\xi(e^{\frac{x}{\rho}})$ алгебарска функција променљиве $e^{\frac{x}{\rho}}$ и обрасца који изражава y као рационалну функцију параметра t, ваља елиминисати t; резултат елиминације биће тражени интеграл (45) дате једначине другога реда $F = 0$.

Као пример наводим једначину

$$(y+a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (y^2 + 2ay + b)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Једначина $F\left(y, 1, \frac{dp}{dy}\right) = 0$ овде је

$$(y+a)^2 Y - (y^2 + 2ay + b) = 0$$

$\left(\text{где је } Y = \frac{dy}{dp}\right)$ и њен је род раван нули, јер се координате y и Y могу изразити као рационалне функције параметра t по обрасцима

$$y = t, \quad Y = \frac{t^2 + 2at + b}{t+a}.$$

Први је интеграл $\varphi = 0$ алгебарски и облика

$$(p + C - y)(y + a) + a^2 - b = 0.$$

Ова је крива, кад се p и y сматрају као координате, такође уникурсална и координате се могу изразити као рационалне функције параметра t по обрасцима

$$y = t, \quad p = \frac{(t-C)(t+a) + a^2 - b}{t+a}$$

или ако се са α и β означе корени квадратне једначине по t

$$(t-C)(t+a)+a^2-b=0$$

биће

$$y=t, \quad p=\frac{(t-\alpha)(t-\beta)}{t+a}.$$

Применом претходних теорема предвиђа се да општи интеграл не може бити облика $\psi(y,e^{ax})=0$, али да једначина мора имати једну или више класа партикуларних интеграла тога облика, и то за оне вредности константе C за које су корени α и β међу собом мерљиви бројеви. А то се непосредно потврђује на експлицитноме изразу општега интеграла, који се, пошто су y и p изражени као рационалне функције параметра t, лако добија по горњем упутству које је облика

$$(y-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}(y-\beta)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}=C'e^x.$$

За све вредности константе C (која фигурише у коренима α и β) за које су α и β међу собом мерљиви бројеви, тј. за које је количник $\frac{\alpha}{\beta}$ раван каквоме рационалном разломку $\frac{m}{n}$, бројеви

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{m}{m-n} \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{\beta-\alpha}=\frac{n}{n-m}$$

рационални су и интеграл се своди на облик

$$(y-\alpha)^m-C'(y-\beta)^n e^{(m-n)x}=0,$$

дакле на тражени облик. За све остале вредности константе C које не задовољавају поменути услов, интеграл није овавквога облика.

Учинимо једну општу примедбу која се односи на род и степен алгебарске криве

$$\Psi(y,Z)=0,$$

која се добија кад се у интегралу

$$\Psi(y,e^{ax})=0$$

смени e^{ax} променљивом Z и кад се затим y и Z сматрају као координате једне покретне тачке. У томе погледу може се доказати ова теорема:

Кад год једначина $F(y,y',y'')=0$ *посматранога типа има интеграл облика* $\Psi(y,e^{ax})=0$, *род криве* $\Psi(y,Z)=0$ *раван је роду криве* $F=0$ *кад се у овој једначини* y *и* y'' *сматрају као координате покретне тачке.*

Јер, раније је показано да ако је први интеграл

$$\varphi(y, p+C) = 0$$

дате једначине другога реда алгебарски, род криве представљене том једначином раван је роду криве $F = 0$. Са друге стране, г. Рафи[8] је доказао ову теорему: кад год је инверзија $u(x)$ једнога Абеловог интеграла

$$x = \int \frac{du}{U},$$

где су u и U везани каквом алгебарском релацијом

$$F(u, U) = 0,$$

алгебарска функција израза e^{ax}, где је a каква стална величина, тако да је идентички

$$\Psi(u, e^{ax}) = 0$$

(где Ψ означује какав полином по u и e^{ax}), род криве

$$\Psi(u, Z) = 0$$

раван је роду криве $F(u, U) = 0$ кад се u и U сматрају као координате.

Применом ове теореме доказује се непосредно наша горња теорема.

Слична примедба може се учинити и у погледу степена једначине $\Psi(y, e^{ax}) = 0$ по изразу e^{ax} и доказати ова теорема.

Степен полинома Ψ *по изразу* e^{ax} *раван је степену хомогености дате диференцијалне једначине* $F(y, y', y'') = 0$.

Теорема се доказује као непосредна последица онога што је раније казано о степену једначине

$$\varphi(y, p+C) = 0$$

и једне познате теореме из теорије Абелових интеграла, која се може исказати на овај начин: кад год је инверзија $u(x)$ Абеловога интеграла

$$x = \int \frac{du}{U},$$

где су u и U везани релацијом $F(u, U) = 0$, алгебарска функција израза e^{ax}, тако да је идентички

[8] Loc. cit.

$$\Psi(u, e^{ax}) = 0,$$

степен полинома Ψ по изразу e^{ax} раван је степену полинома F по променљивој U.

Најзад, од интереса је узгред приметити и то да довде изложени и примењени резултати налазе једну важну примену у извесним питањима из теорије симултаних линеарних диференцијалних једначина. Нека је дат систем од n симултаних једначина

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = Y\left[a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\right],\\
&\frac{dy_2}{dt} = Y\left[a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dt} = Y\left[a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\right],
\end{aligned} \tag{61}$$

где су уопште a_{ik} сталне величине, а Y једна алгебарска функција независно променљиве величине t, дефинисана једном алгебарском релацијом

$$F(t, Y) = 0, \tag{62}$$

чији је род раван нули. Тада се помоћу резултата што претходе може потпуно решити овај проблем:

Распознати да ли су општи интеграли система (61) алгебарске или трансцендентне функције променљиве t *и наћи експлицитне изразе интеграла.*

Јер, ако се стави да је

$$z = \int Y dt,$$

једначине (61) постају

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dz} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dz} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n.
\end{aligned}$$

Уочимо карактеристичну једначину

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{64}$$

Ако су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ корени једначине, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ њихови редови, систем (63) имаће партикуларне интеграле облика

$$\text{или} \qquad \left.\begin{array}{l} z^k e^{\lambda_i z} \\ \left[\int Ydt\right]^k e^{\lambda_i \int Ydt} \end{array}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (p_i - 1),$$

из којих је лако на познати начин образовати и сам систем општих интеграла.

Из ових се израза види да су ово потребни и довољни услови да би сви општи интеграли $y_1, y_2, \dots, y_n$ система (61) били алгебарске функције променљиве t.

1. Корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ карактеристичне једначине (64) морају сви бити једнаки и међу собом мерљиви.

2. Ако се означи са ρ највећи заједнички делилац тих корена, интеграл $\int Ydt$ мора бити облика

$$\frac{1}{\rho} \log A(t),$$

где је $A(t)$ каква алгебарска функција променљиве t.

Први је услов потребан зато што, ако је $k > 0$, тј. ако је $p_i > 1$, израз

$$\left[\int Ydt\right]^k e^{\lambda_i \int Ydt}$$

никад не може бити алгебарска функција променљиве t. Напротив, израз

$$e^{\lambda_i \int Ydt}$$

то може бити, а за то је потребно и довољно да буде

$$\lambda_1 = m_1\rho,\ \lambda_2 = m_2\rho, \dots,\ \lambda_n = m_n\rho,$$

где су $m_1, m_2, \dots, m_n$ рационални бројеви а ρ ма какав број, и да је

$$\int Ydt = \frac{1}{\rho} \log A(t),$$

где је $A(t)$ каква алгебарска функција променљиве t. Тада је

$$e^{\lambda_i \int Ydt} = \left[A(t)\right]^{\frac{\lambda_i}{\rho}} = \left[A(t)\right]^{m_i},$$

дакле сви партикуларни интеграли су алгебарске функције променљиве t, а према томе то ће бити случај и са општим интегралима. А из овога што претходи јасно је да се за обадва услова, 1 и 2, на датој једначини увек може испитати да ли су задовољени или не и, ако јесу, да се једначина може експлицитно интегралити.

Као пример за испитивање ових услова навешћу систем

$$\frac{dy_1}{dt} = Y\left[ay_1 + by_2 + cy_3\right],$$
$$\frac{dy_2}{dt} = Y\left[a'y_1 + b'y_2 + c'y_3\right],$$
$$\frac{dy_3}{dt} = Y\left[a''y_1 + b''y_2 + c''y_3\right],$$

где је Y алгебарска функција променљиве t, дефинисана једначином

$$27t(tY-1)^3 + (3tY-2)^3 = 0.$$

Сменом $Y = \dfrac{dz}{dt}$ добија се диференцијална једначина

$$(66) \qquad 27t\left(t - \frac{dt}{dz}\right)^3 + \left(3t - 2\frac{dt}{dz}\right)^3 = 0.$$

Крива дефинисана овом једначином је уникурсална. Угаони сачиниоци њених асимптота јесу

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1,$$

а угаони сачиниоци тангената у тачакама у којима она сече $\dfrac{dt}{dz}$-осовину јесу

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 2/3.$$

Према томе, а на основу ранијих теорема, интеграл једначине (66) мора бити облика

$$\Psi(t, e^z) = 0,$$

где је Ψ полином по t и e^z, а према томе ће бити

$$z = \log A(t),$$

где је $A(t)$ извесна алгебарска функција променљиве t, и општи интеграли система (55) биће алгебарски.

Саме интеграле израчунаћемо на овај начин. Изразивши да су t и $\frac{dt}{dz}$, везани релацијом (66), рационалне функције једнога параметра u, добија се да је

$$(67) \qquad t = -\frac{(3-5u)^3}{27(1-2u)^3},$$

$$(68) \qquad \frac{dt}{dz} = \frac{u(3-5u)^3}{27(u-1)(1-2u)^3},$$

одакле је

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{du} = -\frac{u(3-5u)^3}{u(3-5u)(1-2u)} = \frac{1}{u} - \frac{3}{u-\frac{1}{2}} + \frac{2}{u-\frac{3}{5}}.$$

Интеграцијом се добија да је

$$C + z = \log\frac{u(u-\frac{3}{5})^2}{(u-\frac{1}{2})^3}$$

или

$$(69) \qquad C'e^z = -\frac{8u(3-5u)^2}{25(1-2u)^3}.$$

Елиминацијом параметра u између једначина (67) и (69) добија се

$$e^z = K(t + \sqrt[3]{t^2}),$$

као интеграл једначине (66), где је K интеграциона константа. Пошто је овде број ρ раван јединици, то је, да би општи интеграли система (65) били алгебарски, потребно и довољно да корени $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ карактеристичне једначине трећега степена

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ a' & b'-\lambda & c' \\ a'' & b'' & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

буду неједнаки и рационални и онда ће тражени општи интеграли бити представљени обрасцима

$$\begin{aligned} y_1 &= C_{11}U_1 + C_{12}U_2 + C_{13}U_3, \\ y_2 &= C_{21}U_1 + C_{22}U_2 + C_{23}U_3, \\ y_3 &= C_{31}U_1 + C_{32}U_2 + C_{33}U_3, \end{aligned}$$

где је краткоће ради стављено да је

$$U_1 = (t + \sqrt[3]{t^2})^{\lambda_1},$$
$$U_2 = (t + \sqrt[3]{t^2})^{\lambda_2},$$
$$U_3 = (t + \sqrt[3]{t^2})^{\lambda_3},$$

и где C_{ik} представљају константе, од којих су три произвољне.

Ако сва три корена нису рационална, већ само један или два, општи интеграли нису алгебарски, али онда има партикуларних алгебарских интеграла.

Напослетку, завршујући, додајем да се испитивања која су била предмет овога рада могу распрострти и на извесне општије типове једначина

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{70}$$

Тако, ако је једначина $F = 0$ хомогена по изводу y' и изразу $\chi(y')y''$, где је $\chi(y')$ каква дата алгебарска функција извода y', стављајући да је $y' = p$, једначина добија облик

$$F\left[y, 1, \chi(p)\frac{dp}{dy}\right] = 0 \tag{71}$$

и ако се онда стави да је

$$z = \int \chi(p)dp, \tag{72}$$

једначина се своди на

$$F\left(y, 1, \frac{dz}{dy}\right) = 0. \tag{73}$$

Аналитичка природа интеграла $y(x)$ зависиће од природе инверзије Абеловог интеграла (72) и интеграла $z(y)$ диференцијалне једначине првога реда (73), а напред наведени резултати дају могућности да се у великоме броју случајева реши питање о облику интеграла и да се овај одреди у експлицитноме облику.

Тако, нпр., ако је $\chi(p)$ таква функција променљиве p да је интеграл $\int \chi(p)\,dp$ алгебарска функција те променљиве дефинисана, нпр., релацијом

$$\psi(p, z) = 0, \tag{74}$$

онда да би интеграл $y(z)$ био алгебарска или периодична функција промењиве x са коначним бројем вредности за сваку дату вредност x-а, потребно је и довољно

1. да интеграл

$$\Theta(y,z)=0 \tag{75}$$

једначине (73) буде алгебарски;

2. да једначина

$$\Phi(y,p)=0, \tag{76}$$

која се добија као резултат елиминације промењиве z из једначина (74) и (75), буде таква да је интеграл $y(z)$ диференцијалне једначине

$$\Phi\left(y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{77}$$

алгебарска, односно периодична функција x-а са коначним бројем вредности.

Ако је $\chi(p)$ таква функција да се интеграл $\int\chi(p)dp$ изражава помоћу једног логаритма, тако да је

$$z=\int\chi(p)dp=\frac{1}{a}\log A(p),$$

где је a каква стална величина, а $A(p)$ каква алгебарска функција промењиве p, онда је, да интеграл $y(x)$ једначине $F=0$ буде алгебарска или периодична функција x-а са коначним бројем вредности, потребно и довољно

1. да интеграл једначине (73) буде облика

$$\lambda(y,e^{bz})=0,$$

где је λ алгебарска функција по y и e^{bz};

2. да количник $\frac{a}{b}$ буде рационалан број;

3. да једначина (77), која ће у овоме случају бити алгебарска, пошто је $\frac{a}{b}$ рационалан број, буде таква да јој је интеграл алгебарска, односно периодична функција x-а са коначним бројем вредности.

Напослетку, ако је функција $\chi(p)$ таква да се интеграл $\int\chi(p)dp$ своди на један елиптички интеграл прве врсте у коме наместо променљиве фигурише каква алгебарска функција $B(p)$ променљиве p, чије елементарне периоде нека су ω и ω', да би интеграл $y(x)$ једначине $F = 0$ био алгебарска или периодична функција x-а са коначним бројем вредности, потребно је и довољно:

1. да интеграл једначине (73) буде облика

$$P\left[y, \operatorname{sn}(z)\right] = 0,$$

где је P какав полином по y и $\operatorname{sn}(z)$, чије елементарне периоде нека су τ и τ';

2. да количници $\frac{\omega}{\tau}$ и $\frac{\omega'}{\tau'}$ буду рационални бројеви;

3. да једначина (77), која ће тада, према познатој теореми из теорије елиптичких функција, извесно бити алгебарска, буде таква да јој је интеграл $y(x)$ алгебарска, односно периодична функција x-а са коначним бројем вредности.

А у овоме што претходи изложен је начин верификације ових услова у случају кад је та верификација за данас уопште могућна. Додајем само да ће у сва три набројана случаја тражени интеграл једначине (70) бити представљен интегралом једначине (77), која се из дате једначине (70) изводи на горе поменути начин.

ЈЕДАН ПОГЛЕД НА ПРИРОДУ ТРАНСЦЕНДЕНАТА ДЕФИНИСАНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПРВОГА РЕДА СА ПРОМЕНЉИВИМ ПАРАМЕТРИМА*

За једну се величину каже да је израчуната у експлицитном и коначном облику ако је њено израчунавање сведено на коју од данашњих елементарних функција или на комбинације више таквих функција. А под елементарним функцијама или аналитичким елементима подразумевају се најпростији типови функција са испитаним и познатим особинама, несводљиви један на други или на комбинације више таквих типова. Израз „комбинација" ваља узети у његовом ширем смислу; операције које се под тиме подразумевају јесу: четири основне аритметичке операције, затим оне у којима је садржан сам аналитички смисао таквих елемената и напослетку инверзија, и то кад су ове операције употребљене у коначном броју и у ма коме било реду.

Број аналитичких елемената којима се данас служи математичка анализа веома је мален према броју функција које се у рачунима јављају. У ове се елементе за данас урачунавају, нпр., функције: x^m, e^{ax}, основне елиптичне функције, модуларне, Клајнове (Klein), Фуксове и Беселове трансценденте, функције $\Gamma(x)$, $Li(x)$ (интегрални логаритам) итд. Све су то међу собом независни, један на други несводљиви типови функција, чије су особине испитане и на чије се комбинације своди веома велик број функција са којима се има посла у математичкој анализи.

Међутим, и број функција уопште, и број таквих несводљивих типова бесконачно је велик и могућно их је дефинисати на разне начине:

---

* Наслов оригинала: *Jedan pogled na prirodu transcendenata definisanih diferencijalnim jednačinama prvoga reda sa promjenljivim parametrima*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 135, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 25, Zagreb 1898, str. 57–108; саопштено у Разреду 11. јануара 1898.

1. Помоћу бесконачних редова разноврсних облика. Овакав је начин дефинисања трансцендената веома генералан, пошто се зна да се свака аналитична функција може развити у Тејлоров ред, ако не за све вредности независно промењиве величине, а оно бар за вредности које се налазе у извесним областима бројне равни.

2. Помоћу каквих нарочитих особина за које се тражи да их има функција. Тако се, нпр., експоненцијална функција e^x може дефинисати као функција $u(x)$ холоморфна у целој равни која има периоду $2\pi\sqrt{-1}$ и која је таква да свакој вредности u такве функције одговара бесконачно много вредности независно промењиве величине x које се разликују за $2\pi\sqrt{-1}$. Исто тако, елиптичне функције могу се дефинисати као униформне функције у целој равни са две периоде чији је количник имагинаран. Абелове функције и специјални типови у које ове дегенеришу, могу се дефинисати као функције за које вреди алгебарска адициона теорема итд.

3. Помоћу диференцијалних једначина. Велик број данас познатих и испитаних трансцендената задовољава алгебарске диференцијалне једначине првога или вишега реда. Под овај би се начин могло подвести и дефинисање функција помоћу диференцијалних једначина које садрже какав параметар, а интеграл се сматра као функција тога параметра.

Дефинисање помоћу бесконачних редова нарочито је згодно за израчунавање бројних вредности које функција или њени узастопни изводи добијају за дате вредности независно промењиве величине, али је врло неугодно за проучавање основних особина функције, те најзнатније особине таквих функција остају скривене. У појединим специјалним случајевима то је проучавање покаткад још и могућно, као нпр., за редове који приказују функције e^x, $\Theta(x)$, $\Gamma(x)$, Беселове трансценденте итд. У новије су време нарочито чињени покушаји за такво испитивање функционалних особина помоћу бесконачних редова у које су оне развијене. Познате су значајне Ајзенштајнове (Eisenstein) и Чебишевљеве (Чебышев) теореме о редовима који приказују алгебарске функције или функције које се добијају комбинацијама алгебарских, експоненцијалних и логаритамских функција. Господа Адамар и Коен (Cahen) дали су у последње време неколико општијих резултата у томе погледу.

Слаба је страна оваквога начина дефинисања и та што уопште нема никакве карактеристичне везе између сачинилаца реда једнога простог типа функција и других сложенијих функција које се своде на комбинације тога простога типа, тако да баш и кад би биле испитане особине таквога типа то би било без ширега интереса и не би се знало проучавање којих се функција може свести на проучавање тога бесконачног реда. Извесно је да је могућно изабрати бесконачно много функција дефинисаних редовима веома простога облика, а који до сад нису били испитивани, и међу овима извесно би их било и таквих, код којих је могућно проучити и основне особине нове трансценденте, коју они дефинишу. Али, поред свега тога, ствар би била од незнатнога интереса и остала би нерешена баш ова битна питања:

1. Да ли је тако образована трансцендента одиста нова, или се може свести на комбинације већ проучених трансцендената?

2. Ако је одиста нова и несводљива, које се сложеније функције могу свести на њене комбинације и у којим би питањима математичке анализе таква нова трансцендента чинила услуге и била са успехом употребљена? Јер од свакога новог аналитичког елемента тражи се, између осталих, и тај основни услов, да његово увођење у анализу допринесе решењу каквих општијих питања и да такав елеменат буде у исто време и елеменат редукције за читаве групе питања. Трансценденте $\Gamma(x)$ и $Li(x)$, нпр., уведене су у науку баш с тога, што се на њих, као елементе редукције, своди израчунавање читавих класа одређених интеграла. Напротив, трансцендента нпр.

$$\Theta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

дефинисана је бесконачним редом, конвергентним за све вредности промењиве x и била би нова, несводљива, до сад неиспитана трансцендента и извесне би јој се особине могле распознати на самоме бесконачном реду, којим је приказана; али за сад је немогућно наћи ни једно општије питање, у коме би се она појавила и у коме би њено увођење, као аналитичког елемента, учинило каквих услуга.

Дефинисање трансцендената помоћу унапред импозираних функционалних особина утолико је од користи, што, ако је успело према таквој дефиницији наћи још и других особина исте функције и тиме је што боље одредити, тиме је познато баш оно, што је код једне функције и најглавније знати. Али баш тако прецизирање функције према унапред импозираним особинама задаје огромне тешкоће и радови гг. Апела (Appell)[1], Пикара[2], Поенкареа[3], Кенига (Koenigs)[4] и Гревија (Grevy) на томе пољу довољно показују колике су те тешкоће, поред

[1] Journal de Mathematiques pures et appliquées, 1891.

[2] Acta mathematica 1894.

[3] Journal de Mathematiques pures et appliquées 1890.

[4] Annales de l'Ecole Normale Superieure 1887–1894.; Recuiel des Savants Etrangers etc. 1894.

свега тога, што су особине од којих су поменути математичари пошли, од најпростијих могућних функционалних особина.

Напослетку, дефинисање трансцендената помоћу диференцијалних једначина обухвата веома простране класе функција и до сада се показало као обилат извор нових аналитичких елемената које је могућно дубље испитати и чије увођење у математичку анализу чини стварних услуга у великоме броју питања од општијег значаја. Довољно је навести услуге које је увођење елиптичних Беселових, Фуксових, Клајнових итд. функција учинило у разноликим питањима математичке анализе, нерешивим пре тога.

Овај начин дефинисања функција има и ту добру страну што се помоћу диференцијалне једначине и сама функција може развити у бесконачан ред, који ће бити различитог облика према природи вредности независно промењљиве величине за које се тражи да ред важи, а у исто време у великом броју случајева могу се и у појединостима испитати најважније особине тражене функције. То је испитивање било предмет класичних радова г.г. Брио, Букеа, Пикара, Поенкареа и Фукса о методама за развијање интеграла диференцијалних једначина у бесконачне редове, о облицима ових редова према разним вредностима независно промењљиве величине и о основним особинама функција дефинисаних таквим диференцијалним једначинама.

Знатност оваквога начина дефинисања функција и у томе је што се њиме дошло до елемената редукције пространих класа трансцендената дефинисаних диференцијалним једначинама и што се показало да се проучавање таквих класа трансцендената своди на проучавање неколиких простих и несводљивих типова. Тако, показано је да се све униформне трансценденте које постају интеграцијом алгебарских диференцијалних једначина првога реда у којима не долази експлицитно независно промењљива величина, своде на рационалне комбинације експоненцијалне или елиптичне функције. У случају кад независно промењљива x долази експлицитно у једначини, показано је да се униформне трансценденте, кад зависе од интеграционе константе, своде на комбинације елиптичних функција, извесних функција добијених квадратурама из сачинилаца дате једначине и униформних трансцендената које настају интеграцијом Рикатијеве једначине. Слични су резултати добијени и за мултиформне функције са коначним бројем вредности, а које задовољавају алгебарске диференцијалне једначине првога реда за униформне трансценденте које се добијају интеграцијом линеарних једначина итд.

А такве редукције један су од главних циљева модерне математичке анализе. Извесно је да се данас све више осећа потреба за увођењем нових несводљивих трансцендената као елемената редукције у рачунима. Веома је велик број рачуна који се не могу привести крају помоћу до данас испитаних и у анализу уведених трансцендената. Али, увођење нових елемената тражи:

1. да се знају питања у којима се јавља стварна потреба таквога увођења и да се тачно зна од чега долази немогућност њиховог решавања помоћу данашњих аналитичких елемената;

2. да се знају извори нових трансцендената, обиље таквих извора и начин на који ваља из њих изводити поједине нове елементарне трансценденте.

Као што је поменуто, за диференцијалне једначине зна се да су одиста обилат извор трансцендената, сматрајући интеграл било као функцију независно промењливе величине, било као функцију параметара што у диференцијалној једначини долазе, било, напослетку, као функцију интеграционих констаната.

Ја сам намеран у овоме раду, ограничивши се на једначине првога реда, учинити неколико примедаба које иду у прилог расветљавању оваквих питања и извести неколико података о аналитичкој природи трансцендената које су у таквим једначинама скривене.

*

Нека је дата општа алгебарска диференцијална једначина првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\right) = 0, \tag{1}$$

где је F алгебарска функција непознате функције y и њенога извода $\frac{dy}{dx}$ по независно промењливој величини x (ова се функција увек може замислити да је написана у облику полинома по y у изводу), а ма каква функција x-а и параметара $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, која се своди на комбинације данашњих испитаних функција.

Замислимо најпре ове параметре као сталне и сматрајмо општи интеграл једначине као функцију интеграционе промењливе x. Каква ће тада бити аналитичка природа *униформних* трансцендената које приказују општи интеграл и који су елементи редукције на чије се комбинације могу свести такве трансценденте?

За случај кад x не долази експлицитно у диференцијалној једначини, Briot и Bouquet су нашли да се ове трансценденте своде или на рационалне комбинације експоненцијалне функције e^{ax}, или на рационалне комбинације елиптичне функције $\mathrm{sn}(ax)$ и њенога извода по x (где је a каква стална и одређена величина). *Као елеменӣи редукције у ӣоме случају јављају се, дакле, ове дӣве ӣросӣе и несводљиве ӣрансценденӣе* e^{ax} *и* $\mathrm{sn}(ax)$.

За случај кад x долази у једначини, г. Поенкаре[5] је показао да се униформна трансцендента која показује интеграл своди:

1. или на алгебарске комбинације сачинилаца $\varphi_i(x,\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ који долазе у диференцијалној једначини (1);

2. или на алгебарске комбинације сачинилаца φ_i и трансценденте

$$\mathrm{Sn}\left[\int \Phi(x,\alpha,\beta,\gamma,\ldots)dx\right], \tag{2}$$

где је Φ извесна алгебарска комбинација сачинилаца φ_i или

3. на алгебарске комбинације сачинилаца φ_i и трансцендената $\Theta(x)$ дефинисаних Riccati-јевом једначином

$$\frac{d\Theta}{dx} + f_1\Theta^2 + f_2\Theta + f_3 = 0, \tag{3}$$

где су функције f_1, f_2, f_3 извесне алгебарске комбинације сачинилаца φ_i.

Елеменӣи редукције за ӣај случај су, дакле:

1. *најӣросӣије несводљиве ӣрансценденӣе које експлицитно долазе у самој диференцијалној једначини*;

2. *ӣрансценденӣа (2)*;

3. *ӣрансценденӣе* Θ *дефинисане Рикаӣијевом једначином (3).*

Ако је диференцијална једначина алгебарска и по промењљивој x, интеграл

$$\int \Phi dx$$

биће известан Абелов интеграл, који не може имати више од две периоде, и ове, у случају кад постоје, морају бити равне периодама елиптичне функције Sn или тим периодама помноженим каквим целим бројем. У извесним специјалним случајевима ови се Абелови интеграли своде на рационалне функције x-а или на логаритме; елементи редукције тада су трансценденте

$$\mathrm{Sn}\left[(x-a)^m\right],\ \mathrm{Sn}\left[a\log(x-b)\right],$$

где су a и b константе а m какав цео, позитиван или негативан број.

---

[5] Acta mathematica, 1885.

Трансцендента Θ биће интеграл извесне Рикатијеве једначине са алгебарским коефицијентима. Између трансцендената, које тада могу приказивати функцију Θ, налазе се експоненцијалне функције и њихове рационалне комбинације, Беселове, елиптичне и хипергеометријске трансценденте итд. За данас још нису у појединостима испитане све основне, несводљиве трансценденте које се добијају интеграцијом Riccati-јевих једначина са алгебарским сачиниоцима, али се зна да њихов број није велик и да су оне у исто време и елементи редукције за све униформне трансценденте које се добијају интеграцијом алгебарских диференцијалних једначина првога реда, код којих је род (genre, Gattung) релације између непознате функције и њенога извода раван нули, а тако исто и за све неуниформне трансценденте са сталним критичним тачкама добијене интеграцијом таквих једначина.

За случај кад полови униформних трансцендената добијених интеграцијом једначине првога реда не зависе од интеграционе константе (што се лако разпознаје на самој датој једначини), ја сам доказао[6] да се те трансценденте своде:

1. или на алгебарске комбинације трансцендената φ_i које експлицитно долазе у датој једначини;

2. или на алгебарске комбинације трансцендената φ_i и оних до којих се долази операцијама

$$e^{\int \tilde{\omega}(x)dx}, \int \chi(x)\, e^{\int \tilde{\omega}(x)dx} dx,$$

где су $\tilde{\omega}(x)$ и $\chi(x)$ опет алгебарске комбинације трансцендената φ_i.

Ако је диференцијална једначина алгебарска и по интеграционој променљивој x, функције $\tilde{\omega}$ и χ су алгебарске и трансценденте које долазе у општем интегралу су рационалне комбинације променљиве x и трансцендената

$$e^{J(x)}, \int \chi(x)\, e^{J(x)} dx,$$

где је $J(x)$ известан Абелов интеграл, за који сам доказао да

1. ако је степен једначине по изводу непаран, $J(x)$ се своди на збир алгебарских и логаритамских функција и тада се интеграл своди на рационалне комбинације трансцендената

$$e^{R(x)} \quad \text{и} \quad \int (x-a)^m\, e^{R(x)} dx,$$

[6] *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques*, Paris 1894.

где је $R(x)$ каква рационална функција x-а, а m цео позитиван или негативан број или, што је једно исто, на рационалне комбинације израза

$$\sin R(x), \qquad \cos R(x),$$
$$\int \chi(x) \sin R(x) dx, \qquad \int \chi(x) \cos R(x) dx.$$

Као елементи редукције јављају се трансценденте

$$e^{(x-a)^m} \quad \text{и} \quad \int (x-b)^n e^{R(x)} dx$$

или

$$\sin(x-a)^m, \qquad \cos(x-a)^m,$$
$$\int (x-b)^n \sin R(x) dx, \qquad \int (x-b)^n \cos R(x) dx,$$

где су m и n цели, позитивни или негативни бројеви.

2. Ако је поменути степен паран, *Абелов интеграл* $J(x)$ *своди се на известан хиперелиптични интеграл.*

Према овим се разултатима може прецизирати и аналитичка природа *холоморфних* трансцендената које се добијају интеграцијом диференцијалних једначина првога реда. Тако, ако је једначина алгебарска по x и ако је њен степен по изводу непаран, њен ће *општи интеграл, кад је он холоморфна функција* x-а, *бити известан полином по* x *и по изразу* $e^{P(x)}$ *или по* $\sin P(x)$, $\cos P(x)$, *где је* P(x) *какав полином по* x; ако је степен паран, природа интеграла *зависиће од хиперелиптичног интеграла* J(x).

Г. Пенлеве је доказао[7], да се г. *Поенкареови елементи редукције јављају и у случајевима, кад је општи интеграл мултиформна функција интеграционе променљиве величине, али са коначним бројем вредности.* Уосталом, униформне и мултиформне функције са коначним бројем вредности приказују најзнатнији део аналитичних функција; оне, а нарочито униформне функције, заузимају најважније место у модерној теорији функција и један нарочити факт, пронађен у последње време, учинио је да се увећа значај униформних трансцендената и да се целокупна теорија функција сведе на њихово проучавање. Тај се факт састоји у значајноме резултату, до кога је у последње време дошао г. Поенкаре[8]: да се увек ма каква функција и њена независно променљива величина могу изразити као униформне функције једнога параметра и да се на тај начин изучавање свих мултиформних функција може

[7] *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, Paris 1892.

[8] Bulletin de la Sociètè mathematique de France, 1883.

свести на изучавање униформних функција. Тиме је доказано да се тежиште целокупне теорије функција налази у теорији униформних трансцендената.

Малочас је казано какве се униформне трансценденте добијају интеграцијом диференцијалних једначина првога реда у случају кад такве трансценденте зависе од интеграционе константе. У овоме што претходи прецизирана је аналитичка природа таквих униформних трансцендената и показано да елементи редукције, на чије се комбинације оне своде, нису веома многобројни.

Али, може се десити да диференцијалну једначину задовољавају једна или више униформних функција које не зависе од интеграционе константе. Другим речима, може се десити да општи интеграл једначине није униформан, али да постоји један или више партикуларних униформних интеграла. Каква је тада аналитичка природа таквих униформних трансцендената и какви у тим случајевима могу бити елементи редукције?

Питање је, према данашњем стању математичке анализе, нерешиво. Уопште, проучавање партикуларних интеграла диференцијалних једначина повезано је са много већим тешкоћама него што је проучавање општега интеграла и досад добијени резултати у томе правцу сасвим су недовољни да расветле питање о коме је реч. Г. Пенлеве[9] је дао једну методу за распознавање да ли једначина има *рационалних* партикуларних интеграла и за њихово израчунавање у случају кад постоје, али је та метода немоћна за истраживање *трансцендентних* униформних интеграла. Ја сам доказао[10], у случају кад је род једначине по непознатој функцији и њеноме изводу раван нули, а кад је једначина алгебарска по x, y, y', овај резултат: *таква једначина не може имати више од три партикуларна униформна интеграла који би били приказани трансцендентама различним међусобно, тј. између којих не би постојао какав алгебарски однос.* Али, каква је аналитичка природа ових трансцендената и који су елементи редукције за њих, данас је немогућно знати.

Ја сам за извесне опште случајеве показао[11] (нпр., кад су вредности које поништавају или чине бесконачним општи интеграл независне од интеграционе константе, што се увек распознаје непосредно на датој диференцијалној једначини) како се, помоћу Вајерштрасове

[9] Comptes rendus de l'Academie des Sciences de Paris, T. CX, 1890; Annales de l'Ecole Norm. Sup., 1892.

[10] Comptes rendus de l' Academie des Sciences de Paris, Mai 1894; Picard, *Traité d' Analyse*, T. III, pp. 356–359.

[11] *Sur les zéros et les infinis des intégrales...*, Paris 1894.

(Weierstrass) теореме о разлагању униформних функција на примарне чиниоце, тражење *униформних* трансцендената које приказују партикуларне интеграле диференцијалних једначина првога реда може свести на израчунавање једне извесне *холоморфне* функције, која се опет добија као интеграл једне диференцијалне једначине првога реда. Ово израчунавање могућно је само помоћу бесконачних редова, а из њих је немогућно сазнати нешто о особинама и природи трансцендената коју ред приказује и о њеним елементима редукције, чијом је комбинацијом добијена.

Но, поред свега тога, на основу горе наведених резултата и свега онога што се данас зна о диференцијалним једначинама облика (1), где у F долазе обичне данашње функције, може се тврдити да, *кад се интеграл сматра као функција интеграционе променљиве* x, *број несводљивих, елементарних трансцендената до којих се долази њиховом интеграцијом није велик* и да се велик број до данас испитаних и у анализу уведених трансцендената не налази у броју оних које се добијају интеграцијом таквих једначина.

Тако, нпр., за трансценденту $\Gamma(x)$, Фредхолмову (Fredholm) трансценденту

$$\lambda(a,x)=\sum_{0}^{\infty}a^{n}x^{n^{2}},\ |a|<1, |x|<1, \tag{4}$$

Фуксове, Клајнове модуларне функције и њихове комбинације зна се да се никад не могу добити интеграцијом диференцијалне једначине (1). Уосталом, за неке од ових трансцендената, као нпр. за функције $\Gamma(x)$ и $\lambda(a,x)$, доказано је да се не могу добити интеграцијом никакве алгебарске диференцијалне једначине, па ма кога реда она била.

*

Али, уочимо сад једначину (1) са друге њене стране: сматрајмо интеграл не као функцију интеграционе променљиве величине x, већ као функцију једнога од параметара $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ који у једначини долазе дајући промењљивој x неку сталну вредност $x=a$.

И површним посматрањем лако се уверити да једначина тада постаје веома богат извор трансцендената и да се међу њима налазе и оне које је немогућно имати сматрајући интеграл x као независно промењљиву величину.

Тако, ако се у општем интегралу просте диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha y}{x}+e^{-x}=0,$$

који је

$$y = x^{-\alpha}\left[C - \int e^{-x} x^{\alpha} dx\right],$$

стави да је $x = \infty$, производ $x^{\alpha} y$ постаје извесна функција $\Theta(\alpha)$ параметра α, и то облика

$$\Theta(\alpha) = K - \Gamma(\alpha + 1),$$

где је K интеграциона константа независна од α.

Функција Γ, која не може постати интеграцијом никакве алгебарске диференцијалне једначине, добија се, дакле, интеграцијом једне од најпростијих једначина првога реда, али кад се у интегралу параметар сматра као променљива величина, а x као стална.

Исто тако, ако се у општем интегралу једначине

$$\frac{dy}{dx} + \alpha x y + \frac{1 - \beta \cos x}{1 - 2\beta \cos x + \beta^2} = 0,$$

који је

$$y = e^{\frac{-\alpha x^2}{2}}\left[C - \frac{1 - \beta \cos x}{1 - 2\beta \cos x + \beta^2} e^{\frac{\alpha x^2}{2}} dx\right],$$

стави да је $x = \infty$, производ $y e^{\frac{\alpha x^2}{2}}$ постаје функција $\Theta(\alpha, \beta)$ параметара α и β дефинисана обрасцем

$$\Theta(\alpha, \beta) = K - \lambda(\beta, e^{\frac{2}{\alpha}}),$$

где $\lambda(a, x)$ приказује Фредхолмову трансценденту, дефинисану обрасцем (4). Ово произлази непосредно из интегралног обрасца

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^z \cos q}{1 - 2e^z \cos q + e^{2z}} e^{\alpha q^2} dq = 2\sqrt{-\frac{\alpha}{\pi}}\left[1 + e^{\frac{1}{4\alpha} + z} + e^{\frac{4}{4\alpha} + z^2} + e^{\frac{9}{4\alpha} + z^3} + \ldots\right]$$

који важи за вредности α и z за које је[12] $|e^z| < 1, |e^{\alpha}| < 1$.

Уочимо Ермитову трансценденту

$$Z(\alpha) = A\alpha + \frac{1}{\alpha} + \sum\left(\frac{1}{\alpha - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega^2}\right),$$

где је $\Omega = am + bn$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ од којих је вредности искључен само пар $(m = 0, n = 0)$ и где је количник $\frac{a}{b}$ комплексан број. Издвојимо шест констаната $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_6$ тако да за дате вредности α буде

[12] Глас LI, Краљевска српска академија, стр. 175.

$$\begin{array}{lll}
-\lambda_1 a < 0 & -\lambda_1 b < 0 & \lambda_1(\alpha - a - b) < 0 \\
-\lambda_2 a < 0 & -\lambda_2 b < 0 & \lambda_2(\alpha - a) < 0 \\
\lambda_3 a < 0 & -\lambda_3 b < 0 & \lambda_3(\alpha - b) < 0 \\
\lambda_4 a < 0 & \lambda_4 b < 0 & \lambda_4(\alpha + a + b) < 0 \\
\lambda_5 a < 0 & \lambda_5(\alpha + a) < 0 & \\
\lambda_6 a < 0 & \lambda_6(\alpha + b) < 0 &
\end{array}$$

Имајући на уму да је Z периодична функција променљиве α и да се не мења кад се тој променљивој дода величина $k\alpha$, где је k ма какав цео, позитиван или негативан број, лако се увиђа да је одредба констаната λ_i, што задовољавају горње погодбе, увек могућна, па ма каква била вредност променљиве α. И кад су те константе на тај начин издвојене ја сам показао[13] да, ако се стави да је

$$\frac{\lambda_1 e^{(-a+b)\lambda_1 x}}{(1-e^{-\lambda_1 ax})(1-e^{-\lambda_1 bx})} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 ax}}{(1-e^{-\lambda_2 ax})(1-e^{\lambda_2 bx})} + \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_3 bx}}{(1-e^{\lambda_3 ax})(1-e^{-\lambda_3 bx})} +$$

$$+ \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 (a+b)x}}{(1-e^{\lambda_4 ax})(1-e^{\lambda_4 bx})} + \frac{\lambda_5 e^{\lambda_5 ax}}{1-e^{\lambda_5 ax}} + \frac{\lambda_6 e^{\lambda_6 bx}}{1-e^{\lambda_6 bx}} = F(x)$$

$$\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1(\alpha-a-b)x}}{(1-e^{-\lambda_1 ax})(1-e^{-\lambda_1 bx})} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(\alpha-a)x}}{(1-e^{-\lambda_2 ax})(1-e^{\lambda_2 bx})} + \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3(\alpha-b)x}}{(1-e^{\lambda_3 ax})(1-e^{-\lambda_3 bx})} +$$

$$+ \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4(\alpha+a+b)x}}{(1-e^{\lambda_4 ax})(1-e^{\lambda_4 bx})} + \frac{\lambda_5 e^{\lambda_5(\alpha+a)x}}{1-e^{\lambda_5 ax}} + \frac{\lambda_6 e^{\lambda_6(\alpha+b)x}}{1-e^{\lambda_6 bx}} = \Phi(\alpha, x),$$

биће

$$Z(\alpha) = A\alpha + \frac{1}{\alpha} + \int_0^\infty \left[(1+x)F(x) - \Phi(\alpha, x)\right] dx.$$

Према томе, може се сматрати да је трансцендента $Z(\alpha)$ добијена интеграцијом једне извесне диференцијалне једначине првога реда у којој су сачиниоци непознате функције и њеног извода рационалне комбинације променљиве x, експоненцијалних функција ове промен-

[13] Глас LI, Краљевска српска академија, стр. 236.

љиве и параметра α, пошто се у добијеном интегралу стави да је $x = \infty$ и кад се параметар α сматра као променљива величина.

И ако се има на уму да се свака мероморфна двогубо-периодична функција $\Psi(\alpha)$ линеарно изражава помоћу трансценденте $Z(\alpha)$ и неколико њених узастопних извода по α, тако да је

$$\Psi(\alpha) = C + \sum_i \left[A_{1i} Z(\alpha - \alpha_i) + A_{2i} Z'(\alpha - \alpha_i) + \ldots + A_{ki} Z^{(k)}(\alpha - \alpha_i)\right],$$

где је C извесна константа, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, полови функције $\Psi(\alpha)$, k инфинитезимални ред пола α_i, а $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ki}$ константе, онда је тиме доказано да свака мероморфна двогубо-периодична функција може добити интеграцијом извесне диференцијалне једначине поменуте врсте, кад се у интеграл стави да је $x = \infty$, а параметар α сматра као променљива величина.

И модуларна функција $\varphi(\alpha)$ може бити дефинисана на сличан начин помоћу диференцијалних једначина првога реда са једним променљивим параметром. Тако, уочимо диференцијалну једначину

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4t^3 - 27y(1+t),$$

у којој је y као параметар и ставимо да је

$$\left.\begin{aligned} u(y) &= z(t) - z(1) \\ v(y) &= z(t) - z(0) \end{aligned}\right\} \quad \text{за} \quad t = \infty,$$

где $z(t)$ означава интеграл једначине (5). Модуларна функција $\varphi(\alpha)$ може се дефинисати као инверзија функције

$$\alpha = \frac{u(y)}{v(y)}.$$

Ово излази отуда што, као што се зна, модуларна функција $y = \varphi(\alpha)$ постаје инверзијом функције $\alpha(y)$ дефинисане количником два одређена интеграла

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 27t(1+t)}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 27y(1+t)}}} = \frac{\tilde{\omega}_2(y)}{\tilde{\omega}_1(y)}.$$

Тако исто, интеграција диференцијалне једначине првога реда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y(y-1)(y-\alpha),$$

кад се у интегралу x сматра као стална, а α као променљива величина, доводи до познате униформне трансценденте $\tilde{\omega}(\alpha)$, која је веома замашна у теорији двогубо-периодичних функција, а коју би такође било немогућно добити интеграцијом какве једначине првога реда у којој долазе обичне функције x-а, кад би се у добијеном интегралу x сматрало као променљива величина.

Из ових специјалних случајева – и ако се при томе узме у рачун и то да је помоћу њих лако образовати читаве класе диференцијалних једначина првога реда чији би интеграли, сматрани као функције параметара, били комбинације малопређашњих трансцендената – већ се види колико је генералан овај начин дефинисања трансцендената и уколико би била оправдана нада да ће он довести до нових несводљивих функција, корисних за математичку анализу.

Ја ћу се овде нарочито задржати код овога начина дефинисања аналитичких трансцендената и извести неколико општијих резултата који се тичу функција параметара који се јављају као границе интеграла алгебарских диференцијалних једначина првога реда са променљивим параметрима, а кад интеграциона променљива величина x тежи извесној сталној, коначној или бесконачној граници.

Уочимо, дакле, општу алгебарску диференцијалну једначину првога реда

$$(1) \qquad F(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0,$$

где је F полином по y и изводу $\frac{dy}{dx}$, са сачиниоцима који су ма какве функције x-а и параметара $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Општи интеграл једначине биће извесна функција

$$y = \varphi(x, C, \alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

где је C интеграциона константа.

Пустимо да x тежи каквој одређеној (коначној или бесконачној) граници $x = a$; интеграл y постаће извесна функција

$$y = \theta(C, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

параметара која може зависити или бити независна од интеграционе константе C, што ће зависити од природе дате једначине (1) и од вредности $x = a$, којој тежи x. Тако, нпр., ако је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \alpha = 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = -\sqrt{\alpha}\,\frac{1 - Ce^{2x\sqrt{\alpha}}}{1 + Ce^{2x\sqrt{\alpha}}},$$

функција $\Theta(\alpha)$ која се јавља као граница интеграла y, кад x тежи каквој коначној граници $x = a$, трансцендентна је функција параметра α и зависи од константе C; напротив, функција

$$\Theta(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$$

која се јавља као граница̀ истога интеграла за $x = \infty$ алгебарска је и независна од C.

У случају Рикатијеве једначине са променљивим сачиниоцима

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + f(x,\alpha)y + \varphi(x,\alpha) = 0,$$

функција $\Theta(\alpha)$ за $x = \infty$ је независна од интеграционе константе: она је или неодређена, или бесконачна или равна једноме од израза

$$\frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 + 4q}), \quad \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 + 4q}),$$

где је

$$\left.\begin{aligned} p &= \lim f(x,\alpha) \\ q &= \lim \varphi(x,\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \text{за} \quad x = \infty.$$

У погледу аналитичке природе функција добијених на овај начин, може се, пре свега, доказати ова општа теорема:

Кад год за једну вредност x = a, *функција* $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ *што јој одговара не зависи од интеграционе константе, та ће функција бити извесна* алгебарска *комбинација оних функција параметара* $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, *које експлицитно долазе у датој диференцијалној једначини.*

И у специјалном случају, кад су сачиниоци диференцијалне једначине *алгебарске* функције параметара $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ (а ма какве, алгебарске или трансцендентне функције x-а), функција Θ биће и сама извесна *алгебарска функција* тих параметара.

Да бисмо теорему доказали, претпоставимо најпре да је вредност $x = a$ коначна и ставимо да је $x - a = t$, дата диференцијална једначина, постаће

$$\Phi(t, y, \frac{dy}{dt}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \tag{6}$$

где је Φ известан полином по y и изводу $\frac{dy}{dt}$. Функција $\Theta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ приказиваће тада границу којој тежи општи интеграл

$$(7) \qquad y(t, C, \alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

за $t = 0$. Другим речима: ако се у једначини (6) сматра y за независно променљиву величину, а t као њена функција, $\Theta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ није ништа друго до она вредност y која поништава интеграл

$$(8) \qquad t(y, C, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

једначине (6), написане у облику

$$(9) \qquad \Psi\left(y, t, \frac{dt}{dy}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\right) = 0.$$

У случају кад би вредност $x = a$, за коју се тражи одговарајућа вредност Θ, била $x = \infty$, ставили бисмо да је

$$x = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt}$$

и нека је опет (9) нова диференцијална једначина, где се y сматра као независно променљива величина а t као њена функција.

У оба случаја, било да је вредност $x = a$ коначна или бесконачно велика, тражење функције Θ своди се на тражење вредности y за које општи интеграл (8) једначине (9) постаје раван нули. Али, из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда познато је да кад год вредности независно променљиве величине које поништавају општи интеграл једне једначине првога реда не зависе од интеграционе константе, оне поништавају у исто време и један известан сачинилац извода у диференцијалној једначини, пошто се у овоме сачиниоцу стави да је тај интеграл раван нули. Тако сам за случај кад је једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

алгебарска по непознатој функцији y и њеноме изводу $\frac{dy}{dx}$ и ако се напише у облику

$$f_0(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + f_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(x, y)\frac{dy}{dx} + f_m(x, y) = 0,$$

где су $f_k(x, y)$ полиноми по y, доказао ове две теореме[14]:

1. Да би вредности независно променљиве величине x које поништавају општи интеграл y биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да свака од функција $f_k(x,y)$, осим $f_0(x,y)$, садржи као чиниоца y подигнут на степен раван индексу k или већи од њега.

2. Кад год поменуте вредности не зависе од интеграционе константе, оне морају бити или $x = \infty$, или корени једначине $f_0(x,0) = 0$ или вредности за које једна или више функција $f_k(x, y)$постају бесконачне.

У свима овим случајевима вредности независно променљиве добијене на такав начин зависе алгебарски од сачинилаца дате једначине, па, дакле, и од функција параметара које у тим сачиниоцима долазе, чиме је горња теорема доказана.

Из ове се теореме непосредно изводи да се *поменутим начином постанка трансцендената само онда може доћи до трансценденталних функција различних од оних што експлицитно долазе у датој диференцијалној једначини, ако оне зависе од интеграционе константе.*

Теорема се потврђује и горњим примерима, а ја ћу овде показати да овакав начин дефинисања трансцендената одиста доводи до нових несводљивих трансцендената и да су такве трансценденте, добијене овим путем, одиста веома многобројне и разноврсне. Задржимо се прво на линеарној једначини првога реда, *која је у исто време и елеменат редукције за све оне диференцијалне једначине првога реда које је могућно интегралити помоћу квадратура.*

Уочимо, дакле, једначину

$$\frac{dy}{dx} = P(x, \alpha)y + Q(x, \alpha) = 0, \tag{10}$$

где су P и Q две функције интеграционе променљиве x и параметра α (резултати изведени за случај једначина са једним параметром, очевидно, и за ма колики број таквих параметара). Њен је општи интеграл

$$y = e^{-\int_{a_0}^{x} P dx}\left[C - \int_{a_0}^{x} Q e^{\int_{a_0}^{x} P dx} dx\right],$$

[14] *Sur les zèros et les infinis des integrales etc.*, Paris 1894.

где је a_0 ма каква произвољно узета вредност x-а, чијом се варијацијом, очевидно, мења само вредност интеграционе константе C.

Пустимо да x тежи једној извесној граници $x = a$ и нека је

$$\left.\begin{aligned} &(11) \qquad \lim e^{-\int_{a_0}^{x} P dx} = f(\alpha) \\ &(12) \qquad \lim \int_{a_0}^{x} Q e^{\int_{a_0}^{x} P dx} dx = \varphi(\alpha) \end{aligned}\right\} \text{за } x = a.$$

Интеграл y тежиће граници

$$(13) \qquad f(\alpha)[C - \varphi(x)].$$

Може се десити да функција $\int P dx$ за $x = a_0$ буде равна вредности $+\infty$ или $-\infty$. Тада се граница $y(a, C, \alpha)$ одређује овако:

Нека је a_0 коначно и претпоставимо да израз

$$\int_{x_0}^{x} P(x, a) dx,$$

за $x_0 = a_0$, има вредност $\pm\infty$. Тада, ако се стави да је

$$(14) \qquad \int P(x, a) dx = \tilde{\omega}(x, \alpha),$$

општи се интеграл може написати у облику

$$(15) \qquad y = e^{-\tilde{\omega}(x,\alpha)} \left[C - \int_{\alpha_0}^{x} Q e^{\tilde{\omega}(x,a)} dx \right] = f(\alpha)\left[C - \varphi(\alpha)\right]$$

и функција $y(a, C, \alpha)$ биће дата обрасцем

$$(16) \qquad y(a, C, \alpha) = e^{-\tilde{\omega}(a,\alpha)} \left[C - \int_{a_0}^{a} Q e^{\tilde{\omega}(x,\alpha)} dx \right].$$

Ако функција $\tilde{\omega}(x, \alpha)$ и за $x = a$ тежи граници $+\infty$ или $-\infty$, функција $y(x, C, \alpha)$ тежи нули или бесконачно великој граници. Ако при томе одређени интеграл

$$(17) \qquad \int_{a_0}^{a} Q e^{\tilde{\omega}(x,\alpha)} dx$$

има коначну вредност $\varphi(\alpha)$, производ

$$ye^{\tilde{\omega}(a,\alpha)} \tag{18}$$

имаће коначну вредност и биће функција параметра α приказана изразом

$$C-\varphi(\alpha). \tag{19}$$

Претпоставимо, дакле, ма који од ових случајева и нека је $u(x)$ једна, ма каква функција x-а, а U максимална вредност коју добија модул те функције кад x варира од a_0 до a. Претпоставимо, затим, да се функција $Q(x,\alpha)$ може написати у облику

$$Q(x,\alpha)=F(u,\alpha), \tag{20}$$

где је F каква функција променљиве u холоморфна за све вредности u чији је модул мањи од U, па ма каква била вредност α у кругу вредности тога параметра које се посматрају. *Функција* $\varphi(\alpha)$ *може се тада развити у бесконачан ред* на овај начин.

По једној познатој теореми, функција F може се развити у бесконачан ред уређен по степенима променљиве u и конвергентан за све вредности те променљиве чији је модул мањи од U, тако да је

$$F(u,\alpha)=\sum\psi(n,\alpha)u^n.$$

Према томе, а пошавши од обрасца

$$\varphi(\alpha)=\int_{a_0}^{a}Q(x,\alpha)e^{\tilde{\omega}(x,\alpha)}dx, \tag{21}$$

добија се да је

$$\varphi(\alpha)=\sum\left[\psi(n,\alpha)\int_{a_0}^{a}u^n e^{\tilde{\omega}(x,\alpha)}dx\right].$$

Одређени интеграл

$$J=\int_{a_0}^{a}u^n e^{\tilde{\omega}(x,\alpha)}dx \tag{22}$$

биће извесна функција променљивих n и α; нека је за све целе и позитивне вредности n

$$J=\Theta(n,\alpha).$$

Функција $\varphi(\alpha)$ *тада ће бити развијена у ред облика*

$$\varphi(\alpha) = \sum \psi(n,\alpha)\,\Theta(n,\alpha), \tag{23}$$

коме још у свакоме специјалном случају ваља испитати област конвергенције.

Може се десити да је функцију $Q(x,\alpha)$ немогућно написати у облику (20), али да је могућно написати

$$Q(x,\alpha) = F_1(u_1,\alpha) + F_2(u_2,\alpha) + \ldots + F_k(u_k,\alpha), \tag{24}$$

где су $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ма какве функције x-а, а $F_1, F_2, \ldots, F_k$ функције тих променљивих холоморфне за све њихове вредности чији су модули мањи од највећих модула које $u_1, u_2, \ldots, u_k$ могу имати кад x варира од a_0 до a.

Тада се, према горњим разлозима, може написати

$$\begin{aligned} F_1(u_1,\alpha) &= \sum \psi_1(n,\alpha)u_1^n, \\ F_2(u_2,\alpha) &= \sum \psi_2(n,\alpha)u_2^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(u_k,\alpha) &= \sum \psi_k(n,\alpha)u_k^n \end{aligned}$$

и према томе ће бити

$$\varphi(\alpha) = \sum \left[\psi_1(n,\alpha)\,\Theta_1(n,\alpha) + \psi_2(n,\alpha)\,\Theta_2(n,\alpha) + \ldots + \psi_k(n,\alpha)\,\Theta_k(n,\alpha)\right], \tag{25}$$

где је уопште

$$\Theta_p(n,\alpha) = \int_{a_0}^{a} u_p^n e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx. \tag{26}$$

На сличан се начин у извесним општим случајевима и *функција* $f(\alpha)$ *може развити у бесконачан производ.* Јер, пошавши од обрасца

$$f(\alpha) = e^{-\int_{a_0}^{a} P(x,\alpha)dx},$$

ако се претпостави да се $P(x,\alpha)$ може написати у једном од малопређашњих облика у коме смо написали $Q(x,\alpha)$, нпр., у облику

$$P(x,\alpha) = \Phi(u,\alpha),$$

и ако је, као и малочас

$$\Phi(u,\alpha) = \sum \chi(n,\alpha)u^n, \qquad \int_{a_0}^{a} u^n dx = \overline{\omega}(n),$$

биће

$$f(\alpha) = \prod e^{-\overline{\omega}(n)\chi(n,\alpha)},$$

коме само у сваком специјалном случају ваља проучити област конвергенције.

У великоме броју случајева тако добијене функције $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ биће нове, несводљиве трансценденте и оно што је овде од нарочитога интереса јесте то што су ове трансценденте на тај начин тројако дефинисане:

1. као границе којима тежи интеграл једне диференцијалне једначине која зависи од једног параметра кад интеграциона променљива величина тежи извесној одређеној граници;

2. помоћу одређених интеграла;

3. помоћу бесконачних редова или производа.

А познато је колико то доприноси познавању једне трансценденте кад смо је у стању дефинисати на више разних начина.

Приметимо и то да у специјалним случајевима, кад $P(x,\alpha)$ не зависи од α, а функција

$$Q(x,\alpha) = F(u,\alpha)$$

може се написати у облику $\Phi(\alpha u)$, где је $\Phi(\xi)$ каква холоморфна функција променљиве ξ за све вредности од ξ_0 до ξ_1, трансцендента $\varphi(\alpha)$ може се развити у ред уређен по степенима од α, конвергентан у интервалу од

$$\alpha_0 = \frac{\xi_0}{u(\xi_0)} \quad \text{до} \quad \alpha_1 = \frac{\xi_1}{u(\xi_1)}.$$

Јер, тада је за све вредности променљиве ξ од ξ_0 до ξ_1

$$\Phi(\xi) = \sum \psi(n)\,\xi^n,$$

тј.

$$F(u,\alpha) = \sum \psi(n)\,\alpha^n u^n, \tag{27}$$

па, дакле

$$\psi(n,\alpha) = \psi(n)\alpha^n$$

и, према томе,

$$\varphi(\alpha) = \sum \Theta(n)\psi(n)\alpha^n, \tag{28}$$

где је

$$\Theta(n) = \int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x)}dx. \tag{29}$$

Наведимо неколико типова трансцендената добијених на тај начин.

1. Нека је дата диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx} - 2axy + F(\alpha, e^{-bx^2}) = 0, \tag{30}$$

где је $F(\alpha, u)$ каква функција параметра α и израза $u = e^{-bx^2}$ холоморфна за све вредности u у интервалу од $u = 0$ до $u = 1$ и за вредности α од α_0 до α_1; a и b су какви реални и позитивни бројеви. Потражимо границу којој тежи израз ye^{ax^2} за $x = \infty$.

Овде је

$$\overline{\omega}(x, \alpha) = \int P dx = -ax^2 \tag{31}$$

и, ако је

$$F(\alpha, u) = \sum \psi(n, \alpha) u^n, \tag{32}$$

биће

$$F(\alpha, e^{-bx^2}) = \sum \psi(n, \alpha) e^{-nbx^2}. \tag{33}$$

Узмимо да је a_0 (које је произвољно и чијом се варијацијом само мења вредност интеграционе константе) равно нули, па ће бити

$$\Theta(n, \alpha) = \int_0^\infty u^n e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx = \int_0^\infty e^{-(a+bn)x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}}. \tag{34}$$

Према томе је

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum \frac{\psi(n, \alpha)}{\sqrt{a+bn}}, \quad f(\alpha) = 0, \tag{35}$$

а израз ye^{ax^2} за $x = \infty$ тежи граници

$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum \frac{\psi(n, \alpha)}{\sqrt{a+nb}} \tag{36}$$

и ред ће бити конвергентан за све вредности параметра α у интервалу од α_0 до α_1.

Тако у специјалном случају, кад је диференцијална једначина облика

$$\frac{dy}{dx} - 2axy + \frac{1}{1 - \alpha e^{-bx^2}} = 0,$$

биће
$$F(\alpha, u) = \sum_0^\infty \alpha^n u^n,$$
дакле је
$$\psi(n, \alpha) = \alpha^n,$$
и, према томе, израз ye^{ax^2} за $x = \infty$ тежи граници
$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{a+bn}},$$
и ред је конвергентан за све вредности параметра α чији је модул мањи од јединице.

У случају кад је диференцијална једначина облика

(37)
$$\frac{dy}{dx} - 2axy + e^{ae^{-bx^2}} = 0,$$
биће

(38)
$$F(\alpha, u) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n u^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n},$$
дакле је

(39)
$$\psi(n, \alpha) = \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n},$$
и, према томе, граница израза ye^{ax^2} биће

(40)
$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\sqrt{a+bn}},$$
а ред је конвергентан за све могућне вредности параметра α.

2. Нека је дата једначина

(41)
$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(\alpha, e^{-x}) = 0,$$
где је $F(\alpha, u)$ холоморфна функција променљиве u за све вредности те променљиве од $u = 0$ до $u = 1$ и за вредности α од α_0 до α_1, а за коју су $u = 0$ и $u = 1$ прости корени. Тада ће бити:*

Потражимо угаоне сачиниоце асимптота интегралне криве линије, тј. границу којој тежи количник $\frac{y}{x}$ за $x = \infty$.

---

* Наставак реченице испуштен и остаје непознат (пр. пр.).

Ставимо да је

$$\Phi(\alpha, u) = \frac{F(\alpha, u)}{u} - F'(\alpha, 0),$$

па ће функција Φ бити холоморфна у истим границама у којима и функција $F(\alpha, u)$. Одатле је

$$F(\alpha, u) = u\left[F'(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, u)\right],$$

а пошто је $$F(\alpha, 1) = 0,$$

то је $F'(\alpha, 0) = -\Phi(\alpha, 1)$, па дакле

$$F(\alpha, u) = u\left[\Phi(\alpha, u) - \Phi(\alpha, 1)\right].$$

Приметимо да, пошто је $u = 0$ прост корен једначине

$$F(\alpha, u) = 0,$$

то је $F'(\alpha, 0)$, па је, дакле, и $\Phi(\alpha, 1)$ различно од нуле.

Овде је

$$\overline{\omega}(x, \alpha) = -\int \frac{dx}{x} = -\log x$$

и, ако се функција $\Phi(\alpha, u)$ развије у ред тако да је

$$\Phi(\alpha, u) = \sum \psi(n, \alpha) u^n, \tag{42}$$

биће

$$F(\alpha, e^{-x}) = \sum \psi(n, \alpha) e^{-(n+1)x} - \Phi(\alpha, 1) e^{-x} = \tag{43}$$

$$= -\sum \psi(n, \alpha)\left[e^{-x} - e^{-(n+1)x}\right].$$

Према томе, ако се општи интеграл једначине напише у облику

$$y = e^{-\overline{\omega}(x,\alpha)}\left[C - \int_0^x F(\alpha, e^{-x}) e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx\right] = \tag{44}$$

$$= x\left[C + \sum \psi(n, \alpha) \int_0^x \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx\right]$$

и ако се примети, да је, према познатом интегралном обрасцу,

$$\int_0^x \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \log(n+1),$$

налази се да су угаони сачиниоци асимптота интегралних кривих приказани општим обрасцем

$$\lambda = C + \sum \psi(n,\alpha)\log(n+1), \tag{45}$$

који вреди за све вредности параметра α у области конвергенције реда (42). Угаони сачинилац асимптота, сматран као функција параметра α, јавља се, дакле, у једном нарочитом облику бесконачног реда на који се не наилази код обичних, познатих трансцендената.

У специјалном случају, кад дата диференцијална једначина има облик

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{\alpha e^{-x}}{1-\alpha e^{-x}} - \frac{\alpha e^{-x}}{1-\alpha} = 0,$$

биће

$$\Phi(\alpha,u) = \frac{\alpha}{1-\alpha u} = \alpha\sum_0^\infty \alpha^n u^n,$$

дакле $$\psi(\alpha,n) = \alpha\alpha^n,$$

и, према томе,

$$\lambda = C + \alpha\sum_0^\infty \alpha^n \log(n+1),$$

који образац важи за све вредности параметра α чији је модул мањи од јединице.

Ако је једначина облика

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + e^{\alpha e^{-x}-x} - e^{\alpha - x} = 0,$$

биће $$\Phi(\alpha,u) = e^{\alpha u} = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n u^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},$$

дакле $$\psi(n,\alpha) = \frac{\alpha^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},$$

и, према томе, $$\lambda = C + \sum \frac{\log(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\alpha^n,$$

и овај образац важи за све могућне вредности параметра α.

Приметимо да је у овоме што претходи претпостављено да се функција $F(\alpha,u)$ може развити у Тејлоров ред, конвергентан за посматране вредности променљивих α и u. Али, и кад то није могућно, у великоме броју општих случајева може се F развити у ред другога каквог облика, нпр., у тригонометријски ред, или уопште у ред уређен по каквој функцији променљиве u; и у тим се случајевима, истим путем, као и малочас, долази до нарочитих облика бесконачних редова у које се могу развити трансценденте добијене на малопређашњи начин. И код тих трансцендената ваља нарочито истаћи ту интересантну страну што се код њих функције које долазе под знаком Σ, добијају од обичних, познатих трансцендената помоћу интеграционих операција.

*

Вратимо се опет општој линеарној диференцијалној једначини првога реда

$$\frac{dy}{dx}+P(x,\alpha)y+Q(x,\alpha)=0 \tag{46}$$

и задржимо се на знатном и генералном случају кад је функција $Q(x,\alpha)$ каква *рационална* функција $F(u,\alpha)$ друге једне, *ма какве* функције $u(x)$ са сачиниоцима који зависе од параметра α. Претпоставимо да је ова функција $F(u,\alpha)$ холоморфна функција променљиве u за све вредности u чији је модул мањи од највећег модула који има функција $u(x)$ за време док x варира од $x=a_0$ до $x=a$.

Ја ћу показати *да се трансценденте добијене на малопређашњи начин могу свести на извесне типове помоћу чијих се комбинација оне све могу добити, тако да све трансценденте које одговарају једној истој функцији* P(x, α), u(x) *и једној вредности* x = a, *у ма каквој рационалној функцији* F, *линеарно изражавају помоћу једне исте трансценденте и неколико њених узастопних извода*[15] .

Пре свега, функција $F(u,\alpha)$, према ономе што је о њој казано, може се развити у ред облика

$$F(u,\alpha)=\sum_{0}^{\infty}\psi(n,\alpha)u^{n} \tag{47}$$

конвергентан за све вредности u чији је модул мањи од највећег модула који има функција $u(x)$ у интервалу од $x=a_0$ до $x=a$.

Према једној познатој теореми за разлагање рационалних функција у Maclaurin-ов ред, општи сачинилац $\psi(n,\alpha)$ имаће облик

[15] Метода разлагања, којом ћу извести ову теорему, јесте она коју сам употребио у своме раду: *Методе за трансформацију бесконачних редова у одређене интеграле*, Глас LI, Краљевска српска академија.

$$(48) \qquad \psi(n,\alpha) = P_1(n,\alpha)r_1^n + P_2(n,\alpha)r_2^n + \ldots + P_k(n,\alpha)r_k^n,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ означују корене извесне алгебарске једначине

$$(49) \qquad G(r) = 0;$$

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ означују извесне полиноме по n, и то такве да је уопште полином P_i степена $\lambda_i - 1$, где λ_i означује инфинитезимални ред корена r_i једначине (49). Алгебарска једначина (49), која се у теорији рационалних функција назива *једначином генератрисом* дате функције $F(u,\alpha)$, постаје кад се у једначини, која се добија ставивши да је именилац у $F(u,\alpha)$ раван нули, *u* замени са $\frac{1}{r}$ и кад се потом тако добијена једначина ослободи имениоца, који ће бити известан степен r-а.

Према томе, пошавши од обрасца (21)

$$\varphi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} F(u,\alpha) e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx,$$

добија се да је

$$(50) \qquad \varphi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} \left[\sum_0^\infty \psi(n,\alpha) u^n \right] e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx = J =$$

$$= \sum_0^\infty \left[P_1(n,\alpha) r_1^n \int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx \right] + \ldots + \sum_0^\infty \left[P_k(n,\alpha) r_k^n \int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx \right].$$

Ставимо да је

$$(50)' \qquad \int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x,\alpha)} dx = \chi(n,\alpha),$$

па уочимо први сабирак збира (50), који ће бити облика

$$(51) \qquad J_1 = \sum_0^\infty P_1(n,\alpha)\, \chi(n,\alpha) r_1^n.$$

Пошто је P_1 полином $\lambda_1 - 1$-ов степена по n, то се увек може написати да је

$$\begin{aligned}(52)\qquad P_1(n,\alpha) = A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + \ldots +\\ +A_{\lambda_1-1} n(n-1)\ldots(n-\lambda_1+2),\end{aligned}$$

где су A_i сачиниоци који зависе само од параметра α и који се могу израчунати на овај начин: стављајући у (52) узастопце

$$n = 0,1,2,3,\ldots,\lambda_1 - 1$$

добија се систем линеарних једначина

$$(53)\qquad \begin{aligned}&P_1(0,\alpha) = A_0\\ &P_1(1,\alpha) = A_0 + A_1\\ &P_1(2,\alpha) = A_0 + 2A_1 + 2A_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &P_1(\lambda_1-1,\alpha) = A_0 + (\lambda_1-1)A_1 + (\lambda_1-1)(\lambda_1-2)A_2 + \ldots,\end{aligned}$$

из којих се лако израчунавају сачиниоци $A_1, A_2, \ldots, A_{\lambda_1-1}$ помоћу вредности

$$P_1(1,\alpha),\ P_1(2,\alpha),\ldots,\ P_1(\lambda_1-1,\alpha).$$

Замислимо, дакле, те сачиниоце израчунате; они ће бити извесне алгебарске комбинације оних функција које експлицитно долазе у датој диференцијалној једначини и, према обрасцу (51), биће

$$(54)\qquad \begin{aligned}J_1 &= A_0\sum_0^\infty \chi(n,\alpha)r_1^n + A_1\sum_0^\infty n\chi(n,\alpha)r_1^n +\\ &+ A_2\sum_0^\infty n(n-1)\chi(n,\alpha)r_1^n + \ldots +\\ &+ A_{\lambda_1-1}\sum_0^\infty n(n-1)\ldots(n-\lambda_1+2)\chi(n,\alpha)r_1^n.\end{aligned}$$

Разликујмо сад ова два случаја.

Први случај: нека је вредност $\chi(0,\alpha)$ коначна и одређена, зависећи или не од α. Уочимо тада функцију

$$(55)\qquad \Theta(r,\alpha) = \sum_0^\infty \chi(n,\alpha)r^n$$

и претпоставимо да се сви корени $r_1, r_2, \ldots, r_k$ једначине генератрисе (49) налазе у кругу конвергенције реда (55). Тада ће бити

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
&\sum_0^\infty \chi(n,\alpha) r_1^n = \Theta(r_1,\alpha),\\
&\sum_0^\infty n\chi(n,\alpha) r_1^n = r_1 \frac{d}{dr_1}\Theta(r_1,\alpha),\\
&\sum_0^\infty n(n-1)\chi(n,\alpha) r_1^n = r_1^2 \frac{d^2}{dr_1^2}\Theta(r_1,\alpha),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_0^\infty n(n-1)\dots(n-\lambda_1+2)\chi(n,\alpha) r_1^n = r_1^{\lambda_1-1} \frac{d^{\lambda_1-1}}{dr_1^{\lambda_1-1}}\Theta(r_1,\alpha)
\end{aligned}
$$

и, према томе је

$$(57)\quad J_1 = A_0\Theta(r_1,\alpha) + A_1 r_1 \Theta'(r_1,\alpha) + \dots + A_{\lambda_1-1} r^{\lambda_1-1}\Theta^{(\lambda_1-1)}(r_1,\alpha),$$

где је, краткоће ради, стављено да је

$$\frac{d^{(k)}}{dr_1^k} = \Theta(r_1,\alpha) = \Theta^{(k)}(r_1,\alpha),$$

а сам интеграл J биће дат обрасцем

$$(58)\qquad J = J_1 + J_2 + \dots + J_k,$$

где се сваки посебни интеграл J_i односи на корен r_i и има облик

$$(59)\quad J_i = M_0\Theta(r_i,\alpha) = M_1 r_i \Theta(r_i,\alpha) + \dots + M_h r_i^h \Theta^{(h)}(r_i,\alpha).$$

Други случај. Нека је количина $\chi(0,\alpha)$ бесконачна или неодређена. Тада, ако је $F(0,\alpha) \lessgtr 0$, претходни резултати немају смисла, пошто је први члан реда (55) тада и сам бесконачан или неодређен, али, као што ће се видети из овога што следује, ако је

$$F(0,\alpha) = 0,$$

они важе и у томе случају.

Означимо са μ ред корена $u = 0$ једначине

$$F(u,\alpha) = 0$$

решене по u; тада се може написати да је

$$(60)\qquad F(u,\alpha) = u^\mu F_1(u,\alpha),$$

где F_1 означује извесну рационалну функцију промењљиве u која није равна нули за $u = 0$. Ако, као што смо малопре радили са функцијом F, развијемо функцију F_1 у ред уређен по степенима од u, тако да је

$$F_1(u,\alpha) = \sum_0^\infty \psi_1(n,\alpha)u^n, \tag{61}$$

функција $\psi_1(n,\alpha)$ биће дефинисана обрасцем

$$\psi_1(n,\alpha) = Q_1(n,\alpha)\,\rho_1^n + Q_2(n,\alpha)\,\rho_2^n + \ldots + Q_k(n,\alpha)\,\rho_k^n, \tag{62}$$

у коме $Q_i(n,\alpha)$ и ρ_i имају исто значење које и $P_i(n,\alpha)$ у обрасцу (48). И овде бисмо, као и малопре, имали да је

$$\varphi(\alpha) = J = \int_{a_0}^{a} u^\mu F_1(u,\alpha)e^{\omega(x,\alpha)}dx = J_1 + J_2 + \ldots + J_k, \tag{63}$$

где је уопште

$$J_i = \sum_0^\infty Q_i(n,\alpha)\rho_i^n \int_{a_0}^{a} u^{n+\mu} e^{\overline{\omega}(x,\alpha)}dx, \tag{64}$$

или, према обрасцу (50)′

$$J_i = \sum_0^\infty Q_i(n,\alpha)\chi(n+\mu)\rho_i^n. \tag{65}$$

Према томе, службу малопређашње функције $\Theta(r,\alpha)$ овде чини функција

$$\Theta_\mu(r,\alpha) = \sum_0^\infty \chi(n+\mu,\alpha)r^n, \tag{66}$$

која се, уосталом, и сама, па ма какво било μ, своди на збир једнога извесног полинома од $\frac{1}{r}$ и функције

$$\Theta(r,\alpha) = \sum_0^\infty \chi(n+1,\alpha)r^n, \tag{67}$$

помножене са $r^{1-\mu}$, јер је идентички

$$\sum_0^\infty \chi(n+1,\alpha)r^n = \chi(1,\alpha)+\chi(2,\alpha)+\dots$$

$$+\chi(\mu-1,\alpha)r^{\mu-2}+r^{\mu-1}\sum_0^\infty \chi(n+\mu,\alpha)r^n$$

и, према томе

$$(68)\quad \Theta_\mu(r,\alpha)=r^{1-\mu}\Theta_1(r,\alpha)-\left[\frac{\chi(1,\alpha)}{r^{\mu-1}}+\frac{\chi(2,\alpha)}{r^{\mu-2}}+\dots+\frac{\chi(\mu-1,\alpha)}{r}\right].$$

У оба ова случаја функција $\Theta(r,\alpha)$ дефинисана обрасцем (55), или функција $\Theta_1(r,\alpha)$ дефинисана обрасцем (67), јесу као *прости елементи* за трансценденте $\varphi(\alpha)$ добијене на раније изложени начин; све трансценденте $\varphi(\alpha)$ које одговарају једној истој функцији $u(x)$ и $P(x,\alpha)$ и једној вредности $x=a$, могу се, дакле, линеарно изразити помоћу такве једне функције и њених извода, *и тај прост елеменат остаје исти па ма каква била рационална функција* $\mathrm{F}(\mathrm{u},\alpha)$ *која јој одговара.*

Тако, за диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx}-2axy+F(\alpha,e^{-bx^2})=0,$$

где је $F(\alpha,u)$ ма каква рационална функција променљиве u која је таква да су модули корена њене једначине генератрисе $G(r)=0$ сви мањи од јединице *прости елеменат за све трансценденте* $\varphi(\alpha)$ *које одговарају разним рационалним функцијама* F *и вредности* $\mathrm{x}=\infty$, *јест трансцендента*

$$(69)\qquad \Theta_1(r,\alpha)=\sum_0^\infty \frac{r^n}{\sqrt{a+bn}}.$$

Јер максимални модул који функција $u=e^{-bx^2}$ може имати за време док x варира од 0 до $+\infty$ јесте $u=1$ и функција $F(\alpha,u)$ извесно је холоморфна за све вредности u чији је модул мањи од јединице, пошто корени једначине генератрисе

$$G(r)=0,$$

чији су сви модули, по претпоставци, мањи од јединице, нису ништа друго до изврнуте вредности корена једначине која се добија кад се стави да је именилац у Ф раван нули и која даје оне вредности u које чине функцију F прекидном. С друге стране, корени једначине генератрисе налазе се сви у унутрашњости круга конвергенције Θ_1, пошто се елементарним методама налази да је полупречник тога круга раван јединици.

Тако исто, за диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(\alpha, e^{-x}) = 0,$$

где је F ма каква рационална функција променљиве u која постаје равна нули за $u = 0$ и $u = 1$ (за ове корене претпоставићемо да су прости), а која је коначна за све вредности u између тих граница, *простим елементом за све трансценденте* $\varphi(\alpha)$, *које одговарају вредности* $x = \infty$, *јесте трансцендента*

(70) $$\Theta(r, \alpha) = \sum_{0}^{\infty} r^n \log(n+1).$$

Корени једначине генератрисе извесно ће се налазити у кругу конвергенције овога бесконачног реда чији је полупречник раван јединици. Ово долази отуда што су ти корени равни изврнутим вредностима оних величина за које функција F престаје бити коначна и од којих се, по претпоставци, ниједна не налази између 0 и 1.

Познато је из других теорија од колике је важности за проучавање појединих општијих типова функција познавање њихових простих елемената. Корист од познавања таквих елемената редукције састоји се поглавито од рачунских олакшица које се добију разлагањем функције на њене просте елементе и од упрошћених начина за испитивање аналитичке природе сложенијих типова функција. Таквим се разлагањем функција ослобађа сваке привидне компликованости и своди на оно што је у њој одиста есенцијално и што је битно карактерише. Осим тога, редукција на просте елементе доводи до тога да се рачуна да читаве групе функција припадају једноме истом типу функција ако имају исте просте елементе, тако да је довољно разрадити теорију функције која приказује тај елеменат па да тиме и теорија једне велике групе функција буде разрађена.

Приметимо да се одређивање трансцендената $\varphi(\alpha)$ своди:

1. На израчунавање корена $r_1, r_2, \ldots, r_k$ једначине генератрисе $G(r) = 0$, а према самом начину постанка ове једначине очевидно је да ће корени r_i бити *алгебарске* комбинације оних функција параметра α који експлицитно долазе у функцији $F(u, \alpha)$.

2. На одређивање функције $\Theta(r, \alpha)$, односно $\Theta_1(r, \alpha)$, дефинисане обрасцем (55), односно (67).

Ови *елементи редукције* $\Theta(r,\alpha)$, односно $\Theta_1(r,\alpha)$, могу се каткад изразити помоћу обичних, данас познатих и испитаних функција, као што су: алгебарске, експоненцијалне, логаритамске, елиптичне итд.; у великоме броју случајева то ће, напротив, бити *нове несводљиве трансценденте*. Проблем да се за једну дату трансценденту распозна да ли је нова или сводљива на комбинације других познатих трансцендената, спада, као што је познато, у најтеже проблеме данашње математичке анализе.

Ја ћу показати како се оваква питања понекад могу решавати за трансценденте $\varphi(\alpha)$, добијене на горе наведени начин, у извесним општијим случајевима.

Уочимо диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} - P(x)y + F(u,\alpha) = 0$$

и претпоставимо да сачинилац $P(x)$ не зависи од параметра α. Ставимо да је

$$\int P(x)dx = \overline{\omega}(x) + C$$

и претпоставимо да је количник одређених интеграла

$$\lambda(n) = \frac{\int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x)}dx}{\int_{a_0}^{a} u^m e^{\overline{\omega}(x)}dx}, \tag{71}$$

што одговарају истој константи C, а ма каквим целим и позитивним вредностима m и n, рационалан број. Тада:

1. *Да би функција* $\varphi(\alpha)$ *могла бити каква алгебарска комбинација оних функција параметра* α *које експлицитно долазе у датој диференцијалној једначини, потребно је да именилац рационалног броја* λ, *кад* n *бесконачно расте а* m *остаје стално, не садржи бесконачно много простих чинилаца.*

Теорема се може извести као последица једне познате Ајзенштајнове теореме о бесконачним редовима, што приказују алгебарске функције. Јер, пошто је количник (70) по претпоставци рационалан број за ма какве вредности m и n, то је

$$\int_{a_0}^{a} u^n e^{\overline{\omega}(x)}dx = \rho\lambda(n), \tag{72}$$

где је $\lambda(n)$ какав рационалан број а ρ какав рационалан или ирационалан број, али независан од индекса n. Према томе је на основу образаца (50)′ и (55)

$$\Theta(x,\alpha) = \rho\sum_{0}^{\infty}\lambda(n)x^{n}. \tag{73}$$

Али, према Ајзенштајновој теореми за редове уређене по степенима једне променљиве величине x, а са рационалним сачиниоцима да би ред (73) могао приказивати какву алгебарску функцију променљиве x, потребно је да или сачиниоци $\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2), \ldots$ буду цели бројеви, или да постоји такав један цео и коначан број h да су величине $\lambda(0), \lambda(1)h, \lambda(2)h^2, \ldots$ цели бројеви. Другим речима, потребно је да имениоци бројева $\lambda(n)$ не садрже бесконачно много простих чинилаца кад индекс n бесконачно расте.

Са друге стране, пошто су корени једначине генератрисе $G(r) = 0$ алгебарске комбинације функција параметра α које експлицитно долазе у F, то да би функција $\varphi(\alpha)$ била алгебарска комбинација ових функција, потребно је да, према обрасцима (50), (55), (58) и (59), функција $\Theta(x,\alpha)$ буде алгебарска функција променљиве x, чиме је горња теорема доказана.

2. *Да би функција* $\varphi(\alpha)$ *могла бити каква комбинација извесног коначног броја алгебарских, експоненцијалних, тригонометријских, логаритамских и циклометријских функција оних трансцендената које експлицитно долазе у диференцијалној једначини, потребно је да, ако се са* $\mu(\mathrm{n})$ *означи највећи прости чинилац који долази у имениоцу броја* $\lambda(\mathrm{n})$, *израз*

$$\frac{\mu(n)}{n}$$

тежи каквој коначној граници (која може бити и равна нули), кад n *бесконачно расте.*

Теорема се изводи као последица познате теореме г. Чебишева[16] за Тејлорове редове са рационалним сачиниоцима, а која се може исказати на овај начин: да би какав бесконачни ред

$$\sum\lambda(n)x^{n},$$

где су сачиниоци $\lambda(n)$ рационални бројеви, могао приказивати какву функцију, сложену на ма који начин од извеснога коначног броја алгебарских, експоненцијалних, тригонометријских, логаритамских и ци-

[16] Hermite, *Cours à la Faculté des Sciences de Paris*, Paris1891, p. 197.

клометријских функција променљиве x, потребно је да највећи прости чинилац који долази у имениоцу броја $\lambda(n)$ кад n бесконачно расте, не буде бесконачно велика величина вишега реда наспрам n.

Помоћу теореме 1 може се у великоме броју случајева доказати да дата трансцендента $\varphi(\alpha)$, добијена на раније изложени начин, није сводљива ни на какве алгебарске комбинације оних функција параметра α које експлицитно долазе у диференцијалној једначини.

Помоћу теореме 2 може се често распознати да је трансцендента $\varphi(\alpha)$ несводљива на комбинације поменутих елементарних трансцендената у коначном броју.

Претпоставимо сад да количник (71) није за све целе и позитивне вредности m и n рационалан број. Познато је и емпиријски, а може се и доказати[17] помоћу елементарнога правила за диференцијаљење поредних функција и помоћу Лајбницовог (Leibnitz) обрасца за тражење виших извода, да кад год се каква функција, сложена на ма који начин од данашњих елементарних функција и свих до данас испитаних трансцендената развије у бесконачан ред уређен по степенима независно променљиве величине, у сачиниоцу општег члана или су извршене само рационалне операције (сабирање, одузимање, множење, дељење, подизање на степен, који је цео број) са n-ом, или је тај сачинилац рационална функција израза $a^n, b^n, c^n, \ldots$, са сачиниоцима у којима су са n-ом извршене само рационалне операције.

Ако су, дакле, у количнику (71) *извршене какве операције са променљивим* m *и* n *различне од оних горе наведених, за трансценденту* $\varphi(\alpha)$ *која одговара таквом случају може се тврдити да је несводљива на комбинације до данас испитаних и у анализу уведених трансцендената.*

Тако, у случају диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} - 2gxy + F(\alpha, e^{-bx^2}) = 0,$$

а за $a = \infty$, количник (71) биће

$$\lambda(n) = \sqrt{\frac{g+bm}{g+bn}};$$

у случају једначине

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(\alpha, e^{-x}) = 0,$$

---

[17] На овоме ћу се питању више задржати у другоме једном раду.

тај ће количник за $a = \infty$ бити

$$\lambda(n) = \frac{\log(n+1)}{\log(m+1)}.$$

У оба случаја са променљивим m и n извршене су операције, различне од оних горе наведених и, према томе, трансценденте $\varphi(\alpha)$ које им одговарају несводљиве су на данашње трансценденте.

Досад смо претпостављали да је у диференцијалној једначини

$$\frac{dy}{dx} + P(x,\alpha)y + Q(x,\alpha) = 0$$

функција Q каква рационална функција друге једне ма какве функције $u(x)$, са сачиниоцима који зависе од параметра α. Претпоставимо сад да је исти случај и са функцијом $P(x,\alpha)$, тј. да је и она каква рационална функција $\Phi(v,\alpha)$ једне, ма какве функције $v(x)$ са сачиниоцима који су функције параметра α. Претпоставимо, затим, да је ова функција $\Phi(v,\alpha)$ холоморфна функција променљиве v за све вредности v чији је модул мањи од највећег модула који има функција $v(x)$ за време док x варира од $x = a_0$ до $x = a$.

Тада се истим разлагањем као и малопре уверавамо да се и трансценденте

$$f(\alpha) = e^{-\int_{a_0}^{a} P(x,\alpha)dx}$$

могу свести на извесне типове помоћу чијих се комбинација могу добити све такве трансценденте које одговарају једној истој функцији $v(x)$ и једној истој вредности a а ма каквој рационалној функцији Φ.

Јер, тада се одређени интеграл

$$J = \int_{a_0}^{a} P(x,\alpha)dx$$

може написати у облику

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_k,$$

где је уопште

$$J_i = N_0\Theta(r_i,\alpha) + N_1 r_i \Theta'(r_i,\alpha) + \ldots + N_h r_i^h \Theta^{(h)}(r_i,\alpha),$$

$$\Theta^{(h)} = \frac{d^m\Theta}{dr_i^m}.$$

У овоме су обрасцу величине r_i и N_k извесне алгебарске комбинације оних функција параметра α које експлицитно долазе у диференцијалној једначини, а $\Theta(r,\alpha)$ извесна функција чији облик зависи једино од облика функције $v(x)$ и вредности $x = a$, а никако не и од облика рационалне функције Ф. Функција $f(\alpha)$ биће, дакле, производ извеснога коначног броја чланова, који су сви облика

$$e^{N_h \Theta^{(h)}(r_i,\alpha)}$$

и о сводљивости ове трансценденте на комбинације данашњих испитаних функција важи све оно што је казано за трансценденте $\varphi(\alpha)$.

*

Већ по овоме што је довде казано за линеарне диференцијалне једначине првога реда може се оценити колико је обилат извор нових трансцендената кад се оне дефинишу помоћу диференцијалних једначина првога реда са једним или више промењивих параметара и кад се добијени интеграл сматра као функција ових параметара. Само проучавање и налажење експлицитнога облика ових трансцендената задаје у великом броју случајева за данас несавладљивих тешкоћа и може се извршити готово искључиво у оним, уосталом доста генералним случајевима, у којима је могућна експлицитна интеграција једначине у коначном облику или помоћу интеграционих знакова $\int$, или кад се једначина помоћу каквих трансформација може свести на Рикатијеву једначину, или кад у датој једначини

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma, \dots\right) = 0, \tag{74}$$

долази више параметара, али тако да се једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b, c, \dots\right) = 0, \tag{75}$$

добијена из (74), за какве специјалне вредности параметара

$$\beta = b, \quad \gamma = c, \dots$$

идентички своди на један од типова једначина које се могу на поменути начин интегралити. Тада је могућно имати експлицитни израз (било у коначном облику, било у облику реда или одређеног интеграла) трансцендената $\Theta(\alpha)$, које се добијају кад у општем интегралу једначине (74) независно промењива величина x тежи каквој одређеној граници, параметри β, γ,... теже границама b, c,..., а интеграл се сматра као функција параметра α.

Приметимо да се велик број диференцијалних једначина првога реда, помоћу смена променљивих и помоћу алгебарских трансформација, своди на линеарне диференцијалне једначине првога реда и да се тада на њих може применити све оно што је казано за интеграле ових једначина, сматране као функције параметара.

Тако, ја сам доказао[18] да се све алгебарске диференцијалне једначине првога реда за које су сви интегрални сингуларитети независни од интеграционе константе и чији је род по y и $\frac{dy}{dx}$ раван нули, помоћу извесне трансформације облика

$$y = R(x, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, Y),$$

где је Y нова непозната функција, а R извесна рационална функција променљиве Y, своде на линеарне једначине облика

$$\frac{dY}{dx} + P(x, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) Y + Q(x, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0,$$

где су P и Q алгебарске функције сачинилаца од y и $\frac{dy}{dx}$ у датој диференцијалној једначини (74). Према томе, трансцендента $\Theta(\alpha)$, добијена кад се у општем интегралу пусти да x тежи каквој одређеној граници, а интеграл сматра као функција једнога од параметара, нпр. α, *биће извесна алгебарска комбинација оних функција параметра* α *које експлицитно долазе у једначини и оних трансцендената* $\Theta(\alpha)$ *на које смо наишли у теорији линеарне једначине.*

А увек се непосредно, на самој датој једначини, може распознати да ли су сви њени интегрални сингуларитети независни од интеграционе константе или не. Тако, ако се једначина (74) напише у облику

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu-i} = 0,$$

где су f_i полиноми по y, да би једначина припадала категорији о којој је реч, потребно је и довољно да за њу буду задовољени познати Фуксови услови за сталност критичних тачака општега интеграла и да, осим тога, степен полинома f_k за $k = 0, 1, 2, .., \mu$ не буде већи од ње-

18 *Sur les zèros et les infinis* etc., Paris 1894. p. 28.

говог индекса k, а род једначине по y и $\frac{dy}{dx}$ да буде раван нули или већи од јединице.[19]

Уочимо, нпр., случај кад дата једначина припада тој категорији и кад, поред тога, задовољава и ова два услова:

1. да је њен степен по изводу $\frac{dy}{dx}$ непаран;

2. да су у њој сачиниоци непознате функције и извода рационалне комбинације функције e^{ax} (параметри α, β, γ,... могу долазити на какав било начин).

Тада, ако је род једначине већи од јединице, једначина се, као што је показао г. Поенкаре, може интегралити алгебарским путем и општи интеграл биће извесна алгебарска комбинација сачинилаца једначине, па, дакле, алгебарске комбинације функције e^{ax} и оних функција

$$\varphi_1(\alpha,\beta,\ldots),\ \varphi_2(\alpha,\beta,\ldots),\ \varphi_3(\alpha,\beta,\ldots),\ldots$$

параметара који експлицитно у једначини долазе. И ако се у интегралу x сматра за сталан, а један од параметара, нпр. α, као промењив, *функција* $\Theta(\alpha)$*, тако добијена, биће извесна алгебарска комбинација оних функција* $\varphi_i(\alpha)$ *параметра* α *које долазе у самој једначини.* У таквоме случају интеграција не доводи до трансцендената различних од оних које су експлицитно дате сачиниоцима једначине.

Исти бисмо случај имали, уосталом, и кад је степен μ паран, јер и тада вреде горе поменути резултати о интеграцији једначине, претпоставивши да је њен род раван јединици.

Претпоставимо, дакле, да је род једначине раван нули. Тада, ако је степен једначине по изводу непаран, по једној теореми Нетерове, могућно је y и $\frac{dy}{dx}$ изразити као рационалне функције једнога параметра λ, са сачиниоцима који ће бити рационалне комбинације самих сачинилаца дате диференцијалне једначине, а, према томе, и рационалне комбинације функције e^{ax}, тако да је, нпр.,

$$y = R_1(u,\lambda),\ \frac{dy}{dx} = R_2(u,\lambda),$$

где су R_1 и R_2 извесне рационалне комбинације промењивих $u = e^{ax}$ и λ, са сачиниоцима који су алгебарске комбинације функција $\varphi_i(\alpha)$.

Из прве се једначине добија да је

[19] Ibid., p. 26.

$$\frac{dy}{dx} = au\frac{dR_1}{du} + \frac{dR_2}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}$$

и упоређењем са другом једначином налази се да λ задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{R_2 - au\dfrac{dR_1}{du}}{\dfrac{dR_1}{d\lambda}} = R_3(u,\lambda),$$

где је R_3 извесна рационална функција промењљивих u и λ. За ову рационалну функцију ја сам доказао да се она увек кад су задовољени горе наведени услови, своди на облик

$$P(u)\lambda + Q(u),$$

где су P и Q извесне рационалне функције промењљиве u, са сачиниоцима који алгебарски зависе од функција $\varphi_i(\alpha)$. Промењљива λ биће, дакле, интеграл линеарне диференцијалне једначине првога реда

$$\text{(76)}\qquad \frac{d\lambda}{dx} = P(e^{ax})\lambda + Q(e^{ax})$$

и трансценденте $\Theta(\alpha)$, које се добијају кад се у општем интегралу дате једначине

$$\text{(77)}\qquad F\left(e^{ax}, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\right) = 0,$$

сматра x за стално, а параметар α као промењљива величина, *своде се на алгебарске комбинације трансцендената* $f(\alpha)$ *и* $\varphi(\alpha)$ *које се односе на једначину* (76), *а о којима је било пре говора, и функција* $\varphi_i(\alpha)$ *које експлицитно долазе у једначини* (77).

Извесни типови једначина првога реда своде се на једначине овога типа. Тако, ако једна једначина задовољава услове за сталност интегралних критичних тачака и ако су при том вредности које поништавају њен општи интеграл независне од интеграционе константе, довољно је учинити смену

$$y = \frac{1}{Y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{Y^2}\frac{dY}{dx},$$

где је Y нова непозната функција, па да се једначина сведе на другу једну, за коју су сви интегрални сингуларитети независни од интеграционе константе. А, пре је казано како се непосредно на датој једначини може распознати да ли она задовољава услове за сталност интеграционих критичних тачака и вредности независно променљиве величине које поништавају њен општи интеграл.

Претпоставимо сад да за једну дату диференцијалну једначину (77) нису задовољени услови за сталност свих интегралних сингуларитета, али да она задовољава Фуксове услове за сталност интегралних критичних тачака. Разликујмо тада ове случајеве:

1. случај: нека је род дате једначине

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \dots\right) = 0 \tag{78}$$

раван нули. Тада је општи интеграл једначине алгебарска функција њених сачинилаца и једне функције $u(x)$ која се добија као интеграл извесне Рикатијеве једначине

$$\frac{du}{dx} + \psi_1 u^2 + \psi_2 u + \psi_3 = 0, \tag{79}$$

где су ψ_1, ψ_2, ψ_3 извесне алгебарске функције сачинилаца једначине (78). Према томе, и функција $\Theta(\alpha)$, која се добија сматрајући интеграл једначине (78) као функцију параметра α, *биће алгебарска комбинација оних функција које се добијају сматрајући сачиниоце једначине* (78) *и општи интеграл Рикатијеве једначине* (79) *као функције тога параметра.*

Прве су функције већ саме по себи дате у експлицитном облику; о облику функције која се добија сматрајући интеграл једначине (79) као функцију параметра α, не може се рећи ништа општије, изузимајући случај кад се за сталну вредност која се даје независно променљивој величини x узме $x = \infty$. А, у томе случају, зна се ово.

Ставимо у једначини (79)

$$y = \frac{u}{\psi_1},$$

па ће ова прећи у

$$\frac{du}{dx} + u^2 + f_1 u + f_2 = 0,$$

где је

$$f_1 = \psi_2 - \frac{\psi_1'}{\psi_1}, \quad f_2 = \psi_1 \psi_2.$$

Сачиниоци f_1 и f_2 биће алгебарске комбинације оних функција параметра α које експлицитно долазе у једначини (78). Тада

1. Ако f_1 и f_2 за $x = \infty$ теже коначним и од нуле различним границама, тако да је

$$\lim f_1 = \chi_1(\alpha), \quad \lim f_2 = \chi_2(\alpha),$$

функција $\lambda(\alpha) = \lim u(x)$ биће дата једним или другим од образаца

$$\lambda(\alpha) = -\frac{1}{2}\left[\chi_1(\alpha) + \sqrt{\chi_1(\alpha)^2 - 4\chi_2(\alpha)}\right],$$

$$\lambda(\alpha) = -\frac{1}{2}\left[\chi_1(\alpha) - \sqrt{\chi_1(\alpha)^2 - 4\chi_2(\alpha)}\right].$$

Ово излази из познате теореме о границама којима тежи интеграл Рикатијеве једначине кад интеграциона промењива бесконачно расте.

2. Ако f_1 и f_2 не теже обе коначним границама, или ако теже, те су обе границе равне нули, функција је $\lambda(\alpha)$ у првоме случају бесконачна, а у другоме се не може увек одредити. У специјалнијем случају, кад је Рикатијева једначина (79) алгебарска и по промењивој x – што ће бити ако је и дата једначина (78) алгебарска по x – може се једначина (79) написати у облику

$$\sum_{k=0}^{k=m} \psi_k(y, x, \alpha, \beta, \ldots)\left(\frac{dx}{dy}\right)^{m-k} = 0$$

и по томе облику могу се на њу применити правила за тражење асимптотних вредности интеграла која сам извео у једноме пређашњем раду[20].

2. случај: нека је род једначине (78) раван јединици. Према познатој теореми г. Поенкареа, општи интеграл једначине биће извесна алгебарска комбинација њених сачинилаца и функције

$$\mathrm{Sn}[J(x)],$$

где је $J(x)$ известан интеграл облика

$$\int \Phi(x, \alpha)\, dx$$

и где Φ означује једну алгебарску комбинацију поменутих сачинилаца.

Ако се промењивој x да каква специјална вредност $x = a$ и интеграл сматра као функција $\Theta(\alpha)$ параметра α, интеграл

$$J(x) = \int_{a_0}^{a} \Phi(x, \alpha)\, dx$$

---

[20] Глас L, Краљевске српске академије.

биће и сам извесна функција $\chi(\alpha)$ тога параметра, а функција

$$\mathrm{Sn}[J(x)]$$

постаје

$$\mathrm{Sn}[\chi(\alpha)],$$

где још ваља имати на уму да и периоде функције Sn могу зависити од α. *Трансценденте* $\Theta(\alpha)$ *биће, дакле, извесна алгебарска комбинација функција* $\varphi_i(\alpha)$ *добијених сматрајући сачиниоце једначине као функције параметра* α *и трансценденте*

$$\mathrm{Sn}[\chi(\alpha)],$$

где је

$$\chi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} \Phi(x,\alpha)\,dx. \tag{80}$$

О функцијама $\chi(\alpha)$ добијеним интеграцијом једне функције која садржи променљив параметар α било је пре говора и показано је како се многобројне трансценденте могу на тај начин дефинисати. У случају, нпр., кад је $\Phi(x,\alpha)$ каква рационална комбинација једне функције $u(x)$, функција $\chi(\alpha)$ може се разложити на просте чиниоце на раније показан начин и, водећи рачуна о адиционој теореми за елиптичну функцију Sn, лако се увиђа *да се трансцендента* $\Theta(\alpha)$ *може изразити помоћу извесне алгебарске комбинације функцијâ* $\varphi_i(\alpha)$ *и трансцендената*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Sn}[A_0\Theta(r,\alpha)], & \mathrm{Sn}[A_1\Theta'(r,\alpha)], \\ \mathrm{Sn}[A_2\Theta''(r,\alpha)], & \mathrm{Sn}[A_3\Theta'''(r,\alpha)], \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{81}$$

где су $A_0, A_1, A_2, \ldots$ и r извесне константе а $\Theta(r,\alpha)$ један од простих елемената дефинисаних приликом речи о линеарној једначини првога реда.

Помоћу онога што је казано о тој једначини, лако је нпр., образовати опште типове диференцијалних једначина са сталним критичним тачкама, за које ће трансцендента $\Theta(\alpha)$ бити алгебарска комбинација функцијâ $\varphi_i(\alpha)$ и трансцендената (81), где се јавља као прости елеменат $\Theta(r,\alpha)$ трансцендента

$$\Theta(r,\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{\sqrt{a+bn}}$$

или

$$\Theta(r,\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \log(n+1) \quad \text{итд.},$$

на које смо раније наишли.

У специјалном случају, кад је $\Phi(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{x}$ и $a = \infty$, трансцендента $\Theta(\alpha)$ биће алгебарска комбинација функцијâ $\varphi_i(\alpha)$ и трансценденте

$$\mathrm{Sn}\left[\Gamma(\alpha)\right] \quad \text{итд.}$$

3. случај: нека је род једначине (78) већи од јединице. Према теореми г. Поенкареа, једначина се може тада интегралити помоћу чисто алгебарских операција, тако да ће општи интеграл бити извесна алгебарска функција сачинилаца једначине. *Трансцендента* $\Theta(\alpha)$ *биће, дакле, алгебарска комбинација оних функција* $\varphi_i(\alpha)$ *које долазе експлицитно у сачиниоцима једначине.*

*

Ови се резултати могу генералисати и на друге, много општије класе диференцијалних једначина првога реда са променљивим параметрима. Тако је г. Пенлеве показао да се г. Поенкареови елементи редукције јављају и онда кад критичне тачке општега интеграла нису сталне, али интеграл има ограничен број вредности кад интеграциона променљива величина обилази око таквих покретних критичних тачака. Исти је математичар дао и методе по којима се може на датој једначини распознати да ли њен општи интеграл задовољава овај услов или не. И кад се то доведе у везу са довде изложеним резултатима, види се да се они могу распрострти на веома простране класе диференцијалних једначина првога реда и да елементи редукције за трансценденте са којима смо имали посла у овоме раду, вреде у исти мах као елементи редукције и за врло простране класе аналитичких трансцендената. У исто време, ти резултати истичу оно што сам понајвише и хтео истаћи у овоме раду, а то је: обиље трансцендената дефинисаних помоћу једначина првога реда са променљивим параметрима и могућност њиховог свођења на комбинације извесних, уосталом, веома многобројних трансцендената до којих би било немогућно доћи кад би се интеграл сматрао као функција интеграционе променљиве величине.**

** За ову Петровићеву расправу, професор Владимир Варићак је саставио кратак садржај на немачком језику који је објављен у Izvješća o raspravama Matematičko-prirodoslovnoga razreda JAZU, 1867–1914, Zagreb 1916–1917, стр. 34–37 (пр. Д. Т.).

О РЕЗИДУУМИМА ФУНКЦИЈА ДЕФИНИСАНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ВИШЕГ РЕДА*

У многим истраживањима важно је умети израчунати остатке функција имплицитно дефинисаних датим диференцијалним једначинама, а да при том нема потребе ни начина да се функција изрази у експлицитном облику. У једном ранијем раду[1] бавио сам се овим питањем за случај функција дефинисаних једначинама првог реда и при том сам показао како се могу израчунати остаци тих функција који се односе *на покретне просте полове* (чије се постојање непосредно препознаје на датој једначини), како се може установити да ли се ти остаци мењају или не мењају са интеграционом константом итд. Мој циљ је да овде проширим ова истраживања на једначине вишег реда. Добијени резултати мање су потпуни од оних у случају првог реда, али ипак могу бити од користи у извесним истраживањима.

Почнимо подсећањем на извесне *неопходне* услове да једначина било ког реда има *покретне* полове одређеног реда.

Нека је дата једначина p-тог реда

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0, \tag{1}$$

која се може написати у облику

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} \ldots y^{(p)^{m_{pi}}} = 0, \tag{2}$$

где су m_{ij} позитивни цели бројеви такви да за два различита индекса i и j није истовремено

---

* Наслов оригинала: Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles d'ordre supérieur, Věstnik král. česke společnosti náuk, Praha 1898, Trida math. prirodovedecká, t. VI, pp. 1–24; саопштено у Чешкој академији наука 11. фебруара 1898.

[1] Math. Annalen, Bd. 48 (1896).

$$m_{0i} = m_{0j}, \quad m_{1i} = m_{1j}, \ldots, \quad m_{pi} = m_{pj},$$

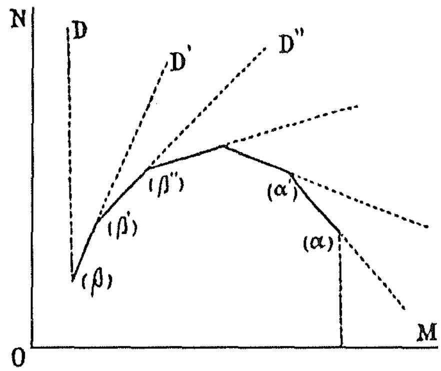
а $\varphi_i(x)$ су било какве функције од x.

Формирајмо двоструку табелу следећих $2s$ позитивних целих бројева

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki},$$

$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi} = \sum_{k=1}^{k=p} km_{ki}.$$

Повуцимо у равни две осе, осу бројева M и осу бројева N, и обележимо s тачака (M_i, N_i), при чему ћемо поред сваке од њих записати њен индекс. Може се десити да се две тачке (M_i, N_i), или више њих поклопе; тада ће се поред једне такве *вишеструке тачке* ставити индекс свих тачака које су се у њој подудариле.



Слика 1.

Конструишимо полигоналну линију П која је конкавна у односу на OM и у својој унутрашњости или на својој периферији садржи све тачке (M_i, N_i). Назовимо *доменом* неке тачке (M_i, N_i) најшири интервал λ_1, λ_2 такав да, кад λ варира у том интервалу, права која има коефицијент правца λ и пролази кроз тачку (M_i, N_i) у почетку има стално већу ординату него било која права повучена кроз неку другу од тачака (M_i, N_i) и са истим коефицијентом правца.

Очигледно је да је домен тачке (M_i, N_i) која није теме полигоналне линије П једнак нули. Супротно овоме, лако се увиђа да је:

1. домен темена (β) најближег оси OM интервал од

$$\lambda = \frac{N_\beta - N_{\beta'}}{M_\beta - M_{\beta'}} \quad \text{до} \quad \lambda = +\infty;$$

2. домен темена (α) најближег оси OM је интервал од

$$\lambda = \frac{N_\alpha - N_{\alpha'}}{M_\alpha - M_{\alpha'}} \quad \text{до} \quad \lambda = -\infty;$$

3. домен једног међутемена (i), које се налази између темена (i') и (i'') представља интервал од

$$\lambda = \frac{N_i - N_{i'}}{M_i - M_{i'}} \quad \text{до} \quad \lambda = \frac{N_i - N_{i''}}{M_i - M_{i''}}.$$

На слици је домен темена (β) представљен углом $D\beta D'$, домен темена (β′) углом $D'\beta' D''$,..., најзад домен темена (α) углом Δ и Δ′.

Ставимо ради краћег писања

$$(3) \qquad \begin{aligned} \gamma_{0i} &= m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\ \gamma_{1i} &= m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{hi} &= m_{h+1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \end{aligned}$$

па затим

$$(4) \qquad A_i = \lambda^{\gamma_{0i}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} (\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1i}}$$

и посматрајмо једначину

$$(5) \qquad \Sigma A_i \varphi_i(a) = 0,$$

где знак Σ показује да се сабирање простире на индексе свих тачака (M_i, N_i) које се поклапају у вишеструком темену, где је γ један од индекса и где је a произвољан број. Једначина (5) је алгебарска по λ, а њени коефицијенти зависе од a; њу ћемо назвати: *једначином по λ која се односи на вишеструко теме* (γ). Сваком вишеструком темену полигоналне линије П одговара једна једначина по λ дефинисана са (5).

У вези са овим, у једном свом ранијем раду[2] доказао сам следећу теорему:

Кад год општи интеграл једначине (1) *има покретне тачке бесконачности фиксираног реда* k, *испуњен је бар један од следећих услова:*

1. *полигонална линија* П *има страну чији је коефицијент правца једнак* – k;

[2] *Докторска дисертација*, Париз 1894.

2. *полигонална линија* П *има вишеструко теме чији домен садржи вредност* – k *и такво је да једначина по* λ *која се односи на то теме има, за било које* a, *корен чији је реалан део једнак* a – k.

Интеграл, дакле, може имати просте непокретне полове само ако је испуњен један или други од следећих услова:

1. полигонална линија П има страну са коефицијентом правца – 1;

2. линија П има вишеструко теме чији домен садржи вредност – 1 и такво је да једначина по λ која се односи на то теме има, за било које a, корен једнак $a - 1$.

Ова теорема истовремено даје могућност да се формулишу довољни услови да сви покретни полови, у случају кад они заиста постоје, буду само прости полови.

Претпоставићемо да су испуњени горе формулисани услови, неопходни за постојање покретних простих полова. Интеграл тада може имати такве полове; ако их нема, остаци су једнаки нули; ако их има, остаци се могу израчунати на следећи начин.

Нека је $x = a$ покретан пол интеграла; ставимо

$$y = \frac{\rho}{x-a} + \psi(x), \tag{6}$$

где је ρ тражени остатак а $\psi(x)$ је функција која остаје ограничена за $x = a$. Ако се стави

$$f(x) = \rho + (x-a)\,\psi(x), \tag{6'}$$

имаћемо

$$\begin{aligned}
y &= (x-a)^{-1} f(x),\\
y' &= (x-a)^{-1} f'(x) - (x-a)^{-2} f(x),\\
y'' &= (x-a)^{-1} f''(x) - 2(x-a)^{-2} f'(x) + 2(x-a)^{-3} f(x),\\
y''' &= (x-a)^{-1} f'''(x) - 3(x-a)^{-2} f''(x) + 6(x-a)^{-3} f'(x) - 6(x-a)^{-4} f(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

тако да општи члан у (2) узима облик

$$\varphi_i(x)(x-a)^{-(M_i+N_i)}[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)],$$

где је $\theta_i(x)$ полином по

$$f(x), (x-a) f'(x), (x-a)^2 f''(x), \ldots, (x-a)^p f^{(p)}(x)$$

у коме нема члана који би зависио само од $f(x)$ и где је

$$A_i = (-1)^{\gamma_{0i}+\gamma_{1i}+\ldots+\gamma_{p-1i}} 2^{\gamma_{1i}} 3^{\gamma_{2i}} \ldots p^{\gamma_{p-1i}},$$

при чему су бројеви γ_{hi} дефинисани са (3). Имаћемо онда

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)(x-a)^{-(M_i+N_i)}\left[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)\right].$$

Уочимо у том збиру скуп T чланова за које је експонент $-(M_i+N_i)$ степена од $x-a$, фактора сабирака, најмањи. У зависности од вредности бројева M_i и N_i, скуп T састоји се од само једног, од два или од више чланова. Уопште, да чланови са индексима γ, δ, ε,... припадају скупу T, уколико се индексу i додељују све вредности од 1 до s различите од индекса чланова који припадају скупу T, потребно је и довољно да истовремено буду испуњени следећи услови

$$M_\gamma + N_\gamma = M_\delta + N_\delta = M_i + N_i = \ldots$$

Тада се, расуђивањем сличним ономе које сам раније употребио у испитивању нула и тачака бесконачности интеграла[3], лако добијају следећи резултати:

I. Да се скуп T састоји само од једног члана, потребно је и довољно да полигонална линија П нема страну са коефицијентом правца –1, а такође да нема вишеструко теме чији домен садржи вредност –1.

Индекс јединог члана који образује скуп T тада ће бити индекс простог темена чији домен садржи вредност –1.

II. Да се T састоји од два или више чланова, потребно је и довољно да буде испуњен бар један од следећих услова:

1. или линија П има страну са коефицијентом правца –1; T је тада збир свих чланова у F који одговарају индексима тачака на тој страни;

2. или ова линија има вишеструко теме чији домен садржи вредност –1; T је тада збир свих чланова који одговарају индексима тог темена.

Искористимо сада те резултате да бисмо левој страни F једначине (2) дали извесне облике који ће нам бити потребни у ономе што следи. Најпре, будући да у случају кад је испуњен услов I нема покретних простих полова, тај случај ћемо оставити по страни.

Претпоставимо онда да је испуњен услов (II, 1). Скуп T ће тада бити збир свих чланова који одговарају индексима тачака на страни са коефицијентом правца –1. Договоримо се да означимо са

[3] *Докторска дисертација*, Париз 1894.

$\sum\limits_{(i,j)}$ сабирање преко индекса свих тачака (M_i, N_i) на правој кроз тачке са индексима i и j, а са

$\sum\limits_{-(i,j)}$ сабирање преко индекса свих тачака различитих од тачака на правој која пролази кроз тачке (i, j).

Нека су γ и δ индекси две тачке на страни полигоналне линије са коефицијентом правца -1; тада је

$$(10) \qquad T = (x-a)^{-(M_\gamma + N_\gamma)} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x),$$

са

$$(11) \qquad \Omega_i(x) = \varphi_i(x)[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)],$$

а F се може написати у облику

$$F = T + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{-(M_i+N_i)} \Omega_i(x),$$

или

$$(12)\ F = (x-a)^{-(M_\gamma+N_\gamma)} \left[\sum_{-(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{M_\gamma+N_\gamma-M_i-N_i} \Omega_i(x) \right],$$

а треба приметити да су експоненти

$$M_\gamma + N_\gamma - M_i - N_i\,,$$

који фигуришу на десној страни једначине, сви позитивни и да је T тада скуп свих тачака са најмањим експонентом степена од $x-a$.

Претпоставимо сада да је испуњен услов (II, 2). Тада је T збир свих чланова који одговарају индексима вишеструког темена у чијем је домену садржана вредност -1. Договоримо се да означимо са

$\sum\limits_{(\gamma)}$ сабирање преко индекса свих тачака које се поклапају у вишеструком темену чији је један од индекса γ; а са

$\sum\limits_{-(\gamma)}$ сабирање преко свих индекса i од 1 до s различитих од тачака које се поклапају у темену γ. Тада ће бити

$$T = (x-a)^{-(M_\gamma+N_\gamma)} \sum_{(\gamma)} \Omega_i(x)$$

и одатле

$$F = T + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{-(M_\gamma+N_\gamma)} \Omega_i(x),$$

или

$$(13)\qquad F=(x-a)^{-(M_\gamma+N_\gamma)}\left[\sum_{(\gamma)}\Omega_i(x)+\sum_{-(\gamma)}(x-a)^{M_\gamma+N_\gamma-M_i-N_i}\,\Omega_i(x)\right],$$

са свим експонентима

$$M_\gamma+N_\gamma-M_i-N_i$$

позитивним. Треба још приметити да ће, стога што збир $\sum\limits_{(\gamma)}$ треба да се простире преко индекса свих тачака које се подударају у темену са индексом γ и што све те тачке имају исте координате и, посебно, исту апсцису, ако се та апсциса означи са μ, према формули (11), бити

$$(14)\qquad \sum_{(\gamma)}\Omega_i(x)=f(x)^{\mu}\sum_{(\gamma)}A_i\varphi_i(x)+\sum_{(\gamma)}\varphi_i(x)\theta_i(x).$$

Зауставимо се сада на оним формама које F узима у околини тачке $x=a$. Каква год да је ова форма, резултат уношења у F функције y, дефинисане са (6), треба да буде идентички једнак нули за свако x из околине тачке $x=a$, јер је y интеграл једначине $F=0$. Имаћемо, према томе, у тој околини идентички било

$$(15)\qquad \sum_{(\gamma,\delta)}\Omega_i(x)+\sum_{-(\gamma,\delta)}(x-a)^{M_\gamma+N_\gamma-M_i-N_i}\,\Omega_i(x)=0,$$

било

$$(16)\qquad \sum_{(\gamma)}\Omega_i(x)+\sum_{-(\gamma)}(x-a)^{M_\gamma+N_\gamma-M_i-N_i}\,\Omega_i(x)=0,$$

према томе да ли F у околини тачке $x=a$ узима облик (12) или облик (13). У том случају, за који важи једначина (16), збир

$$\sum_{(\gamma)}\Omega_i(x)$$

биће приказан једначином (14), а у осталим случајевима (11).

Претпоставимо сада да x тежи ка a. Како је ова вредност прост пол функције y, према формули (6), добијамо

$$\begin{aligned}
&\lim f(x)=\rho,\\
&\lim(x-a)\,f'(x)=0,\\
&\lim(x-a)^2 f''(x)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lim(x-a)^p f^{(p)}(x)=0
\end{aligned}$$

за сваку вредност a. А како су изрази $\theta_i(x)$ полиноми по

$$f(x), \quad (x-a)f'(x), \ldots, \quad (x-a)^p f^{(p)}(x)$$

у којима нема чланова који зависе једино од x, за $x = a$ имаћемо

$$\lim \theta_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s).$$

Одатле, за сваку вредност a, сем за неке посебне вредности a' за које функције $\varphi_i(x)$ постају бесконачне и које ће нам увек унапред бити познате, имаћемо

$$(17) \qquad \lim \Omega_i(x) = A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s).$$

А водећи рачуна о неједнакостима

$$M_\gamma + N_\gamma > M_i + N_i,$$

за сваку вредност a различиту од свих утврђених вредности a' добиће се следећи резултати:

А) *Ако је испуњен услов* (II, 1) и уколико се са D и δ означе индекси два темена која ограничавају страну са коефицијентом правца -1, имаћемо

$$(18) \qquad \sum_{(\gamma,\delta)} A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0.$$

Ово је алгебарска једначина по ρ са коефицијентима који зависе од a: назваћемо је *једначином по* ρ *која се односи на страну са коефицијентом правца* -1. Она увек има најмање један коначан и од нуле различит корен по ρ, јер се међу бројевима M_i који фигуришу на њеној левој страни налазе бар два међусобно различита. *Ови корени су тражени остаци.*

Имамо, дакле, за случај кад је испуњен услов (II, 1), следеће практично правило за израчунавање остатака интеграла:

Треба конструисати полигоналну линију П *дате диференцијалне једначине и образовати једначину по* ρ *која се односи на страну те линије чији је коефицијент правца* -1; *корени различити од нуле ове једначине представљају тражене остатке.*

Одатле се, даље, изводе следећи резултати: остаци су алгебарске функције функција $\varphi_i(a)$ које одговарају индексима тачака на страни чији је коефицијенат правца -1; да они буду алгебарске функције покретних полова, потребно је и довољно да односи између било које две од функција $\varphi_i(x)$ буду алгебарске функције од x.

Да се остаци не мењају са интеграционим константама, потребно је и довољно да ти односи буду независни од x.

Тако ће бити, на пример, кад год у диференцијалној једначини x не фигурише експлицитно. У том случају су, уосталом, сви полови покретни стога што се тада појављује једна адитивна, уз x интеграциона константа.

Применимо претходно правило на неколико општих типова једначина.

Први пример: једначина

$$P(x,y)\,y''+Q(x,y)=0,$$

где су P и Q полиноми по x. Нека су m и m' највећи и најмањи степен експонента степена од y у P, а n и n' одговарајући бројеви за Q. Полином F има две врсте чланова:

1. чланове облика

$$\varphi_i(x)\,y^i y'' \qquad (i=m', m'+1, \ldots, m-1, m),$$

који дају тачке

$$M_i=i+1, \qquad N_i=2,$$

које се налазе на правој $N=2$;

2. чланове облика

$$\psi_k(x)\,y^k \qquad (k=n', n'+1, \ldots, n-1, n),$$

који дају тачке

$$M_k=k, \qquad N_k=0.$$

Пошто се конструише полигонална линија која одговара овим тачкама, лако је уверити се да ће услов за постојање покретних простих полова бити испуњен ако је

$$n'=m+3,$$

и да су, кад је тај услов испуњен, сви покретни полови прости.

Ако се полиноми P и Q напишу у облику

$$P(x,y)=\varphi_0(x)\,y^m+\varphi_1(x)\,y^{m-1}+\ldots,$$

$$Q(x,y)=\psi_0(x)\,y^n+\psi_1(x)\,y^{n-1}+\ldots,$$

чланови израза F који одговарају страни полигоналне линије са коефицијентом правца -1 су

$$\varphi_0(x)\,y^m y'' \quad \text{и} \quad \psi_0(x)\,y^n.$$

За први члан имамо

$$M=m+1, \qquad N=2,$$

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=0,\ \gamma_3=0, \ldots$$

и одатле

$$A = 2.$$

За други члан имаћемо

$$M = n, \quad N = 0,$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = 0$$

и одатле

$$A = 1.$$

Једначина по ρ, пошто се подели са ρ^{m+1}, биће, дакле,

$$\psi_0(a)\rho^2 + 2\varphi_0(a) = 0.$$

Остаци у покретним половима, према томе, биће

$$\rho_1 = \sqrt{-\frac{2\varphi_0(a)}{\psi_0(a)}} \quad \text{и} \quad \rho_2 = -\sqrt{-\frac{2\varphi_0(a)}{\psi_0(a)}},$$

а ако је однос

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}$$

независан од x, ови остаци биће независни од интеграционих константи.

Други пример: једначина

$$y'' + P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0.$$

Дајући вредностима m, m', n и n' претходна значења, лако се установљава да полигонална линија П не може имати вишеструких темена и да она има највише две стране са негативним коефицијентима правца, наиме, страну са коефицијентом правца $-\frac{1}{m}$ и ону са коефицијентом $-\frac{1}{n-m-1}$. За постојање покретних простих полова потребно је и довољно, дакле, да буде

$$n = m + 2.$$

У партикуларном случају, кад је $m = 1$, $n = 3$, постоји само једна страна са негативним коефицијентом правца и тај коефицијент једнак је -1. Сви покретни полови тада су прости. Ако се P и Q напишу у облику

$$P(x, y) = \varphi_0(x)\, y + \varphi_1(x),$$

$$Q(x, y) = \psi_0(x)\, y^3 + \psi_1(x)\, y^2 + \psi_2(x)\, y + \psi_3(x),$$

чланови израза F који одговарају страни са коефицијентом правца -1 су

$$y'', \quad \varphi_0(x)\,yy' \;\text{ и }\; \psi_0(x)\,y^3.$$

За први члан имамо

$$M = 1, \quad N = 2,$$
$$\gamma_0 = \gamma_1 = 1, \;\; \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = 0, \;\; A = 2.$$

За други члан

$$M = 2, \quad N = 1,$$
$$\gamma_0 = 1, \;\; \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = 0, \;\; A = -1.$$

Најзад, за трећи

$$M = 3, \quad N = 0,$$
$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = 0, \;\; A = 1.$$

Једначина по ρ, пошто се подели са ρ, биће, дакле,

$$\psi_0(a)\,\rho^2 - \varphi_0(a)\,\rho + 2 = 0,$$

а остаци у односу на покретне полове биће

$$\rho_1 = \frac{\varphi_0(a) + \sqrt{\varphi_0(a)^2 - 8\psi_0(a)}}{2\psi_0(a)} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{\varphi_0(a) - \sqrt{\varphi_0(a)^2 - 8\psi_0(a)}}{2\psi_0(a)}.$$

Трећи пример: једначина

$$y''^{p} + P(x, y)\,y'^{q} = 0,$$

где је P полином по y. Ако се са m и m' означе највећи и најмањи експонент степена од y у P, лако је уверити се да:

1. полигонална линија Π не може имати вишеструких темена;

2. она не може имати више од једне стране са негативним коефицијентом правца; да би та страна постојала, потребно је и довољно да буде испуњен један од услова

$$\frac{q}{2} < p < m + q$$

или

$$\frac{q}{2} > p > m + q,$$

а у том случају њен коефицијент правца једнак је

$$-\frac{2p-q}{m+q-p}.$$

Одатле, да тај коефицијент буде једнак -1, потребно је и довољно да буде

$$3p = m + 2q.$$

Под претпоставком да је тај услов испуњен, сви покретни полови су прости. Ако се тада P напише у облику

$$P(x,y) = \varphi_0(x)\,y^m + \varphi_1(x)\,y^{m-1} + \ldots,$$

чланови израза F који одговарају страни са коефицијентом правца -1 јесу

$$y''^p \quad \text{и} \quad \varphi_0(x)\,y^m y'^q.$$

За први члан имамо

$$M = p, \quad N = 2p,$$
$$\gamma_0 = p, \;\; \gamma_1 = p, \;\; \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = 0, \;\; A = 2^p,$$

а за други

$$M = m+q, \quad N = q,$$
$$\gamma_0 = q, \;\; \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = 0, \;\; A = (-1)^q.$$

Једначина по ρ, претходно подељена са ρ^{m+q}, према томе, биће

$$2^p \rho^{p-m-q} + (-1)^q \varphi_0(a) = 0,$$

а остаци у покретним половима биће

$$\rho_i = \alpha_i \sqrt[p-m-q]{\frac{(-1)^{q-1}\varphi_0(a)}{2^p}},$$

где су бројеви α_i корени биномне једначине

$$\alpha^{p-m-q} + 1 = 0.$$

Одатле излази да су, ако је коефицијент $\varphi_0(x)$ независан од x, остаци интеграла независни од интеграционих константи.

Вратимо се сада на општи случај.

Б) *Претпоставимо да је испуњен услов* (II, 2) и означимо са γ индекс вишеструког темена чији домен садржи вредност -1. Тада ћемо имати

(19) $$\sum_{\gamma} A_i \varphi_i(a) = 0,$$

где се сабирање врши преко свих индекса вишеструког корена чији је један од индекса γ. Ова једначина није ништа друго до једначина по λ која се односи на теме (γ), уколико је у њој $\lambda = -1$.

Ако ниједан од коефицијената који одговарају темену (γ) не садржи x, лева страна једначине (19) представља константу K, независну од α, а тада:

1. уколико је $K \gtrless 0$, интеграл не може имати покретне просте полове;

2. уколико је $K = 0$, одатле се не може добити никакав резултат који би се односио на просте полове и на остатке у њима.

Ако, сада, бар један од коефицијената $\varphi_i(x)$ који одговарају темену (γ) садржи x, тако да једначину (19) не може задовољити било које α, нема покретних простих полова; прости полови тада се могу подударити само са утврђеним вредностима α' или са коренима једначине (19).

Због тога *једини случајеви у којима се реализује околност коју имамо у виду јесу случајеви постојања покретних простих полова, у којима:*

1. *или полигонална линија* П *дате диференцијалне једначине има страну са коефицијентом правца* -1, при чему смо установили како се израчунавају остаци;

2. *или та линија има вишеструко теме чији домен садржи* -1 *и такво је да његова једначина по* λ *за корен има вредност* -1 *за било које* a; у овом случају остаци остају неодређени.

*

Претходни резултати, мада непотпуни, могу се искористити у извесним истраживањима, посебно у онима код којих је важно да буду познате све вредности које могу имати остаци функција дефинисаних датом диференцијалном једначином а да при том није потребно познавати ове функције у њиховом експлицитном облику. Чак и у случају кад је функција експлицитно дата, понекад је удобније, због једноставности претходног правила, да се формира диференцијална једначина коју задовољава функција о којој је реч и да се непосредно на њу примени правило за израчунавање остатака.

Овде ћу дати једну примену тих резултата, занимљиву са становишта испитивања мероморфних интеграла извесних општих типова диференцијалних једначина.

Претходна правила не могу, очигледно, пружити ниједан податак о постојању мероморфних интеграла за дату диференцијалну једначину; али *у случају када је интеграл ефективно мероморфан,* ова правила дозвољавају, на пример, да се учини очигледном нека значајна околност у вези са интегралима ове природе.

Познато је да свака мероморфна функција може бити представљена као количник две функције $G(x)$ и $H(x)$ холоморфне у целој равни. Одређивање те две функције понекад се врши веома лако; такав је, на пример, случај једноструко или двоструко периодичних мероморфних функција. Али кад је реч о функцијама које су имплицитно дефинисане помоћу диференцијалних једначина, није само немогуће – сем у крајње ретким случајевима – да се потпуно одреде функције $G(x)$ и $H(x)$ него је чак немогуће, да се образују обичне диференцијалне једначине које те функције треба да задовоље. Показаћу како се за неке опште типове једначина, образовањем диференцијалних једначина које оне задовољавају, на неки ближи начин – помоћу претходних расуђивања – могу ближе одредити ове одговарајуће функције $G(x)$ и $H(x)$. Тражење мероморфних интеграла дате једначине тако ће бити сведено на одређивање у целој равни холоморфних интеграла који задовољавају једну другу једначину.

Претпоставимо да је за дату једначину

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$

која експлицитно не садржи x, установљено *да су сви полови интеграла, уколико ефективно постоје, прости и да су односи остатака у њима, узетих два по два, сви реални, позитивни и рационални.* Да би било тако, довољно је – према претходном – да полигонална линија П израза F има једну и само једну страну са негативним коефицијентом правца и да тај коефицијент буде једнак -1; сем тога, да међу вишеструким теменима нема ниједног таквог да једначина по λ која се односи на то теме има целе и негативне корене садржане у домену тог темена; затим, да једначина по ρ која се односи на страну са коефицијентом правца -1 има само један корен различит од нуле, или, ако их има неколико, да односи два по два од њих буду сви реални, позитивни и рационални.

Приметимо да је лако проверити да ли је последњи услов испуњен, без решавања једначине по ρ, будући да, кад се она доведе у облик

$$\rho^m + T_1\rho^{m-1} + T_2\rho^{m-2} + \ldots + T_m = 0$$

(коефицијенти T_i су константе, независне од покретних полова, јер коефицијенти диференцијалне једначине не зависе од x), тада ниједан коефицијент T_i не може бити једнак нули, а ако се образује трансформисани облик, сменом

$$\chi = \frac{\rho}{T_1}$$

ове једначине, овај облик мора имати све корене

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$$

реалне, негативне и рационалне, јер ако се означе са

$$\omega_{i,1}, \omega_{i,2}, \omega_{i,3}, \dots, \omega_{i,m},$$

односи, који су сви позитивни и рационални (по претпоставци), корена

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_m$$

и корена ρ_i, биће

$$\frac{\rho_i}{T_1} = \frac{\rho_i}{-\sum\limits_{k=1}^{k=m} \rho_k} = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{k=m} \omega_{i,k}} = \text{негативан и рационалан број.}$$

Лако ће се, према томе, израчунати сви корени једначине по χ, па стога и сви корени по ρ; или ће се констатовати да тражени услов није испуњен.

Кад се претпостави да су услови испуњени, постојаће број (реалан или имагинаран) такав да је

$$\rho_1 = \mu_1 T_1, \rho_2 = \mu_2 T_1, \dots, \rho_m = \mu_m T_1,$$

где су μ_i позитивни цели бројеви. А како се у околини покретног пола (сви су полови покретни, јер постоји једна адитивна интеграциона константа)

$$y = \frac{\rho_i}{x-a} + \psi(x),$$

при чему је функција $\psi(x)$ холоморфна у околини тачке $x = a$, имаћемо

$$\int y dx = \rho_i \log(x-a) + \Psi(x),$$

где је такође функција $\Psi(x)$ холоморфна у околини тачке $x = a$. Одатле излази да интеграл

$$\frac{1}{m} \int y dx = \mu_i \log(x-a) + \frac{1}{m} \Psi(x)$$

може имати само поларне периоде који су цели умношци броја $2\pi i$, тако да ће

$$G(x) = a^{\frac{1}{T}\int y dx}, \tag{20}$$

као функција од x, *бити холоморфна у целој равни.*

Одатле се добија

$$y = \frac{1}{T}\frac{G'(x)}{G(x)}, \tag{21}$$

па стога, ако би се могла израчунати функција $G(x)$, мероморфни интеграл y био би доведен у облик количника две функције холоморфне у целој равни. Но, диференцирајући једначину (21) p пута, налази се

$$y = T\frac{G'}{G},$$
$$y' = T\frac{GG'' - G'^2}{G^2},$$
$$y'' = T\frac{GG''' - 3GG'G'' + 2G'^3}{G^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а замењујући ове вредности у датој диференцијалној једначини

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0,$$

добиће се нова једначина реда $p + 1$ коју задовољава функција G. Ако је интеграл y првобитне једначине мероморфан, интеграл нове једначине ће бити холоморфан у читавој равни и добиће се помоћу редова.

Ове функције G(x), *када ефективно постоје, представљају уопштења Вајерштрасових функција* Al(x) *и функција* Θ *из теорије елиптичких функција.*

Лако је, на пример, изложеним поступком препознати Вајерштрасову функцију $Al(x)$. Посматрајмо општи тип једначина

$$y''^p + Q(y') = 0,$$

где је Q полином по y' степена n. Ако се n налази између p и $2p$, полигонална линија има страну са негативним коефицијентом правца и тај коефицијент једнак је

$$-\frac{2p - n}{n - p}.$$

Да он буде једнак -1, потребно је и довољно да је

$$3p = 2n,$$

а при том услову сви су полови интеграла прости (лако је уверити се да нема вишеструких темена).

Једначина по ρ' која се односи на страну са коефицијентом правца -1 овде је

$$2^p \rho'^{p-n} + (-1)^n h = 0,$$

где h означава коефицијент уз највиши степен променљиве y' у Q. Остаци су, према томе,

$$\rho_i = \alpha_i \sqrt[p-n]{\frac{(-1)^{n-1} h}{2^n}},$$

где су бројеви α_i корени биномне једначине

$$\alpha^{p-n} + 1 = 0.$$

У партикуларном случају, кад је

$$p = 2, \quad n = 3,$$

услов

$$3p - 2n = 0$$

испуњен је и тада постоји само један остатак, чија је вредност

$$\rho = -\frac{4}{h}.$$

Одатле, ако је функција y мероморфна, тада је функција

$$G(x) = e^{\frac{h}{4}\int v dx}$$

холоморфна у целој равни. Ово проверавамо на једначини

$$y''^2 - 4y'(1 - y')(1 - k^2 y') = 0, \tag{23}$$

која припада проученом типу. Овде је $h = 4k^2$, а резултат је

$$\rho = -\frac{1}{k^2};$$

стога функција

$$G(x) = e^{-k^2 \int y dx} \tag{24}$$

мора бити холоморфна у читавој равни, уколико је функција y у њој мероморфна, што је овде случај, будући да је општи интеграл једначине (23)

$$y = \int [\operatorname{sn}(x + C_1)]^2 dx + C_2,$$

а функција $G(x)$ није ништа друго него до на једну константу Вајерштрасова функција

$$Al(x) = e^{-k^2 \int_0^x dx \int_0^x \operatorname{sn}^2 x dx},$$

која је, свакако, холоморфна у целој равни.

Може се десити да задата једначина

$$F = 0$$

не задовољава услов поседовања само полова интеграла који су прости и такви да су односи између по два њихова остатка сви реални, позитивни и рационални, али да се при том, кад се стави

$$z = R(y, y', \ldots, y^{(q)}), \tag{25}$$

где је R рационална функција од $y, y', \ldots, y^{(q)}$ са константним и неодређеним коефицијентима a_i, може располагати тим коефицијентима тако да претходни услови буду испуњени за нову диференцијалну једначину по z добијену овом заменом функција. А како је, уколико је y мероморфна функција, z такође таква, може се наћи константа T таква да функција

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int R(y, y', \ldots, y^{(q)}) dx}, \tag{26}$$

пошто је у њој y замењено било којим мероморфним интегралом једначине $F = 0$, постане у читавој равни холоморфна.

Из (26) се узастопним диференцирањем добијају једнакости

$$\frac{G'}{G} = \frac{1}{T} R(y, y', \ldots, y^{(q)}),$$

$$\frac{GG'' - G'^2}{G^2} = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial R}{\partial y} y' + \frac{\partial R}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial R}{\partial y^{(q)}} y^{(q+1)}\right],$$

$$\frac{G^2 G''' - 3GG'G'' + 2G'^3}{G^3} = \frac{1}{T}\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial R}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial R}{\partial y^{(q)}} y^{(q+1)}\right],$$

....

помоћу којих је могуће формирати једну једначину реда $p+q$ коју задовољава функција $G(x)$.

Ове функције G(x) *су уопштења оних на које је скренуо пажњу г. Пикар*[4], *а које се односе на једначину*

$$P(y,y')\,y''+Q(y,y')=0 \tag{27}$$

(где су P *и* Q *полиноми по* y *и* y'*) када је њен интеграл мероморфан.*

Г. Пикар је показао, посебно, да ако је интеграл y једначине

$$y''+ay^3+by^2+cy+d+kyy'=0 \tag{28}$$

(где су $a, b,.., k$ константе) мероморфан, тада се константе

$$A, B, C, m, n, p, q, r, s$$

могу одредити тако да, кад се стави

$$\begin{gathered} Y=Ay^2+By+Cy', \\ R=mY^3+nY^2+pY+(qY+r)\,Y'+sY'^2, \end{gathered} \tag{29}$$

израз

$$G(x)=e^{\int R dx} \tag{30}$$

постане функција од x која је холоморфна у целој равни и задовољава једну једначину трећег реда, која се може лако формирати.

Ови резултати добијају се и нашим методама, а може се, штавише, додати следећа примедба која се односи на једначину (28). Полигонална линија једначине има три темена A, B и C чије су координате

$$A(0,0), \quad B(1,2), \quad C(3,0).$$

Страна BC има, дакле, коефицијент правца -1 и она, поред два темена B и C који је ограничавају, садржи још тачку $D(2,1)$. Три тачке B, C и D које се налазе на тој страни потичу од чланова

$$y'', \quad ay^3, \quad kyy',$$

те је стога једначина по ρ која се односи на ту страну

$$a\rho^2-k\rho+2=0,$$

чији су корени

[4] Journal de mathématiques pures et appliquées (1889), pp. 283–287.

$$\rho_1 = \frac{k+\sqrt{k^2-8a}}{2a} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{k-\sqrt{k^2-8a}}{2a}.$$

Према ономе што претходи, кад год је однос

$$\frac{k-\sqrt{k^2-8a}}{k+\sqrt{k^2-8a}}$$

реалан, позитиван и рационалан број, може се наћи константа T таква да је

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int y dx}$$

цела функција од x, уколико је у њој y замењено мероморфним интегралом једначине (28).

На завршетку, додаћемо да је лако конструисати опште типове једначина било ког реда p на које се могу применити претходни резултати.

Најпре ће се тако унапред дати полигонална линија П која има само једну страну са негативним коефицијентом правца, при чему је тај коефицијент једнак -1, и тачке (M_i, N_i) које та линија обухвата. Одређивање чланова који одговарају овим тачкама своди се онда на решавање система линеарних хомогених једначина по целим позитивним бројевима. Да би се нашао члан једначине реда p који одговара датој тачки (M_i, N_i), потребно је решити систем две једначине

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi},$$
$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi}$$

по позитивним целим бројевима, а да проблем буде могућ потребно је и довољно да је

$$pM_i - N_i \geq 0.$$

Овде може бити више система решења која одговарају једној истој тачки (M_i, N_i), али број тих система је ограничен и сваки од њих даје по један начин конструисања члана једначине који одговара датој тачки. Конструишући h чланова једначине који одговарају различитим системима решења која се односе на исту тачку (M_i, N_i); ова тачка ће онда бити вишеструка тачка реда h за тако конструисану једначину.

Да би се олакшали рачуни, овде дајем табелу ових решења за једначине другог и трећег реда; њих треба применити на сваку од тачака (M_i, N_i) које смо унапред изабрали у равни NOM (индекси i су изостављени).

1. *за други ред*:

$$N - M \leq m_2 \leq \frac{1}{2} N,$$
$$m_1 = N - 2m_2,$$
$$m_0 = M - N + m_2,$$

или још

$$M - N \leq m_0 \leq M - \frac{1}{2} N,$$
$$m_1 = 2M - N - 2m_0,$$
$$m_2 = N - M + m_0;$$

2. *за трећи ред*:

$$N - 2M \leq m_3 \leq \frac{1}{2} N,$$
$$N - M - 2m_3 \leq m_2 \leq \frac{1}{2}(N - 3m_3),$$
$$m_1 = N - 2m_1 - 2m_3,$$
$$m_0 = M - N + m_2 + 2m_3,$$

или још

$$M - N \leq m_0 \leq M - \frac{1}{2} N,$$
$$2M - N - 2m_0 \leq m_1 \leq \frac{3}{2} M - \frac{1}{2} N - \frac{3}{2} m_0,$$
$$m_2 = 3M - N - 3m_0 - 2m_1,$$
$$m_3 = \frac{1}{2}(N - M + m_0 - m_2).$$

Кад се експоненти функције y и њених извода једном израчунају, испред сваког од тако израчунатог члана ставиће се произвољан коефицијент $\varphi_i(x)$. Укупан збир свих тако добијених чланова који одговарају различитим унапред изабраним тачкама представљаће леву страну диференцијалне једначине која одговара једном таквом систему тачака.**

** Рад реферисан у Revue sémestrielle des publications mathématiques 1898, t. VII, H1g,3 (пр. Д. Т.).

О ЕКСТРЕМУМИМА ИНТЕГРАЛА АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

Под *екстремалним вредностима* једне реалне функције $y(x)$ подразумеваћемо њене праве максимуме и минимуме, тј. оне коначне и реалне вредности те функције за које је њен први извод једнак нули, и сви су јој узастопни изводи коначни, а извод најнижег реда, који је различан од нуле, парног је реда. Тачке (x, y) криве линије што представља функцију $y(x)$, у којима она достиже своје екстремалне вредности, означићемо као *екстремуме* функције.

Екстремуми интеграла једне диференцијалне једначине ма кога реда могу бити *непокретни*, тј. не мењати се од једног партикуларног интеграла до другог са променама интеграционих констаната; они могу бити и *покретни*, тј. мењати се са тим константама.

Тако, нпр., екстремуми интеграла једначине

$$xy' - 2y + 2 = 0$$

јесу непокретни; тај је интеграл

$$y = 1 + Cx^2 \quad (C = \text{const.})$$

и има свој екстремум само у сталној тачки $x = 0$, $y = 1$.

Напротив, интеграл једначине:

$$y'^2 + y^2 = a,$$

који је

$$y = \sqrt{a}\sin(x + C),$$

као и интеграл једначине

$$y'' + f(x)y = 0,$$

где је $f(x)$ функција позитивна за све позитивне вредности x, које имају своје интегралне екстремуме покретне.

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд 1935, стр. 53–70; саопштено у Академији природних наука 22. октобра 1934.

Предмет ће овога рада бити проблем да се непосредно, на самој датој диференцијалној једначини, без потребе да се ова интеграли, распозна да ли су екстремуми њених интеграла непокретни. У том погледу истакнута су два интуитивна факта која дају *довољне* услове за непокретност екстремума и обухватају бескрајан број диференцијалних једначина са непокретним екстремумима. Први факт се односи на једначине *ма кога* реда, а други на једначине *првога* реда. Затим ће бити дато опште и потпуно решење проблема: *распознати на једној датој алгебарској једначини првога реда да ли су тачке* (x, y), *у којима први извод интеграла постаје једнак нули, за дату диференцијалну једначину првога реда непокретне или се померају са променама интеграционе константе.*

1

Нека је дата једначина p-тога реда

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0, \tag{1}$$

где је F полином по $y, y', \ldots, y^{(p)}$ са коефицијентима који могу бити ма какве, алгебарске или трансцендентне функције независно променљиве количине x.

Теорема 1. – *Кад год F не садржи* y′ *на првом степену, а скуп чланова који никако не садрже* y′ *састоји се од збира двеју функција, од којих једна зависи само од* x, *а друга само од* y, *екстремуми општег интеграла једначне* (1) *су непокретни.*

Јер, тада се F може написати у облику

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, y'^{m} + f(x) + \varphi(y) = 0, \tag{2}$$

где је Φ полином по $y, y', \ldots, y^{(p)}$, а m цео позитиван број већи од јединице.

Диференцијалењем једначине (2) по x добија се

$$y'^{m} \frac{d\Phi}{dx} + m y'^{m-1}\Phi + f'(x) + \varphi'(y)\, y' = 0, \tag{3}$$

где је Φ полином по

$$y, y', \ldots, y^{(p)}, y^{(p+1)}.$$

Ако је $x = \alpha$ једна вредност x за коју функција y добија један свој максимум или минимум, и ако се x не поклапа ни са којом од вредности $x = \alpha'$, за коју једна од функција од x што фигуришу као коефицијенти у полиному $\dfrac{d\Phi}{dx}$ постаје бескрајна, једначина се (3) за $x = \alpha$ своди на:

$$f'(\alpha) = 0. \tag{4}$$

Такве вредности α поништавају, дакле, први извод функције $f(x)$, па су, према томе, независне од интеграционих констананата. А пошто ни вредности α' не зависе од тих констананата, то су вредности x за које општи интеграл y достиже своје максимуме или минимуме *сталне*.

С друге стране, пошто се за такву једну вредност $x = \alpha$ једначина (2) своди на

$$f(\alpha) + \varphi(y) = 0, \tag{5}$$

то су и вредности $y = \beta$, добијене решењем једначине (5) по y, такође *сталне*, независне од интеграционих констананата, па су, дакле, интегрални екстремуми *непокретни*.

Једини изузетак, који може наступити кад су испуњени услови теореме 1 јавља се у случајевима кад се једна или друга од функција $f(x)$ и $\varphi(y)$ или обе те функције, своде на константе. Тада је:

1. кад је

$$f(x) = \text{const.} = a,$$

лева страна једначина (3) своди се за $x = \alpha$ идентички на нулу и не намеће никакве погодбе непокретности вредности α. Једначина (2) тада показује да се сви екстремуми интеграла y налазе на правама $y = \beta$, где су β реални корени једначине

$$\varphi(y) + a = 0,$$

али се они тада могу налазити ма где дуж тих правих. Кад једначина нема реалних корена у једноме посматраном бројном размаку, интеграл y нема ниједан максимум ни минимум у томе размаку вредности x;

2. кад је

$$\varphi(y) = \text{const.} = b$$

једначине (2) и (3) за $x = \alpha$ своде се на

$$f(x) + b = 0, \quad f'(x) = 0, \tag{6}$$

што показује да се екстремуми интеграла y налазе на правама $x = \alpha$, где је α један вишеструки корен прве једначине (6), а да се могу налазити ма где дуж тих правих. Кад та једначина (6) нема вишеструких корена у једноме посматраном размаку, интеграл y нема у томе размаку ни максимума ни минимума;

3. кад се обе функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ своде на константе, једначине (2) и (3) не намећу никакве услове непокретности ни вредностима x, ни вредностима y. Али, једначина (2) намеће услов да те две константе морају бити једнаке, а супротно означене; ако тај услов није испуњен, интеграл y не може имати ниједан максимум ни минимум од $x = -\infty$ до $x = +\infty$.Такав је, нпр. случај са једначином

$$y'^2 + y^2 - f(x) = 0, \tag{7}$$

која има своје максимуме и минимуме непокретне, изузимајући једини случај кад се функција $f(x)$ своди на константу, нпр. a, *њен је општи интеграл тада*

$$y = \sqrt{a}\sin(x + C),$$

па његови екстремуми зависе од константе C, али се сви налазе дуж двеју правих:

$$y = \sqrt{a} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{a}\,.$$

Очевидно је да теорема 1, иако врло општег карактера, даје само *довољне*, али не и *потребне* услове за непокретност интегралних екстремума. Да то нису и потребни услови, види се из простога примера једначине првога реда

$$xy' - 2y + 2 = 0; \tag{8}$$

која не задовољава те услове, а за општи интеграл има, међутим

$$y = 1 + Cx^2; \tag{9}$$

њен је једини екстремум обележен вредностима $x = 0$, $y = 1$ и он је непокретан. То ће бити максимум за све партикуларне интеграле за које је интеграциона константа негативна, а минимум за све интеграле за које је та константа позитивна.

Претпоставимо да диференцијална једначина, ма кога реда она била, задовољава услове теореме 1, а не потпада под горе наведени изузетан случај. Екстремуми њених интеграла су непокретни; вредности $x = \alpha$, за које су они достигнути, корени су једначине

$$f'(x) = 0. \tag{10}$$

Из тога излази непосредно да:

Кад год у једноме размаку (a, b) *променљиве* x *једначина* (10) *нема ниједан корен, ниједан партикуларни интеграл једначине нема у томе размаку ни максимума ни минимума.*

И према томе:

Кад једначина (10) *нема уопште реалних корена, ниједан интеграл не може имати ни максимума ни минимума за вредности* x = – ∞ *до* x = + ∞.

Свака грана интегралне криве која остаје коначна и непрекидна у таквоме једном размаку (a, b), има у њему *монотони* ток, непрестано растући, или непрестано опадајући. Та монотоност тока може престати само проласком вредности x кроз какав реални сингуларитет интеграла што се налази у посматраноме размаку, али никако проласком кроз какав максимум или минимум.

2

Теорема 1, примењена на алгебарске диференцијалне једначине првога реда показује да ће екстремуми интеграла бити независни од интеграционе константе за све такве једначине које, написане у облику полинома по y и y' једнаког нули, не садрже y' на првоме степену, а где је члан независан од y' једнак збиру двеју функција $f(x)$ и $\varphi(y)$. При томе, коефицијенти полинома могу бити ма какве функције променљиве x.

Једини се изузетак јавља у случају кад се једна од функција $f(x)$ или $\varphi(y)$, или обе те функције, своде на константу. У свима осталим случајевима екстремуми могу бити достигнути само за вредности x које су корени једначине

$$f'(x) = 0 \tag{11}$$

и ако та једначина нема корена у једноме датом размаку (a, b), ни један интеграл диференцијалне једначине нема у томе размаку ни минимума ни максимума. Он у томе размаку може изменити монотоност свога тока само проласком вредности x кроз какав реалан ситуларитет $x = \lambda$ интеграла y што се налази у томе размаку.

Напоменућемо узгред да се и за такве вредности $x = \lambda$ увек може непосредно на самој датој диференцијалној једначини распознати да ли се они мењају или не са интеграционом константом.

Тога ради елиминишемо y из дате једначине

$$F(x, y, y') = 0 \tag{12}$$

и оне што се добија њеним тоталним диференцирањем по x, па нека је

$$\psi(x, y', y'') = 0$$

резултанта те елиминације која се сменом

$$y' = z, \quad y'' = z'$$

своди на алгебарску диференцијалну једначину првога реда

$$\psi(x, z, z') = 0. \tag{13}$$

Ако је $x = \lambda$ трансцендентан сингуларитет интеграла y једначине (12), он ће бити такав исти сингуларитет и за интеграл z једначине (13). Према познатој теореми из аналитичке теорије алгебарских диференцијалних једначина првога реда, такви су сингуларитети независни од интеграционе константе. Сингуларитет $x = \lambda$, кад би био покретан, морао би, дакле, бити само или пол интеграла или његова алгебарска критичка тачка. Међутим, у општој теорији диференцијалних једначина првога реда познати су *потребни* и *довољни* услови за непокретност како интегралних полова, тако и интегралних алгебарских критичких тачака; да ли су ти услови испуњени или не за једну дату једначину (13), може се распознати непосредно на самој једначини, без потребе да ова буде претходно интеграљена.

3

Поред све своје генералности, став 1 не обухвата све случајеве алгебарских диференцијалних једначина првога реда чији су екстремуми непокретни. То се већ види и по самом примеру (8), који не испуњава погодбе тога става, па ипак нема покретних интегралних екстремума. Постоји, дакле, и других општих случајева непокретности тих екстремума, и један такав општи случај обухваћен је ставом који следује.

Свака се диференцијална једначина првога реда

$$F(x, y, y') = 0, \tag{14}$$

која садржи x експлицитно, може на разне начине написати у таквоме облику да делимични извод $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ зависи само од x. То би се, нпр., у многобројним случајевима учинило решивши једначину $F = 0$ по једној датој функцији $p(x)$ променљиве x и написавши је у облику

$$F(x, y, y') = p(x) - q(y, y') = 0. \tag{15}$$

И тада се лако доказује ова теорема:

Теорема 2. – *Кад год делимични извод* $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ *постаје једнак нули, а делимични извод* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *остаје коначан за* $y' = 0$, *па ма каква била реална и коначна вредност* y, *екстремуми општега интеграла* y *не мењају се са интеграционом константом.*

Јер, из једначине

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0, \tag{16}$$

види се да кад год су испуњени услови става, вредности $x = \alpha$ за које интеграл y достиже који од својих екстремума мора бити један корен једначине

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

па пошто делимични извод (17) зависи само од x, вредност α не зависи од интеграционе константе.

Са друге стране, екстремуми интеграла увек се налазе на линији

$$F(\alpha, y, 0) = 0, \tag{18}$$

која се састоји од скупа правих линија $y = \beta$, где се вредности β добијају решењем једначине

$$F(\alpha, \beta, 0) = 0. \tag{19}$$

Екстремуми су, дакле, сви непокретни.

Једини изузетак који може наступити кад су испуњени услови става 2 јавља се у случају кад се лева страна једначине (19) своди на нулу за α = корену једначине (17), па ма каква била реална коначна вредност y. Тада се екстремуми интеграла мењају са интеграционом константом, али ће се сви налазе на непокретним правама $x = \alpha_1$, где су α_1 реални корени једначине (17). Међутим, ипак, кад та једначина нема реалних корена, интеграл y не може имати ниједан максимум ни минимум.

Између општијих типова алгебарских диференцијалних једначина првога реда које испуњавају услове теорема 2, навешћемо једначине облика

$$f_0(x) + f_1(y) + f_2(y') = 0, \tag{20}$$

где су f_0, f_1, f_2 полиноми са сталним коефицијентима, а међу којима полином $f_2(y')$ има вредност $y' = 0$ као своју вишеструку нулу.

Интегрални екстремуми су *сталне* тачке

$$x = \alpha_i, \quad y = \beta_i, \tag{21}$$

где су α_i реални корени једначине

$$f_0'(x) = 0, \tag{22}$$

а β_i реални корени једначине

$$f_1(y) + f_0(\alpha_i) + f_2(0) = 0 \tag{23}$$

решене по y.

Кад било једначина (22), било једначина (23) нема реалних корена, интеграл y не може имати ни максимума ни минимума од $x = -\infty$ до $x = +\infty$.

Као прост пример поменутог изузетка навешћемо једначину

$$yy' - f(x) = 0, \tag{24}$$

где су све нуле полинома $f(x)$ вишеструке. Наведени факти потврђују се и непосредно на изразу општег интеграла који је

$$y = \sqrt{C + 2\int \sqrt{f(x)}dx}. \tag{25}$$

4

Као један важан специјалан случај алгебарске диференцијалне једначине првога реда са непокретним интегралним екстремумима навешћемо једначину

$$y'^2 + y^2 = f(x), \tag{26}$$

на коју се наилази у понеким општијим проблемима више геометрије и рационалне механике, а која се може интегралити само у једноме ограниченом броју специјалних случајева.

Једначина има реалних интеграла само за оне вредности x за које је функција $f(x)$ позитивна. Из неједнакости

$$y^2 \leq f(x)$$

види се да се свака интегрална крива налази у области D између двеју кривих

$$y = \sqrt{f(x)} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{f(x)},$$

симетричних према оси Ox. Свакој почетној тачки $M_0(x_0, y_0)$ интегралне криве одговара у области D друга једна тачка $M_0'(x_0, y_0)$ те криве, симетрична тачки M_0 према оси Ox.

Претпоставимо, нпр., да се почетна тачка M_0 налази изнад осе Ox. Она је тада у области између те осе и криве

$$y = \sqrt{f(x)}.$$

Кроз M_0 пролазе две гране интегралне криве, једна позитивна и монотоно растућа Y_1, која има за коефицијенат правца дирке у M_0 вредност

$$\sqrt{f(x) - y_0^2},$$

друга позитивна и монотоно опадајућа Y_2, чији је коефицијенат правца дирке у M_0 вредност

$$-\sqrt{f(x_0) - y_0^2}.$$

Тако исто, кроз тачку M_0', која се тада налази у области између осе Ox и криве

$$y = -\sqrt{f(x)},$$

пролазе две гране интегралне криве, једна негативна и монотоно опадајућа U_1, друга негативна и монотоно растућа U_2, обе симетричне кривима Y_1 и Y_2.

Једначина (26) испуњава у једно исто време услове теорема 1 и 2. Према томе:

Максимуми и минимуми сваке од интегралних грана Y_1, Y_2, U_1, U_2 *не мењају се са интеграционом константом* и сваки се од њих поклапа са по којом од сталних тачака

$$[\alpha_k, \sqrt{f(\alpha_k)}], \quad \text{или} \quad [\alpha_k, -\sqrt{f(\alpha_k)}],$$

где су $x = \alpha_k$ реални корени једначине

$$f'(x) = 0. \tag{27}$$

Кад год у једноме размаку (a, b) променљиве x функција $f(x)$ има монотон ток, ниједна од интегралних кривих y нема у томе размаку ни максимума ни минимума. Сваки од лукова тих кривих који остаје коначан и непрекидан у таквоме једном размаку (a, b), *има у томе размаку монотон ток.* И кад размак (a, b) обухвата све реалне вредности x, што наступа кад једначина (27) нема ниједан реалан корен, свака од интегралних кривих *непрестано расте или непрекидно опада док* x *расте од* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Из једне моје опште, раније доказане теореме о нулама алгебарских диференцијалних једначина првога реда, примењене на једначину (26), следује *да се просте нуле интеграла* у *те једначине мењају са интеграционом константом.*

Из саме једначине (26) види се да интегрална крива, пролазећи кроз такву једну покретну нулу $x = \delta$, има у њој за коефицијенат правца дирке једну или другу од вредности

$$\sqrt{f(\delta)} \quad \text{или} \quad -\sqrt{f(\delta)},$$

према томе, да ли, прошавши кроз нулу δ, крива расте или опада. Међутим, такође се из саме једначине (26) непосредно види и то *да су вишеструке нуле интеграла* у *непокретне и да се поклапају са нулама саме функције* f(x). Штавише, свака нула функције $f(x)$ вишеструка је нула свакога интеграла y, јер кад год је $f(x) = 0$, мора бити и $y = 0$, $y' = 0$.

Тако се исто лако увиђа на самој једначини (26) и то *да су вредности* x *за које интеграл* y *постаје бескрајан такође непокретне*, јер за такве вредности x мора и вредност $f(x)$ бити бескрајна. Кад функција $f(x)$ остаје коначна за све реалне вредности x, тако ће исто бити и са ма којом интегралном кривом y: *она ће остати коначна у целоме размаку од* $x = -\infty$ *до* $x = +\infty$.

Све те појединости знатно олакшавају квалитативну интеграцију диференцијалне једначине (26). Ова је још више олакшана једним општим фактом, доказаним у једноме моме ранијем раду[1] , а који се састоји у овоме:

Грана Y_1 интегралне криве *увек се целокупна налази у области између двеју сталних кривих*

$$y = e^{-x}\left[A + \int_{x_0}^{x} e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right], \qquad y = e^{-x}\left[A + \sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

где A означује константу

$$A = y_0 e^{x_0},$$

која зависи само од почетне тачке посматраног интеграла y.

Тако исто, грана Y_2 интеграла криве *увек се целокупна налази у области између двеју сталних кривих*

$$y = e^{x}\left[B - \sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right], \qquad y = e^{x}\left[B - \int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

где B означава константу

$$B = y_0 e^{-x_0},$$

која такође зависи само од почетне тачке интеграла y.

Остале две интегралне криве U_1 и U_2 су симетричне према гранама Y_1 и Y_2 у односу на осу Ox.

[1] *Intégrales premières à restrictions*, Edit. spéc. de l'Acad. royale Serbe, Paris 1929.

Један занимљив факт, везан за једначину (26), а у вези са напред доказаном непокретношћу интегралних максимума и минимума и са монотоношћу тока интегралне криве кад су испуњени означени услови, састоји се у овоме:

Општи интеграл

$$y = \sqrt{a}\,\sin(x + C)$$

једначине

$$y'^2 + y^2 = a, \quad (a = \text{const.})$$

је периодична осцилаторна функција променљиве x и има као периоду број 2π, па ма каква била интегрална почетна тачка.

Али, ако се позитивној константи a придода члан $\varepsilon\varphi(x)$, где је $\varphi(x)$ једна ма каква монотона функција променљиве x, таква да $\varphi'(x)$ нема реалних нула, онда, ма како споро било мењање ове функције, тј. ма колико се она мало разликовала од константе и ма колико мала била вредност позитивне константе ε, једначина

$$y'^2 + y^2 = a + \varepsilon\varphi(x),$$

не само да неће више имати ниједан осцилаторан периодични интеграл већ ће сваки њен коначан интеграл непрестано расти или непрестано опадати, не пролазећи никако из рашћења у опадање, или из опадања у рашћење.

То, према раније доказаном, излази из факта да је

$$f(x) = a + \varepsilon\varphi(x),$$

$$f'(x) = \varepsilon\varphi'(x),$$

па да, према томе, $f'(x)$ нема реалних нула.

Једначина (26) даје, дакле, са ***феноменолошкоī īледишīа*** интересантан пример случаја где *једна, колико се хоће незнаīна измена једноīа факīора у ӣојави може изазваīи несразмерно велику ӣромену īока ӣојаве и ӣоīӣуну дисконīинуалносīи īоīа īока*, тако да се, нпр., *осцилаīорни* ток таквом минималном изменом фактора одједном и без икаквог континуалног преласка из основе измењује и прелази у *моноīони* ток, без и трага од каквих, па и најслабијих осцилација. И та несразмерност ефеката фактора остаје за све време трајања појаве, па ма измена фактора остала за све то време колико се хоће слаба.

Једна физичка појава у којој тај аналитички факт налази своју конкретну примену била би, нпр., појава флуктуација линеарног резонатора. Те су флуктуације, а при подесном избору јединице мере за време t, масу и дескриптивни елеменат y појаве, регулисане диференцијалном једначином

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = \text{const.},$$

која изражава да је збир кинетичке и потенцијалне енергије у појави сталан за све време њеног трајања. Флуктуације су осцилаторне, периодичне и (при поменутоме избору јединица мера) имају за периоду 2π.

Међутим, ако се утицајем каквих спољних узрока учини да тотална енергија резонатора почне ма и најслабије, колико се хоће споро, али монотоно расти или опадати у току времена, појава ће одједном и без икаквог континуалног преласка изгубити не само своју периодичност већ и сам осцилаторни карактер и флуктуације ће у њој бити монотоне.

Појава даје, у исто време, и врло инструктиван пример несигурности закључака изведених резонујући тачно, али на једначини која би била само приближна (јер је при њеноме постављању нешто што се сматрало као врло слабо и занемарљиво занемарено), па ма колико се таква приближна једначина мало разликовала од тачне[2].

5

Приступимо сад решењу проблема за алгебарске диференцијалне једначине првога реда: наћи *потребне и довољне* услове (који би се могли проверити непосредно на датој једначини, без потребе да се ова претходно интеграли) да би реалне или имагинарне тачке $x = \alpha, y = \beta$ у којима први извод интеграла $y(x)$ постаје једнак нули, биле *непокретне*.

Проблем се своди на ова два посебна питања:

1. Кад ће вредности $x = \alpha$, које поништавају извод $y'(x)$ општега интеграла y бити независне од интеграционе константе?

2. Кад ће вредности $y = \beta$, које добија општи интеграл за $x = \alpha$, бити независне од те константе?

Нека је дата једначина

(27) $$f(x, y, y') = 0$$

алгебарска по x, y, y' и нека је

[2] Један факт такве врсте био је предмет дискусије математичара и физичара у Француском физичком друштву у Паризу (седница од 5. јула 1918. год.). О овоме видети и Петровићев рад *Осетљива места обичних и диференцијалних једначина*, Мат. весник, 5–6, Београд 1939, стр. 8–11 (пр. пр.).

$$(28) \qquad \varphi\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0$$

резултанта елиминације променљиве y из једначине (27) и оне која се добија њеним тоталним диференцијалењем по x пошто се у тој резултанти смени

$$y' = u, \quad y'' = \frac{du}{dx}.$$

Са друге стране, диференцирањем једначине

$$(29) \qquad f(x, y, u) = 0,$$

по променљивој x,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy},$$

добија се једначина

$$(30) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y} + u\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy} = 0.$$

Нека је

$$(31) \qquad \psi\left(y, u, \frac{du}{dy}\right) = 0$$

резултат елиминације променљиве x из једначина (29) и (30). Вредности α поклапају се са нулама општег интеграла $u(x)$ једначине (28), а вредности β су нуле општега интеграла $u(y)$ једначине (31). Оба се, дакле, проблема о непокретности вредности α и β своде на један исти аналитички проблем: наћи потребне и довољне услове да би нуле општега интеграла једне дате диференцијалне једначине првога реда

$$(32) \qquad F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

алгебарске по $t, u, \frac{du}{dt}$, биле независне од интеграционе константе.

Тај је проблем у свој својој потпуности решен у мојим ранијим радовима и решење му је садржано у овој ***општој теореми***:

Нека је једначина (што се увек може учинити) написана у облику

$$(33) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} p_k(t, u)\left(\frac{du}{dt}\right)^{m-k} = 0,$$

где су p_k полиноми по t и u, а m највиши степен једначине (32) по изводу $\frac{du}{dt}$.

Потребан и довољан услов за непокретност нула општега интеграла u(t) *једначине* (32) *јесте тај да, кад се деобом буду уклонили сви заједнички фактори полинома*

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m,$$

сваки полином p_k *осим* p_0, *садржи као фактор* u^h, *где је* $h \geq k$.

Непосредном применом теореме на једначине (28) и (31) добија се решење питања под 1 и 2, а тиме и *потпуно решење проблема* о непокретности тачака (α, β).

Разуме се по себи да, кад је реч о правим, реалним максимумима и минимумима интеграла, од интереса су само реалне тачке (α, β).**

** Ова Петровићева расправа објављена је у скраћеном облику и на француском језику *Sur les extremums des intégrales des équations différentielles algébriques*, Académie royale de Serbie, Bulletin A, № 2, Belgrade 1935, pp. 145–149, а о њој је похвално писао J. H. Fischer у часопису FdM, B. 61, S. 1229 (пр. Д. Т.).

О АЛГЕБАРСКИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПРВОГА РЕДА КОЈЕ ПРОИЗВОДЕ ЦЕЛЕ ФУНКЦИЈЕ*

1. Диференцијална једначина првог реда може имати *целе* функције за интеграле било *опште*, било *партикуларне*. Тако једначина

$$y' - 2xy = 0$$

има општи интеграл целу функцију

$$y = Ce^{x^2},$$

а једначина

$$(1 + x^2)\, y' - xy - a = 0,$$

која има општи интеграл мултиформну функцију

$$y = ax + C\sqrt{1 + x^2}\ ,$$

има партикуларни интеграл целу функцију

$$y = ax.$$

Напишимо једначину у облику

(1) $$f(x, y, y') = 0,$$

где је f несводљив полином по y и y', са коефицијентима који су алгебарске функције по x.

У случају када једначина допушта да интеграли (општи или партикуларни) буду *целе трансцендентне функције* по x, полиному f по y и y' намењене су извесне особености, од којих ћемо указати на следеће.

---

* Наслов оригинала: *Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre engendrant des fonctions entières*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade 1938, t. VI–VII, pp. 1–12.

I. *Алгебарске функције које се јављају као коефицијенти степена по* y *и* y′ *у* f *своде се на полиноме по* x.

Заиста, пошто је f алгебарска по x, једначина се увек може написати у облику

$$F(x, X, y, y') = 0, \tag{2}$$

где је F несводљив полином по x, X, y, y', променљиве x и X су везане алгебарском везом

$$G(x, X) = 0, \tag{3}$$

где је G несводљив полином по ове две променљиве.

Када се истакну степени од X, једначина (2) се може написати:

$$F_0(x, y, y') + F_1(x, y, y')X + \ldots + F_{m-1}(x, y, y')X^{m-1} = 0, \tag{4}$$

где је m степен од G по X. И тада:

Сваки интеграл од (2)*, који је цела функција, заједнички је за* m *диференцијалних једначина*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \ldots, \quad F_{m-1} = 0. \tag{5}$$

Јер ако се у (4) y замени интегралом који је цела функција по x, лева страна ове једначине постаје полином по ирационалној алгебарској функцији X са коефицијентима F_k које су целе функције по x. Ако ови коефицијенти не би били нуле, два полинома (3) и (4) по X имали би заједнички фактор који је свакако полином по x и X, јер он дели G. Једначина (3) не би била несводљива и, према томе, мора да је идентички

$$F_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{6}$$

Како F_k не допуштају заједничке факторе (без чега би једначина (2) била сводљива), једначине (5) или су несагласне (у коме случају нема целих интеграла), или дефинишу алгебарску везу између x и y, тако да функција y не би могла бити трансцендентна, што је и требало доказати.

Претпоставимо, тада, да су испуњени услови тврђења I; f ће бити несводљив полином по x, y, y'. Са становишта које нас интересује, такве једначине биле су предмет истраживања многих истраживача (Пенлеве, Малмквист (Malmquist), Петровић итд.) и главни резултати о томе могу се изразити следећим тврђењима.

Кад год једначина допушта интеграле (опште или партикуларне) целе трансцендентне функције:

II. *Једначина никада нема покретне критичне тачке.*

То следи из теореме коју је доказао Малмквист[1].

Ако једначина није са непокретним критичним тачкама, сваки интеграл са коначним бројем грана и са коначним бројем покретних критичних тачака неминовно је алгебарска функција.

III. *Једначина са непокретним критичним тачкама је нултог рода по* у *и* у′.

Заиста, ако је њен род већи од један, према Поенкареовој теореми о једначинама првога реда са критичним непокретним тачкама, општи интеграл је алгебарска функција по x; сваки униформни интеграл је рационалан и, према томе, сваки интеграл који је цела функција је полином по x.

Ако је рода један, према истој теореми, општи интеграл y је рационалан по

$$\lambda[I(x)+C],$$

где је λ ознака за двопериодичну мероморфну функцију, I је Абелов интеграл, а коефицијенти степена по λ су алгебарске функције по x. Интеграл (општи или партикуларни) не би могао бити цела функција.

Из овога следи да је једини случај који може произвести за интеграле трансцендентне целе функције онај када је род диференцијалне једначине једнак нули. У том случају једначина се сменом променљиве y своди на Рикатијеву једначину или на њене дегенерације, Бернулијеву или линеарну једначину.

У ранијим радовима указао сам на део који се може користити за проблем који се овде посматра, теореме господина Пикара о вредностима које узима цела функција за коначан број вредности независно променљиве. Посебно сам показао да се за опште типове алгебарских диференцијалних једначина првог реда на самој једначини може директно препознати да интеграл не узима извесне вредности за било коју коначну вредност од x. У тим условима, ако је униформна, она је свакако рационална, а пошто је цела функција, она се своди на полином по x[2].

2. За извесне типове једначина, не познајући целу функцију која се јавља у изразу општег или партикуларног интеграла, познат је на-

[1] I. Malmquist: *Sur les functions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre*, Acta mathem. (1920), T. 42, p. 319.

[2] M. Petrovitch, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (Thèse de doctorat, Paris 1894).

чин на који се она ту јавља, као и извесне особености које ова функција има.

Такав је случај са Рикатијевом једначином

$$(7)\qquad y' + y^2 + \varphi(x) = 0,$$

која је елеменат редукције у бројним проблемима који се везују за много оштије диференцијалне једначине.

Тврђења која следе односе се на случај *када је функција* φ(x), *која се јавља као коефицијент у једначини* (7), *реална, коначна, различита од нуле и позитивна за вредности* x *које прелазе један утврђен позитиван број* (а у посебном случају, када је φ коначна, различита од нуле и позитивна за све реалне вредности x). У том случају:

Кад год је интеграл (општи или партикуларни) од (7) *логаритамски извод целе функције, она је рода већег од нуле.*

Стварно, ако се стави

$$y = \frac{z'}{z},$$

функција z задовољава линеарну једначину

$$(8)\qquad z'' + \varphi(x)z = 0.$$

Претпоставимо да је почев од једне позитивне вредности за x, стално

$$\varphi(x) > N,$$

где је N утврђен позитиван број, коначан и различит од нуле. Познато тврђење о нулама интеграла биномне диференцијалне једначине другога реда доводи до следећег резултата:

Две узастопне нуле β_k и β_{k+1} функције

$$u = \sin x\sqrt{N}$$

обухватају *бар једну* нулу a_i функције z; ако се нула a_i поклопи са неком од нула β_k, променљива x, растући почев од a_i, достићи ће неку другу нулу a_{i+1} од z пре но стигне до следеће од нула β_k за u. Ред који има за чланове инверзне модуле реалних нула од z биће, дакле, *дивергентан*, а биће такав из више разлога када се допуни члановима који долазе од евентуалних имагинарних нула, што показује да род по z никада није нула.

Када се запази да, у случају да је

$$\varphi(x) = 1,$$

функција z је

$$z = \sin x,$$

види се да род од z може стварно бити један. Ова последња функција нема имагинарних нула и доказује се, с обзиром на то, следећи општи резултат:

Кад год је интеграл (општи или партикуларни) од (7) *логаритамски извод целе функције која нема имагинарних нула или их има само у коначном броју, канонички производ примарних фактора ове целе функције је рода један.*

Заиста, претпоставимо да је, почев од једне позитивне вредности x, стално

$$\varphi(x) < M,$$

где је M утврђен позитиван број, коначан и различит од нуле. Према познатом тврђењу, две узастопне нуле, β_k и β_{k+1}, функције

$$v = \sin x\sqrt{M}$$

обухватају *највише* једну нулу a_i функције z; ако се нула a_i поклопи са неком од нула β_k, променљива x, када расте почев од a_i, не може достићи другу нулу a_{i+1} од z, а да претходно не достигне једну нулу од v. Ред чији су чланови инверзне вредности квадрата модула реалних нула од z биће конвергентан, а биће и даље конвергентан када се допуни члановима који долазе од евентуалних имагинарних нула (у коначном броју) од z. Род функције z је, дакле, једнак јединици.

Из овог, исто тако, следи следеће тврђење:

Кад год је интеграл (општи или партикуларни) од (7) *логаритамски извод целе функције чији производ примарних фактора је рода већег од један, ова цела функција има бесконачно много реалних нула, као и бесконачно имагинарних нула.*

Дешава се да посматрани интеграл једначине (7) није логаритамски извод целе функције, већ одређена комбинација таквог извода. Такав је случај, на пример, са једначином

$$y' + y^2 + \frac{1-4x}{4x^2} = 0,$$

чији је партикуларни интеграл функција

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\frac{z'}{z},$$

где је z Беселова трансцендента

(9) $$z = \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots$$

Исто је са једначином

$$y' + y^2 - \frac{4x^2+1}{4x^2} = 0$$

која је задовољена функцијом (9), где је z Беселова трансцендента

(10) $$1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Када је y линеарна комбинација логаритамског извода целе функције, позната трансформација која триномну диференцијалну једначину другог реда преводи на биномну једначину, свешће такве случајеве на претходни.

3. У овом што следи посматраћемо алгебарске диференцијалне једначине првога реда које производе целе функције са позитивним Тејлоровим коефицијентима.

У том случају цела функција

(11) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

која испуњава тај услов и диференцијална једначина са реалним коефицијентима

(12) $$f(x, y, y') = 0,$$

коју задовољава y, сем општих услова набројаних у претходном делу, испуњавају још и услове назначене у оном што следи.

Најпре, једначина (12), према претходном, може се написати у таквом облику да f буде несводљив полином по x, y, y'. И тада:

I. *Реални интеграл* y *није никада цела функција бесконачног рода; њен род је највише једнак степену* f *по* x *повећан за јединицу.*

То је последица познате теореме о брзини раста алгебарских диференцијалних једначина првог реда када се независно променљива x повећава преко позитивних реалних вредности. Посебно, нека је y реалан интеграл од (12), непрекидан за велике позитивне вредности за x. Господин Линделеф[3] (Lindelöf) показао је да ће, почев од једне довољно велике вредности за x, по апсолутној вредности стално бити

[3] E. Lindelöf, *Sur la croissance des intégrales des equations différentielles du premier ordre*, Bull. des sc. mathemat., T. I (1899).

$$y(x) \leq e^{Cx^{m+1}}, \quad \left(\left| y(x) \right| \leq e^{Cx^{m+1}}, \text{ прим. прев.}\right) \tag{13}$$

где је m степен полинома по x, а C одређена константа везана за тај полином. Биће, дакле, за велике вредности r

$$| y(x) | \leq e^{Cr^{m+1}}, \quad r = | x |, \tag{14}$$

одакле се на добро познат начин закључује да род функције y не прелази број $m + 1$.

Тврђење обухвата само интеграле, целе функције, диференцијалних једначина првог реда. Тако, на пример, цела функција бесконачног рода

$$y = e^{e^x} P(x),$$

где је P полином позитивних коефицијената, задовољава алгебарску диференцијалну једначину другог реда.

Са друге стране, једначине (12) могу имати за интеграл целе функције било ког рода. То се види на примеру једначине

$$y'^2 + (1 - y^2) p^2 x^{2(p-1)} = 0$$

(p = цео позитиван број), који за партикуларни интеграл има целу функцију рода p

$$y = \frac{1}{2}(e^{x^p} + e^{-x^p}) = \cos(ix^p) = 1 + \frac{x^{2p}}{2!} + \frac{x^{4p}}{4!} + \frac{x^{6p}}{6!} + \ldots$$

Приметимо, такође, да горња граница за род од y може бити стварно достигнута. То је тако, на пример, за целу функцију рода $m + 1$

$$y = e^{x^{m+1}},$$

која задовољава диференцијалну једначину

$$y' - (m+1) x^m y = 0.$$

У случају да се x не јавља експлицитно у диференцијалној једначини, тада је $m = 0$ и род од y је нула или један. То је сагласно са познатом теоремом о једначини

$$f(y, y') = 0.$$

Интеграл је полином по e^{ax}, где је a константа. Господин Линделеф је указао на начин да се одреди константа C за дату једначину (12). Ставимо у тој једначини

(15) $$y = e^{Cx^{m+1}},$$

(16) $$y' = C\,(m+1)\,x^m e^{Cx^{m+1}}$$

и групишимо ту чланове који после ове смене садрже највиши степен експоненцијалне функције (15). Групишимо, затим, у том скупу чланова оне који садрже највиши степен од x и напишимо да је скуп ових чланова нула. Добиће се алгебарска једначина по C и за вредност C ће се узети било која позитивна вредност која је већа од највећег корена те једначине.

Тврђењу I може се дати и следећи облик:

II. *Степен по* x *полинома* f, *када једначина* (12) *има интеграл* у *који је цела функција рода* p, *најмање је једнак* p – 1.

Неједнакост (14) доводи до следећег тврђења, које се односи на коефицијент a_n интеграла y:

III. *Коефицијент* a_n *не прелази никада вредност*

(17) $$\frac{AB^n}{n^{\alpha n}},$$

где су α, A, B *погодно одабране константе које не зависе од* n, *а посебно је:*

(18) $$\alpha = \frac{1}{m+1}.$$

Стварно, према неједнакости (14), која је ваљана за r довољно велико, биће

(19) $$a_n \leq A\frac{e^{Cr^{m+1}}}{r^n}$$

за било коју позитивну вредност r. Мењајући r десна страна од (19) достићи ће свој минимум за

$$r = \left[\frac{n}{(m+1)C}\right]^{\alpha},$$

а тај минимум је

(20) $$A\frac{B^n}{n^{\alpha n}},$$

где B означава константу

(21) $$B = [(m+1)Ce]^{\alpha},$$

што доказује тврђење.

Из тога се такође закључује да:

IV. *Модуо интеграла* у *дуж круга* $|x| = r$ *никада не прелази вредности*

$$A\theta(Bx),$$

где $\theta(x)$ означава целу трансценденту

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha n}}.$$

Из тврђења III изводи се такође следеће тврђење, које се везује за нуле од y:

V. *Нуле интеграла* у *не расту никада спорије, заједно са својим рангом, него што је вредност од* n^{α}.

Јер, према тврђењу III, вредност $\sqrt[n]{a_n}$ не опада спорије но вредност $n^{-\alpha}$, што показује да вредност $a_n^{-\frac{1}{n}}$ не расте спорије но n^{α}. Следи, према теореми господина Адамара, да модуо нуле ξ_n не расте спорије но вредност од n^{α}.

Као што се види, нуле ξ_n нису гушће но што су бројеви n^{α} за $n = 1, 2, 3, \ldots$ Али ови нису гушћи но чланови природног низа позитивних целих бројева, што доводи до следећег тврђења:

VI. *Диференцијална једначина* (12) *нема никада за интеграле* у *целе функције са позитивним Тејлоровим коефицијентима чије би нуле биле гушће но чланови природног низа позитивних целих бројева.*

Посматрајмо сада диференцијалне једначине (12) које производе целе функције са *Тејлоровим коефицијентима позитивним и самерљивим*. Осим тврђења I – VI која се односе на овај случај без измена, интеграл y има особину која важи само у посебном случају.

Зна се да алгебарске диференцијалне једначине не дозвољавају сувише велике брзине опадања коефицијената a_n. Ова брзина је ограничена теоремом господина Поља[4] (Pólya).

Ако цела функција

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{22}$$

[4] G. Pólya, *Ueber das anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentielgleichung genügen*, Vierteljahrschrift der Naturforsch. Geselschaft in Zürich, Jahrg. 61 (1916), pp. 531–545.

са коефицијентима који су самерљиви бројеви задовољава диференцијалну једначину

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

коначног реда, однос

$$\frac{\log |a_n|}{n(\log n)^2}$$

остаје коначан када се n бесконачно увећава. Како је коефицијент a_n, у случају који се овде посматра, реалан, позитиван и тежи нули са $\frac{1}{n}$, то се своди на то да однос

$$-\frac{\log a_n}{n(\log n)^2} = \frac{\log \frac{1}{a_n}}{n(\log n)^2}$$

не прелази неки позитиван број β, коначан и утврђен. Из тога се закључује да a_n опада спорије но број

$$e^{-\beta_n (\log n)^2},$$

што ће рећи да је за сваку вредност за n

$$a_n > Ke^{-\beta_n (\log n)^2},$$

где је K утврђен број, коначан и позитиван. То показује да је за позитивне вредности x стално

$$y > a_0 + K\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n (\log n)^2} x^n,$$

што доводи до тврђења

VII. *Интеграла крива* y *је растућа крива у квадранту са позитивним координатама равни* xOy *и ту се налази стално обухваћена двема кривима*

(23) $$y = a_0 + Kf_1(x),$$

(24) $$y = a_0 + Af_2(x),$$

где су f_1 и f_2 трансценденте

(25) $$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n (\log n)^2} x^n, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n \log n} x^n,$$

где су α, β, A, B, K константе независне од n, назначене у претходном.

Доње ограничење (23) важи у случају једначине било ког реда, док горње ограничење (24) важи само за једначине првог реда.

Завршићемо примећујући да сва тврђења доказана у овом параграфу важе и за све функције y чији модули Тејлорових коефицијената (реални или имагинарни, позитивни или негативни) не прелазе оне од неке функције z која задовољава алгебарску диференцијалну једначину првог реда.

Заиста, сва ова тврђења заснивају се на неједначини (13) господина Линделефа, која важи такође за модуо од y, јер он не прелази модуо од z.

У том циљу било би добро још подсетити се да постојање алгебарске диференцијалне једначине

$$F(x, y, y') = 0, \tag{27}$$

коју задовољава функција z, нема за последицу постојање једне такве једначине која би за интеграл имала саму функцију y. Тако их, према Фату (Fatou) – Пољаовој теореми, функција z која нема прекида јер задовољава једначину облика (27), може имати пошто се погодно измене знаци њених Тејлорових коефицијената; тако измењена она неће задовољавати ниједну једначину (27).**

** Рад реферисан: Müller, Zbl, B. 20, S. 234 и L. Bieberbach, FdM, B. 64, S. 1131 (пр. Д. Т.).

ЈЕДАН ОПШТИ НАЧИН ПАРАМЕТАРСКОГ ИЗРАЖАВАЊА ТРАНСЦЕНДЕНАТА КОНАЧНОГ РЕДА*

1

Под *трансцендентом коначног реда p* има се разумети свака трансцендентна функција y промењиве x која задовољава какву диференцијалну једначину p-тога реда

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^p y}{dx^p}\right) = 0,$$

где је F алгебарска функција промењивих

$$(2) \qquad x, y, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^p y}{dx^p},$$

а не задовољава никакву једначину (1) реда нижега од p.

Под *редом* једне трансценденте y има се, дакле, разумети ред алгебарске диференцијалне једначине најнижег реда коју задовољава y.

Тако би, на пример, трансценденте

$$y = e^x, \sin x, \cos x, \log x$$

и све мероморфне двопериодичне функције биле трансценденте првог реда; трансценденте

$$y = e^{e^x}, e^{e^{\sin x}}, e^{e^{\cos x}},$$

као и Беселове и Пенлевеове трансценденте биле би другога реда; кад је $\varphi(x)$ трансцендента k-тог реда, функција

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXXV, Први разред, књ. 92, Београд 1940, стр. 111–135; саопштено у Академији природних наука 21. октобра 1940.

$$y = e^{\varphi(x)}$$

је уопште трансцендента $k+1$-ог реда (каткад и нижег) итд.

Функције

$$y = \Gamma(x),$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n, \qquad |\alpha| < 1$$

и

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^n}$$

не задовољавају никакву алгебарску диференцијалну једначину коначног реда; то су *трансценденте бескрајног реда* или *хипертрансцендентe.*

Изразити параметарски једну функцију

$$y = f(x), \tag{3}$$

значи изразити x и y у облику

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{4}$$

Најопштији резултат у проблему параметарског изражавања трансцендената, за који се до данас зна, то је позната теорема Поенкареа према којој се свака аналитичка функција (3) може изразити у облику (4), где су φ и ψ *униформне* функције параметра t.

Али се не зна ничега општег о самом аналитичком облику тих функција φ и ψ. Међутим, то се ипак зна бар за поједине, више или мање опште класе аналитичких функција, алгебарских или трансцендентних. Тако, нпр., за алгебарске функције (3) Поенкаре је показао да се z и y могу изразити као Фуксове функције параметра t. Кад врста (genre, Gattung) функције не премаша број 2, функције φ и ψ имају сасвим одређен облик. За функције нулте врсте то су рационалне функције параметра t; за функције прве врсте то су функције рационалне по

$$t \text{ и } \sqrt{P(t)}, \tag{5}$$

где је $P(t)$ полином трећега или четвртог степена по t; за функције друге врсте φ и ψ су рационалне по (5), али где је $P(t)$ полином петога или шестог степена по t.

На први поглед изгледало би да у томе постоји један општи закон за параметарско изражавање алгебарске функције ма које врсте. Али, као што је познато, није тако: у општем случају, кад је врста функције већа од 2, променљиве x и y не изражавају се више као рационалне функције израза (5) да би $P(t)$ био какав полином по t.

У случају кад је функција y алгебарска, могућно је изразити је и у таквом облику (4), да су функције φ и ψ *униформне*, тако да одговарају теореми Поенкареа о униформизацији аналитичких функција. Тако:

1. Кад је y функција нулте врсте, функције φ и ψ су рационалне функције, које се могу трансформисати и у мероморфне просто периодичке функције параметра t;

2. Кад је y функција прве врсте, функције φ и ψ су мероморфне дво-периодичне функције параметра;

3. Кад је y функција врсте веће од 1, то су Фуксове функције параметра.

У аналитичкој теорији линеарних диференцијалних једначина

$$\varphi_p \frac{d^p y}{dx^p} + \varphi_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + \varphi_1 \frac{dy}{dx} + \varphi_0 y = 0 \tag{6}$$

такође је познат један општи начин параметарског изражавања њихових интеграла, у случају кад су функције

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$$

алгебарске функције променљиве x. Поенкаре је показао да се x и y увек могу изразити у облику (4), где су φ и ψ зета – Фуксове и тета – Фуксове функције параметра t.

Новији резултати о трансформацијама диференцијалних система и о каноничном облику који је могућно дати свакоме алгебарском таквом систему, доводе до могућности да се јако прошири област аналитичких функција за које ће се познавати један општи начин њиховог параметарског изражавања.

У овоме ће раду бити приказан један такав начин који се простире на све трансценденте коначног реда. Начин је основан на једној општој теореми о трансформацији алгебарских диференцијалних система, коју су први доказали руски математичари Апелрот (Аппельрот) и Лагутински (Лагутинский), а на коју је потписани наишао на други начин и у другом облику, и применио је на аналитички проблем о коме је овде реч.

2

Уочимо систем од p симултаних диференцијалних једначина

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \varepsilon_1^1 e^{u_1} + \varepsilon_2^1 e^{u_2} + \ldots + \varepsilon_p^1 e^{u_p},\\
\frac{du_2}{dt} &= \varepsilon_1^2 e^{u_1} + \varepsilon_2^2 e^{u_2} + \ldots + \varepsilon_p^2 e^{u_p},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{du_p}{dt} &= \varepsilon_1^p e^{u_1} + \varepsilon_2^p e^{u_2} + \ldots + \varepsilon_p^p e^{u_p},
\end{aligned}
$$

у коме сваки од коефициената ε_k^i има за вредност 0 или 1.

За сваки дати цео број p број таквих система (7) је ограничен, као што је ограничен и број функција u које се добијају интеграцијом свих тих система. Сваки од тако добијених низова

$$(8)\qquad u_1, u_2, u_3, \ldots$$

одређен је таблицом од p^2 елемената

$$
\begin{matrix}
\varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \ldots & \varepsilon_p^1\\
\varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_p^2\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\varepsilon_1^p & \varepsilon_2^p & \ldots & \varepsilon_p^p
\end{matrix}
$$

што низу одговара; број таквих таблица такође је ограничен. Повећавање броја p има за ефекат додавање нових функција u онима што одговарају мањим бројевима p.

Сви низови u, што одговарају једноме датом броју p, одређују се интеграцијом свих могућних система (7) што одговарају томе броју p. Свака од тих функција u садржаће по извесан број произвољних констаната, уведених интеграцијом система, а чије ће вредности бити одређене почетним вредностима функција u, нпр., онима за $t = 0$.

Скуп функција u, дефинисаних свим могућним системима (7), саставља једну таблицу (U) елемената са три индекса, од којих један означава систем (7) који задовољава функција u, а остала два индекса означују хоризонталну линију и стуб којима припада тај елеменат у таблици (7) што карактерише тај систем. Тада се, на познати начин у теорији скупова, ти елементи са три индекса u_{ijk} могу *нумерисати* помоћу низа узастопних целих позитивних бројева, и то тако, да два разна елемента имају различите нумере и да сваки елеменат има само једну нумеру. На тај би начин таблица (U) била претворена у низ елемената $u_1, u_2, u_3, \ldots$ у коме сваки члан има своју потпуно одређену нумеру. Тај се низ може једном за свагда одредити за један произвољно узет цео позитиван број $p = q$, и он ће тада важити и за сваки број $p < q$, у томе смислу што ће чланови u низа, добијати интеграцијом система (5) за

$p < q$, бити обухваћени низом што одговара броју $p = q$. Тај последњи низ може се, дакле, сматрати као потпуно утврђен за све системе (5) чији ред не премаша број q.

Један тако добијен, утврђен низ *и* сматраће се као *канонички низ* за интеграле алгебарских диференцијалних једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^p y}{dx^p}\right) = 0 \tag{8}$$

јер, као што ће се видети из овога што следује, *свака једначина* (8) *може се интегралити помоћу ограниченог броја чланова тога низа.* Из тога разлога систем облика (7) могу се сматрати као *канонични систем* за скуп алгебарских диференцијалних једначина коначнога реда. Свакој једначини тога скупа одговара по један број p; за све једначине скупа, за које тај број не премаша један цео позитиван број q произвољно узет, остаје у важности један исти утврђен канонички низ, одређен једном за свагда, а који је везан за тај број q.

3

Са таквим дефиницијама каноничких низова и каноничких система, употребимо једну теорему о трансформацији алгебарских диференцијалних система коју су Апелрот и Лагутински исказали на овај начин:

Сваки алгебарски диференцијални систем, подесном сменом променљивих и потребним повећањем броја непознатих функција, може се свести на систем облика

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1 \Phi_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_m}{dx} &= y_m \Phi_m, \end{aligned} \tag{9}$$

где су $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ линеарни облици по променљивима $y_1, y_2, \dots, y_m$ чији су коефицијенти цели бројеви, од којих ни један није мањи од -1.

Тако, нпр., систем

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \varphi_3,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 \varphi_3,$$

$$\frac{dy_3}{dx} = k^2 y_1 \varphi_2, \quad 0 < k < 1$$

који има за интеграле три основне елиптичке функције

$$y_1 = \operatorname{sn}(x + C_1),$$
$$y_2 = \operatorname{cn}(x + C_2),$$
$$y_3 = \operatorname{dn}(x + C_3),$$

сменом

$$z_1 = \frac{d}{dx} \log y_1,$$
$$z_2 = \frac{d}{dx} \log y_2,$$
$$z_3 = \frac{d}{dx} \log y_3,$$

своди се на систем

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1(-z_1 + z_2 + z_3),$$
$$\frac{dz_2}{dx} = z_2(z_1 - z_2 + z_3),$$
$$\frac{dz_3}{dx} = z_3(z_1 + z_2 - z_3).$$

Према другој једној теореми, коју је доказао Апелрот, то свођење је могућно извршити тако, да коефицијенти линеарних облика Φ_k буду сви једнаки нули или јединици.

Не знајући начин на који су руски математичари доказали ове теореме, потписани је на сасвим елементаран начин дошао до ове теореме, која се може извести и као последица горе поменутих теорема:

Сваки алгебарски диференцијални систем, подесном сменом променљивих и потребним повећањем броја непознатих функција, своди се на један од каноничких система (7).

Одговарајући број p одређен је самом трансформацијом и једнак је броју једначина њоме добијеног канонског система. Он не зависи од реда посматране диференцијалне једначине или система; тај број зависи од начина на који променљиве улазе у састав левих страна једначина, пошто ове буду сведене на такав облик да постану полиноми по тима променљивим. Број p, нпр., везан за једну диференцијалну једначину првог реда може бити већи од броја p везаног за једну једначину вишега реда.

Треба још приметити да се од система (9) може прећи непосредно на одговарајући канонски систем (7) простом сменом променљивих y_k са $\log u_k$.

Непосредна примена трансформације, о којој је овде реч, на обичне алгебарске диференцијалне једначине, доводи до ове опште теореме која решава проблем параметарског изражавања трансцендената коначног реда:

Свака шрансценденша коначног реда који не премаша један произвољно узеш број q

(10) $$y = f(x)$$

изражава се као функција једног параметра t *обрасцима облика*

(11) $$x = e^{\Phi_1(t)}, \qquad y = e^{\Phi_2(t)},$$

где су Φ_1 *и* Φ_2 *линеарне функције (са коефицијентима који су цели бројеви) по ограниченом броју израза*

(12) $$\int e^{u_k}\,dt \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

а где су u_k *чланови каноничног низа везаног за број* q.

Осим тога, оставивши на страну један тачно познат изузетан случај, десне стране образаца (11) *изражавају се помоћу чланова каноничког низа без квадратура* и то на начин изражен овом теоремом:

Логаритми променљивих x *и* y *изражавају се као линеарне функције ограниченог броја чланова каноничног низа.*

Те теореме доводе, дакле, *до једног општег начина параметарског изражавања трансцендената коначног реда.*

4

У погледу самих функција u, чланова каноничног низа, а на које се своди горе изложени начин параметарског изражавања, може се рећи ово што следује.

Пре свега, приметивши да никакав линеаран израз по

$$e^{u_1}, e^{u_2}, e^{u_3}, \ldots$$

где би u_k биле алгебарске функције, не може бити алгебарска функција, саме једначине које састављају канонични систем показују да су функције u_k трансцендентне.

Најпростији пример система (7), онај што садржи само једну функцију u и само једну једначину, а то је

$$\frac{du_1}{dt} = e^{u_1},$$

чији је општи интеграл

$$u_1 = -\log(C - t),$$

као и систем

$$\frac{du_1}{dt} = e^{u_1},$$
$$\frac{du_2}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2},$$

чији су општи интеграли

$$u_1 = -\log(C_1 - t),$$
$$u_2 = -\log(C_1 - t) - \log[C_2 + \log(C_1 - t)],$$

истичу на видик егзистенцију покретних логаритамских сингуларитета функција u.

Међутим, потписани је у погледу холоморфности тих функција доказао овај резултат:

Свака функција u кога било коначног низа, која за $t = 0$ има коначну и одређену вредност, холоморфна је у једноме кругу који има за центар $t = 0$ и за који се увек може одредити његов полупречник; *за вредности* t *у унутрашњости тога круга функција* u *се може развити у ред*

$$u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

за који ће се познавати структура његових коефицијената. *Ред ће насигурно бити конвергентан за све вредности* t *у кругу полупречника*

$$R = \frac{1}{pe^{\delta}},$$

где p означује ред каноничног система, а δ је највећа вредност реалних почетних вредности функција u одговарајућег каноничног система.

У погледу структуре коефицијената a_n горњег реда, потписани је доказао овај резултат:

Производ $n!a_n$ *је једна форма* n-*тог реда по извесним константама* $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$ *у ограниченом броју: коефицијенти те форме су цели бројеви, сви позитивни или једнаки нули.*

Ти резултати дају могућност да се за дату трансценденту коначног реда

$$y = f(x),$$

x и y изразе у облику реда уређеног по степенима параметра t и да се познаје структура коефицијената тога реда, као и његов полупречник конвергенције.

5

Из овога што претходи види се улога функција u у проблему параметарског изражавања трансцендената коначнога реда. Било би од интереса проучити појединости тих функција, као, нпр., ове:

1. проверити да ли се оне изражавају у коначном облику помоћу данас познатих и испитаних трансцендената (као што је, нпр., случај са онима што одговарају бројевима $p = 1$ и $p = 2$ и које се изражавају помоћу логаритамских функција), или показати да се, кад се број p буде повећавао, јављају нове трансценденте;

2. проучити сингуларитете функција u, начин на који се те функције понашају у бескрајности итд. У томе погледу треба навести да је, проучавајући коначни систем Апелрота и Лагутинског, Костицин (Kostitzin) дошао до важних резултата о сингуларитетима алгебарских диференцијалних једначина. Проф. Пејовић је испитивао начин на који се понашају функције u каноничног система (6) у бескрајности.

Треба, напослетку, поменути да се *трансцендентни* канонички систем (7) сменом

$$e^{u_k} = y_k$$

трансформише у *алгебарски* систем, који се поклапа са каноничким системом Апелрота и Лагутинског, у коме је сваки извод $\dfrac{du_k}{dt}$ изражени као квадратична форма по промењљивима $y_1, y_2, \ldots, y_p$ у којој сваки коефицијенат има за вредност 1 или 0. Али систем (7) има над овим другим то преимућство, што непосредно даје могућност да се функције u_k, па докле и x и y, развију у ред по степенима параметра t за који се зна и полупречник његове конвергенције и структура његових коефицијената.

БИБЛИОГРАФИЈА

L a g o u t i n s k i : Rec. math. Moscou 27. 1909 *p*. 420–423.

A p p e l r o t : Rec. math. Moscou 32, 1922 *p*. 9–21.

M . P e t r o v i t c h : Publications mathem. de l'Univ. de Belgrade VI–VII. 1937, *p*. 290–325.

V . K o s t i t z i n : Comptes rendus de l'Acad. d. Sciences de Paris. 6 févr. 1939, *p*. 411.

T . P e y o v i t s c h : Compt. rend. de l'Acad. d. Sciences de Paris, 20 mars 1939, *p*. 960.**

** Овај Петровићев рад је у целости преведен и објављен *Un mode général de représentation paramétrique des transcendantes d'ordre fini*, Académie royale de Serbie, Bulletin A, № 7, Belgrade 1941, pp. 43–54. – Рад је реферисан: J. F. Ritt, MR, X, 10, p. 686 (пр. Д. Т.).

ДОДАТАК РАСПРАВИ О АЛГЕБАРСКИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА*

У мојој расправи под насловом *Опште теореме о алгебарским диференцијалним једначинама*[1] доказана је следећа теорема:

Интеграција сваке алгебарске диференцијалне једначине

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0 \tag{1}$$

врши се преко ограниченог броја утврђених партикуларних функција

$$u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots, \tag{2}$$

које се могу одредити једном за све случајеве и помоћу којих се изражавају независно променљива x *и интеграл* y *(општи или партикуларни) као функције параметра* t.

Функције u_k, чланове *каноничког низа* (2), генерише *канонички систем*

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \varepsilon_1^1 e^{u_1} + \varepsilon_2^1 e^{u_2} + \dots + \varepsilon_p^1 e^{u_p}, \\ \frac{du_2}{dt} &= \varepsilon_1^2 e^{u_1} + \varepsilon_2^2 e^{u_2} + \dots + \varepsilon_p^2 e^{u_p}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{du_p}{dt} &= \varepsilon_1^p e^{u_1} + \varepsilon_2^p e^{u_2} + \dots + \varepsilon_p^p e^{u_p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Променљиве x и y изражавају се у облику

$$x = e^{\Phi_1(t)} \quad \text{и} \quad x = e^{\Phi_2(t)}, \tag{4}$$

где су Φ_1 и Φ_2 линеарне функције (са целим коефицијентима) од коначног броја израза

---

* Наслов оригинала: *Addition au mémoire sur les équations différentielles algébriques*, Académie Serbe des Sciences, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade 1947, t. I, pp. 1–4.

[1] Publications mathém. de l'Université de Belgrade, T. VI–VII, (1937), стр. 290–325.

$$\int e^{u_k}\,dt. \tag{5}$$

Штавише, уколико се један изузетан случај, иначе егзактно проучен, стави на страну, x и y се изражавају помоћу t без квадратура: *логаритми те две функције изражавају се линеарно помоћу коначног броја чланова каноничког низа.*

Као што сам то у својој расправи показао, г.г. Апелрот и Лагутински већ су били извршили свођење алгебарских диференцијалних једначина на извесне каноничке форме. Али, како нисам био у могућности да видим њихове расправе и да се тачно упознам са њиховим теоремама и доказима, нисам се њима могао користити. Сада, будући да поседујем те расправе, хитам да укажем на удео који руским математичарима треба приписати у третирању проблема редуковања једначине која је у питању и система алгебарских диференцијалних једначина и да признам њихов приоритет у решавању овог проблема. Наиме, двојица руских математичара доказала су да се:

Сваки систем алгебарских диференцијалних једначина, погодном сменом променљивих и неопходним повећањем броја непознатих функција, своди на систем облика

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1\Phi_1, \ldots, \frac{dy_m}{dt} = y_m\Phi_m, \tag{6}$$

где је Φ_i *линеарна форма*

$$\Phi_i = a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \tag{7}$$

чији су коефицијенти a_{ki} *константни и једнаки целим бројевима не мањим од* -1.

Настављајући упрошћавања, г. Апелрот је свео линеарне форме (7) на такве форме *чији су сви коефицијенти* a_{ki} *једнаки* 1 *или* 0.[2]

Са алгебарског система (6) прелази се на трансцендентни систем (3) простом сменом

$$z_k = e^{u_k}. \tag{8}$$

Али, систем (3), иако трансцендентан, има ту предност да пружа могућност лакшег испитивања функција u_k из каноничког низа. Посебно, као што је то у мојој расправи изложено, он дозвољава развијање функција u_i у Тејлорове редове са познатом структуром коефицијената, за које ће бити познат и круг конвергенције. Исти систем (3)

[2] *Саопштења у Московском математичком друштву* (Математичка збирка, Т. 23 (1902), Т. 27 (1909), Т. 32 (1922).

чини очигледном трансцендентност ових функција, постојање њихових покретних сингуларитета, начин њиховог понашања итд.

Подсетићу још да је г. В. Костицин, испитивањем система (6), дошао до неких значајних резултата који се односе на међусобну сагласност стабилних сингуларних интеграла алгебарских диференцијалних једначина.[3]

С друге стране, г. Т. Пејовић је доказао једну теорему о начину на који се понашају функције u_i каноничког низа (2), генерисане системом (3), када се независно променљива бесконачно увећава преко реалних вредности, под претпоставком да су те функције реалне, непрекидне и одређене[4].

На крају, користим се приликом да додам једну примедбу коју дугујем предусретљивости г. професора Е. Котона (E. Catton); она ће исправити једну малу грешку, која ми се поткрала у вези са једним моментом секундарног значаја у примеру наведеном на страни 322 моје расправе. По среди је једна функција θ од t за коју сам рекао да је произвољна; у ствари, она треба да буде решење извесне диференцијалне једначине.

Заиста, као што излази из једначина (63) и (68) у овој расправи, важи

$$\theta = y_1^{m_1-1} y_2^{m_2},$$

одакле је

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = (m_1-1)\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dt} + m_2\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dt},$$

а онда је, према (68) и (69),

$$\frac{d\theta}{dt} = (m_1-1)A_1\theta^2 + m_2 A_2 \theta^{1+\frac{1}{\alpha}}. \tag{10}$$

Разматрани пример припада групи примера који су навели г. професора Котона да испитује системе диференцијалних једначина код којих се ефективно појављују решења која зависе од произвољних функција, али која се објашњавају кад се тражи да се ти системи сведу на класични облик на који се примењују теореме егзистенције. Систем (63) у наведеном примеру своди се на једну такву форму.**

[3] Compt. rend. de l'Acad. de Sc. de Paris, седница од 6. фебруара 1939, стр. 411.

[4] Compt. rend. de l'Acad. de Sc. de Paris, седница од 20. марта 1939, стр. 960.

** Рад је реферисан: G. Sansone, Zbl, B. 32, S. 280 i MR, X, 6, p. 378, а цитиран је у раду T. Peyovitch, *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles,* Académie Serbe des Sciences, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade 1948, t. II, pp. 176–189 (пр. Д. Т.).

ПРИЛОЗИ

ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РЕЗУЛТАТИМА У АНАЛИТИЧКОЈ ТЕОРИЈИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА[*]

Михаило Петровић је пружио бројне доприносе аналитичкој теорији диференцијалних једначина, проучавајући, модерним методама и довитљивошћу која му је својствена, особине интеграла као таквих, не бавећи се њиховим експлицитним приказивањем, које је, уосталом могуће само у ограниченом броју случајева.

Фундаментална и једноставна идеја која му је послужила као основа састоји се у следећем: проблеми који се односе на начине на који интеграционе константе улазе у општи интеграл алгебарске диференцијалне једначине

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0, \tag{1}$$

(где је F полином по $y, y', y'', \ldots$) суштински зависе од начина на који $y, y', y'', \ldots$ улазе у F, *па стога битно зависе од група експонената разних чланова у изразу* F *по* $y, y', y'', \ldots$. Помоћу ових група позитивних целих бројева, г. Петровић образује извесне ***геометријске фигуре*** налик на Њутнове (Newton) и Брио-Букеове ***полигоналне линије*** у теорији алгебарских функција и диференцијалних једначина првог реда. Ове фигуре у извесном смислу представљају и сажимају начин на који функције $y, y', y'', \ldots$ улазе у F и тако дају елементе неопходне за препознавање да ли општи интеграл има или нема неку особину у вези са интеграционим константама. Поступак који г. Петровић у том циљу користи садржи клицу једне опште и плодне методе испи-

[*] У књизи *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894–1921)*, Académie royale de Serbie, Editions spéciales, t. XLIII, Sciences mathématiques et naturelles, l. 10, Paris 1922, p. IX+152, – Петровић је описао своје резултате до 1922. г., те је у посебном поглављу изложио и своје радове у области аналитичке теорије диференцијалних једначина. Професор је о себи писао у трећем лицу (пр. Д. Т.).

тивања особина интеграла на геометријским фигурама на погодан начин довођен је у везу са диференцијалном једначином и зависним од поменуте групе целих бројева.

Г. Петровић овом методом третира различита питања која се односе на директно испитивање нула, бесконачности, максимума и минимума, итд., интеграла алгебарских диференцијалних једначина било ког реда и примењује резултате добијене у проучавању интеграла стављајући се на становиште опште теорије функција.

Када у општем интегралу $y(x, C_1, \ldots, C_p)$ неке једначине реда p мењамо интеграционе константе $C_1, \ldots, C_p$, тада се вредности променљиве x које анулирају тај интеграл, оне које га чине бесконачним, оне које му дају максималну или минималну вредност, итд. *мењају, уопште, заједно са интеграционим константама.* Уопште узев, ионако мењамо било коју константу C_i која фигурише у изразу за општи интеграл, вредности $x = x_0$ које анулирају дату комбинацију $\Psi(x, y, y', y'', \ldots)$ независно променљиве x, интегралу y и неколико њених извода мењаће се такође. Било којој датој кривој Γ_i у равни константе C_i одговарају тада једна или више кривих Δ_i у равни променљиве x_0 тако да, ако константа C_i описује криву T_i, једна од вредности x_0 ће описивати једну од кривих Δ_i.

Г. Петровић је себи поставио задатак да потражи услове под којима се ове криве Δ_i своде на изоловане тачке, тј. услове под којима *се вредности* x_0 *мењају када се мењају интеграционе константе, као и да их у том случају све израчуна.* Кад је већ комбинација ψ дата, проблем се своди на *тражење услова под којима нуле и бесконачности општега интеграла не варирају са интеграционом константом*, и на директно израчунавање нула или бесконачности овога интеграла, што су већ по себи довољно занимљиви проблеми. Господа Фукс, Поенкаре, Пикар и Пенлеве су се бавили аналогним проблемима који се односе на алгебарске критичне тачке и на трансцендентне сингуларитете општега интеграла. Ако је чињеница непромењивости сингуларитета од капиталне важности са становишта теорије функција, није мање тачно да чињеница сталности ових вредности означених са x_0, придодата чињеници сталности трансцендентних сингуларитета, може имати велику важност у применама диференцијалних једначина.

Г. Петровић даје потпуно решење проблема у случају алгебарских једначина првог реда. Потребни и довољни услови да се нуле и бесконачности општих интеграла не мењају са интеграционом константом врло су једноставни и увек се лако може проверити да ли су они испуњени за дату једначину. Уколико су нуле (или бесконачности) непромењиве, г. Петровић показује начин израчунавања свих њих, а методе Бриоа и Букеа омогућавају онда да се одреде њихови редови у случајевима кад ти редови постоје и да се испитује интеграл у њиховим околностима. Ако су оне покретне, г. Петровић даје начин одређивања њихових редова, који су увек рационални бројеви. Овај рачун се обавља графички, на веома удобан начин, помоћу једнога полигона који се може конструисати само на основу познавања експонената степена функција y и y' на левој страни једначине, доведене у облик полинома по y и y' изједначенога са нулом. Посматрање тог полигона уводи се на природан начин у ово испитивање, као што се види из следеће Петровићеве теореме:

Да би интеграл имао покретне нуле реда λ, *потребно је и довољно да одговарајући полигон има страну чији је коефицијенат правца* λ; *да би он имао покретне бесконачности реда* λ, *потребно је и довољно да тај полигон има страну са коефицијентом правца једнаким* $-\lambda$.

Иста разматрања доводе до следеће теореме.

Претпоставимо да је једначина написана у облику

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x,y)y'^{\mu-1} = 0,$$

где су изрази f_i полиноми по y_i, при чему f_i има степен ν_i. Теорема гласи:

Да би нуле интеграла једначине (1) *биле непроменљиве, потребно је и довољно да, после одстрањивања свих заједничких* $\mathrm{f_i(x,y)}$ *фактора сваки израз* $\mathrm{f_i}$ *садржи фактор* $\mathrm{y^h}$, *где је* $\mathrm{h} \geq \mathrm{i}$.

Да би бесконачности интеграла једначине (1) *биле непроменљиве, потребно је и довољно да буде* $\nu_i - \nu_0 \leq i$ *за* $i = 0,1,2,\dots,\mu$.

Да би нуле и бесконачности биле у исти мах непроменљиве, потребно је и довољно да једначина буде хомогена по y *и* $\mathrm{y'}$, *или да полигон буде правоугаоник.*

У случају једначине вишег реда, није могуће дати решење проблема које би било онолико потпуно као претходно. Г. Петровић је ипак формулисао неке *довољне* услове да нуле или бесконачности општег интеграла буду непокретне, под претпоставком да су трансцендентни сингуларитети посматраних интеграла непокретни; тако исказане теореме налазе примерке, на пример, у проучавању мероморфних интеграла једначине, код којих се не јављају тешкоће у вези са трансцендентним сингуларитетима. Овако нађени довољни услови компликованији су од оних у случају једначина првог реда, али увек је могуће проверити на самој диференцијалној једначини да ли су они испуњени или нису. Ово проверавање своди се на конструкцију полигона аналогног ономе у случају једначине првог реда и на тражење корена једне алгебарске једначине (повезане са датом диференцијалном једначином) садржаних у датом реалном интервалу или у некој траци ограниченој двема правама у интегралној равни.

Коефицијенти правца страна полигона и извесни корени поменуте алгебарске једначине представљају једине могуће редове промењивих нула и полова интеграла (али тада се не зна, уопште узев, да ли постоје покретне промењиве) тачке x у којима се y анулира, док y' остаје одређено. Ови редови могу бити непромењиви (и притом рационални или ирационални), или чак и интегрални, или зависни од интеграционих константи; г. Петровић даје *довољне* услове да они сви буду *непромењиви*, као у случају једначина првог реда.

*

Примене ових резултата многобројне су и разноврсне. Једна од њих даје *потребне и довољне услове да општи интеграл алгебарске једначине првог реда има само непокретне сингуларитете.* Према познатој теореми г. Пенлевеа, трансцендентни сингуларитети интеграла никад се не мењају са интеграционом константом. Г. Фукс је дао услове под којима исто важи за алгебарске критичне сингуларитете, те је довољно прикључити им услове г. Петровића под којима су бесконачности непокретне – да би се дошло до услова за непокретности свих сингуларитета, укључујући полове. Кад су ти услови испуњени, једначина се решава алгебарским операцијама или највише двема квадратурама, а г. Петровић тачно одређује чак аналитички облик интеграла у том случају. Он све услове примењује на разне опште класе једначина првог реда тражећи све једначине из неке од тих класа чији интеграл има само непокретне сингуларитете.

Исти резултати доводе до потпуног решења следећег проблема: *установити да ли за неку алгебарску једначину првог реда постоје у равни* (x,y) *криве* Γ *које партикуларни интеграли секу само у непокретним тачкама и наћи те криве кад оне постоје.*

Кад је дата алгебарска једначина првог реда

$$F(x, y, y') = 0$$

која, као једначина по y', има вишеструких корена, нека је

$$Q(x, y) = 0$$

резултат елиминације извода y' из једначине $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Кад функција $y(x)$, која задовољава једначину $Q = 0$, не задовољава једначину $F=0$, доказује се да крива $Q=0$ представља, уопште, геометријско место повратних тачака интегралних кривих једначине $F=0$; ако, напротив, крива $Q=0$ задовољава једначину $F=0$, доказује се да она, *уойшйе*, представља сингуларни интеграл те једначине и обвојницу њених интегралних кривих[1]. Међутим, један пример на који је г. Петровић скренуо пажњу јасно показује да се може десити да крива $Q(t)=0$, мада задовољава једначину $F=0$, *није ни синīуларно решење ни обвојница инйеīралних кривих* ове једначине. Г. Петровић је доказао једну општу теорему која се односи на ове изузетне случајеве показујући да је, у том случају, *крива* $Q=0$ *једна крива* Γ *коју инйеīрали једначине* $F=0$ *секу само у нейокрейним йачкама*:

Да би једначина $F=0$ *дозвољавала криве* Γ, *йойребно је и довољно да једначина*

$$\frac{\partial^{m_i+n_i}F}{\partial y^{m_i}\partial y'^{n_i}}=0,$$

īде је $m_i+n_i<n$ (*йри чему је* n *највећи од ексйоненайа сйейена извода* y' *који фиīуришу у* F), *имају заједничка решења; ако је* $u(x)$ *йакво једно решење, крива* $y=u(x)$ *је йражена* Γ *крива.*

Постојање Γ кривих за дату диференцијалну једначину често олакшава испитивање интеграла. У неким случајевима доста велике општости, оно поједностављује одређивање партикуларних интеграла задате аналитичке природе (мероморфних, рационалних интеграла, итд.). На пример, свака алгебарска једначина првог реда са непокретним критичним тачкама, а која има Γ криве, решава се било алгебарски, било једном или двема квадратурама; г. Петровић је прецизирао аналитички облик таквог једног интеграла.

*

Најзначајнији резултати истраживања г. Петровића у области аналитичке теорије диференцијалних једначина су они који су везани за проучавање ***униформних йарйикуларних инйеīрала***. Чак и у случају кад општи интеграл није униформан, једначина може имати један или више униформних партикуларних интеграла. Методе којима се установљава да ли је *ойшйи* интеграл униформан не примењују се кад је по среди утврђивање да ли једначина има униформне *йарйикуларне* интеграле, што је, уопште узев, проблем компликованији

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, Paris 1896, t. III, Chap. III.

од претходног. Исто тако, уместо да препознамо аналитичку природу општег интеграла дате једначине, под претпоставком да је он униформан, али нисмо у стању да решимо аналогни проблем за партикуларне интеграле.

Два или више трансцендентна униформна партикуларна интеграла $y_1, y_2, \ldots$ треба сматрати *различитим* ако они нису везани никаквом алгебарском релацијом чији су коефицијенти алгебарске функције од x. Комбинујући један поступак који је г. Пенлеве употребио у проучавању рационалних интеграла алгебарске диференцијалне једначине првог реда са класичним теоремама г. Пикара о нулама униформних функција и о роду алгебарских кривих чије се координате изражавају као униформне функције једног параметра, г. Петровић показује како се може прецизирати *једна горња граница броја различитих униформних интеграла* једне такве једначине. Он је показао облик једначине које имају трансцендентне униформне интеграле и такође указао на алгебарске релације којима су међусобно повезани интеграли које не сматрамо различитим.

На тај начин, уколико је дата једначина $F(x, y, y') = 0$, где је F полином по y и y' чији су коефицијенти алгебарске функције од x, *да би она могла имати трансцендентне униформне интеграле потребно је да* F *буде рационална функција по* x. (Уколико овај услов није испуњен, тада је интеграл рационалан и увек израчунљив.) У овом случају имамо следеће.

1° Ако су критичне тачке једначине $F = 0$ непокретне, она може имати *највише три различита униформна интеграла*. Специјално, ако је једначина нултог реда, она се алгебарски своди на Рикатијеву једначину и може имати 0, 1, 2 или 3 различита униформна интеграла, али не више њих. Кад је једначина реда 1, она никад не може имати више од једног таквог интеграла; ако је реда већег од 1, сваки њен униформни интеграл је рационалан.

2° Ако једначина има покретне критичне тачке, нултог је реда по (y, y') и није сводљива на Рикатијеву једначину или на линеарну једначину првог реда, тада она има *највише два различита униформна интеграла.*

Проучавајући ближе једначину

$$y' = R(x, y), \tag{2}$$

где је R по x и y рационална функција, г. Петровић је дошао до следеће потпуније теореме:

Једначина (2) *не може имати више од три различита униформна интеграла.*

Ако их има три, йо среди је Рикашијева једначина.

Ако их има два, она је или Рикашијева, или је линеарна, или се може довесши у облик

$$y' = \frac{P(x,y)}{(x-\varphi)^m},$$

где је P *йолином йо* x *и* y *сшейена* m + 2 *йо* y, *а* φ *рационална функција од* x.

Ако има само један овакав иншеграл, своди се било на један од йрешходних облика, било на облик

$$y' = \frac{P(x,y)}{(y-\varphi_1)^h (y-\varphi_2)^k},$$

где су φ_1 *и* φ_2 *рационалне функције од* x, *а* P *је йолином йо* x *и* y *сшейена* $h+k+2$ *йо* y.[2]

Све ово такође остаје у важности за једначине $F(x,y,y')=0$, где је F несводљив полином по x, y и y' и нултог реда по y и y'.

У случају једначине

$$F(x,X,y,y')=0, \tag{3}$$

где је F полином нултог реда по y и y' чији су коефицијенти рационалне функције од x и X, где X означава извесну алгебарску функцију од x, сваки униформан интеграл је рационална функција; али могу постојати *шрансценденшни иншеграли униформни йо* x *и* X. Г. Петровић је доказао да *не могу йосшојаши више од шри различиша шаква иншеграла*; ако их има три, једначина се своди на Рикатијеву једначину.

Исте методе проширују се на једначине (3) реда 1 или 2 по y и y', а применивши их на једначину првог реда и другог степена г. Петровић је успео да тачно одреди типове таквих једначина које могу имати по x, или по (x,X) униформне интеграле.

Што се тиче проблема установљавања да ли је *ойшши иншеграл* неке алгебарске једначине првог реда *рационална функција*, он се своди, Поенкареовом методом, на алгебарске операције, или на једну

---

[2] Теорема г. Петровића тема је Поглавља VIII у Секцији B (*О униформним шрансценденшима које задовољавају једначине йрвог реда и йрвог сшейена*) из Тома III дела *Traité d'Analyse* г. Е. Пикара (стр. 356–359).

Г. Малмквист (Acta mathematica, t. XXXVI) и г. Ремундос су ову теорему проширили на интеграле са коначним бројем грана. Г. Валенберг саопштио је овај резултат у Берлинском математичком друштву (Седница одржана 26. фебруара 1902). Видети такође анализу г. Л. Отона у Revue générale des Sciences, Paris, 1896, стр. 105.

квадратуру, или на питање установљавања да ли је општи интеграл Рикатијеве једначине рационалан, што се увек може учинити. Али кад су у питању *рационални партикуларни интеграли*, проблем постаје тежи и захтева специјалне методе. Г. Пенлеве је дао једну такву методу, која омогућује да се са сигурношћу одреде сви рационални интеграли за простране класе једначина првог реда. Г. Петровић указује на упрошћавања које у проблем уводи посматрање његовог полигона. Метода се чак може проширити на општији проблем *трансцендентних мероморфних интеграла,* тиме што дозвољава да се њихово израчунавање сведе на релативно лакше израчунавање холоморфних интеграла у читавој равни.

*

Уопште узев, методе за директно испитивање интеграла алгебарских једначина првог реда не примењују се *на једначине вишег реда*. Разлог за ово је, с једне стране, то што за такве једначине трансцендентни сингуларитети варирају са интеграционим константама. С друге стране, у случају једначина првог реда све детерминације извода y' су познате алгебарске функције од y, за које се могу наћи кружни системи корена који се анулирају заједно са y' и проучити начин на који се сваки од њених корена понаша у околини почетних услова $x = x_0$ и $y = y_0$. Ово, сем у изузетним случајевима, не важи за једначине вишег реда. Интеграл, као и његов извод могу постати неодређени за било које вредности $x = x_0$ и $y = y_0$; интеграл може такође имати засене који се мењају са интеграционим константама, или неаналитичке сингуларне линије, које такође варирају са тим константама. Те тешкоће спречавају, као и у многим другим приликама, проширење на ово подручје метода које су успеле у случају једначине првог реда.

Ипак, поступци г. Петровића омогућују извесно проширење у једном од два случаја:

1° кад је могуће утврдити на основу саме диференцијалне једначине (на пример методом Г. Пенлевеа) да се трансцендентни сингуларитети интеграла не мењају са интеграционим константама;

2° кад се ограничавамо на проучавање интеграла (партикуларних или зависних од интеграционих константата) који имају унапред дате есенцијалне сингуларитете; *мероморфних интеграла*, на пример.

Г. Петровић најпре указује на поједностављења која ове теореме о нулама и бесконачностима интеграла, заједно са посматрањем његовог полигона придруженог једначини, доносе испитивању *униформних интеграла* (партикуларних или општих) широких класа једначина било ког реда. Уз помоћ тих теорема и неких познатих резултата теорије функција, може се, за доста опште типове једначина, проучавање униформних интеграла свести на аналогна проучавања која се односе на једначине нижег реда, или на проучавање холоморфних интеграла неких других једначина. Г. Петровић показује опште типове једначина било ког реда за које се може тврдити да су униформне трансценденте произведене њиховом интеграцијом не разликују од до данас познатих трансценденти.

Обично *се првим интегралом* диференцијалне једначине $F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$ назива нека функција Φ независно промењиве x, интеграла y и неких његових извода која се због једначине $F = 0$ своди на константу *за било који посматрани партикуларни интеграл*, при чему само вредност те константе варира са овим партикуларним интегралом. Г. Петровић указује на могућност формирања оваквих првих интеграла *који важе само за интеграле са извесном аналитичком природом*. Наиме, има пространих класа једначина било ког реда код којих се може закључити, посматрањем полигона г. Петровића који им одговарају, и с обзиром на опште особине функција извесне аналитичке природе, да се одређени израз $F(x, y, y', y'', \ldots)$ обавезно своди на константу, на рационалну или алгебарску функцију од x, итд., и то не за *било који* интеграл, него за интеграл *дате природе*. Овакви интеграли су, на пример, униформни, мероморфни и просто или двоструко периодични, интеграли са n вредности, итд., и то како партикуларни интеграли, тако и интеграли који зависе од интеграционих константата. Кад су нам ти први интеграли познати, тражење интеграла једначина своди се на заједничка решења две дате диференцијалне једначине, па с тога и на испитивање њене једначине нижег реда.

Овај поступак омогућује, на пример, да се знатно упрости тражење услова под којима дати тип једначина било ког реда има *двоструко периодичне мероморфне интеграле*, што води ка налажењу првих интеграла који се односе на интеграле овакве природе. Тако се, без икаквог рачуна, успоставља да једначина

$$P(y'') = Q(y),$$

где су P и Q полиноми степена m и n респективно, не може имати такве интеграле уколико је n облика $m + \dfrac{2m}{k}$, где је k неки делилац броја $2m$. Она ће их ефективно имати ако је, на пример, $m = 1$, $n = 2$ или 3, при чему P и Q имају било какве коефицијенте; или, такође, кад је $m = 2$, $n = 4$ или 6, са погодно изабраним коефицијентима. Истим поступком може се увидети да постојање двоструко периодичних мероморфних интеграла једначина

$$P\left[y^{(p)}\right] = Q(y)y'$$

захтева да буде $n = m - 1 + \dfrac{mp-1}{k}$, где је k неки делилац броја $mp-1$; једначина се може ефективно интегралити преко тих функција, на пример у случају кад су коефицијенти у P и Q било какви и притом је $p = 3$, $m = 1$, $n = 2$ или 3. За једначину

$$f(y, y') = 0,$$

неопходан услов за постојање таквих интеграла је да њен полигон има бар једну страну са негативним целим и бар једну са позитивним целим коефицијентом правца, као и да нема страна са разломљеним коефицијентом правца.

Примењујући овај поступак, у случају посебног примера, на једначину

$$f(y, y', y'') = 0,$$

где је f по y' и y'' хомоген полином чији су коефицијенти алгебарске функције од y, г. Петровић даје потпуно решење следећих проблема:

1) установити да ли је општи интеграл рационална функција од x, *или можда униформна и просто или двоструко периодична функција;*

2) установити да ли је општи интеграл алгебарска функција од x;

3) установити да ли једначина има партикуларне интеграле овакве природе;

4) одредити интеграл у случајевима кад је испуњен један од услова 1), 2) и 3).

*

У разним истраживањима важно је умети израчунати *резидууме* функција дефинисаних диференцијалним једначинама, без потребе или могућности да се функција изрази у експлицитном облику. Уколико су у питању једначине првог реда, г. Петровић је показао како се могу за ове функције израчунати резидууми који се односе на покретне просте полове (чије је постојање утврђено непосредно на једначини уз помоћ Петровићевог полигона) и како се може установити да ли се ти резидууми мењају или не мењају са интеграционом константом. Добијени резидууми дају један ефикасан и удобан начин израчунавања вредности које дуж контуре C узима криволинијски интеграл

$$\int_{(C)} f(z,C)\,dz,$$

где је f општи интеграл једначине првог реда са покретним простим половима. Правило г. Петровића показује се веома корисним када се, на пример, траже резидууми мероморфних функција које су двоструко периодичне и дефинисане су диференцијалном једначином првог реда коју задовољавају.

Г. Петровић је своја истраживања о резидуумима интеграла проширио на једначине вишег реда. Најпре, полигон повезан са диференцијалном једначином даје *потребне* услове да нека једначина било ког реда има *покретне* полове одређеног реда, као и *довољне* услове да сви покретни полови буду *прости* (*једноструки*) полови. Уколико су ови услови испуњени, резидууми општег интеграла добијају се као корени извесне алгебарске једначине доведене у везу са полигоном који одговара једначини, а *потребни и довољни* услови да ови резидууми не варирају са интеграционом константом, или да они буду *алгебарске* функције покретних полова, лако се из тих услова изводе.

Овим поступком може се, уз остале примене, открити једна значајна чињеница која се односи на мероморфне интеграле једначине

$$F\left[y, y', y'', \ldots, y^{(p)}\right] = 0 \tag{4}$$

било ког реда: кад за неки трансформитет

$$Y = R\left[y, y', \ldots, y^{(q)}\right]$$

једначине (4), где је R рационална функција од $y, y', \ldots, y^{(q)}$ полигон једначине (4) испуњава извесне услове, који се лако могу проверити, тада постоји константа A таква да израз

$$G(z) = e^{\frac{1}{A}\int R\left[y, y', \ldots, y^{(q)}\right]dz},$$

пошто се у њему y замени било којим мероморфним интегралом једначине (48), постаје *цела* функција од z. Ове функције $G(z)$ тако уопштавају Вајерштрасову функцију

$$Al(z) = e^{-k^2\int y dz},$$

која одговара једначини

$$y''^2 - 4y'(1-y')(1-k^2y') = 0,$$

као и функцију

$$G(z) = e^{\int R dz},$$

на коју је скренуо пажњу г. Пикар[3] и која одговара једначини

$$P(y, y')y'' + Q(y, y') = 0$$

(где су P и Q полиноми по y и y') кад је њен општи интеграл униформан, при чему је R полином од y са погодно изабраним константним коефицијентима.

*

Познато је да *униформне* функције генерисане алгебарским диференцијалним једначинама првог реда, као и њихови општи или партикуларни интеграли, нису нарочито разноврсне, тј. да су њихови редуктивни елементи малобројни. Ови елементи или се подударају са неким елементарним функцијама или се из њих изводе квадратурама, или се пак поклапају са трансцендентима произведеним њеном Рикатијевом једначином.

Ово није случај онда када се, дајући интеграционој променљивој неку константну вредност, интеграл сматра *функцијом параметара* α_i који фигуришу у коефицијентима једначине. Трансценденте које није могуће добити интеграцијом неке алгебарске диференцијалне једначине било ког реда производе и веома једноставне једначине уколико се интеграл сматра функцијом параметра. Такав је случај са функцијом $\Gamma(z)$, трансцендентом г. Фредхолма (Fredholm), Ермитовом функцијом $\zeta(z)$, модуларним функцијама, итд. које производе једначине првог реда у којима, у улози трансцендената, фигуришу само експоненцијалне функције.

Г. Петровић открива велико мноштво разноврсних трансцендентни које се на тај начин добијају од алгебарских диференцијалних једначина првог реда.

Најпре, таква једна трансцендента $y(\alpha, C)$ која одговара партикуларној вредности $x = a$ може зависити или не зависити од интеграционе константе C. Г. Петровић даје *потребне и довољне* услове

[3] E. Picard, *Théorie de fonctions algébriques de deux varieables*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1889, pp. 283–287.

за ову зависност. У случају када $y(\alpha, C)$ не зависи од C, ова трансцендента ће бити извесна алгебарска комбинација коефицијената једначине пошто је у њој претходно стављено $x = a$. *Нове трансценденте могу, дакле, бити произведене само у случају кад* $y(\alpha, C)$ *зависи од* C.

Један случај алгебарских једначина првог реда чији општи интеграл *има само непокретне сингуларитете* а која може да произведе нове трансценденте је случај *једначина нултог рода*. Извесна трансформација

$$y = R(x, Y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \tag{5}$$

(где је Y нова непозната функција, а R нека рационална функција по Y) своди у овом случају дату једначину на линеарну једначину првог реда чији су коефицијенти алгебарске функције коефицијената саме једначине. Може се добити увид у разноврсност трансцендентних и хипертрансцендентних функција које тако настају примећујући, на пример, да се асимптотска вредност општег интеграла линеарне једначине

$$y' - 2axy + R(\alpha, e^{-bx^2}) = 0$$

(где су a и b позитивне константе, а функција R рационална по e^{bx^2}) изражава линеарно помоћу несводљиве трансценденте

$$\theta(\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{a + bn}} \tag{6}$$

и ограниченог броја њених извода по a; да је затим асимптотска вредност функције y дефинисане једначином

$$y' - \frac{y}{x} + R(\alpha, e^{-x}) = 0,$$

улогу редуктивног елемента игра несводљива трансцедента

$$\theta(\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \log(n+1) \cdot \alpha^n, \ldots \tag{7}$$

Када су *све критичне тачке* једначине *непокретне* (при чему полови могу бити покретни), једини случај у коме могу бити произведене нове трансценденте је случај *једначина нултог рода или рода један*. У случају *нултог рода*, функција $y(\alpha, C)$ произведена таквом једном једначином изражава се алгебарски помоћу коефицијената једначине и функције $\operatorname{sn}\left[\theta(\alpha)\right]$, где је $\theta(\alpha)$ једна од трансцендената добијених квадратуром изведеном на извесној алгебарској комбинацији коефицијената једначине; она може, на пример, бити трансцендента (6) или (7) или функција $\Gamma(\alpha)$, итд.

АНАЛИТИЧКА ТЕОРИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

УВОД

Михаило Петровић је једна од оних личности која је својим целокупним активностима и својим делима, научним и стручним једнако као и литерарним и другим, снажно утицала на културни и научни напредак Србије. Зато и није чудо што је о њему, његовом животу и раду доста писано. И ови редови прикључују се тој богатој литератури. Али они ће бити само један делић већ изграђеног великог мозаика о Петровићу. Покушаћемо да критички и са више детаља сагледамо његов допринос аналитичкој теорији диференцијалних једначина, квалитативној обради диференцијалних једначина са становишта теорије аналитичких функција. То је део његовог математичког опуса којем је, у оквиру *Сабраних дела*, посвећена и ова прва књига. Надамо се да ће то, поред објављивања оригиналних радова и њихових превода, допринети бољем познавању Петровићевих резултата којима је он обогатио математику у целини.

Немогуће је анализирати један део мозаика, а немати при том у виду његову целину. Одређене карактеристике целине одражавају се на уочени део. Зато нећу моћи избећи да се не користим већ реченим и написаним о Петровићу и да не укажем у којој мери су опште констатације примењиве на овај део његовог рада, резултата и личности.

Први пут је Петровићев допринос математици и њеним применама до 1922. године свеобухватно сагледан у *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch*[1]. Та књига је посебно значајна јер ју је сам Петрович саставио, па садржи и његов поглед на властите радове.

Обимна и исцрпна монографија Драгана Трифуновића[2], објављена 1969. на јасан и упечатљив начин анализира Петровићев живот и рад. Указаћемо на

---

[1] *Notice sur les travaux scientifiques, de M. Michel Petrovitch*, Gauthier-Villars, Paris 1922.

[2] Драган В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Српска академија наука и уметности, Београд 1969.

још три касније објављена чланка. Већа временска дистанца омогућила је М. Томићу[3] потпунији критички осврт, посебно на математичко стваралаштво.

И у овим редовима наћи ће се одраз наведених књига и чланака, што је неминовно и природно.

ОПШТЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ОБЈАВЉЕНИХ РАДОВА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Миодраг Томић је верно оцртао стање у Србији пре повратка Петровића из Париза и непосредно по повратку, када у Београду организује универзитетску наставу и научни рад из математике. Та слика средине помаже да се реално сагледају његов животни пут и токови његовог стваралаштва. Какав је то контраст! Париз, који је у то време био водећи центар за математичка истраживања, и Србија, која је једино на Великој школи у Београду имала високошколску наставу! Повезивања са светским токовима математике, до његовог доласка, није ни било. М. Томић пише: „Михаило Петровић је оснивач наше математичке науке, али и учитељ и васпитач читавих нараштаја наших математичара. Ако се то на први поглед и не види, његов утицај се осећао и много година после његове смрти. До Петровића се могло говорити само о доброј настави и покушају научног рада у области математике. Са његовим доласком на Велику школу почиње развој наше математике, већ на почетку са запаженим успехом од вредности и гласа.“[4]

Усамљен, далеко од научних центара са којима је све ређе имао контакте, без стваралачке атмосфере и свакодневне размене мишљења, на које услове је навикао у Паризу, његов рад, посебно из области аналитичке теорије диференцијалних једначина, све мање је носио новог, што га је већ уврстило међу водеће математичаре из те области, а све више представљао разраду знања стеченог у Паризу. Али, и то је било довољно да се још дуго Петровићеви радови из ове области задрже у самом врху математичког стваралаштва.

Можда је та његова почетна усамљеност утицала да је све радове (сем једног са Јованом Караматом[5]) написао сам, иако је временом створио читаву школу и око себе окупио скоро све математичаре који су тада нешто стварали.

---

[3] Миодраг Томић, *Математичке науке, Српска академија наука и уметности и развој науке и уметности у Срба (1)*, Београд 1989, стр. 13–34; Миодраг Томић, *Михаило Петровић и његов допринос у развоју математичких наука*, Зборник Филозофског факултета, 150 година Филозофског факултета, Београд 1990, стр. 11–20; Јован Д. Кечкић, *Михаило Петровић Алас (1868–1943), Живот и дело српских научника,* Српска академија наука и уметности, Београд 1997, стр. 325–370.

[4] Миодраг Томић, наведено, стр. 11.

[5] Михаило Петровић, Јован Карамата, *Израчунавање двопериодичних функција помоћу одређених интеграла*, Глас, Књ. CLXV, 81, Београд 1935, стр. 137–152.

Драган Трифуновић је анализирао успоне и падове његове научне продукције с обзиром на број радова. Показао је тачност оцене о опадању квалитета радова из математике. Он, поред осталог, изводи и следећи закључак:

„Понављање резултата у радовима једна је од општих карактеристика која прати Петровићево стварање. Наиме, Петровић је редовито имао две верзије својих научних радова: домаћу и страну. За Петровићево време овај начин објављивања научних резултата био је неопходан." И даље закључује: „Да је Петровић своје резултате задржао само на подручју нашег језика, као што је то био случај са Нешићем, Гавриловићем, Живковићем и Клерићем, његов улазак у науку не би имао данашње димензије." [6]

О понављању у резултатима Михаила Петровића расправљао је и Јован Кечкић[7]. Напомињем да је у Српској академији наука, односно у Српској академији наука и уметности до пре десетак година важио устаљен поступак да се детаљна верзија рада штампа у *Гласу* ћирилицом, а скраћена у *Bulletin*-у на једном од светских језика, баш из разлога који је Драган Трифуновић добро уочио. *Comptes Rendus* Париске академије користио се и користи се за објављивање главних резултата и доказа без детаља, а комплетни резултати и докази штампају се у неком текућем часопису за математику. То је у своје време и Петровић користио. И данас неки часописи међу којима је и *Proceedings of the Japan Academy*, прихватају радове до 3 странице.

Сагледавајући „понављања" у радовма из области аналитичке теорије диференцијалних једначина, пре бисмо рекли да, што се њих тиче, има радова који се један на други надовезују или даље разрађују претходне резултате, некад с мање, некад са више оригиналности и значаја.

Овакво стање навело је приређивача ове књиге да из сваког таквог „ланца" бира, по својој оцени, радове карактеристичне или по резултату или по коришћеним методама. Да је и неки други избор извршио, то не би изменило укупну представу о вредности и значају Петровићевог математичког опуса.

Наведимо и анализирајмо још неколико обележја која карактеришу Петровићев рад из области аналитичке теорије диференцијалних једначина.

Неоспорно је да је Петровић математичар оригиналних и плодних идеја. Рекао бих да је та његова особина посебно дошла до изражаја у радовима о којима је овде реч. Његова докторска дисертација је преплављена идејама које се односе на нова истраживања и на примену већ добивених резултата. Скоро сви радови из ове књиге, као и неки који у њу нису ушли, везани су за докторску дисертацију. На ту везу ћемо посебно касније и указати.

Констатација М. Томића[8] да Петровић није увек имао стрпљења да своје идеје доведе до краја, по мом мишљењу, не односи се у пуној мери на ову област. У овим радовима је посебно дошла до изражаја оригиналност и свежина његових идеја. Он се укључио у научни рад када је париска математичка

[6] Драган В. Трифуновић, наведено, стр. 434–445.

[7] Јован Д. Кечкић, наведено, стр. 335.

[8] Миодраг Томић, наведено.

школа аналитичку теорију диференцијалних једначина већ довела до врхунца. Свежина његових идеја импресионирала је његове професоре[9]. Његов први научни рад (унет као први рад и у ову књигу) ушао је тада у најзначајнију књигу математичке анализе[10], а касније у Енциклопедију[11]. То се исто десило и са његовом докторском дисертацијом, штампаном исте године[12].

Михаило Петровић своје радове није писао по шеми: Дефиниција, лема, теорема, доказ и последица. Тадашњи стил француске школе, који је и он прихватио, много је слободнији. Он уочава проблем, анализира га, тражи раније резултате који се бар делом односе на њега, тражи пут до решења, а теорема долази као крај тога пута.

При читању дела Петровића може сметати и то што он врло шкрто наводи литературу којом се служио, као што могу засметати и понекад дуге и сложене реченице, које отежавају праћење његове мисли.

Савремена математика се враћа идејама коришћеним у времену интензивног изучавања аналитичких особина решења диференцијалних једначина, идејама које је користио и Петровић. Као што смо видели, у аналитичкој теорији диференцијалних једначина изучава се понашање решења у околини сингуларних тачака на основу особина саме диференцијалне једначине. У суштини то је *локална анализа.* Последњих година у изучавању уопштених решења диференцијалних једначина, обичних и парцијалних, све више се користи сноп микрофункција[13], при чему се концентрише само на сингуларне тачке решења. Могло би се размишљати о томе како би се у овој теорији користиле свеже идеје које је Петровић унео у тадашњу локалну анализу. Верујем да би се примена компликоване теорије микрофункција тиме могла и нешто поједноставити.

РЕЗУЛТАТИ КОЈИ ПРЕТХОДЕ ПЕТРОВИЋЕВИМ РАДОВИМА

Када је Петровић започињао своју научну каријеру, аналитичка теорија диференцијалних једначина била је у свом зениту. Њоме су се бавили најпознатији математичари тога времена. Наводимо само нека имена: Е. Пикар, П. Пенлеве, Л. Фукс, Х. Поенкаре, Ш. Ермит. Није било лако почетнику пробити се у круг овако истакнутих математичара.

Навешћемо неке резултате који претходе резултатима Петровића. Основа истраживања била је везана за проблем да ли за дату алгебарску диференцијалну једначину и дати почетни услов постоји решење и, ако га има, како

---

[9] Драган Трифуновић, *Докторска дисертација Михаила Петровића*, Нова сазнања I, „Архимедес", Beograd 1994.

[10] E. Picard, *Traité d'Analyse III*, Paris 1896, pp. 356–359.

[11] *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig, B II, 2, s. 569.

[12] Ibid., B II, 1. A, 4a, S. 214.

[13] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura, *Foundation of Albebraic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1986.

се оно понаша у околини почетног услова. Посебно је изучавана зависност сингуларитета решења диференцијалне једначине од почетног услова и понашање решења у околини сингуларитета.

Према Пенлевеу[14] сингуларитети диференцијалне једначине су подељени у две групе, на следећи начин.

Посматрајмо систем

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где су f у околини $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ облика P_i / Q и где су P_i и Q холоморфне функције. Нека је Q нула у тачки $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ Ако бар за једно i, $P_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ није нула, сингуларитет система је обичан. Ако су сви $P_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, сингуларитет није обичан. Испитивано је да ли систем има решења када се почетни услов поклопи са неким од те две врсте сингуларитета.

За диференцијалну једначину првог реда

$$(*) \qquad y'(x) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

сингуларне тачке су:

1. сингуларне тачке функција по x које су коефицијенти по y полинома P и Q;

2. нуле (x_0, y_0) од $Q(x, y)$, за које је $P(x, y) \neq 0$. При томе се разликују два случаја:

а) $Q(x_0, y) = 0$ за изоловане вредности $y = y_0$. Тада решење диференцијалне једначине, које за $x = x_0$ постаје $y(x_0) = y_0$, има алгебарску тачку гранања. Унутар одређене области та тачка гранања може да се креће у зависности од интеграционе константе;

б) $Q(x_0, y) = 0$, где x_0 не зависи од y. Тачка x_0 је тада непокретна сингуларна тачка решења;

3. заједничке нуле (x_0, y_0) за $P(x, y)$ и $Q(x, y)$;

4. оне сингуларне тачке које се добијају за $z = 0$ када се изврши смена $z = 1/y$ у диференцијалној једначини.

Сингуларне тачке диференцијалне једначине из 1, 2 б и 3, као и одговарајуће које се добију из 4, непокретне су. Обележимо их са ξ. Два главна резултата тога времена су:

ФУКСОВА ТЕОРЕМА[15]. У свакој тачки x која се не поклапа са ξ свако решење једначине (*) које је коначно или бесконачно у x јесте алгеброид.

---

[14] *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig, B II, 1 A, 4a, SS. 206–229.

[15] L. Fuchs, *Über Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen*, Berlin Ber. 1884, s. 699.

ПЕНЛЕВЕОВА ТЕОРЕМА[16]. Све сингуларне тачке решења једначине (*) које нису алгебарске добијају се из скупа тачака ξ (непокретни сингуларитети).

Други важан Пенлевеов резултат односи се на облик зависности решења од интеграционе константе.

Сви ови резултати пренети су и на општи облик алгебарске диференцијалне једначине $F(x,y,y')=0$ где је F полином по y и y', чији су коефицијенти аналитичке функције по x.

Посебно су изучаване диференцијалне једначине чији је општи интеграл алгебарска функција интеграционе константе која нема непокретне тачке гранања или су, ако их има, са коначним бројем грана.

За диференцијалне једначине вишега реда изучавани су исти проблеми, само су они у овом случају знатно компликованији и резултати мање ефикасни[17]. Навешћемо само следећи важан резултат:

Ако општи интеграл од $F(x,y,y',y'')=0$ алгебарски зависи од y_0, y_0', y_0'', тада се F може превести алгебарском трансформацијом

$$y^n + \rho_{n-1}(u'',u',u,x)y^{n-1} + \ldots + \rho_0(u'',u',u,x) = 0,$$

где су ρ рационалне функције u,u',u'', у једначину $G(u'',u',u,x)=0$. При томе је G полином по u'',u',u, чији се коефицијенти алгебарским путем могу рачунати из оних из F.

Напоменимо да је Пенлеве дао пример диференцијалне једначине другог реда чији је општи интеграл трансцендентна функција обе интеграционе константе. То показује да се Пенлевеова теорема не може доказати за диференцијалне једначине реда већег од један.

ДОПРИНОС МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА АНАЛИТИЧКОЈ ТЕОРИЈИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

У овом делу покушаћемо да скренемо пажњу на главне резултате које је Петровић постигао у свом раду као и на његов приступ проблемима, што га је учинило познатим и признатим математичарем. Већ у *Notice*... (стр. 78–92) истакнути су по утврђеном реду, главни резултати из области аналитичке теорије диференцијалних једначина. Наш приступ и редослед навођења резултата биће нешто другачији. Водићемо рачуна и о мишљењу израженом у *Notice*... и о одјеку који је ова књига имала у математичкој литератури. Најзад, од помоћи ће нам бити и временска дистанца са које данас посматрамо његов рад.

[16] P. Painlevé, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Thèse, Toulouse Ann. 1888.

[17] *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*..., B II, 2, S. 585.

Подсећамо да смо у прилогу *О овом издању* скренули пажњу на терминологију коју Петровић употребљава, што може да користи и код читања ових редова.

Убеђени смо да свако ко жели да сагледа и анализира целокупни допринос Михаила Петровића аналитичкој теорији диференцијалних једначина или његов допринос решењу појединих проблема, увек мора поћи од његове докторске дисертације или се на њу вратити. Зато ћемо је детаљно обрадити и посебно указати на то како из ње извиру скоро сви радови који чине садржај ове књиге.

Докторска дисертација се односи на интензивно испитивање особина решења диференцијалних једначина из саме једначине. Рађена је, као што смо навели, у тада водећој париској школи. Брањена је пред комисијом у то време најистакнутијих математичара: Ермит, Пикар и Пенлеве. Њени резултати цитирани су на више места у *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, као и у другим чланцима и књигама.[18]

Теза просто ври од резултата и идеја за решавање врло широке лепезе проблема и за њихову примену. Иза сваке теореме навиру могућности даљег изучавања и развијања нових резултата и њене нове примене, које је могућности Петровић само делимично сам искористио.

Чиме се бавио у својој тези најјасније каже сам Петровић у њеном уводу: „У овом раду разматрам неколико питања која се односе на директно изучавање нула, бесконачности, максимума, минимума,... интеграла (решења) алгебарских диференцијалних једначина и нађене резултате примењујем на изучавање интеграла са становишта опште теорије функција.

Када у општем интегралу $y(x,C_1,\dots,C_p)$ диференцијалне једначине реда p мењамо константе интеграције $C_1,\dots,C_p$, вредности $x=x_0$, које анулирају овај интеграл, које га чине бесконачним, које му дају максималну или минималну вредност итд., мењају се у општем случају са интеграционим константама."

М. Петровић је себи поставио задатак да нађе услове да се поменуте вредности x_0 не мењају са константама интеграције и да то утврди из саме диференцијалне једначине, не тражећи експлицитно њена решења. То, заправо, значи да се нађе могућност да се из саме диференцијалне једначине „чита" када наведене особине решења неће зависити од почетних услова, што је веома важно у примени.

Тај проблем он поставља и знатно општије. Уместо испитивања зависности општег интеграла од интеграционих константи, посматра се нека дата веза $F(x,y,y',\dots,y^{(k)})$, $k<p$.

Петровић у потпуности решава проблем алгебарске диференцијалне једначине првог реда. У шест теорема даје потребне и довољне услове да нуле или бесконачности не зависе од интеграционе константе. Поред тога, ако су

[18] Драган В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969, стр. 447.

нуле или бесконачности непокретне, даје начин на који их је могуће израчунати. Ако су покретне, израчунава њихов ред.

Ако се зна да већ наведена Пенлевеова теорема тврди да трансцендентни сингуларитети решења алгебарске диференцијалне једначине првог реда не зависе од интеграционе константе, ако се још узме у обзир Фуксов резултат који даје услове да критични сингуларитети не зависе од интеграционе константе, онда Петровићеви резултати комплетирају резултате за све сингуларне тачке и нуле решења алгебарске диференцијалне једначине првог реда.

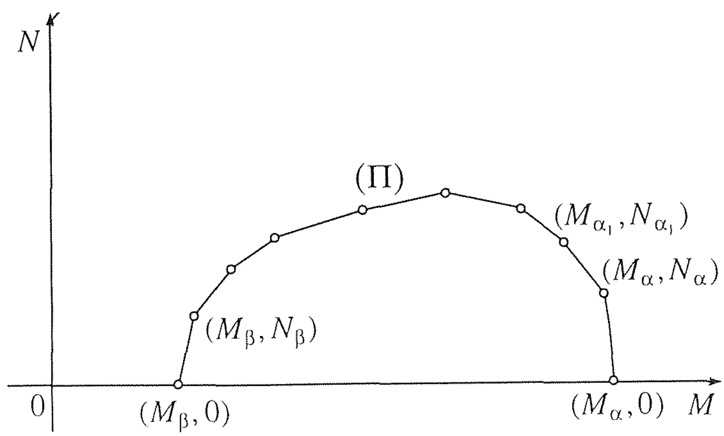
У случају када је диференцијална једначина вишега реда, није више било могуће дати тако комплетно решење. Основни разлог је и тај што за диференцијалне једначине вишега реда више не важи Пенлевеова теорема о трансцендентним сингуларитетима. Ипак, Петровић и за диференцијалне једначине вишега реда даје довољне услове да нуле или бесконачности решења буду независни од интеграционих константи.

Посебно је интересантно како се „читају" његови резултати са диференцијалне једначине. Да би дао визуелну слику и олакшао коришћење својих резултата и нематематичарима, он уводи полигон П који одговара алгебарској диференцијалној једначини F

$$F(x, y, y') \equiv \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

где су m_i и n_i цели позитивни бројеви, такви да није истовремено $m_i = m_j$, $n_i = n_j$ за $i \neq j$, а где су φ_i, $i = 1,\ldots,s$, функције од x, којима се по потреби дају нека ограничења.

Уверимо се како је једноставно конструисати полигон П који одговара диференцијалној једначини F, а са којега се на потпуно једноставан начин читају резултати ове тезе за диференцијалну једначину F.



Обележимо са $M_i = m_i + n_i$ и $N_i = n_i$, $i = 1,\ldots,s$, целе позитивне бројеве, који одговарају диференцијалној једначини F. У раван MON унесимо тачке

(M_i, N_i), $i = 1,\dots,s$. Нека је (M_α, N_α) она од ових тачака која се добива тако што прво утврђујемо тачке које су најудаљеније од осе ON. Ако их има више таквих, (M_α, N_α) је она која је истовремено најудаљенија од OM-осе. Истим поступком се одређује и тачка (M_β, N_β) само ако се реч „најудаљенија" замени речју „најближа".

Обрћимо праву која пролази кроз тачку (M_α, N_α) и тачку $(M_\alpha, 0)$ у позитивном смеру док не додирне неку од тачака (M_i, N_i) $i = 1,\dots,s$. Обележимо ту тачку са $(M_{\alpha_1}, N_{\alpha_1})$. Сада поновимо исти поступак са правом која пролази кроз тачку $(M_{\alpha_1}, N_{\alpha_1})$ и тачку (M_α, N_α) итд. док не стигнемо до тачке (M_β, N_β). Тако је добивен полигон П: $(M_\alpha, 0)$, (M_α, N_α), ..., (M_β, N_β), $(M_\beta, 0)$ као на слици. Највише теме полигона П обележимо са ω. Ако има више темена полигона П на истом растојању од OM, разликоваћемо ω десно и ω лево.

Једном нацртан полигон П за једначину F дозвољава да се сва тврђења о покретним и непокретним нулама и бесконачностима (види теореме I–VI у дисертацији) могу директно читати са полигона П, без икаквог знања о диференцијалним једначинама. Илуструјмо то примером Теореме I.

ТЕОРЕМА I. – *Да би бесконачности општег интеграла (решења) алгебарске диференцијалне једначине првог реда* $\mathrm{F}(x, y, y') = 0$ *биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да полигон* П *од* F *нема темена десно од темена* ω *десно.*

Напомињемо да када су нуле (бесконачности) непокретне Петровић указује на могућност да их све израчуна. Бриова и Букеова метода дозвољава да им се одреди ред и да се интеграли испитају у њиховој околини. Ако су нуле (бесконачности) покретне, Петровић указује на начин на који може да се одреди њихов ред, и то тако да се чита са полигона П.

Као што смо већ напоменули, закључци о диференцијалној једначини првог реда F не могу се директно пренети на диференцијалне једначине вишег реда. Један од главних разлога је неважење теореме о непокретности трансцендентних сингуларитета када је реч о решењу диференцијалне једначине вишег реда. Ипак, коришћене методе за диференцијалне једначине првог реда могу се пренети, у извесним случајевима, и на диференцијалне једначине вишега реда, што Петровић користи у другом делу тезе.

Полигон П за диференцијалну једначину F

$$F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) \equiv \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) y^{m_{0,i}} y'^{m_{1,i}} {y^{(p)}}^{m_{p,i}} = 0,$$

где су $m_{k,i}$, $k = 0,\dots,p$ и $i = 1,\dots,s$, цели позитивни бројеви, и то такви да за две различите вредности i, j није истовремено

$$m_{0,i} = m_{0,j}, \quad m_{1,i} = m_{1,j}, \dots, \quad m_{p,i} = m_{p,j},$$

а функције φ_i, $i = 1,\dots,s$, касније се одређују.

Обележимо са

$$M_i = \sum_{k=0}^{p} m_{k,i} \quad \text{и са} \quad N_i = \sum_{k=0}^{p} k\, m_{k,i}\,, \quad i = 1,\ldots,s\,.$$

Полигон П за диференцијалну једначину вишега реда F саставља се сада као и за диференцијалну једначину F првога реда. Разлика је у томе што је могуће да се две или више тачака (M_i, N_i) поклопе.

Довољни услови да су нуле и бесконачности решења диференцијалне једначине F независни од интеграционих констаната и сада се читају са одговарајућег полигона П, све под претпоставком да се зна да су сви трансцендентни сингуларитети решења независни од констаната интеграције или их решење и нема.

Примене које Петровић обрађује у самој тези су бројне. Наведимо неке.

Кда се утврди да су сингуларитети решења диференцијалне једначине првог реда сви независни, једначина се решава алгебарски или са највише два интеграљења.

Посебно је интересантна примена на изучавање униформних партикуларних интеграла диференцијалне једначине првог реда. То су и резултати који су врло цењени у математичкој литератури.

Петровић указује на широке класе једначина првог реда чији је сваки униформни интеграл рационална функција. Или, када има интеграле који су униформне функције са могућим трансцендентним сингуларитетима, одређује горњу границу различитих (по његовој дефиницији) таквих интеграла и даје алгебарску везу међу њима. И у случају диференцијалних једначина вишега реда примењује своје резултате на изучавање униформних интеграла.

Ако интеграли имају просте полове, указује на могућност израчунавања резидуума за те полове када су они покретни.

Код диференцијалних једначина вишега реда уводи појам првог интеграла за униформне интеграле. То је функција од x, од y и од неких од извода која се своди на константу или на рационалну функцију по x када се у њој y смени униформним интегралом дате диференцијалне једначине. Познавање првих интеграла упрошћава тражење интеграла за дату диференцијалну једначину.

На крају, даћемо неку врсту „водича" кроз резултате М. Петровића из области аналитичке теорије диференцијалних једначина, указујући на везу тих резултата са онима у докторској дисертацији.

Као што смо већ навели, Петровић је у својим радовима разрађивао, пре свега, идеје из докторске тезе. У овој првој књизи су издвојени, по нашем мишљењу, карактеристични радови, а указано је и на оне који су везани за њих. Бројке у угластим заградама код наведених радова односе се на целокупну библиографију диференцијалних једначина, а која се налази у прилогу књиге 2. Сабраних дела Михаила Петровића.

У радовима [4][19] , [297], [16], [110] и [243] непосредно су примењене теореме из докторске тезе. У раду под бројем [4] изучава се зависност асимптотских вредности (ако их има) интеграла алгебарских диференцијалних једначина првог и другог реда од интеграционих констаната. Ту зависност Петровић повезује са резултатима у тези о зависности нула од интеграционих констаната тако што уводи смену

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}.$$

У раду под бројем [297] испитује зависност од интеграционих констаната строгих екстремума интеграла алгебарских диференцијалних једначина првог и вишег реда. Како је изучавање екстремума везано за нуле извода, то се непосредно могу користити резултати тезе. У расправи [16] проучава реалне вредности које су нуле или бесконачности алгебарских диференцијалних једначина првог реда и то примењује на Рикатијеву диференцијалну једначину. У расправи [110], поред осталог, разматра и зависност критичних тачака интеграла диференцијалне једначине од интеграционе константе. У расправи [243] разматра зависност кривина интегралних кривих диференцијалне једначине првог и другог реда од интеграционих констаната.

Посебно су значајни радови везани за униформне интеграле алгебарских диференцијалних једначина. Ови резултати заузимају велики део тезе, а односе се на диференцијалне једначине првог и вишег реда. Од радова из ове области у ову књигу ушли су они под бројевима [2], [5] и [19]. У раду под бројем [2] разматра се број могућих, алгебарски независних, униформних трансцендентних интеграла које може имати алгебарска диференцијална једначина првог реда. У раду број [5] диференцијална једначина је алгебарска по x, X, y и y', где између x и X постоји алгебарска веза.У раду број [19] та испитивања се односе на диференцијалне једначине другог реда.

Ако се знају полови интеграла диференцијалне једначине, природно је да се поставе и питања резидуума за те полове. Та истраживања започета су у докторској дисертацији (види у овој књизи *Thèses*..., стр. 59–60), а настављена су у радовима под бројем [18] и [351].

На 26. страни у *Thèses*... Петровић скреће пажњу да се теорема о зависности нула интеграла диференцијалне једначине може лако повезати са изучавањем пресека интегралних кривих са датом утврђеном кривом. О томе расправља у раду број [18]. Изучавање сингуларних решења диференцијалних једначина има посебан значај јер се они у општем случају не могу добити као партикуларна решења. Зато их он посебно изучава. Његов резултат је забеле-

[19] Број у загради позива на Петровићеву расправу у библиографији радова из диференцијалних једначина објављена у књизи 2 и 15 *Сабраних дела Михаила Петровића.*

жио П. Пенлеве[20], а он се односи на случајеве када интеграли истовремено могу бити и партикуларни и сингуларни.

У раду број [15] изучава сингуларне интеграле и сингуларне интеграле у вези са проблемима третираним у раду број [18].

На крају докторске дисертације веома обимно је разматрано постојање првих интеграла диференцијалних једначина вишег реда (види у овој књизи *Thèses...*, од 96. странице па надаље). Веома обиман рад под бројем [237] посвећен је том проблему, а нешто касније и рад [298].

У тези се расправља и о томе какве се трансценденте јављају као интеграли диференцијалних једначина ако су нуле или полови покретни или непокретни. Идеју даље реализује у радовима број [27] и [378], а касније и у [353].

Као последица изучавања сингуларитета, природно следи расправа о целим функцијама као интегралима алгебарских диференцијалних једначина. То Петровић чини у радовима [351], [221], [233] и [249].

Поменућемо још неке Петровићеве радове који делимично задиру у аналитичку теорију диференцијалних једначина. У расправи [356] даје потребне и довољне услове да потенцијални ред представља решење диференцијалне једначине првог реда. У расправи [309] конструише диференцијалне једначине првог реда на којима се могу проверити разне аналитичке особине интеграла диференцијалне једначине. У расправи [287] показује класу диференцијалних једначина другог реда које могу имати покретне есенцијалне сингуларитете. То потврђује да Пенлевеова теорема о непокретности трансцендентних критичних тачака интеграла диференцијалне једначине првог реда не важи и за једначине вишег реда. У расправи [353] показује да се свака алгебарска диференцијална једначина, без обзира на њен ред, може свести на посебан систем, назван канонички систем, који одређује канонички низ функција користан за решавање диференцијалних једначина.

Рад под бројем [390] унет је у ову књигу не због резултата, већ због коректног начина на који Петровић расправља о приоритету о објављеним резултатима. Ради се о његовим резултатима из рада под [378] и рад [353].

Надам се да овај мали преглед кроз бројне радове Михаила Петровића о аналитичкој теорији диференцијалних једначина може да послужи као прва информација.

Богољуб Станковић

[20] *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften...*, B. II A 4a, S. 214.

ЛИТЕРАТУРА

Извори којима се служио Михаило Петровић у остваривању својих резултата у областима обичних диференцијалних једначина завређују посебну пажњу. Овде се ова литература излаже у следу њеног појављивања у овој књизи *Диференцијалне једначине – Први део*, те пружа кориснику књиге прегледну слику извора на којима је Петровић себе изградио.

Дакако, анализа литературе којом се Петровић служио и начина њеног коришћења, одсликава научников однос према туђим, као и својим резултатима.

Наведимо неколико особености Петровићевог рада на литератури, а о чему ће бити више речи у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

Ако се изузму класична дела Бриоа, Букеа и Штурма, лако је утврдити да се Петровић користио савременом, за своје време најновијом литературом, не старијом од 5 до 10 година. Актуелност у постизању резултата и жеља да се находи у првим савременим редовима науке, очигледна је код младог Петровића. У научној средини Краљевине Србије по први пут се јавља математичар оваквих назора. Било му је веома важно да не губи корак са светом. Све је ово било ново, благотворно. Али, како су године пролазиле овај „научни темпо" у Петровића се полако губио. Тако је у првој половини 20. века Петровић носио науку прошлог века, да би на крају у целости био „застарео".

Друго. Литература показује да се у докторској дисертацији Петровић користио необимним изворима (навео је само осам извора). Највише је цитирао радове својих професора и ментора Пенлевеа и Пикара. Ово је и оправдано, имајући у виду садржај Петровићеве дисертације.

У одабраним Петровићевим расправама из диференцијалних једначина за ову 1. књигу *Сабраних дела Михаила Петровића* утврђен је већи број цитиране литературе страних математичара, као и цитирања својих резултата. Овде уочљиво доминира Петровићева докторска дисертација, носи највећи број цитирања. Овај податак чисто библиографски потврђује став приређивача ове књиге академика Богољуба Станковића, да су скоро сви Петровићеви радови из аналитичке теорије диференцијалних једначина настали из професорове докторске дисертације брањене на Париском факултету наука 29. јуна 1894.

Овде смо литературу изложили у две целине. Први део садржи изворе којима се млади Петровић користио при изради своје докторске дисертације, а други део доноси литературу у Петровићевим изабраним радовима који се објављују у овој књизи.

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

1. NÖTHER M., Mathematische Annalen, Leipzig 1884, t. III (стр. (28), 208, 55).
2. CH. BRIOT–J. BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris 1875, p. 389 (стр. (31), 57).
3. PAINLEVÉ P., Annales de la Faculté de Toulouse, Toulouse 1888, p. 43 (стр. (39), 64).
4. PAINLEVÉ P., Annales de l'École Normale Superieure, Paris 1892, p. 305 (стр. (56), 254, 80).
5. PAINLEVÉ P., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1890, t. CX, p. 34 (стр. (56), 254, 80).
6. PAINLEVÉ P., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1893, t. CXVI, pp. 173; 362–365; 566–569 (стр. (62), (85), (87), 85, 105, 107).
7. PICARD É., *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris 1889, ppp. 283–287 (стр. (86), (94), 211, 308, 106, 113).
8. PAINLEVÉ P., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1893, t. CXVII, pp. 211–214 (стр. (86), 212, 106).

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

9. PAINLEVÉ P., Исто као под 4 (стр. 127).
10. PAINLEVÉ P., Исто као под 5 (стр. 127).
11. PETROVITCH M., *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques*, Paris 1894 (докторска дисертација) (стр. 133, 169, 178, 187, 252, 254, 262, 283, 284, 292, 294, 327).
12. POINCARÉ H., *Sur les équations lienéaires aux différentielles ordinaires et aux differences finies*, American Journal of Mathematics, Baltimore 1886, vol. VII, 3 (стр. 142).
13. STURM F., *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre,* Journal de Liouville, Paris 1836, t. I (стр. 149).
14. HALPHEN J.H., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1880, t. CI, p. 1238 (стр. 152).
15. RAFFY, *Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes,* Annales de l'École Normale Superiéure, Paris 1882, 2me série, t. XII (стр. 158, 216, 231).
16. PETROVITCH M., *Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zero*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1894, t. CXVIII, 22, pp. 1190–1193 (стр. 166, 254).
17. CH. BRIOT–J. BOUQUET, Journal de l'École Polytechnique, Paris 1856, t. XXI, cahier 36, p. 239 (стр. 173, 229).
18. PICARD É., *Traité d'Analyse*, Paris 1896, t. III, chap. 8, pp. 356–359 (стр. 175, 195, 196, 254).
19. ZEUTHEN I., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1880, t. XC, p. 114 (стр. 218).

20. RAFFY, *Sur les quadratures algébriques et logarithmiques*, Annales de l'École Normale Superiéure, Paris 1885, t. XV (стр. 231, 238).
21. APPELL P., Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris 1891 (стр. 248).
22. PICARD É., Acta mathematica (1894) (стр. 248).
23. POINCARÉ H., Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris 1890 (стр. 248).
24. KOENIG J., Annales de l'École Normale Superiéure, Paris 1887–1894 (стр. 248).
25. KOENIG J., Recuiel des Savants Etrangers..., Paris 1894 (стр. 248).
26. POINCARÉ H., Acta mathematica (1885) (стр. 251).
27. PAINLEVÉ P., *Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre*, Paris 1892 (стр. 253).
28. POINCARÉ H., Bulletin de la Sociètè mathématique de France, Paris 1883 (стр. 253).
29. ПЕТРОВИЋ М., *Методе за трансформацију бесконачних редова у одређене интеграле*, Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд 1896, стр. 123–243 (стр. 256, 257, 271).
30. HERMITE CH., *Cours à la Faculté des Sciences de Paris,* Paris 1891, p. 197 (стр. 279).
31. ПЕТРОВИЋ М., *О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првога реда*, Српска краљевска академија, Глас, књ. L, Први разред, књ. 17, Београд 1895, стр. 1–43 (стр. 287).
32. PETROVITCH M., *Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles*, Mathematische Annalen, Leipzig 1896, t. 48, pp. 75–80 (стр. 290).
33. PETROVITCH M., *Intégrales premières à restrictions*, Académie royale de Serbie, Editions spéciales, t. LXXII, Sciences mathématiques et naturelles, t. 19, Paris 1929, p. 50 (стр. 320).
34. MALMQUIST I., *Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre*, Acta mathematica, t. 42, 1920, p. 319 (стр. 327).
35. LINDELÖF E., *Sur la croissance des intégrales des équations différentielles du premier ordre*, Bulletin des Sciences mathematiques, t. 1 (1899) (стр. 330).
36. PÓLYA G., *Ueber das anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentielgleichung genügen*, Vierteljahrschrift der Naturforsch. Geselschaft in Zürich, Jahrg. 61 (1916), pp. 531–545 (стр. 333).
37. LAGOUTINSKI, Rec. math. Moscou 27, 1909, pp. 420–423 (стр. 344, 346).
38. APPELROT, Rec. math. Moscou 32, 1922, pp. 9–21 (стр. 344, 346).
39. PETROVITCH M., *Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques,* Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade 1938, t. VI–VII, pp. 290–325 (стр. 344, 345).
40. KOSTITRIN V., Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1939, 6. févr., p. 411 (стр. 344, 347).
41. PEYOVITSCH T., Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences, Paris 1939, 20. mars, p. 960 (стр. 344, 347).

Драган Трифуновић

О ОВОМ ИЗДАЊУ

Прва књига из области диференцијалних једначина садржи радове Михаила Петровића у којима се бавио аналитичком теоријом диференцијалних једначина. Бар су два разлога определила приређивача да баш овим резултатима посвети прву књигу. Прво, у књизи *Notice sur les travaux scientifiques de Michel Petrovitch*[1] у чијем припремању је М. Петровић лично учествовао, овим радовима почиње део о диференцијалним једначинама и тај део је и најисцрпније обрађен. Друго, Петровић је почео своју веома успешну каријеру радовима из ове области математике. Ту спада и његова докторска дисертација чији резултати су ушли у Математичку енциклопедију[2] као најважнији допринос М. Петровића светској математици.

Нема сумње да се у целокупном опусу Петровића који се односи на диференцијалне једначине, непосредно или посредно осећа утицај његових резултата из области аналитичке теорије диференцијалних једначина, а посебно оних резултата из његове докторске дисертације. Није било лако одабрати радове за ову књигу, а још теже је било, будући да се ради о великом броју радова, одлучити које изоставити. Зато је уведен додатни критеријум за одабир. Главне Петровићеве идеје и резултати из аналитичке теорије диференцијалних једначина објављени су у његовој докторској дисертацији. Кроз радове из прве књиге може се пратити како је он резултате из тезе даље развијао и разрађивао. Овакав начин одабирања радова који ће ући у прву књигу је субјективно опредељење приређивача у којем је до краја поштовано и виђење самог Петровића изражено кроз *Notice...*[1]

Ево и кратког приказа прве књиге. Читалац се прво упознаје са преводом и фототипијом докторске дисертације као централне теме. Треба истаћи да је посебно значајно што ће теза постати доступна већем броју читалаца математичке литературе. Јер, у садашњој Југославији постоји само неколико примерака докторске дисертације, који се с поштовањем и с разлогом добро чувају. Затим следе одабрани радови, по наведеном критеријуму, из аналитичке теорије диференцијалних једначина. Како се Петровић у више радова враћао на исту проблематику, то су међу њима одабрани они који су посебно значајни пошто представљају одређене резултате или су интересантни по коришћеним методама и комплексности обраде. Редослед радова је по времену њиховог штампања. На првом месту је први штампани Петровићев научни

---

[1] *Notice sur les travaux scientifiques de Michel Petrovitch (1894–1921)*, Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris 1922.

[2] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Lepzig, B II, 2, s. 569.

рад, а који се односи на униформне интеграле диференцијалних једначина првог реда. Последњи рад у овој књизи, *Додатак расправи о алгебарским диференцијалним једначинама*, илуструје Петровићев однос према утврђивању првенства на резултате у математици. Он, такође, показује његов стил у полемици о првенству и ауторству резултата управо из ове области.

Поглавље *Прилози* у овој књизи има за циљ да допуни слику Петровићевих резултата из аналитичке теорије диференцијалних једначина и укаже на њихов одјек у математичкој литератури.

Скрећемо пажњу на неке термине и ознаке којима се Петровић користи у својим радовима из области диференцијалних једначина, а који се срећу и у овој књизи.

Михаило Петровић пише: „интеграл диференцијалне једначине", док се данас више користи „решење диференцијалне једначине". Он каже: „извршићемо квадратуру", док би се данас рекло: „интегралићемо". Његов „имагинарни број" је у данашњој терминологији „комплексан број". Термин „униформна функција" одговара данашњем термину „функција". Под нулама интеграла (решења) $y(x)$ диференцијалне једначине он подразумева вредности x_0 које анулирају овај интеграл. То значи да ту спадају и критични сингуларитети у којима се $y(x)$ анулира. Под бесконачностима интеграла (решења) $y(x)$ диференцијалне једначине подразумева оне тачке x_0 у чијој свакој околини функција $y(x)$ не остаје ограничена. Термином „род" неке функционалне везе (француски „genre", немачки „Gattung", енглески „kind", руски „род") користи се у наведеном раду у овој књизи, *Један поглед на природу трансцендената дефинисаних диференцијалним једначинама првог реда са промењивим параметрима*, а термином „врста" у наведеном раду *О алгебарским диференцијалним једначинама првог реда које производе целе функције*. Од ознака поменимо само sn *u*, cn *u*, dn *u* ознаке за елиптичне функције: Sinus amplitudinis, Cosinus amplitudinis и Delta amplitudinis.[3]

На крају, верујемо да ће читалац, уз већ дате напомене, лако и са уживањем читати оригиналне текстове или њихове преводе иако математички језик Михаила Петровића садржи и изразе који се данас ређе употребљавају.

Радови Михаила Петровића у овој, као и у свим књигама *Сабраних дела Михаила Петровића*, објављују се у веродостојном препису. Ако је преводилац или приређивач приметио неку штампарску грешку, то је наведено уз посебну ознаку.

Дугујем велику захвалност на сарадњи Жарку Јовићу, уреднику у Заводу за уџбенике и наставна средства, као и Александру Савићу, асистенту Математичког факултета у Београду.

Професор Д. Трифуновић приложио је своје коментаре о одјеку Петровићевих расправа, што је у фуснотама назначено са (пр. Д. Т.).

Богољуб Станковић

[3] Михаило Петровић, *Елиптичке функције*, 9. књига *Сабраних дела Михаила Петровића*.

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

Друга теза

САВРЕМЕНИ РАДОВИ О ПРИНЦИПУ НАЈМАЊЕГ ДЕЈСТВА

Фототипија оригиналне докторске дисертације

Première thèse

SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 1

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део

Прво издање, 1999. година

Издавач

Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник

АИДА СПАСИЋ

Лектор

НАТАША КЕЦМАНОВИЋ

Корице

АИДА СПАСИЋ

Графички уредник

ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректори

ГОРИЦА МАРКОВИЋ
МАЈА БИЧЕНКО

Обим: 31 3/4 штампарских табака

Формат: 17 × 24 cm

Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу априла 1999. године.

Штампање завршено маја 1999. године.

Штампа

БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.9

ПЕТРОВИЋ, Михаило Н.

Диференцијалне једначине. Део 1 / Михаило Петровић ; приредио Богољуб Станковић ; [докторску дисертацију ... превео је са француског језика Богољуб Станковић, остале радове ... Душан Адамовић]. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1999 (Београд : БИГЗ). – 389, 109 стр. : илустр., факс. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 1)

Слика аутора. – Текст делимично и на франц. језику. – Тираж 500. – Стр. 11–23: Михаило Петровић и његов допринос у развоју математичких наука / Миодраг Томић. – Стр. 367–378: Аналитичка теорија диференцијалних једначина Михаила Петровића / Богољуб Станковић. – Стр. 382–383: О овом издању / Богољуб Станковић. – Библиографија: стр. 379–381. – Регистар.

ISBN 86-17-06409-9

929:51 Петровић М.

а) Петровић, Михаило (1868–1943) б) Диференцијалне једначине
ИД=74709260

9 788617 346704

ISBN 86-17-06409-9

К. Б. 34670