ACADÉMIE ROYALE DE SERBIE

ÉDITIONS SPÉCIALES

TOME LXXII

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

LIVRE 19

INTÉGRALES PREMIÈRES
A RESTRICTIONS

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1929

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}
86599 Quai des Grands-Augustins, 55

ACADÉMIE ROYALE DE SERBIE

ÉDITIONS SPÉCIALES

TOME LXXII

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

LIVRE 19

INTÉGRALES PREMIÈRES A RESTRICTIONS

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1929

INTÉGRALES PREMIÈRES A RESTRICTIONS

CHAPITRE I.

DIVERSES ESPÈCES D'INTÉGRALES PREMIÈRES.

1. *Intégrales premières sans restrictions.* — Étant donnée une expression F dépendant de la variable indépendante x, de la fonction inconnue y, de dérivées y', y'', $\ldots$, $y^{(p)}$ de y par rapport à x et de données initiales $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots$, l'équation

$$\text{(1)} \qquad F = \text{const.}$$

est dite une *intégrale première* de l'équation différentielle

$$\text{(2)} \qquad f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (n > p),$$

si F a une valeur indépendante de x lorsqu'on y remplace y par l'intégrale générale de (2).

Telle est la définition usuelle d'une intégrale première, l'expression F se réduisant à une constante *quelle que soit l'intégrale particulière considérée de* (2).

Ainsi, par exemple, l'équation du second ordre

$$y''(y + 2xy') + 2y'^2 = 0$$

admet comme intégrale première

$$yy' + xy'^2 = \text{const.}$$

L'équation différentielle des coniques

$$9y''^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$$

admet comme intégrale première

$$\frac{y''^8}{(3y''y^{(4)} - 5y'''^2)^3} = \text{const.}$$

De même, étant donné un système d'équations

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n)}) = 0, \\ f_2(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

on appelle *intégrale première du système* une fonction F de l'espèce précédente, constante en vertu des équations (3).

Ainsi, dans le cas des équations canoniques de la Dynamique écrites sous la forme

$$(4) \qquad \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = dt,$$

une intégrale première du système sera toute fonction

$$\varphi(t, q_1, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

constante en vertu des équations du mouvement. Par exemple, dans le cas simple de l'attraction par un centre fixe, on a deux intégrales premières : celles des aires et des forces vives.

Les méthodes générales connues conduisent à des intégrales premières des problèmes de la Dynamique et mettent en évidence leurs propriétés. D'autres méthodes, dues à Bertrand, Massieu, Bour, Maurice Levy et M. Kœnigs ont pour but le problème inverse : chercher les problèmes de Dynamique admettant une intégrale première donnée, par exemple une intégrale algébrique en $p_1, \ldots, p_n$.

La connaissance d'une ou plusieurs intégrales premières pour une équation ou un système d'équations, en simplifie l'intégration et l'étude des propriétés. En général, elle ramène le problème de l'intégration à celui de la recherche des solutions communes à deux ou plusieurs équations différentielles, ce qui permet d'en abaisser l'ordre. Mais, dans des cas généraux, elle fournit la possibilité d'intégrer complètement l'équation ou le système.

Ainsi, si l'on connaît une intégrale première

$$(5) \qquad \varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

de l'équation

$$y'' = f(x, y),$$

le reste de l'intégration s'achève par les quadratures (Jacobi).

On peut intégrer complètement l'équation

$$y'' + f(x)y' + \psi(x, y) = 0$$

au moyen des quadratures dès que l'on en connaît une intégrale première de la forme (5) (Brassine).

L'équation

$$\frac{d}{dx} f(x, y') + \psi(x, y) = 0$$

et

$$\frac{d}{dx} f(x, y') + \psi(x, y)y' = 0$$

jouissent de la même propriété (Malmsten).

Pour indiquer un exemple relatif aux systèmes d'équations, soient

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}, \end{cases}$$

n intégrales premières des équations canoniques (4) indépendantes de t, parmi lesquelles se trouve celle des forces vives $H = \text{const.}$, et supposons que les équations (6) forment un système pour lequel tous les crochets (φ_i, φ_k) sont nuls. On peut alors trouver n autres intégrales premières par des quadratures (Liouville); parmi ces n intégrales il y en a $n - 1$ ne dépendant pas de t et une qui en dépend. Ainsi, dans l'exemple du cas des forces centrales, on connaît deux intégrales, et il en a quatre en tout; si ces deux intégrales vérifient l'équation $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, le problème peut être achevé d'après le théorème de Liouville, et c'est ce qui arrive en réalité.

2. *Intégrales premières à restrictions.* — Les intégrales premières de l'espèce précédente sont fournies par des expressions F, se réduisant à une constante en vertu de l'équation différentielle ou du système d'équations considérées, *quelle que soit l'intégrale particulière de celles-ci*.

Or, à côté de telles intégrales premières, il y a lieu d'en considérer d'autres *valables seulement pour les intégrales de l'équation différentielle* (*ou du système*) *qui satisfont à des conditions données*, se rattachant à leur nature analytique comme fonctions de x ou des constantes d'intégration.

Ainsi, pour des types généraux d'équations d'un ordre quelconque (ou de systèmes d'équations), on peut conclure, en vertu des propriétés générales des fonctions d'une nature analytique déterminée, qu'une fonction Ψ de la variable indépendante, de la fonction y de x, et de quelques dérivées de y par rapport à x (pouvant aussi dépendre de données initiales) doit se réduire à une constante ou à une fonction rationnelle, algébrique, etc. de x lorsqu'on y remplace y non pas par une intégrale *quelconque* de l'équation différentielle, mais par des intégrales *d'une nature analytique spéciale*.

On peut, par exemple, considérer les intégrales premières Ψ valables exclusivement pour les intégrales de l'équation différentielle qui seraient fonctions *entières* de x, ou bien *uniformes, méromorphes, algébroïdes, simplement ou doublement périodiques*, etc. De plus, une telle intégrale première peut n'être valable que pour les valeurs de la variable indépendante appartenant à une région déterminée du plan.

Ainsi, soit $f=0$ une équation algébrique en $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ et R une fonction rationnelle en $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$. S'il existe trois constantes a, b, c telles que les trois équations

$$(7) \qquad R-a=0, \qquad R-b=0, \qquad R-c=0,$$

après y avoir remplacé y par une intégrale *méromorphe* de $f=0$, n'aient qu'un nombre fini de racines en x (en vertu de l'équation même $f=0$), l'équation différentielle admettra comme intégrale première

$$R=r(x),$$

où $r(x)$ ~~est~~ une fonction *rationnelle* de x, et cela pour toute intégrale y *méromorphe*. Si les trois équations (7) n'ont pas des racines à distance finie, l'équation différentielle admet comme intégrale première $R=\text{const}$. Ceci résulte du théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes sans coupures.

De même, considérons une équation $f=0$ d'un ordre quelconque ne contenant pas x explicitement, et une fonction R de $y, y', \ldots, y^{(q)}$, laquelle, après y avoir remplacé y par une intégrale *méromorphe dou-*

blement périodique de $f = 0$, n'a pas des zéros ou des infinis à distance finie. L'équation $f = 0$ admettra comme intégrale première $R =$ const. pour toutes ses intégrales y de cette nature. Ceci résulte du fait qu'une fonction méromorphe doublement périodique ne saurait rester holomorphe ni différente de zéro dans tout le plan de la variable sans se réduire à une constante.

Les intégrales premières sans restrictions fournissent une sorte d'invariants relatifs *à toutes les intégrales* de l'équation, quelle que soit leur nature analytique. Les intégrales premières à restrictions fournissent alors une sorte d'invariants relatifs *à une classe déterminée d'intégrales de $f = 0$.*

3. *Intégrales premières qualitatives à restrictions.* — S'il ne s'agit que d'intégrales *réelles* de $f = 0$, il peut y avoir d'utilité de considérer une autre espèce d'intégrales premières. Ce seraient les intégrales exprimant qu'une certaine expression Φ, dépendant de x, y et de quelques dérivées de y par rapport à x (pouvant aussi dépendre des données initiales), se réduit en vertu de l'équation même $f = 0$, non pas à une constante, *mais à une fonction inconnue θ de x dont on connaît des particularités d'ordre qualitatif pour x variant entre deux valeurs connues a et b.* De telles particularités peuvent consister en signes de θ, variations limitées de cette fonction, existence d'oscillations entre $x = a$ et $x = b$, concavité ou connexité de la courbe

$$y = \theta(x) \ldots.$$

Le fait, par exemple, que pour x variant entre a et b, la fonction θ varie entre deux valeurs λ_1 et λ_2 connues (constantes ou fonctions de x ou des données initiales) s'exprime par une équation de la forme

$$\Phi = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ \lambda_1 < \theta < \lambda_2 \end{array} \right|$$

fournissant une espèce *d'intégrale première qualitative* de $f = 0$, valable pour les intégrales réelles, finies et continues dans l'intervalle (a, b) de x, de $f = 0$, ou bien pour les intégrales positives, monotones, etc.

Ainsi, l'équation

$$y'^2 + y^2 = f(x)$$

admet, pour ses intégrales réelles croissantes à partir de $x = x_0$ et correspondant à la détermination positive de $\sqrt{f(x)}$, l'intégrale première

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} x_0 < x < \infty \\ 1 < \theta < \sqrt{2} \end{array} \right|.$$

L'équation de M. Painlevé

$$y'' = 6y^2 + x$$

admet, pour ses intégrales réelles monotones dans un intervalle (a, b) de x, comme intégrale première

$$\frac{y'^2 - y^3 + (y_0^3 - y_0'^2)}{y - y_0} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ 2x_0 < \theta < 2x \end{array} \right|.$$

L'équation

$$y'' = (a + b\, e^{-x^2-y^2})y \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

admet, pour ses intégrales réelles, une intégrale première de la forme

$$\frac{y''}{y} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ a < \theta < a + b \end{array} \right|.$$

Le système

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_2 y_3, \qquad \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2, \qquad \frac{dy_3}{dx} = k^2 y_1 y_2$$

admet, entre autres, l'intégrale première pour ses intégrales réelles

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \mathrm{M} < \theta < \infty \end{array} \right|,$$

où M est un certain nombre positif.

Dans les Chapitres qui suivent, nous indiquerons des modes de formation d'intégrales premières à restrictions Ψ et Φ pour des types généraux d'équations différentielles et de systèmes. Nous indiquerons également le parti qu'on peut en tirer dans la recherche de leurs intégrales, générales ou particulières, d'une nature analytique déterminée ou dans l'étude de particularités de leurs intégrales réelles.

CHAPITRE II.

THEORÈMES AUXILIAIRES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

4. *Contour polygonal caractéristique des pôles de l'intégrale.* — Nous commencerons par rappeler certaines conditions *nécessaires* pour que l'intégrale d'une équation d'ordre quelconque ait ses pôles *mobiles*, c'est-à-dire variant avec les constantes d'intégration. Le contour polygonal, dont nous indiquerons la construction au moyen des exposants de la fonction inconnue et de ses dérivées dans les termes de l'équation différentielle, y jouera un rôle fondamental.

Soit donnée l'équation $f = 0$ d'ordre p écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} y''^{m_{2i}} \ldots y^{(p)m_{pi}} = 0, \tag{8}$$

où les m_{ik} sont des entiers positifs tels qu'on n'ait pas à la fois pour deux indices i et j différents

$$m_{0i} = m_{0j}, \qquad m_{1i} = m_{1j}, \qquad \ldots, \qquad m_{pi} = m_{pj},$$

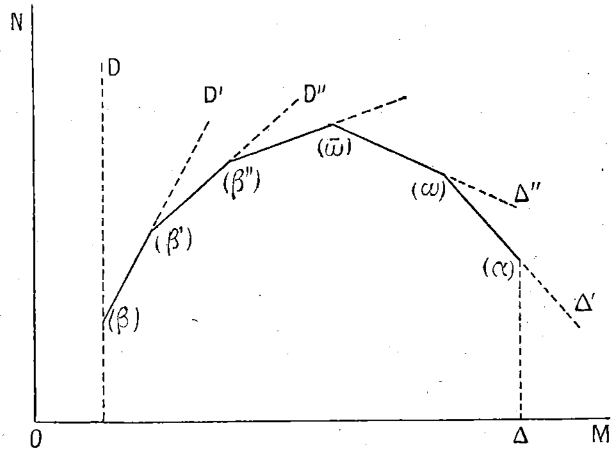
les φ_i étant des fonctions quelconques de x.

Formons les $2s$ nombres entiers positifs suivants :

$$\left\{\begin{aligned} M_i &= m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki}, \\ N_i &= m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} km_{ki}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Traçons dans le plan deux axes, celui des M et des N, et marquons les s points (M_i, N_i), ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice i. Si deux ou plusieurs points coïncident, on mettra à côté d'un tel point multiple les indices de tous les points qui y sont confondus.

Fig. 1.



Construisons le contour polygonal Π concave vers OM, fermé par deux droites L_1 et L_2 perpendiculaires à l'axe OM et par cet axe même, et contenant dans son intérieur et sur sa périphérie tous les points (M_i, N_i); de plus, chaque côté du contour, sauf l'axe OM et les droites L_1, L_2, doit passer par au moins deux points (M_i, N_i). Les sommets (α) et (β) du contour seront appelés *sommets extrêmes* droit et gauche, et le sommet le plus éloigné de OM sera *sommet* ω; s'il y a plus d'un sommet ω sur une même parallèle à OM, on aura un tel sommet droit et un gauche.

L'angle $D\beta D'$ sera désigné comme *domaine* du sommet (β); l'angle $D'\beta'D''$ comme domaine du sommet (β'); l'angle $D''\beta''D'''$ comme domaine du sommet (β'')... ; enfin l'angle $\Delta\alpha\Delta'$ comme domaine du sommet (α). Dire qu'un nombre λ est *compris dans le domaine d'un sommet*, signifie que λ coïncide avec le coefficient angulaire d'une droite passant par ce sommet et comprise dans l'angle représentant le domaine de celui-ci.

Un sommet est *à domaine positif* ou *à domaine négatif* suivant que les valeurs λ comprises dans son domaine sont positives ou négatives. Tous les sommets à gauche du sommet ω gauche sont à domaine positif; tous ceux à droite du sommet ω droit sont à domaine négatif.

Posons

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma_{0i} = m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\ \gamma_{1i} = m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{hi} = m_{h+1,i} + \ldots + m_{pi} \end{cases}$$

et ensuite

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}}(\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}},$$

où λ est un nombre arbitraire.

Il peut arriver que le contour II présente un ou plusieurs sommets en lesquels deux ou plusieurs points (M_i, N_i) coïncident ; nous les appellerons alors les *sommets multiples*. Envisageons un tel sommet et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les indices des termes de f qui y sont confondus. Formons l'équation

$$(11) \quad A_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}(a) + A_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_2}(a) + \ldots + A_{\alpha_n}\varphi_{\alpha_n}(a) = 0,$$

où a est un nombre arbitraire. Elle sera une équation algébrique en λ à coefficients dépendant de a, que nous appellerons *équation en* λ rattachée au sommet multiple $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. A chaque sommet multiple correspond une équation en λ de la forme (11). Une telle équation rattachée à un sommet simple d'indice i se réduirait à $A_i = 0$, c'est-à-dire à

$$\lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}} = 0.$$

Nous indiquerons les formes du contour II relatifs à quelques types généraux d'équations.

Premier exemple. — Soit

$$f = P(x, y)y'' + Q(x, y),$$

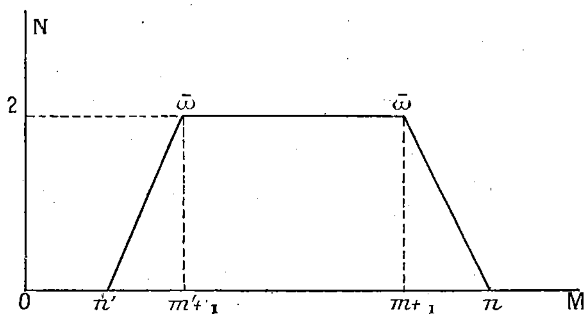
où P et Q sont deux polynomes en y, et soient m et m' le plus grand et le plus petit exposant de y dans P, et n, n' les quantités analogues relatives à Q. Le polynome f présente deux sortes de termes :

1° Les termes de la forme $y^i y''$ $(i = m', m' + 1, \ldots, m - 1, m)$, qui donnent les points $M_i = i + 1$, $N_i = 2$, situés sur la droite $N = 2$;

2° Les termes de la forme y^k $(k = n', n' + 1, \ldots, n - 1, n)$, qui donnent les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

Par conséquent, la forme générale du contour II est celle de la figure 2. Sur la droite $N = 2$ il y a au moins un sommet; la disposition, le nombre de sommets et la forme du contour peuvent d'ailleurs

Fig. 2.



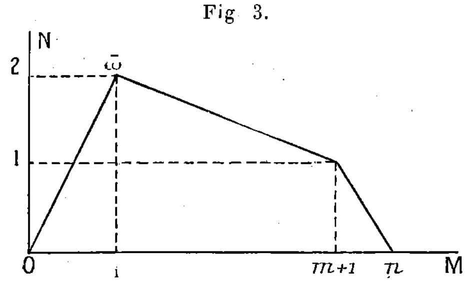
varier. Si $m = m'$, le sommet ϖ sera double; on voit également que le contour ne peut pas présenter plus d'un sommet multiple.

Deuxième exemple. — Pour obtenir le contour II de

$$f = y''^{\nu} + P(x, y, y'),$$

on construira le contour II' de $P(x, y, y')$; on joindra le sommet ϖ droit de ce contour au point $S(M = \nu, N = 2\nu)$ par une droite D, et

Fig 3.

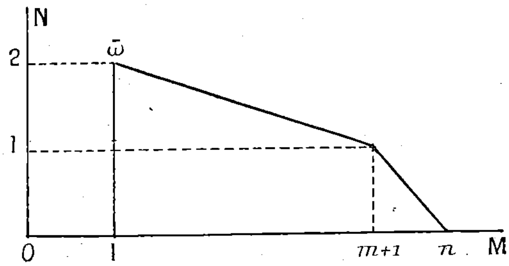


l'on abaissera de S une perpendiculaire Δ sur OM. Si le sommet extrême gauche de II' est à gauche de Δ ou sur Δ, le contour II est celui composé des droites Δ, D, du côté à domaine négatif de II' et d'une portion de l'axe OM; si le sommet extrême gauche est à droite de Δ, le côté Δ sera remplacé par la droite joignant le point S à ce sommet extrême. Lorsque, par exemple, $\nu = 1$ et

$$P(x, y, y') = P(x, y)y' + Q(x, y),$$

en donnant à m, m', n, n' les significations précédentes, on aura l'une ou l'autre forme du contour (*fig.* 3 et 4) suivant que $n' > 0$ ou $n' = 0$. On voit que le contour ne peut pas présenter de points

Fig. 4.



multiples. La forme du contour peut varier, mais le sommet ϖ reste toujours sur la droite $N = 2$.

Troisième exemple. — Soit

$$F = P(x, y'') + Q(x, y).$$

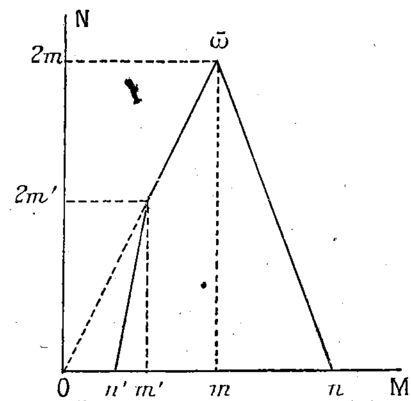
Il y a deux sortes de termes :

1° Les termes en $y''^i (i = m', \ldots, m)$, donnant les points $M_i - i$, $N_i = 2i$ situés sur la droite limite $\lambda = 2$;

2° Les termes en $y^k (k = n', \ldots, n)$, donnant les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

La forme générale du contour est celle de la figure 5; elle peut varier, mais le sommet ϖ se trouve toujours sur la droite $N = 2m$.

Fig. 5.



5. *Conditions suffisantes pour l'invariabilité des pôles et des zéros de*

l'intégrale. — Le lien du contour II avec les pôles de l'intégrale d'une équation différentielle consiste en ce qui suit.

Soit $x=a$ un pôle d'ordre λ de l'intégrale de l'équation $f=0$; dans son voisinage on peut écrire

$$(12)\qquad y=(x-a)^{\lambda}\varphi(x), \qquad \lambda = \text{entier négatif},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction tendant vers une limite déterminée, finie et différente de zéro, lorsque x tend vers a. Remplaçons cette expression de y, ainsi que celles de ses dérivées, dans le polynome f; le résultat de la substitution doit être identiquement nul quel que soit x dans le voisinage de $x=a$. Avec les désignations du paragraphe précédent, le terme général de f prend la forme

$$(13)\qquad \varphi_i(x)(x-a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i\varphi(x)^{M_i}+\theta_i(x)],$$

où $\theta_i(x)$ est un polynome en

$$(14)\qquad \varphi(x),\quad (x-a)\varphi'(x),\quad \ldots,\quad (x-a)^p\varphi^{(p)}(x),$$

dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de $\varphi(x)$.

Envisageons dans f l'ensemble T de termes pour lesquels l'exposant $\lambda M_i - N_i$ de la puissance de $x-a$ mise en facteur est le plus faible. Pour que les termes d'indices γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$(15)\qquad \lambda M_\gamma - N_\gamma = \lambda M_\delta - N_\delta = \lambda M_\varepsilon - N_\varepsilon = \ldots,$$

$$(16)\qquad \lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i,$$

lorsqu'on attribue à l'indice i toutes les valeurs entières de 1 à s autres que celles des indices des termes faisant partie de T.

La condition (15) s'écrit

$$(17)\qquad \lambda = \frac{N_\gamma - N_\delta}{M_\gamma - M_\delta} = \frac{N_\delta - N_\varepsilon}{M_\delta - M_\varepsilon} = \ldots,$$

d'où l'on voit que λ doit être égal au coefficient angulaire de la droite (γ, δ) liant les points (M, N) d'indices γ et δ, et que les points correspondant à divers termes de T doivent se trouver sur cette droite.

D'autre part, la valeur $\lambda M_i - N_i$, lorsqu'on y remplace λ par la valeur (17), représente l'ordonnée à l'origine $S_{i,\lambda}$, changée de signe, de la droite passant par le point (M_i, N_i) et ayant comme coefficient angulaire λ. Par conséquent, pour que les termes d'indices γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit :

1° Que les points (M, N) d'indices γ, δ, ε, ... soient sur une même droite et que λ soit égal au coefficient angulaire de cette droite;

2° Que l'ordonnée à l'origine de la droite (γ, δ) soit plus grande que celle d'une quelconque des droites parallèles à (γ, δ) et passant par les points (M, N) non situés sur la droite (γ, δ).

Si tous les points (M, N) sont simples, la direction de toute droite (γ, δ) est bien déterminée, et pour ces points la condition (15) ne peut être vérifiée que pour une seule valeur de λ. Mais si le point est multiple et correspond, par exemple, aux indices $i, j, k, \ldots$, la direction des droites (i, j), (j, k), ... est indéterminée et la condition (15) est vérifiée quelle que soit la valeur de λ; pour ces points il ne reste que les inégalités (16) à vérifier.

C'est là qu'intervient le contour Π du polynome f et comme l'on a pour $x = a$ et pour tout indice i

$$\lim \theta_i(x) = 0,$$

un raisonnement simple [1] conduit au théorème suivant :

Théorème I. — *Toutes les fois que l'intégrale de $f = 0$, contenant une ou plusieurs constantes d'intégration, a des pôles variant avec ces constantes, l'une ou l'autre des conditions suivantes est remplie :*

1° Le contour Π a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire entier négatif, et l'ordre du pôle est égal à un de ces coefficients;

2° Le contour Π a un ou plusieurs sommets multiples à domaine négatif et tels que l'équation en λ, rattachée au sommet, ait au moins une racine indépendante de a et égale à un nombre entier compris dans le domaine de ce sommet; l'ordre du pôle est alors égal à l'une de telles racines.

Lorsque ni l'une ni l'autre de ces conditions n'est remplie, les pôles

---

(1) M. Petrovitch, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (Gauthier-Villars, Paris, 1894).

de l'intégrale ne varient pas avec les constantes d'intégration. Tel est, par exemple, le cas où le sommet ω droit est en même temps le sommet extrême droit et que ce sommet est simple, ou bien, s'il est multiple, l'équation en λ qui s'y rattache n'a aucune racine de nature précédente.

La théorie analytique des équations différentielles spécifie dans ces conditions les valeurs de x pouvant être pôles fixes de l'intégrale y d'une équation donnée ([1]).

Notamment, les conditions 1° et 2° du théorème précédent n'étant pas remplies, tout pôle de y coïncide : soit avec une racine, soit avec un pôle d'au moins une fonction $\varphi_i(x)$, soit avec une racine en a d'une certaine équation en λ. Plus précisément :

Soient h l'indice du sommet ω droit, h_1, h_2, ... les indices de ceux des sommets qui sont à droite du sommet (h) et qui comprennent chacun dans leur domaine au moins un nombre entier négatif (s'il existe de tels sommets). Alors :

a. Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *simples*, ou bien du sommet (h) supposé *multiple*, le pôle $x = a$ annule celle des fonctions $\varphi_i(x)$ dont l'indice est égal à celui du sommet dans le domaine duquel λ est compris, ou rend infinie l'une des autres fonctions $\varphi_i(x)$;

b. Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *multiples*, ou bien du sommet (h) supposé *multiple*, le pôle $x = a$ est soit une racine en a de l'équation en λ relative à ce sommet (dont le domaine comprend λ), lorsque dans cette équation on remplace λ par un des entiers négatifs qui se trouvent compris dans le domaine du sommet, soit un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ ne correspondant pas à ce sommet.

Supposons que l'équation $f = 0$ ne contient pas x explicitement. Si l'intégrale y a un pôle, elle en a une infinité variant avec la constante d'intégration additive à x. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le contour Π ait au moins un côté à coefficient angulaire égal à un entier

---

([1]) M. Petrovitch, *loc. cit.*, p. 89-90.

négatif, et que l'ordre λ du pôle soit égal à un de ces coefficients; ou bien qu'il y ait un ou plusieurs sommets multiples tels que l'équation en λ admette des racines entières négatives et comprises dans le domaine du sommet (alors λ est égal à l'une de ces racines). *Si aucune de ces conditions n'est remplie, l'intégrale y n'a pas de pôles.*

Il suffit d'appliquer les résultats qui précèdent à la transformée de $f=0$ en $\frac{1}{y}$ pour obtenir des propositions analogues *concernant les zéros* de l'intégrale. On peut, d'ailleurs, constater l'invariabilité des zéros aussi directement, par la considération des côtés à coefficient angulaire positif et des sommets à domaine positif du contour Π de $f=0$.

Dans le cas des équations du premier ordre, les conditions pour la mobilité ou l'invariabilité des pôles et des zéros de l'intégrale sont à la fois plus simples et plus complètes. On a à cet égard les théorèmes suivants (¹):

Théorème II. — *Pour que l'intégrale y de $f=0$ ait des pôles variant avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le contour* Π *rattaché à f ait au moins un côté à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif.*

Si cette condition n'est pas remplie, *les pôles de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration* et coïncident avec l'un des zéros ou des infinis des fonctions $\varphi_i(x)$. Notamment, le pôle sera un zéro de $\varphi_h(x)$, ou bien un infini des autres $\varphi_i(x)$, où h désigne l'indice du sommet du contour Π déterminant l'ordre du pôle. Si, en particulier, tous les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions entières de x, le pôle est un zéro de $\varphi_h(x)$, et si $\varphi_h(x)$ est une constante, *l'intégrale n'a pas de pôles à distance finie.*

Théorème III. — *Pour que les zéros d'ordre entier de $f=0$ ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le contour* Π *n'ait aucun côté à coefficient angulaire égal à un nombre entier positif.*

De tels zéros coïncident soit avec les zéros de $\varphi_h(x)$ (h désignant

(¹) M. Petrovitch, *loc. cit.*, p. 23-24.

l'indice du sommet dont le domaine contient le nombre $\lambda =$ ordre du pôle), soit avec les infinis des autres fonctions $\varphi_i(x)$.

Le théorème III peut aussi s'énoncer sous une forme ne faisant pas intervenir le contour Π. Écrivons l'équation $f = 0$ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{k=m} f_k(x, y) y'^{m-k} = 0; \tag{18}$$

on a le théorème suivant :

Théorème IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros de l'intégrale y ne varient pas avec la constante d'intégration, est qu'après avoir supprimé les facteurs communs aux $f_k(x, y)$, chaque f_k, sauf f_0, contient en facteur y^h, où $h \geqq k$.*

Cette condition étant remplie, les zéros finis de y coïncident avec les zéros de $f_0(x, 0)$, ou bien avec les infinis des autres fonctions $f_i(x, 0)$.

Le raisonnement qui, dans la théorie analytique des équations du premier ordre, conduit aux conditions *nécessaires et suffisantes* pour l'invariabilité des pôles et des zéros de l'intégrale, ne s'étend pas dans tout son ensemble aux équations algébriques d'ordre supérieur. C'est que, d'une part, pour les équations d'ordre supérieur les singularités transcendantes de l'intégrale peuvent varier avec les constantes d'intégration, ce qui n'arrive pas dans le cas des équations du premier ordre. D'autre part, dans le cas du premier ordre, toutes les déterminations de la dérivée y' sont des fonctions algébriques connues de y, pour lesquelles on peut trouver les systèmes circulaires de racines et étudier la façon dont chacune de ces racines se comporte dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$.

Généralement, ceci ne subsiste plus pour les équations d'ordre supérieur. L'intégrale, ainsi que sa dérivée, peut devenir indéterminée pour les valeurs x_0 quelconques; elle peut avoir des coupures variables avec les constantes d'intégration, ou encore des lignes singulières non analytiques, variables également avec les constantes. Ces difficultés empêchent l'extension de la méthode qui réussit dans le cas des équations du premier ordre.

Mais pour le but que nous nous proposons dans cet Ouvrage, il nous suffit de connaître des *conditions suffisantes* pour l'invariabilité des *pôles* et des *zéros d'ordre entier* de l'intégrale sous la forme précédente permettant, pour des types considérés d'équations différentielles, de reconnaître aisément si elles sont remplies.

Remarquons encore que ces *conditions suffisantes* s'étendent aux systèmes d'équations d'ordres quelconques, et en particulier aux équations de la Dynamique ([1]).

([1]) M. PETROVITCH, *Remarques sur les équations de la Dynamique et sur le mouvement tautochrone* (*American Journ. of Mathem.*, vol. XVIII, n° 2, p. 135-144).

CHAPITRE III.

INTÉGRALES PREMIÈRES RATTACHÉES AUX INTÉGRALES MÉROMORPHES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

6. *Principe de la méthode.* — Les théorèmes exposés dans ce qui précède sur les pôles et les zéros des intégrales des équations différentielles, joints à quelques propositions de la théorie générale des fonctions, permettent, dans des cas étendus, de trouver des intégrales premières relatives aux intégrales méromorphes de l'équation (qu'elles soient particulières ou qu'elles dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration), de simplifier la recherche de ces intégrales méromorphes et même de les calculer toutes complètement, dans certains cas particuliers quand il en existe.

Ce qui va suivre repose sur les deux lemmes suivants se rapportant, le premier à la recherche des intégrales méromorphes en général, le second à la recherche des intégrales méromorphes doublement périodiques.

Lemme I. — Soient

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{19}$$

une équation différentielle algébrique; y une intégrale *méromorphe* de (19) et

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) \tag{20}$$

une fonction *rationnelle* de x, y, y', $\ldots$, $y^{(q)}$. Si l'on peut trouver trois constantes a, b, c telles que les trois équations

$$R - a = 0, \qquad R - b = 0, \qquad R - c = 0 \tag{21}$$

(après y avoir remplacé dans R y par l'intégrale considérée) n'aient qu'un nombre fini de racines, *l'équation* (19) *admet pour les y une inté-*

grale première de la forme

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x), \tag{22}$$

où $r(x)$ est une fonction rationnelle de x.

Si les trois équations (21) n'ont pas de racines, *l'intégrale première devient*

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = \text{const.} \tag{23}$$

Ceci résulte du théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes sans coupure.

Si, y étant supposée fonction *entière* de x, on peut trouver deux constantes a et b telles que les deux équations

$$R - a = 0, \qquad R - b = 0 \tag{24}$$

n'ont qu'un nombre fini de racines, *l'équation* (19) *admet pour ses intégrales entières une intégrale première de la forme*

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = P(x), \tag{25}$$

où P *est un polynome en x.*

Enfin, si les deux équations (24) n'ont pas de racines, *l'intégrale première devient* (23).

C'est une conséquence du théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions entières.

Lemme II. — Soient

$$f(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{26}$$

une équation différentielle algébrique à coefficients constants; y une intégrale *méromorphe doublement périodique* de (26) et

$$R(y, y', \ldots, y^{(q)}) \tag{27}$$

une fonction *rationnelle* en $y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants.

Si la fonction R, en vertu de l'équation (26), ne s'annule pour aucune valeur finie de x, ou bien si elle n'a pas de pôles à distance finie, *l'équation* (26) *admet, pour ses intégrales méromorphes doublement périodiques, l'intégrale première*

$$R = \text{const.} \tag{28}$$

Ceci résulte du théorème de Liouville sur les zéros et les pôles des fonctions méromorphes doublement périodiques.

L'application de ces lemmes conduira à des intégrales premières de la forme

$$(29) \qquad R = r(x), \qquad R = P(x), \qquad R = \text{const.}$$

Une telle intégrale étant connue, la recherche des intégrales y de nature analytique supposée se ramène à celle des solutions communes à deux équations différentielles, ce qui se fera par différentiations et éliminations des dérivées successives de y.

Deux cas peuvent alors se présenter :

Premier cas. — On finit par tomber sur des équations d'ordre zéro, et l'on est alors ramené au problème élémentaire : trouver les solutions communes à deux équations algébriques; ces solutions sont alors nécessairement algébriques en x. *Toute intégrale méromorphe est alors rationnelle.*

Deuxième cas. — On peut choisir $r(x)$, $P(x)$ ou la constante des intégrales premières (29), de sorte que les équations de la suite (4) à partir d'un certain rang m se réduisent à des identités. Toute intégrale commune à (1) et (29) est une intégrale de l'équation $(m-1)$; *l'équation* (1) *ne peut avoir d'intégrales méromorphes autres que celles définies par* $(m-1)$. Pour que (1) en admette, il faut et il suffit que $(m-1)$ en admette et que parmi ces intégrales il y en ait qui satisfassent à (1). La recherche des intégrales méromorphes (et par suite des intégrales entières) de l'équation proposée *se trouve donc ramenée à celles d'une équation d'un ordre moindre.*

Si, par exemple, cette dernière équation ne contient que x, y, y', l'équation proposée ne peut admettre comme intégrales d'autres transcendantes méromorphes que celles définies par les équations du premier ordre (fonctions rationnelles en x, ou bien en e^{ax}, ou bien en $\operatorname{sn} ax$ et $\operatorname{cn} ax$).

Si la dernière équation ne contient que x, y, y', y'', on saura, par exemple, reconnaître par les méthodes de M. Painlevé, relatives aux équations du second ordre, si $f = 0$ admet une intégrale méromorphe dépendant algébriquement de deux constantes d'intégration; on calculera, dans ce cas, cette intégrale soit algébriquement, soit par quadratures, ou bien par l'intégration d'une équation linéaire du troisième ordre.

Rappelons que les intégrales premières sans restrictions peuvent être considérées comme une sorte d'invariants relatifs *à toutes les intégrales* de l'équation, quelle que soit leur nature analytique. Les intégrales premières de l'espèce précédente seraient alors des invariants relatifs *à une classe déterminée d'intégrales*. A ce point de vue, la différence entre ces deux sortes d'invariants rappelle la différence qui existe entre les deux sortes d'invariants dans la théorie des équations linéaires, entre ceux considérés par Halphen, valables *quelle que soit la nature* des fonctions entrant dans la substitution, et les invariants d'une nature plus spéciale, considérés par Poincaré, où les fonctions qui entrent dans la substitution ne sont pas quelconques, mais rationnelles en x.

7. *Quelques types d'équations admettant des intégrales premières algébriques pour leurs intégrales méromorphes.* — Nous allons indiquer comment on est conduit à considérer des intégrales premières de l'espèce précédente et comment on peut former des types généraux d'équations pour lesquelles on connaîtra de telles intégrales.

Soit $R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle donnée de $x, y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants et indéterminés $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Effectuons dans l'équation donnée

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{30}$$

le changement

$$z = \frac{1}{R - \alpha} \tag{31}$$

(où α est une constante indéterminée), en prenant z comme nouvelle fonction. Soit

$$\Psi(x, z, z', \ldots, z^{(s)}) = \sum_{i=1}^{i=s} \psi_i z^{n_0}, z'^{n_1}, \ldots, z^{(s), n_{p+q-1}} \tag{32}$$

la nouvelle équation, où les ψ_i sont polynomes en $x, a_1, a_2, \ldots, a_k$ et α.

Supposons construit l'ensemble Δ de points (M, N) relatif à (32) et soit

$$(M_{h_1}, N_{h_1}), \quad (M_{h_2}, N_{h_2}), \quad \ldots, \quad (M_{h_j}, N_{h_j}) \tag{33}$$

un ensemble de points faisant partie de Δ et tel qu'en les supprimant, l'ensemble qui reste ne remplit aucune condition du théorème I (p. 13).

Toutes les fois que les j équations

$$(34) \qquad \psi_{h_1}=0, \quad \psi_{h_2}=0, \quad \ldots, \quad \psi_{h_j}=0$$

pour au moins trois valeurs α_1, α_2, α_3 *de* α *admettent un système de solutions en* a_1, a_2, $\ldots$, a_k *indépendantes de* x, *l'équation* (30) *admet, pour ses intégrales méromorphes, l'intégrale première*

$$(35) \qquad R(x, y, y', \ldots, p^{(q)}) = r(x),$$

où $r(x)$ *est une fonction rationnelle de* x, *et où les* a_k, *figurant dans* R, *sont à remplacer par ce système de solutions.*

Car, y étant une intégrale méromorphe de (30), l'intégrale z de (32) qui lui correspond est aussi une fonction méromorphe, et si l'on donne à α l'une des valeurs α_1, α_2, α_3 et aux coefficients indéterminés a_i dans R, les valeurs trouvées comme solutions du système (34), les termes de l'équation (32) correspondant à l'ensemble de points (33) disparaissent. Le contour Π de (32) ne remplit pas les conditions du théorème I, ce qui montre que les pôles de l'intégrale z ne varient pas avec les constantes d'intégration et annulent ou rendent infinie l'une au moins des fonctions ψ_i, d'où l'on conclut que ces pôles sont en nombre limité. Il s'ensuit que les trois équations

$$R-\alpha_1=0, \qquad R-\alpha_2=0, \qquad R-\alpha_3=0$$

n'ont qu'un nombre limité de racines. Par conséquent

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}),$$

lorsqu'on y remplace y par une intégrale méromorphe de (30), se réduit à une fonction rationnelle de x, ce qu'il fallait démontrer.

On démontre de la même manière la proposition suivante :

Toutes les fois que les équations (34) *pour au moins deux valeurs* α_1 *et* α_2 *de* α *admettent un système de solutions* a_1, a_2, $\ldots$, a_k *indépendantes de* x, *l'équation* (30) *admet, pour ses intégrales entières, l'intégrale pre-*

mière

$$R = P(x),$$

où P *est un polynome en* x.

Lorsque x ne figure pas explicitement dans l'équation (30), *le polynome* P *se réduit à une constante.*

8. *Cas des équations du premier ordre.* — Dans des cas étendus des équations du premier ordre il est possible de former des expressions R dépendant de la variable indépendante x et d'une ou plusieurs intégrales particulières $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *d'une nature analytique déterminée*, se réduisant pour ces intégrales à une fonction *algébrique* ou *rationnelle* de x, ou bien une *constante.* On peut alors en tirer des conclusions sur la nature des y_k, sur le nombre de telles intégrales distinctes (c'est-à-dire n'étant liées par aucune relation algébrique à coefficients algébriques en x), etc.

L'exemple suivant en donnera l'idée.

Considérons l'équation

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{A}$$

où P et Q sont polynomes en y de degrés respectifs m et m', à coefficients algébriques en x, et envisageons-en les intégrales y *uniformes.*

Pour que l'équation puisse admettre des intégrales uniformes *transcendantes,* il faut, d'après un théorème connu, que P et Q soient rationnels en x; on peut donc les supposer polynomes en x. De plus, par une transformation homographique, on peut toujours ramener l'équation à satisfaire à la condition $m = m' + 2$, qu'on supposera donc remplie. La valeur $y = \infty$ est alors une valeur ordinaire, c'est-à-dire que, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, l'intégrale $z(x)$ qui pour $x = x_0$ prend la valeur $z = 0$, est holomorphe au voisinage de $x = x_0$ (pris au hasard).

1° Supposons alors que l'équation algébrique en y

$$Q(x, y) = 0 \tag{B}$$

admette plus de deux racines $y_i = \varphi_i(x)$ *distinctes* et soient

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad y_3 = \varphi_3(x)$$

trois quelconques de ces racines; elles peuvent d'ailleurs être des branches d'une même fonction algébrique.

Une intégrale uniforme y de l'équation (A) n'a pas de coupures et ne peut avoir que certains points essentiels connus à l'avance; soit $x = a$ un tel point. Si $x = a$ est en même temps un point critique de φ_1, φ_2, φ_3, on peut toujours poser

$$(\alpha) \qquad x - a = \xi^\nu$$

(ν étant un entier) de façon que φ_1, φ_2, φ_3 deviennent trois fonctions uniformes de ξ dans le voisinage de $\xi = 0$; on peut donc toujours les supposer uniformes au voisinage de $x = a$.

Ceci posé, considérons l'expression

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_2 - \varphi_1} \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_3} = \mathrm{R}(x, y).$$

Après y avoir remplacé l'intégrale uniforme y par son expression en x, R sera une fonction $z(x)$ de x qui, en dehors de certaines valeurs fixes de x en nombre limité, ne prend les trois valeurs 0, 1, ∞ que pour les valeurs de x racines des équations respectives

$$y(x) - \varphi_1(x) = 0, \qquad y(x) - \varphi_2(x) = 0, \qquad y(x) - \varphi_3(x) = 0.$$

Or, ces racines sont également des valeurs exceptionnelles de x en nombre fini. La fonction $z(x)$ serait donc une fonction admettant $x=a$ comme point essentiel, étant uniforme dans le domaine de ce point et ne prenant dans le voisinage de $x = a$ les trois valeurs 0, 1, ∞ qu'un nombre fini de fois. La fonction $z(x)$ ne peut donc admettre de points essentiels (à distance finie ou infinie) : c'est donc une fonction rationnelle $r(x)$ de x, de sorte qu'on aura

$$\mathrm{R}(x, y) = r(x).$$

On en conclut que l'équation (A) *n'admet aucune intégrale uniforme transcendante*.

2° Supposons que l'équation (B) *n'admette que deux racines distinctes*

$$y = \varphi_1(x), \qquad y = \varphi_2(x)$$

et posons

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

La fonction $z(x)$ n'est pas nécessairement uniforme, puisque φ_1 et φ_2 ne sont pas nécessairement rationnels; mais si le point $x = a$ est un point critique de z, c'est que c'est un point critique algébrique de φ_1 ou de φ_2 et, par suite, après le changement (α), on sera sûr que z sera uniforme dans le voisinage de $z = 0$.

Cela supposé, formons l'équation différentielle du premier ordre en z et soient z_1 et z_2 les deux fonctions de x qui correspondent à deux intégrales uniformes y_1 et y_2 de l'équation (A). Considérons l'expression

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(y_1 - \varphi_2)(y_2 - \varphi_1)}{(y_1 - \varphi_1)(y_2 - \varphi_2)} = \mathrm{R}(x, y_1, y_2).$$

Après y avoir remplacé y_1 et y_2 par leurs expressions en x, cette expression sera une fonction de x à un nombre fini de valeurs n'ayant pas de points essentiels à distance finie ou infinie. Car si $x = a$ était un point essentiel de R, à l'aide du changement (α) on peut toujours supposer cette fonction uniforme autour de $x = a$. Or, l'on démontre par des considérations analogues à celles de tout à l'heure que R ne peut être égal à 0, 1, ∞, que pour un nombre fini de valeurs de x dans le voisinage de $x = a$. Donc $x = a$ n'est pas un point essentiel de R et, par suite, on a

$$\mathrm{R}(x, y_1, y_2) = \text{fonction algébrique de } x.$$

Il s'ensuit que l'équation (A) *ne peut avoir deux intégrales uniformes transcendantes distinctes.*

3° Supposons que (B) *n'a qu'une racine*

$$y = \varphi(x)$$

et posons

$$z = \frac{1}{y - \varphi}.$$

Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales uniformes de (A) et z_1, z_2, z_3 les intégrales correspondantes de l'équation en z. Considérons l'expression

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}\,\frac{y_3 - \varphi}{y_2 - \varphi} = \mathrm{R}(x, y_1, y_2, y_3).$$

Comme φ est rationnel, R est une fonction de x uniforme sans coupure et l'on démontre comme précédemment que les trois équations

$$R = 0, \qquad R = 1, \qquad R = \infty$$

n'ont qu'un nombre fini de racines ; on aura donc

$$R(x, y_1, y_2, y_3) = \text{fonction rationnelle de } x.$$

Il s'ensuit que l'équation (A) *ne peut avoir plus de deux intégrales uniformes transcendantes distinctes.*

4° Si Q ne contient pas y, l'équation (A) est une équation de Riccati ou linéaire. Dans le pemier cas, il peut exister 1, 2 ou 3 intégrales uniformes transcendantes distinctes ; dans le second cas il peut y en avoir 1 ou 2.

Les mêmes considérations et les mêmes conclusions peuvent se répéter :

A. Pour les intégrales uniformes en x des équations

$$F(x, y, y') = 0,$$

où F est un polynome irréductible en x, y, y' du genre zéro en y, y' ;

B. Pour les intégrales uniformes en (x, X) des équations

$$\Phi(x, X, y, y') = 0,$$

où Φ est un polynome irréductible en x, X, y, y' du genre zéro, un ou deux, x et X étant liés par une relation algébrique $\varphi(x, X) = 0$; ou même, plus généralement, pour toutes les équations de l'espèce hyperelliptique.

9. *Types d'équations admettant des intégrales premières pour leurs intégrales méromorphes doublement périodiques.* — Étant donné un type général d'équations différentielles

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{36}$$

d'un ordre quelconque, ne contenant pas x explicitement, on peut se proposer de préciser dans une certaine mesure les équations appartenant à un tel type, qui peuvent être satisfaites par des fonctions méromorphes doublement périodiques, en précisant celles qui ne peuvent pas être de cette catégorie d'équations.

D'abord, les considérations précédentes conduisent à la propriété suivante :

Toutes les fois que l'équation (36) *admet des intégrales y méromorphes doublement périodiques, elle jouit des propriétés suivantes : ou bien le contour* Π *rattaché à f a au moins un côté à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif, ou bien elle a au moins un sommet multiple tel que son équation en λ admet comme racines un ou plusieurs entiers négatifs compris dans le domaine de ce sommet.*

Cette proposition permet dans un grand nombre de cas de simplifier la recherche des conditions pour qu'un type donné d'équation (36) admette des intégrales y de nature ici considérée.

Par exemple, remarquant que le contour Π de l'équation

$$P(y'') + Q(y) = 0$$

(où P et Q sont des polynomes de degrés respectifs m et n) ne peut présenter qu'un seul côté à coefficient angulaire négatif et que ce coefficient est égal à $\frac{2m}{n-m}$, on voit que l'équation ne saurait admettre d'intégrales méromorphes doublement périodiques que si $2m$ est divisible par $n-m$. Elle en admettra effectivement, par exemple, si $m=1$, $n=2$ ou $n=3$, les coefficients des polynomes P et Q étant quelconques; ou encore si $m=2$, $n=4$ ou $n=6$, les coefficients de P et Q étant convenablement choisis, etc.

Plus généralement, pour que l'équation

$$P(y^{(p)}) + Q(y) = 0$$

puisse admettre d'intégrales en question, il faut que mp soit divisible par $n-m$.

En remarquant que le contour Π de l'équation

$$P(y^{(p)}) + Q(y)y' = 0$$

a un seul côté à coefficient angulaire négatif et que celui-ci est égal à $\frac{mp-1}{n+1-m}$, on voit que l'existence des intégrales de l'espèce considérée exige que $mp-1$ soit divisible par $n+1-m$. Elle sera effectivement intégrable par de telles fonctions, par exemple si les coefficients de P et Q étant quelconques, on a $p=3$, $m=1$, $n=1$ ou $n=2$.

S'il s'agit des équations

$$f(y, y')=0,$$

pour qu'une telle équation puisse être intégrable par des fonctions méromorphes doublement périodiques, il faut que son contour II admette au moins un côté à coefficient angulaire entier négatif et au moins un côté à coefficient angulaire entier positif, et qu'il n'y ait pas de côtés à coefficient angulaire fractionnaire.

La considération du contour II, rattaché à une équation $f=0$ d'un ordre quelconque, fournit bien des manières de former des types d'équations admettant, pour leurs intégrales méromorphes doublement périodiques (lorsque celles-ci existent), des intégrales premières de l'espèce précédente.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES PREMIÈRES QUALITATIVES A RESTRICTIONS.

10. *Généralités.* — Nous considérerons dans ce Chapitre les intégrales premières de la forme

$$\Phi = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ \lambda_1 < \theta < \lambda_2 \end{array} \right|. \tag{44}$$

Une telle intégrale exprime que l'expression Φ, dépendant de x, y et de quelques dérivées de y par rapport à x (pouvant aussi dépendre des données initiales) se réduit, en vertu de l'équation différentielle donnée $f = 0$, ou du système donné (f), à une fonction inconnue de x, laquelle, pour x variant de $x = a$ à $x = b$, ne varie elle-même qu'entre deux limites λ_1 et λ_2 connues (constantes ou fonctions de x, ou des données initiales).

Si un tel fait ne subsiste que pour les intégrales y réelles assujetties à certaines conditions, par exemple d'être finies, continues, positives, monotones, croissantes, oscillantes, etc., dans l'intervalle (a, b) de x, l'équation (44) fournit une *intégrale première qualitative à restrictions* pour l'équation $f = 0$ ou le système (f).

Quoiqu'une intégrale première de cette espèce n'exprime pas un fait mathématique précis, elle n'en exprime pas moins un fait pouvant contribuer à l'étude des intégrales d'une équation donnée et parfois même conduire à des résultats précis concernant certaines particularités de ces intégrales. En particulier, de telles intégrales premières fournissent, dans un grand nombre de cas, des limites inférieures et supérieures entre lesquelles reste comprise l'intégrale y lorsque x varie dans un intervalle considéré. Elles permettent également de tirer des conclusions sur les zéros réels de l'intégrale, leur nombre dans un intervalle considéré, leur distribution dans cet intervalle; sur les maxima et minima de l'intégrale, sur son mode de croissance avec x. D'une manière générale, les intégrales premières telles que (44) se prêtent à l'étude des particularités qualitatives de l'intégrale y et peuvent servir d'aide puissant dans des problèmes inaccessibles aux procédés de calcul rigoureux.

Nous nous proposons de le montrer sommairement pour quelques types d'équations différentielles et de systèmes admettant des intégrales premières de formes simples.

11. *Particularités de l'intégrale y impliquées dans la forme de l'intégrale première $\Phi = \theta$:*

A. *Forme* $\frac{y'}{y} = \theta$. — L'existence d'une intégrale première de la forme

$$\frac{y'}{y} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ A < \theta < B \end{array} \right| \tag{45}$$

conduit à ce résultat immédiat que, pour toute valeur de x comprise entre a et b, l'intégrale réelle prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$, se laisse écrire sous la forme

$$y = y_0\, e^{(x-x_0)\theta} \tag{46}$$

faisant voir que l'intégrale ne s'annule pour aucune valeur réelle de x comprise dans l'intervalle (a, b), et que dans cet intervalle elle est constamment comprise entre

$$y_0\, e^{A(x-x_0)} \quad \text{et} \quad y_0\, e^{B(x-x_0)}.$$

Si cet intervalle est celui de o à ∞, l'intégrale tend vers zéro ou croît comme $e^{\alpha x}$ (α étant constante positive comprise entre les valeurs absolues de A et B), suivant le signe de A et B. On a des faits analogues dans le cas où l'intervalle (a, b) est celui de $-\infty$ à o ou de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme exemple d'équations admettant une intégrale première de la forme (45), nous citerons l'équation

$$(\varphi + \psi y^2) y'^2 - (\varphi^2 + \psi^2 y^4) y^2 = 0, \tag{47}$$

où φ et ψ sont des fonctions quelconques finies et positives dans un intervalle (a, b) de x. En remarquant que, pour ces valeurs de x et pour une valeur réelle quelconque de y, la valeur de l'expression

$$\frac{\sqrt{\varphi^2+\psi^2 y^4}}{\varphi+\psi y^2}$$

reste toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1, on a comme intégrale première de (47) (pour toutes ses intégrales réelles et positives dans l'intervalle considéré de x)

$$\frac{y'}{y}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ \frac{1}{\sqrt{2}}<\theta<1 \end{array}\right| \qquad \text{ou bien} \qquad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ -1<\theta<-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right|$$

suivant la détermination du radical.

L'équation

$$y'=(a+b\,e^{-x^2-y^2})y \qquad (a>0,\ b>0)$$

admet comme intégrale première, pour toutes ses intégrales réelles,

$$\frac{y'}{y}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} -\infty<x<\infty \\ a<\theta<a+b \end{array}\right|.$$

B. *Forme* $(y'\pm y)\varphi=\theta$. — Une intégrale première de la forme

$$(48) \qquad (y'+y)\varphi=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ \mathrm{A}<\theta<\mathrm{B} \end{array}\right|$$

(φ étant fonction de x) entraîne le fait suivant : pour toute valeur de x, comprise entre a et b, l'intégrale réelle prenant pour $x=x_0$ la valeur $y=y_0$ (ou $a<x_0<b$), peut s'écrire

$$y=e^{-(x-x_0)}\left[y_0+\theta\,e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right].$$

Dans cet intervalle de x, elle est constamment comprise entre

$$e^{-(x-x_0)}\left[y_0+\mathrm{A}\,e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right]$$

et

$$e^{-(x-x_0)}\left[y_0+\mathrm{B}\,e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right],$$

d'où l'on tire facilement des conclusions sur l'allure de la courbe intégrale, sur son mode de croissance, sur ses zéros réels, ses maxima et minima, ..., suivant la nature de la fonction donnée φ.

Des conclusions analogues sont à tirer d'une intégrale première de la forme

$$(49) \qquad (y'-y)\varphi=\theta \qquad \left| \begin{array}{c} a<x<b \\ A<\theta<B \end{array} \right|$$

dans quel cas on peut écrire

$$y=e^{x-x_0}\left[y_0+\theta\, e^{x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-x}}{\varphi}\,dx\right].$$

Parmi les équations du premier ordre admettant une intégrale première de la forme (48), se trouve l'équation

$$y'^2+y^2=f(x)$$

qui se présente dans divers problèmes de Géométrie et de Mécanique.

Prenons d'abord, pour φ, la détermination positive de $\sqrt{f(x)}$, supposée réelle, finie et continue dans un intervalle (a, b) de x et considérons une intégrale réelle y prenant pour $x=x_0$ la valeur $y=y_0$. Supposons, pour fixer les idées, que le point donné $M_0(x_0, y_0)$ se trouve au-dessus de l'axe des x; ce point se trouve nécessairement dans la région D, comprise entre l'axe des x et la courbe $y=\sqrt{f(x)}$, sans quoi la branche considérée de la courbe intégrale serait imaginaire.

Par M_0 passent deux branches de la courbe intégrale, l'une positive croissante Y_1 à coefficient angulaire de la tangente en M_0 ayant pour valeur

$$\sqrt{f(x_0)-y_0^2},$$

l'autre Y_2, positive et décroissante, à coefficient angulaire de la tangente en M_0, égal à

$$-\sqrt{f(x_0)-y_0^2};$$

les deux tangentes se confondent lorsque M_0 se trouve sur la courbe

$$y=\sqrt{f(x)}.$$

La branche Y_1 admet comme intégrale première (48), où

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \qquad A=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad B=1,$$

ce qui montre que dans l'intervalle (a, b), elle est constamment comprise entre les deux courbes

$$y = y_0 e^{-(x-x_0)} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}\, dx,$$

$$y = y_0 e^{-(x-x_0)} + e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}\, dx.$$

La branche Y_2 admet comme intégrale première (49) avec

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \qquad A = -1, \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, par suite, se trouve dans l'intervalle (a, b) constamment compris entre les deux courbes

$$y = y_0 e^{x-x_0} - e^x \int_{x_0}^{x} e^{-x} \sqrt{f(x)}\, dx,$$

$$y = y_0 e^{x-x_0} - \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} e^{-x} \sqrt{f(x)}\, dx.$$

Par le point $M'_0(x_0, -y_0)$, symétrique au point M_0 par rapport à l'axe des x, passent également deux branches de la courbe intégrale, l'une négative décroissante U_1, l'autre négative croissante U_2, toutes les deux symétriques aux branches Y_1 et Y_2 par rapport à l'axe des x et dont il est facile d'écrire les équations sous la forme précédente.

Lorsque l'intervalle (a, b) s'étend à l'infini, ce qui précède met en évidence le mode de croissance de l'intégrale y pour x indéfiniment croissant par des valeurs positives ou négatives, les données sur la distribution de ses zéros, etc.

C. *Forme* $\frac{y''}{y} = \theta$. — Considérons une intégrale première de la forme

$$\frac{y''}{y} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ A < \theta < B \end{array} \right|. \tag{50}$$

On s'assure facilement que si A et B sont finis, l'intégrale y supposée finie et continue dans l'intervalle (a, b) n'a pas de zéros réels d'un ordre déterminé différent de l'unité, ni des infinis d'un ordre fini déterminé. En effet, au voisinage d'une telle valeur $x = a$ d'ordre k, on aurait

$$y = (x - a)^k \varphi,$$

où φ ne devient ni nul, ni infini pour $x = a$, et l'on voit facilement que le produit $(x - a)^2 \theta$ tend vers la limite $k(k-1)$ pour $x = a$; comme θ étant fini, cette limite doit être zéro, on doit avoir $k = 0$ ou $k = 1$. Il s'ensuit que l'intégrale y change de signe chaque fois que x passe par un zéro réel de y compris entre a et b.

Distinguons maintenant les deux cas suivants :

Premier cas : $A > 0$, $B > 0$. — Soit $x = x_0$ une valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b), annulant la dérivée y' comme son zéro simple. Comme, d'après (50), y'' et y sont de même signe pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b), l'intégrale y ne peut présenter dans cet intervalle ni des maxima positifs, ni des minima négatifs. Par suite, en désignant par y_0 la valeur que prend y pour $x = x_0$:

1° Si $y_0 > 0$, y présentera au point $x = x_0$ un minimum positif; pour les valeurs de x comprises entre a et x_0, l'intégrale est positive et décroissante; pour x compris entre x_0 et b, elle est positive et croissante;

2° Si $y_0 < 0$, y présente en $x = x_0$ un maximum négatif; pour x compris entre a et x_0, elle est négative et croissante; pour x compris entre x_0 et b, elle est négative et décroissante.

En tout cas, le changement de signe de y' ne s'effectue que pour $x = x_0$.

En multipliant l'équation (50) par $y'\,dx$, intégrant entre les limites x et x_0, où $a < x < x_0$ et tenant compte de ce que $y'_0 = 0$, on obtient

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \theta y y'\,dx. \tag{52}$$

Comme le produit yy' ne change pas de signe entre les limites d'intégration, le théorème commun de la moyenne appliqué au second membre de (52), transforme cette équation en

$$y'^2 = \theta(y_0^2 - y^2), \qquad A < \theta < B.$$

d'où l'on tire

$$y = y_0 \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \tag{P}$$

où

$$\text{(Q)} \qquad X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\theta}\, dx = (x - x_0)\lambda,$$

λ étant une valeur comprise entre les racines carrées de la plus petite et de la plus grande valeur que prend le facteur θ lorsque x varie de x à x_0.

Si, maintenant, l'équation (50) étant multipliée par $y'\,dx$, on l'intègre entre les limites x_0 et x, où $x_0 < x < b$, on obtient

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \theta y y'\, dx$$

et comme yy' ne change pas de signe entre les limites d'intégration, on arrive encore aux équations (P) et (Q) avec $x_0 < x < b$, d'où l'on tire le résultat suivant :

Étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque, admettant pour ses intégrales y réelles, finies et continues dans un intervalle (a, b) de x, une intégrale première de la forme

$$\frac{y''}{y} = \theta \qquad \left| \begin{array}{l} a < x < b \\ A < \theta < B \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} A > 0, \\ B > 0, \end{array}$$

toute intégrale y de cette nature, dont la dérivée s'annule en un point $x = x_0$ compris dans l'intervalle (a, b), se laisse écrire sous la forme

$$y = y_0 \frac{e^{(x-x_0)\lambda} + e^{-(x-x_0)\lambda}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\lambda,$$

où λ est une valeur comprise entre les racines carrées de la plus petite et la plus grande valeur que prend le facteur θ lorsque x varie entre x_0 et x, et cela pour toute valeur $a < x < b$.

L'intégrale est donc comprise entre

$$y_0 \frac{e^{(x-x_0)\sqrt{A}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{A}}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{A}$$

et

$$y_0 \frac{e^{(x-x_0)\sqrt{B}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{B}}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{B}$$

pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b). Pour les valeurs de x voisines de x_0, elle se trouve comprise entre les deux paraboles

$$y = y_0\left[1 + \frac{A}{2}(x - x_0)^2\right],$$

$$y = y_0\left[1 + \frac{B}{2}(x - x_0)^2\right],$$

passant par le point (x_0, y_0).

Tout ceci s'applique, par exemple, à l'équation linéaire

$$y'' = f(x)y$$

dans tout intervalle de x dans lequel la fonction $f(x)$ est constamment positive. Les valeurs A et B sont la plus petite et la plus grande valeur que prend $f(x)$ dans cet intervalle de x.

Dans le cas de l'équation

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0,$$

laquelle, par la substitution

$$y = z\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx},$$

se transforme en

$$z'' = f(x) z,$$

où

$$(53) \qquad f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'}{2},$$

on a le résultat suivant :

Toute intégrale réelle y telle que la dérivée première de

$$y\, e^{\frac{1}{2}\int \varphi\, dx}$$

s'annule en un point $x = x_0$ situé dans un intervalle (a, b) dans lequel la fonction (53) est positive, se laisse écrire sous la forme

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{Y} + e^{-Y})\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx},$$

où

$$Y = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)},$$

ξ étant une valeur comprise entre x_0 et x, et cela pour toute valeur $a < x < b$.

L'équation d'ordre n

$$[x^{2k}+y^{2k}+y'^{2k}+\ldots+y^{(n)2k}]y''-[x^2+y^2+y'^2+\ldots+y^{(n)2}]^k y=0$$

admet, pour toutes ses intégrales réelles, comme intégrale première

$$\frac{y''}{y}=\theta \quad \left|\begin{array}{c} -\infty<x<\infty \\ 1<\theta<(n+1)^{k-1} \end{array}\right|,$$

ce qui résulte de la remarque que la valeur du rapport

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_p)^k}{a_1^{2k}+a_2^{2k}+\ldots+a_p^{2k}}$$

(les a_i étant positifs) est toujours comprise entre 1 et p^{k-1}. Il s'ensuit que toute intégrale réelle, finie et continue dans un intervalle (a, b) de x se laisse écrire sous la forme précédente, et est constamment comprise entre

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)}+e^{-(x-x_0)}\right]$$

et

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}}+e^{-(x-x_0)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}}\right].$$

Deuxième cas : $A<0$, $B<0$. — Les méthodes de Sturm, appliquées à l'équation

$$(54) \qquad y''=\theta y \qquad (\theta<0)$$

conduisent au résultat que, dans l'intervalle (a, b), suffisamment étendu, l'intégrale réelle, finie et continue y présente des oscillations autour de l'axe des x, changeant de signe chaque fois qu'elle s'annule. La courbe intégrale se compose de demi-ondes alternativement positives et négatives.

Envisageons d'abord une demi-onde *positive*. D'après (54), la dérivée seconde y'' étant négative le long de cette demi-onde, celle-ci ne peut présenter qu'un seul maximum. Soient $x=x_0$ la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint, x_1 et x_2 les valeurs de x définissant les deux extrémités de la demi-onde.

Lorsque x varie de x_1 à x_0, l'intégrale est constamment positive et croissante; pour x variant de x_0 à x_2, elle est constamment positive et décroissante. Dans chacun des deux intervalles (x_1, x_0) et (x_0, x_2), le produit yy' garde un signe invariable.

Considérons la courbe intégrale dans l'intervalle (x_1, x_0). En multipliant l'équation (54) par $y'\,dx$, intégrant entre les limites x et x_0 où $x_1 < x < 0$, on obtient

$$(55)\qquad -\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \theta y y'\,dx.$$

Comme yy' ne change pas de signe entre les limites d'intégration, (55) conduit à

$$y'^2 = (y_0^2 - y^2)\,\theta_1,$$

où θ_1 désigne une valeur comprise entre la plus petite et la plus grande valeur absolue M_1 et M_0 que prend le facteur θ lorsque x varie de x à x_0. On en tire

$$(56)\qquad y = y_0 \cos(x - x_0)\lambda \qquad (\text{où } \sqrt{M_1} < \lambda < \sqrt{M_0})$$

et cela pour toutes les valeurs de x telles que $x_1 < x < x_0$.

Considérons maintenant la courbe intégrale dans l'intervalle (x_0, x_2). En multipliant l'équation (54) par $y'\,dx$ et intégrant entre les limites x_0 et x où $x_0 < x < x_2$, on obtient

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \theta y y'\,dx,$$

d'où l'on tire encore l'équation (55) et, par suite aussi, l'équation (56) (avec $x_0 < \theta < x$) est valable pour toutes les valeurs de x telles que $x_0 < x < x_2$.

Donc : toute demi-onde positive se laisse présenter sous la forme (56), et cela pour toute valeur de x telle que $x_1 < x < x_2$.

Envisageons maintenant une demi-onde *négative*. La dérivée y'' étant positive, la demi-onde ne peut présenter qu'un seul minimum. Soient x_1, x_2, x_0 les deux abscisses extrêmes et l'abscisse du minimum de la demi-onde. Lorsque x varie de x_1 à x_0, l'intégrale y est constamment négative et décroissante; pour x variant de x_0 à x_2, elle est constamment négative et croissante. Le produit yy' garde donc un signe invariable dans chacun des deux intervalles (x_1, x_0) et (x_0, x_2). On en tire alors, de la manière précédente, cette conclusion : la demi-onde négative, comprise dans l'intervalle (a, b), peut être représentée par la formule (56).

Il s'ensuit le résultat suivant :

Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, comprise dans l'intervalle (a, b), se laisse écrire sous la forme

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\lambda, \tag{57}$$

où λ est une valeur comprise entre les racines carrées de la plus petite et la plus grande valeur M *et* N *que prend la valeur absolue de θ lorsque x varie entre x_1 et x_2.*

De (57), on tire

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\lambda}, \qquad x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\lambda},$$

ce qui montre que la longueur $x_2 - x_1$ d'une demi-onde est comprise entre

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

à l'aide de quoi on peut établir diverses propositions déjà connues sur le nombre et la répartition des zéros réels de y compris dans l'intervalle (a, b).

On voit aussi que chaque demi-onde de y est comprise entre les deux courbes

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{N},$$
$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{M}.$$

Pour les valeurs de x voisines de x_0, elles se trouvent comprises entre les deux paraboles

$$y = y_0\left[1 - \frac{M}{2}(x - x_0)^2\right],$$
$$y = y_0\left[1 - \frac{N}{2}(x - x_0)^2\right]$$

passant par le point (x_0, y_0).

Ces propositions s'appliquent directement à l'équation linéaire

$$y'' = f(x)y$$

pour tout intervalle (a, b) de x dans lequel la fonction $f(x)$ est négative. Le rôle de M et N est joué par une limite inférieure et une limite supérieure de $f(x)$ dans cet intervalle.

Dans le cas de l'équation

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

s'intégrant par des fonctions elliptiques oscillantes, l'intervalle $(a,\ b)$ étant celui de $-\infty$ à $+\infty$, on a comme intégrale première (50), où le rôle de M de la page précédente est joué par α. La longueur de la demi-onde est plus petite que $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, ce qui montre que le nombre de demi-ondes comprises dans un intervalle $(a,\ b)$ est au moins égal au plus grand nombre entier contenu dans la valeur

$$\frac{(b-a)\sqrt{\alpha}}{\pi}.$$

L'équation

$$y'' + (\alpha + \beta\, e^{-x^2-y^2})y = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

admet également l'intégrale première de la forme (50); le rôle de M et N est joué par α et $\alpha + \beta$.

L'intégrale générale de l'équation

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0$$

pour toute valeur de x rendant la fonction

$$f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'}{2}$$

négative, se laisse écrire sous la forme

$$y = y_0\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{f(\xi)},$$

ξ étant une valeur comprise entre x_0 et x. Chaque demi-onde de la courbe intégrale est comprise entre les deux courbes

$$y = y_0\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{\mathrm{N}},$$
$$y = y_0\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{\mathrm{M}},$$

où N et M sont la plus petite et la plus grande valeur absolue de $f(x)$ dans l'intervalle $(a,\ b)$. La longueur d'une demi-onde est comprise entre $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{N}}}$.

L'équation

$$[x^{2k}+y^{2k}+y'^{2k}+\ldots+y^{(n)2k}]y''+[x^2+y^2+y'^2+\ldots+y^{(n)2}]y=0$$

admet, pour toutes ses intégrales réelles, comme intégrale première

$$\frac{y''}{y}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} -\infty<x<\infty \\ -(n+1)^{k-1}<\theta<-1 \end{array}\right|$$

faisant voir que toute intégrale réelle, finie et continue y présente un nombre illimité d'oscillations, le nombre de demi-ondes comprises dans un intervalle arbitraire (a, b) de x étant au moins égal au nombre d'unités entières contenues dans $\frac{b-a}{\pi}$, et au plus égal au nombre d'unités entières contenues dans

$$1+\frac{(b-a)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi}.$$

D. *Sur les fonctions entières y auxquelles se rattache une intégrale première* $\frac{y''}{y}=\theta$. — Parmi les nombreuses conséquences qu'on peut tirer du fait d'existence d'une intégrale première qualitative de la forme

$$\frac{y''}{y}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} -\infty<x<\infty \\ -N<\theta<-M \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} M>0, \\ N>0, \end{array}$$

nous signalerons les suivantes concernant les intégrales *entières* de l'équation ou du système.

L'équation, ou le système, ne peut avoir comme intégrale y aucune fonction entière du genre zéro.

Pour le faire voir, rappelons la proposition de Sturm, d'après laquelle, si dans un intervalle réel (a, b) de x le rapport $\frac{y''}{y}$ reste constamment plus petit que la valeur correspondante d'une fonction $\mu(x)$, et si v désigne une intégrale quelconque de l'équation

$$v''-\mu(x)v=0,$$

deux zéros simples consécutifs de v, compris dans l'intervalle (a, b), comprennent au moins un zéro de y; si y et v ont dans (a, b) un zéro commun $x=\beta$, la variable x croissant à partir de β ne rencontre un zéro de v sans rencontrer d'abord un zéro de y. Et comme l'on a

$$\frac{y''}{y} = \theta < -\mathrm{M},$$

les zéros consécutifs réels de y croissent, en valeur absolue, avec leur rang, *au plus* aussi vite que les zéros de l'intégrale

$$v = \sin x\sqrt{\mathrm{M}}$$

de l'équation

$$v'' + \mathrm{M}v = 0,$$

croissant eux-mêmes aussi vite que leur rang. La série ayant pour termes les inverses des modules des zéros réels de y, sera donc divergente et elle le sera à plus forte raison lorsqu'elle sera complétée par des termes provenant des zéros imaginaires de y, ce qui montre bien que le genre de y n'est jamais zéro.

Ce genre, toujours supérieur ou égal à un, est *égal à un*, par exemple, dans le cas de l'équation

$$yy''' - y'y'' = 0$$

admettant, pour ses intégrales oscillantes, $y = a\sin(b + cx)$, l'intégrale première

$$\frac{y''}{y} = -c^2 \qquad (c = \text{const. réelle}).$$

A cet égard, on démontre le résultat général suivant dont cet exemple n'est qu'un cas particulier :

Toute intégrale y n'ayant pas de zéros imaginaires ou n'en ayant qu'en nombre limité, a son produit canonique des facteurs primaires de genre un.

Ceci résulte de la proposition de Sturm, d'après laquelle, si, dans l'intervalle (a, b) de x, le rapport $\frac{y''}{y}$ est constamment plus grand que la valeur correspondante d'une fonction $\lambda(x)$, et si u désigne une intégrale quelconque de l'équation

$$u'' - \lambda(x)u = 0,$$

deux zéros simples consécutifs, compris dans l'intervalle (a, b), comprennent au plus un zéro de y; si y et u ont dans (a, b) un zéro commun $x = \beta$, la variable x croissant à partir de β ne saurait rencontrer un zéro de y sans rencontrer d'abord un zéro de u. Et comme l'on a

$$\frac{y''}{y} = \theta > -\mathrm{N},$$

les zéros consécutifs réels croissent, en valeur absolue, avec leur rang, *au moins* aussi vite que les zéros de l'intégrale

$$u = \sin x \sqrt{\mathrm{N}}$$

de l'équation

$$u'' + \mathrm{N}u = 0.$$

Et comme en même temps ils croissent *au plus* aussi vite que les zéros de v, *ils sont de l'ordre de grandeur de leur rang* n.

La série ayant pour termes les inverses des carrés des modules des zéros réels de y, est donc convergente; elle le sera encore lorsqu'elle sera complétée par des termes provenant des zéros imaginaires, ce qui démontre la proposition.

Il s'ensuit également que :

Toutes les fois qu'une intégrale entière y a son produit canonique de genre $p > 1$, elle a une infinité de zéros réels et une infinité de zéros imaginaires; les modules des zéros imaginaires croissent aussi vite que la $(p+1)^{\text{ième}}$ racine de leur rang. S'ils croissaient moins vite ou plus vite, le genre serait supérieur resp. inférieur à p.

12. *Intégrales premières qualitatives rattachées aux systèmes d'équations.* — Un système

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{X}_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{60}$$

d'équations simultanées à n fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable indépendante t, les X_i étant fonctions des x_i et de t, peut admettre, pour ses intégrales réelles, finies et continues x_i, des intégrales premières de la forme

$$\mathrm{H} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < t < b \\ \mathrm{M}_1 < \theta < \mathrm{M}_2 \end{array} \right|, \tag{61}$$

où H est une fonction déterminée d'une ou de plusieurs fonctions x_i et de t, ainsi que des dérivées des x_i par rapport à t, pouvant aussi dépendre des données initiales.

Ainsi, toutes les fois que parmi les équations (60) se trouve une ou plusieurs équations de la forme

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k f_k, \tag{62}$$

où f_k est une fonction des x_i et de t plus grande qu'un nombre positif fixe M quelles que soient les valeurs réelles des variables qui y figurent, le système admet autant d'intégrales premières de la forme

$$\frac{1}{x_k}\frac{dx_k}{dt} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} -\infty < t < \infty \\ M < \theta < \infty \end{array} \right|$$

entraînant, comme conséquences, diverses particularités de l'intégrale y : l'intégrale x_k, prenant pour $t = t_0$ la valeur $x_{k,0}$ est, pour toute valeur réelle de t, plus grande en valeur absolue que

$$x_{k,0}\, e^{M(t-t_0)};$$

elle n'a pas de zéros réels, etc.

De même, toutes les fois que l'une (ou plusieurs) des expressions

$$\frac{1}{x_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum f_k \frac{\partial f_k}{\partial t}\right)$$

est, pour $a < x < b$, une fonction limitée supérieurement par un nombre négatif N et inférieurement par un nombre négatif M, le système admet autant d'intégrales premières de la forme

$$\frac{1}{x_k}\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \theta \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ -M' < \theta < -N \end{array} \right|$$

entraînant, comme conséquence, le caractère oscillant de l'intégrale x_k, l'existence de zéros réels de celle-ci dans l'intervalle (a, b) dont le nombre est au moins égal à la partie entière du nombre

$$\frac{(b-a)\sqrt{-N}}{\pi}$$

et au plus égal à la partie entière du nombre

$$1 + \frac{(b-a)\sqrt{-M}}{\pi}, \qquad \ldots.$$

Tel est, par exemple, le cas du système

$$\frac{dx_1}{dt} = Mx_1 + Nx_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Px_1 + Qx_2,$$

où M, N, P, Q sont fonctions de t liées par la relation

$$\frac{dN}{dt} + N(M + Q) = 0,$$

la fonction

$$\frac{dM}{dt} + M^2 + NP$$

étant comprise entre les deux nombres négatifs fixes.

Dans le cas du système

$$(63) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_2 x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_1 x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_1 x_2$$

(où α_1, α_2, α_3 sont des constantes) qu'on rencontre dans le problème du mouvement d'un corps solide et qui s'intègre par des fonctions elliptiques, on trouve

$$(64) \qquad \frac{1}{x_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_1(\alpha_3 x_2^2 + \alpha_2 x_3^2)$$

avec les équations analogues pour x_2 et x_3.

Lorsque α_2 et α_3 sont d'un même signe, l'expression (64) ne saurait s'annuler pour une valeur réelle $t = t_0$ que si pour cette valeur de t on avait à la fois $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Or, les équations (63), en vertu du théorème de l'existence, admettent un système unique d'intégrales x_1, x_2, x_3 holomorphes au voisinage de $t = t_0$ et s'annulant pour cette valeur de t. D'autre part, en vertu des équations (63) mêmes et celles qu'on en tire par différentiations successives, toutes les dérivées de x_1 seraient nulles pour $t = t_0$; l'intégrale x_1, s'annulant pour cette valeur de t, serait donc identiquement nulle. Les intégrales x_2 et x_3 ne peuvent donc s'annuler simultanément ; l'équation (64) reste pour toute valeur réelle de t supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe M, de sorte que le système admettra une intégrale première

$$\frac{1}{x_1}\frac{d^2x_1}{dt^2}=\theta, \tag{65}$$

$$\left|\begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ -\mathrm{M} < \theta < \infty \end{array}\right| \quad \text{ou bien} \quad \left|\begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ -\infty < \theta < -\mathrm{M} \end{array}\right|$$

(suivant le signe commun à α_2 et α_3), ce qui entraîne des conséquences indiquées précédemment.

Ces faits ne sont, d'ailleurs, que des cas particuliers d'un fait d'ordre plus général, indiqué dans ce qui suit.

D'après un théorème remarquable, dû à MM. Appelrot et Lagoutinski (1), *tout système d'équations différentielles algébriques d'un ordre quelconque peut être ramené à un système de la forme*

$$\frac{dy_i}{dt}=y_i\Phi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{66}$$

où Φ_i est une forme linéaire

$$\Phi_i=a_{1,i}y_1+a_{2,i}y_2+\ldots+a_{m,i}y_m$$

à coefficients $a_{k,i}$ constants égaux à des nombres entiers supérieurs ou égaux à -1.

M. Appelrot a même ramené les formes linéaires Φ_i *à avoir tous les coefficients $a_{k,i}$ égaux à* 1 *ou à* 0 (*loc. cit.*).

De plus, ces réductions s'effectuent par le changement des fonctions inconnues *sans changer la variable indépendante*.

Le système, par exemple,

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_1x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt}=k^2x_1x_2,$$

auquel satisfont les trois fonctions elliptiques

$$x_1=snt, \qquad x_2=cnt, \qquad x_3=dnt,$$

en posant

$$y_1=\frac{d}{dt}\log x_1, \qquad y_2=\frac{d}{dt}\log x_2, \qquad y_2=\frac{d}{dt}\log x_3,$$

(1) Communications à la Société mathématique de Moscou (*Recueil mathém.*, t. 23, 1902; t. 27, 1909; t. 32, 1924).

se ramène au système

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1(-y_1+y_2+y_3),$$

$$\frac{dy_2}{dt}=y_2(\quad y_1-y_2+y_3),$$

$$\frac{dy_3}{dt}=y_3(\quad y_1+y_2-y_3).$$

Le théorème de MM. Appelrot et Lagoutinski offre un champ étendu aux applications des résultats qui précèdent.

Ainsi, l'équation (66) montre que si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ est un système d'intégrales finies dans l'intervalle (a, b) de t, pour chacune de ces intégrales existe une intégrale première

$$\frac{1}{y_i}\frac{dy_i}{dt}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} a<t<b \\ \mathrm{A}<\theta<\mathrm{B} \end{array}\right|$$

(où A et C sont des quantités finies fixes) entraînant les conséquences précédentes : aucune intégrale du système n'aura de zéros réels dans l'intervalle (a, b) [ni même de zéros imaginaires dans son cercle d'holomorphie quelconque]; toute intégrale reste dans (a, b), constamment comprise entre les deux fonctions exponentielles $Ce^{\mathrm{A}t}$ et $Ce^{\mathrm{B}t}$, etc.

En différentiant l'équation (66) par rapport à t, on trouve

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}=y_i\mathrm{H}_i, \tag{67}$$

où H_i est une forme quadratique en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à coefficients constants.

D'autre part, la forme H_i est la somme des carrés de m fonctions linéaires en $y_1, \ldots, y_n$, le nombre m étant égal ou inférieur à n :

$$\mathrm{H}_i=\mathrm{Y}_1^2+\mathrm{Y}_2^2+\ldots+\mathrm{Y}_m^2.$$

Toutes les fois que les fonctions linéaires Y_k *sont réelles et que les équations* $\mathrm{Y}_i=0, \ldots, \mathrm{Y}_m=0$ *sont incompatibles, le système* (66) *admettra comme intégrale première*

$$\frac{1}{y_i}\frac{d^2y_i}{dt^2}=\theta \qquad \left|\begin{array}{c} -\infty<t<\infty \\ \mathrm{M}<\theta<\infty \end{array}\right|,$$

où M *est un nombre positif fixe.*

Le système n'a aucune intégrale y_i oscillante; toute intégrale y_i, laquelle (ainsi que ses deux premières dérivées) est finie et continue, pour toute valeur réelle de x, croît à partir d'une certaine valeur de x, en restant toujours positive, ou bien décroît en restant négative.

Toutes les fois que les fonctions linéaires Y_k *sont, pour les valeurs réelles de* $y_1, \ldots, y_n$, *les valeurs purement imaginaires, et que les équations* $Y_1 = 0, \ldots, Y_m = 0$ *sont incompatibles, le système* (66) *admettra comme intégrale première*

$$\frac{1}{y_i}\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \theta \qquad \left| \begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ -\infty < \theta < -M \end{array} \right|,$$

où M *est un nombre positif.*

Toute intégrale y_i finie et continue (ainsi que ses deux premières dérivées) pour toute valeur réelle de x, est oscillante, avec un nombre illimité d'oscillations autour de la valeur zéro. Si c'est une fonction entière de x, elle est d'un genre supérieur à zéro, etc.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Diverses espèces d'intégrales premières.

CHAPITRE II.

Théorèmes auxiliaires sur les équations différentielles.

CHAPITRE III.

Intégrales premières rattachées aux intégrales méromorphes de l'équation différentielle.

CHAPITRE IV.

Intégrales premières qualitatives à restrictions.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},

86599 Quai des Grands-Augustins, 55.

86599 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}.
Quai des Grands-Augustins, 55.