MIHAILO PETROVIĆ

INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

UNIVERZITET U BEOGRADU

DR MIHAILO PETROVIĆ

INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

DRUGO IZDANJE

U REDAKCIJI
DR MILORADA BERTOLINA I DR PETRA VASIĆA

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
GRAĐEVINSKA KNJIGA
BEOGRAD, 1969.

Za preduzeće odgovara:
LJUBICA JURELA, glavni urednik
DRAGOMIR LAZIN, urednik
JOVANKA PRŠENDIĆ, tehnički urednik
VUKA IVANOVIĆ, korektor
ALEKSANDAR PAJVANČIĆ, naslovna strana

ŠTAMPA: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

Max. Neuburger.

MIHAILO PETROVIĆ

Ako bi se postavilo pitanje koja je bila najistaknutija ličnost među srpskim matematičarima, bez dvoumljenja bi se moglo reći: Mihailo Petrović. On je znatno uticao na razvoj naše nauke i kulture kao naučnik i profesor Univerziteta u Beogradu, kao učesnik u polarnim ekspedicijama i plodni putopisac iz egzotičnih krajeva Zemljine kugle. Petrović nije samo nacionalni velikan koji je ponikao iz srpskog naroda, već on uživa veliki ugled u celom svetu.

Po nepodeljenom priznanju Petrović je najveći srpski matematičar i njegovo stvaralačko delo zaslužuje da se svestrano i kritički prouči.

Rođen je 6. maja 1868. godine u Beogradu, gde je svršio osnovnu i srednju školu. Prirodno-matematički odsek Velike škole u Beogradu završio je 1889. godine. Iste godine otišao je u Pariz i tamo je, posle pripremanja od godinu dana, položio prijemni ispit na École Normale Supérieure, na kojoj je ostao sve do 1894. godine. Za to vreme završio je na Faculté des sciences u Parizu: lisans matematičkih nauka (1892), lisans fizičkih nauka (1893) i doktorat matematičkih nauka (juna 1894).

Period studija Mihaila Petrovića u Parizu pada u vreme kada je francuska matematička nauka dostizala jednu od svojih kulminacionih tačaka. Njegovi profesori su bili: Poincaré, Darboux, Picard, Hermite, Painlevé, Appell, Tannery, Boussinesq, Koenigs, Lippmann — sve slavna imena ne samo francuske već i svetske nauke.

Svoju doktorsku tezu: *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations differentielles algebriques* (Pariz 1894, 109 p.) odbranio je pred komisijom koju su sačinjavali: Hermite (predsednik komisije), Picard i Painlevé (ispitivači). Rezultati do kojih je Petrović došao u tezi odmah su zapaženi i neke od ovih Picard je uneo u svoj udžbenik: *Traité d' Analyse*, t. III, deuxième édition, Paris, 1908, p. 378—381.

Odmah po položenom doktorskom ispitu Mihailo Petrović je izabran za redovnog profesora Velike škole u u Beogradu. Početkom 1905. godine donet je Zakon o univerzitetu, po kome je Velika škola ukinuta a svi profesori stavljeni na raspolaganje. Po propisima toga Zakona, ministar prosvete postavio je prvih osam redovnih profesora Univerziteta u Beogradu, među kojima je bio i Mihailo Petrović.

Polovinu stoleća, od 1894. do 1943. godine, Mihailo Petrović neumorno i predano spremao je nastavne i naučne kadrove za matematiku.

Kao profesor Velike škole i Univerziteta u Beogradu održao je šesnaest raznih kurseva, od kojih je neke ponavljao gotovo iz godine u godinu. Bilo je školskih godina kada je sam držao sve kurseve iz matematike.

Mihailo Petrović voleo je svoj nastavnički poziv. Njegova predavanja odlikovala su se jednostavnošću i ona su privlačila studente.

Petrović je imao strogo merilo koje je preneo i na svoje učenike i time je u znatnoj meri doprineo da nastava matematike u našoj srednjoj školi zauzme lepo mesto.

Za svaki kurs Petrović je izdao skripta ili udžbenik. Pri kraju svoje karijere održao je i neke specijalne kurseve kojima je hteo uputiti slušaoce u problematiku iz analitičke teorije diferencijalnih jednačina.

Pod uticajem Mihaila Petrovića formiran je čitav niz naučnih radnika na matematičkom polju. Iz teorijske matematike kod Mihaila Petrovića doktorirali su: Mladen Berić, Sima Marković, Tadija Pejović, Radivoje Kašanin, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Dragoslav Mitrinović, Danilo Mihnjević, Konstantin Orlov, Petar Muzen i Dragoljub Marković.

Petrović se radovao naučnom uspehu svojih učenika i nije im nametao oblast u kojoj će oni vršiti istraživanja. U periodu Petrovićevog delanja zapaženi su, u drugim oblastima nauke, mnogobrojni slučajevi sputavanja naučnog rada, pa je utoliko značajnije što je on davao podstreka za naučni rad.

Godine 1932. Matematički institut Univerziteta u Beogradu, na inicijativu Mihaila Petrovića i Milutina Milankovića, pokreće časopis na inostranim jezicima *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*. Do 1941. godine izišlo je sedam knjiga.

Navedeni časopis bio je kruna uspeha Mihaila Petrovića. To je u stvari bio časopis njegove škole. Preko tog časopisa naši matematičari mogli su se kao kolektiv predstaviti svetskoj javnosti.

Kao mlad čovek, 1900. godine Petrović je postao redovan član Srpske akademije nauka. U odeljenju prirodnih nauka ove Akademije on je živo učestvovao u radu. Na sednicama Odeljenja prikazao je veliki broj rasprava svojih ili svojih učenika. Ovi radovi štampani su u Glasu Srpske akademije nauka.

Petrović je jedan od inicijatora publikacije *Bulletin de l' Académie des sciences mathématiques et naturelles de Belgrade*. U ovoj publikaciji štampani su na inostranim jezicima izvodi iz radova koji su objavljeni u Glasu. U seriji matematičko-fizičkih nauka navedene publikacije, u periodu od 1933. do 1941. objavljeno je sedam knjiga koje većim delom sadrže rasprave pripadnika škole Mihaila Petrovića.

Petrović je bio član više inostranih akademija nauka i član mnogobrojnih naučnih društava. Učestvovao je na više međunarodnih matematičkih kongresa i držao predavanja na inostranim univerzitetima.

17. novembra 1939. promovisan je za počasnog doktora filozofije Beogradskog univerziteta.

Petrović je bio plodan naučni radnik. Prva njegova rasprava objavljena je 1894. godine u izdanju Akademije nauka u Parizu. Od tada pa sve do smrti, 1943. godine, on je stalno i sistematski radio i objavio blizu 250 radova od kojih su 12 posebna naučna dela. Rasprave je štampao u zemlji i inostranstvu, na srpskom i francuskom jeziku.

Petrovićeve rasprave mogu se razvrstati u sledeće oblasti: aritmetika, nejednakosti, polinomi, funkcije kompleksne promenljive, diferencijalne jednačine, integralni račun i opšta fenomenologija.

Mihailo Petrović imao je intuicije, pronalazio je interesantne probleme za proučavanje i često im davao elegantna rešenja. On je imao mnogo ideja, pa nije stizao da ih do tančina obradi. Stoga se proučavanjem njegovih rasprava, naročito iz oblasti diferencijalnih jednačina, mogu naći ideje za nova istraživanja. Zato nove generacije naših matematičara treba da proučavaju Petrovićeve rasprave jer će se ovim ne samo usavršavati, već se mogu inspirisati za nova sopstvena istraživanja.

Treba primetiti da se u radovima M. Petrovića nailazi, ne tako retko, na štamparske i računske greške. Na neke od njih biće ukazano u Predgovoru.

Nemački matematičar H. Schwarz na jednom internacionalnom kongresu matematičara izjavio je da u njegovim radovima nema nikakvih grešaka. Na to mu je M. Petrović odgovorio: »Kod mene, naprotiv, u svakom radu ima grešaka.«

Petrović nije bio samo profesor i naučnik, već je bio i alas i stručnjak za pitanja ribolova, zbog čega je dobio svoje popularno ime Mika-Alas. Postao je stvarno ribarski kalfa 1888. godine, a nešto kasnije položio je ispit za ribarskog majstora. Imao je svoju ribarsku družinu i kada je odlazio u ribolov potpuno se ponašao kao profesionalni alas.

Petrović je takođe bio strastan putnik u egzotične krajeve sveta i putopisac. Godine 1931. i 1933. boravio je kao član jedne naučne ekspedicije u Severnoj polarnoj oblasti, a 1935. godine u Južnoj polarnoj oblasti.

Srpska književna zadruga objavila mu je knjige: *Kroz polarnu oblast* (1932), *U carstvu gusara* (1935), *Sa okeanskim ribarima* (1935), *Po zabačenim ostrvima* (1936), *Roman jegulje* (1940).

M. Petrović je u toku svoje nastavničke karijere držao sledeće kurseve:

* Analitička geometrija u ravni i prostoru.
* Viša algebra.
* Diferencijalni i integralni račun.
* Geometrijske primene teorije diferencijalnih jednačina.
Računanje s brojnim razmacima.
Teorija beskrajnih redova.
Eliptičke funkcije.
* Parcijalne diferencijalne jednačine matematičke fizike.
Linearna diferencijalna jednačina drugog reda i njene primene.
Kvalitativna integracija diferencijalnih jednačina.
Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova.
Analitički problemi za obradu.
* Teorija grešaka (Beograd, 1930).
* Teorija analitičkih funkcija.
Elementi matematičke fenomenologije.

Za kurseve označene zvezdicom M. Petrović je objavio tabake.

Pored toga, on je objavio i sledeće udžbenike:

Elementi matematičke fenomenologije (Beograd, 1911, 774 str.).

Računanje s brojnim razmacima (Beograd, 1932, 193 str.).

Eliptičke funkcije (Beograd, 1937, 128 str.).

Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova (Beograd, 1938, 221 str.).

Povodom stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića mnogo je napisano i još više usmeno kazano. Međutim, samo izuzetno date su kritične ocene na Petrovićeve naučne doprinose pojedinim oblastima matematike. Suviše se insistira, ali ne potkrepljuje dokazima, da je Petrović posebno originalan u fenomenologiji i u numeričkim spektrima. Međutim, potvrđuje se sve više da su njegovi rezultati iz teorije polinoma, specijalnih funkcija, diferencijalnih jednačina i nejednakosti (brojnih razmaka) ne samo i danas aktuelni već da oni služe kao polazna tačka za razne generalizacije.

D. S. Mitrinović

PREDGOVOR

Posle dužeg vremena došlo je do ponovnog izdavanja knjiga Mihaila Petrovića: *Računanje sa brojnim razmacima* (prvo izdanje 1932. godine), *Eliptičke funkcije* (1937) *i Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova* (1938). Mihailo Petrović je ove knjige pisao kao udžbenike za redovne kurseve koje je držao na Beogradskom univerzitetu. Međutim, svaka od njih je više nego običan udžbenik, jer sadrži u sebi mnogo onoga što jednu knjigu karakteriše kao monografiju. Da je zaista tako, vidi se i iz toga, što se i danas jedna grupa beogradskih matematičara inspiriše rezultatima koji se nalaze u njima i daje nove naučne priloge u oblastima koje su ovde tretirane. Ono što smeta da bismo mogli slobodno da tvrdimo da se zaista radi o monografijama u pravom smislu reči je činjenica da ni u jednoj od njih nema bibliografskih podataka, tako da nije uvek mogućno utvrditi o čijem se rezultatu radi, kao ni iz kog perioda je taj rezultat. Ovo je štetilo i samom Mihailu Petroviću kao naučniku. Naime, u ovim knjigama ima dosta njegovih rezultata koji su kasnije u svetskoj literaturi pripisivani drugim matematičarima, mada su ovi došli do njih često puta znatno posle M. Petrovića. Tek danas, za neke od tih rezultata utvrđen je Petrovićev prioritet.

Prilikom čitanja ovih knjiga mora se biti obazriv u odnosu na terminologiju. Često će se naići na neadekvatnosti kao i na nesavremeno shvatanje nekih matematičkih pojmova i to ne samo sa današnjeg stanovišta već i, donekle, sa stanovišta koje su zauzimali pojedini matematičari iz vremena u kome je živeo i stvarao Mihailo Petrović. Redaktori, ma da su, prirodno, ovoga svesni, nisu želeli da vrše izmene u tom pravcu, radi istorijske autentičnosti teksta.

Čitalac će naići na pojedine arhaične izraze koji će pri prvom sretanju smetati, ali se za neke, posle razmišljanja, čini da su čak i prikladniji od onih koji se danas upotrebljavaju.

Prilikom redakcije novog—drugog—izdanja, ponegde su ispravljena suviše gruba gramatička odstupanja. Jezik je, u osnovi, zadržan, ma da je prilikom nedoslednosti autora, izabrana ona varijanta koja je bliža današnjim shvatanjima. Pravopisne greške su, uglavnom ispravljene, osim u slučajevima kada bi ove ispravke davale bitno drukčiji utisak o tekstu.

Terminologija i simbolika najčešće nije menjana, mada su izvršena neka skraćivanja u simbolici. Na primer, pisano je $\equiv$ umesto „identički$=0$“.

U novom izdanju ispravljene su ranije štamparske greške. Takođe su ispravljeni neki pogrešni rezultati, kojih je najviše bilo u knjizi *Računanje sa brojnim razmacima.* Valja naglasiti da su ove greške uglavnom računske prirode. Ponajmanje ovakvih grešaka, koliko su redaktori uspeli da utvrde, bilo e u knjizi *Eliptičke funkcije.*

Ubeđeni smo da će ponovno izdavanje Petrovićevih knjiga značiti značajan podsticaj i u nastavi i u naučnom radu u oblastima o kojima je reč. Pitanja porekla pojedinih rezultata predstavljaju poseban interes i za istoričare matematike. I pored nedostataka koje smo podvukli, Petrovićeve knjige imaju niz visokih kvaliteta, koji u potpunosti opravdavaju ponovno izdavanje. Petrović piše lako, živo, zanimljivo, uvek sa ukazivanjem na otvorena pitanja. Ove knjige su primer kako matematičko izlaganje ne mora da bude suvoparno i odbojno: u nizu razmatranja jasno se vidi ruka velikog majstora, mnoge specifičnosti naučnog postupka našeg velikog matematičara Mihaila Petrovića.

Beograd
30. VI 1969.

Milorad Bertolino
Petar M. Vasić

S A D R Ž A J

1.

OPŠTI POJMOVI O INTEGRACIJI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Integraliti jednu diferencijalnu jednačinu p-toga reda

(1) $$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0$$

gde je $$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \qquad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

znači naći takvu funkciju y nezavisno promenljive količine x, da kad se smeni u jednačini (1), ova bude identički zadovoljena za proizvoljnu vrednost x.

Tako, na primer, jednačina prvoga reda

(2) $$y' - y = 0$$

je identički zadovoljena ako se uzme da je

$$y = e^x;$$

jednačina drugoga reda

(3) $$y'' + ay = 0$$

biće zadovoljena kad se stavi da je

$$y = \sin \sqrt{a}\, x.$$

Kao što se zna iz opšte teorije diferencijalnih jednačina, za svaku jednačinu (1) postoji, ne jedna, već beskrajno mnogo funkcija y koje je zadovoljavaju za proizvoljnu vrednost.

Tako, jednačina (2) je zadovoljena za

$$y = Ce^x$$

za proizvoljne vrednosti x i konstante C; jednačina (3) je zadovoljena za

$$y = C_1 \sin \sqrt{a}\, x + C_2 \cos \sqrt{a}\, x$$

za proizvoljne vrednosti x i konstante C_1 i C_2.

Kao što se opet zna iz opšte teorije diferencijalnih jednačina, za svaku jednačinu (1) postoji po jedna funkcija promenljive x

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_p) \tag{4}$$

koja sadrži onoliko proizvoljnih konstanata $C_1, \ldots, C_p$ koliki je red jednačine; te se proizvoljne konstante nazivaju *integracionim konstantama.*

Kad se u izrazu (4) svih p integracionih konstanata ostave kao proizvoljne, taj izraz predstavlja *opšti integral* jednačine (1). Kad se u njemu, pojedinima od tih konstanata, ili svima, dadu utvrđene, određene vrednosti, on predstavlja po jedan *partikularni integral* jednačine. Očevidno je da kad se zna opšti integral jedne jednačine, znaće se i svi njegovi partikularni integrali, kojih ima beskrajno mnogo i među sobom se razlikuju samo po vrednostima koje su pridate pojedinim integracionim konstantama u opštem integralu.

Pod *integracijom* jednačine (1) ima se uglavnom razumeti odredba

1° ili njenoga opšteg integrala y;

2° ili jednoga njenog partikularnog integrala y.

Kad je nađen opšti integral, za jednačinu se kaže da je *potpuno integraljena;* kad je nađen jedan njen partikularni integral, kaže se da je *integraljena u užem smislu.*

U velikom broju slučajeva, integral jednačine, bilo opšti, bilo partikularni, sastavljen je iz konačnog broja kombinacija elementarnih funkcija, tj. onih koje se iz nezavisno promenljive količine x dobijaju: sabiranjem, oduzimanjem, množenjem, deljenjem, stepenovanjem sa stalnim ili od x zavisnim izložiocima, logaritmisanjem i operacijama koje se izražavaju trigonometrijskim i ciklometrijskim funkcijama. To su, dakle, funkcije koje se dobijaju elementarnim kombinacijama ograničenog broja funkcija

$$x,\ x^a,\ e^x,\ \sin x,\ \arcsin x,\ \log x.$$

U toku razvijanja matematičke analize prišle su ovim elementarnim funkcijama još i neke ranije nepoznate funkcije (kao što su npr. eliptičke funkcije), tako da danas i one ulaze u okvir elementarnih funkcija, a u taj će okvir ući još koja specijalnija vrsta funkcija, kada ove budu tačno i u svima svojim pojedinostima proučene.

Kad se, na ma koji način, uspelo izraziti integral y u obliku kombinacija elementarnih funkcija, kaže se da je diferencijalna jednačina *integraljena u konačnom obliku,* jer su onda sve operacije, na koje se svodi integral, svedene na konačni broj običnih računskih operacija, koje se mogu računski do kraja izvršiti. Takav je npr. slučaj sa jednačinama (2) ili (3).

Međutim, u velikom broju slučajeva nemogućno je izraziti integral u takvom konačnom obliku, ali se on izražava pomoću elementarnih funkcija i integralnog znaka $\int$. Naime, integral se izražava pomoću elementarnih funkcija i jednoga konačnog broja integrala

$$\int X_1\,dx, \qquad \int X_2\,dx, \ \ldots$$

gde su $X_1, X_2, \ldots$ opet određene i poznate kombinacije elementarnih funkcija, i gde integralni znaci mogu biti i superponirani. U takvim se slučajevima kaže da je jednačina *integraljena elementarnim funkcijama i kvadraturama.* Tako npr. jednačina prvoga reda

$$xy' + e^x - x = 0 \tag{5}$$

ima za opšti integral

$$y = C + x - \int \frac{e^x}{x}\,dx; \tag{6}$$

ona je dakle integraljena na takav način.

Dešava se i za jednačine, koje sadrže funkcije neprecizirane, ostavljene u opštem obliku $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ..., da se integral može izraziti elementarnim kombinacijama tih funkcija i ograničenim brojem kvadratura, tj. integracija izvršenih nad tim funkcijama i njihovim kombinacijama. Tako npr. opšti integral linearne jednačine prvog reda

$$y' + fy + \varphi = 0 \tag{7}$$

(gde su f i φ funkcije nezavisno promenljive količine x) ima oblik

$$y = e^{-\int f dx}\left[C + \int e^{\int f dx} \cdot \varphi\,dx\right]. \tag{8}$$

Takav je slučaj i sa jednačinom drugoga reda

$$yy'' + y'^2 + \varphi yy' = 0$$

(gde je φ funkcija promenljive x), čiji je opšti integral

$$y = \sqrt{C_1 + C_2 \int e^{-\int \varphi dx}\,dx}.$$

Veliki broj, kako pojedinačnih diferencijalnih jednačina svakoga konačnog reda, tako i pojedinih opštih tipova jednačina, mogu se integraliti pomoću elementarnih funkcija i kvadratura. Ali ostaje nepregledna množina jednačina za koje se integral ne izražava ni kombinacijama takvih funkcija, ni pomoću kvadratura. Za neke tipove jednačina uspelo se da se i dokaže takva nemogućnost, kao npr. za opštu Riccatievu jednačinu

$$y' + f y^2 + \varphi y + \psi = 0$$

(gde su f, φ, ψ funkcije nezavisno promenljive x), ili za opštu linearnu jednačinu

$$y^{(p)} + f y^{(p-1)} + \varphi y^{(p-2)} + \cdots + \lambda y = 0$$

čiji je red $p \geqslant 2$. Za druge tipove jednačina istina takva nemogućnost nije dokazana, ali su svi pokušaji da se one integrale u konačnom obliku i pomoću kvadratura, ostali bezuspešni.

2.

OPŠTI POJMOVI O INTEGRACIJI JEDNAČINA PRVOG REDA

Opšti integral y date diferencijalne jednačine pıvoga reda

(9) $$f(x, y, y')=0$$

može se odrediti u svoja dva razna oblika:

1° Kao funkcija promenljive x i integracione konstante C, u obliku

(10) $$y=\varphi(x, C)$$

ili, opštije, u obliku jednačine

(11) $$\varphi(x, y, C)=0$$

takve da y, određeno tom jednačinom, z.dovoljava jednačinu (9) za ma kakve vrednosti x i C. Tako npr. jednačina

(12) $$y'-y=0$$

ima za opšti integral

(13) $$y=Ce^x;$$

za jednačinu

(14) $$y'-xy=0$$

to je

(15) $$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

za jednačinu

(16) $$yy'+x=0$$

to je

$$x^2+y^2+C=0.$$

2° Kao ovaj partikularni integral iste jednačine (9) koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$, a kad se te vrednosti x_0 i y_0 smatraju kao proizvoljne. Geometrijski rečeno kao onaj integral jednačine čiji geometrijski predstavnik (integralna kriva linija) prolazi kroz proizvoljno uzetu tačku (x_0, y_0) u ravni xOy.

Takav bi npr. integral za jednačinu (12) bio

$$y=y_0\, e^{(x-x_0)};$$

za jednačinu (14)

$$y=y_0\, e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}$$

a za jednačinu (16)

$$x^2+y^2-x_0^2-y_0^2=0.$$

Od oblika 1° prelazi se na oblik 2° izrazivši da integralna kriva prolazi kroz tačku (x_0, y_0), što daje jednačinu

$$y_0=\varphi(x_0, C) \text{ odnosno } \psi(x_0, y_0, C)=0 \tag{17}$$

i eliminišući konstantu C iz dveju jednačina (10), odnosno (11) i jednačine (17). Tako se dobija opšti integral u obliku

$$y=\lambda(x, x_0, y_0) \text{ odnosno } \mu(x, y, x_0, y_0)=0. \tag{18}$$

Na prvi pogled izgledalo bi da takav opšti integral sadrži dve proizvoljne konstante x_0 i y_0, što ne bi moglo biti, jer dve takve konstante sadrži opšti integral samo za jednačine drugoga reda. Međutim, lako se uveriti da pored svega toga što su obe konstante x_0 i y_0 proizvoljne, one se kod jednačina prvoga reda uvek grupišu u jednu jedinu konstantu C. Jer ako se izrazi da opšti integral y odneđen npr. jednačinom

$$\varphi(x, y, C)=0 \tag{19}$$

za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$, dobija se uslovna jednačina

$$\varphi(x_0, y_0\, C)=0 \tag{20}$$

iz koje kad bi se izračunalo C, tako da je npr.

$$C=\theta\,(x_0, y_0),$$

opšti bi integral bila funkcija y određena jednačinom

$$\varphi\,[x, y, \theta\,(x_0, y_0)]=0$$

gde su se obe proizvoljne konstante x_0 i y_0 grupisale u samo jednu, a to je $\theta\,(x_0, y_0)$.

U svemu daljem izlaganju ovde će se uzeti u obzir ovaj drugi način odredbe opštega integrala. Problem integracije jednačine (9) javlja se tada u ovome obliku:

A) *Naći takav izraz y kao funkciju promenljive x da jednačina (9) bude identički zadovoljena za ma kakvo x i da taj izraz za $x=x_0$ dobije vrednost $y=y_0$.*

Tada ako su vrednosti x_0 i y_0 ostavljene proizvoljne, imaće se opšti integral jednačine; ako su te vrednosti utvrđene, imaće se njen partikularni integral, i to onaj koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$.

Međutim, bilo da se ima posla sa opštim, bilo sa partikularnim integralom y, uvek se problem može svesti na ovaj:

B) *Naći takav izraz y koji identički zadovoljava drugu jednu diferencijalnu jednačinu, izvedenu iz date, i koji će za $x=0$ imati za vrednost $y=0$.*

Jer ako su vrednosti x_0 i y_0 konačne, pa se izvrši smena

$$x=x_0+t, \qquad y=y_0+u, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dt} \tag{21}$$

i smatra se t kao nova nezavisno promenljiva količina, a u kao nova nepoznata funkcija, dobija se nova, transformisana diferencijalna jednačina

$$F(t, u, u')=0. \tag{22}$$

Kad je $x=x_0$ i $y=y_0$, biće $t=0$ i $u=0$. Prema tome, naći integral y jednačine (9) koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$, znači naći integral u jednačine (22) koji za $t=0$ dobija vrednost $u=0$.

U slučaju kad je $x_0=\infty$, a y_0 konačno treba izvršiti smenu

$$x=\frac{1}{t}, \qquad y=y_0+u, \qquad \frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt};$$

kad je $y_0=\infty$, a x_0 konačno, izvršiće se smena

$$x=x_0+t, \qquad y=\frac{1}{u}, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

i naposletku, kad je $x_0=\infty$, $y_0=\infty$ treba izvršiti smenu

$$x=\frac{1}{t}, \qquad y=\frac{1}{u}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{t^2}{u^2}\frac{du}{dt},$$

pa će dobijena diferencijalna jednačina (22), svojim integralom koji za $t=0$ dobija vrednost $u=0$, dati i integral y jednačine (9) koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$.

Kad je problem određivanja integrala formulisan u obliku B), postavlja se pitanje: kako će se doći do integrala koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$? Kao što je napred kazano, u nepreglednom broju slučajeva ne može se integral izraziti pomoću elementarnih funkcija i kvadratura. Pa i u slučajevima kad je to mogućno, dobijeni izraz za integral često je tako komplikovan i nepodesan za praktično računanje, da od takvog izraza nema velike koristi. U takvim slučajevima ili se gleda da se ponešto u izrazu y zanemari, kad to neće mnogo uticati na rezultat računa, pa će se imati bar približan izraz za integral, ili se pokušava da se integral izrazi u obliku beskrajnoga reda, čiji je oblik članova takav da se sa njima može lako računati ili se na njima može raspoznati kakva naročita pojedinost vezana za integral.

Predmet ove knjige biće takav način odredbe integrala, tj. *problem da se integral date diferencijalne jednačine odredi u obliku kakvoga reda*

(23) $$y = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

čiji će članovi biti kakve proste funkcije nezavisno promenljive količine x *i koji će biti takav da je*

(24) $$u_0(0) + u_1(0) + u_2(0) + \cdots = 0.$$

Kod svakoga reda (23) mora se voditi račun o tome za koje će vrednosti x on biti upotrebljiv, tj. konvergentan. Prema tome, iskazani problem integracije svodi se na ova dva zadatka:

Prvi zadatak: naći *formalno rešenje* problema, tj. takav red (23) sa uslovnom jednačinom (24), da y izraženo tim redom identički zadovolji datu diferencijalnu jednačinu i uslov (24), bez obzira na to da li će nađeni red konvergirati ili ne.

Drugi zadatak: ispitati za koje će vrednosti x nađeni red biti konvergentan.

Kad su, u datome slučaju, rešena oba ta zadatka, smatra se da je problem integracije faktički rešen, i dobijeni red smatra da je *faktično rešenje* problema.

Lako se vidi iz prostih primera da nije dovoljno znati samo formalno rešenje problema, jer se može desiti da dobijeni red bude neupotrebljiv, jer nije konvergentan ni za koju vrednost x. Tako npr. jednačinu

$$x^2 y' - y + x = 0$$

formalno zadovoljava red

$$y = 0!\, x + 1!\, x^2 + 2!\, x^3 + 3!\, x^4 + \cdots$$

koji zadovoljava i uslov (24), ali je on neupotrebljiv, jer ne konvergira ni za koju vrednost x.

Isti je slučaj i sa redom

$$y = 0!\, \sqrt{x} + 1!\, (\sqrt{x})^2 + 2!\, (\sqrt{x})^3 + \cdots$$

koji formalno zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$x\,(2\,xy' + 1)^2 - y^2 = 0$$

kao i uslov (24), ali ne konvergira ni za koju vrednost x.

Dešava se i to da je dobijeni red konvergentan za neke vrednosti x, npr. za one što se nalaze u jednoj određenoj oblasti ravni x, ali da se ne može upotrebiti za onu vrednost x za koju se traži vrednost integrala. Tako npr. red

$$y = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

formalno zadovoljava jednačinu

$$y' - (y+1)^2 = 0$$

i jednačinu (24) ali je upotrebljiv samo za vrednosti x što se nalaze u krugu poluprečnika 1 opisanom oko $x=0$, jer je red konvergentan samo za takve vrednosti x.

Naposletku dešava se i to da je nađeno formalno rešenje diferencijalne jednačine u obliku reda koji konvergira za sve vrednosti x za koje se to traži, ali da red ne zadovoljava uslovnu jednačinu (24). Takav je npr. slučaj sa prostom jednačinom

$$y' = y$$

čiji je opšti integral

$$y = Ce^x$$

izražljiv u obliku reda

$$y = C + \frac{C}{1!}x + \frac{C}{2!}x^2 + \frac{C}{3!}x^3 + \cdots$$

konvergentnog za svaku vrednost x. Međutim, takav integral samo tako može zadovoljiti jednačinu (24) ako je $C=0$, ali u tome slučaju integral je identički jednak nuli za sve vrednosti x; to dakle stvarno nije funkcija te promenljive.

Iz takvih se primera jasno vidi da se samim formalnim rešenjem ne rešava problem integracije; to rešenje još treba dopuniti rešenjem zadatka konvergencije dobijenoga reda.

3.

FORMALNO REŠENJE U OBLIKU REDA

Neka je data diferencijalna jednačina

$$F(x, y, y') = 0 \tag{25}$$

pa pokušajmo zadovoljiti je izrazom integrala y u obliku Maclaurinovog reda

$$y = a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \cdots \tag{26}$$

Zadatak se svodi u prvome redu na to da se iz same jednačine (25) izračunaju koeficijenti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tako da izrazom (26) ta jednačina bude zadovoljena. Pretpostavivši najpre da odista postoji takav jedan skup tih koeficijenata da formalno rešenje u obliku (26) odista postoji, odredba koeficijenata može se izvršiti na ovaj način:

Kao što se zna biće

$$a_n = \frac{[y^{(n)}]}{n!} \tag{27}$$

gde uopšte pod znakom $[\varphi]$ treba razumeti rezultat koji se dobija kad se u izrazu φ smene nulom promenljive količine koje φ sadrži.

Međutim, iz jednačine (25) se vidi da će vrednost

$$a_1 = [y']$$

biti jedan od korena jednačine

$$F(0, 0, \alpha) = 0 \tag{28}$$

rešene po α. Svakome od takvih korena odgovara, dakle, po jedna mogućna vrednost koeficijenta a_1.

Diferencijaljenjem jednačine (25) dobija se

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

odakle je

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Izraz na desnoj strani poslednje jednačine, kad se u njemu stavi $x=0$, $y=0$, $y'=\alpha$, postaće proj $[y'']$. Ako se dakle taj izraz označi sa F_1, biće

$$a_2 = \frac{1}{2!} [F_1].$$

Diferencijaljenjem jednačine

$$y'' = F_1$$

dobija se pošto F_1 zavisi od x, y, y',

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' = \frac{\partial F_1}{\partial y'} F_1,$$

tako da, ako se izraz na desnoj strani ove jednačine označi sa F_2, a kad se u njemu stavi $x=0$, $y=0$, $y'=\alpha$, dobijeni rezultat biće broj $[y''']$, i prema tome je

$$a_3 = \frac{1}{3!} [F_2].$$

Tako isto, pošto i F_2 zavisi od x, y, y', diferencijaljenjem jednačine

$$y''' = F_2$$

dobija se

$$y'''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1,$$

tako da, ako se izraz na desnoj strani označi sa F_3 i u njega stavi $x=0$, $y=0$, $y'=\alpha$, dobijeni rezultat biće broj $[y'''']$ i prema tome je

$$a_4 = \frac{1}{4!} [F_3].$$

Produživši te radnje i dalje, dolazi se do ovoga zaključka:

Kad se formira niz funkcija

(29) $$F_1, F_2, F_3 \ldots$$

triju promenljivih x, y, y', *koje se jedna iz druge izvode po obrascu*

(30) $$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1,$$

gde je

$$F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\, y'}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} \tag{31}$$

i gde se indeksu n daju uzastopne vrednosti $n = 2, 3, 4, \ldots$, *koeficijenat* a_n *imaće za vrednost*

$$a_n = \frac{1}{n!}\,[F_{n-1}] \tag{32}$$

gde se pod $[F_{n-1}]$ *ima razumeti rezultat koji se dobija kad se u funkciji* F_{n-1} *smeni* $x = 0,\ y = 0,\ y' = \alpha$, *a gde je* α *jedan ma koji od korena jednačine*

$$F(0, 0, \alpha) = 0 \tag{33}$$

rešene po α.

Kao što se vidi takav način odredbe koeficijenata a_n ima smisla samo onda kad sve funkcije niza (29) imaju za $x = 0,\ y = 0,\ y' = \alpha$ konačne i određene vrednosti.

Funkcije niza (29) postaju prostije u ovim slučajevima:

1° Kad je data diferencijalna jednačina napisana u obliku

$$y' - f(x, y) = 0 \tag{34}$$

biće

$$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0$$

i prema tome

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1,$$

$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2,$$

$$y'''' = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} f = f_3, \ldots$$

tako *da se niz* (29) *poklapa sa nizom funkcija*

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{35}$$

što zavise od dveju promenljivih x, y, a izvode se jedna iz druge po obrascu

$$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} f, \qquad f_0 = f(x, y). \tag{36}$$

Koeficijenat a_n dat je obrascem

$$a_n = \frac{1}{n!}\,[f_{n-1}].$$

2° Kad diferencijalna jednačina ne sadrži promenljivu y, tj. kad je oblika

(37) $$F(x, y') = 0,$$

tada je a_1 jednako jednome od korena jednačine

(38) $$F(0, \alpha) = 0.$$

Iz (37) je

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

odakle je

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} = F_1,$$

zatim

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y'} F_1 = F_2,$$

a iz toga se dobija jednačina

$$y'''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1 = F_3.$$

Produživši te radnje i dalje, dolazi se do zaključka:

Niz (29) *funkcija, pomoću kojih se, prema obrascu* (32), *izračunava koeficijenat* a_n, *jeste onaj koji se dobija pomoću obrasca*

(39) $$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1$$

gde je

(40) $$F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

U specijalnom slučaju kad je jednačina (37) napisana u obliku

(41) $$y' = f(x)$$

niz (29) se sastoji iz funkcije $f_1, f_2, f_3, \ldots$, *koje se jedna iz druge izvode pomoću obrasca*

(42) $$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}, \qquad f_0 = f(x).$$

3° Kad diferencijalna jednačina ne sadrži promenljivu x, tj. kad je oblika

$$F(y, y') = 0 \tag{43}$$

koeficijenat a_1 je jednak jednome od korena jednačine

$$F(0, a) = 0 \tag{44}$$

rešene po a. Iz (43) je

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

odakle je

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} = F_1$$

pa se niz (29) *dobija pomoću obrasca*

$$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1 \tag{45}$$

gde je

$$F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{46}$$

U specijalnom slučaju kad je jednačina (43) napisana u obliku

$$y' = f(y) \tag{47}$$

niz funkcija (29) sastoji se iz funkcija $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *koje se jedna iz druge izvode po obrascu*

$$f_n = y' \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \qquad f_0 = f(y). \tag{48}$$

Kad su koeficijenti a_n na taj način izračunati, od interesa je proveriti da red

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{49}$$

odista zadovoljava diferencijalnu jednačinu od koje se pošlo. Radi uprošćenja stvari ovde će biti pretpostavljeno da je jednačina rešena po izvodu y', tj. data u obliku

$$y' = f(x, y). \tag{50}$$

Pored toga biće pretpostavljeno da je funkcija $f(x, y)$ holomorfna funkcija promenljivih x i y u blizini vrednosti $x = 0$, $y = 0$.

Iz (49) dobija se da je

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \tag{51}$$

gde je

$$b_0 = a_1 \quad b_1 = 2\,a_2, \ldots, b_n = (n+1)\,a_{n+1}$$

i prema ovome što prethodi

(52) $$b_n = \frac{n+1}{(n+1)!}[f_n] = \frac{1}{n!}[f_n]$$

gde je f_n jedan član niza $f_1, f_2, f_3, \ldots$, tj. totalni izvod po x funkcije f_{n-1}, dobijen uzastopnim diferencijaljenjima prvobitne funkcije $f_0 = f(x, y)$ po x i y, vodeći računa o tome da je y funkcija promenljive x.

Sa druge strane, pošto je $f(x, y)$ holomorfna funkcija promenljivih x i y u blizini vrednosti $x = 0$, $y = 0$, to kad se u njoj smeni y redom uređenim po stepenima promenljive x i sama se ta funkcija može razviti u takav jedan red, pa neka je to

(53) $$f(x, y) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3 + \cdots$$

Koeficijenti reda biće

(54) $$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{0!}[f] \\ A_1 &= \frac{1}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right] = \frac{1}{1!}[f_1], \\ A_2 &= \frac{1}{2!}\left[\frac{df_1}{dx}\right] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f\right] = \frac{1}{2!}[f_2], \ldots \end{aligned}$$

iz čega se vidi da je

(55) $$A_n = \frac{1}{n!}[f_n] = b_n.$$

Prema tome red (51) koji daje izvod y', i red (53) koji daje funkciju $f(x, y)$ pošto se u ovoj y smeni redom (49), imaju iste koeficijente; ta su dva reda dakle među sobom jednaka, tj.

(56) $$y' = f(x, y),$$

što znači da y, definisano redom (49) odista zadovoljava posmatranu diferencijalnu jednačinu.

4.

PRIMERI ZA ODREDBU FORMALNOG REŠENJA

U prednjem odeljku navedeni način za odredbu formalnog rešenja problema integracije daje eksplicitne izraze koeficijenata a_n reda koji predstavlja to rešenje. On daje mogućnost da se ili izračuna a_n u obliku obrasca koji daje opšti koeficijenat za ma kakvo n, ili da se izračuna onoliko prvih koeficijenata $a_1, a_2, a_3, \ldots$ koliko se hoće. Ovo je poslednje određivanje mogućno u svim slučajevima; ono prvo je moguće samo u pojedinim, ređim slučajevima. Praktična primena toga načina videće se iz ovih nekolikih primera:

1. primer: neka je data jednačina

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1,$$

pa se nalazi da je

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4}(y - x + 1)^5.$$

$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8}(y - x + 1)^7,$$

$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(y - x + 1)^9, \ldots$$

i uopšte

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n + 1)}{2^{n+1}}(y - x + 1)^{2n+3}$$

prema čemo se za koeficijente integralnog reda dobijaju vrednosti

$$a^n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

2. primer: data je jednačina

$$y' = \frac{1}{2}(1+y)^3,$$

pa se nalazi

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4}(1+y)^5,$$

$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8}(1+y)^7,$$

$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(1+y)^9, \ldots$$

i uopšte

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}}(1+y)^{2n+3}$$

prema čemu koeficijenti a_n imaju iste vrednosti kao koeficijenti u prvome primeru, osim a_1 koji ima vrednost $\frac{1}{2}$.

3. primer: data je jednačina

$$(1-x^2)\,y'^2 - 4\,y^2 - 1 = 0,$$

pa se nalazi

$$F_0 = F = (1-x^2)\,y'^2 - 4\,y^2 - 1,$$

$$F_1 = \frac{xy' + 4\,y}{1-x^2},$$

$$F_2 = \frac{(5-2\,x^2)y' + 12\,xy}{(1-x^2)^2},$$

$$F_3 = \frac{(33-18\,x^2)\,xy' + (32+28\,x^2)\,y}{(1-x^2)^3}, \ldots$$

tako da će uopšte F_n biti oblika

$$F_n = \frac{p_n\,y' + q_{n-1}\,y}{(1-x^2)^n}$$

gde je p_n polinom n-tog, a q_{n-1} polinom $n-1$-og stepena po x.

Iz diferencijalne jednačine se nalazi da za $x=0$, $y=0$ izvod y' ima dve vrednosti ± 1. Prvoj vrednosti odgovara integral čiji su koeficijenti

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \frac{5}{6}, \qquad a_4 = 0, \ldots$$

a drugoj integral sa koeficijentima

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{5}{6}, \qquad a_4 = 0, \ldots$$

4. primer: uočimo jednačinu opšteg oblika

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{57}$$

gde su P i Q polinomi po x i y, sa pretpostavkom da je vrednost Q (0 0) različna od nule. Jednačina ima jedan, i to samo jedan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, i on se može razviti u red

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

čiji se koeficijenti izračunavaju po obrascu

$$a_n = \frac{r_n}{n!}$$

gde r_n označava vrednost koju dobija za $x=0$, $y=0$ izvesna određena racionalna funkcija R_n. Ta je funkcija n-ti član niza racionalnih funkcija

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

koje se jedna iz druge izvode po obrascu

$$R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + \frac{P}{Q} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y}, \qquad R_1 = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{58}$$

Ovde će biti pokazano da se izračunavanje koeficijenata a_n može svesti na izračunavanje, ne niza racionalnih funkcija, nego jednoga niza polinoma po x, y.

Lako se uveriti da će funkcija R_2 biti jedan polinom po x, y, podeljen sa Q^3; da će R_3 biti polinom podeljen sa Q^5, i da će uopšte, ako se stavi da je

$$R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-1}}, \qquad P_1 = P, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

P_n biti polinom po x, y. Iz jednačine

$$R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-3}}$$

dobija se da je

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} = \frac{Q \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} - (2n-3) \dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}},$$

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y} = \frac{Q \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} - (2n-3) \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}}$$

pa smenivši to u jednačini (58) dobija se

$$P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + (2n-3)\,CP_{n-1} \quad (n=2, 3, \ldots), \tag{59}$$

gde su A, B, C stalni polinomi, tj. nezavisni od indeksa n, koji se iz datih polinoma P i Q, što figurišu u diferencijalnim jednačinama izvode po obrascima

$$A = Q^2, \qquad B = PQ, \qquad C = -\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y}\right). \tag{60}$$

Koeficijenat a_n tada se javlja u obliku

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{P_n}{Q^{2n-1}}\right]$$

pa ako se sa $p_1, p_2, p_3, \ldots$ označe članovi nezavisni od x i y u polinomima P_1, P_2, $P_3, \ldots$, a sa q takav član u polinomu Q, koeficijenat a_n izražen je obrascem

$$a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-1}}.$$

Kao što se vidi, izračunavanje koeficijenata integralnog reda jednačine (57) svodi se na određivanje članova nezavisnih od x i y u polinomima Q, P_1, P_2, $P_3, \ldots$ koji se jedan iz drugog izvode po obrascu (59) u kome treba poći od početnog polinoma

$$P_1 = P(x, y)$$

što figuriše u samoj datoj diferencijalnoj jednačini.

5.

KONVERGENCIJA DOBIJENOG REDA

Ovim što je dovde izloženo rešen je zadatak formalnog rešenja u problemu integracije diferencijalne jednačine. Kao što se vidi, u svima slučajevima je mogućno formirati red

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{61}$$

koji će identički zadovoljiti datu jednačinu (56) i biti takav da za $x = 0$ daje vrednost $y = 0$.

Ali da bi dobijeni red dao i faktičko rešenje problema, treba znati još i to da li će on biti konvergentan za vrednosti x za koje se to traži. Kao što se zna, svaki Maclaurinov red ima svoj *krug konvergencije*; kad se vrednost x nalazi u tome krugu, red je nasigurno konvergentan. Krug ima za centar tačku $x = 0$; ako mu je poluprečnik R beskrajno veliki red je konvergentan za sve vrednosti x; ako je jednak nuli, red je divergentan za sve vrednosti x i neupotrebljiv; ako je konačan i različit od nule, red je konvergentan i upotrebljiv za sve vrednosti x što se nalaze u krugu.

Kad bi se mogao poznavati pravi krug konvergencije, tj. takav da je red konvergentan za sve vrednosti x u unutrašnjosti kruga, a divergentan za sve vrednosti x van kruga, imao bi se najprostraniji mogući skup vrednosti x za koje bi red bio konvergentan. Takav se krug osim u izuzetnim slučajevima, ne može odrediti. Ali se uvek može odrediti takav jedan krug, opisan oko $x = 0$, da se može nasigurno tvrditi da će dobijeni red za integral konvergirati za sve vrednosti x što se nalaze u njegovoj unutrašnjosti, bez obzira na to da li će on konvergirati i za kakve vrednosti van kruga. Očevidno je da kad se ne može imati najprostraniji skup vrednosti za koje će red biti upotrebljiv, upućeni smo na to da se traži jedan ma i uži skup takvih vrednosti kakav bude mogućno naći.

Za odredbu takvoga jednoga kruga postoji *Cauchyeva komparativna metoda*, čiji se princip sastoji u ovome:

Uočimo dve diferencijalne jednačine

(62) $$y' = f(x, y),$$

(63) $$v' = \varphi(x, v)$$

gde su f i φ funkcije holomorfne u blizini vrednosti $x=0$, $y=0$, $v=0$. Te se funkcije tada mogu razviti u dvostruke redove

(64) $$f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n,$$

(65) $$\varphi(x, v) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n,$$

koji će nasigurno biti konvergentni u blizini tih vrednosti.

Pretpostavimo da su ispunjeni ovi *Cauchyevi uslovi*:

1° *da su svi koeficijenti* B_{mn} *realni i pozitivni;*

2° *da moduo svakoga koeficijenta* A_{mn} *ne premaša vrednost odgovarajućeg koeficijenta* B_{mn}, *tj. da je*

(66) $$|A_{mn}| \leqslant B_{mn};$$

3° *da je integral jednačine* (63) *holomorfna funkcija pvomenljive* x *za sve vrednosti* x *u jednome određenom krugu* C *opisanom oko* $x=0$.

Tada se, u takvim pretpostavkama, dokazuje ova prethodna teorema:

Red

(67) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

koji je nađen kao formalno rešenje za diferencijalnu jednačinu (62) *biće nasigurno konvergentan za sve vrednosti* x *što se nalaze u krugu* C.

Dokaz teoreme je osnovan na ovim dvama stavovima, koji će prethodno biti dokazani:

Stav A). Neka je $f(x)$ kakva funkcija holomorfna za vrednosti x takve da je $|x| < r$, tj. za vrednosti x u krugu c poluprečnika r sa centrom u tački $x=0$, i neka je M jedna realna i pozitivna vrednost koju ne premaša $|f(x)|$ kad x ostaje u krugu c. Pored toga pretpostavlja se da je funkcija $f(x)$ neprekidna za vrednosti x na samome krugu c. *Tada je za sve vrednosti x u krugu c*

(68) $$\left|\frac{d^m f}{dx^m}\right| < m! \frac{M}{r^m} \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

To izlazi neposredno iz Cauchyevog obrasca poznatog iz opšte teorije analitičkih funkcija

(69)
$$\frac{d^m f}{dx^m} = \frac{m!}{r^m \cdot 2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta$$

iz koga izlazi da je

$$\left|\frac{d^m f}{dx^m}\right| < \left|\frac{m!}{r^m \cdot 2\pi i}\right| \int_0^{2\pi} |f(re^{\theta i})| \, |e^{-n\theta i}| \cdot d\theta$$

pa pošto je

$$\left|\frac{m!}{r^m \cdot 2\pi i}\right| = \frac{m!}{2\pi r^m} \, |e^{-n\theta i}| = 1, \quad |f(re^{\theta i})| < M,$$

to je

$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right| < \frac{m!}{2\pi r^m} M \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{r^m}.$$

Stav B). Neka je $f(x, y)$ kakva funkcija holomorfna za vrednosti x takve da je $|x| < r$ i za vrednosti y takve da je $|y| < r'$ (tj. za vrednosti x u krugu c poluprečnika r, i za vrednosti y u krugu c' poluprečnika r', sa centrima u $x = 0$, odnosno $y = 0$), a sa pretpostavkom da je funkcija neprekidna za vrednosti x i y na samim krugovima c i c'. Neka je M jedna realna i pozitivna vrednost koju ne premaša $|f(x, y)|$ kad x ostaje u krugu c, a y u krugu c'. *Tada je za sve takve vrednosti* x i y

(70)
$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x, y)\right| < \frac{m! \, n!}{r^m r'^n} M, \qquad (m, n = 0, 1, \ldots).$$

Stav je neposredna posledica stava *A*). Jer ako se označi da je

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \varphi(x, y)$$

biće prema stavu A) za vrednosti x i y u krugovima c i c'

(71)
$$|\varphi(x, y)| < \frac{M}{r^m}$$

pa prema istom stavu i

(72)
$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right| < \frac{n!}{2\pi r'^n} N$$

gde je N jedna realna pozitivna vrednost koja ne premaša $|\varphi(x, y)|$ kad x i y ostaju u krugovima c i c'. Pa pošto se prema (71) može uzeti

$$N = \frac{M}{r^m}$$

i pošto je

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \cdot \partial y^n} f(x, y),$$

iz (72) dobija se nejednačina (70).

Sad se na osnovu stavova A) i B) teorema što se ima u vidu dokazuje na ovaj način:

Pošto je funkcija v holomorfna za vrednosti x u krugu C, ona se može razviti u red

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \tag{73}$$

koji će biti konvergentan za takve vrednosti x. Uporedimo koeficijente reda (67) sa odgovarajućim koeficijentima reda (73). Iz ranijih obrazaca

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1!}[f],\\
a_2 &= \frac{1}{2!}[f_1] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right],\\
a_3 &= \frac{1}{3!}[f_2] = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]\\
&= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \ldots
\end{aligned} \tag{74}$$

vidi se *struktura* koeficijenata a_n, koja je ovakva: a_n je sa $n!$ podeljen zbir sabiraka od kojih je svaki jednak proizvodu raznih stepena funkcije f i njenih parcijalnih izvoda po x i y.

Koeficijenti b_n dobijaju se kad se u obrascima (74) funkcija f smeni funkcijom φ; oni dakle imaju istu strukturu kao koeficijenti a_n. Moduo svakoga sabirka u obrascima (74), prema nejednačinama

$$|f(x, y)| < M \tag{75}$$

i (66) koja se može napisati u obliku

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n} f\right| < \left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n} \varphi\right|, \tag{76}$$

manji je od modula odgovarajućeg sabirka u sličnim obrascima za koeficijente b_n. Sa druge strane, svi su parcijalni izvodi funkcije φ po x i v pozitivni za $x=0$, $v=0$ po pretpostavci 1° Moduo svakog sabirka u obrascima za b_n, pošto se u ovima stavi $x=0$, $v=0$, jednak je dakle samome sabirku, pa se iz svega toga vidi da je i moduo koeficijenata a_n manji od zbira takvih sabiraka u izrazu za b_n, pa dakle manji i od samog koeficijenta b_n, tj.

$$|a_n| < b_n.$$

Pa kako je red

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

konvergentan za vrednosti x u krugu C, biće u tome krugu konvergentan i red

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

čime je teorema dokazana.

Uzmimo sad za diferencijalnu jednačinu (63) specijalnu jednačinu

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)} = \varphi(x, v), \tag{77}$$

gde r, r', M imaju maločas navedena značenja. Kad se funkcija $\varphi(x, v)$ razvije u dvostruki red po stepenima promenljivih x i v iz obrazaca

$$\frac{1}{1-\frac{x}{r}} = 1 + \frac{x}{r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{v}{r'}} = 1 + \frac{v}{r'} + \left(\frac{v}{r'}\right)^2 + \left(\frac{v}{r'}\right)^3 + \cdots$$

množenjem se dobija da je

$$\varphi(x, v) = M \sum_m \sum_n \left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{v}{r'}\right)^n = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n, \tag{78}$$

gde opšti koeficijenat ima za vrednost

$$B_{mn} = \frac{M}{r^m r'^n}. \tag{79}$$

Kao što se vidi, taj koeficijenat zadovoljava Cauchyev uslov 1°.

Da je, sa takvom jednačinom (77), zadovoljen i Cauchyev uslov 2°, može se dokazati na ovaj način:

Zna se iz teorije razvijanja funkcija $f(x,y)$ u dvostruki Maclaurinov red da koeficijenat A_{mn} ima za vrednost

$$(80) \qquad A_{mn}=\frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m y^n} f(x,y)\right]$$

gde zagrada, kao i napred, označuje broj koji se dobija kad se u funkciji $f(x,y)$ stavi $r=0$, $y=0$. Prema nejednačini (70) tada se dobija da je

$$(81) \qquad |A_{mn}|<\frac{M}{r^m\,r'^n}$$

što prema jednačini (79) pokazuje da je odista

$$(82) \qquad |A_{mn}|<B_{mn}$$

tj. da je zadovoljen i Cauchyev uslov 2°.

Naposletku, da je jednačinom (77) zadovoljen i Cauchyev uslov 3°, vidi se na ovaj način:

Jednačina (77) može se integraliti razdvojivši joj promenljive x i v, čime se dobija

$$\left(1-\frac{v}{r'}\right) dv=\frac{M}{1-\dfrac{x}{r}}\,.$$

Integraleći dobija se

$$v-\frac{v^2}{2r'}=-Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right)+C,$$

gde je konstanta C određena uslovom da za $x=0$ bude $v=0$, što zahteva da bude $C=0$. Ako se uvede ta vrednost za konstantu C i jednačina se reši po v, dobija se

$$v=r'\pm\sqrt{r'^2+2Mrr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\,.$$

Uslov da za $x=0$ bude $v=0$ dopušta pred kvadratnim korenom samo znak minus; stoga za integral v treba uzeti vrednost

$$v=r'-\sqrt{r'^2+2Mrr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\,.$$

Taj je integral v holomorfna funkcija promenljive x u blizini vrednosti $x=0$, jer singularnosti funkcije proizlaze samo od jednačine

$$r'^2+2Mrr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)=0$$

i

$$\left(1-\frac{x}{r}\right)=0.$$

Ova druga jednačina daje kao logaritamski kritički singularitet vrednost $x=r$, ali ovaj ne dolazi u obzir pošto se ovde posmatraju samo vrednosti u krugu poluprečnika r.

Prva jednačina, rešena po x, ima samo jedan koren i to

$$x=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{83}$$

Ta je vrednost x jedini singularitet funkcije v, y u krugu poluprečnika r i prema tome ta će funkcija biti holomorfna dokle god vrednost x ostaje u krugu C opisanom oko tačke $x=0$ sa poluprečnikom

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{84}$$

Sa takvim krugom zadovoljen je dakle i Cauchyev uslov 3°.

Iz svega ovoga se vidi da specijalna jednačina (77) ispunjava sva tri Cauchyeva uslova da bi mogla igrati ulogu komparativne jednačine za diferencijalnu jednačinu (62). Prema tome i ranijoj prethodnoj teoremi red (67), dobijen na pokazani način, biće i sam konvergentan u krugu C poluprečnika R određenog obrascem (84).

6.

ISKLJUČIVOST DOBIJENOG REDA KAO INTEGRALA JEDNAČINE

Ostaje još poslednje pitanje, koje treba rešiti da bi se imalo potpuno rešenje problema integracije: da li je integral, dobijen na pokazani način u obliku reda, jedino mogućno rešenje, ili pored njega postoji i drugi koji integral jednačine koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$? Jer, ako bi se pokazalo da odista postoji još koji integral, dobijen na drugi koji način, onda ovo dosadašnje rešenje ne bi davalo potpuno rešenje problema integracije.

Da tako postavljeno pitanje nije izlišno, može se videti iz primera u kojima diferencijalna jednačina odista ima više od jednog integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$. Takav je npr. slučaj sa jednačinom

$$yy'-1=0,$$

koja ima dva integrala

$$y=+\sqrt{2x} \quad \text{i} \quad y=-\sqrt{2x}$$

koji su takvi da obadva za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$. Jednačina

$$x(1+x)y'-(1+2x)y=0$$

ima beskrajno mnogo takvih integrala, jer je njen opšti integral

$$y=Cx(1+x).$$

Osim toga, pored načina na koji smo u ovome što prethodi dobili formalno rešenje problema integracije, i koji se sastoji u izračunavanju koeficijenata a_n reda

(85) $$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

pomoću metode uzastopnih diferencijaljenja, ima i drugih načina za to izračunavanje. Jedan bi od njih bio npr. onaj pomoću *metode neodređenih koeficijenata*, koji se sastoji u ovome:

Napišimo integral y u obliku reda (85) sa nepoznatim koeficijentima a_1, a_2, $a_3 \ldots$, pa se iz toga dobija

$$y' = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + \cdots \tag{86}$$

Kad se redovi (85) i (86) stave u datu diferencijalnu jednačinu na mesto y i y', dobija se jedna jednačina

$$\Phi(x) = 0$$

u kojoj kad se leva strana uredi po stepenima promenljive x, dobija se jedna jednačina oblika

$$M_0 + M_1\,x + M_2\,x^2 + \cdots = 0$$

čiji će koeficijenti zavisiti od koeficijenata a_1, a_2, $a_3, \ldots$ Da bi ta jednačina mogla postojati za proizvoljnu vrednost x potrebno je i dovoljno da bude ponaosob

$$M_0 = 0,\ M_1 = 0,\ M_2 = 0, \ldots$$

U izvesnim slučajevima dešava se da se iz ovih jednačina mogu izračunati koeficijenti a_1, a_2, $a_3, \ldots$, tako da se za svaki od njih dobije jedna ili više konačnih i određenih vrednosti. Kad se jedan skup tako određenih vrednosti pripada tim koeficijentima, diferencijalna jednačina biće redom (85) identički zadovoljena, a pošto se iz (85) za $x = 0$ dobija $y = 0$, tako dobijeni red predstavlja jedno formalno rešenje problema.

1. primer: neka je data jednačina

$$(1-x)^2\,y' + y + 1 = 0;$$

nalazi se na pokazani način da je

$$a_1 = -1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\quad a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{24}, \ldots$$

a opšti koeficijent a_n za $n = 3, 4, 5, \cdots$ izračunaće se iz obrasca

$$a_n = \frac{(2\,n-3)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2}}{n}.$$

2. primer: data je jednačina

$$y' - e^x\,(1 + y) = 0;$$

nalazi se da je

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = \frac{5}{6},\ a_4 = \frac{5}{8}, \ldots$$

a opšti koeficijenat a_n za $n=2, 3, 4, \ldots$ izračunaće se iz obrasca

$$a_n = \frac{1}{n}\left(a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{1!} + \frac{a_{n-3}}{2!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right).$$

3. primer: data je jednačina

$$(1+x^2)\,y' - y + x = 0;$$

nalazi se da je

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}, \ldots$$

a a_n se izračunava za $n=3, 4, 5, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{n}\,(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

4. primer: data je jednačina

$$y' - y^2 - x^2 = 0;$$

nalazi se da je

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{54}, \ldots$$

a a_n se izračunava pomoću obrasca

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, a_{n-i}\,.$$

Kao što se vidi iz takvih primera, način koji je napred upotrebljen za odredbu integrala y u obliku reda ne mora biti jedini način za rešenje problema i stoga se odista mora postaviti pitanje: da li je pod pretpostavkom učinjenom za funkciju $f(x, y)$, dobijeno rešenje jedini integral y jednačine

$$y' = f(x, y)$$

koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$? Pretpostavka je bila ta, da je $f(x, y)$ funkcija holomorfna u blizini vrednosti $x=0$, $y=0$. Pod takvom pretpostavkom može se dokazati *da je dobijeno rešenje odista jedino rešenje tražene vrste.*

Da bi se to dokazalo, neka su y i z dva takva rešenja, pa označimo njihovu razliku $y-z$ sa u. Tada je

$$u' = y' - z' = f(x, y) - f(x, z)$$

ili

$$u' = \varphi(x, y, u)$$

gde je

(87) $$\varphi(x, y, u) = f(x, y) - f(x, y-u).$$

Pošto je za $x=0$ i $y=0$, to mora biti za tu vrednost x i $u=0$. Kad se u $f(x, y)$ smeni y nađenim integralom, koji je, kao što smo videli, holomorfna funkcija promenljive x u krugu C, funkcija $\varphi(x, y, u)$ postaje holomorfna funkcija promenljivih x i u za vrednosti x i u u blizini vrednosti $x=0$, $u=0$. Ona se tada može razviti u red uređen po stepenima promenljive u

(88) $$\varphi(x, y, u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots$$

gde će koeficijenti $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ biti holomorfne funkcije promenljive x u blizini vrednosti $x=0$ (pošto je A_n n-ti parcijalni izvod funkcije φ po promenljivoj u, kad se u njemu smeni $u=0$ i rezultat podeli sa $n!$).

Iz (87) se vidi da za $x=0$ (pošto je tada i $y=0$, $u=0$) mora biti i $\varphi=0$. Prema jednačini (88) to zahteva da je $A_0=0$, a pored toga mogu biti jednaki nuli i još jedan ili više prvih koeficijenata $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Neka je to slučaj sa prvih k koeficijenata, tako da je

$$A_0 = A_1 = A_2 \cdots = A_{k-1} = 0.$$

Jednačina (84) se tada svodi na

$$\varphi(x, y, u) = u^k \lambda(x, u)$$

gde je

$$\lambda(x, u) = A_k + A_{k+1} u + A_{k+2} u^2 + \cdots$$

Kad se ona napiše u obliku

(89) $$\frac{u'}{u} = u^{k-1} \lambda(x, u) \qquad (k \geqslant 1)$$

to, pošto logaritamski izvod funkcije u postaje beskrajan kad je $u=0$, tako bi moralo biti i sa desnom stranom jednačine (85). Ali to je nemogućno, pošto je $\lambda(x, u)$ holomorfna funkcija u blizini vrednosti $x=0$, $u=0$. Jednačina (85) je dakle nemogućna ako u nije identički jednako nuli, a tada je $y=z$ za proizvoljnu vrednost x; integrali y i z ne razlikuju se, dakle, među sobom.

7.

OSNOVNA TEOREMA O FAKTIČKOM REŠENJU PROBLEMA INTEGRACIJE

Iz celokupnog dosadašnjeg izlaganja izvodi se osnovna teorema za integraciju diferencijalnih jednačina prvoga reda u obliku Maclaurinovog reda, koja nosi naziv *teoreme Briot-Bouqueta*.

Neka je data jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{90}$$

gde je $f(x, y)$ ma kakva funkcija promenljivih x i y, holomorfna u blizini vrednosti $x = 0$, $y = 0$, kao i za sve vrednosti x u jednome krugu c opisanom u ravni promenljive x oko tačke $x = 0$ i za sve vrednosti y u jednome krugu c' opisanom u ravni promenljive y oko tačke $y = 0$. Ako su r i r' poluprečnici krugova c i c', a M kakav realan pozitivan broj koji ne premaša vrednost modula funkcije $f(x, y)$ dok x i y ostaju u tim krugovima, onda važi ova teorema, kao rezultat svega što je napred izloženo:

Onaj integral y *jednačine* (90), *koji za* $x = 0$ *dobija vrednost* $y = 0$ *uvek se može razviti u Maclaurinov red*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

čiji se opšti koeficijenat a_n *izračunava pomoću obrasca*

$$a_n = \frac{1}{n!} [f_{n-1}], \tag{91}$$

a gde je $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *niz funkcija koje se jedna iz druge izračunavaju pomoću obrasca*

$$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + f \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \quad f_0 = f(x, y). \tag{92}$$

Dobijeni red će nasigurno biti konvergentan za sve vrednosti x što leže u krugu C opisanom u ravni x oko tačke $x=0$ kao centra sa poluprečnikom

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{93}$$

Metoda kojom smo došli do ove osnovne teoreme, je *Cauchyeva komparativna metoda* koja se sastoji u tome da se dobijeni red za integral y uporedi sa redom što daje integral v druge jedne diferencijalne jednačine prvoga reda, za koji se zna jedan krug u kome će red što izražava v konvergirati. Teoremu je prvi dokazao Cauchy, ali su je Briot i Bouquet učinili tačnijom, potpunijom i prožirili joj oblast upotrebljivosti.

S obzirom na napred navedenu smenu, kojom se tačke x_0 i y_0 u svojim ravnima premeštaju u koordinatni početak, teoremi se može dati ovaj oblik:

Neka je funkcija $f(x,y)$ holomorfna u blizini vrednosti $x=x_0$, $y=y_0$, kao i za sve vrednosti x u krugu c opisanom u ravni x oko tačke $x=x_0$, i za sve vrednosti y u krugu c' opisanom u ravni y oko tačke $y=y_0$; neka su r i r' poluprečnici tih krugova, a M kakav realan pozitivan broj koji ne premaša vrednost modula funkcije $f(x,y)$ dok x i y ostaju u tim krugovima. Tada:

Onaj integral y jednačine (90), *koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$ može se razviti u Taylorov red*

$$y=A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\cdots$$

Opšti koeficijenat A_n reda izračunava se pomoću obrasca (91), *ali gde $[f_{n-1}]$ označuje broj koji se dobija kad se u funkciji f_{n-1} smeni $x=x_0$, $y=y_0$. Niz funkcija $f_1, f_2, f_3, \ldots$ opet se određuje pomoću obrasca* (92).

Dobijeni red će nasigurno biti konvergentan za sve vrednosti x što leže u krugu C opisanom u ravni x oko tačke $x=x_0$ kao centra, sa poluprečnikom (93).

Uostalom, napred je pokazano kako se slučaj $x=x_0$, $y=y_0$ uvek svodi na slučaj $x=0$, $y=0$, tako da ovaj drugi oblik teoreme nije opštiji od prvoga.

Primetimo da pošto je

$$\frac{r'}{2Mr}>0,$$

to je

$$0<e^{-\frac{r'}{2Mr}}<1$$

i prema tome

$$0<1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}<1$$

pa dakle

$$R<r.$$

Krug C u kome će konvergirati integralni red y, sadržan je, dakle, u krugu c u kome je funkcija $f(x,y)$, smatrana kao funkcija promenljive x holomorfna.

8.

PRAKTIČNA PRIMENA OSNOVNE TEOREME

Briot-Bouquetova osnovna teorema potpuno rešava problem integracije diferencijalne jednačine prvog reda (90) pomoću Maclaurinovih i Taylorovih redova. Praktična primena teoreme na pojedine date slučajeve zahteva da se odrede poluprečnici r i r' krugova c i c', kao i broj M, za datu funkciju $f(x, y)$.

A) Odredba poluprečnika r *i* r'

Pre svega ima slučajeva kad se može za r i r' uzeti jedan par ma kolikih pozitivnih brojeva; to su slučajevi kad je $f(x, y)$ cela funkcija promenljivih x i y, npr. kakav polinom po x i y.

Kad nije takav slučaj, onda su jedan od dva poluprečnika, ili oba, ograničeni. Holomorfnost funkcije $f(x, y)$ uopšte prestaje za vrednosti x i y koje zadovoljavaju izvesnu jednačinu $\varphi(x, y)=0$. Tako npr. funkcija f prestaje biti holomorfna za takve vrednosti x, y, kad ona ima koji od oblika

$$\frac{P(x, y)}{\varphi(x, y)}, \quad P(x, y)\sqrt[3]{\varphi(x, y)}, \quad \frac{P(x, y)}{\sqrt{\varphi(x, y)}}, \quad P(x, y) \log \varphi(x, y).$$

U slučaju kad φ sadrži samo x, holomorfnost može prestati samo za one vrednosti x za koje je $\varphi(x)=0$; kad φ sadrži samo y, ona prestaje samo za one vrednosti y za koje je $\varphi(y)=0$. Tada se u prvom slučaju može za r uzeti moduo ma koje vrednosti x bliže tački $x=0$ nego ma koji koren jednačine $\varphi(x)=0$, jer kad krug c ima poluprečnik manji od toga modula, taj krug ne sadrži u svojoj unutrašnjosti nikakav singularitet funkcije f; za poluprečnik r' može se uzeti kakav se hoće pozitivan broj. U drugome slučaju može se za r' uzeti moduo ma koje vrednosti y bliže tački $y=0$ nego ma koji koren jednačine $\varphi(y)=0$, iz istog razloga kao u prvom slučaju; za r se može uzeti ma kakav pozitivan broj. Naposletku, kad se jednačina $\varphi(x, y)=0$ raspada na dve jednačine $\varphi_1(x)=0$ i $\varphi_2(y)=0$, uzeće se za r moduo ma koje vrednosti x bliže tački $x=0$ nego ma koji koren jednačine $\varphi_1=0$, a za r' moduo ma koje vrednosti y bliže tački $y=0$ nego ma koji koren jednačine $\varphi_2=0$.

Ali je problem komplikovaniji kad se funkcija φ ne izražava u kome od oblika

$$\varphi(x,y)=\varphi(x), \quad \varphi(x,y)=\varphi(y), \quad \varphi(x,y)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(y),$$

i uopšte kad jednačina $\varphi(x,y)=0$ nema korena $x=\alpha$ ili $y=\beta$ gde su α i β konstante. U takvim se slučajevima može postupiti ovako:

Pošto je funkcija $f(x,y)$ holomorfna za $x=0$, $y=0$, vrednost $\varphi(0,0)$ je različna od nule. U velikom broju slučajeva mogućno je naći takvu jednu realnu funkciju λ dvaju promenljivih količina da, ako se stavi da je

$$|x|=\varrho, \qquad |y|=\varrho',$$

bude za sve vrednosti x i y

$$|\varphi(x,y)|>\lambda(\varrho,\varrho') \qquad \lambda(0,0)>0.$$

Pri traženju takve jedne funkcije λ često pomaže pravilo po kome je moduo zbira manji od zbira modula, a veći od razlike modula, tj.

$$|u|-|v|\leqslant|u+v|\leqslant|u|+|v|.$$

Tako npr. kad je

$$\varphi(x,y)=1+axy$$

biće

$$|\varphi(x,y)|>1-|axy|=1-\alpha\varrho\varrho', \qquad \alpha=|a|.$$

Kad je

$$\varphi(x,y)=1+ax^m y^n(b+cx^p)$$

biće

$$|\varphi(x,y)|>1-|ax^m y^n|\cdot|b+cx^p|,$$

pa pošto je

$$|b+cx^p|<|b|+|c|\varrho^p,$$

biće

$$|\varphi(x,y)|>1-\alpha\varrho^m\varrho'^n(\beta+\gamma\varrho^p)$$

gde je

$$\alpha=|a|, \qquad \beta=|b|, \qquad \gamma=|c|.$$

Kad je u datome slučaju nađena takva jedna funkcija $\lambda(\varrho,\varrho')$, onda postoji ovo pravilo:

Ako se realni pozitivni brojevi ϱ i ϱ' smatraju kao koordinate x i y jedne pokretne tačke $M(x,y)$ u ravni xOy pa se konstruiše realna kriva

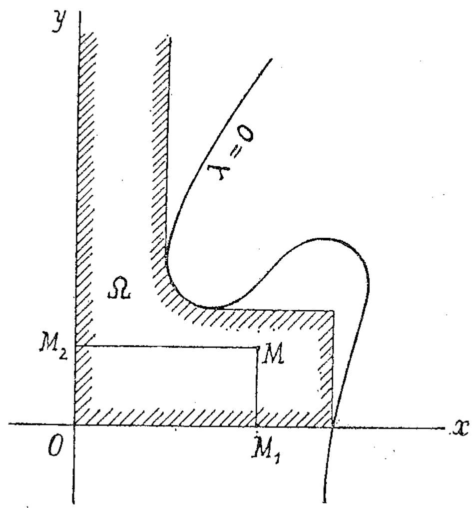
$$\lambda(x,y)=0 \tag{94}$$

i uoči oblast Ω (vidi sliku) *koja se sastoji iz svih mogućih pravougaonika $OM_1\,MM_2$ sa vrhovima u*

$$O(0,0), \quad M_1(x,0), \quad M(x,y), \quad M_2(0,y),$$

što se nalaze celi u pozitivnoj oblasti krive (94), *tada se za r i r' mogu uzeti koordinate jedne ma koje tačke u toj oblasti Ω.*

Da bi se to dokazalo, treba podsetiti da, kao što se zna iz analitičke geometrije, kriva (94) deli ravan xOy na *pozitivnu i negativnu oblast* te krive, tj. takve dve oblasti, rastavljene samom tom krivom, da za sve tačke $M(x, y)$ u jednoj od njih funkcija λ ostaje neprestano pozitivna, a u drugoj neprestano



negativna. Znak funkcije λ, onakav kakav je za jednu proizvoljno izabranu tačku jedne takve oblasti, ostaje nepromenjen za sve druge tačke M u istoj oblasti. Kako je $\lambda(0,0)>0$, pozitivna oblast je uvek ona u kojoj je koordinatni početak.

Na primer prava linija

$$\lambda(x, y)=y+2x+3=0$$

deli ravan xOy na dve oblasti: jedna, u kojoj je koordinatni početak, je pozitivna, jer u njemu funkcija λ ima vrednost $+3$; druga, u kojoj je npr. tačka $x=-2$, $y=-5$, je negativna, jer u ovoj tački funkcija ima vrednost -6.

Tako isto krug

$$\lambda(x, y)=x^2+y^2-4=0$$

deli ravan na unutrašnju i spoljašnu kružnu oblast; za tačku $M(0, 0)$ funkcija λ ima vrednost -4, a npr. za tačku $M(2, 3)$ ona ima vrednost $+9$. Unutrašnja oblast je negativna, a spoljašnja pozitivna.

Kad je, dakle, konstruisana kriva (94) i određena njena pozitivna oblast, koja će sadržati i koordinatni početak, za sve vreme dok se tačka $M(x, y)$ pomera u toj oblasti, a u kvadrantu pozitivnih koordinata, funkcija λ ne menja svoj pozitivni znak, pa će, dakle, za koordinate $x=r$, $y=r'$ jedne ma koje tačke

$M(x, y)$ u istoj oblasti ostati pozitivna. To znači da će za sve tačke M postojati nejednačina

$$|\varphi(x, y)| > \lambda(r, r') > 0.$$

Ako se šta više tačka M pomeri u oblasti Ω, za vreme ma kakvog pomeranja od $M(0, 0)$ do $M(r, r')$, a dok $|x| = \varrho$ raste od nule do r, a $|y| = \varrho'$ od nule do r', funkcija $\lambda(x, y)$ ne može biti jednaka nuli. A to pokazuje da, dok se x kreće u svom krugu c poluprečnika r i y u svome krugu c' poluprečnika r', ma kako, funkcija $f(x, y)$ neprestano ostaje holomorfna, čime je gornje tvrđenje dokazano.

1. primer: neka je data jednačina oblika

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bxy}$$

gde je $p(x, y)$ polinom po x, y, a a i b dve pozitivne konstante. Holomorfnost funkcije na desnoj strani jednačine prestaje kad je

$$a + bxy = 0.$$

Pošto je

$$|a + bxy| \geqslant a - b|x| \cdot |y| = a - b\varrho\varrho'$$

može se za r i r' uzeti apscisa i ordinata jedne ma koje tačke $M(x, y)$ u negativnoj oblasti ravnostrane hiperbole

$$xy - \frac{a}{b} = 0$$

i to u kvadrantu pozitivnih koordinata, pošto se Ω podudara sa tom oblasti.

2. primer: neka je data jednačina oblika

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bx^2 + cy^2},$$

gde su a, b, c, pozitivne konstante. Holomorfnost desne stane prestaje kad je

$$a + bx^2 + cy^2 = 0,$$

a pošto je

$$|a + bx^2 + cy^2| \geqslant a - |bx^2 + cy^2|,$$

a

$$|bx^2 + cy^2| \leqslant |bx^2| + |cy^2| = b\varrho^2 + c\varrho'^2,$$

to je

$$|a + bx^2 + cy^2| \geqslant a - b\varrho^2 - c\varrho'^2.$$

Za r i r' može se, dakle, uzeti apscisa i ordinata jedne ma koje tačke $M(x, y)$ u unutrašnjosti kruga

$$bx^2 + cy^2 - a = 0$$

opisanog oko koordinatnog početka, a u kvadrantu pozitivnih koordinata, pošto se opet Ω podudara sa tim kružnim kvadrantom.

B) Odredba broja M

Očevidno je da broj M, koji treba da je takav da ga moduo funkcije $f(x, y)$ ne premašuje dok x ostaje u svome krugu c poluprečnika r, a y u svome krugu c' poluprečnika r', zavisi od vrednosti r i r'. Problem da se tačno nađe ta zavisnost, nerešljiv je, izuzimajući neke vrlo proste slučajeve. Ali pošto ni sam uslov, koji određuje M, nije precizan, jer se traži samo to da taj broj ne bude manji od pomenutoga modula funkcije $f(x, y)$, to je posao uprošćen i zadatak odredbe broja M u nepreglednom broju slučajeva rešljiv.

Pre svega, u mnogim slučajevima pomaže pravilo da je moduo zbira manji od zbira modula, a veći od razlike modula. Tako npr.

1° za jednačinu

$$y' = \sqrt{1-xy}$$

biće

$$|1-xy| < 1+rr', \qquad r = |x|, \qquad r' = |y|$$

pa se može uzeti

$$M = \sqrt{1+rr'};$$

2° za jednačinu

$$y' = \sqrt{x^2-y^2}$$

prema

$$|x^2-y^2| < r^2+r'^2$$

može se uzeti

$$M = \sqrt{r^2+r'^2};$$

3° za jednačinu

$$y'^3 - x^2 y^5 + 1 = 0$$

može se uzeti

$$M = \sqrt[3]{1+r^2 r'^5}.$$

Međutim postoji za odredbu broja M i jedna opšta *metoda majoriranja*, koja se sastoji u ovome:

Kad je data jednačina

$$y' = f(x, y)$$

gde je $f(x, y)$ funkcija holomorfna u blizini vrednosti $x=0$, $y=0$, ta se funkcija može razviti u dvostruki Maclaurinov red

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n. \tag{95}$$

Za funkciju $f(x, y)$ kaže se da je *majorirana* jednom funkcijom $\lambda(r, r')$, izraženom dvostrukim redom

$$\lambda(r, r') = \sum_m \sum_n B_{mn} r^m r'^n \tag{96}$$

gde je

$$r = |x|, \qquad r' = |y|,$$

ako su koeficijenti B_{mn} reda (96) svi realni i pozitivni a pri tom je za sve vrednosti indeksa n

$$|A_{mn}| \leqslant B_{mn}. \tag{97}$$

Pošto je

$$|f(x,y)|<\sum_m\sum_n|A_{mn}|\cdot|x|^m\cdot|y|^n,$$

a

$$|A_{mn}|\cdot|x|^m\cdot|y|^n<B_{mn}\,r^m\,r'^n$$

biće za sve vrednosti x u krugu c poluprečnika r, i za sve vrednosti y u krugu c' poluprečnika r' (sa centrima u koordinatnom početku)

(98) $$|f(x,y)|<\lambda(r,r').$$

Zadatak odredbe broja M sveden je dakle na

1^0 traženje realnih pozitivnih brojeva B_{mn} za koje će postojati nejednačina (97)

2^0 na sumiranje pomoću njih formiranog dvostrukog reda (96).

A kad je to izvršeno može se uzeti

$$M=\lambda(r,r').$$

U pojedinim opštim slučajevima broj M se izražava neposredno pomoću same funkcije $f(x,y)$. Tako će biti kad su svi koeficijenti A_{mn} realni, a pored toga

1^0 ili su svi oni pozitivni; tada se može uzeti

$$B_{mn}=A_{mn}$$

pa dakle

$$\lambda(r,r')=\sum_m\sum_n A_{mn}\,r^m\,r'^n=f(r,r')$$

tako da će biti

$$M=f(r,r');$$

2^0 ili su koeficijenti parnog ranga m pozitivni, a svi neparnog ranga m negativni; tada se može uzeti

$$M=f(-r,r');$$

3^0 ili su svi koeficijenti parnog ranga n pozitivni, a svi neparnog ranga n negativni; tada se može uzeti

$$M=f(r,-r').$$

Tako isto, u pojedinim opštim slučajevima može se majoriranje funkcije $f(x,y)$ svesti na majoriranje prostijih funkcija. Takav je npr. slučaj kad je funkcija $f(x,y)$ oblika

$$f=\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3+\cdots$$

gde su φ_k i ψ_k funkcije promenljivih x i y.

Pošto je tada

$$|f|<|\varphi_1|\,|\psi_1|+|\varphi_2|\,|\psi_2|+\cdots$$

to kad se znaju majorirati funkcije

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\quad \ldots\qquad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3,\quad \ldots;$$

imaće se majorirana funkcija $f(x,y)$, pa će se time, na gornji način, odrediti i broj M.

Što se tiče zadatka sumiranja dvostrukog reda (96) kojim se izvršuje majoriranje funkcije $f(x, y)$, a time i odredba broja M, on će biti predmet odeljka 10, ove knjige.

Ovde će biti navedeno nekoliko primera, u vezi sa tim odeljkom 10.

1. primer: zna se da dvostruki red

$$\sum_m \sum_n \frac{1}{m!\; n!} r^m r'^n$$

ima za zbir funkciju

$$\lambda(r, r') = e^{r+r'};$$

prema tome za jednačinu

$$y' = Ae^x e^y \qquad (A = \text{const} > 0),$$

može se uzeti

$$M = A_e^{r+r'}.$$

2. primer: zna se da red

$$\sum_m \sum_n (m+1)(n+1) r^m r'^n$$

ima za zbir funkciju

$$\lambda(r, r') = \frac{1}{(1-r)^2 (1-r')^2};$$

prema tome za jednačinu

$$y' = \frac{A}{(1-x)^2 (1-y)^2} \qquad (A > 0)$$

može se uzeti

$$M = \frac{A}{(1-r)^2 (1-r')^2}.$$

3. primer: zna se da red

$$\sum_m \sum_n \frac{(m+n)!}{m!\, n!\, a^m b^n} r^m r'^n$$

ima za zbir funkciju

$$\lambda(r, r') = \frac{1}{1 - \frac{r}{a} - \frac{r'}{b}};$$

prema tome za jednačinu

$$y' = \frac{A}{1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$$

(gde su A, a i b pozitivne konstante) može se uzeti

$$M = \frac{A}{1 - \frac{r}{a} - \frac{r'}{b}}.$$

9.

SPECIJALNIJE KOMPARATIVNE JEDNAČINE U PROBLEMU INTEGRACIJE

Kao što se vidi iz napred izloženoga, određivanje kruga C u kome će dobijeni integralni red

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

date diferencijalne jednačine $y' = f(x, y)$ nasigurno biti konvergentan, vrši se komparativnom metodom upoređujući taj red sa redom što daje integral

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

druge jedne diferencijalne jednačine

(99) $$v' = \varphi(x, v) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n$$

koja ispunjava uslove:

1° da su svi koeficijenti B_{mn} realni i pozitivni;

2° da je za sve vrednosti indeksa m i n

$$|A_{mn}| \leqslant B_{mn};$$

3° da se može odrediti poluprečnik R' kruga C' u kome će integral v biti holomorfna funkcija promenljive x.

Kad je za datu diferencijalnu jednačinu nađena takva jedna jednačina (99), može se tvrditi *da će integralni red prve jednačine biti konvergentan za sve vrednosti x, u krugu opisanom oko $x = 0$, kao centra, sa poluprečnikom R koji je bar toliko veliki koliki je poluprečnik R' kruga C'.*

Jednačina (99) je tada *komparativna jednačina* za datu diferencijalnu jednačinu

(100) $$y' = f(x, y).$$

Komparativnih jednačina ima od dve vrste:

1° jednih što važe za sve jednačine (100) u kojima je funkcija $f(x, y)$ holomorfna u blizini vrednosti $x=0$, $y=0$; to su *opšte komparativne jednačine.*

2° drugih što važe za jednačine (100) za koje je potrebno činiti za $f(x, y)$ kakve naročite pretpostavke; to su *specijalnije komparativne jednačine.*

Sve ovo što je napred izloženo za određivanje kruga konvergencije C integralnog reda y, osnovano je na upotrebi Cauchyeve komparativne jednačine koja je oblika

$$v' = \frac{M}{(1-ax)(1-bv)}$$

gde su a i b dve realne pozitivne konstante.

To, međutim, nije jedina mogućna komparativna jednačina i poznato je više raznih drugih diferencijalnih jednačina koje igraju istu komparativnu ulogu kao i Cauchyeva jednačina. Takve bi npr. bile Weierstrassova jednačina

$$v' = \frac{M}{1-ax-bv}$$

ili Stäckelova jednačina

$$v' = \frac{M}{(1-ax)^2(1-bv)}$$

o čijoj upotrebi za određivanje kruga konvergencije integralnog reda y ovde neće biti govora, pošto je za cilj koji se ima pred očima bila dovoljna Cauchyeva jednačina.

Specijalnih komparativnih jednačina ima mnoštvo, ali je njihova oblast upotrebljivosti mnogo uža. Za mogućnost njihove upotrebe, u pojedinim datim slučajevima, vezane su određene pretpostavke o funkciji $f(x, y)$ što figuriše u datoj diferencijalnoj jednačini.

Najčešće od tih pretpostavki su one *o načinu rašćenja ili opadanja koeficijenata A_{mn}* dvostrukog reda

$$y' = f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn}\, x^m y^n, \tag{101}$$

kad indeksi m i n beskrajno rastu. Kako se podaci o tome načinu rašćenja ili opadanja mogu iskoristiti u problemu o kome je reč, videće se npr. iz ovih pravila:

Neka su $\lambda\,(n)$ i $\mu\,(n)$ dve realne funkcije promenljivog celoga pozitivnog broja n i takve da izrazi

$$\sqrt[n]{\lambda\,(n)}, \qquad \sqrt[n]{\mu\,(n)}, \qquad \frac{|\,A_{mn}}{\lambda\,(m)\cdot\mu\,(n)}$$

ostaju konačni pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n. *Ako se tada stavi da je*

(102)
$$\sum \lambda(n)\, x^n = X(x),$$
$$\sum \mu(n)\, v^n = V(v),$$

diferencijalna jednačina

(103)
$$v' = \varphi(x, v) = AXV,$$

gde je A podesno izabran realan pozitivan broj, igraće ulogu komparativne jednačine za datu jednačinu (101).

Jer, pod postavljenim uslovima, oba reda (102) biće konvergentna u izvesnim krugovima, opisanim oko početka, sa poluprečnicima različnim od nule. Sa druge strane, uslov da izraz

(104)
$$\frac{|A_{mn}|}{\lambda(m)\cdot\mu(n)}$$

ne raste beskrajno pri rašćenju indeksa m i n, pokazuje da postoji jedan realan i pozitivan broj A takav da za sve vrednosti tih indeksa izraz (104) ima vrednost neprestano manju od A. Tada je, ako se stavi da je

$$A\,\lambda(m)\,\mu(n) = B_{mn}$$

za sve vrednosti indeksa

$$|A_{mn}| < B_{mn}.$$

Sa druge strane, integral v jednačine (103), koji za $x=0$ dobija vrednost $v=0$, je izražen jednačinom

(105)
$$\int_0^v \frac{dv}{V} = A\int_0^x X\,dx$$

i u svakome datom slučaju može se odrediti krug C' opisan oko početka $x=0$ u kome će funkcija v, izražena obrascem (105), biti holomorfna. Jednačina (103) ispunjava, dakle, sve uslove koji treba da su ispunjeni da bi bila komparativna jednačina za jednačinu (101). *Poluprečnik R kruga konvergencije integralnog reda y jednačine* (101) *biće, dakle, bar toliko veliki, koliki je poluprečnik kruga C'.*

A iz toga se izvode npr. ova pravila:

1. pravilo: *Kad god izraz*

(106)
$$m!\,n!\,|A_{mn}|$$

ostaje konačan pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n, za poluprečnik R može se uzeti vrednost

107
$$R = \log\left(1 + \frac{1}{A}\right),$$

gde A označuje jednu gornju granicu izraza (106).

Jer komparativna jednačina,

$$v' = \varphi(x, v) = A \sum \frac{x^m v^n}{m!\, n!} = A e^{x+v},$$

ima integral v, što za $x = 0$ dobija vrednost $v = 0$, izraz

$$v = -\log[1 - A(e^x - 1)]$$

koji ima vrednost (107) kao svoj od početka $x = 0$ najmanje udaljeni singularitet.

2. pravilo: *Kad god izraz*

$$\frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)} \tag{108}$$

ostaje konačan pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n, za poluprečnik R može se uzeti vrednost

$$R = \frac{1}{1 + 3A}, \tag{109}$$

gde A označava jednu gornju granicu izraza (108).

Jer komparativna jednačina

$$v' = \varphi(x, y) = A \Sigma (m+1)(n+1) x^m v^n = \frac{A}{(1-x)^2 (1-v)^2}$$

ima za integral v, koji za $x = 0$ dobija vrednost $v = 0$, izraz

$$v = 1 - \sqrt[3]{\frac{1 - (1 + 3A)x}{1 - x}}$$

a ovaj ima vrednost (106) kao svoj singularitet najbliži početku.

3. pravilo: *Kad god su koeficijenti A_{mn} svi realni i pozitivni, a izraz*

$$m!\, n!\, A_{mn} \tag{110}$$

monotono raste pri rašćenju indeksa m i n, za komparativnu jednačinu date diferencijalne jednačine

$$y' = f(x, y) \tag{111}$$

može se uzeti jednačina

$$v' = \varphi(x, v) \tag{112}$$

gde je $\varphi(x, v)$ ma koji parcijalni izvod $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\, \partial v^q}$ funkcije $f(x, v)$.

Jer, pošto izraz (110) monotono raste pri rašćenju indeksa, biće za svako m, n, p

$$m!\, n!\, A_{mn} < (m+p)!\, (n+q)!\, A_{m+p,\, n+q}$$

pa dakle

$$A_{mn} < B_{mn}$$

gde je

$$B_{mn} = \frac{(m+p)!\, (n+q)!}{m!\, n!} A_{m+p,\, n+q},$$

tako da će jednačina

$$v' = \varphi(x, v) = \sum \sum B_{mn}\, x^m\, v^n$$

igrati ulogu komparativne jednačine za jednačinu (111) kad god integral v zadovoljava gore navedeni uslov. Međutim je ovde

$$\sum \sum B_{mn}\, x^m\, v^n = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\, \partial y^q} f(x, v)$$

a ta jednačina nasigurno ima svoj integral v, što za $x=0$ dobija vrednost $v=0$, kao holomorfnu funkciju promenljive x u blizini vrednosti $x=0$.

Primetićemo da iz gornjeg uslova vezanog za izraz (110) sleduje da koeficijenat A_{mn} ne opada nikad brže nego izraz

$$\frac{1}{m!\, n!}$$

u toku postupnog rašćenja indeksa m i n.

Pravilo dovodi do zaključka od interesa kad se primeni npr. na jednačinu

$$y' = p(x, y) + \psi(x, y)$$

gde je p polinom po x i y, a ψ proizvoljna funkcija, takva da desna strana jednačine zadovoljava uslov vezan za izraz (110).

10.

SUMIRANJE DVOSTRUKIH REDOVA U PROBLEMU INTEGRACIJE

Kao što je pokazano, i formiranje komparativnih jednačina, i odredba broja M za Cauchyevu komparativnu jednačinu zahteva sumiranje dvostrukih Maclaurinovih redova

$$z = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n. \tag{113}$$

Problem sumiranja nema opšteg rešenja, ali se on može rešiti u velikome broju opštijih slučajeva i to baš u onima koji su od naročitog interesa u problemu integracije. Najvažniji od takvih slučajeva sadržani su u stavovima koji sleduju.

1. stav: *Da bi funkcija z definisana redom* (113) *bila izražljiva kao zbir partikularnih integrala parcijalne diferencijalne jednačine*

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{114}$$

potrebno je i dovoljno da izraz A_{mn}, pošto se u njemu smeni m sa x, a n sa y, bude zbir partikularnih integrala jednačine (114).

To sleduje iz toga što jednačina (114) ima za opšti integral

$$z = XY, \tag{115}$$

gde je X proizvoljna funkcija promenljive x, a Y proizvoljna funkcija promenljive y. Jer je iz (115)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' Y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = X' Y'$$

i jednačina (114) je zadovoljena za proizvoljne funkcije X i Y.

Ako je, dakle, funkcija (113) jednaka zbiru partikularnih integrala jednačine (114), ona je oblika

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \cdots \tag{116}$$

gde je X_k funkcija promenljive x, Y_k funkcija promenljive y.

Onaj deo dvostrukog reda (113) što proizlazi od člana $X_k Y_k$ oblika je

$$\left(\sum a_m x^m\right) \left(\sum b_n y^n\right)$$

i njegov koeficijenat produkta $x^m y^n$ izražava se kao zbir članova oblika $\alpha_m \beta_n$, gde se α_m menja samo sa indeksom m, a β_n samo sa indeksom n. Prema tome, i sam koeficijenat A_{mn} izražava se kao zbir članova oblika $\alpha_m \beta_n$ pa, dakle kad se u njemu smeni m sa x, a n sa y, on će postati linearna i homogena kombinacija integrala jednačine (114).

Obrnuto, kad god bude nastupio ovaj poslednji slučaj, z je zbir članova oblika

$$\sum\sum \alpha_m \beta_n x^m y^n = \left(\sum \alpha_m x^m\right) \left(\sum \beta_n y^n\right) = X_k Y_k$$

pa je, dakle, funkcija (113) zbir partikularnih integrala jednačine (114). Uslov, iskazan gornjim stavom, u isto je vreme i potreban i dovoljan.

Iz svega toga izlazi i ovaj, sam po sebi očevidan zaključak:

2. stav: *Kad god je funkcija* (113) *izražljiva kao zbir partikularnih integrala jednačine* (114), *ona je izražljiva kao homogena kvadratična funkcija dveju ili više funkcija što zavise samo od po jedne promenljive x ili y, tako da je ona oblika* (116).

A iz toga se dobija i ovaj zaključak:

Da bi funkcija (113) i sama bila integral jednačine (114), potrebno je i dovoljno da to bude slučaj i sa funkcijom A_{xy}, tj. da ona bude produkat dveju funkcija, od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y. Takav će isti oblik tada imati i funkcija z.

I

Jedna prostrana klasa redova (113), koji ispunjavaju uslove ovih stavova, jeste ona za koju je koeficijenat A_{mn} *racionalna* funkcija:

1° ograničenog broja izraza

$$a_m, a_m', a_m'', \ldots \tag{117}$$

što se menjaju samo sa indeksom m;

2° ograničenog broja izraza

(118) $$b_n, b_n', b_n'', \ldots$$

što se menjaju samo sa indeksom n.

Takva racionalna funkcija će ispunjavati uslove gornjih stavova kad kod su joj polovi *stalni*, tj. nezavisni od indeksa m i n, ili kad polova i nema, u kome se slučaju koeficijenat A_{mn} svodi na polinom po izrazima (117) i (118).

U ovom poslednjem slučaju A_{mn} je zbir ograničenog broja članova oblika

(119) $$a_m^p a'^{p_1}_m a''^{p_2}_m \ldots b_n^q b'^{q_1}_n b''^{q_2}_n \ldots,$$

tj. oblika $\alpha_m \beta_n$, pa je, dakle, funkcija A_{xy} zbir partikularnih integrala jednačine (114). Funkcija z je oblika (116), gde je broj funkcija X_k i Y_k ograničen.

U prvom slučaju, tj. kad racionalna funkcija ima polova, a ovi su stalni, među izrazima (117) nalaziće se ograničen broj izraza oblika

$$\frac{1}{[a_m^{(k)} - c_k]^{p_k}},$$

a među izrazima (118) ograničen broj izraza oblika

$$\frac{1}{[b_n^{(k)} - d_k]^{q_k}},$$

gde su c_k i d_k stalni od m i n nezavisni brojevi, a p_k i q_k celi pozitivni stalni brojevi. Funkcija z biće opet oblika (116), tj. biće zbir ograničenog broja partikularnih integrala jednačine (114).

Eliminacijom funkcija

(120) $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

(121) $$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

i njihovih uzastopnih izvoda po x i y iz niza jednačina koje se dobijaju uzastopnim parcijalnim diferencijaljenjima izraza (116) po x i y, dobija se jedna parcijalna jednačina koja ne sadrži ni jednu od funkcija (120) i (121) ni njihove izvode. Ta je jednačina oblika

(122) $$P(z, p, q, r, s, t, \ldots) = 0,$$

gde je P polinom po funkciji z i njenim parcijalnim izvodima $p, q, r\ s, t, \ldots$ po x i y. Kad se red jednoga parcijalnog izvoda smatra kao stepen, taj je polinom homogen; njegovi koeficijenti su celi brojevi.

U slučaju npr. kad je

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2,$$

tj. kad se koeficijenat A_{mn} izražava kao zbir od dva člana oblika $\alpha_m \beta_n$, jednačina (122) je u svome razvijenom obliku,

$$\left(z\frac{\partial z^2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \tag{123}$$

$$-z\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=0.$$

A za opšti slučaj važi ovaj

3. stav: *Kad god je A_{mn} oblika pretpostavljenog u ovome paragrafu, funkcija z je integral jedne parcijalne diferencijalne jednačine konačnog reda oblika* (123) *koji zavisi samo od broja članova α_m, β_n, na čiji se zbir svodi A_{mn}, a ne zavisi od oblika izraza α_m i β_n.*

Jedna ista parcijalna jednačina (123) važi za sve dvostruke potencijalne redove z za koje se koeficijenat A_{mn} izražava kao zbir od jednoga istog broja članova $\alpha_m \beta_n$. Ako je ovaj broj p, jednačina je $2p$-oga reda.

II

Uzmimo kao primer slučaj kad je

$$A_{mn} = Q_{mn}\, A_m\, B_n. \tag{124}$$

gde su A_m i B_n članovi ma kakvih beskrajnih nizova

$$\begin{gathered} A_0, A_1, A_2, \ldots, \\ B_0, B_1, B_2, \ldots, \end{gathered} \tag{125}$$

a Q_{mn} polinom po jednome ograničenom broju članova

$$\begin{gathered} m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \ldots \\ n, \mu_1^n, \mu_2^n, \mu_3^n, \ldots \end{gathered} \tag{126}$$

gde su λ_k i μ_k brojevi nezavisni od m i n, kao i koeficijenti polinoma Q_{mn}.

Koeficijenat A_{mn} i tada je jednak zbiru ograničenog broja sabiraka oblika

$$C m^p n^q M^m N^n A_m B_n,$$

gde su C, M, N konstante nezavisne od m i n, a p i q celi pozitivni brojevi takođe nezavisni od m i n. Funkcija A_{xy} je, dakle, zbir partikularnih integrala jednačine (114). Prema tome, funkcija z, definisana dvostrukim redom

$$z = \Sigma\,\Sigma\, A_{mn}\, x^m y^n$$

jednaka je zbiru ograničenog broja članova oblika $X_p Y_q$, gde je

$$X_p = A \Sigma m^p A_m (Mx)^m,$$

$$Y_q = B \Sigma n^q B_n (Ny)^n.$$

i gde su A i B dve konstante.

Uočimo tada dve funkcije

$$U_p(t) = \Sigma m^p A_m t^n,$$
$$V_q(t) = \Sigma n^q B_n t^n, \tag{127}$$

pa će biti

$$X_p = A U_p(Mx),$$
$$Y_q = B V_q(Ny). \tag{128}$$

Međutim, funkcije U_p i V_q određene su rekursivnim obrascima

$$U_k(t) = t \frac{d}{dt} U_{k-1}(t),$$
$$V_k(t) = t \frac{d}{dt} V_{k-1}(t), \tag{129}$$

sa početnim vrednostima

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m,$$
$$V_0(t) = \Sigma B_n t^n. \tag{130}$$

Pomoću tako određenih funkcija U_k i V_k funkcija z se izražava kao zbir ograničenog broja članova oblika

$$C U_p(Mx) \cdot V_q(Ny). \tag{131}$$

Ako se singulariteti funkcije $U_0(t)$ označe sa

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \tag{132}$$

a singulariteti funkcije $V_0(t)$ sa

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \tag{133}$$

singulariteti funkcije z će biti

$$x = \frac{\xi_0}{M}, \quad x = \frac{\xi_1}{M}, \quad x = \frac{\xi_2}{M}, \ldots \tag{134}$$

$$y = \frac{\eta_0}{N}, \quad y = \frac{\eta_1}{N}, \quad y = \frac{\eta_2}{N}, \ldots \tag{135}$$

Funkcija z biće holomorfna u krugu poluprečnika

$$R=\frac{\xi}{M},$$

u ravni promenljive x i u krugu poluprečnika

$$R'=\frac{\eta}{M},$$

u ravni promenljive y, gde ξ i η označuju najmanju među vrednostima (132) i (133).

1. primer: neka je

$$A_m=1, \qquad B_n=1,$$

a znak $\Sigma\Sigma$ se rasprostire na vrednosti

(136) $$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$$

Tada je

$$U_0=V_0=\frac{1}{1-t}, \qquad U_1=V_1=\frac{t}{(1-t)^2},$$

$$U_2=V_2=\frac{1+t}{(1-t)^3}, \qquad U_3=V_3=\frac{4+2t}{(1-t)^4},\dots$$

Sve su funkcije $U_k(t)$ i $V_k(t)$ racionalne, *pa će funkcija* z *biti racionalna funkcija promenljivih* x *i* y, *koja će imati za polove vrednosti*

$$x=\frac{1}{M}, \qquad y=\frac{1}{N}.$$

Tako se npr. nalazi da je

$$z=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(am+bn+c)\,x^m y^n$$

$$=a\,U_1(x)\cdot V_0(y)+b\,U_0(x)\cdot V_1(y)+c\,U_0(x)\cdot V_0(y),$$

pa pošto je

$$U_0(t)=V_0(t)=\sum_{m=0}^{\infty} t^m=\frac{1}{1-t},$$

$$U_1(t)=V_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty} mt^m=\frac{t}{(1-t)^2},$$

to je

$$z=\frac{ax}{(1-x)^2(1-y)}+\frac{by}{(1-x)(1-y)^2}+\frac{c}{(1-x)(1-y)}.$$

Tako se isto nalazi da je

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am + bn + c)^2 x^m y^n =$$

$$= a^2 U_2(x) \cdot V_0(y) + b^2 U_0(x) \cdot V_2(y) + c^2 U_0(x) \cdot V_0(y)$$

$$+ 2\, ab \cdot U_1(x) \cdot V_1(y) + 2\, ac\, U_1(x) \cdot V_0(y) + 2\, bc\, U_0(x) \cdot V_1(y),$$

pa pošto

$$U_0, V_0, U_1, V_1$$

imaju iste vrednosti kao maločas, a

$$U_2(t) = V_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 t^m = \frac{1+t}{(1-t)^3},$$

to, kad se sve svede, dobija se za z izraz

$$z = \frac{Ax^2 y^2 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I}{(1-x)^3 (1-y)^3},$$

gde su $A, B, \ldots, I$ konstante čije su vrednosti

$$A = c^2 + 2\,(ab - ac - bc), \qquad B = b^2 - 2\, c^2 - 2\,(ab - 2\, ac - bc),$$

$$C = a^2 - 2\, c^2 - 2\,(ab - ac - 2\, bc), \qquad D = b^2 + c^2 - 2\, ac,$$

$$E = -2\,(a^2 + b^2 - 2\, c^2) + 2\,(ab - 2\, ac - 2\, bc), \qquad F = a^2 + c^2 - 2\, bc,$$

$$G = a^2 - 2\,(b^2 + c^2 - ac), \qquad H = b^2 - 2\,(a^2 + c^2 - bc), \qquad I = a^2 + b^2 + c^2.$$

Kao specijalan slučaj dobija se obrazac

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)^2 x^m y^n = \frac{2\, x^2 y^2 + x^2 y - xy^2 + x^2 - 2\, xy + y^2 - x - y + 2}{(1-x)^3 (1-y)^3}.$$

Isto tako je i

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am^2 + bn^2)\, x^m y^n$$

$$= \frac{(a+b)(1 - 2\, xy) + bx^2 (1+y) + ay^2 (1+x) + (a - 2\, b)\, x - (2\, a - b)\, y}{(1-x)^3 (1-y)^3},$$

tako da je

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + n^2)\, x^m y^n = \frac{xy\,(x + y - 4) + x\,(x-1) + y\,(y-1) + 2}{(1-x)^3 (1-y)^3}.$$

2. primer: neka je

$$A_m = \frac{1}{m!}, \qquad B_n = \frac{1}{n!},$$

a znak $\Sigma\Sigma$ se rasprostire na sve vrednosti (136). Tada je

$$U_0 = V_0 = e^t, \qquad U_1 = V_1 = te^t,$$

$$U_2 = V_2 = (1+t)\, e^t, \qquad U_3 = V_3 = (2+t)\, e^t,$$

$$U_4 = V_4 = (3+t)\, e^t, \ldots \qquad U_0 = \ldots \quad V_1 = \ldots, \text{ itd.}$$

Funkcija z je polinom po promenljivima x, y i po raznim eksponencijalnim funkcijama

$$e^{a_1 x}, \; e^{a_2 x}, \; e^{a_3 x}, \ldots$$

$$e^{b_1 y}, \; e^{b_2 y}, \; e^{b_3 y}, \ldots$$

gde su a_k i b_k konstante čiji je broj ograničen.

3. primer: neka je

$$A_m = \frac{(2\,m)!}{(m!)^2}, \qquad B_n = \frac{(2\,n)!}{(n!)^2},$$

a znak $\Sigma\Sigma$ se rasprostire na sve vrednosti (136). Tada je

$$U_0 = V_0 = \frac{1}{\sqrt{1-4\,t}}, \qquad U_1 = V_1 = \frac{2\,t}{(\sqrt{1-4\,t})^3}, \qquad U_2 = V_2 = \frac{2\,t + 8\,t^2}{(\sqrt{1-4\,t})^5}, \ldots$$

Funkcija z je algebarska funkcija promenljivih x i y, koja ima vrednosti

$$x = \frac{1}{4}, \qquad y = \frac{1}{4}$$

kao algebarske kritičke tačke drugoga reda.

4. primer: neka je A_m racionalna funkcija promenljive m čiji su polovi svi prosti i jednaki negativnim stalnim celim brojevima; neka je B_n funkcija takve iste vrste promenljive n. Pored toga, znak $\Sigma\Sigma$ odnosi se na vrednosti

$$m = 1, 2, 3, \ldots; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tada su A_m i B_n oblika

$$A_m = \frac{P(m)}{(m+\alpha_1)(m+\alpha_2)\ldots(m+\alpha_p)},$$

$$B_n = \frac{Q(n)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)\ldots(n+\beta_q)},$$

gde su α_k i β_k celi pozitivni brojevi nezavisni od m i n, a $P(m)$ i $Q(n)$ su polinomi po m, odnosno po n.

Rastavljanjem racionalnih funkcija A_m i B_n na proste elemente dobija se

$$A_m = C + M, \qquad B_n = C' + N,$$

gde je

$$M = \Sigma \frac{R_k}{m+\alpha_k}, \qquad N = \Sigma \frac{R_k'}{n+\beta_k}$$

i gde su

$$C,\ C',\ R_k,\ R_k'$$

konstante nezavisne od m i n, i to R_k, R_k' su ostaci funkcija A_m i B_n za njihove polove $-\alpha_k$ i $-\beta_k$. Tada je

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} + \Sigma \frac{R_1 t^m}{m+\alpha_1} + \Sigma \frac{R_2 t^m}{m+\alpha_2} + \cdots,$$

$$V_0(t) = \frac{C'}{1-t} + \Sigma \frac{R_1' t^m}{m+\beta_1} + \Sigma \frac{R_2' t^m}{m+\beta_2} + \cdots.$$

Međutim obrazac

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \cdots - \frac{t^p}{p} - \\ -t^p\left(\frac{t}{1+p} + \frac{t^2}{2+p} + \frac{t^3}{3+p} + \cdots\right)$$

daje neposredno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n+p} = -\frac{1}{t^p}\left[\log(1-t) + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^p}{p}\right],$$

prema čemu se nalazi da je

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} - \log(1-t)\left(\frac{R_1}{t^{\alpha_1}} + \frac{R_2}{t^{\alpha_2}} + \cdots\right) - S(t),$$

gde je $S(t)$ zbir članova

$$\frac{R_k}{t^{\alpha k}}\left(t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{\alpha k}}{\alpha_k}\right)$$

za

$$k = 1, 2, 3, \ldots, h$$

a gde h označava broj polova racionalne funkcije A_m.

Funkcija $V_0(t)$ ima isti oblik, samo što su u njoj konstante C i R_k smenjene konstantama C' i R_k', a polovi α_k sa β_k.

Iz tih se početnih funkcija, pomoću napred navedenih rekursivnih obrazaca, mogu izraziti potrebne funkcije U_k i V_k a *time će biti sumiran dati red z pomoću ograničenog broja racionalnih i logaritamskih funkcija.*

III

Uočimo isti slučaj kao u odeljku II, a sa tom razlikom što je Q_{mn} polinom po jednom ograničenom broju članova

$$\frac{1}{m},\ \lambda_1^m,\ \lambda_2^m,\ \lambda_3^m \dots,$$

$$\frac{1}{n},\ \mu_1^n,\ \mu_2^n,\ \mu_3^n \dots,$$

gde su λ_k i μ_k stalni brojevi (nezavisni od m i n) kao i koeficijenti polinoma Q_{mn}.

Izračunavanje funkcije z je isto kao u odeljku II, sa tom razlikom što funkcije U_k i V_k imaju drugojače oblike. Naime biće

$$U_k(t) = \Sigma \frac{A_m}{m^k} t^m, \qquad V_k(t) = \Sigma \frac{B_n}{n^k} t^n.$$

Te su funkcije u isti mah određene i rekursivnim obrascima

$$U_k(t) = \int U_{k-1}(t) \frac{dt}{t}, \qquad V_k(t) = \int V_{k-1}(t) \frac{dt}{t},$$

sa početnim funkcijama

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m, \qquad V_0(t) = \Sigma B_n t^n.$$

One se, uostalom, mogu imati i neposredno izražene u obliku određenog integrala. Tako iz integralnog obrasca

$$\frac{1}{m^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-mu} u^{k-1} du$$

dobija se da je

$$U_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty U_0(te^{-u}) u^{k-1} du,$$

$$V_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty V_0(te^{-u}) u^{k-1} du.$$

U specijalnom slučaju kad je

$$A_m = 1, \qquad B_n = 1,$$

a sumiranje $\Sigma\Sigma$ se proteže na vrednosti m, $n=1, 2, 3, \ldots$ biće

$$U_0(t)=V_0(t)=\sum_{m=1}^{\infty} t^m=\frac{t}{1-t}$$

$$U_1(t)=V_1(t)=-\log(1-t)$$

$$\vdots$$

Funkcije $U_k(t)$ i $V_k(t)$ se, uostalom, izražavaju i neposredno u obliku određenog integrala

$$U_k(t)=V_k(t)=\frac{t}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\frac{u^{k-1}\,du}{e^u-t}.$$

Funkcija z je tada jedna multiformna funkcija promenljivih x i y, koja ima vrednosti $x=1$, $y=1$, za logaritamske kritičke tačke.

Uočimo još i slučaj kad je

$$A_{mn}=(A_m+B_n)\,Q_{mn},$$

gde su A_m B_n Q_{mn} isti kao u odeljku II. Koeficijenat A_{mn} tada je zbir ograničenog broja članova od dve vrste, jednih oblika

$$Cm^p\,n^q\,M^m\,N^n\,A_m,$$

drugih oblika

$$Cm^p\,n^q\,M^m\,N^n\,B_n,$$

pa je, dakle, funkcija A_{xy} opet zbir partikularnih integrala parcijalne jednačine (114).

Za članove prvoga oblika je

$$U_0(t)=\Sigma\,A_m\,t^m,\quad V_0(t)=\frac{1}{1-t},$$

a za članove drugoga oblika

$$U_0(t)=\frac{1}{1-t},\quad V_0(t)=\Sigma\,B_n\,t^n,$$

pa bi se funkcije $U_k(t)$ i $V_k(t)$ izračunale pomoću rekursivnih i napred navedenih obrazaca, a pomoću njihovih kvadratičkih kombinacija bila bi izražena i funkcija z.

IV

U mnogim slučajevima mogućno je sumirati i dvostruke redove

(137) $$z=\Sigma\Sigma\,C_{mn}\,x^m\,y^n,$$

u kojima opšti koeficijenat C_{mn} ne ispunjava uslove prednjih stavova, ali ih zadovoljava pošto se podeli kakvim izrazom B_{mn} što zavisi od indeksa m i n.

Takve su vrste redovi (137) u kojima je funkcija C_{xy} dveju promenljivih x i y jednaka produktu dva faktora:

1° jednoga A_{xy} koji je jednak zbiru ograničenog droja partikularnih integrala parcijalne jednačine.

2° jednoga B_{xy} koji je takav da je mogućno sumirati red

$$\varphi(x, y) = \Sigma\Sigma\, B_{mn}\, x^m y^n. \tag{138}$$

Uočimo, kao primer, slučaj kad faktori A_{mn} i A_m imaju oblik pretpostavljen u odeljku II. Opšti koeficijenat C_{mn} tada je jednak zbiru ograničenog broja izraza oblika

$$Cm^p\, n^q\, M^m\, N^n\, B_{mn},$$

tj. zbiru ograničenog broja partikularnih integrala jednačine (138), (gde su C, M, N konstante, a p i q stalni pozitivni celi brojevi).

Funkcija (137) je izražljiva kao zbir ograničenog broja izraza oblika

$$CU_{pq}(Mx, Ny),$$

gde je

$$U_{pq}(x, y) = \Sigma\Sigma\, m^p\, n^q\, B_{mn}\, x^m y^n.$$

Međutim, funkcije U_{pq} se mogu odrediti pomoću jednog ili drugog rekursivnog obrasca

$$U_{pq} = x\,\frac{\partial}{\partial x}\, U_{p-1,\,q},$$

$$U_{pq} = y\,\frac{\partial}{\partial y}\, U_{p,\,q-1},.$$

gde početna funkcija U_{00} ima za izraz

$$U_{00}(x, y) = \varphi(x, y).$$

Tako npr. za dvostruki red

$$\sum\sum \frac{(m+n)!}{(m+n)\, m!\, n!}\, x^m y^n,$$

gde se sumiranje rasprostire na sve vrednosti 0, 1, 2, 3,... indeksa m i n, osim na par $m=0$, $n=0$, zna se da ima za zbir funkciju

$$\varphi(x, y) = -\log(1-x-y).$$

Toj funkciji odgovaraju funkcije U_{pq} oblika

$$U_{1\,0}=\frac{x}{1-x-y}, \qquad U_{0\,1}=\frac{y}{1-x-y},$$

$$U_{1\,1}=\frac{xy}{(1-x-y)^2}, \qquad U_{2\,0}=\frac{x(1-y)}{(1-x-y)^2},$$

$$U_{0\,2}=\frac{y(1-x)}{(1-x-y)^2}, \qquad U_{21}=\frac{xy(1+x-y)}{(1-x-y)^3},$$

$$U_{1\,2}=\frac{xy(1-x+y)}{(1-x-y)^3}, \qquad U_{2\,2}=\frac{xy(1-x^2-y^2+4\,xy)}{(1-x-y)^4}, \ldots$$

pa se, prema tome, uvek može sumirati svaki red oblika

$$\sum\sum\frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}A_{mn}\,x^{r_i}\,y^n.$$

Svaki takav red ima, dakle, za zbir jednu kvadratičnu kombinaciju funkcije $\log(1-x-y)$ *i racionalnih funkcija promenljivih* x *i* y.

Tako isto, za dvostruki red

$$\Sigma\Sigma\, B_{mn}\, x^m\, y^n,$$

gde je

$$B_{mn}=\frac{[1\cdot3\cdot5\ldots(2\,m-1)]\,[1\cdot3\cdot5\ldots(2\,n-1)]}{2\cdot4\cdot6\ldots2\,(m+n)}, \tag{139}$$

zna se da ima za zbir funkciju

$$\varphi(x,y)=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}},$$

kao i to da red

$$\Sigma\Sigma\, B_{mn}\, x^{2m}\, y^{m-2n},$$

gde je

$$B_{mn}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot\frac{1}{2^m} \tag{140}$$

ima za zbir funkciju[1])

$$\varphi(x,y)=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-y+\sqrt{1-x^2}}.$$

---

[1]) *Hermite*: Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, p. 64.

Pomoću gornjih rekursivnih obrazaca određuju se iz ovih početnih funkcija odgovarajuće im funkcije U_{pq}, koje će sve biti algebarske funkcije promenljivih x i y.

Svaki dvostruki red

(141)
$$z = \Sigma\Sigma\, A_{mn}\, B_{mn}\, x^m\, y^n,$$

gde B_{mn} *ima za izraz* (139) *ili* (140) *ima za zbir po jednu algebarsku funkciju promenljivih* x *i* y.

Na isti bi se način sumirali redovi (141) za koje B_{mn} i $\varphi(x, y)$ imaju koji od ovih oblika:

1° $B_{mn} = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{1-x-y}$;

2° $B_{mn} = 1$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{1-xy}$;

3° $B_{mn} = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2}$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4xy}}$;

4° $B_{mn} = \dfrac{am+bn+c}{m!\,n!}$, $\qquad \varphi(x, y) = (ax+by+c)\, e^{x+y}$.

U slučajevima 1° i 2° funkcija z je *racionalna* funkcija promenljivih x i y; u slučaju 3° z je *algebarska* funkcija tih promenljivih, a u slučaju 4° z je *cela* transcendentna funkcija istih promenljivih.

U slučaju 4° kad je sumiranje rasprostrto na vrednosti m, $n = 1, 2, 3,$ nalazi se da je

$$\varphi(x, y) = (ax+by+c)\, e^{x+y} - (ax+c)\, e^x - (by+c)\, e^y + c,$$

a odgovarajuće funkcije U_{pq} dobijaju se pomoću napred navedenih rekursivnih obrazaca.

V

Ovo, što je dovde izloženo, nalazi neposrednu primenu u *problemu majoriranja dvostrukih potencijalnih redova*

(142)
$$f(x, y) = \Sigma\Sigma\, a_{mn}\, x^m\, y^n.$$

Pošto je uvek

(143)
$$|f(x, y)| < \Sigma\Sigma\, |a_{mn}|\, r^m\, r'^n$$
$$r = |x|, \qquad r' = |y|,$$

to, kad kod se $|a_{mn}|$ može majorirati kakvim izrazom A_{mn} onakvog oblika o kakvom je napred bila reč, tj. takvim da je A_{xy} jedan integral, ili zbir ograničenog broja, ovoga puta realnih i pozitivnih partikularnih integrala parcijalne diferencijalne jednačine

$$zs-pq=0,$$

biće

$$|f(x,y)|<F(x,y), \tag{144}$$

gde je

$$F(x,y)=\Sigma\Sigma\, A_{mn}\, x^m\, y^n. \tag{145}$$

Iz ovoga što prethodi vidi se da je u nepreglednom broju slučajeva *mogućno imati majorantnu funkciju* $F(x,y)$ *izraženu u eksplicitnom obliku kao funkciju promenljivih* x *i* y.

A to se opet neposredno primenjuje na *problem integracije diferencijalnih jednačina prvoga reda*

$$y'=f(x,y) \tag{146}$$

pomoću redova

$$y=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots \tag{147}$$

Glavni deo problema sastoji se u odredbi jednoga kruga, opisanog oko tačke $x=0$ u ravni promenljive x, u kome će red (147), za datu jednačinu (146), biti nasigurno konvergentan.

Uočimo integral jednačine (146) koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ i pretpostavimo da se funkcija $f(x,y)$ može razviti u red (142) čiji je opšti koeficijenat a_{mn} mogućno majorirati kakvim realnim i pozitivnim izrazom A_{mn} o kome je maločas bila reč. Tada će funkcija $f(x,y)$ biti majorirana odgovarajućom funkcijom $F(x,y)$ koja će biti zbir partikularnih integrala parcijalne jednačine

$$zs-pq=0.$$

Označimo sa v onaj integral diferencijalne jednačine

$$v'=F(x,v), \tag{148}$$

koji za $x=0$ dobija vrednost $v=0$. *Poluprečnik* R *kruga konvergencije integralnog reda* (147) *biće bar toliki koliki je poluprečnik* R' *kruga holomorfnosti integrala* v.

Međutim, funkcija F je tada oblika

$$F(x,v)=X_1 V_1+X_2 V_2+\cdots$$

gde X_k zavise samo od x, a V_k samo od v, pa se podesnim izborom te majorantne funkcije može učiniti da odgovarajuća jednačina (148)

$$v' = X_1 V_1 + X_2 V_2 + \cdots$$

bude integrabilna, ili da joj se bar može i bez integracije odrediti poluprečnik R' holomorfnosti njenog integrala v. Tada gornji stav daje jedan krug opisan oko tačke $x = 0$, u kome će integralni red (147) nasigurno konvergirati.

To će biti rasvetljeno sledećim primerima.

1. primer: neka su

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots; \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

dva niza pozitivnih brojeva, takvih da količnik

$$\frac{|a_{mn}|}{\lambda_m \mu_n} \tag{149}$$

ostaje konačan pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n; neka je A jedan stalan pozitivan broj koji nije premašen vrednošću količnika (149). Tada se može uzeti

$$A_{mn} = A \lambda_m \mu_n,$$

pa će u komparativnom redu (145) biti ispunjeni napred postavljeni uslovi. Funkcija $F(x, y)$ biće

$$F(x, y) = A \Sigma\Sigma \lambda_m \mu_n x^m y^n = A \lambda(x) \cdot \mu(y),$$

gde je

$$\lambda(x) = \Sigma \lambda_m x^m, \qquad \mu(y) = \Sigma \mu_n y^n,$$

a komparativna jednačina (148) je tada

$$v' = A \lambda(x) \mu(v). \tag{150}$$

Poluprečnik R kruga konvergencije integralnog reda

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{151}$$

jednačine (146) biće bar toliki, koliki je poluprečnik R' kruga holomorfnosti integrala v jednačine (150), datog jednačinom

$$\int_0^v \frac{dv}{\mu(v)} = \int_0^x \lambda(x)\, dx.$$

Tako npr. u specijalnom slučaju kad je

$$\lambda_m = \frac{1}{m!}, \qquad \mu_n = \frac{1}{n!},$$

tj. kad moduo opšteg koeficijenta a_{mn} date diferencijalne jednačine (146), u vezi sa izrazom (142), ne opada sporije nego izraz $\frac{1}{m!\,n!}$, može se uzeti

$$A_{mn} = \frac{A}{m!\,n!}.$$

Komparativna jednačina (150) je

$$v' = A \sum\sum \frac{x^m v^n}{m!\,n!} = Ae^{x+v},$$

a njen integral, koji za $x=0$ dobija vrednost $v=0$, je

$$v = \log(1 + A - Ae^x).$$

Njegov krug holomorfnosti ima za poluprečnik

$$R' = \log\left(1 + \frac{1}{A}\right)$$

i u tome krugu red (151), što predstavlja integral jednačine (146), nasigurno je konvergentan.

U specijalnom slučaju kad λ_m i μ_n rastu brže no 2^m i 2^n, može se uzeti

$$A_{mn} = 2^{m+n} A.$$

Komparativna jednačina (150) je

$$v' = A \sum\sum 2^{m+n} x^m v^n = \frac{A}{(1-2x)(1-2v)}$$

a njen integral, koji za $x=0$ dobija vrednost $v=0$, je

$$v = 1 - \sqrt{1 + 2A \log(1-2x)}.$$

On je holomorfan u krugu poluprečnika $R' = \frac{1-e^{-\frac{1}{2A}}}{2}$, pa će u tome krugu biti konvergentan i integralni red (151) jednačine (146).

Na ovaj poslednji slučaj se svode i jednačine (146) u kojima količnik

$$\frac{|a_{mn}|}{m^2+n^2}$$

ostaje konačan i ne premaša jedan stalan broj A. Dovoljno je primetiti da je za sve pozitivne vrednosti indeksa m i n

$$m^2 + n^2 \leqslant 2^{m+n}.$$

2. primer: uočimo slučaj kad se za A_{mn} može uzeti kakav izraz oblika

$$A_{mn} = \alpha_m \beta_n + \lambda_m \mu_n,$$

tako da je A_{xy} jedan partikularni integral parcijalne jednačine (123).

Neka je

$$\Sigma \alpha_m x^m = \alpha(x), \qquad \Sigma \lambda_m x^m = \lambda(x)$$

$$\Sigma \beta_n y^n = \beta(y), \qquad \Sigma \mu_n y^n = \mu(y),$$

pa će jednačina (148) biti

(152) $$v' = \alpha(x) \cdot \beta(v) + \lambda(x) \cdot \mu(v).$$

Kad su funkcije α, β, λ, μ takve, da je jednačina (152) integrabilna, poluprečnik kruga holomorfnosti njenog integrala v, koji za $x = 0$ dobija vrednost $v = 0$, daće jednu donju granicu poluprečnika kruga konvergencije integrala (147) jednačine (146). Jedna od takvih jednačina je npr. Bernoullijeva jednačina, koja se i uopštem slučaju može integraliti.

11.

REDOVI ŠTO IZRAŽAVAJU OPŠTI INTEGRAL DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOGA REDA

Opšti integral diferencijalne jednačine prvog reda

$$y' = f(x, y), \tag{153}$$

tj. njen integral koji za proizvoljnu vrednost $x = x_0$ dobija proizvoljnu vrednost $y = y_0$, izražen je jednom relacijom

$$F(x, y, x_0, y_0) = 0 \tag{154}$$

gde je F funkcija četiri promenljive

$$x, y, x_0, y_0 \tag{155}$$

u kojoj se x može permutovati sa x_0, y sa y_0, a da pri tome funkcija ne promeni svoju vrednost.

Kad par vrednosti (x_0, y_0) ne predstavlja nikakvu singularnu tačku funkcije $f(x, y)$, opšti integral y može se izraziti u obliku potencijalnog reda

$$y = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \cdots \tag{156}$$

gde su koeficijenti A_n funkcije promenljivih x_0, y_0.

Jedan proizvoljno uzet red (156) može, ali ne mora, biti opšti integral kakve jednačine prvog reda. Tako npr. red u kome je

$$A_0 = y_0, \quad A_n = x_0 y_0 + (n-1) x_0^2 y_0^2$$

nije opšti integral nikakve jednačine (153); naprotiv, red u kome je

$$A_0 = y_0, \qquad A_n = \frac{y_0}{n!}$$

opšti je integral jednačine

$$y' = y.$$

U ovome su odeljku postavljena i potpuno rešena ova dva pitanja:

1° *Kakve potrebne i dovoljne uslove treba da ispune koeficijenti* A_n *reda* (156), *pa da taj red predstavlja opšti integral kakve diferencijalne jednačine prvog reda oblika* (153)?

2° *U slučajevima kad su ti uslovi ispunjeni, naći diferencijalnu jednačinu za koju takav red* (156) *izražava njen opšti integral.*

Neka je (153) jednačina čiji je opšti integral red (156). Tada je

$$A_0 = y_0 \qquad A_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = [f(x, y)] = f(x_0, y_0), \tag{157}$$

gde uopšte izraz $[\varphi]$ označava vrednost koju dobija kakva funkcija φ jedne promenljive x za $x = x_0$, ili funkcija dveju promenljivih x, y za $x = x_0$, $y = y_0$,

Formirajmo neograničen niz funkcija

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{158}$$

promenljivih x, y definisanih rekurentnom relacijom

$$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + f\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{159}$$

gde je početna funkcija

$$f_0 = f(x, y), \tag{160}$$

pa će biti

$$A_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{161}$$

Relacija (159) može se napisati i u obliku

$$[f_n] = \left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right] + [f]\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right] \tag{162}$$

iz čega se, prema (157), (159) i (161) dobija

$$(n+1)\,A_{n+1} = \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0}. \tag{163}$$

To pokazuje da izraz

$$\Delta = \frac{(n+1)\,A_{n+1} - \dfrac{\partial A_n}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}} \tag{164}$$

ima jednu istu vrednost za sve vrednosti $n=1, 2, 3, \ldots$ i da se ta vrednost poklapa sa $f(x_0, y_0)$. Druga jednačina (157) tada pokazuje da su x_0 i y_0 vezani diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dy_0}{dx_0}=f(x_0, y_0). \tag{165}$$

Vrednost izraza Δ je ista kao i vrednost koeficijenta A_1, a to je $f(x_0, y_0)$. Jednačina (160) dobija se, dakle, kad se u jednačini

$$\frac{dy_0}{dx_0}=A_1 \tag{166}$$

smeni x_0 sa x, y_0 sa y, a $\frac{dy_0}{dx_0}$ sa $\frac{dy}{dx}$.

Na taj su način nađeni *potrebni* uslovi da bi red (156) bio opšti integral kakve jednačine (153). Lako se dokazuje da su to u isto vreme i *dovoljni* uslovi za to; dokaz je istovetan sa onim kojim je u 3. odeljku ove knjige dokazano da kad se koeficijenti reda

$$y=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots$$

izračunaju uzastopnim diferencijaljenjem jednačine (153) i deobom dobijenih izvoda sa $n!$, takav red formalno zadovoljava jednačinu (153).

Na taj način dobijeno je rešenje postavljenih pitanja u obliku ova dva stava:

1. stav: *Da bi red* (156) *predstavljao opšti integral kakve diferencijalne jednačine prvoga reda, potrebno je i dovoljno da izraz Δ ima jednu istu vrednost za sve vrednosti $n=1, 2, 3, \ldots$*

A kad je taj uslov ispunjen, rešenje drugoga od postavljenih pitanja dato je ovim stavom:

2. stav: *Diferencijalna jednačina, čiji je opšti integral tada izražen redom* (156) *dobija se kad se u koeficijentu A_1 smeni x_0 sa x, y_0 sa y, pa se rezultat ujednači sa $\frac{dy}{dx}$.*

U slučaju kad se traži da diferencijalna jednačina (153), čiji opšti integral treba da bude red (156), ne sadrži eksplicitno promenljivu x, jednačina (159) se svodi na

$$f_{n+1}=f\frac{\partial f}{\partial y},$$

a jednačina (162) na

$$[f_{n+1}]=[f]\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

prema čemu je

$$(n+1) A_{n+1} = f(x_0, y_0) \frac{\partial A_n}{\partial y_0}$$

iz čega sleduje

3. stav: *Da bi red* (156) *predstavljao opšti integral kakve diferencijalne jednačine prvoga reda koja ne sadrži eksplicitno nezavisno promenljivu količinu x potrebno je i dovoljno da izraz*

$$\Delta = \frac{(n+1) A_{n+1}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}} \tag{167}$$

ima jednu istu vrednost za sve vrednosti $n = 1, 2, 3, \ldots$

I u tome slučaju je odgovarajuća diferencijalna jednačina određena stavom 2.

Kao što se vidi, da li će dati red (156) biti ili ne opšti integral kakve jednačine prvoga reda, zavisi isključivo od toga *da li će njegovi koeficijenti* A_n *imati za invarijantu izraz* Δ. A kad je to slučaj, *diferencijalna jednačina toga reda dobija se iz same vrednosti te invarijante.*

Za red (156) npr. za koji je $A_0 = y_0$, $A_n = \dfrac{y_0}{n!}$ invarijanta je $\Delta = y_0$; za red za koji je

$$A_0 = y_0, \qquad A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} (y_0 - x_0 + 1)^{2n+1}$$

ona je $\Delta = \dfrac{1}{2} (y_0 - x_0 + 1)^3 + 1$;

za red za koji je

$$A_0 = y_0, \qquad A_n = y_0 \left[\frac{(2x_0)^n}{n!} + \frac{(2x_0)^{n-2}}{1!(n-2)!} + \frac{(2x_0)^{n-4}}{2!(n-4)!} + \cdots \right]$$

ona je $\Delta = 2 x_0 y_0$;

za red gde je $A_0 = y_0$,

$$A_n = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{n! (n-1)! (2y_0)^{2n-1}}$$

ona je $\Delta = \dfrac{1}{y_0}$;

za red za koji je $A_0 = y_0$, $A_{4n} = \dfrac{y_0}{(4n)!}$

$$A_{4n+2} = -\frac{y_0}{(4n+2)!}$$

$$A_{4n+1} = \frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+1)!} \qquad A_{4n+3} = -\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+3)!}$$

nalazi se da je

$$\Delta=\sqrt{1-y_0^2}.$$

Ovo što je napred izloženo, može se predstaviti i na ovaj način.

Uopšte jedna funkcija

(168) $$y=\varphi(x, C_1\, C_2),$$

koja sadrži dve proizvoljne konstante C_1 i C_2, opšti je integral jedne diferencijalne jednačine drugog reda koja ne sadrži ni C_1 ni C_2. Ta se jednačina svodi na jednačinu prvoga reda kad se između dveju konstanata uspostavi kakva relacija

(169) $$\psi(C_1, C_2)=0.$$

Tako npr. funkcija

$$y=C_1 \sin x+C_2 \cos x$$

je opšti integral jednačine

$$y''+y=0;$$

to je, međutim, opšti integral jednačine

$$y'^2+y^2-1=0$$

kad se među konstantama uspostavi relacija

$$C_1^2+C_2^2-1=0.$$

Ali, funkcija (168) može biti opšti integral jednačine prvog reda (koja ne sadrži ni C_1 ni C_2) a da konstante C_1 i C_2 ne prestanu biti proizvoljne, tj. da ne moraju biti među sobom vezane. Takav je slučaj sa funkcijom

$$y=\varphi(x, x_0, y_0)$$

što predstavlja integral kakve jednačine prvoga reda koji za proizvoljnu vrednost $x=x_0$ dobija proizvoljnu vrednost $y=y_0$; dovoljno je uzeti $x_0=C_1$, $y_0=C_2$.

Tako, npr. funkcija

$$y=C_1\, e^{x-C_2}$$

opšti je integral jednačine

(170) $$y'-y=0;$$

funkcija

$$y=\sin(\log C_1 x+C_2)$$

je opšti integral jednačine

(171) $$x^2 y'^2+y^2-1=0.$$

Opšti razlog takvog fakta je očevidan: u takvim slučajevima uvek postoji jedna određena funkcija

$$\lambda(C_1, C_2) \tag{172}$$

dveju konstanata C_1 i C_2, takva da kad se stavi da je

$$\lambda(C_1, C_2) = C$$

obe konstante C_1 i C_2 nestaju u izrazu opšteg integrala y, koji postaje funkcija promenljive x i konstante C, ova tada igra ulogu jedine integracione konstante.

Tako npr. u slučaju jednačine (170) konstanta C je izraz

$$C = C_1\, e^{-C_2};$$

za jednačinu (171) ona je

$$C = \log C_1 + C_2.$$

Uočimo sad opšti problem:

Kad je dat potencijalni red

$$y = A_0 + A_1(x - A) + A_2(x - A)^2 + \cdots \tag{173}$$

gde su A, A_0, A_1, $A_2, \ldots$ funkcije dveju proizvoljnih konstanata C_1 i C_2,

1° *naći potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju jedne diferencijalne jednačine prvoga reda, koja ne sadrži* C_1 *u* C_2 *i čiji će opšti integral biti izražen redom* (173);

2° *naći tu diferencijalnu jednačinu u slučaju kad ona postoji.*

Ako se stavi da je

$$A(C_1, C_2) = \alpha, \qquad A_0(C_1, C_2) = \beta \tag{174}$$

parametri će α i β biti poznate funkcije konstanata C_1 i C_2. Smenivši njima te konstante, funkcija y postaje

$$y = \beta + B_1(x - \alpha) + B_2(x - \alpha)^2 + \cdots$$

gde će koeficijenti B_1, B_2, $B_3, \ldots$ biti poznate funkcije parametra α i β, i problem se svodi na onaj napred rešen u ovome odeljku; y treba da bude integral kakve jednačine prvoga reda koji za $x = \alpha$ dobija vrednost $y = \beta$.

Da li će red (173) biti ili ne opšti integral kakve jednačine prvoga reda, zavisi od toga da li će njegovi koeficijenti B_n imati za invarijantu izraz Δ (u kome A_k treba smeniti sa B_k) ili ne. A kad je to slučaj, diferencijalna jednačina se dobija eliminacijom dveju konstanata C_1 i C_2 iz triju jednačina

$$A(C_1, C_2) = x, \quad A_0(C_1, C_2) = y, \quad A_1(C_1, C_2) = \frac{dy}{\partial x}. \tag{175}$$

Da bismo odredili, pomoću C_1 i C_2 konstantu C koja će igrati dalju ulogu jedine integracione konstante u opštem integralu y, primetimo da su C_1 i C_2, ma da su im vrednosti proizvoljne (kao što je i slučaj sa x_0, y_0), vezani diferencijalnom relacijom što sleduje iz odnosa

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=A_1(C_1\,C_2)=\frac{\partial A}{\partial C_1}+\frac{\partial A}{\partial C_2}\cdot\frac{dC_2}{dC_1}.$$

To je diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial C_2}{\partial C_1}=\Phi(C_1\,C_2) \tag{176}$$

gde je Φ određena funkcija konstanata C_1 i C_2 koja ima za izraz

$$\frac{\dfrac{\partial A_0}{\partial C_1}-A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_1}}{A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_2}-\dfrac{\partial A_0}{\partial C_2}}; \tag{177}$$

o tome se uveravamo diferencijaljenjem prvih dveju jednačina (175) i smenom dobijenih dx i dy u trećoj od tih jednačina.

Kad se opšti integral jednačine (176) *napiše u obliku*

$$\mu(C_1, C_2)=\text{const}$$

izraz μ *igra ulogu konstante* C.

12.

ANALITIČKO PRODUŽENJE REDA ŠTO IZRAŽAVA INTEGRAL JEDNAČINE

Kad je data jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{178}$$

gde je funkcija $f(x, y)$ holomorfna u blizini vrednosti $x=0$, $y=0$, primenom osnovne Briot-Bouquetove teoreme dobija se integral, koji za $x=0$ postaje $y=0$, u obliku reda

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{179}$$

koji je konvergentan za sve vrednosti x što se nalaze u krugu C opisanom oko početka sa poluprečnikom R, za koji je napred pokazano kako se određuje.

Kad se vrednost x, za koju se traži vrednost integrala y nalazi u tome krugu, ova se vrednost izračunava neposredno iz obrasca (179). Međutim, *iz toga se reda može, posrednim putem, izračunati i vrednost integrala i u kojoj se hoće tački* $x=a$ (*osim izuzetnih i izolovanih takvih tačaka*) *van kruga* C.

To se može vršiti običnim *analitičkim produžavanjem* funkcije definisane redom koji važi za jednu oblast ravni x, na tačke x što se nalaze van te oblasti.

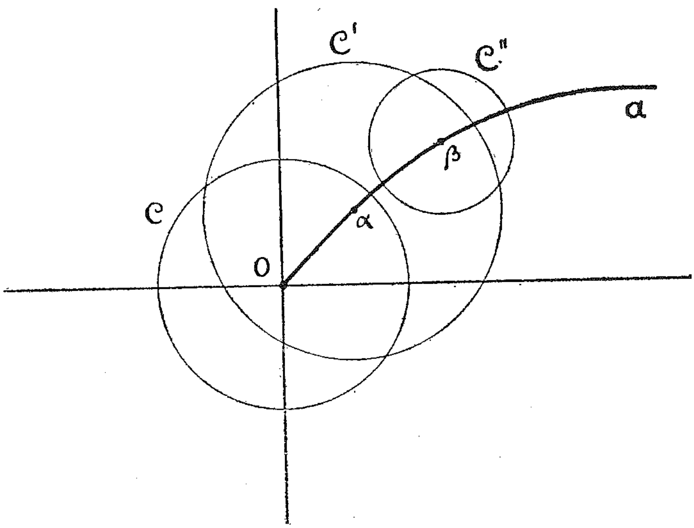
Neka se traži da se, iskoristivši obrazac (179), izračuna vrednost integrala y za $x=a$, gde je a jedna data tačka u ravni x van kruga konvergencije C reda (179). Ako je a obična tačka za integral y izražen tim redom, onda se takvo analitičko produžavanje izvršuje na ovaj način.

Sastavimo početak $x=0$ sa tačkom a jednom proizvoljnom putanjom oa, uočimo na toj putanji jednu proizvoljnu tačku $x=\alpha$ u unutrašnjosti kruga C

(v. sliku). Pošto je ta tačka u krugu C, za nju će važiti red (179), pa se iz toga reda mogu izračunati uzastopni izvodi funkcije y u obliku

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + \cdots \\ y'' &= 2\,a_2 + 2\cdot 3\,a_3\,x + 3\cdot 4\cdot a_4\,x^2 + \cdots \\ y''' &= 2\cdot 3\,a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\,a_4\,x + 3\cdot 4\cdot 5\,a_5\,x^2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{180}$$

Iz obrazaca (179) i (180), gde su redovi nasigurno konvergentni za $x=\alpha$, mogu se izračunati vrednosti $A_0, A_1, A_2 \ldots$ koje dobijaju $y, y', y'', y''', \ldots$ za



$x=\alpha$, pa kad su one izračunate, integral y može se, za vrednosti x u blizini tačke α, izraziti u obliku reda

$$y = A_0 + \frac{A_1}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_2}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots \tag{181}$$

koji će biti konvergentan za sve vrednosti x u unutrašnjosti izvesnog kruga C' opisanog oko tačke α kao centra. Poluprečnik R' toga kruga odredio bi se premestivši koordinatni početak u ravni x u tačku α i primenivši napred navedeni za to postupak.

Opišimo tada oko tačke α taj krug C' i uočimo u njegovoj unutrašnjosti, a na putanji Oa, jednu tačku $x=\beta$. Pošto je ta tačka u krugu C', za nju će važiti red (181) pa se iz toga reda mogu izračunati uzastopni izvodi funkcije y u obliku

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{A_1}{0!} + \frac{A_2}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_3}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots \\
y'' &= \frac{A_2}{0!} + \frac{A_3}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_4}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{182}
$$

Iz obrazaca (181) i (182), gde su redovi konvergentni za $x=\alpha$, mogu se izračunati vrednosti $B_0, B_1, B_2, \ldots$ koje dobijaju $y, y', y'', \ldots$ za $x=\beta$, pa kad su one izračunate, može se za vrednosti x u blizini tačke β integral y izraziti u obliku reda

$$y = B_0 + \frac{B_1}{1!}(x-\beta) + \frac{B_2}{2!}(x-\beta)^2 + \cdots$$

i taj će red biti konvergentan za sve vrednosti x u unutrašnjosti izvesnog kruga C'' opisanog oko tačke β kao centra, a čiji bi se poluprečnik R'' odredio na isti način kao poluprečnik R'.

I taj bi se postupak produžio idući putanjom Oa, sve dotle dok poslednji krug $C^{(k)}$ ne obuhvati i tačku a. Kad to bude, onda će poslednji tako dobijeni red za y važiti i biti konvergentan i za vrednost $x=a$, pa će se pomoću njega moći neposredno izračunati vrednost integrala za tu vrednost x.

Postupak izuzetno neće važiti ako proizvoljno izabrana putanja Oa pređe preko kakvoga singulariteta $x=c$ funkcije $f(x, y)$, jer će takav singularitet, prema uslovima koji se pretpostavljaju za tu funkciju, u trenutku kad se idući putanjom oa naiđe na njega, onemogućiti dalje kretanje na dosadašnji način u pravcu tačke a. Metoda za odredbu poslednjeg poluprečnika $R^{(k)}$ tada izneverava i čini nemogućnim dalje analitičko produžavanje integrala duž te putanje. Tada se mora izmeniti putanja oa i pokušati drugi kakav put kojim bi se od poslednjeg kružnog centra prišlo tački a.

13.

SLUČAJ KAD DESNA STRANA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE POSTAJE BESKRAJNA ZA $x=0$, $y=0$

Pretpostavka, na kojoj je osnovana osnovna Briot-Bouquetova teorema o izražavanju integrala diferencijalne jednačine, kao i teorema iste vrste za sisteme simultanih jednačina, sastoji se u tome da je u jednačini

$$y'=f(x,y) \tag{183}$$

funkcija $f(x, y)$ holomorfna za početne vrednosti $x=0$, $y=0$ promenljivih x i y, tj. da je ona za taj par vrednosti konačna, određena i da ni jedna druga od tih dveju vrednosti nije kritički singularitet funkcije. Taj uslov nije ispunjen

1° ili kad za $x=0$, $y=0$ funkcija $f(x, y)$ dobija beskrajno veliku vrednost, a funkcija $\frac{1}{f}$ je holomorfna za te vrednosti promenljivih;

2° ili kad se vrednost $f(0, 0)$ javlja u neodređenom obliku $\frac{0}{0}$;

3° ili kad je jedna ili druga, ili obe vrednosti $x=0$, $y=0$, kritički algebarski ili transcendentni singularitet funkcije $f(x, y)$.

U takvim slučajevima pomenute teoreme su neupotrebljive, jer nije zadovoljen osnovni uslov pod kojim su one izvedene.

Tako npr. desna strana jednačine

$$y'=\frac{y-1}{x}$$

za $x=0$, $y=0$ postaje beskrajna; ne postoji ni jedan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. To se vidi iz izraza opšteg integrala koji je

$$y=1+Cx.$$

Desna strana jednačine

$$y' = -\frac{y}{x^2}$$

za $x=0$, $y=0$ javlja se u neodređenom obliku $\frac{0}{0}$; ima beskrajno mnogo integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$, ali pored te vrednosti oni dobijaju i svaku drugu, proizvoljnu vrednost i ne mogu se razviti u red uređen po stepenima promenljive x; to se vidi iz izraza opšteg integrala koji je

$$y = Ce^{\frac{1}{x}}$$

i koji ima vrednost $x=0$ kao svoj esencijalni singularitet.

Desna strana jednačine

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{1+y^2}{(1+x)\,y}$$

postaje beskrajna; jednačina ima integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$; ali se ti integrali ne mogu razviti u red uređen po stepenima promenljive x, što se vidi iz izraza opšteg integrala

$$y = \sqrt{x + C(1+x)};$$

takva su dva partikularna integrala

$$y = -\sqrt{x} \quad \text{i} \quad y = +\sqrt{x}$$

koji odgovaraju vrednosti $C=0$ integracione konstante.

Naposletku, desna strana jednačine

$$y' = \frac{y-1}{2\,(x+\sqrt{x})}$$

postaje beskrajna za $x=0$, $y=0$, a ima i vrednost $x=0$ kao kritičku tačku; postoji integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, ali se on ne može razviti u red po stepenima promenljive x, što se vidi iz izraza opšteg integrala koji je

$$y = 1 + C\,(1+\sqrt{x}).$$

Može se izuzetno desiti da se i u kome od takvih slučajeva, i to samo u pojedinačnim slučajevima, ipak integral može izraziti u obliku Maclaurinovog reda

$$y = a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots$$

ali, to tada neće više biti posledica navedenih opštih teorema već će se desiti iz drugih, za takve jednačine specijalnih razloga.

Za takve slučajeve, kad funkcija $f(x, y)$ nije holomorfna za početni par vrednosti $x=0$, $y=0$, javlja se pitanje: *u red kakvog oblika*

(184) $$y=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

može se tada razviti integral y koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, a da red bude nasigurno konvergentan za vrednosti x u nekoj oblasti ravni x?

Od gore pomenutih slučajeva te vrste u ovom će odeljku biti raspravljen onaj kad za $x=0$, $y=0$ funkcija $f(x, y)$ dobija beskrajno veliku vrednost.

Neka je, dakle, data jednačina (183) u kojoj je

$$f(0, 0)=\infty.$$

Ako se jednačina napiše u obliku

(185) $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}=\varphi(x, y)$$

funkcija $\varphi(x, y)$ je holomorfna za $x=0$, $y=0$, jer je vrednost $\varphi(0, 0)$ tačno određena i jednaka nuli. Ona se, prema tome može razviti u red uređen po stepenima promenljive x

(186) $$\varphi(x, y)=A_0+A_1 x+A_2 x^2+\cdots, \qquad A_0=\varphi(0, y),$$

gde će koeficijenti biti holomorfne funkcije promenljive y, od kojih se pojedini mogu svesti i na konstantu. Kao što će se videti, *oblik reda* (184) *i analitička priroda integrala y zavisi poglavito od koeficijenta A_0.*

Da bi se to pokazalo, razlikujmo ova dva slučaja:

Prvi slučaj: pretpostavimo da koefijenat A_0 ne zavisi od y. Tada on mora biti jednak nuli, da bi bilo

(187) $$\varphi(0, 0)=0.$$

Ako se tada broj prvih koeficijenata reda (186), koji su jednaki nuli, označi sa k, tako da je

$$A_0=A_1=\cdots=A_{k-1}=0, \quad A_k\neq 0$$

pa da se red svodi na

(188) $$\varphi(x, y)=A_k x^k+A_{k+1} x^{k+1}+A_{k+2} x^{k+2}+\cdots,$$

iz (185) i (188) se dobija da je

(189) $$\frac{dx}{x^k}=(A_k+A_{k+1} x+A_{k+2} x^2+\cdots)\, dy.$$

Sa druge strane, pošto je $\varphi(x, y)$ holomorfna funkcija promenljivih x i y za $x=0$, $y=0$, prema teoremi Briot-Bouqueta za jednačinu (185) postojaće integral x koji će takođe biti holomorfna funkcija promenljive y za $y=0$. Kad se taj integral x smeni na desnoj strani jednačine (189), ona postaje

$$\psi(y)\,dy,$$

gde je $\psi(y)$ takođe holomorfna funkcija promenljive y za $y=0$, i jednačina (189) postaje

$$\frac{dx}{x^k}=\psi(y)\,dy.$$

Integraleći obe strane u granicama 0 i x, odnosno 0 i y, dobija se

$$\int_0^x \frac{dx}{x^k}=\int_0^y \psi(y)\,dy.$$

Pošto je $k \geqslant 1$, bilo da je $k=1$ ili da je $k>1$, leva strana poslednje jednačine ima beskrajno veliku vrednost, a desna strana ostaje konačna, što je nemogućno. To pokazuje *da u ovom slučaju ne postoji nikakav integral y jednačine* (183) *koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$.*

Takav se slučaj javlja, na primer, za jednačinu

$$y'=\frac{y-1}{x}.$$

Ako se ova napiše u obliku

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y-1}=A_0+A_1\,x,$$

biće

$$A_0=0, \quad A_1=\frac{1}{y-1},$$

a izraz opšteg integrala

$$y=1+Cx$$

pokazuje da jednačina odista nema nijedan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$.

Drugi slučaj: pretpostavimo da koeficijenat A_0 zavisi od y. Kako je on holomorfna funkcija promenljive y, može se razviti u red oblika

$$A_0=a_0+a_1\,y+a_2\,y^2+\cdots, \tag{189$^{\text{bis}}$}$$

gde će koeficijenti a_n biti stalni brojevi (nezavisni od x i y). A pošto za $y=0$ mora biti $A_0=0$, da bi se imala jednačina (187), to mora biti $a_0=0$, a pored njega može biti jednak nuli još i jedan izvestan broj uzastopnih prvih koeficijenata A_n. Označimo sa m broj takvih koeficijenata, tako da je

$$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}, \qquad a_m \neq 0,$$

pa će se red (189^{bis}) javiti u obliku

$$A_0 = a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + a_{m+2} y^{m+2} + \cdots \tag{190}$$

Kao što je kazano, pošto je $\varphi(x, y)$ holomorfna funkcija promenljivih x i y u blizini vrednosti $x=0, y=0$, može se na jednačinu (185) primeniti osnovna Briot-Bouquetova teorema, prema kojoj se tada integral x, koji za $y=0$ dobija vrednost $x=0$, može razviti u red oblika

$$x = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \cdots, \tag{191}$$

koji će biti konvergentan za sve vrednosti x u jednome krugu opisanom oko tačke $x=0$ u ravni x.

Koeficijenti B_n bi se mogli izračunati opet po istoj teoremi, ali se lakše do rezultata, što se ima u vidu, dolazi na ovaj način:

Očevidno je da, ako se u jednačini (185) smeni funkcija $\varphi(x, y)$ svojim izrazom (186) pa se u ovome koeficijenat A_0 smeni redom (190), a x redom (191), dobiće se jedna jednačina koja mora biti identički zadovoljena, pošto je x jedan njen integral. Ta je jednačina

$$\begin{aligned} B_1 + 2B_2 y + 3B_3 y^2 + \cdots &= (a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + a_{m+2} y^{m+2} + \cdots) \\ &+ A_1 (B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \cdots) + A_2 (B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \cdots)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{192}$$

Pošto za $y=0$ treba da bude $x=0$, ta jednačina (191) pokazuje da mora biti $B_0=0$. Kad se to uvede u jednačinu (192), član koji ne sadrži y na levoj strani je B_1, a na desnoj ne postoji, mora dakle biti i $B_1=0$. A kad se i to uvede u jednačinu, njen član sa y na prvom stepenu na levoj strani ima za koeficijenat $2B_2$, a na desnoj strani broj pomnožen sa B_1; prema tome je i $B_2=0$. Produžujući i dalje tako sa ostalim stepenima promenljive y, do njenog $(m-1)$-og stepena zaključno, nalazi se da je

$$B_0 = B_1 = B_2 = \cdots = B_m = 0.$$

Član koji sadrži y^m na levoj je strani $(m+1) B_{m+1} y^m$, na desnoj $a_m y^m$, prema čemu je

$$B_{m+1} = \frac{a_m}{m+1},$$

pa pošto je koeficijenat a_m različan od nule, tako će biti i sa koeficijentom B_{m+1}. Prema tome se integralni red (191) svodi na

$$x = B_{m+1} y^{m+1} + B_{m+2} y^{m+2} + B_{m+3} y^{m+3} + \cdots \tag{193}$$

a iz njega se dobija jednačina

$$\frac{dx}{dy} = (m+1) B_{m+1} y^m + (m+2) B_{m+2} y^{m+1} + (m+3) B_{m+3} y^{m+2} + \cdots \tag{194}$$

Izvršimo u toj jednačini smenu

$$x = t^{m+1}, \qquad dx = (m+1)\, t^m\, dt \tag{195}$$

prema čemu je

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = (m+1)\, t^m \frac{dt}{dy},$$

pa će, kad se to smeni u jednačini (194), ova postati

$$(m+1)\, t^m \frac{dt}{dy} = (m+1)\, B_{m+1}\, y^m + (m+2)\, B_{m+2}\, y^{m+1} + \cdots,$$

što se može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(m+1)\, t^m}{(m+1)\, B_{m+1}\, y^m + (m+2)\, B_{m+2}\, y^{m+1} + (m+3)\, B_{m+3}\, y^{m+2} + \cdots}$$

ili

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{t}{y}\right)^m \frac{1}{B_{m+1} + \dfrac{m+2}{m+1} B_{m+2}\, y + \dfrac{m+3}{m+1} B_{m+3}\, y^2 + \cdots} \tag{196}$$

Sa druge strane, ako se i neposredno u jednačini (193) izvrši ista smena (195), dobija se

$$t^{m+1} = B_{m+1}\, y^{m+1} + B_{m+2}\, y^{m+2} + B_{m+3}\, y^{m+3} + \cdots,$$

odakle je

$$\left(\frac{t}{y}\right)^{m+1} = B_{m+1} + B_{m+2}\, y + B_{m+3}\, y^2 + \cdots$$

Smenom te vrednosti u jednačini (196) dobija se jednačina

$$\frac{dy}{dt} = \frac{[B_{m+1} + B_{m+2}\, y + B_{m+3}\, y^2 + \cdots]^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1} + \dfrac{m+2}{m+1} B_{m+2}\, y + \dfrac{m+3}{m+1} B_{m+3}\, y^2 + \cdots} \tag{197}$$

Za $y = 0$ desna strana ove jednačine svodi se na vrednost

$$\frac{(B_{m+1})^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1}} = B_{m+1}^{-\frac{1}{m+1}},$$

a pošto je koeficijenat B_{m+1} različan od nule, biće i ova poslednja vrednost konačna. Vrednosti $t = 0$, $y = 0$ ne predstavljaju, dakle, nikakve singularitete funkcije na desnoj strani jednačine (197), pa se na tu jednačinu može primeniti osnovna

Briot-Bouquetova teorema. Prema ovoj, integral y jednačine (197), koji za $t=0$ dobija vrednost $y=0$ može se razviti u red oblika

$$y=\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\cdots \tag{198}$$

koji će biti konvergentan za sve vrednosti t u jednome krugu opisanom oko tačke $t=0$ u ravni t.

Kad se u redu (198) smeni t njegovom vrednošću

$$t=x^{\frac{1}{m+1}},$$

on postaje

$$y=\alpha_1 x^{\frac{1}{m+1}}+\alpha_2 x^{\frac{2}{m+1}}+\alpha_3 x^{\frac{3}{m+1}}+\cdots, \tag{199}$$

iz čega se vidi *da se integral y date jednačine*

$$y'=f(x,y) \tag{200}$$

može razviti u red uređen po stepenima vrednosti $x^{\frac{1}{n+1}}$.

A pošto najmanja vrednost koju može imati m je $m=1$, to je izložilac $\frac{1}{m+1}$ uvek pravi razlomak, čija je najmanja mogućna vrednost $\frac{1}{2}$, i prema tome *je vrednost $x=0$ uvek algebarski kritički singularitet integrala y; red takve kritičke algebarske tačke jednak je broju m povećanom za jedinicu.*

A iz svega ovoga što prethodi izvodi se ovaj opšti zaključak:

Neka je data diferencijalna jednačina (200), gde je $f(x,y)$ funkcija koja za $x=0$, $y=0$ dobija beskrajno veliku vrednost, ali takva da je njena recipročna funkcija

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}$$

holomorfna za $x=0$, $y=0$. Vrednost

$$\varphi(0,y)=A_0$$

biće tada ili identički jednaka nuli, ili će zavisiti od promenljive y. Za jedan i drugi slučaj važe teoreme:

I teorema: *Kad je vrednost A_0 nezavisna od y (u kome slučaju ona je identički jednaka nuli), ne postoji integral jednačine* (200) *koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$.*

Prost primer za to daje jednačina

$$y'=\frac{y-1}{x}, \qquad y=1+Cx.$$

II teorema: *Kad vrednost A_0 zavisi od y i razvije se u red uređen po stepenima promenljive y, pa se sa m označi najniži stepen toga reda po y, integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ ima vrednost $x=0$ kao algebarsku kritičku tačku $(m+1)$-og reda i može se razviti u red oblika*

$$y=\alpha_1 x^{\frac{1}{m+1}}+\alpha_2 x^{\frac{2}{m+1}}+\alpha_3 x^{\frac{3}{m+1}}+\cdots,$$

konvergentan za vrednosti x u jednome krugu opisanom oko tačke $x=0$ u ravni x.

Odredba koeficijenata α_n i njegovog kruga konvergencije vrši se primenom osnovne Briot-Bouquetove teoreme na jednačinu (197), pošto ona, radi odredbe koeficijenata B_n, koji su za to potrebni, bude prethodno primenjena na jednačinu (185).

Prost primer za to daje jednačina

$$y'=\frac{1}{y}, \quad y=\sqrt{C+2x}.$$

14.

SLUČAJEVI KAD SE DESNA STRANA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE ZA $X=0$, $Y=0$ JAVLJA U OBLIKU $\frac{0}{0}$

Kad je diferencijalna jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{201}$$

takva da se vrednost $f(0, 0)$ javlja u obliku $\frac{0}{0}$, problem integracije pomoću redova postaje mnogo teži, i on ni do danas još nije u potpunosti rešen, jer još ima specijalnih, u tome pogledu nedovoljno proučenih slučajeva.

Ovde će biti proučeni najvažniji i najčešći slučajevi, u kojima se problem integracije može do kraja rešiti. Problem se može razložiti na pojedine specijalnije probleme koji će biti redom raspravljeni.

A) *Odredba infinitezimalnog reda integrala*

Kad jedna promenljiva količina y, funkcija nezavisno promenljive količine x, teži nuli ako x teži nuli, ona postaje beskrajno mala količina u isto vreme kad i promenljiva x. Pod *infinitezimalnim redom* beskrajno male količine y razume se takav jedan pozitivan broj μ, da količnik $\frac{y}{x^\mu}$ teži konačnoj i od nule različnoj granici H kad x teži nuli.

Pošto se traži integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, to, ako je μ infinitezimalni red integrala, biće za vrednosti x u blizini vrednosti $x=0$

$$\frac{y}{x^\mu} = H + \varepsilon,$$

gde ε teži nuli kad x teži nuli, što se može napisati u obliku

$$y = Hx^{\mu} + \delta, \tag{202}$$

gde i δ teži nuli kad x teži nuli.

Funkcija $f(x, y)$ javlja se za $x = 0$, $y = 0$ u obliku $\frac{0}{0}$. Mi ćemo uzeti da to dolazi otuda, što je $f(x, y)$ količnik

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \tag{203}$$

dveju funkcija φ i ψ holomorfnih u blizini vrednosti $x = 0$, $y = 0$, i takvih da je

$$\varphi(0, 0) = 0, \qquad \psi(0, 0) = 0.$$

Funkcije φ i ψ mogu se, prema tome razviti u dvostruke Maclaurinove redove

$$\varphi(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m y^n, \qquad \psi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n,$$

konvergentne u izvesnim krugovima opisanim oko $x = 0$ i $y = 0$ u ravnima promenljivih x i y.

Zamenivši te izraze u jednačini (201) napisanoj u obliku

$$\psi(x, y)\, y' = \varphi(x, y)$$

ili, prema (202), odakle je

$$y' = \mu H x^{\mu-1} + \delta', \tag{204}$$

u obliku

$$\mu H \psi(x, y)\, x^{\mu-1} = \varphi(x, y) + \eta \tag{205}$$

nalazi se kad se obe strane, posle te smene, urede po stepenima promenljive x, ovo što sleduje:

1° na levoj strani članovi najnižeg reda nalaziće se među članovima oblika $A_{m'n'} x^{m'+\mu n'+\mu-1}$,

2° na desnoj strani oni će se nalaziti među članovima oblika $B_{mn} x^{m+n\mu}$.

Članovi najnižeg stepena po x na levoj i desnoj strani moraju biti među sobom jednaki; neka je na levoj strani to član koji odgovara vrednostima indeksa $n' = \alpha'$, $m' = \beta'$, a na desnoj strani član što odgovara vrednostima indeksa

$n = \alpha$, $m = \beta$.

Tada treba da je

$$\beta' + \mu\alpha' + \mu - 1 = \beta + \mu\alpha,$$

odakle je

$$\mu = \frac{1+\beta-\beta'}{1+\alpha'-\alpha}. \tag{206}$$

Pošto su α, α', β, β' celi brojevi, to jednačina (206) pokazuje *da je infinitezimalni red integrala y u opštem slučaju racionalan broj*. Izuzetak bi mogao biti samo u slučaju kad je u jedan isti mah

$$1+\beta-\beta'=0, \qquad 1+\alpha'-\alpha=0,$$

u kome se slučaju μ javlja u neodređenom obliku $\frac{0}{0}$.

Jednačina (205) važi za svaki par izložilaca

$$m'+\mu n'+\mu-1 \qquad \text{i} \qquad m+\mu n$$

promenljive x na levoj i desnoj strani jednačine (205) pošto se u ovoj smene y i y' svojim vrednostima (202) i (204), ali svaki takav par ne odgovara uslovu koji se ima u vidu, a to je da tako, pomoću odgovarajućeg obrasca (206), dobijen broj μ bude *manji* od sviju onih do kojih bi doveli ostali parovi izložilaca. Takav se najmanji broj μ može u svakome datom slučaju odrediti računski, ali Briot i Bouquet su dali jednu geometrijsku konstrukciju koja taj broj određuje pomoću koeficijenta pravca jedne od strana izvesne poligonalne linije, koja u realnoj ravni xOy prolazi kroz izvesne tačke

$$M(\alpha, \beta+1) \qquad \text{i} \qquad M'(\alpha'+1, \beta)$$

a sve ostale tačke ostavlja na svojoj desnoj strani. Koeficijenat pravca jedne ma koje od strana takve poligonalne linije, kad mu se promeni znak, daje tražen broj μ, i svaka od tih strana određuje po jedan takav broj koji se može smatrati kao infinitezimalni red po jednoga od mogućih integrala y jednačine (201). Takva je linija poznata pod imenom *Briot-Bouquetove poligonalne linije* vezane za datu diferencijalnu jednačinu (201).

B) *Redukcija diferencijalne jednačine na uprošćeni oblik*

Neka je μ jedan od tako dobijenih brojeva što predstavljaju infinitezimalni red integrala y, i neka su

$$n=\alpha, \quad m=\beta, \quad n'=\alpha' \quad m'=\beta'$$

izložioci što figurišu u članu najmanjeg stepena promenljive x na levoj i desnoj strani jednačine (205) posle pomenute smene.

Pošto je μ racionalan broj, stavimo da je

$$\mu=\frac{p}{q},$$

gde su p i q dva cela nesvodljiva broja i izršimo u jednačini smenu

$$x=t^q, \quad y=vt^p,$$

gde je t nova nezavisno promenljiva količina, a v nova nepoznata funkcija.

Prema prethodnoj smeni i pošto je $\mu q=p$ biće

$$\frac{y}{x^\mu}=\frac{y}{t^{\mu q}}=\frac{y}{t^p}=v,$$

a pošto količnik $\frac{y}{x^\mu}$ teži za $x=0$ konačnoj i od nule različitoj granici, vidi se da će i funkcija v za $x=0$ težiti takvoj istoj granici koju ćemo označiti sa λ.

Član $A_{\beta'\alpha'}x^{\beta'}y^{\alpha'}$ razvitka funkcije ψ, na levoj strani jednačine (205), što odgovara najmanjem broju μ, gornjom smenom postaje $A_{\beta'\alpha'}v^{\alpha'}t^{p\alpha'+q\beta'}$, a odgovarajući mu član na desnoj stıani iste jednačine postaje $B_{\beta\alpha}=v^\alpha t^{p\alpha+q\beta}$, a izvod y' postaje

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dt}(vt^p)\frac{dt}{dx}=\frac{pvt^{p-1}-t^p\dfrac{dv}{dt}}{qt^{q-1}}.$$

Prema tome, jednačina (201), napisana u obliku

$$\psi(x,y)\,y'=\varphi(x,y)$$

takvom smenom pomnožena sa qt^{q-1} postaje

$$(207)\quad (A_{\beta'\alpha'}v^{\alpha'}t^{p\alpha'+q\beta'}+\cdots)\left(pt^{p-1}v-t^p\frac{dv}{dt}\right)=(B_{\alpha\beta}v^\alpha t^{p\alpha+q\beta}+\cdots)\,qt^{q-1}$$

gde neispisani članovi na levoj i desnoj strani sadrže više stepene promenljive t.

Po definiciji broja μ, najmanji stepen promenljive t na levoj strani je

$$p\alpha'+q\beta'+p-1$$

a na desnoj to je

$$p\alpha+q\beta+q-1$$

a lako se uviđa da su ta dva izložioca među sobom jednaki, jer je

$$\mu=\frac{p}{q}=\frac{1+\beta-\beta'}{1+\alpha'-\alpha},$$

a prema toj jednakosti je

$$p\alpha' + q\beta' + p = p\alpha + q\beta + q.$$

Ako se zajednička vrednost ova dva broja označi sa h najmanji stepen promenljive t na levoj i desnoj strani jednačine (207) biće t^{h-1}, pa kad se jednačina podeli sa t^{h-1}, ona postaje

$$(208) \qquad (A_{\beta'\alpha'} v^{\alpha'} + \cdots)\left(pv + t\frac{dv}{dt}\right) = q\,(B_{\beta\alpha} v^{\alpha} + \cdots)$$

gde neispisani članovi sadrže stepene promenljive t.

Kad se u jednačini (208) stavi $t=0$, ona daje za v konačnu i od nule različnu vrednost, onu istu koja je maločas označena sa λ. Rezultat te smene biće izvesna jednačina

$$(209) \qquad \Phi(\lambda) = 0$$

koja određuje tu vrednost λ. U toj će jednačini figurisati samo članovi leve i desne strane jednačine (208) koji ne sadrže t, a takvih članova može biti i više od dva, jer članova najnižeg stepena u jednačini (207) može biti dva ili više od dva.

Jednačina (209) je oblika

$$(210) \qquad p\,(A_{\beta'\alpha'} \lambda^{\alpha'} + \cdots) = q\,(B_{\beta\alpha} \lambda^{\alpha} + \cdots),$$

pa uočimo jedan njen koren λ. Za taj će koren, za ovaj mah, biti pretpostavljeno da ne poništava u isti mah posebice i levu i desnu stranu jednačine (210); u daljem izlaganju biće ispitan i takav izuzetan slučaj.

Uvedimo novu nepoznatu funkciju

$$(211) \qquad w = v - \lambda$$

koja će biti jednaka nuli za $t=0$, jer je tada $v=\lambda$. Po binomnom obrascu tada će biti

$$A_{\beta'\alpha'} v^{\alpha'} = A_{\beta'\alpha'} (\lambda + w)^{\alpha'} = A_{\beta'\alpha'} \lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'} \lambda^{\alpha'-1} w + \cdots$$

a tako isto i

$$B_{\beta\alpha} v^{\alpha} = B_{\beta\alpha} (\lambda + w)^{\alpha} = B_{\beta\alpha} \lambda^{\alpha} + \alpha B_{\beta\alpha} \lambda^{\alpha-1} w + \cdots$$

gde neispisani članovi sadrže kao činilac više stepene promenljive w.

Takvom smenom jednačina (208) postaje

$$(212) \qquad \left(A_{\beta'\alpha'} \lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'} \lambda^{\alpha'-1} w + \cdots\right)\left(p\lambda + pw + t\frac{dw}{dt}\right)$$
$$= (B_{\beta\alpha} \lambda^{\alpha} + \alpha B_{\beta\alpha} \lambda^{\alpha-1} w + \cdots)\, q,$$

gde neispisani članovi u zagradama sadrže više stepene promenljive w, kao i razne stepene t promenljive.

Međutim, članovi bez w i t sa leve i desne strane jednačine (212) ulaze u sastav jednačine (209), napisane u obliku (210), i oni iščezavaju, pošto je njihov algebarski zbir, zbog same ove jednačine, jednak nuli. A kad se ti članovi izostave i jednačina (212) posle toga reši po izrazu $t\frac{dw}{dt}$, dobija se jednačina

$$(213) \qquad t\frac{dw}{dt}=\frac{\alpha q B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha-1}w-\alpha' p A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}w-p A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}w+\cdots}{A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}+\alpha' A_{\beta'\alpha'}w+\cdots},$$

gde neispisani članovi sadrže stepene promenljive t i više stepene promenljive w.

Svi sabirci u brojiocu desne strane jednačine (213) sadrže kao činilac bilo w, bilo t, a tako isto i svi sabirci imenioca, osim prvog sabirka, koji to ne sadrži. Prema tome, za $t=0$, $w=0$ brojilac postaje jednak nuli, a imenilac je različan od nule. Jednačina (213) je, dakle, oblika

$$(214) \qquad t\frac{dw}{dt}=F(t, w),$$

gde je F funkcija promenljivih t i w, holomorfna za $t=0$, $w=0$, koja i sama postaje jednaka nuli za te vrednosti promenljivih.

Kao zaključak iz svega ovoga dobija se ova teorema:

Kada je data diferencijalna jednačina

$$y'=f(x, y)$$

takva da se vrednost $f(0, 0)$ javlja u obliku $\frac{0}{0}$, jednačina je u opštem slučaju, smenom nezavisno promenljive i nepoznate funkcije svodljiva na oblik

$$(215) \qquad x\frac{dy}{dx}=F(x, y),$$

gde je F funkcija promenljive x i y, holomorfna za $x=0$, $y=0$.

Izuzetni slučaj biće ispitan u toku daljeg izlaganja.

C) *Proučavanje redukovane jednačine*

Pošto je funkcija F holomorfna u blizini vrednosti x i y, ona se može razviti u dvostruki Maclaurinov red oblika

$$F(x, y)=ay+bx+cy^2+exy+hx^2+\cdots$$

gde će nedostajati član bez x i y, pošto je $F(0, 0)=0$. Koeficijenti

$$a, b, c, e, h \ldots$$

su stalni brojevi. I onda treba ispitati: u kakav se red može razviti integral y jednačine

$$xy' = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \cdots \tag{216}$$

(gde neispisani članovi sadrže stepene promenljivih x i y više od 2) koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. Biće pokazano da *priroda integrala i oblik integralnog reda zavise prvenstveno od koeficijenta a,* tj. od koeficijenta člana sa prvim stepenom promenljive y na desnoj strani jednačine (216).

Koeficijenat a može biti realan ili imaginaran. Kad je realan, izvesnom smenom promenljive y može se uvek učiniti da on bude *negativan,* izuzimajući slučaj kad je on jednak nuli, u kome slučaju ga treba ostaviti takvog kakav je. Ako je imaginaran, izvesnom smenom može se uvek učiniti da njegov realan deo bude *negativan* (ili nula). To se postiže smenom funkcije y

$$y = -\left(\frac{b}{a-1} + z\right)x \tag{217}$$

gde je z nova nepoznata funkcija. Odatle je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a-1} - z - x\frac{dz}{dx} \tag{218}$$

pa dakle

$$x\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a-1} - xz - x^2\frac{dz}{dx} \tag{219}$$

a u isto vreme je

$$ay + bx + \cdots = -\frac{ab}{a-1}x - axz + bx + \cdots \tag{220}$$

Kad se, dakle, prema jednačini (216) ujednače (219) i (220) dobija se jednačina

$$-xz - x^2\frac{dz}{dx} = -axz + \cdots \tag{221}$$

gde će svi neispisani članovi sadržati x^2 kao činilac, jer svi oni sadrže bilo x, bilo y, a y prema (217) sadrži x kao činilac. Jednačina (221), skraćena sa x pa rešena po izrazu $x\dfrac{dz}{dx}$ postaje

$$x\frac{dz}{dx} = (a-1)z + \Delta \tag{222}$$

gde Δ označuje skup članova koji sadrže kao činioce x i z.

Jednačina (222) izražava $x\dfrac{dz}{dx}$ kao funkciju promenljivih x i z holomorfnu za $x=0, z=0$ i gde desna strana jednačine postaje jednaka nuli za te vrednosti x i z. Jednačina je, dakle, istoga oblika kao jednačina (216), samo što je u njoj koeficijenat nepoznate funkcije na prvom stepenu smanjen za jedinicu. Jedini slučaj kad je takvo smanjivanje nemogućno, bio bi taj kad je $a=1$, jer je tada smena (217) nemogućna. Taj izuzetan slučaj biće u daljem izlaganju naknadno ispitan.

Ponovivši istu smenu (217) na novoj jednačini (222), dobila bi se opet jednačina istoga oblika, ali gde bi koeficijenat a, bio smanjen za dve jedinice. I ako se smena ponovi onoliko puta koliko ima celih jedinica u realnom delu broja a, dobiće se jednačina istoga oblika (216), ali *gde će realni deo toga broja biti ili nula, ili negativan broj.*

U svemu što sleduje biće pretpostavljeno da je takvo svođenje već izvršeno, tj. da je realni deo broja a nula ili negativan broj. Vratimo se tada diferencijalnoj jednačini

(223) $$xy' = ay + bx + \cdots = f(x, y)$$

gde je takav koeficijenat α i pokušajmo zadovoljiti je integralnim redom oblika

(224) $$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

Ako takav red može zadovoljiti jednačinu (223) onda se njegov opšti koeficijenat izračunava po obrascu

(225) $$A_n = \frac{1}{n!}\,[y^{(n)}].$$

Uzastopni izvodi $y', y'', y''' \ldots$ funkcije y, potrebni za to izračunavanje, odredili bi se iz same diferencijalne jednačine (223). Kad bi se oni izračunaval na običan, način, kao za jednačinu

$$y' = f(x, y),$$

gde je f holomorfna funkcija za $x=0$, $y=0$, vrednosti

$$[y'],\ [y''],\ [y'''], \ldots$$

javile bi se u obliku $\dfrac{0}{0}$ i bile bi neodređene. Međutim način, koji će ovde biti sad upotrebljen, ne dovodi do te neodređenosti.

Označimo sa r i r' poluprečnike krugova opisanih u x-ravni oko središta $x=0$, odnosno u y-ravni oko središta $y=0$, i takvih da je $f(x, y)$ za sve vrednosti x i y u tim krugovima i na njihovim rubovima holomorfna. Neka je M

maksimum modula te funkcije u posmatranoj oblasti. Posmatrajmo prethodno običnu jednačinu

(226) $$u = f(x, u).$$

Ona određuje u kao implicitnu funkciju od x, koja je za $x=0$ jednaka nuli, jer je $f(0, 0)=0$, a osim toga i uniformna oko $x=0$, jer kada to ne bi bila, $y=0$ bi bio višestruki koren jednačine

$$u - f = (0, u) = 0,$$

poništio bi se dakle i izvod leve strane te jednačine, tj. bilo bi

$$1 - \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right] = 0,$$

što znači $1-a=0$, a to ne može biti jer je po pretpostavci $a \neq 1$. Dakle $u(x)$ je holomorfna oko $x=0$, pa se može razviti u red oblika

(227) $$u = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \cdots$$

Izračunajmo uzastopne izvode funkcije $u(x)$. Iz (226) se dobija

(228) $$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2 u}{dx^2}, \\ \frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3 u}{dx^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odatle se dobija za $x=0$, $u=0$, imajući u vidu i razvitak funkcije $f(x, y)$ u obrascu (223),

(229) $$\begin{aligned} \left[\frac{du}{dx}\right] &= \frac{b}{1-a}, \\ \left[\frac{d^2 u}{dx^2}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]}{1-a}, \\ \left[\frac{d^3 u}{dx^3}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots\right]}{1-a}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kako je $a \neq 1$, imenioci su različiti od nule, dakle leve strane imaju konačne vrednosti. Od njih će zavisiti veličina kruga konvergencije reda (227). Da bi se dobio jedan krug u kome će taj red nasigurno konvergirati, traži se jedna funkcija $v(x)$, čiji će Maclaurinov red biti majorantni red za red (227). Takva se funkcija dobija pošav od funkcije

$$\varphi(x, v) = Av + Bx + M\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{xv}{rr'} + \frac{v^2}{r'^2} + \cdots + \frac{x^m v^n}{r^m r'^n} + \cdots\right),$$

gde A označava takav pozitivan broj manji od 1, da je $1 - A \leqslant |1 - a|$, a B moduo b. Lako se nalazi

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = B,$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right] = A,$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] = \frac{2M}{r^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial v}\right] = \frac{M}{rr'}, \ldots$$

i uopšte

$$\left[\frac{\partial^{m+n} \varphi}{\partial x^m\, \partial v^n}\right] = \frac{m!\, n!\, M}{r^m r'^n},$$

a to znači, prema značenju veličina M, r i r' i prema stavu B) na strani 26 ove knjige, da za moduo svakog izvoda funkcije $f(x, u)$ postoji odnos

$$\text{mod}\left[\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial u^n}\right] \leqslant \left[\frac{\partial^{m+n} \varphi}{\partial x^m\, \partial v^n}\right]. \tag{230}$$

Posmatrajmo sada jednačinu

$$v = \varphi(x, v). \tag{231}$$

Ona određuje v kao funkciju od x, slično kao jednačina (226) što određuje u kao funkciju od x. Zato se, slično obrascima (228), dobija

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{d^2 v}{dx^2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{232}$$

i otuda

$$\left[\frac{dv}{dx}\right]=\frac{B}{1-A},$$

(233)
$$\left[\frac{d^2 v}{dx^2}\right]=\frac{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}{1-A},$$

$$\vdots$$

Imenioci su pozitivni, a isto tako i izvodi funkcije φ za $x=0$, $v=0$. Prva jednačina daje $\left[\frac{dv}{dx}\right]$ kao pozitivnu veličinu. Smenivši je u drugu jednačinu, dobija se brojilac u toj jednačini kao zbir pozitivnih veličina; dakle je i $\left[\frac{d^2 v}{dx^2}\right]$ pozitivna veličina. Na taj način se pokazuje da su uopšte svi izvodi funkcije v po x za $x=0$ pozitivni.

Uporedimo sada obrasce (229) i (233). Pošto je $|1-a|\geqslant 1-A$, to je

(234)
$$\operatorname{mod}\left[\frac{du}{dx}\right]\leqslant\left[\frac{dv}{dx}\right].$$

U drugoj jednačini (229) dobiće se vrednost veća po modulu, ako se mesto modula brojioca uzme zbir modula njegovih članova, a tada se nalazi da je, na osnovu obrazaca (230) i (234),

$$\operatorname{mod}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,du}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\leqslant\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]+2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial v}\right]\cdot\left[\frac{dv}{dx}\right]+\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right]\cdot\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right],$$

a odatle sleduje

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^2 u}{dx^2}\right]\leqslant\left[\frac{d^2 v}{dx^2}\right].$$

Tako se dobija i dalje, dakle uopšte

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^n u}{dx^n}\right]\leqslant\left[\frac{d^n v}{dx^n}\right].$$

Dakle će Maclaurinov red za $v(x)$ biti zaista majorantan za red (227) funkcije $u(x)$. Jednačina (231) koja definiše funkciju $v(x)$ u stvari je algebarska i može se pisati u obliku

$$\left(\frac{M}{r}-B\right)x+\left(\frac{M}{r'}-A+1\right)v+M=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)},$$

te joj se lakše može naći i poluprečnik R konvergencije njenog Maclaurinovog reda. Kad je ovaj nađen, znamo dakle da red (227) nasigurno konvergira u krugu $|x|<R$.

Posle ovih pripremnih posmatranja jednačine (226) i njenog rešenja datog u obliku reda (227) može se dokazati *da je diferencijalna jednačina* (223) *zaista zadovoljena integralnim redom oblika* (224), *i da ovoj nasigurno konvergira u krugu čiji poluprečnik ima pomenutu veličinu R.*

Uzastopnim diferencijaljenjem jednačine (223) dobija se

$$
\begin{aligned}
& y'+xy''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y',\\
& 2y''+xy'''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y'',\\
& 3y'''+xy''''=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y}y''',\\
& \qquad\vdots
\end{aligned}
\tag{235}
$$

a kad se stavi $x=0$, $y=0$ i primeti da se drugi član na levoj strani svake jednačine gubi i da je $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=a$, odatle proizilazi

$$
\begin{aligned}
& [y']=\frac{b}{1-a},\\
& [y'']=\frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2\right]}{2-a},\\
& [y''']=\frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots\right]}{3-a},\\
& \qquad\vdots
\end{aligned}
\tag{236}
$$

i uopšte

$$
[y^{(n)}]=\frac{\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\cdots\right]}{n-a}.
$$

Pošto je realni deo broja a negativan, to ako se stavi $a=-\alpha+\beta i$, biće

$$|1-a|^2=(1+\alpha)^2+\beta^2, \quad |n-a|^2=(n+\alpha)^2+\beta^2 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

dakle

$$|n-a| \geqslant |1-a|. \tag{237}$$

Prema tome je

$$\operatorname{mod}[y^{(n)}] \leqslant \operatorname{mod} \frac{\left[\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}+\cdots\right]}{1-a}. \tag{238}$$

Međutim izraz na desnoj strani ove nejednačine istovetan je sa modulom desne strane u odgovarajućoj jednačini (229), dakle je

$$\operatorname{mod}[y'] \leqslant \operatorname{mod}\left[\frac{du}{dx}\right],$$

$$\operatorname{mod}[y''] \leqslant \operatorname{mod}\left[\frac{d^2 u}{dx^2}\right],$$

$$\operatorname{mod}[y'''] \leqslant \operatorname{mod}\left[\frac{d^3 u}{dx^3}\right],$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{mod}[y^{(n)}] \leqslant \operatorname{mod}\left[\frac{d^n u}{dx^n}\right],$$

a to znači da je uopšte i

$$|A_n| \leqslant |B_n|. \tag{239}$$

Otuda sleduje obećani zaključak, da je i integral

$$y=A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\cdots$$

posmatrane diferencijalne jednačine

$$xy'=f(x, y)$$

konvergentan u krugu $|x|<R$.

Naposletku ostaje još i pitanje: da li na gornji način dobijeni integralni red (224) daje jedini integral jednačine (223) koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$? Može se dokazati da je to odista slučaj: pod dosadašnjom pretpostavkom, da je realni deo broja a negativan ili jednak nuli to je jedini integral te vrste koji je holomorfna funkcija promenljive x.

Da bi se to dokazalo, neka je y integral predstavljen redom (223), a $y+z$ drugi jedan integral jednačine (223) koji za $x=0$ postaje $y+z=0$, što znači da za $x=0$ treba da bude i $z=0$. Pošto oba integrala treba da zadovolje istu jednačinu (223), treba da bude

$$xy' = ay + bx + cy^2 + \cdots$$

$$x(y'+z') = a(y+z) + bx + c(y+z)^2 + \cdots$$

Kad se prva jednačina oduzme od druge, na desnoj strani razlike nestaće svih članova koji zavise samo od x ili samo od y, tako da će svi članovi što ostaju sadržati promenljivu z, što daje

$$xz' = az + 2\,cyz + kz^2 + \cdots$$

Ako se u toj jednačini y smeni svojim integralnim redom (224), ona se pretvara u jednu jednačinu čija će desna strana biti sastavljena:

1° iz jednoga reda oblika

$$az + lz^2 + sz^3 + \cdots = z\,\varphi(z) \tag{240}$$

što zavisi samo od promenljive z;

2° iz jednoga dvostrukog reda po x i z, čiji svaki član sadrži i x i z [jer je skup članova što zavise samo od x iščezao malopređašnjim oduzimanjem, a skup članova što zavise samo od z izdvojen je kao red (240)], i koji će prema tome biti oblika

$$xz\,\psi(x, z)$$

gde je ψ jedna funkcija holomorfna za vrednosti $x=0$, $y=0$. Kad se u toj funkciji smeni z svojim izrazom kao holomorfna funkcija promenljive x, ψ će biti holomorfna funkcija same promenljive x (za $x=0$), koja ako se označi sa $\lambda(x)$, nova, tako transformisana jednačina biće oblika

$$xz' = z\,\varphi(z) + xz\,\lambda(x)$$

pa se deleći je sa $xz\,\varphi(z)$, a zatim množeći sa dx, iz nje dobija

$$\frac{dz}{z\,\varphi(z)} = \frac{dx}{x} + \frac{\lambda(x)}{\varphi(z)}\,dx. \tag{241}$$

Funkcija

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{a + lz + sz^2 + \cdots}$$

pošto je holomorfna funkcija za $z=0$, može se razviti u red oblika

$$\frac{1}{a} + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots$$

a funkcija $\frac{\lambda(x)}{\varphi(z)}$, kad se u njoj smeni z holomorfnom funkcijom promenljive x (kakva se pretpostavlja da je) postaje i sama holomorfna funkcija te promenljive, koja će biti označena sa $\mu(x)$.

Jednačina (241) pomnožena sa a, javlja se dakle u obliku

$$\frac{dz}{z} + a(C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \cdots)\, dz = a\frac{dx}{x} + a\mu(x)\, dx \tag{242}$$

pa se, integraleći joj levu stranu u granicama z_0 i z, a desnu u granicama x_0 i x, dobija

$$\log\frac{z}{z_0} + aC(z) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^a + aL(x)$$

gde je

$$C(z) = C_1(z - z_0) + \frac{C_2}{2}(z^2 - z_0^2) + \cdots, \qquad L(x) = \int_{x_0}^{x} \mu(x)\, dx,$$

a odatle je

$$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^a e^{a[L(x) - C(z)]}. \tag{243}$$

Pustimo sad da x teži nuli. Leva strana jednačine (243) težiće takođe nuli, pošto po pretpostavci i z tada teži nuli. Funkcije $C(z)$ i $L(x)$ teže konačnim granicama pa dakle izraz $e^{a[L(x)-C(z)]}$ ostaje pri tom konačan i različan od nule. A da bi se videlo što će biti sa izrazom $\left(\frac{x}{x_0}\right)^a$, stavimo da je

$$\frac{x}{x_0} = \varrho\, e^{\theta i} \qquad a = \alpha + \beta i$$

pa će biti $\left(\frac{x}{x_0}\right)^a = \varrho^\alpha e^{-\beta\theta} \cdot e^{(\beta \log \varrho + \alpha\theta)i}$, iz čega je $\left|\frac{x}{x_0}\right|^a = \varrho^\alpha e^{-\beta\theta}$.

Kad je α negativno, izraz na levoj strani dobija beskrajno veliku vrednost kad vrednost x, pa prema tome i ϱ, teži nuli; kad je $\alpha = 0$, taj izraz postaje $\varrho^{-\beta\theta}$ i ima konačnu i od nule različnu vrednost.

Jednačina (243) ima, dakle, za $x = 0$, $z = 0$ svoju levu stranu jednaku nuli, a svoju desnu stranu beskrajno veliku ili konačnu i od nule različnu. Pošto tako ne može biti, ne može postojati ni pretpostavka da pored nađenog integrala y jednačine (223) postoji još jedan holomorfan integral $y + z$ koji bi, kao i onaj prvi dobio vrednost $z = 0$ za $x = 0$. Nađeni integral y, izražen u obliku reda (224), jedini je integral te vrste.

A iz cele ove diskusije izvodi se teorema:

Kad god je u redukovanoj diferencijalnoj jednačini (223), *tj. svedenoj na oblik*

$$xy' = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \cdots \tag{244}$$

realni deo koeficijenta a negativan, ili jednak nuli, jednačina ima jedan, i to samo jedan holomorfan partikularni integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. Taj se integral može razviti u red uređen po stepenima promenljive x, koji će biti konvergentan u jednome određenom krugu opisanom oko tačke $x=0$.

Integral se, u pojedinim specijalnim slučajevima, može svesti i na $y=0$, kao što je npr. slučaj sa jednačinom

$$xy' = -my + a\,xy \qquad (m>0),$$

čiji je opšti integral

$$y = C\frac{e^{ax}}{x^m}.$$

D) *Izuzetni slučajevi*

I

Videli smo u odeljku pod A), pre redukovanja diferencijalne jednačine na oblik (244), da se infinitezimalni red μ integrala y, koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, izračunava iz jedne jednačine oblika

$$\alpha'\mu + \beta' + \mu - 1 = \alpha\mu + \beta \tag{245}$$

gde su $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, izložioci promenljivih x i y što figurišu u izvesna dva člana jednačine (205).

Broj μ je u opštem slučaju *realan racionalan broj*. Ali se može desiti da je jednačina (245) identički zadovoljena za proizvoljnu vrednost μ, što će biti kad je u jedno isto vreme

$$1 - \alpha + \alpha' = 0, \quad 1 + \beta - \beta' = 0,$$

i ono što je napred kazano u vezi sa racionalnošću broja μ, tada više ne važi. Broj μ tada može biti i *iracionalan*, kao i *imaginaran*; u takvom izuzetnom slučaju može se desiti da se u integralu y javljaju iracionalni ili imaginarni stepeni, pa da je vrednost $x=0$ *transcendentan kritički singularitet integrala*.

Takav je, na primer, slučaj sa diferencijalnom jednačinom

$$xy' = \lambda\, y,$$

gde je λ kakav realan pozitivan iracionalan, ili imaginaran broj sa pozitivnim realnim delom. Tada je

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$$

i jednačina (245) svodi se na identičnost. Opšti integral jednačine

$$y = Cx^{\lambda}$$

pokazuje da svi partikularni integrali dobijaju za $x = 0$ vrednost $y = 0$, a imaju vrednost $x = 0$ kao transcendentnu kritičku tačku.

II

U odeljku B), pri redukciji diferencijalne jednačine (201) na svedeni oblik (223), bilo je pretpostavljeno za jednačinu (209)

$$\Phi(\lambda) = 0,$$

koja je oblika (210) tj.

$$p\,(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \cdots) = q\,(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \cdots), \tag{246}$$

da njen uočeni koren λ ne poništava u isti mah posebice i jednu i drugu stranu jednačine. Proučimo sad takav izuzetan slučaj, kad je za takav koren λ

$$A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \cdots = 0, \qquad B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \cdots = 0.$$

Tada se članovi na levoj i desnoj strani jednačine (208), koji ne sadrže t potiru i jednačina (208) javlja se u obliku

$$(g'\,t + h'\,v + \cdots)\,t\frac{dv}{dt} = gt + hv + \cdots,$$

tj. u obliku

$$t\frac{dv}{dt} = \frac{gt + hv + \cdots}{g't + h'v + \cdots} \tag{247}$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljivih t i v. Ako se tada izvrši smena

$$gt + hv = tu,$$

gde je u nova nepoznata funkcija, dobija se

$$v = \frac{t}{h}(u - g), \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{u-g}{h} + \frac{t}{h}\frac{du}{dt}, \tag{248}$$

tako da će članovi transformisane jednačine, koji sadrže stepene promenljive u, sadržati tolike iste stepene promenljive t.

Leva strana jednačine (247) takvom smenom dobija oblik

$$atu+bt+\frac{t^2}{h}\,\frac{du}{dt}$$

a desna strana oblik

$$\frac{tu+\cdots}{lt+ktu+\cdots}$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljive t. Skrativši brojilac i imenilac sa t, poslednji se izraz javlja u obliku

$$\frac{u+\cdots}{l+ku+\cdots} \tag{249}$$

gde neispisani članovi sadrže stepene promenljive t.

Sa druge strane, pošto, kad se u jednačini (247) smeni v svojom vrednošću (248), imenilac izraza na desnoj strani dobija oblik

$$\left(g'-\frac{gh'}{h}\right)t+\frac{h'}{h}ut+\cdots,$$

to koeficijenat l u izrazu (249) ima za vrednost

$$l=g'-\frac{gh'}{h}.$$

Jednačina (247), dakle, smenom (248) postaje

$$atu+bt+\frac{t^2}{h}\,\frac{du}{dt}=\frac{u+\cdots}{l+ku+\cdots}$$

ili

$$t^2\frac{du}{dt}=\frac{hu+\cdots}{l+ku+\cdots}-ahut-bht=\frac{hu+st+\cdots}{l+ku+\cdots}. \tag{250}$$

Ako je $l\neq 0$ desna strana poslednje jednačine je jednaka nuli za $t=0$, $u=0$ i holomorfna funkcija promenljivih t i u za te njihove vrednosti. Ona se prema tome može razviti u dvostruki red po stepenima tih promenljivih, pa će jednačina (250) postati

$$t^2\frac{du}{dt}=\alpha u+\beta t+\cdots \tag{251}$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljivih t i u.

Kao što se vidi, *namesto redukovane jednačine ranijeg oblika*

$$xy'=ay+bx+\cdots$$

javlja se redukovana jednačina oblika

(252) $$x^2 y' = ay + bx + \cdots$$

gde neispisani članovi, kad postoje, sadrže više stepene promenljivih x i y.

Za jednačine oblika (252) *vrednost* $x = 0$ *je uopšte esencijalni singularitet integrala* y. To se vidi, npr. na prostome primeru jednačine

(253) $$x^2 y' = ay$$

čiji je opšti integral

$$y = Ce^{-\frac{a}{x}}$$

i ima vrednost $t = 0$ kao esencijalnu tačku.

Isto se vidi i iz potpunije jednačine

(254) $$x^2 y' = ay + bx$$

čiji je opšti integral

$$y = e^{-\frac{a}{x}}\left(C + b\int e^{\frac{a}{x}}\frac{dx}{x}\right)$$

i ima takođe $x = 0$ kao esencijalnu tačku.

Od interesa je navesti za jednačine oblika (252) još i ovu osobenost: u u opštem slučaju, kad bi se pokušalo da se jednačina zadovolji redom oblika

(255) $$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

svi bi se koeficijenti $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mogli izračunati iz same jednačine; svi bi bili konačni i određeni, i tako formirani red bi odista zadovoljavao diferencijalnu jednačinu, pa ipak, ne bi bio konvergentan ni za koju vrednost x.

Tako npr., ako se y, definisano redom (255), smeni u jednačini (254), pa se među sobom ujednače koeficijenti istih stepena promenljive x sa leve i desne strane jednačine, dobija se niz jednačina

$$aA_1 + b = 0,$$

$$A_1 = aA_2, \qquad 2A_2 = aA_3, \qquad 3A_3 = aA_4, \ldots$$

iz kojih se nalazi da je

$$A_1 = -\frac{b}{a}, \qquad A_2 = -1!\frac{b}{a^2}, \qquad A_3 = -2!\frac{b}{a_3}, \ldots$$

i uopšte

$$A_n = -(n-1)!\frac{b}{a_n}.$$

Međutim, tako određen red

$$y=-b\left[\frac{x}{a}+1!\left(\frac{x}{a}\right)^2+2!\left(\frac{x}{a}\right)^3+3!\left(\frac{x}{a}\right)^4+\cdots\right]$$

nije konvergentan ni za koju vrednost x. Na istu se činjenicu nailazi i za opštu jednačinu (252), izuzimajući njen specijalan slučaj (253), u kome se nalazi za sve koeficijente A_n da su jednaki nuli. Sve to proizlazi iz toga, *što je vrednost* $x=0$ *esencijalni singularitet integrala, pa se ovaj može razviti ne po stepenima promenljive* x, *već po stepenima promenljive* $\frac{1}{x}$, kao što se to vidi i iz gornjih primera.

III

Videli smo u prednjem odeljku II da se diferencijalna jednačina (247) smenom

$$gt+hv=tu$$

svodi na oblik

$$t^2\frac{du}{dt}=\frac{hu+st+\cdots}{l+ku+\cdots}$$

gde koeficijenat l ima za vrednost $l=g'-\frac{gh'}{h}$.

Može se u kome specijalnom slučaju desiti da bude $l=0$; jednačina se tada svodi na oblik

(256) $$t^2\frac{du}{dt}=\frac{hu+st+\cdots}{ku+\cdots}$$

i njena desna strana nije više holomorfna za $t=0$, $u=0$. Ako se tada u (256) izvrši smena slična malopređašnjoj, tj. ako se stavi da je

$$hu+st=vt,$$

gde je v nova nepoznata funkcija, nova će jednačina biti oblika

$$t^3\frac{dv}{dt}=\frac{h_1v+s_1t+\cdots}{l_1+k_1v+\cdots}.$$

Ako bi se desilo da je i $l_1=0$, izvršili bismo ponova smenu iste vrste, koja bi se ponavljala sve dotle dok se ne dođe u imeniocu do jednoga koeficijenta l koji više nije jednak nuli. Poslednja tako dobijena jednačina bila bi oblika

$$t^m\frac{dw}{dt}=\frac{hw+qt+\cdots}{l+pt+\cdots}.$$

Pa pošto je tada desna strana jednačine holomorfna za $t=0$, $w=0$, ona se može razviti u dvostruki red po stepenima promenljivih t i w, tako da se jednačina svodi na definitivan oblik

$$x^m y' = ay + bx + \cdots \tag{257}$$

Takva jednačina uopšte (izuzimajući neke vrlo specijalne slučajeve) nema integrala y koji bi za $x=0$ dobio vrednost $y=0$, a koji bi se mogao razviti u red oblika

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots \tag{258}$$

kao što se to već vidi iz specijalnih slučajeva te jednačine, kao što su jednačine (253) i (254).

IV

Pri proučavanju redukovane jednačine

$$xy' = ay + bx + \cdots \tag{259}$$

videli smo da kad koeficijenat a ima svoj realni deo negativan ili jednak nuli, on se može razviti u red oblika (258), koji će biti konvergentan za vrednosti x u jednom određenom krugu opisanom oko tačke $x=0$ u ravni promenljive x. Osim toga pokazano je da pored tako određenog integrala y ne postoji više nikakav integral koji ispunjava uslov da za $x=0$ dobije vrednost $y=0$.

Kad broj a ne ispunjava takav uslov, nastaju izuzetni slučajevi, i ovi mogu biti raznovrsni. Svaki od njih zahteva naročito proučavanje, slično onome koje je izvedeno u dosadašnjem izlaganju. Rezultati u pogledu razvijanja integrala u red takođe su raznovrsni, prema aritmetičkim pojedinostima vezanim za broj a. Tako na primer:

Za sučajeve *kad je realan deo broja a pozitivan*, Briot i Bouquet, upotrebom iste metode koja je upotrebljena u ovome što prethodi, našli su da

1° Jednačina (259) ima opet za integral red oblika (258), ali pored njega može imati još i beskrajno mnogo drugih integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$, ali se ne mogu razviti u red oblika (258).

2° *Kad je a kakav realan, pozitivan i racionalan broj* $\frac{m}{n}$, integral y se može razviti u red uređen po stepenima izraza $\sqrt[n]{x}$

$$y = A_1 \sqrt[n]{x} + A_2 \left(\sqrt[n]{x}\right)^2 + A_3 \left(\sqrt[n]{x}\right)^3 + \cdots$$

konvergentan za vrednosti x u jednome određenom krugu opisanom oko tačke $x=0$ u ravni x. Taj integral ima vrednost $x=0$ kao svoju *algebarsku kritičku* *tačku n-toga reda,* a osim njega jednačina nema nikakvih drugih integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$.

Prost primer za to daje jednačina

$$xy'=\frac{m}{n}y$$

čiji je opšti integral

$$y=C\left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

3° *Kad je* $a=1$, *a koeficijenat* b *različan od nule,* ne postoji integral y koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ i koji bi se mogao razviti u red oblika (258), ali ima beskrajno mnogo takvih integrala koji se mogu razviti u redove drugih oblika.

Prost primer daje jednačina

$$xy'=y+bx$$

čiji je opšti integral

$$y=Cx+bx\log x.$$

4° *Kad je* $a=1$, $b=0$, jednačina ima beskrajno mnogo integrala koji za $x=0$ dobijaju vrednost $y=0$ i od kojih se svaki može razviti u red (258).

Prost primer daje jednačina

$$xy'=y$$

čiji je opšti integral

$$y=Cx.$$

Da bi se kako treba razumeli rezultati Briot-Bouqueta, treba imati u vidu da oni pod integralom y, koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, razumeju i trivijalni integral y identički jednak nuli, kao i svaki integral

$$y=A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n$$

čiji se integralni red svodi na ograničen broj članova.

Tako npr. jednačina

$$y'=y,\quad y=Ce^x$$

ima kao jedini svoj integral, koji ispunjava uslov $x=0$, $y=0$, trivijalni integral y identički $=0$.

Jednačina

$$xy'=ay,\quad y=Cx^a,\quad a>0,$$

ima beskrajno mnogo integrala sa uslovom $x=0$, $y=0$, među kojima je i trivijalni integral $y=0$. Kad je a kakav imaginaran broj sa pozitivnim realnim delom, tako da je

$$a=\alpha+\beta i,\quad \alpha>0,$$

postoji integral y identički jednak nuli, i pored njega beskrajno mnogo integrala koji za $x=0$ postaju $y=0$, a koji se ne mogu razviti u red uređen po stepenima promenljive x. Ti su integrali oblika

$$y = Cx^{p+qi} = Cx^p [\cos(q \log x) + i \sin(q \log x)].$$

Dopunjujući rezultate Briota i Bouqueta, Poincaré je dokazao još i ove teoreme:

5° *Kad je a kakav ceo pozitivan broj*, jednačina ima beskrajno mnogo partikularnih integrala koji za $x=0$, postaju $y=0$, a svaki se od njih može razviti u red po stepenima dveju promenljivih t i z, koje su

$$t = x, \quad z = \log x.$$

Prost primer daje jednačina

$$xy' = y + bx$$

čiji je opšti integral

$$y = Cx + bx \log x.$$

6° *Kad a nije ceo pozitivan broj, a ima svoj realan deo pozitivan*, jednačina ima jedan integral koji za $x=0$ postaje $y=0$, i koji se može razviti u red uređen po stepenima promenljive x; pored njega ona ima još beskrajno mnoga integrala koji takođe postaju $y=0$ za $x=0$, a od kojih se svaki može razviti u red po stepenima dveju promenljivih t i u koje su

$$t = x, \quad u = x^a.$$

Prost primer daje jednačina

$$xy' = ay + bx$$

čiji je opšti integral

$$y = \frac{b}{1-a} x + Cx^a$$

koji, kad je realni deo broja a pozitivan, teži nuli za $x=0$, a samo se jedan od partikularnih integrala, onaj što odgovara vrednosti konstante $C=0$, svodi na ograničen red po stepenima promenljive x.

15.

SLUČAJ KAD DESNA STRANA JEDNAČINE IMA VREDNOSTI X=0, Y=0 KAO KRITIČKE SINGULARITETE

Kad je data diferencijalna jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{260}$$

može se desiti da početni par vrednosti $x=0$, $y=0$ poništava kakav potkoreni izraz što figuriše u funkciji $f(x, y)$. To se, na primer, dešava kad jednačina (260) predstavlja jedno rešenje po izvodu y' kakve algebarske diferencijalne jednačine

$$F(x, y, y') = 0 \tag{261}$$

gde je F polinom po x, y, y'. Tada je par vrednosti $x=0$, $y=0$ jedan par *algebarskih kritičkih tačaka* funkcije $f(x, y)$.

U kakav se red tad može razviti integral y jednačine, koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$?

Uočimo najpre jednačinu

$$f_2(x, y)\, y'^2 + f_1(x, y)\, y' + f_0(x, y) = 0 \tag{262}$$

gde su f_0, f_1, f_2 polinomi po x i y. Ona ima dva rešenja po izvodu y' i to

$$y' = \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4 f_0 f_2}}{2 f_2}$$

(263)

$$y' = \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4 f_0 f_2}}{2 f_2}.$$

Pretpostavimo najpre da funkcija

$$f_1^2 - 4 f_0 f_2 \tag{264}$$

(koja je polinom po x i y) nije jednaka nuli za $x=0$, $y=0$. Onda se za y' imaju dva prosta korena (263) jednačine (262), različita jedan od drugoga. Par $x=0$, $y=0$ nije nikakav par algebarskih kritičkih singulariteta za funkciju na desnoj strani jednačine (260).

U svakoj od dveju jednačina (263) desna strana je funkcija holomorfna za $x=0$, $y=0$, pa se prema tome na obe te jednačine može primeniti osnovna Briot-Bouquetova teorema; prema ovoj, svaka će od tih dveju jednačina dati po jedan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ i koji se može razviti u red oblika

$$y=a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\cdots$$

konvergentan za vrednost x u jednome krugu opisanom oko tačke $x=0$ u ravni x, određenom na način koji propisuje ta teorema.

Izuzetak se može imati samo u slučajevima kad desna strana jednačine postane beskrajna za $x=0$, $y=0$, ili se javi u obliku $\dfrac{0}{0}$; u tim bi se slučajevima integral proučio na napred navedeni način, posle podesne smene promenljivih.

Pretpostavimo sada da funkcija (264) dobija vrednost nulu za par vrednosti $x=0$, $y=0$. Tada se oba korena (263) jednačine (262) stapaju u jedan njen dvostruki koren, koji je

$$y'=-\frac{f_1}{2f_2},$$

a takav par vrednosti x, y je jedan par algebarskih kritičkih tačaka za desnu stranu jedne i druge jednačine (263). To su tada algebarske kritičke tačke drugog reda, jer koreni činioci što im odgovaraju stoje pod znakom kvadratnog korena. A pošto je $x=0$ takva kritička tačka za izvod y' (jednak desnoj strani tih jednačina), to će vrednost $x=0$ biti algebarska kritička tačka drugog reda i za samo y. Prema poznatoj teoremi iz teorije funkcija, y se tada *može razviti u red uređen po stepenima izraza $\sqrt{x}$, koji će biti konvergentan u jednome određenom krugu oko $x=0$ u ravni x.*

Uočimo sad opštu algebarsku diferencijalnu jednačinu prvog reda, koja se uvek može napisati u obliku

$$f_m y'^m+f_{m-1} y'^{m-1}+\cdots+f_1 y'+f_0=0 \tag{265}$$

gde su

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m \tag{266}$$

dati polinomi po promenljivima x i y.

Smenimo u funkcijama (266) vrednosti $x=0$, $y=0$, pa će one postati konstante

$$C_k=[f_k] \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

a tako isto će i izvod y' tom smenom postati jedna konstanta λ. Za te vrednosti x i y jednačina (265) se pretvara u običnu algebarsku jednačinu m-tog stepena

$$C_m \lambda^m + C_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + C_1 \lambda + C = 0$$

ili u skraćenom obliku

$$\Phi(\lambda)=0. \tag{267}$$

Pretpostavimo najpre da su svi koreni jednačine (267) prosti; da bi tako bilo, potrebno je i dovoljno da, ako je α jedan koren te jednačine, izvod $\frac{d\Phi}{d\lambda}$ bude različan od nule za $\lambda=\alpha$. Jednačina (265) ima tada m rešenja oblika

$$y'=f(x,\ y) \tag{268}$$

i par vrednosti $x=0$, $y=0$ nije par kritičkih singulariteta ni za jedno od tih rešenja. Funkcija $f(x, y)$, ako je za taj par vrednost konačna i ne javlja se u obliku $\frac{0}{0}$, biće holomorfna funkcija promenljivih x i y za te njihove vrednosti i primena osnovne Briot-Bouquetove teoreme dovešće do razvitka integrala y u obliku reda

$$y=a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots; \tag{269}$$

svako od m rešenja (268) dovodi do jednog takvog integrala, pa prema tome:

Kad su koreni algebarske jednačine svi prosti, diferencijalna jednačina (265) *ima m integrala koji za* $x=0$ *dobijaju vrednost* $y=0$, *i od kojih se svaki može razviti u po jedan red* (269) *konvergentan u određenom krugu u ravni x.*

Pretpostavimo sad da jednačina (267) ima višestrukih korena. i neka je $\lambda=\alpha$ jedan takav koren p-toga reda. Da bi tako bilo, potrebno je i dovoljno da za $\lambda=\alpha$ bude

$$\frac{d\Phi}{d\lambda}=0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\lambda^2}=0, \ldots, \quad \frac{d^{p-1}\Phi}{d\lambda^{p-1}}=0.$$

Diferencijalna jednačina (265) tada ima jedno rešenje (268) po izvodu y', u kom će par vrednosti $x=0$, $y=0$ biti jedan par algebarskih kritičkih tačaka p-toga reda za odgovarajuću funkciju $f(x, y)$, pa dakle će vrednost $x=0$ biti algebarska kritička tačka p-toga reda za izvod y', a prema tome i za sam odgovarajući integral y. Ovaj se, dakle, *može razviti u red uređen po stepenima izraza* $\sqrt[p]{x}$ *koji će biti konvergentan u određenom krugu u ravni* x.

Svakome višestrukom korenu algebarske jednačine (267) odgovaraće po jedan integral y takve vrste za diferencijalnu jednačinu (265). I kao što se vidi, *oblik reda u koji se može razviti integral, zavisi od prirode korena jednačine* (267), *tj. od toga da li su tu koreni prosti ili višestruki, i koga su oni reda.*

Izuzetak se javlja samo onda kad funkcija $f(x, y)$ za $x=0$, $y=0$ dobija beskrajnu veliku vrednost ili se pojavi u obliku $\frac{0}{0}$. U takvim slučajevima treba odgovarajuću jednačinu (268) proučiti na napred navedeni način.

16.

PRAKTIČNO UPUTSTVO ZA INTEGRACIJU DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA U OBLIKU REDOVA

Iz celokupnog dosadašnjeg izlaganja može se, kao krajnji rezultat, izvući ovo opšte praktično uputstvo koje rešava problem integracije diferencijalne jednačine prvog reda u obliku ograničenih ili neograničenih redova:

Pretpostaviće se da je jednačina rešena po izvodu y', tj. da je napisana u obliku

$$y' = f(x, y) \tag{270}$$

pa da se traži onaj njen partikularni integral koji za $x = x_0$ dobija vrednost $y = y_0$, gde su x_0 i y_0 dve unapred proizvoljno date konačne vrednosti.

Smenom

$$\xi = x + x_0, \qquad \eta = y + y_0$$

jednačina (270) svodi se na drugu

$$\eta' = \varphi(\xi, \eta)$$

čiji odgovarajući partikularni integral η treba da za $\xi = 0$ dobije vrednost $\eta = 0$.

Kad je vrednost x_0 beskrajna, treba izvršiti smenu

$$x = \frac{1}{\xi};$$

kad je vrednost y_0 beskrajna izvršiće se smena

$$y = \frac{1}{\eta};$$

a kad su obe te vrednosti beskrajne, treba izvršiti obe smene

$$y=\frac{1}{\xi}, \qquad y=\frac{1}{\eta}.$$

Ovde će biti pretpostavljeno da su takve smene već izvršene i da je (270) dobijena jednačina čiji integral y za $x=0$ treba da dobije vrednost $y=0$.

Razlikujmo tada ove slučajeve:

Prvi slučaj: neka je funkcija $f(x, y)$ holomorfna za $x=0$, $y=0$, pa će se na diferencijalnu jednačinu (270) primeniti osnovna Briot-Bouquetova teorema, po kojoj će se integral y imati u obliku ograničenog ili neograničenog reda oblika

(271) $$y=a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\cdots$$

gde se koeficijenti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ izračunavaju po uputstvu te teoreme (v. 1. odeljak). Nađeni red će biti konvergentan za vrednosti x što se nalaze u krugu opisanom u ravni x oko tačke $x=0$ sa poluprečnikom

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right)$$

gde su r i r' poluprečnici dva takva kruga (jednog c u ravni x, drugoga c' u ravni y) da je funkcija $f(x, y)$ holomorfna za sve vrednosti x u krugu c i za sve vrednosti y u krugu c'; M je ma kakav realan i pozitivan broj od koga moduo funkcije $f(x, y)$ nikako nije veći pa ma gde se nalazile vrednosti x i y u svojim krugovima c i c'. Vrednosti r, r', M, potrebne za određivanje poluprečnika R, određuju se po uputstvu sadržanom u I odeljku.

Tako dobijen integral (271) jedini je holomorfan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. On se, uostalom, u pojedinim specijalnim slučajevima svodi i na trivijalni integral $y\equiv 0$, koji se ima smatrati kao specijalan slučaj reda (271), kao slučaj u kome je

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=0.$$

Tako isto, u pojedinim slučajevima svi koeficijenti a_n, počevši od jednog određenog ranga p, mogu biti jednaki nuli; red se tada svodi na ograničen broj članova, tj. na polinom

$$y=a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_{p-1} x^{p-1}.$$

Drugi slučaj: neka funkcija $f(x, y)$ dobije beskrajno veliku vrednost za $x=0$, $y=0$, ali tako da je njena recipročna funkcija

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{f(x, y)}$$

holomorfna za te vrednosti x i y.

Kad se funkcija $\varphi(x, y)$ razvije u red po stepenima promenljive x, tako da je

$$\varphi(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

koeficijenti $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mogu biti ili stalne količine, ili funkcije promenljive y, holomorfne za $y=0$.

Oblik reda u koji se može razviti integral koji za $x=0$ postaje $y=0$, zavisi jedino od koeficijenta A_0, i to na ovaj način:

1° kad je $A_0 \equiv 0$ ne postoji ni jedan integral koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$;

2° kad A_0 nije identički jednak nuli, on ne može biti konstanta, već samo kakva funkcija promenljive y koja se može razviti u red oblika

$$A_0 = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \cdots$$

Taj red može počinjati sa članom koji sadrži y na prvom, drugom itd. stepenu; neka je m najniži stepen promenljive y u tome redu. Tada se integral može razviti u red uređen po stepenima izraza $\sqrt[m+1]{x}$

$$y = a_1 \sqrt[m+1]{x} + a_2 \left(\sqrt[m+1]{x}\right)^2 + a_3 \left(\sqrt[m+1]{x}\right)^3 + \cdots \tag{272}$$

i vrednost $x=0$ je algebarska kritička tačka $(m+1)$-og reda za integral.

Koeficijenti i krug konvergencije reda određuju se primenom osnovne Briot-Bouquetove teoreme na izvesnu jednačinu oblika

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t, u)$$

koja je u vezi sa jednačinom (270) i u kojoj je φ holomorfna funkcija promenljivih t i u za vrednosti $t=0$, $u=0$; to je jednačina (185) proučena u 13. odeljku.

Integral (272) je jedini integral jednačine (270) koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. I on se u pojedinim specijalnim slučajevima može svesti na trivijalan integral $y \equiv 0$, ili na polinom po izrazu $\sqrt[m+1]{x}$.

Treći slučaj: neka funkcija $f(x, y)$ za $x=0$, $y=0$ dobije neodređenu vrednost $\frac{0}{0}$. Napišimo je tada u obliku

$$\psi(x, y)\, y' = \varphi(x, y) \tag{273}$$

gde su φ i ψ holomorfne funkcije promenljivih x i y za $x=0$, $y=0$, koje postaju obe jednake nuli za te vrednosti x i y.

Odredimo najpre infinitezimalni red μ integrala y, po uputstvima izloženim u 14. odeljku pod A), pa uočimo jedan od tako dobijenih racionalnih brojeva μ (kad ih bude više od jednoga, sa svakim od njih treba uraditi sve ono što budemo uradili sa jednim od njih). Svaki tako određeni broj μ biće oblika

$$\mu = \frac{p}{q}$$

gde su p i q dva cela broja.

Izvršimo u jednačini (273) smenu

$$x = t^q \qquad y = vt^p \tag{274}$$

gde je t nova nezavisno promenljiva, a v nova nepoznata funkcija. Dokazuje ce [14. odeljak pod B)] da v ima za $t = 0$ konačnu i od nule različnu vrednost λ; ova će biti koren izvesne jednačine

$$\Phi(\lambda) = 0$$

koja se dobija kad se u jednačini (273) izvrši smena (274), pa se po tom u njoj stavi da je $v = 0$ (članovi sa izvodom v' time otpadaju iz jednačine, jer u ovoj uvek pored toga izvoda stoji kao činilac koji stepen promenljive t).

Izračunajmo korene

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

te jednačine i uočimo jedan, koji bilo od njih (sa svakim od njih treba uraditi ono isto što budemo uradili sa tim prvim); neka je to λ_1, pa izvršimo novu smenu

$$v = \lambda_1 + w$$

gde je w nova nepoznata funkcija. Kad se u novoj tako dobijenoj jednačini skrati sve što se može, pa se jednačina reši po izrazu $t\frac{dw}{dt}$, i desna strana tako dobijenog rešenja razvije po stepenima promenljivih t i w, dobija se definitivna redukovana jednačina oblika

$$t\frac{dw}{dt} = aw + bt + \cdots \tag{275}$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljivih t i w (ako takvih članova uopšte ima).

Problem je na taj način sveden na određivanje reda u koji se može razviti integral w jednačine (275) koji za $t = 0$ dobija vrednost $w = 0$. Oblik reda će zavisiti poglavito od koeficijenta a, a taj koeficijenat nije ništa drugo do vrednost koju dobija za $t = 0$, $w = 0$ prvi parcijalni izvod desne strane jednačine (275) po promenljivoj w. Sam način zavisnosti oblika reda od broja a iskazan je u ovim pravilima:

1° Kad je realan deo broja a realan i negativan ili jednak nuli, integral w može se razviti u red po stepenima promenljive t, a to je tada jedini integral jednačine koji za $t=0$ dobija vrednost $w=0$. Koeficijenti reda i njegov krug konvergencije određuju se po uputstvu datom u 14. odeljku pod C).

2° Kad je realni deo broja a pozitivan, ali a nije ceo pozitivan broj, jednačina ima jedan integral w koji se može razviti po stepenima promenljive t, ali pored njega postoji još beskrajno mnogo integrala w koji zadovoljavaju uslov da za $t=0$ postaju $w=0$, a svaki se od njih može razviti u red uređen po stepenima promenljivih t i t^a.

3° Kad je a kakav ceo pozitivan broj, ne postoji nijedan integral w koji bi se mogao razviti u red po stepenima promenljive t (sa uslovom $t=0$, $w=0$), ali postoji beskrajno mnogo integrala (sa tim uslovom), koji se mogu razviti u red po stepenima izraza t i $\log t$.

Izuzetni slučajevi. Primenjujući ova pravila za slučajeve kad se za početne vrednosti $x=0$, $y=0$ desna strana diferencijalne jednačine javlja u obliku $\frac{0}{0}$, može se naići na izuzetne slučajeve u kojima ta pravila ne važe. Poglaviti slučajevi takve vrste bili bi ovi:

I. Može se desiti da se jednačina, koja određuje infinitezimalni red μ integrala y svodi na identičnost. Tada μ može biti i iracionalan broj, a vrednost $x=0$ može biti transcendentan singularitet integrala y. Za takav slučaj ne postoji nikakva opšta metoda za odredbu integrala y koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$.

II. Kad se bude našlo da je $\mu=\frac{p}{q}$, gde su q i p dva cela broja, pa se izvrši smena

$$z=t^{\frac{1}{q}}, \qquad u=vt^p$$

dobija se za $t=0$ jednačina

$$\Phi(\lambda)=0$$

gde λ označava vrednost koju dobija v za $t=0$. Ova je jednačina oblika

$$p\,(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}+\cdots)=q\,(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha}+\cdots)$$

pa se može desiti da njen uočeni koren λ poništava posebice i jednu i drugu zagradu. Tada će se, kao što je pokazano, nova diferencijalna jednačina sa promenljivima t i v, javiti u obliku

$$t\frac{dv}{dt}=\frac{gt+hv+\cdots}{g't+h'v+\cdots}$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljivih t i v. Ako se izvrši ponovna smena

$$gt+hv=tu$$

(gde je u nova nepoznata funkcija), pa se skrati sve što se može, i reši jednačina po izrazu $t^2\frac{du}{dt}$, jednačina će se, pošto se njena desna strana razvije po stepenima promenljivih t i u javiti u obliku

$$t^2\frac{du}{dt}=\alpha u+\beta t+\cdots$$

gde neispisani članovi sadrže više stepene promenljivih t i u. Vrednost $t=0$ tada je uopšte esencijalni singularitet integrala y.

U još izuzetnijim slučajevima (napred navedenim) diferencijalna jednačina se sličnim smenama svodi na oblik

$$t^m\frac{du}{dt}=au+bt+\cdots$$

gde je m kakav ceo pozitivan broj.

Četvrti slučaj: neka je par vrednosti $x=0$, $y=0$ jedan par algebarskih kritičkih singulariteta funkcije $f(x, y)$. Tada je $x=0$ takođe algebarska kritička tačka integrala y koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$. Integral se može razviti u red oblika

$$y=a_1\left(\sqrt[p]{x}\right)+a_2\left(\sqrt[p]{x}\right)^2+a_3\left(\sqrt[p]{x}\right)^3+\cdots$$

gde je p ceo broj veći od jedinice, koji se uvek može odrediti. Smenom

$$x=t^p$$

integral y postaje holomorfna funkcija promenljive t, pa se koeficijenti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ mogu izračunavati po opštem obrascu

$$a_n=\frac{1}{n!}\,[y^{(n)}]$$

gde se vrednosti

$$y', y'', y''' \cdots$$

izračunavaju iz same diferencijalne jednačine i onih koje se dobijaju njenim uzastopnim diferencijaljenjima.

Kad je, prema svemu tome, na taj način nađen u obliku reda integral y, koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$, treba se obrnutim putem, pomoću dotle učinjenih smena promenljivih količina, vratiti na prvobitne promenljive x i y. A ako se tražilo da se nađe integral y koji za $x=x_0$ dobija vrednost $y=y_0$, onda se odgovarajućom smenom napred pomenute vrste treba vratiti na prvobitnu diferencijalnu jednačinu.

17.

KOEFICIJENAT a_n INTEGRALNOG REDA KAO FUNKCIJA SVOGA RANGA n

Retki su slučajevi kad se koeficijenat a_n integralnog reda

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

date diferencijalne jednačine može odrediti kao eksplicitna funkcija svoga ranga n, pa da se tako u obliku jednoga opšteg obrasca imaju svi koeficijenti a_n.

Takav je, npr. slučaj sa jednačinom

$$y' = \alpha y + \beta$$

za koju je $a_n = \dfrac{\beta \alpha^{n-1}}{n!}$,

ili jednačinom

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1$$

za koju je $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

U opštem slučaju koeficijenti se izračunavaju postupno, jedan iz drugog, bilo po metodi neodređenih koeficijenata, koja dovodi do rekursivne relacije između jednoga niza uzastopnih koeficijenata, ili, kao što je pokazano u 20 odeljku, pomoću obrasca

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-m}] \qquad (n = m, m+1, \ldots)$$

(gde je m red diferencijalne jednačine) koji svodi izračunavanje koeficijenata na odredbu niza funkcija f_k vezanih napred navedenom rekursivnom diferencijalnom relacijom.

Ali u svakom slučaju poznate su neke opšte osobine koeficijenata a_n vezanih za opšte oblike diferencijalnih jednačina, a koje se mogu saznati bez potrebe da jednačina bude integraljena, tj. bez potrebe da se zna tačan analitički izraz tih koeficijenata. Takve su osobine izražene:

1° u nejednačinama što se odnose na koeficijenat a_n smatran kao funkcija svoga ranga n;

2° u stavovima što se odnose na brzinu rašćenja ili opadanja koeficijenata kad im rang n beskrajno raste;

3° u stavovima što se odnose na aritmetičke osobine koeficijenata.

Stavovi pod 3° biće predmet 23. odeljka ove knjige; u ovome će odeljku biti reči o stavovima pod 2° i 3°.

I

Kad kakva jednačina

$$v' = \varphi(x, v) \tag{276}$$

ima osobine koje se traže za komparativnu jednačinu date diferencijalne jednačine

$$y' = f(x, y) \tag{277}$$

ili kakvog sistema (koji se, kao što će biti pokazano, uvek svodi na sistem simultanih jednačina prvog reda) onda, ako se sa b_n osnači opšti koeficijenat integralnog reda

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \tag{278}$$

jednačine (276), a opšti integral date jednačine (277) glasi

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{279}$$

za koeficijente oba reda važiće opšta nejednačina

$$|a_n| < b_n .$$

A u toliko pre, kad se za b_n može poznavati kakva nejednačina

$$b_n < c_n ,$$

važiće za a_n nejednačina

$$|a_n| < c_n .$$

Tako, Cauchyeva opšta komparativna jednačina

$$v' = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{v}{r'}\right)} \tag{280}$$

ima kao integral koji za $x=0$ dobija vrednost $v-0$, funkciju

$$v=r'-\sqrt{r'^2-2rr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}$$

holomorfnu u određenom krugu opisanom oko $x=0$ u ravni x.

Samim time što postoji takav holomorfni integral komparativne jednačine (280), zna se, prema Cauchyevoj nejednačini, da za red (278) važi nejednačina

$$b_n<\frac{A}{r^n}$$

gde A označava kakav pozitivan broj koji nije premašen od modula funkcije v dok x ostaje u krugu poluprečnika r u ravni x, u kome je desna strana jednačine (277) holomorfna. Prema tome:

Opšti koeficijenat a_n integralnog reda (279) *jednačine* (277) *zadovoljava za sve vrednosti n nejednačinu*

(281) $$|a_n|<\frac{A}{r^n}.$$

Ta nejednačina ne pretpostavlja ništa drugo o funkciji $f(x, y)$ osim to da je ona holomorfna za početne vrednosti $x=0$, $y=0$. Međutim, kad se o toj funkciji zna još šta bliže, mogu se imati i niže, pa dakle probitačnije granice za taj koeficijenat. Do takvih granica dovode, na primer, specijalnije komparativne jednačine, ali čije iskorišćavanje zahteva još i suplementarne pretpostavke ili o samoj funkciji $f(x, y)$, ili o integralu y.

Tako, kao što je napred pokazano, kad je koeficijent dvostrukog reda

$$f(x, y)=\sum\sum A_{mn}x^m y^n$$

takav da izraz $m!\,n!\,|A_{mn}|$ ostaje konačan pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n, *moduo koeficijenta a_n integralnog reda manji je no koeficijenat b_n funkcije*

$$v=-\log[1-A(e^x-1)]$$

kao integrala komparativne jednačine

$$v'=Ae^{x+v}, \qquad A>0.$$

Tako isto, kad izraz

$$\frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)}$$

ostaje konačan pri beskrajnom rašćenju indeksa m i n, *moduo koeficijenta a_n manji je od koeficijenta b_n funkcije*

$$v=1-\sqrt[3]{\frac{1-Ax}{1-x}}, \qquad A>1,$$

kao integrala komparativne jednačine

$$v'=\frac{\alpha}{(1-x)^2(1-v)^2}.$$

Razne druge komparativne jednačine, vezane za pretpostavke o načinu rašćenja ili opadanja koeficijenata A_{mn} funkcije $f(x, y)$ pri rašćenju indeksa m i n, dovode do raznih drugih gornjih granica za moduo koeficijenta a_n.

Ali do takvih gornjih granica može se doći i čineći pretpostavke o samome integralu y jednačine (277), kao funkciji promenljive x. Jedna vrlo opšta takva granica, koja važi za opštu algebarsku diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$f(x, y, y') = 0 \tag{282}$$

(gde se uvek, ne umanjujući generalnost, može smatrati da je f nesvodljiv polinom po x, y, y') dobija se primenom jedne teoreme koju je dokazao Lindelöf u pogledu gornje granice za ma koji realni integral y jednačine (282), pri rašćenju promenljive x u realnom pozitivnom pravcu. Teorema glasi:

Počevši od jedne dovoljno velike pozitivne vrednosti x, vrednost integrala y nikako ne premaša vrednost funkcije

$$\lambda(x) = e^{\alpha x^{m+1}} \tag{283}$$

gde je m stepen polinoma f po x, a α pozitivna konstanta koja se može izračunati iz same diferencijalne jednačine.

Lindelöf je dao i način za izračunavanje konstante α; njena vrednost, smenjena u $\lambda(y)$, određuje veličinu gornje granice *ma koga* realnog integrala jednačine (282). Ta granica može biti i stvarno dostignuta u pojedinim specijalnim slučajevima, što te vidi na primeru jednačine

$$y' - (m+1)\, x^m\, y = 0, \tag{284}$$

čiji je opšti integral

$$y = Ce^{x^{m+1}}.$$

Uočimo sad one integrale y jednačine (282) koji su *cele funkcije promenljive x čiji su koeficijenti a_n svi realni pozitivni brojevi.*

Pošto su x, α, a_n pozitivni, to je

$$x = |x| = r \qquad y = |y| = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots$$

pa će prema gornjoj teoremi biti za dovoljno velike vrednosti x neprestano

$$|y| < e^{\alpha r^{m+1}} \tag{285}$$

što znači da izraz

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}}$$

ne postaje beskrajno veliki kad r beskrajno raste. Postoji, dakle, jedan konačan pozitivan broj A takav da je za sve vrednosti x neprestano

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}} < A,$$

što znači da je za sve vrednosti x

$$|y| < Ae^{\alpha r^{m+1}}. \tag{286}$$

Prema opštoj Cauchyevoj nejednačini za $|a_n|$ biće tada

(287) $$|a_n| < \frac{|y|}{r^n} < A\,\frac{e^{\alpha r^{m+1}}}{r^n}.$$

Pošto je y po pretpostavci cela funkcija, može se poluprečniku r dati kakva se hoće vrednost od 0 od $+\infty$. Izraz na desnoj strani nejednačine (287) dostiže svoj minimum za

$$r = \gamma\, n^{\lambda}$$

gde su γ i λ racionalni brojevi

$$\gamma = \left[\frac{1}{(m+1)\,\alpha}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad \lambda = \frac{1}{m+1}.$$

Za samu vrednost toga minimuma nalazi se da je ona $A\,\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$ gde je β konstanta $\beta = [(m+1)\,e\,\alpha]^{\lambda}$ a iz toga se vidi *da je za uočene integrale y*

(288) $$a_n = |a_n| < A\,\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}.$$

Iz toga se zaključka mogu izvesti raznovrsne pojedinosti za cele funkcije sa pozitivnim koeficijentima a_n, koje zadovoljavaju kakvu algebarsku diferencijalnu jednačinu prvog reda. Tako:

I. *Za sve pozitivne vrednosti x integral ne premaša vrednosti specijalne cele funkcije*

(289) $$\varphi(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\lambda n}\, \beta^n\, x^n.$$

Jer prema nejednačini (288), a pošto su a_n i x pozitivni, mora biti i

$$y < \varphi(x).$$

II. *Uzastopne nule $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ integrala y ne rastu, pri rašćenju svoga ranga n, sporije no što raste vrednost n^{λ}.*

Jer, prema nejednačini (288), vrednost $\sqrt[n]{|a_n|}$ ne opada sporije od vrednosti $n^{-\lambda}$, i prema tome $|a_n|^{-\frac{1}{n}}$ ne raste sporije od n^{λ}. A prema jednoj teoremi koju je dokazao Hadamard, za cele funkcije uopšte, moduo n-te nule α_n takve jedne funkcije raste brže, pri rašćenju njenog ranga n, nego što raste izraz $|a_n^{-\frac{1}{n}}|$. Pa pošto taj izraz ne raste sporije od n^{λ}, tako će isto biti i sa nulom α_n.

III. *Kad god integral y, izračunat u obliku reda sa pozitivnim koeficijentima a_n, predstavlja kakvu celu funkciju promenljive x, vrsta (genre, Gattung) te funkcije je jedan od brojeva*

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, (m+1).$$

To je posledica nejednačine (286) i stava koji je dokazao Hadamard za cele funkcije uopšte, da kad je moduo jedne takve funkcije manji od vrednosti izraza

$$e^{\alpha r^p}, \quad r = |x|,$$

gde je α kakva pozitivna konstanta, vrsta funkcije ne premaša broj p.

Od interesa je napomenuti da stav III ne važi i za integrale algebarskih diferencijalnih jednačina višega reda; to se može videti na primeru jednačine drugoga reda

$$yy'' - y'^2 - yy' = 0$$

koja ima kao jednu klasu svojih partikularnih integrala, cele funkcije

$$y = Ce^{e^x} \qquad (C > 0).$$

Pošto su svi izvodi funkcije y pozitivni za $x = 0$, to su i svi njeni koeficijenti a_n pozitivni; međutim y je cela funkcija beskrajne vrste.

Isto se vidi i na primeru integralnog reda koji izražava celu funkciju

$$y = e^{e^x} P(x)$$

gde je P kakav polinom čiji su koeficijenti svi pozitivni; takva funkcija zadovoljava jednu algebarsku diferencijalnu jednačinu drugoga reda, a međutim njena je vrsta beskrajna.

A tako isto treba primetiti i to, da cele funkcije, o kakvima je reč, a koje su integrali algebarskih diferencijalnih jednačina, *mogu biti ma koje konačne vrste*. To se vidi na primeru jednačine prvoga reda

$$y'^2 + p^2 (1 - y^2) x^{2(p-1)} = 0$$

($p =$ ceo pozitivan broj), koja ima za partikularni integral

$$y = \frac{1}{2}(e^{x^p} + e^{-x^p}) = \cos(ix^p) = 1 + \frac{x^{2p}}{2!} + \frac{x^{4p}}{4!} + \frac{x^{6p}}{6!} + \cdots$$

Neka je, naposletku, navedeno i to da gornja granica $m+1$ za vrstu integrala y biva i stvarno dostignuta u pojedinim specijalnim slučajevima, kao što je to npr. za diferencijalnu jednačinu (284) čiji je opšti integral cela funkcija $(m+1)$-te vrste.

Stavu III može se dati i ovaj oblik:

IV. *Kad god kakav red*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{290}$$

koji izražava integral kakve algebarske diferencijalne jednačine prvoga reda, ima svoje koeficijente a_n *pozitivne, a predstavlja kakvu celu funkciju promenljive* x, *stepen diferencijalne jednačine po x nikad nije manji od vrste te cele funkcije, smanjene za jedinicu.*

II

Posmatrajmo sad slučaj kad integralni red (290) kakve algebarske diferencijalne jednačine prvog reda *ima sve svoje koeficijente* a_n *jednake pozitivnim racionalnim brojevima,* a predstavlja kakvu *celu funkciju* promenljive x.

Takav slučaj nastupa, na primer, za diferencijalnu jednačinu oblika

(291) $$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

gde su P i Q polinomi po x i y čiji su koeficijenti pozitivni racionalni brojevi, sa uslovom da bude $Q(0, 0) \neq 0$.

Svi uzastopni izvodi integrala y, dobijeni uzastopnim diferencijaljenjima jednačine (291), biće racionalne funkcije promenljivih x i y, koje će sve imati kao imenilac određen stepen polinoma Q. Kad se u njima stavi $x=0, y=0$ i rezultat podeli sa odgovarajućim faktorijelom $n!$, dobija se koeficijenat a_n kao pozitivan racionalan broj. Samo treba još dodati i to da, prema jednoj poznatoj teoremi iz analitičke teorije diferencijalnih jednačina prvog reda, između sviju jednačina oblika (291), jedina čiji *opšti* integral može biti cela funkcija, je linearna jednačina

$$y' = f(x)\, y + \varphi(x)$$

gde su f i φ polinomi po x. Međutim, i druge jednačine oblika (291) mogu imati *partikularnih* integrala koji su cele funkcije.

Na sve jednačine

(292) $$f(x, y, y') = 0$$

(f nesvodljiv polinom po x, y, y') čiji integral ima koeficijente a_n pozitivne i racionalne, a predstavlja kakvu celu funkciju, primenjuju se neposredno svi stavovi iz prošlog paragrafa.

Na primer, raniji stav daje jednu gornju granicu integrala y, izražavajući da za pozitivne vrednosti x funkcija nikad ne premaša vrednost $Ae^{dx^{m+1}}$.

Ali, pored tako određene *gornje* granice koju integral ne može *premašiti,* može se postaviti i jedna *donja* granica koju on nikad ne može *podbaciti* za takve vrednosti x. Šta više, tako nađena donja granica važiće i za integrale opšte algebarske diferencijalne jednačine ma koga konačnog reda p

(293) $$F(x, y, y', \ldots y^{(p)}) = 0.$$

Da bi se odredila takva jedna donja granica, primenićemo na integral y jednu teoremu koju je dokazao Polya za integrale jednačine (293). Teorema glasi:

Za svaki integral y jednačine (293) *koji se izražava u obliku reda*

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

čiji su koeficijenti racionalni brojevi, a koji je konvergentan za sve vrednosti x u ravni promenljive x, izraz

$$\frac{|\log a_n|}{n(\log n)^2}$$

ne teži granici $+\infty$ pri beskrajnom rašćenju broja n.

Pošto je u ovde posmatranom slučaju koeficijenat a_n realan, pozitivan i teži nuli kad n beskrajno raste (jer je integral y cela funkcija sa realnim pozitivnim koeficijentima a_n), teorema dovodi do zaključka da izraz

$$-\frac{\log a_n}{n(\log n)^2} = \frac{\log \dfrac{1}{a_n}}{n(\log n)^2}$$

ostaje, za sve dovoljno velike vrednosti n, manji od jednoga konačnog pozitivnog broja h. Iz toga izlazi da je za svaku vrednost

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

neprestano

(294) $$a_n > e^{-hn(\log n)^2}.$$

Integral y posmatrane analitičke prirode za sve pozitivne vrednosti x premaša vrednost specijalne cele funkcije

(295) $$\mu(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-hn(\log n)^2} x^n.$$

Nejednačine (288) i (294) postavljaju granice mogućnim varijacijama koeficijenata a_n i njihovom načinu opadanja pri beskrajnom rašćenju njihovog ranga n. Tako

1° Jednačina (288) ograničava brzinu opadanja koeficijenta a_n u tome smislu što prema njoj a_n *opada brže nego izraz* $\dfrac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$ ili, što je isto, nego izraz $\dfrac{1}{n^{\lambda n}} = e^{-\lambda n \log n}$; pošto smenom $x = \dfrac{t}{\beta}$ nestaje faktora β^n u izrazu za a_n.

2° Nejednačina (294) ograničava brzinu opadanja koeficijenta a_n u tome smislu što prema njoj a_n *opada sporije nego izraz* $e^{-hn(\log n)^2}$.

Kao što se vidi:

Niz koeficijenata a_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ ne može opadati ni suviše sporo, ni suviše brzo, već najsporije onako, kako opada izraz $e^{-\lambda n \log n}$, a najbrže onako kako opada izraz $e^{-hn(\log n)^2}$.

18.

SISTEMI SIMULTANIH JEDNAČINA PRVOGA REDA

Cauchyeva komparativna metoda primenjuje se ne samo na obične diferencijalne jednačine, već i na sisteme simultanih jednačina. Ovde će biti u tome pogledu proučen sistem oblika

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2 \ldots, y_n),\\
(296)\qquad &\frac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\quad\vdots\\
&\frac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}
$$

gde su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nepoznate funkcije nezavisno promenljive količine x, vezane među sobom sistemom od n diferencijalnih jednačina prvoga reda (296).

Pretpostavimo da je svaka od datih funkcija

(297) $$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

holomorfna funkcija promenljive x u jednom krugu poluprečnika r, opisanom oko tačke $x=0$ u ravni promenljive x, kao i holomorfna funkcija promenljivih

(298) $$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

u blizini vrednosti

(299) $$y_1=0, \quad y_2=0, \ldots, y_n=0,$$

tj. u po jednom krugu opisanom oko tih vrednosti u ravni svake od tih n promenljivih.

Označimo sa r' poluprečnik najmanjega od tih n krugova, a sa M jedan broj takav da ga ne premaša moduo ni jedne od n funkcija (297) dok promenljive ostaju u svojim krugovima poluprečnika r i r', tj. takav da je za sve takve vrednosti promenljivih neprestano

(300) $$|f_1| \leqslant M, \quad |f_2| \leqslant M, \ldots, \quad |f_n| \leqslant M.$$

Formirajmo funkciju $n+1$ promenljivih količina

(301) $$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{r'}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{r'}\right)}$$

pa uporedimo integrale sistema (296) sa integralima sistema

(302) $$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ \frac{dv_2}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dv_n}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Uzastopnim diferencijaljenjima jednačina (296) po x i smenama izvoda

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$$

njihovim vrednostima iz jednačina (296) dobija se jedan sistem jednačina koje izražavaju uzastopne više izvode funkcija

(303) $$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

kao funkcije promenljivih x i (303).

Tako isto, postupnim diferencijaljenjima jednačine (302) po x i smenama izvoda

(304) $$\frac{dv_1}{dx}, \frac{dv_2}{dx}, \ldots, \frac{dv_n}{dx}$$

njihovim vrednostima iz jednačina (302) dobija se sistem jednačina koje izražavaju uzastopne više izvode funkcija

(305) $$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

kao funkcije promenljivih x i (305).

Na taj način dobijeni izvodi funkcija y_k i funkcija v_k imaju istu strukturu i izražavaju se, svaki izvod, kao zbir sabiraka koji su proizvodi raznih stepena funkcija (297), odnosno funkcije φ, i njihovih parcijalnih izvoda po promenljivima x i (303), odnosno x i (305).

Međutim, na isti način kao i za običnu diferencijalnu jednačinu prvoga reda, koji je napred izložen, uveravamo se da je moduo svakoga parcijalnog izvoda ma koje od funkcija (297) manji od odgovarajućeg parcijalnog izvoda funkcije φ. To će tada važiti i za vrednosti koje ti izvodi dobijaju za

$$\begin{gathered} x=0, \quad y_1=0, \quad y_2=0, \ldots, y_n=0, \\ x=0, \quad v_1=0, \quad v_2=0, \ldots, v_n=0, \end{gathered} \tag{306}$$

pa će, prema nejednačinama (300) i jednačini (301) to isto važiti i za vrednosti samih funkcija (297) i funkcije φ. Biće dakle

$$|f_k(0, 0, 0 \ldots 0)| < \varphi(0, 0, 0 \ldots 0),$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n+p+\cdots}}{\partial x^m \, \partial y_1^n \, \partial y_2^p \cdots} f_k(0, 0 \ldots 0)\right| < \frac{\partial^{m+n+p+\cdots}}{\partial x^m \, \partial v_1^n \, \partial v_2^p \cdots} \varphi(0, 0, \ldots 0),$$

a iz toga se, kao i u ranijem slučaju obične diferencijalne jednačine prvoga reda, zaključuje da, ako se sa a_k^i označi vrednost koju dobija i-ti izvod funkcije y_k po x za $x=0$, a sa β_k^i vrednost koju dobija i-ti izvod funkcije v_k po x, uvek će biti

$$|a_k^i| < \beta_k^i, \tag{307}$$

pri čemu treba imati u vidu da su sve vrednosti β_k^i, dobijene na takav način, očevidno realne i pozitivne; to sleduje iz same strukture izvoda (304) i činjenice koju je lako proveriti da funkcija φ, definisana jednačinom (301), i svi njeni parcijalni izvodi, imaju za

$$x=0, \quad v_1=0, \quad v_2=0, \ldots, v_n=0 \tag{308}$$

realne i pozitivne vrednosti.

Pretpostavimo, za jedan trenutak, da sistem (296) ima kao svoje formalno rešenje jedan sistem vrednosti (303) izražen u obliku Maclaurinovih redova koji za $x=0$ daju $y_k=0$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 + \cdots, \\ y_2 &= a_2^1 x + a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3 + \cdots, \\ &\;\;\vdots \\ y_n &= a_n^1 x + a_n^2 x^2 + a_n^3 x^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{309}$$

a da tako isto i sistem (302) ima kao formalno rešenje jedan sistem vrednosti (305) izražen u obliku redova koji za $x=0$ daju $v_k=0$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1^1 x + b_1^2 x^2 + b_1^3 x^3 + \cdots, \\
v_2 &= b_2^1 x + b_2^2 x^2 + b_2^3 x^3 + \cdots, \\
&\ \ \vdots \\
v_n &= b_n^1 x + b_n^2 x^2 + b_n^3 x^3 + \cdots .
\end{aligned}
\tag{310}
$$

Pošto je

$$a_k^i = \frac{\alpha_k^i}{k!}, \qquad b_k^i = \frac{\beta_k^i}{k!},$$

to je prema nejednačini (307)

$$|a_k^i| < b_k^i,$$

što znači da je koeficijenat od x^n svake od funkcija y_k manji od koeficijenta x^n funkcije v_k. Ako je, dakle, svaki od redova (310) konvergentan za vrednosti x u jednome krugu C_k opisanom u ravni x oko tačke $x=0$, u tome će krugu nasigurno biti konvergentan i odgovarajući red (309) istoga ranga k.

Međutim, sistem (302) je mogućno integraliti i odrediti krugove C_k svakoga njegovog integrala v_k. Iz jednačina (302) se vidi da je za proizvoljne vrednosti promenljivih x i v_k

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} = \cdots = \frac{dv_n}{dx}$$

odakle je

$$v_2 = v_1 + C_1, \quad v_3 = v_1 + C_2, \ldots, \quad v_n = v_1 + C_n$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ integracione konstante. Pa pošto za $x=0$ svako v_k treba da je jednako nuli, dobija se da je za proizvoljne vrednosti x

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n .$$

Sistem (302) se tada svodi na jednu jedinu jednačinu

$$\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v, v, \ldots, v)$$

tj., prema (301), na običnu diferencijalnu jednačinu prvoga reda

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{v}{r'}\right)^n} .$$

Kad se ova napiše u obliku

$$\left(1-\frac{v}{r'}\right)^n dv=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}\,dx$$

dobija se integracijom

$$\frac{r'}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{v}{r'}\right)^{n+1}\right]=-Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

odakle se nalazi da integral v, koji za $x=0$ dobija vrednost $v=0$, ima za izraz

$$v=r'\left[1-\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)\,Mr}{r'}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right].$$

Taj je integral v holomorfna funkcija promenljive x u blizini vrednosti $x=0$, jer singulariteti funkcije proizlaze samo od jednačine

$$1+\frac{(n+1)\,Mr}{r'}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)=0.$$

Ta jednačina, rešena po x, ima samo jedan koren, i to

$$x=r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)\,Mr}}\right).$$

Ta je vrednost jedini singularitet funkcije v, i prema tome ta će funkcija biti holomorfna dokle god x ostaje u krugu C opisanom oko tačke $x=0$ sa poluprečnikom

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)\,Mr}}\right).$$

Pošto je funkcija v holomorfna u tome krugu C, ona se može razviti u red

$$v=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots \tag{311}$$

pa pošto su sve funkcije v_k jednake među sobom i sa funkcijom v, svaka se od njih može razviti u isti red (311) sa istim krugom konvergencije C. A kad je to slučaj, prema onome što je maločas kazano, biće u tome istome krugu C konvergentni i svi redovi (309) koji daju formalno rešenje u problemu integracije sistema (296). A takvo formalno rešenje postoji: to je ono što se dobija kad se koeficijentima a_k^i u obrascima (309) dadu vrednosti

$$a_k^i=\frac{a_k^i}{k!}.$$

Na taj način se dolazi do ovoga rezultata za sistem (296):

Neka je dat sistem

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, \ldots, y_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, \ldots, y_n),$$

gde je svaka od funkcija $f_1, \ldots, f_n$ holomorfna funkcija promenljive x u krugu poluprečnika r opisanom oko tačke $x=0$ u ravni x, i tako isto holomorfna funkcija promenljivih $y_1, \ldots, y_n$ u svakome od krugova poluprečnika r' opisanih oko tačaka $y_1=0, \ldots, y_k=0$ u ravnima tih promenljivih. Označimo sa M jedan broj takav da ga ne premaša moduo ni jedne od n funkcija $f_1, \ldots, f_n$ dok svaka od promenljivih ostaje u svome krugu, pa je u ovome što prethodi dokazana ova *osnovna teorema* za integraciju sistema (296) pomoću redova oblika

$$y_k=a_k^1 x+a_k^2 x^2+a_k^3 x^3+\cdots \tag{312}$$

Svaka se nepoznata funkcija $y_1, \ldots, y_n$, *kao integral sistema* (296) *koji za* $x=0$ *dobija vrednost* $y_k=0$, *može razviti u red oblika* (312), *koji će nasigurno konvergirati za sve vrednosti* x *u krugu opisanom oko* $x=0$ *sa poluprečnikom*

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Očevidno je da ta teorema i proširuje na sisteme simultanih jednačina osnovnu Briot-Bouquetovu teoremu za slučaj običnih diferencijalnih jednačina prvoga reda, na koju se ona svodi u slučaju kad je $n=1$.

Teorema je, kao što se vidi, izvedena upotrebom komparativnih jednačina za svaku od jednačina stepena (296) a svaka od njih ima oblik Cauchyeve komparativne jednačine za diferencijalnu jednačinu prvoga reda. Međutim, kao i za ovu, mogu se, pod naročitim pretpostavkama za funkcije $f_1, \ldots, f_n$, upotrebiti i druge, specijalnije komparativne jednačine, koje važe samo za takve slučajeve.

Tako npr. kad se svaka od funkcija $f_1, \ldots, f_n$ razvije u dvostruki red po stepenima promenljivih

$$x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{313}$$

tako da je sistem (296) napisan u obliku

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=f_1=\Sigma\, A^1_{m,p\ldots}\, x^m\, y_1^p \ldots y_n^s,\\
(314)\qquad &\frac{dy_2}{dx}=f_2=\Sigma\, A^2_{m,p\ldots}\, x^m\, y_1^p \ldots y_n^s,\\
&\quad\vdots\\
&\frac{dy_n}{dx}=f_n=\Sigma\, A^n_{m,p\ldots}\, x^m\, y_1^p \ldots y_n^s,
\end{aligned}
$$

onda, ako su svi koeficijenti A realni i pozitivni i takvi da izraz $m!\,p!\ldots A^i_{m,p\ldots}$ monotono raste pri rašćenju indeksa $m, p \ldots$, *za svaku od jednačina*

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$$

može se uzeti jednačina

$$\frac{dv_k}{dx}=\varphi_k(x, v_1, \ldots, v_n)$$

gde je φ_k *ma koji parcijalni izvod, i ma koga reda, funkcije* f_k *po promenljivima* (313).

Dokaz pravila je isti kao dokaz III pravila u 9. odeljku.

19.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I SISTEMI SIMULTANIH JEDNAČINA VIŠEGA REDA

I

Diferencijalna jednačina m-toga reda

$$y^{(m)}=f(x, y, y', \ldots y^{(m-1)}) \tag{315}$$

može se uvek svesti na sistem od m simultanih jednačina prvoga reda. Ako se stavi da je

$$y=y_0, \; y'=y_1, \; y''=y_2, \ldots, y^{(m-1)}=y_{m-1},$$

imaće se sistem od m jednačina prvoga reda

$$\begin{aligned} &\frac{dy_0}{dx}=y_1, \\ &\frac{dy_1}{dx}=y_2, \\ &\vdots \\ &\frac{dy_{m-1}}{dx}=f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}). \end{aligned} \tag{316}$$

Pretpostavivši da je f holomorfna funkcija promenljivih

$$x, y, y', \ldots, y^{(m-1)} \tag{317}$$

i to u krugu poluprečnika r opisanog u ravni x oko tačke $x=0$, i promenljivih $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ u svakome od krugova poluprečnika r' opisanih oko tačaka

$$y=0, \; y'=0, \ldots y^{(m-1)}=0, \tag{318}$$

ona će to isto biti i za promenljive

(319) $$x, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}.$$

Ako se tada označi sa M jedan broj takav da ga ne premašaju ni vrednost r', ni moduo funkcije f dok svaka od promenljivih (318), odnosno (319) ostaje u svome krugu, može se primeniti gornja osnovna teorema, koja dovodi do ovoga rezultata:

Svaka od promenljivih $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$, *pa dakle i sam integral* y *diferencijalne jednačine* (315) *koji, kao i svi njegovi izvodi do* $(m-1)$*-og zaključno, dobija vrednost nulu za* $x=0$, *može se razviti u red oblika*

(320) $$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \cdots$$

koji će biti konvergentan za sve vrednosti x *što leže u krugu opisanome oko tačke* $x=0$ *u ravni* x, *sa poluprečnikom*

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{(m+1)Mr}}\right).$$

Tako npr. diferencijalna jednačina drugoga reda

$$y'' = f(x, y, y')$$

maće za svoj integral y, koji kao i njegov izvod y', postaje jednak nuli za $x=0$, red oblika

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

koji će biti konvergentan za sve vrednosti x u krugu opisanom oko $x=0$ u ravni x sa poluprečnikom

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{3Mr}}\right).$$

Ostaje da se pokaže kako se izračunavaju koeficijenti

$$a_m, \ a_{m+1}, \ a_{m+2}, \ldots$$

reda (320). Iz jednačine (315) dobija se diferencijaljenjem po x

$$y^{(m+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m-1)}} f.$$

Desna strana jednačine je funkcija promenljivih

(321) $$x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$$

koja, ako se označi sa f_1, biće

$$y^{(m+1)} = f_1(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Diferencijaleći ponovo po x, dobija se

$$y^{(m+2)}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}y'+\frac{\partial f_1}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y^{(m-1)}}f,$$

gde će opet desna strana biti funkcija promenljivih (321), koja ako se označi sa f_2, biće

$$y^{(m+2)}=f_2\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Produživši tako i dalje, dobiće se niz izraza za više izvode funkcije y u obliku

$$y^{(n)}=f_{n-m}\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\;(n=m+1,\; m+2, \ldots)$$

gde se niz funkcija

(322) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

izvodi, jedna iz druge, po rekursivnom obrascu

$$f_k=\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x}+\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y}y'+\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(m-1)}}f$$

sa početnom funkcijom

$$f_0=f\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Ako se tada sa $[f_k]$ označi rezultat koji se dobija kad se u funkciji f_k smeni

$$x=0,\;\; y=0,\;\; y'=0, \ldots, y^{(m-1)}=0$$

koeficijenti se izračunavaju po obrascu

$$a_{m+n}=\frac{1}{(n+m)!}[f_n] \quad (n=1, 2, 3\ldots).$$

Primenimo takav način određivanja koeficijenata a_n na jednačinu h-tog reda

(323) $$y^{(h)}=R\,(x, y, y', \ldots, y^{(h-1)})$$

gde je R racionalna funkcija promenljivih

(324) $$x, y, y', \ldots, y^{(h-1)}.$$

Stavimo da je

(325) $$y^{(k)}=y_k \quad (k=0, 1, 2\ldots h)$$

pa će jednačina (323) biti oblika

(326) $$y_h=\frac{P}{Q}$$

gde su P i Q polinomi po promenljivima

$$x, y_0, y_1, \ldots, y_h$$

gde se, radi holomorfnosti funkcije R u blizini vrednosti

$$x=0,\ y=0,\ y'=0, \ldots, y^{(h)}=0 \tag{327}$$

pretpostavlja da je

$$Q(0, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Tada se integral y koji, kao i njegovi uzastopni izvodi do $(h-1)$-og zaključno, za $x=0$ dobija vrednost nulu, može razviti u red

$$y = a_h x^h + a_{h+1} x^{h+1} + a_{h+2} x^{h+2} + \cdots \tag{328}$$

Koeficijent stepena x^n izračunava se pomoću obrasca

$$a_n = \frac{r_n}{n!} \quad (n = h+1, h+2, \ldots), \tag{329}$$

gde r_n označuje vrednost, koju za vrednosti (327) dobija jedna izvesna funkcija R_n; ova je funkcija n-ti član niza funkcija

$$R_h, R_{h+1}, R_{h+2}, \ldots$$

koje se jedna iz druge izračunavaju pomoću rekursivnog obrasca

$$R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} + \cdots + y_{h-1} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}} \tag{330}$$

sa početnom funkcijom

$$R_1 = \frac{P}{Q},$$

što se dokazuje, kao i za diferencijalne jednačine prvoga reda u 4. odeljku, i na istovetan način, uzastopnim diferencijaljenjima jednačine (323) po x, vodeći računa o jednačinama (323), (325), (326).

Ovde će biti pokazano da se izračunavanje koeficijenata može svesti na izračunavanje, ne niza racionalnih funkcija već jednoga niza polinoma po promenljivima (324).

Lako se uveravamo, kao i za jednačine prvoga reda, da je uopšte

$$R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-2h+1}}, \quad P_h = P \quad (n = h, h+1, \ldots) \tag{331}$$

gde je P_n polinom po promenljivima (324). Smenivši n sa $n-1$ dobija se

(332) $$R_{n-1}=\frac{P_{n-1}}{Q^{2n-2h-1}}$$

odakle se pacijalnim diferencijaljenjima dobija niz jednačina

(333) $$\begin{aligned} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial x}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_0}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_1}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}} \end{aligned}$$

pa se iz poslednje od njih dobija

(334) $$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\frac{P}{Q}=\frac{PQ\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}PP_{n-1}}{Q^{2n-2h+1}}.$$

Iz obrazaca (330) i (331) je

$$P_n=Q^{2n-2h+1}\left(\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x}+y_1\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0}+y_2\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1}+\cdots+y_{h-1}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}}+\frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\right)$$

a kad se tu smene parcijalni izvodi funkcije R_{n-1} njihovim izrazima (333) i (334) dobija se

(335) $$\begin{aligned} P_n=A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}+H_0\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0}+H_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1}+H_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_2} \\ +\cdots+H_{h-2}\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-2}}+B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}}+(2n-2h-1)\,CP_{n-1} \end{aligned}$$

gde su

$$A, B, C, H_0, H_1, \ldots, H_{h-2}$$

stalni polinomi po promenljivima $x, y_0, y_1, \ldots y_h$, tj. nezavisni od ranga n koeficijenta a_n; a koji imaju za izraze

$$A = Q^2, \quad B = PQ,$$

$$C = -Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Q}{\partial y_1} + \cdots + y_{h-1} \frac{\partial Q}{\partial x_{h-2}} + \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}\right).$$

$$H_0 = y_1 Q^2, \; H_1 = y_2 Q^2, \; H_2 = y_3 Q^2, \ldots, H_{h-2} = y_{h-1} Q^2.$$

Izračunavanje koeficijenata a_n svodi se dakle na odredbu stalnih od promenljivih $x, y_0, \ldots, y_h$ nezavisnih članova $p_h, p_{h+1}, p_{h+2} \ldots$ niza polinoma

$$P_h, P_{h+1}, P_{h+2} \ldots$$

koji se jedan iz drugoga postupno izračunavaju iz obrasca (335) i stalnoga člana q polinoma Q. To izračunavanje biva po opštem obrascu

$$(336) \qquad a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-2h+1}} \qquad (n = h, h+1, \ldots)$$

pri čemu jedan isti broj q važi za sve koeficijente a_n.

Primetićemo još da se i na diferencijalne jednačine višega reda mogu primeniti specijalnije komparativne jednačine, prema pretpostavkama koje se budu činile o funkciji f u jednačini

$$(337) \qquad y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots y^{(m-1)}).$$

Naposletku, neka je primećeno da se i sistemi simultanih jednačina višega reda, oblika

$$(338) \qquad \frac{d^m y_k}{dx^m} = f_k\left(x, y_1, \ldots, y_n; \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_k}{dx}; \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^2 y_k}{dx^2}, \ldots\right)$$

mogu svesti na sistem simultanih jednačina prvoga reda. To se postiže uvođenjem novih nepoznatih funkcija

$$\begin{array}{llll} y_1 = z_1, & y_2 = z_2, & \ldots, & y_n = z_n; \\ \dfrac{dy_1}{dx} = z_{n+1}, & \dfrac{dy_2}{dx} = z_{n+2}, & \ldots, & \dfrac{dy_n}{dx} = z_{2n}; \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = z_{2n+1}, & \dfrac{d^2 y_2}{dx^2} = z_{2n+2}, & \ldots, & \dfrac{d^2 y_n}{dx^n} = z_{3n}; \ldots \end{array}$$

čiji će broj biti mn pa se sistem (323) svodi na sistem prvoga reda sastavljen iz mn jednačina oblika

$$\frac{dz_k}{dx} = z_{n+k},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_{(m-1)n+k}}{dx} = f_k(x, z_1, z_2, \ldots, z_{mn}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Naposletku, neka je primećeno i to, da se, kako u sistemu prvoga reda, tako i u sistemu višega reda, *uvek može učiniti da sistem ne sadrži nezavisno promenljivu količinu* po kojoj se vrši integracija. Dovoljno je, pored uvedenih novih nepoznatih funkcija, uvesti još jednu u, definisanu jednačinom $u=x$, što u dati sistem uvodi još jednu novu jednačinu, a ta je

$$\frac{du}{dx}=1$$

što broj jednačina povećava za jedinicu. To je od interesa u izvesnim pitanjima u teoriji simultanih jednačina.

II

Opšti integral diferencijalne jednačine p-toga reda

(339) $$y^{(p)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$$

je njen integral koji za proizvoljnu vrednost $x=x_0$ dobija takođe proizvoljnu vrednost $y=y_0$, a njegovih $p-1$ uzastopnih izvoda $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ dobijaju proizvoljne vrednosti $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(p-1)}$. On je izražen jednom jednačinom

(340) $$F(x, y, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)})=0$$

gde je F funkcija $p+3$ promenljivih $x, y, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$. Vrednosti

(341) $$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$$

kojih ima $p+1$, igraju uloge integracionih konstanata koje se uvek mogu smeniti skupom od p proizvoljnih konstanata, na način sličan onome koji je naveden ranije za diferencijalne jednačine prvoga reda.

Kad je funkcija F holomorfna za vrednosti (341), opšti integral se može izraziti u obliku reda

(342) $$y=A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\cdots$$

gde su koeficijenti A_n određene funkcije promenljivih (341).

Jedan proizvoljno uzet red (342) može, ali ne mora biti opšti integral kakve jednačine (339). Mogu se, dakle, postaviti pitanja:

1° *Kakve potrebne i dovoljne uslove treba da ispune koeficijenti* A_n *reda* (342), *pa da taj red predstavlja opšti integral kakve diferencijalne jednačine* (339)?

2° *U slučajevima kad su ti uslovi ispunjeni, naći diferencijalnu jednačinu* (339) *za koju uočeni red predstavlja opšti integral.*

Neka je (339) jednačina čiji je opšti integral (342). Tada je

$$(343) \qquad A_1 = \frac{1}{1!}[y'] = \frac{y_0'}{1!}, \quad A_2 = \frac{1}{2!}[y''] = \frac{y_0''}{2!}, \ldots$$

$$A_p = \frac{1}{p!}[y^{(p)}] = \frac{1}{p!} f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)})$$

gde u ovoj prilici znak $[\varphi]$ označava vrednost koju dobija funkcija φ promenljivih $x, y, y', y'' \ldots$ kad se u njoj te promenljive smene vrednostima (341).

Kao što je u prethodnom paragrafu rečeno, ako se formira niz funkcija $f_1, f_2, f_3, \ldots$ promenljivih $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ a po rekursivnom obrascu

$$(344) \qquad f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}} f,$$

gde je početna funkcija

$$f_0 = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}),$$

n-ti izvod funkcije y po x biće f_{n-1}, i prema tome je

$$(345) \qquad A_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}].$$

Kad se u jednačini (344) promenljive $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ smene vrednostima (341) i ima se u vidu da je

$$[y'] = 1!\, A_1, \qquad [y''] = 2!\, A_2, \qquad \ldots$$

$$[f_n] = (n+1)!\, A_{n+1}, \qquad [f_{n-1}] = n!\, A_n, \qquad \ldots$$

$$\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right] = n!\, \frac{\partial A_n}{\partial x_0}, \qquad \left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right] = n!\, \frac{\partial A_n}{\partial y_0}, \qquad \ldots$$

deobom dobijene jednačine sa $n!$ dobija se

$$(n+1)\, A_{n+1} = \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + 1!\, A_1 \frac{\partial A_n}{\partial y_0} + 2!\, A_2 \frac{\partial A_n}{\partial y_0'} + \cdots$$

$$(p-1)!\, A_{p-1} \frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}} + p!\, A_p \frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}.$$

Rešivši jednačinu po A_p nalazi se da izraz

$$\Delta = \frac{(n+1)\, A_{n+1} - \dfrac{\partial A_n}{\partial x_0} - 1!\, A_1 \dfrac{\partial A_n}{\partial y_0} - 2!\, A_2 \dfrac{\partial A_n}{\partial y'} - \cdots - (p-1)!\, A_{p-1} \dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}}}{p!\, \dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}}$$

ima za vrednost

$$A_p = \frac{1}{p!}[f] = \frac{1}{p!} f(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(p-1)}).$$

A pošto je u isto vreme i

$$A_p = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right] = \frac{1}{p!}[y^{(p)}] = \frac{y_0^{(p)}}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{d^p y_0}{dx_0^p}$$

jer je, po definiciji, $y_0^{(k)}$ vrednost koju dobija k-ti izvod funkcije y kad se u ovoj stavi da je $x = x_0$, to se nalazi da su promenljive (341) među sobom vezane diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^p y_0}{dx_0^p} = f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}).$$

Na taj je način dobijeno rešenje postavljenih pitanja u obliku ova dva stava:

1. stav: *Da bi red* (342), *gde su koeficijenti A_n date funkcije proizvoljnih konstanata $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$, predstavljao opšti integral diferencijalne jednačine p-toga reda* (338), *potrebno je i dovoljno da izraz Δ ima jednu istu vrednost za sve vrednosti indeksa n veće od nule.*

A kad je taj uslov ispunjen, rešenje drugoga od postavljenih pitanja dato je ovim stavom:

2. stav: *Diferencijalna jednačina, čiji je opšti integral tada izražen redom* (342), *dobija se kad se u koeficijentu A_p smene $x_0, y_0, y_0' \ldots y_0^{(p-1)}$ vrednostima $x, y, y', \ldots y^{(p-1)}$, pa se rezultat izjednači sa $y^{(p)}$.*

Kao što se vidi, da li će dati red (342) biti ili ne opšti integral kakve jednačine p-toga reda (339), zavisi isključivo od toga *da li će njegovi koeficijenti A_n imati za invarijantu izraz Δ.* A kad je to slučaj, diferencijalna jednačina dobija se iz izraza same te invarijante.

III

Završujući ovaj odeljak, podsetićemo na jednu osnovnu razliku što postoji između algebarskih diferencijalnih jednačina prvoga reda i jednačina višega reda, u pogledu singulariteta njihovih integrala.

Za jednu se diferencijalnu jednačinu

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

kaže da je *algebarska,* kad je F algebarska funkcija promenljivih $y, y', y'', \ldots,$ i onda se jednačina uvek može napisati u takvom obliku da je F polinom po tim promenljivim, sa koeficijentima koji mogu biti ma kakve funkcije promenljive x, algebarske ili transcendentne (ponekad se traži da su i te funkcije algebarske; diferencijalna jednačina je tada algebarska u užem smislu).

Za algebarske diferencijalne jednačine prvoga reda polovi i algebarske kritičke tačke (algebarski singulariteti) mogu biti *stalni* ili *pokretni*, tj. mogu biti isti za sve partikularne integrale jednačine, ili se menjati od jednog partikularnog integrala do drugog. U prvome slučaju oni se ne menjaju sa integracionom konstantom u izrazu opštega integrala; u drugom slučaju oni se menjaju sa tom konstantom.

Tako npr. jednačina

$$(1+x)\,y'+y=0$$

ima za opšti integral

$$y=\frac{C}{x+1}$$

pa dakle njeni integrali imaju stalan pol prvoga reda $x=-1$.

Jednačina

$$x^3 y'+y^2-3\,x^2 y=0$$

ima za opšti integral

$$y=\frac{x^3}{x+C}$$

pa dakle njeni integrali imaju pokretan pol prvoga reda $x=-C$.

Jednačina

$$2\,xy'-y=0$$

ima za opšti integral

$$y=C\sqrt{x};$$

njeni integrali imaju stalnu algebarsku kritičku tačku drugoga reda $x=0$.

Jednačina

$$2\,xyy'-2\,y^2-x^3=0$$

ima za opšti integral

$$y=x\sqrt{x+C}$$

pa njeni integrali imaju pokretnu algebarsku kritičku tačku drugoga reda $x=-C$.

Za jednačinu

$$xy'+a=0$$

je opšti integral

$$y=C-a\log x$$

pa joj integrali imaju stalnu kritičku logaritamsku tačku $x=0$.

Za jednačinu

$$x^2 y' + ay = 0$$

opšti je integral

$$y = C e^{\frac{a}{x}}$$

i svi njeni integrali imaju stalnu esencijalnu tačku $x = 0$.

Painlevé je dokazao *da nikakva algebarska diferencijalna jednačina* prvoga reda

$$F(x, y, y') = 0 \tag{346}$$

ne može imati pokretnih transcendentnih singulariteta (npr. pokretnih logaritamskih kritičkih tačaka, ili esencijalnih singulariteta). Kad god integral ima pokretnih singulariteta, *ti singulariteti mogu biti samo ili polovi, ili algebarske kritičke tačke.*

Painlevéova teorema važi samo za algebarske, ali ne važi i za transcendentne diferencijalne jednačine prvoga reda, tj. one koje se ne mogu napisati u obliku (346) gde bi F bio polinom po x i y. Takve jednačine mogu (premda ne moraju) imati i pokretnih transcendentnih singulariteta (logaritamskih ili esencijalnih). Tako na primer:

Transcendentna diferencijalna jednačina

$$y' - e^{-y} = 0$$

ima za opšti integral

$$y = \log(x + C)$$

pa joj integrali imaju pokretnu logaritamsku kritičku tačku $x = -C$.

Transcendentna jednačina

$$y' + y(\log y)^2 = 0$$

ima za opšti integral

$$y = e^{\frac{1}{x+C}}$$

i integrali joj imaju kao pokretnu esencijalnu tačku $x = -C$.

Ali, i u tome leži jedna osnovna razlika između algebarskih diferencijalnih ednačina prvoga reda i onih višega reda, Painlevéova teorema ne važi za jednačine višega reda. *Jednačina višega reda*

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

gde je F algebarska funkcija promenljivih $y, y', y'', \ldots$ može imati kao pokretne i transcendentne integralne singularitete.

Da to odista može biti, vidi se iz ovakvih primera:

Jednačina drugoga reda

$$y'' + y'^2 = 0$$

ima za opšti integral

$$y = C_1 + \log (x + C_2)$$

pa joj integrali imaju pokretnu logaritamsku kritičku tačku $x = -C_2$.

Izraz

$$y = C_1 e^{\frac{1}{x + C_2}}$$

je opšti integral jedne algebarske jednačine drugoga reda, koju je lako formirati logaritmisanjem i diferencijaljenjem dva puta uzastopce; integrali te jednačine imaju pokretnu esencijalnu tačku $x = -C_2$.

To su činjenice koje treba imati na umu kad se traži da se integral date diferencijalne jednačine ili sistema simultanih jednačina (koji se, kao što se zna, može svesti i na obične diferencijalne jednačine) razvije u red. Jer kao što je poznato iz opšte teorije analitičkih funkcija, obik reda u koji se može razviti jedna funkcija u blizini jedne date tačke x_0, bitno zavisi od prirode te tačke u pogledu na tu funkciju. Stavovi izloženi u ovome što prethodi, daju oblik integralnog reda date jednačine, a iz toga oblika se može saznati i priroda tačke x_0 kao obične tačke ili singulariteta za integral.

20.

INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I SISTEMA ZA MA KAKVE KONAČNE POČETNE VREDNOSTI PROMENLJIVIH

U odeljcima što prethode pokazano je kako se izvršuje integracija diferencijalnih jednačina i sistema u obliku redova, kad se traži da integral za $x=0$ ima vrednost nulu, kao i to da uzastopni izvodi $y', y'', y''', \ldots$ do izvoda datoga ranga, budu svi jednaki nuli za $x=0$. To su tzv. *početni uslovi* koji su u dosadašnjem izlaganju bili vezani za *početne vrednosti promenljivih*

$$x=0, \;\; y=0, \;\; y'=0, \;\; y''=0, \ldots$$

U slučajevima kad je integral realan, taj uslov znači geometrijski da integralna kriva prolazi kroz koordinatni početak u ravni xoy i da u njemu ima dodir $(m-1)$-og reda sa apscisnom osovinom, gde m označava red diferencijalne jednačine.

Međutim, takvi početni uslovi mogu biti i opštiji, ili druge kakve vrste. Može se, na primer, tražiti da integral za datu početnu vrednost $x=x_0$ promenljive x ima kao svoju početnu vrednost $y=y_0$, a da tako isto početne vrednosti izvoda za $x=x_0$ budu

$$y'=y_0', \;\; y''=y_0'', \;\; y'''=y_0''', \ldots, \;\; y^{(m-1)}=y_0^{(m-1)}$$

gde su $y_0, y_0', y_0'', y_0''', \ldots$ unapred date vrednosti.

Kad je integral realan, kao i sve date vrednosti $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y^{(m-1)}$, taj uslov geometrijski znači da integralna kriva linija prolazi kroz datu tačku (x_0, y_0) u ravni xoy i da u njoj ima dodir $(m-1)$-og reda sa izvesnom parabolom $(m-1)$-og stepena.

Zadatak se rešava stavivši da je

$$x=x_0+t \quad y=P(x)+u(x-x_0) \tag{347}$$

gde je t nova nezavisno promenljiva količina, u nova nepoznata funkcija, a P polinom $(m-1)$ stepena po x.

Ako se stavi da je

$$P(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_{m-1}x^{m-1} \tag{348}$$

a traži se integral jednačine takav, da za $x=x_0$ on i njegovi uzastopni izvodi do $(m-1)$-og zaključno dobijaju date vrednosti

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ldots,\ y^{(m-1)}=y_0^{(m-1)} \tag{349}$$

koeficijenti $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ izračunavaju se iz m uslovnih jednačina

$$\begin{aligned} y_0&=P(x_0)+u(0),\\ y_0'&=P'(x_0)+u'(0),\\ y_0''&=P''(x_0)+u''(0),\\ &\vdots\\ y_0^{(m-1)}&=P^{(m-1)}(x_0)+u^{(m-1)}(0). \end{aligned} \tag{350}$$

Ako se dakle polinom $P(x)$ izabere tako da bude

$$\begin{aligned} P(x_0)&=y_0,\\ P'(x_0)&=y_0',\\ &\vdots\\ P^{(m-1)}(x_0)&=y_0^{(m-1)} \end{aligned} \tag{351}$$

pa se sa tako izabranim polinomom na datoj diferencijalnoj jednačini izvrši smena

$$\begin{aligned} y&=P(x)+u(x-x_0),\\ y'&=P'(x)+u'(x-x_0),\\ &\vdots\\ y^{(m-1)}&=P^{(m-1)}(x)+u^{(m-1)}(x-x_0) \end{aligned} \tag{352}$$

jednačina će biti transformisana u novu diferencijalnu jednačinu

$$\Phi(t, u, u', u'', \ldots, u^{(m)})=0. \tag{353}$$

Pošto su tada ispunjeni uslovi (351), integral u treba, prema uslovnim jednačinama (350) da je takav, da za $x=x_0$ on i njegovi uzastopni izvodi do $(m-1)$-og zaključno dobijaju vrednosti

$$u=0,\ u'=0,\ldots,\ u^{(m-1)}=0. \tag{354}$$

Ali, kad je $x=x_0$, onda je $t=0$, što znači da posle izvršene smene $x=x_0+t$ integral jednačine (353) treba da za $t=0$ ispuni uslove (354). A traženje takvog integrala je zadatak koji je bio predmet svega dosadašnjeg izlaganja.

Pošto je

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(n+k)!}{n!} h_{n+k} x^n,$$

to uslovne jednačine (351), napisane u obrnutom redu, u svome razvijenom obliku su

$$(m-1)!\, h_{m-1} = y_0^{(m-1)},$$

$$(m-2)!\, h_{m-2} + \frac{(m-1)!}{1!} h_{m-1} x_0 = y_0^{(m-2)},$$

$$(m-3)!\, h_{m-3} + \frac{(m-2)!}{1!} h_{m-2} x_0 + \frac{(m-1)!}{2!} h_{m-1} x_0^2 = y_0^{(m-3)},$$

$$(m-4)!\, h_{m-4} + \frac{(m-3)!}{1!} h_{m-3} x_0 + \frac{(m-2)!}{2!} h_{m-2} x_0^2 + \frac{(m-1)!}{3!} h_{m-1} x_0^3 = y_0^{(m-4)}, \ldots$$

Iz prve jednačine dobija se neposredno koeficijenat h_{m-1}; zamenom u drugoj, dobija se jednačina koja daje koeficijenat h_{m-2}; zamenom oba nađena koeficijenta u trećoj, dobija se jednačina koja daje koeficijenat h_{m-3} i produžujući tako, imaće se redom svi koeficijenti polinoma $P(x)$. Smenom (347) svešće se tada zadatak na onaj kad su početne vrednosti nepoznate funkcije i njenih $(m-1)$ uzastopnih izvoda sve jednake nuli.

Kad bude određen, u obliku reda, integral

$$u(x-x_0) = u(t)$$

nove transformisane jednačine, koji za $t=0$ dobija vrednosti (354), stavivši u njoj da je

$$t = x - x_0 \quad u(t) = u(x-x_0),$$

dobija se integral

$$y = P(x) + u(x-x_0)$$

date diferencijalne jednačine, koji će ispunjavati date početne uslove.

Početni uslovi mogu biti i kakve druge vrste, na primer

1° da integralna kriva prolazi kroz dati skup tačaka;

2° ili da ona prolazi kroz određen broj datih tačaka i da u svakoj od njih ima dodir određenog reda sa datom krivom linijom.

U slučaju npr. jednačine drugoga reda

(355) $$f(x, y, y', y'') = 0$$

može se tražiti da integralna kriva prolazi kroz datu tačku (x_0, y_0) i da tu njena tangenta ima dati koeficijenat pravca α. Tada jednačina

$$f(x_0, y_0, \alpha, y_0'') = 0 \tag{356}$$

određuje drugi izvod y_0'' na toj krivoj u tački (x_0, y_0).

Kad se izvrši smena (347) i za polinom P uzme se linearna funkcija

$$P(x) = ax + b,$$

uslovne jednačine (351) za taj polinom su

$$P(x_0) = ax_0 + b = y_0, \quad P'(x_0) = a = \alpha,$$

odakle se nalazi

$$a = \alpha, \quad b = y_0 - \alpha x_0,$$

tako da P treba da bude

$$P(x) = (x - x_0)\,\alpha + y_0.$$

Kad se u jednačini (355) bude izvršila smena

$$x = x_0 + t \qquad y = P(x) + u(x) \tag{357}$$

gde x i y dobijaju vrednosti x_0 i y_0, tako da izvod y' dobije zadatu vrednost α, biće $t = 0$, a za tu vrednost promenljive t funkcija $u(x)$ će dobiti vrednost $u(x_0)$, koja će prema drugoj jednačini (357) biti jednaka nuli. Zadatak je, dakle, sveden na raniji slučaj kad su početne vrednosti nezavisno promenljive količine i nepoznate funkcije jednake nuli.

U slučaju jednačine trećeg reda

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0 \tag{358}$$

može se npr. tražiti da integralna kriva prolazi kroz datu tačku (x_0, y_0) i da u ovoj izvodi y' i y'' imaju date vrednosti β i α. Tada jednačina

$$f(x_0, y_0, \beta, \alpha, y_0''') = 0$$

rešena po y_0''', određuje vrednost koju će imati izvod y''' u tački (x_0, y_0).

Kad se izvrši smena (347), pa se za polinom P uzme polinom drugoga stepena

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

uslovne jednačine za taj polinom su

$$P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0,$$

$$P'(x_0) = 2\,ax_0 + b = \beta,$$

$$P''(x_0) = 2\,a = \alpha.$$

Iz njih se nalazi da treba da je

$$a=\frac{\alpha}{2}, \qquad b=\beta-\alpha x_0, \qquad c=y_0-\beta x_0+\frac{\alpha^2}{2}x_0,$$

tako da P bude polinom

$$P(x)=\frac{\alpha}{2}x^2+(\beta-\alpha x_0)x+\left(y_0-\beta x_0+\frac{\alpha}{2}x_0^2\right).$$

Iz toga se dobija da je

$$P'(x)=\alpha x+(\beta-\alpha x_0)$$

pa kad se u jednačini (358) bude izvršila smena (347) onda, kad x i y dobiju vrednosti x_0 i y_0, tako da izvod y' dobije vrednost β, a da drugi izvod y'' dobije vrednost α,

1° funkcija $u(x)$ će dobiti vrednost $u(x_0)$ koja će, prema jednačini

$$y=P(x)+u(x)$$

biti jednaka nuli;

2° izvod $u'(x)$ će prema jednačini

$$y'=P'(x)+u'(x)$$

dobiti vrednost

$$y_0'-P'(x)=y_0'-\beta=0.$$

Zadatak je opet sveden na raniji slučaj kad su početne vrednosti promenljive t i nepoznate funkcije u jednake nuli.

Uočimo još, kao primer slične vrste, zadatak u kome se traži da integralna kriva jednačine trećeg reda (358) prolazi kroz datu tačku (x_0, y_0) i da u njoj ima tangentu s datim koeficijentom pravca β i jednu datu krivinu δ. Ako se tada stavi da je u tački (x_0, y_0) $y_0'=\beta$, $y_0''=\alpha$, pošto krivina u tački (x, y) ima za izraz

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

za odredbu vrednosti α imaće se jednačina

(359) $$(1+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\delta-\alpha=0.$$

Kad se izračuna α imaće se kao početni uslov

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad y'=\beta, \quad y''=\alpha,$$

pa se smenom (347) problem svodi na onaj kad su početni uslovi

$$t=0, \quad u=0, \quad u'=0$$

i rešava se na pokazani način, odredbom polinoma $P(x)$ koji ispunjava uslove zadatka.

Svakom će paru rešenja jednačina (359) odgovarati po jedno rešenje problema integracije.

21.

INTEGRAL DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA IZRAŽEN KAO POZNATA FUNKCIJA REDA ODREĐENOG OBLIKA

Postoji mnoštvo slučajeva kad se integral algebarske diferencijalne jednačine prvoga reda

$$f(x, y, y') = 0 \tag{360}$$

izrazi u obliku *algebarske* funkcije kakvoga reda poznatog oblika, dobijenog na način izložen u ranijim odeljcima kad funkcija f ispunjava naročite, za to potrebne uslove.

Uočimo jedan od takvih opštijih slučajeva. Smatrajmo u jednačini (360) realne promenljive y i y' kao apscisu i ordinatu jedne tačke $M(y, y')$ u ravni yoy' pa će jednačina (360) predstavljati u toj ravni jednu klasu algebarskih krivih linija C, u kojoj promenljiva x igra ulogu parametra po kome se jedna kriva te klase razlikuje od druge, iste klase.

Postoji uvek mogućnost da se odnos između y i y', dat jednačinom (360), izrazi u obliku dveju parametarskih jednačina

$$y = \varphi(x, t), \tag{361}$$

$$y' = \psi(x, t), \tag{362}$$

takvih da kad se iz (361) i (362) eleminiše parametar t, dobija se jednačina (360). Iz tih se jednačina tada dobija da je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{dt}{dx} = \psi(x, t) \tag{363}$$

odakle je

$$\frac{dt}{dx} = f_1(x, t) \tag{364}$$

gde je

$$f_1 = \frac{\psi - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}. \tag{365}$$

Na diferencijalnu jednačinu prvog reda (354), gde je nezavisno promenljiva količina x, a nepoznata funkcija t, može se tada primeniti sve što je napred izloženo o integralu jednačine izraženom u obliku reda. Ako se za jednačinu (360) traži integral y, koji za datu vrednost $x = x_0$ dobija datu vrednost $y = y_0$, onda su početni uslovi za jednačinu (364)

$$x = x_0 \quad t = \text{koren jednačine } \varphi(x_0, \alpha) = 0$$

rešene po α. U slučaju kad je ova jednačina identički zadovoljena za ma kakvo α, može se za α uzeti kakva se hoće proizvoljna vrednost.

Ako je α jedan koren jednačine (a sa svakim njenim korenom treba učiniti ovo što će se uraditi sa ovim uočenim), smena

$$t = z + \alpha$$

svodi početne uslove transformisane jednačine

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, z + \alpha) = f_2(x, z) \tag{366}$$

na $x = 0$, $z = 0$, pa se problem odredbe integrala z u obliku reda rešava na napred izložene načine, prema tome da li je za $x = 0$, $z = 0$ funkcija $f_2(x, z)$ holomorfna, ili dobija beskrajno veliku vrednost, ili se javlja u neodređenom obliku $\frac{0}{0}$, ili ima algebarskih kritičkih ili transcendentnih singulariteta.

U slučaju kad je ta funkcija holomorfna za $x = 0$, $z = 0$, integral se može po teoremi Briot-Bouqueta razviti u Maclaurinov red

$$z = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

koji će biti konvergentan u krugu opisanom oko tačke $x = 0$ u ravni x, sa poluprečnikom R određenim tom teoremom.

Nepoznata funkcija t biće tada izražena u obliku reda

$$t = \alpha + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{367}$$

pa kad se to smeni u jednačini (361), *imaće se integral jednačine* (360) *izražen u obliku jedne poznate algebarske funkcije φ promenljive x i reda* (367).

U slučaju kad funkcija $f_2(x, z)$ dobija za $x=0$, $z=0$ beskrajno veliku vrednost, ali nema algebarskih kritičkih ili transcendentnih singulariteta, integral z razviće se u red oblika

$$z=a_1 \sqrt[m]{x}+a_2\left(\sqrt[m]{x}\right)^2+a_3\left(\sqrt[m]{x}\right)^3+\cdots$$

a nepoznata t u obliku $t=\alpha+z$.

Tako bi se isto i u ostalim pobrojanim slučajevima odredio oblik reda za integral z, iz čega bi se imao i red za integral t, pa bi se njegovom zamenom u jednačini (361) *imao integral y jednačine* (361) *opet kao algebarska funkcija promenljive x i toga reda.*

Jedan opšti slučaj za koji je poznat način izražavanja promenljivih y i y' u obliku parametarskih jednačina (361) i (362), je taj kad krive C sastavljaju jednu klasu *unikursalnih krivih linija.* Pod takvim krivim linijama razumeju se one krive za koje se koordinate x i y mogu izraziti kao *racionalne funkcije* jednoga parametra t. Njihova je opšta teorija razrađena u analitičkoj geometriji; ovde će se samo podsetiti na nekolike odlike takvih krivih linija, koje služe za njihovo raspoznavanje.

Svaka algebarska kriva m-tog stepena, koja ima jednu višestruku tačku $(m-1)$-og reda, unikursalna je.

Jer, kao što je poznato iz analitičke geometrije, kad se višestruka tačka prenese u koordinatni početak, jednačina krive dobija oblik

$$\varphi_{m-1}(x, y)+\varphi_m(x, y)=0$$

gde φ_{m-1} i φ_m označuju homogene polinome po x i y koji su $(m-1)$-og, odnosno m-tog stepena. Promenljiva prava

$$y=tx$$

što prolazi kroz koordinatni početak, obrćući se oko početka promenom parametra t, seče krivu u $m-1$ tačaka koje se poklapaju sa početkom, i još u jednoj pokretnoj tački čije su koordinate izražene jednačinama

$$x=-\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \qquad y=-\frac{t\,\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \tag{368}$$

iz čega se vidi da je kriva unikursalna.

Tako su unikursalne krive i

1° *sve krive drugoga stepena* $(m=2)$;

2° *sve krive trećega stepena* $(m=3)$ *sa jednom dvostrukom ili povratnom tačkom*, kao što su npr. cisoida i strofoida;

3° *sve krive četvrtog stepena* ($m=4$) *sa jednom trostrukom tačkom, ili sa tri dvostruke ili povratne tačke*;

4° *sve krive m-tog stepena sa*

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} \tag{369}$$

dvostrukih ili povratnih tačaka.

Kao što se zna iz analitičke geometrije, broj (369) je u isto vreme i najveći mogućni broj takvih tačaka koje može imati jedna kriva m-tog stepena, a da se ne razloži na više krivih nižega stepena od m.

Za krive drugoga stepena, što prolaze kroz koordinatni početak i čija je opšta jednačina

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0$$

parametarske jednačine (368) su

$$x=-\frac{D+Et}{A+Bt+Ct^2}, \qquad y=-\frac{Dt+Et^2}{A+Bt+Ct^2}.$$

Za krive trećega stepena pod 2° (što prolaze kroz početak), a čija je opšta jednačina

$$Dx^3+Ex^2y+Fxy^2+Gy^3+Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

$$x=-\frac{A+Bt+Ct^2}{D+Et+Ft^2+Gt^3}, \qquad y=-\frac{At+Bt^2+Ct^3}{D+Et+Ft^2+Gt^3}.$$

Kad je data algebarska diferencijalna jednačina (360) i pretvorena u parametarske jednačine (361) i (362), namesto stalnih koeficijenata u njima kao u slučaju algebarskih krivih linija, figurisaće koeficijenti koji će biti funkcije nezavisno promenljive količine x kao parametra.

Tako npr. za jednačinu

$$y'^2+y^2+xy=0$$

parametarske jednačine su

$$y=\varphi(x, t)=-\frac{x}{1+t^2},$$

$$y'=\psi(x, t)=-\frac{xt}{1+t^2},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{1+t^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{2xt}{(1+t^2)^2},$$

pa je odgovarajuća diferencijalna jednačina (364)

$$\frac{dt}{dx}=\frac{(1+t^2)(1-xt)}{2xt}.$$

Neka je, naposletku, pomenuto i to da se parametarske jednačine za jednu datu diferencijalnu jednačinu (360) mogu katkad lakše dobiti u obliku jednačina transcendentnih po parametru t, ali sa kojima je ipak lako računati. Samo što će se u takvim slučajevima dobiti integral y *ne kao algebarska, već kao transcendentna funkcija* dobijenoga reda. Primer za to daje diferencijalna jednačina

$$y'^2+y^2-f(x)=0$$

za čije se parametarske jednačine mogu uzeti

(370) $$y=\sqrt{f(x)}\sin t, \qquad y'=\sqrt{f(x)}\cos t,$$

pošto se njihovim kvadriranjem i sabiranjem dobija jednačina (370). Iz njih se dobija za t diferencijalna jednačina

(371) $$\frac{dt}{dx}=1-\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\operatorname{tg} t.$$

Kad je funkcija $f(x)$ holomorfna i različna od nule za $x=0$, ta jednačina daje za integral, koji za $x=0$ dobija vrednost $t=0$ jedan konvergentan red uređen po stepenima promenljive x, pa će se integral y, što za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ dobiti u obliku

$$y=\sqrt{f(x)}\sin t$$

gde t treba smeniti tako dobijenim redom.

Neka je pomenuto da se jednačina (371) podesnom smenom nezavisno promenljive količine x i nepoznate funkcije t svodi na jednačinu oblika

$$\frac{du}{d\xi}=F(\xi)+u^3$$

čiji se integral u može razviti u Taylorov ili Maclaurinov red, prema datim početnim uslovima i analitičkoj prirodi funkcije $F(\xi)$.

22.

ARITMETIČKE OSOBINE KOEFICIJENTA a_n INTEGRALNOG REDA

I

Koeficijenti a_n redova

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{372}$$

u obliku kojih se izražavaju integrali diferencijalnih jednačina ili sistema, imaju i svojih *aritmetičkih osobina*, koje su od toliko većeg interesa što proizlaze iz činjenica *analitičke* prirode, vezanih za diferencijalne jednačine, a sa kojima bi izgledalo da one ne mogu stajati ni u kakvoj vezi. Međutim, takvih veza između aritmetičkih i analitičkih činjenica odista ima i neke od njih su istaknute na vidik u stavovima koji su predmet ovoga odeljka.

Pre svega, pojedine od takvih činjenica zapažaju se već na prvi pogled na samoj diferencijalnoj jednačini, kad se vodi računa o načinu izračunavanja koeficijenta a_n iz same jednačine.

Tako, pođimo od činjenice da se za integral jednačine p-tog reda

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}) \tag{373}$$

koji ispunjava početne uslove

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \ldots, \quad y^{(p-1)} = 0 \tag{374}$$

opšti koeficijenat a_n izračunava po obrascu

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-p}] \quad (n = p, p+1, \ldots) \tag{375}$$

gde je

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{376}$$

niz funkcija koje se izvode jedna iz druge po rekursivnom obrascu

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}} f \, (k = p+1, p+2, \ldots)$$

sa početnom funkcijom

(377) $$f_0 = f(x, y, y', \ldots y^{(p-1)}).$$

Uočimo slučaj kad je funkcija f *polinom* po svima promenljivima

(378) $$x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$$

koje sadrži. Prema samome načinu formiranja niza (376) očevidno je da će svaka od funkcija f_k biti polinom po promenljivim (378), i da će svaki koeficijenat b takvoga polinoma biti jedan broj koji se iz koeficijenata a samoga polinoma f dobija sabiranjima i množenjima među sobom i sa stalnim celim brojevima što proističu od izložilaca promenljivih (378) pri uzastopnim diferencijaljenjima. Osim toga, posle n diferencijaljenja broj n se uvek pojavljuje samo ili kao sabirak, ili kao činilac u obliku brojeva

(379) $$n, \; n-1, \; n-2, \ldots$$

ili kao izložilac bilo kakvog stalnog broja, bilo jednoga broja koji je opet sastavljen iz sabiraka i činilaca oblika (379).

Iz načina formiranja niza (376) tada se vidi da će broj $[f_n]$ biti sastavljen iz sabiraka od kojih je svaki jednak proizvodu raznih koeficijenata a, činilaca (379) i činilaca oblika λ^n, gde je λ ili kakav stalan broj, ili opet broj sastavljen iz činilaca oblika (379). A takva struktura ističe na vidik ove činjenice:

I. *Koeficijenat a_n integralnog reda jednačine* (373) *ne može sadržati u svome sastavu nikakve iracionalne brojeve koji ne ulaze u sastav samih koeficijenata a.*

Kad a_n sadrži ma jedan od takvih brojeva, može se tvrditi da funkcija y, definisana redom (372), ne može biti integral nikakve jednačine (373), u kojoj je funkcija f polinom po (378) koji ne sadrži takve iracionalnosti.

Tako, na primer, red (372) u kome bi ma i jedan koeficijenat sadržao $\sqrt{2}$ na neparnom stepenu, ili log 3, može samo tako biti integral kakve jednačine (373) ako koji od njenih koeficijenata a sadrži te iracionalnosti.

II. *Koeficijenat a_n ne može sadržati u svome sastavu nikakvu funkciju indeksa n koja nije* 1° *ili proizvod činilaca koji su stalni, od n nezavisni brojevi, ili su oblika* (379), *ili oblika λ^n (gde je λ od n nezavisan broj)*; 2° *ili zbir ograničenoga broja takvih sabiraka, a koji broj može i rasti sa brojem n.*

Kad a_n nije takvog oblika, može se takođe tvrditi da funkcija y definisana redom (372) nije integral nikakve jednačine (373). Takav je npr. slučaj kad a_n

sadrži eksplicitno funkciju

$$\sqrt{a+bn} \quad \text{ili} \quad \log(a+bn)$$

ili kad n figuriše u imeniocu koeficijenta a_n na drugi koji način, a ne kao proizvod ograničenog broja celih brojeva manjih od n (pošto se a_n dobija iz broja $[f_{n-p}]$ deobom sa $n!$).

III. *Kad su koeficijenti polinoma f celi brojevi, proizvod $n!\,a_n$ je za sve vrednosti indeksa n ceo broj.*

Kad je ma jedan od tih proizvoda racionalan razlomak ili iracionalan broj, red y ne može biti integral nikakve jednačine (373) takve vrste. Tako npr. on tada ne može biti integral nikakve linearne jednačine

$$y^{(p)} + p_1(x)\, y^{(p-1)} + \cdots p_{p-1}(x)\, y' + p_p(x)\, y = 0$$

gde su $p_1, p_2, p_3, \ldots$ polinomi po x čiji su koeficijenti celi brojevi.

Takav je isti slučaj i kad je a_n racionalan broj čiji je imenilac deljiv sa kakvim prostim brojem većim od n.

II

Posmatrajmo sad opštu diferencijalnu jednačinu konačnog reda p, algebarsku po promenjlivima (378), napisanu u obliku

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{380}$$

gde je f polinom po promenljivima $x, y, y', \ldots$ koje sadrži.

Ovde će biti izložen jedan način odredbe koeficijenata integralnog reda, različan od onoga ranije prikazanog, a iz koga se bolje može sagledati algebarska struktura tih koeficijenata.

Eliminišući x iz dveju jednačina

$$f = 0 \quad \text{i} \quad \frac{df}{dx} = 0$$

dobija se jednačina

$$Q(y, y', y'', \ldots, y^{(p+1)}) = 0 \tag{381}$$

gde je Q polinom po promenljivima

$$y, y', y'', \ldots, y^{(p+1)}. \tag{382}$$

Svaka funkcija y, koja zadovoljava jednačinu (380), zadovoljava u isti mah i jednačinu (381).

Neka je sad:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{383}$$

jedan Maclaurinov red, koji zadovoljava kakvu jednačinu oblika (380), pa potražimo opšti oblik koeficijenata a_n takvog jednog reda, kao funkcije koeficijenata $a_0, a_1, a_2, \ldots$ što mu prethode.

Poznato je da su koeficijenti:

$$A_0^0,\ A_1^0,\ A_2^0, \ldots$$

reda:

$$y^p = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^p = A_0^0 + A_1^0 x + A_2^0 x^2 + \cdots \tag{384}$$

određeni sistemom linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} &\alpha_{01} a_0 A_1^0 + \alpha_{10} a_1 A_0^0 = 0, \\ &\alpha_{02} a_0 A_2^0 + \alpha_{11} a_1 A_1^0 + \alpha_{20} a_2 A_0^0 = 0, \\ &\alpha_{03} a_0 A_3^0 + \alpha_{12} a_1 A_2^0 + \alpha_{21} a_2 A_1^0 + \alpha_{30} a_3 A_0^0 = 0, \ldots \end{aligned} \tag{385}$$

gde su α_{ik} celi brojevi i to:

$$\alpha_{ik} = k - pi \tag{386}$$

i gde je:

$$A_0 = a_0^p. \tag{387}$$

Iz toga se lako izvodi da koeficijenat A_n^0 ima za izraz:

$$A_n = \frac{a_0{}^{p-n}}{n!} P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{388}$$

gde je P_n polinom po $a_0, a_1, \ldots, a_n$ [i to $n-k+1$-og stepena po a_k za $k>0$, a $n-1$-og stepena po a_0] sa koeficijentima koji su svi celi brojevi.

Ako se sad koeficijenat a_k smeni sa:

$$\frac{(m+k)!}{k!} a_{m+k}$$

koji izraz predstavlja koeficijenat od x^k u Maclaurinovom redu što odgovara izvodu $y^{(m)}$ funkcije y, nalazi se da opšti koeficijenat A_n^m reda:

$$[y^{(m)}]^q = A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \cdots \tag{389}$$

ima za izraz

$$A_n^m = \frac{a_m{}^{q-n}}{(m!)^n\, n!} Q_n^m(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}) \tag{390}$$

gde je Q_n^m polinom po $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}$ [čiji je stepen po a_k broj $n+m-$ $-k+1$ za $k>m$, a koji je stepen $n-1$ po a_m] sa koeficijentima koji su celi brojevi, i gde je:

$$A_0^m = (m!\, a_m)^q. \tag{391}$$

Uočimo sad koeficijenat λ_n proizvoda:

(392) $$[y]^{p_0}[y']^{p_1}[y'']^{p_2}\ldots[y^{(m)}]^{p_m}=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\cdots$$

i potražimo njegov izraz kao funkciju koeficijenata: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ same funkcije y.

Lako se nalazi da je:

(393) $$\lambda_n=\Sigma A_i^0 A_j^1\ldots A_h^m$$

gde je:

(394) $$i+j+\cdots+h=n.$$

Ali svaki je koeficijenat A_i^s polinom prvog stepena po koeficijentu a_{i+s} koji u njemu figuriše i koji u isto vreme predstavlja onaj među koeficijentima a_k, sadržanim u A_i^s, koji je najvišeg ranga.

U isto vreme očevidno je da:

1° Između svih koeficijenata:

$$A_i^0, A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^m,$$

onaj što sadrži a_k najvišega ranga, jeste koeficijenat A_i^m kome odgovara a_{i+m} kao a_k najvišega ranga.

2° Između svih koeficijenata

$$A_0^m, A_1^m, A_2^m, \ldots, A_h^m$$

onaj što sadrži a_k najvišega ranga, jeste koeficijenat A_h^m, kome odgovara a_{h+m} kao a_k najvišega ranga.

3° Najveća vrednost koju može imati h prema pogodbi (394) jeste $h=n$, u kome je slučaju

$$i=j=\cdots=0.$$

Iz toga izlazi neposredno da je proizvod:

(395) $$A_i^0 A_j^1\ldots A_h^m$$

polinom prvoga stepena po a_{n+m} tako da je za $n>0$

(396) $$\lambda_n=U_n a_{n+m}+V_n$$

gde su U_n i V_n polinomi po

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n+m-1}$$

sa koeficijentima racionalnim po

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

i gde su brojni koeficijenti tih racionalnih funkcija i sami racionalni brojevi. Prvi koeficijenat λ_0 ima, u ostalom, za izraz:

$$\lambda_0 = M\, a_0^{p_0} a_1^{p_1} \ldots a_m^{p_m} \tag{397}$$

gde je M izvestan ceo broj.

Uočimo, naposletku, koeficijenat μ_n od x^n u zbiru jednoga ograničenoga broja p članova oblika (392), pomnoženih sa stalnim brojevima:

$$H_1, H_2, \ldots, H_p.$$

Prema ovome, što je gore kazano, koeficijenat će μ_n za $n>0$ biti oblika:

$$\mu_n = X_n\, a_{n+m} + Y_n \tag{398}$$

gde su X_n i Y_n polinomi po $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n+m-1}$, sa koeficijentima koji su oblika $\Sigma\, \alpha_i H_i$, a gde su α_i izvesne racionalne funkcije po $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ sa brojnim koeficijentima koji su svi racionalni brojevi. Koeficijenat μ_0 ima za izraz $\mu_0 = \Sigma\, \lambda_0$, i on je izvestan polinom po $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sa koeficijentima koji su oblika $\Sigma\, M_i H_i$ gde su M_i celi brojevi.

Pomoću ovih elemenata lako se rešava i postavljeni problem: odrediti opšti koeficijenat a_n Maclaurinovog reda

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{399}$$

koji zadovoljava kakvu diferencijalnu jednačinu algebarsku po x, y i izvodima funkcije y po x.

Pošto se jednačina uvek može dovesti na oblik:

$$\Phi(y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{400}$$

gde je Φ zbir jednoga ograničenog broja p članova oblika

$$H_i\, y^{p_0} y'^{p_1} \ldots y^{(m)p_m} \tag{401}$$

to će Maclaurinov red, u koji se pretvara polinom Φ, kad se u njemu bude smenilo y redom (399) biti:

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots \tag{402}$$

gde su $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ gore određivani koeficijenti, tako da je koeficijenat μ_n dat obrascem (398). Da bi red (399) zadovoljavao jednačinu (400) potrebno je i dovoljno da bude: $\mu_n = 0$, pa dakle prema obrascu (398)

$$X_n \cdot a_{n+m} + Y_n = 0 \tag{403}$$

odakle je:

$$a_{n+m} = -\frac{Y_n}{X_n}. \tag{404}$$

Otuda ovaj prvi rezultat:

Kad god kakav red

$$y = \Sigma a_n x^n \tag{405}$$

zadovoljava kakvu algebarsku diferencijalnu jednačinu konačnoga reda m, koeficijenat a_n*, počevši od ranga* $n = m + 1$*, može se izraziti kao racionalna funkcija prethodnih koeficijenata:*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

i izvesnog ograničenog broja iracionalnih količina koje ne mogu biti različne od onih što već figurišu u samoj datoj diferencijalnoj jednačini; osim toga koeficijenti ovih iracionalnih količina uvek su realni celi brojevi.

Ako se sad u obrascu (404) smenjuje uzastopce n sa $n-1$, $n-2$, itd. iz niza tako dobijenih jednačina može se a_n izračunati kao racionalna funkcija samo koeficijenata $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ i dolazi se do ovog rezultata:

Koeficijenat a_n *je racionalna funkcija količina*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

sa koeficijentima koji su polinomi po koeficijentima same diferencijalne jednačine a brojni koeficijenti ovih polinoma su realni celi brojevi.

Ono, dakle, što se u opštem koeficijentu a_n može menjati sa indeksom n jesu: izložioci pomenutih polinoma i celi brojevi što figurišu u koeficijentima tih polinoma. Svi iracionaliteti, koji bi figurisali u a_n *nezavisni su od n.* Osim toga ti su iracionaliteti racionalne kombinacije onih iracionaliteta što figurišu u prvih $m+n$ koeficijenata reda [a koji, u ostalom, mogu biti ma kakve prirode, pošto su ovi koeficijenti proizvoljni] i u koeficijentima $H_1, H_2, H_3, \ldots$ same diferencijalne jednačine.

Otuda ovaj zaključak:

Kad god jedan red (405) *zadovoljava kakvu algebarsku diferencijalnu jednačinu, njegov je opšti koeficijenat* a_n *ili racionalan broj, ili racionalna funkcija jednoga ograničenoga broja iracionaliteta koji se ne menjaju sa n; brojni koeficijenti te racionalne funkcije svi su realni celi brojevi.*

Taj stav ističe na vidik *hiper-transcendentan karakter* nepreglednoga mnoštva transcendenata definisanih redom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{406}$$

tj. *nemogućnost da funkcija, koju red predstavlja, bude integral kakve algebarske diferencijalne jednačine konačnog reda.* A ta će nemogućnost postojati kad god red ne ispunjava uslove poslednjeg stava.

Na završetku ovih izglaganja biće navedena jedna opšta aritmetičko-analitička teorema koju je dokazao Hurwitz dubljom analizom strukture koeficijenta a_n reda (406) koji zadovoljava kakvu algebarsku diferencijalnu jednačinu

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0. \tag{407}$$

Teorema se odnosi na redove (406) čiji su koeficijenti a_n *racionalni* brojevi, i njoj se može dati sledeći oblik:

Kad god red, pošto mu se koeficijenti a_n svedu na najprostiji izraz, zadovoljava kakvu diferencijalnu jednačinu (407), postoji jedan pozitivan ceo broj λ i jedan niz pozitivnih celih brojeva

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

sa ovom osobinom vezanom za koeficijente a_n reda:

Ako se sa $p(z)$ označi polinom n-tog stepena

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n$$

svaki prost broj sa kojim je deljiv koji od imenilaca koeficijenata

$$a_\lambda, a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots$$

sadržan je kao činilac u odgovarajućem celom broju

$$p(\lambda), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1)\cdot p(\lambda+2), \ldots$$

a svi su ti celi brojevi različni od nule.

Teorema dovodi i do ovoga stava kao svoje posledice:

Ako se sa β_n označi najveći prost broj sa kojim je deljiv imenilac koeficijenta a_n, logaritam broja β_n ne raste, pri rašćenju indeksa n, brže nego $\log n$.

A taj stav dovodi takođe do zaključaka o hipertranscendentnom karakteru nepreglednog mnoštva redova, tako da oni ne mogu biti integrali nikakve algebarske diferencijalne jednačine. Takav je npr. slučaj sa celom funkcijom promenljive x koja je predstavljena redom

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{(2^2)!} + \frac{x^3}{(3^3)!} + \frac{x^4}{(4^4)!} + \cdots$$

Dok ranije navedena teorema Pólya dokazuje hipertranscendentan karakter funkcija jednom *čisto analitičkom* osobinom koeficijenta a_n, teorema Hurwitza ga ističe na vidik pomoću jedne *aritmetičko-analitičke* osobine toga koeficijenta.

III

Stavovi i činjenice koje će biti predmet paragrafa što sleduje osnovani su na nekolikim *čisto aritmetičkim ili aritmetičko-analitičkim pomoćnim stavovima*, čiji se dokazi nalaze u udžbenicima za višu aritmetiku ili za algebarsku analizu. Ti se dokazi neće izlagati, pošto će stavovi ovde poslužiti samo kao pomoćno sredstvo za ono što se misli dokazati. Stavovi su ovi što sleduju.

Prvi pomoćni stav: *Da bi broj* $(n-1)!+1$ *bio deljiv sa celim pozitivnim brojem* n, *potrebno je i dovoljno da* n *bude prost broj.*

To je poznata u aritmetici Wilsonova teorema, koja se za potrebe ovoga što sleduje može iskazati u ovome obliku: ako se označi da je

$$\frac{(n-1)!+1}{n}=\lambda,$$

za svaki prost broj n je $\lambda=M$ a za svaki složen broj n je $\lambda=M-\frac{1}{n}$ gde je M ceo broj. Odatle sleduje kao posledica.

Drugi pomoćni stav: *Za svaki prost broj* n *je* $\frac{(n-1)!}{n}=M-\frac{1}{n}$, *a za svaki složen broj, osim za* $n=4$, *je* $\frac{(n-1)!}{n}=M$; *za* $n=4$ *je* $\frac{(n-1)!}{n}=\frac{3}{2}$.

Taj stav nalazi česte primene u istraživanjima aritmetičkih osobina integralnih redova, i on će ovde biti često primenjivan.

Treći pomoćni stav: *Kad je* n *kakav prost broj sa kojim nije deljiv ceo broj* a, *izraz* $\mu=\frac{a^{n-1}-1}{n}$ *je ceo broj.*

To je Fermatov aritmetički stav o prostim brojevima. On ne daje, kao Wilsonov stav, potrebne i dovoljne uslove da bi izraz μ bio ceo broj, jer ima i složenih brojeva n za koje je μ ceo broj. Takvi su brojevi jako razrađeni u prirodnome nizu celih brojeva, i oni su nazvati Fermatovim brojevima; takvi će složeni brojevi, za specijalan slučaj kad je $a=2$, ovde biti označeni sa

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Broj c_k je, dakle, ma koji složen broj n za koji je

$$\mu=\frac{2^{n-1}-1}{n}=\text{ceo broj}.$$

Po jednoj Lucasovoj aritmetičkoj teoremi, da bi jedan broj n bio jedan broj c_k, potrebno je da njime bude deljiv ne samo broj $2^{x-1}-1$, već i bar još jedan broj 2^z-1, gde je z kakav ceo broj manji od $x-1$. Stoga su ti brojevi retki; najmanji su među njima brojevi

$$c_1=341=11\cdot 31,$$
$$c_2=1105=5\cdot 13\cdot 17,$$
$$c_3=4369=17\cdot 257.$$

Postoje tablice tih brojeva koje daju sve brojeve c_k što leže između 0 i 100 000 000 (tablice Lehmera i Pouleta). Iz njih se vidi da između 0 i 1000 leže 3 takva broja; između 0 i 10 000 ima ih 22; između 0 i 100 000 ima ih 79; između 0 i 1 000 000 ima ih 247; između 0 i 10 000 000 ih je 750, a između 0 i 100 000 000 ima ih svega 2 037.

Četvrti pomoćni stav: *Kad god red*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{408}$$

čiji su koeficijenti racionalni brojevi, predstavlja kakvu algebarsku funkciju promenljive x, postoji jedan stalan, od n nezavisan ceo broj k takav da su svi proizvodi

$$a_n k^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

celi brojevi.

To je Eisensteinova teorema koja daje potrebne uslove da bi red (408) predstavljao algebarsku funkciju promenljive x. Ona ne daje u isti mah i dovoljne uslove za to, jer ima i transcendentnih funkcija koje, razvijene u red (408) imaju kao koeficijente a_n brojeve za koje postoji broj k sa navedenom aritmetičkom osobinom. Takva je npr. funkcija $f(x)$ definisana eliptičkim određenim integralom

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16\, a^2 x^2 t^2)}}$$

gde je a kakav racionalan broj $\dfrac{p}{q}$, koja kad se razvije u red (408), ima za koeficijenat a_n izraz

$$a_{2n} = \binom{2n}{n}^2 a^{2n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{q^{2n}}\, p^{2n};$$

u tome je slučaju $k = q$, jer je

$$a_{2n}\, q^{2n} = (n+1)(n+2)\ldots 2n \cdot p^{2n} = \text{ceo broj},$$

a svi koeficijenti a_{2n+1} su jednaki nuli, pošto je $f(x)$ parna funkcija.

Kao primer algebarske funkcije za koju važi stav, uočimo funkciju

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

gde je

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4\ 6 \ldots 2n}.$$

Taj se koeficijenat može napisati u obliku

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2} = \frac{\lambda_n}{2^{2n}}$$

gde je

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Poznato je iz teorije faktorijela da je λ_n uvek ceo broj; on je jednak broju $\binom{2n}{n}$ tj. koeficijentu srednjega člana u binomnom obrascu za $(1+x)^{2n}$. Prema tome, ako se za k uzme $k=4$, izraz $a_n k^n$ je odista ceo broj.

Iz Eisensteinove teoreme izvodi se kao posledica.

Peti pomoćni stav: *Kad god red* (408) *predstavlja kakvu algebarsku funkciju promenljive x, prosti brojevi sa kojima je deljiv imenilac a_n u ograničenom su broju, ne rastući beskrajno pri beskrajnom rašćenju indeksa n.*

Jer, pošto je $a_n k^n = h_n$ gde je h_n ceo broj, dobija se da je $a_n = \frac{h_n}{k^n}$ što pokazuje da imenilac koeficijenta a_n ne može imati za delilac nijedan prost broj koji nije delilac stalnog broja k, a ovi su delioci u ograničenom broju i ne rastu beskrajno pri beskrajnom rašćenju indeksa n.

Taj stav ističe na vidik transcendentan karakter mnoštva funkcija definisanih redom (408) sa racionalnim koeficijentima a_n. Tako npr. redovi

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

imaju koeficijente čiji su imenioci deljivi sa prostim brojevima koji beskrajno rastu sa rašćenjem ranga koeficijenta; oni, dakle, ne mogu predstavljati algebarske funkcije promenljive x, I odista, prvi red predstavlja logaritamsku funkciju $\log(1+x)$, a drugi eksponencijalnu funkciju e^x.

Šesti pomoćni stav: *Kad god se red* (408) *izražava u konačnom obliku pomoću elementarnih, tj. algebarskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija, najveći prost broj, sa kojim je deljiv imenilac koeficijenta a_n, ne raste brže no što raste rang n koeficijenta.*

Tu je teoremu dao bez dokaza Čebišev, ali su svi pokušaji da se ona ili tačno dokaže, ili nađe da je netačna, ostali bezuspešni, premda sva ispitivanja u tome pravcu naginju tome da je teorema tačna. Ona daje mogućnost da se čisto aritmetičkim posmatranjima istakne na vidik nesvodljivost pojedinih redova na konačne kombinacije elementarnih funkcija. Tako npr. broj n^2+1 je deljiv sa prostim brojevima koji rastu brže nego n; prema tome red (408) čiji je opšti koeficijenat

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}$$

nesvodljiv je na konačne kombinacije elementarnih funkcija.

U paragrafima što sleduju ti će aritmetički i aritmetičko-analitički stavovi biti primenjeni na ispitivanje aritmetičkih osobina koeficijenta a_n integralnog reda diferencijalnih jednačina.

IV

Predmet ovoga paragrafa biće diferencijalne jednačine oblika

$$f(x, y, y', y'' \dots) = 0 \tag{409}$$

gde je f polinom po promenljivim $x, y, y', y'', \dots$ koje sadrži sa koeficijentima koji su *racionalni brojevi* (i za koje se može uzeti da su *celi brojevi*, pošto se oslobođavanjem od imenilaca uvek slučaj može na to svesti).

Uočimo najpre jednačinu prvoga reda

$$f(y, y') = 0 \tag{410}$$

koja ne sadrži eksplicitno promenljivu x. Njen integral, koji za $x=0$, dobija vrednost $y=0$, dobija se inversijom Abelovog integrala

$$x = \int_0^y Y\,dy \tag{411}$$

gde je Y algebarska funkcija promenljive y definisana relacijom

$$f\left(y, \frac{1}{Y}\right) = 0. \tag{412}$$

Sa pretpostavkom da ta jednačina, rešena po Y, ima jedan koren Y koji je holomorfna funkcija promenljive y u blizini vrednosti $y=0$ i koji za $x=0$ dobija vrednost jednaku kakvome racionalnom broju, može se dokazati ovaj stav:

Promenljiva x definisana diferencijalnom jednačinom (410) *može se razviti u red*

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots \tag{413}$$

gde se koeficijenat b_n dobija kao koeficijenat stepena x^n u razvitku funkcije

$$f(x) = x\, e^{\frac{x}{k}} \tag{414}$$

(k = podesno izabran ceo pozitivan broj) kad se ovaj pomnoži jednim racionalnim brojem λ_n; broj λ_n je ceo broj kad je n složen broj; kad λ_n ima svoj imenilac različan od jedinice, n je prost broj.

Da bi se to dokazalo, primetimo da pošto je Y funkcija promenljive y holomorfna za $y=0$, ona se u blizini te vrednosti y može razviti u konvergentan red

$$Y = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots \tag{415}$$

Koeficijenti c_n toga reda biće svi *racionalni brojevi,* što se vidi iz ovoga što sleduje.

Koeficijenat c_0 je vrednost koju dobija Y za $y=0$, i ona je, kao što je pretpostavljeno, racionalan broj. Diferencijaljenjem jednačine (412) po x dobija se

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial Y} Y' = 0$$

odakle se, pošto je $y' = \dfrac{1}{Y}$ i kad se stavi da je

$$-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{Y}}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}} = f_0(y, Y), \tag{416}$$

rešenjem po Y' dobija da je

$$Y' = f_0(y, Y).$$

Diferencijaljenjem ove jednačine po x nalazi se da je

$$Y'' = \frac{\partial f_0}{\partial y} y' + \frac{\partial f_0}{\partial Y} Y'$$

odakle se, smenivši

$$y' = \frac{1}{Y}, \qquad Y' = f_0,$$

dobija

$$Y'' = f_1(y, Y)$$

gde je

$$f_1 = \frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_0}{\partial Y} f_0.$$

Ponovnim diferencijaljenjem dobija se

$$Y''' = f_2(y, Y)$$

gde je

$$f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_1}{\partial Y} f_0,$$

pa će uopšte biti

$$Y^{(n)} = f_{n-1}(y, Y)$$

gde je f_{n-1} član niza funkcija $f_0, f_1, f_2, \ldots$ koje se jedna iz druge izračunavaju po rekursivnom obrascu

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial Y} f_0$$

sa početnom funkcijom (416).

Koeficijenat c_n izračunava se po obrascu

$$c_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}]$$

gde $[f_{n-1}]$ označava broj koji se dobija kad se u funkciji f_{n-1} smeni

$$y = 0, \qquad Y = c_0.$$

Pa pošto su svi koeficijenti funkcija f_k racionalni brojevi, očevidno je da će tako isto biti i sa koeficijentima c_n.

Iz obrasca (411) dobija se tada da je

(417) $$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots$$

gde je

(418) $$b_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \mu_n \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \mu_n = \frac{(n-1)!}{n}.$$

Sa druge strane, pošto red (415) predstavlja algebarsku funkciju promenljive y, a koeficijenti su mu racionalni brojevi, prema četvrtom pomoćnom stavu postojaće jedan ceo pozitivan broj k takav da je svaki proizvod

$$c_n k^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ceo broj, koji ako se označi sa M_n biće

$$c_{n-1} = M_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}, \quad b_n = \mu_n M_{n-1} h_{n-1}, \quad h_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}.$$

Međutim h_{n-1} označava koeficijenat stepena y^n u razvitku funkcije (414). A prema drugom pomoćnom stavu broj μ_n će biti

1° ceo broj kad je n ma kakav složen broj osim $n = 4$;

2° nesvodljiv racionalan razlomak kad je n prost broj; može se desiti da se imenilac toga razlomka skrati uporedo sa celim brojem M_n, ali je sigurno to da kad taj imenilac ostane različan od jedinice, n je prost broj i kao takav ostaće u izrazu za μ_n, pa dakle i u imeniocu koeficijenta c_n.

Time je stav dokazan. A lako se uviđa da će sličan stav važiti i za opštu jednačinu (409) kad je ona takva da se iz nje jedna koja bilo od promenljivih $y, y', y'', \ldots$ što u njoj figurišu, izražava kao *racionalna funkcija* ostalih, a koeficijenti te funkcije su *racionalni brojevi*. I stav će važiti ne samo za početne uslove

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \ldots$$

nego i za uslove

$$x=m, \quad y=n_0, \quad y'=n_1, \quad y''=n_2, \ldots$$

gde su $m, n_0, n_1, n_2, \ldots$ ma kakvi *racionalni brojevi.*

Za slučaj jednačina prvoga reda

$$y'=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{419}$$

gde su P i Q polinomi po x i y *sa racionalnim koeficijentima,* a za integralni red y može se dokazati ova aritmetička osobina:

Napred je pokazano (4. odeljak) da se izračunavanje koeficijenta a_n integralnog reda y svodi na odredbu stalnih članova $p_1, p_2, p_3, \ldots$ u polinomima $P_1, P_2, P_3, \ldots$ koji se jedan iz drugog izračunavaju pomoću rekursivnog obrasca (59) i pomoću stalnog člana q polinoma Q; tada je koeficijenat a_n izražen obrascem

$$a_n=\frac{p_n}{n!\, q^{2n-1}} \tag{420}$$

što se može napisati u obliku

$$a_n=\frac{k_n}{n!\, q^{2n}}$$

gde je k_n ceo broj qp_n. Iz toga se vidi da:

Koeficijenat a_n za $n=1, 2, 3, \ldots$ integralnog reda jednak je koeficijentu stepena x^n u razvitku eksponencijalne funkcije

$$f(x)=e^{\frac{x}{q^2}}$$

pomnoženom jednim celim brojem.

To očevidno važi i za slučaj kad diferencijalna jednačina (419) ne sadrži eksplicitno nezavisno promenljivu količinu x. U tome slučaju ona pripada tipu jednačina (410) pa integralni red ima još i tu aritmetičku osobinu da mu je koeficijenat a_n jednak koeficijentu stepena x^n u razvitku funkcije

$$f(x)=x\, e^{\frac{x}{k}}$$

(gde je k podesno izabran ceo pozitivan broj), pomnožen jednim racionalnim brojem, koji se svodi na ceo broj kad je n kakav složen broj, a kad mu je imenilac različan od jedinice, n je prost broj.

Gornji stav za jednačinu (419) uopštava se i proširuje i na diferencijalne jednačine višega reda

$$y^{(p)}=\frac{P}{Q} \tag{421}$$

gde su P i Q polinomi po promenljivim

$$x, y, y', \ldots, y^{(p-1)} \tag{422}$$

čiji su koeficijenti *racionalni brojevi* (što se uvek može svesti na slučaj kad su koeficijenti *celi* brojevi).

Kao što je napred pokazano (20. odeljak), izračunavanje koeficijenta a_n integralnog reda y svodi se tada na odredbu stalnih člnnova $p_1, p_2, p_3, \ldots$ u polinomima $P_1, P_2, P_3, \ldots$ koji se jedan iz drugoga izračunavaju pomoću rekursivnog obrasca (335) i pomoću stalnog člana q polinoma Q; tada je

$$a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-2p+1}} \qquad (n = p+1, p+2, \ldots)$$

što se može napisati u obliku

$$a_n = \frac{k_n}{n!\, q^{2n}}$$

gde je k_n ceo broj $p_n q^{2p-1}$. A to pokazuje da gornji stav za jednačinu (419) odista važi i za jednačinu (421).

V

Neka je sad data ma kakva, algebarska ili transcendentna diferencijalna jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{423}$$

gde se za funkciju f pretpostavlja samo to da je holomorfna funkcija promenljivih x i y za $x=0$, $y=0$.

Prema osnovnoj Briot-Bouquetovoj teoremi, integral jednačine, koji za $x=0$ dobija vrednost $y=0$ izražava se u obliku reda

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{424}$$

konvergentnog u krugu koji određuje ta teorema.

Formirajmo pomoćnu funkciju

$$\varphi(x, u, u') = \frac{f(x, u + xu') - 2u'}{x} \tag{425}$$

a pomoću nje niz funkcija

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{426}$$

triju promenljivih x, u, u' koje se jedna iz druge izračunavaju po rekursivnom obrascu

$$\varphi_n = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} u' + \varphi \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u'}$$

sa početnom funkcijom

$$\varphi_0 = \varphi(x, u, u').$$

Uočimo niz brojeva

(427) $$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

gde A_n označuje broj koji se dobija kad se u funkciji φ_{n-2} niza (427) smeni

(428) $$x = 0, \quad u = 0, \quad u' = \frac{1}{2} f(0, 0).$$

Tada postoji jedna čisto aritmetička veza između dvaju nizova brojeva

$$A_5, A_6, A_7, \ldots$$

$$a_5, a_6, a_7, \ldots$$

i ta se veza izražava ovim stavom:

Kad god je koji od brojeva A_n jednak recipročnoj vrednosti kakvog celog (pozitivnog ili negativnog) broja, da bi tako isto bilo i sa koeficijentom a_n istoga ranga, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen jedan ili drugi od ova dva aritmetička uslova:

1° *ili da ceo broj $\dfrac{1}{A_n}$ bude deljiv sa $n+1$;*

2° *ili da n nije kakav prost broj smanjen za jedinicu.*

Da bi se to dokazalo, primetimo da, pošto jednačina (423) ima integral y koji se u blizini vrednosti $x=0$ može razviti u red (424) diferencijalna jednačina drugoga reda

(429) $$u'' = \varphi(x, u, u')$$

takođe ima integral u koji se u blizini vrednosti $x=0$ može razviti u red

(430) $$u = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

Jer, ako se u jednačini (429) izvrši smena

(431) $$(xu)' = xu' + u = y$$

iz čega se dobija da je

(432) $$y' = xu'' + 2u',$$

prema (425), (429) i (432) dobija se da je

$$y' = x\varphi(x, u, u') + 2u' = f(x, u + xu') = f(x, y)$$

iz čega se vidi da funkcija $y = (xu)'$ zadovoljava jednačinu (423). Prema tome je

$$(xu)' = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

a odatle se, za integral u koji za $x=0$ dobija vrednost $u=0$, dobija izraz

$$u = \frac{1}{x}\int y\,dx = \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x_2 + \frac{a_3}{4} x^3 + \cdots$$

što pokazuje da se on odista može razviti u red (430), kao i to da koeficijenat b_n toga reda ima za izraz

(433) $$b_n = \frac{a_n}{n+1}.$$

Međutim, isti koeficijenat b_n može se izračunati i pomoću brojeva A_n niza (427), jer se iz jednačine (429) uzastopnim diferencijaljenjima dobija da je

$$u''' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u' + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} \varphi = \varphi_1;$$

$$u'''' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u'} \varphi = \varphi_2; \cdots$$

i uopšte

$$u^{(n)} = \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial u} u' + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial u'} \varphi = \varphi_{n-2}, \qquad (n=4, 5, \ldots)$$

iz čega se vidi da je

(434) $$b_n = \frac{A_n}{n!}.$$

Ujednačivši desne strane jednačine (433) i (434) dobija se da je

$$a_n = \lambda_n A_n, \quad \lambda_n = \frac{n+1}{n!}.$$

Da bi koeficijenat a_n bio jednak recipročnoj vrednosti kakvog celog broja, potrebno je i dovoljno 1° ili da imenilac broja A_n bude deljiv sa $n+1$; 2° ili da λ_n bude recipročna vrednost kakvog celog broja. Prema drugom pomoćnom stavu, pošto je po pretpostavci $n>4$, da bi uslov 2° bio ispunjen, potrebno je i dovoljno da $n+1$ bude složen broj, čime je stav dokazan.

Jedan stav slične vrste može se dokazati i za prvi izvod y' diferencijalne jednačine (423). Formirajmo pomoćnu funkciju

(435) $$\psi(x, u) = \frac{f(x, xu) - u}{x}$$

i pomoću nje niz funkcija

(436) $$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$

dveju promenljivih x i u, koje se jedna iz druge izračunavaju po rekursivnom obrascu

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + \psi \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u}$$

sa početnom funkcijom

$$\psi_0 = \psi(x, u).$$

Uočimo niz brojeva $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gde C_n označuje broj koji se dobija kad se u funkciji ψ_n izvrši smena

(437) $$x = 0, \quad u = f(0, 0).$$

Tada između nizova brojeva

$$C_5, C_6, C_7, \ldots \quad \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \ldots$$

gde su α_n koeficijenti reda

$$y' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

postoji aritmetička veza izražena ovim stavom:

Kad god je koji od brojeva C_k jednak recipročnoj vrednosti kakvog celog (pozitivnog ili negativnog) broja, da bi tako isto bilo i sa koeficijentom α_n, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen jedan ili drugi od dva aritmetička uslova:

1° *ili da ceo broj $\dfrac{1}{C_k}$ bude deljiv sa $k+1$;*

2° *ili da k nije kakav prost broj smanjen za jedinicu.*

Da bi se to dokazalo, stavimo da je

$$\frac{y}{x} = u.$$

Partikularnom integralu

(438) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

jednačine (423) odgovara partikularni integral

(439) $$u = \frac{y}{x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

jednačine

(440) $$u' = \psi(x, u)$$

koji za $x = 0$ dobija vrednost

$$u = a_1 = f(0, 0).$$

Prema jednačini (439) i ranijem pravilu za izračunavanje koeficijenata integralnog reda, biće

(441) $$c_n = \frac{C_n}{n!},$$

pa pošto se iz (438) i (439) vidi da je u isto vreme i

(442) $$c_n = a_{n+1}$$

upoređenjem jednačina (441) i (442) dobija se da je $a_{n+1} = \dfrac{C_n}{n!}$, a kako je $\alpha_n = (n+1)\, a_{n+1}$ nalazi se da je

$$\alpha_n = \lambda_n C_n, \quad \lambda_n = \frac{n+1}{n!},$$

pa se dokaz dovršuje kao i u prethodnom slučaju.

Prvi primer: Za diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x+1}{x} y + x \tag{443}$$

je

$$\psi(x, u) = 1 + u$$

pa se nalazi da je

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \cdots = 1 + u$$

i prema tome

$$C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = 1.$$

Jednačina (440) ovde je

$$u' = 1 + u;$$

i ona ima kao partikularni integral

$$u = e^x - 1;$$

jednačina (443) ima kao odgovarajući partikularni integral

$$y = x(e^x - 1)$$

koji ima za izvod

$$y' = (x+1)e^x - 1$$

koji razvijen u red daje

$$y' = 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{720}x^6 + \frac{1}{630}x^7 + \cdots$$

pa se na tome redu neposredno proverava da su koeficijenti onih stepena x^n jednaki recipročnoj vrednosti kakvoga celog broja za koje je $n+1$ složen broj; oni to nisu za one vrednosti n za koje je $n+1$ prost broj.

Drugi primer: Za diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2} \tag{444}$$

je

$$\psi(x, u) = \sqrt{1 - u^2}$$

pa se nalazi da je

$$\psi_{4k} = \sqrt{1-u^2}, \quad \psi_{4k+1} = -u, \quad \psi_{4k+2} = -\sqrt{1-u^2}, \quad \psi_{4k+3} = u,$$

i prema tome svi brojevi C_n imaju za vrednost 0, -1, $+1$. To dovodi za red u koji se može razviti izvod y' do istog zaključka kao u prvome primeru. A zaključak se proverava neposredno na integralu y koji je

$$y = x \sin x$$

čiji se izvod

$$y' = \sin x + x \cos x$$

može razviti u red

$$y' = 2x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{20}x^3 - \frac{1}{630}x^4 + \cdots$$

23.

ARITMETIČKE OSOBINE INTEGRALA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

U odeljku što prethodi izložene su nekolike aritmetičke osobine koeficijenata a_n integralnog reda diferencijalne jednačine ili sistema, prvoga ili višeg reda. Od interesa je saznati i za pojedine aritmetičke osobine samoga integrala. Takve su npr. osobine vezane za vrednosti koje integral dobija kad se u njemu nezavisno promenljiva količina x smeni celim brojem, ili za nule integrala, njegove maksimume i minimume, njegove asimptotne vrednosti, pojedinih geometrijskih elemenata integralne krive linije itd. U ovome će odeljku biti dat odgovor na nekolika pitanja te vrste, a koja se naročito tiču uloge *prostih brojeva* u čisto analitičkim problemima integracije diferencijalnih jednačina.

I

Posmatrajmo skup funkcija

$$y = \Phi(x)$$

koje imaju tu osobinu da za x jednako ma koliko celom pozitivnom broju m funkcija dobija vrednost $\Phi(m)$ koja je *racionalan broj*. Neka su p i q brojilac i imenilac toga racionalnog broja posle izvršenog mogućnog skraćivanja, tako da je

$$\Phi(m) = \frac{p}{q}.$$

Lako se može uveriti da postoje

1° takve funkcije $\Phi(x)$ da kad god je imenilac q različan od jedinice, on je uvek *složen broj*. Takva je npr. prema Wilsonovoj teoremi (pomoćni stav u 23. odeljku) funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{x}.$$

Funkcije te vrste ovde će biti označene kao funkcije $\lambda(x)$;

2° takve funkcije $\Phi(x)$ da kad god je imenilac q različan od jedinice, on je uvek *prost broj*. Takva je npr. opet prema Wilsonovoj teoremi, funkcija

$$\Phi(x)=\frac{\Gamma(x)}{x} \qquad \text{za } x>4.$$

Funkcije te vrste ovde će biti označene kao *funkcije* $\mu(x)$.

Na pitanje: da li algebarske diferencijalne jednačine

(445) $$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})=0$$

mogu imati među svojim integralima i funkcije $\lambda(x)$ ili $\mu(x)$, može se dati ovaj odgovor:

Sve do danas poznate funkcije $\mu(x)$ su *hipertranscendentne*, tj. nisu integrali nikakve jednačine (445). Ali to ne važi i za funkcije $\lambda(x)$: *diferencijalne jednačine* (445) *mogu imati kao svoje integrale funkcije* $\lambda(x)$.

Da bi se o tome uverili, posmatrajmo funkciju

(446) $$y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x}-1\right) \text{ gde je } \alpha=\log 2=0,693147\ldots$$

To je jedna funkcija $\lambda(x)$, jer se ona može napisati u obliku

$$y=\frac{2^{x-1}-1}{x}$$

a prema Fermatovoj teoremi (pomoćni stav 23. u odeljku) izraz $2^{x-1}-1$ je deljiv sa x kad god je x ceo prost broj; ako, dakle, vrednost funkcije y za $x=$ ceo broj ima imenilac različan od jedinice, taj imenilac je složen broj i y je jedna funkcija $\lambda(x)$. Međutim, ta funkcija y je integral linearne jednačine prvoga reda

(447) $$xy'+(1-\alpha x)y-\alpha=0.$$

Među funkcijama $\lambda(x)$ mogu se razlikovati

1° jedne, koje će biti označene sa $\lambda_1(x)$, i za koje je $\lambda_1(x)$ ceo broj kad god je x ceo *prost broj*, a razlomak kad god je x ceo *složen broj*. Takva je npr. funkcija

$$\lambda_1(x)=\frac{1+\Gamma(x)}{x};$$

2° druge, koje će biti označene sa $\lambda_2(x)$, za koje kad x ne premaša jedan utvrđen broj M, vrednost $\lambda_2(x)$ ima gornju aritmetičku osobinu funkcija $\lambda_1(x)$.

Za do sada poznate funkcije $\lambda_1(x)$ ne postoji nikakva diferencijalna jednačina (445) koja bi njih imala kao svoje integrale. Ali to ne važi i za funkcije $\lambda_2(x)$: *postoje diferencijalne jednačine* (445) *što imaju kao svoj integral koju od funkcija* $\lambda_2(x)$.

Da bi se o tome uverili, uočimo funkciju

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{ax}-1\right)+\frac{a}{2\pi}R(x)\sin 2\pi x \tag{448}$$

gde je a proizvoljan racionalan broj, a $R(x)$ racionalna funkcija oblika

$$R(x)=\frac{1}{x-c_1}+\frac{1}{x-c_2}+\cdots+\frac{1}{x-c_p}$$

a gde $c_1, c_2 \ldots c_p$ označuje skup Fermatovih brojeva koji ne premašuju dati broj M (v. pomoćni stav u 23. odeljku).

Lako se uveriti da sa takvom strukturom racionalne funkcije $R(x)$ funkcija y ima tu osobinu da postaje ceo broj kad se x smeni ma kojim prostim brojem, a da postaje razlomak kad se x smeni ma kojim složenim brojem manjim od M. Jer, prema Fermatovoj teoremi, za $x=$ prost broj prvi sabirak funkcije y je ceo broj, a drugi sabirak postaje jednak nuli; za $x=$ složen broj $\leqslant M$ (osim $x=c_1, c_2 \ldots c_p$) prvi sabirak je razlomak, a drugi sabirak jednak nuli; za same vrednosti $x=c_1, c_2 \ldots c_p$ prvi sabirak je ceo broj, a drugi je razlomak (što se vidi primenom L'Hospitalovog pravila na taj sabirak). To pokazuje da funkcija y odista ima odliku funkcija $\lambda_2(x)$.

Međutim, *ta funkcija y je integral jedne diferencijalne jednačine drugoga reda oblika*

$$Py''^2+Qy'+S=0 \tag{449}$$

gde su P, Q, S polinomi po y i y'; koeficijenti tih polinoma su racionalne funkcije promenljive x čiji su koeficijenti celi brojevi. Polinom P je drugog stepena, Q je trećeg, a S četvrtog stepena po y i y'. Jednačina (449) dobija se kad se jednačina (448) diferencijali dva puta uzastopce pa se iz tako dobijenih dveju jednačina i jednačine (448) eleminišu $\sin 2\pi x$ i $\cos 2\pi x$.

Kad je $M<341$, pošto ne postoji ni jedan broj c_k manji od M, funkcija y se svodi na funkciju (446), a diferencijalna jednačina (449) na jednačinu (447).

Kad je $M<1105$, pošto postoji samo jedan broj c_k manji od M, a to je $c_1=341$, funkcija y je

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{ax}-1\right)+\frac{a}{2\pi}\,\frac{\sin 2\pi x}{x-341}\,.$$

Kad je $M < 4369$, pošto postoje samo dva broja c_k manja od M, a to su $c_1 = 341$ i $c_2 = 1105$, funkcija y je

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} e^{ax} = 1\right) + \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{2x - 1446}{x^2 - 1446x + 376805} \sin 2\pi x. \tag{450}$$

II

Zna se da postoji beskrajno mnogo funkcija $\theta(x)$ koje su uniformne u celoj ravni promenljive x i imaju tu odluku da postaju jednake nuli za sve *proste brojeve* x, veće od 2, a različne su od nule za sve *složene brojeve*. Ali ni jedna od takvih funkcija nije integral nikakve jednačine (445).

Po analogiji sa onim što je kazano u paragrafu I, postavlja se pitanje: da li ima takvih funkcija $\theta(x)$ koje zadovoljavaju kakvu od jednačina (445), a imaju tu aritmetičku osobinu za sve brojeve x što ne premašuju jedan dati broj M?

Odgovor na pitanje je pozitivan: *postoje diferencijalne jednačine* (445) *što imaju za integral koju od takvih funkcija* $\theta(x)$.

Da bi se to videlo, pođimo od jednačine prvoga reda

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{y'}{\lambda_2'}\right)^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{451}$$

gde je λ_2 jedna od funkcija (448) iz paragrafa I. Eleminacijom transcendenata e^{ax} i $\sin 2\pi x$ iz jednačine (451) i dveju jednačina koje se iz ove dobijaju dvama uzastopnim diferencijaljenjima, dolazi se do jedne algebarske diferencijalne jednačine trećega reda

$$f(x, y\, y', y'', y''') = 0$$

koja ima za jedan svoj partikularni integral funkciju

$$y = \sin(2\pi\lambda_2)$$

a ta funkcija prema aritmetičkoj osobini funkcije λ_2, postaje jednaka nuli kad je x ma kakav prost broj, a različna je od nule kad je x kakav složen broj što ne premaša M.

Ali funkcije $\theta(x)$ takve vrste mogu, pored prostih brojeva, imati kao svoje realne nule još i druge brojeve koji nisu celi, pošto se može desiti da funkcija $\lambda_2(x)$ postane ceo broj i za koju vrednost x koji nije ceo broj. Postavlja se, dakle, pitanje: da li ima takvih funkcija $\theta(x)$ koje zadovoljavaju kakvu diferencijalnu jednačinu (445), a koje bi imale kao svoje realne nule što ne premašaju dati broj M, isključivo proste brojeve x?

Odgovor je i na to pitanje pozitivan: *postoje diferencijalne jednačine* (445) *što imaju za integral koju od takvih funkcija* $\theta(x)$. Takva bi npr. jedna funkcija bila

$$\theta(x) = 2 - \cos 2\pi x - \cos 2\pi\lambda_2$$

jer, da bi ona za realno x dobila vrednost nulu, potrebno je i dovoljno da bude u jedan isti mah

$$\cos 2\pi x = 1, \qquad \cos 2\pi\lambda_2 = 1;$$

prva jednačina pokazuje da x treba da je ceo broj, a druga da je λ_2 ceo broj pa dakle taj ceo broj x treba da bude jednak ma kome prostom broju; za ma kakav složen broj što ne premaša M to neće biti slučaj.

Međutim ta funkcija $\theta(x)$ je integral jedne algebarske diferencijalne jednačine koja se dobija eliminacijom transcendenata iz jednačine (451) i onih što se iz nje dobijaju uzastopnim diferencijaljenjima.

III

U pogledu asimptotnih vrednosti integrala algebarskih diferencijalnih jednačina može se tvrditi da i one mogu biti u vezi sa prostim brojevima. Tako ima prostranih klasa jednačina prvoga ili višeg reda čiji opšti, ili koji partikularni integral *ima za asimptotnu vrednost broj koji se izražava pomoću prostih brojeva što ne premašaju jedan utvrđen broj* M.

Uočimo npr. jednačinu drugoga reda

(452) $$y'' + \varphi(y)\, y'^2 + f(x)\, y' = 0$$

gde je $\varphi(y)$ data funkcija promenljive y, a $f(x)$ data funkcija promenljive x. Smenom

(453) $$y' = zY,$$

odakle je

(454) $$y'' = Yz' + YY' z^2,$$

jednačina (452) postaje

(455) $$z' + (Y' + \varphi Y) z^2 + fz = 0.$$

Izaberimo Y tako da bude

(456) $$Y' + \varphi Y = 0,$$

tj. tako da je

(457) $$Y = e^{-\int \varphi(y)\, dy}$$

pa se jednačina (455) svodi na

(458) $$z' + f(x)\, z = 0,$$

a ova ima za opšti integral

$$z = C' e^{-\int f(x)\,dx}, \tag{459}$$

gde je C' integraciona konstanta.

Prema obrascima (453), (457) i (459) opšti integral jednačine (452) je

$$y = \psi\left[C + C' \int\limits_0^x e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right], \tag{460}$$

gde $y = \psi(t)$ označuje inversiju integrala

$$\int e^{\int \varphi(y)\,dy}\,dy = t. \tag{461}$$

Uočimo specijalni slučaj kad je:

1° inversija $\psi(t)$ periodična funkcija promenljive t;

2° funkcija $f(x)$ ima oblik

$$f(x) = 1 - \frac{P'_m(x)}{P_m(x)}, \tag{462}$$

gde P_m označuje polinom $(m-1)$-og stepena

$$P_m(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdot \quad \cdot + \frac{x^{m-1}}{m}, \tag{463}$$

gde su imenioci sabiraka članovi prirodnog niza celih brojeva koji ne premašaju m.

Tada je

$$\int f(x)\,dx = x - \log P_m(x)$$

i prema tome

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{-x} P_m(x).$$

Opšti integral jednačina (452) je dakle

$$y = \psi\left[C + C' \int\limits_0^x P_m(x)\,e^{-x}\,dx\right], \tag{464}$$

a asimptotna vrednost $y(\infty)$ integrala za $x = \infty$ je

$$y(\infty) = \psi(C + C' I_m), \tag{465}$$

gde je

$$I_m = L_1 + L_2 + \cdots + L_m,$$

$$L_n = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = \frac{(n-1)!}{n}.$$

Pošto je prema ranijem pomoćnom stavu (23. odeljak)

za $n =$ prost broj $\qquad \dfrac{(n-1)!}{n} = M - \dfrac{1}{n},$

za $n =$ složen broj (osim 4) $\dfrac{(n-1)!}{n} = N,$

za $n = 4$ $\qquad \dfrac{(n-1)!}{n} = 1 - \dfrac{1}{2},$

(gde su M i N celi brojevi), to će biti

$$y(\infty) = \psi(C + C' s_m - C' A),$$

gde je A ceo broj, a s_m označuje brojnu konstantu

(466) $$s_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

jednaku zbiru recipročnih vrednosti prirodnog niza prostih brojeva koji ne premašuju m.

Ako se uzmu u obzir oni integrali y što odgovaraju vrednosti integracione konstante

(467) $$C' = \omega,$$

gde je ω elementarna perioda funkcije $\psi(t)$, biće

(468) $$y(\infty) = \psi(C + \omega s_m),$$

iz čega se vidi da:

Algebarska jednačina drugoga reda (452), *kad se u njoj algebarske funkcije $f(x)$ i $\varphi(y)$ izaberu na gore navedeni način, ima jednu klasu integrala y što zavise od jedne integracione konstante C i čija se asimptotna vrednost izražava pomoću prirodnog niza prostih brojeva manjih od jednoga određenog broja.*

Takav je npr. slučaj sa jednačinom

$$(y'' + fy')(1 - y^2) + yy'^2 = 0,$$

kad je f racionalna funkcija promenljive x oblika (462). Toj jednačini odgovara

$$\varphi(y) = \frac{y}{1 - y^2}, \quad Y = \sqrt{1 - y^2}, \quad \psi(t) = \sin t,$$

tako da je njen opšti integral

$$y = \sin\left[C + C' \int_0^x e^{-x} P_m(x)\, dx\right].$$

Ona klasa integrala te jednačine što odgovara vrednosti $C' = 2\pi$ konstante C', ima gore navedenu aritmetičku osobinu: njihova asimptotna vrednost je

$$y(\infty) = \sin(C + 2\pi s_m).$$

IV

Pojedini geometrijski elementi integralne krive linije takođe mogu biti u vezi sa prostim brojevima i izražavati se pomoću ovih. Kao primer, ovde će biti pokazana takva veza što postoji između prostih brojeva i površine integralne krive za algebarsku diferencijalnu jednačinu drugoga reda formiranu na ovaj način:

Pođimo od linearne jednačine prvoga reda

$$f(x)\, y' + \varphi(x)\, y + \psi(x) = 0 \tag{469}$$

gde je

$$f(x) = xe^x, \quad \varphi(x) = \frac{d}{dx}(xe^x),$$

$$\psi(x) = -\left(\frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\right)$$

a α i β $(\alpha < \beta)$ označuju dva ma kakva cela pozitivna broja veća od 4.

Kad se iz (469) i jednačine

$$fy'' + (\varphi + f')\, y' + \varphi' y + \psi' = 0$$

koja se dobija diferencijaljenjem jednačine (469) eliminiše e^x, dobija se jedna diferencijalna jednačina drugoga reda

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{470}$$

gde je F polinom po x, y, y', y''; to je jednačina koja se ovde ima u vidu.

Jednačina (469) ima kao jedan svoj partikularni integral funkciju

$$y = \frac{e^{-x}}{x} \int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\, dx \tag{471}$$

pa će nju imati za partikularni integral i jednačina (470). Integralna kriva prolazi kroz koordinatni početak, ima sa desne strane osovine oy jedan pozitivni maksimum i osovina ox joj je asimptota, a u isto vreme i dirka u početku. To se vidi iz tog što je

$$\frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1} = x^\alpha + x^{\alpha+1} + \cdots + x^{\beta-1}, \tag{472}$$

prema čemu je

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+2} + \cdots + \frac{x^{\beta-1}}{\beta}.$$

Jednačina integralne krive može se, dakle, napisati u obliku

$$y = e^{-x}\,P(x)$$

gde je $P(x)$ polinom (472). Izvod y' je

$$y' = Q(x)\,e^{-x}$$

gde je Q polinom

$$Q(x) = P'(x) - P(x) = \frac{\alpha}{\alpha+1}\,x^{\alpha-1} + C_1 x^\alpha + C_2\,x^{\alpha+1} + \cdots - \frac{x^{\beta-1}}{\beta},$$

a $C_1, C_2, \ldots$ su konstante izražene obrascem

$$C_k = \frac{(\alpha+k)^2 - (\alpha+k+1)}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}.$$

Iz toga se vidi da će za $x=0$ biti $y'=0$, tj. da integralna kriva dodiruje apscisnu osovinu u koordinatnom početku. A pošto je broj $\alpha+k$ veći od 2, koeficijenti C_k su svi pozitivni, tako da polinom $Q(x)$ ima svega jednu promenu znaka svojih sabiraka, pa prema tome on ima najviše jednu pozitivnu nulu. Ta nula odista postoji, jer za dovoljno malu pozitivnu vrednost x vrednost $Q(x)$ je pozitivna, dok za vrlo velike vrednosti x ona je negativna (pošto je $\beta-1$ najviši stepen u polinomu Q). Toj jedinoj nuli polinoma Q odgovara jedna maksimalna funkcija y, jer kad bi to bio jedan njen minimum, funkcija bi morala proći kroz još jedan maksimum pre no što počne opadati i težiti nuli kao graničnoj vrednosi.

Celokupna površina S integralne krive linije, što se nalazi sa desne strane ordinatne osovine, ima tada ovu aritmetičku osobinu:

Kad god je površina S izražena kakvim decimalnim brojem, decimalni deo toga broja jednak je dopuni do jedinice decimalnog dela zbira recipročnih vrednosti svih prostih brojeva što se nalaze između α i β.

Da bi se to dokazalo. pođimo od obrasca

$$S=\int_0^{\infty} y\,dx=\int_0^{\infty} e^{-x} P(x)\,dx$$

iz koga se dobija da je

$$S=A_{\alpha+1}+A_{\alpha+2}+A_{\alpha+3}+\cdots$$

gde je

$$A_n=\frac{1}{n}\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

što prema poznatom integralnom obrascu

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x}\,dx=p!$$

daje

$$A_n=\frac{(n-1)!}{n}.$$

Prema pomoćnom stavu iz 23. odeljka, kad god je $n>4$ kakav složen broj, faktorijel $(n-1)!$ je deljiv sa n, a kad god je $n>4$ kakav prost broj, biće

$$\frac{(n-1)!}{n}=\text{ceo broj}-\frac{1}{n}.$$

Prema tome će biti

$$S=\text{ceo broj}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}+\cdots\right)$$

gde su $p, p', p'' \ldots$ uzastopni prosti brojevi što se nalaze između α i β, kao što je trebalo dokazati.