ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

ОД
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА
ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЋЕЛОВИЋА - ТРЕБИЊЦА

БЕОГРАД
1 9 3 7

пријатељски спомен.

Мих. Петровић

ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

ОД

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЋЕЛОВИЋА - ТРЕБИЊЦА

БЕОГРАД

1937

Штампарија „Меркур“, Душана Јанковића, Топличин Венац бр. 10.

Реч унапред

Из обимне, данас толико обрађене теорије елиптичких функција, у овај кратак уџбеник ушло је само оно што се, према елементарним знањима из диференцијалног и интегралног рачуна, и опште теорије аналитичких функција, са којима се претпоставља да располажу слушаоци, може прећи на предавањима од једног скраћеног семестра.

Докази су, местимице и на рачун онакве тачности са каквом се данас ради, упрошћени и скраћени до крајњих граница могућности, а у намери да слушалац што лакше и брже дође ма и до овлашне слике ствари и да му се омогући употреба рачунског инструмента који пружају елиптичке функције. То је, уосталом, све што се може тражити од једног, овако скраћеног, уџбеника.

Писац.

Први одељак

Основни појмови о периодичним функцијама

1. Појам о периодичности

Из Тригонометрије се зна да, кад се за мерење углова узме таква јединица мере, да пун угао има за вредност 2π, функција $\sin z$ не мења се кад се вредности z дода или одузме 2π, што изражава једначина

$$\sin (z \pm 2\pi) = \sin z .$$

Исто тако, из Елементарне Анализе зна се да је

$$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

према чему функција e^z има ту особину да не мења вредност кад се вредности z дода или одузме $2\pi i$, што се изражава једначином

$$e^{z \pm 2\pi i} = e^z .$$

За те две функције каже се да су *периодичне* и да имају за *периоду*, прва број 2π, друга број $2\pi i$.

И у опште, *за једну функцију $f(z)$ каже се да је периодична ако постоји такав један број ω, независан од z, да је за ма какво z*

$$f(z \pm \omega) = f(z) .$$

Број ω назива се тада *периода* функције $f(z)$. Лако се увиђа да, кад $f(z)$ има као периоду један број ω, имаће бескрајно много периода, а то су

$$\pm\omega\,,\ \pm 2\omega\,,\ \pm 3\omega\,,\ \pm 4\omega\,,\cdots$$

т. ј. *позитивни и негативни мултипли броја* ω. То се види из тога што је очевидно

$$f(z\pm 2\omega)=f(z\pm\omega)=f(z)\,,$$
$$f(z\pm 3\omega)=f(z\pm 2\omega)=f(z)\,,$$
$$f(z\pm 4\omega)=f(z\pm 3\omega)=f(z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Кад је, дакле, ω периода функције, биће јој периода и $m\omega$, где је m ма какав, позитиван или негативан, цео број. Кад је број ω такав да испуњава ове погодбе: 1^0 да се свака друга периода функције изражава као мултипл тога броја; 2^0 да је сваки мултипл тога броја једна периода функције, онда се за такав број ω каже да је *основна, несводљива периода* функције.

Такви су н. пр. бројеви

$$\omega=2\pi \quad \text{за функцију} \quad \sin z\,,$$
$$\omega=2\pi i \quad \text{за функцију} \quad e^z\,.$$

Међутим, такав није број π за функцију $\sin z$: тачно је да су све периоде функције мултипли броја π, али свакав његов мултипл, н. пр. $3\pi\,,5\pi\,,7\pi\cdots$ нису периоде.

Из саме дефиниције основне периоде види се да је то међу свима периодама она која је, у равни промењљиве z, *најближа координатном почетку.*

Но има функција чије се све периоде не изражавају као мултипли једне исте периоде, већ се једне изражавају као мултипли једнога броја ω_1, друге као мултипли другога каквог броја ω_2, треће као мултипли трећега броја ω_3 и т.д. где су бројеви $\omega_1\,,\omega_2\,,\omega_3\cdots$ такође периоде исте функције, али ни један од њих није мултипл другог.

У таквом се случају има сматрати да функција има неколико низова периода

$$(1)\qquad \begin{array}{l} \pm\omega_1\,,\ \pm 2\omega_1\,,\ \pm 3\omega_1\,,\cdots \\ \pm\omega_2\,,\ \pm 2\omega_2\,,\ \pm 3\omega_2\,,\cdots \\ \pm\omega_3\,,\ \pm 2\omega_3\,,\ \pm 3\omega_3\,,\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

За први низ има се сматрати као основна периода број ω_1, за други низ број ω_2, за трећи број ω_3 и т.д. За функцију има се такође сматрати да има онолико основних периода, колико има таквих бројева $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots$

Кад су ω_1 и ω_2 две основне периоде функције $f(z)$, биће

$$f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(z + m_1\omega_1) = f(z).$$

И уопште, кад су $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ основне периоде функције $f(z)$, биће

$$f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_n\omega_n) = f(z),$$

па ма какве вредности имали цели, позитивни или негативни бројеви $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$. Према томе функција ће, поред низова (1), имати као периоде и све вредности

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_n\omega_n. \tag{2}$$

Израз (2) је најопштији израз за периоде посматране функције; он изражава сваку периоду као линеарну и хомогену комбинацију основних периода $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$, где су коефицијенти комбинације цели бројеви. Свака се периода изражава у облику (2), и обратно, сваки облик (2) је једна периода функције.

Функције $f(z)$, за које постоји само један број ω_1 поменуте врсте, називају се *просто-периодичне функције.* Оне за које постоје два таква броја ω_1 и ω_2, називају се *дво-периодичне функције*, са основним периодама ω_1 и ω_2. И уопште функције за које постоје n таквих бројева $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n$ називају се *n-периодичне функције*, са основним периодама $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$.

2. Просто-периодичне функције

Као што је напред казано, функција $f(z)$ назива се *просто-периодичном функцијом* кад има периоде и кад се све њене периоде изражавају као мултипли једнога истог броја ω који има ове особине: 1^0 свака друга периода је мултипл броја ω; 2^0 сваки мултипл броја ω је једна периода функције; број ω је и сам једна периода. Број ω је тада *основна периода* функције.

Основна периода ω може бити реалан, или чисто имагинаран, или комплексан број. Тако н. пр. функција $\sin az$, где је a реалан број, има за периоду реалан број

$$\omega = \frac{2\pi}{a};$$

функција e^{az} има за периоду чисто имагинаран број

$$\omega = \frac{2\pi i}{a},$$

а функција $e^{(1+i)z}$ има за периоду комплексан број

$$\omega = (1+i)\pi.$$

Помоћу елементарних функција e^z и $\sin z$ може се формирати бескрајно много просто-периодичних функција $f(z)$. Такве су н. пр. функције са периодом

$$\omega = \frac{2\pi i}{a}:$$

1° сваки полином по e^{az}

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \cdots + A_n e^{naz};$$

2° свака рационална функција по e^{az}, т. ј. количник таква два полинома;

3° сваки конвергентан ред облика

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{naz}$$

као и ред облика

4° $$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{naz} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n e^{-naz}.$$

Такве су и функције са периодом

$$\omega = \frac{2\pi}{a},$$

на име, сваки конвергентан ред облика

$$f(z)=A_0+A_1 \sin az+A_2 \sin 2az+\cdots=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin naz,$$

$$f(z)=B_0+B_1 \cos az+B_2 \cos 2az+\cdots=\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \cos naz.$$

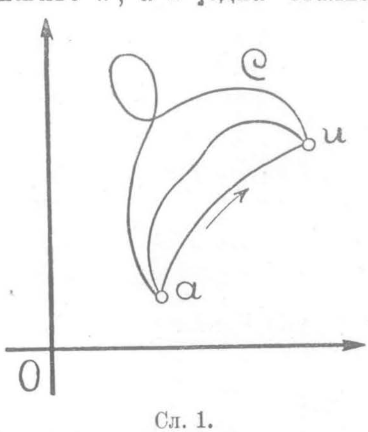
3. Постанак периода

Са гледишта опште теорије аналитичких функција, периоде функција произлазе из чињеница изражених Cauchy-евим ставовима о криволиниским интегралима, а понаособ ставом о еквиваленцији интеграционих путања и ставом о интегралу узетом дуж контуре што опкољава сингуларитете функција.

Посматрајмо интеграл

$$(3) \qquad z=J(u)=\int_a^u f(u)\,du\,,$$

где је $f(u)$ дата функција променљиве u, а a једна стална тачка у равни те променљиве (сл. 1). Образац (3) дефинише z као функцију $J(u)$ променљиве u, а у исто време и u као функцију $u(z)$ променљиве z. Ова функција $u(z)$ назива се *инверсија интеграла* $J(u)$.

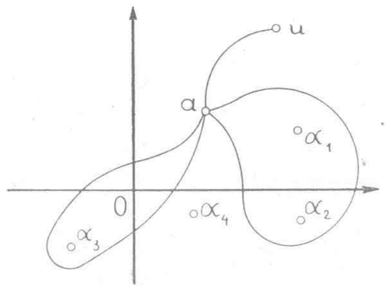


Сл. 1.

Интеграл J може се узети дуж разних, бескрајно многих путања што воде од сталне тачке a до променљиве крајње тачке u која се посматра. Према Cauchy-евом ставу све ће те путање доводити до једне исте вредности z интеграла, осим оних путања по којима се обилази око кога од сингуларитета функције $f(z)$. Нека су

$$(4) \qquad u=\alpha_1\,,\; u=\alpha_2\,,\; u=\alpha_3\cdots$$

такви сингуларитети, па пре но што се изврши интеграција дуж директне путање C што води од a до u, извршимо је дуж какве контуре C' која обухвата један или више тих сингуларитета (сл. 2). Интеграл J дуж C' имаће за вредност један одређен број ω, а функција под интегралним знаком, која је у полазној тачки контуре имала једну одређену своју детерминацију $f(u)$, може по обиласку око сингуларитета дуж контуре имати или опет ту исту, или другу коју од својих детерминација (у случају кад је који од сингуларитета критичка тачка функције).



Сл. 2.

Уочимо случај кад је та детерминација, после обиласка, *исша као йрвобиішна*. Ако се тада, т. ј. после обиласка, продужи интеграциони пут дуж директне путање C, стиже се у исту тачку u у коју би се стигло и да се није извршило заобилажење око сингуларитета, већ се одмах ишло путањом C.

Интеграл J ће дакле, за једну исту крајњу тачку u имати две вредности z и $z+\omega$, према путањама којима се од тачке a ишло до тачке u. Другим речима: једној истој вредности u одговарају две вредности z, од којих је једна једнака вредности интеграла J узетог дуж директне путање C, а друга је једнака вредности истога интеграла узетог дуж комбиноване путање састављене из путање C и контуре C'. Обрнуто: кад се u сматра као функција променљиве z, онда вредностима z и $z+\omega$ одговара једна иста вредност u.

Функција $u(z)$ има дакле шу особину да је, за ма коју вредносш йроменљиве z

$$u(z+\omega)=u(z);$$

она је, дакле, йериодична и има за йериоду број ω.

Кад функција $f(u)$ нема никаквих сингуларитета, т. ј. кад је то каква *цела* функција променљиве u, све су путање што воде од a до u еквивалентне; контуре C' не постоје и функција $u(z)$ нема периода.

Кад $f(u)$ има само један сингуларитет $u = \alpha$, ако је овај пол, детерминација функције по обиласку око тачке α остаје непромењена. Са друге стране, интеграл J дуж контуре C' по којој се буде вршило то обилажење, једнак је броју $2\pi i$ помноженом са остатком B функције $f(u)$ за пол α. И тада:

Ако је $B = 0$, функција u *нема периода; ако је B различно од нуле, функција* u *је периодична и има за периоду број*

$$\omega = 2\pi i \cdot B.$$

За такву периоду се каже да је *поларна периода*, јер произлази од пола α и његовог остатка B.

Кад $f(u)$ има више сингуларитета (4), може постојати више разних контура C' дуж којих функција $f(u)$ не мења своју детерминацију. Дуж сваке од њих интеграл J има по једну одређену вредност, па ако су

$$(5) \qquad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$$

такве вредности што одговарају разним таквим контурама C', те ће вредности (5) бити периоде функције $u(z)$.

При том се може десити:

1⁰ или да су све периоде (5) међу собом несводљиве, т. ј. да се ни једна од њих не може изразити као линеарна и хомогена комбинација (са целим коефицијентима) других, у томе смислу несводљивих периода; *тада се сви бројеви (5) имају сматрати као основне периоде функције $u(z)$*;

2⁰ или су неке од периода (5) међу собом сводљиве, т. ј. изражавају се као линеарне и хомогене функције (са целим коефицијентима) једне или неколиких других несводљивих периода, н. пр. периода

$$(6) \qquad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_k$$

тако да је

$$\begin{aligned}
\omega_{k+1} &= m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_k\omega_k, \\
\omega_{k+2} &= m'_1\omega_1 + m'_2\omega_2 + \cdots + m'_k\omega_k, \\
\omega_{k+3} &= m''_1\omega_1 + m''_2\omega_2 + \cdots + m''_k\omega_k, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Тада се сви бројеви (6) имају сматрати као несводљиве периоде функције $u(z)$.

Као што се види, број основних периода може бити произвољно велики, према природи функције $f(u)$ под интегралним знаком. *Постоје, дакле, n-периодичне функције, где је n произвољно велики цео позитиван број.*

Кад једна таква периода проистиче од заобилажења око какве критичке тачке функције $f(u)$, за њу се каже да је *критичка периода* функције $u(z)$.

4. Постанак периода објашњен примерима

Начин постанка периода, изложен у овоме што је напред казано, биће расветљен примерима што следују.

I пример: уочимо интеграл

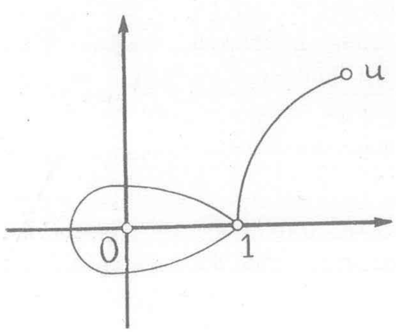
$$z = J(u) = \int_1^u \frac{du}{u} \tag{7}$$

где функција под интегралним знаком има само један сингуларитет $u=0$ и он је пол првога реда, чији је остатак $B=1$. Кад се за контуру C' узме једна ма која контура која опкољава тачку $u=0$ (сл. 3), интеграл J дуж те контуре имаће за вредност

$$\omega = B = 1 \quad 2\pi i \cdot B$$

и према томе ће функција

$$u(z) = e^z ,$$



Сл. 3.

као инверсија интеграла (7), бити периодична и имати за основну периоду број

$$\omega = 2\pi i \cdot B = 2\pi i$$

и тај број је поларна периода функције.

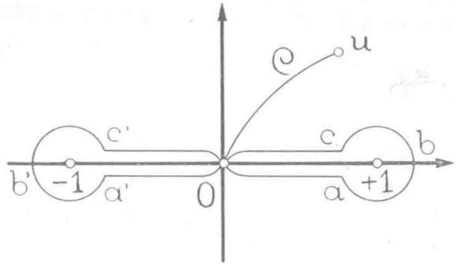
II пример: уочимо интеграл

$$z=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{8}$$

где функција под интегралним знаком има два сингуларитета: тачке $u=-1$ и $u=+1$, а оба су алгебарске критичке тачке другога реда.

Посматрајмо две контуре C' што полазе из тачке O и опкољавају: прва C'_1 тачку $u=+1$, друга C'_2 тачку $u=-1$ (сл. 4).

Контура C'_1 еквивалентна је замци $OabcO$ састављеној од правих Oa и Oc, бескрајно блиских реалној осовини и кружића abc описаног око тачке $u=+1$. Дуж те замке интеграл има за вредност



Сл. 4.

$$\int_{Oa}+\int_{abc}+\int_{cO}.$$

Први од та три интеграла има за вредност

$$\int_{Oa}=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\Big[\arc\sin u\Big]_0^1=\arc\sin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Други интеграл, узет друж кружића abc полупречника r добија се кад се стави

$$u=1+re^{\theta i} \quad , \quad du=rie^{\theta i}\,d\theta$$

и пусти се да θ расти од 0 до 2π; он дакле има за вредност

$$\int_{abc}\frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)}}=i\sqrt{r}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}d\theta}{\sqrt{2+re^{\theta i}}}.$$

Вредност интеграла, према Cauchy-евом ставу, остаје иста за ма колику вредност полупречника r, па дакле и за r бескрајно мало, из чега излази да је тај интеграл једнак нули.

Трећи интеграл има за вредност

$$\int\limits_{cO} = -\int\limits_{1}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2},$$

где знак — пред другим чланом долази отуда што је функција под интегралним знаком после обиласка око критичке тачке $u=+1$ променила детерминацију, т.ј. свој знак.

Дуж контуре C'_1 интеграл J имаће дакле за вредност π, а у тачку O се стиже са детерминацијом

$$f(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tag{9}$$

функције $f(u)$ под интегралним знаком.

На исти начин, а водећи рачуна о томе да је функција $f(u)$ парна и да се сад из O полази са детерминацијом (9), налази се да дуж контуре C'_2 интеграл J има исту вредност π, а да се преко ње стиже у O са детерминацијом

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

функције под нтегралним знаком.

Према томе, целокупна вредност интеграла J дуж двоструке контуре састављене из C'_1 и C'_2 износи 2π. Број ω овде је дакле $\omega=2\pi$, што значи да је функција

$$u(z) = \sin z$$

као инверсија интеграла (8) периодична и има за периоду $\omega = 2\pi$. Тај број је критичка периода фунције.

III пример: уочимо интеграл

$$z = \int\limits_{0}^{u} \frac{du}{\sqrt{U}} = J(u), \tag{10}$$

где је U полином четвртог степена по промењивој u, облика

$$(11) \qquad U=(1-u^2)(1-k^2u^2),$$

а где је k какав сталан реалан број што лежи између 0 и 1.

Функција под интегралним знаком има четири сингуларитета

$$u=-1\ ,\ u=+1\ ,\ u=-\frac{1}{k}\ ,\ u=+\frac{1}{k}$$

који су сви алгебарске критичке тачке другога реда.

Посматрајмо најпре две контуре C'_1 и C'_2 (сл. 4) што полазе из тачке $u=0$ и опкољавају: прва тачку $u=+1$, друга тачку $u=-1$.

Контура C'_1 еквивалентна је малопређашњој замки $OabcO$, а дуж те замке интеграл J има за вредност

$$\int_{Oa}+\int_{abc}+\int_{cO}.$$

Први од тих интеграла има за вредност K, где K означује реални одређени интеграл

$$(12) \qquad K=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Други интеграл, узет дуж кружића abc полупречника r, добија се кад се изврши смена

$$u=1+re^{\Theta i}\quad ,\quad du=rie^{\Theta i}d\Theta$$

и пусти се да Θ расти од O до 2π; он дакле има за вредност

$$\int_{abc}\frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)(1-k^2u^2)}}=i\sqrt{r}\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sqrt{(2+re^{\Theta i})[1-k^2(1+re^{\Theta i2})]}}$$

па пошто вредност интеграла остаје иста и кад се полупречник r бескрајно смањује, то је тај интеграл једнак нули.

Трећи интеграл има за вредност

$$\int\limits_{cO} = -\int\limits_{1}^{0} \frac{du}{\sqrt{U}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{U}} = K$$

тако, да дуж контуре C'_1 интеграл J има за вредност $2K$, а у тачку O се, по повратку, стиже са детерминацијом

$$f(u) = -\frac{1}{\sqrt{U}} \tag{13}$$

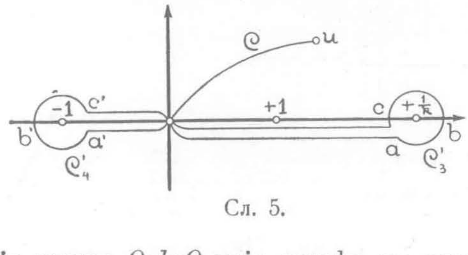
функције под интегралним знаком.

На исти начин, а водећи рачуна о томе да је функција $f(u)$ парна и да се из O сад полази са детерминацијом (13), налази се да дуж контуре C'_2 интеграл J опет има за вредност $2K$ а да се преко те контуре стиже у тачку O са детерминацијом

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{U}}. \tag{14}$$

Према томе: целокупна вредност интеграла J дуж двоструке контуре састављене из C'_1 и C'_2 износи $4K$. Број ω овде је $4K$, што значи да функција $u(z)$, инверсија интеграла $J(u)$, има за периоду $\omega = 4K$.

Посматрајмо сад две контуре C'_3 и C'_4 што полазе из тачке O и опкољавају: прва тачку $u = \frac{1}{k}$, друга тачку $u = -1$ (сл.5).



Сл. 5.

Контура C'_3, не опкољавајући тачку $u = +1$, еквивалентна је замки $OabcO$ која такође не опкољава ту тачку, а састављена је из правих Oa и cO бескрајно блиских реалној осовини, и кружића abc описаног око тачке $u = +\frac{1}{k}$. Дуж те замке интеграл J има за вредност

$$\int\limits_{Oa} + \int\limits_{abc} + \int\limits_{cO}. \tag{15}$$

Први од та три интеграла има за вредност

$$\int_{Oa} = \int_0^{\frac{1}{k}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} = K + L,$$

где је

$$L = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Дуж праве $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ вредност $\sqrt{1-u^2}$ је имагинаран број, јер је $u > 1$, а вредност $\sqrt{1-k^2u^2}$ је реалан број, јер је $u < \frac{1}{k}$. Ако се, дакле, напише

$$\sqrt{1-u^2} = i\sqrt{u^2-1},$$

вредност интеграла

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}$$

је реална и интеграл L ће имати за вредност

$$L = \frac{1}{i} K' = -iK'$$

према чему је

$$\int_{Oa} = \int_0^{\frac{1}{k}} = K - iK'.$$

Други од интеграла (15), узет дуж кружића полупречника r, добија се кад се стави

$$u = \frac{1}{k} + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i}\, d\theta$$

и пусти се да θ расти од 0 до 2π; он, дакле, има вредност

$$\int\limits_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-ku)(1+ku)}} = i\sqrt{kr} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\, d\theta}{\sqrt{(1-r^2e^{2\theta i})(2+kre^{\theta i})}}$$

која тежи нули кад се полупречник r бескрајно смањује, па је, дакле, вредност интеграла једнака нули.

Трећи од интеграла (15) је

$$\int\limits_{cO} = -\int\limits_{\frac{1}{k}}^{0} = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\frac{1}{k}} = K - iK'$$

(знак — пред другим чланом произлази отуда, што је после обиласка око критичке тачке $u = \frac{1}{k}$ функција под интегралним знаком променила свој знак), а у тачку O се стиже са детерминацијом (13).

Из тога излази да је вредност интеграла J дуж контуре C'_3 једнака броју $2K - 2iK'$ и да се, после обиласка том контуром, стиже у тачку O са детерминацијом (13) функције $f(u)$.

Ако се после тога интеграција продужи дуж контуре C'_4, водећи рачун о томе да се полази са детерминацијом (13) функције под интегралрим знаком, налази се, као и у сл. 3. да интеграл J дуж те контуре има за вредност $2K$ и да се у тачку O, по обиласку дуж контуре, стиже са детерминацијом (14).

Према томе, целокупна вредност интеграла J дуж двоструке контуре састављене од C'_3 и C'_4, једнака је броју $4K - 2iK'$, па пошто та контура доводи до детерминације (14) функције под интегралним знаком, то се закључује да је тај број једна периода функције $u(z)$. Али пошто је напред нађено да је и сам број $4K$ једна периода те функције, то следује да је и број $-2iK'$, па дакле и број $2iK'$ једна њена периода.

Функција $u(z)$ има, дакле, две периоде

$$\omega_1 = 4K \qquad \text{и} \qquad \omega_2 = 2iK'$$

где су K и K' реални одређени интеграли:

$$(16) \qquad K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$(17) \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}.$$

Свака друга контура, различна од ових овде посматраних, доводи или до истих периода ω_1 и ω_2, или до њихових линеарних комбинација које не доводе до какве нове периоде.

Нађене две периоде ω_1 и ω_2 су критичке периоде; оне су очевидно једна на другу несводљиве и имају се сматрати као основне периоде функције $u(z)$. Једна је од њих, као што се види, реална, а друга чисто имагинарна.

За $k=0$ интеграли K и K' постају

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$K' = \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \left[\log(u+\sqrt{u^2-1})\right]_0^\infty = \infty$$

тако, да функција $u(z) = \sin z$, на коју се за $k=0$ своди инверсија интеграла J, има само једну коначну периоду

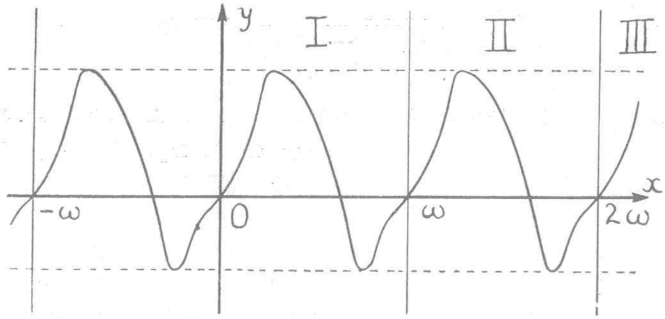
$$\omega = 4K = 2\pi .$$

5. Геометриско значење периодичности

Периодичност се састоји у чињеници да се вредности функције понављају кад се независно промењивој количини дода или одузме једна стална количина ω, која тада игра улогу периоде.

Кад се ради само о реалним количинама, а и периода је реална, онда је периодичност геометриски изражена чињеницом да се лук криве линије, што представља посматрану функцију, понавља у одређеним сталним размацима независно променљиве количине (апсцисе) (сл. 6).

Кад се ради о имагинарним количинама, било да је периода реална или комплексна, такво је геометриско изражавање

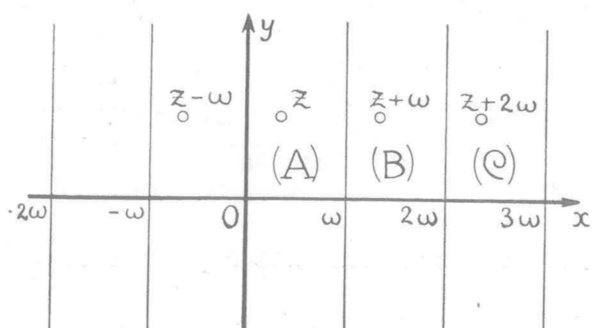


Сл. 6.

периодичности немогућно у једној равни, јер само означавање промена независно променљиве z захтева једну раван, а означавање промена функције другу, засебну раван.

Да би се видело значење периодичности у равни z, разликујмо ове случајеве:

Први случај: *нека је периода* ω *реална.* Означимо на реалној осовини (сл. 7) тачке



Сл. 7.

$$\pm\omega\,,\ \pm 2\omega\,,\ \pm 3\omega\,,\cdots \tag{18}$$

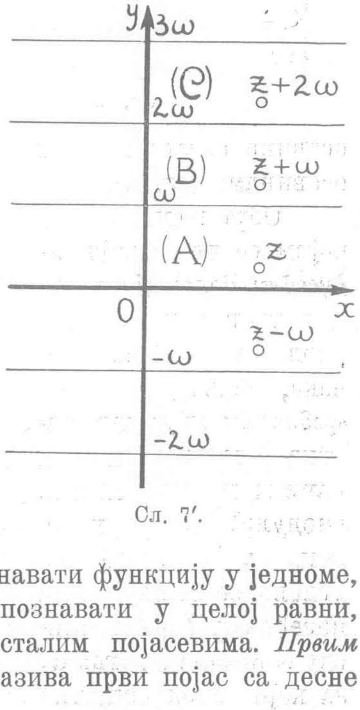
и кроз њих повуцимо управне паралелне имагинарној осовини.

Ако се уочи једна ма која тачка z у области (A), функција ће имати исту вредност и онда кад се тачка z премести у тачку $z+\omega$ области (B) или у тачку $z+2\omega$ области (C) и т. д. и то ће важити за ма коју тачку z области (A). Периодичност функције састоји се, дакле, у томе што, какве год вредности функција добије у области (A) у појединим њеним тачкама z, такве ће исте вредности она добити и у осталим областима $(B), (C), \cdots$ у одговарајућим тачкама

$$(19) \qquad z \pm \omega, \; z \pm 2\omega, \; z \pm 3\omega, \cdots$$

које се све налазе на једној правој паралелној реалној осовини.

Други случај: *нека је периода чисто имагинарна количина.* Тачка ω налазиће се на имагинарној осовини (сл. 7′). Ако се на овој означе тачке (18), па се кроз ове повуку паралелне реалној осовини, добијају се појаси (A), (B), (C), $\cdots$ од којих, кад (A) садржи посматрану тачку z, сваки од њих садржи по једну њој одговарајућу тачку (19). Ове се тачке све налазе на једној правој паралелној имагинарној осовини. Периодичност функције опет се састоји у чињеници да функција у тачкама (19) тих појасева добија једну исту вредност, ону коју она има у тачки z појаса (A).

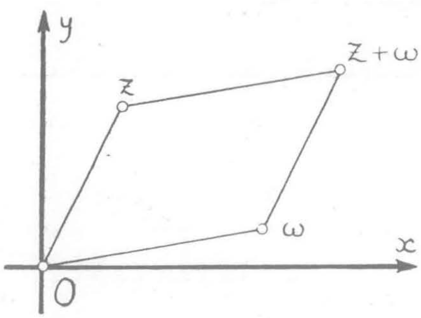


Сл. 7′.

И у првом, и у другом случају области (A), (B), (C), $\cdots$ називају се *појасима периодичности* функције. Тих појасева има бескрајно много, али је довољно познавати функцију у једноме, коме било од њих, па ће се она познавати у целој равни, пошто се она понавља у свима осталим појасевима. *Првим појасом периодичности* обично се назива први појас са десне стране имагинарне осовине.

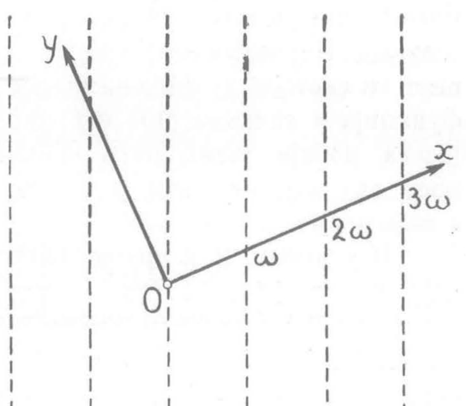
Тачке (19) називају се *хомологим тачкама* или *хомологама* тачке z за посматрану функцију $f(z)$. Периодичност ове састоји се тада у томе, што функција у свима хомологим тачкама има исту вредност, ону коју има у тачки z.

Међутим, и у првоме и у другом случају појасима периодичности *може се дати произвољна оријентација*, али тако да увек остану међусобно паралелни. Претпоставимо да се првобитне правоугле координатне осовине обрну око координатног почетка за угао α, а да почетак остане исти. Међусобни положаји тачака O, ω, z и (19) остају тада неизмењени, пошто се н. пр. тачке O, ω, z, $z+\omega$ налазе на теменима паралелограма који остаје неизмењен обртањем осовина (сл. 8), јер положаји његових темена зависе само од праваца и потега тачака z и ω, а не и од праваца осовина. Према томе и појаси периодичности остају исти, само им се мења нагиб према осовинама. А резултат је исти као да су координатне осовине остале исте, а појаси променили свој нагиб према осовинама (сл. 9).



Сл. 8.

Обртањем осовина, којим се не мењају *међусобни положаји* координатног почетка, периоде и хомологих тачака, мењају се саме *вредности* свих тих тачака, и то на један исти начин: њихови потези (модули) остају неизмењени, а поларни углови се смањују или повећавају (према смислу обртања) за угао α,



Сл. 9.

за који се координатни систем обрнуо око почетка. У првоме случају вредност z постаје $ze^{\alpha i}$, а ω постаје $\omega e^{\alpha i}$; у другоме случају измењене су вредности $ze^{-\alpha i}$ и $\omega e^{-\alpha i}$.

Трећи случај: *нека је ӣериода комӣлексна количина.* Обртањем координатног система око почетка, чиме појаси и хомологе тачке остају неизмењени, може се учинити да се тачка ω нађе на реалној, или на имагинарној осовини, па дакле, да се одређивање тих појасева и тих тачака сведе на први или други случај. А из овога што је напред казано изводи се тада овај закључак:

Каква била периода ω, реална, чисто имагинарна или комплексна, први појас периодичности добија се кад се кроз почетак и кроз тачку ω повуку две међу собом паралелне праве L и L' произвољног правца; део равни између тих двеју правих је први појас периодичности, а сви остали се добијају повлачећи кроз тачке

$$\pm 2\omega\ ,\ \pm 3\omega\ ,\ \pm 4\omega\ ,\ \cdots$$

праве паралелне правама L и L'.

Као што се види, постојање једне периоде ω повлачи собом ограничење дела равни у коме функција добија све могућне своје вредности, а које се само понављају у појасима периодичности, у њиховим хомологим тачкама.

Други одељак

Генералности о дво-периодичним функцијама

6. Непосредни начини формирања дво-периодичних функција

Видели смо како се проучавањем криволиниских интеграла

$$z = \int_a^u f(u)\, du \tag{20}$$

долази до сазнања да инверсија $u(z)$ таквога интеграла има једну или више несводљивих периода. То даје могућност да се непосредно формирају интеграли (20) чија ће инверсија бити дво-периодична функција.

Таква је једна функција напред проучена инверсија $u(z)$ интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{21}$$

Други један начин за непосредно формирање дво-перидичних функција даје теорија редова чији је општи члан одређена функција променљиве z. Уочимо н. пр. ред

$$f(z) = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \tag{22}$$

чији је општи члан облика

$$U_n = u_n + v_n, \tag{23}$$

где је

$$u_n = \frac{e^{z+n\omega}}{(e^\alpha - e^{z+n\omega})(e^\beta - e^{z+n\omega})}, \tag{24}$$

$$v_n = \frac{e^{z-n\omega}}{(e^\alpha - e^{z-n\omega})(e^\beta - e^{z-n\omega})}, \tag{25}$$

где су α и β две ма какве константе, а ω константа чији је реалан део негативан.

Показаћемо најпре да је ред (22) конвергентан за све вредности z, осим за оне за које имениоци израза u_n и v_n постају једнаки нули. Конвергенција зависи од начина на који се u_n и v_n понашају за велике вредности n. Пошто је реалан део константе ω негативан, израз $e^{n\omega}$, па дакле и $e^{z+n\omega}$, теже нули кад n бескрајно расти, и према томе именилац израза u_n понаша се у бескрајности као $e^{\alpha+\beta}$. Члан u_n понаша се, дакле, као израз

$$\frac{e^{z+n\omega}}{e^{\alpha+\beta}} = e^{z-\alpha-\beta} \cdot e^{n\omega}$$

што значи да се ред

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{26}$$

понаша као геометриска прогресија

$$e^{z-\alpha-\beta}(1 + e^\omega + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \cdots)$$

која је конвергентна, јер је e^ω по своме модулу мање од јединице. Према томе ће и ред (26) бити конвергентан за све вредности z различне од

$$\alpha - n\omega + 2k\pi i \quad \text{и} \quad \beta - n\omega + 2k\pi i \tag{27}$$

где је n који било цео позитиван број, а k који било цео (позитиван или негативан) број; за вредности (27) члан u_n постаје бескрајно велики.

Да би се доказала конвергенција реда

$$(28) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

приметимо да израз $e^{-n\omega}$, па дакле и израз $e^{z-n\omega}$, бескрајно расти при рашћењу броја n, па да се за велике вредности n изрази

$$e^{\alpha} - e^{z-n\omega} \quad \text{и} \quad e^{\beta} - e^{z-n\omega}$$

понашају као $-e^{z-n\omega}$, тако да се члан v_n понаша као

$$\frac{e^{z-n\omega}}{e^{2(z-n\omega)}} = e^{-z+n\omega}\,.$$

Ред (28) понаша се, дакле, као геометриска прогресија

$$e^{-z}(1 + e^{\omega} + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \cdots)$$

која је конвергентна. Према томе ће и ред (28) бити конвергентан за све вредности z различне од

$$(29) \qquad \alpha + n\omega + 2k\pi i \quad \text{и} \quad \beta + n\omega + 2k\pi i$$

за које конвергенција престаје, јер члан v_n постаје бескрајно велики.

Према томе и ред (22), као збир редова (26) и (28), конвергентан је за све вредности z осим (27) и (29). *Те су вредности* (27) и (29) *полови првог реда за функцију* $f(z)$ *коју изражава ред* (22). Да је свака од тих вредности пол функције, јасно је из тога што за сваку од њих по један од чланова u_n и v_n реда (22) постаје бескрајан, а његова обрнута вредност постаје једнака нули. Кад се $f(z)$ помножи разликом $z - a$, где је a једна, ма која, од вредности (27) и (29), биће сваки члан u_n и v_n помножен том разликом. А ти су чланови двојаки: једни, чији именилац не постаје једнак нули за $z=a$, и други чији је именилац нула за $z=a$. Они први помножени са $z=a$ постају једнаки нули за $z=a$, а други се јављају у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$, али се применом L'Hospital-овог правила налази да је та вредност коначна и од нуле различна. А све то доказује да је вредност $z=a$ одиста пол првога реда за $f(z)$, па пошто та функција не може имати других сингуларитета осим вредности (27) и (29), то је она *мероморфна* функција промењљиве z.

Пошто се ни u_n ни v_n не мењају кад се вредности z дода $2\pi i$, то функција $f(z)$ има број $2\pi i$ за периоду. Али се може доказати да она има за периоду и број ω, и то на овај начин:

Пошто v_n није ништа друго до u_n кад се у њему индексу n промени знак, то се ред (22) може написати у облику

$$(30) \qquad \ldots + u_{-3} + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

т. ј. у облику реда чији су индекси сви цели бројеви од $-\infty$ до $+\infty$. Кад се на место z стави $z+\omega$, општи члан u_k реда (30) постаје

$$\frac{e^{z+(k+1)\omega}}{\left[e^{\alpha} - e^{z+(k+1)\omega}\right]\left[e^{\beta} - e^{z+(k+1)\omega}\right]} = u_{k+1}$$

и то било да је k позитиван, било да је негативан цео број. То значи да замена вредности z вредношћу $z+\omega$ има за последицу само померање чланова реда (30) на десно за један ранг, што ни у колико не мења збир тога реда (приметимо да такво померање чланова само онда не мења збир реда, кад се индекс мења од $-\infty$ до $+\infty$; кад би се он мењао само од 0 до ∞, збир би се морао променити, јер не би постојао члан u_{-1} који би таквим померањем дошао на место члана u_0). Према свему томе:

Функција $f(z)$ је мероморфна функција са две несводљиве периоде

$$\omega_1 = 2\pi i \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega .$$

Да су оне одиста несводљиве, види се из тога што, како је реалан део периоде ω различан од нуле, ни једна од периода ω_1 и ω_2 не може бити мултипл друге.

7. Jacobi-ева теорема о периодама дво-периодичних функција

За периоде ω_1 и ω_2 ма које дво-периодичне функције везана је једна аритметичка особина исказана ставом:

Jacobi-ева теорема: Количник периода никад није реалан број.

Јер, кад би тај количник био реалан број, тај би број био рационалан или ирационалан, и онда:

1° Претпоставимо најпре да је тај број *рационалан*, т. ј. облика $\frac{p}{q}$, где су p и q два цела броја, за која се увек може сматрати да немају заједничких чинилаца. Из једнакости

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$$

добија се да је

$$\frac{\omega_1}{p} = \frac{\omega_2}{q},$$

па ако се заједничка вредност та два количника означи са λ, добија се да је

$$\omega_1 = p\lambda, \qquad \omega_2 = q\lambda$$

т. ј. да су ω_1 и ω_2 мултипли једног истог броја λ. Али за број λ може се доказати да је и сам периода функције $f(z)$ која има за периоде ω_1 и ω_2. Јер, према познатом аритметичком ставу о линеарним неодређеним једначинама са две непознате x и y, ма какви били цели бројеви p и q (без заједничких чинилаца), увек постоје цели бројеви x и y такви да је

$$px - qy = \pm 1 .$$

Ако је $x = m_1$ и $y = m_2$ један пар таквих бројева, биће

$$pm_1 - qm_2 = \pm 1.$$

па према томе, множећи са λ

$$m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2 = \pm \lambda ,$$

одакле је

$$m_1 \omega_1 = m_2 \omega_2 \pm \lambda .$$

Па пошто је тада

$$f(z) = f(z + m_1 \omega_1) = f(z + m_2 \omega_2 \pm \lambda) = f(z \pm \lambda) ,$$

то је λ периода функције. Обе су периоде ω_1 и ω_2, дакле, мултипли једне исте периоде λ, па према томе то нису несводљиве периоде.

2⁰ Претпоставимо да је поменути број *ирационалан*. Зна се да за сваки ирационалан број μ постоји таквих рационалних бројева $\frac{p}{q}$ који се од μ разликују за колико се хоће мало, што се може изразити једнакошћу

$$\mu = \frac{p+\varepsilon}{q}$$

где је ε колико се хоће мали број. Из једначине

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p+\varepsilon}{q}$$

добија се тада

$$q\omega_1 = p\omega_2 + \varepsilon\omega_2$$

према чему је

$$f(z) = f(z + q\omega_1) = f(z + p\omega_2 + \varepsilon\omega_2) = f(z + \varepsilon\omega_2)$$

што би значило да функција има за периоду и број $\varepsilon\omega_2$. Па како та периода може бити колико се хоће мала, таква би се функција морала свести на константу.

Као непосредна последица Jacobi-еве теореме изводи се закључак:

Несводљиве периоде ω_1 и ω_2 не могу бити ни обе реалне, ни обе чисто имагинарне, јер би у оба случаја њихов количник био реалан број.

Тако исто из ње следује и закључак:

Тачке ω_1 и ω_2 никад се не налазе на једној правој што пролази кроз координатни почетак, јер кад би тако било, ω_1 и ω_2 би имали исти аргуменат θ, па ако им се модули означе са ρ_1 и ρ_2, било би

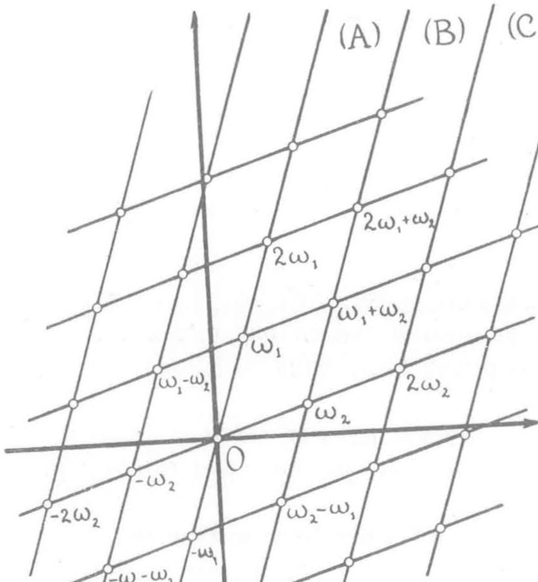
$$\omega_1 = \rho_1 e^{\theta i} \qquad , \qquad \omega_2 = \rho_2 e^{\theta i}$$

па би, дакле количник $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ био реалан број $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

8. Геометриско значење дво-периодичности

Напред је показано да постојање једне периоде ω_1, за дату функцију $f(z)$ повлачи собом чињеницу да је довољно познавати функцију за тачке z у једноме појасу периодичности, па да се она познаје за тачке z у целој равни те променљиве.

Претпоставимо сад да функција, поред периоде ω_1, има још једну периоду ω_2, несводљиву на ω_1. И та периода повлачи собом своје појасеве периодичности, који ће се укрштати са онима које повлачи периода ω_1. Пошто су правци граничних правих тих појасева произвољни, они се могу изабрати тако, да појасеви што одговарају првој периоди буду паралелни потегу друге периоде, и обратно: да појасеви



Сл. 10

што одговарају другој периоди буду паралелни потегу прве периоде (сл. 10). Та ће два система појасева образовати у равни променљиве z једну *мрежу паралелограма* који су, по самоме начину свога постанка карактерисани тиме што:

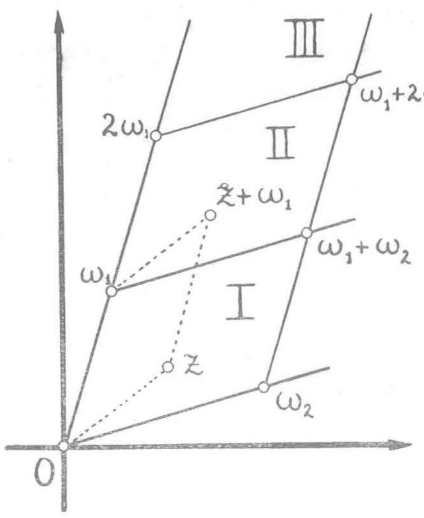
1^0 паралелограм, прецртан на сл. 10 има за темена тачке

$$O\,,\ \omega_1\,,\ \ \omega_2\,,\ \ \omega_1+\omega_2\,; \tag{31}$$

2^0 сви остали паралелограми имају за темена хомологе тачке тачкама (31);

3^0 стране свих паралелограма паралелне су потезима периода ω_1 и ω_2.

Геометриским сабирањем лако се уверити да ће темена паралелограма I (сл. 11) имати за своје хомологе тачке, а за периоду ω_1, темена паралелограма II, III, $\cdots$ Затим, да ће произвољна тачка z у паралелограму I имати у свакоме од тих других паралелограма по једну своју хомологу тачку, у којој функција добија ону исту вредност коју има у тачки z. Према томе функција, одређена у паралелограму I, понавља се у свакоме од паралелограма II, III, $\cdots$, што значи да преносећи паралелограм I дуж појаса периодичности (A), (сл. 10) тако да се I поклапа редом са II, III, $\cdots$, учиниће се да функција буде позната у целоме појасу (A), а према томе и у свима појасима периодичности (B), (C), $\cdots$, па дакле у целој равни.



Сл. 11

Сви су паралелограми мреже на тај начин еквивалентни у погледу вредности функције.

До истог би се резултата дошло и кад би се, на место периоде ω_1, узела периода ω_2; паралелограми и њихова улога остали би неизмењени. Додаће се још и то, да се међусобни положаји хомологих тачака не мењају обртањем координатних осовина за произвољан угао, јер правци осовина не играју никакву улогу при геометриској конструкцији тих тачака. Обртање има за ефекат само промену нагиба мреже паралелограма према осовинама, а не утиче ни на облик, ни на величину паралелограма, па дакле ни на међусобне положаје хомологих тачака.

Паралелограми мреже називају се *паралелограми периода;* паралелограм I је *основни паралелограм периода.* А из овога што је казано следује да се дво-периодичност функције састоји у томе, *што се функција, одређена у једноме, н. пр. у основном паралелограму периода, понавља у свакоме од осталих паралелограма.*

Пошто су за дату тачку z њене хомологе

$$z + m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2$$

т. ј. оне што се из z добијају додавањем или одузимањем мултипла периода, то следује да:

1^0 свако теме основног паралелограма има за хомологу одговарајуће теме свакога од осталих паралелограма;

2^0 свака тачка z на једној страни основног паралелограма има за своју хомологу по једну тачку на одговарајућој страни сваког паралелограма, и то ону са којом се z поклапа кад се поклопе паралелограми;

3^0 свака тачка z у унутрашњости основног паралелограма има по једну хомологу тачку у унутрашњости свакога од осталих паралелограма, и то ону са којом се z поклапа кад се поклопе паралелограми. У свакој од хомологих тачака функција има исту вредност коју она има у тачки z.

Очевидно је да би, према самој конструкцији паралелограма периода, њихово постојање било немогућно кад би тачке $z=\omega_1$ и $z=\omega_2$ лежале на једној правој што пролази кроз тачку $z=o$. Али према Jacobi-евој теореми о периодама тај случај не може никад наступити.

9. Немогућност униформних функција са више од две периоде

Из посматрања појаса периодичности може се геометриски схватити да *не постоји никаква униформна функција са више од две периоде.* Јер, као што је показано, постојање сваке периоде повлачи собом ограничење дела равни у коме функција добија све своје вредности. Једна основна периода ω_1 ограничава тај део на један појас, т. ј. на део равни бескрајно мањи од ње. Друга основна периода ω_2 ограничава тај појас на један паралелограм, т. ј. на један део појаса бескрајно мањи од њега. Трећа основна периода смањила би паралелограм на један његов део бескрајно мањи од њега самог, тако да би функција, која би имала три периоде, а униформна је, па се може представити у једној равни, добила све могућне своје вредности у бескрајно малом делу паралелограма и морала би свести на константу.

Међутим, као што је напред показано, посматрајући инверсију $u(z)$ интеграла

$$z = \int_a^u f(u)\, du \ ,$$

функција $u(z)$ може стварно имати колико се хоће основних периода. Али, према горњем ставу, то се може десити само кад је та функција *мултиформна*, а никад кад је *униформна*. Уосталом, за мултиформне функције не мора постојати горе наведени разлог за немогућност већег броја периода од две, јер се такве функције, са својим разним детерминацијама, не могу целокупне представити у једној истој равни.

10. Неколико општих особина мероморфних дво-периодичних функција

Поред особина, везаних за поједине дво-периодичне функције, има их и таквих које важе за све мероморфне функције са двема периодама. Овде ће се навести неколико таквих општих особина, које су основа општој теорији функција те врсте, у облику ставова што следују.

Став I: *Интеграл ма које мероморфне дво-периодичне функције $f(z)$, узет дуж ма кога паралелограма периода, једнак је нули.*

Јер такав интеграл

$$J = \int f(z)\, dz \tag{32}$$

једнак је збиру интеграла узетих дуж страна паралелограма. Међутим у свакој тачки z једне стране овога функција $f(z)$ има исту вредност као и у њој хомологој тачки што се налази на супротној страни паралелограма, али у тим двема тачкама dz има супротне знаке, јер су правци интеграције супротног смисла. Интеграл J дуж једне стране паралелограма биће, дакле, једнак интегралу узетом дуж супротне стране, али супротно означеном. Збир таква два интеграла једнак је нули, па је дакле и $J=0$.

Став II: *Здир осшашака ма које мероморфне дво-периодичне функције, за њене полове шшо се налазе у ма коме йаралелограму йериода, једнак је нули.*

Јер, ако се ти остаци означе са $B_1, B_2, B_3, \cdots$, према Cauchy-евој теореми интеграл (32), узет дуж паралелограма, има за вредност

$$J=2\pi i \cdot \sum B_k;$$

па пошто, према ставу I, мора бити $J=0$, то је

$$\sum B_k=0.$$

Став III: *Мероморфна дво-йериодична функција не може имаши у йаралелограму йериода само један йол који би био йрвога реда.*

Јер, према ставу II, збир остатака за полове садржане у паралелограму периода једнак је нули, а он то не би могао бити кад би паралелограм садржао само један пол који би био првога реда, јер би тада тај једини остатак, па дакле и збир $\sum B_k$, морао бити различан од нуле. Међутим, за више простих полова, као и за пол вишега реда, то може бити, јер остатак за такав пол, као и збир остатака, може бити једнак нули.

Став IV: *За сваку мероморфну дво-йериодичну функцију збир редова нула, садржаних у йаралелограму йериода, једнак је збиру редова йолова садржаних у шоме йаралелограму.*

Јер, као што се зна из опште теорије аналитичких функција, свака се таква функција може, за вредности z у близини једне своје нуле $z=\alpha$ која је m-тога реда, написати у облику:

$$(33) \qquad f(z)=(z-\alpha)^m \varphi(z),$$

а у близини једнога свога пола $z=\beta$ који је n-тога реда у облику

$$(34) \qquad f(z)=(z-\beta)^{-n} \psi(z),$$

где су $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ две функције које не постају ни једнаке нули, ни бескрајне за $z=\alpha$, односно за $z=\beta$.

Нека је $f(z)$ каква мероморфна дво-периодична функција, па се логоритмисањем и диференцијалењем једначина (33) и (34) добија да је у близини тачке α

$$(35) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-\alpha}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

а у близини тачке β

$$(36) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z-\beta}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Из (35) и (36) се види: 1° да је свака нула α пол првога реда за функцију $\frac{f'(z)}{f(z)}$ и да је остатак за тај пол једнак броју m; 2° да је сваки пол β пол првога реда за исти количник и да је остатак за тај пол једнак $-n$. Па пошто је количник $\frac{f'(z)}{f(z)}$ и сам мероморфна дво-периодична функција, и у паралелограму периода не може имати других сингуларитета осим таквих вредности као што су α и β, збир остатака те функције за полове садржане у њеном паралелограму периода (истом као паралелограм функције f) мора према ставу II, бити једнак нули. Међутим тај збир остатака је

$$\sum m-\sum n$$

према чему мора бити

$$\sum m=\sum n,$$

чиме је став доказан.

Став V: *свака мероморфна дво-периодична функција* $f(z)$ *има у своме паралелограму периода бар један пол.*

Јер ако се у паралелограму уочи једна произвољна стална тачка $z = a$, функција

$$\varphi(z) = f(z) - f(a)$$

је такође мероморфна и дво-периодична, са истим паралелограмом периода као $f(z)$. Према ставу IV за ту функцију мора бити

$$\sum m = \sum n\,,$$

а пошто она има бар једну нулу, а то је вредност $z = a$, то број $\sum m$ не може бити једнак нули, па дакле ни број $\sum n$. Па како сваки од бројева n представља ред по једнога пола функције $f(z)$ (те две функције φ и f имају исте полове), то полови одиста морају постојати.

Из овога става излази као обична последица:

Став VI: *не постоји никаква цела дво-периодична функција.*

Став је познат под називом *Liouville-ове теореме.* Функција мора у паралелограму периода имати бар један пол, и према томе не може бити цела функција.

У томе је ставу исказана једна од разлика између функција са једном, и функција са две периоде. Међу првима се налазе н. пр. целе функције e^z и $\sin z$, док се међу другима не налази ни једна цела функција.

Трећи одељак

Основне елиптичке функције

11. Функције sn, cn, dn и њихове непосредне међусобне везе

Напред проучавана функција $u(z)$, дефинисана као инверсија интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{37}$$

полазна је тачка за теорију елиптичких функција. Она се означује ознаком

$$u(z) = sn\, z .$$

Поред ње су уведене још и ове две њене комбинације: функција

$$cn(z) = \sqrt{1 - sn^2 z} \tag{38}$$

и функција

$$dn\, z = \sqrt{1 - k^2 sn^2 z} . \tag{39}$$

Увођење тих комбинација учињено је по аналогији са тригонометриским функцијама, које се могу сматрати као специјални случајеви елиптичких функција. А то је учињено нарочито с тога, што се те две комбинације функције $sn z$ често појављују у обрасцима за елиптичке функције, па је било од користи, као и при увођењу косинуса, као комбинације синуса, проучити им једном за свагда аналитичке особине, па их са тако проученим особинама увести у рачуне као рачунске елементе.

Увођење функције $cn z$ имало је још и ту добру страну што, кад је она уведена, обрасци теорије елиптичких функција постали су слични обрасцима из теорије тригонометриских функција, на које се оне своде у специјалном случају кад је $k = o$.

Као што ће се видети из онога што ће доцније бити показано, целокупна теорија елиптичких функција може се свести на проучавање трију функција

$$sn\, z \;,\; cn\, z \;,\; dn\, z$$

и њихових алгебарских комбинација. Оне се стога називају *основне елиптичке функције.*

Прва непосредна веза између те три функције изражена је обрасцима што служе за саму њихову дефиницију:

$$sn^2 z + cn^2 z = 1\,, \tag{40}$$

$$dn^2 z + k^2\, sn^2 z = 1 \tag{41}$$

од којих је први исти као и онај што изражава везу између синуса и косинуса.

Друга је веза изражена у обрасцима који дају изводе тих трију функција. Образац (37) доводи до једначине

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2} \tag{42}$$

која показује да је

$$sn' z = cn\, z \cdot dn\, z\,. \tag{43}$$

Из обрасца (40) добија се диференцијалењем

$$sn\, z \cdot sn' z + cn\, z \cdot cn' z = 0\,,$$

одакле је

$$(44) \qquad cn'z = -\frac{sn\,z \cdot sn'z}{cn\,z} = -sn\,z \cdot dn\,z\,.$$

Напослетку, из (41) добија се диференцијалењем

$$dn\,z \cdot dn'z + k^2 sn\,z \cdot sn'z = 0\,,$$

одакле је

$$(45) \qquad dn'z = -k^2 sn\,z \cdot cn\,z\,.$$

Обрасци (43), (44), (45) уопштавају елементарне обрасце за изводе функција $\sin z$ и $\cos z$, на које се своде за $k = o$, а то су обрасци

$$\sin' z = \cos z\,,$$

$$\cos' z = -\sin z\,.$$

Друге везе између $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$, које такође уопштавају сличне везе између основних тригонометриских функција, биће показане у даљим излагањима.

12. Неколике особине функције $sn\,z$

За проучавање особина функције $sn\,z$ полазне су тачке:

1° израз те функције у облику инверсије интеграла (37)

2° општи интеграл диференцијалне једначине првога реда

$$(46) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1-y^2)(1-k^2y^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

која носи назив Euler-ове диференцијалне једначине и која се може интегралити на два начина: квадратурама и алгебарским операцијама.

Написана у облику

$$(47) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

једначина (46) има за општи интеграл

$$(48)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + C\,.$$

Са друге стране, Euler је нашао да се њен општи интеграл може изразити и у алгебарском облику

$$(49)\quad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C'\,.$$

Случај је сличан ономе са простијом диференцијалном једначином

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{1-x^2}$$

написаном у облику

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

чији се општи интеграл може написати у два разна облика

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + C$$

т. ј.

$$\arcsin x = \arcsin y + C$$

и

$$x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = C'\,,$$

о чему је лако уверити се диференцијалењем једне и друге од двеју последњих једначина.

Помоћу једначине (49) доказује се *да је $sn\,z$ униформна функција променљиве z*. Јер, кад не би била таква, она би за дату вредност z (изузимајући поједине, специјалне вредности z) имала више од једне вредности. Нека су x и y две такве вредности, што одговарају једноме истоме z и мењају се са овом. Према једначини (37), коју задовољава функција $sn\,z$, тада би морало бити

$$(50)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

из чега се диференцијалењем види да x и y морају задовољавати једначину (47), а према томе и једначину (49), кад се у овој буде подесно изабрала константа C'. А ова је одређена тиме што је једначина (50) задовољена за $x=0$, $y=0$ па дакле тако мора бити и са једначином (49), што даје $C'=0$. А тада је, према истој једначини (49)

$$x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = 0$$

из чега се добија да је

$$(51) \qquad \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Поређењем једначина (47) и (51) добија се да је

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

према чему је интеграцијом

$$(52) \qquad y = ax,$$

где је a интеграциона константа. Сменом те вредности y у једначини (51) налази се да је

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-k^2a^2x^2)}},$$

па, пошто a не зависи од x, то може бити само за $a=1$. Из (52) тада се закључује да је $y=x$, т. ј. да се претпостављене две вредности функције $sn\,z$ међу собом поклапају, и према томе функција је униформна. Она дакле нема критичких тачака.

А једначина (42) показује да функција $u=sn\,z$, као интеграл те једначине, нема ни есенцијалних тачака. То следује из познатих ставова из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, а понаособ из става према коме, кад је у једначини

$$\frac{du}{dz} = \varphi(z, u)$$

функција φ за један дати пар вредности $z = \alpha$, $u = \beta$ холоморфна, тачка (α, β) је обична тачка за интеграл u који за $z = \alpha$ добија вредност $u = \beta$.

Пошто $sn\, z$, као дво-периодична функција, не може, према ставу VI, бити цела функција, а нема ни критичких, ни есенцијалних тачака, то она мора имати полова, па је према томе то *мероморфна функција* променљиве z.

Из једначине (42), коју задовољава $u = sn\, z$, види се *да је $sn\, z$ непарна функција* променљиве z. Јер је та једначина задовољена кад се z смени са $-z$, а u са $-u$.

Као што је напред нађено, *функција $sn\, z$ има две основне, несводљиве периоде*

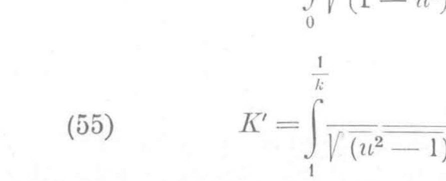
$$(53) \qquad \omega_1 = 4K \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2iK',$$

где су K и K' реални одређени интеграли:

$$(54) \qquad K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$(55) \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}.$$

Сталан број k, који лежи између O и 1, назван је *модуо* функције $sn\, z$, и као што се види, *периоде ω_1 и ω_2 су одређене функције тога модула.*

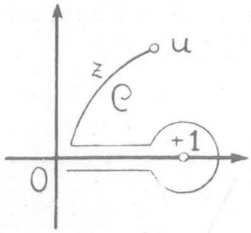


Сл. 12

Основни паралелограм функције $sn\, z$ је правоугаоник чија су темена тачке O, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ (сл. 12).

Пошто је $sn\, z$ униформна функција, то она за једну дату вредност z има само једну, и то тачно одређену вредност $u = \beta$. Али из једначине (37) налази се *да она ту исту вредност β добија за две вредности z које нису једна другој хомологе.*

Јер, кад се интеграција, означена у обрасцу (37), изврши по путањи C' састављеној из замке што, полазећи из тачке O, опкољава тачку $u = +1$ (сл. 13), и директне путање C од O до u, интеграл кад се стигне у тачку O има за вредност $2K$, али се у ту тачку стиже са промењеном детерминацијом функције под интегралним знаком, тако да ће се у тачку u стићи са вредношћу $2K - z$ истога интеграла. Целокупна путања $C' + C$ даје, дакле, за интеграл вредност $2K - z$, док путања C даје вредност z. Па пошто обе путање доводе до исте тачке u, то *функција $u = sn\, z$ има ту особину да*



Сл. 13

$$(56) \qquad sn\,(2K - z) = sn\, z\,,$$

а то је особина слична оној што важи за $\sin z$, да је

$$\sin(\pi - z) = \sin z\,.$$

Кад дакле функција $sn\, z$ добије једну вредност β за $z = \alpha$ она ту исту вредност добија и за $z' = 2K - \alpha$.

Тачке z и z' уопште (т.ј. кад је тачка z произвољна) нису једна другој хомологе, јер се не своде једна на другу додавањем или одузимањем мултипла периода. Оне су различне међу собом, па се, или обе налазе у основном паралелограму периода у коме је z, или тачка z' има своју хомологу у томе паралелограму, пошто се додавањем или одузимањем периода z' може довести у који се хоће паралелограм.

Према томе, кад функција $sn\, z$ добије једну дату вредност β за какву вредност $z = \alpha$, она ту исту вредност β добија и за бескрајно много вредности z, а то су:

1° све хомологе вредности α, тј. вредности

$$z = \alpha + 4mK + 2niK'\,,$$

где су m и n ма какви, позитивни или негативни, цели бројеви;

2^o вредност

$$z' = 2K - \alpha\,;$$

3^o све хомологе вредности z', тј. вредности

$$z'' = z' + 4m\,K + 2ni\,K'\,.$$

Кад је тачка α у основном паралелограму периода, онда, ако то није случај и са одговарајућом тачком z', једна ће се њена хомолога z'' сигурно налазити у томе паралелограму. Те се две тачке α и z', односно α и z'', могу и међу собом поклапати, као што је случај н. пр. кад је $\alpha = K$.

13. Нуле и полови функције $sn\,z$

Једначина (37) задовољена је за $z = 0$, $u = 0$, што значи да функција $u = sn\,z$ постаје једнака нули за $z = 0$, а она ће то бити и за све хомологе вредности, тј. за

$$z = 4mK + 2ni\,K'\,.$$

Али, према обрасцу (56) она ће бити једнака нули и за вредност $z = 2K$. *Функција $sn\,z$ има, дакле, у основном паралелограму периода две нуле*

$$z = 0 \quad \text{и} \quad z' = 2K\,.$$

Кад се тим двема нулама придаду мултипли $4m\,K$ реалне периоде функције, добија се *бескрајни низ њених позитивних и негативних реалних нула, које се све могу изразити општим обрасцем*

$$z = 2m\,K\,.$$

А кад се овима придаду мултипли $2ni\,K'$ имагинарне периоде, добија се *бескрајни низ имагинарних нула које се све изражавају општим обрасцем*

$$z' = 2m\,K + 2ni\,K'\,.$$

Све су те нуле *просте*, јер кад за једну вредност z буде $u = 0$, извод

$$u'(z) = \sqrt{(1-u^2)(1-\kappa^2 u^2)} \tag{57}$$

добија од нуле различну вредност ± 1. Па пошто су нуле, просте, то *функција мења знак при проласку кроз сваку своју реалну нулу.*

По својим реалним нулама $sn\,z$ показује сличност са $\sin z$: и ова функција има бескрајно много нула, које су све мултипли полу-периоде π, и све су просте. Али, док $\sin z$ има само реалне нуле, $sn\,z$ их има и бескрајно много имагинарних.

Потражимо полове функције $sn\,z$. Кад се у обрасцу (37) стави на десној страни да је $u = \infty$, налази се да ће један пол α функције бити

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

што се може написати у облику

$$\alpha = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^\infty .$$

Први интеграл има за вредност K, други $-iK'$, а трећи се може израчунати кад се у њему изврши смена

$$u = \frac{1}{kv}, \quad du = -\frac{dv}{kv^2} \tag{58}$$

која тај интеграл претвара у

$$-\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = K - ,$$

па се налази да је

$$\alpha = K + iK' - K = -iK' = -\frac{\omega_2}{2}.$$

А пошто је функција u непарна, то је и вредност

$$\alpha' = iK' = \frac{\omega_2}{2}$$

један њен пол. Са друге стране, према обрасцу (56), налази се да ће и $2K - iK'$ бити један пол функције. Па пошто ће она остати пол и кад јој се дода периода $\omega_2 = 2iK'$, то ће и $\alpha'' = 2K + iK'$ бити такође пол. Па пошто се обе вредности α' и α'' налазе у основном паралелограму периода, то се закључује да:

Функција $sn\, z$ *има у основном паралелограму периода два пола, оба имагинарна, а то су вредности*

$$iK' = \frac{\omega_2}{2} \quad \text{и} \quad 2K + iK' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Додавањем мултипла периода

$$4mK + 2niK'$$

добија се бескрајан низ полова функције, који су сви имагинарни. *Функција* $sn\, z$ *остаје, дакле, коначна за све реалне вредности* z.

Сви су полови функције $sn\, z$ *првога реда*, јер кад се у у једначини (57) изврши смена (58), она постаје

$$v' = -\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)};$$

сваки пол функције u је нула функције v, а за једну такву нулу добија се за v' вредност ± 1 различна од нуле.

Потражимо остатке функције $sn z$ за један ма који њен пол $z = \alpha$. Остатак B је гранична вредност којој тежи израз:

$$(z - \alpha)\, u(z) = \frac{z - \alpha}{\dfrac{1}{u}} \text{ за } z = \alpha.$$

За $z = \alpha$ та се вредност јавља у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$, али се применом L'Hospital-овог правила налази да је она

$$B = \frac{1}{\frac{u'}{u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\left(\frac{1}{u^2} - k^2\right)}} = \pm \frac{1}{k} \, .$$

Остатак функције $sn\, z$ *за ма који њен пол има, дакле, за вредност или* $-\frac{1}{k}$ *или* $+\frac{1}{k}$.

14. Вредности z за које $sn\, z$ добија вредности ± 1 и $\pm \frac{1}{k}$

Према обрасцу (37) *z има реалне вредности само док се u мења од -1 до $+1$*; За остале вредности u или је U негативно, или, кад је позитивно, интеграл z је ипак састављен из збира једнога реалног и једнога чисто имагинарног интеграла.

Потражимо вредности z за које ће u достизати своје крајње реалне вредности ± 1.

1° Вредност z за коју је $u = -1$ дата је обрасцем

$$z = \int_0^{-1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = -K = -\frac{\omega_1}{4} \, .$$

Та тачка није садржана у основном паралелограму периода (p), али је у овоме садржана њена хомолога тачка $3K$, за коју u такође добија вредност -1. Ту исту вредност -1 добија u и за другу хомологу тачку $3K + 2iK'$, такође садржану у (p). Образац (56) не доводи ни до које нове тачке z која би била садржана у (p) и за коју би u имало исту вредност -1.

Функција $sn\, z$ добија, дакле, вредност -1 за две тачке садржане у основном паралелограму периода, а то су тачке $3K$ и $3K + 2iK'$.

2° Вредност z за коју је $z = +1$ дата је обрасцем

$$z = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = K = \frac{\omega_1}{4}$$

а та је тачка садржана у (p), као и њена хомолога $K+2iK'$. Образац (56) не доводи до које нове такве тачке која би била садржана у (p).

Функција $sn\,z$ добија, дакле, вредност $+1$ за две тачке садржане у основном паралелограму периода, а то су тачке K и $K+2iK'$.

Вредност z, за коју ће u добити једну или другу од вредности $\pm\frac{1}{k}$, добија се кад се у обрасцу (37) стави као горња граница интеграла $u = -\frac{1}{k}$ или $u = +\frac{1}{k}$. И тада се налази да:

3° Вредност z за коју је $u = -\frac{1}{k}$ дата је обрасцем

$$z = \int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = -\int_0^{\frac{1}{k}} = -\left(\int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= -K + iK' = -\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{4}$$

која вредност није садржана у (p), али је у овоме садржана њена хомолога $3K+iK'$, за коју u добија исту вредност $-\frac{1}{k}$. Образац (56) не доводи ни до чега новог, тако да:

Функција $sn z$ добија вредност $-\frac{1}{k}$ за једну тачку садржану у основном паралелограму периода, а то је тачка $3K+iK'$.

4^o вредност z за коју је $u = +\frac{1}{k}$ дата је обрасцем

$$z = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} = K - iK' .$$

Та тачка није садржана у (p), али је у овоме садржана њена хомолога $K + iK'$, за коју је такође $u = \frac{1}{k}$. Образац (56) не доводи ни до чега новог, тако да:

Функција $sn\,z$ *добија вредност* $\frac{1}{k}$ *у једној тачки садржаној у основном паралелограму периода, а то је тачка* $K + iK'$.

Као што се види, све вредности z за које $sn\,z$ добија вредности $\pm\frac{1}{k}$ имагинарне су.

15. Ефекат додатка полу-периода вредности променљиве z

Према основној особини функције $sn\,z$, она се не мења кад се вредности z дода једна или друга периода ω_1 или ω_2. Да видимо шта бива од функције кад се вредности z дода једна или друга од полу-периода

$$\frac{\omega_1}{2} = 2K , \qquad \frac{\omega_2}{2} = iK' .$$

Из обрасца (56) добија се да је

$$sn\,(2K + z) = -\,sn\,z$$

што значи да је

$$sn\,(z + \frac{\omega_1}{2}) = -\,sn\,z .$$

Кад се, дакле, у функцији $sn\,z$ *вредности* z *дода реална полу-периода, функција задржава исту вредност, али мења знак.*

Да би се видела последица додатка полу - периоде $\frac{\omega_2}{2}$, приметимо да, према познатом интегралном обрасцу, за сваки интеграл је

$$\int_a^b - \int_a^c = \int_c^b .$$

Узевши за функцију под интегралним знаком израз

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

а за a, b, c вредности $a = o$, $b = u$, $c = \infty$, добија се да је

$$\int_0^u \frac{du}{W(u)} - \int_0^\infty \frac{du}{W(u)} = \int_\infty^u \frac{du}{W(u)} . \tag{59}$$

Кад се у интегралу на десној страни изврши смена (58), он постаје

$$-\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}},$$

па пошто први интеграл на левој страни има за вредност z, а други вредност $-iK'$, то једначина (59) постаје

$$z + iK' = -\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}}$$

из чега се инверсијом види да је

$$v = sn(-z - iK') = -sn(z + iK') = -sn\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right);$$

па пошто је

$$u = sn\, z, \qquad v = \frac{1}{ku},$$

то се добија образац

$$sn\left(z + \cancel{u}\frac{\omega_2}{2}\right) = -\frac{1}{k\, sn\, z}$$

који показује да:

Кад се у функцији $sn\, z$ *вредности* z *дода имагинарна йолу-йериода, вредност функције йостаје* $-\dfrac{1}{k\, sn\, z}$.

16. Униформност функција $cn\, z$ и $dn\, z$

Посматрајмо функцију

$$v = \Phi(u), \tag{60}$$

где је Φ каква алгебарска функција променљиве u, инверсије интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{61}$$

Пошто, као што је показано, u нема критичких тачака, неће их имати ни $\Phi(u)$ кад год је Φ рационална функција. Али их *може* имати кад је Φ каква алгебарска ирационална функција, премда то *не мора* увек бити: има случајева кад је v *униформна* функција променљиве z, поред свега тога што, сматрана као функција променљиве u, иста функција *има критичких тачака.*

Такав се случај јавља н. пр. кад је

$$v = \sqrt{a^2 - u^2}, \tag{62}$$

где је a константа која испуњава извесне погодбе. Сматрана као функција променљиве u, функција v има две критичке тачке $u = a$ и $u = -a$. Нека је λ један корен једначине

$$u(z)^2 - a^2 = 0, \tag{63}$$

па претпоставимо да је константа a таква, да је за њој одговарајући корен λ једначине (63) израз $u(\lambda + x)$ *йарна функција йроменљиве* x, *која има* $x=0$ *као своју обичну тачку.* Тада се та функција, за вредности x у близини нуле, може развити у ред који ће садржати само парне степене променљиве x

$$u(\lambda + x) = A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \cdots$$

што за $x=0$ даје

$$A_0 = u(\lambda), \qquad A_0{}^2 = u(\lambda)^2 = a^2,$$

пошто је λ корен једначине (63). Према томе је

$$(64) \qquad [u(\lambda+x)]^2 - a^2 = x^2(B_2 + B_4x^2 + B_6x^4 + \cdots).$$

Ако се тада за x узме вредност $x = z - \lambda$, једначина (64) постаје

$$u(z)^2 - a^2 = (z-\lambda)^2 [B_2 + B_4(z-\lambda)^2 + B_6(z-\lambda)^4 + \cdots],$$

а према томе је

$$(65) \qquad v = \sqrt{a^2 - u^2} = (z-\lambda)\,\Psi(z),$$

где је $\Psi(z)$ функција коначна и од нуле различна за $z=\lambda$.

Једначина (65) показује да вредност $z=\lambda$ није критичка тачка функције v, већ једна њена обична нула. А као што се види, такав случај увек наступа кад су испуњени ови услови:

1° корен $z=\lambda$ једначине (63) је обична тачка за функцију $u(z)$;

2° израз $u(\lambda+x)$ је парна функција променљиве x.

А очевидно је да би то све важило и онда, кад би један или више првих коефицијената $B_2, B_4, B_6 \cdots$ на десној страни једначине (64) били једнаки нули; и тада би се опет имао као заједнички чинилац паран степен променљиве x, па би се имао исти закључак.

Применимо сад то на функцију

$$v = cn\,z = \sqrt{1-u^2}.$$

Једначина (63) је

$$1 - sn^2 z = 0$$

и она има у основном паралелограму периода за корене вредности $\lambda=K$ и $\lambda=K+2iK'$ од којих се друга може сматрати као хомолога вредности K, па је, дакле, довољно испитати само корен $\lambda=K$.

Сменом $z=K+x$ у једначини

$$sn(2K-z)=sn\,z$$

добија се да је

$$sn(K-x)=sn(K+x),$$

што показује да, кад се узме за λ вредност K, израз $sn(\lambda+x)$ је парна функција променљиве x, па како је $z=K$ обична тачка за $sn\,z$, то су оба горња услова 1° и 2° испуњена, и према томе за функцију $v=cn\,z$ вредност $z=K$ није критичка тачка. Та функција има, дакле, као сингуларитете само полове, тако да је и она, као и $sn\,z$, *мероморфна* функција променљиве z.

Израз

$$\pm\sqrt{1-sn^2 z}$$

сматран као функција променљиве $u=sn\,z$ је неоспорно мултиформна функција те променљиве, али, сматран као функција променљиве z, он је униформна функција ове променљиве. Он, са својим двојним знаком $\pm$ не представља две детерминације једне исте мултиформне функције, већ две једну од друге различне функције $cn\,z$ и $-cn\,z$, као што је то случај са изразом $\pm z^3$, и као што је такође случај са изразом $\pm\sqrt{1-\sin^2 z}$. Ову последњу функцију обухвата горњи закључак о непостојању критичких тачака, и њој за λ одговара вредност $\lambda=\frac{\pi}{2}$.

Применимо сад горње опште закључке на функцију

$$v=dn\,z=\sqrt{1-k^2\,sn^2 z}=\sqrt{1-k^2 u^2}$$

написану у облику

$$v=k\sqrt{\frac{1}{k^2}-u^2}.$$

Једначина (63) је

$$sn^2 z-\frac{1}{k^2}=0$$

и има у основном паралелограму периода за корене вредности $K+iK'$ и $3K+iK'$. Пошто је $2iK'$ периода функције $sn\,z$, биће

$$sn\,(2K-z)=sn\,(2K+2iK'-z)=sn\,z\,,$$

тако да кад се за λ узме $K+iK'$, биће

$$sn\,(2\lambda-z)=sn\,z\,,$$

па се сменом $z=\lambda+x$ добија да је

$$sn\,(\lambda+x)=sn\,(\lambda-x)\,,$$

што показује да је израз $sn\,(\lambda+x)$ парна функција променљиве x.

Тако исто, пошто су $4K$ и $2iK'$ периоде функције $sn\,z$, то ако се за корен λ узме $3K+iK'$ биће

$$sn\,(6K+2iK'-z)=sn\,(2\lambda-z)=sn\,z\,,$$

тако да је опет израз $sn\,(\lambda+x)$ парна функција променљиве x.

То показује да су услови 1° и 2° испуњени и да корени λ нису за функцију v критичке тачке. И функција $dn\,z$ има, дакле, као сингуларитете само полове, тако да је и она *мероморфна* функција променљиве z.

Израз

$$\pm\sqrt{1-k^2\,sn^2\,z}$$

не представља дакле, као ни у случају функције $cn\,z$, две детерминације једне исте функције, већ две различне функције $-dn\,z$ и $+dn\,z$.

17. Периоде функција $cn\,z$ и $dn\,z$

Посматрајмо опет функцију

$$v=\Phi\,(u)\,,$$

где је Φ дата алгебарска функција променљиве u, инверсије интеграла (61).

Могло би на први поглед изгледати да, пошто u има за основне периоде вредности

$$\omega_1 = 4K \qquad \text{и} \qquad \omega_2 = 2iK',$$

те ће исте вредности имати за периоде и функција v. И то ће одиста тако бити кад год је Φ рационална функција променљиве u. Али то не мора бити кад је Φ ирационална алгебарска функција са више детерминација, па ма она и била униформна функција променљиве z.

Према напред изложеном оппітем поступку за одређивање периода функција што зависе од једне променљиве z, види се да основне периоде функције v зависе:

1° од вредности интеграла (61) узетог дуж контура у равни променљиве u описаних око критичких тачака функције

$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\ ;$$

2° од промена детерминација тога израза по обиласку променљиве u око тих критичких тачака;

3° од промена детерминација функције $\Phi(u)$ при тим обиласцима.

Посматрајмо најпре функцију

$$v = \sqrt{1-u^2} = cn\, z,$$

где је u инверсија интеграла (61). Као што је напред показано, кад се интеграција изврши дуж путање означене на сл. 13, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K$ интеграла, а са детерминацијом (—) квадратног корена; у тачку u се, дакле, стиже са вредношћу $2K-z$ интеграла.

Ако се сад функција v посматра, не као функција променљиве z, већ као функција променљиве u, она има $u=1$ као критичку тачку и при обиласку око те тачке прелази од детерминације $+\sqrt{1-u^2}$ на детерминацију $-\sqrt{1-u^2}$. Ако се, дакле, при одредби интеграла (61) иде директном путањом C од од тачке O до u, функција v ће имати за вредност

$$v_0 = +\sqrt{1-u^2} = +\sqrt{1-sn^2 z}\ ;$$

а ако се иде најпре контуром сл. 13, па затим директним путем до u, функција v ће имати за вредност

$$v_1 = -\sqrt{1 - sn^2(2K - z)}\,.$$

Па пошто је

$$v_0 = cn\, z\,, \qquad v_1 = -\,cn\,(2K - z),$$

а функција $v = cn\, z$ је униформна, па дакле обе путање моморају довести до једне исте вредности v, то је $v_1 = v_0$ тј.

$$cn\,(2K - z) = -\,cn\, z\,.$$

Кад се у томе обрасцу изврши смена

$$z = 2K + x\,,$$

он постаје

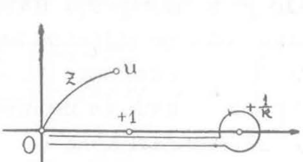
$$cn\, x = -\,cn\,(2K + x)\,,$$

па кад се та смена још једном понови, т. ј. смени се x са $2K + x$, добија се да је

$$cn\,(x + 4K) = cn\, x\,,$$

из чега се види да $cn\, x$ има за периоду $4K$.

Посматрајмо сад интеграл (61) узет дуж контуре означене на сл. 14. Напред је показано да, кад се интеграција изврши дуж такве контуре, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K - 2iK'$ интеграла, а са детерминацијом (—) квадратног корена под интегралним знаком; у тачку u се, дакле, стиже са вредношћу $2K - 2iK' - z$ интеграла.



Сл. 14.

Са друге стране, ако се v сматра као функција промењљиве u, она нема тачку $u = \dfrac{1}{k}$ као критичку тачку (јер су јој критичке тачке само $u = \pm 1$), па, дакле, по обиласку промењљиве u око тачке $u = \dfrac{1}{k}$ функција v не мења детерминацију. Ако се, дакле, при одредби интеграла (61), иде директном путањом C од тачке O до u, функција v ће имати за вредност

$$v_o = +\sqrt{1-u^2} = +\sqrt{1-sn^2 z} = cn\, z\,;$$

а ако се иде најпре контуром сл. 14, па затим директном путањом до u, стиже се у u са вредношћу

$$v_1 = +\sqrt{1 - sn^2\,(2K - 2iK' - z)}\,.$$

Па пошто је

$$v_1 = cn\,(2K - 2iK' - z) = cn\,(z - 2K + 2iK'),$$

то, ако се вредности z дода $4K$ (што не мења вредност функције, пошто је $4K$ периода) добија се да је

$$v_1 = cn\,(z + 2K + 2iK')\,.$$

А како је $v = cn\,z$ униформна функција, то све путање морају доводити до једне исте вредности v, па је, дакле, $v_1 = v_o$, а из тога је

$$cn\,(z + 2K + 2iK') = cn\,z\,,$$

из чега се види да је $2K + 2iK'$ једна основна периода функције $cn\,z$.

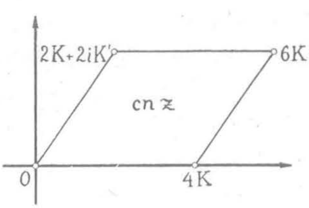
Функција $cn\,z$ има, дакле, две основне периоде, једну реалну

$$\omega_1 = 4K$$

и једну комплексну

$$\omega_2 = 2K + 2iK'\,.$$

Њен основни паралелограм периода има облик сл. 15.



Сл. 15.

Уочимо сад функцију

$$v = \sqrt{1 - k^2 u^2} = dn\,z\,,$$

где је опет u инверсија интеграла (61).

Као што је напред показано, кад се интеграција изврши дуж путање сл. 13, пошавши са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K$ интеграла, а са детерминацијом (—) квадратног корена под интегралним знаком; у тачку u се стиже са вредношћу $2K-z$ интеграла (61).

Па како, кад се v сматра као функција променљиве u, она нема тачку $u=+1$ као критичку тачку, то по обиласку око те тачке она не мења своју полазну детерминацију $+\sqrt{1-k^2u^2}$. Ако се, дакле, иде директном путањом од O до u, функција v ће имати за вредност

$$(66)\qquad v_0=+\sqrt{1-k^2u^2}=+\sqrt{1-k^2sn^2z}=dn\,z\,;$$

а ако се иде најпре контуром сл. 13, па затим директном путањом C до u, она ће имати за вредност

$$v_1=+\sqrt{1-k^2sn^2(2K-z)}=dn(2K-z)\,,$$

па пошто је функција $dn\,z$ униформна, мора бити $v_1=v_0$ тј.

$$dn(2K-z)=dn\,z\,.$$

Кад се у томе обрасцу смени z са $-z$, добија се, пошто је $dn\,z$ парна функција, да је

$$dn(z+2K)=dn z$$

што показује да је $2K$ периода функције $dn\,z$.

Посматрајмо сад интеграл (61) узет најпре дуж контуре сл. 14. Као што је показано, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K-2iK'$ интеграла, а са детерминацијом (—) квадратног корена; у тачку u стиже се са вредношћу $2K-2iK'-z$ истога интеграла.

Са друге стране, кад се v сматра као функција променљиве u, она има тачку $u=\dfrac{1}{k}$ као критичку тачку, па дакле по обиласку променљиве u око те тачке функција v мења детерминацију. Ако се, према томе, иде директном путањом од O до u, функција v ће имати за вредност (66), а ако се најпре иде контуром сл. 14, па затим директном путањом до u, стиже се у u са вредношћу

$$v_1 = -\sqrt{1 - k^2 sn^2 (2K - 2iK' - z)} = -dn\,(2K - 2iK' - z),$$

па пошто мора бити $v_1 = v_0$ (јер је функција u униформна), то је

$$dn\,(2K - 2iK' - z) = -dn\,z;$$

а пошто је $2K$ једна периода функције, то се добија

$$dn\,(-z - 2iK') = -dn\,z\,,$$

или, пошто је $dn\,z$ парна функција

$$dn\,(z + 2iK') = -dn\,z\,.$$

Ако се сад вредности z дода $2iK'$, последњи образац даје

$$dn\,(z + 4iK') = -dn\,(z + 2iK') = dn\,z$$

што показује да је $4iK'$ периода функције.

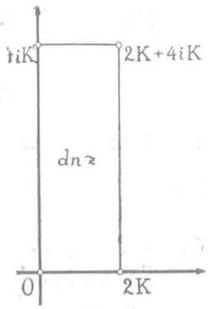
Функција $dn\,z$ има дакле две основне периоде, једну реалну

$$\omega_1 = 2K$$

и једну чисто имагинарну

$$\omega_2 = 4iK'\ .$$

Њен основни паралелограм периода има облик сл. 16.



Сл. 16.

18. Нуле и полови функције $cn\,z$

За проучавање функције $cn\,z$ служе као полазна тачка њене везе са функцијом $sn\,z$ исказане обрасцима

$$cn\,z = \sqrt{1 - sn^2 z}\,, \tag{67}$$

$$cn'\,z = -sn z \cdot dn\,z\,. \tag{68}$$

Функција $cn\, z$ постаје еднака нули за вредности z за које је

$$sn\, z = -1 \quad \text{и} \quad sn\, z = +1\,,$$

а такве вредности, садржане у основном паралелограму периода функције, јесу

$$z = 3K \quad \text{и} \quad z = K\,.$$

Кад се тим двема вредностима придаду мултипли реалне периоде $4K$ функције, добија се *бескрајни низ њених позитивних и негативних реалних нула, које се све могу изразити општим обрасцем*

$$z = (2m+1)K\,.$$

А кад се овима придаду мултипли имагинарне периоде $2K+2iK'$, добија се *бескрајни низ имагинарних нула функције које се све изражавају општим обрасцем*

$$z' = (2m+1)K + 2niK'\,.$$

Све су те нуле *просте*, јер је за сваку од њих

$$sn\, z = \pm 1\,,\; dn\, z = \pm\sqrt{1-k^2}\,,$$

па дакле извод

$$cn'\, z = -\, sn\, z \cdot dn\, z$$

има од нуле различну вредност $\pm\sqrt{1-k^2}$.

То показује у исто време да *функција* $cn\, z$ *мења знак при сваком проласку кроз једну своју реалну нулу.*

Из обрасца (67) јасно је да $cn\, z$ *има исте полове и истога реда као и функција* $sn^2 z$, јер се за велике вредности $sn\, z$ поткорени израз понаша као $sn^2 z$, а сам квадратни корен као $sn\, z$. Сви су полови, према томе, *имагинарни и прости.* Функција $cn\, z$ *остаје коначна за све реалне вредности* z.

Из истих разлога и остаци функције $cn\, z$ за сваки њен пол $z=a$ су једна од вредности $-\dfrac{1}{k}$ или $+\dfrac{1}{k}$, јер је гранична вредност израза

$$(z-a)\cdot cn\, z \qquad \text{за} \qquad z=a$$

иста као и за израз

$$(z-a)\cdot sn\, z\,.$$

Приметимо још и то да, пошто се све реалне вредности функције $sn\, z$ налазе између -1 и $+1$, према обрасцу (67) тако ће исто бити и са функцијом $cn\, z$.

Вредности z, за које $cn\, z$ добија своје крајње вредности ± 1, јесу оне за које је $sn\, z = 0$, а то су у основном паралелограму периода вредности 0 и $2K$.

19. Нуле и полови функције $dn\, z$

И за проучавање особина функције $dn\, z$ полазна је тачка њена веза са функцијом $sn\, z$, изражена релацијама

$$dn\, z = \sqrt{1 - k^2\, sn^2\, z}\,, \tag{69}$$

$$dn'\, z = -\, k^2\, sn\, z \cdot dn\, z\,. \tag{70}$$

Функција постаје једнака нули за вредности z за које је

$$sn\, z = \pm \frac{1}{k}\,,$$

а оне од тих вредности, што су садржане у њеноме основном паралелограму периода, јесу

$$\alpha = K + iK' \qquad \text{и} \qquad \alpha' = K + 3iK'\,.$$

Кад се тим нулама придаду мултипли $2mK + 4niK'$ њених периода $2K$ и $4iK'$, добија се *бескрајан низ нула функције које су све имагинарне и изражене општим обрасцем*

$$\alpha = (2m+1)\, K + (2n+1)\, iK'\,.$$

Све су те нуле *просте*, јер за ма коју од њих је

$$sn\, z = \pm \frac{1}{k}\,, \qquad cn\, z = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}\,,$$

тако да извод (70) има од нуле различну вредност $\pm\sqrt{k^2 - 1}$.

Из обрасца (69) види се да $dn\, z$ има све своје полове исте као и $sn\, z$ и да су сви *првога реда*, јер се за велике вредности $sn\,z$ поткорени израз (69) понаша као $k^2 sn^2 z$. *Сви су йолови, дакле, имагинарни и йрости.* То показује да *функција остаје коначна за све реалне вредности* z.

Из истих разлога и остаци функције $dn\,z$ за сваки њен пол $z = a$ су једна од вредности ± 1, јер је гранична вредност израза

$$(z - a) \cdot dn\,z \qquad \text{за} \qquad z = a$$

једнака једној или другој од тих двеју вредности.

Пошто $dn\,z$ нема реалних нула, а постаје једнака јединици за вредности z за које је $sn\,z = 0$, т. ј. за вредности

$$z = 0\,, \quad \pm 2K\,, \quad \pm 4K\,, \quad \pm 6K\,, \cdots$$

то крива линија $y = dn\,x$ не пресеца осовину Ox. А пошто се за

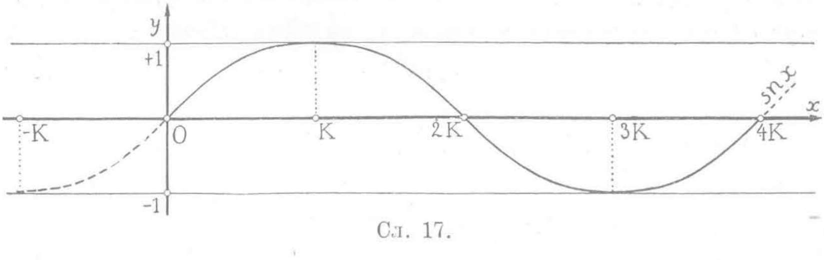
$$z = \pm K\,, \quad \pm 3K\,, \quad \pm 5K\,, \cdots$$

добија као крајња доња гранична вредност функције број $\sqrt{1 - k^2}$, то је цела крива садржана у области равни xOy ограниченој двема правама

$$y = 1 \qquad \text{и} \qquad y = \sqrt{1 - k^2}\,.$$

20. Криве линије што претстављају основне елиптичке функције

Из свега што је довде казано може се саставити слика о облицима кривих линија које претстављају основне елип-



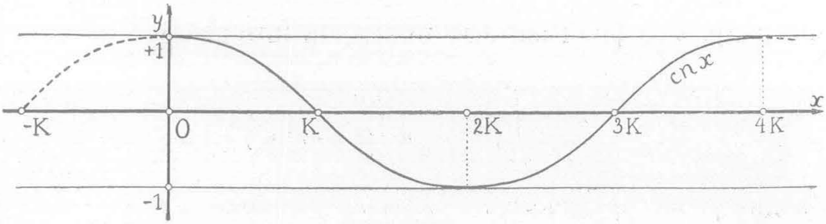
Сл. 17.

тичке функције. Ти су облици претстављени на сл. 17, 18 и 19 и то у оквиру једне периоде од $z = 0$ до $z = 4K$ за криве линије

(71) $\qquad y = sn\, x \qquad$ и $\qquad y = cn\, x\,,$

а у оквиру једне периоде од $z=0$ до $z=2K$ за криву

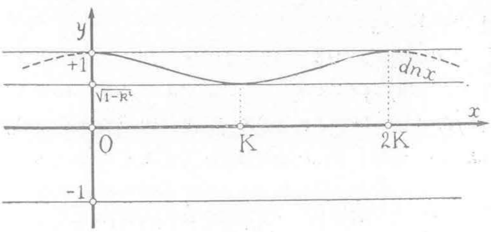
(72) $\qquad y = dn\, x\,.$



Сл. 18.

Криве (71) јако потсећају на криве

$$y = \sin x \qquad \text{и} \qquad y = \cos x$$



Сл. 19.

са подесно изабраном периодом. У тачкама у којима је

$$y = -1\,, \quad y = 0\,, \quad y = +1$$

криве (71) се тачно поклапају са кривама

(73) $$y = \sin \frac{\pi x}{2K} \qquad \text{и} \qquad y = \cos \frac{\pi x}{2K}$$

које такође имају за периоду $4K$.

Исте криве (71) и нису ништа друго до нешто деформисане криве (73). Та деформација је у толико слабија, у колико се k мање разликује од нуле. Кад је $k=0$, криве (71) и (73) се тачно поклапају.

21. Модуларна трансформација основних елиптичких функција

Означимо са

$$u_1 = sn\,(k_1\,,z)\ ,\quad u_2 = sn\,(k_2\,,z)$$

функције u дефинисане као инверсија интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

за две разне вредности $k = k_1$ и $k = k_2$ модула k.

Општи проблем *модуларне трансформације* функције $sn\,z$ састојао би се у томе да се, знајући везу

$$\varphi\,(k_1\,,k_2) = 0$$

између модула k_1 и k_2, одреди веза између одговарајућих им функција u_1 и u_2.

Између специјалних проблема те врсте овде ће бити решен један од најпростијих, познат под именом *Landen-ове трансформације.* Он се састоји у томе *да се нађе веза између u_1 и u_2 кад су k_1 и k_2 везани релацијом облика*

$$k_1^2\,(1+k_2)^2 - 4k_2 = 0\,.$$

Кад се у једначини

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2 u^2)}}$$

изврши смена

$$u = \frac{(1+k')\,v}{1+k'v^2}\,, \tag{74}$$

где су k и k' везани релацијом

$$k^2\,(\,1+k')^2 - 4k' = 0\,,$$

једначина се претвара у

$$dz = (1+k')\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\,(1-k'^2\,v^2)}}$$

о чему се уверавамо непосредно, извршивши такву смену.

Ако се тада узме за k вредност k_1, а за k' вредност k_2, функција u постаје u_1, а v постаје u_2. Са друге стране, из једначине

$$dz = \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1^2 u_1^2)}} = (1+k_2)\frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-k_2^2 u_2^2)}}$$

налази се инверсијом да је

$$u_1 = sn(k_1, z),$$

$$u_2 = sn\left(k_2, \frac{z}{1+k_2}\right).$$

Па пошто су u и v везани релацијом (74), иста ће релација везивати u_1 и u_2, па се из тога изводи став:

Кад се у функцији $sn(k_1, z)$ вредност k_1 смени другом вредношћу k_2, која је таква да је

$$k_1^2(1+k_2)^2 - 4k_2 = 0$$

између првобитне и нове функције $sn(k_1, z)$ и $sn(k_2, z)$ постоји веза

$$sn(k_1, z) = \frac{(1+k_2)v}{1+k_2 v^2},$$

где је

$$v = sn\left(k_2, \frac{z}{1+k_2}\right).$$

Важност става лежи у томе, што он даје могућност да се једна дата функција $sn\,z$ изрази помоћу друге чији ће модуо k бити različан од модула k дате функције. Тако н. пр. функције

$$u = sn\left(\frac{4}{5}, z\right),$$

$$v = sn\left(\frac{1}{4}, \frac{4z}{5}\right)$$

везане су релацијом

$$u = \frac{5v}{4+v^2}.$$

Помоћу веза између функција

$$sn\,z\;,\;cn\,z\;,\;dn\,z$$

лако је формулисати и одговарајуће ставове за остале две елиптичке функције $cn\,z$ и $dn\,z$.

22. Дегенерације основних елиптичких функција

За специјалне вредности $k=0$ и $k=1$ модула k основне елиптичке функције своде се (дегенеришу) на елементарне функције или на константу. Тако, за $k=0$ интеграл

$$z=\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{75}$$

што дефинише функцију $u=sn\,z$, своди се на интеграл

$$z=\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u\,,$$

а одговарајућа му инверсија $sn\,z$ своди се на $\sin z$. Функција $cn\,z$ своди се тада на $\cos z$, а функција $dn\,z$ на 1.

За $k=1$ интеграл (75) се своди на

$$z=\int\limits_0^u \frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\,\log\frac{1+u}{1-u}\,;$$

одговарајућа функција $sn\,z$ своди се на просто-периодичну функцију

$$\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\,,$$

а функције $cn\,z$ и $dn\,z$ на једну исту просто-периодичну функцију

$$\cancel{\frac{2}{e^{2z}+e^{-2z}+2}}\,. \qquad \frac{2}{e^z+e^{-z}}$$

За све остале вредности k, што леже између 0 и 1, такво је свођење немогућно и инверсија интеграла (75) представља једну *сасвим нову трансценденшну функцију, несводљиву ни на какве комбинације ограниченог броја елеменшарних функција.*

Као што је напред показано, криве линије

$$y = sn\, x \qquad \text{и} \qquad y = cn\, x$$

мало се разликују од кривих

$$y = \sin \frac{\pi x}{2K} \qquad \text{и} \qquad y = \cos \frac{\pi x}{2K}$$

са којима се тачно поклапају у бескрајно много тачака и то у онима за које је:

$$y = -1\,, \; y = 0\,, \; y = +1\,.$$

Та сличност, као и многобројне друге сличности у особинама тих основних елиптичких и тригонометриских функција, учиниле су да су они, што су створили теорију елиптичких функција, назвали $sn\, z$ „псеудо-синус“, а $cn\, z$ „псеудо-косинус“. Функција $dn\, z$, која се за $k = 0$ своди на 1, била је названа „псеудо-полупречник“, јер синус и косинус представљају познате из Тригонометрије дужине за круг чији је полупречник 1.

Иста је сличност дала повода и томе да се основне елиптичке функције дефинишу још и на овај начин:

Кад се у обрасцу (75) изврши смена

$$u = \sin \varphi\,, \qquad du = \cos \varphi \cdot d\varphi\,,$$

интеграл (75) се претвара у

$$(76) \qquad z = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\,.$$

У специјалном случају кад је $k = 0$ добија се да је $z = \varphi$; кад је модуо k различан од нуле, φ се не поклапа више са z, већ показује извесно одступање од те вредности, које је у толико веће у колико се k више разликује од нуле.

Jacobi је промењиву φ назвао „амплитудом" промењиве z и то је означавао знаком

$$z = am\,\varphi\,.$$

Па пошто је за $k=0$

$$\sin z = \sin\varphi\ ,\quad \cos z = \cos\varphi\,,$$

то је за k различно од нуле Jacobi означавао функцију $sn\,z$ са $\sin am\,z$, а функцију $cn\,z$ са $\cos am\,z$. Тек су доцније уведене ознаке $sn\,z$ и $cn\,z$.

23. Адициона теорема за елиптичке функције

Има безброј функција $f(z)$ за које се $f(\alpha+\beta)$, за ма какве вредности α и β, може изразити као *алгебарска* функција израза $f(\alpha)$, $f(\beta)$ и једног ограниченог броја узастопних извода

$$f'(\alpha)\ ,\ f''(\alpha)\ ,\ \cdots$$

$$f'(\beta)\ ,\ f''(\beta)\ ,\ \cdots$$

Кад се ти изводи и сами изражавају као алгебарске функције израза $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, онда се и $f(\alpha+\beta)$ изражава као алгебарска функција истих израза $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

Кад једна функција испуњава услов такве врсте, за њу се каже да има своју *адициону теорему:* ова исказује начин тога изражавања за ту функцију.

За сваку функцију $f(z)$ не постоји адициона теорема. Тако н. пр. за функцију

$$f(z) = e^{e^z}$$

добија се да је

$$f(\alpha+\beta) = e^{e^{\alpha+\beta}} = e^{e^\alpha \cdot e^\beta}\ ;$$

па пошто је

$$e^z = \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\ ,$$

$f(\alpha+\beta)$ се изражава у облику

$$f(\alpha+\beta) = e^{\log f(\alpha)\,.\,\log f(\beta)} = e^{\frac{f'(\alpha)\,.\,f'(\beta)}{f(\alpha)\,.\,f(\beta)}}$$

из чега се види да се то изражава не као алгебарска, већ као трансцендентна функција израза $f(\alpha)$, $f(\beta)$, или још и

$f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$. А за непрегледну множину функција уопште је и немогућно изразити $f(\alpha+\beta)$ тако да функција буде имала своју адиционо теорему.

Али постоји и безброј функција које имају адициону теорему у наведеном смислу. Тако н. пр. за функцију e^z је

$$f(\alpha+\beta)=e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta}=f(\alpha)\cdot f(\beta).$$

За $\sin z$ је

$$f(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha=$$
$$=f(\alpha)\cdot f'(\beta)+f(\beta)\cdot f'(\alpha)=f(\alpha)\sqrt{1-f(\beta)^2}+f(\beta)\sqrt{1-f(\alpha)^2}.$$

Исти је случај и са функцијама $\cos z$, $tg\, z$, $\operatorname{cotg} z$, а очевидно је да ће тако бити и са ма каквом алгебарском функцијом променљиве z, или променљиве e^{az}. Све такве функције имају своју адициону теорему.

Овде ће бити показано да и *свака од трију основних елиптичких функција такође има своју адициону теорему.*

Доказ је сличан ономе на који се доказује у математичкој анализи адициона теорема за $\sin z$. За ту се функцију на елементаран *тригонометриски* начин доказује постојање такве теореме. Такав се доказ не примењује на функцију $sn\, z$, али се теорема може доказати на начин сличан ономе који се *аналитички* истиче на видик постојање теореме за функцију $\sin z$.

Тај доказ за $\sin z$ основан је на чињеници да се општи интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{77}$$

може изразити у два разна облика

$$\arcsin x-\arcsin y=C, \tag{78}$$

$$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=C', \tag{79}$$

где су C и C' интеграционе константе.

Једначина (78) се добија непосредном интеграцијом обеју страна једначине (77). А да је и (79) општи интеграл исте једначине (77), види се њеним диференцијалењем које даје једначину

$$xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)+dx\cdot\sqrt{1-y^2}-dy\cdot\sqrt{1-x^2}=0\,.$$

у којој су, према (77), сва три члана једнака нули.

Међутим, као што се зна из опште теорије диференцијалних једначина првога реда, кад год две једначине

$$f\,(x\,,y)=C\,,\qquad \varphi\,(x\,,y)=C'$$

претстављају општи интеграл једне исте једначине оне не могу бити једна од друге независне, већ је једна од функција f и φ функција друге, тако да је

$$C'=\Phi\,(C)\,, \tag{80}$$

па тај случај мора бити и са двема једначинама (78) и (79).

Са друге стране, кад се у једначини (78) стави да је

$$\arcsin x=\alpha\ ,\qquad \arcsin y=\beta\,,$$

према чему је

$$x=\sin\alpha\ ,\qquad y=\sin\beta\,,$$

једначина постаје

$$\alpha-\beta=C\,, \tag{81}$$

а једначина (79) се претвара у

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha=C'\,,$$

тако да једначина (80) постаје

$$\Phi\,(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\,. \tag{82}$$

Да би се одредио облик функције Φ, ставимо у (82) да је $\beta=0$, па се добија

$$\Phi\,(\alpha)=\sin\alpha$$

према чему (82) постаје

$$\sin\,(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

или, сменом β са $-\beta$,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

који образац изражава адициону теорему за функцију $\sin z$.

Исти се аналитички доказ примењује и на функцију $sn\, z$. Као што је напред казано, Euler-ова диференцијална једначина, написана у облику

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}\,, \tag{83}$$

где је

$$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,, \tag{84}$$

$$Y = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,, \tag{85}$$

може се написати у два разна облика

$$\int_0^x \frac{dx}{X} - \int_0^y \frac{dy}{Y} = C\,, \tag{86}$$

$$\frac{xY - yX}{1-k^2x^2y^2} = C'\,. \tag{87}$$

Према горе казаноме мора бити

$$C' = \Phi(C). \tag{88}$$

Са друге стране, ако се стави да је

$$\int_0^x \frac{dx}{X} = \alpha\,, \qquad \int_0^y \frac{dy}{Y} = \beta$$

према чему је

$$x = sn\,\alpha\,, \qquad y = sn\,\beta\,,$$

$$X = \frac{dx}{d\alpha} = sn'\,\alpha\,, \qquad Y = \frac{dy}{d\beta} = sn'\,\beta\,,$$

једначина (86) претвара се у

$$\alpha - \beta = C$$

а једначина (87) у

$$\frac{sn\,\alpha \cdot sn'\,\beta - sn\,\beta \cdot sn'\,\alpha}{1 - k^2 sn^2\,\alpha \cdot sn^2\,\beta} = C'' ,$$

па се заменом у (88) добија

$$(89) \qquad \Phi(\alpha - \beta) = \frac{sn\,\alpha \cdot sn'\,\beta - sn\,\beta \cdot sn'\,\alpha}{1 - k^2 sn^2\,\alpha \cdot sn^2\,\beta} .$$

Да би се одредио облик функције Φ, ставимо у (89) да је $\beta = 0$, па се, пошто је

$$sn\,0 = 0 , \qquad sn'\,0 = 1$$

добија да је

$$\Phi(\alpha) = sn\,\alpha .$$

Образац (89) добија тада облик

$$(90) \qquad sn(\alpha - \beta) = \frac{sn\,\alpha \cdot sn'\,\beta - sn\,\beta \cdot sn'\,\alpha}{1 - k^2 sn^2\,\alpha \cdot sn^2\,\beta}$$

одакле је, сменом β са $-\beta$,

$$(91) \qquad sn(\alpha + \beta) = \frac{sn\,\alpha \cdot sn'\,\beta + sn\,\beta \cdot sn'\,\alpha}{1 - k^2 sn^2\,\alpha \cdot sn^2\,\beta} .$$

А пошто је

$$sn'\,x = cn\,x \cdot dn\,x ,$$

то се образац (91) може написати и у облику

$$(92) \quad sn(\alpha + \beta) = \frac{sn\,\alpha \cdot cn\,\beta \cdot dn\,\beta + sn\,\beta \cdot cn\,\alpha \cdot dn\,\alpha}{1 - k^2 sn^2\,\alpha \cdot sn^2\,\beta} .$$

Напослетку, у обрасцу (92) могу се функције cn и dn сменити својим изразима као функције промењиве sn, по обрасцима

$$cn\,x = \sqrt{1 - sn^2\,x} ,$$

$$dn\,x = \sqrt{1 - k^2 sn^2\,x} ,$$

па се добија образац који изражава $sn(\alpha + \beta)$ као алгебарску функцију израза $sn\,\alpha$ и $sn\,\beta$. Тај образац, као и образац (91) показују да *за функцију* $sn\, z$ *постоји адициона теорема* и истичу на видик облик те теореме, т.ј. *начин на који се* $sn\,(\alpha+\beta)$ *изражава као рационална функција израза*

$$sn\,\alpha\ ,\ sn\,\beta\ ,\ sn'\,\alpha\ ,\ sn'\,\beta$$

или као алгебарска функција израза

$$sn\,\alpha \text{ и } sn\,\beta\,.$$

Ти обрасци уопштавају елементарни тригонометриски образац за $\sin(\alpha+\beta)$, на који се они своде кад је $k=0$, тј. кад $sn\, z$, $cn\, z$ и $dn\, z$ дегенеришу у $\sin z$, $\cos z$ и 1.

Из истих се образаца и оних што исказују везу између функција sn, cn, dn изводе и адиционе теореме за $cn\, z$ и $dn\, z$, које су исказане обрасцима сличним обрасцу (92):

$$(93)\quad cn\,(\alpha+\beta)=\frac{cn\,\alpha\cdot cn\,\beta - sn\,\alpha\cdot sn\,\beta\cdot dn\,\alpha\cdot dn\,\beta}{1-k^2\,sn^2\,\alpha\cdot sn^2\,\beta}\,,$$

$$(94)\quad dn(\alpha+\beta)=\frac{dn\,\alpha\cdot dn\,\beta - k\,sn\,\alpha\cdot sn\,\beta\cdot cn\,\alpha\cdot cn\,\beta}{1-k^2\,sn^2\,\alpha\cdot sn^2\,\beta}$$

одакле се, сменом β са $-\beta$, добијају обрасци за

$$cn\,(\alpha-\beta) \qquad \text{и} \qquad dn\,(\alpha-\beta)\,.$$

Тако исто, из тих се образаца изводи мноштво других који, као и они, уопштавају познате тригонометриске обрасце и од којих ће неки бити изведени у овоме што следује.

Као прост пример биће наведена примена образаца на случај кад је $\alpha=z$ и $\beta=K$, као и кад је $\alpha=z$ и $\beta=-K$

$$sn\,\beta = sn\,K = 1\,, \qquad sn\,\beta = sn\,(-K) = -1\,,$$

$$cn\,\beta = cn\,K = 0\,, \qquad cn\,\beta = cn\,(-K) = 0\,,$$

$$dn\,\beta = dn\,K = \sqrt{1-k^2}\,, \qquad dn\,\beta = dn\,(-K) = \sqrt{1-k^2}\,.$$

Применом обрасца за $sn\,(\alpha+\beta)$ и $sn\,(\alpha-\beta)$ налази се тада да је

$$sn(z+K) = \frac{cn\,z}{dn\,z},$$

$$sn(z-K) = -\frac{cn\,z}{dn\,z}.$$

Кад се, дакле, вредности z дода четвртина реалне периоде, $sn\,z$ постаје $\frac{cn\,z}{dn\,z}$; кад се одузме та четвртина, $sn\,z$ постаје $-\frac{cn\,z}{dn\,z}$.

То је уопштење правила по коме је

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \qquad \sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z.$$

24. Функције $sn\,(mz)$, $cn\,(mz)$, $dn\,(mz)$

Кад се у обрасцима (92), (93), (94) стави да је $\alpha = \beta$ добијају се обрасци

$$sn\,2\alpha = \frac{2\,sn\,\alpha \cdot cn\,\alpha \cdot dn\,\alpha}{1-k^2 sn^4\alpha},$$

(95) $$cn\,2\alpha = \frac{1-2\,sn^2\alpha + k^2 sn^4\alpha}{1-k^2 sn^4\alpha},$$

$$dn\,2\alpha = \frac{1-2k^2 sn^2\alpha + k^2 sn^4\alpha}{1-k^2 sn^4\alpha}$$

који се за $k=0$ своде на елементарне тригонометриске обрасце

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Помоћу образаца за збирове $\alpha+\beta$ и образаца (95), узевши да је $\beta = 2\alpha$, добијају се обрасци помоћу којих се могу израчунати

$$sn\,3\alpha, \quad cn\,3\alpha, \quad dn\,3\alpha,$$

кад се знају вредности

$$sn\,\alpha, \quad cn\,\alpha, \quad dn\,\alpha$$

и то се може продужити тако, да се помоћу познатих вредности ових последњих израза могу одредити узастопце све вредности

$$sn\,(m\alpha)\ ,\ cn\,(m\alpha)\ ,\ dn\,(m\alpha)\ .$$

25. Обрасци за збирове и разлике функција $sn\,z\ ,\ cn\,z\ ,\ dn\,z$

Сабирањем и одузимањем образаца за $sn\,(\alpha+\beta)$ и $sn\,(\alpha-\beta)$ и ставивши да је

$$\alpha+\beta=p\ ,\qquad \alpha-\beta=q\ ,$$

одакле је

$$\alpha=\frac{p+q}{2}\ ,\qquad \beta=\frac{p-q}{2}\ ,$$

добијају се обрасци који изражавају

$$sn\,p\pm sn\,q\ ,\qquad cn\,p\pm cn\,q\ ,\qquad dn\,p\pm dn\,q\ ,$$

помоћу производа функција

$$sn\,\frac{p+q}{2}\ ,\qquad cn\,\frac{p+q}{2}\ ,\qquad dn\,\frac{p+q}{2}$$

$$sn\,\frac{p-q}{2}\ ,\qquad cn\,\frac{p-q}{2}\ ,\qquad dn\,\frac{p-q}{2}\ .$$

Такви су н. пр. обрасци

$$(96)\qquad \begin{aligned} sn\,p+sn\,q&=\frac{2\,sn\frac{p+q}{2}\cdot cn\frac{p-q}{2}\cdot dn\frac{p-q}{2}}{1-k^2\,sn^2\frac{p+q}{2}\cdot sn^2\frac{p-q}{2}}\\ sn\,p-sn\,q&=\frac{2\,sn\frac{p-q}{2}\cdot cn\frac{p+q}{2}\cdot dn\frac{p+q}{2}}{1-k^2\,sn^2\frac{p+q}{2}\cdot sn^2\frac{p-q}{2}}\end{aligned}$$

и слични обрасци за

$$cn\,p+cn\,q\ ,\qquad dn\,p+dn\,q\ ,$$
$$cn\,p-cn\,q\ ,\qquad dn\,p-dn\,q\ .$$

Ти обрасци уопштавају Неперове тригонометриске обрасце као што су

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} ,$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

и слични обрасци за косинус. Обрасци (96) се своде на Неперове обрасце за $k = 0$. Они су, као и ови, од користи при логаритмисању, а тако исто и за доказивање разних ставова у теорији елиптичких функција.

Четврти одељак

Разни облици редова за основне елиптичке функције

26. Развијање у Maclaurin-ов ред

Функције $cn\,z$ и $dn\,z$ су *парне*, а функција $sn\,z$ *непарна* функција променљиве z. Па пошто вредност $z=0$ није никакав сингуларитет ни за једну од тих функција, то се оне могу развити у редове облика

$$
\begin{aligned}
sn\,z &= A_1 z + A_3 z^3 + A_5 z^5 + \cdots \\
cn\,z &= B_0 + B_2 z^2 + B_4 z^4 + \cdots \qquad (97)\\
dn\,z &= C_0 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

Коефицијенти A_n одређују се помоћу обрасца

$$
A_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\,sn\,z \qquad \text{за } z=0\,. \tag{98}
$$

Узастопни изводи функције sn добијају се пошавши од обрасца

$$
sn'\,z = cn\,z \cdot dn\,z
$$

из кога се диференцијалењем и сменом извода функција $cn\,z$ и $dn\,z$ њиховим вредностима

$$
\begin{aligned}
cn'\,z &= -\,sn\,z \cdot dn\,z\,, \\
dn'\,z &= -\,k^2\,sn\,z \cdot cn\,z
\end{aligned}
$$

добија низ образаца

$$sn'' z = 2k^2 sn^2 z - (1+k^2) sn z ,$$
$$sn''' z = (6k^2 sn^2 z - 1 - k^2) cn z \cdot dn z ,$$
$$sn'''' z = 24k^2 sn^3 z - 20 (k^2+k^4) sn^2 z+(1+14k^2+k^4) sn z$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Кад се у тим обрасцима стави $z=0$, добијају се за узастопне коефицијенте A_n вредности:

$$A_1 = \frac{1}{1!} , \quad A_3 = -\frac{1+k^2}{3!} , \quad A_5 = \frac{1+14k^2+k^4}{5!} ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

На исти начин се одређују и коефицијенти B_n и C_n, а то су:

$$B_0 = 1 , \quad B_2 = -\frac{1}{2!} ,$$
$$B_4 = \frac{1+4k^2}{4!} , \quad B_6 = -\frac{1+44k^2+14k^4}{6!} ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_0=1 , \quad C_2 = -\frac{k^2}{2} ,$$
$$C_4 = \frac{4k^2+k^4}{4!} , \quad C_6 = -\frac{16k^2-44k^4+k^6}{6!} ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Као што се види, *општи коефицијенат Maclaurin-овог реда за сваку од функција $sn z$, $cn z$, $dn z$ је рационалан разломак, који за именилац има одговарајући факторијел, а за бројилац један полином по модулу k, чији су сви коефицијенти цели бројеви.*

Питање је још: за које ће вредности z добијени редови конвергирати? Пошто све три функције имају исте сингуларитете, а то су у њиховим паралелограмима полови

$$(99) \qquad iK' \quad \text{и} \quad 2K+iK' ,$$

то ће сваки од горња три реда бити конвергентан за вредности z у кругу описаном око тачке $z=0$ са полупречником једнаким одстојању те тачке до најближег јој пола, а то значи са полупречником K'. А сменивши у редовима (97) на десној страни z ма којом својом хомологом у равни z, добиће се нова три реда за $sn\,z, cn\,z, dn\,z$ који ће конвергирати за све вредности z у кругу описаном око те хомологе са полупречником K'.

27. Развијање у Laurent-ов ред

Означимо са α један ма који пол функције $sn\,z$. Пошто су сви полови првога реда, функција се може развити у Laurent-ов ред који ће бити конвергентан за све вредности z садржане у кругу који има за центар тачку $z = \alpha$, а за полупречник одстојање те тачке до најближег јој другог кога пола функције. Ред је облика

$$sn\,z = \frac{B}{z - \alpha} + A_0 + A_1(z - \alpha) + A_2(z - \alpha)^2 + \cdots$$

Напред је показано да сви остаци функције, за све њене полове, имају за вредност једну или другу од вредности $-\frac{1}{k}$ или $+\frac{1}{k}$. Према томе је

$$B = \pm\frac{1}{k}.$$

Да би се одредили коефицијенти A_n, може се u сменити са $sn\,z$ у једначини коју u задовољава

$$u'^2 = (1 - u^2)(1 - k^2 u^2), \tag{100}$$

па поредити међу собом чланове истих степена израза $\frac{1}{z - \alpha}$ и $(z - \alpha)$, пошто се на левој страни једначине (100) смени

$$u' = -\frac{B}{(z - \alpha)^2} + A_1 + 2A_2(z - \alpha) + 3A_3(z - \alpha)^2 + \cdots$$

па дакле

$$u'^2 = \frac{B^2}{(z - \alpha)^4} - \frac{2A_1 B}{(z - \alpha)^2} + \frac{4A_2 B}{z - \alpha} + 3A_3 B + \cdots$$

а на десној страни,

$$u = \frac{B}{z-\alpha} + A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

Тада се н. пр. налази да на левој страни не фигурише члан са $\frac{1}{(z-\alpha)^3}$; а на десној он фигурише и има за коефицијенат $4\,k^2\,B^3\,A_0$; па пошто су k и B различни од нуле, мора бити $A_0 = 0$.

Ред је, дакле, облика

$$(101) \qquad sn\,z = \pm \frac{1}{k}\,\frac{1}{z-\alpha} + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

а ред за квадрат те функције је облика

$$(102) \qquad sn^2\,z = \frac{1}{k^2}\,\frac{1}{(z-\alpha)^2} + M_0 + M_1(z-\alpha) + M_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

где се коефицијенти M_k одређују помоћу коефицијената A_n.

Као што се види:

1° Ред за $sn\,z$ не садржи члан независан од $(z-\alpha)$;

2° Ред за $sn^2 z$ не садржи члан са $\frac{1}{z-\alpha}$ на првом степену.

Та на први поглед безначајна чињеница има своју нарочиту важност, што ће се видети из овога што следује.

Из обрасца (102) се види *да је остатак функције $sn^2 z$ за ма који њен пол једнак нули*. И то је такође чињеница од важности за исту теорију, јер су многи резултати на њој основани.

28. Основне елиптичке функције изражене као количници целих функција

Напред је показано да никаква мероморфна дво-периодична функција не може бити цела функција. Али, из опште теорије аналитичких функција зна се да се свака мероморфна функција може изразити као количник двеју целих функција. Потражимо које су то целе функције за $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$.

Тога ради уочимо функцију

$$(103) \qquad Z(z) = k^2 \int_0^z sn^2 z \cdot dz$$

која у теорији елиптичких функција игра доста важну улогу и назива се „зета-функција“.

Из обрасца (103) се види да $Z(z)$ не може имати других сингуларитета осим оних што их има $sn\,z$, а то су полови ове функције. Из обрасца (102) добија се интеграцијом

$$\int sn^2 z \cdot dz = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{z-\alpha} + M_0(z-\alpha) + \frac{M_1}{2}(z-\alpha)^2 + \cdots + \text{const},$$

тако да се за $Z(z)$ добија ред

$$Z(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + k^2 M_0 (z-\alpha) + \\ + \frac{k^2 M_1}{2}(z-\alpha)^2 + \cdots + \text{const} \tag{104}$$

из чега се види *да је сваки пол функције* $sn\,z$ *пол првога реда за* $Z(z)$ *и да су сви осшаци ове функције за ше полове једнаки* -1. У исти мах се види и то да је $Z(z)$ *мероморфна* функција.

Помоћу тако дефинисане функције $Z(z)$ формирајмо функцију

$$G(z) = e^{-\int\limits_0^z Z(z)\,dz}, \tag{105}$$

па је очевидно да, кад би она имала сингуларитета, ови би могли произаћи само од функције $Z(z)$, па дакле би се сваки од њих морао поклопити са којим полом те функције. Али, ни један пол $z = \alpha$ те функције не може бити сингуларитет за $G(z)$, јер се из обрасца (104) интеграцијом добија да је

$$\int Z(z)\,dz = -\log(z-\alpha) + \frac{k^2 M_0}{2}(z-\alpha)^2 + \frac{k^2 M_1}{6}(z-\alpha)^3 + \cdots$$

тако да се може написати да је

$$G(z) = e^{\log(z-\alpha)} \cdot e^{f(z)} = (z-\alpha)\,e^{f(z)}, \tag{106}$$

где је $f(z)$ једна функција представљена редом уређеним по целим позитивним степенима разлике $(z-\alpha)$ и која, према томе, нема $z=\alpha$ као сингуларитет. Из тога се види *да је* $G(z)$ *цела функција променљиве* z *која има* $z = \alpha$ *као своју просшу нулу, па дакле као своју обичну шачку.*

Помоћу тако дефинисане целе функције $G(z)$ формирајмо сад функцију

$$G_1(z) = sn\ z \cdot G(z). \tag{107}$$

Она се, према обрасцима (101) и (106), може написати у облику

$$G_1(z) = \left[\pm \frac{1}{k} \frac{1}{z-\alpha} + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots\right](z-\alpha)\, e^{f(z)} =$$

$$= \left[\pm \frac{1}{k} + A_1(z-\alpha)^2 + A_2(z-\alpha)^3 + \cdots\right] e^{f(z)}.$$

Из тог се израза види да је $z = \alpha$ обична тачка за функцију $G_1(z)$. Па како сингуларитети те функције могу произлазити само од таквих вредности као што је $z = \alpha$, тиме је доказано да она нема никаквих сингуларитета, што значи *да је* $G_1(z)$ *цела функција променљиве* z. Из (107) се тада добија да је

$$sn\ z = \frac{G_1(z)}{G(z)}$$

тако, да је функција $sn\ z$ изражена као количник двеју целих функција, за које се зна и њихов начин формирања.

На исти се начин, а имајући у виду да функције $cn\ z$ и $dn\ z$ имају исте полове и истога реда као и $sn\ z$, налази *да су и функције*

$$G_2(z) = cn\ z \cdot G(z),$$

$$G_3(z) = dn\ z \cdot G(z)$$

целе функције.

Функције G, G_1, G_2, G_3 увео је у теорију елиптичких функција Weierstrass и означио их је ознакама

$$G(z) = Al\, z, \quad G_1 = Al_1 z, \quad G_2 = Al_2 z, \quad G_3 = Al_3 z$$

и тако означене оне носе назив *Weierstrass-ове функције Al.*

Помоћу њих се основне елиптичке функције изражавају у облику

$$\begin{aligned} sn\, z &= \frac{Al_1\, z}{Al\, z}\,, \\ cn\, z &= \frac{Al_2\, z}{Al\, z}\,, \qquad (108) \\ dn\, z &= \frac{Al_3\, z}{Al\, z}\,, \end{aligned}$$

тако да се долази до овог резултата:

Свака од функција $sn\, z$, $cn\, z$, $dn\, z$, изражава се као количник двеју целих функција; те функције су Weierstrass-ове функције Al.

Такав начин изражавања основних елиптичких функција од нарочите је важности с тога, што је употребљив *за све вредности z у равни те променљиве*, при чему се нема потребе водити рачуна ни о каквој конвергенцији, пошто су функције Al целе функције, па се могу развити у Maclaurin-ов ред конвергентан у целој равни z. При свима другим начинима изражавања елиптичких функција помоћу редова то није случај, јер је ред конвергентан и употребљив само у одређеној области равни z.

29. Weierstrass-ове функције Al

Те целе функције, чија је улога у теорији елиптичких функција наведена малочас, могу се, пре свега, развити у Maclaurin-ов ред конвергентан у целој равни z. Тако се налази да је

$$Al\, z = 1 - \frac{A_4}{4!} z^4 + \frac{A_6}{6!} z^6 - \frac{A_8}{8!} z^8 + \cdots,$$

$$Al_1\, z = z - \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_5}{5!} z^5 - \frac{B_7}{7!} z^7 + \cdots,$$

$$Al_2\, z = 1 - \frac{C_2}{2!} z^2 + \frac{C_4}{4!} z^4 - \frac{C_6}{6!} z^6 + \cdots,$$

$$Al_3\, z = 1 - \frac{D_2}{2!} z^2 + \frac{D_4}{4!} z^4 - \frac{D_6}{6!} z^6 + \cdots,$$

где је сваки од коефицијената A_n, B_n, C_n, D_n *рационалан разломак који има за именилац $n!$, а за бројилац по један полином по k, са коефицијентима целим бројевима.*

Поступним израчунавањем тих коефицијената налази се да је

$$
\begin{aligned}
A_4 &= 2k^2, \\
A_6 &= 8(k^2 + k^4), \\
A_8 &= 32(k^2 + k^6) + 68k^4, \\
A_{10} &= 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_3 &= 1 + k^2, \\
B_5 &= 1 + k^4 + 4k^2, \\
B_7 &= 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4), \\
B_9 &= 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_2 &= 1, \\
C_4 &= 1 + 2k^2, \\
C_6 &= 1 + 6k^2 + 8k^4, \\
C_8 &= 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_2 &= k^2, \\
D_4 &= 2k^2 + k^4, \\
D_6 &= 8k^2 + 6k^4 + k^6, \\
D_8 &= 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Функције Al су међу собом везане разним коначним и диференцијалним релацијама, од којих ће бити изведене ове што следују.

Кад се у једначинама

$$
sn^2 z + cn^2 z = 1,
$$

$$
k^2 sn^2 z + dn^2 z = 1
$$

смене $sn\, z$, $cn\, z$, $dn\, z$ својим вредностима

$$
(109) \qquad sn\, z = \frac{G_1(z)}{G(z)}, \quad cn\, z = \frac{G_2(z)}{G(z)}, \quad dn\, z = \frac{G_3(z)}{G(z)},
$$

добијају се између функција G_k релације

$$
(110) \qquad \begin{aligned} G_1^2 + G_2^2 &= G^2 , \\ k^2 G_1^2 + G_3^2 &= G^2 . \end{aligned}
$$

Међутим, из једначине (105) добија се да је

$$
\log G = - \int_0^z Z(z)\, dz
$$

одакле је, после два узастопна диференцијалења,

$$
(\log G)'' = - Z'(z) .
$$

Са друге стране из једначине (103) је

$$
Z'(z) = k^2 sn^2 z ,
$$

према чему је

$$
(\log G)'' = - k^2 sn^2 z = - k^2 \left(\frac{G_1}{G} \right)^2 .
$$

Одатле је

$$
G_1 = \frac{G}{k} \sqrt{-(\log G)''}
$$

или, кад се то развије,

$$
(111) \qquad G_1 = \frac{1}{k} \sqrt{G'^2 - GG''} ,
$$

а тај образац изражава функцију $Al_1 z$ помоћу функције $Al z$.

Из једначина (110), сменом (111), добијају се обрасци

$$
(112) \qquad G_2 = \sqrt{G^2 + \frac{1}{k} (G G'' - G'^2)} ,
$$

$$
(113) \qquad G_3 = \sqrt{G^2 + G G'' - G'^2} ,
$$

који изражавају функције $Al_2 z$ и $Al_3 z$ помоћу функције $Al z$.

Све три функције

$$
Al_1 z , Al_2 z , Al_3 z
$$

изражавају се дакле помоћу основне функције $Al z$ и њеног првог и другог извода.

Од интереса је приметити и то да се за $k = 0$ две од функција Al своде на 1, а друге две на $\sin z$ и $\cos z$. Јер из обрасца (103) се види да се за $k = 0$ функција $Z(z)$ своди на нулу, што значи да се функција G своди на јединицу; пошто се тада $sn\, z$ своди на $\sin z$, $cn\, z$ на $\cos z$, а $dn\, z$ на 1, то се види да за $k = 0$ функције Al постају

$$Al = 1 \;,\; Al_1 = \sin z \;,\; Al_2 = \cos z \;,\; Al_3 = 1 \,.$$

Приметимо још и то, да функције Al нису једине помоћу којих се основне елиптичке функције изражавају као количници двеју целих функција. То се постиже и помоћу једне целе функције, коју је у теорију елиптичких функција увео Jacobi и која се може развити, за све вредности z, у ред облика

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{nz+an^2},$$

а где је a одређена константа, чији је реални део негативан, чиме је осигурана конвергенција реда.

Међутим, метода Weierstrass-а, напред изложена, која проблем решава помоћу функција Al, не само што је знатно простија од осталих, већ је и општија, јер се примењује и на друге елиптичке функције у бескрајном броју.

30. Развијање у ред чији су чланови рационалне функције израза e^{az}

Напред је проучена функција $f(z)$ изражена редом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u_n \,, \tag{114}$$

где је

$$u_n = \frac{e^{z+n\omega}}{(e^{\alpha} - e^{z+n\omega})(e^{\beta} - e^{z+n\omega})} \,, \tag{115}$$

где су α, β, ω константе (реални део константе ω треба да је негативан), па је нађено да она има две периоде $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = 2\pi i$, а да као полове има вредности $z = \alpha$ и $z = \beta$, као и оне што се добијају из ових придавањем мултипла периода. Сви су ти полови првога реда.

Уочимо сад функцију

$$\varphi(z) = f(z) - \mu \cdot sn\, \lambda z \,, \tag{116}$$

где су μ и λ две неодређене константе. Подесним избором свих констаната може се учинити

1° да функција $\varphi(z)$ има периоде једнаке периодама функције $sn\,\lambda z$;

2° да $\varphi(z)$ има исте полове као $sn\,\lambda z$;

3° да $f(z)$ има за те полове исте остатке као $\mu \cdot sn\,\lambda z$.

Пошто $sn\,\lambda z$ има за периоде вредности

$$\frac{4K}{\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{2iK'}{\lambda},$$

па дакле и вредност $-\dfrac{4K}{\lambda}$, то ће услов 1° бити испуњен кад се λ и ω изберу тако да буде

$$\omega = -\frac{4K}{\lambda}, \qquad 2\pi i = \frac{2iK'}{\lambda},$$

а то ће бити ако се узме

$$\lambda = \frac{K'}{\pi}, \qquad \omega = -\frac{4K\pi}{K'}.$$

А пошто $sn\,\lambda z$ има у основном паралелограму периода за полове вредности

$$\frac{iK'}{\lambda} = \pi i \quad \text{и} \quad \frac{2K + iK'}{\lambda} = \frac{2K\pi}{K'} + \pi i,$$

то ће услов 2° бити испуњен кад се за α и β узму те две вредности.

Тада обе функције $f(z)$ и $\mu \cdot sn\,\lambda z$ имају исте полове, који су сви првога реда. Према ранијем општем ставу, који важи за све мероморфне дво-периодичне функције, збир остатака за те полове једнак је нули за сваку појединце од тих функција, па дакле и за функцију $\varphi(z)$. За функцију $sn\,\lambda z$ ти су остаци, за један пол у основном паралелограму периода, $-\dfrac{1}{k\lambda}$, а за други пол $+\dfrac{1}{k\lambda}$. Јер, пошто је у близини једнога пола $t = a$ функције $sn\,t$

$$sn\,t = -\frac{1}{k}\,\frac{1}{t-a} + \dots$$

биће у близини пола $z = \frac{a}{\lambda} = \alpha$ функције $sn\,\lambda z$

$$sn\,\lambda z = -\frac{1}{k}\,\frac{1}{\lambda z - a} + \cdots = -\frac{1}{k\lambda}\,\frac{1}{z-\alpha} + \cdots$$

тако, да ће остатак за тај пол бити $-\frac{1}{k\lambda}$, па за други пол он мора бити $+\frac{1}{k\lambda}$, пошто је збир остатака једнак нули. За функцију $\mu \cdot sn\,\lambda z$ остатак за један пол биће, дакле, $-\frac{\mu}{k\lambda}$, а за други пол ће бити $+\frac{\mu}{k\lambda}$.

Са друге стране, за функцију $f(z)$ остаци такође морају бити међу собом једнаки а супротно означени, пошто је и њихов збир једнак нули. Нека су ти остаци $-B$ и $+B$; ако се за константу μ узме вредност

$$\mu = \frac{k\,B\,K'}{\pi},$$

биће испуњен и услов 3^0.

Кад је тако изабрано свих пет констананата

$$\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \omega$$

функција $\varphi(z)$ ће испуњавати ове погодбе:

a) то је једна мероморфна дво-периодична функција;

b) она има у своме основном паралелограму периода два пола, која су оба првог реда.

Међутим, остатак за сваки пол једнак је нули, пошто је тај остатак једнак разлици остатака функција $f(z)$ и $\mu \cdot sn\,\lambda z$, а ови су међу собом једнаки. Према томе у Laurent-овом реду за $\varphi(z)$ недостајаће члан са $\frac{1}{z-\alpha}$, као и члан са $\frac{1}{z-\beta}$, што значи да су тачке $z=\alpha$ и $z=\beta$ обичне тачке за ту функцију. Па пошто она не може имати каквих других сингуларитета, осим α и β (и њихових хомолога), то би она била дво-периодична функција без сингуларитета; таква функција, према раније доказаном општем ставу своди се на константу.

Према томе је

$$f(z) - \mu \cdot sn\, \lambda z = C$$

из чега се, сменивши z са $\frac{z}{\lambda}$, добија да је

$$(117) \quad sn\, z = \frac{1}{\mu} f\left(\frac{z}{\lambda}\right) - C = \frac{\pi}{k B K'} f\left(\frac{\pi z}{K'}\right) - C .$$

Па пошто се $f(z)$ изражава као збир реда чији су чланови рационалне функције израза e^z, то се види *да се функција $sn\, z$ може изразити као збир реда чији су чланови рационалне функције израза*

$$e^{az}, \left(a = \frac{\pi}{K'}\right) \cdot$$

Константа C, што одговара датој функцији $sn\, z$, добија се кад се у обрасцу (117) стави да је $z = o$, што даје

$$C = \frac{\pi}{k B K'} f(o) = \frac{\pi}{k B K'} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u_n ,$$

где је

$$u_n = \frac{e^{n\omega}}{(e^{\alpha} - e^{n\omega})(e^{\beta} - e^{n\omega})}$$

пошто се у томе изразу смене α, β, ω напред нађеним вредностима.

Константа C се, дакле, добија као збир једнога реда који је конвергентан, јер је константа ω негативна, а његов се општи члан u_n за велике позитивне вредности n понаша као

$$\frac{e^{n\omega}}{e^{\alpha+\beta}}$$

т. ј. као општи члан геометриске прогресије

$$e^{\alpha+\beta}\,(q + q^2 + q^3 + \cdots)$$

где је

$$q = e^{\omega} < 1 ,$$

а за велике негативне вредности n он се понаша као $\frac{1}{e^{-n\omega}}$, т. ј. као члан геометриске прогресије

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots$$

где је

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{e^{-\omega}}=e^{\omega}<1\,.$$

Сличан се резултат добија и за друге две елиптичке функције $cn\,z$ и $dn\,z$, пошто су им полови исти и истога реда као и за $sn\,z$.

Пети одељак

Елиптичке функције дефинисане инверсијом општијих интеграла

31. Инверсије интеграла што садрже квадратни корен општег полинома трећег или четвртог степена

У овоме што претходи проучене су функције дефинисане инверсијом интеграла

$$(118) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

т.ј. интеграла у коме се под квадратним кореном налази један специјалан полином четвртог степена.

У овоме ће одељку бити проучене функције које се добијају инверсијом интеграла

$$(119) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

где је $F(u)$ *ма какав полином четвртог степена*

$$(120) \qquad F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E .$$

Пре свега, да би интеграл својом инверсијом могао дати какву дво-периодичну функцију, све нуле полинома $F(u)$ морају бити просте. Јер, кад би која нула, н. пр. $u=c$ били двострука, у $F(u)$ би се јавио као корени чинилац израз $(u-c)^2$, тако да би под квадратним кореном остао полином другога степена по u, а инверсије интеграла што садрже квадратни корен каквог полинома другог степена нису дво-периодичне функције. Тако би исто било кад би корен био троструки или четвороструки, или кад више од једног корена не би били прости.

Нека су, дакле, c_1, c_2, c_3, c_4 нуле полинома $F(u)$, које су све просте, па се може написати

$$F(u) = A\,(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)(u-c_4)\,.$$

Извршимо смену

$$(121) \qquad u = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\,, \qquad du = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma y + \delta)^2}\,dy\,,$$

где су α, β, γ, δ неодређене константе. Таква смена претвара једначину

$$dz = \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

у једначину облика

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{\Phi(y)}},$$

где је $\Phi(y)$ полином опет четвртог степена. Подесним избором констаната α, β, γ, δ може се учинити да се последња једначина сведе на облик

$$(122) \qquad dz = \frac{dy}{\sqrt{(1-py^2)\,(1-qy^2)}}\,,$$

где су p и q константе, што се добија стављајући да су коефицијенти степена y и y^3 једнаки нули, и да је коефицијенат степена y^4 једнак јединици, па се онда смени z са $\frac{z}{B}$.

Очевидно је да, ако се тражи да инверсија y интеграла једначине (122) буде дво-периодична функција, ни једна од констаната p и q не може бити једнака нули, ни бескрајна, нити може бити $p=q$. И тада је могућно извршити такву смену променљиве y, да се једначина (122) сведе на облик

$$(123) \qquad dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}},$$

где ће k бити реалан број који лежи између 0 и 1.

Кад су p и q реални бројеви, таква је смена врло проста. Тако:

1° Кад су оба броја p и q истога знака, па се изврши смена

$$y = \frac{x}{\sqrt{q}}, \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{q}},$$

(где q означује онај од два броја који је већи по апсолутној вредности), једначина (122) претвара се у једначину (123) у којој је

$$(124) \qquad k = \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad \text{па дакле} \quad 0 < k < q$$

и тада је

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}}\, sn\, z\sqrt{q},$$

где sn има за модуо вредност (124);

2° Кад су бројеви p и q супротних знакова, н. пр. q позитиван, а p негативан, па се изврши смена

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{1-x^2}, \qquad dy = -\frac{1}{\sqrt{q}}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

једначина (122) постаје (123), где је

$$(125) \qquad k = \sqrt{\frac{p}{p-q}}, \quad \text{па дакле} \quad 0 < k < 1$$

и тада је

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}}\, cn\,(z\sqrt{q-p}),$$

где cn има за модуо k вредност (125).

У сваком случају, једначина (119) *не доводи ни до какве нове дво-периодичне функције, већ само до рационалних комбинација функција $sn\, az$ и $cn\, az$, где је a константа.*

До истог се резултата долази и у случају инверсије интеграла (119), *где је* $F(u)$ *ма какав полином трећег степена*

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E\,.$$

Тај се случај, у осталом, има сматрати као специјалан случај полинома $F(u)$ четвртог степена (120). Јер, кад се у интегралу (120) изврши смена

$$u = \frac{1}{v}\,, \qquad du = -\frac{dv}{v^2}\,,$$

образац (120) постаје

$$z = -\int \frac{dv}{\sqrt{Dv^4 + Cv^3 + Bv^2 + Av}}\,,$$

па се дакле своди на случај полинома четвртог степена, али који има за једну своју нулу вредност $v = 0$. Одговарајућа тачка $u = \frac{1}{v}$ налази се тада у бескрајности, тако да се случај полинома трећег степена има сматрати као случај полинома четвртог степена, али који има једну од својих нула у бескрајности. Па пошто је свака од нула овога полинома једна критичка тачка функције под интегралним знаком, то се случај полинома трећег степена има сматрати као да је то полином четвртог степена, али такав да функција под интегралним знаком има једну своју критичку тачку у бескрајности.

32. Неколико особина тако дефинисаних дво-периодичних функција

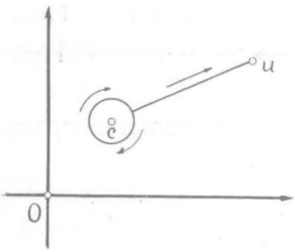
Нека је c једна нула полинома трећег или четвртог степена $F(u)$, па посматрајмо интеграл

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}\,. \tag{127}$$

Према напред казаноме, c је проста нула за $F(u)$ кад год инверсија u интеграла (127) дефинише какву дво-периодичну функцију. А тада се може доказати овај резултат:

Функција u *увек је парна функција променљиве z.*

Да би се то доказало, извршимо интеграцију (127) од тачке c до тачке u идући путањом cu, па ће интеграл имати извесну вредност z. Међутим, ако се, пре но што се пође тим директним путем, изврши око тачке c обрт дуж једнога малог круга (сл. 20), па се тек онда иде директним путем cu, интеграл ће бити једнак збиру два интеграла: једнога узетог дуж малога круга, другога узетог дуж путање cu. Први је једнак нули, јер ако се, да би се извршила интеграција дуж круга, стави



Сл. 20.

$$z = c + re^{\Theta i},$$

$$dz = rie^{\Theta i}\, d\Theta,$$

лако се уверавамо да интеграл тежи нули кад се r бескрајно смањује. Али, обилажењем око критичке тачке c мења се и детерминација квадратног корена полинома $F(u)$, тако да ако се пошло са $(+)$, после обиласка имаће се $(-)$. Па кад се, са тако промењеном детерминацијом, изврши интеграција дуж директне путање cu, интеграл ће имати вредност z, али са промењеним знаком.

Према томе, једној истој вредности u одговарају две једнаке, а супротно означене вредности $+z$ и $-z$, и обратно, тим двема вредностима одговара једна иста вредност u, што показује да је u, сматрано као функција променљиве z, одиста парна функција.

Тај закључак важи било да је полином $F(u)$ четвртог, било да је трећег степена. Приметимо да он не важи кад се за доњу границу интеграла (127) узме каква вредност a која није нула полинома $F(u)$, јер у томе случају вредност $z = a$ није критичка тачка за квадратни корен (127) који, према томе, не мења знак при обиласку око тачке $z = a$.

Као што је показано, инверсија u интеграла (127) је једна рационална комбинација израза $sn\, az$ и $cn\, az$, где је a одређена константа. Па пошто су те две функције униформне, таква ће бити и инверсија u. Она, очевидно, не може имати никаквих других сингуларитета осим полова: то је, дакле, *мероморфна дво-периодична функција* променљиве z.

Периоде ω_1 и ω_2 функције u поклапају се са заједничким периодама функција $sn\, az$ и $cn\, az$, чија је рационална комбинација функција u. Као и те две функције, кад u добије једну вредност β за једну вредност $z = \alpha$, добиће исту вредност β и за још једну вредност z у своме паралелограму периода што садржи тачку α.

Према томе u ће имати у своме основном паралелограму периода две нуле, од којих је једна

$$z = \int_c^0 \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{128}$$

Све су нуле *просте*, јер кад се у обрасцу

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)} \tag{129}$$

смени z једном таквом нулом, пошто је за њу $u = o$, добија се за извод u' вредност $\sqrt{F(o)}$, различна од нуле.

Тако исто ће u имати у паралелограму *два пола*, од којих је један

$$z = \int_c^\infty \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{130}$$

Кад је полином $F(u)$ четвртог степена, сви су полови првога реда. Јер сменом

$$u = \frac{1}{v}, \qquad du = -\frac{dv}{v^2} \tag{131}$$

једначина (129) постаје

$$\frac{dv}{dz} = -\sqrt{v^4 \cdot F\left(\frac{1}{v}\right)} \tag{132}$$

па ако је

$$F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

једначина (132) добија облик

$$\frac{dv}{dz} = -\sqrt{Ev^4 + Dv^3 + Cv^2 + Bv + A},$$

па, дакле, за $v = 0$ извод v' добија вредност $-\sqrt{A}$, различну од нуле.

Међутим, *кад је полином $F(u)$ трећег степена, сви су полови другог реда.* Јер ако је

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

једначина (132) је

$$(133) \qquad \frac{dv}{dz} = -\sqrt{Ev^4 + Dv^3 + Cv^2 + Bv},$$

па за $v = 0$ извод v' добија вредност једнаку нули, што значи да је сваки пол функције u пол вишега реда. Па како у основном паралелограму периода u добија једну исту вредност за две вредности z, па дакле има два пола, то се та два пола поклапају. *Функција* u *има, дакле, у паралелограму периода један пол, а тај је пол другога реда.*

33. Weierstrass-ова нормална елиптичка функција

Као што је показано, смена (131) своди једначину

$$(134) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)},$$

где је $F(u)$ полином трећег степена, на једначину (133), где је под квадратним кореном полином четвртог степена, али који има вредност $v = 0$ као своју просту нулу. Тај квадратни корен има, дакле, $v = 0$ као своју критичку тачку, па се, према томе, у једначини (134) има сматрати као да јој је под квадратним кореном какав полином четвртог степена, али који има једну критичку тачку у бескрајности.

Узмимо за критичку тачку c ту вредност $c = \infty$ и уочимо интеграл

$$(135) \qquad z = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

где је

$$(136) \qquad F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E.$$

Смена

$$u = av + b, \qquad du = a\,dv,$$

(a и b су произвољне константе), своди једначину (135) на

$$(137) \qquad z = a\int_{\infty}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}},$$

где је

$$\Phi(v) = Mv^3 + Nv^2 + Pv + Q,$$

и где ће коефицијенти M и N имати за вредности

$$M = Ba^3, \qquad N = a^2(3\,Bb + C).$$

Изберимо за константе a и b такве вредности да буде $M = 4$, $N = 0$, што ће бити ако се узме

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{B}}, \qquad b = -\frac{C}{3B},$$

па једначина (137) добија облик

$$(138) \qquad \sqrt[3]{\frac{B}{4}}\; z = \int_{\infty}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}},$$

где је

$$(139) \qquad \Phi(v) = 4\,v^3 - g_2 v - g_3,$$

и где су g_2 и g_3 стални коефицијенти.

Ставимо у (138) u на место v и уочимо инверсију интеграла

$$(140) \qquad z = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} .$$

Та инверсија носи назив *нормалне елиптичке функције*. Њу је у теорију елиптичких функција увео Weierstrass, означио је ознаком

$$u = pz ,$$

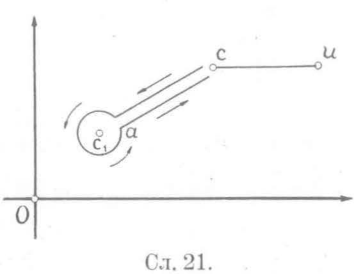
испитао јој у појединостима особине и истакнуо на видик њене везе са осталим дво-периодичним функцијама.

Из овога, што је напред казано, следује да је pz *мероморфна дво-периодична функција* променљиве z. Да би смо јој одредили периоде, вратимо се напред посматраном случају кад је

$$z = \int_{c}^{u} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \qquad F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E ,$$

па нека су c, c_1, c_2, c_3 нуле полинома $F(u)$. Оне су све просте и свака је од њих критичка тачка за квадратни корен под знаком интеграла.

Обележимо у равни променљиве u две од тих нула, н. пр. c и c_1 (сл. 21). Кад би се интеграл узео дуж директне путање cu, он би имао извесну вредност z. Ако се пре тога он узме дуж контуре која, полазећи од c, обиђе једним кружићем тачку c_1, па се врати у c, интеграл ће имати за вредност збир од три интеграла: једног узетог дуж путање ca, другога дуж кружића око c_1, и трећег дуж ac, у означеном на слици смислу.



Сл. 21.

Интеграл дуж кружића једнак је нули, о чему се лако уверавамо ставивши у

$$F(u) = A\,(u - c)\,(u - c_1)\,(u - c_2)\,(u - c_3) ,$$

да је

$$u = c_1 + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i} d\theta,$$

и пустивши да се r бескрајно смањује.

Интеграл дуж ac једнак је интегралу дуж ca, јер је обиласком око критичке тачке c_1 квадратни корен променио знак, па је још једном променио знак и тиме што је смисао интеграције дуж ac супротан ономе дуж ca.

Према томе ће интеграл дуж целе контуре имати за вредност

$$2 \int_c^a \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

па кад се кружић бескрајно смањи, тако да се тачке a и c_1 поклопе, он ће имати за вредност $2K_1$, где је

$$K_1 = \int_c^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

После тог обиласка стиже се у тачку c са вредношћу $2K_1$ интеграла, а са детерминацијом (—) квадратног корена под интегралним знаком (ако се не обилази и тачка c). Кад се после тога продужи интеграција дуж директне путање cu, стиже се у тачку u са вредношћу $2K_1 - z$ интеграла. Па пошто се обема путањама стиже у исту тачку u, то је

$$(141) \qquad u(2K_1 - z) = u(z),$$

што значи да функција u добија једну исту вредност у двема тачкама z и $2K_1 - z$. А пошто је $u(z)$ парна функција (што следује из § 32), сменивши у (141) z са $-z$, добија се да је

$$u(z + 2K_1) = u(z),$$

што значи да функција $u(z)$ има за периоду $2K_1$ (исто би било и кад би се обишла и тачка c, јер је u парна функција).

Међутим, на место критичке тачке $u = c_1$, може се узети још и једна или друга од осталих критичких тачака c_2 и c_3. Ако се, дакле, означи да је

$$K_2 = \int_c^{c_2} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \qquad K_3 = \int_c^{c_3} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

налази се да:

1° *функција* u *има једну исту вредност у тачкама*

$$z, \qquad 2K_1 - z, \qquad 2K_2 - z, \qquad 2K_3 - z;$$

2° *она има као периоде*

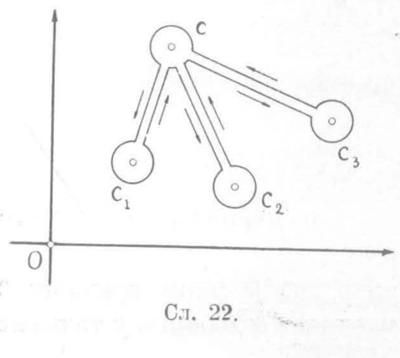
$$\omega_1 = 2K_1, \qquad \omega_2 = 2K_2, \qquad \omega_3 = 2K_3.$$

Тако би изгледало да u има три основне периоде. Али се лако доказује *да је трећа периода једнака збиру осталих двеју*, па да, према томе, она не представља несводљиву периоду.

Да бисмо се о томе уверили, посматрајмо интеграл

$$(141) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

узет дуж контуре означене на сл. 22, а са полазном тачком c. Интеграл дуж свакога од кружића око тачака c, c_1, c_2, c_3 једнак је нули, пошто се кружићи могу бескрајно смањивати а да интеграл дуж њих не измени своју вредност. Са друге стране, при обиласку око сваке од тих тачака квадратни корен мења знак. Према томе интеграл дуж целокупне контуре имаће за вредност



Сл. 22.

$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3.$$

Са друге стране, према теореми о еквиваленци интегралних путања, тај ће интаграл бити једнак истоме интегралу узетом дуж круга C са центром у почетку, а који обухвата све четири тачке c, c_1, c_2, c_3. Тај се круг може и бескрајно ширити, јер функција под интегралним знаком (141) нема других сингуларитета осим те четири тачке. Из тога се закључује да је тај интеграл дуж круга C једнак нули. Јер кад се пусти да се тачка u бескрајно удаљи од почетка, полином $F(u)$ се понаша као његов члан највишег степена Au^4, а интегрални елеменат као

$$\frac{du}{u^2\sqrt{A}}.$$

Кад се, дакле, ради те интеграције дуж C, стави

$$u = re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i}d\theta,$$

интегрални елеменат се понаша као

$$\frac{i}{\sqrt{A}}\frac{e^{-\theta i}}{r}\,d\theta;$$

он тежи нули кад r бескрајно расте, па ће тада и интеграл, узет између коначних граница 0 и 2π, такође тежити нули; како је његова вредност независна од полупречника r, то је она једнака нули.

Из тога следује да је

$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0,$$

то јест

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

а одатле је

$$\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2);$$

па пошто, кад је $-\omega$ периода, и $+\omega$ је периода, то је горње тврђење доказано.

Напред је показано да кад u добије једну вредност β за једну вредност $z=\alpha$, она ту вредност β добија и у тачкама

$$\alpha' = 2K_1 - \alpha, \qquad \alpha'' = 2K_2 - \alpha,\ \alpha''' = 2K_3 - \alpha.$$

Лако се уверити да су тачке α'' и α''' хомологе тачке α', јер је

$$\alpha'' - \alpha' = 2K_2 - 2K_1 = \omega_2 - \omega_1,$$

$$\alpha''' - \alpha' = 2K_3 - 2K_1 = \omega_3 - \omega_1,$$

према чему је

$$\alpha'' = \alpha' + \omega_2 - \omega_1,$$

$$\alpha''' = \alpha' + \omega_3 - \omega_1,$$

што показује да се α'' и α''' разликују од α' само додатком периода.

Да би се све то, као и оно што је казано у § 32., применило на нормалну елиптичку функцију pz, треба узети да је $c=\infty$ (та је вредност једна критичка тачка за квадратни корен под интегралним знаком). И тада се налази ово што следује.

Функција pz *има две периоде,* за које се могу узети две ма које од трију вредности

$$\omega_1 = 2\int_{\infty}^{c_1}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}\,,\quad \omega_2 = 2\int_{\infty}^{c_2}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}\,,\quad \omega_3 = 2\int_{\infty}^{c_3}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}\,,$$

где је

$$F(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3\,;$$

трећа је периода сводљива на оне две које се буду узеле, пошто је

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_2 = 0\,.$$

Нуле функције су вредности

$$z = -\int_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

$$z' = 2K_1 - z = 2\int_{\infty}^{c_1}\frac{du}{\sqrt{F(u)}} + \int_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

и хомологе тих вредности; све су нуле *просте.*

Сви су полови функције двоструки; сам почетак $z=0$ је такав пол, јер се за пол добија вредност

$$z = \int_{\infty}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{F(u)}} = 0\,,$$

а остали су полови њене хомологе

$$z = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2\,.$$

Пошто $z=0$ није обична тачка за функцију, *што се ова не може развити у Maclaurin-ов ред*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Али, пошто је $z=0$ пол другога реда, она се за вредности z у близини тога пола *може развити у Laurent-ов ред* облика

$$\frac{B_2}{z^2} + \frac{B_1}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

А пошто је функција парна, тај ред мора садржати само парне степене променљиве z, па дакле је облика

$$pz = \frac{B_2}{z^2} + A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots \tag{142}$$

из чега се види *да је остатак за пол $z=0$ једнак нули, па ће тако бити и за све остале полове.*

Коефицијенти $B_2, A_0, A_2, A_4, \cdots$ одређују се сменом израза (142) и израза

$$p'z = -\frac{2B_2}{z^3} + 2A_2 z + 4A_4 z^3 + \cdots$$

у диференцијалној једначини

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \tag{143}$$

коју задовољава функција pz. Упоређењем чланова са истим степенима променљиве z на левој и десној страни тако добијене једначине, налази се да је

$$B_2 = 1, \qquad A_0 = 0,$$

$$A_2 = \frac{g_2}{20}, \qquad A_4 = \frac{g_3}{28}, \qquad A_6 = \frac{g_2{}^2}{240},$$

. . . .

и тако се може одредити колико се хоће узастопних коефицијената A_n.

Према томе *Laurent-ов ред за функцију pz је облика*

$$pz = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots \tag{144}$$

тј. ред не садржи ни члан са $\frac{1}{z}$, ни независан члан. На тој је чињеници основано *изражавање функције* pz *као количника двеју целих функција*, потпуно слично ономе које је напред изложено за функције $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$.

34. Адициона теорема за функцију pz

На начин сличан ономе којим се долази до адиционе теореме за функције $\sin z$ и $sn\,z$, напред изложене, долази се и до адиционе теореме за функцију pz. Та теорема исказује *да се вредност* $p(\alpha+\beta)$ *изражава као алгебарска функција вредности*

$$p\alpha \ , \ p\beta \ , \ p'\alpha \ , \ p'\beta$$

тј. као алгебарска функција самих израза $p\alpha$ *и* $p\beta$, *у облику обрасца*

$$p(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}\right)^2 - p\alpha - p\beta \ , \tag{145}$$

где још треба сменити $p'\alpha$ и $p'\beta$ њиховим вредностима

$$\begin{aligned} p'\alpha &= \sqrt{4p^3\alpha - g_2\,p\alpha - g_3}\ , \\ p'\beta &= \sqrt{4p^3\beta - g_2\,p\beta - g_3}\ . \end{aligned} \tag{146}$$

Кад се β смени са $-\beta$ и примети да је pz парна, а $p'z$ непарна функција променљиве z, добија се образац

$$p(\alpha-\beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha + p'\beta}{p\alpha - p\beta}\right)^2 - p\alpha - p\beta \ , \tag{147}$$

па се од образаца (145) и (147) може чинити иста онаква употреба, као и од адиционих образаца за функцију $sn\,z$.

Тако, узевши да је $\beta = \alpha$, лева страна обрасца (145) постаје $p(2\alpha)$, а заграда на десној страни јавља се у облику $\frac{0}{0}$. Да бисмо нашли њену праву вредност, ставимо да је $\beta = \alpha + h$, па пустимо да h тежи нули. Заграда тада постаје

$$\left[\frac{p'(\alpha+h)-p'\alpha}{p(\alpha+h)-p\alpha}\right]^2=\left(\frac{p''\alpha}{p'\alpha}\right)^2,$$

па је, дакле,

$$p(2\alpha)=\frac{1}{4}\left(\frac{p''\alpha}{p'\alpha}\right)^2-2p\alpha\,. \tag{148}$$

Према обрасцу (143) извод $p'\alpha$ изражава се као алгебарска функција израза $p\alpha$. Из истог обрасца добија се диференцијалењем и скраћењем са $2p'\alpha$ да је

$$p''z=6p^2z-\frac{g_2}{2},$$

па се помоћу тога обрасца за други извод $p''z$ и обрасца (143) за први извод израз $p(2\alpha)$ изражава као рационална функција израза $p\alpha$ и $p\beta$.

Обрасци (145) и (147) доводе и до образаца за збир и разлику израза $p\alpha$ и $p\beta$, који решавају исти задатак као и Неперови обрасци у Тригонометрији. Тако, ако се развију квадрати заграда у тим обрасцима, добија се

$$p(\alpha-\beta)-p(\alpha+\beta)=\frac{p'\alpha\cdot p'\beta}{(p\alpha-p\beta)^2};$$

па ако се ту стави да је

$$\alpha-\beta=a\,,\qquad\qquad \alpha+\beta=b\,,$$

одакле је

$$\alpha=\frac{b+a}{2},\qquad\qquad \beta=\frac{b-a}{2},$$

добија се образац

$$pa-pb=\frac{p'\left(\dfrac{b+a}{2}\right)\cdot p'\left(\dfrac{b-a}{2}\right)}{\left[p\left(\dfrac{b+a}{2}\right)-p\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right]^2},$$

а на сличан начин би се добио и образац за збир израза $p\alpha$ и $p\beta$.

35. Функција pz изражена као количник целих функција

Помоћу функције pz формирајмо функцију

$$\zeta(z)=-\int pz\cdot dz\,. \tag{148}$$

Пошто се pz може, за вредности z у близини тачке $z=0$, развити у ред облика

$$(149) \qquad pz = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots ,$$

то се $\zeta(z)$ може развити у ред облика

$$(150) \qquad \zeta(z) = \frac{1}{z} + az^3 + bz^5 + \cdots ,$$

из чега се види да је ζ *нейарна* функција променљиве z. Она не може имати других сингуларитета до оних што их има функција pz. Образац (150), који важи и кад се у њему тачка $z=0$ смени ма којом својом хомологом, показује да ζ има *бескрајно много йолова, који су сви йрвога реда и који су облика*

$$z = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 ,$$

(где су ω_1 и ω_2 напред одређене периоде функције pz), а *који сви имају за осйайак* 1.

Међутим, функција ζ *нема за йериоде ни* ω_1 *ни* ω_2. Јер, ако је ω једна од тих периода, пошто је из (148)

$$\zeta'(z) = -pz ,$$

извод $\zeta(z)$ има исте периоде као pz. Али то не важи и за саму функцију ζ, јер интеграција једначине

$$\zeta'(z+\omega) = \zeta'(z)$$

увлачи једну интеграциону константу C и даје

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + C .$$

Ако се у тој једначини стави да је $z = -\frac{\omega}{2}$, добија се

$$\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) + C ,$$

што даје

$$C = 2 \cdot \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) ,$$

па дакле

$$\zeta(z+\omega)=\zeta(z)+2\cdot\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

што показује да ω није периода функције ζ.

Формирајмо сад функцију

$$(151) \qquad \sigma(z)=e^{\int\zeta(z)\,dz}$$

која се непосредно помоћу функције pz изражава у облику

$$\sigma(z)=e^{-\int\int pz\cdot dz}.$$

Пошто је

$$\int pz\cdot dz=\log z+\frac{A_2}{3}z^3+\frac{A_4}{4}z^5+\cdots,$$

то је

$$(152) \qquad \sigma(z)=z\,e^{\varphi(z)},$$

где је $\varphi(z)$ једна функција која има $z=0$ као своју обичну тачку. Па како та функција не може имати других сингуларитета, до оних што их има pz, а то је тачка $z=0$ и њене хомологе, то излази *да је $\sigma(z)$ цела функција променљиве z.*

Ако се сад уочи функција

$$(153) \qquad G(z)=pz\cdot\sigma(z)^2,$$

из образаца (149) и (152) види се да ће тачка $z=0$ бити обична тачка за функцију $G(z)$, јер се при множењу функција p и σ^2 члан $\frac{1}{z^2}$ потире са z^2. Па пошто и $G(z)$ не може имати других сингуларитета осим вредности $z=0$ и њених хомолога, то ће и та *функција $G(z)$ бити цела функција променљиве z.*

Једначина (153) тада даје

$$(154) \qquad pz=\frac{G(z)}{\sigma(z)^2},$$

а тиме је функција pz изражена као количник двеју целих функција.

Целе функције $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ увео је у теорију елиптичких функција Weierstrass и проучио им је особине. Оне су у тој теорији познате под називом „зета функција“ и „сигма-функција“.

Функција σ се изражава помоћу ζ обрасцем (151), а ζ се изражава помоћу σ обрасцем

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z) ,$$

који се добија логаритмисањем и диференцијалењем обрасца (151).

Из адиционе теореме за функцију pz изводи се за ζ образац

$$\zeta(\alpha + \beta) = \zeta(\alpha) + \zeta(\beta) + \frac{1}{2} \frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}$$

који, у вези са обрасцима

$$pz = -\zeta'(z) ,$$
$$p'z = -\zeta''(z) ,$$

изражава $\zeta(\alpha + \beta)$ помоћу израза

$$\zeta(\alpha) , \ \zeta(\beta) , \ \zeta'(\alpha) , \ \zeta'(\beta) , \ \zeta''(\alpha) , \ \zeta''(\beta)$$

и то као рационалну функцију тих израза.

36. Веза функције pz са функцијама $sn\, z$, $cn\, z$, $dn\, z$

Ако се у једначини

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} \tag{155}$$

изврши смена

$$u^2 = \frac{1}{v + a} , \quad du = - \frac{dv}{2(v + a)^{\frac{3}{2}}} , \tag{156}$$

она постаје

$$dz = \frac{-dv}{\sqrt{4v^3 + cv^2 + gv + h}} , \tag{157}$$

где је

$$\begin{aligned} c &= 4(3a - k^2 - 1) , \\ g &= 12a^2 - 8a(1 + k^2) + 4k^2 , \\ h &= 4a^3 - 4a^2(1 + k^2) + 4ak^2 . \end{aligned} \tag{158}$$

Константа a може се изабрати тако да буде $c = 0$, што ће бити ако се узме

$$a = \frac{1+k^2}{3} . \tag{159}$$

Заменом те вредности у једначинама (158) једначина (157) постаје

$$dz = \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}} , \tag{160}$$

где је

$$g_2 = -\frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4) ,$$

$$g_3 = \frac{4}{3} k^2 (1 + k^2) .$$

Између интеграла $u = sn z$ једначине (155) и функције v постоји релација (156) где a има вредност (159). Па пошто једначина (160) има за интеграл функцију pz, *што између pz и $sn\, z$ постоји веза*

$$sn^2 z = \frac{1}{pz + \frac{1+k^2}{3}} \tag{161}$$

или

$$pz = \frac{1}{sn^2 z} - \frac{1+k^2}{3} . \tag{162}$$

Помоћу везе функције $sn\, z$ са функцијама $cn\, z$ и $dn\, z$, добијају се за ове функције њихове везе са pz, а то су

$$cn^2 z = 1 - \frac{1}{pz + \frac{1+k^2}{3}} ,$$

$$dn^2 z = 1 - \frac{k^2}{pz + \frac{1+k^2}{3}}$$

или

$$pz = \frac{1}{1 - cn^2 z} - \frac{1+k^2}{3} ,$$

$$pz = \frac{k^2}{1 - dn^2 z} - \frac{1 + k^2}{3}.$$

Само треба приметити да везе изражене горњим обрасцима не важе за *ма какве* функције $sn\,z$ (односно $cn\,z$ и $dn\,z$) и pz. Функција pz садржи два променљива параметра g_2 и g_3; горње везе постоје између једне дате, уосталом ма које, функције $sn\,z$ и једне тада *тачно одређене функције* pz, и то оне чији су параметри одређени помоћу модула k функције $sn\,z$ обрасцима (158) и (159).

Из тих веза долази се и до закључка о вези између појединих особина функција $sn\,z$ и њој одговарајуће функције pz. Тако: функција pz има за полове нуле функције $sn\,z$; за сваки пол функције $sn\,z$ функција pz добија вредност $-\frac{1+k^2}{3}$ и т. д.

Везе између $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$ и функција pz које имају друге параметре g_2 и g_3 компликованије су и не улазе у оквир ових предавања.

37. Сводљивост свих мероморфних дво-периодичних функција на линеарне комбинације функције ζ и њених извода

Нека је $F(z)$ једна ма која мероморфна дво-периодична функција, чије периоде нека су ω_1 и ω_2. Означимо са

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$$

полове те функције у њеноме основном паралелограму периода, и нека је m_k ред пола α_k.

Према општој Mittag-Leffler-овој теореми за изражавање мероморфних функција, може се написати да је

$$(163)\quad F(z) = \sum \left[\frac{A_k}{z - \alpha_k} + \frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \cdots + \frac{H_k}{(z - \alpha_k)^m} \right] + G(z),$$

где је $G(z)$ једна цела функција и где се сумирање протеже на све полове α_k. Ред је конвергентан за све вредности z, осим за саме полове α_k.

Нека је pz нормална елиптичка функција која има исте периоде ω_1 и ω_2 које има и $F(z)$. Из обрасца (150) добија се да је

$$\frac{1}{z}=\zeta(z)-az^3-bz^5-\cdots,$$

$$\frac{1}{z^2}=-\zeta'(z)+3az^2+5bz^4+\cdots,$$

$$\frac{1}{z^3}=\frac{1}{2}\zeta''(z)-3az-10bz^3+\cdots.$$

. . . .

Сменивши у тим обрасцима z са $z-\alpha_k$ добија се низ образаца

$$\frac{1}{z-\alpha_k}=\zeta(z-\alpha_k)-\Psi_1(z),$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^2}=-\zeta'(z-\alpha_k)+\Psi_2(z),$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^3}=\frac{1}{2}\zeta''(z-\alpha_k)-\Psi_3(z),$$

. . . .

где су Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, $\cdots$ функције које имају $z=\alpha_k$ као обичну тачку.

Множећи леве и десне стране последњих образаца са A_k, B_k, $\cdots$ H_k и сабирајући тако добијене једначине, добија се

$$\frac{A_k}{z-\alpha_k}+\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{H_k}{(z-\alpha_k)^m}=$$
$$=M_0\zeta(z-\alpha_k)+M_1\zeta'(z-\alpha_k)+\cdots+M_m\zeta^{(m)}(z-\alpha_k)+\Phi_k(z),$$

где су M_0, M_1, $\cdots$ M_m стални коефицијенти, а Φ_k једна функција која има α_k као своју обичну тачку.

Према обрасцу (163) може се тада написати да је

$$\text{(164)}\qquad F(z)=\sum M_0\zeta(z-\alpha_k)+$$
$$+\sum\left[M_1\zeta'(z-\alpha_k)+\cdots+M_m\zeta^{(m)}(z-\alpha_k)\right]+H(z),$$

где се знак сумирања протеже на све полове α_k и где је $H(z)$ једна функција која има те полове као обичне тачке.

За први збир на десној страни једначине (164) може се доказати да претставља једну функцију $\varphi(z)$ која има за периоде ω_1 и ω_2. Јер, ако се са ω означи једна или друга од тих периода, напред је показано да је

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

према чему је

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z) + 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sum M_o\,. \tag{165}$$

Међутим, коефицијенти M_o нису ништа друго до коефицијенти A што множе

$$\frac{1}{z-\alpha_1}\,, \qquad \frac{1}{z-\alpha_2}\,, \qquad \frac{1}{z-\alpha_3}\,, \cdots$$

у изразу (163) за функцију $F(z)$; то су, дакле, остаци те функције за њене полове $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ Па пошто је $F(z)$ мероморфна дво-периодична функција, то је збир тих остатака једнак нули, тако да је

$$\sum M_o = 0\,,$$

и једначина (165) се своди на

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z)\,,$$

што показује да $\varphi(z)$ има ω као периоду, па према томе има обе вредности ω_1 и ω_2 за периоде.

За други збир је очевидно да има те исте периоде, пошто је напред показано да те периоде има први извод $\zeta'(z)$, па ће их, према томе, имати и сви изводи те функције. Из тога следује да ће и $H(z)$ имати те исте периоде, као линеарна комбинација самих дво-периодичних функција. Па пошто та функција има вредности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ као обичне тачке, а не може ван тих вредности имати никаквих сингуларитета, она је *цела* функција променљиве z. А како се цела функција, која има две периоде, своди на једну константу C, образац (164) постаје

$$(166) \qquad F(z) = C + \sum [\, M_0\, \zeta\,(z - \alpha_k) + $$
$$+ M_1\, \zeta'\,(z - \alpha_k) + \cdots + M_m\, \zeta^{(m)}\,(z - \alpha_k)\,]$$

и исказује ову теорему, познату под називом *Hermite-ове теореме:*

Свака мероморфна дво-периодична функција $F(z)$ изражава се као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\zeta\,(z - \alpha_k)\,, \qquad \zeta'\,(z - \alpha_k)\,, \qquad \zeta''\,(z - \alpha_k)\,, \cdots$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ полови функције $F(z)$ у њеноме паралелограму периода, а ζ означује Weierstrass-ову зета-функцију, формирану помоћу функције pz која има исту периоду као $F(z)$.

Важност теореме лежи у томе, што она своди све мероморфне дво-периодичне функције на једну једину функцију, а то је *зета-функција.* Кад је ова проучена, може се сматрати да су проучене и све мероморфне дво-периодичне функције у ономе што је за њих битно.

Једна од важних последица Hermite-ове теореме је ова:

Неодређени интеграл

$$(167) \qquad \int F(z)\, dz$$

једне ма које мероморфне дво-периодичне функције изражава се као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\log \sigma\,(z - \alpha_k)\,, \qquad \frac{d}{dz} \log \sigma\,(z - \alpha_k)\,, \qquad \frac{d^2}{dz^2} \log \sigma\,(z - \alpha_k)\,, \cdots$$

где $\sigma(z)$ означава Weierstrass-ову сигма-функцију, формирану помоћу функције pz која има исту периоду као $F(z)$.

То излази отуда што је

$$\zeta\,(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma\,(z)\,,$$

па је према томе

$$\int \zeta(z-\alpha_k)\,dz = \log(z-\alpha_k)\,,$$

$$\int \zeta'(z-\alpha_k)\,dz = \zeta(z-\alpha_k) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z-\alpha_k)\,,$$

$$\int \zeta''(z-\alpha_k)\,dz = \zeta'(z-\alpha_k) = \frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z-\alpha_k)\,,$$

. . . .

Такав је начин изражавања интеграла (167) сличан ономе на који се изражава интеграл једне рационалне функције $R(z)$. Као што се зна, таква функција се изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\frac{1}{z-\alpha_k}\,, \quad \frac{1}{(z-\alpha_k)^2}\,, \quad \frac{1}{(z-\alpha_k)^3}\,, \cdots$$

или, што је исто, као линеарна комбинација израза

$$\lambda(z-\alpha_k)\,,\ \lambda'(z-\alpha_k)\,,\ \lambda''(z-\alpha_k)\,, \cdots$$

где је

$$\lambda(z) = \frac{1}{z}\,,$$

а α_1, α_2, α_3, $\cdots$ означују полове функције $R(z)$.

Интеграл

$$\int R(z)\,dz$$

изражава се, дакле, као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\log(z-\alpha_k)\,,\ \frac{d}{dz}\log(z-\alpha_k)\,,\ \frac{d^2}{dz^2}\log(z-\alpha_k)\,, \cdots.$$

Функција $\frac{1}{z}$ је, дакле, *редуктивни елеменат* за све рационалне функције, а зета-функција је редуктивни елеменат за све мероморфне дво-периодичне функције.

Тако исто, логаритам је такав елеменат за интеграл ма какве рационалне функције, а сигма-функција за ма какву мероморфну дво-периодичну функцију.

38. Сводљивост свих мероморфних дво-периодичних функција на рационалне комбинације функција $sn\,z$ и $sn'z$

Према ономе што је горе показано, свака се мероморфна дво-периодична функција $F(z)$ може изразити у облику (166) где је

$$\sum M_o = 0\,, \tag{168}$$

и где су α_1, α_2, α_3, $\cdots$ полови функције $F(z)$ садржани у њеном паралелограму периода.

Према напред доказаном обрасцу за све вредности α и β је:

$$\zeta(\alpha+\beta) = \zeta(\alpha) + \zeta(\beta) + \frac{1}{2}\,\frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}\,, \tag{169}$$

па, кад се α смени са z, а β са $-\alpha_k$, добија се да је

$$\zeta(z-\alpha_k) = \zeta(z) - \zeta(\alpha_k) + \frac{1}{2}\,\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}\,, \tag{170}$$

тако да је

$$\sum M_o\,\zeta(z-\alpha_k) = \zeta(z)\sum M_o - \sum M_o\,\zeta(\alpha_k) + \frac{1}{2}\sum M_o\cdot\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}\,.$$

Пошто је израз

$$-\sum M_o\,\zeta(\alpha_k)$$

независан од z, па дакле представља једну константу C, то се према (168) налази да је

$$\sum M_o\,\zeta(z-\alpha_k) = C + \frac{1}{2}\sum M_o\cdot\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}\,,$$

из чега се види да је израз

$$\sum M_o\,\zeta(z-\alpha_k) \tag{171}$$

рационална функција променљивих pz и $p'z$.

Из (170) се добија диференцијалењем да је

$$\zeta'(z-\alpha_k) = \zeta'(z) + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dz}\,\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}\,. \tag{172}$$

Означено диференцијалење на десној страни, кад се изврши, даје једну рационалну комбинацију функција

$$(173) \qquad pz \,,\; p'z \,,\; p''z \,, \cdots ;$$

па пошто је

$$(174) \qquad \begin{aligned} \zeta'(z) &= -pz \,, \\ p''\,z &= 6p^2 z - \frac{g_2}{2} \,, \end{aligned}$$

то се, према обрасцу (172), израз $\zeta'(z-\alpha_k)$, па дакле и збир

$$\sum M_1 \zeta'(z-\alpha_k) \,,$$

своди на рационалну комбинацију функција pz и $p'z$.

Диференцијалењем обрасца (172) добија се $\zeta''(z-\alpha_k)$ као рационална комбинација функција $\zeta''(z)$ и (173), што се, према обрасцима (174) опет изражава рационално само помоћу pz и $p'z$. Према томе се и израз

$$\sum M_1 \; \zeta(z-\alpha_k)$$

изражава рационално помоћу pz и $p'z$.

Продуживши тако, узастопним диференцијалењима и сменом извода $p''z$ његовом вредношћу (174), налази се да се извод ма кога реда функције $\zeta(z-\alpha_k)$, па дакле и сви изрази

$$\sum M_n \zeta^{(n)}(z-\alpha_k)$$

такође изражавају рационално помоћу pz и $p'z$, што доводи до ове теореме:

Свака мероморфна дво-периодична функција $F(z)$ изражава се као рационална комбинација функција pz и pz' које имају исте периоде као $F(z)$.

А пошто се према обрасцу

$$p'z = \sqrt{4p^3 z - g_2 pz - g_3}$$

извод $p'z$ изражава као алгебарска функција нормалне функције pz, то та теорема доводи до ове:

Свака мероморфна дво-периодична функција изражава се као алгабарска функција нормалне функције pz која има исте периоде као $F(z)$.

Из обрасца

$$pz = \frac{1}{sn^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

за који смо напред нашли да исказује везу између $sn\, z$ и оне функције pz што њој одговара према вредности модула k, добија се

$$p'z = -\frac{2sn' z}{sn^3 z},$$

што доводи до теореме:

Свака мероморфна дво-периодична функција $F(z)$ изражава се као рационална функција од $sn\, z$ и $sn' z$, везаних са одговарајућом јој функцијом pz.

Напослетку, према обрасцу

$$sn' z = \sqrt{(1-sn^2 z)(1-k^2 sn^2 z)},$$

извод $sn' z$ изражава се као алгебарска функција основне елиптичке функције $sn\, z$, што доводи до ове теореме:

Свака мероморфна дво-периодична функција изражава се као алгебарска комбинација функције $sn\, z$, везане са одговарајућом јој функцијом pz.

Те су теореме познате у теорији елиптичких функција под називом *Liouville-ових теорема*. Њихова важност лежи у томе, што оне своде све мероморфне дво-периодичне функције на једну од њих, а то је било на pz, било на $sn\, z$; све су остале само алгебарске комбинације тих специјалних функција.

То је и разлог због кога се мероморфне дво-периодичне функције називају *елиптичким функцијама*. Тај се назив раније односио само на функције $sn\, z$, $cn\, z$, $dn\, z$; кад је показано да се и све мероморфне функције са две периоде своде на ове специјалне трансценденте, тај назив је обухватио и све њих.

Шести одељак

Општи поглед на дво-периодичне функције

39. Сличности и разлике између просто-периодичних и дво-периодичних функција

Као што се види из свега овога што претходи, елиптичке функције, под којима се имају подразумевати уопште све мероморфне дво-периодичне функције, састављају једну класу аналитичких функција које показују велике сличности са елементарним тригонометриским функцијама и њиховим алгебарским комбинацијама и на које се оне своде за специјалну вредност модула k. Те су сличности истакнуте на видик у ономе што је напред изложено, и оне се састоје н. пр. у периодичности, облицима кривих линија што их геометриски представљају, у адиционој теореми, у разноврсним обрасцима који им изражавају особине, у могућности изражавања функције мултипла промењиве помоћу функције саме те промењиве, итд.

Међутим, између просто-периодичних и дво-периодичних функција постоје и битне разлике. Постојање двеју периода чини да је скуп дво-периодичних функција ужи но скуп просто-периодичних функција, јер свака периода уноси собом један скуп погодаба које функција треба да испуни; две периоде уносе више тих погодаба него једна. А то повлачи собом често и битне разлике између та два скупа функција.

Тако, постоји бескрајно много целих функција са једном периодом: такве би н. пр. биле функције

$$e^z \ , \quad e^{z^m} \ , \quad \sin z \ , \quad e^{\sin z}.$$

А не постоји никаква цела функција са две периоде.

Затим, свака је мероморфна дво-периодична функција изражљива као алгебарска функција једне једине функције те врсте, н. пр. функције pz или $sn\, z$. А никаква слична теорема не постоји за мероморфне просто-периодичне функције.

Према Hermite-овој теореми свака се мероморфна функција са две периоде изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\zeta\,(z-\alpha_k)\ , \qquad \zeta'\,(z-\alpha_k)\ , \qquad \zeta''\,(z-\alpha_k)\ , \cdots$$

док никаква слична теорема не постоји за мероморфне функције са једном периодом. Једна таква теорема у ствари постоји за тригонометриске функције, тј. за рационалне комбинације функција $\sin z$ и $\cos z$, јер се зна из елементарне анализе да се свака таква комбинација изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза:

$$\sin az\ , \qquad \cos az\ ,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{z-\alpha_k}{2}\ , \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cotg}\frac{z-\alpha_k}{2}\ , \qquad \frac{d^2}{dz^2}\operatorname{cotg}\frac{z-\alpha_k}{2}\cdots,$$

где су α_k одређене константе.

Али се свака мероморфна просто-периодична функција не може изразити као рационална комбинација функција $\sin az$ и $\cos az$, и последњи став не важи за све функције такве врсте.

Доказано је *да се елиптичке функције не могу свести ни на какве коначне комбинације елементарних функција.* То су, дакле, потпуно нове трансценденте које је требало проучити саме за себе, не тражећи да се оне сведу на елементарне функције, па да тек онда, преко њих, буду проучене.

40. Диференцијалне једначине које се интеграле помоћу елиптичких функција

Постоји бескрајно много алгебарских диференцијалних једначина првог, другог, трећег и вишег реда, које за своје интеграле имају елиптичке функције.

Тако н. пр. једначина првог реда

$$y'^2 - (1-y^2)(1-k^2y^2) = 0 \tag{175}$$

има за општи интеграл

$$y = sn\,(x + C)\,.$$

Иста функција је и интеграл диференцијалне једначине другог реда

$$y'' - ay^3 - by = 0\ ,$$

где су a и b два стална броја везана релацијом

$$a + 2\,(b + 1) = 0\ ;$$

једначина се добија диференцијалењем једначине (175).

Једначина првог реда

(176) $$y'^2 - 4y^3 - \alpha y - \beta = 0$$

има за општи интеграл

(177) $$y = p\,(z + C)$$

са параметрима $g_2 = \alpha$, $g_3 = \beta$.

Једначина другог реда

$$y'' - 6y^2 - \frac{\alpha}{2} = 0$$

има функцију (177) као једну класу својих партикуларних интеграла.

Исти је случај и са једначином трећег реда

$$y''' - 12yy' = 0$$

која се добија диференцијалењем напред поменуте једначине

$$y'' - 6y^2 - \frac{\alpha}{2} = 0\,.$$

Према Liouville-овој теореми свака је мероморфна двопериодична функција изражљива као рационална комбинација

(178) $$y = R\,(u\,, u')$$

основне елиптичке функције $u = sn\,z$ и њеног извода $u' = sn'\,z$.

Диференцијалењем једначине (178) добија се

(179) $$y' = \frac{\partial R}{\partial u}\,u' + \frac{\partial R}{\partial u'}\,u''\ ;$$

па пошто је

$$(180) \quad u'^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2) = 1-(1+k^2)u^2+k^2u^4,$$

$$(181) \quad u'' = 2k^2u^3-(1+k^2)u,$$

елиминацијом трију непознатих u, u', u'' из четири једначине (178), (179), (180), (181) добија се једна алгебарска диференцијална једначина

$$(182) \qquad F(y, y') = 0$$

која садржи само функцију y и њен извод y'. Према томе:

Свака мероморфна дво-периодична функција задовољава по једну алгебарску диференцијалну једначину првога реда која не садржи експлицитно интеграциону променљиву z.

А за такве једначине се зна да, кад им се познаје један њихов партикуларни интеграл $y = f(z)$, знаће се и општи интеграл који је

$$y = f(z+C).$$

Узастопним диференцијалењем једначине (182) добијају се редом диференцијалне једначине другог, трећег и вишег реда; све ће њих задовољавати мероморфне функције са две периоде. Међутим постоји став:

Никаква диференцијална једначина

$$(183) \qquad F(z, y, y', y'', \cdots) = 0,$$

алгебарска по z, y *и изводима, па ма кога реда она била, ако садржи експлицитно променљиву* z, *не може имати као интеграл никакву периодичну функцију.*

Јер, кад би се једначина (183) решила по z, добила би се једна једначина

$$(184) \qquad z = \Phi(y, y', y'', \cdots),$$

где би Φ била алгебарска функција променљиве y и њених извода. Кад би једначина (183) имала као интеграл какву периодичну функцију са периодом ω, смена вредности z вредношћу $z+m\omega$ (где је m ма какав цео број) оставља вредности $y, y', y'' \cdots$ непромењене, а функција Φ може за те вредности имати највише онолико вредности колико она, као алгебарска функција, има разних својих детерминација, а ове су у коначном броју. Међутим лева страна једначине (184) имала би бескрајно много вредности $z + m\omega$, што је према самој једначини немогућно.

Но, као што је показано, једначине (184), у којима не фигурише z, могу имати као интеграле и просто-периодичне, и дво-периодичне функције.

Тако исто постоји и бескрајно много система симултаних једначина које имају за интеграле дво-периодичне функције. Такав је н. пр. систем

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dz} - vw = 0\,,\\
(185)\qquad &\frac{dv}{dz} + uv = 0\,,\\
&\frac{dw}{dz} + k^2 uv = 0\,,
\end{aligned}
$$

где је k какав реалан број што се налази између 0 и 1. Систем има за интеграле

$$
\begin{aligned}
u &= sn\,(z + C_1),\\
v &= cn\,(z + C_2),\\
w &= dn\,(z + C_3),
\end{aligned}
$$

о чему се лако уверити сменом тих израза у једначинама (185) и водећи рачун о обрасцима који изражавају изводе

$$sn'\,z\,,\ cn'\,z\,,\ dn'\,z$$

помоћу функција

$$sn\,z\,,\ cn\,z\,,\ dn\,z\,.$$

А лако се уверити, као и малочас у случају једначине (184), да никакав систем симултаних једначина

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dz} &= f\,(z\,,\ u\,,\ v\,,\ w)\,,\\
\frac{dv}{dz} &= \varphi\,(z\,,\ u\,,\ v\,,\ w)\,,\\
\frac{dw}{dz} &= \psi\,(z\,,\ u\,,\ v\,,\ w)\,,
\end{aligned}
$$

где су f, φ, ψ, алгебарске функције променљивих које садрже, ако која од њих садржи експлицитно променљиву z, не може имати као интеграле периодичне функције.

Нека је наведено још и то, да су у теорији алгебарских диференцијалних једначина првога реда познати *потребни* и *довољни* услови да би дата једначина облика (182) имала као своје интеграле мероморфне дво - периодичне функције. Проблем је решен применом општих Cauchy-евих теорема из теорије аналитичких функција.

41. Кратка историја елиптичких функција

Историја елиптичких функција може се поделити на две периоде:

1^0 проучавање *елиптичких интеграла;*

2^0 проучавање *елиптичких функција* као инверсија елиптичких интеграла.

Прва периода. — Под елиптичким итегралима подразумевају се интеграли у којима под интегралним знаком фигурише рационално: или сам квадратни корен из каквог полинома X четвртог или трећег степена, или поред њега још и сама независно променљива количина x. То су, дакле, интеграли облика

$$\int R\,(x\,,\ \sqrt{X}\,)\,dx\,,$$

где је X какав полином четвртог или трећег степена по x, а R је рационална функција двеју променљивих x и $\sqrt{X}$.

На такве је интеграле први наишао Wallis 1655 године, покушавајући да одреди дужину лука елипсе. Најдубља испитивања на елиптичким интегралима извршио је Euler који их је свео на неколико нормалних облика и овима испитао особине. Али оно, због чега су његова испитивања постала основица за теорију и елиптичких интеграла и елиптичких функција, јесте његов проналазак од 1751 године о интегралу диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}\,,$$

где је X ма какав полином четвртог или трећег степена по промењивој x, а Y такав исти полином по промењивој y.

У ономе што је напред изложено наведен је облик тога интеграла и он је искоришћен за добијање основних резултата теорије елиптичких функција. Euler је тај, за теорију те класе функција, основни проналазак учинио сретним случајем, пробом, или, како он сам то каже „tentando et divinando“. Lagrange је 1768 године први дао прави, аналитички доказ Euler-овог резултата.

Међу многобројним испитивањима у области елиптичких интеграла после Euler-ових радова, највише се истичу опсежна Legendre-ова испитивања, вршена у правцу Euler-ових и публикована у великом делу тога математичара „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes“, штампаног 1825—1828 год. Пошто је елиптичке интеграле свео на утврђене типове, Legendre је ове у појединостима проучио, дао практичне методе за њихово бројно израчунавање и саставио таблице њихових бројних вредности.

Landen је доста унапредио теорију елиптичких интеграла поставивши методу за њихове модуларне трансформације, тј. за промену модула k у основном елиптичком интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и тиме, поред осталих користи, јако упростио и проширио употребу Legendre-ових таблица.

Друга периода. — У тој периоди историје елиптичких функција почиње проучавање тих функција као *инверсија елиптичких интеграла*. Оно почиње испитивањима Abel-а (1825 год.) и Jacobi-а (1828 год.), који су скоро у једно исто време, потпуно независно један од другога, дошли на идеју проучавања инверсије елиптичких интеграла. Они су одмах пронашли дво-периодичност тих инверсија и поставили основне обрасце за њихову теорију, истакли на видик њихову адициону теорему и њене последице, нашли њихове изразе у облику бескрајних редова и количника таквих редова, изразили их у облику бескрајних продуката, нашли везе између разних елиптичких функција, везе између њихових периода и модула k итд.

Jacobi је главне резултате својих истраживања изнео у своме основном делу „Fundamenta nova theoriae funct. ellipt." публикованом 1829 год. У тим истраживањима основну улогу игра Jacobi-ева „тета-функција", о којој је било речи у предњим излагањима, и која је послужила као редуктивни елеменат за три основне елиптичке функције.

Jacobi и његови савременици употребљавали су за основне елиптичке функције $sn\,z$ и $cn\,z$ ознаке $\sin am\,z$ и $\cos am\,z$, као што је то поменуто у ранијим излагањима. Данашња означавања са $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$ увео је Gudermann који је такође унапредио теорију тих функција.

Разумљиво је да општа Cauchy-ева теорија аналитичких функција имагинарне променљиве количине није могла остати без јаког утицаја на теорију елиптичких функција. Применом Cauchy-евих теорема учињени су велики напретци у тој теорији, а многи су, дотле већ познати резултати, постали боље расветљени кад се стало на гледиште опште Cauchy-еве теорије. Ова је н. пр. довела Liouville-а (1847 год.) до појма паралелограма периода, до основног става по коме је интеграл дво-периодичне функције, узет дуж паралелограма периода, једнак нули, до става по коме свака таква функција мора имати сингуларитета у равни независно променљиве количине и т. д., што му је све дало основицу за једну општу теорију дво-периодичних функција.

Један од најважнијих резултата Liouville-ових истраживања је став да се све мероморфне функције са две периоде изражавају као рационалне комбинације функција $sn\,z$ и $sn'\,z$, а као алгебарске комбинације саме функције $sn\,z$. Liouville је доказао и несводљивост елиптичких функција на елементарне функције, показавши да су то потпуно нове трансценденте, сасвим нов аналитички инструменат.

Општој теорији дво-периодичних функција моћно је допринео и Jacobi, доказавши између осталога, и немогућност постојања униформних функција са више од две периоде, као став да количник двеју периода није никад реалан број.

Право порекло периода, са гледишта опште Cauchy-еве теорије функција, први је истакао на видик Puiseux, показавши како се периоде појављају кад променљива, од које зависи функција под интегралним знаком каквог криволиниског интеграла, описује разне путање у својој равни. У томе су погледу јако допринела расветљавању ствари и истраживања Riemann-а, који је нарочито истакао улогу алгебарских критичких тачака при јављању периода, употребивши при томе своју нову методу за проучавање рачвања и детерминација мултиформних функција и створивши појам Riemann-ових површина.

Од великог су значаја за развитак теорије елиптичких функција била Hermite-ова истраживања, отпочета 1844 год., вршена опет са гледишта Cauchy-еве теорије аналитичких функција. Поред многобројних резултата о трансформацијама елиптичких интеграла и елиптичких функција једних у друге, о везама између модула k и периода функције (модуларна функција), о аритметичким последицама појединих ставова теорије елиптичких функција и т. д. Hermite је доказао став од велике важности, да је свака мероморфна дво-периодична функција изражљива као линеарна комбинација једне једине функције и њених извода, а то је „зета-функција“ која је напред проучена. Тиме је нађен један линеарни редуктивни елеменат за све функције те врсте, а као непосредна последица тога става је чињеница да се интеграл ма које мероморфне дво-периодичне функције изражава као линеарна комбинација једне једине функције и њених извода, а то је функција $\log \sigma(z)$ која је такође напред проучена.

Теорију елиптичких функција су знатно унапредила и проширила истраживања Weierstrass-а, почета 1840 године, који је у ту теорију унео нове погледе и нове методе. Увођењем своје нормалне елиптичке функције pz, на место дотле уведене основне функције $sn\, z$, Weierstrass је обрасце за елиптичке функције учинио простијим и симетричнијим. Осим тога, показало се да се тиме и сама метода истраживања олакшава и упрошћава. Weierstrass је развио потпуну теорију своје нормалне функције pz, прилагодио јој све до тада познате обрасце за елиптичке функције, нашао мноштво нових образаца и истакао на видик улогу те функције као редуктивног елемента за све остале мероморфне дво-периодичне функције. Начин, на који је он изразио pz као количник двеју целих функција, много је општији од онога на који је Jacobi (помоћу своје „тета-функције") решио проблем за функције $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$. Weierstrass-ов начин таквог изражавања је и простији, и протеже се и на на друге дво-периодичне функције. И метода коју је он увео, и облик који је он дао теорији елиптичких функција, знатно се разликују од онога што се имало до његових радова.

Briot и Bouquet су допринели теорији испитујући везу елиптичких функција са диференцијалним једначинама. Они су 1854 год. нашли да кад год је интеграл једне алгебарске диференцијалне једначине првога реда, која не садржи експлицитно независно промењљиву z, *униформна* функција те промењљиве, онда је тај интеграл увек:

1° или рационална,

2° или просто-периодична,

3° или дво-периодична функција те промењљиве.

Исти су математичари дали потребне и довољне услове за сваки од та три случаја, па дакле и за случај кад је интеграл дво-периодична функција промењљиве z. Они су своја истраживања проширили и на општији случај кад је интеграл *мултиформна* функција промењљиве z, али за једну дату вредност z има ограничен број својих вредности. За такве случајеве они су нашли да је интеграл алгебарска функција или промењљиве z, или израза e^{az}, или израза $sn\,az$ (где је a сталан број) и дали су потребне услове за сваки од тих случајева.

Hermite и Picard су нашли за мноштво диференцијалних једначина, а нарочито за извесне типове линеарних једначина са промењљивим коефицијентима, да су им интеграли дво-периодичне функције.

Упоредо са развијањем теорије елиптичких функција ишле су и њихове примене на разноврсне проблеме математичке анализе: Више Аритметике, Аналитичке Геометрије, Механике, Математичке Физике и др. Такве су примене доводиле до решења проблема која су била немогућна или непотпуна без увођења елиптичких функција. И те су примене биле један од разлога што се теорија елиптичких функција развила до данашње њене потпуности и обимности.

САДРЖАЈ

Први Одељак

Основни појмови о периодичности функција

Други Одељак

Генералности о дво-периодичним функцијама

Трећи Одељак

Основне елиптичке функције

Четврти Одељак

Разни облици редова за основне елиптичке функције

Пети Одељак

Елиптичке функције дефинисане инверсијом општијих интеграла

Шести Одељак

Општи поглед на дво-периодичне функције

POKL
RADIVOJE
KAŠPAHIV