ADDITION AU MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

Par
MICHEL PETROVITCH

Dans mon Mémoire intitulé „Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques"[1]) se trouve démontré le théorème suivant:

L'intégration de toute équation différentielle algébrique

$$F\left(x, y, \frac{du}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0 \tag{1}$$

s'effectue au moyen d'un nombre limité de fonctions particulières fixes

$$u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t), \dots \tag{2}$$

qu'on peut déterminer une fois pour toutes et au moyen des quelles s'exprimera la variable indépendante x et l'intégrale y (générale ou particulière) en fonction d'un paramètre t.

Les fonctions u_k, termes de la *suite canonique* (2), sont engendrées par le *système canonique*

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \varepsilon_1^1 e^{u_1} + \varepsilon_2^1 e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^1 e^{u_p} \\ \frac{du_2}{dt} &= \varepsilon_1^2 e^{u_1} + \varepsilon_2^2 e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^2 e^{u_p} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{du_p}{dt} &= \varepsilon_1^p e^{u_1} + \varepsilon_2^p e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^p e^{u_p} \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) Publications mathém. de l'Université de Belgrade, t. VI—VII. 1937, p. 290—325.

Les variables x et y s'expriment sous la forme

(4) $$x = e^{\Phi_1(t)} \quad \text{et} \quad y = e^{\Phi_2(t)},$$

où Φ_1 et Φ_2 sont fonctions linéaires (à coefficients nombres entiers) en un nombre fini d'expressions

(5) $$\int e^{u_k}\, dt.$$

De plus, un cas exceptionnel, exactement connu, étant mis à part, x et y s'expriment en fonction de t sans quadratures: *les logarithmes de ces deux fonctions s'expriment linéairement en fonction d'un nombre fini de termes de la suite canonique.*

Comme je l'ai indiqué dans mon Mémoire, je savais que MM. Appelrot et Lagoutinski avaient déjà effectué la réduction des équations différentielles algébriques à certaines formes canoniques. Mais n'ayant pas pu avoir leurs Mémoires et ne connaissant pas exactement leurs théorèmes ni les démonstrations, je n'ai pas pu en profiter. Maintenant, en possession de ces Mémoires, je m'empresse d'indiquer la part qu'il convient d'attribuer aux géomètres russes dans le problème de réduction des équations en question et des systèmes différentiels algébriques et de reconnaître leur priorité dans la solution du problème. A savoir, les deux géomètres russes avaient démontré que:

Tout système différentiel algébrique se ramène, par le changement convenable de variables et par l'augmentation nécessaire du nombre de fonctions inconnues, au système de la forme

(6) $$\frac{dy_1}{dt} = y_1\,\Phi_1 \quad \ldots \frac{dy_m}{dt} = y_m\,\Phi_m,$$

où Φ_i est une forme linéaire

(7) $$\Phi_i = a_{1i}\,y_1 + a_{2i}\,y_2 + \cdots + a_{m,i}\,y_m$$

à coefficients a_{ki} constants égaux à des nombres entiers supérieurs ou égaux à -1.

Poursuivant les simplifications M. Appelrot a ramené les formes linéaires (7) *à avoir tous les coefficients a_{ki} égaux à* 1 *ou à* 0[1]).

---

[1]) Communications à la Soc. mathém. de Moscou (Recueil mathématique t. 23, 1902; t. 27, 1909; t. 32, 1924).

On passe du système algébrique (6) au système transcendant (3) par le simple changement

(8) $$z_k = e^{u_k}.$$

Mais le système (3), quoique transcendant, présente l'avantage de se prêter plus aisément à l'étude des fonctions u_i de la suite canonique. En particulier, comme cela se trouve exposé dans mon Mémoire, il permet de développer ces fonctions en séries tayloriennes à structure des coefficients connue, pour lesquelles on connaîtra un cercle de convergence. Le même système (3) met en évidence la transcendance de ces fonctions, l'existence de leurs singularités mobiles, la manière dont elles se comportent à l'infini etc.

Je rappellerai encore que, par l'étude du système (6), M. V. Kostitzin est parvenu à quelques résultats importants sur la compatibilité des points singuliers stables des équations différentielles algébriques.[2])

D'autre part, M. T. Peyovitch a démontré une proposition sur la manière dont se comportent les fonctions u_i de la suite canonique (2), engendrées par le système (3), lorsque la variable indépendante augmente indéfiniment par des valeurs réelles, ces fonctions étant supposées réelles, continues et déterminées.[3])

En terminant je saisis l'occasion d'ajouter une remarque que je dois à l'obligeance de M. le professeur E. Cotton; elle corrigera une petite erreur qui s'est glisée sur un point d'importance secondaire dans l'exemple cité à la page 322 de mon Mémoire. Il s'agit d'une fonction θ de t que j'avais qualifiée d'arbitraire; en réalité elle doit être la solution d'une certaine équation differentielle.

En effet, comme il résulte des équations (63) et (68) de ce Mémoire, on a

(9) $$\theta = y_1^{m_1-1}\, y_2^{m_2},$$

---

[2]) Compt. rend. de l'Acad. de Sc. de Paris, séance du 6 février 1939, p. 411.

[3]) Compt. rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, séance du 2 mars 1939, p. 960.

d'où

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}=(m_1-1)\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dt}+m_2\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dt}$$

et alors, d'après (68) et (69),

$$\frac{d\theta}{dt}=(m_1-1)A_1\theta^2+m_2A_2\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}. \tag{10}$$

L'exemple traité appartient à ceux qui ont conduit M. le prof. Cotton à étudier des systèmes d'équations différentielles où se présentent effectivement des solutions dépendant des fonctions arbitraires, mais qui s'expliquent quand on cherche à ramener ces systèmes à la forme classique à laquelle s'appliquent les théorèmes d'existence. Le système (63) dans l'exemple cité se ramène à une telle forme.