МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

КАРАКТЕРИСТИЧНА КОНСТАНТА БРОЈНИХ НИЗОВА

Прештампано из Гласника Југословенског професорског друштва, књ. XVII, св. 2—3, 1936 год.

БЕОГРАД
1936

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

КАРАКТЕРИСТИЧНА КОНСТАНТА БРОЈНИХ НИЗОВА

Прештампано из Гласника Југословенског професорског друштва, књ. XVII, св. 2—3, 1936 год.

БЕОГРАД
1936

1937

ЗА ШТАМПАРИЈУ „ЗОРА“, КОСМАЈСКА 24 - ТЕЛ. 29-9-20
БОГОМИР ЈОВАНОВИЋ, ШТАМПАР ПОП ЛУКИНА 4.

КАРАКТЕРИСТИЧНА КОНСТАНТА БРОЈНИХ НИЗОВА.

1. Нека је

$$(I) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots$$

један ма какав, ограничен, или неограничен низ позитивних бројева, уређен по растућим величинама својих чланова, па се може доказати овај став:

За сваки низ (I) постоји по једна позитивна константа С која има ту особину, да се помоћу ње увек може, за сваки члан u_n низа, одредити један бројни размак $\triangle_n$ који зависи само од чланова u_k што претходе члану u_n, и у коме се мора налазити сам члан u_n,

Поред тога:

Закон, по коме размак $\triangle_n$ зависи од чланова u_k што предходе члану u_n, исти је за све низове (I).

Да би се став доказао, формирајмо три израза

$$(2) \quad C = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \ldots$$

$$(3) \quad T_n = u_{n+1}\left(\frac{1}{u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+3}} + \frac{1}{u_{n+4}} - \ldots\right)$$

$$(4) \quad S_n = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{u_n}$$

Наизменични (алтернативни) редови (2) и (3), са члановима који непрестано опадају, увек су конвергентни. Збир T_n реда (3) увек се налази у размаку између позитивних вредности

$$(5) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \qquad \text{и} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

које су обе мање од јединице. Из тога следује да израз

$$(6) \qquad \frac{1}{1 - T_n} = \frac{\dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_{n+2}} + \dfrac{1}{u_{n+3}} - \dots}$$

има вредност већу од јединице. Међутим, именилац десне стране израза (6) има за вредност

$$S_n - C \quad \text{за} \quad n \text{ парно,}$$
$$C - S_n \quad \text{за} \quad n \text{ непарно.}$$

Према томе, вредност нзраза

$$(7) \qquad \frac{\dfrac{(-1)^n}{u_{n+2}}}{S - C}$$

увек је већа од јединице, па дакле је

$$(8) \qquad u_{n+1} < \frac{(-1)^n}{S_n - C}$$

а пошто је

$$u_{n+1} > u_n$$

то показује да се u_{n+1} увек налази у размаку између вредности

$$(9) \qquad u_n \quad \text{и} \quad h_n = \frac{(-1)^n}{S_n - C}$$

т. ј. у размаку између

$$(10) \qquad u_n \quad \text{и} \quad u_n + L_n$$

где је

$$(11) \qquad L_n = h_n - u_n .$$

Неједнакости

$$u_n < u_{n+1} < h_n$$

показују да је вредност L_n увек позитивна. Она зависи само од чланова

$$u_0, u_1, u_2, \dots u_n$$

низа (1) и од константе C везане за тај низ, а начин те зависности је исти за све низове.

Став је тиме доказан. *Он изражава, у извесној мери, за један ма који члан датога низа (1), утицај претходних чланова на његову вредност, а тај је утицај, опет у извесној мери, регулисан бројном вредношћу карактеристичке константе С низа.*

Приметимо и то да се став изражава и у облику једначине

(12) $$u_{n+1} = u_n + \theta L_n$$

где је θ један број што се налази између *0* и *1*.

2. Став истиче улогу карактеристичне константе *С* низа, у *предсказивању* онога што ће, према познатим првим члановима низа, наступити са члановима што следују.

За непрегледно мноштво низова ту је константу могућно израчунати или тачно, или са колико се хоће децимала тачно. Тако:

1^0 За природан низ целих позитивних бројева

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

биће $$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log \operatorname{nat} 2 = 0{,}69314\ldots$$

2^0 За природан низ целих непарних бројева

$$1, 3, 5, 7 \ldots$$

биће $$C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4} = 0{,}78538\ldots$$

3^0 За природан низ кубова непарних целих бројева

$$1^3, 3^3, 5^3, 7^3, \ldots$$

биће $$C = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}23370\ldots$$

4^0 За природан низ бројева

$$1^5, 3^5, 5^5, 7^5, \ldots$$

биће $$C = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots = \frac{5\pi^5}{1536}$$

5^0 За природан низ бројева

$$1^7, 3^7, 5^7, 7^7, \ldots$$

биће $$C = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \ldots = \frac{61\pi^7}{184320}$$

6^0 За природан низ факторијела

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ 4!,\ \ldots$$

биће
$$C = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots = \frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots$$

8^0 За низ бројева

$$1,\ \frac{1\cdot 2}{\lambda^2},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{\lambda^4},\ \frac{1\cdot 2\cdots 5\cdot 6}{\lambda^6},\ \ldots$$

где је $\lambda = \frac{\pi}{4}$, применом елементарног обрасца

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

налази се да је

$$C = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots$$

Константа *C* може се изразити још једним редом који конвергира брже од реда (2) што је дефинише. До тога се другог реда долази применом познате Euler - ове трансформације наизменичних редова. Ставимо да је

$$\frac{1}{u_\kappa} = \lambda_\kappa \tag{13}$$

и уочимо ред

$$f(x) = \lambda_0 x - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^3 - \ldots$$

који ће бити конвергентан за $x = 1$ и који се за ту вредност *x* своди на константу *C*. Ако се стави да је

$$x = \frac{t}{1-t} = t + t^2 + t^3 + \ldots$$

добија се да је

$$f(x) = \lambda_0 t + (\lambda_0 - \lambda_1)\, t^2 + (\lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2)\, t^3 + =$$
$$= + (\lambda_0 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2)\, t^4 + \ldots$$

За $x = 1$ добија се да је $t = \frac{1}{2}$ и према томе

$$C = f(1) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \frac{1}{2^2}(\lambda_0 - \lambda_1) + \frac{1}{2^3}(\lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2) + =$$
$$= + \frac{1}{2^4}(\lambda_0 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3) + \ldots$$

или, сменивши λ_k вредношћу (13)

$$C = \frac{1}{2}\frac{1}{u_0} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{_0} - \frac{1}{u_1}\right) + \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{u_0} - \frac{2}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) + =$$

$$= + \frac{1}{2^7}\left(\frac{1}{u_0} - \frac{3}{u_1} + \frac{3}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right) + \ldots$$

а тај ред конвергира брже но ред (2).

3. Оно што је од нарочитог интереса у напред доказаном ставу, то је *могућност предвиђања* онога што ће у датоме низу (1) наступити, према ономе што наступа у скупу од његових првих чланова.

Кад би се, на пример, тачно познавала константа C, везана за природан низ *простих* бројева

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots$$

т. ј. константа

$$C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \ldots$$

израчуната на какав начин који не претпоставља непосредно познавање чланова низа, онако како се, на пример, зна да за низ целих позитивних бројева

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.\ 5 \ldots$$

та константа има за вредност

$$C = \log \operatorname{nat} 2 = 0{,}6931 \ldots$$

или да она за низ непарних целих бројева има за вредност

$$C = \frac{\pi}{4} = 0{,}7853 \ldots$$

то би довело до једне групе ставова од интереса за теорију простих бројева. За ту константу, чија је вредност са три прве децимале тачно

$$C = 0{,}896 \ldots$$

не познаје се данас никакав образац који би је дао са оноликим бројем децимала, колики би се хтео.

Међутим, ствар ипак не изгледа немогућна. У теорији бројева познате су вредности сличних констаната везаних за просте бројеве, и чије израчунавање не претпоставља да се сви прости бројеви знају унапред (разни обрасци Чебишева).

Као пример ставова који би били од интереса кад би се могла израчунати константа C везана за природан низ простих бројева

$$1,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ p_4 = 11, \ldots$$

т. ј. константа

$$C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \ldots = 0{,}896 \ldots$$

навешћемо ове што следују.

Означимо са S_n збир

$$(15) \qquad S_n = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{p_n}$$

са h_n вредност

$$(16) \qquad h_n = \frac{(-1)^n}{S_n - C}$$

а са $\triangle_n$ вредност

$$(17) \qquad \triangle_n = h_n - p_n - 1$$

Прост број p_{n+1} *има за вредност*

$$(18) \qquad p_{n+1} = p_n + \theta \triangle_n$$

где је θ *један број што лежи између 0 и 1.*

Другојаче исказано:

Број p_{n+1} *увек се налази између бројева* $1 + p_n$ и h_n (не могући се никад поклопити са границама тога размака).

Да би се то доказало, довољно је приметити да је p_{n+1} веће не само од p_n, већ и од $1 + p_n$, па применити на горњу границу тога броја напред доказани став.

Као једна последица истога става био би и закључак да се између бројева

$$(19) \qquad 1 + p_n \quad \text{и} \quad h_n$$

увек налази бар један прост број. Било би од интереса довести то у везу са *Bertrand*-овим постулатом (који је тачно, ма да на један врло компликован начин, доказао *Чебишев)* према коме, почевши од $a > 3$, између a и $2a - 2$ увек се налази бар један прост број. Узевши да је $a = 1 + p_n$ идући прост број p_{n+1} мора се, дакле, увек налазити у размаку између $1 + p_n$ и $2p_n$, док би се он, према горњем ставу, морао налазити између $1 + p_n$ и h_n. Који је од та два размака ужи?

У исти мах се из горњег става изводи и овај:

Збир S_n *чланова, што претходе члану* $\frac{1}{p_n}$, *увек је мањи од броја*

$$C + \frac{(-1)^n}{2 + p_n}$$

Јер, кад не би тако било, морало би бити

$$S_n - C \geqslant \frac{(-1)^n}{2 + p_n} \tag{20}$$

па пошто је

$$S_n - C = \frac{(-1)^n}{h_n} \tag{21}$$

морало би бити

$$h_n \leqslant 2 + p_n \tag{22}$$

па би, према (17) било

$$\triangle_n < h_n - p_n + 1 \leqslant 1$$

тако да би према (18) било

$$\rho_{n+1} \leqslant 1 + \rho_n$$

што је немогућно.

Из овога се, у исти мах, види и то да, ако се стави да је

$$h_n = p_n + \alpha_n \tag{23}$$

број α_n је увек већи од 2, пошто не може важити неједначина (20) или једначина (22). Па пошто је p_{n+1} увек мање од h_n, то ако се означи са

α највећи цео број садржан у α_n

$$\alpha' \begin{cases} \text{број } \alpha \text{ кад је } \alpha \text{ парно} \\ \text{број } \alpha - 1 \text{ кад је } \alpha \text{ непарно,} \end{cases}$$

изводи се закључак да:*)

Бар један од бројева

$$2 + \rho_n, \quad 4 + \rho_n, \ \ldots \ \alpha' + \rho_n \tag{24}$$

мора бити прост број.

Јер из једначине (23) и неједначине

$$\rho_{n+1} < h_n$$

*) У овоме што следује треба свуда сменити ρ са $\mathbf{p}$.

следује да је

$$\rho_{n+1} < \rho_n + \alpha_n$$

па дакле се број ρ_{n+1} мора налазити међу бројевима

$$\rho_n + 1, \quad \rho_n + 2, \quad \rho_n + 3, \ldots \rho_n + \alpha'$$

а пошто су бројеви

$$\rho_n + 1, \quad \rho_n + 3, \quad \rho_n + 5, \ldots$$

сви сложени, то се прост број ρ_{n+1} мора налазити међу бројевима (24).

Непосредна последица тога било би и ово:

Кад год се вредносӣ разлике

$$\alpha_n = h_n - \rho_n$$

налази између 2 и 3, бројеви ρ_n *и* ρ_{n+1} *образују један дублеӣ ӣросӣих бројева, ӣ.ј. један ӣар ӣросӣих бројева расӣављених само једним сложеним бројем, а овај је* $1 + \rho_n$.

Јер у томе случају је

$$\alpha' = \alpha = 2 \;;$$

низ (24) своди се само на свој први члан $2 + \rho_n$ Који тада мора бити прост број.

Исте би врсте био и став што следује. Означимо са k_n разлику

$$k_n = h_n - \rho_{n-1},$$

па пошто је

$$h_n = \rho_n + \alpha_n$$

то ће према малопређашњем бити $\alpha_n > 2$, а у исти мах, ако се стави да је

$$\rho_n = \rho_{n-1} + \beta_n$$

биће очевидно и $\beta_n \geqslant 2$ (пошто број $\rho_{n-1} + 1$ не може бити прост), па дакле је увек $k_n > 4$, пошто је

$$k_n = h_n - \rho_{n-1} \quad \alpha_n + \beta_n$$

Претпоставимо, дакле, да се број k_n налази између два узастопна цела броја l и $l + 1$; тада мора бити $l \geqslant 4$. Означио са l' сам број l у случају кад је l парно а број $l-1$ у случају кад је l непарно, па ће се имати став:

Међу бројевима

(25) $$2 + \rho_{n-1}, \quad 4 + \rho_{n-1}, \quad 6 + \rho_{n-1}, \ldots l' + \rho_{n-1}$$

мора их биӣи бар два који су ӣросӣи бројеви.

Јер према неједначинама

$$\rho_{n-1} < \rho_n < \rho_{n+1} < h_n$$

између бројева

(26) $$\rho_{n-1} \quad \text{и} \quad h_n = k_n + \rho_{n-1}$$

т.ј. међу бројевима низа

(27) $$2 + \rho_{n-1}, \quad 4 + \rho_{n-1}, \quad 6 + \rho_{n-1}, \ \ldots \ l + \rho_{n-1}$$

увек се налазе бар два проста броја ρ_n и ρ_{n-1}. Кад је l непарно, последњи број низа (27) је паран, дакле сложен број, па према томе треба га смањити за јединицу, тако да се низ (27) поклапа са низом (25).

У специјалном случају кад је $l = 4$, низ (25) се своди на

$$2 + \rho_{n-1}, \quad 4 + \rho_{n-1}$$

и то су тада та два проста броја што леже између граница (25); *они су растављени само једним сложеним бројем* $3 + \rho_{n-1}$ *и састављају један дублет простих бројева.*

Очевидно је да би се могао извести велики број ставова такве врсте.

4. Уредимо низ хемиских елемената по растућим величинама њихових атомских тежина (атомских маса), н.пр. према таблици међународне комисије од 1914 године, тако да се добије низ

(28)

H = 1,003	He = 3,99	Li = 6,94	Be = 9,1
B 11,0	C = 12	N = 14,01	O = 16,00
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

И тај низ има своју константу C која би била

$$C = \frac{1}{1{,}003} - \frac{1}{3{,}99} + \frac{1}{6{,}94} - \frac{1}{9{,}1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{222{,}4} - \frac{1}{226{,}4} + \frac{1}{238{,}5}$$

где би, према поменутој таблици, имало 83 сабирка наизменце позитивних и негативних; константа се може израчунати са колико се хоће децимала тачно.*)

*) Горња таблица наведена је само као пример који се имао под руком; модернија таблица дала би нешто друкчију вредност за C, али би се имали закључци исте врсте.

Помоћу те константе, везане за низ (28), могао би се, из атомских тежина елемената *што претходе* једноме елементу *E*, одредити бројни размак у коме ће се налазити атомска тежина овога. Па пошто су особине елемената периодичке функције њихових атомских тежина, то се за сваку поједину од тих особина елемента *E*, знајући размак у коме се налази атомска тежина овога, може рачунски или графички одредити размак у коме се мора налазити вредност параметра што карактерише ту особину, т.ј. размак могућних ниванса те особине за уочени елеменат *E*.

На тај начин, чисто математички став, примењен на низ (28), изражавао би *једну врсту зависности између особина једнога, ма кога, хемиског елемента, од оних што му у томе низу претходе по величини атомске тежине.*

По себи се разуме да би то била само једна математичка занимљивост, јер би закључци давали у једноме занимљивом облику само оно што је у обрасцу већ унапред стављено. Али кад би се то у довољној мери обрадило, могло би имати и неког интереса бар због интересантног облика датог нечему што се већ и без тога зна.

Београд. **Мих. Петровић**