Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A: Sciences Mathématiques
1934

Sur une classe d'équations différentielles algébriques du second ordre

par

M. Petrović

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1934

Publié par l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, sous la direction de M. K. Dziewoński, Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles (Cracovie, Institut de Chimie Organique de l'Université, rue K. Olszewski 2), avec la collaboration de M. Lad. Natanson.

Nakładem Polskiej Akademji Umiejętności.
Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles — Série A: Sciences Mathématiques
1934

O pewnej klasie równań różniczkowych algebraicznych rzędu drugiego. — Sur une classe d'équations différentielles algébriques du second ordre.

Note

de M. ***MICHEL PETROVIĆ*** m. c.,

présentée le 5 Février 1934.

1. L'intégrale générale d'une équation différentielle algébrique du second ordre

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

peut présenter des points essentiels mobiles (c'est-à-dire variant avec une ou deux constantes d'intégration), fait qui ne se présente jamais pour les équations algébriques du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}.$$

Mais une équation (1), prise au hasard, ne rentre pas dans ce cas; pour qu'elle puisse présenter des singularités essentielles mobiles, il faut que certaines conditions soient remplies, dont quelques-unes, nécessaires, ont été indiquées par P. Painlevé.

J'indique dans la présente Note une classe d'équations (1), algébriques en y, y', y'', pour lesquelles il est possible d'énoncer telles conditions sous une forme autre que celle de Painlevé. Cette classe d'équations est réductible à une équation différentielle algébrique du premier ordre (d'ailleurs quelconque) et à l'inversion d'une intégrale abélienne. Mais les conditions de mobilité trouvées, rattachées à cette classe d'équations, sont à la fois nécessaires et suffisantes; de plus, il est facile de reconnaître sur l'équation différentielle elle-même si elles sont remplies ou non et de trancher ainsi la question de mobilité.

2. Une équation (1) sera désignée comme équation

$$\Delta(y) = 0$$

si elle admet une fonction algébrique Y de y seul, telle qu'en y posant

$$\left.\begin{aligned} y' &= Yz \\ y'' &= Y\left(z' + \frac{dY}{dy} z^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

d'où

l'équation se réduit à une équation algébrique du premier ordre en z

$$f(x, z, z') = 0 \qquad (4).$$

Ainsi, par exemple, pour qu'une équation de la forme

$$y'' + Y_1 y'^2 + X_1 y' + X_2 Y_2 = 0$$

(où X_1 et X_2 sont fonctions de x seul, et Y_1, Y_2 fonctions algébriques de y seul) soit une équation $\Delta(y) = 0$, il faut et il suffit que Y_1 et Y_2 soient liées par la relation

$$Y_2' - Y_1 Y_2 = \text{const.}$$

Si cette constante diffère de zéro, la transformée (4) par le changement (3) où $Y = Y_2$ sera une équation de Riccati; quand elle est égale à zéro, (4) sera une équation linéaire.

De même, pour qu'une équation de la forme

$$y''^2 + Y_1 y'^2 y'' + Y_2 y'^4 + Y_3 y'^2 + X \cdot Y_4 = 0$$

(où X ne dépend que de x, et Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 étant fonctions algébriques de y seul) soit une équation $\Delta(y) = 0$, il faut et il suffit que les fonctions Y_k soient liées par les deux relations

$$2 Y_4' + Y_1 Y_4 = a$$

$$Y_4'^2 + Y_2 Y_4^2 + Y_1 Y_4 Y_4 = b \qquad (a, b = \text{const.})$$

et que Y_3 se réduise à une constante c. Le changement (3), en y prenant $Y = Y_4$, réduit alors l'équation donnée à

$$z'^2 + az^2 z' + bz^4 + z^2 + X = 0.$$

Dans le cas particulier où la constante a est égale à zéro, la transformée est

$$z'^2 + bz^4 + cz^2 + X = 0;$$

si $b = 0$ elle se réduit à

$$z'^2 + az^2 z' + cz^2 + X = 0;$$

si $a = 0$, $b = 0$, elle est

$$z'^2 + z^2 + X = 0;$$

si $a = b = c = 0$ elle se réduit à

$$z'^2 + X = 0.$$

La fonction de deux variables $f(x, z)$ étant quelconque, pour qu'une équation

$$y'' = Y_1 f\left(x, \frac{y'}{Y_2}\right) + Y_3 y'^2$$

soit une équation $\Delta(y) = 0$, il faut et il suffit qu'on ait

$$Y_2 = Y_1 \qquad Y_3 = \frac{1}{Y_1} \frac{dY_1}{dy};$$

le changement (3) en y prenant $Y = Y_1$ conduira alors à la transformée

$$z' = f(x, z).$$

3. Considérons maintenant une équation $\Delta(y) = 0$ et soit (4) sa transformée par le changement (3) compatible avec elle. La première équation (3) fait voir que l'intégrale générale de $\Delta(y) = 0$ est fournie par

$$\int \frac{dy}{Y} = \int z\,dx + C \tag{5}$$

où z désigne l'intégrale générale de la transformée (4) et C la constante d'intégration. Si donc l'on désigne par

$$y = \varphi(t)$$

l'inversion de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{dy}{Y} = t \tag{6}$$

l'intégrale générale y sera

$$y = \varphi\left(C + \int z\,dx\right) \tag{7}.$$

Or, une valeur de x pour laquelle z est fini et déterminé ne saurait être une singularité essentielle de y. Comme les valeurs de x, pour lesquelles z devient indéterminé, sont fixes (théorème de Painlevé), y ne saurait présenter des points essentiels mobiles que si z a des infinis mobiles.

Cette condition nécessaire n'est pas à la fois suffisante. En effet, les infinis mobiles de l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre sont toujours d'un ordre fini et déterminé. D'autre part, l'intégrale abélienne (6), qui est généralement une somme d'intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce, plus une partie algébrique et logarithmique, peut se réduire à la partie algébrique seule; les infinis mobiles de z ne seraient pas alors singularités essentielles de y. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'intégrale (6) soit une fonction transcendante de y dont l'inversion admet les infinis de t comme points essentiels.

La théorie analytique des équations différentielles algébriques du premier ordre fournit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle équation ait des infinis mobiles. Ecrivons l'équation sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=m} f_i(x, z) z'^{\,m-i} = 0 \tag{8}$$

où les f_i sont des polynômes en z, et désignons par n_i le degré de f_i en z.

Pour que les infinis de l'intégrale générale z soient fixes, il faut et il suffit que pour toute valeur

$$i = 0, 1, 2, \ldots m$$

l'entier correspondant

$$N_i = n_i - n_0 - i$$

soit négatif ou nul[1]). Donc:

Pour que z ait des infinis mobiles, il faut et il suffit que parmi les entiers N_i il y en ait au moins un qui soit positif.

[1]) Michel Petrovitch. *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (Gauthier-Villars, Paris 1894).

Ce qui précéde conduit au résultat suivant:

Pour que l'équation considérée $\Delta(y) = 0$ ait des singularités essentielles mobiles, *il faut et il suffit*

1° *que l'inversion de l'intégrale abélienne correspondante (6) soit une fonction transcendante de t admettant comme points essentiels les infinis de t*;

2° *que, la transformée (4) étant écrite sous la forme (8), parmi les entiers N_i il y en ait au moins un qui soit positif.*

Nous rappellerons en terminant que le problème consistant à reconnaître si l'inversion de l'intégrale abélienne (6) est algébrique ou transcendante, est résolu dans le cas le plus général (Abel, Liouville, Briot et Bouquet, Zeuthen, Raffy etc.).

19/VII-21

[illegible]

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES ET DES LETTRES
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES

DERNIERS MÉMOIRES PARUS

Décembre, 1933.

Centnerszwer M. und **Blumenthal M.** Bildung und Dissoziation der Peroxyde der Alkalimetalle.

Dziewoński K., Pizoń St. und **Mazurkiewiczówna M.** Studien über das symm. α-β-Dinaphtho-γ-pyron.

Dziewoński K. und **Pizoń St.** Über zwei isomere symm. α-β-Dinaphthopyrane.

Gradowska T., Krynicki A. und **Małachowski R.** Zur Kenntnis der ungesättigten Polycarbonsäuren. — Derivate der Äthylentricarbonsäure.

Hłasko M. et **Kuszpecińska J.** Sur le poids atomique du lithium.

Kozak J. und **Kalmus A.** Über Tricyklochinazolin (I).

Kozak J. und **Pazdór F.** Photokinetik der Bromsubstitutionsreaktion (IV). Der Verlauf der Bromierung des Naphthalins unter dem Einfluß des Lichtes.

Kozak J. und **Pazdór F.** Photokinetik der Bromsubstitutionsreaktion (V). Der Verlauf der Bromierung von Naphthalinalkylderivaten unter dem Einfluß des Lichtes.

Kreutz St. Sur la fluorescence de certaines fluorines à des températures basses.

Leja F. Sur l'existence du domaine de convergence des séries des polynômes homogènes.

Małachowski R. und **Wanczura T.** Über die katalytische Reduktion der Dehydracetsäure.

Marchlewski L. and **Urbańczyk W.** On the Transformation of Chlorophyl in the Animal Body.

Świętosławski W. On the Classification of Zeotropic and Azeotropic Mixtures.

Świętosławski W. and **Wardziński E.** On the Ternary Heteroazeotropic System composed of Ethyl Alcohol, Carbon Disulphide and Water.

TABLE DES MATIÈRES

Janvier—Février 1934.

Adresser les demandes à l'Académie ou à la Librairie „Gebethner et Wolff" Rynek Gł., Cracovie (Pologne).