Estratto dagli *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*
Bologna, 3-10 settembre 1928 - VI

M. PETROVITCH

SUR UN NOMBRE ABSOLU RATTACHÉ AUX GÉODÉSIQUES DES SURFACES

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

M. PETROVITCH (Beograd - Jugoslavia)

SUR UN NOMBRE ABSOLU RATTACHÉ AUX GÉODÉSIQUES DES SURFACES

Désignons par λ le quadruple produit de la courbure totale d'une surface en un point considéré M, par le carré de l'arc considéré M_0M d'une géodésique passant par M et par un point fixe M_0 de la surface. Nulle à l'origine des arcs M_0, la valeur λ commence à croître en valeur absolue le long de la géodésique, variant avec la courbure totale de la surface le long de celle-ci et avec la longueur de l'arc parcouru.

Cette valeur étant le produit de deux facteurs de dimensions respectives L^{-2} et L^2 et qui sont invariants par rapport aux systèmes des coordonnées, est un *nombre absolu* dont la grandeur est *indépendante de ces systèmes et du choix des unités de mesure.* Elle ne dépend que des propriétés intrinsèques de la surface et de l'origine de l'arc choisie sur la géodésique.

Le nombre λ est positif ou négatif suivant que le long de la géodésique la courbure totale de la surface est positive ou négative. Pour qu'il soit constamment nul, il faut et il suffit que la surface soit développable.

L'élément linéaire (ds) de la surface étant exprimé sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2 \tag{1}$$

au moyen des coordonnées u et v telles que les courbes v=const. soient les géodésiques, et les courbes u=const. leurs trajectoires orthogonales, le nombre λ s'exprime à l'aide de la fonction G par la formule

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}}{G^2} u^2. \tag{2}$$

Ceci resulte de la formule de Gauss exprimant la courbure totale σ de la surface en un point (u, v), sous la forme

$$\sigma = -\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \qquad \text{où } \Phi = \sqrt{G}. \tag{3}$$

Dans la formule (2) la variable v doit être remplacée par la valeur constante définissant la géodésique considérée; le long de celle-ci λ variera avec la seule variable u representant l'arc M_0M de la géodésique.

Le problème inverse: trouver la surface pour laquelle, le point M_0 étant convenablement choisi sur chaque géodésique, λ varie suivant une loi donnée

$$\lambda = \varphi(u, v) \tag{4}$$

se ramène à l'équation du second ordre

$$4u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \varphi(u, v)\Phi = 0 \tag{5}$$

(où v ne figure que comme paramètre) déterminant la fonction $\Phi = \sqrt{G}$ laquelle elle-même détermine l'élément linéaire (1) de la surface.

L'intégrale générale de (5) est de la forme

$$\Phi = \Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2 \tag{6}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont deux intégrales particulières de (5), et V_1, V_2 deux fonctions arbitraires de v. Le ds^2 de la surface est de la forme

$$ds^2 = du^2 + (\Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2)^2 dv^2. \tag{7}$$

À l'aide de (4) et (7) on connaîtra le ds^2 de la surface sous la forme

$$ds^2 = A du^2 + B du d\lambda + C d\lambda^2 \tag{8}$$

exprimé en coordonnées u et λ.

Il y aurait de l'intérêt de refaire quelques problèmes de la théorie des géodésiques à l'aide de coordonnées u et λ. Ces coordonnées se présentent même d'une manière naturelle dans certains de ces problèmes comme le montre l'exemple suivant.

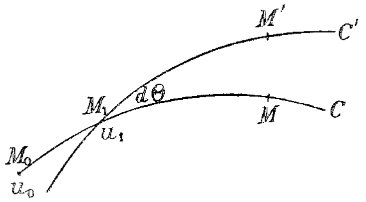

Fig. 1.

Considérons deux géodésiques infiniment voisines C et C' (fig. 1), issues d'un point considéré $M_1(u, v)$ de la surface. D'après le théorème de Jacobi, l'arc M_1M de C sera le plus court chemin entre M_1 et M si entre ces deux points la géodésique C' ne coupe pas C, et il le sera effectivement sur toute portion de surface à courbure totale *négative*. Cet arc cessera d'être le plus court chemin si M se trouve au delà du premier point d'intersection de C et C' après M.

D'après le théorème d'Ossian Bonnet, sur une surface à courbure totale *positive* et constamment *plus grande* qu'une valeur a, une géodésique cesse généralement d'être une ligne minima sur une étendue supérieure à $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

Or, on arrive à des propositions analogues, parfois plus précises, par la considération des valeurs λ le long d'une géodésique.

Désignons par p la distance variable MM' de C et C'. D'après la formule de Gauss, p considéré comme fonction de l'arc $M_1M=u$ de la géodésique, satisfera à l'équation différentielle

$$\frac{d^2p}{du^2}+\sigma p=0. \tag{9}$$

La distance p sera l'intégrale de cette équation différentielle s'annulant pour $u=u_1$ et dont la dérivée $\frac{dp}{du}$ prend pour $u=u_1$ la valeur $d\theta$ égale à l'angle que forment les géodésiques C et C' au point M_1. En posant dans (9)

$$\sigma=\frac{\lambda}{4u^2} \tag{10}$$

l'équation devient

$$4u^2\frac{d^2p}{du^2}+\lambda p=0 \tag{11}$$

et par le changement

$$u=e^t, \qquad p=ze^{\frac{t}{2}}=z\sqrt{u} \tag{12}$$

se transforme en

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\lambda-1}{4}z=0. \tag{13}$$

Mettant à part la valeur $u=0$, les valeurs p et z s'annulent pour les mêmes valeurs de t et de u.

Supposons que le long de l'arc M_1M de la géodésique C le nombre λ reste constamment *plus petit* qu'un nombre M, plus petit lui-même que un, et envisageons l'équation différentielle

$$\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{M-1}{4}z'=0. \tag{14}$$

Son intégrale s'annulant pour $u=u_1$ et dont la dérivée $\frac{dz'}{dt}$ prend pour $u=u_1$ la valeur $d\theta$, est

$$z'=\frac{\sqrt{u_1}}{2a}\left[\left(\frac{u}{u_1}\right)^a-\left(\frac{u_1}{u}\right)^a\right]d\theta \tag{15}$$

où a est le nombre réel positif

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{1-M}. \tag{16}$$

D'après le théorème de Sturm sur les équations linéaires homogènes du second ordre, dans un intervalle quelconque à partir de $u=u_1$ la valeur z' devrait s'annuler au moins autant de fois que z (et par suite aussi p). Mais z' ne s'annule jamais, donc p ne peut non plus jamais devenir nul. Les géodésiques C et C' ne se coupent plus à partir du point M_1 et il s'en suit, d'après le théorème de JACOBI, que la géodésique C est ligne minima dans toute la longueur de l'arc M_1M.

Un arc de la géodésique le long duquel, pour l'origine des arcs M_0 considéré, le nombre λ est constamment plus petit que un, est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

Il en est, en particulier, ainsi pour les géodésiques des surfaces à courbure totale *négative*: le nombre λ est costamment négatif et par suite plus petit que un; la géodésique est ligne minima dans toute sa longueur, conformement au théorème de JACOBI. Mais notre proposition offre plus de généralité: la propriété de minimum le long d'un arc s de la géodésique subsiste également pour des surfaces (ou portions de surface) à courbure *positive*, toutes les fois que, pour M considéré, le nombre λ est constamment plus petit que un le long de s.

Considérons, par exemple, une surface à courbure totale *positive* et constamment *plus petite* qu'une valeur β. Si alors

$$u < \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$$

on aura $\lambda < 1$ et la proposition précédente sera applicable. Comme l'on peut prendre l'origine des arcs M aussi près qu'on veut du point M_1, on a la proposition suivante complètant dans une certaine mesure celles de JACOBI et d'OSSIAN BONNET:

Sur une surface à courbure totale positive et plus petite qu'une valeur β, une géodésique est certainement ligne minima sur une étendue inférieure à $\frac{1}{2\sqrt{\beta}}$.

Supposons maintenant que le long de l'arc M_1M de la géodésique C le nombre λ soit constamment *plus grand* qu'un nombre N, plus grand lui-même que un, et envisageons l'équation

$$\frac{d^2z''}{dt^2} + \frac{N-1}{4} z'' = 0. \tag{17}$$

Son intégrale exprimée en u, s'annulant pour $u = u_1$ et dont la dérivée $\frac{dz''}{dt}$ prend pour $u = u_1$ la valeur $d\theta$ est

$$z'' = \frac{\sqrt{u_1}}{b} \cdot \sin\left(b \log \frac{u}{u_1}\right) d\theta \tag{18}$$

où b est le nombre réel positif

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{N-1}. \tag{19}$$

D'après un second théorème de Sturm, p s'annulera à partir de $u = u_1$ avant z'', et comme z'' s'annulle pour

$$u = u_1 e^{\frac{n\pi}{b}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

p s'annulera avant que u ait atteint la valeur

$$u_2 = u_1 e^{\frac{\pi}{b}}. \tag{21}$$

La longueur de l'arc $M_1M_2 = u_2 - u_1$, dont les extrémités sont les deux points consécutifs d'intersection des géodésiques C et C', est donc plus petit que l'arc $M_0M_1 = L$ multiplié par le facteur

$$\mu = e^{\frac{\pi}{b}} - 1 = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{N-1}}} - 1. \tag{22}$$

On en tire, utilisant le théorème de JACOBI, la proposition suivante:

Un arc s de la géodésique le long duquel le nombre λ est constamment plus grand que un, ne peut être le chemin le plus court entre deux de ses points sur une étendue supérieure à μL.

On peut aussi l'exprimer sous la forme suivante:

Le plus court chemin entre deux points sur s est toujours moindre que μL.

Ce fait subsiste quel que soit l'origine des arcs M_0 (c.-à-d. la longueur L). Or, comme l'on a

$$\lambda = 4 \cdot \sigma \cdot (L+s)^2 \tag{23}$$

en considérant un même point M (s constant) et en augmentant L, on peut faire λ (et par suite aussi N) plus grand que un et même aussi grand qu'on veut. En prenant alors

$$N = 4 \cdot \sigma \cdot L^2$$

on aura $\lambda > 1$ et la proposition précédente sera applicable. D'autre part, pour L très grand le facteur μ se réduit à

$$e^{\frac{\pi}{L\sqrt{\sigma}}} - 1 \tag{24}$$

et la valeur μL diffère peu de $\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}}$. Si donc la courbure totale de la surface est constamment plus grande qu'un nombre positif a, *le plus court chemin entre deux points quelconques de la surface est toujours moindre que* $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$ et par suite *la surface est fermée.* On retombe ainsi sur le théorème d'OSSIAN BONNET.

Les résultats qui précédent fournissent, par la seul considération du nombre λ rattaché aux géodésiques issues d'un point considéré M, une solution des problèmes suivants:

1°) Déterminer sur la surface une région D entourant le point M, telle que l'arc d'une géodésique issue de M et compris dans cette région, soit le plus court chemin entre M et un point quelconque de cet arc, ou bien qu'il ne le soit pas;

2°) Trouver combien de fois deux géodésiques infiniment voisines issues du point M, se coupent sur une longueur donnée de leurs arcs.

Les théorèmes de JACOBI et d'OSSIAN BONNET en fournissent une sorte de solution par la considération des variations de la courbure totale dans une région de la surface autour du point M. OSSIAN BONNET utilise la méthode de comparaison de Sturm où comme équations différentielles de comparaison servent les équations correspondant à la courbure constante. La considération des variations du nombre λ le long des géodésiques conduit à utiliser comme équations de comparaison les équations correspondant à la courbure variable, ce qui augmente la précision des résultats. On s'en rendra compte sur l'exemple suivant:

Considérons l'équation

$$\frac{d^2p}{du^2} + \frac{65}{4u^2}\, p = 0. \tag{25}$$

Si l'on emploie comme équation de comparaison celle correspondant à la courbure totale constante, en majorant la courbure $\sigma = \frac{65}{4u^2}$ par le nombre $\frac{65}{4 \cdot 1^2}$ et en la minorant par le nombre $\frac{65}{4 \cdot 100^2}$, on trouve, par le procédé de Sturm, que dans l'intervalle de $u=1$ à $u=100$ la variable p s'annule au moins une fois, et au plus 128 fois. Or, si pour la même équation (25) on prend pour équation de comparaison celle correspondant à λ constant, en majorant le nombre $\lambda=62$ par le nombre 82 et en le minorant par 50, on trouve que p s'annule dans le même intervalle de $u=1$ à $u=100$ au moins 2 fois et au plus 4 fois, ce qui fournit un résultat beaucoup plus précis.