УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јована Николић

Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији

докторска дисертација

Београд, 2017.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Јелена Катић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ, Београд

др Јелена Катић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Дарко Милинковић, редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Jovana Nikolić

Algebraic properties of spectral invariants in Floer Homology

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017

АЛГЕБАРСКА СВОЈСТВА СПЕКТРАЛНИХ ИНВАРИЈАНТИ У ФЛОРОВОЈ ХОМОЛОГИЈИ

Резиме

У овом раду дефинишемо и анализирамо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за конормално раслојење и Флоровој хомологији за отворен скуп. Конструкција пресликавања типа Пиуникин–Саламон–Шварц, коју ми овде изводимо, неопходан је корак за добру дефинисаност ових инваријанти. Постојање додатних алгебарских структура, као што је производ на споменутим Флоровим хомологијама, омогућава нам да изведемо разне неједнакости међу спектралним инваријантама. Посматрањем пертурбовано холоморфних Риманових површи са границом можемо да упоредимо инваријанте из разних Флорових хомологија.

Кључне речи: Флорова хомологија, спектралне инваријанте, Морсова хомологија, Лагранжева подмногострукост

Научна област: Математика
Ужа научна област: Анализа

УДК број: 514.154 (043.3)

АМС класификација: 53Д40, 53Д12, 57Р58, 57Р17

Algebraic properties of spectral invariants in Floer Homology

Abstract

In this doctoral dissertation we define and investigate spectral invariants in Floer homology for conormal bundle and Floer homology of an open subset. As a key step to well defined spectral invariants we give a construction of Piunikhin-Salamon-Schwarz isomorphism in both of these homologies. Additional algebraic structures, such as a product on Floer homology, give us various inequalities between spectral invariants. We can compare spectral invariants from different Floer homologies by observing appropriate perturbed holomorphic Riemmanian surfaces with boundary.

Keywords: Floer homology, spectral invariants, Morse homology, Lagrangian submanifold

Scientific area: Mathematics
Scientific area: Analysis

UDK number: 514.154 (043.3)

AMS classification: 53D40, 53D12, 57R58, 57R17

Садржај

Увод и преглед резултата

Морсова теорија, која се приписује М. Морсу [79, 80], даје нам начин да изучавамо топологију глатке многострукости M посматрањем критичних тачака Морсове функције f која је дефинисана на тој многострукости. Идеја која се издваја из ове теорије јесте да се посматрају подниво $M^a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$. Две теореме су битне при проучавању поднивоа, видети [76]. Једна теорема нам каже да су подниво M^a и M^b дифеоморфни ако у интервалу $[a, b]$ немамо критичних тачака. Дифеоморфизам се успоставља спуштањем тачака из скупа M^b до скупа M^a негативним градијентним током функције f. А ако у истом интервалу имамо једну критичну тачку индекса k онда је M^b хомотопски еквивалентно подниву M^a на који је залепљена једна $k-$ћелија. Оваква ћелијска декомпозиција даје нам једно важно својство глатких повезаних затворених многострукости. Свака таква многострукост коначне димензије дифеоморфна је унији коначно много $k-$ручки, при чему је свака ручка у бијективној вези са критичним тачкама индекса k. Наведено својство даје мотивацију да се постави и следеће питање. Ако две многострукости имају исти број ћелија у свакој димензији да ли су оне хомотопски еквивалентне? Да би се одговорило на ово питање, морамо да контролишемо начин на који лепимо ћелије у тим многострукостима. Одговор је негативан, а испитивање хомотопског типа многострукости водило је ка заснивању Морсове хомологије. Први продор на том пољу приписује се Р. Тому [110], С. Смејлу [108] и Џ. Милнору [76]. Другачији приступ Морсовој хомологији присутан је у раду Е. Витена [114]. Он нам даје директну везу између хомологије многострукости и Хоџове теорије, видети [17] и [49]. Леп историјски преглед Морсове хомологије може се наћи у [20].

Симплектичка структура се природно појављују у класичној механици при моделирању фазног простора разних система, видети [7]. Таква структура нам даје добар амбијент за изучавање трансформација система од N честица, затим за изучавање кретања планета или за простирање таласа. Покушаји да се опишу овакви системи водили су ка развоју симплектичке топологије. Данас, ова област комбинује идеје из анализе, топологије, динамичких система, комплексне анализе, диференцијалне и алгебарске геометрије. Занимљив пут од симплектичке топологије ка динамици дат је у [82].

Арнолдова хипотеза, која је природно уопштење Последње Поенкареове геометријске теореме, тврди да је број фиксних тачака симплектоморфизма на затвореној симплектичкој многострукости који је генерисан Хамилтоновим векторским пољем већи од суме Бетијевих бројева. Симплектоморфизми су дифеоморфизми симплектичке многострукости који чувају симплектичку структуру.

Бетијеви бројеви су једнаки димензији одговарајуће сингуларне хомологије. Ч. Конли и Е. Цендер су показали да Арнолдова хипотеза важи на торусима свих димензија [22]. Ељашберг [26] је потврдио хипотезу у случају многострукости димензије два. Варијациони метод који су користили, коначнодимензиона апроксимација функционала дејства на простору петљи, није могао да се примени у другим случајевима. Громовљев рад о псеудо-холоморфним кривама [47] увео је потпуно нову технику за изучавање симплектичких многострукости. Комбинујући варијациони метод Конлија и Цендера, Громовљеву теорију псеудо-холоморфних кривих и Витенову интерпретацију Морсове теорије, Флор прави значајан искорак у доказивању Арнолдове хипотезе. У серији радова [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40] дефинише се Флорова теорија као бесконачнодимензиона верзија Морсове теорије. Симплектоморфизми који су генерисани Хамилтоновим векторским пољем називају се Хамилтоновим дифеоморфизмима. Фиксне тачке таквих дифеоморфизама су у „$1-1$" вези са периодичним орбитама Хамилтонијана који је задат на симплектичкој многострукости (видети Главу 1 за дефиниције ових појмова). Ове периодичне орбите ће бити генератори Флорове хомологије. Гранични оператор броји пертурбоване холоморфне цилиндре који спајају две периодичне орбите. Ти цилиндри ће заправо бити негативне градијентне трајекторије функционала дејства. Разлика у односу на Морсову теорију је у томе што функционал делује на простору контрактибилних петљи, који је заправо бесконачнодимензиона многострукост. Још једна разлика је што у Морсовом случају градијентне трајекторије представљају решења обичних диференцијалних једначина док у Флоровој теорији цилиндре видимо као решења парцијалних диференцијалних једначина. Познато је да у теорији парцијалних једначина, за разлику од теорије диференцијалних једначина, не важи Теорема о егзистенцији и јединствености решења као ни Теорема о продуживости решења. Описане разлике захтевају другачији аналитички приступ Флоровој теорији. Флор је, користећи нелинеарну Фредхолмову анализу, успешно формулисао ово бесконачнодимензионо уопштење иако је и сам Громов сумњао у то [11]. Флор је такође показао да је нова хомологија изоморфна сингуларној. Из ове чињенице Арнолдова хипотеза следи једноставно. Хамилтонов дифеоморфизам има фиксних тачака бар онолико колико има генератора Флорове хомологије. А број таквих генератора је једнак броју генератора сингуларне хомологије, чији број је већи од суме Бетијевих бројева. Флор је своју конструкцију извео под претпоставком да је друга хомотопска група амбијентне многострукости тривијална. Ови услови су касније ослабљени, а затим и потпуно елиминисани у радовима [44, 50, 68].

Једна од наредних уопштења описане конструкције јесте Флорова хомологија за Лагражеве пресеке. Потпуно је природно посматрати Лагранжеве подмногострукости у симплектичким многострукостима. Једна од мотивација за овако нешто је и својство да дифеоморфизам многострукости чува симплектичку форму ако и само ако је његов график Лагранжева подмногострукост у производу симплектичке многострукости са самом собом. Нека су дате две компактне Лагранжеве подмногострукости L_0 и L_1 које се секу трансверзално. Генератори нове хомологије ће бити пресечне тачке подмногострукости, $L_0 \cap L_1$, (којих има коначно много) а гранично пресликавање броји холоморфне дискове чије се границе налазе на L_0 и L_1. Флор је показао да је број пресека Лагранжеве подмногострукости L_0 и њене Хамилтонове деформације $L_1 = \phi_H^1(L_0)$ већи од суме Бетијевих бројева подмногострукости L_0. Флорова хомологија за Лагражеве пресеке не може да се дефинише за сваке две Лагранжеве подмногострукости. Тополошке претпоставке које је користио Флор ослабљене су у радовима [84, 45].

У амбијенту котангентног раслојења T^*M (који увек има симплектичку структуру) природно је посматрати Лагранжеву Флорову хомологију за пар нулто сечење o_M, и конормално раслојење ν^*N затворене подмногострукости $N \subset M$. Ова хомологија је разматрана у [94, 85, 86]. Генератори хомологије су пресечне тачке подмногострукости које се секу трансверзално, $\nu^*N \pitchfork \phi_H^1(o_M)$. Лагранжева подмногострукост $\phi_H^1(o_M)$ је заправо Хамилотонова деформација од o_M. Гранични оператор броји холоморфне дискове чије су границе на ν^*N и $\phi_H^1(o_M)$. Овако дефинисана хомологија биће изоморфна сингуларној хомологији од N.

Мотивисани оваквом конструкцијом у котангентном раслојењу, Р. Кастуриранган и Ј.-Г. О [58] дефинишу Флорову хомологију за отворен подскуп $U \subset M$. Ова конструкција је била део пројекта квантизације Ејленберг-Стинродових аксиома [57]. Ту је главни проблем био како отвореном скупу придружити Лагранжеву подмногострукост у T^*M. Не можемо да посматрамо унију нултог сечења o_U и конормалног раслојења од ∂U јер је то сингуларна Лагранжева подмногострукост. Аутори уместо тога посматрају само негативан део конормалног раслојења (видети Поглавље 1.8 за прецизну дефиницију). То ће опет бити сингуларна подмногострукост али овога пута допушта апроксимацију тачним Лагранжевим подмногострукостима. Даље, аутори посматрају Флорову хомологију за пар нулто сечење и унапред описане апроксимације па узимају директан лимес добијених хомологија. Испоставља се да ће хомологија која се добије у директном лимесу бити изоморфна сингуларној хомологији од U.

Описане Флорове хомологије су изоморфне одговарајућим сингуларним (па онда и Морсовим) хомологијама. У случају котангентног раслојења, на пример, изоморфизам између Флорове хомологије за пар (o_M, ν^*N) и Морсове хомологије за N постиже се подизањем C^2 мале Морсове функције $f : N \to \mathbb{R}$ до Хамилтонијана $H_f : T^*M \to \mathbb{R}$. Функција се прво контролисано прошири на цевасту околину од N а затим се прошири да буде нула ван те околине (видети [94] за више детаља). На овај начин постижемо један-један везу између генератора Флорове хомологије и критичних тачака функције f. Додатно, градијентни дискови Хамилтонијана H_f ће бити у бијективној вези са негативним градијентним трајекторијама од f. На овај начин, постижемо изоморфизам међу хомологијама још на нивоу ланаца. За овако дефинисан изоморфизам није познато да ли комутира са природним изоморфизмима у одговарајућим хомологијама. Природни изоморфизми идентификују хомологије за различит избор параметара. У случају Флорове хомологије параметри су Хамилтонијан и скоро комплексна структура. А у случају Морсове хомологије то су Морсова функција и Риманова метрика. Постављено питање комутативности није тривијално јер ту треба упоредити пресликавање које броји објекте који су дефинисани као решења диференцијалних једначина са пресликавањем које броји објекте који су решења парцијалних диференцијалних једначина.

Сем проширивања C^2 мале Морсове функције до одговарајућег Хамилтонијана, изоморфизам између Флорових и Морсових хомологија можемо да конструишемо и на други начин. Тај начин је заснован на бројању објеката комбинованог типа и прво је конструисан у случају Флорове хомологије за периодичне орбите. Не захтева никакву везу између Морсове функције и Хамилтонијана већ може да се конструише за произвољан избор истих. С. Пиуникин, Д. Саламон и М. Шварц у раду [91] показују да тај изоморфизам комутира са канонским изоморфизмима. Касније су се појавиле сличне конструкције у другим контекстима које успостављају изоморфизме између одговарајућих Морсових и Флорових хомологија и свако такво пресликавање се назива пресликавањем типа ПСС. И у овој тези ћемо користити овај неформалан назив. У ауторовом раду [24] приказана је конструкција овог изоморфизма у случају Флорове хомологије за пар (o_M, ν^*N) и показана је његова природност. У коауторском раду са Ј. Катић и Д. Милинковићем [61] дефинисан је изоморфизам између Морсове и Флорове хомологије за отворен скуп бројањем комбинованих објеката сличног типа. Конструкције ПСС пресликавања у Лагранжевој Флоровој хомологији, која не морају увек да буду изоморфизми, дате су у радовима [60, 4, 23, 14, 16, 66, 51, 117].

Већ смо напоменули да је Флорова хомологија изоморфна сингуларној хомологији. Али поред тога, Флорова хомологија садржи много више информација осим тополошких. Можемо да посматрамо Флорову једначину на неким компликованијим објектима него што су цилиндри или дискови. Посматрањем Флорове једначине на површи која личи на пар панталона (то је $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$) М. Шварц [101] дефинише производ на Флоровој хомологији за периодичне орбите. Испоставља се да се при ПСС пресликавању овај производ слика у стандардан индекс пресека на Морсовој (односно сингуларној) хомологији. У коауторском раду са Ј. Катић и Д. Милинковићем [25] дата је конструкција која спарује елементе Флорових хомологија за периодичне орбите и Лагранжеве пресеке и као резултат добије се елемент Лагранжеве Флорове хомологије. Ту се броје пертурбовано-холоморфне Риманове површи са границом које личе на панталоне (видети Слику 9). У већ поменутом ауторовом раду [24] дата је конструкција производа на Лагранжевој Флоровој хомологији за пар (o_M, ν^*N). Дефинисан је бројањем пертурбовано-холоморфних панталона са границом. Граница ових панталона се слика у $o_M \cup \nu^*N$ при чему на једној повезаној компоненти границе имамо скок са једне на другу Лагранжеву подмногострукост. Холоморфне Риманове површи са скоком на граници изучавају се у [3], али се тамо посматрају само траке $\mathbb{R} \times [0, 1]$ на чијој граници може да се деси скок. Наше Риманове површи су компликованије. Изучавањем описаних панталона са границом можемо да дефинишемо и производ на Флоровој хомологији за отворен скуп [61]. Овде је конструкција компликованија јер захтева да се тај производ дефинише за апроксимације а затим да се покаже његова сагласност са директним лимесом.

Још једна потврда тога да Флорова хомологија садржи пуно више од тополошких информација јесте постојање филтриране Флорове хомологије. Постојање добро дефинисаног функционала дејства на одговарајућим просторима путева (или петљи) задаје нам филтрацију на Флоровом комплексу. Из чињенице да функционали дејства опадају дуж објеката помоћу којих дефинишемо гранично пресликавања следи да ће филтрирани комплекс бити један поткомплекс. Његова хомологија задаје филтрирану Флорову хомологију. Док обична Флорова хомологија није зависила од избора Хамилтонијана, филтриране хомологије ће зависити. Постојање филтрације на хомологијама дају нам могућност да дефинишемо спектралне инваријанте. То су реални бројеви придружени Хамилтонијану и хомолошкој класи. Инваријанте региструју најмањи ниво у филтрираним хомологијама на којем се појављује наша класа.

Можда најједноставнији начин да се разумеју ове инваријанте јесте приступ приказан у књизи [93]. Аутори Л. Полтерович и Д. Розен мотивишу Флорове инваријанте спектралним бројевима у Морсовој хомологији компактне многострукости M. Ако је дата Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ филтрацију на хомологији задајемо поднивоима функције f. Означимо са

$$i_a : HM_*(M^a) \to HM_*(M)$$

инклузију хомологије поднивоа M^a у хомологију целог простора. За ненула Морсову класу α дефинишемо спектрални број

$$c(\alpha, f) = \inf\{a \, : \, \alpha \in \mathrm{Im}(i_a)\}.$$

Овако дефинисани бројеви ће бити критичне вредности функције f, спектрални број фундаменталне класе ће бити максимум функције f, док ће минимум функције бити једнак спектралном броју класе једне тачке у нултој хомологији. Аутори такође показују да су ови спектрални бројеви Липшиц-непрекидни у односу на униформну норму на $C^\infty(M)$. Изведена је и субадитивност бројева у односу на индекс пресека (видети Тврђење 10.1.4 у [93]). Овако дефинисани спектрални бројеви ће бити карактеристични експонент на Морсовој хомологији (коју видимо као векторски простор). Није случајно што аутори користе појам из динамичких система. Спектралне инваријанте нам дају информације и о динамици нашег простора у ком су кретања задата Хамилтонијанима.

Спектралне инваријанте, дефинисане помоћу генеришућих функција у котангентном раслојењу, први је увео К. Витербо у свом познатом раду [113]. У раду [2] може се наћи јасно и концизно излагање ове конструкције. Нека је E раслојење ранга k над M и нека је $S : E \to \mathbb{R}$ генеришућа функција квадратна у бесконачности која генерише Лагранжеву подмногострукост $L \subset T^*M$. Нека је $\alpha \in H^*_{dR}(M)$ кохомолошка класа и

$$\tau : H^s_{dR}(M) \to H^{s+k}_{c,dR}(E)$$

Томов изоморфизам. Означимо са

$$j_a : \{e \in E \,|\, S(e) < a\} \to E$$

улагање. Број

$$c(u, S) = \inf\{a \,|\, j_a^*(\tau(u)) \neq 0\}$$

представља Витербову инваријанту кохомолошке класе u. Витербове инваријанте придружујемо и хомолошким класама помоћу Поенкареовог дуала. За $\alpha \in H_*(M)$ дефинишемо

$$c(\alpha, S) = -c(PD(\alpha), -S).$$

Ј.-Г. О [85] је дефинисао инваријанте у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке у амбијенту котангентног раслојења (дефиниције ових инваријанти су презентоване у Глави 5). Испоставља се да су ове две инваријанте, Витербове и Оове, једнаке при неким условима нормализације, видети [74, 75].

Спектралне инваријанте за Флорову хомологију периодичних орбита дефинисали су М. Шварц [102] и Ј.-Г. О [88]. Амбијентни простор који се посматра је затворена симплектичка многострукост, са додатним тополошким рестрикцијама.

Р. Леклерк [66] дефинише спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за пресеке затворених релативно асферичних Лагранжевих подмногострукости. Он такође дефинише инваријанте вишег реда користећи технике спектралних низова. Овај услов који треба да задовоље Лагранжеве подмногострукости додатно је ослабљен у раду [67]. Р. Леклерк и Ф. Заполски дефинишу спектралне инваријанте за монотоне Лагранжеве подмногострукости (што је иначе најопштији случај када класична Флорова хомологија може да се дефинише).

У радовима [19, 13, 98, 116] дефинисане су инваријанте у амбијенту контактних многострукости а у раду [5] изведене је конструкција инваријанти у Рабиновицевој Флоровој хомологији.

Динамичка дефиниција инваријанти на површима различитим од сфере, коју су аутори В. Умелијер, Ф. Ле Ру и С. Сејфадини презентовали у раду [55], даје инваријанте које су једнаке до сада дефинисаним спектралним инваријантама. Динамички приступ олакшава њихово израчунавање у специјалним ситуацијама.

Спектралне инваријанте су примењене у решавању многих проблема у симплектичкој топологији. Неки од њих су испитивање Хоферове метрике на простору Хамилтонових дифеморфизама и Лагражевих подмногострукости [71, 72, 73, 113, 102, 89, 63, 66, 116, 105]. Затим проблем симплектичке камиле [113, 109]. Коришћењем спектралних инваријанти могу се дефинисати квазиморфизми на групи Хамилтонових дифеоморфизама [28, 90, 111, 46], затим квазистања [29, 30, 78] а може се испитати ригидност неких подскупова у симплектичкој многострукости [30] (које је динамичко својство). Спектралне инваријанте су нашле велику примену и у C^0 симплектичкој топологији [103, 104, 52, 53, 54].

У овом раду настављамо са изучавањем спектралних инваријанти у Флоровој хомологији. Да би исте биле добро дефинисане, и да би могла да се покаже њихова независност од Хамилтонијана, неопходно је постојање изоморфизма типа ПСС. J. Катић је у својој докторској дисертацији [1], у поглављу Закључци и могући правци даљег истраживања, поставила питање да ли је могуће конструисати изоморфизам типа ПСС у случају Флорове хомологије за пар (o_M, ν^*N). Оно што наводи као потешкоћу јесте шта узети за граничне услове холоморфних дискова које посматрамо. О неопходности оваквог изоморфизма довољно говори рад [52] у ком аутори, у недостатку истог, конструишу пресликавање типа ПСС користећи чињеницу да се подмногострукости које разматрају могу представити као производ неке две многострукости. Ова конструкција, наравно, не може да се уопшти јер не може свако конормално раслојење да се представи као производ две подмногострукости. Овде изводимо конструкцију таквог пресликавања типа ПСС. Скок на граници Риманове површи дао нам је идеју да прављењем скока на панталонама дефинишемо производ на Флоровој хомологији за конормално раслојење.

Слична идеја скока на граници је коришћена за дефинисање пресликавања типа ПСС у Флоровој хомологји за отворен скуп. Да бисмо показали да су ПСС пресликавања изоморфизми морамо да користимо озбиљније алгебарске структуре. Прво, да бисмо показали да је ПСС за апроксимације изоморфизам морамо да компонујемо наша пресликавања са одговарајућим Поенкареовим дуалима. Проблем је, наиме, у томе што је Флорова хомологија за отворен скуп, онако како је дефинисана у [57], изоморфна Морсовој хомологији функције чије негативне градијентне трајекторија увиру у скуп U око границе. Ми ћемо морати да посматрамо и функције чије негативне градијентне трајектορије излазе из скупа U. А Морсова хомологија за такву класу функција није изоморфна сингуларној хомологији већ сингуларној хомологији од U релативно граница ∂U. Када тај проблем превазиђемо, морамо да испитамо сагласност ПСС пресликавања са директним лимесом помоћу којег смо дефинисали Флорову хомологију отвореног скупа. Као и у случају конормалне Флорове хомологије можемо да дефинишемо производ који броји панталоне које имају скок на једној повезаној компоненти границе.

У Глави 1 дате су дефиниције основних појмова које користимо у раду. Ту је дат и преглед свих верзија Флорових хомологија које изучавамо. Наведени су основни ставови и теореме и указано је на литературу где се могу наћи детаљнија разјашњења. Кроз целу тезу посматрамо четири различите Флорове хомологије. То су Флорова хомологија за периодичне орбите у затвореној симплектичкој многострукости која је дефинисана у Поглављу 1.6, затим Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке у затвореној симплектичкој многострукости за затворену Лагранжеву подмногострукост која је дефинисана у Поглављу 1.7.2. Следећа је Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке у амбијенту котангентног раслојења T^*M за пар нулто сечење, o_M, конормално раслојење, ν^*N, затворене подмногострукости $N \subset M$. Ову хомологију смо дефинисали у Поглављу 1.7.1. Последња хомологија која нам је од интереса је Флорова хомологија у амбијенту котангентног раслојења T^*M за отворен скуп $U \subset M$ базе. Циљ овог текста је да испита следеће три ствари

- упоређивање спектралних инваријанти у Флоровој хомологији за периодичне орбите и Лагранжевој Флоровој хомологији за затворене (под)многострукости,
- испитивање спектралних инваријанти у конормалној Флоровој хомологији,
- дефинисање и испитивање спектралних инваријанти у Флоровој хомологији за отворен скуп.

Сходно томе кроз целу тезу се провлаче три целине. Свака глава је, почев од друге, подељена према испитивању или дефинисању неког појма у тим различитим амбијентима. Читалац може да чита тезу редом или да се посвети изучавању једног проблема из горе наведене листе па да пролази само она поглавља која су посвећена том проблему. Ми ћемо садржај тезе презентовати пратећи баш тај начин читања.

Помоћу модулских простора који броје холоморфне површи у компактној многострукости, које смо дефинисали у Поглављу 2.1, можемо да дефинишемо морфизме између Флорове хомологије за периодичне орбите и Лагранжеве Флорове хомологије у затвореном амбијенту. Ови морфизми, чија је конструкција дата у Поглављу 3.1, познати су од раније и ми пратимо приступ који је дат у [4]. Поглавље 2.1 садржи и конструкцију модулских простора који броје холоморфне површи које личе на исцепане панталоне. Помоћу тих модулских простора дефинишемо операцију која спарује елементе из две поменуте Флорове хомологије. Конструкција те операције је дата у Поглављу 4.1 и део је коауторског рада са Ј. Катић и Д. Милинковићем [25]. Након увођења довољно алгебарских структура можемо да упоредимо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за периодичне орбите, дефинисане у Поглављу 5.1, и инваријанте за Лагранжеву Флорову хомологију у затвореном амбијенту, дефинисане у Поглављу 5.2. Такође можемо да испитамо како се те инваријанте слажу са операцијом која спарује елементе из ове две хомологије. То је садржај Поглавља 6.1 чији су резултати објављени у раду [25].

Прилаз другом проблему из горње листе почиње од Поглавља 2.2 и 2.3. Амбијент у ком се налазимо је котангентно раслојење T^*M а издвојена је једна затворена подмногострукост N затворене многострукости M. Помоћу модулских простора из ових поглавља, који броје (комбиноване) објекте градијентних трајекторија у N и пертурбовано холоморфних трака са граничним условима на o_M и ν^*N можемо да дефинишемо ПСС изоморфизам између Флорове хомологије за пар (o_M, ν^*N) и Морсове хомологије од N. Конструкција овог пресликавања може се наћи у Поглављу 3.2. Бројањем панталона из Поглавља 2.4 можемо да дефинишемо производ на конормалној Флоровој хомологији, што је садржај Поглавља 4.2. Након дефинисања спектралних инваријанти у конормалној Флоровој хомологији у Поглављу 5.3 можемо да пређемо на Поглавље 6.2 у ком показујемо субадитивност конормалних спектралних инваријанти у односу на производ у конормалној Флоровој хомологији. Изложене конструкције су оригинални резултати објављени у ауторским радовима [24, 83].

Трећи проблем, испитивање спектралних инваријанти у Флоровој хомологији за отворен скуп $U \subset M$ базе у амбијенту котангентног раслојења T^*M, такође почиње од конструкције разних модулских простора, односно Поглавља 2.5 и 2.6. Након тога можемо да дефинишемо ПСС пресликавање из одговарајуће Флорове хомологије у Морсову хомологију за отворен скуп U и можемо да конструишем производ на Флоровој хомологији. Конструкција изоморфизма је дата у Поглављу 3.3 а конструкција производа у Поглављу 4.3. ПСС изоморфизам нам омогућава да у Поглављу 5.4 дефинишемо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за отворен скуп и испитамо нека њихова својства. Поглавље 6.3 садржи доказ да су спектралне инваријанте субадитивне у односу на производ у одговарајућој хомологији. Наведени резултати су део коауторског рада са Ј. Катић и Д. Милинковићем [61].

Последња глава садржи кратак опис проблема који дају идеје у ком правцу би могао да се настави даљи рад у истраживању спектралних инваријанти.

На крају, желим да се захвалим мом ментору, Јелени Катић, и Дарку Милинковићу на подршци коју су ми пружили у претходним годинама заједничког рада. Без њихових сугестија, помоћи и бројних одговора било би немогуће доћи до ових резултата. Такође се захваљујем Божидару Јовановићу који је својим сугестијама допринео квалитету саме тезе.

1 Основни појмови и дефиниције

У овој глави дефинишемо познате појмове и ставове који ће нам бити неопходни у раду. Полазимо од дефиниције разних диференцијално-тополошких објеката, уводимо помоћне алгебарске појмове, затим дефинишемо Морсову хомологију. У Поглављу 1.4 издвајамо неке карактеристичне класе које користимо у раду. Помоћу тих класа дефинишемо Конли-Цендеров индекс периодичних орбита и Масловљеве индексе Хамилтонових путева који су нам потребни за опис индекса разних Коши-Риманових оператора који се јављају у раду. Споменуте карактеристичне класе дају опструкцију за добру дефинисаност Флорових хомологија којима је посвећен већи део главе. У овој тези се на више места користе кобордизми модулских простора. У Поглављу 1.5 дефинишемо Громовљеву конвергенцију пертурбовано холоморфних трака која нам касније задаје тополошку границу тих модулских простора.

1.1 Диференцијално-тополошки појмови

Сада ћемо дати дефиницију симплектичких многострукости који су главни амбијентни простор у целом раду.

Дефиниција 1.1. Кажемо да је пар (P, ω) *симплектичка многострукост* ако је P глатка многострукост а ω затворена, недегенерисана диференцијална $2-$форма на P. Недегенерисаност значи да за сваки тангентни вектор $X_p \in T_pP$ постоји вектор $Y_p \in T_pP$ тако да је

$$\omega(X_p, Y_p) \neq 0.$$

Форма ω се назива *симплектичка форма.*

Познато својство симплектичких многострукости је да је свака оријентабилна, а ако још претпоставимо да је многострукост коначне димензије онда ће та димензија бити паран број (видети [18]).

Најпознатији пример симплектичке многострукости је стандардни Еуклидски простор $\mathbb{R}^{2n}$ са координатама $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ на којем је симплектичка форма задата са $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.

Сам услов да је свака коначно димензиона симплектичка многострукост парне димензије нам каже да не можемо на свакој глаткој многострукости да задамо симплектичку форму. Али изнад сваке многострукости налази се нека симплектичка многострукост. Прецизније, нека је M компактна многострукост без границе и нека је $\pi : T^*M \to M$ њено котангентно раслојење. Са

$$\theta(X_p) = p(\pi_* X_p),\ p \in T^*M,$$

је дефинисана $1-$форма на T^*M. Ова форма се назива *Лиувилова форма.* Симплектичка структура на T^*M задата је $2-$формом

$$\omega = d\theta.$$

Следећом дефиницијом ћемо издвојити једну класу подмногострукости у симплектичким многострукостима које разматрамо касније.

Дефиниција 1.2. Кажемо да је $L \subset (P, \omega)$ *Лагранжева подмногострукост* ако се симплектичка форма анулира на L, $\omega|_L = 0$, и ако је $\dim L = \frac{1}{2} \dim P$.

Прве примере Лагранжевих подмногострукости можемо да нађемо у $\mathbb{R}^2$ где је свака глатка крива Лагранжева. У T^*M такође можемо да издвојимо неке Лагранжеве подмногострукости. Нека је $N \subset M$ подмногострукост од M. Њено *конормално раслојење*

$$\nu^* N = \{\alpha \in T_p^* M \ : \ p \in N,\, \alpha|_{T_p N} = 0\},$$

је Лагранжева подмногострукост од T^*M. Специјално, за $N = M$ добијемо да је *нулто сечење* $o_M \subset T^*M$ Лагранжева подмногострукост.

Од интереса ће нам бити да посматрамо Лагранжеве подмногострукости које су у специјалном положају, трансверзалном или им је пресек чист.

Дефиниција 1.3. Кажемо да се две подмногострукости $U, V \subset X$ глатке многострукости X *секу чисто* ако за сваку тачку $p \in U \cap V$ важи

$$T_p(U \cap V) = T_p U \cap T_p V.$$

Трансверзалан пресек је специјалан случај чистог пресека две подмногострукости. Већ споменуте подмногострукости o_M и ν^*N секу се чисто дуж њиховог пресека $o_N = o_M \cap \nu^* N$.

Дефинисаћемо и додатну структуру на симплектичким многострукостима (која опет, не захтева постојање симплектичке структуре већ може да се дефинише и општије).

Дефиниција 1.4. *Скоро комплексна структура* на P је изоморфизам векторских раслојења

$$J : TP \to TP,$$

за који важи

$$J^2 = -\mathbb{I},$$

где је $\mathbb{I}$ идентичко пресликавање на фибри тангентног раслојења, $\mathbb{I} : T_pP \to T_pP$.

Кад већ имамо дату симплектичку структуру можемо некако да је „упоредимо" са скоро комплексном структуром. Кажемо да је J *сагласна са* ω ако $\omega(\cdot, J\cdot)$ задаје Риманову метрику на P. Може се показати (видети [18]) да на свакој симплектичкој многострукости (P, ω) постоји скоро комплексна структура која је сагласна са ω. Векторско поље дато функцијом енергије задаје динамику симплектичке многострукости. Под функцијом енергије подразумеваћемо глатко пресликавање

$$H : P \times [0, 1] \to \mathbb{R},$$

које називамо *Хамилтонова функција* или *Хамилтонијан.* Ако P није компактна многострукост онда ћемо захтевати да Хамилтонијан H има компактан носач. Како је форма ω недегенерисана можемо да је видимо као изоморфизам векторских раслојења

$$\omega : TP \to T^*P.$$

То значи да свакој $1-$форми на P одговара тачно једно векторско поље на P. Кад имамо дат Хамилтонијан H јединствено векторско поље које задовољава једнакост

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH(\cdot),$$

назива се *Хамитоново векторско поље.* Ток овог векторског поља, односно решење система

$$\frac{d}{dt}\phi_H^t(x) = X_H(\phi_H^t(x)),\ \phi_H^0 = \mathbb{I},$$

задаје *Хамилтонове дифеоморфизме* на P.

1.2 Директан лимес

Да бисмо дефинисали Флорову хомологију за отворене скупове потребна нам је мало компликованија алгебарска структура. У овом поглављу ћемо дефинисати неопходне алгебарске појмове који су стандардни и познати и могу се наћи у [48].

Посматраћемо директан лимес фамилије хомологија. Да бисмо могли да дефинишемо директан лимес морамо да дефинишемо директан скуп индекса по коме се узима тај лимес.

Дефиниција 1.5. Кажемо да је предуређен скуп $(I, \leq)$ *директан скуп* ако за свака два елемента $\alpha, \beta \in I$ постоји неки елемент $\gamma \in I$ тако да важи $\alpha \leq \gamma$ и

$\beta \leq \gamma$.

Када имамо скуп Абелових група G_α који је индексиран директним скупом $(I, \leq)$ захтеваћемо додатна пресликавања која повезују G_α и G_β за неке индексе $\alpha, \beta \in I$.

Дефиниција 1.6. Нека је G_α, $\alpha \in I$, скуп Абелових група индексиран директним скупом $(I, \leq)$. Кажемо да је G_α *директан систем група* ако за све индексе $\alpha, \beta \in I$ за које важи $\alpha \leq \beta$ постоји хомоморфизам

$$f_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta,$$

тако да ови хомоморфизми задовољавају следећа својства

- $f_{\alpha\alpha} = \mathbb{I}$, за све $\alpha \in I$,
- Ако је $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ за неке $\alpha, \beta, \gamma \in I$ тада је $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$.

Када имамо директан систем група можемо да дефинишемо и директан лимес. Овај лимес може да се дефинише на два начина.

Дефиниција 1.7. *Директан лимес*, $\varinjlim G_\alpha$, директног система група G_α дефинише се као количник директне суме $\oplus_\alpha G_\alpha$ по подгрупи која је генерисама елементима облика $a - f_{\alpha\beta}(a)$, где је $a \in G_\alpha$ а G_α видимо као подскуп директне суме. Другим речима,

$$\varinjlim G_\alpha = \oplus_\alpha G_\alpha / \Gamma,$$

где је $\Gamma = \{a - f_{\alpha\beta}(a) \,|\, a \in G_\alpha,\ \alpha, \beta \in I\}$.

Пратећи [48], директан лимес можемо да дефинишемо на још један начин (који ће заправо бити оперативнији). Посматрајмо дисјунктну унију посечену по релацији еквиваленције

$$\coprod_\alpha G_\alpha / \sim,$$

при чему је $a \sim b$ ако је $f_{\alpha\gamma}(a) = f_{\beta\gamma}(a)$ за неко $\gamma \in I$ где су елементи $a \in G_\alpha$ и $b \in G_\beta$. Хомоморфизам који класу еквиваленције $[a] \in \coprod G_\alpha / \sim$ слика у косет од a у групи $\varinjlim G_\alpha$ ће заправо бити изоморфизам. То нам даје могућност да директан лимес дефинишемо и као

$$\varinjlim G_\alpha = \coprod_\alpha G_\alpha / \sim .$$

На исти начин се дефинише директан лимес векторских простора.

1.3 Морсова хомологија

Нека је X компактна многострукост. Кажемо да је глатка функција $f : X \to \mathbb{R}$ *Морсова функција* ако су све њене критичне тачке недегенерисане. Геометријски, то значи да је диференцијал функције, $df : X \to T^*X$, трансверзалан на нулто сечење у котангентном раслојењу,

$$df \pitchfork o_X \subset T^*X.$$

Недегенерисаност другог извода нам даје *Морсове карте* U у околини сваке критичне тачке $p \in U$ на којој функција f има облик

$$f = f(p) - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2,$$

где су $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ локалне координате (видети [76]). Број k који се појављује у претходној суми назива се *Морсовим индексом критичне тачке* p, и означава са

$$k = m_f(p).$$

Он представља број негативних сопствених вредности матрице другог извода функције f у тачки p и не зависи од избора локалних координата око критичне тачке. Још једна лепа последица постојања Морсових карата је чињеница да су критичне тачке Морсове функције изоловане. Како је X компактна многострукост закључујемо да f може имати само коначно много критичних тачака. Означимо скуп свих критичних тачака са $\mathrm{Crit}(f)$.

За генерички избор Морсове функције f и Риманове структуре g на X можемо да дефинишемо *Морсову хомологију*, коју означавамо са $HM_*(X : f, g)$. Ланчасти комплекс ће бити векторски простор над $\mathbb{Z}_2$[1] генерисан елементима из $\mathrm{Crit}(f)$. Градуација на комплексу је задата Морсовим индексом,

$$CM_k(X : f, g) = \mathbb{Z}_2\langle p \,|\, p \in \mathrm{Crit}(f),\, m_f(p) = k\rangle.$$

Гранични оператор ∂_M броји градијентне трајекторије које спајају две критичне

[1]Морсову хомологију можемо да дефинишемо и са коефицијентима у $\mathbb{Z}$ али тада бисмо морали да водимо рачуна о оријентацији модулских простора. За потребе ове тезе довољно је узети коефицијенте из $\mathbb{Z}_2$.

тачке чији се индекси разликују за један. Скуп решења

$$\begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to X, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma), \\ \gamma(-\infty) = p,\ \gamma(+\infty) = q \end{cases} \tag{1.1}$$

посеченог по $\mathbb{R}$-дејству означимо са $\mathcal{M}(p,q;f,g)$. Прокоментаришимо градијент функције, ∇f који фигурише у систему једначина (1.1). Знамо да се у присуству Риманове метрике на X градијент дефинише као дуал диференцијала df, односно

$$\langle \nabla f, v\rangle = df(v),\ \text{за све } v \in TX.$$

Користећи услов да је (f,g) Морс-Смејлов пар[2] (што се постиже за генерички избор Морсове функције и Риманове метрике) може се показати да ће $\mathcal{M}(p,q;f,g)$ бити многострукост димензије

$$m_f(p) - m_f(q) - 1.$$

Ако је $m_f(p) - m_f(q) = 1$ тада ће $\mathcal{M}(p,q;f,g)$ бити компактна многострукост димензије нула, чији број тачака означавамо са $n(p,q;f,g)$. Гранични оператор

$$\partial_M : CM_k(X:f,g) \to CM_{k-1}(X:f,g),$$

се на генераторима дефинише као

$$\partial_M(p) = \sum_{q \in CM_{k-1}} n(p,q;f,g)\, q,$$

и даље линеарно проширује на цело $CM_k(X:f,g)$. Овај оператор је добро дефинисан и задовољава једнакост

$$\partial_M \circ \partial_M = 0,$$

видети [76, 100]. Морсова хомологија се дефинише као хомологија пара $(CM_*(X:f,g), \partial_M)$, односно

$$HM_k(X:f,g) = \operatorname{Ker}\partial_M / \operatorname{Im}\partial_M.$$

Хомологија неће зависити од избора Морс-Смејлов пара (f,g). Односно, за два

[2] Кажемо да је пар (f,g) Морс-Смејлов ако се све стабилне и нестабилне многострукости придружене критичним тачкама функције f секу трансверзално.

таква пара (f^α, g^α) и (f^β, g^β) постоји изоморфизам који се на следећи начин дефинише на нивоу ланаца. Нека је $R > 0$ фиксирано. Нека је $f_s^{\alpha\beta}$ глатка хомотопија између f^α и f^β која задовољава услове

$$f_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} f^\alpha, & s \leq -R, \\ f^\beta, & s \geq R. \end{cases}$$

И Риманове метрике ћемо спојити глатком хомотопијом $g_s^{\alpha\beta}$ која задовољава

$$g_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} g^\alpha, & s \leq -R, \\ g^\beta, & s \geq R. \end{cases}$$

Нека је $n(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ број елемената (по модулу 2) многострукости димензије нула

$$\mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) = \begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to X, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g_s^{\alpha\beta}} f_s^{\alpha\beta}(\gamma), \\ \gamma(-\infty) = p^\alpha,\ \gamma(+\infty) = p^\beta, \end{cases} \tag{1.2}$$

где су $p^\alpha \in \mathrm{Crit}(f^\alpha)$ и $p^\beta \in \mathrm{Crit}(f^\beta)$ критичне тачке истих индекса, $m_{f^\alpha}(p^\alpha) = m_{f^\beta}(p^\beta)$. За генерички избор хомотопија $f_s^{\alpha\beta}$ и $g_s^{\alpha\beta}$ скуп $\mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ ће заиста бити многострукост (видети [100] за више детаља). Ланчасто пресликавање

$$\tau_{\alpha\beta} : CM_*(X : f^\alpha, g^\alpha) \to CM_*(X : f^\beta, g^\beta),$$

дефинише се са

$$\tau_{\alpha\beta}(p^\alpha) = \sum_{p^\beta} n(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})\, p^\beta.$$

Одговарајуће пресликавање на нивоу хомологија означавамо са

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} : HM_*(X : f^\alpha, g^\alpha) \to HM_*(X : f^\beta, g^\beta). \tag{1.3}$$

Изоставили смо $*$ у ознаци пресликавања на нивоу хомологија као што се уобичајено пише због једноставнијег записа.

Може се показати да пресликавања $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ задовољавају једнакост

$$\mathbf{T}_{\alpha\gamma} = \mathbf{T}_{\beta\gamma} \circ \mathbf{T}_{\alpha\beta},$$

за свака три Морс-Смејлова пара (f^α, g^α), (f^β, g^β) и (f^γ, g^γ). Ако специјално посматрамо константне хомотопије $f_s^{\alpha\alpha} \equiv f^\alpha$ и $g_s^{\alpha\alpha} \equiv g^\alpha$ добијемо идентитет

$$\mathbf{T}_{\alpha\alpha} = \mathbb{I},$$

одакле закључујемо да су пресликавања $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ изоморфизми.

Ако кажемо да су нам свака два Морс-Смејлова пара у релацији $\leq$ (у смислу Дефиниције 1.5) онда можемо да посматрамо директан лимес по тим паровима. Векторски простор који добијемо такође називамо *Морсовом хомологијом затворене многострукости*[3] X и означавамо

$$HM_*(X) = \varinjlim HM_*(X : f^\alpha, g^\alpha),$$

(видимо да овде не фигуришу ни Риманова метрика ни Морсова функција).

Слично како смо конструисали пресликавања $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ можемо да дефинишемо повезујући хомоморфизам

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} : HM_k(X : f, g^\alpha) \to HM_k(X : f, g^\beta)$$

за сваке две метрике за које су (f, g^α) и (f, g^β) Морс-Смејлови парови. На нивоу ланчастих комплекса пресликавање $\mathbf{G}_{\alpha\beta}$ броји градијентне трајекторије из следећег модулског простора

$$\mathcal{M}(p, q : f, g^{\alpha\beta}) = \begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to X, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g_s^{\alpha\beta}} f(\gamma), \\ \gamma(-\infty) = p,\ \gamma(+\infty) = q. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ако фиксирамо једну Морсову функцију f и посматрамо директан лимес по свим генеричким Римановим метрикама (сада су нам сваке две метрике у релацији $\leq$) добијемо векторски простор који означавамо са $HM_*(X : f)$ (видимо да сада не фигурише Риманова метрика).

Из комутативности следећег дијаграма

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & HM_k(X : f_\alpha, g_a) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{ab}^{f_\alpha}} & HM_k(X : f_\alpha, g_b) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{bc}^{f_\alpha}} & HM_k(X : f_\alpha, g_c) & \to & \cdots \\ & & \downarrow \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{g_a} & & \downarrow \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{g_b} & & \downarrow \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{g_c} & & \\ \cdots & \to & HM_k(X : f_\beta, g_a) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{ab}^{f_\beta}} & HM_k(X : f_\beta, g_b) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{bc}^{f_\beta}} & HM_k(X : f_\beta, g_c) & \to & \cdots \end{array}$$

можемо да закључимо да постоји изоморфизам из количничког простора $HM_*(X : f_\alpha)$ у $HM_*(X : f_\beta)$ који је индукован изоморфизмима $\mathbf{T}_{\alpha\beta}^g$. Добијено

[3] За многострукост кажемо да је затворена ако је компактна и без границе

пресликавање ћемо означити истим словом као и пресликавање дефинисано у (1.3),

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} : HM_*(X : f_\alpha) \to HM_*(X : f_\beta), \tag{1.5}$$

без могућности да дође до забуне јер су домен и кодомен последњег пресликавања количнички простори добијени после дејства директним лимесом по Римановим метрикама.

Све ове наведене Морсове хомологије су изоморфне међусобно и изоморфне су сингуларној хомологији $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$ са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$. За изоморфизам са сингуларном хомологијом погледати [10, 93, 56]. У остатку рада ћемо идентификовати све наведене хомологије. Истакнимо још једном да иако све наведене хомологије можемо да идентификујемо, треба имати у виду да постоји могућност избора различитих параметара (Морсове функције и Риманове метрике) у конструкцији ради постизања услова трансверзалности.

Сада ћемо конструисати производ на овој хомологији. Видети [12] за конструкцију производа у сличном контексту. Наш производ броји дрвета са три гране при чему се све три гране идентификују као долазеће. Нека су f_j, $j \in \{1, 2, 3\}$ три Морсове функције и g_j Риманове метрике тако да је задовољена трансверзалност следећих простора

$$W^u_{f_1}(p_1) \pitchfork W^u_{f_2}(p_2) \pitchfork W^u_{f_3}(p_3)$$

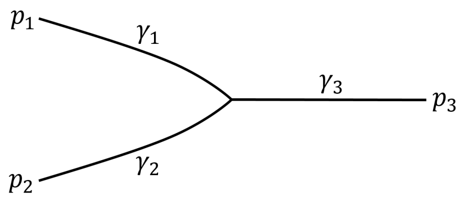
за све критичне тачке p_j функције f_j. Такође ћемо претпоставити да су парови (f_j, g_j), $j \in \{1, 2, 3\}$, Морс-Смејлови. Ови услови се могу постићи за генерички избор метрика. За критичне тачке $p_j \in CM_*(X : f_j, g_j)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, дефинишемо модулски простор $\mathcal{M}(p_1, p_2, p_3)$ као скуп дрвета $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ тако да важи (видети Слику 1)

$$\begin{cases} \gamma_j : (-\infty, 0] \to X,\ j = 1, 2, 3, \\ \dot{\gamma}_j = -\nabla_{g_j} f_j(\gamma_j),\ j = 1, 2, 3, \\ \gamma_j(-\infty) = p_j,\ j = 1, 2, 3, \\ \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0). \end{cases}$$

За генерички избор Риманових метрика овај модулски простор ће бити многострукост димензије

$$m_{f_1}(p_1) + m_{f_2}(p_2) + m_{f_3}(p_3) - 2 \dim X.$$

Ако са $n(p_1, p_2, p_3)$ означимо број елемената компактне многострукости чија је



Слика 1: Дрво са три долазећа краја $\mathcal{M}(p_1, p_2, p_3)$

димензија нула, тада се производ $\cdot$ дефинише на нивоу ланаца

$$\cdot : CM_k(X : f_1, g_1) \otimes CM_l(X : f_2, g_2) \longrightarrow CM_{2\dim X - k - l}(X : f_3, g_3).$$

На генераторима узима вредност

$$p_1 \cdot p_2 = \sum_{p_3} n(p_1, p_2, p_3)\, p_3, \tag{1.6}$$

а даље се продужава по линеарности. Пресликавање $\cdot$ комутира са граничним оператором у Морсовој хомологији и дефинише производ на нивоу хомологија

$$\cdot : HM_*(X : f_1, g_1) \otimes HM_*(X : f_2, g_2) \longrightarrow HM_*(X : f_3, g_3).$$

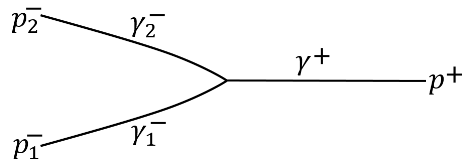
Овај производ је такође добро дефинисан на хомологијама које се добију као директан лимес по метрикама

$$\cdot : HM_*(X : f_1) \otimes HM_*(X : f_2) \longrightarrow HM_*(X : f_3),$$

што следи из једнакости

$$\mathbf{G}^{f_3}_{ab}(p_a \cdot q_a) = \mathbf{G}^{f_1}_{ab}(p_a) \cdot \mathbf{G}^{f_2}_{ab}(q_a). \tag{1.7}$$

У раду ћемо користити још један производ на Морсовој хомологији, такозвани *спољашњи индекс пресека.* Нека је $A \subset X$ затворена подмногострукост. Дате су нам Морсове функције $f_1^- : X \to \mathbb{R}$ и $f_2^-, f^+ : A \to \mathbb{R}$. За $p_1^- \in \mathrm{Crit}(f_1^-)$, $p_2^- \in \mathrm{Crit}(f_2^-)$ и $p^+ \in \mathrm{Crit}(f^+)$ дефинишемо модулски простор дрвета са два



Слика 2: Дрво из простора $\mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+)$ са два долазећа и једним одлазећим крајем

долазећа и једним одлазећим крајем (видети Слику 2). Прецизније, нека је

$$\mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+) = \left\{ (\gamma_1^-, \gamma_2^-, \gamma^+) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_1^- : (-\infty, 0] \to X, \\ \gamma_2^- : (-\infty, 0] \to A, \\ \gamma^+ : [0, +\infty) \to A, \\ \frac{d\gamma_1^-}{ds} = -\nabla_{g_1^-} f_1^-(\gamma_1^-), \\ \frac{d\gamma_2^-}{ds} = -\nabla_{g_2^-} f_2^-(\gamma_2^-), \\ \frac{d\gamma^+}{ds} = -\nabla_{g^+} f^+(\gamma+), \\ \gamma_1^-(-\infty) = p_1^-, \\ \gamma_2^-(-\infty) = p_2^-, \\ \gamma^+(+\infty) = p^+, \\ \gamma_1^-(0) = \gamma_2^-(0) = \gamma^+(0). \end{array} \right. \tag{1.8}$$

За генерички избор Морс-Смејлових парова $(f_1^-, g_1^-), (f_2^-, g_2^-), (f^+, g^+)$, модулски простор $\mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+)$ ће бити многострукост димензије

$$m_{f_1^-}(p_1^-) + m_{f_2^-}(p_2^-) - m_{f^+}(p^+) - \dim X.$$

На ланчастим комплексима пресликавање

$$\widetilde{\cap}_A : CF_k(X : f_1^-, g_1^-) \otimes CF_l(A : f_2^-, g_2^-) \to CF_{k+l-\dim X}(A : f^+, g^+),$$

дефинисано је једнакошћу

$$p_1^- \widetilde{\cap}_A p_2^- = \sum_{p^+} \sharp_2 \mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+)\, p^+. \tag{1.9}$$

То је једно ланчасто пресликавање које индукује спољашњи индекс пресека

$$\widetilde{\cap}_A : HF_k(X : f_1^-, g_1^-) \otimes HF_l(A : f_2^-, g_2^-) \to HF_{k+l-\dim X}(A : f^+, g^+).$$

Назив овог производа, као и ознаку $\widetilde{\cap}_A$, позајмили смо из [15], Поглавље 4.3.

У циљу аксиоматизације Морсове хомологије у [100] разматрана је Морсова хомологија отвореног подскупа у некој амбијентној многострукости. У овој тези ћемо користити само нека својства те конструкције која овде наводимо. Нека је $U \subset X$ отворен подскуп са глатком границом ∂U. Посматраћемо специјалну класу Морсових функција, дефинисаних као у [8] или [65].

Дефиниција 1.8. Нека је $\mathcal{F}^- \subset C^\infty(X)$ скуп свих Морсових функција f на X за које важи

- $\mathrm{Crit}(f) \cap \overline{V} = \emptyset$, где је V нека околина од ∂U,
- $df(\xi) > 0$ за сваки тангентни вектор ξ који извире из U дуж ∂U.

Морсову хомологију скупа U дефинисану помоћу функција из класе $\mathcal{F}^-$ можемо да идентификујемо са сингуларном хомологијом од U. За конструкцију изоморфизма

$$HM_*(U : f) \cong H_*(U; \mathbb{Z}_2),$$

када $f \in \mathcal{F}^-$ видети Теорему 2.6. (iii) у [65] или Главу 4 у [100].

Приметимо да производ који смо дефинисали на амбијентној многострукости X, једнакост (1.6), можемо да дефинишемо и на отвореном подскупу $U \subset X$ ако бирамо функције $f_j \in \mathcal{F}^-$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Избор таквих функција нам обезбеђује да се губитак компактности модулског простора $\mathcal{M}(p_1, p_2; p_3)$ реализује једино као распадање градијентних трајекторија унутар скупа U (јер смо критичне тачке унутар U раздвојили неком околином од границе). Овде су p_j критичне тачке функција f_j које се налазе унутар скупа U. Производ на хомологијама отвореног подскупа

$$\cdot : HM_*(U : f_1) \otimes HM_*(U : f_2) \to HM_*(U : f_3), \tag{1.10}$$

испитујемо детаљније у Поглављу 4.3.

Дефинисаћемо и скуп

$$\mathcal{F}^+ := \{f \in C^\infty(X) \mid -f \in \mathcal{F}^-\}. \tag{1.11}$$

За функције из ове класе постоји изоморфизам са релативном сингуларном хомологијом

$$HM_*(U : f) \cong H_*(U, \partial U; \mathbb{Z}_2),$$

видети Теорему 2.6. (ii) у [65].

Можемо да нађемо директну везу између Морсових хомологија у односу на функцију $f \in \mathcal{F}^-$ и функцију $-f \in \mathcal{F}^+$. Под Поенкареовом дуалношћу у

Морсовој хомологији подразумеваћемо изоморфизам облика

$$\mathrm{PD}_M^g : HM_k(U : f, g) \xrightarrow{\cong} HM_{n-k}(U : -f, g), \quad p \mapsto p. \tag{1.12}$$

Ово није познати Поенкареов дуал (дефинисан у [100], Поглавље 5.2) јер домен и кодомен нашег пресликавања нису једнаки домену и кодомену пресликавања које је дефинисано у [100]. Ипак ћемо користити исту ознаку јер је конструкција пресликавања ($f \mapsto -f$, $p \mapsto p$) иста. Додали смо параметар g у ознаци пресликавања да бисмо истакли да се ради о Морсовим хомологијама које су дефинисане у односу на метрику g. Како PD_M^g критичну тачку слика у себе оно је очигледно сагласно са пресликавањем $\mathbf{G}_{\alpha\beta}$, односно важи

$$\mathrm{PD}_M^{g_\beta} \circ \mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_{\alpha\beta} \circ \mathrm{PD}_M^{g_\alpha}.$$

То значи да у директном лимесу по Римановим метрикама добијемо изоморфизам, који такође називамо Поенкареов дуал,

$$\mathrm{PD}_M : HM_k(U : f) \xrightarrow{\cong} HM_{n-k}(U : -f). \tag{1.13}$$

1.4 Неке карактеристичне класе

У овом поглављу (P, ω) ће бити компактна симплектичка многострукост а $L \subset P$ затворена Лагранжева подмногострукост. Приступ и ознаке које користимо прате радове [35, 84, 95, 96].

Симплектичка структура задаје нетривијалну (де Рамову) кохомолошку класу $[\omega] \in H^2(P, \mathbb{R})$. Ова класа, даље, дефинише хомоморфизам (који ћемо означити истим словом)

$$\omega : \pi_2(P) \to \mathbb{R}.$$

Симплектичка форма задаје још једну кохомолошку класу. То је *прва Чернова класа* скоро комплексног векторског раслојења (TP, J) у односу на скоро комплексну структуру која је $\omega-$сагласна. Класу означавамо са

$$c_1 \in H^2(P; \mathbb{Z}).$$

Иако се у самој конструкцији појављује J, Чернова класа c_1 неће зависити од $\omega-$сагласне скоро комплексне структуре јер је простор таквих структура контрактибилан (видети [47]). Ова класа дефинише један нови хомоморфизам, који означавамо истим словом

$$c_1 : \pi_2(P) \to \mathbb{Z}.$$

Сада ћемо описати како се дефинише кохомолошка класа

$$\mu \in H^1(\Lambda(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}),$$

а за детаље видети [6] или [1]. $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ представља скуп свих Лагражевих потпростора у $\mathbb{C}^n$. Унитарна група $U(n)$ делује транзитивно на $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ а стабилизатор издвојеног Лагранжевог потпростора $\mathbb{R}^n$ може се идентификовати са $O(n)$. Дакле

$$\Lambda(\mathbb{C}^n) = U(n)/O(n).$$

Ако је дат произвољан потпростор $L \in \Lambda(\mathbb{C}^n)$ тада постоји унитарни аутоморфизам $\varphi(L)$ који слика $\mathbb{R}^n$ у L. Ово пресликавање је јединствено до на ортогоналну трансформацију. Квадрат детерминанте матрице $\varphi(L)$ зависи само од L па је добро дефинисано пресликавање

$$\mathrm{Det}^2 : \Lambda(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{S}^1, \; L \mapsto \mathrm{Det}^2(\varphi(L)).$$

Коришћењем одговарајућих фибрација и тачних низова могу се израчунати хомолошка и кохомолошка група простора Лагранжевих подмногострукости. Важиће

$$H_1(\Lambda(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong H^1(\Lambda(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

За генератор кохомолошке групе $H^1(\Lambda(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$ узима се коцикл чија је вредност на затвореној кривој $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \Lambda(\mathbb{C}^n)$ једнака степену композиције

$$\mathrm{Det}^2 \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Овај генератор се означава са μ и назива се *Масловљева класа.*

И на релативним хомотопским групама можемо да дефинишемо неке хомоморфизме. Јасно је да симплектичка форма задаје хомоморфизам

$$\omega : \pi_2(P, L) \to \mathbb{R},$$

који на представнику $w : (\mathbb{D}^2, \partial \mathbb{D}^2) \to (P, L)$ класе $A \in \pi_2(P, L)$ делује са

$$\langle \omega, A \rangle = \int_{\mathbb{D}^2} w^* \omega.$$

Показаћемо да Масловљева класа дефинише хомоморфизам на $\pi_2(P, L)$. Нека је

$$w : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (P, L)$$

глатко пресликавање. Тада постоји јединствена тривијализација (до на хомотопију) повлачења раслојења TP на $\mathbb{D}^2$. Ново раслојење, које означавамо са w^*TP, биће симплектичко векторско раслојење

$$f : w^*TP \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^n,$$

(односно на фибрама имамо очување симплектичке форме). Тривијализација f дефинише пут у простору Лагранжевих подмногострукости

$$\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \Lambda(\mathbb{C}^n).$$

Сада дефинишемо

$$I_{\mu,L}(w) = \mu(\tilde{f}) \in \mathbb{Z}.$$

У претходном изразу са десне стране фигурише Масловљева класа из кохомолошке групе $H^1(\Lambda(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$. Пресликавање $I_{\mu,L}$ дефинисано на овај начин индуковаће хомоморфизам на $\pi_2(P, L)$ (видети [84, 112] за више детаља). Нови хомоморфизам такође означавамо са μ без бојазни да ће доћи до забуне

$$\mu : \pi_2(P, L) \to \mathbb{Z}.$$

У наведеним радовима је такође показана једнакост

$$\mu(w) - \mu(w') = 2c_1(u), \tag{1.14}$$

за свака два глатка пресликавања $w, w' : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (P, L)$ која су једнака на граници, $w|_{\partial\mathbb{D}^2} = w'|_{\partial\mathbb{D}^2}$. Сфера u добијена је лепљењем пресликавања w и w' по граници.

Сада ћемо објаснити како се дефинише Масловљев индекс Хамилтоновог пута у P који почиње и завршава се на L (у овом делу смо пратили ознаке и излагање из рада [66]). Нека су $x, y : [0, 1] \to P$ два таква пута за Хамилтонијан H, односно нека важи

$$\dot{x} = X_H(x),\ x(0), x(1) \in L,\ \dot{y} = X_H(y),\ y(0), y(1) \in L.$$

Одаберимо глатко пресликавање

$$v : [0,1] \times [0,1] \to P,$$

за које важи

$$v(r,0), v(r,1) \in L,\ v(0,t) = x(t), v(1,t) = y(t),\ r,t \in [0,1].$$

Тривијализација повлачења раслојења $v^*TP \cong [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{C}^n$ задаје петљу у $\Lambda(\mathbb{C}^n)$. Ту петљу означимо са γ_v. Цео број

$$\langle \mu, \gamma_v \rangle \in \mathbb{Z}, \tag{1.15}$$

означавамо са $\mu(x,y)$. Ова вредност, која се назива *релативан Масловљев индекс*, неће зависити ни од тривијализације ни од избора пресликавања v ако важи услов $\mu|_{\pi_2(P,L)} = 0$. Из адитивности спаривања (1.15) закључујемо да сваком Хамилтоновом путу можемо да доделимо цео број ако издвојимо један Хамилтонов пут, x_0, и дефинишемо

$$\mu_L(x) = \mu(x, x_0).$$

Овако дефинисана целобројна вредност $\mu_L(x)$ назива се *релативан Масловљев индекс Хамилтоновог пута* x.

Можемо да дефинишемо и *индекс Лагранжевог пута* у $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ као индекс пресека криве и оријентисаног Масловљевог цикла. Овај приступ је изложен у [95]. Нека је $\Lambda : [a,b] \to \Lambda(\mathbb{C}^n)$ глатка крива чије су све тачке пресецања регуларне (видети [95] за дефиницију). Нека је V један фиксиран Лагранжев потпростор из $\Lambda(\mathbb{C}^n)$. *Масловљев индекс* $\mu(\Lambda, V)$ једнак је

$$\mu(\Lambda, V) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, a) + \sum_{a<s<b} \operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, s) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, b).$$

Овде је $\Gamma(\Lambda, V, s)$ форма пресецања криве Λ и потпростора V у тачки s, а $\operatorname{sign}\Gamma$ представља разлику броја негативних и позитивних сопствених вредности матрице која задаје форму (видети [95] за више детаља).

Означимо са $\mathrm{Sp}(n)$ скуп свих *симплектоморфизама* од $\mathbb{R}^{2n}$. То су дифеоморфизми простора $\mathbb{R}^{2n}$ који чувају стандардну симплектичку структуру ω_0. Можемо да дефинишемо и *Масловљев индекс пута симплектичких матрица*

$\Psi : [a,b] \to \mathrm{Sp}(n)$ као

$$\mu(\Psi) = \mu(\Psi(V), V),$$

где је издвојен један Лагранжев потпростор $V = \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Сада ћемо дефинисати Конли-Цендеров индекс за Хамилтонове орбите. Нека је $a : \mathbb{S}^1 \to P$ периодична орбита Хамилтонијана $H : \mathbb{S}^1 \times P \to \mathbb{R}$, односно, нека важи $\dot{a}(t) = X_H(a)$. Посматраћемо само оне Хамилтонове орбите које су тривијалне у $\pi_1(P)$. Ако петљу a попунимо диском $u : \mathbb{D}^2 \to P$ тада можемо да тривијализујемо повлачење раслојења $\Psi : a^*TP \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$. На тај начин добијемо пут симплектоморфизама

$$\Psi_a(t) = \Psi \circ d\phi_H^t \circ \Psi^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

Конли-Цендеров индекс Хамилтонове орбите a дефинише се једнакошћу

$$\mu^{CZ}(a) = \frac{\dim P}{2} - \mu(\Psi_a),$$

где $\mu(\Psi_a)$ представља Масловљев индекс пута симплектичких матрица. Овако дефинисан Конли-Цендеров индекс једнак је Морсовом коиндексу ($\dim P - m_f(p)$) критичне тачке p од неке C^2 мале Морсове функције f (у том случају критичну тачку p посматрамо као константну орбиту). Када је задовољен услов $c_1|_{\pi_2(P)} = 0$ дефиниција неће зависити од избора диска u. У раду [97] могу се наћи детаљнија својства овако дефинисаног индекса.

Преостало нам је да дефинишемо Масловљев индекс Хамилтонових путева у котангентном рслојењу. Када имамо структуру котангентног раслојења T^*M дефиниција Масловљевог индекса је једноставнија. Нека је $x : [0,1] \to T^*M$ Хамилтонов пут Хамилтонијана $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ са компактним носачем. Посматраћемо путеве који почињу на o_M а завршавају се на конормалном раслојењу ν^*S затворене подмногострукости $S \subset M$. Као и у случају опште симплектичке многострукости посматраћемо тривијализације раслојења $x^*T(T^*M)$. Симплектичке тривијализације

$$\Phi : x^*T(T^*M) \to [0,1] \times \mathbb{C}^n \cong [0,1] \times \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$$

које посматрамо задовољаваће додатне услове. Тангентно раслојење $T(T^*M)$ се канонски раздваја на суму

$$T(T^*M) = H \oplus V,$$

при чему је V вертикално тангентно раслојење чија је фибра V_p изоморфна са $T^*_{\pi(p)}M$ а H је хоризонтално подраслојење задато Леви-Чивитином конексијом од g. Овде је g фиксирана Риманова метрика на M. Фибра хоризонталног раслојења H_p је изоморфна са $T_{\pi(p)}M$. Посматрамо класу тривијализација Φ које хоризонтални простор сликају у $\mathbb{R}^n$

$$\Phi(H_{x(t)}) = \mathbb{R}^n,$$

а вертикални у $\imath\mathbb{R}^n$

$$\Phi(V_{x(t)}) = \imath\mathbb{R}^n.$$

Једна оваква тривијализација може да се добије помоћу паралелног транспорта па класа коју посматрамо неће бити празна. Означимо са

$$V^\Phi = \Phi(T_{x(1)}\nu^*S),$$

један издвојени Лагранжев потпростор. Дефинишемо пут симплкетичких матрица

$$B_\Phi(t) = \Phi \circ d\phi^t_H \circ \Phi^{-1},$$

где су ϕ^t_H Хамилтонови дифеоморфизми генерисани Хамилтонијаном H. Може се показати да израз

$$\mu(B_\Phi(\mathbb{R}^n), V^\Phi)$$

неће зависити од избора тривијализације Φ из наведене класе. *Масловљев индекс Хамилтоновог пута* x у котангентном раслојењу дефинишемо као

$$\mu_S(x) = \mu(B_\Phi(\mathbb{R}^n), V^\Phi).$$

Овако дефинисан Масловљев индекс ће задовољавати својство да

$$\mu_S(x) + \frac{1}{2}\dim S \in \mathbb{Z},$$

и додатно, ова вредност ће бити једнака Морсовом индексу критичне тачке неке Морсове функције која је C^2 мала. У том случају критичну тачку функције посматрамо као константан Хамилтонов пут (видети [85] за више детаља).

1.5 Громовљева компактност

У овом делу ћемо објаснити основне појмове Громовљеве компактности. Наиме, разни модулски простори које дефинишемо у Глави 2 ће бити многострукости.

Али ове многострукости неће бити ни затворене[4] ни многострукости са границом, у општем случају. Њихова тополошка граница (односно тачке нагомилавања) неће бити многострукост димензије за један мање од полазне али ипак показује неке правилности. Њу ће чинити многострукости истог типа али нижих димензија. Ову појаву имамо и на простору негативних градијентних трајекторија Морсове функције. У том случају се скуп $\mathcal{M}(p,q;f,g)$ компактификује додавањем „изломљених" градијентних трајекторија. Подсетимо се дефиниције овог појма.

Дефиниција 1.9. Кажемо да низ градијентних трајекторија $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(p,q;f,g)$ конвергира ка *изломљеној трајекторији* $(\gamma^1,...,\gamma^k)$ ако постоје реални низови $(s_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $i\in\{1,...,k\}$, такви да важи

$$\gamma_n \cdot s_n^i \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^i$$

за све $i\in\{1,...,k\}$. Овде $\gamma_n \cdot s_n^i$ означава трајекторију $\gamma_n\cdot s_n^i(s) = \gamma_n(s_n^i + s)$. Потребно је да буду задовољене и следеће једнакости $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(-\infty) = \gamma^1(-\infty)$, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(+\infty) = \gamma^k(+\infty)$ и ако је $i\neq k$ тада важи $\gamma^i(+\infty) = \gamma^{i+1}(-\infty)$.

Сада ћемо објаснити у односу на коју конвергенцију посматрамо тополошку границу низа холоморфних трака, односно у ком смислу низ холоморфних трака конвергира. У овом поглављу P означава симплектичку многострукост која не мора бити компактна. Тиме желимо да покријемо конвергенцију трака и у компактној симплектичкој многострукости и у котангентном раслојењу јер су то амбијенти са којима радимо у овој тези.

Дефиниција 1.10. Кажемо да низ пертурбовано холоморфних пресликавања $u_n : \mathbb{R}\times[0,1]\to P$ ограничене енергије *конвергира у Громовљевом смислу* ка разломљеној траци $u = (u^1,...,u^k)$, $u^i : \mathbb{R}\times[0,1]\to P$, ако постоје реални низови $(s_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $i\in\{1,...,k\}$, такви да $u_n(s+s_n^i,t)$ конвергира на компактима заједно са свим својим изводима ка u^i, $i\in\{1,...,k\}$. Додатно се захтева да важи $\lim_{n\to\infty}u_n(-\infty,t) = u^1(-\infty,t)$, $\lim_{n\to\infty}u_n(+\infty,t) = u^k(+\infty,t)$ и ако је $i\neq k$ тада важи $u^i(+\infty,t) = u^{i+1}(-\infty,t)$.

Ову конвергенцију неки аутори називају *слаба* или *геометријска конвергенција*.

У Поглављима 2.3 и 2.5 радимо са комбинованим објектима у смислу да посматрамо уређене парове које чине градијентне трајекторије и пертурбовано

[4] Осим у димензији нула

холоморфне траке. За низ таквих објеката кажемо да *конвергира ка разломљеном објекту* ако низ трајекторија конвергира ка разломљеној трајекторији или ако низ пертурбовано холоморфних трака конвегира ка разломљеној траци.

1.6 Флорова хомологија за периодичне орбите

У овом поглављу дајемо конструкцију Флорове хомологије за периодичне орбите. Амбијентна многострукост је затворена симплектичка многострукост (P,ω) која задовољава услов

$$\omega|_{\pi_2(P)} = 0, \quad c_1|_{\pi_2(P)} = 0. \tag{1.16}$$

Многострукости које задовољавају ова два услова називамо *симплектички асферичним* многострукостима. Нека је $H : P \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ временски зависан Хамилтонијан. Посматраћемо периодичне орбите овог Хамилтонијана које су решења диференцијалне једначине

$$\dot{a}(t) = X_H(a(t)), \tag{1.17}$$

где је X_H Хамилтоново векторско поље. Фиксне тачке Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ_H^1 су у 1-1 вези са 1-периодичним решењима једначине (1.17). Та веза се остварује једнакошћу

$$a(t) = \phi_H^t(x),$$

при чему је $x \in P$ фиксна тачка од ϕ_H^1. Претпоставићемо да су све периодичне Хамилтонове орбите недегенерисане, што значи да 1 није сопствена вредност од $d\phi_H^1(a(0))$. Управо ће нам контрактибилне Хамилтонове периодичне орбите бити генератори ланчастог комплекса над $\mathbb{Z}_2$

$$CF_*(P : H, J) = \mathbb{Z}_2 \left\langle a : \mathbb{S}^1 \to P \,|\, \dot{a}(t) = X_H(a(t)),\, [a] = 0 \in \pi_1(P) \right\rangle.$$

Комплекс је градуисан Конли-Цендеровим индексом

$$CF_k(P : H, J) = \mathbb{Z}_2 \left\langle a \in CF_*(P : H, J) \,|\, \mu^{CZ}(a) = k \right\rangle,$$

а гранични оператор броји пертурбоване холоморфне цилиндре који спајају две периодичне Хамилтонове орбите. Дефинишемо модулски простор таквих цилиндара

$$\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)=\left\{\begin{array}{l} u:\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1\to P,\\ \overline{\partial}_{J,H}(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial s}+J(\frac{\partial u}{\partial t}-X_H(u))=0,\\ u(-\infty,t)=a(t),\ u(+\infty,t)=b(t)\end{array}\right\}/\mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Пертурбација на цилиндрима је инваријантна дуж $s-$осе па можемо да дејствујемо групом $\mathbb{R}$ на простор оваквих пресликавања. Дејство има облик

$$u(\cdot,\cdot)\mapsto u(\cdot+s,\cdot).$$

Цилиндре из оваквог модулског простора ћемо називати непараметризованим цилиндрима. За генерички избор $\omega-$сагласне скоро комплексне структуре модулски простор $\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)$ ће бити многострукост димензије

$$\mu^{CZ}(a)-\mu^{CZ}(b)-1.$$

Када је димензија ове многострукости нула она ће бити компактна, односно то ће бити коначан скуп тачака чији број (по модулу 2) означавамо са $\sharp_2\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)$. У случају да је њена димензија 1 можемо да је компактификујемо тако да важи (видети [97] за више детаља)

$$\partial\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)=\bigcup_{c\in CF_*}\mathcal{M}^{period}(a,c:P:H,J)\times\mathcal{M}^{period}(c,b:P:H,J).$$

Гранични оператор

$$\delta:CF_k(P:H,J)\to CF_{k-1}(P:H,J)$$

је на генераторима ланчастог комплекса дефинисан са

$$\delta(a)=\sum_{b\in CF_{k-1}}\sharp_2\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)\,b,$$

и линеарно продужен на цео простор. Из описа границе једнодимензионе многострукости $\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)$ чији је број крајева паран можемо да закључимо

$$\delta\circ\delta=0.$$

Флорова хомологија за периодичне орбите се дефинише као хомологија описаног комплекса

$$HF_*(P:H,J)=H_*(CF_*(P:H,J),\delta).$$

На простору контрактибилних петљи

$$\Omega_0(P)=\{a:\mathbb{S}^1\to P\,|\,[a]=0\in\pi_1(P)\},$$

имамо добро дефинисан *функционал дејства* $a_H^P:\Omega_0(P)\to\mathbb{R}$ који је једнак

$$a_H^P(a)=-\iint_{\mathbb{D}^2}\widetilde{a}^*\omega+\int_{\mathbb{S}^1}H(a(t),t)\,dt. \tag{1.19}$$

Овде је $\widetilde{a}:\mathbb{D}^2\to P$ било које проширење пресликавања a, $\widetilde{a}|_{\mathbb{S}^1}=a$, на цео диск. Први интеграл у (1.19) не зависи од избора пресликавања $\widetilde{a}$ док год је услов (1.16) задовољен. Може се показати да су генератори ланчастог комплекса $CF_*(P:H,J)$ заправо критичне тачке од a_H^P.

Познато је да функционал дејства опада дуж пертурбованих холоморфних цилиндара. То следи из следећег низа једнакости

$$\begin{aligned}a_H^P(b)-a_H^P(a)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds}a_H^P(u(s,t))\,ds=\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds}\left[-\iint_{\mathbb{D}^2}\widetilde{u}^*(s,t)\omega+\int_{\mathbb{S}^1}H(u(s,t),t)\,dt\right]ds.\end{aligned}$$

Овде је u пертурбовани холоморфни цилиндар који спаја периодичне орбите a и b. Пресликавање $\widetilde{u}^*(s,t)$ је проширење петље $u(s,t)$ на било који диск. Даље, користећи Картанову формулу и чињеницу да је симплектичка форма затворена, добијамо једнакости

$$\begin{aligned}a_H^P(b)-a_H^P(a)&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\iint_{\mathbb{D}^2}\frac{d}{ds}\widetilde{u}^*\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1}\frac{d}{ds}H(u(s,t),t)\,dt=\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\iint_{\mathbb{D}^2}\widetilde{u}^*\left(d(i_X\omega)+i_Xd\omega\right)+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1}dH\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)dt\,ds=\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\iint_{\mathbb{D}^2}d\widetilde{u}^*i_X\omega-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1}\omega\left(X_H,\frac{\partial u}{\partial s}\right)dt\,ds.\end{aligned}$$

Векторско поље X једнако је

$$X(\widetilde{u})=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s}.$$

Настављамо претходни рачун

$$
\begin{aligned}
a_H^P(b) - a_H^P(a) &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1} u^* i_X\omega - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1} \omega\left(X_H, \frac{\partial u}{\partial s}\right) dt\, ds = \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(X, \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt\, ds - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(X_H, \frac{\partial u}{\partial s}\right) dt\, ds = \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt\, ds - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(X_H, \frac{\partial u}{\partial s}\right) dt\, ds = \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_H\right) dt\, ds = \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, J\frac{\partial u}{\partial s}\right) dt\, ds = \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|_J^2 dt\, ds \leq 0.
\end{aligned}
$$

Последња једнакост следи из чињенице да је скоро комплексна структура $\omega-$сагласна.

Опадање функционала дејства дуж холоморфних цилиндара омогућава нам да дефинишемо филтрирану Флорову хомологију. Иста је генерисана ланчастим комплексом

$$CF_*^\lambda(P : H, J) = \mathbb{Z}_2 \left\langle a \in CF_*(P : H, J) \,|\, a_H^P(a) < \lambda \right\rangle.$$

Гранични оператор је задат рестрикцијом граничног оператора са већег комплекса

$$\delta^\lambda = \delta|_{CF_*^\lambda(P:H,J)} : CF_k^\lambda(P : H, J) \to CF_{k-1}^\lambda(P : H, J),$$

и добро је дефинисан због опадања функционала дејства a_H^P дуж цилиндара. *Филтрирана Флорова хомологија за периодичне орбите* дефинише се као хомологија комплекса CF^λ

$$HF_*^\lambda(P : H, J) = H_*(CF_*^\lambda(P : H, J), \delta^\lambda).$$

Познато је да Флорова хомологија не зависи од избора Хамилтонијана ни скоро комплексне структуре, док филтриране хомологије зависе од избора Хамилтонијана. Такође је познато да је Флорова хомологија изоморфна Морсовој хомологији целог простора

$$HF_*(P : H, J) \cong HM_*(P).$$

Један начин да се конструише овај изоморфизам јесте посматрањем C^2 малих

Морсових функција на P чије ће Хамилтонове орбите (ако f посматрамо као Хамилтонијан који не зависи од времена) бити само критичне тачке од f. Други начин да се покаже овај изоморфизам јесте помоћу пресликавања типа ПСС. Сада ћемо, пратећи [91], у кратким цртама извести конструкцију ПСС пресликавања.

Фиксирајмо реалан број $R > 0$. Користићемо глатку функцију $\rho_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ која задовољава услове

$$\rho_R(s) = \begin{cases} 1, & |s| \geq R+1, \\ 0, & |s| \leq R. \end{cases} \tag{1.20}$$

Нека је $f : P \to \mathbb{R}$ Морсова функција и g Риманова метрика на P таква да је пар (f,g) Морс-Смејлов. На нивоу ланаца дефинишемо пресликавање

$$PSS : CM_*(P : f) \to CF_*(P : H, J),$$

које на генераторима узима вредност

$$PSS(p) = \sum_a n(p,a)\, a, \tag{1.21}$$

а даље се продужава по линеарности. Број $n(p,a)$ представља (по модулу 2) број парова (γ, u) (видети Слику 3)

$$\gamma : (-\infty, 0] \to P,\ u : [0, +\infty) \times \mathbb{S}^1 \to P$$

који задовољавају систем

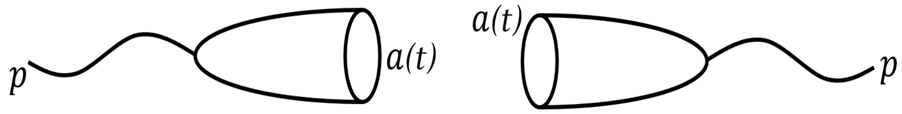
$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \partial_s u + J(\partial_t u - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ \gamma(-\infty) = p,\ u(+\infty, t) = a(t), \\ \gamma(0) = u(0, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Овако дефинисано пресликавање комутира са одговарајућим диференцијалима

$$PSS \circ \partial_M = \delta \circ PSS,$$

и индукује хомоморфизам на нивоу хомологија

$$PSS : HM_*(P : f) \to HF_*(P : H, J).$$



Слика 3: Комбиновани објекти који дефинишу пресликавања PSS и PSS^{-1}

Оно ће заправо бити изоморфизам чији инверз броји „обрнуте” комбиноване објекте. То су уређени парови (u, γ) који задовољавају систем

$$\begin{cases} u : (-\infty, 0] \times S^1 \to P, \quad \gamma : [0, +\infty) \to P, \\ \partial_s u + J(\partial_t u - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ u(-\infty, t) = a(t),\ \gamma(+\infty) = p, \\ u(0, \frac{1}{2}) = \gamma(0). \end{cases}$$

1.7 Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке

Као што смо већ напоменули у уводу, Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке представља уопштење Флорове хомологије за периодичне орбите. Она није увек добро дефинисана у амбијенту компактне симплектичке многострукости већ захтева неке тополошке рестрикције. Претпоставке који ми овде користимо могу да се ослабе. Ипак користимо рестриктивније претпоставке због једноставности излагања. У амбијенту котангентног раслојења (које није компактна многострукост) не морамо да уводимо никакве тополошке рестрикције. Ипак, да бисмо премостили проблем некомпактности амбијентне многострукости морамо да посматрамо специјалну класу скоро комплексних структура која ће контролисати понашање холоморфних трака.

1.7.1 Конормалне Лагранжеве подмногострукости

Нека је $H : T^*M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан са компактним носачем такав да важи

$$\nu^* N \pitchfork \phi_H^1(o_M), \tag{1.22}$$

где је N затворена подмногострукост од M. Ланчасти комплекс помоћу кога дефинишемо Флорову хомологију биће $\mathbb{Z}_2-$векторски простор генерисан коначним скупом $\nu^*N \cap \phi_H^1(o_M)$. Комплекс означавамо са

$$CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$$

при чему је J скоро комплексна структура на T^*M. Овде нам J игра улогу параметра, односно, варираћемо J са циљем да постигнемо неке услове регуларности. Може се показати (видети [85] за детаље) да су пресечне тачке $\nu^*N \cap \phi_H^1(o_M)$ у $1-1$ вези са Хамилтоновим путевима који почињу на нултом сечењу o_M а завршавају се на конормалном раслојењу ν^*N. Више ћемо користити овај други опис генератора ланчастог комплекса, односно

$$CF_*(o_M, \nu^*N : H, J) = \mathbb{Z}_2 \left\langle x : [0,1] \to T^*M, \,|\, \dot{x} = X_H(x),\, x(0) \in o_M,\, x(1) \in \nu^*N \right\rangle.$$

Комплекс градуишемо целобројним Масловљевим индексом

$$CF_k(o_M, \nu^*N : H, J) = \mathbb{Z}_2\langle x \in CF_*(o_M, \nu^*N : H, J) |\, \mu_N(x) + \frac{\dim N}{2} = k\rangle.$$

Гранични оператор ∂_F броји пертурбоване холоморфне траке које спајају Хамилтонове путеве x и y,

$$\partial_F(x) = \sum_{y \in CF_*} n(x, y; H, J)\, y.$$

Овде је $n(x, y; H, J)$ број елемената (по модулу 2) нуладимензионе многострукости

$$\mathcal{M}(x, y; H, J) = \left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \overline{\partial}_{J,H}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M,\ u(s,1) \in \nu^*N, \\ u(-\infty, t) = x(t),\ u(+\infty, t) = y(t) \end{array} \right\} / \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Овде сечемо по $\mathbb{R}-$дејству које делује као транслација дуж холоморфних трака. Пар (H, J) ћемо називати регуларним паром ако је линеаризација пертурбованог Коши-Римановог оператора $\overline{\partial}_{J,H}$ сурјективна за све $u \in \mathcal{M}(x, y; H, J)$. За тако одабран пар модулски простор $\mathcal{M}(x, y; H, J)$ ће заиста бити многострукост димензије

$$\dim \mathcal{M}(x, y; H, J) = \mu_N(x) - \mu_N(y) - 1$$

(видети [94] за више детаља). Регуларност овог пара се постиже за избор скоро комплексне структуре из генеричког скупа. Једнодимензиона компонента многострукости $\mathcal{M}(x,y;H,J)$ биће једнака унији

$$\partial\mathcal{M}(x,y;H,J)=\bigcup_z \mathcal{M}(x,z;H,J)\times\mathcal{M}(z,y;H,J).$$

Ова једнакост се показује користећи Громовљеву компактност и лепљење, слично као у [97]. Бројањем крајева ове многострукости долазимо до једнакости

$$\partial_F\circ\partial_F=0.$$

Флорова хомологија за пар (o_M,ν^*N) дефинише се као хомологија описаног комплекса

$$HF_*(o_M,\nu^*N:H,J)=H_*(CF_*(o_M,\nu^*N:H,J),\partial_F).$$

Познато је да ова хомологија не зависи од избора регуларног пара (H,J). За било која два регуларна пара (H^α,J^α) и (H^β,J^β) изоморфизам између одговарајућих Флорових хомологија

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}:HF_*(o_M,\nu^*N:H^\alpha,J^\alpha)\to HF_*(o_M,\nu^*N:H^\beta,J^\beta)$$

индукован је ланчастим хомоморфизмом

$$\sigma_{\alpha\beta}:CF_*(o_M,\nu^*N:H^\alpha,J^\alpha)\to CF_*(o_M,\nu^*N:H^\beta,J^\beta).$$

На генераторима комплекса узима вредност

$$\sigma_{\alpha\beta}(x^\alpha)=\sum_{x^\beta}n(x^\alpha,x^\beta;H^{\alpha\beta}J^{\alpha\beta})\,x^\beta,$$

где је $n(x^\alpha,x^\beta;H^{\alpha\beta}J^{\alpha\beta})$ број елемената компактне нуладимензионе многострукости

$$\mathcal{M}(x^\alpha,x^\beta;H^{\alpha\beta}J^{\alpha\beta})=\begin{cases} u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M,\\ \frac{\partial u}{\partial s}+J^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t}-X_{H^{\alpha\beta}}(u))=0,\\ u(s,0)\in o_M,\ u(s,1)\in\nu^*N,\\ u(-\infty,t)=x^\alpha(t),\ u(+\infty,t)=x^\beta(t).\end{cases}\tag{1.24}$$

Овде су $H_s^{\alpha\beta}$ и $J_s^{\alpha\beta}$ хомотопије између одговарајућих Хамилтонијана и скоро комплексних структура. Другим речима, за неко $R>0$ важи

$$H_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} H^\alpha, & s \leq -R \\ H^\beta, & s \geq R, \end{cases}$$

$$J_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} J^\alpha, & s \leq -R \\ J^\beta, & s \geq R. \end{cases}$$

Сада ћемо дефинисати одговарајући функционал дејства за ову хомологију. Посматрамо простор путева чији су крајеви на издвојеним Лагранжевим подмногострукостима

$$\Omega(o_M, \nu^*N) = \{\gamma : [0,1] \to T^*M \mid \gamma(0) \in o_M,\, \gamma(1) \in \nu^*N\}.$$

Функционал дејства $\mathcal{A}_H : \Omega(o_M, \nu^*N) \to \mathbb{R}$ дефинисан је са

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = -\int \gamma^*\theta + \int_0^1 H(\gamma(t), t)\, dt,$$

где је θ Лиувилова $1-$форма на котангентном раслојењу. Критичне тачке овог функционала ће бити управо Хамилтонови путеви од H, односно елементи комплекса $CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$.

Када имамо добро дефинисан функционал дејства, који опада дуж холоморфних трака, можемо да дефинишемо и филтрирану Флорову хомологију. Као што смо већ истакли, ова хомологија игра важну улогу при дефинисању спектралних инваријанти. Она ће, за разлику од обичне хомологије, зависити од Хамилтонијана. Дефинисаћемо један поткомплекс нашег комплекса. Нека је

$$CF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H, J) = \mathbb{Z}_2\langle x \in CF_*(o_M, \nu^*N : H, J) \mid \mathcal{A}_H(x) < \lambda\rangle. \tag{1.25}$$

Гранични оператор чува овако дефинисану филтрацију јер ако $u \in \mathcal{M}(x, y; H, J)$ тада је $\mathcal{A}_H(y) \leq \mathcal{A}_H(x)$. То значи да је рестрикција

$$\partial_F^\lambda = \partial_F|_{CF_*^\lambda}$$

једно гранично пресликавање на новом комплексу CF_*^λ. *Филтрирана Флорова хомологија* се дефинише као хомологија овог поткомплекса

$$HF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H, J) = H_*(CF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H, J), \partial_F^\lambda). \tag{1.26}$$

Знамо да T^*M није компактна многострукост. Услов компактности је неопходан за примену многих теорема. Овај проблем можемо да превазиђемо избором одговарајућих скоро комплексних структура. Ако је на многострукости M задата Риманова метрика G тада придружена Леви-Чивитина конексија индукује канонску скоро комплексну структуру на T^*M коју ћемо означити са J_G. Оваква скоро комплексна структура задовољава следеће услове

- J_G је ω-компатибилна,
- За свако $(q,p) \in T^*M$, J^G слика вертикалне тангентне векторе у хоризонталне тангентне векторе у односу на Леви-Чивитину конексију,
- На нултом сечењу, $o_M \subset T^*M$, J^G сваком вектору $v \in T_qM \subset T_{(q,0)}(T^*M)$ додељује котангентни вектор $J_G(v) = G(v,\cdot) \in T_q^*M \subset T_{(q,0)}(T^*M)$. Овде смо користили идентификацију

$$T_{(q,0)}(T^*M) = T_qM \oplus T_q^*M.$$

Кад год имамо потребу за скоро комплексном структуром на котангентном раслојењу подразумева се да ће она бити из скупа

$$j^c = \{J \mid J \text{ је } \omega - \text{сагласна }, J = J_G \text{ ван компактног подскупа у } T^*M\}. \quad (1.27)$$

Овакав избог скоро комплексних структура нам омогућава да контролишемо пертурбовано холоморфна пресликавања у амбијенту котангентног раслојења које није компактна многострукост. Наиме, слика сваке пертурбоване холоморфне траке у T^*M (у односу на скоро комплексну структуру из j^c) ће бити у компактном подскупу од T^*M (видети Теорему 3.2 у [85]).

1.7.2 Затворена симплектичка многострукост

Нека је (P,ω) компактна симплектичка многострукост и $L \subset P$ њена затворена Лагранжева подмногострукост, такви да важи

$$\omega|_{\pi_2(P,L)} = 0, \quad \mu|_{\pi_2(P,L)} = 0. \quad (1.28)$$

Пар (P,L) који задовољава услов (1.28) назива се релативно асферична подмногострукост (у некој литератури се може наћи и термин ослабљено тачна подмногострукост). Пример таквог пара је подторус $L = \mathbb{T}^k \times \{0\}$ у торусу $P = \mathbb{T}^{2k}$ (знамо да је $\pi_2(\mathbb{T}^{2k}, \mathbb{T}^k) = 0$ па је услов (1.28) задовољен). Још неки примери се могу добити „plumbing" конструкцијом (видети [115]).

Дефинисаћемо Лагранжеву Флорову хомологију за подмногострукост L која задовољава ове услове иако је познато да ти услови могу да се ослабе. Нека је

$$H : P \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

гладак Хамилтонијан, такав да се L и његова Хамилтонова деформација секу трансверзално,

$$L \pitchfork \phi_H^1(L). \tag{1.29}$$

Ланчасти комплекс, помоћу кога дефинишемо Флорову хомологију, генерисан је Хамитоновим путевима који почињу и завршавају на L а тривијални су у релативној хомотопској групи. Комплекс је градуисан релативним Масловљевим индексом који смо дефинисали у Поглављу 1.4

$$CF_k(L, P : H, J) = \mathbb{Z}_2\langle x : [0,1] \to P \mid \\ \dot{x} = X_H(x),\ x(0), x(1) \in L,\ [x] = 0 \in \pi_1(P, L),\ \mu_L(x) = k\rangle.$$

Гранични оператор броји пертурбоване холоморфне траке из модулског простора

$$\mathcal{M}(x, y : L : H, J) = \left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to P, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)) = 0, \\ u(s,0), u(s,1) \in L,\ s \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty, t) = x(t),\ u(+\infty, t) = y(t) \end{array} \right\} / \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

посеченог по $\mathbb{R}-$дејству. Дејство је (као и раније) задато транслацијом дуж $s-$осе. За генерички избор скоро комплексне структуре $\mathcal{M}(x, y : L : H, J)$ ће бити многострукост димензије

$$\mu_L(x) - \mu_L(y) - 1.$$

Када је та димензија једнака нули $\mathcal{M}(x, y : L : H, J)$ ће бити компактна многострукост, односно коначан број тачака. Број тачака (по модулу 2) означавамо са $n(x, y : L : H, J)$. Сада можемо да дефинишемо гранично пресликавање

$$\partial : CF_k(L, P : H, J) \to CF_{k-1}(L, P : H, J).$$

На генераторима је оно једнако

$$\partial(x) = \sum_{y \in CF_{k-1}} n(x, y : L : H, J)\, y$$

а даље је продужено по линеарности. Из описа тополошке границе једнодимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}(x, y : L : H, J)$ закључујемо да важи

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке дефинише се као хомологија дефинисаног комплекса

$$HF_*(L, P : H, J) = H_*(CF_*(L, P : H, J), \partial).$$

Генератори ланчастог комплекса ће, као и у ранијим случајевима, бити критичне тачке функционала дејства. Функционал

$$\mathcal{A}_H^{P:L} : \Omega_0(P, L) \to \mathbb{R}$$

је дефинисан на простору путева

$$\Omega_0(P, L) = \{\gamma : [0,1] \to P, \mid \gamma(0), \gamma(1) \in L, [\gamma] \in \pi_1(P, L)\}.$$

У путу γ са крајевима на L он узима вредност

$$\mathcal{A}_H^{P:L}(\gamma) = -\iint_{\mathbb{D}_+^2} h^*\omega + \int_0^1 H(\gamma(t), t)\, dt. \tag{1.31}$$

Овде је проширење h било које пресликавање из горње половине диска

$$h : \mathbb{D}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\} \to P,$$

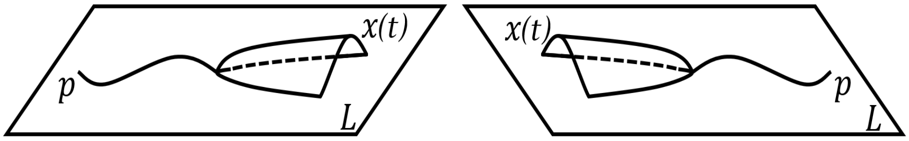
које се на горњој кружници рестрикује на γ

$$h(e^{i\pi t}) = \gamma(t)$$

и задовољава гранични услов $h(t) \in L$ за $t \in [-1, 1]$. Како смо претпоставили да је $\omega|_{\pi_2(P,L)} = 0$, први интеграл у (1.31) неће зависити од проширења h.

Функционал дејства опада дуж холоморфних трака које спајају два Хамилтонова пута, па можемо да дефинишемо филтрирану хомологију. Гранични оператор ∂ се рестрикује на поткомплекс

$$CF_*^\lambda(L, P : H, J) = \mathbb{Z}_2 \left\langle x \in CF_*(L, P : H, J) \mid \mathcal{A}_H^{P:L}(x) < \lambda \right\rangle.$$



Слика 4: Комбиновани објекти који дефинишу пресликавања PSS^L и $(PSS^L)^{-1}$

и даје гранично пресликавање на том поткомплексу

$$\partial^\lambda = \partial|_{CF_*^\lambda}.$$

Филтрирана Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке дефинише се као хомологија поткомплекса

$$HF_*^\lambda(L, P : H, J) = H_*(CF_*^\lambda(L, P : H, J), \partial^\lambda).$$

Сада ћемо у кратким цртама извести конструкцију пресликавања типа ПСС које даје изоморфизам између $HF_*(L, P : H, J)$ и Морсове хомологије $HM_*(L : f, g)$ где је $f : L \to \mathbb{R}$ Морсова функција на L. Ова конструкција је изведена у [4] у општијем случају (без претпоставки (1.28)). Нека је $p \in CM_*(L : f, g)$ критична тачка функције f и $x \in CF_*(L, P : H, J)$ Хамилтонов пут за H. Пресликавање типа ПСС

$$PSS^L : CM_*(L : f, g) \to CF_*(L, P : H, J),$$

на генераторима узима вредност

$$PSS^L(p) = \sum_x n(p, x)\, x.$$

Овде је $n(p, x)$ број елемената (по модулу 2) парова (γ, u) који задовољавају систем једначина (видети Слику 4)

$$\begin{cases} \gamma : (-\infty, 0] \to L, \quad u : [0, +\infty) \times [0, 1] \to P, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \partial_s u + J(\partial_t u - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ u(s, 0), u(s, 1), u(0, t) \in L, \\ \gamma(-\infty) = p,\ u(+\infty, t) = x(t), \\ \gamma(0) = u(0, \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{1.32}$$

Испоставља се да је PSS^L ланчасто пресликавање које индукује хомоморфизам на нивоу хомологија

$$PSS^L : HM_*(L : f, g) \to HF_*(L, P : H, J).$$

Важиће и јаче својство. То ће бити изоморфизам чији инверз, на нивоу ланаца,

$$(PSS^L)^{-1} : CF_*(L, P : H, J) \to CM_*(L : f, g),$$

броји инверзне објекте. Односно

$$(PSS^L)^{-1}(x) = \sum_p n(x, p)\, p,$$

где је $n(x, p)$ број (по модулу 2) уређених парова (u, γ) који задовољавају систем

$$\begin{cases} u : (-\infty, 0] \times [0, 1] \to P, \quad \gamma : [0, +\infty) \to L, \\ \partial_s u + J(\partial_t u - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ u(s, 0), u(s, 1), u(0, t) \in L, \\ u(-\infty, t) = x(t),\ \gamma(+\infty) = p, \\ u(0, \frac{1}{2}) = \gamma(0). \end{cases}$$

1.8 Флорова хомологија за отворене скупове

У радовима [57, 58] аутори дају конструкцију Флорове хомологије за отворене скупове. У овом поглављу дајемо опис те конструкције.

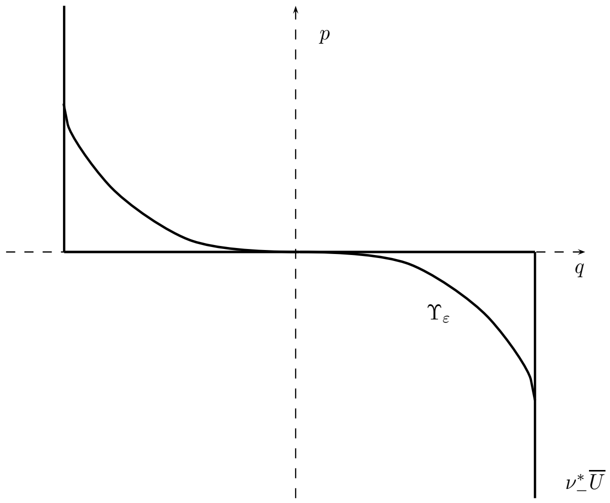
Нека је $U \subset M$ отворен подскуп са глатком границом ∂U. Основна идеја је да скупу U придружимо неки симплектички објекат. Знамо да смо у случају затвореног подскупа $N \subset M$ посматрали његово конормално раслојење $\nu^* N$ које је Лагранжева подмногострукост у T^*M. Поставља се питање коју подмногострукост придружити објекту U. Као једно од решења долазимо до следећег скупа

$$\nu^*_- \overline{U} = o_U \coprod \nu^*_-(\partial U), \tag{1.33}$$

где је $\nu^*_-(\partial U)$ негативан део конормалног раслојења $\nu^*(\partial U)$

$$\nu^*_-(\partial U) = \{(q, p) \in \nu^*(\partial U) \mid p(\mathbf{n}) \leq 0, \text{ за } \mathbf{n} \text{ спољну нормалу на } \partial U\}.$$

Скуп $\nu^*_- \overline{U}$ се назива *негативан конормалан скуп од* $\overline{U}$. Простор $\nu^*_- \overline{U}$ је сингуларан и не можемо да разматрамо Коши-Риманову јендачину са граничним условима на њему. Оно што је згодно јесте да овај сингуларан простор допушта



Слика 5: Сингуларан простор $\nu_-^*\overline{U}$ и једна његова апроксимација Υ_ε

апроксимацију тачним Лагранжевим подмногострукостима. Сада ћемо објаснити конструкцију тих апроксимација које означавамо са Υ (видети и [58]). На Слици 5 приказан је $\nu_-^*\overline{U}$ и једна апроксимација Υ_ε у случају када је $U = (-1,1) \subset \mathbb{R}$.

За конструкцију апроксимација у општем случају користимо апроксимације у димензији један. Нека је $Tb(\partial U)$ цеваста околина границе ∂U. Знамо да важи

$$Tb(\partial U) \cong \partial U \times (-1,1)$$

Ако је C сингуларна крива у $(-1,1)\times\mathbb{R}$ дефинисана са

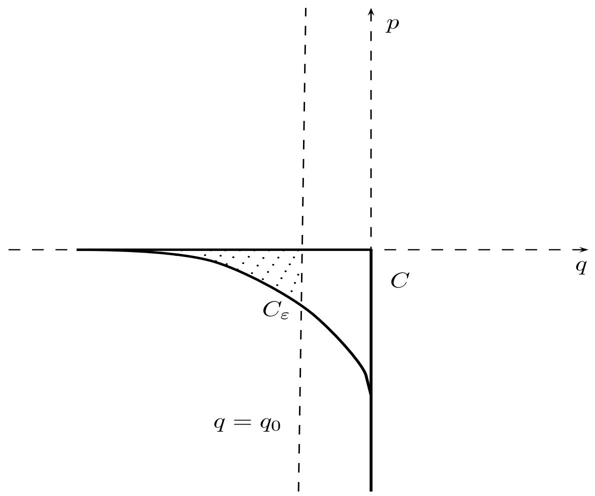
$$C = \{(q,0) \mid -1 \leq q \leq 0\} \cup \{(0,p) \mid p \geq 0\},$$

тада је

$$\nu_-^*\overline{U} \cap \pi^{-1}(Tb(\partial U)) = o_{\partial U} \times C.$$

Овде $o_{\partial U} \times C$ видимо као подскуп котангентног раслојења јер је

$$o_{\partial U} \times C \subset T^*(\partial U) \times ((-1,1)\times\mathbb{R}),$$



Слика 6: Функција h_{Υ_ε} представља површину шрафиране области

а са друге стране имамо низ идентификација

$$\begin{aligned} T^*M|_{Tb(\partial U)} = T^*(Tb(\partial U)) &\cong T^*(\partial U \times (-1,1)) \\ &\cong T^*(\partial U) \times T^*(-1,1) \\ &\cong T^*(\partial U) \times ((-1,1) \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Криву C апроксимирамо фамилијом кривих C_ε која је добијена од једне почетне криве C_1. Крива C_1 је неко монотоно утапање од $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^2$ које изгледа као на Слици 6. Фамилија C_ε се добије коничним рескалирањем криве C_1 из угла криве C, тачке $(0,0)$. Сада апроксимацију од $\nu_-^*\overline{U}$ дефинишемо као

$$\Upsilon_\varepsilon = \nu_-^*\overline{U} \setminus \pi^{-1}(Tb(\partial U)) \cup (o_{\partial U} \times C_\varepsilon), \tag{1.34}$$

при чему $o_{\partial U} \times C_\varepsilon$ видимо као подскуп од $T^*M|_{Tb(\partial U)}$ на горе описани начин. Показаћемо да је Υ_ε тачна Лагранжева подмногострукост. Дефинишимо функцију $h_{\Upsilon_\varepsilon} : \Upsilon_\varepsilon \to \mathbb{R}$ тако да задовољава следеће услове

- на скупу $\nu_-^*\overline{U} \setminus \pi^{-1}(Tb(\partial U)) = o_M|_{U \setminus Tb(\partial U)}$ функција h_{Υ_ε} једнака је нули,
- у средишњем делу $\nu_-^*\overline{U} \cap \pi^{-1}(Tb(\partial U))$ функција $h_{\Upsilon_\varepsilon}(q_0, p_0)$ представља површину шрафиране области на Слици 6 (област је ограничена кривом C_ε, q-осом и правом $q = q_0$),
- на скупу $\nu_-^*(\partial U) \cap \Upsilon_\varepsilon$ функција h_{Υ_ε} једнака је површини која је ограничена q-осом, p-осом и кривом C_ε.

Једноставно се проверава да важи

$$\theta|_{T\Upsilon_\varepsilon} = dh_{\Upsilon_\varepsilon},$$

(подсетимо се да је θ канонска Лиувилова $1-$форма на T^*M). Ова фамилија апроксимација Υ_ε конвергира ка $\nu_-^*\overline{U}$, када $\varepsilon \to 0$, у Липшицовој топологији[5].

Сада када смо дефинисали апроксимације Υ_ε можемо да дефинишемо Флорову хомологију за пар $(o_M, \Upsilon_\varepsilon)$.

Нека је $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан са компактним носачем, такав да важи

$$\phi_H^1(o_M) \pitchfork o_M,$$

и

$$\phi_H^1(o_M) \cap o_M|_{\partial U} = \emptyset, \quad \phi_H^1(o_M) \pitchfork \nu_-^*\overline{U}. \tag{1.35}$$

Оба наведена услова можемо да задовољимо генеричким избором Хамилтонијана H.

Дефинишимо Флоров комплекс $CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon)$ као скуп Хамилтонових путева

$$x : [0,1] \to T^*M, \ \dot{x} = X_H(x),$$

који задовољавају граничне услове

$$x(0) \in o_M, \ x(1) \in \Upsilon_\varepsilon.$$

Генератори комплекса ће бити критичне тачке ефективног функционала дејства $\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon} : \Omega(o_M, \Upsilon_\varepsilon) \to \mathbb{R}$ који је дефинисан са

$$\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(\gamma) = -\int \gamma^*\theta + \int_0^1 H(\gamma(t), t)dt + h_{\Upsilon_\varepsilon}(\gamma(1)). \tag{1.36}$$

Функционал делује на простору свих путева са одговарајућим крајевима

$$\Omega(o_M, \Upsilon_\varepsilon) = \{\gamma : [0,1] \to T^*M \,|\, \gamma(0) \in o_M, \ \gamma(1) \in \Upsilon_\varepsilon\}.$$

Приметимо да се у дефиницији функционала дејства појављује додатан члан, $h_{\Upsilon_\varepsilon}(\gamma(1))$. Како је $i_{\Upsilon_\varepsilon}^*\theta \neq 0$ овај члан је неопходан да бисмо постигли да се

[5]Липшицово растојање између два простора се дефинише као

$$d_L(A, B) = \inf\{|\log \mathrm{dil}(f)| + |\log \mathrm{dil}(f^{-1})| \,|\, f : A \to B \text{ је би-Липшицов хомеоморфизам}\},$$

при чему је $\mathrm{dil}(f)$ најмања Липшицова константа од f (видети [64] за дефиницију)

$d\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x)$ анулира на Хамилтоновим путевима $x \in CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon)$.

Комплекс $CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon)$ се градуише целобројним вредностима

$$\mu(x) \equiv \mu_M(x) + \frac{1}{2}\dim M, \quad \text{ако } x(1) \in o_U$$
$$\mu(x) \equiv \mu_{\partial U}(x) + \frac{1}{2}\dim(\partial U), \quad \text{ако } x(1) \in \nu^*(\partial U).$$

У претходним једначинама $\mu_S(x)$ је канонски додељен Масловљев индекс дефинисан у Поглављу 1.4 за сваку глатку затворену подмногострукост $S \subset M$.

Гранични оператор

$$\partial_{J_\varepsilon,H} : CF_k(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) \to CF_{k-1}(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon),$$

је дефинисан као број пертурбованих холоморфних трака са границом на o_M и Υ_ε и одговарајућим асимптотским крајевима

$$\begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \Upsilon_\varepsilon, \\ u(-\infty,t) = x(t),\, u(+\infty,t) = y(t). \end{cases} \tag{1.37}$$

Скуп решења овог система, посеченог по $\mathbb{R}-$дејству, означићемо са $\mathcal{M}(x, y : o_M, \Upsilon_\varepsilon; H, J_\varepsilon)$.

Флорова хомологија за пар $(o_M, \Upsilon_\varepsilon)$ дефинише се као хомологија описаног комплекса

$$HF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) = H_*(CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon), \partial_{J_\varepsilon,H}).$$

Хоћемо да дефинишемо филтрирану Флорову хомологију за апроксимације. Као и претходним случајевима, филтрација се задаје функционалом $\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}$ који опада дуж пертурбованих холоморфних трака. Другим речима, ако постоји $u \in \mathcal{M}(x, y : o_M, \Upsilon_\varepsilon; H, J_\varepsilon)$ тада је

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(y(t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds}\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,t))\, ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{d}{ds}\int u(s,t)^*\theta + \frac{d}{ds}\int_0^1 H(u(s,t),t)\, dt\right] ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} h_{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,1))\, ds. \end{aligned}$$

Сада ћемо у првом интегралу искористити Картанову формулу при чему је X векторско поље генерисано пресликавањима u, $X(s,t) = \frac{\partial u}{\partial s}(s,t)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(y(t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x(t)) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int u(s,t)^*\left(di_X\theta + i_X d\theta\right) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dH\frac{\partial u}{\partial s}\,dt\,ds + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dh_{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1)\,ds.\end{aligned}$$

Лиувилова форма θ задаје симплектичку форму $\omega = d\theta$ па имамо следеће једнакости.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(y(t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x(t)) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 du(s,t)^* i_X\theta - \int_{-\infty}^{+\infty}\int u(s,t)^* i_X\omega + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 dH\frac{\partial u}{\partial s}\,dt\,ds + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dh_{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1)\,ds = \\ = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\theta(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1) - \theta(u(s,0))\frac{\partial u}{\partial s}(s,0)\right) - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(X, \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(X_H, \frac{\partial u}{\partial s}\right)\,dt\,ds + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dh_{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1)\,ds.\end{aligned}$$

Знамо да је $\theta|_{To_M} = 0$ и да $\frac{\partial u}{\partial s}(s,o) \in To_M$ па је други члан у првом интегралу једнак нули. Следи једнакост

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(y(t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\theta(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1) + dh_{\Upsilon_\varepsilon}(u(s,1))\frac{\partial u}{\partial s}(s,1)\right)\,ds - \\ - \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_H\right)\,dt\,ds\end{aligned}$$

Функције h_{Υ_ε} задовољавају услов $dh_{\Upsilon_\varepsilon} = \theta|_{T\Upsilon_\varepsilon}$ а $\frac{\partial u}{\partial s}(s,1) \in T\Upsilon_\varepsilon$ па је први интеграл у последњој једнакости једнак нули. Преостаје нам још један члан

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(y(t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x(t)) = -\int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\,dt\,ds = \\ = -\int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \left\|\frac{\partial u}{\partial s}\right\|_J^2\,dt\,ds \leq 0,\end{aligned}$$

који је негативан јер је J скоро комплексна структура сагласна са симплектичком формом. Дакле, гранични оператор ће чувати филтриран комплекс

$$CF_*^\lambda(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) = \mathbb{Z}_2 \left\langle x \in CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) \,|\, \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\varepsilon}(x) < \lambda \right\rangle,$$

па можемо да дефинишемо *филтрирану Флорову хомологију за апроксимацију* Υ_ε

$$HF_*^\lambda(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) = H_*(CF_*^\lambda(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon), \partial_{J_\varepsilon, H}|_{CF_*^\lambda}).$$

Означићемо са

$$\imath_{\Upsilon_\varepsilon *}^\lambda : HF_*^\lambda(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) \to HF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon), \tag{1.38}$$

хомоморфизам на нивоу хомологија који је индукован инклузијом ланчастих комплекса

$$\imath_{\Upsilon_\varepsilon}^\lambda : CF_*^\lambda(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon) \to CF_*(o_M, \Upsilon_\varepsilon : H, J_\varepsilon).$$

Слично као и у случају Флорове хомологије за пар $(o_M, \nu^* N)$, Флорова хомологија за апроксимацију Υ неће зависити од избора регуларног пара (H, J). Пресликавање које успоставља изоморфизам, за нека два регуларна пара (H_β, J_β) и (H_α, J_α), означићемо са

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}^\Upsilon : HF_*(o_M, \Upsilon : H_\alpha, J_\alpha) \to HF_*(o_M, \Upsilon : H_\beta, J_\beta). \tag{1.39}$$

На нивоу ланчастог комплекса оно је индуковано пресликавањем

$$\sigma_{\alpha\beta}^\Upsilon : CF_*(o_M, \Upsilon : H_\alpha, J_\alpha) \to CF_*(o_M, \Upsilon : H_\beta, J_\beta).$$

Као и у случају када смо дефинисали $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$ за конормалну Флорову хомологију (видети (1.24)), бројимо пертурбоване траке код којих је пертурбација на једном крају дата Хамилтонијаном H_α. Затим се та пертурбација глатко мења и на другом крају је одређена Хамилтонијаном H_β. У односу на већ поменут случај разлика је у томе што имамо другачије граничне услове. Прецизније

$$\sigma_{\alpha\beta}^\Upsilon(x^\alpha) = \sum_{x^\beta} n(x^\alpha, x^\beta : o_M, \Upsilon; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})\, x^\beta,$$

где $n(x^\alpha, x^\beta : o_M, \Upsilon; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$ означава број елемената многострукости

$$\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta : o_M, \Upsilon; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H^{\alpha\beta}}(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M, \ u(s,1) \in \Upsilon, \\ u(-\infty, t) = x^\alpha(t), \, u(+\infty, t) = x^\beta(t). \end{cases}$$

Сада ћемо дефинисати пресликавање које повезује Флорове хомологије за различите апроксимације Υ. Прво ћемо дефинисати релацију $\leq$ међу овим апроксимацијама. Означимо са φ_Υ функцију која задовољава једнакост

$$h_\Upsilon = \varphi_\Upsilon \circ \pi,$$

на скупу U. Ова функција је добро дефинисана јер је рестрикција

$$\pi : \Upsilon \setminus \pi^{-1}(\partial U) \to U,$$

дифеоморфизам (овде је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција). Приметимо да смо пресликавање

$$\varphi_\Upsilon : U \to \mathbb{R},$$

могли да дефинишемо и као

$$\varphi_\Upsilon = h_\Upsilon \circ \pi^{-1}.$$

Користићемо се функцијама φ_Υ да бисмо упоредили неке две апроксимације. Овај појам издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.11. Нека су Υ_α и Υ_β две апроксимације сингуларне подмногострукости $\nu_-^*\overline{U}$. Кажемо да важи

$$\Upsilon_\alpha \leq \Upsilon_\beta \quad \text{ако је } \varphi_{\Upsilon_\alpha} \leq \varphi_{\Upsilon_\beta}.$$

Када имамо две апроксимације које су упоредиве у смислу релације $\leq$ користиће нам да их спојимо одговаајућим фамилијама апроксимација.

Дефиниција 1.12. Једнопараметарска фамилија апроксимација $\{\Upsilon^\varepsilon\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ је *монотона* ако важи

$$\Upsilon^{\varepsilon_1} \leq \Upsilon^{\varepsilon_2} \quad \text{за све } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2.$$

Нека су дате две апроксимације Υ_α и Υ_β за које важи $\Upsilon_\alpha \leq \Upsilon_\beta$. И нека је

$\{\Upsilon^{\varepsilon}\}_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ монотона фамилија која их спаја,

$$\Upsilon^0 = \Upsilon_\alpha,\ \Upsilon^1 = \Upsilon_\beta.$$

Да бисмо постигли регуларност простора решења пертурбоване Коши-Риманове једначине биће нам потребно да варирамо и скоро комплексну структуру $\{J^{\varepsilon}\}_{0\leq\varepsilon\leq 1}$. За $K > 0$ дефинишемо глатку растућу функцију $\sigma_K : \mathbb{R} \to [0,1]$ која задовољава следеће услове

$$\sigma_K(s) = \begin{cases} 1, & s \geq K, \\ 0, & s \leq -K. \end{cases}$$

За $x_\alpha \in CF_*(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha)$ и $x_\beta \in CF_*(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta)$ уводимо модулски простор

$$\mathcal{M}(x_\alpha, x_\beta : o_M, \{\Upsilon^{\varepsilon}\} : H, \{J^{\varepsilon}\}) = \begin{cases} u : \mathbb{R}\times[0,1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J^{\sigma_K(s)}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \Upsilon^{\sigma_K(s)}, \\ u(-\infty,t) = x_\alpha(t),\ u(+\infty,t) = x_\beta(t). \end{cases} \tag{1.40}$$

За генерички избор фамилије скоро комплексних структура $\mathcal{M}(x_\alpha, x_\beta : o_M, \{\Upsilon^{\varepsilon}\} : H, \{J^{\varepsilon}\})$ ће бити многострукост. Опис њене границе (који је стандардан) даје нам чињеницу да је пресликавање

$$F_{\alpha\beta} : CF_k(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha) \to CF_k(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta),$$

дефинисано на нивоу ланаца бројањем елемената нуладимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}$

$$F_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \sum_{x_\beta} n(x_\alpha, x_\beta : o_M, \{\Upsilon^{\varepsilon}\} : H, \{J^{\varepsilon}\})\, x_\beta, \tag{1.41}$$

једно ланчасто пресликавање. На нивоу хомологија добијамо повезујући хомоморфизам

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} : HF_*(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha) \to HF_*(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta).$$

Ови хомоморфизми задовољавају једнакост

$$\mathbf{F}_{\alpha\alpha} = \mathbb{I},$$

за све апроксимације Υ_α које су довољно близу $\nu_-^*\overline{U}$. Додатно, ако је $\Upsilon_\alpha \leq \Upsilon_\beta \leq \Upsilon_\gamma$ тада важи

$$\mathbf{F}_{\alpha\gamma} = \mathbf{F}_{\beta\gamma} \circ \mathbf{F}_{\alpha\beta},$$

(видети Теорему 3.5 у [58]).

Дефинисали смо једно предуређење на скупу свих апроксимација. Хоћемо да покажемо да је овај скуп директан. Нека су Υ_α и Υ_β неке две апроксимације. Из описа конструкције ових апроксимација следи да постоје криве C_α и C_β које задовољавају релацију (1.34). Ми можемо да нађемо монотону криву C_γ чији ће график бити изнад графика кривих C_α и C_β у $\mathbb{R}^2$. За овако конструисану криву добијемо апроксимацију Υ_γ која ће задовољавати неједнакости

$$\Upsilon_\alpha \leq \Upsilon_\gamma,\ \Upsilon_\beta \leq \Upsilon_\gamma.$$

Показали смо да је скуп свих апроксимација са уређењем $\leq$ директан, показали смо да је систем хомологија $HF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ директан систем група и да има смисла причати о директном лимесу тог система.

Флорову хомологију за отворен скуп U дефинишемо као директан лимес Флорових хомологија за апроксимације

$$HF_*^-(H, U : M) = \varinjlim HF_*(o_M, \Upsilon : H, J). \tag{1.42}$$

Дефинисана на овај начин, Флорова хомологија $HF_*^-(H, U : M)$ биће изоморфна Морсовој хомологији $HM_*(U : f)$ за Морсове функције f из класе $\mathcal{F}^- \subset C^\infty(M)$ коју смо дефинисали у Дефиницији 1.8 (видети [58] за конструкцију изоморфизма). Знамо да су Морсове хомологије за овакав избор функција изоморфне сингуларној хомологији. Дакле

$$HF_*^-(H, U : M) \cong H_*(U; \mathbb{Z}_2). \tag{1.43}$$

Користећи дефинисане повезујуће хомоморфизме $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ можемо да дефинишемо и филтриране Флорове хомологије за отворен скуп. У раду [58], Тврђење 3.4, аутори су показали да функционал дејства $\mathcal{A}_H^{\{\Upsilon^\varepsilon\}}$ опада дуж пертурбованих холоморфних трака помоћу којих дефинишемо $F_{\alpha\beta}$. То заправо значи да важи неједнакост

$$\mathcal{A}_H^{\Upsilon_\beta}(u(+\infty, t)) - \mathcal{A}_H^{\Upsilon_\alpha}(u(-\infty, t)) \leq 0$$

када постоји $u \in \mathcal{M}(x_\alpha, x_\beta : o_M, \{\Upsilon^\varepsilon\} : H, \{J^\varepsilon\})$. Дакле, ланчасто пресликавање $F_{\alpha\beta}$ је добро дефинисано пресликавање на филтрираним ланчастим комплексима

$$F_{\alpha\beta}|_{CF^{\lambda}_*} : CF^{\lambda}_*(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha) \to CF^{\lambda}_*(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta).$$

И индукује хомоморфизам на нивоу филтрираних хомологија

$$\mathbf{F}^{\lambda}_{\alpha\beta} : HF^{\lambda}_*(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha) \to HF^{\lambda}_*(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta).$$

Сада дефинишемо *филтрирану Флорову хомологију за отворен скуп* као директан лимес по филтрираним хомологијама за апроксимације

$$HF^{\lambda}_*(H, U : M) = \varinjlim HF^{\lambda}_*(o_M, \Upsilon : H, J). \tag{1.44}$$

Важиће

$$\mathbf{F}^{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \imath^{\lambda}_{\Upsilon_\alpha *} = \imath^{\lambda}_{\Upsilon_\beta *} \circ \mathbf{F}^{\lambda}_{\alpha\beta},$$

одакле закључујемо да постоји пресликавање

$$[\imath]^{\lambda}_* : HF^{\lambda}_*(H, U : M) \to HF^{-}_*(H, U : M), \tag{1.45}$$

које је индуковано инклузијама филтрираних комплекса за апроксимације.

Пресликавања $\mathbf{S}^{\Upsilon}_{\alpha\beta}$ ће такође бити сагласна су са повезујућим изоморфизмима $\mathbf{F}_{ab}$, у смислу да је следећи дијаграм комутативан

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & HF_k(\Upsilon_a : H_\alpha, J_a) & \xrightarrow{\mathbf{F}^{H_\alpha}_{ab}} & HF_k(\Upsilon_b : H_\alpha, J_b) & \xrightarrow{\mathbf{F}^{H_\alpha}_{bc}} & HF_k(\Upsilon_c : H_\alpha, J_c) & \to \\
 & & \downarrow S^{\Upsilon_a}_{\alpha\beta} & & \downarrow S^{\Upsilon_b}_{\alpha\beta} & & \downarrow S^{\Upsilon_c}_{\alpha\beta} & \\
\cdots & \to & HF_k(\Upsilon_a : H_\beta, J_a) & \xrightarrow{\mathbf{F}^{H_\beta}_{ab}} & HF_k(\Upsilon_b : H_\beta, J_b) & \xrightarrow{\mathbf{F}^{H_\beta}_{bc}} & HF_k(\Upsilon_c : H_\beta, J_c) & \to
\end{array}$$

Када прођемо директним лимесом по (Υ, J) добијемо канонски изоморфизам који повезује две Флорове хомологије отвореног скупа за различит избор Хамилтонијана

$$\mathbf{S}^{-}_{\alpha\beta} : HF^{-}_*(H_\alpha, U : M) \to HF^{-}_*(H_\beta, U : M). \tag{1.46}$$

У раду [58], где се дефинише хомологија за отворен скуп, не стоји $-$ у ознаци Флорове хомологије $HF^{-}_*(H, U : M)$. Увели смо ову ознаку да бисмо истакли да користимо негативан конормалан скуп $\nu^*_-\overline{U}$ у конструкцији. За разлику од [58], биће нам потребно да посматрамо и хомологије дефинисане помоћу позитивног конормалног скупа.

Позитиван конормалан скуп, $\nu_+^*\overline{U}$ дефинише се као

$$\nu_+^*\overline{U} = o_U \coprod \nu_+^*(\partial U), \tag{1.47}$$

где је

$$\nu_+^*(\partial U) = \{(q,p) \in \nu^*(\partial U) \mid p(\mathbf{n}) \geq 0, \text{ за } \mathbf{n} \text{ спољну нормалу на } \partial U\}.$$

Пратећи ознаке из [57] дефинишимо анти-симплектичку инволуцију

$$\zeta : x = (q,p) \mapsto \overline{x} = (q,-p). \tag{1.48}$$

Приметимо да ζ слика негативан конормалан скуп $\nu_-^*\overline{U}$ у позитиван конормалан скуп $\nu_+^*\overline{U}$. Користећи ово пресликавање можемо да опишемо апроксимације од $\nu_+^*\overline{U}$ користећи већ описане апроксимације негативног дела. Ако је Υ тачна Лагранжева апроксимација од $\nu_-^*\overline{U}$, тада је

$$\overline{\Upsilon} = \zeta(\Upsilon)$$

тачна Лагранжева апроксимација од $\nu_+^*\overline{U}$. На скупу апроксимација $\overline{\Upsilon}$ можемо да задамо парцијално уређење

$$\overline{\Upsilon}^\alpha \leq \overline{\Upsilon}^\beta \Leftrightarrow \zeta(\overline{\Upsilon}^\alpha) \leq \zeta(\overline{\Upsilon}^\beta).$$

ζ нам даје нови Хамилтонијан

$$\overline{H}(x,t) = -H(\zeta(x),t),$$

и нову скоро комплексну структуру

$$\overline{J} = \zeta^* J.$$

Нека је, за $\overline{\Upsilon}^\alpha \leq \overline{\Upsilon}^\beta$, $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^+$ повезујући хомоморфизам:

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^+ : HF_k(o_M, \overline{\Upsilon}_\alpha : \overline{H}, \overline{J}_\alpha) \to HF_k(o_M, \overline{\Upsilon}_\beta : \overline{H}, \overline{J}_\beta)$$

дефинисан на исти начин као и $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$, бројањем решења система (1.40). Сада дефинишемо Флорову хомологију отвореног скупа U, моделирану позитивним конормалним скупом као

$$HF_k^+(H,U:M) = \varinjlim HF_k(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H},\overline{J}). \tag{1.49}$$

Овај лимес ће сада бити изоморфан Морсовој хомологији $HM_*(U:f)$ при чему се сада посматрају функције из класе $f \in \mathcal{F}^+ \subset C^\infty(M)$. Морсова хомологија за овакав избор функција изоморфна је релативној хомологији $H_*(U,\partial U;\mathbb{Z}_2)$. Закључујемо

$$HF_*^+(H,U:M) \cong H_*(U,\partial U;\mathbb{Z}_2). \tag{1.50}$$

Као што су нам изоморфизми $\mathbf{S}^{\Upsilon}_{\alpha\beta}$ били сагласни са повезујућим изоморфизмима $\mathbf{F}_{ab}$ тако ће и изоморфизми

$$S^{\overline{\Upsilon}}_{\alpha\beta}: HF_*(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H}_\alpha,\overline{J}_\alpha) \to HF_*(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H}_\beta,\overline{J}_\beta)$$

бити сагласни са повезујућим изоморфизмима $\mathbf{F}^+_{ab}$. Проласком директног лимеса добијамо изоморфизам који повезује Флорове хомологије за различит избор Хамилтонових функција

$$\mathbf{S}^+_{\alpha\beta}: HF_*^+(H_\alpha,U:M) \to HF_*^+(H_\beta,U:M). \tag{1.51}$$

Користећи анти-симплектичку инволуцију можемо да упоредимо Флорове хомологије за апроксимације од $\nu^*_-\overline{U}$ и $\nu^*_+\overline{U}$. Очигледно је

$$CF_k(o_M,\Upsilon:H,J) \cong CF_{n-k}(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H},\overline{J}).$$

Постоји идентификација простора пертурбованих холоморфних трака које дефинишу гранични оператор у одговарајућим хомологијама

$$\zeta: \mathcal{M}(x,y:o_M,\Upsilon;H,J) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(\overline{x},\overline{y}:o_M,\overline{\Upsilon};\overline{H},\overline{J}).$$

Ови модулски простори су дефинисани у (1.37). Инволуција ζ индукује изоморфизам у Флоровој хомологији, типа Поенкареовог дуала

$$\mathrm{PD}^{\Upsilon}_F = \zeta_*: HF_k(o_M,\Upsilon:H,J) \xrightarrow{\cong} HF_{n-k}(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H},\overline{J}). \tag{1.52}$$

Приметимо да ово пресликавање није исто као уобичајена Поенкареова дуалност између хомолошких и кохомолошких група, која је дефинисана у Поглављу 2.2. у [86]. Ипак ћемо користити исту ознаку за ово пресликавање (између хомолошких група), јер је конструкција иста као у [86]. Слично као у Морсовом случају, у ознаци овог пресликавања користићемо параметар Υ да би истакли да се оно одоноси на Флорове хомологије за апроксимације Υ и $\overline{\Upsilon}$. Очигледно важи

$$\mathbf{F}^{+}_{\alpha\beta} \circ \mathrm{PD}_F^{\Upsilon_\alpha} = \mathrm{PD}_F^{\Upsilon_\beta} \circ \mathbf{F}_{\alpha\beta},$$

па је добро дефинисано пресликавање, типа Поенкареов дуал, међу Флоровим хомологијама за отворен скуп

$$\mathrm{PD}_F : HF_k^{-}(H, U : M) \xrightarrow{\cong} HF^{+}_{n-k}(H, U : M). \tag{1.53}$$

Примедба 1.13. У дефиницији Флорове хомологије за отворен скуп не можемо да фиксирамо једну скоро комплексну структуру па да тражимо директан лимес по апроксимацијама, већ за сваку апроксимацију имамо одговарајућу скоро комплексну структуру која се користи при дефинисању $HF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$. Ове скоро комплексне структуре бирамо из генеричког скупа а разлог варирања је потреба да нам решења Коши-Риманове једначине која посматрамо буду регуларна. У складу са тим у ознаци Флорових хомологија за отворен скуп (леве стране једначина (1.42) и (1.49)) не фигурише ни једно J.

2 Модулски простори

У овој глави ћемо дефинисати више помоћних модулских простора који касније улазе у дефиницију разних производа и морфизама међу хомологијама. Ти модулски простори су заправо простори решења диференцијалних или парцијалних диференцијалних једначина.

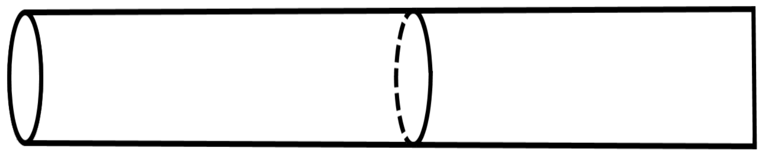
Када год имамо неко пресликавање Риманове површи са границом подразумеваћемо да је оно глатко на унутрашњости површи а непрекидно на целој површи са границом.

Фредхолмова анализа на одговарајућим Банаховим просторима даје нам регуларност решења парцијалних диференцијалних једначина које ће бити елиптичког типа. Одатле ћемо закључивати да су ти модулски простори заправо многострукости чија је димензија једнака Фредхолмовом индексу оператора који задаје ту многострукост. Опис границе такве многострукости следи из одговарајућих конвергенција и аргумената лепљења. Те технике су описане у готово свим стандардним књигама о симплектичким многострукостима. Посебно ћемо обратити пажњу на неке феномене који до сада нису описани у литератури. Један такав феномен, описан у Поглављу 2.4, је скок на граници Риманове површи са једне на другу Лагранжеву подмногострукост, при чему се такве подмногострукости секу чисто. Потребно је објаснити зашто је једно такво пресликавање непрекидно и потребно је поставити Фредхолмову анализу.

У Поглављу 2.1 дата је конструкција модулских простора чији су елементи пертурбовано холоморфна пресликавања Риманове површи у компактну многострукост. Риманова површ коју посматрамо добијена је идентификацијом дела границе траке $\mathbb{R} \times [0,1]$ (видети Слику 7). Резултати овог поглавља су познати од раније а ми пратимо ознаке из [4].

У Поглављу 2.2 посматрамо пертурбовано холоморфна пресликавања трака $\mathbb{R}\times[0,1]$ у котангентно раслојење T^*M при чему се доња граница траке, $\mathbb{R}\times\{0\}$, слика на нулто сечење, o_M, док се горња граница траке, $\mathbb{R}\times\{1\}$, слика на конормално раслојење, ν^*N. Овде је $N \subset M$ затворена подмногострукост затворене многострукости. У наредном поглављу, 2.3, посматрамо комбиноване објекте истих пертурбовано холоморфних трака и полуградијентних трајекторија које се налазе у N. Резултати ових поглавља су део ауторовог рада [24].

Поглавље 2.4 садржи конструкцију модулског простора чији су елементи пертурбовано холоморфне панталоне смештене у T^*M. Граница панталона се слика у унију Лагранжевих подмногострукости $o_M \cup \nu^*N$ при чему на повезаним компонентама границе имамо скокове са једне на другу Лагранжеву подмногострукост. Фредхолмова анализа на објектима оваквог типа је ауторов



Слика 7: Риманова површ Σ^τ

оригиналан резултат. Рачунање димензије ових модулских простора, што је приказано у Поглављу 2.4.2, део је ауторовог рада [83].

У Поглављима 2.5 и 2.6 дата је конструкција модулских простора комбинованог типа и модулских простора панталона. И у једном и у другом случају амбијентна многострукост је T^*M. Посматрамо полуградијентне трајекторије које се налазе у отвореном скупу $U \subset M$ са глатком границом. Границе Риманових површи које посматрамо (то су траке и панталоне) сликају се у уније две Лагранжеве подмногострукости. Једна је нулто сечење а друга Лагранжева подмногострукост, која је иначе тачна, је апроксимација негативног или позитивног конормалног скупа од $\overline{U}$ (ове појмове смо дефинисали у Поглављу 1.8). Резултати презентовани у овим поглављима део су коауторског рада са Ј. Катић и Д. Милинковићем [61].

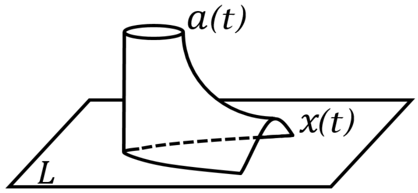
2.1 Холоморфне површи у компактној многострукости

Амбијент у ком се налазимо, у овом поглављу, је компактна симплектичка многострукост (P, ω) која задовољава услове дате у (1.16). Њена затворена Лагранжева подмногострукост $L \subset P$ задовољава услов (1.28). Нека је $H : P \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ допустив гладак Хамилтонијан. Допустивост значи да не постоје константне контрактибилне периодичне орбите од H. Дефинишемо Риманову површ која је добијена идентификацијом дела границе бесконачне траке. Прецизније, нека је

$$\Sigma^\tau = \mathbb{R} \times [0,1]/\sim,$$

где идентификујемо $(s,0) \sim (s,1)$ за све $s \leq 0$ (видети Слику 7). Нека су $a \in CF_*(P : H, J)$ и $x \in CF_*(L, P : H, J)$ генератори ланчастих комплекса. Посматрамо модулски простор димњака дефинисану у [4]

$$\mathcal{M}^\tau(a,x) = \left\{ u : \Sigma^\tau \to P \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial_s u + J(\partial_t u - X_H(u)) = 0, \\ u(s,0), u(s,1) \in L,\ s \geq 0, \\ u(-\infty,t) = a(t),\ u(+\infty,t) = x(t) \end{array} \right\}, \tag{2.1}$$



Слика 8: Димњак који представља елемент модулског простора $\mathcal{M}^\tau(a,x)$

(видети Слику 8). Хамилтонијан H бирамо тако да пар (H,J) задовољава услове регуларности и у Флоровој хомологији за периодичне орбите и у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке. За генерички избор скоро комплексне структуре $\mathcal{M}^\tau(a,x)$ ће бити многострукост димензије

$$\mu^{CZ}(a) - \mu_L(x) - n,$$

видети [4] за више детаља[6]. Овде μ^{CZ} и μ_L означавају, редом, Конли-Цендеров и Масловљев индекс који су дефинисани у Поглављу 1.4. У претходној једнакости n је природан број за који важи $\dim P = 2n$. Тополошка граница једнодимензионе компоненте од $\mathcal{M}^\tau(a,x)$ је облика

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{M}^\tau(a,x) = &\bigcup_{b\in CF_{k-1}(P:H,J)} \mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)\times\mathcal{M}^\tau(b,x)\\ &\bigcup_{y\in CF_{k+1}(L,P:H,J)} \mathcal{M}^\tau(a,y)\times\mathcal{M}(y,x:L:H,J).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Подсетимо се да смо многострукост $\mathcal{M}^{period}(a,b:P:H,J)$, која означава скуп пертурбовано холоморфних цилиндара, дефинисали у (1.18). Скуп пертурбованих холоморфних трака у P са границом на L, $\mathcal{M}(x,y:L:H,J)$, дефинисан је у (1.30).

У раду [4] посматрани су и модулски простори обрнутих димњака. За те потребе дефинишемо Риманову површ Σ^χ као стандардну траку

$$\Sigma^\chi = \mathbb{R}\times[0,1]/\sim,$$

[6]Наше димензије се разликују од оних у раду [4]. Разлог лежи у томе што се наша нормализација за Конли-Цендеров индекс разликује. Ми смо овај индекс нормализовали тако да је једнак Морсовом коиндексу критичне тачке C^2 малог Хамилтонијана. Уз тај услов нормализације, димензија позитивних полу-капа које у крају $+\infty$ теже ка периодичној орбити $a(t)$ једнака је $2n-\mu^{CZ}(a)$, а димензија полу-капа које на $-\infty$ крају теже ка $a(t)$ једнака је $\mu^{CZ}(a)$. Оваква нормализација Конли-Цендеровог индекса, и сходно томе рачун димензија полу-капа, дата је у раду [91].

са идентификацијом $(s,0)\sim(s,1)$ за све $s\geq 0$. Обрнути димњаци који спајају $x\in CF_*(L,P:H,J)$ и $a\in CF_*(P:H,J)$ дефинисани су као скуп пресликавања који задовољавају следеће услове

$$\mathcal{M}^\chi(x,a)=\left\{u:\Sigma^\chi\to P\;\middle|\;\begin{array}{l}\partial_s u+J(\partial_t u-X_H(u))=0,\\ u(s,0),u(s,1)\in L,\ s\leq 0,\\ u(-\infty,t)=x(t),\ u(+\infty,t)=a(t)\end{array}\right\}. \tag{2.3}$$

За генерички избор скоро комплексне структуре $\mathcal{M}^\chi(x,a)$ ће такође бити многострукост димензије

$$\mu_L(x)-\mu^{CZ}(a).$$

Граница се описује на сличан начин као и $\partial\mathcal{M}^\tau(a,x)$.

Дефинисаћемо једну Риманову површ са границом која личи на стандардне парове панталона али имаћемо додатну идентификацију на граници. На дисјунктној унији

$$\mathbb{R}\times[-1,0]\sqcup\mathbb{R}\times[0,1]$$

задајемо две идентификације. Једна је

$$(s,0^-)\sim(s,0^+),\ \text{за све } s\geq 0,$$

а друга је

$$(s,0^+)\sim(s,1),\ \text{за све } s\leq 0,$$

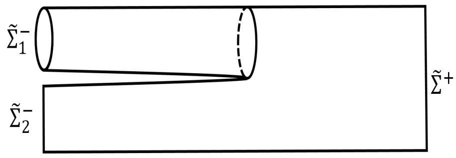
(видети Слику 9). Означимо са $\widetilde{\Sigma}$ добијену Риманову површ са границом. Нека су $\widetilde{\Sigma}_1^-$ и $\widetilde{\Sigma}_2^-$ два долазећа краја и нека је $\widetilde{\Sigma}^+$ један одлазећи у $\widetilde{\Sigma}$ тако да важи

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}_1^-&\approx S^1\times(-\infty,0],\\ \widetilde{\Sigma}_2^-&\approx[0,1]\times(-\infty,0],\\ \widetilde{\Sigma}^+&\approx[0,1]\times[0,+\infty).\end{aligned}$$

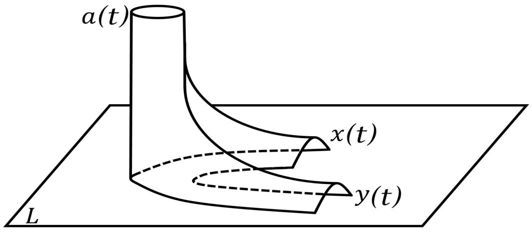
Преостали, компактан, део површи означићемо са

$$\widetilde{\Sigma}^0=\widetilde{\Sigma}\setminus(\widetilde{\Sigma}_1^-\cup\widetilde{\Sigma}_2^-\cup\widetilde{\Sigma}^+).$$

За периодичну орбиту $a\in CF_*(P:H_1^-,J_1^-)$ и Хамилтонове путеве $x\in CF_*(L,P:H_2^-,J_2^-)$, $y\in CF_*(L,P:H^+,J^+)$ дефинишемо модулски простор $\widetilde{\mathcal{M}}(a,x;y)$ као скуп свих пресликавања $u:\widetilde{\Sigma}\to P$ која задовољавају следећи



Слика 9: Риманова површ $\widetilde{\Sigma}$



Слика 10: Елемент модулског простора $\widetilde{\mathcal{M}}(a,x;y)$

систем (видети Слику 10)

$$\begin{cases} \partial_s u_j^- + J(\partial_t u_j^- - X_{\rho_R(s)H_j^-}(u_j^-)) = 0, \text{ на } u_j^- = u|_{\widetilde{\Sigma}_j^-},\ j \in \{1,2\}, \\ \partial_s u^+ + J(\partial_t u^+ - X_{\rho_R(s)H^+}(u^+)) = 0, \text{ на } u^+ = u|_{\widetilde{\Sigma}^+}, \\ \partial_s u^0 + J\partial_t u^0 = 0, \text{ на } u^0 = u|_{\widetilde{\Sigma}^0}, \\ u(s,-1), u(s,0^-), u(-s,-1), u(-s,1) \in L,\ s \le 0, \\ u_1^-(-\infty,t) = a(t), \\ u_2^-(-\infty,t) = x(t), \\ u^+(+\infty,t) = y(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Функцију ρ_R смо дефинисали у (1.20). За генеричи избор скоро комплексне структуре J (која је на одговарајућим крајевима једнака задатим скоро комплексним структурама), скуп $\widetilde{\mathcal{M}}(a,x;y)$ ће бити многострукост димензије

$$\mu^{CZ}(a) + \mu_L(x) - \mu_L(y) - 2n.$$

Тополошка граница ове многострукости има облик

$$\begin{aligned} \partial\widetilde{\mathcal{M}}(a,x;y) = &\bigcup_{b\in CF_*(P:H_1^-,J_1^-)} \mathcal{M}^{period}(a,b:P:H_1^-,J_1^-) \times \widetilde{\mathcal{M}}(b,x;y) \\ &\bigcup_{x'\in CF_*(L,P:H_2^-,J_2^-)} \mathcal{M}(x,x':L:H_2^-,J_2^-) \times \widetilde{\mathcal{M}}(a,x';y) \\ &\bigcup_{y'\in CF_*(L,P:H^+,J^+)} \widetilde{\mathcal{M}}(a,x;y') \times \mathcal{M}(y',y:L:H^+,J^+). \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Холоморфне траке са конормалним граничним условима

У овом поглављу ћемо дефинисати један модулски простор холоморфних трака у T^*M које се секу у некој тачки на $o_N = o_M \cap \nu^*N$. Потреба за оваквим простором се јавља у Поглављу 3.2 где дефинишемо ПСС пресликавање. У овој ситуацији имамо специфичне граничне услове. Наиме, доња граница траке се слика у нулто сечење o_M а горња граница траке се слика у ν^*N. Познато је да се ове две многострукости секу чисто дуж o_N. Специфичност оваквих граничних услова, који нису чести у литератури, захтева дубљу анализу и овде ћемо извести детаље те анализе.

Нека су $x, y : [0,1] \to T^*M$ Хамилтонови путеви Хамилтонијана $H : [0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ са компактним носачем. Ови путеви задовољавају исте граничне услове

$$x(0), y(0) \in o_M,\ x(1), y(1) \in \nu^*N.$$

Нека је $R > 0$ фиксирана константа а $\rho_R^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је глатка функција за коју важи

$$\rho_R^+(s) = \begin{cases} 1, & s \geq R+1, \\ 0, & s \leq R. \end{cases} \tag{2.6}$$

Глатка функција $\rho_R^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

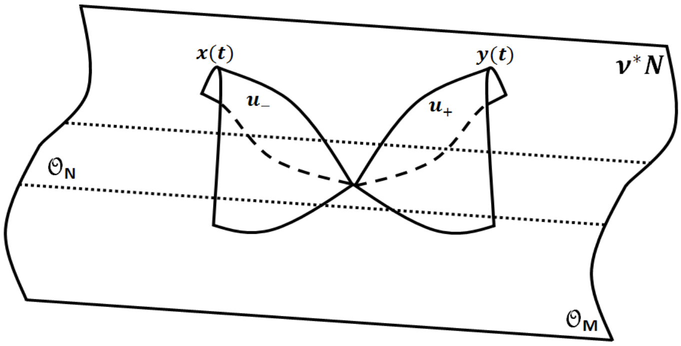
$$\rho_R^-(s) = \rho_R^+(-s). \tag{2.7}$$

Дефинишемо многострукост

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H) = \left\{ (u_-, u_+) \;\middle|\; \begin{array}{l} u_\pm : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ E(u_\pm) := \iint_{\mathbb{R}\times[0,1]} \|\partial_s u_\pm\|_J^2 \, dt\, ds < +\infty, \\ \frac{\partial u_\pm}{\partial s} + J(\frac{\partial u_\pm}{\partial t} - X_{\rho_R^\pm H}(u_\pm)) = 0, \\ u_\pm(s,0) \in o_M, u_\pm(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u_-(-\infty, t) = x(t), u_+(+\infty, t) = y(t), \\ u_-(+\infty) = u_+(-\infty) \end{array} \right\}. \tag{2.8}$$

На Слици 11 је дат приказ једног комбинованог објекта (u_-, u_+) из скупа $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H)$.

Трака u_+ (односно u_-) коју посматрамо је холоморфна за $s \leq R$ ($s \geq -R$) и има ограничену енергију. Зна се да такве траке допуштају непрекидно продужење (видети Поглавље 4.5 у [70] и Теорему 3.1 у [99]). Ово продужење ће бити тачка која се налази у $o_N = o_M \cap \nu^*N$ стога можемо да изоставимо други



Слика 11: $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H)$

аргумент у $u_+(-\infty)$ (односно $u_-(+\infty)$).

Многострукост $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H)$ је на неки начин сингуларна. Објектима (u_-, u_+) би у Морсовој анализи одговарале две градијентнте трајекторије које имају заједничку тачку. Оно што је нама неопходно јесте да пребројимо елементе из нуладимензионе компоненте многострукости $\widetilde{\mathcal{M}}$. Показаћемо да је бројање ових објеката исто што и бројање пертурбованих холоморфних трака које спајају x и y (исто на нивоу хомологија). Главна идеја јесте да покажемо да је $\widetilde{\mathcal{M}}$ кобордантно многострукости која садржи споменуте траке.

Уводимо помоћну многострукост

$$\mathcal{M}_R(x, y; H) = \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ u(s, 0) \in o_M, u(s, 1) \in \nu^* N, s \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty, t) = x(t), u(+\infty, t) = y(t) \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

и

$$\check{\mathcal{M}}(x, y; H) = \{(R, u) \,|R > R_0,\, u \in \mathcal{M}_R(x, y; H)\}.$$

Функција ρ_R је дефинисана у (1.20). Границу многострукости $\check{\mathcal{M}}(x, y; H)$ можемо да опишемо као

$$\begin{aligned} \partial\check{\mathcal{M}}(x, y; H) = \mathcal{M}_{R_0}(x, y; H) \;&\cup\; \widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H) \\ &\cup\; \bigcup_z \mathcal{M}(x, z; H) \times \check{\mathcal{M}}(z, y; H) \\ &\cup\; \bigcup_z \check{\mathcal{M}}(x, z; H) \times \mathcal{M}(z, y; H). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Сада ћемо објаснити једнакост (2.10). Јасно је како се последња два члана десне стране јављају као гранични елементи. Елементи из скупа $\mathcal{M}_{R_0}(x, y; H)$ се јављају у граници када $R_n \to R_0$. Најкомпликованије је показати да се $\widetilde{\mathcal{M}}$

јавља као део границе. Доказ тога ћемо поделити на два дела. У Поглављу 2.2.1 показујемо зашто је део границе $\partial\check{\mathcal{M}}$ заправо подскуп модулског простора $\widetilde{\mathcal{M}}$. А у Поглављу 2.2.2 показујемо зашто важи инклузија $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \partial\check{\mathcal{M}}$.

2.2.1 Распадање

Нека је (R_n, u_n) низ елемената из $\check{\mathcal{M}}(x, y; H)$. У случају када $R_n \to +\infty$ граничну вредност од $u_n \in \mathcal{M}_{R_n}(x, y; H)$ можемо да идентифиујемо са елементом из $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H)$ користећи следеће две репараметризације

$$u_n^-(s,t) = u_n(s - R_n + R_0, t), \;\; u_n^+(s,t) = u_n(s + R_n - R_0, t).$$

Траке u_n^- задовољавају једначину

$$\frac{\partial u_n^-}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u_n^-}{\partial t} - X_{\rho_{R_n -}H}(u_n^-)\right) = 0,$$

и граничне услове

$$\begin{aligned} u_n^-(s,0) &= u_n(s - R_n + R_0, 0) \in o_M, \\ u_n^-(s,1) &= u_n(s - R_n + R_0, 1) \in \nu^* N, \end{aligned}$$

за све $s \in \mathbb{R}$. Функција $\rho_{R_n -}$ задовољава следеће једнакости

$$\rho_{R_n -}(s) = \begin{cases} 0, & -R_0 \le s \le 2R_n - R_0, \\ 1, & s \in (-\infty, -R_0 - 1] \cup [2R_n - R_0 + 1, +\infty). \end{cases}$$

Позитивна трака u_n^+ такође задовољава пертурбовану Коши-Риманову једначину

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u_n^+}{\partial t} - X_{\rho_{R_n +}H}(u_n^+)\right) = 0,$$

граница $u_n^+(\mathbb{R} \times \{0\})$ се слика у нулто сечење а $u_n^+(\mathbb{R} \times \{1\})$ се слика у $\nu^* N$. Фукција $\rho_{R_n +}$ испуњава једнакости

$$\rho_{R_n +}(s) = \begin{cases} 0, & -2R_n + R_0 \le s \le R_0, \\ 1, & s \in (-\infty, -2R_n + R_0 - 1] \cup [R_0 + 1, +\infty). \end{cases}$$

Траке $u_n^{\pm}$ конвергирају локално униформно са свим својим изводима ка тракама $u^{\pm}$ које задовољавају једначину

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t} - X_{\rho^{\pm}_{R_0}H}(u^{\pm})\right) = 0,$$

видети [1] за више детаља. Очигледно је $u^{-}(-\infty, t) = x(t)$ и $u^{+}(+\infty, t) = y(t)$. У $+\infty-$крају трака u^{-} конвергира ка некој тачки $p \in N \subset o_M$ јер је u^{-} холоморфно за $s \geq -R_0$ и има ограничену енергију. Позитивна трака u^{+} је холоморфна у околини $-\infty$ и на том крају конвергира ка некој тачки $q \in N$. Из једнакости

$$u_n^{-}(R_n - R_0, t) = u_n^{+}(-R_n + R_0, t)$$

закључујемо да је $p = q$. Дакле пар (u^{-}, u^{+}) припада $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y; H)$.

2.2.2 Лепљење

Сада хоћемо да покажемо да за дат пар $(u_{-}, u_{+}) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ можемо да нађемо фамилију елемената $(R, \omega_R) \in \check{\mathcal{M}}$ која конвергира (у Громовљевом смислу) ка (u_{-}, u_{+}) када $R \to +\infty$ (видети Теорему 4.1.2 у [14], Поглавље 4.7 у [41] и Теорему 7.1 у [99]).

Главна техника која се користи је лепљење и у најкраћим цртама изгледа овако. Траке u_{-} и u_{+} су холоморфне око тачака $u_{-}(+\infty) = u_{+}(-\infty)$ и можемо да изведемо пред-лепљење чиме добијамо неко пресликавање u_R. Ово пресликавање ће бити апроксимативно решење Коши-Риманове једначине, u_R задовољава ову једначину свуда сем у малој околини од $u_R(0) = u_{-}(+\infty) = u_{+}(-\infty)$. Након овога конструишемо десни инверз линеаризације D_{u_R} оператора $\overline{\partial}$. Користећи Теорему о имплицитној функцији можемо да нађемо право решење ове једначине, ω_R, које ће бити у околини произвољног решења.

У [14] аутори лепе два холоморфна диска са границом на једној Лагранжевој подмногострукости. Фрауенфелдер у [41] и Шмешке у [99] посматрају холоморфне траке чије су границе на две компактне подмногострукости које се секу чисто у компактној симплектичкој многострукости. Котангентно раслојење није компактна многострукост, али уз избор скоро комплексних структура из скупа j^c (видети (1.27) за дефиницију), слика сваке холоморфне траке коначне енергије са границом на $\nu^*N \cup o_M$ ће се налазити у компактном подскупу од T^*M. Дакле, можемо претпоставити да се све дешава у компактном делу наше симплектичке многострукости. Потребна нам је и специјална класа Риманових метрика које посматрамо на T^*M. Наиме, потребно је да подмногострукости o_M и ν^*N буду тотално геодезијске подмногострукости у односу на

Риманову метрику коју разматрамо.

Пратећи [42] и [107] објаснићемо како се конструишу тражене Риманове метрике на T^*M. Нека је J_t гладак пут у j^c. Тада постоји глатка фамилија Риманових метрика на T^*M, g_t таква да важи

1. o_M је тотално геодезијска подмногострукост у односу на g_0 и $J_0(q)T_q o_M$ је ортогонални комплемент од $T_q o_M$ за све $q \in o_M$,

2. ν^*N је тотално геодезијска подмногострукост у односу на g_1 и $J_1(q)T_q(\nu^*N)$ је ортогонални комплемент од $T_q(\nu^*N)$ у околини тачке пресека две холоморфне траке које лепимо,

3. $g_t(J_t(q)u, J_t(q)v) = g_t(u, v)$ за $q \in T^*M$ и $u, v \in T_q(T^*M)$.

Можемо да дефинишемо метрику g_0 тако да она задовољава услове

1. o_M је тотално геодезијска подмногострукост у односу на g_0 и $J_0(q)T_q o_M$ је ортогонални комплемент од $T_q o_M$ за све $q \in o_M$,

2. $g_0(J_0(q)u, J_0(q)v) = g_0(u, v)$ за $q \in T^*M$ и $u, v \in T_q(T^*M)$,

видети [42] за детаље. На исти начин дефинишемо метрику g_1 која задовољава иста својства у односу на подмногострукост ν^*N. У [42] аутор разматра компактне Лагранжеве подмногострукости. Конормално раслојење ν^*N није компактна многострукост у општем случају. Али нама је довољно да нађемо метрику у односу на коју је ν^*N тотално геодезијска у околини $N \subset o_M$, не на целом ν^*N. Линеарна комбинација

$$g_t(u, v) = \overline{g}_t(u, v) + \overline{g}_t(J_t u, J_t v),$$

где је $\overline{g}_t(u, v) = (1-t)g_0(u, v) + t g_1(u, v)$, даје нам тражену фамилију метрика (видети и [107] за конструкцију тражених метрика).

Остали технички детаљи лепљења су исти као у [99].

2.3 Комбиновани објекти са конормалним граничним условима

У овом поглављу посматрамо пресек полуградијентних трајекторија неке Морсове функције и пертурбованих холоморфних трака код којих се пертурбација глатко смањује до нуле на одговарајућем крају. Показаћемо да скуп оваквих објеката има структуру многострукости са границом и описати ту границу у неким случајевима.

Нека је p критична тачка Морсове функције $f : N \to \mathbb{R}$ и нека је задат временски зависан Хамилтонијан $H : [0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ са компактним носачем. Посматрамо Хамилтонов пут $x : [0,1] \to T^*M$

$$\dot{x} = X_H(x),$$

који почиње на нултом сечењу o_M а завршава на конормалном раслојењу ν^*N

$$x(0) \in o_M,\ x(1) \in \nu^*N.$$

За тако одабране елементе дефинишемо простор (видети Слику 12)

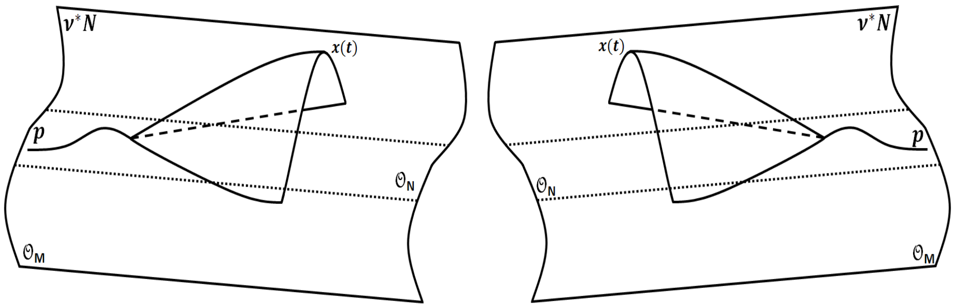
$$\mathcal{M}(p,f;x,H) = \left\{ (\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : (-\infty,0] \to N, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ \gamma(-\infty) = p, u(+\infty,t) = x(t), \\ \gamma(0) = u(-\infty). \end{array} \right\}. \tag{2.11}$$

Овде је $R > 0$ а функција ρ_R^+ је дефинисана у (2.6).

Примедба 2.1. Јасно је да модулски простор $\mathcal{M}(p,f;x,H)$ зависи од Риманове метрике на N (која се крије у градијенту функције f, ∇f) и од скоро комплексне структуре на T^*M (која се појављује у Коши-Римановој једначини). Ове аргументе у нотацији ипак изостављамо због практичних разлога.

Биће нам потребна и инверзна (у времену, ако s посматрамо као временски параметар) слика ових модулских простора. Прецизније, дефинишемо нови скуп уређених парова

$$\mathcal{M}(x,H;p,f) = \left\{ (\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [0,+\infty) \to N, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^- H}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty,t) = x(t), \gamma(+\infty) = p, \\ \gamma(0) = u(+\infty), \end{array} \right\}, \tag{2.12}$$



Слика 12: $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$

при чему је ρ_R^- дефинисано у (2.7).

Став 2.2. *За генерички избор Риманове метрике и генерички избор скоро комплексне структуре скуп $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ има структуру многострукости чија је димензија $m_f(p) - (\mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N)$. Скуп $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ такође има структуту многострукости димензије $\mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N - m_f(p)$.*

Доказ. Нека $W^u(p, f)$ означава нестабилну многострукост критичне тачке p Морсове функције f

$$W^u(p, f) = \{\gamma(t) \,|\, \gamma : \mathbb{R} \to N,\, \dot{\gamma} = -\nabla f(\gamma),\, \gamma(-\infty) = p\} \subset N.$$

Познато је да овакви скупови имају структуру глатке многострукости чија је димензија $\dim W^u(p, f) = m_f(p)$ (видети [77] за детаље).

Дефинишимо још један помоћни модулски простор $\mathcal{M}_+(x, H)$ као скуп решења система

$$\begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0, 1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ u(s, 0) \in o_M, u(s, 1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x(t). \end{cases}$$

Овај скуп такође има структуру многострукости чија је димензија

$$\dim \mathcal{M}_+(x, H) = \frac{1}{2}\dim N - \mu_N(x),$$

видети [85] за више детаља.

За генерички избор параметара пресликавање

$$ev : W^u(p, f) \times \mathcal{M}_+(x, H) \to N \times N,$$

дефинисано са

$$ev(\gamma, u) = (\gamma(0), u(-\infty)),$$

је трансверзално на дијагоналу $\triangle \subset N \times N$. Сада $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ можемо да видимо као инверзну слику дијагонале при пресликавњау ev

$$\mathcal{M}(p, f; x, H) = ev^{-1}(\triangle),$$

чија је димензија

$$m_f(p) + \frac{1}{2}\dim N - \mu_N(x) - (2\dim N - \dim N) = m_f(p) - \frac{1}{2}\dim N - \mu_N(x).$$

Димензија многострукости $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ се одређује на сличан начин. $\square$

Бројањем тачака нуладимензионе многострукости $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ добијамо морфизам из Морсове у Флорову хомологију дефинисан на нивоу ланаца. Да бисмо могли боље да опишемо тај морзфизам (да ли је то ланчасто пресликавање, да ли индукује изоморфизам) морамо да прецизно да опишемо нарушавање компактности многострукости $\mathcal{M}(p, f; x, H)$. Као што смо нагласили у Поглављу 1.5 модулски простори неће бити компактне многострукости, осим када им је димензија једнака нули. Али њихову тополошку границу можемо у потпуности да опишемо. Опис тополошке границе (у смислу конвергенције коју смо дефинисали у Поглављу 1.5) је дат у следећем ставу.

Став 2.3. *Нека је g генеричка Риманова метрика и J генеричка скоро комплексна структура. Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N$ тада је $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ коначан скуп. Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N + 1$ тада је $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ многострукост димензије 1 чију границу можемо да опишемо на следећи начин*

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{M}(p, f; x, H) = &\bigcup_{m_f(q)=m_f(p)-1} \mathcal{M}(p, q; f) \times \mathcal{M}(q, f; x, H)\\ \cup &\bigcup_{\mu_N(y)=\mu_N(x)+1} \mathcal{M}(p, f; y, H) \times \mathcal{M}(y, x; H).\end{aligned}$$

Доказ. Посматрамо низ (γ_n, u_n) у $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ који нема $W^{1,2}-$конвергентан подниз. Како је N компактна подмногострукост $\gamma_n(t)$ је ограничено за свако t.

Низ γ_n је равностепено непрекидан што следи из следећих неједнакости

$$\begin{aligned}
d(\gamma_n(t_1), \gamma_n(t_2)) &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(s)\| \, ds \\
&\leq \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(s)\|^2 \, ds} \\
&= \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} f(\gamma_n(s)) \, ds} \\
&\leq \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{\max_{x \in N} f(x) - f(\gamma_n(-\infty))} \\
&= \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{\max_{x \in N} f(x) - f(p)}.
\end{aligned}$$

Користећи Арцела-Асколијеву теорему закључујемо да γ_n има подниз који конвергира униформно на компактним скуповима. Како низ γ_n задовољава диференцијалну једначину

$$\dot{\gamma}_n = -\nabla f(\gamma_n),$$

а функција f је глатка, закључујемо да γ_n конвергира са свим својим изводима на компактним подскуповима од $(-\infty, 0]$.

Енергија пертурбованих холоморфних трака u_n је униформно ограничена јер је

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_H(x(t)) =& \mathcal{A}_{\rho_R^+ H}(u_n(+\infty), t) - \mathcal{A}_{\rho_R^+ H}(u_n(-\infty), t) = \\
&= -E(u_n) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 (\rho_R^+(s))' H(u_n(s,t), t) \, dt \, ds.
\end{aligned}$$

Функција ρ_R^+ је дефинисана у (2.6). Хамилтонијан H има компактан носач, функција $(\rho_R^+(s))'$ је различита од нуле само на интервалу $[R, R+1]$ па је последњи интеграл униформно ограничен

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 (\rho_R^+(s))' H(u_n(s,t), t) \, dt \, ds \right| \leq C.$$

Из Громовљеве теореме о компактности (видети [47]) следи да u_n има подниз који конвергира заједно са свим својим изводима на компактним подскуповима од $(\mathbb{R} \times [0,1]) \setminus \{z_1, ... z_m\}$. Мехурови могу да се појаве у тачкама z_i ако су то унутрашње тачке од $\mathbb{R} \times [0,1]$. Могућа је и појава мехурова у тачкама z_k које су граничне тачке скупа $\mathbb{R} \times [0,1]$. Ту се мехурови појављују као холоморфни дискови чије је граница на нултом сечењу и конормалном раслојењу. У нашем случају не могу да се појаве ни холоморфне сфере ни холоморфни дискови. Изостанак истих следи из тачности симплектичке форме и из чињенице да се

Лиувилова форма анулира на нултом сечењу и конормалном раслојењу. Заиста, ако је $v : S^2 \to T^*M$ холоморфна сфера тада је

$$\int_{S^2} \|dv\|^2 = \int_{S^2} v^*\omega = \int_{\partial S^2} v^*\lambda = 0.$$

А ако је $v : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M$ холоморфни диск, тада је

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \|dv\|^2 = \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} v^*\omega = \int_{\partial(\mathbb{R}\times[0,1])} v^*\lambda = 0,$$

јер је $\lambda = 0$ на o_M и ν^*N.

Дакле (γ_n, u_n) има подниз који униформно конвергира са свим својим изводима на компактним подскуповима. Из C^∞_{loc} конвергенције следи $W^{1,2}$ конвергенција. Нашли смо подниз од (γ_n, u_n) који конвергира ка неком елементу скупа $\mathcal{M}(p^m, f; x^0, H)$. Слично као у [35, 59, 69, 97, 100] закључујемо да је једино нарушавање компактности распадање трајекторија на следећи начин

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{M}(p, p^1; f) \times ... \times \mathcal{M}(p^{m-1}, p^m; f) \times \mathcal{M}(p^m, f; x^0, H)\\ \times\mathcal{M}(x^0, x^1; H) \times ... \times \mathcal{M}(x^{l-1}, x; H).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Овде су $p, p^1, ..., p^m$ критичне тачке функције f а $x^0, ..., x^{l-1}, x$ су Хамилтонови путеви са опадајућим Морсовим и Масловљевим индексима тако да важи

$$m_f(p^m) \geq \mu_N(x^0) + \frac{1}{2}\dim N.$$

Овим смо објаснили зашто је граница $\partial\mathcal{M}(p, f, g; x, H, J)$ подскуп уније (2.13). Обрнута инклузија следи из стандардних аргумената лепљења.

Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N$ тада је $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ компактна многострукост димензије нула па $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ има коначан број елемената.

Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N + 1$ тада граница од $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ може да садржи само елементе скупа $\mathcal{M}(p, q; f) \times \mathcal{M}(q, f; x, H)$ за неку критичну тачку q за коју важи $m_f(q) = m_f(p) - 1$ или елементе скупа $\mathcal{M}(p, f; y, H) \times \mathcal{M}(y, x; H)$ за неки Хамилтонов пут y чији је Масловљев индекс $\mu_N(y) = \mu_N(x) + 1$. □

Аналоган став постоји и у случају описивања границе многострукости $\mathcal{M}(x, H; p, f)$.

Став 2.4. *Нека је g генеричка Риманова метрика и J генеричка скоро комплексна структура. Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N$ тада је $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ коначан скуп. Ако је $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N - 1$ тада је $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ многострукост* *димензије 1 чију границу можемо да опишемо на следећи начин*

$$\partial\mathcal{M}(x,H;p,f) = \bigcup_{m_f(q)=m_f(p)+11} \mathcal{M}(x,H;q,f)\times\mathcal{M}(q,p;f)$$
$$\cup \bigcup_{\mu_N(y)=\mu_N(x)-1} \mathcal{M}(x,y;H)\times\mathcal{M}(y,H;p,f).$$

Сада ћемо дефинисати више помоћних модулских простора који ће нам бити неопходни у Глави 3. Слични простори су већ описани у [60].

Нека је $R>0$ фиксиран број. За p и q, две критичне тачке функције f дефинишемо

$$\mathcal{M}_R(p,q,f;H) = \left\{ (\gamma_-,\gamma_+,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_- : (-\infty,0]\to N,\ \gamma_+ : [0,+\infty)\to N, \\ u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M, \\ \frac{d\gamma_\pm}{ds} = -\nabla f(\gamma_\pm), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\sigma_R H}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ \gamma_-(-\infty)=p,\ \gamma_+(+\infty)=q, \\ u(s,0)\in o_M, u(s,1)\in\nu^*N, s\in\mathbb{R}, \\ u(\pm\infty,t)=\gamma_\pm(0) \end{array} \right\}, \quad (2.14)$$

где је $\sigma_R:\mathbb{R}\to[0,1]$ глатка функција за коју важи

$$\sigma_R(s) = \begin{cases} 1, & |s|\le R, \\ 0, & |s|\ge R+1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Дефинишемо и модулски простор

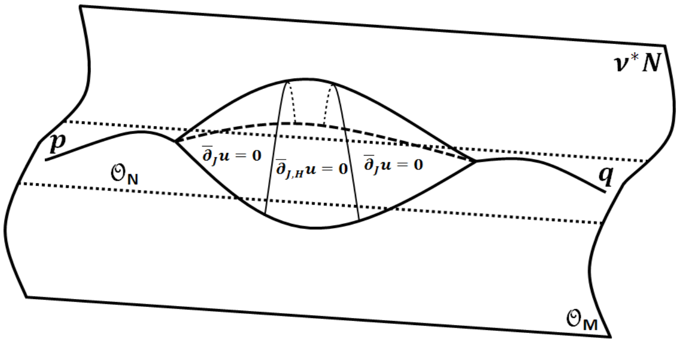
$$\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H) = \big\{ (R,\gamma_-,\gamma_+,u) \,|\, (\gamma_-,\gamma_+,u)\in\mathcal{M}_R(p,q,f;H),\ R>R_0 \big\}, \quad (2.16)$$

(Видети Слику 13).

За генерички избор параметара $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ је многострукост димензије један ако је $m_f(p)=m_f(q)$ и многострукост димензије нула ако је $m_f(p) = m_f(q)-1$.

Сада ћемо описати тополошку границу многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ у случају када је та многострукост димензије један. Када год кажемо тополошка граница подразумева се да је то у смислу конвергенције коју смо дефинисали у Поглављу 1.5.

Став 2.5. *Нека су p и q критичне тачке функције f истог Морсовог индекса, $k=m_f(p)=m_f(q)$. Тада тополошка граница многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$*



Слика 13: $\mathcal{M}_R(p,q,f;H)$

има облик

$$\begin{aligned}\partial\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H) =& \mathcal{M}_{R_0}(p,q,f;H) \ \cup \bigcup_{m_f(r)=k-1} \mathcal{M}(p,r;f)\times\overline{\mathcal{M}}(r,q,f;H)\\ &\cup \bigcup_{m_f(r)=k+1} \overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H)\times\mathcal{M}(r,q;f)\\ &\cup \bigcup_{\mu_N(x)+\dim N/2=k} \mathcal{M}(p,f;x,H)\times\mathcal{M}(x,H;q,f).\end{aligned}$$

Доказ. Нека је $(R_n,\gamma_-^n,\gamma_+^n,u_n)$ низ из модулског простора $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$. Тада овај низ или $W^{1,2}-$конвергира ка елементу из истог модулског простора или једно од следећих тврђења важи.

(1) Постоји подниз R_{n_k} такав да $R_{n_k}\to R_0$ и $(\gamma_-^{n_k},\gamma_+^{n_k},u_{n_k})$ конвергира ка елементу $(\gamma_-,\gamma_+,u)\in\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f;H)$.

(2) Постоји подниз од $(R_n,\gamma_-^n,\gamma_+^n,u_n)$ који конвергира ка разломљеном елементу у $\mathcal{M}(p,r;f)\times\overline{\mathcal{M}}(r,q,f;H)$. Подниз $(\gamma_+^{n_k},u_{n_k})$ конвергира у $W^{1,2}$ топологији а $\gamma_-^{n_k}$ конвергира слабо.

(3) Постоји подниз који конвергира ка разломљеном елементу у $\overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H)\times\mathcal{M}(r,q;f)$ (случај сличан случају који је описан у (2)).

(4) Постоји подниз такав да $R_{n_k}\to+\infty$ и $(\gamma_-^{n_k},\gamma_+^{n_k},u_{n_k})$ конвергира слабо ка разломљеном елементу из $\mathcal{M}(p,f;x,H)\times\mathcal{M}(x,H;q,f)$.

Наиме, ако је низ R_n ограничен тада можемо да нађемо компактан скуп K такав да је $\{R_n\}\subset K$. Фамилију функција ρ_R можемо одабрати тако да буде непрекидна по R, па све процене у Ставу 2.3 важе униформно по $R\in K$. Сличним резоновањем као у Ставу 2.3 можемо да закључимо да низ $(\gamma_-^n,\gamma_+^n,u_n)$ има подниз који конвергира локално униформно. Ако $(R_n, \gamma_-^n, \gamma_+^n, u_n)$ не конвергира ка елементу из $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$, тада $R_n \to R_0$ или $R_n \to R > R_0$ (са R_n означавамо и подниз). У првом случају $(\gamma_-^n, \gamma_+^n, u_n)$ конвергира у $W^{1,2}$ топологији а у другом случају $(\gamma_-^n, \gamma_+^n, u_n)$ конвергира ка разломљеном елементу. Како је $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ димензије један, елемент $(\gamma_-^n, \gamma_+^n, u_n)$ може да се распадне само једном. До распада може да дође на трајекторијама γ_-^n или γ_+^n али не и на траци. Низ u_n не може да конвергира ка разломљеној траци. Трака u_n је пертурбовано холоморфна на компактном делу $[-R_n, R_n] \times [0,1]$ и она ту конвергира. Ако се распад деси на делу где немамо пертурбацију (на холоморфном делу) добијемо нову траку која је решење система

$$\begin{cases} v : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{\partial v}{\partial s} + J\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ v(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset o_M, \ v(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \nu^*N. \end{cases}$$

Раније смо видели да су сва решења оваквог система константна. Дакле, u_n не може да се распадне ни на холоморфном делу.

На овај начин смо описали прва три случаја. Четврти случај се дешава ако је R_n неограничен низ. Издвојићемо подниз $R_n \to +\infty$. Траке

$$u_n^-(s,t) := u_n(s - R_n - R_0 - 1, t), \ u_n^+(s,t) := u_n(s + R_n + R_0 + 1, t),$$

конвергирају локално униформно са свим својим изводима ка неким тракама u^- и u^+. Ове траке су решења система

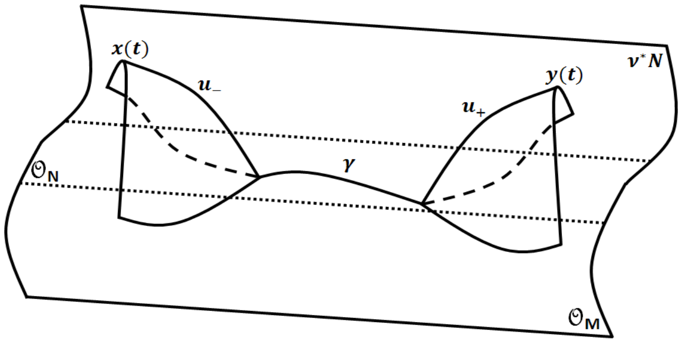
$$\begin{cases} \frac{\partial u^\pm}{\partial s} + J(\frac{\partial u^\pm}{\partial t} - X_{\rho^\pm_{R_0}}(u^\pm)) = 0, \\ u^\pm(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset o_M, \ u^\pm(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \nu^*N, \\ u^\pm(\mp\infty, t) = x(t), \\ u^\pm(\pm\infty, t) = \gamma_\pm(0). \end{cases}$$

Трајекторије $\gamma_\pm^n$ не могу да се распадну јер су p и q критичне тачке истог Морсовог индекса па оне конвергирају ка неким трајекторијама $\gamma_\pm$.

Обрнуто, за сваки разломљени елемент облика

- $(\gamma, \gamma_-, \gamma_+, u) \in \mathcal{M}(p,r;f) \times \overline{\mathcal{M}}(r,q,f;H)$,
- $(\gamma_-, \gamma_+, u, \gamma) \in \overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H) \times \mathcal{M}(r,q;f)$,
- $(\gamma_1, u_1, \gamma_2, u_2) \in \mathcal{M}(p,f;x,H) \times \mathcal{M}(x,H,J;q,f,g)$,

постоји низ из $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ који слабо конвергира ка одговарајућем об-



Слика 14: Модулски простор $\mathcal{M}_\varepsilon(x, y, H; f)$

јекту. Доказ ове чењенице је заснован на Теореми о имплицитној функцији и техникама пред-лепљења и лепљења (сви детаљи се могу наћу у [1] и [59]). $\square$

Сада дефинишемо још један модулски простор који броји објекте комбинованог типа, само сада спајамо два Хамилтонова пута x и y. Нека је $\varepsilon > 0$ фиксирано. Дефинишимо скуп

$$\mathcal{M}_\varepsilon(x, y, H; f) = \left\{ (u_-, u_+, \gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} u_\pm : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to N, \\ \frac{\partial u_\pm}{\partial s} + J(\frac{\partial u_\pm}{\partial t} - X_{\rho_R^\pm H}(u_\pm)) = 0, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma), \\ E(u_\pm) < +\infty, \\ u_\pm(s, 0) \in o_M, u_\pm(s, 1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u_-(-\infty, t) = x(t), u_+(+\infty, t) = y(t), \\ u_\mp(\pm\infty) = \gamma(\mp\varepsilon) \end{array} \right\}, \quad (2.17)$$

(видети Слику 14) и параметризовану верзију тог скупа

$$\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f) = \big\{(\varepsilon, u_-, u_+, \gamma) \,|\, (u_-, u_+, \gamma) \in \mathcal{M}_\varepsilon(x, y, H; f),\, \varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]\big\}, \quad (2.18)$$

при чему су ε_0 и ε_1 фиксирани позитивни бројеви. Биће нам потребна још једна параметризована верзија многострукости $\mathcal{M}_\varepsilon$. Нека је

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, y, H; f) = \big\{(\varepsilon, u_-, u_+, \gamma) \,|\, (u_-, u_+, \gamma) \in \mathcal{M}_\varepsilon(x, y, H; f),\, \varepsilon > \varepsilon_0\big\}. \quad (2.19)$$

Ако Масловљеви индекси путева x и y задовољавају једнакост

$$\mu_N(y) = \mu_N(x) + 1$$

тада је $\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ многострукост димензије нула. У случају да важи

$$\mu_N(y) = \mu_N(x)$$

$\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ је многострукост димензије један чију границу можемо да опишемо на следећи начин.

Став 2.6. *Нека су x и y два Хамилтонова пута истог Масловљевог индекса, $\mu_N(x) = \mu_N(y)$. Тополошка граница многострукости $\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ је облика*

$$\begin{aligned}
\partial \underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f) = & \mathcal{M}_{\varepsilon_1}(x, y, H; f) \ \cup \ \mathcal{M}_{\varepsilon_0}(x, y, H; f) \\
& \cup \bigcup_{\mu_N(z)=\mu_N(x)-1} \mathcal{M}(x, z; H) \times \underline{\mathcal{M}}(z, y, H; f) \\
& \cup \bigcup_{\mu_N(z)=\mu_N(x)+1} \underline{\mathcal{M}}(x, z, H; f) \times \mathcal{M}(z, y; H).
\end{aligned}$$

Доказ. Посматрамо низ $(\varepsilon_n, u_-^n, u_+^n, \gamma_n) \in \underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ који нема конвергентан подниз у $W^{1,2}-$топологији. Како је низ ε_n ограничен све оцене за $u_\pm^n, \gamma_n$ важе униформно по ε (видети Став 2.3). Дакле низови u_-^n, u_+^n и γ_n конвергирају локално униформно и елемент (u_-^n, u_+^n, γ_n) може да се распадне само једном (због начина на који смо одабрали димензије). Домени трајекторија γ_n су ограничени па γ_n не може да се распадне. Тако да као граничну вредност низа елемената из $\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ можемо да добијемо неки од следећих објеката

(1) Постоји подниз који конвергира ка елементу из $\mathcal{M}_{\varepsilon_1}(x, y, H; f)$ или $\mathcal{M}_{\varepsilon_0}(x, y, H; f)$.

(2) Постоји подниз који слабо конвергира ка елементу скупа $\mathcal{M}(x, z; H) \times \underline{\mathcal{M}}(z, y, H; f)$.

(3) Постоји подниз који слабо конвергира ка елементу скупа $\underline{\mathcal{M}}(x, z, H; f) \times \mathcal{M}(z, y; H)$.

□

Биће нам потребан и опис границе многострукости $\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, y, H; f)$. Доказ следећег става сличан је доказу Става 2.5.

Став 2.7. *Нека су x и y два Хамилтонова пута истог Масловљевог индекса,*

$\mu_N(x) = \mu_N(y)$. *Тополошка граница многострукости* $\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, y, H; f)$ *је облика*

$$\begin{aligned}\partial\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, y, H; f) =& \mathcal{M}_{\varepsilon_0}(x, y, H; f)\\ &\cup \bigcup_{\mu_N(z)=\mu_N(x)-1} \mathcal{M}(x, z; H) \times \underline{\underline{\mathcal{M}}}(z, y, H; f)\\ &\cup \bigcup_{\mu_N(z)=\mu_N(x)+1} \underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, z, H; f) \times \mathcal{M}(z, y; H)\\ &\cup \bigcup_{m_f(p)=\mu_N(x)+\dim N/2} \mathcal{M}(x, H; p, f) \times \mathcal{M}(p, f; y, H).\end{aligned}$$

Сада ћемо дефинисати модулски простор сличан простору $\overline{\mathcal{M}}(p, q, f; H)$, једина разлика је што холоморфне траке које посматрамо нису пертурбоване једним фиксираним Хамилтонијаном H већ целом фамилијом Хамилтонијана. Прецизније, нека је H_δ, $0 \leq \delta \leq 1$, хомотопија временски зависних Хамилтонових функција која повезује два фиксирана Хамилтонијана H_0 и H_1. Дефинишемо

$$\overline{\mathcal{M}}(p, q, f; H_\delta) = \big\{(\delta, \gamma_-, \gamma_+, u) \,|\, (\gamma_-, \gamma_+, u) \in \mathcal{M}_{R_0}(p, q, f; H_\delta),\ 0 \leq \delta \leq 1\big\}. \quad (2.20)$$

Димензија ове многострукости је $m_f(p) - m_f(q) + 1$ и тополошку границу описујемо у следећем ставу.

Став 2.8. *Нека су* p *и* q *критичне тачке Морсове функције* f *истог Морсовог индекса,* $k = m_f(p) = m_f(q)$. *Тополошка граница многострукости димензије један,* $\overline{\mathcal{M}}(p, q, f; H_\delta)$, *је облика*

$$\begin{aligned}\partial\overline{\mathcal{M}}(p, q, f; H_\delta) =& \mathcal{M}_{R_0}(p, q, f; H_0) \ \cup\ \mathcal{M}_{R_0}(p, q, f; H_1)\\ &\cup \bigcup_{m_f(r)=k-1} \mathcal{M}(p, r; f) \times \overline{\mathcal{M}}(r, q, f; H_\delta)\\ &\cup \bigcup_{m_f(r)=k+1} \overline{\mathcal{M}}(p, r, f; H_\delta) \times \mathcal{M}(r, q; f).\end{aligned}$$

Доказ. Доказ је сличан доказу Става 2.5. □

У дефинисању досадашњих модулских простора увек смо користили једну фиксирану Морсову функцију f. Потребно је да варирамо и овај параметар, односно да посматрамо просторе који зависе од фамилије Морсових функција. Дефинисаћемо прецизније те хомотопије.

Нека је $(f^{\alpha\beta}_{s,\delta}, H^{\alpha\beta}_{s,\delta})$, $0 \leq \delta \leq 1$, хомотопија која повезује $(f^\alpha, H^{\alpha\beta}_s)$ за $\delta = 0$ и $(f^{\alpha\beta}_s, H^\beta)$ за $\delta = 1$. Овде је и $f^{\alpha\beta}_s$ хомотопија која повезује две Морсове функције

f^α и f^β

$$f_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} f^\alpha, & s \leq -T-1, \\ f^\beta, & s \geq -T. \end{cases}$$

Слично, $H_s^{\alpha\beta}$ је хомотопија која повезује два Хамилтонијана H^α и H^β

$$H_s^{\alpha\beta} = \begin{cases} H^\alpha, & s \leq T, \\ H^\beta, & s \geq T+1. \end{cases}$$

Хомотопију $(f_{s,\delta}^{\alpha\beta}, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$ ћемо одабрати тако је за δ и s довољно мале (велике) вредности, $f_{s,\delta}^{\alpha\beta}$ једнако f^α ($H_{s,\delta}^{\alpha\beta}$ једнако H^β). На исти начин одаберемо хомотопију Риманових метрика на N и скоро комплексних структура на T^*M, $(g_{s,\delta}^{\alpha\beta}, J_{s,\delta}^{\alpha\beta})$. Нека је

$$\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta}) = \left\{ (\delta,\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : (-\infty, 0] \to N, \\ u : \mathbb{R}\times[0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g_{s,\delta}^{\alpha\beta}} f_{s,\delta}^{\alpha\beta}(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J_{s,\delta}^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H_{s,\delta}^{\alpha\beta}}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ \gamma(-\infty) = p^\alpha, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x^\beta(t), \\ \gamma(0) = u(-\infty) \end{array} \right\}. \tag{2.21}$$

Димензија ове многострукости је $m_{f^\alpha}(p^\alpha) - (\mu_N(x^\beta) + \frac{1}{2}\dim N) + 1$. Многострукости

$$\mathcal{M}(p^\alpha, f_s^{\alpha\beta}; x^\beta, H^\beta) = \left\{ (\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : (-\infty, 0] \to N, \\ u : \mathbb{R}\times[0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g_s^{\alpha\beta}} f_s^{\alpha\beta}(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J^\beta(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H^\beta}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ \gamma(-\infty) = p^\alpha, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x^\beta(t), \\ \gamma(0) = u(-\infty) \end{array} \right\},$$

и

$$\mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H_s^{\alpha\beta}) = \left\{ (\gamma, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : (-\infty, 0] \to N, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g^\alpha} f^\alpha(\gamma), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J_s^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H_s^{\alpha\beta}}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ \gamma(-\infty) = p^\alpha, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^* N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x^\beta(t), \\ \gamma(0) = u(-\infty) \end{array} \right\}, \tag{2.22}$$

су делови границе $\partial\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$ која је у потпуности описана у следећем ставу.

Став 2.9. *Нека је p^α критична тачка Морсове функције f^α и x^β Хамилтонов пут Хамилтонијана H^β тако да важи $m_{f^\alpha}(p^\alpha) = \mu_N(x^\beta) + \frac{1}{2}\dim N$. Граница многострукости димензије један, $\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$, је облика*

$$\begin{aligned} \partial\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta}) =& \mathcal{M}(p^\alpha, f_s^{\alpha\beta}; x^\beta, H^\beta) \ \cup \ \mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H_s^{\alpha\beta}) \\ & \cup \bigcup_{m_{f^\alpha}(q^\alpha) = m_{f^\alpha}(p^\alpha) - 1} \mathcal{M}(p^\alpha, q^\alpha; f^\alpha) \times \widehat{\mathcal{M}}(q^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta}) \\ & \cup \bigcup_{\mu_N(y^\beta) = \mu_N(x^\beta) + 1} \widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; y^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta}) \times \mathcal{M}(y^\beta, x^\beta; H^\beta). \end{aligned}$$

Доказ. Доказ је сличан доказу Става 2.3 и Става 2.5. □

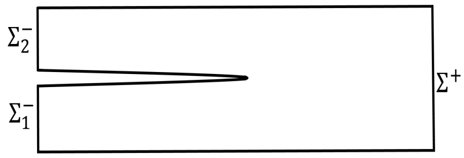
2.4 Холоморфне панталоне са конормалним граничним условима

Нека је Σ Риманова површ са границом коју дефинишемо као дисјунктну унију

$$\mathbb{R} \times [-1, 0] \sqcup \mathbb{R} \times [0, 1]$$

при чему идентификујемо $(s, 0^-) \sim (s, 0^+)$ за $s \geq 0$ (видети Слику 15). Добијена површ Σ је Риманова површ чија је унутрашњост

$$\mathrm{Int}(\Sigma) = \mathbb{R} \times (-1, 1) \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}.$$



Слика 15: Риманова површ Σ

Комплексна структура на $\mathrm{Int}(\Sigma)$ је дата инклузијом у $\mathbb{C}$, $(s,t) \mapsto s + \imath t$. Холоморфне координате у тачки $(0,0)$ дате су пресликавањем

$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\zeta \geq 0,\, |\zeta| < 1\} \to \Sigma, \ \ \zeta \mapsto \zeta^2,$$

које границу $\{\operatorname{Re}\zeta = 0,\, |\zeta| < 1\}$ слика у део границе $(-1,0] \times \{0^-, 0^+\}$. Граница површи Σ има три компоненте

$$\mathbb{R} \times \{-1\}, \ \ \mathbb{R} \times \{1\}, \ \ (-\infty, 0] \times \{0^-, 0^+\}.$$

Посматраћемо пресликавања која Риманову површ Σ сликају у T^*M. Оваква пресликавања ћемо називати и панталонама. Панталоне задовољавају пертурбовану Коши-Риманову једначину. Пертурбација на одговарајућим крајевима (асимптотски крајеви који су налик тракама) је задата Хамилтонијанима H_1^-, H_2^- и H^+. Ова пертурбација се глатко спушта до нуле и на компактном делу панталона (који садржи расцеп између две ногавице) пресликавање задовољава непертурбовану Коши-Риманову једначину. На асимптотским крајевима имамо задате координате (s,t) па Коши-Риманову једначину можемо да изразимо у координатама, док на компактном делу немамо задате локалне координате. Ту је пресликавање описано као нула оператора $\overline{\partial}$. Граница панталона се слика на Лагранжеве подмногострукости $o_M \cup \nu^* N$ које се секу чисто. На расцепу између ногавица имамо прелаз са једне Лагранжеве подмногострукости на другу (холоморфна пресликавања са сличним граничним условима су разматрана у [21] и [3]). Скуп описаних пресликавања (уз додатне услове) формирају многострукост коју ћемо сада прецизно дефинисати.

Означићемо са Σ_1^-, Σ_2^-, Σ^+ два „долазна” и један „одлазни” крај површи Σ. Ови крајеви су дефинисани помоћу холоморфних утапања

$$\begin{aligned} &\psi_i^- : (-\infty, 0] \times [0,1] \to \Sigma,\, i \in \{1,2\}, \\ &\psi^+ : [0, +\infty) \times [0,1] \to \Sigma, \end{aligned}$$

као њихове слике

$$\Sigma_i^- = \psi_i^-((-\infty,0]\times[0,1]), i\in\{1,2\}$$
$$\Sigma^+ = \psi^+([0,+\infty)\times[0,1]).$$

Преостаје нам компактан део Риманове површи

$$\Sigma^0 = \Sigma \setminus \left(\Sigma_1^- \cup \Sigma_2^- \cup \Sigma^+\right).$$

За Хамилтонове путеве $x_i^- \in CF_*(H_i^-)$, $i\in\{1,2\}$ и $x^+\in CF_*(H^+)$ дефинишемо модулски простор

$$\mathcal{M}(x_1^-,x_2^-;x^+) = \begin{cases} u:\Sigma\to T^*M, \\ \frac{\partial u_i^-}{\partial s} + J(\frac{\partial u_i^-}{\partial t} - X_{\rho_R(s)H_i^-}(u_i^-)) = 0,\ u_i^- = u\circ\psi_i^-,\ i\in\{1,2\} \\ \frac{\partial u^+}{\partial s} + J(\frac{\partial u^+}{\partial t} - X_{\rho_R H^+}(u^+)) = 0,\ u^+ = u\circ\psi^+, \\ \overline{\partial}_J(u) = \frac{\partial u^0}{\partial s} + J\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0,\ u^0 = u|_{\Sigma^0}, \\ u(s,-1)\in o_M, u(s,1)\in\nu^*N,\ s\in\mathbb{R}, \\ u(s,0-)\in\nu^*N, u(s,0+)\in o_M,\ s\le 0, \\ u_i^-(-\infty,t) = x_i^-(t),\ i\in\{1,2\}, \\ u^+(+\infty,t) = x^+(t). \end{cases} \tag{2.23}$$

Користићемо ознаку

$$\overline{\partial}_{J,H}(u) = 0 \tag{2.24}$$

за пертурбовану Коши-Риманову једначину коју посматрамо

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^-}{\partial s} + J(\frac{\partial u_i^-}{\partial t} - X_{\rho_R(s)H_i^-}(u_i^-)) = 0,\ u_i^- = u\circ\psi_i^-,\ i\in\{1,2\} \\ \frac{\partial u^+}{\partial s} + J(\frac{\partial u^+}{\partial t} - X_{\rho_R H^+}(u^+)) = 0,\ u^+ = u\circ\psi^+, \\ \frac{\partial u^0}{\partial s} + J\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0,\ u^0 = u|_{\Sigma^0}. \end{cases}$$

За генерички избор Хамилтонијана и скоро комплексне структуре $\mathcal{M}(x_1^-,x_2^-;x^+)$ је многострукост коначне димензије. Циљ нам је да $\mathcal{M}(x_1^-,x_2^-;x^+)$ видимо као регуларну нулу одговарајућег Фредхолмовог пресликавања. Сада ћемо дати детаље Фредхолмове анализе која линеаризацију пресликавања $\overline{\partial}_{J,H}$ описује као Фредхолмов оператор. Да бисмо постигли регуларност одговарајућих објеката допустићемо да скоро комплексна структура J зависи од тачака у Σ.

2.4.1 Фредхолмова анализа на панталонама

Нека је $p > 2$. Дефинишимо простор пресликавања

$$\mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+) = \begin{cases} u \in W^{1,p}_{loc}(\Sigma, T^*M), \\ (\exists T > 0)(\exists \xi_i^- \in W^{1,p}((-\infty, -T] \times [0,1], (x_i^-)^* T(T^*M)) \\ \qquad (\exists \xi^+ \in W^{1,p}([T, +\infty) \times [0,1], (x^+)^* T(T^*M)) \\ \qquad u_i^-(s,t) = exp_{x_i^-(t)} \xi_i^-(s,t), s \leq -T,\ i \in \{1,2\}, \\ \qquad u^+(s,t) = exp_{x^+(t)} \xi^+(s,t), s \geq T, \\ u(s,-1) \in o_M, u(s,1) \in \nu^* N,\ s \in \mathbb{R}, \\ u(s,0^-) \in \nu^* N, u(s,0^+) \in o_M,\ s \leq 0, \\ \lim\limits_{s \to -\infty} u_i^-(s,t) = x_i^-(t),\ i \in \{1,2\}, \\ \lim\limits_{s \to +\infty} u^+(s,t) = x^+(t). \end{cases} \tag{2.25}$$

$\mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+)$ је Банахова многострукост на којој се карте добијају помоћу експоненцијалног пресликавања. За $u \in \mathcal{P}^{1,p}$ важи

$$T_u \mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+) = W^{1,p}_\Lambda(u^* T(T^*M)),$$

при чему на десној страни имамо скуп $W^{1,p}$-сечења векторског раслојења

$$u^* T(T^*M) \to \Sigma$$

са Лагранжевим граничним условима

$$W^{1,p}_\Lambda(u^* T(T^*M)) = \begin{cases} \xi \in W^{1,p}(u^* T(T^*M)), \\ \xi(s,-1) \in T_{u(s,-1)} o_M,\ \xi(s,1) \in T_{u(s,1)} \nu^* N,\ s \in \mathbb{R}, \\ \xi(s,0^-) \in T_{u(s,0^-)} \nu^* N,\ \xi(s,0^+) \in T_{u(s,0^+)} o_M,\ s \leq 0. \end{cases}$$

Оператор $\overline{\partial}_{J,H}$ можемо да видимо као сечење Банаховог раслојења

$$\mathcal{E} \to \mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+),$$

чија је фибра над $u \in \mathcal{P}^{1,p}$

$$\mathcal{E}_u = L^p(u^* T(T^*M)).$$

Оператор $\overline{\partial}_{J,H}$ је Фредхолмово пресликавање. Линеаризација оператора у његовој нули u је облика

$$E_u\xi := D\overline{\partial}_{J,H}(u)\xi = \nabla_{\partial_s u}\xi + J\nabla_{\partial_t u}\xi + \nabla_\xi J\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_\xi(JX_H(u)).$$

Фредхолмовост оператора следи из локалних елиптичких процена и асимптотског понашања (пресеци $\nu^*N \cap \phi^1_{H_i^-}(o_M)$ и $\nu^*N \cap \phi^1_{H^+}(o_M)$ су трансверзални). Слично као у Фредхолмовој анализи за Лагранжеву Флорову хомологију, посматрамо скуп скоро комплексних структура на T^*M, $\mathcal{J}$, које су параметризоване тачкама из Σ

$$\mathcal{J} = \{J : \Sigma \to j^c\}.$$

Скуп $\mathcal{J}$ ће нам бити скуп параметара које варирамо у циљу да нула постане регуларна вредност пресликавања

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+) \times \mathcal{J} \to \mathcal{E},$$
$$(u, J) \mapsto \overline{\partial}_{J,H}(u).$$

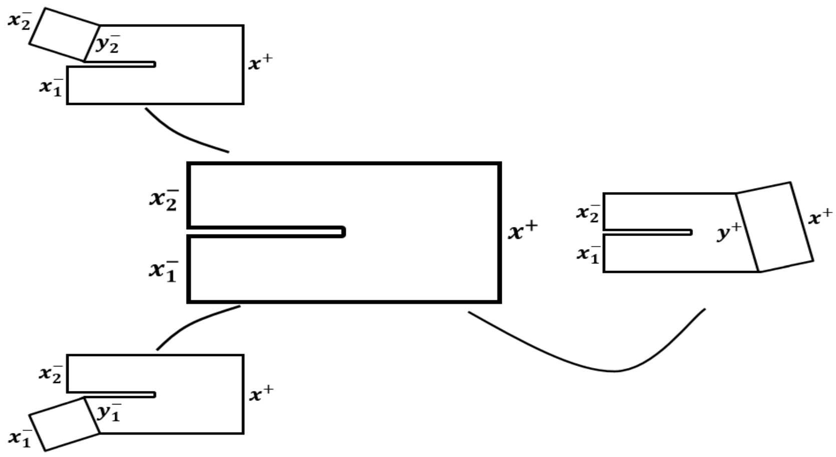
Постојаће генерички скуп $\mathcal{J}_{reg} \subset \mathcal{J}$ такав да је E_u „на” за свако $J \in \mathcal{J}_{reg}$. То даље значи да је за свако $J \in \mathcal{J}_{reg}$

$$\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+) = \overline{\partial}_{J,H}^{-1}(0)$$

многострукост чију димензију добијамо из индекса Фредхолмовог оператора $\overline{\partial}_{J,H}$

$$\dim \mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+) = \operatorname{Ind} \overline{\partial}_{J,H}.$$

Компактност скупа решења једначине (2.24) у C^∞_{loc} топологији следи из Леме 6.1, Става 6.2 у [3] и чињенице да не постоје нетривијални холоморфни дискови са границом на $o_M \cup \nu^*N$. Заправо, када испитујемо компактност простора решења, не постоји разлика између трака са скоковима на граници (које разматрају Абондандоло и Шварц у [3]) и наших граничних услова са скоком на расцепу између ногавица. Непрекидно продужење у тачки где се дешава скок следи из Става 6.5 у [3]. Како је N компактна подмногострукост низ панталона може да се распадне само на асимптотским крајевима и то на панталоне плус пертурбована холоморфна трака на одговарајућем крају (Слика 16).



Слика 16: Граница многострукости $\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$

Зато, граница многострукости димензије један $\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$ је унија

$$
\begin{aligned}
\partial\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+) = & \bigcup_{y_1^- \in CF_*(H_1^-)} \mathcal{M}(x_1^-, y_1^-; H_1^-) \times \mathcal{M}(y_1^-, x_2^-; x^+) \\
& \bigcup_{y_2^- \in CF_*(H_2^-)} \mathcal{M}(x_2^-, y_2^-; H_2^-) \times \mathcal{M}(x_1^-, y_2^-; x^+) \\
& \bigcup_{y^+ \in CF_*(H^+)} \mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; y^+) \times \mathcal{M}(y^+, x^+; H^+).
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Аргументи лепљења у овој ситуацији су слични аргументима који се јављају у [100] или [34]. Пред-лепљење линеаризованих Фредхолмових оператора и постојање тачног решења Коши-Риманове једначине у близини залепљене траке и панталона дају инклузију десне стране (2.26) у скуп $\partial\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$.

2.4.2 Рачунање димензије многострукости панталона

У овом поглављу ћемо израчунати димензију многострукости

$$\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$$

коју смо дефинисали у (2.23). Већ смо истакли да је димензија те многострукости једнака индексу оператора $\overline{\partial}_{J,H}$. Индекс овог оператора ћемо наћи лепљењем Фредхолмових оператора који задају полу-траке са одговарајућим граничним условима, које на једном крају конвергирају ка Хамилтоновим путевима. Индекс таквих оператора знамо а такође је познато да се при лепљењу оператора њихови индекси сабирају. Ова идеја се користи у [101], када аутор рачуна димензије модулских простора који садрже Риманове површи са три асимптотска краја који личе на цилиндре. Како је димензија полу-капа позната (видети фусноту на страни 61), лепљењем Фредхолмових индекса, директно је добијена тражена димензија.

Означимо са F оператор који добијемо када рестрикујемо $\mathcal{F}$ за једну вредност скоро комплексне структуре $J \in \mathcal{J}_{reg}$

$$F \equiv \mathcal{F}|_J : \mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+) \to \mathcal{E}.$$

Сада ћемо описати простор решења полу-трака које лепимо на панталоне. Нека је

$$\mathcal{M}_+(x_1^-, H_1^-) = \begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ E(u) < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H_1^-}(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^* N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x_1^-(t) \end{cases}$$

простор решења полу-трака које се у крају $-\infty$ скупљају у тачку а на крају $+\infty$ конвергирају ка Хамилтоновом путу x_1^-. Овај модулски простор можемо да видимо као регуларну вредност (за неку вредност скоро комплексне структуре) оператора

$$F_1^- : \mathcal{P}_-^{1,p}(x_1^-) \to \mathcal{E}_1^-,$$

при чему се $\mathcal{P}_-^{1,p}(x_1^-)$ и $\mathcal{E}_1^-$ дефинишу слично као $\mathcal{P}^{1,p}(x_1^-, x_2^-; x^+)$ и $\mathcal{E}$. Банахов простор $\mathcal{P}_-^{1,p}(x_1^-)$ ће бити једнак скупу $W_{loc}^{1,p}$ пресликавања, са одговарајућим граничним условима, која експоненцијално конвергирају ка x_1^- када $s \to +\infty$. $\mathcal{E}_1^-$ ће бити тотални простор Банаховог раслојења чија је фибра једнака скупу пресликавања које добијемо када Коши-Риманов оператор делује на $u \in \mathcal{P}_-^{1,p}(x_1^-)$. На исти начин дефинишемо Фредхолмов оператор

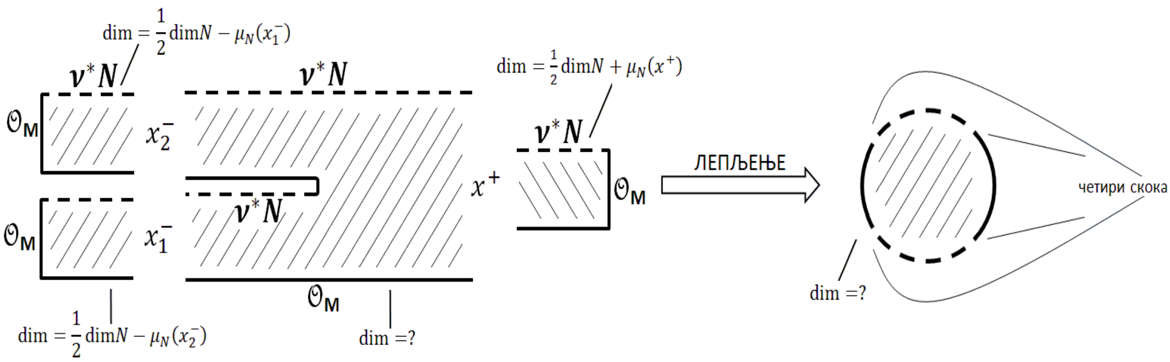
$$F_2^- : \mathcal{P}_-^{1,p}(x_2^-) \to \mathcal{E}_2^-,$$

који описује простор полу-трака које у крају $+\infty$ конвергирају ка x_2^-. Индекси ових оператора су познати (видети [3]) и једнаки су

$$\operatorname{ind} F_i^- = \frac{1}{2} \dim N - \mu_N(x_i^-).$$

Формулу смо већ користили у доказу Става 2.2.

Биће нам потребан и оператор који описује простор полу-трака које у крају $-\infty$ конвергирају ка неком Хамилтоновом путу. Прецизније, за Хамилтонов



Слика 17: Лепљење полу-трака на панталоне

пут x^+ Хамилтонијана H^+ дефинишемо модулски простор

$$\mathcal{M}_-(x^+,H^+) = \begin{cases} u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M, \\ E(u)<+\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial s}+J(\frac{\partial u}{\partial t}-X_{\rho_R^- H^+}(u))=0, \\ u(s,0)\in o_M, u(s,1)\in\nu^*N, s\in\mathbb{R}, \\ u(-\infty,t)=x^+(t). \end{cases}$$

Он ће бити регуларна нула Фредхолмовог оператора

$$F^+:\mathcal{P}_+^{1,p}(x^+)\to\mathcal{E}^+,$$

који делује на Банахов простор $W^{1,p}_{loc}$ пресликавања која у $-\infty$ крају експоненцијално конвергирају ка $x^+(t)$. Слично као и у претходним случајевима, $\mathcal{E}^+$ је тотални простор чија је фибра скуп одговарајућих пресликавања из L^p простора. Индекс овог оператора је такође познат и једнак је

$$\operatorname{ind} F^+ = \frac{1}{2}\dim N + \mu_N(x^+).$$

Када залепимо операторе F, F_1^-, F_2^- и F^+ (видети [100] за дефиницију лепљења Фредхолмових оператора) добијемо оператор који означавамо са

$$F_1^-\sharp F_2^-\sharp F\sharp F^+. \tag{2.27}$$

Индекс овог оператора биће једнак индексу оператора који броји холоморфне дискове са четири скока на граници која се слика у $o_M\cup\nu^*N$ (видети Слику 17).

Да бисмо нашли индекс оператора (2.27) залепићемо три нова оператора који ће, након лепљења, бројати исте дикове са четири скока на граници која се слика у $o_M\cup\nu^*N$. Прецизније, нека су дати Хамилтонијани H^-, H^+ и нека je $\tilde{H}$ хомотопија која их спаја. За Хамилтонове путеве $x^{\pm}$ Хамилтонијана $H^{\pm}$ дефинишемо простор пертурбовано холоморфних трака које имају скок и на горњем и на доњем делу границе

$$\mathcal{M}(x^-, H^-; x^+, H^+) = \begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ E(u) < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\tilde{H}}(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \leq 0, \\ u(s,0) \in \nu^*N, u(s,1) \in o_M, s \geq 0, \\ u(-\infty, t) = x^-(t),\ u(+\infty, t) = x^+(t). \end{cases}$$

Овај модулски простор ће бити нула Фредхолмовог оператора

$$S : \mathcal{P}^{1,p}(x^-, x^+) \to \mathcal{E}^{\mp},$$

где је

$$\mathcal{P}^{1,p}(x^-, x^+) = \begin{cases} u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R} \times [0,1], T^*M), \\ (\exists T > 0)(\exists \xi^- \in W^{1,p}((-\infty, -T] \times [0,1], (x^-)^*T(T^*M)) \\ \qquad (\exists \xi^+ \in W^{1,p}([T, +\infty) \times [0,1], (x^+)^*T(T^*M)) \\ \qquad u^-(s,t) = exp_{x^-(t)}\xi^-(s,t), s \leq -T, \\ \qquad u^+(s,t) = exp_{x^+(t)}\xi^+(s,t), s \geq T, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N,\ s \leq 0, \\ u(s,0) \in \nu^*N, u(s,1) \in o_M,\ s \geq 0, \\ \lim\limits_{s \to -\infty} u(s,t) = x^-(t), \\ \lim\limits_{s \to +\infty} u(s,t) = x^+(t). \end{cases}$$

Тотални простор $\mathcal{E}^{\mp}$ има фибру

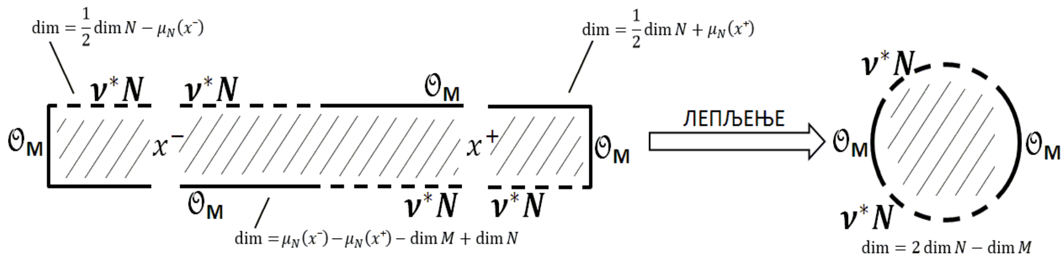
$$\mathcal{E}^{\mp}_u = L^p(u^*T(T^*M)).$$

Индекс оператора S (односно димензија многострукости $\mathcal{M}(x^-, H^-; x^+, H^+)$) је познат и једнак је

$$\operatorname{ind} S = \mu_N(x^-) - \mu_N(x^+) - \dim M + \dim N,$$

видети [3] за детаље. Означимо са S^- Фрехолмов оператор

$$S^- : \mathcal{P}^{1,p}_-(x^-) \to \mathcal{E}^-,$$



Слика 18: Лепљење полу-трака на целу траку са два скока

који задаје многострукост $\mathcal{M}_+(x^-, H^-)$

$$\mathcal{M}_+(x^-, H^-) = (S^-)^{-1}(0).$$

Многострукост $\mathcal{M}_-(x^+, H^+)$ ћемо видети као регуларну нулу оператора

$$S^+ : \mathcal{P}_+^{1,p}(x^+) \to \mathcal{E}^+.$$

Лепљењем оператора S, S^- и S^+ (видети Слику 18) добијамо оператор чији је индекс једнак

$$\mathrm{ind}(S^- \sharp S \sharp S^+) = \mathrm{ind}\, S^- + \mathrm{ind}\, S + \mathrm{ind}\, S^+.$$

Оператор $S^- \sharp S \sharp S^+$ броји, као и $F_1^- \sharp F_2^- \sharp F \sharp F^+$, холоморфне дискове са четири скока на граници која се слика у $o_M \cup \nu^* N$. Изједначавањем њихових индекса закључујемо да је

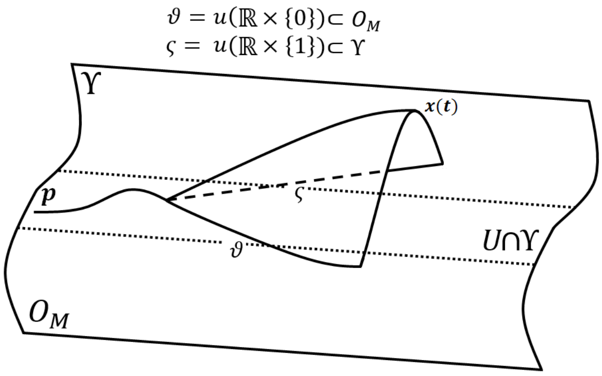
$$\mathrm{ind}\, F = \dim \mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+) = \mu_N(x_1^-) + \mu_N(x_2^-) - \mu_N(x^+) + \frac{1}{2}\dim N - \dim M.$$

2.5 Комбиновани објекти са тачним граничним условима

Сви објекти које овде посматрамо смештени су у котангентно раслојење T^*M. Границе Риманових површи које користимо у овом поглављу биће смештене на тачним Лагранжевим подмногострукостима. Једна таква је нулто сечење, o_M. Остале тачне Лагранжеве подмногострукости су заправо апроксимације Υ које смо дефинисали у Поглављу 1.8. Као и у том поглављу, $U \subset M$ ће бити отворен скуп са глатком границом ∂U.

Објекти које дефинишемо слични су објектима које смо дефинисали у Поглављу 2.3 па ћемо изоставити техничке детаље у доказима.

Нека је $f \in \mathcal{F}^- \subset C^\infty(M)$ и p критична тачка функције f која се налази у скупу U. Нека је $H : T^*M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан са компактним носачем. Из (1.35) следи да сви Хамилтонови путеви $x \in CF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ задовољавају



Слика 19: Комбиновани објекат $\mathcal{M}(p, x)$

услов

$$x(1) \notin o_M|_{\partial U}.$$

Посматраћемо апроксимације Υ које се поклапају са $\nu_-^*\overline{U}$ ван мале околине од $o_M|_{\partial U}$ (тј. довољно су близу негативног конормалног скупа). За довољно добре апроксимације Υ можемо рећи да сви Хамилтонови путеви из $CF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ имају исте граничне услове

$$x(0), x(1) \in o_M \quad \text{или} \quad x(0) \in o_M,\ x(1) \in \nu_-^*\overline{U}. \tag{2.28}$$

За овако одабрану критичну тачку p и Хамилтонов пут x дефинишемо многострукост (видети Слику 19)

$$\mathcal{M}(p,x) \equiv \mathcal{M}(p,f,g;x,o_M,\Upsilon,H,J) = \left\{ (\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : (-\infty,0] \to U,\ u : \mathbb{R}\times[0,1] \to T^*M, \\ \dot\gamma(s) = -\nabla_g f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ u(s,0) \in o_M,\ u(s,1) \in \Upsilon,\ s \in \mathbb{R}, \\ \gamma(-\infty) = p,\ u(+\infty,t) = x(t), \\ u(-\infty) = \gamma(0) \end{array} \right\}. \tag{2.29}$$

Став 2.10. *За генерички избор Риманове метрике g и скоро комплексне структуре J, скуп $\mathcal{M}(p,x)$ је глатка многострукост димензије $m_f(p) - \mu(x)$.*

Доказ. Означимо са D траку $\mathbb{R} \times [0,1]$. Нека је $W_u^{1,r}(D)$ комплетирање тангентног простора $T_uC^\infty(D)$ од

$$C^\infty(D) = \{u \in C^\infty(D, T^*M) \mid u(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset o_M, u(\mathbb{R}\times\{1\}) \in \Upsilon, u(+\infty, t) = x(t)\}, \tag{2.30}$$

који је једнак

$$T_uC^\infty(D) = \left\{ \eta \in C^\infty(D, TT^*M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \eta(s,t) \in T_{u(s,t)}T^*M, \\ \eta(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset To_M, \\ \eta(\mathbb{R}\times\{1\}) \in T\Upsilon, \\ \eta(t, +\infty) = 0 \end{array} \right\}, \tag{2.31}$$

у Собољевљевој норми

$$\|\eta\|_{W^{1,r}} = \left(\iint\limits_D (|\eta|^r + |\nabla_s \eta|^r + |\nabla_t \eta|^r)\, dsdt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Овде је параметар $r > 1$. Котангентно раслојење није компактна многострукост, али због избора скоро комплексне структуре из скупа (1.27), слика сваке холоморфне траке са одговарајућим граничним условима се налази у компактном подскупу од T^*M. Овакво тврђење смо већ користили у случају трака са конормалним граничним условима. А за доказ тврђења које описује траке са тачним граничним условима видети Лему 2.1 у [87]. Закључак је да можемо претпоставити да се све дешава у компактном подскупу од T^*M. У том случају норма $\|\cdot\|_{W^{1,r}}$ еквивалентна је норми коју добијемо за други избор конексије или метрике. Дакле, топологија индукована овом нормом је независна од избора метрике и конексије.

Глатки објекти на D које смо дефинисали у (2.30) и (2.31) су заправо глатки на унутрашњости од D а непрекидни на D. Банахов простор $W^{1,r}_u(D)$ даје нам Банахову многострукост пресликавања $\mathcal{P}^{1,r}(D)$ помоћу једнакости

$$T_u\mathcal{P}^{1,r}(D) = W^{1,r}_u(D).$$

Пратећи [58] бирамо метрику g тако да цевасту околину од ∂U можемо да идентификујемо са производом

$$Tb(\partial U) \cong \partial U \times (-1, 1).$$

Како се TT^*M симплектички разлаже на директан збир

$$TT^*M|_{Tb(\partial U)} = T(T^*(\partial U)) \oplus T(T^*(-1,1)),$$

овакав избор метрике g даје нам разлагање вертикалног и хоризонталног простора

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}(T^*M) = \mathcal{V}((T^*(\partial U)) \oplus \mathcal{V}(T^*(-1,1)),$$
$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(T^*M) = \mathcal{H}((T^*(\partial U)) \oplus \mathcal{H}(T^*(-1,1)).$$

Нека је $u : D \to T^*M$ решење система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^+ H}(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M,\, u(s,1) \in \Upsilon,\, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x(t). \end{cases} \tag{2.32}$$

Означимо димензију многострукости M са n. Фиксирамо тривијализацију

$$\Phi_+ : x^*(TT^*M) \to [0,1] \times \mathbb{C}^n,$$

и проширимо је до тривијализације

$$\Phi_u : u^*(TT^*M) \to D \times \mathbb{C}^n,$$

која чува разлагање од TT^*M

$$\Phi_u(\mathcal{H}) = \mathbb{R}^n, \quad \Phi_u(\mathcal{V}) = i\mathbb{R}^n.$$

Избор метрике g даје нам и следећа разлагања

$$\Phi_u(\mathcal{V}(T^*(\partial U)) = i\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \qquad \Phi_u(\mathcal{V}(T^*(-1,1)) = \{0\} \times i\mathbb{R},$$
$$\Phi_u(\mathcal{H}(T^*(\partial U)) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \qquad \Phi_u(\mathcal{H}(T^*(-1,1)) = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Оператор $\partial_{J,\rho_R^+ H}$, дефинисан са

$$\partial_{J,\rho_R^+ H} u = \frac{\partial u}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R H}(u)\right),$$

можемо видети као сечење одговарајућег векторског раслојења над $\mathcal{P}^{1,r}(D)$. Означимо са L_u његову коваријантну линеаризацију у тачки u. Оператор $(\Phi_u^{-1})^* L_u$

је Коши-Риманов оператор облика $\frac{\partial}{\partial s} + J\frac{\partial}{\partial t} + T$ који дејствује на

$$W^{1,r}_{\Phi_u} = \{\eta \in W^{1,r}(D, \mathbb{C}^n) \mid \eta(s,0) \in \mathbb{R}^n, \eta(s,1) \in \Lambda^{\Phi_u}(s)\},$$

где је

$$\Lambda^{\Phi_u}(s) = \Phi_u(T_{u(s,1)}\Upsilon).$$

Наставак доказа прати Додатак у [86]. Закључујемо да је, за генерички избор J, скуп решења $W^s(x,H)$ система (2.32) глатка многострукост димензије $-\mu(x) + n$.

Као и раније, $W^u(p,f)$ нам означава нестабилну многострукост тачке p. За генерички избор параметара g и J пресликавање

$$\mathrm{ev} : W^u(p,f) \times W^s(x,H) \to U \times U, \quad (\gamma, u) \mapsto (\gamma(0), u(-\infty)),$$

је трансверзално на дијагоналу па је

$$\mathcal{M}(p,x) = \mathrm{ev}^{-1}(\Delta)$$

глатка многострукост кодимензије n у $W^u(p,f) \times W^s(x,H)$. Закључујемо

$$\dim \mathcal{M}(p,x) = m_f(p) - \mu(x) + n - n = m_f(p) - \mu(x).$$

□

Следећи став даје опис границе многострукости $\mathcal{M}(p,x)$. Подсетимо се да смо модулски простор $\mathcal{M}(p,q;f,g)$ непараметризованих градијентних трајекторија функције $f : U \to \mathbb{R}$ дефинисали у (1.1). Скуп непараметризованих пертурбованих холоморфних трака, $\mathcal{M}(x,y : o_M, \Upsilon; H, J)$, дефинисали смо у (1.37).

Став 2.11. *Следећа својства важе за генерички избор параметара:*

(1) ако је $m_f(p) = \mu(x)$ тада је многострукост $\mathcal{M}(p,x)$ компактна и димезије нула, дакле коначан скуп тачака,

(2) ако је $m_f(p) = \mu(x) + 1$ тада је $\mathcal{M}(p,x)$ многострукост димензије један. Њена тополошка граница је облика

$$\partial\mathcal{M}(p,x) = \bigcup_q \mathcal{M}(p,q;f,g) \times \mathcal{M}(q,x) \cup \bigcup_y \mathcal{M}(p,y) \times \mathcal{M}(y,x : o_M, \Upsilon; H, J).$$

Прва унија је узета по свим критичним тачкама $q \in \mathrm{Crit}(f)$ Морсовог *индекса* $m_f(q) = m_f(p) - 1$ *а друга унија по свим* $y \in CF(o_M, \Upsilon : H, J)$ *за које важи* $\mu(y) = \mu(x) + 1$.

Доказ. Став се доказује коришћењем Арцела-Асколијеве теореме и Громовљеве теореме о компактности. Мехурови не могу да се појаве због тачности форме ω и због граничних услова на тачној Лагранжевој подмногострукости. Избор Морсове функције f из класе $\mathcal{F}^-$ контролише непостојање додатних елемената у тополошкој граници који долазе од низа $\gamma_n(0) = u_n(-\infty)$. Не може доћи до распада низа оваквих тачака јер су оне изоловане од границе ∂U. $\square$

Сада ћемо одабрати Морсову функцију f из класе $\mathcal{F}^+ \subset C^\infty(M)$ коју смо дефинисали у (1.11). За $\overline{x} \in CF_*(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}, \overline{J})$ дефинишемо модулски простор

$$\mathcal{M}(\overline{x}, p) \equiv \mathcal{M}(\overline{x}, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}, \overline{J}; p, f, g) =$$
$$\left\{ (u,\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M,\ \gamma : [0, +\infty) \to U, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \overline{J}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R^- \overline{H}}(u)) = 0, \\ \dot{\gamma}(s) = -\nabla_g f(\gamma(s)), \\ E(u) < +\infty, \\ u(s,0) \in o_M,\ u(s,1) \in \overline{\Upsilon},\ s \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty, t) = \overline{x}(t),\ \gamma(+\infty) = p, \\ u(+\infty) = \gamma(0) \end{array} \right\}. \tag{2.33}$$

Користећи исте аргументе као у доказу Става 2.10 можемо да закључимо да је, за генерички избор параметара g и J, скуп $\mathcal{M}(\overline{x}, p)$ многострукост димензије

$$\dim \mathcal{M}(\overline{x}, p) = \mu(\overline{x}) - m_f(p).$$

Многострукост је компактна у димензији нула. Ако је њена димензија једнака јединици опис тополошке границе је дат са

$$\partial\mathcal{M}(\overline{x}, p) = \bigcup_{\overline{y}} \mathcal{M}(\overline{x}, \overline{y} : o_M, \overline{\Upsilon}; \overline{H}, \overline{J}) \times \mathcal{M}(\overline{y}, p) \cup \bigcup_{q} \mathcal{M}(\overline{x}, q) \times \mathcal{M}(q, p; f, g). \tag{2.34}$$

Сада ћемо дефинисати модулске просторе који су слични просторима које смо дефинисали у (2.14) и (2.16) (само сада уместо конормалних граничних услова имамо тачне граничне услове). Нека су дате две критичне тачке $p, q \in \mathrm{Crit}(f) \cap U$ функције $f \in \mathcal{F}^-$ и $R > 0$ реалан број. Дефинишемо модулски простор

$$\overline{\mathcal{M}}_R(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)=\left\{(\gamma_-,\gamma_+,u)\;\middle|\;\begin{array}{l}\gamma_-:(-\infty,0]\to U,\\ \gamma_+:[0,+\infty)\to U,\\ u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M,\\ \frac{d\gamma_\pm}{dt}=-\nabla(\pm f)(\gamma_\pm),\\ \frac{\partial u}{\partial s}+J(\frac{\partial u}{\partial t}-X_{\sigma_R H}(u))=0\\ \gamma_-(-\infty)=p,\ \gamma_+(+\infty)=q,\\ E(u)<+\infty,\\ u(s,0)\in o_M,\ u(s,1)\in\Upsilon,\\ u(\pm\infty,t)=\gamma_\pm(0)\end{array}\right\}. \tag{2.35}$$

Овај модулски простор ће бити глатка многострукост и део границе многострукости

$$\overline{\mathcal{M}}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)=\{(\gamma_-,\gamma_+,u,R)\,|\\ (\gamma_-,\gamma_+,u)\in\overline{\mathcal{M}}_R(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J),\ R>R_0\,\}. \tag{2.36}$$

Нека су $f^\alpha, f^\beta\in\mathcal{F}^+$ две Морсове функције и H^α Хамилтонијан са компактним носачем. За $p_\beta\in\mathrm{Crit}(f^\beta)$ и $\overline{x}_\alpha\in CF_*(o_M,\overline{\Upsilon}:\overline{H^\alpha},\overline{J^\alpha})$ дефинишемо још један помоћни модулски простор

$$\widetilde{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha,o_M,\overline{\Upsilon},\overline{H^\alpha},\overline{J^\alpha};p_\beta,f_T^{\alpha\beta},g_T^{\alpha\beta})=\left\{(\gamma,u)\;\middle|\;\begin{array}{l}\gamma:[0,+\infty)\to U,\\ u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M,\\ \dot\gamma(s)=-\nabla_{g_T^{\alpha\beta}}f_T^{\alpha\beta}(\gamma),\\ \frac{\partial u}{\partial s}+\overline{J^\alpha}(\frac{\partial u}{\partial t}-X_{\rho_T^-\overline{H^\alpha}}(u))=0,\\ E(u)<+\infty,\\ u(s,0)\in o_M,\ u(s,1)\in\overline{\Upsilon},\ s\in\mathbb{R},\\ \gamma(+\infty)=p_\beta,\\ u(-\infty,t)=\overline{x}_\alpha(t),\\ \gamma(0)=u(+\infty)\end{array}\right\}. \tag{2.37}$$

Овде је $T>0$ фиксиран реалан број, а хомотопија $f_T^{\alpha\beta}(s)\in\mathcal{F}^+$ задовољава услове

$$f_T^{\alpha\beta}(s)=\begin{cases}f^\alpha, & s\le T,\\ f^\beta, & s\ge 2T.\end{cases}$$

Да бисмо постигли регуларност решења морамо да варирамо и Риманове метрике. Посматрамо хомотопију метрика $g_T^{\alpha\beta}$ која задовољава услове

$$g_T^{\alpha\beta}(s) = \begin{cases} g^\alpha, & s \le T, \\ g^\beta, & s \ge 2T. \end{cases}$$

Параметризована верзија претходног модулског простора је

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H^\alpha}, \overline{J^\alpha}; p_\beta, f_T^{\alpha\beta}, g_T^{\alpha\beta}) = \\ &\qquad \left\{ (\gamma, u, T) \,\middle|\, (\gamma, u) \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H^\alpha}, \overline{J^\alpha}; p_\beta, f_T^{\alpha\beta}, g_T^{\alpha\beta}),\, T > T_0 \right\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Сада ћемо фиксирати једну Морсову функцију $f^\beta \in \mathcal{F}^+$. Нека је $H_T^{\alpha\beta}(s)$ хомотопија Хамилтонових функција која задовољава услове

$$H_T^{\alpha\beta}(s) = \begin{cases} \overline{H^\alpha}, & s \le -2T, \\ \overline{H^\beta}, & s \ge -T. \end{cases}$$

Дефинишемо модулски простор

$$\check{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_T^{\alpha\beta}, J_T^{\alpha\beta}; p_\beta, f^\beta, g^\beta) = \left\{ (\gamma, u) \,\middle|\, \begin{array}{l} \gamma : [0, +\infty) \to U, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \dot\gamma(s) = -\nabla_{g^\beta} f^\beta(\gamma), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J_T^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_T^- H_T^{\alpha\beta}}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ u(s,0) \in o_M,\, u(s,1) \in \overline{\Upsilon},\, s \in \mathbb{R}, \\ \gamma(+\infty) = p_\beta, \\ u(-\infty, t) = \overline{x}_\alpha(t), \\ u(+\infty) = \gamma(0), \end{array} \right. \tag{2.39}$$

Слично као и малопре, да бисмо постигли регуларност решења морамо да варирамо скоро комплексне структуре. Хомотопија истих, $J_T^{\alpha\beta}$ прилагођена је Хамилтонијанима на одговарајућим крајевима,

$$J_T^{\alpha\beta}(s) = \begin{cases} \overline{J^\alpha}, & s \le -2T, \\ \overline{J^\beta}, & s \ge -T. \end{cases}$$

Сада ћемо посматрати хомотопије и Хамилтонијана и Морсових функција. Нека је $(f_\lambda^{\alpha\beta}, H_\lambda^{\alpha\beta})_{0 \le \lambda \le 1}$ хомотопија која повезује $(f^\beta, H_T^{\alpha\beta})$ за $\lambda = 0$ и $(f_T^{\alpha\beta}, \overline{H^\alpha})$ за $\lambda = 1$. На исти начин изаберемо хомотопије скоро комплексних структура и

Римановых метрика $(g_\lambda^{\alpha\beta}, J_\lambda^{\alpha\beta})_{0\le\lambda\le1}$.

Модулски простор

$$\widehat{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_\lambda^{\alpha\beta}, J_\lambda^{\alpha\beta}; p_\beta, f_\lambda^{\alpha\beta}, g_\lambda^{\alpha\beta}) = \left\{ (\gamma, u, \lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l} u : \mathbb{R}\times[0,1] \to T^*M, \\ \gamma : [0,+\infty) \to U, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J_\lambda^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_T^- H_\lambda^{\alpha\beta}}(u)) = 0, \\ \dot\gamma(s) = -\nabla_{g_\lambda^{\alpha\beta}} f_\lambda^{\alpha\beta}(\gamma), \\ E(u) < +\infty, \\ u(-\infty, t) = \overline{x}_\alpha(t), \\ u(s,0) \in o_M,\ u(s,1) \in \overline{\Upsilon},\ s \in \mathbb{R}, \\ \gamma(+\infty) = p_\beta, \\ u(+\infty) = \gamma(0). \end{array} \right. \tag{2.40}$$

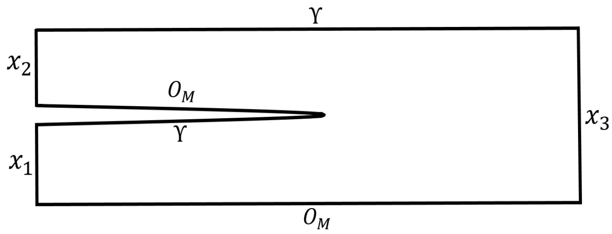
ће бити многострукост димензије $m_{f^\beta}(p_\beta) - \mu(\overline{x}_\alpha) + 1$. За $m_{f^\beta}(p_\beta) = \mu(\overline{x}_\alpha)$ граница многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_\lambda^{\alpha\beta}, J_\lambda^{\alpha\beta}; p_\beta, f_\lambda^{\alpha\beta}, g_\lambda^{\alpha\beta})$, чија је димензија један, је облика

$$\begin{aligned} &\bigcup_{\overline{y}_\alpha} \mathcal{M}(\overline{x}_\alpha, \overline{y}_\alpha : o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H^\alpha}, \overline{J^\alpha}) \times \widehat{\mathcal{M}}(\overline{y}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_\lambda^{\alpha\beta}, J_\lambda^{\alpha\beta}; p_\beta, f_\lambda^{\alpha\beta}, g_\lambda^{\alpha\beta}) \cup \\ &\bigcup_{q_\beta} \widehat{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_\lambda^{\alpha\beta}, J_\lambda^{\alpha\beta}; q_\beta, f_\lambda^{\alpha\beta}, g_\lambda^{\alpha\beta}) \times \mathcal{M}(q_\beta, p_\beta; f^\beta, g^\beta) \cup \\ &\bigcup \widetilde{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H^\alpha}, \overline{J^\alpha}; p_\beta, f_T^{\alpha\beta}, g_T^{\alpha\beta}) \cup \\ &\bigcup \check{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_T^{\alpha\beta}, J_T^{\alpha\beta}; p_\beta, f^\beta, g^\beta). \end{aligned} \tag{2.41}$$

2.6 Холоморфне панталоне са тачним граничним условима

Да бисмо дефинисали производ на Флоровој хомологији за отворен скуп посматраћемо пертурбоване холоморфне панталоне са границом на тачним подмногострукостима, $o_M \cup \Upsilon$. Сличне објекте смо посматрали у Поглављу 2.4 само је тада граница панталона била на $o_M \cup \nu^*N$. Постоји једна суштинска разлика у односу на панталоне са конормалним граничним условима. Тамо смо посматрали Риманову површ Σ која је имала два долазећа краја, Σ_1^- и Σ_2^-, и један одлазећи крај Σ^+. У овом поглављу површ Σ ћемо посматрати као површ која садржи три долазећа краја.

Прецизније, нека су Σ_1, Σ_2, Σ_3 три краја површи Σ коју идентификујемо са



Слика 20: Модулски простор $\mathcal{M}^{\Upsilon}(x_1, x_2, x_3)$

негативним полу-тракама,

$$\Sigma_j \approx (-\infty, 0] \times [0, 1],\, j \in \{1, 2, 3\}.$$

За пресликавање $u : \Sigma \to T^*M$ посматраћемо рестрикције на тим крајевима које означавамо са

$$u_j = u|_{\Sigma_j},\, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Нека су H_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, Хамилтонијани са компактним носачем. Одаберимо апроксимацију Υ која је довољно близу негативном конормалном скупу $\nu^*_-\overline{U}$. За $x_j \in CF_*(o_M, \Upsilon : H_j, J_j^{\Upsilon})$, $j \in \{1, 2, 3\}$ дефинишемо модулски простор (видети Слику 20)

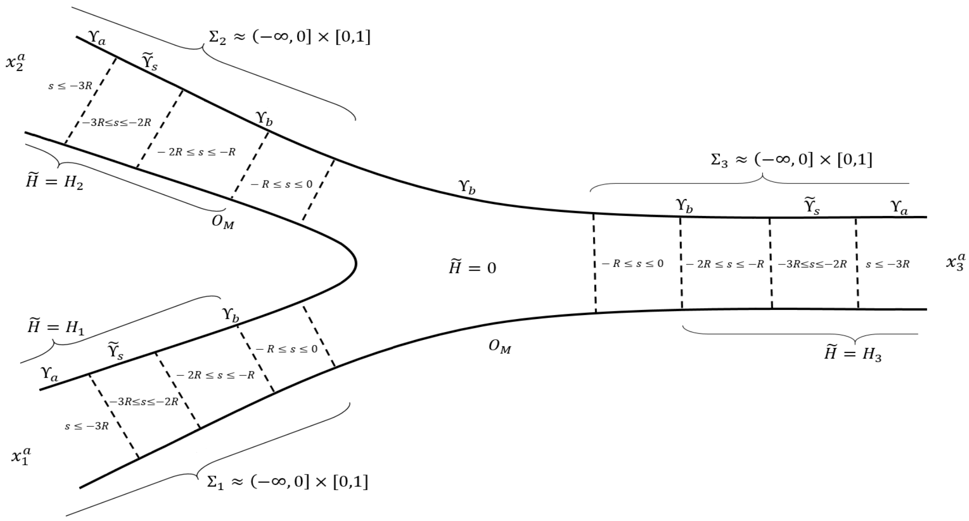
$$\mathcal{M}^{\Upsilon}(x_1, x_2, x_3) = \left\{ u : \Sigma \to T^*M \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial_s u_j + J^{\Upsilon}(\partial_t u_j - X_{\rho(s)H_j}(u_j)) = 0,\, j = 1, 2, 3, \\ \partial_s u + J^{\Upsilon}\partial_t u = 0, \text{ на } \Sigma_0 := \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3), \\ E(u) < +\infty, \\ u(s, -1) \in o_M,\, u(s, 1) \in \Upsilon,\, s \in \mathbb{R}, \\ u(s, 0^-) \in \Upsilon,\, u(s, 0^+) \in o_M,\, s \leq 0, \\ u_j(-\infty, t) = x_j(t),\, j = 1, 2, 3. \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Сада је $\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ глатка опадајућа функција која задовољава услове

$$\rho(s) = \begin{cases} 1, & s \leq -2 \\ 0, & s \geq -1. \end{cases}$$

Да бисмо постигли регуларност решења из скупа $\mathcal{M}^{\Upsilon}(x_1, x_2, x_3)$ допустићемо да скоро комплексна структура J^{Υ} зависи од тачака Риманове површи Σ. На одговарајућим асимптотским крајевима она је једнака унапред задатим скоро комплексним структурама J_j^{Υ}. За генерички избор скоро комплексне структуре $\mathcal{M}^{\Upsilon}(x_1, x_2, x_3)$ ће бити многострукост димензије

$$\mu(x_1) + \mu(x_2) + \mu(x_3) - 2n,$$



Слика 21: Гранични услови и Хамилтонијан $\tilde{H}$ за $u \in \mathcal{M}_R(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s)$

(подсетимо се да је $n = \dim M$).

Биће нам потребне и панталоне са границом на хомотопији тачних Лагранжевих подмногострукости. Нека је $\widetilde{\Upsilon}_s$ хомотопија између две апроксимације

$$\widetilde{\Upsilon}_s = \begin{cases} \Upsilon_a, & s \leq -R \\ \Upsilon_b, & s \geq R, \end{cases} \tag{2.43}$$

при чему је $R > 0$ фиксиран реалан број. Нека су дати Хамилтонови путеви $x_j^a \in CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_j, J_j^{\Upsilon_a})$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Дефинишемо модулски простор

$$\mathcal{M}_R(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s) \tag{2.44}$$

као скуп решења $u : \Sigma \to T^*M$ једначине

$$\bar{\partial}_{J,\tilde{H}} u = 0,$$

где је Хамилтонијан $\tilde{H}$ приказан на Слици 21.

Биће нам потребна и параметризована верзија овог модулског простора

$$\mathcal{M}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s) = \Big\{ (R, u) \,|\, R > R_0,\, u \in \mathcal{M}_R(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s) \Big\}. \tag{2.45}$$

Граница једнодимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s)$ може да се опише као унија следећих многострукости

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \bigcup_{y_1^a} \mathcal{M}(x_1^a, y_1^a : o_M, \Upsilon_a; H_1, J_1^{\Upsilon_a}) \times \mathcal{M}(y_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s),\\
\mathcal{B}_2 &= \bigcup_{y_2^a} \mathcal{M}(x_2^a, y_2^a : o_M, \Upsilon_a; H_2, J_2^{\Upsilon_a}) \times \mathcal{M}(x_1^a, y_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s),\\
\mathcal{B}_3 &= \bigcup_{y_3^a} \mathcal{M}(x_3^a, y_3^a : o_M, \Upsilon_a; H_3, J_3^{\Upsilon_a}) \times \mathcal{M}(x_1^a, x_2^a, y_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s),\\
\mathcal{B}_4 &= \mathcal{M}_{R_0}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s),\\
\mathcal{B}_5 &= \bigcup_{x_1^b, x_2^b, x_3^b} \mathcal{M}(x_1^a, x_1^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_1, J_1) \times \mathcal{M}(x_2^a, x_2^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_2, J_2) \times\\
&\qquad \times \mathcal{M}(x_3^a, x_3^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_3, J_3) \times \mathcal{M}^{\Upsilon_b}(x_1^b, x_2^b, x_3^b)
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

У претходним изразима уније су узете по оним члановима $y_j^a \in CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_j, J_j^{\Upsilon_a})$ и $x_j^b \in CF_*(o_M, \Upsilon_b : H_j, J_j^{\Upsilon_b})$, $j \in \{1, 2, 3\}$, за које су све многострукости $\mathcal{B}_i$ димензије нула. Подсетимо се да смо многострукости $\mathcal{M}(x^a, x^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H, J)$ дефинисали у (1.40), док смо помоћу $\mathcal{M}(x^a, y^a : o_M, \Upsilon_a; H, J)$ дефинисали гранични оператор у Флоровој хомологији за апроксимације (видети (1.37)).

3 (Изо)Морфизми

Ова глава садржи конструкцију (изо)морфизама између разних хомологија (Флорових и Морсових). Морфизми су дефинисани на нивоу ланаца бројањем комбинованих објеката које смо дефинисали у Глави 2. Неопходно је показати да су таква пресликавања ланчаста а у неким случајевима она ће индуковати изоморфизме између хомологија. Да бисмо то постигли дефинишемо више помоћних многострукости, а затим посматрањем граница тих многострукости добијамо жељене идентитете. Ове морфизме ћемо касније искористити да бисмо дефинисали спектралне инваријанте и показали неке неједнакости међу њима (видети Главу 5 и 6).

Поглавље 3.1 садржи опис познатог морфизма, између Флорове хомологије за периодичне орбите и Лагранжеве Флорове хомологије у компактној симплектичкој многострукости, чија је конструкција дата у [4]. Морфизам је дефинисан бројањем тачака нуладимензионог модулског простора који садржи димњаке са границом на компактној Лагранжевој подмногострукости.

У Поглављу 3.2 дата је конструкција ПСС изоморфизма између Морсове хомологије затворене подмногострукости $N \subset M$ и Флорове хомологије, у амбијенту котангентног раслојења T^*M, за пар (o_M, ν^*N). Пресликавање је дефинисано на нивоу ланаца помоћу модулских простора који су дефинисани у Поглављу 2.3. Да би се показало да је ово пресликавање ланчасто, затим да је изоморфизам и да је природно, у смислу са комутира са канонским изоморфизмима у одговарајућим хомологијама, користе се описи граница разних једнодимензионих модулских простора из истог поглавља. Резултати овог поглавља објављени су у ауторовом раду [24].

Поглавље 3.3 посвећено је конструкцији ПСС изоморфизама између Морсове хомологије отвореног подскупа $U \subset M$ са глатком границом и Флорових хомологија које су моделиране позитивним и негативним конормалним скупом од $\overline{U}$, $\nu^*_-\overline{U}$ и $\nu^*_+\overline{U}$. Пресликавања су прво дефинисана на Флоровим хомологијама за апроксимације. У дефиницији пресликавања и доказивању његових својстава (ланчасто пресликавање, изоморфизам и природно пресликавање) користе се помоћни модулски простори који су дефинисани у Поглављу 2.5. Знамо да се Флорове хомологије моделиране са $\nu^*_-\overline{U}$ и $\nu^*_+\overline{U}$ дефинишу као директни лимеси. Да бисмо дефинисали ПСС пресликавање на њима неопходно је показати да се ПСС пресликавања за апроксимације добро слажу са повезујућим хомоморфизмима између Флорових хомологија за различите апроксимације. Резултати овог поглавља део су коауторског рада са Ј. Катић и Д. Милинковићем [61].

3.1 Бројање димњака

У овом поглављу конструишемо хомоморфизам између Флорове хомологије за периодичне орбите коју смо дефинисали у Поглављу 1.6 и Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке дефинисане у 1.7.2

$$\tau_* : HF_*(P : H, J) \to HF_*(L, P : H, J).$$

Амбијентна многострукост је затворена симплектичка многострукост (P, ω) а $L \subset P$ је њена затворена Лагранжева подмногострукост. Пар (P, L) задовољава услов (1.28). Хомоморфизам τ

$$\tau : CF_*(P : H, J) \to CF_*(L, P : H, J),$$

је на нивоу ланаца задат једнакошћу

$$\tau(a) = \sum_{x \in CF_*(L,P:H,J)} n^\tau(a, x)\, x,$$

при чему $n^\tau(a, x)$ означава број елемената (по модулу 2) нуладимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}^\tau(a, x)$ коју смо дефинисали у (2.1). Чињеница да је τ ланчасто пресликавање ($\tau \circ \delta = \partial \circ \tau$) следи из описа границе који је дат у (2.2). Дакле, добро је дефинисано пресликавање на нивоу хомологија

$$\tau_* : HF_*(P : H, J) \to HF_*(L, P : H, J).$$

Биће нам потребно додатно својство хомоморфизма τ_*. Поставља се питање да ли се ово пресликавање (и како) редукује на филтриране хомологије. Одговор је позитиван и то својство нам даје могућност да упоредимо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за периодичне орбите са спектралним инваријантама у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке.

Став 3.1. *Хомоморфизам τ_* индукује хомоморфизам τ_*^λ на филтрираним хомологијама*

$$\tau_*^\lambda : HF_*^\lambda(P : H, J) \to HF_*^\lambda(L, P : H, J).$$

Доказ. Нека је $a \in CF_*^\lambda(P : H, J)$ и нека постоји димњак $u \in \mathcal{M}^\tau(a, x)$ који спаја периодичну орбиту a и Хамилтонов пут $x \in CF_*(L, P : H, J)$. Хоћемо да покажемо да $x \in CF_*^\lambda(L, P : H, J)$, односно да је задовољена неједнакост

$$\mathcal{A}_H^{P:L}(x) \le \lambda.$$

Одатле ће директно следити да $\tau(a) \in CF_*^{\lambda}(L, P : H, J)$.

Издвојићемо једну петљу y помоћу пресликавања u чији ће крајеви (или боље рећи крај $y(0) = y(1)$) припадати подмногострукости L,

$$y(t) = u(0, t).$$

Како $a \in \Omega_0(P)$ и како постоји цилиндар који спаја a и y то значи да се y такође налази у простору $\Omega_0(P)$. Са друге стране $x \in \Omega_0(P, L)$ и постоји трака која спаја y и x па ће y припадати и простору $\Omega_0(P, L)$. Знамо да су функционали дејства a_H^P и $\mathcal{A}_H^{P:L}$ једнаки на пресеку скупова $\Omega_0(P)$ и $\Omega_0(P, L)$. Подсетимо се да је функционал a_H^P дефинисан у (1.19) док је функционал $\mathcal{A}_H^{P:L}$ дефинисан у (1.31). Добијамо следећи низ неједнакости

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_H^{P:L}(x) - a_H^P(a) &= \mathcal{A}_H^{P:L}(x) - \mathcal{A}_H^{P:L}(y) + a_H^P(y) + a_H^P(a) = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} a_H(u(s, \cdot))\, ds + \int_{-\infty}^0 \frac{d}{ds} \mathcal{A}_H(u(s, \cdot))\, ds = \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \omega(\partial_s u, \partial_t u - X_H(u))\, dt\, ds = \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \|\partial_s u\|_J^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Дакле, на нивоу ланаца је добро дефинисано пресликавање

$$\tau^{\lambda} = \tau|_{CF_*^{\lambda}(P:H,J)} : CF_*^{\lambda}(P : H, J) \to CF_*^{\lambda}(L, P : H, J).$$

Показали смо да гранични оператори δ и ∂ чувају филтрацију, знамо да је τ ланчасто пресликавање па ће и τ^{λ} бити ланчасто пресликавање. Односно, добили смо хомоморфизам међу филтрираним хомологијама, τ_*^{λ}. $\square$

Једноставно се закључује да дијаграм на нивоу ланчастих комплекса

$$\begin{tikzcd}
CF_*^{\lambda}(P : H, J) \arrow[r, "\tau^{\lambda}"] \arrow[d, "i^{\lambda}"'] & CF_*^{\lambda}(L, P : H, J) \arrow[d, "j^{\lambda}"'] \\
CF_*(P : H, J) \arrow[r, "\tau"] & CF_*(L, P : H, J)
\end{tikzcd}$$

комутира. Како су све стрелице у дијаграму ланчаста пресликавања добијамо комутативан дијаграм на нивоу хомологија

$$\begin{tikzcd} HF_*^{\lambda}(P:H,J) \arrow[r, "\tau_*^{\lambda}"] \arrow[d, "i_*^{\lambda}"'] & HF_*^{\lambda}(L,P:H,J) \arrow[d, "j_*^{\lambda}"'] \\ HF_*(P:H,J) \arrow[r, "\tau_*"] & HF_*(L,P:H,J). \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

У раду [4] је показано да следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} HF_*(P:H,J) \arrow[r, "\tau_*"] & HF_*(L,P:H,J) \\ HM_*(P:f_P,g_P) \arrow[r, "\imath_!"] \arrow[u, "PSS"'] & HM_*(L:f_L,g_L), \arrow[u, "PSS^L"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

где је $\imath_!$ умкер пресликавање дефинисано као композиција Поенкареових дуала и инклузије

$$\imath_! = (PD^L)^{-1} \circ \imath^* \circ PD^P. \tag{3.3}$$

Пресликавање $\imath^*$ је повлачење инклузије на нивоу кохомологија

$$\imath^* : HM^{2n-*}(P : -f_P, g_P) \to HM^{n-*}(L : -f_L, g_L),$$

док су Поенкареови дуали пресликавања облика

$$PD^L : HM_*(L : f_L, g_L) \to HM^{n-*}(L : -f_L, g_L),$$
$$PD^P : HM_*(P : f_P, g_P) \to HM^{2n-*}(P : -f_P, g_P).$$

Функције $f_P : P \to \mathbb{R}$ и $f_L : L \to \mathbb{R}$ су Морсове а g_P и g_L су метрике на P и L такве да су одговарајући парови Морс-Смејлови.

Дефинисаћемо још један морфизам

$$\chi_* : HF_*(L,P:H,J) \to HF_*(P:H,J),$$

који на нивоу ланаца броји тачке многострукости $\mathcal{M}^{\chi}(x,a)$ коју смо дефинисали у (2.3). У Хамилтоновом путу $x \in CF_*(L,P:H,J)$ пресликавања χ узима вредност

$$\chi(x) = \sum_{a \in CF_*(P:H,J)} n^{\chi}(x,a)\, a,$$

где је $n^{\chi}(x,a)$ број елемената компактне нуладимензионе многострукости $\mathcal{M}^{\chi}(x,a)$. Пресликавање се на цео комплекс продужава по линеарности. Из описа границе једнодимензионе компоненте од $\mathcal{M}^{\chi}(x,a)$ следи да ће χ бити ланчасто пресликавање које индукује морфизам на нивоу хомологија. Пресликавање χ ће индуковати морфизам на нивоу филтрираних хомологија

$$\chi_*^\lambda : HF_*^\lambda(L, P : H, J) \to HF_*^\lambda(P : H, J).$$

Као и у случају пресликавања τ може се показати да постоји комутативан дијаграм који укључује филтриране Флорове хомологије

$$\begin{tikzcd} HF_*^\lambda(L, P : H, J) \arrow[r, "\chi_*^\lambda"] \arrow[d, "j_*^\lambda"'] & HF_*^\lambda(P : H, J) \arrow[d, "i_*^\lambda"'] \\ HF_*(L, P : H, J) \arrow[r, "\chi_*"] & HF_*(P : H, J). \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

У раду [4] је такође показано да постоји комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} HF_*(L, P : H, J) \arrow[r, "\chi_*"] & HF_*(P : H, J) \\ HM_*(L : f_L, g) \arrow[r, "i_*"] \arrow[u, "PSS^L"'] & HM_*(P : f_P, g), \arrow[u, "PSS"'] \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

где је i_* инлузија Морсових хомологија. Функција f_P је проширење функције f_L које је описано у доказу Става 4.5. У том случају је добро дефинисана инклузија ланчастих комплекса

$$i : CM_*(L : f_L, g) \to CM_*(P : f_P, g),$$

која индукује хомоморфизам на нивоу Морсових хомологија.

3.2 ПСС у конормалној Флоровој хомологији

Сада ћемо дати конструкцију ПСС пресликавања које успоставља изоморфизам између Морсове хомологије од N и Лагранжеве Флорове хомологије за пар нулто сечење o_M, конормално раслојење ν^*N у котангентном раслојењу T^*M. Користећи комбиноване објекте из скупова $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ који су дефинисани у (2.11) и (2.12) пресликавање дефинишемо на нивоу ланаца. Да бисмо показали да је оно ланчасто и да индукује изоморфизам на нивоу хомологија користићемо кобордизме помоћних модулских простора који су дефинисани у Поглављу 2.3.

У овом поглављу ћемо, ради једноставнијег записа, уместо $CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$ користити ознаку $CF_*(H)$ и $CM_*(f)$ уместо $CM_*(N : f, g)$. Исто скраћење ћемо користити и у ознакама хомологија. До забуне не може да дође јер је сада амбијентна многострукост котангентно раслојење T^*M и кад год кажемо Флорова хомологија мислимо на Лагранжеву Флорову хомологију $HF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$. Слично, једина Морсова хомологија коју посматрамо је хомологија Морсове функције f која је дефинисана на подмногострукости $N \subset M$.

Показали смо да су $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ компактне многострукости димензије нула ако важи релација $m_f(p) = \mu_N(x) + \frac{1}{2}\dim N$. Коначан број елемената ових многострукости (модуло 2) ћемо означити са $n(p, f; x, H)$ и $n(x, H; p, f)$. Пресликавања типа ПСС се дефинишу као

$$\begin{aligned} &\phi : CF_k(H) \to CM_k(f),\ \phi(x) = \sum_{m_f(p)=k} n(x, H; p, f)\, p, \\ &\psi : CM_k(f) \to CF_k(H),\ \psi(p) = \sum_{\mu_N(x)=k-\frac{1}{2}\dim N} n(p, f; x, H)\, x, \end{aligned}$$

на генераторима ланчастих комплекса а затим се продуже по линеарности. Из следећег става можемо да закључимо да ова пресликавања индукују пресликавања на нивоу хомологија.

Став 3.2. *Пресликавања ϕ и ψ су ланчаста пресликавања.*

Доказ. Показаћемо да важи $(\phi \circ \partial_F - \partial_M \circ \phi)(x) = 0$ за све $x \in CF_k(H)$. Ако кренемо од десне стране добијемо једнакост

$$\begin{aligned} (\phi \circ \partial_F - \partial_M \circ \phi)(x) = &\sum_{m_f(q)=k-1} \Bigg(\sum_{\mu_N(y)+\dim N/2=k-1} n(x, y; H)\, n(y, H; q, f) \Bigg) q - \\ &- \sum_{m_f(q)=k-1} \Bigg(\sum_{m_f(p)=k} n(x, H; p, f)\, n(p, q; f) \Bigg) q. \end{aligned}$$

За $q \in CM_{k-1}(f)$ сума, која фигурише у претходном изразу,

$$\sum_{\mu_N(y)+\dim N/2=k-1} n(x, y; H)\, n(y, H; q, f) - \sum_{m_f(p)=k} n(x, H; p, f)\, n(p, q; f) \tag{3.6}$$

представља број елемената многострукости

$$\bigcup_{y \in CF_{k-1}(H)} \mathcal{M}(x, y; H) \times \mathcal{M}(y, H; q, f) \cup \bigcup_{p \in CM_k(f)} \mathcal{M}(x, H; p, f) \times \mathcal{M}(p, q; f).$$

У Ставу 2.4 смо видели смо да је ова унија управо граница многострукости $\mathcal{M}(x, H; q, f)$ чија је димензија један. Знамо да свака многострукост димензије један има паран број тачака у граници па је израз (3.6) једнак нули (наравно, у простору са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима). Закључујемо да заиста важи

$$\phi \circ \partial_F = \partial_M \circ \phi.$$

Посматрањем једнодимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и описа њене границе из Става 2.3 можемо да закључимо да важи једнакост

$$\psi \circ \partial_M = \partial_F \circ \psi.$$

$\square$

Дакле, добили смо пресликавања на нивоу хомологија

$$\phi_* : HF_k(H) \to HM_k(f),$$

и

$$\psi_* : HM_k(f) \to HF_k(H).$$

Теорема 3.3. *Пресликавања ϕ_* и ψ_* су изоморфизми, инверзни један другоме*

$$\phi_* \circ \psi_* = \mathbb{I}|_{HM} \quad \textit{и} \quad \psi_* \circ \phi_* = \mathbb{I}|_{HF}.$$

Доказ. Знамо да ланчасто хомотопна пресликавања индукују иста пресликавања на нивоу хомологија. Главна идеја која се користи јесте да покажемо да су одговарајуће композиције (на нивоу ланаца) ланчасто хомотопне једноставнијим пресликавањима. Када кажемо једноставнија пресликавања мислимо на пресликавања у чијој дефиницији учествују мање компликовани објекти од објеката помоћу којих смо дефинисали ПСС.

Доказ ћемо поделити на два дела. У Делу А показујемо да је $\phi_* \circ \psi_*$ идентитет а у Делу Б да важи $\psi_* \circ \phi_* = \mathbb{I}|_{HF}$.

Део А. Из начина на који смо дефинисали ϕ и ψ закључујемо да је

$$\phi_* \circ \psi_*(p) = \sum_{m_f(q)=k} \left(\sum_{\mu_N(x)+\dim N/2=k} n(p, f; x, H)\, n(x, H; q, f) \right) q.$$

Сума

$$\sum_{\mu_N(x)+\dim N/2=k} n(p, f; x, H) n(x, H; q, f)$$

је број елемената скупа

$$\cup_x \mathcal{M}(p, f; x, H) \times \mathcal{M}(x, H; q, f), \tag{3.7}$$

а ова унија је, са друге стране, део границе многострукости $\partial\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ дефинисане у (2.16). Конструисаћемо нова пресликавања на нивоу ланаца, l и j. Овим желимо да опишемо остатак границе $\partial\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ који се не јавља у (3.7).

Пресликавање

$$l : CM_k(f) \to CM_k(f),$$

је задато једнакошћу

$$l(p) = \sum_{m_f(q)=k} n(p,q,f;H)\, q,$$

где је $n(p,q,f;H)$ број елемената многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f;H)$ (видети (2.14) за дефиницију).

Примедба 3.4. Број $n(p,q,f;H)$ можемо да видимо и као број пресека пертурбованих холоморфних дискова са нестабилном многострукошћу $W^u(p,f)$ и стабилном многострукошћу $W^s(q,f)$. Половина границе холоморфних дискова је на нултом сечењу а друга половина на конормалном раслојењу. Када се приближавамо тачкама скока, пертурбација, која фигурише у Коши-Римановој једначини, се глатко смањује до нуле.

Друго пресликавање

$$j : CM_k(f) \to CM_{k+1}(f),$$

једнако је

$$j(p) = \sum_{m_f(r)=k+1} \overline{n}(p,r,f;H)\, r,$$

где је $\overline{n}(p,r,f;H)$ број тачака (модуло 2) многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H)$ чија је димензија нула. Сума

$$\sum_{m_f(r)=k-1} n(p,r;f)\, \overline{n}(r,q,f;H)$$

одговара суми која се јавља у $j \circ \partial_M$, а

$$\sum_{m_f(r)=k+1} \overline{n}(p,r,f;H)\, n(r,q;f)$$

одговара суми $\partial_M \circ j$. Из описа границе многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,q,f;H)$ датог у Ставу 2.5 закључујемо да важи

$$\phi \circ \psi - l = \partial_M \circ j + j \circ \partial_M.$$

Како су пресликавања ϕ и ψ ланчаста закључујемо да је и пресликавање

$$l = \phi \circ \psi - \partial_M \circ j - j \circ \partial_M$$

ланчасто. Одговарајуће пресликавање на нивоу хомологија, које је заправо једнако $\phi_* \circ \psi_*$, означићемо са

$$l_* : HM_k(f) \to HM_k(f).$$

Сада уместо пресликавања $\psi_* \circ \phi_*$ можемо да посматрамо пресликавање l_*.

Показаћемо да l_* не зависи од Хамилтонијана H (зависност од овог параметра се јавља у дефиницији $\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f;H)$ а самим тим и у $n(p,q,f;H)$). Нека су H_0 и H_1 два Хамилтонијана са компактним носачима и H_δ, $0 \leq \delta \leq 1$, хомотопија која их спаја. Нека је l_i, $i \in \{0,1\}$, пресликавање које одговара Хамилтонијанима H_i. Посматрајући многострукост $\overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H_\delta)$ која је дефинисана у (2.20) и њену тополошку границу описану у Ставу 2.8 закључујемо да важи

$$l_1 - l_0 = \partial_M \circ j_\delta + j_\delta \circ \partial_M,$$

где је j_δ помоћно пресликавање које броји елементе простора $\overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H_\delta)$. Прецизније, пресликавање

$$j_\delta : CM_k(f) \to CM_{k+1}(f),$$

је на генераторима ланчастог комплекса једнако

$$j_\delta(p) = \sum_{m_f(r)=k+1} \overline{n}(p,r,f;H_\delta)\, r,$$

где $\overline{n}(p,r,f;H_\delta)$ означава број елемената (модуло 2) многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,r,f;H_\delta)$ чија је димензија једнака нули. Закључујемо да је на нивоу хомологија

$$l_{0*} = l_{1*}.$$

Ми ћемо одабрати хомотопију која спаја наш Хамилтонијан H и Хамилтонијан који је идентички једнак нули. Закључујемо да је пресликавање l, а самим тим и $\phi \circ \psi$, ланчасто хомотопно пресликавању $i : CM_k(f) \to CM_k(f)$ које се дефинише као

$$i(p) = \sum_{m_f(q)=k} n(p, q, f; 0)\, q.$$

Сада смо композицију на нивоу хомологија $\phi_* \circ \psi_*$ изједначили са i_*.

Детаљније ћемо описати пресликавање i. За две критичне тачке $p, q \in CM_*(f)$ оно броји пресек многострукости $W^u(p, f)$, $W^s(q, f)$ и простор холоморфних дискова (непертурбованих) чија је граница на $o_M \cup \nu^* N$. У доказу Става 2.3 смо видели да су сви овакви дискови константни. Следи да $n(p, q, f; 0)$ представља број елемената у пресеку $W^u(p, f) \cap W^s(q, f)$ или, једноставније речено, то је број градијентних трајекторија које спајају тачке p и q. Како Морсов индекс строго опада дуж нетривијалне градијентне трајекторије, а p и q су критичне тачке истог Морсовог индекса, такве трајекторије неће постојати ако је $p \neq q$. Другим речима,

$$i = \mathbb{I},$$

и на нивоу ланаца (сада постаје јасније зашто смо употребили појам једноставнија пресликавања на почетку доказа). На нивоу хомологија такође добијамо идентичко пресликавање.

Део Б. Исту идеју користимо да бисмо показали други идентитет

$$\psi_* \circ \phi_* = \mathbb{I}|_{HF}.$$

Композиција $\psi \circ \phi$ је ланчасто хомотопна пресликавању

$$r : CF_k(H) \to CF_k(H),$$

које се дефинише са

$$r(x) = \sum_{\mu_N(y)=\mu_N(x)} n_{\varepsilon_0}(x, y, H; f)\, y.$$

$n_{\varepsilon_0}(x, y, H; f)$ је број елемената многострукости $\mathcal{M}_{\varepsilon_0}(x, y, H; f)$ чија је димензија нула (ову многострукост смо дефинисали у (2.17)) (пресликавање

r је аналогија пресликавања l у Делу А). Ланчаста хомотопија се успоставља помоћу пресликавања

$$v : CF_k(H) \to CF_{k+1}(H),$$

које је дефинисано са

$$v(x) = \sum_{\mu_N(y)=\mu_N(x)+1} \underline{\underline{n}}(x, y, H; f)\, y.$$

$\underline{\underline{n}}(x, y, H; f)$ представља број елемената (модуло 2) многострукости $\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x, y, H; f)$ чија је димензија нула (видети (2.19) за дефиницију). Из описа границе многострукости $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ који је дат у Ставу 2.7 следи једнакост

$$\psi \circ \phi = r + \partial_F \circ v + v \circ \partial_F.$$

Сада ћемо, користећи многострукост $\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$ која је дефинисана у (2.18), показати да је r_*, пресликавање на нивоу хомологија, независно од избора параментра ε_0. Нека су r_0 и r_1 пресликавања на нивоу ланаца која одговарају вредностима ε_0 и ε_1. Дефинишемо пресликавање

$$s : CF_k(H) \to CF_{k+1}(H),$$

на генераторима ланчастог комплекса као

$$s(x) = \sum_{\mu_N(y)+=\mu_N(x)+1} \underline{n}(x, y, H; f)\, y,$$

где је $\underline{n}(x, y, H; f)$ број елемената многострукости $\underline{\mathcal{M}}(x, y, H; f)$. Из Става 2.6 следи

$$r_0 - r_1 = s \circ \partial_F + \partial_F \circ s,$$

односно, на нивоу хомологија добијемо иста пресликавања

$$r_{0*} = r_{1*}.$$

Када прођемо лимесом $\varepsilon \to 0$ закључујемо да је $\psi \circ \phi$ хомотопно пресликавању

$$\widetilde{i} : CF_k(H) \to CF_k(H),$$

које дефинишемо једнакошћу

$$\widetilde{i}(x) = \sum_{\mu_N(y)=\mu_N(x)} \widetilde{n}(x,y;H)\, y.$$

$\widetilde{n}(x,y;H)$ означава број елемената многострукости $\widetilde{\mathcal{M}}(x,y;H)$ коју смо дефинисали у (2.8). Користећи многострукост $\check{\mathcal{M}}(x,y;H)$ чија је димензија један и опис њене границе који је дат у (2.10) закључујемо да је $\widetilde{i}$ (односно $\psi \circ \phi$) ланчасто хомотопно пресликавању

$$k : x \mapsto \sum_{\mu_N(y)=\mu_N(x)} n_{R_0}(x,y;H)\, y,$$

где $n_{R_0}(x,y;H)$ броји елементе многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(x,y;H)$ чија је димензија нула (видети (2.9) за дефиницију). Ако постоји холоморфна трака која спаја Хамилтонове путеве x и y тада је $\mu_N(x) > \mu_N(y)$ па закључујемо да је

$$n_{R_0}(x,y;H) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Другим речима, пресликавање k индукује идентитет у хомологији $HF_*(H)$.

$\square$

Показаћемо да су наша ПСС пресликавања ϕ_* и ψ_* природна, у смислу да комутирају са изоморфизмима у Морсовој и Флоровој хомологији за избор различитих параметара. Пресликавање $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ које успоставља изоморфизам између Морсових хомологија за два различита Морс-Смејлова пара (f^α, g^α) и (f^β, g^β) смо дефинисали у Поглављу 1.3. Пресликавање $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$ је дефинисано у Поглављу 1.7.1. Оно успоставља изоморфизам између конормалних Флорових хомологија $HF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$ за избор различитих Хамилтонијана и скоро комплексних структура. Питање природности, односно сагласности ПСС са овим пресликавањима није тривијално. Пресликавања $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ броје објекте различитог типа. Бројањем градијентних трајекторије, које представљају решења обичних диференцијалних једначина, дефинишемо пресликавање $\mathbf{T}$, док $\mathbf{S}$ броји решења парцијалних диференцијалних једначина.

Теорема 3.5. *Дијаграм*

$$\begin{tikzcd} HF_k(o_M, \nu^*N : H^\alpha, J^\alpha) \arrow[r, "\mathbf{S}_{\alpha\beta}"] & HF_k(o_M, \nu^*N : H^\beta, J^\beta) \\ HM_k(N : f^\alpha, g^\alpha) \arrow[u, "\psi_*^\alpha"] \arrow[r, "\mathbf{T}_{\alpha\beta}"] & HM_k(N : f^\beta, g^\beta), \arrow[u, "\psi_*^\beta"'] \end{tikzcd}$$

комутира.

Доказ. Идеја доказа је да се покаже да су $\sigma_{\alpha\beta}\circ\psi^\alpha$ и $\psi^\beta\circ\tau_{\alpha\beta}$ ланчасто хомотопна пресликавања. Како они генеришу (редом) $\mathbf{S}_{\alpha\beta}\circ\psi_*^\alpha$ и $\psi_*^\beta\circ\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ следиће да дијаграм заиста комутира.

Доказ ћемо извести у два корака. У Кораку 1 дефинишемо ново пресликавање χ које ће бити хомотопно пресликавању $\sigma_{\alpha\beta}\circ\psi^\alpha$ а у Кораку 2 дефинишемо пресликавање ξ хомотопно $\psi^\beta\circ\tau_{\alpha\beta}$. У закључку доказа показујемо да су χ и ξ ланчасто хомотопна пресликавања.

Корак 1. На основу дефиниција пресликавања $\sigma_{\alpha\beta}$ и ψ^α знамо да је

$$(\sigma_{\alpha\beta}\circ\psi^\alpha)(p^\alpha) = \sum_{x^\alpha, x^\beta} n(p^\alpha, f^\alpha; x^\alpha, H^\alpha)\, n(x^\alpha, x^\beta; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})\, x^\beta.$$

Другим речима, $\sigma_{\alpha\beta}\circ\psi^\alpha$ броји елементе скупа

$$\bigcup_{x^\alpha, x^\beta} \mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\alpha, H^\alpha)\times\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta}). \tag{3.8}$$

Подсетимо се да смо $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$ дефинисали у (1.24). Унија у изразу (3.8) је узета по свим x^α, x^β за које важи

$$m_{f^\alpha}(p^\alpha) = \mu_N(x^\alpha) + \frac{1}{2}\dim N = \mu_N(x^\beta) + \frac{1}{2}\dim N.$$

Нека је $T > 0$ реалан параметар и нека је $H_{T,s}^{\alpha\beta}$ глатка хомотопија која спаја H^α и H^β, односно

$$H_{T,s}^{\alpha\beta} = \begin{cases} H^\alpha, & s\le T,\\ H^\beta, & s\ge T+1.\end{cases}$$

Заједно са тим посматраћемо и хомотопију између скоро комплексних структура J^α и J^β

$$J_{T,s}^{\alpha\beta} = \begin{cases} J^\alpha, & s\le T,\\ J^\beta, & s\ge T+1.\end{cases}$$

Дефинишемо модулски простор

$$\check{\mathcal{M}}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_{T,s}) = \left\{ (T,\gamma,u) \;\middle|\; \begin{array}{l} T > T_0, \\ \gamma : (-\infty, 0] \to N, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla_{g^\alpha} f^\alpha(\gamma), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J^{\alpha\beta}_{T,s}(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho^+_R H^{\alpha\beta}_{T,s}}(u)) = 0, \\ E(u) < +\infty, \\ \gamma(-\infty) = p^\alpha, \\ u(s,0) \in o_M, u(s,1) \in \nu^*N, s \in \mathbb{R}, \\ u(+\infty, t) = x^\beta(t), \\ \gamma(0) = u(-\infty) \end{array} \right\}.$$

Користећи исте идеје као у анализи модулских простора у Поглављу 2.3, закључујемо да границу од $\check{\mathcal{M}}$ можемо описати као

$$\begin{aligned} \partial\check{\mathcal{M}}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_{T,s}) =& \mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_{T_0,s}) \\ & \cup \bigcup_{x^\alpha} \mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\alpha, H^\alpha) \times \mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta; H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta}) \\ & \cup \bigcup_{q^\alpha} \mathcal{M}(p^\alpha, q^\alpha; f^\alpha, g^\alpha) \times \check{\mathcal{M}}(q^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_{T,s}) \\ & \cup \bigcup_{y^\beta} \check{\mathcal{M}}(p^\alpha, f^\alpha; y^\beta, H^{\alpha\beta}_{T,s}) \times \mathcal{M}(y^\beta, x^\beta; H^\beta, J^\beta). \end{aligned}$$

Први елемент претходне уније је већ описан у (2.22) (добије се за једну фиксирану хомотопију $H^{\alpha\beta}_s = H^{\alpha\beta}_{T_0,s}$). Уводимо ново пресликавање χ које броји елементе (по модулу 2) многострукости $\mathcal{M}(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_s)$

$$\chi(p^\alpha) = \sum_{x^\beta} n(p^\alpha, f^\alpha; x^\beta, H^{\alpha\beta}_s)\, x^\beta.$$

Из описа тополошке границе $\check{\mathcal{M}}$ закључујемо да су χ и $\sigma_{\alpha\beta} \circ \psi^\alpha$ ланчасто хомотопна пресликавања.

Корак 2. Друга композиција задовољава једнакост

$$\psi^\beta \circ \tau_{\alpha\beta}(p^\alpha) = \sum_{p^\beta, x^\beta} n(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})\, n(p^\beta, f^\beta; x^\beta, H^\beta)\, x^\beta.$$

Сада, $\psi^\beta \circ \tau_{\alpha\beta}$ броји елементе скупа

$$\bigcup_{p^\beta, x^\beta} \mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) \times \mathcal{M}(p^\beta, f^\beta; x^\beta, H^\beta),$$

где је $\mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta; f^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ дефинисано у (1.2). У претходном изразу унија је узета по елементима p^β, x^β који задовољавају једнакости

$$m_{f^\alpha}(p^\alpha) = m_{f^\beta}(p^\beta) = \mu_N(x^\beta) + \frac{1}{2}\dim N.$$

Дефинишемо пресликавање ξ које броји елементе многострукости $\mathcal{M}(p^\alpha, f_s^{\alpha\beta}; x^\beta, H^\beta)$. Следи, слично као у Кораку 1, да су ξ и $\psi^\beta \circ \tau_{\alpha\beta}$ ланчасто хомотопна пресликавања.

Посматрајући модулски простор $\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$ који смо дефинисали у (2.21), показаћемо да су χ и ξ ланчасто хомотопни. Дефинишемо ланчасти хомоморфизам

$$\begin{aligned} &j : CM_{k-1}(f^\alpha) \to CF_k(H^\beta),\\ &j(p^\alpha) = \sum_{\mu_N(x^\beta)+\dim N/2=k} \widehat{n}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})\, x^\beta, \end{aligned}$$

где је $\widehat{n}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$ број елемената многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p^\alpha, f_{s,\delta}^{\alpha\beta}; x^\beta, H_{s,\delta}^{\alpha\beta})$ димензије нула. Из Става 2.9 у ком смо дали опис границе $\partial\widehat{\mathcal{M}}$ следи једнакост

$$\xi - \chi + j \circ \partial_M + \partial_F \circ j = 0.$$

$\square$

3.3 ПСС у Флоровој хомологији за отворене скупове

У овом поглављу конструишемо изоморфизме споменуте у (1.43) и (1.50) тако што сингуларне хомологије моделирамо одговарајућим Морсовим хомологијама. Главна идеја је да прво конструишемо изоморфизме за апроксимације Υ од конормалних скупова $\nu_-^*\overline{U}$ и $\nu_+^*\overline{U}$, што је задатак Поглавља 3.3.1. Након тога у Поглављу 3.3.2 испитујемо како се ти изоморфизми понашају у директном лимесу.

Подсетимо се да је амбијент у ком се налазимо котангентно раслојење, T^*M. У бази, затвореној многострукости M, посматрамо отворен скуп $U \subset M$ са глатком границом ∂U. Оваквом скупу придружујемо негативан конормалан скуп, $\nu^*_-\overline{U}$, дефинисан у (1.33) и позитиван конормалан скуп, $\nu^*_+\overline{U}$, дефинисан у (1.47). Флорову хомологију за отворен скуп U, моделирану негативним конормалним скупом, дефинисали смо у (1.42) као директан лимес Флорових хомологија за пар (o_M, Υ) где је Υ апроксимација од $\nu^*_-\overline{U}$. Ову хомологију смо означавали са $HF_*^-(H, U : M)$. Као што смо истакли у Поглављу 1.8 биће нам потребна и Флорова хомологија за отворен скуп U, моделирана позитивним конормалним скупом. Ову хомологију смо означавали са $HF_*^+(H, U : M)$, а дефинисали смо је у (1.49) као директан лимес по апроксимацијама од $\nu^*_+\overline{U}$.

У целом поглављу ћемо претпоставити да радимо са Хамилтонијаном $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ чији је носач компактан скуп и који задовољава следеће услове

$$\phi^1_H(o_M) \pitchfork o_M, \quad \phi^1_H(o_M) \cap o_M|_{\partial U} = \emptyset, \quad \phi^1_H(o_M) \pitchfork \nu^*_-\overline{U}. \tag{3.9}$$

3.3.1 ПСС за апроксимације

Нека је $f \in \mathcal{F}^-$ Морсова функција и $p \in \mathrm{Crit}(f) \cap U$ критична тачка. Одаберимо апроксимацију Υ која је довољно близу $\nu^*_-\overline{U}$, у смислу да за све $x \in CF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ важи (2.28). За претходно описане изборе у (2.29) дефинисали смо модулски простор $\mathcal{M}(p, x)$ који ће бити компактна многострукост димензије нула ако је $m_f(p) = \mu(x)$. Сада на нивоу ланаца дефинишемо пресликавање

$$\phi^\Upsilon : CM_k(U : f, g) \to CF_k(o_M, \Upsilon : H, J),$$

једнакошћу

$$\phi^\Upsilon(p) = \sum_{x \in CF_k} n(p, x)\, x,$$

где $n(p, x)$ означава број елемената од $\mathcal{M}(p, x)$.

Нека је сада f Морсова функција из друге класе $\mathcal{F}^+ \subset C^\infty(M)$ и $p \in \mathrm{Crit}(f) \cap U$. Многострукост $\mathcal{M}(\overline{x}, p)$, дефинисана у (2.33), биће компактна и димензије нула ако је $m_f(p) = \mu(\overline{x})$. Означимо са $n(\overline{x}, p)$ број елемената по модулу 2 те многострукости. Дефинишемо још једно пресликавање

$$\psi^{\overline{\Upsilon}} : CF_k(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}, \overline{J}) \to CM_k(U : f),$$

које је на генераторима ланчастог комплекса задато са

$$\psi^{\overline{\Upsilon}}(\overline{x}) = \sum_{p \in CM_k} n(\overline{x}, p)\, p,$$

а даље продужено по линеарности.

Пресликавања ϕ^{Υ} и $\psi^{\overline{\Upsilon}}$ ће бити ланчаста пресликавања.

Став 3.6. *Пресликавања ϕ^{Υ} и $\psi^{\overline{\Upsilon}}$ индукују хомоморфизме на нивоу хомологија*

$$\Phi^{\Upsilon} : HM_k(U : f^-, g) \to HF_k(o_M, \Upsilon : H, J),$$

и

$$\Psi^{\overline{\Upsilon}} : HF_k(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}, \overline{J}) \to HM_k(U : f^+, g),$$

за све $f^{\pm} \in \mathcal{F}^{\pm}$

Доказ овог става сличан је доказу Става 3.2. Изостављамо га јер смо све неопходне кораке већ извели. Описали смо границе једнодимензионих многострукости $\mathcal{M}(p, x)$ $\mathcal{M}(\overline{x}, p)$ (Став 2.11 и (2.34)) што је довољно да би се показале релације $\Phi^{\Upsilon} \circ \partial_M = \partial_F \circ \Phi^{\Upsilon}$ и $\Psi^{\overline{\Upsilon}} \circ \partial_F = \partial_M \circ \overline{\Upsilon}$.

Приметимо да сада не можемо да се питамо да ли су ови хомоморфизми инверзни један другом (што смо имали у случају ПСС-а у Флоровој хомологији са конормалним граничним условима, Теорема 3.3). Питање нема смисла јер се не поклапају домен пресликавања Φ^{Υ} и кодомен од $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$. Истакнимо још једном да је Φ^{Υ} дефинисано помоћу Морсових функција из класе $\mathcal{F}^-$, док смо за конструкцију пресликавања $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ користили функције из $\mathcal{F}^+$. Ипак, Поенкареов дуал PD^g_M у Морсовој хомологији, дефинисан у (1.12), и Поенкареов дуал у Флоровој хомологији за апроксимације PD^{Υ}_F, дефинисан у (1.52), дају нам везу између Φ^{Υ} и $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$. О томе говори следећи став.

Став 3.7. *Нека је $f \in \mathcal{F}^-$. Тада следећи дијаграм комутира*

$$\begin{tikzcd} HM_k(U : f, g) \arrow[r, "\Phi^{\Upsilon}"] \arrow[d, "\mathrm{PD}^g_M"', "\cong"] & HF_k(o_M, \Upsilon : H, J) \arrow[d, "\mathrm{PD}^{\Upsilon}_F"', "\cong"] \\ HM_{n-k}(U : -f, g) & HF_{n-k}(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}, \overline{J}). \arrow[l, "\Psi^{\overline{\Upsilon}}"'] \end{tikzcd}$$

Из овог дијаграма закључујемо да су пресликавања Φ^{Υ} и $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ изоморфизми.

Доказ. Показаћемо да важи

$$\Psi^{\overline{\Upsilon}} \circ \mathrm{PD}^{\Upsilon}_F \circ \Phi^{\Upsilon} = \mathrm{PD}^g_M.$$

Лева страна дејствује на критичну тачку $p \in CM_k(U : f, g)$ као

$$\Psi^{\overline{\Upsilon}} \circ \mathrm{PD}^{\Upsilon}_F \circ \Phi^{\Upsilon}(p) = \sum_{m_{-f}(q)=n-k} \left(\sum_{\mu(x)=k} n(p, x) n(\overline{x}, q) \right) q.$$

Очигледно је $n(\overline{x},q)=n(x,q)$ где је

$$n(x,q)=\sharp_2\mathcal{M}(x,o_M,\Upsilon,H,J;p,-f,g)$$

при чему смо ову многострукост дефинисали у (2.33). Приметимо да овде немамо анти-симплектичке параметре, $\overline{\Upsilon},\overline{H},\overline{J}$, као у самој дефиницији (2.33). Сада посматрамо пертурбоване холоморфне траке при чему је пертурбација задата са H а граница трака је на $o_M\cup\Upsilon$. Што се тиче пресека са негативним градијентним трајекторијама од $-f$ ту се ништа не мења јер $u(+\infty)\in o_M\cap\Upsilon\subset o_U$ па је $\overline{u}(+\infty)=u(+\infty)$. Сума $\sum\limits_{\mu(x)=k} n(p,x)n(x,q)$ представља број елемената многострукости

$$\bigcup_x \mathcal{M}(p,f,g;x,o_M,\Upsilon,H,J)\times\mathcal{M}(x,q,O_M,\Upsilon:-f,H,J,g). \tag{3.10}$$

чија је димензија једнака нули. У остатку доказа користимо модулске просторе дефинисане у Поглављу 2.5. Многострукост (3.10) ће бити део границе многострукости $\overline{\mathcal{M}}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)$ коју смо дефинисали у (2.36). Цела граница ове једнодимензионе многострукости је облика

$$\begin{aligned}\partial\overline{\mathcal{M}}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)=\ &\overline{\mathcal{M}}_{R_0}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)\cup\\ &\bigcup_{x\in CF_k(H)}\mathcal{M}(p,f,g;x,o_M,\Upsilon,H,J)\times\mathcal{M}(x,q,O_M,\Upsilon:-f,H,J,g)\cup\\ &\bigcup_{r\in CM_{k-1}(f)}\mathcal{M}(p,r;f,g)\times\overline{\mathcal{M}}(r,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)\cup\\ &\bigcup_{r\in CM_{n-k+1}(-f)}\overline{\mathcal{M}}(p,r:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)\times\mathcal{M}(r,q;-f,g).\end{aligned}$$

Многострукост $\overline{\mathcal{M}}_{R_0}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)$, која се појављује у претходној унији, дефинисана је у (2.35). Овакав опис границе нам каже да ће пресликавање $\Psi^{\overline{\Upsilon}}\circ\mathrm{PD}_F^{\Upsilon}\circ\Phi^{\Upsilon}$ бити ланчасто хомотопно пресликавању

$$p\mapsto\sum_{q\in CM_{n-k}(-f)} n_{R_0}(p,q)\,q,$$

где $n_{R_0}(p,q)$ представља број тачака нуладимензионе многострукости $\overline{\mathcal{M}}_{R_0}(p,q:o_M,\Upsilon;\pm f,H,J)$. Као и у доказу Теореме 3.3 може се показати да последње пресликавање, на нивоу хомологија, не зависи од параметра R_0. Специјално, узмимо да је $R_0=0$. Холоморфне траке које бројимо у $\overline{\mathcal{M}}_{R_0=0}$ имају границу на тачним Лагранжевим подмногострукостима $o_M\cup\Upsilon$ и важи $h_\Upsilon|_{o_U}=0$. Такве траке могу да буду само константне. Свели смо наше пресликавање на бројање парова (γ_-, γ_+) за које важи

$$\begin{cases} \gamma_- : (-\infty, 0] \to U,\ \gamma_+ : [0, +\infty) \to U, \\ \dot{\gamma}_\pm = -\nabla(\pm f)(\gamma_\pm), \\ \gamma_-(-\infty) = p,\ \gamma_+(+\infty) = q, \\ \gamma_-(0) = \gamma_+(0). \end{cases}$$

То значи да се негативном градијентном трајекторијом од f крећемо из тачке p до неке тачке (која није критична тачка функције f). Затим се из те тачке враћамо назад јер се крећемо дуж негативне градијентне трајекторије од $-f$. Једино где можемо да завршимо то је критична тача p коју видимо као елемент комплекса $CM_{n-k}(U : -f, g)$. Дакле, број таквих парова је 1 ако је $p = q$ а иначе је једнак 0. Закључујемо да је $\Psi^{\overline{\Upsilon}} \circ \mathrm{PD}_F^{\Upsilon} \circ \Phi^{\Upsilon}$ ланчасто хомотопно пресликавању PD_M^g. $\square$

Сада ћемо показати да су пресликавања $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ и Φ^{Υ} природна, у смислу да комутирају са канонским изоморфизмима

$$\mathbf{S}^{\Upsilon}_{\alpha\beta} : HF_*(o_M, \Upsilon : H_\alpha, J_\alpha) \to HF_*(o_M, \Upsilon : H_\beta, J_\beta)$$

и

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} : HM_*(U : f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*(U : f_\beta, g_\beta),$$

који су дефинисани (редом) у (1.39), Поглавље 1.8 и (1.3), Поглавље 1.3. Са

$$\begin{aligned} \Phi^{\Upsilon}_\alpha &: HM_k(U : f_\alpha, g_\alpha) \to HF_k(o_M, \Upsilon : H_\alpha, J_\alpha), \\ \Psi^{\overline{\Upsilon}}_\alpha &: HF_k(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha) \to HM_k(U : f_\alpha, g_\alpha) \end{aligned}$$

ћемо означити ПСС хомоморфизме којима одговара избор параметара $(f_\alpha, g_\alpha, H_\alpha, J_\alpha)$.

Став 3.8. *Следећи дијаграми су комутативни*

$$\begin{array}{ccc} HF_k(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{S}^{\overline{\Upsilon}}_{\alpha\beta}} & HF_k(o_M, \overline{\Upsilon} : \overline{H}_\beta, \overline{J}_\beta) \\ \Psi^{\overline{\Upsilon}}_\alpha \downarrow & & \downarrow \Psi^{\overline{\Upsilon}}_\beta \\ HM_k(U : f_\alpha, g_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{T}_{\alpha\beta}} & HM_k(U : f_\beta, g_\beta) \end{array} \tag{3.11}$$

и

$$\begin{array}{ccc} HF_k(o_M, \Upsilon : H_\alpha, J_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{S}^\Upsilon_{\alpha\beta}} & HF_k(o_M, \Upsilon : H_\beta, J_\beta) \\ \Phi^\Upsilon_\alpha \uparrow & & \uparrow \Phi^\Upsilon_\beta \\ HM_k(U : f_\alpha, g_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{T}_{\alpha\beta}} & HM_k(U : f_\beta, g_\beta). \end{array}$$

Примедба 3.9. Јасно је да у претходном дијаграму Морсове функције f_α и f_β узимамо из класе $\mathcal{F}^-$ када су оне аргументи домена функције Φ^Υ. А када су Морсове функције аргументи домена функције $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ онда их бирамо из класе $\mathcal{F}^+$.

Доказ. Хомоморфизам $\mathbf{T}_{\alpha\beta} \circ \Psi^{\overline{\Upsilon}}_\alpha$ једнак је, на нивоу хомологија, пресликавању $\mathbf{K}$ које је на генераторима ланчастог комплекса задато са

$$K(\overline{x}_\alpha) = \sum_{p_\beta} \tilde{n}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, p_\beta)\, p_\beta,$$

где је $\tilde{n}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, p_\beta)$ број елемената (по модулу 2) нуладимензионе компоненте многострукости $\widetilde{\mathcal{M}}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T})$ коју смо дефинисали у (2.37).

Једнакост пресликавања (на нивоу хомологија), $\mathbf{T}_{\alpha\beta} \circ \Psi^{\overline{\Upsilon}}_\alpha = \mathbf{K}$ следи из описа тополошке границе једнодимензионе многострукости $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T})$ коју смо дефинисали у (2.38). Једноставно закључујемо да важи

$$\begin{aligned} &\partial\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T}) = \\ &\qquad \widetilde{\mathcal{M}}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T}) \cup \\ &\qquad \bigcup_{p_\alpha} \mathcal{M}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\alpha, f_\alpha, g_\alpha) \times \mathcal{M}(p_\alpha, p_\beta; f_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}) \\ &\qquad \bigcup_{\overline{y}_\alpha} \mathcal{M}(\overline{x}_\alpha, \overline{y}_\alpha : o_M, \overline{\Upsilon}; \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\overline{y}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; p_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T}) \\ &\qquad \bigcup_{q_\beta} \widetilde{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, \overline{H}_\alpha, \overline{J}_\alpha; q_\beta, f_{\alpha\beta,T}, g_{\alpha\beta,T}) \times \mathcal{M}(q_\beta, p_\beta : f_\beta, g_\beta). \end{aligned}$$

На сличан начин закључујемо да је пресликавање $\Psi^{\overline{\Upsilon}}_\beta \circ \mathbf{S}^{\overline{\Upsilon}}_{\alpha\beta}$ једнако пресликавању које L,

$$L(\overline{x}_\alpha) = \sum_{p_\beta} \check{n}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, p_\beta)\, p_\beta,$$

индукује на нивоу хомологија. Овде $\check{n}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, p_\beta)$ означава број тачака многострукости $\check{\mathcal{M}}_{T_0}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_{\alpha\beta,T}, J^{\alpha\beta,T}; p_\beta, f_\beta, g_\beta)$ коју смо дефинисали у (2.39). Као и малопре, уводимо параметризовану верзију многострукости $\check{\mathcal{M}}_{T_0}$ која је дефинисана као

$$\check{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_{\alpha\beta,T}, J^{\alpha\beta,T}; p_\beta, f_\beta, g_\beta) = \{(\gamma, u, T) \mid \\ (\gamma, u) \in \check{\mathcal{M}}_T(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_{\alpha\beta,T}, J^{\alpha\beta,T}; p_\beta, f_\beta, g_\beta),\, T > T_0 \}\,.$$

Затим из описа њене границе закључујемо да важи

$$\Psi_\beta^{\overline{\Upsilon}} \circ \mathbf{S}_{\alpha\beta}^{\overline{\Upsilon}} = \mathbf{L}.$$

Преостало нам је да покажемо да су пресликавања K и L једнака на нивоу хомологија. Посматрањем једнодимензионе многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(\overline{x}_\alpha, o_M, \overline{\Upsilon}, H_{\alpha\beta,\lambda}, J_{\alpha\beta,\lambda}; p_\beta, f_{\alpha\beta,\lambda}, g_{\alpha\beta,\lambda})$ коју смо дефинисали у (2.40) из описа њене границе (2.41) следи једнакост

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}.$$

□

3.3.2 ПСС у директном лимесу

У овом поглављу испитујемо како се пресликавања Φ^{Υ} и $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ слажу са директним лимесима помоћу којих смо дефинисали Флорове хомологије за отворен скуп.

Подсетимо се да смо пресликавање

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} : HM_*(U : f, g_\alpha) \to HM_*(U : f, g_\beta),$$

које успоставља изоморфизам између Морсових хомологија за различит избор метрика дефинисали у Поглављу 1.3. Пресликавања

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} : HF_k(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha) \to HF_k(o_M, \Upsilon_\beta : H, J_\beta),$$

која повезују Флорове хомологије за две апроксимације Υ_α и Υ_β од $\nu_-^*\overline{U}$, дефинисали смо у Поглављу 1.8. У истом поглављу смо дефинисали повезујуће хомоморфизме за апроксимације позитивног конормалног скупа

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{+} : HF_k(o_M, \overline{\Upsilon}_\alpha : \overline{H}, \overline{J}_\alpha) \to HF_k(o_M, \overline{\Upsilon}_\beta : \overline{H}, \overline{J}_\beta).$$

Ради лакшег записа користићемо скраћене ознаке у следећем ставу

$$\begin{aligned} &HM_k(g_\alpha) \equiv HM_k(U : f, g_\alpha), \\ &HF_k(\Upsilon_\alpha) \equiv HF_k(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha), \\ &\Phi^\alpha \equiv \Phi^{\Upsilon_\alpha}, \\ &\Psi^\alpha \equiv \Psi^{\overline{\Upsilon}_\alpha}. \end{aligned}$$

Став 3.10. *Следећи дијаграми су комутативни*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & HM_k(g_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{\alpha\beta}} & HM_k(g_\beta) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{\beta\gamma}} & HM_k(g_\gamma) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Phi^\alpha & & \downarrow \Phi^\beta & & \downarrow \Phi^\gamma & & \\ \cdots & \longrightarrow & HF_k(\Upsilon_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{F}_{\alpha\beta}} & HF_k(\Upsilon_\beta) & \xrightarrow{\mathbf{F}_{\beta\gamma}} & HF_k(\Upsilon_\gamma) & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{3.12}$$

и

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & HF_k(\overline{\Upsilon}_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{F}^+_{\alpha\beta}} & HF_k(\overline{\Upsilon}_\beta) & \xrightarrow{\mathbf{F}^+_{\beta\gamma}} & HF_k(\overline{\Upsilon}_\gamma) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Psi^\alpha & & \downarrow \Psi^\beta & & \downarrow \Psi^\gamma & & \\ \cdots & \longrightarrow & HM_k(g_\alpha) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{\alpha\beta}} & HM_k(g_\beta) & \xrightarrow{\mathbf{G}_{\beta\gamma}} & HM_k(g_\gamma) & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{3.13}$$

Доказ. За доказ овог става користе се идеје које смо већ изнели у доказу Става 3.8. Уводимо комбиноване модулске просторе који су задати као парови градијентних трајекторија и холоморфних трака. Сада варирамо Риманову метрику код градијентних трајекторија и варирамо граничне услове за пертурбовање холоморфне траке. Аргументима кобордизама показујемо да су пресликавања $\Phi^\beta \circ \mathbf{G}_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{F}_{\alpha\beta} \circ \Phi^\alpha$ (односно $\Psi^\beta \circ \mathbf{F}^+_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{G}_{\alpha\beta} \circ \Psi^\alpha$) једнака на нивоу хомологија. □

Из комутативности дијаграма (3.12) и (3.13) следи да можемо да прођемо директним лимесом кроз пресликавања $\Psi^{\overline{\Upsilon}}$ и Φ^{Υ}.

Став 3.11. *Нека су $f^\pm \in \mathcal{F}^\pm \subset C^\infty(M)$ две Морсове функције. Тада постоје хоморфизми*

$$\Phi : HM_k(U : f^-) \to HF_k^-(H, U : M),$$

и

$$\Psi : HF_k^+(H, U : M) \to HM_k(U : f^+).$$

Доказ. Извешћемо конструкцију пресликавања Φ чији је домен векторски простор који је добијен као директан лимес. Ово је позната алгебарска конструкција и изводимо је због целовитости излагања.

Први наш корак ће бити да дефинишемо пресликавање Φ. Нека је $[p] \in HM_k(U : f^-)$. То значи да постоји нека метрика g_α тако да $p \in HM_k(U : f^-, g_\alpha)$. Сада је добро дефинисано пресликавање

$$\Phi^\alpha : HM_k(U : f^-, g_\alpha) \to HF_*(o_M, \Upsilon_\alpha : H, J_\alpha)$$

за неку апроксимацију Υ_α и неку скоро комплексну структуру J_α. Дефинишемо

$$\Phi([p]) = [\Phi^\alpha(p)].$$

Следећи корак је да покажемо да је овако пресликавање Φ добро дефинисано, односно да не зависи од избора представника класе. Нека, за неки други елемент задат Римановом метриком g_β,

$$q \in HM_k(U : f^-, g_\beta),$$

важи

$$[p] = [q].$$

Једнакост у директном лимесу значи да постоји нека трећа Риманова метрика g_γ тако да важи

$$\mathbf{G}_{\alpha\gamma}(p) = \mathbf{G}_{\beta\gamma}(q).$$

Из комутативности дијаграма (3.12) закључујемо да важи

$$\Phi^\gamma(\mathbf{G}_{\beta\gamma}(q)) = \mathbf{F}_{\beta\gamma}(\Phi^\beta(q))$$

и

$$\Phi^\gamma(\mathbf{G}_{\alpha\gamma}(p)) = \mathbf{F}_{\alpha\gamma}(\Phi^\alpha(p)).$$

Закључујемо да важи

$$\mathbf{F}_{\beta\gamma}(\Phi^\beta(q)) = \mathbf{F}_{\alpha\gamma}(\Phi^\alpha(p)).$$

По дефиницији директног лимеса то значи да су класе $[\Phi^\alpha(p)]$ и $[\Phi^\beta(q)]$ једнаке у $HF_*^-(H, U : M)$. Закључујемо, пресликавање Φ је добро дефинисано. Оно ће бити хоморфизам јер је свако од пресликавања Φ^α такође хомоморфизам.

Пресликавање Ψ се дефинише на сличан начин. $\square$

Овако дефинисани хомоморфизми су заправо пресликавања типа ПСС. Као и у случају конормалне Флорове хомологије, они ће бити изоморфизми. Али не један другом инверзни, јер смо већ нагласили да таква композиција нема смисла. Повезани су, као и у случају пресликавања за апроксимације, Поенкареовим дуалима које смо дефинисали у (1.13) и (1.53).

Теорема 3.12. *Нека је $f \in \mathcal{F}^-$. Из комутативности следећег дијаграма*

$$\begin{tikzcd} HM_k(U:f) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{PD}_M"', "\cong"] & HF_k^-(H,U:M) \arrow[d, "\mathrm{PD}_F"', "\cong"] \\ HM_{n-k}(-f,U) & HF_{n-k}^+(H,U:M) \arrow[l, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

закључујемо да су пресликавања Φ и Ψ изоморфизми.

Доказ. На основу Става 3.7 знамо да важи

$$\Psi^\alpha \circ \mathrm{PD}_F^{\Upsilon_\alpha} \circ \Phi^\alpha = \mathrm{PD}_M^{g_\alpha}.$$

Нека је $p_\alpha \in HM_k(U:f,g_\alpha)$ представник класе $[p_\alpha] \in HM_k(U:f)$. Тада важи

$$\begin{aligned}\Psi \circ \mathrm{PD}_F \circ \Phi([p_\alpha]) &= \Psi \circ \mathrm{PD}_F([\Phi^\alpha(p_\alpha)]) \\ &= \Psi([\mathrm{PD}_F^{\Upsilon_\alpha} \circ \Phi^\alpha(p_\alpha))] \\ &= [\Psi^\alpha \circ \mathrm{PD}_F^{\Upsilon_\alpha} \circ \Phi^\alpha(p_\alpha)] \\ &= [\mathrm{PD}_M^{g_\alpha}(p_\alpha)] = \mathrm{PD}_M([p_\alpha]).\end{aligned}$$

□

Сада ћемо показати природност пресликавања Φ и Ψ (природност у смислу Теореме 3.5). Подсетимо се да смо у (1.5), Поглавље 1.3, дефинисали канонско пресликавање

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} : HM_*(U:f_\alpha) \to HM_*(U:f_\beta),$$

које успоставља изоморфизам између Морсових хомологија за различит избор Морсових функција $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{F}^-$ или $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{F}^+$. Канонско пресликавање које успоставља изоморфизам између Флорових хомологија за отворен скуп смо дефинисали у Поглављу 1.8, и то за хомологије моделиране негативним конормалним скупом у (1.46),

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}^- : HF_*^-(H_\alpha, U:M) \to HF_*^-(H_\beta, U:M).$$

А за хомологије моделиране позитивним конормалним скупом пресликавање

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}^+ : HF_*^+(H_\alpha, U:M) \to HF_*^+(H_\beta, U:M),$$

је дефинисано у (1.51).

Теорема 3.13. *Изоморфизми* Φ *и* Ψ *комутирају са природним изоморфизмима у Морсовој и Флоровој хомологији. Прецизније, нека су дате Морсове функције* $f^{\pm}_{\alpha}, f^{\pm}_{\beta} \in \mathcal{F}^{\pm}$ *и Хамилтонијани* H_α, H_β. *Означимо са* Ψ_α, Ψ_β *ПСС изоморфизме у позитивној хомологији, а са* Φ_α, Φ_β *изоморфизме у случају негативне хомологије. Тада су следећи дијаграми комутативни*

$$\begin{array}{ccc} HF^{+}_{k}(H_\alpha, U:M) & \stackrel{\mathbf{S}^{+}_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} & HF^{+}_{k}(H_\beta, U:M) \\ \Psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \Psi_\beta \\ HM_k(U:f^{+}_{\alpha}) & \stackrel{\mathbf{T}_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} & HM_k(U:f^{+}_{\beta}) \end{array} .$$

и

$$\begin{array}{ccc} HF^{-}_{k}(H_\alpha, U:M) & \stackrel{\mathbf{S}^{-}_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} & HF^{-}_{k}(H_\beta, U:M) \\ \Phi_\alpha \uparrow & & \uparrow \Phi_\beta \\ HM_k(U:f^{-}_{\alpha}) & \stackrel{\mathbf{T}_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} & HM_k(U:f^{-}_{\beta}). \end{array}$$

Доказ. Показаћемо комутативност првог дијаграма. Комутативност другог се показује на исти начин.

Подсетимо се да смо показали да одговарајући дијаграм за апроксимације комутира (3.11). Дакле, на класама из простора који је добијен као диретан лимес имамо једнакост

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\alpha\beta} \circ \Psi_\alpha([x_a]) &= \mathbf{T}_{\alpha\beta}\left(\left[\Psi^{\overline{\Upsilon}_a}_{\alpha}(x_a)\right]\right) = \\ &= \left[T^{g_a}_{\alpha\beta}\left(\Psi^{\overline{\Upsilon}_a}_{\alpha}(x_a)\right)\right] = \\ &= [\Psi^{\overline{\Upsilon}_a}_{\beta}\left(S^{\overline{\Upsilon}_a}_{\alpha\beta}(x_a)\right)] = \\ &= \Psi_\beta\left([S^{\overline{\Upsilon}_a}_{\alpha\beta}(x_a)]\right) = \Psi_\beta \circ \mathbf{S}^{+}_{\alpha\beta}([x_a]), \end{aligned}$$

за све $[x_a] \in HF^{+}_{k}(H_\alpha, U:M)$. $\square$

4 Прозводи

Ова глава је посвећена дубљем изучавању алгебарских структура Флорових хомологија које смо дефинисали у Глави 1. Наиме, бројањем разних пертурбовано-холоморфних Риманових површи које смо дефинисали у Глави 2 можемо да дефинишемо производе на једној Флоровој хомологији или да спарујемо елементе из две различите Флорове хомологије. Овај други случај је приказан у Поглављу 4.1 где бројањем панталона код којих је једна ногавица „закрпљена” а ивица друге ногавице је на Лагранжевој подмногострукости спарујемо елемент Флорове хомологије за периодичне орбите са елементом Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке. Резултати овог поглавља део су коауторског рада са Ј. Катић и Д. Милинковићем [25].

Ако бројимо панталоне код којих на расцепу између ногавица имамо скок, при чему се један део те компоненте границе слика на нулто сечење а други део на конормално раслојење добијемо производ на Флоровој хомологији за пар (o_M, ν^*N). Оно што овај производ разликује од до сада познатих производа јесте што су до сада познати производи облика

$$HF_*(L_0, L_1) \otimes HF_*(L_1, L_2) \to HF_*(L_0, L_2).$$

Односно нису на Флоровој хомологији за исти пар. Наш производ је облика

$$HF_*(o_M, \nu^*N) \otimes HF_*(o_M, \nu^*N) \to HF_*(o_M, \nu^*N),$$

односно спарује елементе из Флорових хомологија за исти пар. Конструкција овог производа дата је у Поглављу 4.2 и део је ауторовог рада [24]. Такође је показано да овај производ, компонован са ПСС пресликавањем у конормалној Флоровој хомологији, даје спољашњи индекс пресека у Морсовој хомологији.

Сличну идеју (присуство скока на расцепу између ногавица) смо искористили у дефинисању производа на Флоровој хомологији за отворен скупу у Поглављу 4.3. Као и у случају дефинисања морфизама, прозвод смо прво дефинисали на хомологији за апроксимацију а затим показали да се тако дефинисан производ слаже са директним лимесом. Констукција овог производа део је коауторског рада [61].

4.1 Флорова хомологија компактних подмногострукости

У овом поглављу ћемо конструисати производ који спарује елемент Флорове хомологије за периодичне орбите (дефинисане у Поглављу 1.6) и Флорове хомологије компактне Лагранжеве подмногострукости (дефинисане у Поглављу 1.7.2). Производ се дефинише бројањем пертурбовано холоморфних Риманових површи које смо дефинисали у Поглављу 2.1.

Теорема 4.1. *Нека је* (P, ω) *затворена симплектичка многострукост и* $L \subset P$ *њена затворена Лагранжева подмногострукост таква да је пар* (P, L) *релативно асферична подмногострукост (односно, задовољава услов (1.28)). Дате су три Хамилтонове функције* $H_j : P \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2,3\}$ *и три скоро комплексне структуре* J_j *при чему су одговарајући парови регуларни. Тада постоји производ*

$$\diamond : HF_*(P : H_1^-, J_1^-) \otimes HF_*(L, P : H_2^-, J_2^-) \to HF_*(L, P : H^+, J^+),$$

који, за избор Хамилтонијана $H_2^- = H^+$, *на Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке* $HF_*(L, P : H_2^-, J_2^-)$ *задаје структуру модула над Флоровом хомологијом за периодичне орбите* $HF_*(P : H_1^-, J_1^-)$.

Доказ. Овај производ је дефинисан бројањем пертурбованих холоморфних Риманових површи које су налик панталонама, $\widetilde{\Sigma}$ из Поглавља 2.1. Нека је $a \in CF_*(P : H_1^-, J_1^-)$ Хамилтонова орбита и нека су $x \in CF_*(L, P : H_2^-, J_2^-)$, $y \in CF_*(L, P : H^+, J^+)$ Хамилтонови путеви. За дефинисање пресликавање $\diamond$ на нивоу ланаца

$$\diamond : CF_*(P : H_1^-, J_1^-) \otimes CF_*(L, P : H_2^-, J_2^-) \to CF_*(L, P : H^+, J^+),$$

користимо многострукост $\widetilde{\mathcal{M}}(a, x; y)$ коју смо дефинисали у (2.4). На генераторима дефинишемо

$$a \diamond x = \sum_{y \in CF_*(L, P : H^+, J^+)} \sharp_2 \widetilde{\mathcal{M}}(a, x; y)\, y,$$

а даље се пресликавање продужи по линеарности. $\sharp_2 \widetilde{\mathcal{M}}(a, x; y)$ означава број елемената ове компактне нуладимензионе многострукости. Из описа границе њене једнодимензионе компоненте, који је дат у (2.5) следи да ће ово бити једно ланчасто пресликавање које индукује производ на хомологијама. □

4.2 Флорова хомологија конормалних подмногострукости

Сада ћемо дефинисати операцију на Флоровој хомологији затвореног подскупа $N \subset M$ коју смо дефинисали у Поглављу 1.7.1 и означили са $HF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$. Све неопходне конструкције за дефиницију овог производа извели смо у Поглављу 2.4. Сада нам преостаје да дефинишемо сам производ.

Теорема 4.2. *Нека су $H_1^-, H_2^-, H^+ : [0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ Хамилтонијани са компактним носачеми и J_1^-, J_2^-, J^+ скоро комплексне структуре тако да су одговарајући парови са Хамилтонијанима регуларни. Тада постоји производ $*$ у хомологији*

$$\begin{aligned} * : HF_k(o_M, \nu^*N : H_1^-, J_1^-) \otimes HF_l(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-) \to \\ \to HF_{k+l-\dim M}(o_M, \nu^*N : H^+, J^+), \end{aligned}$$

који помоћу ПСС пресликавања индукује операцију на $HM_*(N)$

$$\alpha \bullet \beta = \phi_*(\psi_*(\alpha) * \psi_*(\beta)),$$

за све $\alpha, \beta \in HM_*(N)$.

Доказ. Пресликавање је на нивоу ланаца дефинисано бројањем парова панталона са конормалним граничним условима. За $x_1^- \in CF_k(o_M, \nu^*N : H_1^-, J_1^-)$, $x_2^- \in CF_l(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-)$, и $x^+ \in CF_*(o_M, \nu^*N : H^+, J^+)$ дефинишемо

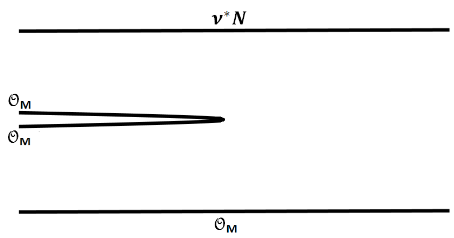
$$x_1^- * x_2^- = \sum_{x^+} n(x_1^-, x_2^-; x^+)\, x^+, \tag{4.1}$$

где је $n(x_1^-, x_2^-; x^+)$ број елемената (по модулу 2) многострукости $\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$ димензије нула коју смо дефинисали у (2.23). Димензију ове многострукости смо срачунали у Поглављу 2.4.2 па ће сума у (4.1) пролазити по

$$x^+ \in CF_{k+l-\dim M}(o_M, \nu^*N : H^+, J^+).$$

Производ се даље проширује по линеарности. Из распадања једнодимензионе многострукости $\mathcal{M}(x_1^-, x_2^-; x^+)$ које је описано у (2.26) следи да је $*$ једно ланчасто пресликавање и да индукује производ описан у поставци теореме. $\square$

У случају када је $N = M$ добијамо производ који је дефинисан у [86] (разматран и у [62]). У том случају је $\bullet$ производ пресека на Морсовој хомологији (дуалан кап производу).



Слика 22: Објекти који дефинишу производ $\star$

У општем случају, када N није једнако целој многострукости, производ $\bullet$ можемо да опишемо као композицију спољашњег индекса пресека који је дефинисан у (1.9) и морфизма $HM_*(N) \to HM_*(M)$ који долази од инклузије $N \hookrightarrow M$. У остатку поглавља показаћемо ово тврђење. Потребан нам је другачији опис производа $*$. Наиме, производ смо могли да дефинишемо и као композицију познатог производа у Лагранжевој Флоровој хомологији

$$\star : HF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-) \otimes HF_*(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-) \to HF_*(o_M, \nu^*N : H^+, J^+),$$

и морфизма

$$m_* : HF_*(o_M, \nu^*N : H_1^-, J_1^-) \to HF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-).$$

Приметимо да је $HF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-)$ Флорова хомологија коју смо дефинисали у Поглављу 1.7.1 када специјално узмемо да је $N = M$. Производ $\star$ се дефинише бројањем панталона чија је граница на $o_M \cup \nu^*N$ (видети Слику 22). Та конструкција је позната и може се наћи у [9]. Извешћемо је и овде јер ће нам бити потребни детаљи те конструкције. Након тога ћемо извести конструкцију морфизма m_*.

Став 4.3. *Нека су H_1^-, H_2^-, H^+ Хамилтонијани са компактним носачима и J_1^-, J_2^-, J^+ одговарајуће скоро комплексне структуре. Тада постоји производ*

$$\star : HF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-) \otimes HF_*(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-) \to HF_*(o_M, \nu^*N : H^+, J^+),$$

који, компонован са пресликавањем типа ПСС, даје спољашњи индекс пресека $\widetilde{\cap}_N$. Односно, за све $\alpha \in HM_*(M : f_1^-, g_1^-)$ и $\beta \in HM_*(N : f_2^-, g_2^-)$ важи

$$\psi_*(\alpha \widetilde{\cap}_N \beta) = \psi_*(\alpha) \star \psi_*(\beta).$$

Примедба 4.4. Спољашњи индекс пресека који се спомиње у формулацији овог става дефинисан је у (1.9).

Доказ. За $x_1^- \in CF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-)$, $x_2^- \in CF_*(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-)$ и $x^+ \in CF_*(o_M, \nu^*N : H^+, J^+)$ дефинишемо модулски простор $\mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)$ као скуп

$$\begin{cases} u : \Sigma \to T^*M, \\ \partial_s u_j^- + J(\partial_t u_j^- - X_{\rho_R H_j^-}(u_j^-)) = 0, \; j = 1, 2, \\ \partial_s u^+ + J(\partial_t u^+ - X_{\rho_R H^+}(u^+)) = 0, \\ \partial_s u^0 + J\partial_t u^0 = 0, \\ u(s, -1) \in o_M, \; u(s, 1) \in \nu^*N, \; s \in \mathbb{R}, \\ u(s, 0^-), u(s, 0^+) \in o_M, \; s \leq 0, \\ u_j^-(-\infty, t) = x_j^-(t), \; j = 1, 2, \\ u^+(+\infty, t) = x^+(t). \end{cases}$$

Риманову површ Σ и рестрикције пресликавања u, које смо означили са u_j^-, u^+, u^0, дефинисали смо у Поглављу 2.4. За генерички избор скоро комплексне структуре, $\mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)$ ће бити многострукост димезије

$$\mu_M(x_1^-) + \mu_N(x_2^-) - \mu_N(x^+) - \frac{\dim M}{2}.$$

Производ $\star$ задајемо једнакошћу

$$x_1^- \star x_2^- = \sum_{x^+} \sharp_2 \mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)\, x^+,$$

на генераторима ланчастог комплекса. Овде је $\sharp_2 \mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)$ број елемената (по модулу 2) нуладимензионе компоненете многострукости $\mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)$. Проширимо $\star$ билинеарно на цео домен

$$CF_*(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-) \otimes CF_*(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-).$$

Опис границе једнодимензионе компоненте од $\mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+)$ даје нам чињеницу да $\star$ комутира са одговарајућим граничним операторима и да индукује пресликавање на нивоу хомологија

$$\begin{aligned} \star : HF_k(o_M, o_M : H_1^-, J_1^-) \otimes HF_l(o_M, \nu^*N : H_2^-, J_2^-) \to \\ \to HF_{k+l-\dim M}(o_M, \nu^*N : H^+, J^+). \end{aligned}$$

Сада ћемо показати да ПСС пресликавање ψ_* чува алгебарску структуру, односно слика $\widetilde{\cap}_N$ у $\star$. Идеја је, као и у претходним ситуацијама, да покажемо да су пресликавања $\widetilde{\cap}_N$ и $\phi(\psi\star\psi)$ ланчасто хомотопна. Нека су p_1^-, p_2^-, p^+ критичне тачке одговарајућих Морсових функција $f_1^- : M \to \mathbb{R}$, $f_2^-, f^+ : N \to \mathbb{R}$. Из дефиниције пресликавања ψ и ϕ следи да важи једнакост

$$\phi(\psi(p_1^-)\star\psi(p_2^-)) = \sum_{x_1^-,x_2^-,x^+,p^+} \sharp_2\mathcal{M}(p_1^-,f_1^-;x_1^-,H_1^-)\,\sharp_2\mathcal{M}(p_2^-,f_2^-;x_2^-,H_2^-)$$
$$\sharp_2\mathcal{M}^e(x_1^-,x_2^-;x^+)\,\sharp_2\mathcal{M}(x^+,H^+;p^+,f^+)\,p^+.$$

Пратећи идеје из [62], дефинишемо два помоћна модулска простора. Први простор, $\mathcal{M}_R^{prod}(p_1^-,p_2^-,p^+;\overrightarrow{f},\overrightarrow{H})$, једнак је скупу пресликавања $(\gamma_1^-,\gamma_2^-,\gamma^+,u)$ која задовољавају следеће услове

$$\begin{cases}
\gamma_1^- : (-\infty,0]\to M,\ \gamma_1^-(-\infty)=p_1^-,\\
\gamma_2^- : (-\infty,0]\to N,\ \gamma_2^-(-\infty)=p_2^-,\\
\gamma^+ : [0,+\infty)\to N,\ \gamma^+(+\infty)=p^+,\\
u:\Sigma\to T^*M,\\
\frac{d\gamma_1^-}{ds} = -\nabla_{g_1^-}f_1^-(\gamma_1^-),\\
\frac{d\gamma_2^-}{ds} = -\nabla_{g_2^-}f_2^-(\gamma_2^-),\\
\frac{d\gamma^+}{ds} = -\nabla_{g^+}f^+(\gamma+),\\
\partial_s u_j^- + J(\partial_t u_j^- - X_{\kappa_R^- H_j}(u_j^-)) = 0,\ j=1,2,\\
\partial_s u^+ + J(\partial_t u^+ - X_{\kappa_R^+ H_3}(u^+)) = 0,\\
\partial_s u^0 + J\partial_t u^0 = 0,\\
E(u) < +\infty,\\
u(s,-1)\in o_M,\ u(s,1)\in\nu^*N,\ s\in\mathbb{R},\\
u(s,0^-),u(s,0^+)\in o_M,\ s\le 0,\\
u_j^-(-\infty)=\gamma_j^-(0),\ j=1,2,\\
u^+(+\infty)=\gamma^+(0),
\end{cases}$$

где је $R>2$. Функција

$$\kappa_R^- : (-\infty,0]\to[0,1],$$

задовољава услове

$$\kappa_R^-(s) = \begin{cases} 1, & -R\le s\le -2,\\ 0, & s\le -R-1,\ s\ge -1\end{cases}$$

а функција

$$\kappa_R^+ : [0,+\infty)\to[0,1],$$

једнака је

$$\kappa_R^+(s) = \kappa_R^-(-s).$$

У аргументу овог модулског простора јавља се израз $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{H})$. Тиме смо желели да истакнемо да имамо различите функције, f_1^-, f_2^-, f^+, и Хамилтонијане, H_1^-, H_2^-, H^+, на одговарајућим крајевима панталона Σ. Други помоћни модулски простор је

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) = \\ &\qquad \{(R, \gamma_1^-, \gamma_2^-, \gamma^+, u) \,|\, R > R_0,\, (\gamma_1^-, \gamma_2^-, \gamma^+, u) \in \mathcal{M}_R^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H})\}.\end{aligned}$$

Тополошка граница једнодимензионе многострукости $\mathcal{M}^{prod}$ је облика

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{M}^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) &= \mathcal{M}_{R_0}^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) \\ &\bigcup_{q_1^- \in CF_*(f_1^-)} \mathcal{M}(p_1^-, q_1^-; f_1^-, g_1^-) \times \mathcal{M}^{prod}(q_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) \\ &\bigcup_{q_2^- \in CF_*(f_2^-)} \mathcal{M}(p_2^-, q_2^-; f_2^-, g_2^-) \times \mathcal{M}^{prod}(p_1^-, q_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) \\ &\bigcup_{q^+ \in CF_*(f^+)} \mathcal{M}^{prod}(p_1^-, p_2^-, q^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H}) \times \mathcal{M}(q^+, p^+; f^+, g^+) \\ &\bigcup_{x_1^-, x_2^-, x^+} \mathcal{M}(p_1^-, f_1^-; x_1^-, H_1^-) \times \mathcal{M}(p_2^-, f_2^-; x_2^-, H_2^-) \times \\ &\qquad \times \mathcal{M}^e(x_1^-, x_2^-; x^+) \times \mathcal{M}(x^+, H^+; p^+, f^+).\end{aligned}$$

Закључујемо да је, на нивоу хомологија, пресликавање $\phi(\psi(p_1^-) \star \psi(p_2^-))$ једнако пресликавању које броји елементе модулског простора $\mathcal{M}_{R_0}^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H})$. Последње пресликавање је независно од избора Хамилтонијана којима вршимо пертурбацију на ногавицама панталона. Исти аргумент смо користили када смо показивали да хомоморфизам L, у доказу Теореме 3.3, не зависи од Хамилтонијана. Специјално, узећемо да су сви Хамилтонијани једнаки нули. Холоморфни диксови са границом на $o_M \cup \nu^* N$ су константни па важи једнакост

$$\mathcal{M}_{R_0}^{prod}(p_1^-, p_2^-, p^+; \overrightarrow{f}, \overrightarrow{H} = 0) = \mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+).$$

Скуп дрвета $\mathcal{M}^{ext}(p_1^-, p_2^-; p^+)$, који се јавља у дефиницији спољашњег индекса пресека, дефинисали смо у (1.8). Закључујемо да важи

$$\alpha \widetilde{\cap}_N \beta = \phi_*(\psi_*(\alpha) \star \psi_*(\beta)),$$

за све $\alpha \in HM_*(M : f_1^-, g_1^-)$ и $\beta \in HM_*(N : f_2^-, g_2^-)$. □

У следећем ставу ћемо конструисати споменути морфизам m_* и показати да долази од инклузије

$$i : N \hookrightarrow M.$$

Став 4.5. *Нека је* $H : [0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ *Хамилтонијан са компактним носачем и* J *скоро комплексна структура таква да је пар* (H, J) *регуларан. Тада постоји морфизам међу Флоровим хомологијама*

$$m_* : HF_*(o_M, \nu^*N : H, J) \to HF_*(o_M, o_M : H, J),$$

који је индукован инклузијом на нивоу Морсовох хомологија. Другим речима, важи

$$\phi_* \circ m_* \circ \psi_* = i_*,$$

где је i_* *морфизам на нивоу Морсових хомологија индукован инклузијом* $i : N \hookrightarrow M$ *у смислу Шварца (видети Помоћно Тврђење 4.22 у [100]).*

Доказ. Морфизам m_* се дефинише на нивоу ланаца бројањем пертурбованих холоморфних трака које имају скок на горњој граници $\mathbb{R} \times \{1\}$. Прецизније, за $x \in CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$ и $y \in CF_*(o_M, o_M : H, J)$ дефинишемо модулски простор

$$\mathcal{M}^j(x, y; H, J) = \left\{ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial_s u + J(\partial_t u - X_H(u)) = 0, \\ u(s, 0) \in o_M,\ s \in \mathbb{R}, \\ u(s, 1) \in \nu^*N,\ s \leq 0, \\ u(s, 1) \in o_M,\ s \geq 0, \\ u(-\infty, t) = x(t), \\ u(+\infty, t) = y(t) \end{array} \right\}.$$

Пертурбоване холоморфне траке, са оваквим скоковима на граници, разматране су у [3]. На генераторима комплекса $CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)$ дефинишемо m

$$m(x) = \sum_y \sharp_2 \mathcal{M}^j(x, y; H, J)\, y,$$

и даље продужимо по линеарности. Граница једнодимензионе компоненте од $\mathcal{M}^j(x, y; H, J)$ је облика

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{M}^j_{[1]}(x, y; H, J) = & \bigcup_{x' \in CF_*(o_M, \nu^*N : H, J)} \mathcal{M}(x, x'; H, J) \times \mathcal{M}^j(x', x; H, J) \\ & \bigcup_{y' \in CF_*(o_M, o_M : H, J)} \mathcal{M}^j(x, y'; H, J) \times \mathcal{M}(y', y; H, J). \end{aligned}$$

Дакле, m индукује пресликавање на нивоу хомологија

$$m_* : HF_*(o_M, \nu^* N : H, J) \to HF_*(o_M, o_M : H, J).$$

Сада ћемо детаљније описати пресликавање које m_*, помоћу ПСС пресликавања, индукује не нивоу Морсових хомологија

$$\phi_* \circ m_* \circ \psi_* : HM_*(N) \to HM_*(M).$$

Да бисмо ово пресликавање могли да доведемо у везу са инклузијом из поставке овог става морамо некако да повежемо Морсове функције на N и M. Нека је $f : N \to \mathbb{R}$ било која Морсова функција дефинисана на затвореном подскупу N. Показано је у [100] да постоји Морсова функција $F : M \to \mathbb{R}$ која проширује f на цео амбијентни простор M,

$$F|_N = f,$$

тако да не постоје негативне градијентне трајекторије од F које излазе из N (за детаље видети Тврђење 4.16 и Последицу 4.17 у [100]). На даље, у доказу, подразумевамо да нам је Морсова хомологија од N моделирана функцијом f, а Морсова хомологија од M се дефинише у односу на споменуто проширење F.

Пресликавање, $\phi \circ m \circ \psi$ је на генератору ланчастог комплекса једнако

$$\phi(m(\psi(p))) = \sum_{x,y,q} \sharp_2 \mathcal{M}(p, f; x, H) \sharp_2 \mathcal{M}^j(x, y; H, J) \sharp_2 \mathcal{M}(y, H; q, F)\, q,$$

при чему сумирамо по елементима

$$x \in CF_k(o_M, \nu^* N : H, J), y \in CF_k(o_M, o_M : H, J), q \in CM_k(M : F, g).$$

Приметимо да је сада g метрика на већем простору, M. Дефинисаћемо модулске просторе који су аналогија простора $\mathcal{M}_R(p, q, f; H)$ и $\overline{\mathcal{M}}(p, q, f; H)$ који се јављају у (2.14) и (2.16). Разлика у односу на ту ситуацију је у томе што сада имамо скок на горњој граници. Први помоћни модулски простор је

$$\mathcal{M}_R^{aux}(p,f;q,F;H)=\left\{(\gamma_-,u,\gamma_+)\;\middle|\;\begin{array}{l}\gamma_-:(-\infty,0]\to N,\,\dot\gamma_-=-\nabla f(\gamma_-),\\ \gamma_+:[0,+\infty)\to M,\,\dot\gamma_+=-\nabla F(\gamma_+),\\ u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M,\\ \partial_s u+J(\partial_t u-X_{\sigma_R H}(u))=0,\\ u(s,0)\in o_M,\,s\in\mathbb{R},\\ u(s,1)\in\nu^*N,\,s\le 0,\\ u(s,1)\in o_M,\,s\ge 0,\\ \gamma_-(-\infty)=p,\,\gamma_+(+\infty)=q,\\ u(-\infty)=\gamma_-(0),\,u(+\infty)=\gamma_+(0)\end{array}\right\}.$$

За генерички избор параметара он ће бити многострукост димензије $m_f(p)-m_F(q)$. Подсетимо се да смо функцију σ_R дефинисали у (2.15). Други модулски простор је параметризована верзија претходног

$$\mathcal{M}^{aux}(p,f;q,F;H)=\{(R,\gamma_-,u,\gamma_+)\,|\,(\gamma_-,u,\gamma_+)\in\mathcal{M}_R^{aux}(p,f;q,F;H),\;R>R_0\}.$$

Такође, за генерички избор параметара, то је једна многострукост димензије $m_f(p)-m_F(q)+1$. За $p\in CM_k(N:f,g)$ и $q\in CM_k(M:F,g)$ граница многострукости $\mathcal{M}^{aux}(p,f;q,F;H)$ чија је димензија један може да се опише као

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{M}^{aux}(p,f;q,F;H)=\,&\mathcal{M}_{R_0}^{aux}(p,f;q,F;H)\\ &\bigcup_{r\in CM_{k-1}(N:f,g)}\mathcal{M}(p,r;f,g)\times\mathcal{M}^{aux}(r,f;q,F;H)\\ &\bigcup_{s\in CM_{k+1}(M:F,g)}\mathcal{M}^{aux}(p,f;s,F;H)\times\mathcal{M}(s,q;F,g)\\ &\bigcup_{x\in CF_k,y\in CF_k}\mathcal{M}(p,f;x,H)\times\mathcal{M}^j(x,y;H,J)\times\mathcal{M}(y,H;q,F).\end{aligned}$$

Дакле, $\phi\circ m\circ\psi$ је ланчасто хомотопно пресликавању

$$\eta:CM_k(N:f,g)\to CM_k(M:F,g),$$

дефинисано једнакошћу

$$\eta(p)=\sum_q\sharp_2\mathcal{M}_{R_0}^{aux}(p,f;q,F;H)\,q.$$

Ово пресликавање је аналогија пресликавања l које смо користили у доказу

Теореме 3.3. На исти начин као и тада, закључујемо да ће η бити ланчасто хомотопно пресликавању η_0 које броји комбиноване објекте (γ_-, u, γ_+) где је u холоморфни диск (пертурбован нула Хамилтонијаном) са границом на $o_M \cup \nu^* N$. Већ смо показали да су сви такви дискови константни, па η_0 броји негативне градијентне трајекторије од F (јер је $F = f$ на N) које повезују тачку $p \in N$ са неком тачком $q \in CM_k(M : F, g)$. Избор функције F је такав да ни једна њена негативна градијентна трајекторија не може да напусти N. Како су p и q истог Морсовог индекса, негативна градијентна трајекторија која спаја p и q не постоји када је $p \neq q$. Закључујемо да је

$$\eta_0 = i : CM_k(N : f, g) \to CM_k(M : F, g),$$

обична инклузија ланчастих комплекса. Још једном ћемо нагласити да је F специјално одабрано проширење функције f па инклузија ланчастих комплекса има смисла у таквој ситуацији. На нивоу Морсових хомологија, пресликавања $\phi_* \circ m_* \circ \psi_*$ и i_* су једнака. $\square$

Дакле, дефинисали смо производ на Флоровој хомологији $HF_*(o_M, \nu^* N : H, J)$ бројањем парова панталона које имају скок између ногавица. Помоћу пресликавања типа ПСС добили смо производ $\bullet$ на нивоу Морсових хомологија. Из другачијег описа производа

$$* = \star \circ (m_* \otimes \mathbb{I}),$$

Става 4.3 и Става 4.5 закључујемо да производ $\bullet$ можемо да опишемо као композицију инклузије и спољашњег индекса пресека. Односно за све $\alpha, \beta \in HM_*(N)$ важи

$$\alpha \bullet \beta = i_*(\alpha) \widetilde{\cap}_N \beta. \tag{4.2}$$

4.3 Флорова хомологија за отворене скупове

У овом поглављу дефинишемо производ на Флоровој хомологији за отворен скуп. Производ се дефинише бројањем парова панталона које смо дефинисали у (2.42). Први корак је да дефинишемо производ на Флоровим хомологијама за апроксимације Υ а затим да покажемо да је тај производ сагласан са повезујућим хомоморфизмима $\mathbf{F}_{ab}$ које смо дефинисали у Поглављу 1.8. Показаћемо и да пресликавање типа ПСС чувају алгебарску структуру тиме што овај производ слика у производ $\cdot$ на Морсовој хомологију (дефинисан у (1.10)).

Подсетимо се да је амбијентна симплектичка многострукост T^*M. У бази наше многострукости посматрамо отворен скуп $U \subset M$ који има глатку границу ∂U. Овде ћемо разматрати само апроксимације Υ негативног конормалног скупа $\nu_-^*\overline{U}$ и, сходно томе, Флорову хомологију за отворен скуп моделирану са $\nu_-^*\overline{U}$. Ова хомологија, коју смо означавали са $HF_*^-(H, U : M)$, дефинисана је у (1.42).

Означимо са H_j, $j \in \{1,2,3\}$, Хамилтонијане на T^*M који зависе од времена и који имају компактне носаче. Такође ћемо претпоставити да H_j задовољавају релације дате у (3.9). Нека је Υ довољно добра апроксимација од $\nu_-^*\overline{U}$, у смислу да сви Хамилтонови путеви $x_j \in CF_*(o_M, \Upsilon : H_j, J_j^\Upsilon)$, $j \in \{1,2,3\}$, задовољавају услов (2.28).

Став 4.6. *За претходно описане Хамилтонијане H_j и апроксимацију Υ постоји производ на Флоровој хомологији за апроксимације*

$$\circ : HF_*(o_M, \Upsilon : H_1, J_1^\Upsilon) \otimes HF_*(o_M, \Upsilon : H_2, J_2^\Upsilon) \to HF_*(o_M, \Upsilon : H_3, J_3^\Upsilon).$$

Доказ. Производ се дефинише на генераторима ланчастих комплекса $x_j \in CF_*(o_M, \Upsilon : H_j, J_j^\Upsilon)$, $j \in \{1,2\}$, релацијом

$$x_1 \circ x_2 = \sum_{x_3} \sharp_2 \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)\, x_3.$$

$\sharp_2 \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)$ означава број елемената компактне нуладимензионе многострукости $\mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)$ коју смо дефинисали у (2.42). Производ се билинеарно проширује на цео простор. Из описа граница једнодимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned}\partial \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3) = & \bigcup_{y_1 \in CF_*(H_1)} \mathcal{M}(x_1, y_1 : o_M, \Upsilon : H_1, J_1^\Upsilon) \times \mathcal{M}^\Upsilon(y_1, x_2, x_3) \\ & \bigcup_{y_2 \in CF_*(H_2)} \mathcal{M}(x_2, y_2 : o_M, \Upsilon : H_2, J_2^\Upsilon) \times \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, y_2; x_3) \\ & \bigcup_{y_3 \in CF_*(H_3)} \mathcal{M}(x_3, y_3 : o_M, \Upsilon : H_3, J_3^\Upsilon) \times \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, y_3),\end{aligned}$$

следи да ће $\circ$ комутирати са одговарајућим граничним операторима. Дакле, дефинисали смо производ $\circ$ на нивоу хомологија. $\square$

Следећи став нам показује да је производ $\circ$ сагласан са повезујућим изоморфизмима

$$\mathbf{F}_{ab}^H : HF_*(o_M, \Upsilon_a : H, J^{\Upsilon_a}) \to HF_*(o_M, \Upsilon_b : H, J^{\Upsilon_b}),$$

које смо дефинисали у (1.41). У ознаци овог изоморфизма се појављује H да би било истакнуто за коју Хамилтонову функцију је дефинисано повезујуће пресликавање.

Став 4.7. *За довољно добре апроксимације* Υ_a *и* Υ_b *важи*

$$\mathbf{F}_{ab}^{H_3}(\cdot \circ \cdot) = \mathbf{F}_{ab}^{H_1}(\cdot) \circ \mathbf{F}_{ab}^{H_2}(\cdot). \tag{4.3}$$

Односно, пресликавања $F_{ab}^{H_3}(x_1^a \circ x_2^a)$ *и* $F_{ab}^{H_1}(x_1^a) \circ F_{ab}^{H_2}(x_2^a)$ *су ланчасто хомотопна за* $x_1^a \in CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_1, J_1^{\Upsilon_a})$ *и* $x_2^a \in CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_2, J_2^{\Upsilon_a})$.

Доказ. Повезујући хомоморфизми $\mathbf{F}_{ab}$ су изоморфизми када су Υ_a и Υ_b довољно добра апроксимација од $\nu_-^*\overline{U}$. Инверзни хомоморфизам ће бити $\mathbf{F}_{ba}$. Овај хомоморфизам је дефинисан у (1.41) помоћу модулских простора (1.40), само ћемо сада уместо хомотопије $\Upsilon^{\sigma_K(s)}$ имати хомотопију $\Upsilon^{\sigma_K(-s)}$ као гранични услов. Дакле, довољно је да покажемо да су пресликавања $x_1^a \circ x_2^a$ и $F_{ba}^{H_3}\left(F_{ab}^{H_1}(x_1^a) \circ F_{ab}^{H_2}(x_2^a)\right)$ ланчасто хомотопна. Из једнакости

$$F_{ab}^{H_1}(x_1^a) = \sum_{x_1^b} \sharp_2 \mathcal{M}(x_1^a, x_1^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_1, J_1)\, x_1^b$$

и

$$F_{ab}^{H_2}(x_2^a) = \sum_{x_2^b} \sharp_2 \mathcal{M}(x_2^a, x_2^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_2, J_2)\, x_2^b$$

закључујемо да важи

$$\begin{aligned} F_{ab}^{H_1}(x_1^a) \circ F_{ab}^{H_2}(x_2^a) = \sum_{x_1^b, x_2^b, x_3^b} & \sharp_2 \mathcal{M}(x_1^a, x_1^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_1, J_1) \\ & \sharp_2 \mathcal{M}(x_2^a, x_2^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_2, J_2) \sharp_2 \mathcal{M}^{\Upsilon_b}(x_1^b, x_2^b, x_3^b)\, x_3^b. \end{aligned}$$

Када ову једнакост нападнемо са леве стране пресликавањем $F_{ba}^{H_3}$ добијемо следећу једнакост

$$\begin{aligned} F_{ba}^{H_3}\left(F_{ab}^{H_1}(x_1^a) \circ F_{ab}^{H_2}(x_2^a)\right) = \sum_{x_1^b, x_2^b, x_3^b, x_3^a} & \sharp_2 \mathcal{M}(x_1^a, x_1^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_1, J_1) \\ & \sharp_2 \mathcal{M}(x_2^a, x_2^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_2, J_2) \\ & \sharp_2 \mathcal{M}^{\Upsilon_b}(x_1^b, x_2^b, x_3^b) \\ & \sharp_2 \mathcal{M}(x_3^a, x_3^b : o_M, \widetilde{\Upsilon}_s : H_3, J_3)\, x_3^a. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Сада ћемо посматрати многострукост $\mathcal{M}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s)$ коју смо дефинисали у (2.45). Опис границе ове многострукости који је дат у (2.46) показује да ће пресликавање (4.4) бити ланчасто хомотопно билинеарном пресликавању

$$U : CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_1, J_1^{\Upsilon_a}) \otimes CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_2, J_2^{\Upsilon_a}) \to CF_*(o_M, \Upsilon_a : H_3, J_3^{\Upsilon_a}),$$

које је не генераторима ланчастог комплекса једнако

$$U(x_1^a \otimes x_2^a) = \sum_{x_3^a} \sharp_2 \mathcal{M}_{R_0}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s)\, x_3^a.$$

Многострукост $\mathcal{M}_{R_0}(x_1^a, x_2^a, x_3^a : \widetilde{\Upsilon}_s)$ смо дефинисали у (2.44). Дефинисањем новог помоћног модулског простора лако се доказује да ће пресликавање U бити ланчасто хомотопно пресликавању $\circ$, односно да U на нивоу хомологија индукује дефинисани производ $\circ$. Помоћни модулски простор ће сада бројати панталоне у којима глатко мењамо границу. Односно, од хомотопије $\widetilde{\Upsilon}_s$ коју смо дефинисали у (2.43) правимо хомотопију која је идентички једнака $\widetilde{\Upsilon}_s \equiv \Upsilon_a$. □

Сагласност производа $\circ$ са повезујућим хомоморфизмима даје нам добро дефинисан производ на Флоровој хомологији за отворен скуп.

Теорема 4.8. *Производ $\circ$ дефинисан на Флоровим хомологијама за апроксимације даје нам добро дефинисан производ на Флоровој хомологији за отворен скуп*

$$\circ : HF_*^-(H_1, U : M) \otimes HF_*^-(H_2, U : M) \longrightarrow HF_*^-(H_3, U : M).$$

Доказ. Нека су $[x_1] \in HF_*(H_1, U : M)$ и $[x_2] \in HF_*(H_2, U : M)$ два елемента из количничког простора. Одаберимо елементе $x_1^a \in HF_*(o_M, \Upsilon_a : H_1, J_1^{\Upsilon_a})$ и $x_2^{a'} \in HF_*(o_M, \Upsilon_{a'} : H_2, J_2^{\Upsilon_{a'}})$ као представнике тих класа

$$[x_1^a] = [x_1],\ [x_2^{a'}] = [x_2].$$

У општем случају, апроксимације Υ_a и $\Upsilon_{a'}$ не морају да буду једнаке, али сигурно можемо наћи неку апроксимацију која је већа од обе, у смислу Дефиниције 1.5. Нека је Υ_b нека апроксимација тако да важи

$$\Upsilon_a \leq \Upsilon_b, \quad \Upsilon_{a'} \leq \Upsilon_b.$$

Нека су

$$\mathbf{F}_{ab}^{H_1} : HF_*(o_M, \Upsilon_a : H_1, J_1^{\Upsilon_a}) \to HF_*(o_M, \Upsilon_b : H_1, J_1^{\Upsilon_b})$$

и

$$\mathbf{F}_{a'b}^{H_2} : HF_*(o_M, \Upsilon_{a'} : H_2, J_2^{\Upsilon_{a'}}) \to HF_*(o_M, \Upsilon_b : H_2, J_2^{\Upsilon_b}),$$

одговарајући повезујући изоморфизми. Производ на елементима Флорове хомологије за отворен скуп се дефинише као

$$[x_1]\circ[x_2]=[\mathbf{F}^{H_1}_{ab}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'b}(x_2^{a'})].$$

Хоћемо да покажемо да овако дефинисан производ не зависи од представника класа а ни од апроксимације Υ_b. Нека постоје апроксимације Υ_c и $\Upsilon_{c'}$ такве да су елемент $x_1^c\in HF_*(o_M,\Upsilon_c:H_1,J_1^{\Upsilon_c})$ и $x_2^{c'}\in HF_*(o_M,\Upsilon_{c'}:H_2,J_2^{\Upsilon_{c'}})$ представници класа $[x_1]$ и $[x_2]$. Односно, важи

$$[x_1^c]=[x_1],\ [x_2^{c'}]=[x_2].$$

Нека је Υ_d нека нова апроксимација која задовољава релације

$$\Upsilon_c\leq\Upsilon_d,\quad \Upsilon_{c'}\leq\Upsilon_d.$$

Сада хоћемо да покажемо да су елементи

$$\mathbf{F}^{H_1}_{ab}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'b}(x_2^{a'})\text{ и }\mathbf{F}^{H_1}_{cd}(x_1^c)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{c'd}(x_2^{c'})$$

једнаки у количничком простору. Како су x_1^a и x_1^c представници исте класе количничком простору закључујемо да постоји апроксимација Υ_e тако да важи

$$\Upsilon_a\leq\Upsilon_e,\quad \Upsilon_c\leq\Upsilon_e,$$

и

$$\mathbf{F}_{ae}(x_1^a)=\mathbf{F}_{ce}(x_1^c).\tag{4.5}$$

Слично, постоји апроксимација $\Upsilon_{e'}$ таква да су задовољене релације

$$\Upsilon_{a'}\leq\Upsilon_{e'},\quad \Upsilon_{c'}\leq\Upsilon_{e'},$$

и

$$\mathbf{F}_{a'e'}(x_2^{a'})=\mathbf{F}_{c'e'}(x_2^{c'}).\tag{4.6}$$

Нађимо нову апроксимацију Υ_f која ће бити већа од свих осталих

$$\Upsilon_e,\Upsilon_{e'},\Upsilon_b,\Upsilon_d\leq\Upsilon_f.$$

Тада је

$$\mathbf{F}^{H_3}_{bf}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{ab}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'b}(x_2^{a'})\right)\overset{(4.3)}{=}\mathbf{F}^{H_1}_{bf}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{ab}(x_1^a)\right)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{bf}\left(\mathbf{F}^{H_2}_{a'b}(x_2^{a'})\right)=$$
$$=\mathbf{F}^{H_1}_{af}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'f}(x_2^{a'}).$$

Такође важи

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{H_3}_{df}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{cd}(x_1^c)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{c'd}(x_2^{c'})\right)&\overset{(4.3)}{=}\mathbf{F}^{H_1}_{df}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{cd}(x_1^c)\right)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{df}\left(\mathbf{F}^{H_2}_{c'd}(x_2^{c'})\right)=\\
&=\mathbf{F}^{H_1}_{cf}(x_1^c)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{c'f}(x_2^{c'})=\\
&=\mathbf{F}^{H_1}_{ef}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{ce}(x_1^c)\right)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{e'f}\left(\mathbf{F}^{H_2}_{c'e'}(x_2^{c'})\right)\overset{(4.5)+(4.6)}{=}\\
&=\mathbf{F}^{H_1}_{ef}\left(\mathbf{F}^{H_1}_{ae}(x_1^a)\right)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{e'f}\left(\mathbf{F}^{H_2}_{a'e'}(x_2^{a'})\right)=\mathbf{F}^{H_1}_{af}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'f}(x_2^{a'}).\end{aligned}$$

Закључујемо да су елементи $\left[\mathbf{F}^{H_1}_{ab}(x_1^a)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{a'b}(x_2^{a'})\right]$ и $\left[\mathbf{F}^{H_1}_{cd}(x_1^c)\circ\mathbf{F}^{H_2}_{c'd}(x_2^{c'})\right]$ једнаки у количничком простору $HF_*^-(H_3,U:M)$, односно производ $\circ$ је добро дефинисан на Флоровој хомологији за отворен скуп. $\square$

Сада ћемо показати да пресликавање

$$\Phi: HM_k(U:f^-)\to HF_k^-(H,U:M),$$

које смо дефинисали у Ставу 3.11, чува алгебарску структуру, односно, да производ на Морсовој хомологији, дефинисан у (1.10) слика у производ који смо управо дефинисали, $\circ$.

Теорема 4.9. *Нека су $f_1,f_2,f_3:U\to\mathbb{R}$ Морсове функције из класе $\mathcal{F}^-$. За $[\alpha_i]\in HM_k(U:f_i)$, $i\in\{1,2\}$ важи*

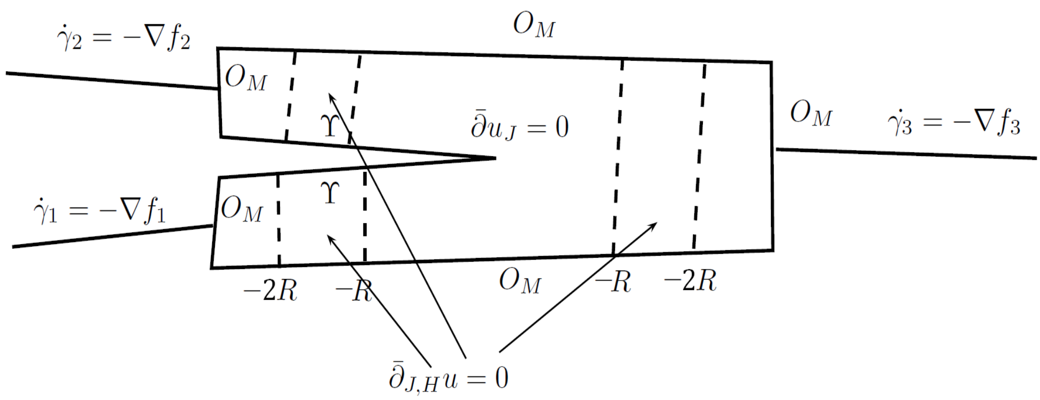
$$\Phi^{f_3}([\alpha_1]\cdot[\alpha_2])=\Phi^{f_1}([\alpha_1])\circ\Phi^{f_2}([\alpha_2]),$$

где је Φ^{f_j} изоморфизам типа ПСС који одговара функцији f_j у домену и Хамилтонијану H_j у кодомену.

Доказ. Можемо претпоставити да је елемент $\alpha_i\in HM_*(U:f_i,g_i)$ представник класе $[\alpha_i]$, $i\in\{1,2\}$. Из дефиниције пресликавања Φ и Теореме 4.8 следи да је довољно показати да на нивоу Флорових хомологија за апроксимације важи

$$\Phi^{f_3}_{\Upsilon}(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\Phi^{f_1}_{\Upsilon}(\alpha_1)\circ\Phi^{f_2}_{\Upsilon}(\alpha_2).\tag{4.7}$$

Овде је Υ довољно добра апроксимација од $\nu_-^*\overline{U}$. Једнакост (4.7) еквивалентна



Слика 23: Помоћна многострукост која се користи у доказу Теореме 4.9

је једнакости

$$(\Phi^{f_3}_{\Upsilon})^{-1}\left(\Phi^{f_1}_{\Upsilon}(\alpha_1)\circ\Phi^{f_2}_{\Upsilon}(\alpha_2)\right)=\alpha_1\cdot\alpha_2.$$

Користећи Став 3.7, последњу једнакост сводимо на њој еквивалентну

$$(\mathrm{PD}^{f_3,g_3}_{M})^{-1}\circ\Psi^{f_3}_{\Upsilon}\circ\mathrm{PD}^{\Upsilon,H_3}_{F}\left(\Phi^{f_1}_{\Upsilon}(\alpha_1)\circ\Phi^{f_2}_{\Upsilon}(\alpha_2)\right)=\alpha_1\cdot\alpha_2. \tag{4.8}$$

Једнакост ових пресликавања на нивоу хомологија следи из аргумената кобордизама примењених на помоћну многострукост која је скицирана на Слици 23. Слична идеја је коришћена у доказу Става 4.3. $\square$

5 Спектралне инваријанте у Флоровој хомологији

У овој глави дефинишемо спектралне инваријанте у разним Флоровим хомологијама. Дефиниција у прва три поглавља је на идејном нивоу иста. Посматрамо најмањи ниво у филтрираној хомологији на ком се реализује нека сингуларна класа. Овде ћемо некада користити сингуларне класе, некада Морсове класе, имајући увек на уму да су те хомологије изоморфне.

Поглавље 5.1 садржи конструкцију спектралних инваријанти за периодичне орбите. Та конструкција је позната и ми пратимо ознаке из [102].

Дефиниција спектралних инваријанти у Лагранжевој Флоровој хомологији за компактне подмногострукости дата је у Поглављу 5.2 при чему ми пратимо рад [66].

Спектралне инваријанте у конормалној Флоровој хомологији су дефинисане у Поглављу 5.3. Ова конструкција је позната и дата је у [85] а ми пратимо ознаке дате у ауторовом раду [24].

У Поглављу 5.4 дефинисане су спектралне инваријанте у случају отвореног подскупа базе $U \subset M$ и ово је оригинални резултат објављен у [61]. У Флоровој хомологији за отворене скупове постоји додатан изазов при дефинисању спектралних инваријанти. Наиме, ту нам је домен количнички простор добијен деловањем директног лимеса. Да бисмо могли да дефинишемо инваријанте за елементе таквог простора прво ћемо дефинисати инваријанте у Флоровим хомологијама за апроксимације. Након тога треба показати да се тако дефинисане инваријанте добро слажу са директним лимесом. У овом поглављу је нађена веза између инваријанти за отворен скуп и инваријанти за апроксимације, односно показано је да ће те инваријанте бити једнаке за све апроксимације које су веће од неке фиксиране. Показана је и непрекидност релативних инваријанти у односу на Хоферову норму Хамилтонијана и неједнакост између инваријанти за два отворена скупа $U \subset V$.

5.1 Флорова хомологија за периодичне орбите

Дефиниције и својства која овде наводимо могу се наћи у [102]. Нека је (P, ω) затворена симплектичка многострукост која задовољава услов (1.16). Означимо са

$$i_*^{\lambda} : HF_*^{\lambda}(P : H, J) \to HF_*(P : H, J),$$

инклузију на нивоу хомологија која је индукована инлузијом на нивоу комплекса

$$i^{\lambda} : CF_*^{\lambda}(P : H, J) \to CF_*(P : H, J).$$

Подсетимо се да смо ове Флорове хомологије за периодичне орбите дефинисали у Поглављу 1.6. Нека је $f : P \to \mathbb{R}$ Морсова функција. За $\alpha \in HM_*(P : f, g) \backslash \{0\}$ дефинишемо *спектралну инваријанту*

$$\rho(\alpha : P : H) = \inf \left\{ \lambda \,|\, PSS(\alpha) \in \mathrm{Im}(i_*^{\lambda}) \right\}.$$

Овде је PSS пресликавање које успоставља изоморфизам између Морсове хомологије од P и Флорове хомологије за периодичне орбите и дефинисано је у (1.21).

5.2 Флорова хомологија компактних подмногострукости

У овом поглављу дефинишемо инваријанте сингуларних класа које живе у затвореној Лагранжевој подмногострукости L затворене симплектичке многострукости (P, ω). Пратимо дефиницију која се може наћи у у [66]. Нека је

$$j_*^{\lambda} : HF_*^{\lambda}(L, P : H, J) \to HF_*(L, P : H, J),$$

инклузија филтриране Флорове хомологије у комплетну Флорову хомологију која је, као и у претходном поглављу, индуковна инклузијом одговарајућих комплекса

$$j^{\lambda} : CF_*^{\lambda}(L, P : H, J) \to CF_*(L, P : H, J).$$

Споменуте комплексе и Флорове хомологије смо дефинисали у Поглављу 1.7.2. Нека је $f : L \to \mathbb{R}$ Морсова функција и α елемент Морсове хомологије $HM_*(L : f, g)$ различит од нуле. *Спектрална инваријанта* од α дефинише се као

$$\sigma(\alpha : L, P : H) = \inf \left\{ \lambda \,|\, PSS^L(\alpha) \in \mathrm{Im}(j_*^{\lambda}) \right\}.$$

Сада је PSS^L изоморфизам типа ПСС чију смо конструкцију извели у Поглављу 1.7.2.

Ако имамо два Хамилтонијана, H и K, који праве исту Хамилтонову деформацију од L, $\phi_H^1(L) = \phi_K^1(L)$, онда ће се њихове спектралне инваријанте разликовати за исту константу C. Другим речима

$$\sigma(\alpha : L, P : H) - \sigma(\alpha : L, P : K) = C,$$

за све $\alpha \in HM_*(L)$ (видети [66] за више детаља).

5.3 Флорова хомологија конормалних подмногострукости

Сада нам је амбијентна многострукост T^*M, где је M затворена многострукост, и издвојена је једна затворена подмногострукост $N \subset M$. Флорова хомологија за пар (o_M, ν^N), чије инваријанте посматрамо, дефинисана је у Поглављу (1.7.1). Инваријанте у овој хомологији су дефинисане у [85] а ми ћемо пратити дефиницију и ознаке из [24]. Разлика је у томе што у [24] користимо пресликавање типа ПСС у дефиницији инваријанти.

Нека је

$$k_*^\lambda : HF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H, J) \to HF_*(o_M, \nu^*N : H, J),$$

пресликавање индуковано инклузијом ланчастих комплекса. Нека је $f : N \to \mathbb{R}$ Морсова функција. За $\alpha \in HM_*(N : f, g) \setminus \{0\}$ дефинишемо *конормалну спектралну инваријанту*

$$l(\alpha : o_M, \nu^*N : H) = \inf\left\{\lambda \,|\, \psi_*(\alpha) \in \mathrm{Im}(k_*^\lambda)\right\}.$$

Изоморфизам ψ_* смо дефинисали у Поглављу 3.2.

5.4 Флорова хомологија за отворене скупове

Овде ћемо анализирати Флорову хомологију за отворен скуп моделирану негативним конормалним скупом $\nu_-^*\overline{U} \subset T^*M$. Хомологија је дефинисана у Поглављу 1.8 као директан лимес Флорових хомологија за апроксимације и означавали смо је са

$$HF_*^-(H : U, M) = \varinjlim HF_*(o_M, \Upsilon : H, J).$$

Подсетимо се да је $U \subset M$ отворен скуп чија је граница глатка затворена подмногострукост ∂U. У истом поглављу смо дефинисали филтриране Флорове хомологије за апроксимацију Υ, у ознаци

$$HF_*^\lambda(o_M, \Upsilon : H, J).$$

Инклузија филтрираног ланчастог комплекса у цео комплекс индуковала је хомоморфизам на нивоу хомологија

$$\imath_{\Upsilon *}^\lambda : HF_*^\lambda(o_M, \Upsilon : H, J) \to HF_*(o_M, \Upsilon : H, J).$$

Нека је $f : U \to \mathbb{R}$ Морсова функција. За $\alpha \in HM_*(U : f, g_\Upsilon) \setminus \{0\}$ дефинишемо *спектралне инваријанте у односу на апроксимације* као

$$c_\Upsilon(\alpha : U, M : H) = \inf \left\{ \lambda \mid \Phi^\Upsilon(\alpha) \in \operatorname{Im}(\imath^\lambda_{\Upsilon *}) \right\}.$$

Пресликавање Φ^Υ је изоморфизам типа ПСС који смо дефинисали у Поглављу 3.3.1.

Желимо да дефинишемо и спектралне инваријанте које испитују када се нека класа реализује у Флоровој хомологији за отворен скуп. Дефинисали смо филтрирану Флорову хомологију за отворен скуп у (1.44) и показали да постоји хомоморфизам

$$[\imath]^\lambda_* : HF^\lambda_*(H, U : M) \to HF^-_*(H, U : M),$$

који је индукован инклузијама ланчастих комплекса за апроксимације. За $[\alpha] \in HM_*(U : f) \setminus \{0\}$ дефинишемо *спектралну инваријанту за отворен скуп* U као

$$c([\alpha] : U, M : H) = \inf \left\{ \lambda \mid \Phi([\alpha]) \in \operatorname{Im}([\imath]^\lambda_*) \right\}.$$

Φ је изоморфизам дефинисан у Поглављу 3.3.2.

Природно се намеће питање да ли су некако повезане инваријанте $c_\Upsilon(\alpha : U, M : H)$ и $c([\alpha] : U, M : H)$. Да ли, на пример, $c_\Upsilon(\alpha : U, M : H)$ тежи ка $c([\alpha] : U, M : H)$ када се Υ приближава $\nu^*_-\overline{U}$. Важиће јаче својство. Све инваријанте ће постати једнаке, почев од неке апроксимације.

Став 5.1. *Нека је $\alpha \in HM_*(f, U : g_\Upsilon) \setminus \{0\}$. Тада постоји апроксимација $\widetilde{\Upsilon}$, која је већа од Υ, $\Upsilon \leq \widetilde{\Upsilon}$, тако да важи*

$$c([\alpha] : U, M : H) = c_{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha) : U, M : H)$$

за све апроксимације $\widehat{\Upsilon}$ које су веће од $\widetilde{\Upsilon}$, $\widetilde{\Upsilon} \leq \widehat{\Upsilon}$.

Примедба 5.2. Овде смо као аргументе функције $\mathbf{G}$ ставили апроксимације, а не само слова као раније. Тиме смо желели да истакнемо која апроксимација се налази у домену а која у кодомену функције.

Доказ. У доказу ћемо користити следећи комутативан дијаграм у ком се појављују апроксимације за које важи поредак $\Upsilon \leq \widetilde{\Upsilon} \leq \widehat{\Upsilon}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & HM_k(f,U:g_\Upsilon) & \overset{\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}}{\to} & HM_k(f,U:g_{\widetilde{\Upsilon}}) & \overset{\mathbf{G}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}}}{\to} & HM_k(f,U:g_{\widehat{\Upsilon}}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow \Phi^{\Upsilon} & & \downarrow \Phi^{\widetilde{\Upsilon}} & & \downarrow \Phi^{\widehat{\Upsilon}} & & \\
\cdots & \to & HF_k(\Upsilon_a:H,J_\Upsilon) & \overset{\mathbf{F}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}}{\to} & HF_k(\widetilde{\Upsilon}:H,J_{\widetilde{\Upsilon}}) & \overset{\mathbf{F}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}}}{\to} & HF_k(\widehat{\Upsilon}:H,J_{\widehat{\Upsilon}}) & \to & \cdots \\
 & & \uparrow \imath^\lambda_{\Upsilon *} & & \uparrow \imath^\lambda_{\widetilde{\Upsilon}*} & & \uparrow \imath^\lambda_{\widehat{\Upsilon}*} & & \\
\cdots & \to & HF^\lambda_k(\Upsilon_a:H,J_\Upsilon) & \overset{\mathbf{F}^\lambda_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}}{\to} & HF^\lambda_k(\widetilde{\Upsilon}:H,J_{\widetilde{\Upsilon}}) & \overset{\mathbf{F}^\lambda_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}}}{\to} & HF^\lambda_k(\widehat{\Upsilon}:H,J_{\widehat{\Upsilon}}) & \to & \cdots
\end{array}
\tag{5.1}
$$

Комутативност горњег дијаграма смо показали у Ставу 3.10, док комутативност доњег дијаграма следи из чињенице да су пресликавања $\mathbf{F}^\lambda$ добијена, на нивоу ланаца, као рестрикција пресликавања F на одговарајуће поткомплексе CF^λ.

Нека је $\lambda \in \mathbb{R}$ број за који важи

$$\Phi([\alpha]) \in \mathrm{Im}(\imath^\lambda_*).$$

Тада постоји $[x] \in HF^\lambda_k(H,U:M)$ за које је

$$\Phi([\alpha]) = [\imath]^\lambda_*([x]).$$

Како су класе $[\alpha]$ и $[x]$ елементи простора који је добијен као директан лимес, постојаће елементи

$$\alpha \in HM_k(U:f,g_\Upsilon),\ x \in HF^\lambda_k(o_M,\Upsilon':H,J_{\Upsilon'})$$

који ће бити представници тих класа. Овде су Υ и Υ' неке апроксимације од $\nu^*_-\overline{U}$.

$$\Phi([\alpha]) = [\Phi^\Upsilon(\alpha)],$$

и

$$[\imath]^\lambda_*[x] = [\imath^\lambda_{\Upsilon' *}(x)].$$

Једнакост ових елемената количничког простора значи да постоји нека апроксимација $\widetilde{\Upsilon}$ већа од Υ и Υ' тако да је

$$\mathbf{F}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\Phi^\Upsilon(\alpha)) = \mathbf{F}_{\Upsilon'\widetilde{\Upsilon}}(\imath^\lambda_{\Upsilon' *}(x)).$$

Користећи комутативни дијаграм (5.1) добијамо низ једнакости

$$\Phi^{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) = \mathbf{F}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\Phi^\Upsilon(\alpha)) = \mathbf{F}_{\Upsilon'\widetilde{\Upsilon}}(\imath^\lambda_{\Upsilon' *}(x)) = \imath^\lambda_{\widetilde{\Upsilon}*}(\mathbf{F}^\lambda_{\Upsilon'\widetilde{\Upsilon}}(x)).$$

Дакле
$$\Phi^{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) \in \mathrm{Im}(\imath^{\lambda}_{\widetilde{\Upsilon}*}).$$
Закључујемо да важи неједнакост
$$c_{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha) : U, M : H) \leq c([\alpha] : U, M : H). \tag{5.2}$$
Ако је $\mu \in \mathbb{R}$ реалан број тако да
$$\Phi^{\Upsilon}(\alpha) \in \mathrm{Im}(\imath^{\mu}_{\Upsilon*}),$$
тада је $\Phi^{\Upsilon}(\alpha) = \imath^{\mu}_{\Upsilon*}(y)$ за неки елемент $y \in HF^{\mu}_{k}(o_M, \Upsilon : H, J_{\Upsilon})$. Тада важи
$$\Phi([\alpha]) = [\Phi^{\Upsilon}(\alpha)] = [\imath^{\mu}_{\Upsilon*}(y)] = [\imath]^{\mu}_{*}[y],$$
односно, $[\alpha] \in \mathrm{Im}([\imath]^{\mu}_{*})$. Добили смо још једну неједнакост
$$c([\alpha] : U, M : H) \leq c_{\Upsilon}(\alpha : U, M : H). \tag{5.3}$$
Нека је сада $\widehat{\Upsilon}$ било која апроксимација за коју важи
$$\widetilde{\Upsilon} \leq \widehat{\Upsilon}.$$
Ако $\Phi^{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) \in \mathrm{Im}\, \imath^{\lambda}_{\widetilde{\Upsilon}*}$ тада постоји $z \in HF^{\lambda}_{*}(o_M, \widetilde{\Upsilon} : H, J_{\widetilde{\Upsilon}})$ тако да важи
$$\Phi^{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) = \imath^{\lambda}_{\widetilde{\Upsilon}*}(z).$$
Користећи дијаграм (5.1) добијамо низ једнакости
$$\begin{aligned}\Phi^{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha)) &= \Phi^{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}} \circ \mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) = \\ &= \mathbf{F}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}} \circ \Phi^{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha)) = \\ &= \mathbf{F}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}} \imath^{\lambda}_{\widetilde{\Upsilon}*}(z) = \imath^{\lambda}_{\widehat{\Upsilon}*}(\mathbf{F}^{\lambda}_{\widetilde{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}}(z)).\end{aligned}$$
Другим речима $\Phi^{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha)) \in \mathrm{Im}(\imath^{\lambda}_{\widehat{\Upsilon}*})$. Добили смо неједнакост
$$c_{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha) : U, M : H) \leq c_{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha) : U, M : H). \tag{5.4}$$
То заправо значи да како идемо низ комутативан дијаграм (5.1) спектралне инваријанте опадају. Сада ћемо показати и обрнуту неједнакост, одакле за-

кључујемо да ће све инваријанте бити једнаке. Заиста

$$\begin{aligned}
c_{\widetilde{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widetilde{\Upsilon}}(\alpha):U,M:H) &\overset{(5.2)}{\leq} c([\alpha]:U,M:H) \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} c([\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha)]:U,M:H) \overset{(5.3)}{\leq} \\
&\overset{(5.3)}{\leq} c_{\widehat{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha):U,M:H).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Једнакост $(*)$ важи јер α и $\mathbf{G}_{\Upsilon\widehat{\Upsilon}}(\alpha)$ представљају исти елемент у количничком простору. Из (5.4) и (5.5) добијамо једнакост из поставке овог става. □

Као и за остале инваријанте, и у случају ових инваријанти, може да се постави питање да ли су оне упоредиве за два блиска Хамилтонијана. Када кажемо два блиска Хамилтонијана, мисли се у Хоферовој норми која се дефинише као

$$\|H\| = \int_0^1 \left[\max_x H(x,t) - \min_x H(x,t)\right] dt. \tag{5.6}$$

Испоставиће се да су *релативне спектралне инваријанте за отворен скуп* U које се дефинишу као

$$C([\alpha]:U,M:H) = c([\alpha]:U,M:H) - c(1:U,M:H), \tag{5.7}$$

непрекидне у односу на Хоферову норму. Овде је 1 генератор нулте хомолошке групе $HM_0(U:f)$.

Теорема 5.3. *Нека су* $H, H' : T^*M\times[0,1]\to\mathbb{R}$ *Хамилтонијани са компактним носачима. За све* $[\alpha]\in HM_*(U:f)\setminus\{0\}$ *важи*

$$|C([\alpha]:U,M:H) - C([\alpha]:U,M:H')| \leq \|H - H'\|. \tag{5.8}$$

Доказ. Први корак у доказу јесте да покажемо да иста неједнакост важи за релативне инваријанте за апроксимације. Означимо те релативне инваријанте са

$$C_\Upsilon(\alpha:U,M:H) = c_\Upsilon(\alpha:U,M:H) - c_\Upsilon(1:U,M:H),$$

где $\alpha\in HM_*(U:f,g_\Upsilon)\setminus\{0\}$ и 1 је генератор групе $HM_0(U:f,g_\Upsilon)$.

Спојимо Хамилтонијане линеарном хомотопијом

$$H^s = (1-\sigma(s))H + \sigma(s)H',$$

где је $\sigma:\mathbb{R}\to[0,1]$ глатка растућа функција која задовољава услов $\sigma(s)=0$ за $s\leq 0$ и $\sigma(s)=1$ за $s\geq 1$. Посматраћемо пресликавање које успоставља изоморфизам између Флорових хомологија за избор Хамилтонијана H и H'

$$\mathbf{S}^{\Upsilon}_{HH'} : HF_*(o_M, \Upsilon : H, J) \to HF_*(o_M, \Upsilon : H', J').$$

Пресликавање смо дефинисали у (1.39), али смо тада бирали произвољну регуларну хомотопију која спаја H и H'. Сада ћемо, специјално, узети линеарну хомотопију H^s која улази у дефиницију модулских простора $\mathcal{M}(x, x' : o_M, \Upsilon; H^s, J^s)$. За $x \in CF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ и $x' \in CF_*(o_M, \Upsilon : H', J')$ дефинишемо

$$\mathcal{M}(x, x' : o_M, \Upsilon; H^s, J^s) = \begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J^s(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H^s}(u)) = 0, \\ u(s,0) \in o_M,\ u(s,1) \in \Upsilon, \\ u(-\infty, t) = x(t),\ u(+\infty, t) = x'(t). \end{cases}$$

Овде је J^s скоро комплексна структура која је на $-\infty$ крају једнака задатој структури J а на $+\infty$ крају је једнака J'. Ако постоји нека трака $u \in \mathcal{M}(x, x' : o_M, \Upsilon; H^s, J^s)$ тада је

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\Upsilon}_{H'}(x') - \mathcal{A}^{\Upsilon}_{H}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \mathcal{A}^{\Upsilon}_{H^s}(u(s,\cdot))\, ds \\ &\leq E_+(H - H') \equiv \int_0^1 \max_x (H - H')\, dt. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Како линеарна хомотопија не мора да буде регуларна, можемо да је C^1- апроксимирамо регуларном хомотопијом која ће ући у дефиницију модулског простора $\mathcal{M}(x, x' : o_M, \Upsilon; H^s, J^s)$. Тада ће важити

$$\mathcal{A}^{\Upsilon}_{H'}(x') - \mathcal{A}^{\Upsilon}_{H}(x) \leq E_+(H - H') + \varepsilon$$

за произвољно мало $\varepsilon > 0$. Када пустимо лимес да $\varepsilon \to 0$ добијемо процену (5.9) и за регуларну хомотопију H^s. Дакле, ако је слика елемента x при пресликавању $\mathbf{S}^{\Upsilon}_{HH'}$ облика

$$\mathbf{S}^{\Upsilon}_{HH'}(x) = \sum_j x'_j,$$

тада је

$$\mathcal{A}^{\Upsilon}_{H'}(x'_j) - \mathcal{A}^{\Upsilon}_{H}(x) \leq E_+(H - H'), \tag{5.10}$$

за све x'_j. За $x \in HF_*(o_M, \Upsilon : H, J)$ уводимо ознаку

$$\widetilde{c}_{\Upsilon}(x, H) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, x \in \operatorname{Im} \imath^{\lambda}_{\Upsilon, H*})\}.$$

Очигледно важи
$$c_\Upsilon(\alpha : U, M : H) = \widetilde{c}_\Upsilon(\Phi_H^\Upsilon(\alpha), H).$$
Из процене (5.10) следи неједнакост
$$\widetilde{c}_\Upsilon(\mathbf{S}_{H,H'}^\Upsilon(x), H') \leq \widetilde{c}_\Upsilon(x, H) + E_+(H - H').$$
У Ставу 3.8 смо показали да важи
$$\mathbf{S}_{H,H'}^\Upsilon \circ \Phi_H^\Upsilon = \Phi_{H'}^\Upsilon.$$
Користећи овај идентитет добијамо низ неједнакости
$$\begin{aligned} c_\Upsilon(\alpha : U, M : H') &= \widetilde{c}_\Upsilon(\Phi_{H'}^\Upsilon(\alpha), H') = \\ &= \widetilde{c}_\Upsilon(\mathbf{S}_{H,H'}^\Upsilon \circ \Phi_H^\Upsilon(\alpha), H') \leq \\ &\leq \widetilde{c}_\Upsilon(\Phi_H^\Upsilon(\alpha), H) + E_+(H - H') = \\ &= c_\Upsilon(\alpha : U, M : H) + E_+(H - H'), \end{aligned} \tag{5.11}$$
који важи за све $\alpha \in HM_*(f, U) \setminus \{0\}$. Ако напишемо исту неједнакост за генератор нулте хомологије са измењеним Хамилтонијанима добијемо
$$\begin{aligned} c_\Upsilon(1 : U, M : H) &\leq c_\Upsilon(1 : U, M : H') + E_+(H' - H) = \\ &= c_\Upsilon(1 : U, M : H') + \int_0^1 \max_x \left(H'(x,t) - H(x,t)\right) dt = \\ &= c_\Upsilon(1 : U, M : H') + \int_0^1 -\min_x \left(H(x,t) - H'(x,t)\right) dt = \\ &= c_\Upsilon(1 : U, M : H') - \int_0^1 \min_x \left(H(x,t) - H'(x,t)\right) dt. \end{aligned} \tag{5.12}$$
Када спојимо неједнакости (5.11) и (5.12) добијемо нову неједнакост
$$\begin{aligned} C_\Upsilon(\alpha : U, M : H') - C_\Upsilon(\alpha : U, M : H) &= \\ &= c_\Upsilon(\alpha : U, M : H') - c_\Upsilon(1 : U, M : H') - \\ &\qquad - c_\Upsilon(\alpha : U, M : H) + c_\Upsilon(1 : U, M : H) \leq \\ &\leq \int_0^1 \max_x \left(H(x,t) - H'(x,t)\right) dt - \int_0^1 \min_x \left(H'(x,t) - H(x,t)\right) dt = \\ &= \|H - H'\|. \end{aligned}$$

Када заменимо места Хамилтонијанима добијемо и неједнакост

$$C_\Upsilon(\alpha : U, M : H) - C_\Upsilon(\alpha : U, M : H') \leq \|H' - H\|.$$

Одатле следи да су релативне инваријенте за апроксимације непрекидне у односу на Хоферову норму

$$|C_\Upsilon(\alpha : U, M : H) - C_\Upsilon(\alpha : U, M : H')| \leq \|H' - H\|.$$

Користећи Став 5.1 закључујмо да ће и апроксимације за отворен скуп задовољавати ову неједнакост. $\square$

Следећа теорема је уопштење неједнакости која је показана у [87] а даје везу између инваријанти при улагању отвореног скупа у већи отворен скуп.

Теорема 5.4. *Нека су* $U \hookrightarrow V$ *два отворена подскупа од* M *и нека је хомоморфизам*

$$\jmath_{UV*} : HM_k(U : f) \to HM_k(V : f)$$

индукован инклузијом

$$\jmath_{UV} : U \hookrightarrow V$$

сурјективан. Тада за $[\alpha] \in HM_k(U : f) \setminus \{0\}$ *важи неједнакост*

$$c(\jmath_{UV*}([\alpha]) : V, M : H) \leq c([\alpha] : U, M : H).$$

Доказ. Означимо са

$$\begin{aligned}
[\imath]_{UV*} &: HF_k^-(H, U : M) \to HF_k^-(H, V : M),\\
[\imath]_{UV*}^\lambda &: HF_k^\lambda(H, U : M) \to HF_k^\lambda(H, V : M),\\
[\imath]_{U*}^\lambda &: HF_k^\lambda(H, U : M) \to HF_k^-(H, U : M),\\
[\imath]_{V*}^\lambda &: HF_k^\lambda(H, V : M) \to HF_k^-(H, V : M),
\end{aligned}$$

одговарајуће хомоморфизме индуковане инклузијама (видети и [87]). Следећи дијаграм је комутативан

$$\begin{tikzcd} HF_k^\lambda(H,U:M) \arrow[r, "{[\imath]^\lambda_{UV*}}"] \arrow[d, "{[\imath]^\lambda_{U*}}"'] & HF_k^\lambda(H,V:M) \arrow[d, "{[\imath]^\lambda_{V*}}"] \\ HF_k^-(H,U:M) \arrow[r, "\imath_{UV*}"] \arrow[d, "\Psi_U"'] & HF_k^-(H,V:M) \arrow[d, "\Psi_V"] \\ HM_k(U:f) \arrow[r, "\jmath_{UV*}"] & HM_k(V:f). \end{tikzcd} \tag{5.13}$$

Комутативност горњег дијаграма је показана у [87]. Да би показали да доњи дијаграм комутира довољно је посматрати хомологије за одговарајуће апроксимације

$$\begin{tikzcd} HF_k(o_M,\Upsilon^U:H,J) \arrow[r, "\imath^{(H,J)}_{UV*}"] \arrow[d, "\Psi_{\Upsilon^U}"'] & HF_k(o_M,\Upsilon^V:H,J) \arrow[d, "\Psi_{\Upsilon^V}"] \\ HM_k(U:f,g) \arrow[r, "\jmath_{UV*}"] & HM_k(V:f,g), \end{tikzcd}$$

Υ^U која је довољно близу скупу $\nu^*_-\overline{U}$ и Υ^V довољно близу скупу $\nu^*_-\overline{V}$. Овде су $\imath^{(H,J)}_{UV*}$ инклузије дефинисане као у [87]. Узмимо $[x]$ из хомологије $HF_k(o_M,\Upsilon^U:H,J)$. Важи

$$\Psi_{\Upsilon^V}(\imath^{(H,J)}_{UV*}([x])) = \sum_{p\in CM_k(V)} n(x,p)[p]. \tag{5.14}$$

Друга композиција даје једнакост

$$\jmath_{UV*}(\Psi_{\Upsilon^U}([x])) = \sum_{p\in CM_k(U)} n(x,p)\jmath_{UV*}([p]),$$

која је заправо једнака (5.14) ако је $\jmath_{UV*}$ сурјективно пресликавање. Дакле, показали смо комутативност дијаграма (5.13).

Дефинишимо скуп

$$A^U_{[\alpha]} = \{\lambda\in\mathbb{R} \mid \Phi_U([\alpha])\in \mathrm{Im}[\imath]^\lambda_{U*}\}.$$

Ако $\lambda\in A^U_{[\alpha]}$, тада је $\Phi_U(\alpha) = [\imath]^\lambda_{U*}([\beta])$ за неко $[\beta]\in HF_k^\lambda(H,U:M)$. На основу дијаграма (5.13) закључујемо да важи

$$[\imath]^\lambda_{V*}([\imath]^\lambda_{UV*}([\beta])) = [\imath]_{UV*}([\imath]^\lambda_{U*}([\beta])) = [\imath]_{UV*}(\Phi_U([\alpha])) = \Phi_V(\jmath_{UV*}([\alpha])).$$

Другим речима $\lambda \in A^V_{\mathcal{J}UV*([\alpha])}$. Показали смо инклузију скупова

$$A^U_{[\alpha]} \subset A^V_{\mathcal{J}UV*([\alpha])}.$$

Наше инваријанте су инфимуми ових скупова, па неједнакост међу инваријантама следи из чињенице да је

$$\inf A^V_{\mathcal{J}UV*([\alpha])} \leq \inf A^U_{[\alpha]}.$$

$\square$

6 Упоређивање спектралних инваријанти

У овој глави комбинујемо све појмове које смо дефинисали и конструисали у Главама 2, 3, 4, 5.

Наиме, морфизам који броји димњаке у компактној симплектичкој многострукости даје нам начин да упоредимо спектралне инваријанте Флорове хомологије за периодичне орбите и Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке. Инваријанте можемо да упоредимо јер функционали дејства (из одговарајућих хомологија) опадају дуж димњака. Поред тога, у Поглављу 6.1 показана је субадитивност спектралних инваријанти у односу на производ који смо дефинисали у Поглављу 4.1. Садржај овог поглавља је оригинални резултат објављен у [25].

Када задајемо једну алгебарску структуру на Флоровој хомологији (као што је производ) јасна геометријска слика која се јавља (то је бројање одговарајућих пертурбованих панталона) олакшава нам посао када желимо дубље да испитамо својства тог производа. Наиме, можемо да контролишемо вредности функционала дејства на једном асимптотском крају панталона које учествују у дефиницији производа па можемо да закључимо како се производ редукује на филтриране Флорове хомологије. Као што смо већ истакли филтриране хомологије играју важну улогу у дефинисању спектралних инваријанти. Контрола функционала дејства омогућава нам да покажемо да су спектралне инваријанте субадитивне (или да задовољавају неједнакост троугла) у односу на одговарајуће производе.

У Поглављу 6.2 показујемо субадитивност инваријанти у конормалној Флоровој хомологији у односу на производ који је дефинисан у Поглављу 4.2. Резултати овог поглавља објављени су у ауторском раду [24].

У последњем поглављу показујемо субадитивност инваријанти у Флоровој хомологији за отворен скуп у односу на производ који је дефинисан у Поглављу 4.3. Добијени резултати део су коауторског рада [61].

6.1 Упоређивање инваријанти у компактној многострукости

Амбијентна многострукост је компактна симплектичка многострукост (P, ω). $L \subset P$ је Лагранжева подмногострукост тако да су задовољени услови (1.28). Претпоставићемо да су задовољени и услови (1.16) који су нам били неопходни за добру дефинисаност (филтриране) Флорове хомологије за периодичне орбите. Из једнакости (1.14) можемо да закључимо да услов $\mu|_{\pi_2(P,L)} = 0$ важи ако је задовољен услов $c_1|_{\pi_2(P)} = 0$.

Прве две теореме у овом поглављу упоређују спектралне инваријанте у Флоровој хомологији затворене Лагранжеве подмногострукости и Флоровој хомологији за периодичне орбите.

Теорема 6.1. *Нека је* $\alpha \in HM_*(P : f_P, g_P) \setminus \{0\}$ *класа у Морсовој хомологији. Тада важи*

$$\rho(\alpha : P : H) \geq \sigma(\imath_!(\alpha) : L, P : H).$$

Примедба 6.2. Пресликавање $\imath_!$ је умкер пресликавање које смо дефинисали у (3.3).

Доказ. Постоји следећи комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} HF_*^\lambda(P : H, J) \arrow[r, "\tau_*^\lambda"] \arrow[d, "i_*^\lambda"'] & HF_*^\lambda(L, P : H, J) \arrow[d, "j_*^\lambda"'] \\ HF_*(P : H, J) \arrow[r, "\tau_*"] & HF_*(L, P : H, J) \\ HM_*(P : f_P, g_P) \arrow[r, "\imath_!"] \arrow[u, "PSS"] & HM_*(L : f_L, g_L). \arrow[u, "PSS^L"] \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Горњи дијаграм је изведен у (3.1) а доњи дијаграм се појављује у (3.2). Подсетимо се да смо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији дефинисали као

$$\rho(\alpha : P : H) = \inf R_H(\alpha),$$

где је

$$R_H(\alpha) = \left\{\lambda \,|\, PSS(\alpha) \in \mathrm{Im}(i_*^\lambda)\right\}.$$

Спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке смо дефинисали као

$$\sigma(\beta : L, P : H) = \inf S_H(\beta),$$

где је

$$S_H(\beta) = \left\{\lambda \,|\, PSS^L(\beta) \in \mathrm{Im}(j_*^\lambda)\right\}.$$

Ако $\lambda \in R_H(\alpha)$ тада је

$$PSS(\alpha) = i_*^\lambda(a),$$

за неко $a \in HF_*^\lambda(P : H, J)$. Из дијаграма (6.1) видимо да ће важити

$$PSS^L(\imath_!(\alpha)) = j_*^\lambda(\tau_*^\lambda(a)),$$

односно $\lambda \in S_H(\imath_!(\alpha))$. Дакле, важи инклузија

$$R_H(\alpha) \subset S_H(\imath_!(\alpha)).$$

Наше инваријанте су инфимуми ових скупова па закључујемо

$$\rho(\alpha : P : H) \geq \sigma(\imath_!(\alpha) : L, P : H).$$

$\square$

Теорема 6.3. *Нека је* $\beta \in HM_*(L : f_L, g) \setminus \{0\}$ *Морсова хомолошка класа. Тада важи*

$$\rho(i_*(\beta) : P : H) \leq \sigma(\beta : L, P : H).$$

Примедба 6.4. i_* је инклузија Морсових хомологија која је добро дефинисана када је Морсова функција $f_P : P \to \mathbb{R}$ проширење Морсове функције $f_L : L \to \mathbb{R}$ које смо описали у доказу Става 4.5.

Доказ. Када спојимо комутативне дијаграме (3.4) и (3.5) добијемо следећи комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
HF_*^\lambda(L, P : H, J) \arrow[r, "\chi_*^\lambda"] \arrow[d, "j_*^\lambda"'] & HF_*^\lambda(P : H, J) \arrow[d, "i_*^\lambda"'] \\
HF_*(L, P : H, J) \arrow[r, "\chi_*"] & HF_*(P : H, J) \\
HM_*(L : f_L, g) \arrow[r, "i_*"] \arrow[u, "PSS^L"'] & HM_*(P : f_P, g). \arrow[u, "PSS"']
\end{tikzcd}$$

Ако је $PSS^L(\beta) \in \mathrm{Im}(j_*^\lambda)$ тада $PSS(i_*(\beta)) \in \mathrm{Im}(i_*^\lambda)$. Сада неједнакост следи из инклузије

$$S_H(\beta) \subset R_H(i_*(\beta)).$$

$\square$

Сада ћемо показати како се понашају спектралне инваријанте у односу на производ

$$\diamond : HF_*(P : H_1, J_1) \otimes HF_*(L, P : H_2, J_2) \to HF_*(L, P : H_1 \sharp H_2, J_{H_1 \sharp H_2}),$$

који смо дефинисали у Поглављу 4.1. Скоро комплексна структура J_1 задовољава услове регуларности у Флоровој хомологији за периодичне орбите у односу на Хамилтонијан $H_1 : P \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, док J_2 задовољава услове регуларности у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке у односу на Хамилтонијан $H_2 : P \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Овде ћемо разматрати ситуацију када је на излазном крају Риманове површи $\widetilde{\Sigma}$ пертурбација Коши-Риманове једначине задата надовезивањем Хамлтонијана

$$H_1 \sharp H_2(p,t) = \begin{cases} H_1(p,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H_2(p,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

У општем случају не можемо да надовежемо било која два Хамилтонијана јер не морају да буду једнаки на одговарајућим крајевима интервала. Ипак, постоји поступак (видети Напомену 2.5 у [78]) који нам допушта да било који Хамилтонијан заменимо Хамилтоновом функцијом која је једнака нули у околини тачака $t = 0$ и $t = 1$. Такав поступак неће променити спектралне инваријанте Хамилтонијана а при томе ће $H_1 \sharp H_2$ бити глатка функција.

Теорема 6.5. *Нека су $a \in HF_*(P : H_1, J_1)$ и $x \in HF_*(L, P : H_2, J_2)$ елементи Флорових хомологија различити од нуле. Тада важи неједнакост*

$$\begin{aligned}\sigma((PSS^L)^{-1}(a \diamond x) : L, P : H_1 \sharp H_2) \le \\ \le \rho(PSS^{-1}(a) : P : H_1) + \sigma((PSS^L)^{-1}(x) : L, P : H_2).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Доказ. Да бисмо показали неједнакост (6.2), посматраћемо, као у [88] и [102], раслојење $\widetilde{\pi} : \widetilde{P} \to \widetilde{\Sigma}$ чија је фибра изоморфна са (P, ω). Фиксираћемо тривијализације на одговарајућим крајевима

$$\begin{aligned} &\varphi_j^- : \widetilde{P}_j^- \equiv \widetilde{P}|_{\widetilde{\Sigma}_j^-} \to \widetilde{\Sigma}_j^- \times P,\ j \in \{1,2\}, \\ &\varphi^+ : \widetilde{P}^+ \equiv \widetilde{P}|_{\widetilde{\Sigma}^+} \to \widetilde{\Sigma}^+ \times P. \end{aligned}$$

На рестрикцијама $\widetilde{P}_1^-, \widetilde{P}_2^-$ и $\widetilde{P}^+$ дефинишемо $2-$форме

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}_j^- = (\varphi_j^-)^*(\omega + d(\rho_R H_j dt)),\ j \in \{1,2\}, \\ &\tilde{\omega}^+ = (\varphi^+)^*(\omega + d(\rho_R (H_1 \sharp H_2) dt)). \end{aligned}$$

У доказу ће нам бити потребна следећа теорема.

Теорема 6.6. *(Ентов,[27]) Постоји затворена $2-$форма $\tilde{\omega}$ која задовољава следеће услове*

(1) $\tilde{\omega}|_{\widetilde{\Sigma}_j^-} = \tilde{\omega}_j^-$, $j \in \{1,2\}$,

(2) $\tilde{\omega}|_{\widetilde{\Sigma}^+} = \tilde{\omega}^+$,

(3) рестрикција од $\tilde{\omega}$ *на фибре раслојења* $\widetilde{\pi}$ *једнака је* ω,

(4) $\tilde{\omega}^{\wedge(n+1)} = 0$.

Настављамо са доказом Теореме 6.5. Нека је $\tilde{\omega}$ 2−форма описана у Теореми 6.6. Дефинишемо

$$\Omega_\lambda = \tilde{\omega} + \lambda \tilde{\pi}^* \omega_{\widetilde{\Sigma}},$$

где је $\omega_{\widetilde{\Sigma}}$ форма површине на $\widetilde{\Sigma}$ за коју је $\int_{\widetilde{\Sigma}} \omega_{\widetilde{\Sigma}} = 1$. Одаберимо скоро комплексну структуру $\widetilde{J}$ на $\widetilde{P}$ тако да важи

(1) $\widetilde{J}$ је $\tilde{\omega}-$сагласна на свакој фибри (па чува вертикални тангентни простор),

(2) пројекција $\widetilde{\pi} : \widetilde{P} \to \widetilde{\Sigma}$ је $(\widetilde{J}, i)$ холоморфно пресликавање, односно важи $d\widetilde{\pi} \circ \widetilde{J} = i \circ d\widetilde{\pi}$, при чему је i комплексна структура на $\widetilde{\Sigma}$,

(3) $(\varphi_j^-)_* \widetilde{J} = i \oplus J_j^-$, где је $J_j^-(s,t,x) = (\phi^t_{\rho_R H_j})^* J$, $j \in \{1,2\}$,

(4) $(\varphi^+)_* \widetilde{J} = i \oplus J^+$, где је $J^+(s,t,x) = (\phi^t_{\rho_R(H_1 \sharp H_2)})^* J$.

У односу на овако одабране скоро комплексне структуре и 2−форме добили смо $\widetilde{J}-$холоморфно сечење $\tilde{u}$ раслојења $\widetilde{\pi}$. Рестрикције овог раслојења, на крајеве $\widetilde{\Sigma}_j^-, \widetilde{\Sigma}^+$ (или неки краћи асимптотски крај дифеоморфан са $(-\infty, K] \times \mathbb{S}^1$ односно $(-\infty, K'] \times [0,1]$), решења су одговарајућих једначина

$$\begin{aligned} &\partial_s u + J\left(\partial u_s - X_{\rho_R H_j}(u)\right) = 0,\ j \in \{1,2\}, \\ &\partial_s u + J\left(\partial u_s - X_{\rho_R(H_1 \sharp H_2)}(u)\right) = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Пратећи [102] или [27] добијамо да, за $a_c \in CF_*(P : H_1, J_1)$, $x_c \in CF_*(L, P : H_2, J_2)$ и $y_c \in CF_*(L, P : H_1 \sharp H_2, J_{H_1 \sharp H_2})$ важи

$$\int \tilde{u}^* \tilde{\omega} = a^P_{H_1}(a_c) + \mathcal{A}^{P:L}_{H_2}(x_c) - \mathcal{A}^{P:L}_{H_1 \sharp H_2}(y_c), \tag{6.4}$$

кад год постоји $\widetilde{J}-$холоморфно сечење $\tilde{u} : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{P}$ које задовољава једначине (6.3) на крајевима. Како је $\widetilde{J}$ скоро комплексна структура која је $\Omega_\lambda-$сагласна, важиће

$$0 \leq \int \tilde{u}^* \Omega_\lambda = \int \tilde{u}^* \tilde{\omega} + \lambda \int \tilde{u}^* \tilde{\pi}^* \omega_{\widetilde{\Sigma}} = \int \tilde{u}^* \tilde{\omega} + \lambda \int \omega_{\widetilde{\Sigma}} = \int \tilde{u}^* \tilde{\omega} + \lambda.$$

Сада ћемо опет искористити резултат који је показао Ентов, који каже да за било које $\delta > 0$ можемо да одаберемо затворену $2-$форму $\tilde{\omega}$ тако да Ω_λ буде симплектичка форма за све $0 < \lambda \le \delta$ (видети [27] за више детаља).

Нека је $\delta > 0$, $a \in HF_*(P : H_1, J_1)$ и $x \in HF_*(L, P : H_2, J_2)$. Нека су $a_c \in CF_*(P : H_1, J_1)$ и $x_c \in CF_*(L, P : H_2, J_2)$ представници класа a и x, тако да важи

$$a^P_{H_1}(a_c) \le \rho(PSS^{-1}(a) : P : H_1) + \delta,$$
$$\mathcal{A}^{P:L}_{H_2}(x_c) \le \sigma((PSS^L)^{-1}(x) : L, P : H_2) + \delta.$$

За било које y_c које се појављује у суми $a_c \diamond x_c$, постоји $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a_c, x_c; y_c)$, па ће важити

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{P:L}_{H_1\sharp H_2}(y_c) &\le a^P_{H_1}(a_c) + \mathcal{A}^{P:L}_{H_2}(x_c) + \delta \le \\ &\le \rho(PSS^{-1}(a) : P : H_1) + \delta + \sigma((PSS^L)^{-1}(x) : L, P : H_2) + \delta + \delta = \\ &= \rho(PSS^{-1}(a) : P : H_1) + \sigma((PSS^L)^{-1}(x) : L, P : H_2) + 3\delta.\end{aligned}$$

Претходна једнакост је тачна за све $\delta > 0$ и y_c који се појављују у суми $a_c \diamond x_c$. Закључујемо да важи неједнакост из тврђења ове теореме. □

Примедба 6.7. Може се показати да, помоћу ПСС пресликавања, производ $\diamond$ даје производ на Морсовој хомологији

$$HM_*(P : f_1, g_1) \otimes HM_*(L : f_2, g_2) \to HM_*(L : f_3, g_3).$$

Тај производ ће управо бити спољашњи индекс пресека, односно, важиће

$$PSS^L(\alpha \tilde{\cap}_L \beta) = PSS(\alpha) \diamond PSS^L(\beta),$$

за све $\alpha \in HM_*(P : f_1, g_1)$ и $\beta \in HM_*(L : f_2, g_2)$. Једнакост из последње теореме може да се напише и у облику

$$\sigma(\alpha \tilde{\cap}_L \beta : L, P : H_1 \sharp H_2) \le \rho(\alpha : P : H_1) + \sigma(\beta : L, P : H_2).$$

6.2 Конормалне спектралне инваријанте

Сада ћемо испитати како се мењају конормалне спектралне инваријанте при дејству производа који су дефинисани у Поглављу 4.2. Налазимо се у котангентном раслојењу T^*M, и посматрамо Флорову хомологију за пар (ν^*N, o_M).

Теорема 6.8. *Конормалне спектралне инваријанте су субадитивне у односу на спољашњи индекс пресека. Другим речима, за* $\alpha \in HM_*(M : f_1, g_1)$ *и* $\beta \in$

$HM_*(N : f_2, g_2)$ *при чему је* $\alpha\widetilde{\cap}_N\beta \neq 0$ *важи*

$$l(\alpha\widetilde{\cap}_N\beta : o_M, \nu^*N : H_1\sharp H_2) \leq l(\alpha : o_M, o_M : H_1) + l(\beta : o_M, \nu^*N : H_2). \qquad (6.5)$$

Доказ. Показали смо у Ставу 4.3 да пресликавање типа ПСС у конормалној Флоровој хомологији, ψ_*, производ $\star$ слика у $\widetilde{\cap}_N$, односно да за све $\alpha \in HM_*(M : f_1, g_1)$ и $\beta \in HM_*(N : f_2, g_2)$ важи

$$\psi_*(\alpha\widetilde{\cap}_N\beta) = \psi_*(\alpha) \star \psi_*(\beta).$$

Прво ћемо детаљније испитати како производ $\star$ делује на филтрираним хомологијама. Показаћемо да се $\star$ редукује на следеће филтриране комплексе

$$CF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H_1, J_1) \times CF_*^\mu(o_M, \nu^*N : H_2, J_2) \to CF_*^{\lambda+\mu+4\varepsilon}(o_M, \nu^*N : H, J_H),$$

за свако $\varepsilon > 0$. Овде је H краћа ознака за $H_1\sharp H_2$.

Дефинишемо глатку фамилију Хамилтонијана

$$K : \mathbb{R} \times [-1, 1] \times T^*M \to \mathbb{R}$$

која задовољава услове

$$K(s, t, \cdot) = \begin{cases} H_1(t + 1, \cdot), & s \leq -1, -1 \leq t \leq 0, \\ H_2(t, \cdot), & s \leq -1, 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{2}H_1\sharp H_2(\frac{t+1}{2}, \cdot), & s \geq 1. \end{cases}$$

Фамилију K можемо да одаберемо тако да важи

$$\left\|\frac{\partial K}{\partial s}\right\| \leq \varepsilon,\ s \in [-1, 1],$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0,$$

иначе. Нека су $x_1 \in CF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H_1, J_1)$ и $x_2 \in CF_*^\mu(o_M, \nu^*N : H_2, J_2)$ Хамилтонови путеви. Нека постоје панталоне $u \in \mathcal{M}^e(x_1, x_2; x)$ за неко $x \in$

$CF_*(o_M, \nu^*N : H, J_H)$ (u је решење једначине $\bar{\partial}_{K,J}(u) = 0$). Тада важи

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_\Sigma \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_J^2 ds\, dt &= \int_\Sigma \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, J\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds\, dt \\
&= \int_\Sigma \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_K(u) \right) ds\, dt \\
&= \int_\Sigma u^*\omega - \int_\Sigma dK\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds\, dt.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

Користећи Стоксову формулу добијемо једнакост

$$
\int_\Sigma u^*\omega = -\int x_1^*\lambda - \int x_2^*\lambda + \int x^*\lambda.
$$

Примењујући идентитет

$$
\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s}\big(K \circ u\big)\, ds\, dt = \int_\Sigma dK\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds\, dt + \int_\Sigma \frac{\partial K}{\partial s}(u)\, ds\, dt,
$$

и Стоксову формулу поново добијамо процену

$$
\begin{aligned}
-\int_\Sigma dK\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds\, dt \leq \int_0^1 & H_1(x_1(t), t)\, dt + \\
& + \int_0^1 H_2(x_2(t), t)\, dt - \int_0^1 H_1 \sharp H_2(x(t), t)\, dt + 4\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Дакле

$$
\mathcal{A}_{H_1 \sharp H_2}(x) \leq \mathcal{A}_{H_1}(x_1) + \mathcal{A}_{H_2}(x_2) + 4\varepsilon.
$$

Односно, $x_1 \star x_2 \in CF_*^{\lambda+\mu+4\varepsilon}(o_M, \nu^*N : H_1 \sharp H_2, J_{H_1 \sharp H_2})$.

Сада се враћамо на Морсове хомолошке класе $\alpha \in HM_*(M : f_1, g_1)$ и $\beta \in HM_*(N : f_2, g_2)$. Ако $\psi_*(\alpha) \in \mathrm{Im}(k_*^\lambda)$ и $\psi_*(\beta) \in \mathrm{Im}(k_*^\mu)$ тада је

$$
\begin{aligned}
\psi_*(\alpha \widetilde{\cap}_N \beta) &= \psi_*(\alpha) \star \psi_*(\beta) = \\
&= k_*^\lambda(x_1) \star k_*^\mu(x_2) \in \mathrm{Im}\, k_*^{\lambda+\mu+4\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Добијамо неједнакост

$$
l(\alpha \widetilde{\cap}_N \beta; o_M, \nu^*N : H_1 \sharp H_2) \leq l(\alpha; o_M, o_M : H_1) + l(\beta; o_M, \nu^*N : H_2) + 4\varepsilon,
$$

која важи за свако $\varepsilon > 0$. Када прођемо лимесом $\varepsilon \to 0$ добијемо неједнакост (6.5). $\square$

Узмимо специјално да је $\alpha = [M]$, где је $[M]$ фундаментална класа, $H_2 = 0$

и ставимо то у неједнакост (6.5). Како је $H\sharp 0$ само репараметризација од H која не мења ни Хамилтонове путеве, ни пертурбоване траке, а самим тим ни спектралне инваријанте, добијамо следећу последицу.

Последица 6.9. *Све спектралне инваријанте не-нула Морсових хомолошких класа су ограничене. За све $\alpha \in HM_*(N : f, g) \setminus \{0\}$ важи*

$$l(\alpha; o_M, \nu^* M : H) \leq l([M]; o_M, o_M : H).$$

Сада ћемо показати како се спектралне инваријанте мењају инклузијом у Морсову хомологију већег простора

$$i_* : HM_*(N : f, g) \to HM_*(M : F, g),$$

која настаје компоновањем морфизма

$$m_* : HF_*(o_M, \nu^* N : H, J) \to HF_*(o_M, o_M : H, J),$$

(дефинисан у Ставу 4.5) и пресликавања типа ПСС

$$i_* = \phi_* \circ m_* \circ \psi_*.$$

Пресликавања ψ_* и ϕ_* су међусобно инверзна и дефинисана су у Поглављу 3.2.

Теорема 6.10. *Нека је $\alpha \in HM_*(N : f, g) \setminus \{0\}$. Тада важи*

$$l(i_*(\alpha) : o_M, o_M : H) \leq l(\alpha : o_M, \nu^* N : H). \tag{6.7}$$

Доказ. Функционал дејства $\mathcal{A}_H$ опада дуж пертурбоване холоморфне траке $u \in \mathcal{M}^j(x, y; H, J)$. Рачун је сличан рачуну који смо већ изводили у Поглављима 1.6 и 1.8. Холоморфне траке из модулског простора $\mathcal{M}^j(x, y; H, J)$ коришћене су при дефинисању пресликавања m на нивоу ланаца. То значи да се m_* редукује на филтриране хомологије као

$$m_* : HF_*^\lambda(o_M, \nu^* N : H, J) \to HF_*^\lambda(o_M, o_M : H, J).$$

Из ове редукције закључујемо да ако се $\psi_*(\alpha)$ реализује као слика неког елемента из $HF_*^\lambda(o_M, o_M : H, J)$, онда ће

$$\psi_*(i_*(\alpha)) = \psi_*(\phi_* m_* \psi_*(\alpha)) = m_*(\psi_*(\alpha)),$$

бити слика елемента из $HF_*^\lambda(o_M, \nu^*N : H, J)$. Неједнакост (6.7) следи директно. $\square$

Показали смо да производ $*$ дефинисан на Флоровој хомологији за пар (o_M, ν^*N) може да се опише као

$$* = \star \circ (m_* \otimes \mathbb{I}).$$

Помоћу ПСС пресликавања, дефинисали смо производ на Морсовој страни

$$\alpha \bullet \beta = \phi_*(\psi_*(\alpha) * \psi_*(\beta)),$$

за $\alpha, \beta \in HM_*(N : f, g)$. У (4.2) смо истакли да се производ $\bullet$ може видети као композиција спољашњег индекса пресека и инклузије

$$\alpha \bullet \beta = i_*(\alpha) \widetilde{\cap}_N \beta.$$

Ова карактеризација, заједно са Теоремама 6.8 и 6.10 даје нам својство да су конормалне спектралне инваријанте субадитивне у односу на производ $\bullet$.

Последица 6.11. *За све Морсове хомолошке класе $\alpha, \beta \in HM_*(N : f, g)$ такве да је $\alpha \bullet \beta \neq 0$ важи*

$$l(\alpha \bullet \beta; o_M, \nu^*N : H \sharp H') \leq l(\alpha; o_M, \nu^*N : H) + l(\beta; o_M, \nu^*N : H').$$

6.3 Спектралне инваријанте за отворен скуп

У Поглављу 4.3 смо конструисали производ на Флоровој хомологији за отворен скуп

$$\circ : HF_*^-(H_1, U : M) \otimes HF_*^-(H_2, U : M) \to HF_*^-(H_3, U : M),$$

и показали да се при ПСС пресликавању $\circ$ слика у производ на Морсовој хомологији који броји дрвета (видети Теорему 4.9). Прецизније, нека су дате Морсове функције $f_1, f_2, f_3 : U \to \mathbb{R}$ из класе $\mathcal{F}^-$. Тада за све $[\alpha_i] \in HM_k(U : f_i)$, $i \in \{1, 2\}$ важи

$$\Phi^{f_3}([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) = \Phi^{f_1}([\alpha_1]) \circ \Phi^{f_2}([\alpha_2]).$$

У овом поглављу ћемо показати да су спектралне инваријанте за отворен скуп субадитивне у односу на производ $\cdot$ у Морсовој хомологији. Слично својство смо имали у случају конормалних спектралних инваријанти, Теорема 6.8 и Последица 6.11. Да бисмо показали субадитивност инваријанти за отворен скуп прво ћемо показати да то својство задовољавају инваријанте за апроксимације Υ негативног конормалног скупа $\nu^*_-\overline{U}$. Нека су нам дати Хамилтонијани $H_1, H_2 : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ са компактним носачима. Као што смо раније већ објаснили можемо да их заменимо Хамилтонијанима који су једнаки нули у околини тачака $t = 0$ и $t = 1$ па је њихово надовезивање добро дефинисан гладак Хамилтонијан $H_1 \sharp H_2$.

Став 6.12. *За Морсове класе $\alpha_j \in HM_*(U : f_j, g_j)$, $j \in \{1,2\}$, за које је $0 \neq \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in HM_*(U : f_3, g_3)$, важи*

$$c^3_\Upsilon(\alpha_1 \cdot \alpha_2 : U, M : H_1 \sharp H_2) \leq c^1_\Upsilon(\alpha_1 : U, M : H_1) + c^2_\Upsilon(\alpha_2 : U, M : H_2).$$

Додали смо експоненте у ознаци инваријанти, c^j_Υ, да бисмо истакли да се оне дефинишу помоћу ПСС изоморфизама у чијој дефиницији се користе Морсове функције f_j, $j \in \{1,2,3\}$.

Доказ. Као и у доказу Теореме 6.8 може се показати да производ $\circ$ на филтрираним хомологијама индукује пресликавање

$$CF^\lambda_*(\Upsilon, H_1) \otimes CF^\mu_*(\Upsilon, H_2) \to CF^{\lambda+\mu+4\varepsilon}_*(\Upsilon, H_1 \sharp H_2).$$

Подсетимо се да смо производ $\circ$ дефинисали бројањем елемената нуладимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)$ коју смо дефинисали у (2.42). Из описа редукције производа на филтриране хомологије закључујемо да ако постоји $u \in \mathcal{M}^\Upsilon(x_1, x_2, x_3)$ тада је

$$\mathcal{A}^\Upsilon_{H_1 \sharp H_2}(x_3) \leq \mathcal{A}^\Upsilon_{H_1}(x_1) + \mathcal{A}^\Upsilon_{H_2}(x_2) + 4\varepsilon.$$

Опет, као и у доказу Теореме 6.8, користећи идентитет (4.7) закључујемо да неједнакост

$$c^3_\Upsilon(\alpha_1 \cdot \alpha_2 : U, M : H_1 \sharp H_2) \leq c^1_\Upsilon(\alpha_1 : U, M : H_1) + c^2_\Upsilon(\alpha_2 : U, M : H_2) + 4\varepsilon,$$

важи за све $\varepsilon > 0$. Пустимо лимес $\varepsilon \to 0$ и добијемо неједнакост из поставке овог Става. $\square$

Сада ћемо показати да се ова неједнакост слаже са директним лимесом помоћу кога смо дефинисали Флорову хомологију за отворен скуп.

Теорема 6.13. *За Морсове класе $[\alpha_j] \in HM_*(U : f_j)$, $j \in \{1,2\}$, које задовоља-*

вају услов $0 \neq [\alpha_1]\cdot[\alpha_2] \in HM_*(U:f_3)$ *важи неједнакост*

$$c^3([\alpha_1]\cdot[\alpha_2]:U,M:H_1\sharp H_2) \leq c^1([\alpha_1]:U,M:H_1) + c^2([\alpha_2]:U,M:H_2),$$

при чему смо опет експонентима j *у ознаци инваријанти* c^j *истакли да су класе из Морсових хомологија моделиране функцијама* f_j.

Доказ. Из дефиниције директног лимеса следи да за $[\alpha_j] \in HM_*(U:f_j)$ постоји Υ_j тако да

$$\alpha_j \in HM_*(U:f_j, g_{\Upsilon_j}),\ j \in \{1,2\}.$$

Производ на директном лимесу Морсових хомологија се дефинише као

$$[\alpha_1]\cdot[\alpha_2] = [\mathbf{G}_{\Upsilon_1\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_1)\cdot\mathbf{G}_{\Upsilon_2\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_2)],$$

за неку апроксимацију $\widetilde{\Upsilon}$ која је већа од Υ_1 и Υ_2, $\Upsilon_1 \leq \widetilde{\Upsilon}$ и $\Upsilon_2 \leq \widetilde{\Upsilon}$. На основу Става 5.1 закључујемо да постоји апроксимација Υ_0 која је већа од $\widetilde{\Upsilon}$ тако да важи

$$\begin{aligned}
&c^1([\alpha_1]:U,M:H_1) = c^1_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_1\overline{\Upsilon}}(\alpha_1):U,M:H_1),\\
&c^2([\alpha_2]:U,M:H_2) = c^2_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_2\overline{\Upsilon}}(\alpha_2):U,M:H_2),\\
&c^3([\alpha_1]\cdot[\alpha_2]:U,M:H_1\sharp H_2) = c^3_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\widetilde{\Upsilon}\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_1\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_1)\cdot\mathbf{G}_{\Upsilon_2\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_2)):U,M:H_1\sharp H_2),
\end{aligned}$$

за све $\overline{\Upsilon}$ за које је $\Upsilon_0 \leq \overline{\Upsilon}$. Сада претходни став примењујемо на последњу инваријанту $c^3_{\overline{\Upsilon}}$. Добијемо неједнакост

$$\begin{aligned}
c^3([\alpha_1]\cdot[\alpha_2]:U,M:H_1\sharp H_2) &=\\
&= c^3_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\widetilde{\Upsilon}\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_1\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_1)\cdot\mathbf{G}_{\Upsilon_2\widetilde{\Upsilon}}(\alpha_2)):U,M:H_1\sharp H_2) =\\
&= c^3_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_1\overline{\Upsilon}}(\alpha_1)\cdot\mathbf{G}_{\Upsilon_2\overline{\Upsilon}}(\alpha_2):U,M:H_1\sharp H_2) \leq\\
&\leq c^1_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_1\overline{\Upsilon}}(\alpha_1):U,M:H_1) + c^2_{\overline{\Upsilon}}(\mathbf{G}_{\Upsilon_2\overline{\Upsilon}}(\alpha_2):U,M:H_2) =\\
&= c^1([\alpha_1]:U,M:H_1) + c^2([\alpha_2]:U,M:H_2),
\end{aligned}$$

при чему друга једнакост следи из идентитета (1.7). $\square$

7 Даљи правци истраживања

Овде ћемо објаснити неке идеје у ком правцу би могао да се настави даљи рад у области спектралних инваријанти Флоровог типа.

Квазиморфизми А. Монзнер, Н. Вишери и Ф. Заполски [78] су дефинисали две фамилије функција индексиране кохомолошким класама $a \in H^1(M;\mathbb{R})$. Једна фамилију дејствује на групу Хамилтонових дифеоморфизама котангентног раслојења T^*M

$$\mu_a : \mathrm{Ham}(T^*M) \to \mathbb{R},$$

док друга фамилија функција дејствује на простор глатких функција са компактним носачем на T^*M

$$\zeta_a : C_c^\infty(T^*M) \to \mathbb{R}.$$

Сада ћемо укратко описати конструкцију ових фамилија функција која се значајно ослања на својства спектралних инваријанти.

Подсетимо се да смо са $l(\alpha : o_M, \nu^*N : H)$ означили спектралне инваријанте у Лагранжевој Флоровој хомологији котангентног раслојења (видети Поглавље 5.3 за дефиницију). Аутори у раду [78] разматрају специјалан случај када је подмногострукост N једнака целој многострукости M. Прилагодићемо ознаке том раду па ћемо инваријенате за тај специјалан случај означавати са $l(\alpha, H)$, односно

$$l(\alpha, H) \equiv l(\alpha : o_M, o_M : H).$$

Може се показати (видети Лему 2.6 у [78]) да спектралне инваријанте неће зависити од Хамилтонијана док год он генерише исти Хамилтонов дифеоморфизам. Другим речима, ако су $H, H' \in C_c^\infty([0,1] \times T^*M)$ два Хамилтонијана таква да важи $\phi_H^1 = \phi_{H'}^1$ тада је

$$l(\alpha, H) = l(\alpha, H'),$$

за све $\alpha \in HM_*(M)$. То значи да можемо да дефинишемо

$$l(\alpha, \phi),$$

где је $\phi \in \mathrm{Ham}(T^*M)$ Хамилтонов дифеоморфизам. Означимо са l_+ спектралне инваријанте придружене фундаменталној класи $[M] \in HM_n(M)$ многострукости M,

$$l_+(\phi) \equiv l([M], \phi),$$

за све $\phi \in \mathrm{Ham}(T^*M)$.

Дефинишимо једну фамилију функција

$$\mu_0 : \mathrm{Ham}(T^*M) \to \mathbb{R}$$

као

$$\mu_0(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{l_+(\phi^k)}{k}. \tag{7.1}$$

Сада можемо да објаснимо како се дефинише фамилија μ_a. За $a \in H^1(M;\mathbb{R})$ одаберемо $\alpha \in a$ и дефинишемо симплектоморфизам

$$T_\alpha : T^*M \to T^*M$$

једнакошћу

$$T_\alpha(q,p) = (q, p + \alpha(q)).$$

На крају

$$\mu_a(\phi) = \mu_0(T_{-\alpha}\phi T_\alpha). \tag{7.2}$$

У [78] се могу наћи детаљи зашто је гранична вредност која се јавља у (7.1) коначна и зашто израз са леве стране у једнакости (7.2) неће зависити од избора представника α. Ова фамилија функција ће заправо бити парцијални квазиморфизми у смислу Ентова и Полтеровича (видети [29] и Теорему 1.3 у [78]). Неформално речено, квазиморфизми су хомоморфизми групе у $\mathbb{R}$ до на неку ограничену грешку. Они служе као замена хомоморфизмима за испитивање геометријских и динамичких својстава група јер многе познате групе не допуштају нетривијалне хомоморфизме у $\mathbb{R}$ (видети Главу 3 у [93]).

Другу фамилију функција, ζ_a, дефинишемо као

$$\zeta_a(H) = \mu_a(\phi_H^1).$$

Ова фамилија ће задовољавати својства парцијалних квазистања. Дефиниција овог појма се може наћи у [29].

Овакве фамилије функција су примењене на испитивање алгебарске и геометријске структуре групе $\mathrm{Ham}(T^*M)$, затим на испитивање својстава Поасонових заграда и на симплектичку ригидност.

Поставља се питање да ли могу да се добију неки нови резултати ако би се радило са спектралним инваријантама у случају када је N права подмногострукост од M? Да ли би у том случају фамилије μ_a и ζ_a и даље биле парцијални квазиморфизми и квазистања? Колико би се те фамилије разликовале од горе дефинисаних?

Убице спектра С. Сејфадини у раду [106] доказује следећу теорему.

Теорема 7.1. *(Теорема 2 у [106]) Нека су $U_1, ..., U_k$ међусобно раздвојени отворени подскупови затворене монотоне симплектичке многострукости*[7] (P, ω). *Претпоставимо да је сваки скуп U_i симплектоморфан Еуклидској лопти полупречника r_i и да је сваки скуп раздвојив од себе*[8] *са енергијом раздвајања*[9] $E(U_i) < \frac{|\lambda|}{2}$. *Тада, за сваки Хамилтонијан $H : P \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ чији је носач садржан у скупу $U_1 \sqcup ... \sqcup U_k$ важи*

$$\rho([P] : P : H) \leq \pi r^2,$$

где је $r = \max\{r_1, ..., r_k\}$.

Подсетимо се да је ρ спектрална инваријанта у Флоровој хомологији за периодичне орбите дефинисана у Поглављу 5.1. Класа $[P]$ означава фундаменталну класу многострукости P. Теорема је нашла примену у испитивању својстава инваријанти Поасонових заграда (видети [106] за више детаља) а мотивисана је општијим питањем (видети следећи параграф).

За потребе доказа Теореме 7.1 Сејфадини конструише специјалну класу функција коју назива „убице спектра”. Ако је задат отворен скуп U који је симплектоморфан Еуклидској лопти полупречника r, $\mathbb{B}_r$, за свако позитивно ϵ мање од r може се конструисати функција $K_\epsilon : P \to \mathbb{R}$ чији ће носач бити у скупу $\{z \ : \ r - 4\epsilon \leq |z| \leq r - \epsilon\} \subset \mathbb{B}_r \equiv U$ (овде смо идентификовали скуп U са $\mathbb{B}_r$). Графички приказ функције K_ϵ је дат на Слици 24. Важно својство ове класе функција јесте да неутралише спектралне инваријане Хамилтонијана чији је носач садржан у скупу U. Прецизније, ако је U отворен скуп из Теореме 7.1 тада ће важити

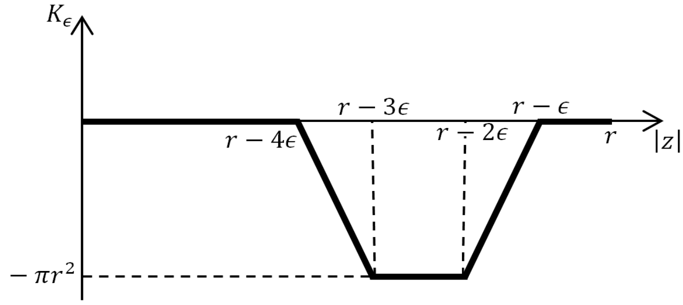
$$\rho([P] : P : H + K_\epsilon) = 0,$$

за све Хамилтонијане чији је носач садржан у $\mathbb{B}_{r-4\epsilon} \subset \mathbb{B}_r \equiv U$ (ово је тврђење Теореме 7 у [106]). Приметимо једно важно својство функција K_ϵ. Оне не зависе

[7] Кажемо да је симплектичка многострукост монотона ако постоји не-нула константа λ таква да важи $\omega|_{\pi_2(P)} = \lambda c_1|_{\pi_2(P)}$.

[8] Кажемо да је скуп раздвојив од себе ако постоји Хамилтонов дифеоморфизам $\phi \in \mathrm{Ham}(P)$ такав да важи $\phi(U) \cap \overline{U} = \emptyset$.

[9] Енергија раздвајања отвореног скупа U дефинише се као $E(U) = \inf\{\|\phi\| \ : \ \phi(U) \cap \overline{U} = \emptyset\}$. Овде је $\|\phi\|$ Хоферова норма на простору $\mathrm{Ham}(P)$ која се дефинише као $\|\phi\| = \inf\{\|H\| \ : \ \phi_H^1 = \phi\}$. Норму Хамилтонијана $\|H\|$ дефинисали смо у (5.6).



Слика 24: Графички приказ функције K_ϵ

од Хамилтонијана H већ само од скупа U.

Убице спектра дају значајан допринос у процени спектралних инваријанти велике класе Хамилтонијана. Сам аутор у раду [106] поставља питање да ли се функције K_ϵ могу конструисати за ширу класу домена а не само за отворене скупове који су симплектоморфни лопти. Оно што се нама чини као занимљиво питање јесте да ли се могу конструисати убице спектра које неутралишу спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке. Да ли онда у тој хомологији, помоћу нове класе функција, можемо да покажемо аналогно тврђење Теореми 7.1? Јасно је да, ако имамо фиксирану Лагранжеву подмногострукост L, отворени скупови U_i који се јављају у Теореми 7.1 морају да секу L да би уопште допринели промени спектра Хамилтонијана H.

Макс формула Нека је H Хамилтонијан описан у Теореми 7.1. Означимо са H_i, $i = 1, ..., k$, Хамилтонијане који су једнаки H на скупу U_i а даље проширени нулом на цео домен. Јасно је да важи $H = \sum_{i=1}^{k} H_i$. Како су скупови U_i међусобно дисјунктни и могу да се раздвоје од себе, логично је претпоставити да Флорова хомологија за периодичне орбите од H зависи само од појединачних Хамилтонијана H_i, односно, неће постојати холоморфни цилиндри који повезују периодичне орбите од H смештене у различитим скуповима U_i, већ ће нетривијални холоморфни цилиндри, који задају гранични оператор у хомологији, а тиме и саму хомологију, спајати периодичне орбите које се налазе у истом скупу U_i. Оваква дискусија природно води до питања постављеног у Напомени 6 у [106]. Да ли важи формула максимума у Флоровој хомологији за периодичне орбите

$$\rho([P] : P : H) = \max_i \rho([P] : P : H_i)?$$

Потврдан одговор на ово питање, у случају када је је P затворена асферична многострукост а U_i специјална класа Лиувилових домена, дат у раду [55], Теорема 45. Слична формула постоји за спектралне бројеве у Морсовој хомологији (видети Поглавље 10.1 у [93]). Овим је заправо дат потврдан одговор на питање које је Л. Полтерович поставио у свом раду [92] о инваријантама Поасонових заграда.

Могући наставак овог рада је питање да ли формула максимума важи за спектралне инваријанте у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке.

Лимес ПСС пресликавања у Флоровој хомологији за отворен скуп по отвореним скуповима У Поглављу 1.7.1 дата је конструкција Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке за пар (o_M, ν^*N), где је $N \subset M$ затворена подмногострукост затворене многострукости M. У Поглављу 1.8 дата је конструкција Флорове хомологије за отворен скуп $U \subset M$ чија је граница ∂U глатка. Прва хомологија, коју ћемо краће означавати[10] са $HF_*(o_M, \nu^*N)$, изоморфна је сингуларној хомологији од N. Друга хомологија, моделирана негативним конормалним скупом, у ознаци $HF_*(U : M)$ изоморфна је сингуларној хомологији од U. И у једном и у другом случају амбијент у коме се налазимо је T^*M и конструишемо хомологије за које се испоставља да су изоморфне сингуларним хомологијама одговарајућих подскупова, N, односно U. При томе је скуп N затворен а скуп U отворен. Природно се намеће питање како се понашају ове хомологије ако посматрамо њихов лимес по скуповима. Ту разликујемо два случаја.

Први случај је да посматрамо лимес по отвореним скуповима који су подскупови од N. Нека је дата фамилија отворених скупова U_n таква да важи $\lim_{n\to\infty} U_n = N$. Питање је да ли ће бити изоморфне групе $\lim_{n\to\infty} HF_*(U_n : M)$ и $HF_*(o_M, \nu^*N)$. Одговор на ово питање је негативан. Контрапример можемо да конструишемо ако узмемо да је $M = \mathbb{S}^1$ и $N = M$. Покрићемо кружницу отвореним скуповима U_n који су дифеоморфни отвореном интервалу у $\mathbb{R}$. Нека су скупови са парним индексима, U_{2n}, једнаки целој кружници без малог лука који садржи тачку $1 \in \mathbb{S}^1$. Ове лукове око тачке 1 бирамо тако да фамилија U_{2n} буде растућа у смислу инклузије. Скупови са непарним индексима, U_{2n+1}, ће бити једнаки целој кружници без малог лука који садржи тачку $\imath \in \mathbb{S}^1$. Као и малопре, лукове око тачке $\imath$ бирамо тако да фамилија U_{2n+1} буде растућа у смислу инклузије. Знамо да је $HF_1(U_n : M) \cong H_1(U_n) = 0$ јер су скупови U_n контрактибилни. Са друге стране $HF_1(o_M, \nu^*N) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}_2$. То значи да лимес хомологија за отворен скуп по отвореним скуповима који исрпљују неки затворен скуп не даје хомологију која је изоморфна хомологији тог затвореног скупа.

[10]Сада изостављамо ознаке за Хамилтонијан и скоро комплексну структуру јер желимо да обратимо више пажње на саме скупове који се јављају у конструкцији.

Други случај је да посматрамо лимес од $HF_*(U : M)$ по отвореним скуповима U који садрже N (овде, као и у претходном случају, можемо да посматрамо директан лимес при чему је предуређење задато инклузијом међу скуповима). У раду [87] је само напоменуто да ће важити

$$\varinjlim_{U\supset N} HF_*(U : M) \cong HF_*(o_M, \nu^* N) \tag{7.3}$$

и није дат никаква доказ ове чињенице која није очигледна. Тако да је питање које се овде поставља да ли важи (7.3). Ако је одговор на ово питање потврдан било би занимљиво да се испита да ли пресликавање типа ПСС у Флоровој хомологији за отворен скуп, које смо дефинисали у Поглављу 3.3, при дејству директног лимеса $\varinjlim_{U\supset N}$ постаје једнако пресликавању ПСС у конормалној Флоровој хомологији које смо дефинисали у Поглављу 3.2.

Спектралне инваријанте и C^0 симплектичка топологија Позната Громов-Ељашбергова теорема каже да је дифеоморфизам који је C^0 лимес симплектоморфизама и сам симплектоморфизам. Ова теорема је дала мотивацију да се дефинишу симплектички хомеоморфизми на (P, ω) као C^0 лимес (на компактним подскуповима) симплектоморфизама. Дефиниција Хамилтоновог хомеоморфизма је значајно компликованија. Најгрубље речено, то је хомеоморфизам симплектичке многострукости ϕ са компактним носачем за који постоји пут хомеоморфизама ϕ^t са компактним носачем, $\phi^1 = \phi$ и низ Хамилтонових дифеоморфизама $\phi^t_{H_i}$, такође са компактним носачем, који у C^0 норми конвергира ка ϕ^t униформно по $t \in [0, 1]$. Додатно се захтева да низ Хамилтонијана H_i конвергира ка некој непрекидној функцији у супремум норми на P (видети [81] за тачну дефиницију). Ови појмови су основа C^0 симплектичке топологије која се значајно развила у последњих пар година.

Било би занимљиво испитати како се понашају спектралне инваријанте при C^0 лимесима? Да ли их симплектички и Хамилтонови хомеоморфизми чувају? Оваква питања су започета у [52, 53].

Литература

[1] J. Катић, *Модулски простори комбинованог типа у Морс–Флоровој теорији*, Докторски рад одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду, 2008.

[2] В. Стојисављевић, *Спектралне инваријанте у Флоровој хомологији*, Мастер рад одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду, 2015.

[3] A. Abbondandolo, M. Schwarz, *Floer homology of cotangent bundles and the loop product*, Geom. Topol. 14(3) (2010), 1569-1722.

[4] P. Albers, *A Lagrangian Piunikhin–Salamon–Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology* , Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 4, 56pp.

[5] P. Albers, U. Frauenfelder, *Spectral invariants in Rabinowitz-Floer homology and global Hamiltonian perturbations*, J. Mod. Dyn., 4(2):329-357, 2010.

[6] V. I. Arnold, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Functional Anal. Appl. 1, 1-8, 1967.

[7] V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[8] M. Audin, M. Damian, *Morse theory and Floer homology*, Springer Verlag, 2014.

[9] D. Auroux, *A Beginners Introduction to Fukaya Categories*, in Frédéric Bourgeois, Vincent Colin, and András Stipsicz, editors, Contact and Symplectic Topology, volume 26 of Bolyai Society Mathematical Studies, pages 85–136, Springer International Publishing, 2014.

[10] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, Kluwer Academic Publishers, 29, 2004.

[11] M. Berger, *Encounter with a Geometer, Part II*, Notices of the AMS 47 (3): 326–340, 2000.

[12] M. Betz, R. Cohen, *Graph moduli spaces and cohomology operations*, Turkish J. Math, 18, 23-41, 1994.

[13] M. Bhupal, *A partial order on the group of contactomorphisms of* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *via generating functions*, Turkish J. Math., 25(1):125-135, 2001.

[14] P. Biran, O. Cornea, *Quantum structures for Lagrangian submanifolds*, arxiv:0708.4221.

[15] P. Biran, O. Cornea, *A Lagrangian quantum homology*, from: "New perspectives and challenges in symplectic field theory" (editors M. Abreu, F. Lalonde, L. Polterovich), CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc. (2009).

[16] P. Biran, O. Cornea, *Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds*, Geom. Topol., 13(5):2881-2989, 2009.

[17] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publ. Math. I.H.E.S. 68 (1988), 99–114.

[18] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, 1764, Springer–Verlag Berlin Heidelberg (2001).

[19] M. Chaperon, *On generating families*, In The Floer memorial volume, volume 133 of Progr. Math., pages 283-296. Birkhäuser, Basel, 1995.

[20] Y. Chen, *A brief history of Morse homology*, http://math.berkeley.edu/∼alanw/240papers03.html

[21] K. Cieliebak, T. Ekholm, J. Latschev, *Compactness for holomorphic curves with switching Lagrangian boundary conditions*, J. Symplectic Geom. 8 no. 3 (2010), 267–298.

[22] C. Conley, E. Zehnder, *The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), no. 1, 33–49.

[23] O. Cornea, F. Lalonde, *Cluster homology*, arXiv:math/0508345, 2005.

[24] J. Đuretić, *Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphisms and spectral invariants for conormal bundle*, Publications de l'Institut Mathématique (прихваћен за објављивање).

[25] J. Đuretić, J. Katić, D. Milinković, *Comparison of spectral invariants in Lagrangian and Hamiltonian Floer theory*, Filomat 30:5 (2016), 1161-1174.

[26] Y. M. Eliashberg, *Estimates on the number of fixed points of area preserving transformation*, Syktyvkar, 1979.

[27] M. Entov, *$K-$area, Hofer metric and geometry of conjugacy classes in Lie groups*, Invent. Math., **146** (2001), 93–141.

[28] M. Entov, L. Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not., 30:1635-1676, 2003.

[29] M. Entov, L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comm. Math. Helv., 81(1):75-99, 2006.

[30] M. Entov, L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, Compos. Math., 145(3):773-826, 2009.

[31] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J., 53, 1-32, 1986.

[32] A. Floer, *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math., 41, 393-407, 1988.

[33] A. Floer, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math., 41, 775-813, 1988.

[34] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. 28 (1988), 513–547.

[35] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys., 120 (1989), 575–611.

[36] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Differential Geometry, 30, 207-221, 1989.

[37] A. Floer, H. Hofer, *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry*, Mathematische Zeitschrift, 212, 13-38, 1993.

[38] A. Floer, H. Hofer, *Symplectic homology I: Open sets in $\mathbb{C}^n$*, Mathematische Zeitschrift, 215, 37-88, 1994.

[39] A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, *Applications of symplectic homology I*, Mathematische Zeitschrift 217, 577-606, 1994.

[40] A. Floer, *Construction of monopoles on asymptotically flat manifolds*, H. Hofer, C. Taubes, A.Weinstein, and E. Zehnder (editors), The Floer Memorial Volume, Progress in Mathematics, Birkhauser Verlag, 133, 1995.

[41] U. Frauenfelder, *Floer homology of symplectic quotients and the Arnold–Givental conjecture*, PhD thesis, ETH Zürich, 2003.

[42] U. Frauenfelder, *Gromov convergence of pseudoholomorphic discs*, Journal of Fixed Point Theory and Application, Volume 3 (2008), Number 2, 215–271.

[43] U. Frauenfelder, F. Schlenk, *Hamiltonian dynamics on convex symplectic manifold*, Israel J. Math. 159 (2007), 1-56.

[44] K. Fukaya, K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology 38, 5 (1999), 933–1048.

[45] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction, Part I*, vol. 46 of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somervilee, MA, 2009.

[46] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasimorphisms and Lagrangian Floer theory*, Mem. Amer. Math. Soc., arXiv:1105.5123 (прихваћен за објављивање).

[47] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[48] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2000.

[49] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten*, Comm. Par. Diff. Equ. 10 (1985), 245–340.

[50] H. Hofer, D. Salamon, *Floer homology and Novikov rings*, In The Floer memorial volume, vol. 133 of Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 483-524.

[51] S. Hu, F. Lalonde, R. Leclercq, *Homological Lagrangian monodromy*, Geom. Topol., 15(3):1617-1650, 2011.

[52] V. Humilière, R. Leclercq, S. Seyfaddini, *Reduction of symplectic homeomorphisms*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., arXiv:1407.6330 (прихваћен за објављивање).

[53] V. Humilière, R. Leclercq, S. Seyfaddini, *Coisotropic rigidity and* C^0*−symplectic geometry*, Duke Math. J., 164(4):767-799, 2015.

[54] V. Humilière, R. Leclercq, S. Seyfaddini, *New energy–capacity–type inequalities and uniqueness of continuous Hamiltonians*, Comment. Math. Helv., 90:1-21, 2015.

[55] V. Humilière, F. Le Roux, S. Seyfaddini, *Towards a dynamical interpretation of Hamiltonian spectral invariants on surfaces*, Geom. Topol. 20 (2016) 2253–2334.

[56] M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudo-holomorphic curves)*, Preprint, 2002.

[57] R. Kasturirangan, Y.-G. Oh, *Quantization of Eilenberg–Steenrod axioms via Fary functors*, RIMS preprint, 2000.

[58] R. Kasturirangan, Y.-G. Oh, *Floer homology for open subsets and a relative version of Arnold's conjecture*, Math. Z. 236 (2001), 151–189.

[59] J. Katić, *Compactification in mixed moduli spaces in Morse–Floer theory*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 38 (2008), 923–939.

[60] J. Katić, D. Milinković, *Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphism for Lagrangian intersections*, Diff. Geom. and its Appl., 22 (2005), 215–227.

[61] J. Katić, D. Milinković, J. Nikolić, *Spectral Invariants in Lagrangian Floer homology of open subset*, Diff. Geom. and its Appl., 53, 220–267, 2017.

[62] J. Katić, D. Milinković, T. Simčević, *Isomorphism between Morse and Lagrangian Floer cohomology rings*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 41, No. 3 (2011), 789–811.

[63] M. Khanevsky, *Hofers metric on the space of diameters*, J. Topol. Anal., 1(4):407-416, 2009.

[64] K. Kuwae, T. Shioya, *Convergence of spectral sructures: a functional analytic theory and its application to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. 11, 599673 (2003).

[65] S. Lanzat, *Hamiltonian Floer homology for compact convex symplectic manifolds*, S. Beitr Algebra Geom. (2016) 57: 361.

[66] R. Leclercq, *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*, J. Modern Dynamics 2 (2008), 249–286.

[67] R. Leclercq, F. Zapolsky, *Spectral invariants for monotone Lagrangians*, arxiv:1505.07430, 2015.

[68] G. Liu, G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. 49, 1 (1998), 1-74.

[69] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, AMS, University Lecture Series 6, 1994.

[70] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52, AMS, Providence, RI, 2004.

[71] D. Milinković, *On Equivalence of Two Constructions of Invariants of Lagrangian Submanifolds*, Pacific J. Math, Vol. 195, 2, 371-415, 2000.

[72] D. Milinković, *Geodesics on the space of Lagrangian submanifolds in cotangent bundles*, Proc. Am. Math. Soc., 129, No. 6, 1843-1851, 2001.

[73] D. Milinković, *Action Spectrum and Hofers Distance between Lagrangian Submanifolds*, Differential Geometry and Its Applications, 17, 69-81, 2002.

[74] D. Milinković, Y.-G. Oh, *Floer homology as the stable Morse homology*, J. Korean Math. Soc. 34 (1997), no. 4, 1065-1087.

[75] D. Milinković, Y.-G. Oh, *Generating functions versus action functional. Stable Morse theory versus Floer theory*, Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995), 107-125, CRM Proc. Lecture Notes, 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[76] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[77] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism Theorem*, Princeton University Press, 1965.

[78] A. Monzner, N. Vichery, F. Zapolsky, *Partial quasi-morphisms and quasistates on cotangent bundles, and symplectic homogenization*, J. Modern Dynamics 2 (2012) 205-249.

[79] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Transactions of the American Mathematical Society, 27(3):345-396, 1925.

[80] M. Morse, *The foundations of a theory of the calculus of variations in the large in $m-$space*, Trans. Am. Math. Soc., 1929.

[81] S. Müller, *The group of Hamiltonian homeomorphisms and C^0–symplectic topology*, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin - Madison, 2008.

[82] J. Nelson, *From dynamics to contact and symplectic geometry and back*, The Institute Letter Summer, 2016.

[83] J. Nikolić, *The moduli space of psuedo holomorphic disks with jumping Lagrangian boundary conditions* (рад на рецензији).

[84] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I*, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 949–994.

[85] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional I – relative Floer theory on the cotangent bundle*, J. Differential Geom. 45 (1997), 499–577.

[86] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional, II – pants product and cohomological invariants*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 1–55.

[87] Y.-G. Oh, *Naturality of Floer homology of open subsets in Lagrangian intersection theory*, Proc. of Pacific Rim Geometry Conference 1996 (1998) 261-280.

[88] Y.-G. Oh, *Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds*, in The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry, Prog. Math. **232**, Birkhäuser, Boston, (2005), 525–570.

[89] Y.-G. Oh, *Spectral invariants, analysis of the Floer moduli space, and geometry of the Hamiltonian diffeomorphism group*, Duke Math. J., 130(2):199-295, 2005.

[90] Y. Ostrover, *Calabi quasi-morphisms for some non-monotone symplectic manifolds*, Algebr. Geom. Topol., 6:405-434 (electronic), 2006.

[91] S. Piunikhin, D. Salamon, M. Schwarz, *Symplectic Floer–Donaldson theory and quantum cohomology*, in: Contact and symplectic geometry, Publ. Newton Instit. 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996), pp. 171–200.

[92] L. Polterovich, *Symplectic geometry of quantum noise*, Comm. Math. Phys., 327(2):481–519, 2014.

[93] L. Polterovich, D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, American Mathematical Society and Centre de Recherches Mathematiques, 2014.

[94] M. Poźniak, *Floer homology, Novikov rings and clean intersections*, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1994.

[95] J. Robbin, D. Salamon, *The Maslov index for paths*, Topology, 32, 827-844, 1993.

[96] J. Robbin, D. Salamon, *The spectral flow and the Maslov index*, Bull. London Math. Soc., 27, 1-33, 1995.

[97] D. Salamon, *Lectures on Floer homology*, IAS Park City Math. Series, AMS Vol 7, 1999.

[98] S. Sandon, *Contact homology, capacity and non-squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}^1$ via generating functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 61(1):145-185, 2011.

[99] F. Schmäschke, *Floer homology of Lagrangians in clean intersection*, Ph. D. Thesis, arXiv:1606.05327, 2016.

[100] M. Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser, 1993.

[101] M. Schwarz, *$\mathbb{S}^1-$cobordism operations in Floer homology*, Ph. D. Thesis, ETH Zürich, 1995.

[102] M. Schwarz. *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 193, No. 2 (2000), 419–461.

[103] S. Seyfaddini, *C^0-limits of Hamiltonian paths and the Oh-Schwarz spectral invariants*, Int. Math. Res. Not., (21):4920-4960, 2013.

[104] S. Seyfaddini, *The displaced disks problem via symplectic topology*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 351(21–22):841-843, 2013.

[105] S. Seyfaddini, *Unboundedness of the Lagrangian Hofer distance in the Euclidean ball*, Electron. Res. Announc. Math. Sci., 21:1-7, 2014.

[106] S. Seyfaddini, *Spectral killers and poisson bracket invariants*, J. Mod. Dyn., 9:51–66, 2015.

[107] T. Simčević, *A Hardy Space Approach to Lagrangian Floer gluing*, PhD thesis, ETH Zürich, 2014.

[108] S. Smale, *Differentiable dynamical system*, Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), 747–817.

[109] D. Théret, *A Lagrangian camel*, Comment. Math. Helv., 74(4):591-614, 1999.

[110] R. Thom, *Sur une partition en cellules saaociée à une fonction sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 973–975.

[111] M. Usher, *Deformed Hamiltonian Floer theory, capacity estimates and Calabi quasimorphisms*, Geom. Topol., 15(3):1313-1417, 2011.

[112] C. Viterbo, *Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens*, Bull. Soc. Math. Fr., 115, 361-390, 1987.

[113] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann., 292(4):685-710, 1992.

[114] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 661–692.

[115] F. Zapolsky, *On the Lagrangian Hofer geometry in symplectically aspherical manifolds*, J. Symplectic Geom., 11(3):475-488, 2013.

[116] F. Zapolsky, *Geometry of contactomorphism groups, contact rigidity, and contact dynamics in jet spaces*, Int. Math. Res. Notices, 2013(20):4687-4711, 2013.

[117] F. Zapolsky, *The Lagrangian Floer-quantum-PSS package and canonical orientations in Floer theory*, arxiv:1507.02253, 2015.

БИОГРАФИЈА

Јована Николић је рођена 29. јануара 1987. у Подгорици. Дипломирала је 2008. године на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Докторске студије на истом факултету, смер Анализа, уписала је 2009. године. Од 2009. године ради на Математичком факултету у Београду у звању сарадника у настави, а од 2011. године у звању асистента.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а _Јована Николић___________________________________

број уписа _2027/2009____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _31.07.2017._

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора __Јована Николић__________________________________

Број уписа _2027/2009____

Студијски програм _Математика____

Наслов рада _ Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој

хомологији____

Ментор _др Јелена Катић____

Потписани _Јована Николић___________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _31.07.2017._

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _31.07.2017._

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.