Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Алгебарске једначине и системи таквих једначина у основној и средњој школи

Студент: Катарина Трајковић
Ментор: проф. др Александар Т. Липковски
Чланови комисије: др Мирослав Марић, др Милан Божић

Beograd,
2015.

Садржај

I

Историјски осврт

Ахмесов папирус (познатији под називом Риндов папирус), написан око 1800. г. пне, један је од најстаријих споменика људске културе. Ево малог исечка тог дешифрованог текста: „Поука, како постићи знања свих нејасних (тешких) ствари . . . свих тајни које у себи скривају ствари . . . писац Ахмес написао је ово . . . из старих рукописа . . . “.

Ахмесов папирус садржи низ задатака, које савремена математика решава помоћу једначина првог степена. Њихов аутор их решава начином који ће током више миленијума представљати главни поступак за решавање сличних задатака, тзв. "методом лажне претпоставке". Египћани су тада имали за обележавање непознате посебан знак и назив, последње се изговара "хуа"или "аха"и преводи се речју "гомила".

У Ахмесовом папирусу наводи се пример:

„Гомила. њен седми део, она цела. Да чини 19.“

Ово значи да треба решити једначину $x + \frac{x}{7} = 19$. Решење је $x = 16\frac{5}{8}$.

Суштина Ахмесовог решавања је у следећем: Он је рачунао са разломцима као са природним бројевима, тј. претпоставио је да је „гомила“ -7; тада ће $\frac{1}{7}$ „гомиле“ бити 1 (као једно цело). При учињеној претпоставци би се десна страна једначине коју решавамо изједначила са левом, тј. са осам $(7 + 1)$. Осам је мањи од броја 19 траженог у задатку. Ахмес у мислима удвостручава тај број и добија број 16. Следеће удвостручење дало би 32, али тај број премашује задати број 19 и у решењу он, због тога, звездицом обележава број 16, као онај део који треба да уђе у решење. Још недостаје $19 - 16 = 3$. Ахмес зато узима $\frac{1}{2}$ од 8, тј.4. Овај део предложеног броја не може да уђе у тражено решење, јер треба додати само 3. Тада он решава задатак узимајући $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ од 8, тј. 2 и 1, који када се саберу са 16 дају 19. На овај начин Ахмес је установио да првобитно постављено значење за „гомилу“ -7 треба узети $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ пута, да би се задовољио услов задатка. Дакле, решење је

$$x = 7 \cdot (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = 7 \cdot \frac{16+2+1}{8} = \frac{133}{8} = 16\frac{5}{8}.$$

Језиком савремене математике Ахмесова прича, којом он 1800 г. пне. каже да само преноси, тј. преписује запис са једног много старијег папируса из времена око 4000. г. пне, могла би изгледати овако:

$x + \frac{x}{7} = 19 \Longleftrightarrow 7 \cdot x + x = 7$

$$\Longleftrightarrow 8x = 7(2 \cdot 8 + 2 + 1)$$

$$\Longleftrightarrow 8 \cdot x = 8 \cdot 7 \cdot (2 + \frac{2}{8} + \frac{1}{8})$$

$$\Longleftrightarrow x = 7 \cdot (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{133}{8} \Longleftrightarrow x = 16\frac{5}{8}.$$

Пример: Ахмесовим методом, прилагођеном језику савремене математике, решити једначину $x + \frac{x}{19} = 37$.

Решење: $x + \frac{x}{19} = 37 \Longleftrightarrow x = 9 \cdot (3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5})$.

Историја алгебре наставља се у античком Египту и Вавилону, када су решаване линеарне($ax = b$), квадратне ($ax^2 + bx + c = 0$) и неодређене једначине ($x^2 + y^2 = z^2$).

Ту традицију су наставили Александријски математичари Херон [1] и Диофант [2] чија књига Аритметика је била на необично високом нивоу. Знања о решавањима једначинама су се затим проширила на Арапски свет под називом "Наука о намештању једнакости", арапски ал-џабра, одакле савремени назив алгебре. Најпознатији арапски математичари из тога времена су а Хорезми [3] и Омр Хајам [4] и Египћанин Абу Камил [5]. Они су успевали решавати једначине попут:

$$x + y + z = 10, x^2 + y^2 = z^2 \text{ и } xz = y^2.$$

[1]Херон (око 10. − 70. п.н.е.), старогрчки математичар и инжињер

[2]Диофант (око 250.н.е.), грчки математичар

[3]Абу Абдулах Мухамед ибн Муса а Хорезми (око 783.-850.н.е.), персијски математичар, астроном, астролог и географ

[4]Гијат ад-Дин Абу'л ал-Фатх Умар ибн Ибрахим ал-Хајам Нишапури (1048-1131), персијски полимат, филозоф, математичар, астроном, астролог и песник

[5]Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммад ал-Хасиб ал-Мисри (око 850.-930.н.е.), египатски математичар

Омар Хајам је развио методе за геометријско решавање кубних једначина, док је италијански математичар Фибоначи [6] први приближно решио кубну једначину специјалног облика. Средњевековни Кинези су такође знали приближно да реше кубну једначину. Данас постоје формуле за општа решења алгебарских једначина, једначина трећег и четвртог степена.

Негативни коефицијенти су доследно избегавани, што је довело до тога да су уместо једне једначине општег облика одређеног степена, решавали више типова те исте једначине. Италијански математичар Феро [7] је око 1515. први решио један од типова кубне једначине, али је поступак држао у тајности. На самрти (1526) га је пренео своме ученику Антонију Фиору. Италијански математичар Тартаља [8] је око 1530. открио како да реши кубну једначину и то није крио. Како је Фиоро био уверен да само он зна решити кубну једначину, изазвао је Тартаљу на математички двобој (1535). Наравно, задао му је управо кубне једначине тога типа, које је он без проблема решио. Овај, са друге стране, није знао ни да реши управо те кубне једначине. За Тартаљину победу сазнао је италијански математичар Кардано [9] и успео је из њега извући методу решавања кубне једначине, у стиховима, под условом да не сме пре њега да је објави. Након тога је, заједно са својим студентом Фераријем [10], развио методу решавања која је примењива на све типове кубних једначина. Након тога је Ферари самостално развио методу за решавање једначине четвртог степена. Упркос обећању, Кардано објављује књигу „Велика вештина" (Ars Magna; 1545), у којој даје детаљан опис методе за решавање једначина трећег и четвртог степена, наводећи Тартаљу као аутора методе коју је од њега добио. Уз то, у њој се налази прва појава комплексних бројева. То је разбеснило Тартаља, који још није био објавио своју методу. Изазвао је Кардана на математички двобој, на који је овај послао Ферарија, који га је глатко победио. Данас су формуле за решавање кубне једначине познате као Кардановe или Кардано-Тартаљине формуле.

Након што су Тартаља и Ферари пронашли методе за решавање једначина трећег и четвртог степена у зависности од њиховиг коефицијената, те формуле су се неуспешно примењивале на решавање једначина петог и виших степена. Италијанско-француски математичар Лагранж [11] је анализирао све њему познате успешне методе за решавање једначина другог, трећег и четвртог степена (1770) не би ли утврдио њихове законитости и могућност генерализације. Иако су Лагранжове анализе проблема пермутација коренова биле обећавајуће, он је постајао

[6] Leonardo Fibonacci, (1170-1250)

[7] Scipione del Ferro, (1465-1526)

[8] Niccolo Tartaglia, (1499-1557)

[9] Girolamo Cardano, (1501-1576)

[10] Lodovico Ferrari, (1522-1565)

[11] Joseph-Louis, comte de Lagrange, (1736-1813)

све сумњичавији, јер су године пролазиле, а није долазио до конкретних резултата. Први чврсти доказ да општа једначина петог степена није решива помоћу радикала (операција сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања рационалним бројевима, које су извршене коначан број пута са коефицијентима једначине) дао је 1824. године норвешки математичар Абел [12]. Он је примером показао да су неке једначине петог степена решиве помоћу радикала и то релативно лако. Абел је, такође, поставио питање: „Које једначине степена већег од четири су решиве помоћу радикала?“ Умро је 1829. у 27. години, а није решио овај проблем. Нешто касније у први план долази француски математичар Галоа [13], поставивши 1829. године на Академији наука нову теорију једначина. Нажалост, тај рукопис је изгубљен. Друга верзија рада је такође изгубљена, тако да је нису пронашли ни међу папирима секретара Академије Фуријеа, који је умро 1830. Након две године, као двадесетогодишњак, Галоа је страдао у двобоју. Коначно, 1846. године, његов рад је пронађен и објављен у математичком журналу научника Лиувила. Галоа је доказао да се једначине петог и вишег степена у општем случају не могу решити помоћу радикала. Галоаова теорија се, на крају, развила у теорију једначина као део теорије група.

II

Решавање једначина са и без рачунара

Једначине се решавају у свим разредима основне школе. У почетку, до петог разреда, посматрају се једначине са једном непознатом и решавају се само у скупу природних бројева и скупу који чине природни бројеви и нула. Кроз градиво и, сагласно томе, кроз уџбенике и збирке задатака једначине се понекад уводе без потребне прецизности и наглашавања појединих важних чињеница. То може да доведе до споријег прихватања једначина од стране ученика и осећања да ту има пуно „заплетених“ ствари. Једначине се често решавају тако што се посматра неки решени пример и затим се по аналогији решава посматрана једначина.

У каснијим разредима основне школе једначине са једном непознатом се решавају у различитим скуповима. Како су појмови израз и бројевна једнакост потребни за дефинисање једначине, у уџбеницима се ови појмови поново појављују и објашњавају. Нажалост, то се ради углавном по

[12] Niels Abel, (1802-1829)

[13] Evariste Galois, (1811-1832)

принципу: „Понови!“, „Већ сте раније упознали са ...“, „Шта је ...?“, „Решавали смо ...“, „Наведи један пример ...“ итд. Полази се од тога да је ученицима све што су учили у претходним разредима у свежем сећању и потпуно јасно. Уместо да се ученик на одређеном месту у уџбенику подсећа на нешто што је учио у претходним разредима, могло би се кратко и сажето поновити то што очекујемо да зна како би могао да настави да прати ново излагање. Ово навођење појмова и чињеница, могло би се приказати и на крају истог уџбеника. Тиме се пружа шанса да се брзо и више пута понови оно што је потребно. У исту сврху може се користити и материјал спремљен за приказивање помоћу рачунара. За брже понављање могу се користити бројни примери, спремљене апликације и алати. На примеру решавања неких једначина и даћемо једну могућност таквог приказивања.

Основни циљ је да се прикаже визуелизација решавања једначина које се обрађују у основној и средњој школи. При томе, увођењем параметара креирамо проблемске ситуације. Променом параметара могу се створити услови за анализу решивости једначине. Тиме се ученици подстичу да посматрају једначине, да експериментишу сами и да изводе закључке о решивости посматраног проблема и броју решења. Добра основа за то је стварање и алгебарског и геометријског погледа на посматрани проблем. У ту сврху погодно је користити одговарајуће рачунарско окружење. Креирање анимација и једноставне илустрације школског садржаја омогућавају наставницима да за кратко време и веома ефикасно упознају ученике са основним математичким појмовима и знањима.

Програм GeoGebra и други компјутерски софтвери могу бити од помоћи, с обзиром на потребе у реализацији наставног програма.

Мишљења да ће увођење рачунара у наставу само по себи побољшати наставу данас, није важеће. И пре појаве рачунара постојала су веровања да ће нови медији у настави учинити значајне кораке у побољшању наставе. Ни те се наде нису обистиниле, као што су показала многа истраживања и упоређивања ефикасности медија у настави. Медији сами по себи имају споредну улогу у настави. Примарне су активности које се помоћу њих спроводе. Медији који не могу „прерађивати“ већ само служе за посматрање имају ограничену вредност. Да ли су важнији медији или методе? Ако су методе важније, да ли су рачунари у настави уопште потребни?

Увођењем рачунара у наставу математике добијен је нови когнитивни алат, тј. алат којим наставник може да управља и којег може да контролише. Сви се слажу да је и данас могућа добра настава математике и без нове технологије. Међутим, не би требало изгубити из вида да нова технологија представља нове алате који доносе и нове дидактичке могућности и изазове.

GeoGebra је рачунарски алат који повезивањем симболичког и иконичког представљања доноси бројне могућности. Код овог алата долазе до изражаја принцип активности, принцип оперативности, принцип експерименталности и принцип учења откривањем. Иконичка репрезентација је представљање или предочавање на степену који је прелаз између дословне, реалистичке репрезентације и симболичке, потпуно апстрактне репрезентације. Иконичка репрезентација задржава основне елементе или контуре стварности, док је у симболичкој веза са стварношћу још само конвенционална.

Овај пакет пружа на једноставан и веома приступачан начин припремање и самосталан рад ученика из две веома важне области школске математике, из геометрије и алгебре. Програм GeoGebra је математички софтвер који повезује геометрију и алгебру.

Радне површине креиране у програму GeoGebra могу се преносити у html и word документе. Поред тога конструкције се могу понављати по вољи корак по корак и аутоматски и ручно.

У GeoGebra-и могуће је једначине и координате директно задавати. GeoGebra познаје и експлицитне и имплицитне једначине правих и конусних пресека, параметарско представљање правих као и поларне и Декартове координате тачака и вектора.

Динамичко јединство геометрије и алгебре у GeoGebra-и омогућавају ученицима једноставан експериментални прилаз математици. Они могу као сопствени учитељи самостално да напредују, индивидуално и откривачки да раде и уче. Уз чешћу употребу рачунара и овог програма и бољу обученост, пре свега наставника, организација часа може бити и боља и занимљивија од досадашње. Реакције ученика, повратне информације, такође ће утицати на будуће организације часова.

GeoGebra се може користи као динамички пројектор да би се материја изложила целом одељењу или да би се извео неки експеримент. За то је потребан један лаптоп или PC и пројектор.
Примери решавања једначина биће приказани при чему се могу мењати и скупови у којима се решења траже. Експерименти, такође. Користећи графике и комбинацију боја и текста може се дискутовати решивост посматраних проблема.

III

Једначина првог степена са једном непознатом и њено увођење у наставу

1 Општи појмови о једначинама

Једначина је једнакост која је задовољена само за извесне системе вредности слова која у њој фигуришу, а која се називају непознате. Такав систем вредности, који чини једнаким нумеричке вредности, леве и десне стране, назива се решењем једначине. Ако на обема странама фигурише само једно слово x, каже се да је једначина са једном непознатом; у том случају је свако решење нека вредност те непознате.
Савремена употреба квантификатора $\exists$ доводи до писања једначине у упитном облику:

$$\exists(x)\ ?\ [3x = 5]$$

Када не постоји опасност двосмислености, писаћемо само $3x = 5$. Види се чиме се индетитети разликују од једначина: индентитет је задовољен за сваки систем вредности слова, што није случај са једначином, која се понекад, због тога, назива условном једнакошћу.
Ученици петог и шестог разреда нису упознати са појмом индетитета, тако да једначину прихватају на начин на који је формулисана.

Пример: $1\frac{2}{5} + x = 2,8$ је једначина. Та једнакост претвара се у нумеричку једнакост само за једну вредност слова x: $x = 1\frac{2}{5}$.

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$ је идентитет и може се писати овако $(x-1)^2 \equiv x^2-2x+1$ који важи $\forall x \in \mathbf{R}$.
Ученици од седмог разреда разликују идентитете од једначина, кроз појам полинома.

Решити једначину значи наћи њена решења. Директним израчунавањем нумеричких вредности леве и десне стране проверава се да ли неки а приори дат систем нумеричких вредности непознатих представља решење једначине. Како је једначина један од општих појмова математике који се усваја још у ранијим разредима основне школе, ученици петог разреда, пре свега, обнове стечено знање при решавању једначина у скупу $\mathbf{N}$, а касније га и допуне. Решавање једначина се своди на увођење правила типа: "Непознати умањеник добијамо када разлику саберемо са умањиоцем".

- Посматрамо једначину $x^2-4=x+2$. Рачуном установимо да за $x=3$ обе стране имају исту нумеричку вредност 5; дакле, вредност $x=3$ је решење ове једначине. $x=-1$ није њено решење, јер за $x=-1$ лева страна узима нумеричку вредност -3 а десна страна нумеричку вредност $+1$, различиту од прве вредности.
- Посматрајмо једначину $4,2:x=\frac{9}{10}$. Може се проверити да вредност $x=4\frac{2}{3}$ јесте, а вредност $x=2$ није њено решење.

За две једначине каже се да су еквивалентне ако имају иста решења. Да би се решила нека једначина, настоји се да се она замени еквивалентном једначином чије је решавање једноставније. Еквиваленција две једначине садржи два услова: свако решење прве једначине је решење друге; свако решење друге је и решење прве.

КЛАСИФИКАЦИЈА ЈЕДНАЧИНА. Ако су обе стране једначине $A=B$ алгебарски изрази, за једначину се каже да је алгебарска; у супротном случају она је трансцедентна. Међу алгебарским једначинама разликују се:

1. **целе једначине**,чије су обе стране полиноми;
2. **рационалне једначине** у којима фигуришу рационални изрази (са непознатама у имениоцу);
3. **ирационалне једначине**, које садрже ирационалне изразе (са непознатама под кореном).

У алгебарској једначини на сваку непознату примењене су само алгебарске операције (сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање, кореновање). У свим другим случајевима једначина је трансцедентна.

$2^x-3=0$ је трансцедентна једначина.

ТРАНСФОРМАЦИЈА ЈЕДНАЧИНА. Наведимо уобичајне трансформације које се примењују на алгебарске једначине.

Т е о р е м а: Када се обема странама једначине дода, или од њих одузме, исти израз, добија се еквивалентна једначина. Посматрамо једначину:

$$A = B. \tag{1}$$

Образујемо једначину

$$A + C = B + C. \tag{2}$$

За свако решење (**R**) једначине(1) имамо

$$\text{нумеричка вред. од } A = \text{нумеричка вред. од } B \tag{3}$$

и одатле нумеричка вред. од A + нумеричка вред. од C = нумеричка вред. од B + нумеричка вред. од C, дакле, (**R**) је решење и једначине (2). Обрнуто, за свако решење једначине (2) важи последња нумеричка једнакост, из које излази једнакост (3), тако да је једначина (1) задовољена. Дакле, једначина (1) и (2) имају исти скуп решења, тј. еквивалентне су.

На пример, једначине

$$3x - 1 = 4x + 5, \tag{4}$$

$$3x - 1 + 2x - 7 = 4x + 5 + 2x - 7 \tag{5}$$

су еквивалентне.

П р и м е д б а. Општа формулација претходне теореме захтева једну ограду: ако је са D означена област у којој су дефинисана оба израза A и B, решења једначине (1) очигледно припадају области D, тако да је неопходно, за исправност претходног расуђивања, да и C буде дефинисано у тој области (иначе се не би могло говорити о нумеричкој вредности израза C). Ово ограничење нема значаја ако су по среди цели изрази (дефинисани свуда у $\mathbf{R}$).

П р и м е н а. Пребацивање чланова са једне стране на другу. Посматрајмо једначину

$$A = B + C + D.$$

и додајмо $-C$ њеним странама; добијамо једначину

$$A - C = B + D.$$

Члан леве и десне стране једначине може се пребацити на другу страну мењајући притом његов знак.
Тако се у једначини (4) може 5 пребацити на леву страну: додаје се -5 обема странама што даје

$$3x - 1 - 5 = 4x.$$

Ако се изврши пребацивање на леву страну свих чланова десне стране, добија се еквивалентна једначина чија је десна страна нула.
Тако једначина $A = B + C + D$ постаје

$$A - B - C - D = 0.$$

Т е о р е м а: Кад се обе стране једначине помноже истим изразом који се не може анулирати, добија се еквивалентна једначина.
Посматрајмо једначину

$$A = B \text{ или } A - B = 0, \tag{6}$$

и нека је израз C дефинисан у домену у коме су дефинисана оба израза A и B и не анулира се у тој области; образоваћемо једначину

(7) $$AC = BC \text{ или } AC - BC = 0,$$

односно једначину

(8) $$(A - B) \cdot C = 0.$$

Свако решење једначине (6) анулира израз $(A - B)$, па стога и производ $(A - B)C$; оно је онда решење једначине (7).
Свако решење једначине (7) анулира производ $(A - B)C$; али како је C различито од нуле, то решење анулира $(A - B)$; оно је, дакле, решење једначине (6).
Ове две једначине имају исти скуп вредности, тј. оне су еквивалентне.

Множење изразом који је у $\mathbf{R}$ свуда дефинисан и нигде се не анулира не захтева никакво ограничење; такав је на пример израз $x^2 + 1$.
Тако се може тврдити да су, бар у области $\mathbf{R}$, једначине

$$3x - 1 = 4x + 5,$$

$$(3x - 1)(x^2 + 1) = (4x + 5)(x^2 + 1)$$

еквивалентне.

Понекад је потребно помножити обе стране једначине изразом који се анулира за извесне вредности промењиве x. Добијена једначина тада у општем случају није еквивалентна датој једначини.

На пример, ако се обе стране једначине $A = B$ помноже са $x - a$, добијена једначина

$$A(x - a) = B(x - a)$$

има као решења, сва решења дате једначине; њено решење је, међутим, и $x = a$, што не мора бити решење дате једначине. Према томе, када се обе стране једначине помноже са $x - a$, добијена једначина има као решење сва решења дате једначине, а решење јој још може бити вредност за x које анулира израз којим је дата једначина помножена, а не налази се међу њеним решењима. То важи и у општем случају. Каже се да добијена једначина може бити општија него дата.

Обрнуто, при прелазу са једначине

$$A(x-a) = B(x-a)$$

на једначину $A = B$, исчезава решење $x = a$ (уколико ова вредност није решење једначине $A = B$).

Т е о р е м а: *Кад се обе стране дате једначине квадрирају, добија се једначина која има као решење сва решења дате једначине и сем тога сва решења једначине добијене од дате променом знака једне од њених страна.*
Посматрајмо једначину

$$A = B. \tag{9}$$

Квадрирајући обе њене стране, добија се једначина

$$A^2 = B^2. \tag{10}$$

која се може написати у облику

$$A^2 - B^2 = 0 \text{ или } (A-B)(A+B) = 0.$$

Свако решење једначине (9) анулира $A - B$, па стога и производ $(A-B)(A+B)$; оно је, дакле, и решење једначине (10).
Свако решење једначине (2) анулира производ

$$(A-B)(A+B)$$

па мора анулирати $A - B$ или $A + B$, тако се с једне стране добијају решења једначине (9), а са друге стране, решења једначине $A = -B$.

Квадрирање обе стране једначине није, дакле, регуларна трансформација; његова употреба захтева извесну контролу: треба за свако добијено решење, проверити да ли је заиста решење једначине $A = B$.

Ученици се тек у осмом разреду основне школе упознају са "Линеарном једначином са једном непознатом". У претходним разредима су се сусрели са специјалним облицима линеарних једначина као и са полиномима. Први пут у осмом разреду линеарне једначине посматрају на један свеобухватни начин. Једначине више не решавају уз помоћ строгих правила већ имају довољно знања да једначине могу решавати на различите начине, применом свих наведених теорема. Проблем код решавања једначина може настати при трансформацији једначине у еквивалентну једначину. Ученици често решавају једначине множећи леву и десну страну неким исказом, без разумевања да тај исказ може да утиче на решење једначине. Како множимо једначину, исказ мора бити различит од 0, то је услов. Може се рећи, ако добијено решење еквивалентне једначине анулира исказ којим смо множили тј. не испуни услов, онда такво решење одбацујемо.

2 Једначина првог степена са једном непознатом

Цела једначина са једном непознатом. Ако су обе стране једначине полиноми, она се може, транспозицијом чланова, довести у облик $P(x) = 0$, где је P полином.
Степен тог полинома, после свођења чланова, назива се степеном једначине. Решење x_0 ове једначине назива се још и њеним кореном, а такође и кореном полинома $P(x)$.

По плану и програму наставе математике, ученици се, у седмом разреду упознају са појмом полинома, и то не само са изказима већ и са полиномијалним једначинама. Тада ученици могу установити јасну разлику.
Пример:
Решити једначину:

$$\tfrac{3x-1}{48} - \tfrac{x-2}{36} + 2x - 1 = 3x - 4 + \tfrac{1}{12}.$$

Помножимо обе стране најмањим заједничким садржаоцем свих именилаца, тј. са 144. Добијамо

$$(3x-1)3 - (x-2)4 + (2x-1)144 = (3x-4)144 + 12,$$

или

$$9x - 3 - 4x + 8 + 288x - 144 = 432x - 576 + 12.$$

Пребацујемо све чланове са непознатом на једну, а све познате чланове на другу страну:

$$9x - 4x + 288x - 442x = 3 - 8 + 144 - 576 + 12,$$
$$-139x = -425;$$

делећи обе стране са -139, добија се

$$x = \tfrac{425}{139};$$

то је корен једначине.
Проучавање општег случаја. Свака једначина првог степена са једном непознатом може се довести у облик

$$ax = b.$$

Разликоваћемо два случаја које можемо приказати табелом:

Табела 1: Решења целе једначине са једном непознатом

$ax = b$		
$a \neq 0$	$a = 0$	
	$b = 0$	$b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	$x \in \mathbf{R}$	$\times$

Рационалне једначине су оне у којима фигуришу рационални изрази. Рационални могу бити коефицијенти непознатих, или се непозната може појавити у имениоцу.
Овај тип алгебарских једначина је представљен ученицима још од петог разреда, кроз различите задатке. Зато им у осмом разреду није страно да реше следећу једначину:
Пример:
Решити једначину:

$$\tfrac{x}{x-1} - 1 = \tfrac{4}{2x+3}.$$

Водећи рачуна о дефинисаности рационалних израза решавамо једначину на сличан начин као и целу. Помножимо обе стране једнакости са заједничким садржаоцем, односно са $(x-1)(2x+3)$, уз услов да је $(x-1)(2x+3)$ различито од 0, тј. $x \neq 1$, $x \neq -\frac{3}{2}$. Добијамо:

$$x(2x+3) - (x-1)(2x+3) = 4(x-1),$$
$$2x+3 = 4x-4,$$

Пребацујемо све чланове са непознатом на једну, а све познате чланове на другу страну:

$$2x - 4x = -4 - 3, \; -2x = -7$$

делећи обе стране са -2, добија се

$$x = \tfrac{7}{2};$$

то је корен једначине.

Ирационалне једначине које се своде на једначине првог степена.Ако дата ирационална једначина садржи само један корен, она се може свести на целу једначину следећим поступком: сви чланови који не садрже корен пребацују се на другу страну једначине, потом се обе дижу на довољно висок степен да би исчезао корен. Знамо да нова једначина није увек еквивалентна датој једначини; треба од корена нове једначине задржати само оне који задовољавају и дату једначину.
Ирационални број као појам је обрађен у седмом разреду основне школе, док ирационалне једначине ученици решавају у средњој школи и то у првом и другом разреду.
Пример:
Решити једначину:

$$2x - 5 + \sqrt{x^2 + 6x} = x - 2.$$

Пребацићемо све чланове леве стране сем корена на десну

$$\sqrt{x^2 + 6x} = 3 - x.$$

Квадрирајмо обе стране.

$$x^2 + 6x = (3 - x)^2.$$
$$x^2 + 6x = 9 - 6x + x^2.$$
$$12x = 9 \longrightarrow x = \tfrac{3}{4}.$$

Нумеричким рачуном можемо се уверити да је $x = \frac{3}{4}$ заиста корен једначине.
Проверавање се може ограничити на установљавање позитивности десне стране за $x = \frac{3}{4}$; знамо да би требало одбацити оне корене који представљају решења једначине

$$2x - 5 + \sqrt{x^2 + 6x} = x - 2.$$

добијене променом знака десне стране.

IV

Једначине првог реда са две непознате

Код решавања једначина издвајам као посебно интересантну тему решавања система две линеарне једначине са две непознате. Мислим да би се прелаз од једне једначине са једном непознатом до система две једначине са две непознате могао лако остварити посматрањем једне линеарне једначине са две непознате.

Решавајући ову једначину добијамо могућност и да објаснимо имплицитни облик једначине праве. При томе не користимо појам функције. Ово је значајно као прпрема за графичко решавање система две линеарне једначине са две непознате. Наиме, као једна од могућности појављују се случајеви код којих је једна од правих које су дефинисане имплицитно једначинама посматраног система паралелна са y-осом. Таква права није график функције и када се крене од експлицитне једначине праве такав случај се мора посебно издвојити. Обично се само констатује да је свака једначина облика $x = c$, где је c неки реалан број једначина праве паралелне са y-осом. Ако се пође од имплицитно задате једначине праве, сви специјални случајеви се лако изводе из општег.

При томе велику помоћ може пружити рачунар и одговарајући софтвер. Идеалан је једноставан софтвер, на нашем језику и да је бесплатан. Пожељне су и друге корисне особине, као што је комбинација алгебарског и геометријског задавање једначина, коефицијената, параметара лако мењања боја нацртаних фигура уз одговарајући текст.

1 Општи облик једначине првог степена са две непознате

Једначина првог степена са две непознате може се написати и облику

$$ax + by = c$$

где су a, b и c коефицијенти. Сем у изузетним случајевима, о којима ће бити речи, бројеви a и b су различити од нуле. Може се писати

$$by = -ax + c; \tag{1}$$

$$y = -\tfrac{a}{b}x + \tfrac{c}{b}. \tag{2}$$

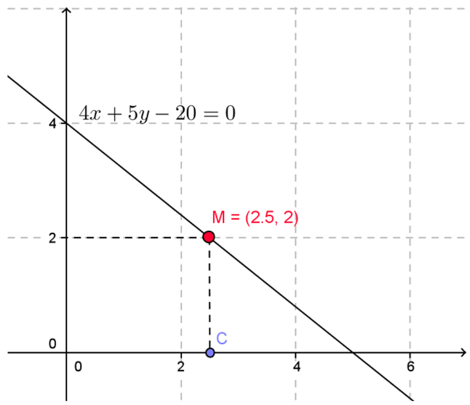
Решење једначине је (x, y) који је задовољава. Према формули (2), x се може изабрати произвољно и y је тада дефинисано као линеарна функција од x; једначина (1), дакле, има бесконачно много решења. Свако решење може се у равни представити тачком M, чије су координате x и y; према формули (2), скуп свих тих тачака је права чији је угловни коефицијент $-\frac{a}{b}$.

Уочимо, на пример, једначину $4x + 5y - 20 = 0$. Ако се промењљивој y произвољно да вредност $y = 2$, добија се услов

$$4x + 10 - 20 = 0 \text{ или } x = \tfrac{5}{2}.$$

Једначину задовољава систем вредности $x = \frac{5}{2}$, $y = 2$. Овај систем вредности представља једно решење једначине. Претставимо тачком M то решење чије су координате $\frac{5}{2}$ и 2.

Обрнуто, свака права која није паралелна координатним осама представља график једне једначине облика (1); заиста, она одређује неку линеарну функцију $y = ax + b$; имамо, дакле,

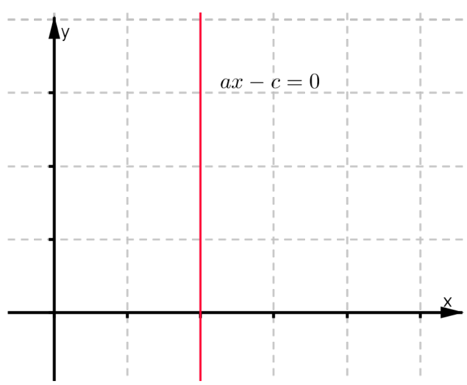


Слика 1: Једначина првог реда са две непознате

$$ax - y + b = 0.$$

Специјални случајеви .

1. Једначина не садржи y (што значи да је $b = 0$); из једначине се тада добија $x = \frac{c}{a}$. Постоји, према томе, у овом случају бесконачно много решења у којима се ова вредност за x придружују произвољно изабраној вредности за y. Једначину представља права паралелна y-оси.

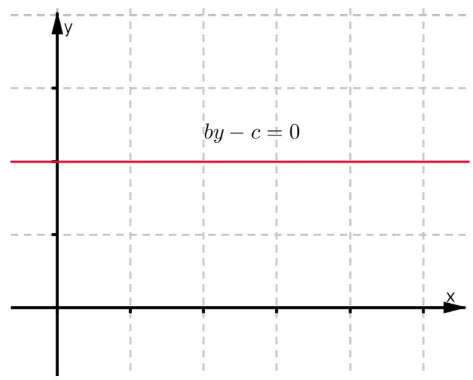


Слика 2: Права паралелна y-оси

2. Једначина не садржи x (што значи да је $a = 0$); она тада такође има бесконачно много решења:

$$x \text{ произвољно и } y = \frac{c}{b}.$$

График је права паралелна x-оси.

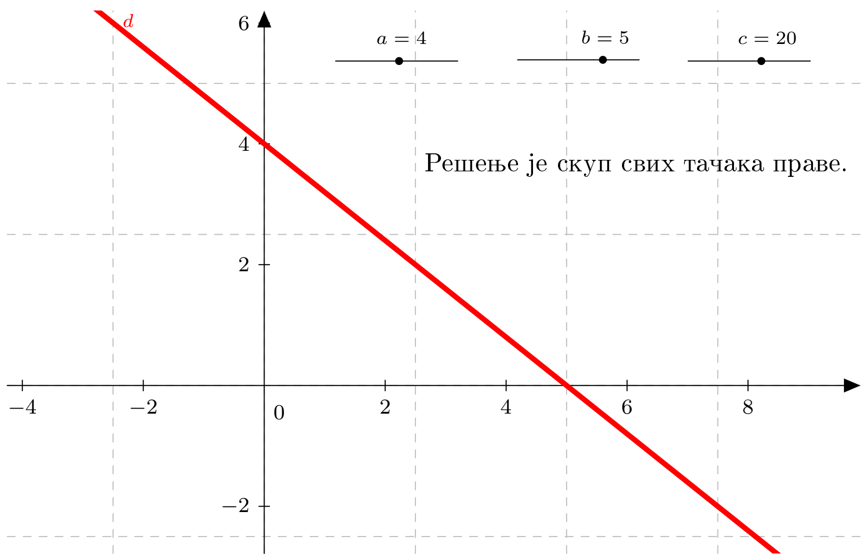


Слика 3: Права паралелна x-оси

Следећом табелом приказана су сва решења осталих случајева. Можемо приметити да за $b = 0$ односно $y \in \mathbf{R}$ једначина мења облик у једначину са једном непознатом.

Табела 2: Решења једначине првог реда са две непознате

<table>
<tr><td colspan="4">$ax + by = c$</td></tr>
<tr><td>$b \neq 0$</td><td colspan="3">$b = 0$</td></tr>
<tr><td>$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$</td><td colspan="3">$y \in \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="3">$ax = c$</td></tr>
<tr><td>$a \neq 0$</td><td colspan="2">$a = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c = 0$</td><td>$c \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$x = \frac{c}{a}$</td><td>$x \in \mathbf{R}$</td><td>$\times$</td></tr>
<tr><td>$(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b})$</td><td>$(\frac{c}{a}, y)$</td><td>$(x, y)$</td><td>$\times$</td></tr>
</table>



Слика 4: Аплет решења једначине првог реда са две непознате

Једначину првог реда са две непознате може се ученицима представити уз помоћ анимације, на којој се јасно може видети како коефицијенти утичу на положај праве. Променом параметра a, b или c долази до промене положаја праве одређене једначином са две непознате. Овом анимацијом може се видети геометријско тумачење решења једначине, што за циљ има да ученицима олакша учење.

У осмом разреду у оквиру наставне теме: Систем линеарних једначина са две непознате, наставна јединица: Једначине са две непознате ученицима је приказан поступак решавања оваквих једначина. До геометријске инерпретације могу сами доћи коришћењем пакета GeoGebra који је идеалан за решавање оваквих проблемских задатака.

V

Системи једначина

Ако више једначина треба да задовољи исти систем вредности непознатих, каже се да те једначине образују систем или да су оне симултане једначине. Два система једначина су еквивалентни када су једначине оба система задовољене за исте системе вредности непознатих.

Да би се установило да су два система једначина еквивалентни системи, треба доказати да је свако решење првог система и решење другог и обрнуто.

Решити систем једначина значи наћи све системе вредности непознатих који задовољавају све његове једначине, тј. системе вредности које, стављене на место непознатих, претварају све једначине система у нумеричке једнакости.

1 Решавање система првог степена са две непознате

Системи линеарних једначина се појављују у многим областима математике од најдавнијих времена, па се стога постоје и разни поступци и проучавају се разне методе за решавање система линеарних једначина. Један од приступа, у случају једначина са две или три непознате је и примена геометријске интерпретације. Тако, на пример, пошто се линеарна једначина са две непознате може посматрати и као једначина праве линије у правоуглом координатном систему, онда се решавање система од две линеарне једначине са две непознате своди на налажење пресечне тачке одговарајућих правих.

Системи линеарних једначина се решавају тако што се низом еквивалентних трансформација полазни систем постепено поједностављује и доводи до облика у коме се вредности непознатих непосредно одређују. Еквивалентне трансформације су: замена места једначинама у систему, множење једначине константом и додавање једне једначине другој. Свака од наведених операција преводи полазни систем у систем који му је еквивалентан у смислу да има исто решење као и полазни систем. Вишеструким понављањем тих операција се долази до решења полазног система једначина.

Ученици осмог разреда на часу обраде *Решавање система линеарних једначина* уче методу замене и методу супротних коефицијената кроз

примере.
1. Метод замене. Узмимо да треба решити систем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Из једне од једначина изведемо вредност једне непознате као да је друга позната и унесемо потом ову вредност у другу једначину; тим путем долазимо до следећег система:

$$\begin{cases} x = \frac{4+2y}{3} \\ 5\frac{4+2y}{3} + 3y = 2 \end{cases} \tag{2}$$

Системи (1) и (2) су еквивалентни; то би се лако могло установити показујући да сваки систем вредности

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

који задовољава систем (1) задовољава и систем (2), и обрнуто. Трансформацијом друге једначине система (2) добија се, даље систем

$$\begin{cases} x = \frac{4+2y}{3} \\ 19y = -14. \end{cases}$$

Последња једначина је задовољена само за y. Унесимо вредност у прву једначину. Добијемо

$$x = \frac{4 - \frac{28}{19}}{3} = \frac{16}{19}.$$

Имамо, дакле, као једино решење,

$$\begin{cases} x = \frac{16}{19} \\ y = \frac{-14}{19} \end{cases}$$

2. Метод супротних коефицијената. Узмимо да треба решити систем:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 1 \\ -15x - 24y = -3 \end{cases}$$

Да би се елиминисао y, бирају се множиоци тако да коефицијенти уз y у две једначине буду супротни бројеви; могу се узети бројеви -12 и $+8$, али овде је умесније заменити их пропозиционалним, али једноставнијим множиоцима:

5x+8y=1	|(-3)
11x+12y=19	|(+2)
-15x-24y=-3	+
22x+24y=38	←
7x=35	
11x+12y=19	
x=5	
y=-3	

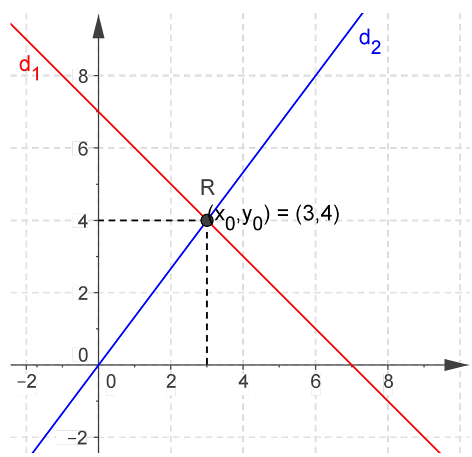
2 Графичко решавање и дискусија система првог степена са две непознате

Сваки систем две једначине првог степена са две непознате може се довести у облик:

$$(3)\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

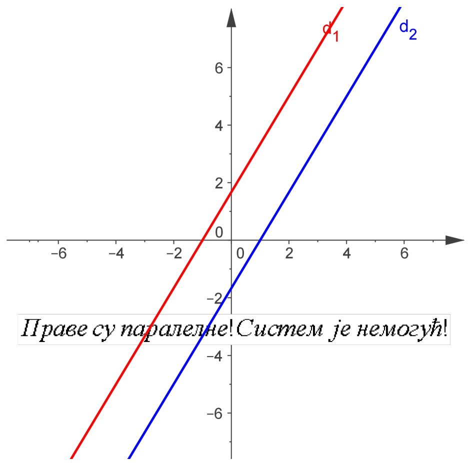
Прва и друга једначина система (3) имају редом као графике праве d_1 и d_2. Решење система претпостављено је заједничком тачком ових правих.

1. Ако је $ab_1 - a_1b$, различито од нуле, праве имају различите коефицијенте правца, оне се онда секу, па систем има једно и само једно решење; то је пар координата пресека ових правих.



Слика 5: Решење система је тачка R

2. Ако је $ab_1 - a_1b = 0$, имамо $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, па ове две праве имају исти коефицијент правца.
Ако је тада $cb_1 - bc_1$ различито од нуле, ове две праве су паралелне, а њихове једначине немају заједничка решења; систем је немогућ.



Слика 6: Немогућ систем

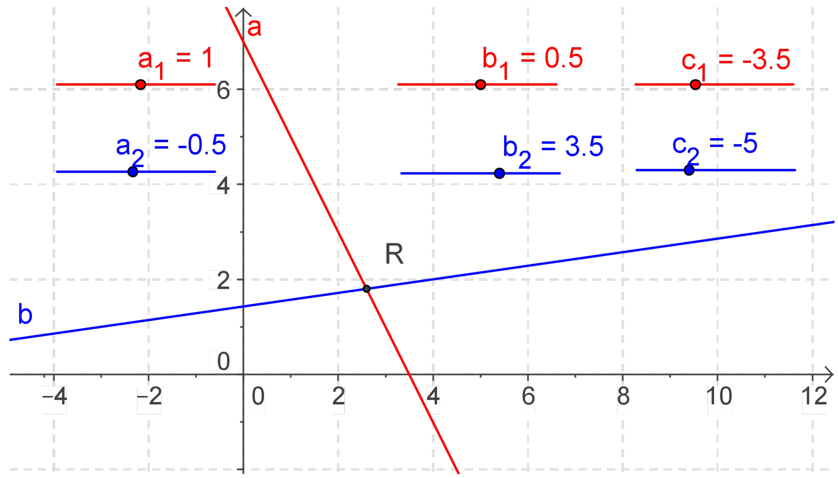
Ако је, међутим, $cb_1 - bc_1 = 0$, праве се подударају; систем је неодређен; једначине имају иста решења; уосталом, у овом случају је

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1},$$

што показује индентичност ових једначина до на нумерички фактор различит од нуле.

Слика 7: Неодређен систем

Посматрајући решавање система две линеарне једначине са две непознате и дискусију око решивости и броја решења тог система, могу се прикати могућности које нуди програм GeoGebra као алат за креирање



Слика 8: Аплет решење система једначина првог реда са две непознате

експеримената и дискусију о решивости система кроз анимацију.

Како смо ученике припремили за наставну тему: Системи линеарних једначина, решавањем једначина са две непознате, то ће им се наставна јединица: Појам и решење система линеарних једначина са две непознате учинити лакшим.

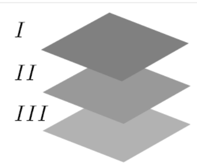
Уз помоћ анимације јасно се види како коефицијенти утичу на решење система. Променом параметра a, b, c или a_1, b_1, c_1 долази до промене положаја правих одређених једначинама са две непознате. Овом анимацијом може се видети геометријско тумачење решења система једначина, што за циљ има да ученицима олакша учење.
Осим тога, ученици могу сами употребити анимацију, померати клизаче и на тај начин видети сва решења система.

3 Графичко решавање и дискусија система првог степена са три непознате

Раван у xyz простору је задата једначином : $Ax+By+Cz=D$. Вектор $A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ је нормалан на раван. Еквивалентна једначина је $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$, где је (x_0,y_0,z_0) задата тачка у равни. Решити систем

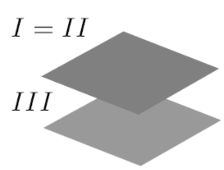
$$\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z&=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z&=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z&=b_3\end{aligned}$$

је геометријски еквивалентно тражењу свих (x,y,z) уређених парова равни представљене датим системом. Илустроваћу приказе неких занимљивих геометријских решења.



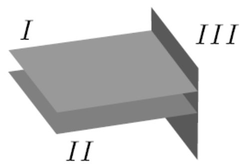
Геометријски приказ 1. Равни I, II и III су паралелне. Нема тачке пресека. Пример:

$I\colon z=2, \qquad II\colon z=1, \qquad III\colon z=0.$



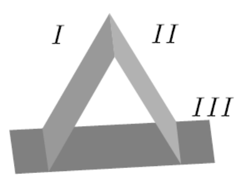
Геометријски приказ 2. Равни I, II су једнаке и паралелне са равни III. Такође нема тачке пресека. Пример:

$I\colon 2z=2, \qquad II\colon z=1, \qquad III\colon z=0.$



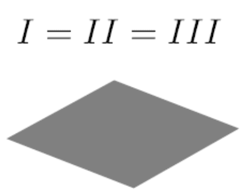
Геометријски приказ 3. Равни I, II су паралелне и нормалне на раван III. Нема тачке пресека. Пример:

$I\colon z = 2, \qquad II\colon z = 1, \qquad III\colon y = 0.$



Геометријски приказ 4. Равни I, II секу се по правој која не додирује раван III. Нема тачке пресека. Пример:

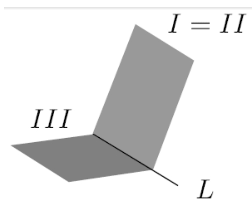
$I\colon y + z = 0, \qquad II\colon y - z = 0, \qquad III\colon z = -1.$



Геометријски приказ 5. Равни I, II и III су једнаке. Има бесконачно много тачака.

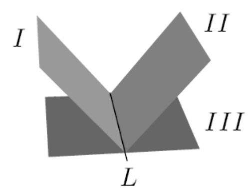
Пример:

$I\colon z = 1, \qquad II\colon 2z = 2, \qquad III\colon 3z = 3.$



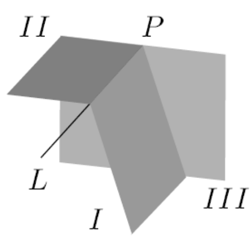
Геометријски приказ 6. Равни I, II су једнаке, а са равни III се секу у правој L. Има бесконачно много тачака. Пример:

$I\colon y+z=0, \qquad II\colon 2y+2z=0, \qquad III\colon z=0.$



Геометријски приказ 7. Равни I, II и III се секу у правој L. Има бесконачно много тачака. Пример:

$I\colon -y+z=0, \qquad II\colon y+z=0, \qquad III\colon z=0.$



Геометријски приказ 8. Равни I, II секу се у правој L која продире кроз раван III. Постоји јединствена тачка P пресека све три равни. Пример:

$I\colon y+z=0, \qquad II\colon z=0, \qquad III\colon x=0.$

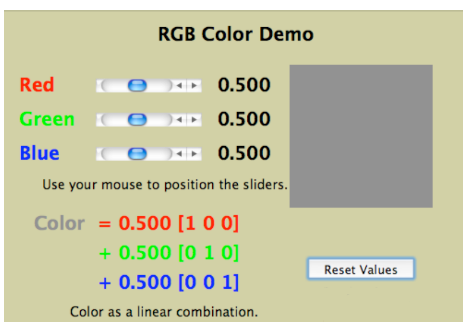
Математика за први разред средње школе не подразумева решавање система једначина геометријским приказом, али би било занимљиво да ученици виде ових пар слика, како би створили свеобухватну слику о једначинама. Наставне јединице које се обрађују у првом разреду углавном се фокусирају на учење Гаусове методе за решавање система од три линеарне једначине са три непознате.

4 Примери

Већина ученика, на графику система линерних једначина, могу лако да утврде пресечну тачку или да се праве поклапају. Многи ученици ће бити у стању да разумеју и примене методе за решавање система. Да би ученици применили методе, све што морају да ураде је да прате одређене кораке за решавање једначина.

Метода супротних коефицијената је основа за многе математичке појмове које ће ученици касније усвајати, као што су матрице, вектори, линеарно програмирање... Следећи примери ће им олакшати разумевање и на неки занимљив начин описати системе једначина.

Пример:



Слика 9: Избор боја као линеарна комбинација

Боја у боксу је исход линеарне комбинације три боје. Померањем клизача приказује се вектор сваке боје (Црвена, Зелена и Плава) са различитим нумеричким вредностима различитих линеарних комбинација. Ово није пример задатка али лепо илуструје систем једначина и приказује апликацију која користи математички појам.

Пример:

Apples and Oranges је компјутерска игра која приказује систем једначина које видимо као груписање објеката у одређеним комбинацијама. Да би решили игрицу, ученици морају да преведу слику у две или више једначина и онда употребом метода замене или супротних коефицијената да нађу коефицијент који недостаје. На тај начин, ученици, могу схватити како да напишу и анализирају систем једначина, да би успели.

Слика 10: Компјутерска игра као систем једначина

Садржаји о системима линеарних једначина чине занимљиву материју која се такође може даље проши-ривати и продубљивати. У том смислу у оквиру ове теме ће бити примера решавање система са више једначина него непознатих, система са више непознатих него једначина, система са три и више непознатих, моделирања доста сложених проблема у систем једначина...

Пример:

Три каубоја су ушла у кафану. Први је купио 4 сендвича, чашу кафе и 10 палачинки и за то је платио 6 долара и 76 центи. Други је купио три сендвича, чашу кафе и 7 палачинки и за то је платио 5 долара и 4 цента. Колико је трећи каубој платио за сендвич, чашу кафе и палачинку?

Решење: Ако цену сендвича обележимо са a, цену кафе са b, и цену палачинки са c, онда се на основу датих услова могу формирати две једначине:
$4a + b + 10c = 676$
$3a + b + 7c = 504$
Две једначине са три непознате, употребом метода супротних коефицијената, се могу довести у облик $a + b + c = 160$.

Пример:

Краљ је рекао краљици: "Сада ја имам два пута више година него што сте имали Ви када је мени било онолико година колико је Вама сада. Када Ви будете имали онолико година колико их сада имам ја, онда ћемо заједно имати 63 године". Колико година сада имају краљ и краљица?

Решење: Нека краљ има тренутно x, а краљица y година. Ученици постављају једначину на следећи начин:
$y - (x - y) = 2y - x$
$x + 2x - y = 63.$
Краљ има 35 а краљица 28 година.

Пример:

Бројеве $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ распореди у празна поља датог квадрата 3 x 3 тако да збир бројева у свакој врсти, колони и дијагонали буде једнак.

Табела 3: Графички приказ решења примера

	1	

Решење: Нека се у пољима магичног квадрата налазе бројеви $x_1, x_2 = 1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Нека је збир бројева у свакој врсти, колони и дијагонали једнак броју S. Онда је $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 = S$. Како је $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, то је $3S = 45$, па је $S = 15$, тј. збир бројева у свакој врсти колони и дијагонали је 15.

Табела 4: Графички приказ решења примера

x_1	1	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

x_1	1	x_3
x_4	5	x_6
x_7	9	x_9

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

VI

Закључак

Дефиниција и решавање алгебарских, линеарних и полиномијалних, једначина и њихових система представља један од најстаријих математичких проблема. У многим примена математике и њеним подобластима сусрећу се такви проблеми у којима треба решити неку линеарну једначину или систем линеарних или полиномијалних једначина.

Рад представља једно од могућих виђења *Алгебарских једначина и њихових система у основној и средњој школи* . Може послужити, у методичком и дидактичком смислу, ученицима и наставницима. Рад није скуп готових наставних рецепата, већ садржи детаљно обрађене методе за решавање линеарних једначина згодних за директну и аналогну примену.

Овакве једначине и системи се решавају у свим основним и средњим школама. Кроз градиво, кроз уџбенике и збирке задатака, и сагласно томе кроз овај мастер рад, једначине и системи се уводе са потребном прецизношћу и наглашавањем појединих важних чињеница. Ово свакако доводи до бржег схватања и лакшег увођења нових сазнања.

У овом мастер раду приказано је решење једначина и система помоћу визуелизације тј. анимација и слика у рачунарском пакету GeoGebra, као и начин њиховог савладавања, на стандардним примерима и задацима из уџбеника и збирки за старије разреде основне и млађе разреде средње школе.

Геометријски приказ линеарних једначина и система омогућује ученицима једноставан експериментални прилаз математици. Они могу самостално да напредују, индивидуално и откривачки да раде и уче. Уз чешћу употребу рачунара и овог програма организација часа може бити и боља и занимљивија.

Литература

[1] Р.Вуковић, Д. Кечек, *Математика I*, Велеучилиште у Варажрину, Вараждин 2012.

[2] *Математика, Општа енциклопедија LaRousse*, Вук Карацић, Београд 1973.

[3] С. Јешић, Д. Мишић, Н. Бабачев, *Математика за 8. разред основне школе*, Герундијум 2014.

[4] С. Јешић, Д. Мишић, Н. Бабачев, *Математика за 7. разред основне школе*, Герундијум 2014.

[5] http://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php

[6] Л. Хогбен,*Стварање математике*,Бук Карацић, Београд 1972.

[7] В. Јевремовић, *Старокинеска математика*, Настава математике, Београд 2006.

[8] http://www.dmi.uns.ac.rs/pretraga/imenik/herceg

[9] Д. Георгијевић, М. Обрадовић, *Математика за 1. разред средње школе*, Завод за уџбенике, Београд 1994.

[10] http://www.montereyinstitute.org