СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

Геометријске Основе

Рачуна са Диадама

I

Диада и Афинор.

Од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА.

1 Издање Задужбине Даринке и Мих. А. Петровића 1

БЕОГРАД
Исп. М. Ковальов у штампарији «Карић» Кр. Петра, 49.
1930.

ПРЕДГОВОР.

„Geometrica geometrice".

Последњих деценија, Теорија Вектора игра све већу и већу улогу у различитим гранама савремених рационалних наука. Има у Анализи, Геометрији, Механици, Теоретској Физици, Техници читав низ таквих дисциплина, које се у данашње време без Теорије Вектора не могу проучавати.

Уместо операција са обичним бројевима, са скаларима, који одређују геометријске облике, Теорија Вектора поставља и развија операције непосредно са самим геометријским облицима. Јасно је да ће методи ове геометријске дисциплине имати тим већу вредност уколико, с једне стране, што изразитију геометријску конкретност буду имале векторске операције и уколико, с друге стране, што више буде био ослабљен формалан карактер тих операција. У Теорији Вектора, после сабирања и одузимања, играју капиталну улогу операције множења, којих има више врста; основни производи, то су скаларни, векторски и диадички производи. Векторско сабирање, одузимање, скаларно и векторско множење имају већ одавно јасно геометријско тумачење, али диадички производ двају вектора или диада имала је формалан карактер, па није било геометријског облика, који би њој одговарао; ти би облици, раније, добивали геометријско тумачење тек после нових операција.

Тежња ми је била да у овој расправи дам претставу диаде, као самосталног геометријског облика. Тврдим да свакој диади по самој њеној природи мора одговарати један потпуно конкретан геометријски облик и да тај облик претставља модел елипсоида, конструјисаног на основу својих кружних пресека, али не сам тај елипсоид. Тај геометријски облик лежи у основи изложене теорије рачуна са диадама и са афинорима; свакој диади и сваком афинору одговара један геометријски облик, једна слика, и то независно од тога, макакве операције буду биле вршене са том диадом или са тим афинором. У том смислу Рачун са Диадама може бити претстављен као Рачун са Моделима нарочитих особина.

Прва глава бави се диадом, друга афинором. У првој глави постављен је основни појам диаде као модела елипсоида. Показао сам да на основу те геометријске дефиниције може бити развијена савремена алгебра тог производа. У другој глави дата је геометријска дефиниција афинора као скупа диада; даље је показано како из тог основног облика може да буде развијена целокупна алгебра афинора, потпуна теорија линеарне векторске функције.

Исте основе могу да послуже за развијање диференцијалне геометрије диаде и афинора, а исто тако могу бити проширене и на анализу означених геометријских облика у вишедимензионалном простору.

Начин излагања у овој расправи има елементаран карактер, пошто се овај рад бави основама једне специјалне дисциплине; он треба да буде приступачан не само онима који се већ баве нарочито том науком, него и ономе који хоће да се први пут упозна са тим предметом. Овакав начин излагања и тежња да се теорија и са овом новом основом прикаже у својој целини, имали су за последицу, да су се овде морала уврстити и она места теорије, која су и при новом схватању очувала свој пређашњи облик. Скаларни обрасци су овде дати само за ортогоналне координате; коваријантне и контраваријантне координате задржавамо за општи случај анализе вишедимензијоналног афинора.

Начин означавања у Теорији Вектора претставља још увек једну велику тешкоћу, чак и са чисто техничких разлога. Ознаке у овој расправи не браним нарочитим начелним разлозима, али ми се само чинило, да је употреба заграда за производе доста згодна и да она у некој мери умањује оно, код многих писаца, често бескрајно шаренило ознака.

Професор Др. Иван Арновљевић био је преко сваке мере добар и љубазан да прочита ову расправу у рукопису и да ми саопшти своје драгоцене примедбе не само о форми расправе, него и о суштини самог предмета. Ја немам довољно тих речи да му се достојно захвалим на његовој предусретљивости и неоцењивој стручној помоћи.

Професор и академик Др. Богдан Гавриловић, као Секретар Академије Природних Наука, прочитао је ову расправу при њеном објављивању и, са своје стране, саопштио ми многе важне примедбе; израз моје захвалности на овом месту само је слаб знак мојих осећања према нашем заслужном Секретару.

Српској Краљевској Академији Наука, а нарочито Академији Природних Наука, које су омогућиле штампање ове расправе, изјављујем и овом приликом своју велику захвалност.

20. XI. 1930. *Антон Билимовић.*

Београд.

ЛИТЕРАТУРА.

У вези са проучавањем теорије диада и афинора имао сам могућност да прегледам ову литературу:

1. Abraham M. und Föppl A. Theorie der Elektrizität. B. I. Sechste Aufl. 1921.
2. Bouligand G. Leçons de Géométrie vectorielle. 1924.
3. Budde E. Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. 1914.
4. Burali-Forti C. e Marcolongo R. Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol. I. Transformazioni lineari. Seconda edizione. 1929.
5. Burgatti P., Boggio T. e Burali-Forti C. Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol. II. Geometria differenziale 1930.
6. Gans R. Einführung in die Vektoranalysis. 1903.
7. Gibbs J. W. Vector analysis. Founded by E. B. Wilson. 1913.
8. Grassmann H. Gesammelte mathematische und physikalische Werke. 1894—1911.
9. Haas A. Vektor-Analysis. 1922.
10. Hamilton W. R. Lectures on quaternions. 1853.
11. » Elements of quaternions. 1869.
12. Heaviside O. Electromagnetic Theory. Vol. I. 1925.
13. Ignatowsky v. W. Die Vectoranalysis und ihre Anwendung in der theoretichen Physik. 1926.
14. Jahnke E. Zur Einführung in die Dyadenrechnung. Archiv der Mathematik und Physik. B. 25. S. 310.
15. Jaumann G. Die Grundlagen der Bewegungslehre. 1905.

16. Joly Ch. J. A manual of quaternions. 1905.
17. Jung F. Einige vektoranalytische Bezeichnung — und Benennungsfragen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. B. 17. 383—390.
18. Котельниковъ А. П. Винтовое счисленіе. 1895.
19. Lagally M. Vektor-Rechnung. 1928.
20. Lotze A. Punkt-und Vektor-Rechnung. 1929.
21. Rabinovitch G. Les invariants dans la théorie des homographies vectorielles. Rend. del. Circ. Mat. di Palermo. T. XXXVI. 1913. p. 99.
22. Рабиновичъ Ю. Теорія линейныхъ векторфункцій. 1911.
23. » Аналитическія векторфункціи и дифференціалныя уравненія, которымъ онѣ удовлетворяютъ. 1918.
24. Rothe H. Einführung in die Tensorrechnung. 1924.
25. Runge C. Vektoranalysis. B. I. 1919.
26. Schouten I. A. Grundlagen der Vektor-und Affinoranalysis. 1914.
27. Silberstein L. Éléments d'algèbre vectorielle et d'analyse vectorielle. 1921.
28. Сомовъ П. О. Векторіальный анализъ и его приложенія. 1907.
29. Spielrein J. Lehrbuch der Vektorrechnung. 1926.
30. Study E. Einleitung in die Theorie der Invarianten linearen Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. 1923.
31. » Geometrie der Dynamen. 1903.
32. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions. Third edit. 1890.
33. Tolle M. Vektorrechnung. «Hütte» des Ingenieurs Taschenbuch. B. I. 1923.
34. Weitzenböck R. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten. Encyklopädie der math. Wissensch. B. III_3. Heft. 6. 1922.

Сем тога сам се служио радовима читавог низа научника (Eddington A. S., Einstein A., Hessenberg G., Laue M., Levi-Civita T., Schouten I. A., Struik D. I., Weyl H и др.), који се баве теоријом вишедимензијоналног афинора или тензора у општем смислу те речи и Апсолутном Геометријом, нарочито у применама на Теорију Релативитета. Детаљан списак те литературе остављам да наведем у идућим свескама ове расправе. У њима намеравам да изнесем алгебру и анализу вишедимензијоналног афинора са геометријске тачке гледишта коју сам овде поставио.

Таблица ознака.

$\vec{A}$ — вектор, A — његов интензитет или модул, $\vec{A_0}$ — орт (вектор јединичне дужине) вектора $\vec{A}$.

i, j, k — основни ортови триједра $Oxyz$.

$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$, где су A_x, A_y, A_z координате вектора $\vec{A}$.

$(\vec{A}, \vec{B})$ — скаларни производ.

$[\vec{A}, \vec{B}]$ — векторски производ.

$\mathrm{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\}$ — диада или диадски производ.

Множење диаде скаларом:

$$n\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{n\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}, n\vec{B}\}.$$

Сабирање диада са колинеарним члановима:

$$p\{\vec{A}, \vec{B}\} + q\{\vec{A}, \vec{B}\} = (p+q)\{\vec{A}, \vec{B}\},$$

$$\{\vec{A_1}, \vec{B}\} + \{\vec{A_2}, \vec{B}\} = \{\vec{A_1} + \vec{A_2}, \vec{B}\},$$

$$\{\vec{A}, \vec{B_1}\} + \{\vec{A}, \vec{B_2}\} = \{\vec{A}, \vec{B_1} + \vec{B_2}\}.$$

Координатне диаде:

$$\mathrm{Д}_{11} = \{i, i\}, \quad \mathrm{Д}_{12} = \{i, j\}, \quad \mathrm{Д}_{13} = \{i, k\},$$
$$\mathrm{Д}_{21} = \{j, i\}, \quad \mathrm{Д}_{22} = \{j, j\}, \quad \mathrm{Д}_{23} = \{j, k\},$$
$$\mathrm{Д}_{31} = \{k, i\}, \quad \mathrm{Д}_{32} = \{k, j\}, \quad \mathrm{Д}_{33} = \{k, k\}.$$

Координате диаде:

$$\mathrm{Д} = \sum_{p,q} a_{pq} \mathrm{Д}_{pq}, \text{ где су: } \begin{array}{l} a_{11} = A_x B_x \,,\ a_{12} = A_x B_y \,,\ a_{13} = A_x B_z \,, \\ a_{21} = A_y B_x \,,\ a_{22} = A_y B_y \,,\ a_{23} = A_y B_z \,, \\ a_{31} = A_z B_x \,,\ a_{32} = A_z B_y \,,\ a_{33} = A_z B_z \,. \end{array}$$

Координатна шема:

$$\{ a_{pq} \} = \begin{cases} a_{11},\ a_{12},\ a_{13} \\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23} \\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33} \end{cases}$$

Везе између координата:

$$a_{23}\ a_{31}\ a_{12} = a_{32}\ a_{13}\ a_{21},$$
$$a_{11}\ a_{23} = a_{13}\ a_{21},$$
$$a_{22}\ a_{31} = a_{21}\ a_{32},$$
$$a_{33}\ a_{12} = a_{32}\ a_{13}.$$

Коњуговане диаде:

$$\mathrm{Д}^c = \{ \vec{A}, \vec{B} \}^c = \{ \vec{B}, \vec{A} \}; \qquad (\mathrm{Д}^c)^c = \mathrm{Д}.$$

Скаларно множење диаде са вектором:

$(\mathrm{Д}, \vec{C}) = (\{ \vec{A}, \vec{B} \} \vec{C}) = \vec{A} (\vec{B}, \vec{B})$, скаларни производ с десна

$(\vec{C}, \mathrm{Д}) = (\vec{C} \{ \vec{A}, \vec{B} \}) = \vec{B} (\vec{A}, \vec{C}) = (\mathrm{Д}^c, \vec{C})$, скаларни производ с лева.

Векторско множење диаде са вектором:

$^s[\{ \vec{A}, \vec{B} \}, \vec{C}] = (\vec{A} [\vec{B}, \vec{C}])$, скаларно-векторски производ

$^v[\{ \vec{A}, \vec{B} \}, \vec{C}] = [\vec{A} [\vec{B}, \vec{C}]]$, векторско- » »

$^d[\{ \vec{A}, \vec{B} \}, \vec{C}] = \{ \vec{A} [\vec{B}, \vec{C}] \}$, диадско- » »

Остали су производи наведени у таблици на странама 73 и 74.

Производи диаде са два вектора су наведени на странама 84 и [illegible].

Производи двеју диада.

$((\{ \vec{A}, \vec{B} \}, \{ \vec{C}, \vec{D} \})) = (\vec{A}, \vec{C}) (\vec{B}, \vec{D})$, двоструки скаларни производ

$$[(\{\vec{A},\vec{B}\},\{\vec{C},\vec{D}\})]=(\vec{A},\vec{C})[\vec{B},\vec{D}]$$ скаларно-векторски производ

$$\{(\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ )\}=(\vec{A},\vec{C})\{\vec{B},\vec{D}\}$$ скаларно-диадски производ

$$\{(\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ )\}'=(\vec{B},\vec{C})\{\vec{A},\vec{D}\}=\mathbf{P}$$ исти производ друге врсте са особином: $((\vec{r},\Delta_1)\Delta_2)=(\vec{r},\mathbf{P})$.

$$([\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ ])=([\vec{A},\vec{C}],[\vec{B},\vec{D}])$$ векторско-скаларни производ

$$[[\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ ]]=[[\vec{A},\vec{C}],[\vec{B},\vec{D}]]$$ двоструко-векторски производ

$$\{[\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ ]\}=\{[\vec{A},\vec{C}],[\vec{B},\vec{D}]\}$$ векторско-диадски производ

$$^{s}[\{\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ \}]=([\vec{A},\vec{C}],\{\vec{B},\vec{D}\})=\vec{D}([\vec{A},\vec{C}]\vec{B}),$$ скаларни диадско-векторски производ

$$^{sv}[\{\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ \}]={}^{s}[[\vec{A}.\vec{C}],\{\vec{B},\vec{D}\}]=(\vec{D}[[\vec{A},\vec{C}]\vec{B}]),$$ скаларно-векторски диадско-векторски производ

$$^{vv}[\{\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ \}]={}^{v}[[\vec{A},\vec{C}],\{\vec{B},\vec{D}\}]=[\vec{D}[[\vec{A},\vec{C}]\vec{B}]],$$ векторско-векторски диадско-векторски производ

$$^{dv}[\{\ \text{»}\ ,\ \text{»}\ \}]={}^{d}[[\vec{A},\vec{C}],\{\vec{B},\vec{D}\}]=\{\vec{D}[[\vec{A},\vec{C}]\vec{B}]\},$$ диадско-векторски диадско-векторски производ.

Афинор.

$$\mathbf{A}=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\{\vec{A}_1,\vec{B}_1\}+\{\vec{A}_2,\vec{B}_2\}+\{\vec{A}_3,\vec{B}_3\}.$$

Координате афинора. $a_{ij}=\sum_{s=1}^{3}A_{si}\,B_{sj}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=a_{11}\{i,i\}+a_{12}\{i,j\}+a_{13}\{i,k\}+\\&+a_{21}\{j,i\}+a_{22}\{j,j\}+a_{23}\{j,k\}+\\&+a_{31}\{k,i\}+a_{32}\{k,j\}+a_{33}\{k,k\}.\end{aligned}$$

Координатни вектори афинора — претходни и идући:

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_{(i)}, i\} + \{\vec{A}_{(j)}, j\} + \{\vec{A}_{(k)}, k\} =$$

$$\{i, \vec{B}_{(i)}\} + \{j, \vec{B}_{(j)}\} + \{k, \vec{B}_{(k)}\}.$$

Нормална форма афинора:

$\mathbf{A} = a_1\{I_1, I\} + a_2\{J_1, J\} + a_3\{K_1, K\}$ афинор

$\mathbf{T} = a_1\{I, I\} + a_2\{J, J\} + a_3\{K, K\}$ тензор

$\mathbf{\Gamma} = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\}$ верзор

$\mathbf{\Pi}_I = \{I, I\} - \{J, J\} - \{K, K\}$ биквадрантални верзор са осом I

$\mathbf{K} = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} - \{K_1, K\}$ керверзор

$\mathbf{I} = \{I, I\} + \{J, J\} + \{K, K\}$ јединични афинор и тензор.

Афинор $\mathbf{A}^c$ коњуговани са $\mathbf{A}$:

$\mathbf{A}^c = \{\vec{B}_1, \vec{A}_1\} + \{\vec{B}_2, \vec{A}_2\} + \{\vec{B}_3, \vec{A}_3\}$ са координатном

шемом $\mathbf{A}^c \begin{cases} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{cases}$

$ts\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^c)$ афиноров тензор

$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^c)$ афиноров аксиатор

$\mathbf{A} = ts\,\mathbf{A} + ax\,\mathbf{A}$ разлагање афинора датог

$\mathbf{A}^c = ts\,\mathbf{A} - ax\,\mathbf{A}$ и коњугованог

$ts\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\})$ диадин тензор

$ax\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} - \{\vec{B}, \vec{A}\})$ диадин аксиатор

$\vec{A} \times \vec{B} = ts\{\vec{A}, \vec{B}\}$, алгебарски производ двају вектора

$\mathbf{T}_d = \frac{1}{2}(\vec{A} \times \vec{B}) - \frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B})\mathbf{I}$ девиатор

$\mathbf{T} = ts\,\mathbf{\Delta} + \sigma\mathbf{I} = \mathbf{T}_d + \frac{1}{3}S_1\mathbf{I}$ разлагање тензора

$\mathbf{A} = \sigma\mathbf{I} + ax\,\mathbf{A} + ts\,\mathbf{\Delta} = \frac{1}{3}S_1\mathbf{I} + ax\,\mathbf{A} + \mathbf{T}_d$ разлагање афинора

$$\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}^{*} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{S_3}(\{[\vec{A}_2, \vec{A}_3], [\vec{B}_2, \vec{B}_3]\} + \ldots + \ldots) =$$

$= \frac{1}{a_1}\{I_1, I\} + \frac{1}{a_2}\{J_1, J\} + \frac{1}{a_3}\{K_1, K\}$, реципрочни афинор

$ко\,\mathbf{A} = S_3\mathbf{A}^{*} = a_2 a_3\{I_1, I\} + a_3 a_1\{J_1, J\} + a_1 a_2\{K_1, K\}$ коафинор

$\vec{\vec{V}} = \vec{A} + \varepsilon\vec{B}$, где је $\varepsilon = \sqrt{-1}$ бивектор.

Инваријанте афинора.

$$S_1 = (\vec{A}_1, \vec{B}_1) + (\vec{A}_2, \vec{B}_2) + (\vec{A}_3, \vec{B}_3) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$S_2 = ([\vec{A}_2, \vec{A}_3], [\vec{B}_2, \vec{B}_3]) + ([\vec{A}_3, \vec{A}_1], [\vec{B}_3, \vec{B}_2]) +$$

$$+ ([\vec{A}_1, \vec{A}_2], [\vec{B}_1, \vec{B}_2]) = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{13} \\ a_{31}, & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$S_3 = (\vec{A}_1[\vec{A}_2, \vec{A}_3])(\vec{B}_1[\vec{B}_2, \vec{B}_3]) = |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}|.$$

$$\vec{V} = [\vec{A}_1, \vec{B}_1] + [\vec{A}_2, \vec{B}_2] + [\vec{A}_3, \vec{B}_3] = (a_{23} - a_{32})i +$$

$$+ (a_{31} - a_{13})j + (a_{12} - a_{21})k.$$

Потпуни систем инваријаната.

$T_1 = \lambda + \mu + \nu$, $\quad T_4 = l^2 + m^2 + n^2$,

$T_2 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu$, $\quad T_5 = \lambda l^2 + \mu m^2 + \nu n^2$,

$T_3 = \lambda\mu\nu$; $\quad T_6 = \lambda^2 l^2 + \mu^2 m^2 + \nu^2 n^2$.

$$\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} \lambda, & n, -m, \\ -n, & \mu, \quad l, \\ m, & -l, \quad \nu, \end{matrix}\right. \quad ts\,\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} \lambda, & 0, & 0, \\ 0, & \mu, & 0, \\ 0, & 0, & \nu, \end{matrix}\right. \quad ax\,\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} 0, & n, -m, \\ -n, & 0, \quad l, \\ m, & -l, \quad 0. \end{matrix}\right.$$

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\{[i, \vec{V}], i\} + \{[j, \vec{V}], j\} + \{[k, \vec{V}], k\}).$$

Скаларно множење афинора са вектором:

$$(\mathbf{A}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}(\{\vec{A}_i, \vec{B}_i\}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \vec{A}_i\,(\vec{B}_i, \vec{r}).$$

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}^c, \vec{r}).$$

$$(ax\,\mathbf{A}, \vec{r}) = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{V}],$$

$(\mathbf{\Gamma}, \vec{r}) = \vec{r}_1$ множење верзором одговара ротацији.

$(\mathbf{K}, \vec{r}) = \vec{r}_2$ множење керверзором одговара ротацији и огледалној трансформацији.

$(\mathbf{I}, \vec{r}) = \vec{r}$ множење јединичним афинором не мења вектор.

Обрасци за друге производе су слични обрасцима за производе, где учествује уместо афинора само једна диада.

САДРЖАЈ.

Глава I.

Диада.

Глава II.

Афинор.

ГЛАВА I.

Диада.

1. Модел површине другог реда.

Замислимо једну централну површину другога реда, на пример елопсоид. У тој површини можемо посебице да одредимо *форму* и *положај*. Величине, које одређују форму површине, зову се *параметри форме*. За елипсоид то би биле, на пример, три главне полуосе a, b, c. Друге величине, које одређују положај површине, зову се *параметри положаја*. За такве параметре, рецимо у случају елипсоида, можемо да узмемо: три координате центра те површине и три Euler'ова угла, што одређују положај триједра главних централних осовина елипсоида у погледу једног Декартовог ортогоналног триједра примљеног за основни, за триједар упоређивања. На тај начин видимо да у пуној мери површину једног елипсоида можемо да одредимо помоћу девет независних параметара.

Појам форме једне површине другога реда можемо да рашчланимо, и то на следећи начин. Замислимо упоредно, рецимо, са нашим елипсоидом други елипсоид сличан првоме, али са унапред утврђеном једном димензијом. Форма тог новог елипсоида одређена је помоћу само два параметра; рецимо, то би били: $m = a : b$ и $n = c : b$. Таква два параметра могу бити сматрани као *параметри нарочито форме*. Са друге стране, мерни број, што претставља количник између једне димензије првог елипсоида и одговарајуће димензије другог елипсоида, може бити сматран као *параметар величине* дате површине у погледу друге, примљене за основу упоређивања.

Параметре положаја такође можемо да поделимо у две категорије: прво, Euler'ови углови као параметри сами по себи одређују само правац оса елипсоида, и зато такве параметре можемо да зовемо *параметрима оријентације*; друго, координате положаја, центра површине, везују ту површину за одређену тачку простора, — њих можемо да зовемо *параметрима фиксирања*.

На тај начин, у општем случају централна површина другога реда има:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{2 параметра нарочито форме}\\ \text{1 параметар величине}\end{array}\right\}\text{3 параметра форме}\\ \left.\begin{array}{l}\text{3 параметра оријентације}\\ \text{3 параметра фиксирања}\end{array}\right\}\text{6 параметара положаја}\end{array}\right\}\text{9 параметара}$$

Ако једна површина има са датом површином другог реда исте вредности параметара нарочито форме, а други параметри су исти или различити, за ту површину се каже да она претставља *модел* дате површине. За идентифицирање модела са датом површином у општем случају потребно је: 1) променити димензије модела сразмерно са вредношћу параметра величине, 2) наперити му осе како то захтевају параметри оријентације и 3) пренети центар у тачку простора, одређену параметрима фиксирања.

За објашнење улоге различитих параметара једне централне површине наведимо једну шему. Означимо са f, g, o, p све параметре нарочито форме, величине, оријентације и фиксирања. Претпоставимо даље да једначина, рецимо $f=f'$, значи да оба параметра нарочито форме једне површине имају одговарајуће једнаке вредности истих параметара за другу површину. У таквом случају при упоређивању двеју површина могу да буду следећи случајеви:

$$f \neq f' \begin{cases} g \neq g' \begin{cases} o \neq o' \begin{cases} p \neq p' & 1) \\ p = p' & 2) \end{cases} \\ o = o' \begin{cases} p \neq p' & 3) \\ p = p' & 4) \end{cases} \end{cases} \\ g = g' \begin{cases} o \neq o' \begin{cases} p \neq p' & 5) \\ p = p' & 6) \end{cases} \\ o = o' \begin{cases} p \neq p' & 7) \\ p = p' & 8) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$f = f' \begin{cases} g \neq g' \begin{cases} o \neq o' \begin{cases} p \neq p' & 9) \\ p = p' & 10) \end{cases} \\ o = o' \begin{cases} p \neq p' & 11) \\ p = p' & 12) \end{cases} \end{cases} \\ g = g' \begin{cases} o \neq o' \begin{cases} p \neq p' & 13) \\ p = p' & 14) \end{cases} \\ o = o' \begin{cases} p \neq p' & 15) \\ p = p' & 16) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

1) Површине су потпуно различите.

2) Центри различитих површина се поклапају.

3) Различите површине имају исту оријентацију оса, али су центри различитог положаја у простору.

4) Осе различитих површина се поклапају.

5) Различите површине имају различити положај, али им је једна димензија, по којој меримо величину површине, исте вредности.

6) Различите површине имају једну исту димензију и центри тих површина се налазе у истој тачки простора.

7) Површине имају једну димензију заједничку и њихове осе су паралелне, али су оне различите форме.

8) Главне осе површина се поклапају, оне имају исту једну димензију, али су оне различите форме.

9) Једна површина служи као модел друге површине, али су оне различите величине и различитог положаја.

10) Центар модела се налази у центру површине, али су осе различите оријентације и величина модела се разликује од величине површине.

11) Једна површина претставља тако звани *оријентисани модел* друге површине; те две површине имају паралелне осе и једна је слична другој.

12) Модел и површина коју он претставља имају исти положај: њихове главне осе се поклапају.

13) Површине су исте, само њихов положај је различит.

14) Исте површине имају центар у истој тачки, али су осе различитог правца.

15) Исте површине имају паралелне осе, али су центри различитог положаја.

16) Површине се поклапају.

У вези са анализом карактера параметара, што одређују једну површину, наведимо да написати једначину површине у *каноничном облику* значи написати такву једначину те површине, у коју би ушли само параметри форме, т. ј. параметри нарочито форме и величине. Дакле, на пример, канонична једначина елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

садржи само параметре форме a, b, c. За параметре нарочито форме те површине могу бити примљена, рецимо, два односа $m=a:b$ и $n=c:b$. Једначина површине модела нашег елипсоида може бити написана овако:

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{m^2}+y^2+\frac{z^2}{n^2}\right)=1,$$

при чему b може узимати произвољну вредност; за $b=1$ имамо један од модела са једначином

$$\frac{x^2}{m^2}+y^2+\frac{z^2}{n^2}=1.$$

За површине другога реда без центра такође можемо да покажемо параметре нарочито форме, величине и положаја — оријентације и фиксирања. Тако, на пример, за један или други параболоид са једначином

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

канoничну форму једначине можемо да напишемо овако:

$$\frac{x^2}{p_1} + \frac{y^2}{p_2} = 2z;$$

величине су p_1 и p_2 параметри форме те површине, а количник $p_1 : p_2$ може бити сматран као параметар нарочито форме те површине. У случају произвољног положаја те површине у простору, три координате темена су параметри фиксирања и три Euler'ова угла су параметри оријентације.

У идућим геометријским интерпретацијама највећу важност имају централне површине и то специално елипсоид. Нарочиту улогу играју кружни пресеци те површине. Није тешко показати да положај равни кружних пресека, рецимо за један елипсоид, претставља моделну особину површине, т. ј. остаје исти, независно од промене параметра величине те површине. У ствари, за један елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

са

$$a \geqslant b \geqslant c$$

једначине равни кружних пресека можемо написати овако:

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \mp \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0;$$

ако применимо горе наведене параметре нарочито форме $m = a : b$ и $n = c : b$, исту једначину пишемо следећим начином

$$nx\sqrt{m^2 - 1} \mp mz\sqrt{1 - n^2} = 0,$$

а то и потврђује наведену особину кружних пресека.

За конструјисање једног елипсоидног модела можемо да наведемо само једну елипсу са великом a и малом c полуосом; ако на тој елипси после тога означимо пречник што одговара вредности средње полуосе b елипсоида, сам елипсоид тиме је потпуно одређен. Ако ту елипсу нацртамо у таквој сразмери да буде $b = 1$, та елипса сама одређује модел једног елипсоида.

2. Дефиниција диаде.

Уочимо два слободна вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Са тим векторима можемо на различите начине да упоредимо један облик, који је помоћу тих вектора потпуно и једнозначно одређен.

Тако, *скаларни производ* $(\vec{A}, \vec{B})$ два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ претставља скалар одређени једначином

$$(\vec{A}, \vec{B}) = AB \operatorname{Cos}(\vec{A}, \vec{B}),$$

где су A и B модули, интензитети, одговарајућих вектора. Ако са P означимо производ модула тих вектора

$$P = AB,$$

а са $\vec{A}_0$ и $\vec{B}_0$ ортове, јединичне векторе, вектора $\vec{A}$ односно $\vec{B}$, скаларни производ можемо претставити овако:

$$(\vec{A}, \vec{B}) = P \operatorname{Cos}(\vec{A}_0, \vec{B}_0)$$

Даље, *векторски производ* $[\vec{A}, \vec{B}]$ истих вектора претставља један вектор, чији а) правац стоји управно на правце вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, b) смер је наперен на ону страну простора одакле видимо да вектор $\vec{B}$, надовезани на крај вектора $\vec{A}$, вуче тај вектор $\vec{A}$ у смислу кретања казаљке на сату и с) модул је једнак површини паралелограма конструјисаног са векторима $\vec{A}$ и $\vec{B}$ као са странама; то значи да му је модул једнак:

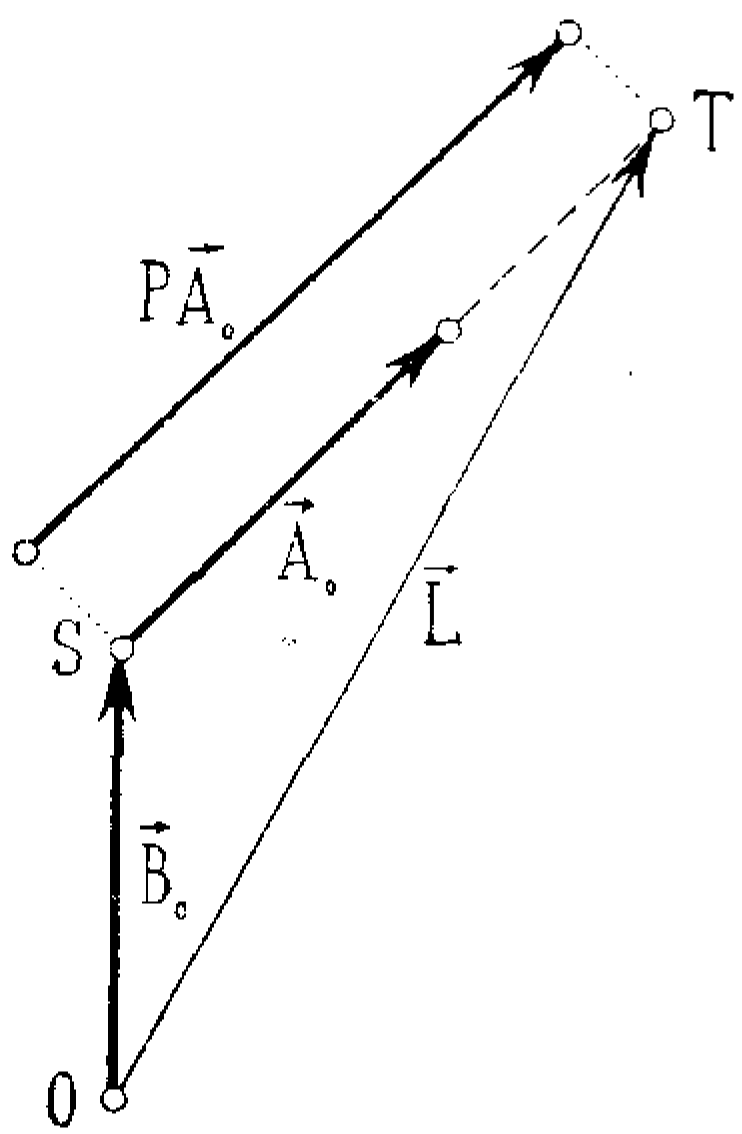
$$AB \operatorname{Sin}(\vec{A}, \vec{B}) = P \operatorname{Sin}(\vec{A}_0, \vec{B}_0).$$

Али скалар и вектор нису једини облици који могу да буду образовани са двама векторима. Са двама векторима могуће је упоредити и друге геометријске облике, који су помоћу тих вектора потпуно једнозначно одређени. Покажимо да за такав облик може да служи ***модел одређене оријентације једног елипсоида*** нарочитим начином претстављен.

Уочимо два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Конструјишимо орт $\vec{B}_0$ другог по реду вектора (слика 1) и на крај му надовежимо орт $\vec{A}_0$ првог вектора. У правцу тог вектора одмеримо дужину $P = AB$, дакле конструјишимо вектор $P\vec{A}_0$. Векторски збир

$$\vec{B}_0 + P\vec{A}_0 = \vec{L}$$

одређује једну праву OT, коју ћемо звати *осом конструкције.*



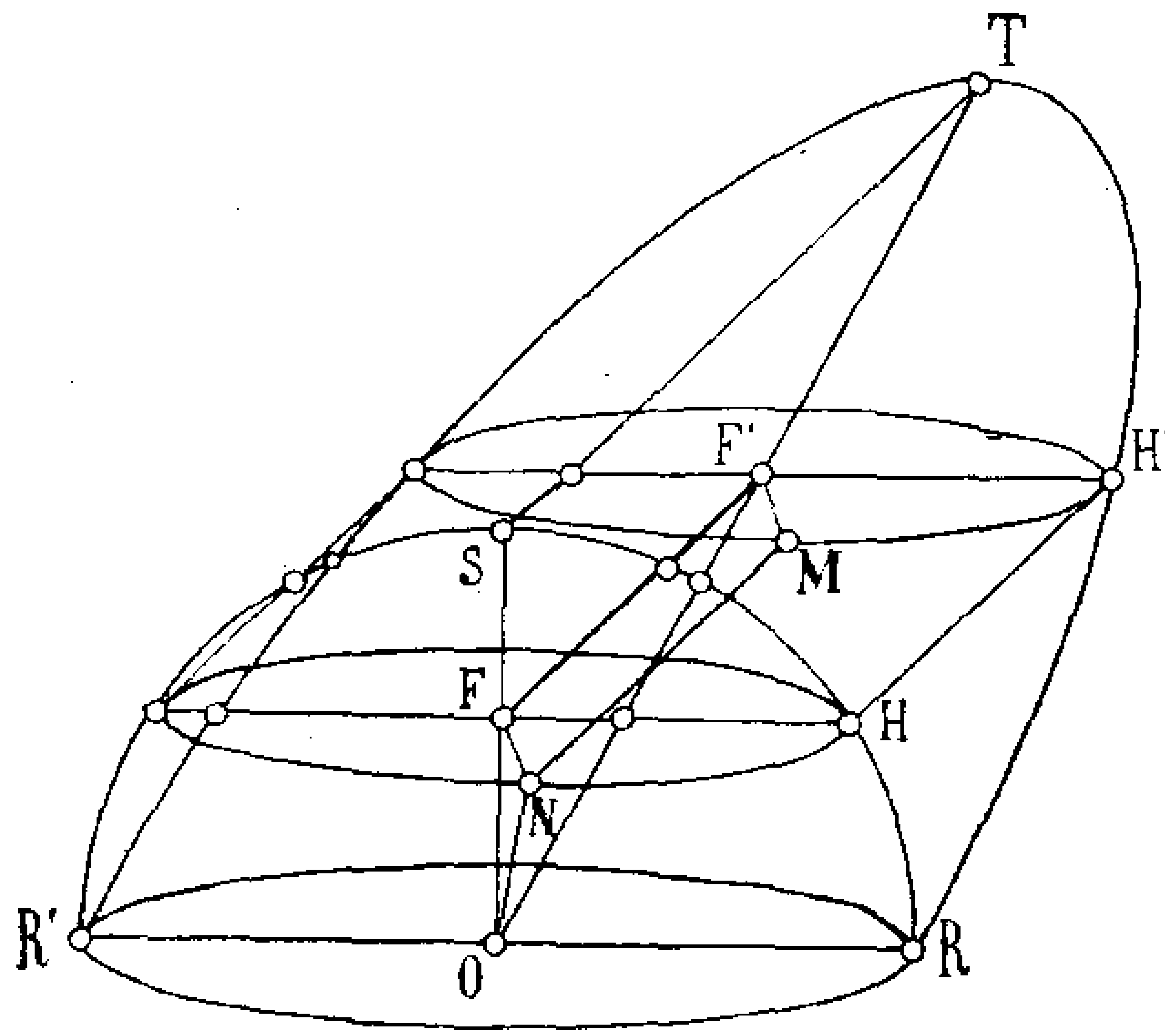
Слика 1.

Оса конструкције.

Узимајући сада тачку O за центар, замислимо сферу јединичног полупречника. Велики круг, чија раван стоји управно на правац вектора $\vec{B}_0$, дели ту сферу у две полусфере: полусферу, којој припада крај вектора $\vec{B}_0$, означимо, рецимо, као позитивну, а ону другу, супротну, као негативну. На слици (слика 2) је показана само позитивна полусфера. На тој сфери означимо један произвољан кружни пресек са равни нормалном на правац вектора $\vec{B}$. Ту кружну линију померајмо транслаторно у правцу вектора $\vec{A}$ тако, да нов положај центра буде на осовини OT наше конструкције. Геометријско место тих кружних линија у новом положају, ако будемо мењали тај произвољни кружни пресек сфере, претставља, као што ћемо видети, једну површину елипсоида. Модел тог елипсоида исте оријентације као што и конструисани елипсоид претставља један нарочити геометријски облик потпуно одређени за векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Докажимо да у ствари конструисана површина претставља елипсоид и да се конструисане кружне линије у новом положају јављају као систем кружних пресека тог елипсоида.

Тога ради одредимо прво вредност вектора положаја произ-



Слика 2.

Грађење модела елипсоида из сфере.

вољне тачке површине. Тај вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ може бити сматран као векторски збир двају вектора:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}.$$

Први вектор $\overrightarrow{ON}$ претставља вектор положаја тачке на сферној површини јединичног полупречника. Ако тај вектор означимо са $\vec{\varrho}$, имамо $\varrho = 1$. Други вектор $\overrightarrow{NM}$ има вредност вектора $\overrightarrow{FF'}$, померања центра кружне линије. Правац тог вектора одговара правцу вектора $\vec{A}$, а модул му може бити лако одређен из сличности троуглова OFF' и OST, при чему је $OF = \mathrm{Cos}\,(\vec{\varrho}, \vec{B})$. Пошто је

$$\overline{FF'} = P\,\mathrm{Cos}\,(\vec{\varrho}, \vec{B}),$$

непосредно имамо

$$\overrightarrow{NM} = \vec{A}_0\, P\,\mathrm{Cos}\,(\vec{\varrho}, \vec{B}) = \vec{A}\,(\vec{B}, \vec{\varrho}).$$

На тај начин долазимо до следеће дефинитивне векторске једначине за одређивање вектора положаја произвољне тачке наше површине:

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}(\vec{B}, \vec{\varrho}) = \vec{\varrho} + P(\vec{B}_0, \vec{\varrho})\vec{A}_0 . \tag{1}$$

Ако за општи случај уведемо косоугли систем координата $O\xi\eta\varsigma$ тако, да осе $O\xi$ и $O\eta$ стоје управно једна на другу и обе управно на вектор $\vec{B}$, а осу $O\varsigma$ наперимо дуж осе OT конструкције, добијамо везу између координата ξ, η, ς произвољне тачке наше површине на следећи начин.

Из сличности троуглова OFF' и OST имамо:

$$\varsigma : l = \overline{OF} : 1 ,$$

при чему је l константна дужина са вредношћу:

$$l = \overline{OT} = \left[1 + P^2 + 2P \operatorname{Cos} (\vec{A}_0, \vec{B}_0) \right]^{1/2} .$$

Пошто је са друге стране

$$\overline{OF}^2 = 1 - \overline{FH}^2 = 1 - \overline{F'H'}^2 = 1 - (\xi^2 + \eta^2),$$

можемо написати следећу везу између координата:

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{\varsigma^2}{l^2} = 1 ,$$

а та једначина потврђује да је наша површина елипсоид, при чему је ова једначина написана у погледу централног кружног пресека и коњугованог пречника.

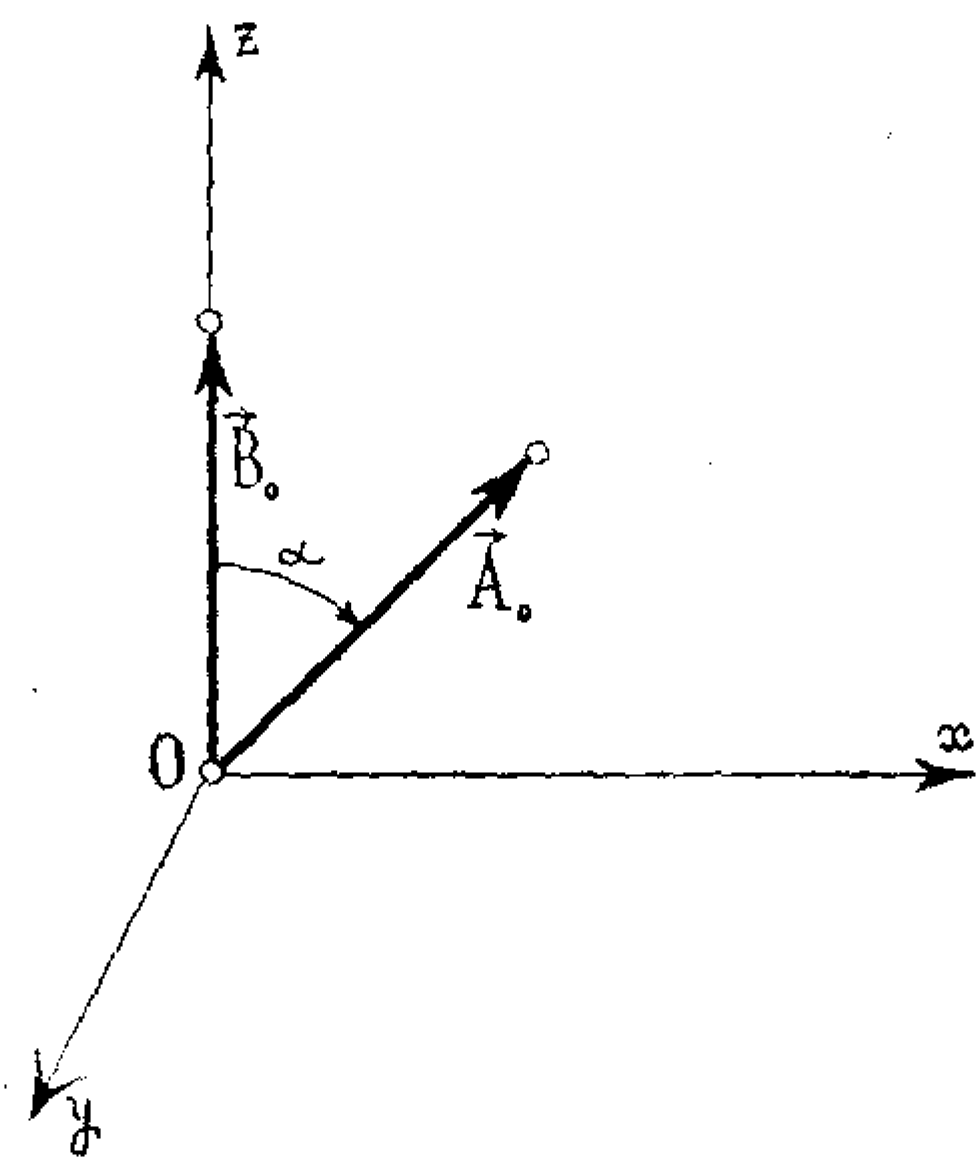
Једначину те исте површине у Декартовом ортогоналном систему можемо написати после следећих елементарних рачуна.

Конструјишимо тријedar Декартових оса $Oxyz$ на тај начин, да се Oz оса поклапа са правцем вектора $\vec{B}$, а да Ox оса лежи у равни вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (слика 3); Oy оса заузеће онда одговарајући положај; нагласимо да ћемо у овој расправи увек употребљавати леви систем координатних оса. У том случају координате вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ имају следеће вредности:

$$\begin{aligned} A_x &= A \operatorname{Sin} \alpha , & B_x &= 0 , \\ A_y &= 0 , & B_y &= 0 , \\ A_z &= A \operatorname{Cos} \alpha , & B_z &= B \end{aligned}$$

где је α угао између вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Из векторске једначине (1) непосредно закључујемо да



Слика 3.

Положај координатних оса.

координате x, y, z вектора положаја $\vec{r}$ тачке M наше површине имају следеће вредности:

$$x = X + PZ \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$y = Y,$$
$$z = Z(1 + P \operatorname{Cos} \alpha),$$

при чему смо са X, Y, Z означили координате вектора $\vec{\varrho}$ тачке N на сферној површини.

Ако решимо претходне једначине у погледу X, Y, Z:

$$X = x - \Delta \,.\, Pz \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$Y = y,$$
$$Z = \Delta \,.\, z,$$

где је

$$\Delta^{-1} = 1 + P \operatorname{Cos} \alpha,$$

и уврстимо те вредности у једначину сферне површине:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

добићемо једначину нашег елипсоида у облику

$$(x - \Delta \,.\, Pz \operatorname{Sin} \alpha)^2 + y^2 + \Delta^2 \,.\, z^2 = 1.$$

Наведимо понеке, за нас важне, особине тог елипсоида.

1. Један систем кружних пресека тог елипсоида стоји управно на вектор $\vec{B}$. Ова особина непосредно следује из начина конструјисања елипсоида.

2. За елипсу пресека површине нашег елипсоида са равни вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ можемо да наведемо ово:

a. Она пролази кроз тачке R и R' (слика 2), које се налазе на правој, управној на вектор $\vec{B}$, у јединичном отстојању од тачке O — пресека вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

b. Она пролази кроз тачку T, крај векторског збира вектора $\vec{B}_0$ и $P\vec{A}_0$.

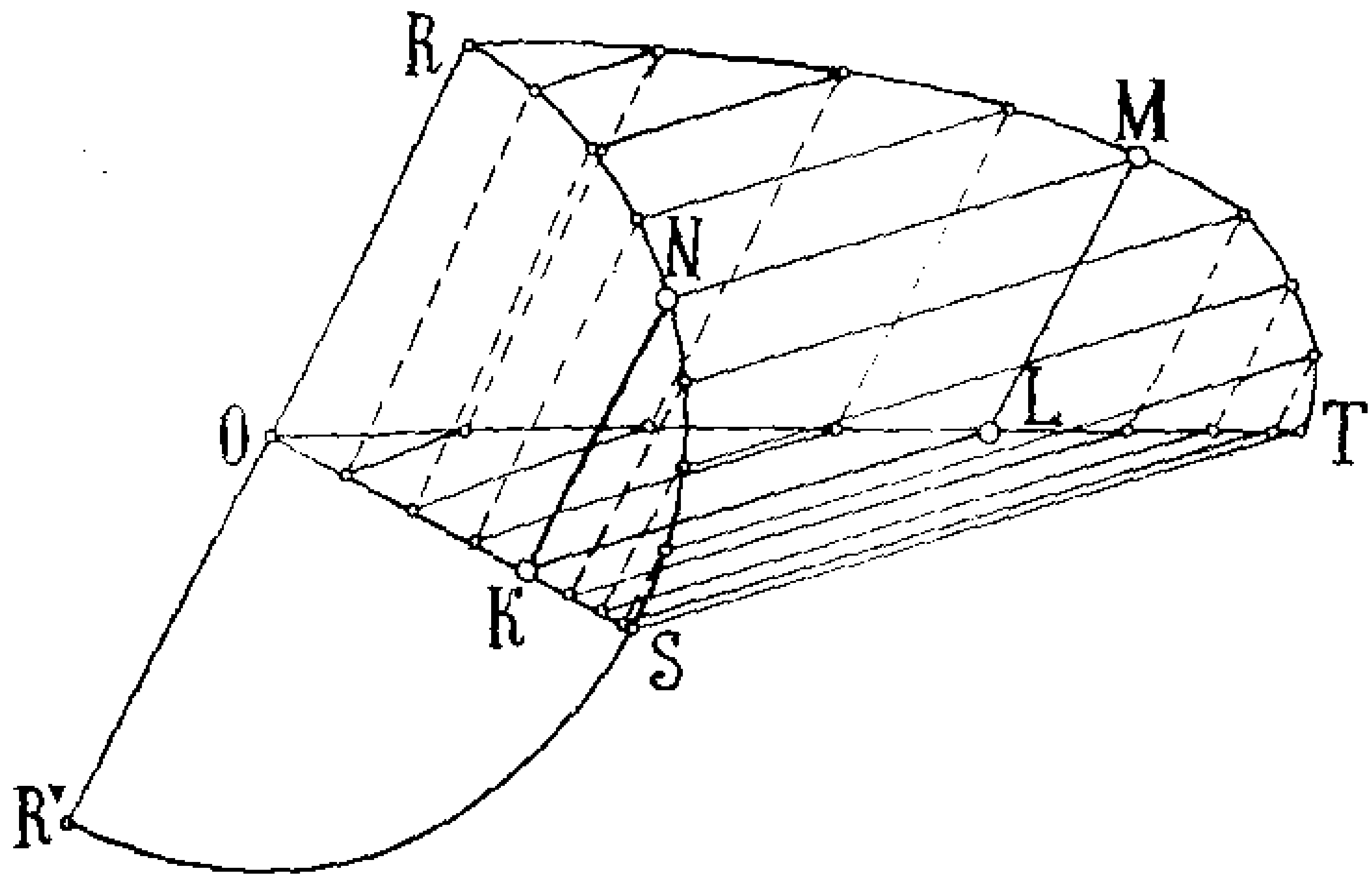
c. Тангента у тачки T на елипсу стоји управно на правац вектора $\vec{B}$. То закључујемо из тога што је права OT коњуговани пречник са тетивом RR'.

Јасно је да положај тачака R и R' и тачке T са познатим правцем тангенте у тој тачки потпуно одређује положај и форму елипсе нашег пресека.

У вези са тим особинама елипсе наведимо један поступак коструисања елипсе, који је нарочито згодан у нашем случају и који непосредно следује из векторске једначине (1):

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + P\vec{A}_0 \operatorname{Cos} (\vec{B}_0 , \vec{\varrho}).$$

Поделимо лук SR (слика 4) кружне линије на произвољан број једнаких или неједнаких делова. Кроз тачке дељења $N_1, N_2, \ldots, N, \ldots, N_n$ повуцимо праве пералелне са OR до пресека са OS у тачкама $K_1, K_2, \ldots, K, \ldots, K_n$; даље, кроз ове тачке повуцимо праве паралелне са ST, т. ј. у правцу вектора $\vec{A}$, и означимо тачке пресека тих правих са правом OT са $L_1, L_2, \ldots, L, \ldots, L_n$. Ако сада кроз ове последње тачке повучемо праве паралелне са OR, а кроз тачке N_1, $N_2, \ldots, N, \ldots, N_n$ праве паралелне са ST — одговарајуће праве тих двају система секу се у тачкама $M_1, M_2, \ldots, M, \ldots, M_n$, које припадају елипси.



Слика 4.

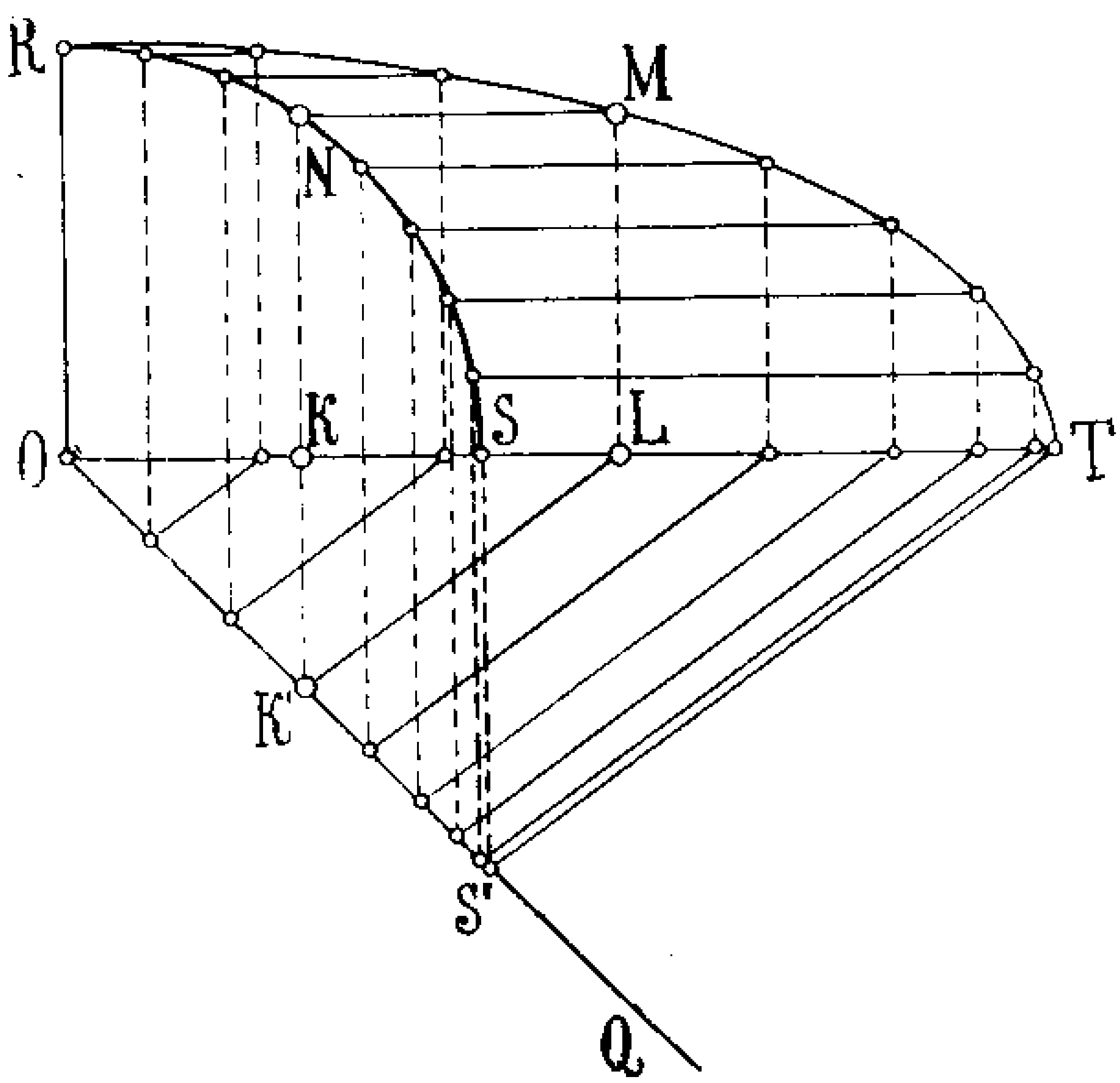
Конструјисање елипсе.

Наша конструкција престаје да важи за случај када вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$ имају исте правце. У том случају, за одређивање положаја тачака $L_1, L_2, \ldots, L, \ldots, L_n$ на правој OT (слика 5), можемо да конструјишемо произвољну помоћну праву OQ и кроз тачке пресека $K'_1, K'_2, \ldots, K', \ldots, K'_n$ правих NK са том правом повучемо праве паралелне са $S'T$ до пресека са OT у тачкама $L_1, L_2, \ldots, L, \ldots, L_n$. После тога поступамо исто као и у претходном случају за конструјисање тачака M_1, $M_2, \ldots, M, \ldots, M_n$ елипсе. Паралелограми $KLMN$ у овом случају постају правоугаоници; сам елипсоид постаје обртним елипсоидом.

Наведимо две важне напомене за модел једног елипсоида конструјисаног са векторима $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

1. У општем случају сваки елипсоид има два система кружних пресека. За елипсоид конструјисани са векторима $\vec{A}$ и $\vec{B}$, од тих система важан је само један, и то онај који стоји управно на вектор $\vec{B}$, који је дакле тим вектором потпуно одређен. Дакле, ако један модел елипсоида хоћемо да ставимо у везу са двама векторима, потребно је на том елипсоиду *озна-*

чити један нарочити кружни пресек; раван тог пресека одређиће правац другог по реду од вектора, који стоје у вези са елипсоидом.

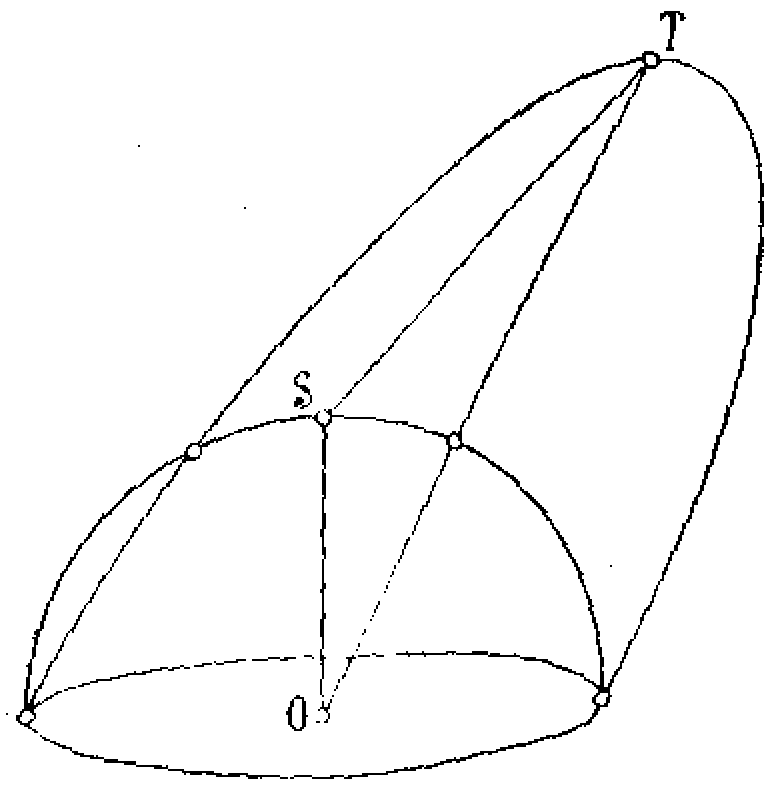


Слика 5.

Конструјисање елипсе у специјалном случају.

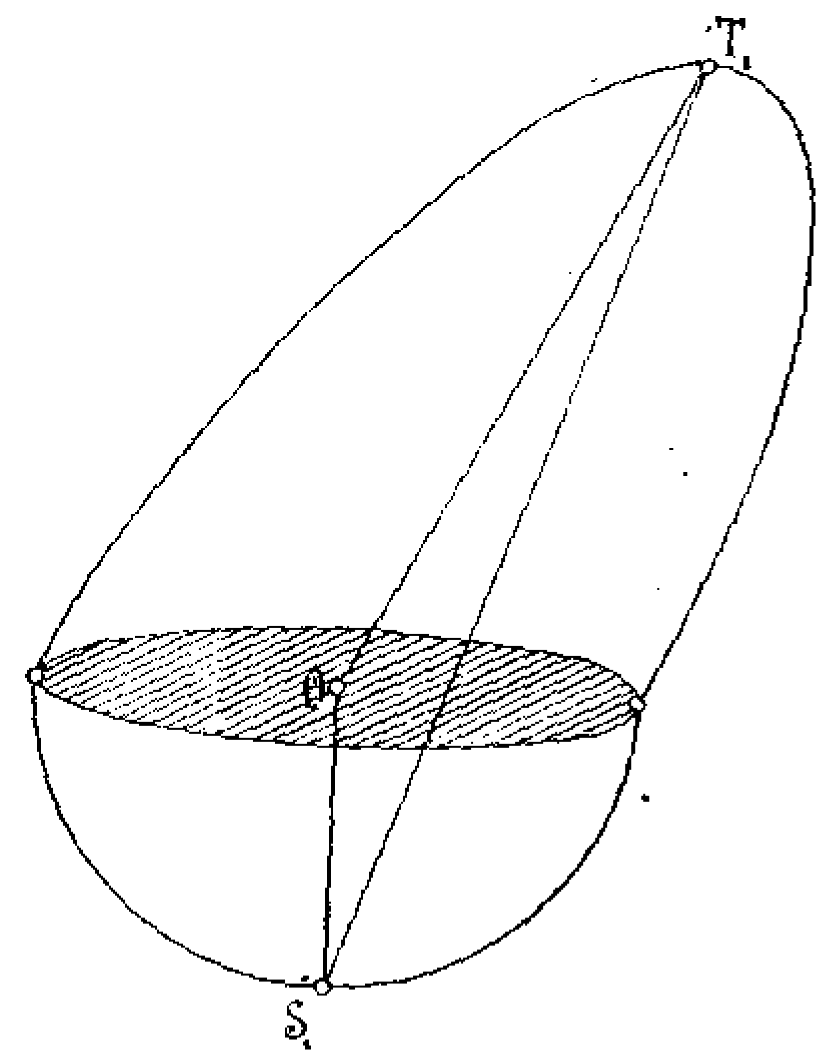
2. Један исти елипсоид може да буде добивен из једне сфере померањем кружних пресека те сфере на два начина. Прва слика (слика 6) показује образовање једне половине елипсоида из половине сфере, која се налази са исте стране равни кружног пресека. Друга слика (слика 7) показује образовање те исте половине елипсоида из оне половине сфере, која се налази са друге стране кружног пресека. У првом и другом случају други вектори $\vec{B}$ и $\vec{B}_1$ имају исте правце, али различите смерове; што се тиче првих вектора $\vec{A}$ и $\vec{A}_1$, то има вектор $\vec{A}$ правац вектора $\overrightarrow{ST}$, а вектор $\vec{A}_1$ — правац вектора $\overrightarrow{S_1 T_1}$, дакле њихови су правци различити. Али вектори $\overrightarrow{OT}$ и $\overrightarrow{OT_1}$ могу да имају, као што је то у нашем случају, исте вредности.

На тај начин, ако су дати вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$, модел елипсоида конструјисаног са тим векторима потпуно је одређен, али, ако је дат модел елипсоида, и на том елипсоиду означен кружни пресек, за конструисање праваца вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ неопходно је навести на какав је од два горе наведена начина тај елипсоид



Слика 6.

Бели модел елипсоида.



Слика 7.

Црни модел елипсоида.

конструисан: да ли полусфера и одговарајућа јој половина елипсоида леже на истој страни равни или на супротној. Поставимо као услов да ћемо у првоме случају *модел* сматрати *белим*, у другом — *црним*. Другим речима сем положаја и форме, за модел елипсоида, конструисаним са два вектора, морамо да вежемо одређену боју — белу или црну. На слици је врло згодно модел елипсоида цртати само помоћу једне половине те површине и у случају белог модела кружни пресек остављати белим, а у случају црног — црним или шрафираним.

После тих напомена можемо да поставимо следећу дефиницију.

Модел елипсоида одређене боје са одређеним кружним пресеком, чије су тачке конструисане према једначини

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}_0 A B \, Cos \, (\vec{B}, \vec{\varrho})$$

где су $\vec{r}$ вектор положаја тачке површине и $\vec{\varrho}$ орт произвољног *правца, претставља један геометријски облик, који се зове* **диада** *конструјисана са векторима* $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$.

У место орта $\vec{\varrho}$ *можемо узети вектор произвољног константног модула, али у том случају треба да се руководимо следећом општом једначином:*

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}\,(\vec{B}\,,\vec{\varrho}\,)$$

за одређивање вектора положаја $\vec{r}$ *произвољне тачке површине модела елипсоида.*

Диаду вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ означимо са

$$\{\vec{A}\,,\vec{B}\}.$$

За ознаку диаде без навода оних вектора, за које је конструјисана та диада, употребљаваћемо слово $Д$, дакле

$$Д = \{\vec{A}\,,\vec{B}\}.$$

На тај начин свакоме пару вектора одговара једна диада, један одређени модел елипсоида. Диада је потпуно одређена, ако су познати:

1) правац и смер вектора $\vec{A}$; за то је потребно два параметра,

2) правац и смер вектора $\vec{B}$; за то је потребно да знамо још два параметра,

3) производ P модула вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, — још један параметар.

Дакле *за одређивање диаде потребно је свега пет независних скаларних параметара.* Разуме се да се то слаже са тим да је за одређивање модела одређене оријентације једног елипсоида такође потребно да познајемо пет параметара: случај 11) наше шеме (стр. 3), за који је $f = f'$ (два параметра) и $o = o'$ (три параметра).

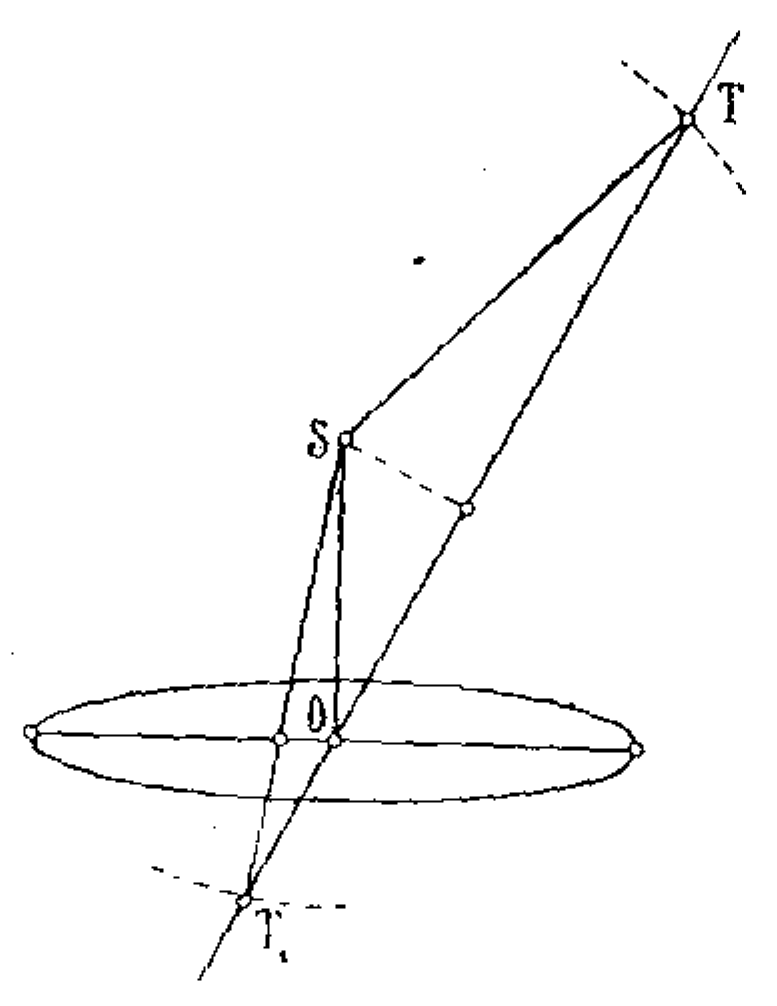
Јасно је да је улога вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ код једне диаде различита и зато у бележењу диаде треба да разликујемо *ред чланова* те *диаде. Први члан* ћемо звати још и *претходним*, а *други идућим* или *наредним* чланом диаде; употребљују се такође називи *леви* и *десни* чланови диаде.

Идући члан диаде, вектор $\vec{B}$, стоји управно на систем кружних пресека елипсоида. Централни кружни пресек звaћемо *основом диаде*, а његов центар — *центром диаде*. На тај начин идући члан диаде стоји управно на основу и својим положајем у простору одређује ту основу.

Претходни члан диаде, вектор $\vec{A}$, показује правац померања свих тачака сферне површине. Тај правац ћемо звати *правцем померања диаде*.

Праву OT — геометријско место центара кружних пресека елипсоида диаде — зваћемо *осом* диаде; оса диаде претставља осу конструкције модела елипсоида. Напоменимо да се оса диаде у општем случају не поклапа ни са једном од оса елипсоида. То наступа само за случај колинеарности вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Величина P — производ модула вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — претставља *коефицијенат* диаде. Коефицијенат диаде показује за колико се тачке сферне површине померају у правцу вектора $\vec{A}$, т. ј. у правцу померања диаде.



Слика 8.

Одређивање правца померања помоћу диадине осе.

Основа, правац померања и коефицијенат диаде претстављају *диадине елементе*. У место правца померања за елеменат може се узети диадина оса. У ствари, тачка T на тој осовини може бити одређена, ако из тачке S полупречником $P = AB$ засечемо тачку на правцу диадине осе (слика 8). После тога тачке S и T одређују правац померања диаде. Јасно је да између две тачке T и T_1 пресека кружне линије полупречника P са осом диаде треба да бирамо ону, која одговара смеру диадине осе.

Ако су правци вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ одређени, за одређивање коефицијента диаде може да послужи скаларни производ $(\vec{A}, \vec{B})$, јер је

$$P = AB = (\vec{A}, \vec{B}) . Cos^{-1}(\vec{A}, \vec{B}).$$

Тај производ не можемо да искористимо само у случају, кад он има вредност нуле, т. ј. у случају ортогоналности вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, од којих ни један није раван нули.

Анализирајмо сада те специјалне случајеве кад један од чланова диаде има вредност нуле.

Ако у диади $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ претходни вектор $\vec{A}$ има вредност нуле, све тачке сферне површине остају на своме месту. Диада $\{0, \vec{B}\}$ дегенерише у модел једне сфере.

Са друге стране, ако идући диадин члан има вредност нуле, диада $\{\vec{A}, 0\}$ не може да буде конструисана, она не постоји.

Претресимо још питање, у каквој мери диада $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ одређује векторе, са којим је она конструисана.

Као што је познато ни скаларни производ $(\vec{A}, \vec{B})$, ни векторски производ $[\vec{A}, \vec{B}]$ не одређују у довољној мери векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Исто тако диада $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ не одређује у потпуности два своја вектора. Основа диаде одређује правац другог вектора $\vec{B}$. Смер тог вектора можемо изабрати произвољно. За одређивање правца првог вектора $\vec{A}$ диаде потребно је повући тангенцијалну раван на површину модела паралелну са основом и за бели модел изабрати ону тачку T додира, која се налази у оном делу простора камо је наперен смер вектора $\vec{B}$. За црни модел потребно је узети тачку T_1 додира друге тангенцијалне равни. Ако спојимо после тога тачку T или T_1 са тачком S пресека позитивног правца вектора $\vec{B}$ са сферном површином конструисаном на основи као великом кругу, вектор $\overrightarrow{ST}$ или $\overrightarrow{ST_1}$ одређује правац и смер вектора $\vec{A}$ диаде. Ако изаберемо супротни смер вектора $\vec{B}$, вектор $\vec{A}$ ће добити такође супротни смер. Значи, као што у скаларном и векторском производу, тако и код диаде можемо да променимо смерове једног и другог члана диаде, а да се сама диада не промени.

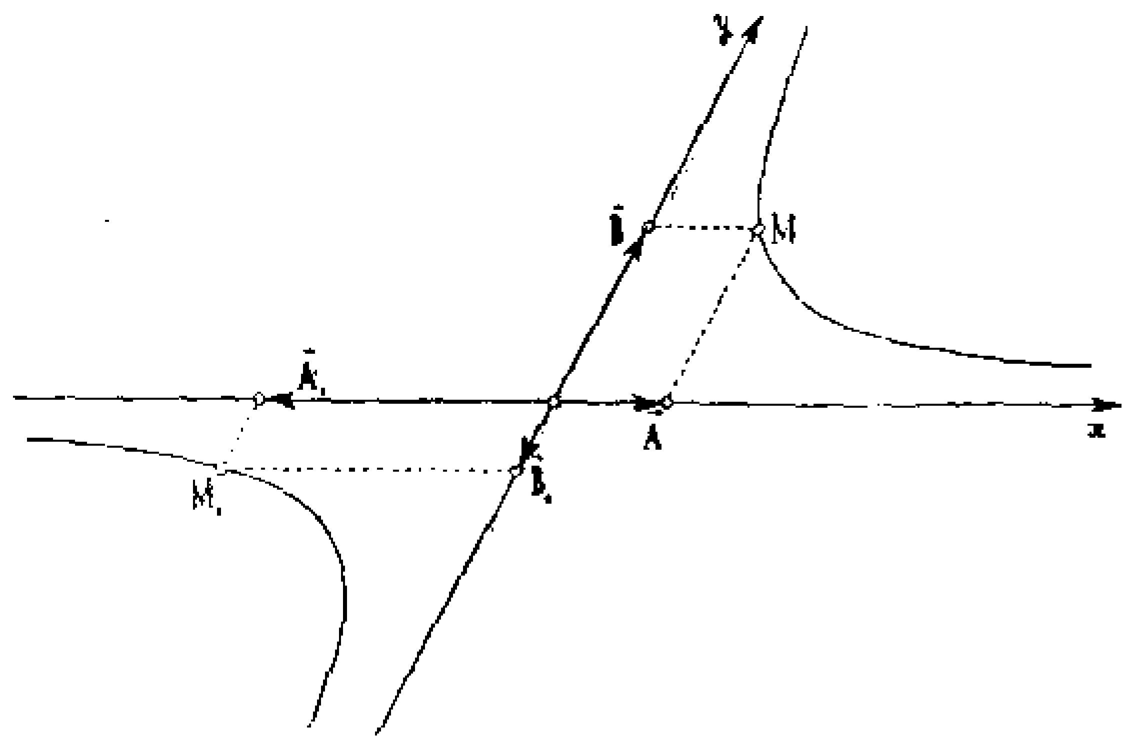
Што се тиче одређивања модула једног и другог вектора диаде, они не могу да буду одређени у пуној мери. По датом моделу можемо да одредимо вектор $\overrightarrow{ST}$, а пошто он има вредност $\overrightarrow{PA_0}$, значи можемо да одредимо коефицијенат диаде $P=$

$= AB$. Ако из ма које тачке простора O конструјишемо правце вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (слика 9) и узмемо те правце за координатне осе система Oxy, геометријско место тачке M за коју је

$$xy = P$$

претставља једну хиперболу.

На тај начин можемо тврдити да диада одређује два своја вектора по правцима и смеровима, при чему могу смерови оба вектора бити замењени супротним, а њихови модули треба да



Слика 9.

Хипербола чије тачке одређују модуле диадиних вектора.

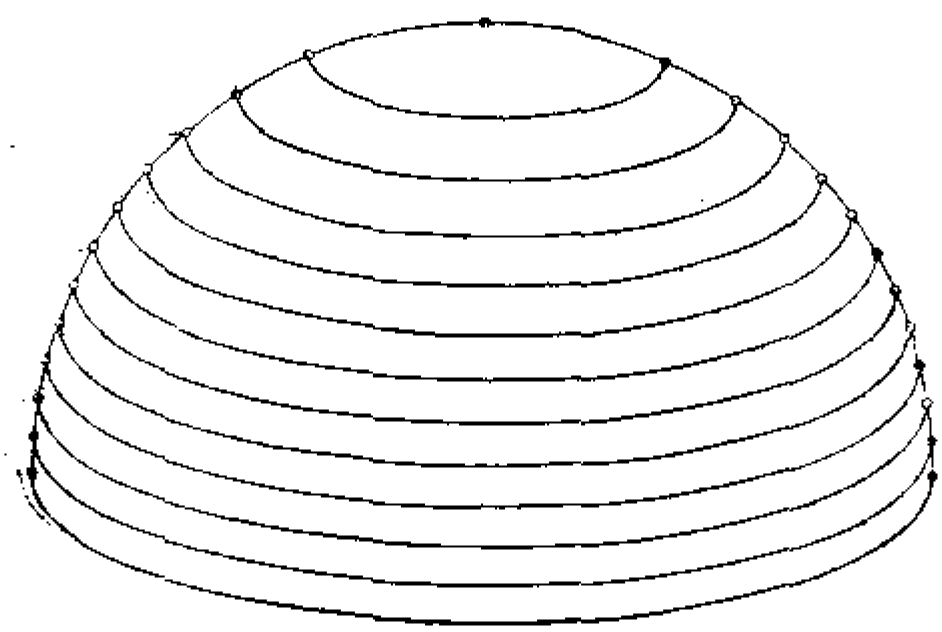
буду такви, да се крај геометријског збира тих вектора налази на једној одређеној хиперболи. Чим изаберемо одређену тачку на тој хиперболи, вектори диаде су потпуно одређени. За тачку M имамо једне вредности вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, за тачку M_1 — друге вредности $\vec{A}_1$, $\vec{B}_1$ које одговарају истој диади.

Забележимо да чим је дата једна диада, могуће је одредити како скаларни производ вектора, са којим је она конструјисана, тако и векторски производ истих вектора. За скаларни производ $(\vec{A}, \vec{B}) = P \, Cos \, (\vec{A}, \vec{B})$ то смо раније видели, а што се тиче векторског производа $[\vec{A}, \vec{B}]$, његов правац и смер одређени су познатим правцима и смеровима вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, при чему заједничка промена смерова вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ не изазива промене векторског производа; најзад модул тог вектора, једнак

$$AB \, Sin \, (\vec{A}, \vec{B}) = P \, Sin \, (\vec{A}, \vec{B})$$

да одредимо по коефицијенту диаде P и по правцима $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

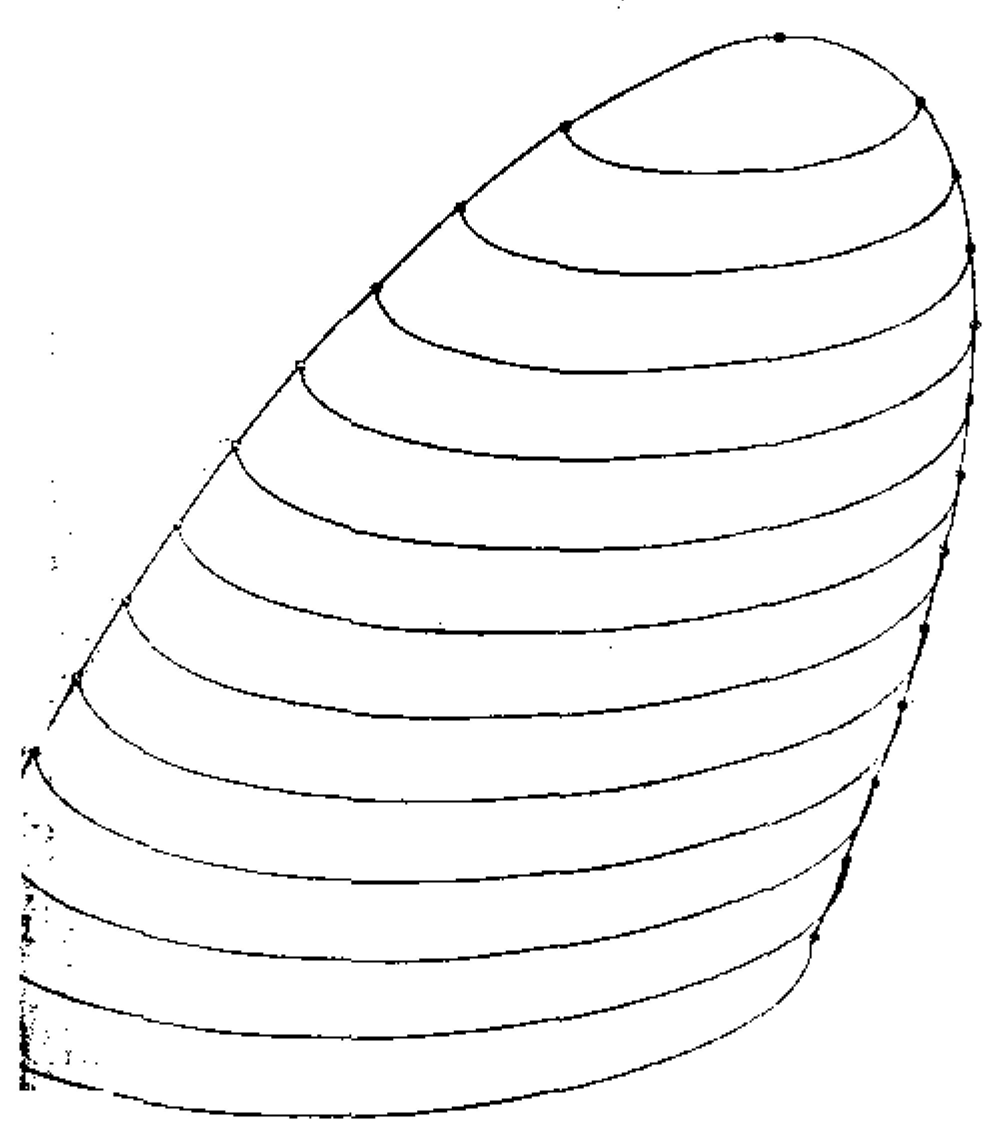
крају овог параграфа наведимо још једну слику диаде, ма конкретно приказује суштину тог геометријског обњегову везу са сфером. На првој слици (слика 10) ви-



Слика 10.

Кружни пресеци сфере.

угова — пресека сфере са равнима у истим отстодругој слици (слика 11) имамо те исте кругове



Слика 11.

Кружни пресеци диаде.

распоређене дуж осе диаде, али тако да су сва отстајања између кругова повећана у истој сразмери. Лако можемо замислити једну површину, која обухвата све кружне линије у новом положају и та површина претставља елипсоид диаде.

3. Примедбе о литератури.

Појам који смо увели има, као што ћемо даље видети тесну везу са формалним појмом диаде, коју уводи W. Gibbs, али Gibbs'ова диада нема конкретне претставе, нема је у толико да сам W. Gibbs (или E. Wilson, који је штампао предавања W. Gibbs'а) зове тај формални оператор *неодређеним* производом. О томе он говори овако: «The reason for the term indeterminate is this. The two products $a.b$ and $a \times b$ (у нашим бележењима $(\vec{a}, \vec{b})$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$) have definite meanings. One is a certain scalar, the other a certain vector. On the other hand the product ab (код нас $\{\vec{a}, \vec{b}\}$) is neither vector nor scalar — it is purely symbolic and acquires a determinate phisical meaning only when used as an operator». (Vector analysis. New Haven. 1913. p. 272).

Следећи W. Gibbs'у, други писци такође не дају геометријског тумачења диади. Она се уводи или као симбол једног оператора, диадског производа, или у вези са линеарном векторском функцијом. Исту формалну тачку гледишта наводе M. Abraham и P. Langevin у чланку «Notions géométriques fondmentales» француског издања Encyclopédie des sciences mathématiques (T. IV. 16).

I. A. Schouten наводи један геометријски облик за девиатор (Grundlagen der Vektor — und Affinoranalysis. 1914. S. 83), али, прво, појам девиатора се не поклапа са појмом диаде; друго, Schouten'ова слика претставља само елементе вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, који су потребни за девиатор, али она не даје један резултативни облик и најзад, треће, Schouten'ова геометријска слика не служи основом за идуће операције са девиатором.

G. Jaumann у својем делу «Die Grundlagen der Bewegungslehre» (1905) на странама 28—29 пише: «Die Dyaden haben eine ebenso grosse geometrische und physikaliche Bedeutung wie die Grassmannschen Produkte, sind ebenso reale, ihrer Grösse, Form und Lage nach vorstellbare Gebilde. Keineswegs sind sie, wie Gibbs glaubt, nur symboliche analytische Operatoren. Eine Dyade ist gegeben durch fünf Bestimmungsstücke, und zwar durch die Richtungen der beiden Vektoren a und b und durch das Produkt ihrer Grössen. Die Grösse der einzelnen Vektoren ist hier wie bei den Grassmannschen Produkten gleichgültig». Али и тај писац се зауставља само на томе; он јасно осећа геометријски садржај тог појма, али не даје му конкретног геометријског облика и не ставља тај облик за основу своје теорије.

J. Spielrein у своме уџбенику (Lehrbuh der Vektorrechnung. 2 Aufl. 1926. S. 285) о диади пише: «Man kann eine Dyade nicht durch eine geometrische Figur unmittelbar veranschaulichen, wie man z. B. einen Vektor durch eine gerichtete Strecke veranschaulichen kann. Aber wie ein Vektor durch seine Projektionen, d. h. durch seine skalaren Produkte mit anderen Vektoren definiert werden kann, so kann auch eine Dyade durch ihre „skalaren Produkte“ mit gegebenen Vektoren definiert werden».

Исто мишљење понављају и други уџбеници. На пример, у новом уџбенику M. Lagally (Vektor-Rechnung, Leipzig, 1928) стоји (стр. 46): «Dyadische Produkte und Dyaden sind weder Skalare noch Vektoren, sondern Grössen höherer Art, denen eine unmittelbare geometrische Bedeutung nicht beizulegen ist».

На тај начин могуће је тврдити као несумњиво, да диада сама по себи до сада није имала непосредног геометријског тумачења. У овој расправи чинимо покушај да дамо диади то геометријско тумачење: диада може бити сматрана као одређени оријентисани модел елипсоида. Таква промена у суштини геометријске концепције једне диаде даје могућност да се развије рачун са диадама на новој геометријској основи. Такво развијање претставља у главноме предмет наших проучавања те важне области модерне Теорије Вектора.

4. Једнакост диада.

Замислимо две диаде

$$Д = \{\vec{A}, \vec{B}\},$$

$$Д' = \{\vec{A'}, \vec{B'}\}.$$

Пошто по нашој дефиницији диада претставља модел елипсоида одређене оријентације и одређене боје са показаним одређеним кружним пресеком, можемо тврдити:

Две су диаде једнаке, кад се њихови модели, конструисани са истим центром и са истом вредношћу пулупречника основе, поклапају, када означени кружни пресеци на тим елипсоидима имају исти положај и кад се модели исте боје.

За ознаку једнакости две диаде можемо да употребимо обичан знак једнакости и да напишемо:

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}', \vec{B}'\}$$

или кратко

$$Д = Д'.$$

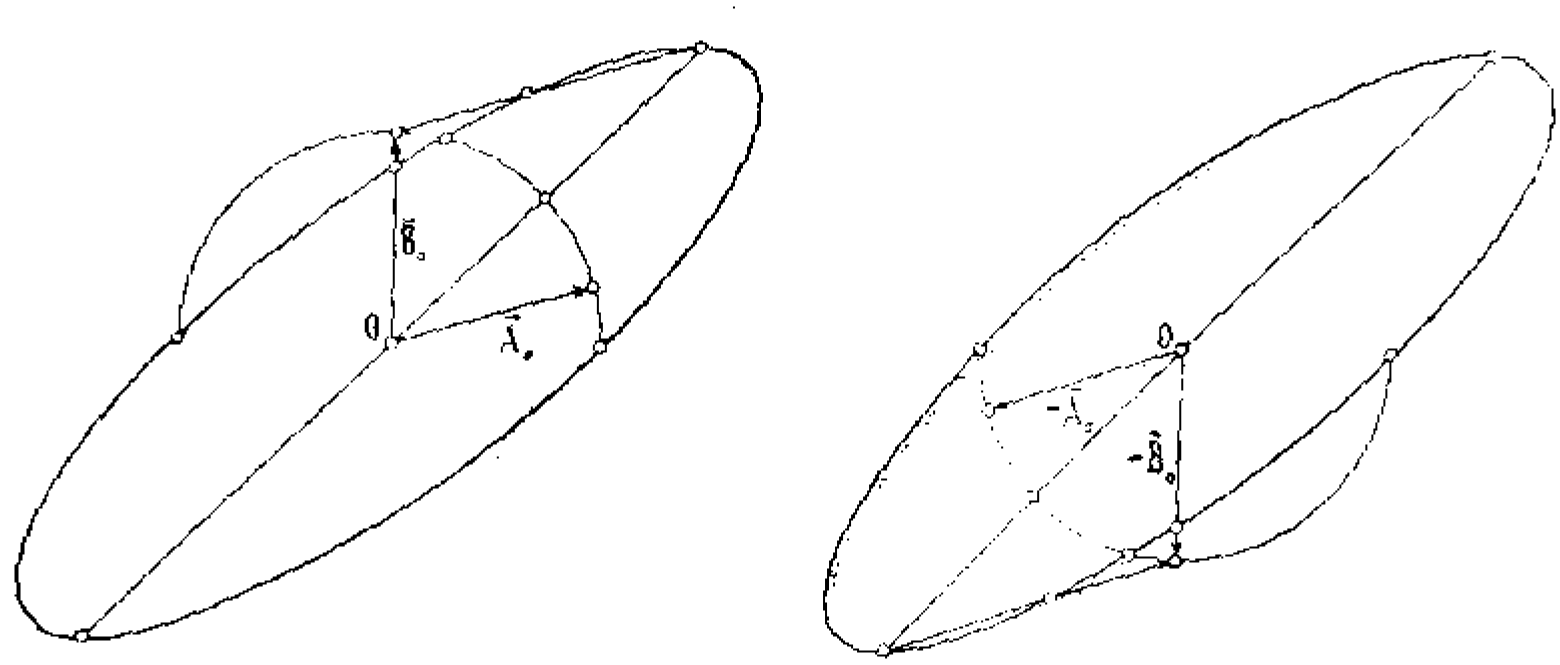
Из наведене дефиниције једнакости двеју диада непосредно следују ове особине вектора са којим су конструисане једнаке диаде:

1. Ортови претходних вектора диада треба да имају или исте вредности или да буду супротног смера.

2. Ортови идућих вектора треба да имају или исте вредности, када су ортови претходних вектора једнаки, или супротне вредности, када су смерови претходних вектора супротни.

3. Коефицијенти диада, т. ј. производи модула вектора прве и друге диаде, треба да имају исте вредности.

Могућност да променимо смер ортова у исто време код



Слика 12.

Промена смерова диадиних вектора.

претходног и идућег члана диаде следује непосредно из тога што је увек могуће променити ред у конструисању половина елипсоида (слика 12). Основа при томе остаје иста, сами елипсоиди се поклапају и модели имају исте боје.

Дакле, као услове једнакости двеју диада Д и Д' можемо да напишемо две векторске једначине и једну скаларну:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} \vec{A}_0 &= \varepsilon\, \vec{A}_0', \\ \vec{B}_0 &= \varepsilon\, \vec{B}_0', \\ AB &= A'B' \end{aligned}
$$

при чему смо, као увек, са нулом доле код ознаке вектора означили орт тог вектора; ε има вредност ± 1. Пошто векторској једнакости ортова одговарају само две скаларне једнакости, можемо тврдити да наши услови (2) једнакости двеју диада могу бити замењени са пет скаларних услова.

Ако координате вектора диада у погледу Декартовог триједра $Oxyz$ означимо помоћу следећих шема:

$$
\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z), \qquad \vec{A}'\,(A'_x, A'_y, A'_z),
$$

$$
\vec{B}\,(B_x, B_y, B_z), \qquad \vec{B}'\,(B'_x, B'_y, B'_z),
$$

скаларни услови једнакости двеју диада могу да се пишу овако:

$$
(3) \qquad \frac{A_x}{A'_x} = \frac{A_y}{A'_y} = \frac{A_z}{A'_z},
$$

$$
(4) \qquad \frac{B_x}{B'_x} = \frac{B_y}{B'_y} = \frac{B_z}{B'_z},
$$

$$
(5) \qquad A_x B_x = A'_x B'_x .
$$

Последњу једначину можемо да смењимо каквом другом:

$$
A_y B_y = A'_y B'_y, \ldots,
$$

или

$$
A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z .
$$

Лако увиђамо да из једначина (2) следују једначине (3) — (5) и обратно. У ствари, ако су ортови вектора истих или супротних смерова, координате су тих вектора пропорционалне.

Ако коефицијенте пропорционалности за размере (3) и (4) означимо са k и l, имамо:

$$(6) \qquad \begin{array}{lll} A_x = k A'_x, & A_y = k A'_y, & A_z = k A'_z, \\ B_x = l\, B'_x, & B_y = l\, B'_y, & B_z = l\, B'_z. \end{array}$$

Пошто после квадрирања последњу од једначина (2) можемо да напишемо у облику

$$(A^2_x + A^2_y + A^2_z)(B^2_x + B^2_y + B^2_z) =$$
$$= (A'^2_x + A'^2_y + A'^2_z)(B'^2_x + B'^2_y + B'^2_z),$$

из те једначине на основу (6) следује $k^2 l^2 = 1$ или

$$(7) \qquad kl = 1.$$

Знак смо изабрали само позитивни, јер вектори $\vec{A}$ и $\vec{A'}$ са једне стране и вектори $\vec{B}$ и $\vec{B'}$ са друге треба да имају исте смерове: ако су вектори $\vec{A}$ и $\vec{A'}$ истосмерни ($k > 0$), $\vec{B}$ и $\vec{B'}$ такође су истосмерни ($l > 0$), а при услову $k < 0$, исто тако је $l < 0$.

Сада из једначине (7) на основу (6) следује једначина (5).

Обратно, из једначине (3) — (5) следују једначине (2). У ствари, из једначина (3) и (4) непосредно следује да ортови вектора $\vec{A}$ и $\vec{A'}$, са једне стране, и вектора $\vec{B}$ и $\vec{B'}$ са друге имају или исте вредности или супротне, при чему једначина (5) доводи до једначине (7), а ова последња тврди да су или оба два орта у исто време истосмерни ($k > 0$, $l > 0$) или супротног смера ($k < 0$, $l < 0$). Из те исте једначине (7) помоћу (3) и (4) непосредно долазимо до закључка истинитости последње једначине из система (2).

Из наведених услова једнакости двеју диада непосредно следује да су две диаде

$$\{\vec{A}, \vec{B}\}, \ \{m\vec{A}, \frac{1}{m}\vec{B}\}$$

једнаке независно од произвољне вредности скалара m, искључујући при томе вредност $m = 0$.

Такву промену вредности чланова диаде можемо да искористимо у намери да једном од вектора диаде дамо унапред изабрани модул; сем тога можемо да располажемо и смером једног вектора.

Ако други вектор диаде има вредност орта, тај облик диаде зваћемо *редукованим* обликом. Редуковани облик једне произвољне диаде одређује следећа једначина:

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{B\vec{A}, \frac{1}{B}\vec{B}\} = \{B\vec{A}, \vec{B}_0\}.$$

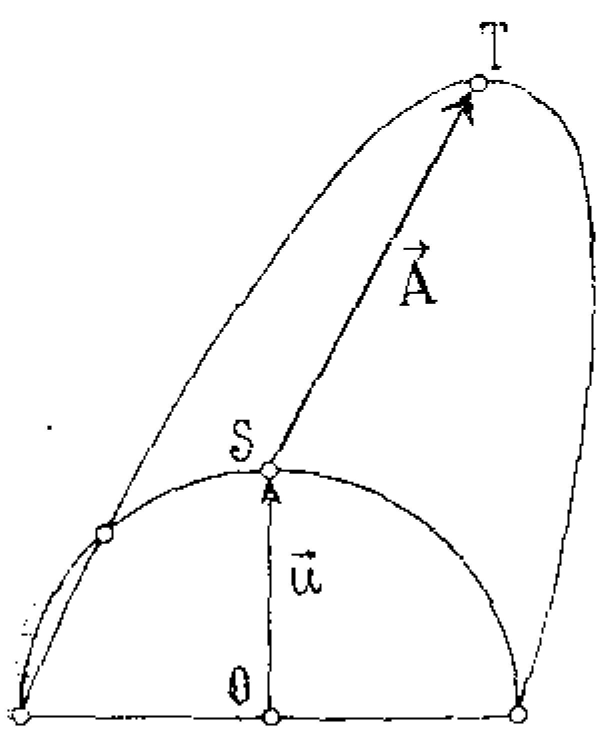
За конструјисање једне редуковане диаде

$$\{\vec{A}, \vec{u}\}$$

где смо са $\vec{u}$ означили један орт, можемо да се руководимо следећом векторском једначином:

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}\,\mathrm{Cos}\,(\vec{u}, \vec{\varrho}).$$

Из тачке S (слика 13) у датом случају треба да повучемо сам вектор $\vec{A}$, дакле $\overrightarrow{ST} = \vec{A}$, другим речима коефицијенат P редуковане диаде не претставља ништа друго него модул првог вектора. За остале тачке сфере тај вектор $\vec{A}$ треба да скратимо у сразмери вредности $\mathrm{Cos}\,(\vec{u}, \vec{\varrho})$.



Слика 13.

Конструјисање једне редуковане диаде.

5. Конгруентност диада.

Конструјишимо две диаде

$$Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}$$

$$Д' = \{\vec{A}', \vec{B}'\}$$

са истим центром и са истом вредношћу полупречника основе. Може бити случај да се тако конструјисани модели диада не поклапају, али могу да буду доведени до поклапања после обртања једног елипсоида око одређене осе за одређени угао.

Диаде исте боје, којих елипсоиди могу да буду доведени до поклапања, зову се конгруентне диаде.

Из непосредног геометријског посматрања очигледно је да је за конгруентност двеју диада неопходно и довољно, да

1) углови између вектора појединих диада буду исти и да
2) коефицијенти тих диада имају исту вредност.

Ако узмемо у обзир вредности скаларног производа вектора диаде и модул векторског производа

$$\overline{[\vec{A},\vec{B}]} = AB\,\mathrm{Sin}\,(\vec{A},\vec{B})$$

услове за конгруентност двеју диада можемо да напишемо овако:

$$(\vec{A},\vec{B}) = (\vec{A}',\vec{B}'),$$

$$\overline{[\vec{A},\vec{B}]} = \overline{[\vec{A}',\vec{B}']}.$$

6. Множење диаде са скаларом.

Уочимо једну диаду

$$\mathbf{Д} = \{\vec{A},\vec{B}\}$$

и један скалар произвољне вредности n, изузев $n = 0$.

Помножити диаду са скаларом значи начинити нову диаду, којој је претходни или идући члан помножен са тим скаларом

Производ диаде и скалара означимо са

$$n\,\mathbf{Д} = n\{\vec{A},\vec{B}\}$$

Дакле на основу дефиниције

$$n\{\vec{A},\vec{B}\} = \{n\vec{A},\vec{B}\} = \{\vec{A},n\vec{B}\} = \{\vec{A},\vec{B}\}n.$$

Да у тој дефиницији нема противуречја, следује из истинитости једначине:

$$\{n\vec{A},\vec{B}\} = \{\vec{A},n\vec{B}\},$$

а да је та једначина тачна, о томе се можемо уверити после множења првог члана прве диаде са $\frac{1}{n}$, а другог члана са n. То множење, као што смо видели раније (§ 4), не мења диаду.

На тај начин производ диаде и скалара можемо такође означити са

$$\{\vec{A},\vec{B}\}n,$$

а то значи да резултат множења диаде са скаларом не зависи од реда множитеља.

За упоређивање дате диаде $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ са диадом — производом те диаде са скаларом n, т. ј. са диадом $\{n\vec{A}, \vec{B}\}$ доведимо једну и другу диаду до редукованог облика; у том случају добићемо две диаде:

$$\{B\vec{A}, \vec{B}_0\} \qquad \text{и} \qquad \{nB\vec{A}, \vec{B}_0\}.$$

За те две диаде можемо тврдити, да су им основе исте, да су њихови правци померања такође исти, при чему та померања имају исти смер, ако је $n > 0$ и супротни смер, ако је $n < 0$. Што се тиче коефицијената тих диада, коефицијенат прве диаде има вредност

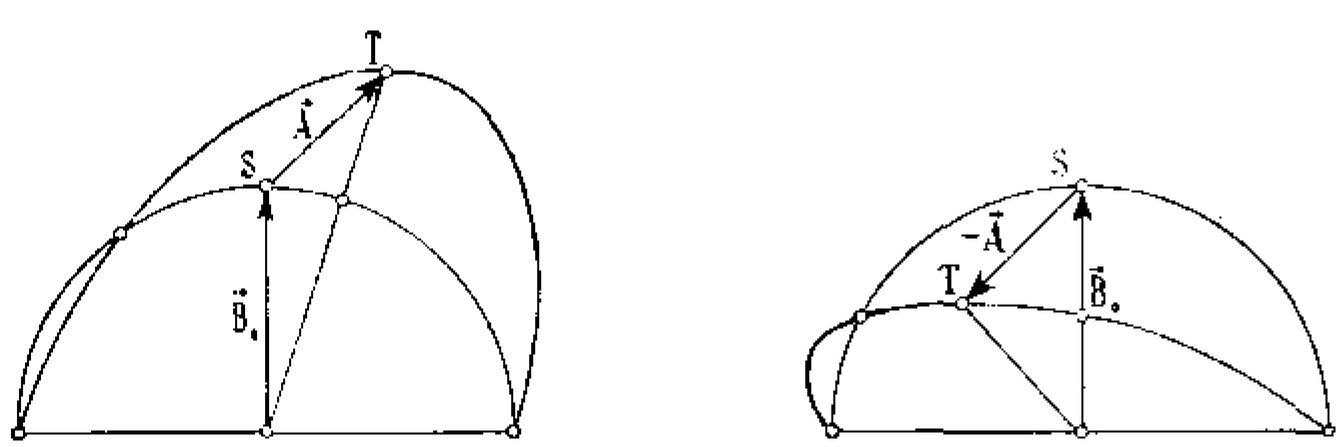
$$P = AB,$$

а коефицијенат друге

$$P_1 = |n| AB = |n| P,$$

где смо са $|n|$ означили модул скалара n. На тај начин можемо тврдити да коефицијенат диаде производа претставља производ коефицијента диаде множитеља и модула скаларног множитеља.

Јасно је да позитивна јединица као множитељ не мења диаду. Множење са негативном јединицом мења диаду. Слика 14



Слика 14.

Једна диада и њезин производ са негативном јединицом.

даје пример једне диаде и њезиног производа са негативном јединицом.

Не треба мислити да бела диада после множења са негативном јединицом постане увек црна. Анализирајмо питање о промени боје једне диаде. Као што знамо, диада има белу боју, ако две тачке S и T (слика 6) остану на истој страни од основе диаде, а то је случај при услову

$$\overline{ST} \operatorname{Cos}(\vec{A}, \vec{B}) > -1$$

или

$$(\vec{A}, \vec{B}) + 1 > 0.$$

При услову

$$(\vec{A}, \vec{B}) + 1 < 0$$

диада је црна.

Најзад при услову

$$(\vec{A}, \vec{B}) + 1 = 0$$

лежи диадина оса у основи, т. ј. елипсоид диаде дегенерише у једну равну слику. У том случају говорићемо да она губи своју боју.

Анализујући боју диада

$$Д = \{\vec{A}, \vec{B}\} \qquad \text{и} \qquad -Д = \{-\vec{A}, \vec{B}\}$$

у вези са вредношћу производа $(\vec{A}, \vec{B})$ можемо тврдити:

1. Бела диада после промене знака остаје бела, ако је

$$1 > (\vec{A}, \vec{B}) > -1$$

2. Бела постаје црна, ако је

$$(\vec{A}, \vec{B}) > 1.$$

3. Црна постаје бела при услову

$$(\vec{A}, \vec{B}) < -1$$

и никад не може црна после промене знака да остане црна, јер две неједнакости

$$(\vec{A}, \vec{B}) < -1,$$

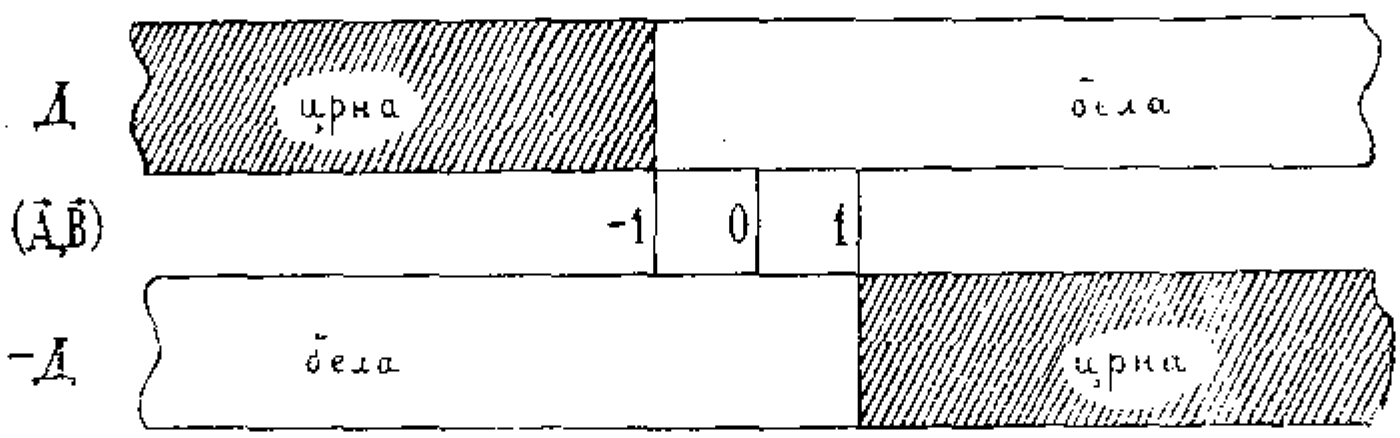
$$-(\vec{A}, \vec{B}) < -1$$

стоје у противуречју једна са другом.

Горње резултате можемо графички претставити следећом сликом (слика 15).

Ако скалар n, којим желимо да помножимо диаду $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ претставимо у облику, рецимо,

$$n = n_1 n_2 ,$$



Слика 15.

Шема боје диада Д и — Д

та два множитеља можемо да распоредимо између првог и другог члана диаде. Дакле

$$n_1 n_2 \{\vec{A}, \vec{B}\} = \{n_1 \vec{A}, n_2 \vec{B}\} = \{n_2 \vec{A}, n_1 \vec{B}\}.$$

Зауставимо се још на множењу диаде са нулом, дакле претпоставимо да је $n = 0$. Следећи општем правилу после множења добићемо диаду једног од облика:

$$\{0, \vec{B}\}, \qquad \{\vec{A}, 0\}, \qquad \{0, 0\}.$$

Прву диаду можемо да конструјишемо — она претставља сферу без промене, другим речима белу сферу [1]; другу и трећу диаду не можемо ни да конструјишемо. Све те случајеве можемо обухватити општим појмом *диада — нула*. Као што ћемо видети даље, таква на први поглед разноликост тог појма не смета општој шеми рачуна са диадама као са геометријским облицима.

7. Сабирање диада са колинеарним члановима.

Замислимо две диаде:

$$\text{Д}_1 = \{\vec{A}_1, \vec{B}_1\}, \qquad \text{Д}_2 = \{\vec{A}_2, \vec{B}_2\}.$$

[1] Диада може да претставља и црну сферу; то је, на пр., случај диаде $\{-2\vec{B}_0, \vec{B}_0\}$, али та диада више не претставља нулу.

1. Претпоставимо прво, да су вектори прве диаде колинеарни са векторима друге диаде, т. ј.

$$\vec{A}_2 = m\,\vec{A}_1\,, \qquad \vec{B}_2 = n\,\vec{B}_1\,,$$

где су m и n одређени скалари.

У таквом случају другу диаду можемо да трансформишемо следећим начином:

$$\text{Д}_2 = \{\, m\vec{A}_1\,, n\,\vec{B}_1 \,\} = mn\,\{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\}\,.$$

Начинимо сада збир од две наше диаде са ознаком:

$$\text{Д}_1 + \text{Д}_2 = \{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\} + \{\, \vec{A}_2\,, \vec{B}_2 \,\}\,.$$

Под тим збиром у специјалном случају колинеарних вектора хоћемо, по услову, да разумемо нову диаду, која се добива од полазне само множењем одређеним скаларом и то на основу следеће једначине:

$$\{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\} + m\,n\,\{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\} = (\,1 + mn\,)\,\{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\}\,.$$

Дакле можемо у опште за сабирање диада са колинеарним члановима поставити следећу једначину:

$$p\,\{\, \vec{A}\,, \vec{B} \,\} + q\,\{\, \vec{A}\,, \vec{B} \,\} = (\,p + q\,)\,\{\, \vec{A}\,, \vec{B} \,\}\,, \tag{8}$$

где су p и q произвољни скалари.

2. Претпоставимо сада, да су колинеарни само први вектори диада, дакле

$$\vec{A}_2 = m\vec{A}_1\,,$$

а други су вектори потпуно произвољни.

У том случају можемо другу диаду тако трансформисати, да она има први члан не само колинеарни, него и једнаки са првим чланом прве диаде. После тога треба да саберемо овакве две диаде:

$$\{\, \vec{A}_1\,, \vec{B}_1 \,\} + \{\, \vec{A}_1\,, m\,\vec{B}_2 \,\}.$$

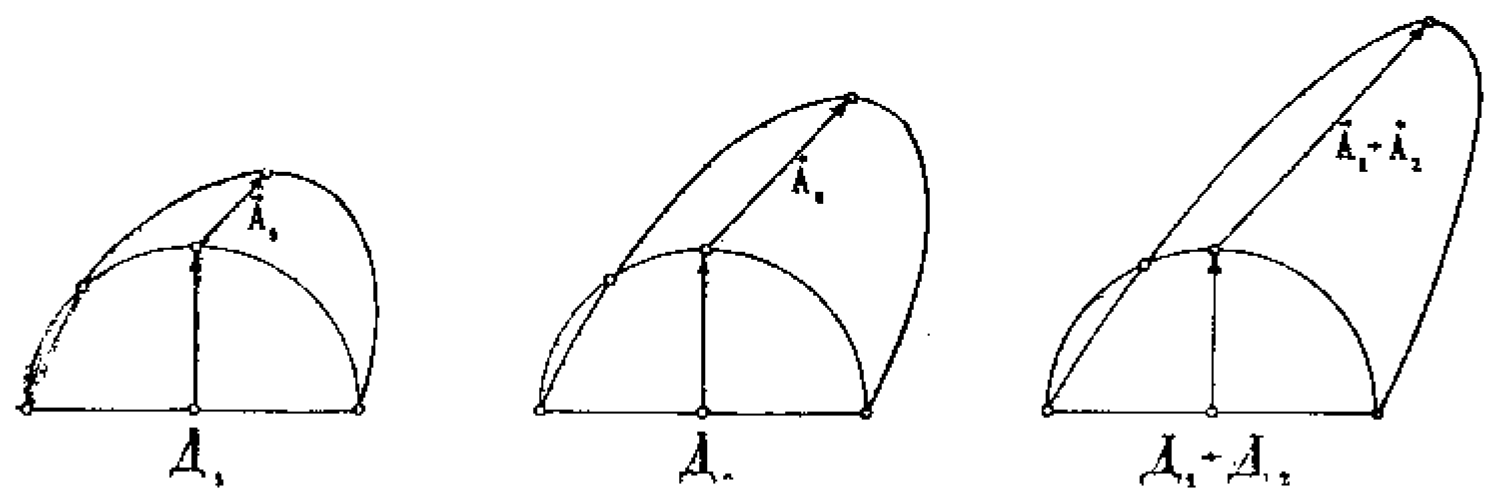
Као дефиницију за тај случај сабирања ставимо једначину:

$$\{\, \vec{A}\,, \vec{B} \,\} + \{\, \vec{A}\,, \vec{C} \,\} = \{\, \vec{A}\,, \vec{B} + \vec{C} \,\}\,, \tag{9}$$

другим речима, збир двеју диада са једнаким првим члановима претставља диаду са истим првим чланом, а другим чланом равним векторском збиру других чланова датих диада.

3. За случај колинеарности само других чланова диада, једначина, која одређује збир таквих диада, има облик:

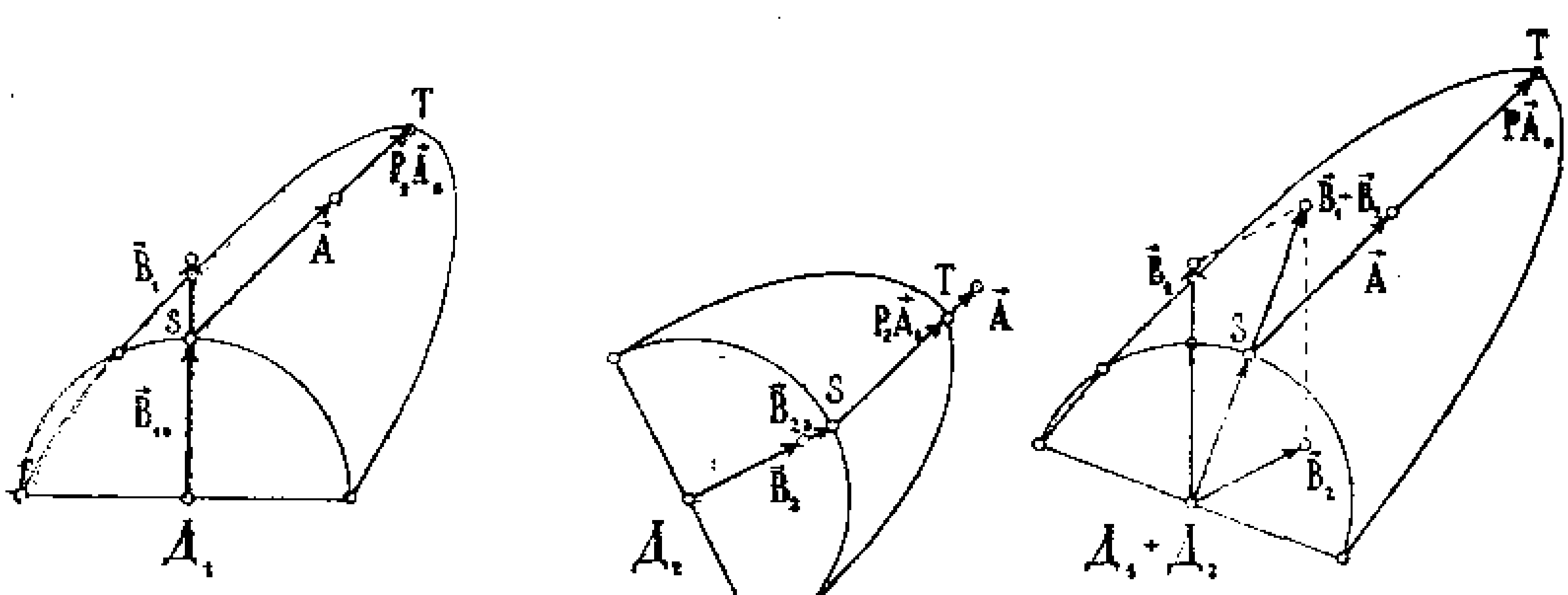
$$(10) \qquad \{\vec{A}, \vec{C}\} + \{\vec{B}, \vec{C}\} = \{\vec{A} + \vec{B}, \vec{C}\}.$$



Слика 16.

Сабирање диада са колинеарним члановима.

То значи, збир двеју диада са једнаким другим члановима претставља диаду са истим другим чланом, а првим чланом равним векторском збиру првих чланова датих диада.

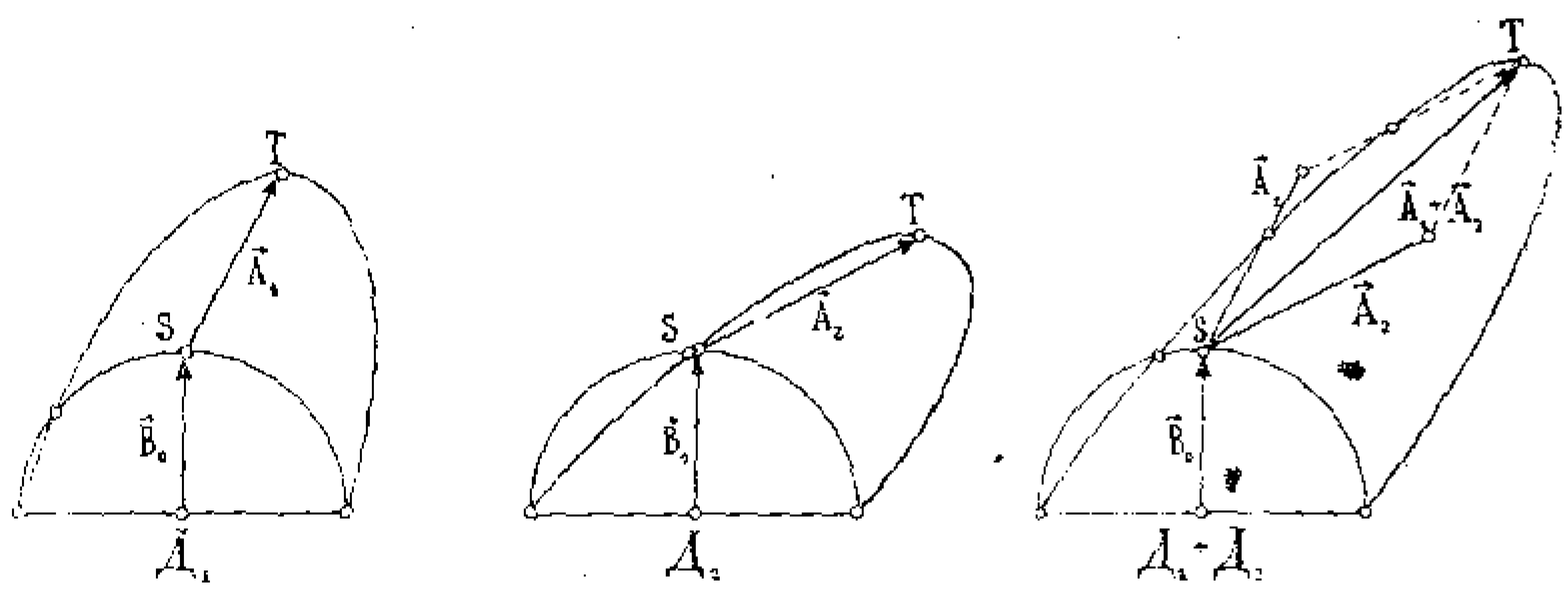


Слика 17.

Сабирање диада са колинеарним првим члановима.

Три слике (слике 16, 17, 18) дају примере сабирања диада са колинеарним члановима првог и другог пара вектора, само првог и само другог; на сликама 17 и 18 узели смо због упрошћавања цртања случај компланарних вектора: $\vec{A}$, $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, односно $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{B}$.

Једначине (8) — (10) играју улогу дефиниција сабирања диада за специјалне случајеве: оне обухватају само случајеве кад две диаде имају барем један пар колинеарних вектора. Ако диаде немају колинеарних чланова, горе наведене дефиниције не



Слика 18.

Сабирање диада са колинеарним другим члановима.

дају правила за сабирање таквих диада. Збир произвољних диада не може бити сматран у општем случају као једна нова диада — он претставља један сасвим нов геометријски облик, заједницу од две или више диада. Анализа збирова произвољних диада биће предмет друге главе. Овде ћемо да гледамо на такав збир као на једну заједницу самостално постојећих диада.

Јасно је да се правила овог параграфа за сабирање диада са колинеарним члановима такође примењују на случај сабирања више диада. Тако, на пример,

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}, \vec{B}_i, \} = \{ \vec{A}, \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i, \vec{B} \} = \{ \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i, \vec{B} \}.$$

8. Диада као производ двају вектора.

Скалар $(\vec{A}, \vec{B})$ се зове скаларни производ двају вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ из тог разлога што се он покорава следећим законима множења обична два броја:

1. комутативном

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{B}, \vec{A}),$$

2. дистрибутивном

$$(\vec{A}+\vec{B},\vec{C})=(\vec{A},\vec{C})+(\vec{B},\vec{C}).$$

Асоциативни закон, који важи за множење обичних бројева

$$(ab)c=a(bc)$$

за скаларни производ губи свој смисао.

Вектор $[\vec{A},\vec{B}]$, који се зове векторски производ, задовољава дистрибутивни закон било у погледу распоређивања десног члана:

$$[\vec{A}+\vec{B},\vec{C}]=[\vec{A},\vec{C}]+[\vec{B},\vec{C}]$$

било у погледу распоређивања левог члана:

$$[\vec{A},\vec{B}+\vec{C}]=[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{A},\vec{C}].$$

Али тај производ се не покорава комутативном закону, јер

$$[\vec{A},\vec{B}]\neq[\vec{B},\vec{A}].$$

Диада, састављена од два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\{\vec{A},\vec{B}\}$$

такође се покорава дистрибутивном закону, на име за њу важи и једна и друга једначина:

$$\{\vec{A}+\vec{B},\vec{C}\}=\{\vec{A},\vec{C}\}+\{\vec{B},\vec{C}\},$$

$$\{\vec{A},\vec{B}+\vec{C}\}=\{\vec{A},\vec{B}\}+\{\vec{A},\vec{C}\}.$$

Истинитост тих једначина непосредно следује из правила која смо поставили у претходном параграфу за сабирање диада са најмање једним колинеарним чланом.

Пошто се диада покорава дистрибутивном закону, она такође може бити сматрана као један производ нарочите природе двају вектора. Тај производ зваћемо *диадским производом* двају вектора.

Диадски се производ не покорава комутативном закону, јер

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} \neq \{\vec{B}, \vec{A}\};$$

за њега исто тако не важи асоциативни закон.

Забележимо да се сви производи двају вектора — скаларни, векторски и диадски — покоравају истом правилу за случај множења тих производа скаларом, на име:

$$n(\vec{A}, \vec{B}) = (n\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, n\vec{B}),$$

$$n[\vec{A}, \vec{B}] = [n\vec{A}, \vec{B}] = [\vec{A}, n\vec{B}],$$

$$n\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{n\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}, n\vec{B}\}.$$

Дистрибутивни закон, који важи за диадско множење вектора, даје могућност да претставимо диадски производ збирова више вектора као збир више диада, којих су чланови поједини вектори. На пример:

$$\begin{aligned} \{\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3, \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3\} &= \\ = \{\vec{A}_1, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_1, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_1, \vec{B}_3\} &+ \\ \{\vec{A}_2, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_3\} &+ \\ \{\vec{A}_3, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_3, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_3, \vec{B}_3\} &. \end{aligned} \tag{11}$$

9. Координатне диаде.

Уочимо једну диаду

$$\text{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\}$$

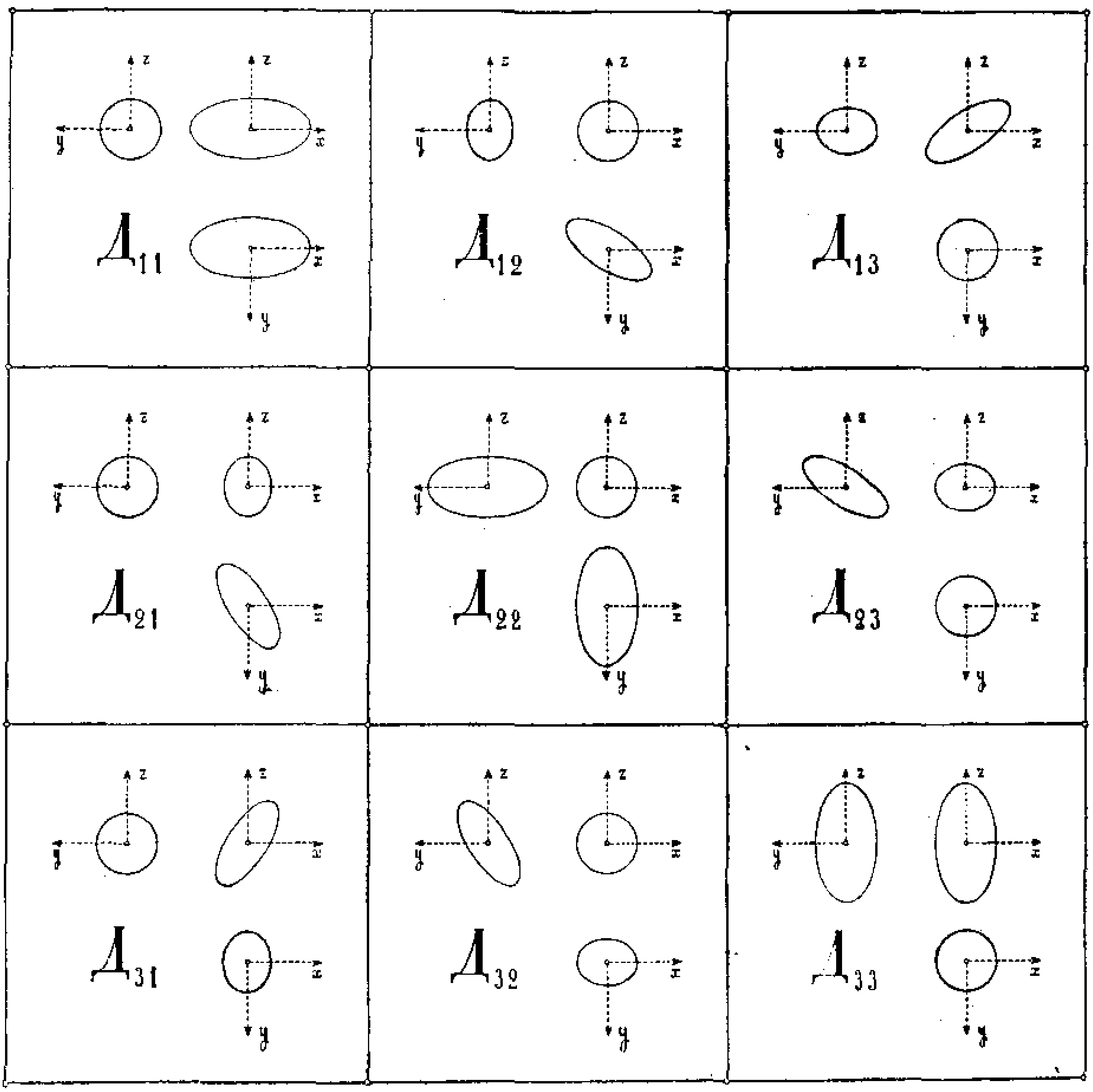
састављену од вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Сваки од вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ може бити претстављен као векторски збир његових компонената у правцима координатних оса ортогоналног триједра $Oxyz$. Ако основне ортове тог триједра означимо са i, j, k *), за векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$ можемо да напишемо следеће векторске једначине:

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k,$$

$$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k,$$

где смо са A_x, A_y, . . . , B_z означили координате одговарајућих



Слика 19.

Координатне диаде.

---

*) Пошто су те ознаке класичне, изоставили смо стрелицу над сваким од тих слова, независно од тога, да свако то слово претставља код нас један вектор.

вектора, т. ј. пројекције тих вектора на осе триједра $Oxyz$.

Ако уврстимо добивене вредности вектора у диадски производ тих вектора, добићемо по (11) следећи облик диаде:

$$
\begin{aligned}
\{\vec{A}, \vec{B}\} &= \{A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k,\ B_x\, i + B_y\, j + B_z\, k\} = \\
&= A_x B_x \{i, i\} + A_x B_y \{i, j\} + A_x B_z \{i, k\} + \\
(12) \qquad & \quad A_y B_x \{j, i\} + A_y B_y \{j, j\} + A_y B_z \{j, k\} + \\
& \quad A_z B_x \{k, i\} + A_z B_y \{k, j\} + A_z B_z \{k, k\}.
\end{aligned}
$$

У том облику фигуришу девет диада састављених од основних ортова. Те ћемо диаде звати *јединичним диадама од координатних ортова* или *координатним диадама* и због краткоће означавати са $\text{Д}_{11} = \{i, i\}$, $\text{Д}_{12} = \{i, j\}, \ldots, \text{Д}_{33} = \{k, k\}$.

Свакој јединичној диади одговара њен модел, њена површина елипсоида.

Јасно је да је свака од јединичних диада бела. На слици (слика 19) претстављени су елипсоиди тих диада помоћу пресека тих површина са координатним равнима. На први поглед тих диада можемо закључити, да постоје два различита типа јединичних диада: први тип — то су диаде од множења истих ортова, дакле Д_{11}, Д_{22}, Д_{33}, а други тип — резултат диадског множења двају ортогоналних вектора, на пример Д_{23}, Д_{32} и др. Детаљније о особинама тих диада говорићемо доцније.

10. Координате диаде.

Ако производе координата вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ диаде, који фифигуришу у обрасцу (12) означимо овако: $A_x B_x = a_{11}$, $A_x B_y = a_{12}, \ldots, A_z B_z = a_{33}$, горњи образац за сваку диаду можемо да напишемо у следећем облику:

$$
\begin{aligned}
\text{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\} = a_{11}\,\text{Д}_{11} &+ a_{12}\,\text{Д}_{12} + a_{13}\,\text{Д}_{13} + \\
a_{21}\,\text{Д}_{21} &+ a_{22}\,\text{Д}_{22} + a_{23}\,\text{Д}_{23} + \\
a_{31}\,\text{Д}_{31} &+ a_{32}\,\text{Д}_{32} + a_{33}\,\text{Д}_{33},
\end{aligned}
$$

или

$$Д = \sum_{p,q} a_{pq} Д_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3).$$

Пошто јединичне диаде $Д_{pq}$ за сваки одређени координатни триједар претстављају потпуно одређене облике, скалари a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ потпуно одређују сваку диаду у погледу тог координатног триједра и зато се зову *координате диаде.*

Раније смо видели да је за одређивање једне диаде потребно да знамо само пет скаларних величина, па према томе између девет координата a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ сваке диаде морају да постоје четири везе. Те везе можемо да напишемо овако:

$$(13) \qquad \begin{aligned} a_{23}\, a_{31}\, a_{12} &= a_{32}\, a_{13}\, a_{21}, \\ a_{11}\, a_{23} &= a_{13}\, a_{21}, \\ a_{22}\, a_{31} &= a_{21}\, a_{32}, \\ a_{33}\, a_{12} &= a_{32}\, a_{13}. \end{aligned}$$

У истинитост тих веза лако можемо да се убедимо, ако уврстимо у место координата a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ њихове вредности. На пример, у место последње једначине имамо:

$$A_z\, B_z\, A_x\, B_y = A_z\, B_y\, A_x\, B_z,$$

а ова једнакост претставља очигледан идентитет.

Написане четири везе (13) су независне, јер прва не садржи координата a_{11}, a_{22}, a_{33}, а свака од остале три садржи само по једну од тих координата.

Ако је диада дата као геометријски облик, одређивање координата диаде не претставља тешкоће: за то прво можемо да одредимо векторе диаде (§ 2), разуме се са познатом неодређеношћу, па после по векторима и координате диаде. Али је потребно забележити да у вредностима координата диаде не ће бити никакве неодређености, јер, прво, промена смера код оба два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ не ће утицати на знакове координата диаде и, друго, распоред модула вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ при услову.

$$A\, B = \text{Const.}$$

такође не ће утицати на вредности координата диаде, које зависе од производа координата вектора диаде.

Решимо сада обратно питање: на какав начин можемо да одредимо једну диаду, кад су дате њезине координате a_{pq} ($p, q = 1, 2, 3$) и кад те координате задовољавају услове (13).

Пошто су величине

$$a_{11} = A_x B_x, \quad a_{21} = A_y B_x, \quad a_{31} = A_z B_x$$

пропорционалне косинусима углова, што гради правац првог вектора са координатним осама, за одређивање тог правца имамо:

$$(14) \qquad \begin{gathered} \operatorname{Cos}(\vec{A}, x) = \pm \lambda_1 a_{11}, \quad \operatorname{Cos}(\vec{A}, y) = \pm \lambda_1 a_{21}, \\ \operatorname{Cos}(\vec{A}, z) = \pm \lambda_1 a_{31}, \end{gathered}$$

где смо са λ_1 означили:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}}.$$

На исти начин из једначина

$$a_{11} = A_x B_x, \quad a_{12} = A_x B_y, \quad a_{13} = A_x B_z$$

имамо за правац другог вектора:

$$(15) \qquad \begin{gathered} \operatorname{Cos}(\vec{B}, x) = \pm \lambda_2 a_{11}, \quad \operatorname{Cos}(\vec{B}, y) = \pm \lambda_2 a_{12}, \\ \operatorname{Cos}(\vec{B}, z) = \pm \lambda_2 a_{13}, \end{gathered}$$

где је

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}}.$$

Што се тиче двоструких знакова у једначинама (14) и (15), то питање се решава овако. Смер једног вектора, рецимо $\vec{A}$, може да буде изабран произвољно, а то значи и знак може бити у једначинама (14) изабран произвољно. После тога се знак у једначинама (15) одређује по знаку производа

$$(16) \qquad \begin{gathered} (\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \\ = AB \,.\, (\pm \lambda_1) \,.\, (\pm \lambda_2) \,.\, (a_{11}^2 + a_{12} a_{21} + a_{13} a_{31}). \end{gathered}$$

Пошто је производ AB увек позитиван, ова једначина даје могућност да одредимо знак за λ_2, ако смо изабрали знак за λ_1. Горњу једначину не можемо да искористимо у случају да су вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$ управни један на други, т. ј. при услову

$$(\vec{A}, \vec{B}) = 0;$$

али у том случају можемо да искористимо векторски производ $[\vec{A}, \vec{B}]$. Са једне стране координате тог вектора имају вредности

$$(17) \qquad \begin{aligned} A_y B_z - A_z B_y &= a_{23} - a_{33}, \\ A_z B_x - A_x B_z &= a_{31} - a_{13}, \\ A_x B_y - A_y B_x &= a_{12} - a_{21}. \end{aligned}$$

са друге стране

$$\begin{aligned} A_y B_z - A_z B_y &= AB \,.\, (\pm \lambda_1) \,.\, (\pm \lambda_2)\,(a_{21}\, a_{13} - a_{31}\, a_{12}), \\ A_z B_x - A_x B_z &= AB \,.\, (\pm \lambda_1) \,.\, (\pm \lambda_2)\, a_{11}\,(a_{31} - a_{13}), \\ A_x B_y - A_y B_x &= AB \,.\, (\pm \lambda_1) \,.\, (\pm \lambda_2)\, a_{11}\,(a_{12} - a_{21}). \end{aligned}$$

Пошто за случај управности вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ барем једна од наведених координата није равна нули, из упоређивања горњих једначина увек је могуће одредити знак за λ_2, кад је изабран знак за λ_1.

На тај начин увек је могуће одредити ортове вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ на основу координата дате диаде.

Остаје још да одредимо коефицијенат диаде, производ P модула вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Из једначине (16) непосредно имамо:

$$(18) \quad P = AB = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{(\pm \lambda_1) \,.\, (\pm \lambda_2)\,(a_{11}^2 + a_{12}\, a_{21} + a_{13}\, a_{31})}.$$

У случају ортогоналности вектора, кад је

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

можемо да искористимо координате (17) векторског производа $[\vec{A}, \vec{B}]$. Пошто је у том случају

$$\mathrm{Sin}(\vec{A}, \vec{B}) = 1,$$

модул векторског производа има вредност P и зато непосредно имамо:

$$(19) \qquad P^2 = (a_{23} - a_{32})^2 + (a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{21})^2 .$$

На тај смо начин одредили све елементе једне диаде, ако су познате координате те диаде.

Замислимо сада две диаде Δ и Δ' са координатама

$$a_{pq} \text{ и } a'_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3)$$

и решимо питање, какве услове треба да задовољавају наведене координате, да те две диаде буду једнаке.

Из услова да код једнаких диада претходни и идући вектор прве диаде треба да имају правац претходног односно идућег вектора друге диаде, непосредно следују једначине

$$a_{pq} = \lambda\, a'_{pq}, \qquad (p, q = 1, 2, 3)$$

где је λ коефицијенат пропорционалности.

Пошто код једнаких диада коефицијенти P и P' треба да имају такође једнаке вредности, било из (18), било из (19) долазимо до закључка да је

$$\lambda = 1$$

и на тај начин можемо тврдити да једнаке диаде имају исте вредности координата, т. ј.

$$a_{pq} = a'_{pq} . \qquad (p, q = 1, 2, 3)$$

Истинит је и обратни став: ако су координате диада једнаке, диаде су такође једнаке.

Нађимо још услове за конгруентност двеју диада.

Пошто је за конгруентност двеју диада довољно да су им једнаки скаларни производи њезиних вектора и модули векторских производа, имамо следеће услове конгруентности двеју диада претстављене помоћу координата:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} ,$$

$$(a_{23} - a_{32})^2 + (a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{21})^2 =$$
$$= (a'_{23} - a'_{32})^2 + (a'_{31} - a'_{13})^2 + (a'_{12} - a'_{21})^2 .$$

Напишимо још једначину површине елипсоида диаде помоћу координата те диаде.

Пошто једначина те површине у векторском облику има форму (1):

$$(1) \qquad \vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}(\vec{B}, \vec{\varrho}),$$

где је $\varrho = 1$, после пројицирања те једначине на координатне осе триједра $Oxyz$ добићемо:

$$(20) \qquad \begin{aligned} x &= (1 + a_{11}) X + a_{12} Y + a_{13} Z, \\ y &= a_{21} X + (1 + a_{22}) Y + a_{23} Z, \\ z &= a_{31} X + a_{32} Y + (1 + a_{33}) Z, \end{aligned}$$

при чему смо означили са x, y, z — кординате тачке елипсоида, а са X, Y, Z координате тачке сферне површине јединичног полупречника, — према томе

$$(21) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

Једначину (1) можемо да решимо по вектору $\vec{\varrho}$. Помножимо ту једначину скаларно са $\vec{B}$, тада имамо:

$$(\vec{B}, \vec{r}) = (\vec{B}, \vec{\varrho}) + (\vec{A}, \vec{B})(\vec{B}, \vec{\varrho}),$$

одакле

$$(22) \qquad (\vec{B}, \vec{\varrho}) = \Delta \,.\, (\vec{B}, \vec{r}),$$

где је

$$\Delta^{-1} = 1 + (\vec{A}, \vec{B}) = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

На основу (22) из једначине (1) имамо

$$\vec{\varrho} = \vec{r} - \vec{A}\Delta \,.\, (\vec{B}, \vec{r})$$

па према томе после пројицирања на координатне осе добићемо:

$$(23) \qquad \begin{aligned} X &= x - \Delta \,.\, (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z), \\ Y &= y - \Delta \,.\, (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z), \\ Z &= z - \Delta \,.\, (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z). \end{aligned}$$

Те исте резултате могуће је добити решењем система линеарних једначина (20) по променљивим X, Y, Z, али је тај пут везан са дугачким трансформацијама.

Ако сада уврстимо координате (23) у једначину (21), добићемо следећу једначину површине елипсоида диаде изражену помоћу диадиних координата:

$$\begin{aligned} &[x (1 + a_{22} + a_{33}) - y a_{12} - z a_{13}]^2 + \\ &+ [- x a_{21} + y (1 + a_{11} + a_{33}) - z a_{23}]^2 + \\ &+ [- x a_{31} - y a_{32} + z (1 + a_{11} + a_{22})]^2 = \\ &= (1 + a_{11} + a_{22} + a_{33})^2. \end{aligned}$$

За бележење диаде одређене помоћу својих координата употребљаваћемо и следеће ознаке:

$$\text{Д} = \{ a_{pq} \} = \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{23} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix} \right\}.$$

Непосредно из правила сабирања диада, које имају барем један колинеарни члан, следује да у случају сабирања, рецимо двеју диада, координате збира имају вредности збирова координата диада сабирака. Дакле, ако упоредно са горе наведеном диадом Д имамо још другу диаду $\text{Д}' = \{ a'_{pq} \}$, збир тих диада помоћу координата можемо написати овако:

$$\text{Д} + \text{Д}' = \left\{ \begin{matrix} a_{11} + a'_{11}, & a_{12} + a'_{12}, & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} + a'_{21}, & a_{22} + a'_{22}, & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} + a'_{31}, & a_{32} + a'_{32}, & a_{33} + a'_{33} \end{matrix} \right\}$$

или

$$\{ a_{pq} \} + \{ a'_{pq} \} = \{ a_{pq} + a'_{pq} \}. \qquad (p, q = 1, 2, 3).$$

11. Независне координате диаде. Инварианте диаде.

Између девет координата a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ једне диаде постоје четири независне везе (13). Природно је поставити питање о *независним координатама* једне диаде.

Пошто диаду одређују два орта $\vec{A}_0$, $\vec{B}_0$ и коефицијенат P, можемо тврдити да за независне координате једне диаде могу да буду усвојене следеће величине:

1) сферне координате φ_A, ψ_A краја орта $\vec{A}_0$ у погледу триједра $Oxyz$, при чему је φ_A угао тог орта са Oxy равни, а ψ_A угао између Oxz равни и равни тог орта и z осе,

2) сферне координате φ_B, ψ_B краја орта $\vec{B}_0$ истим начином конструјисане,

3) коефицијенат $P = AB$ диаде.

Ако са λ означимо један произвољан позитиван број, координате вектора те диаде могу бити претстављене овако:

$$
\begin{aligned}
A_x &= \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Cos} \psi_A , \\
A_y &= \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Sin} \psi_A , \\
A_z &= \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Sin} \varphi_A ; \\
B_x &= \pm \frac{1}{\lambda} P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Cos} \psi_B , \\
B_y &= \pm \frac{1}{\lambda} P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Sin} \psi_B , \\
B_z &= \pm \frac{1}{\lambda} P^{\frac{1}{2}} \operatorname{Sin} \varphi_B .
\end{aligned}
\tag{24}
$$

при чему од двоструких знакова можемо бирати за обе групе вредности или горњи или доњи.

Из написаних вредности координата вектора непосредно следују следеће вредности координата саме диаде:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Cos} \psi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Cos} \psi_B , \\
a_{21} &= P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Sin} \psi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Cos} \psi_B , \\
a_{31} &= P \operatorname{Sin} \varphi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Cos} \psi_B , \\
a_{12} &= P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Cos} \psi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Sin} \psi_B ,
\end{aligned}
$$

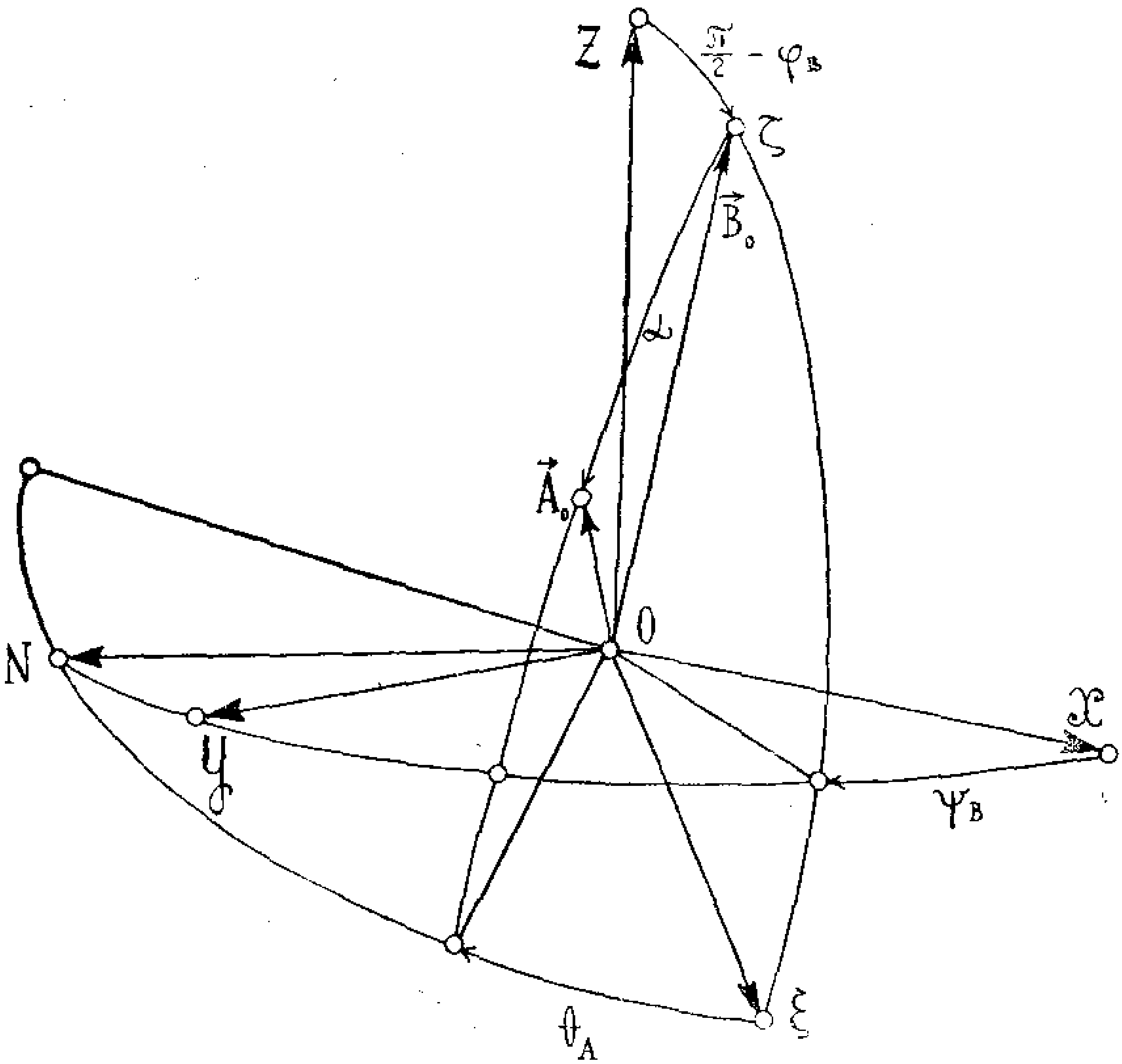
$$a_{22} = P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Sin} \psi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Sin} \psi_B ,$$

$$a_{32} = P \operatorname{Sin} \varphi_A \operatorname{Cos} \varphi_B \operatorname{Sin} \psi_B ,$$

$$a_{13} = P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Cos} \psi_A \operatorname{Sin} \varphi_B ,$$

$$a_{23} = P \operatorname{Cos} \varphi_A \operatorname{Sin} \psi_A \operatorname{Sin} \varphi_B ,$$

$$a_{33} = P \operatorname{Sin} \varphi_A \operatorname{Sin} \varphi_B .$$



Слика 20.

Координате оријентације једне диаде.

Јасно је да се помоћу тих израза везе (13) идентично задовољавају.

Независне координате једне диаде можемо да изаберемо тако, да једна група тих координата одређује положај диаде, а друга форму.

Као пример наведимо следеће координате диаде:

1. Координате оријентације:

a) φ_B, ψ_B — горе споменуте сферне координате орта $\vec{B}_0$.

b) θ_A — угао између равни, што пролази кроз $\vec{B}$ и Oz осу' и равни, што пролази кроз исти вектор $\vec{B}$ и вектор $\vec{A}$ (Слика 20).

2. Координате форме:

a) α — угао између вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$,

b) P — коефицијенат диаде.

Координате вектора $\vec{B}$ у овом случају имају исте вредности као и у једначинама (24), а што се тиче координата вектора $\vec{A}$, оне имају следеће вредности:

$$A_x = \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} (\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\theta_A \operatorname{Cos}\varphi_B \operatorname{Sin}\psi_B - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\theta_A \operatorname{Sin}\psi_B + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\varphi_B \operatorname{Cos}\psi_B),$$

$$A_y = \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} (\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\theta_A \operatorname{Sin}\varphi_B \operatorname{Sin}\psi_B + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\theta_A \operatorname{Cos}\psi_B + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\varphi_B \operatorname{Sin}\psi_B),$$

$$A_z = \pm \lambda P^{\frac{1}{2}} (-\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\theta_A \operatorname{Cos}\varphi_B + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\varphi_B),$$

које се могу лако добити елементарном анализом сферних троуглова, нарочито кад уведемо у расуђивање помоћни триједар $ON\xi\varsigma$.

На основу вредности координата вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ без икакве тешкоће могли бисмо да напишемо координате a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ диаде, али не ћемо да наводимо њихове вредности, пошто су оне доста дугачке, а за нас не играју улогу у детаљним расматрањима.

Ако хоћемо једну дату диаду да конструјишемо у произвољном положају у простору, за то конструјисање довољно је да знамо само координате те друге категорије — координате форме. Из тог разлога те координате можемо да зовемо *природним координатама диаде.*

У нашем случају су α и P природне координате диаде.

Координате оријентације једне диаде зависе од избора координатног система према коме хоћемо њен положај да одредимо.

Координате форме се не мењају, остају исте за сваку врсту координата једне диаде; те координате претстављају *инварианте* диаде. У нашем случају величине α и P су инварианте диаде. Јасно је да свака функција тих величина претставља такође инварианту. Нарочито важне инварианте диаде то су два производа

$$P \operatorname{Cos} \alpha \qquad \text{и} \qquad P \operatorname{Sin} \alpha.$$

Први производ претставља скаларни производ чланова диаде, други има вредност модула векторског производа истих чланова. На тај начин можемо тврдити да две инварианте диаде могу бити претстављене још и у облику:

$$(\vec{A}, \vec{B}) \qquad \text{и} \qquad \overline{[\vec{A}, \vec{B}]}.$$

Помоћу диадиних координата те се инварианте изражавају овако:

$$(\vec{A}, \vec{B}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\overline{[\vec{A}, \vec{B}]} = [(a_{23} - a_{32})^2 + (a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{21})^2]^{\frac{1}{2}}$$

Са једном шемом од девет величина

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

могуће је довести у везу три скалара

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и један вектор $\vec{V}$ са координатама:

$$V_x = a_{23} - a_{32}\,,$$
$$V_y = a_{31} - a_{13}\,,$$
$$V_z = a_{12} - a_{21}\,.$$

Први скалар S_1 не претставља ништа друго до инварианту $(\vec{A}, \vec{B})$. Што се тиче другог и трећег скалара, они имају идентичне вредности нуле:

$$S_2 = 0\,, \qquad\qquad S_3 = 0\,,$$

у што се можемо лако уверити кад уврстимо у место вредности координата диаде, њихове изразе помоћу координата чланова диаде.

Вектор $\vec{V}$ претставља векторски производ вектора диаде, дакле

$$\vec{V} = [\vec{A}, \vec{B}]\,.$$

Његов модул претставља такође једну инварианту.

12. Разлагање диаде на диаду истезања и диаду смицања.

Уочимо једну произвољну диаду

$$Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}$$

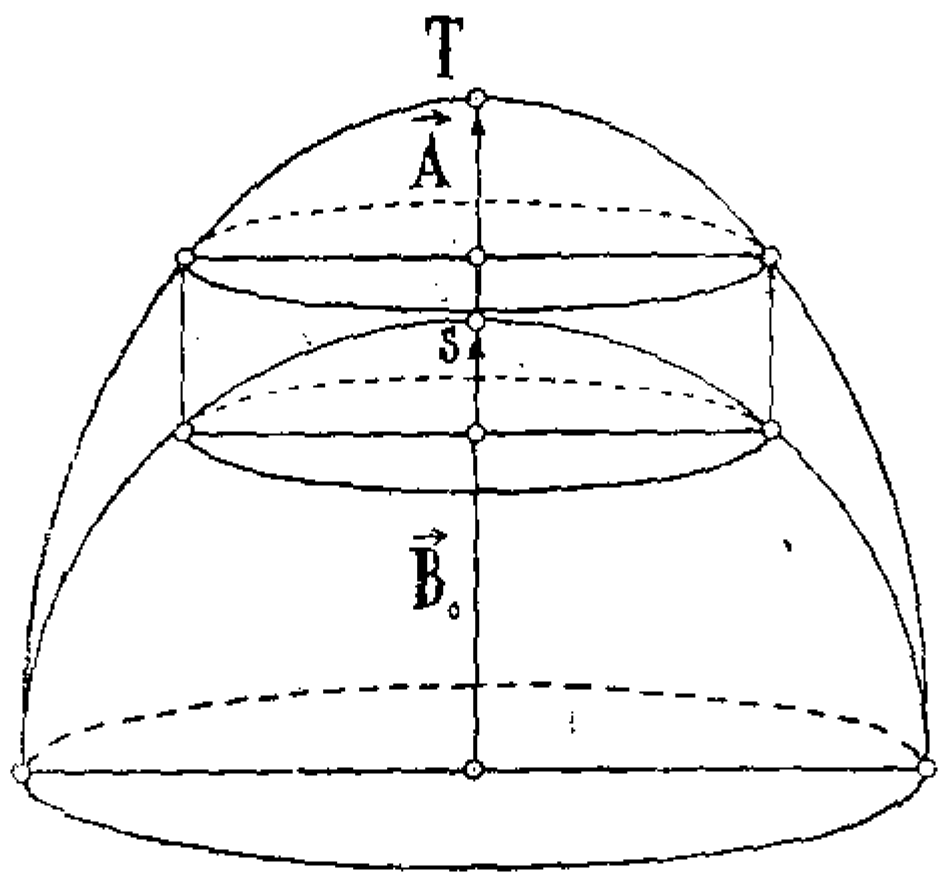
Раставимо први вектор те диаде $\vec{A}$ у две компоненте: једну $\vec{A}_к$ у правцу вектора $\vec{B}$, значи колинеарну са тим вектором, и другу $\vec{A}_п$ ортогоналну на правац тог истог вектора $\vec{B}$, дакле имамо

$$\vec{A} = \vec{A}_к + \vec{A}_п\,.$$

Ако уврстимо ту вредност вектора $\vec{A}$ у израз за диаду, она ће се распасти у две диаде:

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}_к, \vec{B}\} + \{\vec{A}_п, \vec{B}\}\,.$$

Прва диада је састављена од колинеарних вектора. Такву ћемо диаду звати *диадом истезања* и то из тог разлога што *) елипсоид модела те диаде претставља обртни елипсоид са осом ротације правом линијом, којој припадају оба два вектора: $\vec{B}$ и $\vec{A}_k$. Појам истезања употребљујемо овде у општем смислу: ту



Слика 21.

Бела диада правог истезања.

спада и право истезање и скраћивање, којем одговара један спљоштени елипсоид. Дајемо три примера диаде истезања: прва слика (слика 21) даје белу диаду правог истезања; друга (слика 22) показује белу диаду скраћивања и најзад трећа слика (слика 23) даје пример црне диаде истезања.

Обратимо пажњу на један специалан случај када је

$$\vec{A}_k = -\vec{B}$$

и при томе коефицијенат диаде $\{\vec{A}_k, \overleftarrow{B}\}$ има вредност јединице, т. ј.

$$A_k B = P = 1.$$

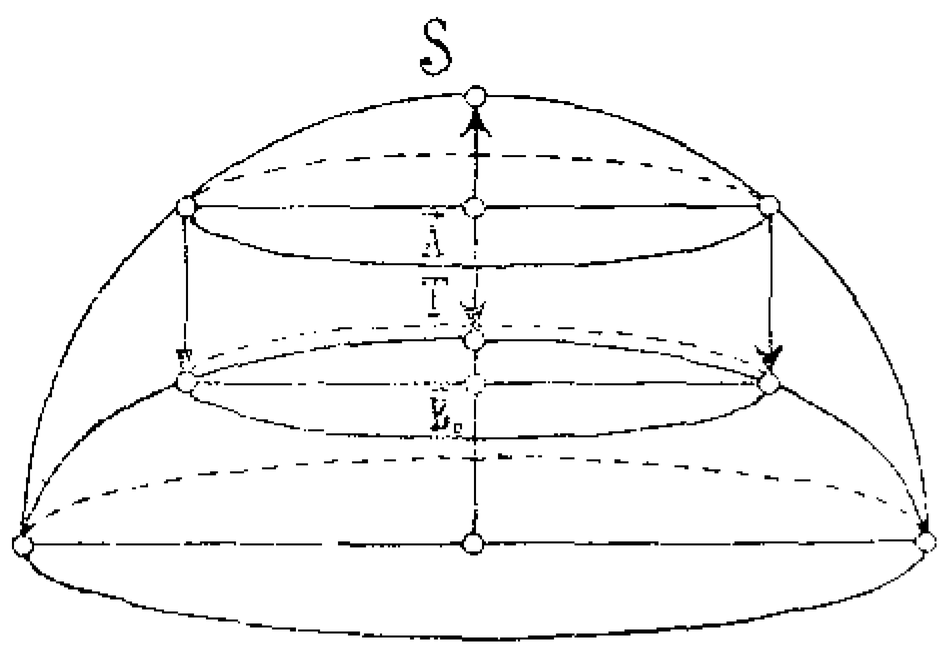
У овом случају диаду можемо претставити овако:

$$\{-\vec{B}_0, \vec{B}_0\},$$

*) Сфера од изотропног материјала, истезана у правцу вектора $\vec{A}_k$, прелази у обртни елипсоид са осом $\vec{B}$. Елипсоид је **издужен**, ако $\vec{A}_k$, $\vec{B}$ имају исти смер (истезање), **спљоштен**, ако су смерови супротни (сабијање).

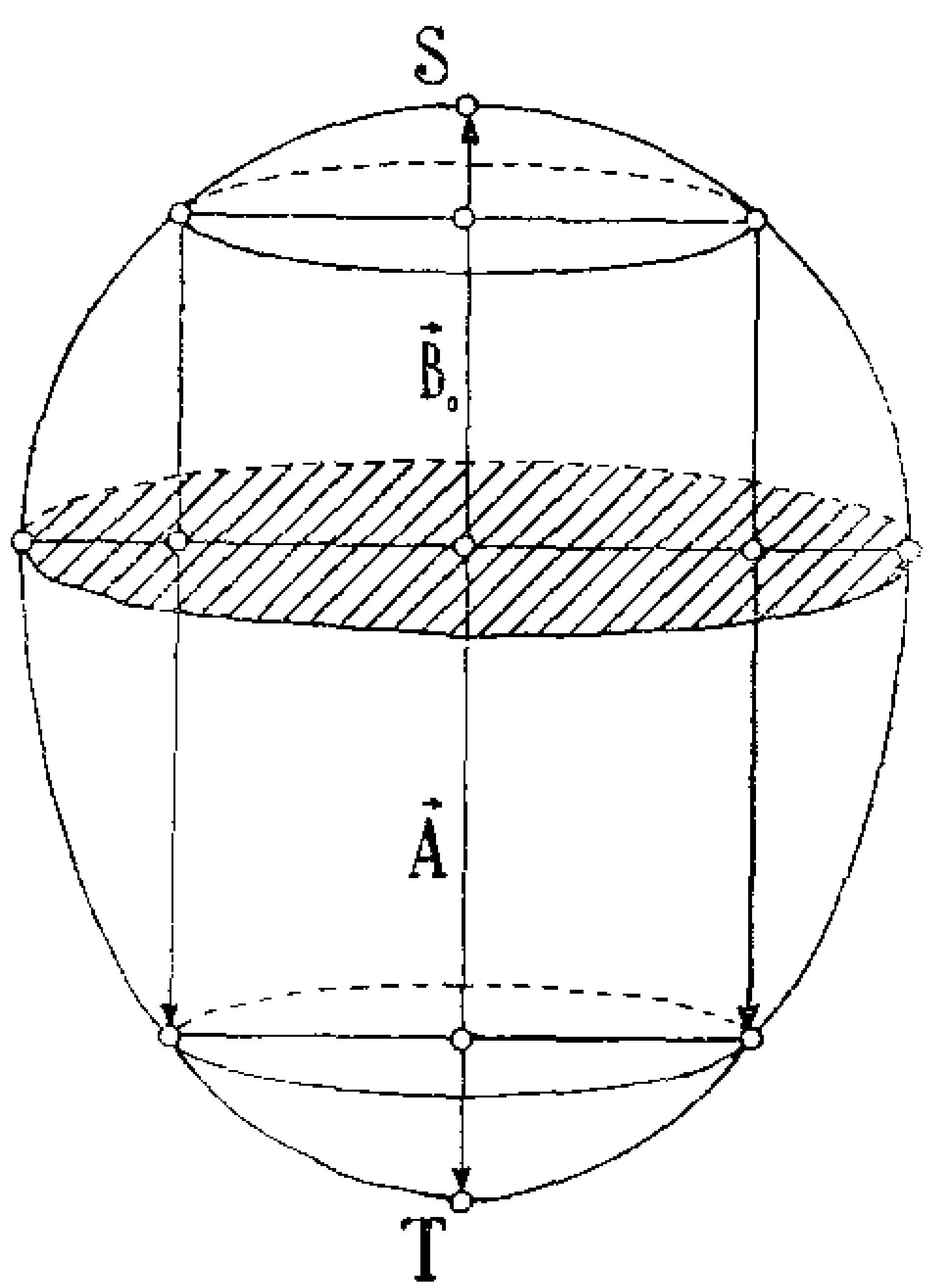
где је $\vec{B}_0$ орт вектора $\vec{B}$. Површини елипсоида диаде у том случају одговара једначина:

$$\vec{r} = \vec{\varrho} - \vec{B}_0 (\vec{B}_0 , \vec{\varrho}).$$



Слика 22.

Бела диада скраћивања.



Слика 23.

Црна диада истезања.

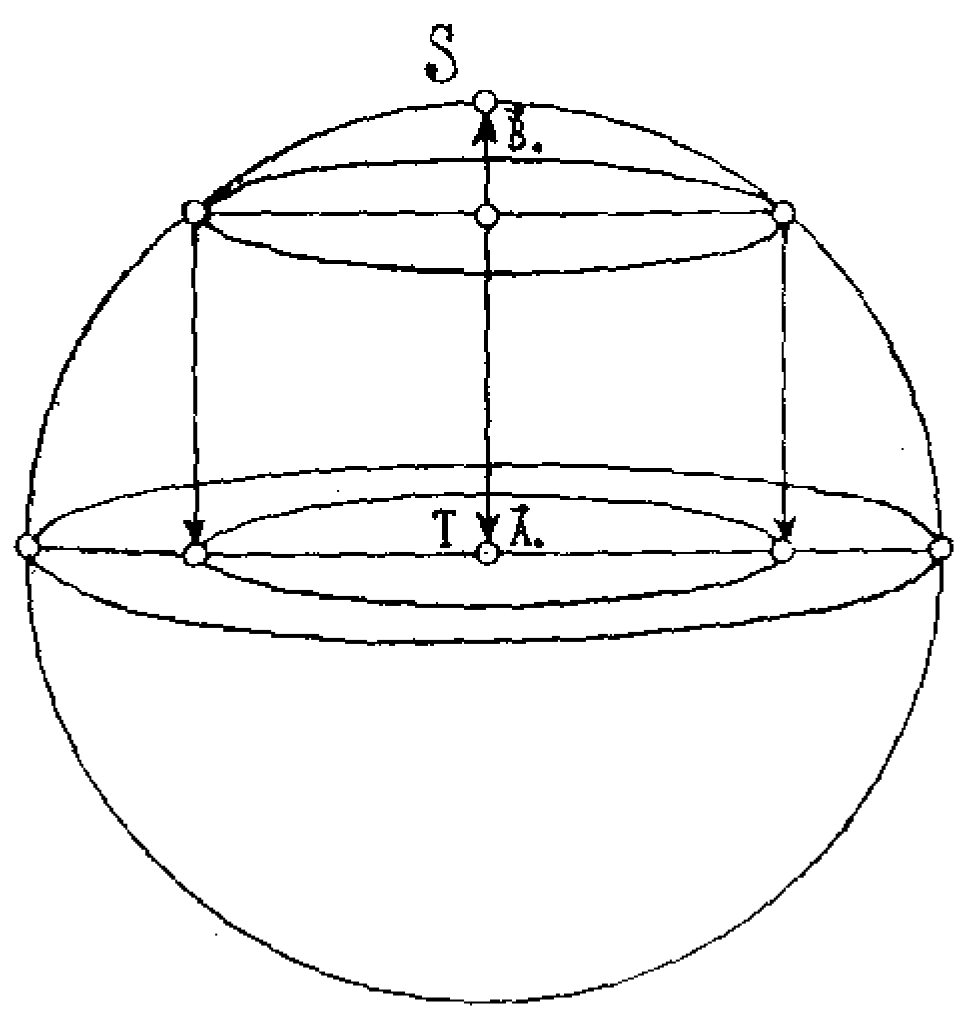
Она показује да елипсоид диаде у овом случају дегенерише у круг, у један *округли диск* јединичног полупречника (слика 24).

Сваку диаду истезања могуће је претставити у облику производа једног скалара, било позитивног, било негативног, и диаде од два једнака орта. Заиста, ако су $\vec{B}$ и $\vec{A}_k$ два колинеарна вектора, можемо ставити:

$$\vec{B} = m\,\vec{B}_0\,,$$

$$\vec{A}_k = n\,\vec{B}_0\,,$$

где су m и n скалари, при чему скалар n може да буде негативан, ако је смер вектора $\vec{A}_k$ супротан смеру вектора $\vec{B}$.



Слика 24.

Диада у облику округлог диска.

ко те вредности ставимо у нашу диаду, добићемо:

$$\{\vec{A}_k\,,\ \vec{B}\} = \{n\,\vec{B}_0\,,\ m\,\vec{B}_0\} = mn\,\{\vec{B}_0\,,\ \vec{B}_0\}\,,$$

а то и потврђује наш став.

Диада

$$\{\vec{B}_0\,,\ \vec{B}_0\}$$

се зове *јединична диада истезања.* Та се диада разликује од следећих координатних јединичних диада истезања

$$\{i, i\}, \quad \{j, j\}, \quad \{k, k\}$$

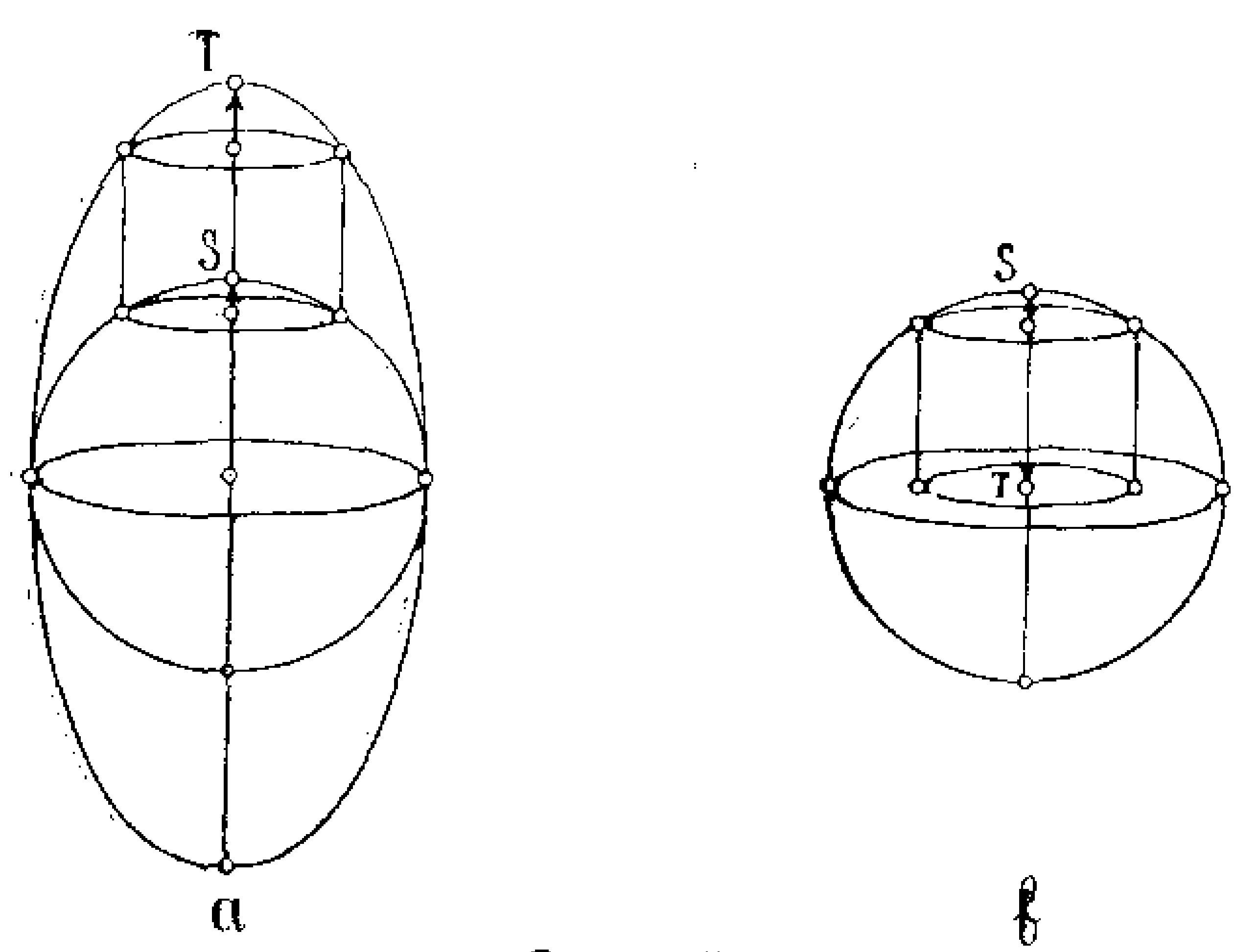
само својим положајем у простору; форма свих тих диада је иста.

Скаларни множитељ $mn = k_1$ код произвољне диаде истезања зове се *коефицијенат истезања* те диаде. Јасно је да за сваку диаду истезања апсолутна вредност коефицијента истезања има вредност коефицијента те диаде, дакле

$$|k_1| = |mn| = P_k,$$

где је P_k коефицијенат диаде истезања.

Напоменимо да множење диаде истезања са скаларним множитељем не одузима ротациони карактер модела елипсоида



Слика 25.

a. Диада $\{i, i\}$ *b.* Диада $\{-i, i\}$

диаде, али оно мења карактер истезања — меру истезања, а може променити и смисао. Тако две диаде:

$$\mathbf{Д}_{11} = \{i, i\}$$

$$-\mathbf{Д}_{11} = -\{i, i\} = \{-i, i\}$$

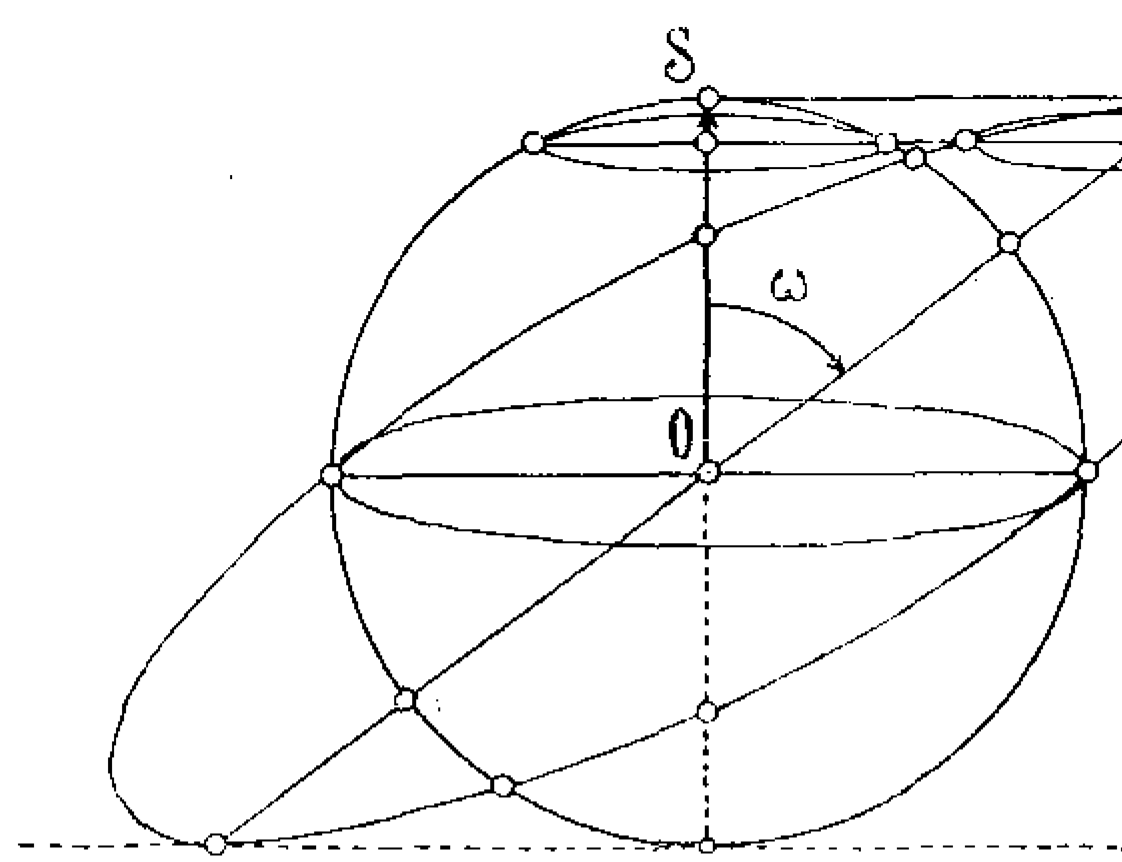
сасвим су различите форме: прву претставља ротациони елип-

соид (слика 25, a) са великом осом два пута већом од мале, а другу (слика 25, b) претставља округли диск са основом претходне диаде.

Друга диада

$$\{\vec{A}_0, \vec{B}\}$$

састављена је од вектора управних међу собом. Ту диаду можемо да зовемо *диадом смицања*. Правац померања такве диаде паралелан је са основом диаде: сваки кружни пресек сфере, управни на вектор $\vec{B}$, помакнут је у равни паралелној са основом диаде и то тако, да се центри свих тих кругова налазе на једној правој OT (слика 26); читав се елипсоид смести између



Слика 26.

Диада смицања.

две паралелне равни, што додирују сферу у крајевима пречника правца вектора $\vec{B}$.

Угао, што гради вектор $\vec{B}$ са правом OT, осом диаде, зове се *угао смицања* дате диаде смицања. Тај угао означимо са ω, а његов тангенс са k_2, дакле

$$k_2 = \operatorname{tg} \omega .$$

Број k_2 зваћемо *коефицијентом смицања* диаде. Тај коефицијенат се одређује из једначине:

$$k_2 = \operatorname{tg}\omega = A_n B = P_n \ ,$$

где је P_n коефицијенат диаде смицања.

На тај начин сваку диаду истезања можемо да напишемо у облику:

$$\text{Д}_k = k_1 \{ \vec{B}_0 , \vec{B}_0 \} ,$$

а сваку диаду смицања овако:

$$\text{Д}_n = k_2 \{ \vec{N}_0 , \vec{B}_0 \} ,$$

где смо са $\vec{N}_0$ означили орт нормални на вектор $\vec{B}$, а у равни и у страну вектора $\vec{A}$.

Дакле за сваку произвољну диаду можемо да напишемо једначину:

$$\text{Д} = \text{Д}_k + \text{Д}_n =$$

$$= \{ \vec{A} , \vec{B} \} = k_1 \{ \vec{B}_0 , \vec{B}_0 \} + k_2 \{ \vec{N}_0 , \vec{B}_0 \}$$

Израчунајмо сада вредности коефицијената k_1 и k_2 за једну произвољну диаду.

Пошто је

$$\vec{A}_k = A \operatorname{Cos} \alpha \, . \, \vec{B}_0 , \qquad \vec{A}_n = A \operatorname{Sin} \alpha \, . \, \vec{N}_0 ,$$

где је α угао између вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, имамо

$$\{ \vec{A} , \vec{B} \} = \{ \vec{A}_k , \vec{B} \} + \{ \vec{A}_n , \vec{B} \} =$$

$$= \{ A \operatorname{Cos} \alpha \, . \, \vec{B}_0 , \vec{B} \} + \{ A \operatorname{Sin} \alpha \, . \, \vec{N}_0 , \vec{B} \} =$$

$$= A B \operatorname{Cos} \alpha \{ \vec{B}_0 , \vec{B}_0 \} + A B \operatorname{Sin} \alpha \{ \vec{N}_0 , \vec{B}_0 \}$$

или дефинитивно

$$(25) \qquad \{ \vec{A} , \vec{B} \} = (\vec{A} , \vec{B}) \{ \vec{B}_0 , \vec{B}_0 \} + \overline{[\vec{A} , \vec{B}]} \{ \vec{N}_0 , \vec{B}_0 \} ,$$

значи

$$k_1 = (\vec{A} , \vec{B}) , \qquad k_2 = \overline{[\vec{A} , \vec{B}]} \, .$$

Једначину (25) можемо да изразимо у облику следеће теореме:

Ако једну произвољну диаду разложимо на диаду истезања и диаду смицања, коефицијенат истезања прве диаде има вредност скаларног производа вектора чланова диаде, а коефицијенат смицања друге једнак је модулу векторског производа тих истих вектора.

Из једначине (25) непосредно следују услови да се наша диада редукује или само на диаду истезања или само на диаду смицања.

Неопходан и довољан је услов за диаду истезања да је

$$[\vec{A}, \vec{B}] = 0,$$

а за диаду смицања, да је

$$(\vec{A}, \vec{B}) = 0.$$

Од координатних диада три диаде

$$\{i, i\}, \qquad \{j, j\} \qquad \{k, k\}$$

претстављају *јединичне диаде истезања*; те се диаде разликују једна од друге само правцем у којем имамо истезања. Коефицијенти тих диада су јединице. Оне су конгруентне.

Остале од координатних диада су *јединичне диаде смицања*, јер општи облик такве диаде има форму:

$$\{\vec{N}_0, \vec{B}_0\}$$

Угао смицања за те диаде има вредност 45^0. Пошто се те диаде разликују једна од друге само оријентацијом у простору, свака од тих диада може да буде добивена од какве друге путем ротације око једне осовине. Ако желимо да вршимо ротације само око координатних оса, једну диаду можемо да доведемо до поклапања са другом путем једног или двоструког обртања око тих оса за 90^0 или 180^0. Ако узмемо за диаду упоређивања, рецимо, диаду $\{i, j\}$, остале пет диада могу да буду добивене, на пример, следећим начином:

диаду $\{i, k\}$ добићемо после ротације око i осе за угао 90^0,
» $\{j, i\}$ » » » » k » » » 90^0 и
око i осе за 180^0

диаду $\{ j, k \}$ добићемо после ротације око i осе за угао 90^0 и око k осе за 90^0

» $\{ k, i \}$ » » » » k осе за угао 90^0 и око i осе за -90^0

» $\{ k, j \}$ » » » » j осе за угао -90^0.

Разлагање сваке диаде на диаду истезања и диаду смицања очито показује врло важну улогу тог геометријског облика, коју он игра у многим научним дисциплинама.

Скаларни производ двају вектора има широку примену у теорији пројекција, он претставља рад силе на датом померању и др.; он се сада одомаћио у механици, у математској физици, у електротехници и другим суседним дисциплинама.

Векторски производ двају вектора добио је нарочиту важност, пошто он игра улогу момента, рецимо силе, количине кретања и др. у погледу одређене тачке. Тај геометријски облик такође је добио потпуно уважење у горе наведеним наукама.

Диадски производ двају вектора такође може бити сматран као потпуно конкретни геометријски облик и то такве природе, да његово увођење у многа питања механике, нарочито промењљивих средина, и математске физике мора да у великој мери скрати и олакша расуђивање у тим областима. Раније је он фигурисао као један више формалан оператор и у том облику је добио уважење; сада, кад у вези са њим стоји јасна конкретна геометријска слика, он може само да појача свој значај, да дубље продре у већ заузете гране науке.

Решимо још питање о томе како треба да напишемо координате диаде истезања и диаде смицања, ако је диада $\{ \vec{A}, \vec{B} \}$ дата помоћу својих координата a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ у погледу једног ортогоналног триједра $Oxyz$.

За одређивање координата диаде

$$\text{Д}_к = (\vec{A}, \vec{B}) \{ \vec{B}_0, \vec{B}_0 \}$$

узмимо у обзир координате (15) вектора $\vec{B}_0$:

$$\pm \lambda_2 a_{11}, \quad \pm \lambda_2 a_{12}, \quad \pm \lambda_2 a_{13},$$

где је

$$\lambda_2^2 = (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2)^{-1}.$$

Ако уврстимо те координате и узмемо још у обзир да је

$$(\vec{A}, \vec{B}) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

добићемо следећу вредност диаде $Д_k$:

$$Д_k = K \cdot \begin{Bmatrix} a_{11}^2, & a_{11}a_{12}, & a_{11}a_{13} \\ a_{12}a_{11}, & a_{12}^2, & a_{12}a_{13} \\ a_{13}a_{11}, & a_{13}a_{12}, & a_{13}^2 \end{Bmatrix},$$

где је

$$K = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}.$$

Координате друге диаде $Д_n$ после тог можемо да добијемо из једначине

$$Д_n = Д - Д_k$$

и то, рецимо, у следећем облику:

$$Д_n = \begin{Bmatrix} a_{11} - Ka_{11}^2, & a_{12} - Ka_{11}a_{12}, & a_{13} - Ka_{11}a_{13} \\ a_{21} - Ka_{12}a_{11}, & a_{22} - Ka_{12}^2, & a_{23} - Ka_{12}a_{13} \\ a_{31} - Ka_{13}a_{11}, & a_{32} - Ka_{13}a_{12}, & a_{33} - K_{23}^2 \end{Bmatrix}$$

Не би тешко било видети да ћемо, ако пођемо од других координата диаде за одређивање координата вектора $\vec{B}_0$, добити исте бројне вредности координата једне и друге диаде; при томе треба да се руководимо везама (13) између координата диаде.

13. Коњуговане диаде.

Замислимо једну произвољну диаду

$$(26) \qquad Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}.$$

Тој диади одговара један модел елипсоида конструјисаног одређеним начином са векторима $\vec{A}$ и $\vec{B}$: основа те диаде стоји управно на вектор $\vec{B}$, а правац померања одређен је вектором $\vec{A}$. Коефицијенат те диаде има вредност производа AB.

Упоредно са нашом диадом конструишимо нову диаду

$$(27) \qquad Д^c = \{\vec{B}, \vec{A}\},$$

коју смо добили из претходне променом реда множитеља тог диадског производа. Код те диаде је основа управна на вектор $\vec{A}$, а правац померања одређен је вектором $\vec{B}$.

Две диаде, које се разликују редом вектора са којим су оне конструјисане, зову се *коњуговане*.

Диада (26) је коњугована диади (27) и обратно.

Коњуговану диаду обележили смо додавањем слова c горе. Јасно је да је

$$(Д^c)^c = Д.$$

За лакше упоређивање двеју коњугованих диада трансформишимо једну и другу диаду тако, да претходни и идући чланови тих диада имају исте модуле. То је увек могуће. У § 4 видели смо да су две диаде

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} \quad \text{и} \quad \{m\vec{A}, \tfrac{1}{m}\vec{B}\}$$

једнаке. На тај начин, ако је

$$A \neq B,$$

можемо бирати за m вредност

$$m = \sqrt{\frac{B}{A}};$$

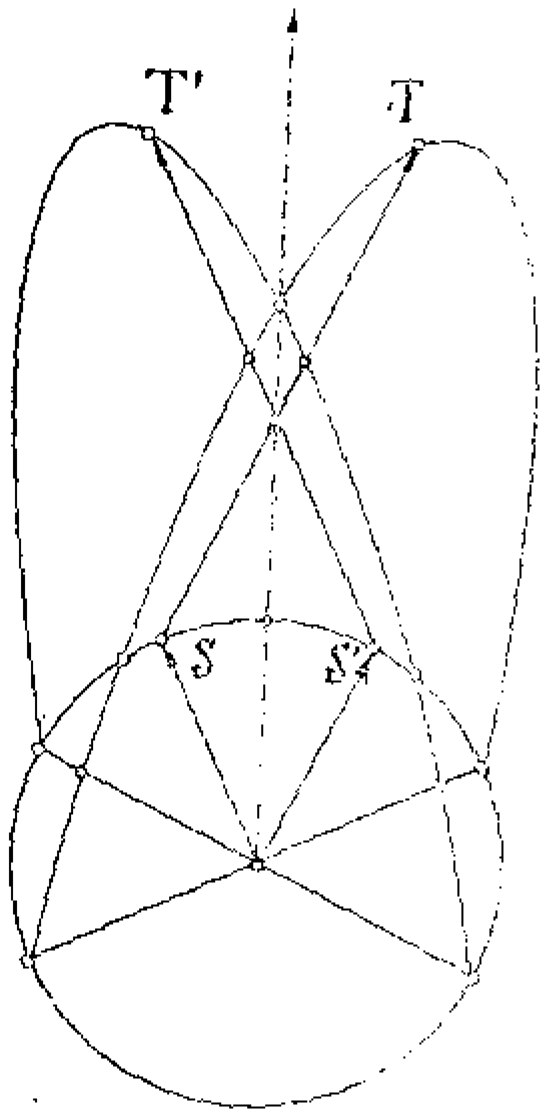
са том вредношћу скалара m нашу диаду можемо претставити овако:

$$Д = \{\vec{A}, \vec{B}\} = \left\{\sqrt{\frac{B}{A}}\, A\vec{A}_0, \sqrt{\frac{A}{B}}\, B\vec{B}_0\right\} = \left\{\sqrt{AB}\,\vec{A}_0, \sqrt{AB}\,\vec{B}_0\right\},$$

а то и потврђује наш став.

Дакле сада, без ограничења потпуне произвољности и општности дате диаде $\{\vec{A}, \vec{B}\}$, можемо рачунати да су модули вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ једнаки.

За две коњуговане диаде можемо тврдити да су оне конгруентне. Ако обрнемо диаду $\{\vec{A}, \vec{B}\}$, око осе што полови угао између $\vec{A}$ и $\vec{B}$ за 180^0, одговарајући елипсоиди ће се поклопити (*слика* 27).



Слика 27.

Коњуговане диаде.

За упоређивање јединичних коњугованих диада конструјисаних са координатним ортовима, можемо да искористимо слику 19. Из те слике непосредно следује да је за коњуговане диаде

$$\mathbf{Д}_{12} = \{i, j\}$$

$$\mathbf{Д}_{21} = \{j, i\} = \mathbf{Д}^c_{12}$$

оса ротације симетрала угла Oxy; за диаде

$$\mathbf{Д}_{13} = \{i, k\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Д}_{31} = \{k, i\}$$

осу претстављa симетрала угла Oxz; најзад за диаде

$$\mathbf{Д}_{23} = \{j, k\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Д}_{32} = \{k, j\}$$

је оса симетрала угла Oyz.

Анализујмо вредности скалара S_1, S_2, S_3 за дату и коњуговану диаду. Пошто је

$$S_1 = (\vec{A}, \vec{B})$$

а тај производ се не мења са променом улоге вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, можемо тврдити да први скалар диаде задржава своју вредност и за коњуговану диаду. То исто важи за други и трећи скалар, јер за сваку диаду они имају вредности нуле.

Што се тиче вектора диаде

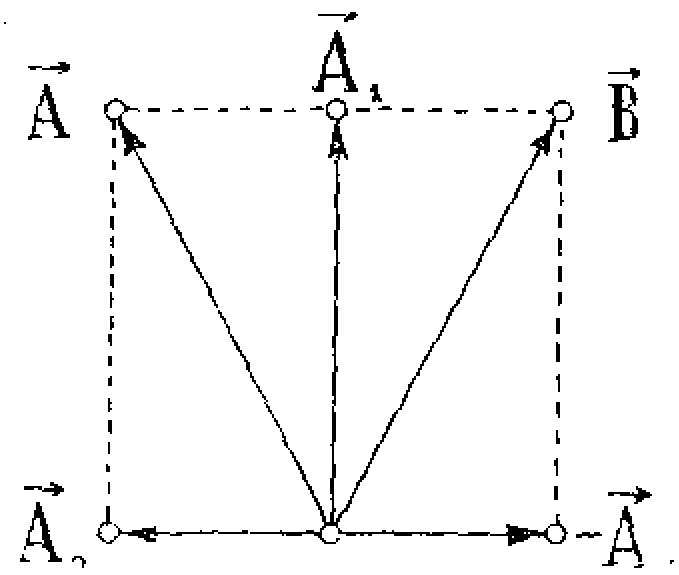
$$\vec{V} = [\vec{A}, \vec{B}],$$

он мења свој смер, али правац и модул остају му исти.

За даље упоређивање дате диаде са коњугованом конструјишимо у равни вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ два правца — један симетралу између тих вектора (слика 28), а други управан на ту симетралу — и раставимо векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$ у компоненте дуж тих праваца. Тада за сваки вектор можемо да напишемо следеће векторске једначине:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 ,$$

$$\vec{B} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 .$$



Слика 28.

Специјално разлагање вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$

Ако увретимо те вредности вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ у изразе за једну и другу диаду, добићемо:

$$\text{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}_1, \vec{A}_1\} - \{\vec{A}_2, \vec{A}_2\} + \{\vec{A}_2, \vec{A}_1\} - \{\vec{A}_1, \vec{A}_2\},$$

$$\text{Д}^c = \{\vec{B}, \vec{A}\} = \{\vec{A}_1, \vec{A}_1\} - \{\vec{A}_2, \vec{A}_2\} - \{\vec{A}_2, \vec{A}_1\} + \{\vec{A}_1, \vec{A}_2\}.$$

Означимо орт вектора $\vec{A}_1$, т. ј. симетрале са S_0, а орт вектора $\vec{A}_2$, т. ј. нормале одређеног смера са N_0; са таквим ознакама горње једначине могу бити написане овако:

$$\text{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\} = A_1^2\{\vec{S}_0, \vec{S}_0\} - A_2^2\{\vec{N}_0, \vec{N}_0\} +$$
$$+ A_1 A_2(\{\vec{N}_0, \vec{S}_0\} - \{\vec{S}_0, \vec{N}_0\}),$$

(28)

$$\text{Д}^c = \{\vec{B}, \vec{A}\} = A_1^2\{\vec{S}_0, \vec{S}_0\} - A_2^2\{\vec{N}_0, \vec{N}_0\} -$$
$$- A_1 A_2(\{\vec{N}_0, \vec{S}_0\} - \{\vec{S}_0, \vec{N}_0\}).$$

Ти обрасци показују да коњуговане диаде могу да буду увек претстављене као збир двају делова: први део, који се састоји из диада истезања, исти је за једну и другу диаду, а други део, који се састоји из диада смицања, разликује се само знаком.

Горња посматрања дају могућност да анализујемо услов када ће једна диада бити *самокоњугована*, т. ј. коњугована сама себи. У том случају морамо имати једначину:

$$(29) \qquad \{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{B}, \vec{A}\},$$

Једначине (28) показују да ће једначина (29) бити задовољена само под условом да је

$$A_1 A_2 = 0,$$

а то може да буде, ако диада у опште постоји, само у случајевима

$$A_1 = 0 \quad \text{или} \quad A_2 = 0.$$

Сваки од тих услова тврди да вектори A и B морају бити колинеарни, а сама диада се своди на диаду истезања. На тај начин доказали смо теорему·

Самокоњугована диада претставља једну диаду истезања.

Истинит је и реципрочни став: свака диада истезања коњугована је сама себи.

На тај начин једну самокоњуговану диаду можемо да претставимо овако:

$$\begin{aligned} Д = Д^c = \{\vec{A}, p\vec{A}\} \\ = p\big(A_x^2\{i, i\} + A_y^2\{j, j\} + A_z^2\{k, k\} + \\ + A_y A_z(\{j, k\} + \{k, j\}) + \\ + A_z A_x(\{k, i\} + \{i, k\}) + \\ + A_x A_y(\{i, j\} + \{j, i\})\big), \end{aligned}$$

где је p један скалар.

Упоредно са коњугованим диадама можемо да обратимо пажњу на две комбинације од једне диаде и њој коњуговане. Прва, то је половина збира коњугованих диада:

$$(30) \qquad \frac{1}{2}(Д + Д^c) = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\}).$$

Пошто по (28) тај збир има вредност

$$A_1^2\{\vec{S}_0, \vec{S}_0\} - A_2^2\{\vec{N}_0, \vec{N}_0\},$$

можема тврдити да се он састоји само из диада истезања.

Друга, то је половина разлике коњугованих диада:

$$(31) \qquad \frac{1}{2}(Д - Д^c) = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} - \{\vec{B}, \vec{A}\});$$

по (28) она се своди на

$$A_1 A_2 (\{ \vec{N}_0 , \vec{S}_0 \} - \{ \vec{S}_0 , \vec{N}_0 \})$$

и на тај начин зависи само од јединичних диада смицања.

Детаљније о изразима (30) и (31) говорићемо у другој глави.

Услов (29) за самокоњугованост једне диаде можемо да напишемо овако:

$$\{ \vec{A} , \vec{B} \} - \{ \vec{B}, \vec{A} \}, = 0 .$$

Природно се сада намеће питање да ли постоји диада, која би задовољавала једначину:

$$\{ \vec{A} , \vec{B} \} + \{ \vec{B} , \vec{A} \}$$

или би имала особину, да мења свој знак, ако променимо ред чланова те диаде:

$$(\vec{A} , \vec{B}) = -(\vec{A}, \vec{B}) .$$

Пошто збир диаде и њој коњуговане има вредност

$$2(A_1^2 \{ \vec{S}_0, \vec{S}_0 \} - A_2^2 \{ \vec{N}_0 , \vec{N}_0 \}),$$

а две диаде истезања $\{ \vec{S}_0 , \vec{S}_0 \}$ и $\{ \vec{N}_0 , \vec{N}_0 \}$ не могу множењем са скаларом да буду сведене једна на другу, тај израз може да буде једнак нули само под условима

$$A_1 = 0 , \qquad A_2 = 0$$

а то значи да се наша диада редукује на нулу, она не постоји.

Ако једну диаду претставимо шемом њезиних координата,

$$Д = \left\{ \begin{matrix} a_{11} , & a_{12} , & a_{13} \\ a_{21} , & a_{22} , & a_{23} \\ a_{31} , & a_{32} , & a_{33} \end{matrix} \right\}$$

шема, која одговара коњугованој диади, има облик:

$$Д^c = \left\{ \begin{matrix} a_{11} , & a_{21} , & a_{31} \\ a_{12} , & a_{22} , & a_{32} \\ a_{13} , & a_{23} , & a_{33} \end{matrix} \right\}$$

Ако је диада коњугована сама себи, те две шеме морају да се поклапају, а то значи за тај случај

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}.$$

Другим речима шема је постала симетрична. Из тог разлога диада коњугована сама себи често пута се зове *симетрична*. У векторском облику услов симетричности једне диаде изгледао би овако:

$$\vec{V} = [\vec{A}, \vec{B}] = 0.$$

14. Скаларно множење диаде са вектором.

Помоћу једне диаде $\text{Д} = \{\vec{A}, \vec{B}\}$, као одређеног модела елипсоида и једног вектора $\vec{C}$ можемо да извршимо следећу геометријску конструкцију.

Конструјишимо модел елипсоида дате диаде са полупречником основе једнаким модулу вектора $\vec{C}$ (слика 29) и, узимајући центар тог модела за почетак, конструјишимо тај вектор $\vec{C}$. Јасно је да крај тог вектора, тачка N, припада диадиној сферној површини. Из те тачке конструјишимо вектор са правцем и смером вектора $\vec{A}$ диаде и са крајем M на конструјисаној површини елипсоида модела. Дакле као резултат конструјисања добићемо један вектор

$$\overrightarrow{NM} = \vec{D};$$

тај вектор дефинишимо као *скаларни производ диаде* $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ *и вектора* $\vec{C}$ и то скаларни производ *с десна*, подвлачећи тиме, да је за конструјисање основе диаде употребљен десни диадин вектор $\vec{B}$.

Скаларни производ диаде и вектора с десна бележићемо овако

$$(\text{Д}, \vec{C}) = (\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}),$$

Из дефиниције диаде знамо да вектор положаја тачке M на елипсоиду има вредност

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{A}(\vec{B}, \vec{\varrho}),$$

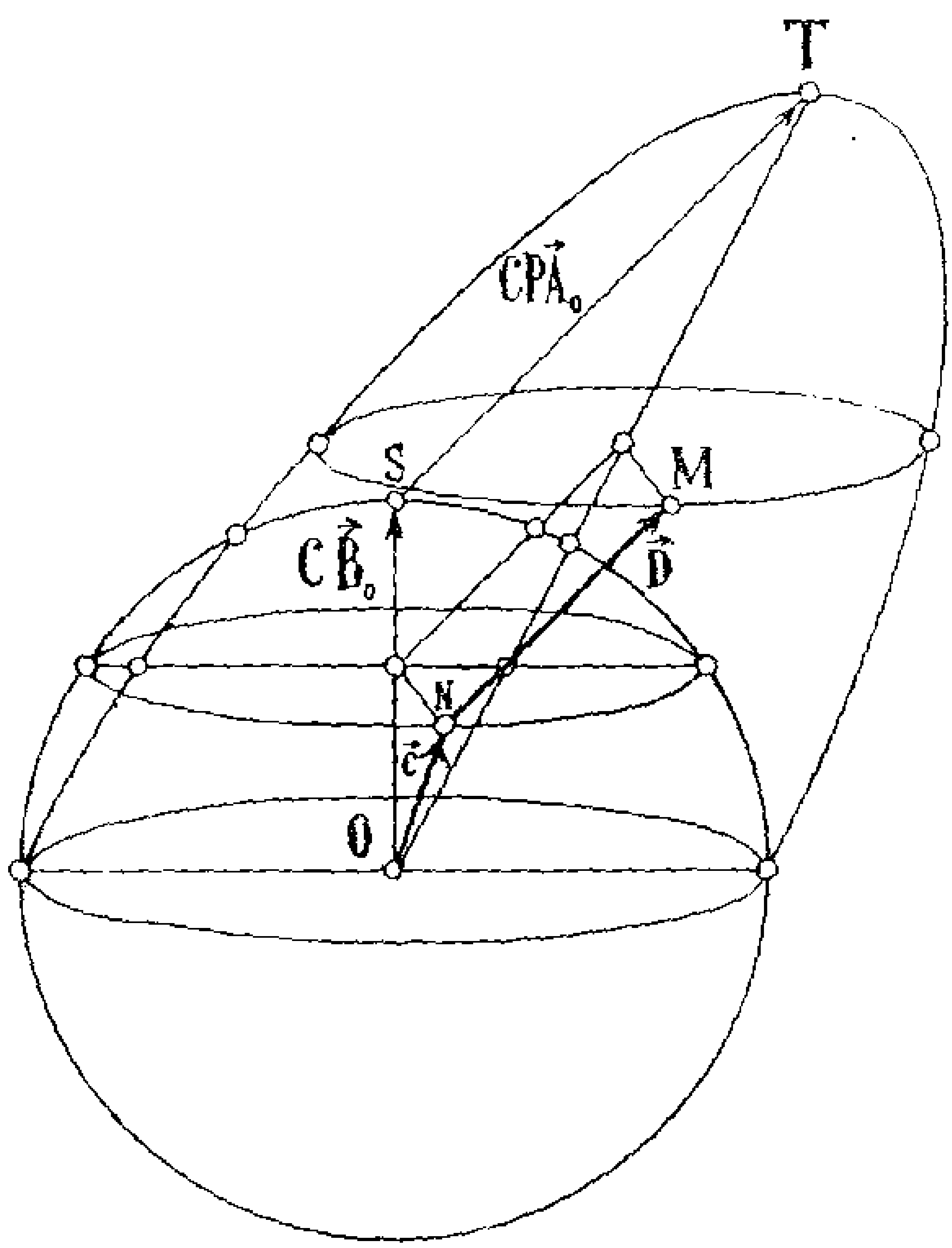
а у нашем случају, када је

$$\vec{\varrho} = \vec{C},$$

вектор $\overrightarrow{NM} = \vec{D}$ има вредност

$$\vec{D} = \vec{A}(\vec{B}, \vec{C}),$$

јер улогу полупречника $\vec{\varrho}$ сфере игра сада вектор $\vec{C}$.



Слика 29.

Диада са основом датог произвољног полупречника.

На тај начин можемо да поставимо следећу основну једначину за одређивање скаларног производа диаде и вектора с десна:

$$(32) \qquad (\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B}, \vec{C}).$$

Написана једначина служи већини писаца као полазна тачка за дефиницију диаде. У нашем излагању та једначина отступа на други план; она служи за одређивање једне операције са већ познатим објектима — диадом и вектором.

Што се тиче другог *скаларног производа диаде и вектора с лева,* који ћемо означавати са

$$(\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\}),$$

под тим производом такође ћемо да разумемо један вектор.

За кострујисање тог вектора послужиће нам следећи поступак: узимајући поново $\vec{C}$ за полупречник диадине сфере, кострујишемо диаду $\{\vec{B}, \vec{A}\}$ *коњуговану* са диадом $\{\vec{A}, \vec{B}\}$, па даље радимо на исти начин, као што смо радили у првоме множењу: из краја вектора $\vec{C}$, као почетка, конструјишемо вектор у правцу и смеру вектора $\vec{B}$ са крајем на површини елипсоида те коњуговане диаде, — тај вектор претставља скаларни производ диаде и вектора с лева.

На тај начин за други производ имамо следећу основну једначину

$$(33) \qquad (\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\}) = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}).$$

Једначине (32) и (33) можемо спојити у једно исто правило:

Скаларни производ диаде и вектора, било с десна, било с лева, *једнак је ономе вектору диаде, који није суседан са вектором множитељем, помноженим са скаларним производом тог множитеља са другим диадиним вектором.*

У том правилу фугуришу вектори диаде — појединци — један или други. Важно је обратити пажњу на то, да за израчунавање скаларног производа диаде и вектора у ствари није потребно знати модуле појединих вектора диаде. На пример за производ с десна имамо

$$(\{\vec{A}, \vec{B}\}\ \vec{C}) = \vec{A}(\vec{B}, \vec{C}) = \vec{A}_0\, A\, B\, C \operatorname{Cos}(\vec{B}, \vec{C}).$$

Последњи израз за тај производ показује да је за његово израчунавање потребно само да знамо правце вектора диаде и производ њихових модула.

Претходна анализа показује да између два скаларна производа диаде и вектора, десног и левог, постоји следећа веза:

$$(\{\vec{A},\vec{B}\}\,\vec{C}) = (\vec{C}\{\vec{B},\vec{A}\})$$

или у скраћеном облику:

$$(Д,\vec{C}) = (\vec{C},Д^{c}), \tag{34}$$

другим речима, десни производ се претвара у леви са коњугованом диадом и обратно.

Скаларно множење диаде и вектора покорава се дистрибутивном закону, т. ј.

$$(Д,\vec{C}_1+\vec{C}_2) = (Д,\vec{C}_1)+(Д,\vec{C}_2) \tag{35}$$

и тако исто за леви производ

$$(\vec{C}_1+\vec{C}_2,Д) = (\vec{C}_1,Д)+(\vec{C}_2,Д). \tag{35'}$$

За доказ прве једначине имамо

$$\begin{aligned}(Д,\vec{C}_1+\vec{C}_2) &= (\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}_1+\vec{C}_2) = \vec{A}\,(\vec{B},\vec{C}_1+\vec{C}_2) = \\ &= \vec{A}(\vec{B},\vec{C}_1)+\vec{A}(\vec{B},\vec{C}_2) = \\ &= (\{\vec{A},\vec{B}\}\,\vec{C}_1)+(\{\vec{A},\vec{B}\}\,\vec{C}_2) = \\ &= (Д,\vec{C}_1)+(Д,\vec{C}_2).\end{aligned}$$

Исто тако може бити проверена и друга једначина (35').

Што се тиче скаларног множитеља скаларног производа диаде и вектора, можемо тврдити да тај скаларни множитељ може да буде изнесен испред ознаке производа, другим речима, треба да помножимо резултат, који је вектор, тим скаларним множитељем.

Дакле, рецимо,

$$(m\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}) = m(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}),$$

$$(\{\vec{A},\vec{B}\},m\vec{C}) = m(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}).$$

У ствари,

$$(m\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}) = (\{m\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}) = m\vec{A}(\vec{B},\vec{C}) =$$
$$= m(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C})$$

и

$$(\{\vec{A},\vec{B}\},m\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B},m\vec{C}) = m\vec{A}(\vec{B},\vec{C}) =$$
$$= m(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}).$$

За различите случајеве множења јединичних координатних диада можемо да напишемо следеће обрасце:

1. Три орта су једнака:

$$(\{i,i\}i) = (i\{i,i\}) = i;$$

таквих образаца је свега шест.

2. Два орта су само једнака:

$$(i\{j,j\}) = 0, \qquad (\{j,j\}i) = 0,$$
$$(j\{i,j\}) = 0, \qquad (\{i,j\}j) = i,$$
$$(j\{j,i\}) = i, \qquad (\{j,i\}j) = 0;$$

таквих образаца имамо свега 36.

3. Сва три орта су различита:

$$(i\{j,k\}) = 0, \qquad (\{j,k\}i) = 0,$$

једначина такве природе имамо свега 12. На тај начин добили смо свега 54 образаца и то због тога што сваку јединичну координатну диаду, а њих има свега девет, можемо да помножимо лево и десно са једним од трију орта.

Изведимо још неколико особина скаларног производа диаде и вектора.

Производ

$$(\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C})$$

можемо да трансформишемо овако:

$$(\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B},\vec{C}) = \vec{A}(\vec{C},\vec{B}) = (\{\vec{A},\vec{C}\}\vec{B}).$$

Одавде изводимо закључак: скаларни производ диаде и вектора се не мења, ако векторски множитељ мења своје место са суседним вектором диаде.

Иста особина важи и за производ диаде и вектора с лева.

Узмимо сада једну диаду $Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}$, помножимо је с десна и с лева са вектором $\vec{C}$ и начинимо разлику тих производа; у том случају имамо:

$$(Д, \vec{C}) - (\vec{C}, Д) = (\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}) - (\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\})$$
$$= \vec{A}(\vec{B}, \vec{C}) - \vec{B}(\vec{C}, \vec{A}) =$$
$$= [\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}]].$$

Тај резултат можемо да забележимо кратко овако:

$$(Д, \vec{C}) - (\vec{C}, Д) = [\vec{C}, \vec{V}], \tag{36}$$

где смо, као и раније, означили са $\vec{V}$ — векторски производ чланова диаде:

$$\vec{V} = [\vec{A}, \vec{B}].$$

Образац (36) даје могућност да претставимо производ вектора и коњуговане диаде као функцију производа тог истог вектора и дате диаде.

У ствари из (34) и (36) непосредно имамо:

$$(Д^c, \vec{C}) = (\vec{C}, Д) = (Д, \vec{C}) - [\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}]].$$

Тако исто:

$$(\vec{C}, Д^c) = (Д, \vec{C}) = (\vec{C}, Д) + [\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}]].$$

Скаларни производ диаде и вектора претставља један вектор. Координате тог вектора разликују се од координата једног вектора диаде само множитељем; дакле, ако је

$$\vec{D} = (\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}),$$

за координате вектора $\vec{D}$ имамо вредности;

$$D_x = A_x(\vec{B}, \vec{C}), \qquad D_y = A_y(\vec{B}, \vec{C}), \qquad D_z = A_z(\vec{B}, \vec{C}).$$

Ако је диада одређена својим координатама

$$Д = \{a_{pq}\} \qquad p, q = 1, 2, 3,$$

а координате вектора $\vec{C}$ означимо са C_x, C_y, C_z, вредности координата скаларног производа диаде и вектора узимају следеће вредности:

$$D_x = a_{11} C_x + a_{12} C_y + a_{13} C_z,$$

$$D_y = a_{21} C_x + a_{22} C_y + a_{23} C_z,$$

$$D_z = a_{31} C_x + a_{32} C_y + a_{33} C_z.$$

15. Диада као оператор линеарне векторске функције специјалне природе.

Означимо са $\vec{x}$ један произвољан вектор; у општем случају он може да буде и променљив. Помножимо тај вектор скаларно диадом $Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}$; ставимо, рецимо, вектор $\vec{x}$ с десне стране. У резултату ћемо добити један вектор, који означимо са $\vec{y}$; дакле имамо:

$$\vec{y} = (Д, \vec{x}) = (\{\vec{A}, \vec{B}\} \vec{x}). \tag{37}$$

Ова векторска једначина поставља везу између вредности вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, она дефинише вектор $\vec{y}$ као *векторску функцију* вектора $\vec{x}$. Могли бисмо да напишемо:

$$\vec{y} = \text{fonct.}(\vec{x})$$

или скраћено

$$\vec{y} = \phi(\vec{x}).$$

Векторска функција се зове *линеарна*, ако она задовољава векторску једначину:

$$\phi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \phi(\vec{r}_1) + \phi(\vec{r}_2)$$

за све могуће вредности вектора $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. За ту функцију такође важи једначина

$$\phi(\lambda \vec{r}) = \lambda \phi(\vec{r}),$$

где су λ произвољни скалар, а $\vec{r}$ произвољни вектор.

Векторска функција одређена једначином (37) претставља линеарну функцију пошто по (35) имамо:

$$(\text{Д}, \vec{r}_1 + \vec{r}_2) = (\text{Д}, \vec{r}_1) + (\text{Д}, \vec{r}_2).$$

Ако координате вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ означимо са

$$\vec{x}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\vec{y}(y_1, y_2, y_3),$$

у место векторске једначине

$$\vec{y} = \vec{A}(\vec{B}, \vec{x}),$$

која замењује једначину (37), можемо да напишемо следеће три скаларне једначине:

$$(38) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3, \end{aligned}$$

где смо са a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ означили поново координате диаде.

Ако су величине a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ потпуно произвољне, једначине (38) одређују једну линеарну векторску функцију општег карактера. Ако те величине задовољавају услове (13), горње једначине одређују једну линеарну векторску функцију специјалне природе, која одговара једној диади. У идућој глави говорићемо о линеарној векторској функцији општег типа у вези са збиром више произвољних диада, а овде наводимо само неколико особина те функције нашег специјалног типа.

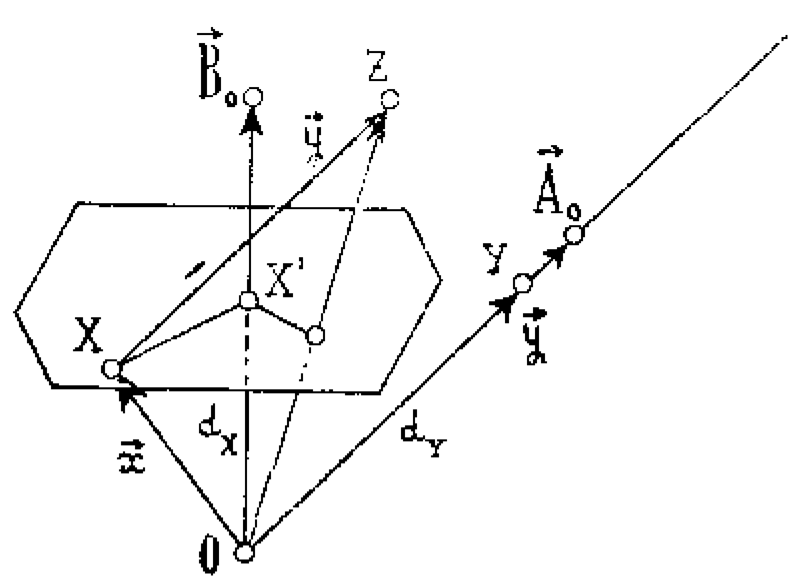
Ако хоћемо величине x_1, x_2, x_3 да сматрамо као координате једне тачке простора, тачке X, у погледу одређеног триједра, а y_1, y_2, y_3 као координате друге тачке, тачке Y, у погледу истог триједра, једначине (38) одређује једну трансформацију простора. Покажимо геометријску природу те трансформације; прво, можемо тврдити да се независно од положаја тачке X све тачке Y налазе на правој линији, што пролази кроз почетак координатних оса и има правац вектора $\vec{A}$ диаде, при чему је

$$\vec{y} = \text{Const.}$$

за све тачке, за које

$$(\vec{B}, \vec{x}) = \text{Const.},$$

а то значи за све тачке, које припадају равни, што стоји управно на правац вектора $\vec{B}$; другим речима, свима тачкама X те равни одговара само једна тачка Y на тој правој. Друго, између отстојања d_x горе наведене равни од почетка координата и отстојања d_y одговарајуће тачке Y од тог истог почетка (слика 30) постоји веза:



Слика 30.

Трансформација простора што одговара диади.

$$d_y = ABd_x = Pd_x .$$

Ту везу добијамо из једначине

$$\vec{y} = \vec{A}(\vec{B}, \vec{x}),$$

када у њу уврстимо:

$$\vec{x} = d_x \,.\, \vec{B}_0 , \qquad \vec{y} = d_y \,.\, \vec{A}_0$$

при чему смо у место тачке X узели директно тачку X' — подножје нормале на раван тачке X.

На тај начин једној диади одговара таква трансформација простора, да се читав простор (тачке X) трансформише у једну праву линију (тачке Y) и да свакој тачки Y одговара раван у, простору X управна на идући вектор диаде, при чему количник између отстојања тачке Y од почетка координата и отстојања равни X од тог истог почетка има сталну вредност за све тачке, једнаку коефицијенту диаде.

Ако почетак вектора $\vec{y}$ сместимо у крај вектора $\vec{x}$, крај вектора $\vec{y}$, тачка Z (слика 30), такође може бити сматрана као тачка простора, који се добива од трансформације простора тачака X. Вектор положаја $\vec{z}$ тачке Z се одређује из једначине

$$\overrightarrow{OZ} = \vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} + (\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{x}).$$

Свака диада може бити сматрана као оператор и те трансформације. Наведена геометријска конструкција може бити искоришћена упоредно са конструјисањем тачке Y, али доцније употребљаваћемо вектор $\vec{y}$ са почетком само у тачки O (упореди § 42).

16. Векторско множење диаде и вектора.

У § 14 поставили смо дефиницију скаларног производа диаде и вектора полазећи од једне геометријске конструкције, али до те исте дефиниције могли бисмо доћи и на други, формални начин и то овако.

Ако уочимо једну диаду $\Delta = \{\vec{A}, \vec{B}\}$ и један вектор $\vec{C}$, имамо могућност да узмемо у комбинацију три вектора:

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}. \tag{39}$$

Од та три вектора можемо да начинимо више комбинација, али треба да искључимо оне, када се од диадиних вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ прави скаларни или векторски производ, јер би у том случају у место диаде имали директно тај производ, а то искључујемо. На тај начин потребно је да комбинујемо векторе диаде са вектором $\vec{C}$.

Прва комбинација, која долази на ред, то је скаларни производ из једног диадиног вектора и вектора $\vec{C}$. Дакле имамо у том смислу две комбинације вектора (39):

$$\vec{A} \text{ и } (\vec{B}, \vec{C}), \tag{40}$$

$$(41) \qquad \vec{B} \text{ и } (\vec{A}, \vec{C}).$$

Пошто даље од вектора и скалара можемо да направимо само једну комбинацију — производ скалара и вектора — из (40) и (41) можемо да добијемо само две комбинације:

$$\vec{A}(\vec{B}, \vec{C}) \quad \text{и} \quad \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}).$$

Природно је да и са те формалне тачке гледишта сваку од тих комбинација зовемо *скаларним производом диаде и вектора* и да само разликујемо један од другог. Реч «скаларни» наглашује да смо за стварање тих производа употребили скаларни производ једног диадиног вектора и вектора множитеља.

На тај смо начин дошли другим путем до ранијих појмова десног и левог производа диаде и вектора и то:

$$(\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B}, \vec{C}),$$

$$(\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\}) = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}).$$

Јасно је да горње комбиновање вектора (39) може бити проширено у том смислу, да од једног диадиног вектора и вектора множитеља $\vec{C}$ направимо векторски производ и пошто векторски производ зависи од реда у којем узимамо векторе добићемо следеће комбинације:

$$(42) \qquad \vec{A}, \quad [\vec{B}, \vec{C}],$$

$$(43) \qquad \vec{A}, \quad [\vec{C}, \vec{B}],$$

$$(44) \qquad \vec{B}, \quad [\vec{C}, \vec{A}],$$

$$(45) \qquad \vec{B}, \quad [\vec{A}, \vec{C}].$$

Пошто смо начинили «векторски» производ из диадиног вектора и вектора множитеља, све идуће комбинације горе написаних вектора треба да зовемо *векторским производима диаде и вектора*, при чему би комбинацијама (42) и (43), одговарала једна ознака — *десног* векторског производа, а комбинацијама (44) и (45) друга — *левог* векторског производа. Дакле имали бисмо ознаке

$$[\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}] \quad \text{и} \quad [\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\}].$$

Али треба још да разликујемо комбинацију (42) од (43) и комбинацију (44) од (45). За прву комбинацију оставимо ознаку

$$[\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}],$$

а за другу, где је на прво место у векторском производу стављен други вектор по реду — вектор $\vec{C}$, можемо да употребимо ознаку:

$$[\{\vec{A}, \vec{B}\}\underline{\vec{C}}]$$

са подвученим вектором $\vec{C}$; црта треба да нагласи да у векторском производу из вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$ треба да ставимо на прво место вектор $\vec{C}$. Исто тако за комбинације (44) и (45) употребићемо две ознаке:

$$[\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\}],$$

$$[\vec{C}\{\underline{\vec{A}}, \vec{B}\}].$$

Пошто смо направили комбинације (42) — (45) ваља нам навести какву операцију треба да извршимо са векторима, добивеним у тим комбинацијама. Таквих операција може бити три: скаларно множење, векторско множење и диадско множење, при чему у двема последњим операцијама треба да разликујемо ред у којем узимамо чланове производа. Да бисмо означили сваку од тих операција, можемо да ставимо пред ознаком векторског производа ознаке: s, v, d за скаларни, векторски и диадски производ, при чему у векторском и диадском производу, кад треба да на прво место ставимо векторски производ диадиног вектора и множитеља, та два вектора можемо да подвучемо.

На тај начин имамо следеће векторске производе:

скаларне природе:

(46) $$^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}] = (\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]),$$

(47) $$^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}\underline{\vec{C}}] = (\vec{A}[\vec{C}, \vec{B}]),$$

(48) $${}^{s}[\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\}] = (\vec{B}[\vec{C},\vec{A}]),$$

(49) $${}^{s}[\vec{C}\{\underline{\vec{A}},\vec{B}\}] = (\vec{B}[\vec{A},\vec{C}]);$$

векторске природе:

(50) $${}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}] = [\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]],$$

(51) $${}^{v}[\{\vec{A},\underline{\vec{B}\}\vec{C}}] = [[\vec{B},\vec{C}]\vec{A}],$$

(52) $${}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\underline{\vec{C}}] = [\vec{A}[\vec{C},\vec{B}]],$$

(53) $${}^{v}[\{\vec{A},\underline{\vec{B}\}\underline{\vec{C}}}] = [[\vec{C},\vec{B}]\vec{A}],$$

(54) $${}^{v}[\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\}] = [\vec{B}[\vec{C},\vec{A}]],$$

(55) $${}^{v}[\underline{\vec{C}\{\vec{A}},\vec{B}\}] = [[\vec{C},\vec{A}]\vec{B}],$$

(56) $${}^{v}[\vec{C}\{\underline{\vec{A}},\vec{B}\}] = [\vec{B}[\vec{A},\vec{C}]],$$

(57) $${}^{v}[\underline{\vec{C}\{\underline{\vec{A}}},\vec{B}\}] = [[\vec{A},\vec{C}]\vec{B}];$$

диадске природе:

(58) $${}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}] = \{\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]\},$$

(59) $${}^{d}[\{\vec{A},\underline{\vec{B}\}\vec{C}}] = \{[\vec{B},\vec{C}]\vec{A}\},$$

(60) $${}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\}\underline{\vec{C}}] = \{\vec{A}[\vec{C},\vec{B}]\},$$

(61) $${}^{d}[\{\vec{A},\underline{\vec{B}\}\underline{\vec{C}}}] = \{[\vec{C},\vec{B}]\vec{A}\},$$

(62) $${}^{d}[\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\}] = \{\vec{B}[\vec{C},\vec{A}]\},$$

(63) $${}^{d}[\underline{\vec{C}\{\vec{A}},\vec{B}\}] = \{[\vec{C},\vec{A}]\vec{B}\},$$

(64) $${}^{d}[\vec{C}\{\underline{\vec{A}},\vec{B}\}] = \{\vec{B}[\vec{A},\vec{C}]\},$$

(65) $${}^{d}[\underline{\vec{C}\{\underline{\vec{A}}},\vec{B}\}] = \{[\vec{A},\vec{C}]\vec{B}\}.$$

На тај начин добили смо свега двадесет векторских производа (46) — (65). Анализујмо сада те производе.

I. Производ (46)

$$^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}] = (\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}])$$

и остале из групе (46) — (49) можемо да зовемо *скаларно-векторски производ диаде и вектора* и да разликујемо један од другог по томе дали он с десна или с лева садржи множитељ $\vec{C}$ и дали је у правом или обратном (са подвученим вектором) реду.

За доказ да је такав производ могућан, неопходно је показати да за његово израчунавање није потребно знати посебице векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$, него је довољно искористити само елементе диаде $\{\vec{A}, \vec{B}\}$. Пошто производ

$$(\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}])$$

можемо трансформисати овако

$$(\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}])$$

непосредно закључујемо да је од диаде неопходно да знамо само векторски производ

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{V},$$

а тај вектор, као што је познато, потпуно је одређен само елементима диаде.

Производ $(\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}])$ претставља познату комбинацију трију вектора; његово геометријско тумачење основано је на запремини паралелепипеда конструјисаног са векторима $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ као ивицама. Ако ту запремину са одговарајућим знаком означимо са v имамо:

$$^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C}] = (\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]) = v.$$

Сви остали производи те природе имају исту апсолутну вредност и могу да се разликују само знаком, на име производ (47) има вредност — v, производ (48) — вредност v и најзад производ (49) вредност — v. Тиме је постављена и веза између четири производа те врсте.

Из тих особина скаларно-векторског производа диаде и вектора непосредно следује, да од производа састављених из ортова ортогоналног триједра само они нису једнаки нули, чији су сви ортови различити, дакле, на пример,

$$^{s}[\{i,j\}k]=1, \qquad ^{s}[\{i,j\}\underline{k}]=-1,$$

$$^{s}[\{i,j\}j]=0, \qquad ^{s}[\{i,j\}\underline{j}]=0.$$

II. Производ (50)

$$^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}]=[\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]] \tag{50}$$

и остале из групе (50) — (57) можемо да зовемо *векторско-векторски производ диаде и вектора*, при чему тај производ може да буде обратног реда како у погледу првог векторског множења, тако и у погледу другог.

Пошто производ (50) може да буде написан овако:

$$^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}]=[\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{C},\vec{A})-\vec{C}(\vec{A},\vec{B})=$$

$$=\vec{B}_0\,ABC\,\mathrm{Cos}\,(\vec{C},\vec{A})-\vec{C}(\vec{A},\vec{B})$$

можемо тврдити, да је он такође потпуно одређен вектором $\vec{C}$ и елементима диаде $\{\vec{A},\vec{B}\}$. У ствари, у горе наведени израз улазе само правци вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и производ њиховог модула.

Да поставимо сада везу између осам векторско-векторских производа (50) — (57). Јасно је да прва четири производа — десни производи — или су једнаки међу собом или се разликују само по знаку. У истој се међусобној вези налазе и остала четири производа — леви производи. Значи треба само да поставимо везу између једног десног производа и једног левог. Пошто први од десних производа има вредност

$$^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}]=[\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{C},\vec{A})-\vec{C}(\vec{A},\vec{B}),$$

а први од левих

$$^{v}[\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\}]=[\vec{B}[\vec{C},\vec{A}]]=\vec{C}(\vec{A},\vec{B})-\vec{A}(\vec{B},\vec{C}),$$

можемо написати

$$(66)\ {}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}] + {}^{v}[\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\}] = [[\vec{A},\vec{B}]\vec{C}] = [\vec{V},\vec{C}],$$

т. ј. збир тих векторско-векторских производа — једног десног и једног левог — има вредност векторског производа вектора диаде $[\vec{A},\vec{B}]$ и вектора множитеља $\vec{C}$.

Из једначине (66) лако можемо да добијемо везу између произвољног десног производа (50) — (53) и произвољног левог производа (54) — (57).

У случају множења координатних ортова можемо да напишемо следеће основне комбинације:

$$
\begin{aligned}
{}^{v}[\{i,j\}k] &= [i[j,k]] = 0,\\
{}^{v}[\{i,j\}j] &= [i[j,j]] = 0,\\
{}^{v}[\{i,j\}i] &= [i[j,i]] = j,\\
{}^{v}[\{i,i\}j] &= [i[i,j]] = -j,\\
{}^{v}[\{i,i\}i] &= [i[i,i]] = 0.
\end{aligned}
$$

III. Производ (58)

$$^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C}] = \{\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]\}$$

и остале из групе (58) — (65) можемо звати *диадско-векторским производом диаде и вектора.* Прва четири производа су десни, а остали су леви. У свакој од тих група векторско и диадско множење могу да имају супротни ред.

Прво, природно је ставити питање, каква веза постоји између дате диаде

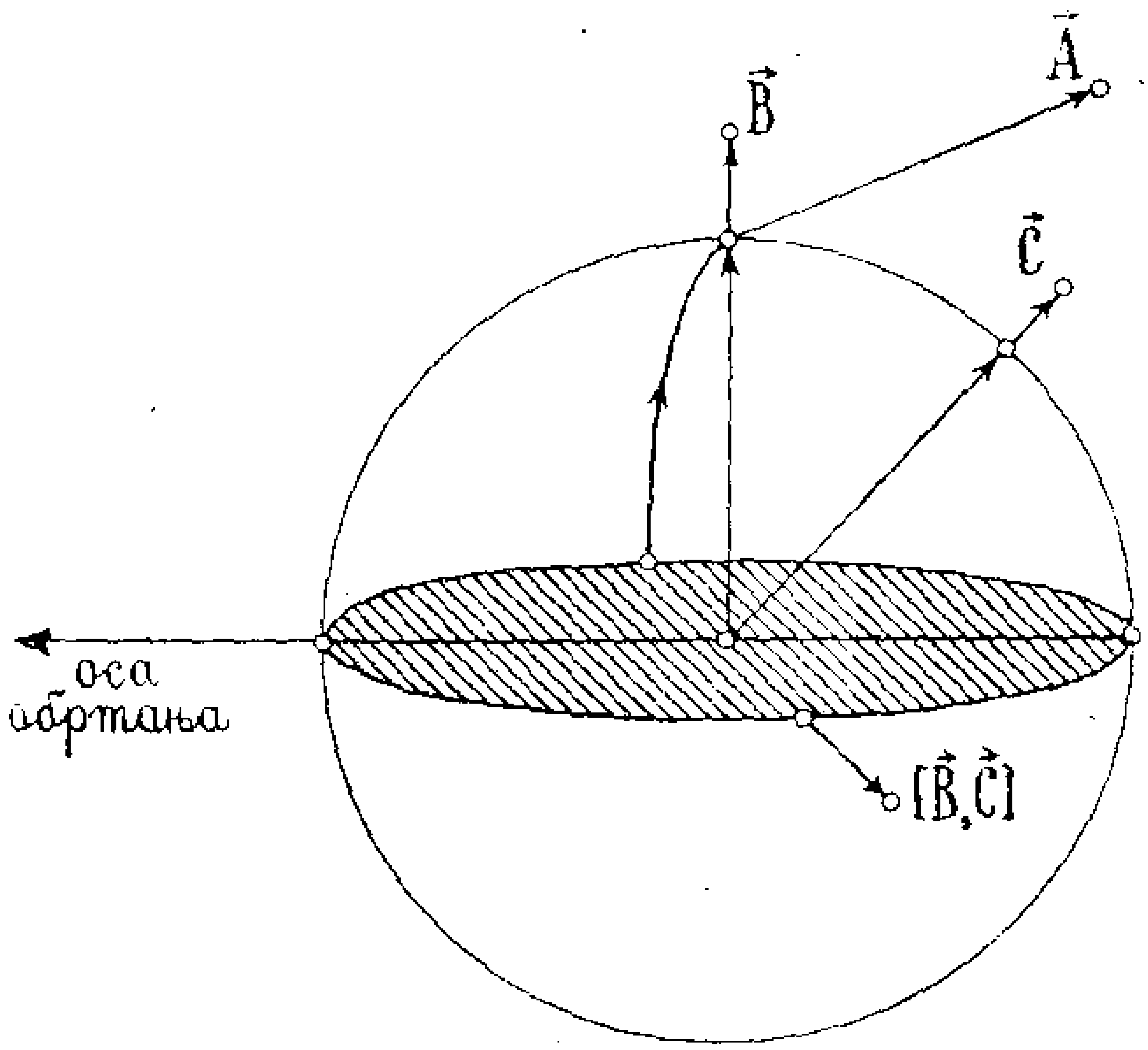
$$Д = \{\vec{A},\vec{B}\}$$

и диаде, што одговара, рецимо, диадско-векторском производу (58):

$$^{d}[Д,\vec{C}] = \{\vec{A}[\vec{B},\vec{C}]\}.$$

Први вектор тих диада је исти — вектор $\vec{A}$; можемо дакле тврдити да је правац померања кружних пресека сфере у случају прве и друге диаде исти.

Други вектор се мења: био је вектор $\vec{B}$, постао је $[\vec{B},\vec{C}]$. Значи да је основа диаде прешла из положаја управног на $\vec{B}$ у положај управни на $[\vec{B}, \vec{C}]$, то значи у положај равни паралелне са векторима $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Можемо тврдити (слика 31) да се



Слика 31.

Веза између дате диаде и диаде производа.

основа диаде обрнула за 90^0 око осе, која лежи у равни вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$ и стоје управно на вектор $\vec{B}$. Та оса обртања поклапа се са правцем вектора

$$[\vec{B}[\vec{B},\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{B},\vec{C}) - \vec{C}B^2.$$

Што се тиче коефицијента прве диаде

$$P = A\,B,$$

он се мења у вредност

$$P_1 = A\,\overline{[\vec{B},\vec{C}]} = A\,B\,C\,\mathrm{Sin}(\vec{B},\vec{C})$$

за другу диаду. Дакле

$$P_1 = P\,C\,\mathrm{Sin}(\vec{B},\vec{C}),$$

а то значи коефицијенат диаде производа једнак је коефицијенту диаде множитеља помноженом пројекцијом вектора множитеља на раван основе диаде множитеља.

На тај начин смо показали, како треба да конструјишемо диаду производа. Из предходног је очигледно, да за то конструјисање треба да знамо само елементе дате диаде и вектор множитељ $\vec{C}$.

Елементе свих диада (58) — (65) можемо да упоредимо помоћу следеће таблице:

број	правац померања	основа стоји управно на векторе	коефицијенат
(58)	$\vec{A}$	$[\vec{B}, \vec{C}]$	$PC\operatorname{Sin}(\vec{B}, \vec{C})$
(59)	$[\vec{B}, \vec{C}]$	$\vec{A}$	
(60)	$\vec{A}$	$-[\vec{B}, \vec{C}]$	
(61)	$-[\vec{B}, \vec{C}]$	$\vec{A}$	
(62)	$\vec{B}$	$[\vec{C}, \vec{A}]$	$PC\operatorname{Sin}(\vec{A}, \vec{C})$
(63)	$[\vec{C}, \vec{A}]$	$\vec{B}$	
(64)	$\vec{B}$	$-[\vec{C}, \vec{A}]$	
(65)	$-[\vec{C}, \vec{A}]$	$\vec{B}$	

Ова таблица показује да свака од диада — производа има своју нарочиту индивидуалност; на тај начин операцију диадско-векторског множења диаде са вектором можемо да искоришћавамо са циљем да на одређени начин трансформишемо дату диаду.

Анализујмо још диадско-векторске производе састављене од координатних ортова; заустављамо се само на следећим типовима:

$$^{d}[\{i, j\} k] = \{i[j, k]\} = \{i, i\} = \Delta_{11},$$

$$^{d}[\{i, j\} j] = \{i[j, j]\} = \{i, 0\} = 0,$$

$$^{d}[\{i, j\} i] = \{i[j, i]\} = -\{i, k\} = -\Delta_{13},$$

$$^{d}[\{i, i\} j] = \{i[i, j]\} = \{i, k\} = \Delta_{13},$$

$$^{d}[\{i, i\} i] = \{i[i, i]\} = \{i, 0\} = 0.$$

Израчунајмо сада вредности различитих векторских производа кад су диада Д и вектор $\vec{C}$ дате својим координатама:

$$\text{Д}\{ a_{pq} \}, \qquad\qquad p, q = 1, 2, 3.$$
$$\vec{C}(c_1, c_2, c_3).$$

I. За скаларно-векторске производе имамо:

$$^s[\text{Д}, \vec{C}] = -{}^s[\text{Д}, \underline{\vec{C}}] = {}^s[\vec{C}, \text{Д}] = -{}^s[\vec{C}\{\underline{\vec{A}}, \vec{B}\}] =$$
$$= \begin{vmatrix} A_x, & A_y, & A_z \\ B_x, & B_y, & B_z \\ C_x, & C_y, & C_z \end{vmatrix} = c_1(a_{23} - a_{32}) + c_2(a_{31} - a_{13}) + c_3(a_{12} - a_{21}).$$

II. За координате векторско-векторских производа редом ћемо добити следеће вредности:

за (50):

$$(67) \qquad \begin{aligned} &c_1(a_{11} - S_1) + c_2 a_{21} + c_3 a_{31}, \\ &c_1 a_{12} + c_2(a_{22} - S_1) + c_3 a_{32}, \\ &c_1 a_{13} + c_2 a_{23} + c_3(a_{33} - S_1), \end{aligned}$$

где S_1, као и раније, има вредност:

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

за (51) добијамо исте величине са супротним знацима, за (52) исто тако са супротним знацима, и за (53) исте величине;

за (54):

$$(68) \qquad \begin{aligned} &-[c_1(a_{11} - S_1) + c_2 a_{12} + c_3 a_{13}], \\ &-[c_1 a_{21} + c_2(a_{22} - S_1) + c_3 a_{23}], \\ &-[c_1 a_{31} + c_2 a_{32} + c_3(a_{33} - S_1)]. \end{aligned}$$

Ова се шема разликује од шеме (67) осим по знацима још и тиме што су координате диаде из врста прве шеме прешле у стубце шеме (68).

Даље, за (55) имамо координате (68) са супротним знаком; за (56) исто тако са супротним знаком и најзад за (57) имамо координате са вредностима (68), јер је тај производ једнак (54).

III. Саставимо још координате диада, што претсгављају диадско-векторске производе диаде и вектора.

За диаду (58) имамо следећу шему координата:

$$(69)\quad \begin{array}{lll} a_{12}c_3 - a_{13}c_2, & a_{13}c_1 - a_{11}c_3, & a_{11}c_2 - a_{12}c_1, \\ a_{22}c_3 - a_{23}c_2, & a_{23}c_1 - a_{21}c_3, & a_{21}c_2 - a_{22}c_1, \\ a_{32}c_3 - a_{33}c_2, & a_{33}c_1 - a_{31}c_3, & a_{31}c_2 - a_{32}c_1; \end{array}$$

за диаду (59):

$$(70)\quad \begin{array}{lll} a_{12}c_3 - a_{13}c_2, & a_{22}c_3 - a_{23}c_2, & a_{32}c_2 - a_{33}c_2, \\ a_{13}c_1 - a_{11}c_3, & a_{23}c_1 - a_{21}c_3, & a_{33}c_1 - a_{31}c_3, \\ a_{11}c_2 - a_{12}c_1, & a_{21}c_2 - a_{22}c_1, & a_{31}c_2 - a_{32}c_1, \end{array}$$

т. ј. шема (69) обрнута око главне диагонале.

за диаду (60) имамо шему (69) са супротним знацима;
за диаду (61) имамо шему (70) са супротним знацима;
за диаду (62) шема изгледа овако:

$$(71)\quad \begin{array}{lll} a_{31}c_2 - a_{21}c_3, & a_{11}c_3 - a_{31}c_1, & a_{21}c_1 - a_{11}c_2, \\ a_{32}c_2 - a_{22}c_3, & a_{12}c_3 - a_{32}c_1, & a_{22}c_1 - a_{12}c_2, \\ a_{33}c_2 - a_{23}c_3, & a_{13}c_3 - a_{33}c_1, & a_{23}c_1 - a_{13}c_2; \end{array}$$

за диаду (63) потребно је претходну шему обрнути око главне диагонале,

за диаду (64) треба узети шему (71) са супротним знацима, најзад

за диаду (65) потребно је шему (71) обрнути око главне диагонале и променити знаке чланова.

У вези са векторским множењем диаде и вектора наведимо једну примедбу о литератури. G. Jaumann у књизи Die Grundlagen der Bewegungslehre анализује две диаде: једну skalare или lineare Dyade и другу rotorische или planare Dyade. Ни једна, ни друга диада код њега немају самостална конкретна значења; он разликује те диаде само по резултату који добијамо множењем диаде са вектором. Он означава скаларну диаду са Λ^s, а роторску са Λ^r и затим даје следећа правила за множење тих диада са векторима:

$$(\Lambda^s, \vec{r}) = \vec{A}(\vec{B}, \vec{r}),$$

$$(\Lambda^r, \vec{r}) = [\vec{A}[\vec{B}, \vec{r}]],$$

и сем тога:

$$(\vec{r}, \Lambda^s) = (\vec{r}, \vec{A})\vec{B},$$

$$(\vec{r}, \Lambda^r) = [[\vec{r}, \vec{A}]\vec{B}].$$

Ту смо употребили наша бележења за скаларно и векторско множење.

Наше је дубоко убеђење, да је увођење планарне диаде ма и само у погледу формалних операција, сасвим сувишно и без икакве потребе. Стварањем нових комбинација трију вектора могу бити добивени исти резултати помоћу само једног појма диаде — појма, који има потпуно конкретан карактер. Потребно је само проширити појам производа даиде са вектором, као што је то извршено у овом параграфу. Теорија не само да не губи ништа тиме, него добија у својој конкретности и систематичности.

17. Производи четирију вектора.

Уочимо четири вектора

$$\vec{A}, \ \vec{B}, \ \vec{C}, \ \vec{D}.$$

Од та четири вектора можемо да начинимо више комбинација. Сваку од тих комбинације означимо привремено са

$$«\vec{A}, \ \vec{B}, \ \vec{C}, \ \vec{D}».$$

Ако таква комбинација у погледу сваког од четири вектора задовољава дистрибутивни закон, који, на пример, за први вектор изгледа овако:

$$«\vec{A}_1 + \vec{A}_2, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}» = «\vec{A}_1, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}» + «\vec{A}_2, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}»,$$

она се зове *производ четирију вектора.*

Тако, на пример,

$$(\vec{A}, \vec{B})(\vec{C}, \vec{D})$$

претставља производ четирију вектора, на име производ двају скаларних производа, а

$$([\vec{A}, \vec{B}], [\vec{C}, \vec{D}])$$

и

$$[[\vec{A}, \vec{B}], [\vec{C}, \vec{D}]]$$

нови производи такође четирију вектора.

Овде нећемо да се заустављамо на анализи таквих пропроизвода, — то спада у обичну елементарну теорију вектора. У теорији диада хоћемо да се бавимо само таквим производима, у којим фигурише барем једна диада, т. ј. барем два вектора улазе у облику диадског производа. Пошто од четири вектора можемо да саставимо или једну диаду (трећи и четврти вектор улазе при томе у каквој другој комбинацији) или две диаде, треба да разликујемо два случаја: производе са једном диадом и производе двеју диада.

18. Производи диаде са два вектора.

Од прва два од четири вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ образујемо диаду

$$\{\vec{A}, \vec{B}\}.$$

Даље можемо да поступимо на два различита начина: по првом начину треба да образујемо производ двају осталих вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$, па са тим производом да помножимо диаду; по другом начину можемо диаду да измножимо прво са једним вектором, па после добивени резултат да помножимо са четвртим вектором. Да видимо какве производе ћемо добити у првом и другом случају.

I. Множење диаде са производом двају вектора.

Пошто од два вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$ можемо да формирамо два производа: скаларни $(\vec{C}, \vec{D})$ и векторски $[\vec{C}, \vec{D}]$ или $[\vec{D}, \vec{C}]$; множењем диаде са тим производима добијамо следеће типове производа четирију вектора:

$a.$	$\{\vec{A}, \vec{B}\}(\vec{C}, \vec{D})$	множење диаде са скаларом; резултат је диада.		
$b.$	$(\{\vec{A}, \vec{B}\}, [\vec{C}, \vec{D}])$	скаларно множење диаде са вектором, рецимо с десна; резултат је вектор.		
$c_1.$	${}^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, [\vec{C}, \vec{D}]]$	скаларно-	векторско множење диаде и вектора, рецимо с десна са резултатом:	скалар,
$c_2.$	$[\{\vec{A}, \vec{B}\}, [\vec{C}, \vec{D}]]$	векторско-	векторско множење диаде и вектора, рецимо с десна са резултатом:	вектор,
$c_3.$	${}^{d}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, [\vec{C}, \vec{D}]]$	диадско-	векторско множење диаде и вектора, рецимо с десна са резултатом:	диада.

Геометријско конструисање тих облика и израчунавање њихових вредности, кад су дате координате диаде и вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$, не претставља никакве тешкоће.

II. Множење диаде прво са једним вектором па после са другим.

Ако помножимо диаду $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ прво са вектором $\vec{C}$, добијамо следеће типове резултата:

$\alpha.$	$(\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C})$	вектор.
$\beta_1.$	${}^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}]$	скалар.
$\beta_2.$	${}^{v}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}]$	вектор.
$\beta_3.$	${}^{d}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}]$	диада.

Сваки од тих резултата можемо да помножимо са последњим вектором $\vec{D}$ и готово у свима случајевима на више начина. После тог множења добићемо следеће типове производа:

$$\alpha \begin{cases} \alpha_1 & ((\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}),\vec{D}) & \text{скалар}, \\ \alpha_2 & [(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}),\vec{D}] & \text{вектор}, \\ \alpha_3 & \{(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}),\vec{D}\} & \text{диада}; \end{cases}$$

$$\beta \left\{ \begin{array}{lll}
\beta_1 - \beta_{11} & {}^{s}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}]\vec{D} & \text{вектор}; \\
\beta_2 \left\{ \begin{array}{l} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{array} \right. & \begin{array}{l} ({}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D}) \\ [{}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D}] \\ \{{}^{v}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D},\} \end{array} & \begin{array}{l} \text{скалар}, \\ \text{вектор}, \\ \text{диада}; \end{array} \\
\beta_3 \left\{ \begin{array}{l} \beta_{31} \\ \beta_{32} \left\{ \begin{array}{l} \beta_{321} \\ \beta_{322} \\ \beta_{323} \end{array} \right. \end{array} \right. & \begin{array}{l} ({}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D},) \\ {}^{s}[{}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D}] \\ {}^{v}[{}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D}] \\ {}^{d}[{}^{d}[\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}],\vec{D}] \end{array} & \begin{array}{l} \text{вектор}, \\ \text{скалар}, \\ \text{вектор}, \\ \text{диада}. \end{array}
\end{array} \right.$$

Геометријско конструјисање горе набројених облика не претставља тешкоће. Лако је такође написати вредности координата тих облика, ако су дате координате диаде и вектора, које улазе у те производе.

Тако, на пример, производ под α_1 можемо израчунати на следећи начин. Означимо координате диаде $\{\vec{A},\vec{B}\}$ са a_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$, а координате вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$ са c_1, c_2, c_3 односно d_1, d_2, d_3.

Пошто вектор $(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C})$ има за координате:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{1i}\, c_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\, c_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\, c_i\,,$$

скалар, што претставља наш производ, има вредност:

$$((\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C})\vec{D}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ji}\, c_i\, d_j.$$

Обратимо пажњу на један специјалан случај тог производа. Претпоставимо да је

$$\vec{C} = \vec{D} = \vec{r},$$

при чему вектор $\vec{r}$ има за координате x, y, z. Тада ћемо добити:

$$((\{\vec{A},\vec{B}\},\ \vec{r})\ \vec{r}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$
$$+ (a_{23}+a_{32})yz + (a_{31}+a_{13})zx + (a_{12}+a_{21})xy.$$

У случају симетричне диаде тај производ добија вредност следеће квадратичне форме:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{23}yz + 2\,a_{31}zx + 2\,a_{12}xy.$$

Учинимо сада неколико примедаба о наведеним производима категорија I и II.

1. За образовање диаде узимали смо векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Са истим правом можемо диаду да образујемо из макоја друга два вектора; остала два вектора играју, и то у ком хоћемо реду, улогу вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$. Другим речима можемо да мењамо ред вектора у свакоме производу; у резултату ћемо добити производ нове вредности, али исти природе.

2. Сваки од наведених производа не претставља нешто несводљиво: већина од производа може да буде претстављена у простијем облику, где не учествује диада.

Тако, α_1 можемо написати овако:

$$((\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C}),\vec{D}) = (\vec{A},\vec{D})(\vec{B},\vec{C});$$

за α_2 имамо:

$$[(\{\vec{A},\vec{B}\}\vec{C})\,\vec{D}] = (\vec{B},\vec{C})[\vec{A},\vec{D}].$$

Производ α_3 претставља диаду, али та диада може да буде написана једноставније овако:

$$\{(\{\vec{A},\vec{B}\},\vec{C})\vec{D}\} = (\vec{B},\vec{C})\{\vec{A},\vec{D}\}.$$

3. За сваки од написаних производа довољно је да познајемо само елементе диаде, а не поједине векторе, који образују ту диаду.

4. Горе наведене обрасце лако можемо да применимо и на случај јединичних вектора — ортова; на тај начин можемо без тешкоће да напишемо за сваки производ основне обрасце, помоћу којих онда налазимо тим производима одговарајуће скаларне изразе.

5. Множили смо диаду с десна; са истим правом можемо да анализујемо леве производе; исто тако са једним вектором можемо да помножимо диаду с лева, а са другим с десна.

Узмимо, на пример, производ

$$((\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\})\vec{D});$$

он има вредност

$$(\vec{B}(\vec{A},\vec{C}),\vec{D}) = (\vec{A},\vec{C})(\vec{B},\vec{D}).$$

Исто тако бисмо имали за други пример:

$$[(\vec{C}\{\vec{A},\vec{B}\})\vec{D}] = [\vec{B}(\vec{C},\vec{A}),\vec{D}] = (\vec{A},\vec{C})[\vec{B},\vec{D}].$$

19. Производ двеју диада.

Уочимо две диаде

$$Д_1 = \{\vec{A},\vec{B}\},$$

$$Д_2 = \{\vec{C},\vec{D}\}.$$

Од четири вектора, што образују те диаде, могуће је саставити више комбинација, које би играле улогу сваки пут нарочито дефинисаног *производа двеју диада*. Овде се заустављамо на комбиновању претходног члана прве диаде са претходним чланом друге и идућег члана прве диаде са идућим чланом друге. Али са истим правом можемо да комбинујемо претходни члан прве диаде са идућим друге; често пута за понеке производе такво комбиновање игра већу улогу него ли прво.

1. *Двоструки скаларни производ* са ознаком

$$((\text{Д}_1, \text{Д}_2)) = ((\{\vec{A}, \vec{B}\}, \{\vec{C}, \vec{D}\}))$$

дефинишимо једначином:

$$((\text{Д}_1, \text{Д}_2)) = (\vec{A}, \vec{C})(\vec{B}, \vec{D}).$$

Ако су диаде дате помоћу својих координата:

$$a_{pq}^{(1)}, \qquad a_{pq}^{(2)}, \qquad p, q = 1, 2, 3$$

тај производ има вредност:

$$((\text{Д}_1, \text{Д}_2)) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{(1)} a_{ij}^{(2)}$$

2. *Скаларно-векторски производ* у облику:

$$[(\text{Д}_1, \text{Д}_2)] = (\vec{A}, \vec{C})[\vec{B}, \vec{D}].$$

То је вектор са координатама:

$$\sum_{i=1}^{3} (a_{i2}^{(1)} a_{i3}^{(2)} - a_{i3}^{(1)} a_{i2}^{(2)}),$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_{i3}^{(1)} a_{i1}^{(2)} - a_{i1}^{(1)} a_{i3}^{(2)}),$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_{i1}^{(1)} a_{i2}^{(2)} - a_{i2}^{(1)} a_{i1}^{(2)}).$$

3. *Скаларно-диадски производ* са вредношћу:

$$\{(\text{Д}_1, \text{Д}_2)\} = (\vec{A}, \vec{C})\{\vec{B}, \vec{D}\}.$$

Координате диаде, што претставља тај производ, одређене су следећом шемом:

$$\begin{array}{lll}
\sum_{i=1}^{3} a_{i1}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i1}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i1}^{(1)} a_{i3}^{(2)}, \\
\sum_{i=1}^{3} a_{i2}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i2}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i2}^{(1)} a_{i3}^{(2)}, \\
\sum_{i=1}^{3} a_{i3}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i3}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{i3}^{(1)} a_{i3}^{(2)}.
\end{array}$$

Образујмо тај производ и у другој комбинацији, узимајући претходни вектор прве диаде са идућим вектором друге; тако добијамо производ

$$\{(\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2)\}' = (\vec{B}, \vec{C})\{\vec{A}, \vec{D}\}$$

са следећом координатном шемом:

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{i=1}^{3} a_{1i}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}^{(1)} a_{i1}^{(2)}, \\
\sum_{i=1}^{3} a_{1i}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}^{(1)} a_{i2}^{(2)}, \\
\sum_{i=1}^{3} a_{1i}^{(1)} a_{i3}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}^{(1)} a_{i3}^{(2)}, & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}^{(1)} a_{i3}^{(2)},
\end{array}$$

Покажимо понеке особине тог производа, који означимо краће са

$$\mathbf{P} = \{(\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2)\}'.$$

Узмимо један произвољан вектор $\vec{r}$ и помножимо га скаларно са првом диадом $\mathbf{Д}_1$; резултат множења означимо са $\vec{r}_1$, дакле имамо:

$$\vec{r}_1 = (\vec{r}, \mathbf{Д}_1) = \vec{B}(\vec{A}, \vec{r}).$$

Добивени резултат помножимо на исти начин скаларно са другом диадом; резултат означимо са $\vec{r}_2$, дакле имамо:

$$\vec{r}_2 = (\vec{r}_1, \mathbf{Д}_2) = (\vec{r}_1, \{\vec{C}, \vec{D}\}) = ((\vec{r}, \vec{A})\vec{B}, \{\vec{C}, \vec{D}\}) =$$

$$= (\vec{r}, \vec{A})(\vec{B}, \vec{C})\vec{D} =$$

$$= (\vec{B}, \vec{C})(\vec{r}, \{\vec{A}, \vec{D}\}).$$

Али последњи резултат можемо претставити овако:

$$\vec{r}_2 = (\vec{r}, (\vec{B}, \vec{C})\{\vec{A}, \vec{D}\}) = (\vec{r}, \mathbf{P})$$

или следећим начином:

$$((\vec{r}, \mathbf{Д}_1)\, \mathbf{Д}_2) = (\vec{r}, \{(\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2)\}') = (\vec{r}, \mathbf{P}).$$

Тај резултат показује да је узастопно скаларно множење једног вектора прво са једном диадом, а после са другом еквивалентно скаларном множењу тог истог вектора са горе наведеним скаларно-диадским производом, новом диадом $\mathbf{P}$.

Јасно је да такво множење може бити продужено множењем са трећом, четвртом и т. д. диадом., на пример, за три диаде можемо саставити производ:

$$(((\vec{r}, \mathbf{Д}_1)\, \mathbf{Д}_2)\, \mathbf{Д}_3).$$

Ако су множитељи једнаки, производ једнаких диада може бити дефинисан као *степен диаде* и можемо да уведемо, на примеу, следећу ознаку:

$$\{(\mathbf{Д}, \mathbf{Д})\}' = \mathbf{Д}^2.$$

Следеће групе производа претстављају векторске производе и то у таквим врстама:

4. *Векторско-скаларни производ* са следећом ознаком и вредношћу:

$$([\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2]) = ([\vec{A}, \vec{C}], [\vec{B}, \vec{D}]).$$

5. *Двоструко векторски производ*:

$$[[\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2]] = [[\vec{A}, \vec{C}], [\vec{B}, \vec{D}]].$$

6. *Векторско-диадски производ:*

$$\{[\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2]\} = \{[\vec{A}, \vec{C}], [\vec{B}, \vec{D}]\}.$$

Најзад треба да узмемо у обзир још оне комбинације кад од претходних вектора образујемо векторски производ, а од идућих диадски; од тог векторског производа и диаде могућно је саставити различите производе и на тај начин можемо да наведемо још следеће врсте производа двеју диада:

7. *Скаларни диадско-векторски производ* са вредношћу:

$$^{s}[\{\text{Д}_1, \text{Д}_2\}] = (\{\vec{A}, \vec{C}\}, \{\vec{B}, \vec{D}\}) = \vec{D}(\vec{B}[\vec{A}, \vec{C}])$$

8. *Векторских диадско-векторских производа* својим редом имамо три врсте:

8a. *Скаларно-векторски диадско-векторски производ*:

$$^{sv}[\{\text{Д}_1, \text{Д}_2\}] = {}^{s}[[\vec{A}, \vec{C}], \{\vec{B}, \vec{D}\}] = (\vec{D}, [[\vec{A}, \vec{C}], \vec{B}]),$$

8b. *Вектореко-векторски диадско-векторски производ*:

$$^{vv}[\{\text{Д}_1, \text{Д}_2\}] = {}^{v}[[\vec{A}, \vec{C}], \{\vec{B}, \vec{D}\}] = [\vec{D}, [[\vec{A}, \vec{C}], \vec{B}]],$$

8c. *Диадско-векторски диадско-векторски производ*:

$$^{dv}[\{\text{Д}_1, \text{Д}_2\}] = {}^{d}[[\vec{A}, \vec{C}], \{\vec{B}, \vec{D}\}] = \{\vec{D}, [[\vec{A}, \vec{C}], \vec{B}]\}.$$

Карактер свих тих производа потпуно је очигледан. Они могу бити сматрани као примери различитих производа двеју диада. У случају потребе лако је увести и друге производе, узимајући векторе у другом реду и комбинујући их на други начин.

Израчунавање вредности сваког производа помоћу координата датих диада не претставља никакве тешкоће. Лако је такође образовати вредности тих производа за основне ортове.

Могуће би било претрести све могуће производе са различитим редом вектора, што образују те производе, али та анализа носи сувише формалан карактер и више спада у проблем комбинаторике.

У вези са појмом производа треба да наведемо још једну примедбу.

Узмимо, рецимо, два производа два, три или више вектора. Претпоставимо да је сваки од тих производа истог карактера, т. ј. или су оба два скалари или вектори или диаде. Саставимо од тих производа линеарну функцију са одређеним бројним коефицијентима. Тада можемо тврдити да та комбинација од вектора такође претставља један производ, производ једне нарочите природе.

Тако, на пример, ако узмемо два векторска производа вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$[\vec{A}, \vec{B}] \quad \text{и} \quad [\vec{B}, \vec{A}]$$

тада вектор

$$\alpha[\vec{A}, \vec{B}] + \beta[\vec{B}, \vec{A}] = \vec{F}$$

такође претставља један производ векторске природе и то из тог разлога, да под условима

$$\vec{F}(\vec{A}_1) = \alpha[\vec{A}_1, \vec{B}] + \beta[\vec{B}, \vec{A}_1],$$

$$\vec{F}(\vec{A}_2) = \alpha[\vec{A}_2, \vec{B}] + \beta[\vec{B}, \vec{A}_2],$$

$$\vec{F}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \alpha[\vec{A}_1 + \vec{A}_2, \vec{B}] + \beta[\vec{B}, \vec{A}_1, + \vec{A}_2]$$

имамо непосредно

$$\vec{F}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \vec{F}(\vec{A}_1) + \vec{F}(\vec{A}_2).$$

Исто тако израз

$$\alpha\{\vec{A}, \vec{B}\} + \beta\{\vec{B}, \vec{A}\}$$

може бити сматран као нарочити производ диадске природе. За специјалне вредности $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ тај последњи производ, о којем ћемо говорити мало детаљније у другој глави, употребљује се у теорији диада у облику тако званог *алгебарског производа* два вектора.

Ова примедба показује да сем овде протумачених производа два или више вектора може бити још више других производа, који могу често да служе врло корисно у применама теорије вектора и нарочито теорије диада.

ГЛАВА II.

Афинор.

20. Збир диада. Афинор.

Уочимо n произвољних диада, где је n коначан број:

$$\text{Д}_i = \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \} . \qquad i = 1 , 2 , \ldots , n$$

Скуп тих диада, заједно посматраних, претставља њихов збир. Сабирање диада означимо и у том општем случају знаком $+$, дакле

$$\{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \ldots + \{ \vec{A}_n , \vec{B}_n \} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \} = \sum_{i=1}^{n} \text{Д}_i .$$

Покажимо сада да збир произвољног броја произвољних диада увек може да буде сведен на збир највише само трију диада.

У ствари, сваки, рецимо, идући вектор диаде можемо да разложимо у три компоненте у три произвољна правца, — само та три правца не смеју бити компланарна. Дакле за сваки вектор можемо да напишемо:

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i' + \vec{B}_i'' + \vec{B}_i''' .$$

После тога наш збир диада можемо да трансформишемо овако:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Д}_i = \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \} = \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i' \} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i'' \} + \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i''' \}.$$

Пошто сви вектори B_i' ($i = 1, 2, \ldots, n$) имају исти правац, можемо ставити

$$\vec{B}_i' = B_i' \vec{u}_1 ,$$

где је $\vec{u}_1$ орт првог правца, а B_i' скалар, који претставља интензитет вектора, ако се смер тог вектора поклапа са смером орта $\vec{u}_1$, а негативну вредност тог интензитета, ако му је смер супротан смеру орта $\vec{u}_1$.

Ако уврстимо добијену вредност вектора $\vec{B}'$ у први збир, добићемо:

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i' \} = \sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , B_i' \vec{u}_1 \}.$$

Пошто сваки члан тог збира можемо да трансформишемо овако:

$$\{ \vec{A}_i , B_i' \vec{u}_1 \} = \{ B_i' \vec{A}_i , \vec{u}_1 \} ,$$

сам збир узима вредност:

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i' \} = \{ \sum_{i=1}^{n} B_i' \vec{A}_i , \vec{u}_1 \} .$$

Ако сада уведемо ознаку

$$\sum_{i=1}^{n} B_i' \vec{A}_i = \vec{A}'_{(1)} ,$$

наш збир се претвара у диаду

$$\{ \vec{A}'_{(1)}, \vec{u}_1 \} .$$

Помножимо сада други вектор, орт $\vec{u}_1$, са произвољним скаларом m, а први вектор поделимо са тим истим скаларом; услед те операције диада остаје непромењена (§ 4). Ако означимо

$$\frac{1}{m}\vec{A'}_{(1)} = \vec{A}_{(1)}, \qquad m\vec{u}_1 = \vec{B}_{(1)},$$

нашу диаду можемо написати овако:

$$\{\vec{A}_{(1)}, \vec{B}_{(1)}\}.$$

Пошто је орт $\vec{u}_1$ изабран произвољно, а скалар m је такође произвољан, можемо тврдити да је у тој диади вектор $\vec{B}_{(1)}$ произвољан.

На исти начин могу два друга збира бити доведена до диада:

$$\{\vec{A}_{(2)}, \vec{B}_{(2)}\} \quad \text{и} \quad \{\vec{A}_{(3)}, \vec{B}_{(3)}\},$$

при чему су вектори $\vec{B}_{(2)}$ и $\vec{B}_{(3)}$ такође произвољни и ограничени су само тим условом, да три вектора $\vec{B}_{(1)}, \vec{B}_{(2)}, \vec{B}_{(3)}$ не смеју бити компланарни.

На тај начин можемо да напишемо следећу основну једначину за збир произвољних диада у произвољном броју:

$$\sum_{i=1}^{n}\{\vec{A}_i, \vec{B}_i\} = \{\vec{A}_{(1)}, \vec{B}_{(1)}\} + \{\vec{A}_{(2)}, \vec{B}_{(2)}\} + \{\vec{A}_{(3)}, \vec{B}_{(3)}\}.$$

Та једначина потврђује горе наведени став, да произвољни збир произвољних диада може да буде сведен на збир трију диада.

Из овог става закључујемо да у теорији диада нарочиту улогу игра збир трију диада.

Збир трију произвољних диада има нарочити назив, — он се зове *диадик* или *афинор*. Први назив је увео у науку W. Gibbs (цитирам по Vector analysis J. W. Gibbs'a и E. B. Wilson'a. 1913. p. 265). Код Gibbs'a је диадик симбол једне нарочите операције — линеарне функције. Реч афинор увео је F. Jung (Einige vektoranalytische Bezeichnungs und Benennungsfragen. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 17. S. 388). Тај последњи назив стоји у вези са такозваном афином трансформацијом простора, о којој ћемо говорити доцније. Пошто та реч има више смисла, него реч диадик, и јасније разликује тај појам од диаде, задржаћемо у идућим излагањима реч афинор.

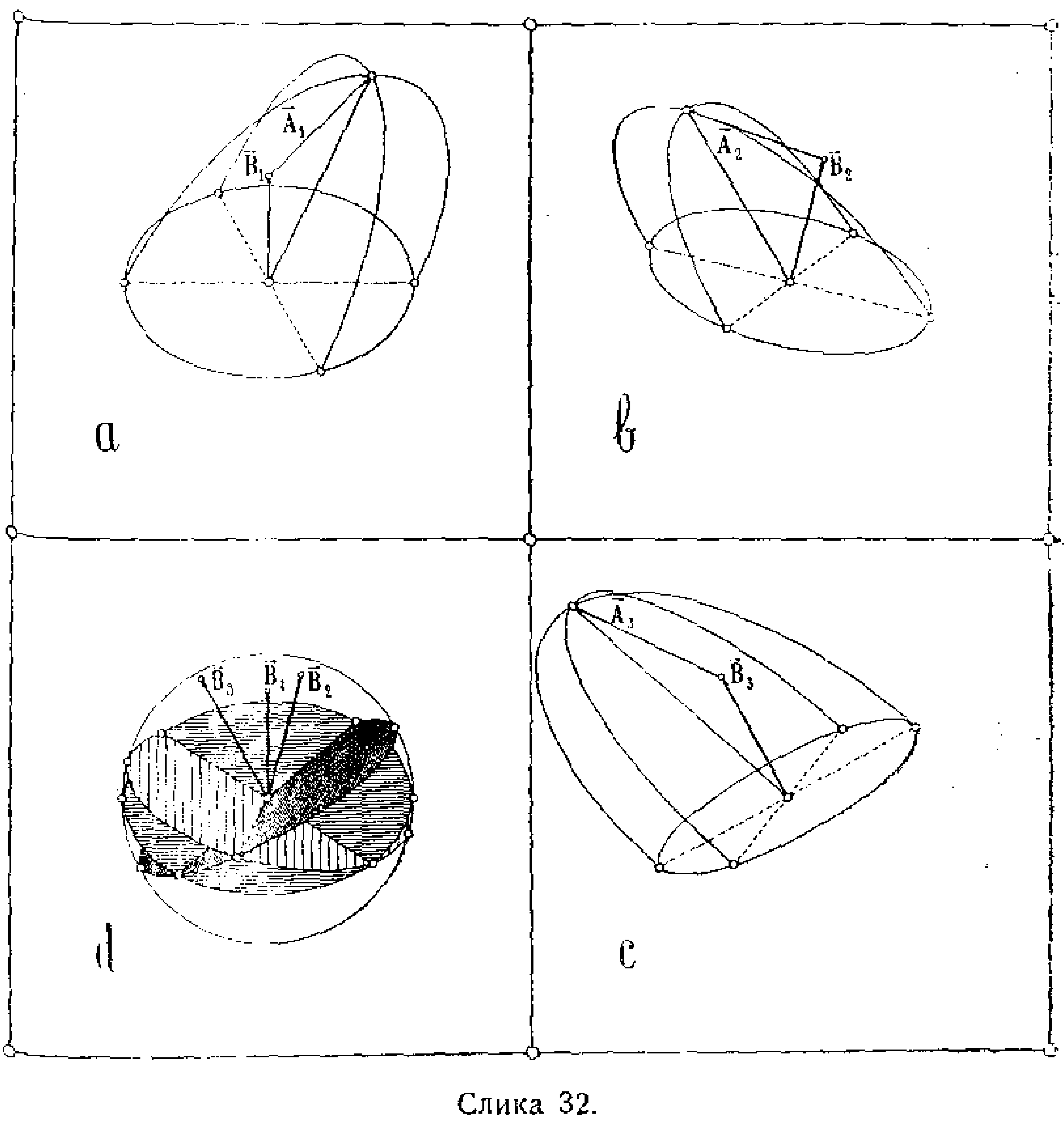
Афинор можемо краће да означимо са $\mathbf{A}$, дакле

$$\mathbf{A} = Д_1 + Д_2 + Д_3 =$$

$$= \{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3 , \vec{B}_3 \} ;$$

афинор можемо обележавати и каквим другим словом кад унапред установимо да је то један афинор.

Пошто смо у претходној глави навели конкретно геомет-



Слика 32.

Афинор. *a*, *b*, *c*. — Поједине афинорове диаде. *d*. — Релативни положај основа тих диада.

ријско тумачење једне диаде, јасно је да такво конкретно тумачење има и један афинор. Афинор претставља скуп трију модела елипсоида, од којих сваки претставља одговарајућу диаду. Три претходна вектора одређују правце померања диада, три идућа стоје управно на основе диада. Слика 32 претставља један афинор. Афинорове диаде су претстављене у редукованом облику: вектори су $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ ортови; основе диада су диаметралне равни једне сфере; те равни стоје управно на векторе $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$. Афинор дакле у том тумачењу претставља један троструки геометријски облик и у својој потпуности има три засебно постојеће геометријске слике — диаде. Ако једну диаду упоредимо са оделом, онда би афинор могли упоредити са гардеробом, која се састоји из летњег, зимског и полусезонског одела.

У трансформацији збира произвољних диада на један афинор видели смо да идући вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ могу да буду изабрани потпуно произвољно, само да нису компланарни. То значи основе наших трију елипсоида могу бити изабране произвољно, само равни тих основа не могу у општем случају да се секу дуж једне исте праве линије. Кад изаберемо те основе на један одређени начин, правци претходних вектора $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ узимају потпуно одређене положаје.

Обратно, можемо да на један произвољан начин изаберемо правце померања афинора, векторе $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ и у том случају биће потпуно одређени вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$.

За доказ уочимо један афинор:

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_1, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_3, \vec{B}_3\}$$

и три произвољна некомпланарна вектора

$$\vec{A}_1^*, \vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*.$$

Сваки од вектора $\vec{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) можемо да претставимо у облику

$$\vec{A}_i = l_i \vec{A}_1^* + m_i \vec{A}_2^* + n_i \vec{A}_3^*, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где су l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) скалари, који, као што је познато, имају вредности:

$$l_i = \frac{(\vec{A}_i\,[\vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*])}{(\vec{A}_1^*[\vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*])},\; m_i = \frac{(\vec{A}_i\,[\vec{A}_3^*, \vec{A}_1^*])}{(\vec{A}_1^*[\vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*])},\; n_i = \frac{(\vec{A}_i\,[\vec{A}_1^*, \vec{A}_2^*])}{(\vec{A}_1^*[\vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*])}.$$

Ако уврстимо добијене вредности у наш афинор, добићемо следећу вредност тог афинора:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3}\{\, l_i\,\vec{A}_1^* + m_i\,\vec{A}_2^* + n_i\,\vec{A}_3^*, \vec{B}_i\,\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\{\,\vec{A}_1^*, l_i\,\vec{B}_i\,\} + \sum_{i=1}^{3}\{\,\vec{A}_2^*, m_i\,\vec{B}_i\,\} + \sum_{i=1}^{3}\{\,\vec{A}_3^*, n_i\,\vec{B}_i\,\}.$$

Ако сада уведемо ознаке

$$\sum_{i=1}^{3} l_i\,\vec{B}_i = \vec{B}_1^*,\; \sum_{i=1}^{3} m_i\,\vec{B}_i = \vec{B}_2^*,\; \sum_{i=1}^{3} n_i\,\vec{B}_i = \vec{B}_3^*,$$

можемо афинор дефинитивно написати овако:

$$\mathbf{A} = \{\,\vec{A}_1^*, \vec{B}_1^*\} + \{\,\vec{A}_2^*, \vec{B}_2^*\} + \{\,\vec{A}_3^*, \vec{B}_3^*\,\}.$$

Та једначина потврђује горе наведени став. У том су изразу вектори $\vec{A}_1^*$, $\vec{A}_2^*$, $\vec{A}_3^*$ произвољно изабрани, а вектори $\vec{B}_1^*$ $\vec{B}_2^*$, $\vec{B}_3^*$ за дати афинор потпуно су одређени.

На тај начин за одређивање једног афинора, рецимо, са датим основама, једанпут засвагда изабраним, довољно је да познајемо три вектора. Један афинор можемо дакле да одредимо са три вектора. Пошто је за одређивање сваког вектора потребно да познајемо три скалара, можемо тврдити да за одређивање једног афинора треба да познајемо девет скалара. То могу да буду или девет координата трију вектора, што одређују један афинор, или какве функције тих координата, помоћу којих могу да буду одређене те координате.

21. Трансформација афинора.

У претходном параграфу видели смо да један афинор

$$\mathbf{A} = \{\,\vec{A}_1, \vec{B}_1\} + \{\,\vec{A}_2, \vec{B}_2\,\} + \{\,\vec{A}_3, \vec{B}_3\}$$

можемо да напишемо у различитим облицима. Претставимо да је тај исти афинор написан у облику:

$$\mathbf{A}' = \{\vec{A}'_1, \vec{B}'_1\} + \{\vec{A}'_2, \vec{B}'_2\} + \{\vec{A}'_3, \vec{B}'_3\},$$

где су $\vec{A}'_i$, $\vec{B}'_i$ ($i = 1, 2, 3$) нови вектори. Решимо питање, какве везе постоје између старих и нових вектора, кад смо до новог афинора дошли трансформацијом полазног афинора.

Прелаз од вектора $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ на векторе $\vec{B}_1{}', \vec{B}_2{}', \vec{B}_3{}'$ можемо да извршимо помоћу следећих векторских једначина:

$$\begin{aligned} \vec{B}'_1 &= l_{11}\vec{B}_1 + l_{12}\vec{B}_2 + l_{13}\vec{B}_3, \\ \vec{B}'_2 &= l_{21}\vec{B}_1 + l_{22}\vec{B}_2 + l_{23}\vec{B}_3, \qquad (72) \\ \vec{B}'_3 &= l_{31}\vec{B}_1 + l_{32}\vec{B}_2 + l_{33}\vec{B}_3. \end{aligned}$$

Ако су вектори $\vec{B}_i$ и $\vec{B}'_i$ ($i = 1, 2, 3$) дати, скалари l_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) се одређују из једначина:

$$(73) \qquad l_{ij} = \frac{(\vec{B}'_i[\vec{B}_{j+1}, \vec{B}_{j+2}])}{(\vec{B}_1[\vec{B}_2, \vec{B}_3])}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

при чему треба да рачунамо:

$$\vec{B}_4 = \vec{B}_1, \quad \vec{B}_5 = \vec{B}_2.$$

Ако почнемо сада облик $\mathbf{A}'$ нашег афинора поново враћати на облик $\mathbf{A}$ сменом вектора $\vec{B}'_i$ ($i = 1, 2, 3$) из (72), добићемо следећу форму нашег афинора:

$$\mathbf{A}'' = \{l_{11}\vec{A}'_1 + l_{21}\vec{A}'_2 + l_{31}\vec{A}'_3, \vec{B}_1\} + \{l_{12}\vec{A}'_1 + l_{22}\vec{A}_2{}' + l_{32}\vec{A}'_3, \vec{B}_2\} + \{l_{13}\vec{A}'_1 + l_{23}\vec{A}'_2 + l_{33}\vec{A}_3{}', \vec{B}_3\}.$$

Она ће бити идентична са формом $\mathbf{A}$, ако ставимо

$$(74)\qquad \begin{aligned} \vec{A}_1 &= l_{11}\vec{A}'_1 + l_{21}\vec{A}'_2 + l_{31}\vec{A}'_3,\\ \vec{A}_2 &= l_{12}\vec{A}'_1 + l_{22}\vec{A}'_2 + l_{32}\vec{A}'_3,\\ \vec{A}_3 &= l_{13}\vec{A}'_1 + l_{23}\vec{A}'_2 + l_{33}\vec{A}'_3. \end{aligned}$$

Ако у те једначине уврстимо вредности скалара l_{ij} из (73), долазимо до следећих векторских веза

$$(75)\quad (\vec{B}_1[\vec{B}_2,\vec{B}_3])\vec{A}_i = \sum_{j=1}^{3}\vec{A}'_j(\vec{B}'_j[\vec{B}_{i+1},\vec{B}_{i+2}]),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

које треба да задовољавају вектори $\vec{A}_i$, $\vec{B}_i$ и $\vec{A}'_i$, $\vec{B}'_i$ $(i=1,2,3)$, ако они претстављају један исти афинор.

Са друге стране, ако желимо да трансформишемо афинор **A** у какви други облик, вредности скалара l_{ij} $(i,j=1,\ 2,\ 3)$ у једначинама (72) можемо да узмемо произвољне; ти су скалари ограничени само тиме, да детерминанта

$$\Delta = |l_{11}\, l_{22}\, l_{33}|$$

не сме да буде једнака нули.

За нови облик афинора векторе $\vec{A}'_1, \vec{A}'_2, \vec{A}'_3$ можемо затим да одредимо из једначина (74); тако добијамо:

$$(76)\qquad \begin{aligned} \vec{A}'_1 &= L_{11}\vec{A}_1 + L_{21}\vec{A}_2 + L_{31}\vec{A}_3,\\ \vec{A}'_2 &= L_{12}\vec{A}_1 + L_{22}\vec{A}_2 + L_{32}\vec{A}_3,\\ \vec{A}'_3 &= L_{13}\vec{A}_1 + L_{23}\vec{A}_2 + L_{33}\vec{A}_3, \end{aligned}$$

где су L_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ алгебарски комплементи (минори са одговарајућим знацима) детерминанте Δ, који припадају елементима l_{ij} $(i,j=1,\ 2,\ 3)$, подељени самом детерминантом. Дакле, на пример,

$$L_{11} = \frac{1}{\Delta}(l_{22}\,l_{33} - l_{23}\,l_{32}).$$

Једначине (72) и (76) показују какве вредности имају идући и претходни вектори једног афинора када га из форме

$\mathbf{A}$ трансформишемо помоћу система произвољних скалара l_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ у нову форму.

Величине L_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ су функције величина l_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. Девет линеарних веза између тих величина могу бити написане овако:

$$(77) \qquad \sum_{k=1}^{3} l_{ik} L_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ за } i = j, \\ 0 \text{ за } i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Обратимо пажњу на једну нарочиту трансформацију афинора. Претставимо да су за нове идуће векторе узети вектори коњуговани првобитним идућим векторима, дакле ставимо:

$$\vec{B}_1' = \vec{B}_1^* = \frac{1}{D}[\vec{B}_2, \vec{B}_3], \quad \vec{B}_2' = \vec{B}_2^* = \frac{1}{D}[\vec{B}_3, \vec{B}_1],$$

$$\vec{B}_3' = \vec{B}_3^* = \frac{1}{D}[\vec{B}_1, \vec{B}_2],$$

где је

$$D = (\vec{B}_1 [\vec{B}_2, \vec{B}_3]).$$

Пошто у овом случају једначине (73) дају:

$$l_{ij} = (\vec{B}_i^*, \vec{B}_j^*),$$

лако можемо да одредимо нове вредности претходних вектора из једначина (76).

У вези са конструисањем коњугованих вектора, рецимо, са идућим векторима датог афинора наведимо следећу примедбу.

Замислимо један афинор

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_1, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_3, \vec{B}_3\}.$$

Том афинору одговарају два триједра вектора: триједар $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ и триједар $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$. За сваки триједар можемо да конструишемо коњуговани триједар, чије ћемо векторе означити са:

$$\vec{A}_1^*, \vec{A}_2^*, \vec{A}_3^*; \quad \vec{B}_1^*, \vec{B}_2^*, \vec{B}_3^*.$$

На тај начин у вези са сваким афинором можемо да анализујемо још три афинора:

$$\mathbf{A}^{0*} = \{\vec{A}_1, \vec{B}_1^*\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_2^*\} + \{\vec{A}_3, \vec{B}_3^*\},$$

$$\mathbf{A}^{*0} = \{\vec{A}_1^*, \vec{B}_1\} + \{\vec{A}_2^*, \vec{B}_2^*\} + \{\vec{A}_3^*, \vec{B}_3\},$$

$$\mathbf{A}^{**} = \{\vec{A}_1^*, \vec{B}_1^*\} + \{\vec{A}_2^*, \vec{B}_2^*\} + \{\vec{A}_3^*, \vec{B}_3^*\}.$$

Сваки од тих афинора одређује основни афинор $\mathbf{A}$; јер за сваки систем коњугованих вектора можемо да одредимо основне векторе на основу познате дефиниције коњугованости; дакле, на пример, ако су дати вектори $\vec{B}_1^*, \vec{B}_2^*, \vec{B}_3^*$, основни вектори се одређују из образаца:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{D^*}[\vec{B}_2^*, \vec{B}_3^*], \ldots\ldots,$$

где је

$$D^* = (\vec{B}_1^*[\vec{B}_2^*, \vec{B}_3^*]),$$

али то одређивање за све те афиноре не доводи увек до истог резултата, јер ако, на пр., у афинору

$$\mathbf{A}^{*0} = \sum_{i=1}^{3}\{\vec{A}_i^*, \vec{B}_i\}$$

трансформишемо диаде, из којих је образован тај афинор, и после тога успоставимо полазни афинор узимајући у обзир у место $\vec{A}_i^*$ нове претходне векторе, нећемо добити тај исти афинор $\mathbf{A}$.

На анализу тих афинора вратићемо се у једноме од идућих параграфа (§ 39).

22. Једнакост афинора.

Из претходног је очигледно да као услов једнакости двају афинора не можемо да поставимо једнакост оних диада, које стварају тај афинор: диаде могу да буду различите, али после трансформације афинори могу да постану идентични; дакле за упоређивање двају афинора морамо да их доведемо на збир таквих, највише трију диада, чији су идући (или претходни) чланови упоредно једнаки.

На тај начин дефиницију једнакости двају афинора можемо да поставимо овако:

Два афинора су једнака кад, трансформисана на исте идуће (или претходне) чланове својих диада, они имају исте одговарајуће претходне (или идуће) чланове тих диада.

Дакле за два афинора

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \},$$

$$\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}'_i , \vec{B}'_i \}$$

можемо тврдити да су једнаки:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

ако после трансформације тих афинора, рецимо, на исте идуће чланове $\vec{B}_1''$, $\vec{B}_2''$, $\vec{B}_3''$:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}''_i , \vec{B}''_i \},$$

$$\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}'''_i , \vec{B}''_i \}$$

имају исте претходне векторе, т. ј.

$$\vec{A}''_i = \vec{A}'''_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Непосредно помоћу вектора $\vec{A}_i$, $\vec{B}_i$; $\vec{A}'_i$, $\vec{B}'_i$ ($i = 1, 2, 3$) услови једнакости двају афинора претстављени су једначинама (75):

$$(\vec{B}_1 [\vec{B}_2, \vec{B}_3]) \vec{A}_i = \sum_{=1}^{3} \vec{A}'_j (\vec{B}'_j [\vec{B}_{i+1}, \vec{B}_{i+2}]) . \qquad i = 1, 2, 3.$$

23. Инваријанте афинора.

Ако један афинор

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \}$$

трансформишемо на други облик

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}'_i , \vec{B}'_i \} ,$$

могуће је навести више скалара и један вектор, који задржавају своје вредности независно од тога да ли су они образовани на основу вектора прве форме афинора или друге.

Такви скалари и тај вектор зову се *инваријанте* датог *афинора.*

Наведимо вредности понеких инваријантних скалара и инваријантног вектора.

Покажемо да вектор

$$\vec{V} = [\vec{A}_1 , \vec{C}_1] + [\vec{A}_2 , \vec{B}_2] + [\vec{A}_3 , \vec{B}_3] ,$$

образован од векторских производа диадиних вектора и скалари

$$S_1 = (\vec{A}_1 , \vec{B}_1) + (\vec{A}_2 , \vec{B}_2) + (\vec{A}_3 , \vec{B}_3) ,$$

$$S_2 = ([\vec{A}_2 , \vec{A}_3] [\vec{B}_2 , \vec{B}_3]) + ([\vec{A}_3 , \vec{A}_1] [\vec{B}_3 , \vec{B}_1]) +$$

$$+ ([\vec{A}_1 , \vec{A}_2] , [\vec{B}_1 , \vec{B}_2]) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{A}_2 , \vec{B}_2) , (\vec{A}_2 , \vec{B}_3) \\ (\vec{A}_3 , \vec{B}_2) , (\vec{A}_3 , \vec{B}_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\vec{A}_3 , \vec{B}_3) , (\vec{A}_3 , \vec{B}_1) \\ (\vec{A}_1 , \vec{B}_3) , (\vec{A}_1 , \vec{B}_1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (\vec{A}_1 , \vec{B}_1) , (\vec{A}_1 , \vec{B}_2) \\ (\vec{A}_2 , \vec{B}_1) , (\vec{A}_2 , \vec{B}_2) \end{vmatrix} ,$$

$$S_3 = (\vec{A}_1 , [\vec{A}_2 , \vec{A}_3]) (\vec{B}_1 , [\vec{B}_2 , \vec{B}_3]) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{A}_1, \vec{B}_1), (\vec{A}_1, \vec{B}_2), (\vec{A}_1, \vec{B}_3) \\ (\vec{A}_2, \vec{B}_1), (\vec{A}_2, \vec{B}_2), (\vec{A}_2, \vec{B}_3) \\ (\vec{A}_3, \vec{B}_1), (\vec{A}_3, \vec{B}_2), (\vec{A}_3, \vec{B}_3) \end{vmatrix},$$

образовани од скаларних производа тих вектора, претстављају инваријанте афинора.

Образујмо вектор $\vec{V'}$ за другу форму афинора:

$$\vec{V'} = [\vec{A'}_1, \vec{B'}_1] + [\vec{A'}_2, \vec{B'}_2] + [\vec{A'}_3, \vec{B'}_3].$$

Узимајући у обзир једначине (72) и (76), тај вектор можемо претставити овако:

$$\vec{V'} = \sum_{j=1}^{3} [\sum_{i=1}^{3} L_{ij} \vec{A}_i, \sum_{i=1}^{3} l_{ji} \vec{B}_i],$$

али после извршеног множења непосредно на основу једначина (77) долазимо до израза

$$\vec{V'} = \sum_{i=1}^{3} [\vec{A}_i, \vec{B}_i];$$

дакле је

$$\vec{V'} = \vec{V},$$

а то потврђује инваријантност вектора $\vec{V}$.

Сасвим на исти начин можемо да се убедимо у инваријантност скалара S_1, S_2, S_3; и ту треба да се послужимо једначинама (77).

Пошто скалари S_1, S_2, S_3 играју врло велику улогу у анализи природе једног афинора, они се зову *први, други, трећи афинорови скалари.*

Инваријантни вектор $\vec{V}$ зваћемо кратко *афиноров вектор.*

24. Различите форме афинора. Координате афинора.

Сваки афинор

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \} ,$$

можемо, као што смо видели, да претставимо у различитим облицима. Дакле у претстави афинора помоћу диада има произвољности и ту произвољност можемо да искористимо тако, да диадама, које стварају тај афинор, дадемо неке унапред одређене особине.

Прво се зауставимо на оној форми афинора, у којој учествују само ортови координатних оса i, j, k, другим речима да наш афинор буде претстављен само помоћу координатних диада.

Пошто (§ 9—12) свака диада може бити претстављена као скуп од девет координатних диада помножених свака својим скаларом, $3 \times 9 = 17$ чланова афонора своде се сабирањем на девет чланова, тако да афинор добија следећу форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = {} & a_{11}\{ i , i \} + a_{12}\{ i , j \} + a_{13}\{ i , k \} + \\ & a_{21}\{ j , i \} + a_{22}\{ j , j \} + a_{23}\{ j , k \} + \\ & a_{31}\{ k , i \} + a_{32}\{ k , j \} + a_{33}\{ k , k \} . \end{aligned} \tag{78}$$

Скалари a_{ij} $(i , j = 1 , 2 , 3)$ зову се *координате афинора*, а форму (78) можемо да зовемо *координатном формом афинора.*

Координате једног афинора a_{ij} $(i , j = 1 , 2 , 3)$ морамо писати у једном одређеном реду; усвојимо као услов да их пишемо уз ознаку афинора овако:

$$\mathbf{A} \left\{ \begin{matrix} a_{11} , & a_{12} , & a_{13} \\ a_{21} , & a_{22} , & a_{23} \\ a_{31} , & a_{32} , & a_{33} . \end{matrix} \right.$$

Ако координате вектора $\vec{A}_i$, $\vec{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ у погледу основног триједра са ортовима i, j, k означимо са

$$\left. \begin{aligned} & \vec{A}_i (A_{i1} , A_{i2} , A_{i3}) , \\ & \vec{B}_i (B_{i1} , B_{i2} , B_{i3}) , \end{aligned} \right. \qquad (i = 1 , 2 , 3)$$

координате афинора имају вредности:

$$(79) \qquad a_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ki} B_{kj}, \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

или, на пример, у развијеном облику:

$$a_{11} = A_{11} B_{11} + A_{21} B_{21} + A_{31} B_{31},$$

$$a_{12} = A_{11} B_{12} + A_{21} B_{22} + A_{31} B_{32}.$$

Величине са истим ознакама a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) увели смо као координате једне диаде, али између девет координата једне диаде имали смо четири везе, — између координата једног афинора у општем случају никакве везе не постоје, те величине могу узимати потпуно произвољне вредности.

У случају аналитичког проучавања једног афинора његова координатна форма игра врло велику улогу; јасно је да свака операција са афинором може бити претстављена помоћу одговарајућих операција са његовим координатама.

Ако је афинор дат у својој координатној форми, његове горе наведене (§ 23) инваријанте можемо претставити овако:

$$\vec{V} = (a_{23} - a_{32}) i + (a_{31} - a_{13}) j + (a_{12} - a_{21}) k.$$

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{31} \\ a_{13}, & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

25. Координатни вектори афинора, претходни и идући.

Раније смо видели да у једноме афинору за идуће или претходне векторе можемо да бирамо произвољне векторе.

Бирајмо прво за идуће векторе ортове i, j, k једног ортогоналног триједра. Означимо претходне векторе афинора, трансформисаног на такве идуће векторе са $\vec{A}_{(i)}$, $\vec{A}_{(j)}$, $\vec{A}_{(k)}$. У том случају наш афинор узима форму:

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_{(i)}, i\} + \{\vec{A}_{(j)}, j\} + \{\vec{A}_{(k)}, k\}. \tag{80}$$

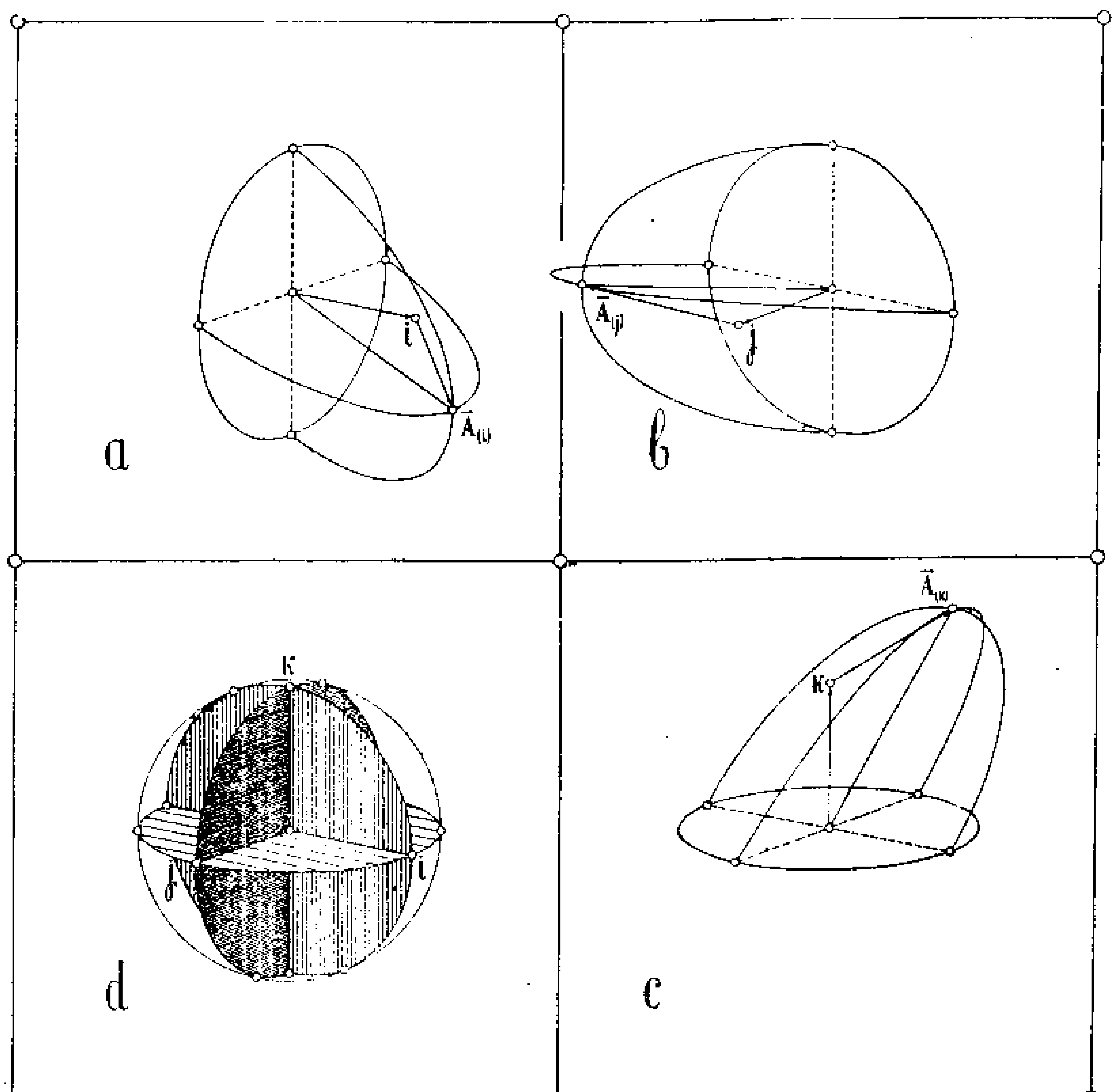
Векторе $\vec{A}_{(i)}$, $\vec{A}_{(j)}$, $\vec{A}_{(k)}$ можемо звати *претходним координатним векторима афинора.*

Ако тај исти афинор претставимо у облику:

$$\mathbf{A} = \{i, \vec{B}_{(i)}\} + \{j, \vec{B}_{(j)}\} + \{k, \vec{B}_{(k)}\}, \tag{81}$$

уведени вектори $\vec{B}_{(i)}$, $\vec{B}_{(j)}$, $\vec{B}_{(k)}$ претстављају тада *идуће координатне векторе афинора.*

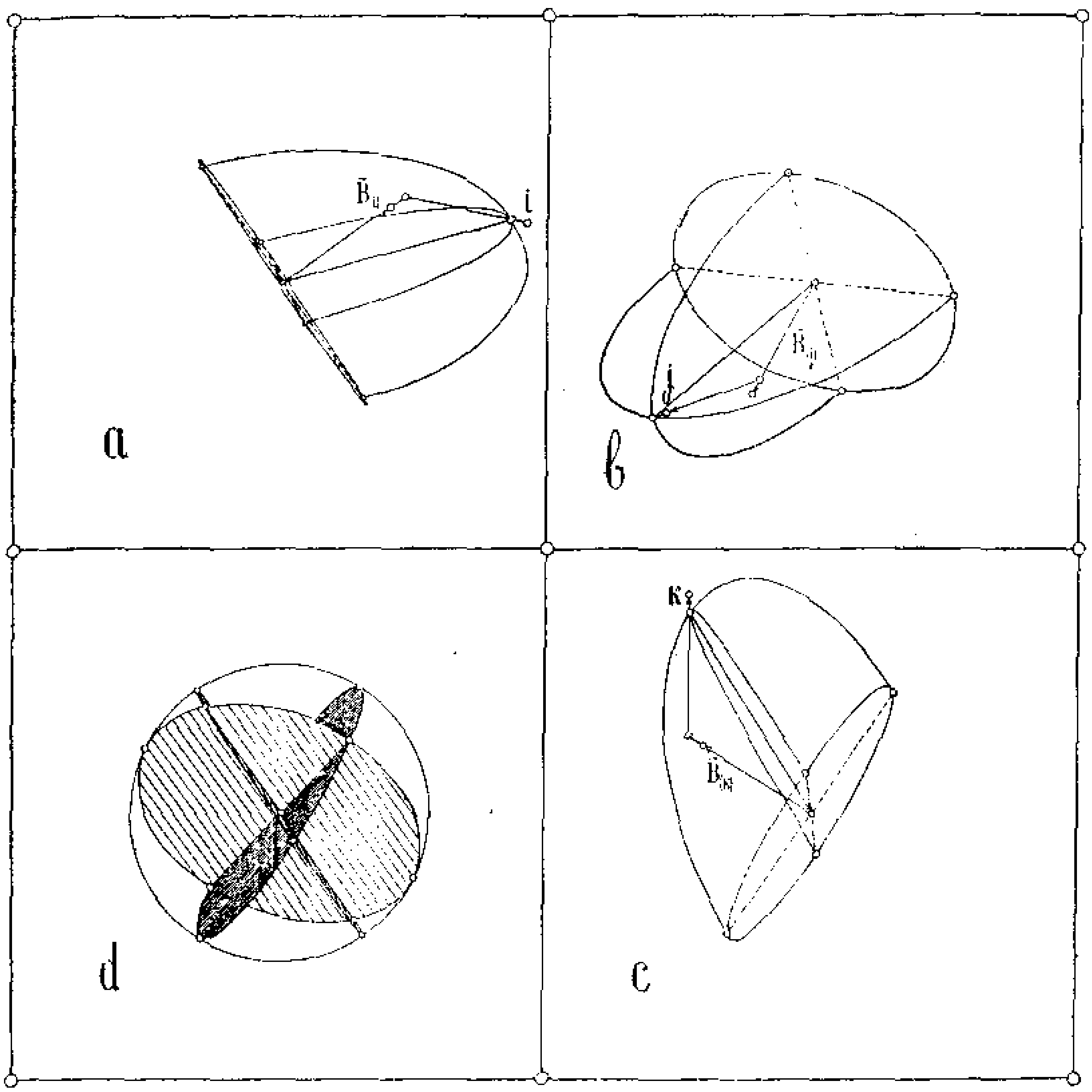
Диаде, које улазе у форме (80) или (81), зову се *координатне диаде афинора из претходних,* било *из идућих координатних вектора* тог *афинора.*



Слика 33.

Афинор са претходним координатним векторима. *a, b, c.* — Поједине афинорове диаде. *d.* — Релативни положај основа тих диада.

Две слике (слике 33 и 34) дају претставу једног истог афинора помоћу једних и других координатних диада.



Слика 34.

Афинор са идућим координатним векторима. *a*, *b*, *c*. — Поједине афинорове диаде. *d*. — Релативни положај основа тих диада.

Јасно је да између претходних и идућих координатних вектора постоје везе, које можемо написати овако:

$$
(82)\qquad
\begin{aligned}
\vec{B}_{(i)} &= A_{(i)\,1}\, i + A_{(j)\,1}\, j + A_{(\text{к})\,1}\, k\,,\\
\vec{B}_{(j)} &= A_{(i)\,2}\, i + A_{(j)\,2}\, j + A_{(\text{к})\,2}\, k\,,\\
\vec{B}_{(\text{к})} &= A_{(i)\,3}\, i + A_{(j)\,3}\, j + A_{(\text{к})\,3}\, k\,.
\end{aligned}
$$

Скалари афинора S_1, S_2, S_3 за једну и другу специјалну форму афинора узимају облик:

$$S_1 = A_{(i)1} + A_{(j)2} + A_{(k)3} = B_{(i)1} + B_{(j)2} + B_{(k)3},$$

$$S_2 = [\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}]_1 + [\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(i)}]_2 + [\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}]_3 =$$

$$= [\vec{B}_{(j)}, \vec{B}_{(k)}]_1 + [\vec{B}_{(k)}, \vec{B}_{(i)}]_2 + [\vec{B}_{(i)}, \vec{B}_{(j)}]_3,$$

$$S_3 = (\vec{A}_{(i)} [\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}]) = (\vec{B}_{(i)} [\vec{B}_{(j)}, \vec{B}_{(k)}]).$$

Векторска инваријанта има вредност:

$$\vec{V} = [\vec{A}_{(i)}, i] + [\vec{A}_{(j)}, j] + [\vec{A}_{(k)}, k] =$$

$$= [i, \vec{B}_{(i)}] + [j, \vec{B}_{(j)}] + [k, \vec{B}_{(k)}].$$

Везе, које можемо да поставимо између вектора $\vec{A}_{(i)}$, $\vec{A}_{(j)}$, $\vec{A}_{(k)}$ и вектора $\vec{B}_{(i)}$, $\vec{B}_{(j)}$, $\vec{B}_{(k)}$ на основу двеју вредности за сваку инваријанту, лако се проверавају помоћу једначина (82).

26. Нормални облик афинора.

Узмимо један произвољан афинор $\mathbf{A}$ и трансформишимо га тако, да му идући вектори буду ортови једног одређеног ортогоналног триједра $Oxyz$; тај афинор можемо тада да напишемо у облику:

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_{(i)}, i\} + \{\vec{A}_{(j)}, j\} + \{\vec{A}_{(k)}, k\}, \tag{80}$$

при чему можемо претходне координатне векторе да повежемо са координатама самог афинора помоћу следећих једначина:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{(i)} &= a_{11} i + a_{21} j + a_{31} k, \\ \vec{A}_{(j)} &= a_{12} i + a_{22} j + a_{32} k, \\ \vec{A}_{(k)} &= a_{13} i + a_{23} j + a_{33} k. \end{aligned} \tag{83}$$

Са променом оријентације триједра $Oxyz$ у простору мењају се вектори $\vec{A}_{(i)}$, $\vec{A}_{(j)}$, $\vec{A}_{(k)}$ за дати афинор. Поставимо сада питање, да ли је могуће изабрати у место триједра $Oxyz$ такав тријеДар $OXYZ$ са ортовима I, J, K, да одговарајући му претходни вектори такође буду узајамно ортогонални и да својим правцима одреде нови ортогонални триједар $OX_1Y_1Z_1$ са ортовима I_1, J_1, K_1.

Ако је таква претстава афинора могућа, претходни вектори добијају вредности:

$$a_1 I_1\,,\ a_3 J\,,\ a_3 K\,,$$

где су a_1, a_2, a_3 — три скалара, а сам афинор узима облик:

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I_1 , I \} + a_2 \{ J_1 , J \} + a_3 \{ K_1 , K \}. \tag{84}$$

Покажимо сада како можемо да одредимо положај триједара $OXYZ$ и $OX_1Y_1Z_1$ и вредности скалара a_1, a_2, a_3.

Означимо координате ортова тријеДара $OXYZ$ и $OX_1Y_1Z_1$ у погледу тријеДра $Oxyz$ помоћу следећих шема:

$$\begin{aligned} I &= \alpha_{11} i + \alpha_{21} j + \alpha_{31} k\,, & I_1 &= \beta_{11} i + \beta_{21} j + \beta_{31} k\,,\\ J &= \alpha_{12} i + \alpha_{22} j + \alpha_{32} k\,, & J_1 &= \beta_{12} i + \beta_{22} j + \beta_{32} k\,,\\ K &= \alpha_{13} i + \alpha_{23} j + \alpha_{33} k\,, & K_1 &= \beta_{13} i + \beta_{23} j + \beta_{33} k\,. \end{aligned} \tag{85}$$

Ако афинор, претстављен у облику (84), трансформишемо на старе идуће векторе i, j, k и изједначимо претходне векторе из (84) и (80) добићемо следеће једначине, које одређују векторе $\vec{A}_{(i)}$, $\vec{A}_{(j)}$, $\vec{A}_{(k)}$ у функцији нових констаната афинора;

$$\begin{aligned} \vec{A}_{(i)} &= a_1 \alpha_{11} I_1 + a_2 \alpha_{12} J_1 + a_3 \alpha_{13} K_1\,,\\ \vec{A}_{(j)} &= a_1 \alpha_{21} I_1 + a_2 \alpha_{22} J_1 + a_3 \alpha_{23} K_1\,,\\ \vec{A}_{(k)} &= a_1 \alpha_{31} I_1 + a_2 \alpha_{32} J_1 + a_3 \alpha_{33} K_1\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Ако затим унесемо вредности вектора у тим једначинама као функције координата x, y, z из (83) и (85), добићемо следеће скаларне једначине за координате нашег афинора:

$$\begin{aligned} a_{pq} &= a_1 \beta_{p1} \alpha_{q1} + a_2 \beta_{p2} \alpha_{q2} + a_3 \beta_{p3} \alpha_{q3}\\ &= \sum_{s=1}^{3} a_s\, \beta_{ps} \alpha_{qs} \qquad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}$$

Ове једначине заједно са једначинама, што постављају везе између косинуса α_{qs}, β_{ps}, на име:

$$\sum_{s=1}^{3} \alpha_{qs}\beta_{q's} = \begin{cases} 1 \text{ за } q = q', \\ 0 \text{ за } q \neq q', \end{cases} \quad \sum_{s=1}^{3} \beta_{ps}\beta_{p's} = \begin{cases} 1 \text{ за } p \neq p', \\ 0 \text{ за } p = p'. \end{cases}$$

дају могућност да одредимо двадесет и једну константу: три скалара a_1, a_2, a_3 и осамнаест косинуса α_{11}, α_{12}, ... β_{33}.

То одређивање можемо да вршимо на следећи начин:

Образујмо три скаларна производа:

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), \qquad (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}), \qquad (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})$$

једанпут помоћу израза (83), а други пут искоришћавајући једначине (86). Ако изједначимо две добивене форме, добићемо следеће три једначине:

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}) = a^2_{11} + a^2_{21} + a^2_{31} =$$
$$= a^2_1 \alpha^2_{11} \quad I^2_1 + a^2_2 \alpha^2_{12} \quad J^2_1 + a^2_3 \alpha^2_{13} \quad K^2_1,$$

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}) = a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} =$$
$$= a^2_1 \alpha_{11} \alpha_{21} I^2_1 + a^2_2 \alpha_{12} \alpha_{22} J^2_1 + a^2_3 \alpha_{13} \alpha_{23} K^2_1,$$

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)}) = a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + a_{31} a_{33} =$$
$$= a^2_1 \alpha_{11} \alpha_{31} I^2_1 + a^2_2 \alpha_{12} \alpha_{32} J^2_1 + a^2_3 \alpha_{13} \alpha_{33} K^2_1.$$

Помножимо сада те производе са α_{11}, α_{21}, α_{31} и резултате саберимо; тада ћемо добити следећу једначину:

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)})\alpha_{11} + (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)})\alpha_{21} + (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})\, a_{31} = a_1^2 \alpha_{11}.$$

На исти начин добијамо још две једначине:

$$(\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(i)})\alpha_{11} + (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)})\alpha_{21} + (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)})\alpha_{31} = a_1^2 \alpha_{21},$$

$$(\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(i)})\alpha_{11} + (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(j)})\alpha_{21} + (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)})\alpha_{31} = a_1^2 \alpha_{31}$$

На тај начин за одређивање трију косинуса α_{11}, α_{21}, α_{31} можемо да поставимо следеће три хомогене линеарне једначине:

$$
(87) \quad
\begin{aligned}
&(a^2_{11}+a^2_{21}+a^2_{31}-a^2_1)\,\alpha_{11}+\\
&\quad+(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32})\,\alpha_{2}+\\
&\qquad+(a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33})\,\alpha_{31}=0,\\
&(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}+a_{32}a_{31})\,\alpha_{11}+\\
&\quad(a^2_{12}+a^2_{22}+a^2_{32}-a^2_1)\,\alpha_{21}+\\
&\qquad+(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33})\,\alpha_{31}=0,\\
&(a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31})\,\alpha_{11}+\\
&\quad+(a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}\;a_{33}a_{32})\,\alpha_{21}+\\
&\qquad+(a^2_{13}+a^2_{23}+a^2_{33}-a^2_1)\,\alpha_{31}=0.
\end{aligned}
$$

За одређивање других косинуса из групе α треба да сменимо у тим једначинама прво α^2_1 са α^2_2, а после са α^2_3 Да би написани систем једначина имао решење, неопходно је да је детерминанта:

$$
\begin{vmatrix}
a^2_{11}+a^2_{21}+a^2_{31}-a^2, & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}, & a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}\\
a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}+a_{32}a_{31}, & a^2_{12}+a^2_{22}+a^2_{32}-a^2, & a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}\\
a_{13}a_{12}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}, & a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{32}, & a^2_{13}+a^2_{23}+a^2_{33}-a^2
\end{vmatrix}
$$

једнака нули, при чему смо са a означили једну од величина a_1, a_2, a_3.

Горњу кубичну једначину у погледу a^2 можемо краће написати овако:

$$
(88) \quad
\begin{vmatrix}
(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)})-a^2, & (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}), & (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})\\
(\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(i)}), & (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)})-a^2, & (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)})\\
(\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(i)}) & (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(j)}), & (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)})-a^2
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ова једначина може бити сматрана као секуларна једначина, јер је детерминанта те једначине симетрична. Корени a^2_1, a^2_2, a^2_3 те једначине увек су реални. Покажимо да су у нашем случају они увек позитивни, а то значи да су величине a_1, a_2 a_3 такође увек реалне. За доказ применимо познати став из теорија квадратичне форме и секуларне једначине *) по коме

*) В., на пример, G. Kowalewski „Einführung in die Determinantentheorie". Leipzig. 1909. S. 238.

су сви корени те једначине позитивни и одговарајућа квадратична форма одређена позитивна форма, ако су величине

$$1, (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), \begin{vmatrix} (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), & (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}) \\ (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(i)}), & (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)}) \end{vmatrix},$$

$$\left\| (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)},), (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)}) \right\|$$

све позитивне. А ти су услови овде испуњени, јер друга величина претставља квадрат модула вектора $\vec{A}_{(i)}$, трећа претставља квадрат интензитета векторског производа, јер има вредност $A^2_{(i)} A^2_{(j)} \operatorname{Sin}^2 (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)})$ и најзад четврта је једнака квадрату производа $(\vec{A}_{(i)} [\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}])$, што је непосредно очигледно, ако напишемо тај производ помоћу координата вектора у облику детерминанте и дигнемо ту детерминанту на квадрат.

На тај начин можемо тврдити, да у случају различитих корена наше кубичне једначине (88), можемо увек одредити три правца I, J, K, који задовољавају постављене услове. Тога ради имамо да решимо могући линеарни систем једначина (87). Одређивање вектора I_1, J_1, K_1 после тога не претставља тешкоће, јер из (86) имамо:

$$\begin{aligned} a_1 I_1 &= \vec{A}_{(i)} \alpha_{11} + \vec{A}_{(j)} \alpha_{21} + \vec{A}_{(k)} \alpha_{31}, \\ a_2 J_1 &= \vec{A}_{(i)} \alpha_{12} + \vec{A}_{(j)} \alpha_{22} + \vec{A}_{(k)} \alpha_{32}, \\ a_3 K_1 &= \vec{A}_{(i)} \alpha_{13} + \vec{A}_{(j)} \alpha_{23} + \vec{A}_{(k)} \alpha_{33}. \end{aligned} \tag{80}$$

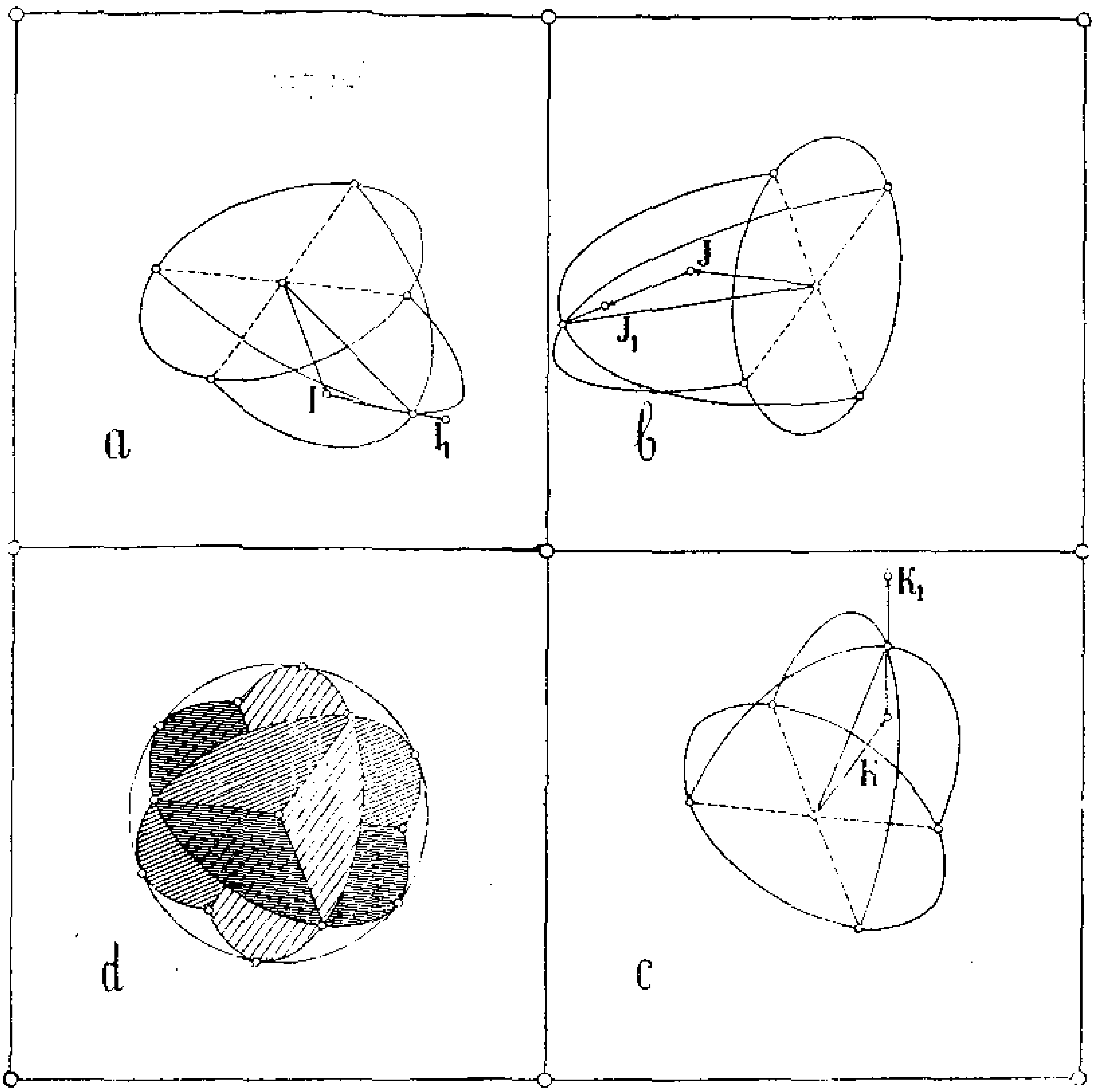
Дакле решење питања о довођењу једног афинора на облик (84) зависи од кубичне једначине (88) и од природе корена те једначине.

Форма афинора (84)

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I_1, I \} + a_2 \{ J_1, J \} + a_3 \{ K_1, K \}$$

зове се *нормална форма* или *нормални облик*. Триједри $OXYZ$ и $OX_1Y_1Z_1$ зову се *главни триједри афинора, идући односно* *претходни.* Осе тих триједара одређују *главне правце афинора, идуће и претходне.*

Слика 35 претставља један афинор у свом нормалном облику.



Слика 35.

Афинор у нормалном облику. *a*, *b*, *c*. — Поједине афинорове диаде. *d*. — Релативни положај основа тих диада.

За потпуност решења проблема потребно је на тај начин анализовати основну кубичну једначину у погледу a^2.

У вези са анализом корена те једначине решимо прво питање о сводљивости једног афинора на две или само на једну диаду.

27. Сводљивост афинора.

Корени једначине (88) могу да буду једнаки нули или различити од нуле. Кад су они различити од нуле, нормални облик афинора садржи три диаде, сам афинор се зове *потпуни афинор.*

Претпоставимо сада да нису сви корени различити од нуле.

1. Ако је један корен једнак нули, афинор се редукује на збир само двеју диада, рецимо:

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I_1', I \} + \{ \dot{J}_1, J \}.$$

Такав се афинор зове *планарни афинор.*

Нађимо критеријум за такав афинор. Неопходан је услов тај, да је слободни члан кубичне једначине једнак нули, а то значи

$$\|(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)}), (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)})\| = 0,$$

а то доводи до услова:

$$(90) \qquad (\vec{A}_{(i)} [\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}]) = 0$$

и захтева компланарност координатних вектора афинора. Јасно је да је тај услов у исто време и довољан јер, ако је вектор $\vec{A}_{(k)}$ компланаран са векторима $\vec{A}_{(i)}$ и $\vec{A}_{(j)}$, тај вектор можемо да разложимо у две компоненте колинеарне са векторима $\vec{A}_{(i)}$ и $\vec{A}_{(j)}$ и на тај начин можемо трећу диаду афинора претставити у облику збира двеју диада, од којих сваку можемо да додамо првој односно другој диади нашег афинора.

Ако је афинор дат помоћу својих координата a_{pq} (p, q = $= 1, 2, 3$), услов да он дегенерише у планарни афинор може бити претстављен овако:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ако су два корена једнака нули, афинор се редукује само на једну диаду

$$\mathrm{A} = a_1 \{ I_1 , I \}$$

и зове се *линеарни афинор* или једноставно *диада*.

2. Ако кубична једначина (88) има два корена једнака нули, осим услова (90), постоји још други услов, да коефицијенат код a^2 у тој једначини мора бити једнак нули. Пошто тај коефицијенат може бити претстављен у облику

$$[\vec{A}_{(j)} , \vec{A}_{(k)}]^2 + [\vec{A}_{(k)} , \vec{A}_{(i)}]^2 + [\vec{A}_{(i)} , \vec{A}_{(j)}]^2 ,$$

видимо да он може бити једнак нули само под условима:

$$(91) \qquad [\vec{A}_{(j)} , \vec{A}_{(k)}] = 0 , \quad [\vec{A}_{(k)} , \vec{A}_{(i)}] = 0 , \quad [\vec{A}_{(i)} , \vec{A}_{(j)}] = 0 ,$$

а ти услови показују колинеарност трију вектора $\vec{A}_{(i)} , \vec{A}_{(j)} , \vec{A}_{(k)}$.

Јасно је да у случају колинеарности претходних чланова можемо да саберемо три афинорове диаде у једну диаду и наш афинор постаје еквивалентан само једној диади.

Ако је афинор дат помоћу својих координата, услов линеарности афинора може бити изражен следећим једначинама:

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = a_{12} : a_{22} : a_{32} = a_{13} : a_{23} : a_{33} .$$

3. Најзад, ако су три корена једнака нули, афинор се своди на нулу. У овом случају ранијим условима (90) и (91) треба да додамо услов

$$(\vec{A}_{(i)} , \vec{A}_{(i)}) + (\vec{A}_{(j)} , \vec{A}_{(j)}) + (\vec{A}_{(k)} , \vec{A}_{(k)}) = 0 ,$$

а тај услов може да буде задовољен само ако је интензитет сваког од координатних вектора једнак нули. Дакле имамо:

$$\vec{A}_{(i)} = 0 , \qquad \vec{A}_{(j)} = 0 , \qquad \vec{A}_{(k)} = 0 .$$

Ако је афинор дат помоћу својих девет координата, услови еквиваленције тог афинора равног нули узимају једноставни облик:

$$a_{pq} = 0 , \qquad\qquad (p , \; q = 1, \; 2, \; 3)$$

т. ј. све координате афинора морају да буду једнаке нули.

Ако је афинор дат у општем облику

$$\mathbf{A} = \{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3 , \vec{B}_3 \},$$

а вектори, рецимо, идући, нису компланарни, услови дегенерације тог афинора имају форму:

у планарни афинор —

$$(\vec{A}_1 [\vec{A}_2 , \vec{A}_3]) = 0 ,$$

у линеарни афинор:

$$[\vec{A}_2 , \vec{A}_3] = [\vec{A}_3 , \vec{A}_1] = [\vec{A}_1 , \vec{A}_2] = 0,$$

у нулу:

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}_3 = 0 .$$

28. Природне координате афинора. Потпуни систем инваријаната.

У § 36 показалисмо да сваки афинор може да буде карактерисан помоћу своје нормалне форме. Са том нормалном формом стоје у вези два триједра $OXYZ$ и $OX_1Y_1Z_1$ и тра скалара a_1, a_2, a_3. Та три скалара заједно са три независна параметра, који одређују релативни положај триједра $OX_1Y_1Z_1$ у погледу триједра $OXYZ$ зваћемо *природним координатама афинора*. За потпуно одређивање положаја афинора у простору потребно је да знамо још три независна параметра, који одређују положај једног од главних триједара у погледу триједра $Oxyz$, триједра референције.

Јасно је да су природне координате афинора инваријантне у погледу промене триједра референције. Пошто је природних координата шест, сваки афинор у општем случају има шест независних инваријаната. Свака функција тих координата претставља такође једну инваријанту. Шест независних скаларних инваријаната једног афинора претстављају *потпуни систем* тих *инваријаната*.

Наведимо један пример могућег потпуног система инваријаната једног афинора.

Пошто су a_1, a_2, a_3 инваријанте, коефицијенти кубичне једначине (80) у погледу a^2 такође су инваријанте. Напишимо ту једначину у облику:

$$a^6 - H_1 a^4 + H_2 a^2 - H_3 = 0,$$

где су

$$(92) \qquad \begin{aligned} H_1 &= (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}) + (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)}) + (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)}), \\ H_2 &= [\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}]^2 + [\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(i)}]^2 + [\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}]^2, \\ H_3 &= (\vec{A}_{(i)}[\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}])^2 . \end{aligned}$$

Величине H_1, H_2, H_3 могу бити усвојене за прве три независне инваријанте једног афинора. Те се три инваријанте налазе у тесној вези са инваријантама, које смо имали раније — са скаларима S_1, S_2, S_3 и интензитетом вектора $\vec{V}$, али инваријанта H_2 не може бити претстављена као функција само тих инваријаната. Што се тиче H_1 и H_3 оне могу бити претстављене овако:

$$(93) \qquad H_1 = V^2 + S_1^2 - 2S_2,$$

$$(94) \qquad H_3 = S_3^2.$$

За H_1 из (92) имамо

$$\begin{aligned} H_1 &= a^2_{11} + a^2_{21} + a^2_{31} + a^2_{12} + a^2_{22} + a^2_{32} + a^2_{13} + a^2_{23} + a^2_{33} = \\ &= (a_{23} - a_{32})^2 + (a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{21})^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 - \\ &- 2[(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + (a_{33} a_{11} - a_{31} a_{13}) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})] = \\ &= V^2 + S^2_1 - 2S_2 , \end{aligned}$$

ако унесемо вредности инваријаната из § 24.

Трећа инваријанта са полазном вредношћу детерминанте

$$H_3 = \left\| (\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}), (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)}), (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)}) \right\|$$

на основу правила множења детерминаната може бити сматрана као квадрат детерминанте, чија вредност у векторском облику може бити претстављена овако:

$$(\vec{A}_{(i)}[\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}]) = S_3$$

и на тај начин можемо тврдити истинитост једначине (94).

Осим инваријаната H_1, H_2, H_3, које одређују величине a_1, a_2, a_3, треба да уведемо још три независне величине, које одређују положај оса $OXYZ$ у погледу оса $OX_1Y_1Z_1$. За такве величинe можемо да узмемо, на пример, три Euler'ова угла или три независна скаларна производа од следећих производа:

$$(I, I_1) = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{21} + \alpha_{31}\beta_{31},$$

$$(I, J_1) = \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{21}\beta_{22} + \alpha_{31}\beta_{32},$$

$$(I, K_1) = \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{21}\beta_{23} + \alpha_{31}\beta_{33};$$

$$(J, I_1) = \alpha_{12}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{32}\beta_{31},$$

$$(J, J_1) = \alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{32}\beta_{32},$$

$$(J, K_1) = \alpha_{12}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{32}\beta_{33};$$

$$(K, I_1) = \alpha_{13}\beta_{11} + \alpha_{23}\beta_{21} + \alpha_{33}\beta_{31},$$

$$(K, J_1) = \alpha_{13}\beta_{12} + \alpha_{23}\beta_{22} + \alpha_{33}\beta_{32},$$

$$(K, K_1) = \alpha_{13}\beta_{13} + \alpha_{23}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33},$$

при чему тада треба да буде дат допунски услов, како да изаберемо једнозначни положај једног триједра у погледу другог.

У једноме од идућих параграфа навешћемо један нарочито једноставан систем од шест инваријаната једног произвољног афинора и показаћемо како могу бити инваријанте овог параграфа и природне афинорове координате изражене помоћу тих нових инваријаната.

29. Случај једнаких корена.

До сада смо претпостављали да основна кубична једначина (88) у општем случају потпуног афинора има три различита корена. Овде хоћемо да анализујемо оне случајеве, када та једначина има два или три једнака корена.

Претпоставимо прво да она има два једнака корена, т. ј.

$$a_1 = a_2$$

У том случају за ту вредност a детерминанта (88) губи свој други ранг и постаје детерминанта првог ранга. Пошто свака субдетерминанта другог реда те детерминанте има вредност нуле, коефицијенти су друге и треће једначине система (87) пропорционални, а то значи од тих трију једначина остаје само једна, рецимо, прва:

$$
(95) \qquad \begin{aligned} &(a^2_{11} + a^2_{21} + a^2_{31} - a^2_1)\,\alpha_{11} + \\ &+ (a_{11}\,a_{12} + a_{21}\,a_{22} + a_{31}\,a_{32})\,\alpha_{21} + \\ &+ (a_{11}\,a_{13} + a_{21}\,a_{23} + a_{31}\,a_{33})\,\alpha_{31} = 0. \end{aligned}
$$

Та једначина има два независна решења.

За трећи корен a^2_3 кубичне једначине (88) систем једначина (87) има једно потпуно одређено решење, које увек можемо нормализовати. У ствари, прво можемо, рецимо, ставити:

$$
\alpha^*_{13} = \begin{vmatrix} a^2_{12} + a^2_{22} + a^2_{32} - a^2_3, & a_{12}\,a_{13} + a_{22}\,a_{32} + a_{32}\,a_{33} \\ a_{13}\,a_{12} + a_{23}\,a_{22} + a_{33}\,a_{32}, & a^2_{13} + a^2_{23} + a^2_{33} - a^2_3 \end{vmatrix},
$$

$$
\alpha^*_{23} = - \begin{vmatrix} a_{12}\,a_{11} + a_{22}\,a_{21} + a_{32}\,a_{31}, & a_{12}\,a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}\,a_{33} \\ a_{13}\,a_{11} + a_{23}\,a_{21} + a_{33}\,a_{31}, & a^2_{13} + a^2_{23} + a^2_{33} + a^2_3 \end{vmatrix},
$$

$$
\alpha^*_{33} = \begin{vmatrix} a_{12}\,a_{11} + a_{22}\,a_{21} + a_{32}\,a_{31}, & a^2_{12} + a^2_{22} + a^2_{32} - a^2_3 \\ a_{13}\,a_{11} + a_{23}\,a_{21} + a_{33}\,a_{31}, & a_{13}\,a_{12} + a_{23}\,a_{22} + a_{33}\,a_{32} \end{vmatrix},
$$

па после за вредности α_{13}, α_{23}, α_{33} узети вредности:

$$
\alpha_{13} = \frac{\alpha^*_{13}}{\sqrt{\alpha^{*2}_{13} + \alpha^{*2}_{23} + \alpha^{*2}_{33}}}, \qquad \alpha_{23} = \frac{\alpha^*_{23}}{\sqrt{\alpha^{*2}_{13} + \alpha^{*2}_{23} + \alpha^{*2}_{33}}},
$$

$$
\alpha_{33} = \frac{\alpha^*_{33}}{\sqrt{\alpha^{*2}_{13} + \alpha^{*2}_{23} + \alpha^{*2}_{33}}}.
$$

Покажимо сада да је увек могуће изабрати таква два независна решења једначине (95), да она буду нормална и ортогонална како међусобно, тако и у погледу на решење α_{13}, α_{23}, α_{33}.

Претпоставимо да смо узели једно произвољно решење једначине (95) и то у нормалном облику, дакле са условом

$$
\alpha^2_{11} + \alpha^2_{21} + \alpha^2_{31} = 1.
$$

Узмимо сада друго независно решење те исте једначине (95) и означимо га са

$$\alpha'_{12}, \ \alpha'_{22}, \ \alpha'_{32}.$$

Ако оно није ортогонално са првим решењем, поставимо ново решење $\alpha^*_{12}, \alpha^*_{22}, \alpha^*_{32}$ помоћу образаца:

$$\alpha^*_{12} = \alpha_{11} + \lambda\, \alpha'_{12}, \qquad \alpha^*_{22} = \alpha_{21} + \lambda\, \alpha'_{22}, \qquad \alpha^*_{32} = \alpha_{31} + \lambda\, \alpha'_{32},$$

где је λ произвољни број и бирајмо тај број тако, да ново решење буде ортогонално на прво решење: то значи морамо ставити:

$$\alpha_{11}\, \alpha^*_{12} + \alpha_{21}\, \alpha^*_{22} + \alpha_{31}\, \alpha^*_{32} = 0$$

или

$$\alpha^2_{11} + \alpha^2_{21} + \alpha^2_{31} + \lambda\, (\alpha_{11}\, \alpha'_{12} + \alpha_{21}\, \alpha'_{22} + \alpha_{31}\, \alpha'_{32}) = 0$$

одакле

$$\lambda = -\frac{a^2_{11} + a^2_{21} + a^2_{31}}{\alpha_{11}\, \alpha'_{22} + \alpha_{21}\, \alpha'_{22} + \alpha_{31}\, \alpha'_{32}}.$$

Са том вредношћу λ решење $\alpha^*_{12}, \alpha^*_{22}, \alpha^*_{32}$ биће ортогонално на прво решење и на тај начин можемо дефинитивно добити следеће друго ортогонално и нормално решење:

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha^*_{12}}{\Delta}, \qquad \alpha_{22} = \frac{\alpha^*_{22}}{\Delta}, \qquad \alpha_{32} = \frac{\alpha^*_{32}}{\Delta},$$

где је

$$\Delta = \sqrt{\alpha^{*2}_{12} + \alpha^{*2}_{22} + \alpha^{*2}_{32}}.$$

Остаје да покажемо да ће добијена два решења

$$\alpha_{11}, \ \alpha_{21}, \ \alpha_{31},$$

$$\alpha_{12}, \ \alpha_{22}, \ \alpha_{32},$$

бити ортогонална у погледу решења

$$\alpha_{13}, \quad \alpha_{23}, \quad \alpha_{33}.$$

Да би смо ту ортогоналност утврдили, напишимо оне линеарне системе једначина, које задовољавају величине, рецимо,

$$\alpha_{11},\ \alpha_{21},\ \alpha_{31} \quad \text{и} \quad \alpha_{13},\ \alpha_{23},\ \alpha_{33}$$

и то у следећем облику:

$$(\ldots.)\,\alpha_{11} + (\ldots.)\,\alpha_{21} + (\ldots.)\,\alpha_{31} = a^2{}_1\,\alpha_{11},$$
$$(\ldots.)\,\alpha_{11} + (\ldots.)\,\alpha_{21} + (\ldots.)\,\alpha_{31} = a^2{}_1\,\alpha_{21},$$
$$(\ldots.)\,\alpha_{11} + (\ldots.)\,\alpha_{21} + (\ldots.)\,\alpha_{31} = a^2{}_1\,\alpha_{31},$$

$$(\ldots.)\,\alpha_{13} + (\ldots.)\,\alpha_{23} + (\ldots.)\,\alpha_{33} = a^2{}_3\,\alpha_{13},$$
$$(\ldots.)\,\alpha_{13} + (\ldots.)\,\alpha_{23} + (\ldots.)\,\alpha_{33} = a^2{}_3\,\alpha_{23},$$
$$(\ldots.)\,\alpha_{12} + (\ldots)\,\alpha_{23} + (\ldots.)\,\alpha_{33} = a^2{}_3\,\alpha_{33}.$$

Ако једначине првог од тог система помножимо са α_{13}, α_{23}, α_{33}, а другог са α_{11}, α_{21}, α_{31} и саберемо одговарајуће резултате, са леве стране добићемо исте резултате због симетричности основне детерминанте; на основу тога закључујемо о једнакости десних страна:

$$a^2{}_1\,(\alpha_{11}\,\alpha_{13} + \alpha_{21}\,\alpha_{23} + \alpha_{31}\,\alpha_{33}) = a^2{}_3\,(a_{11}\,\alpha_{13} + \alpha_{21}\,\alpha_{23} + \alpha_{31}\,\alpha_{33}).$$

Пошто по услову

$$a_1 \neq a_3,$$

горња једначина доводи до закључка

$$\alpha_{11}\,\alpha_{13} + \alpha_{21}\,\alpha_{23} + \alpha_{31}\,\alpha_{33} = 0,$$

који потврђује ортогоналност првог и трећег решења. Иста расуђивања доводе до доказа ортогоналности другог и трећег решења.

Сада треба да се зауставимо на анализи услова, које треба да задовољавају вектори афинора $\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}$ па да кубична једначина има два једнака корена и да одговарајућа нормална форма афинора има облик:

$$a_1\,(\{I_1\,,\,I\} + \{J_1\,,\,J\}) + a_3\{K_1\,,\,K\}. \tag{96}$$

Пошто проблем решења једначине (88) стоји и вези са одређивањем главних оса једне површине другога реда, услов двострукости корена поклапа се са условом да наша површина буде ротациона површина. Тај услов за нашу једначину може бити написан у облику *):

$$(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(i)}) - \frac{(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)})}{(\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)})} =$$

$$= (\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(j)}) - \frac{(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)})(\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)})}{(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})} =$$

$$= (\vec{A}_{(k)}, \vec{A}_{(k)}) - \frac{(\vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)})(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(k)})}{(\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)})}.$$

Не би било тешко написати услове, које треба да задовољавају координате нашег афинора у том специјалном случају једнакости двају корена.

У случају када кубична једначина има три једнака корена, сам афинор узима облик:

$$\mathbf{A} = a_1 (\{ I_1 , I \} + \{ J_1 , J \} + \{ K_1 , K \}).$$

Решење одговарајућег система линеарних једначина може бити потпуно произвољно. Од тих произвољних решења можемо да конструјишемо три независна решења нормална и ортогонална. Другим речима триједар $OXYZ$ може бити изабран произвољно. Триједар са ортовима I_1, J_1, K_1 после тога може бити одређен једначинама (89).

Што се тиче услова, које треба да задовољавају вектори $\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}$, да наша кубична једначина има три једнака корена, они лако могу бити написани по аналогији са условима под којима једна централна површина другога реда претставља једну сферну површину.

*) В, напр., G. Salmon. Analytische Geometrie des Raumes I. Theil. Leipzig. 1879. S. 136.

30. Релативни положај главних афинорових триједара.

У § 26 видели смо да сваки афинор можемо да доведемо до нормалног облика:

$$\mathbf{A} = a_1\{I_1, I\} + a_2\{J_1, J\} + a_3\{K_1, K\},$$

где су I, J, K ортови идућег главног афиноровог триједра $OXYZ$, а су I_1, J_1, K_1 — претходног $OX_1Y_1Z_1$.

Анализујмо сада релативни положај главних афинорових триједара једног према другоме и афинорове особине, што стоје у вези са тим положајем.

Означимо косинусе углова што граде осе триједра $OX_1Y_1Z_1$ са осама триједра $OXYZ$ помоћу следеће шеме:

	I	J	K
I_1	α_1	β_1	γ_1
J_1	α_2	β_2	γ_2
K_1	α_3	β_3	γ_3

За одређивање тих косинуса служе нам једначине (89):

$$(89)\qquad \begin{aligned} a_1 I_1 &= \vec{A}_{(i)}\alpha_{11} + \vec{A}_{(j)}\alpha_{21} + \vec{A}_{(k)}\alpha_{31}, \\ a_2 J_1 &= \vec{A}_{(i)}\alpha_{12} + \vec{A}_{(j)}\alpha_{22} + \vec{A}_{(k)}\alpha_{32}, \\ a_3 K_1 &= \vec{A}_{(i)}\alpha_{13} + \vec{A}_{(j)}\alpha_{23} + \vec{A}_{(k)}\alpha_{33}. \end{aligned}$$

У тим се једначинама величине a_1, a_2, a_3 одређују решавањем у погледу a^2 кубичне једначине (88), а α_{pq} $(p, q = 1, 2, 3)$ решавањем система линеарних једначина (87) и двају аналогних система. За одређивање самих косинуса, рецимо α_1, помножимо прву од векторских једначина (89) скаларно са

$$I = \alpha_{11} i + \alpha_{21} j + \alpha_{31} k;$$

тада ћемо, узимајући у обзир вредности координатних вектора $\vec{A}_{(i)}, \vec{A}_{(j)}, \vec{A}_{(k)}$ из (83), добити:

$$a_1(I, I_1) = a_1\alpha_1 = \alpha_{11}(\alpha_{11}a_{11} + \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{31}a_{13}) +$$
$$+ \alpha_{21}(\alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}a_{22} + \alpha_{31}a_{23}) +$$
$$+ \alpha_{31}(\alpha_{11}a_{31} + \alpha_{21}a_{32} + \alpha_{31}a_{33})$$

или

$$a_1\alpha_1 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} a_{pq}\alpha_{p1}\alpha_{q1}.$$

Тако исто за два остала косинуса имамо:

$$a_1\beta_1 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=2}^{3} a_{pq}\alpha_{p2}\alpha_{q1},$$

$$a_1\gamma_1 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} a_{pq}\alpha_{p3}\alpha_{q1};$$

на исти начин можемо одредити косинусе других група, значи дефинитивно имамо:

$$a_i\alpha_i = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} a_{pq}\alpha_{p1}\alpha_{qi},$$

$$a_i\beta_i = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} a_{pq}\alpha_{p2}\alpha_{qi},$$

$$a_i\gamma_i = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} a_{pq}\alpha_{p3}\alpha_{qi}.$$

Забележимо да ако за координатни триједар референције узмемо главни афиноров триједар, рецимо, $OXYZ$, координате афинора узимају вредности:

$$a_1\alpha_1,\quad a_2\alpha_2,\quad a_3\alpha_3,$$
$$a_1\beta_1,\quad a_2\beta_2,\quad a_3\beta_3,$$
$$a_1\gamma_1,\quad a_2\gamma_2,\quad c_3\gamma_3,$$

које ћемо краће означити са

$$m_{pq}, \qquad (p, q = 1, 2, 3)$$

дакле, на пример,

$$m_{21} = a_1\beta_1, \qquad m_{12} = a_2\alpha_2.$$

Девет величина m_{pq} $(p,\ q = 1,\ 2,\ 3)$ могу бити сматране као природне афинорове координате, али оне нису независне, него између њих постаје следеће три везе:

$$\sum_{i=1}^{3} m_{i2}\, m_{i3} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{3} m_{i3}\, m_{i1} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{3} m_{i1}\, m_{i2} = 0\,.$$

Инваријанте у таквом случају могу бити образоване овако:

$$S_1 = a_1\, \alpha_1 + a_2\, \beta_2 + a_3\, \gamma_3\,,$$

$$S_2 = a_2\, a_3\, \alpha_1 + a_3\, a_1\, \beta_2 + a_1\, a_2\, \gamma_3\,,$$

$$S_1 = a_1\, a_2\, a_3\,.$$

Инваријантни вектор $\vec{V}$ има за координате:

$$\vec{V} = (a_3\, \beta_3 - a_2\, \gamma_2)\, I + (a_1\, \beta_1 - a_3\, \alpha_3)\, J + (a_2\, \alpha_2 - a_1\, \beta_1)\, K\,.$$

Инваријанте H_1, H_2, H_3 имају вредности:

$$H_1 = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3\,,$$

$$H_2 = a^2_2\, a^2_3 + a^2_3\, a^2_1 + a^2_1\, a^2_2\,,$$

$$H_3 = a^2_1\, a^2_2\, a^2_3\,.$$

Ако уведемо још једну инваријанту, рецимо, у облику

$$S = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3\,,$$

то систем инваријаната,

$$S;\ S_1,\ S_2,\ S_3;\ H_1,\ H_2 \tag{97}$$

може бити сматран као потпуни систем инваријаната. У ствари, на основу величина

$$H_1,\ H_2,\ H_3 = S^2_3$$

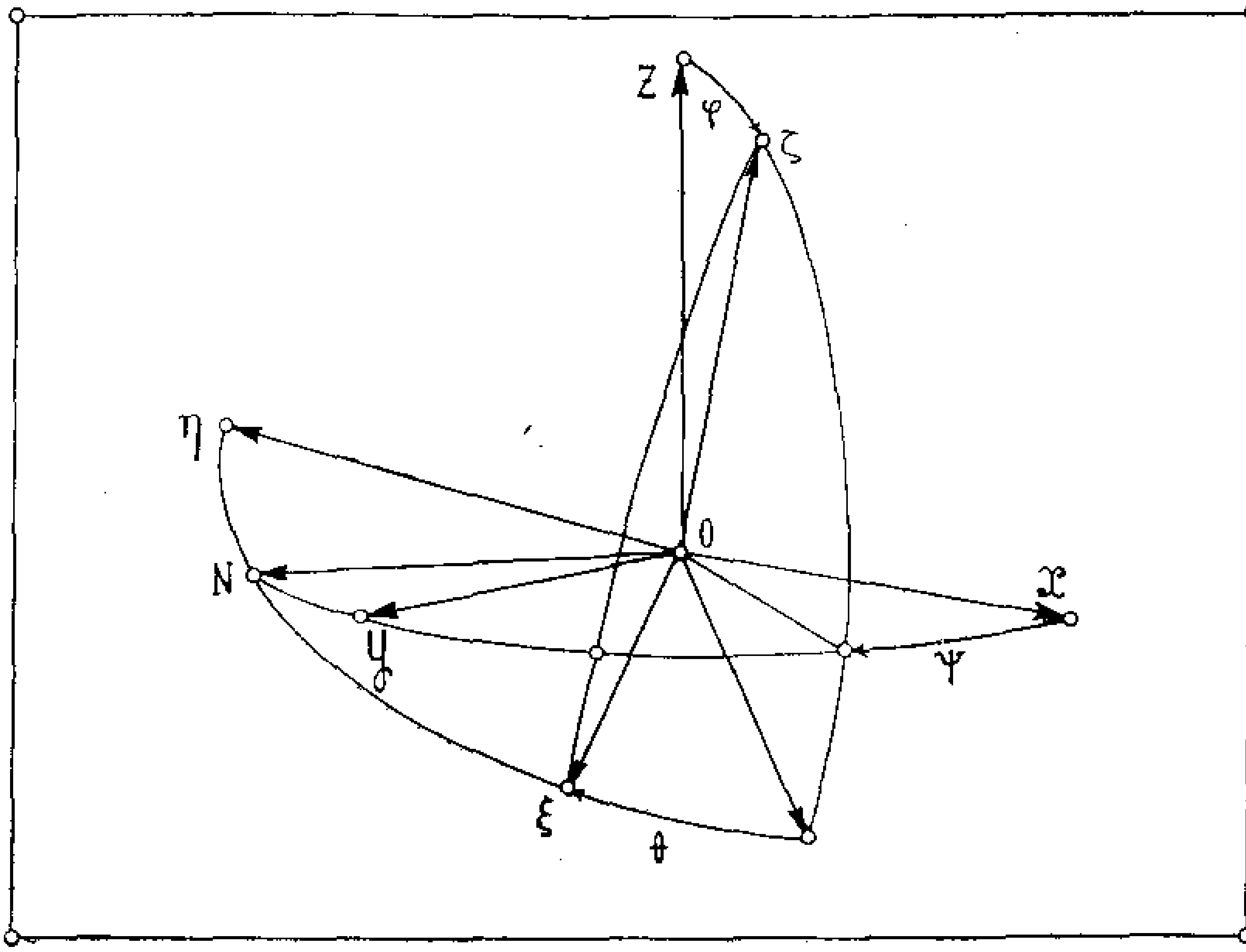
можемо одредити величине a_1, a_2, a_3, при чему морамо знаке тих величина бирати из допунских услова. После тога решењем линеарних једначина

$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = S,$$

$$a_1\, \alpha_1 + a_2\, \beta_2 + a_3\, \gamma_3 = S_1,$$

$$a_2\, a_3\, \alpha_1 + a_3\, a_1\, \beta_2 + a_1\, a_2\, \gamma_3 = S_2$$

можемо одредити косинусе α_1, β_2, γ_3. Познавање тих косинуса даје могућност да одредимо положај триједра $OX_1Y_1Z_1$ у погледу триједра $OXYZ$. Ако уведемо Euler'ове углове φ, ψ, Θ помоћу слике (слика 36), добићемо следеће вредности косинуса α_1, β_2, γ_3:



Слика 36.

Euler'ови углови.

$$\alpha_1 = -\operatorname{Sin}\Theta \operatorname{Sin}\psi + \operatorname{Cos}\Theta \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\varphi ,$$

$$\beta_2 = \operatorname{Cos}\Theta \operatorname{Cos}\psi - \operatorname{Sin}\Theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi ,$$

$$\gamma_3 = \operatorname{Cos}\varphi .$$

Последња једначина даје могућност да одредимо угао φ, при чему за једнозначност решења, као увек, морамо навести ош допунски услов. После тога две једначине:

$$\operatorname{Cos}(\Theta + \psi) = \frac{\beta_2 + \alpha_1}{1 + \gamma_3} \qquad \operatorname{Cos}(\Theta - \psi) = \frac{\beta_2 - \alpha_1}{1 - \gamma_3}$$

одређују углове ψ и Θ са истом претпоставком о једнозначности решења.

Могућност одређивања релативног положаја главних триједара афинора и констаната a_1, a_2, a_3 потврђује потпуност система инваријаната (97).

Анализујмо сада специјалне случајеве када се једна или две осе (а то значи барем правац и треће осе) једног главног триједра поклапају са осама другог триједра.

Ако се осе, рецимо I_1, поклапа са осом I, прва од једначина (89) даје:

$$a_1 I = \vec{A}_{(i)} \alpha_{11} + \vec{A}_{(j)} \alpha_{21} + \vec{A}_{(k)} \alpha_{31}.$$

Ова векторска једначина доводи до следећих трију скаларних једначина:

$$\begin{aligned}
a_1 \alpha_{11} &= a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{21} + a_{13} \alpha_{31}, \\
a_1 \alpha_{21} &= a_{21} \alpha_{11} + a_{22} \alpha_{21} + a_{23} \alpha_{31}, \\
a_1 \alpha_{31} &= a_{31} \alpha_{11} + a_{32} \alpha_{21} + a_{33} \alpha_{31}.
\end{aligned}$$

Из ових једначина следује, да a_1 мора да буде не само корен једначине (88) него и корен једначине:

$$(98) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - a_1, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - a_1, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

У том случају афинор може бити претстављен помоћу израза:

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I, I \} + a_2 \{ J_1, J \} + a_3 \{ K_1, K \}.$$

Слика 37 претставља пример таквог афинора.

Анализујмо сада услове, које треба да задовољава афинор, па да му се једна главна оса поклапа са одговарајућом осом другог главног триједра.

Величина a^2_1 мора да буде корен једначине (88), коју смо написали у облику

$$(99) \qquad a^6 - H_1 a^4 + H_2 a^2 - H_3 = 0$$

са вредностима:

$$H_1 = S^2_1 - 2S_2 + V^2,$$

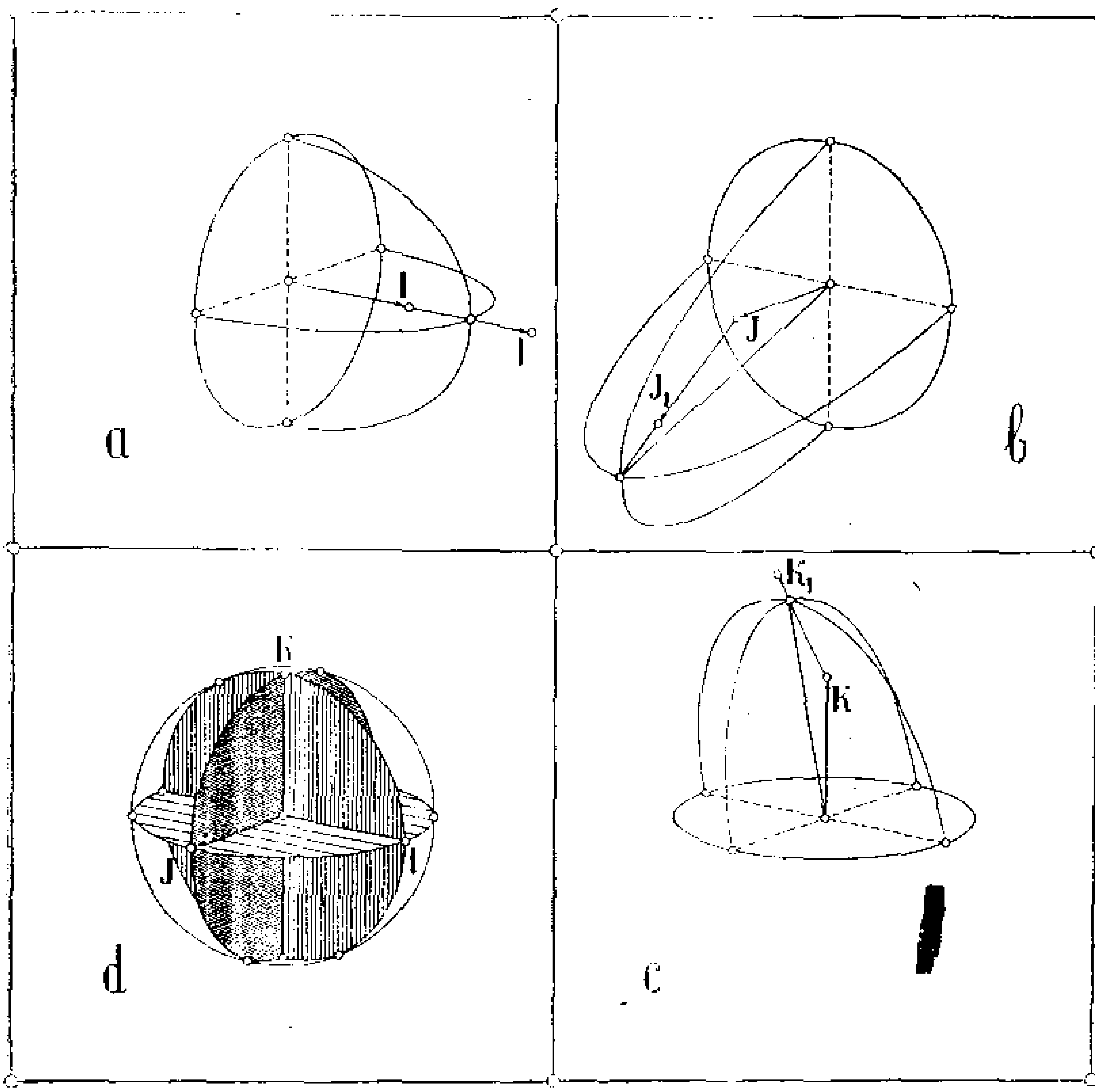
$$H_3 = S^2_3,$$

а што се тиче коефицијента H_2, он има форму:

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{23}, & a_{21} \\ a_{33}, & a_{31} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{32}, & a_{33} \\ a_{12}, & a_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{31} \\ a_{13}, & a_{11} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{31}, & a_{32} \\ a_{11}, & a_{12} \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13} \\ a_{22}, & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{13}, & a_{11} \\ a_{23}, & a_{21} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}^2 .$$



Слика 37.

Афинор са једном паром главних оса, које се поклапају. *a, b, c.* — Поједине афинорове диаде. *d.* — Релативни положај основа тих диада.

Једначину (98) можемо написати у облику:

$$a^3 - |S_1| a^2 + S_2 a - S_3 = 0. \tag{100}$$

Образујмо сада из те једначине нову једначину, чији су корени квадрати корена претходне једначине. Узимајући у обзир познате особине симетричних функција, ту нову једначину можемо написати овако:

$$a^6 - M_1 a^4 + M_2 a^2 - M_3 = 0, \tag{101}$$

где је

$$M_1 = S^2_1 - 2 S_2,$$

$$M_2 = S^2_2 - 2 S_1 S_3,$$

$$M_3 = S^2_3.$$

Једначине (99) и (101) морају да имају исти корен a^2_1. За тај корен треба да имамо два идентитета:

$$a^6_1 - H_1 a_1^4 + H_2 a_1^2 - H_3 = 0,$$

$$a^6_1 - M_1 a_1^4 + M_2 a_1^2 - M_3 = 0.$$

Пошто је

$$H_3 = M_3,$$

претпостављајући да је $a_1 \neq 0$, одузимањем добићемо следећу вредност за a^2_1:

$$a^2_1 = \frac{H_2 - M_2}{H_1 - M_1} = \frac{H_2 - M_2}{V^2}. \tag{102}$$

Ако уврстимо ту вредност, рецимо, у једначину (101), добићемо следећи неопходни услов

$$\begin{gathered}(H_2 - M_2)^3 - (H_2 - M_2)^2 M_1 V^2 + \\ + (H_2 - M_2) M_2 V^4 - M_3 V^6 = 0,\end{gathered} \tag{103}$$

који треба да задовољавају координате афинора, па да му се два одговарајућа главна правца поклапају. Обратимо пажњу да је тај услов претстављен само помоћу афиноровик инваријаната и на тај начин одговара једној природној особености афинора.

За ту вредност a_1 систем линеарних једначина (87) мора имати исто решење са системом наведених линеарних једначина:

$$(104)\quad \begin{aligned} (a_{11}-a_1)\alpha_{11} &+ a_{12}\alpha_{21} + a_{13}\alpha_{31} = 0, \\ a_{21}\alpha_{11} &+ (a_{22}-a_1)\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{31} = 0, \\ a_{31}\alpha_{11} &+ a_{32}\alpha_{21} + (a_{33}-a_1)\alpha_{31} = 0. \end{aligned}$$

Ако помножимо те једначине узастопно прво са a_{11}, a_{21}, a_{31}, а после са a_{12}, a_{22}, a_{32} и најзад са a_{13}, a_{23}, a_{33} и сваки пут саберемо одговарајуће резултате, добићемо следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} &(a^2_{11}+a^2_{21}+a^2_{31}-a_1 p)\alpha_{11}+(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32})\alpha_{21}+ \\ &\qquad +(a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33})\alpha_{31}=0, \\ &(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}+a_{32}a_{31})\alpha_{11}+(a^2_{12}+a^2_{22}+a^2_{32}-a_1 q)\alpha_{21}+ \\ &\qquad +(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33})\alpha_{31}=0, \\ &(a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31})\alpha_{11}+(a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{32})\alpha_{21}+ \\ &\qquad +(a^2_{13}+a^2_{23}+a^2_{33}\,a-a_1 r)\alpha_{31}=0, \end{aligned}$$

причему се p, q, r одређују из једначина:

$$(105)\quad \begin{aligned} p\,\alpha_{11} &= a_{11}\alpha_{11}+a_{21}\alpha_{21}+a_{31}\alpha_{31}, \\ q\,\alpha_{21} &= a_{12}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{21}+a_{32}\alpha_{31}, \\ r\,\alpha_{31} &= a_{13}\alpha_{11}+a_{23}\alpha_{21}+a_{33}\alpha_{31}. \end{aligned}$$

Ако упоредимо добивене једначине са једначинама (87 видећемо да се оне идентично поклапају под условима:

$$a_1 = p = q = r.$$

У том случају систем једначина (105) прелази у систем

$$\begin{aligned} a_1\alpha_{11} &= a_{11}\alpha_{11}+a_{21}\alpha_{21}+a_{31}\alpha_{31}, \\ a_1\alpha_{21} &= a_{12}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{21}+a_{32}\alpha_{31}, \\ a_1\alpha_{31} &= a_{13}\alpha_{11}+a_{23}\alpha_{21}+a_{33}\alpha_{31} \end{aligned}$$

и њихово упоређивање са (104) доводи до закључка:

$$\begin{aligned} & (a_{21}-a_{12})\alpha_{21}+(a_{31}-a_{13})\alpha_{31}=0, \\ (a_{12}-a_{21})\alpha_{11} & \qquad\qquad +(a_{32}-a_{23})\alpha_{31}=0, \\ (a_{13}-a_{31})\alpha_{11}+(a_{23}-a_{32})\alpha_{21} & \qquad\qquad =0. \end{aligned}$$

Решење тог система даје:

$$(106)\qquad \alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} = (a_{23} - a_{32}) : (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} - a_{21}).$$

Геометријско је тумачење тог услова у томе, да је орт I паралелан са инваријантним вектором $\vec{V}$ афинора.

Ако добивена решења (106) уврстимо, рецимо, у једначине (104), добићемо следеће услове за наш афинор:

$$(107)\quad \begin{aligned} (a_{23} - a_{32})\, a_{11} + (a_{31} - a_{13})\, a_{12} + (a_{12} - a_{21})\, a_{13} &= a_1 (a_{23} - a_{32}), \\ (a_{23} - a_{32})\, a_{21} + (a_{31} - a_{13})\, a_{22} + (a_{12} - a_{21})\, a_{23} &= a_1 (a_{31} - a_{13}), \\ (a_{23} - a_{32})\, a_{31} + (a_{31} - a_{13})\, a_{32} + (a_{12} - a_{21})\, a_{33} &= a_1 (a_{12} - a_{21}). \end{aligned}$$

Из тих једначина имамо следећа два дефинитивна услова за координате афинора ако му се две главне осе поклапају:

$$(108)\quad \begin{aligned} a_{11} - \frac{a_{21}\, a_{13} - a_{12}\, a_{31}}{a_{23} - a_{32}} &= a_{22} - \frac{a_{32}\, a_{21} - a_{23}\, a_{12}}{a_{31} - a_{13}} = \\ &= a_{33} - \frac{a_{13}\, a_{32} - a_{31}\, a_{23}}{a_{12} - a_{21}}. \end{aligned}$$

Покажимо сада, да су ова два услова не само неопходна за такво поклапање оса, него су и довољна. Услов (103) при томе се јавља као закључак услова (108).

Означимо заједничку вредност величина у једначинама (108) са k, дакле ставимо

$$k = a_{11} - \frac{a_{21}\, a_{13} - a_{12}\, a_{31}}{a_{23} - a_{32}}.$$

Ако уврстимо ту вредност k у кубичну једначину:

$$a^3 - S_1\, a^2 + S_2\, a - S_3 = 0,$$

добићемо, узимајући у обзир (108), идентитет. Значи та заједничка вредност k је корен те кубичне једначине.

Исто тако, ако уврстимо заједничку вредност k у једначину (99), она доводи до идентитета; стога можемо тврдити да k претставља један од корена те једначине и можемо ставити, рецимо,

$$k = a_1.$$

После тога услови (108) доводе до једначина (107), а те последње доводе до решења (106). Та решења задовољавају како систем једначина (104), тако и систем једначина (87), што се потврђује непосредно кад узмемо у обзир једначине (108). На тај начин долазимо до закључка да се са правцем

$$\alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} = (a_{23} - a_{32}) : (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} - a_{21})$$

поклапају две главне афинорове осе. То можемо да потврдимо такође и тиме кад проверимо једначине:

$$\alpha_1 = 1 \text{ , } \beta_1 = \gamma_1 = 0.$$

Пошто се β_1 одређује из једначине:

$$a_1 \beta_1 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} a_{pq} \alpha_{p2} \alpha_{q1},$$

имамо на основу (106)

$$a_1 \beta_1 = \sum_{p=1}^{3} \alpha_{p2} (a_{p1} \alpha_{11} + a_{p2} \alpha_{21} + a_{p3} \alpha_{31}) =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{3} \alpha_{p2} [a_{p1} (a_{23} - a_{32}) + a_{p2} (a_{31} - a_{13}) + a_{p3} (a_{12} - a_{21})] =$$

$$= \frac{1}{V} \cdot a_1 [(a_{23} - a_{32}) \alpha_{12} + (a_{31} - a_{13}) \alpha_{22} + (a_{12} - a_{21}) \alpha_{32}] =$$

$$= \frac{1}{V} \cdot a_1 (\vec{V}, J) = 0 ;$$

јер ако је вектор $\vec{V}$ у датом случају паралелан са ортом I, он стоји управно на орт J, а тим смо потврдили једначину

$$\beta_1 = 0.$$

Тако исто могли бисмо потврдити једначину

$$\gamma_1 = 0,$$

а из те две једначине следује једначина

$$\alpha_1 = 1.$$

Пређимо сад на анализу случаја када се два пара одговарајућих главних оса афинора поклапају.

У анализи претходног случаја поклапања само једног пара оса дошли смо до закључка да ортови тих поклопљених оса, рецимо I и I_1, морају да буду паралелни са инваријантним вектором $\vec{V}$ афинора. Ако сада тражимо да се и други орт J поклапа са ортом J_1, дсћићемо до закључка да орт J мора такође бити паралелен са вектором $\vec{V}$. Пошто I стоји управно на орт J, а вектор $\vec{V}$ мора да буде паралелан једном и другом од тих вектора, — долазимо до једног јединог излаза из тог противуречја, да вектор $\vec{V}$ мора имати вредност нуле, дакле је

$$\vec{V} = 0, \tag{109}$$

а то значи

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21}, \tag{110}$$

другим речима шема афинорових координата:

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix}$$

постаје симетрична.

Афинор, чији је инваријантни вектор једнак нули, или, другим речима, чија је координатна шема симетрична, зове се *симетрични афинор* или *тензор*.

У случају симетричног афинора инваријанте H_1, H_2, H_3 имају вредност:

$$H_1 = S_1^2 - 2S_2 + V^2 = S^2_1 - 2S_2 = M_1,$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \; (a_{22}a_{33} - a^2_{23})^2 + (a_{33}a_{11} - a^2_{13})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2 + \\ & + 2(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})^2 + 2(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})^2 + 2(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})^2 = \\ & = [(a_{22}a_{33} - a^2_{23}) + (a_{11}a_{33} - a^2_{13}) + (a_{11}a_{22} - a^2_{12})]^2 - \\ & - 2(a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a^2_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - \\ & - a_{22}a^2_{31} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{33}a^2_{21}) = S^2_2 - 2S_1 S_3 = M_2, \end{aligned}$$

$$H_3 = S^2_3 = M_3$$

и стога можемо тврдити да се у том случају једначина

$$a^6 - H_1 a^4 + H_2 a^2 - H_3 = 0,$$

која служи за одређивање количина $a^2{}_1$, $a^2{}_2$, $a^2{}_3$, поклапа са једначином

$$a^6 - M_1 a^4 + M_2 a^2 - M_3 = 0,$$

која је постала од једначине

$$(111) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - a, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - a \end{vmatrix} = 0,$$

када смо тражили једначину за квадрате корена последње једначине.

Кубична једначина (111) у случају симетричног афинора има три стварна корена. Свакоме од тих различитих корена одговара један правац, са којим се поклапају два одговарајућа главна афинорова правца. На тај начин нормална форма сваког тензора може бити претстављена овако:

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I, I \} + a_2 \{ J, J \} + a_3 \{ K, K \},$$

другим речима, тензор може бити претстављен у облику збира трију диада истезања са трима узајамно ортогоналним осама. Детаљније ћемо о тензору говорити у једноме од идућих параграфа.

31. Класификација афинора.

Један афинор можемо да разликујемо од другог по томе, на какву нормалну форму могу да буду редуковани ти афинори. У вези са тим можемо за сада поставити следеће типове афинора.

I. По броју диада, на које се своди афинор, он може да буде *потпуни, планарни* и *линеарни* или *диада*. Њихови су нормални облици следећи:

за *потпуни* афинор:

$$a_1 \{ I_1, I \} + a_2 \{ J_1, J \} + a_3 \{ K_1, K \},$$

за *планарни* афинор:

$$a_1 \{ I_1, I \} + a_2 \{ J_1, J \},$$

за *линеарни афинор или диаду*:

$$a_1\{I_1, I\}.$$

II. По вредностима величина a_1, a_2, a_3 афинор може да се приказује овако:

троосни афинор у случају $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ са нормалном формом:

$$a_1\{I_1, I\} + a_2\{J_1, J\} + a_3\{K_1, K\},$$

ротациони афинор при условима $a_1 = a_2$, $a_1 \neq a_3$ са формом:

$$a_1(\{I_1, I\} + \{J_1, J\}) + a_3\{K_1, K\},$$

сферни афинор у случају $a_1 = a_2 = a_3$; његова нормална форма изгледа овако:

$$a_1(\{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\}).$$

Између сферних афинора можемо да нарочито разликујемо један специјалан сферни афинор за који је

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Такав се афинор зове *верзор*; означаваћимо га са Γ дакле имамо:

$$\Gamma = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\}.$$

У вези са верзором можемо да наведемо још један, у погледу вредности a_1, a_2, a_3 специјалан афинор из категорије ротационих афинора, на име афинор за који

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = -1.$$

Афинор такве природе зове се *керверзор*; означаваћемо га са K, дакле је

$$K = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} - \{K_1, K\}.$$

Ако бисмо у исто време узимали у обзир координатне триједре различите природе, леви и десни, што до сада нисмо радили, онда при упоређивању верзора са керверзором можемо казати да верзор прелази у керверзор ако му променимо смер једне осе код једног од главних триједара; у таквом случају могли бисмо ставити и за керверзор

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 ,$$

али му би један главни триједар био десни, а други леви.

III. По релативном положају главних триједара афинор може да буде један од следећих типова:

прави афинор, кад су главне осе триједара различите и афинор има нормалну форму:

$$a_1 \{ I_1 , I \} + a_2 \{ J_1 , J \} + a_3 \{ K_1 , K \} ,$$

полу афинор, кад се једна оса једног главног триједра поклапа са одварајућом осом другог главног триједра; његова је нормална форма овака:

$$a_1 \{ I , I \} + a_2 \{ J_1 , J \} + a_3 \{ K_1 , K \} .$$

тензор, кад се главни триједри поклапају, а нормална му је форма следећа:

$$a_1 \{ I , I \} + a_2 \{ J , J \} + a_3 \{ K , K \} .$$

Јасно је да један афинор може да буде једног специјалног облика и у погледу једне категорије и у погледу друге. Тако, на пример, афинор са нормалном формом

$$a_1 (\{ I_1 , I \} + \{ J_1 , J \})$$

претставља планарни ротациони (или *кружни*) *афинор*, а са формом

$$a_1 (\{ I , I \} + \{ J , J \})$$

он прелази у планарни ротациони (или *кружни*) *тензор*.

32. Тензор и његова површина.

Као што смо раније видели, тензор претставља један нарочити облик афинора са идентичним главним триједрима. Тензор ћемо означавати са $\mathbf{T}$; дакле је

$$\mathbf{T} = a_1 \{ I , I \} + a_2 \{ J , J \} + a_3 \{ K , K \} .$$

У општем случају, када је афинор дат у облику

$$\mathbf{A} = \{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3 , \vec{B}_3 \} ,$$

он дегенерише у један тензор при услову

$$(112) \qquad \vec{V} = 0$$

или

$$(113) \qquad [\vec{A}_1 , \vec{B}_1] + [\vec{A}_2 , \vec{B}_2] + [\vec{A}_3 , \vec{B}_3] = 0 .$$

Тај услов је неопходан, јер смо видели да за један тензор инваријантни вектор има вредност нуле, али у исто време је тај услов и довољан, јер ако напишемо вредност тог вектора у координатама

$$\vec{V} = (a_{23} - a_{32}) i + (a_{31} - a_{13}) j + (a_{12} - a_{21}) k$$

услов (112) доводи до једначина

$$a_{ij} = a_{ji} , \qquad (i , j = 1 , 2 , 3) .$$

које потврђују тензоријални карактер нашег афинора.

Пошто сваки тензор може бити претстављен као збир трију диада истезања, којих су осовине узајамно управне, сваком тензору одговара један геометријски облик од три ратационa елипсоида са узајамно управним осама (слика 38).

Али са једним тензором обично се везује један геометријски облик и на други начин. На име: свакоме тензору одговара један триједар ортогоналних оса и три скалара a_1, a_2, a_3 везана појединце за те осе. На основу тих података можемо да конструјишемо једну централну површину другога реда са једначином

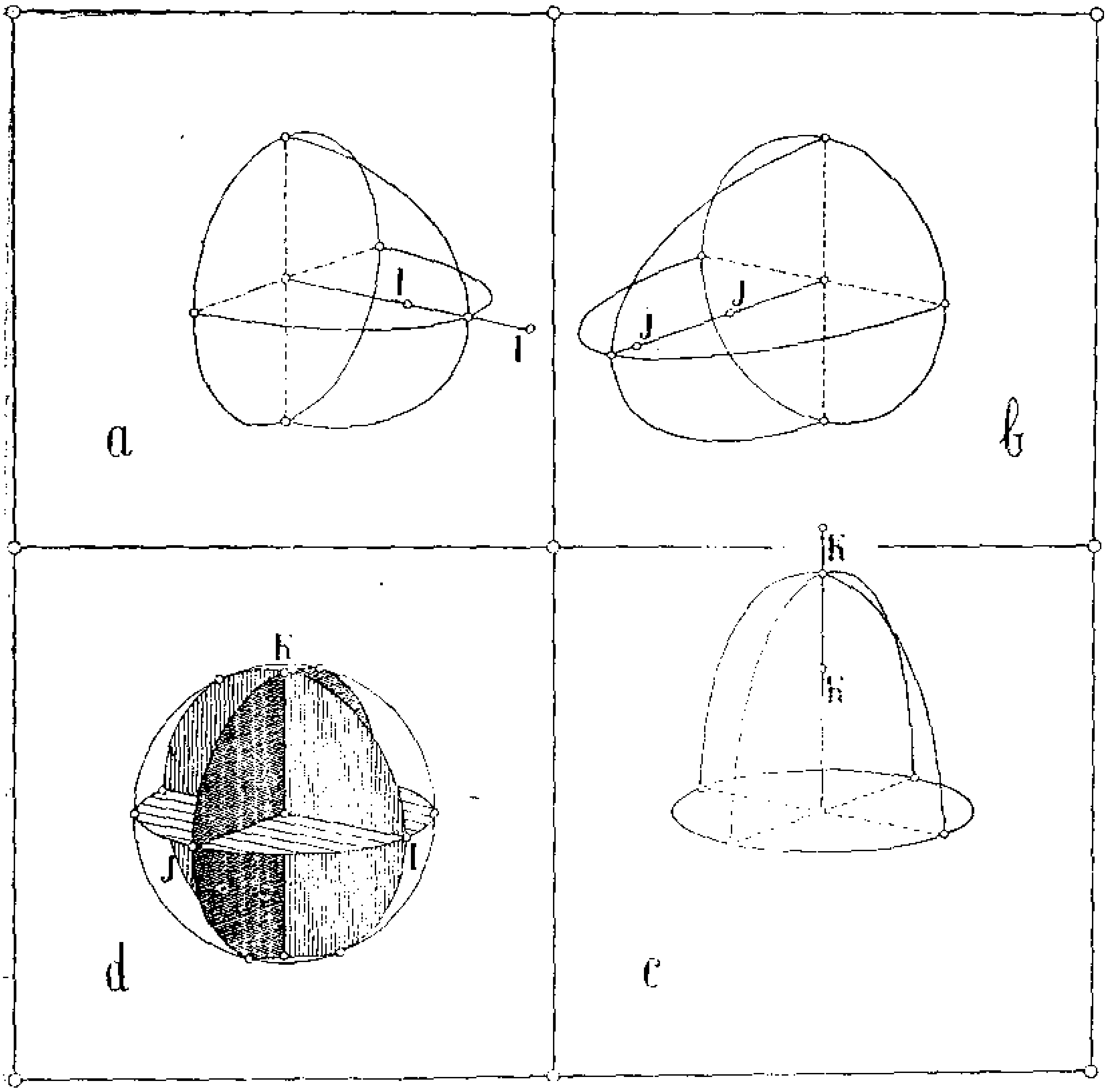
$$(114) \qquad a_1 X^2 + a_2 Y^2 + a_3 Z^2 = 1 .$$

Та се површина зове *тензорска површина*. Она може да буде елипсоид, један или други хиперболоид.

Ако је тензор дат помоћу својих координата a_{ij} (i, $j = 1, 2, 3$) при $a_{ij} = a_{ji}$, једначина тензорске површине узима облик:

$$(115) \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 1 ,$$

где су x_1, x_2, x_3 координате произвољне тачке те површине у погледу основног триједра референције. У ствари, пошто формуле трансформације координата имају облик:



Слика 38.

Тензор. *a*, *b*, *c*. — Поједине тензорове диаде истезања. *d*. — Релативни положај тих диада.

$$X = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \alpha_{31} x_3 ,$$

$$Y = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3 ,$$

$$Z = \alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3 ,$$

онда, ако уврстимо те вредности у једначину (114) и узмемо у обзир вредности координата тензора

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{3} a_s \alpha_{is} \alpha_{js} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

добићемо једначину (115).

Јасно је да тензорска површина потпуно карактеризује један тензор *). За одређивање једног тензора потребно је да знамо шест скалара; за те скаларе можемо да узмемо: три Euler'ова угла, што одређују положај главних оса тензорске површине и три параметра a_1, a_2, a_3, који одређују форму и величину те површине. Последње три величине могу бити сматране као *природне координате тензора*. Оне дају потпуни систем инваријаната тензора. Пошто се три величине a_1, a_2, a_3 одређују из једначине

$$a^3 - S_1\, a^2 + S_2\, a - S_3 = 0\,,$$

три инваријанте S_1, S_2, S_3 једног тензора сачињавају такође *потпуни систем инваријаната* тог *тензора*.

Забележимо да ако за осе триједра референције узмемо главне осе тензорове површине, координатна шема тензора за такав триједар изгледа овако:

$$\mathrm{T}\begin{cases} a_1\,,\ 0\ ,\ 0 \\ 0\ ,\ a_2\,,\ 0 \\ 0\ ,\ 0\ ,\ a_3 \end{cases}$$

У теорији афинора игра нарочиту улогу један специјалан тензор, за који имамо

$$a_1 = a_3 = a_3 = 1.$$

Тај ћемо тензор означавати са I, дакле у нормалном облику:

$$\mathrm{I} = \{I, I\} + \{J, J\} + \{K, K\}.$$

Он се зове *јединични тензор*, а у исто време и *јединични афинор*. Његова координатна шема за нормални облик има форму:

---

*) Претпостављамо да је та површина нормализована, т. ј. да у једначини

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 + a_3 Z^2 = \text{Const.},$$

константа са десне стране има вредност јединице.

$$\mathrm{I}\begin{cases} 1, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 1. \end{cases}$$

33. Претходна и идућа афинорова површина.

Нормални облик сваког афинора

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I_1 , I \} + a_2 \{ J_1 , J \} + a_3 \{ K_1 , K \}$$

показује, да са сваким афинором стоје у вези два триједра: претходни главни триједар $OX_1Y_1Z_1$ са ортовима I_1, J_1, K_1 и идући главни триједар $OXYZ$ са ортовима I, J, K и сем тога три скалара a_1, a_2, a_3.

Ако узмемо у обзир претходни триједар $OX_1Y_1Z_1$ и три скалара a_1, a_2, a_3, можемо да конструјишемо једну централну површину са једначином:

$$a_1 X^2_1 + a_2 Y^2_1 + a_3 Z^2_1 = 1. \tag{116}$$

Ту ћемо површину звати *претходном афиноровом површином*. Та површина заједно са идућим главним триједром $OXYZ$ потпуно одређује један афинор. Заједница од такве површине и триједра може дакле бити сматрана као један геометријски облик, који претставља један афинор.

На исти начин могуће је конструјисати *идућу афинорову површину* на идућем главном триједру са једначином:

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 + a_3 Z^2 = 1. \tag{117}$$

Она заједно са триједром $O X_1 Y_1 Z_1$ такође претставља тај исти афинор.

У погледу основног триједра референције $Oxyz$ једначине површина (116) и (117) можемо написати овако:

$$a''_{11} x^2_1 + a''_{22} x^2_2 + a''_{33} x^2_3 + 2a''_{23} x_2 x_3 + 2a''_{31} x_3 x_1 + 2a''_{12} x_1 x_2 = 1 ,$$

$$a'_{11} x^2_1 + a'_{22} x^2_2 + a'_{33} x^2_3 + 2a'_{23} x_2 x_3 + 2a'_{31} x_3 x_1 + 2a'_{12} x_1 x_2 = 1,$$

где су

$$a'_{ij} = \sum_{s=1}^{3} a_s \, \alpha_{is} \, \alpha_{js} , \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

$$a''_{ij} = \sum_{s=1}^{3} a_s \beta_{is} \beta_{js}. \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Ако потпуни афинор дегенерише у планарни

$$a_1 \{ I_1 , I \} + a_2 \{ J_1 , J \}$$

његова афинорова површина, рецимо идућа, претвара се у цилиндар са једначином:

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 = 1 .$$

Тај цилиндар заједно са осама I_1, J_1, K_1 потпуно одређује планарни афинор.

Најзад, ако афинор дегенерише у диаду

$$a_1 \{ I_1 , I \}$$

одговарајућа површина дегенерише у две паралелне равни са једначином:

$$a_1 X^2 = 1 .$$

Те две паралелне равни *) одређеног положаја у простору заједно са осом I_1 потпуно одређују диаду и на тај начин две паралелне равни са једном осом могу бити такође сматране као геометријски облик, који потпуно одређује једну диаду.

34. Коњуговани афинори.

Узмимо један произвољан афинор

$$\mathbf{A} = \{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3 , \vec{B}_3 \}$$

и конструишимо нов афинор из диада, коњугованих (§ 13) са диадама датог афинора; тај афинор означимо са $\overset{c}{\mathbf{A}}$, дакле

$$\overset{c}{\mathbf{A}} = \{ \vec{B}_1 , \vec{A}_1 \} + \{ \vec{B}_2 , \vec{A}_2 \} + \{ \vec{B}_3 , \vec{A}_3 \} .$$

Тај се афинор зове *афинор коњуговани* са датим афино-

*) Те две паралелне равни одређују стварно у нашем случају један вектор, наиме идући вектор диаде. Такво одређивање једног вектора помоћу две паралелне равни искоришћава на сасвим други начин G. Bouligand у својој књизи: Leçons de géométrie vectorielle (Paris, 1924) p. 153. у облику тако званог dublet'a.

ром. Јасно је да је та коњугованост узајамног карактера, другим речима да је

$$(\mathbf{A}^c)^c = \mathbf{A}.$$

Ако је афинор $\mathbf{A}$ дат помоћу својих координатних вектора у облику

$$\mathbf{A} = \{ \vec{A}_{(i)}, i \} + \{ \vec{A}_{(j)}, j \} + \{ \vec{A}_{(k)}, k \},$$

коњуговани афинор може бити претстављен у форми:

$$\mathbf{A}^c = \{ i, \vec{A}_{(i)} \} + \{ j, \vec{A}_{(j)} \} + \{ k, \vec{A}_{(k)} \} =$$

$$= \{ \vec{A}^c_{(i)}, i \} + \{ \vec{A}^c_{(j)}, j \} + \{ \vec{A}^c_{(k)}, k \},$$

где су

$$\vec{A}^c_{(i)} = (\vec{A}_{(i)}, i) i + (\vec{A}_{(j)}, i) j + (\vec{A}_{(k)}, i) k,$$

$$\vec{A}^c_{(j)} = (\vec{A}_{(i)}, j) i + (\vec{A}_{(j)}, j) j + (\vec{A}_{(k)}, j) k,$$

$$\vec{A}^c_{(k)} = (\vec{A}_{(i)}, k) i + (\vec{A}_{(j)}, k) j + (\vec{A}_{(k)}, k) k.$$

Из претходног непосредно следује да координатне шеме једног и другог афинора имају следеће облике:

$$\mathbf{A} \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix} \right. \qquad \mathbf{A}^c \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{matrix} \right.$$

и да могу да буду добивене једна из друге ротацијом тих шема око линије дијагоналних чланова.

Ако дат афинор претставимо у нормалном облику

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I_1, I \} + a_2 \{ J_1, J \} + a_3 \{ K_1, K \}$$

коњуговани афинор узима вредност:

$$\mathbf{A}^c = a_1 \{ I, I_1 \} + a_2 \{ J, J_1 \} + a_3 \{ K, K_1 \}$$

и на тај начин можемо тврдити да код коњугованих афинора главни триједри мењају своју улогу: претходни главни триједар првог афинора постаје идућим главним триједром другог и обратно. Ако са триједрима повежемо афинорове површине, за коњуговани афинор афинорова површина треба да се премести са једног главног триједра на други, а да остане исте природе, дакле да буде, на пример, претходна.

Разгледајмо сада инваријанте датог и коњугованог афинора. Инваријанте S_1, S_2, S_3 се не мењају, јер је

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = S_1^c,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{31} \\ a_{13}, & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = S_2^c,$$

$$S_3 = \| a_{11}, a_{22}, a_{33} \| = S_3^c.$$

Што се тиче инваријантног вектора $\vec{V}$, тај вектор са променом улоге претходних и идућих вектора мења свој знак и на тај начин можемо написати да је

$$\vec{V}^c = -\vec{V}.$$

Најзад, пошто инваријанте H_1, H_2, H_3 зависе само од a_1, a_2, a_3, те величине остају без промене, можемо написати:

$$H_1^c = H_1, \qquad H_2^c = H_2, \qquad H_3^c = H_3.$$

35. Тензор и аксиатор афинора.

Узмимо један произвољан афинор $\mathbf{A}$ и њему коњуговани $\mathbf{A}^c$. Конструјишимо сада два афинора

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^c), \tag{118}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^c), \tag{119}$$

т. j. половину збира датог афинора и коњугованог и половину разлике.

Анализујмо сваки од тих афинора.

1. Ако инваријантни вектор афинора $\mathbf{A}$ означимо са $\vec{V}$, за коњуговани афинор он има вредност — $\vec{V}$, а то значи инваријантни вектор афинора (118) има вредност нуле и на тај начин можемо тврдити да тај афинор претставља један тензор. Тај ћемо тензор звати *афиноровим тензором* и означавати га са ts $\mathbf{A}$, дакле

$$\mathrm{ts}\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^c).$$

Он има своју површину, коју ћемо звати *тензоровом површином афинора* и своје главне осе: *тензоријалне осе афинора*. Јасно је да ако афинор дегенерише у тензор, његов тензор претставља сам тај тензор, дакле

$$\mathrm{ts}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}.$$

За одређивање тензоријалних оса једног произвољног афинора можемо да поступимо овако.

Координате ts $\mathbf{A}$ можемо да напишемо помоћу следеће шеме:

$$\mathrm{ts}\,\mathbf{A}\left\{\begin{array}{lll} a_{11}, & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}), \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}), & a_{22}, & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}), \\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}), & a_{33}, \end{array}\right.$$

или кратко

$$\mathrm{ts}\,\mathbf{A}\left\{\begin{array}{lll} a_{11} & a_{(12)} & a_{(13)} \\ a_{(21)} & a_{22} & a_{(23)} \\ a_{(31)} & a_{(32)} & a_{33} \end{array}\right.$$

где је, на пример,

$$a_{(12)} = a_{(21)} = \frac{1}{2}(a_{(12)} + a_{(21)}).$$

Конструјисање оса зависи од решења кубичне једначине

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t, & a_{(12)}, & a_{(13)} \\ a_{(21)}, & a_{22}-t & a_{(23)} \\ a_{(31)}, & a_{(32)} & a_{33}-t \end{vmatrix} = 0,$$

коју ћемо кратко написати овако:

$$(120) \qquad t^3 - T_1 t^2 + T_2 t - T_3 = 0,$$

где су

$$T_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = S_1,$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{(23)} \\ a_{(32)}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{(31)} \\ a_{(13)}, & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{(12)} \\ a_{(21)}, & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22}\,a_{33} + a_{33}\,a_{11} + a_{11}\,a_{22} - \frac{1}{4}(a_{23}+a_{32})^2 - \frac{1}{4}(a_{31}+a_{13})^2 -$$

$$- \frac{1}{4}(a_{12}+a_{21})^2 = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32} + a_{33}\,a_{11} - a_{31}\,a_{13} + a_{11}\,a_{22} -$$

$$- a_{12}\,a_{21} - \frac{1}{4}\left[(a_{23}-a_{32})^2 + (a_{31}-a_{13})^2 - (a_{12}-a_{21})^2\right] =$$

$$= S_2 - \frac{1}{4}V^2.$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{(12)}, & a_{(13)} \\ a_{(21)}, & a_{22}, & a_{(23)} \\ a_{(31)}, & a_{(32)}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Корене те кубичне једначине означимо са λ, μ, ν, а триједар главних оса површине

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{(23)}x_2x_3 + 2a_{(31)}x_3x_1 + 2a_{(21)}x_1x_2 = 1$$

са $O\xi\eta\varsigma$. Ако косинусе углова тих оса са осама основног триједра референције $Oxyz$ означимо помоћу шеме:

	x	y	z
ξ	λ_1	λ_2	λ_3
η	μ_1	μ_2	μ_3
ς	ν_1	ν_2	ν_3

онда за одређивање, рецимо величина λ_1, λ_2, λ_3, што одговарају корену λ једначине (120'), имамо следећи систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)\lambda_1 + \quad a_{(12)} \quad \lambda_2 + \quad a_{(13)} \quad \lambda_3 &= 0,\\
a_{(21)}\lambda_1 + (a_{22}-\lambda)\lambda_2 + \quad a_{(23)} \quad \lambda_3 &= 0,\\
a_{(31)}\lambda_1 + \quad a_{(32)} \quad \lambda_2 + (a_{33}-\lambda)\lambda_3 &= 0;
\end{aligned}$$

сличне једначине имамо и за друге две групе косинуса.

2. Други афинор (119)

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^c)$$

има за координате:

$$\begin{matrix}
0, & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}),\\
\frac{1}{2}(a_{21}-a_{12}), & 0, & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32});\\
\frac{1}{2}(a_{31}-a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23}), & 0.
\end{matrix}$$

Вредности тих координата показују да овај афинор стоји у тесној вези са вектором $\vec{V}$ афинора, јер тај вектор има за координате:

$$\begin{matrix}
0, & \frac{1}{2}V_3, & -\frac{1}{2}V_2,\\
-\frac{1}{2}V_3, & 0, & \frac{1}{2}V_1,\\
\frac{1}{2}V_2, & -\frac{1}{2}V_1, & 0.
\end{matrix} \tag{121}$$

Тај се афинор зове *афиноров аксиатор* или *антитензор*. Означаваћемо га са $ax\,\mathbf{A}$, дакле

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^c).$$

Аксиатор стоји у тесној вези са претставом ротације једног триједра помоћу угаоне брзине. Ако замислимо да један триједар оса са ортовима i, j, k ротира и има угаону брзину

$$\frac{1}{2}\vec{V}\left(\frac{1}{2}V_1, \frac{1}{2}V_2, \frac{1}{2}V_3\right),$$

брзине крајева тих ортова, које ћемо редом означити са $\vec{V}_i$, $\vec{V}_j$, $\vec{V}_k$, имају, као што је познато, следеће вредности:

$$\vec{V}_i\left(\quad 0, \quad \frac{1}{2}V_3, -\frac{1}{2}V_2\right),$$

$$\vec{V}_j\left(-\frac{1}{2}V_3, \quad 0, \quad \frac{1}{2}V_1\right),$$

$$\vec{V}_k\left(\quad \frac{1}{2}V_2, -\frac{1}{2}V_1, \quad 0, \quad\right),$$

другим речима, свака од тих брзина може бити сматрана као векторски производ угаоне брзине и одговарајућег вектора положаја, т. ј.

$$\vec{V}_i = [\frac{1}{2}\vec{V}, i],$$

$$\vec{V}_j = [\frac{1}{2}\vec{V}, j],$$

$$\vec{V}_k = [\frac{1}{2}\vec{V}, k],$$

а то значи идући координатни вектори могу бити претстављени као ти производи, т. ј.

$$\vec{B}_{(i)} = \vec{V}_i, \qquad \vec{B}_{(j)} = \vec{V}_j, \qquad \vec{B}_{(k)} = \vec{V}_k,$$

а сам аксиатор узима форму:

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\{i, [\vec{V}, i]\} + \{j, [\vec{V}, j]\} + \{k, [\vec{V}, k]\})$$

или, ако узмемо у обзир да координате претходних координатних вектора имају вредности елемената стубаца шеме (121), а то значи

$$\vec{A}_{(i)} = -\vec{V}_i\ ,\ \vec{A}_{(j)} = -\vec{V}_j\ ,\ \vec{A}_{(k)} = -\vec{V}_k\ ,$$

можемо да напишемо такође у облику:

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\{[i,\vec{V}],i\} + \{[j,\vec{V}],i\} + \{[k,\vec{V}],k\}\right).$$

Из два обрасца

$$ts\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^c\right)$$

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^c\right)$$

непосредно следује:

$$(122)\qquad \begin{aligned} \mathbf{A} &= ts\,\mathbf{A} + ax\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^c &= ts\,\mathbf{A} - ax\,\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Образац (122) исказује врло важан став о разлагању сваког афинора на збир његовог тензора и аксиатора.

Пошто један тензор може бити претстављен помоћу једне своје површине, а аксиатор помоћу једног вектора, можемо тврдити да је једна од геометријских слика, које могу претстављати један афинор, једна централна површина (није модел) са једним вектором.

Из ове претставе афинора излази нова природна форма афинора и у вези са њоме нов систем природних координата. Независно од положаја у простору афинор може да буде одређен помоћу трију главних оса λ, μ, ν своје тензоријалне површине и помоћу координата L, M, N свог инваријантног вектора у погледу на главне осе те тензоријалне површине. Шест независних величина λ, μ, ν, L, M, N преставољају потпуни систем независних инваријаната једног афинора. Ако за координатне осе бирамо главне осе тензорове површине, афинорови тензор и аксиатор имају следеће шеме:

$$ts\,\mathbf{A}\left\{\begin{array}{lll} \lambda, & 0, & 0, \\ 0, & \mu, & 0, \\ 0, & 0, & \nu, \end{array}\right.$$

$$ax\,\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{1}{2}N, & -\frac{1}{2}M, \\ -\frac{1}{2}N, & 0, & \frac{1}{2}L, \\ \frac{1}{2}M, & -\frac{1}{2}L, & 0, \end{matrix}\right. \quad \text{или} \quad ax\,\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} 0, & n, & -m \\ -n, & 0, & l \\ m, & -l, & 0 \end{matrix}\right.$$

где смо ставили

$$L = 2l, \quad M = 2m, \quad N = 2n.$$

Самом афинору у таквом случају одговара следећа шема:

$$\mathbf{A}\left\{\begin{matrix} \lambda, & n, & -m, \\ -n, & \mu, & l, \\ m, & -l, & \nu, \end{matrix}\right.$$

или, другим речима, за сваки афинор могуће је изабрати такве ортогоналне осе са ортовима $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\zeta}$, да он има форму следећег збира

$$\mathbf{A} = \lambda\{\vec{\xi}, \vec{\xi}\} + \mu\{\vec{\eta}, \vec{\eta}\} + \nu\{\vec{\zeta}, \vec{\zeta}\} +$$
$$+ l(\{\vec{\eta}, \vec{\zeta}\} - \{\vec{\zeta}, \vec{\eta}\}) + m(\{\vec{\zeta}, \vec{\xi}\} - \{\vec{\xi}, \vec{\zeta}\}) +$$
$$+ n(\{\vec{\xi}, \vec{\eta}\} - \{\vec{\eta}, \vec{\xi}\}).$$

У вези са природним координатама афинора такве врсте можемо навести следећи потпуни систем независних инваријаната једног произвољног афинора:

$$T_1 = \lambda + \mu + \nu,$$
$$T_2 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu,$$
$$T_3 = \lambda\mu\nu,$$
$$T_4 = l^2 + m^2 + n^2,$$
$$T_5 = \lambda l^2 + \mu m^2 + \nu n^2,$$
$$T_6 = \lambda^2 l^2 + \mu^2 m^2 + \nu^2 n^2.$$

Ако упоредимо те инваријанте са раније уведеним, можемо да поставимо следеће везе:

$$S_1 = T_1,$$
$$S_2 = T_2 + T_4,$$
$$S_3 = T_3 + T_5,$$
$$V^2 = 4T_4.$$

$$H_1 = V^2 + S^2_1 - 2S_2 = 2T_4 + T^2_1 - 2T_2,$$
$$H_2 = (T_2 + T_4)^2 - 2T_1(T_3 + T_5) + 2T_6,$$
$$H_3 = S^2_3 = (T_3 + T_5)^2.$$

Наведена форма инваријанте H_2, коју можемо да препишемо у облику

$$H_2 = S^2_2 - 2S_1 S_3 + 2T_6$$

потврђује раније наведену особину те инваријанте да она не може да буде изражена само помоћу инваријаната S_1, S_2, S_3 и V^2.

36. Тензор и аксиатор диаде. Алгебарски производ двају вектора.

У § 13 смо навели два израза образована од једне произвољне диаде $Д = \{\vec{A}, \vec{B}\}$ и коњуговане са њом $Д^c = \{\vec{B}, \vec{A}\}$, на име:

$$\frac{1}{2}\left(Д + Д^c\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(Д - Д^c\right).$$

Сада видимо да први израз претставља *тензор диаде*, а други *аксиатор диаде*, дакле

$$ts\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\}),$$

$$ax\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} - \{\vec{B}, \vec{A}\}).$$

Ако орт $\vec{S}_0$ (§ 13) симетрале угла између вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ означимо са I, а орт $\vec{N}_0$ нормале на ту симетралу у равни тих вектора са J, та два афинора, као што смо видели, могу бити написани овако:

$$ts\{\vec{A}, \vec{B}\} = A^2{}_1\{I, I\} - A^2{}_2\{J, J\},$$

$$ax\{\vec{A}, \vec{B}\} = A_1 A_2(\{J, I\} - \{I, J\}),$$

где су A_1 и A_2 модули компонената вектора $\vec{A}$ у правцима I и J, при чему се претпоставља, да је

$$A = B.$$

Из тих образаца непосредно следује да тензор диаде увек претставља један планарни тензор и да сваку диаду можемо да претставимо помоћу следеће координатне шеме:

$$\mathbf{\Delta}\begin{cases} A^2{}_1, -A_1 A_2, 0, \\ A_1 A_2, - A^2{}_2, 0, \\ 0, \quad 0, \quad 0. \end{cases}$$

Покажимо сада да сваки произвољни тензор може бити претстављен као збир тензора једне диаде и јединичног тензора помноженог одређеним скаларом, дакле

$$\mathbf{T} = ts\,\mathbf{\Delta} + \sigma\,\mathbf{I}. \tag{123}$$

где смо са σ означили тај скалар.

Напишимо тензор у облику

$$\mathbf{T} = a_1\{I, I\} + a_2\{J, J\} + a_3\{K, K\}$$

и претпоставимо, што је увек могуће, да је

$$a_1 \geqslant a_3 \geqslant a_2. \tag{124}$$

Ставимо после тога у једначину (123) ту вредност тензора $\mathbf{T}$ и

$$ts\,\mathbf{\Delta} = A^2{}_1\{I, I\} - A^2{}_2\{J, J\},$$

$$\mathrm{I} = \{I, I\} + \{J, J\} + \{K, K\},$$

у том случају после изједначења коефицијената код јединичних диада добићемо следеће услове за одређивање A_1, A_2, σ:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \quad A^2{}_1 + \sigma, \\
a_2 &= -A^2{}_2 + \sigma, \qquad (125)\\
a_3 &= \sigma,
\end{aligned}
$$

одакле

$$A^2{}_1 = a_1 - a_3, \quad A^2{}_2 = a_3 - a_2, \quad \sigma = a_3,$$

где су под условима (124) величине A_1 и A_2 увек реалне.

На тај начин увек је могуће наћи такву диаду, да она помоћу свог тензора заједно са јединичним тензором даде један произвољан тензор.

Тензор једне диаде зове се такође *алгебарски производ двају вектора*; означимо тај производ са $\vec{A} \times \vec{B}$. Дакле имамо:

$$\vec{A} \times \vec{B} = ts\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\}).$$

Из те дефиниције алгебарског производа непосредно следује:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A},$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times C,$$

другим речима за тај производ важи не само дистрибутивни закон, него и комутативни.

37. Девиатор.

Из произвољних тензора

$$\mathrm{T} = a_1\{I, I\} + a_2\{J, J\} + a_3\{K, K\}$$

треба да издвојимо такав, чији је први скалар једнак нули, т. ј. такав, да задовољава услов

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 0. \qquad (126)$$

Тензор те особине зове се *девиатор*. Означаваћемо га T_d.
Пошто за одређивање тензора треба да знамо шест констаната, то за одређивање девиатора треба да знамо само пет.

Искористимо сада разлагање једног произвољног тензора по обрасцу (123) на један диадин тензор и на јединични афинор, т. ј. ставимо

$$\mathrm{T}_d = ts\,\mathrm{Д} + \sigma\,\mathrm{I}$$

и одредимо вредност σ за тај специални тензор.

Пошто се σ, A_1 и A_2 одређују из једначина (125) у нашем случају сабирањем тих једначина, узимамајући у обзир услове (126), добићемо

$$0 = A^2_1 - A^2_2 + 3\sigma. \tag{127}$$

Али пошто за једну диаду

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2,$$

$$\vec{B} = \vec{A}_1 \quad \vec{A}_2$$

и

$$\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2,$$

можемо тврдити да

$$(\vec{A}, \vec{B}) = A^2_1 - A^2_2$$

и за то из (127)

$$\sigma = -\frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B}),$$

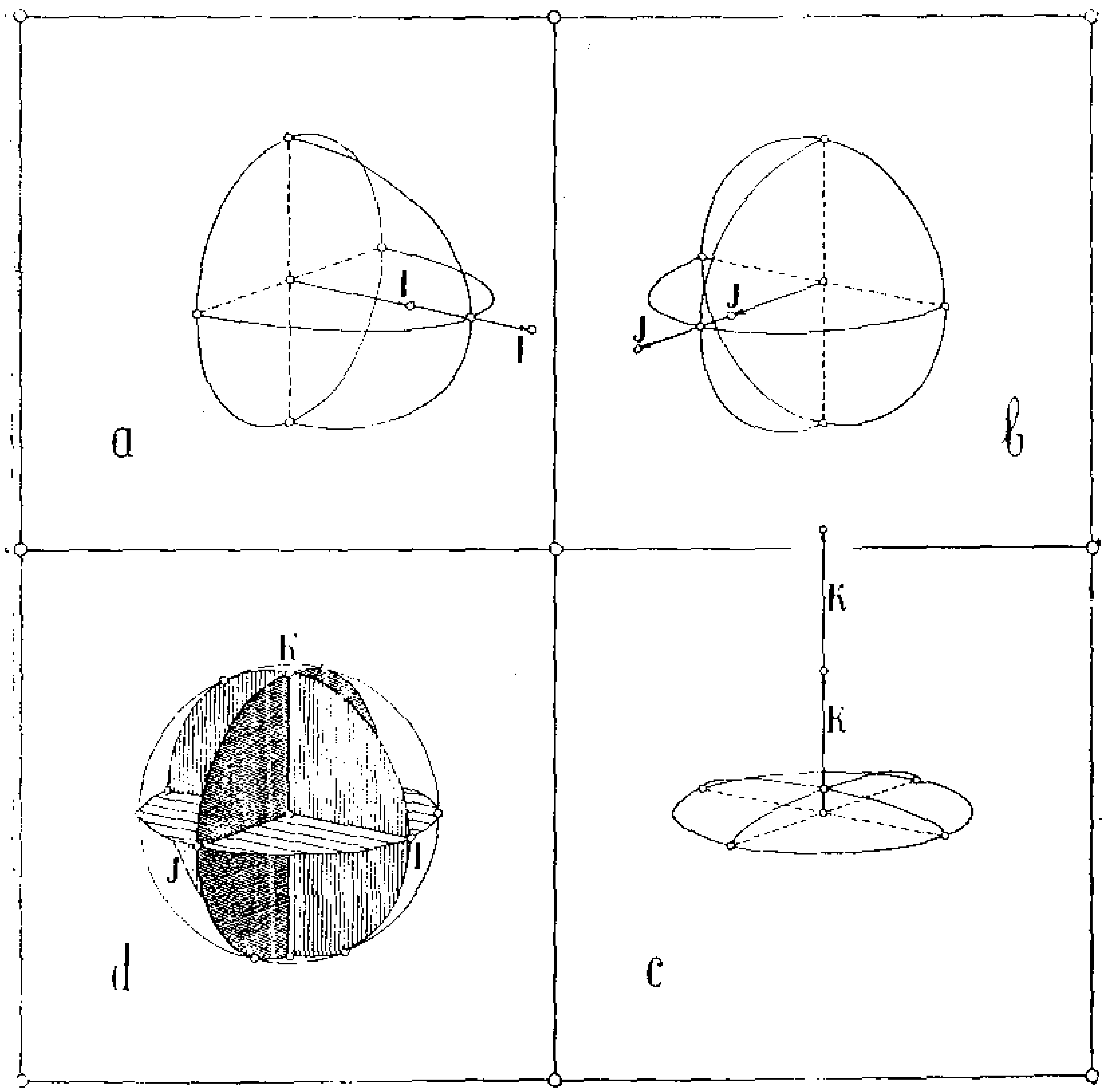
а то значи за дивиатор имамо следећи образац:

$$\mathrm{T}_d = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\}) - \frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B})\,\mathrm{I}. \tag{128}$$

У тај израз улазе само два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и према томе он не зависи од интензитета појединих вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (као ни диада) него само од праваца тих вектора и од производа њихових интензитета.

Наведéни образац (128) разлагања једног девиатора показује да свакој диади одговара један девиатор и свакоме девиатору одговара једна диада. Ово дозвољава да појам девиатора поставимо као један од главних појмова у теорији диада и афинора и да помоћу њега објаснимо многе ставове у тој теорији. На таквој тачки гледишта стоји I. A. Schouten, али нама се чини да је природније ставити у основ излагања појам диаде, нарочито ако она има конкретно геометријско тумачење.

Слика 39 претставља један девиатор помоћу трију специ-



Слика 39.

Девиатор претстављен помоћу диада. *a*, *b*, *c*. — Поједине девиаторове диаде. *d*. — Релативни положај основа тих диада.

јалних диада истезања. Слика 40 даје тензорску површину тог истог девиатора са два пут смањеним димензијама.

Наведимо још претставу једног произвољног тензора помоћу девиатора и јединичног афинора. Пошто за један произвољан тензор имамо:

$$\mathbf{T} = ts\,\boldsymbol{\Delta} + \sigma\,\mathbf{I},$$

при чему сабирањем из (125) имамо:

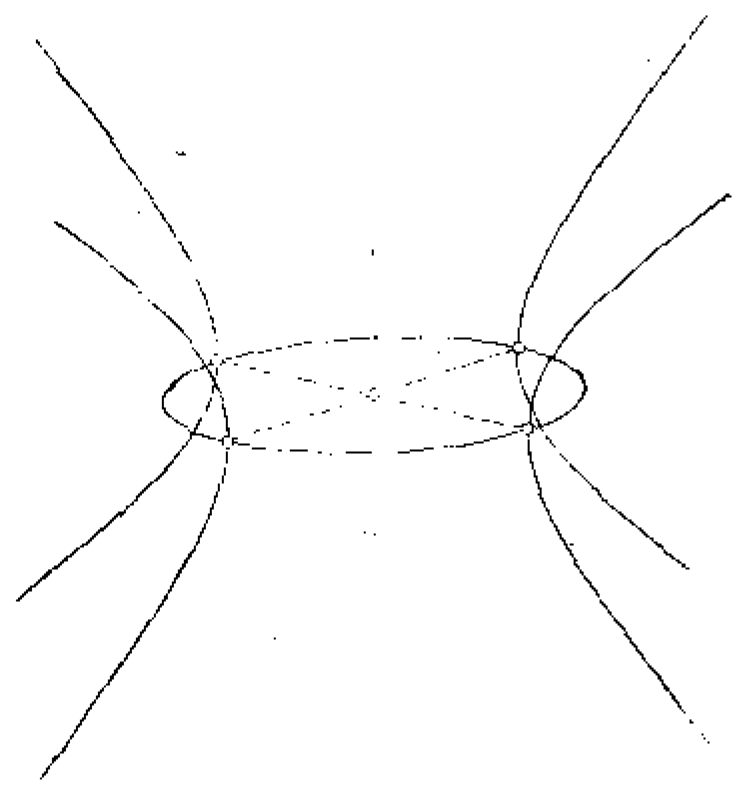
$$a_1 + a_2 + a_3 = S_1 = 3\sigma +$$

$$+ A^2{}_1 - A^2{}_2 = 3\sigma + (\vec{A}, \vec{B}),$$

а за један девиатор

$$\mathbf{T}_d = ts\,\boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B})\,\mathbf{I},$$

онда после елиминисања тензора диаде из тих образаца можемо да напишемо:



Слика 40.

Девиатор претстављен помоћу своје тензорске површине.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_d + \frac{1}{3} S_1\,\mathbf{I}. \tag{129}$$

38. Разлагање афинора у три специјална члана.

Ако у образац (122) у место $ts\,\mathbf{A}$ ставимо његову вредност из (123), добићемо следећи израз за произвољан афинор:

$$\mathbf{A} = \sigma\,\mathbf{I} + ax\,\mathbf{A} + ts\,\boldsymbol{\Delta}, \tag{130}$$

а у случају примене обрасца (129) можемо написати:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} S_1\,\mathbf{I} + ax\,\mathbf{A} + \mathbf{T}_d. \tag{131}$$

Први од тих образаца показује да сваки афинор може бити растављен у три члана: први је потпуно одређен само помоћу једног скалара, други одговара једноме вектору и трећи одговара једному диадином тензору. Други образац уноси ту модификацију, да у место диадиног тензора фигурише девиатор, а у вези са тим се мења и вредност скалара првог члана.

Пошто разлагања (130) и (131) за сваки одређени афинор могу да буду извршена само у једној јединој форми, ти обрасци могу такође да послуже за класификацију афинора: један афинор можемо да разликујемо од другог вредношћу, рецимо, скалара σ, карактером диадиног тензора и положајем вектора аксиатора у погледу оса тог тензора. Нећемо да улазимо у детаље те класификације.

39. Реципрочни афинор. Коафинор.

У § 21 смо видели да у вези са конструјисањем триједара вектора

$$\vec{A}_1^*,\ \vec{A}_2^*,\ \vec{A}_3^*;\quad \vec{B}_1^*,\ \vec{B}_2^*,\ \vec{B}_3^*$$

реципрочних са векторима датих триједара

$$\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \vec{A}_3;\quad \vec{B}_1,\ \vec{B}_2,\ \vec{B}_3$$

могуће је анализовати четири афинора:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}_i, \vec{B}_i\}, \tag{132}$$

$$\mathbf{A}^{*0} = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}_i^*, \vec{B}_i\}, \tag{133}$$

$$\mathbf{A}^{0*} = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}_i, \vec{B}_i^*\}, \tag{134}$$

$$\mathbf{A}^{**} = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}_i^*, \vec{B}_i^*\}. \tag{135}$$

Афинори (133) и (134) немају нарочитог интереса због особине, наведене на крају § 21, на име: ако пођемо од друге форме афинора $\mathbf{A}$, на пример од форме:

$$\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}'_i, \vec{B}'_i\}$$

и конструјишемо, рецимо, афинор

$$\mathbf{A}'^{0*} = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}'_i, \vec{B}'^*_i\},$$

он неће бити једнак афинору $\mathbf{A}^{0*}$, дакле

$$\mathbf{A}'^{0*} \neq \mathbf{A}^{0*}. \tag{136}$$

Да та особина афинора (133) и (134) постоји, о томе можемо да се уверимо из каквог конкретног примера. Узмимо један произвољан афинор:

$$\mathbf{A} = \sum_{=1}^{3} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \}$$

и преобразимо га на нову форму тако, да нови вектори $\vec{B}'_i$ имају вредности:

$$\begin{aligned} \vec{B}'_1 &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 , \\ \vec{B}'_2 &= \vec{B}_1 - 2\vec{B}_2 + \vec{B}_3 , \\ \vec{B}'_3 &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 - 3\vec{B}_3 . \end{aligned} \tag{137}$$

Тада за векторе $\vec{A}'_i$ треба да узмемо:

$$\begin{aligned} \vec{A}'_1 &= \frac{1}{12} (5\vec{A}_1 + 4\vec{A}_2 + 3\vec{A}_3) , \\ \vec{A}'_2 &= \frac{1}{3} (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) , \\ \vec{A}'_3 &= \frac{1}{4} (\vec{A}_1 - \vec{A}_3) . \end{aligned}$$

Конструјишимо сада афинор $\mathbf{A}^{0*}$; он има претходне векторе $\vec{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$), а идуће:

$$\begin{aligned} \vec{B}_1^* &= k [\vec{B}_2 , \vec{B}_3] , \\ \vec{B}_2^* &= k [\vec{B}_3 , \vec{B}_1] , \\ \vec{B}_3^* &= k [\vec{B}_1 , \vec{B}_2] , \end{aligned}$$

где је

$$k = \frac{1}{(\vec{B}_1 [\vec{B}_2, \vec{B}_3])}.$$

Са друге стране, афинор $\mathbf{A}'^{0*}$ конструјисан је са векторима $\vec{A'}_i$ ($i = 1, 2, 3$), а за идуће векторе му служе:

$$\vec{B'}_1^* = k' [\vec{B'}_2, \vec{B'}_3],$$

$$\vec{B'}_2^* = k' [\vec{B'}_3, \vec{B'}_1],$$

$$\vec{B'}_3^* = k' [\vec{B'}_1, \vec{B'}_2],$$

где је

$$k' = \frac{1}{(\vec{B'}_1 [\vec{B'}_2, \vec{B'}_3])}.$$

Ако сада уврстимо вредности (137) за $\vec{B'}_i$, рецимо у израз за $\vec{B'}_1^*$, добићемо следећу вредност:

$$\vec{B'}_1^* = \frac{1}{12} k (5 [\vec{B}_2, \vec{B}_3] + 4 [\vec{B}_3, \vec{B}_1] + 3 [\vec{B}_1, \vec{B}_2]).$$

Ако сада хоћемо да докажемо неједнакост (136), довољно је да покажемо неједнакост, рецимо, првих идућих вектора под условом да су оба два афинора трансформисани на исте претходне векторе.

Трансформишимо афинор $\mathbf{A}^{0*}$ на претходне векторе $\vec{A'}_i$ ($i = 1, 2, 3$); тада први идући вектор има вредност

$$\vec{B}_1^* + \vec{B}_2^* + \vec{B}_3^*,$$

значи треба да потврдимо неједнакост:

$$\vec{B}_1^* + \vec{B}_2^* + \vec{B}_3^* \neq \vec{B'}_1^*,$$

а она стварно постоји јер је можемо да напишемо овако:

$$k ([\vec{B}_2, \vec{B}_3] + [\vec{B}_3, \vec{B}_1] + [\vec{B}_1, \vec{B}_2] \neq$$

$$\neq \frac{1}{12} k (5 [\vec{B}_2, \vec{B}_3] + 4 [\vec{B}_3, \vec{B}_1] + 3 [\vec{B}_1, \vec{B}_2]).$$

На тај начин можемо тврдити да афинори (133) и (134) не остају исти, кад узимамо различите полазне форме афинора (132).

Покажимо сада да, напротив, афинор (135)

$$\mathrm{A}^{**} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i^*, \vec{B}_i^* \}.$$

задржава своју вредност независно од тога од каквих полазних вектора афинора A конструјишимо реципрочне триједре. Замислимо афинор A у двема формама:

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i, \vec{B}_i \}$$

$$\mathrm{A}' = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}'_i, \vec{B}'_i \},$$

где по (72) и (76) ставимо:

$$(72) \qquad \vec{B}'_i = \sum_{j=1}^{3} l_{ij} \vec{B}_j,$$

$$(76) \qquad \vec{A}'_i = \sum_{j=1}^{3} L_{ji} \vec{A}_j;$$

од те форме конструјишимо афиноре са реципрочним векторима:

$$\mathrm{A}^{**} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i^*, \vec{B}_i^* \},$$

$$\mathrm{A}'^{**} = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}'^*_i, \vec{B}'^*_i \},$$

где значи, на пример,

$$\vec{A}_1^* = \frac{1}{D_A} [\vec{A}_2, \vec{A}_3], \qquad \vec{B}_1^* = \frac{1}{D_B} [\vec{B}_2, \vec{B}_3],$$

$$\vec{A}'^*_1 = \frac{1}{D_{A'}} [\vec{A}'_2, \vec{A}'_3], \qquad \vec{B}'^*_1 = \frac{1}{D_{B'}} [\vec{B}_2, \vec{B}_3],$$

где смо означили са

$$D_A = (\vec{A}_1 [\vec{A}_2, \vec{A}_3])$$

и аналого D_{A}'.

Покажимо сада, да је

$$\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}'^{**}.$$

За то је, као што знамо, потребно да трансформишемо оба два афинора на исте, рецимо, претходне векторе и да покажемо једнакост одговарајућих идућих вектора. Ако за први претходни вектор хоћемо да узмемо вектор $[\vec{A}'_2, \vec{A}'_3]$, једнакост одговарајућих првих идућих одговарала би једначини:

$$\frac{1}{D_A D_B}\Big((l_{22} l_{33} - l_{32} l_{23})[\vec{B}_2, \vec{B}_3] + (l_{23} l_{31} - l_{33} l_{21})[\vec{B}_3, \vec{B}_1] +$$
$$+ (l_{21} l_{32} - l_{31} l_{22})[\vec{B}_1, \vec{B}_2]\Big) = \frac{1}{D_{A}' D_{B}'}[\vec{B}'_2, \vec{B}'_3].$$

Пошто на основу (72) вектор $[\vec{B}'_2, \vec{B}'_3]$ има вредност израза што стоји у загради са леве стране, а производ $D_A D_B$ не претставља ништа друго него трећи скалар, т. ј.

$$D_A D_B = S_3 = D_{A}' D_{B}',$$

можемо тврдити да је наша једначина истинита. Тако исто могуће је потврдити једнакост идућих вектора за векторе $[\vec{A}'_3, \vec{A}'_1]$ и $[\vec{A}'_1, \vec{A}'_2]$ и на тај начин доказати једнакост афинора $\mathbf{A}^{**}$ и $\mathbf{A}'^{**}$.

Афинор $\mathbf{A}^{**}$, који ћемо сада кратко обележавати са $\mathbf{A}^{*}$, зове се *афинор реципрочни афинору* $\mathbf{A}$. Дакле имамо:

$$\mathbf{A}^{*} = \frac{1}{S_3}\sum_{i=3}^{3}\{[\vec{A}_{i+1}, \vec{A}_{i+2}], [\vec{B}_{i+1}, \vec{B}_{i+2}]\},$$

где узимамо $\vec{A}_4 = \vec{A}_1$, $\vec{A}_5 = \vec{A}_2$ и тако исто за векторе $\vec{B}_4$ и $\vec{B}_5$.

Афинор, који се разликује од претходног само тиме, да нема делитеља S_3, т. ј. има вредност

$$\sum_{i=1}^{3}\{[\vec{A}_{i+1}, \vec{A}_{i+2}], [\vec{B}_{i+1}, \vec{B}_{i+2}]\},$$

зове се *коафинор*. Означаваћемо коафинор за афинор $\mathbf{A}$ са $ko\,\mathbf{A}$, дакле

$$ko\,\mathbf{A} = S_3\,\mathbf{A}^*.$$

Ако је афинор $\mathbf{A}$ дат помоћу својих координата

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{31}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \end{matrix}$$

координате коафинора не претстављају ништа друго него алгебарске допуне елемената претходне шеме; дакле за коафинор имамо шему

$$\begin{matrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, \end{matrix}$$

где је на пример

$$A_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32},$$

$$A_{12} = -(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}).$$

Координате реципрочног афинора $\mathbf{A}^*$ можемо да добијемо из координата коафинора, ако координате тог последњег поделимо вредношћу саме детерминанте S_3, дакле имамо:

$$a^*_{ij} = \frac{1}{S_3}\,A_{ij}. \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Нарочито јасно могуће је показати везу између датог афинора $\mathbf{A}$, реципрочног афинора $\mathbf{A}^*$ и коафинора $ko\,\mathbf{A}$, ако дати афинор напишемо у нормалном облику:

$$\mathbf{A} = a_1\{I_1, I\} + a_2\{J_1, J\} + a_3\{K_1, K\};$$

за коафинор тада имамо израз

$$ko\,\mathbf{A} = a_2\,a_3\{I_1, I\} + a_3\,a_1\{J_1, J\} + a_1\,a_2\{K_1, K\},$$

а за реципрочни афинор:

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{a_1}\{I_1, I\} + \frac{1}{a_2}\{J_1, J\} + \frac{1}{a_3}\{K_1, K\}.$$

Јасно је да се у случају

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

афинор, коафинор и реципрочни афинор поклапају.

40. Имагинарне диаде.

Теорија диада и афинора ни у својој геометријској, ни у својој аналитичкој форми не би била потпуна, ако не бисмо показали какву улогу могу да играју у тој теорији диаде и афинори конструјисани са имагинарним векторима.

Пошто смо са i у току овог рада означавали један вектор, на име орт једне од координатних оса, не би било згодно да ту исту ознаку употребимо за обележавање једног скалара — имагинарне јединице како је то обично примљено; зато ћемо означавати ту јединицу са ε, дакле

$$\varepsilon = +\sqrt{-1}.$$

Комплексни вектор (по Gibbs'у *бивектор*) претставља један формалан збир

$$\vec{A} + \varepsilon\vec{B},$$

где су $\vec{A}$ и $\vec{B}$ два обична вектора.

За ознаку комплексних вектора употребљаваћемо двоструку стрелицу горе; дакле имамо:

$$\vec{\vec{V}} = \vec{A} + \varepsilon\vec{B}.$$

Комплексни скалари (по Gibbs'у *бискалари*)

$$A_x + \varepsilon B_x,$$

$$A_y + \varepsilon B_y,$$

$$A_z + \varepsilon B_z$$

претстављају координате датог комплексног вектора.

Ако два комплексна вектора означимо са

$$\vec{V}_1 = \vec{A}_1 + \varepsilon \vec{B}_1$$

$$\vec{V}_2 = \vec{A}_2 + \varepsilon \vec{B}_2,$$

једначине, које одређују једнакост и операције са комплексним векторима, можемо да поставимо овако:

једнакости

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

одговарају две једнакости:

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2, \qquad \vec{B}_1 = \vec{B}_2.$$

За збир $\vec{V}$ тих вектора

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2,$$

можемо написати:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \qquad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

За случај множења са скаларом, рецимо m, имамо: из

$$\vec{V}_2 = m \vec{V}_1$$

следује

$$\vec{A}_2 = m \vec{A}_1, \qquad \vec{B}_2 = m \vec{B}_1,$$

где тај скалар може да буде и комплексни број.

Дефиницијама производа: скаларног, векторског и диадског двају комплексних вектора можемо применом дистрибутивног закона, који важи за сваки од тих производа, да дамо следећу форму:

a) за скаларни производ —

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{A}_1, \vec{A}_2) - (\vec{B}_1, \vec{B}_2) + \varepsilon ((\vec{A}_1, \vec{B}_2) + (\vec{A}_2, \vec{B}_1)).$$

То је у општем случају један комплексни број; он може да постане један реалан број, ако је

$$(\vec{A}_1, \vec{B}_2) + (\vec{A}_2, \vec{B}_1) = 0.$$

b) за векторски производ —

$$[\vec{V}_1, \vec{V}] = [\vec{A}_1, \vec{A}_2] - [\vec{B}_1, \vec{B}_2] + \varepsilon([\vec{A}_1, \vec{B}_2] + [\vec{A}_2, \vec{B}_1]),$$

c) за диадички производ —

$$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} = \{\vec{A}_1, \vec{A}_2\} - \{\vec{B}_1, \vec{B}_2\} + \varepsilon(\{\vec{A}_1, \vec{B}_2\} + \{\vec{A}_2, \vec{B}_1\}).$$

Овај последњи образац показује да се диада, образована од комплексних вектора, састоји у општем случају из два дела — из обичних, реалних диада, као што је на пример даида $\{\vec{A}_1, \vec{B}_2\}$ и диада друге природе, као што је на пример диада

$$\varepsilon\{\vec{A}_1, \vec{B}_2\}.$$

Таква се диада зове *имагинарна диада*. Множитељ ε можемо повезати било са претходним вектором, било са идућим, т. ј. једну имагинарну диаду можемо претставити овако:

$$\varepsilon\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\varepsilon\vec{A}, \vec{B}\} = \{\vec{A}, \varepsilon\vec{B}\}.$$

Забележимо још да се *интензитет комплексног вектора* $\vec{V}$, који ћемо означити са V, одређује из једначине

$$V^2 = (\vec{V}, \vec{V}) = A^2 - B^2 + 2\varepsilon(\vec{A}, \vec{B});$$

тај интензитет може бити реалан само у случају када су вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$ управни један на други (случај $B=0$ је искључен) и при томе $A > B$.

Ако ставимо у општем случају имагинарну вредност интензитета

$$V = m + n\varepsilon,$$

за тај вектор $\vec{V}$ можемо да напишемо

$$(138) \qquad \vec{\vec{V}} = V\vec{\vec{u}} = (m + n\varepsilon)\vec{\vec{u}},$$

где смо са $\vec{\vec{u}}$ означили *комплексни орт*, т. ј. вектор који задовољава услов

$$u = 1$$

или у развијеном облику при

$$\vec{\vec{u}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}\varepsilon$$

услове

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1, \qquad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

Из једначине (138) непосредно следује да сваки комплексни вектор може да спада само у једну од следећих категорија:

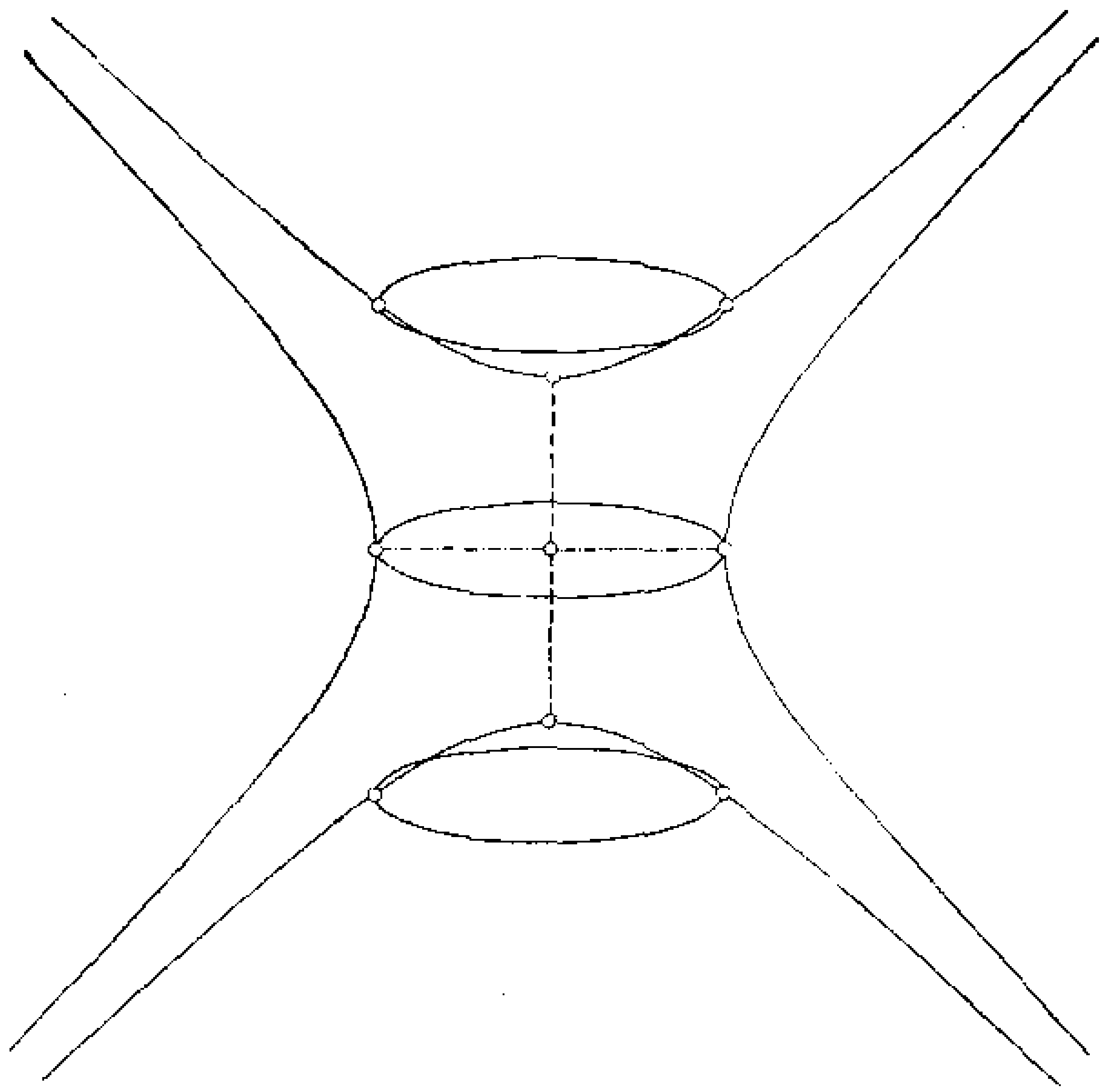
1. интензитет је комплексан, орт је комплексан,
2. интензитет је комплексан, орт је реалан,
3. интензитет је реалан, орт је комплексан,
4. интензитет је реалан, орт је реалан, — то је обичан вектор.

Покажимо сада какви геометријски облик можемо да упоредимо са једном имагинарном диадом.

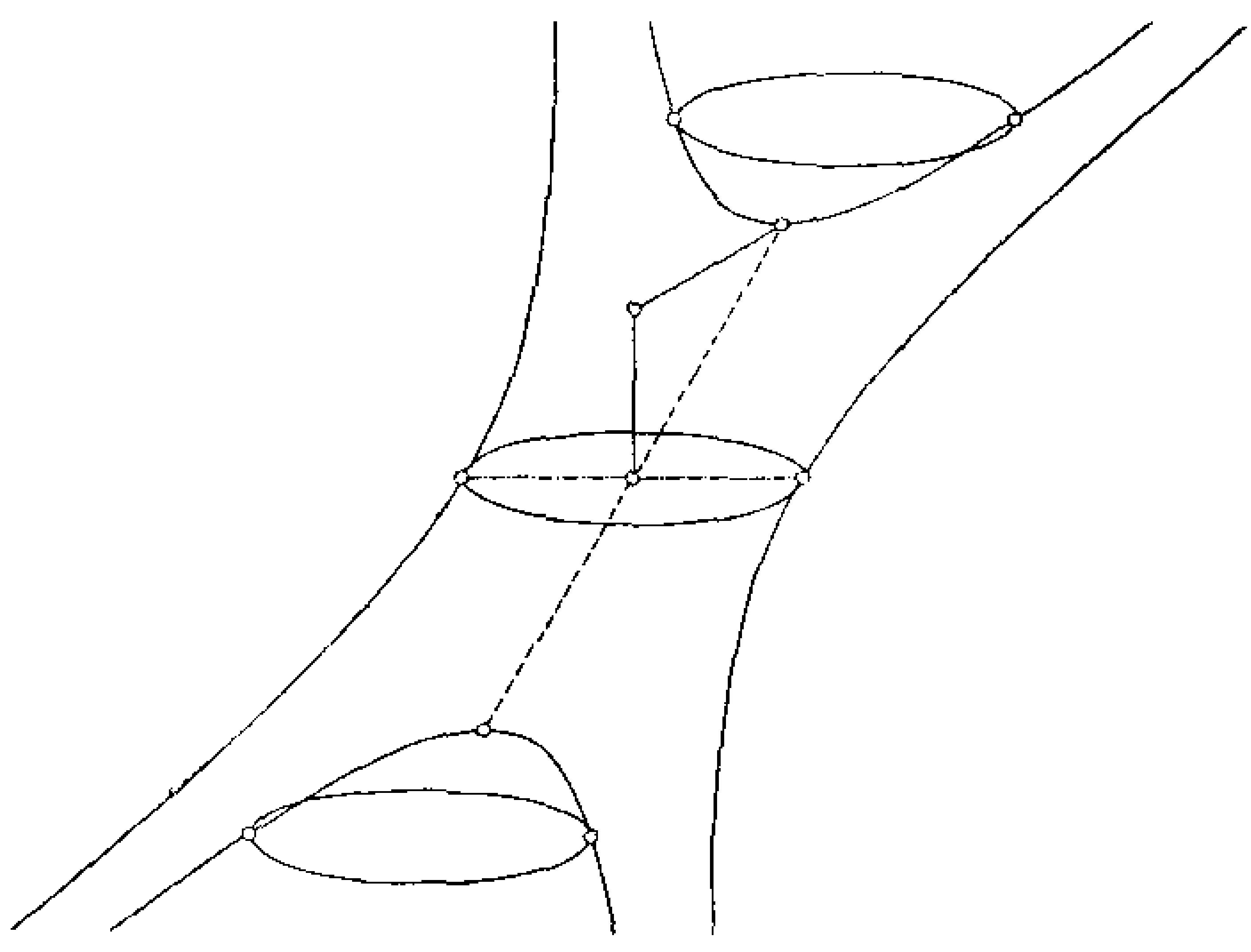
Узмимо једну имагинарну диаду

$$\varepsilon\{\vec{A}, \vec{B}\}.$$

Конструјишимо орт $\vec{B}_0$ и у вези са тим ортом конструјишимо просторну слику од два обртна хиперболоида — једнограног и двограног — са осом ротације $\vec{B}_0$ и са углом од 90^0 између супротних производиља асимптотског конуса (слика 41). Из краја вектора $\vec{B}_0$ конструјишимо сада орт претходног вектора — вектор $\vec{A}$ и на том правцу одмеримо вредност производа $P = AB$ од краја вектора $\vec{B}_0$ до тачке T, па спојимо ту тачку T са тачком O — почетком вектора $\vec{B}_0$. И овде права OT одређује *осу имагинарне диаде*. Ако сада центре свих кружних пресека наше слике од двају хиперболоида помакнемо у правцу вектора $\vec{A}$ и то тако, да сви центри падну на осовину имагинарне диаде, сами ти кружни пресеци припадају поново површинама једнограног и двограног хиперболоида (слика 42). Мо-



Слика 41.
Два обртна равнострана коњугована хиперболоида, једнограни и двограни.



Слика 42.
Имагинарна диада.

део тих површина може бити сматран као геометријски облик имагинарне диаде. — Не би било тешко поставити правила за операције са имагинарним диадама полазећи од горе наведене геометријске слике, али овде нећемо да улазимо у детаље тих операција.

Збир комплексних диада у произвољном коначном броју претставља један *комплексни афинор*. Јасно је да сваки комплексни афинор може бити претстављен у облику формалног збира

$$\mathbf{A}_1 + \varepsilon \mathbf{A}_2 ,$$

т. ј. из реалног и имагинарног афинора.

41. Скаларно множење афинора са скаларом.

Уочимо један афинор

$$\mathbf{A} = \{ \vec{A}_1 , \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2 , \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3 , \vec{B}_3 \}$$

и један вектор $\vec{r}$.

Скаларни производ тог афинора било сдесна, било слева са вектором $\vec{r}$ дефинишимо као векторски збир одговарајућих производа свих афинорових диада са датим вектором. Дакле по дефиницији

$$(\mathbf{A}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} (\{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \} \vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \vec{A}_i (\vec{B}_i , \vec{r}) ,$$

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \}) = \sum_{i=1}^{3} \vec{B}_i (\vec{A}_i , \vec{r}) .$$

Пошто множење вектора $\vec{r}$ са сваком диадом одговара конструјисању новог вектора помоћу модела те диаде, множење вектора $\vec{r}$ са једним афинором $\mathbf{A}$ захтева конструјисање толико вектора, колико има диада у афинору и тада векторски збир свих конструјисаних вектора претставља резултат скаларног множења афинора са вектором.

Јасно је да су правила те операције иста као што су правила множења са диадом; на пример

$$(\mathbf{A}, \vec{r}_1 + \vec{r}_2) = (\mathbf{A}, \vec{r}_1) + (\mathbf{A}, \vec{r}_2).$$

Ако је афинор дат помоћу својих координата a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), а вектор $\vec{r}$ координатама r_x, r_y, r_z у погледу на исти координатни триједар, вектор десног производа

$$(\mathbf{A}, \vec{r}) = \vec{P}$$

има за координате следеће вредности:

$$P_x = a_{11} r_x + a_{12} r_y + a_{13} r_z,$$
$$P_y = a_{21} r_x + a_{22} r_y + a_{23} r_z,$$
$$P_z = a_{31} r_x + a_{32} r_y + a_{33} r_z,$$

а левог производа

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = \vec{Q}$$

следеће:

$$Q_x = a_{11} r_x + a_{21} r_y + a_{31} r_z,$$
$$Q_y = a_{12} r_x + a_{22} r_y + a_{32} r_z,$$
$$Q_z = a_{13} r_x + a_{23} r_y + a_{33} r_z.$$

Јасно је да је

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}^c, \vec{r}).$$

Ако је афинор претстављен помоћу својих претходних координатних вектора у облику

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}_{(i)}, i\} + \{\vec{A}_{(j)}, j\} + \{\vec{A}_{(k)}, k\}$$

или помоћу својих идућих координатних вектора

$$\mathbf{A} = \{i, \vec{B}_{(i)}\} + \{j, \vec{B}_{(j)}\} + \{k, \vec{B}_{(k)}\}$$

за скаларно множење са вектором $\vec{r}$ (r_x, r_y, r_z) афинора $\mathbf{A}$

у случају десног производа згодније је узети прву форму тог афинора, а за леви производ, — другу форму. Јер тада имамо:

$$(\mathbf{A}, \vec{r}) = r_x \vec{A}_{(i)} + r_y \vec{A}_{(j)} + r_z \vec{A}_{(k)},$$

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = r_x \vec{B}_{(i)} + r_y \vec{B}_{(j)} + r_z \vec{B}_{(k)}.$$

У случају нормалног облика афинора

$$\mathbf{A} = a_1 \{ I, I_1 \} + a_2 \{ J, J_1 \} + a_3 \{ K, K_1 \}$$

за десни производ можемо да одредимо вектор $\vec{r}$ помоћу координата у погледу триједра $I_1\ J_1\ K_1$, дакле ставимо:

$$\vec{r} = X_1 I_1 + Y_1 J_1 + Z_1 K_1$$

и тада имамо

$$(\mathbf{A}, \vec{r}) = a_1 X_1 I + a_2 Y_1 J + a_3 Z_1 K;$$

за леви производ ставимо:

$$\vec{r} = XI + YJ + ZK$$

и тада ћемо добити:

$$(\vec{r}, \mathbf{A}) = a_1 X I_1 + a_2 Y J_1 + a_3 Z K_1.$$

Ако афинор дегенерише у један тензор

$$\mathbf{T} = a_1 \{ I, I \} + a_2 \{ J, J \} + a_3 \{ K, K \},$$

скаларни производ тог тензора са вектором

$$\vec{r} = XI + YJ + ZK$$

даје и за десни и за леви производ исти резултат:

$$(\mathbf{T}, \vec{r}) = (\vec{r}, \mathbf{T}) = a_1 XI + a_2 YJ + a_3 ZK = \vec{R}.$$

Помоћу тог производа једначину тензоријалне површине можемо сада да напишемо овако:

(139) $$(\vec{\varrho}(\mathbf{T}, \vec{\varrho})) = 1,$$

где смо са $\vec{\varrho}$ означили променљиви вектор произвољне тачке на тој површини. Јер ако вектор $\vec{\varrho}$ претставимо помоћу координата једначином

$$\vec{\varrho} = \xi I + \eta J + \zeta K ,$$

за производ тензора и тог вектора добићемо:

$$(\mathrm{T}, \vec{\varrho}) = a_1 \xi I + a_2 \eta J + a_3 \zeta K,$$

а скаларним множењем последњих двају израза можемо једначину (139) да напишемо овако

$$a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 = 1,$$

а та форма упоређена са једначином (114) потврђује да горе наведена једначина (139) претставља тензоријалну површину.

Обратно, помоћу тензоријалне површине (139) можемо да конструјишимо скаларни производ тензора T са вектором, рецимо $\vec{r}$, т. ј. вектор $\vec{R}$ на следећи начин:

$$(\mathrm{T}, \vec{r}) = \vec{R}.$$

Тога ради упоредно са површином (139) замислимо породицу површина са једначином:

$$(\vec{\varrho}(\mathrm{T}, \vec{\varrho}) = \text{Const.} = c$$

и бирајмо константу c тако, да та површина пролази кроз крај датог вектора $\vec{r}$, дакле ставимо

$$c = (\vec{r}(\mathrm{T}, \vec{r})) .$$

Конструјишимо сада (слика 43) на крају вектора $\vec{r}$ тангенцијалну раван на тензоријалну површину

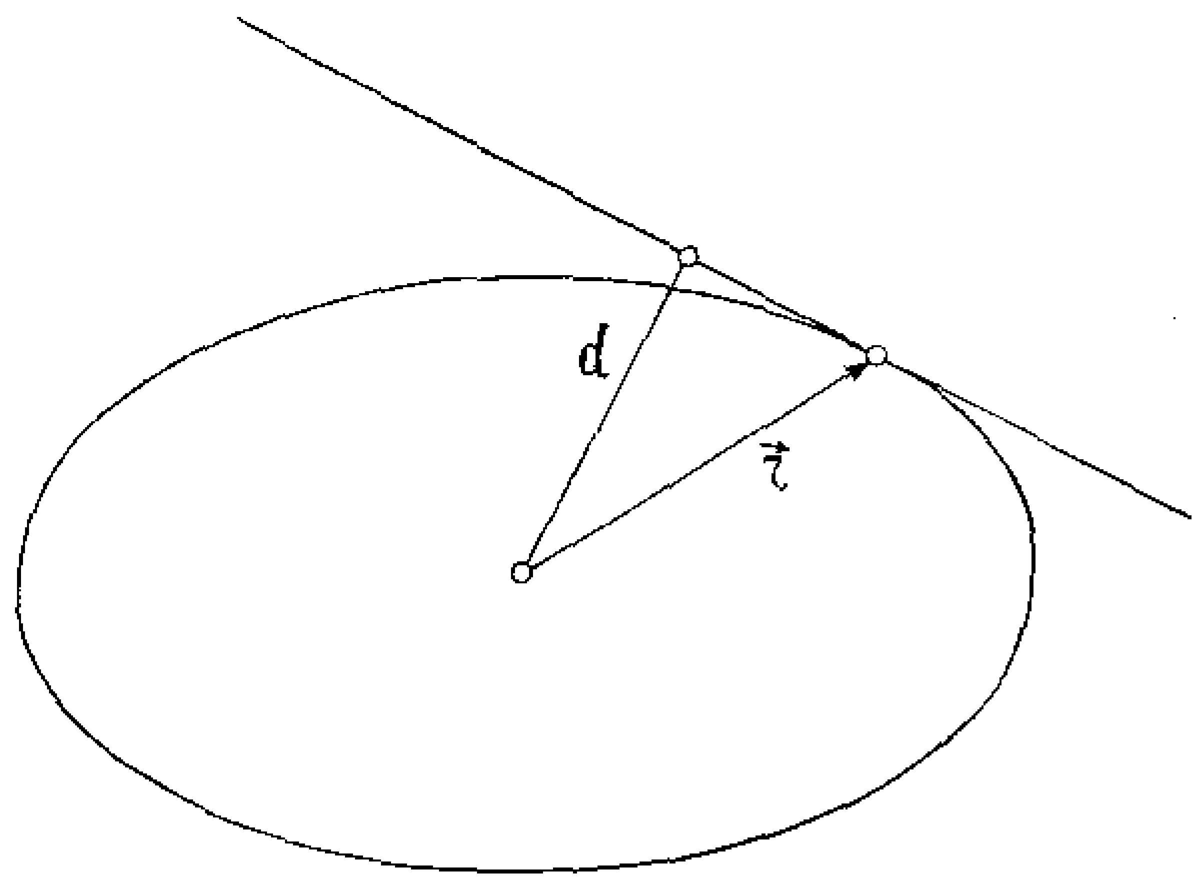
$$a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 = (\vec{\varrho}(\mathrm{T}, \vec{\varrho})) = c .$$

Пошто једначина те тангенцијалне равни има облик

$$a_1 X(x - X) + a_2 Y(y - Y) + a_3 Z(z - Z) = 0$$

или скраћено:

$$(\vec{R}, \vec{s} - \vec{r}) = 0,$$



Слика 43.

Тензоријална површина са тангенцијалном равни.

где је вектор $\vec{s}$ вектор положаја произвољне тачке тангенцијалне равни са координатама:

$$\vec{s}(x, y, z),$$

можемо тврдити да вектор $\vec{R}$ стоји управно на ту тангенцијалну раван и да је интензитет тог вектора

$$R = \sqrt{a_1^2 X^2 + a_2^2 Y^2 + a_3^2 Z^2}$$

обратно пропорционалан растојању d центра тензоријалне површине од тангенцијалне равни, јер је

$$d = c : \sqrt{a_1^2 X^2 + a_2^2 Y^2 + a_3^2 Z^2}.$$

Дакле имамо:

$$R = c : d.$$

Пошто познајемо правац, смер и интензитет вектора $\vec{R}$ можемо да конструјишемо тај вектор непосредно помоћу датога вектора $\vec{r}$ и дате тензоријалне површине.

Пређимо сада на случај скаларног множења афинора када тај афинор дегенерише у један аксиатор.

Узмимо један аксиатор у облику (§ 35):

$$ax\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\{i, [\vec{V}, i]\} + \{j, [\vec{V}, j]\} + \{k, [\vec{V}, k]\}\right),$$

где је $\vec{V}$ инваријантни вектор афинора, — у општем случају један одређени дати вектор, од којег, и само од којег, зависи аксиатор.

Ако извршимо скаларно множење, рецимо сдесна, са вектором

$$\vec{r} = xi + yj + zk,$$

добићемо:

$$(ax\,\mathbf{A}, \vec{r}) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\{i, [\vec{V}, i]\}, \vec{r}) + (\{j, [\vec{V}, j]\}, \vec{r}) + (\{k, [\vec{V}, k]\}, \vec{r})] =$$

$$= \frac{1}{2}[i([\vec{V}, i], \vec{r}) + j([\vec{V}, j], \vec{r}) + k([\vec{V}, k], \vec{r})] =$$

$$= \frac{1}{2}[i(i[\vec{r}, \vec{V}]) + j(j[\vec{r}, \vec{V}]) + k(k[\vec{r}, \vec{V}])] =$$

$$= \frac{1}{2}[i[\vec{r}, \vec{V}]_x + j[\vec{r}, \vec{V}]_y + k[\vec{r}, \vec{V}]_z] =$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{V}].$$

Дакле дефинитивно имамо једначину

$$(ax\,\mathbf{A}, \vec{r}) = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{V}],$$

која показује да се скаларни производ аксиатора и вектора своди на половину векторског производа датог вектора и инваријантног вектора аксиатора.

Наведимо још производе понеких важних специјалних афинора са вектором.

Ако афинор претставља верзор:

$$\mathbf{\Gamma} = \{ I_1 , I \} + \{ J_1 , J \} + \{ K_1 , K \}$$

његов скаларни производ са вектором

$$(140) \qquad \vec{r} = X_1 I_1 + Y_1 J_1 + Y_1 K_1$$

има вредност

$$(\mathbf{\Gamma}, \vec{r}) = X_1 I + Y_1 J + Z_1 K = \vec{r}_1 .$$

Тај резултат показује да вектор $\vec{r}_1$ има исте координате у погледу триједра $I\,J\,K$, као што вектор $\vec{r}$ има координате у погледу триједра $I_1\,J_1\,K_1$; другим речима, ако ротацијом један главни триједар доведемо до поклапања са другим главним триједром, вектор $\vec{r}_1$ поклопиће се са вектором $\vec{r}$.

Ако афинор претставља керверзор

$$\mathbf{K} = \{ I_1 , I \} + \{ J_1 , J \} - \{ K_1 , K \}$$

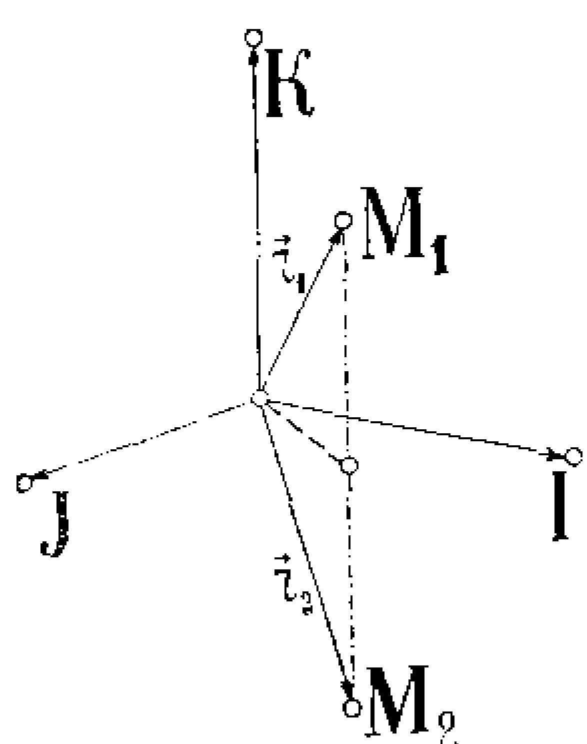
његов десни производ са вектором (140) има вредност

$$(\mathbf{K}, \vec{r}) = X_1 I + Y_1 J - Z_1 K = \vec{r}_2 .$$

Добивени резултат можемо претставити овако:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - 2 Z_1 K ;$$

први део десне стране претставља вектор $\vec{r}_1$ добивени из вектора $\vec{r}$ ротацијом триједра $O I_1 J_1 K_1$ у положај триједра $OIJK$; други део — $2 Z_1 K$ одговара правцу осе K, супротног смера, а вредност му је двострука величина пројекције вектора $\vec{r}_1$ на K осу. На слици (слика 44) дајемо конструкцију вектора $\vec{r}_2$. Пошто крај вектора $\vec{r}_2$ — тачка M_2 — лежи на



Слика 44.

Конструјисање огледалне слике једне тачке.

истој нормали на раван ортова I и J као што и тачка M_1 и те две тачке су у истом растојању од те равни, тачка M_2 претставља огледалну слику тачке M_1 и сам вектор $\vec{r}_2$ претставља огледалну слику вектора $\vec{r}_1$.

На тај начин резултат скаларног множења вектора са керверзором можемо конструјисати помоћу два узастопна чина: први се чин састоји у ротацији једног главног триједра са датим вектором до поклапања са другим главним триједром, а други се чин састоји у конструјисању огледалне слике, узимајући за раван огледала раван, што стоји управно на орт, који фигурише у диади са негативним знаком.

Најзад конструјишимо скаларни производ јединичног афинора

$$\mathrm{I} = \{I, I\} + \{J, J\} + \{K, K\}$$

са вектором $\vec{r}$.

Пошто имамо

$$(\mathrm{I}, \vec{r}) = XI + YJ + ZK = \vec{r},$$

можемо тврдити да скаларно множење вектора са јединичним афинором не мења тај вектор; у том смислу јединични афинор игра улогу обичне скаларне јединице.

42. Афинор као оператор линеарне векторске функције.

Следећи § 15 означимо са $\vec{x}$ (x_1, x_2 x_3) један вектор, а са $\vec{y}$ (y_1, y_2, y_3) други. У том параграфу било је наведено да у случају једначина:

$$y_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3\,,$$

$$y_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3\,,$$

$$y_3 = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3$$

вектор $\vec{y}$ претставља линеарну векторску функцију, а у случају произвољних величина a_{ij} (i, $j = 1$, 2, 3), које нису везане никаквим везама, претставља *линеарну векторску функцију општијег типа.*

У претходном параграфу смо видели да горње једначине могу бити сматране као резултат скаларног множења афинора са координатама a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) вектором $\vec{x}$, дакле можемо написати:

$$\vec{y} = (\mathbf{A}, \vec{x}).$$

Пошто координате a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) једног произвољног афинора могу узимати све могуће вредности, написана векторска једначина одговара једној линеарној векторској функцији општијег типа.

На тај начин афинор можемо сматрати оним геометријским обликом чијом применом на одређени начин можемо, полазећи од датог вектора $\vec{x}$, конструисати нов вектор $\vec{y}$ — линеарну векторску функцију општијег типа; у томе смислу афинор игра улогу *оператора* те функције.

Покажимо сада на примерима како помоћу једног афинора можемо да претставимо и оне линеарне векторске функције, које на први поглед немају ничега заједничког са једним афинором.

Узмимо следећи пример једне линеарне векторске функције:

$$\vec{y} = m\vec{x},$$

где је m један скалар.

Јасно је да увођење афинора

$$\mathbf{A} = m\mathbf{I} = m(\{i, i\} + \{j, j\} + \{k, k\})$$

са координатном шемом:

$$\begin{matrix} m, & 0, & 0, \\ 0, & m, & 0, \\ 0, & 0, & m \end{matrix}$$

даје

$$(\mathbf{A}, \vec{x}) = (m\mathbf{I}, \vec{x}) = m(\mathbf{I}, \vec{x}) = m\vec{x}.$$

За други пример узмимо

$$\vec{y} = [\vec{R}, \vec{x}],$$

где је $\vec{R}$ дати вектор.

Да бисмо и у том случају извршили конструјисање вектора $\vec{y}$ помоћу једног афинора, замислимо један специјалан афинор, на име аксиатор, чији инваријантни вектор има вредност

$$\vec{V} = -2\vec{R}.$$

То значи, ако је вектор $\vec{R}$ дат помоћу координата R_x, R_y R_z, наш афинор-аксиатор има за координате:

$$ax\,\mathbf{A}\begin{cases} 0\ , -R_z\ , \quad R_y\ , \\ R_z\ , \quad 0\ , -R_x\ , \\ -R_y\ , \quad R_x\ , \quad 0\ . \end{cases}$$

Скаларним множењем вектора $\vec{x}$ са тим аксиатором на основу претходног параграфа добићемо:

$$(ax\,\mathbf{A}, \vec{x}) = \frac{1}{2}[\vec{x}, \vec{V}] = [\vec{R}, \vec{x}].$$

На исти начин могуће је наћи одговарајућу форму афинора и за сваку другу специјалну форму линеарне векторске функције.

43. Афина трансформација простора.

Замислимо један простор. Узмимо у том простору фиксирану тачку O и произвољну тачку X; вектор положаја тачке X у погледу O означимо са $\vec{x}$, дакле је

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x}.$$

Тај простор нека се зове простор X.

Упоредно са тим простором замислимо други простор, простор Y, чију произвољну тачку означимо са Y, а вектор положаја те тачке у погледу тачке O' означимо са $\vec{y}$, дакле је

$$\overrightarrow{O'Y} = \vec{y}.$$

Ако између вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ поставимо линеарну векторску везу:

$$(141) \qquad \vec{y} = (\mathbf{A}, \vec{x}),$$

где је $\mathbf{A}$ један одређени афинор, можемо тврдити, да свакој тачки простора X одговара одређена тачка простора Y; другим речима, једначина (141) трансформише простор X у простор Y. Трансформација простора одређена једначином (141) зове се *афина трансформација простора.*

Основна је особина те трансформације у томе што се свака раван у простору X трансформише у једну раван у простору Y и при томе две паралелне равни простора X прелазе такође у паралелне равни у простору Y. Докажимо те две особине.

Напишимо једначину равни у простору X у облику:

$$(142) \qquad \vec{x} = \vec{A} + u\vec{B} + v\vec{C},$$

где су $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ дати стални вектори, а u и v променљиви скаларни параметри.

После трансформације (141) једначина (142) узима форму:

$$\vec{y} = (\mathbf{A}, \vec{A}) + u(\mathbf{A}, \vec{B}) + v(\mathbf{A}, \vec{C})$$

или

$$(143) \qquad \vec{y} = \vec{A'} + u\vec{B'} + v\vec{C'}.$$

где су $\vec{A'}$, $\vec{B'}$, $\vec{C'}$ такође стални вектори. Пошто једначина (143) претставља такође једну раван, прва особина афине трансформације је тим доказана.

Ако сада упоредно са равни (142) конструишемо у простору X другу раван паралелну са првом, једначину те равни увек можемо да напишемо у облику:

$$(144) \qquad \vec{x} = \vec{A_1} + u\vec{B} + v\vec{C},$$

где само први вектор десне стране узима нову вредност. После трансформације та раван одговара равни

$$(145) \qquad \vec{y} = \vec{A'}_1 + u\vec{B'} + v\vec{C'},$$

где је

$$\vec{A'}_1 = (\mathbf{A}, \vec{A}_1).$$

Јасно је да је раван (145) паралелна са равни (143), а ово потврђује и другу наведену особину афине трансформације.

Из те особине непосредно следује да се две паралелне праве трансформишу у праве, које су такође паралелне међу собом.

Код многих писаца афина трансформација простора служи за основу теорије афинора и из особина те трансформације развијају се све особине афинора као једног оператора линеарне векторске функције. Таква теорија је добро разрађена и зато је овде нећемо понављати у свима детаљима; наведимо само оно, што нам се чини главним као и оно, што у нашем систему излагања може бити од интереса.

У општем случају једначину (141) можемо да решимо у погледу вектора $\vec{x}$; резултат тог решења можемо написати у облику:

$$(146) \qquad \vec{x} = (\mathbf{A}^*, \vec{y}),$$

где је $\mathbf{A}^*$ афинор реципрочни афинору $\mathbf{A}$. То непосредно следује из дефиниције реципрочног афинора наведене у § 39.

Јасно је да је

$$(\mathbf{A}(\mathbf{A}^*, \vec{y})) = \vec{y};$$

од те особине потиче назив «реципрочни» и бележење тог афинора са $\mathbf{A}^{-1}$, дакле је

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}.$$

Исто тако истинита је једначина

$$(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}, \vec{x})) = \vec{x}.$$

Замислимо сада у простору X промењиви орт $\vec{x}$. Ходографска површина тог орта је сфера са једначином:

$$(147) \qquad (\vec{x}, \vec{x}) = 1 .$$

Ако трансформишемо сваки вектор $\vec{x}$ помоћу афинора $\mathbf{A}$, добићемо на основу (141) вектор $\vec{y}$ и ако желимо да видимо у какву се површину трансформише сфера (147), потребно је да у ту једначину ставимо вредност вектора $\vec{x}$ из (146); после те смене добићемо скаларну једначину

$$(148) \qquad \left((\mathbf{A}^*, \vec{y}), (\mathbf{A}^*, \vec{y})\right) = 1,$$

која одговара једном елипсоиду. Тај се елипсоид зове *индикатриса афине трансформације* или *афинорова индикатриса.*

Ако афинор $\mathbf{A}$ напишемо у нормалном облику

$$\mathbf{A} = a_1 \{I_1, I\} + a_2 \{J_1, J\} + a_3 \{K_1, K\}$$

реципрочни афинор добија форму:

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{a_1}\{I_1, I\} + \frac{1}{a_2}\{J_1, J\} + \frac{1}{a_3}\{K_1, K\}$$

и његов скаларни производ са вектором $\vec{y}$, који хоћемо да претставимо у погледу триједра I, J, K једначином

$$\vec{y} = y_1 I + y_2 J + y_3 K,$$

има вредност:

$$(\mathbf{A}^*, \vec{y}) = \frac{y_1}{a_1} I_1 + \frac{y_2}{a_2} J_1 + \frac{y_3}{a_3} K_1 ;$$

ако ту вредност уврстимо у једначину (148) долазимо до једначине:

$$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} + \frac{y_3^2}{a_3^2} = 1,$$

која претставља једначину афинорове индикатрисе у погледу на осе идућег главног триједра. Форма те једначине потврђује елипсоидални карактер те површине. Главне осе тог елипсоида поклапају се са осама главног идућег триједра. Из овог се види да се питање одређивања главних оса своди на одређивање главних оса афинорове индикатрисе.

Ако бисмо сада поставили питање: трансформацијом којих полупречника сферне површине (147) бисмо добили главне полуосе афинорове индикатрисе са вредностима:

$$a_1 I,\ a_2 J,\ a_3 K,$$

онда би нам једначина (146) дала одговор:

$$I_1,\ J_1,\ K_1,$$

т. ј. трансформацијом праваца претходног триједра.

Из ових особина афинорове индикатрисе непосредно следује да за геометријску карактеристику једног афинора можемо узети ту индикатрису (са шест скаларних параметара), али то није довољно — потребно је још да наведемо од којих су вектора постали главни правци те индикатрисе, другим речима, да одредимо положај триједра I_1, J_1, K_1 у погледу триједра I, J, K, а то захтева још три параметра.

Ако желимо да анализујемо како се мења дужина једног произвољног вектора $\vec{x}$ услед трансформације, можемо да уведемо појам *коефицијента елонгације* k; он има вредност:

$$k = \frac{y - x}{x}.$$

Јасно је да тај коефицијенат не зависи од полазне дужине вектора $\vec{x}$ и зато можемо да ставимо $x = 1$, а за y можемо да узмемо дужину одговарајућег потега афинорове индикатрисе: тада имамо:

$$k = y - 1.$$

Ако сада уврстимо y из једначине (141), дефинитивно ћемо добити једначину

$$(k + 1)^2 = (\mathbf{A}, \vec{x})^2,$$

која даје могућност да одредимо коефицијенат елонгације за сваки произвољни правац. Ако је афинор дат у нормалном облику, а орт $\vec{x}$ је одређен помоћу својих координата α, β, γ у погледу на триједар I, J, K, т. ј.

$$\vec{x} = \alpha I + \beta J + \gamma K,$$

горња једначина узима форму:

$$(k+1)^2 = a_1^2 \alpha^2 + a_2^2 \beta^2 + a_3^2 \gamma^2 \tag{149}$$

и даје вредност k за све могуће правце. Ако коефицијенте елонгације за главне правце I_1, J_1, K_1 означимо са k_1, k_2, k_3, они имају вредности:

$$k_i = a_i - 1. \qquad\qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Из обрасца (149) непосредно следује да једини афинор, који не мења дужине произвољног вектора, то је верзор. Јер за случај $k = 0$ имамо

$$1 = a_1^2 \alpha^2 + a_2^2 \beta^2 + a_3^2 \gamma^2$$

и та једначина мора да постоји за све могуће вредности α, β, γ, које задовољавају једначину

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

а то може да буде само у случају $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, што одговара једноме верзору са нормалном формом:

$$\Gamma = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\}.$$

Анализујмо сада како се мења површина паралелограма конструјисаног са векторима $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ као странама. Ту површину можемо сматрати као модул вектора $[\vec{x}, \vec{x}']$. После трансфорформације стране узимају вредности $\vec{y}$, $\vec{y}'$, а нова површина има вредност модула вектора $[\vec{y}, \vec{y}']$. Значи, треба да упоредимо модуле двају вектора

$$[\vec{x}, \vec{x}'] \quad \text{и} \quad [(\mathbf{A}, \vec{x}), (\mathbf{A}, \vec{x}')].$$

Јасно је да ће анализа бити потпунија, ако анализујемо не само модуле тих вектора него и саме векторе, т. ј. ако узмемо у обзир и оријентацију тих површина у простору.

Узмимо афинор $\mathbf{A}$ у нормалном облику

$$\mathbf{A} = a_1\{I_1, I\} + a_2\{J_1, J\} + a_3\{K_1, K\},$$

а векторе $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ одредимо у погледу триједра I, J, K једначинама:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 I + x_2 J + x_3 K, \\ \vec{x}' &= x'_1 I + x'_2 J + x'_3 K. \end{aligned} \tag{150}$$

Тада вектори $\vec{y}$ и $\vec{y}'$ имају вредности:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= (\mathbf{A}, \vec{x}) = a_1 x_1 I_1 + a_2 x_2 J_1 + a_3 x_3 K_1, \\ \vec{y}' &= (\mathbf{A}, \vec{x}') = a_1 x'_1 I_1 + a_2 x'_2 J_1 + a_3 x'_3 K_1, \end{aligned} \tag{151}$$

а њихов векторски производ изгледа овако:

$$\begin{aligned} [\vec{y}, \vec{y}'] = a_2 a_3 (x_2 x'_3 - x'_2 x_3) I_1 + a_3 a_1 (x_3 x'_1 - x'_3 x_1) J_1 + \\ + a_1 a_2 (x_1 x'_2 - x'_1 x_2) K_1. \end{aligned}$$

Ако сада уведемо коафинор

$$ko\,\mathbf{A} = a_2 a_3 \{I_1, I\} + a_3 a_1 \{J_1, J\} + a_1 a_2 \{K_1, K\},$$

видимо да наш векторски производ можемо претставити овако:

$$[\vec{y}, \vec{y}'] = (ko\,\mathbf{A}, [\vec{x}, \vec{x}']).$$

На тај смо начин дошли до закључка да се вектор $[\vec{x}, \vec{x}']$ после афине трансформације претвара у вектор $(ko\,\mathbf{A}, [\vec{x}, \vec{x}'])$ и тиме карактерише промену површине паралелограма конструјисаног са векторима $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ као странама.

Ако координате вектора $[\vec{x}, \vec{x}']$ у погледу I, J, K означимо са Δ_1, Δ_2, Δ_3, координате вектора $[\vec{y}, \vec{y}']$ у погледу I_1, J_1, K_1 добијају вредности

$$a_2 a_3 \Delta_1, \quad a_3 a_1 \Delta_2, \quad a_1 a_2 \Delta_3.$$

Ако са Δ означимо интензитет вектора $[\vec{x}, \vec{x}']$, а са Δ' интензитет вектора $[\vec{y}, \vec{y}']$ за *коефицијенат промене површине* треба да узмемо количник

$$p = \frac{\Delta' - \Delta}{\Delta}.$$

Тај коефицијенат можемо да одредимо из једначине

$$\Delta'^2 = \Delta^2 (p+1)^2 .$$

Ако ставимо

$$\Delta_1 = \Delta \,.\, \alpha , \qquad \Delta_2 = \Delta \,.\, \beta , \qquad \Delta_3 = \Delta \,.\, \gamma ,$$

та једначина даје:

$$(p+1)^2 = a_2^2\, a_3^2\, \alpha^2 + a_3^2\, a_1^2\, \beta^2 + a_1^2\, a_2^2\, \gamma^2$$

и на тај начин одређује вредност коефицијента p са променом оријентације равни у којој се налази наша површина. И ту можемо тврдити да коефицијенат p има вредност нуле за сваку површину само у том случају, када је $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, а то значи када се афинор претвара у верзор.

Најзад узмимо запремину v паралелепипеда образованог од вектора $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}''$, значи са вредношћу

$$v = (\vec{x}\,[\,\vec{x}', \vec{x}''\,]) ;$$

услед трансформације, када се вектори $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}''$ трансформишу у векторе $\vec{y}, \vec{y}', \vec{y}''$, запремина узима вредност:

$$v' = (\vec{y}[\,\vec{y}', \vec{y}''\,]) .$$

Ако једначинама (150) и (151) додамо још једначине

$$\vec{x}'' = x_1''\, I + x_2''\, J + x_3''\, K ,$$

$$\vec{y}'' = a_1\, x_1''\, I_1 + a_2\, x_2''\, J_1 + a_3\, x_3''\, K_1$$

и израчунамо запремину v', лако долазимо до резултата:

$$v' = a_1\, a_2\, a_3\, v .$$

Пошто производ $a_1\, a_2\, a_3$ претставља трећу афинорову инваријанту S_3, претходну једначину можемо написати овако:

$$\frac{v'}{v} = S_3 ,$$

другим речима услед афине трансформације свака се запремина мења у константној сразмери према својој полазној вредности.

Коефицијенат запреминске промене можемо да претставимо овако:

$$q = \frac{v' - v}{v} = S_3 - 1 .$$

За случај $S_3 = 1$ запремина не мења своју вредност.

Сада пређимо на анализу промене праваца услед афине трансформације. У тој анализи најважнију улогу игра питање, дали постоје такви правци, који и после афине трансформације задржавају свој положај у простору. За такав правац треба да имамо:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

где је λ одређени скалар. Значи имамо:

$$(\mathbf{A}, \vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

Та векторска једначина доводи до следећих скаларних једначина:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + \quad a_{12} x_2 \quad + \quad a_{13} x_3 \quad &= 0, \\ a_{21} x_2 \quad + (a_{22} - \lambda) x_2 + \quad a_{23} x_3 \quad &= 0, \\ a_{31} x_1 \quad + \quad a_{32} x_2 \quad + (a_{33} - \lambda) x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{152}$$

За могућност решења написаних линеарних једначина скалар λ треба да задовољава кубичну једначину:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \quad , & a_{13} \\ a_{21} \quad , & a_{22} - \lambda, & a_{23} \\ a_{31} \quad , & a_{32} \quad , & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{153}$$

коју можемо написати овако:

$$\lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda - S_3 = 0, \tag{154}$$

где су S_1, S_2, S_3 вредности познатих афинорових инваријаната.

Написана кубична једначина (153 или 154) зове се *Hamilton'ова једначина.*

За писце, који у основу учења о афинорима стављају појам афинора као оператора линеарне векторске функције, Hamilton'ова једначина служи као полазна тачка за класификацију афинора. Према карактеру корена те једначине могуће је разликовати следеће случајеве:

I. Сви су корени реални.

II. Један корен је реалан, два остала имагинарна.

У случају реалних корена можемо да разликујемо следеће подслучајеве:

I_1. Сви су корени различити. Hamilton'ова једначина за тај случај може да буде доведена до облика:

$$(155) \qquad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0,$$

где је

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 .$$

У том случају постоје три правца, који се не мењају услед афине трансформације, али у општем случају та три правца не чине један ортогонални триједар, него један косоугли триједар. О косоуглости тог триједра можемо да се уверимо из каквог конкретног примера. Узмимо, на пример, афинор:

$$\mathbf{A}\begin{cases} 2, & 0\ , & 1, \\ 4, & -18, & 4, \\ -1, & 5\ , & 0. \end{cases}$$

Hamilton'ова једначина за тај афинор

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 0 & , & 1 \\ 4 & , -18-\lambda, & & 4 \\ -1 & , \quad 5 & , & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

може бити написана овако:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 19) = 0.$$

За први корен $\lambda_1 = 1$, линеарне једначине (152) дају решење:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -1 : 0 : 1 ,$$

за други корен $\lambda_2 = 2$ решење изгледа овако:

$$x_1' : x_2' : x_3' = 5 : 1 : 0 .$$

Пошто је

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' = -5 \neq 0\,,$$

можемо тврдити да та два правца нису ортогонална.

Ако један афинор дегенерише у тензор дакле има нормалну форму:

$$\mathbf{T} = a_1 \{I, I\} + a_2 \{J, J\} + a_3 \{K, K\},$$

правци вектора I, J, K остају после трансформације непромењени и на тај начин чине један ортогонални триједар.

За анализу афинора са косоуглим триједром непромењивих праваца уведимо три вектора $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ тих непромењивих праваца. Узмимо та три вектора за претходне векторе диада, чији збир претставља наш афинор, дакле ставимо:

$$(155) \qquad \mathbf{A} = \{\vec{A}, \vec{A_1}\} + \{\vec{B}, \vec{B_1}\} + \{\vec{C}, \vec{C_1}\},$$

где су $\vec{A_1}, \vec{B_1}, \vec{C_1}$ три одређена вектора, који одговарају датом афинору.

Али, ако правац вектора $\vec{A}$ одговара корену λ_1, после множења (155) десно са $\vec{A}$ морамо добити

$$(\mathbf{A}, \vec{A}) = \lambda_1 \vec{A},$$

значи

$$\lambda_1 \vec{A} = \vec{A}(\vec{A_1}, \vec{A}) + \vec{B}(\vec{B_1}, \vec{A}) + \vec{C}(\vec{C_1}, \vec{A}),$$

а та векторска једначина доводи до следећих скаларних једначина:

$$(156) \qquad (\vec{A_1}, \vec{A}) = \lambda_1, \; (\vec{B_1}, \vec{A}) = 0, \; (\vec{C_1}, \vec{A}) = 0.$$

На исти начин множењем са $\vec{B}$, односно са $\vec{C}$ једначине (155) добићемо још следеће скаларне једначине:

$$(157) \qquad (\vec{A_1}, \vec{B}) = 0, \quad (\vec{B_1}, \vec{B}) = \lambda_2, \quad (\vec{C_1}, \vec{B}) = 0\,,$$

$$(158) \qquad (\vec{A_1}, \vec{C}) = 0, \quad (\vec{B_1}, \vec{C}) = 0\,, \quad (\vec{C_1}, \vec{C}) = \lambda_3\,.$$

Једначине (156), (157), (158) показују да се вектори $\vec{A_1}, \vec{B_1}, \vec{C_1}$ разликују од вектора коњугованих триједру $\vec{A}, \vec{B},$

$\vec{C}$ само множитељима λ_1, λ_2, λ_3. Дакле, ако са $\vec{A}'$, $\vec{B}'$, $\vec{C}'$ означимо векторе коњуговане векторима $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, што значи, ако на пример за $\vec{A}'$ имамо

$$(\vec{A}', \vec{A}) = 1, \ (\vec{A}', \vec{B}) = 0, \ (\vec{A}', \vec{C}) = 0,$$

можемо ставити:

$$\vec{A}_1 = \lambda_1 \vec{A}', \quad \vec{B}_1 = \lambda_2 \vec{B}', \quad \vec{C}_1 = \lambda_3 \vec{C}'.$$

На тај начин у нашем случају афинор (155) може бити претстављен овако:

$$(159) \qquad \mathbf{A} = \lambda_1 \{ \vec{A}, \vec{A}' \} + \lambda_2 \{ \vec{B}, \vec{B}' \} + \lambda_3 \{ \vec{C}, \vec{C}' \},$$

где $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ и $\vec{A}'$, $\vec{B}'$, $\vec{C}'$ претстављају коњуговане триједре.

Афинор облика (159) зове W. Gibbs *тоничким* (tonic). Тонички афинор одговара таквој трансформацији простора, у којој је тај простор истегнут (скраћен) у три различита правца. Ако су та три правца ортогонални, афинор дегенерише у тензор, а одговарајућа трансформација простора зове се *чиста деформација*.

I_1'. Из случајева кад су сва три корена различита можемо да издвојимо тај специјалан случај кад један од корена има јединичну вредност (E. Budde). Ако ставимо, рецимо, $\lambda_1 = 1$, можемо тврдити да је у правцу одговарајућег вектора $\vec{A}$ простор остао без промене. Афинор за тај случај може бити претстављен овако:

$$(160) \qquad \mathbf{A} = \{ \vec{A}, \vec{A}' \} + \lambda_2 \{ \vec{B}, \vec{B}' \} + \lambda_3 \{ \vec{C}, \vec{C}' \}.$$

I_2. Претпоставимо сада да су од три реална корена два једнака, рецимо,

$$\lambda_2 = \lambda_3.$$

Кубична једначина (153) у том случају може бити претстављена овако:

$$(161) \qquad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 = 0.$$

За анализу таквог афинора поступићемо овако. Упоредно са афинором $\mathbf{A}$, коме одговара кубична једначина у облику (161), замислимо други афинор $\mathbf{A}_1$ са кубичном једначином

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0,$$

где је

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta \lambda_2.$$

Афинор $\mathbf{A}_1$ можемо написати у облику (159) овако:

$$\mathbf{A}_1 = \lambda_1 \{ \vec{A}_1 , \vec{A'}_1 \} + \lambda_2 \{ \vec{B}_1 , \vec{B'}_1 \} + \lambda_3 \{ \vec{C}_1 , \vec{C'}_1 \}.$$

За векторе $\vec{A}_1$, $\vec{B}_1$, $\vec{C}_1$ имамо:

$$(162) \qquad (\mathbf{A}_1 , \vec{A}_1) = \lambda_1 \vec{A}_1 ,$$

$$(163) \qquad (\mathbf{A}_1 , \vec{B}_1) = \lambda_2 \vec{B}_1 ,$$

$$(164) \qquad (\mathbf{A}_1 , \vec{C}_1) = \lambda_3 \vec{C}_1 = \lambda_2 \vec{C}_1 + \Delta\lambda_2 \vec{C}_1 .$$

Из једначине (163) и (164) долазимо одузимањем до следеће векторске једначине:

$$(165) \qquad (\mathbf{A}_1 , \vec{C}_1 - \vec{B}_1) = \lambda_2 (\vec{C}_1 - \vec{B}_1) + \Delta \lambda_2 \vec{C}_1 .$$

Вратимо се сад на случај једнаких корена, стављајући да

$$\Delta\lambda_2 \to 0.$$

Афинор $\mathbf{A}_1$ се враћа на своју вредност $\mathbf{A}$, вектори $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_1$ узимају одређене вредности $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Што се тиче једначине (165) за $\Delta\lambda_2 \to 0$, она може да доведе до закључака:

a.
$$\lim_{\Delta \lambda_2 \to 0} (\vec{C}_1 - \vec{B}_1) = \vec{C},$$

т. ј. та разлика тежи одређеној граничној вредности $\vec{C}$, различитој од нуле.

b.
$$\lim_{\Delta \lambda_2 \to 0} (\vec{C}_1 - \vec{B}_1) = 0,$$

али

$$(166) \qquad \lim_{\Delta\lambda_2 \to 0} \frac{\vec{C_1} - \vec{B_1}}{\Delta\lambda_2} = \vec{C},$$

где је $\vec{C}$ одређени вектор.

Друге случајеве искључујемо, јер они не одговарају линеарној векторској функцији.

У случају *a.* једначина (165) даје

$$(\mathbf{A}, \vec{C}) = \lambda_2 \vec{C},$$

а то значи корену λ_2 сем правца $\vec{B}$ одговара још и други правац $\vec{C}$, различит од правца $\vec{B}$. Јасно је да том корену одговара тада безбројно много праваца $m\vec{B} + n\vec{C}$, где су m и n произвољни скалари; значи у том случају два одређена правца $\vec{B}$ и $\vec{C}$ можемо да бирамо на бескрајно много начина у једној одређеној равни. Из једначина тог случаја:

$$(\mathbf{A}, \vec{A}) = \lambda_1 \vec{A},$$
$$(\mathbf{A}, \vec{B}) = \lambda_2 \vec{B},$$
$$(\mathbf{A}, \vec{C}) = \lambda_2 \vec{C},$$

непосредно следује следећа форма афинора:

$$(167) \qquad \mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A'}\} + \lambda_2 (\{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\}),$$

где смо са $\vec{A'}$, $\vec{B'}$, $\vec{C'}$ означили векторе триједра коњугованог триједру вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.

За афинор (167), који W. Gibbs зове special tonic, предлажемо назив *кружно тоничког афинора*, јер, као што ћемо даље видети, постоји још и други special tonic код W. Gibbs'a, који се разликује од претходног. Кружно тонички афинор одређује такву трансформацију простора, за коју постоји сем једног одређеног изолованог правца, у коме је истегнут (скраћен) простор, још и читава раван таквих праваца, за сваки од којих је простор подједнако истегнут (скраћен).

Као пример кружно тоничког афинора наведимо афинор:

$$\mathbf{A}\begin{cases}1, & 1, & 0,\\ 0, & 2, & 0,\\ 0, & 0, & 2.\end{cases}$$

Hamilton'ова једначина за тај афинор

$$\begin{vmatrix}1-\lambda, & 1\ , & 0\\ 0\ , & 2-\lambda, & 0\\ 0\ , & 0\ , & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

прима облик

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0$$

и зато има корене $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

Одговарајући систем линеарних једначина за први корен

$$x_2=x_2=0,\ \ x_3=0$$

даје решење у облику вектора $\vec{A}\,(1\ ,\ 0,\ 0)$. За корен $\lambda_2=2$ систем се своди само на једну једначину

$$-x_1+x_2=0,$$

која одговара равни, што пролази кроз z осу и полови угао између координатних оса Ox и Oy. У тој равни можемо да изаберемо два произвољна правца један, рецимо, који у ист· време припада Oxy равни са координатама:

$$\vec{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$$

и други дуж Oz осе:

$$\vec{C}(0,\ 0,\ 1).$$

Сада можемо наш афинор да претставимо овако:

$$\mathbf{A}=\{\vec{A},\vec{A'}\}+2(\{\vec{B},\vec{B'}\}+\{\vec{C},\vec{C'}\}),$$

где вектори $\vec{A'},\vec{B'},\vec{C'}$ имају вредности:

$$\vec{A}'(1, \quad -1, \quad 0),$$

$$\vec{B}'(0, \quad \sqrt{2}, \quad 0),$$

$$\vec{C}'(0, \quad 0, \quad 1).$$

Пређимо сада на случај *b*. При услову (166) за $\Delta\lambda_2 \to 0$ једначина (165) даје:

$$(\mathbf{A}, \vec{C}) = \lambda_2 \vec{C} + \vec{B}.$$

На тај начин у овом случају имамо следеће три векторске једначине:

$$(\mathbf{A}, \vec{A}) = \lambda_1 \vec{A},$$

$$(\mathbf{A}, \vec{B}) = \lambda_2 \vec{B},$$

$$(\mathbf{A}, \vec{C}) = \lambda_2 \vec{C} + \vec{B}.$$

Из тих једначина непосредно излази следећа форма нашег афинора:

$$(168) \quad \mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A}'\} + \lambda_2 (\{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) + \{\vec{B}, \vec{C}'\},$$

при чему цртица поново означава векторе коњугованог триједра. Треба обратити пажњу да вектор $\vec{C}$ више не одређује правац, који се не мења услед трансформације.

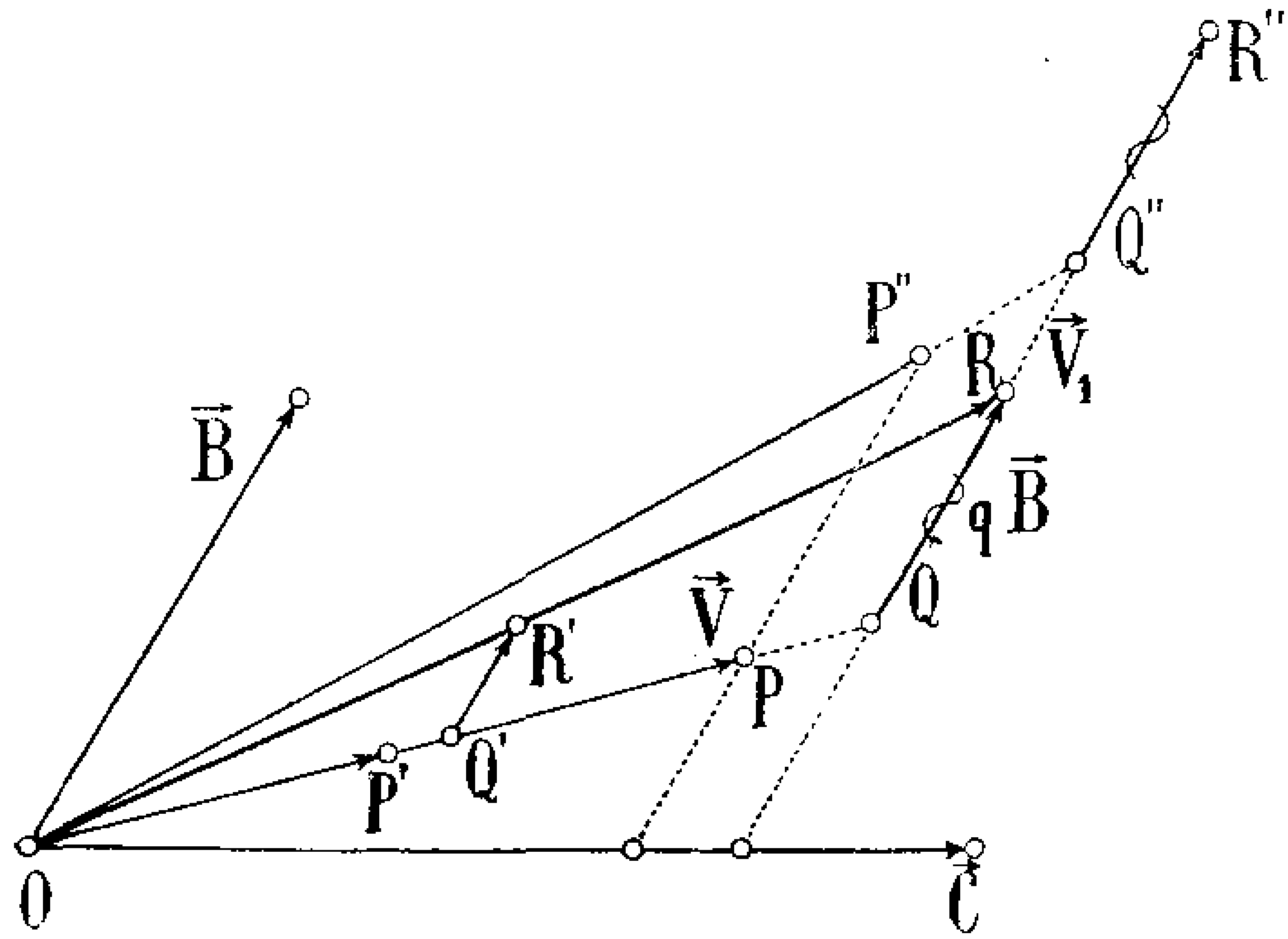
Афинор (168) W. Gibbs зове simple shearer; то је *афинор простог смицања*. Тај афинор у правцу вектора $\vec{A}$ истегне (скрати) простор према вредности λ_1, а у равни вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$ (и у паралелним равнима) он врши са сваким вектором у тој равни трансформацију, коју можемо анализовати овако. Нека је дат један вектор

$$\vec{V} = p\vec{B} + q\vec{C},$$

где су p и q два дата скалара. Услед трансформације тај вектор узима вредност

$$\vec{V}_1 = (\mathbf{A}, \vec{V}) = \lambda_2 p \vec{B} + \lambda_2 q \vec{C} + q \vec{B} = \lambda_2 \vec{V} + q \vec{B}$$

и на тај начин добија елонгацију према вредности λ_2 и сем тога један векторски прираштај у сталном правцу вектора $\vec{B}$, а величина тог прираштаја пропорционална је вредности компоненте вектора $\vec{V}$ у правцу вектора $\vec{C}$; тај прираштај одговара смицању. На слици (слика 45) показана је трансформација вектора $\vec{V}$: вектору $\vec{V}$ додата је елонгација — вектор $\overrightarrow{PQ}$ и смицање — вектор $\overrightarrow{QR}$. Са једне стране за тачке, што припадају



Слика 45.

Елонгација и смицање једног вектора.

правој, која пролази кроз тачку O, вектор смицања пропорционалан је растојању тачке од тачке O, са друге стране за све тачке праве, паралелне са $\vec{B}$, вектор смицања је исти. За тачку P', рецимо средину вектора $\overrightarrow{OP}$, вектор смицања има вредност половине вектора $\overrightarrow{QR}$; за тачку P'' вектор смицања $\overrightarrow{Q''R''}$ има исту вредност са вектором $\overrightarrow{QR}$.

Као пример афинора простог смицања наведимо афинор:

$$A\begin{cases}1, & 1, & 1,\\ 0, & 2, & 1,\\ 0, & 0, & 2.\end{cases}$$

Hamilton'ова једначина узима форму

$$\begin{vmatrix}1-\lambda, & 1, & 1\\ 0, & 2-\lambda, & 1\\ 0, & 0, & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

и доводи поново до једначине:

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0\,.$$

За $\lambda_1=1$ систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}0\,.\,x_1+x_2+x_3&=0\,,\\ 0\,.\,x_1+x_2+x_3&=0\,,\\ 0\,.\,x_1+0\,.\,x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

даје решење, рецимо: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$, што одговара вектору $\vec{A}\,(1,\ 0,\ 0)$.

За $\lambda_2=2$ систем једначина

$$\begin{aligned}-x_1+x_2+x_3&=0\,,\\ 0\,.\,x_1+0\,.\,x_2+x_3&=0\,,\\ 0\,.\,x_1+0\,.\,x_2+0\,.\,x_3&=0\end{aligned}\tag{169}$$

одређује само један правац: $x_1=x_2$, $x_3=0$, рецимо са вектором $\vec{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$; други правац претходни систем не одређује. Али у том случају можемо да нађемо решење таквог система једначина, који се добива из претходног када на десној страни сменимо нуле решењем тог истог система (169); нови систем изгледа овако:

$$-x_1+x_2+x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$0\,.\,x_1+0\,.\,x_2+x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$0 . x_1 + 0 . x_2 + 0 . x_3 = 0 ;$$

тај систем даје решење: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а оно одговара трећем вектору $\vec{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. На тај начин имамо два коњугована триједра

$$\vec{A}(1, \quad 0, \quad 0), \qquad \vec{A}'(1, -1, \quad 0),$$

$$\vec{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0\right), \qquad \vec{B}'(0, \quad \sqrt{2}, -1),$$

$$\vec{C}\left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \vec{C}'(0, \quad 0, \quad \sqrt{2}),$$

и афинор простог смицања у облику:

$$\mathbf{A} = \{\vec{A}, \vec{A}'\} + 2(\{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) + \{\vec{B}, \vec{C}'\}.$$

I_3. Претпоставимо најзад да су три корена Hamilton'ове једначине једнака, т. ј.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Кубична једначина (153) за тај случај имала би овакав облик:

$$(170) \qquad (\lambda - \lambda_1)^3 = 0 .$$

За анализу афинора $\mathbf{A}$ са кубичном једначином (170) узмимо нов афинор $\mathbf{A}_2$, чија Hamilton'ова једначина има само два једнака корена; означимо корене те нове једначине са

$$\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1.$$

Сагласно претходном случају афинор $\mathbf{A}_2$ може бити претстављен у једној од следећих форми: по (167)

$$(171) \quad \mathbf{A}_2 = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\{\vec{A}_1, \vec{A}'_1\} + \lambda_1(\{\vec{B}_1, \vec{B}'_1\} + \{\vec{C}_1, \vec{C}'_1\})$$

и по (168)

$$(172) \quad \mathbf{A}_2 = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\{\vec{A}_1, \vec{A}'_1\} + \lambda_1(\{\vec{B}_1, \vec{B}'_1\} + \{\vec{C}_1, \vec{C}'_1\}) + \{\vec{B}_1, \vec{C}'_1\}.$$

На основу расуђивања сличних претходном случају за граничну вредност $\Delta\lambda_1$, кад

$$\Delta\lambda_1 \to 0,$$

из афинора (171) долазимо до следећих афинора:

$$(173) \qquad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\})$$

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) + \{\vec{B}, \vec{A}'\}.$$

Ако променимо наслове вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, последњу форму можемо написати још и овако:

$$(174) \qquad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) + \{\vec{A}, \vec{B}'\}.$$

Из афинора (172) добијамо такође две форме: прва је

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) + \{\vec{B}, \vec{C}'\}.$$

Јасно је да је природа тог афинора иста са природом афинора (174). Друга форма може бити написана овако:

$$(175) \qquad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) +$$
$$+ \{\vec{A}, \vec{B}'\} + \{\vec{B}, \vec{C}'\}.$$

Анализујмо сваки од афинора (173), (174) и (175).

a. Афинор (173)

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A}'\} + \{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\})$$

можемо да зовемо *сферно тоничким афинором* (други special tonic код W. Gibbs'a). Пошто у овом случају сваки правац претстављен вектором

$$\vec{V} = l\vec{A} + m\vec{B} + n\vec{C},$$

где су l, m, n произвољни скалари, остаје услед трансформације без промене, сферно тонички афинор можемо претставити овако:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\{i, i\} + \{j, j\} + \{k, k\}) = \lambda_1 \mathbf{I},$$

где је $\mathbf{I}$ јединични афинор. Сферно тонички афинор одговара таквој трансформацији простора, у којој сви зраци из почетка координата добијају исту елонгацију (или скраћивање). У случају $\lambda_1 = 1$, т. ј. у случају јединичног афинора, простор се не мења услед трансформације.

b. Афинор (174)

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{I} + \{\vec{A}, \vec{B'}\}$$

може бити означен као *специалан афинор простог смицања* (special simple schearer Gibbs'a). Он се разликује од афинора простог смицања општег типа само тиме, што му је елонгација у правцу вектора $\vec{A}$ иста са елонгацијом у равни вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$; трансформација простора састоји се из проширења (скраћивања) простора у истој мери у свима правцима и из једног смицања.

c. Најзад афинор (175) може бити претстављен овако:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{I} + \{\vec{A}, \vec{B'}\} + \{\vec{B}, \vec{C'}\}.$$

Тај се афинор зове *афинор сложеног смицања* (complex schearer код Gibbs'a).

Сваки произвољни вектор претстављен векторском једначином

$$\vec{V} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C},$$

где су α, β, γ произвољни скалари, после трансформације овим афинором узима вредност:

$$\vec{V_1} = \lambda_1(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}) + \beta \vec{A} + \gamma \vec{B} =$$

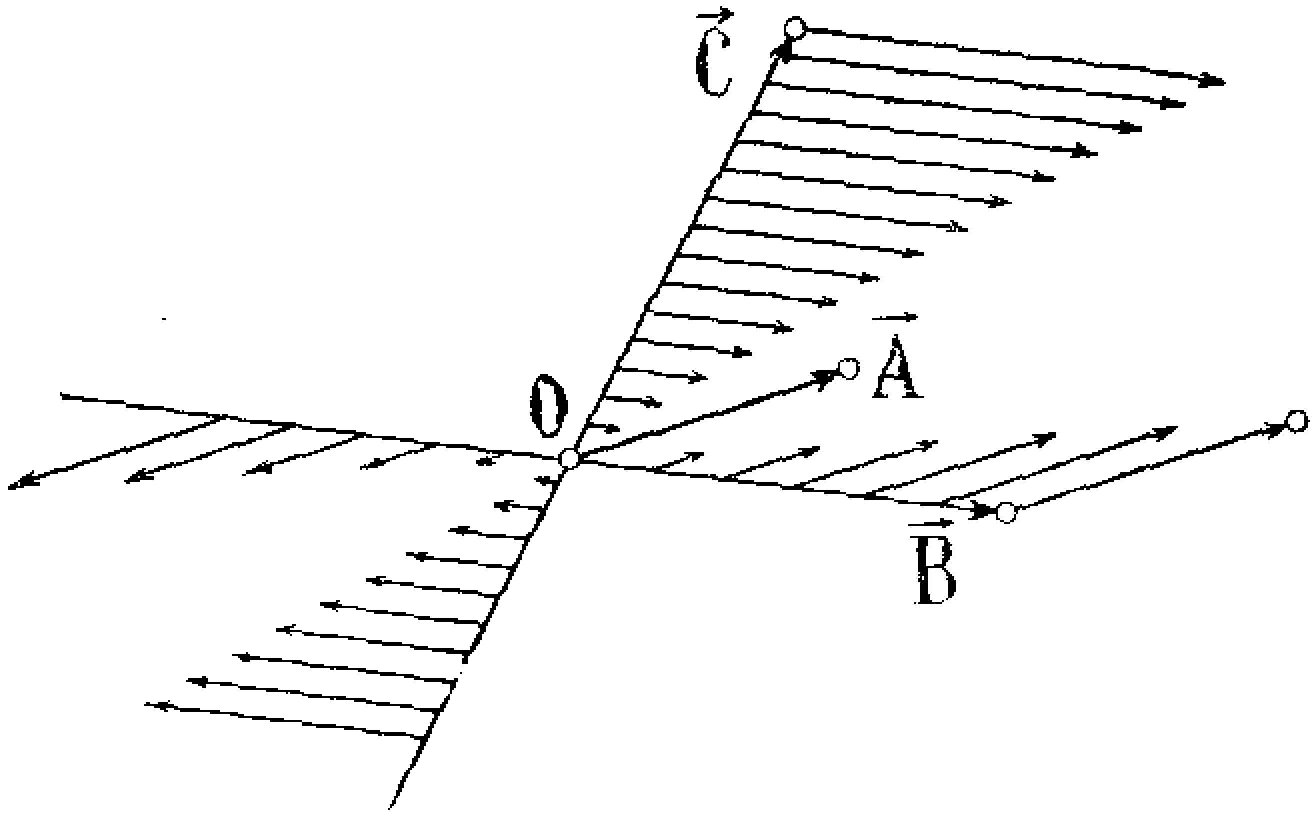
$$= \lambda_1 \vec{V} + \beta \vec{A} + \gamma \vec{B}.$$

Први члан тог израза одговара елонгацији вектора $\vec{V}$ у своме правцу, члан $\beta\vec{A}$ одговара смицању простора и то таквом, при коме крај вектора

$$\vec{B} \ (\beta = 1, \alpha = \gamma = 0)$$

добија померање једнако вектору $\vec{A}$; члан $\gamma\vec{B}$ одговара смицању кад се крај вектора

$$\vec{C}(\gamma = 1, \ \alpha = \beta = 0)$$



Слика 46.

Два смицања.

помакне у правцу вектора $\vec{B}$ за $\vec{B}$. Слика (слика 46) објашњује та два смицања.

II. Пређимо сад на анализу тог специалног случаја кад Hamilton'ова једначина има само један реалан корен, а два остала су имагинарна.

Означимо реалан корен са λ_1, а два имагинарна претставимо овако:

$$\lambda_2 = p\,(\cos\omega + \varepsilon \sin\omega),$$

$$\lambda_3 = p\,(\cos\omega + \varepsilon \sin\omega).$$

Основне једначине (152) за реални корен λ_1 дају један одређени реалан правац, чији вектор означимо поново са $\vec{A}$, дакле имамо

$$(\mathbf{A}, \vec{A}) = \lambda_1 \vec{A}.$$

За имагинарни корен, рецимо λ_2, једначина

$$(176) \qquad (\mathbf{A}, \vec{x}) = \lambda_2 \vec{x}$$

даје имагинарно решење; означимо то решење овако:

$$\vec{x} = \vec{C} + \varepsilon \vec{B},$$

где су $\vec{B}$ и $\vec{C}$ два реална вектора и $\varepsilon = \sqrt{-1}$. Једначина (176) узима тада форму:

$$(\mathbf{A}, \vec{C}) + \varepsilon(\mathbf{A}, \vec{B}) = p(\vec{C}\cos\omega - \vec{B}\sin\omega) +$$
$$+ \varepsilon p(\vec{B}\cos\omega + \vec{C}\sin\omega)$$

и доводи до следеће две реалне једначине:

$$(\mathbf{A}, \vec{B}) = p(\vec{B}\cos\omega + \vec{C}\sin\omega),$$
$$(\mathbf{A}, \vec{C}) = p(\vec{C}\cos\omega - \vec{B}\sin\omega).$$

Ове две једначине заједно са једначином

$$(\mathbf{A}, \vec{A}) = \lambda_1 \vec{A}$$

дају могућност да конструјисањем триједра $\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'$, коњугованог триједру $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ претставимо афинор, који у нашем случају има само један реалан корен, на следећи начин:

$$\mathbf{A} = \lambda_1\{\vec{A}, \vec{A}'\} + p\cos\omega(\{\vec{B}, \vec{B}'\} + \{\vec{C}, \vec{C}'\}) +$$
$$+ p\sin\omega(\{\vec{C}, \vec{B}'\} - \{\vec{B}, \vec{C}'\}).$$

Афинор таквог облика зове се *циклотонички* (cyclotonic). Произвољни вектор

$$\vec{V} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$$

после множења тим афинором узима вредност:

$$\vec{V}_1 = (\mathbf{A}, \vec{V}) = \alpha\lambda_1\vec{A} + \beta p(\vec{B}\cos\omega + \vec{C}\sin\omega) +$$
$$+ \gamma p(\vec{C}\cos\omega - \vec{B}\sin\omega).$$

Први члан десне стране одговара истезању простора у правцу вектора $\vec{A}$; јасно је да у вези са тим чланом вектор $\vec{A}$ не мења свој правац. Величина истезања (или скраћивања) одговара вредности корена λ_1.

Два друга члана

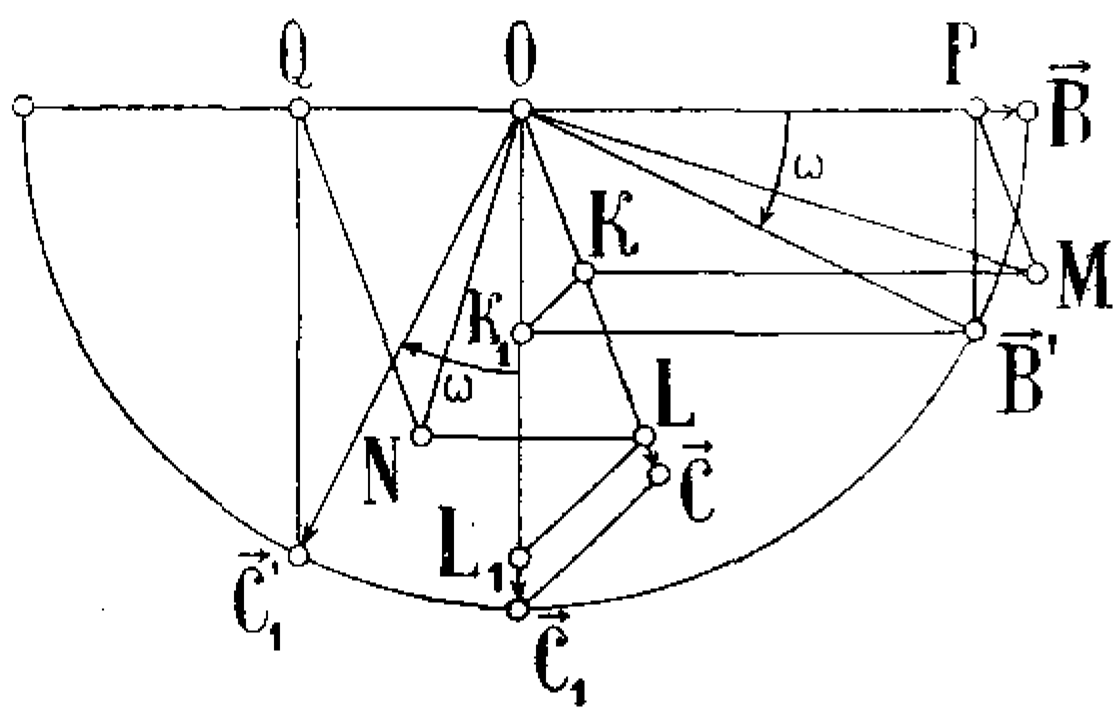
$$(177) \qquad \beta p\,(\vec{B}\cos\omega + \vec{C}\sin\omega),$$

$$(178) \qquad \gamma p\,(\vec{C}\cos\omega - \vec{B}\sin\omega)$$

одговарају с једне стране радиалном истезању простора у равнима паралелним векторима $\vec{B}$ и $\vec{C}$, при чему величина тог истезања зависи од величине p; с друге стране они претстављају тако звану *елиптичку ротацију*. Ту ротацију можемо да карактеришемо на следећи начин. У равни вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$ конструјишимо круг полупречника B. У том кругу означимо полупречник нормалан на вектор $\vec{B}$ (према страни C) са $\vec{C}_1$. Ако сада (слика 47) осе вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}_1$ обрнемо за угао ω у показаном смеру, вектори $\vec{B}'$ и $\vec{C}'_1$ у новом положају можемо претставити овако:

$$\vec{B}' = \vec{B}\cos\omega + \vec{C}_1\sin\omega,$$

$$\vec{C}'_1 = \vec{C}_1\cos\omega - \vec{B}\sin\omega.$$



Слика 47.

Елиптичка ротација.

Десне стране тих једначина одговарају обичној ротацији за угао ω; остављајући сада чланове што зависе од вектора $\vec{B}$ без промене, трансформишимо два остала члана $\vec{C}_1 \sin\omega$ и $\vec{C}_1 \cos\omega$ у вези са заменом вектора $\vec{C}_1$ са вектором $\vec{C}$. За тај циљ спојимо крајеве вектора $\vec{C}_1$ и $\vec{C}$ и кроз тачке K_1 и L_1, чији је положај одређен једначинама $OK_1 = C_1 \sin\omega$, $OL_1 = C_1 \cos\omega$, повуцимо праве паралелне са добивеном правом, а до пресека у тачкама L и K са вектором $\vec{C}$. Вектори $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ тада имају вредности

$$\overrightarrow{OK} = \vec{C} \sin\omega, \quad \overrightarrow{OL} = \vec{C} \cos\omega.$$

Та два вектора са векторима

$$\overrightarrow{OP} = \vec{B} \cos\omega, \quad \overrightarrow{OQ} = -\vec{B} \sin\omega$$

дају векторе

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OK} = \vec{B} \cos\omega + \vec{C} \sin\omega,$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OQ} = \vec{C} \cos\omega - \vec{B} \sin\omega,$$

који се разликују од вектора (177) и (178) само множитељима βp и γp. Ако дати вектор $\vec{V}$ има компоненте $\beta\vec{B}$ и $\gamma\vec{C}$ у погледу вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$, после елиптичке ротације тај вектор има компоненте

$$\beta\,\overrightarrow{OM} = \beta\,(\vec{B} \cos\omega + \vec{C} \sin\omega),$$

$$\gamma\,\overrightarrow{ON} = \gamma\,(\vec{C} \cos\omega - \vec{B} \sin\omega)$$

у погледу вектора $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$. Радиално истезање доводи те векторе множењем њихових величина са p до вредности (177) и (178). Споменута трансформација има назив елиптичке ротације због тога што са променом угла ω тачке M и N описују једну елипсу.

Тиме завршавамо анализу промене праваца простора под утицајем једног афинора. На завршетку да набројимо том анализом добивене типове афинора:

(159) $\mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A'}\} + \lambda_2 \{\vec{B}, \vec{B'}\} + \lambda_3 \{\vec{C}, \vec{C'}\}$, тонички.

(167) $\mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A'}\} + \lambda_2 (\{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\})$,

кружно-тонички.

$$(168)\quad \mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A'}\} + \lambda_2 (\{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\{\vec{C}, \vec{C'}\}) +$$

$$+ \{\vec{B}, \vec{C'}\}, \qquad \text{простог смицања.}$$

$$(173)\quad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A'}\} + \{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\}),$$

$$\text{сферно-тонички.}$$

$$(174)\quad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A'}\} + \{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\}) +$$

$$+ \{\vec{B}, \vec{C'}\}, \text{ специалан простог смицања.}$$

$$(175)\quad \mathbf{A} = \lambda_1 (\{\vec{A}, \vec{A'}\} + \{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\}) + \{\vec{A}, \vec{B'}\} +$$

$$+ \{\vec{B}, \vec{C'}\}, \qquad \text{сложеног смицања.}$$

$$(179)\quad \mathbf{A} = \lambda_1 \{\vec{A}, \vec{A'}\} + p \cos\omega (\{\vec{B}, \vec{B'}\} + \{\vec{C}, \vec{C'}\}) +$$

$$+ p \sin\omega (\{\vec{C}, \vec{B'}\} - \{\vec{B}, \vec{C'}\}), \qquad \text{циклотонички.}$$

Не би било тешко читаоцу да за сваки од тих афинора нацрта диаде, чији скуп одговара том афинору.

44. Векторско множење афинора са вектором.

У § 16 анализовали смо векторско множење диаде са вектором и поставили смо три типа векторских производа диаде и вектора:

скаларно-векторски

$${}^{s}[\text{Д}, \vec{C}] = {}^{s}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}] = (\vec{A} \mid \vec{B}, \vec{C}]),$$

векторско-векторски

$${}^{v}[\text{Д}, \vec{C}] = {}^{v}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}] = [\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]],$$

диадско-векторски

$${}^{d}[\text{Д}, \vec{C}] = {}^{d}[\{\vec{A}, \vec{B}\}, \vec{C}] = \{\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]\},$$

при чему смо упоредно са сваким од горе наведених производа.

анализовали друге, који се разликују од њих редом вектора (леви или десни), који бирамо из диаде и затим редом груписања добијених вектора за последња два производа, векторско-векторски и диадско-векторски.

Слично тим производима могуће је поставити векторске производе афинора и вектора.

Ако ставимо за један произвољан афинор:

$$\mathbf{A} = Д_1 + Д_2 + Д_3 = \sum_{i=1}^{3} \{ \vec{A}_i , \vec{B}_i \},$$

можемо на следећи начин дефинисати векторске производе афинора и вектора:

скаларно-векторски производ афинора и вектора —

$$^{s}[\mathbf{A}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} {}^{s}[\{\vec{A}_i, \vec{B}_i\}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} (\vec{A}_i [\vec{B}_i, \vec{C}]),$$

векторско-векторски производ афинора и вектора —

$$^{v}[\mathbf{A}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} {}^{v}[\{\vec{A}_i, \vec{B}_i\}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} [\vec{A}_i [\vec{B}_i, \vec{C}]]$$

диадско-векторски производ афинора и вектора —

$$^{d}[\mathbf{A}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} {}^{d}[\{\vec{A}_i, \vec{B}_i\}, \vec{C}] = \sum_{i=1}^{3} \{\vec{A}_i [\vec{B}_i, \vec{C}]\}.$$

У тим дефиницијама се претставља да важи дистрибутивни закон, т. ј. да за сваки производ можемо написати:

$$[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \vec{C}] = [\mathbf{A}_1, \vec{C}] + [\mathbf{A}_2, \vec{C}].$$

Ако су афинор и вектор дати својим координатама

$$\mathbf{A}\{a_{ij}\}, \quad \vec{C}(c_1, c_2, c_3),$$

изрази за координате горе наведених производа поклапају се формално у потпуности са изразима за координате производа диаде и вектора, ако под a_{ij} разумемо координате само једне диаде. То непосредно следује из тога, што сви ти изрази зависе линеарно од координата a_{ij}; дакле при сабирању одговарајућих координата трију диада биће увек код сваког c_1, c_2, c_3 као множитељ збир координата a_{ij} за поједине диаде, а тај збир не претставља ништа друго него одговарајућу координату афинора. Дакле, на пример, координате производа ${}^{d}[\,\mathbf{A}, \vec{C}\,]$ имају вредности (69):

$$
\begin{array}{lll}
a_{12}\,c_3 - a_{13}\,c_2, & a_{13}\,c_1 - a_{11}\,c_3, & a_{11}\,c_2 - a_{12}\,c_1, \\
a_{22}\,c_3 - a_{23}\,c_2, & a_{23}\,c_1 - a_{21}\,c_3, & a_{21}\,c_2 - a_{22}\,c_1, \\
a_{32}\,c_3 - a_{33}\,c_2, & a_{33}\,c_1 - a_{31}\,c_3, & a_{31}\,c_2 - a_{32}\,c_1.
\end{array}
$$

45. Производи двају и више афинора.

У § 19 прве главе показали смо како је могуће образовати различите производе двеју диада. Појмови тих производа лако могу бити проширени и на производе афинора, ако узмемо у обзир важење дистрибутивног закона. Не понављајући разне могуће типове производа, зауставимо се само на оном производу, који игра највећу улогу у општој теорији афинора. Тај производ афинора стоји у вези са оним производом диада, који смо увели помоћу једначине:

$$\mathbf{P}_{1,2} = \{ (\mathbf{Д}_1, \mathbf{Д}_2) \}' = \{ (\{ \vec{A}, \vec{B} \}, \{ \vec{C}, \vec{D} \}) \}' = (\vec{B}, \vec{C}) \{ \vec{A}, \vec{D} \}.$$

Узимајући у обзир дистрибутивни закон можемо поставити следећи образац за производ исте природе двају афинора:

$$\{ (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{P}_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{3} \{ (\mathbf{Д}_i^{(1)}, \mathbf{Д}_j^{(2)}) \}',$$

при чему смо ставили

$$\mathbf{A}_1 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{Д}_i^{(1)}, \qquad \mathbf{A}_2 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{Д}_i^{(2)}.$$

Карактер тог производа врло се очито испољава, кад узмемо афиноре $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ у једној нарочитој форми. Први афинор $\mathbf{A}_1$ узмимо у произвољном облику:

$$\mathbf{A}_1 = \{ \vec{A}_1, \vec{B}_1 \} + \{ \vec{A}_2, \vec{B}_2 \} + \{ \vec{A}_3, \vec{B}_3 \};$$

пошто у другом афинору за претходне или идуће векторе диада можемо да изаберемо произвољне векторе, бирајмо за претходне векторе тог афинора векторе C'_1, C'_2, C'_3 чији је систем коњугован систему $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ идућих вектора првог афинора. Пошто у том случају од скаларних производа вектора $\vec{B}_i$ и $\vec{C}'_i$ нису једнаки нули само три производа:

$$(\vec{B}_1, \vec{C}'_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}'_2) = (\vec{B}_3, \vec{C}'_3) = 1,$$

производ $\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\}$, где је сада

$$\mathbf{A}_2 = \{\vec{C}'_1, \vec{D}_1\} + \{\vec{C}'_2, \vec{D}_2\} + \{\vec{C}'_3 \vec{D}_3\},$$

добиће облик

$$\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\} = \{\vec{A}_1, \vec{D}_1\} + \{\vec{A}_2, \vec{D}_2\} + \}\vec{A}_3, \vec{D}_3\},$$

т. ј. за тај специалан избор вектора у дефинитивном производу фигуришу само претходни вектори првог афинора и идући вектори другог. Горе наведени облик тог производа нарочито је згодан за анализу општих особина тог производа.

Ако су афинори дати помоћу својих координата

$$\mathbf{A}_1 \{a_{ij}^{(1)}\}, \quad \mathbf{A}_2 \{a_{ij}^{(2)}\},$$

координате производа имају вредности:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{i\alpha}^{(1)} \; a_{\alpha j}^{(2)},$$

другим речима, оне су образоване на основу познатог правила множења детерминаната.

И овде, као и у случају множења двеју диада, узастопно скаларно множење једног вектора $\vec{r}$ прво са првим афинором

$$\vec{r}_1 = (\vec{r}, \mathbf{A}_1),$$

а затим множење резултата $\vec{r}_1$ са другим афинором

$$\vec{r}_2 = (\vec{r}_1, \mathbf{A}_2) = ((\vec{r}, \mathbf{A}_1), \mathbf{A}_2)$$

еквивалентно је множењу полазног вектора $\vec{r}$ са горе наведеним производом афинора, т. ј.

$$((\vec{r}, \mathbf{A}_1), \mathbf{A}_2) = (\vec{r}, \{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\}).$$

Језиком афине трансформације простора тај резултат можемо да формулишемо овако:

Две узастопне афине трансформације простора одговарају једној новој афиној трансформацији, чији афинор претставља производ афинора двеју полазних трансформација.

Тај став може бити проширен и на случај производа више афинора; тако за случај производа трију афинора можемо написати:

$$(((\vec{r}, \mathbf{A}_1), \mathbf{A}_2), \mathbf{A}_3) = (\vec{r}, \{(\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\}, \mathbf{A}_3)\}),$$

при чему за производ више афинора важи асоциативни закон; тако за производ од трију афинора имамо:

$$\{(\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\}, \mathbf{A}_3)\} = \{(\mathbf{A}_1, \{(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)\})\}.$$

На тај начин за производ више афинора можемо да употребимо ознаку

$$\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n)\},$$

али ред афинора у том производу не смемо да мењамо јер је уопште

$$(\{\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2)\}' \neq \{(\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2)\}';$$

то непосредно следује из упоређивања развијених вредности тих производа:

$$\{(\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2)\}' = \{(\{\vec{A}, \vec{B}\}, \{\vec{C}, \vec{D}\})\}' = (\vec{B}, \vec{C})\{\vec{A}, \vec{D}\},$$

$$\{(\mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_1)\}' = \{(\{\vec{C}, \vec{D}\}, \{\vec{A}, \vec{B}\})\}' = (\vec{D}, \vec{A})\{\vec{C}, \vec{B}\}.$$

Другим речима за наш производ не важи комутативни закон.

Кад су множитељи производа једнаки, производ претставља степен афинора, за који ћемо употребљавати једноставну ознаку:

$$\{(\mathbf{A}, \mathbf{A})\} = \mathbf{A}^2, \ \{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A})\} = \mathbf{A}^3, \ldots$$

46. Афинор као производ верзора и тензора.

У § 26 смо видели да сваки афинор можемо да претставимо у следећем нормалном облику:

$$\mathbf{A} = a_1 \{I_1, I\} + a_2 \{J_1, J\} \, a_3 + \{K_1, K\},$$

где су I, J, K и I_1, J_1, K_1 ортови ортогоналних триједара.

Први члан десне стране можемо да претставимо у облику следећег производа двеју диада:

$$a_1 \{I_1, I\} = a_1 \{ (\{I_1, I\}, \{I, I\}) \},$$

при чему скаларни множитељ a_1 можемо да вежемо са диадом $\{I, I\}$. На основу дефиниције производа имамо:

$$\{ (\{I_1, I\}, \{I, I\}) \} = (I, I) \{I_1, I\} = \{I_1, I\}.$$

Слично можемо трансформисати и остале чланове афинора; узимајући даље у обзир да производ, рецимо, диада

$$\{ (\{I_1, I\}, \{J, J\}) \}$$

има вредност нуле, јер је

$$(I, J) \{I_1, J\} = 0 \,.\, \{I_1, J\} = 0,$$

можемо претставити наш афинор у облику производа следећа два множитеља:

$$\mathbf{A} = \{ (\{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\}, \; a_1 \{I, I\} + a_2 \{J, J\} + a_3 \{K, K\}) \}.$$

Пошто први множитељ претставља верзор

$$\mathbf{\Gamma} = \{I_1, I\} + \{J_1, J\} + \{K_1, K\},$$

а други тензор

$$\mathbf{T} = a_1 \{I, I\} + a_2 \{J, J\} + a_3 \{K, K\},$$

горњи образац можемо написати овако:

$$\mathbf{A} = \{ (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{T}) \},$$

што показује да сваки афинор може бити претстављен у облику производа верзора и тензора.

47. Проучавање верзора.

Као што смо видели (179), сваки циклотонички афинор може бити претстављен овако:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \{ \vec{A}, \vec{A'} \} + p \cos\omega (\{ \vec{B}, \vec{B'} \} + \{ \vec{C}, \vec{C'} \}) +$$
$$+ p \sin\omega (\{ \vec{C}, \vec{B'} \} - \{ \vec{B}, \vec{C'} \}).$$

Ако у том афинору ставимо

$$\vec{A} = \vec{A'} = i,$$
$$\vec{B} = \vec{B'} = j,$$
$$\vec{C} = \vec{C'} = k,$$
$$p = 1,$$
$$\lambda_1 = 1,$$

он се претвара у верзор:

$$(180) \quad \mathbf{\Gamma} = \{ i, i \} + \cos\omega (\{ j, j \} + \{ k, k \}) + \sin\omega (\{ k, j \} - \{ j, k \}),$$

јер, ако уведемо нове ортове помоћу образаца

$$I = i, \quad J = j, \quad K = k,$$
$$I_1 = i, \; J_1 = j \cos\omega + k \sin\omega, \; K_1 = -j \sin\omega + k \cos\omega,$$

претходни афинор претвориће се у афинор:

$$(181) \qquad \mathbf{\Gamma} = \{ I_1, I \} + \{ J_1, J \} + \{ K_1, K \},$$

а то је нормални облик верзора.

Обратно, за сваки произвољни верзор са произвољним релативним положајем триједара I, J, K и I_1, J_1, K_1 из облика (181) можемо да добијемо облик (180). Јер, пошто инваријанте S_1, S_2, S_3 за форму (181) имају вредности:

$$S_1, \; S_2 = S_1, \; S_3 = 1,$$

Hamilton'ова једначина узима облик:

$$\lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_1 \lambda - 1 = 0;$$

она има реални корен $\lambda_1 = 1$, а два остала корена су имагинарни, јер из шеме стране 125 имамо

$$S_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 < 3$$

и само за случај $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ (јединични афинор) $S_1 = 3$ пошто је $\lambda_2 \lambda_3 = 1$, можемо тврдити да модуо тих имагинарних корена има вредност јединице, дакле имамо

$$p = 1.$$

Пошто у нормалном облику (181) тријездар I_1, J_1, K_1 можемо да изаберемо произвољно, изаберимо га тако да се нови орт i тријездра i, j, k поклопи са оним непромењивим правцем, што одговара корену $\lambda_1 = 1$. Афинор (181) мора тада да узме форму:

$$\Gamma = \{ I_1^*, i \} + \{ J_1^*, j \} + \{ K_1^*, k \}.$$

Пошто орт i одређује непромењиви правац тог афинора, вектор I_1^* мора имати вредност тог истог орта, дакле $I_1^* = i$, јер

$$(\Gamma, i) = I_1^*.$$

После тога претходни образац даје:

$$\Gamma = \{ i, i \} + \{ J_1^*, j \} + \{ K_1^*, k \}.$$

Пошто се ортови J_1^* и K_1^* налазе у равни ортова j и k, они увек могу бити претстављени овако

$$J_1^* = \quad j \cos \omega + k \sin \omega ,$$
$$K_1^* = -j \sin \omega + k \cos \omega ,$$

а такве вредности тих ортова доводе наш афинор до облика (180). Да угао ω стварно одговара имагинарним коренима

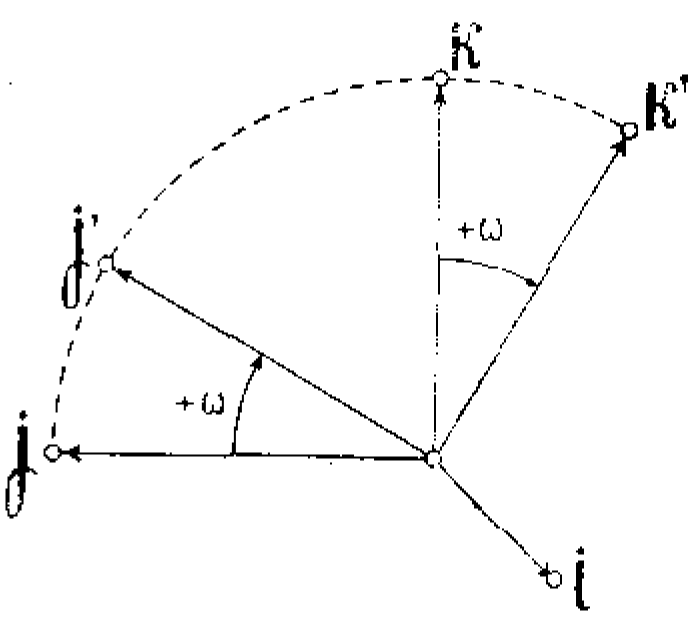
$$\lambda_2 = \cos \omega + i \sin \omega ,$$

$$\lambda_3 = \cos \omega - i \sin \omega$$

Hamilton'ове једначине, то непосредно следује из тога што за афинор (180) та једначина узима форму:

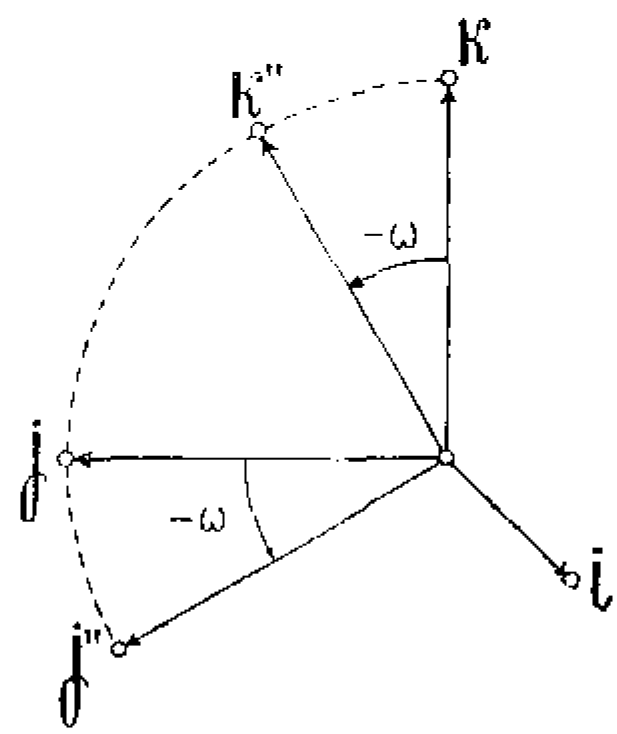
$$(1 - \lambda) [(\cos \omega - \lambda)^2 + \sin^2 \omega] = 0.$$

Дакле у облику (180) орт i претставља осу ротације верзора, а угао ω претставља угао обртања, при чему један исти верзор одговара ротацији за угао $(+\omega)$ и за угао $(-\omega)$ и то према томе, дали у скаларном производу верзора и вектора положаја тачке простора стављамо тај вектор са десне или са леве стране верзора. Тако, на пример, производу $(\mathbf{\Gamma}, j)$ одговара једна ротација (слика 48), а производу $(j, \mathbf{\Gamma})$ супротна ротација (слика 49).



Слика 48.

Ротација од множења верзора с десна.



Слика 49.

Ротација од множења верзора с лева

Облик (180) верзора лако можемо да напишемо у таквој форми да она буде зависна само од једног орта осе ротације и од угла те ротације. Јер из вредности јединичног афинора

$$\mathbf{I} = \{i, i\} + \{j, j\} + \{k, k\}$$

непосредно имамо:

$$\{j, j\} + \{k, k\} = \mathbf{I} - \{i, i\}, \tag{182}$$

с друге стране, диадско-векторски производ јединичног афинора и орта i даје:

$$^{d}[\mathbf{I}, i] = \{i[i, i]\} + \{j[j, i]\} + \{k[k, i]\} = \\ = -\{j, k\} + \{k, j\} \tag{183}$$

и на тај начин искоришћавајући (182) и (183), можемо из (180) написати следећи образац:

$$(184) \qquad \mathbf{\Gamma} = \{i, i\} + \cos\omega\,(\mathbf{I} - \{i, i\}) + \sin\omega\ {}^{d}[\mathbf{I}, i].$$

Зауставимо се сада на једноме специјалном верзору, чији угао обртања има вредност π. Он се зове *биквадрантални верзор*. Такав верзор потпуно је одређен само помоћу једног орта; за орт $\vec{u}$ тај специјални верзор означаваћемо са $\mathbf{\Pi}_{\vec{u}}$. Из (184) за $\omega = \pi$ непосредно следује:

$$(185) \qquad \mathbf{\Pi}_i = 2\{i, i\} - \mathbf{I}.$$

Операција скаларног множења верзора $\mathbf{\Pi}_i$ са произвољним вектором $\vec{r}$ одговара обртању вектора $\vec{r}$ за 180^0 око осе i. За ту операцију важи једначина:

$$(\mathbf{\Pi}_i, \vec{r}) = (\vec{r}, \mathbf{\Pi}_i).$$

Покажимо сада да сваки произвољни верзор може бити претстављен у облику производа двају биквадранталних верзора; другим речима, покажимо да је увек могуће одредити таква два орта $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ за један произвољан верзор $\mathbf{\Gamma}$ да буде

$$(186) \qquad \mathbf{\Gamma} = \{(\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_2}, \mathbf{\Pi}_{\vec{u}_1})\}.$$

У ствари, сваки произвољни верзор можемо да претставимо у облику (180). Ако сада ставимо

$$\vec{u}_1 = j, \quad \vec{u}_2 = j\cos\alpha + k\sin\alpha,$$

множитеље $\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_1}$ и $\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_2}$ можемо да претставимо овако:

$$\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_1} = \mathbf{\Pi}_j = 2\{j, j\} - \mathbf{I},$$

$$\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_2} = \mathbf{\Pi}_{j\cos\alpha + k\sin\alpha} =$$

$$= 2\{j\cos\alpha + k\sin\alpha,\ j\cos\alpha + k\sin\alpha\} - \mathbf{I}$$

или у следећем облику:

$$\mathbf{\Pi}_{\vec{u}_1} = -\{i, i\} + \{j, j\} - \{k, k\},$$

$$\Pi_{\vec{u}_2} = -\{i,i\} + \cos 2\alpha(\{j,j\} - \{k,k\}) + \sin 2\alpha(\{k,j\} + \{j,k\}),$$

а горе наведени производ тих верзора дао би следећи резултат:

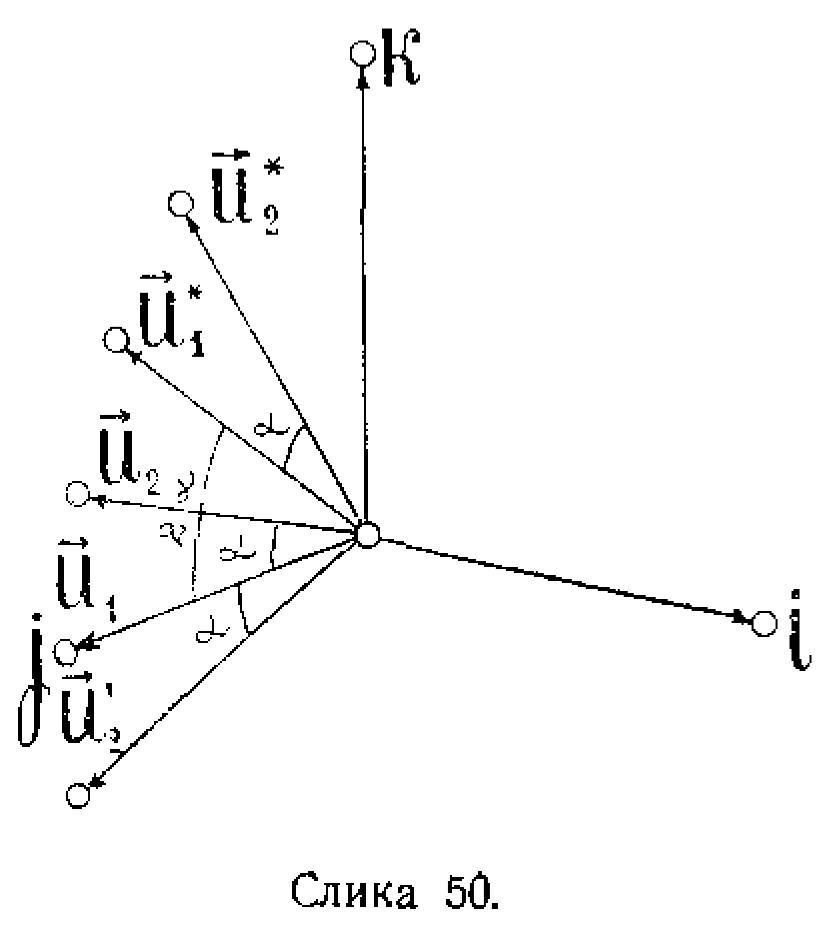
$$\{(\Pi_{\vec{u}_2}, \Pi_{\vec{u}_1})\} = \{i,i\} + \cos 2\alpha(\{j,j\} + \{k,k\}) +$$
$$+ \sin 2\alpha(\{k,j\} - \{j,k\}).$$

Ако сада ставимо

$$2\alpha = \omega,$$

видимо да се десна страна претходне једначине поклапа са десном страном једначине (180) и на тај начин долазимо до истинитости једначине (186).

Тај исти резултат можемо да потврдимо и чисто геометријским путем. Покажимо да су два узастопна обртања простора за 180° еквивалентни обртању око осе што стоји управно на ортове првих обртања и угао тог обртања је раван двострукој вредности угла између тих ортова. Ако обрнемо простор за 180° прво око $\vec{u}_1 = j$ осе (слика 50), сваки орт у равни управ-



Слика 50.

Произвољни верзор као производ двају биквадранталних верзора.

ној на j заузеће супротни положај; ако обрнемо затим простор такође за 180° око $\vec{u}_2$ осе, сваки орт у равни управној на тај орт обрнуће се такође за 180°. Орт i правца, који припада првој и другој равни, после два узастопна обртања за 180^0, вратиће се у свој првобитни положај, а то значи после та два обртања остаће непромењен. То значи орт i, управни на $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, одређује осу ротације резултујућег обртања. Покажимо сада да угао ротације има вредност 2α, ако је α угао између вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. После првог обртања орт $\vec{u}_1$ задржава свој положај, а орт $\vec{u}_2$ узима положај $\vec{u'}_2$. После другог обртања око осе $\vec{u}_2$ орт $\vec{u}_1$ заузима положај $\vec{u}_1^*$ чији правац гради угао 2α са полазним правцем $\vec{u}_1$, а правац $\vec{u'}_2$ узима положај $\vec{u}_2^*$, чији правац поново заклапа угао 2α са својим полазним положајем $\vec{u}_2$. На тај начин се сваки од тих праваца обрнуо за угао 2α око i осе; угао између тих нових ортова $\vec{u}_1^*$ и $\vec{u}_2^*$ остао је исти са вредношћу α.

Да бисмо што простије претставили верзор уведимо један нарочити вектор, који се зове *вектор ротације једнога верзора* и који има вредност производа орта осе ротације и величине $tg\frac{\alpha}{2}$, где је α угао ротације~~,~~ при чему бирамо смер орта осе ротације тако, да он одговара оној ротацији, која настаје услед множења верзора *са десне стране*. Вектор ротације верзора Γ означимо са $\vec{R}_\Gamma$.

Пошто у случају претставе једне ротације око осе i помоћу два биквадрантална верзора $\Pi_{\vec{u}_1}, \Pi_{\vec{u}_2}$ са осама $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ имамо

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = i \sin \alpha = i \sin \frac{\omega}{2},$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \cos \alpha = \cos \frac{\omega}{2},$$

можемо претставити вектор ротације $\vec{R}_\Gamma$ једног произвољног верзора на следећи начин:

$$\vec{R}_\Gamma = i\,tg\frac{\omega}{2} = \frac{[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}. \tag{187}$$

Јасно је да пар ортова $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ за претставу једне ротације може имати произвољни положај у равни управној на $\vec{i}$; потребно је само да ред тих ортова буде такав да смер вектора $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ одговара смеру осе ротације у случају множења верзора са десне стране и да угао између тих ортова за изабрани ред има вредност половине угла ротације.

Упоредимо сада вредност вектора $\vec{R}_\Gamma$ са вектором $\vec{V}$ једног афинора, у датом случају верзора Γ.

Из обрасца (180), који можемо да напишемо у облику

$$\Gamma = \{ i, i \} + \{ j \cos \omega + k \sin \omega, j \} + \{ k \cos \omega - j \sin \omega, k \},$$

непосредно добијамо следећу вредност за инваријантни вектор тог верзора:

$$\vec{V} = [i, i] + [j \cos \omega + k \sin \omega, j] + [k \cos \omega - j \sin \omega, k] = \tag{188}$$

$$= - i \sin \omega - i \sin \omega = - 2 i \sin \omega = - 4 i \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

С друге стране прва инваријанта тог истог верзора има вредност:

$$S_1 = (i, i) + (j \cos \omega + k \sin \omega, j) + (k \cos \omega - j \sin \omega, k) =$$

$$= 1 + \cos \omega + \cos \omega = 1 + 2 \cos \omega.$$

Из последње једначине непосредно закључујемо да је

$$4 \cos^2 \frac{\omega}{2} = S_1 + 1 . \tag{188*}$$

На тај начин упоређивањем (188) и (188*) добијамо следећу једначину

$$\frac{\vec{V}}{S_1 + 1} = - i \, tg \frac{\omega}{2},$$

из које на основу (187) дефинитивно имамо следећу везу између вектора ротације $\vec{R}_\Gamma$ једног верзора и његовог инваријантног вектора $\vec{V}$:

$$(189)\qquad \vec{R}_\Gamma = -\frac{\vec{V}}{S_1+1}.$$

Ако бисмо вектор ротације изабрали у супротном смеру, што одговара множењу верзора $\mathbf{\Gamma}$ с леве стране, за тај вектор $\vec{R}'_\Gamma$ имали бисмо вредност

$$\vec{R}'_\Gamma = \frac{\vec{V}}{S_1+1}.$$

Раније смо навели образац (184) за један верзор помоћу орта осе ротације i и угла ротације ω. Пошто сваки верзор може бити претстављен само помоћу једног вектора $\vec{R}_\Gamma$, ставимо уместо орта i у том обрасцу одговарајућу вредност помоћу вредности (187) за вектор $\vec{R}_\Gamma$. Тога ради помножимо једначину (184), коју можемо да напишемо овако

$$\mathbf{\Gamma} = \cos\omega\,.\,\mathbf{I} + (1-\cos\omega)\,\{i\,,\,i\} + \sin\omega\,.\,{}^{d}[\,\mathbf{I}\,,\,i\,]\,,$$

са

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = 1 + tg^2\frac{\omega}{2} = 1 + (\vec{R}_\Gamma\,,\,\vec{R}_\Gamma)\,.$$

У том случају добићемо:

$$(1+(\vec{R}_\Gamma\,,\vec{R}_\Gamma))\,\mathbf{\Gamma} = (1-tg^2\frac{\omega}{2})\,\mathbf{I} + 2\,tg^2\frac{\omega}{2}\,\{\,i\,,\,i\,\} + 2\,tg\,\frac{\omega}{2}\,.\,{}^{d}[\,\mathbf{I}\,,\,i]$$

$$= (1-(\vec{R}_\Gamma\,,\vec{R}_\Gamma))\,\mathbf{I} + 2\,\{\vec{R}_\Gamma\,,\vec{R}_\Gamma\} + 2\,{}^{d}[\,\mathbf{I}\,,\vec{R}_\Gamma\,],$$

одакле дефинитивно имамо:

$$(190)\qquad \mathbf{\Gamma} = \frac{(1-(\vec{R}_\Gamma\,,\vec{R}_\Gamma))\,\mathbf{I} + 2\,\{\vec{R}_\Gamma\,,\vec{R}_\Gamma\} + 2\,{}^{d}[\,\mathbf{I}\,,\vec{R}_\Gamma\,]}{1+(\vec{R}_\Gamma\,,\,\vec{R}_\Gamma)}.$$

То је врло важан образац, који одређује произвољни верзор помоћу само једног вектора, његовог вектора ротације.

Из тог обрасца лако можемо да добијемо класичне обрасце за трансформацију координата помоћу нарочитих *Euler'ових параметара.*

Означимо координате вектора $\vec{R}_{\text{г}}$, $\vec{r}$ и $\vec{r}' = (\mathbf{\Gamma}, \vec{r})$ помоћу следеће шеме:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\text{г}} &= ai + bj + ck, \\ \vec{r} &= xi + yj + zk, \\ \vec{r}' &= x'i + y'j + z'k; \end{aligned}$$

после тога можемо написати:

$$(\vec{R}_{\text{г}}, \vec{R}_{\text{г}}) = a^2 + b^2 + c^2;$$

$$\begin{aligned} \{\vec{R}_{\text{г}}, \vec{R}_{\text{г}}\} = a^2 \{i, i\} + ab \{i, j\} + ac \{i, к\} + \\ + ab \{j, i\} + b^2 \{j, j\} + bc \{j, к\} + \\ + ac \{к, i\} + bc \{к, j\} + c^2 \{к, к\}; \end{aligned} \tag{191}$$

$$\begin{aligned} {}^{d}[\mathbf{I}, \vec{R}_{\text{г}}] = \qquad & - c\{i, j\} + b\{i, к\} \\ + c\{j, i\} \qquad & - a\{j, к\} \\ - b\{к, i\} + a\{к, j\}, & \end{aligned}$$

а после множења (190) десно са $\vec{r}$ имамо:

$$\begin{aligned} (1 + (\vec{R}_{\text{г}}, \vec{R}_{\text{г}}))\vec{r}' = (1 - (\vec{R}_{\text{г}}, \vec{R}_{\text{г}}))\vec{r} + 2(\{\vec{R}_{\text{г}}, \vec{R}_{\text{г}}\}, \vec{r}) + \\ + 2({}^{d}[\mathbf{I}, \vec{R}_{\text{г}}], \vec{r}), \end{aligned}$$

при чему смо именитељ десне стране ставили на леву страну.

Ако сада ставимо вредности (191) у претходну једначину и напишемо три одговарајуће скаларне једначине, дефинитивно ћемо добити следеће једначине:

$$\begin{aligned} (1 + a^2 + b^2 + c^2)\, x' &= (1 + a^2 - b^2 - c^2)\, x - 2(ab - c)\, y + \\ &\quad + 2(ac + b)\, z, \\ (1 + a^2 + b^2 + c^2)\, y' &= 2(ab + c)\, x + (1 - a^2 + b^2 - c^2)\, y + \\ &\quad + 2(bc - a)\, z, \\ (1 + a^2 + b^2 + c^2)\, z' &= 2(ac - b)\, x + 2(bc + a)\, y + \\ &\quad + (1 - a^2 - b^2 + c^2)\, z. \end{aligned}$$

То су тражени обрасци. Они одређују једну линеарну трансформацију, која даје вредности декартових координата x', y', z' једне тачке M' простора, која је дошла у тај свој положај из полазног положаја M са координатама x, y, z после једне коначне ротације, при чему су коефицијенти те трансформације *рационалне функције само трију независних Euler'ових параметара* a, b, c.

На крају овог параграфа покажимо, како је могуће претставити резултат двају узастопних обртања. Замислимо да су нам дата два верзора $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ и треба да конструјишемо верзор $\mathbf{\Gamma}$ што претставља производ тих верзора, т. ј.

$$\mathbf{\Gamma} = \{ (\mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_1) \}.$$

Јасно је (§ 45) да тај производ није комутативан и зато на његову вредност утиче ред множитеља, ред узастопних ротација.

Сваки од верзора, као што смо раније видели, можемо да претставимо помоћу два орта биквадранталних верзора. Означимо те ортове са

$$\mathbf{\Gamma}_1 \ldots\ldots \vec{u}, \vec{w}_1,$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 \ldots\ldots \vec{w}_2, \vec{v}.$$

Положај тих ортова у њиховим равнима, које означимо са E_1 и E_2 и које можемо да зовемо *екваторима верзора*, може да буде у некој мери произвољан; ту произвољност можемо да искористимо тако, да један од ортова сваког пара има положај дуж праве линије пресека равни E_1 и E_2 и да при томе њихови смерови буду исти. Претпоставимо да смо изабрали

$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{w},$$

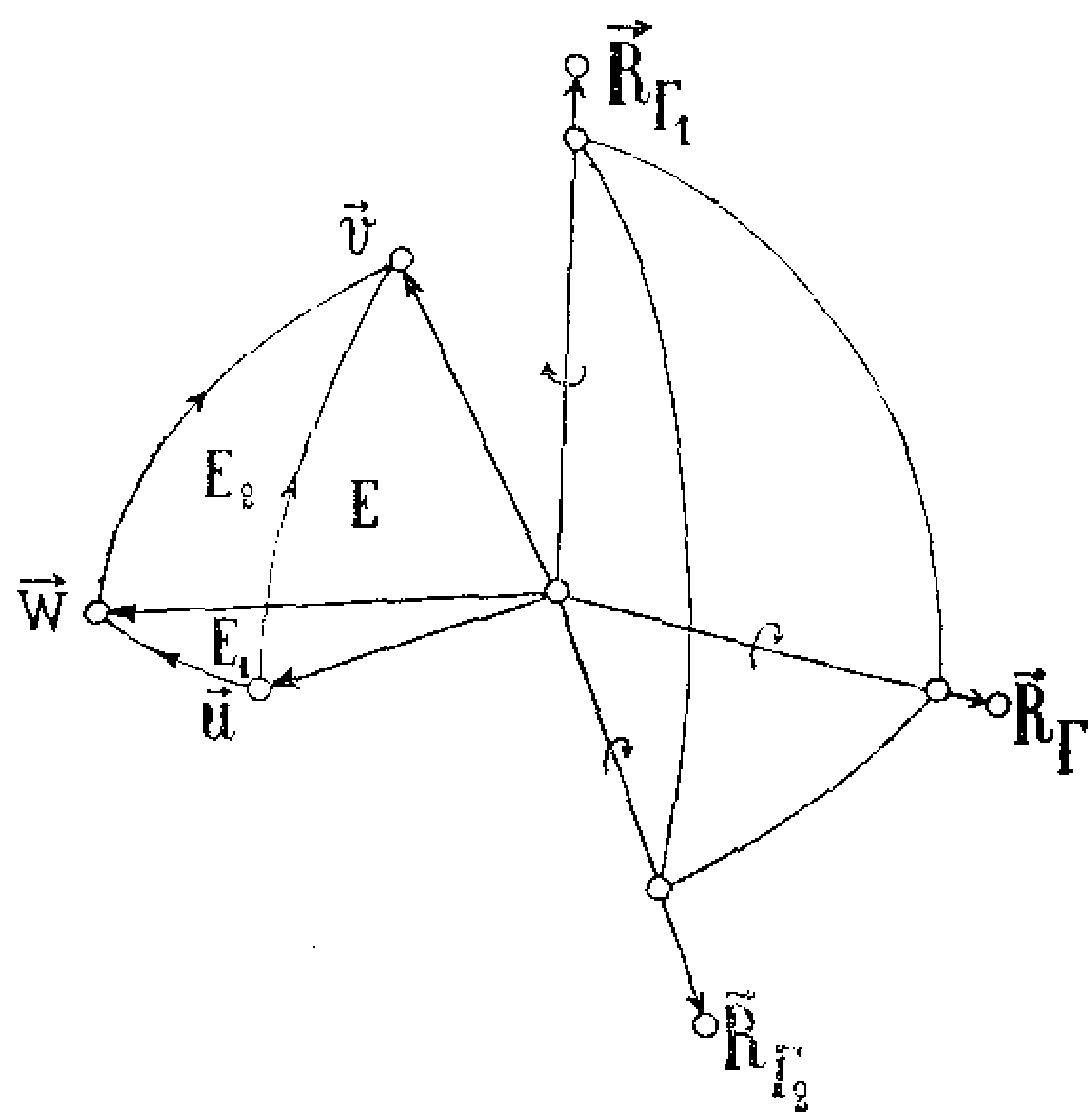
тада можемо написати

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \{ (\mathbf{\Pi}_{\vec{w}}, \mathbf{\Pi}_{\vec{u}}) \},$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \{ (\mathbf{\Pi}_{\vec{v}}, \mathbf{\Pi}_{\vec{w}}) \}.$$

Пошто резултујућа ротација доводи вектор $\vec{u}$ у положај

$\vec{v}$ (слика 51), можемо тврдити, да је верзор Γ претстављен помоћу ортова $\vec{u}$, $\vec{v}$. Нормала на раван екватора E тог верзора одређује осу ротације.



Слика 51.

Сабирање двеју коначних ротација.

На тај начин можемо тврдити да множењу двају верзора одговара нарочито геометријско сабирање лукова $\vec{u}\vec{w}$ и $\vec{w}\vec{v}$ великих кругова на сферној површини. Резултујући лук $\vec{u}\vec{v}$ претставља резултујућу ротацију. Напоменимо да такво сабирање лукова на сферној површини није комутативна операција.

Јасно је да одговарајући поларни сферни троугао својим теменима одређује ортове оса ротација.

Што се тиче геометријског конструисања вектора $\vec{R}_\Gamma$ резултујуће ротације на основу вектора ротације $\vec{R}_{\Gamma_1}$ и $\vec{R}_{\Gamma_2}$ поједииних верзора, оно може да буде извршено на основу следећих расуђивања.

Означени вектори ротације имају следеће вредности:

$$(192) \qquad \vec{R}_{\text{г}} = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{(\vec{u}, \vec{v})}, \quad \vec{R}_{\text{г}_1} = \frac{[\vec{u}, \vec{w}]}{(\vec{u}, \vec{w})}, \quad \vec{R}_{\text{г}_2} = \frac{[\vec{w}, \vec{v}]}{(\vec{w}, \vec{v})}.$$

Израчунајмо сада векторски производ двају последњих вектора:

$$(193) \qquad [\vec{R}_{\text{г}_1}, \vec{R}_{\text{г}_2}] = \frac{1}{(\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})} \, [[\vec{u}, \vec{w}], [\vec{w}, \vec{v}]].$$

Векторски производ десне стране можемо да трансформишемо овако:

$$(194) \qquad [[\vec{u}, \vec{w}], [\vec{w}, \vec{v}]] = \vec{w}(\vec{u}[\vec{w}, \vec{v}]) - \vec{u}(\vec{w}[\vec{w}, \vec{v}]) = $$
$$= - \vec{w}(\vec{u}[\vec{v}, \vec{w}]).$$

Разложимо сада тај последњи вектор помоћу следеће векторске једначине:

$$(195) \qquad -\vec{w}(\vec{u}[\vec{v}, \vec{w}]) = s_1 [\vec{u}, \vec{w}] + s_2 [\vec{w}, \vec{v}] + s [\vec{u}, \vec{v}],$$

где су s_1, s_2, s три скалара, које треба да одредимо.

Ако претходну једначину помножимо скаларно узастопце са $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$, добићемо следеће вредности за скаларе s_1, s_2, s:

$$s_1 = (\vec{w}, \vec{v}),$$

$$s_2 = (\vec{u}, \vec{w}),$$

$$s = -1.$$

На тај начин уместо (195) можемо написати:

$$-\vec{w}(\vec{u}[\vec{v}, \vec{w}]) = (\vec{w}, \vec{v})[\vec{u}, \vec{w}] + (\vec{u}, \vec{w})[\vec{w}, \vec{v}] - [\vec{u}, \vec{v}].$$

Искоришћавајући затим једначину (194) и (193) на основу (192) можемо написати:

$$(196) \qquad [\vec{R}_{\text{г}_1} \, \vec{R}_{\text{г}_2}] = \vec{R}_{\text{г}_1} + \vec{R}_{\text{г}_2} + \vec{R}_{\text{г}} \, \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{(\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})}.$$

За израчунавање коефицијента код последњег члана образујмо скаларни производ вектора $\vec{R}_{\text{г}1}$ и $\vec{R}_{\text{г}2}$:

$$(\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2}) = \frac{1}{(\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})}([\vec{u}, \vec{w}], [\vec{w}, \vec{v}]).$$

На основу познатог обрасца

$$([\vec{A}, \vec{B}], [\vec{C}, \vec{D}]) = (\vec{A}, \vec{C})(\vec{B}, \vec{D}) - (\vec{A}, \vec{D})(\vec{B}, \vec{C})$$

можемо десну страну претходне једначине трансформисати овако:

$$(\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2}) = 1 - \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{(\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v})}, \tag{197}$$

јер је

$$([\vec{u}, \vec{w}], [\vec{w}, \vec{v}]) = (\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w}) =$$
$$= (\vec{u}, \vec{w})(\vec{w}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{v}).$$

Искоришћавајући једначину (197) можемо једначину (196) написати овако:

$$[\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2}] = \vec{R}_{\text{г}1} + \vec{R}_{\text{г}2} - (1 - (\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2}))\vec{R}_{\text{г}}.$$

Ако ту једначину решимо у погледу вектора $\vec{R}_{\text{г}}$, дефинитивно ћемо добити:

$$\vec{R}_{\text{г}} = \frac{\vec{R}_{\text{г}1} + \vec{R}_{\text{г}2} - [\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2}]}{1 - (\vec{R}_{\text{г}1}, \vec{R}_{\text{г}2})}.$$

Овај резултат одређује вектор ротације резултујућег верзора на основу вредности вектора ротације оних двају верзора, чији је производ еквивалентан резултујућем верзору.

48. Cayley-Hamilton'ова једначина.

У вези са појмом степена једног афинора изведимо једну врло важну једначину трећег степена, коју задовољава сваки афинор. На основу те једначине, која има облик

$$\mathbf{A}^3 - S_1 \mathbf{A}^2 + S_2 \mathbf{A} - S_3 \mathbf{I} = 0, \tag{198}$$

где су S_1, S_2, S_3 познате инваријанте афинора и која се зове *Cayley-Hamilton'ова једначина*, сваки степен афинора већи од другог можемо да претставимо као линеарну функцију само следећих афинора:

$$\mathbf{A}^2, \mathbf{A}, \mathbf{I}.$$

Једначина (198) може бити изведена на више начина. Изаберимо један природни начин, који се састоји у одређивању коефицијената l, m, n у једначини

$$\mathbf{A}^3 = l\mathbf{A}^2 + m\mathbf{A} + n\mathbf{I} \tag{199}$$

са том погодбом, да претходна једначина постане идентитет за сваки афинор.

Помножимо претходну једначину десно са $\vec{r}_1$, где је $\vec{r}_1$ вектор, који има правац једног од непроменљивих праваца датог афинора, рецимо оног, који одговара корену λ_1 Hamilton'ове једначине

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0. \tag{200}$$

Пошто за тај вектор имамо

$$(\mathbf{A}, \vec{r}_1) = \lambda_1 \vec{r}_1$$

и даље

$$(\mathbf{A}^2, \vec{r}_1) = \lambda_1^2 \vec{r}_1,$$

$$(\mathbf{A}^3, \vec{r}_1) = \lambda_1^3 \vec{r}_1,$$

после тог множења добићемо једначину:

$$\lambda^3{}_1 \vec{r_1} = l\lambda^2{}_1 \vec{r_1} + m\lambda_1 \vec{r_1} + n\vec{r_1}.$$

Ако скратимо ту једначину са $\vec{r_1}$ добићемо следећу скаларну једначину:

$$\lambda^3{}_1 = l\lambda^2{}_1 + m\lambda_1 + n.$$

На исти ћемо начин добити још две једначине за два остала, било реална, било имагинарна корена Hamilton'ове једначине; дакле разумевајући под λ један од корена λ_1, λ_2, λ_3 можемо написати једначину

$$\lambda^3 = l\lambda^2 + m\lambda + n, \tag{201}$$

коју треба да задовољавају l, m, n, ако је λ корен Hamilton'ове једначине (200).

Ако сада једначину (201) напишемо у облику

$$\lambda^3 - l\lambda^2 - m\lambda - n = 0$$

и упоредимо са једначином (200), морамо закључити да ако те две једначине имају исте корене, а коефицијенти су код λ^3 исти, остали коефицијенти морају имати такође исте вредности; на тај начин долазимо до једначина

$$l = S_1,$$

$$m = -S_2,$$

$$n = S_3.$$

Ако сада те вредности ставимо у једначину (199), добићемо Cayley-Hamilton'ову једначину у облику (198).

Имајмо на уму да наведене једначине важе и за случај једнаких корена. За случај, рецимо,

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

могли бисмо да допунимо доказ следећим расуђивањем. Узели бисмо у обзир нов афинор, чија Hamilton'ова једначина има неједнаке корене

$$\lambda_1 \text{ и } \lambda_1 + \Delta\lambda.$$

За такве корене једначина је доказана; после прелаза на гранични случај, кад је $\Delta\lambda \to 0$, она прелази у Cayley-Hamilton'ову једначину и за случај једнаких корена. То исто важи и за случај трију једнаких корена.

Пошто је Hamilton'ова једначина служила за одређену класификацију афинора (§ 43), том истом циљу може да послужи и Cayley-Hamilton'ова једначина.

РЕГИСТАР

Бројеви означавају стране књиге.

Штампарске грешке.

Страна	Ред	Стоји	Треба
39	10 одозго	.	,
42	12 „	c_{23}	a_{13}
43	16 „	Sin	Sin
59	9 „	$+$	$-$
60	3 одоздо	можема	можемо
61	11 одозго	$\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\}$	$\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\} = 0$
61	14 „	$\{\vec{A}, \vec{B}\} = -\{\vec{A}, \vec{B}\}$.	$\{\vec{A}, \vec{B}\} = -\{\vec{B}, \vec{A}\}$.
70	5 одоздо	на крају реда треба укинути запету.	
106	12 одозго	17	27
104	14 „	$\vec{C}_1$	$\vec{B}_1$
113	11 одоздо	$\vec{A}$)	$\vec{A}(i)$
116	9 одозго	$+\{J_1, J\}$	$+ a_2\{J_1, J\}$
128	5 одоздо	ош	још
128	4 „	$\frac{\beta_2 + \alpha_1}{1 + \gamma_3}$	$\frac{\beta_2 + \alpha_1}{1 + \gamma_3}$,
132	11 „	(87	(87)
146	1 „	$\frac{1}{2}(a_{(12)} + a_{(21})$	$\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$
150	3 одозго	$\{[j, \vec{V}], i\}$	$\{[j, \vec{V}], j\}$
160	2 одоздо	$\neq$	$) \neq$
162	5 „	i=3	i=1
169	12 одозго	са скаларом.	са вектором.
176	8 одоздо	x_2	x_2,
192	8 „	ист	исто
198	6 „	векто а	вектора
205	3 „	$\mathrm{A}_1 \quad \mathrm{A}_2$	A_1 и A_2
206	11 одозго	$\}\vec{A}_3, \vec{D}_3\}$	$\{\vec{A}_3, \vec{D}_3\}$
207	10 одоздо	$\neq \{(\Delta_1, \Delta_2)\}'$	$\neq \{(\Delta_2, \Delta_1)\}'$
208	4 одозго	$a_3 +$	$+ a_3$

Fondements géométriques de la théorie des diades.

I.

Diade et Affineur.

Par M. A. Bilimovitch.

Résumé.

Le produit diadique ou diade, avec les produits scalaire et vectoriel, joue le rôle fondamental dans la théorie moderne des vecteurs. Mais tandis que les produits scalaire et vectoriel ont depuis longtemps reçu leur interprétation géométrique claire, naturelle et autonome, le diade n'a pas jusqu'à présent bénéficié d'une pareille interprétation. D'abord les fondateurs de la théorie des vecteurs (Grassmann, Hamilton, Gibbs), ainsi que les savants qui ont étudié et développé cette théorie, tant dans le domaine de la théorie abstraite que dans celui des applications pratiques, puis enfin les auteurs des manuels modernes — tous utilisent le diade comme un opérateur sans en donner une interprétation géométrique autonome. Quelques auteurs mêmes soulignent tout spécialement que le diade n'a reçu encore aucune interprétation géométrique (§ 3). Le but de ce travail est de proposer une interprétation géométrique du diade qui en donne une image géométrique, tout à fait claire, complètement autonome, naturelle, étroitement liée à la nature même du diade et aux principes fondamentaux du calcul des diades et des affineurs ainsi que de développer l'algèbre du diade et de l'affineur en me basant sur cette interprétation.

La notion fondamentale de la théorie est *le modèle* d'une surface de second degré (§ 1). Considérons, par exemple, un ellipsoïde. On peut distribuer les 9 paramètres de cette surface

en classes suivantes: 1) 6 paramètres de position qu'on peut partager: a) en 3 paramètres de fixation (par ex. 3 coordonnées du centre) et b) en 3 paramètres d'orientation (par ex. 3 angles d' Euler); puis, 2) 3 paramètres de forme qu'on peut à leur tour partager: a) en 2 paramètres de forme propre (par ex.: $m = a:b$ et $n = c:b$, a, b, c étant les demiaxes d'ellipsoïdes) et b) 1 paramètre de grandeur. On peut convenir qu'un ellipsoïde est le modèle d'un autre ellipsoïde et *vice versa*, quand ces deux ellipsoïdes ont pour paramètres de forme propre les mêmes valeurs. Si ces deux surfaces ont pour paramètres de forme propre et pour paramètres d'orientation également les mêmes valeurs, on dit que l'une de ces surfaces est le modèle de même orientation de l'autre surface. Il faut remarquer que, pour donner un modèle d'orientation déterminée, il faut connaître cinq paramètres indépendants.

Avec la notion de modèle, on peut construire le diade de la manière suivante (§ 2). Prenons deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$; désignons leurs vecteurs-unité par $\vec{A}_0$ et $\vec{B}_0$ et leurs grandeurs par A et B et effectuons la construction suivante. Construisons une demi-sphère de centre O et d'unité de rayon sur le cercle du plan Π perpendiculaire au vecteur $\vec{B}_0$. De l'extrémité S de ce vecteur $\vec{B}_0$ traçons le vecteur $\vec{A}_0$ et sur cette direction marquons la longueur $ST = P = AB$. La droite OT s'appelle *l'axe du diade.* Transposons alors le système des sections circulaires normales au vecteur $\vec{B}_0$ de la sphère dans la direction du vecteur $\vec{A}_0$ de telle manière que les centres de toutes ces sections se trouvent sur l'axe du diade. Nous obtiendrons comme résultat un demi-ellipsoïde; à l'autre moitié de la sphère correspond un autre demi-ellipsoïde. Il faut distinguer deux natures différentes d'ellipsoïde: par ex. blanc et noir; le modèle d'ellipsoïde s'appellera blanc, si la demi-sphère et le demi-ellipsoïde correspondant se trouvent du même côté du plan Π; dans le cas contraire il s'appellera noir. Le modèle d'ellipsoïde de la construction susdite d'une couleur déterminée, avec le système determiné des sections circulaires représente le diade des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ (l'ordre gardé) avec la signification $\{\vec{A}, \vec{B}\}$. A chaque diade correspondent aussi cinq paramètres: 4 paramètres de deux vecteurs-unité $\vec{A}_0$, $\vec{B}_0$ et un scalaire $P=AB$. Il est nécessaire de remarquer qu'au diade ne correspond pas un ellipsoïde, mais un modèle d'ellipsoïde construit par ses éléments naturels — les sections circulaires. Ce modèle d'orientation donnée, de couleur déterminée, avec le système déterminé des sections circulaires définit tous les éléments du diade. C' est par cette raison que le calcul des diades peut être considéré comme calcul des modèles des surfaces de second degré.

L'image géométrique indiquée du diade permet de développer complètement *l'algèbre du diade* en se basant seulement sur les propriétés intrinsèques de cette image. On établit l'égalité des modèles (§ 4); on introduit la notion de la congruence des modèles (§ 5); cette notion est liée à l'égalité des paramètres de forme propre, qui sont en même temps les invariants du diade (§ 11). Viennent ensuite les règles de la multiplication du diade par un scalaire positif ou négatif (§ 6), d'addition des diades à un ou deux membres colinéaires (§ 7). L'application de la loi distributive donne la possibilité de prendre le diade comme un produit de nature spéciale: produit diadique (§ 8). On peut construire les images des diades coordonnées (§§ 9, 10) et faire la décomposition d'un diade en diade de dilatation et diade du glissement (§ 12), introduire la notion des diades conjugués (§ 13). Enfin on peut établir les règles de la multiplication scalaire (§§ 14, 15) et vectorielle (§ 16) du modèle par un vecteur, ainsi que celles d'autres opérations avec les diades et les vecteurs (§§ 17—19).

L'algèbre de l'affineur est l'objet du second chapitre du travail. On peut définir l'affineur comme la somme des diades arbitraires; on peut toujours réduire cette somme à une somme des trois diades, des trois modèles (§ 20), et après quelques transformations (§§ 21—25) représenter cette somme sous une forme normale quand les trois modèles ont une certaine position spéciale (§ 26). En prenant pour base cette forme normale, on peut discuter les affineurs et en faire la classification (§§ 27—31). Puis on peut développer l'algèbre des affineurs et former les images géométriques correspondant aux affineurs de genre spécial: tenseur (§§ 32, 33), axiateur (§ 35), le produit algébrique de deux vecteurs (§ 36), déviateur (§§ 37, 38); on peut établir la liaison entre les affineurs dérivatifs, par ex., entre coaffineurs (§ 39), affineurs conjugués (§ 34) et l'affineur donné. En généralisant les opérations, on peut construire l'image géométrique du diade imaginaire (§ 40). Quant aux opérations fondamentales avec les affineurs et les vecteurs, on peut les développer de la même manière que dans le cas d'un diade, restant toujours dans le domaine des images géométriques concrètes (§§ 41—48).