Dušan Adamović

COLLECTED WORKS

Ω

University of Belgrade

Faculty of Mathematics

BELGRADE, 2009

Dušan Adamović

Dušan Adamović rođen je 8. juna 1928. godine u Peći na Kosmetu. Osnovnu i srednju školu pohađao je i završio u Beogradu. Maturirao je u III muškoj gimnaziji 1946. godine, a 1947. počeo je studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Na Matematičkoj grupi ovog fakulteta diplomirao je 1953, dok je doktorat matematičkih nauka odbranio 1965. godine. Naslov doktorske disertacije glasio je *Sporo promenljive funkcije u teoriji trigonometrijskih redova*. Neposredno po završetku studija, 1954. bio je dodeljen na rad Katedri za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta. Na istoj katedri (kasnije Institutu za matematiku) izabran je za asistenta 1956, za docenta 1967, za vanrednog profesora 1974, a za redovonog profesora 1981. godine. Penzionisan je oktobra 1993. godine.

U okviru nastavničke delatnosti vodio je vežbe i držao predavanja iz većeg broja matematičkih predmeta. Najduže je vodio kurseve *Analize* I, II i III. Ove predmete predavao je i na prirodno-matematičkim fakultetima u Prištini i Kragujevcu. U dvogodišnjem periodu, od 1985. do 1986. godine, bio je upravnik Instituta za matematiku. Od 1977. godine pa do penzije bio član redakcionog odbora časopisa *Matematički vesnik*, u kome je jedno vreme bio urednik rubrike "Problemi". Objavio 32 naučna rada, 2 knjige (*Zbirku rešenih zadataka iz matematičke analize, diferencijalnih jednačina i teorije kompleksnih funkcija*, 1959, i *Nizove i redove*, sa D. Mitrinovićem, četiri izdanja od 1971. do 1990.) i 24 stručna rada. U naučnom radu bavio se na prvom mestu matematičkom i funkcionalnom analizom, posebno teorijom i primenama sporo promenljivih funkcija u Karamatinom smislu, nejednakostima u normiranim prostorima, funkcionalnim jednačinama i ponašanjem realnih i kompleksnih nizova. Većina naučnih radova pripada pomenutim oblastima, a stručni radovi imaju različita obeležja. Učestvovao je na nekoliko naučnih kongresa i drugih skupova, na kojima je saopštio više svojih radova, kasnije objavljenih. Radovi profesora Adamovića citirani su u domaćoj i stranoj naučnoj literaturi, naročito oni koji se odnose na Karamatine sporopromenljive funkcije. Na primer, citiran je u poznatoj knjizi *Regularly varying functions* Eugene Seneta (Springer, 1976).

Supruga Dušana Adamovića bila je Svetlana Knjazeva, ugledni profesor filozofije Beogradskog univerziteta. Sa njom imao je sina Vladimira. Profesor Adamović umro je 23. januara 2008.

Ž.M.

Dušan Adamović
COLLECTED WORKS

Prepared and edited by
Žarko Mijajlović

Virtual Library
NCD - National Center for Digitization

University of Belgrade
Faculty of Mathematics
BELGRADE, 2009

In the process of the preparation of this electronic edition
helped Ivan Glišić and Vladimir Nikolić

ISBN: 978-86-7589-076-8

Table of Contents

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

D. ADAMOVIĆ

GÉNÉRALISATION DE DEUX THÉORÈMES DE ZYGMUND — B. SZ.-NAGY

Extrait
des
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE T. XII

BEOGRAD
1958

GÉNÉRALISATIONS DE DEUX THÉORÈMES DE ZYGMUND — B. SZ.-NAGY

DUŠAN ADAMOVIĆ (Belgrade)

SOMMAIRE — On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la somme d'une série trigonométrique (des sinus ou des cosinus), celle-ci étant supposée monotone et bornée inférieurement.

1. Dans la suite les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ sont *non croissantes* et *inférieurement bornées* dans l'intervalle $(0, \pi)$ et

$$xg(x) \in L(0, \pi), \quad f(x) \in L(0, \pi).$$

Soient b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les coefficients de la série des sinus de $g(x)$ et a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les coefficients de la série des cosinus de $f(x)$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ici les b_n ne sont pas nécessairement les coefficients de Fourier de $g(x)$.

Alors on a:

(A) *Pour que la série*

$$\sum n^{-\gamma} b_n, \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

soit absolument convergente il faut et il suffit que

$$x^{\gamma-1} g(x) \in L(0, \pi).$$

(B) *Pour que la série*

$$\sum n^{-\gamma} a_n \tag{1}$$

soit absolument convergente il faut et il suffit que

$$x^{\gamma-1} f(x) \in L(0, \pi) \tag{2}$$

ou

$$f(x) \log x \in L(0, \pi) \tag{3}$$

suivant que l'on a $0 < \gamma < 1$ *ou* $\gamma = 1$.

Ces résultats pour $\gamma = 1$ sont dus à Zygmund [1] et dans le cas général à B. Sz.-Nagy [2]. De plus, B. Sz.-Nagy a démontré que *déjà la sommabilité* $-C^{(1)}$ *de la série* (1) *entraîne* (2) *ou* (3) *selon le cas.*

Soit dans ce qui suit $L(x)$ une *fonction à croissance lente de Karamata* [8], c.-à-d. positive et continue pour $x \geqslant 0$ et telle que pour tout $t > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

Dans cette note nous allons montrer que l'on peut remplacer dans les énoncés (A) et (B), ainsi que dans la remarque supplémentaire de B. Sz. — Nagy, les facteurs $n^{-\gamma}$, $x^{\gamma-1}$ et $\log x$ par $n^{-\gamma} L(n)$, $x^{\gamma-1} L(1/x)$ et $L(1/x) \log x$ respectivement. Plus précisément, nous allons généraliser ces résultats par les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1[1]. *Soit* $0 < \gamma < 2$. *La série*

$$\sum n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in L(0, \pi).$$

THÉORÈME 2[1]. *Soit* $0 < \gamma < 1$. *La série*

$$\sum n^{-\gamma} L(n)\, a_n \tag{4}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L(0, \pi). \tag{5}$$

---

[1]) Voir la remarque à la fin de cet article (p. 98).

THÉORÈME 3. *Soit* $0 < \gamma < 1$.

Si

$$x^{-1-\gamma} L(x)$$

ne croît pas pour x suffisamment grand, de la convergence de la série (4) *résulte* (5).

Si

$$x^{-\gamma} L(x)$$

ne croît pas pour x suffisamment grand, de la sommabilité $-C^{(1)}$ *de la série* (4) *résulte* (5).

THÉORÈME 4. *Soit*

$$0 < AL(x)\log x < \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt < BL(x)\log x,\quad x > 1 \tag{6}$$

(A et B constants). Alors la série

$$\sum n^{-1} L(n)\,a_n \tag{7}$$

converge absolument si et seulement si

$$L\left(\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\,f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

THÉORÈME 5. *Soit*

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt > AL(x)\log x > 0,\quad x > 1.$$

Alors

$$L\left(\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\,f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$$

résulte de la convergence ou de la sommabilité $-C^{(1)}$ *de la série* (7) *suivant que, pour x suffisamment grand, la fonction* $x^{-2} L(x)$ *seulement ou déjà la fonction* $x^{-1} L(x)$ *est non croissante.*

Pour $L(x) \equiv 1$ (une constante positive est évidemment une fonction à croissance lente) le théorème 1 se réduit à (*A*), où l'intervalle $0 < \gamma \leqslant 1$ est remplacé par l'intervalle plus large $0 < \gamma < 2$, les théorèmes 2 et 4 se réduisent à (*B*) et les théorèmes 3 et 5 à la remarque supplémentaire de B. Sz.-Nagy. Les théorèmes 1—5 ont un sens analogue à celui des généralisations des résultats de Boas, Heywood et Young [3, 4, 5], données par Aljančić, Bojanić et Tomić dans [6]. Nos résultats, avec ceux de Aljančić, Bojanić et Tomić, montrent que la notion de fonction à croissance lente, introduite d'abord dans les théorèmes abéliens et tauberiens, est aussi féconde dans la théorie des séries trigonométriques.

Notons que la condition (6) du théorème 4 est par ex. satisfaite par les fonctions

$$L(x)=(\log_k x)^\alpha,\ k\geqslant 2, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand,}$$

et

$$L(x)=(\log x)^\alpha,\ \alpha>-1, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand;}$$

elle n'est pas satisfaite par les fonctions

$$L(x)=(\log x)^\alpha,\ \alpha\leqslant -1, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand.}$$

Nous ajoutons aux résultats précédents le théorème suivant, qui en est proche bien qu'il ne généralise aucun des résultats cités de Zygmund — B. Sz.-Nagy:

THÉORÈME 6.[2] *Soit $L(x)$ convexe et tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) < +\infty .$$

Alors la série

$$\sum b_n L(n)$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi) .$$

Pour les démonstrations des théorèmes ci-dessus nous avons besoin du

LEMME. *Soit la fonction $\varphi(x)$ non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle $(0, \alpha)$, $\alpha>0$, et soit $s>0$. Alors l'existence de l'une des intégrales*

$$\int_0^\alpha x^s L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \quad et \quad \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \tag{8}$$

[2]) Loc. cit. 1).

entraîne l'existence de l'autre et que

$$\varphi(x)\int_0^x t^{s-1}L\left(\frac{1}{t}\right)dt\to 0, \quad x\to+0.$$

Pour $L(x)\equiv 1$ ce lemme se réduit au cas particulier du lemme de B. Sz.-Nagy [2].

2. L'exposé qui suit est fondé sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente, à savoir:

(I) $\dfrac{L(tx)}{L(x)}\to 1$, $x\to+\infty$ *uniformément pour* $0<a\leqslant t\leqslant b<+\infty$.

(II) *Si la fonction* $\varphi(x)$ *est positive et continue pour* $x\geqslant 0$ *et* $\varphi(x)\sim L(x)$, $x\to+\infty$, $\varphi(x)$ *est une fonction à croissance lente.*

(III) *Pour tout* $\alpha>0$

$$x^{\alpha}L(x)\to+\infty \quad \textit{et} \quad x^{-\alpha}L(x)\to 0, \quad x\to+\infty.$$

(IV) *Si* $\alpha>0$ *et si l'on pose*

$$\overline{L}_1(x)=x^{-\alpha}\operatorname*{Max}_{0\leqslant t\leqslant x}\{t^{\alpha}L(t)\},\quad \overline{L}_2(x)=x^{\alpha}\operatorname*{Max}_{x\leqslant t<+\infty}\{t^{-\alpha}L(t)\},$$

$$\underline{L}_1(x)=x^{\alpha}\operatorname*{Min}_{0\leqslant t\leqslant x}\{t^{\alpha}L(t)\},\quad \underline{L}_2(x)=x^{-\alpha}\operatorname*{Min}_{x\leqslant t<+\infty}\{t^{\alpha}L(t)\},$$

on a

$$\underline{\overline{L}}_k(x)\sim L(x),\qquad x\to+\infty,\qquad k=1,2,$$

de sorte que, d'après (II), *les fonctions* $\underline{\overline{L}}_k(x)$, $k=1,2$, *continues pour* $x\geqslant 0$, *sont à croissance lente.*

3. D é m o n s t r a t i o n du lemme. On démontre d'abord que, pour $0<x\leqslant\alpha$, $s>0$,

$$0<Px^{s}L\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\int_0^x t^{s-1}L\left(\frac{1}{t}\right)dt\leqslant Qx^{s}L\left(\frac{1}{x}\right)\tag{9}$$

(P et Q constants), où l'existence de l'intégrale envisagée est assurée par (III).

Si l'on pose $s = s' + s''$, $0 < s' < 1$, $s'' > 0$ et $t = 1/u$, on aura, d'après (IV),

$$\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^x t^{s'-1} u^{-s''} L(u)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant u < +\infty} \{u^{-s''} L(u)\} \int_0^x t^{s'-1} dt = \left(\frac{1}{x}\right)^{-s''} \overline{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{s'}}{s'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q'}{s'} x^s L\left(\frac{1}{x}\right) = Q x^s L\left(\frac{1}{x}\right)$$

et aussi

$$\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \geqslant \operatorname*{Min}_{1/x \leqslant u < +\infty} \{u^{1-s'} L(u)\} \int_0^x t^{s''} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{1-s'} \underline{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{s''+1}}{s''+1} \geqslant \frac{P'}{s''+1} x^s L\left(\frac{1}{x}\right) = P x^s L\left(\frac{1}{x}\right),\ P > 0.$$

De (9) on déduit d'une part l'équiconvergence des intégrales

$$\int_0^\alpha x^s L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\varphi(x).$$

D'autre part $(0 < \varepsilon < \alpha)$,

$$\int_\varepsilon^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d[-\varphi(x)] =$$

$$-\varphi(\alpha) \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_\varepsilon^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx - \varphi(\alpha) \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

on en déduit l'équiconvergence des intégrales

$$\int_0^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\left[-\varphi(x)\right] \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx,$$

donc, en vertu du résultat précédent, l'équiconvergence des intégrales (8) Il s'ensuit enfin que de l'existence de l'une de ces deux intégrales résulte

$$0 < \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \to 0, \ \ \varepsilon \to +0.$$

4. Démonstration du théorème 1. On peut supposer sans réstriction que

$$g(\pi - 0) = 0.$$

Dans le cas contraire il suffit de considérer la fonction $g(x) - g(\pi - 0)$, car une constante additive ne peut rien changer, les deux conditions dont le théorème 1 établit l'équivalence étant automatiquement satisfaites pour $g(x) = \text{const}$. On a alors

$$b_n = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (1 - \cos n x)\, dg(x) \geqslant 0. \tag{10}$$

En effet, d'après le lemme (avec $L(x) \equiv 1$),

$$x g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$$

entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\pi x^2\, dg(x)$$

et que

$$x^2 g(x) \to 0, \ \ x \to +0,$$

et par conséquent l'existence de

$$\int_0^\pi (1 - \cos nx)\, dg(x)$$

et que

$$(1 - \cos nx)\, g(x) \to 0, \ \ x \to +0.$$

Donc, en tenant compte de $g(\pi-0)=0$, une intégration par parties donne

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[-\lim_{x\to+0} g(x)(1-\cos nx) - \int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x)\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x).$$

D'après (10), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\, n^{-1-\gamma}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma}(1-\cos nx)\,L(n)\,dg(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi A(x)\,dg(x)$$

converge si et seulement si cette dernière intégrale existe. Cependant, comme nous allons le montrer,

$$0 < M' x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant A(x) \leqslant M'' x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right), \tag{11}$$

de sorte que l'intégrale mentionnée existe en même temps que l'intégrale

$$\int_0^\pi x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) dg(x),$$

d'où, d'après le lemme, résulte le théorème 1.

Nous n'avons donc qu'à prouver les inégalités (11). Si l'on pose

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma}(1-\cos nx)\,L(n) = \sum_{n\leqslant 1/x} + \sum_{n>1/x} = A^{(1)}(x) + A^{(2)}(x)$$

et si l'on a

$$\operatorname{Max}\{0, 1-\gamma\} < \delta < 2-\gamma,\ \gamma=\gamma'+\gamma'',\ \gamma'>0,\ \gamma''>0,$$

on obtient, en vertu de l'inégalité

$$1-\cos u \leqslant \operatorname{Min}\left\{2, \frac{u^2}{2}\right\}$$

et d'après (IV), pour x suffisamment petit,

$$A^{(1)}(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma-\delta} n^{\delta} L(n) \leqslant \frac{x^2}{2} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta} \bar{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} t^{1-\gamma-\delta}\, dt \leqslant M''' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$A^{(2)}(x) \leqslant 2 \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} n^{-\gamma'} L(n) \leqslant 2 \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\gamma''} L(t)\} \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{1}{x}\right)^{-\gamma''} \bar{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-1-\gamma'}\, dt \leqslant M^{IV} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc

$$A(x) \leqslant M'' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, comme

$$1 - \cos u \geqslant 2\left(\frac{u}{\pi}\right)^2 \text{ pour } |u| \leqslant \pi,$$

on a, si l'on prend

$$\delta > \operatorname{Max}\{0, \gamma - 1\},$$

pour x suffisamment petit,

$$A(x) \geqslant 2\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma+\delta} n^{-\delta} L(n) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x^2 \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{-\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma+\delta} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^{-\delta} \underline{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x-1} t^{1-\gamma+\delta}\, dt \geqslant M' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Démonstration des théorèmes 2 et 3. De la même façon qu'au début du § 3, on peut déduire, en utilisant le lemme, la formule

$$a_n = -\frac{2}{\pi n}\int^{\pi} \sin nx\, df(x), \qquad (12)$$

valable sans restriction.

Nous allons montrer d'abord que (5) entraîne la convergence absolue de la série (4). Nous démontrerons ensuite la seconde, puis la première assertion du théorème 3 et, enfin, que la convergence absolue de la série (4) entraîne (5).

D'après (12), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\,|a_n| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n)\,|\sin nx|\, d[-f(x)] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} B(x)\, d[-f(x)]$$

converge si la fonction

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n)\,|\sin nx|$$

est intégrable par rapport à $f(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme on a, en posant

$$\gamma < \gamma + \delta < 1, \quad \gamma = \gamma' + \gamma'', \quad \gamma' > 0, \quad \gamma'' > 0,$$

pour x suffisamment petit,

$$B(x) \leqslant x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma} L(n) + \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma} L(n) = B^{(1)}(x) + B^{(2)}(x),$$

$$B^{(1)}(x) = x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma-\delta} n^{\delta} L(n) \leqslant x \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant x \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta} \bar{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} t^{-\gamma-\delta}\, dt \leqslant M_1 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$B^{(2)}(x) = \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} n^{-\gamma''} L(n) \leqslant \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\gamma''} L(t)\} \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{x}\right)^{-\gamma''} \bar{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-1-\gamma'}\, dt \leqslant M_2 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

on obtient

$$B(x) \leqslant M_3 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en conclut, d'après le lemme, que (5) entraîne la convergence absolue de la série (4).

Supposons que la série soit sommable $-C^{(1)}$, c.-à-d. que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-\gamma} L(\nu)\, a_\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu)\sin\nu x\, df(x) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P_n(x)\, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n\to\infty$, et que $x^{-\gamma}L(x)$ ne croisse pas pour $x \geqslant m$, m entier positif. Soit

$$s_\nu(x) \overset{def}{=} \frac{1-\cos(2\nu+1)x/2}{2\sin x/2}, \qquad \nu=1, 2, \ldots.$$

Alors

$$P_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma}L(\nu)\sin\nu x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right][s_\nu(x)-s_0(x)] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right]s_\nu(x) -$$

$$-\left(1-\frac{1}{n}\right)L(1)\, s_0(x) \geqslant \sum_{\nu=m}^{n-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{m-1} - L(1)\, s_0(x)\right] = P_n^{(1)}(x) + P^{(1)}(x). \tag{13}$$

La suite

$$\omega_{n,\nu} = \left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1) =$$

$$= [\nu^{-1-\gamma}L(\nu)-(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)] -$$

$$-\frac{1}{n}[\nu^{-\gamma}L(\nu)-(\nu+1)^{-\gamma}L(\nu+1)], \quad \nu \leqslant n-1,$$

est positive pour $\nu \geqslant m$, et, pour un $\nu \geqslant m$ fixe, non décroissante par rapport à n; de plus,

$$\omega_{n,\nu} \to \omega_\nu = \nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1), \quad n \to \infty .$$

En utilisant le fait que

$$s_\nu(x) \geqslant 0, \quad 0 < x \leqslant \pi,$$

on en conclut que les fonctions de la suite $P_{(n)}^{(1)}(x)$ sont non négatives et que cette suite tend vers

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=m}^{n-1} \omega_{n,\nu} s_\nu(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} \omega_\nu s_\nu(x).$$

On obtient de (13)

$$\int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\, d[-f(x)] \leqslant \left| \int_0^\pi P_n(x)\, df(x) \right| + \left| \int_0^\pi P^{(1)}(x)\, df(x) \right|. \tag{14}$$

Comme, d'après l'hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x)\, df(x)$$

est fini et que la fonction $P^{(1)}(x)$ est, d'après le lemme, intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on déduit de (14), tenant compte de la non-négativité des fonctions $P_n^{(1)}(x)$, que la fonction $P(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$.

Or, comme nous allons le démontrer tout de suite,

$$P(x) \geqslant M x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \tag{15}$$

ce qui entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\pi x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) df(x),$$

donc, d'après le lemme,

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

Il reste à démontrer (15). Pour $\nu+1/2 \leqslant \pi/x$ on a

$$s_\nu(x) \geqslant \frac{2}{x}\left(\frac{2\nu+1}{2\pi}x\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}x\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2$$

et, pour x suffisamment petit, d'après (I) et (IV),

$$P(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} s_\nu(x)\left[\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \sum_{m+1/2\leqslant\nu+1/2\leqslant\pi/x} (\nu+1/2)^2\left[\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \int_m^{\pi/x-1} (t-1/2)^2\, d\left[-t^{-1-\gamma}L(t)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}x\left[(t-1/2)^2 t^{-1-\gamma}L(t)\Big|_{\pi/x-1}^{m} + 2\int_m^{\pi/x-1}(t-1/2)\,t^{-1-\gamma}L(t)\,dt\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x\left[(m-1/2)^2 m^{-1-\gamma}L(m) - \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-1-\gamma}L\left(\frac{\pi}{x}-1\right) + \right.$$

$$\left. + 2M_4 \operatorname*{Min}_{0\leqslant t\leqslant\pi/x}\{t^{-\gamma/2}L(m)\}\int_m^{\pi/x-1} t^{-\gamma/2}\,dt\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x\left\{2M_5 L\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{\gamma/2}\pi^{-\gamma/2}}{1-\gamma/2}\left[\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{1-\gamma/2} - m^{1-\gamma/2}\right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-1-\gamma}L\left(\frac{\pi}{x}-1\right)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\frac{2M_6}{1-\gamma/2} - M_7\right)\pi^{-1-\gamma}x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) = M x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right),\quad M > 0.$$

Ici les constantes M_4, M_5 et M_6 sont positives et plus petites que 1 et la constante M_7 est plus grande que 1; elles peuvent toutes être aussi proches de l'unité que l'on veut.

Si l'on suppose que la série (4) converge, c.-à-d. que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu)\, a_\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x\, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$ et que $\nu^{-1-\gamma} L(\nu)$ ne croisse pas pour $\nu \geqslant l$, l entier positif, on obtient, d'une manière analogue que ci-dessus, que

$$Q_n(x) \stackrel{def}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)]\, s_\nu(x) - L(1)\, s_0(x) + n^{-1-\gamma} L(n)\, s_n(x) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=l}^{n} + \left[\sum_{\nu=1}^{l-1} - L(1)\, s_0(x)\right] = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),$$

où $Q_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives, et l'on en déduit l'intégrabilité de la fonction $P(x)$ par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. On en obtient de nouveau (5).

Soit enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, |a_n| = K < +\infty .$$

Alors

$$K \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu)\, |a_\nu| \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t < \nu} \{t^{-\gamma} L(t)\}\, |a_\nu| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} \underline{L_1}(\nu)\, |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} \underline{L_1}(\nu) \left| \frac{2}{\pi\nu} \int_0^\pi \sin \nu x\, d[-f(x)] \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma-1} \underline{L_1}(\nu) \sin \nu x \right] d[-f(x)] \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi R_n(x)\, d[-f(x)] \right| .$$

Ici la fonction $x^{-\gamma} L_1(x)$ ne croît pas pour $x>0$. Or,

$$R_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} \underline{L}_1(\nu) \sin \nu x \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} [\nu^{-1-\gamma} \underline{L}_1(\nu)-(\nu+1)^{-1-\gamma} \underline{L}_1(\nu+1)] s_\nu(x)-\underline{L}(1) s_0(x)=$$

$$=R_n^{(1)}(x)-\underline{L}_1(1) s_0(x),$$

où $R_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives et la fonction $s_0(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. Par un procédé semblable à celui employé ci-dessus on obtient

$$R(x) \geqslant M_8 x^\gamma \underline{L}_1\left(\frac{1}{x}\right)>0, \quad R(x)=\lim_{n \to \infty} R_n^{(1)}(x),$$

d'où, d'après (IV),

$$R(x) \geqslant M_9 x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)>0.$$

On en obtient (5) en utilisant le lemme.

6. Démonstration des théorèmes 4 et 5. Le plan général de cette démonstration étant le même que celui de la précédente, nous n'en donnerons qu'une esquisse, en soulignant quelques points caractéristiques.

1° On majore l'expression

$$B(x)=B^{(1)}(x)+B^{(1)}(x),$$

où ces trois fonctions sont définies (avec $\gamma=1$) de la même façon qu'auparavant, comme il suit:

$$B^{(1)}(x)=x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-1} L(n) \leqslant x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-1/2} \operatorname*{Max}_{n \leqslant t<+\infty} \{t^{-1/2} L(t)\} \leqslant$$

$$\leqslant x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-1} \bar{L}_2(n) \leqslant x\left[\bar{L}_2(1)+\int_1^{1/x} t^{-1} \bar{L}_2(t)\, dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant x\left[\bar{L}_2(1)+M_{10} \int_1^{1/x} t^{-1} L(t)\, dt\right] \leqslant x\left[\bar{L}_2(1)+M_{11} L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x}\right] \leqslant$$

$$\leqslant M_{12}\, x L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x},$$

$$B^{(2)}(x) = \sum_{n>1/x} n^{-2} L(n) \leqslant \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant t < +\infty} \{t^{-1/2} L(t)\} \sum_{n>1/x} n^{-3/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \bar{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-3/2} dt \leqslant M_{13}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant M_{14}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x},$$

$$B(x) \leqslant M_{15}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x},$$

où l'on a utilisé la condition (6) et sa conséquence immédiate: il existe un $T > 0$ tel que, pour x suffisamment grand,

$$\bar{L}_2(1) < TL(x) \log x.$$

2° On déduit de l'inégalité obtenue, en appliquant le lemme, où le rôle de $L(x)$ est joué par la fonction à croissance lente $L(x) \log x$, que

$$L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi) \tag{16}$$

entraîne la convergence absolue de la série (7).

3° Si la condition

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt > A \log x > 0, \quad x > 1$$

est satisfaite, de même que les conditions que

$x^{-2} L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand, ou que

$x^{-1} L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand

respectivement, en partant des hypothèses correspodantes sur la série (7), on aboutira, de la même façon que dans la démonstration précédente, à l'expression

$$\frac{2}{\pi^2} x \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 m^{-2} L(m) - \left(\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{-2} L\left(\frac{\pi}{x} - 1\right) + 2 \int_m^{\pi/x-1} t^{-1} L(t)\, dt \right], \tag{17}$$

que l'on peut minorer maintenant par ($M_{16} > 0$, $M_{17} > 0$)

$$\frac{2}{\pi^2} x \left[2 M_{16} L \left(\frac{1}{x} \right) \log \frac{1}{x} - M_{17} L \left(\frac{1}{x} \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left(2 M_{16} - \frac{M_{17}}{\log 1/x} \right) x L \left(\frac{1}{x} \right) \log \frac{1}{x} \geqslant$$

$$\geqslant M_{18}\, x L \left(\frac{1}{x} \right) \log \frac{1}{x}, \qquad M_{18} > 0. \tag{18}$$

4° En supposant la convergence absolue de la série (7), on obtient l'expression (17) où $L(x)$ est remplacé par $\underline{L_1}(x)$. Cette expression peut être alors de nouveau minorée par l'expression (18).

5° L'application du lemme, de la même façon qu'à 2°, d'après les résultats 3° et 4°, prouve alors que l'hypothèse correspondante sur la série (7) entraîne (16).

7. Démonstration du théorème 6. Nous remarquons que des propriétés supposées de la fonction $L(x)$ résulte que $L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand et tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$ et aussi que

$$x^{-1} L \left(\frac{1}{x} \right) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

On en conclut que les deux conditions dont le théorème 6 établit l'équivalence sont satisfaites pour $g(x) = \text{const}$, et l'on peut, comme dans la démonstration du théorème 1, supposer, sans restreindre la généralité, que $g(\pi - 0) = 0$, d'où, d'après (10), la non-négativité des coefficients b_n. Par conséquent, pour que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \right] dx$$

converge (absolument), il faut et il suffit que l'intégrale écrite existe.

Or, Aljančić, Bojanić et Tomić [7] ont démontré que, si $L(x)$ est convexe et $L(x) \to 0$, $x \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \sim x^{-1} L \left(\frac{1}{x} \right), \qquad x \to +0.$$

Primedba. Izvesne nekorektnosti ovog dokaza ispravljene su u drugoj njegovoj verziji, datoj u članku „Généralisations de quelques théoremes de A. Zygmund, B. Sz.-Nagy et R.P. Boas (II)" str. 44-45 (dokaz teoreme VIII).

Donc, d'après la conclusion précédente et les propriétés de notre fonction $L(x)$, le théorème 6 est vrai.

(Reçu le 18 juin 1958)

Remarque faite pendant l'épreuve de la présente note — Récemment Chen-Yung-Ming ([10], p. 110) a démontré que

$$(C) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \text{ si et seulement si } \frac{f(x)}{\psi(x)} \in L(0, \pi),$$

$$(D) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \text{ si et seulement si } \frac{g(x)}{\psi(x)} \in L(0, \pi),$$

où la fonction $\psi(x)$ est définie dans $(0, \pi)$ et telle que

1° $\psi(x)$ pour $0 < x < \pi$,

2° $\psi(x)$ croît strictement pour $0 < x < \pi$,

3° $\dfrac{\psi(x)}{x^{1-\delta}}$ décroît strictement pour $0 < x < \pi$, si $\delta > 0$ est suffisamment petit.

En posant

$$\psi(x) = x^{1-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

les théorèmes (C) et (D) se réduisent respectivement à (B) et (A), avec $0 < \gamma < 1$. Nous allons montrer que les théorèmes (C) et (D) ne contiennent pas nos théorèmes 2 et 1 respectivement, avec $0 < \gamma < 1$. En effet, pour qu'ils les contiennent, il faut (et il suffit) que la fonction

$$h(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

satisfasse aux conditions 1°—3° dès que $L(x)$ est une fonction à croissance lente. Ce n'est pas cependant le cas, comme le montre l'exemple de la fonction à croissance lente

$$L(x) = \log x + \sin x, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand.}$$

En effet, si x est suffisamment grand, en posant,

$$\omega(x) \overset{def}{=} \frac{1}{h\left(\frac{1}{x}\right)} = x^{1-\gamma}(\sin x + \log x),$$

on a

$$\omega'(x) = x^{1-\gamma}\left[\cos x + \frac{1+(1-\gamma)(\sin x + \log x)}{x}\right] = x^{1-\gamma}[\cos x + o(1)],$$

et, par conséquent, $h(x)$ n'est monotone dans aucun intervalle de la forme $(0,\xi)$, $\xi > 0$.

De même, notre théorème 6 n'est pas contenu dans (D). En effet, la fonction à croissance lente

$$L(x) = \frac{1}{\log^2 x}, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand},$$

satisfait aux conditions que lui impose le théorème 6, tandis que

$$h(x) = \frac{x}{L\left(\frac{1}{x}\right)} = x \log^2 x$$

ne satisfait pas à la condition 3°.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Zygmund — Sur les fonctions conjuguées. *Fundamenta Math.* **13** (1929), p. 284—303, en particulier p. 299—301.

[2] Béla Sz.-Nagy — Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées. *Acta. sc. matematicarum* (Szeged), **XIII** (1949), p. 118—135.

[3] R. P. Boas — Integrability of trigonometric series (III). *Quart. J. of Math.* (Oxford) (2), **5** (1954), p. 71—76.

[4] P. Heywood — On the integrability of functions defined by trigonometric series. *Quart. J. of Math.* (Oxford) (2), **5** (1954), p. 71—76.

[5] W. H. Young — On the Fourier series of bounded functions. *Proc. London. Math. Soc.* **12** (1913), p. 41—70.

[6] S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić — Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriqus. *Publ. Inst. Math. Acad Serbe sci.* **VIII** (1955), p. 67—84.

[7] S. Aljančić, R. Bojanič, M. Tomić — Deux théorèmes relatifs au comportement asymptotique des séries trigonométriques. *Zbornik radova SAN* **4** (1955), p. 15—26 (en serbe, sommaire en français)

[8] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. Soc. Math. France* **LXI** (1933), p. 55—62.

[9] Chen Yung-Ming — Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems. *Math. Zeitschr.* **68** (1957), p. 227—244.

[10] Chen Yung-Ming — Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants, *Math. Zeitschr.* **69** (1958), p. 105—120.

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA

№ 101 — № 106
(1963)

P. M. VASIĆ

SUR UNE INÉGALITÉ

R. LUČIĆ

SUR UNE INÉGALITÉ DE HORNICH

W. SIERPIŃSKI

L'HYPOTHÈSE DE M. A. SCHINZEL SUR LES NOMBRES PREMIERS ET LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

D. S. MITRINOVIĆ

JEDAN JEDNOSTAVAN POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE OSA SIMETRIJE I METRIČKIH ELEMENATA KONUSNIH PRESEKA

D. Ž. DJOKOVIĆ

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION DES CYCLES

D. D. ADAMOVIĆ — D. S. MITRINOVIĆ — D. Ž. DJOKOVIĆ

FORMULE DE DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUIVIE DE QUELQUES APPLICATIONS

B E O G R A D

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 106 (1963)

FORMULE DE DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUIVIE DE QUELQUES APPLICATIONS

D. D. Adamović, D. S. Mitrinović et *D. Ž. Djoković*

(Reçu le 13 mars 1963)

1. Soit $m,\ n \in N$, où N désigne l'ensemble de tous les nombres naturels. Un théorème bien connu conduit à l'identité suivante

$$(*)\qquad \frac{1}{x^m(1-x)^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{B_l}{(1-x)^l} \qquad (x \neq 0 \wedge x \neq 1),$$

où les $A_k\,(k=1,2,\ldots,m)$ et les $B_l\,(l=1,2,\ldots,n)$ sont des constants à déterminer.

Nous allons démontrer les formules suivantes

$$(1)\qquad A_k = \binom{m+n-1-k}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m),$$

$$(2)\qquad B_l = \binom{m+n-1-l}{m-1} \qquad (l=1,2,\ldots,n),$$

c'est-à-dire que la décomposition

$$(3)\qquad \frac{1}{x^m(1-x)^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{m+n-1-k}{n-1}}{x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\binom{m+n-1-l}{m-1}}{(1-x)^l} \qquad (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

est valable pour tous les nombres naturels m et n.

L'identité (*) peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{p=1}^{m} A_p x^{m-p} + x^m \sum_{q=1}^{n} \frac{B_q}{(1-x)^q}.$$

On en déduit, pour $k=1,2,\ldots,m$,

$$\left\{\frac{1}{(1-x)^n}\right\}^{(m-k)} = A_k (m-k)! + x\,\varphi_k(x),$$

où la fonction $\varphi_k(x)$ prend une valeur finie pour $x=0$. En posant $x=0$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\left\{\frac{1}{(1-x)^n}\right\}^{(m-k)}\Bigg|_{x=0} = \frac{n(n+1)\cdots(n+m-k-1)}{(m-k)!}$$

$$= \binom{n+m-k-1}{m-k} = \binom{m+n-k-1}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m).$$

Nous avons donc démontré les formules (1). On en déduit immédiatement la validité des formules (2) en remarquant que les constants B_l jouent le rôle des constants A_k dans l'identité obtenue de (*) par la substitution $x=1-t$.

Notons une autre démonstration de la formule (3). Désignons par (P_ν) l'assertion que les formules (1) sont vraies pour la valeur ν du nombre n et pour toute valeur du nombre m. D'après la remarque par laquelle s'achève la première démonstration, il suffit de démontrer

$$(P_\nu) \quad (\forall \nu \in N).$$

Comme l'on a, pour tout $m \in N$,

$$\frac{1}{x^m(1-x)} = \frac{1}{x^m}\,\frac{1-x^m}{1-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m-1} x^k + \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x^k} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+1-1-k}{1-1}}{x^k} + \sum_{l=1}^{1}\frac{\binom{m+1-1-l}{m-1}}{1-x} \qquad (x\neq 0 \wedge x\neq 1),$$

(P_1) est vrai. Si l'on suppose la validité de (P_ν), c'est-à-dire de l'identité suivante

$$\frac{1}{x^m(1-x)^\nu} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+\nu-1-k}{\nu-1}}{x^k} + \sum_{l=1}^{\nu}\frac{B_l}{(1-x)^l}$$

pour tout $m \in N$, on aura, pour tout $m \in N$,

$$\frac{1}{x^{m+1}(1-\alpha x)^\nu} = \sum_{k=1}^{m+1}\alpha^{m+1-k}\frac{\binom{m+\nu-k}{\nu-1}}{x^k} + \alpha^{m+1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\binom{n+\nu-1-l}{m-1}}{(1-\alpha x)^l}$$

$$(x\neq 0 \wedge \alpha x\neq 1).$$

Après la dérivation par rapport au paramètre α, on obtient

$$\text{(4)} \qquad \frac{\nu}{x^m(1-\alpha x)^{\nu+1}} = \sum_{k=1}^{m}(m+1-k)\alpha^{m-k}\frac{\binom{m+\nu-k}{\nu-1}}{x^k} + \cdots$$

Étant donné que

$$\frac{m+1-k}{\nu}\binom{m+\nu-k}{\nu-1} = \binom{m+\nu-k}{\nu},$$

l'identité (4) pour $\alpha=1$ devient

$$\frac{1}{x^m(1-x)^{\nu+1}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+(\nu+1)-1-k}{(\nu+1)-1}}{x^k} + \cdots \qquad (x\neq 0 \wedge x\neq 1),$$

où les trois points remplacent la partie de l'expression ne contenant pas les fractions $\frac{1}{x^k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Nous avons donc démontré

$$(P_1) \wedge [(P_\nu) \Rightarrow (P_{\nu+1}) \qquad (\forall \nu \in N)],$$

d'où

$$(P_\nu) \qquad (\forall \nu \in N), \quad \text{c. q. f. d.}$$

2. En remplaçant dans (3) x par $\frac{x-a}{b-a}$ $(a \neq b)$, on obtient

$$(5) \qquad \frac{1}{(x-a)^m (x-b)^n} = \frac{(-1)^n}{(b-a)^{m+n}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{(b-a)^k \binom{m+n-k-1}{n-1}}{(x-a)^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{(a-b)^l \binom{m+n-l-1}{m-1}}{(x-b)^l} \right\}$$

$$(x \neq a, b \wedge a \neq b).$$

En faisant $x=0$, on en tire la formule sommatoire que voici:

$$\sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{b}{a}\right)^k \binom{m+n-1-k}{n-1} + \sum_{l=1}^{n} \left(1-\frac{a}{b}\right)^l \binom{m+n-1-l}{m-l} = (-1)^m \frac{(b-a)^{m+n}}{a^m b^n} \qquad (ab \neq 0).$$

3. L'identité (3) peut servir comme une source de formules sommatoires et autres.

3.1. En posant $x=1/2$, l'identité (3) prend la forme simple suivante

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m+n-1-k}{n-1} 2^k + \sum_{l=1}^{n} \binom{m+n-1-l}{m-1} 2^l = 2^{m+n}.$$

Pour $x=-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m+n-1-k}{n-1} + \sum_{l=1}^{n} \binom{m+n-1-l}{m-1} 2^{-l} = (-1)^m 2^{-n}.$$

3.2. On a

$$(6) \qquad \frac{1}{x^m (1-x)^n} = \frac{\left\{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}^{m+n}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m+n} (-1)^\mu \binom{m+n}{\mu} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu-n}$$

$$= \sum_{\mu=n+1}^{m+n} (-1)^\mu \binom{m+n}{\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu-n} (-1)^\nu \binom{\mu-n}{\nu} \frac{1}{x^\nu} + \cdots,$$

où les trois points désignent la partie de l'expression qui ne contient pas les fractions $\frac{1}{x^k}$ $(k=1,2,\ldots,m)$.

En confrontant les identités (6) et (3), on arrive à

$$\sum_{\mu=n+k}^{m+n} (-1)^{\mu+k} \binom{m+n}{\mu} \binom{\mu-n}{k} = \binom{m+n-1-k}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m; \quad m, n \in N).$$

3.3. Partons maintenant de la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^\beta)^m}\,dx=(-1)^{m+1}\pi\,\frac{\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{m-1}}{\beta\sin\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

$$\left(\beta>0\wedge -1<\alpha<\beta m-1;\ \frac{\alpha+1}{\beta}\notin N\wedge m\in N\right),$$

que l'on peut obtenir, après le changement de variable $x=t^{1/\beta}$, au moyen d'intégration complexe.

En mettant à profit la formule (5), on obtient le résultat que voici

$$(7)\qquad \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(x^\beta+a)^m(x^\beta+b)^n}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{(a-b)^{m+n}\beta\sin\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}\left\{a^{(\alpha+1)/\beta}\sum_{k=1}^{m}\binom{m+n-1-k}{n-1}\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{k-1}\left(\frac{b}{a}-1\right)^k\right.$$

$$\left.+b^{(\alpha+1)/\beta}\sum_{l=1}^{n}\binom{m+n-1-l}{m-1}\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{l-1}\left(\frac{a}{b}-1\right)^l\right\}$$

$$(a,b,\beta>0\wedge a\neq b\wedge -1<\alpha<\beta-1;\ m,n\in N).$$

La formule (~~12~~ 7) conduit immédiatement au résultat suivant

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(ax^2+2bx+c)^m(ax^2+2bx+d)^n}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{a(c-d)^{m+n}}\left\{\sqrt{ac-b^2}\sum_{k=1}^{m}\binom{m+n-1-k}{n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{k-1}\left(\frac{a(d-c)}{ac-b^2}\right)^k\right.$$

$$\left.+\sqrt{ad-b^2}\sum_{l=1}^{n}\binom{m+n-1-l}{m-l}\binom{-\frac{1}{2}}{l-1}\left(\frac{a(c-d)}{ad-b^2}\right)^l\right\}$$

$$(a>0\wedge ac-b^2>0\wedge ad-b^2>0\wedge c\neq d;\ m,n,\in N).$$

Les intégrales figurant dans (7) et (8) ne se trouvent pas indiquées dans le recueil d'intégrales suivant:

W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, II Teil, Bestimmte Integrale, dritte, verbesserte Auflage, Wien 1961.

4. Si l'on prend comme point de départ la fonction

$$\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}}\qquad (k_1,k_2,\ldots,k_n\in N),$$

on peut obtenir des résultats semblables à ceux indiqués plus haut, mais ils seront plus compliqués.

БРАНИСЛАВ МАРТИЋ и ДУШАН АДАМОВИЋ

ДВЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА КОЈЕ НИСУ АНАЛИТИЧКЕ У ТАЧКИ А ИСПУЊАВАЈУ У ЊОЈ CAUCHY—RIEMANN—ОВЕ УСЛОВЕ

Математички весник
1 (16), Св. 2, 1964

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 151 — 153.

ДВЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА КОЈЕ НИСУ АНАЛИТИЧКЕ У ТАЧКИ А ИСПУЊАВАЈУ У ЊОЈ CAUCHY-RIEMANN-ОВЕ УСЛОВЕ

Бранислав Марјшић и Душан Адамовић

(Саопштено 26. септембра 1963)

1. Нека је

$$p_k^r(x) = x^k + a_{k+1}^r x^{k+1} + \cdots + a_r^r x^r \qquad (2 \leqslant k \leqslant r), \tag{1}$$

при чему су коефицијенти овог полинома произвољни реални бројеви. Означимо са K скуп свих функција $f(z)$ комплексне промењиве z дефинисаних једнакошћу

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} \dfrac{p_n^s(x) - p_m^t(y)}{p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)} + i\,\dfrac{p_n^s(x) + p_m^t(y)}{p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)}, \\ \qquad z = x + iy \neq 0 \quad (p_{n-1}^n + p_{m-1}^v \neq 0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \quad z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Како ни за једну функцију из скупа K

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{(1+i)\, p_n^s(x) + (i-1)\, p_m^t(y)}{(x+iy)\,[p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)]}$$

не постоји, јер је, на пример

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \begin{cases} 0 & , \; n \neq m \\ \dfrac{1+i}{2}, & n = m \end{cases}$$

кад $z \to 0$ по кривој линији $x^n = y^m$ $(x > 0)$, док је

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(z)}{z} = 1 + i$$

кад $z \to 0$ по y-оси, то функције из скупа K немају извод у тачки $z = 0$, тј. нису аналитичке у тој тачки.

Како је, даље,

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{p_n^s(x)}{x p_{n-1}^u(x)} = 1$$

и

$$u_y(0, 0) = -1, \quad v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1,$$

функције $f(z)$ у тачки $z = 0$ испуњавају *Cauchy-Riemann*-ове услове.

Напоменимо да у специјалном случају кад је $n = s = m = t = 3$ и $u = v = 2$ из скупа K добијамо функцију коју је конструисао *Pollard* [1], показавши да

Cauchy-Riemann-ови услови нису довољни за аналитичност функције у тачки. Наиме, та његова функција је дефинисана једнакошћу

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(1+i)\,x^3-(1-i)\,y^3}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0\qquad , & z=0\end{cases}$$

и непрекидна је у тачки $z=0$.

Што се тиче функција из скупа K, интересантно је приметити да оне могу у тачки $z=0$ бити непрекидне или прекидне, шта више без граничне вредности кад $z\to 0$. На пример, ако су бројеви m и n парни, функција $f(z)$ је, што се лако показује, непрекидна за $z=0$. С друге стране, функција

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3+x^5}+i\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3+x^5}, & z=x+iy\neq 0\\ 0\qquad , & z=0\end{cases}$$

припада скупу K, а за $t>0$

$$I_m\{f(t-it)\}=\frac{2}{t}\to+\infty, \qquad t\to+0.$$

2. Означимо са E скуп функција $f(z)$ комплексне променљиве z које су у области која садржи тачку $z=0$ дефинисане на следећи начин

$$(3)\qquad f(z)=\begin{cases}R\,(z)\,e^{-1/z^{4k}}, & z\neq 0, \quad (k=1,\,2,\,\ldots)\\ 0 & z=0\end{cases}$$

где је $R(z)$ произвољна рационална функција.

Из

$$f(z)=R\,(z)\,e^{-1/z^{4k}}=u\,(x,\,y)+iv\,(x,\,y)$$

за $y=0$ добијамо

$$R\,(x)\,e^{-1/x^{4k}}=\{R_e[R(x)]+i\,I_m[R(x)]\}\,e^{-1/x}\;=u\,(x,\,0)+iv\,(x,\,0),$$

где $R_e(a)$ и $I_m(a)$ означава реални и имагинарни део од a. Одатле,

$$u_x(0,\,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u\,(x,\,0)-u\,(0,\,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}R_e[R(x)]\,e^{-1/x^{4k}}=0$$

и даље, после кратког рачуна, слично

$$u_y(0,\,0)=v_x(0,\,0)=v_y(0,\,0)=0,$$

тј. *Cauchy-Riemann*-ovi услови испуњени су у тачки $z=0$. Очевидно је, с друге стране, да функције из скупа E немају граничну вредност кад $z\to 0$, јер је тачка $z=0$ есенцијални сингуларитет сваке такве функције.

Последња класа функција $f(z)$ представља генерализацију примера који се наводи у уџбенику *E. C. Titchmarsh*-а [2].

3. У [3] *S. Ćetković* је доказао да постоји класа H_p функција $f(z)$ таквих да су оне прекидне у свакој тачки, а да при том на једном скупу

свуда-густо распоређених тачака задовољавају *Cauchy-Riemann*-ove једначине. Међутим, класе K и E функција $f(z)$ из тачака 1. и 2. не могу се упоређивати са овом класом H_p.

На крају ћемо приметити да се класе K и E функција $f(z)$могу лако модификовати тако да сви они закључци који су важили за тачку $z=0$ важе у некој произвољно одабраној тачки $z=\alpha+\beta i$.

LITERATURA

[1] T. Copson, *Theory of functions of a complex variable*, London, str. 41.

[2] E. C. Titchmarsh, *Theory of functions*, Oxford University press, str. 70.

[3] S. Ćetković, *Nekoliko priloga teoriji svuda-gusto neprekidnih funkcija*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija Matematika i fizika, № 33 (1960).

DEUX CLASSES DE FONCTIONS NON ANALYTIQUES DANS LE POINT OÙ ELLES SATISFONT AUX CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN

B. Martić et *D. Adamović*

Résumé

On cite deux classes de fonctions de variable complexe, à savoir celle des fonctions (2), définies au moyen des polynômes réels (1), et celle des fonctions (3), où $R(z)$ désigne une fonction rationnelle arbitraire, qui ne sont pas analytiques dans le point $z=0$, bien qu'elles satisfassent aux conditions de Cauchy-Riemann dans ce point. On remarque que les fonctions de la première classe peuvent être continues ou discontinues dans le point $z=0$.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964. стр. 153—156.

AN ELEMENTARY INEQUALITY

M. Marjanović

(Communicated October 8, 1963)

The aim of this note is a generalization of the following inequality

$$|x+y|+|y+z|+|z+x|\leqslant|x+y+z|+|x|+|y|+|z|, \tag{1}$$

where x, y, z are three arbitrary real numbers.

Some generalizations of this inequality, when x, y, z are arbitrary vectors, have been given in [1], [2], [3], where these authors refer to it as Hlawka's inequality.

W. SIERPIŃSKI, D. S. MITRINOVIĆ, D. ADAMOVIĆ, E. STIPANIĆ, V. VUJIČIĆ
P. M. VASIĆ, D. C. B. MARSH, D. Ž. ĐOKOVIĆ, A. MAKOWSKI

PROBLEMI

Математички весник
1 (16), Св. 3., 1964

Évaluer la matrice

$$M^r \text{ (} r \text{ nombre naturel)}$$

et généraliser le résultat obtenu.

24. *Proposé par D. Adamović, Université de Belgrade.*

Soit S un corps commutatif non dénombrable. Démontrer qu'une fonction $f(x,y)$ qui applique $S \times S$ dans S est nécessairement un polynôme (fonction polynôminale) si les deux conditions suivantes sont remplies:

1° elle se réduit à un polynôme en x pour tout y fixé;

2° elle se réduit à un polynôme en y toujours que x prend une valeur fixée appartenant à un ensemble dénombrable déterminé.

25. *Proposed by D. S. Mitrinović, University of Belgrade.*

Let D_{nk} be a determinant of order n, such that every row and every column of D_{nk} contains exactly $k\,(<n)$ elements different from zero.

Evaluate D_{nk} if

a) all elements different from 0 are equal to a;

b) some of them are equal to $+1$ and the others to -1.

26. *Predložio E. Stipanić, Univerzitet, Beograd.*

Dokazati da važi

$$\sum_{k=1}^{i}\left[\cos^3(k-1)\frac{\pi}{2i}-\cos^3 k\frac{\pi}{2i}\right]\operatorname{ctg}\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2i}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 2$$

27. *Predložio V. Vujičić, Univerzitet, Beograd.*

Pokazati da je osnovni kontravarijantni tensor $a^{\alpha\beta}$ n—dimenzionog konfiguracionog prostora V_n jednak

$$a^{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \qquad \begin{array}{l}(\alpha,\beta=1,\ldots,\ n<N)\\ (m_{3i-2}=m_{3i-1}=m_{3i}),\end{array}$$

gde su x^i Dekartove koordinate položaja dinamičkih tačaka mase m_i a q^α su Lagranžove generalisane koordinate.

REŠENI PROBLEMI

1. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade.*

Soit $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, où E est un ensemble quelconque. Supposons que la fonction f reçoit ses valeurs qui appartiennent à un groupe additif abélien M.

Déterminer la solution générale de l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x,y,z)-f(y,x,z)=f(x,x,z)+f(y,x,y)$$

sous les conditions indiquées plus haut, ou si cela sera nécessaire ajouter de nouvelles conditions.

Solution de P. M. Vasić, Université de Belgrade.

Supposons que dans le groupe M l'équation $2X=A$ $(X\in M,\ A\in M)$ possède, par rapport à X, une solution unique.

En faisant $x=y=z=u$, l'équation

(1) $$f(x,y,z)-f(y,x,z)=f(x,x,z)+f(y,x,y)$$

donne $f(u,u,u)\equiv 0$. Pour $y=x=u$, $z=v$, de (1) on a $f(u,u,v)\equiv 0$. Posons $f(y,x,y)\overset{def}{=}F(x,y)$. En permutant x et y de (1) on obtient $F(x,y)+F(y,x)=0$, d'où on trouve $F(x,y)=G(x,y)-G(y,x)$ (G, fonction arbitraire). Donc, l'équation (1) se réduit à

$$f(x,y,z)-G(x,y)=f(y,x,z)-G(y,x).$$

La dernière équation a pour solution générale la fonction suivante $f(x,y,z)=H(x,y,z)+H(y,x,z)+G(x,y)$. Par conséquent, la solution générale de l'équation (1) est

$$\begin{aligned} f(x,y,z)&=0 && (x=y)\\ &=G(y,x)-G(x,y) && (z=x)\\ &=H(x,y,z)+H(y,x,z)+G(x,y) && (x\neq y\wedge x\neq z), \end{aligned}$$

où les fonctions G, H sont arbitraires à valeurs appartenants à M.

2. *Proposed by D. S. Mitrinović, University of Belgrade.*

If each x_k $(k=1,2,\ldots,m)$ and each y_k $(k=1,2,\ldots,n)$ is either zero or $+1$ or -1, determine the number of different solutions of the equation

$$\prod_{k=1}^{m} x_k=\prod_{k=1}^{n} y_k.$$

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.

The products must be the same, either 0 or -1 or $+1$.

If the product is 0, let x_k $(k=1$ to $m)$ be the first 0 factor (taking the subscripts in order); then there are three choices for each successive factor but only two choices (± 1) for each preceding factor. The number of ordered sets of x_k is given by $\sum_{k=1}^{m} 2^{k-1}3^{m-k}=3^m-2^m$, and the number of solutions of the equation (involving the x_k and the y_k) for values 0 is $(3^m-2^m)(3^n-2^n)$.

For the product $+1$, no 0 factors occur and -1 occurs an even number of times. We count these as $\sum_{k=0}^{[1/2\,m]} C(m,2k)\cdot\sum_{k=0}^{[1/2\,n]} C(n,2k)$
$=2^{m-1}2^{n-1}$ sets.

Similarly, for product -1, no 0's and an odd number of -1's are present: $\sum_{k=1}^{[1/2\,(m+1)]} C(m,2k-1)\ \sum_{k=1}^{[1/2\,(n+1)]} C(n,2k-1)=2^{m-1})\,2^{n-1}$.

Summing, we find that the total number of ordered sets, $\{x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ satisfying the given equation is $3^{m+n}-3^m2^n-3^n2^m+3\cdot 2^{m+n-1}$.

Also solved by P. M. Vasić and M. Popadić.

3. *Predložio M. Stojaković, Univerzitet, Novi Sad.*

Jednoznačno deljenje nulom. Izvršiti deljenje

$$\text{LUNA} : \text{NULA} = \text{A}$$

Da li je u svakom od brojnih sistema sa osnovom 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 rešenje ovog zadatka moguće i jednoznačno?

Solution. In the bases 4, 5, 7, 8, 9, there are no solutions. In the base 6 there is a solution

$$4213 : 1243 = 3$$

and in the base 10 the solution is

$$8316 : 1386 = 6.$$

D. C. B. Marsh considered the more general problem with A instead o- A on the right side. This was a misprint in the original text of the problem

4. *Proposed by M. Stojaković, University of Novi Sad.*

As it is known the solution in the domain of natural numbers of the functional equation

$$* \qquad f(n, k) = f(n-1, \ k) + f(n-1, k-1)$$

with „boundary conditions"

$$f(n, \ 0) = 1, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ldots$$

$$f(0, \ k) = 0, \ k = 1, 2, \ldots \ \text{is} \binom{n}{k}.$$

Solve the same functional equation under the same condition* but with boundary conditions

$$f(n, \ 0) = a_n, \ f(0, k) = b_k, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ldots, \ k = 1, 2 \ldots$$

where a_j, b_i are given (complex) numbers.

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.

Construction of a Pascal-like array enables one to deduce that

$$f(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} C(n-1-j, \ k-1)\, a_j + \sum_{j=1}^{k-n} C(n, k-j) \ b_j$$

which can be proved to satisfy the boundary conditions and the recursive relation; double induction (on k and n) may be used.

(Note: We use $C(n, k) = n! / (k!)\,(n-k)!$ for $0 < k < n$,
$= 1$ for $n = k$, and for $0 = k < n$,
$= 0$ for $n \neq k < 0$, and for $n < k$.)

5. *Proposé par S. Prešić, Université de Belgrade.*

Démontrer que la fonction $f(x)$ n'a pas de zéros dans l'intervalle (a, b) si la condition suivante est remplie:

Il existe au moins un $c \in (a, b)$ tel qu'on ait

$$f'^2(c) \ - 2 f(c) f''(x) < 0$$

pour tout $x \in (a, b)$.

Deux solutions (l'une de S. Prešić et l'autre de D. Ž. Đoković) de ce problème sont données dans le livre:

D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964, p. 73-74.

6. *Proposé par S. Prešić, Université de Belgrade.*

Soit $A = \|a_{ij}\|$ une matrice carrée d'ordre n dont chaque élément est l'un des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, -(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ $(a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Supposons de plus que chaqu'un de ces nombres—là figure exactement une fois dans chaque ligne et chaque colonne.

Démontrer que le rang de la matrice A est égal à $n-1$.

Solution by D. Ž. Đoković, Univerzity of Belgrade

We shall use the following well known result (see e. g. D. S. Mitrinović: Zbornik matematičkih problema II, Beograd 1960, problem 187, p. 67): The matrix with dominant principal diagonal is non-singular. We remember that the $n \times n$ square matrix $X = \|x_{ij}\|$ has dominant principal diagonal if

$$|x_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq}}^{n} |x_{ij}|.$$

We can suppose that all negative elements of A appear on the principial diagonal since the rank is invariant under permutations of rows and columns. First, we have det $A = 0$ for the sum of each row of A is zero. Hence, rank $A \leqslant n-1$. On the other hand, the $(n-1) \times (n-1)$ matrix obtained by deleting the last row and column from A is nonsingular by the above result. So, rank $A \geqslant n-1$. From these two inequalities we get that rank $A = n-1$.

8. *Proposé per W. Sierpiński, Warszawa.*

Démontrer que pour n naturel > 1 l'équation $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu^2} = 1$ n'a pas de solution en nombres naturels $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.

If 1 is in the set of x_ν, then $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu^2} > 1$ for $n > 1$, while if the set of x_ν does not contain 1, then

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu^2} < \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1.$$

Thus, no set of n (> 1) distinct natural numbers satisfies

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu^2} = 1.$$

Also solved by the proposer.

9. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa.*

Démontrer que, quelque soit le nombre naturel n, l'équation $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2}$ a une infinité de solutions en nombres naturels

$$x_\nu \ (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \text{ où } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.

If we solve the diophantine system resulting from $n = 2$, we find that $x_0, x_1, x_2 = ab, ac, bc$ is a solution for a, b, c any Pythagorean triple (i. e., $a^2 + b^2 = c^2$). Extending this idea to larger n, we obtain the infinitude of solutions:

$x_0, \ldots, x_n = ab^{2n-3}$, $c^2 b^{2n-4}, \ldots, c^{n-1} b^{n-1}$, $c^{n-1} b^{n-2} a$, for any natural numbers a, b, c satisfying $a^2+b^2=c^2, b<a<c$. That this result is valid, may by demonstrated by finite induction, summing reciprocals of squares from the last-mentioned number „x_n" trough to „x_0", for

$$(a\, b^{n-2+j}\; c^{n-j-1})^{-2} + (b^{n-1+j}\; c^{n-1-j})^{2} \equiv (a\, b^{n-1+j}\; c^{n-j-2})^{-2}$$

for all $j=0, 1, \ldots, n-2$.

Also solved by M. Popadić.

10. *Proposé par A. Sade, Pertuis, France.*

L'équation diophantienne

$$n!\; q!\; (m-q)! = m!\; p!\; (n-p)!,$$

qui exprime l'égalité de deux coefficients binomiaux C_n^p et C_m^q a les solutions banales $p+q=n=m$ et $q=1$ (ou $p=1$), et les solutions particulières

$$C_{10}^3 = C_{16}^2 = 120; \quad C_{10}^4 = C_{21}^2 = 210; \quad C_{14}^6 = C_{15}^5 = 3\,003.$$

Peut-on en trouver la solution générale?

Note de Andrzej Mąkowski, Warszawa, Pologne.

The equation $C_{x+1}^y = C_x^{y+1}$ has been solved in the American Mathematical Monthly 38 (1931), p. 351—354, problem no. 3459; equation $C_x^y = C_y^3 = N$ has only five solutions with $N < 10^9$ (E.B. Escott, H. Sulisz-Sendacka, cf. W. Sierpiński, sur un problème de A. Mąkowski concernant les nombres tétraédraux, Publ, Inst. Math. Beograd, 2 (16), 1962, p. 115—119).

DUŠAN D. ADAMOVIĆ

QUELQUES REMARQUES RELATIVES AUX GÉNÉRALISATIONS DES INÉGALITÉS DE HLAWKA ET DE HORNICH

Математички весник
1 (16), Св. 3., 1964

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. de la Soc. pol. de Math. T. XX p. 279—313.

[2] M. Bertolino, *Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina, Vesnik Društva mat. i fiz. SRS, XV. 1963, str. 79—124.*

[3] M. B:rtolino, *Asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda faktorizovane desne strane, Matematički vesnik*, 1 (16), 1964, str. 23—27.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 241—242

QUELQUES REMARQUES RELATIVES AUX GÉNÉRALISATIONS DES INÉGALITÉS DE HLAWKA ET DE HORNICH

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 5 juin 1964)

En généralisant une inégalité de Hlawka [1], on a démontré dans [2] que l'inégalité

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i+a_j| \leqslant (n-2)\sum_{i=1}^{n} |a_i| + |\sum_{i=1}^{n} a_i| \qquad (n\geqslant 3) \tag{1}$$

est valable dans tout espace préhilbertien (réel ou complexe). Ici $|a|$ désigne la norme de l'élément a. On a démontré aussi dans [2] que l'inégalité (1), pour aucun $n\geqslant 3$, n'est valable dans le cas général d'espace demi-normé ou normé (réel ou complexe).

C'est ce résultat négatif que nous allons compléter par les remarques suivantes.

1. *Soit E in espace demi-normé. Pour démontrer que* (1) *pour aucun $n\geqslant m\,(\geqslant 3)$ n'est valable dans tout E il suffit d'établir ce fait pour $n=m$.*

Démonstration. Cette proposition équivaut évidemment à la suivante: si, dans tout l'espace demi-normé E donné, (1) est valable pour un nombre naturel $n\,(>3)$, alors (1) y est valable aussi pour le nombre naturel $n-1$.

Pour prouver le dernier énoncé, posons dans (1) (avec $n>3$) $a_n=0$. On obtient

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |a_i+a_j| + \sum_{i=1}^{n-1} |a_i| \leqslant (n-2)\sum_{i=1}^{n-1} |a_i| + \left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right|$$

$$\Rightarrow \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |a_i+a_j| < [(n-1)-2] \sum_{i=1}^{n-1} |a_i| + \left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right|.$$

1.1. D'après la proposition démontrée, le contre-exemple 3.2. dans [2] peut être exposé d'une manière plus simple.

2. *Si l'inégalité* (1) *avec* $n=3$ *n'est pas valable dans l'espace demi-normé* E, *alors l'inégalité plus générale que* (1), *obtenue par D. Ž. Đoković* [3],

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}|$$

$$\leqslant \binom{n-2}{k-2}\left(\frac{n-k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|\right) \tag{2}$$

n'y est valable pour aucun $n\geqslant 3$ *ni pour aucun* k $(2\leqslant k\leqslant n-1)$.

En effet, il suffit de poser dans (2) $a_4=\cdots=a_n=0$ pour que cette inégalité se réduise à (1) avec $n=3$.

3. On peut ajouter une remarque analogue à 1. à l'inégalité de Hornich, p. ex. dans sa forme symétrique et généralisée obtenue par D. Ž. Đoković [4] (p. 35).

4. *Pour que l'identité de Hlawka généralisée* [3] (*page* 170, *identité* (8)), *avec un* $n(\geqslant 3)$ *et un* $k(2\leqslant k\leqslant n-1)$ *déterminé, soit valable dans tout l'espace* E *demi-normé, il faut et il suffit que* E *soit un espace préhilbertien.*

En effet, d'après la considération à la page 170 de [3], l'identité en question est équivalente à l'identité

$$\binom{n-2}{k-2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2 - \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2\right]$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} [(|a_{i_1}|+|a_{i_2}|+\cdots+|a_{i_k}|)^2-|a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}|^2],$$

laquelle se réduit, en y posant $a_3=-a_2$, $a_4=\cdots=a_n=0$, a l'identité

$$|a_1+a_2|^2+|a_1-a_2|^2=2(|a_1|^2+|a_2|^2),$$

caractéristique pour les espaces préhilbertiens.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Hornich *Eine Ungleichung für Vektorlängen*, *Mathematische Zeitschrift*, 48 (1942), 264—274.

[2] D. D. Adamović, *Généralisation d'une identité de Hlawka et de l'inégalité correspondante*, Matematički vesnik, 1 (16) (1964), 39—43.

[3] D. Ž. Đoković, *Generalizations of Hlawka's inequality*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, II, T. 18 (1963), 169—175.

[4] D. Ž. Đoković, *Hornich's inequality and some generalizations*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. S. de Serbie, XV (1963), 34—36.

DRAGAN S. DIMITROVSKI et DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR QUELQUES FORMULES DU CALCUL DES RÉSIDUS

Математички весник
1 (16), Св. 2, 1964

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964 стр. 113—117.

Dragan S. Dimitrovski
et *Dušan D. Adamović*

SUR QUELQUES FORMULES DU CALCUL DES RÉSIDUS

(Communiqué le 8 novembre 1963)

1. *Soit $f(z)$ une fonction analytique univoque possédant dans tout le plan complexe fermé un nombre fini de pôles ou de singularités essentielles qui n'appartiennent pas au segment $[a, b]$ $(a<b)$.*

Alors on a la formule

$$\int_0^b f(x)\,dx=(a-b)\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2}\,f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}, \tag{1}$$

où la somme s'étend à toutes les singularités hors de la demi droite $0\leqslant x<\infty$ de la détermination de la fonction

$$F(z)=\frac{\ln z}{(1+z)^2}\,f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

laquelle correspond à la coupure $0\leqslant z<\infty$ et pour laquelle $\ln z>0$ si $z>1$.

En effet, mettant à profit la substitution bilinéaire

$$x=\frac{at+b}{1+t}, \tag{2}$$

on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}. \tag{3}$$

La transformation bilinéaire

$$z\leftarrow\frac{az+b}{1+z}$$

applique le segment $[a, b]$ sur $[0, +\infty)$, transforme la fonction $f(z)$ en fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$ et chacune des singularités de $f(z)$ en une singularité de même type de la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$, les dernières étant toutes hors de la demi-droite $[0, +\infty)$.

C'est pourquoi on peut appliquer au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}$$

le procédé connu consistant à intégrer la détermination mentionnée de la fonction $F(z)$ le long du contour formé de deux cercles dont les centres sont dans l'origine et de deux segments sur la demi-droite $[0, +\infty]$. En effet, la fonction

$$\frac{1}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

n'a d'autres singularités que celles mentionnées ci-dessus. D'autre part, comme la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$ reste finie lorsque $z\to\infty$, de sorte que l'on a

$$\left|f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right| \leqslant M$$

pour $|z|$ suffisamment grand, nous avons

$$\left|\int_{|z|=R} F(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{aRe^{i\theta}+b}{Re^{i\theta}+1}\right)\right|\frac{|\ln Re^{i\theta}|\,R}{|1+Re^{i\theta}|^2}\,d\theta \leqslant \frac{2\pi MR(\ln R+2\pi)}{(R-1)^2}\to 0,\ R\to\infty .$$

L'application de ce procédé-là conduit au résultat

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2} = -\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}. \tag{4}$$

D'après (3) et (4), on a (1).

L'idée initiale du procédé que nous exposons ici est due à Slaviša Prešić (voir [1]). Notons que le présent arcticle précise et complète les résultats de [2].

2. Dans les livres [3] et [4] on trouve le résultat que voici: Soit $f(z)$ une fonction rationnelle ne possédant pas de pôles sur une ligne régulière C non-fermée qui joint les points finis $z=a$ et $z=b$. On a alors la formule

$$\int_C f(z)\,dz = \sum \operatorname{Res}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right], \tag{5}$$

où on a choisi la détermination de $\ln\frac{z-b}{z-a}$ qui correspond à la coupure le long de C et où la sommation s'étend à tous les pôles de la fonction

$$f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}.$$

La méthode par laquelle est obtenu ce résultat-là diffère de celle par laquelle nous avons démontré la formule (1).

On peut remarquer, tout d'abord, *que le résultat (5) reste valable si l'on remplace la supposition que la fonction $f(z)$ est rationnelle et ne possède pas de pôles sur la ligne C par la supposition plus générale que $f(z)$ est une fonction analytique univoque possédant dans tout le plan complexe un nombre fini de pôles et de singularités essentielles qui n'appartiennent pas à la ligne C.*

En effet, on voit sans difficulté que la démonstration de la formule (5), exposée dans le livre [3], peut être étendue sans changement au cas plus général que nous venons de préciser.

Dans le cas spécial, qui coïncide avec celui qui nous traitons dans 1., on obtient de la formule (5) la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \operatorname{Res}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right], \tag{6}$$

valable aussi sous l'hypothèse moins restrictive sur la fonction $f(z)$.

On remarque que notre formule (1) et la formule (6) servent à calculer la même intégrale déterminée. Un des seconds membres de ces deux formules ne peut pas être obtenu, dans le cas général, de l'autre par quelque transformation simple. En effet, comme on peut le montrer par des exemples simples convenables, les résidus pour les singularités correspondantes des fonctions

$$(a-b)\frac{\ln z}{(1-z)^2}f\left(\frac{az+b}{1+z}\right) \quad \text{et} \quad f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}$$

ne sont pas égaux. Considérons, par exemple, la fonction $f(z)=\frac{1}{(z-2)\,(z-3)}$ qui ne possède pas de singularités sur le segment $[a,\ b]$. La fonction qui correspond à notre procédé:

$$\frac{-\ln z}{(1+2z)\,(2+3z)}$$

a les singularités $z=-\frac{1}{2}$ et $z=-\frac{2}{3}$, avec les résidus correspondants $\ln 2-\pi i$ et $\ln\frac{2}{3}+\pi i$; d'autre part, les singularités de la fonction du procédé de Behnke-Sommer

$$\frac{1}{(z-2)\,(z-3)}\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

sont les points $z=2$ et $z=3$ avec les résidus correspondants $\ln 2$ et $\ln\frac{2}{3}$.

La confrontation des formules (1) et (6) conduit, cependant, au théorème suivant:

Soit $f(z)$ une fonction analytique ne possédant pas de singularités sur le segment $[a,\ b]$ de l'axe réel $(a<b)$.

Alors on a l'identité

$$(a-b)\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2}f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\} = \sum \operatorname{Res}\left\{f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right\} + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right\}, \tag{7}$$

avec les déterminations des logarithmes précisées ci-dessus et les sommations s'étendant aux singularités hors de la semi-droite $[0,\ +\infty]$ *et du segment* $[a,\ b]$, *respectivement, des fonctions correspondantes.*

Ce théorème peut servir de source d'identités différentes.

3. Pour illustrer l'application des résultats précédents, nous allons citer quelques exemples.

3.1. Considérons la classe suivante d'intégrales définies

$$I=\int_a^b \frac{dx}{Ax^3+Bx^2+Cx+D} \qquad (a<b), \tag{8}$$

où $A\neq 0$ et le dénominateur ne s'annule pas dans $[a, b]$. La substitution (2) conduit à

$$I=(b-a)\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)\,dt}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}$$

avec

$$\alpha=a^3 A+a^2 B+a C+D,$$

$$\beta=3a^2 b A+(2ab+a^2) B+(2a+b) C+3 D,$$

$$\gamma=3ab^2 A+(b^2+2ab) B+(a+2b) C+3 D,$$

$$\delta=b^3 A+b^2 B+b C+D.$$

On obtient une sous-classe des intégrales (6), à savoir celle pour laquelle $\beta=\gamma=0$, dont le calcul au moyen du procédé exposé est très facile.

En procédant de manière analogue on peut obtenir diverses classes d'intégrales de fonctions rationnelles dont le calcul est assez simple.

3.2. L'application de (1) au calcul de $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,dx$ fournit la formule

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,dx=\ln 2+e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k k}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-k)}{n!}. \tag{9}$$

En confrontant (9) au résultat qu'on obtiendrait au moyen du développement de la fonction exp (1/z) en série des puissances, on aboutit à l'identité

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k\,\mathrm{k}}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-k)}{n!}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{2^k}}{(k+1)!\,k}.$$

On obtient pareillement la représentation suivante de l'intégrale-sinus

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx=S_i(b)-S_i(a)$$

$$=\sin a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,(b-a)^{2k}}{(2k)!!}\sum_{n=1}^{2k}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{2k-n}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$+\cos a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!!}\sum_{n=1}^{2k+1}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{2k-n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

qui peut servir en même temps de formule de sommation pour la dernière expression.

3.3. Soit $f(z)=\dfrac{1}{(z-a_1)\,(z-a_2)\,\cdots\,(z-a_n)}$ avec $a_1<a_2<\cdots<a_n<a<b$.

Toutes les singularités de cette fonction sont hors du segment [0,1]. D'après l'une ou l'autre des formules (1) ou (6) et d'après l'égalité (7), on aboutit aux résultats

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a_1)\ (x-a_1)\ \cdots\ (x-a_n)} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln \frac{b-a_k}{a-a}}{\prod\limits_{\nu=1,\ \nu\neq k}^{n} (a_\nu - a_k)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1,\ \nu\neq k}^{n} (a_\nu - a_k)} = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema,* tome I, 3me édition, problème 235, p. 474.

[2] D. Dimitrovski: *Sur une méthode d'évaluation des intégrales définies...* (en macédonien, résumé en français), Bull. de la Société des mathématiciens et des physiciens de la République Populaire de Macédonie, tome XIII, Skopje, 1962.

[3] Behnke-Sommer: *Théorie der Analytischen Funktionen,* zweiter Auflage, 1962.

[4] Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович: *Сборник-задач йо йеорий функций комйлексноіо йеременноіо,* Москва, 1962, problème 906, p. 122.

D. D. ADAMOVIĆ

GÉNÉRALISATION D'UNE IDENTITÉ DE HLAWKA ET DE L'INÉGALITÉ CORRESPONDANTE

Matematički vesnik
1 (16), 1964

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16) 1964, стр. 39—43.

Dušan D. Adamović

GÉNÉRALISATION D'UNE IDENTITÉ DE HLAWKA ET DE L'INÉGALITÉ CORRESPONDANTE

(Reçu le 20 septembre 1963)

1. Dans son article *Hornich inequality and some generalisations* (Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens de la R. S. de Serbie, t. 15, 1963, p. 33—36) D. Ž. Djoković a cité l'identité de Hlawka

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|a|+|b|+|c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|+|a+b+c|\\ &=(|a|+|b|-|a+b|)\left(1-\frac{|a|+|b|+|a+b|}{|a|+|b|+|c|+|a+b+c|}\right)\\ &+(|b|+|c|-|b+c|)\left(1-\frac{|b|+|c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|+|a+b+c|}\right)\\ &+(|c|+|a|-|c+a|)\left(1-\frac{|c|+|a|+|c+a|}{|a|+|b|+|c|+|a+b+c|}\right)\\ &(|a|+|b|+|c|>0), \end{aligned}$$

valable dans chaque espace préhilbertien, et l'inégalité qui en résulte immédiatement

$$(2)\qquad |a|+|b|+|c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|+|a+b+c|\geqslant 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignons par $|a|$ la seminorme de l'élément a dans l'espace préhilbertien en question (N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, V § 1.3). L'inégalité (2) a servi à Djoković comme point de départ pour sa démonstration algébrique de l'inégalité de Hornich et de quelques généralisations de celle-là.

2. Nous remarquons ici que *l'identité* (1) *peut être généralisée sous la forme*

$$(3)\qquad \begin{aligned} &(n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\\ &=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i|+|a_j|-|a_i+a_j|)\left(1-\frac{|a_i|+|a_j|+|a_i+a_j|}{\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|}\right)\\ &\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|>0;\quad n\geqslant 3\right) \end{aligned}$$

et l'inégalité (2) *sous la forme*

$$(4)\qquad (n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|\qquad (n\geqslant 3),$$

toutes les deux étant valables dans chaque espace préhilbertien.

Démonstration. On vérifie sans difficulté la validité de l'identité

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2-\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{|a_i+a_j|^2-(|a_i|+|a_j|)^2\}$$

dans tout espace préhilbertien. Cette identité-là peut être écrite sous la forme

$$\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|-\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i+a_j|-|a_i|-|a_j|)\,(|a_i+a_j|+|a_i|+|a_j|),$$

d'où

$$(5)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|-\sum_{k=1}^{n}|a_k|=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i|+|a_j|-|a_i+a_j|)\frac{|a_i|+|a_j|+|a_i+a_j|}{\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|>0\right).$$

En ajoutant à (5), membre à membre, l'identité évidente

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n}|a_k|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i|+|a_j|-|a_i+a_j|)$$

on obtient (3).

On déduit (4) de (3) en remarquant que l'on a

$$(6)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|-(|a_i|+|a_j|+|a_i+a_j|)$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}|a_k|-|a_i+a_j|$$

$$\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}a_k\right|-|a_i+a_j|$$

$$=\left|(a_i+a_j)-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|-\left(|a_i+a_j|-\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\right)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\quad 1-\frac{|a_i|+|a_j|+|a_i+a_j|}{\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|}\geqslant 0.$$

3. Nous ajoutons quelques remarques supplémentaires aux résultats précédents.

3.1. Quant à l'inégalité plus générale que (4)

$$\alpha_n \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \beta_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |a_i + a_j| \quad (\alpha_n, \beta_n \text{ nombres réels}), \tag{7}$$

on peut énoncer la proposition suivante:

En excluant le cas trivial de l'espace préhilbertien où la seminorme de tout élément est nulle, pour $n\,(\geqslant 3)$ déterminé l'inégalité (7) *est valable dans tout l'espace préhilbertien considéré si et seulement si*

$$\alpha_n \geqslant n-2 \quad \wedge \quad \alpha_n + \beta_n \geqslant n-1. \tag{8}$$

Démonstration. Supposons la condition (8) remplie et écrivons

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = A, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = B, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |a_i + a_j| = C.$$

On a alors, en vertu des inégalités $A - B \geqslant 0$ et (4),

$$\begin{aligned} \alpha_n A + \beta_n B &\geqslant \alpha_n A + (n-1-\alpha_n) B \\ &= \alpha_n (A-B) + (n-1) B \geqslant (n-2)(A-B) + (n-1) B \\ &= (n-2) A + B \geqslant C. \end{aligned}$$

La condition (8) est donc suffisante.

Pour démontrer qu'elle est aussi nécessaire il suffit de poser dans (7) d'abord

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a, \quad a_n = -(n-1)\, a \qquad (|a| \neq 0)$$

et ensuite

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a \qquad (|a| \neq 0).$$

3.2. *L'inégalité* (4) *ne peut être étendue, pour aucun $n\,(\geqslant 3)$, à tout espace seminormé, ni même à tout espace de Banach.*

En effet, considérons l'espace $C\left(0, \binom{n}{2}\pi\right)$ de toutes les fonctions réelles définies et continues sur le segment $S = [0, \binom{n}{2}\pi]$. On peut effectuer une correspondance biunivoque entre les paires (non ordonnées) des nombres $1, 2, \ldots, n$ et les segments $[l\pi, (l+1)\pi]$ $(l = 0, 1, \ldots, \binom{n}{2} - 1)$. Désignons par S_{ij} ou par S_{ji} le segment qu'on a fait correspondre à la paire $\{i, j\}$. Soit

$$a_i(t) = a_j(t) = \sin t \quad \text{pour} \quad t \in S_{ij}\ (i \neq j;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}),$$

$$a_k(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in S \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} S_{ki} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a alors

$$a_k \in C\left(0, \tbinom{n}{2}\pi\right), \ |a_k| = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = |a_i + a_j| = 2 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les membres de (4) sont respectivement égaux à

$$M=(n-2)\,n+2=n^2-2n+2$$

et à

$$N=\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot 2=n^2-n>M.$$

3.3. L'inégalité (4) peut être écrite sous la forme plus symétrique

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|-\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right| \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i|+|a_j|-|a_i+a_j|).$$

3.4. *Pour que, dans un espace unitaire E (espace préhilbertien où $|a|=0 \Rightarrow a=0$), soit atteinte l'égalité dans* (4), *il faut et il suffit qu'il soit remplie une des conditions suivantes:*

1° $\quad a_k=\alpha_k a \ \wedge\ \alpha_k\geqslant 0 \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n;\ a\in E);$

2° $\quad a_k=\alpha_k a \ \wedge\ \alpha_k\geqslant 0 \qquad (k\neq k_0;\ a\in E)\ \wedge\ a_{k_0}=-\alpha a\ \wedge\ \alpha\geqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n}\alpha_k;$

3° $\quad a_p+a_q+a_r=0\ \wedge\ a_k=0 \qquad (k\neq p,\,q,\,r;\ p,\,q,\,r$ nombres différents et fixés);

4° $\quad a_k=0 \qquad (k\neq p,\,q;\ p,\,q$ nombres différents et fixés).

Démonstration. La condition 1° est évidemment suffisante. Si elle n'est pas remplie, on a pour une paire $\{i,j\}$ d'indices $|a_i|+|a_j|-|a_i+a_j|>0$. Il est clair qu'on ne restreint pas la généralité en supposant que $i=1,\ j=2$. De l'hypothèse que l'on ait l'égalité dans (4) résulte, d'après (6), l'égalité

$$\sum_{k=3}^{n}|a_k|=\left|\sum_{k=3}^{n}a_k\right|,$$

d'où

(9) $\quad a_k=\alpha_k a\ \wedge\ \alpha_k\geqslant 0 \qquad (k=3,\,4,\,\ldots,\,n;\ a\in E).$

Un des éléments a_1 et a_2 doit être aussi multiple positif de a. En effet, si par ex. l'élément a_1 ne l'est pas, on a $|a_1|+|a_3|-|a_1+a_3|>0$, d'où, comme ci-dessut, résulte

(10) $\quad a_k=\alpha'_k a'\ \wedge\ \alpha'_k\geqslant 0 \qquad (k=2,\,4,\,\ldots,\,n;\ a'\in E).$

De (9) et (10) résulte

(11) $\quad a_k=\alpha_k a\ \wedge\ \alpha_k\geqslant 0 \qquad (k=2,\,3,\,\ldots,\,n;\ a\in E).$

Cette conclusion suppose bien que $n>3$ et que $\sum_{k=4}^{n}|a_k|>0$. En cas contraire, on peut montrer, par une considération particulière facile, que (11) reste valable si aucune des conditions 3° et 4° n'est remplie.

D'après ce qui précède et d'après 3.3., si l'on suppose que ni 3° ni 4° n'est rempli, l'hypothèse peut être écrite sous la forme

(12) $\quad (n-2)\,|a_1|+|a_1+\alpha' a|=\sum_{k=2}^{n}|a_1+\alpha_k a|,$

avec $\alpha' = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$. On a aussi, d'après (6),

$$|a_1| + \alpha_k |a| + |a_1 + \alpha_k a| = |a_1| + \alpha' |a| + |a_1 + \alpha' a| \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

d'où, après addition,

$$\sum_{k=2}^{n} |a_1 + \alpha_k a| = (n-2)\, \alpha' |a| + (n-1)\, |a_1 + \alpha' a|. \tag{13}$$

En ajoutant (13) à (12), membre à membre, on obtient

$$(n-2)\, |a_1| = (n-2)\, (\alpha' |a| + |a_1 + \alpha' a|),$$

c. à. d. $(n > 2)$

$$|a_1| = |a_1 + \alpha' a| + \alpha' |a|,$$

d'où résulte immédiatement que l'on a

$$a_1 = -\alpha a \ \wedge \ \alpha \geqslant \alpha'.$$

La condition 2° est donc nécessaire si aucune des conditions 1°, 3° et 4° n'est remplie. On vérifie sans difficulté que chacune des conditions 2°, 3° et 4° est suffisante.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
2 (17) 1965 стр. 207–208.

UNE DÉMONSTRATION IMMÉDIATE DU THÉORÈME SUR LA REPRÉSENTATION DES ALGÈBRES DE BOOLE FINIES

Dušan Adamović

(Communiqué le 18 octobre 1965)

1. Il s'agit du théorème connu suivant:

Toute algèbre de Boole finie $(B, \vee, \wedge)$ *est isomorphe à une algèbre de Boole de la forme* $(P(S), \cup, \cap)$ *où* $P(S)$ *désigne l'ensemble partitif de l'ensemble* S, $\cup$ *et* $\cap$ *étant respectivement l'union et l'intersection des ensembles.*

Dans les manuels et les monographies que nous connaissons on démontre le théorème cité d'une manière indirecte, en le déduisant, au moyen de considérations supplémentaires, des résultats bien plus généraux (voir, par exemple, [1], p. 220—223).

La démonstration directe qui suit pourrait présenter quelque intérêt du point de vue de la méthode.

2. Soit $(B, \vee, \wedge)$ une algèbre de Boole finie, ce qui veut dire que l'ensemble B est fini, et soient 0 et 1 son minimum et son maximum, respectivement. Mis à part le cas trivial ou B n'a qu'un seul élément, l'ensemble S de tous les éléments de B qui sont différents de 0 et suivent immédiatement 0, par rapport à la relation d'ordre $\leqslant$ définie dans B par

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y,$$

n'est pas vide et tout élément $z \neq 0$ de B est précédé d'un élément de S au moins. En effet, cette assertion est valable pour n'importe quel ensemble ordonné, fini et possédant le minimum 0, ce qu'on prouve facilement par induction.

Posons

$$S_x = \begin{cases} \{z \mid x \geqslant z \in S\} & (0 \neq x \in B) \\ \varnothing & (x = 0). \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $S_x \neq \varnothing$ pour $0 \neq x \in B$. On a aussi l'égalité

$$1 = \bigvee_{z \in S} z. \tag{1}$$

En effet, si l'on pose $\overline{1} = \bigvee_{z \in S} z$, on a, pour $0 \neq x \in B$,

$$\overline{1} \wedge x \geqslant a \wedge a = a \neq 0,$$

où $a \in S_x (\neq \varnothing)$, et par conséquent, $(\overline{1})' = 0$, le complément de l'élément $t \in B$ étant désigné par t', d'où $\overline{1} = ((\overline{1})')' = 0' = 1$.

Si l' on écrit par convention $0 = \bigvee_{t \in S_o} t$, on a

$$x = \bigvee_{z \in S_x} z \qquad (x \in B).$$

Il suffit, d'après le résultat et la convention qui précèdent, de démontrer ce fait pour $x \neq 0, 1$. En posant

$$\bar{x} = \bigvee_{z \in S_x} z, \qquad y = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z,$$

on a, tout d'abord, $x \geqslant \bar{x}$ et, par conséquent, d'après (1),

$$x \vee y \geqslant \bar{x} \vee y = \bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S} z = 1,$$

$$\bar{x} \wedge y \leqslant x \wedge y = x \wedge \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} (x \wedge z) = 0,$$

puisque, évidemment, $x \wedge z = 0$ pour $z \in S \setminus S_x$. Donc.

$$x' = (\bar{x})' = y \Rightarrow x = \bar{x}.$$

Posons

$$f(x) = S_x \qquad (x \in B).$$

Cette fonction, d'après tout ce qu'on vient d'établir, applique d'une manière biunivoque B sur $P(S)$. Comme on a de plus, pour x, $y \in B$:

$$f(x \vee y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{z \in S_x \cup S_y} z) = S_x \cup S_y = f(x) \cup f(y),$$

$$f(x \wedge y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \wedge \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{(z, t) \in S_x \times S_y} (z \wedge t)) = f(\bigvee_{z \in S_x \cap S_y} z) = S_x \cap S_y = f(x) \cap f(y),$$

cette application est un isomorphisme de $(B, \vee, \wedge)$ sur $(P(S), \cup, \cap)$, ce qui termine notre démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. Г. Курош, *Лекции ӣо общей алīебре*, Москва 1962.

DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Poseban otisak
PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA
UNIVERZITETA U BEOGRADU
Serija: Matematika i fizika, № 143—155 (1965)

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 149 (1965)

SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

D. S. Mitrinović et *D. D. Adamović*

1. Nous allons prouver tout d'abord le résultat suivant, relatif à l'inégalité

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Proposition 1. *L'inégalité* (1) *est vraie pour* $a \leqslant 3$.

La valeur $a = 3$ *est la meilleure possible; plus précisément, pour tout* $a > 3$ *il existe un nombre* $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *(qui dépend de a) tel que l'on ait*

$$\cos x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \quad (0 < x < x_1), \quad \cos x_1 = \left(\frac{\sin x_1}{x_1}\right)^a, \quad \cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \quad \left(x_1 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Démonstration. Pour $a > 0$ l'inégalité (1) est équivalente à la suivante:

$$x - \sin x \,(\cos x)^{-\frac{1}{a}} < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = x - \sin x \,(\cos x)^{-\frac{1}{a}} \quad (a > 1) \tag{3}$$

et ses deux dérivées premières:

$$f'(x) = 1 - (\cos x)^{1-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a} \sin^2 x \,(\cos x)^{-1-\frac{1}{a}}, \tag{4}$$

$$f''(x) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \sin x \,(\cos x)^{-2-\frac{1}{a}} \left[\cos^2 x - \frac{a+1}{(a-1)^2}\right]. \tag{5}$$

Dans le cas où $a = 3$ on a, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) < f(0) = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité (2), c'est-à-dire l'inégalité (1), est donc vraie pour $a = 3$.

x \ 2 /

et par conséquent

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^a > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \qquad \left(a<3;\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

on en déduit que l'inégalité (1) est vraie pour $a \leqslant 3$.

Soit maintenant $a>3$. On a alors

$$\frac{a+1}{(a-1)^2} = \frac{1}{a-1} + \frac{2}{(a-1)^2} < 1,$$

d'où, d'après (5), il résulte l'existence d'un nombre $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tel que l'on a

$$f''(x)>0 \quad (0<x<\xi), \quad f''(\xi)=0, \quad f''(x)<0 \quad \left(\xi<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Cette conclusion-là, combinée avec le fait que l'on a dans ce cas-là, d'après (3) et (4),

$$f(0)=0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty, \quad f'(+0)=0,$$

conduit à la seconde assertion de la proposition 1.

Notons que la courbe $y=f(x)$ a dans les cas où $0<a\leqslant 3$ et où $a>3$ les formes présentées par les figures 1 et 2, respectivement. Le petit cercle sur la figure 2 désigne le point d'inflexion.

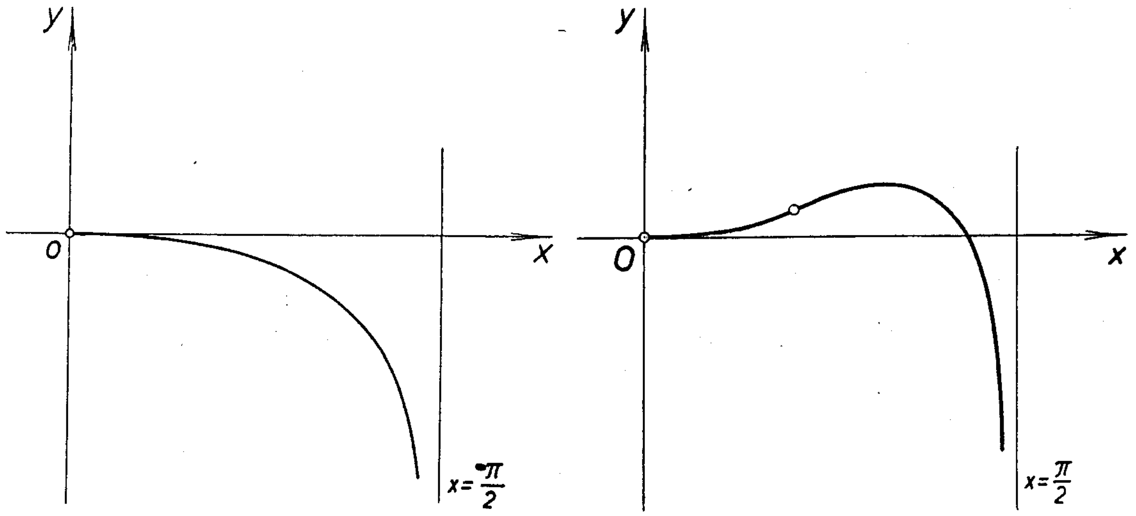


Fig. 1 et 2

On peut remarquer encore que l'on a aussi

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \qquad \left(a\leqslant 3;\quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

D. Đoković a démontré l'inégalité (1) pour $a=2$ en suivant une autre voie (*voir:* D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964, p. 66—67).

1.1. Étant donné que $0<\sin x<1 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, on a, pour $a\leqslant b$,

$$\frac{(\sin x)^a}{x^b} \geqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^b \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après cette remarque-là, on a la généralisation suivante de la première assertion de la proposition 1:

Proposition 2. *L'inégalité*

$$\cos x<\frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

est vraie pour $a\leqslant b\leqslant 3$.

2. L'étude de l'inégalité plus générale que (1), à savoir

$$(\cos x)^c<\frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad (a,\ b,\ c \text{ nombres réels; } b\neq 0), \tag{6}$$

dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se réduit à celle du signe de la fonction f définie par

$$f(x)=x-(\sin x)^p (\cos x)^q \qquad (p,\ q \text{ nombres réels}). \tag{7}$$

En effet, l'inégalité (6) pour $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est équivalente à

$$x-(\sin x)^{\frac{a}{b}} (\cos x)^{-\frac{c}{b}}<0$$

ou à

$$x-(\sin x)^{\frac{a}{b}} (\cos x)^{-\frac{c}{b}}>0$$

suivant que $b>0$ ou $b<0$.

On doit noter que pour $b=0$ l'étude de l'inégalité (6) est bien plus simple (elle se réduit pareillement à l'étude du signe de la fonction

$$1-(\sin x)^p (\cos x)^q;$$

cette étude s'achève assez facilement).

L'énoncé suivant contient nos résultats concernant le signe de la fonction f dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Les nombres x_1 et x_2 qui y figurent dépendent de p et de q.

Proposition 3. 1° *Pour* $p\geqslant 1$, $q\geqslant 0$, *on a*

$$f(x)>0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

2° *Il existe une fonction* $\lambda(p)$, *définie, continue et strictement décroissante de la valeur* 0 *jusqu'à la valeur* $-\frac{1}{3}$ *dans l'intervale* $(-\infty, 1)$, *telle que l'on a, pour* $p<1, q<\lambda(p)$, *de même que pour* $p=1, q\leqslant -\frac{1}{3}$,

$$f(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

3° *Pour* $p<1$, $q\geqslant 0$, *on a*

$$f(x)<0 \quad (0<x<x_1),\ f(x_1)=0,\ f(x)>0 \quad \left(x_1<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

4° *Pour* $p<1$, $\lambda(p)<q<0$, *on a*

$$f(x)<0\left(0<x<x_1 \text{ ou } x_2<x<\frac{\pi}{2}\right),\ f(x_1)=f(x_2)=0,\ f(x)>0 \quad (x_1<x<x_2).$$

5° *Pour* $p<1$, $q=\lambda(p)$, *on a*

$$f(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2} \text{ et } x\neq x_1\right), \quad f(x_1)=0.$$

6° *Pour* $p>1$, $q<0$ *ou pour* $p=1$, $-\frac{1}{3}<q<0$, *on a*

$$f(x)>0 \quad (0<x<x_1), \quad f(x_1)=0, \quad f(x)<0 \left(x_1<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

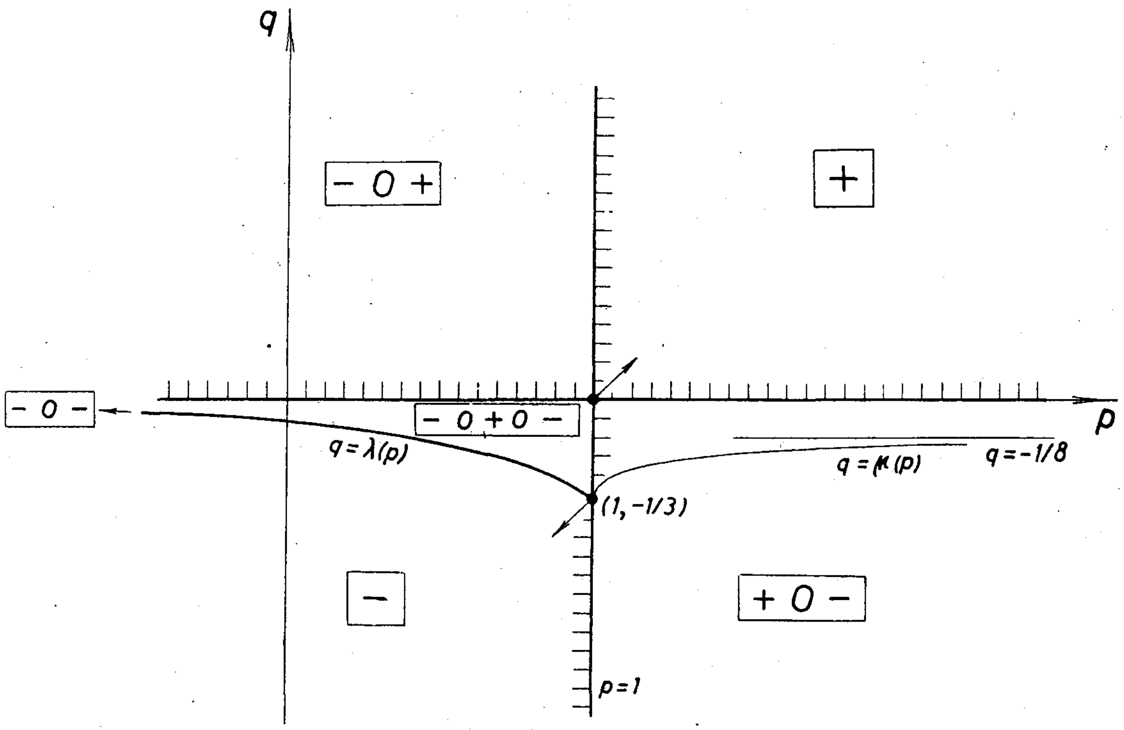


Fig. 3

Cette proposition est rendue visuelle par la figure 3, où sont présentés les domaines du plan Opq correspondants aux cas différents que l'on vient de distinguer. Les cas 1°, 2°, 3°, ... sont respectivement désignés par $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{-0+}$, etc. Les hachures marquent l'appartenance des points de la ligne-limite de deux domaines, et les flèches celle de la ligne grasse et de deux points particuliers.

On peut compléter l'assertion 3° par la remarque que, pour $0 \leqslant p < 1$, $q \geqslant 0$, $p^2 + q^2 > 0$, on a $x_1 \in (0, 1)$ et les assertions 4° et 5° par la remarque que l'on y a $x_1 \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ si $p \leqslant 0$. En effet, si $p, q \geqslant 0$, $p^2 + q^2 > 0$, on a $f(x) > 1 - 1 = 0 \left(1 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$, et lorsque $p, q < 0$, on a $f(x) < 1 - 1 = 0$ $(0 < x \leqslant 1)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixé, la fonction $f(x) = x - (\sin x)^p (\cos x)^q$ est strictement croissante par rapport à p et par rapport à q (séparément).

Comme on a, pour $p = 1$, $q = 0$,

$$f(x) = x - \sin x > 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

on en déduit l'assertion 1°.

D'autre part, d'après le § 1 (l'inégalité (2) avec $a = 3$), on conclut que $f(x) < 0$ pour $p \leqslant 1$, $q \leqslant -\frac{1}{3}$.

La seconde assertion de la proposition 1 et le fait que l'on a

$$-\frac{1}{3} < q < 0 \Rightarrow \left(q = -\frac{1}{a} \text{ et } a > 3\right)$$

entraînent la partie de l'assertion 6° concernant le cas $p = 1$, $-\frac{1}{3} < q < 0$.

Pour ce qui suit nous avons besoin des deux dérivées premières de la fonction $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - p(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1} + q(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}\left[q(q-1)\operatorname{tg}^4 x - (p+q+2pq)\operatorname{tg}^2 x + p(p-1)\right] \\ &= -(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}\left[q(q-1)t^2 - (p+q+2pq)t + p(p-1)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

où

$$t = \operatorname{tg}^2 x; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow t \in (0, +\infty).$$

Soit $p = 0$, $q > 0$. La seconde dérivée, donnée par (9), s'annulle alors une fois au plus dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et l'on a $f''(x) > 0$ dans un voisinage droit de $x = 0$. Comme l'on a, d'autre part, $f(0) < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, on obtient dans ce cas - là le comportement du signe de $f(x)$ précisé dans 3°.

Soit maintenant $p < 1$, $q = 0$. Si $0 < p < 1$, on a, d'après (7), (8) et (9), $f''(x) > 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(+0) = -\infty$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$; si $p < 0$, on a $f''(x) < 0$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0) = -\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$; en y ajoutant le cas trivial $p = q = 0$, on aboutit de nouveau au comportement 3° du signe de $f(x)$.

Soit $p < 1$, $q = 1$. Si $p < 0$, alors, d'après (7), $f(x) \uparrow \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0) = -\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$; si $0 < p < 1$, on a, d'après (7), (8) et (9),

$f''(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(+0)=-\infty$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$; dans ces deux cas on obtient, donc, encore une fois le comportement 3°.

Soit $p(p-1)q(q-1)\neq 0$. Alors l'équation

$$q(q-1)t^2-(p+q+2pq)t+p(p-1)=0 \tag{10}$$

peut être mise sous la forme suivante

$$t^2-At+B=0, \tag{10'}$$

avec

$$A=\frac{p+q+2pq}{q(q-1)}, \qquad B=\frac{p(p-1)}{q(q-1)}. \tag{11}$$

Pour que cette équation possède exactement une racine positive, il faut et suffit que $B<0$, ce qui a lieu dans les cas que voici:

$p\in(0,\ 1)$, $q\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$; $p\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$, $q\in(0,\ 1)$.

Laissant à part les cas déjà étudiés, on peut se borner aux trois cas suivants:

(I) $p\in(0,\ 1)$, $q\in(1,\ +\infty)$;

(II) $p\in(-\infty,\ 0)$, $q\in(0,\ 1)$;

(III) $p\in(0,\ 1)$, $q\in\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$.

Dans le cas (I) $p(p-1)<0$, d'où, d'après (9), la conclusion que l'on a alors $f''(x)>0$ dans un voisinage droit de $x=0$. Comme l'on a également $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f'(+0)=-\infty$, on a de nouveau établi le comportement 3°. Il en est de même dans le cas (II), puisque l'on a maintenant, d'après (7) et (8), $f'(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Laissons de côté le cas (III) et passons à celui où $B>0$. Cette inégalité est remplie das les cas suivants:

$$p\in(0,\ 1),\quad q\in(0,\ 1);\quad p,\ q\in(1,\ +\infty);\quad p,\ q\in(-\infty,\ 0);$$

$$p\in(-\infty,\ 0),\quad q\in(1,\ +\infty);\quad p\in(1,\ +\infty),\quad q\in(-\infty,\ 0).$$

Tenant compte de ce qu'on a déjà établi, on peut se borner aux cas suivants:

(IV) $p\in(0,\ 1)$, $q\in(0,\ 1)$;

(V) $p\in(-\infty,\ 0)$, $q\in(1,\ +\infty)$;

(VI) $p\in(-\infty,\ 0)$, $q\in\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$;

(VII) $p\in(1,\ +\infty)$, $q\in(-\infty,\ 0)$.

Dans le cas (IV), on a

$$p(p-1)<0,\quad q(q-1)<0,\quad p+q+2pq>0,$$

d'où, d'après (9), $f''(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. En observant que l'on a $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f'(0)=-\infty$, on obtient le comportement 3°. Il en est de même sous les conditions (V), la dérivée première étant, d'après (8), positive dans ce cas et puisque l'on a $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Considérons ensuite les cas (III) et (VI). Comme on a, pour le premier d'entre' ux, $p(p-1)<0$ et par conséquent $f''(x)>0$ dans un voisinage droit de $x=0$ $\left(\text{on a déjà établi que } f''(x) \text{ a alors exactement un zéro dans } \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty$, dans ce cas-là ne sont possibles que les comportements du signe de $f(x)$ précisés dans 2°, 4° et 5°. Il en est de même dans le second cas. En effet, on parvient alors à

$$-[q(q-1)t^2-(p+q+2pq)t+p(p-1)]$$
$$=-(qt-p)^2+qt^2+(p+q)t+p<0 \qquad (t>0),$$

et par conséquent à $f''(x)<0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. On a aussi $f(+0)=f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty$ d'où notre assertion.

Les mêmes possibilités se présentent si $p=0$, $-\frac{1}{3}<q<0$, cas que nous avons mis à part. En effet, on a alors

$$f(0)=-1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty, \quad f''(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour préciser ce qu'on vient d'établir, remarquons que les inégalités $f(x)<0$ et $f(x)>0$ sont respectivement équivalentes aux inégalités

$$q<\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x} \qquad \text{et} \qquad q>\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x},$$

de même que l'égalité $f(x)=0$ est équivalente à celle-ci

$$q=\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x}.$$

Pour $p<1$ la fonction g_p, définie par

$$g_p(x)=\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right), \tag{12}$$

tend vers $+\infty$ lorsque $x\to+0$ et vers 0 par les valeurs négatives lorsque $x\to\frac{\pi}{2}-0$. Il s'ensuit que $g_p(x)$ atteint son minimum dans l'intervalle $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ce minimum étant négatif, et cela pour tout $p<1$. Ce minimum est l'unique point extrêmal de la courbe situé au dessous de la droite $y=0$, puisque, s'il n'en était pas ainsi, la fonction f aurait, pour certaines valeurs négatives de q, plus de deux zéros dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, contrairement à ce qu'on a déjà établi. On remarque ensuite que pour tout $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixé la valeur de $g_p(x)$ décroît avec la croissance de p. Or, on peut en dire de même, évidemment, pour le minimum en question. En désignant par $\lambda(p)$ la valeur de ce minimum-là, on vient d'établir que la fonction $\lambda(p)$ est négative et strictement décroissante pour $p\in(-\infty, 1)$. Elle est aussi continue, ce qui est évident. Soit $\varepsilon>0$ arbitrairement choisi. Étant donné que

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log\dfrac{x}{\sin x}}{\log\cos x}=-\frac{1}{3},$$

on a, pour un $\xi\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixé,

$$\frac{\log\dfrac{\xi}{\sin\xi}}{\log\cos\xi}<-\frac{1}{3}+\varepsilon.$$

Pour le même ξ l'on a

$$\lim_{p\to1-0}\frac{\log\dfrac{\xi}{(\sin\xi)^p}}{\log\cos\xi}=\frac{\log\dfrac{\xi}{\sin\xi}}{\log\xi},$$

de manière qu'on aura, pour un $p<1$ et suffisamment proche de 1,

$$\lambda(p)\leqslant\frac{\log\dfrac{\xi}{(\sin\xi)^p}}{\log\cos\xi}<-\frac{1}{3}+2\varepsilon;$$

donc,

$$\overline{\lim_{p\to1-0}}\,\lambda(p)\leqslant-\frac{1}{3}.$$

D'après le résultat déjà obtenu relatif au cas $p\leqslant1$, $q\leqslant-\frac{1}{3}$, on a, d'autre part,

$$\lambda(p)>-\frac{1}{3}\qquad(p<1),$$

de sorte que l'on a établi l'égalité suivante

$$\lim_{p\to1-0}\lambda(p)=-\frac{1}{3}.$$

On peut écrire

(13) $$g_p(x)=\alpha(x)-p\,\beta(x),\quad \alpha(x)=\frac{\log x}{\log\cos x},\quad \beta(x)=\frac{\log\sin x}{\log\cos x}.$$

L'abscisse x_p du minimum négatif de $g_p(x)$ dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ satisfait à l'inégalité suivante

$$g_p'(x_p) = \alpha'(x_p) - p\,\beta'(x_p) = 0\,,$$

c'est-à-dire à l'égalité $\left(\text{on a } \beta'(x) \neq 0 \text{ pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$(14) \qquad p = \frac{\alpha'(x_p)}{\beta'(x_p)} = \frac{\frac{1}{x_p}\log\cos x_p + \operatorname{tg} x_p \log x_p}{\operatorname{cotg} x_p \log\cos x_p + \operatorname{tg} x_p \log\sin x_p} = h(x_p)\,,$$

où

$$(15) \qquad h(x) = \frac{\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg} x \log x}{\operatorname{cotg} x \log\cos x + \operatorname{tg} x \log\sin x} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction h, définie par (15), est continue pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et l'on a $h(+0) = 1$, $h\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\infty$. On en conclut que

$$\lim_{p \to -\infty} x_p = \frac{\pi}{2}\,,$$

d'où, d'après (13) et (14),

$$\lim_{p \to -\infty} \lambda(p) = \lim_{x_p \to \frac{\pi}{2} - 0} \left[\alpha(x_p) - \frac{\alpha'(x_p)}{\beta'(x_p)}\,\beta(x_p)\right]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\alpha(x)\,\beta'(x) - \alpha'(x)\,\beta(x)}{\beta'(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{(\operatorname{cotg} x \log\cos x + \operatorname{tg} x \log\sin x)\log x - \left(\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg} x \log x\right)\log\sin x}{\left(\cancel{\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg}\log x}\right)\log\cos x}$$

$$= 0\,.$$

La combinaison de tous les résultats concernant les cas

$$p \leqslant 1,\ q \leqslant -\frac{1}{3}\,; \quad (\mathrm{III})\,; \quad (\mathrm{VI})\,; \quad p = 0,\ -\frac{1}{3} < q < 0$$

que nous venons d'obtenir conduit a toutes les assertions 2°, 4° et 5°.

Considérons enfin le cas (VII). Pour toutes les valeurs de p et de q il reste en vigueur ce qu'on a dit à la page 29 sur la coïncidence des signes de $f(x)$ et de $q - g_p(x)$, la fonction g_p étant définie par (12). Pour $p > 1$, l'on a

$$g_p(+0) = -\infty\,, \quad g_p\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0\,.$$

Nous allons prouver que $g_p(x)$, pour $p > 1$, croît strictement dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; de plus, que l'on a, d'après (13),

$$g_p'(x) = \alpha'(x) - p\,\beta'(x) > 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\,;\ p > 1\right).$$

cotg x log cos x + tg x log sin x

Or, on a déjà démontré que la fonction f ne peut avoir plus d'un zéro dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si $p=1$, $q<0$. En outre, on a

$$g_1(x) = \frac{\log \frac{x}{\sin x}}{\log \cos x} < 0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right); \quad g_1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=0.$$

On en déduit que

$$g_1'(x) \geqslant 0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Partant de ce résultat et d'après (13) et le fait que l'on a

$$\beta'(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

pour $p>1$, l'on arrive à

$$g_p'(x) = \alpha'(x) - p\,\beta'(x) > \alpha'(x) - \beta'(x) = g_1'(x) \geqslant 0 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous avons, donc, démontré que $g_p(x)$ croît strictement de $-\infty$ jusqu'à 0 lorsque x varie de 0 jusqu'a $\frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que le signe de $f(x)$ a le comportement 6° dans ce dernier cas considéré.

2.1. Observons que la discussion exposée, complétée par quelques considérations et calculs simples, fournit des données assez précises sur les représentations graphiques de la fonction f dans tous les cas à distinguer.

On a, par exemple, pour le cas 6° [redacted] (où $p>1$, $q<0$; ce cas est le plus intéressant) les résultats que voici:

(16) $$f(0)=0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty, \quad f'(+0)=1;$$

$f''(x)$ est négatif dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si

(17) $$q<\mu(p) \quad (p>1);$$

dans le cas où

(18) $$q=\mu(p) \quad (p>1)$$

$f''(x)$ est aussi négatif dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sauf pour une seule valeur de x qui l'annule; pour

(19) $$\mu(p)<q<0 \quad (p>1)$$

$f''(x)$ a deux zéros dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entre lesquels il est positif; ailleurs il est de nouveau négatif; la fonction μ est définie par

$$\mu(p) = \frac{1}{\frac{1}{p}-4-4\sqrt{1-\frac{1}{p}}} \quad (p>1)$$

et elle croît strictement de $-\frac{1}{3}$ *à* $-\frac{1}{8}$ *lorsque p varie dans l'intervalle* $(1, +\infty)$; *dans les cas* (17) *et* (18) $f(x)$ *a un seul point extrêmal dans* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *et dans le cas* (19) $f(x)$ *peut en avoir un ou trois.*

Démonstration. On peut vérifier (16) immédiatement.

Dans le cas considéré on a $q(q-1)>0$, $B>0$ (*voir* (11)), de sorte que l'équation (10) est alors équivalente à (10′) et elle peut ne pas avoir de racines réelles ou en avoir deux de même signe (différents ou non) suivant que son discriminant

$$\Delta=(1+8p)\,q^2-2p\,(1-4p)\,q+p^2 \tag{20}$$

est non négatif ou négatif. Or, on a maintenant $1+8p>0$ et c'est pourquoi l'on aura, d'après (20),

$$(\alpha)\quad \Delta>0; \qquad (\beta)\quad \Delta=0; \qquad (\gamma)\quad \Delta<0$$

suivant que l'on a respectivement:

$$(\alpha)\ \mu_2(p)<q<\mu_1(p); \quad (\beta)\ q=\mu_1(p) \text{ ou } q=\mu_2(p); \quad (\gamma)\ q<\mu_2(p) \text{ ou } q>\mu_1(p),$$

où $\mu_1(p)$ et $\mu_2(p)$ désignent les zéros du trinôme du second degré en q donnés par

$$\mu_{1,2}(p)=p\,\frac{1-4p\pm4\sqrt{p(p-1)}}{1+8p} \qquad (p>1). \tag{21}$$

En effet, pour $p>1$, l'on a

$$p(p-1)>0, \quad 1-4p<0, \quad p^2>0,$$

d'où la conclusion, d'après (20) et (21), que ces racines sont réelles, différentes et négatives, et l'on a, évidemment, $\mu_2(p)<\mu_1(p)$.

D'autre part, le signe commun des racines de l'équation (10), en supposant leur réalité, est, d'après (10′), positif ou négatif suivant qui l'on a $A>0$ ou $A<0$ (si $A=0$, alors (10) ne peut pas avoir de racines réelles), c'est-à-dire, d'après (11), suivant que l'on a

$$q>\mu_3(p) \quad \text{ou} \quad q<\mu_3(p),$$

avec

$$\mu_3(p)=-\frac{p}{1+2p} \qquad (p>1).$$

Or, on a, pour $p>1$,

$$\frac{1}{\mu_2(p)}-\frac{1}{\mu_3(p)}=\left(\frac{1}{p}-4+4\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)-\left(-\frac{1}{p}-2\right)$$

$$=2\,(t+2\sqrt{1-t})=2\,\varphi(t) \qquad \left(t=\frac{1}{p}\right);$$

$$\varphi(1)=0, \qquad \varphi'(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-t}}<0 \qquad (0<t<1)$$

$$\Rightarrow \varphi(t)>0 \qquad (0<t<1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_2(p)}-\frac{1}{\mu_3(p)}>0 \qquad (p>1).$$

Donc, les fonctions $\mu_2(p)$ et $\mu_3(p)$ étant négatives pour $p>1$, on a

(22) $$\mu_2(p)<\mu_3(p) \qquad (p>1).$$

On conclut immédiatement que la fonction

$$\mu_1(p)=\frac{1}{\frac{1}{p}-4-4\sqrt{1-\frac{1}{p}}}$$

croît strictement de $-\frac{1}{3}$ à $-\frac{1}{8}$ lorsque q varie dans l'intervalle $(1, +\infty)$ et que $\mu_3(p)$ décroît strictement en même temps, et cela partant de la valeur $-\frac{1}{3}$. On a, par conséquent,

(23) $$\mu_3(p)<\mu_1(p) \qquad (p>1).$$

Si l'on pose $\mu(p)=\mu_1(p)$, alors les inégalités (22) et (23), de même que les rôles précédemment établis des fonctions $\mu_r(p)$ $(r=1, 2, 3)$, conduisent à la partie de notre énoncé concernant la seconde dérivée de $f(x)$.

Il est clair que, dans le cas considéré, $f(x)$ a toujours un maximum au moins. On conclut sans difficulté, d'après les résultats déjà obtenus, que cette fonction ne peut pas avoir d'autres points extrêmaux si $q\leqslant\mu(p)$ et que, pour $\mu(p)<q<0$, elle peut ou n'avoir que le maximum mentionné, ou bien avoir encore un minimum et un maximum. Toutes les deux possibilités se réalisent effectivement, la première par raison de continuité et la seconde d'après quelques essais numériques, effectués sur la machine électronique par S. Jovanović.

Notre énoncé est ainsi complètement démontré.

Observons que S. Jovanović a fait un nombre considérable de calculs utiles rélatifs au cas $p>1$, $q<0$, au moyen desquels il a obtenu une image plus précise de l'allure de la courbe $y=f(x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. En particulier, il a déterminé, approximativement, le domaine du plan $0\,pq$ où $f(x)$ a trois points extrêmaux. Pour plus de détails, *voir* l'article suivant dans ces *Publications*.

2.2. Aussi pourait-on se proposer de déterminer de plus près la fonction λ.

ПАВЕЛ ТОДОРОВ, STANISLAV PEJOVIĆ, CHR. KARANIKOLOV, BRANISLAV MARTIĆ, DUŠAN ADAMOVIĆ, ГРОЗЬО СТАНИЛОВ, ANDRZEJ MĄKOWSKI I W. SIDRPIŃSKI

MATEMATIČKE NOTE

Математички весник
2 (17), Св. 3, 1965

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
2 (17) 1965 стр. 207—208.

UNE DÉMONSTRATION IMMÉDIATE DU THÉORÈME SUR LA REPRÉSENTATION DES ALGÈBRES DE BOOLE FINIES

Dušan Adamović

(Communiqué le 18 octobre 1965)

1. Il s'agit du théorème connu suivant:

Toute algèbre de Boole finie $(B, \vee, \wedge)$ *est isomorphe à une algèbre de Boole de la forme* $(P(S), \cup, \cap)$ *où* $P(S)$ *désigne l'ensemble partitif de l'ensemble* S, $\cup$ *et* $\cap$ *étant respectivement l'union et l'intersection des ensembles.*

Dans les manuels et les monographies que nous connaissons on démontre le théorème cité d'une manière indirecte, en le déduisant, au moyen de considérations supplémentaires, des résultats bien plus généraux (voir, par exemple, [1], p. 220—223).

La démonstration directe qui suit pourrait présenter quelque intérêt du point de vue de la méthode.

2. Soit $(B, \vee, \wedge)$ une algèbre de Boole finie, ce qui veut dire que l'ensemble B est fini, et soient 0 et 1 son minimum et son maximum, respectivement. Mis à part le cas trivial ou B n'a qu'un seul élément, l'ensemble S de tous les éléments de B qui sont différents de 0 et suivent immédiatement 0, par rapport à la relation d'ordre $\leqslant$ définie dans B par

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y,$$

n'est pas vide et tout élément $z \neq 0$ de B est précédé d'un élément de S au moins. En effet, cette assertion est valable pour n'importe quel ensemble ordonné, fini et possédant le minimum 0, ce qu'on prouve facilement par induction.

Posons

$$S_x = \begin{cases} \{z \mid x \geqslant z \in S\} & (0 \neq x \in B) \\ \varnothing & (x = 0). \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $S_x \neq \varnothing$ pour $0 \neq x \in B$. On a aussi l'égalité

$$1 = \bigvee_{z \in S} z. \tag{1}$$

En effet, si l'on pose $\overline{1} = \bigvee_{z \in S} z$, on a, pour $0 \neq x \in B$,

$$\overline{1} \wedge x \geqslant a \wedge a = a \neq 0,$$

où $a \in S_x (\neq \varnothing)$, et par conséquent, $(\overline{1})' = 0$, le complément de l'élément $t \in B$ étant désigné par t', d'où $\overline{1} = ((\overline{1})')' = 0' = 1$.

Si l' on écrit par convention $0 = \bigvee_{t \in S_o} t$, on a

$$x = \bigvee_{z \in S_x} z \qquad (x \in B).$$

Il suffit, d'après le résultat et la convention qui précèdent, de démontrer ce fait pour $x \neq 0,\ 1$. En posant

$$\bar{x} = \bigvee_{z \in S_x} z, \qquad y = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z,$$

on a, tout d'abord, $x \geqslant \bar{x}$ et, par conséquent, d'après (1),

$$x \vee y \geqslant \bar{x} \vee y = \bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S} z = 1,$$

$$\bar{x} \wedge y \leqslant x \wedge y = x \wedge \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} (x \wedge z) = 0,$$

puisque, évidemment, $x \wedge z = 0$ pour $z \in S \setminus S_x$. Donc.

$$x' = (\bar{x})' = y \Rightarrow x = \bar{x}.$$

Posons

$$f(x) = S_x \qquad (x \in B).$$

Cette fonction, d'après tout ce qu'on vient d'établir, applique d'une manière biunivoque B sur $P(S)$. Comme on a de plus, pour $x,\ y \in B$:

$$f(x \vee y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{z \in S_x \cup S_y} z) = S_x \cup S_y = f(x) \cup f(y),$$

$$f(x \wedge y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \wedge \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{(z,\, t) \in S_x \times S_y} (z \wedge t)) = f(\bigvee_{z \in S_x \cap S_y} z) = S_x \cap S_y = f(x) \cap f(y),$$

cette application est un isomorphisme de $(B,\ \vee,\ \wedge)$ sur $(P(S),\ \cup,\ \cap)$, ce qui termine notre démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. Г. Курош, *Лекции йо общей алiебре*, Москва 1962.

A. SADE, W. SIERPIŃSKI, D. D. ADAMOVIĆ D. BLANUŠA, D. C. B. MARSH,
A. MĄKOWSKI

PROBLEMI

Математички весник
2 (17), Св. 3, 1965

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

Il est désirable d' adjoindre aux problèmes qui doivent être originaux, leurs solutions ainsi que d' autres informations, surtout sur la litérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

---

54. *Proposé par A. Sade, Pertuis, France*

$Q=E\,(\ )$ étant un quasigroupe sur l' ensemble E, le transposé de Q. $R=QP^{123}=E\,(.)$ est défini par la condition

$$\forall\, x,\ y,\ z \in E,\ xy=z \Leftrightarrow z.\ x=y.$$

Un quasigroupe est demi-symétrique s' il coincïde avec son transposé. Soit un quasigroupe $Q=E\,(\ )$ isotope de son transposé, $QP^{123}=R=E\,(.)$, par la distorsion $(1,\,1,\,F)$, F d'ordre 3^m dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_E$; soit S_i l' ensemble des éléments de E constituant les cycles de longueur 3^i de F, et g_i le nombre de ces cycles. Alors, on montre que

(i) Chaque sous-ensemble $E_i=S_0+S_1+\cdots+S_i$ est un sous-quasigroupe de Q, isotope de son transposé par la distorsion $(1,\,1,\,F_i)$ où F_i est la permutation induite par F dans E_i.

(ii) Si Q est fini, l' ordre de Q est divisible par 3, ou bien tous les g_i sont multiples de 3.

(iii) Tout quasigroupe isotope de son transposé, dont l' ordre est premier avec 3 est isotope d' un quasigroupe demi-symétrique, sauf peut être si Q est isotope d' un quasigroupe admettant une autotopie distorsive $(1,\,1,\,F)$, d' ordre 3^m, pour laquelle le nombre des cycles non monômes de même longueur dans F est divisible par 3, quelle que soit cette longueur.

C'est là une réponse partielle à la question posée dans Matematička Biblioteka, 25 (1963), 71—72, Problème $N°$ 1 et dans Rendiconti del Circolo di Palermo, 12 (1963), p. 363, réciproque du Théorème 7 (iii).

On a pu construire des quasigroupes, H, isotopes de leur transposé par une distorsion $(1,\,1,\,F)$ et qui ne sont isotopes d' aucun quasigroupe demi-symétrique. On demande une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de tels quasigroupes, H. Il suffira d'examiner le cas où E est d' ordre 3^m.

55. *Proposé par W. Sierpiński, Université de Warszawa*

Trouver cent nombres naturels consécutifs parmi lesquels il n' y a aucun qui soit divisible par 11 ou par 13, mais ne soit pas divisible par aucun des nombres 2. 3, 5 et 7 et démontrer qu' il existe une infinité de telles centaines.

56. *Proposé par W. Sierpiński, Université de Warszawa*

Soit u_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ la suite déterminée par les conditions: $u_1=2$ et $u_{n+1}=u_n{}^{u_n}$ pour $n=1,\ 2,\ldots$

a) Combien de termes de cette suite nous savons effectivement écrire en chiffres du systéme décimal?

b) Trouver un nombre naturel n pour lequel le nombre u_n+1 soit composé.

57. *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Soit $a<b$, $A<B$, $\alpha<\frac{B-A}{b-a}<\beta$.

1° Est-ce-qu'il existe une fonction réelle f partout infiniment différenciable et satisfaisant aux conditions

$$f(x)\uparrow (x\in[a,b]);\ f(x)=A\ (x<a),\ f(x)=B\ (x>b)\,?$$

2° Existe-t-il une fonction réelle g partout infiniment différenciable est remplissant les conditions:
$g(x)$ est convexe dans $[a, b]$;

$$g(x)=A+\alpha\,(x-a)\quad (x<a),\ g(x)=B+\beta\,(x-b)\quad (x>b)\,?$$

58. *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Existe-t-il une fonction réelle f partout infiniment différenciable et possédant la propriété: pour tout $h>0$ fixé on a $f(x+h)-f(x)>0$ si x est suffisamment grand, mais $f(x)$ n'est pas monotone pour x suffisamment grand?

REŠENI PROBLEMI

29. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Démontrer que tout nombre rationnel positif r est, pour tout nombre naturel m, une somme finie

$$r=1/m_1+1/m_2+\cdots+1/m_s,$$

où m_i $(i=1,2,\ldots,s)$ sont des nombres naturels tels que $m<m_1<m_2<\cdots<m_s$.

Solution de D. Blanuša, Université de Zagreb

Le nombre m étant choisi, considérons la série harmonique $1/(m+1)+$ $+1/(m+2)+1/m+3)+\cdots$. Cette série étant divergente, il existe un nombre naturel $k\geqslant m$ tel qu'on a $\sum_{s=m+1}^{k}\frac{1}{s}<r\leqslant\sum_{s=m+1}^{k+1}\frac{1}{s}$. (Pour $k=m$ la somme à gauche est zéro.) Au cas d'égalité il n'y a plus rien à démontrer. Autrement, on aura

$$r=\sum_{s=m+1}^{k}\frac{1}{s}+r_1,\quad r_1<\frac{1}{k+1}.$$

En appliquant le procédé P du problème 30 au nombre rationel r_1, on obtient la décomposition voulue.

Le problème est aussi résolu par l'auteur.

Problems **29** and **30.** *Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.* For every pair natural numbers, m and n $(m<n)$, define $S(n, m)=\sum_{j=m+1}^{n}1/j$. For m fixed and $n=m+1,\ m+2,\ldots,$ the sequence $\{S(n, m)\}$ is monotone increasing a d unbounded. Thus for any positive rational number r there exists an n for which $S(n^*, m)\leqslant r<S(n^*+1, m)$. With $0\leqslant r-S(n^*, m)<$ $<1/(n^*+1)$, should the equality on the left hold, the solution of Problem 29 ist complete; otherwise, Problem 29 has been reduced to Problem 30. For $r_1=p_1/q_1<1/(n^*+1)<1$ with p_1, q_1 positive and relatively prime, $n_1=[q_1/p_1]+$

$+1 > n^* + 1$. Letting $p_2/q_2 = p_1/q_1 - 1/n_1 = (p_1 n_1 - q_1)/q_1 n_1$ with p_2, q_2 positive and relatively prime, one finds $0 < (p_1 n_1 - q_1)/q_1 n_1 \leqslant p_1/q_1 n_1$ with equality (which would terminate the procedure) if and only if $p_1/q_1 = 1/(n_1 - 1) < 1/n^*$. Otherwise, let $g = (p_1 n_1 - q_1, q_1 n_1)$ whence $p_2 \leqslant g p_2 = p_1 n_1 - q_1 < p_1$ and $n_2 = [q_2/p_2] + 1 = [q_1 n_1/(p_1 n_1 - q_1)] + 1 \geqslant [q_1 n_1/p_1] + 1 \geqslant n_1^2 - n_1 + 1 > n_1$. Thus the sequence of p_i is strictly decreasing and, consisting of positive integers, must terminate the Procedure P after no more than p_i steps. The successive n_i constitute a strictly increasing sequence so that the decomposition of r consists of *distinct* terms of the form $1/n_i$.

30. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Démontrer que si r est un nombre rationnel tel que $0 < r < 1$, le procédé P suivant conduit à la décomposition du nombre r en une somme d'un nombre fini de termes distincts dont chacun est de la forme $1/n$, où n est un entier > 1.

Procédé P. r étant un nombre rationnel $0 < r < 1$, soit n_1 le plus petit nombre naturel tel que $r \geqslant 1/n$. Si $r > 1/n_1$, soit $r_1 = r - 1/n_1$ et procédons avec le nombre r_1 comme nous avons procédé avec le nombre r, et ainsi de suite.

Solution de D. Blanuša, Université de Zagreb.

Posons $r = \dfrac{p}{q}$, $0 < p < q$, $(p, q) = 1$ On aura

$$q = \rho_1 p + \rho_2,\quad 0 < \rho_2 < p < q;\quad \rho_1 \geqslant 1,$$

donc

$$0 < p - \rho_2 < p$$

et

$$r = \frac{p}{q} = \frac{1}{\rho_1 + 1} + \frac{p - \rho_2}{q(\rho_1 + 1)} = \frac{1}{n_1} + r_1$$

où nous avons posé

$$2 \leqslant \rho_1 + 1 = n_1,\quad \frac{p - \rho_2}{q(\rho_1 + 1)} = r_1 > 0.$$

$n_1 = \rho_1 + 1$ est, en effet, le plus petit nombre naturel tel que $r \geqslant 1/n_1$, car $1/\rho_1 = \dfrac{p}{q - \rho_2} < \dfrac{p}{q} = r$. On a aussi

$$r_1 = \frac{p - \rho_2}{q(\rho_1 + 1)} < \frac{p}{q(\rho_1 + 1)} < \frac{1}{\rho_1 + 1} = \frac{1}{n_1}.$$

Si $p - \rho_2 = 1$ $\left(\text{éventuellement après simplification de la fraction } \dfrac{p - \rho_2}{q(\rho_1 + 1)}\right)$ le procédé est achevé. Sinon, on aura

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ avec } p_1 < p$$

et

$$r_1 = \frac{1}{n_2} + \frac{p_1 - \rho_4}{q_1(\rho_3 + 1)} = \frac{1}{n_2} + \frac{p_2}{q_2}$$

où $p_2 < p_1$ et $\dfrac{1}{n_2} < r_1 < \dfrac{1}{n_1}$, donc $n_2 > n_1$. Comme les numérateurs vont en décroissant, le procédé doit finir, et les fractions $1/n_i$ obtenues sont différentes entre elles.

Le problème est aussi résolu par l'auteur.

31. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Donner un exemple d'un nombre rationnel r, où $0<r<1$, qui est une somme de s nombres distincts de la forme $1/n$ (où n est un nombre naturel) mais pour lequel le procédé P (voir le problème précédent) conduit à une décomposition ayant plus de s termes.

Solution de D. Blanuša, Université de Zagreb.

Nous donnons plusieurs exemples, la décomposition à droite étant celle qui est fournie par le procédé P.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{11}{28}=\frac{1}{3}+\frac{1}{17}+\frac{1}{1428},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{13}{40}=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{280},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{14}{45}=\frac{1}{4}+\frac{1}{17}+\frac{1}{438}+\frac{1}{223380}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{11}=\frac{16}{55}=\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{1100},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}=\frac{18}{65}=\frac{1}{4}+\frac{1}{38}+\frac{1}{1647}+\frac{1}{8136180},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{14}=\frac{19}{70}=\frac{1}{4}+\frac{1}{47}+\frac{1}{6580},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{17}=\frac{22}{85}=\frac{1}{4}+\frac{1}{114}+\frac{1}{19380},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{61}{84}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{39}+\frac{1}{1820}.$$

31. *Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines.*
The simplest exemple is $r=9/20=1/4+1/5$, which by Procedure P is decomposed into $1/3+1/9+1/180$.

Also solved by the author.

32. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade.*

Déterminer les costantes a et b les meilleurs possibles telles que

$$a \leqslant \sin^k x+\cos^k x \leqslant b \quad (k \text{ entier})$$

pour tout x pour lequel $\sin^k x+\cos^k x$ est défini.

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines. The statement does not specify whether a and b are to depend on k or not.

If k is a negative odd integer, then $\sin^k x+\cos^k x$ is unbounded both above and below (*i.e.*, neither a nor b exists);

If k is a negative even integer, then $\sin^k x + \cos^k x$ has no maximum, but has a minimum of $2^{\frac{1}{2}k+1}$

if $k=0$, the expression is identically 2 whenever defined;

if $k=1$, $\sin x + \cos x \equiv \sqrt{2} \sin (x+\pi/4)$ has extrema of $-\sqrt{2}$ and $+\sqrt{2}$;

if k is a positive even integer, the expression varies from $2^{1-\frac{1}{2}k}$ to 1;

if k is a positive odd integer ($\geqslant 3$), the extrema are -1 and $+1$.

The procedure used was the examination of $D_x (\sin^k x + \cos^k x) = k \sin x \cos x (\sin^{k-2} x - \cos^{k-2} x)$ for critical values; these are limited to integral multiples of $\pi/4$; the function is readily evaluated at these few points and the minima and maxima determined.

Other conclusions, as desired, are readily obtained; *e. g.*, the best possible a und b for which $a \leqslant \sin^k x + \cos^k x \leqslant b$ for all positive integral k and all x are $a = -\sqrt{2}$ and $b = +\sqrt{2}$.

33. *Доставил Хр. Караниколов, Университет София*

Пусть $f(x) = a_0 x^n - \sum_{k=1}^{n} a\ x^{n-k}$ и $\varphi(x) = a_n x^n - \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x^{n-k}$ где $a_k \geqslant 0$

$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots,\ n;\ a_0 a_n \neq 0),\ x_1 > 0,\ x_2 > 0.$

Доказать, что если $f(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ и $a_0 \neq a_n$, то $x_1 + x_2 > 2$.

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines

Under the given conditions that $a_k \geqslant 0$, $x_1 > 0$, and $x_2 > 0$, $f(x_1) = 0$

implies that $a_0 x_1{}^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_1{}^{n-k} \geqslant a_n$ and $\varphi(x_2) = 0$ implies that $a_n x_2{}^n =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x_2^{n-k} \geqslant a_0.$

For $a_0 a_n \neq 0$, $x_1 + x_2 \geqslant (a_n/a_0)^{1/n} + (a_0/a_n)^{1/n} = t + (1/t)$ in form >2 for $t > 0$, $t \neq 1$ as is the case when $a_0 \neq a_n$. (The latter inequality is presumed to be well known).

Also solved by the author.

34. *Доставил Т. Т. Тонков, Университет София*

Пусть p_1, p_2 и p_3 примитивные корни по простому модулю p. Доказать, что сравнение $p_1 \equiv p_2 p_3 \pmod{p}$ — невозможно!

Solutions by D. C. B. Marsh.

No 1. Since primitive roots are quadratic non-residues, and since the product of two quadratic non-residues is a quadratic residue, the congruence $p_1 \equiv p_2 p_3 \pmod{p}$ is impossible for p_1, p_2, p_3 primitive roots modulo the prime p.

No 2. The prime 2 may be quickly dismissed, after which $p_1 \equiv p_2 p_3 \pmod{p}$ would imply that $p_1^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv p_2^{\frac{1}{2}(p-1)} p_3^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$. For primitive roots p_1, p_2 p_3 the preceding becomes $-1 \equiv +1 \pmod{p}$, which is impossible.

34. *Решение которое дал A. Makowski, Warszawa*

Теорема неверна для $p=2$: единственным первообразным корнем в этом случае является 1 и, конечно, $1\equiv 1\cdot 1 \pmod{2}$.
Если предпологать, что $p\neq 2$, имеет место более общая теорема:

Если $n=4$, p^{α} или $2\,p^{\alpha}$, где p — нечётное простое число и α — целое неотрицательное число, p_1, p_2, p_3 — первообразные корни по модулю n, то сравнение $p_1\equiv p_2\, p_3$ (мод n) невозможно.

Доказательство. Так как p_1 первообразный корень, существуют целые положительные числа x, y такие что $p_2\equiv p_1^{x} \pmod{n}$, $p_3\equiv p_1^{y} \pmod{n}$. Таким образом $p_1\equiv p_1^{x+y} \pmod{n}$, откуда $1\equiv p_1^{x+y-1} \pmod{n}$ и $x+y-1$ делится на $\varphi(n)$ ($\varphi(n)$ обозначаем известную функцию Эйлера). Так как для $n<2\,\varphi(n)$ — число четное, $x+y-1$ — четное и одно из чисел x и y — четное. Претположим, что x — четное: $x=2t$ (t — целое). Тогда $p_2^{\varphi(n)/2}\equiv(p_1^{x})^{\varphi(n)/2}=(p_1^{t})^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$ (теорема Эйлера) и получаем противоречие с определением первообразного корня.

Тоже решил автор.

D. D. ADAMOVIĆ

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS A CROISSANCE LENTE DE KARAMATA (I)

Математички весник
3 (18), Св. 2, 1966.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
3 (18), 1966 стр. 123—136

Dušan D. Adamović

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA I

(Communiqué le 25 mars 1966)

0. Une fonction reelle $L(x)$ est dite *à croissance lente* si elle est définie et positive pour $x \geqslant 0$ et si

(1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$$

pour tout $\lambda > 0$.

Les fonctions suivantes sont par exemple à croissance lente:

$$L(x) = \log(x+2) \qquad (x \geqslant 0);$$

$$L(x) = (\underbrace{\log \log \ldots \log}_{k \text{ fois}} x)^{\alpha} \qquad (x \text{ suffisamment grand; } \alpha \text{ réel});$$

$$L(x) = \log(x+2) + \sin x + 1 \qquad (x \geqslant 0);$$

$L(x)$ pour $x \geqslant 0$ fonction positive qui tend vers une limite positive finie lorsque $x \to +\infty$;

$$L(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1 + |\log t|} \qquad (x > 0);$$

$$L(x) = \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) \log(x+2) + \cos[x] \qquad (x \geqslant 0).$$

Ces exemples montrent qu'une fonction à croissance lente peut être mais n'est pas nécessairement monotone pour x suffisamment grand et qu'elle peut tendre vers l'infini positif, vers zéro ou vers une limite positive et finie, lorsque $x \to +\infty$. Dans se qui suit, nous allons montrer, entre autre. qu'elle peut aussi osciller pour $x \to +\infty$, même avec un intervalle d'oscillation infini.

La notion de fonction à croissance lente a été introduite par *J. Karamata* en 1930 [7] à la suite des travaux de *E. Landau* [9], *G. Polya* [11, 12] et *R. Schmidt* [13]. Les fonctions à croissance lente ont été appliquées depuis dans les généralisations des théorèmes abéliens et taubériens, de même que dans la théorie des séries trigonométriques et dans quelques autres questions particulières. On a obtenu aussi beaucoup de résultats concernant les fonctions à croissance lente elles-même.

Citons tout d'abord les résultats fondamentaux suivants:

0.1. *Soit* $L(x)$ *une fonction positive pour* $x \geqslant 0$ *et mesurable sur* $(0, +\infty)$. *Si l'égalité* (1) *est valable pour tout* $\lambda \in E$, *l'ensemble* $E \subset (0, +\infty)$ *étant à mesure positive, alors* (1) *est valable pour tout* $\lambda > 0$ *et l' on a* $\dfrac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ $(x \to +\infty)$ *uniformément pour* $\lambda \in [a, b]$, *où* $0 < a < b < +\infty$.

Ce théorème-là, fondamental pour la théorie et les applications des fonctions à croissance lente, a été démontré par *J. Karamata* [7, 8], mais seulemen' pour le cas spécial où la fonction $L(x)$ est continue et l'ensemble E est un intervalle. *J. Karamata* a déduit ce résultat de la représentation de fonction à croissance lente (0.2, cas particulier où la fonction $L(x)$ est continue). Le théorème a été démontré directement et pour le cas général de fonction mesurable par *T. van Aarden — Ehrenfest*, *N. G. de Bruijn* et *J. Korevar* [1], qui ont cependant conservé l'hypothèse restrictive sur *E. H. Delange* [6] et *W. Matuscewska* [10] ont donné des démonstrations directes de 0.1 sans aucune restriction.

0.1.1. *Corollaire. Une fonction à croissance lente qui est mesurable sur* $[0, +\infty)$ *est bornée, pour un* $a > 0$ *suffisamment grand, sur tout intervalle fini* $[a, b]$ $(b > a)$ *et par suite elle est intégrable dans le sens de Lebesgue sur chacun de tels intervalles.*

0.2. *(Théorème de représentation). Une foncion* $L(x)$ *mesurable sur* $[0, +\infty)$ *est à croissance lente si et seulement si l'on a*

$$L(x) = c(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} \qquad (x \geqslant 0), \tag{2}$$

où $c(x)$ *est une fonction positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *qui tend vers une limite finie et positive lorsque* $x \to +\infty$ *et la fonction* $\varepsilon(x)$ *est continue pour* $x \geqslant 0$ *et tend vers zéro lorsque* $x \to +\infty$.

0.3. *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et la fonction* $L^+(x)$ *est positive pour* $x \geqslant 0$ *et telle que* $L^+(x) \sim L(x)$ $(x \to +\infty)$, *alors la fonctions* $L(x)$ *est à croissance lente.*

0.4. *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et si* $\alpha > 0$, *alors*

$$x^\alpha L(x) \to +\infty, \qquad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

0.5. 1° *Soit la fonction* $L(x)$ *à croissance lente et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et soit, pour* $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{L}_1(x) &= x^{-\alpha} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^\alpha L(t)\}, & \overline{L}_2(x) &= x^\alpha \sup_{x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \\ \underline{L}_1(x) &= x^\alpha \inf_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, & \underline{L}_2(x) &= x^{-\alpha} \inf_{x \leqslant t < +\infty} \{t^\alpha L(t)\} \end{aligned} \qquad (x \geqslant 0), \tag{3}$$

où l'on attribue à chacune de ces fonctions la valeur 1 *pour* $x = 0$. *Alors toutes les fonctions* $\overline{\underline{L}}_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ *sont à croissance lente et mesurables sur* $[0, +\infty)$ *et l'on a*

$$\overline{\underline{L}}_\nu(x) \sim L(x) \qquad (x \to \infty;\ \nu = 1, 2).$$

2° *Soit la fonction* $L(x)$ *positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$. *Alors les relations*

$$\overline{L}_1(x) \sim L(x), \quad \overline{L}_2(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

ou bien les relations

$$\underline{L}_1 = (x) \sim L(x), \quad \underline{L}_2(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

les fonctions $L_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ *étant définies par* (3), *entraînent que la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente.*

0.5.1. *Soit la fonction* $L(x)$ *mesurable et positive sur* $[0, +\infty)$. *Pour qu'elle soit à croissance lente il faut et il suffit que pour tout* $\alpha > 0$ *existent deux fonctions* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *telles que l'on ait*

$$\varphi_1(x) \nearrow, \quad \varphi_2(x) \searrow \qquad (x \geqslant 0),$$

$$x^\alpha L(x) \sim \varphi_1(x), \quad x^{-\alpha} L(x) \sim \varphi_2(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Dans les applications on emploie toujours les fontions à croissance lente mesurables (et par conséquent, d'après 0.1, intégrables sur des intervalles finis et suffisamment éloignés de zéro). Outre cela, dans toutes les applications connues ne sont essentielles que les propriétés des fonctions à croissance lente pour les valeurs de x suffisamment grandes. C'est pourquoi nous acceptons la convention suivante.

Convention. *Dans ce qui suit on va sous-entendre (sans l'énoncer explicitement) que toute fonction à croissance lente est mesurablə sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle* $[0, a]$ $(a > 0)$.

On pourra facilement voir lesquels des résultats à suivre sont valables sans ces hypothèses restrictives, c'est-à-dire pour le cas général de fonction à croissance lente.

Notons ici le fait suivant. Au sujet de 0.4 on pourrait être tenté de poser la question *si les conditions*

$$x^\alpha f(x) \to +\infty, \quad x^{-\alpha} f(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty; \ \alpha > 0) \tag{4}$$

sont suffisantes pour que la fonction $L(x)$, *positive (et, par exemple, continue) pour* $x \geqslant 0$, *soit à croissance lente. La réponse est négative,* comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(x) = 2 + \sin x \qquad (x \geqslant 0),$$

qui est positive et continue (infiniment différenciable) pour $x \geqslant 0$ et statisfait à (4) et qui n'est pas cependant à croissance lente, puisque

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{2 + \sin 2x}{2 + \sin x}$$

ne tend pas vers 1 lorsque $x \to +\infty$.

Outre les propositions 0.1—0.5.1, on a obtenu beaucoup d'autres résultats relatifs aux fonctions à croissance lente. Dans les paragraphes suivants nous allous démontrer quelque résultats qui, à notre conuaissance, étaient jusqu'à présent inconnus, complètement ou partiellement, ou étaient connues sous des hypothèset plus restrictives. Les résultats sur les fonctions à croissance lente seront groupés en théorèmes I—VII et les énoncés auxiliares en lemmes I—V.

1. Dans quelques démonstrations nous aurons besoin des variantes suivantes des théoremes de *L'Hospital—Stolz*, analogues à quelques propositions dans le paragraphe 8 du chapitre I de [14].

LEMME I. *Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies et intégrables dans le sens de Lebesque sur tout intervalle fini $[a, x]$ $(x>a)$ et soit $g(x)>0$ $(x\geqslant a)$. On a alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)},$$

pourvu que la limite au second membre existe, comme nombre fini on comme $\pm\infty$, et que $\int_a^x g(t)\,dt\to+\infty$ $(x\to+\infty)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ fini et soit $\varepsilon>0$. Il existe alors un $x_0\,(\geqslant a)$ tel que l'on a

$$\int_a^t g(u)\,du>0,\quad L-\varepsilon<\frac{f(t)}{g(t)}<L+\varepsilon \qquad (t\geqslant x_0).$$

L'inégalité double peut être écrite sous la forme

$$(L-\varepsilon)\,g(t)<f(t)<(L+\varepsilon)\,g(t) \qquad (t\geqslant x_0),$$

d'où

$$(L-\varepsilon)\int_{x_0}^x g(t)\,dt<\int_{x_0}^x f(t)\,dt<(L+\varepsilon)\int_{x_0}^x g(t)\,dt, \qquad (x\geqslant x_0).$$

On en déduit

$$(L-\varepsilon)\left[\int_a^x g(t)\,dt-\int_a^{x_0} g(t)\,dt\right]+\int_a^{x_0} f(t)\,dt\leqslant\int_a^x f(t)\,dt\leqslant$$

$$(L+\varepsilon)\left[\int_a^x g(t)\,dt-\int_a^{x_0} g(t)\,dt\right]+\int_a^{x_0} f(t)\,dt, \qquad (x\geqslant x_0),$$

c'est-à-dire, puisque $\int_a^x g(t)\,dt>0 \qquad (x\geqslant x_0)$,

$$(L-\varepsilon)\left[1-\frac{\int_a^{x_0} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}\right]+\frac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}\leqslant\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}\leqslant$$

$$(L+\varepsilon)\left[1-\frac{\int_a^{x_0} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}\right]+\frac{\int_a^{x_0} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \qquad (x\geqslant x_0).$$

Si $x \to +\infty$, on en obtient

$$L-\varepsilon \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leqslant L+\varepsilon,$$

et puis, faisant tendre ε vers zéro,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = L.$$

La démonstration est semblable pour $L=-\infty$ et pour $L=+\infty$.

LEMME II. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient définies et intégrables dans le sens de Lebesque sur tout intervalle fini $[a,\ x]$ $(x>a)$, que l'on ait $h(t)>0$ $(t\geqslant a)$ et que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ soient finis. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} g(t)\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ soit fini et soit $\varepsilon>0$. Il existe alors un $x_0 \geqslant a$ tel que l'on a

$$L-\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < L+\varepsilon, \qquad (t\geqslant x_0),$$

d'où l'on obtient successivement:

$$(L-\varepsilon)\,g(t) < f(t) < (L+\varepsilon)\,g(t), \qquad (t\geqslant x_0),$$

$$(L-\varepsilon)\int_x^{+\infty} g(t)\,dt < \int_x^{+\infty} f(t)\,dt < (L+\varepsilon)\int_x^{+\infty} g(t)\,dt \qquad (x\geqslant x_0),$$

$$L-\varepsilon < \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} g(t)\,dt} < L+\varepsilon \qquad (x\geqslant x_0).$$

Donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} f(t)\, dt}{\int\limits_x^{+\infty} g(t)\, dt} = L \qquad (x \geqslant x_0).$$

La démonstration est analogue pour $L = -\infty$ et pour $L = +\infty$.

LEMME III. *Soit $b_n > 0$ $(n = 1, 2 \ldots)$ et soient les series Σa_n et Σb_n convergents. On a alors*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu}{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} b_\nu} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

La démonstration est analogue à celle du lemme II.

2.

2.1. Quelques assertions du théorème suivant sont connues, mais elles ont été démontrées sous des hypothèses restrictives ou par des méthodes différentes de la nôtre. Plus présisément, les premières relations des assertions 1° et 2° sont citées sans démonstration et sous une forme différente dans [5]. Les assertions 3°—6° sont démontrées dans [14], mais seulement pour la classe de *Zygmund* des fonctions à croissance lente (voir 2.5) et par une méthode qui dépend essentiellement de la monotonie. Nous allons démontrer ici toutes les assertions par une méthode basée sur les lemmes I—III.

THÉORÈME I. *Soit $L(x)$ une fonction à croissance lente.*

1° *Si $\alpha < 1$, on a*

$$\frac{1}{\alpha - 1} x^{1-\alpha} L(x) \sim \int\limits_1^x t^{-\alpha} L(t)\, dt \sim \sum_{\nu \leqslant x} \nu^{-\alpha} L(\nu) \qquad (x \to +\infty),$$

et par conséquent

$$L(x) = o\left(\int\limits_1^x t^{-\alpha} L(t)\, dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

2° *Si $\alpha > 1$, on a*

$$\frac{1}{\alpha - 1} x^{1-\alpha} L(x) \sim \int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt \sim \sum_{\nu \leqslant x} \nu^{-\alpha} L(\nu) \qquad (x \to +\infty)$$

et par conséquent

$$\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt = o\,(L(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

3° *La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ et l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt$ sont équiconvergentes.*

4° *On a*

$$L(x)=o\left(\int_1^x t^{-1}\,L(t)\,dt\right) \qquad (x\to+\infty).$$

5° *Soit*

$$\sum \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,L(n)=+\infty\,, \quad S(x)\overset{\text{def}}{=}\int_1^x t^{-1}\,L(t)\,dt, \quad S^*(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\nu\leqslant x}\nu^{-1}\,L(\nu).$$

Alors

$$S(x)\sim S^*(x) \qquad (x\to+\infty).$$

6° *Soit*

$$\sum=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,L(n)<+\infty\,, \quad R(x)\overset{\text{def}}{=}\int_x^{+\infty} t^{-1}\,L(t)\,dt, \quad R^*(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\nu\geqslant x}\nu^{-1}\,L(\nu).$$

Alors

$$L(x)=o\,(R(x)), \quad R(x)\sim R^*(x), \qquad (x\to+\infty).$$

DÉMCNSTRATION. 1° D'après 0.3, pour $\alpha<1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,L(t)\,dt$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\,L(n)$ divergent. C'est pourquoi on obtient tout d'abord, mettant à profit 0.2 et le lemme I,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}\,L(x)}{\int_1^x t^{-\alpha}\,L(t)\,dt}=\frac{c}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}{\int_1^x t^{-\alpha}\,L(t)\,dt}$$

$$=\frac{c}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)x^{-\alpha}\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}+\varepsilon(x)\,x^{-\alpha}\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}{x^{-\alpha}\,c(x)\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\,[1-\alpha+\varepsilon(x)]=1,$$

et puis, à l'aide du théorème de *Stolz* pour les suites,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^n t^{-\alpha}\,L(t)\,dt}{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-\alpha}\,L(\nu)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{n-1}^{n} t^{-\alpha}\,L(t)\,dt}{n^{-\alpha}\,L(n)}, \tag{5}$$

l'existence de la limite au second membre étant supposée. Si l'on pose

$$A(n)=\inf_{n-1\leqslant t\leqslant n} L(t), \qquad B(n)=\sup_{n-1\leqslant t\leqslant n} L(t),$$

on a

$$(6)\qquad \frac{A(n)}{L(n)}\,n^{\alpha}\,\frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\leqslant\frac{\int\limits_{n-1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{n^{-\alpha}L(n)}\leqslant\frac{B(n)}{L(n)}\,n^{\alpha}\,\frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Puisque, d'après 0.1,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{L(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{B(n)}{L(n)}=1,$$

on déduit de (6) ($n\to\infty$)

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{n-1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{n^{-\alpha}L(n)}=1.$$

D'après (5) et (7),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{-\alpha}L(\nu)}=1.$$

Il reste à démontrer la relation asymptotique

$$\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt\sim\int\limits_{1}^{[x]} t^{-\alpha}L(t)\,dt\qquad (x\to+\infty).$$

Cette relation résulte de

$$\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt=\int\limits_{1}^{[x]} t^{-\alpha}L(t)\,dt+\int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt$$

et du fait que l'on a, d'après 0.1 et le lemme I,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_{x-1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\int\limits_{1}^{x-1} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}\right]=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_{1}^{x-1} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}$$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^{-\alpha}L(x-1)}{x^{-\alpha}L(x)}=0.$$

2° D'après 0.3, pour $\alpha > 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt$ et la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)$ convergent. C'est pourquoi l'on a, d'après 0.2 et le lemme II,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\frac{1}{\alpha-1} x^{1-\alpha} L(x)} = (\alpha-1)\frac{1}{c} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{x^{1-\alpha} e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}$$

$$= (\alpha-1)\frac{1}{c} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^{-\alpha} L(x)}{[(1-\alpha)x^{-\alpha} + x^{-\alpha}\varepsilon(x)]\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}$$

$$= (1-\alpha)\frac{1}{c} \lim_{x\to+\infty} \frac{c(x)}{1-\alpha+\varepsilon(x)} = 1.$$

D'après le leme III,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_n^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, bt}{\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \int_\nu^{\nu+1} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_n^{n+1} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{n^{-\alpha} L(n)} = 1,$$

où la dernière égalité peut être démontrée de la même manière que l'égalité (7). Enfin,

$$\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt = \int_{[x]}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt - \int_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)\, dt$$

et, d'après 0.1 el le lemme II,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\int_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{x-1}^{x} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\int_{x-1}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt} - 1 \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^{-\alpha} L(x-1)}{x^{-\alpha} L(x)} - 1 = 0;$$

donc,

$$\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \int_{[x]}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \qquad (x \to +\infty).$$

3° Posons

$$C(x) = \sup_{x \leq t < +\infty} \{t^{-\frac{1}{2}} L(t)\}.$$

On a $C(x) \searrow (x > 0)$ et, par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)\,dt$ sont équiconvergentes. Puisque, d'après 0.5,

$$C(x) \sim x^{-\frac{1}{2}} L(x) \qquad (x \to \infty),$$

on peut dire le même des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$$

et aussi des intégrales

$$\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)\,dt \quad et \quad \int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt,$$

d'où notre assertion.

4° *Si* $\sum = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty$, on a, d'après le lemme I,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt} = c \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt}$$

$$= c \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1} \varepsilon(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{x^{-1} L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Si $\sum < +\infty$, l'assertion résulte immédiatement de 6°.

La démonstration de 5° est semblable à celle de 1° et celle de 6° à celle de 2°.

2.2. Voici quelques résultats élémentaires sur les fonctions à croissance lente, non contenus dans la litterature qui nous est connue et que nous groupons dans le théorème suivant.

THÉORÈME II. 1° *Si les fonctions* $L_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *sont à croissance lente et* $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est une fonctions rationnelle à coefficients positifs, alors la fonction*

$$L(x) = R(L_1(x), L_2(x), \ldots, L_n(x))$$

est à croissance lente.

2° *Si* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente et* $r(x)$ *une fonction rationnelle qui tend vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$, *alors la fonction* $L_1(x)$, *définie pour* x *suffisamment grand par*

$$L_1(x) = L(r(x)),$$

devient à croissance lente si l'on la définie pour les autres valeurs de $x \geqslant 0$ *d'une manière convenable.*

3° *Soient* $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$ *deux fonctions à croissance lente et soit* $L_1(x)$ *continue et* $\lim\limits_{x \to +\infty} L_2(x) = +\infty$. *Alors la fonction* $L(x) = L_1(L_2(x))$ *est à croissance lente. Donc, l'ensemble de toutes les fonctions à croissance lente et continues qui tendent vers* $+\infty$ *avec* x *est fermé par rapport aux opérations d'addition, de multiplication et de substitution de fonctions.*

4° *Une fonction à croissance lente peut lorsque* $x \to +\infty$ *osciller et cela avec un intervalle d'oscillation fini ou infini.*

5° *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente, alors les fonctions* $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$, *positives et mesurables sur* $[0, +\infty)$ *et définies pour* x *suffisamment grand par*

$$L_1(x) = x^{-1} \int_1^x L(t)\,dt, \qquad L_2(x) = \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt,$$

sont à croisance lente, de même que la fonction $L_3(x)$ *positive et mesurable sur* $[0, \infty)$ *et définie, sous l'hypothèse* $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) < +\infty$, *pour* x *suffisamment grand par*

$$L_3(x) = \int_x^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt$$

6° *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente, alors les fonctions* $K_1(x)$ *et* $K_2(x)$ *définies pour* x *suffisamment grand par*

$$K_1(x) = \int_1^x L(t)\,dt, \qquad K_2(x = L'(x)$$

ne peuvent pas être à croissance lente.

DÉMONSTRATION. 1° Il est évident que le produit et le quotient de deux fonctions à croissance lente sont fonctions à croissance lente. Or, on peut dire le même de la somme. Soient, en effet, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ deux fonctions à croissance lente et soit $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$. On a alors, pour un $\lambda > 0$ fixé,

$$L_\nu(\lambda x) = L_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x) L_\nu(x) \ (x \geqslant 0), \ \lim_{x \to +\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0 \ (\nu = 1, 2).$$

En posant $\varepsilon_3(x) = \max\{|\varepsilon_1(x)|, |\varepsilon_2(x)|\}$, on obtient

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + \frac{\varepsilon_1(x) L_2(x) + \varepsilon_2(x) L_2(x)}{L_1(x + L_2(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

avec

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{|\varepsilon_1(x)| L_1(x) + |\varepsilon_2(x)| L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)} = \varepsilon_3(x) \to 0 \ (x \to +\infty);$$

donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

2° Sous les hypothèses, on a $r(x) \sim ax^n \, (x \to +\infty;\ a>0,\ n$ nombre naturel), ce qui veut dire

$$r(x) = c(x)\, ax^n, \ \lim_{x \to +\infty} c(x) = 1.$$

Nous avons donc, d'après 0.1, pour un $\lambda>0$ fixé et pour x suffisamment grand,

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} = \frac{L(r(\lambda x))}{L(r(x))} = \frac{L(c(\lambda x)\, a\, \lambda^n x^n)}{L(c(x)\, ax^n)}$$

$$= \frac{L\left(\dfrac{c(\lambda x)}{c(x)} \lambda^n \cdot a\, c(x) x^n\right)}{L(ac(x)\, x^n)} \to 1, \quad (x \to +\infty),$$

puisque, pour x suffisamment grand,

$$\frac{1}{2} \lambda^n < \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \lambda^n < 2\, \lambda^n.$$

3° Sous les conditions formulées, la fonction $L(x)$ est définie, positive et mesurable sur $[0, +\infty)$. Soit $\lambda>0$ fixé. Il existe alors un $x_0 \geqslant 0$ tel que l'on a pour $x \geqslant x_0$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} \leqslant 2.$$

On a alors, d'après 0.1 et d'après $L_2(x) \to +\infty \ (x \to +\infty)$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{L_1\left(\dfrac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} \cdot L_2(x)\right)}{L_1(L_2(x))} = 1.$$

4° L'assertion qu'une fonction à croissance lente peut osciller (ne pas tendre vers une limite finie on infinite) peut être prouvée par l'exemple de la fonction $L(x)$ définie pour $x \geqslant 0$ par

$$L(x) = e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}}$$

avec

$$\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{1 + \log x},$$

où la fonction $\eta(x)$ est définie comme il suit. Soit

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = e^{e-1}(x_n + 1)^e + 1 \ (n = 1, 2, \ldots);$$

on a $x_n > x_1 = 3$ et par suite

$$x_{n+1} - x_n = x_n \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) > 3 \cdot (e^{e-1} - 1) > 3 \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Posons

$$\eta(x)=\begin{cases} x-x_{2\nu-1} & (x_{2\nu-1}-1<x<x_{2\nu-1}+1), \\ 1 & (0\leqslant x\leqslant 2 \text{ et } x_{2\nu-1}+1\leqslant x\leqslant x_{2\nu}-1), \qquad (\nu=1,2,3) \\ -x-x_{2\nu+1} & (x_{2\nu}-1<x<x_{2\nu}+1), \\ -1 & (x_{2\nu}+1\leqslant x\leqslant x_{2\nu+1}-1). \end{cases}$$

Cette définition est, d'après (8), non contradictoire. La partie de la courbe $z=\eta(x)$ corre pondante à l'intervale $[x_{2\nu-1}-1,\ x_{2\nu+1}+1]$ est présentée par la figure 1. Evidemment, la fonction $\eta(x)$ est continue. La suite

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{|\eta(t)|}{t(1+\log t)}\,dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\int_{x_k+1}^{x_{k+1}-1}\frac{dt}{t(1+\log t)}+\left(\int_{x_k}^{x_k+1}+\int_{x_{k+1}-1}^{x_{k+1}}\right)\frac{|\eta(t)|}{t(1+\log t)}\,dt\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(1+\alpha_k)\qquad(\alpha_k\downarrow 0,\ k\to\infty)$$

oscille: elle a deux points d'accumulation, à savoir α et $1+\alpha$, avec $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\alpha_k$ (>0). Il s'ensuit que la fonction $L(x)$ oscille aussi, avec un intervalle fini d'oscillation. C'est par quelques modifications de cet exemple-là que l'on peut former une fonction à croissanae lente qui oscille avec un intervalle d'oscillation infini.

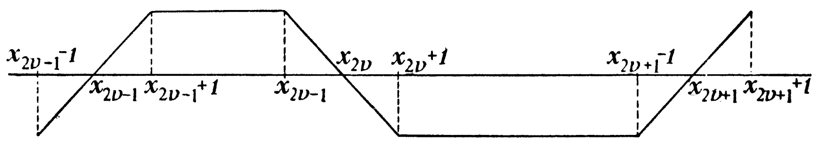


Fig. 1

5° Les fonctions $L_\nu(x)$ $(\nu=1,2)$ sont positives sur $[0,+\infty)$. On a, d'après le lemme I et le théorème I,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)}=\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{\lambda x}L(t)\,dt}{\int_1^{x}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{x}L(\lambda t)\,dt}{\int_1^{x}L(t)\,dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1$$

et pareillement, sous l'hypothèse $\int_1^{+\infty}L(t)\,dt=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{\lambda x} t^{-1}L(t)\,dt}{\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{x} t^{-1}L(\lambda t)\,dt}{\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1.$$

Dans le cas contraire, $\lim_{x\to+\infty} L_2(x)$ est nombre positif et fini, de sorte que $L_2(x)$ est de nouveau à croisance lente.

On démontre de manière analogue, à l'aide du lemme II, que la fonction $L_3(x)$ est à croisance lente.

6° On a, selon 5°,

$$x^{-\frac{1}{2}}K_1(x)=x^{\frac{1}{2}}L_1(x)\to+\infty \qquad (x\to+\infty)$$

et par conséquent la fonction $K_1(x)$, d'après 0.4, ne peut pas être à croissance lente.

Si la fonction $K_2(x)$ était à croissance lente, elle serait pour tout $x\geqslant 0$ finie et intégrable sur tout intetvalle fini contenu dans $[0, +\infty)$. On aurait alors

$$L(x)=\int_1^x K_2(t)\,dt+L(1),$$

où, d'après le résultat précédent, la fonction $\int_1^x K_2(t)\,dt$, positive pour $x>1$, ne serait pas à croissance lente et l'on aurait par conséquent $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x K_2(t)\,dt=+\infty$. Il en résulterait alors que la fonction $L(x)$ ne soit pas à croissance lente. Centre contradiction prouve l'assertion sur K_2.

2.2.1. On peut remarquer que l'assertion 4° du théorème entraîne le corollaire suivant: *une fonction à croissance lente n'a pas nécessairement le comportement asymptotique d'une fonction monotone*. Ce fait a été démontré dans [7] par un exemple patriculier.

(A suivre.)

DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA (II)

Математички весник
3 (18) Св. 3, 1966

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
3 (18), 1966, стр. 161 — 172

Dušan D. Adamović

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA II

(Suite)*

(Communiqué le 25. mars 1966)

2.3. Le théorème suivant trouve des applications dans les démonstrations de quelques théorèmes sur les séries trigonométriques (voir [2] et [3]). Pour $L(x)\equiv 1$ il se réduit au lemme de *B. Sz.-Nagy* dans [4]. Son assertion 1° (sous titre de lemme) a été publiée, avec une démonstration un peu plus longue, dans l'article [2] de l'auteur.

THÉORÈME III. *Soit la fonction* $f(x)$ *non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle* $(0,\ \delta)$ $(\delta>0)$, *et soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente et* $\alpha>0$. *Alors*:

1° *La convergence* (*vers une limite finie*) *de l'une des intégrales*

$$\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad et \quad \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \tag{9}$$

entraîne la convegence de l'autre et que

$$f(x)\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dt \to 0 \qquad (x\to 0). \tag{10}$$

2° *Sous l'hypothèse*

$$\int_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\ dt < +\infty,$$

la convergence de l'une des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad et \quad \int_{+0}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \tag{11}$$

* La première partie de cet article, sous le même titre, a été publiée dans ce Bulletin, t. 3 (18) 1966, pp. 123—136.

entraîne la convergence de l'autre et que

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Nous rappelons que R (x) est défini dans 2.1.

DÉMONSTRATION. 1° On peut supposer que $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x \leqslant \delta)$, les deux intégrales (9) étant automatiquement finies et la condition (10) satisfaite pour $f(x)$ constant. On a, d'après l'assertion 2° du théorème I,

$$\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\alpha-1} L(t)\, dt \sim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Il en résulte l'équiconvergence des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] df(x).$$

D'autre part, pour $0 < \varepsilon < \delta$ on obtient, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{\mathrm{t}}\right) dt\right] d\,[-f(x)] = -f(\delta)\int_{+0}^{\delta} x^{a-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ f(\varepsilon)\int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

$$\leqslant \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx - \quad f(\delta)\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

On en déduit l'equiconvergence des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d[-f(x)] \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

et puis, d'après le résultat précédent, l'équiconvergence des intégrales (9). Il en résulte enfin que la convergence de l'une de ces deux intégrales entraîne

$$0 \leqslant f(\varepsilon) \int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0.)$$

2° On peut supposer, par la même raison que sous 1°, que l'on a dans ce cas $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x \leqslant \delta)$. Alors, pour $0 < \varepsilon < \delta$,

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) d\,[-f(x)] = R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon) - R\left(\frac{1}{\delta}\right) f(\delta)$$

$$(12) \qquad + \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx - R\left(\frac{1}{\delta}\right) f(\delta).$$

On en déduit que la convergence de la première des intégrales (11) entraîne la convergence de la seconde. La convergence de la seconde intégrale (11) entraîne, cependant,

$$0 \leqslant R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon) = f(\varepsilon) \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt = f(\varepsilon) \int_{+0}^{\varepsilon} t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\leqslant \int_{+0}^{\varepsilon} t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) f(t)\, dt \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0).$$

et par suite, d'après (12), la convergence de la première des intégrales (11).

2.4. Le théorème suivant, entre autre, implique que dans toutes les considérations concernant les propositions dans la théorie des séries trigonometriques où interviennent les fonctions à croissance lente on peut supposer, sans restreindre la généralité, que toute fonction à croissance lente $L(x)$ en question a pour $x \geqslant 0$ autant de dérivées que l'on veut et de même que, dès que l'on introduit une condition de monotonie ou de convexité relative à $L(x)$, il n'importe si l'on y soumet $L(x)$ ou seulement la suite correspondante $L(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

THÉORÈME IV. *Pour toute fonction à croissance lente $L(x)$ il existe une fonction à croissance lente et infiniment différenciable $L_0(x)$ telle que l'on ait:*

1° $L_0(x) \sim L(x)$ $\qquad (x \to +\infty)$.

2° $L_0(n) = L(n)$ $\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

3° *Si la fonction $L(x)$ est monotone, pour $x \geqslant 0$ ou pour x suffisamment grand, alors $L_0(x)$ a la même propriété.*

4° *La proposition correspondante concernant la convexité est aussi vraie,* Pour la démonstration nous avons besoin de deux lemmes:

LEMME IV. *Soit $a<b$, $A<B$. Il existe alors une fonction $F(x)$ qui est:*

1° *partout infiniment différenciable;*

2° *strictement monotone dans $[a, b]$;*

2° *aves la propriété*

$$F(x)=A \quad (x\leqslant a), \qquad F(x)=B \quad (x\geqslant b).$$

(Voir la figure 2.)

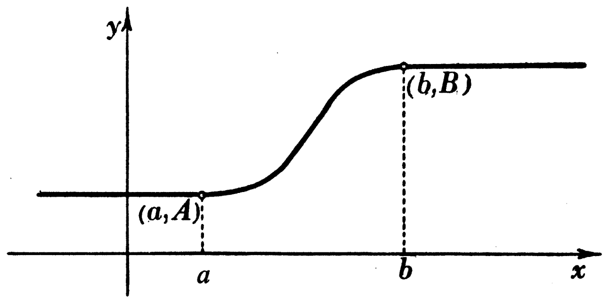


Fig. 2

DÉMONSTRATION. Les propriétés énumérées appartiennent à la fonction

$$F(x)=\begin{cases} A & (x<a) \\ G(x) & (a\leqslant x\leqslant b) \\ B & (x>b), \end{cases}$$

avec

$$G(x)=(B-A)\frac{\int\limits_a^x e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}}\,dt}{\int\limits_a^b e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}}\,dt}+A.$$

LEMME V.

Soit

$$a<b,\ \alpha<\frac{B-A}{b-a}<\beta. \tag{13}$$

Il existe une fonction $H(x)$ qui est:

1° *partout infiniment différenciable;*

2° *convexe dans l'intervalle $[a, b]$;*

3° *avec la propriété*

$$H(x)=A+\alpha(x-a) \quad (x\leqslant a), \qquad H(x)=B+\beta(x-b) \quad (x\geqslant b).$$

(Voir la figure 3.)

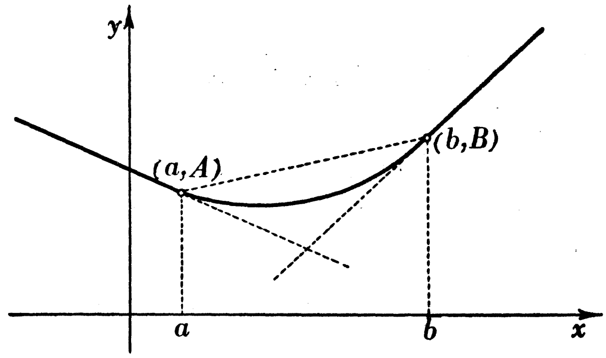


Fig. 3

DÉMONSTRATION. Posons

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)(b-a)}} & (a<x<a) \\ 0 & (x=a,\ x=b), \end{cases}$$

(14) $$f(x)=\gamma\int_a^x dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du+\delta(x-a)+\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

où la fonction $p(u)$ est infiniment différenciable. Cette fonction-là et les constantes γ, δ et ε peuvent être déterminées de manière que l'on ait

(15) $$f(a)=\varepsilon=A, \quad f(b)=\gamma\int_a^b dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du+\delta(b-a)+\varepsilon=B,$$

$$f'(a)=\delta=\alpha, \quad f'(b)=\gamma\int_a^b g(u)\, e^{p(\mu)}\, du+\delta=\beta.$$

Ces équations-là se réduisent à

$$\varepsilon=A, \quad \delta=\alpha,$$

(16) $$\begin{aligned} &\gamma\int_a^b dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du=B-A-\alpha(b-a)\ (=M), \\ &\gamma\ (b-a)\int_a^b g(u)\, e^{b(u)}\, du=(\beta-\alpha)(b-a)\ \ (=N). \end{aligned}$$

D'après (13), on a

$$M>0, \qquad M-N=B-A-\beta\ (b-a)<0;$$

donc,

$$0<M<N.$$

D'après (16), on a alors

$$\omega(p) \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du}{\int_a^b dt \int_a^b g(u)\, e^{p(u)}\, du} = \frac{M}{N} \in (0,\ 1). \tag{17}$$

La fonctionnelle ω: $P \to (0,\ 1)$ (P espace de toutes les fonctions réelles infiniment differenciables dans $[a,\ b]$) prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0,\ 1)$. En effet, soit tout d'abord $p\ (u)$ une fonction infiniment différenciable dans $[a,\ b]$ et avec la propriété $(0<\mu<b-a,\ 0<\eta<b-a-\mu,\ m>0)$

$$p(u) = \begin{cases} 1 & (a \leqslant u \leqslant a+\mu), \\ \text{monotone pour } a+\mu \leqslant u \leqslant a+\mu+\eta \\ e^{-m} & (a+\mu+\nu \leqslant u \leqslant b). \end{cases}$$

L'existence d'une telle fonction est assurée par le lemme IV. On a alors

$$\omega(p) = \frac{\int_a^{a+\mu} dte \int_a^t g(u)\, du + \int_{a+\mu}^{a+\mu+\eta} dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du + e^{-m} \int_{a+\mu+\eta}^{b} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu e \int_a^b g(u)\, du + \eta \int_a^b g(u)\, e^{p(u)}\, du + e^{-m}(b-a-\mu-\eta) \int_a^b g(u)\, du}.$$

En faisant tendre d'abord η vers zéro et puis m vers $+\infty$, on établit que $\omega\ (p)$ peut être aussi proche que l'on veut de

$$\frac{\int_a^{a+\mu} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu \int_a^b g(u)\, du} \qquad (0<\mu<b-a),$$

c'est-à-dire, puisque

$$\lim_{\mu \to +0} \frac{\int_a^{a+\mu} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu \int_a^b g(u)\, du} = \lim_{\mu \to +0} \frac{\int_a^{a+\mu} g(u)\, du}{\int_a^b g(u)\, du} = 0,$$

que $\omega\ (p)$ peut être aussi proche que l'on veut de 0. On démontre pareillement le même fait pour la valeur 1. Donc, l'espace P étant connexe et la fonctionnelle ω continue, on conclut que $\omega\ (p)$ prend toute valeur entre 0 et 1.

Il résulte du fait qu'on vient de démontrer que (17) est satisfait pour une fonction $p\ (u)$. On obtient alors de la première équation (16) la valeur positive pour γ. La fonction $f\ (x)$ donnée par (14), avec les constantes γ, δ, ε et la fonction $p\ (u)$ ainsi déterminées, remplit alors toutes les conditions (15) et

$$f''(x) = \gamma\, g(x)\, e^{p(x)} > 0 \qquad (a<x<b).$$

On en conclut immédiatement que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} \alpha(x-a) + A & (x < a) \\ f(x) & (a \leqslant x \leqslant b) \\ \beta(x-b) + B & (x > b) \end{cases}$$

possède toutes les propriétés demandées.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV. Désignons par $G_n(x)$ la fonction $G(x)$ de la démonstration du lemme IV, avec $a = n$, $b = n+1$, $A = \min\{L(n), L(n+1)\}$, $B = \operatorname{Max}\{L(n), L(n+l)\}$, sous la condition $L(n) \neq L(n+l)$, et posons

$$L_0(x) = \begin{cases} G_n(x) \quad , & si \ L(n) < L(n+l) \\ L(n) \quad , & si \ L(n) = L(n+1) \\ G_n(2n+1-x) \, , & si \ L(n) > L(n+l) \end{cases} \quad (n \leqslant x \leqslant n+1; \ n = 1, 2, \dots).$$

La fonction $L_0(x)$ remplit évidemment la condition 2° et croît strictement, reste constante ou décroît strictement dans l'intervalle $[n, n, 1]$ suivant que l'on a $L(n) < L(n+1)$, $L(n) = L(n+1)$ on $L(n) > L(n+1)$. Il en résulte que $L_0(x)$ remplit la condition 3° et que l'on a, pour $x \geqslant 0$,

$$A(x) \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Inf}_{[x] \leqslant t \leqslant [x]+1} L(t) \leqslant L_0(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{[x] \leqslant t \leqslant [x]+1} L(t) \overset{\text{def}}{=} B(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{A(x)}{L(x)} \leqslant \frac{L_0(x)}{L(x)} \leqslant \frac{B(x)}{L(x)}.$$

Il s'ensuit, d'après 0.1, que $L_0(x) \sim L(x)$ $(x \to +\infty)$. Enfin, d'après le lemme IV, la fonction $L_0(x)$ est infiniment différenciable.

Si la fonction $L(x)$ est convexe et monotone (la convexité pour x suffisamment grand entraîne la monotonie pour x suffisamment grand) pour $x \geqslant m$ (m nombre naturel ou zéro), alors la fonction $L_0(x)$ sera convexe pour $x \geqslant m$ et possédera toutes les autres propriétés demandées si on la construit, pour $x \geqslant m$, come il suit (voir la figure 4). Supposons qu'il s'agit de la convexité stricte de $L(x)$ pour $x \geqslant m$. Posons $M_\nu = (\nu, L(\nu))$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ et traçons la droite p_m située à droite de $x = m$ au dessous de la droite $M_m M_{m+1}$ et montant ou descendant avec cette droite-là. Si l'on fixe un point P_m sur p_m entre les droites $x = m$ et $x = m+1$ et suffisamment proche du point P_m, alors les segments $M_m M_{m+1}$ et $M_{m+1} M_{m+2}$ sont situés du même côté de la droite $P_m M_{m+1}$ et montent ou descendent avec elle. En choisissant sur la dernière droite, entre les droites $x = m+1$ et $x = m+2$, un point P_{m+1} suffisamment proche de M_{m+1} on obtient la droite $P_{m+1} M_{m+2}$ telle que les segments $M_{m+1} M_{m+2}$ et $M_{m+2} M_{m+3}$ sont situés du même côté de cette droite et montent ou descendent avec elle. Continuant ainsi, on obtient une ligne polygonale C: $M_m P_m P_{m+1} \cdots$ qui a pour $x \geqslant m$ l'équation $y = 1\,(x)$ avec la fonction $1\,(x)$ possédant les propriétés 1°—4°. En „arrondissant" la ligne C aux voisinages des points $P_m, P_{m+1}, \dots$, par les parties curvilignes suffisamment petites, dans le sens du lemme V, on obtiendra la ligne courbe $y = L_0(x)$ $(x \geqslant m)$, où la fonction $L_0(x)$ est infiniment différenciable et possède toutes les propriétés 1°—4°. On peut procéder pareillement dans le cas où la convexité n'est pas stricte.

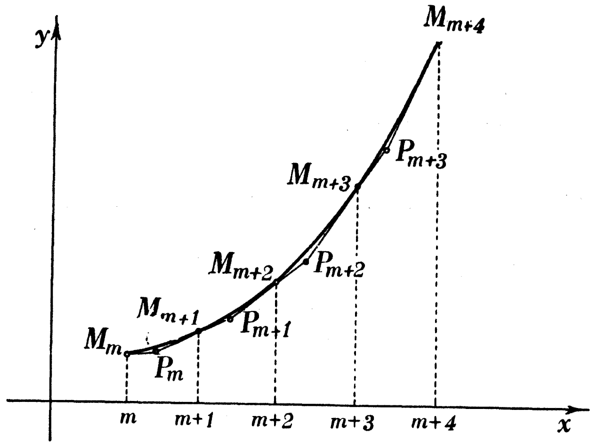


Fig. 4

2.5. Désignons par $\mathcal{K}$ la classe de toutes les fonctions à croissance lente. C'est à la classe suivante de fonctions réelles, définie et appliquée par *A. Zygmund* dans [14] (page 299 et plus loin), que nous donnons, de même que *R. Bojanić* et *J. Karamata* dans [5], le nom de *classe de Zygmund de fonctions à croissance lente.*

DÉFINITION. *On dit qu'une fonction $K(x)$, positive et mesurable sur* $[0+\infty]$ *et bornée sur tout intervalle fini à droite de $x=0$, appartient à la classe de Zygmund de fonctions à croissance lente si, pour tout $\delta>0$,*

$$x^{\delta}\, K(x) \nearrow, \quad x^{-\delta} K(x) \searrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}).$$

Nous désignons cette classe par $\mathcal{K}_0$.

2.5.1. On peut démontrer sans difficulté l'inclusion $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, ce qui justifie le nom de la classe $\mathcal{K}_0$. On a démontré aussi dans [5], par un exemple, que $\mathcal{K}_0$ *est un vrai sous-ensemble de* $\mathcal{K}$. Nous allons démontrer cependant les assertions suivantes plus précises:

THÉORÈME V. 1° *Il existe une fonction à croissance lente $L(x)$ telle que pour aucun $\delta>0$ on n'a ni*

$$x^{\delta}\, L(x) \nearrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}), \tag{18}$$

ni

$$x^{-\delta}\, L(x) \searrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}). \tag{19}$$

2° *Il existe une fonction à croissance lente et décroissante telle que (18) n'est valable pour aucun $\delta>0$.*

3° *Il y a des fonctions à croissance lente telles que (18) ou (19) est valable pour quelques valeurs de δ et pour quelque'unes ne l'est pas.*

DÉMONSTRATION. 1° Toutes les fonctions de la forme

$$L(x)=\left(1+\frac{\sin x^2}{x}\right) e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} \qquad (x>0),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction continue et tendant vers zéro quand $x\to+\infty$, possèdent la propriété en question. En effet, pour aucun $\alpha\neq 0$ la dérivée

$$[x^\alpha L(x)]'=\left[(x^\alpha+x^{\alpha-1}\sin x^2)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}\right]'$$

$$=x^{\alpha-1}[\alpha+2x\cos x^2+o(1)]\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}$$

n'a un signe constant pour x suffisamment grand.

2° Posons

$$\eta(x)=\begin{cases} n^{\frac{1}{2}} & (n^2\leqslant x\leqslant n^2+1)\\ 0 & (n^2+1<x<(n+1)^2)\end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\dots),$$

$$c(x)=e^{\int_1^x \frac{\eta(t)}{t}dt} \quad (x\geqslant 1),\quad L(x)=c(x)\log x \quad (x\geqslant 1).$$

La fonction $L(x)$ est évidemment positive et strictement croissante pour $x>1$ et comme l'on a

$$c(x)=e^{\sum\limits_{\nu^2\leqslant x-1}\sqrt{\nu}\int_{\nu^2}^{\nu^2+1}\frac{dt}{t}}<e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\nu}\log\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)}<+\infty \quad (x\geqslant 1),$$

ce qui entraîne que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x)$ est positive et finie, on conclut que la fonction $L(x)$ est à croissance lente. D'autre part, avec tout $\delta>0$ fixé,

$$[x^{-\delta}L(x)]'=-\delta\, x^{-\delta-1}L(x)+x^{-\delta}\frac{\eta(x)}{x}L(x)+x^{-\delta-1}c(x)$$

$$=x^{-\delta-1}L(x)\left[\eta(x)-\delta+\frac{1}{\log x}\right]$$

prend les deux signes pour les valeurs de x arbitrairement grandes.

3° L'assertion peut être prouvée par la fonction à croissance lente

$$L(x)=(a+x^{-1}\sin x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} \qquad (x \text{ suffisamment grand; } a>0).$$

Si $\delta > a^{-1}$, on a pour x suffisamment grand

$$x^{-\delta} L(x) \searrow \quad \text{et} \quad x^{\delta} L(x) \nearrow .$$

Si $\delta < a^{-1}$, aucune des deux relations précédentes n'est valable pour x suffisamment grand.

2.5.2. Citons la caractérisation suivante de la classe $\mathcal{K}_0$, démontrée dans [5]:

2.5.2.1. Une fonction $L(x)$, définie, positive et mesurable sur $[0, +\infty]$ et finie sur tout intervalle fini, appartient à $\mathcal{K}_0$ si et seulement si

$$-\infty < D_+ L(x) \leqslant D^+ L(x) < +\infty \quad (x \text{ suffisamment grand})$$

et

$$x D_+ L(x) = o\,(L(x)),\ x D^+ L(x) = o\,(L(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

Ici $D_+ L(x)$ et $D^+(x)$ désignent respectivement la dérivée droite intérieure et la dérivée droite supérieure de $L(x)$.

En s'appuyant sur ce résultat-là, on va démontrer le théorème suivant.

2.5.2.2. THÉORÈME VI. *Toute fonction à croissance lente et convexe ou concave (non nécessairement dans le sens strict) pour x suffisamment grand appartient à la classe $\mathcal{K}_0$ de Zygmund.*

DÉMONSTRATION. Soit $L(x)$ une fonction à croisance lente qui est convexe pour $x > x_0$. On a alors ($L'_+(x)$ désigne la dérivée droite de $L(x)$)

$$-\infty < L'_+(x) < \infty \ (x > x_0),$$

$$L'_+(x) \leqslant \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leqslant L'_+(x+h) \qquad (x > x_o, h > 0), \tag{20}$$

ce qui entraîne en particulier que $L'_+(x)$ est à signe constant pour x suffisamment grand.

D'autre part, si $\lambda > 1$ est fixé, il existe, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, un $x_\varepsilon \geqslant x_o$ tel que l'on ait

$$|L(\lambda x) - L(x)| < \varepsilon L(x) \qquad (x > x_\varepsilon). \tag{21}$$

Si $L'_+(x) \geqslant 0$ pour x suffisamment grand, alors (21), d'après (20), entraîne

$$|L'_+(x)| \leqslant \left| \frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x} \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{x} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{x\,|L'+(x)|}{L(x)} < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}).$$

Si $L'_+(x) < 0$ pour x suffisamment grand, on obtient, d'après (20) et (21),

$$|L'+(\lambda x)| \leqslant \left| \frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x} \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{x} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda x\,|L'+(\lambda x)}{L(\lambda x)} < \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{L(\lambda x)} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}).$$

On obtient dans le premier cas

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\, \frac{x\,|L'_+(x)|}{L(x)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda-1}$$

et dans le second cas

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\, \frac{x|L'_+(x)|}{L(x)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\, \frac{\lambda x|L'_+(\lambda x)|}{L(\lambda x)} \leqslant \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on aboutit, dans les deux cas, au résultat

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x|L'+(x)|}{L(x)} = 0.$$

Donc, d'après 2. 5. 2. 1, on a

$$f(x) \in \mathcal{K}_o.$$

La démonstration est semblable si la fonction $L(x)$ est concave.

2.6. Dans les énoncés de quelques théorèmes de notre travail [2] figurait la condition suivante concernant une fonction à croissance lente

$$A\,L(x)\log x \leqslant \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt \leqslant BL(x)\log x \tag{22}$$

$(x > 1;\ A,\ B$ constantes positives et finies),

de même que les conditions qui ne comprenaient que l'une ou l'autre des inégalités (22), c'est-à-dire les conditions

$$L(x)\log x = 0\Big(\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt\Big) \qquad (x\to+\infty)$$

et

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt = 0\,(L(x)\log x) \qquad (x\to+\infty)$$

C'est à propos des conditions précédentes et des conditions

$$L(x)\log x = \mathrm{o}\Big(\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt\Big) \qquad (x\to+\infty) \tag{23}$$

et

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt = \mathrm{o}\,(L(x)\log x) \qquad (x\to+\infty) \tag{24}$$

que l'on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME VII. *Soient* $\mathcal{K}_\nu$ $(\nu = 1, \dots, 5)$ *respectivement les classes des fonctions à croissance lente qui: remplissent la condition* (22); *ne satisfont que la première inégalité* (22); *ne satisfont que la seconde inégalité* (22); *remplissent la condition* (23); *remplissent la condition* (24). *Aucune des classes* $\mathcal{K}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, 5)$ *n'est vide. En particulier: toutes les fonctions à croissance lente définies pour x suffisamment grand par*

$$L(x) = (\underbrace{\log\log\dots\log x}_{k \text{ fois}})^\alpha \qquad (k \geqslant 2;\ \alpha \text{ réel}) \tag{25}$$

ou par

$$L_\alpha(x) = (\log x)^\alpha \qquad (\alpha > -1) \tag{26}$$

appartiennent à $\mathcal{K}_1$; *toutes les fonctions à croissance lente définies pour x suffisamment grand par*

$$L(x) = e^{(\log x)^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

appartiennent à $\mathcal{K}_4\,(\subset \mathcal{K}_2)$ *et toutes celles définies pour x suffisamment grand par*

$$L(x) = \frac{(\log_k x)^{\alpha}}{\log x \ldots \log_{k-1} x}$$

$$(\log_k x \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\log\log\ldots\log}_{K \text{ fois}} x;\ k \geqslant 2;\ \alpha\ \textit{rél})$$

à la classe $\mathcal{K}_5\,(\subset \mathcal{K}_3)$.

Les assertions générales résultent immédiatement de celles particulières. Les dernières peuvent être démontrées sans difficulté à l'aide du lemme I.

On peut ajouter que l'on a pour les fonctions (25), plus précisément,

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt \sim L(x) \log x \qquad (x \to +\infty)$$

et pour les fonctions (26)

$$\int_1^x t^{-1} L_{\alpha}(t)\, dt \sim \frac{1}{\alpha+1} L_{\alpha}(x) \log x \qquad (x \to +\infty).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. van Aarden — Ehrenfest, N.G. de Bruijn, J. Korevar, *A note on slowly oscillating functions*, Nieuw Archief vor Wiskunde 23 (1949), 77-86.

[2] D. Adamović, *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund – B. Sz. — Nagy* Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences t. XII (1958), 81-100

[3] D. Adamović, *Généralisations de quelques résultats de Zygmund, B. Sz. — Nagy et Boas relatifs aux séries trigonometriques* (en préparation).

[4] Bela Sz. — Nagy, *Séries et intégrales de Fourier des functions non bornées*, Acta. sc. matematicarum (Szeged), XIII (1949), 118-135.

[5] R. Bojanić and J. Karamata, *On slowly oscillating function and asymptotic relations*, Technical Summary Report 432, Math. Research Center (1963).

[6] H. Delange, *Sur un théorème de Karamata*, Bull. Sci. Math. (2) 79 (1955), 9-12.

[7] J. Karamata, *Sur mode de croissance régulier des fonctions*, Matematica (Cluj) 4 (1930), 38-53.

[8] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, théorème fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France 61 (1953), 55-62.

[9] E. Landau, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques*, Bull. Acad. Royale de Belgique (1911), 443-472.

[10] W. Matuszewska, *Regulary increasing functions in connection with the theory of L — spaces*, Studia Mathematica 21 (1962), 317-344.

[11] G. Polya, *Über eine neue Weise bestimte Integrale in der analytischen Zahlteorie zu gebrauchen*, Göttingen, Nachr. (1917, 149-159.

[12] G. Polya, *Bemerkung über unendliche Folgen und ganze Funktionen*, Math. Ann. 88 (1923), 169-183.

[13] R. Schmidt, *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, Mathematische Zeitschrift 22 (1925), 89-152.

[14] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Москва 1965.

D. S. MITRINOVIĆ
D. D. ADAMOVIĆ

COMPLÉMENT À L'ARTICLE „SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES"

Poseban otisak
PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA
UNIVERZITETA U BEOGRADU
Serija: Matematika i fizika, № 159—170 (1966)

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 167 (1966)

COMPLÉMENT À L'ARTICLE "SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES"

D. S. Mitrinović et D. D. Adamović

0. Dans l'article [**1**], nous avons étudié la validité de l'inégalité

$$(\cos x)^c < \frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad (a,\ b,\ c \text{ nombres réels}) \tag{1}$$

pour $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Partant de la remarque que:

(*R*) *pour* $b \neq 0$ *l'inégalite* (1) *équivaut à*

$$f(x) = x - (\sin x)^p (\cos x)^q < 0 \quad \left(p = \frac{a}{b},\ q = -\frac{c}{b}\right)$$

ou à $f(x) > 0$ *suivant que l'on a* $b > 0$ *ou* $b < 0$, on y a établi une proposition sur le signe de $f(x)\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ dans tous les cas possibles (proposition 3 dans [**1**]). On a cependant omis, dans l'article [**1**], de formuler explicitement une proposition qui résumerait, d'une manière directe, la discussion complète de l'inégalité (1), c'est-à-dire la discussion complète du signe de la fonction

$$g(x) = (\cos x)^c - \frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

y compris le cas $b = 0$ (d'ailleurs facile à étudier). C'est cet énoncé final que nous donnons dans cette note.

Désignons, dans ce qui suit, par $\boxed{-}$ le fait que l'on a $g(x) < 0$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, par $\boxed{-0+}$ le fait que l'on a $g(x) < 0$ $(0 < x < x_1)$, $g(x_1) = 0$, $g(x) > 0$ $\left(x_1 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, et employons les symbôles correspondants pour les autres cas qui auront lieu.

0.1. En ce qui concerne le signe de

$$g(x) = (\cos x)^c - (\sin x)^a \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire le cas $b = 0$, on remarque tout d'abord que l'on a, sous l'hypothèse $a^2 + c^2 > 0$, $\boxed{-}$ et $\boxed{+}$ dans les cas $c \geqslant 0$, $a \leqslant 0$ et $c \leqslant 0$, $a \geqslant 0$ recpectivement. Dans le cas $a > 0$, $c > 0$, on a: $g(x) \downarrow \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et par conséquent $\boxed{+0-}$. Enfin, dans le cas $a<0$, $c<0$, on a: $g(x)\uparrow\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $g(+0)=-\infty$, $g\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$ et par conséquent $\boxed{-0+}$.

1. Soit $\lambda(p)$ la fonction réelle mentionnée dans l'énoncé de la proposition 3 dans [**1**]. Rappelons qu'elle est définie, continue et strictement décroissante de la valeur 0 jusqu'à la valeur $-\frac{1}{3}$ dans l'intervalle $(-\infty, 1)$.

La proposition 3 de [**1**], combinée à la remarque (R), et le résultat **0.1** conduisent immédiatement à la proposition suivante sur le signe de $g(x)$:

Proposition. On a:

$\boxed{-}$ *si et seulement si*: α) $a\leqslant b\leqslant 0\leqslant c$, $a^2+b^2+c^2>0$, *ou* β) $a>b$, $c>-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b>0$, *ou* γ) $0<a<b<3c$;

$\boxed{+}$ *si et seulement si*: α) $a\geqslant b\geqslant 0\geqslant c$, $a^2+b^2+c^2>0$, *ou* β) $a>b$, $c<-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b<0$, *ou* γ) $3c<a<b<0$;

$\boxed{-0+}$ *si et seulement si*: α) $a<b\leqslant 0$, $c<0$, *ou* β) $b>\max\{a, 0\}$, $c\leqslant 0$, *ou* γ) $a=b<3c<0$;

$\boxed{+0-}$ *si et seulement si*: α) $a>b\geqslant 0$, $c>0$, *ou* β) $b<\min\{a, 0\}$, $c\geqslant 0$, *ou* γ) $0<3c<a=b$;

$\boxed{-0+0-}$ *si et senlement si*: $a<b$, $0<c<-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{+0-0+}$ *si et seulement si*: $a>b$, $0>c>-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{-0-}$ *si et seulement si*: $b<\min\{a, 0\}$, $c=-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{+0+}$ *si et seulement si*: $b>\max\{a, 0\}$, $c=-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{0}$ $\left(g(x)=0 \text{ } pour \text{ } 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ *si et seulement si*: $a=b=c=0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović et D. D. Adamović *Sur une inégalité élémentaire où interviennent des fonctions trigonométriques*, Ces *Publications*, № 143—155 (1965), p. 23—34.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

D. D. ADAMOVIĆ

GENERALISATIONS DE QUELQUES THEOREMES DE A ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (I)

Extrait

des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE T. 7 (21), 1967

BEOGRAD

1967

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, 7 (21) 1967, p. 123–138

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (I)

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

0. Tous les résultats de cet article sont liés à la notion de *fonction à croissance lente* dans le sens de *Karamata* (J. Karamata, 1930 [12, 13]), c'est-à-dire d'une fonction réelle $L(x)$ définie et positive pour $x \geqslant 0$ et possédant la propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \qquad (\lambda > 0).$$

On démontre qu'une fonction à croissance lente et mesurable sur $[0, +\infty)$ est bornée, pour un a suffisamment grand, sur tout intervalle fini $[a, b]$ $(b > a)$ et par suite intégrable dans le sens de Lebesque sur chacun de tels intervalles. C'est pourquoi, dans les applications connues n'étant essentielles que les propriétés des fonctions à croissance lente pour les valeurs de x suffisamment grandes, nous allons supposer (sans l'énoncer explicitement) que *toute fonction à croissance lente qu'on mentionne est mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle* $[0, a]$ $(a > 0)$.

Dans le présent article nous donnons, au moyen de fonctions à croissance lente, les généralisations et les compléments d'un groupe de théorèmes de *A. Zygmund, B. Sz.-Nagy* et *R. P. Boas* [7-9, 14] concernant le comportement asymptotique et la connexion entre intégrabilité et convergence des séries trigonométriques. Quelques unes de ces généralisations, ne se limitant pas à l'introduction des fonctions à croissance lente, sont faites dans d'autres directions aussi. Nos résultats sont contenus dans les théorèmes I-XIII, avec un lemme auxiliaire. Notons que les théorèmes III-V et VIII ont été démontrés dans notre article [1] (où ils sont nommés théorèmes 1—3 et 6, respectivement). Nous les citons ici pour compléter notre exposé et pour corriger ou simplifier quelques détails de leurs démonstrations.

0.1. Dans les démonstrations de nos théorèmes nous allons profiter des résultats suivants qui se rapportent tous sauf (VI) aux propriétés des fonctions à croissance lente. Les propositions (I)-(V) et (X) sont bien connues, les propositions (VI)-(IX) sont démontrées dans notre travail [2] et la proposition (XI) dans l'article [4] de *Aljančić, Bojanić* et *Tomić*.

(I) *Si* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente, on a*

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1 \quad (x \to +\infty)$$

uniformément pour $\lambda \in [a, b]$, *où* $0 < a < b < +\infty$.

(II) *Si la fonction $L(x)$ est à croissance lente et si pour la fonction $L^{+}(x)$, positive et mesurable sur $[0, +\infty)$ et bornée sur tout intervalle fini, on a $L^{+}(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty)$, alors la fonction $L^{+}(x)$ est à croissance lente.*

(III) (*Théorème de représentation.*) *Une fonction $L(x)$ mesurable sur $[0, +\infty)$ est à croissance lente si et seulement si l'on a*

$$L(x) = c(x)\, e^{\int\limits_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} \qquad (x \geqslant 0),$$

où $c(x)$ est une fonction positive et mesurable sur $[0, +\infty)$ qui tend vers une limite finie et positive lorsque $x \to +\infty$ et la fonction $\varepsilon(x)$ est continue pour $x \geqslant 0$ et tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$.

(IV) *Si la fonction $L(x)$ est à croissance lente et si $a > 0$, alors*

$$x^{\alpha} L(x) \to +\infty, \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

(V) *Soit la fonction $L(x)$ à croissance lente et soit, pour $\alpha > 0$,*

$$\left.\begin{aligned} \overline{L}_1(x) &= x^{-\alpha} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\}, & \overline{L}_2(x) &= x^{\alpha} \sup_{t \geqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \\ \underline{L}_1(x) &= x^{\alpha} \inf_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, & \underline{L}_2(x) &= x^{-\alpha} \inf_{t \geqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\} \end{aligned}\right\} (x \geqslant 0),$$

où l'on attribue à chacune de ces fonctions la valeur 1 pour $x = 0$. Alors toutes les fonctions $\overline{\underline{L}}_{\nu}(x)\ (\nu = 1,2)$ sont à croissance lente (les deux dernières pour x suffisamment grand) et l'on a $\overline{\underline{L}}_{\nu}(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty;\ \nu = 1,2)$.

(VI) 1° *Supposons que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ soient définies et intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini $[a, x]$ $(x > a)$, que l'on ait $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ et que les intégrales $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\, dt$ soient finies. Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} f(t)\, dt}{\int\limits_x^{+\infty} g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

2° *Supposons que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ soient intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini $[a, x]$ $(x > a)$ et que l'on ait $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ et*

$$\int\limits_a^x g(t)\, dt \to +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_a^x f(t)\, dt}{\int\limits_a^x g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous l'hypothèse que la limite au second membre existe, comme valeur fini ou comme $\pm\infty$.

(VII) *Soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *et l'intégrale* $\int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt$ *sont équiconvergentes.*

2° *On a*

$$L(x) = o\left(\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

3° *Soit*

$$(D_1) \qquad \sum \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n),\ S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x t^{-1} L(t)\, dt,\ S^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \leqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum = +\infty$, *on a* $S(x) \sim S^*(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

4° *Soit*

$$(D_2) \qquad R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt,\ R^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \geqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum < +\infty$, *on a* $L(x) = o(R(x))$, $R^*(x) \sim R(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

Dans ce qui suit on va employer les symbôles $\sum$, $S(x)$, $S^*(x)$, $R(x)$ et $R^*(x)$ avec les significations définies par (D_1) et (D_2).

(VIII) *Soit la fonction* $f(x)$ *non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle* $(0, \delta)$ $(\delta > 0)$ *et soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La convergence (vers une limite finie) de l'une des intégrales*

$$\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad et \qquad \int_{+0}^{\infty} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \qquad (\alpha > 0)$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$f(x) \int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \to 0 \qquad (x \to +0).$$

2° *Sous l'hypothèse*

$$\int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt < +\infty,$$

la convergence de l'une des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad et \qquad \int_{+0}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$R\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\to 0 \qquad (x\to+0).$$

(IX) *Pour toute fonction à croissance lente $L(x)$ il existe une fonction à croissance lente et infiniment différentiable $L_0(x)$ telle que l'on ait:*

1° $L_0(x)\sim L(x) \qquad (x\to\infty)$.

2° $L_0(n)=L(n) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$.

3° *Si la fonction $L(x)$ est monotone, pour $x\geqslant 0$ ou pour x suffisamment grand, alors $L_0(x)$ a la même propriété.*

4° *L'énoncé correspondant au précédent qui concerne la convexité est aussi vrai.*

Le théorème précédent implique que *dans les énoncés de nos théorèmes* I-XIII, *de même que dans ceux des autres théorèmes abeliens et tauberiens ou de la théorie trigonométrique où interviennent les fonctions à croissance lente* (exemples: les résultats dans [3], [4], [5] et [6]) *on peut supposer, sans restreindre la généralité, que toute fonction à croissance lente $L(x)$ en question a pour $x\geqslant 0$ autant de dérivées que l'on veut et de même que, dès que l'on introduit une condition de monotonie ou de convexité relative à $L(x)$, il n'importe si l'on y soumet $L(x)$ ou seulement la suite correspondante $L(n)$ $(n=0,1,2,\ldots)$.*

(X) *Soit $\mathcal{K}$ la classe de toutes les fonctions à croissance lente et $\mathcal{K}_0$ la classe de Zygmund* ([15], tome I, p. 299) *de toutes les fonctions $K(x)$ positives et mesurables sur* $[0,+\infty)$ *et bornées sur tout intervalle fini* $[0,a]$ $(a>0)$ *pour lesquelles*

$$x^{\delta}K(x)\nearrow,\ x^{-\delta}K(x)\searrow^{1)}\ (x \text{ suffisamment grand};\ \delta>0).$$

Alors $\mathcal{K}_0$ est un vrai sous-ensemble de $\mathcal{K}$.

(XI) *Si $L(x)$ est le produit de deux fonctions à croissance lente monotones $L^{(1)}(x)$ et $L^{(2)}(x)$ (ou bien de deux fonctions à croissance lente telles que $L^{(1)}(n)\nearrow$, $L^{(2)}(n)\searrow$) et $\alpha>0$, alors*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}|\nu^{-\alpha}L(\nu)-(\nu+1)^{-\alpha}L(\nu+1)|\leqslant M(\alpha)\,n^{-\alpha}L(n)\ (=1,2,\ldots),$$

$M(\alpha)$ étant indépendant de n.

0.2. Dans la démonstration du théorème I on va profiter du lemme suivant.

Lemme. *Soit la fonction $h(x)$ intégrable dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle* $[\varepsilon,\pi]$ $(0<\varepsilon<\pi)$ *et soit $L(x)$ une fonction à croissance lente et $\gamma>0$. Alors la relation asymptotique*

$$h(x)\sim x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0) \tag{1}$$

entraîne

$$\int_0^x h(t)\,dt\sim\frac{1}{\gamma}x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0).$$

[1]) Le symbôle $f(x)\nearrow$ désigne que l'on a $f(x)\geqslant f(y)$ pour $x>y$. On admet la signification correspondante de $f(x)\searrow$ et des même symbôles pour les suites.

En particulier, pour $\gamma > 0$

$$\int_0^x t^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Démonstration. (1) entraîne

$$h(x) = \alpha(x)\, x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\lim\limits_{x \to +0} \alpha(x) = 1$ et la fonction $\alpha(x)$ est intégrable sur $[\varepsilon, \pi]\,(0 < \varepsilon < \pi)$. On obtient alors, d'après (III) et (VI) (assertion 1°),

$$\lim_{x \to +0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\gamma-1} \alpha(t) L\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\displaystyle\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\displaystyle\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_y^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\displaystyle\frac{1}{\gamma} y^{-\gamma} L(y)}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-y^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) L(y)}{-y^{-\gamma-1} L(y) + \displaystyle\frac{1}{\gamma} y^{-\gamma-1} c(y)\, \varepsilon(y) \exp\left(\int_1^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right)}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$

1. Le comportement asymptotique des séries trigonométriques de sinus et de cosinus pour $x \to +0$.

A partir d'ici, on va sous-entendre que toute fonction désignée par $L(x)$ est à croissance lente sans l'énoncer explicitement. Comme nous l'avons déjà dit, on peut supposer partout que $L(x)$ a autant de dérivées que l'on veut. L'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur l'intervale $(0, \pi)$ sera partout désignée par $f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi)$.

Les considérations dans ce paragraphe se rapportent au comportement asymptotique des séries

(2). $$g(x) = \sum_{n=1} b_n \sin nx$$

et

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{3}$$

pour $x \to +0$, sous l'hypothèse que $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0\,(n \to \infty)$, ou sous quelque autre hypothèse qui assure la convergence de ces séries pour $x \in (0, \pi)$.

Comme résultat initial dans ce domaine, on peut considérer les formules

$$\left.\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx \sim x^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \sin \dfrac{\pi\gamma}{2} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \sin nx \sim x^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \cos \dfrac{\pi\gamma}{2} \end{cases}\right\} (x \to +0;\ 0<\gamma<1). \tag{4}$$

Pour la démonstration voir, par exemple, [15] (I, pp. 298—299).

Quant aux séries de sinus (2), *Hardy* [10] a démontré en 1928 que, sous l'hypothèse $b_n \searrow 0\,(n \to \infty)$, la relation

$$b_n \sim n^{-\gamma} \quad (n \to \infty\,;\ 0<\gamma<1) \tag{5}$$

entraîne

$$g(x) \sim x^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi\gamma}{2} \qquad (x \to +0). \tag{6}$$

En 1931 *Hardy* a établi que, inversement, sous la même condition, (6) entraîne (5). Plus tard ce résultat-là a été étendu à l'intervalle $0<\gamma<2$ tout entier [11]. On a obtenu des résultats analogues pour la série de cosinus.

Dans [4] et [6] *Aljančić, Bojanić* et *Tomić* ont généralisé le résultat cité relatif à la série de sinus, par la proposition suivante:

Soit $0<\gamma<2$, $b_n \searrow 0$. *Alors*

$$b_n \sim n^{-\gamma} L(n) \qquad (n \to \infty) \tag{7}$$

entraîne

$$g(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi\gamma}{2} \qquad (x \to +0) \tag{8}$$

et inversement, (8) *entraîne* (7). *Pour* $1<\gamma<2$ (8) *est valable dès que*

$$b_n = n^{-\gamma} L(n), \tag{9}$$

sans la condition $b_n \searrow$, *et pour* $0<\gamma\leqslant 1$ (8) *est aussi valable si l'on a* (9) *où* $L(x)$ *est produit de deux fonctions monotones à croissance lente.*

Ici nous ne nous intéressons qu'à la partie directe de ce théorème-là, c'est-à-dire à l'énoncé des conditions suffisantes pour (8).

On a des propositions analogues sur la série de cosinus (3) avec

$$a_n = n^{-\gamma} L(n) \quad (0<\gamma<1).$$

Dans [4] et [6] *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić* ont aussi étendu, au moyen de fonctions à croissance lente, l'énoncé direct et l'énoncé inverse de leur théorème cité au cas de la série de sinus avec $\gamma=0$. La partie directe de ce résultat est formulée comme il suit:

Soit $L(x)$ une fonction à croissance lente et convexe qui tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Dans sa monographie [15], *A. Zygmund*, employant la notion plus étroite de fonction à croissance lente, à savoir la notion de fonction appartenant à la classe $\mathcal{K}_0$ de *Zygmund* ((X) dans 0.1), étend les propositions de type considéré pour les séries de sinus et pour celles de cosinus aux cas $\gamma=0$ et $\gamma=1$ et puis, par „l'intégration", qu'il omet d'expliquer de plus près, à quelques autres intervalles et valeurs entiers de γ ([15], tome I, pp. 298—305 et page 366, problèmes 11 et 12). Nous remarquons cependant que l'on peut, en modifiant et complétant les démonstrations correspondantes contenues dans les travaux des auteurs cités, formuler tous les résultats de *Zygmund* avec la notion générale de fonction à croissance lente et aussi avec les variantes de conditions dans les résultats de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*. En outre, on peut donner, à l'aide de l'induction mathématique, une forme fermée à l'extension des énoncés à toutes les valeurs entières non négatives de γ et a tous les intervalles entre ces valeurs—là.

1.1. Tous les résultats et toutes les remarques qui précèdent (concernant les énoncés directs) sont contenus dans le

Théorème I. *Avec les désignations*

$$f_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \cos nx, \quad g_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx, \tag{10}$$

les assertions suivantes sont valables:

1° *Si la fonction $L(x)$ est convexe et tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$, alors*

$$g_0(x) \sim x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0);$$

si en outre la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$ est à croissance lente, alors

$$f_0(x) \sim \frac{\pi}{2} x^{-2}\left[L\left(\frac{1}{x}\right) - L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] \qquad (x \to +0)$$

$\left[\sim -\frac{\pi}{2} x^{-2} L'\left(\frac{1}{x}\right) (x \to +0)\right.$, *si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente*$\left.\right]$.

2° *Pour $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\, U\, (2k+1,\ 2k+2)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ on a*

$$g_\gamma(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{\gamma+1-2\nu}(0)$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0), \tag{11}$$

où l'on n'écrit pas la somme si $k=0$; *pour* $\gamma \in (0,1)$

$$f_\gamma(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0); \tag{12}$$

pour $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\ U(2k\ 2k+1)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$

$$f_\gamma(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{\gamma-2\nu}(0) \tag{13}$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0);$$

les relations (11) *avec* $\gamma \in (2k+1,\ 2k+2)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *ont lieu dès que* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente et les relations* (11) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$, *les relations* (12) *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *si une des conditions suivantes est encore remplie*

(C_1) $$x^{|\gamma|-\gamma} L(x) \searrow;$$

(C_2) *$L(x)$ est produit de deux fonctions à croissance lente monotones.*

3° *En supposant une des conditions* (C_2) *ou*

(C'_1) $$x^{-1} L(x) \searrow$$

remplie, on a

$$g_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \tag{14}$$

$$f_{2k}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &(16)\ g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} S\left(\frac{1}{x}\right), \\ &(17)\ f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} S\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} \left(\sum = +\infty\right)$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots).$$

Si $\sum < +\infty$,

$$g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} R\left(\frac{1}{x}\right), \tag{18}$$

$$f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} R\left(\frac{1}{x}\right) \tag{19}$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots)$$

Pour $k=1$ *on n'écrit pas les sommes* (14), (16) *et* (17).

4° *Sous la condition* (C_2) *les séries* (2) *et* (3) *avec* $0 < \gamma \leqslant 1$ *convergent uniformément pour* $x \in [\delta,\ 2\pi-\delta]$ $(0 < \delta < \pi)$.

Notons que la condition particulière de la seconde assertion sous 1° est remplie si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente.

Dans les résultats précédemment cités de *Aljančić-Bojanić-Tomić* sont contenus la première assertion 1°, la relation (11) pour $\gamma \in (0, 1) \, U (1, 2)$ et la relation (14) pour $k=1$, tout cela sous les conditions correspondantes citées dans l'énoncé de notre théorème. La seconde assertion 1° et les relations: (12); (13) avec $\gamma \in (1, 2)$; (15)—(19) pour $k=1$ sont démontrées dans le livre de *Zygmund*, mais sous des hypothèses plus restrictives que dans notre théorème. Il faut remarquer que les hypothèses de la seconde assertion 1° chez *Zygmund* ne sont pas plus restrictives en raison de la plus large notion de fonction à croissance lente dans notre énoncé, la convexité de la fonction $L(x)$ à croissance lente entraînant $L(x) \in \mathcal{K}_0$ (théorème VI dans notre travail [2]), mais parce que la fonction $-xL'(x)$ est remplacée dans le théorème I par la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$, supposée à croissance lente (dans le sens plus large) et que, d'autre part, si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente dans le sens de *Zygmund*, la fonction $L(x)$ est convexe: en effet, alors $-L'(x) = x^{-1}[-xL'(x)] \searrow$.

Démonstration. Ce que nous avons à prouver encore, nous allons le faire dans l'orde suivant:

a) l'assertion 4°;

b) la seconde assertion 1°;

c) la relation (12);

d) la relation (11) avec $k=1, 2, 3, \ldots$ et les relations (13);

e) les relations (17) et (19) avec $k=1$;

f) les autres cas des relations (14)—(19).—

a) En supposant la condition (C_2) remplie et avec un $\gamma \in (0,1)$ fixé, on obtient, d'après (XI), pour $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$,

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{p} \nu^{-\gamma} L(\nu) \sin \nu x \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=m+1}^{p-1} [\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)]^{-\gamma} L(\nu+1)] \cdot \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right.$$

$$\left. + p^{-\gamma} L(p) \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sum_{\nu=m+1}^{p-1} |\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-\gamma} L(\nu+1)| + p^{-\alpha} L(p) \right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} [M(\gamma)(m+1)^{-\gamma} L(m+1) + p^{-\gamma} L(p)].$$

On obtient la même majorante, d'une manière tout-à-fait semblable, dans le cas de la série des cosinus. Cette majorante-là ne dépend pas de x et tend vers zéro lorsque $m,\ p\to\infty$.

b) Il résulte des hypothèses sur $L(x)$ que cette fonction est non croissante pour x suffisamment grand et tend vers zéro quand $x\to+\infty$. Par conséquent, pour un nombre naturel n_0 on a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|L(n)-L(n+1)|=\sum_{n=n_0}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]<+\infty. \tag{20}$$

On obtient alors, en appliquant la sommation partielle $(0<x<\pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(n)\cos nx=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}L(n)\cos nx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m-1}[L(n)-L(n+1)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+L(m)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]\left(\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]\sin nx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)](\cos nx-1)$$

$$=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}n[L(n)-L(n+1)]\sin nx+0(1), \tag{21}$$

puisque, d'après (20),

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)](\cos nx-1)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|L(n)-L(n+1)|<+\infty.$$

D'après l'hypothèse, $x[L(x)-L(x+1)]$ est une fonction à croissance lente et

$$n^{-1}n[L(n)-L(n+1)]=L(n)-L(n+1)\searrow,$$

de sorte que, d'après (14) avec $k=1$, la dernière somme dans (21) a le comportement asymptotique de la fonction $x^{-1}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\frac{\pi}{2}$. (21) entraîne alors l'assertion en question.

c) La première des formules (4) peut être écrite sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx = x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi}{2}\gamma + o(x^{\gamma-1}) \quad (x\to+0;\quad 0<\gamma<1),$$

d'où, pour $0<\gamma<1$,

$$\frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\frac{1}{x}\right)}\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,n^{-\gamma}\cos nx - \Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi}{2}\gamma$$

$$= x^{1-\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})}-1\right]n^{-\gamma}\cos nx + o(1) = T(x)+o(1) \quad (x\to+0).$$

Il suffit, donc, d'établir que $T(x)\to 0$ $(x\to+0)$.

On a, avec $0<\delta<1<\Delta<+\infty$,

$$|T(x)| = \left|x^{1-\gamma}\left(\sum_{n\le\frac{\delta}{x}} + \sum_{\frac{\delta}{x}<n\le\frac{\Delta}{x}} + \sum_{n>\frac{\Delta}{x}}\right)\left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})}-1\right]n^{-\gamma}\cos nx\right|$$

$$\le \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\left|\sum_{n\le\frac{\delta}{x}} L(n)\,n^{-\gamma}\cos nx\right| + x^{1-\gamma}\left|\sum_{n\le\frac{\delta}{x}} n^{-\gamma}\cos nx\right|$$

$$+ x^{1-\gamma}\left|\sum_{\frac{\delta}{x}<n\le\frac{\Delta}{x}}\left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})}-1\right]n^{-\gamma}\cos nx\right| + \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\left|\sum_{n>\frac{\Delta}{x}} L(n)\,n^{-\gamma}\cos nx\right|$$

$$+ x^{1-\gamma}\left|\sum_{n>\frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma}\cos nx\right| = T_1+T_2+T_3+T_4+T_5. \tag{22}$$

On a ensuite, avec $\gamma<\beta<1$ et en désignant par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 M_1', M_4' des constantes positives, d'après (V),

$$T_1 \le \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\sum_{n\le\frac{\delta}{x}} L(n)\,n^{\beta-\gamma}\cdot n^{-\beta}\,|\cos nx|$$

$$\le \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\sup_{0\le t\le\frac{\delta}{x}}\{t^{\beta-\gamma}L(t)\}\sum_{n\le\frac{\delta}{x}} n^{-\beta}$$

$$\le M_1'\,\frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\beta-\gamma} L\left(\frac{\delta}{x}\right)\int_0^{\delta/x} t^{-\beta}\,dt$$

$$\le M_1\,\delta^{1-\gamma}\,\frac{L(\delta x^{-1})}{L(x^{-1})} \tag{23}$$

et, comme cas particulier,

(24) $$T_2 \leqslant M_2 \delta^{1-\gamma}.$$

On obtient

$$T_3 \leqslant x^{1-\gamma} \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right| n^{-\gamma} |\cos nx|$$

$$\leqslant x^{1-\gamma} \operatorname{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \leqslant x^{1-\gamma} \operatorname{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \int_{\frac{\delta}{x}-1}^{\frac{\Delta}{x}} t^{-\gamma}\, dt$$

(25) $$\leqslant M_3 \frac{\Delta^{1-\gamma} - \delta^{1-\gamma}}{1-\gamma} \operatorname{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right|.$$

D'après la majoration que nous avons déjà fait dans a) (le cas des cosinus, comme nous l'avons dit, est tout-à-fait analogue à celui des sinus) et d'après (I), nous avons

$$T_4 = \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right| \leqslant \frac{M_4'}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} L([\Delta x^{-1}] + 1)([\Delta x^{-1}] + 1)^{-\gamma}$$

(26) $$\leqslant M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{-\gamma}}{L(x^{-1})} \cdot L(\Delta x^{-1})(\Delta x^{-1})^{-\gamma} = M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma} \frac{L(\Delta x^{-1})}{L(x^{-1})}$$

et, comme cas particulier,

(27) $$T_5 \leqslant M_5 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma}.$$

D'après les inégalités (23)—(27) et les propriétés correspondantes des fonctions à croissance lente, on obtient, faisant dans (22) $x \to +0$,

$$\overline{\lim_{x \to +0}} \, |T(x)| \leqslant (M_1 + M_2)\, \delta^{1-\gamma} + (M_4 + M_5)\, \Delta^{-\gamma},$$

d'où ($\delta \to +0$, $\Delta \to +\infty$)

$$\lim_{x \to +0} T(x) = 0.$$

d) D'après le résultat de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*, la relation (11) est valable pour $k = 0$ et cela sous une des conditions (C_i) $(i = 1, 2)$ si $\gamma \in (0,1)$ et sans condition particulière si $\gamma \in (1, 2)$. On en déduit, pour $\gamma \in (0, 1) \cup (1, 2)$ et sous les mêmes conditions pour chacun des deux intervalles, par l'integration de 0 à $x \in (0, 2\pi)$, ce procédé étant justifié par le lemme de 0.2,

$$f_{\gamma+1}(x) - f_{\gamma+1}(0) \sim -\frac{x^{\gamma}}{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi}{2} \gamma \qquad (x \to +0),$$

c'est-à-dire, pour $\gamma \in (1,2) \cup (2,3)$,

$$f_\gamma(x) - f_\gamma(0) \sim -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}\Gamma(1+1-\gamma)\cos\frac{\pi}{2}(\gamma-1)\cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi}{2}\gamma\cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma)L\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{\pi}{2}\gamma,$$

cette égalité étant valable sous chacune des conditions $(C_i)(i=1,2)$ si $\gamma \in (1,2)$ et sans elles si $\gamma \in (2,3)$. Les assertions (11) et (13) sont donc valables pour $k=0$ et pour $k=2$ respectivement. Si on les suppose valables pour un nombre naturel k, on établit, de la même manière que là-dessus, en intégrant de 0 à x et en profitant du lemme, leur validité pour le nombre naturel $k+1$ et cela sous les conditions correspondantes. C'est donc par induction mathématique que l'on vient d'achever la démonstration de toutes les assertions 2°.

e) Supposons une des conditions $(C_i)\,(i=1,2)$ remplie. Si $\sum = +\infty$, on a, d'après (IV) et VII),

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n)\cos nx$$

$$= \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1}L(n) - \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)$$

$$+ \sum_{n > \frac{1}{x}} n^{-1}L(n)\cos nx = S^*\left(\frac{1}{x}\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

$$= S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{28}$$

Comme (P_1, P_2 constantes positives), d'après (V) et (VII),

$$\left|\sum\nolimits_1\right| = \left|\sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right| \leqslant \frac{1}{2}x^2 \sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} nL(n)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{x}}\{tL(t)\} \leqslant P_1 L\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et, d'après la majoration dans a),

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant \frac{P_2}{\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

on déduit de (28) l'assertion (17) pour $k=1$.

Si l'on a $\sum < +\infty$ (sans autre condition) la série $f_1(x)$ est convergente et

$$f_1(0)-f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)+R^*\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(29)\qquad -\sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-1} L(n)\cos nx=R\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\sum\nolimits_3-\sum\nolimits_4.$$

On obtient de nouveau, de la même manière que plus haut,

$$\left|\sum\nolimits_3\right|=0\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=0\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et par suite, d'après (VII),

$$(30)\qquad \left|\sum\nolimits_3\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Les égalités (29) et (30) entraînent l'assertion (19) avec $k=1$.

f) D'après ce qui précède, les relations (14), (17) et (19) sont valables pour $k=1$ sous les conditions correspondantes. En intégrant, dans le sens du lemme, la relation (14) de 0 à x, on aboutit à

$$f_2(x)-f_2(0)=-\frac{\pi}{2}\,xL\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (x\to+0),$$

c'est-à-dire à la relation (15) pour $k=1$. En intégrant les relations (17) et (19), sous les conditions correspondantes, on aboutit respectivement aux relations

$$g_2(x)\sim xS\left(\frac{1}{x}\right)\qquad \left(x\to+0;\ \sum=+\infty\right),$$

$$g_2(x)-xf_1(0)\sim -xR\left(\frac{1}{x}\right)\qquad \left(x\to+0;\ \sum<+\infty\right),$$

c'est-à-dire aux relations (16) et (18) pour $k=1$. On a ainsi prouvées toutes les relations (14)—(19) pour $k=1$. Pareillement, en intégrant de 0 à x selon le lemme, de l'hypothèse que toutes les assertions (14)—(19) sont vraies pour le nombre naturel k on déduit leur validité pour $k+1$. C'est donc par induction mathématique que l'on prouve toutes les assertions (14)—(19).

1.2. Aux résultats précédents sur le comportement asymptotique des séries (2) et (3) nous ajoutons l'estimation suivante de la série des modules des termes de la série $g_\gamma(x)$.

Théorème II. *Sous une des conditions (C_2) et (C_1') (l'énoncé du théorème I) on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx|\sim\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\sin nx\qquad (x\to+0).$$

Si $\sum<+\infty$, cette relation est valable sans conditions supplémentaires.

Démonstration. Soit d'abord $\sum=+\infty$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx|=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}}+\sum_{n>\frac{1}{x}}$$

$$\leqslant x \sum_{n\leqslant \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) + \sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} L(n)$$

$$\leqslant x S^*\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(xL\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= xS^*\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1)) = xS\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1))$$

et, d'autre part, d'après le thèorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim xS\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \sim xS\left(\frac{1}{x}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x\to+0).$$

Si $\sum < +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = x\sum;$$

d'autre part, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x\sum \qquad (x\to+0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \sim x\sum \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x\to+0).$$

1.2.1. De la même façon que les inégalités dans la démonstration précédente, on peut déduire les deux estimations suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\,|\sin nx| \leqslant \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \tag{31}$$

($o<\varepsilon<\gamma$; $x>o$ et suffisamment petit; $1<\gamma<2$);

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\,|\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\gamma} L(n) \qquad (\gamma>2),$$

valables sans aucune restriction pour $L(x)$.

(à suivre)

BIBLIOGRAPHIE

1. D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund—B. Sz.-Nagy*, Publ. Ins. Math. Acad. serbe Sci., t. XII (1958), 81—100.

2. D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

3. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publ. Inst. Math, Acad. serbe, Sci., t. VII (1954), 81—94.

4. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15 — 26.

5. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. VII (1954), 81 — 94.

6. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. X (1958), 101—120,

7. Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118 — 135.

8. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363 — 368.

9. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 358 — 373.

10. G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12 — 13

11. P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373 — 378.

12. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica, (Cluj), 4 (1930), 38 — 53.

13. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondameutaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55 —62.

14. A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13 (1929), 284 — 303.

15. A. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

DUŠAN ADAMOVIĆ

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (II)

Extrait
des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE. T. 8 (22), 1968

BEOGRAD
1968

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 37—50

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (II)

*(Suite)**

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

2. Généralisations des théorèmes de Zygmund et B. Sz.-Nagy

On suppose dans ce paragraphe que les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ soient non croissantes et inférieurement bornées pour $x \in (0, \pi)$ et que l'on ait

$$xg(x) \in \mathscr{L}(0, \pi), \quad f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

On désigne par b_n $(n=1,2,3, \ldots)$ les coefficients de la série de sinus de la fonction $g(x)$ et par a_n $(n=0,1,2, \ldots)$ les coefficients de la série de cosinus de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \qquad (n=1,2,3, \ldots),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx \qquad (n=0,1,2, \ldots).$$

Ici les nombres a_n sont les coefficients de *Fourier* de la fonction $f(x)$ et les nombres b_n ne le sont pas nécessairement pour la fonction $g(x)$.

Les deux théorèmes suivants sont dûs à *A. Zygmund* [14] et à *B. Sz.-Nagy* [7]:

(A) *Soit* $0<\gamma\leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

(B) *La série*

(32) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n$$

* La première partie de cet article, sous le même titre, a été publiée dans ces „Publications", t. 7 (21), 1967.

converge absolument si et seulement si

(33) $$x^{\gamma-1} f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi)$$

ou bien si et seulement si

(34) $$f(x) \log x \in \mathscr{L}(0, \pi),$$

suivant que l'on a $0<\gamma<1$ *ou* $\gamma=1$.

Zygmund a obtenu ces résultats pour le cas $\gamma=1$ et *B. Sz.-Nagy* dans le cas général.

De plus, *B. Sz.-Nagy* a démontré que *déjà la sommabilité* (C, 1) *de la série* (32) *entraîne* (33) *ou* (34), *selon le cas.*

Les résultats précédents peuvent être généralisés par les théorèmes suivants, où intervient la fonction à croissance lente $L(x)$:

Théorème III. *Soit* $0<\gamma\leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème IV. *Soit* $0<\gamma<1$. *La série*

(35) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n$$

converge absolument si et seulement si

(36) $$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème V. *Soit* $0<\gamma<1$.

Si $x^{-1-\gamma} L(x) \searrow$ *pour x suffisamment grand, de la convergence de la série* (35) *résulte* (36).

Si $x^{-\gamma} L(x) \searrow$ *pour x suffisamment grand, de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (35) *résulte* (36).

Théorème VI. *La série*

$$\sum_{n-1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n$$

converge absolument si et seulement si

(37) $$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème VII. *La relation* (37) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (35) *suivant que l'on a, pour x suffisamment grand, seulement* $x^{-2} L(x) \searrow$ *ou déjà* $x^{-1} L(x) \searrow$.

Pour $L(x) \equiv 1$ le théorème III se réduit à (A), les théorèmes IV et VI se réduisent à (B) et les théorèmes V et VII à la remarque supplémentaire de *B. Sz.-Nagy*.

On peut ajouter aux théorèmes précédents le théorème suivant, relatif au cas de la série de sinus et de $\gamma = 0$, non compris dans les résultats de *Zygmund — B. Sz.-Nagy*.

Théorème VIII. *Soit* $L(x)$ *convexe et tel que* $\Sigma < +\infty$. *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n L(n)$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

En 1958 nous avons donné dans [1] une généralisation des théorèmes (A) et (B) différente de la précédente. A savoir, cette généralisation-là contenaient les mêmes énoncés des théorèmes IV, V et VIII et l'énoncé du théorème III avec l'intervalle plus large (0,2) pour γ; les énoncés suivants y figuraient au lieu des théorèmes VI et VIII, respectivement:

(VI′) *Soit*

$$0 < A\, L(x) \log x > \int_0^x t^{-1} L(t)\, dt < B\, L(x) \log x \quad (x > 1) \tag{38}$$

(*A et B constantes*). *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n \tag{39}$$

converge absolument si et seulement si

$$f(x) L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} \in \mathscr{L}(0, \pi). \tag{40}$$

(VII′) *Soit*

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt > A\, L(x) \log x \qquad (x > 1). \tag{41}$$

Alors (40) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (39) *suivant que, pour x suffisamment grand, la fonction* $x^{-2} L(x)$ *seulement ou déjà la fonction* $x^{-1} L(x)$ *est non croissante.*

Ici, dans le théorème III nous nous limitons à l'intervalle (0,1] pour γ, en vertu du résultat concernant l'intervalle (1,2) obtenu en 1962 par *R. P. Boas* (théorèmes (C) et (D) dans **3**), qui est, pour $L(x) \equiv 1, 1 < \gamma < 2$, plus générale que l'ancienne variante de notre théorème III et que nous avons, d'ailleurs, réussi à généraliser au moyen de fonctions à croissance lente (théorèmes IX et X). — Les théorèmes VI et VII sont plus généraux que les théorèmes (VI′) et (VII′), puisque les premiers ne contiennent pas les conditions restrictives (38) et (41) et puisqu'on a (37) $\Leftrightarrow$ (40) sous la condition (38) et (37) $\Rightarrow$ (40) sous la condition (41).

Pour compléter l'exposé sur notre sujet, nous avons cités tous les théorèmes III — VIII. Les démonstrations des théorèmes III — V étant contenues dans [1], nous nous limitons ici à exposer les démonstrations des théorèmes VI — VIII, celle du dernier puisque sa démonstration dans [1] n'était pas correcte.

2.1 Démonstrations des théorèmes VI—VIII

2.1.1 *Démonstration des théorèmes* VI *et* VII. D'après l'assertion 1° de (VIII), avec $L(x)\equiv 1$, $f(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi x\,df(x)$ et que $xf(x)\to 0$ $(x\to+0)$ et, par conséquent, l'existence de $\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)$ et que $f(x)\sin nx\to 0$ $(x\to+0)$, de sorte qu'une intégration par parties donne

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\left[-\lim_{x\to+0} f(x)\sin nx-\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\right]$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x);$$

donc,

$$a_n=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{42}$$

Nous allons démontrer d'abord que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39). Nous démontrerons ensuite la seconde, puis la première assertion du théorème VII et, enfin, que la convergence absolue de la série (39) entraîne (37). Toutes les assertions des théorèmes VI et VII étant triviales si $\Sigma<+\infty$, nous allons supposer jusqu'à la fin de la démonstration que l'on ait $\Sigma=+\infty$.

D'après (42) et la majoration effectuée dans la démonstration du théorème II, on a, avec une constante positive M,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)\,|a_n|\leq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty n^{-2}L(n)\,|\sin nx|\,d[-f(x)]$$

$$\leq M\int_0^\pi x\,S\left(\frac{1}{x}\right)d[-f(x)].$$

On en conclut, d'après (VIII), que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39).

Supposons que la série (39) soit sommable (C, 1), c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1}L(\nu)\,a_\nu=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x\cdot df(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n\to\infty$ et que l'on ait $x^{-1}L(x)\searrow$ pour $x\geqslant m$ (m nombre naturel). Soit

$$s_\nu(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-\cos(2\nu+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\qquad(\nu=1,2,3,\ldots).$$

Alors

$$P_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right][s_\nu(x)-s_0(x)]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right]s_\nu(x)$$

$$\text{(43)}\qquad-\left(1-\frac{1}{n}\right)L(1)\,s_0(x)\geqslant\sum_{\nu=m}^{n-1}+\left[\sum_{\nu=1}^{m-1}-L(1)\,s_0(x)\right]=P_n^{(1)}(x)+P^{(1)}(x).$$

La suite

$$\omega_{n,\nu}\overset{\text{def}}{=}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)$$

$$=[\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)]-\frac{1}{n}[\nu^{-1}L(\nu)-(\nu+1)^{-1}L(\nu+1)]\qquad(\nu\leqslant n-1)$$

est positive pour $\nu\geqslant m$ et, pour un $\nu\geqslant m$ fixé, non décroissante par rapport à n; en outre,

$$\omega_{n,\nu}\to\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)=\omega_\nu\qquad(n\to\infty).$$

En profitant du fait que $s_\nu(x)\geqslant 0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$, on en conclut que les fonctions de la suite $P_n^{(1)}(x)$ sont non négatives et que cette suite tend vers

$$P(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{n-1}\omega_{n,\nu}s_\nu(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty}\omega_\nu s_\nu(x).$$

(La dernière égalité, d'après ce qui précède, se justifie par le fait suivant, aisé à démontrer: si $0\leqslant\alpha_{n,\nu}\nearrow\alpha_\nu$ $(n\to\infty;\ \nu=m,m+1,\ldots)$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_{n,\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_\nu.\Big)$$

On obtient de (43)

$$\int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\,d[-f(x)] \leqslant \left|\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)\right| + \left|\int_0^\pi P^{(1)}(x)\,df(x)\right|. \tag{44}$$

Comme, d'après l'hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)$ est fini et que la fonction $P^{(1)}(x)$ est, selon (VIII), intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on déduit de (44), tenant compte de la non negativité des fonctions $P_n^{(1)}(x)$, que la fonction $P(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$.

Or, comme nous allons le montrer tout de suite,

$$P(x) \geqslant M_1\, x\, S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (M_1 \text{ constante positive}), \tag{45}$$

d'où résulte que l'intégrale $\int_0^\pi x\,S\left(\frac{1}{x}\right)df(x)$ est finie; donc, d'après (VIII),

$$S\left(\frac{1}{x}\right)f(x) \in \mathscr{L}\ (0, \pi).$$

Pour achever cette partie de la démonstration, il suffit, donc, de démontrer (45).

Pour $\nu + \frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{x}$ on a

$$s_\nu(\alpha) \geqslant \frac{2}{x}\left(\frac{2\nu+1}{2\pi}x\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}x\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2$$

et, pour x suffissamment petit, d'après (I) et (V),

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{\nu=m}^{\infty} s_\nu(x)\,[\nu^{-2}L(\nu) - (\nu+1)^{-2}L(\nu+1)] \\
&\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \sum_{m+\frac{1}{2}\leqslant\nu+\frac{1}{2}\leqslant\frac{\pi}{x}} \left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2 [\nu^{-2}L(\nu) - (\nu+1)^{-2}L(\nu+1)] \\
&\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \int_m^{\frac{\pi}{x}-1} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 d[-t^{-2}L(t)] \\
&= \frac{2}{\pi^2}x\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 t^{-2}L(t)\Big|_{\frac{\pi}{x}-1}^{m} + 2\int_m^{\frac{\pi}{x}-1}\left(t-\frac{1}{2}\right)t^{-2}L(t)\,dt\right]
\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x \Bigg[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 m^{-2} L(m) - \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-2} L\left(\frac{\pi}{x}-1\right)$$

$$+ M_2 \int\limits_m^{\frac{\pi}{x}-1} t^{-1} L(t)(dt) \Bigg] \geqslant \frac{2}{\pi^2} x \left[M_3 S\left(\frac{1}{x}\right) - M_4 L\left(\frac{1}{x}\right)\right] \geqslant M_5 x S\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec les constantes positives M_2, M_3, M_4, M_5. Ici on a mis à profit la relation 2° de (VII).

Si l'on suppose que la série (39) converge, c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) a_\nu = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x \, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$, et que $\nu^{-2} L(\nu) \searrow$ pour $\nu \geqslant l$ (l nombre naturel), on obtient, d'une manière analogue que ci-dessus,

$$Q_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} [\nu^{-2} L(\nu) - (\nu+1)^{-2} L(\nu+1)] \, s_\nu(x) - L(1) \, s_0(x) + n^{-2} L(n) \, s_n(x)$$

$$\geqslant \sum_{\nu=l}^{n-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{l-1} - L(1) \, s_0(x) \right] = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),$$

où $Q_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives, et l'on en déduit l'intégrabilité de la fonction $P(x)$ par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. On en obtient de nouveau (37).

Soit enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \, |a_n| = K < +\infty.$$

Alors, d'après (V),

$$K \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) \, |a_\nu| \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \inf_{0 \leqslant t \leqslant \nu} \{t^{-1} L(t)\} \, |a_\nu|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) \, |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) \left| \frac{2}{\pi\nu} \int\limits_0^\pi \sin \nu x \cdot d[-f(x)] \right|$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int\limits_0^\pi \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} \underline{L_1}(\nu) \sin \nu x \right] d[-f(x)] \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int\limits_0^\pi R_n(x) \, d[-f(x)] \right|.$$

On a $x^{-1}\underline{L}_1(x)\searrow(x>0)$ et par suite

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)\sin\nu x\\&=\sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)-(\nu+1)^{-2}L_1(\nu+1)]s_\nu(x)-\underline{L}_1(1)s_0(x)\\&=R_n^{(1)}(x)-\underline{L}_1(1)s_0(x),\end{aligned}$$

où $R_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives et la fonction $s_0(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0,\pi)$. Par un procédé semblable à celui employé plus haut, on obtient

$$R_0(x)\geqslant M_6\,x\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right),\quad R_0(x)=\lim_{n\to\infty}R_n^{(1)}(x)\ (M_6 \text{ constante positive}),\ \text{avec}$$

$$\underline{S}_1(x)\overset{\text{def}}{=}\int_1^x t^{-1}\underline{L}_1(t)\,dt.$$

Etant donné que, d'après l'assertion 3° de (VI), $\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right)\sim S\left(\frac{1}{x}\right)(x\to+0)$, on en déduit

$$R_0(x)\geqslant M_7\,xS\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (M \text{ constante positive}).$$

On en obtient (37) en s'appuyant sur (VIII).

2.1.2. *Démonstration du théorème VIII.*

Il résulte des propriétés supposées de la fonction $L(x)$ que $L(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ et aussi que, d'après (VII),

$$\int_0^1 t^{-1}L\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{+\infty}t^{-1}L(t)\,dt<+\infty,$$

c'est-à-dire que

$$x^{-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathscr{L}(0,\ \pi).$$

On en conclut que les deux conditions dont le théorème VIII établit l'équivalence sont pour $g(x)=\text{const}$ automatiquement satisfaites, et l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $g(\pi-0)=0$. Les coefficients b_n sont alors donnés par

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-\cos nx)\,dg(x)\geqslant 0.$$

En effet, d'après l'assertion 1° de (VIII) (avec $L(x)\equiv 1$), $xg(x)\in(0,\ \pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi x^2\,dg(x)$ et que $x^2g(x)\to 0\ (x\to+0)$, et par conséquent l'existence de $\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x)$ et que $(1-\cos nx)\cdot g(x)\to 0$ $(x\to+0)$. Donc, en tenant compte de $g(\pi-0)$, une intégration par parties donne

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\Big[-\lim_{x\to+0} g(x)(1-\cos nx)\Big]-\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x).$$

Par conséquent, $b_n\geqq 0\ (n=1,2,3,\dots)$ et, d'après le théorème de *Beppo-Levi*, la série

$$\sum_{n=1}^\infty L(n)\,b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right]dg(x)$$

converge (absolument) si et seulement si l'intégrale au second membre est fini. Or, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\sim R\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (x\to+0),$$

de manière que l'application de (VIII) conduit à l'assertion du théorème VIII.

3. Généralisation des théorèmes de Boas

Dans ses travaux [8] et [9], *R. P. Boas* a démontré les théorèmes (C)—(G), qui étendent le théorème (A) à l'intervalle $[1, 2]$, en affaiblissant les conditions pour $1<\gamma\leqq 2$ et pour l'assertion dans une direction dans le cas $\gamma=1$, et donnent un analogue du théorème (B) pour la série de cosinus généralisée, définie par *Boas*, sous l'hypothèse

$$x^2 f(x)\in\mathcal{L}(0,\pi),$$

comme la série de cosinus aux coefficients

$$a_n=-2\pi^{-1}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,f(x)\,dx\qquad (n=1,2,3,\dots) \tag{46}$$

(pour l'explication voir [8, 9]). On n'y suppose pas la monotonie des fonctions $g(x)$ et $f(x)$.

(C) *Soit* $1<\gamma<2$ *et*

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx\qquad (n=1,2,3,\dots). \tag{47}$$

Alors

$$x^{\gamma-1}g(x)\in\mathcal{L}\quad(0,\pi) \tag{48}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n. \tag{49}$$

(D) *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0,\pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de* (49) *entraîne* (48).

(E) *Soit* $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0,\pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n$ *entraîne* $g(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$.

(F) *Avec la formule* (47):

1°

$$xg(x)\log\frac{1}{x}\in\mathscr{L}(0,\pi) \tag{50}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n. \tag{51}$$

2° *Si* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, *la convergence de* (51) *entraîne* (50).

(G) *Soit* $1<\gamma<3$, $x^2 f(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$, $f(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$ *et les coefficients* a_n *soient donnés par* (46). *Alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n$ *converge absolument si et seulement si* $x^{\gamma-1} f(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$.

Nous généralisons ici les théorèmes (C)—(G) par les théorèmes suivants, dont le dernier est pour (G) généralisation dans deux directions: introduction de fonction à croissance lente et élargissement de l'intervalle pour γ:

Théorème IX. *Soit* $1<\gamma<2$ *et* (47). *Alors*

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0,\pi) \tag{52}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n. \tag{53}$$

Théorème X. *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, $x\,g(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$, (47) *et* $x^{1-\gamma} L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* (53) *entraîne* (52).

Théorème XI. *Soit* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, (47) *et* $L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *entraîne* $L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$.

Théorème XII. *Avec la formule* (47):

1°

$$x\,S\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0,\pi) \tag{54}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\, b_n. \tag{55}$$

2° *Si* $g(x) \geqq 0$ $(0<x<\pi)$, $x^{-1} L(x) \searrow$ *et* $\sum = +\infty$, *la convergence de* (55) *entraîne* (54).

Théorème XIII. *Soit* $x^2 f(x) \in \mathcal{L}$ $(0, \pi)$, $f(x) \geqq 0$ $(0<x<\pi)$ *et* (46). *Alors:*

1° *Pour* $1<\gamma<3$ *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathcal{L} \ (0, \pi).$$

2° *Sous une des conditions* (C_2) *et* (C_1') *(l'énoncé du théorème* I) *et sous l'hypothèse* $\Sigma = +\infty$, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n)\, a_n \tag{56}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathcal{L} \ (0, \pi).$$

3° *Sous l'hypothèse* $\sum < \infty$: *la série* (56) *converge absolument, et la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n \tag{57}$$

converge absolument si et seulement si

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathcal{L} \ (0, \pi).$$

3.1. Démonstration des théorèmes IX—XIII

3.1.1. *Démonstration du théorème* IX. D'après le théorème de *Beppo-Levi* et l'estimation (31),

$$\frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |b_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \int_0^{\pi} |g(x)|\, |\sin nx|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |\sin nx|\, dx \leqq M \int_0^{\pi} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)|\, dx,$$

avec M constant, d'où le théorème.

3.1.2. *Démonstration du théorème* X. Mettant à profit le fait que toutes les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$ sont positives pour $0<x<\pi$ (pour la démonstration voir, par exemple, [35], I, p. 106) et l'hypothèse $x^{1-\gamma} L(x) \searrow$, on obtient, au moyen d'une sommation par parties,

(58) $$\sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0<x<\pi;\ p=1, 2, 3, \ldots).$$

Comme

$$\int_0^\pi g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \, dx = \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) b_n,$$

on obtient, d'après le lemme de *Fatou* et (58),

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) b_n < +\infty.$$

Cette intégralité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \sim C x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0;\ C \text{ constante positive})$$

entraînent le théorème,

3.1.3. *Démonstration du théorème* XI. D'après l'hypothèse $L(x)\searrow$, on a (58) avec $\gamma=1$. On en déduit, de la même manière que dans la démonstration précédente,

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-1} L(n) b_n < +\infty.$$

Cette inégalité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \sim \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0)$$

entraînent le théorème.

3.1.4. *Démonstration du théorème* XII. 1° D'après le théorème de *Beppo-Levi* et les théorèmes I et II,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |b_n| \leqslant \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi |g(x)| \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \right] dx$$

$$\leqslant M \int_0^\pi x S\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| \, dx \qquad (M \text{ constante}),$$

ce qui entraîne l'assertion 1°.

2° On a, d'après l'hypothèse sur $L(x)$,

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0 < x < \pi;\ p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent, de

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n$$

on déduit, d'après le lemme de *Fatou*,

$$(59) \qquad \int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p \to \infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n.$$

Puisque $\sum = +\infty$, on a (théorème I)

$$(60) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

De (59) et (60) résulte l'assertion 2°.

3.1.5. *Démonstration du théorème* XIII. 1° On a, en vertu de $1 - \cos nx \geqslant 0$ et d'après le théorème de *Beppo-Levi*,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |a_n| = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

L'assertion 1° résulte de cette égalité et de l'inégalité double

$$A x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \leqslant B x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1 < \gamma < 3;\ A, B \text{ constantes positives}),$$

démontrée dans notre article [1] (p. 88, double inégalité (11)).

2° De même que dans le cas précédent,

$$(61) \qquad \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) |a_n| = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

Sous les hypothèses correspondantes, on a, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

d'où l'assertion.

3° La partie de l'assertion relative à la série (56) résulte de (61) et de la relation (théorème I), valable si $\Sigma < +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 \sum \qquad (x \to +0),$$

et celle concernant la série (57) de l'égalité

$$\frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\,|a_n| = \int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\,(1-\cos nx)\right] f(x)\,dx$$

et de la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\,(1-\cos nx) \sim R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

3.2. On peut remarquer, d'après les démonstrations correspondantes exposées, que la convergence des séries dans les énoncés des théorèmes X et XI et de l'assertion 2° du théorème XII peut être remplacée par la condition que les limites inférieures de leurs suites de sommes partielles sont $<+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund — B. Sz.-Nagy*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. XII (1958), 81—100.

[2] D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

[3] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[4] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15—26.

[5] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[6] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. X (1958), 101—120.

[7] Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118—135.

[8] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363—368.

[9] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 368—373.

[10] G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12—13.

[11] P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373—378.

[12] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj), 4 (1930), 38—53.

[13] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55—62.

[14] A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13, (1929), 284—303.

[15] A. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES

Extrait
des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE. T. 8 (22), 1968

BEOGRAD
1968

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968. p. 106—120.

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS FONCTIONNELLES LINEAIRES

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 23 juin 1967)

Le but principal de cet article est la discussion complète des solutions de l'équation fonctionnelle de la forme

$$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_{ij} f(x_i,\, x_j)=0 \quad (n\geqslant 2), \tag{1}$$

où la fonction $f\colon \mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{L}$ ($\mathcal{S}$ ensemble non vide, $\mathcal{L}$ espace linéaire sur le corps commutatif $\mathcal{F}$ dont la caractéristique n'est pas 2) est inconnue et $a_{ij}\in\mathcal{F}$ $(1\leqslant i,\, j\leqslant n)$ sont constantes données. En particulier, $\mathcal{L}$ peut coïncider avec $\mathcal{F}$.

Notons que ces résultats ne sont pas comparables, du point de vue de la généralité, à ceux de *S. Prešić* contenus dans [1], lesquels se rapportent au cas de l'équation fonctionnelle linéaire homogène, où f est fonction d'un nombre arbitraire de variables indépendantes et où les coefficients sont fonctions données des mêmes variables, mais sont soumis à certaines conditions qu'ils ne satisfont automatiquement s'ils sont constants.

Avant de passer à la discussion de l'équation (1) sous forme générale, nous allons exposer un résultat supplémentaire, à savoir

0. Etude de l'équation fonctionnelle

$$af(x,\, y)+bf(y,\, x)+cf(x,\, x)+df(y,\, y)=g(x,\, y) \tag{2}$$

($f\colon \mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{L}$ **fonction inconnue;** $g\colon \mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{L}$ **fonction donnée;** a, b, c, d **(**$\in\mathcal{F}$**) constantes données)**

Dans ce qui suit jusqu'à la fin de l'article nous désignerons partout par F une fonction arbitraire de deux variables indépendantes ($F\colon \mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{L}$), par G et H des fonctions arbitraires d'une variable indépendante ($G,\, H\colon \mathcal{S}\to\mathcal{L}$) et par C une constante arbitraire ($C\in\mathcal{L}$), sans le noter explicitement.

En posant dans (2) $y=x$, on obtient

$$(a+b+c+d)f(x,\, x)=g(x,\, x). \tag{3}$$

0.1. Soit

$$a+b+c+d\neq 0.$$

Alors (3) entraîne

$$f(x,\, x)=\frac{1}{a+b+c+d}\, g(x,\, x),$$

de manière que (2) devient

$$af(x, y)+bf(y, x)=h(x, y), \tag{4}$$

avec

$$h(x, y)=g(x, y)-\frac{cg(x, x)+dg(y, y)}{a+b+c+d}. \tag{5}$$

Nous allons distinguer quatre cas possibles:

0.1.1. (6) $$a^2-b^2 \neq 0.$$

L'équation (4) et l'équation obtenue par la permutation des lettres x et y

$$bf(x, y)+af(y, x)=h(y, x)$$

forment un système linéaire par rapport à $f(x, y)$ et $f(y, x)$. D'après (6), il en résulte

$$f(x, y)=\frac{ah(x, y)-bh(y, x)}{a^2-b^2}.$$

Etant donné que cette expression pour $f(x, y)$ satisfait identiquement l'équation (2), ce qu'on vérifie immédiatement, *dans ce cas la solution générale est donnée par l'égalité précédente, ou bien, d'après* (5), *par*

$$f(x, y)=\frac{(a+b+c+d)\,[ag(x, y)-bg(y, x)]+(bd-ac)\,g(x, x)+(bc-ad)\,g(y, y)}{(a^2-b^2)(a+b+c+d)}.$$

0.1.2. $$a=b \neq 0.$$

(4) devient

$$a[f(x, y)+f(y, x)]=h(x, y). \tag{7}$$

Il en résulte

$$h(x, y)=h(y, x), \tag{8}$$

ou bien, d'après (5),

$$g(x, y)-g(y, x)=\frac{(c-d)\,[g(x, x)-g(y, y)]}{2a+c+d}. \tag{8'}$$

Cette condition-là est nécessaire pour que l'équation (2) possède une solution dans ce cas. En supposant (8′), c'est-à-dire (8), après la substitution

$$f(x, y)=\frac{1}{2a}h(x, y)+\varphi(x, y) \quad (\varphi \text{ nouvelle fonction inconnue}), \tag{9}$$

(7) se réduit à

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, x)=0;$$

d'où

$$\varphi(x, y)=F(x, y)-F(y, x).$$

D'après tout ce qui précède et une vérification facile: *dans le cas considéré,* (8′) *représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (2) *ait une solution et sous cette condition-là la solution de* (2) *est donnée par*

$$f(x, y)=\frac{(2a+c+d)\,g(x, y)-cg(x, x)-dg(y, y)}{}+F(x, y)-F(y, x).$$

0.1.3. (10) $$a=-b\neq 0.$$

(4) prend la forme

$$a[f(x, y)-f(y, x)]=h(x, y).$$

Il en résulte

(11) $$h(x, y)=-h(y, x),$$

c'est-à-dire, d'après (5) et (10),

(12) $$g(x, y)+g(y, x)=g(x, x)+g(y, y),$$

une condition nécessaire pour que (2) ait une solution dans ce cas. En supposant (12), c'est-à-dire (11), la substitution (9) conduit à

$$\varphi(x, y)-\varphi(y, x)=0,$$

d'où

$$\varphi(x, y)=\Phi(x, y)+\Phi(y, x),$$

et puis, d'après (9) et (5),

$$f(x, y)=\frac{(c+d)\,g(x, y)-cg(x, x)-dg(y, y)}{2a(c+d)}+\Phi(x, y)+\Phi(y, x).$$

En posant $y=x$, il vient

$$f(x, x)=2\,\Phi(x, x),$$

c'est-à-dire, d'après (3),

$$\Phi(x, x)=\frac{g(x, x)}{2(c+d)}.$$

Donc,

$$\Phi(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+\frac{g(x, x)}{2(c+d)},$$

de manière que l'expression précédente pour $f(x, y)$ devient

$$f(x, y)=\frac{(c+d)\,g(x, y)+(a-c)\,g(x, x)+(a-d)\,g(y, y)}{2a(c+d)}+$$

$$+F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y).$$

Une vérification immédiate montre que (12) *représente la condition nécessaire et suffisante et que la solution générale est donnée par la dernière égalité.*

0.1.4. $$a=b=0.$$

On voit sans difficulté que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (2) *ait une solution peut être exprimée comme il suit*

$$g(x, y)=\mathrm{cm}(x)+\mathrm{dm}(y)$$

et que *si $m(x)$ figure dans l'équation précédente, la solution générale de* (2) *est donnée par*

$$f(x, y)=m(x)+F(x, y)-F(x, x).$$

0.2. (13) $$a+b+c+d=0.$$

En posant $y=x$ dans (2), on obtient une condition nécessaire pour qu'on ait une solution dans ce cas:

$$g(x,x)=0. \tag{14}$$

Considérons le système linéaire formé par (2) et l'équation obtenue pa la permutation de x et y:

$$\begin{cases} af(x,y)+bf(y,x)+cf(x,x)+df(y,y)=g(x,y) \\ bf(x,y)+af(y,x)+df(x,x)+cf(y,y)=g(y,x). \end{cases} \tag{15}$$

0.2.1. $$a^2-b^2\neq 0.$$

On obtient de (15)

$$(a^2-b^2)f(x,y)=(bd-ac)f(x,x)+(bc-ad)f(y,y)+ag(x,y)-bg(y,x),$$

ou bien, étant donné que l'on a, d'après (13),

$$bd-ac=-(a+b)(b+c), \quad bc-ad=(a+b)(a+c),$$

$$f(x,y)=\frac{ag(x,y)-bg(y,x)}{a^2-b^2}+(b+c)G(x)-(a+c)G(y). \tag{16}$$

L'équation (2) étant, sous la condition (14), identiquement satisfaite par la fonction f donnée par (16), avec une fonction arbitraire G, on conclut que *la condition* (14) *est nécessaire et suffisante pour qu'on ait une solution et que, sous cette condition-là, la solution générale est donnée par* (16).

0.2.2.

$$a=b\neq 0. \tag{17}$$

(15) devient

$$\begin{cases} a[f(x,y)+f(y,x)]+cf(x,x)+df(y,y)=g(x,y) \\ a[f(y,x)+f(x,y)]+df(x,x)+cf(y,y)=g(y,x), \end{cases}$$

d'où

$$(c-d)[f(x,x)-f(y,y)]=g(x,y)-g(y,x). \tag{18}$$

0.2.2.1. $$c=d\,(=-a).$$

(18) donne

$$g(x,y)=g(y,x), \tag{19}$$

ce qui représente la seconde condition nécessaire. En supposant les conditions (14) et (19) remplies, après la substitution

$$f(x,y)=\frac{1}{2a}g(x,y)+\varphi(x,y), \tag{20}$$

l'équation (2) devient

$$\varphi(x,y)+\varphi(y,x)-\varphi(x,x)-\varphi(y,y)=0,$$

d'où

$$\varphi(x,y)=F(x,y)-F(y,x)+G(x),$$

et puis, d'après (20),

$$f(x,y)=\frac{1}{2a}g(x,y)+F(x,y)-F(y,x)+G(x). \tag{21}$$

Après vérification, on établit que *dans ce cas la condition nécessaire et suffisante est* (14) $\wedge$ (19) et que *la solution générale est donnée par* (21).

0.2.2.2. $c \neq d.$

On a, d'après (18),

$$g(x, y)-g(y, x)=(c-d)[\alpha(x)-\alpha(y)] \tag{22}$$

(la seconde condition nécessaire dans ce cas), avec

$$\alpha(x)=f(x, x). \tag{23}$$

En posant dans (22) $y=y_0$ (y_0 élément fixé de $\mathscr{S}$, arbitrairement choisi), on obtient

$$\alpha(x)=\frac{g(x, y_0)-g(y_0, x)}{c-d}+C, \tag{24}$$

avec $C(=\alpha(y_0))$ constant. La condition (22), d'après (24), prend la forme

$$g(x, y)-g(y, x)=g(x, y_0)-g(y_0, x)-g(y, y_0)+g(y_0, y) \qquad (y_0 \in \mathscr{S}). \tag{25}$$

Après la substitution (20), (2) devient, d'après (14), (22) et (23),

$$g(x, y)+\frac{d-c}{2}[\alpha(x)-\alpha(y)]+a[\varphi(x, y)+\varphi(y, x)]+c\,\alpha(x)+d\,\alpha(y)=g(x, y),$$

c'est-à-dire, d'après (13) et (17),

$$\varphi(x, y)-\alpha(x)+\varphi(y, x)-\alpha(y)=0.$$

Il en résulte

$$\varphi(x, y)=\alpha(x)+F(x, y)-F(y, x)$$

et puis, d'après (20) et (24),

$$f(x, y)=\frac{1}{2a}g(x, y)+\frac{g(x, y_0)-g(y_0, x)}{c-d}+F(x, y)-F(y, x)+C. \tag{26}$$

En supposant les conditions (14) et (25) remplies, la substitution montre que la fonction $f(x, y)$ donnée par (26) satisfait (2) pour C et $F(x, y)$ arbitraires. Donc, *la condition* (14) $\wedge$ (25) *est nécessaire et suffisante pour que l'équation ait une solution dans ce cas et, sous cette condition-là, la solution générale est donnée par* (26).

0.2.3. $a=-b \neq 0.$

On a, d'après (13),

$$d=-c,$$

de manière que (2) devient

$$a[f(x, y)-f(y, x)]+c[f(x, x)-f(y, y)]=g(x, y). \tag{27}$$

Etant donnée que l'on a aussi

$$a[f(y, x)-f(x, y)]+c[f(y, y)-f(x, x)]=g(y, x),$$

on obtient, comme condition nécessaire,

$$g(x, y)+g(y, x)=0 \tag{28}$$

(cette condition implique (14)).

En supposant (28), après la substitution (20) l'équation (27) devient

$$a[\varphi(x, y)-\varphi(y, x)]+c[\varphi(x, x)-\varphi(y, y)]=0,$$

c'est-à-dire

$$a\varphi(x, y)+c\varphi(x, x)-[a\varphi(y, x)+c\varphi(y, y)]=0,$$

d'où

(29) $$a\varphi(x, y)=-c\,\alpha(x)+\Phi(x, y)+\Phi(y, x),$$

avec

$$(a+c)\,\alpha(x)=2\,\Phi(x, x),$$

puisque $\alpha(x)=\varphi(x, x)$. Donc,

$$\Phi(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+\frac{a+c}{2}\alpha(x),$$

ce qui donne, d'après (29),

$$\varphi(x, y)=-\frac{c}{a}\alpha(x)+F(x, y)+F(y,x)-F(x, x)-F(y, y)+\frac{a+c}{2a}\alpha(x)+\frac{a+c}{2a}\alpha(y)$$

$$=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+\frac{a-c}{2a}\alpha(x)+\frac{a+c}{2a}\alpha(y),$$

ou

$$\varphi(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+(a-c)\,G(x)+(a+c)\,G(y)$$

et puis, d'après (20),

(30) $$f(x, y)=\frac{1}{2a}g(x, y)+F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+$$
$$+(a-c)\,G(x)+(a+c)\,G(y).$$

L'équation (27) étant satisfaite par (30), sous la condition (28), on conclut que (28) *est la condition nécessaire et suffisante pour ce cas et que la solution générale et donnée par* (30).

0.2.4. $a=b=0.$

On a de nouveau $d=-c$, de manière que l'équation (2) se réduit à

$$c[f(x, x)-f(y, y)]=g(x, y).$$

0.2.4.1. $c=0.$

Evidemment: *la condition nécessaire et suffisante est*

$$g(x, y)=0$$

et la solution générale est donnée par

$$f(x, y)=F(x, y).$$

0.2.4.2. $c\neq 0.$

Une condition nécessaire est

(31) $$g(x, y)=c[\alpha(x)-\alpha(y)],$$

d'où

$$\alpha(x)=\frac{1}{c}g(x, y_0)+C \quad (C=\text{const},\ y_0\in\mathcal{S}),$$

de sorte que (31) devient

$$g(x, y)=g(x, y_0)-g(y, y_0). \tag{32}$$

On en conclut que *la condition* (32) *est nécessaire et suffisante et que la solution générale est donnée par*

$$f(x, y)=\frac{1}{c} g(x, y_0)+F(x, y)-F(x, x)+C.$$

0′. La discussion que nous venons d'achever montre que, si en particulier

$$g(x, y)=0 \quad (x, y \in S),$$

l'équation (2) a toujours des solutions.

Ce cas particulier (que l'on peut considérer aussi comme cas particulier de l'équation (1)) possède les formes suivantes des solutions générales, correspondantes aux cas précédemment traités, respectivement:

0′. $a+b+c+d \neq 0.$

0′.1′.1′. $a^2-b^2 \neq 0:$

$$f(x, y)=0.$$

0′.1′.2′. $a=b \neq 0:$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x).$$

0′.1′.3′. $a=-b \neq 0:$

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y).$$

0′.1′.4′. $a=b=0:$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x).$$

0′.2′. $a+b+c+d=0.$

0′.2′.1′. $a^2-b^2 \neq 0:$

$$f(x, y)=(b+c)\, G(x)-(a+c)\, G(y).$$

0′.2′.2′. $a=b \neq 0:$

0′.2′.2′.1′. $c=d:$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x)+G(x).$$

0′.2′.2′.2′. $c \neq d:$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x)+C.$$

0′.2′.3′. $a=-b \neq 0:$

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+(a-c)\, G(x)+(a+c)\, G(y).$$

0′.2′.4′. $a=b=0.$

0′.2′.4′.1′. $c=0:$

$$f(x, y)=F(x, y).$$

0′.2′.4′.2′. $c \neq 0.$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+C.$$

1. Discussion de l'équation

(1) $$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_{ij} f(x_i,\ x_j)=0 \qquad (n\geqslant 2).$$

Dans ce qui suit on va employer les désignations:

$$\Delta_{kl}^{ij}=\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ji} \\ a_{kl} & a_{lk} \end{vmatrix},\ \sum=\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_{ij},$$

$$P_k=\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{kj},\quad Q_k=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ik},\quad A_k=\sum_{j\neq k} a_{kj}.$$

Supposons que l'on ait

$$\Delta_{kl}^{ij}=0 \quad (1\leqslant i<j\leqslant n,\ 1\leqslant k\neq l\leqslant n)$$

et que tous les coefficients $a_{ij}\,(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$ ne soient pas nuls. Si, par exemple, $a_{pq}\neq 0\,(p\neq q)$, on a alors, pour $1\leqslant i<j\leqslant n$, $a_{ij}=\lambda_{ij}\,a_{pq}$, $a_{ji}=\lambda_{ij}\,a_{qp}$ et comme, d'autre part,

$$\Delta_{qp}^{pq}=a_{pq}^2-a_{qp}^2=0, \text{ d'où } a_{qp}=\lambda\, a_{pq}\,(\lambda\in\{-1,\ 1\}), \text{ on obtient}$$

$$a_{ji}=\lambda_{ij}\,\lambda\, a_{pq}=\lambda\, a_{ij} \quad (1\leqslant i<j\leqslant n;\ \lambda\in\{-1,\ 1\}).$$

On peut donc distinguer les quatre possibilités **1.1** — **1.4** suivantes, s'excluant mutuellement.

1.1. Un des déterminants $\Delta_{kl}^{ij}\,(i<j,\ k\neq l)$ est différent de zéro. Soit, par exemple, avec $(p<q,\ r\neq s)$,

(33) $$\Delta_{rs}^{pq}\neq 0.$$

La permutation des lettres $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$

$$\begin{pmatrix} \cdots x_p \cdots x_q \cdots \\ \cdots x_r \cdots x_s \cdots \end{pmatrix}$$

conduit au système d'équations

$$\cdots + a_{pq} f(x_p,\ x_q) + \cdots + a_{qp} f(x_q,\ x_p) + \cdots = 0$$

$$\cdots + a_{rs} f(x_p,\ x_q) + \cdots + a_{sr} f(x_q,\ x_p) + \cdots = 0.$$

En y posant $x_p=x$, $x_q=y$, $x_k=x_0=\text{const}$ pour $k\notin\{p,\ q\}$, on obtient

$$a_{pq} f(x,\ y)+a_{qp} f(x,\ y)=\alpha(x)+\beta(y)$$

$$a_{rs} f(x,\ y)+a_{sr} f(y,\ x)=\gamma(x)+\delta(y),$$

d'où, d'après (33),

(34) $$f(x,\ y)=u(x)+v(y).$$

La substitution (34) dans (1) donne

(35) $$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} [P_k\, u(x_k)+Q_k\, v(x_k)]=0.$$

1.1.1. $$P_k=Q_k=0 \quad (1\leqslant k\leqslant n).$$

On a, évidemment, *la solution générale*

$$f(x, y) = G(x) + H(y).$$

1.1.2. Pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$ au moins toutes les deux constantes P_k et Q_k ne sont pas égales à zéro. Soit, par exemple,

$$Q_r \neq 0.$$

On obtient de (35), en y posant $x_r = x$, $x_k = x_0 = \text{const}$ pour $k \neq r$,

$$P_r u(x) + Q_r v(x) = \text{const},$$

d'où

(36) $$v(x) = -\frac{P_r}{Q_r} u(x) + C_0 \quad (C_0 = \text{const}).$$

La substitution (36) dans (35) donne

(37) $$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (P_k Q_r - P_r Q_k) u(x_k) + C_1 \sum = 0 \quad (C_1 = \text{const}),$$

puisque

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} Q_k = \sum.$$

1.1.2.1. (38) $\begin{vmatrix} P_k & Q_k \\ P_r & Q_r \end{vmatrix} = P_k Q_r - Q_k P_r = 0 \quad (1 < k < n).$

(37) devient

(39) $$C_1 \sum = 0.$$

1.1.2.1.1. $\sum = 0.$

La solution générale, d'après (34), (36), (37) et (38), *est*

$$f(x, y) = Q_r G(x) - P_r G(y) + C.$$

1.1.2.1.2. $\sum \neq 0.$

D'après (39), $C_1 = 0$. Donc, la solution générale est donnée par

$$f(x, y) = Q_r G(x) - P_r G(y).$$

En posant dans (1) $x_k = x$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, on obtient

$$\sum f(x, x) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(x, x) = 0.$$

D'après cette remarque, *la solution générale pour ce cas peut être mise sous la forme*

$$f(x, y) = G(x) - G(y).$$

1.1.2.2. Pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\begin{vmatrix} P_k & Q_k \\ P_r & Q_r \end{vmatrix} \neq 0.$$

On obtient alors, en posant dans (37) $x_k = x$, $x_i = x_0 = \text{const}$ pour $i \neq k$, $u(x) = \text{const}$ et puis, d'après (34) et (36), $f(x, y) = \text{const}$.

1.1.2.2.1. $\sum = 0.$

La solution générale est

$$f(x, y) = C.$$

1.1.2.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = 0.$$

Il est clair que l'hypothèse $P_r \neq 0$ au lieu de $Q_r \neq 0$ conduirait aux mêmes résultats.

1.2. $a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ et pour une paire (i, j) $(i < j)$ au moins $a_{ij} \neq 0$.

Soit donc, avec $p < q$,

(40) $$a_{pq} \neq 0.$$

L'équation (1) devient

(41) $$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \psi(x_i, x_j) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} f(x_k, x_k) = 0,$$

où l'on a écrit

(42) $$\psi(x, y) = f(x, y) + f(y, x).$$

En posant dans (40) $x_p = x$, $x_q = y$, $x_k = x_0 = \text{const}$ pour $k \notin \{p, q\}$, on obtient, d'après (41),

(43) $$\psi(x, y) = \alpha(x) + \beta(y).$$

Etant donné que l'on a $\psi(x, y) = \psi(y, x)$, ou $\alpha(x) + \beta(y) = \alpha(y) + \beta(x)$, et par suite

$$\alpha(x) - \beta(x) = \text{const},$$

(43) devient

$$\psi(x, y) = \gamma(x) + \gamma(y),$$

c'est-à-dire, d'après (42),

$$f(x, y) - \gamma(x) + f(y, x) - \gamma(y) = 0,$$

d'où

(44) $$f(x, y) = \gamma(x) + F(x, y) - F(y, x).$$

Avec cette expression-là pour $f(x, y)$, (41) devient

(45) $$\sum_{1 \leq k \leq n} P_k \gamma(x_k) = 0.$$

1.2.1. $P_k = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

On conclut, d'après ce qui précède, que *la solution générale est*

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + G(x).$$

1.2.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On a, d'après (45), en procédant comme ci-dessus,

$$\gamma(x) = \text{const},$$

de manière que (44) devient

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + C_2 \qquad (C_2 = \text{const}).$$

1.2.2.1. $\sum = 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + C.$$

1.2.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x).$$

1.3. (46) $\qquad a_{ij} = -a_{ji} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$

et pour une paire (i, j) $(i < j)$ au moins $a_{ij} \neq 0$.

L'équation (1) devient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \theta(x_i, x_j) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} f(x_k, x_k) = 0, \tag{47}$$

avec

$$\theta(x, y) = f(x, y) - f(y, x).$$

En procédant comme dans les cas précédents, on conclut que l'on a

$$f(x, y) - f(y, x) = \theta(x, y) = u(x) + v(y).$$

Il en résulte, puisque $\theta(x, x) = 0$,

$$v(x) = -u(x).$$

Donc,

$$f(x, y) - f(y, x) = u(x) - u(y),$$

ou

$$f(x, y) - u(x) = f(y, x) - u(y),$$

ce qui entraîne

$$f(x, y) = u(x) + \Phi(x, y) + \Phi(y, x). \tag{48}$$

La substitution dans (47) donne, d'après (46),

$$\sum_{1 \leq k \leq n} A_k u(x_k) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} [2\Phi(x_k, x_k) + u(x_k)] = 0. \tag{49}$$

1.3.1. $\qquad A_k = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

(49) se réduit à

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} [2\Phi(x_k, x_k + u(x_k)] = 0.$$

1.3.1.1. $\qquad a_{kk} = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) + G(x).$$

1.3.1.2. La condition précédente n'est pas remplie. On a alors

$$u(x) = -2\Phi(x, y) + C_3 \qquad (C_3 = \text{const}),$$

c'est-à-dire, d'après (48),

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - 2\Phi(x, x) + C_3.$$

Avec cette représentation-là pour $f(x, y)$, (47) devient

$$C_3 \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque dans ce cas

$$\sum = \sum_{1 \leq k \leq n} A_k + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk}, \tag{50}$$

$$C_3 \sum = 0.$$

1.3.1.2.1. $\sum = 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - 2F(x, x) + C.$$

1.3.1.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - 2F(x, x).$$

1.3.2. Pour un $k \in \{1, \dots, n\}$ au moins $A_k \neq 0$.

Soit $A_p \neq 0$. En posant dans (47) $x_p = x$, $x_k = y$ pour $k \neq p$, on obtient

(51) $$af(x, y) + bf(y, x) + cf(x, x) + df(y, y) = 0,$$

où

$$a = A_p, \quad b = -A_p, \quad c = a_{pp}, \quad d = \sum_{i, j \neq p} a_{ij};$$

(52) $$a + b + c + d = \sum.$$

1.3.2.1. $\sum = 0.$

D'après **0.'2.'3,'** (51) donne

(53) $$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) + (A_p - a_{pp})\, u(x) + (A_p + a_{pp})\, u(y).$$

Etant donné que l'on a alors

$$f(x, y) - f(y, x) = 2a_{pp}[u(y) - u(x)], \quad f(x, x) = 2A_p u(x),$$

avec la représentation (53) de $f(x, y)$ (47) devient, d'après (46),

(54) $$2 \sum_{1 \leq k \leq n} (A_p a_{kk} - A_k a_{pp})\, u(x_k) = 0.$$

1.3.2.1.1. (55) $\quad A_p a_k - A_k a_{pp} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$

La solution générale est

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y) + (A_p - a_{pp})\, G(x) + (A_p + a_{pp})\, G(y).$$

Notons que *la condition* (55) *est remplie si, en particulier,* $a_{kk} = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et que *dans ce cas-là la solution générale peut être écrite sous la forme*

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y) + G(x) + G(y).$$

1.3.2.1.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On a alors, d'après (54),

$$u(x) = C_4 = \text{const},$$

de manière que (53) devient

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) + C_4.$$

Etant donné que l'on a alors

$$f(x, y) - f(y, x) = 0, \; f(x, x) = C_4$$

et que, d'après (46),

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk}=\sum=0,$$

la solution générale est

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+C.$$

1.3.2.2. $\sum\neq 0.$

On a, d'après (52) et **0′.1′.3′**,

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y), \tag{55}$$

et puisqu'on a alors

$$f(x, y)=f(y, x),\ f(x, x)=0,$$

par cette expression pour $f(x, y)$ l'équation (47) est satisfaite. *La solution générale est,* donc, *donnée par* (55).

1.4. $a_{ij}=0 \quad (i\neq j).$

1.4.1. $\sum\ (=\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk})=0.$

1.4.1.1. $a_{kk}=0 \quad (1\leqslant k\leqslant n).$

Solution générale:

$$f(x, y)=F(x, y).$$

1.4.1.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On obtient $f(x, x)=\text{const}$, d'où la conclusion que *la solution générale est*

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+C.$$

1.4.2. $\sum\ (=\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk})\neq 0.$

On a maintenant $f(x, x)=0$ et par conséquent *la solution générale est*

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x).—$$

A la fin de cette discussion, nous notons que, *pour* $n\geqslant 3$, *toutes les cas que l'on y vient de distinguer, c'est-à-dire tous les ensembles de conditions correspondant à ces cas, sont effectivement possibles et cela dans tout corps commutatif* $\mathcal{F}$ *dont la caractéristique n'est pas 2.*

En effet, voici un aperçu des cas non trivials et des valeurs des coefficients qui réalisent les conditions correspondantes:

1.1.1. (Avec $\Delta_{21}^{12}\neq 0$.)

$$a_{12}=a_{23}=-a_{13}=-a_{22}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.1.2.1.1. $(\Delta_{21}^{12}\neq 0,\ P_2=Q_2\neq 0)$

$$a_{12}=a_{23}=-a_{13}=-a_{11}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.1.2.1.2. $(\Delta_{21}^{12}\neq 0,\ P_2=Q_2\neq 0)$

$$a_{12}=a_{23}=-a_{13}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.1.2.2.1. $\left(\Delta_{21}^{12} \neq 0, \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_3 & Q_3 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

$$a_{12} = -a_{31} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.1.2.2.2. $\left(\Delta_{21}^{12} \neq 0, \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_3 & Q_3 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

$$a_{12} = -a_{31} = -a_{22} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.2.1. $(a_{12} \neq 0)$

$$a_{12} = a_{21} = -a_{11} = -a_{22} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.2.2.1. $(a_{12} \neq 0, \ P_1 \neq 0)$.

$$a_{12} = a_{21} = -a_{22} = -a_{33} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.2.2.2. $(a_{12} \neq 0, \ P_1 \neq 0)$.

$$a_{12} = a_{21} = -a_{22} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0$$

1.3.1. $(a_{12} \neq 0)$

$$a_{12} = -a_{21} = a_{31} = -a_{13} = a_{23} = -a_{32} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

On établit sans difficulté que pour $n=2$ les cas **1.1.1, 1.1.2.1.2, 1.1.2.2.1** et **1.3.1** ne sont pas possibles. Ce fait s'accorde avec le fait que les représentations des solutions générales qui correspondent à ces cas-là ne se trouvent pas parmi les solutions générales énumérées dans **0'**.

2. Quelques remarques supplémentaires

2.1. En ce qui concerne l'équation fonctionnelle

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij} f(x_i, x_j) = a_0 \ (0 \neq a_0 \in \mathscr{L}, \ a_0 = \text{const}), \tag{56}$$

on établit, en y posant $x_k = x \ (1 \leqslant k \leqslant n)$, que (56) *possède une solution si et seulement si*

$$\sum \neq 0, \tag{57}$$

et que sous la condition (57), *par la substitution*

$$f(x, y) = \frac{a_0}{\sum} + \varphi(x, y),$$

(56) *se réduit à une équation de la forme* (1).

Le résultat précédent est valable aussi dans le cas général d'équation linéaire à coefficients constants

$$\sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_m \leqslant n} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = a_0.$$

2.2. *Supposons que $\mathscr{S}$ soit un espace topologique, $\mathscr{L}$ un espace linéaire topologique sur $\mathscr{T}$ et $g\,(: \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{L})$ une fonction continue donnée. Alors chacune des solutions générales, obtenues dans* **0** *et* **1**, *où $F(: \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{S})$, $G\,(: \mathscr{S} \to \mathscr{L})$ et $H\,(: \mathscr{S} \to \mathscr{L})$ sont des fonctions continues arbitraires, représente la solution continue générale pour le cas correspondant.* (Bien entendu, on suppose l'ensemble $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ muni de la topologie de l'espace-produit.)

En effet, dans le cas **0′.1′.2′**, par exemple, la solution générale est donnée par (*) $f(x, y) = F(x, y) - F(y, x)$ (F fonction arbitraire). Avec une fonction continue F quelconque, la fonction $f(x, y)$ donnée par (*) est continue et satisfait l'équation (2); d'autre part, si $f(x, y)$ est une solution continue de (2), on a $f(x, y) = -f(y, x)$ et par suite

$$f(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y) - \frac{1}{2} f(y, x) = F(x, y) - F(y, x),$$

où la fonction $F(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y)$ est continue.

Un autre exemple: dans le cas **1.1.1** on a la solution générale

$$f(x, y) = G(x) + H(y). \tag{58}$$

Si les fonctions G et H sont continues, alors la fonction $f(x, y)$ donnée par (58) est continue et satisfait l'équation (1); si, d'autre part, $f(x, y)$ est la solution continue de (1), alors $f(x, y)$ a la représentation (58) avec les fonctions continues F et G, ce qu'on établit en posant dans (58) $y = y_0 = \text{const}$.

En procédant semblablement, on peut prouver la validité de notre assertion pour tous les cas dans **0** et **1**.

2.3. *D. S. Mitrinović* et *P. M. Vasić* ont étudié dans [2] l'équation fonctionnelle

$$af(x, y, z) + bf(y, z, x) + cf(z, x, y) = \alpha f(x, x, y) + \beta f(y, y, z) + \gamma f(z, z, x), \tag{59}$$

où les constantes sont des nombres réels et l'inconnue f est une fonction réelle de variables réelles. Sans entrer dans les détails, nous remarquons que l'on pourrait abréger et simplifier leur discussion à l'aide des résultats contenus dans **1**. En outre, leurs résultats concernant la solution générale de (59) restent valables sous la forme correspondante des hypothèses plus générales relatives aux coefficients et à la fonction $f(:\mathcal{S}^3 \to \mathcal{L})$ que nous avons formulées au commencement de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, Série: Mathématiques et physique, № 119 (1963), pp. 21—28.

[2] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Equations fonctionnelles linéaires généralisées*, Publ. Inst. Math., t. 4 (18), 1964, pp. 63—76.

РЕПУБЛИЧКИ ОДБОР ЗА ПРОСЛАВУ СТОГОДИШЊИЦЕ РОЂЕЊА
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ДУШАН АДАМОВИЋ

О ПОЈМУ ЕКСПОНЕНТА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ КОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Отисак из
Споменице Михаила Петровића
1868 — 1968

Београд 1968

Душан Д. Адамовић

О ПОЈМУ ЕКСПОНЕНТА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ КОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

0. У раду [1], објављеном 1931. године, Михаило Петровић на почетку указује на од раније познати појам експонента (изложиоца) конвергенције ([2], [3], [4]), који се дефинише на следећи начин:

Дефиниција 1. *Нека је*

$$(A_n) \tag{1}$$

бројни низ са особинама

$$A_n > 0 \text{ за свако } n; \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0. \tag{2}$$

За реални број λ *каже се да је експонент конвергенције низа* (1) *ако за свако* $\varepsilon > 0$ *ред* $\sum A_n^{\lambda+\varepsilon}$ *конвергира, а ред* $\sum A_n^{\lambda-\varepsilon}$ *дивергира. Ако за свако* $\alpha > 0$ *ред* $\sum A_n^{\alpha}$ *дивергира, каже се да низ* (1) *има експонент конвергенције* $\lambda = +\infty$.

На основу ове дефиниције, јасно је да сваки низ (1) са особинама (2) има један и само један експонент конвергенције и да је то увек елемент интервала $[0, +\infty]$. При томе је $\lambda = 0$ ако и само ако ред $\sum A_n^{\varepsilon}$ конвергира за свако $\varepsilon > 0$.

На пример: низ облика

$$\left(\frac{L(n)}{n^{\alpha}}\right) \quad (\alpha > 0),$$

где је $L(x)$ споро промењива функција у смислу Карамате ([5]), има експонент конвергенције $\frac{1}{\alpha}$, низови

$$\left(e^{-(\ln n)^2}\right), \ \left(e^{-n}\right), \ \left(\frac{1}{n!}\right), \ \left(e^{-n^2}\right)$$

имају експонент конвергенције 0, док је $+\infty$ експонент конвергенције низова облика

$$\big(L(n)\big) \ \big(L(x) \text{ споро промењива функција и } L(x) \to 0, \ x \to +\infty\big).$$

Пошто је напоменуо да „кадгод број λ није једнак нули ни бескрајан, он у довољној мери прецизира аналитичку природу низа (1) у погледу начина на који чланови овог низа прилази нули код *n* бескрајно расте" и да „· · · међутим, кад се има посла са једним од поменута два гранична случаја ($\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$), тада се јавља много већа разноврсност у горњем погледу, тј. у начину опадања низа (1)", као и да „· · · из претпоставке да $A_n \to 0$ и према горњим примерима изгледа да је разноврсност низова за $\lambda = +\infty$ у горњем погледу мања од оне за $\lambda = 0$," — Петровић, у циљу већег „разликовања нијанси у начину на који одговарајући низови теже нули", на првом месту за случајеве $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, уводи нов појам променљивог експонента конвергенције, дефиницијом која се може (само небитно, терминолошки нешто друкчије него у Петровићевом тексту) исказати овако:

Дефиниција 2. *Низ позитивних бројева* (λ_n) *назива се низом експонената конвергенције, или, краће, експонентом конвергенције, низа* (1) *са особинама* (2) *ако се свако* $\varepsilon > 0$ *ред* $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ *конвергира, а ред* $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ *дивергира.*

Ако би се у предходнвј дефиницији речи „позитивних бројева" замениле речима „реалних бројева", не би се добио суштински општији појам експонента конвергенције, јер би чланови сваког низа — експонента конвергенције у смислу тако измењене дефиниције 2 очигледно морали бити позитивни за довољно велико *n*.

Од овог места надаље претпостављамо, удобности ради и очигледно без битног ограничења општости даљег расуђивања, да низ (1) са особинама (2) испуњава и услов

$$A_n < 1 \text{ за свако } n. \tag{3}$$

Одмах се може уочити, што Петровић у чланку нешто даље и чини, да сваки низ (1) са особинама (2) има бар један експонент конвергенције у смислу дефиниције 2. То је, наиме, низ $(\bar{\lambda}_n)$ који испуњава услов

$$A_n^{\bar{\lambda}_n} = n^{-1} \text{ за свако } n,$$

тј. низ са општим чланом

$$\bar{\lambda}_n = -\frac{ln\, n}{ln\, A_n}.$$

(С обзиром на претпоставку (3), $\bar{\lambda}_n > 0$ за свако *n*.)

Овај низ $(\bar{\lambda}_n)$ назваћемо *стандардним експонентом конвергенције* низа (A_n).

Наглашавамо да је експонент конвергенције у смислу дефиниције 1 ненегативан реалан број или симбол $+\infty$, а у смислу дефиниције 2 низ позитивних бројева (који, као што ћемо видети, ни за један низ (1) са особинама (2) није једнозначно одређен, чак ни до на асимптотско понашање). Одавде надаље термину „експонент конвергенције" придаваћемо значење из дефиниције 2, а експонент конвергенције у смислу дефиниције 1 називаћемо *бројним експонентом конвергенције*. Термине „стандардни експонент конвергенције" и „бројни експонент конвергенције" Петровић није употребио.

Ако низ (A_n) има као бројни експонент конвергенције број $\lambda \in (0, +\infty)$, тада је низ чији су сви чланови једнаки λ очигледно експонент конвергенције низа (A_n). Јасно је да у случајевима $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$ ово никад не важи. У извесном смислу, стога, појам експонента конвергенције представља уопштење појма бројног експонента конвергенције уколико је овој последњи позитиван број, док се то не може рећи за случајеве кад је он 0 или $+\infty$. У вези са тим, Петровић каже: „*У граничним случајевима, кад је* $\lambda = 0$ *или* $\lambda = +\infty$, *низ изложилаца конвергенције тежиће нули или бескрајности* и брзина опадања, односно рашћења, чланова тог низа чини могућним разликовање нијанса у брзини опадања самог низа (1)“ (курзив наш, Д. А.).

Може зе констатовати да курзивом написано тврђење *није коректно.* Наиме, уклико се усвоји баш Петровићева дефиниција експонента конвергенције (дефиниција 2), онда, као што ћемо показати (одељак **1,** тврђење 4°), сваки низ (1) са особинама (2) има осцилаторни експонент конвергенције. Петровићево тврђење није тачно ни за стандардни експонент конвергенције, јер (одељак **1**, тврђење 9°) постоје низови чији су бројни експоненти конвергенције 0 односно $+\infty$, а чији стандардни експоненти конвергенције осцилирају. Сем тога, може се чак поставити питање (одељак **2**) да ли сваки низ чији је бројни експонент конвергенције 0, односно $+\infty$, има бар један експонент конвергенције који тежи ка 0, односно ка $+\infty$.

Петровићев чланак садржи још неколико тврђења која нису сасвим коректно формулисана, заправо, која захтевају прецизирање услова под којима важе. У већини ових тврђења, изледа, имплицитно се претпоставља да термин „експонент конвергенције“ има, уствари, уже значење нашег термина „стандардни експонент конвергенције“, или да, нешто шире, означава експонент конвергенције асимптотски једнак стандардном. Ако се тако схвате, већи део тих тврђења био би углавном тачан.

На пример, Петровићево тврђење да за сваки експонент конвергенције (λ_n) важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{ln\, n}=0$$

тачно је кад је у питању стандардни или стандарном асимптотски једнак експонент конвергенције. Међутим, тврђење да се „експонент конвергенције целе функције ... не мења ни деривацијом ни интеграцијом функције“ није тачно ни у општем случају, ни за случај стандарног експонента конвергенције, него само за бројни експонент конвергенције. При томе се *експонентом конвергенције*, односно *бројним експонентом кенвергенције*, *целе функције*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

где је (a_n) низ комплексних бројева са особином

$$0<|a_n|<1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{4}$$

назива експонент конвергенције, односно бројни експонент кнвергенције, низа са општим чланом

$$A_n=|a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Тада је, наиме, $0<A_n<1$ $(n=,0,\ 1,\ 2,\ldots)$ и према Hadamard-овој формули $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\lim\limits_{u\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=0$. У Петровићевом чланку услов (4) није експлицитно претпостављен. Извесну некоректност преставља околност што није бар претпостаљено да је $a_n\neq 0$ за довољно велико *n*. (Услов $|a_n|<1$ није битан.)

Сва остала од поменутих тврђења у чланку Михаила Петровића односе се на експоненте конвергенције целих функција и за њих се може рећи да су тачна у случају стандардног експонента конвергенције, а нису тачна у општем случају. Ово се сасвим лако може проверити.

И поред свих претходних примедби, сматрамо да је Петровићев појам експонента конвергенције интересантан и да пружа могућности за даљу и специфичну разраду, нијансирање одговарајуће проблематике, за уочавање нових односа и постављање нових проблема. Сви резултати које смо у овом правцу добили, а од којих су неки у претходном излагању већ поменути или наговештени, обухваћени ст групом тврђења у одељку **1.** Одељак **2** садржи неколико занимљивих питања на која досада нисмо успели да одговоримо.

Математичко (као и филозофско) наслеђе Михаила Петровића обимно је и многим својим деловима и данас инспиративно, често после ближег испитивања далеко више него што на први поглед изгеда. Међутим, по нашем мишљењу, да би се из њега извукла права и пуна корист, треба му — уз известан слух за специфичнос стила Петровићевог математичког мишљења и његове математичке интуиције — прилазити у исти мах брижљиво и критички. Чини нам се да предходна разматрања и резултати који следе бар унеколико на конкретном примеру ово гледиште потврђују.

Напоменимо да је у Петровићевом чланку [1] био најављен његово наставак, до чијег публиковања, међутим, није дошло.

1. *Важе следећа тврђења*:

1° *Сваки низ* (1) *са особином* (2) *има експонент конверверіенције* (λ_n) *са општим чланом*

$$\lambda_n = -\frac{\ln n}{\ln A_n}\,\omega_n,$$

іде је (ω_n) *осцилаторан низ реалних бројева, или, прецизније, іде* (ω_n) *има као скуп тачака наіомилавања било који унапред дати затворени део* E *скупа* $[1, +\infty]$ *који садржи тачку* 1. *Такође,* $\alpha = \varliminf_{n\to\infty} \omega_n$ *може бити било која тачка из* $[0, 1]$, *а* $\beta = \varlimsup_{n\to\infty} \omega_n$ *било која тачка из* $[1, +\infty]$.

2° *Потребни услови за низ* (ω_n) *из предходноі тврђења су*

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \omega_n \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \omega_n, \tag{5}$$

тако да низ (ω_n) *може конверіирати само ка јединици. Услови* (5) *нису довољни.*

3° *Ако низ* (A_n) *има бројни експонент конверіенције* λ, *тада је за сваки експонент конверіенције* (λ_n) *низа* (A_n)

$$\varliminf_{n\to\infty} \lambda_n \leqslant \lambda \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n.$$

Према томе, ако низ (λ_n) *конверіира, мора бити*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

4° *Сваки низ* (1) *са особинама* (2) *има осцилаторан експонент конверіенције. Ако је*

$$A_n = 0\,(n^{-\delta}), \quad n^{-\mu} = 0\,(A_n) \quad (n \to \infty),$$

са неким $0 < \delta < \mu$, *постоји експонент конверіенција који осцилира између* 0 *и* $+\infty$.

5° *Да би низ позитивних бројева* (λ_n) *био експонент конвергенције неког низа, потребно је да буде*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0.$$

Услов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0$$

довољан је, а није потребан. Прецизније, сваки низ (1) *са особинама* (2) *за свако* $\alpha \in (0, +\infty]$ *има експонент конвергенције* (λ_n) *такав да*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = \alpha.$$

6° *Ако је* (λ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n) *и* (μ_n) *је низ позитивних бројева са особином* $\mu_n \sim \lambda_n$ $(n\to\infty)$, *тада је и низ* (μ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n)

7° *Ако је* (λ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n) *и* (B_n) *је низ позитивних бројева са особином* $B_n \sim A_n$ $(n\to\infty)$, *тада је* (λ_n) *експонент конвергенције и низа* (B_n).

8° *Цела функција* $f(z)$ *дата потенцијалним редом чији су сви коефицијенти различити од нуле и њена изводна функција* $f'(z)$ *имају увек исти бројни експонент конвергенције. Ако је бројни експонент конвергенције функције* $f(z)$ *нула, скупови експонената конвергенције функција* $f(z)$ *и* $f'(z)$ *могу бити дисјунктни. Ако је бројни експонент конвергенције позитиван број, ова два скупа експонената конвергенције могу бити различити.*

9° *За свако* $\lambda \in [0, +\infty]$ *стандардни експонент конвергенције низа чији је бројни експонент конвергенције* λ *може осцилирати.*

Потпуности ради, у претходном списку наведено је и тврђење 6°, које иначе и Петровић у раду [1] формулише и доказује. Из истог разлога, у доказу који следи налази се и доказ овог тврђења.

Доказ. 1° Нека је (r_n) један низ образован од свих рационалних бројева из $[1, +\infty)$. За сваки природан број n постоји $x \in E$ такво да је

$$|r_n - x| = \mathrm{Min}\{|r_n - y| : y \in E\}.$$

Ако постоји само један такав број x, ставимо $r_n = x$, а ако постоје два таква броја, онај већи означимо за r_n. Нека се низ (ρ_n) или подудара са претходно одређеним низом (r_n), уколико $+\infty \notin E$, или има за непарне чланове редом чланове низа (r_n) а за парне редом природне бројеве, уколико $+\infty \in E$. Лако се проверава да је у оба случаја E скуп тачака нагомилавања низа (ρ_n).

Ставимо

$$\omega_{2k-1} = 1, \qquad \omega_{2k} = \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Јасно је да овако одређен низ (ω_n) има такође E као скуп тачака нагомилавања. С друге стране, у овом случају је, за било које $\varepsilon > 0$,

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)} = n^{-\omega_n(1+\varepsilon)} \leqslant n^{-(1+\varepsilon)},$$

што значи да ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергира, и сем тога

$$A_{2k-1}^{\lambda_{2k-1}(1-\varepsilon)}=(2k-1)^{-(1-\varepsilon)},$$

што значи да ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ дивергира.

Остаје да се докаже последња реченица тврђења. Нека је

$$\alpha\in(0,\,1],\qquad \beta\in[1,\,+\infty).$$

Ставимо

$$p_k=2\,[k^{\frac{1}{\alpha}}]\qquad (k=1,\,2,\ldots).$$

Ако је

$$\omega_{p_k}=\alpha\,(k=1,\,2,\,3,\ldots),\ \omega_n=\beta \text{ за остале вредности } n,$$

тада $\varliminf\limits_{n\to\infty}\omega_n=\alpha$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\omega_n=\beta$ и сем тога

$$A_{p_k}^{\lambda_{p_k}}=p_k^{-\alpha}=\{2k^{\frac{1}{\alpha}}[1+o(1)]\}^{-\alpha}=k^{-1}\cdot 2^{-\alpha}[1+o(1)]^{-\alpha}\quad (k=1,\,2,\ldots),$$

$$A_n^{\lambda_n}=n^{-\beta} \text{ за остале вредности } n.$$

Одавде излази да је (λ_n) са овако одређеним (ω_n) експонент конвергенције низа (A_n).

Ако $\alpha>0$, $\beta=+\infty$, треба претходну конструкцију изменити утолико што се за вредности n различите од p_k ставља $\omega_n=n$.

Ако је $\alpha=0$, треба ставити

$$\omega_{k^k}=k^{-1}\qquad (k=1,2,\ldots),$$

а за остале вредности n, $\omega_n=\beta$ односно $\omega_n=n$, према томе да ли је $\beta<+\infty$ или $\beta=+\infty$.

2° Ако би било

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega_n<0,$$

за бескрајно много вредности n имало би се

$$\lambda_n=-\frac{\ln n}{\ln A_n}\,\omega_n<0,$$

супротно претпоставци да је (λ_n) експонент конвергенције.

Ако би било

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega_n>1,$$

за довољно велико n имало би се

$$\omega_n\geqslant\delta>1$$

и одатле, са $0<\varepsilon<1$,

$$A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}=n^{-\omega_n(1-\varepsilon)}\leqslant n^{-\delta(1-\varepsilon)},$$

па би за $\delta(1-\varepsilon)>1$ ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ конвергирао.

Ако би било

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega_n<1,$$

за довољно велико n имало би се

$$\omega_n\leqslant\mu<1$$

и одатле

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}=n^{-\omega_n(1+\varepsilon)}\geqslant n^{-\mu(1+\varepsilon)},$$

тако да би за $\mu(1+\varepsilon)<1$ ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ дивергирао.

Да услови (5) нису довољни доказује пример низа (ω_n) код кога

$$\omega_{2k-1}=\frac{1}{2},\quad \omega_{2k}=\frac{3}{2}\quad (k=1,2,3,\ldots).$$

У овом случају

$$A_{2k-1}^{\lambda_{2k-1}}=(2k-1)^{-\frac{1}{2}},\ A_{2k}^{\lambda_{2k}}=(2k)^{-\frac{3}{2}}\quad (k=1,2,\ldots),$$

па (λ_n) не може бити експонент конвергенције.

3° Нека је $\lambda\in(0,\ +\infty)$. Ако би било

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<\lambda,$$

имало би се за n довољно велико $\lambda_n<\alpha<\lambda$ и одатле, са $\varepsilon>0$,

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}>A_n^{\alpha(1+\varepsilon)},$$

па би са довољно малим ε ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ дивергирао, јер је $\alpha(1+\varepsilon)<\lambda$ за ε довољно мало. Слично се доказује да не може бити

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>\lambda$$

кад је $\lambda\in[0,\ +\infty)$. Ако је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<+\infty,$$

тада $\lambda_n\leqslant\beta<+\infty$ за довољно релико n, па

$$A_n^{\beta(1+\varepsilon)}\leqslant A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}\ \text{за довољно велико } n,$$

што значи да тада не може бити $\lambda=+\infty$. Најзад, неједнакости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<0\quad\text{и}\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>+\infty$$

очигледно нису уопште могуће. Тако је у свим случајевима доказана немогућност неједнакости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<\lambda\quad\text{и}\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>\lambda.$$

4° Ако је $\lambda\in(0,\ +\infty)$ бројни експонет конвергенције низа (A_n), тада је бар један од редова $\sum A_{2k-1}^{\lambda(1-\varepsilon)}$ и $\sum A_{2k}^{\lambda(1-\varepsilon)}$ за свако $\varepsilon>0$ дивергентан. Нека је, на пример, дивергентан први ред. Тада је низ (λ_n) одређен са

$$\lambda_{2k-1}=\lambda,\ \lambda_{2k}=\lambda+1\quad (k=1,2,\ldots)$$

експонент конвергенције низа (A_n). Аналогно се поступа у случају дивергенције другог реда.

Ако је $\lambda = 0$, бројни експонент конвергенције низа (A_{2k}) очигледно такође је 0. Нека је (μ_k) стандардни експонент конвергенције низа (A_{2k}). Јасно је да је тада низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_{2k-1} = 1, \quad \lambda_{2k} = \mu_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

експонент конвергенције низа (A_n). Низ (λ_n) је осцилаторан, јер, према 3°, не може бити

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_{2k} = \lim_{k \to \infty} \mu_k = 1.$$

Нека је $\lambda = +\infty$. Свакако постоји строго растући низ природних бројева (p_k) такав да је ред $\sum A_{p_k}$ конвергентан. Нека је (q_k) строго растући низ образован од преосталих природних бројева. Јасно је да низ (A_{q_k}) има $+\infty$ као бројни експонент конвергенције и нека је (μ_k) његов стандардни експонент конвергенције. Лако се увиђа да је низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_{p_k} = 1, \quad \lambda_{q_k} = \mu_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

експонент конвергенције. Он је, поново на основу 3°, осцилаторан.

Ако је $A_n = 0\,(n^{-\delta})$ и $n^{-\mu} = 0\,(A_n)$, са $0 < \mu < \delta$, онда је

$$\ln n = 0\left(\ln \frac{1}{A_n}\right) \quad \text{и} \quad \ln \frac{1}{A_n} = 0\,(\ln n) \quad (n \to \infty)$$

и одатле

$$-\frac{\ln n}{\ln A_n} = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{A_n}} = 0\,(1), \quad -\frac{\ln A_n}{\ln n} = \frac{\ln \frac{1}{A_n}}{\ln n} = 0\,(1) \qquad (n \to \infty),$$

па ако се узме да је (тврђење 1°)

$$\varliminf_{n \to \infty} \omega_n = 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n \to \infty} \omega_n = +\infty,$$

добија се експонент конвергенције (λ_n) код кога

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda_n = 0, \qquad \varlimsup_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

5° Ако је

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} > 0,$$

за довољно велико n је

$$\lambda_n > \alpha \ln n,$$

где је α неки позитиван број, и одатле

$$A_n^{\lambda_n} < A_n^{\alpha \ln n} = n^{-\alpha \ln \frac{1}{A_n}},$$

тј., са $0 < \varepsilon < 1$,

$$A_n^{\lambda_n (1-\varepsilon)} < n^{-\alpha (1-\varepsilon) \ln \frac{1}{A_n}},$$

тако да у том случају ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ конвергира $\left(\lim_{n\to\infty} ln\frac{1}{A_n}=+\infty\right)$, што значи да (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (A_n) са особинама (2).

Ако је за низ позитивних бројева (λ_n)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{ln\, n}=0,$$

тада низ (A_n) дефинисан са

$$A_n=e^{-\frac{ln\, n}{\lambda_n}} \qquad (n=1,\ 2\ldots)$$

има особине (2). Како је

$$A_n^{\lambda_n}=n^{-1} \qquad n=1,\ 2,\ldots),$$

(λ_n) је експонент конвергенције низа (A_n),

Ако је (A_n) низ са особинама (2), лако се проверава да је низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_n=-\frac{ln\, n}{ln\, A_n}\omega_n \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где је, са $\alpha\in(0,\ +\infty)$,

$$\omega_{2k-1}=1,\quad \omega_{2k}=\alpha\, ln\frac{1}{A_{2k}} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

један његов експонент конвергенције. Међутим, тада

$$\frac{\lambda_{2k-1}}{ln(2k-1)}=-\frac{1}{ln\, A_{2k-1}}\to 0,\quad k\to\infty;\quad \frac{\lambda_{2k}}{ln(2k)}=\alpha \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

тако да је $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n=\alpha$. У случају кад $\alpha=+\infty$ треба ставити

$$\omega_{2k}=ln^2\frac{1}{A_{2k}} \qquad (k=1,\ 2,\ldots).$$

6° Имамо, за свако $0<\delta<1$,

$$\lambda_n(1-\delta)<\mu_n<\lambda_n(1+\delta),$$

уколико је n довољно велико, и одатле, са $0<\varepsilon<1$,

$$A^{\mu_n(1-\varepsilon)}>A_n^{\lambda_n(1+\delta)(1-\varepsilon)},\quad A_n^{\mu_n(1+\varepsilon)}<A_n^{\lambda_n(1-\delta)(1+\varepsilon)}$$

за довољно велико n, па како је са довољно малим δ

$$(1+\delta)(1-\varepsilon)<1 \text{ и } (1-\delta)(1+\varepsilon)>1,$$

ред $\sum A_n^{\mu_n(1-\varepsilon)}$ дивергира, а ред $\sum A_n^{\mu_n(1+\varepsilon)}$ конвергира.

7° Имамо

$$B_n = A_n b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1,$$

па за $0<\varepsilon<1$

$$B_n^{\lambda_n(1\pm\varepsilon)} = e^{(1\pm\varepsilon)\lambda_n(\ln A_n + \ln b_n)}$$

$$= e^{(1\pm\varepsilon)\lambda_n \ln A_n\left(1+\frac{\ln b_n}{\ln A_n}\right)} = e^{\ln A_n\cdot\lambda_n(1\pm\varepsilon)[1+0(1)]}$$

$$= A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)[1+0(1)]}.$$

Одавде је јасно да је (λ_n) експонент конвергенције и низа (B_n).

8° Нека цела функција

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

испуњава услов (4). Њен (бројни) експонент конвергенције је сваки (бројни) експонент конвергенције низа са општим чланом

$$A_n = |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

а (бројни) експонент конвергенције њене изводне функције

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1} z^n$$

је сваки (бројни) експонент конвергенције низа са општим чланом

$$B_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}.$$

Део тврђења која се односи на бројне експоненте конвергенције лако се проверава.

Део тврђења који се односи на случај кад је бројни експонент конвергенције нула доказује пример целе функције $f(z)$ са

$$a_n = e^{-ne^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Тада имамо

$$A_n = e^{-e^n} \qquad (n=1,\ 2,\ldots)$$

и

$$B_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{n+1}} = e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{n+1}+\frac{1}{n}\ln(n+1)}$$

$$= e^{-e^{n+1}[1+0(1)]}.$$

Нека је (λ_n) експонент конвергенције низа (A_n). Онда је, за $0<\varepsilon<1$, $0<\delta<1$ и n довољно велико,

$$B_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)} = e^{-e^{n+1}[1+0(1)]\lambda_n(1-\varepsilon)}$$

$$< A_n^{\lambda_n e(1-\delta)(1-\varepsilon)} < A_n^{2\lambda_n},$$

уколико су ε и δ изабрани тако да буде $e(1-\delta)(1-\varepsilon)>2$. Дакле, у том случају ред $\sum B_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ за свако ε довољно мало конвергира, због чега (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (B_n).

Последњи момент тврђења доказује случај кад је

$$a_{2k-1}=\frac{1}{(2k-1)^{2k-1}}, \quad a_{2k}=\frac{1}{(2k)^{4k}} \qquad (k=1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Тада

$$A_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}, \quad A_{2k}=\frac{1}{(2k)^2} \qquad (k=1,\ 2, \ldots),$$

тако да је низ (λ_n) дат са

$$\lambda_{2k-1}=1, \quad \lambda_{2k}=\frac{1}{2} \qquad (k=1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

један експонент конвергенције низа (A_n). Међутим, сада је

$$B_{2k}^{\lambda_{2k}}=\left[(2k+1)^{\frac{1}{2k}}a_{2k+1}^{\frac{1}{2k}}\right]^{\frac{1}{2}}=(2k+1)^{\frac{1}{4k}}\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{4k}},$$

па (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (B_n).

9° Тврђење доказује пример низа (A_n) датог: за случај $\lambda\in(0,\ +\infty)$ са

$$A_{2k-1}=(2k-1)^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad A_{2k}=e^{-k};$$

за случај $\lambda=0$ са

$$A_{2^k}=k^{-1}\ (k=1,\ 2,\ 3, \ldots), \quad A_n=2^{-n} \text{ за остале вредности } n;$$

за случај $\lambda=+\infty$ са

$$A_{2k-1}=(\ln 2k)^{-1}, \quad A_{2k}=e^{-k} \qquad (k=1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

2. Неколико отворених питања

Да бисмо лакше изложили оно што следи, означимо за $\mathcal{N}$ скуп свих низова (1) са особином (2), а са $\mathcal{E}$ скуп свих експонената конвергенције (у смислу дефиниције 2) елемената скупа $\mathcal{N}$. Затим, нека су функције

$$F\colon\ \mathcal{N}\to\mathcal{P}(\mathcal{E}) \text{ и } G\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{P}(\mathcal{N})$$

($\mathcal{P}$ ознака партитивног скупа) дефинисане на следећи начин: за свако $A=(A_n)\in\mathcal{N}$ је $F(A)$ скуп свих експонената конвергенције низа A, а за свако $\lambda=(\lambda_n)\in\mathcal{E}$ је $G(\lambda)$ скуп свих низова чији је експонент конвергенција λ. Даље, бинарне релације ρ и ϱ дефинисане су у $\mathcal{N}$ редом са

$$A\,\rho\,B\Leftrightarrow F(A)\cap F(B)\neq\varnothing, \quad A\,\varrho\,B\Leftrightarrow F(A)=F(B),$$

а бинарне релације Δ и $\mathit{\Delta}$ дефинисане су у $\mathcal{E}$ редом са

$$\lambda\,\Delta\,\mu\Leftrightarrow G(\lambda)\cap G(\mu)\neq\varnothing, \quad \lambda\,\mathit{\Delta}\,\mu\Leftrightarrow G(\lambda)=G(\mu).$$

Овде је реч о следећим питањима:

1° *Може ли се наћи адекватна карактеризација елемената скупа* $\mathcal{E}$?

У вези са овим, подсећамо да смо у **1** (тврђење 5°) установили да је

$$\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}\subset\mathcal{E}_2,$$

где је

$$\mathscr{E}_1=\left\{(\lambda_n):\quad \lambda_n>0\ (n=1,\,2,\,3,\ldots)\wedge \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=0\right\},$$

$$\mathscr{E}_2=\left\{(\lambda_n):\quad \lambda_n>0\ (n=1,\,2,\,3,\ldots)\wedge \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=0\right\},$$

при чему је прва инклузија сигурно права.

2° *Да ли сваки низ из $\mathscr{N}$ чији је бројни експонент конвергенције 0 или $+\infty$ има експонент конвергенције који тежи ка бројном експоненту конвергенције истог низа?*

3° *Да ли за два низа A и B из $\mathscr{N}$ са различитим бројним експонентима конвергенције може бити $A\,\rho\,B$?*

4° *Да ли је ρ релација еквиваленције у скупу $\mathscr{N}$?*

(У питању је само транзитивност; рефлексивност и симетричност су очигледне.)

5° *Да ли је Δ релација еквиваленција у скупу $\mathscr{E}$?*

(Поново је само транзитивност у питању.)

6° *ϱ је очигледно релација еквиваленције у $\mathscr{N}$. Може ли се она ближе окарактерисати; посебно, да ли се она подудара са асимптотском једнакошћу низова из $\mathscr{N}$?*

Овде се има у виду резултат 7° из **1**.

7° *Аналогно питање за релацију Δ.*

Има се у виду резултат 6° из **1**.

Негативан одговор на питање 3° изгледа нам вероватан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровић, Михаило, *О изложиоцу конвергенције*, Глас С К А Н, CXLIII, I. разред 70, 1931, 149 — 167.

[2] Pringsheim, A., *Elementare Theorie der ganzen transcedenten Funkcionen von endlicher Ordnung*, Math. Ann. Bd. 58, 1904, 257 — 342.

[3] Pólya-Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. I, 1925, 19—20.

[4] Borel, E., *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1921, p. 18 et 26.

[5] Adamović, D. D., *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata* I, Мат. весник, 3 (18), св. 2, 1966, 123 — 136.

SUR LA NOTION D'EXPOSANT DE CONVERGENCE DE MICHEL PETROVITCH

D. D. Adamović

Résumé

Pour une suite (1) avec les propriétés (2) on définit l'exposant de convergence comme un nombre $\lambda\in[0,\,+\infty)$ tel que pour $\varepsilon>0$, la série $\sum A_n^{\lambda_n+\varepsilon}$ converge et la série $\sum A_n^{\lambda_n-\varepsilon}$ diverge. Si la série $\sum A_n^{\alpha}$ diverge pour tout $\alpha>0$, on dit que l'exposant de convergence est $+\infty$. Cette notion est bien connue. En 1931, dans [1], Michel Petrovitch a proposé une nouvelle notion d'exposant de convergence: pour une suite (1) avec les propriétés (2), il a appelé exposant de convergence toute suite (λ_n) de nombres positifs telle que pour tout $\varepsilon>0$ la série $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ converge et la série $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ diverge. Quelques résultats relatifs à cette notion-là sont donnés. Quelques questions, dont on ne sait pas encore les réponses, sont formulées à la fin de l'article.

РЕПУБЛИЧКИ ОДБОР ЗА ПРОСЛАВУ СТОГОДИШЊИЦЕ РОЂЕЊА
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

DUŠAN ADAMOVIĆ

MODERNE MATEMATIČKE DISCIPLINE, POSEBNO TEORIJA SKUPOVA, U RADOVIMA MIHAILA PETROVIĆA

Отисак из
Споменице Михаила Петровића
1868 — 1968

Београд 1968

DUŠAN ADAMOVIĆ

MODERNE MATEMATIČKE DISCIPLINE, POSEBNO TEORIJA SKUPOVA, U RADOVIMA MIHAILA PETROVIĆA

Postoji i ima šta više izvesnu raširenost, među matematičarima i ostalima, u različitim stepenima i varijantama, mišljenje da matematički rad Mihaila Petrovića, njegov stil i metode pripadaju isključivo tzv. klasičnoj (ustvari, devetnaestovekovnoj) matematici. Ovome se pokatkad pridaje pozitivan, a češće suprotan smisao. Uprkos izvesnoj, delimičnoj osnovanosti — ovo mišljenje u suštini je pogrešno, nesaglasno sa nekim glavnim, najmarkantnijim i najprisnijim crtama Petrovićevog duha i stvaranja. Jedan od uzroka javljanja i prilične tvrdokornosti ovakvog shvatanja leži u nedovoljnom poznavanju celine Petrovićevog opusa, dobrim delom uslovljenom nepostojanjem, bilo u kom vidu, izdanja njegovih celokupnih ili sabranih dela. Ta praznina, kao što je na ovom Simpozijumu već istaknuto, i inače je umnogome odgovorna za činjenicu da Petrovićevo matematičko i ostalo duhovno nasleđe sve do danas nije ni približno onoliko proučeno i adekvatno procenjeno, pa usled toga u našoj nauci i kulturi nije ni približno onoliko živo i inspirativno koliko bi moglo i trebalo da bude. Drugi uzrok pomenutog mišljenja sastojao bi se, kako se autoru ovih redova čini, u tome što se obeležja moderne matematike i prisustvo modernih matematičkih disciplina u Petrovićevom delu često traže i vide samo u određenim detaljima, u eksplicitnim i bukvalnim vidovima, a ne, što bi u ovom slučaju bilo mnogo adekvatnije i pravednije, i u implicitnim, ali suštinskim momentima, u celini naučne orijentacije, u strukturi mišljenja, u glavnim, pokretačkim idejama i inspiracijama, u trajnim preokupacijama Petrovićevog stvaralaštva. Međutim, sa pravom istinom ne bi bilo saglasno ni tvrđenje da moderna matematika — naravno ona iz perioda pokrivenog Petrovićevim životom, tačnije, njegovom punom naučnom aktivnošću — nije u njegovim radovima zastupljena i direktno.

Ovo saopštenje nema ambiciju da iole iscrpno obradi odgovarajuću temu. Njegov cilj je samo da na nju ukaže i ujedno bar donekle obrazloži napred formulisane teze, navođenjem i analizom nekoliko mesta iz Petrovićevih radova i nekim opštim primedbama koje se na to mogu nadovezati.

Godine 1927, u Glasu Srpske akademije nauka, izašao je Petrovićev članak »Brojni spektri pojava«. Objavljen između dva opsežna i celovita dela o matematičkim spektrima »Les spectres numériques« (1919) u »Leçons sur les spectres mathématiques« (1928), ovaj rad bavi se onim što bi se moglo smatrati osnovnom idejom teorije spektara. U njemu autor, ne upuštajući se u razradu algoritama i specifičnih primena ove teorije, u zamenu za to podrobnije izlaže njenu principijelnu, skupovno-teoretsku podlogu i prelazi potom, preko razmatranja u vezi sa Baire-ovom klasifikacijom funkcija i drugim rezultatima o analitičkoj reprezentaciji, u širem smislu, realnih i kompleksnih funkcija, na izvlačenje dalekosežnih opštih, filozofskih zaključaka o principijelnoj mogućnosti, u granicama izvesnih pretpostavki, prikazivanja, određivanja svakog — i najkompleksnijeg — bića ili procesa, iz prirode ili sveta matematičkih konstrukcija, jednim jedinim brojem iz intervala (0, 1). Na kraju autor ukazuje na dugačak put, na sve stepene koje je ne samo matematika, nego i čitava prirodna nauka, morala u milenijumskom razvitku preći da bi se stiglo do tog preciznog saznanja, dovodeći u vezu i ujedno suočavajući ovo saznanje sa davnim idejama antičkih mislilaca o »broju kao suštini stvari«:

»Za Pitagorino se ime naročito vezuje težnja za izražavanjem stvari i fakata brojevima i jedna njegova famozna formula glasi »stvari (bića) su brojevi«. Dok je Platon stavljao brojeve, kao atribute, pored stvari koje se mogu čulno opažati, Pitagorejci su tvrdili da su brojevi same stvari. Uzajamnost između fakata i brojnih spektara daje pravi i tačan smisao takvim neodređenim, mističkim refleksijama. Niti stvari moraju biti brojevi, niti brojevi biti atributi stvari, pa da ipak važi tvrđenje da između fakata i brojeva postoji uzajamnost takve vrste, da se svet fakata može na jedan potpuno utvrđen način ilustrovati svetom brojeva«.

Završni pasus ovog članka karakterističan je za njegov opšti ton i smisao.

»... Sve je to, međutim, bilo potpuno skriveno tamom u vreme grčkih filozofa. Njihove refleksije o uzajamnosti između fakata i brojeva, izražene u stavovima toliko puta ponavljanim u toku vekova, mogle su se samo svoditi na filozofske vizije i generalnosti. Platon je, ostajući u generalnostima, mogao tvrditi da »brojevi upravljaju svetom«, ali to je u njegovo vreme bilo nemoguće konkretno precizirati i dati mu naučni smisao. U to vreme bilo bi neshvatljivo tvrđenje da svakoj od pojava, što pripadaju jednoj klasi, odgovara jedan tačno određen decimalni broj što se nalazi između 0 i 1, ili, ako se hoće, jedna tačno određena nepomična tačka u kvadratu čije su strane jednake jedinici, i to tako da se posmatranjem tog broja, ili te nepomične tačke, mogu saznati sve pojedinosti pojave. Za takvu jednu tačku vezane su, na primer, sve pojedinosti kretanja jednog materijalnog sistema, na primer kretanje n nebeskih tela koja se među sobom privlače po Newton-ovom zakonu. Menjanjem konstanata problema (masa, početnih položaja i drugih) pomera se u kvadratu i ta tačka, ili se menja odgovarajući decimalni broj, ali kad su te konstante utvrđene, tj. kad se posmatra jedan određen konkretan slučaj, tačka ostaje nepomična i decimalni broj nepromenljiv, pa ipak oni u sebi sadrže sve što treba za večito predviđanje promena u kojima se pojava sastoji. Međutim, za razumevanje toga, danas elementarnog i potpuno shvatljivog fakta, mora se u mislima preći sva dosadašnja evolucija matematičke analize i prirodne filozofije, na čijim je rezultatima takvo tvrđenje osnovano. I tek tada je mogućno shvatiti tačan, naučni smisao filozofske vizije velikih grčkih matematičara i filozofa u pogledu uzajamnosti između fakata i brojeva.«

Ove reči, kao i čitav članak, pokazuju ne samo dobro, suštinsko poznavanje i razumevanje nekih bitnih rezultata Cantorove teorije skupova i kardinalnih brojeva, nego i izvesnu duboku impresioniranost njima, neku vrstu njima inspirisanog matematičkog i filozofskog entuzijazma.

Inače, ovde je, sumarno govoreći, reč o činjenici da su matematički objekti i sistemi prividno daleko većeg ekstenziteta i unutrašnje raznovrsnosti, kad se shvate kao skupovi, u pogledu kardinalnog broja jednaki, pa time u određenom smislu ekvivalentni, izvesnim, ponovo bar prividno, jednostavnijim, preglednijim, običnijim objektima i sistemima, kao što su konačni ili beskonačni skupovi celih brojeva, pojedinačni realni brojevi (u decimalnoj reprezentaciji) ili prebrojivi skupovi i skupovi moći kontinuuma realnih brojeva, do intervala (0,1) kao najopsežnijeg od tih entiteta. U članku se prvo izlažu sve etape redukcije, u tom smislu, skupa svih realnih ili kompleksnih nizova, sa bilo kojim konačnim brojem indeksa, ili jednog dela tog skupa, na interval (0,1), ili na jedan njegov deo. Po sredi su, naime, rezultati teorije kardinalnih brojeva koji se kratko mogu izraziti jednakostima

$$\aleph_0 = \aleph_0^m \ (m \varepsilon N), \ \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{(0,1)}} = c, \ c^{\aleph_0} = c = \overline{\overline{(0,1)}}.$$

Iz ovoga i iz konstatacije da su, na osnovu Baire-ovih i drugih rezultata, za matematičku analizu u pravom smislu i za njene primene od interesa samo tzv. Baire-ove realne i kompleksne funkcije i da se svaka od njih jednoznačno određuje višestrukim nizom realnih brojeva, izvodi se zaključak o postojanju biunivoke korespondencije između skupa svih takvih funkcija i dela intervala (0,1). Najzad, ukazivanjem na činjenicu da se bilo koji određeni prirodni proces ili kompleks procesa, može prikazati — u bitnom — jednom funkcijom pomenute vrste ili najviše prebrojivim skupom takvih funkcija (ovde interveniše i Petrovićeva fenomenološka ideja analoškog jezgra), dolazi se do već navedenih krajnjih konsekvenci članka.

Redukcija koja se u članku izlaže, kao što smo već rekli, osnovna je ideja, bar sa izvesnog stanovišta, Petrovićeve teorije matematičkih spektara. Mora se, međutim, konstatovati da dalji razvoj ove teorije do danas nije imao onaj zamah ni doneo one rezultate koje je Petrović, bar u početku, po svoj prilici očekivao. Ovo se može objašnjavati različitim, pa i spoljašnjim i slučajnim okolnostima. Biće ipak da je jedan od glavnih razloga ono što je E. Borel, u predgovoru prvoj Petrovićevoj knjizi o spektrima, 1919. godine primetio. Reč je, naime, o velikim teškoćama sa kojima se mora sukobiti nastojanje da se — posle početnog, teorijski ispravnog, uviđanja principijelne mogućnosti svođenja, na osnovu pomenutih ekvivalencija u pogledu kardinalnosti, računa i algoritama sa raznim, takoreći i najkompleksnijim matematičkim objektima na račune i algoritme sa realnim brojevima — i efektivno izgrade takvi postupci ove redukcije koji bi imali značajniji stepen opštosti i kojima bi se, u dovoljno širokoj klasi slučajeva, postizala veća efikasnost nego drugim metodama, koji, prema Borel-ovim rečima iz pomenutog predgovora, ne bi bili samo »le plus souvent, une complication inutile«. Borel, s druge strane, naglašava da bi stvarni uspeh ovakve redukcije bio dragocen. Po našem mišljenju, ima osnove za postavljanje pitanja da li je on u većoj meri uopšte moguć. Teškoće su, prema Borel-u, u vezi sa »samom suštinom našeg duha, sa njegovom nesposobnošću da jasno shvati beskonačnost«. Sem toga, može se izneti jedna opšta primedba, ne toliko samoj Petrovićevoj ideji o spektrima, koliko njegovoj nadi da će se, skoro isključivo na bazi te jedne ideje, izgraditi efikasna i takoreći univerzalna metoda rešavanja analitičkih problema. Ona bi se sastojala u ovome: principijelna osnova ideje o spektrima i spektralnoj metodi, tačnije o njihovom univerzalnom zahvatu, predstavlja samo jedan fragment, doduše značajan, teorije kardinalnih brojeva. Tu su, dakle, već u polaznoj ideji i metodološkoj orijentaciji ispuštene, odnosno bitno zanemarene, druge važne i fundamentalne komponente matematičkih struktura (algebarske i topološke strukture, njihove kombinacije i slično), čime je, možda, ispuštena prava mogućnost ne samo za realizaciju napred pomenute ambicije, nego i za postizanje skromnijeg cilja izgradnje jedne matematičke teorije, discipline u pravom smislu. Poznato je da matematičke strukture, ekvivalentne, tj. identične u pogledu kardinalnosti, mogu u drugom pogledu biti duboko, nepremostivo različite. Jasno je da je redukcija jedne strukture na drugu, kao i postupaka sa jednom na postupke sa drugom — u takvom slučaju bez šireg oslonca u strukturalnom paralelizmu i vezana samo za tanku, često iluzornu nit korespondencije jedan - jedan između elemenata — mada teorijski u izvesnom smislu moguća, po pravilu ili praktično sasvim neostvarljiva, ili veoma neadekvatna i necelishodna, »une complication inutile«.

Ovo je ujedno i opšta primedba koja bi se, uz priznavanje značaja uloženog truda i pokazane ingenioznosti, kao i izvesnih dosadašnjih rezultata, mogla uputiti nastavljačima rada Mihaila Petrovića na teoriji spektara. Nju zapravo treba shvatiti kao konstruktivnu sugestiju da se, u daljoj izgradnji, ova disciplina suočava i dovodi u vezu sa već uveliko sazrelim i iskristalisanim, provereno efikasnim tokovima sličnih nastojanja u savremenoj matematici i da joj se, pre svega, da bitno šira, kompletnija i eksplicitnija strukturalno - teorijska osnova. Ovaj posao neće biti lak, ali u svakom slučaju manja je opasnost da, usled proširenja novim elementima i aspektima, matematički spektri izgube svoju individualnost, nego opasnost da se oni, izolovani od svih tih širokih i plodnih tokova, definitivno svedu na usku matematičku veštinu, na ne naročito bogatu zbirku pojedinačnih rezultata i kurioziteta. Autentična, unutrašnja potencijalna vrednost specifične Petrovićeve koncepcije spektara i spektralne metode mogla bi, ustvari, u adekvatnoj kombinaciji sa drugim postignućima samo da dobije.

No, bez obzira na dosadašnju i buduću faktičku sudbinu discipline zasnovane na ovoj zamisli Mihaila Petrovića, treba istaći da ta zamisao u svakom slučaju zadržava, u osnovi, vrednost anticipacije i analogona dva značajna metodološka principa široko i presudno primenjivana u matematici perioda koji približno počinje u poslednjoj deceniji Petrovićevog života. Prvi od njih je linearizacija podataka (elemenata) jednog problema prilikom njegove obrade od strane računskih mašina, a drugi tzv. postupak Gödel-izacije, kojim se svi simboli, formule, teoreme i dokazi jedne formalizovane matematičke teorije izražavaju pomoću pogodno izabranih prirodnih brojeva. Ovaj drugi postupak primenjen je u dokazu Gödel-ovih i drugih teorema od esencijalne važnosti za savremene poglede na zasnivanje i suštinu matematike.

Isti ovaj smisao anticipacije, nagoveštavanja, i to ne samo pojedinih rezultata i disciplina, nego pre svega opšte orijentacije, opšteg duha i stila čitave savremene, pa i buduće matematike, šta više i jedne od savremene matematike još mnogo šire duhovne tendencije moderne epohe ka slobodnoj, spoljašnjim, predmetnim okvirima nesputanoj kombinatorici i sintezi svih oblasti iskustva i stvaranja pomoću apstraktnih, formalnih strukturalnih šema, a koja danas preliva sve domene, počev od matematike i filozofije, pa preko drugih nauka i operativnih tehnika do poezije i umetnosti, — ima i druga glavna Petrovićeva originalna kreacija u matematičko-filozofskoj sferi — njegova matematička fenomenologija. Napomenuto je već u prethodnom izlaganju da, pored skupovnosti i kardinalnosti, ostale komponente apstraktnih matematičkih struktura, posebno algebarske i topološke strukture, ne ulaze dovoljno, u eksplicitnoj i specifičnoj formi, u vidokrug Petrovićevih, inače moderno inspirisanih, generalnih metodoloških matematičkih koncepcija. Može se, međutim, reći da Petroviću izvesno, čak i dosta dobro, poznavanje principa ovih oblasti nije nedostajalo, recimo na osnovu pojedinih mesta iz »Fenomenološkog preslikavanja« (na primer, na 128. strani). S druge strane, ovaj nedostatak umnogome je kompenzovan pomenutim opštim smislom, kako filozofskim, tako i matematičkim, osnovnih ideja Petrovićeve fenomenologije i njihovih konsekvenci. Pored brojnih drugih momenata i mesta iz odgovarajućih Petrovićevih dela koja se pod ovo mogu podvesti, istaknimo pre svega da je u njima, naročito u »Fenomenološkom preslikavanju«, jasno i nedvosmisleno formulisana sasvim moderna koncepcija matematike kao najšireg, najuniverzalnijeg, najslobodnijeg bavljenja apstraktnim strukturama, uz jedine obaveze logičke konsekventnosti i izvesne racionalne organizovanosti — daleko preko granica »nauke o količinskim i prostornim odnosima«. Navodim sledeće karakteristično mesto:

»... Moderna se matematika sve više razvija baš u pravcu i smislu toga da, pored broja, veličine i poretka, obuhvati i druge apstraktne odlike u svetu fakata, u kojima ti pojmovi ne moraju igrati kakvu naročitu ulogu. Takve težnje i takvi pravci razvijanja daju povod i opravdanost naslućivanju da će se Matematika budućnosti rasprostrti na sve što ima gore navedenu odliku, tj. *mogućnost potpunog apstrahovanja od konkretnih nosilaca i sadržinu koja je, tako apstrahovana do krajnjih granica mogućnosti, ipak pristupačna pozitivnim logičkim dedukcijma.** Matematika brojeva, veličina i poretka bila bi tada samo jedna prostrana oblast tako proširene Matematike«.

Ova opšta vizija »Proširene matematike« (što je jedan od podnaslova »Fenomenološkog preslikavanja«) sadrži i viziju takvih novih disciplina neočekivanih teorijskih i praktičnih sinteza najudaljenijih,

* Petrovićev kurziv.

najdisparatnijih fenomena, mimo konvencionalnih podela naučnih domena i nadležnosti — kakve danas nose nazive kibernetike, teorije modela itd. i njihove zadivljujuće, spektakularne efikasnosti, a takođe i Petrovićevo čvrsto uverenje da uspon u pravcu apstrakcije i emancipacija od vezanosti za konkretne sadržaje ne samo da ne dovode do gubljenja kontakta između matematike i realnosti, nego baš uvećavaju područje i prodornost primena matematike.

Što se tiče čisto filozofske, principijelne strane matematičke fenomenologije, pada u oči frapantan paralelizam, ako ne identičnost, između njenih osnovnih koncepcija i preokupacija i najsavremenije, besumnje veoma značajne, filozofske škole strukturalizma (Lévy-Stross i ostali), između »analoškog jezgra« s jedne i »strukture« s druge strane. Više je nego upadljivo odlučno insistiranje i kod Petrovića i kod strukturalista na verovatnom postojanju ne samo konačnog, nego i ne suviše velikog broja »fenomenoloških reduktivnih elemenata«, odnosno »osnovnih struktura«. Interesantno bi bilo bliže poređenje argumentacija za ovo tvrđenje u jednom i u drugom slučaju.

Treba podsetiti da ovaj duh vizionarskog elana i kombinatorne smelosti ne prožima samo filozofsko-matematičke i filozofske radove Mihaila Petrovića, nego je prisutan u čitavoj njegovoj matematičkoj aktivnosti. Njime se na prvom mestu, naime obiljem ideja i nestrpljivom stvaralačkom hitrinom, mnogo pre nego nekom nesolidnošću, mogu objasniti mestimične Petrovićeve nemarnosti, nekorektnosti i greške.

Pomenimo da je još jedna značajna oblast savremene nauke, teorija relativnosti, koja skoro isto toliko pripada modernoj matematici koliko i modernoj teorijskoj fizici, bila predmet ne samo vrlo solidnog Petrovićevog poznavanja, nego i njegovog trajnog interesovanja. To pokazuju ne samo njegovi pojedini radovi iz ove oblasti, kao na primer članak »Fizičke konstante u teoriji relativiteta« (1927), koji je postavljenim problemom izazvao žive naučne diskusije na međunarodnom kongresu na kome je bio saopšten, nego i završno poglavlje Petrovićevog »Fenomenološkog preslikavanja«, u kome on upravo opštoj teoriji relativnosti, posle jednog izvanredno zaokrugljenog i plastičnog izlaganja njene suštine, daje počasno mesto vrha svoje skale takozvanih »mitologija fakata«, čak iznad svoje Fenomenologije, na ovom mestu nazvane »fenomenološka mitologija«.

Videli smo da je moderna matematika u mnogim svojim vidovima široko i, što je još važnije, bitno prisutna u stvaralaštvu i interesovanjima Mihaila Petrovića, ekplicitno na nekim mestima, pokatkad preko svojih određenih rezultata u prisnoj vezi sa genezom nekih

Petrovićevih najoriginalnijih ideja, kao što je slučaj sa teorijom skupova i njenom vezom sa matematičkim spektrima, ili sa teorijom relativnosti, — ali najčešće kao opšti podtekst, podloga, unutrašnja komponenta skoro svih Petrovićevih matematičkih, pa i ostalih intelektualnih aktivnosti, na prvom mestu njegovih poletnih, nadahnutih anticipacija budućnosti, budućih mogućnosti matematike i nauke uopšte, koje su danas uveliko u ostvarivanju. Možda bi se moglo reći, ponavljajući samog Petrovića, uz jedno značajno *mutatis mutandis* pozitivnog smisla, da se to umnogome svodilo »na filozofske vizije i generalnosti«. Ali treba odmah dodati da su to vizije krajnjih, čudesnih mogućnosti realnih i bitnih tokova razvitka čiji smo svi mi danas svedoci.

LITERATURA

1. Michel Petrović: *Les spectres numériques*, Paris, 1919.
2. Michel Petrović: *Leçons sur les spectres mathématiques*, Paris, 1928.
3. Mihailo Petrović: *Brojni spektri pojava*, Glas SAN, CXXVII, 1927, str. 47—66.
4. Mihailo Petrović: *Elementi matematičke fenomenologije*, izdanje Srpske kraljevske akademije nauka, Beograd, 1911.
5. Michel Petrović: *Mécanismes communs aux phénomènes disparates*, Nouvelle Collection scientifique, Paris, 1921.
6. Mihailo Petrović: *Fenomenološko preslikavanje*, Posebna izdanja Srpske kraljevske akademije nauka, knjiga XCVII, Beograd, 1933.
7. Mihailo Petrović: *Fizičke konstante u Teoriji relativnosti*, Glas SAN, CXXVII, 1927, str. 1—16.
8. Dragoljub Marković: *Pedeset godina jednog značajnog dela dr Mihaila Petrovića*, Beograd, Vesnik Društva matematičara i fizičara, XIII (1961), str. 107—120.
9. Claude Levy-Stross: *Divlja misao*, Beograd 1966.

DUŠAN ADAMOVIĆ

DISCIPLINES MATHÉMATIQUES MODERNES, EN PARTICULIER LA THEORIE DES ENSEMBLES, DANS LES TRAVAUX DE MICHEL PETROVIĆ

RÉSUMÉ

L'auteur s'oppose à l'opinion assez répandue, selon laquelle l'activité mathématique de Michel Petrović appartiendrait toute entière aux mathématiques classiques, c'est-à-dire aux mathématiques du dix-neuvième siécle. Il trouve que, tout au contraire, la création et la pensée mathématique et philosophique de Petrović, prises dans leur ensemble, sont profondément et intimement pénetrées de l'esprit et des tendences des mathématiques modernes, bien que souvent ce fait ne se présente pas d'une manière tout-à-fait explicite. Les anticipations du développement contemporain et futur des mathématiques et des autres sciences, contenues dans les oeuvres de Petrović, surtout dans celles consacrées aux *spectres mathématiques* et à la *phénomenologie mathématique* (noms donées par M. Petrović lui-même à deux disciplines mathématiques nouvelles, dont il proposa et initia l'édification); puis le rôle essentiel de quelques résultats et tendences des mathématiques et de la physique théorique modernes (théorie des ensembles, relativité) dans la génèse des idées et inventions philosophico-mathématiques les plus importantes et les plus originales de Petrović; enfin, une analogie intéressante entre les notions et les thèses de la *phénomenologie mathématique* et celles de l'école philosophique contemporaine du *structuralisme* — sont particulièrement soulignées.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

P. M. VASIĆ et D. D. ADAMOVIĆ

SUR UN SYSTÈME INFINI D'INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

Extrait
des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE. T. 9 (23), 1969

BEOGRAD
1969

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. p. 107—114.

SUR UN SYSTÈME INFINI D'INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

P. M. Vasić — D. D. Adamović

(Communiqué le 17 Mai 1968)

0. L'inégalité de Hlawka

$$\text{(H)} \qquad |a_2+a_3|+|a_3+a_1|+|a_1+a_3|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_1+a_2+a_3|$$

(a_1, a_2, a_3 éléments d'un espace préhilbertien, $|a|$ demi norme de a) a été généralisée en 1963 dans [1] par l'inégalité

$$\text{(A)} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|\leqslant(n-2)\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right| \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Après, D. Ž. Đoković [2] a généralisé le dernier résultat par l'inégalité

$$\text{(D)} \qquad \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}|a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}|\leqslant\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\binom{n-2}{k-2}\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$$

$$(1\leqslant k\leqslant n-1;\ n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Les résultats (A) et (D) sont aussi valables dans tout espace préhilbertien.

On a établi en 1964 dans [3] que si l'inégalité (D) avec $n=3$, $k=2$ (c'est-à-dire l'inégalité (H)) n'est pas valable dans tout l'espace demi normé considéré, alors il en est ainsi de (D) pour tout $n\geqslant3$ et pour tout $2\leqslant k\leqslant n$.

Un des résultats de [4] (1968) peut être énoncé comme il suit:

(V) Soit f une fonction réelle convexe du troisième ordre (pour la définition voir [5]) dans l'intervalle $[0,\ a)$ $(a>0)$ et soit $a_i\in[0,\ a)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ et $\sum_{i=1}^{n}a_i\in[0,\ a)$. Alors

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}f(a_i+a_j)+\binom{n-1}{2}f(0)\leqslant(n-2)\sum_{i=1}^{n}f(a_i)+f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) \qquad (n\geqslant3).$$

Les résultats (A) et (V) contiennent les inégalités à peu près de même forme, mais les conditions sous lesquelles ces inégalités sont valables sont incomparables (on peut dire même: disparates). En outre, le résultat (A) et le résultat (D) plus général sont déduits des identités correspondantes, et cela pour tout n et k, tandis que (V) est démontré d'abord pour $n=3$ et étendu ensuite, par induction mathématique, à tout $n\geqslant3$.

Inspirés par tous les faits précédents, nous avons obtenu le théorème suivant de caractère assez général, lequel, entre autre, met en évidence (partiellement au moins), la structure logique et la connexion mutuelle des résultats (H), (A), (D), [3], (V) et rend possible une démonstration de (D) différente de celle exposée dans [2] et [1]. Il faut noter, cependant, que ce théorème ne contient pas (et ne fournit pas de moyen pour obtenir) les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité en question devienne égalité, lesquelles sont formulées et démontrées pour chacun des cas (A), (D) et (V), dans les travaux correspondants [2], [1] et [4], d'une manière particulière.

1. Théorème. *Soient: D un demi groupe additif et commutatif à l'élément neutre O, $E \subset D$ un ensemble aux propriétés:*

α) $0 \in E$;

β) $\left(a_i \in E \ (i=1, \ldots, n) \ \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i \in E\right) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu} \in E \quad (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n)$

et G un groupe additif, commutatif et totalement ordonné (le dernier signifie que G est muni d'une relation d'ordre total $\leqslant$ avec la propriété

$$(a, b, c \in G \wedge a < b) \Rightarrow a+c < b+c).$$

Pour une fonction $f\colon E \to G$ désignons par $(C_{n,k})$ la condition

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} f(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}) + \binom{n-1}{k}(k-1) f(0)$$

$$\leqslant \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) + \binom{n-2}{k-2} f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

$$\left(a_i \in E \ (1 \leqslant i \leqslant n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \in E\right).$$

Alors les deux implications suivantes sont valables:

(1) $$(C_{3,2}) \Rightarrow (C_{n,k}) \quad (2 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \geqslant 3),$$

(2) $$non\,(C_{3,2}) \Rightarrow non\,(C_{n,k}) \quad (2 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \geqslant 3).$$

Autrement dit, toutes les conditions

(3) $$(C_{n,k}) \qquad (2 \leqslant k \leqslant n;\ n \geqslant 3)$$

sont remplies si et seulement si une quelconque d'entr'elles est remplie; ou bien: chacune des conditions (3) *est équivalente à toute autre de ces conditions.*

Avant de passer à la démonstration, notons que l'on peut considérer l'implication (1) comme l'énoncé du fait que la „solution générale" du „système infini d'inégalités fonctionnelles" (3) est donnée (déterminée) par l'inégalité

$(C_{3,2})$, dans le sens que la fonction f $(:E \to G)$ est une solution du système (3) si et seulement si f satisfait à $(C_{3,2})$.

Démonstration. On peut supposer que

$$f(0)=0. \tag{4}$$

En effet, supposons que l'on ait déjà démontré le théorème sous l'hypothèse (4) et appliquons-le à la fonction $f(x)-f(0)$. Étant donné que l'inégalité dans $(C_{n,k})$ devient alors

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})-\binom{n}{k}f(0)$$
$$\leq\binom{n-2}{k-2}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)+\binom{n-2}{k-2}f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)-\left[\binom{n-2}{k-1}n+\binom{n-2}{k-2}\right]f(0)$$

et que l'on a

$$\binom{n-2}{k-1}n+\binom{n-2}{k-2}-\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k-2}\left[\frac{n\,(n-k)}{k-1}+1\right]-\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}$$
$$=\binom{n-2}{k-2}\frac{(n-1)(n+1-k)}{k-1}-\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}$$
$$=\binom{n-1}{k-1}\frac{(n-k)(k-1)}{k}$$
$$=\binom{n-1}{k}(k-1),$$

il en résulte immédiatement le cas général du théorème.

Supposons donc, sous l'hypothèse (4), la condition $(C_{3,2})$ remplie. Avant de démontrer, par induction, que l'on a alors (3), nous allons prouver, de la même manière, les cas particuliers suivants: $(C_{n,2})$ $(n\geq 3)$ et $(C_{n,n-1})$ $(n\geq 3)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} f(a_i+a_j)\leq(n-2)\sum_{i=1}^{n} f(a_i)+f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \tag{5}$$
$$\left(a_i\in E\ (i=1,\ldots,n),\quad \sum_{i=1}^{n} a_i\in E;\ n\geq 3\right)$$

et

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-1}\leq n} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{n-1}})\leq\sum_{i=1}^{n} f(a_i)+(n-2)f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \tag{6}$$
$$\left(a_i\in E\ (i=1,\ldots,n),\quad \sum_{i=1}^{n} a_i\in E;\ n\geq 3\right).$$

Pour $n=3$ chacune des assertion (5) et (6) se réduit à $(C_{3,2})$ et est donc vraie, selon l'hypothèse. Supposons la proposition (5) vraie pour un nombre naturel $n\,(\geqslant 3)$ et soit

$$a_i \in E \;\; (i=1, \ldots, n+1), \;\; \sum_{i=1}^{n+1} a_i \in E. \tag{7}$$

En applicant (5) aux éléments

$$a_i \;\; (i=1, \ldots, n-1), \;\; a_n + a_{n+1}, \tag{8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} f(a_i+a_j) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i+a_n+a_{n+1}) \\ &\qquad \leqslant (n-2)\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + f(a_n+a_{n+1})\right] + f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \end{aligned} \tag{9}$$

et en applicant $(C_{3,2})$ aux éléments a_i, a_n et a_{n+1}, pour tout $i=1, \ldots, n-1$ à part, on obtient

$$\begin{aligned} -f(a_i+a_n+a_{n+1}) &\leqslant -f(a_i+a_n) - f(a_i+a_{n+1}) \\ &\quad - f(a_n+a_{n+1}) + f(a_i) + f(a_n) + f(a_{n+1}) \qquad (i=1, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

ou bien, après addition,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i+a_n+a_{n+1}) &\leqslant -\sum_{i=1}^{n-1} [f(a_i+a_n)+f(a_i+a_{n+1})] - (n-1)\, f(a_n+a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + (n-1)\,[f(a_n)+f(a_{n+1})]. \end{aligned} \tag{10}$$

L'addition des inégalités (9) et (10) donne

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} f(a_i+a_j) + \sum_{i=1}^{n-1} [f(a_i+a_n)+f(a_i+a_{n+1})] + f(a_n+a_{n+1}) \\ &\qquad \leqslant (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + f(a_n) + f(a_{n+1})\right] + f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n+1} f(a_i+a_j) \leqslant [(n+1)-2] \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right),$$

ce qui achève la démonstration inductive de (5).

Supposons maintenant l'assertion (6) vraie pour $n\,(\geqslant 3)$ et que l'on ait de nouveau (7). L'application de (6) aux éléments (8) donne

$$\text{(11)}\qquad f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)+f\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i+a_n+a_{n+1}\right)+\cdots+f\left(\sum_{i=2}^{n-1} a_i+a_n+a_{n+1}\right)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n+a_{n+1})+(n-2)\,f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)$$

et l'application de $(C_{3,2})$ aux éléments

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ a_n \text{ et } a_{n+1}$$

conduit à

$$\text{(12)}\qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)+f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i+a_{n+1}\right)+f(a_n+a_{n+1})$$
$$\leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)+f(a_n)+f(a_{n+1})+f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right).$$

On obtient par addition de (11) et (12)

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n+1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_n})\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i)+[(n+1)-2]\,f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right),$$

ce qui termine la démonstration inductive de (6).

L'assertion $(C_{n,k})$ pour $n=3$ (et $k=2$, la seule possibilité pour k) est vraie, d'après l'hypothèse. Supposons $(C_{n,k})$ vrai avec le premier indice variant jusqu'au nombre naturel $n\,(\geqslant 3)$. En supposant (7), l'application de $(C_{n,k})$ aux éléments (8), avec $2\leqslant k\leqslant n-1$, donne (après multiplication par $k-1$)

$$\text{(13)}\qquad (k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})$$
$$+(k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{k-1}}+a_n+a_{n+1})$$
$$\leqslant (k-1)\left\{\binom{n-2}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n+a_{n+1})\right]+\binom{n-2}{k-2} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\right\}.$$

L'application de (6) aux $k+1$ éléments $a_{i_1},\ldots,a_{i_{k-1}}, a_n, a_{n+1}$ et l'addition de toutes ces inégalités donne

$$\text{(14)}\qquad -(k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{k-1}}+a_n+a_{n+1})$$
$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\ \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_k,\\ j_1,\ldots,j_k\in\{i_1,\ldots,i_{k-1},n,n+1\}}} f(a_{j_1}+\cdots+a_{j_k})$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} [f(a_{i_1})+\cdots+f(a_{i_{k-1}})]$$
$$+\binom{n-1}{k-1}[f(a_n)+f(a_{n+1})].$$

En ajoutant (14) à (13), on obtient

$$(15)\qquad (k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\ \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_k,\\ j_1,\ldots,j_k\in\{i_1,\ldots,i_{k-1},\,n,\,n+1\}}} f(a_{j_1}+\cdots+a_{j_k});$$

$$\leqslant(k-1)\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+\binom{n-1}{k-1}[f(a_n)+f(a_{n+1})]$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}[f(a_{i_1})+\cdots+f(a_{i_{k-1}})]$$

$$+(k-1)\binom{n-2}{k-1}f(a_n+a_{n+1})+(k-1)\binom{n-2}{k-2}f\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right).$$

En ajoutant à (15) toutes les inégalités de même type où le rôle des éléments a_n et a_{n+1} est joué par toutes les autres paires des éléments a_i $(i=1,\ldots,n+1)$, on obtient

$$(16)\qquad A_n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})$$

$$\leqslant B_n'\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)+C_n'f\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)+(k-1)\binom{n-2}{k-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}f(a_i+a_j);$$

on va donner les expressions pour A_n, B_n' et C_n'.

On a, d'après (5) appliqué aux éléments a_i $(i=1,\ldots,n+1)$,

$$(17)\qquad (k-1)\binom{n-2}{k-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}f(a_i+a_j)$$

$$\leqslant(k-1)\binom{n-2}{k-1}(n-1)\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)+(k-1)\binom{n-2}{k-1}f\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right).$$

L'addition de (16) et (17) donne

$$(18)\qquad A_n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1}f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})\leqslant B_n\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)+C_nf\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right).$$

Ici on a:

$$A_n=\binom{n+1}{2}\left[(k-1)\binom{n-1}{k}+(k+1)\binom{n-1}{k-1}\right]:\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{(n+1)\,n}{2}\cdot\frac{k!}{(n+1)\,n\ldots(n-k+2)}\binom{n-1}{k}\left[(k-1)+\frac{(k+1)\,k}{n-k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(n-k+1)(nk-n+2k),$$

$$B_n = B_n' + (k-1)\binom{n-2}{k-1}(n-1) \tag{19}$$

$$= \binom{n+1}{2}\left[\binom{n-2}{k-1}(k-1)(n-1) + 2\binom{n-1}{k-1} + (k-1)\binom{n-1}{k-1}\right]\frac{1}{n+1}$$

$$+ (k-1)\binom{n-2}{k-1}(n-1)$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}\,\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{k-1}[(k-1)(n-k)+k+1] + \binom{n-1}{k-1}(k-1)(n-k)$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}[(n-k+1)(nk-n+2k-2)+n(k+1)]$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}(n-k+1)(nk-n+2k)$$

$$= \binom{n-1}{k-1}A_n,$$

$$C_n = C_n' + (k-1)\binom{n-2}{k-1} \tag{20}$$

$$= (k-1)\left[\binom{n+1}{2}\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}\right]$$

$$= \binom{n-1}{k-2}\left[\frac{(n+1)n}{2}(k-1)\frac{n-k+1}{n-1} + \frac{(n-k+1)(n-k)}{n-1}\right]$$

$$= \binom{n-1}{k-2}\frac{(n-k+1)(n-1)(nk-n+2k)}{2(n-1)}$$

$$= \binom{n-1}{k-2}A_n.$$

D'après (19), (20) et le fait que dans un groupe totalement ordonné

$$ma \leqslant mb \Rightarrow a \leqslant b \qquad (m \text{ nombre naturel}),$$

l'inégalité (18) devient

$$\sum_{1\leqslant i<\cdots<i_k\leqslant n+1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}) \leqslant \binom{(n+1)-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + \binom{(n+1)-2}{k-2} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)$$

$$(2 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Tenant compte de (6), on a ainsi démontré la validité de $(C_{n,k})$ pour le nombre $n+1$ au lieu de n, ce qui achève la démonstration inductive de (3), c'est-à-dire la démonstration de (1).

L'assertion (2) est évidemment équivalente à l'assertion que la validité de $(C_{n,k})$ pour un n $(\geqslant 3)$ et un k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ déterminés entraîne $(C_{3,2})$. Or, il suffit de poser dans l'inégalité $(C_{n,k})$ $a_4 = \cdots = a_n = 0$ pour qu'elle se réduise à $(C_{3,2})$, ce qu'on vérifie aisément (tenant compte de (4)).

Ainsi, notre théorème est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Généralisation d'une identité de Hlawka et de l'inégalité correspondante*, Matematički vesnik, 1 (16) (1964), 39—43.

[2] D. Ž. Đoković, *Generalizations of Hlawka's inequality*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 18 (1963), 169—175.

[3] D. D. Adamović, *Quelques remarques relatives aux généralisations des inégalités de Hlawka et de Hornich*, Matematički vesnik, 1 (16) (1964), 241—242.

[4] P. M. Vasić, *Les inégalités pour les fonctions convexes d'ordre n*, Matematički vesnik, 5 (20) (1968), 327—331.

[5] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualités 992, Paris 1945, pp. 76.

Institut Mathématique
Beograd

DUŠAN D. ADAMOVIĆ
MILAN R. TASKOVIĆ

MONOTONY AND THE BEST POSSIBLE BOUNDS OF SOME SEQUENCES OF SUMS

Poseban otisak
UNIVERZITET U BEOGRADU
PUBL. ELEKTROTEHNIČKOG FAK.
SER. MAT. FIZ. No 247—No 273 (1969)

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

252. MONOTONY AND THE BEST POSSIBLE BOUNDS OF SOME SEQUENCES OF SUMS*

Dušan D. Adamović and *Milan R. Tasković*

0. Prof. D. S. MITRINOVIĆ has proposed in [1] the following problem:

"Determine some sharp enough bounds of

$$\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+1} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

where p and q are fixed natural numbers, and if possible, the best ones."

By using CAUCHY-SCHWARZ's and SCHWEIZER's inequalities, A. LUPAS, in his solution of this problem [2], gives for the expression

$$S_n(p, q) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=pn+1}^{qn+1} \frac{1}{k} \qquad (p < q;\ p,\ q,\ n \text{ natural numbers}) \tag{1}$$

the following estimate

$$\underline{L}_n(p, q) \overset{\text{def}}{=} 2\,\frac{(q-p)\,n+1}{(q+p)\,n+2} < S_n(p, q) < \frac{[(q-p)\,n+1]\,[(q+p)\,n+2]}{2\,(pn+1)\,(qn+1)} \overset{\text{def}}{=} \overline{L}_n(p, q) \tag{2}$$

$$(p < q;\ p,\ q,\ n \text{ natural numbers}),$$

which follows from his more general estimate

$$\frac{t}{A(s, s+t)} < \sum_{k=s+1}^{s+t} \frac{1}{k} < \frac{t}{H(s, s+t)} \qquad (s,\ t \text{ natural numbers}), \tag{3}$$

where $A(a, b)$ and $H(a, b)$ denote arithmetic and harmonic means of numbers a and b respectively.

In LUPAS' solution the question of the best possible bounds was not treated. In fact, in the case when the bounds depend of p, q and n, as in LUPAS' estimate, the problem of the best possible bounds does not have a real meaning, because the unique solution for the bounds (for both of them) is the expression $S_n(p, q)$.

On the other hand, if $S_n(p, q)$ is regarded as a sequence determined by parameters p and q, and the bounds are given as the functions of p and q only, the mentioned question has a non trivial meaning and is without any ambiguity: the lower bound $\underline{B}(p, q)$ and the upper bound $\overline{B}(p, q)$ are the best possible if and only if the following conditions hold:

$$\underline{B}(p, q) = \inf_{n\geqslant 1} S_n(p, q), \quad \overline{B}(p, q) = \sup_{n\geqslant 1} S_n(p, q).$$

* Presented January 25, 1969 by D. S. Mitrinović.

1. The best possible bounds of the sum (2), in the previous sense, for all natural numbers p and q (with $p<q$), save for a fixed set of pairs, are given in Proposition 2. Paralelly with sums (1), we also considered the following sums

$$(4) \qquad \sigma_n(p, q) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=pn+1}^{qn} \frac{1}{k} \qquad (p<q;\ p, q, n \text{ natural numbers}).$$

The best possible bounds $\underline{\mathcal{B}}(p, q)$ and $\overline{\mathcal{B}}(p, q)$ of sums (4), and in the same sense, gives Proposition 1.

In Propositions 1 and 2 the monotony of sequences $\sigma_n(p, q)$ and $S_n(p, q)$ is examined too. This monotony is applied in the determination of the best possible bounds, and is interesting by itself.

We note that a solution of this problem of Prof. D. S. Mitrinović, given by us in **[2]**, contains an error that we have made carrying over the result obtained for $S_n(p, p+1)$ to all sequences of sums (1).

Proposition 1. *For any fixed natural numbers p and q ($>p$), the sequence $\sigma_n(p, q)$ is strictly increasing, in symbols:*

$$(5) \qquad \sigma_n(p, q) \uparrow \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Therefore,

$$\underline{\mathcal{B}}(p, q) \overset{\text{def}}{=} \sigma_1(p, q) \leqslant \sigma_n(p, q) < \ln \frac{q}{p} \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{B}}(p, q)$$

$$(p<q;\ p,\ q \text{ natural numbers};\ n=1, 2, \ldots),$$

and these bounds are the best possible for any two fixed natural numbers p and q ($>p$).

Proof. For $p<q$, we have

$$\sigma_n(p, q) = \sum_{s=p}^{q-1} \sigma_n(s, s+1).$$

Hence, to prove (5), it suffices to prove that for $p=1, 2, \ldots$

$$(6) \qquad \sigma_n(p, p+1) \uparrow \quad (n=1, 2, \ldots),$$

i.e.

$$a_n(p) \overset{\text{def}}{=} \sigma_{n+1}(p, p+1) - \sigma_n(p, p+1) > 0 \qquad (n, p=1, 2, \ldots).$$

Since

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{pn+p+k} - \frac{1}{pn+k} = \frac{k}{n(pn+p+k)(pn+k)} > 0,$$

or

$$\frac{1}{pn+k} < \frac{n+1}{n} \frac{1}{pn+p+k},$$

we get

$$a_n(p)=\sum_{k=p(n+1)+1}^{(p+1)(n+1)}\frac{1}{k}-\sum_{k=pn+1}^{(p+1)n}\frac{1}{k}=\frac{1}{p(n+1)+1}-\left(\sum_{k=pn+1}^{(p+1)n}\frac{1}{k}-\sum_{k=p(n+1)+2}^{(p+1)(n+1)}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{pn+p+1}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{pn+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{pn+p+k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{pn+p+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{p+1}{(pn+k)(pn+p+k+1)}$$

$$>\frac{1}{pn+p+1}-\frac{n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p+1}{(pn+p+k)(pn+p+k+1)}$$

$$=\frac{1}{pn+p+1}-\frac{(n+1)(p+1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{pn+p+k}-\frac{1}{pn+p+k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{pn+p+1}-\frac{(n+1)(p+1)}{n}\cdot\frac{n}{(pn+p+1)(pn+p+n+1)}=0$$

for $p, n=1, 2, \ldots$.

The second part of the proposition follows immediately from the first one and from the fact that

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(p, q)=\ln\frac{q}{p}.$$

Proposition 2. *Let p and q $(>p)$ be two fixed natural numbers.*

1° *If $q\leqslant\frac{5}{2}p$, not being $p=2\alpha+1$, $q=5\alpha+\beta$ $(\alpha=2, 3, \ldots;\ \beta=1, 2)$ $\left(\text{especially, if } q<\frac{11}{5}p\right)$, then*

$$S_n(p, q)\ \downarrow\ (n=1, 2, \ldots).$$

In this case

$$\underline{B}(p, q)=\ln\frac{q}{p}<S_n(p, q)\leqslant S_1(p, q)=\overline{B}(p, q)\qquad(n=1, 2, \ldots),$$

with the best possible bounds.

2° *If $q\geqslant 3p$, then*

$$S_n(p, q)\ \uparrow\ (n=1, 2, \ldots).$$

In this case

$$\underline{B}(p, q)=S_1(p, q)\leqslant S_n(p, q)<\ln\frac{q}{p}=\overline{B}(p, q)\qquad(n=1, 2, \ldots),$$

with the best possible bounds again.

3° *For all other values of p and q $(>p)$, the sequence $S_n(p, q)$ is strictly decreasing for n large enough.*

Proof. To prove the parts of 1° and 2° concerning monotony, we use the following

Lemma. *For each fixed natural number n, the expression*

$$\beta_n(p, q) \overset{\text{def}}{=} S_{n+1}(p, q) - S_n(p, q)$$

is a strictly increasing function of q and a strictly decreasing function of p.

$$\beta_n(p, q) = \sum_{k=qn+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=pn+1} \frac{1}{k} = \gamma_n(q) + \delta_n(p) \tag{7}$$

and

$$\gamma_n(q) = \sum_{k=qn+1}^{q(n+1)} \frac{1}{k} + \frac{1}{q(n+1)+1} - \frac{1}{qn+1} = \sigma_q(n, n+1) + \frac{1}{q(n+1)+1} - \frac{1}{qn+1}.$$

So, in virtue of (6) and using

$$\left[\frac{1}{x(n+1)+1} - \frac{1}{xn+1}\right]' = \frac{n}{(xn+1)^2} - \frac{n+1}{[x(n+1)+1]^2}$$

$$= \frac{n(n+1)x^2-1}{(xn+1)^2[x(n+1)^2+1]^2} > 0 \qquad (x \geqslant 1),$$

we find that $\gamma_n(q)$ is a strictly increasing function of q. On the other hand, and again by (6),

$$\delta_n(p) = -\sum_{k=pn+1}^{p(n+1)} \frac{1}{k} = -\sigma_p(n, n+1)$$

is a strictly decreasing function of p, whict proves Lemma.

Now, we continue with the proof of Proposition 2. By (7),

$$\beta_n(1, 3) = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} \tag{8}$$

$$= \frac{6(n+1)}{(3n+2)(3n+4)} - \frac{2}{3(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9(n+1)^2-(3n+2)(3n+4)}{(3n+2)(3n+4)(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(3n+2)(3n+4)(n+1)} > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

After some calculation, we find

$$\beta_n(2, 5) = -\frac{625n^4+1625n^2+3550n^2+604n+72}{10(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+6)(n+1)} < 0 \tag{9}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

By (8) and (9),

$$S_n(1, 3) \uparrow, \quad S_n(2, 5) \downarrow \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

and this implies, for each $p = 1, 2, \ldots$,

$$S_n(p, 3p) = S_{np}(1, 3) \uparrow, \quad S_n(2p, 5p) = S_{np}(2, 5) \downarrow \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

By (10) and Lemma, for $q \geqslant 3p$ we have

$$\beta_n(p, q) \geqslant \beta_n(p, 3p) > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Let $p < q \leqslant \frac{5}{2}p$. If $p = 1$, q must be equal to 2, and the first part of 1° is valid in this case, being

$$\beta_n(1, 2) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

If $p = 2a$ (a natural number), then $q \leqslant \frac{5}{2} \cdot 2a = 5a$, and by Lemma and (10),

$$\beta_n(p, q) \leqslant \beta_n(2a, 5a) < 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

If $p = 2a + 1$ (a natural number) and $q \neq 5a + 1$, $q \neq 5a + 2$, then the inequality $q \geqslant 5a + 3$ is impossible, for it would imply

$$q = \left(q - \frac{5}{2}p\right) + \frac{5}{2}p \geqslant \left[5a + 3 - \frac{5}{2}(2a + 1)\right] + \frac{5}{2}p = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}p > \frac{5}{2}p;$$

hence, $q \leqslant 5a$, i.e. by Lemma,

$$\beta_n(p, q) \leqslant \beta_n(2a + 1, 5a) < \beta_n(2a, 5a) < 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Finally, if $p = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ and $q = 5 \cdot 1 + 2 = 7$, then, following a somewhet longer calculation, the expression $\beta_n(p, q)$ can be reduced to the form of a rational function of n having all coefficients of numerator negative and all those of denominator positive, which means that

$$\beta_n(3, 6) \leqslant \beta_n(3, 7) < 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

So, we have proved both first statements under 1° and 2°.

The last two statements in 1° and 2° follow from the first ones and the fact that for $p < q$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(p, q) = \ln \frac{q}{p}.$$

Let the numbers p and q, with $p < q < 3p$, be fixed. For $n \geqslant 2$, we have

$$\begin{aligned}
\beta_n(p, q) &= \sum_{k=2}^{q+1} \frac{1}{qn + k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{pn + k} \\
&= \sum_{k=2}^{q+1} \frac{1}{qn}\left(1 + \frac{k}{qn}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{pn}\left(1 + \frac{k}{pn}\right)^{-1} \\
&= \sum_{k=2}^{q+1} \frac{1}{qn}\left[1 - \frac{k}{qn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{pn}\left[1 - \frac{k}{pn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \left(q \cdot \frac{1}{q} - p \cdot \frac{1}{p}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p} k - \frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{q+1} k\right)\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{q - 3p}{2pq} \cdot \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) < 0
\end{aligned}$$

for n large enough. This proves 3°.

2. One of the advantages of the bounds

$$\underline{\mathcal{B}}(p, q), \quad \overline{\mathcal{B}}(p, q), \quad \underline{B}(p, q) \quad \text{and} \quad \overline{B}(p, q),$$

that we have obtained in this paper, is that they do not depend on n and that they are the best possible in the sense given in **0**, although for some values of p, q and n, one of both of the corresponding bounds of LUPAS [2] $\underline{\mathcal{L}}_n(p, q)$, $\overline{\mathcal{L}}_n(p, q)$, $\underline{L}_n(p, q)$ and $\overline{L}_n(p, q)$ might be sharper, and ours being sharper for other values of p, q and n. Namely, we have

Proposition 3. *With already introduced symbols:*

1° *For n large enough:*

$$\overline{\mathcal{B}}(p, q) < \overline{\mathcal{L}}_n(p, q), \text{ if } p < q;$$

$$\overline{B}(p, q) < \overline{L}_n(p, q), \text{ if } q \geqslant 3p;$$

$$\underline{L}_n(p, q) < \underline{B}(p, q), \text{ if } p < q \leqslant \frac{5}{2} p,$$

and not being

$$p = 2\alpha + 1, \quad q = 5\alpha + \beta \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots; \ \beta = 1, 2).$$

Here the lower bound for n depends on p and q.

2° $\underline{L}_n(p, 3p) < \underline{B}(p, 3p), \ \overline{B}(p, 3p) < \overline{L}_n(p, 3p) \quad (p, n = 1, 2, \ldots).$

3° *There are values for p, q and n for which*

$$\underline{\mathcal{B}}(p, q) < \underline{\mathcal{L}}_n(p, q), \ \overline{\mathcal{B}}(p, q) > \overline{\mathcal{L}}_n(p, q), \ \underline{B}(p, q) < \underline{L}_n(p, q),$$

$$\overline{B}(p, q) > \overline{L}_n(p, q).$$

Namely:

3°.1. $\underline{\mathcal{B}}(p, q) < \underline{\mathcal{L}}_n(p, q)$ *for n large enough, if $p < q \leqslant p + 2$ (the lower bound for n depends on p and q);*

3°.2. $\overline{\mathcal{B}}(1, 2) > \overline{\mathcal{L}}_n(1, 2)$ $(n = 1, 2, 3)$, $\overline{\mathcal{B}}(1, 3) > \overline{\mathcal{L}}_n(1, 3)$ $(n = 1, 2)$;

3°.3. $\underline{B}(3, 5) < \underline{L}_1(3, 5)$;

3°.4. *if m $(= 1, 2, \ldots)$ is fixed, then for p large enough*

$$\overline{B}(p, p + m) > \overline{L}_n(p, p + m),$$

provided n is large enough (the lower bound for p depends on m and the lower bound for n on m and p); in special cases:

$\overline{B}(p, p + 1) > \overline{L}_n(p, p + 1)$ *for each p with n large enough,*

$\overline{B}(p, p + 2) > \overline{L}_n(p, p + 2)$ *for $p = 2, 3, \ldots$ with n large enough.*

Proof. According to the LUPAS' estimate (3), the corresponding bounds for the sum $\sigma_n(p, q)$ are

$$(11) \qquad \underline{\mathcal{L}}_n(p, q) = 2\frac{(q-p)\,n}{(q+p)\,n + 1} \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{L}}_n(p, q) = \frac{(q-p)\,[(q+p)\,n + 1]}{2q\,(pn + 1)}.$$

By (2) and (11), for $p<q$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{L}}_n(p, q) = \lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(p, q) = \frac{q^2-p^2}{2qp} = \frac{1}{2}\left[\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\right],$$

(12)

$$\lim_{n\to\infty} \underline{L}_n(p, q) = 2\cdot\frac{q-p}{q+p} = 2\cdot\frac{\frac{q}{p}-1}{\frac{q}{p}+1}.$$

Statement 1°, according to the corresponding parts of Propositions 1 and 2, follows from (12) and this double inequality

$$2\,\frac{t-1}{t+1} < \ln t < \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \quad (t>1),$$

which can easily be proved in the usual manner.

Further, for $p,\ n=1, 2, \ldots,$ we have:

$$\underline{L}_n(p, 3p) = 2\cdot\frac{2pn+1}{4pn+2} = 1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= S_1(1, 3) \leqslant S_p(1, 3) = S_1(p, 3p) = \underline{B}(p, 3p);$$

$$\overline{B}(p, 3p) = \ln 3 < \frac{9}{8} = \overline{L}_1(1, 3) \leqslant \overline{L}_{pn}(1, 3) = \overline{L}_n(p, 3p),$$

since:

$$e^{\frac{9}{8}} = e\cdot e^{\frac{1}{8}} > 2{,}7\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right) = \frac{2{,}7\cdot 9}{8} = \frac{24{,}3}{8} > \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow \ln 3 < \frac{9}{8};$$

$$\overline{L}_n(p, 3p) = \overline{L}_{pn}(1, 3) = \frac{(2pn+1)^2}{(pn+1)(3pn+1)},$$

$$\left[\frac{(2x+1)^2}{(x+1)(3x+1)}\right]' = \frac{2x(2x+1)}{(x+1)^2(3x+1)^2} > 0 \qquad (x>0).$$

So we have proved statement 2°.

From $p<q\leqq p+2$ it follows

$$\frac{1}{p+1} \leqq \frac{2}{q+p}$$

and so, by Proposition 1 and (11),

$$\underline{\mathcal{B}}(p, q) = \sigma_1(p, q) = \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{q} \lesseqgtr \frac{q-p}{p+1}$$

$$\lesseqgtr \frac{2(q-p)}{q+p} = \lim_{n\to\infty} \underline{\mathcal{L}}_n(p, q),$$

which proves 3°.1.

Since

$$e^{\frac{5}{8}} < 1+\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot 3=\frac{13}{8}+\frac{25}{128}+\frac{125}{1024}$$

$$<\frac{13}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{7}{4}+\frac{1}{5}<2 \Rightarrow \ln 2>\frac{5}{8},$$

$$\overline{\mathcal{L}}_n(1,\,2)=\frac{3n+1}{4(n+1)}\uparrow,\ \overline{\mathcal{L}}_n(1,\,3)=\frac{4n+1}{3(n+1)}\uparrow\quad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

we get

$$\overline{\mathcal{B}}(1,\,2)=\ln 2>\frac{5}{8}=\overline{\mathcal{L}}_3(1,\,2)\geqslant \overline{\mathcal{L}}_n(1,\,2)\qquad (n=1,\,2,\,3),$$

$$\overline{\mathcal{B}}(1,\,3)=\ln 3>1=\overline{\mathcal{L}}_2(1,\,3)\geqslant\overline{\mathcal{L}}_n(1,\,3)\qquad(n=1,\,2)$$

and inequalities 3°.2 are so proved.

3°. 3. follows from:

$$\underline{B}(3,\,5)=\ln\frac{5}{3},\qquad \underline{L}_1(3,\,5)=\frac{3}{5},$$

$$e^{\frac{3}{5}}>1+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25}=\frac{89}{50}>\frac{5}{3}\ \Rightarrow\ \ln\frac{5}{3}<\frac{3}{5}.$$

If $m\,(=1,\,2,\,\ldots)$ is fixed, then for $p\geqslant m$

$$p+m=\left(1+\frac{m}{p}\right)p\leqslant 2p$$

and so (Proposition 2 and (2))

$$\overline{B}(p,\,p+m)=S_1(p,\,p+m)=\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{p+m+1}$$

$$>\frac{m+1}{p+m+1}=\frac{m+1}{p+m+1}-\frac{m(2p+m)}{2p(p+m)}+\frac{m(2p+m)}{2p(p+m)}$$

$$=\frac{2p^2-pm^2-m^2(m+1)}{2p(p+m+1)(m+p)}+\frac{m(2p+m)}{2p(p+m)}>\frac{m(2p+m)}{2p(p+m)}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\overline{L}_n(p,\,p+m)$$

for p large enough. This immediately implies the general statement in 3°.4. In special cases:

$$\overline{B}(p,\,p+1)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}=\frac{2p+3}{(p+1)(p+2)}-\frac{2p+1}{2p(p+1)}+\frac{2p+1}{2p(p+1)}$$

$$=\frac{2(p^2-1)+p}{2p(p+1)(p+2)}+\lim_{n\to\infty}L_n(p,\,p+1)$$

$$>\lim_{n\to\infty}\overline{L}_n(p,\,p+1)\qquad(p=1,\,2,\,\ldots),$$

$$\overline{B}(p, p+2) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} - \frac{2(p+1)}{p(p+2)} + \frac{2(p+1)}{p(p+2)}$$

$$= \frac{p^2-3}{p(p+1)(p+2)(p+3)} + \lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(p, p+2)$$

$$> \lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(p, p+2) \qquad (p=2, 3, \ldots),$$

which proves last two statements in 3°. 4.

3. Some remarks

3.1. Proposition 2 does not solve the problem of monotony and the best possible bounds of the sequence $S_n(p, q)$ $(n=1, 2, \ldots)$ for arbitrary fixed p and q, since the cases when

$$\text{(13)} \qquad \frac{5}{2}p < q < 3p, \quad \text{or} \quad p=2\alpha+1, \; q=5\alpha+\beta \qquad (\alpha=2, 3, \ldots; \; \beta=1, 2)$$

remain open.

Nevertheless, in virtue of statement 3° of Proposition 2, as well as in virtue of some examined special cases, *we conjecture that also in the cases* (13) *sequence* (1) *is strictly decreasing and so has the best possible bounds*

$$\underline{B}(p, q) = \ln\frac{q}{p} \quad \textit{and} \quad \overline{B}(p, q) = S_1(p, q).$$

3.2. The bounds of $\sigma_n(p, q)$ and $S_n(p, q)$ $(p<q;\; n=1, 2, \ldots)$ which do not depend on n and which do not involve complicated expressions, but not being, of course, all the best possible, can be determined in the following way. For $p<q$, $n=1, 2, \ldots$:

$$\sigma_n(p, q) = \sum_{k=pn+1}^{qn} \frac{1}{k} > \int_{pn+1}^{qn+1} \frac{dt}{t} = \ln\frac{qn+1}{pn+1} = \ln\left[\frac{q}{p} - \frac{q-p}{p(pn+1)}\right] \geqslant \ln\frac{q+1}{p+1};$$

$$\sigma_n(p, q) < \int_{pn}^{qn} \frac{dt}{t} = \ln\frac{q}{p};$$

$$S_n(p, q) = \sum_{k=pn+1}^{qn+1} \frac{1}{k} > \int_{pn+1}^{qn+2} \frac{dt}{t} = \ln\frac{qn+2}{pn+1}$$

$$= \ln\left[\frac{q}{p} + \frac{2p-q}{p(pn+1)}\right] \begin{cases} \geqslant \ln\dfrac{q}{p} & (q \leqslant 2p) \\[2ex] \geqslant \ln\dfrac{q+2}{p+1} & (q > 2p); \end{cases}$$

$$S_n(p, q) < \int_{pn}^{qn+1} \frac{dt}{t} = \ln\frac{qn+1}{pn} = \ln\left(\frac{q}{p} + \frac{1}{pn}\right) \leqslant \ln\frac{q+1}{p}.$$

Therefore, for $p<q$ and $n=1, 2, \ldots,$

$$\ln\frac{q+1}{p+1}<\sigma_n(p, q)<\ln\frac{q}{p}; \tag{14}$$

$$\min\left\{\ln\frac{q}{p},\ \ln\frac{q+2}{p+1}\right\}<S_n(p, q)<\ln\frac{q+1}{p}. \tag{15}$$

Of all these bounds, the best possible ones are the upper bound in (14) and the lower bound in (15) when $q\leqslant 2p$.

Note that from (14) and (15), and according to

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(p, q)=\lim_{n\to\infty}S_n(p, q)=\ln\frac{q}{p} \qquad (p<q),$$

it follows that $\ln\frac{q}{p}$ is the best possible lower bound of the sequence $\sigma_n(p, q)$ for $p<q$ and of the sequence $S_n(p, q)$ for $p<q\leqslant 2p$. This does not depend on the results previously obtained.

3.3. Finally, we remark that S. BARNARD and J. M. CHILD in [3] have given the bounds $\frac{1}{2}$ and $\frac{2}{3}$ for $S_n(3, 5)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Both of them are weaker than the bounds given in Proposition 2, which follows from the fact that the bounds found in this paper are the best possible, and this can be directly verified:

$$e<2{,}77<\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\ln\frac{5}{3}=\underline{B}(3, 5),$$

$$\overline{B}(3, 5)=S_1(3, 5)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}<\frac{40}{60}=\frac{2}{3}.$$

REFERENCES

[1] ***Problèm*** 108, Matematički Vesnik **4** (19) (1967), 338.

[2] ***Problèmes résolus***: 108, Matematički Vesnik **5** (20) (1968), 249.

[3] S. BARNAND and J. M. CHILD, *Higher Algebra*, London 1955, p. 562.

D. D. Adamović

M. D. Ašić

LIMIT POINTS OF SEQUENCES IN METRIC SPACES

A. M. M.

Vol. 77, № 6, June — July, 1970.

Reprinted from the AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
Vol. 77, No. 6, June-July, 1970

LIMIT POINTS OF SEQUENCES IN METRIC SPACES

M. D. AŠIĆ AND D. D. ADAMOVIĆ, University of Belgrade, Yugoslavia

The aim of this paper is to generalize both statements of the following theorem [1]:

THEOREM A. *Let* $C(\xi)$ *be the set of limit points of the bounded complex sequence* ξ. *Then* $C(\xi)$ *is connected if and only if there exists a subsequence* $\eta=(y_n)$ *of* ξ *such that* $C(\eta)=C(\xi)$ *and* $y_{n+1}-y_n\rightarrow 0$ $(n\rightarrow\infty)$.

The "if part" of this theorem is due to H. G. Barone [2], and the "only if part" to Paul Schaeffer [1].

A generalization of the first statement is

THEOREM 1. *Let X be a compact metric space, $\xi=(x_n)$ a sequence of its points, and $C(\xi)$ the set of limit points of ξ. Assume*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{1}$$

Then $C(\xi)$ is a connected set.

Proof. Suppose that $C(\xi)$ is not connected, i.e., that

$$C(\xi) = A \cup B \quad \text{and} \quad A \cap B = \varnothing, \tag{2}$$

with A and B nonempty closed sets. Put

$$\epsilon = \operatorname{Inf}\{d(t, u): t \in A, u \in B\}. \tag{3}$$

Since the space X is compact, there exist $a\in A$ and $b\in B$ such that $d(a, b)=\epsilon$. In view of the second condition of (2), we have $\epsilon>0$.

The sets

$$O_1 = \bigcup_{t\in A} K(t, \epsilon/3) \quad \text{and} \quad O_2 = \bigcup_{t\in B} K(t, \epsilon/3), \tag{4}$$

where $K(t, \delta)$ is the open sphere whose center is $t\in X$ and radius is δ, are then disjoint. Owing to the compactness of X, the set $O_1\cup O_2$ contains all members of the sequence ξ with large enough indices. This last fact together with (1) implies that there is a natural number n_0 such that

$$x_n \in O_1 \cup O_2 \qquad (n \geqq n_0) \tag{5}$$

and

$$d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon/3 \qquad (n \geqq n_0). \tag{6}$$

Since A and B are nonempty sets of limit points of the sequence ξ, upon taking into account (4) and (5), we see there exists a natural number $m\geqq n_0$, such that $x_m\in O_1$ and $x_{m+1}\in O_2$, and so there exist $t\in A$ and $u\in B$, such that

$$d(t, x_m) < \epsilon/3, \quad d(u, x_{m+1}) < \epsilon/3. \tag{7}$$

Then, by (6) and (7),

$$d(t, u) \leqq d(t, x_m) + d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, u) < \epsilon,$$

which contradicts the choice of ϵ, and thus proves the theorem.

For the proof of our second theorem, which generalizes the second statement of Theorem A, we shall need the following lemma (see [3], pp. 169–170, T, (a), where the supposition of compactness of X is not necessary).

LEMMA. *Let E be a connected part of a metric space. Then for any two elements t and u of E and for every $\epsilon > 0$ there is a finite number of elements $t_0, t_1, \cdots, t_k$ of E, such that $t_0 = t$, $t_k = u$ and $d(t_{\nu-1}, t_\nu) < \epsilon$ $(\nu = 1, \cdots, k)$.*

THEOREM 2. *Let X be a metric space and $\xi = (x_n)$ a sequence of its points, for which $C(\xi)$ is non-empty and connected. Then there exists a subsequence $\eta = (y_n)$ of the sequence ξ with the properties $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$ and $C(\eta) = C(\xi)$.*

Proof. For each $\delta > 0$, there exists an (at most) countable cover Σ of the set $C(\xi)$ which consists of spheres of diameter δ whose intersections with $C(\xi)$ are not empty. Namely, Σ can be formed from all those spheres with centers in x_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and with diameter δ which have nonempty intersections with $C(\xi)$. If Σ_ν denotes such a collection of spheres for $\delta = \nu^{-1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$, the collection of spheres $\Sigma_0 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Sigma_\nu$ is countable, so that we can write $\Sigma_0 = \{K_1, K_2, K_3, \cdots\}$. Besides, for each t in $C(\xi)$ there exists a sphere from Σ_0 with an arbitrary small diameter which contains t. Let $t_i \in K_i \cap C(\xi)$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$. According to the lemma, there exist positive integers $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$ and points $u_n \in C(\xi)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ such that

$$u_{k_i} = t_i (i = 1, 2, 3, \cdots); \; d(u_{n-1}, u_n) < i^{-1} (k_{i-1} < n \leqq k_i; \; i = 2, 3, \cdots).$$

It is clear that

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0. \tag{8}$$

Furthermore, let p_1 be the smallest positive integer such that $x_{p_1} \in K_1$ and $d(x_{p_1}, u_1) < 1$; if the natural numbers p_ν $(\nu = 1, \cdots, n-1)$ are determined, then let p_n be the smallest natural number with the properties:

$$p_n > p_{n-1}; \; d(x_{p_n}, u_n) < n^{-1}; \quad \text{if } n = k_i, \text{ then } x_{p_n} \in K_i.$$

According to the construction of the sequence (u_n), an infinite and strictly monotonic sequence of natural numbers (p_n) has been defined by the above procedure. The sequence $\eta = (y_n)$, where $y_n = x_{p_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, has, therefore, members with arbitrary large indices in each sphere K_i $(i = 1, 2, 3, \cdots)$. Therefore, $C(\eta) \supset C(\xi)$, and since the opposite inclusion clearly holds, we have $C(\eta) = C(\xi)$. On the other hand, according to (8),

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) = d(x_{p_n}, x_{p_{n+1}}) &\leqq d(x_{p_n}, u_n) + d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, x_{p_{n+1}}) \\ &< n^{-1} + d(u_n, u_{n+1}) + (n+1)^{-1} \to 0 \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

A few additional remarks concerning Theorem 1.

1. Compactness of the space X cannot be simply omitted from Theorem 1. This can be proved by choosing a suitable sequence ξ in the two-dimensional Euclidean space $X = R^2$ (for example, such that $C(\xi)$ be the union of a curve and its asymptote).

2. On the other hand, compactness of the space X is not necessary for the

holding of the implication

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \Rightarrow C(\xi) \text{ is a connected set,} \tag{9}$$

which is proved by the example of the one-dimensional Euclidean space $X=R$.

3. Another example for the same statement is a metric space X with a non-denumerable amount of points in which $d(x, y)=1$ $(x\neq y)$.

4. In view of the above, we can raise the question of replacing the compactness of X in Theorem 1 by a weaker condition. Such a condition certainly could not be Σ-compactness (the property of a space to be represented as a denumerable union of compact parts). Moreover, according to Remarks 1 and 3, Σ-compactness of the space X is neither a necessary nor sufficient condition for implication (9) to hold.

References

1. Paul Schaefer, Limit points of bounded sequences, this MONTHLY, 75 (1968) 51.

2. H. G. Barone, Limit points of sequences and their transforms by methods of summability, Duke Math. J., 5 (1939) 740–752.

3. J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961.

D. D. ADAMOVIĆ

RÉSOLUTIONS DE DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES PROCHES DE L'ÉQUATION DE CAUCHY

Математички весник
9 (24), Св. 1, 1972.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
9 (24) 1972. стр. 19—22

Dušan D. Adamović

RÉSOLUTIONS DE DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES PROCHES DE L'ÉQUATION DE CAUCHY

(Communiqué le 26. Juin 1970.)

0. Dans cette Note, on va déterminer la solution générale de chacune des équations fonctionnelles suivantes:

$$f\big(f(x+y)\big)=f(x)+f(y), \tag{1}$$

$$f(x+y)=f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big), \tag{2}$$

où, dans les deux cas, la fonction inconnue f peut être *réelle* ($f: R\to R$; R ensemble des nombres réels), ou *complexe* ($f: C\to C$; C ensemble des nombres complexes).

Cette détermination sera fondée sur le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 1. *La solution générale du système d'équations fonctionnelles*

$$\begin{cases} g(x+y)=g(x)+g(y), \\ g\big(g(x)\big)=g(x) \end{cases} \qquad (g: R\to R, \quad ou\ g: C\to C) \tag{3}$$

est donnée par

$$g(x)\begin{cases} =x, & x\in H_0, \\ \in\mathscr{L}(H_0), & x\in H\setminus H_0, \\ =\sum\limits_{h\in H}\alpha_h g(h), & x=\sum\limits_{h\in H}\alpha_h h \end{cases} \tag{4}$$

(*H base d'Hamel de R, ou de C, déterminée; H_0 partie non vide de H arbitraire; $\mathscr{L}(H_0)$ variété linéaire sur H_0; $\alpha_h\,(h\in H)$ nombres rationnels*).

Dans la démonstration de ce lemme on va s'appuyer sur le

Lemme 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$g\big(g(x)\big)=g(x) \qquad (g: E\to E;\ E \text{ ensemble non vide donné}) \tag{5}$$

peut être exprimée par

$$g(x)\begin{cases} =x, & x\in F \\ \in F, & x\in E\setminus F \end{cases} \qquad (F \text{ sous-ensemble non vide de } E \text{ arbitraire}).$$

Pour sa démonstration, voir, par exemple, [1]. (Notons que les solutions de (5) jouent des rôles importants dans diverses questions; un tel rôle est mis en évidence dans [2].)

Démonstration du lemme 1. Soit g une solution de (3). Alors, d'après la première équation (3) (*équation de Cauchy*), on a

(6) $$g(x)=\sum_{h\in H}\alpha_h g(h) \quad \Big(x=\sum_{h\in H}\alpha_h h,\ \alpha_h \text{ nombres rationnels}\Big),$$

H étant une base d'Hamel de R, ou de C, déterminée, et les valeurs $g(h)$ $(h\in H)$ pouvant être arbitraires. D'autre part, d'après le lemme 2, la seconde équation (3) donne

(7) $$g(x)\begin{cases}=x, & x\in L,\\ \in L, & x\in R\setminus L, \quad \text{ou } x\in C\setminus L,\end{cases}$$

avec $L=g(R)$, ou $L=g(C)$. Comme on sait, L est un sous-espace de l'espace linéaire R, ou C, sur le corps des nombres rationnels, et l'ensemble

(8) $$H_0=L\cap H$$

est une base d'Hamel de $L: L=\mathscr{L}(H_0)$. On a donc $f(x)=x\,(x\in H_0)$ et, d'après (7), $g(x)\in\mathscr{L}(H_0)$ $(x\in H\setminus H_0)$.

On a établi ainsi que g doit satisfaire à (4), avec H_0 donné par (8).

D'autre part, si g satisfait à (4), avec H_0 arbitraire, alors on a (6), et par suite g satisfait à la première équation (3). On a aussi, pour tout $x\in\mathscr{L}(H_0)=L$, c'est-à-dire pour $x=\sum_{h\in H_0}\alpha_h h$, où les $\alpha_h\,(h\in H_0)$ sont des nombres rationnels,

$$g(x)=\sum_{h\in H_0}\alpha_h g(h)=\sum_{h\in H_0}\alpha_h h=x,$$

et encore, pour $x=\sum_{h\in H}\alpha_h h$,

$$g(x)=\sum_{h\in H}\alpha_h g(h)\in\mathscr{L}(H_0)=L;$$

donc, g satisfait à (7), et par conséquent, d'après le lemme 1, à la seconde équation (3).

1. Notre résultat concernant l'équation (1) est exprimé par le

Théorème 1. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1) *est donné par*

(9) $$f(x)=g(x)+\lambda \quad \big(g \text{ une fonction décrite par } (4);\ \lambda \text{ un élément de } g(R), \text{ ou de } g(C)\big),$$

g et λ étant arbitraires.

Démonstration. Soit f une solution de (1). On a alors $f(f(0))=2f(0)$, c'est-à-dire

(10) $$f(\lambda)=2\lambda,$$

avec

$$\lambda=f(0).$$

En posant $y=0$, on obtient de (1)

(11) $$f(f(x))=f(x)+\lambda,$$

de manière que (1) devient

$$f(x+y)+\lambda=f(x)+f(y),$$

ou

(12) $$g(x+y)=g(x)+g(y),$$

avec

(13) $$g(x)=f(x)-\lambda.$$

D'après (13) et (10), $\lambda=g(\lambda)$ $(\in g(R)$, ou $\in g(C))$. D'après (13), (12) et (11), on a alors

$$\begin{aligned} g(g(x)) &= g(f(x)-\lambda) = g(f(x)) - g(\lambda) = f(f(x)) - \lambda - g(\lambda) \\ &= (f(x)+\lambda) - \lambda - g(\lambda) = (f(x)-\lambda) + \lambda - g(\lambda) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Donc, g est une solution de (3), de sorte que l'on a, d'après le lemme 1, l'expression (9) pour $f(x)$.

D'autre part, si $f(x)$ est donné par (9), alors on a, d'après le lemme 1,

$$\begin{aligned} f(f(x+y)) &= g(g(x+y)+\lambda) + \lambda = g(g(x+y)) + g(\lambda) + \lambda \\ &= g(x+y) + 2\lambda = (g(x)+\lambda) + (g(y)+\lambda) \\ &= f(x) + f(y); \end{aligned}$$

donc, l'équation (1) est satisfaite, ce qui termine notre démonstration.

1.1. **Corollaire du théorème 1.** *Toutes les solutions continues de l'équation* (1) *sont données par*:

$$f(x)=x+\lambda \qquad (\lambda \text{ constante réelle, ou complexe, arbitraire}),$$
$$f(x)=0.$$

2. Notre résultat relatif à l'équation fonctionnelle (2) est contenu dans le

Théorème 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2) *est donnée par*

(14) $$f(x)=g(x) \qquad (g \text{ une fonction décrite par } (4)),$$

g étant arbitraire.

Démonstration. Soit f une solution de (2). En posant

$$\mu=f(0),$$

on obtient de (2) $\mu=2f(\mu)$, ou

(15) $$f(\mu)=\frac{1}{2}\mu.$$

Par conséquent, pour $y=0$ (2) devient

(16) $$f(f(x))=f(x)-\frac{1}{2}\mu.$$

D'après (16), (2) prend la forme

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-\mu,$$

c'est-à-dire la forme

(17) $$g(x+y)=g(x)+g(y),$$

avec

(18) $$g(x)=f(x)-\mu.$$

D'après (18), (17), (16) et (15), on a

$$\begin{aligned} g(g(x)) &= g(f(x)-\mu) = g(f(x)) - g(\mu) = f(f(x)) - \mu - g(\mu) \\ &= f(x) - \frac{1}{2}\mu - \mu - g(\mu) = (f(x)-\mu) - g(\mu) - \frac{1}{2}\mu \\ &= g(x) - (f(\mu)-\mu) - \frac{1}{2}\mu = g(x) - \left(f(\mu) - \frac{1}{2}\mu\right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Donc, g est une solution de (3), ce qui veut dire, en raison du lemme 1, que g satisfait à (4). D'après (18) et (15), on a

$$g(\mu) = f(\mu) - \mu = \frac{1}{2}\mu - \mu = -\frac{1}{2}\mu;$$

il en résulte, d'après (17),

$$g(g(\mu)) = g\left(-\frac{1}{2}\mu\right) = -\frac{1}{2}g(\mu) = \frac{1}{4}\mu,$$

et aussi

$$g(g(\mu)) = g(\mu) = -\frac{1}{2}\mu;$$

par conséquent, $\mu = 0$.

On a obtenu ainsi l'expression (14) pour $f(x)$.

D'autre part, on vérifie immédiatement, en s'appuyant sur le lemme 1, que toute fonction f donnée par (14) satisfait à (2), ce qui achève notre démonstration.

2.1. **Corollaire du théorème 2.** *L'équation* (2) *n'a que deux solutions continues, données par* $f(x) = x$ *et par* $f(x) = 0$.

2.2. **Remarque.** On voit, d'après le lemme 1 et le théorème 2, que *l'équation fonctionnelle* (2) *et le système* (3) *d'équations fonctionnelles sont équivalents.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović: *Solution du problème* № 20, Matematički vesnik, 2 (17), sv. 1, 1965, p. 100.

[2] S. B. Prešić: *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle* $f^2 = f$, Publications de l'Institut Mathématique, Belgrade, t. 8 (22), 1968, p. 143—148.

D. D. ADAMOVIĆ

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIO-DIFFÉRENTIELLES

Математички весник
9 (24), Св. 1, 1972.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
9 (24) 1972. стр. 9—18

Dušan D. Adamović

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIO-DIFFÉRENTIELLES

(Communiqué le 26. Juin 1970.)

0. Inspirés par la méthode au moyen de laquelle Pl. Kannappan et D. Ž. Đoković [1] ont résolu l'équation fonctio-différentielle

$$f'(x+y)=f'(x)f(y)+f(x)f'(y)$$

$$\left(f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \mathbf{R}\text{ ensemble des nombres réels; } f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)\right),$$

nous nous proposons de donner ici la discussion complète de l'équation

$$(1)\qquad Af'(x+y)+Bf(x+y)=af'(x)f(y)+bf(x)f'(y)+cf'(x)f'(y)+$$
$$+df(x)f(y)+\alpha f'(x)+\beta f'(y)+\gamma f(x)+\delta f(y)+\varepsilon,$$

où A, B, a, b, c, d, α, β, γ, δ et ε sont des constantes réelles ou complexes et la fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ou $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$, ou $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, est inconnue, la première possibilité n'ayant lieu que lorsque les constantes sont réelles; ici $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Le cas où toutes les constantes sont réelles et $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sera appelé *cas réel* dans la suite, et les cas ou $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ et $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ seront appelés *premier* et *second cas complexe*, respectivement.

1. Les solutions générales pour quelques cas particuliers de l'équation (1) sont données par le

Théorème 1. *Dans les cas suivants:*

$$(2)\qquad A=a=b=c=d=\alpha=\beta=0\wedge B=\gamma=\delta\neq 0;$$

$$(3)\quad A=a=b=c=\alpha=\beta=\gamma-\delta=0\wedge Bd\neq 0\wedge\begin{cases}(3.1)\ M\overset{\text{def}}{=}\dfrac{1}{B^2}[\gamma(B-\gamma)+d\varepsilon]\neq 0,\ \dfrac{1}{4},\\ \vee\\ (3.2)\ M=\dfrac{1}{4},\\ \vee\\ (3.3)\ M=0;\end{cases}$$

$$(4)\qquad a=b=c=d=A-\alpha=A-\beta=B-\gamma=B-\delta=0\wedge A\neq 0\wedge\begin{cases}(4.1)\ B\neq 0,\\ \vee\\ (4.2)\ B=0;\end{cases}$$

$$(5)\ B=a=b=d=\alpha-\beta=\gamma=\delta=0 \wedge Ac\neq 0 \wedge \begin{cases} (5.1)\ P\overset{\text{def}}{=}\dfrac{1}{A^2}[\alpha(A-\alpha)+c\,\varepsilon]\neq 0,\ \dfrac{1}{4}, \\ \vee \\ (5.2)\ P=\dfrac{1}{4}, \\ \vee \\ (5.3)\ P=0; \end{cases}$$

$$(6)\qquad B-\omega A=a-\omega c=d-\omega a=\gamma-\omega\alpha=a-b=\alpha-\beta=\gamma-\delta=$$

$$=0\wedge Aa\,\omega\neq 0\wedge \begin{cases} (6.1)\ P\neq 0,\ \dfrac{1}{4} \\ \vee \\ (6.2)\ P=\dfrac{1}{4}, \\ \vee \\ (6.3)\ P=0 \end{cases}$$

toutes les solutions de l'équation (1) *sont données respectivement par:*

(2 bis) $f(x)=Cx-\dfrac{\varepsilon}{B}$;

(3.1 bis) $f(x)=\dfrac{1}{d}(BD_1-\gamma),\ f(x)=\dfrac{1}{d}(BD_2-\gamma)$, *avec* $D_{1,2}=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4M})$;

(3.2 bis) $f(x)=\dfrac{1}{2d}(B-2\gamma)$;

(3.3 bis) $f(x)=\dfrac{1}{d}(Be^{\lambda x}-\gamma),\ f(x)=-\dfrac{\gamma}{d}$;

(4.1 bis) $f(x)=C_1e^{-\frac{B}{A}x}+(Bx-A)\,C_2-\dfrac{\varepsilon}{B}$;

(4.2 bis) $f(x)=C_1x^2-\dfrac{\varepsilon}{A}x+C_2$;

(5.1 bis) $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{c}(AE_1-\alpha)\,x+C, \\ f(x)=\dfrac{1}{c}(AE_2-\alpha)\,x+C, \end{array}\right\}\ \textit{avec}\ E_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4P});$$

(5.2 bis) $f(x)=\dfrac{1}{2c}(A-2\alpha)\,x+C$;

(5.3 bis) $f(x)=-\dfrac{\alpha}{c}x+\dfrac{1}{c\lambda}e^{\lambda x}+C,\ f(x)=\dfrac{1}{c}(A-\alpha)\,x+C,\ f(x)=-\dfrac{\alpha}{c}x+C$;

(6.1 bis) $f(x)=Ce^{-\frac{a}{c}x}+\dfrac{1}{a}(AE_1-\alpha),\ f(x)=Ce^{-\frac{a}{c}x}+\dfrac{1}{a}(AE_2-\alpha)$;

(6.2 bis) $f(x)=Ce^{-\frac{a}{c}x}+\frac{1}{2a}(A-2\alpha);$

(6.3 bis) $f(x)=Ce^{-\frac{a}{c}x}+\frac{A}{a+c\lambda}e^{\lambda x}-\frac{\alpha}{a},$

$$f(x)=\left(C+\frac{A}{c}x\right)e^{-\frac{a}{c}x}-\frac{\alpha}{a},\quad f(x)=Ce^{-\frac{a}{c}x}-\frac{\alpha}{a},$$

les constantes C, C_1, C_2 et λ étant arbitraires $\Bigl(\lambda\neq 0$ *dans* (5.3 *bis*) *et* $\lambda\neq-\frac{a}{c}$ *dans* (6.3 *bis*)$\Bigr)$, *réelles dans le cas réel et complexes dans les deux cas complexes.*

Corollaire. *S'il s'agit du cas réel, l'équation* (1) *n'a pas de solution dans le cas* (3) *avec* $M>\frac{1}{4}$ *et dans les cas* (5) *et* (6) *avec* $P>\frac{1}{4}$.

Démonstration. Nous allons considérer d'abord le cas réel et le premier cas complexe.

Dans le cas (2), l'équation (1) se réduit à

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{\varepsilon}{B}.$$

Or, on doit se limiter aux solutions partout différentiables de cette équation-là, puisqu'on la considère comme cas particulier de (1). (On peut dire le même de chaque cas où (1) se réduit à une équation qui ne contient pas de dérivées). Donc, d'après les résultats connus concernant l'équation fonctionnelle de Cauchy, dans ce cas toutes les solutions de (1) sont données par (2 bis).

Dans le cas (3), (1) devient

$$Bf(x+y)=df(x)f(y)+\gamma\,[f(x)+f(y)]+\varepsilon,$$

ou

$$\frac{1}{B}[df(x+y)+\gamma]=\frac{1}{B}[df(x)+\gamma]\cdot\frac{1}{B}[df(y)+\gamma]+\frac{1}{B^2}(d\varepsilon-\gamma^2+B\gamma);$$

en y posant $M=\frac{1}{B^2}[\gamma(B-\gamma)+d\varepsilon]$ et

(7) $$g(x)=\frac{1}{B}[df(x)+\gamma],$$

on obtient

(8) $$g(x+y)=g(x)g(y)+M.$$

Soit $M\neq 0$. Pour $y=0$, (8) devient $g(x)[1-g(0)]=M$. Il en résulte d'abord que $1-g(0)\neq 0$ et ensuite que $g(x)=D=\text{const}$, où $D^2-D+M=0$. On en déduit, d'après (7), les assertions concernant les cas (3.1) et (3.2).

Soit $M=0$ (cas (3.3)). Alors (8) se réduit à

(9) $$g(x+y)=g(x)g(y).$$

On sait que dans le cas réel toutes les solutions mesurables de l'équation fonctionnelle (9) sont données par

$$g(x)=0 \text{ ou } g(x)=e^{\lambda x} \qquad (\lambda \text{ constante arbitraire}).$$

M. Ghermănescu a montré dans [2] que ce résultat peut s'étendre au premier cas complexe. On en déduit, d'après (7), que dans le cas (3.3) toutes les solutions de (1) sont données par (3.3 bis).

Dans les cas (4), (5) et (6) l'équation (1) peut être écrite respectivement sous les formes suivantes:

$$h(x+y)=h(x)+h(y)+\varepsilon, \tag{4'}$$

$$k(x+y)=k(x)\cdot k(y)+P \quad \left(P=\frac{1}{A^2}[\alpha(A-\alpha)+c\,\varepsilon]\right), \tag{5'}$$

$$l(x+y)=l(x)\cdot l(y)+P, \tag{6'}$$

avec

$$\begin{aligned} h(x)&=Af'(x)+Bf(x),\\ k(x)&=\frac{1}{A}[cf'(x)+\alpha],\\ l(x)&=\frac{1}{A}[cf'(x)+af(x)+\alpha]. \end{aligned} \tag{10}$$

D'après (10), les fonctions h, k et l sont mesurables sur **R**. Par conséquent, en appliquant d'abord nos remarques et considérations précédentes aux résolutions des équations (4'), (5') et (6'), et en intégrant ensuite, dans chacun des trois cas, les équations différentielles pour f que l'on obtient d'après (10), on aboutit, pour chacun des cas à distinguer, à celles des représentations (4.1 bis) — (6.3) des solutions de (1) qui lui correspondent.

Nous avons démontré ainsi toutes les assertions du théorème concernant le cas réel et le premier cas complexe. Dans le second cas complexe, toute fonction f satisfaisant à (1) est nécessairement analytique dans tout le plan complexe, c'est-à-dire entière, et satisfait à (1) pour tout x et y réel; par conséquent, d'après les assertions du théorème concernant le premier cas complexe, pour x réel $f(x)$ a, selon le cas, nécessairement une des représentations que lui prescrit notre théorème. Donc, $f(x)$ et la spécification correspondante de sa représentation précisée par le théorème coïncident pour tout x réel dans chacun des cas en question. Etant donné qu'elles sont toutes deux fonctions entières, elles coïncident pour tout x complexe aussi. Cela veut dire que $f(x)$ est nécessairement donné par une des expressions en question. D'autre part, chacune de ces expressions satisfait à (1), dans le cas correspondant, pour tous les x et y réels et pour toutes les valeurs complexes des constantes arbitraires. Il en résulte, les deux membres de (1) étant fonctions entières (par rapport à x et y séparément) pour $f(x)$ remplacé par une de ces expressions, que (1) est satisfait sous les mêmes conditions pour x et y complexe aussi. Donc, les assertions du théorème peuvent s'étendre au second cas complexe.

2. Nos résultats concernant les formes possibles des solutions de l'équation (1) dans tous les autres cas sont contenus dans le

Théorème 2. *Supposons qu'aucune des conditions* (2) – (6) *ne soit remplie et qu'il ne s'agisse pas du cas trivial où* $A = B = \cdots = \delta = 0$.

1° *Si*

(11) $$a = c = \alpha - A = 0 \wedge \operatorname{rang}\begin{pmatrix} b & d \\ \beta & \delta \end{pmatrix} < \operatorname{rang}\begin{pmatrix} b & d & \gamma - B \\ \beta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix},$$

ou

(12) $$b = c = \beta - A = 0 \wedge \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & d \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} < \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & d & \delta - B \\ \alpha & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix},$$

ou

(13) $$a - b = \alpha - \beta = 0 \wedge \gamma - \delta \neq 0,$$

ou

(14) $$A = B = a = b = c = \alpha = \beta = \gamma - \delta = 0 \wedge |d| + |\gamma| > 0,$$

l'équation (1) *ne possède que des solutions constantes:*

(15) $$f(x) = C.$$

2° *Dans le cas où les conditions* (11) — (14) *ne sont pas remplies, si*

(16) $$|a - b| + |\alpha - \beta| > 0,$$

ou

(17) $$a - b = \alpha - \beta = \gamma - \delta = 0 \wedge \operatorname{rang}\begin{pmatrix} c & a \\ a & d \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} < \operatorname{rang}\begin{pmatrix} c & a & \alpha - A \\ a & d & \gamma - B \\ \alpha & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix},$$

ou

(18) $$a - b = \alpha - \beta = \gamma - \delta = A = B = 0 \wedge |a| + |c| + |\alpha| > 0,$$

toute solution de l'équation (1) *a nécessairement une des formes*

(19) $$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2$$

ou

(20) $$f(x) = C_1 x + C_2,$$

C_1, C_2 *et* λ *étant des constantes, réelles dans le cas réel et complexes dans les deux cas complexes.*

3° *Si aucune des condition* (11)—(14) *et* (16)—(18) *n'est remplie, toute solution de* (1) *a nécessairement une des formes suivantes:*

(21) $$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3,$$

(22) $$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} + C_3$$

(23) $$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x + C_3,$$

(24) $$f(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

C_1, C_2, C_3, λ_1, λ_2 *et* λ *étant des constantes, réelles dans le cas réel et complexes dans les deux cas complexes; une exception peut se présenter dans le cas réel, ou les constantes* λ_1 *et* λ_2 *dans* (21) *peuvent être deux nombres complexes conjugués, sous la condition que les constantes* C_1 *et* C_2 *correspondantes soient en même temps réelles et égales ou bien purement imaginaires et opposées.*

En particulier, si l'on a, dans le cas 3°,

$$A = \alpha = \gamma = 0 \vee \alpha = \gamma = \varepsilon = 0,$$

les expressions (21)—(24) *se réduisent à*

$$(21') \qquad f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

$$(22') \qquad f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

Démonstration. Etant donné que toutes les expressions (15), (19), (20) et (21)—(24) définissent des fonctions entières, c'est d'après la première partie de la considération par laquelle s'achève la démonstration du théorème 1 que nous pouvons nous borner au cas réel et au premier cas complexe.

1° Posons $y = 0$ dans (1). L'équation obtenue peut être écrite sous la forme

$$(25) \qquad f'(x)[cf'(0) + af(0) + \alpha - A] + f(x)[bf'(0) + df(0) + \gamma - B] + \beta f'(0) + \delta f(0) + \varepsilon = 0.$$

En posant dans (1) $x = 0$, on obtient semblablement

$$(26) \qquad f'(y)[cf'(0) + bf(0) + \beta - A] + f(y)[af'(0) + df(0) + \delta - B] + \alpha f'(0) + \gamma f(0) + \varepsilon = 0.$$

Dans le cas (11), le multiplicateur de $f'(x)$ dans (25) s'annule et le multiplicateur de $f(x)$ et le terme constant ne peuvent pas s'annuler à la fois, d'où la conclusion que toute solution de (1) est nécessairement constante dans ce cas-là. On obtient la même conclusion, de la même manière, dans le cas (12), en utilisant (26).

Si l'on permute dans (1) les lettres x et y et l'on soustrait l'équation obtenue de l'équation (1), il vient

$$(27) \qquad 0 = (a-b)[f'(x)f(y) - f(x)f'(y)] + (\alpha - \beta)[f'(x) - f'(y)] + (\gamma - \delta)[f(x) - f(y)].$$

Sous la condition (13), il en résulte, avec un y fixe,

$$f(x) = f(y) = \text{const.}$$

Supposons la condition (14) remplie. L'équation (1) se réduit à

$$(28) \qquad [df(y) + \gamma] f(x) + \gamma f(y) + \varepsilon = 0.$$

Alors, si l'on a identiquement $df(y) + \gamma = 0$, on a $d \neq 0$ et par suite $f(y) = \text{const}$, et si $df(y) + \gamma \neq 0$ pour au moins un y, la même conclusion résulte de (28).

2° Supposons tout d'abord la condition (16) remplie et écrivons (27) sous la forme

$$(29) \qquad 0 = [(a-b)f(y) + \alpha - \beta] f'(x) + [\gamma - \delta - (a-b)f'(y)] f(x) - (\alpha - \beta) f'(y) - (\gamma - \delta) f(y).$$

Si l'on a, pour un y au moins,

$$(a-b)f(y) + \alpha - \beta \neq 0,$$

on déduit de (29) que toute solution $f(x)$ de (1) satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(30) \qquad f'(x) + pf(x) + q = 0 \qquad (p \text{ et } q \text{ constantes}),$$

et par conséquent $f(x)$ a une des formes (19) ou (20). Si

$$(a-b)f(y)+\alpha-\beta=0$$

pour tout y, alors on a nécessairement, d'après (16), $a-b\neq 0$, et par suite $f(y)=\text{const.}$

Sous la condition (17), les multiplicateurs de $f'(x)$ et de $f(x)$ et le terme constant dans (25) ne peuvent pas s'annuler à la fois; il en résulte que $f(x)$ dans ce cas doit aussi satisfaire à une équation de la forme (30) ou bien être constant.

Soit maintenant la condition (18) remplie. Alors (1) devient

$$(31)\quad [cf'(y)+af(y)+\alpha]f'(x)+[af'(y)+df(y)+\gamma]f(x)+\alpha f'(y)+\gamma f(y)+\varepsilon=0.$$

Si

$$(32)\qquad cf'(y)+af(y)+\alpha=af'(y)+df(y)+\gamma=0, \qquad \text{pour tout } y,$$

on a aussi, d'après (31),

$$\alpha f'(y)+\gamma f(y)+\varepsilon=0, \qquad \text{pour tout } y;$$

par suite, en raison de $|a|+|c|+|\alpha|>0$, dans ce cas $f(x)$ doit satisfaire à une équation de la forme (30). Si (32) n'est pas vrai, on conclut, d'après (31), que $f(x)$ doit satisfaire à une équation de la forme (30) ou bien être constant.

3° Si aucune des conditions (11)—(14) et (16)—(18) n'est remplie, on a nécessairement

$$a-b=\alpha-\beta=\gamma-\delta=0\wedge(|A|+|B|)\cdot(|a|+|c|+|\alpha|)>0,$$

et (1) devient

$$(33)\quad Af'(x+y)+Bf(x+y)=a[f'(x)f(y)+f(x)f'(y)]+cf'(x)f'(y)+df(x)f'(y)$$
$$+\alpha[f'(x)+f'(y)]+\gamma[f(x)+f(y)]+\varepsilon.$$

3°.1. Si $A=0\wedge|B|(|a|+|c|+|\alpha|)>0$, écrivons (33) sous la forme

$$(34)\qquad Bf(x+y)=[cf'(y)+af(y)+\alpha]f'(x)+[af'(y)+df(y)+\gamma]f(x)$$
$$+\alpha f'(y)+\gamma f(y)+\varepsilon.$$

Lorsque

$$(35)\qquad cf'(y)+af(y)+\alpha=0, \qquad \text{pour tout } y,$$

on a nécessairement $|c|+|a|>0$, de sorte que $f(x)$ est alors donné par (19) ou par (20), cas particuliers de (21) et de (22). Si l'on a

$$(36)\qquad cf'(y)+af(y)+\alpha\neq 0, \qquad \text{pour un } y \text{ au moins},$$

on conclut, d'après (34), que $f(x)$ a partout sa seconde dérivée. En différentiant (34) d'abord par rapport à x et puis par rapport à y, on obtient

$$Bf'(x+y)=[cf'(y)+af(y)+\alpha]f''(x)+[af'(y)+df(y)+\gamma]f'(x),$$

$$Bf'(x+y)=[cf''(y)+af'(y)]f'(x)+[af''(y)+df'(y)]f(x)$$
$$+\alpha f''(y)+\gamma f'(y).$$

Après soustraction, on a

$$(37)\qquad \begin{aligned}&[cf'(y)+af(y)+\alpha]f''(x)+[-cf''(y)+df(y)+\gamma]f'(x)\\ &-[af''(y)+df'(y)]f(x)-\alpha f''(y)-\gamma f'(y)=0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après (36), que $f(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(38)\qquad f''x+pf'(x)+qf(x)+r=0 \qquad (p,\ q,\ r \text{ constantes}).$$

Par conséquent, $f(x)$ est nécessairement donné par une des expressions (21)—(24).

3°.2. Soit

$$|A|(|a|+|c|+|\alpha|)>0.$$

Si l'on remplace dans (33) d'abord x par $x+y$ et y par z, et ensuite y par $y+z$, les premiers membres des deux équations ainsi obtenues coïncideront, de sorte que l'on aura, après soustraction,

$$(39)\qquad \begin{aligned}&a[f'(x+y)f(z)+f(x+y)f'(z)-f'(x)f(y+z)-f(x)f'(y+z)]\\ &+c[f'(x+y)f'(z)-f'(x)f'(y+z)]+d[f(x+y)f(z)-f(x)f(y+z)]\\ &+\alpha[f'(x+y)+f'(z)-f'(x)-f'(y+z)]+\gamma[f(x+y)+f(z)-f(x)-f(y+z)]=0.\end{aligned}$$

L'élimination de $f'(x+y)$ et de $f'(y+z)$ de (39), au moyen de (33) et de l'équation qu'on en obtient en remplaçant x par y et y par z, donne l'équation que l'on peut mettre sous la forme suivante

$$(40)\qquad \begin{aligned}&\{(Aa-Bc)f(x+y)+(cd-a^2)f(x)f(y)+(c\gamma-a\alpha)[f(x)+f(y)]+\\ &\qquad +c\varepsilon+\alpha(A-\alpha)\}f'(z)\\ &-\{(Aa-Bc)f(y+z)+(cd-a^2)f(y)f(z)+(c\gamma-a\alpha)[f(y)+f(z)]+\\ &\qquad +c\varepsilon+\alpha(A-\alpha)\}f'(x)\\ &+(Ad-Ba)[f(x+y)f(z)-f(x)f(y+z)]+(A\gamma-B\alpha)[f(x+y)-f(y+z)]\\ &+[f(z)-f(x)][(a\gamma-d\alpha)f(y)+(A-\alpha)\gamma+a\varepsilon]=0.\end{aligned}$$

3°.2.1. Supposons tout d'abord que la condition suivante

$$(41)\qquad Aa-Bc=cd-a^2=c\gamma-a\alpha=c\varepsilon+\alpha(A-\alpha)=0$$

ne soit pas remplie. Alors, si le multiplicateur de $f'(z)$ dans (40) s'annule pour toutes les valeurs de x et de y, on conclut, d'après nos résultats précédents concernant les cas (3) et (14), que $f(x)$ est partout deux fois différentiable. En cas contraire, la même conclusion résulte de (40).

3°.2.2. Considérons maintenant le cas où la condition (41) est remplie. Alors (40) se réduit à

$$(42)\qquad \begin{aligned}&(Ad-Ba)[f(x+y)f(z)-f(x)f(y+z)]+(A\gamma-B\alpha)[f(x+y)-f(y+z)]\\ &+[f(z)-f(x)][(a\gamma-d\alpha)f(y)+(A-\alpha)\gamma+a\varepsilon]=0.\end{aligned}$$

3°.2.2.1. Soit d'abord $d\neq 0$.

3°.2.2.1.1. Si $a \neq 0$, on a, d'après (41), $c \neq 0$ et puis

$$B-\frac{a}{c}A=d-\frac{a}{c}a=\gamma-\frac{a}{c}\alpha=0,$$

de manière que ce cas coïncide avec le cas (6), mentionné par l'énoncé du théorème 1.

3°.2.2.1.2. Soit $a=0$. En différentiant (42) par rapport à y, on obtient

$$Ad[f'(x+y)f(z)-f(x)f'(y+z)]+(A\gamma-B\alpha)[f'(x+y)-f'(y+z)]$$
$$+[f(z)-f(x)](a\gamma-d\alpha)f'(y)=0.$$

Pour $y=0$, la dernière équation devient

$$f'(x)[Adf(z)+A\gamma-B\alpha]-[Adf(x)+A\gamma-B\alpha]f'(z)$$
$$+[f(z)-f(x)](a\gamma-d\alpha)f'(0)=0,$$

d'où la conclusion ($Ad \neq 0$) que $f(x)$ est partout deux fois différentiable.

3°.2.2.2. Si $d=0$, on a, d'après (41), $a=0$.

3°.2.2.2.1. Le cas $c=\alpha=0$ serait en contradiction avec la condition $|A|\cdot(|a|+|c|+|\alpha|)>0$.

3°.2.2.2.2. Soit $c=0 \wedge \alpha \neq 0$. Alors, d'après (41), on a $A-\alpha=0$. Si $\gamma-B \neq 0$, on est dans le cas (11), et le cas où $\gamma-B=0$ coïncide avec le cas (4).

3°.2.2.2.3. Si $c \neq 0$, on a, d'après (41), $B=\gamma=0$, de manière que ce cas coïncide avec le cas (5).

Donc, si le cas 3°.2 ne se réduit pas à un des cas précédents, $f(x)$ a partout sa seconde dérivée. Par conséquent, on peut différentier (33) par rapport à y. En posant $y=0$ ensuite, on obtient

$$(43) \qquad Af''(x)+[B-af'(0)-cf''(0)]f'(x)-[af''(0)+df'(0)]f(x)-$$
$$-[\alpha f''(0)+\gamma f'(0)+\varepsilon]=0,$$

c'est-à-dire une équation de la forme (38). Donc, dans ce cas aussi $f(x)$ est donné par une des expressions (21)—(24).

La dernière assertion du théorème résulte des équations (37) et (43).

3. Après ces réultats, pour toute équation déterminée de la forme (1) on a, d'après le théorème 1, immédiatement sa solution générale s'il s'agit d'un des cas auxquels ce théorème se rapporte, et dans le cas contraire, il suffit de voir tout d'abord auquel des cas mentionnés par l'énoncé du théorème 2 elle appartient, et puis de chercher ses solutions sous une ou plusieurs formes correspondantes. En remplaçant $f(x)$ par chacune de ces formes et en égalant les coefficients des termes semblables des membres de l'équation obtenue ainsi, on détermine sans difficulté, partiellement ou complètement suivant le cas, les constantes contenues dans ces formes, ce qui donne une ou plusieurs expressions pour la solution générale correspondant au cas concret considéré. Ce procédé-là conduit dans certains cas à la conclusion que l'équation (1) n'a pas de solution. Le problème d'établir pour chaque cas possible si l'équation (1) possède ou ne possède pas de solution et de trouver sa solution générale toujours qu'elle existe est résolu ainsi en principe.

Les deux exemples suivants illustrent l'application du procédé que nous venons de décrire.

1° *Equation résolu par Kannappan—Đoković* [1]:

$$f'(x+y)=f'(x)f(y)+f(x)f'(y). \tag{44}$$

On voit qu'elle appartient au cas 3° du théorème 2 et que la remarque finale de ce théorème peut s'y appliquer. Il faut donc chercher toutes ses solutions sous les formes (21′) et (22′). Si l'on applique le procédé en question, supposant dans (21′) $C_1 C_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, puisque en cas contraire (21′) se réduirait à (22′), on obtient les systèmes d'équations suivants:

$$C_1 \lambda_1 = 2C_1^2 \lambda_1, \; C_2 \lambda_2 = 2C_2^2 \lambda_2, \; 0 = C_1 C_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \; (C_1 C_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0), \tag{21′}$$

$$0 = 2C_2^2 \lambda, \; C_2 \lambda = 2C_1 C_2 \lambda + C_2^2, \; C_2 + C_1 \lambda = 2C_1^2 \lambda + 2C_1 C_2. \tag{22′}$$

Les solutions de ces systèmes sont respectivement données par:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}, \; \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0 \text{ arbitraire;} \tag{21″}$$

$$C_1 = C \text{ arbitraire, } C_2 = \lambda = 0; \text{ ou } C_1 = C_2 = 0, \; \lambda \text{ arbitraire;} \tag{22″}$$
$$\text{ou } C_1 = \frac{1}{2}, \; C_2 = 0, \; \lambda \text{ arbitraire.}$$

Donc, toutes les solutions de (44) sont données par

$$f(x) = C, \; f(x) = \frac{1}{2} e^{\lambda x}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}),$$

où les constantes C et λ sont complexes et arbitraires dans les cas complexes; dans le cas réel, C et λ dans les deux premières expressions sont réels et arbitraires et λ dans la troisième expression est réel ou purement imaginaire, d'ailleurs arbitraire.

2° L'équation

$$f'(x+y) + 2f(x+y) = 2f'(x)f(y) + f(x)f'(y) + f'(x)f'(y) + \tag{45}$$
$$+ f'(x) + f'(y) + f(x) + f(y) + 1$$

appartient au cas (16) et par conséquent toute solution de (45) doit avoir une des formes (19) ou (20). En substituant (20) dans (45) et en égalant les coefficients de x et de y et les termes absolus des deux membres, on obtient les équations

$$C_1(C_1 - 1) = 0, \; C_1(2C_1 - 1) = 0, \; 3C_1 C_2 + C_1^2 + C_1 + 1 = 0,$$

dont les deux premières impliquent $C_1 = 0$, ce qui contredit la troisième. Si l'on substitue dans (45) l'expression (19), avec $\lambda \neq 0$, le terme absolu du premier membre est $2C_2$ et du second $2C_2 + 1$.

Donc, l'équation (45) n'a pas de solution.

4. On pourrait traiter de la même manière le cas général et aboutir, après un travail assez long mais tout-à-fait technique, à une table de toutes les solutions générales de tous les cas avec solutions à distinguer. Pour éviter d'être trop long, nous omettons même de citer ce résultat final.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pl. Kannappan and D. Ž. Đoković: *Solution of problem* 104 (proposed by P. M. Vasić), Matematički vesnik, 5 (20), 1968, p. 244, 248-249.

[2] M. Ghermănescu: *Caractérisation fonctionnelle des fonctions trigonométriques*, Bull. Inst. Polyt. Jassy 4 (1949), p. 362—368.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR LA CONVERGENCE DES RAPPORTS DE LA SOMME PARTIELLE AU TERME GÉNÉRAL ET DU RESTE AU TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE RÉELLE OU COMPLEXE

Extrait
des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE. T. 15 (29) 1973

BEOGRAD
1973

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 15 (29), pp. 5—20

SUR LA CONVERGENCE DES RAPPORTS DE LA SOMME PARTIELLE AU TERME GÉNÉRAL ET DU RESTE OU TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE RÉELLE OU COMPLEXE

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 2. Février 1973.)

Soit dans ce qui suit $a_n\,(n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres complexes ou réels différents de zéro pour n suffisamment grand. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n=0,\ 1, 2, \ldots).$$

et, dans le cas où la série

(1) $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

converge (avec une somme finie),

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k,\ R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Dans cette Note, nous allons nous occuper des conditions de validité pour chacune des relations asymptotiques

$$S_n \sim a_n\,(n \to +\infty);\ R_n \sim a_n\ (n \to +\infty),$$

et aussi, plus généralement, pour chacune des égalités suivantes

(I) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = w;$$ (II) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = w,$$

w étant un nombre complexe donné. Appelons *cas complexe* le cas où $a_n \in \mathbf{C}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ et $w \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes, et *cas réel* le cas où $a_n \in \mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ et $w \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ désignant l'ensemble des nombres réels. Dans le cas réel nous allons considérer aussi (I) et (II) avec les valeurs $w=+\infty$ et $w=-\infty$.

Par le symbole $\alpha_n \uparrow +\infty$ nous désignons ici le fait que la suite de nombres réels $\alpha_n\,(n=0, 1, 2, \ldots)$ croît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers $+\infty$, et par $\alpha_n \downarrow 0$ le fait qu'elle décroît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers 0.

1. Dans les considérations qui suivent nous nous appuyons, entre autre, sur les résultats connus suivants:

Théorème *A* (*théorème de Stolz*). *Soit* $\alpha_n \in \mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *et* $\beta_n \uparrow +\infty$. *Alors on a*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\beta_n-\beta_{n-1}} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\beta_n-\beta_{n-1}}.$$

En particulier, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\beta_n-\beta_{n-1}}=l$ (*l nombre réel,* $+\infty$ *ou* $-\infty$) *résulte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}=l$, *l'assertion inverse n'étant pas vraie.*

Théorème *B* (voir, par exemple, [1], p. 127–128). *Sous les conditions* $\alpha_n \in \mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n=0$ *et* $\beta_n \downarrow 0$, *toutes les assertions du théorème A sont valables.*

Le théorème suivant ([5], partie première, chapitre IV, problème №178) généralise une partie des assertions de notre théorème 2.

Théorème *C*. *Supposons que*: 1° $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; 2° $a_n \neq 0$ *pour n suffisamment grand*; 3° *la série* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$ *ait le rayon de convergence* $r>0$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}=\zeta \wedge |\zeta|<r$$

entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=f(\zeta).$$

Passant à nos résultats, nous allons démontrer tout d'abord l'analogue suivant du théorème *C*, lequel généralise aussi une partie des assertions du théorème 2.

Théorème *1*. *Sous les conditions 1°–3° du théorème C,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta \wedge |\zeta|<r$$

entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n}=f(\zeta).$$

Démonstration. Sous les conditions 1°–3°, soit $|\zeta|<\rho<r$. Il existe alors un nombre naturel n_0 tel que l'on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho \quad (n \geqslant n_0)$$

et par suite

$$\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| \leq \rho^k \quad (n \geqslant n_0;\ k \geqslant 0).$$

Par conséquent, pour un nombre naturel m arbitrairement choisi, on a

$$\Delta_n \equiv \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n} - f(\zeta) \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} b_k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \zeta^k \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k \right) \right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \left| \frac{a_{n+k}}{a_n} \right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, |\zeta|^k$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k \right) \right| + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, \rho^k \quad (n \geq n_0). \tag{2}$$

Vu que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = \zeta^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

on obtient de (2), en y faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \, \Delta_n \leq 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, \rho^k,$$

et puis, en faisant $m \to +\infty$,

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \, \Delta_n \leq 0,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \Delta_n = 0$, c.q.f.d.

2. Nos résultats concernant les conditions sous lesquelles se réalise (I) ou (II) sont contenus dans les théorèmes $2-4$. Notons qu'ils géneralisent et complètent plusieurs résultats d'autres auteurs, par exemple la première assertion du théorème 33 (page 48) dans [4].

Théorème 2. *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}\,(w) \neq \frac{1}{2}$:

1° *on a* (I) *si et seulement si*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1} \wedge S = 0 \quad \textit{dans le cas où la série (1) converge,} \tag{I'}$$

où la première égalité doit être interprétée comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ *si* $w = 1$;

2° *on a* (II) *si et seulement si*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w-1}{w} \wedge \textit{ la série (1) converge.} \tag{II'}$$

Remarque. Étant donné que

$$\left| \frac{w}{w-1} \right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(w) < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{w}{w-1} \right| > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(w) > \frac{1}{2},$$

la seconde partie de la condition (I') (*le second terme de cette conjonction*) *peut être remplacée par*

"$S = 0$ *si* $\mathrm{Re}\,(w) < \frac{1}{2}$",

et la seconde partie de (II') *par*

"$\mathrm{Re}\,(w) > \frac{1}{2}$".

Avant de passer à la démonstration du théorème, remarquons qu'on a immédiatement, d'après ce qui précède, le

Corollaire *1. Si* $\mathrm{Re}(w)<\frac{1}{2}$, *l'égalité* (II) *n'est pas possible.*

Nous formulons à part, sous titre de corollaires, deux cas particuliers du théorème 2 qui nous semblent d'intérêt particulier,

Corollaire *2. Dans le cas complexe*:

1° $S_n \sim a_n \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}=0;$

2° $R_n \sim a_n \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$

Corollaire *3. Dans le cas complexe*:

1° $|S_n|=o(|a_n|)\ (n\to+\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=0 \wedge S=0;$

2° $|R_n|=o(|a_n|)\ (n\to+\infty)$ *n'est pas possible.*

Démonstration du théorème 2.

1° On a

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{a_n+S_{n-1}}{a_n}=1+\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

par conséquent, (I) avec $w\neq 1$ entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n}-1}=\frac{w}{w-1},$$

et avec $w=1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n}-1}\right|=+\infty.$$

La première partie de la condition (I′) est donc nécessaire. La nécessité de sa seconde partie est évidente.

Supposons que l'on ait, avec $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{w}{w-1}. \tag{3}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{w-1}{w}\quad\text{et}\quad\left|\frac{w-1}{w}\right|<1.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème C au cas où $b_n=1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire où $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=f\left(\frac{w-1}{w}\right)=f\left(1-\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{w}\right)}=w.$$

Enfin, si l'on a (3), $\mathrm{Re}(w)<\dfrac{1}{2}$ et $S=0$, alors, d'après l'assertion 2° (qu'on va démontrer tout de suite),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=-\lim_{n\to+\infty}\frac{S-S_n}{a_n}=-\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+1}}{a_n}=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=1-\frac{1}{1-\dfrac{w}{w-1}}=w.$$

2° Il est évident que la seconde partie de la condition (II') est nécessaire pour (II). La nécessité de la première partie résulte de

$$\frac{R_n}{a_n}=1+\frac{R_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Supposons la condition (II') remplie. Alors l'application du théorème 1 au cas où $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=f\left(\frac{w-1}{w}\right)=w. -$$

C'est au cas "singulier" où $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{1}{2}$ que se rapporte le

Théorème 3. *Dans le cas complexe, pour tout* $w\in\mathbf{C}$ *satisfaisant à*

(4) $$\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}:$$

1° *la condition* (I') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (I);

2° *la condition* (II') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (II).

En particulier, s'il s'agit du cas réel avec $w=\dfrac{1}{2}$:

3° *la condition*

$$
(\mathrm{I}'') \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \left(= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} \right) \wedge \dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \text{ converge (vers } -1) \\ \qquad \wedge \, [\,|a_n| \uparrow +\infty \vee (|a_n| \downarrow 0 \wedge S=0)] \end{cases}
$$

est suffisante pour (I);

4° *la condition*

$$
(\mathrm{II}'') \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \left(= \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} \right) \wedge \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \text{ converge (vers } -1) \wedge |a_n| \downarrow 0
$$

est suffisante pour (II).

R e m a r q u e. Les mots „vers -1" dans (I″) et (II″) sont mis entre parenthèses puisque, d'après les autres parties de chacune des conditions (I″) et (II″), -1 est, dans les deux cas, la seule possible valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}}$; on établit aisément ce fait au moyen des théorèmes *A* et *B*.

D é m o n s t r a t i o n. La nécessité des conditions (I′) et (II′) pour (I) et (II), respectivement, résulte des parties correspondantes da la démonstration du théorème 1.

Étant donné que

$$
Re(w) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{w}{w-1} = e^{\theta i} \text{ avec } \theta \in (0, 2\pi),
$$

l'exemple de la suite

$$
(5) \qquad a_n = e^{n\theta i} \, (n=0, 1, 2, \ldots; 0<\theta<2\pi)
$$

montre que pour aucun w satisfaisant à (4) la condition (I′) n'est suffisante pour (I). En effet, dans le cas de la suite (5) on a

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i},
$$

et la suite

$$
\frac{S_n}{a_n} = \frac{1}{e^{n\theta i}} \frac{e^{(n+1)\theta i}-1}{e^{\theta i}-1} = \frac{1}{e^{\theta i}-1} (e^{\theta i} - e^{-n\theta i}) \quad (n=0, 1, 2, \ldots)
$$

ne converge pas. Afin de prouver que pour aucun w satisfaisant à (4) la condition (II′) n'est suffisante pour (II), remarquons que, pour tout $\theta \in (0, 2\pi)$, la suite $e^{n\theta i}(n=0, 1, 2, \ldots)$ a 1 comme point d'accumulation. Soit $\theta \in (0, 2\pi)$ donné et posons

$$a_k = \frac{1}{n+1} e^{k\theta i} \quad (p_n \leqslant k < p_{n+1};\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

les nombres $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$ étant choisis de manière que l'on ait

$$\left| \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} e^{k\theta i} \right| = \left| \frac{1}{e^{\theta i}-1} \right| \left| e^{(p_{n+1}-p_n)\theta i} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} (n=0, 1, 2, \ldots),$$

ce qui est possible, d'après la remarque précédente. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est convergente (critère de Dirichlet) et, évidemment,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i}\left(= \frac{w-1}{w}\right).$$

Cependant,

$$\left|\frac{R_{p_n}}{a_{p_n}}\right| = \frac{\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1} \sum_{\nu=p_k}^{p_{k+1}-1} e^{\nu\theta i}\right|}{(n+1)^{-1}} \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1}\cdot(k+1)^{-2}}{(n+1)^{-1}} = \frac{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{(n+1)^{-1}} \to 0 \, (n\to+\infty),$$

et

$$\frac{R_{p_n-1}}{a_{p_n-1}} = \frac{a_{p_n-1}+R_{p_n}}{a_{p_n-1}} = 1 + \frac{R_{p_n}}{a_{p_n}} \cdot \frac{a_{p_n}}{a_{p_n-1}} \to 1 \, (n\to+\infty),$$

de sorte que le rapport $\frac{R_n}{a_n}$ ne converge pas dans ce cas.

Passons à la démonstration de l'assertion relative au cas réel.

3° Les conditions (II″) peuvent être exprimées autrement de la manière suivante: on a

(6) $\qquad a_n = (-1)^n \alpha_n \, (n=0, 1, 2, \ldots)$, ou $a_n = (-1)^{n+1} \alpha_n \, (n=0, 1, 2, \ldots)$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$; $\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}}$ converge (vers 1); $\alpha_n \uparrow +\infty$, ou bien $\alpha_n \downarrow 0$ et $S=0$. Sans diminuer la généralité, on peut se borner à la première des possibilités (6). Si $\alpha_n \uparrow +\infty$, on a, d'après le théorème A,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{2n}}{a_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{2k} - \alpha_{2k-1})}{\alpha_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n-2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n-2}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{2n+1}}{a_{2n+1}}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{2n}}{a_{2n}}\cdot\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1+\frac{1}{2}(-1)=\frac{1}{2}.$$

Il résultera de 4° que la condition (I″) est aussi suffisante si $\alpha_n\downarrow 0$ et $S=0$.

4° Sous la condition (II″) et en choisissant la première des possibilités (6), on a, d'après le théorème B,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1})}{\alpha_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\alpha_{2n+1}-\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n-1}}{a_{2n-1}}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n}}{a_{2n}}\cdot\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.-$$

Le thèorème suivant traite, dans le cas réel, les égalités (I) et (II) avec $w=+\infty$ et $w=-\infty$.

Théorème 4. *Dans le cas réel*:

1° *chacune des conditions suivantes*

$(\mathrm{I}'_{+\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$(\mathrm{I}''_{+\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$(\mathrm{I}'''_{+\infty})$ $\begin{cases} a_n \text{ est de signe constant pour } n \text{ suffisamment grand} \\ \wedge\,(1) \text{ diverge} \wedge \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\end{cases}$

est suffisante pour

$(\mathrm{I}_{+\infty})$ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=+\infty;$$

2° *chacune des conditions*

$(\mathrm{I}'_{-\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$(\mathrm{I}''_{-\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$(\mathrm{I}'''_{-\infty})$ (1) *converge avec* $S=0\wedge\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$

est suffisante pour

$(\mathrm{I}_{-\infty})$ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=-\infty;$$

3° *l'inégalité*

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$$

est une condition nécessaire pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$, *de même que pour* $(\mathrm{I}_{-\infty})$;

4° *la condition*

$(\mathrm{II}'_{+\infty})$ $$(1)\ \textit{converge} \wedge \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

est suffisante pour

$(\mathrm{II}_{+\infty})$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n}=+\infty;$$

5° *l'égalité*

$(\mathrm{II}_{-\infty})$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n}=-\infty$$

n'est pas possible.

Avant la démonstration, citons une conclusions de 1°, 2°, et 4°.

Corollaire *4. L'égalité*

(7) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

entraîne $(\mathrm{I}_{+\infty})$, *ou* $(\mathrm{I}_{-\infty})$, *suivant qu'il s'agit des cas où* (1) *diverge ou converge avec* $a_n S>0$ *pour* n *suffisamment grand, d'une part, ou du cas où* (1) *converge avec* $a_n S\leqslant 0$ *pour* n *suffisamment grand, d'autre part. L'égalité* (7) *et la convergence de* (1) *entraînent* $(\mathrm{II}_{+\infty})$.

Démonstration du théorème *4.*

1° Il est évident que chacune des conditions $(\mathrm{I}'_{+\infty})$ et $(\mathrm{I}''_{+\infty})$ est suffisante pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$. La condition $(\mathrm{I}'''_{+\infty})$ entraîne, d'après le théorème *A*,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{S_n}\leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}=\varlimsup_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=$$

$$=1-\varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}=1-\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=1-1=0,$$

d'où, étant donné que, sous cette condition, $\dfrac{a_n}{S_n}>0$ pour n suffisamment grand,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n}=+\infty, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n}=+\infty.$$

2° La suffisance de chacune des conditions $(\mathrm{I}'_{-\infty})$ et $(\mathrm{I}''_{-\infty})$ pour $(\mathrm{I}_{-\infty})$ est évidente. La condition $(\mathrm{I}'''_{-\infty})$ entraîne, d'après le théorème *B*,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{R_{n+1}}\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}=\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}-1=0,$$

et par conséquent, puisque $\frac{a_n}{R_{n+1}} > 0$ pour n suffisamment grand,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = +\infty,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S-R_{n+1}}{a_n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = -\infty.$$

3° L'inégalité

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \tag{8}$$

entraîne la divergence de (1) et la constance du signe de a_n pour n suffisamment grand. Il en résulte $\frac{S_n}{a_n} > 0$ pour n suffisament grand, d'où l'impossiblité de $(\mathrm{I}_{-\infty})$. L'égalité $(\mathrm{I}_{+\infty})$ est aussi impossible dans le cas (8), puisqu'on a alors, d'après le théorème A,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{S_n} \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = \varliminf_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

$$= 1 - \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} < +\infty.$$

4° La condition $(\mathrm{II}'_{+\infty})$ entraîne la constance du signe de a_n pour n suffisamment grand, et l'on a, d'après le théorème B,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{R_n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 - \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

d'où, puisque $\frac{a_n}{R_n} > 0$ pour n suffisamment grand,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty.$$

5° L'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = -\infty \tag{$\mathrm{II}_{-\infty}$}$$

entraîne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{R_n}{a_n} - 1}{\frac{R_{n+1}}{a_{n+1}}} > 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand,} \tag{9}$$

mais (9) est évidemment incompatible avec $(\mathrm{II}_{-\infty})$.

3. *Autres corollaires et applications*

3.1. Mettant à profit les relations

$$\frac{S_{n-1}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}-1 \quad \text{et} \quad \frac{R_{n+1}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}-1,$$

on peut, pour les égalités

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-1}}{a_n}=w \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+1}}{a_n}=w,$$

formuler les énoncés correspondant aux théorèmes $2-4$.

3.2. En ce qui concerne la question plus générale de la convergence et des limites des rapports

$$\frac{S_{n+m}}{a_n},\ \frac{S_{n-m}}{a_n},\ \frac{R_{n+m}}{a_n} \ \text{et} \ \frac{R_{n-m}}{a_n},$$

avec un nombre naturel m fixe, c'est au moyen des égalités

$$\frac{S_{n+m}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{a_{n+\nu}}{a_n}, \quad \frac{S_{n-m}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{a_{n-\nu}}{a_n},$$

$$\frac{R_{n+m}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{a_{n+\nu}}{a_n}, \quad \frac{R_{n-m}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{a_{n-\nu}}{a_n}$$

qu'on déduit des théorèmes $2-4$ la proposition suivante:

Corollaire 5. *Soit m un nombre naturel fixe. Alors*:

1° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+m}}{a_n}=w\left(\frac{w}{w-1}\right)^m; \tag{10}$$

2° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-m}}{a_n}=w\left(\frac{w-1}{w}\right)^m;$$

3° (II) $\left(\textit{avec}\ \operatorname{Re}(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+m}}{a_n}=w\left(\frac{w-1}{w}\right)^m;$$

4° (II) *avec* $w\neq 1$ $\left(\textit{et}\ \operatorname{Re}(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}=w\left(\frac{w}{w-1}\right)^m. \tag{11}$$

5° *Dans le cas réel avec* a_n *de signe constant pour* n *suffisamment grand, les formules* (10) *et* (11) *sont valables même pour* $w=1$, *si l'on attribue alors à* $\frac{w}{w-1}$ *la valeur* $+\infty$. *Dans le cas réel avec* $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *on a aussi:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+m}}{a_n}=+\infty \quad si \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=+\infty, \; et \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}=+\infty \, si \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=+\infty$$

(voir le corollaire 4).

3.2.1. On a immédiatement la conséquence suivante:

Corollaire. *6.* 1° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ *entraîne,*

dans le cas complexe:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+m}}{a_n}\begin{cases}=\infty, & si\ Re(w)>\frac{1}{2},\\ =0, & si\ Re(w)<\frac{1}{2},\\ n'existe\ pas, & si\ Re(w)=\frac{1}{2};\end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+m}}{a_n}\begin{cases}=+\infty, & si\ w>1,\\ =0, & si\ w<\frac{1}{2},\\ n'existe\ pas, & si\ \frac{1}{2}\leqslant w<1.\end{cases}$$

2° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ *entraîne,*

dans le cas complexe:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-m}}{a_n}\begin{cases}=0, & si\ Re\ (w)>\frac{1}{2},\\ =\infty, & si\ Re(w)<\frac{1}{2},\\ n'existe\ pas, & si\ Re(w)=\frac{1}{2};\end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-m}}{a_n}\begin{cases}=0, \text{ si } w>\dfrac{1}{2},\\ =-\infty, \text{ si } w<0,\\ n'existe\ pas, \text{ si } 0<w\leqslant\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

3° (II) $\left(\text{avec } Re(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne, dans les deux cas (complexe et réel),*

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+m}}{a_n}\begin{cases}=0, \text{ si } Re(w)>\dfrac{1}{2},\\ n'existe\ pas, \text{ si } Re(w)=\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

4° (II) *avec* $w\neq 1$ $\left(\text{et } Re(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne,*

dans le cas complexe:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}\begin{cases}=\infty, \text{ si } Re(w)>\dfrac{1}{2},\\ n'existe\ pas, \text{ si } Re(w)=\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}\begin{cases}=+\infty, \text{ si } w>1,\\ n'existe\ pas, \text{ si } \dfrac{1}{2}\leqslant w<1.\end{cases}$$

R e m a r q u e. Il faut tenir compte du fait que le sens de la notion d'existence de limite varie quelque peu suivant qu'il s'agit du cas complexe ou du cas réel. Par exemple, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n=\infty$ si l'on considère la suite $(-2)^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ comme suite complexe (dans le cas complexe), et la même suite n'a pas de limite si elle est considérée comme suite réelle (dans le cas réel)

3.3. *Séries de puissances*

L'application du théorème 2 à la série de puissances

(12) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \text{ avec } a_n\neq 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

conduit au résultat suivant:

C o r o l l a i r e 7. *Soit* $f(z)$ *une série de puissances satisfaisant à* (12).

1° *Pour que la suite*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

converge vers un nombre complexe pour un $z \neq 0$ *au moins, il faut que l'on on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \zeta, \ \textit{avec}\ \zeta \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}. \tag{13}$$

Si la condition (13) *est remplie, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n} = \frac{\zeta z}{\zeta z - 1} \quad \textit{pour}\ |z| > \frac{1}{|\zeta|} = r \ \textit{et pour}\ 0 < |z| < r \ \textit{tel que}\ f(z) = 0,$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n} = 1 \quad \textit{pour}\ z \neq 0,$$

suivant que $\zeta \in \mathbf{C}$ *ou* $\zeta = \infty$, *respectivement.*

2° *Pour que la suite*

$$\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k}{a_n z_n} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

converge vers un nombre complexe pour un $z \neq 0$ *au moins, il faut que l'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \zeta \in \mathbf{C}. \tag{14}$$

Si la condition (14) *est remplie, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k}{a_n z_n} = \frac{1}{1 - \zeta z} \quad \textit{pour}\ 0 < |z| < \frac{1}{|\zeta|} = r.$$

3.3.1. On a, en particulier, la proposition suivante:

C o r r o l l a i r e 8. *Soit* $a_n \neq 0$ *pour* n *suffisamment grand.*

1° *Pour qu'on ait*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \sim a_n z^n \qquad (n \to +\infty) \tag{15}$$

pour un $z \neq 0$ *au moins il faut, et pour que* (15) *soit valable pour tout* $z \neq 0$ *il suffit, que l'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0.$$

2° *Pour qu'on ait*

(16) $$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \sim a_n z^n \quad (n \to +\infty)$$

pour un $z \neq 0$ *au moins il faut, et pour que* (16) *soit valable pour tout* $z \neq 0$ *il suffit, que l'on ait*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

3.3.2. D'après *3.3.1, si le nombre* $\theta_n (0 < \theta_n < 1)$ *figure dans la formule de Mac-Laurin appliquée à la fonction* e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

alors, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *fixe,* $\lim_{n \to +\infty} \theta_n = 0$.

On a les propositions analogues pour la formule de Mac-Laurin appliquée aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$.

3.3.3. On a aussi le résultat suivant concernant les séries de puissances lacunaires:

Corollaire 9. *Soit* $a_n \neq 0$ *pour* n *suffisamment grand et soit* $\varphi(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *une suite strictement croissante d'éléments de* $N_0 = \{0\} \cup N$ *telle que* $\varphi(n+1) - \varphi(n) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. *Alors*:

1° *si* $\underline{\lim}_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 0$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n z^{\varphi(n)} \text{ pour } |z| > 1,$$

2° *si* $\overline{\lim}_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < +\infty$, *on a*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n z^{\varphi(n)} \text{ pour } |z| < 1.$$

3.4. Le résultat suivant est un cas particulier de la partie du théorème 3 relative au cas réel:

Soit $0 < \omega < 1$ *et soient*

(17) $\alpha, \beta, \gamma_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ *des nombres réels tels que* $|\alpha| + |\beta| + \sum_{\nu=1}^{p} |\gamma_\nu| > 0$.

Si le premier des nombres (17) *différents de zéro est positif, on a*

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k e^{\alpha k^\omega} k^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu k)^{\gamma_\nu} \sim \frac{(-1)^n}{2} e^{\alpha n^\omega} n^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu n)^{\gamma_\nu} \equiv \frac{1}{2} a_n \quad (n \to +\infty)$$

2*

($\log_\nu x \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\log\log\cdots\log x}_{\nu \text{ fois}}$; *m un nombre naturel suffisamment grand*). *Si le premier des nombres* (17) *différents de zéro est négatif, alors*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \frac{1}{2} a_n \quad (n \to +\infty).$$

En effet, on vérifie sans difficulté que a_n donné par

$$a_n = (-1)^n e^{\alpha n} n^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu n)^{\gamma_\nu} \tag{18}$$

satisfait, selon le cas, à la condition (I''), ou à la condition (II'').

Notons que l'expression (18) pour a_n dans l'énoncé précédent pourrait être bien plus générale: par exemple, on peut remplacer n^β par $[R(n)]^\beta$, où $R(x)$ est une fonction rationnelle tendant vers $+\infty$ avec x.

3.5. Les résultats de ce travail peuvent être appliqués à beaucoup de problèmes relatifs aux limites des suites de nombres complexes ou réels. Par exemple, le problème suivant [3]:

»Déterminer la limite de la suite

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k} \quad (n = 1, 2, \ldots)«$$

- a été résolu dans [2] sous une forme plus générale:

»Déterminer le comportement asymptotique de la suite

$$\sum_{k=2}^{n} a^{k^\alpha} k^\beta (\log k)^\gamma \quad (n = 2, 3, \ldots;\ a > 1;\ \alpha \geqslant 1;\ \beta, \gamma \text{ nombres réels}).« \tag{19}$$

D'après nos résultats correspondants, on peut déterminer immédiatement le comportement asymptotique de la suite (19) où a est un nombre complexe satisfaisant à $|a| > 1$, et l'on peut généraliser cette considération encore plus, dans diverses directions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata* (I), Matematički vesnik 3 (18), 1966, sv. 2, p. 123—136,

[2] D. D. Adamović, *Solution du problème N° 190*. Matematički vesnik 8 (23), 1971, sv. 3, p. 96—97.

[3] K. M. Brown, *Problem E* 2115, The American Mathematical Monthly, October 1968.

[4] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge University Press, 1954.

[5] Г. Полия и Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Москва, 1956.

UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 544 — № 576 (1976), 149—154.

572. AN IDENTITY AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOME SEQUENCES*

Dušan D. Adamović

1. We shall first deduce the following result:

Proposition 1. *The equality*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}\left[(z+1)^{k_m}-1\right] \tag{1}$$

holds for each complex number z and all natural numbers m and n.

Proof. This equality is true for $m=1$, since for all complex z and all positive integers n we have

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\binom{n}{k} = \sum_{n=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^z t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^z \frac{1}{t}\left[(t+1)^n-1\right]\mathrm{d}t = \int_0^z \frac{(t+1)-1}{t} \sum_{k=1}^{n} (t+1)^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^z (t+1)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k-1}{k}. \tag{2}$$

If (1) is supposed to be true for a fixed value of m, then, using the identity

$$\int_0^z \frac{1}{t}\left[(t+1)^n-1\right]\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k-1}{k}, \tag{3}$$

which is contained in (2), we obtain, for z complex and n natural,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{m+1}}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}\binom{n}{k} \int_0^z t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^z \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}\binom{n}{k} t^k\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^z \frac{1}{t} \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}\left[(t+1)^{k_m}-1\right]\mathrm{d}t$$

* Presented September 5, 1976 by D. S. MITRINOVIĆ.

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \int_0^z \frac{(t+1)^{k_m}-1}{t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \sum_{k_{m+1}=1}^{k_m} \frac{(z+1)^{k_{m+1}}-1}{k_{m+1}}.$$

This completes the inductive proof of our proposition.

REMARKS. 1° For $z=-1$ (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^m} \binom{n}{k} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_1=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \qquad (n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}), \tag{4}$$

$\mathbf{N}$ denoting the set of all natural numbers; in particular, if $m=1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

One can consider (4) as a formula serving to „condense" the m times iterated sum on its right hand side. The equality (5) is known and there are several manners to prove it; see, for example, [4] (p. 77, ex. 13) and [3].

2° Putting in (1) $z=e^{xi}$ and $z=e^{-xi}$, and adding and substracting the obtained equalities, one gets *the identities*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{k_m} \cos\frac{k_m x}{2} - 1}{k_m},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\sin kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{k_m} \sin\frac{k_m x}{2}}{k_m},$$

valid for each complex x.

If we replace x by $x+\pi$ in the previous identities, we get *the identities*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \left\{ \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m} \cos k_m x - 1}{2k_m} \right.$$
$$\left. + \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_{m-1}} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_{m-1}} \sin(2k_m-1)x - 1}{2k_m-1} \right\}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \left\{ \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m} \sin k_m x}{2k_m} \right.$$
$$\left. + \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m-1} \cos(2k_m-1)\frac{x}{2}}{2k_m-1} \right\}.$$

3° The identity (3) can be written in the form

$$\int_{0}^{z} \frac{f_n(t)}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(z)}{k} \qquad (z \text{ complex, } n \text{ natural}), \tag{6}$$

where

$$f_n(z) = (z+1)^n - 1. \tag{7}$$

This means that the sequence of functions (7) is a particular solution of the infinite system (6) of integral equations.

2. Our second result (Proposition 2) gives the asymptotic behaviour of the left hand side of (1) when $n \to +\infty$. In order to prove it, we use the preceding proposition and the following statements A and B. Statement A is a combination of some parts of Theorem 1 in **[1]** and Theorem 3 in **[2]**. Statement B can be immediately deduced from Theorem (8.4) in **[5]** (page 32), by applying it to $f(x) = \frac{\log^\alpha x}{x}$ and adding a simple consideration. Both statements are formulated in more general form than it is necessary for the followwing proof, the first one in order to point out more clearly its connection with the mentioned theorems in **[1]** and **[2]**, and the second one because this more general form could be of some interest by itself.

A. Let

$$\left(u_n^{(p)}\right)_{n\in \mathbf{N}} \quad and \quad \left(v_n^{(p)}\right)_{n\in \mathbf{N}} \qquad (p \in \mathbf{N})$$

be sequences of complex numbers satisfying

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^{(p)}}{u_n^{(p)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(p)}}{v_n^{(p)}} = 1 \qquad (p \in \mathbf{N})$$

and let the sequences $\left(\sigma_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $(p\in\mathbf{N})$ *be defined as follows*:

$$\sigma_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *being a given sequence of complex numbers different from zero for n sufficiently large*;

$$\sigma_n^{(p+1)} \overset{\text{def}}{=} u_n^{(p+1)} \sum_{k=1}^{n} v_k^{(p+1)} \sigma_k^{(p)} \qquad (n\in\mathbf{N};\ p\in\mathbf{N}).$$

Then for $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1} \quad implies \quad \sigma_n^{(p)} \sim w^{p+1} a_n \prod_{\nu=1}^{p} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \qquad (n \to +\infty).$$

B. For $\alpha \neq -1$ *and real,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^\alpha k}{k} = \frac{\log^{\alpha+1} n}{\alpha+1} + \varphi(\alpha) + \Delta_n(\alpha) \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

where $\varphi(\alpha)$ *does not depend of n, the sequence* $\left(\Delta_n(\alpha)\right)_{n\in\mathrm{N}}$ *is decreasing for n large enough and*

$$\Delta_n(\alpha)=O\left(\frac{\log^\alpha n}{n}\right) \qquad (n\to+\infty).$$

The announced determination of asymptotic behaviour is given by

Proposition 2. *For each complex number z and all natural numbers m,*

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k}\sim\begin{cases}\dfrac{(z+1)^{m+n}}{(zn)^m} & (n\to+\infty), \quad \textit{if}\quad |z+1|>1,\\[2ex] -\dfrac{\log^m n}{m!} & (n\to+\infty), \quad \textit{if}\quad |z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0.\end{cases}$$

If $|z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0$, *we have, more precisely,* $O\left(\log^{m-2} n\right)$

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k}=-\frac{\log^m n}{m!}-[\log(-z)+C]\frac{\log^{m-1}n}{(m-1)!}+\cancel{\lambda(m,z)+O\left(\frac{\log^{m-1}n}{n}\right)}$$

($n\to+\infty$; *z complex number,* $m\in\mathrm{N}$), *where C denotes Euler's constant,* $\lambda(m,z)$ *do not depend of n and the determination of the complex logarithm is such that* $\log 1=0$.

We point out as an interesting fact that the considered complex sequence has for $|z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0$ the asymptotic behaviour of a real sequence, independently of values of z.

Proof. Let $|z+1|>1$. Then the complex number $w=\frac{z+1}{z}$ satisfies $z+1=$ $=\frac{w}{w-1}$, and so $\left|\frac{w}{w-1}\right|>1$, i.e. $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$. In this case also

$$\frac{\dfrac{(z+1)^{n+1}-1}{n+1}}{\dfrac{(z+1)^n-1}{n}}=(z+1)\frac{n}{n+1}[1+o(1)]\to z+1 \qquad (n\to+\infty).$$

Hence, using (1) and applying A with $u_n^{(p)}=1$, $v_n^{(p)}=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathrm{N}, p\in\mathrm{N})$ and $p=m-1$, one deduces the first asymptotic estimate in (8).

Let

$$(10)\qquad |z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0.$$

For this case we shall prove the estimate (9), which obviously implies the second asymptotic behaviour in (8). The condition (10) implies the convergence of the series $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(z+1)^k}{k}$ to the sum $-\log[1-(z+1)]=-\log(-z)$, with the determination chosen as above. Hence and in view of (1) and B, we have

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z+1)^k-1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(z+1)^k}{k}$$

$$=-\left[\log n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(z+1)^k}{k}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=-\log n-[\log(-z)+C]+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n\to+\infty).$$

Thus, (9) is true for $m=1$ (with $\lambda(1, z)=0$). Supposing the validity of (9) for a fixed value of m, we obtain, using (1) and B,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{m+1}}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{\sum_{k_1=1}^{k} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}\left[(z+1)^{k_m}-1\right]\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{z^l}{l^m}\binom{k}{l} \qquad \alpha_k = \log^{m-2} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{-\frac{\log^m k}{m!}-[\log(-z)+C] \frac{\log^{m-1} k}{(m-1)!}+\cancel{\lambda(m, z)+\frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k}}\right\} \\
&= -\frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log^m k}{k}-\frac{\log(-z)+C}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-1} k}{k}+\cancel{\lambda(m, z) \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{k}}\ O\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-2} k}{k}\Big) \\
&\quad+\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2}}\ \vartheta \\
&= -\frac{1}{m!}\left[\frac{\log^{m+1} n}{m+1}+\varphi(m)+O\left(\frac{\log^m n}{n}\right)\right] \\
&\quad-\frac{\log(-z)+C}{(m-1)!}\left[\frac{\log^m n}{m}+\varphi(m-1)+O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right)\right] \qquad O(\log^{m-1} n) \\
&\quad+\cancel{\lambda(m, z)\left[\log n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2}+O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right)} \\
&= -\frac{\log^{m+1} n}{(m+1)!}-[\log(-z)+C] \frac{\log^m n}{m!} \qquad O(\log^{m-1} n) \\
&\quad+\left[-\frac{\varphi(m)}{m!}-\frac{\log(-z)+C}{(m-1)!} \varphi(m-1)+C \lambda(m, z)+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2}\right] \\
&\quad+O\left(\frac{\log^m n}{n}\right) \qquad (n \rightarrow+\infty),
\end{aligned}
$$

where $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is a bounded sequence. This completes our inductive proof.

2.1. The first asymptotic estimate in (8) holds also if m is a negative integer. In other words and more precisely, we have the following complementary result.

Proposition 3. *For all complex z different from 0 and -1 and all natural numbers m,*

$$
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} k^m z^k \sim (z n)^m(z+1)^{n-m} \qquad (n \rightarrow+\infty).
$$

This statement is an immediate consequence of the following fact:

Proposition 3′. *For z complex and m and n natural*

$$
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} k^m z^k=n z(z+1)^{n-m} P_{m, n}(z),
$$

where $P_{m, n}(z)$ are polynomials in z of the form

$$
P_{m, n}(z)=n^{m-1} z^{m-1}+\cdots+1,
$$

the exponents of all powers of n contained in the expression denotedy by „...“ being less than $m-1$. *These polynomials satisfy the recursive formulae*

$$(10)\quad P_{1,n}(z)=1;\quad P_{m+1,n}(z)=[z(n-m+1)+1]P_{m,n}(z)+z(z+1)P'_{m,n}(z)$$

(m *and* n *natural*; z *complex*).

Proof. We have, for n natural and z complex,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kz^k=z\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\right]'=z[(z+1)^n]'=nz(z+1)^{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2z^k=z\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kz^k\right]'=z[nz(z+1)^{n-1}]'=nz(z+1)^{n-2}(nz+1),$$

which means that the first statement and the second formula (10) are true for $m=1$, and also that the first formula (10) holds. If we suppose the validity of the first statement for a fixed m and also the validity of the second formula (10) for $m-1$ instead of m, then, for n natural and z complex,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{m+1}z^k=z\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^mz^k\right]'=z[nz(z+1)^{n-m}P_{m,n}(z)]',$$

$$=nz[(n-m)(z+1)^{n-m-1}zP_{m,n}(z)+(z+1)^{n-m}P_{m,n}(z)+(z+1)^{n-m}zP'_{m,n}(z)]$$

$$=nz(z+1)^{n-(m+1)}\{[z(n-m+1)+1]P_{m,n}(z)+z(z+1)P'_{m,n}(z)\}.$$

This completes the inductive proof of our proposition, since

$$[z(n-m+1)+1](n^{m-1}z^{m-1}+\cdots+1)+z(z+1)(n^{m-1}z^{m-1}+\cdots+1)'$$

$$=z(n-m+1)n^{m-1}z^{m-1}+z^2(m-1)n^{m-1}z^{m-2}+\cdots+1=n^mz^m+\cdots+1,$$

where the last two appearances of „...“ denote expressions with powers of n inferior to the m-th, and its other appearances expressions with powers of n inferior to the $(m-1)$-st.

REFERENCES

1. D. D. Adamović: *Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **15** (29) (1973), 5—20.
2. D. D. Adamović: *Quelques compléments aux résultats du travail »Sur la convergence des rapports. . .».* Publ. Inst. Math. (Beograd **20** (34) (1976), 9—27.
3. D. D. Adamović: *Solution of Problem* 340. Mat. Vesnik **12** (27), 420.
4. D. Knuth: *The art of compute programming.* Reading Mass. 1973.
5. А. Зигмунд: *Тригонометрические ряды.* Москва 1965.

Dušan Adamović i Dragomir Lopandić

DR. MILOŠ RADOJČIĆ (1903 - 1975)

Душан Адамовић и
Драгомир Лопандић

ДР МИЛОШ РАДОЈЧИЋ (1903—1975)

Четрнаестог маја 1975. године преминуо је у Женеви др. Милош Радојчић, дописни члан Српске академије наука, дугогодишњи професор Филозофског и Природно-математичког факултета у Београду, истакнути наш математичар, интелектуалац ретко широке, многостране културе, интересовања и креативног деловања.

Милош Радојчић рођен је у Земуну 31. августа 1903. године. Основну школу завршио је у Земуну, где је почео и гимназију, коју је за време Првог светског рата наставио у Швајцарској и Француској, да би је завршио у Земуну 1921. године. Студије технике, започете у Грацу, наставио је у Београду, а у току 1922—1923. школске године прешао је на Математичку групу Филозофског факултета у Београду, на којој је дипломирао 1925. године. На истом факултету одбранио је 1928. године дисертацију под насловом „Аналитичке функције представљене конвергентним низовима алгебарских функција." По студијама и првим годинама свог каснијег математичког формирања, Радојчић, као и Јован Карамата, припада средњој генерацији ученика Михаила Петровића, али само донекле, и у мањој мери него Карамата, јер је скоро од самог почетка — и у науци и у математичкој настави — ишао својим путем, различитим и од Петровићевог и од Караматиног. По завршетку студија, 1926. године, почиње да ради као асистент на Катедри за теоријску математику, у прво време као волонтер. Године 1938. изабран је за доцента, 1950. за ванредног, а 1954. за редовног професора. Дописни члан Српске академије наука постао је 1959. године. Од 1959. до 1964. године радио је, по позиву и уговору, као професор на Универзитету у Картуму (Судан). Од 1964. до смрти, уз један прекид почетком седамдесетих година, када је извесно време провео у Коломбу на Цејлону, борави у Француској у месту Тонон-ле-Бен, где ради као сарадник француског „Centre national des recherches scientifiques".

Као математичар, професор Радојчић има значајних, суштинских постигнућа и оставио је трајне бразде како на пољу научног истраживања, тако и у области универзитетске математичке наставе, њеног унапређивања и обогаћивања новим садржајима и дисциплинама. Радојчићеви доприноси историји математике и популарни чланци о различитим математичким темама, ма да чине мањи и мање значајан део његовог математичког стваралаштва, такође се одликују озбиљношћу, одговорношћу односа према предмету и солидношћу у његовој обради.

Научна делатност професора Радојчића посвећена је већим делом теорији аналитичких комплексних функција, а мањим делом теорији релативности. Од 33 јединице списка његових научних радова, њих 25 односи се на теорију аналитичких функција, а преосталих 8 припада теорији релативности. Радојчићева научна активност у области теорије аналитичких функција, уједно и научна активност уопште, почела је једном нотом објављеном

1927. године у *Comptes rendus*, у којој су најављени и делимично изложени главни резултати касније дисертације, а наставља се самом дисертацијом, одбрањеном 1928. године, и низом радова који су јој, у предратном и послератном периоду, уследили — све до пре неколико година, када је, како изгледа, код њега преовладало интересовање за проблематику теорије релативности. Кратко и уопштено речено, предмет свих његових радова из теорије аналитичких функција су мултиформалне аналитичке функције и њихове Римановe површи. У њима се, међутим, јасно разликују и издвајају три тематска круга.

Први од њих сам Радојчић је окарактерисао као „развијање општих мултиформних аналитичких функција, у ма каквим областима њихове егзистенције, у конвергентне низове аналитичких функција". Реч је о проширивању и употпуњавању познатих ставова Вајерштраса и Митаг-Лефлера о приказивању целих односно мероморфних функција у комплексној равни (униформно) конвергентним производима односно редовима једноставних аналитичких елемената, полинома и рационалних функција, као и аналогних резултата Рунгеа који се односе на произвољне области равни уместо на читаву раван. Сви ови и њима слични резултати, уз изузетак једног Апеловог става специјалног карактера, односили су се, међутим, на случај униформне аналитичке функције и на области обичне комплексне равни. На самом почетку своје научне каријере, Радојчић је у наведеној дисертацији дао своје уопштење поменутих ставова за случај аналитичке функције на произвољној области одговарајуће Риманове површи. Овај свој резултат Радојчић је, у самој дисертацији и у низу каснијих радова објављених пре и после рата, допунио и усавршио у више погледа. Може се сматрати да су његовим завршним обликом, који, поред осталог, садржи и тврђење да се низом алгебарских функција може униформно апроксимирати било која аналитичка функција у било којој области њене Риманове површи, уопштени до крајњих могућних граница поменути ставови Вајерштраса и Рунгеа. Јасан је и несумњив фундаменталан, принципијелан значај резултата оваквог типа. Наиме, познато је да су ставови Вајерштраса и Митаг-Лефлера били полазна тачка простране и значајне теорије целих и мероморфних функција, па стога њихова адекватна уопштења имају све услове да буду у истом смислу база сличних проучавања општих мултиформних аналитичких функција на Римановим површинама. Важно је констатовати да су ти Радојчићеви резултати у једном дужем периоду били једина значајна постигнућа у области којој припадају. Тек пуних двадесет година после обављивања Радојчићеве тезе, немачка математичарка Хелена Флорак добила је резултате по значају и тежини упоредиве са Радојчићевим; ти њени резултати се, међутим, са Радојчићевим само складно допуњују и ниуколико се не могу сматрати заменом за њих. Треба напоменути да је у тези добијено и уопштење познатог Кошијевог интегралног обрасца за случај аналитичке функције на Римановој површи.

Други тематски круг односио се на задатак деобе Риманове површи на листове, један од основних задатака геометријске теорије функција у једном периоду њеног развитка. Радојчић је доказао више централних ставова у вези са овим комплексом проблема и дао један општи поступак поделе ма које Риманове површи на листове, за случајеве неограничених Риманових површи, када се једино о таквој подели у обичном смислу речи може говорити. Према компетентном мишљењу немачког математичара Е. Улриха, тим ставовима постигнуто је највише што се у оквиру примењене методе могло постићи. Ови (као и други, уосталом) Радојчићеви резултати, објављивани највећим делом у часописима наше Академије и Универзитета, нису одмах добијали потребан публицитет, па се тако могло догодити да је неколико месеци после Радојчића до врло сличних резултата, скоро истом методом, дошао јапански математичар Шимицу, чији су радови, публиковани у светски познатом часопису, одмах наишли на одговарајући одјек у међународној математичкој јавности. Ближим увидом у радове о којима је реч стиче се, међутим, утисак да професору Радојчићу припада и временски и суштински приоритет. И Радојчићу и Шимицуу ови ставови послужили су касније као основа за даљи рад на проучавању општих аутоморфних функција. Према једном од главних Радојчићевих резултата добијеном у оквиру тих истраживања, свака мероморфна функција у извесном смислу је аутоморфна.

Трећа група радова посвећена је геометријским, односно тополошким, особинама аналитичких функција у близини есенцијалних сингуларитета, нарочито с обзиром на такозвани проблем типа Риманове површи. Реч је о давању критеријума, тј. потребних и довољних, или само довољних, услова да Риманова површ буде елиптичног, параболичног или хиперболичног типа. Овим проблемом бавио се, у последњој деценији пред Други светски рат и једно време после њега, низ истакнутих математичара (Неванлина, Улрих, Алфорс, Кобајаши и други). Радојчић је о овој области, поред осталог, дао две варијанте довољних услова да Риманова површ буде параболичног односно хиперболичког типа; ови случајеви су много важнији и интересантнији од случаја припадања елиптичном типу.

За читав научни рад професора Радојчића, а посебно за његов рад у области теорије аналитичких функција, карактеристичне су изузетна темељност и озбиљност, усредсређеност на значајне и тешке проблеме, уз упорно, деценијама продужавано, настојање да се они суштински, у основама, обухватно и исцрпно третирају и решавају. Треба истаћи — као карактеристичну и присну црту његове интелектуалне и моралне научне физиономије — аутентичну унутрашњу мотивисаност и тог његовог делања у целини и сваког рада посебно, потпуно одсуство коњуктуризма и каријеризма, оног „прављења" радова ради постизања спољашњих и утилитарних ефеката једне или друге врсте. Такође и одсуство онога што би се могло назвати техничким и занатским у негативном смислу речи; наравно, само у негативном смислу, јер сви његови радови, почев од најранијих, показују солидно и ефикасно влададање математичким занатом и техником; оно, међутим, није никада избијало у први план, него је увек било адекватно подређено проблему и идеји. Нека од тих Радојчићевих настојања довела су до пуног успеха, до задовољавајућих решења, којима је постигнута максимална мера могућег унутар одређеног тематског и методолошког подручја, и до зрелих, заокругљених теоријских градњи и обухвата, а значајне доприносе проблематици и теорији постигао је и у осталим правцима свог интересовања и активности на овом научном пољу.

Сви ови Радојчићеви радови припадају геометријској теорији аналитичких функција. С тим у вези, он се објективно може сматрати самосталним зачетником извесних модерних методолошких концепција у теорији аналитичких функција. Може се, сем тога, рећи да је битна компонента и дубинска димензија како унутрашњег јединства и континуитета главне линије његовог математичког научног рада, тако и читаве фигуре професора Радојчића као математичара, оно што прожима целокупну његову математичку делатност — известан геометризам, суптилан и флуидан геометријски дух и стил мишљења. Тај дух представља у ствари оно животворно средиште чије се плодоносно и инспиративно зрачење осећа у свом доменима његовог математичког дела, укључујући његове непроцењиве заслуге за увођење, заснивање и уобличавање свих видова савремене наставе геометрије на Београдском универзитету. Покушавајући овом приликом да дамо летимичан и сумаран опис тог Радојчићевог геометризма, рећи ћемо да је по среди једна полетна и еластична покретљивост апстрактног мишљења, уз истовремену изванредну развијеност просторне интуиције и перцепције, перцептивног, такорећи визуелног сагледавања просторних односа и целина. Те способности су се код њега будиле, развијале и култивисале баш кроз бављење Римановим површима, кроз мисаоно кретање и деловање у том свету комплексних, замршених и флуидних просторних облика, релација и структура, са значајним унутрашњим правилностима и повезаностима, чијем је откривању и потпунијем упознавању у великој мери и сам допринео.

Усмераване ка фундаменталним питањима и филозофским хоризонтима, ове способности и склоности уздигле су се до једне фине, продубљене и далекосежне концепције — може се рећи, филозофије — простора и геометрије, која је, с једне стране, садржала, сасвим у духу модерне математике, потпуну отвореност ка апстракцији и слободу креирања и комбиновања апстрактних математичких појмова, а с друге стране је, у занимљивој и складној комбинацији, носила у себи чврсто уверење да геометрија треба и мора, бар једним својим делом, да буде и *наука о простору*, нашем, реалном, физичком простору. Тај простор је, међутим, у тој филозофској визији (наравно, у вези са извесним научно-филозофским идејама и тенденцијама епохе, али у оригиналној артикулацији и са посебном консеквентношћу) схваћен далеко шире и дубље, садржајније, него у обичним концептима: као реални медијум, оквир, што више и живи, активни праоснов, супстрат, не само у обичном смислу просторних аспеката и димензија космоса, него и времена, материје, кретања, збивања и догађаја у њиховој свеукупности — у смислу релативистичког четвородимензионалног континуума, али и уз превазилажење те концепције. Ову своју доктрину професор Радојчић је експлицитније излагао, ма да углавном узгред и више у популарној форми, у неколико пригодних чланака, а развијао је и примењивао у радовима посвећеним теорији релативности и њеној аксиоматици, на првом месту у монографији „Une construction axiomatique de la Théorie de l'espace-temps de la Relativité restreinte", коју је 1973. године издала Српска академија наука и уметности. Није лако рећи до које је мере успео да је у њима прецизира и систематизује. Одговор на то питање захтевао би студиозно проучавање поменутих радова, и то не само у њиховим ужим, математичко-физичким, него и у принципијелним, концепцијским, филозофским аспектима. Не може се, међутим, оспорити да је овим својим залажењем у основе специјалне теорије релативности Радојчић помогао да се расветле многе у њој прикривене претпоставке. Радојчићев активан рад у овој области, ма да по обиму мањи него рад на теорији аналитичких функција, показује такође дуг и истрајан континуитет: почео је доста рано, 1933. године, и настављен је са неколико чланака објављених пре и после рата, да би му се последњих година, као што је већ речено, професор Радојчић скоро сасвим посветио

У периоду између два светска рата, на катедри за теоријску математику ондашњег Филозофског факултета било је неколико истакнутих математичара који су своју делатност у науци и настави углавном усмеравали ка алгебри и математичкој анализи. Геометрија је у сваком погледу била запостављена. У настави је била заступљена једино аналитичка геометрија, коју је предавао професор Николај Салтиков, а у оквиру течаја диференцијалног и интегралног рачуна професор Тадија Пејовић излагао је елементе диференцијалне геометрије.

Године 1938, по избору за доцента на поменутој Катедри, Радојчић се прихватио обавезе да поред предавања из теорије аналитичких функција зачне и први течај синтетичке геометрије, под називом Елементарна геометрија. Када је 1945. године састављен нов наставни план, Радојчић је предложио увођење две нове геометријске дисциплине: нацртне и више геометрије. Тај веома амбициозан план није било лако реализовати са недовољним бројем настав- Течај нацртне геометрије почео се предавати студентима математике на Београдском универзитету у јесен 1945. године, као двосеместрални курс на првој години студија. Увођење нацртне геометрије није значило новину на овом универзитету, јер је настава из тог предмета већ имала дужу традицију на његовим техничким факултетима. Програм нацртне геометрије за студенте математике није се у почетку у већој мери разликовао од програма истоименог предмета за студенте техничких факултета. Међутим, излагање градива од самог почетка имало је својих специфичности. Приликом извођења геометријских конструкција и представљања просторних ликова у разним пројекцијама, професор Радојчић је нарочито инсистирао на теоријским образложењима која оправдавају употребљени поступак и на известан начин доказују тачност изведене конструкције. Из тих разлога, у течају нацртне геометрије за студенте математике професор Радојчић је овај предмет од самог почетка излагао пре свега као математичку, па тек онда као у техници примењену дисциплину.

Искуствима из првих година предавања нацртне геометрије по првобитном програму професор Радојчић није био задовољан. Он је стекао уверење да се представљање геометријских објеката у две или више пројекција, којим су почињала предавања из нацртне геометрије, код многих студената своди на шаблонско извођење геометријских конструкција, без јасних просторних представа. За разумевање градива то је било веома штетно. Да би отклонио узроке томе и подстакао студенте да у пројекцији сагледавају просторне односе, Радојчић се одлучио да предавања из нацртне геометрије почне управним пројектовањем на једну раван, уз посматрање одстојања, и котираном пројекцијом, па тек потом да приступи излагању управног пројектовања на две и више равни. У методском погледу, настојао је да своја предавања учини што јаснијим, приступачнијим и кориснијим. Опште је мишљење да је у томе потпуно успео.

Професор Радојчић располагао је изузетним смислом за извођење наставе нацртне геометрије. Подаци од којих је полазио да би извео конструкцију извесног објекта у некој пројекцији увек су били најбоље изабрани. Премда се често служио само једним лењиром, слике које је добијао на табли за време предавања увек су биле узорно нацртане. Врхунац је достизао када је неком од метода у перспективи представљао степениште или фасаду неке зграде и одређивао њену сопствену и бачену сенку при централном или паралелном осветљењу. У извођењу и најсложенијих геометријских конструкција Радојчић је испољавао одлике правог виртуоза. Прецизношћу, јасноћом и брзином у излагању градива пленио је пажњу свих слушалаца. Стога није чудо што је слушати његове предавања из нацртне геометрије представљало право задовољство.

Своју концепцију заснивања нацртне геометрије професор Радојчић је изложио у књизи „Нацртна геометрија", која је као редован уџбеник истоименог предмета за студенте математике први пут штампана 1955. године, и за протеклих двадесет година доживела шест издања.

Течај елементарне геометрије професора Радојчића био је не само први систематски курс синтетичке геометрије, већ и први аксиоматски курс који се предавао студентима математике на Београдском универзитету. Беспрекорно строг начин заснивања ове дисциплине на једном непротивречном, потпуном и независном систему основних појмова и аксиома развијао је код слушаоца смисао не само за логичко и егзактно расуђивање у области геометрије, већ и уопште за заснивање једне дедуктивне научне теорије. У овим својим предавањима професор Радојчић почео је да развија онакав дух строгости у дефинисању појмова и доказивању теореме какав до тада није био заступљен у математичкој настави на Београдском универзитету, а који је захтевао доказивање и најочигледнијих тврђења која се нису налазила на списку аксиома. Нема сумње, тај дух строгости постепено је продирао и у наставу других математичких дисциплина, свакако не само заслугом професора Радојчића, али не мало под непосредним или посредним утицајем овог његовог пионирског подухвата у области наставе математике. Посматрана са тог становишта, Радојчићева предавања из елементарне геометрије имала су далекосежнији значај но што се у први мах могло претпоставити.

Будући да је у овом течају, на известан начин, дат сопствени аксиоматски приступ у синтетичку еуклидску геометрију, прилика је да о том приступу кажемо нешто више. Да би се објасниле његове најважније особености и извело поређење са другим концепцијама, поменимо две основне алтернативе које су до тада постојале у аксиоматизацији еуклидске геометрије. У једној од њих, кретање се узима за један од основних појмова, из којих се изводи релација подударности ликова; у другој алтернативи, подударност ликова је један од основних појмова, из којих се изводи појам кретања. Прву алтернативу заступали су Хелмхолц, Мереј, Пеано, Пиери, Каган, Борел и Шур, а другу Паш, Веронезе, Хилберт и Веблен. Различите концепције у свакој од тих алтернатива водиле су различитим путевима ка реализацији метричке структуре еуклидског простора, при чему је свака од њих имала и предности и недостатака. Стога је проблем налажења непротивречне и потпуне аксиоматике еуклидске геометрије, по могућности с минималним бројем основних појмова и аксиома, остајао и даље отворен. У оквиру прве алтернативе развиле су се у новије време концепције код којих се, уместо кретања у најширем смислу, за основни појам узима појам симетрије. Такве интенције редуковања разних система основних појмова руководиле су Вилерса, Томсена, Бахмана и друге. У оквиру друге алтернативе, већ је Хилберт установио да подударност ликова у најширем смислу не треба сматрати основним појмом. У своме заснивању геометрије, Хилберт је пошао од основних појмова: тачка, права, раван, лежи, између и подударно. При томе се релација подударности узима за основну само уколико је реч о сегментима и угловима. Веблен је покушао да редукује Хилбертов систем основних појмова полазећи само од три појма: тачка, између и подударно. При томе се релација подударности и његовом систему односи искључиво на парове тачака.

У своме течају елементарне геометрије, Радојчић полази од истог система основних појмова као Веблен. Међутим, Радојчићев систем аксиома различит је од Вебленовог. Да би извео појмове праве, равни и простора, Радојчић је, као Веблен, најпре увео аксиоме поретка. Тих аксиома код Веблена има осам, а код Радојчића пет. Из њих је изведена геометрија на правој, у равни и у простору. Другу групу аксиома код Радојчића чине аксиоме везе; код Веблена оне посебне нису заступљене. На тај начин, аксиоме поретка и инциденције изложене су код Радојчића обрнутим редом него код Хилберта. Следе потом аксиоме подудардарности, непрекидности и паралелности. У складу са савременим тенденцијама, изграђена је најпре апсолутна геометрија у Бољаијевом смислу, па тек онда еуклидска геометрија.

Ову своју концепцију заснивања еуклидске геометрије Радојчић је објавио најпре у облику литографисаних скрипата под насловом „Елементарна геометрија", у два дела. Први део, објављен 1948. године, односио се на планиметрију, а други, објављен 1950, на стереометрију. Године 1961. штампана је у нешто измењеном облику књига „Елементарна геометрија", у којој су упоредо изложене планиметрија и стереометрија.

Течај више геометрије први пут је предаван студентима математике на Београдском универзитету 1947—1948. школске године. Био је то једногодишњи течај који се предавао у петом и шестом семестру студија. Састојао се из два дела: нееуклидске геометрије Лобачевског, која је предавана у зимском, и пројективне геометрије, предаване у летњем семестру. Тако је, 120 и више година после открића нееуклидске геометрије Лобачевског и формирања пројективне геометрије као посебно математичке дисциплине, и у нашем поднебљу на Београдском универзитету почела настава из тих модерних геометријских теорија. Искључиве заслуге за то припадају професору Милошу Радојчићу.

Предавања из више геометрије била су, уз незнатне одступања, прилагођене књизи „Виша геометрија" од Јефимова. Највећим делом градиво је излагано синтетичком методом. У геометрији Лобачевског само је указивано на могућност увођења тзв. Белтрамијевих координата и изграђивања аналитичке и диференцијалне хиперболичке геометрије, док је у проіектованој геометрији једно поглавље било посвећено увођењу пројектованих координата на правој, у равни и у простору. Аналитичком методом излагана је и геометрија пројективних трансформација. Професор Радојчић се у својим предавањима радо освртао на везу која постоји између геометрије Лобачевског и еуклидске геометрије, као и на примену коју геометрија Лобачевског налази у другим областима науке, посебно у физици, наиме, у Ајнштајновој теорији релативности. Када би говорио о Клајновој „ерлангенској" концепцији излагања геометрије са становишта теорије група, тј. о геометрији као теорији инваријаната одређене групе трансформација, помињао би Ајнштајнову специјалну теорију релативности као формалну теорију инваријаната Лоренцове групе трансформација, истичући при томе да се тродимензионални еуклидски простор и време могу разматрати као четвородимензионални римански простор коме је кривина већа тамо где је већа густина материје.

Поред ових геометријских предмета, професор Радојичић предавао је на матичном факултету алгебру и теорију аналитичких (комплексних) функција, а сем тога водио је од 1947. до 1952. године курс Опште математике за студенте Филозофске групе Филозофског факултета.

Ма да теорији аналитичких функција припада највећи део његовог научног рада, тако да се она може сматрати његовом главном и ужом струком, предавања на одговарајућем курсу, стицајем прилика, држао је само у току неколико школских година. На тим предавањима он је нешто мање него што је уобичајено инсистирао на техничким, оперативним елементима материје, а више, и пре свега, на принципијелним, појмовним моментима; наравно, уз давање значајног места геометријској методи, истицање геометријских аспеката ове дисциплине.

Радојчићев курс Опште математике за студенте филозофије садржао је, поред осталог материјала, излагања о основама, филозофији и историји математике. У периоду док је предаван (1947—1952.), а такође и пре и извесно време после њега, ови наставни садржаји код нас су значајније место и систематску обраду добили једино у овом универзитетском курсу. Један део тих предавања, онај посвећен историји античке математике, публикован је у облику литографисаних скрипата. Била је то прва, истина некомплетна, историја математике публикована на нашем језику. Начин на који се у њој излаже материја не представља вербално препричавање и хронолошко ређање чињеница о настанку математичких појмова и откривању математичких законитости, већ суптилну анализу најважнијих дела епохе о којој је реч. Радојчић је највећу пажњу обраћао на генезу појединих математичких појмова, идеја и ставова и на третирање ових од стране разних аутора кроз векове, дајући на крају њихово савремено тумачење. Највише простора у овим скриптама посветио је Еуклидовим „Елементима“, том најпотпунием и најсистематичнијем делу старогрчке математике. Само прву књигу „Елемената‘, која садржи настарији аксиоматски приступ заснивању геометрије, разматрао је на пуних 27 страница текста, расветљавајући са савременог становишта хеленистичко схватање аксиоматике геометрије опажајног простора. Ова скрипта у сваком случају представљају занимљив и вредан прилог нашој још увек веома оскудној оригиналној литератури из историје математике, па свакако заслужују да буду поново објављена у облику шмампане књиге (у одговарајућој редакцији и, евентуално, допуњена одговарајућим непубликованим Радојчићевим текстовима). Нема сумње да би та књига и обогатила и освежила поменуту домаћу литературу.

Треба напоменути и да је професор Радојчић озбиљно радио на утврђивању наше стручне математичке терминологије.

Излагање о Милошу Радојчићу, као интелектуалцу, духовном посленику и човеку, било би врло непотпуно без осврта на његову пространу и многоструку активност изван граница математике, теоријске физике и филозофије наука (у ужем смислу речи). Спектар ових његових делатности веома је широк: простире се од аматерског бављења музиком и скоро професионалног сликарством, преко поезије, других видова литературе, књижевне и уметничке критике и историје, филозофије, до есејистичког и публицистичког писања о разним културним и друштвеним темама. У нашим и страним часописима, као и у неколико посебних публикација, објавио је преко 80 чланака, студија и других радова из поменутих области, чему треба прикључити велики број необјављених рукописа, читаву једну обимну рукописну заоставштину. Иако бројне и разноврсне, све ове његове активности биле су садржајне, из аутентичне духовне потребе истекле и интензивним духовним ангажовањем ношене — и ниуколико се не могу сматрати дилетантским. Ово се у сваком случају може рећи, без обзира на евентуалну каснију прецизну и стручну процену коначне вредности њихових домета. Ограничавамо се на краће напомене о само неколико аспеката овог дела Радојчићевог стваралаштва.

Радојчић је годинама сликао и за собом је оставио неколико успелих и оригиналних сликарских радова на платну. Његово широко и присно познавање ове уметности нашло је израза у једној обимној и запаженој студији о нашем средњевековном сликарству. — Оригинална Радојчићева поезија у својим најуспелијим тренуцима дочарава неку врсту озареног доживљаја мистичних дубина човековог постојања. — И све остале његове литерарне и есејистичке творевине изражавају и заступају својеврстан спиритуализам, који пре свега значи залагање за есенцијалне, дубинске духовне вредности и реалности, интелектуално-сазнајне, естетске, етичке и емотивне. У време кад наш велики песник Владислав Петковић-Дис још увек најчешће није био ни довољно ни адекватно цењен, Радојчић је, у посебно објављеној студији о једној од најзначајнијих и најчудеснијих Дисових песама (*О Дисовој „Тамници“*, 1929.), писао о његовој поезији, указујући — у перспективи својих метафизичких преокупација, али са несумњивим унутрашњим афинитетом и уз веома луцидна запажања — на оно понорно, исконско и судбинско у њој. — Више Радојчићевих радова инспирисано је нашом народном и средњевековном књижевношћу (*Наход Симеун — драма човечанства*, *О златној јабуци и девет пауница*, *Бајка о сунчевој сестри*, *Слово похвале Светом Лазару* и други). Они у већини случајева представљају истовремено презентирање неких мање познатих творевина из ових литерарних ризница (односно извесних њихових скоро незнаних верзија), њихову естетску анализу, песничко-мисаону прераду и филозофску интерпретацију. При томе је, у прикупљању и одабирању грађе, њеном редиговању и, у случају наведеног средњевековног спева, давању своје верзије превода на савремени наш језик, унеколико обављен и одговарајући посао научника-истраживача у области књижевне и културне историје. — Филозофијом је, као што се из претходног излагања види, прожето и филозофску димензију има све што је Радојчић на овим подручјима писао, а такође, често у латентном облику, и добар део његовог рада у официјелној струци. Неколико његових радова посвећено је и експлицитно филозофским темама. Занимљива је подела досадашњег развитка светске филозофије на четири главне етапе, коју је изложио и подробно образложио у једном чланку, а такође и његово аргументовано указивање на принципијелну ограниченост Кантовог гносеолошког учења

оном које припада литератури и ...
чистоту, свежину и изражајност језика и стила. Научна, рационалистичка компонента његове духовне културе огледа се у систематичности и прегледности излагања, у јасним и елегантно сажетим формулацијама главних мисли, чак и кад је реч о најфлуиднијој материји песничке и уметничке интуиције, имагинације, сновиђења. Његово излагање, међутим, никада није научнички сувопарно или монотоно: нису у њему ретка места поетских узлета или импресивне сликовитости, а ритам казивања покаткад је убрзан, узбуђен. У поменутом фабулирању у стилу народне приповетке понекад чак, помало, подсећа на Настасијевићев искидан, загрцнут и бизаран језичко-стилски идиом: инверзијама, елипсама, архаизмима (фолклорним и медијевалним), још неким језичким особеностима. (Напоменимо узгред да су Милош Радојчић и Момчило Настасијевић годинама били блиски пријатељи; није тешко уочити суштинску духовну сродност између њих, а и известан узајамни утицај веома је вероватан).

Читава ова пространа сфера стваралаштва професора Радојчића, изван граница математике и суседних дисциплина, тек треба да добије одговарајућу компетентну, стручну анализу и процену, која ће, свакако, допунити, конкретизовати, прецизирати, а вероватно у нечем и кориговати, претходне кратке напомене; изгледа нам ипак да судови у њима садржани — у најбитнијим — њоме неће бити оповргнути. У сваком случају, ова сфера употпуњује посебном и значајном димензијом и иначе упечатљиву слику јединствено комплексне и оригиналне личности интелектуалца и духовног ствараоца — која би се о професору Милошу Радојчићу имала већ на основу укупности осталих његових постигнућа.

Научни и остали математички радови Милоша Радојчића

I *Научни радови*

1. *О апроксимацији мултиформних аналитичких функција алгебарским функцијама*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 185 (1927), стр. 1007—1009 (на француском).

2. *Један начин аналитичког приказивања мултиформних функција*, Глас српске академије наука, т. 130 (1928), стр. 13—30.

3. *Аналитичке функције представљене конвергентним низовима алгебарских функција*, докторска дисертација, Посебна издања Српске академије наука, т. 18, и ауторово издање, 1928, стр. 1—32.

4. *О деоби Римановых површи на листове*, Глас Српске академије наука, т. 134 (1929), стр. 63—83.

5. *О инверзним функцијама мероморфних функција*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 189 (1929), стр. 1240—1242 (на француском).

6. *О фундаменталним доменима мероморфних функција*, Comptes rendus, t. 190 (1930), стр. 356—357 (на француском).

7. *О једном начину деобе Риманових површина на листове*, Глас Српске академије наука, т. 146 (1931), стр. 37—55.

8. *О једној класи аналитичких функција*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.1 (1932), стр. 83—116 (на француском).

9. *Темељи аксиоматске изградње специјалне теорије релативности*, I, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 2 (1933), стр. 106—149 (на немачком).

10. *Темељи аксиоматске изградње специјалне теорије релативности*, II, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 3 (1934), стр. 65—152 (на немачком).

11. *О основама специјалне теорије релативности*, Саопштења на Другом конгресу математичара словенских земаља, Праг 1934, стр. 238—239 (на француском).

12. *О фундаменталним доменима аналитичких функција у близини есенцијалног сингуларитета*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 4 (1935), стр. 185—200 (на француском).

13. *О једној особини аналитичких функција у близини есенцијалних сингуларитета*, Глас Српске академије наука, т. 173 (1936), стр. 11—16.

14. *Основне области и изузетне вредности аналитичких функција у близини есенцијалних сингуларитета*, Глас Српске академије наука, т. 173 (1936), стр. 4—8.

15. *О понашању аналитичких функција у близини есенцијалних сингуларитета*, Bulletin de la Société mathématique de France, 5. 64 (1936), стр. 1—10 (на француском).

16. *О чврстим и са њима еквивалентним телима у теорији релативности*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, т. 5 (1936), стр. 103—116 (на немачком).

17. *О скупу трансцедентних снопова у близини некој есенцијалног сингуларитета аналитичке функције*, Глас Српске академије наука, т. 74 (1937), стр. 239—248.

18. *О једном ставу І. Алфорса*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 6 (1937), стр. 77—83 (на немачком).

19. *Примедба о проблему типа Риманових површи*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. 1 (1947) стр. 97—100 (на француском).

20. *О једном тополошком проблему теорије Риманових површи*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 2 (1948), стр. 11—25 (на француском).

21. *Неки критеријуми који се односе на тип Риманове површи са алгебарским тачкама грањања*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 3 (1950), стр. 25—52 (на француском).

22. *Примедба поводом чланка „Неки критеријуми који се односе на тип Риманових површи итд.“* Publications de l'Institut mathématique de l'Academie serbe des Sciences, т. 3 (1956) стр. 305—306 (на француском).

23. *Један став о есенцијалним сингуларитетима аналитичких функција*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 3 (1950), стр. 137—142 (на француском).

24. *О есенцијалним сингуларитетима неких аутоморфних функција у извесној области*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 4 (1952), стр. 129—132 (на француском).

25. *О проблему типа Риманових површи*, Зборник радова Математичког института Српске академије наука, т. 35, (1953), стр. 15—28.

26. *О низовима алгебарских функција и егзистенцији аналитичких функција са било каквом облашћу егзистенције*, Proceedings of the International Mathematical Congress, Amsterdam, 1954.

27. *О редовима алгебарских функција и аналогним бесконачним производима, који дефинишу мултиформне аналитичке функције у било којим доменима егзистенције*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 7, стр. 95—118 (на француском).

28. *Приказивање аналитичких функција на Римановим површима помоћу алгебарских или других познатих трансцендентних коначно мултиморфних функција*. Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, т. 8 (1955), стр. 93—122 (на немачком).

29. *Прилог аксиоматској изградњи теорије релативности*, саопштење на IV конгресу аустријских математичара у Бечу 1956, објављено у Nachrichten der Österreichischen mathematischen Gesellschaft, Беч 1957 (на немачком).

30. *О Вајерштрасовом развијању у производе аналитичких функција на Римановим површима*, Annales Academie scientiarum Fennicae, A. И. 150 27, Хелсинки 1958, стр. 3—11, (на немачком).

31. *О аксиоматском извођењу специјалне теорије релативности*, саопштење на Међународном математичком конгресу у Единбургу, 1958 (на енглеском).

32. *Једна аксиоматска конструкција теорије простор — времена специјалне теорије релативности*, Посебна издања (монографије) Српске академије наука, т. CDLXII, 1973 (на француском).

33. *Једно аксиоматско извођење кинематике специјалне теорије релативности*, саопштење на конгресу аустријских математичара, Беч 1973.

II *Универзитетски уџбеници*

1. *Курс опште математике за студенте филозофије — том* I (*Античка математика*), Београд 1950, 163 стране (литографисано).

2. *Нацртна геометрија* (*у сарадњи са Војном Радојчић*), прво издање 1955. године, досада издата шест пута, 449 страна.

3. *Елементарна геометрија — основе и елементи еуклидске геометрије*, Београд 1961, 434 стране.

III *Експозиторни и популарни чланци* (*непотпун списак*)

1. *О развићу појма функције*, Математички весник (студентски стручни часопис), број 7—8, 1940, стр. 1—9.

2. *О разликовању типа Риманових површи*, Извештаји са I конгреса математичара и физичара Југославије (Блед 1949), Београд 1950.

3. *О становиштима у геометрији*, Извештаји са I конгреса метаматичара и физичара Југославије (Блед 1949), Београд 1960.

4. *Алберт Ајнштајн и његово дело*, Годишњак нашег неба, т. 21 (1957), стр. 61—70.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 9—27

QUELQUES COMPLÉMENTS AUX RÉSULTATS DU TRAVAIL „SUR LA CONVERGENCE DES RAPPORTS DE LA SOMME PARTIELLE AU TERME GÉNÉRAL ET DU RESTE AU TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE RÉELLE OU COMPLEXE"

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 29. août 1975.)

0. Soit dans ce qui suit:

C l'ensemble des nombers complexes, **R** celui des nombres réels, **N** celui des nombres naturels, $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$;

$(a_n)_{n\in N_0}$ une suite de nombres complexes ou réels, différents de zéro pour n suffisamment grand,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n\in N_0);$$

dans le cas où la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

converge (avec une somme finie),

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad R_n=\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \qquad (n\in\mathbf{N}_0).$$

Par le symbole $\alpha_n\uparrow+\infty$ nous désignons le fait que la suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n\in N_0}$ croît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers $+\infty$, et par $\alpha_n\downarrow 0$ le fait qu'elle décroît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers 0.

Dans cette Note, nous allons donner plusieurs compléments à notre travail [1], dans lequel nous avons traité la question suivante: sous quelles conditions on a, pour un nombre complexe w donné,

$$(\mathrm{I_w})\ \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=w, \qquad \text{ou bien} \qquad (\mathrm{II_w})\ \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=w?$$

Nous y avons distingué le *cas complexe*, c'est-à-dire le cas général où $a_n\in\mathbf{C}$ $(n\in\mathbf{N}_0)$ et $w\in\mathbf{C}$, du *cas réel*, où $a_n\in\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N}_0)$ et $w\in\mathbf{R}$. Dans le cas réel nous avons considéré aussi $(\mathrm{I_w})$ et $(\mathrm{II_w})$ avec les valeurs $w=-\infty$ et $w=+\infty$.

D'autre part, dans le cas complexe la convergence d'une suite (z_n) vers ∞, désignée par $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\infty$, signifiait, comme d'habitude, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|=+\infty$. Cette dénomination et la désignation correspondante étaient évitées dans le cas réel, où il s'agissait, d'autre part, de la convergence vers $-\infty$ et vers $+\infty$. Dans le texte qui suit nous allons garder les mêmes significations de termes et de symboles, en y ajoutant le terme *cas complexe au sens large* pour désigner le cas où dans $(\mathrm{I_w})$ et $(\mathrm{II_w})$ w prend les valeurs de $\mathbf{C}_\infty$, $(a_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ restant toujours une suite de nombres complexes.

Entre autre, nous avons démontré dans [1] les théorèmes suivants:

Théorème A (*théorème* 2 *dans* [1]). *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}\,(w)\neq\dfrac{1}{2}$:

1° *on a* $(\mathrm{I_w})$ *si et seulement si*

$$(\mathrm{I'_w})\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{w}{w-1}\wedge S=0 \text{ pourvu que la série (1) converge;}$$

2° *on a* $(\mathrm{II_w})$ *si et seulement si*

$$(\mathrm{II'_w})\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{w-1}{w}\wedge \text{ la série (1) converge.}$$

Théorème B (*théorème* 3 *dans* [1]). *Dans le cas complexe, pour tout* $w\in C$ *satisfaisant à* $\mathrm{Re}\,(w)=\dfrac{1}{2}$:

1° *la condition* $(\mathrm{I'_w})$ *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* $(\mathrm{I_w})$;

2° *la condition* $(\mathrm{II'_w})$ *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* $(\mathrm{II_w})$.

En particulier, s'il s'agit du cas réel avec $w=\dfrac{1}{2}$:

3° *la condition*

$$(\mathrm{I'})\qquad \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1\left(=\dfrac{{}^1/_2}{{}^1/_2-1}\right)\wedge\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \text{ converge (vers } -1)\\ \wedge[\,|a_n|\uparrow+\infty\vee(|a_n|\downarrow 0\wedge S=0)]\end{cases}$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{1/2})$;

4° *la condition*

$$(\mathrm{II'})\qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1\left(=\frac{{}^1/_2-1}{{}^1/_2}\right)\wedge\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \text{ converge (vers } -1)\wedge|a_n|\downarrow 0$$

est suffisante pour $(\mathrm{II}_{1/2})$.

Théorème C (*théorème* 3 *dans* [1]). *Dans le cas réel:*

1° *chacune des conditions suivantes*

$(\mathrm{I}'_{+\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$(\mathrm{I}''_{+\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$$(\mathrm{I}'''_{+\infty}) \quad \begin{cases} a_n \text{ est de signe constant pour } n \text{ suffisament grand} \\ \wedge\,(1) \text{ diverge } \wedge \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1 \end{cases}$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$;

2° *chacune des conditions*

$(\mathrm{I}'_{-\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$(\mathrm{I}''_{-\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$$(\mathrm{I}'''_{-\infty}) \quad (1) \text{ converge avec } S=0 \wedge \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{-\infty})$;

3° *l'inégalité*

$$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$$

est une condition nécessaire pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$, *de même que pour* $(\mathrm{I}_{-\infty})$;

4° *la condition*

$$(\mathrm{II}'_{-\infty}) \qquad (1) \text{ converge } \wedge \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

est suffisante pour $(\mathrm{II}_{+\infty})$;

5° *l'égalité* $(\mathrm{II}_{-\infty})$ *n'est pas possible.*

Corollaire de C. *L'égalité*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \tag{2}$$

entraîne $(\mathrm{I}_{+\infty})$ *ou* $(\mathrm{I}_{-\infty})$, *suivant qu'il s'agit des cas où* (1) *diverge ou converge avec* $a_nS>0$ *pour* n *suffisamment grand, d'une part, ou du cas où* (1) *converge avec* $a_nS\leqslant 0$ *pour* n *suffisamment grand, d'autre part. L'égalité* (2) *et la convergence de* (1) *entraînent* $(\mathrm{II}_{+\infty})$.

1. On peut dire que le théorème A et la première partie du théorème B se rapportent à la liaison entre l'égalité (I_w) et la condition (I'_w), de même qu'entre l'égalité (II_w) et la condition (II'_w). Si l'on pose

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta,$$

cette limite dans (I'_w) est liée à w de (I_w) par la relation

$$\zeta=\frac{w}{w-1}\quad\left(\Leftrightarrow w=\frac{\zeta}{\zeta-1}\right), \tag{3}$$

et la même limite dans (II'_w) et w de (II_w) sont liés par

$$\zeta=\frac{w-1}{w}\quad\left(\Leftrightarrow w=\frac{1}{1-\zeta}\right). \tag{4}$$

D'après A, pour $\operatorname{Re}(w)\neq\frac{1}{2}$ on a $(\mathrm{I}_w)\Leftrightarrow(\mathrm{I}'_w)$ et $(\mathrm{II}_w)\Leftrightarrow(\mathrm{I}'_w)$. D'après la première partie de B, ces liaisons entre (I_w) et (I'_w), et entre (II_w) et (II'_w), sont moins étroites pour tout $w\in\mathbf{C}$ satisfaisant à $\operatorname{Re}(w)=\frac{1}{2}$: elle se réduisent pour ces valeurs à $(\mathrm{I}_w)\Rightarrow(\mathrm{I}'_w)$ et à $(\mathrm{II}_w)\Rightarrow(\mathrm{II}'_w)$. Or, la droite „singulière" $\operatorname{Re}(w)=\frac{1}{2}$ dans le plan des w correspond, selon (3), de même que selon (4) au cercle unité non complet

$$|\zeta|=1\wedge\zeta\neq1$$

dans le plan des ζ (voir les figures 1 et 2). D'après chacune des relations

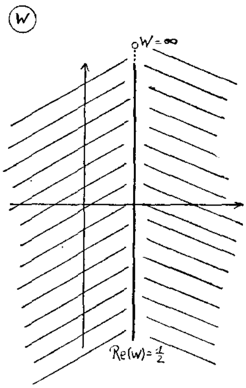


Fig. 1

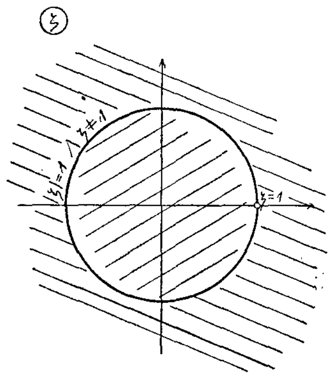


Fig. 2

(3) et (4), les valeurs $w=\infty$ et $\zeta=1$ sont mutuellement correspondantes. C'est à ce cas particulier, qui n'a pas été traité dans [1], que se rapporte l'énoncé suivant.

Théorème 1. *Dans le cas complexe au sens large:*

1° *la condition*

$$(\mathrm{I}'_\infty)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\wedge S=0 \text{ *pourvu que* (1) *converge*}$$

n'est ni nécessaire ni suffisante pour

$$(\mathrm{I}_\infty)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=\infty;$$

2° *la condition*

$$(\mathrm{II}'_\infty) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \wedge (1) \text{ converge}$$

n'est ni nécessaire ni suffisante pour

$$(\mathrm{II}_\infty) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = \infty;$$

3° *sous l'hypothèse*

$$(5) \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = 0\,(1) \quad (n \to +\infty),$$

la condition (I'_∞) *est suffisante pour* (I_∞), *plus précisément, pour qu'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = +\infty;$$

4° *sous l'hypothèse*

$$(6) \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = 0\,(1) \quad (n \to +\infty),$$

la condition (I'_∞) *est suffisante pour* (I_∞), *plus précisément, pour qu'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = +\infty;$$

Remarque. Il résulte immédiatement des assertions 3° et 4° du théorème précédent que dans le cas réel (I'_∞) entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = +\infty$$

et (II'_∞) entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty.$$

Cependant, cette conclusion est contenue dans le corollaire cité du théorème C (en réalité, ce corollaire est plus précis que cette conclusion).

Dans la démonstration du théorème 1 on va s'appuyer sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1. *Pour deux suites de nombres complexes*

$$(z_n)_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \text{et} \quad (c_n)_{n\in\mathbf{N}_0},$$

la conjonction

$$(7) \qquad \begin{cases} |c_n| = 1 \ (n\in\mathbf{N}_0) \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1 \wedge z_0 = 1 \\ \wedge z_{n+1} = 1 + c_n z_n \ (n\in\mathbf{N}_0) \end{cases}$$

n'entraîne pas $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$.

Démonstration. Soit:

(8) $$\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi}{n} i} \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$c_0 = \varepsilon_2, \ c_1 = c_2 = c_3 = \varepsilon_3, \ c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = \varepsilon_4,$$

$$c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = c_{12} = \varepsilon_5, \ c_{13} = \cdots = c_{18} = \varepsilon_6, \ \ldots ;$$

$$z_0 = 1, \ z_{n+1} = 1 + c_n z_n \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Dans ce cas-là on a évidemment $|c_n| = 1$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1$, et aussi:

$$z_0 = 1, \ z_1 = 1 + \varepsilon_2 = 0, \ z_2 = 1 + \varepsilon_3 \cdot 0 = 1, \ z_3 = 1 + \varepsilon_3,$$

$$z_4 = 1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3{}^2 = 0, \ z_5 = 1 + \varepsilon_4 \cdot 0 = 1, \ z_6 = 1 + \varepsilon_4,$$

$$z_7 = 1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_4{}^2, \ z_8 = 1 + \varepsilon_4 + \varepsilon^2{}_4 + \varepsilon_4{}^3 = 0, \ z_9 = 1 + \varepsilon_5 \cdot 0 = 1, \ \ldots .$$

Donc, ces suites $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ et $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ satisfont à (7) et la première d'elles ne tend pas vers ∞, prenant une infinité de fois la valeur 0 (et une infinité de fois la valeur 1).

Lemme 2. *La conjonction des conditions*

(9) $$z_{n+1} = d_n + c_n z_n \quad (n \in \mathbf{N}_0),$$

(10) $$\lim_{n \to +\infty} c_n = 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(d_n) = \gamma \neq 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}(z_n) = 0\,(1) \quad (n \to +\infty)$$

entraîne

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = -\infty \vee \lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = +\infty .$$

En particulier, pour le ssuites de nombres réels $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$, $(d_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ *et* $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ *la conjonctions des conditions* (9), (10) *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \gamma \neq 0$ *entraîne*

(11) $$\lim_{n \to +\infty} z_n = -\infty \vee \lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty .$$

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas particulier, où il s'agit de trois suites de nombres réels. Soit $\gamma > 0$. L'hypothèse ($\neg$ symbole de négation)

$$\neg \left(\lim_{n \to +\infty} z_n = -\infty \right)$$

entraîne l'existence d'un point d'accumulation $z > -\infty$ de la suite (z_n). D'après (9), les valeurs

$$z + k\gamma \quad (k \in \mathbf{N})$$

sont aussi points d'accumulation, d'où la conclusion que la suite (z_n) n'est pas bornée de droite. Donc, avec un $\rho \in (0, 1)$ arbitrairement choisi, on a, pour un $n_0 \in \mathbf{N}$,

$$d_n \geqslant \frac{1}{2} \gamma \overset{\text{def}}{=} \gamma_0 \ (n \geqslant n_0), \quad c_n \geqslant \rho \ (n \geqslant n_0), \quad z_{n_0} > 1,$$

et par conséquent

$$z_{n_0+1} > \gamma_0 + \rho$$

$$z_{n_0+2} > \gamma_0 + \gamma_0 \rho + \rho^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{n_0+k} > \gamma_0 \frac{1-\rho^k}{1-\rho} + \rho^k \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Il en résulte

$$\varliminf_{n\to+\infty} z_n \geqslant \frac{\gamma_0}{1-\rho};$$

faisant $\rho \to 1-0$, on obtient

$$\varliminf_{n\to+\infty} z_n \geqslant +\infty, \quad \text{c.à.d.} \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty.$$

Soit $\gamma < 0$. Écrivant (9) sous la forme

$$-z_{n+1} = (-d_n) + c_n(-z_n) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

et appliquant le résultat précédent, on conclut qu'on a aussi nécessairement (11) dans ce cas.

Dans le cas géneral, si l'on pose

$$\operatorname{Re}(z_n) = x_n, \ \operatorname{Im}(z_n) = y_n, \ \operatorname{Re}(c_n) = \alpha_n, \ \operatorname{Im}(c_n) = \beta_n, \ \operatorname{Re}(d_n) = \gamma_n, \ \operatorname{Im}(d_n) = \delta_n$$

et l'on égale les parties réelles des membres de (9), on obtient

$$x_{n+1} = (\gamma_n - \beta_n y_n) + \alpha_n x_n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \tag{12}$$

Etant donné que les hypothèses du lemme entraînent

$$\lim_{n\to+\infty} (\gamma_n - \beta_n y_n) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n - \lim_{n\to+\infty} (\beta_n y_n) = \gamma - 0 = \gamma \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1,$$

il résulte de (12), d'après ce qui précède, qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

c.q.f.d.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. Il résulte de l'assertion 1° (ou 2°) du théorème C que (I'_∞) n'est pas une condition nécessaire pour (I_∞), et l'assertion 4° du même théorème implique que la condition (II'_∞) n'est pas nécessaire pour (II_∞).

Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ une suite de nombres complexes qui, avec la suite correspondante de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$, remplit la condition (7) sans qu'on ait $\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty$ (lemme 1; on peut par exemple définir la suite (c_n) comme dans la démonstration de ce lemme). Si l'on pose

$$a_0 = 1, \quad a_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} c_k\right)^{-1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

on a:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = c_n^{-1} \quad (n \in \mathbf{N}_0), \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1;$$

$|a_n| = 1$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, ce qui entraîne la divergence de la série (1);

$$\frac{S_0}{a_0} = 1, \quad \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{S_n}{a_n} = 1 + c_n \frac{S_n}{a_n} \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Donc, dans ce cas la condition (I'_∞) est remplie et la suite $z_n = \frac{S_n}{a_n}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ n'a pas la propriété $\lim\limits_{n \to -\infty} z_n = \infty$. Par suite, la condition (I'_∞) n'est pas suffisante pour (I_∞).

Avec $\varepsilon_n \, (n \in \mathbf{N})$ donné par (8), la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie comme suit:

$$a_0 = \frac{1}{2^3}, \quad a_1 = \frac{\varepsilon_2}{2^3}, \quad a_2 = \frac{1}{3^3}, \quad a_3 = \frac{\varepsilon_3}{3^3}, \quad a_4 = \frac{\varepsilon_3^{\,2}}{3^3},$$

$$a_5 = \frac{1}{4^3}, \quad a_6 = \frac{\varepsilon_4}{4^3}, \quad a_7 = \frac{\varepsilon_4^{\,2}}{4^3}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_4^{\,3}}{4^3}, \quad a_9 = \frac{1}{5^3}, \ \ldots$$

satisfait à (II'_∞), ce qu'on établit sans difficulté. On a pourtant, pour la même suite,

$$\frac{R_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{a_{\frac{n(n+1)}{2}-1}} = 0 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

de manière que (II_∞) n'est pas valable.

Les assertions 3° et 4° du théorème résultent du lemme 2, étant donné qu'on a, au moins pour n suffisamment grand (ce qui, évidemment, n'est pas une restriction essentielle de la possibilité d'appliquer le lemme 2):

$$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{S_n}{a_n} \quad \text{et} \quad \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(-1 + \frac{R_n}{a_n}\right) \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

1.1. C'est de la manière suivante que l'on peut résumer toutes les assertions des théorèmes A, B et 1 relatives au cas complexe et au cas complexe au sens large:

Dans le cas complexe, si $\mathrm{Re}\,(w) \neq \frac{1}{2}$: (I'_w) *est une condition nécessaire et suffisante pour* (I_w) *et* (II'_w) *est une condition nécessaire et suffisante pour* (II_w).

Dans le cas complexe, pour tout w *avec la propriété* $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$*: la condition* (I'_w) *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (I_w)*, et la condition* (II'_w) *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (II_w).

Dans le cas complexe au sens large: la condition (I'_∞) *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (I_∞)*, et la condition* (II'_∞) *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (II_∞).

Si l'on veut donner à ces assertions-là la forme d'un énoncé établissant le rapport logique entre les conditions

$$(\mathrm{U}_\zeta') \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta \wedge S=0 \quad \text{pourvu que (1) converge}$$

et

$$(\mathrm{U}_\zeta) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{\zeta}{\zeta-1},$$

de même qu'entre les conditions

$$(\mathrm{V}_\zeta') \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta \wedge (1) \quad \text{converge}$$

et

$$(\mathrm{V}_\zeta) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=\frac{1}{1-\zeta},$$

on peut les formuler de la manière suivante:

Théorème 1'. 1° *Pour tout* $\zeta\in\mathbf{C}_\infty$ *satisfaisant à* $|\zeta|\neq 1$: (U_ζ') *est une condition nécessaire et suffisante pour* (U_ζ)*, et* (V_ζ') *est une condition nécessaire et suffisante pour* (V_ζ).

2° *Pour tout* $\zeta\in\mathbf{C}$ *satisfaisant à* $|\zeta|=1\wedge\zeta\neq 1$: *la condition* (U_ζ') *est nécessaire est n'est pas suffisante pour* (U_ζ)*, et la condition* (V_ζ') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (V_ζ).

3° *La condition* (U_1') *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (U_1)*, et la condition* (V_1') *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (V_1).

Les figures 1 et 2 représentent visuellement les énoncés dans **1.1,** c'est-à-dire la variation de la connexion logique entre les conditions correspondantes dans le plan des w et dans celui des ζ: sur chacune de ces figures, les hachures marquent les régions où les conditions sont nécessaires et suffisantes, la grosse ligne l'ensemble des points où les conditions ne sont que nécessaires et le petit cercle le point où il n'y a ni nécessité ni suffisance de conditions.

1.2. Ajoutons aux considérations précédentes une remarque supplémentaire concernant le théorème C (c'est-à-dire le théorème 4 de [1]). A savoir, on peut se demander, au sujet de ce théorème-là, si, en supposant la constance de signe de a_n, de même que toutes les autres conditions correspondantes remplies, la condition

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \quad \text{ou} \quad \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

est nécessaire pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$, $(\mathrm{I}_{-\infty})$ ou $(\mathrm{II}_{+\infty})$, selon le cas. La réponse est négative dans chacun des trois cas. Plus précisément, on a l'énoncé suivant:

Soit, dans le cas réel, a_n de signe constant pour n suffisament grand. Alors:

α) *si* (1) *diverge, la condition*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

n'est pas nécessaire pour

$$(\mathrm{I}_{+\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = +\infty;$$

β) *si* (1) *converge avec* $S=0$, *la condition*

$$(*) \qquad \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

n'est pas nécessaire pour

$$(\mathrm{I}_{-\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = -\infty;$$

γ) *si* (1) *converge, la condition* (*) *n'est pas nécessaire pour*

$$(\mathrm{II}_{+\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty.$$

Il est aisé de voir que le contre-exemple suivant:

$$a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = 2 \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

prouve l'assertion α) et que le contre-exemple:

$$a_0 = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^3}\right), \quad a_{2k-1} = \frac{1}{k^2}, \quad a_{2k} = \frac{1}{k^3} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

prouve les assertions β) et γ).

2. D'après la seconde partie du théorème **B**, les égalités (I_w) et (II_w) sont possibles pour $w=\frac{1}{2}$; en réalité, ces assertions indiquent les classes assez larges de suites $(a_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ pour lesquelles on a $(\mathrm{I}_{1/2})$ ou $(\mathrm{II}_{1/2})$. Cependant, dans [1] on a omis d'établir la possibilité effective de (I_w) et de (II_w) pour tout $w\in\mathbf{C}$ satisfaisant à $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$. C'est ce que nous faisont maintenant par le

Théorème 2. *Pour tout $w \in C$ satisfaisant à* $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$ *les égalités* $(\mathrm{I_w})$ *et* $(\mathrm{II_w})$ *sont effectivement possibles; à savoir, avec tout $w \in C$ satisfaisant à* $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$:

1° *on a* $(\mathrm{I_w})$ *pour*

$$a_n = n\left(\frac{w}{w-1}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}_0); \tag{13}$$

2° *on a* $(\mathrm{II_w})$ *pour*

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{w-1}{w}\right)^n & (n \in \mathbf{N}). \end{cases} \tag{14}$$

Démonstration. 1° Soit, pour $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie par (13). Alors $\left|\frac{w}{w-1}\right| = 1$, de manière que l'on peut poser

$$\frac{w}{w-1} = e^{\theta i}, \quad \text{avec} \quad \theta \in (0, 2\pi). \tag{15}$$

Après la différentiation des membres de l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} e^{k\theta i} = \frac{e^{(n+1)\theta i} - 1}{e^{\theta i} - 1} \qquad (0 < \theta < 2\pi),$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} ki\, e^{k\theta i} = (n+1)\, i \frac{e^{(n+1)\theta i}}{e^{\theta i} - 1} - ie^{\theta i} \frac{e^{(n+1)\theta i} - 1}{(e^{\theta i} - 1)^2} \qquad (0 < \theta < 2\pi),$$

d'où, d'après (15),

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} ke^{k\theta i}}{n\, e^{n\theta i}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i} - 1} - \frac{e^{\theta i}}{n} \cdot \frac{e^{\theta i} - e^{-n\theta i}}{(e^{\theta i} - 1)^2} \to \frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i} - 1} = w \quad (n \to +\infty).$$

2° Soit maintenant, pour $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie par (14). On peut poser

$$\frac{w-1}{w} = e^{\theta i}, \quad \text{avec} \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Pour $t \in (0,2\pi)$, $n=2, 3, \ldots$, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{kti} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{kti} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{e^{nti}-1}{e^{ti}-1} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{e^{nti}}{e^{ti}-1} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{ti}+1}{e^{ti}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\,\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\frac{t}{2}.$$

L'intégration de π à $\theta \in (0,2\pi)$ donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k\theta i}-(-1)^k}{ki} = \frac{1}{2}(\pi-\theta) - \frac{1}{i}\ln\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

d'où

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k\theta i}}{k} = \frac{i}{2}(\pi-\theta) - \ln\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}$$

$$(n=2, 3, \ldots).$$

Il en résulte que

$$S = \frac{i}{2}(\pi-\theta) - \ln\sin\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} \qquad (n=2, 3, \ldots)$$

(d'après le théorème de Rieman-Lebesque). Par conséquent,

$$R_n = S - S_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Utilisant le fait que, d'après l'assertion 4° du théorème B, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty);$$

effectuant l'intégration par parties et appliquant de nouveau le théorème de Riemann-Lebesgue, on obtient

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n}[1+o(1)] - \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta i}}{2i\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{(-1)^n}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)} -$$

$$\frac{1}{4i\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_{\pi}^{\theta}\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{n}o(1)+\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to+\infty),$$

d'où

$$\frac{R_n}{a_n}=\frac{n}{n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{\theta i}}+o(1)\to\frac{1}{1-e^{\theta i}}=w\quad(n\to+\infty).$$

2.1. L'énoncé suivant, généralisant à la fois les assertions 3° et 4° du théorème B et le théorème 2, nous semble vrai, bien que nous n'ayons pas réussi à le demontrer: c'est pourquoi nous lui donnons ici la forme d'une

Hypothèse. 1° *Si*

$$\alpha_n\uparrow+\infty\ \textit{et}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}}=1,$$

alors on a pour tout $\theta\in(0,2\pi)$

$$\sum_{k=0}^{n}e^{k\theta i}\alpha_k\sim\frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i}-1}e^{n\theta i}\alpha_n\quad(n\to+\infty).$$

2° *Si*

$$\alpha_n\downarrow+o\ \textit{et}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}}=1,$$

alors pour tout $\theta\in(0,2\pi)$

$$\sum_{k=n}^{+\infty}e^{k\theta i}\alpha_k\sim\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}\alpha_n\quad(n\to+\infty).$$

Voici maintenant deux énoncés simplement démontrables, mais complétant aussi utilement les résultats de [1].

2.2. La proposition suivante détermine, dans le cas réel, deux classes de suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ remplissant les conditions suffisantes (I′) et (II′) des assertions 3° et 4° du théorème B, respectivement. Ces classes-là sont bien plus larges que les classes dont il s'agit dans l'énoncé analogue **3.4** de [1]. Dans cette proposition interviennent les *fonctions logarithmico-exponentielles*, appelées aussi *fonctions L* (voir, par exemple, la section **3.2** dans [2], laquelle contient la définition de cette classe de fonctions réelles, de même qu'un théorème qui en établit les propriétés fondamentales).

Proposition 1. *Soit* $x \mapsto \alpha(x)$ *une fonction L réelle, définie pour* $x \geqslant 0$ *et différente de zéro pour x suffisamment grand, et supposons que* $\alpha(x)$ *ne tende pas vers un nombre réel différent de zéro lorsque* $x \to +\infty$ *et que l'on ait*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = 1.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha(k) \sim \frac{(-1)^n}{2} \alpha(n) \quad (n \to +\infty),$$

ou

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \alpha(k) \sim \frac{(-1)^n}{2} \alpha(n) \quad (n \to +\infty),$$

suivant que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha(x) = 0, \quad ou \quad \lim_{n \to +\infty} |\alpha(x)| = +\infty.$$

On déduit cette proposition immédiatement des assertions 3° et 4° du théorème B, tenant compte des propriétés fondamentales des fonctions logarithmico-exponentielles ([2], théorème 13, page 17).

2.3. L'énoncé suivant établit une connection étroite entre (I_w) et (II_w); bien sûr, la convergence de (1) avec $S = 0$ étant supposée.

Proposition 2. *Soit la série* (1) *convergente et soit* $S = 0$. *Alors pour tout* $w \in \mathbf{C}$ $\left(\text{c'est-à-dire pour tout } w \in \mathbf{C} \text{ satisfaisant à } \operatorname{Re}(w) \leqslant \frac{1}{2}, \text{ puisque la convergence de (1) n'est pas possible si } \operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}\right)$ *on a*

$$(I_w) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{a_n} = w$$

si et seulement si

$$(I_{1-w}) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{a_n} = 1 - w.$$

La conjonction $(I_w) \wedge (II_w)$, *c'est-à-dire l'égalité*

$$(16) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{a_n} = w,$$

n'est possible que pour $w = \frac{1}{2}$ *et pour* $w = \infty$; *pour ces deux valeurs de* w (16) *se réalise effectivement.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit la série (1) convergente avec $S=0$. On a alors, pour n suffisamment grand,

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{S-R_{n+1}}{a_n}=-\frac{R_{n+1}}{a_n}=-\frac{R_n-a_n}{a_n}=1-\frac{R_n}{a_n},$$

d'où la première assertion. La seconde résulte immédiatement de la première et des assertions correspondantes des théorèmes **B** et **C**.

3. Cette section traite, entre autre, la question du comportement des suites

$$\left(\frac{S_n^{(m)}}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{R_n^{(m)}}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \qquad (m\in\mathbf{N}), \tag{17}$$

où $S_n^{(m)}$ désigne la m-ième itération de la n-ième somme et $R_n^{(m)}$ la m-ième itération du n-ième reste, c'est-à-dire:

$$\left.\begin{aligned} &S_n^{(0)}\stackrel{\text{def}}{=}S_n, \quad S_n^{(m+1)}\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}S_k^{(m)};\\ &R_n^{(0)}\stackrel{\text{def}}{=}R_n, \quad R_n^{(m+1)}\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=n}^{+\infty}R_k^{(m)}\end{aligned}\right\} \qquad (n\in\mathbf{N}_0;\quad m\in\mathbf{N}_0).$$

Le théorème 3.1 se rapporte directement à cette question. Voici d'abord un résultat bien plus général:

T h é o r è m e 3. *Soient*

$$(u_n^{(m)})_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \textit{et} \quad (v_n^{(m)})_{n\in\mathbf{N}_0} \qquad (m\in\mathbf{N})$$

des suites de nombres complexes qui remplissent les conditions suivantes:

$$u_n^{(m)}\neq 0,\ v_n^{(m)}\neq 0 \qquad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m)}}=1 \qquad (m\in\mathbf{N}), \tag{18}$$

et soient les suites $(\sigma_n^{(m)})_{n\in\mathbf{N}_0}$ *et* $(\tau_n^{(m)})_{n\in\mathbf{N}_0}$ $(m\in\mathbf{N})$ *définies comme suit*:

$$\sigma_n^{(0)}\stackrel{\text{def}}{=}S_n\ (n\in\mathbf{N}_0),\quad \sigma_n^{(m+1)}\stackrel{\text{def}}{=}u_n^{(m+1)}\sum_{k=0}^{n}v_k^{(m+1)}\sigma_\kappa^{(m)} \qquad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N}_0);$$

$$\tau_n^{(m)}\stackrel{\text{def}}{=}R_n\ (n\in\mathbf{N}_0),\quad \tau_n^{(m+1)}\stackrel{\text{def}}{=}u_n^{(m+1)}\sum_{k=n}^{+\infty}v_k^{(m+1)}\tau_k^{(m)} \qquad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N}_0).$$

Alors, dans le cas complexe et pour $\operatorname{Re}(w)>\frac{1}{2}$:

1° (I_w) (*c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$)

entraîne

$$\sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1}a_n\prod_{\nu=1}^{m}u_n^{(\nu)}v_n^{(\nu)} \qquad (m\in\mathbf{N}); \tag{19}$$

2° $(\mathrm{II_w})$ (*c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$)

entraîne

$$\tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \quad (m\in\mathbf{N}). \tag{20}$$

Démonstration 1° Soit remplie la condition $(\mathrm{I_w})$ avec $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$. Alors on a, d'après le théorème A,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1}, \tag{$\mathrm{I'_w}$}$$

et la relation

$$\sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \tag{21}$$

a lieu pour $m=0$ (on attribue pour $m=0$ la valeur 1 au produit dans (21)). Supposons (21) valable pour un $m\in\mathbf{N}_0$ fixe. Alors $\sigma_n^{(m)}\neq 0$ pour n suffisamment grand, de sorte qu'on a, d'après (21) et $(\mathrm{I'_w})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_{n+1}^{(m)}}{\sigma_n^{(m)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w^{m+1} a_{n+1} \prod_{\nu=1}^{m} u_{n+1}^{(\nu)} v_{n+1}^{(\nu)}}{w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{u_{n+1}^{(\nu)}}{u_n^{(\nu)}} \cdot \frac{v_{n+1}^{(\nu)}}{v_n^{(\nu)}} = \frac{w}{w-1},$$

et puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)}\,\sigma_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m+1)}\,\sigma_n^{(m)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)}}{v_n^{(m+1)}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_{n+1}^{(m)}}{\sigma_n^{(m)}} = \frac{w}{w-1}.$$

Par suite, appliquant le théorème A, on obtient

$$\frac{1}{u_n^{(m+1)}} \sigma_n^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{n} v_k^{(m+1)} \sigma_k^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} \sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)},$$

d'où

$$\sigma_n^{(m+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+2} a_n u_n^{(m+1)} v_n^{(m+1)} \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} = w^{m+2} a_n \prod_{\nu=1}^{m+1} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}.$$

Nous venons ainsi d'établir, par induction mathématique, que $(\mathrm{I_w})$ avec $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$ entraîne (19).

2° Soit remplie la condition $(\mathrm{II_w})$ avec $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$. On a alors, d'après le théorème A,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w-1}{w}, \tag{$\mathrm{II'_w}$}$$

et la relation

$$(22) \qquad \tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}$$

a lieu pour $m=0$. Supposons (22) valable pour un $m \in \mathbf{N}_0$ fixe. Alors $\tau_n^{(m)} \neq 0$ pour n suffisamment grand, de manière que l'on a, d'après (22) et (II'_w),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_{n+1}^{(m)}}{\tau_n^{(m)}} = \frac{w-1}{w},$$

et puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)} \tau_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m+1)} \tau_n^{(m)}} = \frac{w-1}{w}.$$

On en conclut d'abord que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^{(m+1)} \tau_n^{(m)}$$

converge, puisque $\left|\frac{w-1}{w}\right| < 1$. On établit ensuite, en appliquant le théorème A, que

$$\frac{1}{u_n^{(m+1)}} \tau_n^{(m+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k^{(m+1)} \tau_k^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} \tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} w^{m+1} \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)},$$

d'où

$$\tau_n^{(m+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+2} a_n u_n^{(m+1)} v_n^{(m+1)} \sum_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} = w^{m+2} a_n \prod_{\nu=1}^{m+1} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}.$$

Ainsi, nous avons établi, par induction mathématique, que (II_w) avec $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$ entraîne (20).

3.1. En posant dans le théorème précédent, d'abord

$$u_n^{(m)} = v_n^{(m)} = 1 \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}),$$

et ensuite, avec un nombre réel $\alpha \neq 0$ fixe,

$$u_n^{(m)} = (n+1)^{-\alpha}, \quad v_n^{(m)} = \alpha (n+1)^{\alpha-1} \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}),$$

on en obtient deux cas particuliers, que nous exprimons par les deux théorèmes suivants. Le premier, déjà mentionné, se rapporte aux sommes et restes itérés, et la première partie du second aux moyennes de Riesz itérées, dont le cas spécial, pour $\alpha=1$, sont les moyennes de Cesarò itérées.

Théorème 3.1. *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° (I_w) (*c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w a_n$)

entraîne

$$S_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° $(\mathrm{II_w})$ *(c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$*)*

entraîne

$$R_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Théorème 3.2. *Soit, avec un nombre réel* $\alpha \neq 0$ *fixe*:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} S_n, \quad \varphi_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} \alpha(n+1)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} \varphi_k^{(m)}; \\ &\theta_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} R_n, \quad \theta_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} \alpha(n+1)^{-\alpha} \sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{\alpha-1} \theta_k^{(m)} \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}_0).$$

Dans le cas complexe, pour $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° $(\mathrm{I_w})$ *(c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$*)*

entraîne

$$\varphi_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-m} \alpha^m w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° $(\mathrm{II_w})$ *(c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$*)*

entraîne

$$\theta_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-m} \alpha^m w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Remarques. 1. La formule

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k}{m} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} S_k \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N})$$

est bien connue. C'est en appliquant la formule sommatoire d'Abel et en utilisant le fait que $(\mathrm{II_w}) \wedge \mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$ entraîne la convergence des suites (a_n) et (R_n) vers zéro à une vitesse exponentielle (théorème A) que l'on prouve sans difficulté *la validité de la formule*

$$R_n^{(m)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n}{m} a_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n-1}{m-1} R_k \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N})$$

sous l'hypothèse $(\mathrm{II_w}) \wedge \mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$. Donc, on peut donner au théorème 3.1 la forme suivante:

Dans le cas complexe, pour $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° ($\mathrm{I_w}$) *entraîne*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k}{m} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} S_k \underset{n \to +\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° ($\mathrm{II_w}$) *entraîne*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n}{m} a_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n-1}{m-1} R_k \underset{n \to +\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N}).$$

2. Par d'autres spécifications de $u_n^{(m)}$ et $v_n^{(m)}$, on peut obtenir des résultats analogues pour plusieurs autres procédés de sommation.

Nous notons que c'est une idée de Mr. M. Ašić qui nous a aidé à donner à la démonstration du théorème 1 une forme plus simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 15 (29), 1973, pp. 5—20.

[2] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge University Press, 1954.

UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 544 — № 576 (1976), 149—154.

572. AN IDENTITY AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOME SEQUENCES*

Dušan D. Adamović

1. We shall first deduce the following result:

Proposition 1. *The equality*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^m} \binom{n}{k} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \left[(z+1)^{k_m} - 1 \right] \tag{1}$$

holds for each complex number z and all natural numbers m and n.

Proof. This equality is true for $m=1$, since for all complex z and all positive integers n we have

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} \binom{n}{k} = \sum_{n=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^z t^{k-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^z \frac{1}{t} \left[(t+1)^n - 1 \right] \mathrm{d}t = \int_0^z \frac{(t+1)-1}{t} \sum_{k=1}^{n} (t+1)^{k-1}\, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^z (t+1)^{k-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k - 1}{k}. \tag{2}$$

If (1) is supposed to be true for a fixed value of m, then, using the identity

$$\int_0^z \frac{1}{t} \left[(t+1)^n - 1 \right] \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k - 1}{k}, \tag{3}$$

which is contained in (2), we obtain, for z complex and n natural,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{m+1}} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} \binom{n}{k} \int_0^z t^{k-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^z \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} \binom{n}{k} t^k\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^z \frac{1}{t} \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \left[(t+1)^{k_m} - 1 \right] \mathrm{d}t$$

---

* Presented September 5, 1976 by D. S. MITRINOVIĆ.

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \int_0^z \frac{(t+1)^{k_m}-1}{t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \sum_{k_{m+1}=1}^{k_m} \frac{(z+1)^{k_{m+1}}-1}{k_{m+1}}.$$

This completes the inductive proof of our proposition.

REMARKS. 1° For $z=-1$ (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^m} \binom{n}{k} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_1=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m} \qquad (n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}), \tag{4}$$

$\mathbf{N}$ denoting the set of all natural numbers; in particular, if $m=1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

One can consider (4) as a formula serving to „condense" the m times iterated sum on its right hand side. The equality (5) is known and there are several manners to prove it; see, for example, [4] (p. 77, ex. 13) and [3].

2° Putting in (1) $z=e^{xi}$ and $z=e^{-xi}$, and adding and substracting the obtained equalities, one gets *the identities*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{k_m} \cos\frac{k_m x}{2} - 1}{k_m},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\sin kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{k_m} \sin\frac{k_m x}{2}}{k_m},$$

valid for each complex x.

If we replace x by $x+\pi$ in the previous identities, we get *the identities*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \left\{ \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m} \cos k_m x - 1}{2k_m} \right.$$
$$\left. + \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_{m-1}} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_{m-1}} \sin(2k_m-1)x - 1}{2k_m-1} \right\}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin kx}{k^m} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \left\{ \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m} \sin k_m x}{2k_m} \right.$$
$$\left. + \sum_{k_m=1}^{\left[\frac{k_{m-1}+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k_m} \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k_m-1} \cos(2k_m-1)\frac{x}{2}}{2k_m-1} \right\}.$$

3° The identity (3) can be written in the form

$$\int_{0}^{z} \frac{f_n(t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(z)}{k} \qquad (z \text{ complex}, n \text{ natural}), \tag{6}$$

where

$$f_n(z) = (z+1)^n - 1. \tag{7}$$

This means that the sequence of functions (7) is a particular solution of the infinite system (6) of integral equations.

2. Our second result (Proposition 2) gives the asymptotic behaviour of the left hand side of (1) when $n \to +\infty$. In order to prove it, we use the preceding proposition and the following statements A and B. Statement A is a combination of some parts of Theorem 1 in **[1]** and Theorem 3 in **[2]**. Statement B can be immediately deduced from Theorem (8.4) in **[5]** (page 32), by applying it to $f(x) = \frac{\log^\alpha x}{x}$ and adding a simple consideration. Both statements are formulated in more general form than it is necessary for the followwing proof, the first one in order to point out more clearly its connection with the mentioned theorems in **[1]** and **[2]**, and the second one because this more general form could be of some interest by itself.

A. Let

$$(u_n^{(p)})_{n\in \mathbf{N}} \quad \text{and} \quad (v_n^{(p)})_{n\in \mathbf{N}} \qquad (p \in \mathbf{N})$$

be sequences of complex numbers satisfying

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^{(p)}}{u_n^{(p)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(p)}}{v_n^{(p)}} = 1 \qquad (p \in \mathbf{N})$$

and let the sequences $(\sigma_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ $(p\in\mathbf{N})$ *be defined as follows:*

$$\sigma_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *being a given sequence of complex numbers different from zero for n sufficiently large;*

$$\sigma_n^{(p+1)} \overset{\text{def}}{=} u_n^{(p+1)} \sum_{k=1}^{n} v_k^{(p+1)} \sigma_k^{(p)} \qquad (n \in \mathbf{N};\ p \in \mathbf{N}).$$

Then for $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1} \quad \text{implies} \quad \sigma_n^{(p)} \sim w^{p+1} a_n \prod_{\nu=1}^{p} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \qquad (n \to +\infty).$$

B. For $\alpha \neq -1$ *and real,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^\alpha k}{k} = \frac{\log^{\alpha+1} n}{\alpha+1} + \varphi(\alpha) + \Delta_n(\alpha) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

where $\varphi(\alpha)$ *does not depend of* n, *the sequence* $(\Delta_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$ *is decreasing for* n *large enough and*

$$\Delta_n(\alpha)=O\left(\frac{\log^\alpha n}{n}\right)\qquad (n\to+\infty).$$

The announced determination of asymptotic behaviour is given by

Proposition 2. *For each complex number* z *and all natural numbers* m,

$$\text{(8)}\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k}\sim\begin{cases}\dfrac{(z+1)^{m+n}}{(zn)^m} & (n\to+\infty),\quad \text{if}\quad |z+1|>1,\\[2mm] -\dfrac{\log^m n}{m!} & (n\to+\infty),\quad \text{if}\quad |z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0.\end{cases}$$

If $|z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0$, *we have, more precisely,* $O(\log^{m-2} n)$

$$\text{(9)}\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k}=-\frac{\log^m n}{m!}-[\log(-z)+C]\frac{\log^{m-1}n}{(m-1)!}+\cancel{\lambda(m,z)+O\left(\frac{\log^{m-1}n}{n}\right)}$$

($n\to+\infty$; z *complex number*, $m\in\mathbf{N}$), *where* C *denotes Euler's constant,* $\lambda(m,z)$ *do not depend of* n *and the determination of the complex logarithm is such that* $\log 1=0$.

We point out as an interesting fact that the considered complex sequence has for $|z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0$ the asymptotic behaviour of a real sequence, independently of values of z.

Proof. Let $|z+1|>1$. Then the complex number $w=\dfrac{z+1}{z}$ satisfies $z+1=$ $=\dfrac{w}{w-1}$, and so $\left|\dfrac{w}{w-1}\right|>1$, i. e. $\operatorname{Re}(w)>\dfrac{1}{2}$. In this case also

$$\frac{\dfrac{(z+1)^{n+1}-1}{n+1}}{\dfrac{(z+1)^n-1}{n}}=(z+1)\frac{n}{n+1}[1+o(1)]\to z+1\qquad (n\to+\infty).$$

Hence, using (1) and applying A with $u_n^{(p)}=1$, $v_n^{(p)}=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}, p\in\mathbf{N})$ and $p=m-1$, one deduces the first asymptotic estimate in (8).

Let

$$\text{(10)}\qquad |z+1|\leqq 1\wedge z\neq 0.$$

For this case we shall prove the estimate (9), which obviously implies the second asymptotic behaviour in (8). The condition (10) implies the convergence of the series $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(z+1)^k}{k}$ to the sum $-\log[1-(z+1)]=-\log(-z)$, with the determination chosen as above. Hence and in view of (1) and B, we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\binom{n}{k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z+1)^k-1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(z+1)^k}{k}\\&=-\left[\log n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(z+1)^k}{k}+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=-\log n-[\log(-z)+C]+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad (n\to+\infty).\end{aligned}$$

Thus, (9) is true for $m=1$ (with $\lambda(1, z)=0$). Supposing the validity of (9) for a fixed value of m, we obtain, using (1) and B,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{m+1}}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{\sum_{k_1=1}^{k} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}\left[(z+1)^{k_m}-1\right]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{z^l}{l^m}\binom{k}{l} \qquad \alpha_k = \log^{m-2} k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{-\frac{\log^m k}{m!} - [\log(-z)+C]\frac{\log^{m-1} k}{(m-1)!} + \cancel{\lambda(m, z)} + \cancel{\frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^m k}{k} - \frac{\log(-z)+C}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-1} k}{k} + \cancel{\lambda(m, z)\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{k}} \; O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-2} k}{k}\right)$$

$$+ \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2}}$$

$$= -\frac{1}{m!}\left[\frac{\log^{m+1} n}{m+1} + \varphi(m) + O\left(\frac{\log^m n}{n}\right)\right]$$

$$-\frac{\log(-z)+C}{(m-1)!}\left[\frac{\log^m n}{m} + \varphi(m-1) + O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right)\right] \qquad O(\log^{m-1} n)$$

$$\cancel{+\lambda(m, z)\left[\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2} + O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right)}$$

$$= -\frac{\log^{m+1} n}{(m+1)!} - [\log(-z)+C]\frac{\log^m n}{m!} \qquad O(\log^{m-1} n)$$

$$+\left[-\frac{\varphi(m)}{m!} - \frac{\log(-z)+C}{(m-1)!}\cancel{\varphi(m-1) + C\lambda(m, z) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k \log^{m-1} k}{k^2}}\right]$$

$$+ O\left(\frac{\log^m n}{n}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

where $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is a bounded sequence. This completes our inductive proof.

2.1. The first asymptotic estimate in (8) holds also if m is a negative integer. In other words and more precisely, we have the following complementary result.

Proposition 3. *For all complex z different from 0 and -1 and all natural numbers m,*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^m z^k \sim (zn)^m (z+1)^{n-m} \qquad (n \to +\infty).$$

This statement is an immediate consequence of the following fact:

Proposition 3′. *For z complex and m and n natural*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^m z^k = nz(z+1)^{n-m} P_{m,n}(z),$$

where $P_{m,n}(z)$ are polynomials in z of the form

$$P_{m,n}(z) = n^{m-1} z^{m-1} + \cdots + 1,$$

the exponents of all powers of n contained in the expression denotedy by „...“ being less than $m-1$. These polynomials satisfy the recursive formulae

$$(10)\quad P_{1,n}(z)=1;\quad P_{m+1,n}(z)=[z(n-m+1)+1]P_{m,n}(z)+z(z+1)P'_{m,n}(z)$$

(m *and* n *natural*; z *complex*).

Proof. We have, for n natural and z complex,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kz^k=z\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\right]'=z[(z+1)^n]'=nz(z+1)^{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2z^k=z\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kz^k\right]'=z[nz(z+1)^{n-1}]'=nz(z+1)^{n-2}(nz+1),$$

which means that the first statement and the second formula (10) are true for $m=1$, and also that the first formula (10) holds. If we suppose the validity of the first statement for a fixed m and also the validity of the second formula (10) for m—1 instead of m, then, for n natural and z complex,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{m+1}z^k=z\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^mz^k\right]'=z[nz(z+1)^{n-m}P_{m,n}(z)]',$$

$$=nz[(n-m)(z+1)^{n-m-1}zP_{m,n}(z)+(z+1)^{n-m}P_{m,n}(z)+(z+1)^{n-m}zP'_{m,n}(z)]$$

$$=nz(z+1)^{n-(m+1)}\{[z(n-m+1)+1]P_{m,n}(z)+z(z+1)P'_{m,n}(z)\}.$$

This completes the inductive proof of our proposition, since

$$[z(n-m+1)+1](n^{m-1}z^{m-1}+\cdots+1)+z(z+1)(n^{m-1}z^{m-1}+\cdots+1)'$$

$$=z(n-m+1)n^{m-1}z^{m-1}+z^2(m-1)n^{m-1}z^{m-2}+\cdots+1=n^mz^m+\cdots+1,$$

where the last two appearances of „...“ denote expressions with powers of n inferior to the m-th, and its other appearances expressions with powers of n inferior to the $(m-1)$-st.

REFERENCES

1. D. D. Adamović: *Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **15** (29) (1973), 5—20.
2. D. D. Adamović: *Quelques compléments aux résultats du travail »Sur la convergence des rapports. . .».* Publ. Inst. Math. (Beograd **20** (34) (1976), 9—27.
3. D. D. Adamović: *Solution of Problem* 340. Mat. Vesnik **12** (27), 420.
4. D. Knuth: *The art of compute programming.* Reading Mass. 1973.
5. A. Зигмунд: *Тригонометрические ряды.* Москва 1965.

ON RELATIONS BETWEEN LOCAL AND GLOBAL MONOTONY OF MAPPINGS OF ORDERED SETS

Dušan D. Adamović

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 27 (41) 1980, pp. 5—12

ON RELATIONS BETWEEN LOCAL AND GLOBAL MONOTONY OF MAPPINGS OF ORDERED SETS

Dušan D. Adamović

0. Let $(S, \leqslant)$ and $(T, \leqslant_1)$ be odered sets (partially or totally) and let f be a mapping of S into T. As usually, we say that the mapping f is *increasing* on S if for all $x, y \in S$

$$x < y \Rightarrow f(x) \leqslant_1 f(y),$$

and that it is *strictly increasing* on S if for $x, y \in S$

$$x < y \Rightarrow f(x) <_1 f(y),$$

and we accept also the corresponding definitions of *decreasing* and *strictly decreasing mapping*. The increasing and decreasing mappings are called *monotonic* and strictly increasing or decreasing *strictly monotonic mappings* (*functions*). The importance of monotonic functions in certain domains is well-known; for example, in the cases of real functions and real sequences. However, in last decades the more general types of such functions have been studied very much; in particular, after the well-known fundamental result of *A*. Tarski [1] concerning fixed points of increasing mappings. Numerous papers are dedicated to various generalizations of this result and to other applications of increasing and decreasing mappings of ordered sets.

The subject of this paper is the question under which conditions the "local monotony", or the "local strict monotony", i. e. the (strict) monotony on at least one interval containing x, for any $x \in S$, or some analoguous property, implies the "global (strict) monotony", i. e. the (strict) monotony on the whole set S. In some simple and familiar cases, as in the cases of real sequence and real function defined on an interval, this implication is intuitively evident and can easily be rigorously proved; but it is impossible to extend this intuition to some more complicate cases, as it is not difficult to show by examples. Our results contained in Theorems 1 – 3 and in supplementary statements give different conditions under which a property apparently weaker implies the monotony, resp. the strict monotony, on the whole domain of the consiredred function, and establishes that any of these conditions cannot be omitted or weakened, in a definite sense, and moreover (Theorems 1 and 3) that a characteristic condition is also necessary for the validity of the implication in question, all other conditions being unchanged. We add to these general results a characterization of monotony and of strict monotony of a real function defined on an interval (without any other suppositions) in terms of upper and lower, left and right derivative (Theorem 4), which we deduce from Theorem 1.

We point out that every of Theorems $1-3$ and $1'$ is really *twofold*: namely, it contains two statements condensed in one statement; the first of them consists of the text and the symbols out of parentheses and in the second one the text and the symbols in parentheses everywhere replace the corresponding elements out of them. We note also that, for $x, y \in S$ and $x < y$, the set $[x, y[$ is defined by

$$[x, y[\stackrel{\text{def}}{=} \{t : t \in S \wedge x \leqslant t < y\},$$

and similarly the sets $]x, y]$, $]x, y[$ and $[x, y]$ are defined.

1. The following results, as formulated, refer to (strictly) increasing mappings. From every of them one can obviously, by suitable changes, obtain the corresponding statement concerning (strictly) decreasing function, and also the statement in which the increasing function is retained, but otherwise the left and right sides change their roles.

We start from a characterization of conditional completness of ordered sets, in some sense comparable to the characterization of complete lattice given by Anne Devis in [2] (as a supplementary result to the cited paper of Tarski).

Theorem 1. *Let us suppose that*

(1) $(S, \leqslant)$ *is a chain (totally ordered set).*

Then the condition

(2) $\begin{cases} (S, \leqslant) \text{ is conditionally complete (that is, every nonempty} \\ \text{subset of } S \text{ with upper bound has its supremum)} \end{cases}$

is necessary and sufficient for the validity, whenever

(3) $(T, \leqslant_1)$ *is an ordered set*

and $f : S \to T$, *of the implication*:

(4) $$(\forall x \in S) \begin{cases} (\forall y \in S)\,(y < x \;\Rightarrow\; (\exists t \in [y, x[\,) f(t) \leqslant_1 f(x)) \wedge \\ (x \text{ is not } \max S \;\Rightarrow\; (\exists y \in S)\,(x < y \wedge (\forall t \in]x, y])\, f(x) \underset{(<_1)}{\leqslant_1} f(t))) \end{cases}$$
$$\Rightarrow$$

(5) f *increases (strictly increases) on* S.

Proof. 1° *Sufficiency*. Under the suppositions (1), (2) and (3), let (4) be satisfied. Suppose that (5) is not true, i. e. that there exist $x \in S$ and $y \in S$ such that

$$x < y \wedge \neg f(x) \underset{(<_1)}{\leqslant_1} f(y)$$

($\neg$ denotting the negation). Then obviously x is not the maximum of S. This and (4) imply that the set

(6) $$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \{t : t \in S \wedge x < t \wedge (\forall u \in]x, t])\, f(x) \underset{(<_1)}{\leqslant_1} f(u)\}$$

is nonempty. By (1), y is an upper bound of P_x and so, by (2), there exists

$$z = \sup P_x. \tag{7}$$

On account of (6), $x \prec z$. We have further

$$(\forall t \in]x, z[)\, f(x) \underset{(\prec_1)}{\leqslant_1} f(t). \tag{8}$$

Indeed, if $t \in]x, z[$, then, by (7), there exists $u \in]t, z] \cap P_x$, which implies, accordingly to (6), $f(x) \underset{(\prec_1)}{\leqslant_1} f(t)$. If $]x, z[= \varnothing$, then we conclude, using (6), (7) and the fact $P_x \neq \varnothing$, that

$$z \in P_x. \tag{9}$$

If $]x, z[\neq \varnothing$, let $u \in]x, z[$. Then $[u, z[\subset]x, z[$ and, by (4), there exists $t \in [u, z[$ such that $f(t) \leqslant_1 f(z)$. So

$$(\exists t \in]x, z[)\, f(t) \leqslant_1 f(z). \tag{10}$$

From (8) and (10)

$$f(x) \underset{(\prec_1)}{\leqslant_1} f(z)$$

follows, which togheter with (8) implies (9) again.

The proved relation (9) and the fact that y is an upper bound of P_x which does not belong to P_x imply $z \prec y$, and so z is not max S. Hence, by (4), there is a $u \in S$ such that $z \prec u \wedge (\forall v \in]z, u])\, f(z) \underset{(\prec_1)}{\leqslant_1} f(v)$. Then, accordingly to (9), $u \in P_x$, and $z \prec u$, in contradiction with (7). The proof of sufficiency is over.

2° *Necessity.* Suppose that the chain $(S, \leqslant)$ is not conditionally complete. Then there exists a nonempty part U of S which is bounded from above and has not its supremum. Let us denote by B the set of all upper bounds of U and put $A = S \setminus B$. The sets A and B are nonempty, A is without maximum and B without minimum and we also have

$$(\forall x \in A)\, (\forall y \in B) \quad x \prec y.$$

Let us put $T = S$ and

$$(\forall x, y \in T) \begin{cases} x \leqslant_1 y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leqslant y, \text{ if } x, y \in A \text{ or } x, y \in B, \\ x \prec_1 y, \text{ if } x \in B \text{ and } y \in A. \end{cases}$$

It is easy to see that this defines the ordering relation $\leqslant_1$ in T.

Then the mapping $f: S \to T$ defined by $f(x) = x\, (x \in S)$ satisfies the condition (4), with symbols $\prec$ and $\prec_1$ (and even a stronger condition), and does not insrease on S. This completes the proof of necessity.

It is clear that Theorem 1 contains the following statement:

Theorem 1′. *Under conditions* (1), (2), (3) *and* (4), *for every* $f: S \to T$, (5) *holds.*

Any of conditions (1), (2) and (4) cannot be omitted or replaced by a definite weaker condition, even if some other conditions are simultaneously, in a definite manner, strenghtened. More precisely, we have the following supplementary.

P r o p o s i t i o n 1. *In Theorem* 1′ *one cannot:*

1° *omit condition* (1) (*i. e. replace it by the supposition that* $(S, \preccurlyeq)$ *is only an ordered set*), *even if* (3) *is simultaneously replaced by the condition*

$$(11) \qquad (T, \preccurlyeq_1) \text{ is a chain}$$

and, eventually, the condition (4) *by the following*

$$(12) \quad (\forall x \in S)\,(\exists y \in S)\,(\exists z \in S)\,(y \prec x \prec z \wedge f \text{ strictly increases on } [y, z]);$$

2° *omit condition* (2), *even if at the same time one requires the total ordering of* $(T, \preccurlyeq_1)$ *and one replaces* (4) *by* (12);

3° *replace* (4) *by the condition in which the conjunction contained in* (4) *is reduced to the first or to the second of its parts, even if the retained part is simultaneously replaced by a stronger condition, namely the first one by*

$$(\exists y \in S)\,(y < x \wedge f \text{ stictly increases on } [y, x]),$$

and the second one by

$$(\exists y \in S)\,(x \prec y \wedge f \text{ strictly increases on } [x, y]),$$

adding simultaneously the condition (11);

4° *replace* (4) *by*

$$(\forall x, y, z \in S)\,((y \prec x \;\Rightarrow\; (\exists t \in [y, x[)\, f(t) \prec_1 f(x)) \wedge (x \prec z \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\exists u \in]x, z])\, f(x) \prec_1 f(u))).$$

P r o o f. 1° Let the set S be formed of the followed two chains:

$$0 \prec \ldots \prec -3 \prec -2 \prec 1 \prec 3 \prec \ldots \text{ and } \ldots \prec -4 \prec -2 \prec 0 \prec 2 \prec 4 \prec \ldots,$$

each element different from zero of the first chain being non comparable to any element $\succ 0$ of the second chain. Let further $(T, \preccurlyeq_1) = (Z, \leqslant)$, where Z denotes the set of all integers; $f(k) = k\ (k \in S = Z)$. In this case the conditions of Theorem 1′ with all changes mentionned in 1° (and also with the condition (4) unchanged) hold, but (5) does not hold, because $0 \prec -1$, $f(0) = 0 > -1 = f(-1)$.

2° The assertion is proved by the following example:

$$S = T = R \setminus \{0\},\ \preccurlyeq\, = \,\preccurlyeq_1\, = \,\leqslant, \quad f(x) = -\frac{1}{x}\ (x \in S)$$

(R denotes the set of all real numbers).

3° α) *Reduction to the first part of the conjunction, this part being strenghtened.* Example:

$$(S, \preccurlyeq) = (T, \preccurlyeq_1) = (R, \leqslant), \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

β) *Reduction to the second part of the conjunction, this conjunction being strengthened.* Example:

$$(S, \preccurlyeq)=(T, \preccurlyeq_1)=(R, \leqslant), \quad f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

4° Example: $(S, \preccurlyeq)=(T, \preccurlyeq_1)=(R, \leqslant)$,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } x \text{ is irrational or } x=0, \\ q, & \text{if } x=\dfrac{p}{q},\ p\in Z\setminus\{0\},\ q\in N, \text{ the fraction } |p|/q \text{ being irreducible, and } q \text{ is even}, \\ -q, & \text{if } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ and } q \text{ is odd}. \end{cases}$$

(We remark that this function f has the properties $D^-f(x)=D^+f(x)=+\infty(x\in R)$ and $D_-f(x)=D_+f(x)=-\infty\ (x\in R)$.) –

However, there are some other and to Theorem 1 incomparable statements which also give sufficient conditions for the monotony, resp. the strict monotony, of the mapping $f: S\to T$. First, we formulate the folowing result, *in which the total ordering of $(S, \preccurlyeq)$ is not supposed.*

Theorem 2. *Let the following conditions be satisfied:*

(13) *every nonempty subset of S bounded from below has a minimal element and*

$$(\forall x\in S)(\forall y\in S)\,(y\prec x \Rightarrow (\exists t\in[y, x[\,)f(t)\underset{(\prec_1)}{\preccurlyeq_1}f(x)). \tag{14}$$

Then the mapping f is increasing (stictly increasing) on S.

Proof. Let the conditions (13) and (14) be satisfied and suppose that f is not increasing (strictly increasing) on S. Then there exist $x\in S$ and $y\in S$ such that

$$x\prec y \wedge \neg f(x)\underset{(\prec_1)}{\preccurlyeq_1}f(y). \tag{15}$$

For such a fixed x, let us denote by Q_x the set of all y satisfying (15). The set Q_x is bounded from below and consequently has a minimal element z. We have $x\prec z$; by (14), there exists $t\in[x, z[$ such that

$$f(t)\underset{(\prec_1)}{\preccurlyeq_1}f(z). \tag{16}$$

We also have

$$f(x)\preccurlyeq_1 f(t). \tag{17}$$

Indeed, (17) holds if $x=t$; otherwise, $x\prec t\prec z$ and hence $f(x)\underset{(\prec_1)}{\preccurlyeq_1}f(t)$, since z is a minimal element of Q_x. By (16) and (17), $f(x)\underset{(\prec_1)}{\preccurlyeq_1}f(z)$, what contradicts the supposition that z is a minimal element of Q_x. This contradiction proves the theorem. –

One can add the following supplementary

Proposition 2. *In Theorem* 2:

1° *condition* (13) *cannot be omitted, even if one supposes simultaneously the total ordering of* $(S, \leqslant)$ *and* $(T, \leqslant_1)$, *and one replaces* (14) *by the condition* (12);

2° *condition* (13) *cannot be replaced by the condition* (2), *even if one supposes simultaneously the total ordering of* $(S, \leqslant)$ *and* $(T, \leqslant_1)$ *and one replaces* (14) *by*

$$(18)\qquad (\forall x \in S)\ (x \text{ is not } \min S \Rightarrow (\exists y < x)\ (\forall t \in [y, x[\,)\ \underset{(<_1)}{f(t) \leqslant_1 f(x)}).$$

This statement follows immediately from Proposition 1.

Using the previous theorem and adding a supplementary consideration, one easily proves the

Theorem 3. *The condition*

(13′) *every nonempty subset of* S *bouned from below has a minmum*

is necessary and sufficient for the validity, whenever $(S, \leqslant)$ *is a chain, of the implication*

$$(18) \Rightarrow (5).$$

Proof. The sufficiency follows immediately from Theorem 2, since (13′) implies (13) and in the case when $(S, \leqslant)$ is a chain (18) implies (14).

In order to prove the necessity, let us suppose that $(S, \leqslant)$ is a chain and that the set $C \subset S$ is bounded from below and has not its minimum. Let us denote the set of all lower bounds of C by A and let $B = S \setminus A$. If $T = S$, and $\leqslant_1$ is defined as in the second part of the proof of Theorem 1 and $f(x) = x\,(x \in S)$, then (18) holds and (5) does not. –

A remark concerning Theorem 1 and Theorem 1′. It is easy to see that these theorems remain true if one displaces in (4) the symbol $(<_1)$ on the corresponding place under the first row.

2. On the basis of Theorem 1, we shall prove the following statement characterizing, in the general case, the strict increase of a real function defined on an interval.

Theorem 4. *Let* $f: I \to R$, *where* R *denotes the set of all real numbers and* $I (\subset R)$ *a nonempty interval.*

1° *For the increase of* f *on* I *it is necessary that*

$$(19')\qquad \begin{cases} D_-f(x) \geqslant 0 \wedge D_+f(x) \geqslant 0 \ \text{on } I, \\ \text{excluding the requirement that } D_-f(a) \geqslant 0 \text{ if } a = \inf I \in I, \text{ and that} \\ D_+f(b) \geqslant 0 \text{ if } b = \sup I \in I, \end{cases}$$

and is sufficient that

$$(19)\qquad \begin{cases} D^-f(x)\geqslant 0 \wedge D_+f(x)\geqslant 0 \text{ on } I, \\ \text{with a restriction similar to that included in } (19'). \end{cases}$$

Therefore any of conditions (19') *and* (19) *is necessary and sufficient for the increase of f on I (and so* (19') $\Leftrightarrow$ (19)).

2° *A necessary and sufficient condition for the strict increase of f on I is*

$$(19)\wedge(20)\ (or\ (19')\wedge(20)),$$

where

(20) $(\forall\, x\in S)\ (D^-f(x)>0 \vee D^+f(x)>0)$, *the set $S\subseteq I$ being dense on I.*

Remark 1. One can formulate the corresponding similar theorem concerning strict decrease. Also, in the condition (19) of Theorem 4 one can replace $D^-f(x)\geqslant 0\wedge D_+f(x)\geqslant 0$ by $D_-f(x)\geqslant 0\wedge D^+f(x)\geqslant 0$. Both facts are clear with respect to the following proof and to the remarks at the beginning of **1**.

Remark 2. Another statement containing sufficient condition, expressed partially by unilateral upper derivative, for the increase of a real function on an interval is well-know (see, for instance, [3], pp. 354—355, Example IV). This condition is the conjunction of the nonnegativity of D^+f, or of D^-f, on the interval and the continuity of f on the same interval. It is evident that this condition is essentially stronger than the corresponding condition (19) in Theorem 4.

Proof of Theorem 4. 1° It is evident that the condition (19') is necessary for the increase of f on I. Let us suppose the condition (19) be satisfied. Then, for each $\varepsilon>0$, the fonction $g_\varepsilon : I\to R$ defined by

$$g_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon x \qquad (x\in I)$$

has the property

$$(\forall\, x\in I)\ (D^-g_\varepsilon(x)=D^-f(x)+\varepsilon>0\wedge D_+g_\varepsilon(x)=D_+f(x)+\varepsilon>0).$$

This implies that the function g_ε satisfies the conditions of Theorem 1', with symbols in parentheses. Hence, for each $\varepsilon>0$, g_ε increases strictly on I, and consequently we have, for fixed $x, y\in I$ such that $x<y$,

$$f(x)+\varepsilon x<f(y)+\varepsilon y \qquad (\varepsilon>0).$$

Making $\varepsilon\to+0$, one gets $f(x)\leqslant f(y)$ $(x, y\in I,\ x<y)$. Therefore, the condition (19) is sufficient.

2° If the condition $(19)\wedge(20)$ is satified, then in the first place f increses on I. Further, for $x, y\in I$ and $x<y$, there exists $z\in]x, y[$ such that $D^-f(z)>0$ or $D^+f(z)>0$. Let, for instance, the first inequality hold. Then we have, for a $t\in]x, z[$, $(f(t)-f(z))/(t-z)>0$, i.e. $f(t)<f(z)$; so we get $f(x)\leqslant f(t)< f(z)\leqslant f(y)$ and consequently $f(x)<f(y)$. If $D^+f(z)>0$,we similarly obtain the same conclusion. So the conjunction $(19)\wedge(20)$ iz sufficient for the strict increase of f on I. It is also necessary, since (19) is already necessary for the increase of f on I, and if (19) is satisfied and (20) is not, then f increases on I and there exists an interval $(\alpha, \beta)\subset I$ such that

$$(\forall\, x\in(\alpha, \beta))\ D^-f(x)=D_-f(x)=D^+f(x)=D_+f(x)=0,$$

which implies (for instance, by 1° and by the corresponding statement concerning decrease of f on I; see Remark 1) $f(x)=\text{const}$ on (α, β).

An immediate corollary (special case) of the preceding statement is

Theorem 4'. *Let the real function f have its derivative on the interval I, understanding by the existence of the derivative at $a=\min I$ the existence of $f_+'(a)$ and similarly for $b=\max I$. (The derivative can be finite or infinite and the continuity of f on I is not supposed.) Then*:

1° *the condition*

$$f'(x)\geqslant 0 \text{ on } I \tag{21}$$

is necessary and sufficient for the increase of f on I;

2° *f increases strictly on I if and only if* (21) $\wedge$ (22) *holds, where*

$$(\forall x\in S) f'(x)>0,\ S\subset I \text{ being dense on } I. - \tag{22}$$

At the end, let us remark that in textbooks exposing foundations of mathematical analysis the connexion between monotony and sign of derivative is usually established in the form of a statement which supposes the continuity of the function and the existence of its derivative (finite or infinite) on the considered interval. Its proof is usually based on Lagrange's or Rolle's mean value theorem, whose proof uses Weierstrass' theorem on extrema of a continuous function on a segment. Theorem 4' gives an alternative possibility in this way. Namely: Theorem 4' is more general than the usual theorem, and its direct proof (that is the appropiate form of the combination of the proofs of Theorems 1' and Theorem 4) uses neither properties of continuous functions nor mean value theorems, and even not the notion of continuous function (it really uses only the conditional completness of $(R, \leqslant)$), and finally it is not longer than the proof of the usual theorem, taking into consideration all auxiliary results preceding this second proof.

REFERENCES

[1] A. Tarski: *A lattice-theoretical fixtpoint theorem and its applications.* Pacific J. Math. 5 (1955), 285—309.

[2] A. C. Devis: *A characterisation of complete lattice.* Pacific J. Math. 5 (1955), 311—319.

[3] E. C. Titchmarsh: *Theory of functions,* Oxford university press, second edition, 1947.

YU ISSN 0025-5165

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СР СРБИЈЕ-СФР ЈУГОСЛАВИЈА

SOCIETE DES MATHEMATICIENS DE LA RS DE SERBIE–
RSF DE YOUGOSLAVIE

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК

КЊИГА 35
ГОДИНА 1983
СВЕСКА 3

БЕОГРАД
1983.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
35, 1983

Dušan D. Adamović
Josip E. Pečarić

SOME INEQUALITIES OBTAINED BY ELEMENTARY METHODS

(received 11.01.1983)

The aim of this paper is to show, by concrete results of particular or more general kind, the possibilities of applications of some simple ideas concerning deductions or proofs of inequalities. These ideas are: α) coming to the conclusion about the monotonicity of a real function by decomposing, in a suitable manner, the expression by which it is defined in simple expressions whose monotonicity can easily be estabilished, and deducing then some inequalities from so proved monotonicity, directly or by using convenient transformations; β) deducing from the monotonicity of a real function, estabilished in the described fashion, the conclusion concerning the sign of its derivative, which then gives a new inequality; γ) if the validity of an inequality, for discrete values of parameters contained in it, has yet been estabilished by some of the described or other elementary methods, the extension of its validity, by application of some different procedure, to the values of parameters forming whole intervals.

The starting point and initial inspiration of these consideration was the simple manner in which has been proved in [1] (pp. 353-354; or in [2], pp. 344-345), by the firstly signed author, the strict increaseness on $[0, +\infty)$ of the function

$$f(x) = \frac{1+x+\ldots+x^m}{1+x+\ldots+x^n} \tag{1}$$

with $m > n$, and deduced the inequalities

$$\frac{m+1}{n+1}\, x^{m-n} < f(x) < \frac{m+1}{n+1} \quad (0<x<1), \qquad \frac{m+1}{n+1} < f(x) < \frac{m+1}{n+1}\, x^{m-n} \quad (x>1) \tag{2}$$

from it. Afterwards, D.Acu, inspired by the idea of this method, arrived in [3] to some more general results, by considerations including the momenta α) and β). Our considerations in this paper prolong in some sense the mentioned paper of D.Acu. They also include the momentum γ), and the results which we got contain, as special cases, all results of D.Acu, and also several other particular inequalities.

1. Let the functions P and Q be defined on $[0, +\infty)$ by

$$(3) \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^{\alpha_i}, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i x^{\beta_i},$$

where: $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, $0 = \beta_0 < \ldots < \beta_q$; $p, q \in N$; and a_i $(i=0,\ldots,p)$ and b_i $(i=0,\ldots,q)$ are nonnegative coefficients such that $a_0 > 0$, $a_p > 0$, $b_q > 0$.

For $\alpha_i = i$ $(i=0,\ldots,p)$ and $\beta_i = i$ $(i=0,\ldots,q)$ P and Q are polynomials of degrees p and q, respectively.

We shall consider the functions

$$f_k : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f_k(x) = \frac{P(x) + x^{\alpha_p + k} Q(x)}{P(x)},$$

$$g_k : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad g_k(x) = \frac{x^{\beta_q + k} P(x) + Q(x)}{x^{\beta_q + k} P(x)},$$

where $k \geq 0$.

THEOREM 1. For every $k \geq 0$, the function f_k is strictly increasing on $[0, +\infty)$ and the function g_k is strictly decreasing on $(0, +\infty)$

PROOF. As we have

$$f_k(x) = 1 + \frac{x^k Q(x)}{x^{-\alpha_p} P(x)} = 1 + \frac{x^k P(x)}{\sum_{i=0}^{p} a_i x^{\alpha_i - \alpha_p}} \qquad (x>0),$$

the function f_k is strictly increasing on $(0, +\infty)$, and, by reason of continuity, on $[0, +\infty)$, too. Further, from

$$g_k(x) = 1 + \frac{x^{-\beta_q} Q(x)}{x^k P(x)} = 1 + \left(\sum_{i=o}^{p} b_i x^{\beta_i - \beta_q}\right)/(x^k P(x)), \quad x \in (0, +\infty),$$

follows that the function g_k decreases strictly on $(0, +\infty)$.

<u>COROLLARY 1</u>. For every $k \geqslant 0$, we have

$$1 + \frac{Q(1)}{P(1)} x^{\alpha_p + \beta_q + k} < f_k(x) < 1 + x^k \frac{Q(1)}{P(1)}, \quad \text{if } x \in (0,1), \tag{4}$$

and if $x > 1$, the reverse inequalities hold.

<u>PROOF</u>. By Theorem 1, we have

$$f_o(x) < f_o(1), \quad g_o(x) > g_o(1), \quad \text{for } x \in (0,1), \tag{5}$$

and the reverse inequalities for $x > 1$. Taking into account that, for each $k \geqslant 0$,

$$\left.\begin{aligned} g_o(x) &= (f_k(x) - 1) x^{-\alpha_p - \beta_q - k} + 1, \\ f_o(x) &= (f_k(x) - 1) x^{-k} + 1, \end{aligned}\right\} \quad (x > 0),$$

we obtain (4) from (5) for $x \in (0,1)$, and for $x > 1$ we get (4) with reverse inequalities from the reverse inequalities in (5).

<u>REMARKS</u>. 1^o The second inequality in (4) is obviously more precise than the inequality

$$f_k(x) < 1 + \frac{Q(1)}{P(1)} \ (= f_k(1)), \quad x \in (0,1), \tag{4'}$$

which directly follows from Theorem 1. The same is true for the reverse second inequality (4) with respect to the reverse inequality in (4').

2^o Let us also remark that the special case of Corollary 1 when P and Q are polynomials of degree p and q, respectively, represents a generalization and more precise form of the corresponding result in [3].

2. Now, let

$$H(x) = P(x) + x^{\alpha_p+k} Q(x), \quad m = \alpha_p+\beta_q+k,$$

the expressions P and Q being given by (3).

If the identities

$$P(x) = x^{\alpha_p} P(1/x), \quad Q(x) = x^{\beta_q} Q(1/x), \quad H(x) = x^m H(1/x)$$

hold, then for each $k \geqslant 0$ the equality

$$(6) \qquad f_k(x) > \left(1 + \frac{Q(1)}{P(1)}\right) x^{m-\alpha_p}, \quad x \in (0,1),$$

is valid and also the reversed inequality for $x>1$.

Indeed, as we have in this case

$$g_k(x) = x^{\alpha_p-m} f_k(x),$$

(6) and the reverse inequality for $x>1$ follow from the inequalities (Theorem 1)

$$g_k(x) > g_k(1), \quad x \in (0,1), \quad g_k(x) < g_k(1), \quad x>1.$$

Especially, for $k=1$, $P(x) = 1+x+\ldots+x^m$, $Q(x) = 1+x+\ldots+x^{m+n-1}$, we get (2). But applying Corollary 1 we obtain the following more precise form of (2).

$$(7) \qquad \frac{m+1}{n+1} x^{m-n} < 1 + x^m \frac{m-n}{n+1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + x \frac{m-n}{n+1} < \frac{m+1}{n+1}, \quad x \in (0,1),$$

$$(8) \qquad \frac{m+1}{n+1} < 1 + x \frac{m-n}{n+1} < f(x) < \min\{1 + x^m \frac{m-n}{n+1}, \frac{m+1}{n+1} x^{m-n}\}, \quad x>1,$$

where f is defined by (1) with $m>n$.

We only have to prove the first inequality in (7), that is that

$$\theta(x) = 1 + x^m \frac{m-n}{n+1} - \frac{m+1}{n+1} x^{m-n} > 0, \quad x\in(0,1).$$

Because of

$$\theta'(x) = \frac{m-n}{n+1} x^{m-n-1}(mx^m - (m+1)) < 0, \quad x\in(0,1),$$

if follows $\theta(x) > \theta(1) = 0$, $x\in(0,1)$, q.e.d.

3. The following considerations are natural generalization of the considerations and results in 1.

Let $h: [0, +\infty) \to R$ and $s_o,\dots,s_q: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ be increasing and $a_o,\dots,a_p: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ decreasing functions, at least one of the functions s_i $(i=1,\dots,p)$ and at least one of the functions a_i $(i=0,\dots,q)$ taking on $(0, +\infty)$ positive values only, and let $0 \le \alpha_o < \dots < \alpha_p$, $0 \le \beta_o < \dots < \beta_q$ and $k \ge 0$. Let the function Φ_k be defined on $(0, +\infty)$ (or on $[0, +\infty)$ if, especially, $\alpha_o = 0$ and $a_o(0) > 0$) by

$$\Phi_k(x) = \frac{h(x) \sum_{i=o}^{p} a_i(x)x^{\alpha_i} + x^{\alpha_p+k} \sum_{i=o}^{q} s_i(x)x^{\beta_i}}{\sum_{i=o}^{p} a_i(x)\, x^{\alpha_i}} \tag{9}$$

<u>THEOREM 2</u>. The function Φ_k defined by (9) is strictly increasing on $(0, +\infty)$ (or on $[0, +\infty)$ if Φ_k is defined and right continuous at $x = 0$).

<u>PROOF</u>. For every $x\in(0, +\infty)$, we have

$$\Phi_k(x) = h(x) + \frac{x^k \sum_{i=o}^{q} s_i(x)x^{\beta_i}}{\sum_{i=o}^{p} a_i(x)x^{\alpha_i-\alpha_p}},$$

wherefrom the assertion immediately follows.

COROLLARY 2. Under the hypotheses of Theorem 2, for $x\in(0,1)$ the inequalities

$$(10)\qquad \Phi_k(x)<h(x)+x^k\Big(h(1)-h(x)+\frac{\sum_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum_{i=o}^{p} a_i(1)}\Big),$$

$$(11)\qquad \Phi_k(x)<h(1)+\frac{\sum_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum_{i=o}^{p} a_i(1)}<\Phi_k\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

hold, and for $x>1$ the reverse inequalities are true.

For $x\in(0,1)$ the inequality

$$(12)\qquad h(x)+x^k\Big(h(1)-h(x)+\frac{\sum_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum_{i=o}^{p} a_i(1)}\Big)<h(1)+\frac{\sum_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum_{i=o}^{p} a_i(1)},$$

is also true.

PROOF. We have, by Theorem 2,

$$\Phi_o(x)<\Phi_o(1),\qquad x\in(0,1),$$

and this implies (10), because of

$$\Phi_o(x)=h(x)+x^{-k}(\Phi_k(x)-h(x)),\qquad x\in(0,+\infty).$$

Both inequalities (11) folow immediately from Theorem 2. The inequality (12), written in the form

$$(h(x)-h(1))(1-x^k)<(1-x^k)\frac{\sum_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum_{i=o}^{p} a_i(1)}$$

if for $x\in(0,1)$ equivalent to

$$h(x)-h(1)\ (\leq 0) < \frac{\sum\limits_{i=o}^{q} s_i(1)}{\sum\limits_{i=o}^{p} a_i(1)},$$

which is obviously true if $x\in(0,1)$.

4. By Theorem 2, the funetion $\varphi:(0,+\infty)\to R$ is strictly increasing on $(0,+\infty)$ if

$$(9') \qquad \varphi(x) = \frac{h(x)\sum\limits_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i} + s(x)\sum\limits_{i=n+1}^{m} a_i x^{\alpha_i}}{\sum\limits_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i}}, \quad x\in(0,+\infty),$$

where $a_i\geq 0$ $(i=0,1,\ldots,m;\ m>0)$, $\sum\limits_{i=o}^{n} a_i>0$, $\sum\limits_{i=n+1}^{m} a_i>0$, and the function $h:(0,+\infty)\to R$ and $s:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ are increasing on $(0,+\infty)$.

APPLICATION. We now suppose that the functions h and s are, in addition, differentiable on $(0,+\infty)$. Then we have $\varphi'(x)\geq 0$, $x>0$, which implies the following inequality

$$(13) \qquad h'(x)\Big(\sum_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i}\Big)^2 + s'(x)\sum_{i=n+1}^{m} a_i x^{\alpha_i}\sum_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i}$$

$$+\ s(x)\sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i a_i x^{\alpha_i-1}\sum_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i}$$

$$\geq s(x)\sum_{i=o}^{n}\alpha_i a_i x^{\alpha_i-1}\sum_{i=n+1}^{m} a_i x^{\alpha_i}, \quad x>0,$$

For $h(x)\equiv 1$, $s(x)\equiv 1$ (13) becomes

$$(14) \qquad \sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i a_i x^{\alpha_i-1}\sum_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i} \geq \sum_{i=o}^{n}\alpha_i a_i x^{\alpha_i-1}\sum_{i=n+1}^{m} a_i x^{\alpha_i}, \quad x>0.$$

Adding $\sum_{i=o}^{n} \alpha_i a_i x^{\alpha_i - 1} \sum_{i=o}^{n} a_i x^{\alpha_i}$ to both sides of (14), we get

$$\sum_{i=o}^{m} \alpha_i a_i x^{\alpha_i-1} \sum_{i=o}^{m} a_i x^{\alpha_i} \geqslant \sum_{i=o}^{m} \alpha_i a_i x^{\alpha_i-1} \sum_{i=o}^{m} a_i x^{\alpha_i}, \quad x>0, \tag{15}$$

This inequality obviously holds without suppositions $\sum_{i=o}^{m} a_i>0$, $\sum_{i=m+1}^{n} a_i>0$. For $\alpha_i = i$ $(i=0,1,\dots,m)$ it reduces to the corresponding result in [3].

We also remark that after the substitution

$$a_o = 0,\ a_i \to p_i x^{-\alpha_i},\quad \alpha_i \to x_i x \quad (i=1,\dots,m),$$

where p_i and x_i $(i=1,\dots,m)$ are nonnegative numbers, the numbers x_i forming an increasing sequence, (15) becomes

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i \sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{i=1}^{m} p_i \quad (m>n). \tag{16}$$

If, in addition, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, we obtain the known inequality

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \quad (m>n;\ p_i \geqq 0,\ i=1,\dots,m;\ \sum_{i=1}^{n} p_i>0;$$

$$(0 \leqq x_1 \leqq \dots \leqq x_m).$$

We remark here that one can easily prove (15) starting from (16). If all numbers p_i in (16) are positive, then (16) with strict inequality is valid. This means that (15) becomes a strict inequality if

$$a_i > 0 \quad (i=0,1,\dots,m). \tag{15'}$$

FURTHER REMARKS

3° Generally, according to the fact that the function φ increases strictly on $(0,+\infty)$, the inequality (13), i.e. the inequality $\varphi'(x) \geqq 0$ $(x>0)$, under some aditional conditions, is really a strict inequality except for a finite number of values of x, or even for each $x>0$. This is, for instance, the case of the inequality (15) under the condition (15´), which we just estabilished on the basis of the connection between the inequalities (15) and (16).

4° Theorem 2, which is a generalization of Theorem 1, also can be generalized, for example, replacing in the expression (9) for the function Φ_k the powers x^{α_i} and x^{β_i} by the functions $u_i(x)$ and $v_i(x)$ respectively such that the functions u_i/u_n are strictly decreasing and the functions v_i stricly increasing. Thus u_i can be the functions λ_i^x and v_i the functions μ_i^x, where positive numbers μ_i and λ_i form two strictly increasing sequences.

5. The function f defined by (1) can be given by

$$f(x) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x^{n+1}} \quad (0<x \neq 1), \quad f(1) = \frac{m+1}{n+1} . \tag{17}$$

This enables us to generalize the results (2) in another direction, extending it to the case when m and n are arbitrary real numbers greater than -1.

We shall prove the following

THEOREM 3. Let the real numbers m and n be different from -1 and let m>n. If

$$(m > -1 \wedge n > -1) \vee (m < -1 \wedge n < -1),$$

then the function f is strictly increasing and (2) is true. If

$$m > -1 \wedge n < -1,$$

then the function f is strictly decreasing and (2) with reverse inequalities holds.

PROOF. Applying Cauchy's mean value theorem to the interval $[x,1]$ $(0<x<1)$, or to $[1,x]$ $(x>1)$, we get

$$f(x) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x^{n+1}} = \frac{(m+1)\xi^m}{(n+1)\xi^n} = \frac{m+1}{n+1}\xi^{m-n}, \text{ with } \xi\in(x,1), \text{ or} \tag{18}$$

$\xi\in(1,x)$, respectively.

Let

$$(m>-1 \wedge n>-1)\vee(m<-1\wedge n<-1), \text{ i.e. } \frac{m+1}{n+1}>0.$$

Then we deduce from (18)

$$\frac{m+1}{n+1}x^{m-n} < f(x) < \frac{m+1}{n+1}1^{m-n}, \quad 0<x<1,$$

and

$$\frac{m+1}{n+1}1^{m-n} < f(x) < \frac{m+1}{n+1}x^{m-n}, \quad x>1,$$

which means that in this case (2) holds.

If

$$m>-1\wedge n<-1, \text{ i.e. } \frac{m+1}{n+1}<0,$$

we similarly obtain (2) with reverse inequalities.

As we have

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n}{1-x^{n+1}}\left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{m+1}{n+1}x^{m-n}\right) \quad (0<x\neq 1),$$

we conclude easily, on the basis of the previous result, that

$$f'(x)>0 \quad (x>0) \quad \text{if} \quad (m>-1\wedge n>-1)\vee(m<-1\wedge n<-1),$$

and

$$f'(x)<0 \quad (x>0) \quad \text{if } m>-1\wedge n<-1,$$

and the assertions concerning monotonicity of f are proved, too.

Let us remark that

$$f(x) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x^{n+1}} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{m+1}}{1-x^{n+1}} = 1+x^{n+1}\frac{1-x^{m-n}}{1-x^{n+1}} \quad (0<x\neq 1). \tag{19}$$

This enables us to obtain, applying Theorem 5 to the factor $\frac{1-x^{m-n}}{1-x^{n+1}}$, the following more precise form of (2) (and also of (7) and (8)):

<u>COROLLARY 3</u>. Let m and n be real numbers such that $m>n$ and $m,n \neq 1$.

1° If

$$m>2n+1 \wedge n>-1,$$

then for $x\in(0,1)$

$$1+x^{m-n}\frac{m-n}{n+1}<f(x)<1+x^{n+1}\frac{m-n}{n+1}, \tag{20}$$

holds, and for $x>1$ the reverse inequalities are true.

2° If

$$(m<2n+1\wedge n>-1)\vee n<-1,$$

then the inequalities (20) hold for $x>1$, and for $x\in(0,1)$ the reverse inequalities are true.

<u>PROOF.</u> 1° Let $m>2n+1\wedge n>-1$. In this case $m-n-1>n>-1$. Therefore, applying Theorem 3 with $M = m-n-1$ and $N = n$ instead of m and n respectively, we get for $x\in(0,1)$

$$\frac{M+1}{N+1}x^{M-N}<\frac{1-x^{M+1}}{1-x^{N+1}}<\frac{M+1}{N+1}, \tag{21}$$

i.e.

$$\frac{m-n}{n+1}x^{m-2n-1}<\frac{1-x^{m-n}}{1-x^{n+1}}<\frac{m-n}{n+1}, \tag{22}$$

and further, using (19), the inequality (20). For $x>1$ the reverse inequalities in (21) and (22) hold, and consequently in (20), too.

2° Let

$$m<2n+1\wedge n>-1.$$

In this case, for $M = n$ and $N = m-n-1$, we have $M>N>-1$, and so (21) holds again if $x \in (0,1)$. Hence we obtain now for $x \in (0,1)$

$$\frac{n+1}{m-n} x^{-m+2n+1} < \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m-n}} < \frac{n+1}{m-n},$$

which implies (22) with reverse inequalities. Combining this result with (19), one obtains (20) with reverse inequalities. For $x>1$ one obtains, clearly, the inequalities (20).

Finally, if $n < -1$, then we have for $M = m-n-1$ and $N = n$

$$M > -1 \wedge N < -1,$$

which implies, for $x \in (0,1)$, the reverse inequalities in (21) and (22), and consequently in (20), too. For $x>1$, we obviously get the opposite result, i.e. the inequality (20).

R E F E R E N C E S

[1] D.S.Mitrinović, in cooperation with P.M.Vasić: Analytic Inequalities. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[2] D.S.Mitrinović: Nejednakosti, "Gradjevinska knjiga", Belgrade, 1965.

[3] D.Acu: Generalizations of Some Inequalities, Univ.Beograd. Publ. Elektrotehn.Fak.Ser.Mat.Fiz. No.678 - No.715 (1980), 58-62.

NEKE NEJEDNAKOSTI DOBIJENE ELEMENTARNIM METODAMA

Dušan D. Adamović i Josip E. Pečarić

SADRŽAJ. U ovom radu, korišćenjem jednostavnih ideja, ustanovljena je monotonija na skupu pozitivnih brojeva nekoliko klasa realnih funkcija. Odatle je izvedeno više nejednakosti za realne funkcije. Time su u više pravaca prošireni i upotpunjeni rezultati iz [1] (str. 353-354) i [3].

Prirodno-matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Yugoslavia
Gradjevinski fakultet, Bulevar Revolucije 73, Beograd, Yugoslavia

ЗБОРНИК
ИСТОРИЈСКОГ МУЗЕЈА СРБИЈЕ

ДРАГАН ТРИФУНОВИЋ, ДУШАН АДАМОВИЋ

О ЈЕДНОЈ СВЕТОГОРСКОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ РАСПРАВИ И ЊЕНОМ ПРЕВОДУ НА НАШ ЈЕЗИК

DRAGAN TRIFUNOVIĆ, DUŠAN ADAMOVIĆ

ON A MATHEMATICAL TREATISE FROM MOUNT ATHOS AND ITS TRANSLATION INTO OUR LANGUAGE

23

БЕОГРАД 1986.

ДРАГАН ТРИФУНОВИЋ
ДУШАН АДАМОВИЋ

О ЈЕДНОЈ СВЕТОГОРСКОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ РАСПРАВИ И ЊЕНОМ ПРЕВОДУ НА НАШ ЈЕЗИК

Димитрије Туцовић (1881—1914), истакнути социјалистички и раднички првак у Србији на почетку 20. века, успео је да у току свог кратког, трагично и херојски окончаног, живота стекне и углед снажног, изразитог интелектуалца, и то у време које је у Србији било обележено необично интензивним и свестраним културним и интелектуалним полетом. Овај реноме **Туцовићу** су оправдано донели његови бројни чланци и други публицистички и слични радови, писани веома луцидно и садржајно, а не мање темпераментно, са жаром енергичног политичког борца.[1] Познато је, међутим, и да је **Д. Туцовић** већ као сасвим млад човек, па и као ученик Ужичке реалке, видно испољавао своје разноврсне умне способности и склоности. Био је, наравно, одличан ђак, али је већ као гимназијалац објављивао озбиљне прилоге у „Радничким новинама" (чији ће главни уредник постати неколико година касније), а живо је деловао и у разним ученичким удружењима и групама, тзв. „дружинама", литерарним и другим, чији је често био покретач и предводник.[2] Син проте **Јеврема Туцовића, Димитрије** је био, тада и касније, страстан и истрајан читалац, који систематским проучавањем одговарајуће литературе упорно настоји да, прелазећи увелико границе обичних школских знања, стекне потпунија и подробнија обавештења о предметима свог дубљег интересовања.

Овде ћемо изложити и анализирати један конкретан случај овакве **Туцовићеве** активности у шестом разреду Ужичке реалке.[3] Прегледајући сва годишта часописа *Наставник*, наишли смо на чла-

[1] *Сабрана дела Димитрија Туцовића* у серији *Дела српских социјалиста*, издање „Рада", књ. 1, Београд 1975.

[2] О успеху **Димитрија Туцовића** у гимназији видети рад **Борђа Митровића**, *Фрагменти за биографију Димитрија Туцовића*, Димитрије Туцовић и раднички покрет Србије, Титово Ужице 1982, стр. **83—102** и **Н. Поповић**, *Димитрије Туцовић*, Београд 1934.

[3] Школске 1898/99. године **Д. Туцовић** је учио и завршио VI разред *приватне* Ужичке реалке. До оснивања приватне реалке дошло је после затварања Ужичке реалке „због јаких социјалистичких утицаја" (**С. Димитријевић** из напомене под 1).

нак *Нова теорија трансинскриптних сфера.*[4] Реч је о преводу чланка *Nouvelle théorie des spheres transinscrites,* чији је аутор „*Отац* **Кипријан,** *светогорски монах, пређашњи Кнез* **С. Вјаземски,** *истраживач*", а који је у броју од 15. септембра 1898. године објавио париски научни часопис *Revue générale des sciences pures et appliquées.*[5] У фусноти у вези с насловом текста уредништво *Наставника* дало је следеће обавештење: „Ову новину послао нам је **Дим. J. Туцовић,** ученик VI раз. Ужичке Реалке. По препоруци својега наставника математике он је превео овај чланак из *Revue générale des sciences*".[6]

би се могло сматрати да припада важан за студију живота и дела **Димитри-** продукцији, била — бар унеколико и бар у једном периоду његовог гимназијског школовања — предмет пажње и интересовања младог **Туцовића.** Заслуга за буђење и такво усмеравање овог његовог интересовања припада, свакако, и његовом тадашњем професору математике.[7]

У сваком случају, из чињенице што је професор математике баш **Туцовићу,** а не неком другом од својих ђака, предложио и поверио превођење овог математичког рада, објављеног у угледном француском часопису, скоро са сигурношћу може се извести закључак да је он имао високо мишљење о озбиљности **Туцовићевог** интересовања за математику и његовим одговарајућим предзнањима, као и да је сматрао сасвим солидним његово познавање француског језика.[8]

---

[4] *Наставник,* лист Професорског друштва, Београд, година 1899, **3—4.** свеска, март и април, књига X, власник Професорско друштво, одговорни уредник проефсор Ранко Петровић.

[5] *Revue générale des sciences pures et appliquées,* **9** (1898), **17,** pp. **665—666.** Захваљујемо поч. **Лазару Трифуновићу** (1929—1983) који нам је из Париза послао фотокопију чланка оца Кипријана.

[6] *Наставник* **10** (1899), стр. **153.**

[7] Нисмо успели прецизно утврдити име професора математике Ужичке реалке који је саветовао младом **Димитрију Туцовићу** да преведе рад оца Кипријана и објави га у *Наставнику.* Према *Шематизмима Србије* за 1895—1899. годину, установили смо да су у Ужичкој реалци математику и нацртну геометрију предавали професори **Јован Дравић** и **Атанасије Савић.** Од ове двојице професора, један је имао жељу да Туцовића „вине у свет математике". За **Туцовићевог** професора математике веома је значајан податак да је при крају прошлог века „у далеком Ужицу" добијао и читао страни часопис *Revue générale des sciences pures et appliquées*!

[8] Према *Шематизмима Србије* за 1895—1899. годину, установили смо да је у Ужичкој реалци француски језик предавао професор **Урош Кубуровић.** Поред француског, млади **Туцовић** је добро познавао и немачки језик. „Под утицајем Радована Драговића, који му је слао литературу, **Д. Туцовић** је савладао немачки језик. У петом разреду гимназије 1897/98. он је већ толико знао немачки да је читао без речника..." (**С. Димитријевић:** наведено под 1).

*
* *

Самом раду оца **Кипријана** претходио је краћи уводни текст уредника француског часописа **Луја Оливјеа** *(Louis Olivier)*. У њему је поменута недавна посета Светој Гори, и посебно „руском манастиру Росикону",[9] групе од 350 туриста, чију је екскурзију иначе организовао сам часопис, као и пријатно изненађење ових посетилаца Росикона кад их је тамо дочекао „монах који перфектно говори француски" и који је отпрве деловао као човек високе културе, научник и личност „жедна идеала". Даље се, у овом кратком али срдачно, топло написаном уводу, каже да је то заиста био велики научник, пре монаштва *славни истраживач*, који је сада, као скроман монах, избегавао да ту своју прошлост макар помене; најзад се саопштава да је он, тадашњи отац **Кипријан** а раније кнез **Вјазнемски,** извесно време после тога *Ревији* упутио „један занимљив рад из геометрије", који она објављује без измена, „желећи да мисли руског научника остави сву њену особеност, и начину на који је он њу сам изразио, сву његову арому".[10]

Приметимо да сама чињеница овакве туристичке екскурзије баца занимљиву светлост на време — крај 19. века — у коме се догодила: није баш феномен организованог масовног туризма, у свим његовим видовима, искључиво својствен нашем добу, овим последњим деценијама; и скоро пре сто година извођене су туристичке шетње заиста импозантне масовности, и то специјализованог, истраживачког типа, у организацији једног научног часописа, што ни данас није сувише чест догађај! Сама *Revue générale des sciences* била је у то време светски угледан часопис, добрим делом информативно-популаризаторског карактера, али и са прилозима озбиљних научних претензија.

Рад оца **Кипријана** односи се на правилне полиедре и за њих уводи и проучава тзв. трансинскриптне (у **Туцовићевом** преводу „крозуписане", могло би се рећи и „надуписане") сфере, тј. сфере које додирују све ивице тих полиедара. Ово би била трећа врста сфера које се доводе у везу с правилним полиедрима, поред општепознатих уписаних и описаних сфера. Пошто је на једноставан начин установио постојање једне и само једне овакве сфере за сваки правилни полиедар и дао формулу која изражава њен полупречник помоћу полупречника описане сфере и дужине ивице полиедра, аутор наводи низ особина трансинскриптних сфера и чињеница

---

[9] Руски манастир Росикон (Стари Русик) у Светој Гори саграђен је у 12. веку и налази се на пола часа од обале у унутрашњости копна. „... у њему је дотадањи кнез хумски **Растко**, син **Немањин**, примио ризу и добио име **Сава**". Једно време Стари Русик је био у рукама српских монаха. Манастир је у почетку 14. века изгорео, а затим обновљен. — Сви подаци из књиге **А. Дероко**: *Света Гора*, Београд 1977.

[10] *Revue générale des sciences...*, наведено, стр. **665.**

у вези с њима, као и још две формуле за полупречник трансинскриптне сфере, напомињући да би се могао навести још велики број других особина „ових занимљивих сфера". Он, међутим, констатује да је већ оно што је изложио довољно за увиђање важне улоге коју те сфере могу одиграти у проучавању правилних полиедара, благодарећи на првом месту већој једноставности наведених формула, веза и својстава од оних у случајевима уписаних и описаних сфера, што трансинскриптне сфере чини погоднијим, нарочито за израчунавање метричких елемената правилних полиедара. Ово своје тврђење отац **Кипријан** образлаже и конкретизује с неколико посебних примера. После напомене да би сфере у питању такође могле играти значајну улогу у испитивању *двојног преламања* и *поларизације светлости*, отац **Кипријан** на крају истиче још једну занимљиву околност: позната чињеница да сваком метричком или дескриптивном својству једног правилног полиедра одговара аналогно својство њему коњугованог полиедра, била би, уколико се не би разматрале и трансинскриптне сфере, него само уписане и описане, нарушена паром *коцка-октаедар:* док је однос дужине ивице коцке и полупречник њене уписане сфере рационалан, са коцком коњугован октаедар (а такође и ниједан други правилан полиедар) нема сличну особину — уколико се не узме у обзир и трансинскриптна сфера. Међутим, управо је ивица октаедра у рационалном односу с полупречником његове трансинскриптне сфере, и тако се, захваљујући овим сферама, уочена правилност, симетрија у свету правилних полиедара савршено заокругљује.

Скоро сва тврђења и формуле оца **Кипријана** дате су без доказа, али директним проверавањем и консултовањем литературе установили смо тачност већине њих, а нема разлога за претпоставку да и остале нису такве.[11] Нема озбиљног разлога ни за сумњу у то да је отац **Кипријан** сасвим самостално, сопственим мисаоним напором, без репродуковања туђих идеја и сазнања, дошао и до појма трансинскриптне сфере и до свих осталих резултата и расуђивања која његов рад садржи. О овоме сведочи и особеност и консеквентност његовог начина размишљања и специфична, лично

[11] У Д. Туцовићевом преводу има неколико штампарских грешака у отиску математичких израза. Тако, у другом изразу на страни 154. треба да стоји

$$\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12},$$

као у оригиналном тексту, а одмах затим

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

обојена форма његовог излагања и изражавања, што је истакао и уредник *Ревије* горе наведеним речима. У том смислу, садржај овог рада оца **Кипријана** могао би се сматрати оригиналним доприносом. Мора се, међутим, рећи да је не само до појма трансинскриптне сфере (под другим називом „полуописана сфера", у енглеској верзији „med-sphere") него и до скоро читавог његовог садржаја — геометријска наука до времена објављивања овог **Кипријановог** чланка већ била дошла, превазишавши га чак у неким правцима. Наиме, познато је да се правилним полиедрима бавила већ античка грчка математика; тако 13. и 14. књига **Еуклидових** *Елемената* садрже неколико метричких особина ових полиедара, а посебно у 13. књизи описане су конструкције свих њих.[12] Каснији векови донели су знатно проширење и употпуњење знања о правилним полиедрима. То нарочито важи за 18. и 19. век (**Ојлерове** опште теореме[13] и с њима у вези доказ да су Платонова тела, њих пет укупно, једини правилни полиедри). Може се сматрати да су отприлике до пред крај 19. века откривене и све метричке и остале битне особине правилних полиедара у обичном, тродимензионалном простору, и тиме је практично завршено проучавање тих полиедара. У ово треба, наравно, укључити и трансинскриптне сфере и њихове особине. Према специјалисти за ову област геометрије, кога смо консултовали, није познато ко је први дефинисао ове сфере, али већ у уџбенику геометрије холандског аутора **Van Swinder-a** (за своје време изврсној књизи), чији је енглески превод изашао 1834. године, налази се известан број резултата у вези с њима. На том подручју у 19. веку истакла се **Alisa Scott-Boole** (кћи чувеног математичара и логичара **G. Boole-a**). У њеним радовима и у каснијим радовима других геометара тежиште интересовања помера се ка испитивању полиедара и полигона у вишедимензионалним просторима. У том правцу до краја 19. века добијен је низ занимљивих и значајних резултата. Све ово, међутим, не поништава унутрашњу, субјективну — да тако кажемо — оригиналност и аутентичност рада оца **Кипријана** и онога што је у њему добијено. Сем тога, поменута истраживања, вршена у неколико претходних деценија 19. века, у време о коме је реч, још су добрим делом имала уско специјалистички карактер и статус и као таква била су ван видокруга шире научне и математичке јавности. Тако се могло десити да не само математичар-аматер какав је био отац **Кипријан** у најбољем уверењу овај свој рад напише и упути часопису, него и да уредник часописа *Revue générale des sciences* **Луј Оливје** исти рад прихвати и презентира као *Нову теорију трансинскриптних сфера.*

Тек у коментару који отац **Кипријан** прикључује последњем разматрању у овом раду — оном о иначе непотпуној а тек тран-

[12] *Еуклидови Елементи,* Тринаеста књига са додатком такозване четрнаесте и петнаесте књиге, превео и коментар додао **Антон Билимовић,** Српска академија наука, Класични научни списи, књига XIII, Математички институт, књига **13,** Београд, 1957, стр. **85.**

[13] **Leonard Euler,** 1707—1783.

синскриптним сферама до краја успостављеној симетрији у свету правилних полиедара — долази до изражаја **Кипријанова** тадашња „професија", наиме, његова монашка, духовничка опредељеност и усмереност: „Ова једноставна чињеница већ је била побудила радозналост многих геометара, који, не желећи да допусте да од **Творца** потиче нека неправда, поготову према неживим стварима, нису могли да схвате зашто је само коцка у овом повлашћена на рачун свог коњугованог полиедра. Било је то као неки изазов бачен људском духу, та несхватљива неправилност..."[14] Некима ће свакако ова размишљања оца **Кипријана** изгледати наивна, а могло би се поставити и питање њихове исправности и умесности са строго теолошког становишта (разматрање о „правди" и „неправди" према „неживим стварима", које су заправо апстракције, као да пре припада неком религиозном сентиментализму него озбиљном теолошком ставу). Чини нам се, ипак, да има духовите инвенције у овом **Кипријановом** запажању и прикљученој интерпретацији, као и елеганције у начину на који је једно и друго исказано.

*

* *

Туцовићев превод **Кипријановог** француског текста, који овде репродукујемо заједно и паралелно с француским оригиналом, у

Димитрије Туцовић из гимназијских дана; снимљен у Ужицу 1898. године, у време када је преводио математички текст оца Кипријана

[14] *Revue générale des sciences...*, наведено, стр. **666.**

великој мери је коректан и успео.[15] У великој већини случајева **Туцовић** је добро схватио тачан смисао реченице и нашао му одговарајућу, прикладну формулацију на нашем језику. Умесно је што у неким случајевима није настојао да до ње дође непосредном заменом сваке речи нашом речи истог значења, него је (као што се то често у добрим преводима иоле комплекснијих, тежих текстова чини — и мора да чини), одступајући од буквалности, друкчијим речима и комбинацијама речи постизао адекватно преношење суштине смисла — уз вођење рачуна о контексту — у наш језички медијум. У таквим ситуацијама, наравно, често није једнозначно одређено како треба поступити, па преводилац има већу или мању слободу избора, избора у коме могу доћи до изражаја његови афинитети и преференције, особености његовог личног става. Тако, нека **Туцовићева** решења одају његову већ тадашњу опредељеност за „реални правац" (**Светозар Марковић** и следбеници), чији је утицај на омладину, нарочито средњешколску, баш у то време био у јеку: и кад није изричито заступао атеистичке или социјалистичке тезе, правац је веома много инсистирао на агностицизму у односу на „последња питања" и на реализму и социјалном утилитаризму у животу и литератури. Као јасна манифестација овог става, уз одузимање великог почетног слова **Творцу** (Créateur) из **Кипријановог** текста, пада у очи околност да је сам отац **Кипријан** — „un assoiffé d'idéal", дакле, у дословном значењу „човек жедан идеала" (или, можда, нешто другачије али по смислу слично речено, „човек страсно привржен идеалу"), из уводног текста **Луја Оливјеа** у **Туцовићевом** преводу постао само „човек пун идеала": идеале реалан правац свакако прихвата и цени — поготову као корисне инструменте друштвеног прогреса, али да идеал као такав буде унутрашња потреба, чак предмет нечије жеђи — то је за младог **Туцовића** (као и за његовог наставника, вероватно) представљало ипак мало претерано романтичарски и идеалистички став — неприхватљив макар и у преводилачкој репродукцији! Приметимо и то да је извесна непотпуност **Туцовићевог** тадашњег владања француским језиком, заједно с недостатком искуства у превођењу овакових, сложенијих текстова, учинила да његов превод на неколико места не буде адекватан. Тако му се, примера ради, скоро на самом почетку превода, десило да уместо коректног „Није уопште било потребно бити нарочито учен да би се у њему распознао . . ."[16] — напише „И ако он није био велики свештеник,

[15] У наведеној књ. 1 *Сабраних дела Димитрија Туцовића* (Београд, 1975) објављене су *Животописне белешке* (одабрао и редиговао **Сергије Димитријевић**, стр. 589—671) у којима се наводи Туцовићев превод. „Први превод Д. Туцовића (са француског језика) објављен је у време када је он био ученик VI разреда ужичке реалке. То је био чланак **Кипријана** (**С. Вијаземски**), *Нова теорија трансинскриптних сфера*, „Наставник" X, 1899, св. **3** и **4**, март и април, стр. **153—156**". Аутори овог рада су знатно пре ове белешке открили овај Туцовићев превод истражујући нашу математичку прошлост кроз часописе нашег 19. века.

[16] *Revue générale des sciences . . .*, наведено, стр. 665.

ипак се у њему могао распознати...“[17] У основи ове омашке налази се превиђање чињенице да реч „*clerc*“ поред значења „свештеник, свештено лице“ има и значење „учен“, што је учинило да **Туцовићу** сасвим измакне прави смисао овог места. Нешто даље, млади **Туцовић** је „... voulant laisser à la pensée du savant russe tout son caractère, et à la façon dont il l'a exprimée toute sa saveur“[18] — превео са „... хотећи да остави у мисли руског научника сав његов карактер и метод, којим је изразио пуну научност.“[19] У питању је очигледно промашај условљен тиме што се — због почетног дела *sav* — речи *saveur*, која иначе значи *укус* (или, у овом случају, пре *арома*), по аналогији са *savant*, дало значење *научност*. Још неколике некоректности у преводу знатно су мање и мање значајне. Младом **Туцовићу**, наравно, не треба замерити што је извесне непрецизности у математичким формулацијама, које су у оно време биле уобичајене и углавном толерисане (на пример, писање „трансинскриптна сфера“ уместо исправног „полупречник трансинскриптне сфере“ у формулацијама особина под 1 и 2), преузео од аутора — оца **Кипријана** не коригујући их.

*

* *

На основу уводног *Ревијиног* текста, као и самог **Кипријановог** чланка, сигурно је да се отац **Кипријан** математиком бавио као аматер, тако да математика није била она наука у којој се пре монаштва прославио као *истраживач* (explorateur). Није јасно која је то наука била, али веома је вероватно да нису у питању ни физика или хемија, које је, као што се види, такође познавао, него нека од „теренских“ природних наука, као што су географија, геологија, ботаника или зоологија, или можда етнологија, јер француска реч *explorateur* баш означава теренског истраживача, никако само кабинетског или лабораторијског. Нема сумње да он, пре замонашења **кнез Вјаземски,** потиче из високог руског племства, а скоро је сигурно да се у световној фази живота више или мање кретао у круговима тог племства. Биће да је и касније, као светогорски калуђер, сачувао нешто од манира и префињености тог великог света — и то у најбољем значењу речи. Тиме се може објаснити онај шарм личности којим је, уз савршено владање француским језиком и друге своје квалитете, импресионирао групу француских посетилаца Росикона, свакако највећим делом интелектуалаца. Та импресионираност и симпатија још трепере у неколико месеци касније писаном извештају уредника **Л. Оливјеа.** Радозналост читаоца ових текстова, наравно, побуђује разлог његовог напуштања световног живота и каријере, а по свој прилици и главних научних активности, ради монашке смирености и смерности. Лежи ли он, као што то обична, да не кажемо банална, читаочева реакција одмах, аутоматски претпоставља, у неком

[17] *Наставник* **10** (1899), стр. **153.**

[18] *Revue générale des sciences...*, наведено, стр. 665.

[19] *Наставник* **10** (1899), стр. **153.**

ударцу судбине, животној катастрофи, тешком разочарању у некога или у нешто, или је у питању логичан исход постепеног сазревања и продубљивања истинске религиозности кнеза и научника **Вјаземског**? Наша настојања да било од Свете Горе (додуше, само преко неких наших монаха из Хиландара), било од Института за историју АНСССР добијемо било какав податак о оцу **Кипријану,** односно кнезу **Вјаземском** — нису досад дала никакве резултате.[20] Није мало тужна чињеница што се за неког ко је пре мање од 90 година био славно име у светској науци — данас, и то на местима где би првенствено требало да их буде, не могу наћи ни основни докази постојања и идентитета, а камоли неки ближи подаци о животу и постигнућима: Sic transit ...! Не прихватајући коначност оваквог закључка, надамо се бар неким плодовима наших даљих покушаја у истом правцу.

И тако, ближи аналитички увид у овај Кипријанов рад, Туцовићев превод тог рада и две пропратне уредничке белешке открива више занимљивих околности. До неких закључака долази се са сигурношћу на основу тих текстова, нешто се са извесном основаношћу може закључити екстраполирањем поузданих чињеница, а много остаје да се само, са више или мање разлога и среће, претпоставља, нагађа. На тај начин, њихово испитивање, без добијених допунских података — засад, дајући извесне резултате, још више делује као подстрек: да се потпуније испита и осветли, у неким димензијама које досад нису биле баш у центру пажње, рана младост **Димитрија Туцовића,** разни аспекти интелектуалног формирања будућег социјалистичког лидера и идеолога; такође, да се сазна више о необично занимљивој, а не мање загонетној, личности и животу кнеза **Вјаземског**, касније оца **Кипријана;** како о његовим научним активностима пре замонашења, о области којој су оне припадале и о карактеру и садржају достигнућа која су га прославила у светској научној јавности, тако и о његовом каснијем светогорском животу, о његовим математичким, евентуално и осталим научним и уопште интелектуалним, духовним — и духовничким — делатностима у то доба, на крају прошлог и почетку нашег века, у времену које умногоме представља судбоносну границу, прелаз између две различите епохе — за свет, па и за Свету Гору! Од посебног интереса било би, наравно, евентуално установљавање извесне везе и сарадње овог руског монаха и интелектуалца с нама, Србима, с нашим Хиландаром.

Тако су се, у *Наставнику* од пре скоро деведесет година и сада, у овом нашем напису, два пута до сада за тренутак укрстили путеви две јединствене личности — руског кнеза, па монаха **Кипријана** и српског социјалисте **Туцовића,** личности којима је, поред свих дубоких међусобних разлика, било заједничко извесно занимање за математику, и наклоност према њој, и које су — на врло различите начине, свакако, али обе истински и суштински — пре свега биле „жедне идеала".

[20] Рецимо, писмо Института за историју СССР, АНСССР од 29. јуна 1981. са потписом заменика директора Института др **В. И. Буганова.**

9e ANNÉE N° 17 15 SEPTEMBRE 1898

REVUE GÉNÉRALE

DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

CHRONIQUE ET CORRESPONDANCE

§ 1. — Mathématiques

Nouvelle théorie des sphères transinscrites. — *Quand, il y a quelques mois, la* Revue *conduisit 350 touristes au couvent russe du Rossicon (Mont-Athos), les voyageurs eurent la très agréable surprise d'y être accueillis par un moine qui parlait parfaitement le français. Point n'était besoin d'être grand clerc pour discerner en lui plus qu'un esprit très cultivé, un assoiffé d'idéal et un savant. Mais le père Cyprien — c'est ainsi qu'on l'appelait — cachait modestement sous cette désignation monastique le nom qu'il a rendu célèbre parmi les explorateurs, et s'abstenait de parler de sa science de prédilection. Aujourd'hui, la* Revue *reçoit de lui le très curieux travail de Géométrie qu'on va lire. Elle le publie sous la forme même que lui a donnée l'auteur, voulant laisser à la pensée du savant russe tout son caractère, et à la façon dont il l'a exprimée toute sa saveur.* **L. O.**

J'appelle sphère transinscrite à un polyèdre celle qui est tangente à toutes ses arêtes.

On sait que tout polyèdre régulier possède une sphère inscrite et une sphère circonscrite; outre cela, le tétraèdre possède encore quatre sphères exinscrites (pas davantage, car dans ses combles il n'y en a pas). Aucun autre polyèdre régulier ne saurait en admettre, puisque ses faces opposées sont toujours parallèles; mais, à la place de cela, chaque polyèdre régulier (le tétraèdre y compris) possède une sphère transinscrite, qui *lui est concentrique, touche toutes ses arêtes en leurs milieux et coupe toutes ses faces suivant des cercles qui leur sont inscrits.*

Maintenant, le lecteur peut comprendre pourquoi j'ai donné le nom de « transinscrite » pour ce genre de sphères, puisque, tout en étant inscrites, elles coupent le polyèdre et en sortent par autant de calottes sphériques que le polyèdre a de faces.

Il est facile de démontrer l'existence de pareilles sphères. En effet, soit un polyèdre P de nature quelconque, f sa face et a son arête; R le rayon de la sphère qui lui est circonscrite. Le triangle qui a son sommet au centre et pour base l'arête, est isocèle, car ses deux côtés sont les rayons; par suite, la perpendiculaire abaissée du centre sur l'arête tombe en son milieu et est égale à la racine carrée de la différence entre le carré du rayon et celui de la moitié de l'arête, c'est-à-dire

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

elle est donc constante; la sphère qui l'aura pour rayon, et de plus, aura son centre au centre du polyèdre, sera, par conséquent, tangente à toutes les arêtes du polyèdre en leurs milieux, et elle sera unique de ce genre, c'est-à-dire indépendante de la nature du polyèdre et même de son espèce, car ceux d'espèce supérieure possédant tous un noyau convexe, on pourra raisonner sur ce noyau comme on l'a fait sur le polyèdre ordinaire.

Or, l'espèce d'un polyèdre étant subordonnée à sa nature, on voit que les polyèdres d'espèce supérieure auront les mêmes sphères transinscrites que ceux dont ils dérivent d'après le système de Cauchy.

Les sphères transinscrites ont des propriétés remarquables, mais on appréciera surtout l'importance de ces nouvelles sphères en remarquant que *tandis que les rayons des sphères inscrite et circonscrite ne s'expriment en fonction de l'arête du polyèdre que d'une façon très compliquée, le rayon de la sphère transinscrite s'exprime très simplement en fonction de cette arête.* Par exemple, d'après Cauchy, en prenant l'arête de l'icosaèdre pour unité, le rayon de la sphère qui lui est inscrite est égal à

$$\frac{\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}$$

et celui de la sphère circonscrite à

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Dans les mêmes conditions, le rayon de la sphère transinscrite est égal à

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

on voit combien cette expression est plus simple que les précédentes : elle ne contient qu'un seul radical et qui se calcule fort aisément; le même cas se présente concernant les autres polyèdres. Si nous désignons par I l'inclinaison de deux faces adjacentes, et par ρ le rayon de la sphère transinscrite, nous pourrons déduire facilement la formule générale qui servira pour le calcul de la surface et du volume de cette sphère lorsque l'arête du polyèdre est donnée et *vice versa* quand c'est le rayon de la sphère qui est connu. A cet effet, désignons par k le quotient de la demi-circonférence, par π le nombre qui exprime combien les faces du polyèdre en question ont de côtés et par L le quotient de la même quantité par le nombre exprimant combien il y a d'arêtes qui aboutissent à chaque sommet. (De sorte que k et L ne peuvent avoir que les valeurs suivantes : 36°, 45°, 60°, comptant 360° pour la circonférence.)

D'après des formules trigonométriques connues, nous obtiendrons :

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cot k}{\cos \frac{I}{2}};$$

ou bien, en éliminant I, nous aurons :

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos k}{\sqrt{\sin^2 k - \cos^2 L}};$$

ce qui veut dire que le rayon de la sphère transinscrite est égal à la moitié de l'arête multipliée par le rapport de la cotangente de k au cosinus de la moitié de l'inclinaison entre les faces. Connaissant donc l'espèce et la nature du polyèdre, on peut toujours calculer aisément le rayon de la sphère qui lui est transinscrite, par suite sa surface et son volume, et, réciproquement, l'arête, la surface et le volume du polyèdre, si ce rayon est connu.

La simplicité des formules qu'on trouve comparativement à celles qui correspondent aux sphères inscrite et circonscrite donne un immense avantage à l'emploi de ces sphères sur les autres, et je ne doute pas que leur considération facilitera beaucoup l'étude des polyèdres et simplifiera bien des calculs. Outre cela, les sphères transinscrites ont beaucoup de propriétés fort curieuses :

1. *La sphère transinscrite au tétraèdre est moyenne proportionnelle entre les sphères qui lui sont inscrite et circonscrite;*

2. *La sphère transinscrite à l'octaèdre est moyenne proportionnelle entre les sphères transinscrites au cube et au tétraèdre de même arête;*

3. *Si l'on construit un parallélipipède rectangle avec les rayons des sphères transinscrites au tétraèdre, au cube et à l'octaèdre de même arête, son volume sera égal au cube dont l'arête n'est que la moitié de celle des polyèdres considérés;*

4. *La différence entre le rayon de la sphère transinscrite au dodécaèdre et à l'icosaèdre de même arête est égale à la moitié de cette arête.*

5. *Si l'on construit un triangle équilatéral avec le rayon de la sphère inscrite à l'icosaèdre et qu'on lui circonscrive un cercle, le rayon de ce cercle sera le tiers du rayon de la sphère transinscrite au dodécaèdre de même arête.*

La démonstration de ces théorèmes n'offre aucune difficulté et chaque géomètre un peu expérimenté dans l'Analyse les établira sans peine.

Je pourrais citer encore d'autres propriétés de ces curieuses sphères; mais, ce que j'en ai dit suffit déjà à en montrer l'importance et à faire saisir le rôle utile qu'elles sont appelées à jouer dans les questions de Géométrie, notamment dans le calcul des éléments des polyèdres réguliers, où, ainsi que je l'ai déjà fait voir, elles remplacent avantageusement les sphères inscrite et circonscrite à cause de la simplicité relative de leurs formules.

J'ajouterai qu'elles jouent un grand rôle en Optique dans la réfraction double (phénomène produit par certains cristaux), ainsi que dans la polarisation de la lumière.

Je terminerai cet article en appelant l'attention du lecteur sur un fait assez curieux : — c'est que ces sphères rétablissent la symétrie des polyèdres conjugués, dérangée par les sphères inscrites et circonscrites. On sait qu'à chaque propriété descriptive ou métrique d'un polyèdre répond une propriété analogue de son conjugué. Or, parmi tous les polyèdres, il n'y avait jusqu'à présent que le cube seul qui s'exprimait rationnellement en fonction du rayon de sa sphère inscrite. Effectivement, aucun autre polyèdre régulier ne peut être exprimé en fonction rationnelle ni du rayon de sa sphère inscrite, ni de la circonscrite, pas même son conjugué, l'octaèdre ne jouissait d'aucune propriété analogue. Ce fait singulier avait déjà piqué la curiosité de bien des géomètres, qui, ne voulant pas admettre qu'il y ait injustice de la part du Créateur, surtout concernant les choses inanimées, ne pouvaient comprendre pourquoi le cube seul était favorisé en cela aux dépens de son conjugué. C'était comme un défi jeté à l'esprit humain, cette irrégularité inconcevable!...

Actuellement, cette anomalie n'existe plus, et l'octaèdre a reconquis l'avantage que le cube, son conjugué, avait sur lui, car, à son tour, il est le seul polyèdre régulier qui s'exprime rationnellement en fonction du rayon de sa sphère transinscrite; son arête est égale au double de ce rayon, tout juste comme celle du cube est égale au double du rayon de sa sphère inscrite.

On peut encore conclure de là que les sphères transinscrites font le pendant des sphères inscrites, ou, comme on dit en Géométrie, leur sont conjuguées.

Père Cyprien,
Moine du Mont-Athos,
Ci-devant Prince C. Wiasemsky, explorateur.

ГЛАСНИК

НОВИНЕ ИЗ НАСТАВЕ И НАУКЕ

Нова теорија трансинскриптних сфера.[1]) — „Кад је, пре неколико месеци, *Revue générale des sciences* приредило екскузију за 350 туриста у руски манастир *Росикон (Св. Гора)*, путници се пријатно изненадише, што их тамо дочека један калуђер, који говораше потпуно француски. И ако он није био велики свештеник, ипак се у њему могао распознати одмах један врло развијен дух, човек пун идеала и научник. Али отац *Кипријан* — тако га зваху — скромно кријаше под оним монашким знацима име, које га је учинило славним међу испитиваоцима, и уздржаваше се да говори о свом знању, до кога је дошао једино из наклоности. Данас је *Revue* примио од њега врло интересантан рад из Геометрије, који овде износимо. Поменути лист донео га је у истом облику у каквоме га је писац послао, хотећи да остави у мисли руског научника сав његов карактер и метод, којим је изразио пуну научност"

* * *

Трансинскриптном (крозуписаном) сфером једног полиедра ја називам ону сферу, која додирује све његове ивице.

Зна се, да сваки правилан полиедар има једну уписану и једну описану сферу; осем тога тетраедар има још четири уписане сфере (не више, јер их нема више у његовим рогљевима). Сваки други правилан полиедар не може их толико имати, јер су њихове супротне стране паралелне; али у место тога, сваки правилан полиедар (ту спада и тетраедар) има једну трансинскриптну сферу, која *има заједнички центар са полиедром, додирује све његове ивице у средини и сече све његове стране по круговима, који су им уписани.*

Сада читалац може разумети, зашто ја овој врсти сфера дајем назив „трансинскриптне", јер како су све уписане, оне секу полиедар и на површини се појављује толико сферних калота, колико полиедар има страна.

[1]) Ову новину послао нам је *Дим. Ј. Тупошић*, ученик VI раз. Ужичке Реалке. По препоруци својега наставника математике он је превео овај чланак из *Revue générale des sciences*. Уредништво.

Лако је показати, да постоје такве сфере. Узмимо да је P полиедар ма какве природе, f његова страна, a његова ивица а R полупречник описане сфере. Троугао, чији је врх у центру, а основица ивица, равнокрак је, јер су његове две стране полупречници, према томе, управна спуштена из центра на ивицу пада у њену средину и једнака је: квадратном корену из разлике квадрата полупречниковог и квадрата половине ивице, т. ј.

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

она је дакле константна; сфера, чији ће она бити полупречник а шта више имаће свој центар у центру полиедра и према томе додириваће све ивице полиедрове у њиховој средини, биће једина овог реда т. ј. независна од природе полиедра па чак и од његове врсте, јер ове сфере више врсте, које имају једну испупчену средину, могло би се размишљати о овој средини, као што је то учињено на простим полиедрима.

Но, пошто је врста полиедра зависна од његове природе, види се, да ће полиедри сложеније врсте имати исте трансинскриптне сфере као и они, од којих се изводе по систему *Cauchy*-а.

Трансинскриптне сфере имају важних особина, али ће се оценити нарочито значај ових нових сфера примећујући, *како се полупречник трансинскриптне сфере изражава врло просто у функцији полиедрове ивице, докле се полупречници уписатих и описатих сфера изражавају у функцији ове ивице само начином компликованим.* На пр. по Cauchy-у, узимајући ивицу икосиедра за јединицу, полупречник уписане му сфере једнак је:

$$\frac{\sqrt{3(3+\sqrt{5})}}{12};$$

а полупречник описане сфере:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Под истим условима полупречник трансинскриптне сфере једнак је:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

види се, колико је овај израз простији од претходних: он садржи само један прост корен, који се лако израчунава; исти се случај показује, кад се тиче других полиедара. Ако обележимо са J угао нагиба двеју суседних страна, а са ϱ полупречник трансинскриптне сфере, лако ћемо извести општу формулу, која ће послужити за израчунавање површине и запремине ове сфере, када је дата ивица полиедра и обрнуто, кад је познат полупречник сфере. У тој намери обележимо са K количник полукруга са бројем, колико стране полиедрове имају полигонских страна и са L количник исте количине са бројем, који исказује, колико ивица чини сваки рогаљ. (Тако да K и L могу имати само следеће вредности: 36°, 45°, 60°, рачунајући круг са 360°).

Према познатим тригонометриским формулама добићемо:

$$\varrho = \frac{a}{2}\,\frac{\cot K}{\cos\frac{J}{2}};$$

то што се хоће да каже, да је полупречник трансинскриптне сфере једнак са половином ивице, умноженом са односом контангенте K и косинуса половине нагибног угла између страна. Познавајући дакле врсту и природу полиедра, може се увек лако израчунати полупречник сфере, која му је трансинскриптна, по томе њена површина и запремина, и обратно: може се одредити ивица, површина и запремина полиедра, кад је познат полупречник.

Простота формула, које се налазе, у вези с оним, које одговарају уписаним и описаним сферама, даје огромну превагу у употреби ових сфера пад другима, и ја не сумњам, да ће њихово разматрање олакшавати проучавање полиедара и упростити много израчунавање. Осим тога, трансинскриптне сфере имају много врло интересантних особина. Тако:

1, Трансинскриптна сфера у тетраедру средња је пропорционала између уписаних му и описаних сфера;

2, Трансинскриптна сфера у октаедру средња је пропорционала између транс. сфере у коцки и тетраедру исте основе;

3, Ако се конструише један правоугли паралелопипед са полупречницима трансинскриптних сфера у тетраедру, коцки и октаедру исте ивице, његова ће запремина бити једнака са запремином коцке, чија је ивица само половина ивице од посматраних полиедара;

4, Разлика између полупречника трансинскриптне сфере у додекаедру исте ивице једнака је с половином ове ивице;

5, Ако се конструише равностран троугао са полупречником описате сфере у икосаедру, и ако му се опише круг, тада ће полупречник овог круга бити трећина полупречника трансинскриптне сфере у додекаедру са истом ивицом.

Доказ ових теорема не изискује никакве тешкоће и сваки геометар мало искусан у анализи утврдиће их без муке.

Ја бих могао навести још других занимљивијих особина ових сфера; али оно, што сам о томе казао, довољно је да покаже њихову важност, и да учини, да узму корисну улогу, коју су позвате да врше у питањима Геометрије, особито у израчунавању елемената правилних полиедара, где оне, како сам ја показао, замењују корисно уписане и описане сфере, због њихових релативно простијих формула.

Додаћу, да оне врше велику улогу у Оптици у двојном преламању (појав, произведен извесним кристалима), исто тако у поларизацији светлости.

Ја ћу завршити овај чланчић, обраћајући пажњу читалаца на један доста интересантан факат а то је: што ове сфере успоставише симетрију спрегнутих полиедара, поремећену уппс. и опис. сферама. Зна се, да свакој дескриптивној или метриској особини једног полиедра одговара аналога особина његовога спрегнутога полиедра. Но, међу свима полиедрима до сада је била само коцка, која се изражаваше рационално у функцији полупречника њене уписане сфере. Заиста, ни један други правилан полиедар не може бити изражен у рационалној функцији, ни полупречника своје уписане ни описане сфере, па и њен спрегнути полиедар, октаедар не имађаше никакву аналогу особину. Овај особити факат беше већ раздражио радозналост многих геометара, који, не хотећи допустити, да ту има неправде са стране творца, нарочито кад се тиче мртвих ствари, не могаху разумети, зашто коцка једина беше удостојена у томе, на штету њеног спрегнутог полиедра. Ова необјашњива неправилност беше бачена у дух људски као нека кво изазивање.

Сад ова неправилност не постоји више, и октаедар је повратио надмоћност, коју коцка, његов спрегнути полиедар, имађаше над њим, јер, што се тиче њега, он је једини правилан полиедар, који се изражава рационално у функцији полупречника трансинскриптне сфере; његова је ивица једнака двоструком полупречнику, потпуно, као што је ивица коцке једнака дрострукем полупречнику уписане сфере.

Још се може отуда извести, да трансинскриптске сфере чине пар са уписаним сферама, или како се то геометриски каже, њима су спрегнуте.

Отац Кипријан,
калуђер свето-горски
пређе *кнез С. Вјаземски.*

ON A MATHEMATICAL TREATISE FROM MOUNT ATHOS AND ITS TRANSLATION INTO OUR LANGUAGE

Summary

The paper analyses all the details on Dimitrije Tucović's first published work. Already as a secondary school pupil (1898), Tucović translated and published a mathematical study by an Athonite monk Cyprian (published in *Revue générale des Sciences*, 9, 1898), which refers to semi-inscribed spheres into the regular polyhedra (*Nastavnik*, 10, 1898, 3—4).

»In this way« (conclude the authors), in the review *Nastavnik* of the almost twenty years ago and now, in this paper of ours, crossed each other, twice so far, for a moment roads of two unique personalities — of the Russian prince and, after that, monk Cyprian and, of the Serbian socialist Tucović, personalities who, in spite of all the profound mutual differences, had in common a certain interest in mathematics and inclination toward it, and who — in very different ways, certainly, but both of them truly and essentially — were, first of all, »thirsty for the ideals«.«

NEKE NAPOMENE O FAKTORIJELU

DUŠAN ADAMOVIĆ, Beograd
DRAGAN TRIFUNOVIĆ, Beograd

1. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Faktorijel broja n, ili n faktorijel, koji se označava simbolom $n!$, definisan je sa

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k,$$

odnosno sa

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

i uz to je $0! := 1$. Recimo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Naziv dolazi od reči factor = množilac, a čita se faktorijel ili faktorijal (zavisi od jezičke osnove).

Francuski matematičar **Luj Arbogast** (Louis François Antoine Arbogast, 1759—1803) prvi je uveo termin faktorijel (factorielle) sa gore navedenim značenjem. To je on uradio u svojoj poznatoj knjizi o diferencijalnom računu **Calcul des Dérivations** (1800. g.)[1]. Nešto docnije, 1808. godine, uvedeno je obeležavanje faktorijela pomoću znaka uzvika !, odnosno u obliku $n!$. Ovo je učinio nemački matematičar **Kramp** (Christian Kramp, 1760—1826).

Simbol za faktorijel ! preuzet je iz interpunkcije običnog jezika i pripada klasi simbola matematičkog jezika koji postoje i u opštem fondu književnog jezika, ali sa različitim značenjem[2]. Inače, nije nam poznato kako je Kramp došao na ideju da upotrebi običan interpunkcijski znak za simbol faktorijela.

Međutim, u 19. veku Krampovo obeležavanje $n!$ nije prihvaćeno. Tako je za faktorijel Gaus (Karl Fridrich Gauss, 1777—1855) koristio oznaku $\Pi(n)$, a Jakobi (Carl Gustav Jacobi, 1804—1851) oznaku Π_n. U engleskoj literaturi tog vremena nalazimo oznaku $\underline{|n}$.

Za vreme prvog svetskog rata, tačnije 1916. godine, **Savet Londonskog matematičkog društva** predložio je da se faktorijel obeležava isto onako kako je 1808. godine predložio Kramp, znači sa $n!$. To je učinjeno dokumentom **Suge-**

---

[1] Arbogast je poznat još po tome, što je u pomenutoj knjizi iz 1800. god. uveo oznaku $D_x y$ za prvi izvod. Ovo obeležavanje je prihvatio Koši (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857) i afirmisao ga.

[2] Isti je slučaj i sa rečima. Recimo, to su reči: otvoreno, zatvoreno, sito, filter i drugo. Bilo bi zanimljivo sastaviti rečnik matematičkih reči (termina) koje su preuzete iz običnog književnog jezika.

stion for Notation and Printing, koje je **Društvo** izdalo 1916. godine. Zanimljivo je primetiti da je ovom **Sugestijom** predložen i izgovor znaka $n!$ i to: n-ushićenost.[3]

2. Godine 1952. **Đ. Kurepa** je uveo „levi faktorijel" definicijom

$$!n := \sum_{k=0}^{n-1} k!,$$

odnosno

$$!n := 0! + 1! + 2! + \ldots + (n-1)!,$$

što je prilično obrađivano, premda levi faktorijel i dalje traži nove istraživače[4].

Zanimljiv je i sledeći rezultat: svaki prirodan broj a može se jednoznačno predstaviti u obliku

$$a = a_1\, 1! + a_2\, 2! + a_3\, 3! + \ldots + a_n\, n!,$$

gde su a_k — celi brojevi, $0 \leqslant a_k \leqslant k$, $a_n \neq 0$[5]. Ovakva reprezentacija broja a za $a_k = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ uzima oblik Kurepinog levog faktorijela.

Primetimo da se ideja Đ. Kurepe da se znak prebaci na levu stranu javlja već 1882. godine, kada je Gerlah uveo iterirani stepen obeležavajući ga stavljanjem izložioca na levu stranu[6]

$${}^{n}a = \left. a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}} \right\} \; n\text{-puta}, \quad a \in \mathbf{R}^{+}.$$

3. Kod znaka faktorijela !, pored njegovog prenošenja, prebacivanja na levu stranu, treba navesti i slučaj kada se ovaj znak **udvostručava**, recimo 17!!. U istraživanju matematičkog pisma posebno se proučava ovaj slučaj **udvostručavanja** simbola. Recimo, simbol dvostrukog integrala je slučaj udvostručavanja simbola za integral. Udvostručavanje simbola može se, pokatkad, i izbeći, kao što se to, na primer, radi kod konačnih diferencija $\Delta\Delta y = \Delta^2 y$ ili kod diferencijala $\mathrm{dd}y = \mathrm{d}^2 y$.

Prema usvojenoj konvenciji, udvostručeni faktorijel $n!!$, ukoliko se u njemu ne stavi $n!$ u zagradu, ima značenje bitno različito od značenja običnog faktorijela $n!$. To značenje nije ni u kom smislu iteracija značenja običnog, jednostrukog faktorijela. Naime, simbol $n!!$ označava proizvod svih parnih brojeva od 2 do n

---

[3] N. V. Aleksandrova: *Matematičeskie termini*, Moskva, 1978.

[4] O levom faktorijelu konsultovati kao prvo Math. Balkanica 4 (1974) i tamo dalje.

[5] V. E. Kolosov, Kvant 1 (1984), str. 42.

[6] O ovome pogledati: Branislav Petronijević, *Logičke primedbe o četvrtoj direktnoj aritmetičkoj operaciji*, Glas CLXXIX, Beograd 1939, 31—39, H. Gerlach, *Zur vierten Rechnungsstufe*,

ili proizvod svih neparnih brojeva od 1 do n, prema tome da li je broj n paran ili neparan. Dakle,

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k),$$

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1).$$

U gore navedenom primeru imamo $17!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$.

Simbol $(n!)!$, međutim, označava faktorijel broja $n!$. Tako je, na primer, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$, dok je $(4!)! = 24!$.

4. Jasno je da se za $n \geqslant 5$ broj $n!$ u decimalnom cifarskom zapisu završava bar jednom nulom, za $n \geqslant 10$ bar dvema nulama itd., naime, da se ukoliko n raste broj $n!$ u decimalnom zapisu završava sve većim brojem nula. U stvari, faktorijel $n!$ ima osobinu da se njegov cifarski zapis završava velikim brojem nula čim je n nešto veći broj. Recimo, $188!$ se završava sa 45 nula[7]. Ako sa $z(n)$ $(\in \mathbf{N} \cup \{0\})$ označimo broj nula kojima se u decimalnom cifarskom zapisu završava broj $n!$ (uzimajući da je $z(n) = 0$ kad se $n!$ ne završava nulom), jasno je da možemo pisati

$$n! = a_n \cdot 10^{z(n)} \qquad (n \in \mathbf{N}), \tag{1}$$

gdje je a_n prirodni broj čija poslednja cifra nije nula. „Empirijskim" postupkom, tj. izračunavanjem izvesnog broja vrednosti faktorijela $n!$, ustanovljava se da se oba faktora desne strane u (1), pa i njihove dužine (brojevi cifara), brzo uvećavaju sa uvećavanjem broja n. Pri tome je, kao što te probe pokazuju, uvećavanje dužine broja a_n, koju ćemo obeležiti sa $\bar{a}_n$, znatno brže od uvećavanja dužine $z(n)$ drugog faktora u (1). Tako se, na primer, za već pomenuti broj $188!$ nalazi da je $\bar{a}_n = 303$, dok je, kao što smo rekli, za isti broj $z(n) = 45$. Sve ove uvide ilustruje sledeća tablica, koja daje izvesne vrednosti za $z(n)$ i $\bar{a}_n$, dobijene izračunavanjem vrednosti broja $n!$ pomoću računara.

n	$z(n)$	$\bar{a}_n$
10	2	5
20	4	15
30	7	26
40	9	39
50	12	53
60	14	68
70	16	85
80	19	100
90	21	118
100	24	134
150	37	226
200	49	326

U vezi sa ovim, od izvesnog je interesa, teorijskog i praktičnog, da se bliže odrede brojevi a_n, $\bar{a}_n$ i $z(n)$. Naše dalje izlaganje odnosiće se uglavnom na brojeve $z(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ i na neka pitanja u bliskoj vezi sa njihovim određivanjem. Tu se najpre javljaju sledeća dva zadatka: **prvo,** da se dobije pogodan postupak, odnosno for-

[7] Math. Balkanica 4 (1974), pp. 702.

mula, za određivanje broja $z(n)$ ($n \in \mathbf{N}$), i **drugo,** da se nekim jednostavnim izrazom proceni asimptotsko ponašanje niza $z(n)$ kad $n \to \infty$. Ovakva dva rezultata daju stavovi 2 i 3. Stav 1 sadrži jednu činjenicu koja se koristi u dokazu stavova 2 i 3, ali je i inače od interesa i ima drugih primena.

Stav 1. Neka je, za prost broj p veći od 1 i prirodni broj n, sa $b_p(n)$ označen najveći celobrojni eksponent stepena broja p kojim je deljiv broj $n!$. Za svako p i n važi

$$b_p(n) = \sum_{1 \leqslant k,\, p^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p^k}\right], \tag{2}$$

gde napisani zbir treba izjednačiti sa nulom ukoliko nema prirodnih brojeva k za koje je $p^k \leqslant n$.

Dokaz. Ovo tvrđenje dokazaćemo matematičkom indukcijom. Neka je prost broj $p > 1$ proizvoljno izabran i potom do kraja rasuđivanja fiksiran. Kako je, sa $k, n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{n}{p^k} = \left[\frac{n}{p^k}\right] + t, \qquad \text{sa } 0 \leqslant t < 1,$$

i odatle

$$n = \left[\frac{n}{p^k}\right] \cdot p^k + tp^k, \qquad \text{sa } 0 \leqslant tp^k < \text{p},$$

pri čemu je svakako tp^k ceo broj, to broj $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ predstavlja najveći od nenegativnih celih brojeva čiji proizvod sa p^k nije veći od n, odnosno, drugačije rečeno, broj pozitivnih celobrojnih umnožaka broja p^k koji nisu veći od n (on je jednak nuli kad takvih umnožaka nema).

Za $n = 1$ tvrđenje važi, jer je $b_p(1) = 0$, a nuli je za $n = 1$ jednak i zbir na desnoj strani u (2), s obzirom na konvenciju u formulaciji stava.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za prirodan broj n. Ako broj $n+1>1$ nije deljiv sa p, za svako $k \in \mathbf{N}$ važe istovremeno nejednakosti $p^k \leqslant n$ i $p^k \leqslant n + 1$, te je, prema gore ustanovljenom, tada

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n+1}{p^k}\right] \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

S druge strane, u istom slučaju je očigledno i $b_p(n+1) = b_p(n)$, tako da se u tom slučaju, s obzirom na induktivnu pretpostavku, dobija

$$b_p(n+1) = b_p(n) = \sum_{1 \leqslant k,\, p^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{1 \leqslant k,\, p^k \leqslant n+1} \left[\frac{n+1}{p^k}\right].$$

Neka je $n + 1$ deljivo sa p i pri tom je m najveći celobrojni eksponent stepena broja p kojim je deljivo $n + 1$. Jasno, da je tada

$$b_p(n+1) = b_p(n) + m. \tag{3}$$

S druge strane, za svako $k \in \mathbf{N}$ sa osobinama $p^k \leqslant n$ i $k \leqslant m$ broj celobrojnih pozitivnih umnožaka broja p^k koji nisu veći od $n+1$ tačno je za jedan veći od broja takvih umnožaka koji nisu veći od n. Ovo, prema gornjem, znači da je

$$\left[\frac{n+1}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p^k}\right] + 1 \quad (k \in \mathbf{N},\ p^k \leqslant n,\ k \leqslant m). \tag{4}$$

$$\left[\frac{n+1}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p^k}\right] \quad (k \in \mathbf{N},\ p^k \leqslant n,\ k > m). \tag{5}$$

Prema (3), (4), (5) i induktivnoj pretpostavci, imamo

$$b_p(n+1) = \sum_{1 \leqslant n,\ p^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p^k}\right] + m =$$

$$= \sum_{1 \leqslant k, p^k \leqslant n, k \leqslant m} \left(\left[\frac{n}{p^k}\right] + 1\right) + \sum_{1 \leqslant k, p^k \leqslant n, k > m} \left[\frac{n}{p^k}\right] + \sum_{1 \leqslant k, p^k = n+1} 1 = \tag{6}$$

$$= \sum_{1 \leqslant k, p^k \leqslant n} \left[\frac{n+1}{p^k}\right] + \sum_{1 \leqslant k, p^k = n+1} \left[\frac{n+1}{p^k}\right] = \sum_{1 \leqslant k, p^k \leqslant n+1} \left[\frac{n+1}{p^k}\right].$$

U ovim jednakostima treba izjednačiti sa nulom svaku sumu kojoj odgovara prazan skup indeksa. Prva suma u drugom redu formula (6) ima m ili $m-1$ članova prema tome da li je $p^m \leqslant n$ ili $p^m > n$, a treći zbir u istom redu u ta dva slučaja respektivno je jednak nuli ili jedinici. U drugom od ova dva slučaja mora biti $p^m = n+1$, zbog čega je tada $1 = \left[\frac{n+1}{p^m}\right]$. Ovim su objašnjeni svi prelazi u (6).

Dakle, u svakom od slučajeva koji dolaze u obzir tvrđenje važi i za prirodan broj $n+1$. Time je završen induktivni dokaz stava.

Primedba 1. Kako je $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ kad $p^k > n$, formula (2) može se pisati i u obliku

$$b_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]. \tag{2'}$$

Primedba 2. Kad od jedinice veći prost broj p nije veći od n (što je, očigledno, potreban i dovoljan uslov da $n! > 1$ bude deljivo sa p), broj $b_p(n)$ je, u stvari, eksponent stepena broja p u kanoničkoj faktorizaciji (reprezentaciji) broja $n!$. Ovo omogućuje da se srazmerno lako dobije ta faktorizacija, čak i kad je broj n nešto veći. To je, na primer, slučaj sa faktorizacijom broja 100!, koja izgleda ovako

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdot 13^{7} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot$$
$$\cdot\, 31^{3} \cdot 37^{2} \cdot 41^{2} \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot$$
$$\cdot\, 79 \cdot 83 \cdot 91 \cdot 97.$$

Primedba 3. U vezi sa prethodnim, primetimo da iz (2), ili iz (2′), izlazi da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi, sa prostim i od jedinice većim brojevima p i q,

$$p < q \Rightarrow b_p(n) \geqslant b_q(n).$$

Drugačije rečeno, ako su u kanoničkoj reprezentaciji broja $n!$ faktori poređani po veličini prostih brojeva čiji su stepeni, tada odgovarajući eksponenti obrazuju nerastući konačni niz.

Stav 2. Broj nula $z(n)$ kojima se završava decimalni zapis broja $n!$ dat je formulom

$$z(n) = \sum_{1 \leqslant k, 5^k \leqslant n} \left[\frac{n}{5^k}\right] \quad (= b_5(n)). \tag{7}$$

Dokaz. Jasno je da je $n!$ deljivo stepenom broja 10 ako i samo ako je deljivo stepenom istog eksponenta i broja 2 i broja 5. Odatle izlazi jednakost

$$z(n) = \min\{b_2(n), b_5(n)\}. \tag{8}$$

Prema primedbi 3, za svako $n \in \mathbf{N}$ je $b_2(n) \geqslant b_5(n)$, pa za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\min\{b_2(n), b_5(n)\} = b_5(n). \tag{9}$$

Prema (8), (9) i stavu 1, dobijamo

$$z(n) = b_5(n) = \sum_{1 \leqslant k, 5^k \leqslant n} \left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Primer. Kako je prema (7) za $n = 188$

$$z(188) = \left[\frac{188}{5}\right] + \left[\frac{188}{5^2}\right] + \left[\frac{188}{5^3}\right] = 37 + 7 + 1 = 45,$$

to se faktorijel ovog broja završava sa 45 nula, tj.

$$188! = a_{188} \cdot 10^{45}.$$

Stav 3. Važi sledeća dvostruka nejednakost

$$\frac{n}{4} - 1 - \frac{5}{4n} - \frac{\ln n}{\ln 5} < z(n) \leqslant \frac{n-1}{4} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{10}$$

i njena posledica — relacija

$$z(n) \sim \frac{n}{4} \quad (n \to \infty). \tag{11}$$

Dokaz. Neka je α_n najveći nenegativan ceo eksponent stepena broja 5 koji nije veći od n. Tada je

$$5^{\alpha_n} \leqslant n < 5^{\alpha_n + 1} \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{12}$$

i odatle

$$\alpha_n \leqslant \frac{\ln n}{\ln 5} \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{13}$$

Prema (7), (12) i (13),

$$z(n)=\sum_{k=1}^{\alpha_n}\left[\frac{n}{5^k}\right]\leqslant\sum_{k=1}^{\alpha_n}\frac{n}{5^k}=n\,\frac{1}{5}\,\frac{1-\dfrac{1}{5^{\alpha_n}}}{1-\dfrac{1}{5}}=$$

$$=\frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{5^{\alpha_n}}\right)\leqslant\frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{4},$$

i takođe

$$z(n)\geqslant\sum_{k=1}^{\alpha_n}\left(\frac{n}{5^k}-\frac{5^k-1}{5^k}\right)=(n+1)\sum_{k=1}^{\alpha_n}\frac{1}{5^k}-\alpha_n=$$

$$=\frac{n+1}{4}\left(1-\frac{1}{5^{\alpha_n}}\right)-\alpha_n>\frac{n+1}{4}\left(1-\frac{5}{n}\right)-\frac{\ln n}{\ln 5}=$$

$$=\frac{n}{4}-1-\frac{5}{4n}-\frac{\ln n}{\ln 5}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Time je dokazana dvostruka nejednakost (10), iz koje neposredno izlazi asimptotska relacija (11).

Primedba 4. Specijalno, za $n=5^m$ $(m\in\mathbf{N})$ formula (7) daje

$$z(5^m)=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{5^m}{5^k}\right]=\sum_{k=1}^{m}5^{m-k}=\sum_{k=0}^{m-1}5^k=\frac{5^m-1}{4}.$$

Ova jednostavna formula za izračunavanje broja $z(n)$ u specijalnom slučaju (ona važi i za $n=5^m+\nu$, $\nu=1,2,3,4$; $m\in\mathbf{N}$) dokazuje da u drugoj nejednakosti (10) jednakost može biti dostignuta.

S druge strane, za $n=5^m-1$ iz (7) izlazi

$$z(n)=z(5^m-1)=\frac{5^m-1}{4}-m=\frac{n}{4}-\frac{\ln(n+1)}{\ln 5}\quad(m\in\mathbf{N}).$$

Ovo pokazuje da se ni prva nejednakost (10) ne može bitno pooštriti.

Primedba 5. Broj a_n u (1) paran je za svako $n>1$. Naime, najveći celobrojni eksponent stepena broja 2 kojim je deljiv broj a_n jednak je

$$\omega_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^k}\right]\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

pa za $n\geqslant 5$ dobijamo

$$\omega_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{5^k}\right]\right)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{5}\right]\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{n}{5}=\frac{3n}{10}-\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1,$$

dok je za $n = 2, 3, 4$

$$\omega_n \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \geqslant \left[\frac{2}{2}\right] = 1.$$

Primedba 6. Na isti način kao u dokazu stava 3 može se ustanoviti da za svaki prost broj $p > 1$ važi

$$\frac{n}{p-1} - 1 - \frac{p}{(p-1)n} - \frac{\ln n}{\ln p} < b_p(n) \leqslant \frac{n-1}{p-1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

uz dostizanje jednakosti u desnoj nejednakosti za $n = p^m$ $(m \in \mathbf{N})$, i nemogućnost bitnog pooštrenja leve nejednakosti, i da

$$b_p(n) \sim \frac{n}{p-1} \qquad (n \to \infty).$$

Primedba 7. Nije teško ustanoviti, da je, za prost broj $p > 1$ i prirodne brojeve l i n, najveći celobrojni eksponent stepena broja p^l kojim je deljiv broj $n!$ dat sa

$$\left[\frac{1}{l} \sum_{1 \leqslant k,\ p^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p^k}\right]\right].$$

Na osnovu ovoga, jednostavno se dolazi do sledeće formule za broj $z_c(n)$ nula kojima se završava cifarski zapis broja $n!$ u brojnom sistemu čija je osnova umesto broja 10 broj c sa kanoničnom reprezentacijom

$$c = \prod_{\nu=1}^{s} p_\nu^{\alpha_\nu},$$

gde je p_ν $(\nu = 1, \ldots s)$ strogo rastući niz prostih brojeva većih od 1. Ta formula glasi

$$z_c(n) = \min_{\nu=1,\ldots,s} \left[\frac{1}{\alpha_\nu} \sum_{1 \leqslant k,\ p_\nu^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p_\nu^k}\right]\right].$$

Ako je, specijalno, $\alpha_\nu = 1$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, poslednja formula dobija jednostavniji oblik

$$z_c(n) = \sum_{1 \leqslant k,\ p_s^k \leqslant n} \left[\frac{n}{p_s^k}\right] \qquad (= b_{p_s}(n)).$$

Primedba 8. Činjenica, koja je gore „empirijski”, probama ustanovljena, da se, sa rašćenjem broja n, $\bar{a}_n$ „znatno brže” uvećava nego $z(n)$ — može se, u obliku određenog tvrđenja da količnik $\dfrac{\bar{a}_n}{z(n)}$ teži beskonačnosti kad $n \to \infty$, lako dokazati korišćenjem stava 3 i poznate Stirling-ove formule za faktorijel. Tim postupkom može se i, preciznije, brzina kojom ovaj odnos teži ka beskonačnosti kad $n \to \infty$ proceniti sledećom asimptotskom relacijom

$$\frac{\bar{a}_n}{z(n)} \sim \frac{4 \ln n}{\ln 10} \qquad (n \to \infty).$$

Pojedinosti ovog izvođenja prepuštamo čitaocu.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 42 (56), 1987, pp. 47–56

ON GENERAL SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dušan D. Adamović and **Jovan D. Kečkić**

Abstract. This paper is concerned with the form of the general solution of the equation (1), and the Theorem of Section 1 gives an answer which is somewhat different from the classical Picard result. Not only is the proof elementary, but the requests for the coefficients are much less restrictive; see the assumption (A_0). On the other hand, we had to introduce the additional assumption (A_0). Several examples are constructed in order to throw more light on the importance of those two assumptions.

0. Consider the differential equation

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

where the real functions $a_1, \dots, a_n$ are defined on an open interval $I \subseteq R$. This supposition regarding the coefficients $a_1, \dots, a_n$ and the interval I will be assumed throughout this paper.

The well-known theorem (see, for example, [1], [2] or [3]) states that if all the functions $a_1, \dots, a_n$ are continuous on I, then there exists a (linearly independent) system $y_1, \dots, y_n$ of solutions of (1) on I such that the general solution of (1) is given by their linear combination, i.e. by

$$y(x) = \sum_{k-1}^{n} C_k y_k(x) \quad (x \in I;\ C_1, \dots, C_n \text{ arbitrary constants}).$$

The usual (standard) proof of this theorem is based upon the classical Picard's existence and uniqueness theorem; more precisely, upon its special case for linear differential equations.

This basic question regarding the form of the general solution of (1) is once again treated in this paper, and we give in the Theorem of Section 1 an answer which is somewhat different from the classical answer cited above. Namely, our requests for the coefficients $a_1, \dots, a_n$ are much less restrictive (assumption (A_1)),

---

AMS Subject Classification (1980): Primary 34A30.

but we had to introduce the additional assumption (A_2). Besides, the proof is elementary. Sections 2 and 3 are devoted to the investigation of the effects of (A_1) and (A_2) on the Theorem. Several examples are constructed to show e.g. that the condition (A_1) cannot be omitted from the Theorem, and that the same conclusion is probably also true for (A_2). The facts established by those examples are then summarized in Propositions 1 and 2.

The Theorem of Section 1, together with its proof, may be used to provide a theoretical background for the representation (too often taken for granted) of general solutions of linear differential equations in elementary courses which avoid the existence and uniqueness theorems. Besides, when a system $y_1, \dots, y_n$ of solutions of (1) with the property (A_2) is found (by guesswork, inspection, or some other ad-hoc method, as it often happens in practice) according to our Theorem it may safely be concluded that (2) is the general solution of (1), provided that (A_1) is fulfilled.

1. As usual, we say that F is a primitive function of f on I, if $F'(x) = f(x)$ for all $x \in I$. If a function f has a primitive function on I, we shall say, as in [5], that it has the P_I-property. Similarly. following the usual practice, we say that a system $u_1, \dots, u_n$ of real functions defined on an open interval $I \subseteq R$ is linearly dependent if there exist constants $C_1, \dots, C_n$, not all zero, such that $\sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x) = 0$ for all $x \in I$; otherwise, it is linearly independent. If we suppose that the functions $u_1, \dots, u_n$ have $(n-1)$-st derivatives on I then in order that they be linearly dependent it is necessary, but not sufficient, that their Wronskian vanishes for all $x \in I$, i.e. that

$$W(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & & u_n'(x) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (x \in I),$$

In the case when all the coefficients of the equation (1) are continuous on I, then by a known result (based on the mentioned existence and uniqueness theorem) the above condition is also sufficient for the system $u_1, \dots, u_n$ of n solutions of (1) to be linearly dependent.

In the proof of the main theorem and of the propositions which follow we shall use the following auxiliary results.

LEMMA 1. *For the equation*

$$y' + a(x)y = 0, \tag{3}$$

where the function a is defined on I, the following two conditions are equivalent:

(i) *the function a has the P_I-property.*

(ii) *the equation* (3) *has at least one solution y_0 such that $y_0(x) \neq 0$ for all $x \in I$. Each of the conditions* (i) *and* (ii) *implies that for every nontrivial solution y of the equation* (3) *we have $y(x) \neq 0$ for all $x \in I$.*

The following condition is effectively weaker than the above two:

(iii) *there exists a solution* y_0 *of* (3) *with the property that all solutions of* (3) *are given by*

$$y(x) = Cy_0(x) \qquad (x \in I;\ C \text{ arbitrary constant}).$$

Proof. Suppose that A is a primitive function of a on I. Then for each function y differentiable on I, the function u defined by

$$y(x) = e^{-A(x)}u(x) \qquad (x \in I) \tag{4}$$

is differentiable on I. Substituting (4) into (3), we conclude that this function y, (3) is equivalent to $u'(x) = 0$ $(x \in I)$, which in turn is equivalent to $u(x) = C$ $(x \in I)$, where C is an arbitrary constant. Hence, y is a solution of (3) if and only if

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \qquad (x \in I;\ C = \text{const}), \tag{5}$$

which can be written in the form $y(x) = Cy_0(x)$ $(x \in I;\ C$ arbitrary constant), where $y_0(x) = e^{-A(x)} \neq 0$ $(x \in I)$. This proves the implication (i) $\Rightarrow$ (ii) and also (i) $\Rightarrow$ (iii).

If the equation (3) has a solution y_0 such that $y_0(x) \neq 0$ $(x \in I)$, then

$$a(x) = -y_0'(x)/y_0(x) = -(\log|y_0(x)|)' \qquad (x \in I),$$

(ii) $\Rightarrow$ (i).

The next assertion of Lemma 1 follows directly from (5).

Finally, in order to shaw that (iii) is weaker than (i), or (ii), let $I = \mathbf{R}$, and define the function a on $\mathbf{R}$ by:

$$a(x) = -1/x^2 \quad (x > 0), \qquad a(x) = 0 \quad (x \leq 0) \tag{6}$$

In this case the equation (3) has the solution y_0 defined by

$$y_0(x) = \exp(-1/x) \quad (x > 0), \qquad y_0(x) = 0 \quad (x \leq 0),$$

which is easily verified. If y is any solution of (3), then

$$y(x) = C\exp(-1/x) \quad (x > 0), \qquad y(x) = D \quad (x \leq 0),$$

where C, D are constant. But $\lim_{x\to 0+} y(x) = 0 = D$, and hence $y(x) = Cy_0(x)$ $(x \in I)$, where C is an arbitrary constant. The condition (iii) is therefore fulfilled, but the function a defined by (6) does not have P_R-property (by Darboux's theorem, or because y_0 vanishes for some $x \in \mathbf{R}$, but is not identically zero).

LEMMA 2. (i) *For any system*

$$y_1, \ldots, y_n \tag{7}$$

of solutions of (1), *we have*

$$\frac{d}{dx}W(y_1,\ldots,y_n) + a_1(x)W(y_1,\ldots,y_n) = 0 \qquad (x \in I).$$

(ii) *If there exists a system* (7) *of solutions of* (1), *such that*

$$W(y_1, \dots, y_n) \neq 0 \quad \textit{for all} \quad x \in I, \tag{8}$$

then the function a_1 has the P_I-property. Conversely, if a_1 has the P_I-property and if there exists a system (7) *such that $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ for at least one $x \in I$, then this system of solutions satisfies* (8).

(iii) *If a_1 has the P_I-property, then the Wronskian of an arbitrary system* (7) *of solutions* (1) is given by

$$W(y_1, \dots, y_n) = CW(y_1^0, \dots, y_n^0) \qquad (x \in I)$$

where $y_1^0, \dots, y_n^0$ is one particular system of solutions and C is a constant.

Proof. Statement (i) is proved in the usual manner. Statements (ii) and (iii) follow from (i) and Lemma 1.

We now formulate and prove the main result of this paper.

THEOREM. *Suppose that:*
(A_1) *the function a_1 has the P_I-property;*
(A_1) *there exists a system* (7) *of solutions of* (1) *on I such that*

$$W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$$

for at least one $x \in I$.

Then the general solution of the equation (1) *is given by*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \quad (x \in I;\ C_1, \dots C_n \textit{ arbitrary constants}).$$

Proof. Suppose that the conditions (A_1) and (A_2) are satisfied, and that y is a solution of the equation (1) on I. We have

$$0 = \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y(x) & y_1(x) & & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= y(x)W(y_1, \dots, y_n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k y_k(x) W(y, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n) \quad (x \in I).$$

Furthermore, in virtue of Lemma 2, (8) is valid and we obtain

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{W(y, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{W(y_1, \dots, y_n)} y_k(x) \quad (x \in I).$$

Again, according to Lemma 2, the coefficients of $y_1, \dots, y_n$ are constants, and therefore

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \quad (x \in I;\ C_1, \dots C_n = \text{const.}).$$

Conversely, it is readily verified that any function y, defined by (9) is a solution of the equation (1) on I.

Remark 1. The above theorem and its proof were given for $n = 2$, in a rudimentary form, in [4].

2. Now that the Theorem is established, we see that in the proof given above we made use of the assumptions (A_1) and (A_2). The question for each of those assumptions is, of course, whether it is essential for the validity of the theorem, and also what happens if it is suppressed. The Proposition 1 given at the end of this section provides an answer for the assumptions (A_1). It is based upon the following four examples.

Example 1. Consider the equation

$$y^{(n)} + a(x)y^{(n-1)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{10}$$

where the function a is defined on $\mathbf{R}$ by (6). As we know (proof of Lemma 1) this function does not have the P_R-property. On the other hand, the equation (10) has solutions $y_1, \ldots, y_n$ on $\mathbf{R}$ defined by

$$\begin{aligned} &y_1(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \alpha(t)dt \\ &y_2(x) = 1,\ y_3(x) = x,\ \ldots\ ,\ y_n(x) = x^{n-2} \end{aligned} \quad (x \in \mathbf{R})$$

where $\alpha(x) = e^{-1/x}$ $(x > 0)$, $\alpha(x) = 0$ $(x \leq 0)$, which are linearly independent on $\mathbf{R}$. Indeed, the functions $y_2, \ldots, y_n$ are clearly independent on $\mathbf{R}$, whereas linear dependence of the form

$$C_1 y_1(x) + \sum_{k=2}^{n} C_k x^{k-2} = \quad (x \in \mathbf{R};\ C_1 \neq 0)$$

would imply, after $n-1$ differentiations, that $y_1^{(n-1)}(x)e^{-1/x} = 0$ $(x > 0)$, which is absurd.

The Wronskian of this system vanishes for $x = 0$, since $y_1(0) = y_1'(0) = \cdots = y_1^{(n-1)}(0) = 0$, but its value differs from 0 for $x > 0$, since all the functions form a linearly independent system on $(0, +\infty)$, and the coefficients of (10) are continous for $x > 0$. Clearly, all the solutions of the equation (10) are given by

$$y(x) = \sum_{k=2}^{n} C_k y_k(x) \quad (x \in \mathbf{R};\ C_1, \ldots, C_n = \text{const.}).$$

Example 2. We now consider the equation

$$y^{(n)} + b(x)y^{(n-1)} = 0 \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{11}$$

where b is defined on $\mathbf{R}$ by

$$b(x) = -x^{-2}\operatorname{sgn} x\ (x \neq 0), \quad b(0) = 0, \tag{12}$$

and again does not have the P_R-property. The functions $y_1, \dots y_n$ defined on $\mathbf{R}$ by

$$(13)\qquad \begin{aligned} &y_1(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \beta(t)dt \\ &y_2(x) = 1, y_3(x) = x, \dots, y_n(x) = x^{n-2} \quad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

with $\beta(x) = \exp(x^{-1}\operatorname{sgn} x)$ $(x \neq 0)$, $\beta(0) = 0$, are linearly independent solutions of (11). Their Wronskian vanishes at $x = 0$, and does not vanish for $x > 0$, but in this case the general solutions of (11) cannot be written in the form (9), since there is no choise of constants $C_1, \dots, C_n$ which leads to the following solution:

$$(14)\qquad y_0(x) = (\text{sgn } x) y_1(x)$$

of (11).

Example 3. We now extend the above example to show tha it is not possible to construct a linearly independent system $Y_1, \dots, Y_n$ of solutions of (11) such that its general solution is $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k Y_k(x)$ with constants $C_1, \dots, C_n$. Indeed, since the general solution of (11) is given by

$$(15)\qquad y(x) = \begin{cases} C_1^{(1)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n C_k y_k(x) & (x \geq 0) \\ C_1^{(2)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n C_k y_k(x) & (x < 0) \end{cases}$$

where $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2, \dots, C_n$ are arbitrary constants, anyone of solutions Y_ν of that equation must have the form

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} C_{1,\nu}^{(1)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n C_{k,\nu} y_k(x) & (x \geq 0) \\ C_{1,\nu}^{(2)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n C_{k,\nu} y_k(x) & (x < 0) \end{cases} \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

for some constants $C_{1,\nu}^{(1)}, C_{1,\nu}^{(2)}, C_{k,\nu}$ $(k = 2, \dots, n;\ \nu = 1, \dots, n)$. If a linear combination of those functions, namely if

$$Y(x) = \sum_{\nu=1}^n C_\nu Y_\nu(x) = \begin{cases} y_1(x) \sum_{\nu=1}^n C_\nu C_{1,\nu}^{(1)} + \sum\limits_{k=2}^n y_k(x) \sum\limits_{\nu=1}^n C_\nu C_{k,\nu} & (x \geq 0) \\ y_1(x) \sum_{\nu=1}^n C_\nu C_{1,\nu}^{(2)} + \sum\limits_{k=2}^n y_k(x) \sum\limits_{\nu=1}^n C_\nu C_{k,\nu} & (x < 0), \end{cases}$$

where the general solution of (11), then for any real numbers $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2, \dots, D_n$ there would have to exist such values of the constants $C_1, \dots, C_n$ to ensure that

$$Y(x) = \begin{cases} D_1^{(1)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n D_k y_k(x) & (x > 0); \\ D_1^{(2)} y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^n D_k y_k(x) & (x < 0). \end{cases}$$

Since the functions $y_1, \dots, y_n$ are linearly independent both on $(0, +\infty)$ and $(-\infty, 0)$, this means that there would have to exist $C_1, \dots, C_n$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu C_{1,\nu}^{(1)} = D_1^{(1)}, \ \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu C_{1,\nu}^{(2)} = D_1^{(2)}, \ \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu C_{k,\nu} = D_k \quad (k = 2, \dots, n).$$

However this system of $n+1$ equations in n unknowns $C_1, \dots, C_n$ need not have solutions for arbitrary given numbers $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2, \dots, D_n$, no matter how the numbers $C_{1,\nu}^{(1)}, C_{1,\nu}^{(2)}, C_{k,\nu}$ $(k = 2, \dots, n;\ \nu = 1, \dots, n)$ are previously chosen, implying that the general solution of (11) cannot be written in the form (9).

This example also shows that *the assumption* (A_1) *cannot be omitted from the following slightly weaker form of our Theorem:* (T) *Under the conditions* (A_1) *and* (A_2) *there exists a system of* n *solutions of* (1) *such that the general solution of* (1) *is the linear combination of functions of this system.*

Example 4. We again use the equation (11), with (12), and the solutions $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ defined by (13) and (14) to establish one more possibility. Namely, since

$$(-1)y_0(x) + 1 \cdot y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) + \cdots + 0 \cdot y_{n-1}(x) = 0 \quad (x > 0),$$
$$1 \cdot y_0(x) + 1 \cdot y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) + \cdots + 0 \cdot y_{n-1}(x) = 0 \quad (x < 0)$$

the Wronskian of this system vanishes for $x \neq 0$. But we also have $y_1(0) = y_1'(0) = \cdots = y_1^{(n-1)}(0) = 0$, and so it also vanishes for $x = 0$. In order to show that this system is linearly independent, suppose that there exist constants $C_1, \dots, C_n$, not all zero, such that

$$C_1 y_0(x) + C_2 y_1(x) + \cdots + C_n y_{n-1}(x) = 0 \quad (x > 0), (x \in R). \tag{16}$$

Since $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ are linearly independent, this would imply that

$$C_1^2 + C_2^2 > 0. \tag{17}$$

On the other hand, (16) can be split into

$$(C_1 + C_2) y_1(x) + C_3 y_2(x) + \cdots + C_n y_{n-1}(x) \quad (x > 0),$$
$$(-C_1 + C_2) y_1(x) + C_3 y_2(x) + \cdots + C_n y_{n-1}(x) \quad (x < 0)$$

and differentiating the last two equalities $n-1$ times we get

$$(C_1 + C_2) e^{-1/x} = 0 \quad (x > 0); \quad (-C_1 + C_2) e^{-1/x} = 0 \quad (x < 0)$$

and consequently $C_1 + C_= - C_1 + C_2 = 0$, i.e. $C_1 = C_2 = 0$, contradicting (17).

The conclusions established by the preceeding examples are now combined into the following.

Proposition 1. *Suppose that* $n \in N$ *and that the function* a_1 *does not have the* P_I*-property.*

(i) *The equation* (1) *may* (Example 1) *or may not* (Example 3) *have a system of solutions* (7) *such that its general solution is given by* (9).

(ii) *There may exist a system of solutions* (7) *of the equation* (1) *whose Wronskian vanishes at some, and does not vanish at other points of* I. *Besides, in this case each of the following two cases is possible:*

(a) *the general solution of* (1) *is given by* (9) (Example 1)*;*

(b) *the general solution cannot be written in the form* (9) (Example 2).

(iii) *There may exist a linearly independent system of* n *solutions of the equation* (1) *whose Wronskian vanishes for all* $x \in X$ (Example 4)

3. In the preceeding section we have examined various situations which may arise if the assertion (A_1) is dropped. Conversely, we now assume that (A_1) is fulfilled, and we give two examples to illustrate two possibilities which may take place in this case.

Example 5. Consider the equation

$$y^{(n)} + d(x)y = 0 \qquad (n \geq 2;\ x \in R), \tag{18}$$

where d is the Dirichlet function, i.e. $d(x) = 1$ (x rational) and $d(x) = 0$ (x irrational). The coefficient a_1 of $y^{(n-1)}$ in (18) has the P_R-property. We prove that the unique solution of (18) is given by $y_0(x) = 0$ ($x \in R$).

Conversely, suppose that there exists a solution Y of (18) such that $Y(x_0) > 0$, say, for some $x_0 \in R$. But then there would exist an interval $J = (\alpha, \beta) \ni x_0$ such that $Y(x) > Y(x_0)/2$ ($x \in J$) and hence the set of values which the function $d(x)Y(x)$ takes when $x \in J$ would be equal to $S \cup \{0\}$, where $\emptyset \neq S \subset (Y(x_0)/2, \infty)$. This would mean that the function $d(x)Y(x) = -(Y^{(n-1)}(x))'$ does not have the P_R-property, which is absurd. Hence, the unique solution of (18) is $y_0(x) = 0$ ($x \in R$), and so any system of solutions of that equation must be linearly dependent.

Example 6. If $c(x) = -6/x^2$ ($x \neq 0$), $c(0) = 0$, then for $n \geq 2$, the coefficient of $y^{(n-1)}$ in the equation

$$y^{(n)} + c(x)y^{(n-2)} = 0 \quad (x \in R) \tag{19}$$

has the P_R-property. This equation has the system of solutions

$$y_1(x) = x^{n+1},\ y_2(x) = (\operatorname{sgn} x)\, x^{n+1},\ y_3(x) = 1,\ y_n(x) = x^{n-3} \quad (x \in R) \tag{20}$$

which is linearly independent on R, but whose Wronskian vanishes for all $x \in R$. Indeed, since

$$\begin{gathered} 1 \cdot y_1(x) + (-1)y_2(x) + 0 \cdot y_3(x) + \cdots + 0 \cdot y_n(x) = 0 \quad (x > 0) \\ 1 \cdot y_1(x) + 1 \cdot y_2(x) + 0 \cdot y_3(x) + \cdots + 0 \cdot y_n(x) = 0 \quad (x < 0) \end{gathered}$$

we conclude that $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ for all $x \neq 0$. On the other hand, $y_1(0) = y_1'(0) = \cdots = y_1^{(n-1)}(0) = 0$, implying that $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ for $x = 0$. In order to show that this system is linearly independent, put $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) = 0$ $(x \in R)$ where $C_1, \dots, C_n$ are constants. This splits into

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2)x^{n+1} + C_3 + \cdots + C_n x^{n-3} = 0 \quad (x > 0) \\ (C_1 - C_2)x^{n+1} + C_3 + \cdots + C_n x^{n-3} = 0 \quad (x < 0) \end{aligned}$$

and so $C_1 + C_2 = C_1 - C_2 = C_3 = \cdots = C_n = 0$, i.e. $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

We now construct the general solution of (19) using the system (20). Consider first the case when $n = 2$, i.e. the equation

$$y'' + c(x)y = 0 \quad (x \in R). \tag{21}$$

For $x > 0$ this equation has linearly independent solutions y_1, y_2 defined by $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 1/x^2$, and so by the standard result (or by our Theorem) all the solutions on $(0, +\infty)$ of this equation are given by

$$y(x) = K_1 x^3 + K_2/x^2 \qquad (x > 0), \tag{22}$$

where K_1, K_2 are arbitrary constants. This means that the restrictions on $(0, +\infty)$ of all the solutions of the equation (21) are among the functions (22). But those solutions must be continuous at $x = 0$, and so $K_2 = 0$. Hence, any solution of (22) for $x > 0$, and also for ≥ 0, must be given by $y(x) = K^{(1)}x^3$ $(x \geq 0)$, where $K^{(1)}$ is a constant. Similarly, the restrictions on $(-\infty, 0)$ of all the solutions of (21) must be given by $y(x) = K^{(2)}x^3$ $(x < 0)$, where $K^{(2)}$ is a constant. Therefore, the general solution of (21) is given by

$$y(x) = \begin{cases} K^{(1)}x^3 & (x \geq 0) \\ K^{(2)}x^3 & (x < 0) \end{cases} (K^{(1)}, K^{(2)} = \text{const}).$$

Now for any $n \geq 2$, if y is a solution of (19), then

$$y^{(n-2)}(x) = z(x) \ (x \in R) \quad \wedge \quad z'' + c(x) = 0 \ (x \in R),$$

i.e.

$$y^{(n-2)}(x) = z(x) \ (x \in R) \quad \wedge \quad z(x) = \begin{cases} K^{(1)}x^3 & (x \geq 0) \\ K^{(2)}x^3 & (x < 0) \end{cases}$$

wherefrom we obtain the general solution of (l9):

$$y(x) = \begin{cases} C^{(1)}x^{n+1} + C_3 + C_4 x + \cdot + C_n x^{n-3} & (x \geq 0) \\ C^{(2)}x^{n+1} + C_3 + C_4 x + \cdot + C_n x^{n-3} & (x < 0) \end{cases}$$

where $C^{(1)}, C^{(2)}, C_3, \dots, C_n$ are arbitrary constants. However, it is clear that this solution can also be written in the form $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$ $(x \in R)$, where $C_1, \dots, C_n$ are arbitrary constants and $y_1, \dots, y_n$ are defined by (20).

As before, we combine the conclusion of the last two examples into the following

Proposition 2. *Suppose that al has the P_I-property. For any $n \geq 2$ it is possible that:*

(i) *any system of n solutions of* (1) *is linearly dependent;*

(ii) *there exists a system of n linearly independent solutions of* (1) *whose Wronskian vanishes for all $x \in I$, but the general solution of* (1) *is again given by* (9).

The above proposition implies that (A_2) is not a consequence of (A_1).

It would be interesting to investigate whether it is possible that the function a_1 has the P_I-property, and that at the same time there is no system $y_1, \dots, y_n$ of solutions of (1) such that the general solution of (1) is given by (9); in other words whether (A_2) may, or may not be omitted from the statement of the Theorem; strictly speaking, from the weaker form of this theorem, denoted earlier by (T). *This question remains open.*

Remark 2. The following example shows that *for any $n \geq 2$, (A_2) can be realized when the condition (A_1) is satisfied and the condition of continuity of all the coeficients* (i.e. the condition of the classical theorem cited at the beginning) *is not.*

Let a_1 have P_I-propqrty, not being continous on I. Then the equation $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} = 0$, for any $n \geq 2$, has the following system of n solutions

$$\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_2} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-2}} e^{-A(t)} dt,\ 1,\ x,\ \dots\ ,\ x^{n-2},$$

whose Wronskian differs from 0 on I. Here A is a primitive function of a_1 on I and x_0 is a point of I.

4. Needless to say, analogous results hold for the nonhomogeneous equations of the form

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x)$$

where the function F is defined on I. The Theorem is also carried over to first order linear systems of differential equations.

REFERENCES

[1] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, New York, 1945.

[2] Х. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1970.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen*, I. 6. verbesserte Auflage, Leipzig, 1959.

[4] J. D. Kečkić, *Reproductivity of some equation of analysis*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **31** (**45**) (1982), 73–81.

[5] D. D. Adamović, *Quelques remarques relatives aux fonctions primitives des fonctions réelles*, to appear.

Institut za matematiku
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Received 24 06 1985)
(Revised 23 03 1987)

FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ)
SER. MATH. INFORM. 2 (1987), 35—48

QUELQUES REMARQUES RELATIVES AUX FONCTIONES PRIMITIVES DES FONCTIONS RÉELLES

Dušan Adamović

Sommaire. Dans le cadre de considérations plus complexes, on traite ici, en particulier, la question suivante: la fonction f possédant une fonction primitive dans l'intervalle I, quelle propriété (quel degré de régularité) de la fonction g, définie dans I, assure-t-elle l'existence de la fonction primitive dans I du produit $h=f\cdot g$? Les résultats principaux du travail sont contenus dans les théorèmes **P** et **P'**.

0. Dans ce qui suit, l'ensemble des nombres naturels sera désigné par **N**, celui des nombres rationnels par **Q** et celui des nombres réels par **R**.

Comme d'habitude, nous appelons *fonction primitive* de la fonction réelle f dans l'intervalle ouvert I toute fonction réelle F definie dans I et telle que $F'(x)=f(x)$, $x\in I$. Pour une fonction possédant une fonction primitive dans I nous disons qu'elle est une P_I-*fonctions*, ou bien qu'elle *a la propriété* P_I; s'il n'est pas nécessaire de mentioner expressément l'intervalle I, nous disons qu'elle est *P-fonction* ou qu'elle *a la propriété P*.

Il est clair que la somme de deux P_I-fonctions et aussi une P_I-fonction, c'est-à-dire que la propriété P_I est *additive*. Beacoup d'autres propriétés des fonctions réelles sont aussi additives, par exemple: intégrabilité (dans n'importe quel sens), *continuité*, continuité uniforme, *propriété d'être bornée*, *variation bornée*, *dérivabilité* (propriété d'avoir une dérivié finie en tout point), *dérivabilité continue* (propriété d'avoir la dérivée continue) dans un intervalle (ouvert ou fermé selon le cas). De ces propriétés-là, celles soulignées, de même que l'intégrabilité dans le sens de Riemann dans un intervalle borné, sont aussi *multiplicatives*, ce qui veut dire que le produit de deux fonctions jouissant de l'une de ces propriétés — en jouit aussi. C'est par le théorème qui suit que nous allons établier, entre autre, que *la propriété* P_I *n'est pas multiplicative*. Dans la litterature assez vaste, comprenant monographies, manuels et autres publications, dans laquelle on traite (largement ou en passant) les fonctions primitives — par exemple dans la monographie bien connue [2] de H. Lebesgue, de même que dans les livres aussi connus [1] et [3] — nous n'avons nulle part trouvé la constation de ce fait assez élémentaire.

Received January 29, 1987.

On peut, bien entendu, poser la question plus complexe suivante: la propriété P_I de la fonction f étant supposée, quelle propriété (plus forte que P_I) de la fonction g définie dans I assure-t-elle la propriété P_I du produit des fonctions f et g? Une réponse assez complète à cette question-là est donnée par notre théorème **P** et par le théorème **P′** qui lui est ajouté.

1. Dans la démonstation de ces résultats nous allons utiliser les deux énoncés auxiliaires suivants.

Lemme 1. *Soit $I=(a, b)$, $x_0 \in I$ et f une fonction définie dans I et juissant à la fois des propriétés $P_{(a, x_0)}$ et $P_{(x_0, a)}$. Alors f est une P_I-fonction si et seulement si une fonction primitive F_1 de f dans (a, x_0) (arbitrairrment choisie) a dans le point x_0 la limite à gauche finie et une fonction primitive F_2 de f dans (x_0, b) a dans le point x_0 la limite à droite finite, et l'égalite suivante*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0 - 0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{F_2(x) - F_2(x_0 + 0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

est valable.

Démonstration. Il est évident que toutes ces conditions sont nécessaires. D'autre part, il est clair que, lorsqu'elles sont toutes remplies et les fonctions F_1 i F_2 sont choises de manière que l'on ait $F_1(x_0 - 0) = F_2(x_0 + 0) = A$, alors la fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a < x < x_0 \\ A, & x = x_0 \\ F_2(x), & x_0 < x < b \end{cases}$$

est une fonction primitive de f dans I. La fonction f, donc, possède la propriété P_I.

Corollaire. *Sous la condition supplémentaire de l'integrabilité dans le sens de Riemann de f dans tout intervalle fermé et borné contenu dans $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ (en particulier, de la continuité de f dans $(a, x_0) \cup (x_0, b)$), cette fonction jouit de la propriété P_I si et seulement si, aves les nombres $x_1 \in (a, x_0)$ et $x_2 \in (x_0, b)$ arbitrairement choisis, les valeurs* $\int_{x_1}^{x_0 - 0} f(t)\,dt$ et $\int_{x_0+0}^{x_2} f(t)\,dt$ *sont finies et*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0 - 0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0 + 0}^{x} f(t)\,dt = f(x_0).$$

Si, par surcroît, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite $x = x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, ou bien si l'intervalle I est remplacé par l'intervalle $[x_0, b)$, alors pour la propriété P_I de f il faut et il suffit que $\int_{x_0+0}^{x_2} f(t)\,dt$ soit fini et que l'on ait

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0 + 0}^{x} f(t)\,dt = f(x_0).$$

Lemme 2. *La fonction*

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

dans l'intervalle $I=\mathbf{R}$:

1° *pour* $\alpha>3$ *est continûment dérivable;*

2° *pour* $1<\alpha\leqslant 3$ *est dérivable et n'est pas continûment dérivable;*

3° *pour* $0<\alpha\leqslant 1$ *est continue et n'est pas dérivable;*

4° *pour* $-2<\alpha\leqslant 0$ *a la propriété P est n'est pas continue;*

5° *pour* $\alpha\leqslant -2$ *n'a pas la propriété P.*

Démonstration. On démontre aisément et d'une manière habituelle les faits 1°, 2° et 3°. Évidemment, pour $\alpha\leqslant 0$ la fonction f n'est pas continue dans $\mathbf{R}$. Pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$ elle a dans $(0, +\infty)$ la fonction primitive

$$G_\alpha(x)=\int_1^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x t^\alpha \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{x}}^{1} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,\mathrm{d}u. \tag{1}$$

Il en résulte que, d'après le lemme 1, son corollaire et le fait que f_a est une fonction paire, pour la propriété $\mathrm{P}_{\mathbf{R}}$ de cette fonction il suffit que la limite

$$G_\alpha(+0)=\lim_{x\to+0}\int_{\frac{1}{x}}^{1} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,\mathrm{d}u=\int_{+\infty}^{1} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

soit finie et que l'on ait en plus

$$\lim_{x\to+0}\frac{G_\alpha(x)-G_\alpha(x+0)}{x}=0=f_\alpha(0).$$

Soit $-2<\alpha\leqslant 0$. On a alors $\alpha+2>0$, et par conséquent l'integrale $\int_1^{+\infty} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,\mathrm{d}u$ converge, ce qui signifie, d'après (2), que la limite $G_\alpha(+0)$ existe et que sa valeur est finie. Dans la même cas, en appliquant l'intégration par parties et le théorème de L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to+0}\frac{G_\alpha(x)-G_\alpha(+0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} y\int_y^{+\infty} u^{-(\alpha+3)}\cdot 2u\sin u^2\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}\left[y\cdot y^{-(\alpha+3)}\cos y^2-(\alpha+3)\,y\int_y^{+\infty} u^{-(\alpha+4)}\cos u^2\,\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{y\to+\infty} y^{-(\alpha+2)}\cos y^2-(\alpha+3)\lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+4)}\cos u^2\,du}{y^{-1}}\right]$$

$$=-\frac{\alpha+3}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{-y^{-(\alpha+4)}\cos y^2}{-y^{-2}}=-\frac{\alpha+3}{2}\lim_{y\to+\infty} y^{-(\alpha+2)}\cos y^2=0.$$

Il en résulte, d'après ce qui précède, que pour $-2<\alpha\leqslant 0$ la fonction f_α a la propriété $P_{\mathbf{R}}$ et n'est pas continue dans $\mathbf{R}$.

Si $\alpha\leqslant -3$, l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,du$, c-est-à-dire l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} v^{-\frac{1}{2}(\alpha+3)}$ $\sin v\,dv$, diverge, da manière que f_α n'est pas $P_{\mathbf{R}}$ — fonction dans ce cas-là. Enfin, lorsque $-3<\alpha\leqslant 2$, l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,du=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} v^{-\frac{1}{2}(\alpha+3)}\sin v\,dv$ converge, ce qui signifie que $G_\alpha(+0)$ a une valeur finie, mais dans ce cas nous obtenons, avec $y=\frac{1}{x}$, $x>0$,

$$\frac{G_\alpha(x)-G_\alpha(+0)}{x}=y\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+2)}\sin u^2\,du=\frac{1}{2}y\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+3)}\cdot 2u\sin u^2\,du$$

$$=\frac{1}{2}y\cdot y^{-(\alpha+3)}\cos y^2-\frac{\alpha+3}{2}\cdot\frac{1}{2}y\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+4)}\cdot u^{-1}\cdot 2u\cos u^2\,du$$

$$=\frac{1}{2}y^{-(\alpha+2)}\cos y^2+\frac{\alpha+3}{4}y^{-(\alpha+4)}\sin y^2-\frac{(\alpha+3)(\alpha+5)}{4}y\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+6)}\sin u^2\,du$$

$$=\frac{1}{2}y^{-(\alpha+2)}\cos y^2+o(1),\ \text{lorsque}\ y\to+\infty,\ \text{c'-est-à-dire}\ x\to+0, \tag{3}$$

puisque $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{-(\alpha+4)}\cdot\sin y^2=0$ et

$$\lim_{y\to+\infty} y\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+6)}\sin u^2\,du=\lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_y^{+\infty} u^{-(\alpha+6)}\sin u^2\,du}{y^{-1}}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{-y^{-(\alpha+6)}\sin y^2}{-y^{-2}}=\lim_{y\to+\infty} y^{-(\alpha+4)}\sin y^2=0.$$

Il résulte de (3) que dans ce cas $\frac{G_\alpha(x)-G_\alpha(+0)}{x}$ n'a pas de limite lorsque $x\to+0$. Donc, f_α n'est pas $P_{\mathbf{R}}$ — fonction pour $-3<\alpha\leqslant -2$ non plus.

2. Nos résultats principaux sont contenus dans l'énoncé suivant.

Théorème P. *On suppose les fonctions réelles f et g définies dans l'intervalle ouvert I et f possédant la propriété P_I, et soit $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in I$. Alors:*

1° *La dérivabilité continue de g dans I entraîne la propriété P_I de h.*

2° *La dérivabilité de g dans I n'entraîne pas la propriété P_I de h.*

3° *Si la fonction g possède la propriété P_I et aucune des fonctions f et g n'est continue dans I, la fonction h peut avoir ou ne pas avoir la propriété P_I.*

4° *Si la fonction f n'est pas continue dans I (possédant toujours la propriété P_I, selon l'hypothèse préalable du théorème), alors pour aucun nombre naturel $n\geqslant 2$ la n-ième puissance de f ne peut être fonction continue dans I, et pour tout tel nombre n cette puissance peut avoir ou ne pas avoir la propriété P_I.*

Démonstration. 1° Supposons que la dérivée de g soit continue dans I. D'après la supposition préalable, la fonction f a une fonction primitive F dans I. Alors le produit $F(x)\cdot g'(x)$ est une fonction continue dans I, et par conséquent y possède une fonction primitive G. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}(F(x)\cdot g(x)-G(x))' &= f(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)-G'(x)\\ &= f(x)\cdot g(x)=h(x),\quad x\in I.\end{aligned}$$

Donc, h est une P_I-fonction.

Il est clair que tous les exemples qui suivent (ici ou plus loin dans cet article) et où l'on a $I=\mathbf{R}$ peuvent être simplement appropriés à n'importe quel autre intervalle I.

2° Cette assertion sera prouvée par le cas où $I=\mathbf{R}$, $f=f_{-\frac{3}{2}}$ et $g=f_{\frac{5}{4}}$ (voir le lemme 2), c'est-à-dire où

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{5}{4}}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

En effet, dans ce cas, d'après le lemme 2, f est une $P_{\mathbf{R}}$-fonction et la fonction g est dérivable dans $\mathbf{R}$. Puis on a

$$h(x)=\begin{cases}|x|^{-\frac{1}{4}}\sin^2\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{4}}\left(1-\cos\dfrac{2}{x^2}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

de sorte qu'on a

$$h(x)=h_1(x)-h_2(x),\qquad x\in\mathbf{R}, \tag{4}$$

avec

$$h_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{4}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad h_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{4}}\cos\dfrac{2}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

La fonction h_1, d'après le théorème de Darboux, n'a pas la propriété $P_{\mathbf{R}}$. Étant donné encore que la fonction h_2, d'après une modification légère de l'assertion correspondante du lemme 2 $\left(\text{on a } -\frac{1}{4}\in(-2, 0]\right.$ et le remplacement du sinus par le cosinus et le multiplicateur 2 sous le symbole de cosinus ne changent pas évidemment la validité du lemme), jouit de la propriété $P_{\mathbf{R}}$, on déduit de (4) la conclusion que dans ce cas h n'est pas une $P_{\mathbf{R}}$-fonction.

3° Si

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ f_0(x), & x\geqslant 0,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} f_0(x), & x\leqslant 0 \\ 0, & x<0,\end{cases}$$

les fonctions f et g ne sont pas continues dans $\mathbf{R}$ et elles sont toutes les deux $P_{\mathbf{R}}$-fonctions, d'après les lemmes 1 et 2. Leur produit — la fonction identiquement nulle — a la propriété $P_{\mathbf{R}}$. D'autre part, si $f=g=f_0$, les fonctions f et g, selon le lemme 2, ont la propriété $P_{\mathbf{R}}$ et ne sont pas continues dans $\mathbf{R}$. Le produit h de ces deux fonctions est donné par

$$h(x)=\begin{cases} \sin^2\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0,\end{cases}$$

c'est-à-dire par $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$, $x\in\mathbf{R}$, où

$$h_1(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0,\end{cases} \qquad h_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\cos\frac{2}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

La fonction h_1 évidemment n'a pas le propriété $P_{\mathbf{R}}$ et la fonction h_2, d'après le lemme 2 et la remarque correspondante dans notre considération sous 2°, jouit de cette propriété. Par conséquent, h n'est pas une $P_{\mathbf{R}}$-fonction. Ainsi on a prouvé les deux possibilités en question.

4° Supposons que la fonction f ne soit pas continue dans I (tout en jouissant, d'après la supposition générale du théoremè, de la propriété P_I) et posons $\varphi(x)=f^n(x)$, $x\in I$, le nombre $n\in\{2, 3, \ldots\}$ étant fixé. Il existent alors $x_0\in I$ et deux suites (a_k) et (b_k) de points de l'intervalle I telles que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = x_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)=a$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)=b$ et $a\neq b$. Si n est impair, ou bien si n est pair et $|a|\neq|b|$, on a $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(a_k)=a^n\neq b^n=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(b_k)$, de manierè que la fonction φ n'est pas continue dans le point x_0. Si n est pair et $|a|=|b|\,(>0)$, c'est-à-dire les nombres a et b sont de signés opposés, alors les nombres $f(a_k)$ et $f(b_k)$ sont aussi, pour k suffisamment grand, de signes opposés, et par suite, d'après le théorème de Darboux, il existe une suite (c_k) de points de I, convergeant vers x_0 et telle que l'on a $f(c_k)=0$ pour k suffisamment grand. On a alors $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(a_k)=a^n\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(c_k)$, ce qui signifie que la fonction φ n'est pas continue dans point x_0.

Soit ensuite f la fonction dont le graphe est représénté par la figure 1, où l'on a particulièrement mis en relief la partie du graphe correspondant au k-ième $(k\in\mathbf{N})$ des segments consécutifs formant un ensemble dénombrable d'intervalles dont l'union est l'intervalle $(0, \alpha]$, avec $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$. (Le rapport des grandeurs horizontales à celles verticales n'est pas présenté fidèlement sur la figure). Étant donné que

$$\int_{+0}^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} < +\infty$$

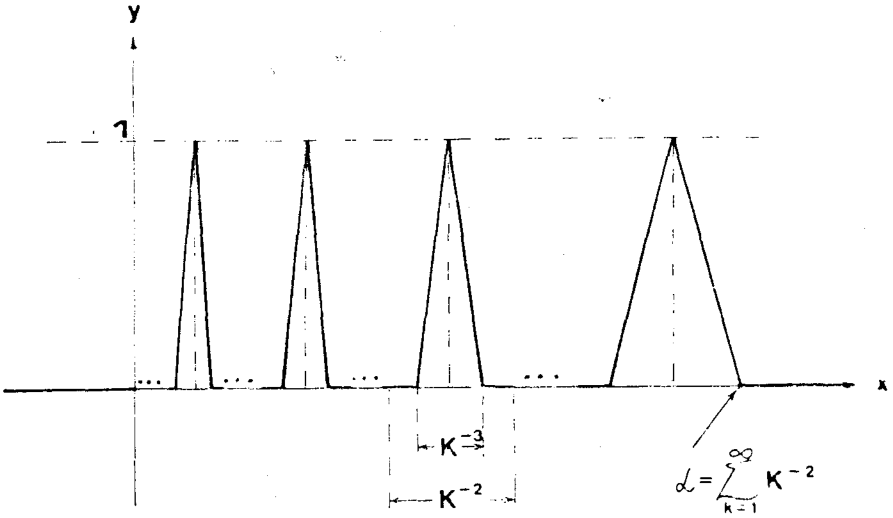


Fig. 1

et que, pour $\sum_{k=n_x+1}^{\infty} k^{-2} < x \leqslant \sum_{k=n_x}^{\infty} k^{-2}$, on a

$$0 < \frac{\int_{+0}^{x} f(t)\,dt}{x} < \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=n_x}^{\infty} k^{-3}}{\sum_{k=n_x+1}^{\infty} k^{-2}} \to 0, \quad x \to +0,$$

(puisque $\lim_{x\to+0} n_x = +\infty$), cette fonction f, discontinue dans le point $x=0$, possède la propriété $P_{\mathbf{R}}$, d'après le lemme 1. Comme on a, évidemment, $0 \leqslant f^n(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, chacune des fonctions f^n, $n \in \mathbf{N}$, a aussi la propriété $P_{\mathbf{R}}$. Si, d'autre part, le graphe de la fonction f est représenté par la figure 2, alors cette fonction, discontinue dans le point $x=0$, a la propriété $P_{\mathbf{R}}$, ce qu'on peut établir de manière semblable que dans le cas précédent, tandis que la fonction f^n, avec $2 \leqslant n \in \mathbf{N}$, n'a pas la propriété $P_{\mathbf{R}}$, puisque

$$\int_{0}^{\alpha} f^n(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^n k^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-3} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = +\infty.$$

3. *Désignons, pour un intervalle fixe I, par les symboles*

(5) $$C_k \ (k=1, 2, \ldots, 5)$$

respectivement les classes de toutes les fonctions réelles définies dans I et qui: 1) *n'ont pas la propriété P_I,* 2) *ont la propriété P_I et ne sont pas continues dans I,* 3) *sont continues et ne sont pas dérivables dans I,* 4) *sont dérivables et*

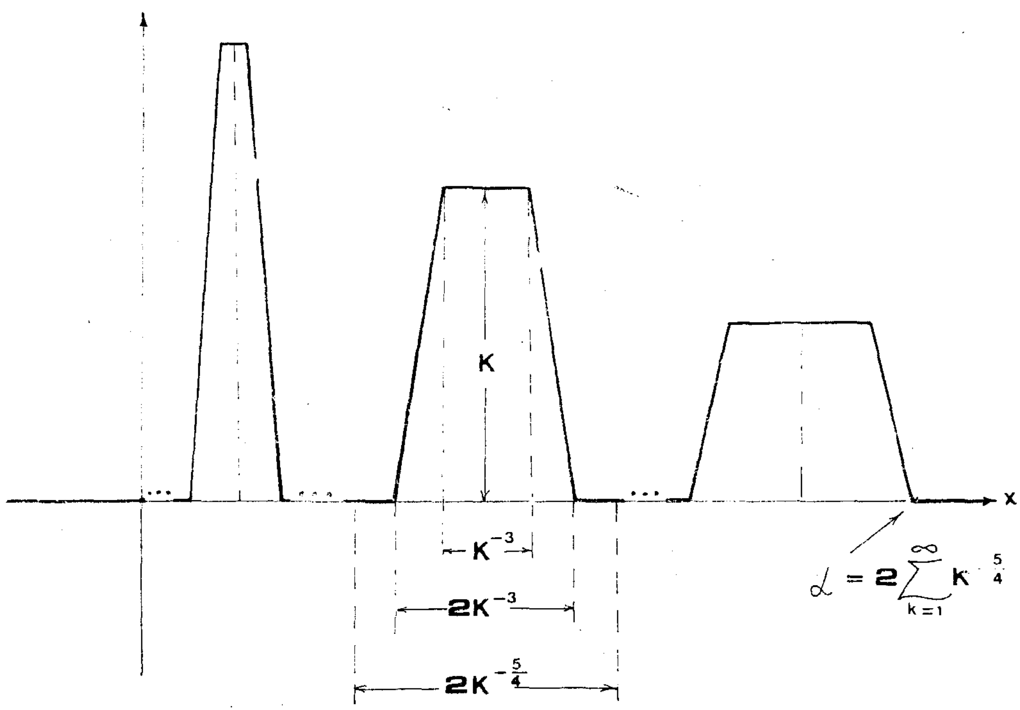


Fig. 2

ne sont pas continûment dérivables dans I et 5) *sont continûment dérivables dans I.* C'est en s'appuyant sur le théorème **P** et sur quelques faits élémentaires, et en effectuant quelques considérations supplémentaires, que l'on peut, pour chacun des cas où $f \in C_i$, $g \in C_j$, avec les nombres i, $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ satisfaisant à $i \leqslant j$ (cette condition sert à éviter la répétition des cas identiques) déterminés, établir exactement auxquelles des classes (5) peut appartenir la produit $f \cdot g$, et aussi auxquelles des classes peut appartenir la ***n***-ième puissance f^n de f, avec $2 \leqslant n \in \in \mathbf{N}$. Ici il faut considérer que les mots „*peut appartenir*" signifient que *cette possibilité se réalise effectivement pour une paire concrète de fonctions au moins, ou bien pour une n-ième puissance concrète d'une fonction,* — l'un et l'autre dans le cadre du cas en question.

Pour une partie non vide A de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 5\}$, *soit désigné par le symbole* $(i, j) \to A$ *le fait que, lorsque $f \in C_i$ et $g \in C_j$, alors A représente l'ensemble des indices de toutes les classes* (5) *auxquelles peut appartenir* (dans le sens précisé ci-dessus) *le produit $f \cdot g$; aussi, soit désigné par* $(i)_m \to A$ *le fait que, si $f \in C_i$, alors A représente l'ensemble des indices de toutes les classes* (5) *auxquelles peut appartenir la puissance f^m.* Avec ces désignations, le résultat plus complexe que nous avons annoncé sera formulé de la manière suivante:

Théoremè P'. *Nous avons*:

1° $(1, j) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $1 \leqslant j \leqslant 5$;

2° $(2, j) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $2 \leqslant j \leqslant 4$;

3° $(2, 5) \to \{2, 3, 4, 5\}$;

4° $(i, j) \to \{k : i \leqslant k \leqslant 5\}$, $3 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$;

5° $(\forall n \in \mathbf{N})$ $(1)_{2n} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

6° $(\forall n \in \mathbf{N})$ $(1)_{2n+1} \to \{1, 2\}$,

7° $(\forall n \in \mathbf{N})$ $(2)_{n+1} \to \{1, 2\}$;

8° $(\forall n \in \mathbf{N})$ $(i)_{n+1} \to \{k : i \leqslant k \leqslant 5\}$, $3 \leqslant i \leqslant 5$.

Remarque. Le théorème **P**′ contient toutes les assertions du théorème **P** (ainsi, par exemple, 7° dans **P**′ coïncide avec 4° dans **P**) en les complétant et précisant par plusieurs novelles assertions. Nous avons quand-même énconcé le théorème **P** à part — en raison de l'importance des faits qu'il contient (à ce qu'il nous semble) — et nous avons donné au théorème **P**′ la forme précédente afin d'obtenir un aperçu complet et uniforme d'un ensemble de faits.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà dit, l'assertion 7° du théorème **P**′ est réellement identique à l'assertion 4° du théorème **P.** Nous n'allons pas exposer complètement, avec tous les détails, les démonstrations des assertions 1°—4° du théorème ***P***, puisque cela exigerait l'élaboration de beaucoup de cas à distinguer, parmi lequels plusieurs sont semblables et quelqu'uns assez simples; quant à ces assertions-là nous allons donner des informations sommaires relatives aux points principaux de leurs démonstrations, en représentant par un nombre d'exemples sélectionnés l'élaboration des cas particuliers. Nous allons exposer, cependant, tous les cas cous 5°, 6° et 8°, prêtant le plus d'attention au dernier des cas sous 6°.

Pour abréger notre exposition, dans chaque cas considéré nous désignerons, sans le dire explicitement, par A l'ensemble figurant dans la relation correspondante de la forme $(i, j) \to A$ ou de la forme $(i)_m \to A$, et le fait que $k \in A$ sera designé par

(6) $$(i, j) \to k,$$

ou bien par

(7) $$(i)_m \to k.$$

Il résulte de l'assertion 1° du théorème **P** que l'on a $A \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$ dans le cas 3°. Le fait que les propriétés de continuité, de dérivabilité et de dérivabilité continue sont multiplicatives, dans le sens précisé dans ***O***, entraîne pour tous les cas sous 4° l'inclusion $A \subseteq \{k : i \leqslant k \leqslant 5\}$, $3 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$ et pour tous les cas sous 8° l'inclusion $A \subseteq \{k : i \leqslant k \leqslant 5\}$, $3 \leqslant i \leqslant 5$. Étant donné que, évidemment, la puissance impaire d'une fonction discontinue est aussi fonction discontinue, on a $A \subseteq \{1, 2\}$ dans 6°. Il reste donc à établir que toutes ces inclusions-là se remplacent effectivement par les égalités correspondantes et que l'on a $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans les cas 1°, 2° et 5°. On peut le faire en démontrant chacun des faits valables (6) et (7) (sauf, bien entendu, le fait $(5, 5) \to 5$) par un exemple corrésponant de fonctions f et g concrètes, ou bien, pour quelques cas, par une considération plus ou moins générale.

Ainsi, le fait sous 1°

$$(1, 1) \to 1$$

se prouve par l'exemple suivant:

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Ensuite, les faits sous 1°:

$$(1,\ 1)\to 2,\quad (1,\ 1)\to 3\quad \text{et}\quad (1,\ 1)\to 4$$

sont prouvés par les exemples:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ f_\alpha(x), & x>0,\end{cases}$$

où l'on a $\alpha\in(-2,\ 0]$, $\alpha\in(0,\ 1]$ et $\alpha\in(1,\ 3]$, respectivement, et le fait

$$(1,\ 1)\to 5$$

se démontre par l'exemple

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Le plus grand nombre des exemples servant à démontrer les autres faits particuliers sous 1°—4°, ainsi que les exemples précédents, sont consitués par les fonctions f et g définies dans $\mathbf{R}$ et telles que leurs restrictions à quelques sous-intervalles de $\mathbf{R}$ appartiennet à des classes (5) déterminées, la conservation d'une propriété s'effectuant par le fait que l'autre de ces deux fonotions prend la valeur 1 dans l'intervalle en question, et son annulation par la valeur 0 prise par cette autre fonction dans cette intervalle. Les constructions de telles fonctions f et g s'appuyent sur les lemmes 1 et 2 et utilisent des restrictions des fonctions f_α à $(-\infty,\ 0)$ ou à $(0,\ +\infty)$, de même que les translations de ces restrictions ou des restrictions à des intervalles bornés, et la continuité ou la dérivabilité continue dans un intervalle plus large d'une fonction prenant la valeur 1 dans un sous-intervalle et la valeur 0 dans un autre sous-intervalle peut évidemment se réaliser d'une manière simple.

Des exemples ou considérations prouvant le fait du type (6) sous 2°—4°, nous allons citer cependant tous ceux qui diffèrent des exemples que nous venons de décrire.

$(2,\ 2)\to 1,\ 2$: ce fait résulte de l'assertion 4° de **P**).

$(2,\ 2)\to 5$: ce fait est prouvé par l'exemple employé dans la démonstration da la partie positive de l'assertion 3° du théorème **P.**

$(2,\ 3)\to 4$:

$$f(x)=\begin{cases}f_0(x), & x\leqslant 0\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ f_1(x), & x>0.\end{cases}$$

$(2,\ 4)\to 1$: cela résulte immédiatement des assertion 1° et 2° de **P.**

$(2,\ 4)\to 2$: soit $f\in C_2$ avec le point de desconinuité x_0 et soit g la fonction primitive de f dans I telle que $g(x_0)\neq 0$; on a alors $g\in C_4$ et la fonction $h=f\cdot g$ a la fonction primitive $\frac{1}{2}g^2$ dans I et n'est pas continue dans le point x_0, de manière que $h\in C_2$.

$(2,\ 4)\to 3$: $f=f_{-1}$, $g=f_2$.

$(2,\ 4)\to 4$: $f=f_{-1}$, $g=f_3$.

$(2,\ 5)\to 3$: $f=f_0$, $g(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$.

$(2,\ 5)\to 4$: $f=f_0$, $g(x)=x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

$(3,\ 3)\to 3$: $f(x)=g(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$, $x\in\mathbf{R}$.

$(3,\ 3)\to 4$: $f=f_1$, $g(x)=|x|$, $x\in\mathbf{R}$.

$(3,\ 3)\to 5$: $f(x)=g(x)=|x|$, $x\in\mathbf{R}$.

$(4,\ 4)\to 4$: $f=g=f_{\frac{3}{2}}$.

$(4,\ 4)\to 5$: $f=g=f_3$.

Nous passons aux exemples concernant les assertions 5°, 6° et 8°.

5°

$(1)_{2n}\to 1$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$(1)_{2n}\to 2$: soit g la fonction dont le graphe est représenté sur la figure 1 et soit

$$f(x)=\begin{cases}(g(x))^{\frac{1}{2n}}, & x\in\mathbf{Q}\\ -(g(x))^{\frac{1}{2n}}, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q};\end{cases}$$

alors $f\in C_1$, $f^{2n}=g\in C_2$.

$(1)_{2n}\to 3$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2n}}, & 0<x\in\mathbf{Q}\\ -x^{\frac{1}{2n}}, & 0<x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

$(1)_{2n}\to 4$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ f_{\frac{1}{n}}(x), & 0<x\in\mathbf{Q}\\ -f_{\frac{1}{n}}(x), & 0<x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

$(1)_{2n} \to 5$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

6°

$(1)_{2n+1} \to 1$: le même exemple que pour $(1)_{2n} \to 1$.

$(1)_{2n+1} \to 2$: soit, pour un nombre m impair supérieur à 1 arbitraire, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{m+2}{m+1}} = \alpha$, et soit f la fonction dont le graphe dans l'intervalle $(0, 3\alpha]$ est représenté par la figure 3 et qui s'annule pour les autres valeurs de $x \in \mathbf{R}$. Si l'on désigne par P_k et par $\overline{P}_k$ les aires des triangles isocèles sur la figure 3, et par $P_k^{(m)}$ et $\overline{P}_k^{(m)}$ les aires des figures correspondantes obtenues en remplaçant la ligne $y = f(x)$ par la ligne $y = f^m(x)$, nous avons d'abord

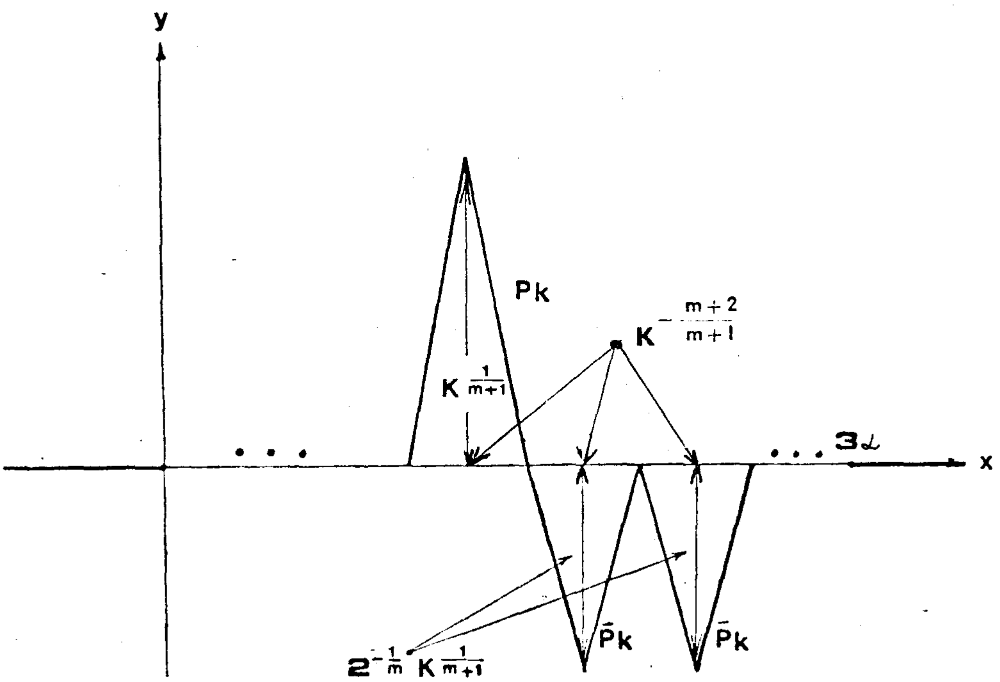


Fig. 3

$$\int_0^{3\alpha} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (P_k - 2\overline{P}_k) = \frac{1}{2}\left(1 - 2^{1-\frac{1}{m}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = +\infty,$$

d'où la conclusion que $f \in C_1$. Étant donné que

$$P_k^{(m)} = \frac{1}{m+1} k^{-\frac{2}{m+1}},$$

nous obtenons

$$\int_0^{3\alpha} f^m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(P_k^{(m)} - 2\overline{P}_k^{(m)}\right) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-\frac{2}{m+1}} - 2\cdot 2^{-1}k^{-\frac{2}{m+1}}\right) = 0.$$

Avec

$$3\sum_{k=n_x+1}^{\infty} k^{-\frac{m+2}{n+1}} < x \leqslant 3\sum_{k=n_x}^{\infty} k^{-\frac{m+2}{n+1}},$$

on aura ensuite

$$0 < \frac{\int_{+0}^{x} f^m(t)\,dt}{x} < \frac{\sum_{k=n_x}^{\infty}\left(P_k^{(m)} - 2\overline{P}_k^{(m)}\right) + P_{n_x}^{(m)}}{3\sum_{k=n_x+1}^{\infty} k^{-\frac{m+2}{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{m+1}\cdot n_x^{-\frac{2}{m+1}}}{3\sum_{k=n_x+1}^{\infty} k^{-\frac{m+2}{m+1}}} \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{n_x^{-\frac{2}{m+1}}}{n_x^{-\frac{1}{m+1}}} \to 0, \quad x \to +0.$$

Par conséquent, $f^m \in C_2$.

8°

$(3)_{n+1} \to 3$: $\quad f(x) = |x|^{\frac{1}{n+1}}, \quad x \in \mathbf{R}$.

$(3)_{n+1} \to 4$: $\quad f = f_{\frac{2}{n+1}}$.

$(3)_{n+1} \to 5$: $\quad f(x) = |x|^{\frac{2}{n+1}}, \quad x \in \mathbf{R}$.

$(4)_{n+1} \to 4$: soit $g \in C_2$ avec le point da discontinuité x_0 et soit f la fonction primitive dans I de la fonction g, telle que $f(x_0) \neq 0$; alors $f \in C_4$ et $(f^{n+1}(x))' = (n+1)\, f^n(x)\cdot g(x)$, $x \in I$; cette fonction-là n'est pas continue dans le point x_0, de sorte que $f^{n+1} \in C_4$.

$(4)_{n+1} \to 5$: $\quad f = f_2$.

Je remercie mr Slavko Simić de son aide concernant un point particulier dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. R. Gelbaum and J. M. Olmsted: *Countre Examples in Analysis*. Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam 1964.
2. Henry Lebesgue: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris 1950.
3. Г. Полия и Г. Cere: *Задачи и теореми Анализа I—II*. Москва 1956.

Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, P. O. Box 550
Yugoslavia

NEKOLIKO PRIMEDBI O PRIMITIVNIM FUNKCIJAMA REALNIH FUNKCIJA

Dušan D. Adamović

U sklopu širih razmatranja, ovde se na prvom mestu tretira sledeće pitanje: pod pretpostavkom da funkcija f ima na intervalu I primitivnu funkciju, koje svojstvo (koji stepen pravilnosti) funkcije g, definisane na I, obezbeđuje postojanje primitivne fnnkcije na I prozvoda $h=f\cdot g$? Glavni rezultati rada sadržani su u teoremama P i P'.

Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 19,1,87–95 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

A REMARK CONCERNING SLOWLY VARYING FUNCTIONS IN KARAMATA'S SENSE

Dušan D. Adamović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Beograd

ABSTRACT

In this paper the author give a complete proof of a statement from the paper [1] .

In [1] we were concerned with the properties of slowly varying functions in Karamata's sense i.e. of real functions L defined and positive for $x \geq 0$, such that

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \quad \text{for any } \lambda \in (0,+\infty).$$

In paper [3] J. Karamata defined this class of functions, and established also, using a particular example (p. 46-47), that a slowly varying function need not have the asymptotic behaviour of a monotonic function as $x\to+\infty$. In [1] we made this fact more precise by assertion 4^0 of Theorem II, by which: a slowly varying function may, as $x\to+\infty$, oscillate, with a finite or infinite interval of oscillation ([1], p. 133). However, proving this statement, we only constructed ([1], p. 134-135) a definite slowly varying function which oscillates between finite (and positive) limits as $x\to+\infty$, and noted finally that "one can, by suitable modifications of this example, construct a slowly varying function with an infinite interval of oscillation".

Here we shall give a complete proof of the second part of the cited statement, which has not been made in [1], and we shall also give a more precise form of this statement. Namely, we shall replace it by the following:

Proposition. For any two elements a and b of the interval $[0,+\infty]$ such that $a<b$, there exists a slowly varying function L continuous on $[0,+\infty)$ and such that

$$\varliminf_{x\to+\infty} L(x)=a, \qquad \varlimsup_{x\to+\infty} L(x)=b.$$

Proof. In all cases considered, the slowly varying function $L(x)$ which we shall construct for $x\geq 1$ will be given by an equality of the form

$$L(x)=e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt},$$

where

$$\varepsilon(x)=\frac{\eta(x)}{1+\ln x} \quad (x\geq 1) \tag{1}$$

and the function $\eta(x)$ is continuous and bounded for $x\geq 1$; for $x\in[0,1]$ it is sufficient to define $L(x)$ as a function continuous and positive on that interval. According to the known result about the representation of a slowly varying function (see, for example, [1], p.124, 0.2), the function $L(x)$ defined in this way is certainly slowly varying and continuous on $[0,+\infty)$.

We shall first consider the case

$$0<a<b<+\infty .$$

Let us put

$$(2) \qquad \rho = \ln b - \ln a \ (>0), \quad \omega = e^{e^{\rho}-1} - 1 \ (>0), \quad \delta = \frac{\omega}{3} \ (>0)$$

and

$$(3) \qquad x_1 = 1+2\delta; \quad x_{n+1} = \delta + e^{e^{\rho}-1} \cdot (\delta + x_n)^{e^{\rho}} \ (n \in N).$$

Then,

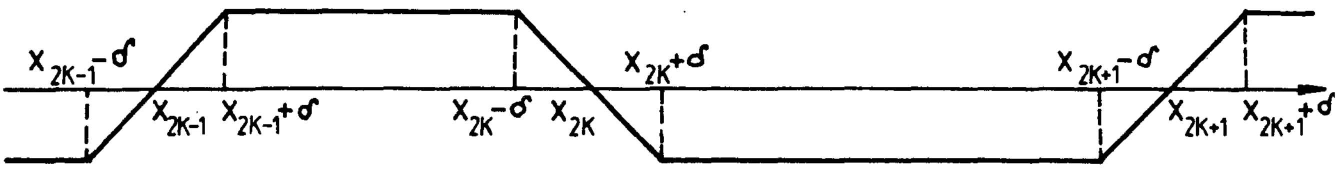
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > e^{e^{\rho}-1} \cdot \frac{(\delta+x_n)^{e^{\rho}}}{x_n} > e^{e^{\rho}-1}; \quad \frac{\delta+x_n}{x_n} > e^{e^{\rho}-1} = \omega+1 \ (>1) \ (n \in N)$$

and hence,

$$(4) \qquad x_{n+1} - x_n = x_n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) > x_1\omega > \omega = 3\delta \ (n \in N).$$

Let us further pose (see the figure)

$$(5) \qquad \eta(x) = \begin{cases} x - x_{2k-1} & (x_{2k-1} - \delta \leqslant x < x_{2k-1} + \delta) \\ 1 & (x_{2k-1} + \delta \leqslant x < x_{2k} - \delta) \\ -x + x_{2k} & (x_{2k} - \delta \leqslant x < x_{2k} + \delta) \\ -1 & (x_{2k} + \delta \leqslant x \leqslant x_{2k+1} - \delta) \end{cases} \quad (k \in N).$$



According to (2), (3) and (4), this definition of $\eta(x)$ is consistent and obviously $\eta(x)$ is defined by it for $x \geqslant x_1 - \delta$ (>1) as a function continuous and bounded on $[0,+\infty)$. For $1 \leqslant x \leqslant x_1 - \delta$, we define $\eta(x)$ as a function continuous on $[1, x_1 - \delta]$ and such that

$$\int_1^{x_1-\delta}\frac{\eta(t)}{t(1+\ell nt)}\,dt=\ln a-\alpha-\int_{x_1-\delta}^{x_1}\frac{t-x}{t(1+\ln t)}\,dt,$$

where the number α will be determined later; evidently, this can be done.

By (3), we have

$$\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}\frac{dt}{t(1+\ln t)}=\ln(1+\ln t)\Big|_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}=\ln\frac{1+\ln(x_{k+1}-\delta)}{1+\ln(x_k+\delta)}$$

$$=\ln\frac{1+\ln[e^{e^{\rho}-1}(\delta+x_k)^{e^{\rho}}]}{1+\ln(x_k+\delta)}=\ln\frac{1+e^{\rho}-1+e^{\rho}\ln(\delta+x_k)}{1+\ln(x_k+\delta)}=\rho.$$

Hence,

$$\int_1^{x_{n+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\int_1^{x_1-\delta}\frac{\eta(t)}{t(1+\ln t)}\,dt+\int_{x_1-\delta}^{x_1}\frac{t-x_1}{t(1+\ln t)}\,dt+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt$$

$$=\ln a-\alpha+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{|\eta(t)|}{t(1+\ln t)}\,dt$$

$$=\ln a-\alpha+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big[\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}\frac{dt}{t(1+\ell nt)}+\Big(\int_{x_k}^{x_k+\delta}+\int_{x_{k+1}-\delta}^{x_{k+1}}\Big)\frac{|\eta(t)|}{t(1+\ln t)}\,dt\Big]$$

$$=\ln a-\alpha+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\rho+\alpha_k),$$

where

$$\alpha_n\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \Big(\int_{x_n}^{x_n+\delta}+\int_{x_{n+1}-\delta}^{x_{n+1}}\Big)\frac{|\eta(t)|}{t(1+\ln t)}\,dt\downarrow 0\quad(n\to\infty),$$

and consequently

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \alpha_k$$

is a finite number. Hence,

$$(6) \qquad \int_1^{x_{2n+1}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt = \ln a - \alpha + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \alpha_k \to \ln a - \alpha + \alpha = \ln a \; (n \to \infty),$$

$$(7) \qquad \int_1^{x_{2n+2}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt = \ln a - \alpha + \rho + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \alpha_k \to \ln a - \alpha + \rho + \alpha = \ln b \; (n \to \infty).$$

By (1) and (5), we have, for each $n \in N$,

$$\int_1^{x_{2n-1}} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < \int_1^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \int_1^{x_{2n}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \quad (x_{2n-1} < x \leq x_{2n}),$$

$$\int_1^{x_{2n+1}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \int_1^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt < \int_1^{x_{2n}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \qquad (x_{2n} < x \leq x_{2n+1}),$$

wherefrom we obtain

$$\int_1^{y_x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \int_1^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \int_1^{z_x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \quad (x > x_1),$$

where $x \in (x_k, x_{k+1}]$, $\{y_x, z_x\} = \{x_k, x_{k+1}\}$, $y_x \in \{x_{2\nu-1} : \nu \in N\}$, $z_x \in \{x_{2\nu} : \nu \in N\}$. This implies, according to (6) and (7),

$$\ln a \leq \varliminf_{x \to +\infty} \int_1^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \int_1^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \leq \ln b,$$

and this together with (6) and (7) implies

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \ln a, \quad \overline{\lim}_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \ln b.$$

Therefore,

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} L(x)=a, \quad \overline{\lim}_{x\to+\infty} L(x)=b.$$

In the case

$$0<a<b=+\infty,$$

let us pose

$$x_1=3; x_{2n}=e^{e^n-1}(x_{2n-1}+1)^{e^n}+1\,(n\in N), x_{2n+1}=e^{e^n-1}(x_{2n}+1)^{e^n}+1\,(n\in N).$$

Then, we have

$$x_{2n}>1+e^{e-1}x_{2n-1}>1+2x_{2n-1}(>x_{2n-1}) \quad (n\in N),$$

$$x_{2n+1}>1+2x_{xn}(>x_{2n}) \quad (n\in N),$$

that is, $x_{n+1}>1+2x_n(>x_n)$ $(n\in N)$, and so $x_{n+1}-x_n>1+x_n\geqslant 1+3>3$. Therefore, in this case we shall also define $\eta(x)$ for $x\geqslant 2$ by (5) with $\delta=1$, and for $x\in[1,2]$ as a continuous function such that

$$\int_1^{x_1} \frac{\eta(t)}{t(1+\ln t)}\,dt=\int_1^{x_1} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \ln a-\alpha,$$

where

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\alpha_k ,$$

with

$$\alpha_k=\left(\int_{x_k}^{x_k+1}+\int_{x_{k+1}-1}^{x_{k+1}}\right)\frac{|\eta(t)|}{t(1+\ln t)}\,dt \qquad (k\in N),$$

is a finite number. Similarly as in the first case, one can establish that now

$$\int_1^{x_{2n+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\ln a-\alpha+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\alpha_k\to\ln a-\alpha+\alpha=\ln a \quad (n\to\infty),$$

$$\int_1^{x_{2n+2}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\ln a-\alpha+n+1+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\alpha_k\to+\infty(n\to\infty),$$

wherefrom one concludes that

$$\varliminf_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\ln a,\qquad \varlimsup_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=+\infty,$$

i.e. $\varliminf_{x\to+\infty}L(x)=a,\quad \varlimsup_{x\to+\infty}L(x)=+\infty.$

In the case

$a=0<b<+\infty,$

it is sufficient to observe that the function $L(x)=1/L_0(x)$, where L_0 is a slowly varying function continuous on $[0,+\infty)$ and such that $\varliminf_{x\to+\infty}L_0(x)=1/b$, $\varlimsup_{x\to+\infty}L_0(x)=+\infty$ (preceding case) - is continuous on $[0,+\infty)$ and has the properties $\varliminf_{x\to+\infty}L(x)=0$, $\varlimsup_{x\to+\infty}L(x)=b$.

Let us finally consider the case

$a=0,\ b=+\infty.$

Putting

$$x_1=3;\ x_{n+1}=1+e^{e^n-1}(x_n+1)^{e^n}\qquad (n\in N),$$

and defining $\eta(x)$ on $[2,+\infty)$ by (5) with $\delta=1$, and on $[1,2]$ as a continuous function on that interval, we get in this case

$$\int_1^{x_{n+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\int_1^{x_n}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt+\sum_{x=1}^{n}(-1)^{k-1}k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\alpha_k,$$

where α_k has the same meaning as in the proceding case, and consequently

$$\int_1^{x_{2n+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\int_1^{x_1}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt-n+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\alpha_k\to-\infty\ (n\to\infty),$$

$$\int_1^{x_{2n+2}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\int_1^{x_1}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt+n+1+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\alpha_k\to+\infty(n\to\infty).$$

Hence,

$$\varliminf_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=-\infty,\qquad \varlimsup_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=+\infty,$$

that is,

$$\varliminf_{x\to+\infty}L(x)=0,\qquad \varlimsup_{x\to+\infty}L(x)=+\infty.$$

Remark. A particular example of a slowly varying function $L(x)$ with properties $\varliminf_{x\to+\infty}L(x)=0$ and $\varlimsup_{x\to+\infty}L(x)=+\infty$ is given in [2] (p.58,ex.3), without detailed proof. Our result is evidently more general.

REFERENCES

[1] D. Adamović: *Sur quelques propriétés des fonctions a croissance lente de Karamata (I), Matematički vesnik 3(18), sv.2,1966,p.123-136.*

[2] N.C.Bingham, C.M.Goldie and J.L.Teugel: *Regular Variation (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 27), Cambridge University Press, 1987.*

[3] J. Karamata: *Sur un mode de croissence régulière des fonctions, Cluj, 1930, p. 38-53.*

REZIME

JEDNA PRIMEDBA KOJA SE ODNOSI NA SPORO PROMENLJIVE U SMISLU KARAMATE

Dat je kompletan dokaz jednog rezultata iz rada [1].

Received by the editors May 23, 1988.

Mathematica Balkanica

New Series Vol. 3, 1989, Fasc. 1

On Nanson's Inequality and on Some Inequalities Related to It

Dušan D. Adamović , Josip E. Pečarić

Mathematica
Balkanica

New Series Vol. 3, 1989, Fasc. 1

On Nanson's Inequality and on Some Inequalities Related to It

Dušan D. Adamović, Josip E. Pečarić***

Presented by Đ. Kurepa

1. The following result is due to E. J. Nanson:
"If a real sequence $a=(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ is convex, then

$$\frac{a_1+a_3+\ldots+a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n}, \tag{1}$$

with equality if and only if a is an arithmetic progression."

One can find this result in [1, p. 205], where its proof is also given. This proof is correct, but it appeared to the authors rather artificially constructed. That incited them to try to find a different proof, which would be, without regard to the length, essentially more natural. The form of the proof of Nanson's inequality that they — tending to this purpose — obtained, conducted them to a more general result. Besides that general proposition and its corollaries this paper contains several other results, related in a different way to Nanson's inequality.

Before passing to our main results, we shall give some auxiliary assertions.

Lema 1. *If a function $f(x)$ is convex (strictly convex) on the intervals $[a, b]$ and $[b, c]$ $(a<b<c)$, and $f'_-(b)\leqq f'_+(b)$, then this function is also convex (strictly convex) on the interval $[a, c]$.*

Proof. By hypothesis, we have, with $a\leqq y_1<b<y_2\leqq c$,

$$\frac{f(b)-f(y_1)}{b-y_1} \underset{(<)}{\leqq} f'_-(b)\leqq f'_+(b) \underset{(<)}{\leqq} \frac{f(y_2)-f(b)}{y_2-b}.$$

Hence we get for $a\leqq x_1<x_2<b<x_3\leqq c$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{(<)}{\leqq} \frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} \underset{(<)}{\leqq} \frac{f(x_3)-f(b)}{x_3-b}$$

and further, using the fact that the second inequality implies

$$\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} \underset{(<)}{\leqq} \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{(<)}{\leqq} \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{2}$$

If $a \leqq x_1 < b < x_2 < x_3 \leqq c$, we have

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \underset{(>)}{\geqq} \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b} \underset{(>)}{\geqq} \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}$$

and further, since the second inequality implies

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b} \underset{(>)}{\geqq} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

we conclude that (2) holds in this case, too. Therefore (2) is valid for all $x_1, x_2, x_3 \in [a, c]$ such that $x_1 < x_2 < x_3$, which means that the function f is convex (strictly convex) on $[a, c]$.

Lemma 2. *If a sequence $a_n (n \in \mathrm{N})$ is convex, then the function f whose graph is the polygonal line with corner points $(n, a_n) (n \in \mathrm{N})$ is also convex on $[1, \infty)$.*

Therefore, a convex sequence $a_n (n \in \mathrm{N})$ has the property

$$a_q \leqq \frac{(r-q)a_p + (q-r)a_r}{r-p} \quad (1 \leqq p < q < r)$$

with strict inequality for fixed p, q and r if and only if the sequence (a_n) is not arithmetic for $p \leqq n \leqq r$.

Similar assertions concerning finite sequence are valid.

Proof. The supposition implies the convexity of the function f on each interval $[k, k+1]$ $(k \in \mathrm{N})$ and its property $f'_-(k) \leqq f'_+(k)$ $(k \in \mathrm{N},\ k \geqq 2)$. Hence, using Lemma 1 and applying mathematical induction, one can easily prove the convexity of f on each interval $[1, k] (k \in \mathrm{N},\ k \geqq 2)$, and that obviously implies its convexity on $[1, +\infty)$.

It follows from the established, that

$$a_q = f(q) \leqq \frac{(r-q)f(p) + (q-r)f(r)}{r-p} = \frac{(r-q)a_p + (q-r)a_r}{r-p} \quad (1 \leqq p < q < r).$$

According to a known property of convex function, this inequality is equality and only if f is linear on $[p, r]$, that is if and only if (a_n) is arithmetic for $p \leqq n$

It is clear that all we previously established is also valid, in a corresponding form, in the case of a finite sequence.

Lemma 3. *If a sequence (a_n) is convex, then the sequences (a_{2n-1}), (a_{2n}), generally all sequences (a_{mn-p}) with fixed $m \in \mathrm{N}$ and $p \in \{0, \ldots, m-1\}$, are convex,*

Lemma 4. *Let A and B be real, and* α *and* β *— positive numbers. Then any of the inequalities*

$$\frac{A}{\alpha} \underset{(<)}{\leqq} \frac{B}{\beta}, \quad \frac{A}{\alpha} \underset{(<)}{\leqq} \frac{A+B}{\alpha+\beta}, \quad \frac{A+B}{\alpha+\beta} \underset{(<)}{\leqq} \frac{B}{\beta}$$

implies remaining two of them, i.e. the inequality

$$\frac{A}{\alpha} \underset{(<)}{\leqq} \frac{A+B}{\alpha+\beta} \underset{(<)}{\leqq} \frac{B}{\beta}.$$

Lemma 3 follows immediately from Lemma 2. The assertion of Lemma 4 is evident and well-known.

Let us remark that we have, according to Lemma 4, the following corollary of Nanson's inequality

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}}{n+1} \geqq \frac{\sum_{k=1}^{2n+1} a_k}{2n+1} \geqq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{2k}}{n}$$

holding for convex sequence $(a_1, \ldots, a_{2n+1})$ (a similar result is given in [5, pp. 59-60]).

2. We pass to a result of a general kind.

Theorem 1. *Let* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *be a convex sequence and let* $I_n=\{1, \ldots, n\}$. *Let further I, J and M be nonempty subsets of* I_n, *the sets I and J being non-overlapping. Let these three sets have cardinal numbers* α, β *and* γ, *respectively, and let*

$$u=\sum_{i\in I} i, \quad v=\sum_{i\in J} i, \quad w=\sum_{i\in M} i.$$

Then, under the conditions

$$\frac{u}{\alpha}<\frac{v}{\beta}\wedge(\forall m\in M)\frac{u}{\alpha}\leqq m\leqq\frac{v}{\beta}, \tag{4}$$

the inequality

$$\sum_{i\in M} a_i \leqq \frac{\gamma v-\beta w}{\alpha v-\beta u}\sum_{i\in I} a_i+\frac{\alpha w-\gamma u}{\alpha v-\beta u}\sum_{i\in J} a_i \tag{5}$$

holds. If besides (4) *the condition*

$$\frac{w}{\gamma}=\frac{u+v}{\alpha+\beta} \tag{6}$$

is satisfied, then

$$\frac{\sum_{i\in M} a_i}{\gamma} \leqq \frac{\sum_{i\in I\cup J} a_i}{\alpha+\beta} \tag{7}$$

holds. If, in addition, M and $I\cup J$ are non-overlapping sets, the inequality

$$\frac{\sum_{i\in M} a_i}{\gamma} \leqq \frac{\sum_{i\in I\cup J\cup M} a_i}{\alpha+\beta+\gamma} \leqq \frac{\sum_{i\in I\cup J} a_i}{\alpha+\beta} \tag{7'}$$

is also true.

Each of the inequalities (5), (7) and (7′) becomes an equality if and only if a is an arithmetic progression on the set

$$S=\{\min(I\cup J),\ \min(I\cup J)+1,\ldots,\ \max(I\cup J)\}.$$

Without the supposition

$$(\forall m\in M)\frac{u}{\alpha}\leqq m\leqq\frac{v}{\beta}, \tag{4'}$$

the conditions $\frac{u}{\alpha}<\frac{v}{\beta}$ and (6) do not imply the inequality (7).

Proof. For $m\in M$ arbitrarily chosen, we can find nonnegative numbers P and Q such that $P+Q>0$ and

$$m=\frac{Pu+Qv}{P\alpha+Q\beta},$$

i.e.

$$(\alpha m-u)P=(v-\beta m)Q.$$

This is satisfied for

$$P=v-\beta m,\quad Q=\alpha m-u,$$

these numbers P and Q being, according to (4), nonnegaive and with positive sum. Using Lemma 2 and Jensen's inequality applied to the function f mentioned in that Lemma, we obtain

$$a_m=f(m)\leqq\frac{P\alpha f(\frac{u}{\alpha})+Q\beta f(\frac{v}{\beta})}{P\alpha+Q\beta}=\frac{P\alpha f(\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in I} i)+Q\beta f(\frac{1}{\beta}\sum_{i\in J} i)}{P\alpha+Q\beta}$$

$$\leqq\frac{P\sum_{i\in I}f(i)+Q\sum_{i\in J}f(i)}{P\alpha+Q\beta},$$

i.e.

$$(8) \qquad a_m \leqq \frac{(v-\beta m)A+(\alpha m-u)B}{\alpha v-\beta u},$$

where $A=\sum_{i\in I} a_i$, $B=\sum_{i\in J} a_i$. It follows further from (8)

$$\sum_{m\in I} a_m \leqq \frac{1}{\alpha v-\beta u}\{A \sum_{m\in M}(v-\beta m)+B\sum_{m\in M}(\alpha m-u)\}$$

$$=\frac{\gamma v-\beta w}{\alpha v-\beta u}A+\frac{\alpha w-\gamma u}{\alpha v-\beta u}B,$$

that is the inequality (5).

If the condition (6) is satisfied, then we have

$$\frac{\gamma v-\beta w}{\alpha v-\beta u}=\frac{\alpha w-\gamma u}{\alpha v-\beta u}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta},$$

so that (5) becomes, I and J being non-overlapping sets,

$$\frac{\sum_{i\in M} a_i}{\gamma} \leqq \frac{\sum_{i\in I\cup J} a_i}{\alpha+\beta},$$

i.e. (7). If, in addition, $M\cap(I\cup J)=\emptyset$, this inequality implies (7′), according to Lemma 4.

Further, one can easily see that if the sequence a is not an arithmetic progression (linear sequence) on the set S, then any of the inequalities (8) is strict, and so the inequality (7) is strict, too.

Finally, the last assertion is confirmed by the example of the sequence $a_n=n^2$ ($n=1,\ldots,8$), with $I=\{1,3,4\}$, $J=\{5,6,8\}$, $M=\{2,7\}$. In this case the condition (6) is satisfied, but

$$\frac{u}{\alpha}=\frac{8}{3}>2\in M,$$

and so (4′) do not hold. Since

$$\frac{\sum_{i\in M} a_i}{\gamma}=\frac{2^2+7^2}{2}=\frac{53}{2}, \quad \frac{\sum_{i\in I\cup J} a_i}{\alpha+\beta}=\frac{151}{6}<\frac{159}{2.3}=\frac{53}{2},$$

the inequality (7) is not satisfied.

This completes the proof of Theorem 1.

Corollary 1. *Let $a=(a_1,\ldots,a_n)$ be a convex sequence. Then for $m\in\mathbb{N}$ and $2m\leqq n-1$ the inequalities*

$$\frac{1}{n-2m}\sum_{i=m+1}^{n-m} a_i \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \frac{1}{2m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=n-m+1}^{n} a_i\right)$$

hold. Both inequalities become equalities if and only if a is an arithmetic progression.

3. Using Theorem 1, we shall prove the following generalization of Nanson's inequality.

Theorem 2. *Let the sequence* $a=(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ *be convex. Then for* $m \in \mathbf{N}$ *and* $2m \leqq n+1$ *the following inequality*

$$\frac{1}{n-2m+2}\sum_{k=m}^{n+1-m} a_{2k} \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} \tag{9}$$

holds, with equality if and only if a is an arithmetic progression.

Proof. We start from the inequality defining a convex sequence

$$2a_{2k} \leqq a_{2k-1} + a_{2k+1}.$$

Adding from $k=m$ to $k=n+1-m$ one gets

$$2\sum_{k=m}^{n+1-m} a_{2k} \leqq a_{2m-1} + 2\sum_{k=m+1}^{n+1-m} a_{2k-1} + a_{2(n+1-m)+1}$$

$$= 2\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1} - (a_{2m-1} + a_{2(n-m)+3})$$

$$\leqq 2\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1} - \frac{2}{n-2m+3}\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1},$$

i.e.

$$\sum_{k=m}^{n+1-m} a_{2k} \leqq \frac{n-2m+2}{n-2m+3}\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1}. \tag{10}$$

Here we use the inequality

$$\frac{1}{n-2m+3}\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1} \leqq \frac{a_{2m-1} + a_{2(n-m)+3}}{2}$$

which follows immediately from Theorem 1. It follows also from Theorem 1 (first inequality (7')) the inequality

$$\frac{1}{n-2m+3}\sum_{k=m}^{n-m+2} a_{2k-1} \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1}. \tag{11}$$

Combining (10) and (11) one gets (9). The statement concerning equality in (9) is clear, taking into consideration the corresponding assertion of Theorem 1. This completes the proof.

Remark 1. Using the substitution $a_i = b_{i+1}$ one gets from (9), with $n \geqq 2$ instead of $n+1$,

$$\frac{1}{n-2m+1} \sum_{k=m}^{n-m} a_{2k+1} \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \quad (m \in \mathrm{N},\ 2m \leqq n),$$

and especially, for $m=1$,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1} \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{2k},$$

or, according to Lemma 4,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1} \leqq \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} a_k \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.$$

4. As it has been established in [1, pp 205-206, 3.2.27], Nanson's inequality with $a_k = x^{k-1}$ becomes the inequality of J. M. Wilson

$$\frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}{x+x^3+\ldots+x^{2n-1}} \geqq \frac{n+1}{n} \quad (x>0).$$

Using Theorem 2 one can, clearly, obtain a generalization of Wilson's inequality. On the other hand, starting from Corollary 1 one can also deduce the results given in [1, p. 198, 3.2.4] (or in [5, p. 139, 2.3.1.4]), in [3, p. 142, 2.3.1.5] and in [3, p. 144, 2.3.1.6].

The following statement generalizes many results of this kind.

Theorem 3. *Let p and q be real numbers and let $p>q$.*

1° *If* $q>0 \vee (p>0>q \wedge p+q<0)$, *then*

$$\frac{a^{p+q}-1}{a^p-a^q} > \frac{p+q}{p-q} \quad (0<a\neq 1). \tag{12}$$

2° *If* $(p>0>q \wedge p+q>0) \vee p<0$, *then* (12) *with reverse inequality is valid.*

Proof. As the substitutions $a \to 1/a$ do not change the left side of (12), it suffices to consider this inequality for $a>1$. For the function

$$f(a) = a^{p+q} - 1 - \frac{p+q}{p-q}(a^p - a^q) \quad (a>1)$$

we have

$$f'(a) = \frac{p+q}{p-q} a^{q-1} ((p-q)a^p - pa^{p-q} + q) \quad (a>1).$$

If we put

$$g(a) = (p-q)a^p - pa^{p-q} + q,$$

then

$$g'(a) = (p-q)pa^{p-q-1}(a^q - 1).$$

For $p>q>0$, we have $g'(a)>0$ $(a>1)$ and consequently $g(a)>g(1)=0$. That implies $f'(a)>0$ $(a>1)$ and further $f(a)>f(1)=0$, and so (12) holds in this case. $p>0>q$ and $p+q<0$, we have $g'(a)<0$ and consequently $g(a)<g(1)=0$ $(a>1)$, which implies $f'(a)>0$ $(a>1)$ and further $f(a)>f(1)=0$ $(a>1)$, so that (12) holds again. For $p>0>q$ and $p+q>0$ we have, as in the preceding case, $g(a)<0$ $(a>1)$, which now implies $f'(a)<0 (a>1)$ and hence $f(a)<f(1)=0 (a>1)$ and so the reverse inequality of (12) holds. Finally, under the conditions $0>p>q$ we have $g'(a)>0$ $(a>1)$ and so $g(a)>g(1)=0$ $(a>1)$, wherefrom it follows $f'(a)<0$ $(a>1)$, so that $f(a)<f(1)=0$, i.e. the reverse inequality in (12) holds again. The proof is finished.

Remark 2. Besides the generalizations of Wilson's inequality and other mentioned results, Theorem 3 gives improvement of a result of D. Ž. Djoković [3, pp 162-163, 2.3.2.8] (also see [1, p. 276, 3.6.26]), and also improves the inequality in [1, p. 279, 3.6.31] (or in [3, 2.5.18]).

Corollary 2. *The function* $h(a)=\dfrac{x^a-x^{-a}}{a}$, *with fixed* $x>1$, *is strictly increasing for* $a>0$.

First proof. Let us put in Theorem 3: $a=x>1$, $p=u+v$, $q=u-v$ with $u>v>0$. Then we get

$$\frac{x^{2u}-1}{x^{u+v}-x^{u-v}}>\frac{u}{v},$$

or

$$\frac{x^u-x^{-u}}{u}>\frac{x^v-x^{-v}}{v} \quad (x>1,\ u>v>0),$$

which was to be proved.

Second proof. As we have

$$\text{(13)}\quad h(a)=\frac{x^a-x^{-a}}{a}=2\frac{\operatorname{sh}(a\ln x)}{a}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^{2n+1}x}{(2n+1)!}a^{2n} \quad (a\neq 0,\ x>0),$$

the function h with fixed $x>1$ increases strictly for $a>0$.

Remark 3. From Corollary 2 immediately follows the mentioned improvement of 3.6.31 in [1, p. 279]. On the other hand, it follows from (13) that, with a fixed $x>1$, the function $h(a)$ strictly increases together with $|a|$. By using this fact and writing preliminarily (12) in the form

$$\frac{x^{\frac{p+q}{2}}-x^{-\frac{p+q}{2}}}{x^{\frac{p-q}{2}}-x^{-\frac{p-q}{2}}}>\frac{p+q}{p-q} \quad (0<x\neq 1),$$

one can simply prove in another way all assertions of Theorem 3.

Corollary 3. *Let* $x>y>0$. *Then*

$s\sqrt{x^r y^r} \quad r\sqrt{x\,y}$

$$(15) \qquad \frac{x-y}{\ln x-\ln ny}>\frac{r(x-y)}{x^r-y^r}\sqrt{x^r y^r}>\sqrt{xy} \quad (0<r<1);$$

for $r=1/2$ *the inequality* (15) *reduces to the following result from* [4]

$$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}>\frac{1}{2}(x^{3/4}y^{1/4}+x^{1/4}y^{3/4})>\sqrt{xy}.$$

Proof. According to Corollary 2, we have

$$h\left(\frac{s}{2}\right)>h\left(\frac{r}{2}\right)>\lim_{a\to+0}h(a)=2\ln x,$$

wherefrom one deduces (14) using the substitution $x\to x/y$. (15) is a simple consequence of (14).

Remark 4. For $y=1$ and $r=1$ the second inequality (14) gives a Karamata's inequality [1, p. 272, 3.6.15]; more precisely, this Karamata's result in the form of a strict inequality. One really first obtains, directly, Karamata's inequality for $x>1$, and then, by substitution $x\to 1/x$, also for $0<x<1$.

Remark 5. It follows from (13) that $h'(a)>0$ $(a>0)$. Using this inequality we can easily obtain the inequality 3.6.17 in [1, p. 273]:

$$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}<\frac{x+y}{2} \quad (0<y<x).$$

This result enables us to prolong the sequence (14) of inequalities by

$$\ln x-\ln y>\frac{2}{r}\,\frac{x^r-y^r}{x^r+y^r}>\frac{2}{s}\,\frac{x^s-y^s}{x^s+y^s} \quad (0<y<x,\ 0<r<s),$$

where the last inequality follows from the fact that the function $\frac{\operatorname{th} t}{t}$ decreases strictly for $t>0$.

References

1. D. S. Mitrinović (In cooperation with P. M. Vasić). Analytic Inequalities. Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
2. D. S. Mitrinović, P. S. Bullen, P. M. Vasić. Sredine i sa njima povezane nejednakosti I. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **600**, 1977, 1-232.
3. D. S. Mitrinović. Nejednakosti. Beograd, 1965.
4. A. O. Pittenger. The Symmetric, Logarithmic and Power Means. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **678-715**, 1980, 19-23.
5. J. Steining. Inequalities Involving Convex Sequences. *Elem. der Math.*, **36**, 1981, No 3, 58-64.

Prirodno-matematički fakultet
Studentski trg 16,
Tehnološki fakultet
Ive Lole Ribara 126, Zagreb
JUGOSLAVIA

Presented 03. 02. 1988
Submitted to Prof. Kurepa 30. 12. 1982

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 48 (62), 1990, 41–44

TWO PROPOSITIONS ON SLOWLY VARYING FUNCTIONS

Dušan D. Adamović

Abstract. The paper contains two statements which both assert that, under certain conditions, the function $f(x) = F(R_1(x), \dots, R_m(x))$, where $F : (\mathbf{R}^+)^m \to \mathbf{R}^+$, $R_k : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $k = 1, \dots, m$, is slowly varying.

1. Our first theme is the following:

PROPOSITION 1. *Let L_k $(k = 1, \dots, m)$ be slowly varying functions and let the real function F be defined and continuous on the adherence (closure) D in $(\mathbf{R}^*)^m$ of the set $E = L_1(\mathbf{R}^+) \times \cdots \times L_m(\mathbf{R}^+)$ and with the properties*

$$m = \inf_{(t_1, \dots, t_m) \in E} F(t_1, \dots, t_m) > 0, \qquad M = \sup_{(t_1, \dots, t_m) \in E} F(t_1, \dots, t_m) < +\infty. \quad (1')$$

Then the function

$$f(x) = F(L_1(x), \dots, L_m(x)) \qquad (x > 0)$$

is slowly varying.

Here $\mathbf{R}^*$ denotes the extended system (space) of real numbers, $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ and the continuity on D means especially that, if $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in D$ and $+\infty \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, then

$$\lim_{E \ni (t_1, \dots, t_m) \to (\alpha_1, \dots, \alpha_m)} F(t_1, \dots, t_m) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

exists.

Proof. Under the conditions of the proposition, the function f is obviously defined and positive for $x > 0$, and also measurable on $\mathbf{R}^+$ if the measurability

AMS Subject Classification (1985): Primary 26 A 12 on $\mathbb{R}^+$ of the functions L_k $(k = 1, \dots, m)$ is clamed (by the accepted definition of slowly varying function). Moreover,

$$0 < m \le f(x) \le M < +\infty \qquad (x > 0). \tag{1}$$

Suppose that f is not slowly varying. This function cannot be regularly varying, because that would imply $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, contradicting (1). Besides, (1) implies that for no $\lambda \in (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = +\infty \vee \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 0$$

is possible.

Hence, there exists $\lambda > 0$ such that $f(\lambda x)/f(x)$ oscillates as $x \to +\infty$, and consequently, for the same λ, there exist numbers A and B such that

$$0 < A < B < +\infty \tag{2}$$

and the sequences (x_n) and (y_n) of positive numbers, tending $+\infty$, for which

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\lambda x_n)}{f(x_n)} = A, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(\lambda y_n)}{f(y_n)} = B. \tag{3}$$

But then there exist the elements $\alpha, \beta \in D$, the subsequence $(\bar{x}_n)$ of (x_n) and the subsequence $(\bar{y}_n)$ of (y_n) such that

$$\lim_{n\to\infty} L_k(\bar{x}_n) = \alpha_k, \quad \lim_{n\to\infty} L_k(\bar{y}_n) = \beta_k \qquad (k = 1, \dots, m),$$

where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$. By the definition of slowly varying function, we have

$$\lim_{n\to\infty} L_k(\lambda\bar{x}_n) = \alpha_k, \quad \lim_{n\to\infty} L_k(\lambda\bar{y}_n) = \beta_k \qquad (k = 1, \dots, m),$$

and further

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\lambda\bar{x}_n)}{f(\bar{x}_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(L_1(\lambda\bar{x}_n), \dots, L_m(\lambda\bar{x}_n))}{F(L_1(\bar{x}_n), \dots, L_m(\bar{x}_n))} = \frac{F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} = 1;$$

similarly,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\lambda\bar{y}_n)}{f(\bar{y}_n)} = \frac{F(\beta_1, \dots, \beta_m)}{F(\beta_1, \dots, \beta_m)} = 1,$$

and two last conclusions contradict (2) and (3). This proves our statement.

We can remark that simple examples show that none of the conditions concerning the function F can be omitted. For example, if $m = 1$, $L_1(x) = \ln(x + 1)$, $F(x) = 2 + \sin x$, then the function F is not continuous on $D = [0, +\infty]$ in the previous sense, and the function $f(x) = 2 + \sin\ln(x+1)$ is not slowly varying. On the other hand, for $m = 1$, $L_1(x) = \ln(x+1)$ and $F(x) = e^x$, F is continuous on D (F can be considered as a function whose values belong to $\mathbf{R}^*$), but (1) is not satisfied; in this case $f(x) = x + 1$ is not a slowly varying function.

2. Besides the previous proposition, one can give the following one, in some sense similar, but really incomparable to it.

PROPOSITION 2. *Let $R_k(x)$ $(k = 1, \dots, m)$ be regularly varying functions tending to infinity with x, and let the function $F : (\mathbf{R}^+)^m \to \mathbf{R}^+$ be continuous and slowly varying, in Karamata-Bajšanski sense* [**1**]. *Then the function $f(x) = F(R_1(x), \dots, R_m(x))$ $(x > 0)$ is slowly varying.*

Proof. First, recall that, by the definition given by Karamata and Bajšanski in [**1**], the function $F : (\mathbf{R}^+)^m \to \mathbf{R}^+$ is slowly varying if

$$\lim_{\min\{x_1,\dots,x_m\}\to+\infty} \frac{F(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_m x_m)}{F(x_1, \dots, x_m)} = 1 \quad \text{for each} \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (\mathbf{R}^+)^m$$

and that the theorem on uniform convergence in [**1**] implies that, for such a function and for $0 < \alpha_k < \beta_k < +\infty$ $(k = 1, \dots, m)$,

$$\lim_{\min\{x_1,\dots,x_m\}\to+\infty} \frac{F(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_m x_m)}{F(x_1, \dots, x_m)} = 1$$

$$\text{uniformly for} \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \prod_{k=1}^{m} [\alpha_k, \beta_k]$$

Under the hypotheses of the proposition, the function $f(x)$ is defined and measurable on $\mathbf{R}^+$.

Let $\lambda > 0$ be arbitrarly chosen. By hypothesis,

$$R_k(x) = x^{\rho_k} L_k(x), \quad \text{with } \rho_k \geq 0 \ (k = 1, \dots, m),$$

where $L_k(x)$ $(k = 1, \dots, m)$ are slowly varying functions. Then, for x large enough, we have

$$1/2 \leq L_k(\lambda x)/L_k(x) \leq 2 \qquad (k = 1, \dots, m),$$

and hence, on account of what we have supposed on R_k and by the just mentioned uniform convergence property of F,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(R_1(\lambda x), \dots, R_m(\lambda x))}{F(R_1(x), \dots, R_m(x))}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{F\left(\dfrac{R_1(\lambda x)}{R_1(x)} \cdot R_1(x), \dots, \dfrac{R_m(\lambda x)}{R_m(x)} \cdot R_m(x)\right)}{F(R_1(x), \dots, R_m(x))}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{F\left(\lambda^{p_1} \dfrac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} \cdot R_1(x), \dots, \lambda^{p_m} \dfrac{L_m(\lambda x)}{L_m(x)} \cdot R_m(x)\right)}{F(R_1(x), \dots, R_m(x))} = 1.$$

So the function $f(x)$ is slowly varying.

Finally, we note that special cases of Propositions 1 and 2 were given in [**2**, Theorem II, 1°, 2°, 3°]).

REFERENCES

[1] B. Bajšanski, J. Karamata, *Regularly varying functions and the principle of equicontinuity*, Publ. Ramanujan Inst, **1** (1968–1969), 235–242.

[2] D. Adamović, *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata, I, II*, Mat. Vesnik **3** (1966), 123–136, 161–172.

Matematički fakultet
Studentski trg 16
11000 Beograd, Yugoslavia

(Received 10 10 1989)

UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. 2 (1991), 42–48.

CORRECTIONS AND SUPPLEMENTS OF SOME DETAILS IN TWO FORMER PAPERS

Dušan D. Adamović

This note contains corrections of some minor mistakes in papers [1] and [2] and also supplements and improvements of corresponding points in these papers.

0. In this note we shall give, as suggested by the title, not only corrections of noticed mistakes but also supplements and improvements of corresponding points in previously published papers [1] and [2]. Those mistakes, observed by the author immediately after the publications of [1] and [2], have not seriously damaged the main results of these papers, so that the corresponding places, after necessary corrections, can be replaced by similar propositions, as will be seen in what follows.

The present author is reputed to be a rather strict, even pedantic reviewer and critic of mathematical texts, and so it was completely natural and appropriate that he should apply his usual standards to his own papers.

1. Theorems 1 and 2 in [1] determine general solutions of functional equations

$$f\big(f(x+y)\big) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

and

$$f(x+y) = f\big(f(x)\big) + f\big(f(y)\big) \tag{2}$$

respectively, where, in both cases, the unknown function f can be *real* (i.e. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ desinating the set of all real numbers), or *complex* ($f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ desinating the set of all complex numbers). Let us call the first possibility *real case* and the second one *complex case*. By using the system of functional equations

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g\big(g(x)\big) = g(x) \end{cases} \qquad (g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \text{or} \quad g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}), \tag{3}$$

1991 Mathematics Subject Classification: 39B12, 40A05

one can, on account of Lemma 1 in [1], state the mentioned theorems in the following manner, different from that in which they really have been stated in [1]. (The formulations of Theorems 1 and 2 given in [1] are directly, without regard to Lemma 1, more informative than the formulations we give now, but these last formulations

I. [illegible] suitable for the following exposition; otherwise on the basis of Lemma 1 *(g arbitrary solution of (3), constant λ arbitrary element of $g(\mathbf{R})$, respectively of $g(\mathbb{C})$).*

II. *The general solution of the functional Equation (2) is given by $f(x) = g(x)$ (g arbitrary solution of (3)).*

In [1], under the titles *"Corollary of Theorem 1"* and *"Corollary of Theorem 2"* respectively, (without proof) the following sentences were formulated:

I′. *All continuous solutions of Equation (1) are given by $f(x) = x + \lambda$ (λ arbitrary real, or complex constant), $f(x) = 0$.*

II′. *Equation (2) has only two continuous solutions, given by $f(x) = x$ and by $f(x) = 0$.*

However, *statements I′ and II′ are not true in the complex case, while they remain true in the real case.*

This incorrectness resulted from the circumstance that, considering the question of continuous solutions of (1) and (2), we presumed by mistake that even in the complex case ($f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) the general continuous solution of CAUCHY's functional equation

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \tag{4}$$

is given by

$$f(x) = Cx \qquad (C \text{ arbitrary complex constant}).$$

In fact, *the general continuous solution of (4) in the complex case can be expressed in the following manner*

$$g(x) = (\alpha + i\gamma)\,\Re x + (\beta + i\delta)\,\Im x \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \textit{ arbitrary real constants}). \tag{5}$$

Using this fact and statements I and II, one arrives at the following correct version of corollaries of theorems in [1].

Corollary of Theorem 1. *All continuous solutions of Equation (1) in the complex case are given by:*

$$f(x) = x + \lambda \qquad (\lambda \textit{ arbitrary complex constant});$$

$$f(x) = 0;$$

$$f(x) = \Re x + \lambda \qquad (\lambda \textit{ arbitrary real constant});$$

$$f(x) = i\,\Im x + i\mu \qquad (\mu \textit{ arbitrary real constant});$$

$$f(x) = \big(1 + i(1-\alpha)/\beta\big)\big(\alpha\,\Re x + \beta\,\Im x\big) + \lambda$$

$\big($*α and $\beta \neq 0$ arbitrary real constants, constant λ arbitrary element of* $\{(1 + i(1-\alpha)/\beta)\ t : t \in \mathbb{R}\}\big)$;

$$f(x) = \big((1-\beta)/\alpha + i\big)\big(\alpha\,\Re x + \beta\,\Im x\big) + \lambda$$

$\big($*$\alpha \neq 0$ and β arbitrary real constants, constant λ arbitrary element of* $\{((1-\beta)/\alpha + i)\ t : t \in \mathbb{R}\}\big)$.

In the real case, all continuous solutions of (1) are given by:

$$f(x) = x + \lambda \qquad (\lambda \text{ arbitrary real constant});$$

$$f(x) = 0.$$

Corollary of Theorem 2. *All continuous solutions of Equation (2) are given by:*

$$f(x) = x; \qquad f(x) = 0; \qquad f(x) = \Re x; \qquad f(x) = i\,\Im x;$$

$$f(x) = \big(1 + i(1-\alpha)/\beta\big)\big(\alpha\,\Re x + \beta\,\Im x\big) \qquad (\alpha \text{ and } \beta \neq 0 \text{ arbitrary real constants});$$

$$f(x) = \big((1-\beta)/\alpha + i\big)\big(\alpha\,\Re x + \beta\,\Im x\big) \qquad (\alpha \neq 0 \text{ and } \beta \text{ arbitrary real constants}).$$

In the real case all continuous solutions of (2) are given by

$$f(x) = x; \qquad f(x) = 0.$$

Proof. We shall restrict ourselves to the proof of the assertions concerning the complex case, because those concerning the real case can simply be verifed.

In view of Theorems I and II, in order to find all continuous solutions of (1) resp. (2) it is sufficient to find all continuous solutions $g(x)$ of the system (3) of functional equations and include them into the formulas for the general solution given in I and II. On the other hand, all continuous solutions of (3) can be obtained if one determines all values of real constants in (5) for which the second equation in (3)

$$g\big(g(x)\big) = g(x)$$

it satisfied. It is easy to establish that, with designations $\xi = \Re x$, $\eta = \Im x$, the last is equivalent to

$$\alpha(\alpha\xi + \beta\eta) + \beta(\gamma\xi + \delta\eta) = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad (\xi, \eta \in \mathbf{R}),$$

$$\gamma(\alpha\xi + \beta\eta) + \delta(\gamma\xi + \delta\eta) = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad (\xi, \eta \in \mathbf{R}).$$

It is clear that this condition is equivalent to the following system of equations for real constants:

$$(6) \qquad \alpha^2 + \beta\gamma = \alpha, \qquad \alpha\beta + \beta\delta = \beta, \qquad \gamma\alpha + \delta\gamma = \gamma, \qquad \gamma\beta + \delta^2 = \delta.$$

Under the assumption $\beta \neq 0$, the first Equation (6) becomes

$$\gamma = \frac{\alpha - \alpha^2}{\beta}, \tag{7}$$

and the second one

$$\alpha + \delta = 1; \tag{8}$$

it follows from (8) $\alpha^2 - \delta^2 = (\alpha - \delta)(\alpha + \delta) = \alpha - \delta$, that is $\alpha^2 - \alpha = \delta^2 - \delta$, which means that the fourth Equation (6) is satisfied too; (8) also implies that the third equation is satisfied. So, under the assumption $\beta \neq 0$, (6) is equivalent to

$$\delta = 1 - \alpha, \qquad \gamma = \frac{\alpha - \alpha^2}{\beta} \quad \left(= (1 - \alpha)\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Similarly, under the assumption $\gamma \neq 0$, (6) is equivalent to

$$\alpha = 1 - \delta, \qquad \beta = \frac{\delta - \delta^2}{\gamma} \quad \left(= (1 - \delta)\frac{\delta}{\gamma}\right).$$

Further, if $\beta = \gamma = 0$, the second and the third Equation (6) are satisfied, and the first and the fourth equation become $\alpha^2 = \alpha$ and $\delta^2 = \delta$, and are satisfied if and only if $\alpha = \delta = 1$, or $\alpha = \delta = 0$, or $\alpha = 1$ and $\delta = 0$, or $\alpha = 0$ and $\delta = 1$.

It follows from all previously said and established that both propositions are true.

2. One of results in [2] was formulated as follows:

"**Proposition 2.** *For each complex number z and all natural numbers m,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k} \sim \begin{cases} \dfrac{(z+1)^{m+n}}{(zn)^m} \quad (n \to \infty), & \text{if } |z+1| > 1, \\ -\dfrac{\log^m n}{m!} \quad (n \to \infty), & \text{if } |z+1| \leq 1 \wedge z \neq 0. \end{cases}$$

If $|z+1| \leq 1 \wedge z \neq 0$, we have, more precisely,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k} = -\frac{\log^m n}{m!} - \left[\log(-z) + C\right]\frac{\log^{m-1} n}{(m-1)!} + \lambda(m, z) + O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right) \tag{9}$$

($n \to \infty$; z complex number, $m \in \mathbb{N}$), where C denotes EULER's *constant, $\lambda(m, z)$ does not depend on n and the determination of the complex logarithm is such that* $\log 1 = 0$."

The part of this proposition stated by the second sentence (i.e. by the text we have designated here by $\big[$ *is not true.*

More precisely, even this statement would be true if the sum of two last members in the right side of (9) were replaced by $O(\log^{m-2} n)$ and if everything concerning $\lambda(m, z)$ were omitted from the further text.

In fact, what we first noticed was the incorrectness of the part of the proof corresponding to this part of the proposition, and also the fact that this part of the proposition, changed as we said, can be proved by slight modifications of the proof. Afterwards, S. Simić in [3], determining the infinite asymptotic exposition of the expression on the left side under the condition $|z+1| \leq 1 \wedge z \neq 0$, proved effectively that (9) is not true.

Therefore:

The statement formulated by the second part of Proposition 2 in [2] *need be replaced by the following:*

T. *If* $|z+1| \leq 1 \wedge z \neq 0$, *we have, more precisely,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k} = -\frac{\log^m n}{m!} - \big[\log(-z) + C\big]\frac{\log^{m-1} n}{(m-1)!} + O\big(\log^{m-2} n\big) \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

(z *complex number,* $m \in \mathbb{N}$), *where* C *denotes* Euler's *constant and the determination of the complex logarithm is such that* $\log 1 = 0$.

Proof of T. In this proof, as in that exposed in [2], the following two known results will be used (the second of them is here, as in [2], formulated in a somewhat more precise form than necessary for the exposition which follows).

$\mathbf{R_1}$. (Proposition 1 in [2]). The equality

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^m}\binom{n}{k} = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}\big[(z+1)^{k_m} - 1\big]$$

holds for each complex number z and for all natural numbers m and n.

$\mathbf{R_2}$. (Immediate Corollary of Theorem (8.4) in [4], p. 32). For $\alpha \neq -1$ and real,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} k}{k} = \frac{\log^{\alpha+1} n}{\alpha+1} + \varphi(\alpha) + \Delta_n(\alpha) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

where $\varphi(\alpha)$ does not depend on n, the sequence $\big(\Delta_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing for n large enough and

$$\Delta_n(\alpha) = O\Big(\frac{\log^{\alpha} n}{n}\Big) \qquad (n \to \infty).$$

After these remarks, the further text of our proof will be the text of the corresponding part of the proof in [2] with necessary changes.

Let

$$|z+1| \le 1 \wedge z \ne 0.$$

This condition implies the convergence of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k}$ to the sum $-\log[1-(z+1)] = -\log(-z)$, with the determination choosen as above. Hence and in view of R_1 and R_2, we have

$$\text{(11)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k - 1}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(z+1)^k}{k}$$

$$= -\left[\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\log n - [\log(-z) + C] + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Thus, (10) is true for $m = 1$. Supposing the validity of (10) for a fixed value of m, we obtain, using R_1 and R_2,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{m+1}}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{\sum_{k_1=1}^{k} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \frac{1}{k_m}[(z+1)^{k_m} - 1]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{z^l}{l^m}\binom{k}{l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left\{-\frac{\log^m k}{m!} - [\log(-z) + C]\frac{\log^{m-1} k}{(m-1)!} + \alpha_k \log^{m-2} k\right\}$$

$$= -\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^m k}{k} - \frac{\log(-z) + C}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-1} k}{k}$$

$$+ O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{m-2} k}{k}\right)$$

$$= -\frac{1}{m!}\left[\frac{\log^{m+1} n}{m+1} + \varphi(m) + O\left(\frac{\log^m n}{n}\right)\right]$$

$$- \frac{\log(-z) + C}{(m-1)!}\left[\frac{\log^m n}{m} + \varphi(m-1) + O\left(\frac{\log^{m-1} n}{n}\right)\right]$$

$$+ O(\log^{m-1} n)$$

Душан Адамовић — Dušan Adamović

ПЕТАР ЖИВКОВИЋ
PETAR ŽIVKOVIĆ
(1847 — 1924)

Отисак из публикације *Живот и дело српских научника,* 1
(Српска академија наука и уметности, Биографије
и библиографије књ. I, II одељење књ. 1)

Reprinted from the publication: *Lives and work of the Serbian scientists,* 1 (Serbian academy of sciences and arts, Biographies and bibliographies Vol. I, II section, Book 1)

БЕОГРАД — BELGRADE

1996

ПЕТАР ЖИВКОВИЋ
(1847–1924)

Душан Адамовић

У невеликом скупу истакнутијих математичара који су у последњим деценијама деветнаестог и на почетку двадесетог века били носиоци математичког научног рада и наставних активности у Србији (Димитрије Данић, Димитрије Нешић, Љубомир Клерић, Ђорђе Петковић, Богдан Гавриловић, Петар Вукићевић, Михаило Петровић и још неки) одређено место – не баш међу првима, али ни безначајно – свакако припада *Пешру Живковићу*, који је у дугом низу година на оба ова поља истрајно, вероватно до максимума могућности, деловао. Будући да се његово име често прећуткивало или помињало само узгред, у набрајању, без улажења у специфична обележја његовог живота, делатности и достигнућа, трагова које је за собом оставио, одмах ћемо рећи да је он један од првих који су у нашој средини бар озбиљно покушавали да систематски научно раде у области математике (спонтано падају на памет песникове речи: „Нико неће знати да некад бесмо први, премда мали,...“),* што треба констатовати без обзира на околност што се његови научни радови не могу сматрати баш бриљантним, па чак можда ни правим, аутентичним доприносима науци, нарочито према неким високим, светским, а поготову према данашњим строгим мерилима, – као и да је највећи део своје енергије у току неколико деценија поклањао педагошкој делатности у области средњошколске наставе математике и физике, њеног практичног извођења и програмског и организаторског уобличавања, делујући тиме подстицајно и благотворно на све средине у којима је радио. У тексту који следи настојаћемо да, уз релативно сажето излагање битних чињеница, дамо одговарајуће прецизирање, конкретизацију и образложење претходних констатација.

Петар Живковић рођен је јула 1847. године у Зајечару, од оца Јована и мајке Цоце (или Јоце, према неким папирима у Архиву Срп-

---

* Милан Ракић: *Прелазно йокољење.*

ске академије наука и уметности). Главна уписница (Matrikel) Циришке политехнике садржи 1845. као годину Живковићевог рођења, али овај податак вероватно није тачан, будући да је сам Живковић приликом уписа на угледну циришку школу по својој прилици желео да прође као нешто старији него што је био. Његов отац Јован свакако је био прилично имућан човек, с обзиром на чињеницу да је био у стању да искључиво сопственим средствима финансира целокупно школовање свог сина, у земљи и иностранству; према извесним подацима, по занимању је био нека врста предузетника (Mittels, према поменутој Главној уписници), или можда занатлија. У родном граду Живковић је учио основну школу од 1854. до 1858. године. Определивши се за даље школовање, напушта Зајечар, тада малу варошицу без средње школе, и одлази прво у Неготин, где завршава полугимназију 1862, па затим у Крагујевац, у коме је у наредне две године, од 1862. до 1864, наставио и окончао своје гимназијско образовање, које је, према тадашњем реформисаном плану и програму, трајало шест година. У основној школи први његов сусрет са елементима математике уоквирила је *Крашка рачуница за основне србске школе* (1852) од Филипа Христића; у неготинској полугимназији, тада већ реномираној школи (основаној 1839), о којој је касније често најлепше говорио, стекао је прва озбиљнија знања из математике и природних наука, док је у крагујевачкој вишој гимназији математику учио по Мочниковим уџбеницима алгебре и геометрије, који су тада и касније били веома цењени и у Србији и у многим другим европским земљама. У то време код њега се, по свему судећи, јавила и развила љубав према математици и техничким наукама и сазрела одлука да студира ове дисциплине.

То је и учинио, уписавши се одмах по завршетку гимназијског школовања, септембра 1864. године, на Технички факултет београдске Велике школе. Да је до тога дошло под неодољивим импулсом поменутих, већ у гимназији артикулисаних склоности, јасно говори следећа његова изјава из нешто каснијег времена (у молби за добијање државне службе поднесеној 1872. године): „... имао сам велику склоност за математичке науке, па сам зато ушао у технички факултет *као једини ѓде се машемашичке науке ойширно изучавају...*“. Ова последња Живковићева примедба, коју смо овде репродуковали курзивом, одговарала је реалном стању у то и у нешто касније време: тада се заиста настави математичких дисциплина посвећивало више пажње на Техничком факултету, па чак и на Војној академији, него на (матичном) Филозофском факултету! Петар Живковић припадао је другој генерацији наших инжењера школованих на Великој школи, основаној 1863. године. Технички факултет завршио је за три године, јуна 1867, са пристојним успехом, из неколико предмета одличним. У току ових студија слушао је елементарну и вишу математику код Косте Алковића, механику код Емилијана Јосимовића, хемијску технологију код Михаила Рашковића, природњачке предмете (ботанику, зоологију и геологију са минералогијом) код Јосифа Панчића. У настави математике на овом факултету коришћени су тада за то време доста добри уџбеници Емилијана Јосимовића.

Жељан даљег усавршавања и проширења видика, попут многих других младих људи у Србији у то време, он после завршетка Техничког факултета у Београду одлази у Швајцарску, на Политехничку школу у Цириху. То је иста она високошколска установа на којој су неких двадесет година касније студирали физику Алберт Ајнштајн и његова супруга Милева Марић. Основана је 1854. године и код српске универзитетске омладине тог времена била је на гласу као школа у којој се могу солидно изучавати како разне гране технике, тако и више математичких и природних наука. Тако се у време Живковићевих цирушких студија на Политехничкој школи или око ње у овом граду налазио већи број других младића из Србије приближно истих година и са сличном школском предспремом, међу којима су била и таква каснија истакнута имена наше културне и политичке историје као што су Никола Пашић, Светозар Марковић, Пера Тодоровић, Петар Велимировић, Ђура Љочић, Владан Ђорђевић, Сима Лозанић и други. Разним револуционарним и „превратничким“ идејама и преокупацијама (социјалистичким, анархистичким и сличним) које су овладале већином поменутих личности, па и многим другим омладинцима тада на студијама у иностранству, и због којих неки од њих никад нису завршили студије, – Живковић уопште није био захваћен. Ни касније политиком се никад није озбиљније бавио, у сваком случају никад није упадао у вртлоге политичких сукоба и превирања. У току своје прве школске године у Цириху Живковић је био на такозваном III одсеку Политехничке школе, који је носио назив Механичко-техничка школа. На њему је слушао и положио осам предмета са просечном оценом 4,5, што представља више него врло добар успех, будући да су могуће оцене варирале од 1 до 6. Сем тога, слушао је четири факултативна предмета. Ова прва година студија Живковића није задовољила, јер је настава свих предмета, па и математике, била исувише техничарски обојена и усмерена. Стога је 1868. године прешао на прву годину VI–A одељења, које је обучавало наставнички кадар за математику, механику и физику. Овде је он изгледа „нашао себе“, тако да је студије на овом одељењу са вољом започео и са успехом завршио после три године, јула 1871. На њиховом почетку, обратио се министру просвете са молбом да му се додели стипендија (према тадашњем називу, „благодејање"). У тој молби поред осталог рекао је: „Узрок због кога желим да и даље у Цириху останем, јесте тај, што има славни и стручно изображени професора у тој струци и што је устројство истог одељења тј. математичког одељења врло добро." Молба му није усвојена, због чега је наставио школовање о трошку родитеља. Ове трогодишње студије биле су му успешније од ранијих; просечна оцена на њима била је 5,7 – сасвим близу максимално могуће (6). Укупно је положио 31 испит и слушао 12 факултативних предмета.

После овако успешно завршених студија, враћа се у Србију у јесен 1871. године и, понесен еланом од овог успеха, обраћа се министру просвете Стојану Вељковићу са захтевом за добијање неког наставничког места које би одговарало његовим квалификацијама и потврђеним квалитетима. Да је при том првенствено имао у виду неко звање универзитетског (односно великошколског) ранга, показује следеће место у овом писму министру: „Моје специјалне студије јесу: Математика, Механика и Нацртна геометрија и ако би ме Г. Министар удостојио свог поверења и поверио ми на *научним заводима* место као учитељ буди које од горе поменуте науке, то би се моја највећа жеља испунила и мој труд не би био узалудно потрошен." Овој Живковићевој молби није се тада изашло у сусрет; штавише, министар просвете није на његово писмо ни одговорио. Нешто касније, почетком 1872. године, Живковић се поново обраћа министру просвете молбом сличне садржине, али уз напомену овог пута да би се задовољио било каквим наставничким запослењем, сталним или привременим. Ни овог пута по свој прилици није било одговора из министарства, али кад је нешто касније у следећем писму скренуо пажњу министру просвете на једно упражњено место суплента математике у крагујевачкој учитељској школи, министарство је најзад реаговало и, 5. фебруара 1872. године, донело одлуку да се Живковић постави на ово место. Ускоро потом Петар Живковић је ступио на дужност суплента у учитељској школи у Крагујевцу. У овој школи остао је до августа 1877, предајући математику, рачуницу и физичку географију. Своје школске дужности обављао је савесно, радећи посебно на оспособљавању будућих учитеља за примену метарског система, у Србији уведеног 1. децембра 1873. године, при чему је користио књигу о метарском систему од Димитрија Нешића (1874. г.) и приручник Мите Петровића (1873. г.); такође је разрађивао у практичном смислу извесне елементе наставе рачуна. У току боравка у овој школи успоставио је пријатељске односе са члановима школског колегијума познатим историчарем *Љубомиром Ковачевићем* и каснијим истакнутим педагошким писцем *др Војиславом Бакићем*. Од августа 1877. до октобра 1878. године Живковић је радио у „завичајној" гимназијској реалци у Зајечару, где је предавао скоро све природно-математичке предмете и, заједно са осталим члановима малог наставничког колегијума, успевао да се, упркос ратним приликама, настава нормално одвија. У међувремену, док су трајали први и други српско-турски рат (јуни–октобар 1876. и децембар 1877–фебруар 1878), обављао је савесно и пожртвовано различите војне дужности, у првом као комесар инжењеријског батаљона Шумадијске дивизије, а у другом као управник војних складишта у Црноречком округу.

Од почетка новембра 1878. као професор у Београдској реалци предаје аритметику, алгебру, механику, физику и космографију. У овој школи остаје до почетка 1888/89. школске године. У том периоду почео је да објављује како стручно-педагошке чланке (рецензије и друго), тако и дуже текстове, који су добијали статус научних радова а публиковани су у Гласнику Српског ученог друштва. Први од њих, под насловом *Графичко представљање простог односа тачке у низу и зрака у прамену*, примљен је октобра 1880. године на састанку Ученог друштва, на основу реферата Љубомира Клерића и Димитрија Нешића, а објављен је у Гласнику 1883. године. Живковићево тврђење, изнесено у пријави рада, да овај припада пројективној геометрији – не може се прихватити, будући да се у њему принципи и методе пројективне геометрије заправо не користе, него само резултати и поступци класичне аналитичке геометрије, односно претежно метода геометријских места. Други рад, објављен 1884. године под насловом *Прилог алгебарским влацима вишег ступња*, унеколико је сличан претходном, пре свега у погледу коришћених метода, али у опширном третирању проблема еволвената и њиховог испитивања користи и елементе диференцијалне геометрије. Реч „влаци" (у једнини „влак"), у овом и у неколико других радова, Живковић је употребљавао уместо речи „криве линије" (односно „крива линија"). Трећи од ових радова *О инволуторијској систему тачака код сферних огледала*, публикован 1885. године, припада математички третираној геометријској оптици и у њему се геометријски успоставља веза између светлог предмета у кретању и његовог лика у огледалу, при чему се третира више различитих случајева инволуције. Занимљиво је то што Живковић у овом тексту цитира физичаре Hankel-а и Wolf-а, дајући раду смисао развијања једне Hankel-ове узгредне идеје. Један Живковићев текст упућен Гласнику 1881. године, под насловом *Општи постанак кружне еволвенте*, није добио позитивну рецензију, па није штампан.

Већ први од поменута три у Гласнику објављена рада, заједно са учешћем у раду Просветног савета, чији је члан постао на почетку овог „београдског периода", као и углед доброг педагога и истакнутог професора Београдске реалке, донели су Живковићу избор за редовног члана Српског ученог друштва, на основу предлога који су 8. децембра 1882. године поднели чланови Друштва *Јосиф Панчић*, *Лазар Докић*, *Љубомир Клерић* и *Сима Лозанић*. Сам избор извршен је 27. фебруара 1883. Своје редовне послове Живковић је поново за краће време прекинуо за време српско-бугарског рата, вршећи дужност управника војних постројења у Нишу и Крагујевцу.

Уочи школске 1888/89. године Живковић је постављен за директора и професора Ужичке реалке. Са искуством стеченим у дотадашњим педагошким активностима, од самог почетка настоји и умногоме успева да у овој школи реорганизује наставу и формира што бољи наставнички кадар. Поред обављања директорских послова, у овом периоду, који је потрајао до краја августа 1894. године, држао је предавања из механике, физике и космографије, наставио је раније започето писање рецензија и других стручно-методичких чланака у Просветном гласнику и Наставнику, а активан је био и као члан Просветног савета. Напомињемо да је у једној од тада написаних рецензија негативно оценио настојање гимназијског професора *Среће Стојковића* да се у наставу уведу детерминанте, што (та негативна рецензија) можда није био добар потез. Сем тога, продужио је објављивање радова научног усмерења. Један од тих радова, под насловом *Други прилог влацима вишег степена*, објављен је 1889. у Гласнику Српског ученог друштва (обиман рад на скоро 60 страна), а следећа два, под скоро истим насловима као два претходна, 1892. и 1898 (овај последњи заправо припада већ следећем периоду Живковићеве наставничке каријере, али га овде помињемо стога што се њиме довршава циклус који са њим чине три рада која су му претходила) – у Гласу Српске краљевске академије наука. Сви ови радови сличног су карактера и садржаја као први од њих и у њима се уобичајеним методама геометријских места и диференцијалног рачуна с једне стране формирају једначине, а с друге врши конструкција разних класа кривих линија. Треба, међутим, истаћи њихову промишљену систематичност, целовиту обраду уочене проблематике, у којој се прво даје општи теоријски и методолошки облик решења проблема – у неким случајевима, на пример у последња два од ових радова, и одговарајућа основна формула са општим (неодређеним) функционалним елементима, а затим се, у његовом оквиру, подробно испитују значајни посебни („особени“) случајеви. Све ове активности учиниле су да Петар Живковић буде 25. децембра 1893. године изабран за дописног члана Српске краљевске академије наука у Академији природних наука. Предлагач је и овог пута био Љубомир Клерић.

На лични захтев, Живковић почетком 1894/95. школске године прелази у Ваљевску гимназију – поново на положај директора. Уз ту дужност, држао је часове аритметике, алгебре и геометрије. Као и у претходној школи, и овде се на различите начине трудио да унапреди наставни процес и оплемени читав живот и рад школе. Ово се поред осталог огледа у тадашњим годишњим школским извештајима, чију је израду брижљиво надгледао и у њој својим прилозима учествовао. Неки од тих његових текстова садржали су васпитне поуке и савете ученицима, а неки су представљали лепо писане информације о појединим занимљивим научним темама (*Глоб и његова важност и употреба*, 1898; *Тома Алва Едисон и његови проналасци*, 1901). Тако су годишњи извештаји Ваљевске гимназије док је Живковић био њен директор, од доста сувопарних и штурих прегледа школског рада – што они обично јесу, постали нека врста школског часописа за популаризацију науке и ширење интелектуалних видика ђака. Сасвим је јасно да је Живковић у средњошколском наставничком позиву, у његовом интегралном садржају, нашао своје пуно самоостварење. Ово потврђује и то што је раније, 1885. године, одбио понуду Љ. Клерића да добије наставничко место на Катедри за нижу математику Велике школе. Живковић је у току читавог свог боравка у Ваљевској гимназији, тада у ствари полугимназији, упорно настојао да издејствује њено претварање у потпуну гимназију, али то му, и поред свег угледа који је уживао, није пошло за руком. Поред већ поменутог, последњег из циклуса радова о „влацима", у овом периоду објавио је, 1898. у Гласу Академије, само још један рад под насловом *Један метод за цртање кривих линија*, по методама и садржају унеколико сличан чланцима о „влацима", али и са извесним новим моментима и идејама. У овој школи Живковића је затекло и пензионисање, августа 1904.

Крај Живковићеве државне службе није, међутим, био и крај његове наставничке делатности. Такорећи без прекида, ту делатност одмах наставља у тек основаној Вишој женској школи (односно, приватној гимназији) у Ваљеву – као њен управник. На овом положају остао је све до 1912. године, када су у Србији укинуте приватне женске гимназије. За овај последњи период Живковићевог ангажовања на подручју средњошколске наставе важи исто што и за раније периоде: мада у више него зрелим годинама, деловао је и тада свестрано и са свом ревношћу како би и ова школа у сваком погледу дала што више позитивних резултата. Како се почетак рада школе подудара са његовим ступањем на дужност управника, нема сумње да је основна концепција њене организације, бар великим делом, његова заслуга. Сам је држао до шест часова математике недељно, а успео је да за рад у овој приватној гимназији ангажује више најбољих професора из Ваљевске гимназије. Формирао је и комплетирао школску збирку математичких учила. Такође је све учинио да школа добије добру библиотеку, редовно снабдевану новим и актуелним књигама и другим публикацијама. Годишње школске извештаје обогаћивао је и оплемењивао на сличан начин као раније у Ваљевској гимназији, а ученицима и гостима школе држао је лепе и мудре светосавске беседе.

Укидање Женске гимназије у Ваљеву представљало је и крај Живковићеве четрдесетогодишње наставничке делатности. Живео је још дванаест година, које ипак нису биле године без активности. Он се тада, после паузе која је потрајала више од двадесет година, јавио новим радовима објављеним у Академијином Гласу: *Троугли уписани у круг и описани око круга у перспективном положају – перспективни, конполни и конполарни конични пресеци* (1922), *Веза између Паскаловог шестоугла, Бријаншоновог шестостраника и пола и поларе* (1922), *Конполни и конфокални конични пресеци* (1924). Ова три рада по методама и стилу размишљања и излагања доста су слични претходним Живковићевим радовима, мада се тематски разликују од њих. У њима он проучава такозване конполне и конполарне конусне пресеке, тј. фамилије конусних пресека са заједничким полом, односно поларом (термини су образовани по аналогији са термином „конфокалне линије“). Основни резултати ових његових истраживања могу се, у сумарном облику, свести на тврђење да се полигони, у ове конусне пресеке уписани и око њих описани, добијају као перспективне слике полигона уписаних у круг и описаних око њега. Треба напоменути да су ови чланци (као, уосталом, и други Живковићеви радови) снабдевени већим бројем прецизно и педантно урађених цртежа, који у ауторовом излагању, међутим, имају само помоћну, илустративну функцију, будући да је његово расуђивање у основи логичко и вербално, и као такво не позива се и не наслања битно на визуелне представе.

Исте, 1924. године, кад је у Гласу публикован последњи његов рад, Петар Живковић је умро, у 77. години, 23. септембра. Последње године живота, од 1912. до смрти, провео је у Београду, усамљен и у доста неповољним материјалним и осталим приликама, добијајући скромну помоћ од Академије.

Као што се из напред изложеног види, оно што се може сматрати научним опусом Петра Живковића чини укупно девет његових радова, чије смо пуне наслове (уз избегавање непотребног понављања на једном месту) навели. У списку свих познатих публикованих Живковићевих текстова, који дајемо у прилогу, налазе се ти радови са потребним подацима. Уочава се да сви они третирају релативно елементарна питања из класичних, широко проучаваних области синтетичке, аналитичке и елементарне диференцијалне геометрије, али треба рећи и да је њихов аутор већ од првог рада настојао да проблеме којима се бавио обрађује темељно и обухватно, да их варира и шири, и да је на њима годинама истрајавао.

У свом, иначе веома корисном и информативном, прегледу развитка математике у Србији у последња два века (одељак под насловом *Математичке науке* зборника *САНУ и развој наука и уметности у Срба*, Београд 1989) академик *Миодраг Томић* на неколико места се осврће на поменуте радове Петра Живковића. Не оспоравајући оправданост, у доброј мери, карактеризација и оцена појединих Живковићевих текстова у овом Томићевом прегледу, чини нам се да је ипак његов општи закључак о Живковићу (имплицитно дат) нешто строжи од оног који би био сасвим адекватан – кад се узму у обзир све битне околности. По среди су како извесни квалитети које његови радови поседују, тако и наше принципијелно уверење да пионире научног рада у XIX веку код нас, с обзиром на прилике у којима су деловали и на почетно стање од кога су пошли, треба оцењивати по посебним мерилима, различитим од оних апсолутних и највиших. Наиме, недограђеност и недовршеност у општем стању друштва, ограничавајуће околности, многи пречи послови које су императивно налагале потребе државе и народа тада су код нас веома отежавали неговање чисте науке у области математике, нарочито оно дужег даха. Ово би, при доношењу крајњег суда о значају и вредности доприноса појединих научних посленика у тим временима у нашој средини, требало да буде битан корективни и комплементарни моменат у односу на процену вредности и оригиналности самих њихових радова, ма колико она иначе била егзактна и образложена. Овакву корекцију својих претходно изречених релативно неповољних оцена не само Живковићевих, него математичких резултата и осталих чланова Српског ученог друштва о којима је било речи, професор Томић ипак донекле даје следећом завршном формулацијом одговарајућег одељка свог текста: „Ако бисмо их оцењивали строго, данашњим мерилима, могли бисмо поновити оно што је давно за њих речено, тј. да 'су таворили у научном локалитету београдске вароши'. Али, ако се има на уму да су они све сами створили, да су се борили са, за данашње време, несхватљивим тешкоћама, да су радили не за своју славу и своје име већ да будућим нараштајима обезбеде боље услове и више знања, онда се добија права слика о њиховом доприносу стварању наше математичке науке и њеним првим корацима, а они нису тако лоши као што би, по резултатима, на први поглед изгледало."

У ствари, умесно би било, с обзиром на овакве случајеве, имати у виду два могућа критеријума аутентичности и оригиналности научних резултата неког аутора. Први би био строжи, а могао би се назвати апсолутним, спољашњим или објективистичким, и представљао би доношење закључка, после утврђивања коректности самих резултата и пута до њих, на основу тога да ли су ти резултати у тренутку кад су добијени, односно публиковани, били познати (већ од стране неког другог добијени) или нису, као и да ли је или није сама тема рада тада била значајна и актуелна, и то са неког високог, светског становишта. Други критеријум би, задржавајући проверу тачности резултата и коректности извођења, при доношењу основног закључка пре свега постављао питање: да ли се резултату о коме је реч може приписати, да тако кажемо, унутрашња, субјективна аутентичност и оригиналност, наиме, да ли је сам резултат *као такав* нетривијалан и занимљив и да ли се са довољно разлога може сматрати да је аутор потпуно самостално до њега дошао, док би за тај критеријум остале околности из првог критеријума имале секундарну, или бар не би имале пресудну важност. Други критеријум је, наравно, блажи од првог, а могао би се назвати унутрашњим, субјективистичким или релативним критеријумом. Мишљења смо да би у случају Петра Живковића, као и других зачетника и иницијатора научног рада у области математике код нас, примеренија била примена овог другог критеријума, или бар његово озбиљно узимање у обзир. Према том критеријуму, међутим, Живковићеви радови не би могли добити баш негативну оцену: он је у већини њих сам нашао и одредио тему и проблеме и дошао до резултата коректним и, по свему судећи, самосталним поступком; при томе, за разлику од онога што се може рећи за многе друге из тог, па и из каснијих времена код нас, за скоро све његове радове, као што смо већ напоменули, карактеристично је настојање да се изабране теме третирају систематски и обухватно, не само као појединачни случајеви, него као комплекси проблема, – може се рећи и тежња грађењу неке опште теорије. Ово нарочито важи за последњу групу Живковићевих радова, објављених после I светског рата.

Кад се, према томе, све ово узме у обзир, или, кратко речено, кад се много више него његов допринос светској математичкој науци има у виду његова улога у почетном развитку наше, – Петру Живковићу, иначе првом нашем математичару који је то био и по свом универзитетском образовању (одсек циришке Политехничке школе који је завршио заправо није технички, него нека врста природно-математичког факултета, са нагласком на математици), међу пионирима научног рада у области математичких наука и њихових примена код нас – припада одређено, скромно, али не и безначајно и свакако часно место.

Није мање часно, а свакако је и истакнуто, место које Живковићу даје друга димензија његових животних активности – његов рад у различитим средњим школама у разним крајевима Србије, којим је испунио најбољих четрдесет година живота, читав, како се то данас каже, „свој радни век", и којим је – да се мало сликовито изразимо – по Србији повукао свој благотворни „шестостраник" Београд–Крагујевац–Зајечар–Београд–Ужице–Ваљево–Београд (ни Паскалов, ни Бријаншонов, него Живковићев). Веома савестан наставни рад, од самог почетка у крагујевачкој учитељској школи, и разне друге допунске школске и педагошке активности у истој и у другим срединама донели су Живковићу не мали углед, који је, уз остало, допринео његовом избору за члана Просветног савета и Српског ученог друштва, а потом и Академије наука. Касније је редовно у школама у које је долазио постајао директор или управитељ. На овим дужностима, не напуштајући сасвим основни наставни процес, непосредан контакт са ученицима, развио је веома живу и свестрану делатност на унапређењу наставе и њене организације, и то не само наставе математике и сродних предмета, него и укупног образовно-васпитног рада у школама. Колико год је могао, својим иницијативама у свим тим срединама покретао је ствари напред, доприносио је увођењу корисних новина, обогаћењу и оплемењивању живота школе. У све то, поред елана и пожртвовања, уносио је много топлине и љубави – према свом позиву и својим ђацима. Без обзира на пролазне фазе и наносе заборава,* трагови ове његове преданости остаће трајно присутни – бар преко продуженог деловања, преко каснијих и данашњих плодова, на пример у Ваљевској гимназији, његових некадашњих импулса и постигнућа.

Чини нам се да се симболом и концентрисаним изразом његовог доживљавања школе као истинске заједнице, као и његових главних животних привржености и прегнућа, може сматрати наслов његове светосавске беседе изговорене 1909. године: *Школа као место светлости, љубави и живота.*

*

Претходном тексту прилажемо списак објављених радова Петра Живковића и списак извора података о њему. Први од тих спискова можда није потпун, а за други нисмо нарочито ни настојали да такав буде.

---

* Овај заборав, не само кад је у питању Петар Живковић, него, на пример, и у случају истакнутог физичара и ректора Београдског универзитета *Ђорђа Станојевића*, и више других знаменитих личности из наше научне прошлости, једно време био је наизглед потпун и дефинитиван, али недавно је почео да се са њих скида, у Живковићевом случају благодарећи монографијама о Ваљевској гимназији и Ваљевској вишој женској школи, наведеном чланку академика Томића и, нарочито, краћој монографији о Живковићу коју је 1993. године објавио професор *Драган Трифуновић*.

БИБЛИОГРАФИЈА РАДОВА ПЕТРА ЖИВКОВИЋА

1. *Реферат о „Алгебри за ученике гимназије" од Радована Пеића*, Просветни гласник, Београд 1882, књига 3, св. 24, стр. 899–906.
2. *Графичко представљање вредности простог односа тачке у низу и зрака у прамену*, Гласник Српског ученог друштва, књ. 54, Београд 1883, стр. 129–154.
3. *Реферат о „Тригонометрији и аналитичкој геометрији за више разреде средњих школа" од Среће Ј. Стојковића*, Просветни гласник, Београд 1883, књ. 4, св. 5, стр. 165–175.
4. *Допунски реферат о „Алгебри за ученике гимназија" од Радована Пеића*, Просветни гласник, Београд 1883, књ. 4, св. 11, стр. 435–437.
5. *Прилог алгебарским влацима вишег ступња*, Гласник Српског ученог друштва, књ. 67, Београд 1884, стр. 181–243.
6. *О инволуторијској системи тачака код сферних огледала*, Гласник Српског ученог друштва, књ. 64, Београд 1885, стр. 235–274.
7. *Други прилог алгебарским влацима вишег степена*, Гласник Српског ученог друштва, књ. 69, Београд 1889, стр. 266–322.
8. *Прилог алгебарским влацима вишег степена*, Српска краљевска академија наука, Глас XXXIV, Први разред, књ. 14, Београд 1892, стр. 26.
9. *Реферат о „Основи одредница (детерминанти)" од Ср. Ј. Стојковића*, Наставник – Лист Професорског друштва, књ. 3, св. 1–6, Београд 1892, стр. 204–214.
10. *Цртање елипсе, хиперболе и параболе*, Наставник – Лист Професорског друштва, књ. 4, св. 1–6, Београд 1893, стр. 204–216.
11. *Други прилог алгебарским влацима вишег степена*, Српска краљевска академија, Глас LVI, Први разред, књ. 20, Београд 1898, стр. 1–16.
12. *Један метод за цртање кривих линија у равни*, Српска краљевска академија, Глас LVI, Први разред, књ. 20, Београд 1898, стр. 17–26.
13. *Глоб и његова важност и употреба*, Ваљевска гимназија, Годишњи извештај о раду и успеху у школској години 1897–1898, Ваљево 1898.
14. *Глоб и његова важност и употреба*, израдио Петар Ј. Живковић, директор и професор Ваљевске гимназије (прештампано из Годишњег извештаја Ваљевске гимназије за школску 1897/98. годину), Ваљево 1898, стр. 19; in 8°.
15. *Тома Алва Едисон и неки његови проналасци*, Ваљевска гимназија, Годишњи извештај о раду и успеху у школској години 1900–1901, Ваљево 1901, стр. 3–16.
16. *Како треба децу да васпитавамо*, Годишњи извештај о раду и успеху у школској 1901–1902, Ваљево 1902, стр. 3–15.
17. *Троугли уписани у кругу и описани око круга у перспективном положају – перспективи. Конполни и конполарни конични пресеци*, Српска краљевска академија, Глас XCIX, први разред, књ. 42, Београд 1922, стр. 7–44.
18. *Веза између Паскаловог шестоугла, Бријаншоновог шестостраника и пола и поларе (Le rapport entre l'hexagone de Pascal, l'hexagone de Brianchon. Le pôle et la pôlaire)*, Српска краљевска академија, Глас CIII, Први разред, књ. 44, Београд 1922, стр. 10–25.
19. *Конполни и конполарни конични пресеци (Les coupes conpôles et conpôlaires)*, Српска краљевска академија, Глас CXI, Први разред, књ. 49, Београд 1924, стр. 76–153.

РАДОВИ О ПЕТРУ ЖИВКОВИЋУ

(Скраћенице: САНУ = Српска академија наука и уметности; СКА = Српска краљевска академија; СУД = Српско учено друштво)

1. Драган Трифуновић: *Пешар Ј. Живковић, професор и дирекшор Ваљевске гимназије 1894–1904*, Ваљевска гимназија, Ваљево 1963, стр. 53.
2. Д. Недељковић–М. Трипковић: *Сшо година ваљевске гимназије*, Ваљево 1970, стр. 236.
3. Милан Трипковић и други: *Сшо двадесеш йеш година Ваљевске гимназије 1870–1995*, Ваљево 1995, стр. 165.
4. М. Трипковић: *Привашна ваљевска женска гимназија*, Међуопштински историјски архив, Ваљево, Гласник 23 (1988), стр. 21–28.
5. Драган В. Трифуновић: *Лешойис живоша и рада Михаила Пешровића*, САНУ, Београд 1969, стр. 630.
6. Драган Трифуновић: *Проучавање моделовања у делу Михаила Пешровића*, Нови Сад 1976, стр. 398.
7. Миодраг Томић: *Машемашичке науке*, у зборнику *САНУ и развој науке и умешносши у Срба*, књ. 1, САНУ, Београд 1989, стр. 13–34.
8. Архив САНУ: Фонд СКА, 1893/146; Годишњак СКА за 1895, књ. IX, стр. 329–332. (Подаци о родитељима и о рођењу.)
9. Архив Србије: МПс, Досијеа, књ. 1, Ф–VI, Петар Живковић. (Разни биографски подаци.)
10. Архив Србије: ВШ–1864, 96, 98; 1866,72; 1967,8,12,13,28. (Подаци о студијама технике у Београду.)
11. Љ. Ј. Дурковић: *О боравку Свешозара Марковића у Швајцарској за време школовања*, Зборник Историјског музеја Србије, 13–74 (1977), стр. 99–104. (Списак студената циришке Политехничке школе.)
12. Архив Србије: МПс, Ф II, 12/1872. (Молба за добијање државне службе.)
13. Архив САНУ, фонд СУД: 136 (1880). (Пријава првог научног рада Српском ученом друштву.)
14. Гласник СУД, 52(1882), стр. 312–313. (Списак чланова Српског ученог друштва 1882.)
15. Годишњак СКА, књ. VII за 1893. годину, стр. 68. и 201. (Подаци о избору за дописног члана Српске краљевске академије.)
16. Годишњак СКА, књ. IX за 1895. годину, лично писана биографија, стр. 329–332.
17. Срета Стојковић: *Одговор г. Пешру Живковићу*, Наставник – Лист Професорског друштва, књ. 3, св. 1–6, Београд 1892, стр. 214–228.
18. *Срйска библиографија* – Књиге (1868–1944), издање Народне библиотеке Србије, Београд 1990, књ. 6.

PETAR ŽIVKOVIĆ

(1847–1924)

This article purports to show the main features in the life and work of mathematician *Petar Živković*, one of the leading proponents of mathematical, scientific and educational activities at the turn of the last century in Serbia. In the author's opinion he is entitled to a prominent place in this endeavour, if not the top, certainly not an insignificant one. Živković, according to the author's findings, is one of the first in this country to make a serious attempt to develop a systematic scientific work in the field of mathematics, while on the other hand he spent most of his energies in the span of a few decades to organize pedagogical activity at the secondary level of mathematical and physical education, spreading a stimulating and benign influence in all the environments where he worked. In the text that follows, the author has laid out some of the essential facts concerning him, and has attempted to elucidate and explicate his above claims.

He will begin with the most important facts concerning Petar Živković, born in 1847 at Zaječar, a small town at the eastern confines of Serbia. His father, most probably a businessman, was fairly well-to-do, which enabled him to finance his son's education at home and abroad. In the course of his schooling, Petar Živković, after completing his primary schooling in his birthplace in 1858, moved to Negotin where he began, then to Kragujevac where he completed in 1864 his secondary education. Motivated by his proclivity for mathematical and technical sciences, he enrolled at the recently established Technical Faculty of the Belgrade University, graduating after three years, in 1867. In a desire to further his education, he enrolled at the well known School of Polytechnics at Zurich, first in its mechanical engineering department from which after one year, dissatisfied with the insufficient share of mathematics in the curriculum, he moved to the department of mathematics and physics (where twenty years later Albert Einstein and his wife Mileva Marić were students). On his return to Serbia, he first unsuccessfully tried to obtain a teaching post at the university, and then, in 1872, he was appointed teacher of mathematics in the Teachers College at Kragujevac, where he taught until 1877.

After teaching for a year at the real gymnasium in Zaječar, he was professor of mathematics, physics and mechanics from 1878 to 1888 at the Belgrade real gymnasium. In this period he began publishing professional and pedagogical articles as well as larger texts which acquired the status of scientific works and were published in the Gazette of the Serbian Learned Society. These activities, as well as his acquired renown of a good pedagogue, earned him election as a regular member of the Serbian Learned Society in 1883. Following the subsequent establishment of the Serbian Royal Academy of Sciences, in which the Serbian Learned Society merged, Živković became its correspondent member in 1883. Just prior to the start of the 1888/1889 school year he was appointed director of the Užice real gymnasium. In 1894 he took the directorship of the Valjevo high school, which post he retained until his retirement in 1904. Even after his retirement from civil service, he continued for a time working in education as director of a private girls high school at Valjevo until it closed down in 1912. At all times he was extremely successful in his educational practice, which he never gave up, as director and organizer of schools, and as a pedagogical writer.

To the end of his life, with some interruptions, he continued writting scientific articles in the Gazette of the Serbian Learned Society and later in the Voice of the Serbian Royal Academy of Sciences. In all he published nine such works. Živković's scientific contibutions dealt with elementary questions from the classical fields of synthetic, analytical and elementary differential geometry which he elaborated thoroughly and comprehensively for a long number of years. Following a mild polemic which brought out a relatively unfavourable assessment of his work voiced a few years ago by academician Miodrag Tomić, the prevailing opinion insisted on the above stated positive quality of his work and on the idea that the pioneers of scientific work in this country in the 19th century, in view of the conditions in which they worked and the point of departure from which they started, should be assessed by special criteria, different from the absolute and highest ones. Taking everything into consideration, Petar Živković, being one of the earliest scientific workers in the field of mathematics, deserves a modest but by no means insignificant place.

Just as honourable and eminent a place, in the autohor's opinion, pertains to Živković on account of his work in various secondary schools in the various parts of Serbia which filled the best forty years of his life, and where, to the utmost of his abilities, he endeavoured to move things forward, to introduce useful innovations, to enrich educational activities.

Appended to the text on the life and work of Petar Živković is a list of his published works and a list of sources of data on his person.

UDK 51

YU ISSN 0353-8893

U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

P U B L I K A C I J E

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA:

MATEMATIKA

9 (1998)

B E O G R A D

UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. 9 (1998), 35–45.

SOME PROPERTIES OF INCREASING FUNCTIONS, ESPECIALLY THOSE RELATED TO RECURRENTLY DEFINED SEQUENCES

Dušan Adamović

In this paper one studies some properties of increasing real functions defined on real intervals, especially in connection with sets S_x and T_x, and also monotony and convergence of sequences defined recurrently by such functions.

This text comprises several results; those forming the first group and included in Theorem 1 refer to different properties of an increasing function $f : I \to \mathbf{R}$, while the results of the second group, colected in the formulation of Theorem 2, treat exhaustively the question of convergence and monotony of a sequence (x_n) defined recurrently by means of such a function:

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, \ldots).$$

Here and in that which follows, $\mathbf{R}$ denotes the set of all real numbers and $I \subseteq \mathbf{R}$ an interval which is neither empty nor singleton. As usually, $\mathbf{N}$ is the set of natural numbers and $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$.

1. RESULTS

Theorem 1. *Let*

$$(1) \qquad \begin{cases} I \subseteq \mathbf{R} \textit{ be an interval which is neither empty nor singleton} \\ \textit{and } f : I \to \mathbf{R} \textit{ an increasing function (non necessarily strictly).} \end{cases}$$

Under this condition:

1° *If $x < \sup I$ and $f(x) > x$, then the set*

$$S_x := \{y : x < y \in \mathbf{R} \wedge (x, y) \subseteq I \wedge f(t) > t (x \leq t < y)\}$$

is not empty and

$$(x, \min\{f(x), \sup I\}) \subseteq S_x, \quad (x, \sup S_x) \subseteq S_x;$$

1991 Mathematics Subject Classification: 26A48 *moreover,* $\sup S_x = \max S_x$ *if* $\sup S_x < +\infty$. *The corresponding symmetrical assertions are also true.* (*The exact meaning of the last sentence is*: *retaining the supposition that* f *is increasing-strictly or not, the assertions which differ from the previous assertions ony in the fact that right and left sides have changed places, i.e. all inequalites have been repaced by opposite inequalites, -remain true.*- The same sentence should be repeated at several places; at any of them it will be replaced by the sign $\bowtie$.)

2° *If* $z := \sup S_x$ $(= \max S_x) \in I$, *then* $z \leq f(z)$. *If moreover* $z < \sup I$, *we have*

$$z = f(z) = f(z-0) = \min F_x^+,$$

where

$$F_x^+ := \{t : x < t \wedge f(t) = t\}$$

(*so* F_x^+ *is the set of all fixed points of* f *greater than* x). *If the set*

$$F_x^- := \{t : t < x \wedge f(t) = t\}$$

(*i.e. the set of all fixed points of* f *less than* x) *is not empty, its maximum need not exist.*

3° *A sufficient, but not a necessary, condition for the existence of a fixed point of* f *is the existence of numbers* $x, y \in I$ *such that* $x < y$, $f(x) > x$ *and* $f(y) < y$. *If this condition is satisfied, at least one fixed point of* f *lies in the interval* (x, y).

4° *Again, let*

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \sup I, f(x) > x, \\ \textit{and let } T_x := \{t : x < t \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad f(t-0) = t\} \neq \emptyset. \end{array} \right. \tag{2}$$

Then there exists the minimum y *of* T_x. *This minimum can be an accumulation point of the set* T_x. *A necessary, but not a sufficient, condition for this is* $y \in F_x^+$. *A suficient, but not a necessary, condition for an* $x \in I$ *with properties* $x < \sup I$ *and* $f(x) > x$ *to be* $T_x \neq \emptyset$ *is* $F_x^+ \neq \emptyset$ (*i.e. that there exists at least one fixed point of* f *greater than* x).

Theorem 2. *Under the suppositions* (1), *the folowing assertions hold*:

1° *If the condition* (2) *is satisfied, so that there exists* $y := \min T_x$ (*assertion* 4° *of Theorem* 1), *and also the condition*

$$f(t) < y \quad (x \leq t < y) \quad \vee\, y \in F_x^+ \tag{3}$$

then by

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, \ldots) \tag{4}$$

is defined an infinite sequence (x_n)*, which increases strictly and converges to* y *if the first part in* (3) *holds, and if only the second part in* (3) *is satisfied, it increases stricty for* $n \in \{1, \ldots, m\}$*, with an* $m \in \mathbf{N}$*, and for* $n \geq m$ *it takes constantly the value* y*.*

(It is not dificult to see that the first part of disjunction (3) can be formulated as follows:a left neighbourhood of the point y in which the function f should be constant-does not exist).

1°.1 *If* $x < \sup I$*,* $f(x) > x$ *and* $T_x = \emptyset$*, then* (4) *defines an infinite sequence* (x_n) *which increases strictly and tends to* $+\infty$*, or* (4) *defines only a finite sequence which is strictly increasing on its domain-depending on whether* $\sup I = +\infty$ *or* $\sup I < +\infty$*.*

2° *Suppose that* (2) *is satisfied and that* (3) *is not. Then there exists a strictly increasing sequence*

$$y_\ell \quad (\ell = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

finite or infinite, such that

$$\begin{cases} y_0 = x; \quad \text{with } y_{\ell-1} \text{ instead of } x \text{ condition (2) is satisfied and} \\ \text{condition (3) is not, and } y_\ell = \min T_{y_{\ell-1}} \quad (\ell = 1, \ldots), \end{cases} \tag{6}$$

and moreover

$$x_{p_\ell} = y_\ell \ (\ell = 0, 1, \ldots), \ p_0 = 1, \ p_{\ell-1} < p_\ell \quad (\ell = 1, \ldots),$$

where $x_n (n = 1, \ldots)$ *is the sequence defined by* (4)*. Further :*

2°.1 *The sequence* (5) *is finite if for some* $\ell_0 \in \mathbf{N}$ *:*

$$y_{\ell_0} = \sup I, \ \text{ or} \tag{7}$$

$$y_{\ell_0} < \sup I \quad \wedge \quad T_{y_{\ell_0}} = \emptyset, \ \text{or} \tag{8}$$

$$\text{with } y_{\ell_0} \text{ instead of } x \text{ both conditions (2) and (3) are satisfied.} \tag{9}$$

2°.1.1 *In the case* (7)*, sequence* (4) *is defined and stricty increasing on the set* $\{1, \ldots, p_{\ell_0} + 1\}$ *or on the set* $\{1, \ldots, p_{\ell_0}\}$ *, –depending on whether* $\sup I \in I$ *or* $\sup I \notin I$*.*

2°.1.2 *In the case* (8)*, sequence* (4) *is infinite and strictly increasingly tends to* $+\infty$*, or it is finite and strictly increasing on its domain, –depending on whether* $\sup I = +\infty$ *or* $\sup I < +\infty$*.*

2°.1.3 *In the case* (9), *sequence* (4) *is infinite and strictly increasingly converges to* $z := \min T_{y_{\ell_0}}$, *or for some* $m\,(\geq p_{\ell_0})$ *is strictly increasing on the set* $\{1,\ldots,m\}$ *and for* $n \geq m$ *constantly takes the value* z, *–depending on whether, with* y_{ℓ_0}, *instead of* y, *the first member of the disjunction* (3) *is satisfied or only its second member holds.*

2°.2 *If for none* $\ell_0 \in \mathbf{N}$ *any of conditions* (7), (8) *and* (9) *is satisfied, then sequence* (5), *and consecuently sequence* (4), *is infinite, and moreover sequence* (4) *is strictly increasing and converges to a number* $u \in \mathbf{R}$ *with the property* $f(u-0) = u$ (*i.e. with the property* $u \in T_x$), *or it is strictly increasing and tends to* $+\infty$, *– depending on whether sequence* (y_ℓ) *is bounded or unbounded.*

All previous cases are effectively possible. ⋈ (*This sign refers to the whole statement, i.e. to all assertions in* 2).

3° *If* $x = \max I$ *and* $f(x) > x$, *sequence* (4) *is defined and strictly increasing on the set* $\{1,2\}$. ⋈.

4° *In order that a sequence* (4), *with* $x \in I$, *is strictly increasing and convergent to* $u \in \mathbf{R}$ *it is nessesary that* $f(u-0) = u$. *If* $u \in \mathbf{R}$, $\inf I < u \leq \sup I$ *and* $f(u-0) = u$, *a sequence* (x_n) *defined by* (4), *strictly increasing and tending to* u *need not exist.*

1.1. In particular, if the function f is *strictly increasing*, one can omit from previous formuation any mention of the condition (3), all parts of the text under 1° referring to this condition and also whole text under 2°. Therefore, in this case Theorem 2 can be repaced by the following simpler statement.

Theorem 2.1. *Let the function* $f : I \to \mathbf{R}$ *be strictly increasing. Then, if* (2) *holds,* (4) *defines an infinite sequence* (x_n) *which is strictly increasing and converges to* $y = \min T_x$. *–If* $x < \sup I$, $f(x) > x$ *and* $T_x = \emptyset$, *then by* (4) *is defined an infinite sequence which is strictly increasing and tends to* $+\infty$, *or only a finite sequence is defined and this sequence is strictly increasing on its domain, –depending on whether* $\sup I = +\infty$ *or* $\sup I < +\infty$. *–If* $x = \max I$ *and* $f(x) > x$, *sequence* (4) *is defined and strictly increasing on the set* $\{1,2\}$. *–For the convergence to* $y \in \mathbf{R}$ *of a sequence* (x_n) *defined by* (4) *and strictly increasing, it is nessesary that* $f(y-0) = y$. *–If* $y \in \mathbf{R}$, $\inf I < y \leq \sup I$ *and* $f(y-0) = y$, *then a sequence* (x_n) *defined by* (4) *which strictly increases and converges to* y *–need not exist.* ⋈ (*Refers to all preceding assertions*).

1.2. If the function $f : I \to \mathbf{R}$ is *continuous*, in preceding statements the points $y \in I$ with the property $f(y-0) = y$ or $f(y+0) = y$ ought to be replaced by fixed points of f, since then, obviously, any such point is fixed and every fixed point has both previous properties, excluding one of them at the endpoint of I. Therefore, the statement which in this case comprises all assertions of Theorems 1 and 2 could be as follows:

Theorem 2.2. *Let the function* $f : I \to \mathbf{R}$ *be increasing and continuous. Then :*

1° *For any* $x \in I$ *such that* $f(x) > x$, *the set* F_x^+ *of all fixed points of* f *greater than* x, *provided that it is not empty, has its minimum, and the set* F_X^- *of all fixed points of* f *less than* x, *if not empty, has its maximum.*

2° *Suppose that* $x < \sup I$ *and* $f(x) > x$. *Then the sequence* $x_n (n = 1, \ldots)$ *defined by* (4) : *if* $F_x^+ \neq \emptyset$, *increases strictly and converges to* $y := \min F_x^+$, *or increases strictly on the set of indices* $\{1, \ldots, m\}$ *and for* $n \geq m$ *takes constantly the value* y, *–depending on whether we have* $f(t) < y$ $(x < t < y)$ *or this condition is not satisfied; if* $F_x^+ = \emptyset$, *the sequence* (4) *is strictly increasing and tends to* $+\infty$, *or increases strictly and converges to* $\sup I$, *or is finite and strictly increasing on its domain, –depending on whether we have* $\sup I = +\infty$ *or* $z := \sup I < +\infty$ *and* $f(x) < z = f(z-0)$ *or* $z < +\infty$ *and* $f(x) \geq z \vee z < f(z-0)$. $\bowtie$

3° *If* $x = \sup I$ *and* $f(x) > x$, *the sequence defined by* (4) *is defined and increases stricty on the set* $\{1, 2\}$. $\bowtie$

4° *For the existence of a sequence defined by* (4), *strictly monotone and convergent to* $y \in I$ *–it is nessesary, but not sufficient, that* y *be a fixed point of* f. $\bowtie$

1.3. A conclusive comment. Taking into consideration the fact that, if x is a fixed point of the mapping f, then sequence (4) constantly takes the value x, all assertions of Theorem 2 (and partially and implicitely of Theorem 1) can be resumed as follows:

Under the hypothesis that the function $f : I \to \mathbf{R}$ *is increasing, sequence* (4), *with* $x \in I$, *is increasing or decreasing, depending on whether* $f(x) \geq x$ *or* $f(x) \leq x$; *in fact strictly on its whole domain, which can be finite or infinite, or strictly up to a certain index* $m \in \mathbf{N}$ *and further being constant*; *if this sequence is infinite and strictly monotone, it can converge to a number* y *such that* $f(y-0) = y$ *in the case of increase and* $f(y+0) = y$ *in the case of decrease, or tend in the first case to* $+\infty$ *and in the second to* $-\infty$; *the conditions of realization of any previous possibilities are precisely determined by more extensive statements of Theorems* 1 *and* 2.

2. PROOFS

Proof of Theorem 1. 1° Let $x < \sup I$ and $f(x) > x$. Suppose that the inclusion $(x, \min\{f(x), \sup I\}) \subseteq S_x$ is not true. Then there exist $y \in (x, \min\{f(x), \sup I\})$ and $t \in (x, y)$ such that $f(t) \leq t$, and so $f(t) \leq t < y < f(x)$ and at the same time $x < t$, which contradicts the supposition (1) on the function f. Hence $(x, \min\{f(x), \sup I\}) \subseteq S_x$ and consequently $S_x \neq \emptyset$. Further, if $y \in (x, \sup S_x)$, then exists $t \in (y, \sup S_x) \cap S_x$, and because $[x, y) \subseteq [x, t)$ we have $f(u) > u(x \leq u < y)$, which implies $y \in S_x$. Hence $(x, \sup S_x) \subseteq S_x$. It follows that $f(y) > y(x \leq y < \sup S_x)$; therefore, if $\sup S_x < +\infty$ and consequently $\sup S_x \in \mathbf{R}$, we have $\sup S_x \in S_x$, i.e. $\sup S_x = \max S_x$.

2° Let us suppose that

$$z := \sup S_x \in I. \tag{10}$$

Then we have, by the last assertion in 1°,

$$f(t) > t \quad (x \leq t < z). \tag{11}$$

Further, in this case $f(z) < z$ would imply, with an $u \in (f(z), z)$, $f(u) > u > f(z)$, that is $f(u) > f(z)$ and simultaneously $u < z$, in contradiction with our starting supposition. Therefore,

$$z \leq f(z). \tag{12}$$

In particular, if

$$z < \sup I \tag{13}$$

then $f(z) > z$ would imply, by 1^0, the existence of some $u > z$ such that $f(t) > t \quad (x \leq t < u)$, i.e. such that $z < u \in S_x$, in contradiction with (10). Hence and by (12), $f(z) = z$. This and (11) imply $z = \min F_x^+$. Finally, taking into consideration (11), we conclude that $z = f(z) \geq f(z-0) \geq z$, i.e. $f(z-0) = z$.

The last assertion is proved by the example: $f(t) = t - \frac{1}{4}\sin 1 (t \leq -1)$, $f(t) = t + \frac{1}{4}t^2 \sin\frac{1}{t}$ $(-1 < t < 0)$, $f(t) = t + 1$ $(t \geq 0)$, $I = \mathbf{R}$ and $x = 0$.

3° One can obtain both assertions, except the detail expressed by the words "but not a necessary", by a direct application of the known theorem on fixed point of A. Tarski [**1**]. Namely, under the accepted conditions, $f|[x, y]$ is an increasing mapping of the complete lattice $[x, y]$ into $[x, y]$. The non necessity of this condition is proved by the example of the function $f(t) = 2t$ $(t \in \mathbf{R} = I)$, or by the function $f(t) = t$, $(t \in \mathbf{R} = I)$.

4° Let condition (2) be satisfied. Then $y := \inf T_x$ exists and $x \leq y$. If y is not an accumulation point of the set T_x, we have certainly $y = \min T_x$. Let y be an accumulation point of T_x. Then there exists to y convergent sequence (y_n) of numbers greater than y and such that $f(y_n - 0) = y_n$, $(n \in \mathbf{N})$. Therefore,

$$f(y) \leq f(y_n - 0) = y_n \to y \quad (n \to \infty)$$

and so

$$f(y) \leq y. \tag{14}$$

This and $f(x) > x$ imply that the equality $y = x$ is not possible, i.e. that

$$y > x. \tag{15}$$

The supposition that $f(t) \leq t$ for some $t \in (x, y)$ would imply, on account of 2°, the existence of $z := \max S_x$ and the relations $z \in (x, t] \subset (x, y)$ and $z \in T_x$, in contradiction with $y = \inf T_x$. Hence

$$f(t) > t \quad (x \leq t < y). \tag{16}$$

It follows that

$$f(y-0) = \lim_{t \to y-0} f(t) \geq \lim_{t \to y-0} t = y. \tag{17}$$

From (14) and (17) follows $y \geq f(y) \geq f(y-0) \geq y$, and so $y = f(y-0)$ and $f(y) = y$. The first of these equalites means that in this sedond case we also have $y = \min T_x$, which proves the first statement in this point. The second equality proves the necessity of the condition from the second statement. –The non sufficiency of this condition is proved by the example: $I = R, f(t) = \frac{1}{2}t \quad (t \in \mathbf{R})$; in this case we have $T_{-1} = \{0\}, \min T_{-1} = 0 \in F^+_{-1}$ and 0 is not an accumulation point of the set T_{-1}. –On the other hand, $\min T_x$ can indeed be an accumulation point of T_x as proved by the following case $(I \in \mathbf{R})$: $f(t) = \frac{1}{2}t \quad (t \leq 0), f(t) = t + \frac{1}{4}t^2 \sin\frac{1}{t} \quad (0 < t < 1), f(t) = t + \frac{1}{4}\sin 1 \quad (t \geq 1)$; this function is obviously increasing on the intervals $(-\infty, 0]$ and $[1, +\infty)$, and on $[0, 1]$ too, because $f'(t) = 1 + \frac{1}{2}t\sin t^{-1} - \frac{1}{4}\cos t^{-1} > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0 \quad (0 < t < 1), f(+0) = 0, \quad f(1-0) = 1 + \frac{1}{4}\sin 1$. In this case $\min T_{-1} = 0$ and $T_{-1} = \{0\} \cup \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbf{N}\}$, which means that $\min T_{-1}$ is an accumulation point of the set T_{-1}. –Further, when $f(x) > x$ and $x < \sup I$, the set S_x, by 1°, is not empty and then the supposition $F_x^+ \neq \emptyset$ implies the relations $x < z := \sup S_x \in I$. Under the same supposition: if we have $z (= \max S_x) < \sup I$, it will be, on account of 2°, $f(z-0) = z$, and if $z = \sup I$, then we have first, by (11), $f(z) = z$, and (11) also implies $f(z-0) \geq z$, so that we obtain $z = f(z) \geq f(z-0) \geq z$, that is $f(z-0) = z$; therefore, in both cases $z \in T_x$. This means that under the cited conditions $F_x^+ \neq \emptyset$ implies $T_x \neq \emptyset$. –Finally, the example of the function $f(t) = \frac{1}{2}t \quad (t < 0), \quad f(t) = t + 1 \quad (t \geq 0)$, for which $T_{-1} = \{0\}$ and $F^+_{-1} = \emptyset$, proves that $F_x^+ \neq \emptyset$ is not a necessary condition for $T_x \neq \emptyset$.

Proof of Theorem 2. 1° Let conditions (2) and (3) be satisfied. If the first member of the disjunction (3) is satisfied in this case, then, as can be established by a simple consideration which uses the inequality (16), sequence (4) is infinite and strictly increasing, and we also have $x < x_n < y (n \in \mathbf{N})$. Hence $u = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ exists and $x < u \leq y$. Since

$$u = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(u-0), \tag{18}$$

i.e. $u \in T_x$, the inequality $u < y$ is not possible, and so $u = y$. Therefore, in this case sequence (4) is strictly increasing and converges to $y = \min T_x$. If only the second member of the disjunction (3) is satisfied, then $f(t) \le f(y) = y \quad (x \le t < y)$ and consequently sequence (4) is again infinite, bounded from above by the number y, and, on account of (16), increasing. Hence $u = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ exists and $x < u \le y$ (first inequality is strict because $x_1 < x_2$). The inequality $u < y$ is again impossible. Namely, in the consideration expressed by the statement comprising formula (18) we have in fact established the following:

$$\text{(19)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{if some sequence defined by (4) is strictly increasing} \\ \text{and converges to } u \in \mathbf{R} \text{ then } x < u \text{ and } f(u-0) = u. \end{array} \right.$$

Hence the strict increase of sequence (4) in this case implies $u \in T_x$, which excludes the possibility $u < y$. If sequence (4) is not strictly increasing, there exists $m \in \mathbf{N}$ such that $x_m = x_{m+1} = f(x_m)$, and this implies $x_n = x_m = u \quad (n \ge m)$; it follows $f(u) = f(x_m) = x_{m+1} = u$, and this excludes the possibility of the relation $u < y$. So we have also in this second case

$$\text{(20)} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

However, since now the first member of disjunction (3) does not hold, there exists $u \in [x, y)$ such that $f(t) = y \quad (u < t \le y)$. On account of (20), it is not possible that $x_n \le u \quad (n \in \mathbf{N})$ and consequently there exists $k \in \mathbf{N}$ such that $u < x_k \le y$, and this implies that we have, with $\ell = k + 1, x_n = y \quad (n \ge \ell)$. Denoting by m the smallest of such numbers ℓ, we have $m \ge 2$ (because $x_1 < x_2 \le y$) and $x_n < y \quad (n = 1, \ldots, m-1), x_n = y \quad (n \ge m)$. It is clear that sequence (x_n) is strictly increasing on the set $\{1, \ldots, m\}$.

$1^\circ.1$ Suppose that $x < \sup I, f(x) > x$ and $T_x = \emptyset$. By the statements 3° and 4° of Theorem 1, we have $f(t) > t \quad (x \le t \in I)$, which implies the strict increase of sequence (4) on its whole domain. If $\sup I = +\infty$, sequence (4) is infinite, as can simply be established by induction, and the inequality $u := \lim\limits_{n\to\infty} x_n < +\infty$ is not possible, because this inequality would imply, by (19), $x < u = f(u-0)$, i.e. $u \in T_x$. Therefore, in this case $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. If $v := \sup I < +\infty$, the supposition $x_n \le v \quad (n \in \mathbf{N})$ would imply $w := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le v$ and further, by (19) again, $x < w = f(w-0)$, that is $w \in T_x$. Consequently, in this case exists an $m \in \mathbf{N}$ such that $m \ge 2$, $x_n \in I \quad (n = 1, \ldots, m-1)$ and $x_m \notin I$, which means that sequence (4) is defined on the set $\{1, \ldots, m\}$ only and that it strictly increases on this set.

2° Suppose that condition (2) is satisfied and that condition (3) is not. In this case, on account of $f(t) \le f(y-0) = y \quad (x \le t < y)$, there exists $u \in [x, y)$ such that $f(t) = y \quad (u < t < y)$. Denoting by v the infimum of the set of all such numbers u, we have $x \leq v < y$, $f(t) < y \quad (t \in J)$ and $f(t) = y \quad (t \in [x, y) \setminus J)$, where J denotes the interval $[x, v]$ or the interval $[x, v)$ (this second interval being empty if $v = x$), –depending on whether $f(v) < y$ or $f(v) = y$. Then we cannot have $x_n \in J \quad (n \in \mathbf{N})$; for, this supposition would imply, in virtue of (16), the strict increase of sequence (4) and further $x < \lim_{n\to\infty} x_n \leq v < y$, which, by (19), is impossible. Therefore, there exists $m := \max(\{1\} \bigcup \{k : k \in \mathbf{N} \wedge x_k \in J\})$. Sequence (4) is obviously strictly increasing on the set $\{1, \dots, m\}$. If $J = \emptyset$, we have $m = 1$, $x_1 < y$, $x_2 = f(x_1) = y$, and when $J \neq \emptyset$, then $x_m \in J, \quad x_m < f(x_m) = x_{m+1} \in (x, y) \setminus J, \quad x_{m+1} < f(x_{m+1}) = x_{m+2} = y = y_1$. Hence, if we put $p_0 = 1$ and in the first case $p_1 = 2 \quad (= m + 1)$, and in the second one $p_1 = m + 2$, it will be $p_1 > 1 = p_0, x_{p_1} = y_1$ and sequence (4) will increase strictly on the set $\{1, \dots, p_1\}$. It is clear, further, that either one of conditions (7), (8) and (9), with 1 instead of ℓ_0, is satisfied, or, with y_1 instead of x, condition (2) is satisfied and condition (3) is not. In the case (7) and (8), obviously, the continuation of the forming of sequence (y_ℓ) with demanded properties is not possible. In the case (9) it is possible to make at most one step yet in this forming, because, if we put in this case $y_2 = \min T_{y_1}$, we will have by the result under 1^0, $x_n \leq y_2 \quad (n \in \mathbf{N})$. In the last of mentioned cases, however, we have $y_1 \in I, \quad f(y_1) > y_1$ and $T_{y_1} \neq \emptyset$; hence, putting $y_2 = \min T_{y_1}$, one concludes, on the basis of the above analysis concerning the same situation with the point $y_0 = x$ instead of the point y_1, that there exists $p_2 > p_1$ such that $y_2 = x_{p_2}$ and that sequence (x_n) increases strictly on the set $\{p_1, \dots, p_2\}$.

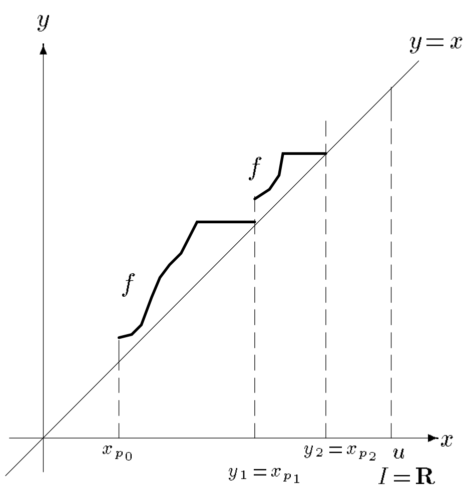


Fig. 1

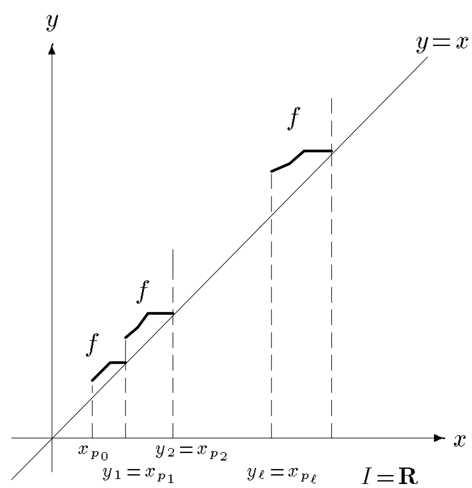


Fig. 2

Continuing in this way, one can establish the correctness of all statements in 2° concerning the existing possibilities. It is not difficult to prove by examples that each of them can effectively take place. Namely, the examples respectively represented by figures 1 and 2 prove effective realizability of both possibilities in the case 2°.2.

[A concrete aspect of the second example gives the function (see Figure 3) $f(t) = [t]+1 \quad (t \in \mathbf{R})$; in this case, we have, for each $x \in \mathbf{R}$, $\quad y_\ell = [x]+\ell \quad (\ell \in \mathbf{N}), p_\ell = \ell+1 \quad (\ell \in \mathbf{N}_0)$ and consequently $x_\ell = x_{p_{\ell-1}} = y_{\ell-1} = [x]+\ell-1 \quad (\ell \geq 2)$, which implies $x_\ell \uparrow +\infty \ (\ell \to \infty)$.]

3° This statement is obvious.

4° The assertion formulated by the first sentence coincides with the statement (19). The assertion contained in the second sentence is proved by the example of the function cited at the end of the proof of statement 2° of Theorem 1: in this case, for $u = 0$ we have $f(u-0) = u$ and $-\infty = \inf I < u < \sup I = +\infty$, and for any real $x < u$ such that $f(x) > x$ sequence (4) converges (statement 1° of Theorem 2) to the nearest fixed point of f greater then x; this fixed point, however, is less than u.

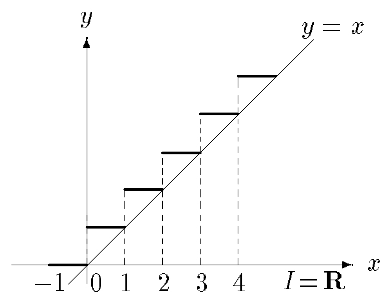


Fig. 3

Proof of Theorem 2.1. All statements of this theorem follow from Theorem 2, on account of the fact that when the function f is strictly increasing the condition (2) cannot hold without the condition (3) (more precisely, (2) cannot hold if the first part of disjunction (3) does not hold simuntanously), and consequently all assertions concerning the case when (2) $\wedge\neg$ (3) can be omitted.

All statements of Theorem 2.2., *excepting the last one, follow from Theorems* 1 *and* 2, with regard to the remarks which precede the formulation of this theorem. Its last statement is proved by the example of the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(t) = t - \frac{1}{4}\sin 1 \quad (t \leq -1), \quad f(t) = t + \frac{1}{4}t^2 \sin\frac{1}{t} \quad (-1 < t < 0), f(t) = t \quad (t \geq 0)$: number 0 is a fixed point of the mapping f and for each $x < 0$ we have $\min F_x^+ < 0$, and therefore the corresponding sequence (4) cannot converge to 0.

3. TWO SUPPLEMENTARY REMARKS

3.1. The statement 3° of Theorem 1 can be formulated (interpreted) as follows: *If the function* $f : I \to \mathbf{R}$ *is increasing, then the function* $g(x) = f(x) - x(x \in I)$ *has the following property (of a continous function): it cannot pass from a positive to a negative value without taking all midvalues between corresponding points.*

Let us remark that the statement which differs from the previous one only by the interchange of the words "*positive*" and "*negative*" does not hold.On the other hand,it is easy to see that in this formulation the words "*positive*" and "*negative*" can be changed by the words, "*greater*" and "*smaller*", respectively.

3.2. All assertions in the preceding text, excepting that in **3.1**, refer exclusively to the order structure of the system of real numbers, i.e. to the set $\mathbf{R}$ordered by the relation $\leq$, –directly or through the topology generated in the usual manner by this order (which includes convergence of sequences and limits and continuity of functions treated here). On the other hand, it is well known (see, for example, [**2**] p.151, or [**3**] p.217) that: every totally ordered and dense set which is conditionally complete (namely, in which each nonempty set bounded from above has its supremum), unbounded from both sides and separable (i.e. with a denumerable everywhere dense part)–is isomorphic with the set $\mathbf{R}$ordered by the relation $\leq$. Therefore:

All theorems and other statements in this paper, excepting that in **3.1.**, *hold for every totally ordered, dense, conditionally complete, unbounded from both sides and separabile set–provided that convergence of sequences and limit value and continuity of functions are defined in the topology generated by this order.*

We remark that this conclusion is in no way affected by the fact that the algebraic structure of the real number system was used in some details of the given proofs (in constructions of examples and counterexamples for particular and negative assertions).

REFERENCES

1. A. Tarski: *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*, Pacific J. Math. **5** (1955), 285–309.
2. W. Sierpiński: *Leçons sur les nombres transfinits*, Colection de monographies sur la théorie des functions, Paris, 1950.
3. W. Sierpiński: *Cardinal and Ordinal Numbers*, Warszawa, 1958.

Ljube Stojanovića 5,
11000 Beograd,
Yugoslavia

(Received September 9, 1997)

MATHEMATICA MORAVICA
VOL. 4 (2000), 1–4

CORECTION D'UNE DEMONSTRATION DANS UN TRAVAIL ANTERIEUR

Dušan Adamović

Sommaire. Il s'agit dans cette Note de la correction d'une partie de la démonstration du Lemme 1 dans le travail [1], suivie de quelques considérations supplémentaires.

Il s'agit de notre travail "Résolutions de deux équations fonctionnelles proches de l' équation de Cauchy" [1], qui contient deux théorèmes, relatives aux solutions des équations fonctionnelles

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

et

$$f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y)), \tag{2}$$

respectivement, la fonction inconnue pouvant, dans les deux cas, être *réelle* ($f : R \to R$; R ensemble des nombres réels) ou *complexe* ($f : C \to C$; C ensemble des nombres complexes). Ces deux théorèmes, ainsi que leurs démonstrations, sont, à notre avis, tout-à-fait corrects - mais ils déterminent, tous les deux, les solutions générales des équatinos (1) et (2) au moyen de la solution générale du système d'équations fonctionnelles

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g(g(x)) = g(x) \end{cases} \qquad (g : R \to R, \text{ ou } g : C \to C), \tag{3}$$

et cette solution générale est donnée (décrite) par l'énoncé suivant (Lemme 1): "La solution générale du système d'équations fonctionnelles (3) est donnée par

$$g(x) \begin{cases} = x, & x \in H_0 \\ \in \mathcal{L}(H_0), & x \in H \backslash H_0 \\ = \sum_{h \in H} \alpha_h g(h), & x = \sum_{h \in H} \alpha_h h \end{cases}$$

AMS (MOS) Classification de sujets. Primaire: 39B22, 39B32. Secondaire: .
Mots et phrases clés: équation fonctionnelle, espace linéaire, base d'Hamel.

(H base d'Hamel de R, ou de C, déterminée; H_0 partie non vide de H arbitraire; $\mathcal{L}(H_0)$ variété linéaire sur H_0; $\alpha_h(h \in H)$ nombres rationnels)".

Tout d'abord, notre opinion est qu'il faut remplacer dans cet énoncé le mot "*déterminée*" par le mot "*arbitraire*". A vrai dire, lorsqu'on dit seulement que la base d'Hamel est déterminée, sans préciser les conditions qui la "déterminent", on n'a pas nié la posibilité qu'elle soit arbitrairement choisie, c'est-à-dire arbitraire (on en a seulement suggéré qu'elle doit être fixée après ce choix, ce qui est sous entendu d'ailleurs); les deux énoncés sont donc logiquement équvalents. Nous pensons toutefois que l'énoncé sera plus convenable après ce changment-là: d'abord par ce que l' on pourrait interpréter l'énoncé où la base est "déterminée" comme l'affirmation que toute les solutions sont données au moyen d'une seule base d'Hamel, ce qu'on ne voulait pas dire, et, d'autre part, puisque l'énoncé cité nous avait conduit à la démonstration du lemme dont la première partie contenait une faute assez grave, que nous allons corriger dans se qui suit. Cette faute provenait de la fausse supposition que, en général, dans un espace linéaire X l'inersection H_0 d'une base H de cet espace et de son sous-espace L soit toujours non vide et une base de L. En effet, si, par exemple, X est l'espace C des nombres complexes sur le champ R des nombres réels, $H = \{1, i\}$ est une base de X et $L = \{x + ix \mid x \in R\}$ est un sous-espace de X, mais on a $H \cap L = \emptyset$.

Afin de permettre au lecteur un aperçu complet du Lemme 1 et de sa démonstration, ainsi que du Lemme 2 qui y est utilisé, nous citerons ici, entre guillemets, le texte complet de la version nouvelle de la partie du travail située entre son second paragraphe et la fin de la section 0:

<< Lemme 1. *La solution générale du système d'équations fonctionnelles*

$$\left\{\begin{array}{l} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g(g(x)) = g(x) \end{array}\right. \qquad (g : R \to R,\ \ ou\ g : C \to C) \tag{3}$$

est donnée par

$$g(x) \left\{\begin{array}{ll} = x, & x \in H_0 \\ \in \mathcal{L}(H_0), & x \in H \backslash H_0 \\ = \sum_{h \in H} \alpha_h g(h), & x = \sum_{h \in H} \alpha_h h \end{array}\right. \tag{4}$$

(H base d'Hamel de R, ou de C, arbitraire; H_0 partie non vide da H arbitraire; $\mathcal{L}(H_0)$ variété linéaire sur H_0; α_h ($h \in H$) nombres rationnels).

Dans la démonstration de ce lemme on va s appuyer sur le

Lemme 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$g(g(x)) = g(x) \quad (g : E \to E;\ E \text{ ensemble non vide donné}) \tag{5}$$

peut être exprimée par

$$g(x) \begin{cases} = x, & x \in F \\ \in F, & x \in E \backslash F \end{cases}$$

(F sous-ensemble non vide de E arbitraire).

Pour sa démonstration, voir, par exemple, [2]. (Notons que les solutions de (5) jouent des rôles importants dans diverses questions; un tel rôle est mis on évidence dans [3].)

Démonstration du Lemme 1. Soit g une solution de (3). Alors, d'après le Lemme 2, on a

(6) $$g(x) = x \quad (x \in L), \quad L = g(R), \text{ ou } L = g(C), \text{ et}$$

(7) $$g(x) \in L \quad (x \in R \backslash L), \text{ ou } (x \in C \backslash L).$$

Or, L est un sous-espace de l'espace linéaire R, ou C, sur le champ des nombres rationnels. Soit H_0 une base d'Hamel de L et soit $H \supseteq H_0$ une base d'Hamel de R, ou de C. On a alors $g(x) = x$ $(x \in H_0)$ et $g(x) \in L = \mathcal{L}(H_0)$ $(x \in H \backslash H_0)$. D'après la première équation (3) (équation de Cauchy), on a aussi

(8) $$g(x) = \sum_{h \in H} \alpha_h g(x) \quad (x = \sum_{h \in H} \alpha_h h), \ \alpha_h \ (h \in H) \text{ nombres rationnels}).$$

On a établi ainsi que g doit satisfaire à (4), avec les ensembles H et H_0 mentionnés dans ce qui précède.

D'autre part, si g satisfait à (4), avec H et H_0 arbitraires, alors on a d'abord (8), et par suite g satisfait à la première équation (3). On a aussi, pour tout $x \in \mathcal{L}(H_0) = L$, c'est-à-dire pour tout $x = \sum_{h \in H_0} \alpha_h h$, où les α_h $(h \in H_0)$ sont des nombres rationnels,

$$g(x) = \sum_{h \in H_0} \alpha_h g(h) = \sum_{h \in H_0} \alpha_h h = x,$$

et encore, pour $x = \sum_{h \in H} \alpha_h h$,

$$g(x) = \sum_{h \in H} \alpha_h g(h) \in \mathcal{L}(H_0) = L;$$

donc, g satisfait à (7), et par conséquent, d'après le Leme 2, à la seconde équation (3). >>

Remarque. Comme nous l'avons dit: malgré cette correction portant sur l'énoncé et (la première partie de) la démonstration du Lemme 1, les énoncés et les démonstrations des Théorèmes 1 et 2, où figure la fonction g décrite dans le Lemme 1, peuvent rester sans aucun changement. C'est vrai, mais les énoncés des *corollaires* de ces deux théorèmes (parties du travail en question sans beaucoup d'importance d'ailleurs) n'étaient pas complets en ce qui concerne la cas complexe. Leurs corrections ont déjà été données dans l'article [4].

1. Références

[1] D. D. Adamović, *Résolutions de deux équations fonctionnelles proches de l'équation de Cauchy*, Matematički vesnik **9 (24)**, 1972, pp. 19-22.

[2] D. D. Adamović, *Solution du problème* No. 20, Matematički vesnik, **2 (17)**, sv. 1, 1965, p. 100.

[3] S. B. Prešić, *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnele* $f^2 = f$, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade, t. **8 (22)**, 1968, pp. 143-148.

[4] D. D. Adamović, *Corrections and Supplements of Some Details in two Former Papers*, Univ. Belgrade, Publ. Elektrotehn. Fac. Ser. Mat. **2** (1991), 42-48.

Yugoslavia

Received ...

Душан Адамовић, Драган Аранђеловић
Dušan Adamović, Dragan Aranđelović

СЛОБОДАН АЉАНЧИЋ
SLOBODAN ALJANČIĆ
(1922–1993)

Отисак из публикације *Живот и дело српских научника, 10*
(Српска академија наука и уметности, Биографије и библиографије,
књ. X, II одељење, књ. 10)

Reprinted from the publication: *Lives and work of the Serbian scientists, 10*
(Serbian Academy of Sciences and Arts, Biographies and bibliographies
vol. X, II section, book 10

BEOGRAD – BELGRADE
2005

Слободан Аљанчић, Београђанин по рођењу и по безмало чтиавом животу проведеном у овом граду, дугогодишњи редовни професор на Природноматематичком, касније Математичком факултету Београдског универзитета и редовни члан Српске академије наука од своје 46. године, био је један од најистакнутијих математичких научних стваралаца и педагошких делатника у нашој средини у другој половини двадесетог века. Он је, свакако, био личност која је у читавој нашој математичкој јавности – не само београдској и српској, него и на просторима тадашње Југославије – уживао поштовање и симпатију, као ретко савестан, озбиљан и успешан научни радник и као темељни познавалац пространих подручја савремене математичке анализе, а не мање као особа изузетних људских особина. Значајну афирмацију стекао је резултатима свог научног рада и на међународној математичкој сцени.

ЖИВОТНИ ТОК

Слободан Аљанчић рођен је 12. марта 1922. године у Београду. Његов отац Зденко Аљанчић (рођен 1889. године), Словенац по оцу а Чех по мајци, више се заправо осећао Чехом и боље је у детињству говорио чешки него словеначки језик. Завршивши у Аустроугарској војне школе, дочекао је крај Првог светског рата као аустроугарски официр, капетан I класе. По завршетку рата био је неколико година у активној служби у тадашњој југословенској војсци у којој је стекао чин мајора, а касније се бавио цивилним пословима. Други светски рат провео је у заробљеништву као резервни официр. После рата, радио је на Војној енциклопедији. Мати Бисенија, рођена Милошевић, потиче из грађанске породице досељене у Београд из унутрашњости Србије. Завршила је средњу школу, али се углавном бавила домаћим пословима. Аљанчић је имао старијег брата Јерка, који је био машински инжењер, а изненада је умро у 48. години.

Основну школу и тада елитну Трећу мушку гимназију Слободан Аљанчић завршио је у Београду. После матуре, коју је као одличан ђак положио 1940. године, уписао је студије грађевинске технике на београдском Техничком факултету. Рат и окупација фактички су прекинули ове студије. Међутим, то време, које је многима било стварни узрок или добар изговор за прекид школовања и рада на сопственом образовању, он је искористио да уз помоћ професора Кашанина, и набављене уџбеничке и друге литературе, савлада практично цео програм студија математике, за коју се у међувремену загрејао и којој се потпуно предао изгубивши интерес за технику. По завршетку рата и формално је прешао на Математичку групу Филозофског факултета, на којој је дипломирао јуна 1947. године. Пре тога венчао се 1946. године с Иванком Јосифовић, која је студирала економију и касније радила као административни и банкарски службеник. Говорила је више страних језика. Њихова кћи Ивана сада је професор на Хемијском факултету у Београду.

Као студент, Аљанчић је испољавао жељу да самостално научно ради и већ је пре краја студија завршио свој први научни текст *Sur une formule sommatoire généralisée (О једној уопштеној сумационој формули),* објављен 1948. године у Публикацијама Математичког института Српске академије наука. Према компетентним оценама, тај његов први рад није почетнички и у њему је показана одређена зрелост, способност да се постављени проблем у потпуности реши и добијено решење адекватно интерпретира и искористи. Овај Аљанчићев упоран и истрајан рад, у тешким ратним и можда још тежим условима у првим послератним годинама, не само на успешном окончању студија него и на даљем математичком усавршавању, показује колико је већ тада имао јасно обликоване основне циљеве и опредељења, као и чврсту решеност да их остварује. О њему у овом периоду завршавања студија и почетка активног научног рада академик Миодраг Томић, касније И кроз цео његов живот његов блиски сарадник и пријатељ, написао је: „Негде под јесен 1946. срео сам га, док сам био асистент код професора Карамате, на Природно-математичком факултету. Имао је велико знање и још већу жељу за новим сазнањима. И тада, а и доцније кад смо постали пријатељи и сарадници, он је показивао ретку особину да сваку ствар настоји да проучи до основа, да продре у срж проблема, али и да буде обазрив и критичан према своме раду, и то на сваком кораку... Он је био од оних стваралаца код којих жеље нису ишле изнад могућности, али који теже сталном напретку и угледању на добре радове... Успех у науци дошао је врло брзо. И тај успех је резултат не само његовог дара, већ и неуморног, напорног рада првих поратних година испуњених и свим могућим тешкоћама.“

После дипломирања, Аљанчић је радио као професор-приправник у Грађевинској средњетехничкој школи у Београду, а истовремено и као хонорарни асистент на Природно-математичком факултету све до 1951. године, када је на истом факултету изабран за сталног асистента. Настављајући научну активност, објавио је неколико радова посвећених темама из математичке анализе, оријентишући се притом претежно на проблематику асимптотских редова, односно развитака. Овој области у потпуности припада и његова докторска дисертација под насловом *О асимптотском развијању А-збирљивих линеарних функционела,* одбрањена јануара 1952. године у Српској академији наука (што је тада, према постојећем закону, још било могуће) пред комисијом коју су чинили академици Милутин Миланковић, Војислав Мишковић, Јован Карамата и Радивоје Кашанин, као и доцент Миодраг Томић. Његов даљи научни развој и универзитетска наставничка каријера текли су континуирано, сигурно и доста брзо, али не и пребрзо, без спољашње спектакуларности. За доцента је изабран марта 1954. године и тада, пошто је неколико година пре тога као прво хонорарни па потом стални асистент веома успешно водио вежбе из више математичких предмета, преузима предавање разних курсева опште математике и математичке анализе, за математичаре и за студенте нематематичких група на Факултету. Његов научни рад у каснијим педесетим годинама претежно се усмеравао ка теорији апроксимације с једне и ка од Јована Карамате иницираној и утемељеној теорији правилно променљивих функција и њеним применама с друге стране, али су значајно место у његовим научним активностима, тада и касније, заузимали његови радови посвећени збирљивости и Фуријеовим редовима. На самом почетку свог интересовања за теорију апроксимације, успоставио је блиску сарадњу и пријатељство с француским математичарем *Ж. Фаваром* (Jean Favard), професором на Сорбони и Политехничкој школи и у то време једним од главних ауторитета за ову област не само у Француској. Фавар је најпре у летњем семестру 1957. године у Београду одржао тромесечни курс посвећен темама и проблемима својих истраживања. Ова сарадња касније је продубљена и интензивирана у току Аљанчићевог боравка у Паризу 1957–1958. школске године, омогућеног стипендијом добијеном од Института Анри Поенкаре (Henry Poincaré). Овај боравак донео му је и друге користи, поред осталих и упознавање и сарадњу са славним руским математичарем Колмогоровом.

Сарадња и пријатељство с Фаваром настављени су и у наредним годинама, а када је Фавар 1965. године умро, његов блиски сарадник *Марк Замански* (Marc Zamansky), тада декан Факултета наука Сорбоне, замолио је Аљанчића да се укључи у „одбор за овековечавање сећања на Жана Фавара" низом манифестација и организовањем и новчаним помагањем подизања споменика Фавару у његовом родном месту Пејра ла Номијер (Peyrat-la-Nomière). Кад је Аљанчић ту молбу прихватио, добио је место (друго по реду, због слова „А") у подужем списку веома угледних личности француског јавног, интелектуалног и културног живота – чланова овог Одбора, а Замански му је упутио своју захвалност у веома љубазном писму.

Cher Ami,

J'ai été très heureux d'avoir un mot de vous et très heureux de savoir que vous acceptiez de faire partie du Comité d'Honneur qui s'efforcera de perpétuer la mémoire de notre ami Jean FAVARD.

J'ai ainsi l'occasion de vous dire que je ne vous ai pas du tout oublié ; je vous assure de ma fidèle amitié.

J'espère avoir l'occasion de vous voir un jour que j'espère proche et je vous prie de transmettre autour de vous mon fidèle souvenir.

Marc ZAMANSKY.

Аљанчић је имао срећу и част да од самог почетка својих научних активности буде, заједно с једним старијим и неколицином млађих колега (М. Томићем, Р. Бојанићем, В. Вучковићем, В. Марићем, Б. Бајшанским), укључен у (неформални) круг ученика и сарадника нашег великог математичара Јована Карамате. Рад у овој око Карамате окупљеној и међусобном сарадњом повезаној групи био је од непроцењиве користи за све учеснике у њему и за развој наше математичке анализе и математике уопште у педесетим и шездесетим годинама двадесетог века. У почетку је њихова делатност захватала првенствено збирљивост, тригонометријске редове и правилно промењиве функције, и била је добрим делом наставак дотадашњих Караматиних истраживања и резултата, да би се убрзо потом проширила и продубила у разним правцима, захватајући и за нашу средину нове области. Неколико значајних радова посвећених применама правилно промењљивих функција на интеграле и тригонометријске редове заједно су написали средином педесетих година Аљанчић, Бојанић и Томић. Наравно, и у овом периоду, а нарочито касније, код сваког од поменутих аутора било је и радова који се не могу приписати делатности у оквиру поменуте групе. Тако је Аљанчић, самостално или скоро самостално, започео успешну научну активност на подручјима асимптотских редова и апроксимације. Поред поменутог једногодишњег боравка у Паризу, Аљанчић је имао још само један студијски боравак у иностранству – од претходног знатно краћи, али веома добро искоришћен. То је био његов одлазак у Сједињене Америчке Државе, где је боравио од почетка маја до средине јула 1971. године. Први део овог боравка провео је на универзитету Колумбус у Охају, где је радио с професором Ранком Бојанићем и одржао два предавања, затим је присуствовао математичко-регионалној конференцији у Еванстону, а остатак расположивог времена посветио је обилажењу неколико највећих америчких универзитета.

Поред ових боравака у иностранству, учествовао је у раду великог броја научних конгреса, конференција и симпозијума, у земљи и у иностранству, међу којима треба поменути Светски математички конгрес у Москви (1966) и Математички конгрес у Ници (1970). На њима је имао укупно око 15 саопштења.

Паралелно са свим овим и неким другим активностима, Аљанчић је продужио своју врло успешну наставну и педагошку делатност на матичном Природно-математичком факултету у Београду, али и ван њега. Преузимао је нове курсеве, којима је иновирао и модернизовао наставу, а предавао је хонорарно разне математичке предмете ван Факултета, на више места у Београду и у унутрашњости. Активно је учествовао у различитим видовима последипломске наставе, не само за математичаре и не само на матичном факултету и у Београду. Све ово, а нарочито квалитети његових предавања, донели су му висок углед код свих категорија студената и других слушалаца, као и у широком кругу колега.

Све претходно учинило је да је, као што рекосмо, његова научна и академска каријера, и то како на Природно-математичком факултету, тако и у Академији наука, текла доста брзо, али не пребрзо. Притом је стицање оба звања академика уследило нешто раније него што се то обично догађа, док је универзитетске титуле стицао углавном „уобичајеним“, тако-званим „добрим обичајима“ успостављеним темпом, чак с једним краћим застојем који није сасвим лако разумети. Тако је, после избора за доцента марта 1954. године, за ванредног професора изабран октобра 1959, а за редовног тек децембра 1968. С друге стране, дописни члан Српске академије наука постао је децембра 1961. године, кад је имао 39 година, а редовни члан већ децембра 1968. са 46 година. У реферату о Аљанчићу као кандидату за редовног професора, чији су потписници били Ђуро Курепа, Константин Орлов и Боривоје Рашајски, писало је: „Закључно можемо рећи да кандидат Аљанчић др Слободан представља изграђеног математичара који је посебно у области Фуријеових редова дао важних прилога... У стручно-педагошком погледу кандидат се истиче својим излагањем, јасним предавањима, педантношћу и својим прилазима уџбеничкој литератури."

А извештај из 1961 године предлагача да се Аљанчић изабере за дописног члана академије, који су потписали академици Р, Кашанин, Ј. Карамата и С. Павловић (до материјала у вези с избором за редовног члана нисмо успели да дођемо), садржао следећу оцену: „Види се да је др Аљанчић научни радник на пољу математике чије је име познато и цењено и ван наше земље. Он се налази у пуној стваралачкој снази, у сталном раду на ширењу свог знања, а исто тако у преношењу свог знања на друге. Његов рад на Универзитету и као наставника и педагога био је увек примеран. И предлагачи се надају да ће његовим избором за дописног члана Српске академије наука и уметности Одељење природно-математичких наука добити једног члана нове генерације чији ће даљи научни рад оправдати његову веру у успех наше науке у будућности."

Углед који је и на међународној математичкој сцени стекао учинио је да професор Аљанчић, постане сарадник реферативног часописа Zentralblat für Mathematik, за који је написао преко 200 приказа радова.

Домаће признање за успехе у научном и педагошком раду била је Седмојулска награда добијена 1971. године.

У току нешто више од две последње деценије живота, почев од краја 1971. године, академик Аљанчић је био оптерећен озбиљним здравственим проблемима. Биле су то теже срчане тегобе, које су нагло избиле и доста га мучиле и ометале у раду и животу. Он се ипак с њима, упорношћу и стриктно дисциплинованим понашањем, доста успешно борио, тако да у овом периоду код њега ниједном није наступила тешка коронарна криза, тзв. инфаркт, нити је долазило до праве хоспитализације. Благодарећи овој упорној и јуначкој борби с невољама које су га задесиле, скоро у читавом овом периоду његов научни рад, а ни настава, тиме нису били сувише ометани. У неким дужим интервалима, изгледало је (само је, на жалост, изгледало) да је болест успео да савлада и да се враћа на сасвим нормалан ритам рада. Због свега овога ипак је на свој захтев нешто раније отишао у пензију 1985. године. А после ове, стоичке, истрајне и релативно успешне борбе са срчаним обољењем које га је било погодило, наишла је једна много гора, опака болест, од које му није било спаса... И у време кад га је она постепено савладавала није престајао да бар покушава да нешто ради, да се не предаје. Према речима професора Томића: „... чак и у овој болести, свестан свог краја, показивао је исти онај мир којим је некад освајао људе..."

Преминуо је 19. марта 1993. године. Његовој сахрани, поред породице и пријатеља, присуствовао је велики број колега, сарадника и студената, из свих генерација. На сахрани су говорили: у име Академије наука академик Миодраг Томић, у име Математичког института при Академији наука академик Богољуб Станковић, а у име Математичког факултета у Београду и Катедре за реалну и функционалну анализу професор др Душан Адамовић.

ОБЛАСТИ НАУЧНОГ РАДА

Целина научног опуса академика Слободана Аљанчића, у ужем смислу речи, импозантна је и то не толико бројем и дужином тих радова (укупно их је било 48) колико оригиналношћу и садржајношћу, као и ширином и разноврсношћу захвата више подручја савремене математичке анализе, а такође и повољним одјецима и утицајима које су многи од њих имали у нашој земљи и у иностранству. Уз изузимање само неколико радова који се баве неким другим темама, Аљанчићева научна делатност може се сврстати у следећих пет области:

I. теорија асимптотских редова,
II. теорија апроксимације,
III. тригонометријски редови,
IV. збирљивост,
V. правилно промењиве функције (правилна промењивост).

Неки од Аљанчићевих чланака, истина, захватају и по две, па и по три поменуте области, али се, водећи рачуна о главној, преовлађујућој тематској усмерености у конкретним случајевима, одговарајућа класификација може доста добро урадити.

I. *Асимптотски редови.* Поред конвергентних нумеричких и функционалних редова, у новијој математичкој анализи и њеним применама значајну улогу играју тзв. *асимптотски редови,* односно *асимптотски развоји функција,* који, било да су конвергетни или дивергентни, такође апроксимирају функцију у питању, али на други начин и у другом смислу него конвергентни редови. Ове редове увели су крајем XIX века француски математичар *Поенкаре* (Poincaré) и холандски *Стилтјес* (Stieltjes). Према дефиницији коју су они дали, за реалну (или комплексну) функцију $f(x)$, дефинисану у извесној околини бесконачности, ред

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots$$

назива се њеним *асимптотским редом* или *асимптотским развојем,* што се означава са

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots,$$

ако је, за свако $n=0,1,2,\ldots,$

$$\lim_{x\to\infty}x^n\left(f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}\right)\right)=0,$$

односно

$$f(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right),\ x\to\infty.$$

Теорију ових редова развио је Поенкаре до задовољавајућег обима, а касније се њима бавио већи број математичара. Притом је сам појам асимптотског реда на више начина уопштаван; на пример, тако да се тај израз односи на редове облика

$$\frac{c_0(x)}{q_0(x)}+\frac{c_1(x)}{q_1(x)}+\frac{c_2(x)}{q_2(x)}+\cdots,$$

где су $c_\nu(x)$ периодичне функције, а функције $q_\nu(x)$, које образују тзв. *скалу* овог реда, испуњавају услов

$$q_\nu(x)\neq 0,\ \text{и}\ \lim_{x\to\infty}\frac{q_\nu(x)}{q_{\nu+1}(x)}=0\ \text{за}\ \nu=0,1,2,\ldots.$$

Различита птиања у вези с асимптотским редовима, и после значајних резултата бројних аутора, остала су, међутим, отворена. Једно од њих је задатак налажења што адекватније и што општије методе развијања дате функције у асимптотски ред по датој скали.

Први Аљанчићев научни рад, под насловом *Sur une formule sommatoire généralisée* (О једној уопштеној сумационој формули), објављен је 1948. године у Публикацијама Математичког института Српске академије наука. Овај његов почетни рад није, међутим, нимало почетнички. У њему су, најпре, добијене формуле које помоћу Бернулијевих полинома изражавају низ такозваних хармонизованих интеграла дате функције, тј. њених узастопних интеграла који узимају једнаке вредности на крајевима дефиниционог интервала, а потом је коришћењем тих формула показано да уопштени Ојлер-Маклоренов сумациони образац доводи у општем случају до асимптотских редова који, сем у изузетним и тривијалним случајевима, не конвергирају. У следећем раду, написаном с *Војиславом Авакумовићем,* једним од тада водећих наших математичара, и објављеном 1950. године, коришћењем поменутих формула за хармонијске интеграле и неких њихових модификација прецизиран је и далекосежно уопштен један резултат *Ландауа* (Landau), који се односи на процену вредности првог извода функције кад су сама функција и њен други извод подвргнути извесним ограничењима. Из тог резултата на крају чланка изведен је закључак сличан закључку у претходном раду, који се односи на асимптотске редове. Тако се ова два прва Аљанчићева рада, мада посвећена и неким другим питањима, у закључним деловима дотичу асимптотских редова и суштински повезују с њиховом проблематиком. Аљанчић се овим подручјем претежно бавио у првом периоду свог научног рада. Асимптотским редовима била је у потпуности посвећена његова докторска дисертација *О асимпшошском развијању А-збирљивих линеарних функционела,* одбрањена јануара 1953. године. У овом раду, поред класичних метода реалне и комплексне математичке анализе, битно су коришћени неки појмови и резултати функционалне анализе, тада код нас још скоро непознате математичке дисциплине. Ти садржаји функционалне анализе били су: нормирани простори, линеарне и ограничене функционеле и њихове репрезентације, конвергенција низова свих функционела, и још неки. У раду су тако, сукцесивном применом класичне теореме *Ф. Риса* (F. Riesz), која даје потребне и довољне услове конвергенције низа линеарних и ограничених функционела на простору $C[a, b]$, добијени потребни и довољни услови за развијање линеарне и ограничене функционеле у асимптотски ред по датој скали функција. Будући да су ти услови доста ограничавајући и стога углавном нису погодни за примене, у дисертацији су потом, увођењем Абелове збирљивости уместо конвергенције функционела, добијене варијанте погодних довољних услова за овакве развоје, и тако се на нов и јединствен начин дошло до више класичних резултата, раније добијених различитим методама, као и до неких нових асимптотских развоја.

Проблематици асимптотских редова Аљанчић је посветио још четири рада. У њима је, даљим применама методе из дисертације, али и њеним варирањем и проширивањем, као и допуњавањем неким другим поступцима, добијен низ нових асимптотских развоја, посебно функција датих ортогоналним редовима и уопштене *Ханкелове* (Hankel) функције. Захваљујући извесном угледу који су му донели претходни радови с овог подручја, Аљанчић је, на позив Белгијског центра за научна истраживања, учествовао на Међународном симпозијуму о низовима и редовима у Бриселу, децембра 1957. године, на коме је саопштио рад 14 (бројеви уз радове који се помињу односе се на списак Аљанчићевих радова на крају овог чланка). Он је касније објављен у Colloque sur la Théorie des suites, Bruxelles, 1957.

II. *Апроксимација.* Феномен *апроксимације* (приближног одређивања), у различитим видовима, присутан је и игра значајну улогу у многим областима математике и њених примена, нарочито у новијим временима. Већ се инфинитезимална математика, њене основне идеје и методе, као што су: конвергенција и гранична вредност, извод, интеграл, ред и многе друге, могу сматрати облицима апроксимације, а каснији и данашњи бурни развој нумеричких и компјутерских метода са свим њиховим спектакуларним могућностима, припада, свакако, овој сфери математике, али је само једна од њених импресивних манифестација. Речи „апроксимација" овде се, међутим, придаје једно уже, специфично значење. Кратко и сумарно речено, реч је о униформној (равномерној), или некој сличној, апроксимацији реалних функција из неког од функционалних простора, као што је простор на одређеном сегменту непрекидних или непрекидних и периодичних функција, или из извесних делова таквих простора, помоћу алгебарских односно тригонометријских полинома, или таквих полинома који припадају извесним ужим класама. Може се сматрати да је оно што је овим истраживањима непосредно претходило, а уједно представља њихов почетак, познати *Вајерштрасов став* (Weierstrass), заједно с његовом варијантом за периодичне непрекидне функције, такозваним *другим Вајерштрасовим ставом.* Према овом ставу, свака на датом сегменту непрекидна функција може се произвољно добро апроксимирати неким полиномом, а одговарајуће аналогно тврђење важи за периодичне непрекидне функције и тригонометријске полиноме. Према другом Вајерштрасовом ставу, на пример, кад се за дату функцију f из простора $C_{2\pi}$ непрекидних и с периодом 2π периодичних функција ненегативан број $\inf\limits_{T\in H_n} \|f-T\|$, где је $\| \ \|$ норма у $C_{2\pi}$, а H_n означава скуп свих тригонометријских полинома реда не већег од n, означи са $E_n(f)$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f)=0$. $E_n(f)$ се назива *најбољом могућом апроксимацијом функције* f полиномима из H_n. Следећи значајан резултат у истом правцу, који се може сматрати првим правим ставом теорије тригонометријске апроксимације, јесте комбинација једног *Бореловог* (Borel) и једног резултата *Чебишева*, према којој за свако $f \in C_{2\pi}$ и за свако $n \in N$ постоји један и само један полином $T_n \in H_n$ такав да је $\|f - T_n\| = E_n(f)$. Овај полином T_n назива се *(n-тим) полиномом најбоље апроксимације.* У даљем развоју теорије тригонометријске апроксимације махом је испитиван однос између појединих поступака апроксимације функција из $C_{2\pi}$, поступака који свакој функцији $f \in C_{2\pi}$ за свако $n \in N$ координирају одређени полином $T_n(f) \in H_n$, и појединих делова M простора $C_{2\pi}$, тј. класа функција из $C_{2\pi}$. Резултати који се на ово односе могу бити:

директни ставови, тј. искази који, за дату позитивну функцију $\varphi(n)$ с особином $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$, тврде да, с позитивном константом *K,* важи

$$f \in M \Rightarrow \|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n);$$

инверзни ставови, који, под истом претпоставком о $\varphi(n)$, тврде да

$$\|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n) \Rightarrow f \in M;$$

ставови еквиваленције, према којима важи

$$\|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n) \Leftrightarrow f \in M;$$

Код директних ставова може се поставити питање одређивања *најбоље могуће константе K,* а неки поступци $T_n(f)$ имају својство такозване *сатурације* (засићења), која се састоји у постојању функције $\varphi_T(n)$ и *класе* $M_T \subseteq C_{2\pi}$ *(сатурације)* таквих да:

$$1^\circ \quad \|f - T_n(f)\| = O(\varphi_T(n)) \Leftrightarrow f \in M_T, \text{ и}$$
$$2^\circ \quad \|f - T_n(f)\| = o(\varphi_T(n)) \Rightarrow f \equiv 0.$$

Искази којима се утврђује сатурација за одређени поступак називају се *ставовима сатурације.* Један од поступака апроксимације је сам *n*-ти полином најбоље апроксимације, и известан број резултата ове теорије су ставови наведених типова који се односе на тај поступак. Код тих, а и других ставова, значајну улогу у дефинисању погодних класа M игра *модул непрекидности,* тј. функција $\omega(\delta; f)$ $(\delta > 0, f \in C_{2\pi})$ дефинисана са

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|h| \le \delta} \|f(x+h) - f(x)\| \quad (\delta > 0),$$

која, могло би се слободније рећи, мери степен униформне непрекидности функције $f \in C_{2\pi}$. Поред модула непрекидности, користе се у истим улогама и неке друге функције, као што су модули непрекидности вишег реда и још неке. Од класа које се јављају у теорији апроксимације, а користе се и у вези с другим питањима, наведимо *Липшицову* (Lipschitz) класу Λ_α $(0 < \alpha \le 1)$, тј. скуп свих функција $f \in C_{2\pi}$ за које важи $\omega(\delta; f) \le K\delta^\alpha (\delta > 0; 0 < \alpha \le 1)$, и класу W дефинисану условом $\omega(\delta; f) \le K\delta |\log \delta|$ $(\delta > 0)$.

Од великог значаја за добијање директних ставова је *Џексонова* (Jackson) *теорема* из 1914, према којој у општем случају важи неједнакост

$$E_n(f) \le 12\omega(n^{-1}; f)$$

Из ње непосредно следе следећи директни ставови:

$$f \in \Lambda_\alpha \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha \le 1);$$

$$f \in W \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-1} \log n).$$

Први инверзни ставови, које је добио *Бернштајн* (Bernstein), гласе:

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \Rightarrow f \in \Lambda_\alpha \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$E_n(f) = O(n^{-1}) \Rightarrow f \in W.$$

Комбинацијом ставова изражених првим редовима ових формула добија се *став еквиваленције*

$$f \in \Lambda_\alpha \Leftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha < 1).$$

Поред ових, илустрације ради наведених резултата, теорија о којој је реч обогаћена је низом каснијих доприноса већег броја других математичара, којима се отишло веома далеко у третирању разних других поступака веће сложености и веће општости, а такође у погледу постизања све веће прецизности и рафинираности процена. Поред простора $C_{2\pi}$, разматрани су и разни други простори реалних функција, на пример, простори $L^p_{2\pi}, p \ge 1$, а и неки од ових општији простори.

Теоријом апроксимација Аљанчић је почео активно да се бави 1957. године. Тада, или нешто раније, он је, свакако у вези с овом својом активношћу, почео да сарађује и успоставља блиске пријатељске везе с професором универзитета и Паризу *Ж. Фаваром* (Jean Favard), у то време водећим француским истраживачем у овој области. Као што је већ речено, Фавар је на београдском Природно-математичком факултету у летњем семестру 1957. године одржао тромесечни курс о апроксимацији и неким са њом повезаним темама. Благодарећи Фаваровом заузимању, вероватно, Аљанчић је школску 1957–58. годину провео на студијском боравку у Паризу, као стипендиста Института Анри Поенкаре (Henry Poincaré). Овај боравак је добро искористио за темељно упознавање не само с радом Фавара и групе његових сарадника, него и са неким другим тада актуелним и, може се рећи, „авангардним" тенденцијама у француској математичкој науци и настави математике (у то време је, на пример, замах активности и утицај групе такозваних „бурбакиста" био на врхунцу). Први Аљанчићев рад посвећен теорији апроксимације, под насловом *Classe de saturation des procédés de sommation de Holder et de Riesz* (Класа сатурације Хелдеровог и Рисовог поступка сумирања) 15, објављен је у *Comptes rendus* (Саопштењима) Француске академије наука. У овом раду су одређене класе сатурације за Хелдерове и Рисове поступке апроксимације и установљено да Цезаров (Cezàro) и Хелдеров поступак имају исту класу сатурације, али су им редови апроксимације различити, као и да ова два поступка, еквивалентна у погледу сумирања (збирљивости), нису такви у погледу апроксимације. Теорији апроксимације Аљанчић је посветио још осам радова. У њима је наставио своја проучавања разних поступака апроксимације, нарочито она која се односе на ставове еквиваленције, класе сатурације и редове апроксимације код сатурација. У тим радовима своје резултате ове врсте неколико пута је поредио с ранијим резултатима других аутора, показујући да су у неким случајевима његови резултати прецизнији од њихових. Треба нарочито истаћи значај, поред поменутог рада 15, радова 16 и 18, који се такође односе на сатурацију, као и рад 22 о апроксимацијама типичним срединама. Они су подстакли *Сунучија* (Sunouchi) и *Ватарија* (Watari) да добију одговарајуће исказе за опште линеарне поступке апроксимације. Овом активношћу у области теорије апроксимације, Аљанчић се, захваљујући како својој тематској усмерености тако и вредности својих доприноса, у потпуности укључио у круг оних аутора који су у његово време и нешто раније развијали ову теорију, већ у претходном периоду у основама конституисану. То су, поред *Фавара,* били *Замански* (Zamansky), *Алексић* (Alexits), *Нина Бари, Стечкин, Никољски, Натансон, Дзјадик, Сунучи, Ватари, Тељаковски, Бухвалтер* и више других.

Треба додати да је Аљанчић неке своје најзначајније резултате на овом подручју, уз врло повољан пријем, саопштио у Еванстону, на Регионалној конференцији посвећеној теорији апроксимације, у току већ поменутог студијског боравка у САД 1971. године. Сем тога, већ почетком шездесетих година 20. века његове радове из теорије апроксимације повољно је оценио професор *А. Зигмунд* (A. Zygmund), а цитирали су их и користили *Буцер* (P. L. Butzer), *Бухвалтер* (H. Buchwalter) и више других аутора.

Веома комплетан и прегледан приказ истраживања и резултата у области апроксимације добијених до 1960. године, међу којима и својих, Аљанчић је дао у дужем чланку, заправо краћој монографији, под насловом *О неким новијим резултатима из тригонометријске апроксимације* (21).

III. *Тригонометријски редови.* У овој групи радова посматрају се збирови косинусног и синусног тригонометријског реда.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

и разни проблеми у вези с њима.

Асимптотско понашање функција $f(x)$ и $g(x)$ кад $x \to 0+$ разматрано је најпре у раду 9. Полазећи од познатог става према коме за монотон низ a_n и $0 < \alpha < 2$ важи

$$a_n \sim n^{-\alpha}, n \to \infty \Rightarrow g(x) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} x^{\alpha-1}, x \to 0+$$

аутори кажу: „Овде ћемо дати два става који проширују класу тригонометријских редова за које важе сличне асимптотске релације. Та проширења добијају се увођењем класе споро променљивих функција“ (видети V).

Једно проширење гласи: ако је $0 < \alpha < 2$, $L(t)$ производ две монотоне споро променљиве функције и $a_n = L(n)n^{-\alpha}$, онда је функција $g(x)$ дефинисана за свако реално x и

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), x \to 0+$$

Ова разматрања се настављају у реду 12, где се доказују и инверзна тврђења.

О интеграбилности функција f и g се расправља у раду (10), где се доказује еквиваленција између интеграбилности извесних функција и конвергенције одговарајућих редова. Уопштења познатих резултата добијају се заменом функције $x^{-\gamma}$ функцијом $x^{-\gamma}L(1/x)$, а низа $n^{-\gamma-1}$ низом $n^{-\gamma-1}L(n)$; при чему $L(x)$ означава споро променљиву функцију. Тако, на пример, Теорема 1 гласи:

Кад је $a_n \downarrow 0$ и $0<\gamma<2$, тада се функција $x^{-\gamma}L(1/x)g(x)$ налази у $L(0,\pi)$ ако и само ако ред $\sum n^{\gamma-1}L(n)a_n$ конвергира.

С. Аљанчић се, поред већ поменутог, бавио и интегралним модулима непрекидности. Реалном броју $1\le p<\infty$ придружује се векторски простор L^p свих мерљивих функција h с периодом 2π које имају коначну норму:

$$\|h\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |h(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Нека је τ_t транслација реалне праве за реалан број t, тј. пресликавање $x \mapsto x+t$. Модуо непрекидности (првог реда) функције h из L_p је број

$$w_p(\delta;h) = \sup_{|t|\le\delta} \|h\circ\tau_t - h\|_p$$

а другог реда број

$$w_p^2(\delta;h) = \sup_{|t|\le\delta} \|h\circ\tau_t + h\circ\tau_{-t} - 2h\|_p .$$

У раду (29) се, поред осталих, доказују и следећа два става.

Став 3. Ако су Фуријеови коефицијенти a_n функције $f\in L_p\,(p>1)$ опадајући, онда је $n^{1-1/p}a_n \le M_p\omega_p(\pi/2n;f)$

Став 4. Нека низ (a_n) задовољава за неко $p>1$ услове

$$(i)\ a_n \downarrow 0, \quad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} k^{1-1/p}a_k = O(n^{2-1/p}a_n), \quad (iii)\ \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2}a_k^p = O(n^{p-1}a_n^p).$$

Тада је

$$\omega_p(\pi/2n;f) = O(n^{1-1/p}a_n).$$

Овај став се уопштава у раду 31, где се под претпоставкама $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p < \infty$ доказује да је

$$\omega(n^{-1}; f) \le A_p n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{2p-2} a_k^p \right)^{1/p} + B_p \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p-2} a_k^p \right)^{1/p}.$$

Модули непрекидности се посебно посматрају и у граничном случају $L = L^1$ као и случају простора непрекидних функција с периодом 2π. Томе су посвећени, на пример, делови радова 29 и 34. О свему томе, и још нечем другом, говори се опширно у раду 33. То друго су трансформације Фуријеовог реда добијене множењем његовог општег члана општим чланом неког низа па сабирањем тих производа: од Фуријеовог реда.

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

фукције $f \in L$ и реалног низа $\mu = (\mu_n)_n \ge 0$ гради се тригонометријски ред

$$\frac{1}{2} \mu_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

У вези с овом трансформацијом постављају се многа питања. Одговори на нека од њих налазе се у 23, 25, 30, 32. Наводимо један од њих из 32:

Ако је $h \in L^p$, μ конвексан, опадајући нула-низ и $\sum_{k=1}^{n} \mu_n = O(n \mu_n)$,

онда је трансформисни ред Фуријеов ред неке функције $h_\mu \in L^p$ и

$$\omega_p^2(n^{-1}; h_\mu) \le A_p \mu_n \omega_p(n^{-1}; h).$$

IV. *Збирљивости.* Прво је *Коши* (A. L. Cauchy) 1821. године доказао следећи став: *ако низ* $c = (c_n)_{n \ge 0}$ *реалних бројева конвергира, онда његовој граничној вредности конвергира и низ* σc *с његових аритметичких средина.*

$$(\sigma c)_n = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Но, може низ σc конвергирати и кад низ с дивергира. Такав је, на пример, геометријски низ $c_n = (-1)^n$ који осцилаторно дивергира, док низ σc тежи нули која је гранична вредност низа c у Кошијевом смислу. Видимо да Кошијев поступак уопштава конвергенцију реалних низова придружујући некима из мора дивергентних одређене граничне вреднсоти, те тако, на неки начин, контролише дивергенцију. Овде је небитно то што је низ c реалан – могао би бити и низ у неком Банаховом простору.

Затим је, 1826. године, дошао *Абел* (N. H. Abel) са својим ставом: *ако је реалан ред* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *конверīенūан, онда је функција* $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ *дефинисана за* $-1 < t \leq 1$ *и неūрекидна у ūачки 1 слева, ūј. њена лева īранична вредносū,* $\varphi(-1)$, *једнака је* $\varphi(1)$. И овде се срећемо с уопштењем збира реда. Тако је геометријски ред с општим чланом $c_n = (-1)^n$ дивергентан, али је $\varphi(t) = (1+t)^{-1}$ те је његов збир у Абеловом смислу $\varphi(-1) = 1/2$.

Крајем века, 1897. године, *Таубер* (A. Tauber) разматра инверзију Абеловог става па закључује: ако је реалан ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ конвергира у Абеловом смислу, а низ nc_n тежи нули кад $n \to \infty$, онда тај ред конвергира. Особина $nc_n = o(1)$ низа c позната је као *Тауберов услов*. Њега је ослабио *Лиūлвуд* (J. E. Littlewood) 1911. године замењујући га условом „низ nc_n је ограничен“ да би заједно с *Хардијем* (G. H. Hardy) 1929. дошао до коначног „низ nc_n је ограничен одоздо“. Следеће године се, као гром из ведра неба, појавио чувени Караматин доказ Харди-Литлвудовог става на само две стране.

Почетком двадесетог века, 1907. године, *Мерсер* (J. Mercer) доказује: *ако је* $\lambda > -1$ *реалан број и низ* $c_n + \lambda(\sigma c)_n$ *конверīен-ūан, онда је и низ* c_n *конверīенūан.*

Постоје три врсте ставова: Абелови (директни), Тауберови (инверзни) и Мерсерови. Описаћемо их у прилично општем облику. Посматрамо скупове $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ функција, особине P и Q на првом, а особину R на другом и пресликавање $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Абелов став је облика: (A)$P(f) \Rightarrow R(Tf)$

Тауберов став тврди: ако је (A), онда је (B) $P(f) \Leftarrow R(Tf) \wedge Q(f)$.

Мерсеров став гласи: ако је $(T_\lambda)_{\lambda\in L}$ фамилија с особином (А) и $M \subseteq L$, онда је (C) $P(f) \Leftarrow R(T_\lambda f) \wedge \lambda \in M$.

Ако се ради о асимптотским особинама функција, онда они могу бити слаби (О-ставови) и јаки (о-ставови); сем тога се уместо особина могу посматрати бинарне релације, рецимо $f \sim g$, у ком случају (А) постаје $P(f,g) \Rightarrow R(T_f, T_g)$.

Посебно, да бисмо били ближи претходним примерима, можемо узети да је: $\mathcal{Z}$ реалан векторски простор, $C_{\mathcal{Z}}$ његов потпростор (конвергентних функција), $\lim_{\mathcal{Z}}$ линеарна форма на $C_{\mathcal{Z}}$ с особином $(\forall h \in C_{\mathcal{Z}})[h \geq 0 \Rightarrow \lim_{\mathcal{Z}} h \geq 0]$ за $\mathcal{Z}$ из $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$, T линеарно пресликавање, $P(f)$ особина $f \in C_{\mathcal{X}}$ а $R(h)$ особина $h \in C_{\mathcal{Y}}$, $L = \mathbf{R}$ И $T_\lambda f = f + \lambda Tf$. Тада би Абелов став био облика $f \in C_{\mathcal{X}} \Rightarrow Tf \in C_{\mathcal{Y}}$.

За Став 1 из 2 аутори кажу да је у суштини Тауберове природе. Ту је операција Т диференцирање, па се из особине извода изводи особина диференциране функције (што се обично чини помоћу теорема о средњој вредности). И поменути став се може доказати на тај начин развијањем функције φ око тачке x у Тејлоров полином првог реда с Лагранжевим остатком, па рачунањем вреднсоти $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

У раду 7, о коме ће још бити речи, посматрају се Абелови асимптотски ставови за интегралне трансформације са споро променљивим језгром $L(t) > 0$, дефинисаним и непрекидним за $t > 0$ и с особином

$$L(\lambda t) \sim L(\lambda) \text{ кад } \lambda \to \infty \text{ за свако } t > 0$$

(видети V). Изучава се под којима ће условима важити

$$\int_a^b f(t) L(\lambda t)\, dt \sim L(\lambda) \int_a^b f(t)\, dt \text{ кад } \lambda \to \infty$$

где је $0 \leq a < b \leq \infty$. Постоји једна фина равнотежа између особина функција L и f, што је била једна од одлика Караматине школе, тако да нађени довољни услови постају и потребни кад претходна еквиваленција важи за све L одређене врсте.

Почетком седамдесетих година XX века С. Аљанчић проучава асимптотске ставове Мерсеровог типа у вези с правилно променљивим функцијама и низовима за трансформације облика

$T_\lambda f = f + \lambda Tf$, где је T линеаран поступак збирљивости. Тиме ће се претежно бавити у својим даљим истраживањима. Што се тиче правилно променљивих низова, чија је теорија већ била разрађена, он једноставно каже да су они сужења правилно променљивих функција на скуп природних бројева (рад 55). Та једноставност је увод у срж проблема који се разматра.

Сетимо се Караматиних речи из 1931. године када је говорио о трансформацијам низова: „Поред тога Tauber-ови ставови изискују много дубље понирање у саму природу посматраних низова, што чини њихове доказе далеко тежим од доказа Mercer-ових ставова" [О уопштењима Mercer-овог става, Глас CXLVI (72) Српске краљевске академије, стр. 90]. Један од начина доказивања Мерсеровог става је да се покаже да једначина $f + \lambda Tf = h$ има решење на које се може применити Абелов став. Аљанчић је то радио, у посебним случајевима, филигранском техником. Дуги низови једнакости су водили открићу нових бића у математичком свету. Та бића би остала непозната ако би се посегло за неким општијим Тауберовим ставом, рецимо *Винеровим* (N. Wiener). Аљанчић, какав је био, ишао је у својим истраживањима до краја крајева.

У раду 41 се посматрају интегралне трансформације $Tf(x) = \alpha x^{-\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} f(t)dt$ и $Tf(x) = \beta x^{\beta} \int_x^{\infty} t^{-\beta-1} f(t)dt$ где су $\alpha > 0$ $\beta > 0$ реални бројеви и $f(x) \sim L(x)$ кад $x \to \infty$. Овде није решен само Мерсеров проблем, него је за остале $\lambda \neq -1$ дат и асимптотски развој, са тачношћу *L(x)*, функције *f(x)*. Две друге интегралне трансформације (средине) јављају се у [42].

Радом 46 започиње разматрање матричних трансфор-мација правилно променљивих низова што се наставља у радовима 47, 55 и 58 где се размарају тежинске средине. Сам облик трансформације неодољиво подсећа на спектар линеарног оператора *T*. Зато се убрзо после рада 47 појавио један спектрални поглед на разматран проблем [Pacific Journal of Mathematics 73, 1 (1977) стр. 63–71]. Решавањем једначине $T_\lambda f = h$ у 47, Аљанчић је дошао до једне матричне трансфор-мације чије коефицијенте детаљније испитује у раду 54 и уочава да су они уопштење Цезарових бројева. Ту је и једно уопштење Г-функције.

Последњи објављен научни рад С. Аљанчића, 61, уопштава један Цезаров став помоћу појма квази-монотоног низа који је увео, у наведеном раду, његов учитељ Јован Карамата.

V. *Правилно променљиве функције.* Као златна нит протеже се правилна променљивост кроз већину Аљанчићевих радова. Она блиста у њима и излази из њих још блиставија. Ти радови спадају међу најзначајније у Аљанчићевом научном делу.

Реална функција $f(x) > 0$, дефинисана у некој околини (позитивне) бесконачности у **R**, конвергира кад $x \to \infty$ неком позитивном реалном броју (ознака $f \in C$) ако и само ако задовољава Кошијев услов:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{f(y)}{f(x)} = 1.$$

Слабљењем овог услова, додавањем неке везе између x и y, добијају се проширења скупа конвергентних функција. Та веза код *Шмита* (R. Schmidt) из године 1925. гласи $y/x \sim 1(y/x \to 1)$, па се, сменом $y = \lambda x$, добија

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ \lambda\to 1}} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1.$$

Карамата се 1930. године налази између Кошија и Шмита; његова веза, $y/x \asymp 1$ (постоје реални бројеви $0 < a < b < \infty$ такви да је $ax \le y \le bx$ почев од неког x и за $y \ge x$) доводи до услова:

$$\textit{за свако } 0 < a < b < \infty \textit{ је } \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1 \textit{ униформно по } a \le y \le b$$

(Теорема у униформној конвергенцији). Карамата је умео да напише овај услов, а то је и учинио, у сасвим једноставном, свима разумљивом, облику што је довело до открића споро, и отуда правилно, променљивих функција:

Споро променљива функција *је реална функција $L(x) > 0$, дефинисана и непрекидна у некој околини бесконачности у* **R**, *с особином*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1 \textit{ за свако } \lambda > 0.$$

Функција $R(x)$ је правилно променљива идекса $\rho \in \mathbf{R}$ ако је $R(x) = x^{\rho} L(x)$ за неку споро променљиву функцију $L(x)$. Споро променљива функција је правилно променљива индекса 0.

Из ове наоко једноставне особине, која то никако није због оног квантификатора „за свако $\lambda > 0$“, Карамата изводи Теорему о униформној конвергенцији и читаву, лепо заокружену, теорију правилно промењљивих функција. Истакнимо став по коме је функција L споро промењљива ако и само ако је облика

$$L(x) = c(x) \exp \int_a^x \varepsilon(t) d \log t$$

за неко $a \geq 0$, свако $x \geq a$, неко $c \in \mathcal{C}$ и неку непрекидну функцију $\varepsilon(t)$ која тежи нули кад $t \to \infty$ (Теорема о репрезентацији). Тиме је, како ће се касније видети, плодоносно проширен скуп $\mathcal{C}$ до скупа $\mathcal{L}$ споро промењљивих функција (функција $\log\, x$ се, на пример, налази у $\mathcal{L} / \mathcal{C}$). Првобитна имена ових фунција била су „споро растуће" (à croissence lente) и „регуларно растуће" (à croissence regulière); нова имена су уведена у раду 13 јер „више одговарају суштини".

Аљанчић сам, или заједно с другима, није се, сем у радовима 13, 44 и 51, бавио „чистом" теоријом правилно промењљивих функција. Превасходне су му биле њихове примене у разним областима анализе које су показивале њихову сврсисходност и њихов значај; при томе су, у процесу доказивања, откриване њихове нове особине којима је допуњавана почетна теорија.

Правилно промењљиве функције су мировале, изузимајући Караматине резултате из 1931, скоро двадесет година. Једино се, заслугом В. Авакумовића и Ј. Карамате, 1936. године појавио њихов слаби облик (O-облик). Крајем четрдесетих година прошлог века доказано је да се непрекидност у дефиницији може заменити мерљивошћу по Лебегу са истим последицама. Али, то није било довољно. Прави живот правилно промењљивих функција је у њиховим применама. Требало је да оне изиђу из себе самих и крену у математички свет да би показале своју снагу и, што не рећи, своју лепоту. То се ускоро и остварило. Наиме, ова теорија правилне промењљивости, од које ни њен оснивач Карамата у прво време није нарочито много очекивао, после тих својих наизглед скромних почетака и једног предратног и послератног периода релативне стагнације, почела је нагло да се развија, како у земљи тако и широм света, и то како сама теорија тако и њене разноврсне примене. Већ средином осамдесетих година двадесетог века број радова посвећених овој области или у блиској вези с њом износио је више стотина. То се, на пример, јасно види из обимне монографије *Regular Variation,* чији су аутори Bingam, Goldi и Тојgel (N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, Cambridge University Press, 1987). Ова књига је иначе један од томова енциклопедије савремених математичких наука, и у њој се на великом броју места помиње Карамата и одаје му се признање као утемељивачу читаве ове области, а такође се доста често наводе његови први настављачи Аљанчић, Бојанић и Томић и истиче значај њихових доприноса. И каснији развој теорије и примена „правилне промењљивости" није, по свему судећи, био мање успешан и динамичан.

У јесен 1952. године расправљају Аљанчић, Бојанић и Томић о асимптотском понашању збирова извесних тригонометријских редова и закључују да се оно може свести на асимптотско понашање одговарајућих интегралних трансформација са споро промењљивим језгром. Тако настају радови 7, 9 и 12, којима правилно промењљиве функције на велика врата улазе у математички свет.

Правилно промењљива функција *R(x)* индекса ρ могла би се сматрати асиптотским уопштењем у бесконачности степена функције x^{ρ}. Природно се поставља питање ставова S који важе за x^{ρ}, а преносе се на *R(x)*, тј. $S(x^{\rho}) \Rightarrow S(R(x))$. Одређивање таквих S захтева дубљу (логичку) анализу особина функције x^{ρ} од којих зависи $S(x^{\rho})$ и питања да ли те особине наслеђује *R(x)*. Када би се прешао тај пут, имали бисмо Принцип преноса који би нам од познатих ставова непосредно производио њихова уопштења, који би повезивао прошлост с будућношћу, можда непознатом и невиђеном. Аљанчић у неким својим радовима даје примере ставова S за које важи Принцип преноса, а поменуто важно питање поставља, на неки начин, у раду 10.

У раду 13 се посматра Фруланијев интеграл,

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$$

функицје *f*, локално интеграбилне на отвореном интервалу с крајевима 0 и ∞, с параметрима $a > 0$ и $b > 0$. Познати услов за његову конвергенцију, да је функција C-збирљива у 0+ и ∞, еквивалентан је, како је уочено и доказано, тврђењу да је функција

$$R(x) = \exp \int_{1}^{x} f(t) d \log t$$

правилно промењљива; при томе је њен индекс једнак C-збиру функције f у бесконачности. Доказ се изводи помоћу две нове особине еквивалентне правилној промењљивости.

Појавом *Фелерове* (W. Feller) књиге [An introduction to probability theory and its applications, J. Wiley, New York, 1966] правилно промењљиве функције улазе у теорију вероватноће и њој сродне области да би доживеле буран развој из кога ће проистећи море радова и неколико запажених њима посвећених монографија. Игром случаја Карамата и Фелер рођени су почетком XX века у Загребу, разишли се на разне стране света да би се срели у тој књизи кад је Карамата био при крају свог животног пута.

Формула

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + o(1) \text{ } \textit{кад } x \to \infty \text{ } \textit{за свако } \lambda > 0$$

из дефиниције споро променљиве функције само је почетак асимптотског развоја количника на левој страни ове једнакости. Шта се дешава после почетка? Један од одговора на ово питање даје монографија, рад 44, у којој се посматра строго растућа функција $\varphi(x) > 0$, дефинисана за $x \geq 0$, са својствима (i) $\varphi(\infty) = \infty$ и (ii) функција $x^{-\theta}\varphi(x)$ опада за неко $0 < \theta < \infty$ и довољно велико *x*, па се за функцију L из $\mathcal{L}$ каже да је *споро променљива с остатком* φ кад је

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \quad (x \to \infty)$$

за свако $\lambda > 0$, што се записује у облику $L \in \mathbf{K}_\theta(\varphi)$. Даље се развија теорија оваквих функција (Теорема о униформној конвергенцији, Теорема о репрезентацији...), по Караматином свеопштем моделу из 1930. године, која се даље примењује на интгралне трансформације, тригонометријске редове и интеграле, Тауберове теореме. Стари ставови добијају ново, прецизније рухо. Тако, на пример, став о асимптотском понашању функције g с почетка тачке III сада постаје: ако је $0 < \alpha < 2, 0 < \theta < 2 - \alpha$ и функција *L(x)* из $\mathbf{K}_\theta(\varphi)$ монотона почев од неког *x*, онда, кад $x \to 0+$, важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} L(n) \sin nx = \left(x^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx + O\left(\frac{1}{\varphi(1/x)}\right)\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

Аљанчић је своје резултате из рада 42 о споро променљивим функцијама прецизирао у раду 50 за споро променљиве функције са остатком. Ту је посматрао и један општи Абелов став за матричне трансформације низова које чувају припадност низа скупу $\mathbf{K}_\theta(\varphi)$ (један низ припада том скупу ако је сужење на скуп природних бројева неке функције из тог скупа).

Функција K је O-правилно променљива ($K \in \mathcal{K}$) ако је дефинисана, мерљива и > 0 у некој околини бесконачности у **R**, и ако је

$$r(\lambda) := \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} < \infty$$

за свако $\lambda > 0$. Ове функције су, као што смо већ поменули, открили Авакумовић и Карамата. Аљанчић је написао рад: A remark on the class of functions of Avakumović–Karamata and that of Bari–Stečkin да би, како је он то умео, коначно рашчистио однос између насловљених класа функција. Било је математичара који су радили с функцијама извесне врсте не знајући одакле оне потичу и откривајући већ откривено. Рад је, по свом обичају, дао другопотписаном овога текста да га прочита и прокоментарише. После писане и усмене размене мишљења, ствари су кренуле другим током те је од поменутог настао рад 51, мала једноставна теорија функција из $\mathcal{K}$, који је имао доста успеха, вероватно због своје прегледности и систематичности (по рецепту Караматине школе), као и због неколико нових резултата. Теорема о униформној конвергенцији овде има облик: ако је $K \in \mathcal{K}$ и $0 < a < b < \infty$, онда је

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \sup_{a\le\lambda\le b} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} < \infty$$

Аутори су имали мало проблема с индексима. Разматрли су, у ствари, само тзв. Караматине индексе,

$$p = p(K) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\log r(\lambda)}{\log \lambda} \quad \text{и} \quad q = q(K) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log r(\lambda)}{\log \lambda}$$

а постоје и *индекси Матушевске* (W. Matuszewska).

Аљанчић је наставио истраживања у овом правцу, па у раду 57 доказује за функције из $\mathcal{K}$ ставове који одговарају неким ставовима из рада 7 и 10; при томе вешто користи поменуте индексе. То је још уочљивије у његовом прет-последњем објављеном научном раду, 60, где се посматрају регуларни оператори A на векторској мрежи $\mathcal{M}$ свих мерљивих реалних функција *f(x)*, дефинисаних за $x \geq 0$. Регуларан оператор на $\mathcal{M}$ је разлика два позитивна линеарна оператора на $\mathcal{M}$ (такве су на пример интегралне транс-формације на неким деловима простора $\mathcal{M}$). Истражују се услови под којима ће за неко K из $\mathcal{K}$ важити

$$(AK)(x) = O(K(x)) \quad (x \to \infty).$$

Идеја је да се нађе што мањи скуп функција из $\mathcal{K}$ за које важи ова релација и да се одатле закључи да она важи и за K. Аљанчић је, уз помоћ индекса, пронашао услове, знатно слабије од оних који су до тада били познати.

Сваки рад С. Аљанчића био је довршен, али и отворен. Дешавало се да се и после двадесет година врати неком од њих и да на том добро постављеном темељу гради даље.

Композиција његовог рада је мало старинска, „караматска". Полази се од изворишта (претходних резулта-та), долази до резултата рада, па завршава доказима. Аљанчићев стил је, као што му је и говор био – одмерен и кристално јасан.

Напомињемо да је у поменутој књизи Бингама, Голдија и Тојгела од тројице главних настављача Карамате највише истицан Аљанчић, чијих је неколико радова у њој у целини репродуковано, а за Аљанчића је речено да је „једна од водећих личности у Југословенској школи математичке анализе коју је основао Ј. Карамата".

На крају овог прегледа области научног рада Слободана Аљанчића, напомињемо да су сви његови радови приказани и повољно оцењени у главним светским реферативним часописима. Сем тога, многи од њих навођени су и битно коришћени у радовима других аутора, страних и домаћих, а неки су упућивали и подстицали те ауторе на нова и даља истраживања. Најзначајније и карактеристичне примере таквих случајева поменули смо у претходном излагању.

НАСТАВА И ЈОШ НЕКЕ АКТИВНОСТИ

Може се с доста разлога рећи да је дугогодишњи рад Слободана Аљанчића у разним видовима наставе и њеним пратећим делатностима, на матичном факултету и ван њега – виђен у целини и с општег становишта, био за нашу математичку средину од истог или скоро истог значаја као његови научни доприноси. (Ова подела на област научног рада и област наставних активности додуше је, у његовом случају а и иначе, прилично условна, јер је, на пример, рад с магистрантима и докторантима, уколико је озбиљан, с једне стране највиши, завршни вид наставе, а с друге стране – више или мање активно и директно учествовање у унапређењу и развоју саме науке). Већ је поменуто да је као асистент водио вежбе из математичких предмета и да је после избора за доцента преузимао предавања више курсева опште математике (тзв. Математике 1 и 2) и разних дисциплина математичке анализе, комплексне, реалне и функционалне. Ови курсеви одвијали су се како у оквиру редовних тако и на последипломским студијама, на матичној групи, односно Институту за математику, као и на групама за механику, астрономију и физику Факултета. Неки од ових курсева или циклуса предавања били су факултативни. Приближно потпун списак свих тих курсева обухватио би, поред већ поменуте Математике 1 и 2 за нематематичаре: Анализу 1, Теорију комплексних функција, Топологију, Теорију мере и интеграције, Специјалне функције, Теорију реалних функција, Функционалну анализу и Анализу 3. Поред свега овога, у Београду је више година учествовао у настави на последипломским студијама на Факултету организационих наука и у организацији Института за економска истраживања, а учествовао је такође, годинама, у редовној и последипломској настави у Новом Саду, Крагујевцу, Нишу, Приштини и Косовској Митровици. За скоро све курсеве које је држао, Аљанчић је савесно писао одговарајућа скрипта, која су студенти користили, и то како ауторизована тако и неауторизована. У два случаја успео је да за своје курсеве публикује одговарајуће врло добре уџбенике: *Вишу мате-матику 2,* за студенте Факултета организационих наука (1974), и *Увод у реалну и функционалну анализу* (1968), о коме ће још бити речи. Веома добра и успела је, по нашој оцени, била и његова *Теорија комплексних функција,* у којој је одговарајућа материја обрађена потпуније и савременије него у било ком дотадашњем домаћем уџбеничком тексту. Овај уџбеник, коришћен у облику ауторизованих скрипата, био је при-премљен за објављивање, али баш док су завршна редиговања била у току, грубо је онемогућено његово штампање, а истовремено је Аљанчићу одузето предавање овог предмета, које је он у неколико претходних година успешно обављао. У разлоге, оне персоналне, а и неке друге, вероватне, оваквог поступка немамо намеру да улазимо. Довољно је, чини нам се, рећи да су, „таква била времена!“ – Поменутој уџбеничкој литератури треба прикључити неколико Аљанчићевих чланака намењених продубљивању и усавршавању средњо-школске и универзитетске атематичке наставе. Они су били посвећени: *увођењу ирационалних бројева у средњошколску наставу (рад 38), проширењу скупа целих у скуп рационалних бројева (рад 43), путу од вектора до векторских простора (радови 48, 49), површини, запремини и мери уопште (52, 53)* и *асимптотском понашању низова који одређено дивергирају (рад 51).*

Већ смо нагласили да је професор Аљанчић од самог почетка своје универзитетске каријере стицао не мали углед квалитетом својих предавања, што је била одлика и вежби које је држао као асистент, као и осталих његових наставних активности. Ово је безмало опште уверење и општи утисак. Њега у потпуности деле аутори овог текста, који су били Аљанчићеви студенти (првопотписаном је он као асистент држао вежбе), а касније дугогодишњи асистенти и сарадници, и као такви слушаоци многобројних његових предавања и разних других усмених излагања. Заправо, мало је рећи да су његова предавања (и вежбе) била успешна: на њима, а и при многим његовим приказивањима својих и туђих резултата којима смо имали прилике да присуствујемо, његова излагања одликовала су се изванредном јасноћом, прегледношћу, елеганцијом и усклађеношћу, и то не само у формално-стилском погледу, него и по суштинској вредности избора, распореда и уобличавања материјала, што је чинило да се и теже и компликованије ствари примају и схватају не само без већег напора, него и с угодним осећајем лаког и пуног разумевања. Тим својим наступом пленио је, а често, верујемо, и фасцинирао, генерације и генерације својих слушалаца најразличитијих врста и на најразличитијим нивоима.

Као што се то из претходног излагања види, дугогодишње наставно-педагошке активности професора Аљанчића биле су веома бројне и разноврсне. Поред редовне наставе и вођења више последипломских, специјалних и факултативних курсева и семинара, у тим активностима велики значај имао је већи број докторских и магистарских дисертација чију је израду као ментор водио или је учествовао у комисијама за њихову одбрану, пружајући притом кандидатима, често и кад званично није био ментор, стварну, суштинску помоћ, скоро увек драгоцену и пресудну. Међутим, пре свега треба истаћи изванредне Аљанчићеве заслуге за увођење *функционалне анализе,* тада нове математичке дисциплине, у наставу, на више нивоа, а такође и у широку научну делатност у нашој средини. Почело је то држањем, у току неколико година и углавном на Аљанчићеву личну иницијативу, факултативних и незваничних курсева у којима су, уз уводне и помоћне области, обрађивани елементи функционалне анализе, да би се наставило увођењем овог предмета у редовну и у разне видове последипломске наставе. Аљанчић је затим објавио, после скрипата и једне његове скраћене верзије, значајан уџбеник *Увод у реалну и функционалну анализу,* који се и данас користи. Уследило је неколико дисертација и иницирање научних активности у овој области. Тако је, Аљанчићевом заслугом, а такође и заслугом професора Бранислава Мирковића и неколико њихових млађих сарадника, функционална анализа ситуирана и конституисана као централна област, осовина математичке анализе, и на научном и на наставном плану, на Математичком факултету и у нашој средини.

Сл. 1. Професор Аљанчић с групом последипломаца и асистената у библиотеци Математичког института августа 1979. године

Није могуће не поменути још једну веома важну функцију и делатност Слободана Аљанчића, од великог значаја за развој и унапређивање математичке науке и математике уопште, у нашој средини. То је био његов рад у Математичком институту Српске академије наука, чији је сарадник званично постао 1950. године и остао до краја живота. Нешто касније, од 1958. године, радио је у управним и организационим телима Института, Научном савету а потом, од 1971, у Научном већу. Такође је од 1959. године, уз један краћи прекид, био члан Редакционог одбора *„Publications de L'Institut mathematique"*, по свој прилици и данас најбољег и најугледнијег математичког часописа у Србији, да би 1984. године постао главни уредник овог часописа. Чини нам се да је сувишно рећи да је и на овим пословима показивао ону исту ревност, савесност и ефикасност којима су се одликовале остале његове активности.

* * *

Као човек, колега и сарадник, професор Аљанчић одликовао се посебном љубазношћу, срдачношћу и комуникативношћу, али не оном формалном и рутинском, него аутентичном, с тоналитетом истинске отмености и господствености. Безмало у свим односима и ситуацијама поступао је веома прибрано, смирено и конструктивно. Према академику М. Томићу: „Сви они који су ближе познавали Слободана Аљанчића... запазили су његов увек одмерен тон и његово владање собом у свим приликама. Ја не памтим да је икада рекао неку оштрију реч или да је показао да је љут." (Првопотписани овог текста ипак памти један изузетак из тог правила коме је он лично присуствовао. Догодило се то на седници Института, односно, према ранијем називу, Катедре за математику, на којој је Аљанчићу категорички и беспризивно саопштено да штампање његових „Комплексних функција" не долази у обзир и уједно да му се одузима предавање овог предмета. Ово га је у тенутку толико погодило да је љутито на сто за којим је седео бацио неке списе, материјале за седницу које је држао у руци, и одмах потом, одговарајућим гестом и изговоривши нешто као „свега ми је доста", дао на знање да одустаје од сваког даљег разговора; само неколико тренутака после тога, међутим, сасвим се прибрао и вратио своје уобичајено спокојно држање.)

Као дугогодишњи ученици и потом сарадници професора Аљанчића, на основу његовог општег познавања и утисака о њему који су се годинама сабирали и слагали, стекли смо уверење да је за њега, поред породице, којој је био дубоко привржен, и пријатеља, с којима је неговао блиско дружење већ од гимназијских дана и ране младости, у суштини само постојао рад у науци и за науку којој је посветио живот. Није, међутим, била по среди нека скученост и једнодимензионалност: Аљанчић је живео нормалним животом културног човека, интересовао се за књижевност, уметности и позориште, активно се бавио рекреа-тивним спортом док му је то здравље дозвољавало, али ни у шта сем у претходно, а нарочито не у нешто што би у било ком погледу било инфериорно и тривијално, није улагао своју праву енергију и преданост. Имамо утисак да је овај његов став одлучне привржености само ономе за шта се определио као за главне вредности у животу, овај његов својеврсни аскетски став, плод његовог рано формираног и сазрелог уверења да је то једини начин да се на овим нашим просторима и у овим временима, у којима има толико оног што спутава и омета, као и оног што збуњује и смућује, постигне нешто значајно на плану интелектуалног стваралаштва.

Чини нам се прикладним да ово излагање закључимо следећим речима које је првопотписани изговорио у једној комеморативној прилици:

„Академик професор Слободан Аљанчић био је једна од најистакнутијих, средишњих личности у ономе што би се могло сматрати беочугом, мостом између генерација наших математичара које већ припадају прошлости, а чији су водећи представници били Михаило Петровић, Богдан Гавриловић, Николај Салтиков, Тадија Пејовић, Јован Карамата, Милош Радојчић, Радивоје Кашанин, Војислав Авакумовић, Драгољуб Марковић, с једне и данашњег времена, с друге стране. Он, међутим, није био неки пасиван, само хронолошки и ситуациони беочуг и мост, него је ту своју улогу остваривао на активан и животворан начин, својим многобројним, значајним и плодоносним иницијативама и иновацијама. Сада, када је физички и фактички отишао, суштинска достигнућа и резултати његове истрајне научне и наставне активности, њихово дејство и зрачење, као и сећање на племенитост и шарм његове личности, остаће у нашој средини трајно присутни.“

БИБЛИОГРАФИЈА РАДОВА СЛОБОДАНА АЉАНЧИЋА

Јединице овог списка уз чије су редне бројеве стављене звездице (*) нису математички научни радови у ужем смислу речи, а све остале јесу. Притом су обе верзије истог рада, она на српском и она на неком страном језику (обично је у питању превод на тај језик са само мањим модификацијама, или без њих), наведене под истим редним бројем, тј. чине једну библиографску јединицу.

1. *Sur une formule sommatoire genéralisée.* – Publications de L'Inst. math. Acad. serbe sci. **2** (1948), стр. 263–269.
2. *Одређивање најбољих граница извода када су познате извесне особине функције и осталих извода* (са В. Г. Авакумовићем). – Глас Српске академије наука CXCVIII (1950), стр. 197–210. – *Sur la meilleure limite de la dérivée d'une fonction assujéttie à des condition supplémentaries* (са В. Г. Авакумовићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **3** (1950), стр. 235–242.
3. *Прилог теорији Gegenbauer-ових полинома.*– Зборник радова Мат. инст. САН **2** (1952), стр. 113–128.
4. *О асимптотском развијању А-збирљивих линеарних функционела*(теза). – Зборник радова Мат. инст. САН **3** (1953), стр. 157–212.
5. *Développement asymptotique des fonctions représentables par les séries de Legendre.* – Publications de L'Inst. math. Acad. serbe sci. **6** (1954), стр. 115–124.
6. *О једном поступку за добијање асимптотских развитака.* – Весник друштва мат. и физ. НР Македоније **5** (1954), стр. 22–29.
7. *Sur la valeur asymtotique d'une classe des intégrales définies* (са R. Bojanićem i M. Tomićem). – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **3** (1950), стр. 235–242.

8*. *Uvod u teoriju kompleksnih funkcija* T. I–III (ауторизована скрипta). – Београд, 1955: T. I 227 стр. T. II 172 стр. T. III 161 стр.

9. *Два става о асимптотском понашању тригонометријских редова*(са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Зборник радова Мат. инст. САН **4** (1955), стр. 15–26.
10. *Sur L'intégrabilité de certaines séries trigonométriques* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **8** (1955), стр. 67–84.
11. *Über Summierbarkeit von Orthogonalenentwicklungen stetiger Funktionen.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **10** (1956), стр. 121–130.
12. *Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro de séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones,* (са Т. Бојанићем и М. Томићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **10** (1956), стр. 101–120.

13. *Правилно променљиве функције у Frullani-ев интеграл* (са Ј. Караматом). – Зборник радова Мат. инст. САН **5** (1956), стр. 239–248.

14. *Quelques cas particuliers de passage à la limite dans le développements asymptotiques.* – Centre belge de rech. math., Colloque Théorie des suites, Bruxelles (1957), стр. 96–108.

15. *Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz.* – Comptes rendus Acad. sci. Paris **246** (1958), стр. 2567–2569.

16. *Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hölder dans les espaces C et L^p.* – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **12** (1958), стр. 109–124.

17. *Über den Perronschen Satz in der Theorie der Differenzengleichungen.* – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **13** (1959), str. 47–56.

18. *Sur la classe de saturation de quelques procédés de sommation.* – Atti del VI Congresso dell Unione Mat. Italiana, Napoli, 1959; str. 171–172.

19. *Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **13** (1959), str. 113–122.

20. *Caractérisation des classes de fonctions de Lipschitz, Zygmund et B. Sz. Nagy.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. 14 (1960), str. 123–128.

21.* *О неким новијим резултатима из тригонометријске апроксимације.* – Зборник радова Мат. инст. САН **8** (1960), стр. 9–52.

22. *Approximation of continuous functions by typical means of their Fourier series.* – Proc. Amer. Math. Soc 12 (1961), стр. 681–688.

23. *О модулу непрекидности Fourier-ових редова трансформисаних конвексним мултипликаторима.* – Глас САНУ CCLIV (1963), Одељење прир. мат. наука, (НС) **24**, стр. 35–53. – *Sur le module de continuité des series de Fourier transformées par des multiplicateurs convexes* . – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts **XXXI** (1963) Cl. Sci. Math. Natur. **4**, стр. 41–51.

24. *Sur les séries de Fourier transformées par des multiplicateurs convexes.* – Atti del Congresso dell Unione Mat. Italiana, Genova, 1963, стр. 2.

25. *Über konvexe Multiplikatoren bei Fourier–Reihen.* – Math. Zeitschrift **81** (1963), стр. 215–222.

26*. *Увод у функционалну анализу.* – Универзитет у Београду, Београд, 1963, стр. 190+3.

27. *Sur le module de continuité intégral des séries de Fourier à coefficients convexes,* (са М. Томићем). – Comptes rendus Acad. sci. Paris **259** (1964), стр. 1609–1611.

28. *О логаритамским у Hölder-овим срединама.* – Глас САНУ CCLX (1965), Одељење прир. мат. наука (НС) **26** , str. 39–46. – Sur les moyennes logarithmiques et celles de Holder. – Bull. Acad, Serbe Sci. Arts **XXXV** (1966) Cl. Sci. Math. Natur. (NS) **5**, стр. 5–8.

29. *Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koeffizienten* (са М. Томићем). – Mathem. Zeitschrift **88** (1965), стр. 275–284.

30. *О модулу непрекидности Fourier-ових редова трансформисаних конвексним мултипликаторима* (II). – Глас САНУ CCLX (1965) Одељење

прир. мат. наука, (НС) **26**, стр. 99–105. – *Sur le module de continuité des séries de Fourier transformées par des multiplicateurs convexesb (II)*. – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts **XXXV** (1966), Cl. Sci. Math. Natur. (NS) 5, стр. 35–38.

31. *On the integral moduli of continuity in L^p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients*, – Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), стр. 287–294.

32. *Transformationen von Fourier-Reihen durch monoton abnehmende Multiplikatoren* (са М. Томићем). – Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1–2) (1966), стр. 23–30.

33. *О доњој граници модула непрекидности израженој помоћу Fourier-ових коефицијената функције* (са М. Томићем). – Глас САНУ CCLXIX (1967), Одељење прир. мат. наука, (НС) **30**, стр. 65–77. – *Sur la borne inférieure du module de continuité de la fonction exprimée par le coefficients de Fourier* (са М. Томићем). – Bull. Acad. Serb Sci. Arts **XL** (1967) Cl. Sci. Math. Natur. (ns) стр. 39–51.

34. *О модулу специјалних Fourier-ових редова и о модулу Fourier-ових редова трансформисаних мултипликаторима различитих типова.*– Глас САНУ CCLXIX (1967) Одељење прир. мат. наука, (НС) 30, стр. 37–64. – *Sur le module de continuité des séries de Fourier particulières et sur le module des séries de Fourier transformées par des multiplicateurs de types divers.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XL (1967) Cl. Sci. Math. Natur. (NS) **6**, стр. 13–38.

35*. *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* – Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1968. str. 326+(1); 2. izd.: 1974. str. (8)+326+(2); 3. izd.: 1978. str. (6)+326+(1) (преведено на албански 1982, друго издање 1986).

36. *On the degree od convergence of Fejér–Lebesgue sums* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Enseign. Math. **15** (1969), стр. 21–28.

37. *Зигмунд-ова класа функција у теорији апроксимације.* – Посебна издања САНУ CDXXXIV (1970), Споменица у част новоизабраних чланова САНУ, **44**, стр. 3–10.

38*. *O uvođenju iracionalnih brojeva u srednješkolsku nastavu.* – Savremena nastava matematike, Beograd, 1971; стр. 141–153.

39. *Sur l'approximation locale par les moyennes arithmétiques* (са М. Томићем). – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XLVIII (1972), Cl. Sci. Math. Natur. **5**, стр. 17–27.

40*. *Viša matematika II (Varijacioni račun).* – FON, Beograd, 1972.

41. *Asymptotic Mercerian theorems involving slowly varying functions.* – Matematički vesnik (NS) **10 (25)** (1973), стр. 331–337.

42. *Asymptotische Mercersätze für Hölder- und Cesàro-Mittel.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **17 (31)** (1974), стр. 5–16.

43*. *О проширењу скупа целих бројева у скуп рационалних бројева.* – Математика, 1974, **4**; стр. 21–32.

44. *Slowly varying functions with remainder term and their applications in analysis* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Посебна издања САНУ CDLXVII, Одељење природноматематичких наука, **41**, стр. (6)+51.

45*. *Viša matematika II (Diferencijalne jednačine, ekstremumi funkcija više promenljivih, Varijacioni račun).* – FON, Beograd, 1974; стр. 422.

46. *Deux théorèmes merceriens asymptotiques pour des suites à comportement lent.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd). – (NS) **18** (**32**) (1975), стр. 5–18.

47. *Sur le théorème mercerien de Čakalov.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **19** (**33**) (1975), стр. 9–15.

48*. *Od vektora do vektorskih prostora (I).* – Matematika **1** (1976), стр. 5–22.

39*. *Od vektora do vektorskih prostor (II).* – Matematika **2** (1976), стр. 11–28.

50. *Abel- und Mercersätze mit Restglied.* – Труды Международной конференции по теории приближения функций, Калуга; Наука, Москва, 1977, стр. 5–9.

51. *O–regularly varying functions* (са Д. Аранђеловићем). – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **22** (**36**) (1977), стр. 5–22.

52*. *Površina, zapremina i mera uopšte (I).* – Matematika **2** (1977), стр. 63–71.

53*. *Površina, zapremina i mera uopšte (II).* – Matematika **4** (1977), стр. 8–18.

54. *Generalized Cesàro numbers.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **24** (38) (1978), стр. 13–18.

55. *An asymptotic Mercerian theorem for weighted means of slowly vaying sequences.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts LXIV (1979), Sciences mathématiques, 10, стр. 47–52.

56*. *O nizovima koji određeno divergiraju i o njihovom asimptotskom ponašanju.* – Putevi i dostignuća, Sarajevo, 1979, стр. 77–105.

57. *Some applications of O-regularly varying fuctions.* – Proc. Internat, Conf. "Approximation and Function Spaces", Gdansk, 1979; North–Holland Amsterdam and PWN Warsawa 1981, стр. 1–15.

58. *Mercerian theorems for weighted means.* – Proc. Internat. Conf. "Functions, Series, Operators", Budapest, 1980; стр. 93–99.

59. *Regularly varying functions in asymptotic Mercerian theorems.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts LXXIX (1982), Sciences mathématiques, 12, стр. 23–30.

60. *Transformations of O-regularly varying functions by regular operators.* – Bull. Acad. Serb. Sci. Arts LXXXIV (1984), Sciences mathématiques, **13**, стр. 1–6.

61. *Generalization of a theorem due to Cesàro.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XCI (1986), Sci. mathématiques, **15**, стр. 1–4.

62*. *Remembering Jovan Karamata* (са М. Томићем). – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **68** (**62**) (1978), стр. 1–6.

63*. *Радивој Кашанин као математичар* (са М. Томићем). – Историја математичких наука, Књига 4, Математички институт, 1991, стр. 9–21.

Према расположивим подацима, С. Аљанчић је написао и студенти су користили неауторизована скрипта под следећим насловима: *Теорија реалних функција, Мера и интеграција,* и још нека.

SLOBODAN ALJANČIĆ

(1922–1993)

Slobodan Aljančić, professor at the Faculty of Sciences and Mathematics in Belgrade for many years, and, from the age of 46. Full Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts, was one of the most outstanding mathematicians and teachers in Serbia in the second half of the 20th century, and also a very respected and beloved person. He was born in Belgrade on March 12, 1922. His father, Zdenko Aljančić, was of Slovenian origin, and his mother Bisenija belonged to a family from Belgrade.

He finished primary school and high school in Belgrade and, in 1940, he started to study Civil Engineering. After World War II he moved to the Faculty of Philosophy – Department of Mathematics, where he graduated in 1947.

Already during his studies he started with research and he published his first paper in 1948. After graduation he became a teacher in a secondary school and also a part-time Assistant at the Faculty of Natural Sciences, until 1951, when he obtained a regular post as Assistant at this faculty. Continuing his research, in 1953 he obtained his doctoral degree at the Academy of Sciences with the thesis *„On Asymptotic Expansions of A-Summable Linear Functionals“*. His further scientific development and his university career were rather quick. He became Assistant Professor in 1954, Associate Professor in 1959 and Full Professor in 1968. He was elected a Corresponding Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts in 1961, and a Full Member in 1968.

Almost from the very beginning of his scientific activities. Aljančić was included in the circle of students and associates of the great Serbian mathematician Jovan Karamata, working in particular with Miodrag Tomić and Ranko Bojanić. Together with this group and also alone he studied primarily summability of trigonometric series and regularly varying functions, and before that he already started successful investigations in the area of asymptotic series and later on in the area of approximation theory. Dealing with these problems, he established a close cooperation with the leading expert in thisarea, Jacques Favard, who provided for him a sabbatical stay in Paris during 1957/58 school year. The friendship with Favard continued in the subsequent years. Besides this stay in Paris, Aljančić had only one longer stay abroad, three months in the United States, in 1971. He also took part in several domestic and foreign conferences and congresses. Parallel to the mentioned activities, Aljančić continued his extremely successful teaching activity and among others, published two successful textbooks; one of them *Introduction to Real and Functional Analysis,* was used by numerous generations of students.

During the last two decades of his life. Aljančić had serious heart troubles. However, due to his persistence and discipline, he successfully coped with these problems. Later on, another malignant disease came, from which he did not recover. He died on March 19. 1993.

The work of Aljančić can be classified into the following five areas:

I. *The theory of asymptotic series,*
II. *Approximation theory,*
III. *Trigonometric series,*
IV. *Summability,*
V. *Regularly varying functions.*

I *Asymptotic series* were introduced by Poincaré and Stieltjes at the end of the 19th century, and later on this notion was generalized in several ways. The first papers of Aljančić partially belong to this area, and the dissertation mentioned above was entirely dedicated to problems from this area. In other articles, Aljančić obtained several new asymptotic expansions.

II The *approximation theory* was concerned with approximation of the elements of a space of real functions by certain classes of trigonometric polynomials and the results consist mostly of *direct* and *inverse theorems, equivalence theorems,* and *saturation theorems.* Aljančić started to investigate this theory in 1957 and, as already mentioned, he cooperated with Favard in connection with this theory. In his works dedicated to this theory, he studied various approximation procedures, especially in connection with saturation classes and orders of approximation for saturations.

III In the area of *trigonometric series* Aljančić, alone or together with Bojanić and Tomić, used slowly varying functions to genaralize, among others, theorems concerned with the asymptotic behavior of *sine* and *cosine* series and with the relationship between the integrability of some functions and convergence of the corresponding series. He also investigated some problems in connection with Fourier series transformed by multiplication of their coefficients by given coefficients.

IV The study of *summability* has a long and abundant tradition in Serbia. Before and after World War II, Karamata and many of his followers led intensive investigations concerned with these problems. Results in this area are the so-called *direct* (Abelian), *inverse* (Tauberian) and *Mercerian* theorems. Aljančić obtained important results in many articles dealing with summability, mainly concerned with the Mercerian topic.

V Aljančić's works that belong to *regular variation (regularly varying functions)* are among the most important of his works. Slowly (and together with them regularly) varying functions were introduced by Karamata in the early thirties of the 20th century. Karamata gave foundation of this theory and found its various applications. Later on, several authors, from Serbia and from abroad, contributed to the further development of this theory and to its various applications. Together with Bojanić and Tomić, with Karamata, or alone, Aljančić applied these functions to the investigation of the behavior of sums of trigonometric series, to the problem of integrability of these sums and to a problem concerned with Frullani integral. Two of his articles belong to the theory of regular variation in the broad sense. The first one, joint with Bojanić and Tomić, contains a systematic study of the so-called *slowly varying functions with a remainder term,* while the second one, joint with D. Arandjelović, develops the theory of the so-called *O-regularly varying functions.* These functions were considered by Karamata and Avakumović already in the thirties, but Aljančić and Arandjelović went much further in their investigations and also found some applications.

There are many reasons to assert that the year-lasting teaching work of Slobodan Aljančić was almost as important for us as his scientific contributions. The quality of his lectures and other forms of his teaching merit a special emphasis. Moreover, he wrote several very good textbooks, only two of which he managed to publish as books. He was the supervisor for several doctoral and masters theses, giving to his students a real and essential help. One has to emphasize especially his merits, at the teaching, as well as at the scientific level, for introducing functional analysis in Serbia.

As a man and as a colleague, Professor Aljančić had a special kindness and warmth and also a very concentrated, calm and constructive behavior in all circumstances.

Academician, Professor Slobodan Aljančić was one of the most prominent, central persons in what could be considered as a link, a bridge, between generations of Serbian mathematicians belonging already to the past, whose leading representatives were Mihailo Petrović, Bogdan Gavrilović, Nikolaj Saltikov, Tadija Pejović, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Radivoje Kašanin, Vojislav Avakumović and Dragoljub Marković, on the one side, and the present generation of mathematicians – on the other side.

ДУШАН АДАМОВИЋ

Присуство Михаила Петровића у савременој науци

Ја сам мислио да ово моје излагање треба да пружи летимичну слику целине математичког научног рада Михаила Петровића, мада је о томе прошли пут било речи. Сада ћу се оријентисати на присуство Михаила Петровића у савременој науци, иако његово дело није „савремено" у најбуквалнијем смислу. Данас Михаило Петровић није непосредно присутан, из његових радова нису директно произашли садашњи токови науке, али јесте у једном ширем смислу – у смислу антиципације, наговештавња, предвиђања, или опште оријентације у смеру у којем је ишао развој науке у његовом, па и у данашњем времену. Ипак ћу морати да се вратим на неке ~~научне~~ основне ствари, на главне моменте лика Михаила Петровића као научника, посебно као математичара.

Случајно је испало да се овај програм организује у години јубиларних датума – 135 година од Петровићевог рођења и 60 година од његове смрти. И то је можда право време да се са ове временске дистанце сагледава Михаило Петровић. Не мислим да смо ми сада овде на неком симпозијуму на коме наши судови треба дефинитивно да поставе ствари на своје место, али ово је повољна прилика: да је та дистанца много већа, поглед би био магловитији, поред осталог и стога што се за многе ствари из прошлости, нарочито из прошлости наука, губи интерес (осим за оне највеће, остало је предмет интересовања ужих и најужих специјалиста); да је много мања, ту би било људи који су са њим били у контакту и памте га, који су према њему били у неком емотивном односу, и слика би опет била више или мање искривљена, али на други начин. Узгред, оних који су били његови ђаци и са њим били у непосредном и живом контакту скоро да и нема. Има их ипак још неколико: то су професори Ћетковић и Булатовић, али они су толико стари да њихово појављивање овде не би било од користи. Имамо ипак једног од нас који није његов бивши ђак, него је био дечак у последњим годинама Петровићевог живота; то је мој добар пријатељ и школски друг Предраг Ђуричић, син књижевника Младена Ђуричића, у чију је кућу Петровић долазио све до пред смрт. Он ће вам говорити о свом сећању на то време.

Наравно, треба свакако ценити наше вредности и достигнућа. Она Петровићева и других истакнутих научника треба истицати и осветљавати, али с правом мером и у пуној сагласности са истином и реалним деминзијама њиховог дела.

Дело Михаила Петровића је за своје време, које није било кратко, представљало знатно унапређење наше математике, и то како у сфери научног рада тако и на подручју универзитетске наставе, стварања подмлатка и подстицања других. Наиме, све до пред крај 19. века код нас је математика била на доста ниском нивоу. Њену универзитетску наставу водили су махом аматери, нестручњаци, чији су курсеви били непотпуни и несолидни, а о научном раду није се скоро могло ни говорити. Нешто касније, крајем овог века, стање је у извесној мери побољшано када је на сцену ступило неколико математичара који су имали комплетно образовање – дипломе, па и докторате стечене на страним универзитетима. На пример, Петар Живковић је завршио исти факултет као неких тридесет година после њега Алберт Ајнштајн – Политехнички институт у Цириху, који је имао више одсека, од којих се на некима изучавала чиста наука (физика и математика), а неки су активности; међутим, некако прећутно су се унапред мирили са тим да буду научници локалног значаја. Михаило Петровић, чије укупно дело представља већ знатно значајнији и даљи корак напред, још као студент се, свесно и вољно, оријентисао на науку на нивоу тадашњег центра светске математике – Париза. То је тамо било време изузетног полета, када су живели и радили велики Поенкаре (за кога кажу да је ишао двадесет и више година испред свог времена, не само својим наговештајима, већ ефективним радовима), Ермит, Дарбу, Апел, Пикар, Пенлеве и други. Отишао је тамо, бриљантно завршио студије и већ као ђак написао рад о униформним интегралима алгебарских диференцијалних једначина; његови резултати одмах су ушли у Пикаров уџбеник, заправо монографију *Traité d'analyse*, који је требало да у пречишћеном облику синтетише сва актуелна знања из математичке анализе. Не знам да ли би се који наш математичар из каснијих, па и данашњег времена могао похвалити таквим врхунским успехом на самом почетку своје научне каријере!

Данас су многи склони да са неком резервом, неким ниподаштавањем и са позиције супериорности, веће или мање, посматрају Михаила Петровића. Овоме се надмоћно супротставља чињеница да је он објавио дела те врсте усред Париза, без икакве подршке и протекције, чак и без државне финансијске помоћи, коју му је пружио само његов деда. Те исте године кад је дипламирао он је и докторирао – докторат му је од раније био спреман – пред комисијом коју су чинили: већ стар али још увек активан Ермит, Пенлеве и Пикар (тим редом по значају) и добио одличну оцену. Један од главних резултата у овој докторској дисертацији био је потпуно решење питања када алгебарска диференцијална једначина првог реда, тј. једначина чија је лева страна алгебарски полином по y и y' са произвољним функцијама од x као коефицијентима, има од интеграционих констаната независне све бесконачности, односно све нуле, својих решења. Покушаћу, у оваквој ситуацији у којој сам, без табле и креде и служећи се само речима и са нешто мало гестикулације рукама, да вам формулишем Петровићеве теореме које решавају ове проблеме. Наиме, ако су m_i и n_i редом степени на којима у i-том члану поменутог полинома фигуришу функција y и њен извод y', и ако M_i означава збир $m_i + n_i$, посматра се прво скуп свих тачака (M_i, n_i) у правоуглом координатном систему. Затим се међу овим тачкама уочава тачка A која има највећу апсцису, и уједно највећу ординату уколико таквих тачака са максималном апсцисом има више, а са B означена она од тачака са најмањом апсцисом чија је ордината највећа, па се у директном смеру окреће полуправа са почетком у A док она не наиђе на прву од тачака (M_i, n_i) и та тачка, односно од A најудаљенија таква тачка уколико их има више, изначена са C, споји помоћу дужи са A, и потом на тачку C примени исто окретање полуправе као у случају тачке A, и тај поступак настави. Кад се тако добијеној полигоналној линији још додају ординате тачака A и B и дуж која спаја подножја тих ордината, добија се конвексан полигон, такозвани *фигуративни* *полигон* посматране диференцијалне једначине. Јасно је да могу постојати највише два највиша темена овог полигона, лево и десно, при чему се у случају постојања само једног таквог темена по конвенцији оно може назвати и левим и десним. Према првој Петровићевој теореми, решење диференцијалне једначине има само од констаната независне (такозване *непокретне*) бесконачнности ако и само ако је десно највише теме њеног фигуративног полигона тачка *A*. Четврта теорема тврди да су све нуле решења непокретне ако и само ако је лево највише теме тачка *B*. Непосредна последица ове две теореме је тврђење шесте теореме, да су све нуле и све бесконачности решења непокретне ако и само ако је фигуративни полигон правоугаоник или вертикална дуж. Овим теоремама прикључено је у дисертацији више сличних и допунских резултата, којима је постигнута целовита и исцрпна обрада читаве групе проблема и од далекосежног је теоријског значаја.

Допустићу себи закључак да како наведени Петровићеви елегантни резултати, којима су у крајње једноставном облику – условима чију формулацију би лако схватила и особа без математичког образовања – постигнута потпуна решења одговарајућих проблема, тако и целина његове дисертације – носе знак и сјај истинске генијалности.

Михаило Петровић враћа се у Србију, постаје редовни професор и академик, има велики број радова, у првих десет година првенствено из диференцијалних једначина, али и из алгебре, односно теорије полинома, коју третира са становишта анализе, затим из теорије комплексних функција, што је по некима његова још најзначајнија област. Према речима академика Томића, „давао је тада своје најбриљантније радове које су прихватала многа велика имена и њима се даље бавили". Паралелно са овим, бави се и хемијом, физиком, електрохемијом, у вези са диференцијалним једначинама и са идејом конструисања аналогних рачунских машина. Просто је невероватно, како је говорио професор Томић, да се човек истовремено бави са два или три разнородна проблема, а камоли са две или три различите науке. Кад је делатност толико обимна и разноврсна, увек се може приговорити да је у питању површност. Ово у Петровићевом случају не стоји: он је просто био велики радник, прегалац, имао је обиље идеја које су из њега извирале.

Паралелно са свим тим код њега се рађа и математичка феноменологија, у низу радова, прво у једном скромном раду о геометрији масе, па у његовој приступној академској беседи, и онда у импозантном делу *Елементи математичке феноменологије*. Многи би рекли да је то било претакање једног истог, али није тако: свако од тих дела имало је специфичне и нове аспекте. Та област и друга, можда мање значајна и у коначном исходу не баш успела – теорија спектара, представљају антиципацију многих тенденција и идеја савремене математике. Те две области, да и не говорим о осталима, ако се и не могу подвести под одређене дисциплине и токове модерне математике и уклопити у њих, у суштини предтављају тежњу истог усмерења – пре свега својом отвореношћу ка далекосежној и смелој апстрактној комбинаторици, ка превазилажењу конвенционалних граница математике, и граница између математике и других научних, па и ваннаучних сфера. То је теза којој се може дати опсежно ближе образложење.

Понекад се математичка каријера Михаила Петровића дели на две фазе: прва је трајала до Првог светског рата, а друга после њега. Овој подели често се прикључује оцена да је у тој другој фази дошло до пада и засићености. Ја се са тим мишљењем не могу сложити. Тачно је да он тада није објављивао радове истим темпом као раније. Професор Томић у својој краткој, али обухватној и иначе изврсној студији о Петровићу објашњава то „нашом средином“. Склон сам да ово пре објашњавам објективним околностима: Србија је много страдала у Првом светском рату, више него иједна друга земља (изузимајући, можда, Русију). Београд је био скоро читав срушен, као и његов Универзитет. Кад се вратио у земљу, Михаило Петровић је имао задатак да обнови и реорганизује наставу математике, а првих десет година био је скоро сам. Имао је неке асистенте, али од двојице у које се у почетку највише уздао, први, Сима Марковић – и да није као лидер комуниста био прогањан – престао би, што се касније и десило, да се озбиљно бави математиком и сав се посветио политици, а други, Младен Берић, напустио је убрзо Факултет због личне афере. И земља је била проширена, а његов задатак је био не само да наставу обнови и унапреди, већ и да много шире него раније помаже научни подмладак, научни рад. У том периоду код њега је одбрањено 12 докторских дисертација; био је коректан и широкогруд према онима који нису радили докторате из његове области, чинећи све да им у вези са њиховим темама помогне. А што се тиче његових научних радова објављених у овом периоду, може се констатовати да, иако су они били мање бројни од оних ранијих и мање значајни од већине њих, ниједан од тих радова није био без значаја и вредности. Све ово га није спречило да даље ради на својој области – математичкој феноменологији. Написао је тада и једну књигу изванредних стилских и других квалитета – *Феноменолошко пресликавање*; она се може читати као литерарно штиво.

Старост га је сустигла, а он је поред свих тих активности у позним годинама кренуо у научне експедиције – и то ка Северном полу. Није тамо ишао као обичан путник, него са научним инструментима, картама и литературом, са коплетном истраживачком опремом. На тим путовањима неуморно истражује све крајеве кроз које пролази, посматра све феномене у природи око њега и код живих бића на која наилази. Резултате ових путовања записао је у више путописних дела изузетне и документарне и литерарне вредности. И тако је он своје суочавање са наилазећим позним животним добом – остајући веран свом познатом свестраном активизму, може се рећи и авантуризму, у најбољем значењу речи – обележио на најлепши и најдостојнији начин. У једном роману, не могу да се сетим чијем, прочитао само овакву девизу једне личности: „Са упереним копљем наступам насупрот старости, болести и смрти.“

И на крају, зашто бисмо ми њега оцењивали строже него што се највећи светски научници оцењују. Кад прође, најпродуктивнији, младалачки период, најчешће се не дају истим темпом и у истој мери кључне ствари на главним пољима науке. Њутн је, на пример, главне ствари дао до своје 40–45 године, после је радио као стручњак за тегове и новац, а у науци се бавио безначајним питањима. И Ајнштајн је све важно написао до 35–40 године, а после тога је, без правог успеха, покушао да изгради теорију универзалног поља. Расел, који је веома дуго живео, своје главне резултате у математичкој логици, математици и филозофији дао је до 45. године. Зашто би се од Михаила Петровића више тражило?

Проф. др **Душан Адамовић**, редовни професор Природно математичког факултета у пензији.

Рођен је 1928. г. у Пећи. Дипломирао је на Природно математичком факултету у Београду на Групи за математику 1953.г. где је и докторирао 1965. (*Споро променљиве функције у теорији тригонометријских редова*). На истом факултету радио је као наставник у свим звањима за предмете: Анализа 1, Анализа 2 и Функционална анализа.

Аутор је 2 књиге, 31 научног рада, 18 стручних радова.

Главна дела: *Резултати из теорије и примена правилно примењивих функција, Резултати о неједнакостима у нормираним просторима и резултати у вези са понашањем реалних и комплексних низова.*

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

Il est désirable d'adjoindre aux problèmes qui doivent être originaux, leurs solutions ainsi que d'autres informations, surtout sur la littérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

---

117. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Trouver toutes les solutions en nombres naturels x, y, z de l'équation $x^{y^z} = z^{y^x}$.

118. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Trouver, d'une façon élémentaire, tous les nombres pentagonaux carrés $\left(\text{Un nombre est appelé } \textit{pentagonal}, \text{ s'il est de la forme } P_k = \frac{k(3k-1)}{2}\right.$ où $\left.k = 1, 2, \dots\right)$

119. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Trouver tous les nombres triangulaires qui sont en même temps pentagonaux $\left(\text{c'est-à-dire de la forme } P_k = \frac{k(3k-1)}{2}, \text{ où } k \text{ est un entier positif}\right)$.

120. *Proposé par W. Sierpiński, Warszawa*

Trouver tous les nombres naturels n qui divisent le nombre $2^n - 1$.

121. *Proposed by Jože Vrečko, Ljubljana*

Let be

$$S_n^m = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \nu^m, \; m, n \in N.$$

Prove

$$S_n^m = 0 \text{ for } m < n$$

$$S_n^n = (-1)^n n!,$$

and

$$S_n^m = (-1)^n m! \sum_{r=1}^{m-n} \sum \frac{1}{k_{i_1}! \, k_{i_2}! \dots k_{i_r}!} \binom{n}{r} \quad \text{for } m > n,$$

where the summation is taken over all permutations of $k_1, k_2 \dots k_r \geqslant 2$ for which is $k_1 + k_2 + \dots + k_r = m - n + r$.

122. *Proposed by D. S. Mitrinović and D. Ž. Đoković, University of Belgrade.*

Prove the inequality

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^{\lambda} \geqslant \frac{(n^2+1)^{\lambda}}{n^{\lambda-1}},$$

where

$$x_k>0, \ \sum_{k=1}^{n} x_k=1, \text{ and } \lambda>0.$$

123. *Предложио Момир С. Станојевић, Универзитет, Ниш*

Са $T_s: E^2 \to E^2$ означено је пресликавање које транслира раван E^2 у правцу x-осе за величину s, тј. $T_s:(x, y) \to (x+s, y)$.

Нека је једначином $y=f(x)$, $x \in (0, r)$ дефинисана непрекидна крива C која спаја тачке $(0, 0)$ и $(r, 0)$. Доказати следеће тврђење:

(а) Ако је $\frac{r}{s}=n$ (n природан број), тада је $C \cap T_s(C) \neq \varnothing$.

(б) Ако је $\frac{r}{s}=q$ (q није природан број), тада постоји крива C таква да је $C \cap T_s(C)=\varnothing$.

Да ли се ово тврђење може уопштити за произвољну непрекидну криву C која спаја тачке $(0, 0)$ и $(r, 0)$?

124. *Proposed by R. R. Janić, University of Belgrade*

Let h_a, h_b, h_c be the altitudes and r_a, r_b, r_c radii of excircles of a triangle ABC. Then

$$\frac{r_a}{h_b+h_c}+\frac{r_b}{h_c+h_a}+\frac{r_c}{h_a+h_b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Equality holds if and only if the triangle is equilateral.

Prove the above proposition.

РЕШЕНИ ПРОБЛЕМИ

84. *Proposé par S. B. Prešić, Université de Belgrade*

Soit k un nombre naturel et soient a et b nombres tels que $b \geqslant 0$, $a>k$. Démontrer la convergence de la suite x_n satisfaisant à la condition:

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \geqslant 0;$$

$$x_{n+k}=b+\sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_{n+i}}{a+x_{n+i}^2} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Solution de D. D. Adamović, Université de Belgrade

Posons $\alpha=\frac{k}{a}\,(\in(0, 1))$, $\beta=\operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant k} |x_{\nu+1}-x_\nu|$ et $f(t)=\frac{t}{a+t^2}$. Étant donné que l'on a, pour tout t réel,

$$|f'(t)|=\frac{|a-t^2|}{(a+t^2)^2}\leqslant\frac{a+t^2}{(a+t^2)^2}=\frac{1}{a+t^2}\leqslant\frac{1}{a},$$

on obtient

$$|x_{n+k+1}-x_{n+k}|=\left|\sum_{i=0}^{k-1}[f(x_{n+i+1})-f(x_{n+i})]\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}|f(x_{n+i+1})-f(x_{n+i})|\leqslant\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{k-1}|x_{n+i+1}-x_{n+i}| \qquad (n=1,\, 2,\, \ldots).$$

Il en résulte

$$|x_{k+2}-x_{k+1}|\leqslant\alpha\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_{2k+1}-x_{2k}|\leqslant\alpha\beta$$
$$|x_{2k+2}-x_{2k+1}|\leqslant\alpha^2\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_{3k+1}-x_{3k}|\leqslant\alpha^2\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_{mk+2}-x_{mk+1}|\leqslant\alpha^m\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_{(m+1)k+1}-x_{(m+1)k}|\leqslant\alpha^m\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(m=1,\, 2,\, \ldots).$$

Donc,

$$|x_{\nu+1}-x_\nu|\leqslant\alpha^{\left[\frac{\nu-1}{k}\right]}\beta \qquad (\nu=1,\, 2,\, \ldots)$$

et par conséquent, pour $n=1,\, 2,\, \ldots,\; p=1,\, 2,\, \ldots,$

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\sum_{\nu=n}^{n+p-1}[x_{\nu+1}-x_\nu]\right|\leqslant\sum_{\nu=n}^{n+p-1}|x_{\nu+1}-x_\nu|$$

$$\leqslant k\,\alpha^{\left[\frac{n-1}{k}\right]}\beta\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu<\frac{k\beta}{1-\alpha}\,\alpha^{\frac{n}{k}},$$

ce qui signifie que la suite x_n est une suite de Cauchy, c'est-à-dire convergente.

On peut remarquer que la suite x_n reste convergente si l'on supprime les conditions $b\geqslant 0$; $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k\geqslant 0$.

85. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade*

Déterminer les constantes réelles a $(a>0)$ et b sous la condition que l'inégalité

$$|e^z|\leqslant|1+z|\;|1+b|z||$$

soit valable pour tout nombre complexe z qui vérifie la condition $|z|\leqslant a$.

Solution de S. B. Prešić et D. D. Adamović, Université de Belgrade

On a le résultat suivant:

1° Si $a \geqslant 1$, l'inégalité

$$(1) \qquad |e^z| \leqslant |1+z|\ |1+b|z|| \qquad (z \text{ nombre complexe et } |z| \leqslant a)$$

n'est satisfaite pour aucun nombre réel b.

2° Pour tout $a \in (0,\ 1)$ la meilleure constante réelle possible b dans (1) est

$$b = \frac{e^{-a} + a - 1}{a(1-a)} \quad (>0).$$

Avec cette valeur-là de b, l'égalité dans (1) n'est atteinte que pour $z=0$ et $z=-a$.

Démonstration. 1° résulte immédiatement du fait que pour $z=-1$ le premier et le second membre de (1) deviennent e^{-1} et 0, respectivement.

2° Soit $0<a<1$. La constante b dans (1) ne pourrait pas être négative ou zéro, puisque pour $z>0$ on a $|e^z| = e^z > 1+z = |1+z|$ et par conséquent, avec $z>0$ et suffisamment petit, $1+bz = |1+bz| > 1$, d'où $b>0$. C'est pourquoi l'inégalité (1) peut être écrite sous la forme

$$|e^z| \leqslant |1+z|(1+b|z|) \qquad (z \text{ complexe et } |z| \leqslant a).$$

En posant $|z| = \rho\ (>0)$, $z = \rho\, e^{ti}$, on obtient:

$$\left|\frac{e^z}{1+z}\right|^2_{z=\rho} = \frac{e^{2\rho\cos t}}{1+\rho^2+2\rho\cos t} = \frac{e^{\rho u}}{1+\rho^2+\rho u} \overset{\text{def}}{=} f(\rho,\ u) \quad (u = \cos 2t),$$

$$f_u'(\rho,\ u) = \frac{\rho^2 e^{\rho u}(\rho+u)}{(1+\rho^2+\rho u)^2},$$

de manière que la plus grande des valeurs

$$\left|\frac{e^z}{1+z}\right|_{z=-\rho} = \frac{e^{-\rho}}{1-\rho} \quad \text{et} \quad \left|\frac{e^z}{1+z}\right|_{z=\rho} = \frac{e^{\rho}}{1+\rho}$$

est le maximum de $\left|\frac{e^z}{1+z}\right|$ pour $|z| = \rho \in (0,\ 1)$. Or, on démontre aisément l'inégalité

$$\frac{e^{-\rho}}{1-\rho} > \frac{e^{\rho}}{1+\rho} \qquad (0<\rho<1).$$

Donc,

$$(2) \qquad g(\rho) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{-\rho}}{1-\rho} = \max\left\{\left|\frac{e^z}{1+z}\right| : |z| = \rho\right\} \ (\rho \in (0,\ 1)).$$

Etant donné que l'on a

$$g''(\rho) = \frac{e^{-\rho}(1+\rho^2)}{(1-\rho)^3} > 0 \qquad (0<\rho<1),$$

le plus petit nombre b pour lequel $g(\rho)\leqslant 1+b\rho=g(0)+b\rho$ $(0\leqslant\rho\leqslant a<1)$ est

$$b=\frac{g(a)-1}{a}=\frac{e^{-a}+a-1}{a(1-a)}$$

et avec cette valeur-là de b on a

$$g(\rho)<1+b\rho \qquad (0<\rho<a).$$

Les deux assertions 2° résultent immédiatement des faits qu'on vient d'établir.

Remarques. 1° La formule (2) conduit au résultat suivant plus général:

$$\frac{e^{-\rho}}{1-\rho}\leqslant h(\rho)\ (\rho\leqslant a<1)\ \Rightarrow\ \left|\frac{e^z}{1+z}\right|\leqslant h(|z|)\ (|z|\leqslant a<1).$$

2° On peut obtenir, avec $0<a<1$, une valeur pour b (qui n'est pas la meilleure possible) comme il suit: si $|z|\leqslant a<1$, on a

$$\left|\frac{e^z}{1+z}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right|$$

$$=\left|1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\leqslant 1+|z|\,a\sum_{n=2}^{\infty}a^{n-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1-a}|z|=|1+b_1|z||,$$

avec

$$b_1=\frac{a}{2(1-a)}.$$

(On établit sans difficulté directement que $b_1>b$.).

3° Le procédé précédent fournit aussi l'inégalité suivante

$$|e^z|\leqslant|1+z|\,|1+b_2|z|^2| \qquad \left(|z|\leqslant a<1;\quad b_2=\frac{1}{2(1-a)}\right).$$

Résolu aussi par I. Lazarević

86. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade*

Déterminer tous les cercles

(1) $$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

à propriété que le segment d'une droite joignant les points (a, b) et (c, d) se trouve en dehors du domaine

(2) $$(x-p)^2+(y-q)^2\leqslant r^2.$$

Généraliser ce problème à une sphère et à un segment d'une droite.

Rešenje I. Lazarevića, Univerzitet u Beogradu

Neka je $O_1\xi\eta$ pravougli koordinatni sistem iste orijentacije kao i sistem Oxy, gde je O_1 središte duži $AB\,(A(a, b),\ B(c, d))$ i neka osa ξ ima pravac kao i data duž AB. U ovom sistemu krajnje tačke date duži imaju reprezentaciju $(-s, 0)$, $(s, 0)$ gde je $s=\frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Tačke preseka kruga

$$(\xi-p')^2+(\eta-q')^2=r^2 \tag{3}$$

sa ξ-osom određene su sa

$$\xi_{1,2}=p'\pm\sqrt{r^2-q'^2}.$$

Krug (3) neće imati zajedničkih tačaka sa duži AB ako je

$$|q'|>r \vee \xi_{1,2}>s \vee \xi_{1,2}<-s. \tag{4}$$

Kako je

$$p'\pm\sqrt{r^2-q'^2}>s \Leftrightarrow p'>s+\sqrt{r^2-q'^2}$$

i

$$p'\pm\sqrt{r^2-q'^2}>-s \Leftrightarrow p'<-s-\sqrt{r^2-q'^2}$$

to je uslov (4) ekvivalentan sa

$$|q'|>r \vee |p'|>s+\sqrt{r^2-q'^2}. \tag{5}$$

Transformacijom koordinata iz jednog u drugi sistem imamo

$$p'=\frac{(2p-a-c)\,(c-a)+(2q-b-d)\,(d-b)}{2\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}}$$

$$q'=\frac{-(2p-a-c)\,(d-b)+(2q-b-d)\,(c-a)}{2\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}},$$

pa se uvrštavanjem ovih vrednosti u (5) dobija traženi uslov:

$$|-(2p-a-c)\,(d-b)+(2q-b-d)\,(c-a)|>2r\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

ili

$$|(2p-a-c)\,(c-a)+(2q-b-d)\,(d-b)|>[(c-a)^2+(d-b)^2]+$$
$$+\sqrt{4r^2[(c-a)^2+(d-b)^2]-[-2p-a-c)\,(d-b)+(2q-b-d)\,(c-a)]^2}.$$

Generališući ovaj postupak, možemo za slučaj sfere

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2 \tag{6}$$

i duži AB $(A(a, b, c),\ B(c, d, f))$, uvesti novi koordinatni sistem $O_1\xi\eta\zeta$ tako da je O_1 središte duži AB a pravac ose ξ određen pravcem date duži. U ovom sistemu jednačina sfere (6) glasiće

$$(\xi-p')^2+(\eta-q')^2+(\zeta-r')^2=R^2. \tag{7}$$

Sfera (7) ne seče duž AB ako je

$$q'^2+r'^2>R^2 \vee |p'|>s+\sqrt{R^2-q'^2-r'^2}. \tag{8}$$

gde je $s=\frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2+(d-b^2)+(f-e)^2}$.

Transformacijom koordinata mogu se veličine p', q', r' izraziti preko p, q, r, pa se posle smenjivanja istih u (8) dobija traženi uslov.

Primetimo da položaj koordinatnog sistema $O_1\xi\eta\zeta$ nismo u potpunosti precizirali. Kako je položaj njegovih osa η i ζ delimično proizvoljan to se iste mogu uzeti tako da računi budu jednostavniji.

89 *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Calculer la limite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\left(a-x+\dfrac{1}{2x}\right)^2}.$$

Solution de D. Ž. Đoković, Université de Belgrade.

L'intégrale donnée $J(a)$ après la substitution $y=a-x+1/2x$ prend la forme suivante

$$J(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\left(1+\frac{a-y}{\sqrt{(a-y)^2+2}}\right)dy=\pi+I(a)\cdot\frac{1}{2},$$

où

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a-y-\sqrt{(a-y)^2+2}}{(1+y^2)\sqrt{(a-y)^2+2}}\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(a,y)}{1+y^2}\,dy.$$

Nous allons prouver que $I(a)\to 0$, $J(a)\to\pi$ $(a\to+\infty)$. On a des inégalités évidentes

$$|f(a,y)|<\frac{4}{a^2}\qquad (2y<a,\ a>0),$$

$$|f(a,y)|<2\qquad (-\infty<y<+\infty).$$

Soit $\varepsilon>0$ arbitraire. Il existe $b>0$ tel que

$$\frac{4\pi}{b^2}<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \int_{b/2}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Si $a>b$, on trouve

$$\left|\int_{-\infty}^{a/2}\frac{f(a,y)}{1+y^2}\,dy\right|\leqslant\frac{4\pi}{a^2}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{a/2}^{+\infty}\frac{f(a,y)}{1+y^2}\,dy\right|<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela implique

$$|I(a)|\leqslant\left|\int_{-\infty}^{a}\right|+\left|\int_{a}^{+\infty}\right|<\varepsilon\qquad (a>b),$$

ce qui achève la démonstration.

Rešenje M. Taskovića, Beograd

Ako se u integralu

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\left(a-x+\dfrac{1}{2x}\right)^2}$$

izvrši smena

$$a-x+\frac{1}{2x}=t \Rightarrow \left(dx=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{t-a}{2\sqrt{(t-a)^2+2}}\right\}dt\right),$$

dobija se

(1) $$I(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t-a}{(1+t^2)\sqrt{(t-a)^2+2}}\,dt.$$

Kako

$$\left|\frac{t-a}{(1+t^2)\sqrt{(t-a)^2+2}}\right|=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{|t-a|}{\sqrt{(t-a)^2+2}}<\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{|t-a|}{|t-a|}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$(-\infty<a<+\infty),$$

drugi integral u (1) uniformno konvergira za $a\in(-\infty,\ +\infty)$. Stoga

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t-a}{(1+t^2)\sqrt{(t-a)^2+2}}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{a\to+\infty}\frac{t-a}{(1+t^2)\sqrt{(t-a)^2+2}}\,dt$$

(2) $$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=-\pi.$$

Prema (1) i (2),

$$\lim_{a\to+\infty}I(a)=\pi.$$

Primedba. Iz prethodnog neposredno izlazi i da je

$$\lim_{a\to-\infty}I(a)=0.$$

Le problème est résolu aussi par l'auteur.

90. *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Soit $f(t)$ une fonction réelle mesurable et bornée sur $(0,\ +\infty)$ et tendant vers zéro lorsque $t\to+0$, et soit $g(t)\in L(0,\ +\infty)$. Démontrer qu'on a

$$\lim_{x\to+0}\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)\,du=0.$$

Solution de D. Ž. Đoković, Université de Belgrade.

D'après les hypothèses on a

$$|f(t)| \leqslant M < +\infty \qquad (t \in (0, +\infty)),$$

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt = N < +\infty.$$

Chosissons d'abord $\varepsilon > 0$ arbitrairement. Pour $0 < a < b < +\infty$ on a

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du = \left(\int_0^a + \int_a^b + \int_b^{+\infty}\right) f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du. \tag{1}$$

Etant donné que $g(t) \in L(0, +\infty)$ et $f(t) \to 0$ $(t \to +0)$ nous pouvons choisir a, b, c de telle façon qu'on ait

$$\int_0^a |g(u)|\, du < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad \int_b^{+\infty} |g(u)|\, du < \frac{\varepsilon}{3M},$$

$$|f(t)| < \frac{\varepsilon}{3N} \qquad (t \in 0, c)).$$

Enfin choisissons $\delta > 0$ tel que $\delta < ac$. Pour $x \in (0, \delta)$ on obtient

$$\left|\int_0^a f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\int_b^{+\infty} f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\int_a^b f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En utilisant (1) cela implique que

$$\left|\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{u}\right) g(u)\, du\right| < \varepsilon \qquad (0 < x < \delta),$$

ce qui finit la démostration.

Résolu aussi par l'auteur.

91. *Dostavio D. D. Adamović, Univerzitet u Beogradu*

1° Neka je $(S, \leqslant)$ totalno uređen skup sa osobinom da je za svako $a \in S$ skup $[a, +\infty)$ relacijom $\leqslant$ dobro uređen ($[a, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \{t: a \leqslant t \in S\}$) i neka funkcija f preslikava skup S u skup T uređen relacijom poretka $\leqslant_1$. Dokazati da tada uslov:

(C) za svako $x \in S$ postoji $y \in S$ takvo da je $y < x$ i da funkcija f monotono (strogo monotono) raste na intervalu $[y, x] \overset{\text{def}}{=} \{t: y \leqslant t \leqslant x,\ t \in S\}$— povlači monotono (strogo monotono) rašćenje funkcije f na S.

2° Ispitati da li bi prethodno tvrđenje ostalo tačno ako se: α) ne bi zahtevalo da je $(S, \leqslant)$ totalno uređen skup; β) pretpostavka o $(S, \leqslant)$ iskazana prvom rečenicom pod 1° zamenila pretpostavkom da je $(S, \leqslant)$ samo totalno uređen skup, zamenjujući istovremeno u uslovu (C) interval $[y, x]$ intervalom $[y, z]$ sa $y < x < z$.

Rešenje autora

1° Pretpostavimo da funkcija f koja ispunjava uslov (C) sa nestrogom monotonijom nije monotono rastuća na S. Tada postoji $a \in S$ takvo da skup $S_a = \{x : x > a$ i nije $f(a) \leqslant_1 f(x)\}$ nije prazan. Prema pretpostavci o $(S, \leqslant)$, postoji $b = \operatorname{Min} S_a$, a prema (C) postoji onda $c < b$ takvo da je funkcija f monotono raste na $[c, b]$. Ne može biti $c < a$, jer bi se u tom slučaju imalo $f(a) \leqslant_1 f(b)$. Iz $a \leqslant c < b$, međutim, sledilo bi $f(a) \leqslant_1 f(c)$ i $f(c) \leqslant_1 f(b)$ i odatle ponovo $f(a) \leqslant_1 f(b)$. Dobijena protivrečnost dokazuje tvrđenje za ovaj slučaj.

Na sličan način dokazuje se varijanta tvrđenja koja odgovara uslovu (C) sa strogom monotonijom.

2° Ni u jednom od slučajeva α) i β) ne važi gornje tvrđenje, ni u jednoj od dve varijante.

Ovo za slučaj α) dokazuje primer uređenog skupa $S = \{0, -1, -2, \ldots\}$ koji se sastoji iz dva lanca

$$\cdots < -2k-1 < -2k+1 < \cdots < -3 < -1 < 0$$

i

$$\cdots < -2(k+1) < -2k < \cdots < -2 < 0,$$

pri čemu je svaki element $\neq 0$ prvog lanca neuporediv sa bilo kojim elementom $\neq 0$ drugog lanca, i funkcije f definisane na S jednakostima

$$f(-2k+1) = -k+2 \ (k = 1, 2, \ldots),\ f(-2k) = -k \ (k = 0, 1, \ldots).$$

Za slučaj β) napred rečeno dokazuje funkcija f definisana na skupu $S = R \setminus \{0\}$ (R skup realnih brojeva), sa uobičajenim poretkom, jednakošću $f(x) = -\dfrac{1}{x}$.

92. *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Soit $a<b$, f une fonction réelle continue et positive sur $[a, b]$ et $C[a, b]$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur $[a, b]$. Démontrer que la fonctionnelle

$$\omega(x)=\frac{\int_a^b dt\int_a^t f(u)\,e^{x(u)}\,du}{(b-a)\int_a^b f(u)\,e^{x(u)}\,du}\qquad (x\in C[a, b])$$

applique $C[a, b]$ exactement sur $(0, 1)$.

Solution de D. Ž. Đoković, Université de Belgrade.

La transformation

$$\varphi: x(t)\to X(t)=\int_a^t f(u)\,e^{x(u)}\,du$$

applique $C[a, b]$ sur l'ensemble E de toutes les fonctions $X(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(a) $X(t)$ est continue et strictement croissante sur $[a, b]$ et $X(a)=0$,

(b) $X(t)$ a la dérivée première continue sur $[a, b]$; la dérivée à droite en a et la dérivée à gauche en b sont finis.

Avec la fonctionnelle

$$\psi(X)=\frac{1}{X(b)}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t)\,dt\qquad (X\in E)$$

on peut écrire $\omega(x)=\psi(\varphi(x))$. Donc, il suffit de démontrer que ψ applique E sur $(0, 1)$.

Le théorème de la moyenne donne $\psi(E)\subset(0, 1)$. Pour

$$X(t)=(t-a)^\alpha\ (\alpha\geqslant 1),\qquad Y(t)=(b-a)^\alpha-(b-t)^\alpha\ (\alpha\geqslant 1)$$

on trouve

$$\psi(X)=\frac{1}{\alpha+1},\qquad \psi(Y)=\frac{\alpha}{\alpha+1},$$

ce qui achève la démonstration.

Résolu aussi par l'auteur.

95. *Proposed by D. Ž. Đoković, University of Belgrade*

Let A be the matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & n & & & & \\ & 1 & n-1 & & & \\ & & 2 & n-2 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 1 \\ & & & & & n \end{bmatrix}$$

whose all entries below the diagonal and above the first super-diagonal are zeros. Find (i, j)-th entry of A^k where k is a positive integer.

Solution by D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines, Golden, Colo., U.S.A.

The (i, j)-th entry of A^k, deduced by inspection and demonstrated by induction, is

$$\sum_{t=0}^{j-i} \frac{(-1)^t C(j-i, t) P(n+1-i, j-i)(j-1-t)^k}{(j-i)!} \quad \text{for } i \leqslant j$$

and 0 for $j<i$.

(Note: I use $C(n, r)$ for $n!/r!\ (n-r)!$ and $P(n, r)$ for $n!/(n-r)!$)

Also solved by J. Vrečko, Ljubljana.

96. *Proposé par D. D. Adamović et B. Momčilović, Université de Belgrade*

Soit a un zéro d'ordre p ($\geqslant 2$) de la fonction

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

qui appartient à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1). Démontrer que a est un zéro d'ordre $p-q$ de la fonction

$$f_q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^q z^{k-1} \qquad (q = 1, \ldots, p-1).$$

Déduire quelques identités de cette proposition-là.

Solution des auteurs.

Si les constantes α_ν ($\nu = 1, \ldots, q$; $q = 1, \ldots, p-1$) sont déterminées de manière que l'on ait identiquement

$$\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu t(t-1)\ldots(t-\nu+1) = t^q,$$

ce qui est, comme on le sait, toujours possible, on aura dans l'intérieur du cercle de convergence de la série considérée

$$\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu z^{\nu-1} f^{(\nu)}_{(z)} = \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu z^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(k-1)\ldots(k-\nu+1) z^{k-\nu}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu k(k-1)\ldots(k-\nu+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^q z^{k-1} = f_q(z),$$

d'où l'assertion proposée.

Notons que l'on pourrait la démontrer aussi en procédant par induction, à l'aide de l'identité évidente

$$[z f_q(z)]' = f_{q+1}(z) \qquad (q = 1, \ldots, p-2).$$

Nous remarquons encore que l'on peut supposer, dans l'énoncé de la proposition démontrée, seulement que a soit un zéro d'ordre $p-1$ de la fonction $f'(z)$.

L'application au cas où $f(z) = (z-1)^n$ (n nombre naturel $\geqslant 2$) et $a = 1$ fournit les identités suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^q = 0 \qquad (q = 1, \ldots, n-1; \quad n = 2, 3, \ldots).$$

Il en résulte immédiatement une identité de forme générale

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = -P(0) \quad (P \text{ polynome arbitraire de degré } n-1; \ n = 2, \ldots)$$

et, comme cas particulier, l'identité 3° dans le problème **36** publié dans ce Bulletin.

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

Il est désirable d' adjoindre aux problèmes qui doivent être originaux, leurs solutions ainsi que d' autres informations, surtout sur la littérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

---

95. *Proposed by D. Ž. Đoković, University of Belgrade.*

Let A be the matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & n & & & & \\ & 1 & n-1 & & & \\ & & 2 & n-2 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 1 \\ & & & & & n \end{bmatrix}$$

whose all entries below the diagonal and above the first super-diagonal are zeros. Find (i, j)-th entry of A^k where k is a positive integer.

96. *Proposé par D. D. Adamović et B. Momčilović, Université de Belgrade*

Soit a un zéro d'ordre $p\,(\geqslant 2)$ de la fonction

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

qui appartient à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1). Démontrer que a est un zéro d'ordre $p-q$ de la fonction

$$f_q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^q z^{k-1} \quad (q = 1, \ldots, p-1).$$

Déduire quelques identités de cette proposition-là.

97. *Proposé par M. Stojaković, Université de Novi Sad*

Trouver (dans le plan euclidien) le plus grand cercle C qui peut être couvert par n cercles C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de radius donné r. (On considère que le cercle C est couvert par les cercles C_i si et seulement si tout point de C, intérieur ou non, est aussi le point d'au moins d'un des cercles C_i. Considérer surtout les cas $n = 5, 4, 5, 6, 7, 8$; les cas $n = 1, 2$ étant banales.

98. *Dostavio Pavle M. Miličić, Univerzitet u Beogradu.*

Neka je K kocka ivice a i S sfera poluprečnika b. Kazaćemo da sfera S dodiruje kocku K u tački M kocke, ako na površi kocke postoje bar dve različite duži, koje su na tangentama sfere koje prolaze kroz tačku M. Označimo sa E skup svih tačaka na sferama i u unutrašnjostima sfera S koje dodiruju kocku K.

Odrediti meru skupa E. Proučiti granični slučaj kad a teži nuli.

99. *Dostavio Pavle M. Miličić, Univerzitet u Beogradu.*

Neka je H realan hilbertov prostor i $S: H \to H$ neprekidan bijektivan operator takav da je $|(Sx, Sy)| = |(x, y)|$ za svako $x, y \in H$. Dokazati da je S unitaran operator na H.

100. *Proposé par P. M. Vasić, Université de Belgrade.*

Trouver la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x) + f(y) + f(ax + by) = 3 f\left(\frac{(a+1)x + (b+1)y}{3}\right),$$

où $a, b = \text{const} \in C$, $f: C \to C$ (C, ensemble des nombres complexes).

REŠENI PROBLEMI

27. *Predložio V. Vujičić, Univerzitet, Beograd.*

Pokazati da je osnovni kontravarijantni tenzor $a^{\alpha\beta}$ n-dimenzionog konfiguracionog prostora V_n jednak

$$a^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \qquad \begin{matrix} (\alpha, \beta = 1, \ldots, n < 3N) \\ (m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}), \end{matrix}$$

gde su x^i Dekartove koordinate položaja dinamičkih tačaka mase m_i, a q^α su Lagranžove generalisane koordinate.

Rešenje Mladena Berkovića, Vazduhoplovnotehnički institut, Beograd.

Osnovni kovarijantni tenzor n-dimenzionog konfiguracionog prostora

$$(1) \qquad a_{\beta\gamma} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q^\beta} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q^\gamma} \qquad (\beta, \gamma = 1, \ldots, n < 3N)$$

može se napisati u obliku

$$(1') \qquad a_{\beta\gamma} = m_{st} \frac{\partial x^s}{\partial q^\beta} \frac{\partial x^t}{\partial q^\gamma} \qquad (s, t = 1, \ldots, 3N)$$

gde je

$$(2) \qquad m_{st} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad s \neq t \\ m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k} & \text{za} \quad s = t. \end{cases}$$

Analogno iz predložene definicione jednačine osnovnog kontravarijantnog tenzora

$$(3) \qquad a^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i},$$

sledi

$$(3') \qquad a^{\alpha\beta} = m^{rs} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^s} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^r} \qquad (r, s = 1, \ldots, 3N).$$

Ovde je

$$(4) \qquad m^{rs} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad r \neq s \\ \dfrac{1}{m_{3k-2}} = \dfrac{1}{m_{3k-1}} = \dfrac{1}{m_{3k}} & \text{za} \quad r = s. \end{cases}$$

Na osnovu (2) i (4) je očigledno

$$m_{st}\, m^{rs} = \delta^r_t .$$

Izvršimo kompoziciju tenzora (1′) i (3′).

$$m_{st}\,\frac{\partial x^s}{\partial q^\beta}\,\frac{\partial x^t}{\partial q^\gamma}\, m^{rs}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^s}\,\frac{\partial q^\beta}{\partial x^r} = \delta^r_t\,\frac{\partial x^t}{\partial q^\gamma}\,\frac{\partial q^\beta}{\partial x^r}\,\delta^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\gamma .$$

Prema tome je tenzor (3′) kontravarijantni osnovni tenzor konf.guracionog prostora, iz čega dalje sledi valjanost definiocione jednačine (3), koju je i trebalo pokazati.

42. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade*

Démontrer l'identité suivante

$$\sum |(k-1)\, z_1 - z_2 - z_3 - \cdots - z_k|^2 = k \sum_{m,\,n}^{m<n} |z_m - z_n|^2 ,$$

où la sommation au premier membre s'étend à toutes les permutations cycliques des indices $1, 2, 3, \ldots, k$.

Solution de D. D. Adamović, Université de Belgrade

On a

$$\sum |(k-1)\, z_1 - z_2 - z_3 - \cdots - z_k|^2 = \sum \{(k-1)^2 |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_k|^2 -$$

$$-2(k-1)\,[R_e(z_1 \bar z_2) + R_e(z_1 \bar z_3) + \cdots + R_e(z_1 \bar z_k)] +$$

$$= 2\,[R_e(z_2 \bar z_3) + \cdots + R_e(z_2 \bar z_k) + R_e(z_3 \bar z_4) + \cdots + R_e(z_{k-1} \bar z_k)]\} =$$

$$= [(k-1)^2 + (k-1)] \sum_{\nu=1}^{k} |z_\nu|^2 + 2\,[(k-2) - 2(k-1)] \sum_{m,\,n}^{m<n} R_e(z_m \bar z_n) =$$

$$= k \left[(k-1) \sum_{\nu=1}^{k} |z_\nu|^2 - 2 \sum_{m,\,n}^{m<n} R_e(z_m \bar z_n)\right] =$$

$$= k \sum_{m,\,n}^{m<n} [|z_m|^2 + |z_n|^2 - 2\, R_e(z_m \bar z_n)] = k \sum_{m,\,n}^{m<n} |z_m - z_n|^2 .$$

Résolu aussi par I. Lazarević.

74. *Proposed by M. S. Popadić, University of Belgrade*

Let $p_1, p_2, \ldots, p_n$ be n arbitrary different prime numbers and x be a positive number. Prove the asymptotic formula

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim \frac{\log^n x}{n!\, \log p_1 \log p_2 \cdots \log p_n} ,$$

where $\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is the number of all the natural numbers of the form $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$ ($s_1, s_2, \ldots, s_n$ non-negative integers) not exceeding x.

Rešenje autora

$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ predstavlja broj rešenja nejednačine

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n} \leqslant x, \tag{1}$$

tj. broj različitih uređenih slogova $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ za koje je zadovoljena prethodna jednačina.

Dokaz tvrđenja u zadatku izvešćemo pomoću matematičke indukcije.

Za $n=1$ (1) postaje $p_1^{s_1} \leqslant x$, pa je broj rešenja ove nejednačine

$$\lambda(x; p_1) = \left[\frac{\log x}{\log p_1}\right]$$

odakle sleduje

$$\lambda(x; p_1) \sim \frac{\log x}{1! \log p_1},$$

što znači da je stav tačan za $n=1$.

Pošto je prema (1)

$$p_2^{s_2} p_3^{s_3} \cdots p_n^{s_n} \leqslant \frac{x}{p_1^{s_1}}$$

dobija se formula

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda\left(\frac{x}{p_1^{s_1}}; p_2, p_3, \ldots, p_n\right), \tag{2}$$

gde je $r_1 = \left[\frac{\log x}{\log p_1}\right]$ (Videti: M. S. Popadić, *Jedna relacija između prostih brojeva*, Godišen zbornik na filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje, Prirodno-matematički oddel, kniga 3, № 3 (1950).). Ako se pretpostavi da asimptotska formula važi za $n-1$ $(n>1)$, tada je

$$\lambda\left(\frac{x}{p_1^{s_1}}; p_2, p_3, \ldots, p_n\right) \sim \frac{(\log x - s_1 \log p_1)^{n-1}}{(n-1)! \log p_2 \log p_3 \cdots \log p_n},$$

za $s_1 = 0, 1, 2, \ldots, r_1$. Pošto je

$$(\log x - s_1 \log p_1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} s_1^k \log^k p_1 \log^{n-1-k} x$$

iz (2) sleduje

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{s_1^k}{(n-1)!} \frac{\log^k p_1 \log^{n-1-k} x}{\log p_2 \log p_3 \cdots \log p_n}.$$

Kako je

$$\sum_{s_1=0}^{r_1} s_1^k \sim \frac{(r_1+1)^{k+1}}{k+1} \sim \frac{r_1^{k+1}}{k+1} \sim \frac{\log^{k+1} x}{(k+1) \log^{k+1} p_1}$$

prethodna relacija postaje

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\log^n x}{\log p_1 \log p_2 \cdots \log p_n}.$$

Najzad, budući da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n}$$

konačan rezultat je

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim \frac{\log^n x}{n! \log p_1 \log p_2 \cdots \log p_n}$$

tj. ako je asimptotska formula tačna za $n-1$, ona je istinita i za n. Prema tome pomenuta formula važi za svaki prirodan broj.

Primedba. Iz dobijene formule može se zaključiti da je niz prostih brojeva beskonačan. Doista ako je broj prostih brojeva n, tada je

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) = [x]$$

za svako $x \geqslant p_n$, te je

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim x \quad (x \to \infty).$$

Međutim ovo je nemoguće jer je na osnovu dobijene formule

$$\lambda(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) = O(x).$$

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

Il est désirable d'adjoindre aux problèmes qui doivent être originaux leurs solutions ainsi que d'autres informations, surtout sur la litérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

---

225. *Proposed by Enes Udovičić, University of Belgrade*

Let two sequences of real numbers x_n and y_n satisfy the following relations

$$x_{n+2}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+x_n^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+y_n^2}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x_{n+1}^2}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+y_{n+1}^2}$$

$$y_{n+2}=\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x_n^2}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+y_n^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+y_{n+1}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+y_{n+1}^2},$$

where $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ are arbitrarly chosen.

Prove that:

1° The sequences x_n, y_n converge.

2° $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l.$

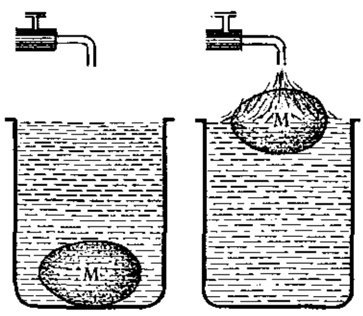
3° The limit l is the solution of the equation

$$4\,l^3+4\,l-3=0,$$

and $l\in(0,\,1)$.

226. *Доставио В. Вујичић, Универзитет у Београду*

Механички објект: Посуда цилиндарског облика (дозвољена одступања) у којој се налази течност; у течности на дну суда (Сл. 1) лежи потопљено тешко тело M елипсоидалног облика.



Слика 1 Слика 2

Динамички процес: Ако тело кроз течност на тело M усмери млаз течности под одређеним притиском, тело ће се подићи усупрот дејству млаза, испливати на површину и задржати се у положају равнотеже на површини под млазом као на сл. 2.

Задатак: Поставити динамичке једначине процеса и извршити анализу односа механичких и геометријских величина објекта при којим је ова појава могућа.

227. *Proposé par J. Malešević, Faculté de technique de Banja Luka*

Démonter l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}2^k=2^{2n}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

228. *Proposed by D. D. Adamović, University of Belgrade*

Prove the equalities

$$\sum_{\nu=k-1}^{n-1}2^{-\nu-1}\left[\binom{\nu}{k-1}-\binom{\nu}{k}\right]=2^{-n}\binom{n}{k}\quad (k=1,\ldots,n;\ n=1,\ldots).$$

229. *Доставио Д. Д. Адамовић, Универзитет у Београду*

Конструисати низ за $x\in(-\infty,\ +\infty)$ непрекидних реалних функција $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ такав да је

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\,(-\infty<x<+\infty),\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx=-\infty.$$

230. *Доставио Д. Д. Адамовић, Универзитет у Београду*

Низ у интервалу [0, 1] непрекидних функција

$$f_n(x)=\begin{cases} x^p\dfrac{1-x^{n+q}}{1-x}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n+r}\frac{1}{x+k}, & 0\leqslant x<1\\[2ex] n+q-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k}, & x=1\end{cases}\qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где су p, q и r дати елементи скупа $\{0,\ 1,\ 2,\ldots\}$, за свако $x\in[0,\ 1)$ тежи негативној бесконачности. Доказати да низ интеграла

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

ипак конвергира ка коначној вредности и одредити ту вредност.

231. *Proposé par D. D. Adamović, Université de Belgrade*

Trouver la forme générale d'une fonction réelle définie partout et avec la propriété que ses accroissements ne dépendent que des accroissements de la variable indépendante. Résoudre le même problème pour une fonction complexe.

232. *Proposed by Ž. M. Mitrović, Ekonomska škola, Vranje*

Let be r inradius, R circumradius ,h_a h_b, h_c altitudes and r_a, r_b, r_c exradii of a triangle. Prove the inequality

$$\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}>3,$$

with equality if and only if the triangle is equilateral.

233. *Vorgelegt von I. Paasche, München*

Am ebenden Dreieck mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}dh=rs=$

$$\underset{\text{Seiten}}{\frac{1}{2}\sqrt{a\,b\,c\,d}}=\underset{\text{Höchen}}{\frac{1}{2}\sqrt{h_a\,h_b\,h_c\,h}}=\underset{\text{Berührradien}}{\sqrt{r_a\,r_b\,r_c\,r}}=\underset{\text{Berührstrecken}}{\sqrt{s_a\,s_b\,s_c\,s}} \qquad (h=2\,R)$$

zeige man

$$7^3\,dr^2/4\leqslant(d+a)\,(d+b)\,(d+c)<7^3\,dh^2/4^3$$
$$7^3\,d^2h/3^3\leqslant(h+h_a)\,(h+h_b)\,(h+h_c)\leqslant 7^3\,h^3/4^3$$
$$4^3\,r^3\leqslant(r+r_a)\,(r+r_b)\,(r+r_c)<h^3 \qquad \text{(cf. Aufgabe 174)}$$
$$4^3\,r^2s\leqslant(s+s_a)\,(s+s_b)\,(s+s_c)<4^3\,s^3/3^3.$$

234. *Доставио J. B. Малешевић, Технички факултет у Бања Луци*

Доказати идентитет

$$\sum_{k=1}^{p}\binom{p+q-k-1}{q-1}\left(\frac{b-a}{x-a}\right)^k+\sum_{l=1}^{q}\binom{p+q-l-1}{p-1}\left(\frac{a-b}{x-b}\right)^l=\sum_{m=0}^{p+q}\binom{p+q}{m}\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{m-p}$$

(p, q природни бројеви).

235. *Доставио Јован Вукмировић, Универзитет у Београду*

Доказати следеће тврђење: ако је низ (x_n) ограничен и има три тачке нагомилавања, тада низ $\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$ није конвергентан.

236. *Proposed by D.D. Adamović, University of Belgrade*

Prove the following proposition:

If f is a mapping of a nonvacuous set E into itself and if, for some natural number n, the iterate f^n possesses a unique fixed point, then f has a unique fixed point, too.

237. *Доставио Р. Дацић, Универзитет у Београду*

1° Доказати да су сви бројеви

$$\binom{n}{k} \qquad (k=2,\ldots,\,n-2;\quad n=3,\,4,\ldots) \tag{1}$$

сложени.

2° Који сложени природни бројеви имају облик (1)?

РЕШЕНИ ПРОБЛЕМИ

183. *Proposé par Pavel Drăgilă, Timisoara, Roumanie,*

Démontrer qu'il existe une courbe plane, définie par l'équation

$$y = f(x)$$

de telle manière que l'angle formé par la tangente à la courbe au point x-u et la tangente au point x, soit égal en grandeur à l'angle formé par la tangente à la courbe au point x avec la tangente au point $x+u$.

Remarque de l'auteur

La solution donnée par M. A. Makowski (voir t. 7 (22) № 3) n'est pas satisfaisante. En dehors du cas trivial des lignes droites, il y a d'autres courbes planes qui peuvent être déterminées.

L'angle α formé par les deux tangentes consécutives est défini, moyennant la dérivée $y' = f'(x)$, que nous désignons $\varphi(x)$, par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-u)}{1 + \varphi(x)\varphi(x-u)}.$$

Posant la condition que cette expression soit indépendante de x, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x) - \varphi(x-u)}{1 + \varphi(x)\varphi(x-u)}\right] = 0,$$

on obtient

$$\varphi(x) + \operatorname{tg} cx,$$

et finalement

$$f(x) = -\frac{1}{c} \operatorname{tg} \cos cx.$$

Remarque de la Rédaction

Bien qu'il y eût intérêt à trouver une classe non triviale de courbes remplissant la condition donnée, la solution de M. A. Makowski, laquelle ne mentionne que des lignes droites, est, strictement dit, une solution correcte du problème — tel qu'il a été posé par son énoncé.

<u>**194.** *Доставио Душан Д. Адамовић, Универзитет у Београду*</u>

Нека R означава скуп свих реалних, а C скуп свих комплексних бројева. Функција $f: C' \to C \left(C' = C \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}\right)$, односно $f: R' \to R \left(R' = R \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}\right)$, дата је са

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (x \in C', \text{ односно } x \in R'),$$

где комплексне, односно реалне, константе α, β, γ и δ испуњавају услове

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ и } \gamma \neq 0.$$

1° Решити диференцну једначину

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

2° Испитати дефинисаност, конвергенцију, број и распоред тачака нагомилавања низа (x_n) одређеног рекурентном формулом (1) и првим чланом x_1 ($\in C'$, односно $\in R'$), у зависности од тог првог члана и константи α, β, γ и δ.

3° Доказати да, ако низ (x_n) конвергира и није константан, тада он својој граници тежи или експоненцијалном брзином или брзином којом $\frac{1}{n}$ тежи ка нули; прецизније, да тада, уколико је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, или је

$$x_n - x_0 \sim A\lambda^n \qquad (n\to\infty;\ 0\neq A\in C,\ \text{односно}\ \in R;\ |\lambda|<1),$$

или

$$x_n - x_0 \sim \frac{B}{n} \qquad (n\to\infty;\ 0\neq B\in C,\ \text{односно}\ \in R).$$

Прецизирати услове под којима се реализује прва и оне под којима настука друга могућност и одредити бројеве A, λ и B.

Решење аутора

Третираћемо најпре општи случај када су α, β, γ, δ и x_1 комплексни бројеви. Дата диференцна једначина може се написати у облику

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma x_n+\delta} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

тј. у облику

(2) $$\gamma x_{n+1} + \delta = \alpha + \delta - \frac{\Delta}{\gamma x_n + \delta} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где је стављено $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma\ (\neq 0)$. После смене

$$\gamma x_n + \delta = y_n \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

(2) постаје

(3) $$y_{n+1} = \alpha + \delta - \frac{\Delta}{y_n} \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Нова смена

(4) $$y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

уз претпоставку $z_n \neq 0$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ и услов

(5) $$z_1 = 1,$$

претвара (3) у

(6) $$z_{n+2} - az_{n+1} + \Delta z_n = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где је стављено $a = \alpha + \delta$. Према томе да ли квадратна једначина

(7) $$t^2 - at + \Delta = 0 \qquad (a \equiv \alpha + \delta,\ \Delta \equiv \alpha\delta - \beta\gamma)$$

има два различита корена t_1 и t_2 или један двоструки корен t_1, тј. према томе да ли је

(8) $$\omega \equiv a^2 - 4\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$$

или

$$\omega=0, \tag{9}$$

решење диференцне једначине (6) има облик

$$z_n=Pt_1^n+Qt_2^n \quad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{10}$$

или

$$z_n=(U+Vn)\,t_1^n \qquad (n=1,\ 2,\ldots), \tag{11}$$

где се константе P, Q, U и V, с обзиром на (5) и (4), одређују из једначина

$$\begin{cases}(z_1=)\ Pt_1+Qt_2=1,\\ (z_2=)\ Pt_1^2+Qt_2^2=y_1;\end{cases} \quad \text{односно} \quad \begin{cases}(z_1=)\ (U+V)\,t_1=1,\\ (z_2=)\ (U+2V)\,t_1^2=y_1.\end{cases} \tag{12}$$

Како су, због услова $\Delta\neq 0$, корени једначине (7) у оба случаја различити од нуле, решавањем једначина (12) добија се

$$P=\frac{t_2-y_1}{t_1(t_2-t_1)}, \qquad Q=\frac{y_1-t_1}{t_2(t_2-t_1)}, \tag{13}$$

$$U=\frac{2\,t_1-y_1}{t_1^2}, \qquad V=\frac{y_1-t_1}{t_1^2}. \tag{14}$$

Формуле (10) и (11), с обзиром на (13) и (14), постају редом

$$z_n=\frac{(t_2-y_1)\,t_1^{n-1}+(y_1-t_1)\ t_2^{n-1}}{t_2-t_1} \quad (n=1,\ 2,\ldots), \tag{15}$$

$$z_n=[2\,t_1-y_1+(y_1-t_1)\,n]\,t_1^{n-2} \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{16}$$

Јасно је да дата диференцна једначина, тј. диференцна једначина (3), дефинише бесконачан низ ако и само ако је $z_n\neq 0$ $(n=1, 2,\ldots)$, тј. с обзиром на (15) и (16), ако и само ако је, према случају,

$$\gamma\,x_1+\delta\,(=y_1)\neq\Delta\,\frac{t_1^{n-1}-t_2^{n-1}}{t_1^n-t_2^n} \quad (n=1,\ 2,\ldots), \tag{17}$$

односно

$$\gamma\,x_1+\delta\,(=y_1)\neq\frac{n-1}{n}\,t_1 \qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{18}$$

Под условом (17), односно (18), решење диференцне једначине (3) је

$$y_n=\frac{(t_2-y_1)\,t_1^n+(y_1-t_1)\,t_2^n}{(t_2-y_1)\ t_1^{n-1}+(y_1-t_1)\,t_2^{n-1}} \quad (n=1,\ 2,\ldots), \tag{19}$$

односно

$$y_n=\frac{t_1+(y_1-t_1)\,n}{2\,t_1-y_1+(y_1-t_1)\,n}\,t_1 \qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{20}$$

(19) се може писати и у облику

$$y_n=\Delta\frac{(t_2-y_1)\,\lambda^n+y_1-t_1}{(t_2-y_1)\,t_2\,\lambda^n+(y_1-t_1)\,t_1}\qquad(n=1,\ 2,\ldots),\tag{21}$$

где је

$$\lambda=\frac{t_1}{t_2}\,(\neq 1).$$

Из (21) и (20) изводи се да је у првом случају низ (y_n), па стога и низ (x_n), константан ако и само ако је

$$\gamma\,x_1+\delta\,(=y_1)=t_1\ \text{ или }\ \gamma\,x_1+\delta\,(=y_1)=t_2,\tag{22}$$

а у другом случају ако и само ако је

$$\gamma\,x_1+\delta\,(=y_1)=t_1\,.\tag{23}$$

Претпоставимо да услов (22) није испуњен. Ако је

$$|\,a\,|^2+|\,a^2-4\,\Delta\,|>4|\,\Delta\,|\ \ (\text{тј. }|\,t_1\,|\neq|\,t_2\,|)\tag{24}$$

применом једнакости (21), или једнакости

$$y_n=\Delta\frac{t_2-y_1+(y_1-t_1)\,\lambda^n}{(t_2-y_1)\,t_2+(y_1-t_1)\,t_1\,\lambda^n}\qquad\left(n=1,\ 2,\ldots;\quad \lambda=\frac{t_2}{t_1}\right),$$

према томе да ли је $|\,t_1\,|<|\,t_2\,|$ или $|\,t_1\,|>|\,t_2\,|$, долази се до закључка да тада низ (y_n) конвергира ка оном од бројева t_1 и t_2 који има већи модуо. При томе је у првом случају

$$y_n=t_2+\frac{t_2-y_1}{y_1-t_1}\cdot t_2^2\,(t_1-t_2)\,\lambda^n+o\,(\lambda^n)\qquad(n\to\infty),$$

а у другом

$$y_n=t_1+\frac{t_1-y_1}{y_1-t_2}\;t_1^2\,(t_2-t_1)\,\lambda^n+o\,\lambda^n)\qquad(n\to\infty).$$

Дакле, под условом (24), низ (x_n) конвергира ка

$$x_0=\frac{1}{\gamma}\,(t_k-\delta)\tag{25}$$

и важи релација

$$x_n-x_0\sim\frac{t_k{}^2}{\gamma}\cdot\frac{t_k-\gamma\,x_1-\delta}{\gamma\,x_1+\delta-t_l}\,(t_l-t_k)\,\lambda^n\qquad(n\to\infty);\tag{26}$$

при томе је

$$\{k,\ l\}=\{1,\ 2\},\ |\,t_l\,|<|\,t_k\,|\ \text{ и }\ \lambda=\frac{t_l}{t_k}\,.\tag{27}$$

Нека је

$$|\,a\,|^2+|\,a^2-4\,|=4\,|\,\Delta\,|\ \text{ и }\ \omega\neq 0\quad(\text{тј. }|\,t_1\,|=|\,t_2\,|\ \text{ и }\ t_1\neq t_2).\tag{28}$$

Тада је

$$z_1=\rho e^{\varphi_1 i},\ z_2=\rho e^{\varphi_2 i}\quad (\rho>0;\ \varphi_1,\ \varphi_2 \text{ реално};\ \varphi=\varphi_1-\varphi_2\neq 2k\pi;\ k \text{ цело})$$

и стога

$$\frac{z_1}{z_2}=e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}=e^{\varphi i}, \tag{29}$$

па (21) постаје

$$y_n=\Delta\frac{(t_2-y_1)e^{n\varphi i}+y_1-t_1}{(t_2-y_1)t_2e^{n\varphi i}+(y_1-t_1)t_1}\qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Одавде се изводе следећи закључци: у овом случају се сви чланови низа (y_n) налазе на кругу или правој — слици јединичног круга $|t|=1$ у комплексној равни при пресликавању билинеарном функцијом

$$u(t)=\Delta\frac{(t_2-y_1)t+y_1-t_1}{(t_2-y_1)t_2t+(y_1-t_1)t_1}\qquad (t\in C); \tag{30}$$

ова слика је права ако и само ако је

$$|(t_2-y_1)t_2|=|(y_1-t_1)t_1|,$$

тј. због $|t_1|=|t_2|$, ако и само ако је

$$|t_2-y_1|=|y_1-t_1|,$$

а иначе је круг; даље, ако је φ рационалан умножак од 2π, низ (y_n) узима коначно много вредности — и при томе сваку од њих бесконачно много пута, тако да су то онда све његове тачке нагомилавања; може се додати да је, прецизније, у овом случају низ (y_n) периодичан, са периодом једнаком броју тих вредности; ако је φ ирационалан умножак од 2π, све тачке поменутог круга односно праве су тачке нагомилавања низа (y_n).

У случају (9), када је низ (y_n) дат једнакошћу (20), овај низ конвергира ка t_1 и при томе, уколико није по среди случај (23),

$$y_n=t_1+\frac{t_1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad (n\to\infty).$$

То значи да у овом случају низ (x_n) конвергира ка броју

$$x_0=\frac{1}{\gamma}(t_1-\delta) \tag{31}$$

и да је

$$x_n-x_0\sim\frac{t_1}{\gamma}\cdot\frac{1}{n}\qquad (n\to\infty). \tag{32}$$

На основу претходног, за посматрани општи случај дошли смо до следећих резултата:

Дата диференцна једначина заједно са почетном вредношћу x_1 *одређује бесконачан низ* (x_n) *ако и само ако је испуњен услов* (17), *односно услов* (18), *према томе да ли је по среди случај* (8), *када квадратна једначина* (7) *има два различита корена* t_1 *и* t_2, *или случај* (9), *када она има један двоструки корен* t_1.

Под претпоставком (17), *односно* (18)*: низ x_n је у првом случају дат са*

$$x_n=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{(t_2-\gamma x_1-\delta)\,t_1^n+(\gamma x_1+\delta-t_1)\,t_2^n}{(t_2-\gamma x_1-\delta)\,t_1^{n-1}+(\gamma x_1+\delta-t_1)\,t_2^{n-1}}-\delta\right]\quad (n=1,\,2,\ldots),$$

а у другом случају са

$$x_n=\frac{1}{\gamma}\left[t_1\cdot\frac{t_1\qquad+(\gamma x_1+\delta-t_1)\,n}{2\,t_1-\gamma x_1-\delta+(\gamma x_1+\delta-t_1)\,n}-\delta\right]\quad (n=1,\,2,\ldots).$$

Овај низ је константан ако и само ако је испуњен у првом случају услов (22), *а у другом случају услов* (23)*.*

Под допунском претпоставком да услов (22), *односно услов* (23), *није испуњен:*

I Низ (x_n) *конвергира ка броју x_0 у случајевима* (24) *и* (9). *У првом од њих x_0 је дато са* (25) *и важи асимптотска процена* (26), *уз конвенцију* (27), *а у другом је x_0 дато са* (31) *и важи асимптотска процена* (32).

II У случају (28) *сви чланови низа* (x_n) *имају вредности на кругу или правој — слици јединичног круга са центром у почетку комплексне равни при пресликавању функцијом*

$$w=\frac{1}{\gamma}\left[u(t)-\delta,\right]$$

где је $u(t)$ дато са (30)*; та слика је права ако и само ако се x_1 налази на симетрали дужи која спаја тачке $\frac{1}{\gamma}(t_1-\delta)$ и $\frac{1}{\gamma}(t_2-\delta)$. У овом случају низ увек дивергира; он има коначно много тачака нагомилавања, које су тада уједно и све вредности које он, периодично, узима, или има за тачке нагомилавања све тачке поменутог круга или праве — према томе да ли је у једнакости* (29) *број φ рационалан или ирационалан умножак од 2π.*

Ако су коефицијенти α, β, γ, δ и почетна вредност x_1 реални, први случај под I наступа кад је $\omega>0$ и $a\neq 0$, а случај II кад је $\omega<0$, или $\omega>0$ и $a=0$. При томе, ако је, у случају II, φ ирационалан умножак од 2π, сваки реалан број је тачка нагомилавања низа (x_n).

Примедбе. 1° У (24) и (28) имплицитно је искоришћен следећи резултат (инспирисан делом расуђивања на стр. 115 у *Зборнику математичких проблема* III Д. С. Митриновића):

Комплексна квадратна једначина по t

$$t^2-at+\Delta=0$$

има корене са једнаким или са различитим модулима према томе да ли је

$$|a|^2+|a^2-4\Delta|>4|\Delta|,$$

или

$$|a|^2+|a^2-4\Delta|=4|\Delta|.$$

Доказ. Како су ови корени

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4\Delta}\right),$$

тако да је

$$|t_{1,2}|^2=\frac{1}{4}\left[|a|^2+|a^2-4\Delta|\pm 2R_e\left(\bar{a}\sqrt{a^2-4\Delta}\right)\right],$$

то увек важи неједнакост

$$|a|^2+|a^2-4\Delta|=2(|t_1|^2+|t_2|^2\geqslant 4|t_1|\ |t_2|=4|\Delta|,$$

а једнакост у њој еквивалентна је са једнакошћу $|t_1|=|t_2|$.

2° На основу добијеног потребног и довољног услова за бесконачност низа (x_n), тј. услова (17) или услова (18), према случају, лако се долази до следећег закључка: *диференцна једначина* (1) *дефинише бесконачан низ ако и само ако* x_1 *нема вредност ниједног члана низа* (u_n) *одређеног рекурентном формулом*

$$u_{n+1}=g(u_n)\qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где је

$$g(x)=\frac{\delta x-\beta}{-\gamma x+\alpha}$$

инверзна функција функције f, *и почетном вредношћу* $u_1=-\dfrac{\delta}{\gamma}$. Заиста може се непосредно проверити да су чланови овог низа дати са

$$\gamma u_n+\delta=\Delta\frac{t_1^{n-1}-t_2^{n-1}}{t_1^n-t_2^n}\qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

ако је $\omega\neq 0$, односно са

$$\gamma u_n+\delta=\frac{n-1}{n}t_1\qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

ако је $\omega=0$.

До овог резултата може се, међутим, доћи и једноставним директним расуђивањем, без позивања на услове (17) и (18)

195. *Доставио Момир С. Станојевић, Универзитет у Нишу*

Нека су $F_1, F_2, \ldots, F_k$ линеарне многострукости (транслације подпростора) n-димензионалног Еуклидског простора E^n са особином да је $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i\neq\Phi$ и сваки F_1 $(1\leqslant i\leqslant k)$ не садржи пресек осталих. Доказати:

а) $k\leqslant n$:

б) ако је $k=n$, тада је $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$ само једна тачка и димензија сваког од F_i је $n-1$.

Решење аутора

По претпоставци, $F_1\not\subset F_2$ и зато је

$$\dim(F_1\cap F_2)\leqslant\min\dim(F_1, F_2)-1.$$

Даље $F_1\cap F_2\not\subset F_3$, те имамо

$$\dim(F_1\cap F_2\cap F_3)\leqslant\min\ \dim(F_1\cap F_2, F_3)-1\leqslant\min\ \dim(F_1, F_2, F_3)-1-1.$$

Коначном индукцијом доказује се да је

(1) $$\dim\left(\bigcap_1^k F_i\right) \leqslant \min \dim(F_i) - k + 1.$$

Како је $\dim\left(\bigcap_1^k F_i\right) \geqslant 0$ и $\dim(F_i) \leqslant n-1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то из (1) следи

$$0 \leqslant \min \dim(F_i) - k + 1 \leqslant n - 1 - k + 1,$$

те је $k \leqslant n$.

Нека је сада $k = n$ и нека је $\dim\left(\bigcap_1^k F_i\right) = m$.

Тада је

$$m \leqslant \min \dim(F_i) - n + 1$$

и

$$\min \dim(F_i) \geqslant m + n - 1 \Rightarrow m = 0 \quad \text{и } \dim(F_i) = n - 1.$$

196. *Proposed by Žarko M. Mitrović, Ekonomska škola, Vranje*

Let be r inradius, R circumradius, h_i altitude, l_i bisector, m_i median line, r_i exradius of a triangle and $e_i = h_i, l_i, m_i, r_i$. Prove the inequality

$$9r \leqslant \sum_{i=1}^{3} e_i \leqslant \frac{9}{2} R,$$

with equality if and only if the triangle is equilateral.

Solution by R. R. Janić, University of Belgrade

By the inequalities 6.8, 6.14, 8.20 and 5.41 of the book O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić: Geometric inequalities, Groningen 1969, we have

$$9r \leqslant \sum_{i=1}^{3} h_i \leqslant \sum_{i=1}^{3} l_i \leqslant \sum_{i=1}^{3} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{3} r_i \leqslant \frac{9}{2} R.$$

Equalities in all cases hold if and only if the triangle is equilateral.

Lösung durch I. Paasche, München

Wir numerieren die Zeichen $\leqq$ in der Kette

$$9r \underset{1}{\leqq} \Sigma h_i \underset{2}{\leqq} \Sigma l_i \underset{3}{\leqq} \Sigma m_i \underset{4}{\leqq} \Sigma r_i \underset{5}{\leqq} 9R/2.$$

Die Ungleichung $\underset{1}{\leqq}$ besagt $9r \leqq 2r + (r^2 + s^2)/2R$, also $14Rr - r^2 \leqq s^2$. Das ist richtig, wie Einschieben des optimalen quadratischen Terms aus [1] zeigt: $14Rr - r^2 \leqq \leqq 16Rr - 5r^2 \leqq s^2$. Ein anderer Beweis findet sich in [2]. Ferner gilt $\underset{2}{\leqq}$ $\underset{3}{\leqq}$ wegen $h_i \leqq l_i \leqq m_i$. Schließlich ist $\underset{4}{\leqq}$ laut [2] richtig und $\underset{5}{\leqq}$ in der Gestalt $r + 4R \leqq 9R/2$ klar. Damit ist die Aufgabe gelöst. — Wegen $\Sigma m_i \lesseqqgtr \sqrt{3}\, \Sigma a_i/2 = = \sqrt{3}\, \Sigma s_i$ (Seiten a_i und Berührstrecken s_i) haben die beiden letzteren Summen keinen festen Platz in obiger Kette. — Analoge Aufgaben für die beiden anderen elementarsymmetrischen Funktionen $yz + zx + xy$ und xyz statt $x + y + z$. Auch $x^2 + y^2 + z^2$ etc.

LITERATUR

[1] W. J. Blundon Canad. Math. Bull. 8. 1965 p. 615—626.
[2] F. Leuenberger, Elem. Math. 13 (1958) S. 121—126.
[3] Mitrinović/Vasić/Đorđević/Janić, Math. Bibl. 31.

Druckfehler am Ende der Lösung 176:

statt $h\ 3\sqrt{3/4}$ lies beidemal $h\ 3\sqrt{3}/4$;

statt $3\sqrt{3r}$ lies beidemal $3\sqrt{3}\,r$.

198. *Proposed by Alexandru Lupas, Institut de calcul, Cluj, Roumanie*

Let y: $[a, b]\to R$ be a function with an absolutely continuous derivative of order $(n+m-1)$ and such that

$$y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(n+m-1)}(a)=0,$$
$$y^{(n)}(b)=y^{(n+1)}(b)=\ldots=y^{(n+m-1)}(b)=0.$$

If $k=1, 2, \ldots, n$, $m=1, 2, \ldots$, $r>1$, $rs>1$, prove the inequality

$$\int_a^b |y^{(n-k)}(x)\, y^{(n)}(x)|^{rs}\, dx \leq (b-a)^{rsk-2s+1+2mrs}\ C(m, r, s, k)\left[\int_a^b |y^{(n+m)}(x)|^r\, dx\right]^{2s},$$

where the constant $C(m, r, s, k)$ is given by

$$C(1, r, s, k)=\frac{(rs-1)^{rs-3}(rs)^{2rs}}{2[(k-1)!]^{rs}(rsk-1)^{rs-1}}\quad\left(\frac{\sin\frac{\pi}{rs}}{2\pi}\right)^{2rs},$$

and if $m=2, 3, \ldots$, then

$$C(m, r, s, k)=\frac{s^{2s(r-1)}(sr-s+1)^{2(s-1)}}{2[(k-1)!]^{rs}\left[B\left(\frac{1}{rs}\cdot\frac{r-1}{r}\right)\right]^{2rs}}$$

$$\left(\frac{rs-1}{rks-1}\right)^{rs-1}\left(\frac{r^r}{r-1}\right)^{2ms}\quad\left(\frac{\sin\frac{\pi}{r}}{2\pi}\right)^{2rs(m-1)}.$$

Eventually, determine the best constant $C(m, r, s, k)$.

Solution by the author

According to D. V. Boyd [Pacific J. of Math., vol. 30, 2, 1969] if $w:[a, b]\to R$ is an absolutely continuous function such that $w(a)=0$, then for $r>1$, $rs>1$ hold the inequality

$$\text{(1)}\qquad \int_a^b |w(x)|^{rs}\, dx \leq (b-a)^{rs-s+1}\, C_{rs}\left[\int_a^b |w'(x)|^r\, dx\right]^s,$$

where the best constant C_{rs} is given by

(1′) $$C_{rs}=\left(\frac{r^r}{r-1}\right)^s s^{s(r-1)} (sr-s+1)^{s-1} \left[B\left(\frac{1}{rs}, \frac{r-1}{r}\right)\right]^{-rs}$$

where $B(p, q)$ is the "Beta"—function.

Likewise, as a consequence of the Boyd's inequalities, we have the following: if $z: [a, b]\to R$ is absolutely continuous on $[a, b]$ and if x_1, x_2 are numbers such that $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$, $z(x_1)=z(x_2)$, then for $r>1$ hold the inequality

(2) $$\int_a^b |z(x)-z(x_1)|^r\, dx\leqslant \max\left[(x_1-a)^r, (b-x_2)^r, \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^r\right] D_r \int_a^b |z'(x)|^r dx$$

where the best D_r is defined by

(2′) $$D_r=\frac{r^r}{r-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{r}}{\pi}\right)^r.$$

The inequality (2) is a simple „variation" of Boyd's inequality. This new form is obtained in a similar way as in J. B. Diaz and F. T. Metcalf ["Variations of Wirtinger's Inequality" in Inequalities (edited by O. Shisha), 1967, Academic Press, pp. 79—103]. Therefore if $w: [a, b]\to R$ is absolutely continuous on $[a, b]$ and $w(a)=w(b)=0$, then

(2″) $$\int_a^b |w(x)|^r\, dx\leqslant \frac{(b-a)^r}{2^r} D_r \int_a^b |z'(x)|^r\, dx.$$

In our conditions we have

$$\int_a^b |y^{(n-k)}(x)\, y^{(n)}x|^{rs}\, dx\leqslant \int_a^b |y^{(n)}(x)|^{rs}\left[\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}|y^{(n)}(t)|\, dt\right]^{rs} dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |y^{(n)}(x)|^{rs}\cdot\left[\int_a^x \frac{(x-t)^{\frac{rs(k-1)}{rs-1}}}{[(k-1)!]^{\frac{rs}{rs-1}}}\, dt\right]^{rs-1}\cdot\left[\int_a^x |y^{(n)}(t)|^{rs}\, dt\right] dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^{rsk-1}}{[(k-1)!]^{rs}}\left(\frac{rs-1}{rsk-1}\right)^{rs-1}\int_a^b\int_a^x |y^{(n)}(x)|^{rs}|y^{(n)}(t)^{rs}\, dt\, dx.$$

Since the integral of a symmetric integrand over the triangle $a\leqslant t\leqslant x$, $a\leqslant x\leqslant b$, is equal to half of its integral over the square $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant x\leqslant b$, we obtain

(3) $$\int_a^b |y^{(n-k)}(x)\, y^{(n)}(x)|^{rs}\, dx\leqslant (b-a)^{rsk-1} Q_{rsk}\left[\int_a^b |y^{(n)}(x)|^{rs}\, dx\right]^2,$$

where

$$Q_{rsk} = \left(\frac{rs-1}{rsk-1}\right)^{rs-1} \cdot \frac{1}{2\,[(k-1)!]^{rs}}. \tag{3'}$$

Let $m = 2, 3, \ldots$; by using (1) with $y^{(n)}(x)$ instead of $w(x)$, we have from (3)

$$\int_a^b y^{(n-k)}(x)\, y^{(n)}(x)|^{rs}\, dx \leqslant (b-a)^{rsk+2rs-2s+1} E_{rsk}\left[\int_a^b |\, y^{(n+1)}(x)\,|^r\, dx\right]^{2s} \tag{4}$$

with

$$E_{rsk} = Q_{rsk}\, C_{rs}^2. \tag{4'}$$

According to (2″) it follows

$$\int_a^b |\, y^{(n+1)}(x)\,|^r\, dx \leqslant \frac{(b-a)^r}{2^r} D_r \int_a^b y^{(n+2)}(x)\,|^r\, dx \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{(b-a)^r D_r}{2^r}\right]^{m-1} \int_a^b |\, y^{(n+m)}(x)\,|^r\, dx$$

and by (4) we conclude with the inequality of this problem where the constant $C(m, r, s, k)$ is given, in the case $m \geqslant 2$, by (1′)—(4′), namely

$$C(m, r, s, k) = \frac{E_{rsk} \cdot D_r^{\,2s(m-1)}}{2^{2rs(m-1)}}.$$

When $m = 1$, applying (2) in (3) and then by using Hölder's inequality we get the constant $C(1, r, s, k)$.

on démontre ensuite par induction que

$$f\left(\frac{n}{2m}a\right)<0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots;\ m=0,\ 1,\ \ldots)$$

et par suite, d'après (III'), que

(12) $$f'(x)\leqslant 0\ \ (x>0)\wedge f'(a)<0.$$

Les conditions (12) et $f(0)=1$ entraînent, cependant, que l'on a $f(x)<1$ pour un $x>0$, — contrairement à (11). On a démontré ainsi que

(13) $$f'(x)\geqslant 0 \qquad (x\geqslant 0).$$

D'après (1), (6') et (13),

$$f'(x+y)\geqslant f'(x) \qquad (x,\ y\geqslant 0),$$

c'est-à-dire $f'(x)$ croît pour $x\geqslant 0$. On en déduit, d'après (II) et (III''), l'assertion (III).

Mettant à profit (III), on peut différentier (1) par rapport à y, ce qui donne

$$f''(x+y)=f'(x)f'(y)+f(x)f''(y) \qquad (x,\ y\in R).$$

En posant $y=0$, on obtient

$$f''(x)=f(x)f''(0) \qquad (x\in R),$$

c'est-à-dire

(14) $$f''(x)=\pm\alpha^2 f(x) \qquad (x\in R;\ \alpha \text{ constante réelle}).$$

Le cas $\alpha=0$ conduit à

$$f(x)=Ax+B \qquad (x\in R;\ A,\ B=\text{const})$$

et puis, d'après (5), à

$$f(x)=1 \qquad (x\in R).$$

Soit $\alpha\neq 0$. Pour le signe „+" dans (14) on obtient

$$f(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x} \qquad (x\in R).$$

D'après (5),

$$f(0)=A+B=1, \quad \frac{1}{\alpha}f'(0)=A-B=0;$$

donc, dans ce cas-là

(15) $$f(x)=\operatorname{ch}\alpha x \qquad (x\in R;\quad \alpha=\text{const}).$$

On établit pareillement que, pour le signe „—" dans (14), $f(x)$ a nécessairement la forme

(16) $$f(x)=\cos\alpha x \qquad (x\in R;\quad \alpha=\text{const}).$$

D'après tout ce qui précède, toute solution de (1) a une des représentations (4), (15), (16) ou

(17) $$f(x)=C \qquad (x\in R;\quad C=\text{const}).$$

Étant donné que, pour toutes les valeurs réelles des constantes α et C, les fonctions (4), (15), (16) et (17) satisfont identiquement à (1), on a abouti au résultat final que voici:

La solution générale de (1) *est donnée par*

$$f(x)=(1-|\operatorname{sing}\delta|)\,C+$$

$$+\frac{|\operatorname{sign}\delta|}{2}\left[\frac{1}{2}\,(1+\operatorname{sign}\delta)\,(e^{\alpha x}+|\operatorname{sign}\varepsilon|\,e^{-\alpha x})+(1-\operatorname{sign}\delta)\cos\alpha x\right]\qquad (x\in R),$$

avec les constantes réelles arbitraires α, C, δ *et* ε.

2. *Solution by Pl. Kannappan and D. Ž. Đoković.*

We shall show that all solutions are given by:

1) $f(x)=\text{const}$,

2) $f(x)=\frac{1}{2}\,e^{\lambda x}$ $\quad(\lambda$ real),

3) $f(x)=\frac{1}{2}\,(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$ $\quad(\lambda$ real or purely imaginary).

From (1) we get

$$\begin{aligned}f'((x+y)+z)&=f'(x+y)\,f(z)+f(x+y)\,f'(z)\\&=f'(x)\,f(y)\,f(z)+f(x)\,f'(y)\,f(z)+f(x+y)\,f'(z),\\f'(x+(y+z))&=f'(x)\,f(y+z)+f(x)\,f'(y+z)\\&=f'(x)\,f(y+z)+f(x)\,f'(y)\,f(z)+f(x)\,f(y)\,f'(z).\end{aligned}$$

It follows that

$$f'(z)\,[f(x+y)-f(x)\,f(y)]=f'(x)\,[f(y+z)-f(y)\,f(z)]. \tag{2}$$

Assume that $f(x+y)=f(x)\,f(y)$ for all x and y. Then

$$f'(x+y)=f'(x)\,f(y)=f(x)\,f'(y).$$

From (1) we get $f'(x+y)=0$, i.e. $f(x)=\text{const}$.

Now let $f(x+y)\neq f(x)\,f(y)$ for at least one pair (x, y). The right hand side of (2) is differentiable with respect to z. Therefore (2) implies that $f''(z)$ exists for all z. The same argument shows that all derivatives exist.

Differentiating (1) with respect to x and y we get

$$f''(x+y)=f''(x)\,f(y)+f'(x)\,f'(y),$$

$$f''(x+y)=f'(x)\,f'(y)+f(x)\,f''(y).$$

Hence,

$$f''(x)\,f(y)-f(x)\,f''(y)=0. \tag{3}$$

We can assume that $f(x)\neq\text{const}$. Let a be such that $f(a)\neq 0$. Then (3) gives

$$f''(x)-kf(x)=0\qquad\left(k=\frac{f''(a)}{f(a)}\right).$$

If $k=0$ then $f(x)$ is a linear function and (1) implies that $f(x)$ must reduce to a constant. If $k \neq 0$ the solution of the above differential equation is

$$(4) \qquad f(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x} \qquad (\lambda=\sqrt{k}).$$

Substituting into (1) we get the conditions

$$2A^2=A, \quad 2B^2=B.$$

So, $A=0$ or $A=1/2$, and $B=0$ or $B=1/2$. If $A=0$ or $B=0$ we get a solution of the form 2). Otherwise we get a solution of the form 3).

Conversely, it is trivial to verify that the functions defined by 1), 2) or 3) satisfy the functional equation (1).

106. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade*

Déterminer les nombres positifs r et s sous la condition que l'inégalité

$$r\left(\frac{1}{r^s}-\frac{1}{(r+1)^s}\right)<\frac{s}{s-1}\left(\frac{1}{r^{s-1}}-\frac{1}{(r+1)^{s-1}}\right)$$

soit valable.

Solution by Alexandru Lupas, Institutul de calcul, Cluj, Rumania

After some elementary manipulations, the inequality becomes

$$(r+1)^s-r^s>sr^{s-1}$$

or

$$(1) \qquad \left(1+\frac{1}{r}\right)^s>1+\frac{s}{r}.$$

On the other hand it is known that the following inequality holds

$$Z^s-Zs+s-1 \geqslant 0$$

for each $s>1$ and $Z>0$, with the equality iff $Z=1$.

If we take

$$Z=1+\frac{1}{r}, \quad r>0, \qquad (Z \neq 1),$$

we obtain the inequality (1).

Therefore we conclude that inequality from this problem holds for r a positive real number and for s a real number greater than one.

Solved also by Ž. Mitrović (Vranje)

108. *Proposé par D. S. Mitrinović, Université de Belgrade*

Determine some enough sharp bounds of

$$\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+1}$$

where p and q are the fixed natural numbers, and if possible the best ones.

1. *Solution by Alexandru Lupas, Institutul de calcul, Cluj, Rumania*

It is known that for $0<m \leqslant a_k \leqslant M$, $k=1, 2, \ldots, N$, the following inequalities hold

$$(1) \qquad N^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \sum_{k=1}^{N} a_k \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM} \cdot N^2,$$

the left-hand inequality being the Cauchy's inequality while the right-hand inequality is the Schweitzer inequality.

Let $a_k = np + k$, $np > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Because

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \frac{N(2pn + N + 1)}{2},$$

by using (1) and taking $m = np + 1$, $M = np + N$, we have

$$\frac{2N}{2pn + N + 1} < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} < \frac{N(2np + N + 1)}{2(np+1)(np+N)}. \tag{2}$$

The equality cases in our hypothesis are not valid for $N > 2$. If we denote $N = n(q-p) + 1$, $a_1 = np + 1$, $a_N = nq + 1$, from (2) we conclude with the inequality

$$\frac{N}{A(a_1, a_N)} < \sum_{k=1}^{n(q-p)+1} \frac{1}{np+k} < \frac{N}{H(a_1, a_N)}, \tag{3}$$

where A, H are the arithmetic respectively harmonic means of the specified numbers. The inequality (3) has also the form

$$[A(a_1, a_N)]^{-1} < A\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_N}\right) < [H(a_1, a_N)]^{-1}.$$

2. *Solution by M. Tasković and D. Adamović, Université de Belgrade*

For p fixed we have

$$\beta_n = \sum_{k=pn+1}^{(p+1)n+1} \frac{1}{k} \ \downarrow \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

and consequently, for p and q fixed,

$$\alpha_n = \sum_{k=pn+1}^{qn+1} \frac{1}{k} \ \downarrow \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

One can prove (1) by considering the difference $\beta_{n+1} - \beta_n$ and using the monotony and the convexity of the function $\frac{1}{t}$. From (2) and $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{q}{p}$ we obtain

$$\ln\frac{q}{p} < \sum_{k=pn+1}^{qn+1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{q+1} \frac{1}{k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

and the conclusion that these bounds are the best possible. Because of

$$\sum_{k=p+1}^{q+1} \frac{1}{k} < \int_{p}^{q+1} \frac{dt}{t} = \ln\frac{q+1}{p},$$

we have also

$$\sum_{k=pn+1}^{q+1} \frac{1}{2} < \ln\frac{q+1}{p} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

but this upper bound is not the best possible.

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

Il est désirable d'adjoindre aux problèmes, qui doivent être originaux, leurs solutions ainsi que d'autres informations, surtour sur la littérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

---

238. *Доставио Д. Д. Адамовић, Универзитет у Београду*

Нека је

$$(f_n) \tag{1}$$

низ реалних или комплексних функционела дефинисаних на непразном скупу E. Доказати следећа тврђења о функционалним редовима

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|. \tag{3}$$

1° Ако ред (3) униформно конвергира на скупу E, тада на истом скупу униформно конвергира и свака пермутација реда (2), тј. сваки ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{p(n)}(x).$$

где је p извесна пермутација скупа N свих природних бројева.

2° Ред (2) може бити на скупу E униформно конвергентан и уједно имати извесну пермутацију која на E конвергира, али не униформно. При томе:

2°.1 Ред (2) може на E бити свуда апсолутно конвергентан, свуда неапсолутно конвергентан, или негде на E апсолутно а негде неапсолутно конвергирати.

2°.2 Уколико је E тополошки простор и сви чланови низа (1) су непрекидне функционеле, сума реда (2) може бити непрекидна, а сума извесне пермутације овог реда прекидна функционела на E.

2°.3 У сваком од три случаја који се помињу под 2°.1, скуп E може бити реалан интервал било ког типа.

239. *Proposed by D. D. Adamović, University of Belgrade*

Let $f_0(x)$ be a nonnegative and Lebesgue integrable function on $[0, 1]$ and let $0<a<1$. Prove that the sequence of functions $f_n(x)$ defined by

$$f_{n+1}(x)=\left[\int_0^x f_n(t)\,dt\right]^a \qquad (0\leq x\leq 1;\ n=0, 1, 2, \ldots)$$

converges to a finite limit $f(x)$ for each $x\in[0, 1]$ and determine the function $f(x)$. Show that this convergence is uniform.

240. *Доставио Д. Д. Адамовић, Универзитет у Београду*

Нека је реална функција $f(x)$ дефинисана на интервалу $[a, b]$ и нека је $f_p(x) = |f(x)|^p$ $(a \leq x \leq b)$, где је $0 < p < 1$. Докозати следећа тврђења:

1° Ако је функција $f(x)$ ограничене варијације на $[a, b]$ и уз то је

(1) $$|f(x)| \geq m > 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

тада је и функција $f_p(x)$ ограничене варијације на $[a, b]$.

2° Ако је функција $f(x)$ апсолутно непрекидна на $[a, b]$ и уз то је

(2) $$f(x) \neq 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

тада је и функција $f_p(x)$ апсолутно непрекидна на $[a, b]$.

3° Ни за једно $p \in (0, 1)$, тврђења 1° и 2° не важе без допунских услова (1) односно (2).

241. *Доставио Д. Д. Адамовић, Универзитет у Београду*

Нека је функција $f(x)$ за $x > 0$ строго растућа и конвексна. Одредити

$$m = \min \left\{ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) : x > 0 \right\}$$

и наћи позитивну вредност независно промењиве x за коју функција $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ узима вредност m.

242. *Proposé par Pavel Drăgilă, Timişoara, Roumanie.*

Déterminer les courbes planes, définies par l'équation

$$y = f(x),$$

de telle manière que les mediatrices des cordes ayant les extremités aux points $[x, f(x)]$ $[x+u, f(x+u)]$ passent par un point fixe.

243. *Proposé par Pavel Drăgilă, Timişoara, Roumanie*

Soit donné l'ensemble de fonctions $\varphi_n = \dfrac{x}{a + nx}$, où a est une constante

et n un nombre entier, avec la loi de composition

$$\varphi_i \square \varphi_j = \varphi_i [\varphi_j x].$$

Déterminer la fonction inverse φ_n^{-1}.

Trouver les conditions nécesaires et suffisantes afin que cet ensemble forme un groupe.

244. *Aufgabe von I. Paasche, München, BR. Deutschland*

Die durch $\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{abcd}}_{\text{Seiten}} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{h_a h_b h_c h}}_{\text{Höhen}} = \underbrace{\sqrt{r_a r_b r_c r}}_{\text{Berührradien}} = \underbrace{\sqrt{s_a s_b s_c s}}_{\text{Berührstrecken}} =$

Flächeninhalt des ebenen Dreiecks definierten vierten Stücke seien wie folgt normiert:

$$d=D/2 \quad r=R/3\sqrt{3} \quad s=S \quad h=4H/3\sqrt{3}.$$

Man zeige, daß die *kompletten* Ungleichungsketten aller Potenzprodukte genau bis zum 2. Grad aufsteigen:

$$D \leqq R \leqq S \leqq H \tag{1}$$

$$D^2 \leqq DR \leqq R^2 \leqq DS \leqq DH = RS \leqq RH \leqq S^2 \leqq SH \leqq H^2; \tag{2}$$

es gibt keine kompletten Ketten der Grade 3, 4, 5, ...

245. *Aufgabe von I. Paasche, München, BR. Deutschland*

Am ebenen Dreieck mit Flächeninhalt

$$F=\frac{1}{2}\sqrt{\underset{\text{Seiten}}{a\,b\,c\,d}}=\frac{1}{2}\sqrt{\underset{\text{Höhen}}{h_a\,h_b\,h_c\,h}}=\sqrt{\underset{\text{Berührradien}}{r_a\,r_b\,r_c\,r}}=\sqrt{\underset{\text{Berührstrecken}}{s_a\,s_b\,s_c\,s}}$$

beweise man

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3\sqrt{3}\,F}\\[1ex] (h_a+h_b+h_c)/\sqrt{3}\end{array}\right\} \leqq s_a+s_b+s_c=(a+b+c)/2 \leqq 3\sqrt{3}\,(r_a+r_b+r_c-r)/8$$

$$h_b\,h_c+h_c\,h_a+h_a\,h_b \leqq 3\sqrt{3} \leqq 3\,(s_b\,s_c+s_c\,s_a+s_a\,s_b) \leqq 3\,(bc+ca+ab)/4 \leqq r_b\,r_c+r_c\,r_a+r_a\,r_b$$

$$h_a\,h_b\,h_c \leqq 3\sqrt{3}\,s_a\,s_b\,s_c \leqq \sqrt{3/\sqrt{3}\,F^3} \leqq r_a\,r_b\,r_c \leqq 3\sqrt{3}\,abc/8.$$

246. *Proposed by Alexandru Lupas, Institutul de calcul, Cluj and Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart.*

If a_1, a_2 are fixed real numbers let $\mathfrak{P}_n(a_1, a_2)$ be the class of polynomials only with real roots, of the form

$$f(x)=x^n+a_1\,x^{n-1}+a_2\,x^{n-2}+b_3\,x^{n-3}+\cdots+b_n, \quad b_k \in \mathbf{R}.$$

If

$$m(f)=\min_{1\leq i<k\leq n}(x_i-x_k), \quad f(x_i)=0, \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

then prove that

$$\max_{f\in\mathfrak{P}_n(a_1,\,a_2)} m(f)=m(P^*)=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{3\cdot|\Delta|}{n^2-1}}, \quad n\geq 2,$$

where

$$\Delta=(n-1)\,a_1^2-2\,na_2,$$

and

$$P^*(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(x-\bar{x}+\frac{n-2k+1}{n}\sqrt{\frac{3\cdot|\Delta|}{n^2-1}}\right); \quad \bar{x}=-\frac{a_1}{n}.$$

150. *Proposed by Ivan Singer, Rež by Prag*

If for nonnegative integer n there exist derivatives $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}x$ on the interval $(-\infty, +\infty)$, then prove

$$\{f(g(x))\}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(g(x))\, g_{k,n}^{(x)} \tag{1}$$

where

$$g_{k,n}^{(x)}=\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}^{(n-j)}\cdot g(x)\cdot g_{k-1,j}^{(x)} \quad \text{for } k\geqq 1, \tag{2}$$

and

$$g_{0,0}=1,\ g_{0,k}=0 \text{ for } k\geqq 1.$$

Solution by Ž. M. Mitrović, University of Niš

At first we have

$$g_{1,1}=g',\quad g_{2,2}=g'^2 \text{ and } g_{k,k}=g'g_{k-1,k-1}$$

so that

$$g_{k,k}=g'^k. \tag{3}$$

Now we shall use mathematical induction and prove the following formula

$$g'_{k,n}=g_{k,n+1}-g'g_{k-1,n}. \tag{4}$$

If we put $k=1$ in (4), we give

$$g'_{1,n}=g_{1,n+1}-g'g_{0,n}=g_{1,n+1}. \tag{5}$$

Since

$$g_{1,n}=\sum_{j=0}^{n=1}\binom{n-1}{j}g^{(n-j)}g_{1,j}=g^{(n)}$$

we have

$$g'_{1,n}=g^{(n+1)}=g_{1,n+1} \quad \text{i.e. (5).}$$

For k we shall have

$$g'_{k,n}=\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}+g^{(n-j)}g'_{k-1,j}\right)$$

and because (4)

$$g'_{k,n}=\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}+g^{(n-j)}g_{k-1,j+1}-g^{(n-j)}g'g_{k-2,j}\right.$$

$$=\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}+\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}-\sum_{j=k-2}^{n-1}\binom{n-1}{j}g^{(n-j)}g'g_{k-2,j}$$

$$+\binom{n-1}{k-1}g^{(n-k+2)}g'g_{k-2,k-2}$$

$$=\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}+\sum_{j=k-1}^{n}\binom{n-1}{j-1}g^{(n+1-j)}g_{k-1,j}-\sum_{j=k-2}^{n-1}\binom{n-1}{j}g^{(n-j)}g'g_{k-2,j}$$

$$= \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n}{j} g^{(n+1-j)} g_{k-1,j} + \binom{n-1}{n-1} g' g_{k-1,n} - \sum_{j=k-2}^{n-1} \binom{n-1}{j} g^{(n-j)} g' g_{k-2,j}$$

$$= \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} g^{(n+1-j)} g_{k-1,j} - \sum_{j=k-2}^{n-1} \binom{n-1}{j} g^{(n-j)} g' g_{k-2,j}$$

$$= g_{k,n+1} - g' g_{k-1,n}, \quad \text{i.e. (4).}$$

Now we shall prove the formula (1).
For $n=1$ we have

$$f' = \sum_{k=0}^{1} f^{(k)} g_{k,1} = f g_{0,1} + f' g_{1,1} = f' g'.$$

For $n+1$ we get

$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} (f^{(k+1)} g_{k,n} g' + f^{(k)} g'_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)} g' g_{k-1,n} + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} g'_{k,n} + f g'_{0,n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)} (g' g_{k-1,n} + g'_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)} g_{k,n+1} + f g_{0,n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)} g_{k,n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

199. *Proposed by Alexandru Lupas, Institut de calcul, Cluj, Roumanie*

Let $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ be a polynomial with the roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$, and such that $|a_k| \le k^2 - \frac{4}{3} k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Prove that, for each real or complex root, holds the inequality

$$|x_j| < 3, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Solution with generalization by D. M. Simeunović and D. D. Adamović, University of Belgrade

For every zero $x = \rho e^{i\theta} \ne 0$ $(\rho > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)$ of the polynomial P the following inequality

$$\rho^n \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \rho^{n-k}$$

holds. By the supposition

$$|a_k| \le k^2 - \frac{4}{3} k + 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

we have further

$$\rho^n \le \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{4}{3} k + 1\right) \rho^{n-k},$$

or

$$1 \le \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{4}{3} k + 1\right) \rho^{-k}.$$

This means, since the function $g(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{4}{3} k + 1\right) t^{-k}$ decreases for $t > 0$, that

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{4}{3} k + 1\right) t^{-k} < 1 \text{ implies } \rho < t.$$

Putting

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1\right) t^{-k},$$

we obtain, for $t>1$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1\right) t^{-k} = \frac{2t^2+t+3}{3(t-1)^3} = s(t).$$

Hence,

$$s_n(3) < s(3) = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

i. e., by the above conclusion, we have, for each zero x of the polynomial P,

$$|x| = \rho < 3,$$

what was to be proved.

We note that the upper bound 3 is the best possible obtainable by the above procedure. Namely, 3 is the unique root of the equation

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1\right) t^{-k} = 1 \quad (t>1),$$

because $s(t)$ decreases strictly for $t>1$.

Generalization. The preceding considerations lead immediately to the following proposition:

Let $a_k\ (k=1, 2, \ldots)$ be complex numbers such that

$$|a_k| \leq \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

where the series

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k$$

has the positive radius of convergence R and infinitely many positive coefficients. Then: if $f(R) \geq 1$, the equality $f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$ has for $t \geq \frac{1}{R}$ the unique root t_0, and for every zero ζ of the polynomial

$$P(z) = z^n + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{n-k}$$

holds $|\zeta| < t_0$; if $f(R) < 1$, we have $|\zeta| < \frac{1}{R}$ for every zero ζ.

Examples. 1° If

$$|a_k| \leq \frac{1}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

then $|\zeta| < \frac{1}{\log 2}$, since in this case

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!\, t^k} = e^{\frac{1}{t}} - 1 = 1$$

for $t = t_0 = \frac{1}{\log 2}$.

2° If

$$|a_k| \leq \alpha k \quad (k=1, 2, \ldots; \ \alpha > 0),$$

then

$$|\zeta| < 1 + \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2},$$

because now

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k t^{-k} = \frac{\alpha t}{(t-1)^2} = 1 \quad (t>1)$$

for $t = t_0 = \dfrac{\alpha + 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$.

(Especially, for $\alpha = 1$ we have

$$|\zeta| < \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

this result is due to *P. Montel.*)

3° If

$$|a_k| \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

then

$$f(R) = f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 < 1$$

and hence $|\zeta| < 1$.

Solution by the author

If $|x_j| \leq 1$ then $|x_j| < 3$; let us suppose that $|x_j| > 1$. Because

$$0 = |P(x_j)| = \left| x_j^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x_j^{n-k} \right| \geq |x_j|^n - \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_j^{n-k} \right|$$

we observe that

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|x_j|^k}. \tag{1}$$

Taking into account that $|a_k| \leq k^2 - \dfrac{4}{3} k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, from (1), one obtains

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3} k + 1\right) \frac{1}{|x_j|^k}$$

which is the same with

$$\frac{t(1+t)}{(1-t)^3} - \frac{4t}{3(1-t)^2} + \frac{t}{1-t} > 1, \quad t = \frac{1}{|x_j|} < 1. \tag{2}$$

It is easy to see that (2) implies that $t > \dfrac{1}{3}$, more precisely $|x_j| < 3$, and the solution is complete.

200. *Proposed by Alexandry Lupas, Institutul de calcul, Cluj, Roumanie*

If $f\colon [a, b] \to R$, $f(a)=0$, has a continuous derivative on $[a, b]$ such that $|f'(x)| \leq 1$, $x \in [a, b]$, then prove the inequality

$$\int_a^b |f(x)| \sqrt{1-|f'(x)|^2}\, dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi},$$

the equality case being valid if and only if $f(x)=\frac{2(b-a)}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$.

Solution by the author.

If

$$g(x) := \frac{\pi}{2(b-a)} f(x), \quad x \in [a, b],$$

then we must prove that

$$\int_a^b |g(x)| \sqrt{1-\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}|g'(x)|^2}\, dx \leq \frac{b-a}{2} \tag{1}$$

with equality iff

$$g(x)=\sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \quad x \in [a, b]. \tag{1'}$$

We have

$$\int_a^b |g(x)| \sqrt{1-\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}|g'(x)|^2}\, dx \leq \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b \left[1-\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}|g'(x)|^2\right] dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

the equality case being valid if and only if

$$|g(x)|=C \sqrt{1-\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}|g'(x)|^2}, \quad C \text{ constant}, \ C \geq 0. \tag{2'}$$

According to the Wirtinger's inequality [see for instance, Mitrinović D. S., and Vasić P. M., Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № 247 – 273, 1969, 157 – 170] we obtain the inequality

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} I \tag{3}$$

where

$$I := \int_a^b |g'(x)|^2 dx,$$

and the inequality (3) is strictly, unless

$$(3') \qquad g(x)=C_1 \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \quad x \in [a, b], \quad C_1 \text{ an arbitrary constant.}$$

From (2) and (3), we conclude with

$$\int_a^b |g(x)| \sqrt{1-\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}|g'(x)|^2}\, dx \leq \frac{2(b-a)^2}{\pi^2} \cdot \left[I-\frac{4(b-a)}{\pi^2} I^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Because

$$(4) \qquad I-\frac{4(b-a)}{\pi^2} I^2 \leq \frac{\pi^2}{16(b-a)}$$

with equality case iff

$$(4') \qquad \int_a^b |g'(x)|^2\, dx=\frac{\pi^2}{8(b-a)},$$

one obtains the inequality (1); taking into account (1'), (2'), (3') and (4') we observe that in (1) the equality case holds if and only if

$$g(x)=\sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \text{ that is } f(x)=\frac{2(b-a)}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}.$$

204. *Поставил Жарко М. Митрович, Економска школа, Вране*

Доказат, что если a, b, c стороны и h_a, h_b, h_c высоты треугольника, то

$$\frac{h_a+h_b}{a+b} \frac{b_b+h_c}{b+c} \frac{h_c+h_a}{c+a} \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

Знак равенства имеет место только для $a=b=c$.

Solution by Andrzej Makowski, Wybickiego 11 Warszawa 97, Poland

We have $\dfrac{h_a+h_b}{a+b}=\dfrac{\dfrac{2F}{a}+\dfrac{2F}{b}}{a+b}=2F\dfrac{\dfrac{a+b}{ab}}{a+b}=\dfrac{2F}{ab}$. Thus the required inequality is equivalent to the following

$$8F^3 \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}\,(abc)^2,$$

$$(abc)^2 \geq \left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

The last inequality is proved in the book O. Bottema, *R.* Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Geometric inequalities, Groningen, 1969 (Inequality 4.14, p. 46). Equality holds if and only if $a=b=c$.

Решење Жарка Мијајловића, Беоїрад

Како је

$$\frac{h_a+h_b}{a+b}\cdot\frac{h_a+h_c}{a+c}\cdot\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{2P\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{a+b}\,\frac{2P\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{a+c}\,\frac{2P\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{b+c}=$$

$$=\frac{2P}{ab}\cdot\frac{2P}{ac}\cdot\frac{2P}{bc}=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma,$$

где је P површина троугла, α, β, γ углови троугла, то, према познатој неједнакости $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$, тврђење важи. У последњој неједнакости једнакост важи ако и само ако је $a=b=c$.

Решење Р. Р. Јанића, Универзиѿеѿ у Беоїраду

Како је

$$h_a=\frac{2P}{a},\quad h_b=\frac{2P}{b},\quad h_c=\frac{2P}{c},$$

биће

$$\frac{h_b+h_c}{b+c}+\frac{h_c+h_a}{c+a}+\frac{h_a+h_b}{a+b}=2P\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=$$

$$=\frac{2P}{abc}(a+b+c)=\frac{a+b+c}{2R}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

где су ознаке стандардне.

Примедба редакције. У претходном решењу није уствари доказана задата неједнакост, него неједнакост

$$\frac{h_b+h_c}{b+c}+\frac{h_c+h_a}{c+a}+\frac{h_a+h_b}{a+b}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Also solved by I. Paasche, P. Drăgilă and the author.

205. *Поставил Жарко М. Митрович, Економска школа, Вране*

Доказать, что если a_1, a_2, a_3 стороны треугольника, $2\,s$ периметр, r радиус вписанной а R описанной окружности, то

$$s^2+r^2\geq 14\,Rr.$$

Знак равенства имеет место тольло для $a_1=a_1=a_s$.

Solution by A. Makowski, Warszawa

In virtue of the inequalities $s^2\geq r(16\,R-5\,r)$ and $2\,r\leq R$ (inequalities 5.8 and 5.1 in the book mentioned above), we have

$$s^2+r^2\geq 16\,Rr-Sr^2+r^2=14\,Rr+2\,Rr-4\,r^2\geq 14\,Rr.$$

Because in both quoted inequalities the equality sign holds only for equilateral triangle, the same result we have for the required inequality.

Also solved by P. Drăgilă and the author.

212. *Доставио Р. Дацић, Универзитет, Београд*

Доказати или оповргнути тврђење: За сваки природни број n број $\binom{2n+1}{n}$ дељив је са $2n+1$.

Solution by A. Makowski, Warszawa

E. Catalan proved that if $(m, n)=1$ then $\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,n!}$ is an integer. Hence, for $m=n+1$, $\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$ is an integer. But

$\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}=(2n+1)\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$, thus $\binom{2n+1}{n}$ is divisible by $2n+1$.

Решење М. Капетановића, Математички институт, Београд

Непосредно се доказује да важи

$$\frac{\binom{2n+1}{n}\cdot(n+1)}{2n+1}=\binom{2n}{n}.$$

То значи да је број $\binom{2n+1}{n}\cdot(n+1)$ дељив бројем $2n+1$. Међутим, бројеви $n+1$ и $2n+1$ су међусобно прости, јер Диофантова једначина

$$(n+1)\cdot x+(2n+1)\cdot y=1$$

има целобројна решења (на пример $x=2$, $y=-1$). Следи да је број $\binom{2n+1}{n}$ дељив бројем $2n+1$.

Решење Жарка Мијајловића, Београд

Како важи једнакост $\dfrac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ за сваки природни број n и $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ је цео број, то $2n+1$ дели $\binom{2n+1}{n}$ за сваки природни број n

Also solved by Ž. M. Mitrović.