У Н И В Е Р З И Т Е Т   У   Б Е О Г Р А Д У

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мастер рад

АЛГЕБАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ СТЕПЕНА >2 У СРЕДЊОШКОЛСКОЈ НАСТАВИ

Петар Драгојловић

Београд, 9. октобар 2015.

Ментор:

др Александар Липковски

Редовни професор Математичког факултета у Београду

Чланови комисије:

др Милан Божић

Ванредни професор Математичког факултета у Београду

др Драгана Тодорић

Доцент Математичког факултета у Београду

Садржај:

Увод

У првом делу овог рада је описан интересантан историјат настанка образаца за решавање алгебарских једначина трећег и четвртог степена. Други део доноси образложење и извођење поменутих образаца. У трећем делу се дискутује о алгебарској једначини петог степена, а након тога о Виетовим формулама за алгебарске једначине степена већег од два и њиховим применама. Истражено је у којим образовним профилима у средњој школи, како и на који начин је заступљено решавање алгебарских једначина степена већег од два. Посебан одељак рада посвећен је решеним задацима уз коментаре о типу и тежини задатка, као и ситуације у којима су они погодни да буду обрађени.

Желим да се захвалим ментору др Александру Липковском на огромном стрпљењу, мотивацији и корисним саветима приликом израде рада. Такође желим да се захвалим члановима комисије на конкретним сугестијама које су ми знатно помогле.

Историјат решавања алгебарских једначина

Данас нам се чини тако једноставно када посматрамо алгебарске једначине степена 2,3,4. Када видимо квадратну једначину, одмах нам на памет падају чувена решења која, отприлике, сви зовемо „x_1 ,x_2". Ал Хорезми (Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, умро 850.), чувени индијски математичар, дао је општи метод за налажење два корена квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ова решења су пронађена у 8-9.веку наше ере. Након година и векова, расправа и двобоја, бурне историјске прошлости, опште решење кубне једначине је угледало светлост дана у касној ренесанси у 16. веку у Италији.

Италијански математичар Дел Феро (Del Fero, 1456-1526) први је решио један од типова кубне једначине, али је поступак држао у тајности. На самрти, он тајну поверава свом ученику Антонију Марији Фиори, а белешке дао свом зету Навеу. Када говоримо о 16. веку, говоримо о времену када Европа није прихватала негативне бројеве, нити нулу, а није постојала ни савремена конотација. Ово је била епоха препорода Европе, а Италија средиште ренесансе и највећих умова тога доба и надаље. У циљу избегавања (и неприхватања) негативних бројева, кубна једначина се сводила на један од облика $x^3 + mx = n$ или $x^3 = mx + n$, где су m,n позитивни бројеви. Није познато колико је облика кубне једначине умео да реши Дел Феро. Чињеница да је умео да реши само један долази од када је самоуки математичар и познати дуелант Николо Фонтана Тартаља (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557) изазвао Фиору који се хвалио како зна метод за решавање кубне једначине. Математички двобој је одигран, Тартаља је успео да реши противникове проблеме, док је Фиори успео да реши само један случај кубне једначине. Остаје тајна да ли је Феро знао оба случаја кубне једначине, али је ипак ученику саопштио само један. Тартаљина победа је привукла пажњу Ђиралома Кардана (Gerolamo Cardano, 1501-1576), који је, за разлику од Тартаље, био школовани математичар. Кардано је успео извући метод за решавање кубне једначине, уз обећање да га неће објављивати. Тартаља је Кардану послао решење у стиховима, те овом није било тешко да закључи како се ради.

Када су куб и ствар заједно
Једнаки неком константном броју
Пронађи друга два броја која се за тај разликују.

Тада ћеш усвојити ово као навику
Да им производ треба увек бити једнак
Тачно кубу трећине од ствари,

Остаје онда као опште правило
Да ће разлика њихових кубних корена
Бити једнака твојој основној ствари.

Шта се онда дешава? Кардано са својим учеником Ферaријем (Lodovico Ferrari, 1522-1566) развија методу за решавање свих типова кубне једначине, док ученик Ферари иде још даље и развија метод за решавање једначине четвртог степена. Сва знања и открића су сабрали у дело „Велика вештина“ (*Ars magna,* 1545.), што је разбеснело Тартаљу, који се осећао изданим и искоришћеним. Међутим, оно сто Тартаља није знао је то да су Кардано и Ферари у Болоњи упознали (зета) Навеа. Кардано опет користи своје вештине и убеђује Навеа да уме да реши један случај једначине, а он им показује Дел Фереову свеску са белешкама. Кардано је био задовољан сазнањем да Тартаља није први решио кубну једначину. Вероватно је и зато имао одрешене руке да објави решења у „Великој вештини“. Али, Тартаља није знао све ово, па се и даље осећао бесно и понижено.

Данас су формуле за решавање кубне једначине познате као **Кардано – Тартаљине формуле**.

Шта је са једначинама вишег степена? Овим проблемом су се бавили изврсни математичари и умови током 18.века. Први је Лагранж безуспешно примењивао формуле које су дали Кардано и Ферари, али није долазио до резултата и решења. Норвешки математичар Нилс Абел је 1824. године је дао чврст доказ да једначине петог степена нису решиве уз помоћ радикала (операције сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања рационалним бројевима извршене коначан број пута са коефицијентима једначине). Више о једначинама петог степена и њиховом решавању споменућемо у наредној глави.

Алгебарска једначина трећег степена

Једначина облика

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad a_3 \neq 0 \tag{1}$$

у којој $a_0, a_1, a_2, a_3 \epsilon R$ и не зависе од x зове се кубна једначина или једначина степена три у односу на x; a_0, a_1, a_2, a_3 се називају коефицијенти једначине. Ево неколико примера кубне једначине:

$x^3 = 0; \quad 3 - x^3 = 0; \quad 3 + 5x^2 + 2x^3 = 0; \quad 3x^3 + 2x + 1 = 0.$

Видимо да су најстарији коефицијенти, односно коефицијенти уз x^3 редом: 1, -1, 2, 3. Такође видимо да ни једна од њих није ''потпуна'', у смислу да има 4 коефицијента ≠ 0.

У претходној дефиницији смо констатовали да је $a_3 \neq 0$, у супротном би једначина била степена <3 . Ако је коефицијент $a_0 \neq 0$, тада једначина (1) постаје:

$$x(a_3x^2 + a_2x + a_1) = 0,$$

одакле видимо да је $x = 0$ или $a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0$.

Последња једначина је квадратна и њу решавамо на познат начин.

Ако су средњи коефицијенти $a_1, a_2 = 0$, онда једначина (1) постаје:

$$a_3x^3 + a_0 = 0.$$

То је чиста кубна једначина. Њено решење је $x = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_3}}$.

Да видимо случај када је бар један од средњих коефицијената различит од нуле.

Први корак: делимо једначину (1) са a_3 , да би коефицијент уз највећи степен нормирали на 1. Тада једначина (1) постаје:

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0.$$

Други корак: поништење коефицијента до најстаријег. Увешћемо смену

$$x = y + z.$$

Унесемо ли израз $y + z$ уместо x у (1) добијамо:`

$$a_3(y+z)^3 + a_2(y+z)^2 + a_1(y+z) + a_0 = 0,$$

Односно ако поређамо по опадајућим степенима по y имамо:

$$a_3y^3 + (3a_3z + a_2)y^2 + (\dots)y + \dots = 0.$$

Сада имамо две непознате y и z; но коефицијент уз y^2 можемо поништити, тј. Ставити да је :

$$3a_3z + a_2 = 0$$

и тиме једнозначно одредити z :

$$z = -\frac{a_2}{3a_3}.$$

Применићемо два наведена корака, нпр. на једначину $3x^3 - 9x^2 + 27x - 15 = 0$.

Дељењем задате једначине са 3 добијамо еквивалентну једначину

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0, \tag{2}$$

Чиме смо најстарији коефицијент нормирали на 1.

Сада уводимо смену,

$x = y + z$,

А пошто је $z = -\frac{a_2}{3a_3}$, тј. $z = 1$, добијамо да је

$$x = y + 1$$

Замењујући x у полазну (2) добијамо

$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) - 5 = 0$,

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 9y + 9 - 5 = 0$,

$y^3 + 6\,y + 2 = 0$, односно

$x^3 + 6x + 2 = 0$.

Видимо да је коефицијент уз x^2 једнак 0.

Кубна једначина у којој је $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, обично записујемо овако:

$$x^3 + p\,x + q = 0. \tag{3}$$

Конкретно, у претходном примеру је $p = 6$, а $q = 2$. За једначину (3) кажемо да је нормални облик кубне једначине.

Решење нормалне кубне једначине

Карданов образац

Да бисмо решили једначину (3), непознату x ћемо представити као суму две непознате u и v :

$$x = u + v \tag{4}$$

Тиме једначина (3) прелази у једначину

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \tag{5}$$

Којој ће очигледно бити удовољено чим је

$$3uv + p = 0 \tag{6}$$

$$u^3 + v^3 = -q, \tag{7}$$

а из (6) је:

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{8}$$

Па кубови u^3 и v^3 непознатих u и v према Виетовим формулама представљају решење квадратне једначине

$$z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3 v^3 = 0,$$

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Одатле је: $$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}};$$

Дакле:

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad (9)$$

$$z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad 0)$$

па је према (4):

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{11}$$

На овај начин налазимо 9 могућности за x. Пошто решавамо једначину трећег степена, морамо од поменутих 9 могућности да нађемо 3.

Обазац (11) се назива **Карданова формула.**

Ставимо да је

$$D = -4p^3 - 27q^2,$$

Тада (11) прелази у

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}}.$$

Израз $D = -4p^3 - 27q^2$ назива се *дискриминанта кубног полинома* $x^3 + px + q$, односно одговарајуће једначине (3). Једначина $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ зове се резолвента кубне једначине $x^3 + px + q = 0$.

Сада ћемо показати на који начин можемо да нађемо три одговарајућа решења.

Нека је U jedno решење из (9), а V једно решење из (10) које задовољавају услов $UV = -\frac{p}{3}$ (због (8)), тада је

$$x = U + V$$

једно решење кубне једначине $x^3 + px + q = 0$.

Да бисмо пронашли остала два решења, означимо са $\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (могли смо узети и да је $\alpha = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Приметимо да је α један од примитивних кубних корена јединице ($\alpha^3 = 1, \alpha \neq 1$).

Ако је, као што смо навели, U једно решење из (9), тада су преостала два решења и $U\alpha$ и $U\alpha^2$. Исто тако су $V, V\alpha, V\alpha^2$ три решења једначине (10).

Бројеви

$$X_0 = U + V$$

$$X_1 = U\alpha + V\alpha^2$$

$$X_2 = U\alpha + V\alpha$$

су три решења кубне једначине $x^3 + px + q = 0$.

При томе смо навели услов да је $UV = -\frac{p}{3}$.

Написаћемо како се понашају решења кубне једначине $x^3 + px + q = 0$ у односу на знак дискриминанте. $(D > 0, D = 0, D < 0)$

1. Ако је $D < 0$, тада је израз који се налази под квадратним кореном у Кардановој формули позитиван, па можемо узети да су U и V реални. Дакле, једно решење је $x_0 = U + V$ и оно је реално, а за друга два израчунавањем се добија да су коњуговано комплексна, тј. :

$$x_1 = \frac{-U-V}{2} + i\frac{U-V}{2}\sqrt{3},$$
$$x_2 = \frac{-U-V}{2} - i\frac{U-V}{2}\sqrt{3}.$$

2. Ако је $D = 0$, тада је $U = V = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, па је :

$$x_0 = 2U$$
$$x_1 = -U$$
$$x_2 = -U.$$

Сва три решења су реална, при чему су два међусобно једнака.

3. Ако је $D > 0$, тада су сва три корена реална и различита.

Тригонометријско решење кубне једначине

Показаћемо тригонометријско решење кубне једначине да и када је $D > 0$ (casus irreducibilis- несводљив случај) сва три корена су реална иако у Карадановој формули долази до кореновања негативног броја.

Из $D > 0$ је $-D < 0$ па u^3 није реалан број. Знамо да је сваки комплексан број облика $re^{i\varphi}$, тј. $r\cos\varphi + risin\varphi$, где $r \geq 0$ је модул комплексног броја, а $\varphi \epsilon [-\pi, \pi]$ је аргумент комплексног броја. Ставимо да је u^3 тог облика, тј.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi.$$

Односно:

$$-\frac{q}{2} = r\cos\varphi$$

$$\sqrt{\frac{D}{108}} = r\sin\varphi,$$

$$r > 0, \sin\varphi > 0 .$$

Ако последње две једначине квадрирамо, а затим их саберемо, добијамо:

$$-\frac{p^3}{27} = r^2,$$

Одакле је:

$$r = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3}$$

Пошто је $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$, мора бити $p < 0$, па се види да је $r > 0$.

φ је једнозначно одређен из услова $\cos\varphi = \frac{-q}{2r}$, уз додатни захтев да је $\sin\varphi > 0$, тј.$0 \leq \varphi \leq \pi$.

На овај начин смо једнозначно одредили r и φ, па за u имамо следеће три вредности:

$$u = \left(re^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3})},\ k = 0,1,2 .$$

Слично за v имамо ове три вредности:

$$v = \left(re^{-i\varphi}\right)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} e^{-i(\frac{\varphi}{3} + \frac{2l\pi}{3})}, l = 0,1,2.$$

Пошто за решења $x = u + v$ вредности треба одабрати u и v тако да важи да је $uv = -\frac{p}{3}$, дакле реалан број, то значи да у изразу $x = u + v$,

$$\text{тј. } x = r^{\frac{1}{3}}(e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2l\pi}{3}\right)}), k = 0,1,2,\ l = 0,1,2.$$

треба да буде $k = l$, па је:

$$x_k = r^{\frac{1}{3}}\left(e^{i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\right)$$

$$x_k = r^{\frac{1}{3}}(\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right] + \left[\cos\frac{-(\varphi+2k\pi)}{3} + i\sin\frac{-(\varphi+2k\pi)}{3}\right]),$$

$$x_k = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},\ k = 0,1,2.$$

Видимо да су x_k реални бројеви. Тиме је показано да када је $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$, решења кубне једначине $x^3 + px + q = 0$ су реална и различита.

Сада ћемо тригонометријски решити кубну једначину $x^3 + px + q = 0$ су за коју је $D < 0$.

Нека је $D < 0$, тј. $-4p^3 - 27q^2 < 0$. Као и у случају када је $D > 0$, ставимо да је $r = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3}$.

Први случај: $p < 0$, онда је

$$r^2 = (-\frac{p}{3})^3$$

Па пошто је $D < 0$, видимо да је

$$r^2 = (-\frac{p}{3})^3 < \frac{q^2}{4},$$

односно $$0 \leq r < \frac{|q|}{2};$$

Зато се може наћи φ тако да је $\sin\varphi = -\frac{2r}{q}$; ако је $q < 0$, нека φ буде у првом квадранту, а ако је $q > 0$ нека φ буде у III квадранту. Свакако је

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{cos^2\varphi}{sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1 - sin^2\varphi}{sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{sin^2\varphi} - 1},$$

$$ctg\varphi = \frac{\sqrt{-D}}{108r},$$

па изрази u^3 и v^3 постају

$$u^3 = r\left(\frac{1}{sin\varphi} + ctg\ \varphi\right) = r\ ctg\ \frac{\varphi}{2}$$

$$v^3 = r\left(\frac{1}{sin\varphi} - ctg\ \varphi\right) = r\ tg\ \frac{\varphi}{2}$$

Да би одредили бројеве u и v одредимо ω по формули:

$$tg^3\omega = tg\ \frac{\varphi}{2}$$

Тако да ω и $\frac{\varphi}{2}$ леже у истом квадранту . Добијамо да је:

$$u = r^{\frac{1}{3}} ctg\omega = \sqrt{-\frac{p}{3}}\, ctg\omega$$

$$v = r^{\frac{1}{3}} tg\omega = \sqrt{-\frac{p}{3}}\, tg\omega$$

Тиме добијамо и једно решење:

$$x_0 = u + v = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot (ctg\omega + tg\omega) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{sin\, 2\omega}.$$

Преостала два решења су:

$$x_1 = u\alpha + v\alpha^2, x_2 = u\alpha^2 + v\alpha, \text{где је}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{и} \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Након израчунавања добијамо да је

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{1}{sin\, 2\omega} + i\sqrt{3} ctg\ 2\omega\right),$$

$$x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{1}{sin\, 2\omega} - i\sqrt{3} ctg\ 2\omega\right),$$

$$r = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3}, \ \ sin\varphi = -\frac{2r}{q}, tg^3\omega = tg\frac{\varphi}{2}.$$

Други случај: $p > 0$. Одредимо φ из $-\frac{q}{2r} = ctg\varphi$ тако да буде $sin\varphi > 0$ и то:

$$sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\varphi}} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

Због тога за u^3 и v^3 имамо следеће изразе:

$$u^3 = rctg\frac{\varphi}{2}, \ \ v^3 = -rtg\frac{\varphi}{2}, \ r = \sqrt{(\frac{p}{3})^3}$$

Ако као у претходном случају одредимо да је $\omega \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ из $tg^3\omega = tg\frac{\varphi}{2}$, тада је $u = \sqrt{\frac{p}{3}} ctg\omega$, $v = -\sqrt{\frac{p}{3}} tg\omega$,

па након краћег израчунавања добијамо да је:

$$x_0 = 3\sqrt{\frac{p}{3}} ctg2\omega,$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}(-ctg2\omega + i\sqrt{3}\frac{1}{sin2\omega})$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}(-ctg2\omega - i\sqrt{3}\frac{1}{sin2\omega}).$$

Тригонометријски начин решавања је прикладан за нумерички пример кубне једначине.

Алгебарска једначина четвртог степена

Општи облик алгебарске једначине четвртог степена је:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ \ a_4 \neq 0 \tag{1}$$

Једначина (1), дељењем са a_4, еквивалентна је једначини

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

где је $a = \frac{a_3}{a_4}, b = \frac{a_2}{a_4}, c = \frac{a_1}{a_4}$ и $d = \frac{a_0}{a_4}$.

Ако је једначина четвртог степена сведена на облик (2), кажемо да је нормирана.

Увек можемо једначину (1) да сведемо на облик (2).На више начина ћемо решити алгебарску једначину четвртог степена. Почећемо од Ферaријевог решења.

1. Ферaријево решење.
   Нека је дата једначина четвртог степена (2), тј.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

У оваквом начину решавања настоји се поделити једначину на две квадратне једначине. Последња једначина је еквивалентна једначини

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

Одакле допуњавањем леве стране једнакости до квадрата бинома, добијамо

$$x^4 + ax^3 + \left(\frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{ax}{2}\right)^2 - bx^2 - cx - d,$$

тј.

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \tag{3}$$

Видимо да је лева страна потпун квадрат, настојимо и да на десној страни добијемо потпуни квадрат $L^2(x)$, јер би тада из (3) произилазило:

$$x^2 + \frac{ax}{2} = \pm L(x). \tag{4}$$

Уколико у првој загради израза (3) додамо непознати израз и пошто је

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + yx^2 + \frac{ayx}{2} + \frac{y^2}{4},$$

Добијамо да је:

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \qquad (5)$$

Да би у последњој једнакости десна страна била потпун квадрат $L^2(x)$, треба да дискриминанта по x буде једнака 0, тј. да важи:

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\cdot\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0 \qquad (6)$$

Последња једначина је једначина трећег степена по y коју знамо решити и назива се Ферартијева резолвента једначине (2).
Значи, из једначине (6) нађе се y, за такво y десна страна од (5) постаје $L^2(x)$, па из (5) закључујемо да важи (4); а квадратну једначину знамо решити.

Сада ћемо показати на који је начин Ојлер (Leonhard Paul Euler, 1707-1783) 1738. год решио једначину четвртог степена.

2. Ојлерово решење.
   Полазимо од нормиране једначине:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

Можемо увести смену $x=y+z$ и одредити z тако да коефицијент уз кубни члан y^3 буде једнак нули. Коефицијент уз y^3 ће бити $a+4z$.

Ако хоћемо да буде

$$a+4z=0,$$

тада је,

$$z=-\frac{a}{4}.$$

Дакле, нормирану једначину смо свели на једначину четвртог степена без кубног члана.

$$y^4+a_2y^2+a_1y+a_0=0,$$

где се a_0, a_1, a_2 израчунавају из једначине (1).
Када уведемо смену $x=y-\frac{a}{4}$, ради једноставнијег рада, имајући у виду смену коју смо увели,последњу једначину ћемо писати на следећи начин:

$$x^4+bx^2+cx+d=0. \qquad (2)$$

Ојлер је увео смену:

$$x = u + v + z \tag{3}$$

Чиме једначина (2) постаје еквивалентна са следећом једначином:

$$(u^2 + v^2 + z^2)^2 + 4(u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2) + b(u^2 + v^2 + z^2) +$$
$$+[2b_2 + 4(u^2 + v^2 + z^2)](uv + uz + vc) + (u + v + z) \cdot (8uvz + c) + d = 0$$
(4)

Последња једначина се поједностављује ако је:

$$8uvz + c = 0, \text{тј.}\ uvz = -\frac{c}{8}, \tag{5}$$

$$2b + 4(u^2 + v^2 + z^2) = 0, \text{тј.}\ u^2 + v^2 + z^2 = -\frac{b}{2} \tag{6}$$

Тада једнакост (4) постаје:

$$u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 = \frac{b^2 - 4d}{16} \tag{7}$$

Ако квадрирамо леву и десну страну једнакости (5), добијамо:

$$u^2 \cdot v^2 \cdot z^2 = -\frac{c^2}{64} \tag{8}$$

На основу релације (5),(6),(8) можемо формирати једначину:

$$(y - u^2)(y - v^2)(y - z^2) = 0,$$

у којој су u^2, v^2, z^2 решења. Измножимо ли сва три чиниоца, претходна једначина постаје:

$$y^3 - \frac{by^2}{2} + \frac{b^2 - 4d}{16} \cdot y - \frac{c^2}{64} = 0. \tag{9}$$

Једначина (9) се назива кубна резолвента једначине (3), јер из ње добијамо да је

$$y_1 = u^2,\ \ y_2 = v^2,\ \ y_3 = z^2,$$

а тиме и само x у облику

$$x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \tag{10}$$

уз услов:

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{c}{8} \tag{11}$$

Видимо да у изразу (10), y-ови не могу бити произвољно изабрани, јер мора важити (11). Ако су u, v и z добро изабрана решења за $\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}$ и $\sqrt{y_3}$ редом, тј. ако је заиста $u + v + z$ једно тражено решење, тада су сва четири решења овог облика :

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v + z, \\ x_2 &= u - v - z, \\ x_3 &= -u + v - z, \\ x_4 &= -u - v + z. \end{aligned}$$

Као доказ да су овим добијена сва четири решења, нужно је и довољно показати да је

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + bx^2 + cx + d,$$

односно да је

$$\begin{gathered} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \mathrm{b}, \\ -x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 = \mathrm{c}, \\ x_1x_2x_3x_4 = d. \end{gathered}$$

Ове једнакости се могу директно проверити!

Навешћемо још један начин решавања једначина четвртог степена.

Нека су корени $x_1, x_{2,} x_{3,} x_4$ комплексне једначине четвртог степена

$$x^4 + \mathrm{a}_3x^3 + \mathrm{a}_2x^2 + \mathrm{a}_1x - \mathrm{a}_0 = 0 \tag{1}$$

презентовани помоћу

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ x_2 &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ x_3 &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ x_4 &= \alpha - \beta - \gamma + \delta, \end{aligned} \tag{2}$$

где су $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ комплексни бројеви. Тада имамо:

$$\begin{gathered} 4\alpha = -a_3, \\ 6\alpha^2 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = a_2, \\ 4\alpha^3 - 4\alpha(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8\beta\gamma\delta = -a_1, \\ \alpha^4 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2 - 2a^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 8\alpha\beta\gamma\delta = a_0 \end{gathered} \tag{3}$$

На основу (3) добијамо:

$4(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$, $4^4(\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\gamma^2\delta^2)$, $4^6\beta^2\gamma^2\delta^2$, који су, у ствари, коефицијенти кубне једначине

$$(16v^2)^3-(3{a_3}^2-8a_2)(16v^2)^2+$$
$$\left(3{a_3}^4-16a_2{a_3}^2+16a_1a_3+16{a_2}^2-64\mathrm{a}_0\right)(16v^2)-({a_3}^3-4a_2\mathrm{a}_3+8a_1)^2=0 \qquad (4)$$

Њена решења су $(4\beta)^2, (4\gamma)^2$ и $(4\delta)^2$. Дакле, једначине (3) дефинишу вредност за $\alpha, \alpha=-\frac{a_3}{4}$, и имплицирају једначину трећег степена (4) за одређивање β^2, γ^2 и δ^2.

Ако ставимо

$$\begin{aligned} P &= a_3^3-4a_2a_3+8a, \\ Q &= 12a_0+{a_2}^2-3a_1a_3, \\ R &= 27a_0{a_3}^2-9a_1a_2a_3+2{a_2}^3-72a_0a_2+27{a_1}^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_3^2-\frac{8}{3}a_2 \\ \beta_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}} \\ \gamma_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R-\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}} \end{aligned} \qquad (6)$$

Тада су

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a_3}{4} \\ \beta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+\beta_0+\gamma_0} \\ \gamma &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_1\beta_0+q_2\gamma_0}, \\ \delta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_2\beta_0+q_1\gamma_0}. \end{aligned} \qquad (7)$$

где су q_1 и q_2 два нереална кубна корена из јединице, чији редослед није битан.

Било који избор гране кубног корена у (6) за који је

$$\beta_0\gamma_0=\frac{16Q}{9} \qquad (8)$$

је дозвољен. Слично је могућ и произвољан избор знака квадратног корена у (7) за који је

$$\beta\gamma\delta=-\frac{P}{64} \qquad (9)$$

Ограничење (9) за избор знака величина β, γ и δ у (7) произилази из прве три једначине у (3).

Теорема 1. Нека је

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

реална једначина четвртог степена и нека су

$Q = 12a_0 + {a_2}^2 - 3a_1a_3,$

$R = 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2{a_2}^3 - 72a_0a_2 + 27{a_1}^2,$

$$T = 3{a_3}^2 - 8a_2 + 8Re\left(\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}}\right). \tag{10}$$

Рачунајући вишеструкост корена

1) Ако је $R^2 - 4Q^3 > 0$ тада су два и само два корена једначине (10) реална;
2) Ако је $R^2 - 4Q^3 = 0$ тада су два корена једначине (10) реална док су преостала два корена реална, ако и само ако је $T \geq 0$ за сва три могућа избора кубног корена у (11);
3) Ако је $R^2 - 4Q^3 < 0$ тада су (а) четири корена једначине (10) реална ако и само је $T \geq 0$ за сва три могућа избора кубног корена у (11); и (б) Ниједан корен једначине (10) није реалан ако и само ако је $T < 0$ за најмање један од могућа три избора кубног корена у (11).

Теорема 2. Једначина четвртог степена $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ има два једнака корена ако и само ако $R^2 - 4Q^3 = 0$ и има три једнака корена ако и само је $R = Q = 0$, где су

$R = 27a_0{a_3}^2 - 9a_1a_2a_3 + {a_2}^3 - 72a_0a_2 + 27{a_1}^2,$

$Q = 12a_0 + {a_2}^2 - 3a_1a_3.$

Ова теорема се може непосредно доказати коришћењем алгебарских решења која су претходно дата.

Теорема 3. Једначина четвртог степена $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ има два пара једнаких корена ако и само ако су испуњени услови

$R^2 - 4Q^3 = 0$ и $32R = 27{\alpha_0}^3$.

Једначина $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ има четири једнака корена ако и само ако је $R = Q = \alpha_0^3 = 0$.

Виетове формуле

Прво ћемо извести Виетове формуле за алгебарске једначине степена n , а затим специјално за кубну једначину и једначину четвртог степена.

Нека су $x_{1,}x_2, \ldots\ldots, x_n$ нуле полинома n-тог степена. Тада је

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (1)$$

Да би важила једнакост, коефицијенти уз исте степене од x на левој и десној страни морају бити једнаки. Да бисмо нашли коефицијенте десне стране, треба извршити множење фактора $x - x_i, i = 1,2.., n$ и при томе треба узети у обзир да се полиноми множе тако што се сваки члан једног полинома множи са сваким чланом другог и добијени производи саберу. Дакле, резултат на десној страни од (1) добијамо тако што помножимо прва два фактора, затим добијени фактор са трећим итд. При том ћемо добити суму производа од којих сваки садржи n од фактора $x_{1,}x_2, \ldots\ldots, x_n$. Фактор x, пошто се налази у сваком биному, ће се понављати. Ако из сваког бинома $x - x_i$ узмемо први члан x добићемо производ x^n . Ако из по једног бинома узмемо други члан , а из свих осталих први члан, добићемо производе

$$-x_1 x^{n-1}, -x_2 x^{n-1}, \ldots \ldots, -x_n x^{n-1}$$

Ако из по два бинома узмемо други члан, а из свих осталих први члан, добићемо производе

$$x_1 x_2 x^{n-2}, x_1 x_3 x^{n-2}, \ldots \ldots, x_{n-1} x_n x^{n-2} \quad \text{итд.}$$

Тако ћемо на десној страни од (1) добити полином

$$a_n x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \cdots + \cdots (-1)^k p_k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n p_n$$

где је

$p_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$
$p_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$,
$p_3 = x_1 x_2 x_3 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n,$
.
.
.
$p_n = x_1 x_2 \ldots x_n$

Изједначавајући одговарајуће коефицијенте на левој и десној страни од (1) добијамо једнакости

$$x_1 + x_2 + .. + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + .. + x_1x_n + .. + .. + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + .. + x_1x_2x_n + .. + .. + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.

.

.

$$x_1x_2 \dots x_k + \cdots + \cdots + x_{n-k-1}x_{n-k+2} \dots x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \qquad (2)$$

.

.

.

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Лева страна k- те једнакости (2) је збир свих могућих различитих производа по k од бројева $x_1, x_2, .. x_n$. Ови производи се добијају када се начине све комбинације по k елемената од $x_1, x_2, .. x_n$.

Једнакости (2) се називају **Виетове формуле**.
За квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ знамо да је

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

За једначину трећег степена $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ Виетове формуле су:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Леве стране једнакости (2) су симетрични полиноми од $x_1, x_2, .. x_n$. Ови полиноми зову се основне симетричне функције аргумената $x_1, x_2, .. x_n$.
Означићемо их редом $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.
Може се доказати да свака цела рационална симетрична функција од аргумената $x_1, x_2, .. x_n$ може се представити као цела рационална функција од основних симетричних функција $\sigma_1 \sigma_2, \dots, \sigma_n$.
Нпр. $x_1{}^2 + x_2{}^2 + .. + x_n{}^2 = (x_1 + x_2 + .. + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + .. + x_{n-1}x_n) = (-\frac{a_{n-1}}{a_n})^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}.$

Алгебарске једначине степена већег од четири

Након решавања алгебарских једначина трећег и четвртог степена, логично је да се математичарима намеће питање да ли свака алгебарска једначина има бар неко решење.
Ако кренемо од линарне једначине, нпр. $2x = 1$, видимо да није решива у скупу целих бројева. Значи, ако су коефицијенти цели, решење не мора бити. Но, свака линеарна једначина у скупу Q, рационалних бројева је решава у скупу Q .
Већ једноставна квадратна једначина $x^2 = 2$, није решива у скупу Q . Решење је ирационалан број.
Даље, квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ чији су коефицијенти из Q, не мора имати решење у Q, па чак ни у скупу R реалних бројева. Али, ипак постоји уска повезаност између заданих коефицијената и траженог решења: решење се добија коришћењем основне четири операције и квадратним кореновањем.
Код кубних једначина појављује се нова операција, рачунање трећег корена. У кубној једначини до решења долазимо уз коришћење рачунских операција, кореновања и рачунања трећег корена.
Слично важи и за једначине степена четири. Дуго се тражило и настојало показати да се, аналогно, и решење једначине петог степена може извести из коефицијената једначине употребом рачунских операција и рачунањем квадратног, трећег и петог корена. Гаус је 1815. године доказао да сваки полином тог степена има и толико нула у скупу комплексних бројева. То је био велики искорак у решавању алгебарских једначина, али то што знамо да полином тог степена има исто толико решења, нам не показује универзалан начин да до тих решења и дођемо. Паоло Руфини (Paolo Ruffini, 1765–1822) је 1798. године формулисао тврђење да алгоритам за решавање алгебарских једначина петог и вишег степена не постоји. Његов доказ није био комплетан. Потпун доказ је изнео Нилс Абел (Niels Henrik Abel, 1802–1829) 1824. године. Независно од њега на сличне резултате је наишао је и његов вршњак Галоа.
Еварист Галоа (Évariste Galois, 1811–1832) је створио теорију група. Његова биографија је кратка и бурна и везана је за већину значајних историјских збивања револуционарне и пост револуционарне Француске. Галоа се као дечак интересовао за математику, али су његови рани школски резултати конфузни, можда због тога што је био политички активан,па су због тога неки од професора га оценили као лењог, па чак и слабо интелигентног. Док је се школовао своје радове је слао величинама попут Кошија, који брзо схватају значај његових покушаја да докаже које једначине се могу, а које се не могу решити у радикалима. Галоа, комуницирајући са Кошијем сазнаје да се део његових резултата поклапа са радовима норвешког математичара Нилса Абела. Због тога одлучује да се даље школује и 1829. године се

уписује у Велику нормалну школу, где му професор постаје Фурније, једна од особа око које ће се окретати математика прве половине 19 века.
У једној од низа револуција Галоа бива ухапшен па ослобођен, у међувремену је опет понешто писао, док није страдао у двобоју, који је изазван сукобом око неке жене, што је само званична верзија. Његов вршњак Абел је такође био из породице уплетене у значајна збивања у периоду када је Шведска окупирала Норвешку. Његова интересовања су шира од Галоових, пошто се бавио магнетизмом, интегралима, решавањем полиномних једначина.
Неки од његових радова стижу до немачког математичара Јакобија и њих двојица убрзо почињу да сарађују и објављују заједничке радове из елиптичких једначина. Одјек њихових радова је већи него Галоових пошто су имали непосредну комуникацију са Гаусом. Абел се убрзо разболео и после неколико година умро. Велика награда Француске Академије наука за решавање једначина 1830. припала је Јакобију и Абелу. Неколико година касније неправда је исправљена и Галоаов допринос признат. Галоу се данас признаје да се увођењем нове структуре, групе, одређена својства нула једначина могу посматрати кроз призму ове структуре. Својим истраживањем и закључцима Галоа омогућује и алгебарски доказ два античка тврђења о немогућности трисекције угла и удвостручења коцке ивице произвољне дужине.

Решени средњошколски задаци

У овом поглављу ћемо навести задатке за средњу школу до чијих се решења долази применом написаног градива у овом раду. Карданова формула и Ферாријев поступак имају малу практичну примену при решавању једначина трећег и четвртог степена и њих користимо када не знамо на други начин да решимо једначину.

Задатак 1.

Овакав тип задатка спада у лакшу групу задатака и могу се давати у свим средњим школама у трећој години. Наравно, подразумева се да ученици знају да примењују Безуов став и да реше квадратну једначину.

Решити једначину: $x^3+3x-4=0$.

Решење:

Проверавамо да ли су делиоци слободног члана решења једначине. Замењујући вредности$=\pm1$, $x=\pm2$ и $x=\pm4$ у полином x^3+3x-4, видимо да је $x_1=1$ једно решење једначине. Остало је да нађемо још два решења.

Затим користимо Безуов став и делимо полином x^3+3x-4 са полиномом $x-1$.

$(x^3+3x-4):(x-1)=x^2+x+4$

x^3-x^2

$-\quad+$

x^2+3x-4

x^2-x

$-\quad+$

$4x-4$

$4x-4$

$-\quad+$

0

Дакле, $x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$, тј.

$(x-1)(x^2+x+4)=0$, односно

$x^2+x+4=0$.

Последњу квадратну једначину решавамо на познат начин и добијамо да је:

$x_2=\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, x_3=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$. Претходно смо уочили да је $x_1=1$.

Задатак 2.

Задати задак решавамо преко Кардановог образца, пошто немамо други начин. Спада у групу тежих задатака и може се задавати напреднијим ученицима у гимназији и ученицима у математичкој гимназији у трећој години.

Решити једначину: $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$.

Решење:
Пошто је $a_2 = -3$, стављамо смену $x = y + 1$.

Добија се

$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) - 5 = 0,$
$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 9y + 9 - 5 = 0,$
$y^3 + 6y + 2 = 0$.

Видимо да је $p = 6, q = 2$, па је:
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -1 + \sqrt{1+8} = 2$,
$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -4.$
За реалне бројеве $\sqrt[3]{2}$ и $-\sqrt[3]{4}$ важи $\sqrt[3]{2 \cdot} \left(-\sqrt[3]{4}\right) = -\sqrt[3]{8} = -2 = \frac{p}{3}$, па можемо узети да је $\alpha = \sqrt[3]{2}, \beta = -\sqrt[3]{4}$. Због тога је
$y_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4};$
$y_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2});$
$y_3 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.
Видимо да је реално решење y_1, а y_2 и y_3 чине пар коњуговано - комплексних решења .
Даље налазимо да је

$$x_1 = y_1 + 1, \quad x_2 = y_2 + 1 , \qquad x_3 = y_3 + 1 .$$

Задатак 3.

Следећа једначина је биквадратна. То је једначина четвртог степена чији су коефицијенти уз x^3 и x једнаки 0. Сменом $x^2 = y$ своди се на квадратну једначину. Спадају у лакше задатке и могу се задавати у образовним профилима са бар 3 часа математике.

Решите једначину: $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Решење:
Заменом $x^2 = y$ добијамо квадратну једначину $y^2 + 8y - 9 = 0$, чија су решења $y_1 = 1, y_2 = -9$. Из $x^2 = 1$ добијамо $x_{1,2} = \pm 1$, а из $x^2 = -9, x_{3,4} = \pm 3i$, и то су сва решења дате једначине.
Ако је једначина таква да се за x^2добијају решења која нису реална, решења полазне једначине ћемо за сада моћи да нађемо само у неким врло специјалним случајевима.

Задатак 4.

У овом задатку је такође дата биквадратна једначина, с тим што у односу на претходни задатак је мало тежа из разлога што се након смене добијају решења која нису реална. Могу се задавати у већини образовних профила са бар четири часа.

Решите једначину: $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Решење:
Заменом $x^2 = y$ добијамо квадратну једначину $y^2 + y + 1 = 0$, чија су решења $y_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,па је $x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ или $x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Пишући број x (који очигледно мора бити комплексан) у облику $x = a + ib$ и замењујући тај израз у добијеним једначинама, добијамо два система једначина за налажење (реалних!) бројева a и b. Решавањем тих система добијају се и решења полазне једначине $x_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (узимају се све четири могуће комбинације знакова).

Задатак 5.

Овакви задаци се решавају сменом на сличан начин као биквадратне, али су ипак мало тежи од поменутих. Могу се задавати у разредима са бар 4 часа недељно.

Наћи решења једначине: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Решење:
Заменом $x^3 = y$ добијамо квадратну једначину $y^2 - 7y - 8 = 0$,чија су решења $y_1 = -1, y_2 = 8$. Дакле, наша једначина је еквивалентна са
$x^3 + 1 = 0$ или $x^3 - 8 = 0$,

односно,

$$(x+1)(x^2-x+1)=0 \text{ или } (x-2)(x^2+2x+4)=0 \quad ,$$

Одакле добијамо два реална решења $x_1=-1$ и $x_2=2$, а такође и четири решења која нису реална, $x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $x_{5,6}=-1\pm i\sqrt{3}$.

Задатак 6.

У једначини облика $(x+a)^4+(x+b)^4=4$ *се уводи смена* $x=t-\frac{a+b}{2}$*. Овакви задаци спадају у теже пошто имамо више смена променљивих. Могу се задавати у гимназији природно-математичког смера и у математичкој гимназији.*

Решите једначину: $(x+3)^4+(x+5)^4=4$.

Решење:

Дакле, у овом задатку је $x=t-4$, тј. $t=x+4$ Замењујући t у полазну једначину, добијамо

$$(t-1)^4+(t+1)^4=4$$

Степеновањем израза $t-1$ и $t+1$ и њиховим сабирањем добијамо једначину

$$2t^4+12t^2-2=0.$$

Дељењем последње једначине са 2 и увођењем смена $t^2=p$, добијамо квадратну једначину $p^2+6p-1=0$, чија су решења $p_1=-3+\sqrt{10}$ и $p_2=-3-\sqrt{10}$. Сада враћањем у смену $t^2=p$ и $x=t-4$, добијамо решења:

$$x_{1,2}=\pm i\sqrt{3+2\sqrt{3}},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{-3+2\sqrt{3}}$$

Задатак 7.

У следећем задатку сабирамо по два слободна члана из заграда док не добијемо исти збир, конкретно у нашем задатку збир слободних чланова из прве и четврте заграде је исти као и збир чланова из друге и треће заграде, па затим множимо по два чиниоца чији је збир слободних чланова исти, што значи да у нашем задатку множимо први и четврти засебно, и други и трећи. Након тога задатак није пуно тежак, али пошто није лако сетити се на који начин се решава, овакав тип задатка се ипак више задаје у профилима са бар 4 часа математике недељно у другој години.

Решите једначину: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15$.

Решење:

Ако међусобно помножимо први и четврти, а такође други и трећи чинилац на левој страни једначине, добијамо

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=15,$$

што можемо писати у облику

$$(x^2-5x+4)[(x^2-5x+4)+2]=15,$$

односно,

$$(x^2-5x+4)^2+2(x^2-5x+4)-15=0$$

Ако уведемо смену $x^2-5x+4=t$, добијамо квадратну једначину

$$t^2+2t-15=0$$

Чија су решења $t_1=3, t_2-5$. Решења једначине $x^2-5x+4=3$ су $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, а једначина $x^2-5x+4=-5$ су $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{11}}{2}$.

Задатак 8.

Овакав задатак није нимало лак, ученик треба да поседује боље знање, а и тешко је се сетити смене која је погодна за овакав задатак. Може се задавати напреднијим ученицима у гимназији природно-математичког смера и у математичкој гимназији у трећој години.

Решити једначину: $8x^3-6x-1=0$

Решење:

Уводимо смену $x=cost$, па имамо да је $8cos^3t-6cost-1=0$, тј.

Трансформацијом cos^3t је

$$8\cdot\frac{3cost+cos^3t}{4}-6cost-1=0$$

$$2cos^3t=1, \text{ односно}$$

$$cos^3t=\frac{1}{2}.$$

Решавањем последње тригонометријске једначине , добијамо да је $3t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ или $3t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$, $k\epsilon Z$.

Замењујући k и узимајући у обзир смену $x=cost$. Закључујемо да узима три различите вредности. Дакле, решења су $x_1=cos\frac{\pi}{9}$, $x_2=cos\frac{5\pi}{9}$ и $x_3=cos\frac{7\pi}{9}$.

Задатак 9.

Овакви задаци се решавају сменом $\alpha x - \frac{\beta}{x} = t$ *и не спадају у лакше задатке. Могу се задавати у профилима са бар 4 часа математике недељно у другој години.*

Решити једначину: $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

Решење:
Поделимо леву и десну страну дате једначине са x^2 , добијамо
$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$,тј.
Након груписања сабирака
$(x - \frac{2}{x})^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 6 = 0$.
Сада уводимо смену $x - \frac{2}{x} = t$ и решавањем квадратне једначине
$t^2 - t - 6 = 0$,
Израчунавамо да је
$t_1 = 3$ и $t_2 = -2$
Враћајући се у смену, добијамо две једначине
$x - \frac{2}{x} = 3$и $x - \frac{2}{x} = -2$. Множењем обе са x , добијамо квадратну једначину чија су решења $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ и $x_{3,4} = \frac{3+\sqrt{17}}{28}$.

Задатак 10.

Специфичан задатак, нестандардан, може се задавати у гимназији природно математичког-смера и математичкој гимназији.

Решити једначину: $x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 = 0$.

Решење:
Дата једначина се напише у облику
$(\sqrt{7})^2 - \sqrt{7}(1 + x^2) + x + x^4 = 0$.
Ако претходну једначину посматрамо као квадратну, видимо да је $\sqrt{7}$ њено решење, па је

$$\sqrt{7} = \frac{1+2x^2 \pm \sqrt{(1+2x^2)^2 - 4(x+x^4)}}{2 \cdot 1}, \text{ тј.}$$

$$\sqrt{7} = \frac{1 + 2x^2 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2}$$

Последња једначина се без обзира на знак израза $2x - 1$ своди на две квадратне једначине

$$\frac{1+2x^2+2x-1}{2} = \sqrt{7} \text{ или } \quad \frac{1+2x^2-(2x-1)}{2} = \sqrt{7}\,.$$

Решавањем прве једначине добијамо $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{7}}}{2}$, а решавањем друге $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

Задатак 11.

У овом задатку је дата симетрична једначина. Код њих су коефицијенти уз x^{n-k} и x^k једнаки. Ако је непарног степена онда је −1 једно њено решење, па можемо применити Безуов став. Шаблонски се решавају, могу се задати у профилима са бар 3 часа недељно.

Решите једначину: $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна са једначином коју налазимо када је поделимо са x^2, јер број 0 није решење једначине. Груписањем одговарајућих чланова, добијамо

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3(x + \frac{1}{x}) - 16 = 0$$

Означимо ли $x + \frac{1}{x} = y$, биће $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = y^2 - 2$, па добијамо квадратну једначину

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$$

Чија су решења $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{5}{2}$. Из $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ налазимо решења $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, а из $x + \frac{1}{x} = -4$ решења $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$

Задатак 12.

Ово је такође симетрична једначина, само са непарним степеном. Слично се ради као и у претходном задатку, само имамо још један корак више у коме примењујемо Безуов став јер знамо да је −1 једно решење.

Решите једначину: $x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решење:

Ово је симетрична једначина непарног степена, па знамо да је $x_1 = -1$ једно њено решење. Количник полинома $x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ и $x + 1$ је $x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x + 1$, па једначину можемо писати у облику

$$(x + 1)(x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x + 1) = 0$$

што је еквивалентно са

$$x = -1 \text{ или } \quad x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x + 1 = 0.$$

Последња једначина је је такође симетрична. После дељења са x^3 (нула није решење једначине) и груписање чланова са једнаким коефицијентима, добијамо

$$(x^3 + \tfrac{1}{x^3}) + 2\left(x^2 + \tfrac{1}{x^2}\right) + 4 = 0$$

Уведимо стандардну ознаку $x + \frac{1}{x} = y$. У претходном примеру смо видели да је тада $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Даље, због

$$x^3 + \tfrac{1}{x^3} = \left(x + \tfrac{1}{x}\right)\left[x^2 - 1 + \left(\tfrac{1}{x}\right)^2\right] = y(y^2 - 3) = y^3 - 2y,$$

Добијамо једначину $y^3 - 3y = 2(y^2 - 2) + 4 = 0$,тј.

$$y^3 + 2y^2 - 3y = 0,$$

Чије је једно решење $y_1 = 0$, а остала решења квадратне једначине $y^2 - 2y - 3 = 0$.

Дакле $y_2 = -3, y_3 = 1$. Из $x + \frac{1}{x} = 0$ добијамо $x_{2,3} = \pm i$, из $x + \frac{1}{x} = -3$ добијамо $x_{4,5} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$., из $x + \frac{1}{x} = 1$ добијамо $x_{6,7} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Дата једначина има седам решења, од којих су три реална.

Задатак 13.

У кососиметричној једначини су кофицијенти уз x^{n-k} и x^k супротни. Код једначина непарног степена користимо чињеницу да је 1 једно решење и примењујемо такође Безуов став.

Решити кососиметричну једначину: $2x^5 + 7x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 7x - 2 = 0$

Решење:

За кососиметричне једначине важи да је једно њихово решење 1, па према Безуовом ставу полином на левој страни једначине је дељив са $x - 1$. У датом случају добијамо

$$(x - 1)(2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2) = 0.$$

Дакле једно решење је $x_1 = 1$ или $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$.

Последњу једначину делимо са x^2 и добијамо $2x^2 + 9x + 14 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$, где груписањем сабирака се добија

$$2(x^2 + \tfrac{1}{x^2}) + 9\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Уводимо смену $x + \frac{1}{x} = t$.

С обзиром да је

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 \text{ ,имамо}$$
$$2(t^2 - 2) + 9t + 14 = 0, \text{ тј.}$$
$$2t^2 + 9t + 10 = 0\,.$$
Решавањем последње квадратне једначине добијамо решења $t_1 = 2$ и $t_2 = -\frac{5}{2}$. Враћањем на смену добијамо две квадратне једначине по x чијим решавањем добијамо још четири решења $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_{4,5} = -1$.

Задатак 14.

Још једна кососиметрична једначина непарног степена. Кососиметричне једначине парног степена је лакше решавати у односу на кососиметричне једначине непарног степена јер не користимо примену Безуовог става. Исто тврђење, наравно, важи и за симетричне једначине.

Решите једначину: $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$.

Решење:
Једно решење једначине је $x_1 = 1$, па је можемо писати у облику
$$(x-1)(x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1) = 0$$
Једначина $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1$ је симетрична и решава се заменом $y = x + \frac{1}{x}$. Њена решења $x_{2,3} = 1, x_{4,5} = 2 \pm \sqrt{3}$ су у исто време и решења дате једначине.

Задатак 15.

Овакав задатак не спада у тешке задатке у којима се примењују Виетове формуле. Може се задавати у разредима са бар три часа математике недељно у трећој години.

Наћи збир квадрата решења једначине: $x^4 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$.

Решење: По Виетовим формулама је
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -5$, па је
${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + .. + x_3x_4) = 10$.

Задатак 16.

Тежи задатак од претходног. Може се задавати у одељењима са бар 4 часа математике недељно у трећој години.

Дужине страница неког троугла су решења једначине $x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$. Наћи површину тог троугла

Решење:

По Виетовим формулама је

$x_1 + x_2 + x_3 = 42,$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 587,$

$x_1x_2x_3 = 2730.$

Полуобим троугла је $s = \frac{x_1+x_2+x_3}{2} = 21$, па применом Херонове формуле добијамо површину

$P = \sqrt{s(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)} = \sqrt{21(21-x_1)(21-x_2)(21-x_3)} =$

$\sqrt{21^4 - 21^3(x_1+x_2+x_3) + 21^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 21x_1x_2x_3} = 84.$

Задатак 17.

Овакав тип задатка није пуно тежак, али није ни лак. Може се задавати у разредима са бар 4 часа математике недељно у трећој години,

Решити једначину $2x^3 - x^2 + 7x + a = 0$ ако је познато да је збир два њена корена једнак 1.

Решење:

Претпоставимо да је $x_1 + x_2 = 1$. Како је по Виетовим формулама

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$,тј.

$1 + x_3 = \frac{1}{2},$

Добијамо да је

$x_3 = \frac{1}{2}.$

Сада у једначини$2x^3 - x^2 + 7x + a = 0$ заменимо $x = -\frac{1}{2}$ и добијамо да је

$2 \cdot (-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 - 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a = 0,$

$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{2} + a = 0,$

$3 + a = 0,$

$a = -3.$

Дакле треба да решимо једначину $2x^3 - x^2 + 7x - 3 = 0$, а да притом знамо да је једно њено решење $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Примењујући Виетове формуле на последњу једнакост имамо:

$x_1x_2x_3 = \frac{3}{2}$,тј.

$-\frac{1}{2}x_1x_2 = \frac{3}{2},$

$x_1x_2 = -3.$

Пошто знамо да је $x_1+x_2=1$, можемо да формирамо квадратну једначину чија су решења x_1 и x_2.
$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$
$x^2-x-3=0.$
Решавањем последње квадратне једначине добијамо да је
$x_1=\frac{1+i\sqrt{13}}{2}$и$x_2=\frac{1-i\sqrt{13}}{2}$.
Тиме смо нашли сва три решења.

Задатак 18.

Овакав задатак није лак, може се задавати у гимназији природно-математичкг смера и у математичкој гимназији.

Одредити бар једну везу између коефицијената p и q једначине
$x^3+px+q=0$, ако за њене корене важи $x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Решење:
Пошто је по Виетовим формулама $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$, $x_1x_2x_3=-q$ и из датог услова у задатку $x_1x_2x_3=x_1+x_2$, то је
$x_1x_2x_3=-q=x_1+x_2=-x_3$, па је $x_3=\ q$.

Заменом у једначину добијамо једну везу: $q^3+pq+q=0$.

Задатак 19.

Спада у групу тежих задатака где се примењују Виетове формуле. Могу да га раде напреднији ученици из гимназије природно-математички смер, као и ученици математичке гимназије.

Дата је једначина $8x^3-20x^2-10x+33=0$. Саставити и решити кубну једначину чији су корени $x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3$, где су x_1, x_2, x_3 корени дате једначине, а затим одредити x_1, x_2, x_3.

Решење:
По Виетовим формулама је $x_1+x_2+x_3=\frac{5}{2}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{5}{4}$ и
$x_1x_2x_3=-\frac{33}{8}$, па је
$(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_2+x_3)=5,$
$(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)+(x_1+x_3)(x_1+x_2)=5,$
$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=1.$

Тако добијамо једначину
$y^3 - 5y^2 + 5y - 1 = 0$,
чија су решења
$y_1 (= x_1 + x_2) = 2 + \sqrt{3}$,
$y_2 (= x_2 + x_3) = 1$,
$y_3 (= x_1 + x_3) = 2 - \sqrt{3}$,
одакле налазимо да је
$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ и $x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Закључак

Иако се поступак решавања једначина трећег степена чини изводљивим применом Карданових формула, наравно, увек постоје тежи и специјални случајеви, изгледа да нема пуно простора и времена за обраду ове наставне јединице у средњим школама. Изузетак су средње школе школе које у трећој години имају бар 4 часа математике и Математичка гимназија где се ове једначине појављују у анализи са алгебром и то као додатак. Начини да средњошколац било ког образовног профила реши једначину трећег и четвртог степена јесте углавном применом Безуовог става или заменом промењљивих уколико су задати неки специјални случајеви једначина. Што се тиче Виетових формула, за њих има више простора, опет у разредима са бар 4 часа недељно математике у трећој години.

Предлог: упознати надарене ученике са обрасцима за решавање једначина трећег и четвртог степена на додатним наставама.

Литература

- **Елементарна математика -** С. Клашња
- **Виша алгебра -** др Ђуро Купера
- **Линеарна алгебра, полиноми, аналитичка геометрија** – Д. С. Митриновић, Д. Михајловић, П. М. Васић
- **Анализа са алгебром 2** – Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић
- **Анализа са алгебром 3** – Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић
- **Математископ 4, збирка решених задатака –** Душан Георгијевић, Милутин Обрадовић
- **Математископ 5, одабрани задаци** – Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић
- **Линеарна алгебра,** Градимир Миловановић, Радосав Ђорђевић