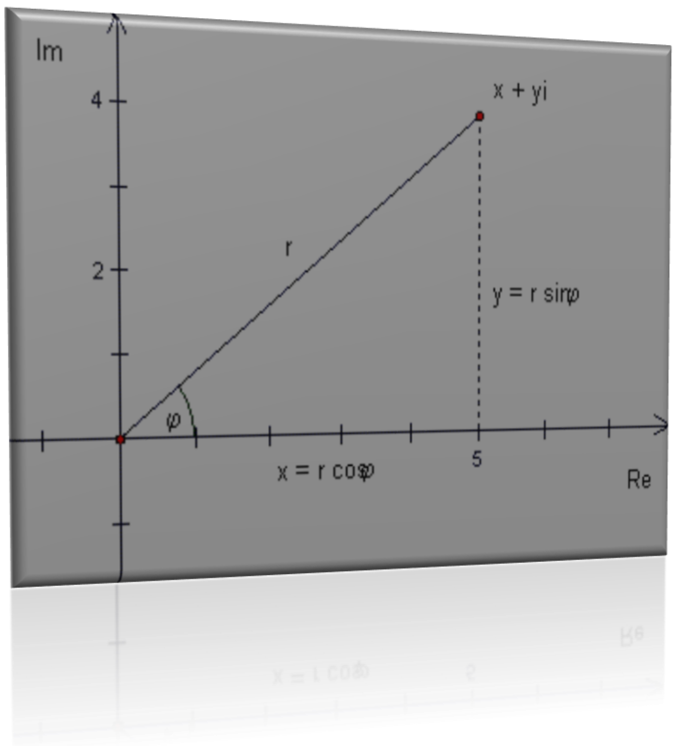
Математички факултет

Београд

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И МЕБИЈУСОВА ПРЕСЛИКАВАЊА

- мастер рад -



Ментор: **Кандидат:**

проф.Миодраг Матељевић **Дијана Авалић**

октобар 2015.

Садржај

1. *Како су настали комплексни бројеви*

Спектакуларна открића, каква су честа у неким знаностима, у математици су права реткост. Математичка знања настају и сазревају у дуготрајном процесу кроз напоран рад многих математичара па се због тога ретко приписују појединцу. Тако је и са настанком комплексних бројева. Уобичајено је мишљење да су комплексни бројеви уведени у математику да би свака квадратна једначина имала решење(на пример једначина x^2 = 1 нема реалних решења а након увођења комплексних бројева има два решења). То се касније подупире још јачим аргументом да свака алгебарска једначина степена n има тачно n решења.

Tartaglia

Cardanu

У време увођења комплексних бројева у математику (16.век) квадратна једначина је била позната више од 3000 година. Стари су је математичари већ решавали и знали да може имати два, једно или ниједно решење и то им је било довољно. Разлог за увођење комплексних бројева могао је бити само математички проблем у којем се комплексни бројеви нису могли заобићи, а такав се проблем појавио при решавању кубне једначине.

У 16. веку италијански математичари Тартаља и Кардан су решили алгебарску једначину трећег степена $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Формуле којима се решава таква једначина називају се Карданове формуле. Важно је да напоменемо да Карданове формуле у општем случају дају веома компликован израз и да су са практичног становишта, одговарајући итеративни поступци налажења приближне вредности корена, често ефикаснији од употребе Кардановиx формула. Ипак, Карданове формуле представљају прво велико откриће у алгебри након вишевековне стагнације.

Међутим прве кораке у развоју аритметике комплексних бројева учинио је Бомбели. Он је значајно унапредио нотацију и од описног објашњавања прешао на симболе. Слово R је користио за квадратни корен, а R^3 за кубни корен, p је симбол сабирања, m одузимања, а заграде уоквирују израз на који се односи посматрана операција.

Све што је везано за комплексне бројеве и што их је у математици ставило у “равноправан положај са реалним бројевима“ ипак је створено у 18.веку, при чему су за то заслужна имена Абрахам де Моавр и Леонард Ојлер. Ознаку $i = \sqrt{-1}$ увео је Ојлер 1748. Прича је заокружена повезивањем комплексних бројева и геометрије при чему је нарочито заслужан Карл Фридрих Гаус. Позиционирање комплексних бројева у координатном систему, користили су Весел и Арган међутим тек је Гаус 1831. године ту идеју продубио и дефинисао аритметику комплексних бројева. Отприлике у исто време Хамилтон развија аритметику комплексних бројева, посматрајући комплексан број као уређени пар реалних бројева.

2. ***Комплексна раван , алгебарски облик комплексног броја***

<u>Дефиниција 2.1</u> Скуп свих уређених парова реалних бројева у којима су релација једнакости, операције сабирања и множења дефинисане на следећи начин:

- $(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1, \ \ y = y_1$
- $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, \ \ y + y_1)$
- $(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + yx_1)$
- $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \alpha \epsilon \mathbb{R}$

назива се скупом комплексних бројева $\mathbb{C}$, а сваки такав уређен пар назива се комплексни број $z = (x, y)$.

Скуп комплексних бројева горе дефинисаним операцијама сабирања и множења чини поље.

Да овако дефинисана алгебарска структура **($\mathbf{R}^2$,+, ·)** задовољава аксиоме поља директно се проверва.

- Неутрални елемент у односу на сабирање је $O = (0,0)$.
- Неутрални елемент у односу на множење је $I = (1,0)$.

Уређени пар $(0,1)$ зове се имагинарна јединица са особином да је $(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$, тј. $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Скуп комплексних бројева представља подскуп Декартовог производа $C \subset R \times R$ са горе наведеним особинама.

Сваки комплексни број $z = (x, y)$ може се на јединствен начин представити у облику $z = x + iy$, при чему реалан број x називамо реалним делом комплексног броја z и означавамо са $\boldsymbol{Rez}$, а реалан број y називамо имагинарним делом комплексног броја z и означавамо са Imz. Овакво представљање комплексног броја назива се **алгебарски облик комплексног броја.**

Теорема 2.1 У скупу комплексних бројева операције сабирања и множења имају следећа својства:

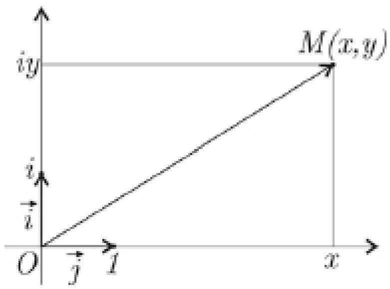
1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (комутативност сабирања)
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (асоцијативност сабирања)
3. $z + 0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (неутралност нуле при сабирању)
4. $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists(-z) \in \mathbb{C})$, $z + (-z) = 0$ (постојање супротног броја)
5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (комутативност множења)
6. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (асоцијативност множења)
7. $1 \cdot z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (неутралност јединице за множење)
8. $(\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0)(\exists z' \in \mathbb{C})$ $z' \cdot z = 1$ (постојање реципрочног броја)
9. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Дефиниција скупа $\mathbb{C}$ као скупа $\mathbf{R}^2$ свих уређених парова реалних бројева омогућује нам геометријску интерпретацију комплексних бројева. Ради формалне дефиниције посматраћемо скуп P свих тачака дате равни *П* са уведеним координатним системом xOy. Посматрајмо бијективну функцију $\boldsymbol{\varphi}$**:** **C** $\rightarrow \boldsymbol{P}$, задату са $\boldsymbol{\varphi(z)} = \boldsymbol{M(x, y)}$**.**

Дефиниција 2.2 Тачку М са Декартовским координатама (x, y) ћемо називати геометријском сликом комплексног броја $z = (x, y)$

Комплексан број $z = x + iy$ називаћемо комплексном координатом тачке $M(x, y)$. Употребљаваћемо ознаку $M(z)$ да назначимо да је комплексна координата тачке M комплексан број z.

Скуп свих тачака равни *П* које идентификујемо са комплексним бројевима називамо комплексном равни или **Гаусовом комплексном равни** пошто је Гаус својом репутацијом омогућио шире прихватање овакве интерпретације скупа комплексних бројева. Пошто се скуп реалних бројева при оваквој идентификацији пресликава на x-осу њу називамо реалном осом, а скуп имагинарних бројева(за које је $Rez = 0$) се пресликава на y-осу, па је зато називамо имагинарном осом.



Слика 2.1

Комплексни број $z = x + iy$ можемо видети и као вектор чија је почетна тачка координатни почетак O, а крајња тачка управо геометријска слика тачке z, $M(z)$. Дакле, при овој идентификацији броју $z = (x, y)$ одговара вектор $\overrightarrow{OM}$ где је M тачка $M(x, y)$. Уколико са $\vec{j}$ и $\vec{\imath}$ означимо јединичне векторе x-осе и y-осе, пошто су Декартове координате тачке M управо x и y имамо да је $\vec{z} = \overrightarrow{OM} = x\vec{j} + y\vec{\imath}$. Посматрајући операцију сабирања комлексних бројева и сабирање вектора видимо да је:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

док је код вектора $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = (x_1\vec{j} + y_1\vec{\imath}) + (x_2\vec{j} + y_2\vec{\imath}) = (x_1 + x_2)\vec{j} + (y_1 + y_2)\vec{\imath}$

Дакле збиру комплексних бррojева $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ одговара вектор $\boldsymbol{\vec{z}_1 + \vec{z}_2}$.

Ако наведену коресподенцију "додељивање вектора комплексном броју z" означимо са $\vec{z}$ имаћемо

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{z_1 + z_2}} = \vec{\boldsymbol{z_1}} + \vec{\boldsymbol{z_2}}}$$

Слично важи и за множење комплексног броја реалним скаларом α тј. биће

$$\alpha\, z = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha\, y)$$

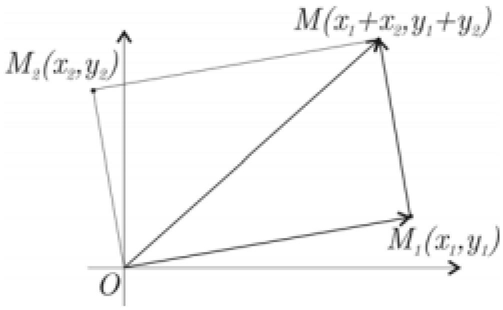
А за векторе : $\alpha\,\vec{z} = \alpha(x\vec{j}, y\vec{\imath}) = \alpha x\vec{j} + \alpha y\vec{\imath}$

Дакле важи $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha\, z}} = \boldsymbol{\alpha\,\vec{z}}}$

Одавде следи да је коресподенција између скупа целих бројева $\mathbb{C}$ и вектора са почетком у O не само уједно једнозначна, већ и **изоморфизам** .

Из ове чињенице следи и геометријска интерпретација сабирања комплексних бројева:

Ако комплексне бројеве z_1 и z_2 посматрамо као векторе $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$, онда њиховом збиру $z_1 + z_2$ одговара вектор $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$ који се добија из вектора $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ правилом паралелограма.



Слика 2.2

Нека тачке M_1 и M_2 имају комплексне координате $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ и нека тачка M има комплексну координату $z = z_1 + z_2$, тада је:

$$\overrightarrow{M_1M} = ((x_1 + x_2) - x_1)\vec{j} + ((y_1 + y_2) - y_1)\vec{i} = x_2\vec{j} + y_2\vec{i} = \vec{z}_2$$

Одавде следи да се тачка M добија транслаацијом тачке M_1 за вектор $\vec{z}_2$. Дакле, додавање комплексног броја z_2 комплексном броју z_1, чија је геометријска слика M_1 можемо схватити и као транслацију тачке M_1 за вектор $\vec{z}_2$.

Пример 1

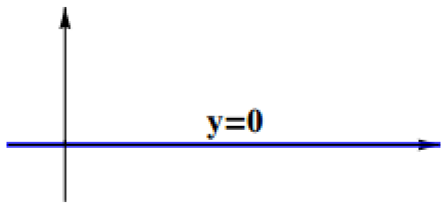
Представити у комплексној равни скуп решења једначина:

a) $z - \bar{z} = 0$ $b)$ $Re z = -2$ $c)$ $lm\, z = 3$ $d)$ $|z| = 5$ $e)$ $\arg z = -\frac{\pi}{3}$

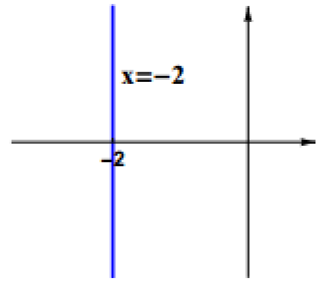
Решење: Нека је $z = x + iy$

a)$z - \bar{z} = 0 \iff x + iy - (x - iy) = 0 \iff 2iy = 0 \iff y = 0$. Тражени скуп тачака је права $y = 0 \to x$-оса.

$b)$$Re\, z = -2 \iff x = -2$, што је права $x = -2$ у комплексној равни.



a)

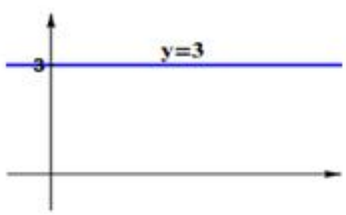


b)

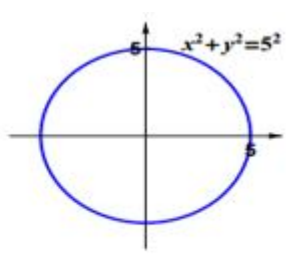
$c)Im\, z\ = 3\ \Leftrightarrow y = 3$, а то је права $y = 3$ у комплексној равни.

$d)$Услов $|z| = 5 \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = 25$ одређује скуп тачака на кружници са центром у координатном почетку полупречника 5.

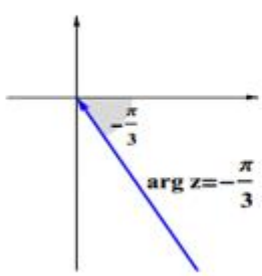
$e)$Тачке одређене комплексним бројевима са особином $\arg z\ = -\frac{\pi}{3}$ налазе се на полуправој са почетком у координатном почетку која гради угао од $-\frac{\pi}{3}$ са позитивним делом x-осе и различити су од нуле (јер је нула одређена само модулом а не и аргументом).



c)



d)



e)

Пример 2

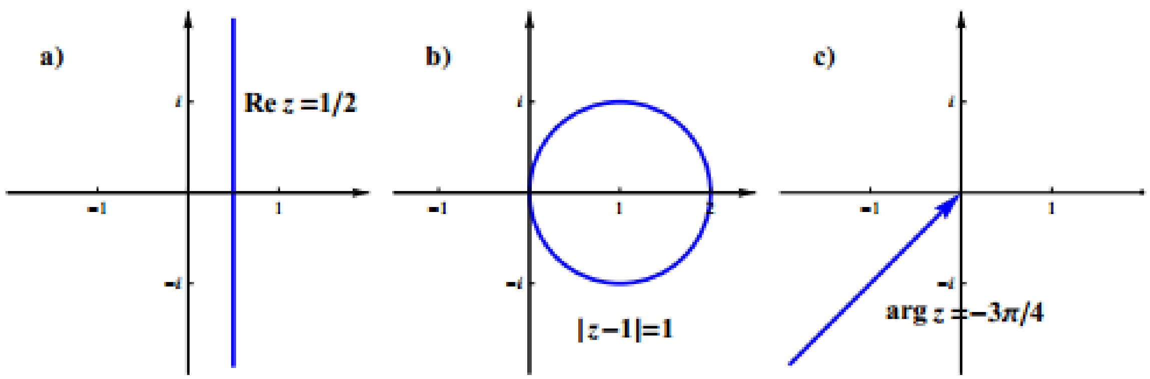
Одредити геометријско место тачака z у комплексној равни ако је :

а) $z = -\bar{z} + 1$; $b)\ Re\ \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$; $c)\ \arg \bar{z} = \arg(-2 + 2i)$.

Решење: $a)\ z = x + iy,\ \ x = \frac{1}{2}$

$b) z = x + iy,\quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

$c) z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \ \theta = -\frac{3\pi}{4}$.



Пример 3

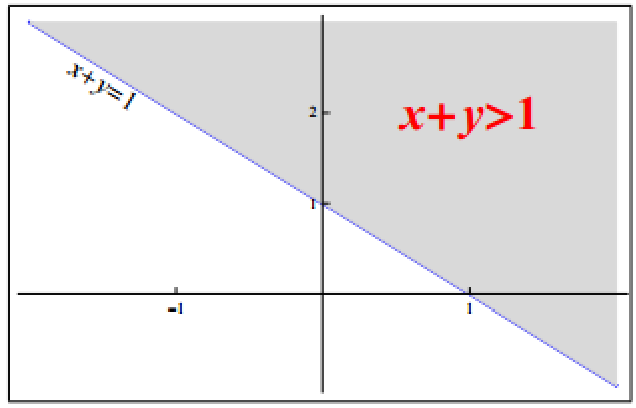
У комплексној равни одредити скуп тачака одређених комплексним бројевима z који задовољавају:

а) једначину $z \cdot \bar{z} + 1 = -i(z - \bar{z})$

$b)$ неједначину $Rez + Imz > 1$

Решење:

а) Увођењем алгебарског облика комплексног броја $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, полазна једначина $z \cdot \bar{z} + 1 = -i(z - \bar{z})$ се трансформише у



$(x + iy)(x - iy) + 1 = -i(x + iy - x + iy)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 = 2y$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (y - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0, \ y = 1 \ \Leftrightarrow z = i.$

Тражени скуп тачака је тачка $z = i$.

b) За $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, неједнакост гласи:

$$Rez + Imz > 1$$

$$\Leftrightarrow x + y > 1.$$

Тражени скуп тачака је полураван изнад праве $x + y = 1$.

Комплексан број $\bar{z} = x + iy$ називамо **коњугованим** броју $z = x + iy$. Такође, број z је коњугован броју $\bar{z}$ и зато кажемо да бројеви z и $\bar{z}$ чине **пар комплексно-коњугованих бројева**. Геометријске слике комплексних бројева z и $\overline{z}$ су узајамно симетричне у односу на реалну осу,па коњуговање комплексног броја можемо схватити и као симетрију у односу на реалну осу. Њиховим сабирањем и одузимањем добијамо

$$\boldsymbol{Re\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})}, \qquad \boldsymbol{lm\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})}.$$

Својства операција комплексног коњуговања :

1. $\boldsymbol{\overline{z_1 + z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

Доказ:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

■

2. $\overline{z_1 - z_1} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Доказ:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i}$$
$$= (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) i = x_1 - y_1 i - x_2 + y_2 i = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

■

3. $\overline{z_1 \cdot z_1} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Доказ:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$
$$= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

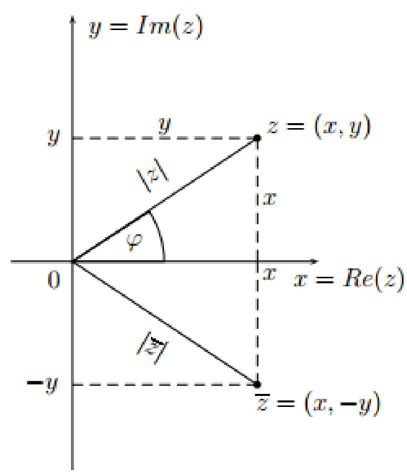
Уопште, за комплексни број $z = x + iy \ (x, y \epsilon \ \mathbb{R})$ важи:

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2$$
$$= x^2 + (xy - xy) i + y^2$$
$$= x^2 + y^2$$

■

<u>**Дефиниција 2.3**</u> Апсолутна вредност или модул комплексног броја $z = x + iy \ (x, y \epsilon \mathbb{R})$ је реалан ненегативни број.

$$\rho = |z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Слика 2.3

Ако једнакост напишемо у облику

$$|z| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2},$$

закључујемо да је модул растојање комплексног броја $z = (x, y)$ од комплексног броја $O = (0,0)$, који једини има особину да је $|O| = 0$.

Основне особине модула које следе директно из дефиниције су:

1. $\boldsymbol{z\bar{z} = |z|^2}$,
2. $\boldsymbol{|z| = |\bar{z}|}$,
3. $\boldsymbol{|z| = 0}$ **акко** $\boldsymbol{z = 0}$,
4. $\boldsymbol{|Re\ z| \leq |z|, |Im\ z| \leq |z|}$

Из правоуглог троугла $\triangle\ Oxz$, следи

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Угао φ назива се **аргумент** комплексног броја $z = (x, y)$ и означава се са $\mathbf{arg}\,\boldsymbol{z}$. Он није једнозначно одређен, па зато ћемо са $\arg z$ означити меру угла унутар интервала $[0, 2\pi)$, а са $\mathbf{Argz}$ скуп $\{\mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k\epsilon}\mathbb{Z}\}$ свих мера угла φ.

Аргумент комплексног броја $z = x + iy$ можемо рачунати по формули

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

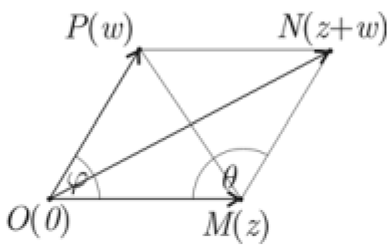
$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x} - \pi, & \text{ako je} \quad x < 0 \quad i \quad y < 0 \\ arctg\frac{y}{x}, & \text{ako je} \quad x > 0 \quad i \quad y < 0\ (y > 0) \\ arctg\frac{y}{x} + \pi & \text{ako je} \quad x < 0 \quad i \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Следеће три једнакости имају битан геометријски смисао:

(I) $\quad |z + w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$,
(II) $\quad |z - w|^2 = |z|^2 - 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$,
(III) $\quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

(I) следи из $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + z\overline{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2$. Слично се доказује и (II), (III) следи сабирањем (I) и (II).

Пошто је $Re(z\overline{w}) = \vec{z} \bullet \vec{w} = |z||w| \cos \measuredangle (\vec{z}, \vec{w})$ видимо да су (I) и (II) искази косинусне теореме.



Нека су $z, w \in \mathbb{C}$ и $M(z), P(w)$ и $N(z+w)$, $OMNP$је паралелограм. Пошто је $\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ из троугла OMN имамо:

$$|z+w|^2 = |z|^2 - 2|z||w|\cos\theta + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + 2|z||w|\cos\varphi + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + \vec{z} \bullet \vec{w} + |w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Дакле формула (I) се слаже са уобичајеним исказом косинусне теореме, док је за то (II) очигледно (из троугла OMP јер је $\overrightarrow{MP} = w - z$).

Формула (III) је правило паралелограма: сума квадрата дужина ивица паралелограма једнака је суми квадрата дијагонала.

Неједнакост троугла

Модул комплексног броја задовољава следећу неједнакост:

$$|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}| \leq |\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_1}|$$

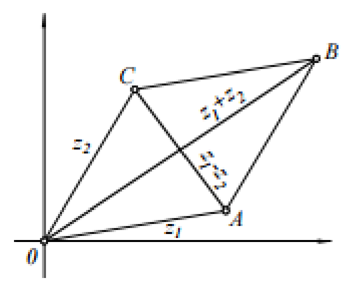
коју називамо неједнакост троугла.

Доказ:

Доказ ове неједнакости као и образложење њеног имена видимо на слици. Из троугла OAB је наиме

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_1|,$$

јер је дужина било које странице троугла увек већа од разлике дужина преостале две.■



Слика 2.4

На истој слици (2.4) видимо да важи и следећа неједнакост.

$$|\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}| \leq \big||\boldsymbol{z_1}| - |\boldsymbol{z_1}|\big|,$$

јер је дужина било које две странице троугла увек већа од разлике дужина преостале две.

3. Операције са комплексним бројевима у алгебарском облику

Нека су $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1, \quad z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2, \qquad (z_1, z_2) \ \epsilon \ C$

Једнакост комплексних бројева

$$\mathrm{z}_1 = z_2 \Leftrightarrow \ x_1 = x_2 \wedge \ y_1 = y_2$$

Сабирање и множење

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

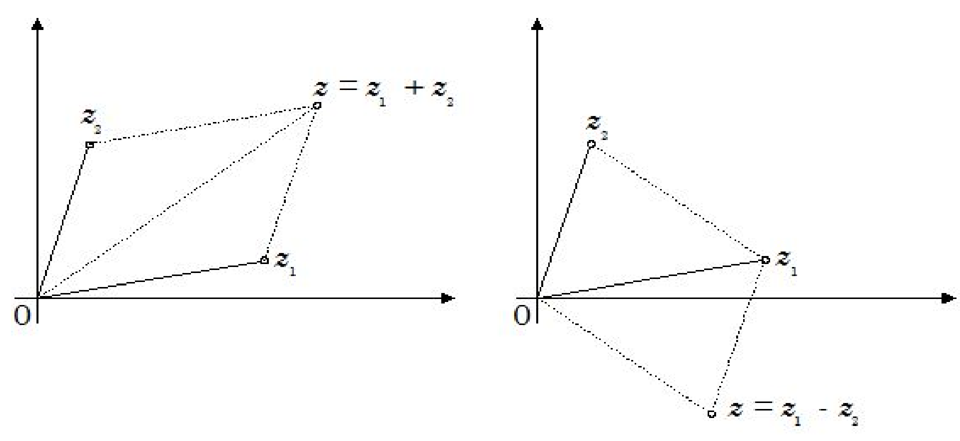
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Одузимање и дељење се као и код реалних бројева дефинишу из ретходних операција

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + y_2^2} \ (z_2 \neq 0)$$

Пошто смо већ напоменули да се комплексни бројеви при операцијама сабирања, одузимања и множења реалним бројем понашају баш као и вектори, геометријска интерпретација сабирања и одузимања два комплексна броја дата је на сликама



Слика 3.1 Геометријска интерпретација сабирања и одузимања два комплексна броја

4.Тригонометријски облик комплексног броја

Комплексан број $z = x + iy$ представља тачку у равни јер је $z = (x, y)\epsilon\, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ако се уведе у систем поларних координата у равни

$x0y$: $\{\rho, \varphi\}, \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, растојање тачке $z = (x, y)$ од координатног почетка

представља **модул** комплексног броја z

$$\boldsymbol{\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Угао који дуж $0z$ образује са позитивним смером апсцисне осе зове се аргумент комплексног броја z :

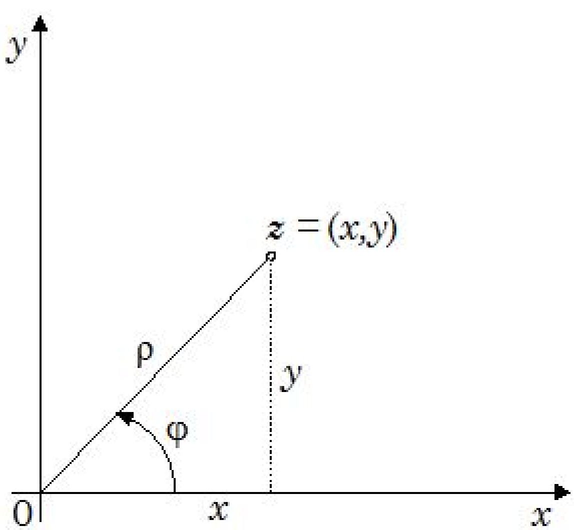
$$\boldsymbol{\varphi = \arg z,\ \ 0 \leq \arg z \leq 2\pi}$$

За угао који је већи од 2π користи се ознака $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi,\ k\epsilon\, Z$

Очигледно је да за $(x, y) \neq (0{,}0)$

$$\boldsymbol{x = \rho\cos\varphi + ip\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

где је $$\boldsymbol{\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\ \varphi = \frac{y}{x}, tj\ arctg\ \frac{y}{x}}$$



Слика 4.1

Множење комплексних бројева у тригонометријском облику

Изаберимо било која два комплексна броја (различита од нуле) и прикажимо их у тригонометријском облику:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2).$$

Коришћењем адицијске теореме за тригонометрјске функције, за њихово множење добијамо израз:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\qquad + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Ове формуле представљају тригонометријски приказ броја z_1z_2. Његов је модул r_1r_2, а аргумент $\varphi_1 + \varphi_2$. Зато важи :

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,$$
$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

У изразу је могуће да збир аргумената премаши вредност 2π и тада од збира треба одузети 2π.

Комплексни бројеви приказани у тригонометријском облику множе се тако да им се помноже модули, а аргументи саберу.

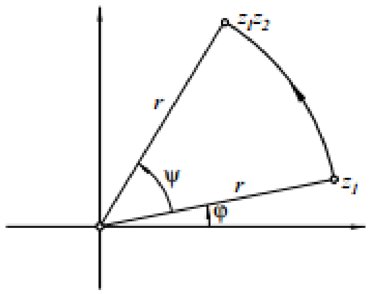
$$\boldsymbol{z_1z_2 = r_1r_2[cos\,(\varphi_1+\varphi_2) + i\,sin\,(\varphi_1+\varphi_2)]}$$

Геометријска интерпретација

Нека је z_2 комплексан број модула 1, тј $z_2 = \cos\psi + i\sin\psi$. Покажимо да множење комплексног броја z_1 са бројем z_2 геометријски одговара ротацији броја z_1 око координатног почетка за угао ψ у позитивном смеру. Ако је $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi\,)$, онда је

$$z_1z_2 = r[\cos(\varphi+\psi) + i\,sin(\varphi+\psi)].$$

Међутим, ово је комплексан број истог модула као и z_1, чији је аргумент увећан за ψ, дакле, то је број z_1 заротиран за угао ψ (у позитивном смеру).



Слика 4.2 множење са комплексним бројем модула 1 и аргумента ψ, број z_1 ротира за угао ψ.

Дељење комплексних бројева у тригонометријском облику

Формула слична оној за множење важи и за операцију дељења. Одредимо најпре тригонометријски приказ броја $\frac{1}{z}$, ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

Из овог приказа видимо да је модул овог броја $\frac{1}{r}$, а аргумент $-\arg z$:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}, \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z.$$

Искористимо сад ове две формуле да бисмо приказали дељење комплексних бројева приказаних у тригонометријском облику.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Комплексне бројеве делимо тако што им поделимо модуле, а аргументе одузмемо:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(cos\ (\varphi_1 - \varphi_2) + i\ sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}$$

Степен комплексног броја

Показали смо да се комплексни бројеви z_1 и z_2 множе :

$$\boldsymbol{z_1 z_2 = r_1 r_2[cos\ (\varphi_1 + \varphi_2) + i\ sin\ (\varphi_1 + \varphi_2)]}$$

Ако уврстимо овде $z_1 = z_{2,}$ добијамо :

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

Применом исте формуле следи:

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\ \sin 2\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \\ &= r^3(\cos 3\varphi + i\ \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

.

.

.

$$z^{n-1} = z^{n-2} \cdot z = r^{n-2}\ (\cos(n-2)\varphi + i \sin(n-2)\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i \sin\varphi) =$$

$$= r^{n-1} \cdot (cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi)$$

$$z^n = z^{n-1} \cdot z = r^{n-1}\ (\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i \sin\varphi) =$$

$$= r^n \cdot (\cos n\,\varphi + i \sin n\varphi)$$

Де Моаврова формула

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

из ње читамо:

$$|\boldsymbol{z^n}| = |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{n}},$$

$$\boldsymbol{arg(z^n) = n\, arg\, z}$$

Доказ:

Моаврову формулу ћемо доказати помоћу математичке индукције.

Формула очигледно важи за

$$\boldsymbol{n = 1}: \qquad z^1 = r^1 \cdot (\cos 1\,\varphi + i \sin 1\varphi)$$

Претпоставићемо сада да важи за

$$\boldsymbol{n = k}: \qquad z^k = r^k \cdot (\cos k\,\varphi + i \sin k\varphi)$$

У том случају је за:

$$\boldsymbol{n = k + 1}: \qquad z^{k+1} = z \cdot z^k = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) r^k(\cos k\,\varphi + i \sin k\varphi)$$

$$= r^{k+1}\,(\cos\varphi\cos k\varphi + i\sin\varphi\cos k\,\varphi + i\cos\varphi\sin k\,\varphi + i^2\sin\varphi\sin k\,\varphi)$$

$$= r^{k+1}[(\cos\varphi\cos k\varphi - \sin\varphi\sin k\,\varphi) + i(\sin\varphi\cos k\,\varphi + \cos\varphi\sin k\,\varphi)]$$

$$= r^{k+1}(\cos(\varphi + k\varphi) + i\sin(\varphi + k\varphi))$$

$$= \mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}(\cos(\mathrm{k}+1)\varphi + \mathrm{i}\sin(\mathrm{k}+1)\varphi) \blacksquare$$

Корен комплексног броја

<u>Дефиниција 4.1.</u> Корен комплексног броја је z је свако решење једначине $w^n = z$. Пишемо $w = \sqrt[n]{z}$

Показаћемо да за $z \neq 0$ увек постоји *n* различитих његових *n*-тих корена. Уобичајено је да се корен комплексног броја означава истим симболом као и аритметички корен реалног боја и то може понекад довести до забуне. Тако на пример , ако је z реалан број, на пример z = 8, тада је 2 једини аритметички трећи корен овог броја, док комплексни корен $\sqrt[3]{8}$ има три вредности, 2 , $-1 + i\sqrt{3}$ и $-1 - i\sqrt{3}$.

Одредимо сад израз за n-ти корен комплексног броја $z, z \neq 0$. Ставимо $w = \sqrt[n]{z}$, тј. $w^n = z$ и прикажимо те бројеве у тригонометријском облику:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Тада из

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\psi)$$

следи

$$\boldsymbol{\rho^n = r \quad \Longrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r},}$$

$$\boldsymbol{n\psi = \varphi + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

У овој формули $\sqrt[n]{r}$ је аритметички n-ти корен позитивног броја r и то је позитивни реални број.

У изразу за аргумент ψ, k узима све целобројне вредности. Међутим, то не значи да ћемо добити бесконачно много различитих вредности за аргумент ψ, јер ће се након неког времена те вредности разликовати за $2k\pi$ па ће због тога дефинисати исти комплексни број. Уврштавањем редом за $k = 0,1, \dots, n-1$ добијамо следеће различите вредности аргумента ψ:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \dots, \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Постоји тачно n различитих вредности n-тог корена комплексног броја z :

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1.}$$

Доказ:

(a) Покажимо сада да се за свако $k = 0,1,2, \dots, n-1$ добија различит корен. Ако су $0 \leq k_1 \leq n-1$ и $0 \leq k_2 \leq n-1$, онда је за $k_1 \neq k_2$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n}\right) \neq z_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n}\right)$$

Ако претпоставимо супротно $k_1 \neq k_2$ и $z_1 = z_2$, следи

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}\right)$$

па је

$$\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}=\cos\frac{\varphi+2k_2\pi}{n} \quad \wedge \quad \sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}=\sin\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}$$

односно

$$\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}-\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}=2k\pi$$

$$\varphi+2k_1\pi-\varphi-2k_2\pi=2nk\pi$$

$$k_1-k_2=nk$$

$$k_1=nk+k_2$$

што је у супротности са полазним претпоставкама $k_1 \neq k_2, 0 \leq k_1 \leq n-1$ и $0 \leq k_2 \leq n-1$ јер је или $k=0$ што повлачи $k_1=k_2$ или је $k_1 \neq 0$ и $k_1 \geq n \vee k_1 < 0$.

(b) Коначно, покажимо да $k<0$ и $k \geq n$ не даје нове корене. Наиме, за свако $k<0$ и $k \geq n$ може се наћи $0 \leq k_1 \leq n-1$ такво да је $k=k_1+nk^*$. Одавде је

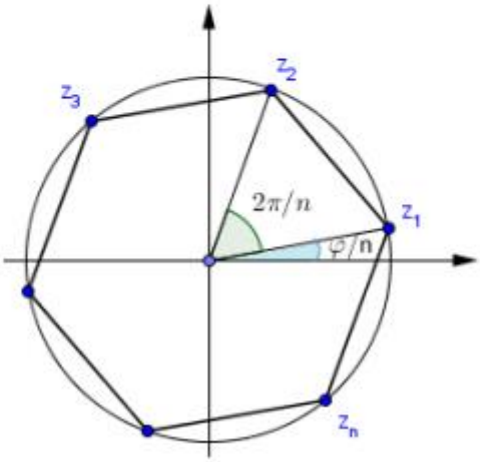
$$\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\cos\frac{\varphi+2(k_1+nk^*)\pi}{n}=\cos\left(\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}+2k^*\pi\right)=\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}$$

$$\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{\varphi+2(k_1+nk^*)\pi}{n}=\sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}$$

па следи да су корени за k и k_1 исти.

Сви ти бројеви имају исти модул. Они леже на кружници са центром у координатном почетку и полупречником $\sqrt[n]{r}$.

Аргументи два узастопна решења разликују се за $\frac{2\pi}{n}$. Сви n-ти корени комплексног броја различитог од нуле врхови су правилнога n-тоугла са средиштем у координатном почетку.



Слика 4.3 Сви n-ти корени комплексног броја различитог од нуле су врхови правилног n-тоугла са средишетем у координатном почетку. Полупречник n-тоугла износи $\sqrt[n]{r}$, а аргумент првог од њих је $\frac{\varphi}{n}$.

Пример 1

Наћи сва решења једначине:

a) $z^3 = -1 - i\sqrt{3}$ $\qquad$ $b)\ z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3$

и дати геометријску интерпретацију тих решења.

Решење: Нека је $w = -1 - i\sqrt{3}$. Одредићемо тригонометријски облик комплексног броја w:

$|w| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2,\ \ \arg w = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3},$

$w = 2\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$

Случај a) : Решења једначине

$$z^3 = 2\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

одређена су формулом

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2$$

одакле je

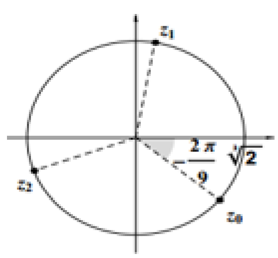
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right), z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{9}\right)\right).$$

Случај b) :

$$z = \left(-1-\sqrt{3}\right)^3 = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^3 =$$

$$2^3\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right)\right) = 8(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 8$$



a) b)

Пример 2

У комплексној равни представити све комплексне бројеве за које важи: $|z-1+5i|=2$;

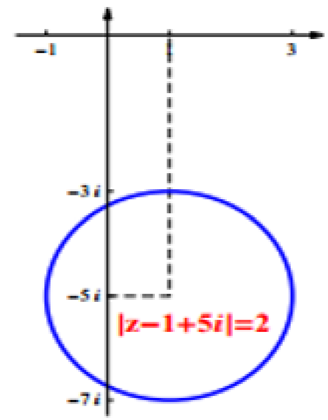
Решење: Увођењем алгебарског облика комплексног броја

$$z = x + iy, x\,, y \in \mathbb{R}$$

Једначина $|z-1+5i|=2$ постаје

$$|x+iy-1+5i| = 2 \iff |x-1+i(y+5)| = 2$$
$$\iff (x-1)^2 + (y+5)^2 = 2^2$$

Што представља једначину кружнице у $\mathbb{R}^2$ са центром (1 , - 5) и полупречником 2.



Пример 3

У комплексној равни представити бројеве z који задовољавају услове:

a) $\dfrac{1}{z^4} = i;$ **b)** $(1-i)^3 z = 1;$ **c)** $|z+i| = 2,\ \arg(z+i) = -\dfrac{\pi}{2}.$

Решење:

a) $\dfrac{1}{z^4} = i$

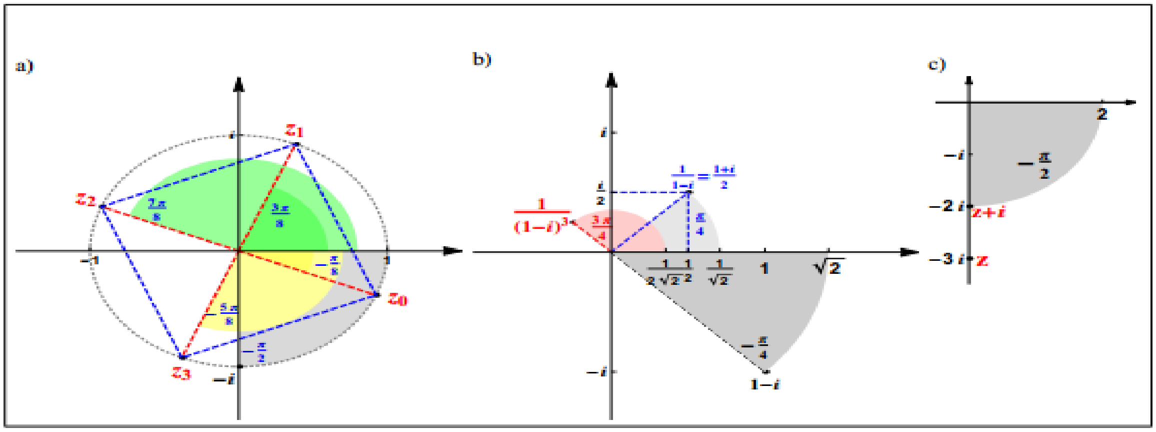
$$\iff z^4 = 1/i = -i = e^{-i\pi/2}$$
$$\iff z_k = \sqrt[4]{-i}$$
$$\iff z_k = e^{i\frac{-\pi/2+2k\pi}{4}}, k = \overline{0,3}.$$

b) $(1-i)^3 z = 1$

$$\iff z = \frac{1}{(1-i)^3}$$
$$\iff z = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{-3}$$
$$\iff z = 2^{-3/2}e^{i3\pi/4}.$$

c) $|z+i| = 2,\ \arg(z+i) = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\iff z + i = 2e^{-i\pi/2}$$
$$\iff z = 2e^{-i\pi/2} - i$$
$$\iff z = -2i - i = -3i.$$



Пример 4

У комплексној равни представити:

a) све бројеве $z_n = i^n + i^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$,

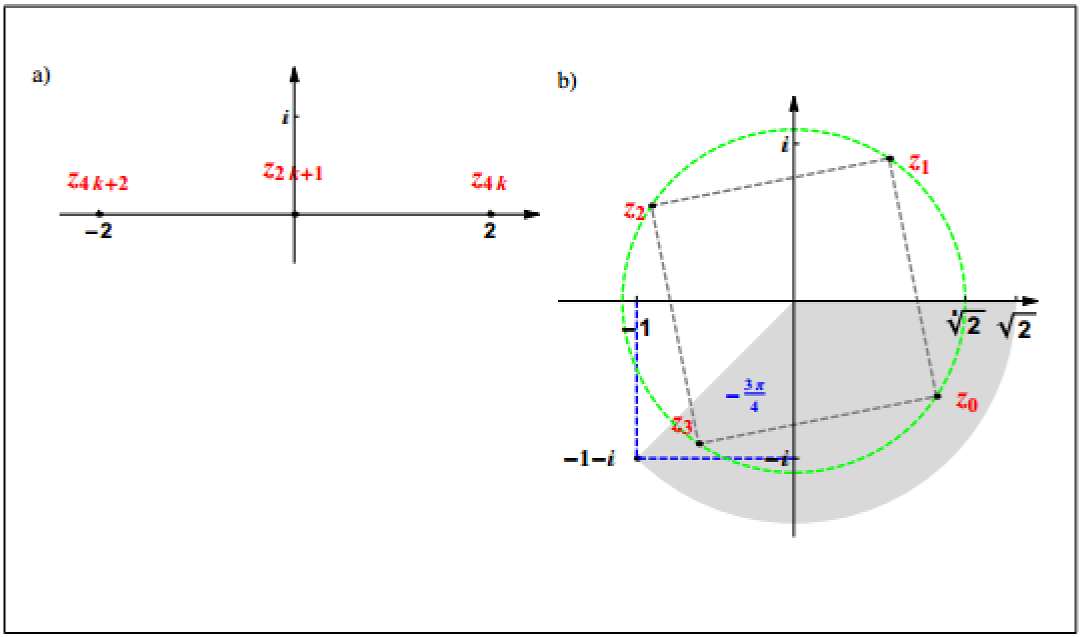
b) Сва решења једначине $z^4 = -1 - i$.

Решење: a) Целобројни степени броја i гласе

$$
\begin{array}{llll}
i^{4k} = 1, & i^{4k+1} = i, & i^{4k+2} = -1, & i^{4k+3} = i^{4k-1} = -i, \\
i^{-4k} = 1, & i^{-(4k+1)} = -i, & i^{-(4k+2)} = -1, & i^{-(4k+3)} = i^{-(4k-1)} = i,
\end{array}
$$

за $k \in \mathbb{N}$. Тада је

$$z_{4k} = i^{4k} + i^{-4k} = 1 + 1 = 2, \quad z_{4k+2} = i^{4k+2} + i^{-(4k+2)} = -1 - 1 = -2,$$
$$z_{4k\pm1} = i^{4k\pm1} + i^{-(4k\pm1)} = \pm i + (\mp i) = 0,$$



b) Тражена решења једначине $z^4 = -1 - i$ представљају све вредности четвртог корена комплексног броја $-1 - i$. Због формуле за n –ти корен комплексног броја, неопходно је $-1 - i$ превести из алгебарског у тригонометријски облик. Како је

$$-1 - i = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big),$$

то су

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{\sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big)} \\ &= \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Дакле,

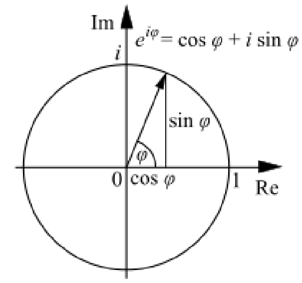
$$z_0 = \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{-3\pi}{16} + i\sin\frac{-3\pi}{16}\Big), \; z_1 = \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\Big),$$
$$z_2 = \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\Big), \quad z_3 = \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\Big).$$

5.Екпоненцијални облик комплексног броја

Знамо да важе Ојлерове формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$



Слика 4.4

Ако саберемо ове релације, добијамо

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}.$$

Ако одузмемо ове релације, добијамо:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{i\left(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}\right)}{-2}.$$

Ако уврстимо добијене релације у тригонометријски облик комплексног броја z добијамо **експоненцијални облик** комплексног броја z :

$$\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = re^{i\varphi}}$$

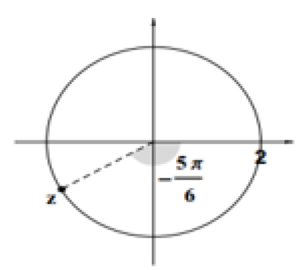
Пример 1.

Ако је $z = -1$, tada је $r = 1$, $\varphi = \pi$, па се у експоненцијалном облику добије Ојлерова **”златна” једначина** која повезује најзначајније бројеве у математици

$$\boxed{\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}}$$

Пример 2.

Наћи сва решења једначине: $e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot z = -1 - i\sqrt{3}$



Решење : $e^{\frac{i\pi}{6}} z = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2\pi i}{3}}e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.

Пример 3.

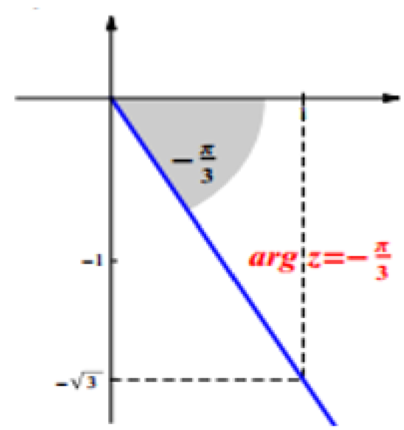
У комплексној равни представити све комплексне бројеве за које важи:

$\arg z = -\frac{\pi}{3}$;

Решење: С обзиром на експоненцијални облик комплексног броја

$$z = |z|e^{i\arg z} = re^{i\varphi}, r \geq 0.$$

једначину $\arg z = -\frac{\pi}{3}$ задовољавају сви комплексни бројеви $z = re^{-\frac{i\pi}{3}}, r > 0$. Сви такви бројеви леже на полуправој са почетком у координатном почетку (различити су од координатног почетка) и под углом $-\frac{\pi}{3}$ у односу на позитивни део x-осе.



6. Комплексни бројеви у геометрији

<u>Дефиниција 6.1</u> Скуп тачака $\{M\colon\ A - M - B\}$ који ћемо означавати (AB) или само AB, називаћемо отвореном дужи са крајевима у тачкама A и B.

<u>Дефиниција 6.2</u> Нека су $A(a)$ и $B(b)$ две различите тачке и нека је $M(z)$ тачка праве AB. Кажемо да тачка M дели дуж AB у односу $k, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ако важи следећа релација $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = k$.

<u>Тврђење 6.1</u> Комплексна координата z тачке M, која дели дуж AB (где је $A(a), B(b)$ у односу k, је дата са $z = \frac{a+kb}{1+k}, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Доказ:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow z - a = k(b - z) \Rightarrow z = \frac{a + kb}{1 + k}. \blacksquare$$

Приметимо да важи распоред $A - M - B$ ако је $k \in \mathbb{R}^+$, распоред $A - B - M$ ако $k \in (-\infty, -1)$ и распоред $M - A - B$ ако је $k \in (-1,0)$.

За $k = 1$ добијамо координату средишта дужи AB дату са $z_s = \frac{a+b}{2}$.

Средиште дужи

Ако у једначини за поделу дужи у датом односу уврстимо да је $k = 1$ добијамо координату средишта дужи AB дату са $z_s = \frac{a+b}{2}$.

Пример. 1

Доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки Т која сваку од њих дели у односу 2:1 (гледајући од одговарајућег темена).

Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи BC, AC, AB редом. Све комплексне координате ће бити означаваме одговарајућим малим словима. Тада је $c_1 = \frac{a+b}{2}, a_1 = \frac{c+b}{2}, b_1 = \frac{a+c}{2}$. Нека је T тачка за коју је $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TA_1} = 2:1$, тада је $t = \frac{a+2a_1}{1+2} = \frac{a+b+c}{3}$. Проверавамо $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{\mathrm{T}B_1} = 2:1$.

$$\overrightarrow{BT}:\overrightarrow{\mathrm{T}B_1} = (t-b)(b_1-t) = \left(\frac{a+b+c}{3}-b\right):\left(\frac{a+c}{2}-\frac{a+b+c}{3}\right) =$$

$$= \frac{a+c-2b}{3}:\frac{a+c-2b}{6} = 2:1.$$

Слично се проверава да је $\overrightarrow{CT}:\overrightarrow{TC_1} = 2:1$.

Транслација

<u>Теорема 6.1</u> Тачка z се транслацијом за вектор одређен тачкама a и b пресликава у тачку

$$z' = z + (b-a)$$

Доказ:

Посматрајмо транслацију комплексне равни за вектор $\overrightarrow{AB}$ који тачку z пресликава у тачку z'. Тада је

$$\overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{AB}$$

одакле следи

$$z' = z + (b-a). \blacksquare$$

Централна симетрија

<u>Теорема 6.2</u> Комплексан број z се централном симетријом у односу на комплексан број a пресликава у комплексан број

$$z' = 2a - z$$

Доказ:

Пресликајмо комплексан број z у односу на компексан број a. Тада је

$$\overrightarrow{Z'A} = \overrightarrow{AZ}$$

Одакле добијамо да је

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OA}$$

тј.

$$z' = 2a - z. \blacksquare$$

Записано преко комплексне нотације имамо да је

$$c - a = \lambda(b - c) \Leftrightarrow c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Овим смо доказали претходну теорему. ■

Веза ортоцентра, тежишта и темена троугла

У практичним применама, посебно је значајна веза између центра описане кружнице, ортоцентра и темена троугла коју нам пружа следећа теорема.

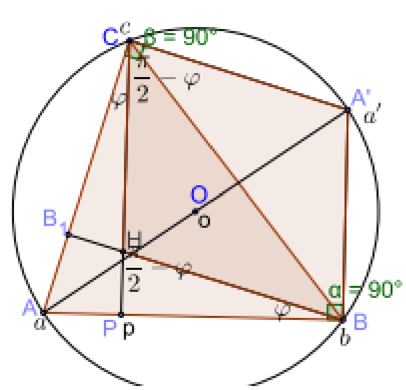
<u>Теорема 6.3</u> За троугао чија су темена комплексни бројеви a, b и c, његов центар описане кружнице тачка o и ортоцентар тачка h важи

$$h + 2o = a + b + c$$

Доказ:

Пресликајмо тачку a у тачку a' у односу на тачку o. Координата тачке a' је, користећи се централном симетријом, $a' = 2o - a$.

Како је $\angle aba' = \frac{\pi}{2}$, као угао над пречником круга. Одатле следи да су праве ch и $a'b$ паралелне. Нека је $\angle abh = \varphi$. Tada је $\angle ach = \varphi$ као углови са нормалним крацима. Како је и $\angle aca' = \frac{\pi}{2}$ као угао над пречником кружнице, одатле имамо да $\angle hca' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Нека је p подножје нормале из тачке c на страницу ab . Са друге стране имамо да је $\angle phb = \frac{\pi}{2} - \varphi$ па одатле имамо да важи $\angle hca' = \angle phb$ па одатле добијамо да су праве hb и ca' паралелне, па је четвороугао $HCA'B$ паралелограм.



Како је четвороугао $HCA'B$ паралелограм имамо да важи

$$\frac{b + c}{2} = \frac{h + a'}{2} = \frac{h + 2o - a}{2}$$

а одатле имамо да је $h + 2o = a + b + c$. ■

Ротација тачке

Нека је у комплексној равни дата тачка $z \neq 0$ у свом тригонометријском облику $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Координате тачке z' добијене ротацијом тачке z за угао φ даје следећа теорема.

Теорема 6.4 Координата тачке $z \neq 0$ заротиране за угао φ око координатног почетка је

$$z' = ze^{i\varphi}$$

Где је

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Доказ:

Помножимо ли комплексан број $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ са $\cos\varphi + i\sin\varphi$ користећи се Моавровом формулом добијамо да је

$$z' = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi))$$

одакле следи тврђење. ■

Наредна теорема представља уопштење теореме 6.6. јер даје координату тачке коај ротира око тачке која није координатни почетак.

Теорема 6.5. Координата тачке $z \neq 0$ заротиране око тачке $\xi \neq 0$ за угао φ је тачка

$$z' = \xi + e^{i\varphi}(z - \xi)$$

Доказ:

Доказ ове теореме сводимо на теорему 6.6. Транслирајмо вектор одређен координатним почетком ξ и врхом z' у координатни почетак. Ако би се ротацијом око тачке ξ тачка z пресликала у z' тада се тачка $z - \xi$ пресликава у тачку $z' - \xi$. Тада по теореми 6.6. имамо да важи

$$z' - \xi = e^{i\varphi}(z - \xi)$$

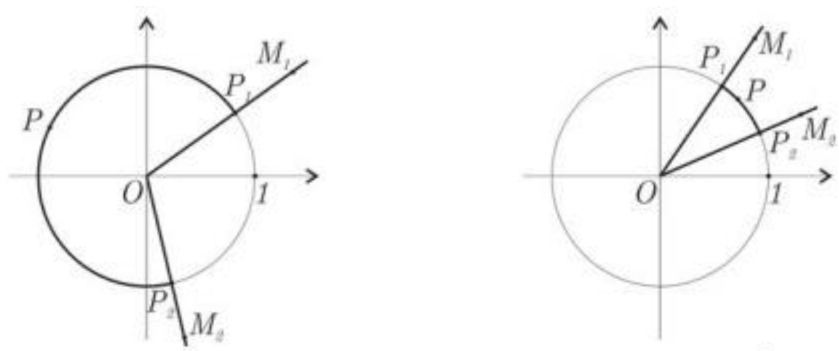
Одакле следи да је

$$z' = \xi + e^{i\varphi}(z - \xi) \quad \blacksquare$$

Мера угла

За троугао се каже да је оријентисан ако су његова темена уређена на специфичан начин. Он је позитивно или директно оријентисан, ако су његова темена поређана у смеру супротном од кретања казаљки на сату. У противном, он је негативно оријентисан. Размотримо две тачке $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$, које су различите од координатног почетка. Угао $\widehat{M_1OM_2}$ је позитивно оријентисан ако су тачке M_1 и M_2, тим редоследом, уређене супротно од кретања казаљки на сату, или еквивалентно, ако је троугао M_1OM_2 позитивно оријентисан. Другим речима, угао $\widehat{M_1OM_2}$ је позитивно оријентисан, ако се крак OM_1 при ротацији око тачке Oдо поклапања са краком OM_2 креће у смеру супротном од кретања казаљки на сату, крећући се при томе преко области угла.

Слика 6.1



пример позитивно оријентисаног угла *пример негативно оријентисаног угла*

Став 6.1 Мера позитивног оријентисаног угла $\widehat{M_1OM_2}$ једнака је $\arg\frac{z_1}{z_2}$.

Став 6.2 Ако су $M_1(z_1)$ $M_2(z_2)$ и $M_3(z_3)$, три различите тачке, онда је мера позитивног оријентисаног угла $\widehat{M_1M_2M_3}$ једнака $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

Доказ:

Транслацијом за вектор $-\overrightarrow{OM_1}$ тачке $M_1(z_1)$ $M_2(z_2)$ и $M_3(z_3)$, пресликавају се у тачке $O(0), M_2'(z_2 - z_1)$ и $M_3'(z_3 - z_1)$, при чему је $\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M_2'OM_3'}$. Но онда је према претходном ставу.

$$\widehat{M_2{}'OM'_3} = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

Права , полуправа , услов ортогоналности двеју правих

Тврђење 6.2 Тачке $M_1(z_1), M_2(z_2)$ и $M_3(z_3)$ су колинеарне акко је $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Тачке M_1, M_2 и M_3 су колинеарне акко је угао $\measuredangle\overline{M_2M_1M_3} \in \{0, \pi\}$. Пошто је $\measuredangle\overline{M_2M_1M_3} = \arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ имамо да $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$. ■

Последица 6.1

Тачка $M(z)$ припада правој M_1M_2 где је $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$, акко је $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$. ■

Услов $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$ се може написати у облику $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \overline{\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}$ тј $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$, одакле се, после унакрсног множења добија $(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\bar{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0$.

Ако ставимо $\mathrm{B} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ и $C = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 2i \cdot Im(z_1 \cdot \overline{z_2})$ имамо да је $Bz - \overline{B} \cdot \bar{z} + C = 0$, $B \in \mathbb{C}$, $C \in i \cdot \mathbb{R}$, општи облик једначине праве.

Пошто из $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$ следи $\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \overline{z_1} \\ z_2 - z_1 & \overline{z_2} - \overline{z_1} \end{vmatrix} = 0$ то ова детерминанта представља још један еквивалентан начин да се изрази припадност тачке $M(z)$ правој M_1M_2, где је $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$.

Стављајући $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \in \mathbb{R}$ имамо $z = (1-t) \cdot z_1 + t \cdot z_2,\ t \in \mathbb{R}$ што је још један начин да се зада једначина праве кој пролази кроз тачке $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$.

Тврђење 6.3 Праве M_1M_2 и M_3M_4 су ортогоналне акко је $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i \cdot \mathbb{R}^*$.

(При чему је $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ и $M_4(z_4)$)

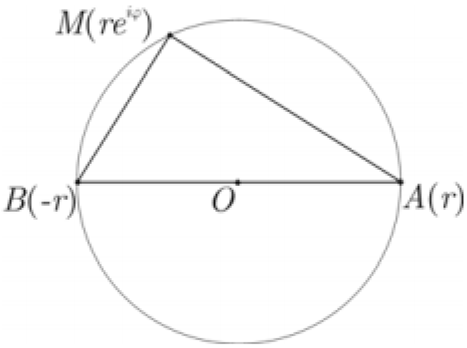
Праве M_1M_2 и M_3M_4 су ортогоналне акко је :

$$\measuredangle\overline{\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right)} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \arg\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in i \cdot \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i \cdot \mathbb{R}^* ■$$

Последица 6.2 :

Ако је $M_2 = M_4$ у претходном тврђењу тада су праве M_1M_2 и M_3M_4 ортогоналне акко је $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \in i \cdot \mathbb{R}^*$ ■.

Пример: Угао над пречником је прав.



Нека је $A(r), B(-r)$ и $M\left(re^{i\varphi}\right), \varphi \in (0,\pi)$.

$$\frac{r - re^{i\varphi}}{-r - re^{i\varphi}} = \frac{1 - e^{i\varphi}}{-1 - e^{i\varphi}} = \frac{1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)}{-1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{-2isin\ \frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{-2icos\ \frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)} = i \cdot tg\ \frac{\varphi}{2}$$

(овде смо користили адиционе формуле за синус и косинус двоструког угла). По претходној последици $\measuredangle\overline{BMA}$ је прав.

Тврђење. Посматрајмо праве l_1 и l_2 задате једначинама: $\begin{matrix} l_1: b_1 z + \overline{b_1}\bar{z} + c_1 = 0 \\ l_2: b_2 z + \overline{b_2}\bar{z} + c_2 = 0 \end{matrix}$ где је

$b_1, b_2 \in \mathbb{C}^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Праве l_1 и l_2 су:

1) Паралелне ако је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} = \frac{\overline{b_2}}{b_2}$,
2) Секу се акко је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} \neq \frac{\overline{b_2}}{b_2}$,
3) ортогоналне акко је $\frac{\overline{b_1}}{b_1} + \frac{\overline{b_2}}{b_2} = 0$.

Нека су $M_1(z_1), M_2(z_2)$ различите тачке праве l_1 такве да је $z_1 - z_2 = \overline{b_1}i$ и$M_3(z_3),\ M_4(z_4)$ различите тачке праве l_2 такве да је $z_3 - z_4 = \overline{b_2}i$. Такве тачке се могу изабрати, M_1 и M_3 су произвољне а M_2 и M_4 су одређене горњим условом.

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{M_1 M_2} = \lambda \cdot \overline{M_3 M_4}, \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{\overline{b_1}i}{\overline{b_2}i} = \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \overline{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\overline{b_1}}{b_1} = \frac{\overline{b_2}}{b_2}$$

2) праве l_1 и l_2 се секу акко нису паралелне (и не поклапају се), дакле акко $\frac{\overline{b_1}}{b_1} \neq \frac{\overline{b_2}}{b_2}$.

3) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_4-z_3} = \lambda \in i \cdot \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{\overline{b_1} i}{\overline{b_2} i} \in i \cdot \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -\frac{b_1}{b_2} = \overline{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{b_1}}{b_1} = -\frac{\overline{b_2}}{b_2} \Leftrightarrow \frac{\overline{b_1}}{b_1} + \frac{\overline{b_2}}{b_2} = 0. \blacksquare$$

Тврђење. Нека је дата права $l: bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, b \in \mathbb{C}^*,\ c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Једначина праве p која садржи тачку M_0 и паралелна је правој гласи l гласи : $p: z - z_0 = -\frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \overline{z_0})$.

Нека су $M_1(z_1), M_2(z_2)$ две различите тачке праве l такве да је $z_1 - z_2 = \bar{b}i$ и $M(z)$ произвољна тачка праве p, различита од M_0. Тада је $p \parallel l \Leftrightarrow \overline{M_1M_2} = \lambda \cdot \overline{MM_0}, \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow (z_2 - z_1) = \lambda(z_0 - z) \Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_0-z} = \lambda \in \mathbb{R}^*$, дакле

$$\frac{z_2 - z_1}{z - z_0} = \frac{\bar{b}\ i}{z - z_0} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{\bar{b}\ i}{z - z_0} = \frac{-\bar{b}\ i}{\bar{z} - \overline{z_0}} \Leftrightarrow z - z_0 = -\frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \overline{z_0}). \blacksquare$$

Тврђење. Нека је дата права $l: bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, b \in \mathbb{C}^*,\ c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Једначина праве n која садржи тачку M_0 и паралелна је правој гласи l гласи : $n: z - z_0 = -\frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \overline{z_0})$.

Нека су $M_1(z_1), M_2(z_2)$ две различите тачке праве l такве да је $z_1 - z_2 = \bar{b}i$ и $M(z) \in n$ произвољна тачка праве n, различита од M_0. Тада је $n \perp l \Leftrightarrow \overline{M_1M_2} \perp \overline{MM_0} \Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_0-z} = \lambda \in i\ \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z-z_0}{\bar{b}\ i} \in i\ \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z-z_0}{\bar{b}\ i} = -\frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{-bi} \Leftrightarrow z - z_0 = \frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \overline{z_0}). \blacksquare$

Тврђење. Нека је дата права $l: bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, b \in \mathbb{C}^*,\ c \in \mathbb{R}$ и тачка $M_0(z_0)$. Подножје нормале n из тачке M_0 на праву l има комплексну координату $z = \frac{bz_0 - \bar{b}\overline{z_0} - c}{2b}$.

Нека је тачка P подножје нормале n из тачке M_0 на праву l њена комплексна координата z је решење система $\begin{cases} bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \\ b(z - z_0) = \bar{b}(\bar{z} - \overline{z_0}) \end{cases}$ Из прве једначине имамо $z = \frac{-bz-c}{\bar{b}}$,

када то уврстимо у другу једначину имамо $z = \frac{bz_0 - \bar{b}\overline{z_0} - c}{2b}$.$\blacksquare$

Концикличност

<u>Дефиниција 6.3</u> Тачке z_1, z_2, z_3 и z_4 су **концикличне** акко припадају истој кружници.

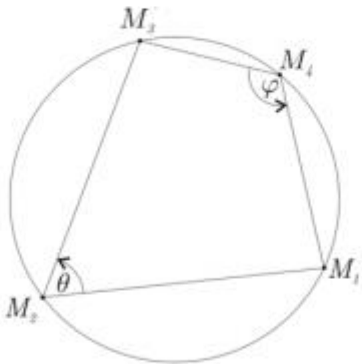
<u>Теорема 6.5</u> Различите тачке $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ припадају истој кружници акко је

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Доказ:

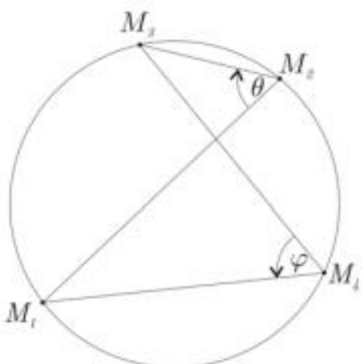
Доказ који следи служи за илустрацију примене аргумента, тачније правила:

$\arg(zw) =_{2\pi} \arg z + \arg w$ (из које следи из $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$).



Ако су дате тачке колинеарне тачке $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а па је и $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

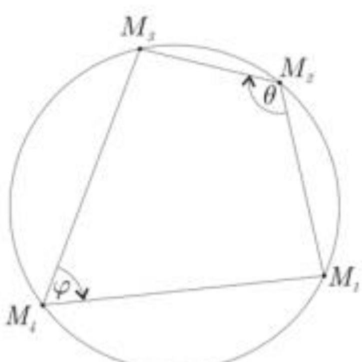
Четири концикличне тачке се на шест начина могу распоредити на кружници. Овде ћемо показати три карактеристична случаја. У овом доказу ће $\overline{\measuredangle ABC}$ означавати меру позитивно оријентисаног $\measuredangle ABC$.



Нека је $\measuredangle M_1M_2M_3 = \theta$, $\measuredangle M_3M_4M_1 = \varphi$ (овде се ради о оријентисаним угловима). Ако су тачке M_1, M_2, M_3, M_4 на кружници тада је четвороугао $M_1M_2M_3M_4$ тетиван, уколико је распоред $M_4M_3M_2M_1$ гледајући у позитивном смеру биће $\overline{\measuredangle M_1M_2M_3} + \measuredangle M_3M_4M_1 = \theta + \varphi = \pi$.

$$\theta = \overline{\measuredangle M_1M_2M_3} = \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}, \varphi = \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4},$$

$$arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} + \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} = \pi.$$



Пошто $\arg w \in [0, 2\pi)$ биће $\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right) = \pi$.

Одавде је $k = \frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

У случају да је распоред M_1, M_2, M_3, M_4 гледају у позитивном смеру биће $\varphi + \theta = 0$, јер је угао φ позитивно оријентисан, а θ негативан $\varphi = \measuredangle\overline{M_3M_4M_1}$, $\theta = \overline{\measuredangle M_1M_2M_3} - 2\pi \Rightarrow \overline{\measuredangle M_3M_4M_1} + \overline{\measuredangle M_1M_2M_3} = 2\pi$.

$$\left(\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}, \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right)$$

$$\Rightarrow \arg k = \arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} + \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} =_{2\pi} 0$$

$$\Rightarrow \arg k = 0 \Rightarrow\ k \in\ \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

У случају да је распоред M_1, M_2, M_3, M_4 гледајући у позитивном смеру биће $\varphi + \varphi = -\pi$, јер су оба улга φ и θ негативно оријентисана. Сада је :

$$\theta = \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} - 2\pi, \varphi = \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} - 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 3\pi$$

Одакле следи

$$k = \arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} + \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} =_{2\pi} 3\pi =_{2\pi} \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg k = \pi \Rightarrow k \in\ \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Остала три случаја су слична претходном.

Да би доказали другу страну еквиваленције приметимо да:

$$k \in\ \mathbb{R}\setminus\{0\} = \arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right) \in \{0,\pi\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} + \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} =_{2\pi} 0 \vee \arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} + \arg\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4} =_{2\pi} \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} =_{2\pi} 0 \vee \Rightarrow \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} =_{2\pi} \pi$$

Пошто је $0+0=0, \pi+\pi=2\pi, 0+\pi=\pi, \pi+0=\pi$, имамо да колинеарност тачака M_1, M_2, M_3 уз претходни услов повлачи колинеарност тачака M_3, M_4, M_1 тј. Следи да су све четири тачке M_1, M_2, M_3, M_4 колинеарне. У случају $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} \notin \{0,\pi\}$ и $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} \notin \{0,\pi\}$ имамо да је:

1. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi$ или
2. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \pi$ или
3. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 3\pi$.

Претпоставимо да је $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \theta$ и нека је l кружница коај садржи тачке M_1, M_2, M_3.

1. Пошто је (позитивно оријентисани) $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi - \theta$ и$\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi$, биће
$\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = 2\pi - \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi - (2\pi - \theta) = \theta = \measuredangle\overline{M_1M_2M_3}$, а тиме и M_4 припада l.

Приметимо да у овом случају добијамо четири од шест могућих распореда тачака на кружници. То су (читано у позитивном смеру) $M_1,\ M_3,\ M_4,\ M_2;\ M_1,\ M_4,\ M_2,\ M_3$; $M_1,\ M_3,\ M_2,\ M_4$; $M_1,\ M_2,\ M_4,\ M_3$.

Слично закључујемо да и у преостала два случаја M_4 припада l. Притом је у случају 2. распоред тачака $M_1,\ M_4,\ M_3,\ M_2$ док је у трећем случају распоред тачака $M_1,\ M_2,$ $M_3,\ M_4$ (читано у позитивном смеру).■

7.Скаларни производ комплексних бројева

Један од уобичајених начина да се уведе скаларни производ комплексних бројева a и b (схватамо их као векоре) је да кажемо да је скаларни производ вектора a и b једнак $(a,b) = Re\ \bar{a}b$.

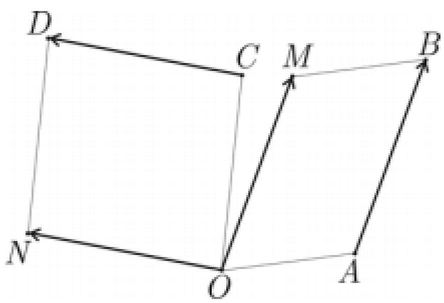
Тада се доказује особина да је $(a,b) = |a||b| \cos\measuredangle(a,b)$(при чему је $\measuredangle(a,b)$ угао између вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, где је O координатни почетак $A(a), B(b)$, тј. где је угао $\measuredangle(a,b) = \measuredangle AOB$). Или се скаларни производ уводи са $(a,b) = |a||b| \cos\measuredangle(a,b)$ па се доказује својство $(a,b) = Re\ \bar{a}b$, користећи особине множења комплексних бројева.

Следеће особине скаалрног производа се једноставно доказују:

1) $a \bullet a = |a|^2$,
2) $a \bullet b = b \bullet a$,
3) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$
4) $(\alpha a) \bullet b = \alpha(a \bullet b) = a \bullet (\alpha b), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5) $a \bullet b = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB$, где је $A(a), B(b)$,
6) $(az) \bullet (bz) = |z|^2(a \bullet b)$, при чему су $a, b, c, z\ \in \mathbb{C}$

Непосредна последица особине (5) је следеће:

<u>Тврђење 7.1</u> Ако су $A(a), B(b), C(c)$ и Dd четири различите тачке, тада је $AB \perp CD \Leftrightarrow$ $(b - a) \bullet (d - c) = 0$.



Слика 7.1

Транслацијом вектора $\overrightarrow{AB}$ за – $\overrightarrow{OA}$ добијамо вектор OM, где је $M(b-a)$, O координатни почетак. Транслацијом вектора $\overrightarrow{CD}$ за – $\overrightarrow{OC}$ добијамо вектор $\overrightarrow{ON}$, где је $N(d-c)$. Сада је $AB \perp CD \Leftrightarrow OM \perp ON$ (јер је $AB \parallel OM$ и $CD \parallel ON$) $\Leftrightarrow$ $(b-a)\bullet(d-c) = 0$ по својству (5). ■

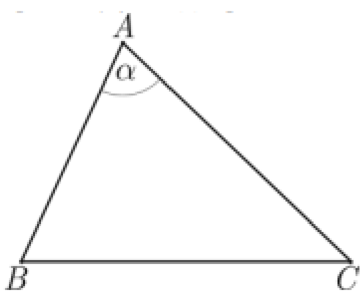
Ово тврђење нам омогућава да једноставно изведемо једначину праве n која садржи тачку $C(c)$ и нормална је на правој која садржи тачке $A(a), B(b)$:

$$(z-c)\bullet(b-a) = 0 \Leftrightarrow (z-c)\left(\bar{b}-\bar{a}\right) + (\bar{z}-\bar{c})(b-a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\left(\bar{b}-\bar{a}\right) + \bar{z}(b-a) + a\bar{c} + \bar{a}c - \bar{c}b - c\bar{b} = 0,$$

При чему је $M(z)$ произвољна тачка праве n.

Пример 1. Косинусна теорема се једноставно доказује применом скаларног производа. Нека су дата темена $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ троугла ABC, тада је



Слика 7.2

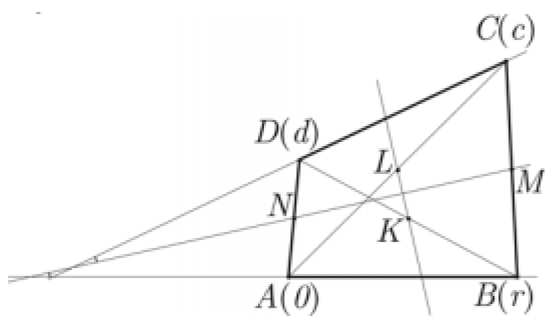
$$|b-c|^2 = (b-c)\bullet(b-c)$$
$$= \big((b-a)-(c-a)\big)\bullet\big((b-a)-(c-a)\big) =$$
$$= |b-a|^2 + |c-a|^2 - 2(b-a)\bullet(c-a) =$$
$$= |b-a|^2 + |c-a|^2 - 2|b-a||c-a|\cos\measuredangle BAC$$

Пример 2. У конвексном четвороуглу ABCD су странице AB и CD једнаке.

а) доказати да праве AB и CD образују једнаке углове са правом која спаја средишта страница AD и BC

б) доказати да праве AB и CD образују једнаке углове са правом која спаја средишта дијагонала AC и BD

а) Нека је $A(O), B(r), D(d), C(c)$ где је $r \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{C}$. Пошто је N средиште AD и M средиште BC, биће $n = \frac{0+d}{2} = \frac{d}{2}$ и $m = \frac{r+c}{2}$.



$$(b-a)\bullet(m-n) = r\bullet\frac{r+c-d}{2} = \frac{r^2}{2} + \frac{r\bullet(c-d)}{2}$$

$$(c-d)\bullet(m-n) = (c-d)\bullet\frac{r+c-d}{2}$$
$$= \frac{r\bullet(c-d)}{2} + \frac{|c-d|^2}{2} =$$
$$= \frac{r\bullet(c-d)}{2} + \frac{r^2}{2} = (b-a)\bullet(m-n)$$

б) Нека је L средиште AC и K средиште BD, тада је $I = \frac{c}{2}$ и $k = \frac{r+d}{2}$, па је :

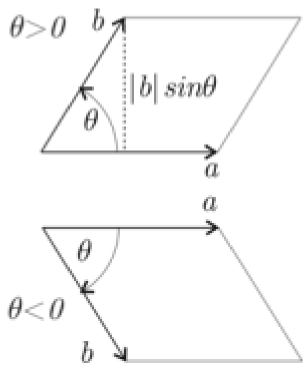
$(k-l)\bullet(m-n) = \frac{1}{2}(r+d-c)\bullet\frac{1}{2}(r+c-d) = \frac{r^2}{4} + \frac{(d-c)\bullet(c-d)}{4} = \frac{r^2}{4} - \frac{|d-c|^2}{4} = 0,$

па је $KL \perp MN$, одакле узимајући у обзир први део задатка, следи тврђење другог дела задатка.■

8.Векторски производ комплексних бројева

Такође је елементарни метод увођења векторског производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ознака $\vec{a} \times \vec{b}$) је да кажемо да је то вектор једнак по интезитету површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ док је он сам нормалан на раван вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и усмерен тако да је систем вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ позитивно оријентисан. Пошто су сви вектори комплексне равни баш у њој, оно што ће разликовати векторски производ комплексних бројева један од другог је његов интезитет и позитивно или негативно усмерење (док је правац увек нормалан на комплексну раван).

Зато је ради дефиниције векторског производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ довољно увести оријентисану површину паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ћемо посматрати као оријентисани конвексан угао у интервалу $(-\pi, \pi]$ и његов знак доделити површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тако дефинисана оријентисана површина паралелограма може играти улогу векторског производа комплексних бројева (вектора) $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

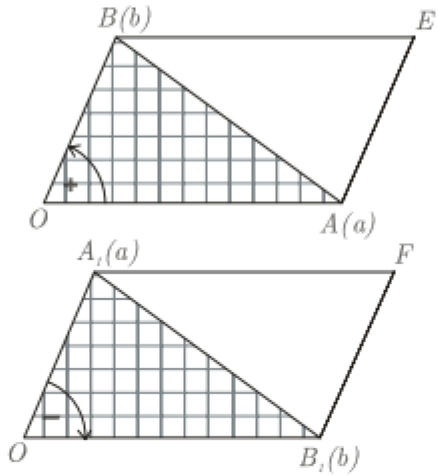


Дефиниција 8.1. Векторски производ комплексних бројева a и b у ознаци $a \times b$ је вектор нормалан на комплексну раван чији је интезитет једнак оријентисаној површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. То записујемо као $a \times b = |a||b| \sin \measuredangle\left(\vec{a}\,, \vec{b}\right)$ где је $\measuredangle\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$ оријентисан угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Користећи геометријску интерпретацију множења показује се да је $a \times b = Im\ \bar{a}b$.

Може се кренути и обрнуто тј дефинисати векторски производ комплексних бројева релацијом $a \times b = Im\ \bar{a}b$ и показати да је он једнак оријентисаној проврршини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Користећи релацију $a \times b = Im\ \bar{a}b$ једноставно се показују следеће особине векторског произода.

1) $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee a = \lambda b$ где је $\lambda \in \mathbb{R}$,
2) $a \times b = -b \times a$,
3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$,
4) $a(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$ за $\alpha \in \mathbb{R}$,
   из особине 1) се добија
5) ако су $A(a)$ и $B(b)$ међусобно различите тачке, од којих се ниједна не поклапа са координатним почетком тада је $a \times b = 0$ акко су тачке O, A и B колинеарне.



По самој дефиницији векторског производа комплексних бројева имамо да је површина позитивно оријентисаног троугла OAB, где је O координатни почетак, $A(a)$, $B(b)$ једнака $\frac{1}{2}a \times b = -\frac{1}{2}Im\bar{a}b$. Док је површина (овде се ради о површини у уобичајеном смислу речи) код негативно оријентисаног троугла OA_1B_1 (опет је O координатни почетак, $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$ једнака $S = -\frac{1}{2}a \times b = -\frac{1}{2}Im\bar{a}b$.

<u>Дефиниција 8.2</u> Троугао је позитивно или директно оријентисан, ако су његова темена, поређана у позитивном математичком смеру (смер кретања од првог, преко другог и трећег до четвртог квадранта координатног система. У супротном се каже негативан математички смер.)

<u>Тврђење 8.1</u> Површина позитивно оријентисаног троугла ABC, (где је $A(a), B(b), C(c)$) је дата са $S = \frac{1}{2}Im(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$.

У случају да је једно од темена троугла ABC координатни почетак имамо већ споменуту ситуацију која следи из дефиниције векторског производа. Ако то није случај транслираћемо троугао ABC за вектор $\overrightarrow{OA}$ tj –a, при чему се добија позитивно оријентисан троугао OB_1C_1 при чему је $b_1 = b - a$ и $c_1 = c - a$ (као и пре је $B_1(b_1)$ и $C_1(c_1)$) који је једнаке површине са полазним. тј.

$$S_{ABC} = S_{OB_1C_1} = \frac{1}{2}b_1 \times c_1 = \frac{1}{2}Im(\bar{b}_1c_1) = \frac{1}{2}Im\left((\bar{b} - \bar{a})(c - a)\right) = \frac{1}{2}Im(\bar{b}c - \bar{a}c - a\bar{b} - a\bar{a})$$

Пошто је $Im\bar{z} = Imz$ и $Im|z|^2 = 0$ и $Im(z_1 + z_2) = Imz_1 + Imz_2$, као и $Im(z_1 - z_2) = Imz_1 - Imz_2$, добијамо

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}Im(\bar{b}c - \bar{a}c - a\bar{b} + a\bar{a}) = \frac{1}{2}Im(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$$

Други начин да докажемо ову формулу је да разматрамо да ли је тачка O ван или унутар троугла ABC . Ако је унутра биће и троуглови OAB, OBC и OCA позитивно оријентисани па је

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = \frac{1}{2}Im\bar{a}b + \frac{1}{2}Im\bar{b}c + \frac{1}{2}Im\bar{c}a =$$

$$= \frac{1}{2}Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right)$$

Ако је тачка О ван троугла ABC, нека је $T(t)$ тежиште троугла ABC, па транслација за вектор $\overrightarrow{TO}$ (тј. -t) троугао ABC преводи у троугао $A_1B_1C_1$ чије су координате $a_1 = a - t,\ b_1 = b - t, c_1 = c - t$.

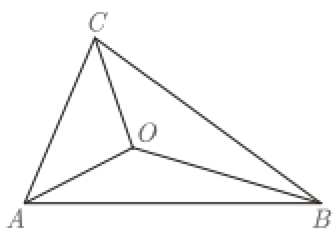
Пошто се датом транслацијом T преводи у O и T је унутар троугла ABC, биће O унутар троугла $A_1B_1C_1$, па ћемо, по претходном имати:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}Im\left(\overline{a_1}b_1 + \overline{b_1}c_1 + \overline{c_1}a_1\right) = \frac{1}{2}Im\left((\bar{a} - \bar{t})\right)(b - t) + \left(\bar{b} - \bar{t}\right)(c - t) + (\bar{c} - \bar{t})(a - t) =$$

$$\frac{1}{2}Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right) - \frac{1}{2}Im(\bar{a}t + \bar{t}a) - \frac{1}{2}Im\left(\bar{b}t + \bar{t}b\right)$$

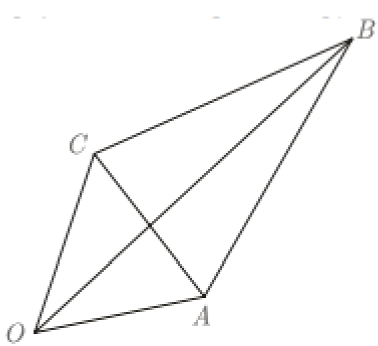
$$- \frac{1}{2}Im(\bar{c}t + \bar{t}c) + \frac{1}{2}Im(3|t|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right)$$



јер је $Im(z + \bar{z}) = 0$. Пошто је $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$ биће $S_{ABC} = \frac{1}{2}Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right)$ и у овом случају.■

Уколико нећемо да корисимо транслацију, а желимо да истакнемо концепт оријентисане површине, други део доказа можемо да образложимо помоћу примера са слике:



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} = \tilde{S}_{OAB} + \tilde{S}_{OBC} + +\tilde{S}_{OCA} =$$

$= \frac{1}{2}a \times b + \frac{1}{2}b \times c + \frac{1}{2}c \times a = \frac{1}{2}Im\bar{a}b + \frac{1}{2}Im\bar{b}c + \frac{1}{2}Im\bar{c}a =$ $\frac{1}{2}Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right)$,

при чему је ознака $\tilde{S}_{MNP}$ уведена за оријентисану побршину троугла MNP.

У ситуацији са слике троуглови OAB и OBC су позитивно оријентисани па су њихове површине позитивне и једнаке њиховим оријентисаним површинама, док је троугао OCA негативно оријентисан па има негативну оријентисану површину тј $S_{OCA} = -\tilde{S}_{OCA}$. Чињеница да је векторски производ дефинисан преко оријентисан површине објашњава остале једнакости.

Међутим, троугао ABC у односу на координатни почетак може да заузме више положаја које би све засебно разматрати да би ово заиста био доказ.

Последица 8.1 Површина негативно оријентисаног троугла ABC је дата са

$$S = -\frac{1}{2} Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right) \blacksquare$$

Последица 8.2Различите тачке $A(a), B(b)$ и $C(c)$ су колинеарне акко је испуњен један од услова:

1) $(b-a) \times (c-a) = 0$,
2) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$.

Тачке A, B и C су колинеарне акко је површина троугла ABC једнака 0, тј. $0 = \frac{1}{2} Im\bar{a}b + \frac{1}{2} Im\bar{b}c + \frac{1}{2} Im\bar{c}a = a \times b + b \times c + c \times a.$ За доказ прве једнакости имамо:

$$(b-a) \times (c-a) = \frac{1}{2} Im\left(\bar{b} - \bar{a}\right)(c-a) = S = \frac{1}{2} Im\left(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\right) = S_{ABC} = 0. \blacksquare$$

9.Мебијусова пресликавања

Дефиниција 9.1 Пресликавање облика

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in R, ad-bc\neq 0 \quad (1),$$

називамо **билинеарном функцијом**. Оваква пресликавања први је разматрао Август Фердинанд Мебијус(1790-1868) па се зато називају и **Мебијусовим пресликавањима.**

Пошто за $c\ \neq 0$ важи $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$ (2),

видимо да у случају $bc-ad=0$ добијамо константно пресликавање, па зато тај (тривијални) случај избацујемо. Из претходног израза (2), јасно је да је билинеарна функција композиција функција

$$f_1(z)=z+\frac{d}{c},\ \ f_2(z)=\frac{1}{z},\ \ f_3(z)=\frac{bc-ad}{c^2z},\ f_4(z)=z+\frac{a}{c} \quad (3),$$

Геометријска интерпретација функција f_1 , f_2, f_3, f_4 је позната : f_1 и f_4 су транслације, док је f_3 дилатациона ротација (у случају $\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|=1$ само ротација).

Случај $c=0$ доводи до функције облика $f(z)=\tilde{a}z+\tilde{b}$ која је такође дилатациона ротација.

Ако је $c\neq 0$ појављује се функција $f_2(z)=\frac{1}{z}$. Она је у блиској вези са инверзијом коју као геометријско пресликавање дефинишемо на следећи начин:

<u>Дефиниција 9.2</u> Нека је k кружница са центром у *O* , полупречника R. Инверзијом у односу на кружницу *k* називамо пресликавање $\psi_{к}$ Еуклидске равни у себе које свакој тачки *P* додељује тачку *P’* такву да важи $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$.

(Другим речима тачке *P* и *P’* су узајамно инверзне у односу на кружницу k акко леже на истој полуправој чији је почетак тачка O и ако важи $OP\cdot OP'=R^2$).

Тачку O називамо центром инверзије, кружницу k називамо кружницом инверзије, а број R полупречником инверзије $\psi_{к}$, понекад се користи и термин R^2- *коефицијент инверзије*.

Уколико за кружницу инверзије узмемо $k\colon |z|=1$, имаћемо да се тачка $P(z)$, где је

$z=re^{i\varphi}$, слика у тачку P’ чија је комплексна координата $p'=\frac{1}{r}e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{-i\varphi}}=\frac{1}{\bar{z}}$. Дакле тачка $\tilde{P}(\bar{z})$ се инверзијом слика у тачку *P** чија је комплексна координата $\frac{1}{z}$. Пошто је коњуговање у ствари симетрија у односу на реалну осу, видимо да је пресликавање f_2 у ствари композиција

$$f_2(z)=(\psi_{к}\circ S_x)(z)=\ \psi_{к}(\bar{z})$$

тј. важи $\frac{1}{z}=\psi_{к}(\bar{z})$.

Такође је $\frac{1}{\bar{z}} = \psi_{\text{к}}(z)$, тј $\frac{1}{z} = \overline{\psi_{\text{к}}(z)}$,

што се може записати и са $f_2(z) = (S_x \circ \psi_{\text{к}})(z)$, што значи да редослед коњуговања и инверзије у претходној композицији није битан.

Из претходног разматрања је јасно да се инверзија у односу на јединичну кружницу $k\colon |z| = 1$ у облику комплексне функције изражава се са $\psi_{\text{к}}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Пресликавање $f_2(z) = \frac{1}{z}$, које је у блиској вези са инверзијом , називаћемо комплексна инверзија.

Из (2) јасно је да Мебијусова трансформација (1) пресликава $\mathbb{C}/\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ у $\mathbb{C}/\left\{\frac{a}{c}\right\}$. Пошто су пресликавања f_1, f_2, f_3, f_4 бијекције, из (3) следи да је Мебијусова трансформација $f\colon \mathbb{C}/\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}/\left\{\frac{a}{c}\right\}$ бијекција. Међутим пошто је $\lim\limits_{z\to\frac{d}{c}} f(z) = \infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \frac{a}{c}$ видимо да уколико ставимо $f\colon \left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ и $f\colon(\infty) = \frac{a}{c}$ добијамо пресликавање $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ које остаје бијекција.

Решавањем једначине

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{по } z \text{ добијамо:}$$

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}, \text{ дакле биће}$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}}.$$

Посматрајмо композицију пресликавања $f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ и $f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$.

Испоставља се да је

$$(f_2 \circ f_1)(z) = \frac{(a_1a_2+c_1b_2)z+b_1a_2+d_1b_2}{(a_1c_2+c_1d_2)z+b_1c_2+d_1d_2} \qquad (\mathbf{4}).$$

Из чињенице да су f_1 и f_2 бијекције јасно је да пресликавање $f_2 \circ f_1$ не може бити тривијално (тј. ако би $f_2 \circ f_1$ сликало $\overline{\mathbb{C}}$ у једну тачку, пошто је f_1 бијекција, морало би f_2 да слика $\overline{\mathbb{C}}$ у једну тачку, што противуречи чињеници да је f_2 бијекција). Дакле *композиција две нетривијалне Мебијусове трансформације је нетривијална Мебијусова трансформација.*

Пошто је $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{kaz+kb}{kcz+kd}, k \neq 0$, јасно је да коефицијенти Мебијусове трансформације нису јединствени. Ако је $k = \frac{\pm 1}{\sqrt{ad-bc}}$, добијамо да нови коефицијенти задовољавају једнакост

$ka \cdot kd - kb \cdot kc = \ k^2(ad - bc) = 1$. Ако коефицијенти Мебијусове трансформације задовољавају једнакост $(ad - bc) = 1$ кажемо да је та трансформације задата у нормализованом облику. Дакле, свака Мебијусова трансформација се може представити у нормализованом облику и то на два начина јер је $\boldsymbol{f(z)} = \frac{\boldsymbol{az+b}}{\boldsymbol{cz+d}} = \frac{\boldsymbol{-az-b}}{\boldsymbol{-cz-d}}$.

Сада ћемо показати да се скуп кругова и правих комплексне равни Мебијусовим трансформацијама пресликава у самог себе. Ради тога посматраћемо Мебијусову функцију представљену у облику (2), тј. као композију функција (3). Показаћемо да комплексна инверзија $f_2(z)$ пресликава скуп кругова и правих у себе, а за пресликавање f_1, f_3, f_4 је то очигледно јер је већ раније показано да су f_1 и f_4 транслације, а да је f_3 композиција хомотетије (дилатације) и ротације. Такође је раније показано да је :

$$\boldsymbol{Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0}, \qquad \boldsymbol{A, C \in} \mathbb{R}, |\boldsymbol{B}|^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{AC} \geq \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{5}),$$

општи облик једначине круга или праве у комплексној равни (за A=0 добија се једначина праве).

$(\boldsymbol{i})$ $A = 0$ и $C = 0$, па је (5) једначина праве која пролази кроз 0, из (6) следи да је њена слика права која пролази кроз 0.

$(\boldsymbol{ii})$ $A = 0$ и $C \neq 0$, па је (5) једначина праве која не садржи 0, из (6) следи да је њена слика кружница коај садржи 0.

$(\boldsymbol{iii})$ $A \neq 0$ и $C = 0$, па је (5) једначина кружнице која садржи 0, из (6) следи да је њена слика права која не садржи 0.

$(\boldsymbol{iv})$ $A \neq 0$ и $C \neq 0$, па је (5) једначина кружнице која не садржи 0, из (6) следи да је њена слика кружница која не садржи 0.

Примењујући функцију $w = f_2(z) = \frac{1}{z}$ добијамо да је $z = \frac{1}{w}$, замењујући ово у (5) имамо да је:

$$\boldsymbol{Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0} \qquad (\boldsymbol{6}),$$

што је опет једначина круга или праве. Прецизније имамо:

Дакле Мебијусова трансформација (1) пресликава кругова или праве комплексне равни у кругове или праве исте равни при чему :

$(\boldsymbol{i})$ права која садржи тачку $X\ \left(-\ \frac{d}{c}\right)$ се слика у праву која садржи тачку $Y\ \left(\frac{a}{c}\right)$

$(\boldsymbol{ii})$ права која не садржи тачку X се слика у кружницу која садржи тачку Y,

$(\boldsymbol{iii})$ кружница која садржи тачку X се слика у праву која не садржи тачку Y,

$(\boldsymbol{iv})$ кружница која не садржи тачку X се слика у кружницу која не садржи тачку Y.

Кружнице и праве комплексне равни се могу поистоветити са кружницама у $\overline{\mathbb{C}}$, тако што ћемо праву комплексне равни посматрати као кружницу која садржи тачку ∞ и бесконачно је великог пречника. Наведено својство (ii) се може образложити и на следећи начин: пошто је у питању права у $\mathbb{C}$, поистовећујемо је са кружницом у $\overline{\mathbb{C}}$ која садржи тачку ∞ и не садржи тачку $X\left(-\frac{d}{c}\right)$.

Пошто Мебијусова трансформација слика кружнице у $\overline{\mathbb{C}}$ у кружнице у $\overline{\mathbb{C}}$, њена слика је кружница у $\overline{\mathbb{C}}$ која садржи слику тачке ∞, а то је $Y\left(\frac{a}{c}\right)$, а не садржи слику тачке X, тј ∞, дакле то је кружница и у $\mathbb{C}$. На сличан начин се могу образложити и остала наведена својства.

Претходне особине указују да постоји веза између Мебијусове трансформације (1) и инверзије у односу на круг $k{:}\left|z+\frac{d}{c}\right|=1$.

Фиксне тачке Мебијусовог пресликавања

Тачка z је фиксна тачка Мебијусовог пресликавања акко је решење једначине

$$\frac{\boldsymbol{az+b}}{\boldsymbol{cz+d}}=\boldsymbol{z},$$

која је еквивалентна са једначином

$$\boldsymbol{cz^2=(d-a)z-b=0} \qquad (\mathbf{7})$$

Пошто је (7), квадратна једначина, она има највише два решења, дакле Мебијусово пресликавања може имати највише две фиксне тачке.

Ако је $\boldsymbol{c\neq 0}$ те две **фиксне тачке су дате са**

$$\boldsymbol{\xi_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4bc}}{2c}}$$

а ако претпоставимо да је Мебијусово пресликавања нормализовано (тј да је $\Delta = ad - bc = 1$) имаћемо да су са

$$\boldsymbol{\xi_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}} \qquad \textbf{(8)}$$

дате његове фиксне тачке.

Из ове формуле примећујемо да се у случају нормализованог Мебијусовог преслиаквања фиксне тачке ξ_1 и ξ_1 поклапају акко је $a + d = \pm 2$, тј. тада наведено пресликавања има само једну фиксну тачку.

Ако је $\boldsymbol{c = 0}$ Мебијусово пресликавање постаје

$$\boldsymbol{f(z) = a'z + b', \quad a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}}$$

$(\boldsymbol{i})$ **за $\boldsymbol{a' = 1}$ и $\boldsymbol{b' \neq 0}$** једначина (7) нема решења у $\mathbb{C}$, али важи $f(\infty) = \infty$ па је ∞ једина фиксна тачка,

$(\boldsymbol{ii})$ **за $\boldsymbol{a' = 1}$ и $\boldsymbol{b' = 0}$** даје идентичко пресликавање у ком су све тачке фиксне,

$(\boldsymbol{iii})$ **за $\boldsymbol{a' \neq 1}$** једначина (7) има решење $z = \frac{b'}{1-a'} \in \mathbb{C}$ али и тачка ∞ испуњава услов $f(\infty) = \infty$, те Мебијусово пресликавање у овом случају има две фиксне тачке, једну коначну и још тачку ∞.

Основни закључак из овог разматрања, који је потребан за следеће тврђење је да Мебијусово пресликавање има највише две фиксне тачке, па ако има више (рецимо три) фиксних тачака оно мора бити идентитета.

Тврђење 9.1 Ако су $Q(q),\ R(r),\ S(s),\ q,\ r,\ s \in \overline{\mathbb{C}}$, три међусобно различите тачке и $\tilde{Q}(\tilde{q})$, $\tilde{R}(\tilde{r}),\ \tilde{S}(\tilde{s}),\ \tilde{q},\ \tilde{r},\ \tilde{s} \in \overline{\mathbb{C}}$, три међусобно различите тачке, тада постоји јединствена Мебијусова трансформација f таква да је

$$f(q) = \tilde{q}, f(r) = \tilde{r}, f(s) = \tilde{s} \qquad (9).$$

Та трансформације је имплицитно задата формулом

$$\frac{w - \tilde{s}}{w - \tilde{q}} \cdot \frac{\tilde{r} - \tilde{q}}{\tilde{r} - \tilde{s}} = \frac{z - s}{z - q} \cdot \frac{r - q}{r - s} \qquad (10)$$

Ако је нека од шест тачака једнака ∞, онда разломак у коме се онда јавља у бројиоцу и имениоцу треба заменити са 1, на пример ако је $\tilde{s} = \infty$, разломак $\frac{w-\tilde{s}}{\tilde{r}-\tilde{q}}$ треба заменити са 1.

Доказ:

Ако би постојале две Мебијусове функције f_1 и f_2 које задовољавају услов (9), Мебијусова трансформација $f_2^{-1} \circ f_1$ би имала три различите фиксне тачке q, r и s, па мора бити једнака идентичком пресликавању одакле следи $f_1 = f_2$, чиме је показана јединственост Мебијусовог пресликавања са својством (9).

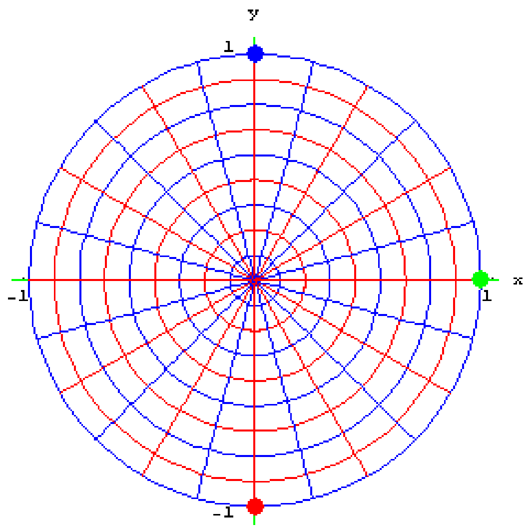
Да је са (10) дата Мебијусова трансформација са својством (9) можемо закључити решавајући једнакост (10) по w, међутим то је прилично гломазан рачун. Други начин је да обележимо $f_1 = \frac{z-s}{z-q} \cdot \frac{r-q}{r-s}$ и $f_2 = \frac{w-\tilde{s}}{w-\tilde{q}} \cdot \frac{\tilde{r}-\tilde{q}}{\tilde{r}-\tilde{s}}$. Тада имамо:

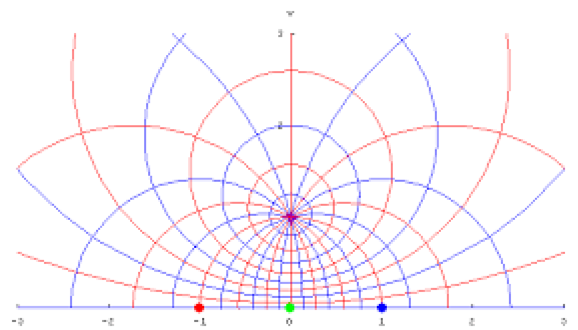
$$f_1(s) = 0 \text{ и } f_2(\tilde{s}) = 0 \ , \ f_1(q) = \infty \text{ и } f_2(\tilde{q}) = \infty, \ f_1(r) = 1 \text{ и } f_2(\tilde{r}) = 1$$

па композиција $f_2^{-1} \circ f_1 = f$ има особину (9).

Пошто из $f = f_2^{-1} \circ f_1$ имамо $f_2 \circ f = f_1$, стављајући $w = f(z)$ имамо да за овакво f важи (10). ■

Пример 1 Покажи да $w = S\,(w) = \frac{i(1-z)}{1+z}$ пресликава диск *D : | z| < 1* $\xrightarrow{"1-1"}$ на горњи део равни $Im(w) > 0$.





Ми прво сматрамо да је објекат круг C: $|z\,| = 1$, који формира границу диска и чија се слика налази на w равни.

Ако запишемо $S(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$, можемо видети да су $a = -i$, $b = i$, $c = 1$ и $d = 1$.

Користећи једначину $z = S^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$, проналазимо да је инверзност дата

$$z = S^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-(1)\,w+(i)}{(1)w-(-i)} = \frac{-w+i}{w+i}.$$

Ако је $|z\,| = 1$, онда једначина $z = S^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-(1)\,w+(i)}{(1)w-(-i)} = \frac{-w+i}{w+i}$, имплицира да слике тачака на кружници задовољавају услов $\left|\frac{-w+i}{w+i}\right| = 1$, који носи једначина $|w+i| = |-w+i|$.

Квадрирајући обе стране једначине $|w+i| = |-w+i|$, добијамо

$$|u+iv+i| = |-u-iv+i|$$

$$|u+i(1+v)|^2 = |-u+i(1-v)|^2$$

$$u^2 + (1+v)^2 = (-u)^2 + (1-v)^2$$

$$u^2 + (1+v)^2 = u^2 + (1-v)^2$$

$$(1+v)^2 = (1-v)^2$$

$$1 + 2v + v^2 = 1 - 2v + v^2$$

$$4v = 0$$

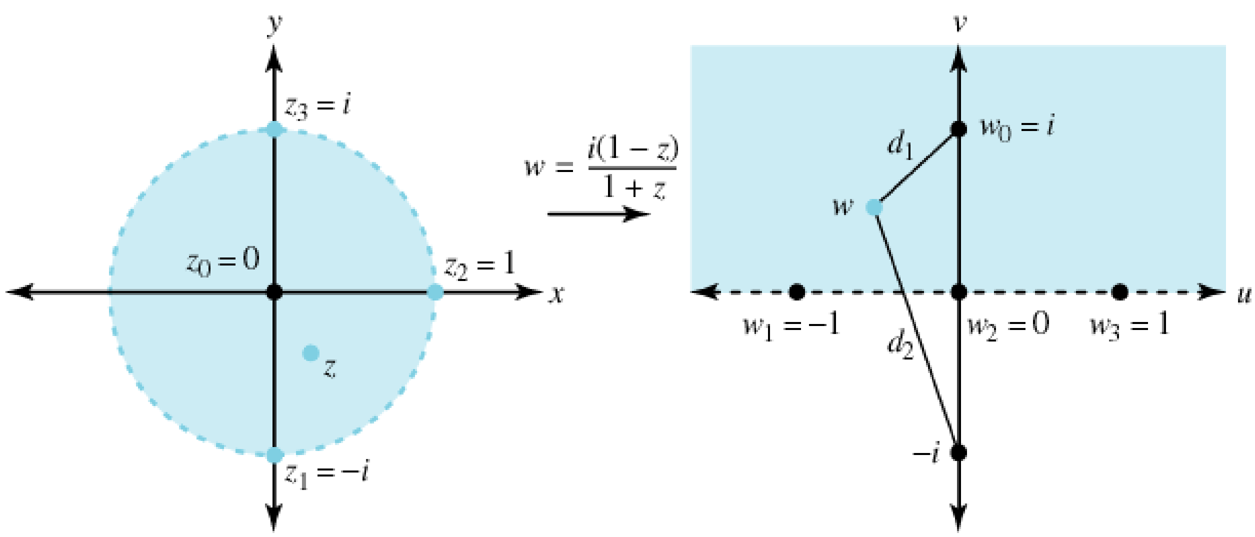
$$v = 0$$

Што је зараво једначина u осе у w равни.

Слика тачке $z = 0$ је $w = S(0) = i$, тако да очекујемо да унутрашњи део кружнице *C* буде пресликан на део равни *w* која лежи изнад *u* осе. Како би показали да је овакав исход истинит, ми узимамо да $|z| < 1$. Онда једначина $z = S^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-(1)\,w+(i)}{(1)w-(-i)} = \frac{-w+i}{w+i}$, имплицира да вредности w морају да задовољавају неједнакост $|-w+i| < |w+i|$, што записујемо као

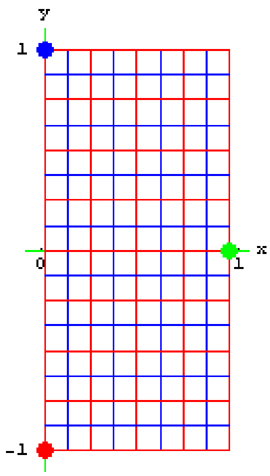
$$d_1 = |w-i| < |w-(-i)| = d_2$$

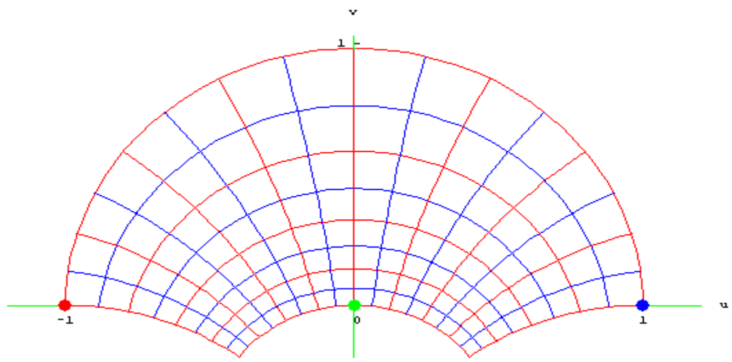
Ако уведемо да је d_1 удаљеност *w* од i и d_2 као удаљеност *w* од – i, онда тачка *w* мора лежати у горњој половини равни $Im(w) > 0$, као што је приказано на илустрацији 9.1.



Илустрација 9.1 Тачке $z_1 = -i,\ z_2 = 1,\ z_3 = i$ су пресликане на тачке $w_1 = -1, w_2 = 0\,, w_3 = 1$, тим редоследом.

Пример 2 Конструисати билинеарну функцију која пресликава тачке $z_1 = -i,\ z_2 = 1,\ z_3 = i$ на тачке $w_1 = -1, w_2 = 0\,, w_3 = 1$ респективно.





Ми користимо имплицитну формулу , једначине

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} = \frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}$$

$$\frac{(z-(-i))(1-i)}{(z-i)(1-(-i))} = \frac{(w-(-i))(0-1)}{(w-1)(0-(-1))}$$

$$\frac{(z+i)(1-i)}{(z-i)(1+i)} = \frac{(w+i)(0-1)}{(w-1)(0+1)}$$

$$\frac{(z+i)(1-i)}{(z-i)(1+i)} = \frac{w+1}{-w+1}$$

Затим поједностављујемо

$$(z-i)(1+i)(w+1) = (z+i)(1-i)(-w+1)$$

$$(1+i)zw + (1-i)w + (1+i)z + (1-i) = (-1+i)zw + (-1-i)w + (1-i)z + (1+i)$$

$$zw + izw + w - iw + z + iz + 1 - i = -zw + izw - w - iw + z - iz + 1 + i$$

$$2zw + 2w = -2iz + 2i$$

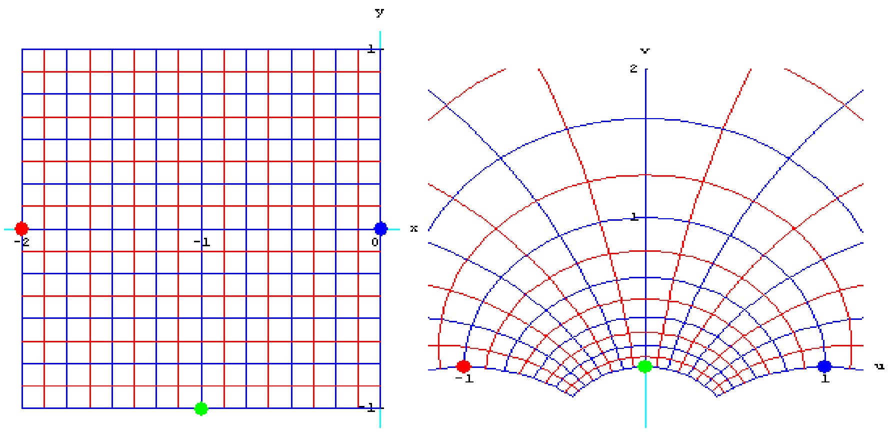
$$zw + w = -iz + i$$

$$w(1+z) = i(1-z)$$

Стога је тражена билинеарна функција :

$$w = S(z) = \frac{i\,(1-z)}{1+z}$$

Пример 3 Нађимо билинеарну функцију која пресликава тачке тачке $z_1 = -2, z_2 = -1,\ z_3 = 0$ у тачке $w_1 = -1,\ w_2 = 0\,, w_3 = 1$ тим редом.



Опет користимо имплицитну формулу , једначине :

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} = \frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}$$

и пишемо

$$\frac{\big(z-(-2)\big)((-1-i)-0)}{(z-0)((-1-i)-(-2)} = \frac{(w-(-1))(0-1)}{(w-1)(0-(-1))}$$

$$\frac{(z+2)(-1-i)}{(z)(-1-i+2)} = \frac{(w+1)(-1)}{(w-1)(1)}$$

$$\frac{z+2}{z}\cdot\frac{-1-i}{1-i} = \frac{1+w}{1-w}$$

Користећи чињеницу да је $\frac{-1-i}{1-i} = \frac{1}{i}$, поново смо написали ову једначину као

$$\frac{z+2}{i\,z} = \frac{1+w}{1-w}$$

одакле добијамо

$$(z+2)(1-w) = i\,z\,(1+w)$$

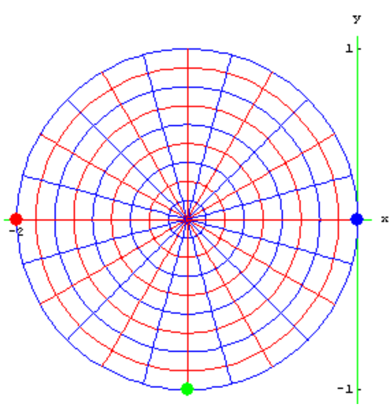
$$z + 2 - zw - 2w = i\,z + i\,z\,w$$

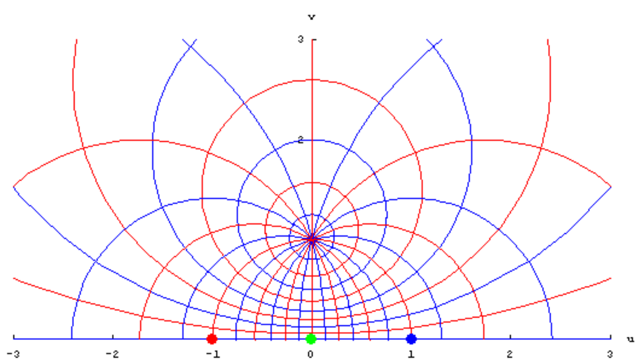
$$(1 - i)z + 2 = w(z + i\,z + 2)$$

$$(1 - i)z + 2 = w((1 + i)z + 2)$$

$$w = S(z) = \frac{(1 - i)z + 2}{(1 + i)z + 2}$$

Пример 4 Покажите да пресликавање $w = S(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$, пресликава диск D: $|z + 1| < 1 \xRightarrow{"1-1"}$ на горњу половину равни $Im\ (w) > 0$





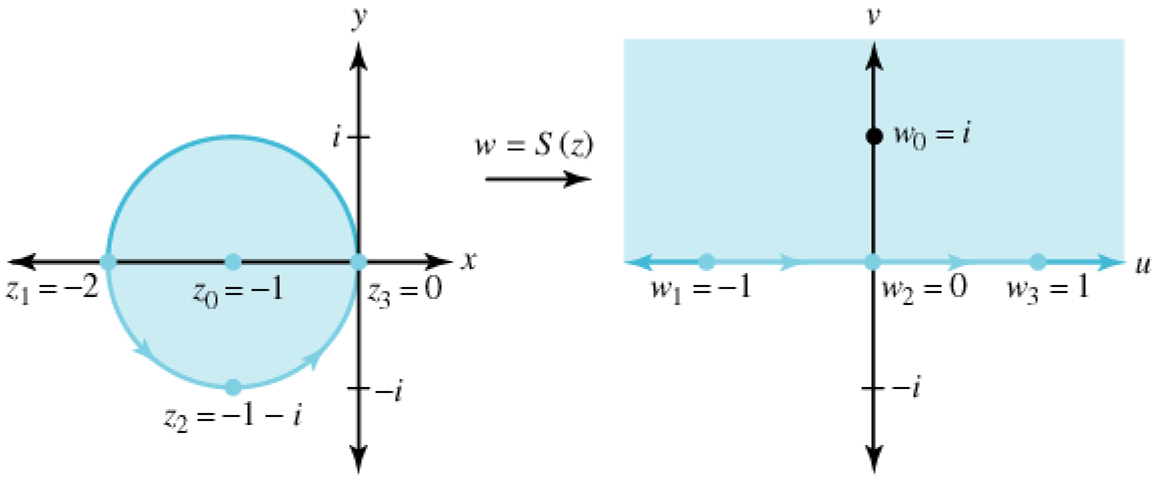
Ради лакшег сналажења , бирамо редом тачке $z_1 = -2,\ z_2 = -1 - i,\ z_3 = 0$. Из претходног примера , одговарајуће слике тачки су :

$$w_1 = S\ (z_1) = S(-2) = -1$$

$$w_2 = S\ (z_2) = S(-1 - i) = 0$$

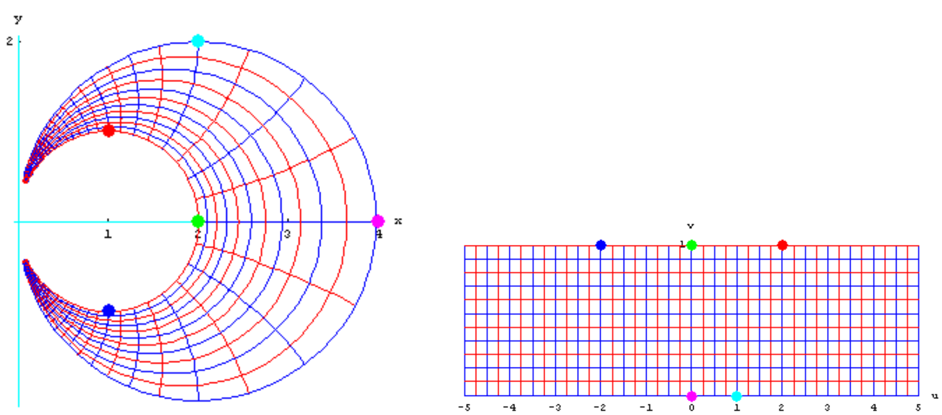
$$w_3 = S\ (z_3) = S(0) = 1$$

због редоследа три тачке $w_1 = -1, w_2 = 0\ , w_3 = 1$, које леже на *u* оси , следи да је слика круга *C* *u* оса . Зато $w = S(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$, пресликава диск D на горњи део полуравни G. Изаберимо тачку z_0 која се налази у D и пронађимо полураван у којем његова слика, w_0 лежи. Избор $z_0 = -1$ носи $w = S(z_0) = i$. Стога горња полураван је тражена слика. Ова ситуација је илустрована на слици 9.2.



Слика 9.2. Билинеарно пресликавање $w = S(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$.

Пример 5 Пронађите билинеарну трансформацију $w = S(z)$ која пресликава регион (у облику полумесеца) који се налази унутар диска D: $|z-2| < 2$ и ван круга $|z-1| = 1$ на хоризонталну траку.



Ради лакшег сналажења узимамо тачке $z_1 = 4$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 0$ и вредности слика $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$, респективно. Редослед триплета тачака $z_1 = 4$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 0$ даје кругу C: $|z-2| < 2$ позитивну оријентацију а диску D : $|z-2| < 2$ леву оријентацију. Тачке $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ све леже на проширеној y оси и оне одређују половину равни $(Im\ (w) > 0)$. Стога можемо користити другу имплицитну формулу,

$$\frac{(z-4)(2+2i-0)}{(z-0)(2+2i-4)} = \frac{w-0}{1-0}$$

која одређује пресликавање диска D: $|z-2| < 2$ на горњу полураван $Im\ (w) > 0$.
Поједностављујемо претходну једначину са $\frac{2+2i}{-2+2i} = -i$ и добијамо нову,

$$\frac{z-4}{z} \cdot \frac{2+2i-0}{2+2i-4} = \frac{z-4}{z}\ (-i) = \frac{w}{1}$$

која се може написати у облику :

$$w = S(z) = \frac{-iz + i4}{z}$$

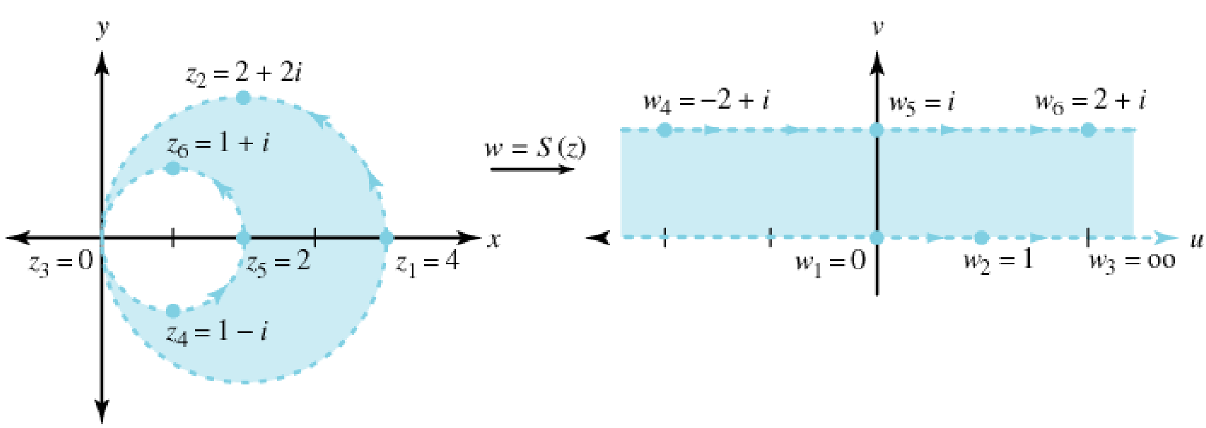
Једноставна рачуница показује да су тачке $z_1 = 4$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 0$ пресликане респективно.

$$w_4 = S(z_4) = S(1-i) = -2 + i,$$

$$w_5 = S(z_5) = S(2) = i$$

$$w_6 = S(z_6) = S(1+i) = 2 + i$$

Тачке $w_4 = 2 + i$, $w_5 = i$ $w_6 = 2 + i$ леже на хоризонталној линији $Im(w) > 1$ у горњој полуравни. На тај начин је регион облика полумесеца пресликан на хоризонталну траку $0 < Im\ (w) < 1$, као што је приказано на илустрацији 9.3.



Илустрација 9.3

10.Конформни аутоморфизам јединичног диска

Теорема 10.1 (Принцип максимума модула)

Ако је функција f холоморфна у области Ω и $|f|$ достиже локални максимум у некој тачки $z_0 \in \Omega$, тада је f константна.

Доказ:

Нека је $w_0 = f(z_0)$. Из услова теореме следи да постоји диск $B = B(z_0; r)$, тако да $|f|$ достиже максимум $|w_0| = |f(z_0)|$ на B. Ако је f константа на Ω тврђење је доказано.

Остаје да се размотри случај $f \neq const$ на Ω.

Ако је $f \neq const$ на Ω, онда је на основу теореме јединости $f \neq const$ и на B. На основу принципа очувања области постоји диск

$$B^* = \{w||w - w_0| < \mu\}, B^* \subseteq f(B).$$

У диску B^* постоји тачка $w_1 \left(w_1 = sw_0, 1 < s < 1 + \frac{\mu}{|w_0|}, \text{за } w_0 \neq 0, \text{и } |w_1| < \mu \text{ за } w_0 = 0\right)$ тако да $|w_1| > |w_0|$. Вредност w_1 функција f добија у некој тачки $z_1 \in B$ супротно претпоставци да $|f|$ достиже на B максимум у z_0. ■

Теорема 10.2

Ако је функција f холоморфна у области Ω и непрекидна на $\overline{\Omega}$, тада f достиже максимум на $\partial\Omega$.

Лема 10.1 (Шварцова лема)

Нека је f холоморфмна у кругу $U = \{z|\,|z| < 1\}$,

$$|f(z)| \leq 1, \quad \text{за сваки } \; z \in U \text{ и } f(0) = 0$$

Тада је

1. $|f(z)| \leq |z| \qquad (z \in U)$,
2. $|f'(0)| \leq 1$

Ако једнакост важи у (1) за неко $z \in U \setminus \{0\}$, или једнакост важи у (2) тада је

$$f(z) = e^{i\alpha} z,$$

где је α реална константа.

Доказ:

На основу Тејлорове теореме

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots , \qquad z \in U$$

Како је $f(0) = 0$, добијамо $c_0 = 0$, отуда функција

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = c_1 + c_2 z + \cdots$$

има отклоњив сингуларитет у тачки 0, па је холоморфна на U.

Поновимо да са $U_r = \{|z| < r\}$ означавамо круг и са $T_r = \{|z| = r\}$ његову границу.

Нека је $0 < r < 1$. Према теореми 9.2. функција $|\varphi|$ на $\overline{U_r}$ достиже максимум на T_r. Како је $|\varphi| \leq \frac{1}{r}$ на T_r, јер је по услову $|f| \leq 1$, отуда је

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Фиксирајмо $z_0 \in U$ и нека r тежи 1. Тада је $r_0 = |z_0| < 1$ и за свако $r_0 \leq r < 1$, следи $z_0 \in U_r$ и стога , на основу $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}$, важи

$$|\varphi(z_0)| \leq \frac{1}{r}$$

Отуда преласком на граничну вредност, када r тежи 1, добијамо да је

$$|\varphi(z_0)| \leq 1, \text{ тј. } |f(z_0)| \leq |z_0|,$$

Стога како је z_0 произвољно изабрана тачка из U , следи

$$|\varphi(z)| \leq 1 \ , (z \in U),$$

тј

$$|f(z)| \leq |z| \text{ за свако } z \in U.$$

Како је

$$\varphi(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0),$$

из $|\varphi(z)| \leq 1$, $(z \in U)$, добијамо обе неједнакости (1) и (2).

Ако једнакост важи у (1) за неко $z \in U \setminus \{0\}$, или једнакост важи у (2) , с обзиром на неједнакост из $|\varphi(z)| \leq 1$, $(z \in U)$, закључујемо да $|\varphi|$ достиже локални максимум у некој тачки круга U. Отуда на основу принципа максимума модула, φ је константна функција, чији је модул једнак 1 тј. $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Из Шварцове леме следи да при холоморфном пресликавању круга U у себе, које пресликава центар у центар, произвољна кружница $K_r = \{|z| = r\}$, $0 < r < 1$, се пресликава у круг $U_r = \{|z| < r\}$, или је f ротације око тачке 0. ■

<u>Теорема 10.3</u>

Сваки конформни аутоморфизам отвореног јединичног круга је билинеарна функција облика $e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}: |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$

Доказ:

За $a \in \mathbb{C}$ дефинисали смо пресликавање

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Нека је φ произвољни аутоморфизам U. Уведимо ознаку $\varphi(0) = a$ и размотримо композицију $f = \varphi_\alpha \circ \varphi$ која је аутоморфизам U, при чему је $f(0) = 0$. Како је $|f(z)| < 1$ за свако $z \in U$, то применом Шварцове леме из претходног текста, добијамо $|f(z)| \leq |z|$ за свако $z \in U$. Но , како и инверзно преслиаквање $z = f^{-1}(w)$ задовољава услове исте леме, то је $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ за све $w \in U$. Отуда замењујући $w = f(z)$, добијамо:

$$|z| \leq |f(z)| \text{ за све } z \in U.$$

На тај начин налазимо да је $|f(z)| \leq |z|$ за свако $z \in U$ и отуда , по Леми Шварца, закључујемо да важи $f(z) = e^{i\alpha}z$. Али тада је $\varphi = \varphi^{-1} \circ f = \varphi_{-\alpha}\left(e^{i\alpha}z\right)$ билинеарно пресликавање . ■

11. Закључак

Овај рад је имао за задатак да вас упозна са историјом и применом комплексних бројева у разним сферама математике. Пре свега да коришћење комплексних бројева представља моћно оружје у решавању планиметријских проблема, као и да представља добру алтернативу елементарним методама.

Ове методе су доста сличне онима из Аналитичке геометрије али у одређеним ситуацијама су чак и боље. Показали смо да се сви основни геометријски појмови могу изразити преко комплексних бројева и да наизглед нерешиви геометријски проблеми могу лако бити решени употребом комплексних бројева.

Најпре смо изложили интерпретацију основних геометријских појмова преко алгебарских једнакости. Тако се решавање неког планиметријског проблема свело на решавање проблема алгебарског типа.

Такође смо подвукли и представили аналогију са скаларним и векторским производом геометријских вектора у Декартовом правоуглом координатном систему у равни, дефинишући појмове реалног и комплексног производа комплексних бројева, дајући много већу тежину изложеној теорији у приступу геометријским проблемима.

Геометријске интепретације изведене на овај начин су показале много јаснију слику датих проблема, што је посебно нашло велику примену код Мебијусових пресликавања.

12.Литература

1. Матељевић М. , *Комплексне функције 1 и 2* , Друштво математичара Србије, Београд 2006.
2. Краљевић Х., Курепа С. *Математичка Анализа (функција комплексне варијабле) 4/1* Техничка књига, Загреб 1986.
3. Митрановић Д.С., *Комплексна Анализа*, Грађевинска књига, Београд, 1981.
4. Лопандић Д.*, Геометрија за III разред усмереног образовања*, Научна књига, Београд 1988.
5. Курепа Ђ., Смолец И., Шкреблин С., *Математика за 4. разред гимназије*, Школска књига, Загреб 1966.
6. Шикић З., Пензар Ј., Шишић С., Шишић Д., Математика 2*, уџбеник и збирка задатака из математике за друг разред гимназије и техничке школе (1. полугодиште),* Профил, Загреб, 2014
7. Вељан Д., *Математика 4, уџбеник и збирка задатака с решењима за четврти разред средњих школа*, Школска књига, Загреб 1997
8. Andreescu T., Andrica *D., Complex Numbers from A to …Z,* Birkhauser, Boston, 2006
9. Божић, Преглед историје и филозофије математике, завод за уџбенике, Београд, 2010
10. Aigner M. , Ziegler G.M., Proofs from the Book, Springer, Berlin 2009.