B E O G R A D S K I   U N I V E R Z I T E T

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

D R A Ž E N   P A N T I Ć

# PRIMENA PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA

# U TEORIJI VEROVATNOĆE

-MAGISTARSKI RAD-

B E O G R A D   1982

# I

# U V O D

## 1.UVOD.

U narednoj glavi ćemo se upoznati sa najraširenijim primenama o-pravilno promenljivih funkcija u teoriji verovatnoće.Navešćemo osobine o-pravilno promenljivih funkcija i videti njihovu primenu u određivanju asimptotskih raspodela nekih nizova slučajnih promenljivih i u teoriji obnavljanja.Međutim,sem klase o-pravilno promenljivih funkcija i klase O-pravilno promenljivih funkcija i sporo promenljivih funkcija sa ostatkom su takođe pogodne za primenu u teoriji verovatnoće.Tako ćemo u glavama II i III videti jednu mogućnost primene ovih klasa funkcija u teoriji obnavljanja.U glavi IV ćemo dati reprezentaciju Zigmundove klase sporo promenljivih funkcija.

## 1.1. KLASA o-PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA.

DEFINICIJA.

Merljiva, pozitivna funkcija $R$ definisana na $[a,+\infty)$, $(a>0)$ naziva se o-pravilno promenljiva (u daljem o-PP) funkcija u beskonačnosti ako za svako $t>0$ postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = r(t) \qquad (1.1.)$$

kao konačan, realan broj.

Sada ćemo iskazati osobine o-PP funkcija.

(i) Ako je $R$ o-PP funkcija u beskonačnosti tada postoji broj $\rho\in\mathbb{R}$ takav da je za svako $t>0$ $r(t)=t^{\rho}$, i taj broj $\rho$ se naziva indeks pravilne promenljivosti funkcije $R$.

Klasu o-PP funkcija indeksa $\rho$ označavaćemo sa $\mathcal{R}_{\rho}$. Ako je indeks o-PP funkcije jednak nuli, tada se ta funkcija naziva o-sporo promenljiva. Značaj o-SP funkcija leži u tome što se o-PP funkcija $R$ indeksa $\rho$ može predstaviti u obliku $R(x)=x^{\rho}\cdot L(x)$ gde je $L\in\mathcal{R}_0$.

(ii) (Teorema o uniformnoj konvergenciji.)

Granična vrednost (1.1.) postoji uniformno po $t$ u svakom kompaktnom intervalu u $(0,+\infty)$.

(iii) Za svako $R\in\mathcal{R}$ postoji $x_0$ tako da je funkcija $\ln R(x)$ lokalno ograničena na $[x_0,+\infty)$.

(iv) Ako je $R\in\mathcal{R}_{\rho}$ tada je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln R(x)}{\ln x} = \rho.$$

(v) (Teorema o reprezentaciji.)

Potreban i dovoljan uslov da $R\in\mathcal{R}_{\rho}$ je da postoje merljive funkcije $\varepsilon$, $\eta$ definisane na $[b,+\infty)$ za koje važi

$$\lim_{x\to+\infty} \eta(x)=\eta\in\mathbb{R}, \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x)=0$$

tako da je za $x\geq b$

$$R(x) = x^{\varsigma} \exp\left\{ \eta(x) + \int_{b}^{x} \varepsilon(t) \frac{dt}{t} \right\} .$$

Ako je $R$ o-PP funkcija indeksa $\varsigma$ tada ona zadovoljava sledeće uslove:

(vi) Za svako $\sigma$ , $\sigma < \varsigma$ i za svako $\tau$ , $\tau > \varsigma$, važi ,kada $x \to +\infty$,

$$\inf_{t \geq x} \{ t^{-\sigma} R(x) \} \sim x^{-\sigma} R(x)$$

$$\sup_{t \geq x} \{ t^{-\tau} R(x) \} \sim x^{-\tau} R(x) .$$

(vii) Za svako $\sigma$ , $\sigma < \varsigma$ i za svako $\tau$ , $\tau > \varsigma$ ,važi kada $x \to +\infty$,

$$\inf_{t \in [b,x]} \{ t^{-\tau} R(t) \} \sim x^{-\tau} R(x)$$

$$\sup_{t \in [b,x]} \{ t^{-\sigma} R(t) \} \sim x^{-\sigma} R(x) .$$

(viii) Za svako $\sigma$ , $\sigma < \varsigma$, važi kada $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^{-\sigma} R(x)} \int_{b}^{x} t^{-\sigma} R(t) \frac{dt}{t} \sim \frac{1}{\varsigma - \sigma} .$$

(ix) Za svako $\tau$ , $\tau > \varsigma$, važi kada $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^{-\tau} R(x)} \int_{b}^{x} t^{-\tau} R(t) \frac{dt}{t} \sim \frac{1}{\tau - \varsigma} .$$

Primetimo da važi i obratno:ako pozitivna,merljiva funkcija definisana na $[a,+\infty)$ zadovoljava bilo koji od uslova (vi),(vii) (viii),(ix) tada je ona o-PP funkcija indeksa $\varsigma$ .

## 1.2. PRIMENE o-PP FUNKCIJA U VEROVATNOĆI.

U teoriji verovatnoće klasa o-PP funkcija je našla svoju primenu kao poredbena funkcija u asimptotskim relacijama. Najrašireni-ja primena se ogleda, na primer, u pretpostavci da je verovatnoća "repa" slučajne promenljive $P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$ o-PP funkcija u beskonačnosti, da je Laplasova transformacija funkcije raspodele o-PP funkcija u nuli [1] i tako dalje.

Jedan od prvih matematičara koji je uveo o-PP funkcije u verovatnoću je bio W. Feller, pa ćemo se dosta često pozivati na njegove radove, naročito na knjigu "An introduction to probability theory and its applications".

## 1.2.1. TEORIJA PRIVLAČENJA.

Neka je dat niz nezavisnih, identično raspodeljenih slučajnih promenljivih $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ sa zakonom raspodele $F$, tj. neka, za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svako $x \in \mathbb{R}$, je

$P\{X_n < x\} = F(x)$ i neka je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\,,\quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.}$$

Tada raspodela $G_{n+1}$ slučajne promenljive $S_{n+1}$ može da se izrazi rekurentnom vezom $G_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(x-t)\,dF(t)$ preko raspodele $G_n$ za $S_n$, gde je $G_1(x) = F(x)$. Lako je pokazati da je onda $G_n$ jednaka n-toj konvoluciji funkcije $F$.

DEFINICIJA.

Neka je dat niz nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_n)$, identično raspodeljenih sa zakonom raspodele $F$. Neka je niz $(S_n)$ definisan kao u (1.2.). Raspodela $F$ pripada domenu privlačenja raspodele $G$ ako postoje konstante $a_n$, $(a_n > 0)$, i $b_n$ tako da raspodela slučajne promenljive $\frac{S_n - b_n}{a_n}$ teži ka $G$ u tačkama neprekidnosti funkcije $G$, kada $n \to +\infty$, tj.

---

1) Funkcija $f(x)$ je o-PP u nuli ako je $f(1/x)$ takva u beskonačnosti.

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{ \frac{S_n - b_n}{a_n} < x \right\} = G(x)$$

gde je $x$ tačka neprekidnosti funkcije $G$.

Sada definišimo funkciju $U$ koja će figurisati u sledećoj teoremi: $U(x) = \int_{-x}^{x} y\, dF(x)$ .

TEOREMA.

Raspodela $F$ pripada domenu privlačenja neke raspodele $G$ ako i samo ako postoji o-SP funkcija $L$ tako da je kada $x \to +\infty$

$$U(x) \sim x^{2-\alpha} L(x)$$

gde je $0<\alpha\le 2$ .Kada je $0<\alpha<2$ tada postoje granične vrednosti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(x)+F(-x)} = p \, , \lim_{x\to+\infty} \frac{F(-x)}{1-F(x)+F(-x)} = q \tag{1.3.}$$

Kada je $\alpha = 2$ , $F$ pripada domenu normalne raspodele.

Dokaz ove teoreme se može naći u citiranoj knjizi Feller-a na strani 303.Na osnovu tog dokaza može se zaključiti nešto više i o funkciji $G$ ,da ona zadovoljava uslove,za $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$

$$G^{*n}(n^{1/\alpha} x) = G(x) \tag{1.4.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}[1-G(x)] = p\frac{2-\alpha}{\alpha} \, , \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} G(-x) = q\frac{2-\alpha}{\alpha} \, , \tag{1.5.}$$

gde je $G^{*n}$ n-ta konvolucija funkcije $G$ .Uslovi (1.4.) i (1.5.) jednoznačno određuju raspodelu $G$ .

## 1.2.2. MAKSIMUM PRVIH n ČLANOVA NIZA.

Neka je dat niz nezavisnih,identično raspodeljenih slučajnih promenljivih $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ sa zakonom raspodele $F$ .Neka je

$$M_n = \max_{1\le k\le n} X_k \tag{1.6.}$$

TEOREMA FISHER-GNEDENKO.

Neka je $F(x)<1$ za sve $x \in \mathbb{R}$ .Potreban i dovoljan uslov da postoje konstante $a_n$ tako da raspodela $\Phi_n$ slučajne promenljive $M_n/a_n$ konvergira ka raspodeli $\Phi$ ( $\Phi$ nije koncentrisana na nulu) je da je $1-F(x)$ o-PP funkcija sa indeksom $\varsigma < 0$ .U tom slučaju je $\Phi(x) = e^{-cx^{\varsigma}}$, $(c>0)$, za $x>0$ i $\Phi(x)=0$ za $x<0$

Sledeća teorema se odnosi na količnik maksimuma $M_n$ i zbira $S_n$ definisanog u (1.2.)

TEOREMA. (Feller, str. 440).

Ako postoji o-SP funkcija $L$ i konstanta $\alpha \in (0,1)$ tako da je kada $x \to +\infty$

$$1-F(x) \sim \frac{x^{-\alpha}L(x)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

tada odnos $S_n/M_n$ ima Laplasovu transformaciju $\omega_n(\lambda)$ koja konvergira ka

$$\omega(\lambda) = \frac{e^{-\alpha}}{1+\alpha\int_0^1 (1-e^{-\lambda t})\, t^{-\alpha-1}\,dt}$$

a specijalno

$$E(S_n/M_n) \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}, \quad (n \to +\infty).$$

## 1.2.3. TEORIJA OBNAVLJANJA.

Neka je dat niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ identično raspodeljenih slučajnih promenljivih sa raspodelom $F$ .(Pretpostavka je da postoji $x_0 \in \mathbb{R}_+$ za koje je $0 < F(x_0) < 1$ .)Tada niz slučajnih promenljivih $S_0=0$, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ definisanih kao u (1.2.) obrazuje proces obnavljanja,gde se $S_n$ nazivaju momentima obnavljanja.

Sada ćemo definisati slučajnu promenljivu $N(x)$

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I\{S_n < x\}, \quad (x>0).^{1)} \tag{1.7.}$$

kao broj obnavljanja procesa na $(0,x)$ .Može se pokazati da je $N(x) < +\infty$ skoro svuda (u daljem s.s.) jer $S_n \to +\infty$, $(n\to\infty)$, s.s.

Očekivana vrednost promenljive $N(x)$ naziva se funkcija obnavlja-

---

1)
$$I\{S_n < x\} = \begin{cases} 1, & S_n < x \\ 0, & S_n \geq x \end{cases}$$

nja i definiše kao

$$U(x) = E(N(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\{S_n < x\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*(n)}(x)$$

gde je $F^{*(0)} = F$ ,a $F^{*(n)}$ je n-ta konvolucija funkcije $F$

Može se dokazati da je $U(x) < +\infty$ za $x \in \mathbb{R}_+$ ,da je $\lim_{x \to +\infty} U(x) = +\infty$ i da funkcija $U$ zadovoljava takozvanu jednačinu obnavljanja

$$U(x) = 1 + \int_0^x F(x-t)\, dU(t) .$$

Pre nego što navedemo osnovnu teoremu obnavljanja,definisaćemo pojam aritmetičke raspodele.Raspodela $F$ se naziva aritmetička ako sve tačke u kojima ima skok pripadaju skupu $\{n\lambda : n \in \mathbb{N}\}$, $\lambda > 0$.

TEOREMA OBNAVLJANJA.

Ako raspodela $F$ nije aritmetička tada za $h>0$ ,kada $x \to +\infty$

$$U(x) - U(x-h) \to \frac{h}{\mu} \qquad (1.8.)$$

gde je $\mu = \int_0^\infty y\, dF(y) = \int_0^\infty [1-F(y)]\, dy .$

Ako je $F$ aritmetička (1.8.) važi kada je $h = k \cdot \lambda$, $k \in \mathbb{N}$.

Direktna posledica teoreme obnavljanja je postojanje granične vrednosti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{U(x)}{x} = \frac{1}{\mu} \qquad (1.8'.)$$

Sada ćemo preći na primenu o-PP funkcija u teoriji obnavljanja.Prvo navodimo teoremu koja pokazuje asimptotsko ponašanje funkcije $U$ pod uslovom da je $F$ o-PP funkcija.

TEOREMA (Feller)

Ako postoji o-SP funkcija $L$ tako da kada $x \to +\infty$ važi

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x) \qquad (1.9.)$$

gde je $0 < \alpha < 1$ ,tada je

$$\lim_{x \to +\infty} U(x)\,[1 - F(x)] = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} . \qquad (1.10.)$$

Dokaz ove teoreme se može naći u citiranom radu Feller-a.

Sada ćemo navesti neke generalizacije ove teoreme.

U svome radu "Renewal theorems when the first or the second moment is infinite." J.Teugels daje,između ostalog,teoremu koja pokazuje ponašanje funkcije $U$ ako važi relacija (1.9.) za $1<\alpha<2$, tj. ako prvi moment funkcije $F$ postoji a drugi je beskonačan. Ako u relaciji(1.9.) uzmemo da je $1-F(x)=x^{-\alpha}L(x)$ tada je jasno da je $L$ funkcija ograničene varijacije na konačnim podintervalima intervala $(0,+\infty)$ ,i neka je $L(x)=L_1(x)-L_2(x)$ gde su $L_1$ i $L_2$ monotone funkcije.Dodatni uslov koji zahteva Teugels je da postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L_1(x)+L_2(x)}{L(x)}=C<+\infty \tag{1.11.}$$

TEOREMA (Teugels.)

Neka je $1-F(x)=x^{-\alpha}L(x)$,gde je $\overset{1}{0}<\overset{2}{\alpha}<1$ i funkcija $L$ je o-SP koja zadovoljava uslov (1.11.).Tada je,kada $x\to+\infty$

$$U(x)-\frac{x}{\mu}\sim\frac{x^{2-\alpha}L(x)}{\mu^2(\alpha-1)(2-\alpha)} \tag{1.12.}$$

Ova relacija daje brzinu konvergenciju funkcije $\frac{U(x)}{x}$ ka $\frac{1}{\mu}$.

Drugu vrstu generalizacije relacije (1.10.) nalazimo kod W. Smith-a u radu "On infinitely divisible laws and a renewal theorem for non-negative random variables.",gde je dokazana sledeća teorema:

TEOREMA. (Smith)

Neka je $\Lambda(x)$ neprekidna,neopadajuća o-PP funkcija indeksa $\beta$ , $0<\beta<1$ i neka je,kada $x\to+\infty$

$$x^{-1}\int_0^x[1-F(u)]\,du\sim\frac{1}{\Gamma(2-\beta)\Lambda(x)} \tag{1.13.}$$

Tada za o-PP funkciju $R(x)$ sa indeksom $\alpha$ , $\alpha>0$ važi relacija:

$$E(R(N(x))) \sim [\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha\beta+1)] \cdot R(\Lambda(x)).$$

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da slučajna promenljiva $N(x)$, definisana relacijom (1.7.), konvergira u raspodeli, kada $x \to +\infty$.

TEOREMA.

Slučajna promenljiva $N(x)$ konvergira u raspodeli ako i samo ako je, kada $x \to +\infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} \cdot L(x)$$

gde je $0 < \alpha < 2$.

Granične raspodele se bitno razlikuju kada je $0 < \alpha < 1$ i kada je $1 < \alpha < 2$. Neka je $G_\alpha$ raspodela koja zadovoljava uslove (1.4.) i (1.5.) iz odeljka 1.2.1., za $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ i $p=1, q=0$. Može se pokazati (Feller, isti rad, str. 369.) da je za $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} P\left\{[1-F(x)]\cdot N(x) \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}\, y^{-\alpha}\right\} = G_\alpha(y)$$

a za $1 < \alpha < 2$

$$\lim_{x \to +\infty} P\left\{N(x) \geq \frac{x - \lambda(x)}{\mu}\cdot y\right\} = G_\alpha(y)$$

gde je funkcija $\lambda$ izabrana tako da zadovoljava uslov

$$\lim_{x \to +\infty} x\,[1 - F(\lambda(x))] = \frac{2-\alpha}{2}$$

i $\mu = \int_0^\infty x\, dF(x)$.

# II

# PRIMENA O-PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA.

## 2.1. UVOD.

Neka je data raspodela $F$ koncentrisana na pozitivnu poluosu tj. neopadajuća funkcija $F$ takva da je $F(0)=0$, $F(+\infty)=1$.[1)]

Pod funkcijom obnavljanja za datu raspodelu podrazumeva se funkcija

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F^{n*}(x) \tag{1.1.}$$

gde je $F^{n*}(x)$ n-ta konvolucija funkcije $F(x)$, tj. $F_0(x)=1$ i $F^{(n+1)*}(x) = \int_0^x F^{n*}(x-t)\,dF(t)$.

U knjizi "An introduction to probability theory and its applications" W.Feller pokazuje da ako je funkcija $1-F$ o-pravilno promenljiva indeksa $\alpha$, $(-1<\alpha<0)$, tada je i $U$ o-pravilno promenljiva funkcija i važi, kada $x\to+\infty$

$$U(x)\cdot[1-F(x)] \to \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}. \tag{1.2.}$$

Osnovni rezultat: pretpostavljajući manje o ponašanju funkcije $1-F(x)$, $(x\to+\infty)$, preciznije da je ona O-pravilno promenljiva u beskonačnosti sa donjim indeksom većim od $-1$, može se o-relacija (1.2.) zameniti O-relacijom

$$U(x) \asymp \frac{1}{1-F(x)}, \quad (x\to+\infty). \tag{1.3.}$$

---

1) Pretpostavka je da postoji tačka $x_0$, $(0<x_0<+\infty)$, tako da je $0<F(x_0)<1$.

## 2.2. OSOBINE O-PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA.

Definicija i osobine O-pravilno promenljivih funkcija citirane su iz rada

S. Aljančić, D. Aranđelović

O-Regularly varying functions.

DEFINICIJA.

Konačnu, merljivu, pozitivnu funkciju $R$ definisanu na intervalu $[a,+\infty)$, $(a>0)$, nazivamo O-pravilno promenljivom (O-PP) funkcijom ako važi

$$(\forall t>0)\ \limsup_{x\to+\infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = r(t) < +\infty .$$

OSOBINE.

(i) $(\forall t>0)\ \liminf_{x\to+\infty} \frac{R(tx)}{R(x)} > 0$

(ii) Postoje granične vrednosti

$$p = \lim_{t\to 0_+} \frac{\ln r(t)}{\ln t}\ , \qquad q = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln r(t)}{\ln t}$$

i važi $-\infty < p \le q < +\infty$. Granične vrednosti $p$ i $q$ se nazivaju donji i gornji indeks. Klasu O-PP funkcija sa indeksima $p, q$ označavaćemo sa $\mathbb{K}(p,q)$.

(iii) Za $\sigma < p$ funkcija $x^{-\sigma}R(x)$ je skoro monotono rastuća funkcija kada je $x$ dovoljno veliko; za $\tau > q$ funkcija [illegible] skoro monotono opadajuća funkcija za $x$ dovoljno veliko. (Pozitivna funkcija $f$ skoro monotono raste (u oznaci $f\nearrow$) na $[b,+\infty)$ ako postoji konstanta $1 \le M < +\infty$ tako da je za svako $x, y$, $y \ge x \ge b$ $f(x) \le M f(y)$. Funkcija $f$ skoro monotono opada, $f\searrow$, ako funkcija $1/f$ skoro monotono raste.)

(iv) Za svaki par brojeva $\sigma$ i $\tau$, takvih da je $\sigma < p \le q < \tau$ postoji $M > 1$ tako da je $\max\{t^p, t^q\} \le r(t) \le M \max\{t^\sigma, t^\tau\}$

(v) Neka su $R_1$ i $R_2$ O-PP funkcije sa indeksima $p_1$, $q_1$ i $p_2$, $q_2$. Ako je $R_1 \asymp \frac{1}{R_2}$, $(x\to+\infty)$, tada je $p_1 = -q_2$, $q_1 = -p_2$.

DOKAZ OSOBINE (v).

Za x dovoljno veliko postoje konstante $0 < m < 1 < M < +\infty$ tako da je $m \leq R_1(x) \cdot R_2(x) \leq M$ pa je za $t > 0$ i x dovoljno veliko

$$\frac{m}{M} \frac{R_2(x)}{R_2(tx)} \leq \frac{R_1(tx)}{R_1(x)} \leq \frac{M}{m} \frac{R_2(x)}{R_2(tx)}$$

a odatle je $\frac{m}{M} \limsup_{x \to +\infty} \frac{R_2(x)}{R_2(tx)} \leq \limsup_{x \to +\infty} \frac{R_1(tx)}{R_1(x)} \leq \frac{M}{m} \limsup \frac{R_2(x)}{R_2(tx)}$. Ako je za $i=1,2$ $r_i(t) = \limsup_{x \to +\infty} \frac{R_i(tx)}{R_i(x)}$, tada je $\frac{m}{M} r_2(1/t) \leq r_1(t) \leq \frac{M}{m} r_2(1/t)$, $(t>0)$, pa je za $0<t<1$,

$$-\frac{\ln M/m}{\ln 1/t} - \frac{\ln r_2(1/t)}{\ln 1/t} \leq \frac{\ln r_1(t)}{\ln t} \leq -\frac{\ln m/M}{\ln 1/t} - \frac{\ln r_2(1/t)}{\ln 1/t}$$

puštajući $t$ da teži nuli dobijamo $p_1 = -q_2$. Slično se dokazuje da je $q_1 = -p_2$.

## 2.3. OSNOVNI REZULTATI.

Najpre iskazujemo nekoliko stavova koji se odnose na O-PP funkcije. Prvi od njih je Abelove prirode.

STAV 1.

Neka je $R \in \mathbb{K}(p,q)$ i neka je $k$ pozitivna, merljiva funkcija na $[0,+\infty)$. Ako je za neko $\sigma$, $\sigma < p$, i neko $\tau$, $\tau > q$, funkcija $x^{-\sigma} R(x)$ ograničena na svakom intervalu $[0, \Delta]$, $(0 < \Delta < +\infty)$, i ako je

$$\int_0^\infty k(t) \max\{t^\sigma, t^\tau\}\, dt < +\infty$$

tada je za $x > 0$ $\int_0^\infty k(t) R(tx)\, dt < +\infty$ i

$$\int_0^\infty k(t) R(tx)\, dt \asymp R(x), \quad (x \to +\infty). \tag{3.1.}$$

U radu /6/ W.Feller je dokazao sledeći stav.

STAV (FELLER.)

Neka su $U_1$ i $U_2$ monotono rastuće funkcije, koje su O-PP funkcije u beskonačnosti, i neka postoje Laplas-Stiltjesove transformacije $\omega_1$ i $\omega_2$ funkcija $U_1$ i $U_2$

$$\omega_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dU_i(t), \quad i=1,2$$

Ako je $L$ o-sporo promenljiva funkcija tada važi, kada $x \to +\infty$

$$\frac{U_1(x)}{U_2(x)} \sim L(x) \iff \frac{\omega_1(x^{-1})}{\omega_2(x^{-1})} \sim L(x) \tag{3.2.}$$

Sledeći stav sadrži tvrđenje slično ovom Feler-ovom stavu, ali za širu klasu funkcija.

STAV 2.

Neka su $R_1$ i $R_2$ O-PP funkcije definisane na $[0,+\infty)$ i neka postoji o-sporo promenljiva funkcija $L$ tako da je, kada $x\to+\infty$

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} \sim L(x) \tag{3.3.}$$

Neka je $k$ pozitivna, merljiva funkcija na $[0,+\infty)$. Ako su za $\sigma$, $\sigma<p$ i $\tau$, $\tau>q$ funkcije $x^{-\sigma}R_1(x)$ i $x^{-\tau}R_2(x)$ ograničene na svakom intervalu $[0,\Delta]$, $(0<\Delta<+\infty)$, i ako je

$$\int_0^\infty k(t)\max\{t^\sigma,t^\tau\}\,dt<+\infty$$

tada je, kada $x\to+\infty$

$$\frac{\int_0^\infty k(t)\,R_1(tx)\,dt}{\int_0^\infty k(t)\,R_2(tx)\,dt} \sim L(x)\,. \tag{3.4.}$$

Sada ćemo iskazati jedan stav Tauberove prirode. Za stavove ove prirode potrebna je i dopunska, Tauberova, pretpostavka o datoj funkciji. Mi ćemo je uzeti u obliku pretpostavke o monotoniji.

STAV 3.

Neka je $U$ monotono neopadajuća funkcija, pozitivna na $[0,+\infty)$, i neka postoji Laplas-Stiltjesova transformacija

$$\omega(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dU(t)\,,\ (\lambda>0). \tag{3.5.}$$

Ako je $\omega$ O-PP funkcija u nuli, tj. ako je

$$(\forall\tau>0)\quad \limsup_{\lambda\to 0^+}\frac{\omega(\lambda\tau)}{\omega(\lambda)}<+\infty \tag{3.6.}$$

tada je $U$ O-pp funkcija u beskonačnosti i važi, kada $x\to+\infty$

$$U(x)\asymp\frac{1}{\omega(x^{-1})}\,. \tag{3.7.}$$

Vraćajući se na teoriju obnavljanja iskazujemo osnovni rezultat.

STAV 4.

Neka je $F$ raspodela koncentrisana na pozitivnu poluosu, i neka je $U$ funkcija obnavljanja date raspodele. Ako je $1-F\in\mathbb{K}(p,q)$,

$(p>-1)$, tada važi, kada $x\to+\infty$

$$U(x) \asymp \frac{1}{1-F(x)} \qquad (3.8.)$$

i $p(U) = -q(1-F)$, $q(U) = -p(1-F)$.

STAV 5.

Neka su $F_1$ i $F_2$ raspodele koncentrisane na pozitivnu poluosu i neka su $U_1$ i $U_2$ funkcije obnavljanja tih raspodela. Ako je $1-F_1$, $1-F_2 \in \mathbb{K}(p,q)$, $(p>-1)$, i ako postoji o-sporo promenljiva funkcija $L$ tako da je, kada $x\to+\infty$

$$\frac{1-F_1(x)}{1-F_2(x)} \sim L(x). \qquad (3.9.)$$

tada je, kada $x\to+\infty$

$$\frac{U_1(x)}{U_2(x)} \sim [L(x)]^{-1}. \qquad (3.10.)$$

DOKAZI STAVOVA.

DOKAZ STAVA 1.

Na osnovu osobine (iii) O-PP funkcija $x^{-\sigma}R(x)\nearrow$ i $x^{-\tau}R(x)\searrow$ na $[b,+\infty)$ za $b$ dovoljno veliko, a na osnovu uslova stava funkcija $x^{-\sigma}R(x)$ je ograničena na $[0,b]$, pa postoje konstante $0<m<1$, $1<M<+\infty$ tako da je: $x^{-\sigma}R(x)\le M$ za $0\le x\le b$ i, za $b\le x\le y$ $x^{-\sigma}R(x)\le M y^{-\sigma}R(y)$, $x^{-\tau}R(x)\ge m\, y^{-\tau}R(y)$. Tada je za $x>0$

$$\int_0^{\infty} k(t)R(tx)\,dt = \left(\int_0^{b/x}+\int_{b/x}^{+\infty}\right)k(t)R(tx)\,dt,$$

$$\int_0^{b/x} k(t)R(tx)\,dt = x^{\sigma}\int_0^{b/x} k(t)\,t^{\sigma}(tx)^{-\sigma}R(tx)\,dt \le$$

$$\le x^{\sigma} M \int_0^{b/x} k(t)\,t^{\sigma}\,dt < +\infty.$$

$$\int_{b/x}^{+\infty} k(t)R(tx)\,dt = x^{\tau}\int_{b/x}^{+\infty} k(t)\,t^{\tau}(tx)^{-\tau}R(tx)\,dt \le$$

$$\le x^{\tau} m^{-1} b^{-\tau} R(b) \int_{b/x}^{+\infty} k(t)\,t^{\tau}\,dt < +\infty$$

pa je $\int_0^{\infty} k(t)R(tx)\,dt < +\infty$

Neka je $J = \int_0^{\infty} k(t)\frac{R(tx)}{R(x)}\,dt = \left(\int_0^{b/x}+\int_{b/x}^{1}+\int_1^{+\infty}\right)k(t)\frac{R(tx)}{R(x)}\,dt =$

$$= J_1 + J_2 + J_3 .$$

Najpre ćemo dokazati da $J_1$ teži nuli kada $x \to +\infty$

$$J_1 = \int_0^{b/x} k(t)\frac{R(tx)}{R(x)}dt \le \frac{M}{x^{-\sigma}R(x)} \cdot \int_0^{b/x} k(t)t^{\sigma}dt \to 0, (\text{jer } x^{-\sigma}R(x) \to +\infty) \qquad (4.1.)$$

Na osnovu skoro monotononog rasta funkcije $x^{-\sigma}R(x)$ i skoro monotonog opadanja funkcije $x^{-\tau}R(x)$ je za $b/x \le t \le 1$

$$m t^{\tau} \le \frac{R(tx)}{R(x)} \le M t^{\sigma}$$

pa je $m\int_{b/x}^{1} k(t)t^{\tau}dt \le J_2 \le M\int_{b/x}^{1} k(t)\, t^{\sigma}dt,$ (4.2.)

a za $1 < t < +\infty$ je

$$m t^{\sigma} \le \frac{R(tx)}{R(x)} \le M t^{\tau}$$

pa je $m\int_1^{\infty} k(t)t^{\sigma}dt \le J_3 \le M\int_1^{\infty} k(t)t^{\tau}dt.$ (4.3.)

Na osnovu (4.1.),(4.2.) i (4.3.) sledi da postoje konstante $m_o$ i $M_o$, $0 < m_o < M_o < +\infty$, tako da je za $x$ dovoljno veliko

$$m_o \le J \le M_o$$

što je ekvivalentno relaciji (3.1.), čime je dokaz Stava 1. završen.

DOKAZ STAVA 2.

Na osnovu uslova (3.3.) je

$$\frac{R_1(tx)}{R_1(x)} \sim \frac{R_2(tx)}{R_2(x)} \cdot \frac{L(tx)}{L(x)} \sim \frac{R_2(tx)}{R_2(x)}$$

pa je $\limsup_{x\to+\infty} \frac{R_1(tx)}{R_1(x)} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{R_2(tx)}{R_2(x)} = v(t)$. Neka je za $i=1,2$

$$\Phi_i(x) = \int_0^{\infty} k(t)\, R_i(tx)\,dt.$$

Na osnovu uslova stava postoje konstanta $0 < m < 1 < M < +\infty$ tako da je

za $x \in [0,b]$ $\quad x^{-\sigma}R_i(x) \le M$, $i=1,2$ ;

za $y \ge x \ge b$ $\quad x^{-\sigma}R_i(x) \le M y^{-\sigma}R_i(y)$ i $x^{-\tau}R_i(x) \ge m y^{-\tau}R_i(y)$, $i=1,2$;

za $x \ge b$ $\quad m \le \Phi_i(x)/R_i(x) \le M$, $i=1,2$.

Ako je $0 < \delta < 1 < \Delta < +\infty$ tada je

$$\frac{\Phi_1(x)}{L(x)\Phi_2(x)} = \int_0^{\infty} k(t)\frac{R_1(tx)}{L(x)\Phi_2(x)}dt = \left(\int_0^{b/x} + \int_{b/x}^{\delta} + \int_{\delta}^{\Delta} + \int_{\Delta}^{+\infty}\right)\frac{R_1(tx)}{L(x)\Phi_2(x)}dt,$$

$$\frac{\Phi_1(x)}{L(x)\cdot\Phi_2(x)} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \qquad (4.4.)$$

$$J_1 = \frac{R_1(x)}{L(x)\cdot R_2(x)} \cdot \frac{R_2(x)}{\Phi_2(x)} \cdot \int_0^{b/x} k(t) \frac{R_1(tx)}{R_1(x)}\, dt =$$

$$= \frac{R_1(x)}{L(x) R_2(x)} \cdot \frac{R_2(x)}{\Phi_2(x)} \cdot \int_0^{b/x} k(t)\, t^{\sigma} \frac{(tx)^{-\sigma} R_1(tx)}{x^{-\sigma} R_1(x)}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{R_1(x)}{L(x)\cdot R_2(x)} \cdot \frac{M}{m\, x^{-\sigma} R_1(x)} \cdot \int_0^{b/x} k(t)\, t^{\sigma}\, dt.$$

Funkcija $x^{-\sigma} R_1(x) \nearrow$ na $[b,+\infty)$ pa je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\sigma} R_1(x) = +\infty$, a odatle sledi da je

$$\limsup_{x\to+\infty} J_1 = 0. \tag{4.5.}$$

$$J_2 = \frac{R_1(x)}{L(x)\cdot R_2(x)} \cdot \frac{R_2(x)}{\Phi_2(x)} \cdot \int_{b/x}^{\delta} k(t) \frac{R_1(tx)}{R_1(x)}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{R_1(x)}{L(x) R_2(x)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \int_{b/x}^{\delta} k(t)\, M t^{\sigma}\, dt \text{, pa je}$$

$$\limsup_{x\to+\infty} J_2 \leq \frac{M}{m} \int_0^{\delta} k(t)\, t^{\sigma}\, dt. \tag{4.5'.}$$

Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ i $\delta \leq t \leq \Delta$ i $x \geq x_0$ tako da je

$$\frac{R_1(tx)}{R_2(tx) L(tx)} \leq 1 + \varepsilon_1$$

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \leq 1 + \varepsilon_2$$

tada je

$$J_2 = \frac{1}{\Phi_2(x)} \int_{\delta}^{\Delta} k(t) \frac{R_1(tx)}{R_2(tx) L(tx)}\, R_2(tx) \cdot \frac{L(tx)}{L(x)}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{\Phi_2(x)} \int_{\delta}^{\Delta} k(t)\, R_2(tx)\, dt \leq (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \text{, pa je}$$

$$\limsup_{x\to+\infty} J_2 \leq (1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2). \tag{4.6.}$$

Dalje je $J_4 = \dfrac{R_1(x)}{R_2(x)\cdot L(x)} \cdot \dfrac{R_2(x)}{\Phi_2(x)} \displaystyle\int_{\Delta}^{+\infty} k(t) \frac{R_1(tx)}{R_1(x)}\, dt \leq$

$$\leq \frac{R_1(x)}{R_2(x)\cdot L(x)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \int_{\Delta}^{+\infty} k(t) \cdot \frac{t^{\rho}}{m}\, dt \text{, pa je}$$

$$\limsup_{x\to+\infty} J_4 \leq \frac{1}{m^2} \int_{\Delta}^{+\infty} k(t)\, t^{\tau}\, dt. \tag{4.7.}$$

Na osnovu relacija (4.4.),(4.5.),(4.5'.),(4.6.) i (4.7.) sleduje da je

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)\cdot L(x)} \le \frac{M}{m}\int_0^{\delta} k(t)t^{\sigma}dt + (1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2) + \frac{1}{m^2}\int_{\Delta}^{+\infty} k(t)t^{\tau}dt.$$

Puštajući da $\delta\to 0$ , $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ , $\Delta\to+\infty$ dobijamo da je

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)\cdot L(x)} \le 1 \tag{4.8.}$$

Relacija (3.3.) je ekvivalentna relaciji

$$\frac{R_2(x)}{R_1(x)} \sim \frac{1}{L(x)}$$

pa ista procedura daje

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\Phi_2(x)\cdot L(x)}{\Phi_1(x)} \le 1, \tag{4.9.}$$

a iz (4.8.) i (4.9.) sleduje (3.3.) čime je dokaz završen.

DOKAZ STAVA 3.

Možemo pretpostaviti da je $U(0)=0$ .Tada je

$$\omega(x^{-1}) = \int_0^{\infty} e^{-x^{-1}t}dU(t) = x^{-1}\int_0^{\infty} e^{-x^{-1}t}U(t)dt$$

$$\omega(x^{-1}) = \int_0^{\infty} e^{-t}U(tx)dt. \tag{4.10.}$$

Neka je $c>1$ ,

$$\frac{\omega(x^{-1})}{U(x)} = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{U(tx)}{U(x)}dt \ge \int_c^{+\infty} e^{-t}\frac{U(tx)}{U(x)}dt \ge$$

(zbog monotonoje funkcije $U$ )

$$\ge \int_c^{+\infty} e^{-t}dt = 1-e^{-c},$$ pa je

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\omega(x^{-1})}{U(x)} \ge 1-e^{-c}.$$ Neka $c\to+\infty$ ,tada je

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\omega(x^{-1})}{U(x)} \ge 1. \tag{4.11.}$$

Neka je $\check{\omega}(x)=\omega(x^{-1})$.Iz pretpostavke stava sleduje da je $\check{\omega}$ O-PP funkcija u beskonačnosti.Za $\tau>q(\check{\omega})$ na osnovu osobine (iii) funkcija $x^{-\tau}\check{\omega}(x)\searrow$ za $x$ dovoljno veliko.Tada postoji $M>1$ tako da je za svako $t>1$

$$\frac{\check{\omega}(tx)}{\check{\omega}(x)} \le Mt^{\tau}. \tag{4.12.}$$

Iz relacije (4.11.) sleduje da je za dovoljno veliko $x$

$$\frac{U(x)}{\check{\omega}(x)} \leq 2. \tag{4.13.}$$

Dalje neka je $a>1$ takvo da je za $0<\varepsilon<1$

$$\int_a^\infty e^{-t} t^\tau dt < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.14.}$$

Sem toga je $\check{\omega}(x) = \int e^{-t} U(tx)dt$ pa je

$$1 = \int_0^\infty e^{-t} \frac{U(tx)}{\check{\omega}(x)} dt = \left(\int_0^a + \int_a^\infty\right) e^{-t} \frac{U(tx)}{\check{\omega}(x)} dt = J_1 + J_2.$$

Sada ćemo proceniti integrale $J_1$ i $J_2$

$$J_1 = \int_0^a e^{-t} \frac{U(tx)}{\check{\omega}(x)} dt \leq \frac{U(ax)}{\check{\omega}(x)} (1-e^{-a}) \leq$$

$$\leq \frac{U(ax)}{\check{\omega}(ax)} M a^\tau (1-e^{-a}) \qquad \text{(na osnovu (4.12.))}$$

$$J_1 \leq K \cdot \frac{U(ax)}{\check{\omega}(ax)} \tag{4.15.}$$

$$J_2 = \int_a^\infty e^{-t} \frac{U(tx)}{\check{\omega}(x)} dt \leq$$

$$\leq 2 \int_a^\infty e^{-t} \frac{\check{\omega}(tx)}{\check{\omega}(x)} dt \leq \qquad \text{(na osnovu (4.13.))}$$

$$\leq 2M \int_a^\infty e^{-t} t^\tau dt < \varepsilon \qquad \text{(na osnovu (4.12.))}$$

pa je

$$J_1 < \varepsilon \tag{4.16.}$$

Iz relacija (4.15.) i (4.16.) sleduje da je

$$1 < K \cdot \frac{U(xa)}{\check{\omega}(xa)} + \varepsilon \text{, pa je}$$

$$\frac{1-\varepsilon}{K} \leq \frac{U(xa)}{\check{\omega}(xa)}$$

$$0 < \frac{1-\varepsilon}{K} \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{U(xa)}{\check{\omega}(xa)} = \liminf_{x\to+\infty} \frac{U(x)}{\check{\omega}(x)} \tag{4.17.}$$

Iz relacija (4.11.) i (4.17) sleduje (3.7.),čime je dokaz završen.

DOKAZ STAVA 4.

Neka su $\phi$ i $\omega$ Laplas-Stiltjesove transformacije funkcija $F$ i $U$.

$$\phi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF(t)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)\,dt$$

$$1-\phi(\lambda)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}[1-F(t)]\,dt$$

$$1-\phi(x^{-1})=\int_0^\infty e^{-t}[1-F(tx)]\,dt. \tag{4.18.}$$

Na osnovu relacije (1.1) je

$$\omega(\lambda)=\frac{1}{1-\phi(\lambda)}. \tag{4.19.}$$

Uzimajući da je $R(x)=1-F(x)$ i $k(t)=e^{-t}$ na osnovu Stava 1. sleduje da je, kada $x\to+\infty$

$$1-\phi(x^{-1})\asymp 1-F(x) \tag{4.20.}$$

pa je

$$\omega(x^{-1})\asymp\frac{1}{1-F(x)}, \tag{4.21.}$$

a odatle sleduje da je $\omega$ O-PP funkcija u nuli. Na osnovu Stava 3. je, kada $x\to+\infty$

$$U(x)\asymp\frac{1}{1-F(x)}, \tag{4.22.}$$

što je i trebalo dokazati. Iz relacije (4.22.) na osnovu osobine (v) O-PP funkcija sleduje da je

$$p(U)=-q(1-F),\quad q(U)=-p(1-F)$$

čime je dokaz završen.

DOKAZ STAVA 5.

Neka su $\phi_1$, $\phi_2$, $\omega_1$, $\omega_2$ Laplas-Stiltjesove tansformacije respektivno funkcija $F_1$, $F_2$, $U_1$, $U_2$. Tada je, kao u dokazu relacije (4.18.), za $i=1,2$

$$1-\phi_i(x)=\int_0^\infty e^{-t}[1-F_i(tx)]\,dt,$$

pa je na osnovu Stava 2.

$$\frac{1-\phi_1(x^{-1})}{1-\phi_2(x^{-1})}\sim L(x). \tag{4.23.}$$

Sem toga je

$$\omega_i(\lambda) = \frac{1}{1-\Phi_i(\lambda)}, \quad i=1,2, \text{ pa je}$$

$$\frac{\omega_1(x^{-1})}{\omega_2(x^{-1})} = \frac{1-\Phi_2(x^{-1})}{1-\Phi_1(x^{-1})} \sim \frac{1}{L(x)}$$

Na osnovu citiranog stava Feller-a sleduje da je, kada $x \to +\infty$

$$\frac{U_1(x)}{U_2(x)} \sim \frac{1}{L(x)}$$

čime je dokaz završen.

# III

# PRIMENA PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA SA OSTATKOM.

## 3.1. SPORO PROMENLJIVE FUNKCIJE SA OSTATKOM.

Definicija i sve teoreme iz ovog odeljka citirane su iz rada S.Aljančić,R.Bojanić,M.Tomić Slowly varying functions with remainder term and their applications in analysis.

DEFINICIJA.

Neka je $\varphi$ pozitivna,rastuća funkcija na $[0,+\infty)$ koja zadovoljava uslove:

(i) $\varphi(x) \to +\infty$, $(x \to +\infty)$

(ii) $x^{-\theta}\varphi(x)$ opada za $0<\theta<+\infty$ i $x$ dovoljno veliko.

Pozitivna,merljiva na $[0,+\infty)$ funkcija $L$ se naziva sporo promenljiva funkcija sa ostatkom $\varphi$ ako je za svako $t>0$ ,kada $x \to +\infty$

$$\frac{L(tx)}{L(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right). \tag{1.1.}$$

Klasu sporo promenljivih funkcija sa ostatkom $\varphi$ označavaćemo sa $\mathbb{K}_\theta(\varphi)$ .Ukoliko je funkcija ostatka stepena funkcija $x^\varsigma$, $\varsigma>0)$, tada ćemo klasu sporo promenljivih funkcija sa ostatkom $x^\varsigma$ označavati sa $\mathbb{K}_\theta(x^\varsigma)$ ,$(\theta>\varsigma)$ .

Sledeće teoreme,citirane iz pomenutog rada,će biti korišćene u daljem.

TEOREMA 3.1. (str. 25.)

Neka je $K$ realna,merljiva funkcija na $[1,+\infty)$ i neka je za $\varsigma>0$

$$\int_1^\infty t^\varsigma |K(t)|\,dt < +\infty.$$

Ako je $L \in \mathbb{K}_\theta(\varphi)$ tada je za $x$ dovoljno veliko

$$\int_1^{+\infty} |K(t)|\,L(tx)\,dt < +\infty$$

i kada $x \to +\infty$

$$\int_1^\infty k(t)\frac{L(tx)}{L(x)}dt = \int_1^\infty k(t)\,dt + O\left(\frac{1}{e(x)}\right). \tag{1.2.}$$

TEOREMA 3.4. (str. 26.)

Neka je $L \in \mathbb{K}_\theta(e)$ i neka je $k$ realna, merljiva funkcija na $[0,1]$. Ako je za neko $\sigma > \theta$ funkcija $x^\sigma L(x)$ ograničena na svakom intervalu $[0,\Delta]$, $(\Delta < +\infty)$, i ako je

$$\int_0^1 t^{-\sigma}|k(t)|\,dt < +\infty$$

tada je za svako $x > 0$ $\int_0^1 |k(t)| L(tx)\,dt < +\infty$, i kada $x \to +\infty$

$$\int_0^1 k(t)\frac{L(tx)}{L(x)}dt = \int_0^1 k(t)\,dt + O\left(\frac{1}{e(x)}\right). \tag{1.3.}$$

Na strani 42. citiranog rada (videti /1/) iskazana je Teorema 5.1. Tauberovog tipa. Sada ćemo iskazati sličnu teoremu (nešto specijalnijeg tipa), za Laplas-Stiltjesovu transformaciju, koja se može dokazati slično kao Teorema 5.1.

TEOREMA 5.1.

Neka je $U$ monotono rastuća, nenegativna funkcija na $[0,+\infty)$ i neka je $L \in \mathbb{K}_\theta(e)$. Ako za $s > 0$

$$\omega(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dU(t)$$

konvergira i ako je, kada $s \to 0_+$

$$\omega(s) = s^{-\alpha}L(1/s)\left[A + O\left(\frac{1}{e(1/s)}\right)\right]$$

za $\alpha > 0$ i $A > 0$, tada je kada $x \to +\infty$

$$U(x) = \frac{x^\alpha L(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[A + O\left(\frac{1}{\ln e(x)}\right)\right].$$

U dokazu osnovne teoreme ovoga poglavlja biće potrebna i sledeća lema.

LEMA 1.

Ako je $L \in \mathbb{K}_\theta(e)$ tada je i $\frac{1}{L} \in \mathbb{K}_\theta(e)$.

DOKAZ.

Na osnovu relacije (1.1.) je za $t > 0$ kada $x \to +\infty$

$$\frac{L(tx)}{L(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{e(x)}\right)$$

pa je $\dfrac{\frac{1}{L(tx)}}{\frac{1}{L(x)}} = \dfrac{L(x)}{L(tx)} = \dfrac{1}{1+O(\frac{1}{e(x)})}$.

Odatle sleduje da je

$$\limsup_{x\to+\infty} e(x)\cdot\left|\frac{L(x)}{L(tx)}-1\right| = \limsup_{x\to+\infty} \frac{e(x)\,|O(\frac{1}{e(x)})|}{|1+O(\frac{1}{e(x)})|} =$$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|O(1)|}{|1+O(\frac{1}{e(x)})|} < +\infty,$$

što znači da je kada $x\to+\infty$

$$\frac{\frac{1}{L(tx)}}{\frac{1}{L(x)}} = 1+O\left(\frac{1}{e(x)}\right) \qquad \text{tj } \frac{1}{L}\in K_\theta(e).$$

## 3.2. PRIMENA NA TEORIJU OBNAVLJANJA.

Neka je data raspodela $F$ ,koncentrisana na pozitivnu poluosu tj. $F(0)=0$ , $F(+\infty)=1$ i neka je $U$ funkcija obnavljanja za datu raspodelu

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \tag{2.1.}$$

a neka su $f$ i $\omega$ Laplas-Stiltjesove transformacije funkcija $F$ i $U$

$$f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dF(t) \tag{2.2.}$$

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dU(t). \tag{2.3.}$$

Na osnovu relacija (2.1.),(2.2.),(2.3.) sledi da je

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{1-f(\lambda)}. \tag{2.4.}$$

Takođe je

$1-f(\lambda)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}[1-F(t)]dt$ a odatle je

$$1-f(x^{-1}) = \int_0^\infty e^{-t}[1-F(tx)]\,dt. \tag{2.5.}$$

Osnovni rezultat ovog odeljka je

TEOREMA 1.

Neka je $1-F(x)=x^{-\alpha}L(x)$, $(0<\alpha<1)$,gde je $L\in K_\theta(e)$ za $0<\theta<1-\alpha$,

Tada je,kada $x\to+\infty$

$$U(x)\cdot[1-F(x)]=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+O\left(\frac{1}{\ln e(x)}\right). \qquad (2.6.)$$

Ovom teoremom nije obuhvaćen slučaj kada je $\alpha+\theta\geq 1$ .Međutim, uz neke restrikcije na funkciju $e$ može se dokazati sličan stav kao posledica Teoreme 1..Naime,iz definicije funkcije ostatka sleduja da je ona O-pravilno promenljiva funkcija.Zaista za $t>1$ je na osnovu osobine (ii)

$$(tx)^{-\theta}e(tx)\leq x^{-\theta}e(x)$$

pa je $\limsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e(tx)}{e(x)}\leq t^{\theta}<+\infty$ (2.7.)

a zbog monotonije funkcije $e$ je za $t\leq 1$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{e(tx)}{e(x)}\leq 1<+\infty \qquad (2.8.)$$

Na osnovu (2.7.) i(2.8.) sledi da je $e$ O-pravilno promenljiva funkcija.Takođe indeksi funkcije $e$ zadovoljavaju uslove

$$0\leq p(e)\leq q(e)\leq\theta \qquad (2.9.)$$

Ako pretpostavimo da je $0<p(e)$ tada je za $0<\varrho<p(e)$ funkcija $x^{-\varrho}e(x)$ skoro monotono rastuća,pa $x^{-\varrho}e(x)\to+\infty$ , $(x\to+\infty)$.

Za dovoljno veliko $x$ je $x^{-\varrho}e(x)\geq 1$ pa je

$$\frac{1}{e(x)}\leq\frac{1}{x^{\varrho}} \qquad (2.10.)$$

a iz te relacije i definicije funkcije $L$ sleduje da je

$$\left|\frac{L(tx)}{L(x)}-1\right|\leq\frac{M}{e(x)}\leq\frac{M}{x^{\varrho}}$$

tj. $\mathbb{K}_{\theta}(e)\subset\mathbb{K}_{\tilde{\theta}}(x^{\varrho})$ (2.11.)

za $\tilde{\theta}>\varrho$.

POSLEDICA.

Neka je $1-F(x)=x^{\alpha}L(x)$, $(0<\alpha<1)$,gde je $L\in\mathbb{K}_{\theta}(e)$.Ako je funkcija $e$ O-pravilno promenljiva sa donjim indeksom $p(e)$ većim od nule tada je

$$U(x)\cdot[1-F(x)]=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\quad(x\to+\infty). \qquad (2.12.)$$

## 3.3. DOKAZI TEOREMA.

### DOKAZ TEOREME 1.

Na osnovu (2.5.) i uslova teoreme je

$$1-f(x^{-1}) = \int_0^\infty e^{-t}[1-F(tx)]dt = \int_0^\infty e^{-t}(tx)^{-\alpha}L(tx)dt$$

pa je
$$\frac{1-f(x^{-1})}{1-F(x)} = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\frac{L(tx)}{L(x)}dt =$$
$$= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right)e^{-t}t^{-\alpha}\frac{L(tx)}{L(x)}dt.$$

Uzimajući $k(t)=t^{-\alpha}e^{-t}$ na osnovu Teoreme 3.1. zaključujemo da je

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\frac{L(tx)}{L(x)}dt = \int_1^\infty e^{-t}t^{-\alpha}dt + O\left(\frac{1}{e(x)}\right), \quad (x\to+\infty) \qquad (3.1.)$$

Neka je $0<\sigma<1-\alpha$ .Funkcija $x^{\sigma}L(x)$ je ograničena na intervalu $[0,\Delta]$ jer $x^{\sigma}L(x) = x^{\sigma+\alpha}x^{-\alpha}L(x) = x^{\sigma+\alpha}[1-F(x)] \le \Delta^{\sigma+\alpha}$

Dalje,
$$\int_0^1 t^{-\sigma}|k(t)|dt = \int_0^1 t^{-\sigma}t^{-\alpha}e^{-t}dt =$$
$$= \int_0^1 t^{-(\sigma+\alpha)}e^{-t}dt < +\infty$$

jer je $\alpha+\sigma<1$ .Dakle $k$ i $L$ zadovoljavaju uslove Teoreme 3.4. pa kada $x\to+\infty$ važi

$$\int_0^1 e^{-t}t^{-\alpha}\frac{L(tx)}{L(x)}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{-\alpha}dt + O\left(\frac{1}{e(x)}\right). \qquad (3.2.)$$

Na osnovu (3.1.) i (3.2.) sledi da je,kada $x\to+\infty$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\frac{L(tx)}{L(x)}dt = \Gamma(1-\alpha) + O\left(\frac{1}{e(x)}\right), \qquad (3.3.)$$

tj.
$$\frac{1-f(x^{-1})}{1-F(x)} = \Gamma(1-\alpha) + O\left(\frac{1}{e(x)}\right). \qquad (3.4.)$$

Na osnovu (2.4.) je

$$\frac{1}{\omega(x^{-1})[1-F(x)]} = \Gamma(1-\alpha) + O\left(\frac{1}{e(x)}\right)$$

$$\omega(x^{-1})[1-F(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{e(x)}\right)$$

tj. kada $\lambda = x^{-1}$ teži nuli

$$\omega(\lambda) = \frac{\lambda^{-\alpha}}{L(1/\lambda)} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + O\left( \frac{1}{\varepsilon(1/\lambda)} \right) \right]. \qquad (3.5.)$$

Takođe je na osnovu Leme 1. $1/L \in \mathbb{K}_0(e)$ pa je na osnovu Teoreme 5.1:

kada $x \to +\infty$

$$U(x) = \frac{x^{\alpha}}{L(x)} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} + O\left( \frac{1}{\ln \varepsilon(x)} \right) \right] \qquad (3.6.)$$

tj.

$$U(x)\,[1-F(x)] = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + O\left( \frac{1}{\ln \varepsilon(x)} \right). \qquad (3.7.)$$

što je i trebalo dokazati.

DOKAZ POSLEDICE.

Neka je $0 < \rho < \min\{p(e), 1-\alpha\}$. Tada na osnovu (2.11.) $L$ pripada klasi $\mathbb{K}_{\rho+\varepsilon}(x^{\rho})$, jer je za svako $\varepsilon > 0$ funkcija $x^{-(\rho+\varepsilon)} \cdot x^{\rho} = x^{-\varepsilon}$ monotono opadajuća. Neka je $\rho + \varepsilon + \alpha < 1$. Tada na osnovu Teoreme 1. neposredno sleduje (2.12.).

# IV

# REPREZENTACIJA ZIGMUNDOVE KLASE FUNKCIJA.

## 4. REPREZENTACIJA ZIGMUNDOVE KLASE FUNKCIJA.

DEFINICIJA.

Pozitivnu, merljivu funkciju $L$ definisanu na $(a,+\infty)$ , $(a>0)$, nazivamo sporo promenljivom u Zigmundovom smislu ako za svako $\varepsilon>0$ funkcija $x^{-\varepsilon}L(x)$ ne raste, a funkcija $x^{\varepsilon}L(x)$ ne opada za $x$ dovoljno veliko.

Klasu Zigmund-sporo promenljivih funkcija označavaćemo sa $\mathcal{Z}$.

U radu "On slowly varying functions and asymptotic relations"[7] R. Bojanić i J. Karamata su dokazali teoremu koja daje karakterizaciju klase $\mathcal{Z}$ preko Dinijevih izvoda.

STAV (B.-K.)

Neka je $L$ pozitivna, merljiva funkcija na $[a,+\infty)$ , $(a>0)$. Tada je $L\in\mathcal{Z}$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi

(i) $-\infty < D_+L(x) \leq D^+L(x) < +\infty$ za $x$ dovoljno veliko

(ii) $x D_+ L(x) = o(L(x))$, $x D^+ L(x) = o(L(x))$ , $(x\to+\infty)$.

Sada ćemo, nezavisno od ovog stava Bojanića i Karamate, dati integralnu reprezentaciju klase $\mathcal{Z}$.

STAV 1.

Potreban i dovoljan uslov da je $L\in\mathcal{Z}$ je da postoje pozitivne konstante $B$ i $C$ i merljiva funkcija $\beta(x)$ koja teži nuli kada $x\to+\infty$ tako da je

$$L(x) = C\exp\left\{\int_B^x \beta(t)\frac{dt}{t}\right\}, \quad (x\geq B).$$

DOKAZ.

Neka je $L\in\mathcal{Z}$. Iz uslova da $x^{\varepsilon}L(x)$ ne opada za $x$ dovoljno veliko sledi da $L'$ postoji skoro svuda na intervalu $[x_0,+\infty)$. Neka je

D skup svih $x$-ova za koje $L'(x)$ postoji.

Najpre ćemo dokazati da

$$\frac{x L'(x)}{L(x)} \to 0, \quad (x \in D, x \to +\infty). \tag{1.}$$

Iz uslova da $x^{\varepsilon} L(x) \nearrow$ i $x^{-\varepsilon} L(x) \searrow$ sleduje, za $x \in D$,

$$(x^{-\varepsilon} L(x))' = -\varepsilon x^{-\varepsilon-1} L(x) + x^{-\varepsilon} L'(x) \le 0 \quad \text{a odatle}$$

$$\frac{x L'(x)}{L(x)} \le \varepsilon \tag{2.}$$

Na isti način se može zaključiti da je

$$\frac{x L'(x)}{L(x)} \ge -\varepsilon \tag{3.}$$

Puštajući $\varepsilon$ da teži ka nuli iz relacija (2.) i (3.) sledi (1.)

Zatim dokazujemo da je $L$ neprekidna za $x$ dovoljno veliko. Ako je $x^{-\varepsilon} L(x) \searrow$ i $x^{\varepsilon} L(x) \nearrow$ na intervalu $[M, +\infty)$ tada je za $x, y \ge M$

$$\left(\frac{\min\{x,y\}}{\max\{x,y\}}\right)^{\varepsilon} \le \frac{L(x)}{L(y)} \le \left(\frac{\max\{x,y\}}{\min\{x,y\}}\right)^{\varepsilon}$$

pa $L(y) \to L(x)$ kada $y \to x$.

Funkcija $\ln L$ je ograničene varijacije na svakom konačnom podintervalu intervala $[B, +\infty)$, pa je njen izvod $\frac{L'}{L}$ lokalno integrabilna na $[B, +\infty)$. Definišimo funkciju

$$\alpha(x) = \ln L(x) - \int_B^x \frac{L'(t)}{L(t)}\, dt.$$

Neka je
$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{x L'(x)}{L(x)}, & x \in D \\ 0, & x \in [B, +\infty) / D \end{cases} \tag{4.}$$

Tada je
$$\alpha(x) = \ln L(x) - \int_B^x \beta(t) \frac{dt}{t}. \tag{5.}$$

Očigledno je da je $\alpha$ neprekidna funkcija i da je $\alpha'(x) = 0$ s.s. na $[\ ,+\infty)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta(x) = 0$. Sada ćemo dokazati da je $\alpha = \text{const}$. Iz relacije (5.) sleduje da je za $x \ge B$

$$L(x) = \exp\left\{\alpha(x) + \int_B^x \beta(t) \frac{dt}{t}\right\}$$

Možemo pretpostaviti da $x^{\varepsilon} L(x) \nearrow$, $x^{-\varepsilon} L(x) \searrow$ na $[B, +\infty)$, gde je $\varepsilon > 0$ ali fiksirano. Na osnovu relacija (2.), (3.) i (4.) je

$$|\beta(x)| < \varepsilon \quad , \quad x \in [B, +\infty), \tag{6.}$$

pa je za $x \geq B$

$$D^+ L(x) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = L(x) \cdot \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[\frac{L(x+h)}{L(x)} - 1\right] =$$

$$= L(x) \cdot \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[\exp\left\{\alpha(x+h) - \alpha(x) + \int_x^{x+h} \beta(t)\frac{dt}{t}\right\} - 1\right] \leq$$

$$\leq 2 \cdot L(x) \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[\alpha(x+h) - \alpha(x) + \int_x^{x+h} \beta(t)\frac{dt}{t}\right] \leq$$

$$\leq 2 \cdot L(x) \limsup_{h \to 0_+} \left[\frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h} + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |\beta(t)|\frac{dt}{t}\right] \leq$$

$$\leq 2 \cdot L(x) \left[D^+\alpha(x) + \varepsilon \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{dt}{t}\right] =$$

$$= 2 \cdot L(x) \left[D^+\alpha(x) + \frac{\varepsilon}{x}\right].$$

Iz uslova da $x^{\varepsilon} L(x) \nearrow$ za svako $x \geq B$ sleduje da je

$$0 \leq D^+\left(x^{\varepsilon} L(x)\right) = \varepsilon x^{\varepsilon - 1} L(x) + x^{\varepsilon} D^+ L(x) \leq$$

$$\leq \varepsilon x^{\varepsilon - 1} L(x) + 2 x^{\varepsilon} L(x) \left[D^+\alpha(x) + \frac{\varepsilon}{x}\right]$$

a odatle je $D^+\alpha(x) \geq -\frac{3 \cdot \varepsilon}{2x} > -\infty$

Iz uslova da je $\alpha'(x) = 0$ s.s. sleduje da je $D^+\alpha(x) = 0$ s.s. na $[B, +\infty)$ .Na osnovu Stava 6.,str. 174. S.Aljančić "Uvod u realnu i funkcionalnu analizu",sleduje da $\alpha$ ne opada na konačnim podintervalima intervala $[B, +\infty)$ .Neka je dalje $L_1 = \frac{1}{L}$ .Funkcija $L_1$ ima reprezentaciju $L_1(x) = \exp\left\{\alpha_1(x) + \int_B^x \beta_1(t)\frac{dt}{t}\right\}$,

gde je $\alpha_1 = -\alpha$ , $\beta_1 = -\beta$ ,i $x^{\varepsilon} L_1(x) = \frac{1}{x^{-\varepsilon} L(x)} \nearrow$ na $[B, +\infty)$.

Ista procedura daje da $\alpha_1$ ne opada na konačnim podintervalima intervala $[B, +\infty)$ .Odatle sleduje da je $\alpha = \text{const.}$ na $[B, +\infty)$ ,pa je

$$L(x) = C \cdot \exp\left\{\int_B^x \beta(t)\frac{dt}{t}\right\}.$$

Obrnuto, iz pretpostavke da funkcija $L$ ima reprezentaciju (6.) lako se izvodi da je $L \in \mathcal{L}$.

Kao posledica ovog stava neposredno sleduje da je svaka $\mathcal{L}$-sporo promenljiva funkcija apsolutno neprekidna za $x$ dovoljno veliko. Obratno ne važi, tj. apsolutno neprekidna o-sporo promenljiva funkcija ne mora da bude i $\mathcal{L}$-sporo promenljiva. Primer takve funkcije, dat u radu "Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata." D. Adamovića, je funkcija

$$L(x) = \left(1 + \frac{\sin x^2}{x}\right) \exp\left\{ \int_1^x \varepsilon(t) \frac{dt}{t} \right\}$$

gde je $\varepsilon$ neprekidna funkcija koja teži nuli, kada $x$ teži $+\infty$. Lako se izračunava da je

$$[x^\delta L(x)]' = \exp\left\{ \int_1^x \varepsilon(t) \frac{dt}{t} \right\} \cdot x^{\delta - 1} [\delta + 2x \cos x^2 + o(1)]$$

što nema stalan znak u okolini tačke $+\infty$. Interesantno je da je moguće izabrati funkciju $\varepsilon$ tako da $L$ bude beskonačno diferencijabilna a da ipak ne bude $\mathcal{L}$-sporo promenljiva funkcija.

## L I T E R A T U R A.


/1/ S.Aljančić,D.Arandelović:O-regularly varying functions.
Publ.Inst.Math.(Belgrade) 22(36),1977,5-22

/2/ S.Aljančić,R.Bojanić,M.Tomić:Slowly varying functions with remainder term and their applications in analysis.
"Serbian Acad. Sci. Arts,Monogr.",Beograd,1974.

/3/ D.Adamović:Sur quelques proprietes des fonctions a croissance lente de Karamata.
Mat. Vesnik(Belgrade)3(18),(1966) 161-172

/4/ R.Bojanić,J.Karamata:On slowly varying functions and asymptotic relations.
Technical Summary Report 432,Math.Research Center(1963)

/5/ W.Feller:An introduction to probability theory and its applications.
J.Wiley,New York,1966.

/6/ W.Feller:On the classical tauberian theorems.
Arch. Math. 14(1963),317-322

/7/ W.L.Smith:On infinitely divisible laws and a renewal theorem for non-negative random variable.
Ann. Math. Stat. 39.(1968),155-157

/8/ J.Teugels:Renewal theorems when the first or the second moment is infinite.
Ann. Math. Stat. 39.(1968),1210-1219

# ON SOME FUNCTIONAL EQUATIONS OF PEXIDER'S TYPE

P.M.Vasić, R.R.JANIĆ and J.E.PEČARIĆ

0. The general continuous solution of functional equation

$$(1) \qquad f(x_1+..+x_n) = f_1(x_1)+..+f_n(x_n)$$

is (see [1]):

$$f(x)=cx+a_1+..+a_n, \quad f_i(x)=cx+a_i \quad (1\leq i\leq n),$$

where $a_i$ $(1\leq i\leq n)$ are arbitrary real constants. For $n=2$, we have well-known Pexider's equation.

Using this result, we shall give the generalizations for some results from [2].

1. THEOREM 1. The general continuous solution of functional equation

$$(2) \qquad f(x_1+..+x_n) = I_n(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n);p)$$

where

$$I_n(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n);p) = \frac{\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}\sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1)..f_k(x_k)}{1-\sum_{k=2}^{n} p^k(k-1)\sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1)..f_k(x_k)}$$

and $\sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1)..f_k(x_k)$ denotes the sum of all the combinations of class k of set $f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n)$ ; is

$$(3) \quad f(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{cx+a_1+..+a_n}{cx+a_1+..+a_n-1}, \quad f_i(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{cx+a_i}{cx+a_i-1} \quad (1\leq i\leq n),$$

or

$$(4) \quad f(x) = -\frac{1}{p},\ f_k(x) = -\frac{1}{p},\ f_i \ \left(\neq -\frac{1}{p};\ i\neq k\right) \text{ are arbitrary functions}$$

The proof is similar to the proof which is given in [2].

THEOREM 2. The general continuous solution of functional equation

$$f(x_1..x_n) = I_n(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n);p)$$

is

$$f(x) = -\frac{1}{p}\frac{c\ln x+a_1+..+a_n}{c\ln x+a_1+..+a_n-1}, \quad f_i(x) = -\frac{1}{p}\frac{c\ln x+a_i}{c\ln x+a_i-1} \quad (1\leq i\leq n;\ x>0),$$

or (4).

THEOREM 3. The general continuous solution of functional equation

$$f(x_1+..+x_n) = I_n(f(x_1),\dots,f(x_n);p)$$

is $f(x)= -\frac{1}{p}\frac{cx}{cx-1}$; and the general continuous solution of functional equation

$$f(x_1..x_n) = I_n(f(x_1),\dots,f(x_n);p)$$

is $f(x)= -\frac{1}{p}\frac{c\ln x}{c\ln x-1}$ $(x>0)$.

2. THEOREM 4. The general continuous solution of functional equation

(5) $$f(I_n(x_1,\dots,x_n;p)) = f_1(x_1)+..+f_n(x_n)$$

is

(6) $$f(x) = c\frac{px}{px+1}+a_1+..+a_n, \quad f_i(x) = c\frac{px}{px+1}+a_i \quad (1\leq i\leq n).$$

PROOF. Using the substitutions

$$f(x) = g\left(\frac{px}{px+1}\right), \ f_i(x)=g_i\left(\frac{px}{px+1}\right), \ u_i=\frac{px}{px+1},$$

functional equation (5) gets a form of (1), so, it is obvious that (6) is its general solution.

THEOREM 5. The general continuous solution of functional equation

$$f(I_n(x_1,\dots,x_n;p)) = f_1(x_1)..f_n(x_n)$$

is

$$f(x) = a_1..a_n\, e^{\frac{cpx}{px+1}}, \quad f_i(x) = a_i\, e^{\frac{cpx}{px+1}} \quad (1\leq i\leq n).$$

THEOREM 6. The general continuous solution of functional equation

$$f(I_n(x_1,\dots,x_n;p)) = f(x_1)+..+f(x_n)$$

is $f(x)=c\frac{px}{px+1}$; and the general continuous solution of equation

$$f(I_n(x_1,\dots,x_n;p)) = f(x_1)..f(x_n)$$

is $f(x)=e^{\frac{cpx}{px+1}}$.

3. THEOREM 7. The general continuous solution of functional equation

$$(7)\qquad f(I_n(x_1,\dots,x_n;q)) = I_n(f_1(x_1),\dots,f_n(x_n);p)$$

is

$$(8)\qquad f(x)= -\frac{1}{p}\,\frac{cqx+(qx+1)(a_1+\dots+a_n)}{cqx+(qx+1)(a_1+\dots+a_n-1)},\quad f_i(x)= -\frac{1}{p}\,\frac{cqx+a_i(qx+1)}{cqx+(qx+1)(a_i-1)}$$

$$(1\leq i\leq n),$$

or (4).

PROOF. Using the substitutions

$$g_i\left(\frac{qx}{qx+1}\right)=\frac{pf_i(x)}{pf_i(x)+1},\quad g\left(\frac{qx}{qx+1}\right)=\frac{pf(x)}{pf(x)+1},\quad u_i=\frac{qx_i}{qx_i+1},$$

analogously to the proof from [2] we can prove the theorem.

THEOREM 8. The general continuous solution of functional equation

$$f(I_n(x_1,\dots,x_n;q)) = I_n(f(x_1),\dots,f(x_n);p)$$

is $f(x)= -\frac{1}{p}\,\frac{qcx}{cqx-qx-1}$.

4. THEOREM 9. The general continuous solution of functional equation

$$(9)\qquad f(x_1+\dots+x_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}\sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1)\dots f_k(x_k)$$

is

$$(10)\qquad f(x)= \frac{1}{p}\left(e^{cx+a_1+\dots+a_n}-1\right),\quad f_i(x)= \frac{1}{p}\left(e^{cx+a_i}-1\right)\quad (1\leq i\leq n).$$

PROOF. Using the substitutions

$$pf(x)+1=g(x) \text{ and } pf_i(x)+1=g_i(x)\quad (1\leq i\leq n)$$

(9) becomes

$$g(x_1+\dots+x_n) = g_1(x_1)\dots g_n(x_n).$$

This equation has the following general and continuous solution

$$g(x)=e^{cx+a_1+\dots+a_n},\quad g_i(x)= e^{cx+a_i}\quad (1\leq i\leq n),$$

so, it is obvious that (10) is solution of (9).

THEOREM 10. The general continuos solution of functional equation

$$f(x_1 \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1) \dots f_k(x_k)$$

is

$$f(x) = \frac{1}{p}(a_1 \dots a_n x^c - 1), \quad f_i(x) = \frac{1}{p}(a_i x^c - 1) \quad (1 \leq i \leq n).$$

THEOREM 11. The general continuous solution of functional equation

$$f(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} f(x_1) \dots f(x_k)$$

is $f(x) = \frac{1}{p}(e^{cx} - 1)$, and the general continuous solution of functional equation

$$f(x_1 \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} f(x_1) \dots f(x_k)$$

is $f(x) = \frac{1}{p}(x^c - 1)$.

5. The following two theorems are given in [1]:

THEOREM 12. The general continuous solution of functional equation

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} x_1 \dots x_k\right) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

is

$$f(x) = c\ln(1+px) + a_1 + \dots + a_n, \quad f_i(x) = c\ln(1+px) + a_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (x > -\frac{1}{p}).$$

THEOREM 13. The general continuous solution of functional equation

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} x_1 \dots x_k\right) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

is

$$f(x) = a_1 \dots a_n (1+px)^c, \quad f_i(x) = a_i (1+px)^c \quad (1 \leq i \leq n) \quad (x > -\frac{1}{p}).$$

6. THEOREM 14. The general continuous solution of functional equation

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} x_1 \dots x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \sum_{\binom{n}{k}} f_1(x_1) \dots f_k(x_k) \tag{11}$$

is

$$f(x) = \frac{1}{q}(a_1 \dots a_n (px+1)^c - 1), \quad f_i(x) = \frac{1}{q}(a_i (px+1)^c - 1) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (x > -\frac{1}{p}) \tag{12}$$

PROOF. By substitutions

$$qf(x)+1 = g(px+1), \quad qf_i(x)+1 = g_i(px+1), \quad u_i = px_i + 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

from (11) we have

$$g(u_1..u_n) = g_1(u_1)..g_n(u_n).$$

This equation has the following general continuous solution:

$$g(u)=a_1..a_n u^c, \quad g_i(u)=a_i u^c \quad (1\leq i\leq n),$$

so, it is obvious that (12) is solution of (11).

THEOREM 15. The general continuous solution of functional equation

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}\sum_{\binom{n}{k}} x_1..x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\sum_{\binom{n}{k}} f(x_1)..f(x_k)$$

is $f(x)=\frac{1}{q}(px+1)^c-\frac{1}{q} \quad (x>-\frac{1}{p})$.

## REFERENCES:


1. I.I.STAMATE: Equations fonctionnelles contenant plusieurs fonctions ineonues. These Publications No 356 (197 ),
2. P.M.VASIĆ et R.R.JANIĆ: Sur quelques equations fonctionnelles du type de Pexider. Ibid.No 274 - No 301 (1969), 33-45.
3. P.M.VASIĆ, R.R.JANIĆ, O.En.GHEORGHIU: Sur une équation fonctionnelle non linéare. Ibid. No 381 - No 409 (1972), 101-105.

# ON SOME FUNCTIONAL EQUATIONS FOR FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Radovan R. Janić and Josip E. Pečarić

0. In this paper we shall give some functional equations for functions of several variables. We shall use the following notations:

$X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_n)$ i.e. $X,Y\in R^n$,

$aX+bY=(ax_1+by_1,\dots,ax_n+by_n)$ $(a,b\in R)$, $XY=x_1y_1+\dots+x_ny_n$,

$X\times Y=(x_1y_1,\dots,x_ny_n)$, $a(X)=(a(x_1),\dots,a(x_n))$ where $a:R\to R$ is given real function (for example $\log X=(\log x_1,\dots,\log x_n)$).

The following generalizations of Pexider's equations are known:

1° Functional equation (see [1]):

$$f(X_1+\dots+X_m) = f_1(X_1)+\dots+f_m(X_m)$$

where $X_i\in R^n$ $(1\le i\le m)$, $f,f_1,\dots,f_m:R^n\to R$, has a continuous solution

$$f(X)=AX+\sum_{i=1}^{m}c_i,\quad f_i(X)=AX+c_i\quad (1\le i\le m),$$

where $a_1,\dots,a_n,c_1,\dots,c_m$, here and in the next text, are real constants and $A=(a_1,\dots,a_n)$.

2° Functional equation ([1]):

$$f(X_1+\dots+X_m) = f_1(X_1)\dots f_m(X_m)$$

has a continuous solution

$$f(X)=c_1\dots c_m e^{AX},\quad f_i(X)=c_i e^{AX}\quad (1\le i\le m).$$

3° Functional equation ([2]):

$$f(X_1\times\dots\times X_m) = f_1(X_1)+\dots+f_m(X_m)$$

has a continuous solution for $X\in R^n_+$

$$f(X)=A\log X+\sum_{i=1}^{m}c_i,\quad f_i(X)=A\log X+c_i\quad (1\le i\le m).$$

$4^\circ$ Functional equation

$$f(X_1 x \dots x X_m) = f_1(X_1)\dots f_m(X_m)$$

has a continuous solution for $X \in R_+^n$

$$f(X)=c_1\dots c_m e^{A\log X}, \quad f_i(X)=c_i e^{A\log X} \quad (1 \leq i \leq m).$$

This result is a extension of result from [2].

1. Let $p_i$ $(1 \leq i \leq m)$ be real numbers and let $X_i \in R^n$ $(1 \leq i \leq m)$. Functional equation

$$f\left(\frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i X_i\right) = \frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i f_i(X_i) \quad \left(P_m=\sum_{i=1}^{m} p_i\right),$$

has a continuous solution

$$f(X)=AX + \frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i c_i, \quad f_i(X)=AX+c_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

From this result we have that the Jensen functional equation

$$f\left(\frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i X_i\right) = \frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i f(X_i)$$

has a continuous solution $f(X)=AX+c$ ($c$ is a real constant).

Functional equation

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i f(X_i)$$

has a solution if and only if $p_1=\dots=p_m$, and it is $f(X)=AX+c$.

These results are the generalizations of results from [1] (equations (1.6) and (1.7)).

2. Functional equation

$$f\left(\frac{X_1+\dots+X_s}{k}\right) = \sum_{1\binom{s}{m}} f_i(X_1+\dots+X_m),$$

where $\sum_{1\binom{s}{m}}$ denotes the sum of all the combinations of class m for $X_1,\dots,X_s$, has a continuous solution

$$f(X)=k\frac{m}{s}\binom{s}{m}AX+\sum_{i=1}^{r} c_i \quad \left(r=\binom{s}{m}\right), \quad f_i(X)=AX+c_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Functional equation

$$f\left(\frac{X_1+\dots+X_s}{k}\right) = \prod_{i\binom{s}{m}} f_i(X_1+\dots+X_m),$$

where $\prod_{i\binom{s}{m}}$ denotes the product of all the combinations of class m for $X_1,\dots,X_s$, has a continuous solution

$$f(X)=c_1\dots c_r e^{k\frac{m}{s}\binom{s}{m}AX}, \quad f_k(X)=c_k e^{AX} \quad (1\leq k\leq r, \quad r=\binom{s}{m}).$$

These results are generalizations of equations (1.4) and (2.4) from [1].

3. Functional equation

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} d^{k-1}\sum\nolimits_{\binom{p}{k}} X_1 x\dots x X_k\right) = f_1(X_1)+\dots+f_p(X_p) \quad (d\in R)$$

has a continuous solution

$$f(X)=A\log|1+dX|+\sum_{i=1}^{p} c_i, \quad f_k(X)=A\log|1+dX|+c_k \quad (1\leq k\leq p).$$

Functional equation

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} d^{k-1}\sum\nolimits_{\binom{p}{k}} X_1 x\dots x X_k\right) = \prod_{i=1}^{p} f_i(X_i)$$

has a continuous solution

$$f(X)=c_1\dots c_p e^{A\log|1+dX|}, \quad f_k(X) = c_k e^{A\log|1+dX|} \quad (1\leq k\leq p).$$

These results are the generalizations of equations $(1.9_2)$ and $(2.8_1)$ from [1]. Analogously, we can generalise the similar results from [3].

4. Functional equation

$$f(X+Y+Z) = g(X)h(Y,Z)$$

has a solution

$$f(X)=ce^{AX}, \quad g(X)=de^{AX}, \quad h(Y,Z)=\frac{c}{d}e^{A(Y+Z)}.$$

This result is a generalitation of a result of T.Popoviciu (see for example [1]).

Functional equation

$$f(X+Y+Z) = g(X) + h(Y,Z)$$

has a solution $f(X)=AX+c$, $g(X)=AX+d$, $h(Y,Z)=A(Y+Z)+c-d$.

Functional equation

$$f(XxYxZ) = g(X)h(Y,Z)$$

has a solution

$$f(X)=ce^{A\log|X|},\quad g(X)=de^{A\log|X|},\quad h(Y,Z)=\frac{c}{d}e^{A\log|YxZ|}.$$

Functional equation

$$f(XxYxZ) = g(X) + h(Y,Z)$$

has a solution

$$f(X)=A\log|X|+c,\quad g(X)=A\log|X|+d,\quad h(Y,Z)=A\log|YxZ|+c-d.$$

Analogously, we can generalise the similar results from [1].

5. Functional equation

$$f(X+Y) = \frac{g(X)+h(Y)-2g(X)h(Y)}{1-g(X)h(Y)}$$

has a continuous solution

$$f(X)=\frac{AX+c_1+c_2}{AX+c_1+c_2-1},\quad g(X)=\frac{AX+c_1}{AX+c_1-1},\quad h(X)=\frac{AX+c_2}{AX+c_2-1};$$

or

$$f(X)\equiv 1,\quad g(X)\equiv 1,\quad h(X)\ (\not\equiv 1)\text{ arbitrary};$$

or

$$f(X)\equiv 1,\quad g(X)\ (\not\equiv 1)\text{ arbitrary},\quad h(X)\equiv 1.$$

This result is a generalization of functional equation (1) from [4]. By substitution

(1) $$f(X)= -F(X),\quad g(X)= -G(X),\quad h(X)= -H(X),$$

from the previous result we can get the generalization of equation (2) from [4].

Functional equation

$$f(X+Y) = \frac{g(X)+h(Y)-2\cos a\, g(X)\, h(Y)}{1 - g(X)h(Y)} \qquad (a\neq k\pi)$$

has a solutions solution

$$f(X)=\frac{\sin(AX+c_1+c_2)}{\sin(AX+c_1+c_2+a)},\quad g(X)=\frac{\sin(AX+c_1)}{\sin(AX+c_1+a)},\quad h(X)=\frac{\sin(AX+c_2)}{\sin(AX+c_2+a)}.$$

This result is a generalization of functional equation (3) from [4].

Functional equation

$$f(X+Y)=\frac{g(X)+h(Y)-2\operatorname{ch}a\, g(X)\,h(Y)}{1-g(X)h(Y)}\qquad (a\neq 0)$$

has a solution

$$f(X)=\frac{\alpha(c_1c_2e^{AX}-1)}{\alpha^2c_1c_2e^{AX}-1},\quad g(X)=\frac{\alpha(c_1e^{AX}-1)}{\alpha^2c_1e^{AX}-1},\quad h(X)=\frac{\alpha(c_2e^{AX}-1)}{\alpha^2c_2e^{AX}-1}$$

where $\alpha=\operatorname{sh}a+\operatorname{ch}a$, or

(2) $f(X)\equiv\alpha,\quad g(X)\equiv\alpha,\quad h(X)$ arbitrary;

or

(3) $f(X)\equiv\alpha,\quad g(X)$ arbitrary, $h(X)\equiv\alpha$;

or

(4) $f(X)\equiv 1/\alpha,\quad g(X)\equiv 1/\alpha,\quad h(X)$ arbitrary;

or

(5) $f(X)\equiv 1/\alpha,\quad g(X)$ arbitrary, $h(X)\equiv 1/\alpha$;

This result is a generalization of functional equation (4) from [4]. Using the substitution (1), from this result, we can get the generalization of equation (5) from [4].

Functional equation

$$f(X+Y)=\frac{g(X)+h(Y)-2a\,g(X)h(Y)}{1+g(X)h(Y)}$$

has a solution

$$f(X)=\frac{\alpha(c_1c_2e^{AX}-1)}{1+\alpha^2c_1c_2e^{AX}},\quad g(X)=\frac{\alpha(c_1e^{AX}-1)}{1+\alpha^2c_1e^{AX}},\quad h(X)=\frac{\alpha(c_2e^{AX}-1)}{1+\alpha^2c_2e^{AX}}$$

where $\alpha=a+\sqrt{a^2+1}$; or (4); or (5); or

$f(X)\equiv-\alpha,\quad g(X)\equiv-\alpha,\quad h(X)$ arbitrary;

or

$$f(X) \equiv -\alpha, \quad g(X) \text{ arbitrary}, \quad h(X) \equiv -\alpha.$$

This result is a generalization of functional equation (6) from [4].

Analogously, we can get the generalizations of other results from [4] and the generalizations of analogous results from [3].

6. The general continuous solution of functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(X_1+\dots+X_m, X_{m+1}+\dots+X_{m+n}) = 0$$

where the cyclic operators C is given by

$$Cf(X_1, X_2, \dots, X_{m+n}) = f(X_2, \dots, X_{m+n}, X_1),$$

is

$$f_i(X,Y) = A(X+Y)(nX-mY) + c_i(X+Y) \quad (1 \leq i \leq m+n)$$

where $A(X)=(a_1(x_1),\dots,a_r(x_r))$, $a_i: R \to R$ $(1 \leq i \leq r)$ are arbitrary real functions, and $c_i: R^r \to R$ $(1 \leq i \leq m+n)$ are also arbitrary functions such that

$$\sum_{i=1}^{m+n} c_i(X) = 0. \tag{6}$$

This result is a generalization of result from [5] and [6] (see also [7]). The proof is similar with the proof from [6].

The general continuous solution of functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(X_1 x \dots x X_m, X_{m+1} x \dots x X_{m+n}) = 0$$

is

$$f_i(X,Y) = A(XxY)\log|X^n/Y^m| + c_i(XxY) \quad (1 \leq i \leq m+n)$$

where $c_i$ $(1 \leq i \leq m+n)$ satisfy the condition (6).

The general continuous solution of functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(X_1+\dots+X_m, X_{m+1}+\dots+X_{m+n}) = 1$$

is

$$f_i(X,Y) = c_i(X+Y)e^{A(X+Y)(nX-mY)} \quad (1 \leq i \leq m+n)$$

where functions $c_i$ $(1 \leq i \leq m+n)$ satisfy the condition

$$\prod_{i=1}^{m+n} c_i(X) = 1. \tag{7}$$

The general continuous solution of functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(X_1 x \ldots x X_m, X_{m+1} x \ldots x X_{m+n}) = 1$$

is

$$f_i(X,Y) = c_i(XxY)e^{A(XxY)\log|X^n/Y^m|} \quad (1 \leq i \leq m+n)$$

and where functions $c_i$ $(1 \leq i \leq m+n)$ satisfy the condition (7).

Using the solutions of previous cyclic functional equations we can get the generalizations of some nonlineare cyclic functional equations from [7].

REFERENCES


1. I.I.STAMATE: Équations fonctionnelles contenant plusieurs fonctions inconnues. These Publications No 354 - No 356 (1971), 123-156.
2. B.MARTIĆ et R.R.JANIĆ: Sur quelques généralisations des équations fonctionelles. Ibid. No 602 - No 633 (1978), 223-228.
3. P.M.VASIĆ, R.R.JANIĆ and J.E.PEČARIĆ: On some functional equations of Pexider's type. Ibid. (in print).
4. P.M.VASIĆ et R.R.JANIĆ: Sur quelques équations fonctionelles du type de Pexider. Ibid. No 274 - No 301 (1969), 33-45.
5. D.Ž.ĐOKOVIĆ: Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy. Ibid. No 61 - No 64 (1961), 21-28.
6. S.PREŠIĆ et D.Ž.ĐOKOVIĆ: Sur une équation fonctionnelle. Bul.Soc. Math.Phys. R.P.S. 13 (1961), 149-152.
7. J.E.PEČARIĆ and R.R.JANIĆ: On a class of cyclic functional equation These Publications (in print).

# ON A CLASS OF CYCLIC FUNCTIONAL EQUATIONS

Josip E. Pečarić and Radovan R. Janić

0. In this paper we shall give continuous real solutions of some nonlinear cyclic functional equations, i.e. the function $F, f_i$ $(i=1,\ldots,m+n)$ are real and continuous functions of two variable.

1. The general solution of the functional equation (see [1-4]):

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(x_1+\cdots+x_m, x_{m+1}+\cdots+x_{m+n}) = 0 \tag{1}$$

where the cyclic operator $C$ is given by

$$Cf(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = f(x_2, \ldots, x_{m+n}, x_1), \tag{2}$$

is

$$f_i(x,y) = a(x+y)(nx-my) + c_i(x+y) \quad (1 \leq i \leq m+n), \tag{3}$$

where $a, c_1, \ldots, c_{m+n}$ are arbitrary functions such that

$$\sum_{i=1}^{m+n} c_i(x) = 0. \tag{4}$$

REMARK: $1^\circ$ The following results are variants of the functional equation (1):

a) The functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(x_1\cdots x_m, x_{m+1}\cdots x_{m+n}) = 0 \quad (x_i > 0,\ i=1,\ldots,m+n) \tag{5}$$

has a general solution

$$f_i(x,y) = a(xy)\log\frac{x^n}{y^m} + c_i(xy) \quad (1 \leq i \leq m+n), \tag{6}$$

where $a, c_1, \ldots, c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) holds.

b) The general solution of the functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(x_1+\dots+x_m, x_{m+1}+\dots+x_{m+n}) = 1 \tag{7}$$

is

$$f_i(x,y) = c_i(x+y)e^{a(x+y)(nx-my)} \quad (1\leq i\leq m+n) \tag{8}$$

where $a, c_1>0,\dots,c_{m+n}>0$ are arbitrary functions such that

$$\prod_{i=1}^{m+n} c_i(x) = 1. \tag{9}$$

c) The general solution of the functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(x_1\cdots x_m, x_{m+1}\cdots x_{m+n}) = 1 \quad (x_i>0,\ 1\leq i\leq m+n) \tag{10}$$

is

$$f_i(x,y) = c_i(xy)\left(\frac{x^n}{y^m}\right)^{a(xy)} \quad (1\leq i\leq m+n), \tag{11}$$

where $a, c_1>0,\dots,c_{m+n}>0$ are arbitrary functions subject to (9).

1.1. We shall denote by $E_k(x_1,\dots,x_n)$ the k-th elementary symmetric function of $x_1,\dots,x_n$, i.e.,

$$E_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

Let $\alpha$ be a real number and let

$$I_n(x_1,\dots,x_n;\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}E_k(x_1,\dots,x_n).$$

The general solution of the functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} f_i(I_m(x_1,\dots,x_m;\alpha), I_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n};\alpha)) = 0 \tag{12}$$

is

$$f_i(x,y) = b((\alpha x+1)(\alpha y+1))\log\frac{(\alpha x+1)^n}{(\alpha y+1)^m} + c_i((\alpha x+1)(\alpha y+1)) \quad (1\leq i\leq m+n) \tag{13}$$

where $b, c_1,\dots,c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) holds.

Since

$$I_n(x_1,\dots,x_n; \ ) = \frac{1}{\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n}(\alpha x_k+1)-1\right),$$

using the substitutions

$$\alpha x_i+1 = u_i \quad \text{and} \quad f_i\left(\tfrac{1}{\alpha}(u-1),\tfrac{1}{\alpha}(v-1)\right) = F(u,v) \quad (1\le i\le m+n),$$

(12) becomes

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1}F_i(u_1\cdots u_m, u_{m+1}\cdots u_{m+n}) = 0.$$

Using (6), we obtain

$$F_i(u,v) = b(uv)\log\frac{u^n}{v^m} + c_i(uv),$$

where $b, c_1,\dots,c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) holds. So,

$$f_i\left(\tfrac{1}{\alpha}(u-1),\tfrac{1}{\alpha}(v-1)\right) = b(uv)\log\frac{u^n}{v^m} + c_i(uv)$$

i.e. $f_i(x,y)$ is given by (13).

Similarly, we can get the following results:

The general solution of the functional equation

(14) $$\prod_{i=1}^{m+n} C^{i-1}f_i(I_m(x_1,\dots,x_m;\alpha), I_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n};\alpha)) = 1$$

$(x_i > -1/\alpha,\ 1\le i\le m+n)$, is

(15) $$f_i(x,y) = c_i((\alpha x+1)(\alpha y+1))\left(\frac{(\alpha x+1)^n}{(\alpha y+1)^m}\right)^{b((\ x+1)(\ y+1))} \quad (1\le i\le m+n),$$

where $b, c_1>0,\dots,c_{m+n}>0$ are arbitrary functions subject to (9).

The general solution of the functional equation

(16) $$I_{m+n}(F_1,\dots,F_{m+n};\alpha) = 0 \quad (\alpha\in R)$$

where

(17) $$F_i = C^{i-1}f_i(x_1+\dots+x_m, x_{m+1}+\dots+x_{m+n}) \quad (1\le i\le m+n)$$

is

(18) $$f_i(x,y) = \frac{1}{\alpha}\left(c_i(x+y)e^{b(x+y)(nx-my)}-1\right) \quad (1\le i\le m+n),$$

where $b, c_1>0,\dots,c_{m+n}>0$ are arbitrary functions such that (9) is valid.

The general solution of the functional equation (16) where

(19) $$F_i = C^{i-1} f_i(x_1 \ldots x_m, x_{m+1} \ldots x_{m+n}) \quad (1 \le i \le m+n)$$

is

(20) $$f_i(x,y) = \frac{1}{\alpha}\left(c_i(xy)\left(\frac{x^n}{y^m}\right)^{a(xy)} - 1\right), \quad (1 \le i \le m+n),$$

where $a, c_1 > 0, \ldots, c_{m+n} > 0$ are arbitrary functions subject to (9).

The general solution of the functional equation (16), where

(21) $$F_i = C^{i-1} f_i(I_m(x_1, \ldots, x_m; \alpha), I_n(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}; \alpha)) \quad (1 \le i \le m+n),$$

$(x_i > -1/\alpha,\ 1 \le i \le m+n)$, is

(22) $$f_i(x,y) = \frac{1}{\alpha}\left(c_i((\alpha x+1)(\alpha y+1))\left(\frac{(\alpha x+1)^n}{(\alpha y+1)^m}\right)^{b((\alpha x+1)(\alpha y+1))} - 1\right)$$

$(1 \le i \le m+n)$,

where $b, c_1 > 0, \ldots, c_{m+n} > 0$ are arbitrary functions such that (9) is valid.

1.2. We shall write

$$J_n(x_1, \ldots, x_n; \alpha) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha^{k-1} E_k(x_1, \ldots, x_n).$$

The general solution of the functional equation

(23) $$J_{m+n}(F_1, \ldots, F_{m+n}; \alpha) = 0 \quad (\alpha \in R),$$

where $F_i$ $(1 \le i \le m+n)$ are given by (17), is

(24) $$f_i(x,y) = -\frac{1}{\alpha}\,\frac{b(x+y)(nx-my)+c_i(x+y)}{b(x+y)(nx-my)+c_i(x+y)-1} \quad (1 \le i \le m+n),$$

where $b, c_1, \ldots, c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) holds;

or

(25) $f_i(x,y) = -1/\alpha$, $f_j(x,y) = -1/\alpha$ $(i \ne j)$, $f_k(x,y)$ $(1 \le k \le m+n,\ k \ne i,j)$ are arbitrary functions.

Indeed, by substitutions $f_i(x,y) \to -\frac{1}{\alpha}\,\frac{f_i(x,y)}{f_i(x,y)-1}$ $(1 \le i \le m+n)$,

and using the identity

$$J_n\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{y_1}{y_1-1},\dots,-\frac{1}{\alpha}\frac{y_n}{y_n-1};\alpha\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{y_1+\dots+y_n}{(y_1-1)\dots(y_n-1)},$$

we can get (24). Now, let $f_i(x,y)=-1/\alpha$. Then (23) becomes $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m+n}(\alpha F_j+1)=0$, wherefrom we have (25).

Analogously, we can get the following results:

The general solution of the functional equation (23), where $F_i$ $(1\leq i\leq m+n)$ are given by (19), is

$$(26)\qquad f_i(x,y)=-\frac{1}{\alpha}\frac{b(xy)\log(x^n/y^m)+c_i(xy)}{b(xy)\log(x^n/y^m)+c_i(xy)-1}\quad (1\leq i\leq m+n),$$

or (25), where $b,c_1,\dots,c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) holds.

1.3. Now, let

$$S_n(x_1,\dots,x_n;\alpha,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\varepsilon^k\alpha^{2k}E_{2k+1}(x_1,\dots,x_n).$$

The general solution of the functional equation

$$(27)\qquad S_{m+n}(F_1,\dots,F_{m+n};\alpha,\varepsilon)=0\quad (\alpha>0),$$

where $F_i$ $(1\leq i\leq m+n)$ are given by (17), is

a) for $\varepsilon=-1$,

$$(28)\qquad f_i(x,y)=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}(b(x+y)(nx-my)+c_i(x+y))\quad (1\leq i\leq m+n),$$

where $b,c_1,\dots,c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) is valid;

b) for $\varepsilon=1$,

$$(29)\qquad f_i(x,y)=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{th}(b(x+y)(nx-my)+c_i(x+y))\quad (1\leq i\leq m+n),$$

where $b,c_1,\dots,c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) is valid, or

(30) $f_i(x,y)=1/\alpha$, $f_j(x,y)=-1/\alpha$ $(i\neq j)$, $f_k(x,y)$ $(1\leq k\leq m+n,\ k\neq i,j)$ are arbitrary functions.

This result is a generalization of functional equation from [6] (see also [7]).

Indeed, using the substitutions $F_i \to \operatorname{tg} F_i$ ($\operatorname{th} F_i$) ($1 \le i \le m+n$), we have that equation (27) is equivalent to

$$\operatorname{tg}(F_1+\dots+F_{m+n}) = 0 \quad (\text{or } \operatorname{th}(F_1+\dots+F_{m+n}) = 0)$$

wherefrom we can get (28) (or (29)).

Now, let $f_i(x,y) = 1/\alpha$. Then (27) for $\varepsilon = 1$, becomes $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m+n}(1+\alpha F_k) = 0$ wherefrom we have (30).

Analogously, we can obtain the following result :

The general solution of the functional equation (27), where $F_i$ ($1 \le i \le m+n$) are given by (19), is

a) for $\varepsilon = -1$,

$$f_i(x,y) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}(b(xy)\log(x^n/y^m)+c_i(xy)) \quad (1 \le i \le m+n) \tag{31}$$

where $b, c_1, \dots, c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) is valid;

b) for $\varepsilon = 1$,

$$f_i(x,y) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{th}(b(xy)\log(x^n/y^m)+c_i(xy)) \quad (1 \le i \le m+n) \tag{32}$$

or (30), where $b, c_1, \dots, c_{m+n}$ are arbitrary functions such that (4) is valid.

REMARK: $2^0$ Using the ideas from [5], we can get some other analogous results.

2. The general solution of the functional equation (see [3]):

$$\sum_{i=1}^{n+m+p} C^{i-1} F(x_1+\dots+x_m, x_{m+1}+\dots+x_{m+n}) = 0 \quad (m,n,p \in N) \tag{33}$$

where the cyclic operator $C$ is given by

$$Cf(x_1,x_2,\dots,x_{m+n}) = f(x_2,\dots,x_{m+n},x_{m+n+1}) \quad (x_{m+n+p+i} = x_i), \tag{34}$$

is

$$F(x,y) = c(nx-my) \quad (n \ne m). \tag{35}$$

$$F(x,y) = h(x) - h(y) \quad (n=m), \tag{36}$$

where, here and in the next text, c is an arbitrary constant and h is an arbitrary function.

REMARK: 3° The following results are variants of the functional equation (33):

a) The general solution of the functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F(x_1\cdots x_m, x_{m+1}\cdots x_{m+n}) = 0 \quad (x_i>0,\ 1\leq i\leq m+n+p) \tag{37}$$

is

$$\begin{aligned} F(x,y) &= c\log(x^n/y^m) \quad (n\neq m),\\ F(x,y) &= h(x) - h(y) \quad (n=m). \end{aligned} \tag{38}$$

b) The general solution of the functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F(x_1+\dots+x_m, x_{m+1}+\dots+x_{m+n}) = 1 \tag{39}$$

is

$$F(x,y) = e^{c(nx-my)} \quad (n\neq m), \tag{40}$$

$$F(x,y) = h(x)/h(y) \quad (n=m,\ h \text{ is positive function}). \tag{41}$$

c) The general solution of the functional equation

$$\prod_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F(x_1\cdots x_m, x_{m+1}\cdots x_{m+n}) = 1 \quad (x_i>0,\ 1\leq i\leq m+n+p) \tag{42}$$

is

$$F(x,y) = (x^n/y^m)^c \quad (n\neq m), \text{ and (41) for } n=m. \tag{43}$$

2.1. The general solution of the functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F(I_m(x_1,\dots,x_m;\alpha), I_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n};\alpha)) = 0 \quad (\alpha\in R), \tag{44}$$

where $I_n$ is defined as in 1.1, $x_i > -1/\alpha$ for $1\leq i\leq m+n+p$, is

$$F(x,y) = c\log\frac{(\alpha x+1)^n}{(\alpha y+1)^m} \quad (n\neq m), \text{ and (36) for } n=m. \tag{45}$$

The general solution of the functional equation

(46) $$\prod_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F(I_m(x_1,\dots,x_m;\alpha),I_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n};\alpha)) = 1$$

$(x_i > -1/\alpha,\ 1 \leq i \leq m+n+p)$, is

(47) $$F(x,y) = \frac{(\alpha x+1)^{nc}}{(\alpha y+1)^{mc}} \quad (n \neq m), \quad \text{and (41) for } n=m.$$

The general solution of the functional equation

(48) $$I_{m+n+p}(F_1,\dots,F_{m+n+p};\alpha) = 0 \quad (\alpha \in R),$$

where

(49) $$F_i = c^{i-1}F(x_1+\dots+x_m,x_{m+1}+\dots+x_{m+n}) \quad (1 \leq i \leq m+n+p),$$

is

(50) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}(e^{c(nx-my)}-1) \qquad (n \neq m),$$

(51) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}((h(x)/h(y))-1) \quad (n=m,\ h \text{ is positive function}).$$

The general solution of the functional equation (48), where

(52) $$F_i = c^{i-1}F(x_1\cdots x_m,x_{m+1}\cdots x_{m+n}) \quad (1 \leq i \leq m+n+p),$$

$(x_i > 0,\ 1 \leq i \leq m+n+p)$, is

(53) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}((x^n/y^m)^c-1) \quad (n \neq m), \quad \text{and (51) for } n=m.$$

The general solution of the functional equation (48), where

(54) $$F_i = c^{i-1}F(I_m(x_1,\dots,x_m;\alpha),I_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n};\alpha))$$

$(x_i > -1/\alpha,\ 1 \leq i \leq m+n+p)$, is

(55) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{(\alpha x+1)^{cn}}{(\alpha y+1)^{cm}}-1\right) \quad (n \neq m), \quad \text{and (51) for } n=m.$$

2.2. The general solution of the functional equation

(56) $$J_{n+m+p}(F_1,\dots,F_{m+n+p};\alpha) = 0 \quad (\alpha \in R),$$

where $J_n$ is defined as in 1.2, and $F_i$ $(1 \leq i \leq m+n+p)$ are given by (49), is

(57) $$F(x,y) = -\frac{1}{\alpha}\,\frac{c(nx-my)}{c(nx-my)-1} \quad (n \neq m),$$

(58) $$F(x,y) = -\frac{1}{\alpha}\frac{h(x)-h(y)}{h(x)-h(y)-1} \quad (n=m),$$

or

(59) $$F(x,y) = -1/\alpha.$$

The general solution of the functional equation (56), where $F_i$ $(1 \leq i \leq m+n+p)$ are given by (52), is

(60) $$F(x,y) = -\frac{1}{\alpha}\frac{c\log(x^n/y^m)}{c\log(x^n/y^m)-1} \quad (n \neq m), \quad \text{and (58) for } n=m;$$

or (59).

2.3. The general solution of the functional equation

(61) $$S_{m+n+p}(F_1,\ldots,F_{m+n+p};\alpha,\varepsilon) = 0 \quad (\alpha > 0),$$

where $S_n$ is defined as in 1.3, and $F_i$ $(1 \leq i \leq m+n+p)$ are given by (49), is

a) for $\varepsilon = -1$,

(62) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}(cnx-cmy) \quad (n \neq m),$$

(63) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}(h(x)-h(y)) \quad (n=m);$$

b) for $\varepsilon = 1$,

(64) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{th}(cnx-cmy) \quad (n \neq m),$$

(65) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{th}(h(x)-h(y)) \quad (n=m).$$

The general solution of the functional equation (61), where $F_i$ $(1 \leq i \leq m+n+p)$ are given by (52), is

a) for $\varepsilon = -1$,

(66) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}\left(c\log\frac{x^n}{y^m}\right) \quad (n \neq m), \quad \text{and (63) for } n=m,$$

b) for $\varepsilon = 1$,

(67) $$F(x,y) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{th}\left(c\log\frac{x^n}{y^m}\right) \quad (n \neq m), \quad \text{and (65) for } n=m.$$

<u>REMARKS:</u> 4° The functional equation

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} c^{i-1}F_i(x_1+\ldots+x_m, x_{m+1}+\ldots+x_{m+n}) = 0$$

is also consider in [3], and solution for m=2, n=1, p=1, is given. Using this result, we can get some results which are analogous to the previous results.

$5^{\circ}$ We can get some analogous results for equation (III.3.1) from [3, p. 39], too.

x

x x

The authors are grateful to Professor D.Ž. Djoković for useful suggestions.

REFERENCES:

1. D.Ž.DJOKOVIĆ: Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy. These Publications No 61 - No 64 (1961), 21-28.
2. S.PREŠIĆ et D.Ž.DJOKOVIĆ: Sur une équation fonctionnelle. Bulletin de la Société des mathématiciens it physiciens de la R.P. de Serbie, 13 (1961), 149-152.
3. D.Ž.DJOKOVIĆ: O nekim klasama cikličnih funkcionalnih jednačina. These Publications No 114 (1963), 1-48.
4. D.Ž.DJOKOVIĆ, R.Ž.DJORDJEVIĆ, P.M.VASIĆ: On a class of functional équations. Publ.Inst.Math.(Belgrade) 6 (20) (1966), 65-76.
5. P.M.VASIĆ, R.R.JANIĆ and J.E.PEČARIĆ: On some functional equations of Pexider's type.
6. C.EM.GHEORGHIU: Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéare. Publ.Inst.Math.(Belgrade) 6 (20) (1966), 5-7.
7. P.M.VASIĆ et R.R.JANIĆ: Généralisation d'une équation fonctionnelle These Publications No 274 - No 301 (1969), 47-52.

Faculty of Civil Engineering
Faculty of Electrical Engineering
Bulevar Revolucije 73, 11ooo Belgrade
Yugoslavia