UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

IVAN ARANĐELOVIĆ

STAVOVI O PRESECANJU
I NJIHOVE PRIMENE U NELINEARNOJ ANALIZI

- DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd 1999.

PREDGOVOR

Osnova za izradu ovog rada bila su saopštenja profesora dr Milana R. Taskovića: A new method for MIN - MAX theory (III godišnji sastanak IWAA, 9. juna 1989. u Kuparima); New Convex Minimax theory (IV godišnji sastanak IWAA, 1.juna 1990. godine u Kuparima). Veći deo rezultata izloženih na tim saopštenjima Tasković je objavio u radovima [1990],[1992],[1993b] i [1993c].

Pojedine delove ovog rada izložili smo u okviru sledećih saopštenja: Transverzalne tačke i uopštene konveksne funkcije (FILOMAT '20, 28. septembra 1991. u Nišu); Nekonveksne minimaks teoreme (seminar iz primenjene matematike, u Beogradu 7. aprila 1992.); Jedno uopštenje KKM principa i njegove primene (FILOMAT '92, 9. oktobra 1992 u Nišu); Konveksnost i nepokretne tačke (Matematički institut SANU, 18. februara 1993.); Fazi skupovi u teoriji igara (Matematički institut SANU, 1. aprila 1993.); KKM preslikavanja i Šauderova hipoteza (Matematički fakultet - Beograd, 9. maja 1995.); KKM preslikavanja, njihova uopštenja i primene (Prirodno Matematički fakultet - Novi Sad, 9. juna 1995.); O Šauderovoj hipotezi (Matematički fakultet - Beograd. 9. januara 1996.); On the weakly admissibility on topological vector space and its application in fixed point theory (II Matematička konferencija - Priština. 27. septembara 1996.); A new extension of Kakutani's fixed point theorem (4. simpozijum iz matematičke analize i njenih primena - Aranđelovac. 29. maja 1997.); Mere nekompaktnosti (Filozofski fakultet - Niš, 5. maja 1998.). Neki od dobijenih rezultata objavljeni su u radovima [1992a]. [1992b]. [1993]. [1995]. [1996]. [1997] i [1998].

Metode korišćene u dokazima teorema jednog dela ove teze primenjivali smo prvi put u magistarskom radu: "Jedan ekvivalent Brauerove teoreme i njegove primene u nelinearnoj analizi", odbranjenom na Matematičkom fakultetu u Beogradu 16. decembra 1993. godine. Članovi komisije dr Milan R. Tasković, dr Dušan D. Adamović, dr Đuro Kurepa i dr Vladimir Rakočević pružili su mi veliku pomoć prilikom izrade tog rada. Njihove ideje i saveti duboko su utkani u ovu tezu. Sa žaljenjem podsećam da akademik Đuro Kurepa nije dočekao da vidi praktično ostvarenje izvesnih svojih ideja, usled svoje tragične smrti septembra 1993. godine.

Delove ove teze pročitali su dr Olga Hadžić, dr Ljilana Gajić, mr Branislav Mijajlović, mr Vladimir Grujić, mr Marina Milovanović-Arandelović i Nebojša Nikolić. Oni su mi ukazali na više propusta i pomogli prilikom njihovog otklanjanja. U rešavanju problema tehničke pripreme i obrade teksta veliku nesebičnu pomoć su mi pružili kolege Miroljub Anđelković, diplomirani matematičar i Dragan Krstić, diplomirani inženjer mašinstva.

Na kraju mi preostaje prijatna obaveza da se zahvalim mentoru rada dr Milanu R. Taskoviću i članovima komisije za pregled i odbranu, dr Ljubomiru B. Ćiriću i dr Vladimiru Rakočeviću na korisnim savetima i sugestijama.

UVOD

Nelinearna funkcionalna analiza je matematička disciplina koja poslednjih godina doživljava buran razvoj. Njeni prapočeci su radovi iz varijacionog računa Isaka Njutna, Jakoba Bernulija, Leonarda Ojlera, Žozefa Luja Lagranža, Karla Fridriha Gausa i Gustava Ležena Dirihleta, zatim je sledio niz Poenkareovih rezultata sa primenama u mehanici, da bi se klasičan period nelinearne analize završio Bolovim rezultatima iz 1904. "Zadatak o brahistohroni" koji je postavio Jakob Bernuli 1696. godine, obično se uzima za početak varijacionog računa, pa prema tome i nelinearne funkcionalne analize. Međutim, Bernulijevim razmatranjima prethodili su jedan Galilejev problem, kao i Fermaov princip geometrijske optike. Prema istraživanjima Josifa Vukovića [1988], jedan problem optimalnog upravljanja korektno je postavio i rešio Isak Njutn u svojim "Principima prirodne filozofije". Kratak istorijski pregled nastanka varijacionog računa može se naći u radu Zorana Stokića [1991]. Jedan od najznačajnijih događaja u klasičnoj nelinearnoj analizi je predavanje Davida Hilberta na međunarodnom kongresu matematičara u Parizu 1900. godine, u kome je izložio 23 najznačajnija nerešena problema ondašnje matematike, od kojih 19, 20. i 23 pripadaju varijacionom računu, pa prema tome i nelinearnoj analizi.

Moderan period istraživanja u nelinearnoj analizi započeo je 1920. godine, kada je uopštavajući klasičnu Pikarovu teoremu o egzistenciji rešenja diferencijalnih jednačina, Stefan Banah u svojoj doktorskoj tezi dokazao poznati stav o fiksnim tačkama kontraktivnih preslikavanja. Banahova teza je objavljena dve godine kasnije u časopisu Fundamenta Matematika. Proučavanje fiksnih tačaka kontraktivnih preslikavanja je i danas jedna od najvažnijih oblasti nelinearne analize.

Prvo tvrđenje koje je ekvivalentno Brauerovoj teoremi o fiksnim tačkama iskazao je i dokazao Anri Poenkare 1883. godine, a sledeće Pirs Bol 1904. godine (prvi jednodimenzionalni ekvivalent je poznata Bolcanova teorema o nulama neprekidne funkcije dokazana 1817. godine). Brauer 1909. dokazuje stav o fiksnim tačkama za slučaj trodimenzionog euklidskog prostora. 1910. Adamar dokazuje odgovarajuće tvrđenje za proizvoljan konačno dimenzionalni prostor, koristeći Kronekerov indeks, a isto tvrđenje dokazuje Brauer 1912. koristeći simplicijalnu aproksimaciju i pojam stepena preslikavanja. Detaljniji komentari o odnosu Brauerovog i Bolovog rezultata mogu se naći u članku Milorada Bertolina [1972], kao i u monografijama Taskovića [1986] i [1993a].

Iako su Poenkare i Bol dali direktne primene svojih rezultata u teoriji diferencijalnih jednačina, kao i u Nebeskoj (Poenkare), odnosno Analitičkoj (Bol) mehanici, dugo nije bilo ozbiljnijih primena Brauerovog stava u Matematičkoj analizi, izuzimajući jedan rezultat Šaudera iz 1927. godine koji se odnosi na egzistenciju rešenja eliptičkih parcijalnih jednačina. Do naglog preokreta dolazi kada je Džon fon Nojman [1928] primenio Brauerovu teoremu, koja je već našla široke primene u Topologiji i Diferencijalnoj geometriji (teorija polja), u dokazu egzistencije rešenja matričnih igara sume nula u skupu kombinovanih strategija. Ovaj rezultat, koji predstavlja osnovu klasične teorije igara, naglo je povećao interes matematičara različitih specijalnosti za proučavanje primena ove teoreme u različitim oblastima analize. Fon Nojmanova teorema je doživela brojna uopštenja od kojih je najpoznatije dokazao M. Sajon [1958].

Knaster, Kuratovski i Mazurkjević [1929] daju jednostavan dokaz Brauerove teoreme, koji se danas praktično može naći u svakom udžbeniku topologije. Koristeći Špernerovu kombinatornu lemu, oni najpre dokazuju stav o presecanju, poznatiji kao KKM lema, iz koga dobijaju dokaz teoreme. Može se pokazati da je KKM lema ekvivalentna sa Brauerovom teoremom. Interesantno je da tvrđenje o nepraznom preseku ostaje tačno i kada su svi skupovi koji pokrivaju simpleks otvoreni! To su dokazali, 50 godina kasnije, verovatno nezavisno jedan od drugog, korejski matematičar Kim [1987] i tajvanski Ših [1986]. Šihov rezultat je objavljen 1986. a Kimov 1987; međutim, oba rada su predata za štampu u proleće 1985. godine. Od mnogobrojnih uopštenja KKM leme najznačajnije je dokazao Ki Fan [1961]. Ta teorema je poznata kao KKM princip i do danas je dobila mnogobrojne primene u različitim oblastima nelinearne analize. Njihov detaljan pregled može se naći u poznatom članku Marka Lasondea [1983]. U poslednje dve decenije veliki broj radova je posvećen prenošenju pojma konveksnosti na topološke prostore koji ne moraju imati algebarsku strukturu. Na tim klasama prostora dobijena su različita uopštenja KKM principa (Horvat [1983] i [1991], Bardaro i Kepiteli [1988],...).

Šauder [1930] prenosi tvrđenje Brauerove teoreme sa konačno dimenzionih (euklidskih) na beskonačno dimenzione (normirane) prostore i daje nove primene u teoriji jednačina matematičke fizike. Tihonov [1935] pokazuje da odgovarajući stav o fiksnim tačkama važi na lokalno konveksnim topološkim vektorskim prostorima. Dalja uopštenja teoreme Tihonova dali su: Ki Fan [1964], K. Zima [1977] (za slučaj metrizabilnih prostora), B. Žepecki [1979], O. Hadžić [1981], A. Idzik [1988] i N. T. Nhu [1996]. Novi dokaz teoreme O. Hadžić [1981] dat je u radu I. Aranđelovića [1995]. Međutim, do danas je ostalo nerasvetljeno pitanje, poznato kao Šauderova hipoteza: da li odgovarajuća teorema važi na proizvoljnim Hausdorfovim topološkim vektorskim prostorima?

Matusov [1978] je dao dokaz Šauderove hipoteze za koji se kasnije ispostavilo da je nekorektan. U poslednjih pet godina najznačajniji rezultati o Šauderovoj hipotezi, pored navedenih, objavljeni su u radovima: E. De Paskale [1993], E. De Paskale, G. Trombeta i H. Veber [1993], N. T. Nhu i L. H. Tri [1994]; i T. V. An, N. Nhuj i L. H. Tri [1995].

Japanski matematičar S. Kakutani [1941] uopštio je Brauerovu teoremu na odozgo poluneprekidna višeznačna preslikavanja. Dalja proširenja Kakutanijeve teoreme dobili su S. Eilenberg i D. Montgomeri [1946], F. H. Bohnenblust i S. Karlin [1950], I. L. Gliksberg [1952], Ky Fan [1952], O. Hadžić [1981] i A. Idzik [1988].

Pored brojnih uopštenja, intenzivno su proučavani i mnogobrojni ekvivalenti Brauerove teoreme. Najpoznatije od njih formulisali su: Kakutani [1941], Ki Fan [1952], [1961] i [1972], Hartman i Štampačija [1966] i Feliks Brauder [1968].

Savremeni period u razvoju nelinearne analize karakteriše grananje istraživanja u različitim pravcima, što je delom podstaknuto potrebama mehanike, fizike i ekonomije. O velikom interesovanju za nelinearnu analizu najbolje svedoči činjenica da je u poslednjih 50 godina objavljeno preko 15000 naučnih radova samo iz teorije nepokretne tačke i njenih primena, koja i danas predstavlja najvažniju oblast u nelinearnoj analizi. Detaljan pregled primena metode nepokretne tačke može se naći u radu Kurepe [1991] i monografijama Taskovića [1986], [1993a]. U savremenoj nelinearnoj analizi sve veću primenu nalaze homološke metode čiji se detaljan pregled može naći u monografiji Taskovića [1993a]. Elementaran pristup ovim metodama dat je u radovima Branislava Mijajlovića [1990] i [1997].

Ovaj rad je podeljen u šest glava. Prva od njih je posvećena definiciji mere nekompaktnosti na ravnomernim (uniformnim) prostorima. Pojam mere nekompaktnosti na metričkim prostorima uveden je u klasičnom radu Kuratovskog [1930]. Ovaj pojam našao je mnogobrojne primene u topologiji, teoriji operatora i nelinearnoj analizi. Pored mere nekompaktnosti Kuratovskog uvedeno je još nekoliko neekvivalentnih definicija od kojih su neke date aksiomatski. Glavu počinjemo sa izlaganjem osnovnih osobina mere nekompaktnosti na metričkim prostorima a nastavljamo prenošenjem nekih osobina klasičnih mera nekompaktnosti (mere Kuratovskog i Hausdorfa) sa normiranih prostora na metričke linearne prostore. Posle toga, uvodimo meru nekompaktnosti na pseudo metričkim prostorima, a zatim dajemo definiciju pojma mere nekompaktnosti na ravnomernim prostorima i ispitujemo njene osobine. Kao što se pojam ravnomernog prostora može definisati na više različitih načina, tako se i pojam mere nekompaktnosti na ovoj klasi prostora može uvesti na više načina. Mi smo izabrali jednu od mogućnosti koja nam izgleda najprikladnija za primene. Posle toga dokazujemo stav o karakterizaciji kompletnih ravnomernih prostora. Glavu završavamo stavovima koji uopštavaju odgovarajuće rezultate Horvata iz rada [1985]. Ti stavovi se odnose na postojanje ekstremnih vrednosti i fiksnih tačaka.

U drugoj glavi se govori o stavovima o presecanju KKM tipa. Prenošenje klasičnog rezultata Knastera, Kuratovskog i Mazurkjevića sa euklidskih na apstraktne prostore je problem kojim se dosada bavilo više autora. U ovoj glavi dajemo više teorema o presecanju zatvorenih i otvorenih skupova. U našim teoremama je uslov kontraktibilnosti zamenjen slabijim topološkim uslovom trivijalnosti odgovarajućih homotopskih grupa. Dobijeni rezultati uopštavaju ranije rezultate Horvata [1983], [1984], [1987] i [1991], Čanga i Zanga [1991] i Čanga i Maa [1992]. Njihovim primenama su posvećene treća, četvrta i peta glava.

U trećoj glavi su uopšteni izvesni rezultati o fiksnim tačkama koje je dobio Horvat u radu [1984]. U našim rezultatima uspeli smo da oslabimo uslov kontraktibilnosti. Kao posledicu dobijamo jedan stav o fiksnim tačkama koji sadrži, kao specijalne slučajeve, Brauerovu teoremu i njena uopštenja koja su dali Šauder [1930], Tihonov [1935], Ki Fan [1964], Zima [1977], Žepecki [1979] i O. Hadžić [1981].

Četvrta glava je posvćena KKM preslikavanjima na topološkim prostorima. KKM preslikavanja su dosad dobila mnogobrojne primene u različitim oblastima nelinearne analize. Proučavanje daljih mogućnosti za primenu preslikavanja ovog tipa dovode do potrebe za njihovim definisanjem na prostorima koji ne poseduju algebarsku strukturu. Glavu počinjemo uvođenjem pojma parakonveksnih prostora a zatim pokazujemo da su definicije ranije razmatranih klasa prostora koji su se pokazali pogodnim za definisanje KKM preslikavanja (topološki vektorski prostori, konveksni prostor - Lasonde [1983], konveksni topološki prostori - Komija [1981], pseudo konveksni prostori - Horvat [1983] i H prostori - Bardaro i Kepiteli [1988]) specijalni slučajevi naše definicije. Dati su i primeri iz kojih se vidi da se parakonveksni prostori ne uklapaju ni u jednu od prethodnih definicija. Naši osnovni rezultati u ovoj glavi su: lema IV.1, koja daje dovoljne uslove za pripadanje klasi KKM preslikavanja; teorema VI.1, koja uopštava teoreme Ki Fana [1961] i Bardara i Kepiteli [1988], teorema IV.2 koja je uopštenje Fan - Brauderove teoreme o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja; minimaks nejednakost koja uopštava rezultat Ki Fana [1972]. Poboljšanja ranijih rezultata dobijena u ovoj glavi ne odnose se samo na domen funkcija kod koga je oslabljen uslov kontraktibilnosti, već i na uslove koje ispunjavaju funkcije jer se umesto klasičane konveksnosti u iskazima teorema koristi proširena konveksnost koja je uvedena u radu Taskovića [1992]. Zatim sledi jedan stav o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja koji uopštava Fan - Kakutanijevu teoremu i varijacioni princip koji je zajedničko uopštenje rezultata koje su dali Hartman, Stampačija, Ki Fan, Kirk, Brauder, Gede, Mazur, Šauder i Park.

U petoj glavi razmatrana su različita uopštenja stavova o presecanju fon Nojmanovog tipa. Dobijeni rezultati su direktno primenjeni u dokazivanju minimaks teorema i stavova o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja.

Šesta glava je posvećena stavovima o nepokretnim tačkama višeznačnih preslikavanja, definisanim na dopustivim i slabodopustivim podskupovima topoloških vektorskih prostora.

I. MERE NEKOMPAKTNOSTI

I.0 UVOD

U mnogim teoremama klasične i moderne matematičke analize važnu ulogu ima uslov *kompaktnosti*, koji je često restriktivan za primene. Da bi se taj uslov oslabio, neophodno je na neki način proceniti koliko se posmatrani skup razlikuje od kompaktnog skupa. Taj problem se uspešno rešava uvođenjem pojma *mere nekompaktnosti*.

Prva definicija mere nekompaktnosti na metričkim prostorima data je u klasičnom radu Kuratovskog [1930]. Zbog teškoća koje se javljaju prilikom konkretnog izračunavanja, kasnije je uvedeno još nekoliko neekvivalentnih definicija, pri čemu novouvedene funkcije zadržavaju osobine mere Kuratovskog. Međutim u funkcionalnoj analizi javljaju se mnogobrojni primeri nemetrizabilnih prostora. Zbog toga smo prvu glavu posvetili definiciji mere nekompaktnosti na ravnomernim (uniformnim) prostorima. Pre toga moramo da razmotrimo još neke osobine mere nekompaktnosti na metričkim linearnim prostorima, jer su se sva dosadašnja istraživanja uglavnom ograničavala na klasu normiranih prostora. Zatim dajemo apstraktne definicije mere nekompaktnosti na klasama metričkih i pseudometričkih prostora. Date definicije obuhvataju, kao što ćemo videti, najvažnije dosad uvedene mere nekompaktnosti. Koristeći meru nekompaktnosti dajemo i novu karakterizaciju kompletnosti pseudometričkih prostora. Posle toga uvodimo pojam apstraktne mere nekompaktnosti na ravnomernim prostorima i izlažemo njene najvažnije osobine.

U prvom odeljku prenosimo osnovne osobine mere nekompaktnosti Kuratovskog, u drugom Hausdorfove a u trećem mere Istrateskua, sa normiranih na metričke linearne prostore. Pored toga se u drugom odeljku dokazuje da je Hausdorfova mera nekompaktnosti jedinične lopte u lokalno ograničenim linearnim prostorima jednaka jedinici. U nastavku trećeg odeljka se razmatra Danešova nejednakost. Njenom primenom izračunavamo meru nekompaktnosti Kuratovskog jedinične kugle u ℓ^p i L^p prostorima za $0 < p < 1$. U četvrtom, petom i šestom odeljku dajemo definicije apstraktne mere nekompaktnosti na metričkim, pseudometričkim i ravnomernim prostorima. Peti odeljak se nastavlja rešavanjem problema karakterizacije kompletnosti pseudometričkih prostora. U šestom odeljku se prenosi Kantorov stav na kompletne ravnomerne prostore. Takođe dajemo i uopštenja Vajerštrasovih teorema o egzistenciji ekstremnih vrednosti, u kojima se oslabljuje uslov kompaktnosti. Sedmi odeljak je posvećen konstrukciji jedne konkretne mere nekompaktnosti koja ispunjava osobine koje zahtevaju aksiome date u šestom odeljku. Odeljak završavamo ispitivanjem osobina i primenama novodefinisane funkcije.

I.1 MERA NEKOMPAKTNOSTI KURATOVSKOG NA METRIČKIM LINEARNIM PROSTORIMA.

Kao što smo već napomenuli, meru nekompaktnosti na metričkim prostorima definisao je Kuratovski [1930]. Taj pojam je ubrzo našao široke primene u različitim matematičkim disciplinama: topologiji, teoriji operatora, nelinearnoj analizi i teoriji diferencijalnih jednačina (videti Banas i Goebel [1980]). Međutim, prilikom konkretnog izračunavanja mere nekompaktnosti Kuratovskog, javljaju se teškoće koje su dovele do uvođenja novih definicija koje nisu ekvivalentne sa prvobitnom. Kao što ćemo videti, novodefinisane funkcije zadržavaju najvažnije osobine funkcije Kuratovskog.

Sada ćemo dati definiciju mere Kuratovskog. U daljem tekstu, sa $\mathcal{P}(X)$ ćemo označavati partitivni skup skupa X, a sa diam(.) dijametar posmatranog podskupa metričkog prostora.

DEFINICIJA I.1.1.. *Neka je (X, d) metrički prostor. Mera nekompaktnosti Kuratovskog je preslikavanje $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, definisano sa*

$$\alpha(A) = \inf\{r > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ S_i \subseteq X,\ diam(S_i) < r\ 1 \leq i \leq n,\ n \in N\},$$

za svaki $A \subseteq X$.

Neke važne osobine prethodno definisane funkcije daćemo u sledećem stavu čiji je dokaz elementaran, pa ga zato izostavljamo (videti Banas i Goebel [1980] ili Rakočević [1994]).

STAV I.1.1. *Neka je (X,d) pseudometrički prostor, $A, B \subseteq X$ i $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mera nekompaktnosti. Tada je:*

1) $\alpha(A) = \infty$ ako i samo ako skup A nije ograničen;

2) $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$;

3) iz $\alpha(A) = 0$ sledi da je A totalno ograničen skup;

4) iz $A \subseteq B$ sledi $\alpha(A) \leq \alpha(B)$;

5) $\alpha(A \bigcup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$;

6) $\alpha(A \bigcap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Sledeći stav, koji je dokazao Kuratovski [1930], posebno je značajan u teoriji nepokretne tačke i nelinearnoj analizi. U nastavku glave daćemo uopštenje tog stava sa metričkih na ravnomerne prostore.

STAV I.1.2. *Neka je X kompletan metrički prostor. Ako je $\{B_n\}_{n\in N}$ niz njegovih zatvorenih podskupova koji ispunjavaju sledeće uslove:*

1) $B_{n+1} \subseteq B_n$ za svako $n \in N$;

2) $\lim_{n\to\infty} \alpha(B_n) = 0$,

tada je $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ neprazan kompaktan skup.

Zapažamo da je stav I.1.2 uopštenje poznate Kantorove teoreme o umetnutim odsečcima.

Mera nekompaktnosti Kuratovskog dosada je najviše proučavana na klasi normiranih prostora. Njene najvažnije osobine na toj klasi prostora dajemo u sledećem stavu (za dokaz videti takođe Banas i Goebel [1980] ili Rakočević [1994]). Sa conv ćemo označavati konveksni omotač posmatranog skupa.

STAV I.1.3. *Neka su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi normiranog prostora X, $x \in X$ i β proizvoljan skalar. Tada je:*

1) $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$;

2) $\alpha(x+Q) = \alpha(Q)$;

3) $\alpha(\beta Q) = |\beta|\alpha(Q)$;

4) $\alpha(\text{conv}(Q)) = \alpha(Q)$.

Prenošenje osobina navedenih u prethodnom stavu na proizvoljne metričke linearne prostore nije uvek moguće. Na primer, u L^p prostorima, $0 < p < 1$, mera nekompaktnosti Kuratovskog jedinične kugle je jednaka 2 (što ćemo kasnije pokazati u stavu I.7.3) a njen konveksni omotač je neograničen skup. Međutim, osobine 1) i 2) se prenose na metričke linearne prostore (što ćemo videti iz stava I.1.4), a u stavu I.1.5 se dokazuje da se osobina 3) može uopštiti na klasu lokalno ograničenih prostora.

Sada ćemo navesti osnovne činjenice iz teorije metričkih linearnih prostora (videti Rolević [1972]).

Neka je X metrički linearan prostor. Tada postoji metrika d na X koja je ekvivalentna sa izvornom metrikom na X, takva da funkcija $\|.\| : X \to [0, +\infty)$, definisana sa $\|x\| = d(x, 0)$ ima sledeće osobine:

1) $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$;

2) $\|x\| = \|-x\|$;

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

4) $0 < \alpha < \beta$ povlači $\|\alpha x\| < \|\beta x\|$.

Preslikavanje $\|.\|$ se naziva *F−norma* ili *paranorma*. Ako postoji broj p, $0 < p \leq 1$, takav da je $\|tx\| = |t|^p\|x\|$ za svaki skalar t i svaki $x \in X$, onda kažemo da je $\|.\|$ *p-norma* a X *p-normirani* prostor.

Neka je X Hausdorfov topološki vektorski prostor. Skup $A \subseteq X$ je *ograničen* ako za svaku okolinu nule U, postoji skalar α, takav da je $A \subseteq \alpha U$. Prostor X je *lokalno ograničen* ako u njegovoj topologiji postoji ograničena okolina nule. Važi sledeće tvrđenje: topološki vektorski prostor X je lokalno ograničen ako i samo ako je metrizabilan i p-normiran.

Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$. Sa $B(x, r)$ označavaćemo zatvorenu kuglu $\{y \in X : d(x, y) \leq r\}$, a sa $U(x, r)$ otvorenu kuglu $\{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Sada prelazimo na izlaganje naših rezultata.

STAV I.1.4. *Ako su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi proizvoljnog metričkog linearnog prostora X i $x \in X$, tada je:*

1) $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$;

2) $\alpha(x + Q) = \alpha(Q)$.

DOKAZ: Neka je $Q_1 \subseteq \cup_{i=1}^{m} A_i$; $\operatorname{diam}(A_i) \leq \alpha(Q_1)$ i $Q_2 \subseteq \cup_{j=1}^{n} B_j$; $\operatorname{diam}(B_j) \leq \alpha(Q_2)$. Iz

$$Q_1 + Q_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [A_i + B_j]$$

i $\operatorname{diam}(A_i + B_j) \leq \operatorname{diam}(A_i) + \operatorname{diam}(B_j)$, sledi $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$.

Iz 1) imamo $\alpha(x + Q) \leq \alpha(\{x\}) + \alpha(Q) = \alpha(Q)$, što povlači $\alpha(Q) = \alpha(-x + x + Q) \leq \alpha(x + Q)$. Odatle sledi $\alpha(x + Q) = \alpha(Q)$.

STAV I.1.5. *Ako je X lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor, $Q \subseteq X$ njegov ograničen podskup, $|.\|$ p-norma na X i β proizvoljan skalar, tada je*

$$\alpha(\beta Q) = |\beta|^p \alpha(Q).$$

DOKAZ: Neka je $\beta \neq 0$. Iz $Q \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i$ sledi $\beta Q \subseteq \cup_{i=1}^{n} \beta S_i$. Sada je

$$\operatorname{diam}(\beta S_i) = \sup_{x,y \in S_i} |\beta(x - y)\| = |\beta|^p \sup_{x,y \in S_i} |(x - y)\| = |\beta|^p \operatorname{diam}(S_i)$$

odakle sledi $\alpha(\beta Q) \leq |\beta|^p \alpha(Q)$. Pošto je $\beta^{-1}\beta Q = Q$, imamo

$\alpha(Q) \leq |\beta|^{-p}\alpha(\beta Q)$, pa je $|\beta|^p \alpha(Q) \leq \alpha(\beta Q)$. Odatle sledi $\alpha(\beta Q) = |\beta|^p \alpha(Q)$.

Sada navodimo poznato tvrđenje Furija i Vignolija [1970] čiji se dokaz zasniva na topološkom principu Ljusternika, Borsuka i Šnirelmana. Detaljnije informacije o tom principu, njegovim ekvivalentima i njihovim primenama mogu se naći u monografiji Tasković [1993a] i radu Tasković [1993b].

STAV I.1.6. *Ako je X beskonačno dimenzionalni normiran prostor, onda je* $\alpha(B(0,1)) = 2$.

Naš naredni stav je proširenje stava I.1.6 na beskonačno dimenzionalne metričke linearne prostore. Za njegov dokaz nam je potrebna sledeća lema, koja je verzija klasičnog rezultata Borsuka, Ljusternika i Šnirelmana.

LEMA I.1.1. *Neka je E_n n-dimenzionalni metrički linearni prostor, $F_1, \dots, F_n$ njegovi zatvoreni podskupovi i $S_*^{n-1} = \{x \in E_n \mid |x\| = 1\}$. Ako je $S_*^{n-1} \subseteq \cup_{i=1}^n F_i$ onda postoje $x \in S_*^{n-1}$ i $i \in \{1, \dots, n\}$ takvi da $x \in F_i$ i $-x \in F_i$.*

DOKAZ: Neka je $\|.\|$ Euklidska norma na E_n i $S^{n-1} = \{x \in E_n \mid \|x\| = 1\}$. Preslikavanje $h : S_*^{n-1} \to S^{n-1}$ definisano sa $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$ je homeomorfizam skupova S_*^{n-1} i S^{n-1} koji ispunjava uslov $h(-x) = -h(x)$. Iz $S_*^{n-1} \subseteq \cup_{i=1}^n F_i$ sledi $S^{n-1} \subseteq \cup_{i=1}^n h(F_i)$. Iz teoreme Borsuka, Ljusternika i Šnirelmana sledi da postoje $y \in S^{n-1}$ i $i \in \{1, \dots, n\}$ takvi da $y \in h(F_i)$ i $-y \in h(F_i)$. Ako je $x = h^{-1}(y) = \frac{y}{|y\|}$, onda $x \in F_i$ i $-x \in F_i$.

Interesantno je da tvrđenje prethodne leme važi i za pokrivanja otvorenim skupovima!

LEMA I.1.1'. *Neka je E_n n-dimenzionalni metrički linearni prostor, $U_1, \dots, U_n$ njegovi otvoreni podskupovi i $S_*^{n-1} = \{x \in E_n \mid |x\| = 1\}$. Ako je $S_*^{n-1} \subseteq$*

$\cup_{i=1}^n U_i$ *onda postoje* $x \in S_*^{n-1}$ *i* $i \in \{1,...,n\}$, *takvi da* $x \in U_i$ *i* $-x \in U_i$.

DOKAZ: Svakoj tački $x \in S_*^{n-1}$ možemo pridružiti okolinu V_x takvu da za svako $j \in \{1,...,n\}$ iz $x \in U_j$ sledi

$$x \in V_x \subseteq \overline{V}_x \subseteq U_j.$$

Familija skupova $\{V_x\}_{x \in S_*^{n-1}}$ obrazuje otvoreni pokrivač skupa S_*^{n-1}. Iz kompaktnosti te sfere sledi da postoje $x_1,...,x_k$ takvi da je

$$S_*^{n-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Familija skupova

$$F_j = \bigcup_{x_i \in U_j} \overline{V}_{x_i}$$

ispunjava sledeće uslove:

1) F_j su zatvoreni skupovi;

2) $S_*^{n-1} \subseteq \cup_{j=1}^n F_j$;

3) $F_j \subset U_j$.

Prema Lemi I.1.1 iz 1) i 2) sledi da postoje $x \in S_*^{n-1}$ i $i \in \{1,...,n\}$, takvi da $x \in F_i$ i $-x \in F_i$. Odatle, iz 3) sledi da $x \in U_i$ i $-x \in U_i$.

STAV I.1.7. *Ako je* X *beskonačnodimenzionalni metrički linearan prostor, i* $B(0,1)$ *njegova zatvorena jedinična kugla, onda je*

$$\operatorname{diam}(B(0,1)) \geq \alpha(B(0,1)) \geq \inf_{\|x\|=1} \|2x\|.$$

DOKAZ: Zapazimo da je $\operatorname{diam}(B(0,1)) \geq \alpha(B(0,1))$. Ako je $\alpha(B(0,1)) < s = \inf_{\|x\|=1} \|2x\|$, onda postoje zatvoreni skupovi $F_1,...,F_n \subseteq X$, takvi da je $B(0,1) \subseteq \cup_{i=1}^n F_i$, i $\operatorname{diam}(F_i) < s$, $1 \leq i \leq n$. Neka je $\{x_1,...,x_n\}$ linearno nezavisan podskup od X. Tada je $E_n = \text{lin}\{x_1, ..., x_n\}$ konačno dimenzionalni potprostor od X i

$$S_*^{n-1} = \{x \in E_n \mid \|x\| = 1\} \subseteq \cup_{i=1}^n F_i \cap S_*^{n-1}.$$

Iz *Leme I.1.1* sledi da postoje $x \in S_*^{n-1}$ i $i \in \{1, ..., n\}$, takvi da je $\{x, -x\} \subseteq F_i \cap S_*^{n-1}$. Iz $d(x, -x) = \|2x\|$ sledi $\text{diam}(F_i) \geq s$, što je kontradikcija.

POSLEDICA I.1.1. *Ako je X beskonačno-dimenzionalni lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor, $x_0 \in X$, $\|.\|$ p-norma na X i $r > 0$, onda je*

$$r2^p \leq \alpha(B(x_0, r)) \leq r\text{diam}(B(0, 1)).$$

DOKAZ: Za $r > 0$ uslovi $\|x\| \leq 1$ i $\|r^{\frac{1}{p}}x\| \leq r$ su ekvivalentni, što povlači $B(0, r) = r^{\frac{1}{p}}B(0, 1)$. Odatle imamo

$$\alpha(B(x_0, r)) = \alpha(x_0 + B(0, r)) = \alpha(B(0, r)) =$$
$$= \alpha(r^{\frac{1}{p}}B(0, 1)) = r\alpha(B(0, 1)) \geq r2^p$$

i $\text{diam}(B(x_0, r)) = \text{diam}(B(0, r)) = \text{diam}(r^{\frac{1}{p}}B(0, 1)) = r\text{diam}(B(0, 1))$.

Prethodni stav nas dovodi do problema određivanja dijametra jedinične kugle u metričkim linearnim prostorima. Ako prostor nije normiran, taj problem postaje prilično komplikovan jer dijametrar kugle ne mora biti jednak rastojanju između algebarski dijametralno suprotnih tačaka. Naravno, iz nejednakosti trougla sledi da je u proizvoljnom metričkom prostoru diametar zatvorene kugle manji ili jednak od dva poluprečnika, ali ta vrednost ne mora uvek biti dostignuta. U primerima I.1.1 i I.1.2 pokazaćemo kako se može odrediti dijametar jedinične kugle lokalno ograničenim prostorima ℓ^p i L^p $(0 < p < 1)$.

PRIMER I.1.1. *U ℓ^p prostoru $(0<p<1)$ je* $\operatorname{diam}(B(0,1))=2$.

DOKAZ: Posmatrajmo vektor $x_1=(1,0,0,...)$ i $x_2=(0,-1,0,...)$. Očigledno je $\|x_1\|_{\ell^p}=\|x_2\|_{\ell^p}$ i $\|x_1-x_2\|_{\ell^p}=2$.

PRIMER I.1.2. *U L^p prostoru $(0<p<1)$ je* $\operatorname{diam}(B(0,1))=2$.

DOKAZ: Posmatrajmo L^p $(0<p<1)$ prostor nad prostorom mere $(\mathcal{X},\Omega,\mu)$, gde je μ regularna mera. Iz regularnosti sledi da postoji $A\in\Omega$ takav da je $\mu(A)=\mu(A^c)$. Neka je

$$t=\mu(A)^{-\frac{1}{p}}.$$

Posmatrajmo funkcije:

$$f_1(x)=\begin{cases} t, & \text{za } x\in A\\ 0, & \text{za } x\in A^c\end{cases}$$

i

$$f_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{za } x\in A\\ -t, & \text{za } x\in A^c.\end{cases}$$

Očigledno je $\|x_1\|_{L^p}=\|x_2\|_{L^p}$ i $\|x_1-x_2\|_{L^p}=2$.

U narednim odeljcima ćemo izložiti definiciju i osnovne osobine mera nekompaktnosti Hausdorfa i Istrateskua. Koristeći te mere i Danešovu nejednakost koja ih povezuje, pokazaćemo da je mera nekompaktnosti Kuratovskog jediničnih kugli u prostorima ℓ^p i L^p, $0<p<1$, jednaka 2. Odgovarajući rezultat za obe klase prostora u slučaju $p\geq 1$ sledi iz stava I.1.6.

I.2. HAUSDORFOVA MERA NEKOMPAKTNOSTI NA METRIČKIM LINEARNIM PROSTORIMA.

Sada ćemo izložiti definiciju i osnovne osobine Hausdorfove mere nekompaktnosti.

DEFINICIJA I.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Hausdorfova mera nekompaktnosti je preslikavanje $\chi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, definisano sa*

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 \ : \ Q \text{ ima konačnu } \varepsilon- \text{ mrežu u } X\}.$$

za svaki $Q \subseteq X$.

Hausdorfovu meru nekompaktnosti su definisali Goldeštejn, Gohberg i Markus [1957]. Naziv je dobila po tome što je Hausdorfova mera nekompaktnosti proizvoljnog skupa jednaka Hausdorfovom rastojanju tog skupa od familije nepraznih kompaktnih skupova (posmatrane kao potprostora partitivnog skupa u eksponencijalnoj topologiji). Ukoliko se u definiciji I.2 zahteva da tačke iz konačne $\varepsilon-$ mreže pripadaju skupu Q, dobija se definicaja *unutrašnje Hausdorfove mere nekompaktnosti koju označavamo sa* χ_i.

Sve osobine mere nekompaktnosti Kuratovskog navedene u stavovima I.1.1, I.1.2 i I.1.3 prenose se na Hausdorfovu meru nekompaktnosti (videti Rakočević [1994]). Sada ćemo preneti stavove I.1.4 i I.1.5 na Hausdorfovu meru nekompaktnosti. Rezultati koje dajemo uopštavaju tvrđenja dobijena za klasu ℓ^p $(0 < p)$ u radu I. Jovanovića i V. Rakočevića [1994].

STAV I.2.1. *Ako su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi proizvoljnog metričkog linearnog prostora X i $x \in X$, onda je:*

1) $\chi(Q_1+Q_2)\leq\chi(Q_1)+\chi(Q_2)$;

2) $\chi(x+Q)=\chi(Q)$.

DOKAZ: Neka je $\delta>0$ proizvoljan pozitivan realan broj. Pošto je

$$Q_1+Q_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}[B(x_i,\chi(Q_1)+\delta)+B(y_j,\chi(Q_2)+\delta)],$$

iz $z\in Q_1+Q_2$ sledi da postoje $z_1\in Q_1$ i $z_2\in Q_2$, takvi da je $z=z_1+z_2$, $d(z_1,x_i)<\chi(Q_1)+\delta$ i $d(z_2,y_j)<\chi(Q_2)+\delta$, za neke i,j $(1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq m)$. Pošto je

$$\begin{aligned}d(z,x_i+y_j)&=d(z_1+z_2,x_i+y_j)=d(z_1-x_i,y_j-z_2)\\&\leq d(z_1-x_i,0)+d(z_2-y_j,0)=d(z_1,x_i)+d(z_2,y_j)\\&\leq\chi(Q_1)+\chi(Q_2)+2\delta,\end{aligned}$$

kad $\delta\to0^+$, dobijamo $\chi(Q_1+Q_2)\leq\chi(Q_1)+\chi(Q_2)$.

Iz 1) sledi $\chi(x+Q)\leq\chi(\{x\})+\chi(Q)=\chi(Q)$, što povlači $\chi(Q)=\chi(-x+x+Q)\leq\chi(x+Q)$. Prema tome je $\chi(x+Q)=\chi(Q)$.

Za dokaz narednog tvrđenja potrebna nam je sledeća lema:

LEMA I.2.1. *Ako je X lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor i $r,s>0$, onda je*

$$B(0,rs)=r^{\frac{1}{p}}B(0,s),$$

za neko p, $(0<p\leq1)$.

DOKAZ: Iz $x\in X$ i $|x\|\leq s$ sledi $r|x\|\leq rs$, što povlači $|r^{\frac{1}{p}}x\|\leq rs$ za neko p $(0<p\leq1)$.

STAV I.2.2. *Ako je X lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor, $Q\subseteq X$ njegov ograničen podskup i α proizvoljan skalar, onda je*

$$\chi(\alpha Q)=|\alpha|^p\chi(Q)$$

za neko p $0 < p \leq 1$.

DOKAZ: Neka je $\alpha \neq 0$. Iz $Q \subseteq \cup_{i=1}^{n}\{x_i + B(0, \chi(Q))\}$ sledi

$$\alpha Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\{\alpha x_i + \alpha B(0, \chi(Q))\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{\alpha x_i + B(0, |\alpha|^p \chi(Q))\}$$

što povlači $\chi(\alpha Q) \leq |\alpha|^p \chi(Q)$. Iz $\alpha^{-1}\alpha Q = Q$, sledi $\chi(Q) \leq |\alpha|^{-p}\chi(\alpha Q)$. Prema tome je $|\alpha|^p \chi(Q) \leq \chi(\alpha Q)$. Odatle sledi $\chi(\alpha Q) = |\alpha|^p \chi(Q)$.

Sada dajemo stav o Hausdorfovoj meri nekompaktnosti jedinične kugle u jednoj klasi prostora.

STAV I.2.3. *Ako je X beskonačno-dimenzionalan lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor i $B(0,1)$ njegova jedinična kugla, onda je*

$$\chi(B(0,1)) = 1.$$

DOKAZ: Očigledno je $\chi(B(0,1)) \leq 1$. Ako pretpostavimo da je $\chi(B(0,1)) = s < 1$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $s + \varepsilon < 1$. Odatle sledi da postoji konačna $(s+\varepsilon)$-mreža skupa $B(0,1)$. Neka su njeni elementi $x_1, ..., x_n$. Odatle sledi

$$B(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i + B(0, s+\varepsilon)\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i + (s+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} B(0,1)\},$$

i

$$\begin{aligned} s = \chi(B(0,1)) &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \chi(x_i + (s+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} B(0,1)) = \\ &= \chi((s+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} B(0,1)) = (s+\varepsilon)\chi(B(0,1)) = (s+\varepsilon)s. \end{aligned}$$

Iz $s + \varepsilon < 1$ sledi da je $s = \chi(B(0,1)) = 0$, što povlači da je $B(0,1)$ totalno ograničen, odakle sledi da je X konačno-dimenzionalni prostor, što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom.

POSLEDICA I.2.1. *Ako je X beskonačno-dimenzionalan lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$, onda je*

$$\chi(B(x_0, r)) = r.$$

DOKAZ:

$\chi(B(x_0,r)) = \chi(x_0 + B(0,r)) = \chi(B(0,r)) = \chi(r^{\frac{1}{p}} B(0,1)) = r\chi(B(0,1)) = r.$

I.3. ISTRATESKUOVA MERA NEKOMPAKTNOSTI I DANEŠOVA NEJEDNAKOST.

Pored navedenih, koristi se i Istrateskuova definicija mere nekompaktnosti.

DEFINICIJA I.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za $A \subseteq X$ kažemo da je ε-diskretan ako je rastojanje bilo koja dva njegova elementa veće ili jednako od ε. Istrateskuova mera nekompaktnosti je preslikavanje I skupa svih ograničenih podskupova prostora X u skup realnih brojeva definisano sa*

$$I(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 \ : \ \textit{svaki } \varepsilon\textit{-- diskretan podskup od } Q \textit{ je konačan}\}$$

za svaki ograničen $Q \subseteq X$.

Kao što vidimo iz narednih stavova Istrateskuova mera nekompaktnosti ima slične osobine kao i prethodno razmatrane mere nekompaktnosti.

STAV I.3.1. *Ako su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi proizvoljnog metričkog linearnog prostora X i $x \in X$, tada je:*

1) $I(Q_1 + Q_2) \leq I(Q_1) + I(Q_2)$;

2) $I(x + Q) = I(Q)$.

DOKAZ:

1) Neka je $\varepsilon > 0$ i neka niz $\{z_i\}$ obrazuje proizvoljnu $[I(Q_1) + I(Q_2) + \varepsilon]$-mrežu u skupu $Q_1 + Q_2$, pri čemu je $z_i = x_i + y_i$. gde je $x_i \in Q_1$ i $y_i \in Q_2$. Tada je za sve $i \neq j$:

$$I(Q_1 + Q_2) - \varepsilon \leq \|z_i - z_j\| \leq \|x_i - x_j\| + \|y_i - y_j\|.$$

Posmatrajmo proizvoljnu $I(Q)+\varepsilon$-mrežu skupa $\{x_i\}$. Ona je konačna i prema tome, u okolini jednog od njenih tačaka označićemo je sa x_1^1 mora se nalaziti beskonačno mnogo članova niza $\{x_i\}$. Njih ćemo označavati sa x_i^1, $i=2,3,\cdots$. Svi članovi niza $\{x_i^1\}$ ispunjavaju uslov $|x_i^1-x_1^1\| \leq I(Q_1)+\varepsilon$. Sada opisani postupak primenjujemo na niz $\{x_i^1\}$ i tako konstrušemo niz $\{x_i^2\}$, zatim konstruišemo nizove $\{x_i^3\}$, $\{x_i^2\}$,... Neka je $u_i = x_i^i$. Očigledno je $|u_i - u_j\| \leq I(Q_1)+\varepsilon$. Odatle sledi da postoji podniz $\{v_i\} \subseteq \{y_i\}$ koji obrazuje $I(Q_1+Q_2)-I(Q_1)-2\varepsilon$ mrežu skupa Q_2. Odatle sledi da je $I(Q_1+Q_2)-I(Q_1)-2\varepsilon \leq I(Q_2)$, za svako $\varepsilon > 0$. Tvrđenje sada sledi iz proizvoljnosti broja ε.

2) Iz 1) sledi $I(x+Q) \leq I(\{x\}) + I(Q) = I(Q)$, što povlači

$I(Q) = I(-x+x+Q) \leq I(x+Q)$. Prema tome je $I(x+Q) = I(Q)$.

U slučaju kada je X normiran tvrđenje 1) prethodnog stava je dokazala Nina Ježarkova 1982. godine i tako potvrdno odgovorila na Danešovu hipotezu iz rada [1972].

STAV I.3.2. *Ako je X lokalno ograničen Hausdorfov topološki vektorski prostor, $Q \subseteq X$ njegov ograničen podskup, $|.\|$ p-norma na X i β proizvoljan skalar tada je*

$$I(\beta Q) = |\beta|^p I(Q).$$

DOKAZ: Neka je $\beta \neq 0$. Iz relacije

$$|\beta x - \beta y\| = |\beta\|^p |x-y\|$$

sledi da svakom konačnom $\varepsilon-$ diskretan podskup od Q odgovara jedan konačan $|\beta|^p\varepsilon-$ diskretan podskup od βQ i da svakom konačnom $|\beta|^p\varepsilon-$ diskretnom podskupu od βQ odgovara jedan konačan $\varepsilon-$ diskretan podskup od Q, odakle sledi da je $I(\beta Q) = |\beta|^p I(Q)$.

Vezu između četiri navedene mere nekompaktnosti daje nam Danešova nejednakost (Daneš [1972]).

STAV I.3.3 - DANEŠOVA NEJEDNAKOST. *Neka je* (M, d) *metrički prostor i* $Q \subseteq M$ *njegov ograničen podskup. Tada je:*

$$\chi(Q) \leq \chi_i(Q) \leq I(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q).$$

Sada izračunavamo Istrateskuovu meru nekompaktnosti jedinične kugle u ℓ^p $(0 < p < 1)$ *prostoru.*

STAV I.3.4. *U* ℓ^p *prostoru* $(0 < p < 1)$ *je* $I(B(0,1)) = 2$.

DOKAZ: Iz Danešove nejednakosti i stava I.10 sledi da je $I(B(0,1)) \leq 2\chi(B(0,1)) = 2$. Neka je e_i element prostora ℓ^p $(0 < p < 1)$ kome je i-ta koordinata jednaka 1 a ostale su 0. Očigledno je $d(e_i, e_j) = 2$ za $i \neq j$. Prema tome, skup $\{e_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ je beskonačan i rastojanje svaka dva njegova elementa je jednako 2, pa je prema tome $I(B(0,1)) \geq 2$, što povlači $I(B(0,1)) = 2$.

STAV I.3.5. *U* ℓ^p *prostoru* $(0 < p < 1)$ *je* $\alpha(B(0,1)) = 2$.

DOKAZ: Prema Danešovoj nejednakosti je

$$I(B(0,1)) \leq \alpha(B(0,1)) \leq 2\chi(B(0,1)).$$

Tvrđenje stava sada direktno sledi iz stavova I.2.3 i I.3.4.

POSLEDICA I.3.1. *Ako je* $x_0 \in \ell^p$ $(0 < p < 1)$ *i* $r > 0$, *onda je* $\alpha(B(x_0, r)) = 2r$.

DOKAZ: Za $r > 0$ uslovi $\|x\| \leq 1$ i $\|r^{\frac{1}{p}} x\| \leq r$ su ekvivalentni, što povlači $B(0, r) = r^{\frac{1}{p}} B(0, 1)$. Odatle imamo

$$\alpha(B(x_0, r)) = \alpha(x_0 + B(0, r)) = \alpha(B(0, r)) =$$

$$= \alpha(r^{\frac{1}{p}} B(0,1)) = r\alpha(B(0,1)) = 2r.$$

STAV I.3.6. *U L^p prostoru $(0 < p < 1)$ je $I(B(0,1)) = 2$.*

DOKAZ: Iz Danešove nejednakosti i stava I.10 sledi da je $I(B(0,1)) \leq 2\chi(B(0,1)) = 2$. Neka je $\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ niz disjunktnih merljivih podskupova mernog prostora nad kojim se posmatra L^p prostor, takvih da A_n ima strogo pozitivnu meru za svaki $n \in \mathcal{N}$, a skup $A = \cup_{n\in\mathcal{N}}$ konačnu meru.

Neka je

$$t_n = \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}}$$

Posmatrajmo funkcije:

$$f_n(x) = \begin{cases} t_n, & \text{za } x \in A_n \\ 0, & \text{za } x \in A_n^c. \end{cases}$$

Očigledno je $d(f_i, j_j) = 2$ za $i \neq j$ i $|f_i\| = 1$. Prema tome, skup $\{f_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ je beskonačan i rastojanje svaka dva njegova elementa je jednako 2, pa je prema tome $I(B(0,1)) \geq 2$, što povlači $I(B(0,1)) = 2$.

STAV I.3.7. *U L^p prostoru $(0 < p < 1)$ je $\alpha(B(0,1)) = 2$.*

DOKAZ: Prema Danešovoj nejednakosti je

$$I(B(0,1)) \leq \alpha(B(0,1)) \leq 2\chi(B(0,1)).$$

Tvrđenje stava sada direktno sledi iz stavova I.2.3 i I.3.6.

POSLEDICA I.3.2. *Ako je $x_0 \in L^p$ $(0 < p < 1)$ i $r > 0$, onda je $\alpha(B(x_0, r)) = 2r$.*

DOKAZ: Za $r > 0$ uslovi $|x\| \leq 1$ i $|r^{\frac{1}{p}}x\| \leq r$ su ekvivalentni, što povlači $B(0,r) = r^{\frac{1}{p}}B(0,1)$. Odatle imamo

$$\alpha(B(x_0,r)) = \alpha(x_0 + B(0,r)) = \alpha(B(0,r)) =$$

$$= \alpha(r^{\frac{1}{p}}B(0,1)) = r\alpha(B(0,1)) = 2r.$$

I.4. AKSIOMATSKO DEFINISANJE MERE NEKOMPAKTNOSTI NA METRIČKIM PROSTORIMA.

Da bi se definicije mera nekompaktnosti razmatrane u prethodnim odeljcima objedinile napravljeno je više aksiomatskih pristupa ovom pojmu. Definicija koju su dali Banas i Goebel [1980] važi samo na normiranim prostorima. Pored nje postoje i definicije Turničija [1980], Pasickog [1979] i Rusa [1981] (videti takođe radove Rus [1983] i Marginean [1983]). Mi ćemo se ovde opredeliti za jednu novu definiciju, koju smatramo najpogodnijom za primene u matematičkoj analizi.

DEFINICIJA I.4.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Mera nekompaktnosti je preslikavanje $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, koje ispunjava sledeće uslove:*

1) $\phi(A) = \infty$ ako i samo ako skup A nije ograničen;

2) $\phi(A) = \phi(\overline{A})$;

3) $\phi(A) = 0$ ako i samo ako je A totalno ograničen skup;

4) iz $A \subseteq B$ sledi $\phi(A) \le \phi(B)$;

5) Ako je $\{B_n\}_{n\in N}$ niz zatvorenih podskupova od X takvih da je $B_{n+1} \subseteq B_n$ za svako $n \in N$ i $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$, tada je $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ neprazan kompaktan skup.

Naša definicija se razlkikuje od Rusove definicije u tome što je dodata aksioma 1) koja nam omogućuje da preko mere nekompaktnosti karakterišemo ograničene skupove.

Iz dokazanih stavova sledi da se dosad definisane mere nekompaktnosti uklapaju u navedenu definiciju. Naš glavni zadatak u ovoj glavi je da prenesemo pojam mere nekompaktnosti na ravnomerne topološke prostore. Pre toga ćemo se podsetiti osnovnih činjenica o ravnomernim prostorima, a zatim ćemo uvesti pojam mere nekompaktnosti na pseudometričkim prostorima.

I.5 MERE NEKOMPAKTNOSTI NA PSEUDOMETRIČKIM PROSTORIMA.

Ako je X neprazan skup i $d : X \times X \to [0, \infty)$ preslikavanje koje ispunjava uslove:

1) $d(x, x) = 0$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

za svako $x, y, z \in X$, onda se uređen par (X, d) naziva *pseudometrički prostor.*

Neka je (X, d) pseudometrički prostor. Pojmovi koji se uvode preko rastojanja u teoriji metričkih prostora (dijametar skupa, Košijev niz, kompletnost, ograničen skup, totalno ograničen skup,...) potpuno se analogno definišu i na pseudometričkim prostorima. Na primer, dijametar skupa $Y \subseteq X$ se definiše sa: $\text{diam}(Y) = \sup\{d(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in Y\}$. Za $x, y \in X$ kažemo da su u relaciji $\sim$ i pišemo $x \sim y$ ako i samo ako je $d(x, y) = 0$. Jednostavno se pokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije a njen količnički prostor $\tilde{X} \equiv X/\sim$ metrički prostor u odgovarajućoj metrici. Elelement prostora $\tilde{X}$ u koji se slika tačka $q \in X$ pri količničkom preslikavanju $p : X \to \tilde{X}$ označavaćemo sa $\tilde{x}$, sliku skupa $A \subseteq X$ pri istom preslikavanju sa $\tilde{A}$, a metriku indukovanu količničkim preslikavanjem sa $\tilde{d}$.

Kao što smo videli, postoje različite definicije pojma mere nekompaktnosti na metričkim prostorima. Sve se one mogu direktno preneti na pseudometričke prostore, zato što ne zavise od separacionih osobina.

Mi ćemo se ovde opredeliti za aksiomatsku definiciju iz prethodnog odeljka i prenećemo je na pseudometričke prostore.

DEFINICIJA I.5.1. *Neka je (X, d) pseudometrički prostor. Mera nekompaktnosti je preslikavanje $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$, koje ispunjava sledeće uslove:*

1) $\phi(A) = \infty$ ako i samo ako skup A nije ograničen;

2) $\phi(A) = \phi(\overline{A})$;

3) $\phi(A) = 0$ ako i samo ako je A totalno ograničen skup;

4) iz $A \subseteq B$ sledi $\phi(A) \leq \phi(B)$;

5) Ako je $\{B_n\}_{n \in N}$ niz zatvorenih podskupova od X takvih da je $B_{n+1} \subseteq B_n$ za svako $n \in N$ i $\lim_{n \to \infty} \phi(B_n) = 0$, tada je $K = \bigcap_{n \in N} B_n$ neprazan kompaktan skup.

Naredni stav nam omogućuje direktno prenošenje osobina mere nekompaktnosti sa metričkih na pseudometričke prostore.

STAV I.5.1. *Neka je (X, d) pseudometrički prostor, $A \subseteq X$ i $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mera nekompaktnosti. Tada je:*

$\phi(A) = \phi^*(\tilde{A})$, gde je sa ϕ^* označena mera nekompaktnosti na prostoru $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

DOKAZ: Iz $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\tilde{A})$ sledi 1). F je zatvoren (totalno ograničen) skup u pseudometričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je $\tilde{F}$ takav skup u prostoru $(\tilde{X}, \tilde{d})$. Odatle dobijamo 2) i 3). 4) sledi iz ekvivalencije: $A \subseteq B$ ako i samo ako $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

Neka je (X, d) kompletan pseudometrički prostor i $\{B_n\}_{n \in N}$ niz zatvorenih podskupova od X, takvih da je $B_{n+1} \subseteq B_n$ za svako $n \in N$ i $\lim_{n \to \infty} \phi(B_n) = 0$. Onda je $(\tilde{X}, \tilde{d})$ kompletan metrički prostor i $\{\tilde{B}_n\}_{n \in N}$ niz zatvorenih podskupova od $\tilde{X}$, takvih da je $\tilde{B}_{n+1} \subseteq \tilde{B}_n$ za svako $n \in N$ i $\lim_{n \to \infty} \tilde{\phi}(\tilde{B}_n) = 0$. Prema tome, $\tilde{K} = \bigcap_{n \in N} \tilde{B}_n$ je neprazan kompaktan skup. Odatle sledi da je $\bigcap_{n \in N} B_n$ neprazan zatvoren totalno ograničen skup, što povlači da je taj skup kompaktan.

Iz narednog stava sledi da se problem ispitivanja kompletnosti pseudometričkog prostora svodi na ispitivanje kompletnosti odgovarajućeg količničkog prostora.

STAV I.5.2. *Pseudometrički prostor (X,d) je kompletan ako i samo ako je odgovarajući količnički prostor $(\tilde{X},\tilde{d})$ kompletan.*

DOKAZ: Ako $\{x_n\}$ Košijev niz u prostoru X, onda je i odgovarajući niz $\{\tilde{x}_n\} \subseteq \tilde{X}$ Košijev, jer je $d(x_i,x_j)=\tilde{d}(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)$ za svaka dva prirodna broja i i j. Takođe, iz konvergencije jednog od tih nizova sledi konvergencija drugog.

Sada smo u mogućnosti da, koristeći prethodni stav, direktno dobijemo sledeće tvrđenje o karakterizaciji kompletnosti pseudometričkih prostora iz odgovarajućih tvrđenja za metričke prostore.

Naredna teorema sadrži nekoliko karakterizacija kompletnosti pseudometričkih prostora. Detaljniji prikaz rezultata ovog tipa za metričke prostore može se naći u radovima M. Tasković [1984]; Š. Park i B. Rouds [1986].

TEOREMA I.5.1. *Ako je (X,d) pseudometrički prostor, i ϕ mera nekompaktnosti na X koja ispunjava uslov* $\operatorname{diam}(A) \geq \phi(A)$ *za svaki $A \subseteq X$, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1) X je kompletan;

2) svaki niz $\{x_n\} \subseteq X$ koji ispunjava uslov $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) < \infty$ je konvergentan;

3) svako kontraktivno preslikavanje ima bar jednu nepokretnu tačku;

4) svaki opadajući niz nepraznih zatvorenih skupova čiji niz dijametara teži ka nuli, ima neprazan presek dijametra jednakog nuli;

5) presek svakog opadajućeg niza nepraznih zatvorenih skupova čiji niz mera nekompaktnosti teži ka nuli je neprazan i kompaktan.

NAPOMENE: Ako je (X, d) metrički prostor, onda:

- implikacija 1) $\Longrightarrow$ 3) sledi iz poznatog Banahovog stava o nepokretnoj tački;

- dokaz implikacije 3) $\Longrightarrow$ 1) može se naći u knjizi [1981] M. Taskovića i D. Aranđelovića; - ekvivalenciju 1) $\Longleftrightarrow$ 4) je dokazao Kuratovski [1930] i ona predstavlja uopštenje poznatog Kantorovog stava o umetnutim odsečcima; njen dokaz se može naći i u knjigama S. Aljančića [1968] strane 50-51 (stav 7) i Kolmogorov-Fomina [1957] strana 65 (teorema 1.);

- u radu Kuratovskog [1930] takođe je dokazana i implikacija 1) $\Longrightarrow$ 5), njen dokaz se može naći i u knjizi V. Rakočević [1994];

- dokaz ekvivalencije 1) $\Longleftrightarrow$ 2) može se naći u zbirci zadataka D. Aranđelovića i M. Taskovića [1971] kao i u knjizi [1981] istih autora;

DOKAZ: Dokazi navedenih ekvivalencija i implikacija slede iz odgovarajućih tvrđenja za metričke prostore i stava I.5.2, zato što su svi navedeni uslovi metričke prirode, a količničko preslikavanje "čuva" rastojanje. Zapazićemo da u kompletnim pseudometričkim prostorima kontrakcije ne moraju imati jedinstvenu fiksnu tačku ali da je rastojanje između bilo koje dve fiksne tačke jedne kontrakcije jednako nuli. Takođe zapažamo da u pseudometričkom prostoru neprazan skup čiji je dijametar jednak nuli ne mora biti jednočlan. Preostaje nam da pokažemo da iz uslova 5) sledi 1) jer ta implikacija dosad, koliko je nama poznato, nije dokazivana u matematičkoj literaturi (pogledati istorijsku napomenu).

Neka pseudometrički prostor ispunjava uslov 5). Dovoljno je da pokažemo da je onda ispunjen i uslov 4). Pošto mera nekompaktnosti proizvoljnog skupa nije veća od njegovog dijametra, iz uslova 5) sledi da je presek opadajuće familije zatvorenih podskupova datog pseudometričkog prostora, čiji niz dijametara teži ka nuli, neprazan, jer mere nekompaktnosti tih skupova teže ka nuli. Da je dijametar tog preseka jednak nuli sledi iz činjenice da je on manji od svakog člana nula-niza.

ISTORIJSKA NAPOMENA: Na jednom od sastanaka Ljvovske sekcije poljskog matematičkog društva održanom 18. januara 1930. godine Kuratovski je izložio jednu od najpoznatijih karakterizacija kompletnih metričkih prostora (metrički prostor je kompletan ako i samo ako svaki opadajući niz zatvorenih nepraznih skupova čiji niz dijametara teži nuli ima jednočlan presek), uveo je pojam mere nekompaktnosti (na metričkim prostorima) i dokazao da presek opadajućeg niza nepraznih zatvorenih skupova, čiji niz mera nekompaktnosti teži nuli, mora biti neprazan i kompaktan. Rezultati saopšteni na tom predavanju objavljeni su u radu Kuratovskog [1930] i mnogo puta su citirani u matematičkoj literaturi. Međutim, izgleda neverovatno da je jednostavna činjenica da se kompletnost metričkih prostora može karakterisati preko navedene teoreme o meri nekompaktnosti promicala Kuratovskom, njegovim saradnicima i učenicima kao i svima koji su se kasnije bavili problemom karakterizacije kompletnosti metričkih prostora ili merama nekompaktnosti, sve do 11. juna 1992. godine kada je profesor Vladimir Rakočević na seminaru katedre za realnu i funkcionalnu analizu Matematičkog fakulteta u Beogradu održao predavanje o merama nekompaktnosti, na kome je izložio teoremu Kuratovskog. U diskusiji posle predavanja profesor Dušan Adamović je postavio pitanje da li se ta teorema može iskoristiti za karakterizaciju kompletnosti metričkih prostora. Potvrdan odgovor na profesorovo pitanje je dat u prethodnoj teoremi.

I.6. MERA NEKOMPAKTNOSTI NA RAVNOMERNIM PROSTORIMA.

Postoje značajni matematički pojmovi u teoriji metričkih prostora koji se ne mogu definisati na proizvoljnom topološkom prostoru, zato što nisu topološke invarijante. To su, na primer, kompletnost prostora, ravnomerna nepekidnost funkcije, pojam Košijevog niza,...

Klasu ravnomernih topoloških prostora (možda je pravilnije reći prostora sa ravnomernom topologijom) - najopštiju na koju se svi navedeni pojmovi mogu preneti, prvi je opisao A. Tihonov 1930. godine preko njihovih separacionih svojstava kao *kompletno regularne prostore.* 1934. godine Đ. Kurepa razmatra metričke prostore sa *apstraktnim rastojanjem*, tj. prostore u kojima rastojanje između tačaka ne mora biti realan broj. Zatim su usledile definicije A. Vejla [1938], Efremoviča [1951], Antonovskog, Boltjanskog i Sarimsakova [1960] i B. Bajšanskog [1960]. Detaljni istorijski komentari mogu se naći u radu Đ. Kurepe [1992]. Klase prostora koje su uveli Kurepa i Bajšanski su nešto opštije od ostalih navedenih ali ne ispunjavaju, u najopštijem slučaju, sve uslove koji se zahtevaju od njih. Preostale navedene definicije su ekvivalentne i, kao što je primetio B. Bajšanski [1960], razlike između njih su uglavnom terminološke prirode.

Mi ćemo usvojiti naziv *ravnomeran prostor* koji potiče od A. Vejla. On je pokazao da je topološki prostor ravnomeran ako i samo ako se njegova topologija može definisati preko familije pseudometrika i dokazao da topološke grupe i kompaktni prostori pripadaju ovoj klasi prostora. Dokazi navedenih činjenica mogu se naći u monografiji Kejlija [1975].

Sada možemo definisati meru nekompaktnosti na proizvoljnom ravnomernom prostoru i proučiti njene osobine koje će nam biti potrebne u daljem radu.

Postoje različite definicije pojma mere nekompaktnosti na topološkim vektorskim prostorima. Međutim, nijedna od njih se ne može direktno preneti na ravnomerne prostore na način koji zahtevaju naše potrebe. Mišljenja smo da svaka mera nekompaktnosti mora da ima osobine koje se zahtevaju u definiciji I.4.

DEFINICIJA I.6.1. *Neka je X ravnomeran prostor. Mera nekompaktnosti na X je preslikavanje $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ koje ispunjava sledeće uslove:*

1) $\phi(A) = \infty$ ako i samo ako skup A nije ograničen;

2) $\phi(A) = \phi(\overline{A})$;

3) iz $\phi(A) = 0$ sledi da je A totalno ograničen skup;

4) iz $A \subseteq B$ sledi $\phi(A) \leq \phi(B)$;

5) Ako je $\{B_n\}_{n\in N}$ niz zatvorenih podskupova od X takvih da je $B_{n+1} \subseteq B_n$ za svako $n \in N$ i $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$, tada je $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ neprazan kompaktan skup.

Zapažamo da smo uspeli da damo definiciju mere nekompaktnosti na uniformnim prostorima koja je analogna definicijama koje važe na pseudometričkim i metričkim prostorima. Objašnjenje te analogije može se naći u radu Kurepe [1937].

Definiciju Kanioka [1990] ne možemo koristiti na prostorima bez odgovarajuće algebarske strukture. Definicija de Paskalea, Trombete i Vebera [1993] nije odgovarajuća jer mera nekompaktosti uzima vrednosti u partitivnom skupu skupa pozitivnih realnih brojeva, što je po našem mišljenju nepotrebno, jer kao što ćemo videti u odeljku I.7, može se konstruisati funkcija koja ima realne vrednosti i ispunjava uslove 1) - 5).

TEOREMA I.6.1. *Neka je (X, d) kompletan ravnomeran prostor i ϕ mera nekompaktnosti na X. Tada je*

$$\bigcap_{j \in J} G_j \neq \emptyset$$

za svaku familiju $\{G_j \mid j \in J\}$ zatvorenih podskupova od X koja:

1) ima svojstvo konačnog preseka;

2) za svako $t > 0$ postoji konačan skup $A \subseteq J$, takav da je $\phi(\bigcap_{x \in A} G_j) < t$.

DOKAZ: Za svako $n \in \{1, 2, ...\}$ postoji konačan skup $F(n) \subseteq J$ takav da je $\phi(\bigcap_{j \in F(n)} G_j) < \frac{1}{n}$. Definišimo niz skupova B_n na sledeći način:

$$B_1 = \bigcap_{j \in F(1)} G(x); ....; B_{n+1} = B_n \bigcap (\bigcap_{j \in F(n+1)} G_j); ...$$

Zbog svojstva konačnog preseka, B_n je neprazan skup za svako $n \in \{1, 2, ...\}$. Pored toga je $\phi(B_n) < \frac{1}{n}$. Preostali uslovi teoreme I.2: zatvorenost skupova B_n i $B_{n+1} \subseteq B_n$ trivijalno su ispunjeni. Sada iz teoreme I.2 sledi da je $K = \bigcap_{n \in N} B_n$ neprazan kompaktan skup. Za svaki konačni skup $F \subseteq J$ je $C_{F,n} = (\bigcap_{j \in F} G_j \bigcap B_n) \neq \emptyset$ za svaki prirodan broj n. Niz $\{C_{F,n}\}_{n \in N}$ takođe ispunjava uslove teoreme II.1, pa je $\bigcap_{n \in N} C_{F,n}$ neprazan podskup od K. Odatle sledi da je $(\bigcap_{j \in F} G_j) \bigcap K$ neprazan skup za svaki konačni skup $F \subseteq J$. Kako familija zatvorenih skupova $\{G_j \bigcap K\}_{j \in J}$ ima svojstvo konačnog preseka, iz kompaktnosti skupa K sledi $\bigcap_{j \in J}(G_j \bigcap K) \neq \emptyset$, pa je, prema tome, $\bigcap_{j \in J} G_j \neq \emptyset$.

Prethodna teorema je uopštenje jednog rezultata Šarla Horvata [1983]. Može se bez problema pokazati da je $\bigcap_{j \in J} G_j$ kompaktan, jer je zatvoren (presek zatvorenih skupova) i totalno ograničen (njegova mera nekompaktnosti je jednaka nuli). Naredni stav takođe daje jednu karakterizaciju kompletnih ravnomernih prostora. On uopštava karakterizaciju datu u Kejli [1975] - teorema 6.23 i sadrži jedan rezultat Š. Horvata [1985] koji je dokazan za metričke prostore.

STAV I.6.1. *Neka je (X,d) kompletan ravnomeran prostor i ϕ mera nekompaktnosti na X. Tada je*

$$\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$$

za svaku familiju $\{G_j \mid j \in J\}$ zatvorenih podskupova od X koja:

1) ima svojstvo konačnog preseka;

2) za svako $t > 0$ postoji $j \in J$, takav da je $\phi(G_j) < t$.

Navedeni stav je direktna posledica prethodne teoreme i njegov dokaz nećemo navoditi.

Ovo poglavlje nastavljamo sa dve primene u dokazima egzistencije ekstremnih vrednosti funkcije, koje uopštavaju poznate Vajerštrasove stavove.

Neka je $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, gde je X proizvoljan topološki prostor. Funkcija f je poluneprekidna odozgo u tački $x_0 \in X$ ako je ispunjen uslov:

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

f je poluneprekidna odozgo na skupu $A \subseteq X$ ako je poluneprekidna odozgo u svakoj tački skupa A. Ako $f : X \longrightarrow R$, poznato je da je f poluneprekidna odozgo na X ako i samo ako je skup $\{x \in X : f(x) < r\}$ otvoren za svako $r \in R$. Poznata teorema kaže da, ako je X kompaktan topološki prostor i funkcija $f : X \longrightarrow R$ poluneprekidna odozgo na X, onda f ima maksimum. U narednom tvrđenju iskaz te teoreme prenosimo na kompletne ravnomerne prostore.

TEOREMA I.6.2. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor i $f : X \to \mathcal{R}$ odozgo poluneprekidna funkcija, takva da je*

$$\inf_{x\in X} \phi(\{y \in X \mid f(x) \leq f(y)\}) = 0.$$

Tada f dostiže svoj maksimum na skupu X.

DOKAZ: Posmatrajmo familiju skupova $\{G_x\}_{x\in X}$ definisanu sa $G_x = \{y \in X : f(x) \leq f(y)\}$. Kako ta familija ispunjava sve uslove stava I.6.1 presek svih njenih članova je neprazan, pa prema tome, postoji $x_0 \in X$ koji pripada svim skupovima iz $\{G_x\}_{x\in X}$. Odatle sledi da je za svaki $x \in X$ ispunjen uslov $f(x) \leq f(x_0)$, pa prema tome f dostiže maksimum u x_0.

Neka je $f : X \longrightarrow R$, gde je X proizvoljan topološki prostor. Funkcija f je poluneprekidna odozdo u tački $x_0 \in X$ ako je ispunjen uslov:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Funkcija f je poluneprekidna odozdo na skupu $A \subseteq X$ ako je poluneprekidna odozdo u svakoj tački skupa A. f je poluneprekidna odozdo na X ako i samo ako je skup $\{x \in X : f(x) > r\}$ otvoren za svako $r \in R$. Ako je X kompaktan topološki prostor i $f : X \to R$, poznata teorema kaže da, ako je funkcija f poluneprekidna odozdo na X, onda f ima minimum. U narednom tvrđenju iskaz te teoreme prenosimo na kompletne ravnomerne prostore.

TEOREMA I.6.3. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor i $f : X \to X$ odozdo poluneprekidna funkcija, takva da je*

$$\inf_{x\in X} \phi(\{y \in X \mid f(y) \leq f(x)\}) = 0.$$

Tada f dostiže svoj minimum na skupu X.

DOKAZ: Posmatrajmo familiju skupova $\{G_x\}_{x\in X}$ definisanu sa

$G_x = \{y \in X : f(x) \geq f(y)\}$. Kako ta familija ispunjava sve uslove stava I.6.1, presek svih njenih članova je neprazan, pa prema tome postoji $x_0 \in X$ koji pripada svim skupovima iz $\{G_x\}_{x \in X}$. Odatle sledi da je za svaki $x \in X$ ispunjen uslov $f(x) \geq f(x_0)$, pa prema tome f dostiže maksimum u x_0.

I.7. JEDNA MERA NEKOMPAKTNOSTI NA RAVNOMERNIM PROSTORIMA I NJENE PRIMENE.

Sada ćemo pokazati kako se na prizvoljnom ravnomernom prostoru može konstruisati jedna mera nekompaktnosti.

DEFINICIJA I.7.1. *Neka je X ravnomeran prostor i $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X. Neka je funkcija $\Phi : X \to [0, \infty]$ definisana sa*

$$\Phi(K) = \sup_{i \in I} \Phi_i(K)$$

za svako $K \subseteq X$, gde je $\{\Phi_i\}_{i\in I}$ familija mera nekompaktnosti na pseudometričkim prostorima (X, d_i), koje ispunjavaju uslov $\operatorname{diam}(A) \geq \Phi_i(A)$ *za svaki $i \in I$ i svaki $A \subseteq X$.*

Definisana funkcija je uopštenje mere nekompaktnosti Kuratovskog. Sličnim postupkom mogu se uopštiti i ostale definicije. Neke elementarne osobine prethodno definisane funkcije daćemo u sledećem stavu.

STAV I.7.1. *Neka je X ravnomeran prostor, $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X, $A, B \subseteq X$ i $\Phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ mera nekompaktnosti. Tada je:*

1) $\Phi(A) = \Phi(\overline{A})$;

2) $\Phi(A) = 0$ *ako i samo ako je A totalno ograničen skup;*

3) iz $A \subseteq B$ *sledi* $\Phi(A) \leq \Phi(B)$;

4) $\Phi(A \bigcup B) = \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$;

5) $\Phi(A \bigcap B) \leq \min\{\Phi(A), \Phi(B)\}$;

6) $\Phi(A) \geq \Phi_i(A)$ *za sve* $i \in I$.

DOKAZ: Tvrđenje 6) je direktna posledica definicije I.7.1 Dokazi tvrđenja 1), 2), 4) i 5) slede direktno iz definicije I.7.1 i stava I.5.1. Sada ćemo dokazati tvrđenje 3). Označimo sa Φ_i meru nekompaktnosti na pseudometričkom prostoru (X, d_i). Ako je $\Phi(A) = 0$, onda je prema tvrđenju 2) i $\Phi(\overline{A}) = 0$, odakle iz tvrđenja 6) sledi $\Phi_i(\overline{A}) = 0$ za svako $i \in I$. Prema tome, skup $\overline{A}$ je kompaktan u topologiji prostora (X, d_i) za svako $i \in I$, jer je zatvoren i totalno ograničen (stav I.5.1), odakle sledi i da je skup $\overline{A}$ kompaktan (videti Kejli [1975]). Na kraju dobijamo da je skup A totalno ograničen jer je podskup kompaktnog skupa.

STAV I.7.2. *Neka je* X *kompletan ravnomeran prostor. Ako je* $\{B_n\}_{n\in N}$ *niz njegovih zatvorenih podskupova koji ispunjavaju sledeće uslove:*

1) $B_{n+1} \subseteq B_n$ *za svako* $n \in N$;

2) $\lim_{n\to\infty} \Phi(B_n) = 0$,

tada je $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ *neprazan kompaktan skup.*

DOKAZ: Neka je $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X. Iz kompletnosti prostora X sledi da su i prostori (X, d_i) kompletni za svako $i \in I$. Označimo sa Φ_i meru nekompaktnosti na pseudometričkom prostoru (X, d_i). Iz tvrđenja 6) stava I.7.1 sledi da je $\lim_{n\to\infty} \Phi_i(B_n) = 0$ pa je, prema tome, skup K neprazan i kompaktan u topologiji prostora (X, d_i) za svako $i \in I$. Odatle sledi da je K kompaktan i u topologiji prostora X.

Iz stavova I.7.1 i I.7.2 direktno sledi sledeća teorema.

TEOREMA I.7.1. *Ako je* X *ravnomeran prostor, onda je* Φ *jedna mera nekompaktnosti na* X.

Sada ćemo izložiti nekoliko stavova o karakterizaciji kompletnih ravnomernih prostora.

STAV I.7.3. *Ako je (X,d) ravnomeran prostor i $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1) X je kompletan;

2) presek svakog opadajućeg niza nepraznih zatvorenih skupova čiji niz mera nekompaktnosti teži ka nuli je neprazan i kompaktan.

DOKAZ: Implikacija 1) $\Longrightarrow$ 2) dokazana je u teoremi I.7.1. Ako je ispunjen uslov 2), onda će on važiti i na svim prostorima oblika (X, d_i) $i \in I$, pa su, prema tome, svi ti prostori kompletni. Kompletnost prostora X sada sledi iz poznatog stava Kejlija [1975].

Za datu familiju skupova kažemo da ima ***svojstvo konačnog preseka*** ako je presek svake njene konačne neprazne podfamilije neprazan. U narednim stavovima daćemo karakterizacije kompletnosti koristeći meru nekompaktnosti i svojstvo konačnog preseka. Naredni stavovi prirodno uopštavaju poznati ekvivalent definicije kompaktnosti topoloških prostora koji kaže da je topološki prostor kompaktan ako i samo ako svaka familija njegovih zatvorenih podskupova koja ima svojstvo konačnog preseka, ima neprazan presek.

STAV I.7.4. *Neka je (X,d) ravnomeran prostor i $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X. Tada je prostor X kompletan ako i samo ako je ispunjen uslov $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$ za svaku familiju $\{G_j \mid j \in J\}$ zatvorenih podskupova od X koja:*

1) ima svojstvo konačnog preseka;

2) za svako $t > 0$ postoji konačan skup $A \subseteq J$, takav da je $\Phi(\bigcap_{x\in A} G_j) < t$.

DOKAZ: Pretpostavimo da je prostor X kompletan. Za svako $n \in \{1, 2, ...\}$

postoji konačan skup $F(n) \subseteq J$ takav da je $\Phi(\bigcap_{j\in F(n)} G_j) < \frac{1}{n}$. Definišimo niz skupova B_n na sledeći način:

$$B_1 = \bigcap_{j\in F(1)} G(x); \ldots; B_{n+1} = B_n \bigcap (\bigcap_{j\in F(n+1)} G_j); \ldots$$

Zbog svojstva konačnog preseka, B_n je neprazan skup za svako $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Pored toga je $\Phi(B_n) < \frac{1}{n}$. Preostali uslovi stava I.7.3: zatvorenost skupova B_n i $B_{n+1} \subseteq B_n$ trivijalno su ispunjeni. Sada iz stava I.7.3 sledi da je $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ neprazan kompaktan skup. Za svaki konačni skup $F \subseteq J$ je $C_{F,n} = (\bigcap_{j\in F} G_j \bigcap B_n) \neq \emptyset$ za svaki prirodan broj n. Niz $\{C_{F,n}\}_{n\in N}$ takođe ispunjava uslove teoreme II.1, pa je $\bigcap_{n\in N} C_{F,n}$ neprazan podskup od K. Odatle sledi da je $(\bigcap_{j\in F} G_j) \bigcap K$ neprazan skup za svaki konačni skup $F \subseteq J$. Kako familija zatvorenih skupova $\{G_j \bigcap K\}_{j\in J}$ ima svojstvo konačnog preseka, iz kompaktnosti skupa K sledi $\bigcap_{j\in J}(G_j \bigcap K) \neq \emptyset$, pa je prema tome $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$.

Sada dokazujemo obrnutu implikaciju. Predpostavimo da za svaku familiju $\{G_j\}_{j\in J}$ zatvorenih podskupova od X, koja ispunjava uslove teoreme, važi $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$. Posmatrajmo proizvoljan opadajući niz zatvorenih skupova čiji niz mera nekompaktnosti teži nuli. Takav niz očigledno ispunjava uslove teoreme, pa je, prema pretpostavci, presek njegovih članova neprazan. Sada kompletnost prostora X sledi direktno iz stava I.7.3.

Prethodni stav je uopštenje jednog rezultata Šarla Horvata [1983]. Može se bez problema pokazati da je $\bigcap_{j\in J} G_j$ kompaktan, jer je zatvoren (presek zatvorenih skupova) i totalno ograničen (njegova mera nekompaktnosti je jednaka nuli). Naredni stav takođe daje jednu karakterizaciju kompletnih ravnomernih prostora. On uopštava karakterizaciju datu u Kejli [1975] - teorema 6.23 i sadrži jedan rezultat Š. Horvata [1985] koji je dokazan za metričke prostore.

STAV I.7.5. *Neka je (X,d) ravnomeran prostor i $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X. Tada je X kompletan ako i samo ako je ispunjen uslov $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$ za svaku familiju $\{G_j \mid j \in J\}$ zatvorenih podskupova od X koja:*

1) ima svojstvo konačnog preseka;

2) za svako $t > 0$ postoji $j \in J$ takav da je $\Phi(G_j) < t$.

Navedeni stav je direktna posledica prethodnog i njegov dokaz nećemo navoditi.

Sledeći stav o fiksnim tačkama je uopštenje Horvatovog rezultata [1985].

STAV I.7.6. *Neka je X kompletan ravnomeran Hausdorfov prostor, $\{d_i | i \in I\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X i $\Phi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty)$ mera nekompaktnosti. Ako funkcija $g : X \to X$ ispunjava uslove:*

1) funkcja $x \mapsto \sup_{i\in I} d_i(x, g(x))$ je poluneprekidna odozdo;

2) $\inf_{x\in X} \sup_{i\in I} d_i(x, g(x)) = 0$;

3) $\inf_{x\in X} \Phi(\{y \in X \mid \sup_{i\in I} d_i(y, g(y)) \leq \sup_{i\in I} d_i(x, g(x))\}) = 0$,

onda postoji $x_0 \in X$, takvo da je $x_0 = g(x_0)$.

DOKAZ: Iz Teoreme I.6.3 primenjene na funkciju $f(x) = \sup_{i\in I} d_i(x, g(x))$ sledi da postoji x_0 za koju je $f(x_0) = 0$ jer je $inf_{x\in X} f(x) = 0$. Prema tome je $d_i(x_0, g(x_0)) = 0$ za sve $i \in I$. Pošto je X Hausdorfov prostor, odatle sledi da je $x_0 = g(x_0)$.

Sledeći stav je direktna posledica prethodnog. On nam daje jedan dovoljan uslov za postojanje fiksnih tačaka preslikavanja definisanih na kompaktnim Hausdorfovim prostorima.

Stav I.7.7. *Neka je* X *kompaktan Hausdorfov prostor i* $\{d_i | i \in I\}$ *familija pseudometrika koje definišu topologiju na* X. *Ako funkcija* $g : X \to X$ *ispunjava uslove:*

1) funkcija $x \mapsto \sup_{i \in I} d_i(x, g(x))$ *je poluneprekidna odozdo;*

2) $\inf_{x \in X} \sup_{i \in I} d_i(x, g(x)) = 0$,

onda postoji $x_0 \in X$, *takvo da je* $x_0 = g(x_0)$.

II. STAVOVI O PRESECANJU KKM TIPA

II.0 UVOD

U drugoj glavi se govori o stavovima o presecanju KKM tipa. Prenošenje klasičnog rezultata Knastera, Kuratovskog i Mazurkjevića sa euklidskih na apstraktne prostore je problem kojim se dosada bavilo više autora. U ovoj glavi dajemo više teorema o presecanju zatvorenih i otvorenih skupova. U našim teoremama je uslov kontraktibilnosti zamenjen slabijim topološkim uslovom trivijalnosti odgovarajućih homotopskih grupa. Dobijeni rezultati uopštavaju ranije rezultate Horvata [1983], [1984], [1987] i [1991], Čanga i Zanga [1991] i Čanga i Maa [1992]. Njihovim primenama su posvećene treća, četvrta i peta glava.

U prvom odeljaku, da bismo čitaocu olakšali praćenje daljeg teksta dajemo osnovne informacije o *homotopskim grupama*. U drugom odeljku se dokazuju teoreme o presecanju za konačne familije zatvorenih i otvorenih skupova. Problem prenošenja osobine presacanja sa simpleksa u konačno dimenzionom prostoru na apstraktne prostore rešava se konstrukcijom jedne funkcije, čija je egzistencija dokazana u teoremi II.1. U trećem odeljku se rešava problem prenošenja teoreme o preseku beskonačne familije zatvorenih skupova na nekompaktne prostore.

II.1 HOMOTOPSKE GRUPE

Neka je X topološki prostor. Neprekidno preslikavanje $f : [0,1] \to X$ naziva se put. Za X kažemo da je putno povezan ako za svako $x, y \in X$ postoji put f takav da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$. Ako je $x_0 \in X$ put f sa osobinom $f(0) = f(1) = x_0$ naziva se petlja pridružena tački x_0. Skup svih petlji pridruženih tački x_0 obeležavaćemo sa $P(x_0)$.

DEFINICIJA II.1.1. *Neka je X topološki prostor, $x_0 \in X$ i $\alpha, \beta \in P(x_0)$. Petlje α i β su ekvivalentne, što označavamo sa $\alpha \sim \beta$, ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ koje ima sledeće osobine:*

$$H(s,0) = \alpha(s),$$

$$H(s,1) = \beta(s),$$

$$H(0,t) = H(1,t) = x_0.$$

Preslikavanje H naziva se homotopija.

Na skupu $P(x_0)$ možemo defінsati operaciju množenja na sledeći način:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{za } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \text{za } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Na taj način smo uspeli da na skupu svih petlji koje su pridružene tački x_0 pridružimo algebarsku strukturu grupoida. Količnička struktura $(P(x_0)/\sim, *)$ ispunjava aksiome grupe i naziva se homtopska grupa prvog reda (fundamentalna grupa) pridružena tački x_0 i označava se sa $\Pi_1(x_0, X)$. Ako je X putno povezan onda su sve fundamentalne grupe pridružene njegovim tačkama međusobno homeomorfne. U tom slučaju se koristi oznaka $\Pi_1(X)$.

Označimo sa c konstantno preslikavanje $c(t) = x_0$ za svako $t \in [0,1]$. X je kontraktibilan ako je za svako $\alpha \in P(X)$ i svako $x_0 \in X$ ispunjen uslov $\alpha \sim c$.

Za X kažemo da je prosto povezan, ako je putno povezan i ako je $\Pi_1(X)$ trivijalna grupa.

Neka su X i Y topološki prostori i $C(X,Y)$ skup svih neprekidnih preslikavanja koja preslikavaju X u Y. Kompaktno otvorena topologija na prostoru $C(X,Y)$ je najmanja topologija koja sadrži sve skupove oblika $C(K.U)$, gde je $K \subseteq X$ kompaktan i $U \subseteq Y$ otvoren skup.

Neka je X topološki prostor, $x_0 \in X$ i $y_0 \in P(x_0)$ konstantna petlja ($y_0(t) = x_0$ za svako $t \in [0,1]$). Označimo sa Y prostor $\Pi(x_0, X)$ snabdeven kompaktno otvorenom topologijom.

Homotopsku grupu reda n pridruženu tački x_0 definišemo rekurentnom relacijom:

$$\Pi_n(x_0, X) = \Pi_{n-1}(y_0, Y).$$

Ako je X putno povezan onda su sve homotopske grupe reda n pridružene njegovim tačkama međusobno homeomorfne. U tom slučaju se koristi oznaka $\Pi_n(X)$.

Ako je X kotraktibilan onda je $\Pi_n(X)$ trivijalna grupa za svako n.

II.2 STAVOVI O PRESECANJU KKM TIPA

Ako je X proizvoljan skup sa $\mathcal{P}(X)$ označavaćemo njegov partitivni skup, sa 2^X skup svih nepraznih, a sa $\mathcal{F}(X)$ skup svih konačnih podskupova skupa X.

Vektore ortonormirane baze $n+1-$dimenzionalnog euklidskog prostora $(n \geq 1)$ označavaćemo sa $e_0, ..., e_n$ a njihov konveksni omotač ($n-$dimenzionalni standardni simpleks) sa Δ_n. Za $A \subseteq \{e_0, ..., e_n\}$ konveksni omotač skupa A označavaćemo sa Δ_A.

Knaster, Kuratovski i Mazurkjević objavili su u radu [1929] jednostavan dokaz Brauerove teoreme, koji se danas praktično može naći u svakom udžbeniku topologije. Koristeći Špernerovu kombinatornu lemu, oni prvo dokazuju sledeće tvrđenje o presecanju konačne familije zatvorenih skupova (stav II.1), poznato kao KKM lema, iz kojeg dobijaju dokaz teoreme. Može se pokazati da je KKM lema ekvivalentna sa Brauerovom teoremom. Interesantno je da tvrđenje o nepraznom preseku ostaje tačno i kada su svi skupovi koji pokrivaju simpleks otvoreni (stav II.1')! To su dokazali, 50 godina kasnije, verovatno nezavisno jedan od drugog, korejski matematičar Kim [1987] i tajvanski Ših [1986]. Šihov rezultat je objavljen 1986. a Kimov 1987; međutim, oba rada su predata za štampu u proleće 1985. godine.

STAV II.2.1 (KKM LEMA). *Neka su $F_0, ..., F_n$ neprazni podskupovi od R^{n+1}, takvi da je $\Delta_A \subseteq \bigcup_{e_j \in A} F_j$, za sve $A \subseteq \{e_0, ..., e_n\}$. Ako su svi skupovi F_j $0 \leq j \leq n$ zatvoreni, onda je:*

$$\bigcap_{0 \leq i \leq n} F_i \neq \emptyset.$$

STAV II.2.1'(KIM [1987], ŠIH [1986]). *Neka su* $F_0, ..., F_n$ *neprazni podskupovi od* R^{n+1}, *takvi da je* $\Delta_A \subseteq \bigcup_{e_j \in A} F_j$, *za sve* $A \subseteq \{e_0, ..., e_n\}$. *Ako su svi skupovi* F_j $0 \leq j \leq n$ *otvoreni, onda je:*

$$\bigcap_{0 \leq i \leq n} F_i \neq \emptyset.$$

U daljem radu biće nam neophodan sledeći stav koji predstavlja uopštenje poznatog Borsukovog stava o kontraktibilnim prostorima.

STAV II.2.2 (ŠPANIER [1966]; FUKS, FOMENKO I GUTENMAHER [1969]). *Neka je* X *putnopovezan topološki prostor čija je* $n-$*ta homotopska grupa trivijalna. Tada je svako neprekidno preslikavanje definisano na skupu* $\partial\Delta_{n+1}$ *sa vrednostima u* X, *restrikcija nekog neprekidnog preslikavanja skupa* Δ_{n+1} *u skup* X.

Sledeće tvrđenje je uopštenje nekih ranijih rezultata Šarla Horvata [1983], [1984], [1987] i [1991].

TEOREMA II.2.1. *Neka* X *topološki prostor,* I *neprazan skup i* $H : 2^I \longrightarrow 2^X$ *preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(I)$ *skup* $H(A)$ *je neprazan i putno povezan;*

2) ako skup $A \in \mathcal{F}(I)$ *ima* n *elemenata,* $n \geq 3$, *onda je* $n-2$*-ga homotopska grupa skupa* $H(A)$ *trivijalna;*

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(I)$ *iz* $A \subseteq B$ *sledi* $H(A) \subseteq H(B)$.

Ako je $A = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}(I)$, *onda postoji neprekidno preslikavanje* $f : \Delta_n \rightarrow X$ *takvo da je za svaki* $B \subseteq \{0, ..., n\}$ *ispunjen uslov:*

$$f(\Delta_B) \subseteq H(\{x_j : j \in B\}).$$

DOKAZ: Izaberimo proizvoljne elemente $y_0, ..., y_n \in X$ koji ispunjavaju uslov $y_k \in H(\{x_k\})$ za sve $0 \leq k \leq n$. Definisaćemo funkciju f_0 koja preslikava skup $\{e_0, ..., e_n\}$ u prostor X sa $f_0(e_j) = y_j$. f_0 je definisana na konačnom podskupu euklidskog prostora, odakle sledi da su svi podskupovi njenog domena otvoreni u indukovanoj euklidskoj topologiji, pa je prema tome neprekidna. Skupovi $H(\{y_i, y_j\})$, $i \neq j$ su putno povezani. Izabraćemo po jedan proizvoljan put u svakom od tih skupova. Svakim putem koji spaja tačke y_i i y_j, $0 \leq i < j \leq n$, definisano je jedno neprekidno preslikavanje intervala $[0,1]$ u prostor X. Pošto je duž $[e_i, e_j]$ homeomorfna sa tim intervalom, mi preslikavanje f_0 možemo neprekidno produžiti do preslikavanja f_1 definisanog na uniji jednodimenzionih grana (ivica) simpleksa Δ_n sa vrednostima u skupu X. Zbog trivijalnosti prve homotopske grupe to preslikavanje se može neprekidno produžiti do preslikavanja f_2 definisanog na uniji dvodimenzionalnih grana, što sledi iz sledi iz stava II.2.2. Nastavljajući opisani postupak dobijamo niz $f_2, f_3, ..., f_{n-1}$ neprekidnih preslikavanja čije slike pripadaju prostoru X, pri čemu je preslikavanje f_k $2 \leq k \leq n-1$ definisano na uniji $k-$dimenzionalnih grana simpleksa Δ_n. Pošto je $n-1$ homotopska grupa skupa $H(A)$ trivijalna preslikavanje f_{n-1} definisano na rubu simpleka Δ_n može se neprekidno produžiti do preslikavanja $f : \Delta_n \to X$, koje ispunjava uslov teoreme.

POSLEDICA II.2.1 (HORVAT [1991]). *Neka X topološki prostor i $H : \mathcal{F}(X) \longrightarrow 2^X$ preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(X)$ skup $H(A)$ je kontraktibilan;

2) za svako $A. B \in \mathcal{F}(X)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H(A) \subseteq H(B)$.

Ako je $A = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}(X)$, onda postoji neprekidno preslikavanje

$f : \Delta_n \to X$ *takvo da je za svaki* $B \subseteq \{0, ..., n\}$ *ispunjen uslov:*

$$f(\Delta_B) \subseteq H(\{x_j : j \in B\}).$$

U naredne dve teoreme daćemo potrebne uslove da jedna familja skupova u topološkom prostoru ima svojstvo konačnog presecanja. Tvrđenja tog oblika nazivaju se Stavovi o presecanju KKM tipa. Prva od njih uopštava ranije rezultate koje su dobili Čang i Zang [1991] i Čang i Ma [1992].

TEOREMA II.2.2. *Neka X topološki prostor i I neprazan skup. Familija zatvorenih podskupova prostora X $\{G_i\}_{i\in I}$ imaće svojstvo konačnog presecanja ako i samo ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je neprazan i putno povezan;

2) ako skup $A \in \mathcal{F}(J)$ ima $n \geq 3$ članova, onda je $n-2$-ga homotopska grupa skupa $H_J(A)$ trivijalna;

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$.

4) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j\in L} G_j$.

DOKAZ: Ako $\{G_i \mid i \in I\}$ ima svojstvo konačnog presecanja, onda je za svaki $J \in 2^I$ važi $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$. Izaberimo proizvoljno $x_* \in \bigcap_{i=1}^n G(x_i)$ i definišimo $H_J(A) = \{x_*\}$ za svako $A \in \mathcal{F}(J)$. Uvedeno preslikavanje ispunjavaće uslove 1), 2), 3) i 4).

Pretpostavimo sada da $\{G_i\}_{i\in I}$ ispunjava uslove teoreme i da nema svojstvo konačnog presecanja. Onda postoji $J \in \mathcal{F}(I)$ takav da je: $\bigcap_{j\in J} G_j = \emptyset$. Ako je $J = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ onda prema teoremi II.2.1 postoji neprekidno preslikavanje $f : \Delta_n \to X$ takvo da je za svaki $B \subseteq \{0, ..., n\}$ ispunjen uslov:

$$f(\Delta_B) \subseteq H_J(\{y_j : j \in B\}).$$

Posmatrajmo familiju zatvorenih skupova $\{G_j^* \mid j \in J\}$ definisanih sa $G_j^* = f^{-1}(G_j)$. Ti skupovi ispunjavaju uslove stava II.2.1 pa je prema tome $\bigcap_{j \in J} G_j^* \neq \emptyset$. Međutim, odatle sledi da postoji $x_* \in \bigcap_{j \in J} G_j^*$. Sada je $f(x_*) \in G_j$ za svako $j \in J$ što protivureči pretpostavci da je presek te familije skupova prazan.

Ako u iskazu teoreme II.2.2 pretpostavimo da su skupovi G_j otvoreni a u dokazu primenimo stav II.2.1' umesto stava II.2.1 dobijamo sledeće tvrđenje.

TEOREMA II.2.2'. *Neka X topološki prostor i I neprazan skup. Familija otvorenih podskupova prostora X $\{G_i\}_{i \in I}$ imaće svojstvo konačnog presecanja ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je neprazan i putno povezan;

2) ako skup $A \in \mathcal{F}(J)$ ima $n \geq 3$ članova, onda je $n-2$-ga homotopska grupa skupa $H_J(A)$ trivijalna;

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$.

4) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j \in L} G_j$.

POSLEDICA II.2.2 ČANG I MA [1992]. *Neka X topološki prostor. Familija zatvorenih podskupova prostora X $\{G_x\}_{x \in I}$ imaće svojstvo konačnog presecanja ako i samo ako za svako $J \in \mathcal{F}(X)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je kontraktibilan;

2) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$;

3) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j \in L} G_j$.

POSLEDICA II.2.3 ČANG I ZANG [1991]. *Neka X Hausdorfov topološki vektorski prostor. Familija zatvorenih podskupova prostora X $\{G_x\}_{x \in X}$ imaće svo-*

jstvo konačnog presecanja ako i samo ako za svako $J \in \mathcal{F}(X)$ postoji 1-1 preslikavanje $h : J \to X$ takvo da za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $\operatorname{conv}(h(L)) \subseteq \bigcup_{x \in L} G_x$.

II.3 MERE NEKOMPAKTNOSTI I STAVOVI O PRESECANJU

Naredno tvrđenje uopštava rezultat Š. Horvata [1983].

TEOREMA II.3.1. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor, ψ proizvoljna mera nekompaktnosti definisana na X i $\{G_j\}_{j\in I}$ data familija zatvorenih podskupova prostora X. Ako za svako $t > 0$ postoji konačan skup $A \subseteq J$ takav da je $\psi(\bigcap_{x\in A} G_j) < t$ i ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je neprazan i putno povezan;

2) ako skup $A \in \mathcal{F}(J)$ ima $n \geq 3$ članova, onda je $n-2$-ga homotopska grupa skupa $H_J(A)$ trivijalna;

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$;

4) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j\in L} G_j$;

onda je $\bigcap_{j\in I} G_j \neq \emptyset$.

DOKAZ: Data familija skupova ima svojstvo konačnog presecanja prema teoremi II.2.2. Pošto je X kompletan, primenom teoreme I.6.1 dobijamo da je presek cele familije neprazan.

POSLEDICA II.3.1 HORVAT [1983]. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, ψ proizvoljna mera nekompaktnosti definisana na X i $\{G_j\}_{j\in I}$ data familija zatvorenih podskupova prostora X. Ako za svako $t > 0$ postoji konačan skup $A \subseteq J$ takav da je $\psi(\bigcap_{x\in A} G_j) < t$ i ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je kontraktibilan;

2) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$;

3) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j\in L} G_j$;

onda je $\bigcap_{j\in I} G_j \neq \emptyset$.

Specijalan slučaj prethodne teoreme je naredni stav koji predstavlja uopštenje jednog tvrđenja Š. Horvata [1985].

STAV II.3.1. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor, $\{d_i | i \in L\}$ familija pseudometrika koje definišu topologiju na X i $\{G_j\}_{j\in I}$ data familija zatvorenih podskupova prostora X. Ako za svako $t > 0$ postoji $j \in J$ takav da je $\alpha(G_j) < t$ i ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je neprazan i putno povezan;

2) ako skup $A \in \mathcal{F}(J)$ ima $n \geq 3$ članova, onda je $n-2$-ga homotopska grupa skupa $H_J(A)$ trivijalna;

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$;

4) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j\in L} G_j$;

onda je $\bigcap_{j\in I} G_j \neq \emptyset$.

POSLEDICA II.3.2. HORVAT [1985]. *Neka je X kompletan metrički prostor, ψ proizvoljna mera nekompaktnosti na X i $\{G_j\}_{j\in I}$ data familija zatvorenih podskupova prostora X. Ako za svako $t > 0$ postoji $j \in J$ takav da je $\alpha(G_j) < t$ i ako za svako $J \in \mathcal{F}(I)$ postoji preslikavanje $H_J : 2^J \to 2^X$ koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(J)$ skup $H_J(A)$ je kontraktibilan;

2) za svako $A, B \in \mathcal{F}(J)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H_J(A) \subseteq H_J(B)$;

3) za svako $L \in \mathcal{F}(J)$ važi $H_J(L) \subseteq \bigcup_{j\in L} G_j$;

onda je $\bigcap_{j\in I} G_j \neq \emptyset$.

III. STAVOVI O FIKSNIM TAČKAMA NA KOMPAKTNIM HAUSDORFOVIM PROSTORIMA

III.0. UVOD

U trećoj glavi su uopšteni izvesni rezultati o fiksnim tačkama koje je dobio Horvat u radu [1984]. U našim rezultatima uspeli smo da oslabimo uslov kontraktibilnosti. Kao posledicu dobijamo jedan stav o fiksnim tačkama koji sadrži kao specijalne slučajeve Brauerovu teoremu i njena uopštenja koja su dali Šauder [1930], Tihonov [1935], Ki Fan [1964], Zima [1977], Žepecki [1979] i O. Hadžić [1981]. Dokazani stav nas približava rešenju *Šauderove hipoteze* kojoj ćemo posvetiti više pažnje u narednim glavama.

III.1. STAVOVI O FIKSNIM TAČKAMA NA KOMPAKTNIM HAUSDORFOVIM PROSTORIMA

Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Funkcija $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, naziva se višeznačno preslikavanje. Višeznačnom preslikavanju komplementarno je preslikavanje $G^* : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, gde je $G^*(x) = Y \backslash G(x)$ za svako $x \in X$, a inverzno $G^{-1} : Y \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, gde je $G^{-1}(y) = \{x \in X : y \in G(x)\}$ za svako $y \in Y$. Primetimo da je $(G^*)^* = G$ i da su za $x \in X, y \in Y$ ekvivalentni uslovi $y \in G(x)$ i $x \in G^{-1}(y)$ pa je $(G^{-1})^{-1} = G$.

Termin višeznačno preslikavanje, kao što vidimo, koristi se za funkcije čije su vrednosti podskupovi nekog skupa. Odlučili smo se na upotrebu ovog izraza, zato što je on uobičajen u literaturi iz ove oblasti, mada je u samoj definiciji pojma preslikavanja prisutna jednoznačnost.

Neka je X neprazan skup i $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje. Za $x_0 \in X$ kažemo da je nepokretna tačka preslikavanja F ako je ispunjen uslov $x_0 \in F(x_0)$ Za višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uslovi $x \in F(x)$ i $x \in F^{-1}(x)$ su ekvivalentni pa F i F^{-1} imaju iste nepokretne tačke.

Sada ćemo izložiti izvesne posledice teoreme II.2.2, koje uopštavaju odgovarajuće rezultate Šarla Horvata [1984].

TEOREMA III.1.1. *Neka su sve homotopske grupe kompaktanog topološkog prostora prostora X trivijalne i neka je $R : X \to \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) $R^{-1}x$ je otvoren skup za svako $x \in X$;

2) iz $\bigcap_{x\in A} R(x) \neq \emptyset$ sledi da su sve homotopske grupe skupa $\bigcap_{x\in A} R(x)$ trivijalne, za svako $A \in 2^X$;

onda ili postoji $x_0 \in X$ koje ispunjava uslov $x_0 \in R(x_0)$ ili je $R(y_0) = \emptyset$ za neko $y_0 \in X$.

DOKAZ: Kompletnost i ravnomernost prostora X slede iz njegove kompaktnosti. Za svaki $A \in \mathcal{F}(X)$ označimo sa $\tilde{A}$ skup $\{x \in X \mid A \subseteq R(x)\}$. Neka je $H(A) = \bigcup_{x\in\tilde{A}} \subseteq R(x)$ ako je $\tilde{A} \neq \emptyset$ i neka je $H(A) = X$ u suprotnom slučaju ($\tilde{A} = \emptyset$). Neka je $H_A(J) = H(J)$ za svaki $J \in F(A)$. Ako za proizvoljno $A \in \mathcal{F}(X)$ $H(A) \not\subseteq \bigcup_{x\in A} R^{*-1}(x)$ onda postoji $x_0 \in H(A)$ za koje je $A \subseteq R(x_0)$. Pošto je u tom slučaju $H(A) \subseteq R(x_0)$ dobijamo $x_0 \in R(x_0)$. U suprotnom slučaju je $H(A) \subseteq \bigcup_{x\in A} R^{*-1}(x)$, pa prema teoremi II.2.2 familija zatvorenih skupova $\{R^{*-1}(x)\}_{x\in X}$ ima svojstvo konačnog presecanja. Iz kompaktnosti prostora X sledi da je onda $\bigcap_{x\in X} R^{*-1}(x) \neq \emptyset$. Odatle sledi da postoji $y_0 \in \bigcap_{x\in X} R^{*-1}(x)$ što povlači $x \notin R(y_0)$ za svako $x \in X$, tj. $R(y_0) = \emptyset$.

TEREMA III.1.2. *Neka su sve homotopske grupe kompaktanog topološkog prostora prostora X trivijalne i neka je $R : X \to 2^X$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) $R^{-1}x$ je otvoren skup za svako $x \in X$;

2) iz $\bigcap_{x\in A} R(x) \neq \emptyset$ sledi da su sve homotopske grupe skupa $\bigcap_{x\in A} R(x)$ trivijalne, za svako $A \in 2^X$.

Onda za svako neprekidno preslikavanje $f : X \to X$ postoji bar jedno $x_0 \in X$ koje ispunjava uslov $x_0 \in R(f(x_0))$.

DOKAZ: Preslikavanje definisano sa $V(x) = R(f(x))$ ispunjava uslove prethodne teoreme i njegove vrednosti su neprazni skupovi. Prema tome postoji

$x_0 \in X$ koje ispunjava uslov $x_0 \in V(x_0)$.

Ako je X neprazan skup sa $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ označavamo dijagonalu skupa X.

TEOREMA III.1.3. *Neka su sve homotopske grupe kompaktanog Hausdorfovog topološkog prostora prostora X trivijalne i neka postoji baza $\{v_i\}_{i \in I}$ simetričnih (iz $(x,y) \in v_i$ sledi $(y,x) \in v_i$) i otvorenih (u topologiji prostora $X \times X$) okolina dijagonale skupa X. Označimo sa $V_i(x)$ skup $\{y \in X \mid (x,y) \in v_i\}$. Ako za svako $A \in 2^X$ iz $\bigcap_{x \in A} V_i(x) \neq \emptyset$ sledi da su sve homotopske grupe skupa $\bigcap_{x \in A} V_i(x)$ trivijalne onda svaka neprekidna funkcija $f : X \to X$ ima bar jednu nepokretnu tačku.*

DOKAZ: Ako je $f : X \to X$ neprekidna funkcija bez fiksnih tačaka onda je

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \bigcap \Delta = \emptyset.$$

Odatle sledi da za neko $i_0 \in I$ važi

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \bigcap v_{i_0} = \emptyset.$$

Višeznačno preslikavanje $R : x \to V_{i_0}(x)$ ispunjava uslove teoreme III.1.2 odakle sledi da je $x_0 \in R(f(x_0))$ za neko $x_0 \in X$ što je kontradikcija sa predpostavkom

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \bigcap v_{i_0} = \emptyset.$$

Predhodna teorema u slučaju kada je X kontraktibilan svodi se na Horvatov rezultat [1984]. Njena direktna posledica je sledeći stav koji uopštava mnoge rezultate iz teorije fiksne tačke: Brauerovu teoremu, Šauder [1930], Tihonov [1935], Ki Fan [1964], K. Zima [1977], B. Žepecki [1979], O. Hadžić [1981],...

STAV III.1.1. *Neka je X Hausdorfova topološka komutativna grupa, $K \subseteq X$ kompaktan skup, čije su sve homotopske grupe trivijalne i $\{V_i\}_{i\in I}$ baza simetričnih (iz $x \in V_i$ sledi $-x \in V_i$) okolina nule u X. Ako za svako $A \in 2^K$ iz $K \bigcap(\bigcap_{x\in A}(x + V_i)) \neq \emptyset$ sledi da su sve homotopske grupe skupa $K \bigcap(\bigcap_{x\in A}(x + V_i))$ trivijalne onda svaka neprekidna funkcija $f : K \to K$ ima bar jednu nepokretnu tačku.*

DEFINICIJA III.1.1. *Neka je E topološki vektorski prostor, $\mathcal{U}$ baza otvorenih okolina nule prostora E i $K \subseteq E$. Kažemo da je skup K Zimanog tipa ako i samo ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je $co(U \bigcap(K - K)) \subseteq V$.*

DEFINICIJA III.1.2. *Neka je E topološki vektorski prostor i $K \subseteq E$. Kažemo da je skup K lokalno konveksan ako postoji baza otvorenih okolina nule prostora E $\mathcal{U}$ takva da za svako $x \in K$ i svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je*

$$\mathrm{conv}((x + U)\bigcap K) \subseteq (x + V).$$

POSLEDICA III.1.1. *Neka je X Hausdorfov topološki vektorski prostor $K \subseteq X$ njegov kompaktan i konveksan neprazan podskup. Ako je funkcija $f : K \to K$ neprekidna i ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:*

a) (Brauerova teorema) X je konačno dimenzionalan;

b) (Šauder [1930]) X je normiran;

c) (Tihonov [1935]) X je lokalno konveksan;

d) (Ki Fan [1964]) postoji familija neprekidnih linearnih funkcionala, koja razdvaja tačke prostora X;

e) (Zima [1977]) X je metrizabilan i K je Ziminog tipa;

f) (Žepecki [1979]) K je lokalno konveksan;

e) (Hadžić [1981]) K je Ziminog tipa;

onda f ima bar jednu nepokretnu tačku.

Navedena posledica sledi iz Stava III.1.1 jer se kompaktni i konveksni podskupovi koji isunjavaju bilo koji od uslova a)-e) mogu afino preslikati u lokalno konveksni topološki vektorski prostor.

V. KKM PRESLIKAVANJA NA TOPOLOŠKIM PROSTORIMA I NJIHOVE PRIMENE

IV.0. UVOD

Četvrta glava je posvćena KKM preslikavanjima na topološkim prostorima. KKM preslikavanja su dosad dobila mnogobrojne primene u različitim oblastima nelinearne analize. Proučavanje daljih mogućnosti za primenu preslikavanja ovog tipa dovode do potrebe za njihovim definisanjem na prostorima koji ne poseduju algebarsku strukturu.

U prvom odeljku uvodimo pojam *parakonveksnih prostora* a zatim pokazujemo da su definicije ranije razmatranih klasa prostora koji su se pokazali pogodnim za definisanje KKM preslikavanja (topološki vektorski prostori, konveksni prostor - Lasonde [1983], konveksni topološki prostori - Komija [1981], pseudo konveksni prostori - Horvat [1983] i H prostori - Bardaro i Kepiteli [1988]) specijalni slučajevi naše definicije. Dati su i primeri iz kojih se vidi da se parakonveksni prostori ne uklapaju ni u jednu od prethodnih definicija.

U drugom odeljku razvijamo teoriju KKM preslikavanja na parakonveksnim prostorima. Naši osnovni rezultati u ovom odeeljku su: lema IV.2.1, koja daje dovoljne uslove za pripadanje klasi KKM preslikavanja; teorema VI.2.1, koja uopštava teoreme Ki Fana [1961] i Bardara i Kepiteli [1988], teorema IV.2.2 koja je uopštenje Fan - Brauderove teoreme o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja.

Treći odeljak posvećujemo minimaks nejednakostima. Prvi rezultat tog tipa dao je Ki Fan [1972]. Poboljšanja ranijih rezultata dobijena u ovom odeljku ne odnose se samo na domen funkcija kod koga je oslabljen uslov kontraktibilnosti, već i na uslove koje ispunjavaju funkcije jer se umesto klasičane konveksnosti u iskazima teorema koristi proširena konveksnost koja je uvedena u radu Taskovića [1992]. Rezultati koje izlažemo uopšavaju minimaks nejednakosti Ki Fana [1972], Jena [1981], Granasa i Liua [1983], [1986], Bardara i Kepiteli [1988], [1989] i [1990] i Parka [1991]. Kao posledice dobijenih rezultata dobijamo varijacionu nejednakost Hartmana i Štampačije, teoremu o fiksnim tačkama neekspanzivnih preslikavanja definisanih na zatvorenim, ograničenim i konveksnim podskupovima Hilbrtovih prostora (teorema Braudera, Kirka i Gedea) i jedan ekstermalni princip koji uopštava principe Mauzer-Šaudera i Parka [1991].

Četvrti odeljak je posvećen primena stavova o presecanju otvorenih skupova. Najznačajnija od njih je jedan stav o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja koji uopštava Fan - Kakutanijevu teoremu.

Peti odeljak se bavi oslabljenjem uslova kompaktnost koji javlja u stavovima dokazanim u drugom i trećem odeljku.

IV.1.1. PARAKONVEKSNI PROSTORI

U ovoj glavi ćemo definisati pojam *parakonveksnog prostora* i navešćemo različite primere takvih prostora.

DEFINICIJA IV.1.1. *Parakonveksan prostor je uređen par (X,H) gde je X topološki prostor, a $H : \mathcal{F}(X) \longrightarrow 2^X$ preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svako $A \in \mathcal{F}(X)$ $H(A)$ je putnopovezan skup;

2) Ako skup A ima $n \geq 3$ članova prvih $n-2$ homotopska grupa skupa $H(A)$ su trivijalne;

3) za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H(A) \subseteq H(B)$.

DEFINICIJA IV.1.2. *Neka je (X,H) parakonveksan prostor. Skup $Y \subseteq X$ je konveksan ako iz $A \in \mathcal{F}(Y)$ sledi $H(A) \subseteq Y$.*

Kao što vidimo, parakonveksan prostori omogućuju prenošenje pojma konveksnosti na topološke prostore koji ne moraju imati algebarsku strukturu. Sada ćemo navesti nekoliko primera parakonveksnih prostora.

PRIMER IV.1.1. (Topološki vektorski prostori)

Neka je X topološki vektorski prostor i $H(A)$ konveksan omotač skupa $A \in \mathcal{F}(X)$. Tada je (X,H) H-prostor jer su koveksni skupovi u X kontraktibilni.

PRIMER IV.1.2. (Konveksni prostori)

Neka je Y konveksan podskup realnog topološkog vektorskog prostora X. Za Y ćemo reći da je konveksan prostor ako se topologija koju X indukuje na konveksnim omotačima njegovih konačnih podskupova poklapa sa njihovom Euklidskom topologijom. Ova klasa prostora je ušla u širu upotrebu posle rada

Lasondea [1983]. Ako se na Y uzme topologija indukovana sa X, a preslikavanje H se definiše isto kao i u primeru I.1. uređeni par (Y, H) je H-prostor.

PRIMER IV.1.3. (Konveksni topološki prostori)

Konveksni topološki prostori definisani su u radu [1981] japanskog matem-atmatičara Hidotoši Komije. Komijina istraživanja nastavljena su radovima O. Hadžić [1984] i I. Aranđelovića [1992b] ali rezultati vezani za Konveksne topološke prostore nisu privukli neku veću pažnju.

Neka je X Hausdorfov topološki prostor; H-operator na X je preslikavanje $[.] : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(X)$ koje ispunjava sledeće uslove:

a) $[\emptyset] = \emptyset$;

b) $[\{x\}] = \{x\}$, za svako $x \in X$;

c) $[[A]] = [A]$, za svako $A \in \mathcal{P}(X)$;

d) $[A] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(A)} [F]$.

Konveksni omotač skupa $A \subseteq X$ je skup $[A]$. Skup $A \subset X$ je konveksan ako je, jednak svom konveksnom omotaču, tj. $[A] = A$.

Neka je $\mathcal{R}$ skup svih funkcija $f : N \to R$ (N je skup prirodnih brojeva) takvih da je skup $\{x : x \in N, f(x) \neq 0\}$ konačan. Drugim rečima $\mathcal{R} = \sum_{i \in N} \mathcal{R}_i$, gde je $\mathcal{R}_i = R$, za svako i. Topološka i algebarska struktura na R su uobičajene. Neka je $[.]$ H-operator na topološkom prostoru X, i neka je $\mathcal{H}(X) = \{[A] : A \in \mathcal{F}(X)\}$.

Za $G \in \mathcal{H}(X)$, funkcija $\phi : G \to \mathcal{R}$ naziva se strukturno preslikavanje na G, ako ispunjava sledeće uslove:

a) ϕ je homeomorfizam topološkog potprostora G na $\phi(G)$;

b) Ako je $A \subseteq G$ onda je $\phi([A]) = [\phi(A)]$, gde je $[\phi(A)]$ konveksni omotač skupa $\phi(A)$ u vektorskom prostoru $\mathcal{R}$.

Sa S_G skup svih strukturnih preslikavanja definisanih na G. Ako je $S_G \neq \emptyset$

za svako $G \in \mathcal{H}(X)$ onda za proizvoljno $\Phi \in \prod_{G \in \mathcal{H}} S_G$ kažemo da je struktura na X u odnosu na H-operator $[.]$. Uređena trojka $(X, [.], \Phi)$ gde je X Hausdorfov topološki prostor, $[.]$ H-operator na X i Φ struktura na X u odnosu na $[.]$, naziva se konveksni topološki prostor.

Ako je $(X, [.], \Phi)$ Konveksni topološki prostor, onda je uređen par (X, h), gde je $h : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{H}(X)$ preslikavanje definisano sa $h(A) = [A]$, jedan H - prostor. Nećemo navoditi dokaz ovog tvrđenja već ćemo samo napomenuti da su konveksni omotači konačnih skupova u Konveksnim topološkim prostorima, homeomorfni sa konveksnim omotačima konačnih skupova u Euklidskim prostorima.

PRIMER IV.1.4. (Pseudokonveksni prostori)

Pseudokonveksni prostori su definisani u radu Šarla Horvata [1983]. Napominjemo da rezultati dobijeni u Horvatvom radu [1983] predhodi uvođenju parakonveksnih prostora. Nešto opštija definicija se može naći u radu Horvat [1991].

Neka je X topološki prostor i $h : X^2 \times [0,1] \longrightarrow X$ preslikavanje koje ispunjava uslov $h(x, y, 0) = y$ i $h(x, y, 1) = x$ za sve $x, y \in X$. Za skup $A \subseteq X$ rećićemo da je h-konveksan ako $h(x, y, \lambda) \in A$ za sve $x, y \in A$ i sve $\lambda \in [0,1]$. Konveksni omotač skupa $A \subseteq X$ definisaćemo kao presek svih h-konveksnih podskupova skupa X koji sadrže A i označavaćemo sa $[A]$. Ako je za svaki $A \in \mathcal{F}(X)$ restrikcija preslikavanja h na skup $[A]^2 \times I$ neprekidna, za uređen par (X, h) kaže se da je pseudokonveksan prostor. Ako uzmemo da je $H(A) = [A]$ za svako $A \in \mathcal{F}(X)$, uređeni par (X, H) je H-prostor (videti rad Bardara i Kepitelijeve [1988]).

PRIMER IV.1.5 (H-prostori)

H-prostori su definisani u radu Karla Bardara i Rite Kepiteli [1988]. Njihova definicija direktno predhodi uvođenju parakonveksnih prostora. Strukturu sličnu H-prstorima - $c-$prostore opisao je Šarl Horvat [1991].

H-prostor je uređen par (X, H) gde je X topološki prostor, a $H : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ preslikavanje koje ispunjava uslove:

1) $H(A)$ je kontraktibilan skup za svako $A \in \mathcal{F}(X)$;

2) za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ iz $A \subseteq B$ sledi $H(A) \subseteq H(B)$.

Neka je (X, H) H-prostor. Za $Y \subseteq X$ reći ćemo da je H-konveksan ako iz $A \in \mathcal{F}(Y)$ sledi $H(A) \subseteq Y$.

H-prostori su parakonveksni zato što su sve homotopske grupe kontraktibilnog skupa trivijalne. Najznačajniji rezultati u teoriji H-prostora dati su u radovima: Bardara i Kapitelijeve [1988], [1989], [1990] i [1995]; Dinga i Tana [1990]; Tarafdara [1990]; Horvata [1991]; Dinga [1993]; Dinga i Tarafdara [1994]; Čanga i Maa [1992] i Huanga [1994].

PRIMER IV.1.6. (Proizvod parakonveksnih prostora)

Neka su (X, H_X) i (Y, H_Y) H-prostori i $Z = X \times Y$ skup snabdeven uobičajenom topologijom proizvoda. Tada funkcija $H_Z : \mathcal{F}(Z) \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$, $H_Z(C) = H_X(A) \times H_Y(B)$ gde je A prva a B druga projekcija skupa C, ima osobine 1) (jer je homotopska grupa proizvoda dva topološka prostora izomorfna proizvodu njihovih homotopskih grupa) i 2) (očigledno) iz Definicije I.2. pa je (Z, H_Z) parakonveksan prostor. Na analogan način se može konstruisati parakonveksna struktura na proizvodu konačnog broja parakonveksnih prostora. Odgovarajuća konstrukcija za H-prostore data je u radu Huanga [1994].

PRIMER IV.1.7. (Konveksan podskup parakonveksnog prostora)

Neka je (X, H) proizvoljan parakonveksan prostor i $Y \subseteq X$ njegov konveksan podskup. Ako preslikavanje H_Y definišemo sa $H_Y(A) = H(A)$ za sve $A \in \mathcal{F}(Y)$, onda je uređen par (Y, H_Y) jedan parakonveksan prostor.

PRIMER IV.1.8.

Neka je X proizvoljan topološki prostor i $x_0 \in X$. Ako je $H(A) = \{x_0\}$ za sve $A \in \mathcal{F}(X)$, onda je uređen par (X, H) jedan parakonveksan prostor. Iz ovog primera se može zapaziti da je pojam parakonveksnih prostora širi od pojmova Konveksnih topoloških prostora i pseudokonveksnih prostora. Međutim navedeni prostor spada takođe u klasu H-prostora.

PRIMER IV.1.9.

Neka je X proizvoljan nekontraktibilan topološki prostor, čije su sve homotopske grupe trivijalne. Ako je $H(A) = X$ za sve $A \in \mathcal{F}(X)$, onda je uređen par (X, H) jedan parakonveksan prostor, koji ne pripada klasi H-prostora.

PRIMER IV.1.10. (Topološka mreža)

Ako je $(X, \leq)$ topološka mreža (X je parcijalno uređeni topološki prostor, na kome relacija poredka $\leq$ ispunjava aksiome mreže) takva da svaki neprazni interval $[a, b] \subseteq X$ ima sve homotopske grupe trivijalne i $H : \mathcal{F}(X) \to 2^X$ preslikavanje definisano sa:

$$H(x_1, ..., x_n) = [\inf\{x_1, ..., x_n\}, \sup\{x_1, ..., x_n\}],$$

onda je (X, H) jedan parakonveksan prostor.

IV.2. KKM PRESLIKAVANJA NA PARAKONVEKSNINIM PROSTORIMA I NJIHOVE PRIMENE

Sada ćemo dati definiciju KKM preslikavanja.

DEFINICIJA IV.2.1. *Neka je (Y, H) parakonveksan prostor, i $X \subseteq Y$. Višeznačno preslikavanje $F : X \to 2^Y$ naziva se KKM preslikavanje ako je ispunjen uslov $H(A) \subseteq \bigcup_{x \in A} F(x)$ za svaki $A \in \mathcal{F}(X)$.*

KKM preslikavanja (definisana na topološkim vektorskim prostorima i na H-prostorima) našla su široke primene u nelinearnoj analizi. Najvažniji rezultati vezani za ovu klasu preslikavanja i njene primene dati su u radovima: Fan [1961], [1972]; Brauder [1968]; Lasonde [1983], [1990]; Tarafdar [1989], [1990]; Park [1989], [1990], [1991], [1994]; Park, Bae i Kang [1994]; Granas i Lasonde [1991]; Liu [1991]; Šiodi [1991]; Čang i Zang [1991]; Čang i Ma [1992]; Bardaro i Kapitelijeva [1988], [1989], [1990] i [1995]; Ding i Tan [1990]; Horvat [1983], [1984], [1985], [1987], [1990] i [1991]; Ding [1993] i Huang [1994].

Ovu glavu nastavljamo lemom koja nam daje dovoljne uslove za pripadanje klasi KKM preslikavanja.

LEMA IV.2.1. *Neka je (X, H) parakonveksan prostor i $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje. Ako važi:*

1) $x \in G(x)$ za svako $x \in X$;

2) $G^{*-1}(x)$ je konveksan skup za svako $x \in X$;

onda je G jedno KKM preslikavanje.

DOKAZ: Dovoljno je da dokažemo: ako G nije KKM preslikavanje, onda G^* ima bar jednu nepokretnu tačku. Kada G nije KKM preslikavanje, tada postoje konačan skup $\{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{F}(X)$ i $x_0 \in X$ tako da je $x_0 \in H(\{x_1, ..., x_n\})$ i $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$. Odatle sledi da je $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} G^*(x_i)$ pa prema tome važi $x_i \in G^{*-1}(x_0)$ za $1 \leq i \leq n$. Pošto je $G^{*-1}(x_0)$ konveksan skup, onda je $H(\{x_1, ..., x_n\}) \subseteq G^{*-1}(x_0)$ odakle dobijamo da je $x_0 \in G^*(x_0)$.

Koristeći lemu IV.2.1. možemo dobiti sledeću karakterizaciju jedne klase KKM preslikavanja na izvesnim parakonveksnim prostorima.

POSLEDICA IV.2.1. *Neka je (X, H) parakonveksan prostor u kome je ispunjen uslov $x \in H(\{x\})$ za sve $x \in X$ i neka je $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje sa osobinom: $G^{*-1}(x)$ je konveksan skup za svako $x \in X$. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

1) $x \in G(x)$ za svaki $x \in X$;

2) G je KKM preslikavanje.

DOKAZ: 2) sledi iz 1) prema lemi IV.2.1. Ako je G jedno KKM preslikavanje, onda je za svaki x ispunjen uslov $H(\{x\}) \subseteq G(x)$ odakle sledi $x \in G(x)$ za svaki $x \in X$.

Predhodna posledica može se zapisati i u obliku teoreme o nepokretnoj tački.

POSLEDICA IV.2.2. *Neka je (X, H) parakonveksan prostor u kome je ispunjen uslov $x \in H(\{x\})$ za sve $x \in X$ i neka je $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje sa osobinom: $G^{-1}(x)$ je konveksan skup za svako $x \in X$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1) $x \in G(x)$ za neko $x \in X$;

2) G^* nije KKM preslikavanje.

Izloženu posledicu nećemo dokazivati jer je direktna posledica prethodne (sa G^* umesto G).

TEOREMA IV.2.1. *Neka je Neka je (X, H) parakonveksan prostor i $G : X \to \mathcal{P}(X)$ KKM preslikavanje, čije vrednosti su zatvoreni skupovi. Tada je:*

$$\bigcap_{x \in A} G(x) \neq \emptyset,$$

za svaki $A \in \mathcal{F}(X)$.

DOKAZ: Višeznačna preslikavanja definisana sa $H_A(F) = H(F)$ za svaki $F \in \mathcal{F}(A)$ i familija skupova $\{G(x)\}_{x \in X}\}$ ispunjavaju sve uslove teoreme II.2.2. Odatle dobijamo da familija skupova $\{G(x)\}_{x \in X}$ ima svojstvo konačnog presecanja.

Navedena teorema je uopštenje poznate KKM leme koju su za simplekse u euklidskim prostorima dokazali Knaster, Kuratovski i Mazurkijevič [1929]. Teoremu je na topološke vektorske prostore preneo Ki Fan [1961]. Ki Fanovo tvrđenje se obično naziva KKM princip. Odgovarajuće tvrđenje za konveksne prostore dokazao je Mark Lasonde [1983], za pseudokonveksne prostore Horvat [1983], za H-prostore Bardaro i Kepiteli [1988] a za konveksne topološke prostore I. Aranđelović [1992b]. Detaljan prikaz mogućnosti za primenu teoreme ovakvog oblika dao je Lasonde [1983].

POSLEDICA IV.2.3. *Neka je (X, H) parakonveksan prostor a $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ KKM preslikavanje, čije vrednosti su zatvoreni skupovi, od kojih je bar jedan kompaktan. Tada je:*

$$\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset.$$

DOKAZ: Neka je $G(x_0)$ kompaktan skup. Definisaćemo višeznačno preslikavanje $G' : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ formulom $G'(x) = G(x) \bigcap G(x_0)$. Pošto prema teoremi IV.2.1 svaka konačna podfamilija od $\{G'(x) \mid x \in X\}$ ima neprazan presek a svi ti skupovi su sadržani u kompaktnom skupu $G(x_0)$ onda je

$$\bigcap_{x\in X} G'(x) \neq \emptyset$$

pa prema tome i

$$\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset.$$

Sada smo u mogućnosti da korišćenjem leme 1. i posledice 1. dokažemo sledeće uopštenje poznate Fan-Brauderove teoreme. Analogni rezultat za konveksne topološke prostore dokazao je Komija u radu [1981].

TEOREMA IV.2.2. *Neka je X neprazan, parakonveksan i kompaktan prostor. Ako je $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je $T(x)$ neprazan i konveksan skup;

2) za svaki $y \in X$ je $T^{-1}(y)$ otvoren skup;

onda T ima nepokretnu tačku.

DOKAZ: Dovoljno je da dokažemo da T^{-1} ima nepokretnu tačku, što ćemo učiniti pomoću leme IV.2.1 sa $G = T^{-1*}$ dokazujući da G nije KKM preslikavanje a skup $G^{*-1}(y)$ jeste konveksan za svako $y \in X$ (tada ne može biti $x \in G(x)$ za svako $x \in X$, pa je $x_0 \in G^*(x_0) = T^{-1}(x_0)$ za neko $x \in X$). Drugi uslov je zadovoljen jer je $G^{*-1}(y) = T(y)$ za svako $y \in X$. Ako bi G bilo KKM, onda bi prema posledici 1. $\bigcap_{x\in X} G(x)$ bio neprazan jer su skupovi $G(x)$ zatvoreni i otuda kompaktni. Odatle bi sledelo da je $\bigcup_{x\in X} G^*(x) \neq X$ što je kontradikcija sa činjenicom da su skupovi $T(x)$ neprazni za svako $x \in X$.

Kao što se zapaža dobijeni rezultat proširuje Fan-Brauderovu teoremu oslabljivanjem uslova konveksnosti. Uopštenje u kojem je oslabljen uslov kompaktnosti dato je u radu Čanga [1991].

LEMA IV.2.2. *Neka je (X,H) parakonveksan prostor i $F,G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dva višeznačna preslikavanja. Ako je $x \in F(x) \subseteq G(x)$ za svaki $x \in X$ i ako je $F^{*-1}(y)$ konveksan skup za svako $y \in Y$, onda je G KKM preslikavanje.*

DOKAZ: Dovoljno je da dokažemo da ako G nije KKM preslikavanje, onda F^* ima bar jednu nepokretnu tačku. Ako G nije KKM preslikavanje, onda postoje konačan podskup $\{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{F}(X)$ i $x_0 \in X$ takvo da je $x_0 \in H(\{x_1, ..., x_n\})$ i $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n G(x_i)$. Odatle sledi da je $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n G^*(x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n F^*(x_i)$, pa prema tome važi $x_i \in F^{*-1}(x_0)$ za $1 \leq i \leq n$. Pošto je $F^{*-1}(x_0)$ konveksan skup, onda je $H(\{x_1, ..., x_n\}) \subseteq F^{*-1}(x_0)$, odakle sledi da je $x_0 \in F^*(x_0)$.

TEOREMA IV.2.3. *Neka je X neprazan i konveksan podskup parakonveksnog prostora E. Ako su $S,T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačna preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je skup $S(x)$ neprazan i $S(x) \subseteq T(x)$;

2) za svaki $x \in X$ je $T(x)$ konveksan skup;

3) za svaki $y \in X$ je $S^{-1}(y)$ otvoren skup, a za bar jedno $y_0 \in X$ je skup $S^{-1*}(y_0)$ kompaktan,

onda T ima nepokretnu tačku.

DOKAZ: Dovoljno je dokazati da T^{-1} ima nepokretnu tačku. Skup $\bigcap_{y \in X} S^{-1*}(y)$ je prazan zato što je skup $S(x)$ neprazan za svako $x \in X$. Svi skupovi $S^{-1*}(y)$, $y \in X$, su zatvoreni a bar jedan od njih je kompaktan pa, na osnovu posledice IV.2.1, S^{-1*} nije KKM preslikavanje. T^{-1*} nije KKM preslikavanje na osnovu leme *IV*.2.2. jer je $T^{-1*}(x) \subseteq S^{-1*}(x)$ za sve $x \in X$. Po pretpostavci je za svako $x \in X$ skup $(T^{-1*})^{-1*}(x) = T(x)$ konveksan odakle pomoću leme IV.2.1. dobijamo da je $x \in (T^{-1*})^*(x) = T^{-1}(x)$ za neko $x \in X$.

Zapažamo da se u slučaju $S = T$ naša teorema svodi na teoremu IV.2.2.

IV.3. MINIMAKS NEJEDNAKOSTI I NJIHOVE PRIMENE

DEFINICIJA IV.3.1. *Neka je X topološki prostor, $f : X \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$, $a(x) = max\{f(x), g(f(x))\}$ i $b(x) = min\{f(x), g(f(x))\}$ za svako $x \in X$. Za funkciju f reći ćemo da je:*

1) $g-$poluneprekidna odozgo na X ako je a poluneprekidna odozgo na X;

2) $g-$poluneprekidna odozdo na X ako je a poluneprekidna odozdo na X.

Odozdo i odozgo g-poluneprekidne funkcije definisao je Tasković u radu [1992]. Početni deo Taskovićevih istraživanja je saopšten u Kuparima 1990. godine, kao što smo naveli u uvodu.

DEFINICIJA IV.3.2. *Neka je X vektorski prostor, Y njegov konveksan podskup, $g : R \longrightarrow R$ i $a(x) = max\{f(x), g(f(x))\}$ za svako $x \in Y$. Funkcija $f : Y \longrightarrow R$ je:*

1) konveksna, ako je $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ za svako $x, y \in Y$ i svako $\lambda \in [0,1]$;

2) kvazikonveksna, ako je $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$ za svako $x, y \in Y$ i svako $\lambda \in [0,1]$;

3) konkavna, ako je $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ za svako $x, y \in Y$ i svako $\lambda \in [0,1]$;

4) kvazikonkavna, ako je $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq min\{f(x), f(y)\}$ za svako $x, y \in Y$ i svako $\lambda \in [0,1]$.

5) $g-$prošireno kvazikonveksna ako je a kvazikonveksna funkcija;

6) $g-$prošireno kvazikonkavna ako je a kvazikonkavna funkcija;

Neka je $f : Y \longrightarrow R$, gde je Y proizvoljan konveksan podskup nekog vektorskog prostora. Može se pokazati da je funkcija f kvazikonveksna ako i samo ako je skup $\{x \in Y \mid f(y) < r\}$ konveksan za svako $r \in R$, odnosno da je f kvazikonkavna ako i samo ako je skup $\{x \in Y \mid f(y) > r\}$ konveksan za svako $r \in R$. g-prošireno kvazikonveksne i g-kvazikonkavne funkcije definisao je Tasković u radu [1992]. Početni deo Taskovićevih rezultata saopšten je 1990. godine u Kuparima, kao što smo naveli u uvodu. Navedene definicije kvazikonveksnih funkcija mogu se bez problema preneti na parakonveksne prostore.

DEFINICIJA IV.3.3. *Neka je (X, H) parakonveksan prostor, Y njegov konveksan podskup, $f : Y \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$, $a(x) = max\{f(x), g(f(x))\}$ i $b(x) = min\{f(x), g(f(x))\}$ za svako $x \in Y$. Za funkciju f rećićemo da je:*

1) f je kvazikonveksna ako je skup $\{y \in Y \mid f(y) < r$ konveksan za svako $r \in R$;

2) f je kvazikonkavna ako je skup $\{y \in Y \mid f(y) > r$ konveksan za svako $r \in R$;

3) $g-$prošireno kvazikonveksna ako je a kvazikonveksna funkcija;

4) $g-$prošireno kvazikonkavna ako je a kvazikonkavna funkcija.

Naredna teorema daje minimaks nejednakost Ki Fanovog tipa za $g-$prošireno konkavne i $g-$odozdo poluneprekidne funkcije. Ona uopštava rezultate: Fana [1972], Jena [1981], Granasa i Lina [1983] i [1986], Bardara i Kapitelijeve [1988], [1989] i [1990], Parka [1991] i Arandelovića [1992b] i [1993].

TEOREMA IV.3.1. *Neka je X parakonveksan prostor a C njegov neprazan i konveksan podskup. Ako su $p, q : C^2 \longrightarrow R$ i $g : R \longrightarrow R$ realne funkcije sa svojstvima:*

1) $p(x, y) \leq q(x, y)$ za sve $x, y \in X$;

2) $sup_{x \in C} g(q(x, x)) \leq sup_{x \in C} q(x, x) = \lambda$;

3) za svaki $y \in C$ funkcija $x \longrightarrow q(x,y)$ je g-kvazikonkavna na C;

4) za svaki $x \in C$ preslikavanje $y \longrightarrow p(x,y)$ je g- poluneprekidno odozdo;

5) za neko $x_0 \in C$ je skup $\{y \in C : max\{p(x_0,y), g(p(x_0,y))\} \leq \lambda\}$ kompaktan;

6) g je rastuća funkcija,

onda postoji $\hat{y} \in C$ takvo da je:

$$sup_{x \in C} p(x,\hat{y}) \leq sup_{x \in C} q(x,x).$$

DOKAZ: Neka je $h(x,y) = max\{p(x,y), g(p(x,y))\}$ i

$k(x,y) = max\{q(x,y), g(q(x,y))\}$. Iz uslova 2) sledi da je $\lambda = sup_{x \in C} k(x,x)$ a iz 1) i 6) da je $h(x,y) \leq k(x,y)$ za sve $x, y \in X$. Neka su $S, T : C \longrightarrow \mathcal{P}(C)$ višeznačna preslikavanja definisana sa:

$S(y) = \{x \in C : h(x,y) > \lambda\}$,

$T(x) = \{y \in C : k(x,y) > \lambda\}$.

Iz predpostavki teoreme dobijamo dalje:

a) T nema nepokretnu tačku;

b) $S(y) \subseteq T(y)$ za sve $y \in X$;

c) za svako $y \in C$ skup $T(y)$ je konveksan;

d) za svako $x \in C$ je skup $S^{-1}(x) = \{y \in C : h(x,y) > \lambda\}$ otvoren u C;

e) bar za jedno $x_0 \in C$ je skup $S^{-1*}(x)$ kompaktan.

Na osnovu teoreme IV.2.3. postoji $\hat{y} \in C$ takvo da je $S(\hat{y}) = \emptyset$ te je $h(x,\hat{y}) \leq \lambda\}$ za sve $x \in C$ i otuda $p(x,\hat{y}) \leq \lambda\}$ za sve $x \in C$.

Naredna teorema je zajedničko uopštenje predhodne i Parkove teoreme iz rada [1991].

TEOREMA IV.3.2. *Neka je X konveksan podskup parakonveksnog prostora E. Ako su $p, q : X \times X \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$ i $h : X \longrightarrow R$ realne funkcije koje* *ispunjavaju sledeće uslove:*

1) $p(x,y) \leq q(x,y)$ *za sve* $x, y \in X$;

2) $q(x,x) \leq 0$ *za sve* $x \in X$;

3) $sup_{x \in X} g(q(x,x)) \leq sup_{x \in X} q(x,x)$;

4) za svaki $y \in X$ *funkcija* $x \longrightarrow q(x,y) + h(y) - h(x)$ *je* g*-kvazikonkavna na* X;

5) za svaki $x \in X$ *preslikavanje* $y \longrightarrow p(x,y) + h(y) - h(x)$ *je* g*-poluneprekidno odozdo na* X;

6) postoji $x_0 \in X$ *takvo da je skup*
$\{y \in X : max\{p(x_0,y)+h(y)-h(x_0), g(p(x_0,y)+h(y)-h(x_0)) \leq 0\}$ *kompaktan;*

7) g *je rasutća funkcija,*

onda postoji $\hat{y} \in X$ *takvo da je:*

$$p(x,\hat{y}) + h(\hat{y}) \leq h(x)$$

za sve $x \in X$.

DOKAZ: Stavljajući u predhodnu teoremu $p(x,y)+h(y)-h(x)$ umesto $p(x,y)$ a $q(x,y)+h(y)-h(x)$ umesto $q(x,y)$, dobijamo da postoji $\hat{y} \in X$ takvo da je: $p(x,\hat{y}) + h(\hat{y}) - h(x) \leq 0$.

Prva primena prethodne teoreme odnosiće se na varijacione nejednakosti. Tvrđenje koje navodimo potiče od Hartmana i Štampačije [1966].

POSLEDICA IV.3.1. *Neka je* E *realan Hilbertov prostor,* $K \subseteq E$ *konveksan, zatvoren i ograničen podskup, i neka je sa* $\langle .,. \rangle$ *označen skalarni proizvod na* E. *Tada za svako* $f : K \longrightarrow E$ *koje ispunjava uslove:*

1) f *je neprekidno na* K;

2) $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq 0$ *za sve* $x, y \in K$;

postoji $x^* \in K$ takvo da je:

$$\langle f(x^*), x^* - x\rangle \leq 0$$

za sve $x \in K$.

DOKAZ: Neka je $q(x,y) = \langle f(y), y-x\rangle$ a $p(x,y) = \langle f(x), y-x\rangle$ za sve $x, y \in K$, $g(t) = t$ za sve $t \in R$ i $h(x) = 0$ za sve $x \in K$. Neka je x_0 proizvoljan element iz K. Skup $\{y \in K : p(x_0, y) \leq 0\}$ je ograničen i zatvoren u K pa prema tome kompaktan u slaboj topologiji. Tvrđenje sledi direktno iz teoreme IV.5.

Iz dobijene posledice možemo izvesti poznatu teoremu Kirka, Braudera i Gedea o nepokretnim tačkama neekspanzivnih preslikavanja.

POSLEDICA IV.3.2. *Neka je K konveksan, zatvoren i ograničen podskup Hilbertovog prostora E. Ako je $f : K \longrightarrow K$ neekspanzivno preslikavanje ($\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ za sve $x, y \in K$), onda f ima bar jednu nepokretnu tačku.*

DOKAZ: Neka je $h(x) = x - f(x)$. Funkcija h ispunjava sve uslove posledice IV.3.1. pa postoji $x_0 \in K$ takvo da je: $\langle h(x_0), x_0 - x\rangle \leq 0$ za sve $x \in K$. Prema tome je za $x = f(x_0)$ važi $\|x_0 - f(x_0)\|^2 \leq 0$ odakle sledi $x_0 = f(x_0)$.

Treća primena teoreme IV.3.2 je sledeći ekstermalni princip, koji je uopštenje Parkovog ekstermalnog principa iz rada [1991] i Mazur-Šauderovog ekstermalnog principa.

POSLEDICA IV.3.3. *Neka je X konveksan podskup parakonveksnog prostora E. Ako $h : X \longrightarrow R$ realna funkcija koja ispunjava sledeće uslove:*

1) za svaki $y \in X$ funkcija $x \longrightarrow h(y) - h(x)$ je kvazikonkavna na X;

2) za svaki $x \in X$ preslikavanje $y \longrightarrow h(y) - h(x)$ je poluneprekidno odozdo na X;

3) postoji $x_0 \in X$ *takvo da je skup* $\{y: \ h(y) - h(x_0\} \leq \ 0\}$ *kompaktan;*

onda postoji $\hat{y} \in X$ *takvo da je:*

$$h(\hat{y}) \leq h(x)$$

za sve $x \in X$.

DOKAZ: Uzećemo da je $p(x,y) = q(x,y) = 0$ za sve $x, y \in X$ i tvrđenje sledi direktno iz teoreme IV.3.2.

IV.4 STAVOVI O PRESECANJU OTVORENIH SKUPOVA I NJIHOVE PRIMENE

Glavu završavamo sa nekoliko primena stavova o presecanju za otvorene skupove.

TEOREMA IV.4.1. *Neka je Neka je (X, H) parakonveksan prostor i $G : X \to \mathcal{P}(X)$ KKM preslikavanje, čije vrednosti su otvoreni skupovi. Tada je:*

$$\bigcap_{x \in A} G(x) \neq \emptyset,$$

za svaki $A \in \mathcal{F}(X)$.

DOKAZ: Višeznačna preslikavanja definisana sa $H_A(F) = H(F)$ za svaki $F \in \mathcal{F}(A)$ i familija skupova $\{G(x)\}_{x \in X}$ ispunjavaju sve uslove teoreme II.2.2'. Odatle dobijamo da familija skupova $\{G(x)\}_{x \in X}$ ima svojstvo konačnog presecanja.

Navedena teorema je uopštenje rezultata koje su dokazali Ših [1986] i Kim [1987]. Mogućnosti za primenu teoreme ovakvog oblika na topološkim vektorskim prostorima dali su Lasonde [1990] i Park [1990].

Naredni stav o fiksnim tačkama pokazuje pod kojim uslovoma se pretpostavka da su inverzne slike otvoreni skupovi, u teoremi IV.2.2 može zameniti pretpostavkom o zatvorenosti odgovarajućih skupova. Analogni rezultat za topološke vektorske prostore dokazao je Mark Lasonde u radu [1990].

TEOREMA IV.4.2. *Neka je X neprazan, parakonveksan i kompaktan prostor. Ako je $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je $T(x)$ neprazan i konveksan skup;

2) za svaki $y \in X$ je $T^{-1}(y)$ zatvoren skup;

3) postoji neprazan konačan skup $A \in \mathcal{F}(X)$ takav da je $T(x) \bigcap A \neq \emptyset$ za svako $x \in X$;

onda T ima nepokretnu tačku.

DOKAZ: Dovoljno je da dokažemo da T^{-1} ima nepokretnu tačku. Uslov $T(x) \bigcap A$ za svako $x \in X$, je ekvivalentan sa $X \subseteq_{x \in A} T^{-1}(x)$. Sada ćemo posmatrati višeznačno preslikavanje $G = T^{-1*}$. Pošto je skup $G^{*-1}(y) = T(y)$ konveksan. za svako $y \in X$ dovoljno je da dokažemo da G nije KKM preslikavanje, jer tada prema lemi IV.2.1 ne može biti $x \in G(x)$ za svako $x \in X$, pa je $x_0 \in G^*(x_0) = T^{-1}(x_0)$ za neko $x_0 \in X$. Ako bi G bilo KKM, onda bi prema teoremi IV.4.1 $\bigcap_{x \in A} G(x)$ bio neprazan jer su skupovi $G(x)$ otvoreni. Odatle bi sledelo da je $\bigcup_{x \in X} G^*(x) \neq X$ što je kontradikcija.

Naredni rezultat je teorema o fiksnim tačkama odozgo poluneprekidnih preslikavanja. On uopštava klasične rezultate iz radova: Kakutani [1941], F. H. Bohnenblust i S. Karlin [1950], I. L. Gliksberg [1952], Ki Fan [1952] i O. Hadžić [1981].

Jedno sličan rezultat je dat u petoj glavi (teorema V.4.2). U toj teoremi je pretpostavka o konveksnosti slike zamenjena sa uslovom acikličnosti.

TEOREMA IV.4.3. *Neka je X kompaktan Hausdorfov topološki prostor i $\{v_i\}_{i \in I}$ baza simetričnih (iz $(x, y) \in v_i$ sledi $(y, x) \in v_i$) i otvorenih (u topologiji prostora $X \times X$) okolina dijagonale skupa X. Ako postoji familija preslikavanja $\{H_i\}_{i \in I}$ $H_i : \mathcal{F}(X) \to 2^X$ takva da je:*

1) (X, H_i) parakonveksan prostor, za svako $i \in I$;

2) $V_i(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in v_i\}$ konveksan skup u (X, H_i) za svako $x \in X$

i svako $i \in I$,

onda za svako odozgo poluneprekidno višeznačno preslikavanje $G : X \to 2^X$, *čije vrednosti su neprazni kompaktni konveksni skupovi, postoji bar jedno* $x_0 \in X$ *takvo da je* $x_0 \in G(x_0)$.

DOKAZ: Pošto je X kompaktan Hausdorfov topološki prostor, dovoljno je da pokažemo da za svako $i \in I$ postoji $x_i \in X$ takvo da je $V_i(x_i) \bigcap G(x_i) \neq \emptyset$. Fiksirajmo v_i. Iz kompaktnosti sledi da postoji konačan skup $A \subseteq X$ takav da je $X \subseteq \bigcup_{a \in A} V_i(a)$. Posmatrajmo viëznačno preslikavanje $F_i : X \to 2^X$ definisano sa

$$F_i(x) = \bigcup_{p \in G(x)} \{y \mid y \in \overline{V_i(p)}\}.$$

Pošto je $F(x) \bigcap A \neq \emptyset$ za svako $x \in X$, iz Teoreme IV.4.2 sledi da je postoji $x_i \in X$ takvo da je $x_i \in F_(x_i)$, što povlači $V_i(x_i) \bigcap G(x_i) \neq \emptyset$.

Naredna teorema je, kao što ćemo videti kasnije uopštenje odgovarajućeg rezultata Ši Parka [1990] dokazanog na Konveksnim prostorima.

TEOREMA IV.4.4. *Neka je* X *neprazan i konveksan podskup parakonveksnog prostora* E. *Ako su* $F, G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *višeznačna preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

1) za svaki $x \in X$ *je skup* $F(x)$ *neprazan i* $F(x) \subseteq G(x)$;

2) za svaki $x \in X$ *je* $G(x)$ *konveksan skup;*

3) za svaki $y \in X$ *je* $F^{-1}(y)$ *zatvoren skup;*

3) postoji neprazan konačan skup $A \in \mathcal{F}(X)$ *takav da je* $F(x) \bigcap A$ *za svako* $x \in X$;

onda G *ima nepokretnu tačku.*

DOKAZ: Dovoljno je dokazati da G^{-1} ima nepokretnu tačku. Skup

$\bigcap_{y \in X} F^{-1*}(y)$ je prazan zato što je skup $F(x)$ neprazan za svako $x \in X$. Svi skupovi $F^{-1*}(y)$, $y \in X$, su otvoreni. Iz leme *IV.2* sledi da G^{-1*} nije KKM preslikavanje na jer je $G^{-1*}(x) \subseteq F^{-1*}(x)$ za sve $x \in X$. Po pretpostavci je za svako $x \in X$ skup $(G^{-1*})^{-1*}(x) = G(x)$ konveksan odakle pomoću leme IV.2.2. dobijamo da je $x \in (G^{-1*})^{*}(x) = G^{-1}(x)$ za neko $x \in X$.

Zapažamo da se u slučaju $F = G$ naša teorema svodi na teoremu IV.4.2.

POSLEDICA IV.4.1 - ŠI PARK [1990]. *Neka je X neprazan i konveksan podskup konveksnog prostora E. Ako su $S, T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačna preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je skup $T(x) \subseteq S(x)$;

2) za svaki $x \in X$ je $S^{-1}(x)$ konveksan skup;

3) za svaki $y \in X$ je $T(y)$ zatvoren skup;

4) postoji neprazan konačan skup $A \in \mathcal{F}(X)$ takav da je $X = \bigcup_{x \in A} T(x)$;

onda S ima nepokretnu tačku.

IV.5. KKM PRESLIKAVANJA NA RAVNOMERNIM PARAKONVEKSNININIM PROSTORIMA

U ovoj glavi pokazujemo kako se uslov kompaktnosti koji se javlja u stavovima dokazanim u odeljcima IV.2 i IV.3 može oslabiti korišćenjem rezultata dobijenih u $II.3$. Pri tome se mora uvesti dodatna pretpostavka da je topološki prostor na kome se posmatra parakonveksnost ravnomeran i kompletan.

TEOREMA IV.5.1. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor, ϕ mera nekompaktnosti na X, (X, H) parakonveksan prostor a $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ KKM preslikavanje, čije vrednosti su zatvoreni skupovi. Ako za svako $t > 0$ postoji $A \in \mathcal{F}(X)$ takvo da je:*

$$\phi(\bigcap_{x \in A} G(x)) < t,$$

onda je:

$$\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset.$$

DOKAZ: Iz teoreme *IV*.2.1 sledi da posmatrana familija skupova ima svojstvo konačnog presecanja. Nepraznost celog preseka sledi iz teoreme II.3.1.

POSLEDICA IV.5.1. *Neka je X kompletan ravnomeran prostor, ϕ mera nekompaktnosti na X, (X, H) parakonveksan prostor a $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ KKM preslikavanje, čije vrednosti su zatvoreni skupovi. Ako za svako $t > 0$ postoji $A \in \mathcal{F}(X)$ takvo da je:*

$$\phi(G(x)) < t,$$

onda je:

$$\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset.$$

DOKAZ: Iz teoreme *IV*.2.1 sledi da posmatrana familija skupova ima svojstvo konačnog presecanja. Nepraznost celog preseka sledi iz stava II.3.1.

Prethodna dva tvrđenja uopštavaju posledicu *IV*.3.2 u slučaju kada je X kompletan ravnomeran prostor.

Sada smo u mogućnosti da dokažemo sledeća uopštenje poznate Fan-Brauderove teoreme.

TEOREMA IV.5.2. *Neka je X neprazan, parakonveksan, kompletan ravnomerni prostor i ϕ mera nekompaktnosti na X. Ako je $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je $T(x)$ neprazan i konveksan skup;

2) za svaki $y \in X$ je $T^{-1}(y)$ otvoren skup;

3) za svaki $t > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $\phi(T^{-1*}(x) < t$;

onda T ima nepokretnu tačku.

DOKAZ: Dovoljno je da dokažemo da T^{-1} ima nepokretnu tačku, što ćemo učiniti pomoću leme IV.2.1 sa $G = T^{-1*}$ dokazujući da G nije KKM preslikavanje a skup $G^{*-1}(y)$ jeste konveksan za svako $y \in X$ (tada ne može biti $x \in G(x)$ za svako $x \in X$, pa je $x_0 \in G^*(x_0) = T^{-1}(x_0)$ za neko $x \in X$). Drugi uslov je zadovoljen jer je $G^{*-1}(y) = T(y)$ za svako $y \in X$. Ako bi G bilo KKM, onda bi prema stavu *IV*.2.1. $\bigcap_{x\in X} G(x)$ bio neprazan jer su skupovi $G(x)$ zatvoreni i otuda kompaktni. Odatle bi sledelo da je $\bigcup_{x\in X} G^*(x) \neq X$ što je kontradikcija sa činjenicom da su skupovi $T(x)$ neprazni za svako $x \in X$.

TEOREMA IV.5.3. *Neka je X neprazan i konveksan podskup parakonveksnog kompletnog ravnomernog prostora E i ϕ mera nekompaktnosti na X. Ako su $S, T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ višeznačna preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

1) za svaki $x \in X$ je skup $S(x)$ neprazan i $S(x) \subseteq T(x)$;

2) za svaki $x \in X$ je $T(x)$ konveksan skup;

3) za svaki $y \in X$ je $S^{-1}(y)$ otvoren skup, a za svko $t > 0$ postoji $x_t \in X$ takvo da je $\phi(S^{-1*}(x_t)) < t$,

onda T ima nepokretnu tačku.

DOKAZ: Dovoljno je dokazati da T^{-1} ima nepokretnu tačku. Skup $\bigcap_{y\in X} S^{-1*}(y)$ je prazan zato što je skup $S(x)$ neprazan za svako $x \in X$. Svi skupovi $S^{-1*}(y)$, $y \in X$, su zatvoreni pa, na osnovu teoreme $IV.2.1$, S^{-1*} nije KKM preslikavanje. T^{-1*} nije KKM preslikavanje na osnovu leme $IV.2.2.$ jer je $T^{-1*}(x) \subseteq S^{-1*}(x)$ za sve $x \in X$. Po pretpostavci je za svako $x \in X$ skup $(T^{-1*})^{-1*}(x) = T(x)$ konveksan odakle pomoću leme IV.2.1. dobijamo da je $x \in (T^{-1*})^*(x) = T^{-1}(x)$ za neko $x \in X$.

Zapažamo da se u slučaju $S = T$ naša teorema svodi na teoremu IV.5.2.

TEOREMA IV.5.4. *Neka je X parakonveksan kompletan ravnomeran prostor, ϕ mera nekompaktnosti na X a $C \subseteq X$ njegov neprazan i konveksan podskup. Ako su $p, q : C^2 \longrightarrow R$ i $g : R \longrightarrow R$ realne funkcije sa svojstvima:*

1) $p(x,y) \leq q(x,y)$ za sve $x, y \in X$;

2) $sup_{x\in C} g(q(x,x)) \leq sup_{x\in C} q(x,x) = \lambda$;

3) za svaki $y \in C$ funkcija $x \longrightarrow q(x,y)$ je g-kvazikonkavna na C;

4) za svaki $x \in C$ preslikavanje $y \longrightarrow p(x,y)$ je g- poluneprekidno odozdo;

5) za svako $t > 0$ postoji $x_t \in C$ takvo da je

$$\phi(\{y \in C : max\{p(x_t,y), g(p(x_t,y))\} \leq \lambda\}) < t;$$

6) g je rastuća funkcija,

onda postoji $\hat{y} \in C$ takvo da je:

$$sup_{x\in C} p(x,\hat{y}) \leq sup_{x\in C} q(x,x).$$

DOKAZ: Neka je $h(x,y) = max\{p(x,y), g(p(x,y))\}$ i $k(x,y) = max\{q(x,y), g(q(x,y))\}$. Iz uslova 2) sledi da je $\lambda = sup_{x \in C} k(x,x)$ a iz 1) i 6) da je $h(x,y) \leq k(x,y)$ za sve $x,y \in X$. Neka su $S,T : C \longrightarrow \mathcal{P}(C)$ višeznačna preslikavanja definisana sa:

$S(y) = \{x \in C : h(x,y) > \lambda\}$,

$T(x) = \{y \in C : k(x,y) > \lambda\}$.

Iz predpostavki teoreme dobijamo dalje:

a) T nema nepokretnu tačku;

b) $S(y) \subseteq T(y)$ za sve $y \in X$;

c) za svako $y \in C$ skup $T(y)$ je konveksan;

d) za svako $x \in C$ je skup $S^{-1}(x) = \{y \in C : h(x,y) > \lambda\}$ otvoren u C;

e) za svako $t > 0$ postoji $x_t \in C$ takvo da je $\phi(S^{-1*}(x_t)) < t$.

Na osnovu teoreme IV.5.3. postoji $\hat{y} \in C$ takvo da je $S(\hat{y}) = \emptyset$ te je $h(x,\hat{y}) \leq \lambda\}$ za sve $x \in C$ i otuda $p(x,\hat{y}) \leq \lambda\}$ za sve $x \in C$.

Naredna teorema je zajedničko uopštenje predhodne, Parkove teoreme iz rada [1991] i teoreme *IV*.3.2

TEOREMA IV.4.5. *Neka je X konveksan podskup parakonveksnog kompletnog ravnomernog prostora E i ϕ mera nekompaktnosti na E. Ako su $p,q : X \times X \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$ i $h : X \longrightarrow R$ realne funkcije koje ispunjavaju sledeće uslove:*

1) $p(x,y) \leq q(x,y)$ za sve $x,y \in X$;

2) $q(x,x) \leq 0$ za sve $x \in X$;

3) $sup_{x \in X} g(q(x,x)) \leq sup_{x \in X} q(x,x)$;

4) za svaki $y \in X$ funkcija $x \longrightarrow q(x,y) + h(y) - h(x)$ je g-kvazikonkavna na X;

5) za svaki $x \in X$ preslikavanje $y \longrightarrow p(x,y) + h(y) - h(x)$ je g-poluneprekidno odozdo na X;

6) za svako $t > 0$ postoji $x_t \in X$ takvo da je

$$\phi(\{y \in X : \max\{p(x_t, y) + h(y) - h(x_t), g(p(x_t, y) + h(y) - h(x_t)) \le 0\}) < t;$$

7) g je rasutća funkcija,

onda postoji $\hat{y} \in X$ takvo da je:

$$p(x, \hat{y}) + h(\hat{y}) \le h(x)$$

za sve $x \in X$.

DOKAZ: Stavljajući u predhodnu teoremu $p(x,y) + h(y) - h(x)$ umesto $p(x,y)$ a $q(x,y) + h(y) - h(x)$ umesto $q(x,y)$, dobijamo da postoji $\hat{y} \in X$ takvo da je: $p(x, \hat{y}) + h(\hat{y}) - h(x) \le 0$.

Primenom teoreme $IV.5.5$ dobija se sledeći ekstermalni princip, koji je uopštenje Parkovog ekstermalnog principa iz rada [1991] i Mazur-Šauderovog ekstermalnog principa.

POSLEDICA IV.5.2. *Neka je X konveksan podskup parakonveksnog kompletnog ravnomernog prostora E i ϕ mera nekompaktnosti na E. Ako $h : X \longrightarrow R$ realna funkcija koja ispunjava sledeće uslove:*

1) za svaki $y \in X$ funkcija $x \longrightarrow h(y) - h(x)$ je kvazikonkavna na X;

2) za svaki $x \in X$ preslikavanje $y \longrightarrow h(y) - h(x)$ je poluneprekidno odozdo na X;

3) za svako $t > 0$ postoji $x_t \in X$ takvo da je skup $\phi(\{y : h(y) - h(x_t) \le 0\}) < t$;

onda postoji $\hat{y} \in X$ takvo da je:

$$h(\hat{y}) \le h(x)$$

za sve $x \in X$.

DOKAZ: Uzećemo da je $p(x,y) = q(x,y) = 0$ za sve $x, y \in X$ i tvrđenje sledi direktno iz teoreme IV.5.3.

V. STAVOVI O PRESECANJU FON NOJMANOVOG TIPA

V.0. UVOD

U petoj glavi razmatrana su različita uopštenja stavova o presecanju fon Nojmanovog tipa. Dobijeni rezultati su direktno primenjeni u dokazivanju minimaks teorema i stavova o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja.

U prvom odeljku smo izneli osnovne činjenice o homološkim grupama. Drugi odeljak sadrži uopštenja nekoliko rezultata iz rada Horvata [1984]. Treći odeljak je posvećenjen dokazivanju jednom novom stavu o presecanju koji uopštava ranije rezultate fon Nojmana [1928] i Ki Fana [1953], kao i njegovim primenama u dokazima minimaks teorema fon Nojmanovog tipa. Četvrti odeljak daje još jedan novi stav o prescanju koji primenjujemo u dokazu stava o fiksnim tačkama višeznačnih preslikavanja.

V.1 HOMOLOŠKE GRUPE

U glavi II.1 dali smo osnovne pojmove iz teorije homotopskih grupa. U ovoj glavi dajemo kratak uvod u teoriju homoloških grupa. Pri poređenju te dve klase topoloških invarijanata zapaža se da se pojam homoloških grupa uvodi na mnogo komplikovaniji način ali da se one mnogo lakše izračunavaju na konkrektnom topološkom prostoru. Čitalac detaljnije informacije o ovoj teoriji može naći u monografijama Španijera [1966] i Fuksa, Fomenka i Gutenmahera [1969], a o njenim primenama u nelinearnoj analizi u monografiji Tasković [1993].

DEFINICIJA V.1. *Neka je X topološki prostor. Proizvoljno neprekidno preslikavanje standardnog simpleksa Δ_n u prostor X naziva se $n-$dimenzionalni singularni simpleks.*

DEFINICIJA V.2. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{G}$ abelova grupa. Izraz oblika*

$$\sum_{i\in I} k_i f_i^n$$

gde je $\{k_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ konačan podskup grupe $\{CalG\}$ a $\{f_i^n\}_{i\in I}$ skup $n-$dimenzionalnih singularnih simpleksa prostora X; naziva se simplicijalni lanac.

"Sabiranje" simplicijalnih lanaca iste dimenzije može se definisati kao sabiranje linearnih kombinacija koje ih generišu. Na taj način se dolazi do slobodne abelove grupe $C_n(X)$ čiji su generatori svi $n-$dimenzionalni simplicijalni lanci prostora X.

Naš sledeći zadatak je da uvedemo pojam graničnog homomorfizma kao preslikavanja grupe $C_n(X)$ u grupu $C_{n-1}(X)$. Pošto je $C_n(X)$ slobodna grupa, dovoljno je to preslikavanje definisati na njenim generatorima tj. na n-dimenzionalnim singularnim simpleksima. To se može uraditi na sledeći način:

$$\partial_n(f^n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i^{n-1},$$

gde je sa f_i^{n-1} označena restrikcija singularnog simpleksa f^n na i-tu granu standardnog simpleksa.

DEFINICIJA V.3. *Količnička grupa*

$$Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$$

se naziva homološka grupa n-tog reda prostora X.

V.2 UOPŠTENJE HORVATOVE TEOREME

Ako su X i Y neprazni skupovi i $A, B : Y \to \mathcal{P}(Y)$ dva višeznačna preslikavanja, tvrđenja koja govore o egzistenciji elementa $x_0 \in X$ takvog da je $A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset$ nazivaju se stavovi presecanju fon Nojmanovog tipa, koji ih je prvi uveo u nelinearnu analizu u svom poznatom radu [1928]. Svaki stav tog oblika može se iskazati u ekvivalentnom obliku koji govori o postojanju tačaka $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ takvih da je $y_0 \in A(x_0)$ i $x_0 \in B^{-1}y_0$.

Ako je X kompaktan topološki prostor onda za svako njegovo konačno otvoreno pokrivanje $U_1, ..., U_n$ postoje realne funkcije $\varphi_1, ..., \varphi_n : X \to R$ takve da je $\varphi_i(x) = 0$ za sve $x \notin U_i$ i da je $\varphi_1(x) + ... + \varphi_n(x) = 1$ za sve $x \in X$. Ta familija funkcija se naziva *podela jedinice* koja odgovara datom pokrivanju.

Glavu započinjemo sledećom stavom o neprekidnoj selekciji koja uopštava rezultat Horvata [1984].

STAV V.1.1. *Neka su sve homotopske grupe kompaktanog topološkog prostora prostora X trivijalne i neka je $R : X \to 2^X$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslove:*

1) $R^{-1}(x)$ je otvoren skup za svako $x \in X$;

2) iz $\bigcap_{x \in A} R(x) \neq \emptyset$ sledi da su sve homotopske grupe skupa $\bigcap_{x \in A} R(x)$ trivijalne, za svako $A \in 2^X$.

Onda postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to X$ takvo da je $f(x) \in R(x)$ za sve $x \in X$.

DOKAZ: Zbog uslova nepraznosti vrednosti preslikavanja R važiće $X \subseteq \bigcup_{y \in X} R^{-1}(y)$. Iz kompaktnosti prostora X sledi da postoje

$y_0, ..., y_n \in X$ takvi da je $X \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} R^{-1}(y)$. Ako je $\varphi_0, ..., \varphi_n$ odgovarajuća podela jedinice onda je sa $\psi : x \to (\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x)$ definisano jedno neprekidno prelikavanje $\psi : X \to \Delta_n$. Preslikavanje $H : 2^{\{0,...,n\}} \to 2^X$ definisano sa $H(J) = \bigcap\{R(x) \mid y_j \in R(x) \ \forall j \in J\}$ ispunjava sve uslove teoreme II.2.1. Prema tome postoji neprekidno preslikavanje $\phi : \Delta_n \to X$ takvo da je

$$\phi(\Delta_J) \subseteq \bigcap\{R(x) \mid y_j \in R(x) \ \forall j \in J\}.$$

Na kraju zaključujemo da neprekidno preslikavanje $f = \phi \circ \psi$ ispunjava uslov $f(x) \in R(x)$ za sve $x \in X$.

Primenom predhodnog stava i teoreme III.1.2 dokazaćemo sledeću stav fon Nojmanovog tipa koji uopťava rezultat Horvata [1984].

TEOREMA V.1.1. *Neka su sve homotopske grupe kompaktanog topološkog prostora prostora X trivijalne i neka su $A, B : X \to 2^X$ dva višeznačna preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

a) $A(x)^{-1}$, $B(x)$ su otvoreni skupovi za sve $x \in X$;

b) skupovi $\bigcap_{y \in Y} B^{-1}(y)$ i $\bigcap_{y \in Y} A(y)$ su prazni ili su im sve homotopske grupe trivijalne, za sve $Y \in 2^X$;

c) $B^{-1}(x) \neq \emptyset$ za sve $x \in X$.

Tada postoji tačka $x_0 \in X$ takva da je

$$A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset.$$

DOKAZ: Preslikavanje A mora prema stavu V.1 imati neprekidnu selekciju f. Prema teoremi III.1.2 višeznačno preslikavanje $B^{-1} \circ f$ mora imati bar jednu fiksnu tačku x_0. Za to x_0 će važiti

$$A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset.$$

V.3. STAVOVI O PRESECANJU I MINIMAKS TEOREME

Sada ćemo Teoremu o koincidenciji, koju je dokazao Ki Fan [1953], preneti na parakonveksne prostore. Inače preteča Ki Fanove teoreme je jedan rezultat fon Nojmana [1928]. Odgovarajući rezultat za pseudokonveksne prostore dokazao je Horvat [1983], a za H-prostore Aranđelović [1993].

TEOREMA V.3.1. *Neka su $X \subseteq E$ i $Y \subseteq F$ neprazni, konveksni, kompaktni skupovi u parakonveksnim prostorima E i F. Neka su $A, B : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dva višeznačna preslikavanja takva da je:*

a) $A(x)$ otvoren i $B(x)$ neprazan konveksan skup za sve $x \in X$;

b) $B^{-1}(y)$ otvoren i $A^{-1}(y)$ neprazan konveksan skup za sve $y \in Y$.

Tada postoji tačka $x_0 \in X$ takva da je

$$A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset.$$

DOKAZ: Skup $Z = X \times Y$ u parakonveksnom prostoru $E \times F$ (videti primer IV.1.5) je neprazan, konveksan i kompaktan. Višeznačno preslikavanje $T : Z \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ definisano sa

$$T(x, y) = A^{-1}(y) \times B(x)$$

ispunjava uslove:

1) za svako $(x, y) \in Z$ je $T(x, y)$ neprazan konveksan skup;

2) za svako $(x, y) \in Z$ je $T^{-1}(x, y) = B^{-1}(y) \times A(x)$ otvoren skup;

pa prema teoremi IV.2.2 postoji $(x_0, y_0) \in Z$ takvo da je $(x_0, y_0) \in T(x_0, y_0)$. Iz $(x_0, y_0) \in A^{-1}(y_0) \times B(x_0)$ dobijamo $y_0 \in A(x_0)$ i $y_0 \in B(x_0)$ te je $y_0 \in A(x_0) \bigcap B(x_0)$.

LEMA V.3.1. *Neka su X i Y skupovi, $s : X \times Y \longrightarrow R$, $f : X \times Y \longrightarrow R$ i $t : X \times Y \longrightarrow R$. Ako je $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$, za svako $(x,y) \in X \times Y$ i ako postoje $\inf_{y \in Y} s(x,y)$ i $\sup_{x \in X} t(x,y)$ onda je:*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} s(x,y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x,y) \leq$$

$$\leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} t(x,y).$$

DOKAZ: Nejednakosti $sup_{x \in X} inf_{y \in Y} s(x,y) \leq sup_{x \in X} inf_{y \in Y} f(x,y)$ i $inf_{y \in Y} sup_{x \in X} f(x,y) \leq inf_{y \in Y} sup_{x \in X} t(x,y)$ važe jer je $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$ za svako $(x,y) \in X \times Y$. Ostaje nam još da dokažemo nejednakost $sup_{x \in X} inf_{y \in Y} f(x,y) \leq inf_{y \in Y} sup_{x \in X} f(x,y)$. Ona sledi iz činjenice da za proizvoljno $(x^*, y^*) \in X \times Y$ važi $inf_{y \in Y} f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq sup_{x \in X} f(x, y^*)$.

U dokazu naredne teoreme koristićemo sledeće činjenice o poluneprekidnim funkcijama. Ako je $\mathcal{A}$ proizvoljna familija odozgo poluneprekidnih realnih funkcija definisanih na topološkom prostoru X i ako je funkcija g definisana sa $g(x) = inf_{f \in \mathcal{A}} f(x)$ za svako $x \in X$ konačna na X, onda je ona poluneprekidna odozgo na X. Ako je $\mathcal{A}$ proizvoljna familija odozdo poluneprekidnih realnih funkcija definisanih na topološkom prostoru X i ako je funkcija g definisana sa $g(x) = sup_{f \in \mathcal{A}} f(x)$ za svako $x \in X$ konačna na X, onda je ona poluneprekidna odozdo na X.

TEOREMA V.3.2. *Ako su X i Y kompaktni i konveksni skupovi u parakonveksnim prostorima E,F i $f : X \times Y \longrightarrow R$, realna funkcija, koje ispunjava uslove:*

1) za svako $x \in X$ funkcija $y \longrightarrow f(x,y)$ je kvazikonveksna i poluneprekidna *odozdo na* Y;

2) za svako $y \in Y$ *funkcija* $x \longrightarrow f(x,y)$ *je kvazikonkavna i poluneprekidna odozgo na* X;

onda je $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$.

DOKAZ: Zbog poluneprekidnosti odozgo funkcije f po prvoj promenjljivoj funkcija $q(y) = \max_{x\in X} f(x,y)$ je defnisana za svako $y \in Y$. q je poluneprekidna odozdo, jer je supremum poluneprekidnih odozdo funkcija, pa prema tome dostiže svoj minimum. Zbog poluneprekidnosti odozdo po drugoj koordinati funkcije f funkcija $p(x) = \min_{y\in Y} f(x,y)$ je defnisana za svako $x \in X$. p je poluneprekidna odozgo, jer je infimum odozgo poluneprekidnih funkcija, pa prema tome dostiže svoj maksimum. Odatle sledi da su izrazi $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)$ i $\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$ definisani.

Iz leme V.3.1 sledi da je

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \leq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Ostaje nam još da dokažemo da ne važi stroga nejednakost:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) < \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Ako važi stroga nejednakost, onda je:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) < r < \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$

za neko $r \in R$.

Definisaćemo višeznačna preslikavanja $A, B : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ izrazima:

$A(x) = \{y \in Y : f(x,y) > r\}$ i $B(x) = \{y \in Y : f(x,y) < r\}$.

Možemo zapaziti da da A i B ispunjavaju sve uslove teoreme V.3.1 Prema tome postoji $x_0 \in X$ takvo da je $A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset$. Odatle sledi da postoji $y_0 \in Y$ takvo da je $r < f(x_0, y_0) < r$ što je nemoguće.

Ovom teoremom obuhvaćene su poznata Sajonova teorema [1958], koja se odnosi na funkcije definisana na komaktnim i konveksnim podskupovima topoloških vektorskih prostora, Komijina teorema iz rada [1981] koja je proširenje te teoreme na konveksne topološke prostore i teorema I. Aranđelovića [1993] koja se odnosi na H-prostore. Originalan dokaz Sajonovog tvrđenja, bitno različit od svih predhodnih, dao je Tasković u radu [1990]. Uslovi kvazi-konveksnosti i kvazikonkavnosti za koordinatne funkcije mogu se još oslabiti kao što nam pokazuje sledeća teorema.

TEOREMA V.3.3. *Ako su X i Y kompaktni i konveksni skupovi u parakonveksnim prostorima E,F i $f : X \times Y \longrightarrow R$, realna funkcija, koje ispunjava uslove:*

1) postoji skup $T \subseteq R$, takav da je za svaki par realnih brojeva $a, b \in f(X, Y)$, $a < b$, ispunjen uslov $T \cap (a, b) \neq \emptyset$;

2) za svako $x \in X$ funkcija $y \longrightarrow f(x, y)$ je poluneprekidna odozdo na Y a skup $\{y \in Y | f(x, y) < t\}$ je konveksan za svako $t \in T$;

2) za svako $y \in Y$ funkcija $x \longrightarrow f(x, y)$ je poluneprekidna odozgo na X a skup $\{x \in X | f(x, y) > t\}$ je konveksan za svako $t \in T$;

onda je $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$.

DOKAZ: Zbog poluneprekidnosti odozgo funkcije f po prvoj promenjljivoj funkcija $q(y) = \max_{x \in X} f(x, y)$ je defnisana za svako $y \in Y$. q je poluneprekidna odozdo, jer je supremum poluneprekidnih odozdo funkcija, pa prema tome dostiže svoj minimum. Zbog poluneprekidnosti odozdo po drugoj koordinati funkcije f funkcija $p(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$ je defnisana za svako $x \in X$. p je poluneprekidna odozgo, jer je infimum odozgo poluneprekidnih funkcija, pa prema tome dostiže svoj maksimum. Odatle sledi da su izrazi $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$

i $\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$ definisani.

Iz leme V.3.1 sledi da je

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \leq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Ostaje nam još da dokažemo da ne važi stroga nejednakost:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) < \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Ako važi stroga nejednakost, onda iz uslova 1) sledi da postoji realan broj $r \in T$ takav da je:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) < r < \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$

za neko $r \in R$.

Definisaćemo višeznačna preslikavanja $A, B : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ izrazima:

$A(x) = \{y \in Y : f(x,y) > r\}$ i $B(x) = \{y \in Y : f(x,y) < r\}$.

Možemo zapaziti da da A i B ispunjavaju sve uslove teoreme V.3.1 Prema tome postoji $x_0 \in X$ takvo da je $A(x_0) \bigcap B(x_0) \neq \emptyset$. Odatle sledi da postoji $y_0 \in Y$ takvo da je $r < f(x_0, y_0) < r$ što je nemoguće.

Prethodna teorema obuhvata kao specijalan slučaj teoremu I. Aranđelovića iz rada [1992a], dokazanu na topološkim vektorskim prostorima.

V.4. STAVOVI O FIKSNIM TAČKAMA VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Neprazan topološki prostor je ***acikličan*** ako su sve njegove Čehove homološke grupe nad poljem racionalnih brojeva trivijalne. Specijalno kontraktibilni prostori su aciklični, pa su takvi i svi konveksni i svi zvezdasti podskupovi topoloških vektorskih prostora. Takođe i svi putno-povezani topološki prostori čije su sve homtopske grupe trivijalne su aciklični.

Ako su X i Y topološki prostori višeznačno preslikavanje $F : X \to Y$ je *odozgo poluneprekidno* ako za svaku tačka $x_0 \in X$ i za svaku otvorenu okolinu V od $F(x_0)$ postoji otvorena okolina U tačke x_0 u X, takva da je $F(x) \subseteq V$ za sve $x \in U$. Višeznačno preslikavanje F je odozgo poluneprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $A \subseteq Y$ skup $\{x \in X \mid f(x) \bigcap A \neq \emptyset\}$ zatvoren. Ako su X i Y kompaktni prostori, onda je $F : X \to Y$ odozgo poluneprekidno preslikavanje ako i samo ako je njegov graf

$$Gr(F) = \{(x, y) \mid x \in X, y \in F(x)\}$$

zatvoren u $X \times Y$. Ako je $g : X \to Y$ neprekidna funkcija, onda g pripada takođe klasi odozgo poluneprekidnih preslikavanja, ako se njene vrednosti posmatraju kao jednočlani podskupovi od Y.

U narednom izlaganju biće nam neophodan sledeća lema iz rada N. Šiodi [1991], koja uopštava rezultat koji je dobio Ha [1980].

LEMA V.4.1. *Ako je C kompaktan, konveksan i neprazan podskup od R^n i K kompaktan topološki prostor. Ako je $g : K \to C$ neprekidna funkcija i $F : C \to K$ jedno odozgo poluneprekidno viěznačno preslikavanje takvo da je* za svaki $x \in C$ $F(x)$ neprazan, kompaktan i acikliklićan podskup od K. Tada postoji $x_0 \in C$ takvo da je $x_0 \in g(F(x_0))$.

Sada dajemo još jedan stav o presecanju Fon Nojmanovog tipa koji uopštava odgovarajuće rezultate Dinga i Tarafdara [1994] i Komije [1986].

Teorema V.4.1. *Neka je X nerazan kompaktan topološki prostor i (Y, H) parakonveksan prostor. Ako su $F : X \to 2^Y$ i $G : Y \to 2^X$ dva višeznačna preslikavanja takva da je:*

1) $F(x)$ je konveksan skup za svako $x \in X$;

2) $F^{-1}(y)$ je otvoren skup za svako $y \in Y$;

3) $X \subseteq \bigcup_{y \in Y} F^{-1}(y)$;

4) G je odozgo poluneprekidno preslikavanje;

5) $G(y)$ je kompaktan acikličan skup,

onda postoje $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ takvi da je $x_0 \in G(y_0)$ i $y_0 \in F(x_0)$.

Dokaz: Iz kompaktnosti prostora X i uslova 3) sledi da postoje $y_0, ..., y_n \in X$ takvi da je $X \subseteq \bigcup_{i=0}^n F^{-1}y$. Neka je za svaki $J \subseteq 2^{\{0,1,...,n\}}$ $H'(J) = H(\{y_i \mid y_i \in J\})$. Prema teoremi II.2.1 postojaće neprekidna funkcija $g : \Delta_n \to X$ takva da je $g(\Delta_B) \subseteq H'(B)$ za svaki $B \subseteq 2^{\{0,1,...,n\}}$. Pošto je G odozgo poluneprekidno, složeno preskikavanje $G \circ g : \Delta_n \to 2^X$ biće odozgo poluneprekidno i imaće kompaktne aciklične vrednosti. Ako je $\varphi_0, ..., \varphi_n$ podela jedinice koja odgovara pokrivanju $F^{-1}(y_0), ..., F^{-1}(y_n)$ onda je sa $f(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x)e_i$ definisano jedno neprekidno prelikavanje $f : X \to \Delta_n$. Iz leme V.2 sledi da postoji $z_0 \in \Delta_n$ za koje važi $z_0 \in f(G(g(z_0)))$. Odatle sledi da postoji $x_0 \in G(g(z_0))$ takvo da je $z_0 = f(x_0) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)e_i$. Ako je

$$J_0 = \{j \in \{0, ..., n\} \mid \varphi_j(x_0) \neq 0\} = \{j \in \{0, ..., n\} \mid x_0 \in F^{-1}(y_j)\},$$

onda je

$$z_0 = \sum_{j \in J_0} \varphi_j(x_0) e_j \in \Delta_{J_0}.$$

Odatle sledi $x_0 \in F^{-1}(y_j)$ za sve $j \in J_0$, pa je $y_j \in F(x_0)$ za svako $j \in J_0$. Pošto je $F(x_0)$ konveksan skup onda je $H'(J_0) \subseteq F(x_0)$, pa je $g(z_0) \in F(x_0)$, pa prema tome možemo uzeti $y_0 = g(z_0)$. Iz predhodno izvedenih relacija sledi $x_0 \in G(y_0)$ i $y_0 \in F(x_0)$.

Naredni stav o fiksnim tačkama odozgo poluneprekidnih preslikavanja uopštava mnoge ranije rezultate vezane za fiksne tačke višeznačnih preslikavanja (Kakutani, Eilenberg-Montgomeri, Himelberg, Hadžić,...) i jednoznačnih preslikavanja (Brauer, Tihonov, Žepecki, Hadžić, Horvat [1991],...), kao i teoremu III.1.3.

TEOREMA V.4.2. *Neka je X kompaktan Hausdorfov topološki prostor i $\{v_i\}_{i \in I}$ baza simetričnih (iz $(x, y) \in v_i$ sledi $(y, x) \in v_i$) i otvorenih (u topologiji prostora $X \times X$) okolina dijagonale skupa X. Ako postoji familija preslikavanja $\{H_i\}_{i \in I}$ $H_i : \mathcal{F}(X) \to 2^X$ takva da je:*

1) (X, H_i) parakonveksan prostor, za svako $i \in I$;

2) $V_i(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in v_i\}$ konveksan skup u (X, H_i) za svako $x \in X$ i svako $i \in I$,

onda za svako odozgo poluneprekidno višeznačno preslikavanje $G : X \to 2^X$, čije vrednosti su neprazni kompaktni aciklični skupovi, postoji bar jedno $x_0 \in X$ takvo da je $x_0 \in G(x_0)$.

DOKAZ: Pošto je X kompaktan Hausdorfov topološki prostor, dovoljno je da pokažemo da za svako $i \in I$ postoji $x_i \in X$ takvo da je $V_i(x_i) \bigcap G(x_i) \neq \emptyset$. Definisaćemo viěznačno preslikavanje $F : X \to 2^X$ sa $F(x) = \{y \mid y \in V_i(x)\}$. Iz Teoreme V.5 sledi da je postoje $x_i, y_i \in X$ takvi da je $y_i \in F(x_i)$ i $x_i \in G(y_i)$. Iz $y_i \in F(x_i)$, zbog simetričnosti, sledi $x_i \in V_i(y_i)$, što zajedno sa $x_i \in G(y_i)$

daje $V_i(x_i) \bigcap G(x_i) \neq \emptyset$.

U narednom stavovima daćemo dovoljane uslove za postojanje fiksnih tačaka odozgo poluneprekidnih višeznačnih preslikavanja definisanih na kompaktnim i konveksnim podskupovima Hausdorfovih topoloških vektorskih prostora, koji slede iz teoreme V.4.2.

STAV V.4.1. *Neka je K neprazan, kompaktan i konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora X i neka je $\mathcal{U}$ fundamentalni sistem simetričnih okolina nule u X, takav da za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji $H_U : \mathcal{F}(X) \to 2^X$ za koje važi:*

1) (K, H_U) parakonveksan prostor;

2) skup $(x + U) \bigcap K$ je konveksan u prostoru (K, H_U) za svako $x \in K$.

Ako je $F : K \to K$ odozgopoluneprekidno preslikavanje i ako je $F(x)$ kompaktan acikličan skup za svako $x \in X$, onda F ima bar jednu fiksnu tačku.

STAV V.4.2. *Neka je K neprazan, kompaktan i konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora X i neka je $\mathcal{U}$ fundamentalni sistem simetričnih okolina nule u X takav da za svako $U \in \mathcal{U}$ i svaki konačan skup $Y = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq K$ važi:*

1) $Z = \bigcap_{x \in K} \bigcap_{x \in Y+U} (x + U)$ je putnopovezan skup;

2) ako je $n \geq 3$ $n - 2$ homotopska grupa skupa Z je trivijalna.

Ako je $F : K \to K$ odozgopoluneprekidno preslikavanje i ako je $F(x)$ kompaktan acikličan skup za svako $x \in X$, onda F ima bar jednu fiksnu tačku.

DOKAZ: Preslikavanje H_U se definiše sa

$$H_U(\{x_1, ..., x_n\}) = \bigcap_{x \in K \bigcap Y+U} x + U$$

i primeni se stav V.4.1.

VI. STAVOVI O NEPOKRETNIM TAČKAMA NA DOPUSTIVIM I SLABODOPUSTIVIM SKUPOVIMA

VI.0. UVOD

Šesta glava je posvećena stavovima o nepokretnim tačkama višeznačnih preslikavanja, definisanim na dopustivim i slabodopustivim podskupovima topoloških vektorskih prostora. Prvi odeljak sadrži stav o fiksnim tačkama odozgo poluneprekidnih prelikavanja definisanim na kompaktnim, konveksnim i dopustivim podskupovima Hausdorfovih topoloških vektorskim prostorima i njegove primene. U drugom odeljku taj stav se, u slučaju jednoznačnih preslikavanja, prenosi na slabodopustive skupove. Treći odeljak je posvećen dokazu jednog stava o fiksnim tačkama kondenzujućih preslikavanja.

VI.1. STAVOVI O NEPOKRETNIM TAČKAMA VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA DEFINISANIH NA DOPUSTIVIM SKUPOVIMA

U ovoj glavi razmatramo postojanje fiksnih tačaka odozgo poluneprekidnih višeznačnih preslikavanja i neprekidnih funkcija definisanih na kompaktim i konveksnim podskupovima Hausdorfovih topoloških vektorskih prostora. Pored toga dokazujemo slično kao u predhonoj glavi jednu teoremu Fan-Juhvidovljevog tipa za višeznačna preslikavanja i nekoliko njenih posledica.

Neka su X, Y topološki prostori. Za neprekidnu funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je ***kompaktna*** ako je $\overline{f(X)}$ kompaktan skup. Neka je E Topološki vektorski prostor. Funkcija $f : X \to E$ je ***konačna*** ako je kompaktna i ako je $f(X)$ podskup od nekog konačno dimenzionog podprostora od E. $K \subseteq E$ je ***dopustiv*** ako za svaki kompaktan $A \subseteq K$ i svaku otvorenu okolinu nule U u E postoji konačno preslikavanje $h : A \to K$ takvo da je $h(x) - x \in U$. Pojam dopustivih skupova uveo je V. Kli u radovima [1960a], [1960b] i [1961]. Do danas je ostao nerešen sledeći problem: Da li postoji konveksan nedopustiv skup u nekom topološkom vektorskom prostoru. Primer nekonveksnog, kompaktnog nedopustivog podskupa Hilbertovog prostora l^2 može se naći u monografiji O. Hadžić [1984], kao i mnogo više informacija iz teorije dopustivih skupova.

Naš prvi rezultat u ovom poglavlju je sledeća teorema.

TEOREMA VI.1.1. *Neka je X Hausdorfov topološki vektorski prostor, i $K \subseteq X$ njegov kompaktan, konveksan dopustiv i neprazan podskup. Ako je $F : K \to$*

2^K *odozgo poluneprekidno višeznačno preslikavanje, takvo da je $F(x)$ neprazan zatvoren i acikličan skup, za svako $x \in K$, onda F ima bar jednu fiksnu tačku.*

DOKAZ: Neka je $\mathcal{U}$ fundamentalni sistem okolina nule u X, i $F : K \to K$ odozgo poluneprekidno preslikavanje. Dovoljno je da pokažemo da za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji $x \in K$ takvo da je $x + V \bigcap F(x) \neq \emptyset$, zato što je K kompaktan i Hausdorfov topološki prostor. Pošto je K dopustiv skup, za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji neprekidno preslikavanje $h : K \to K$ takvo da je $h(x) - x \in V$ i L konačno dimenzioni podprostor od X takav da je $h(K) \subseteq L$. Skup $L \bigcap K$ je kompaktan, konveksan podskup konačno dimenzionalnog prostora L, i $h : L \bigcap K \to L \bigcap K$. Sada, iz leme V.4.1 da postoji $x_0 \in L \bigcap K$ za koje važi $x_0 \in h(F(x_0))$. Onda je $x_0 = h(y_0)$ za neko $y_0 \in F(x_0)$ i prema tome $y_0 \in x_0 + V$. Pošto, za svako $V \in \mathcal{U}$, postoji $x_0 \in K$ za koje važi $x_0 + V \bigcap F(x_0) \neq \emptyset$, F mora imati bar jednu fiksnu tačku.

Predhodna teorema uopštava dosadašnje rezultate koje su dobili Kakutani [1941], S. Eilenberg i D. Montgomeri [1946], F. H. Bohnenblust i S. Karlin [1950], I. L. Gliksberg [1952], Ki Fan [1952], O. Hadžić [1981] i A. Idzik [1988]. Pored toga može se primeniti i u nekim drugim slučajevima o čemu nam govori sledeći stav.

POSLEDICA VI.1.1. *Neka je E Hausdorfov topološki vektorski prostor, i $K \subseteq X$ njegov kompaktan i konveksan neprazan podskup. Ako E pripada jednoj od sledećih klasa prostora:*

1) lokalno konveksni prostori;

2) L^p za neko $(0 < p < 1)$;

3) $S_{[0,1]}$ (prostor merljivih funkcija definisanih na intervalu [0,1] u kome je topologija zadata konvergencijom po meri);

4) Orlićev prostor $SL_\Phi(X, A, m)$;

5) Orlićev prostor $KL_\Phi(X, A, m)$;

6) Ultrabačvast prostor koji ima Šauderovu bazu;

tada svaka odozgo poluneprekidna funkcija $F : K \to K$ *ima najmanje jednu fiksnu tačku.*

DOKAZ: U svim tim prostorima skup K je dopustiv jer je konveksan i kompaktan (videti O. Hadžić [1984]).

Naredna teorema je uopštenje teorema I. S. Juhvidov [1964], Ky Fan [1966], Feliks Brauder [1968] i Olga Hadžić [1983].

TEOREMA VI.1.2. *Neka je* K *neprazan, dopustiv, kompaktan i konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora* X, Y *topološki prostor,* $C \subseteq Y$ *zatvoren podskup i* $G : K \times K \to Y$ *odozgo poluneprekidno preslikavanje. Ako je za svako* $x \in K$ *skup:*

$$\{y \in K | G(x, y) \bigcap C \neq \emptyset\}$$

acikličan, onda postoji $x_* \in K$ *takvo da je* $g(x_*, x_*) \bigcap C \neq \emptyset$.

DOKAZ: Za svako $x \in K$ definisaćemo, $T(x) \subseteq K$ na sledeći način:

$$T(x) = \{y \in K | G(x, y) \bigcap C \neq \emptyset\}.$$

Tada je za svako $x \in K$ $T(x)$ neprazan, zatvoren i acikličan podskup od K, Ako je $Gr(T)$ graf višeznačnog preslikavanja T,

$$Gr(T) = \{(x, y) \mid x \in K, y \in T(x)\},$$

razmatramo kao podskup od $K \times K$, onda je $(x, y) \in Gr(T)$ ako i samo ako je $G(x, y) \bigcap C \neq \emptyset$. Predpostavimo da $Gr(T)$ nije zatvoren skup, tj. da T nije odozgo poluneprekidno. Tada postoji konvergentni uopšteni niz $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I} \subseteq K \times K$ (gde je $(I, \geq)$ usmeren parcijalno uređen skup) takav da je $G(x_i, y_i) \bigcap C \neq \emptyset$ za sve $i \in I$, $(x_i, y_i) \to (x_*, y_*)$ i $G(x_*, y_*) \bigcap C = \emptyset$. To povlači da je $G(x_*, y_*) \subseteq Y \backslash C$. Međutim, zbog konvergentnosti uopštenog niza, postoji $i_0 \in I$ takvo da $i \geq i_0$ povlači $G(x_i, y_i) \subseteq Y \backslash C$ tj. $G(x_i, y_i) \bigcap C = \emptyset$, zato što je $Y \backslash C$ otvoren skup i G odozgo poluneprekidno višeznačno preslikavanje, što je kontradikcija. Prema tome $Gr(T)$ je zatvoren skup i T je odozgo poluneprekidno pa prema teoremi VI.1.1 T ima fiksnu tačku. Ako je x_* ta fiksna tačka tj. ako $x_* \in T(x_*)$ tada je prema definiciji preslikavanja T $G(x_*, x_*) \bigcap C \neq \emptyset$.

Naredno tvrđenje je uopštenje rezultata I. S. Juhvidova [1964], F. Braudera [1968] i O. Hadžić [1983].

POSLEDICA VI.1.2. *Neka je K neprazan, dopustiv, kompaktan i konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora X, Y topološki vektorski prostor, i $G : K \times K \to Y$ odozgo poluneprekidno višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslov*

$$\alpha_1 G(x, y_1) + \alpha_2 G(x, y_2) \subseteq G(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

za sve $x, y_1, y_2 \in K$ i $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ za koje važi $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Ako za svako $x \in K$ postoji $y \in K$ takvo da $0 \in G(x, y)$, onda postoji $x_* \in K$ za koje važi $0 \in G(x_*, x_*)$.

DOKAZ: Ako uzmemo $C = \{0\}$, i zapazimo da je za svako $x \in K$, skup $\{y \in K | 0 \in G(x, y)\}$ neprazan i konveksan. Sada prema teoremi VI.1.2 postoji $x_* \in K$ za koje važi $0 \in G(x_*, x_*)$.

Naredno tvrđenje je uopštenje rezultata Ki Fana [1966], F. Braudera [1968] i O. Hadžić [1983].

POSLEDICA VI.1.3. *Neka je K neprazan, dopustiv, kompaktan i konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora X, C neprazan, zatvoren i konveksan podskup od X. Ako je $F : K \to X$ odozgo poluneprekidno preslikavanje takvo da je skup $F(x)\bigcap(K+C)$, neprazan i konveksan za svako $x \in K$, onda postoji $x_* \in K$ za koje važi $F(x_*)\bigcap x_* + C \neq \emptyset$.*

DOKAZ: Ako uzmemo $X = Y$ i $G(x,y) = F(x) - y$ za sve $x, y \in K$, onda je

$$G(x,y) = \{y \in K | (F(x) - y)\bigcap C \neq \emptyset\}$$

neprazan i konveksan skup. Sada prema teoremi VI.1.2 postoji $x_* \in K$ za koje je $0 \in G(x_*, x_*)$ tj. $F(x_*)\bigcap(x_* + C) \neq \emptyset$.

VI.2 STAVOVI O NEPOKRETNIM TAČKAMA NA SLABODOPUSTIVIM SKUPOVIMA

U radu [1996] N. T. Nhu je uveo pojam ***slabe dopustivosti*** za kompaktne i konveksne podskupove metričkih linearnih prostora na sledeći način. Neka je (X, d) metrički linearni prostor. Za skup neprazan, konveksan i zatvoren skup $K \subseteq X$ kažemo da je slabo dopustiv ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje zatvoreni konveksni podskupovi $K_1,\dots,K_n$ od K takvi da je $K = \ conv\ (\bigcup_{i=1}^n K_i)$, i neprekidne funkcije $f_i : K_i \to K \bigcap E$, $i = 1, \dots, n$ gde je E konačno dimenzioni potprostor od X takve da je $\sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - x_i) < \varepsilon$ za svako $x_i \in X_i$ i $i = 1, \dots, n$. Nhu je u istom radu dokazao sledeću teoremu o fiksnim tačkama.

STAV VI.2.1 - NHU [1996]. *Ako je X metrički linearni prostor, $K \subseteq X$ njegov neprazan, kompaktan, konveksan i slabo dopustiv podskup, tada svaka neprekidna funkcija $f : K \to K$ ima najmanje jednu fiksnu tačku.*

Sada ćemo uvesti pojam ***slabe dopustivosti*** za kompaktne i konveksne podskupove topoloških vektororskih prostora.

DEFINICIJA VI.2.1. *Neka je X Hausdorfov topološki vektorski prostor, $\mathcal{U}$ fundamentalni sistem otvorenih okolina nule u X i $K \subseteq X$ neprazan, zatvoren i konveksan podskup. Za K kažemo da je slabo dopustiv ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoje zatvoreni konveksni podskupovi $K_1,\dots, K_n$ od K takvi da je $K = \ conv\ (\bigcup_{i=1}^n K_i)$, i neprekidne funkcije $f_i : K_i \to K \bigcap E$, $i = 1, \dots, n$ gde je E konačno dimenzioni potprostor od X takve da je $\sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - x_i) \in V$ za svako $x_i \in X_i$ i $i = 1, \dots, n$.*

U dokazu narednog tvđenja, neophodna nam je sledeća lema.

LEMA VI.1. *Neka je X beskonačno dimenzionalni konveksan podskup topološkog vektorskog prostora, A_i, $i = 1, ..., n$ konačni podskupovi od X i U balansirana simetrična otvorena okolina nule. Tada postoje disjunktni konačni podskupovi $B_1, ..., B_n$ takvi da:*

i) $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ je linearno nezavisan skup;

ii) iz $x \in \operatorname{conv}(B_i)$ sledi $x - y \in U$ za svaki $y \in \operatorname{conv}(A_i)$ $i = 1, ..., n$;

iii) postoji afino presliavanje $h : \bigcup_{i=1}^n A_i \to B$ takvo da $x - h(x) \in U$ za svako $x \in \operatorname{conv}(A)$.

DOKAZ: Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Sa $\mathcal{K}_i$ označavaćemo trijangulaciju skupa $\operatorname{conv}(A_i)$ a sa $\mathcal{K}$ trijangulaciju skupa $\operatorname{conv}(A)$ koja ispunjava uslove: $A_i \subseteq \mathcal{K}_i^0$, $A \subseteq \mathcal{K}^0$ (Sa $\mathcal{K}^0$ je označen skup temena trijangulacije $\mathcal{K}$ i $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i^0 = \mathcal{K}^0$).

Neka je m kardinalni broj skupa $\mathcal{K}^0$ i V balansirana simetrična okolina nule takva da je

$$\underbrace{V \cdots V}_{m-puta} \subseteq U.$$

Pošto je X beskonačno dimenzionalan, postoji linearno nezavisan skup

$$B_1 = \{h(v) : v \in \mathcal{K}_1^0\} \subseteq X$$

takav da je:

$$(v - h(v)) \in V$$

za svako $v \in \mathcal{K}_1^0$. Induktivno možemo birati linearno nezavisne podskupove

$$B_k = \{h(v) : v \in \mathcal{K}_k^0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i^0\} \subseteq X \setminus \operatorname{lin}(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i),$$

za $k = 2, ..., i$ takav da je:

$$(v - h(v)) \in V$$

za svako $v \in \mathcal{K}_k^0$.

Tako je konstruisan skup $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ čiji element su linearno nezavisni vektori. Sada ćemo proveriti ispunjenost uslova ii).

Ako $x \in \mathrm{conv}(B)$ onda je $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j h(v_j)$ gde $v_j \in \mathrm{conv}(A_i)$, $\alpha_j \in [0,1]$, $j = 1, ..., k$ i $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$.

Neka je $y = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \in \mathrm{conv}(A_i)$. Pošto je $k < m$ dobijamo

$$x - y = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (h(v_j) - v_j) \in \underbrace{V \cdots V}_{m-puta} \subseteq U.$$

Time smo pokazali da je ispunjen uslov ii).

Produžimo preslikavanje h linearno na svaki simpleks $\sigma \in \mathcal{K}$. Ako je $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \mathcal{K}^0$, imamo $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., k$ i $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Pošto je $m \geq k$ imamo

$$x - h(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (v_i - h(v_i) \in \underbrace{V \cdots V}_{m-puta} \subseteq U.$$

Ovim smo pokazali da je i uslov iii) ispunjen.

Ovaj rad nastavljamo sledećom teoremom koja obuhvata sve dosad postignute rezutate iz teorije fiksnih tačaka neprekidnih funkcija na Hausdorfovim topološkim vektorskim prostorima za klasu neprekidnih funkcija osim, možda, A. Idzik [1988] i restrikcije stavova V.4.1 i V.4.2 na klasu neprekidnih funkcija.

TEOREMA VI.2.1. *Ako je X Hausdorfov topološki vektorski prostor i $K \subseteq X$ njegov neprazan, kompaktan, konveksan i slabo dopustiv podskup, tada svaka neprekidna funkcija $f : K \to K$ ima najmanje jednu fiksnu tačku.*

DOKAZ: Neka je $\mathcal{U}$ fundamentalni sistem simetričnih okolina nule u X, i $f : K \to K$ neprekidna funkcija. Dovoljno je da pokažemo da za svako $V \in \mathcal{U}$

postoji $x \in K$ takvo da je $f(x) \in x+V$, zato što je K kompaktan i Hausdorfov topološki prostor.

Pretpostavimo da postoji $V \in \mathcal{U}$ takvo da je $x - f(x) \notin V$ za svako $x \in K$. Tada postoje $W_1, W_2, W_3, W_4 \in \mathcal{U}$ koje ispunjavaju uslove $W_1 + W_1 \subseteq V$ i $W_{i+1} + W_{i+1} \subseteq W_i$ za $i = 1,2,3$. Pošto je X slabo dopustiv, postoje zatvoreni konveksni podskupovi $K_1,...,K_n \subseteq K$ takvi da je $K = \mathrm{conv}(\bigcup_{i=1}^n K_i)$ i neprekidna preslikavanja $f_i : K_i \to K \bigcap E$, $i = 1,...,n$ gde je E konačno-dimenzionalni podprostor od X, takva da je $\sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - x_i) \in W_4$ za svako $x_i \in X_i$ i $i = 1,...,n$.

Prvo dokazujemo:

α) *Za svako $i = 1,...,n$ postoji neprekidno preslkikavanje g_i iz $f_i(X_i)$ u konveksan poliedar F_i takvo da je*

$\sum_{i=1}^n (g_i(y) - y) \in W_4$ za svako $y \in f_i(X_i)$ i $i = 1,...,n$.

Ako je familja skupova $\mathcal{W}$ konačan pokrivač skupa Z, onda se maksimalan broj elemenata iz $\mathcal{W}$ koji sadrže jedan element iz Z, naziva red pokrivanja $\mathcal{W}$ i obeležava se $\mathrm{ord}(\mathcal{W})$ Neka sa D_i označena dimenzija skupa $f_i(X_i)$. Pošto je $f(X_i)$ konačno dimenzioni kompaktan skup postoji konačan skup $A_i = \{x_{i_1},...,x_{i_l}\} \subseteq f_i(X_i)$ i U otvorena simetrična balansirana okolina nule, takva da je

$$f_i(X_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l_i} x_{i_j} + U,$$

$$\underbrace{U \cdots U}_{(1+D_i)n-puta} \subseteq W_4$$

i $\mathrm{ord}(\mathcal{U}_i) \leq 1 + D_i$ gde je $\mathcal{U}_i = \{x_{i_1} + U, \cdots, x_{i_{l_i}} + U\}$.

Neka je $\{\lambda_{i_j} : 1 \leq j \leq l_i\}$ razlaganje jedinice koje odgovara pokrivanju $\mathcal{U}_i$. Neka je

$$F_i = \mathrm{conv}(\{x_{i_j} : 1 \leq j \leq l_i\})$$

i $g : f_i \to F_i$ preslikavanje definisano formulom:

$$g_i(y) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{i_j}(y) x_{i_j}.$$

Sada je:

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i(y) - y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i} \lambda_{i_j}(x_{i_j} - y) \subseteq \underbrace{U \cdots U}_{(1+D_i)n-puta} \subseteq W_4$$

odakle sledi tvrđenje α.

- Uvešćemo oznaku $F = \mathrm{conv}(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)$.

β) Tada postoji afino preslikavanje g iz F u konveksan poliedar $G \subset X$ takvo da je

$f(x) - g(x) \in W_3$ za svako $x \in F$.

Neka je $m = dim(F) + 1$ i U balansirana simetrična okolina nule takva da je

$$\underbrace{U + \cdots + U}_{m-puta} \subseteq W_3.$$

Pošto je f uniformno neprekidno (jer je f neprekidna funkcija definisana na kompaktnom skupu) postoji $\mathcal{K}$, trijangulacija skupa F takva da je $f(\sigma) - f(\sigma) \subseteq U$ za svako $\sigma \in \mathcal{K}$.

Neka je $g(v) = f(v)$ za svako $v \in \mathcal{K}^0$ i $G = \mathrm{conv}(\{g(v) : v \in \mathcal{K}^0\}$. Tada možemo g linearno produžiti na svaki simpleks $\sigma \in \mathcal{K}$. Tako smo konstrisali afino preslikavanja $G : F \to G$.

Ako $x \in F$ tada postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ takav da $x \in \sigma$. Tada je $x = \sum_i^n \alpha_i v_i$ gde je $\alpha_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ i $v_i \in \sigma^0$.

Iz $n \leq m$ sledi

$$f(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f(x) - f(v_i) \subseteq \underbrace{U + \cdots + U}_{m-puta} \subseteq W_3$$

odakle sledi tvrđenje β.

Neka je $G^0 = \{g(v) : v \in \mathcal{K}^0\}$. Tada je $G = \mathrm{conv}(G^0)$. Zapažamo da za svako $x \in G^0$ važi $x = g(v)$ za neko $v \in \mathcal{K}^0$. Pošto je

$$G^0 \subseteq X = \mathrm{conv}(K_1 \bigcup \cdots \bigcup K_n$$

imamo da je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(v) x_i(v),$$

gde je $x_i(v) \in K_i$, $\alpha_i \in [0,1]$ i $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Neka je $A_i = \{x_i(v) : v \in \mathcal{K}^0\} \subseteq K_i$. Tada je $G_0 \subseteq \mathrm{conv}(A)$, gde je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Neka je $X \to \mathrm{conv}(A_i)$ retrakcija. Izaberimo balansirane simetrične okolinu nule $W, Z \subseteq W_4$ takve da iz $x - \mathrm{conv}(A_i) \subseteq W$ sledi $(r_i(x) - x) \in Z$ i da $\underbrace{Z + \cdots + Z}_{n-puta} \subseteq W_4$.

Primenom leme VI.2.1 dobijamo da postoje disjunktni konačni skupovi $B_i = \{b_{ij} : j = 1, \cdots n(i)\}$, $i = 1, ..., n$ koji imaju sledeće osobine:

- skup

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \{bij, j = 1, \cdots n(i),\ i = 1, ..., n$$

je linearno nezavisan;

- $x - \mathrm{conv}(A_i) \subseteq W$, za svako $x \in \mathrm{conv}(B_i)$, $i = 1, \cdots, n$.

- postoji afino preslikavanje $h : \mathrm{conv}(A) \to \mathrm{conv}(B)$, gde je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, takvo da je: $x - h(x) \subseteq W$, za svako $x \in \mathrm{conv}(A)$.

Iz prthodnih relacija sledi da je $x - r_i(x) \in Z$ za svako $x \in \mathrm{conv}(B_i)$.

Sad dokazujemo:

γ) *Tada postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : G \to F$ takvo da je $x - \varphi(x) \in W_2$ za svaki $x \in h(g(\mathrm{conv} A))$.*

Pošto je B linearno nezavisan skup za svako $x \in \mathrm{conv}(B)$ postoje jedinstveni brojevi $\lambda_{ij} \in [0,1]$ i vektori $x_{ij} \in B_i$, $j = 1, \dots, n(i)$, $i = 1, \dots, n$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(i)} \lambda_{ij} = 1$$

i

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(i)} \lambda_{ij} x_{ij}.$$

Iz linearne nezavisnosti skupa

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \{b_{ij} : i = 1, \dots, n \; j = 1, \dots, n(i)\}$$

sledi da je $\mathrm{conv}(B_i) \cap \mathrm{conv}(B_j) = \emptyset$ za $i \neq j$. Neka je $\lambda_i = \sum_{i=1}^{n(i)} \lambda_{ij}$ i

$$x_i = \begin{cases} \lambda_i^{-1} \sum_{j=1}^{n(i)} \lambda_{ij} x_{ij} \in \mathrm{conv}(B_i), \; za \; \lambda_i > 0, \\ 0 \; za \; \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Zapazimo da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, gde je $x_i \in \mathrm{conv}(B_i)$ ako je $\lambda_i > 0$.

Neka je

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} g_i(f_i(r_i(x_i))), \; za \; \lambda_i > 0, \\ 0 \; za \; x_i = 0. \end{cases}$$

Sad preslikavanje φ definišemo formulom:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_i).$$

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $\psi : F \to F$ definisanu relacijom $\psi(x) = \varphi(h(g(x)))$. Sada je

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (f(x) - g(x)) + (g(x) - h(g(x))) + (h(g(x)) - \varphi(h(g(x))) + (\varphi(h(g(x)) - x) \\ &\in W_3 + W_3 + W_2 + (\psi(x) - x) \in W_1 + (\psi(x) - x) \end{aligned}$$

za svako $x \in K$. Neka je $x_0 \in F$ fiksna tačka funkcije ψ čije postojanje sledi iz Brauerove teoreme. Tada je $f(x_0) - x_0 \in W_1 + (\psi(x_0) - x_0)$ tj. $f(x_0) - x_0 \subseteq W_1 \subseteq V$ što je kontradikcija.

NAPOMENA: U radu de Paskale, Trombeta i Veber [1993] konstruisani su primeri dopustivih skupova koji ne ispunjavaju Idzikove [1988] uslove. Međutim nije nam poznato da li postoji skup koji ispunjava Idzikove uslove a nije (slabo) dopustiv?

Ovu glavu završavamo sa još nekoliko otvorenih problema.

Nekoliko otvorenih problema

PROBLEM 1. *(V. Kli [1960]) Da li je svaki kompaktan konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora* ***dopustiv****?*

PROBLEM 2. *(N. T. Nhu [1996]) Da li je svaki kompaktan konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora* ***slabo dopustiv****?*

Pozitiva odgovor na bar jedan od problema 1,2 dovodi nas do pozitivnog rešenaja Šauderove hipoteze.

PROBLEM 3. *(N. T. Nhu [1996]) Da li je svaki* ***slabo dopustiv*** *kompaktan konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora* ***dopustiv****?*

PROBLEM 4. *Neka je K* ***slabo dopustiv*** *neprazan kompaktan konveksan podskup Hausdorfovog topološkog vektorskog prostora. Neka je $F : K \to K$ poluneprekidno odozgo višeznačno preslikavanje, takvo da je $F(x)$ neprazan kompaktan konveksan skup za svako $x \in K$. Ako je K slabo dopustiv, da li F ima bar jednu fiksnu tačku?*

VI.3 STAV O NEPOKRETNIM TAČKAMA KONDENZUJUĆIH PRESLIKAVANJA

Sada smo u mogućnosti da koristeći rezultate dokazane u prvoj glavi i jedan ekvivalent aksiome izbora proširimimo teoremu VI.2.1 izostavljnjem uslova kompaktnosti.

Za parcijalno uređen skup se kaže da je potpuno uređen ako su svaka dva njegova elementa uporediva. Parcijalno uređen skup je induktivan ako svaki njegov potpuno uređen podskup ima majorantu. Narednu lema je ekvivalentna sa aksiomom izbora. Dokaz te činjenice dao je Tasković [1986].

LEMA VI.3.1.-TASKOVIĆ [1986]. *Neka je $(P, \leq)$ induktivan skup i $\{f_i\}_{i \in I}$ familija preslikavanja koja preslikavaju skup P u sebe samoga i ispunjavaju uslov*

$$x \leq f_i(x)$$

za svako $x \in P$ i svako $i \in I$. Tada familija $\{f_i\}_{i \in I}$ ima bar jednu zajedničku fiksnu tačku.

Prethodna lema ima mnogobrojne primene u nelinearnoj analizi koje su sistematski izložene u radovima i monografijama Taskovića [1986], [1988], [1992] i [1993].

DEFINICIJA VI.3.1. *Neka je X ravnomeran prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. f je kondenzujuće ako postoji preslikavanje $\phi : X \to [0, \infty)$ koje je mera nekompaktnosti na X i koje ispunjava uslove:*

a) $\phi(A) = \phi(f(A))$ ako i samo ako je $\phi(A) = 0$;

b) iz $\phi(A) > 0$ sledi $\phi(f(A)) > \phi(A)$,

za svaki ograničen skup $A \subseteq X$.

U dokazu rezultata o fiksnim tačkama neophodna nam je sledeća lema.

LEMA VI.3.2. *Neka je X neprazan, kompletan ravnomeran prostor i $f : X \to X$ kondenzujuće preslikavanje. Tada postoji neprazan skup $K \subseteq X$ takav da je $K \subseteq f(K)$.*

DOKAZ: Neka je $x \in X$ proizvoljan element. Neka je $M = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Iz $M = \{x\} \bigcup f(M)$ sledi da je $\phi(M) = \phi(f(M))$ pa je prema tome M relativno kompaktan. Neka je K skup svih tačaka nagomilavanja skupa M. Ako je $z \in K$ onda postoji $\{k_n\}$ rastući niz prirodnih brojeva, takav da je

$$z = \lim_{n \to \infty} f^{k_n}(x)$$

. Niz $\{f^{k_n - 1}(x)\}$ je sadržan u kompaktnom skupu pa postoje $\{r_n\} \subseteq \{k_n - 1\}$ i $y \in X$ takvi da je

$$y = \lim_{n \to \infty} f^{r_n}(x).$$

Iz neprekidnosti funkcije f sledi $f(y) = z$. Iz prethodnih relacija sledi da je $f(z) \in K$. Time smo pokazali da je $K \subseteq f(K)$.

Osnovni rezultat ove glave je naredna teorema.

TEOREMA VI.3.1. *Neka je E kompletan Hausdorfov topološki vektorski prostor, X njegov zatvoren, ograničen i konveksan podskup i $f : X \to X$ kondenzujuće preslikavanje, koje ispunjava uslov:*

$$\phi(\mathrm{conv}(f(A))) = \phi(A),$$

za svaki $A \subseteq X$. Ako je svaki konveksan i kompaktan podskup od X slabodopustiv onda f ima bar jednu nepokretnu tačku.

DOKAZ: Neka je $K \subseteq X$ skup koji ispunjava uslov $K \subseteq f(K)$. Egzistencija takvog skupa dokazana je u lemi 6.3.2. Definišimo familiju podskupova σ skupa X na sledeći način:

$$\sigma = \{Y \subseteq X : \text{Y je kompaktan i konveksan}, K, f(Y) \subseteq Y\}.$$

Na skupu σ može se uvesti relacija poretka na sledeći način:

$Y_1 \leq Y_2$ ako i samo ako je $Y_2 \subseteq Y_1$. Definisani poredak na σ je induktivan jer je za proizvoljan potpuno uređeni podskup od σ presek svih njegovih elemenata majoranta u poretku definisanom na σ. Definisaćemo preslikavanje $g : \sigma \rightarrow \sigma$ na sledeći način:

$$g(Y) = \overline{\text{conv}(f(Y))}.$$

$g(Y) \in \sigma$ jer je konveksni omotač zatvorenog skupa zatvoren skup, i iz $K \subseteq Y$ sledi $f(K) \subseteq f(Y)$ pa prema tome imamo

$$K \subseteq f(K) \subseteq f(Y) \subseteq Y.$$

Sada iz konveksnosti i zatvorenosti skupa Y sledi

$$g(Y) = \overline{\text{conv}(f(Y))} \subseteq \text{conv}(Y) = Y.$$

Iz leme VI.3.1 sledi da postoji $Y_0 \in \sigma$ takav da je $g(Y_0) = Y_0$. Taj skup je konveksan i zatvoren jer pripada σ. Iz relacije

$$\phi(\overline{\text{conv}(f(Y_0))}) = \phi(Y_0),$$

sledi kompaktnost skupa Y_0. Prema tome $f : Y_0 \rightarrow Y_0$, f je neprekidno i Y_0 je slabodopustiv pa prema teoremi 6.3.1 f ima fiksnu tačku.

LITERATURA

S. AJLENBERG i D. MONTGOMERI

(S. EILENBERG i D. MONTGOMERY)

[1946] Fixed point theorems for multivalued transformations,

Amer. J. Math. 58 (1946), 214-222.

Slobodan ALJANČIĆ,

[1968] Uvod u realnu i funkconalnu analizu, "Građevinska knjiga", Beograd 1968.

R. R. AHMEROV, M. I. KAMENSKIJ, A. S. POTAPOV, A. E. RODKINA i B. N. SADOVSKIJ

[1986] Measures of noncompactnes and condesing operators (na Ruskom), Nauka, Novosibirsk 1986.

Tran Van AN, Ngujen NHUJ and Le Hoang TRI

(Tran Van AN, Nguyen NHUY i Le Hoang TRI)

[1995] Remarks on Kalton's paper: "Comapact convex sets and complex convexity", Acta Math. Vietnamica 20 No. 1 (1995), 55-66.

M. Ja. ANTONOVSKI, V. G. BOLTJANSKI, T. A. SARIMSAKOV

[1960] Topologičeskie polupolja, Taškent 1960. [Na Ruskom.]

Dragoljub ARANĐELOVIĆ i Milan TASKOVIĆ

[1971] Funkcionalna analiza - zbirka odabranih zadataka, PMF Beograd 1971.

Ivan ARANĐELOVIĆ

[1992a] An extension of the Sion's minimax theorem, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, 6 (1992), 1 - 3.

[1992b] A convexty on topological spaces and KKM multifunctions, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, 6 (2) (1992), 413 - 415.

[1993] Jedan ekvivalent Brauerove teoreme i njegove primene u nelinearnoj analizi, magistarski rad, Univerzitet u Beogradu 1993, 29 strana.

[1995] A short proof of a fixed point theorem in not nesessarily localy convex spaces, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. ser. Mat. 6 (1995), 46-47.

[1996] A theorem of Iohvidov-Fans type for multifunctions, Filomat 10 (1996), 173-176.

[1997] On the weak admissibility on topological vector spaces and its applications in fixed point theory, Proc. of the II math. conf. in Priština (urednik Lj. Kočinac) 89-94., Priština 1997.

Ivan ARANĐELOVIĆ i Marina MILOVANOVIĆ-ARANĐELOVIĆ,

[1997a] A fixed point theorem in compact Menger space, Proc. of II Mathematical Conference in Priština (Lj. Kočinac ed.), 95-98. Priština 1997.

[1997b] A fixed point theorem for upper semicontinuous multifunctions on compact Menger spaces, Math. Moravica 1 (1997) 7 - 10.

[1997c] Some proporties of Hausdorff measure of noncompactness on locally bounded topological vector spaces, Mat. Vesnik 49 (1997) 221-223.

Bogdan BAJŠANSKI

[1960] Uvođenje topologije familijom relacija, Zbornik radova SANU LXIX, Matematički institut 8 (1960), 115 - 129.

J. BANAS i K. GOEBEL (J. BANÁS i K. GOEBEL)

[1980] Measures of noncompactness in Banach spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 60, Marcel Dekker, New York and Basel, 1980.

Karlo BARDARO i Rita KEPITELI (Carlo BARDARO i Rita CEPPITELLI)

[1988] Some futher generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, J. Math. Anal. Appl. 132 (1988) 484 - 490.

[1989] Applications of Generalized Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem to Variational inequalities, J. Math. Anal. Appl. 137 (1989) 46-58.

[1990] Fixed Point Theorems and Vector Valued Minimax Theorems,

J. Math. Anal. Appl. 146 (1990) 363-373.

[1995] General Best Approximation Theorem with Applications in H-Metrizabile Spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Mondena, XLIII, 33-40 (1995)

Milorad BERTOLINO,

[1972] Pitanje prioriteta kod nekih topoloških principa,

Dijalektika 2 (1972), 65 - 73.

H. F. BOHNENBLUST i S. KARLIN (H. F. BOHNENBLUST i S. KARLIN)

[1950] On a theorem of Ville, in "Contributions to the theory of games", Ann. of Math. Studies, No. 24, pp. 155-160, Princeton University Press 1950.

Feliks BRAUDER (Felix BROWDER)

[1968] The Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings in Topological Vector Spaces, Math. Ann. 177 (1968), 283-301.

Ših-sen ČANG i Jing ZANG (Shih-sen CHANG i Ying ZHANG)

[1991] Generalized KKM theorem and Variational Inequalities,

J. Math. Anal. Appl. 159 (1991) 208-223.

Ših-sen ČANG i Ji-Hai MA (Shih-sen CHANG i Yi-Hai MA)

[1992] Generalized KKM theorem on H-space with applications,

J. Math. Anal. Appl. 163 (1992), no. 2, 406–421.

Šo Ju ČANG (Shiow Yu CHANG)

[1991] Fixed points theoreems,

Chinese J. Math. 19 (1991), 205-213.

Jozef DANEŠ (Josef DANES)

[1972] On the Istratescu's measure of noncompactness,

Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie 16 (64) (1972),403-406.

Ksi-Ping DING (Xie-Ping DING)

[1993] New generalisations of an H-KKM type theorem and their applications, Bull. Austral. Math. Soc. 48 (1993), 451-464.

Ksi-Ping DING i Kok-Keong TAN (Xie-Ping DING i Kok-Keong TAN)

[1990] Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities without convexity, J. Australian Math. Soc. (series A) 49 (1990) 111 - 128.

Ksi-Ping DING i Ajnat TARAFDAR (Xie-Ping DING i Einat TARAFDAR)

[1994] Some coincidence theorems and applicatons,

Bull. Austral. Math. Soc. 50 (1994), 73-80.

Ki FAN (Ky FAN)

[1952] Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces,

Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38 (1952), 121-126.

[1953] Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 42-47.

[1961] A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem,

Math. Annalen 142 (1961), 305-310.

[1964] Sur un theoreme minimax, C. R. Acad. Sci. Paris 259 (1964), 3925-3928.

[1966] Applications of a theorem concerning sets with convex sections,

Math. Ann. 163 (1966), 189 - 203.

[1969] Extensions of Two Fixed Point Theorems of F. E. Browder,

Math. Z. 112 (1969), 234-240.

[1972] A minimax inequality and applications,

in Ineqalies Vol III, O. Shisha (ed.), Academic press, New York 1972.

D. B. FUKS, A. T. FOMENKO i B. L. GUTENMAHER

[1969] Homotopičeskaja topologija,

Univerzitet u Moskvi 1969, 460 strana. [Na ruskom.]

M. FURI i A. VIGNOLI (M. FURI i A. VIGNOLI)

On a property of the unite sphere in a linear normed space,

Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astro. Phys. 18 (1970) 333-334.

I. L. GLIKSBERG (I. L. GLICKSBERG)

[1952] A futher generalization of Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 170-174.

Andžej GRANAS i Mark LASONDE (Andrzej GRANAS i Marc LASSONDE)

[1991] Sur un principe géométrique en analyse convexe,
Studia Mathematica 101 (1) (1991), 1 - 18.
Andžej GRANAS i Fon-Či LIN (Andrzej GRANAS i Fon-Che LIN)
[1983] Remark on a Theorem of Ky Fan Concerning Systems of Inequlities,
Bull. Inst. Math. Acad. Sinica,11 (1983), 639-643.
[1986] Coincidences for Set-Valued Maps and Minimax Inequalities,
J. Math. pures et appl., 65(1986), 119-148.
Čang-Vej HA (Chung-Wei HA)
[1980] Minimax and Fixed point Theorems, Math. Ann. 248 (1980), 73-77.
Olga HADŽIĆ
[1981] Some fixed point and almost fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector spaces,
Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 5(9) (1981), 1009-1019. 19-28.
[1983] Some applications of a fixed point theorem for multivalued mappings in topological vector spaces,
Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, serija za matematiku (1983), 15-29.
[1984a] Some generalizatios of Browder's fixed point theorem in topological spaces,
Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, serija za matematiku 14, 2 (1984), 41-48.
[1984b] Fixed point theory in topological vector spaces,
Institut za matematiku, Novi Sad 1984.
[1988] Some proporties of measures of noncompactness in paranormed spacees,
Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988) 843-849.
P. HARTMAN i Đ. ŠTAMPAČIJA (P. HARTMAN i G. STAMPACCHIA)
[1966] On some non-linear eliptic diferential equations,
Acta Mathematica 115 (1966), 271-310.

Šarl HORVAT (Charles HORVATH)

[1983] Point fixes et coincidences pour les applications multivoques sans convexite, C.R. Acad. Sc. Paris, t.296, Serie I (1983) 403 - 406.

[1984] Points fixes et coincidences dans les espaces topologiques compacts conctactiles, C.R. Acad. Sc. Paris, t.299, Serie I, 11(1984) 519 - 521.

[1985] Measure of Non-compactness and Multivalued Mappings in Complete Metric Topological Vector Space, J. Math. Anal. Appl. 108 (1985), 403-408.

[1987] Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity, Non-linear and convex analysis, edited by B. L. Lin and S. Simons, Marcel Dekker 1987, 99-106.

[1990] Quelques theoremes en theorie des Mini-Max,
C. R. Acad. Sci. Paris t.310 Serie I 269-272.

[1991] Contractibility and Generalized Convexty,
J. Math. Anal. Appl. 156 (1991), 341-357.

Jišeng HUANG (Yisheng HUANG)

[1994] Fixed point theorems with an Application in Generalized Games,
J. Math. Anal. Appl. 186 (1994), 634-642.

Adam IDZIK (Adam IDZIK)

[1988] Almost fixed point theorems,
Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988) 779-784.

Vasilj ISTRATESKU (Vasile ISTRATESKU)

[1972] On a measure of noncompactness,
Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie 16 (64) (1972),195-197.

C. L. JEN (C. L. YEN)

[1981] A minimax inequaliti and its applications to variational inequalities,
Pac. J. Math., 97 (1981), 477-481.

V. A. JEFREMOVIČ (V. A. EFREMOVIČ)

[1951] Infinitezimal'nie prostranstva,

DAN SSSR 76 (1951), 341-343. [Na Ruskom.]

N. A. JEŽARKOVA (N. A. JEŽARKOVA)

[1982] O jednoj meri nekompaktnosti,

Numeričke metode ispitivanja diferencijalnih jednačina i njihove primene,

Kujbišev 1982, 58-61. [Na Ruskom.]

Ivan JOVANOVIĆ i Vladimir RAKOČEVIĆ,

[1984] Multipliers of mixed-normed sequence spaces and measures of noncompactness, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 56 (1994) 61-68.

I. S. JUHVIDOV (I. S. IOHVIDOV)

[1964] On a lemma of Ky Fan generalizing the fixed-point principle of A. N. Tihonov (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 159 (1964), 501-504. flushpar English transl.: Soviet Math. 5, 1523-1526 (1964).

S. KAKUTANI (S. KAKUTANI)

[1941] A generalization of Brouwer's fixed point theorem,

Duke Math. J. 8 (1941), 457-459.

Lotar KANIOK (Lothar KANIOK)

[1990] On measures of noncompactness in general topological vector spaces,

Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990) 479-487.

Džon KEJLI (John KELLEY)

[1975] General Topology,

Springer - Verlag New York, Haidelberg, Berlin 1975, 298 + xiv strana.

Van Kju KIM (Wan Kyu KIM)

[1987] Some applications of Kakutani fixed point theorem,

J. Math. Anal. Appl. 121 (1987), 119 - 122.

Viktor KLI (Victor KLEE)

[1960a] Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces,

Math. Ann. 141 (1960), 281-285.

[1960b] Leray-Schauder theory without local convexity,

Math. Ann. 141 (1960), 286-296;
[1961] Corrections to "Leray-Schauder theory without local convexity,
Math. Ann. 145 (1961), 31-32.
B. KNASTER, K. KURATOVSKI i S. MAZURKJEVIČ
(B. KNASTER, K. KURATOWSKI i S. MAZURKIEWICH)
[1929] Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n - dimensionale Simplexe,
Fund. Math. 14 (1929), 132 - 137.
Andrej Nikolajevič KOLMOGOROV i Sergej Vasiljevič FOMIN,
[1957] Elementi teorije funkcija i funkcionalne analize,
"Nauka" Moskva 1957. [Na Ruskom]
H. KOMIJA (H. KOMIYA)
[1980] Convexity on a topological space,
Fund. Math. 111 (1981), 107 - 113.
[1986] Coincidence theorem and saddle point theorem,
Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 599-602.
Klemens KRAUTHAUSEN (Clemens KRAUTHAUSEN)
[1974] On the theorems of Dugundji and Schauder for certain nonconvex spaces,
Math. Balk. 4 (1974), 365-369.
K. KURATOVSKI (K. KURATOWSKI)
[1930] Sur les espaces completes,
Fund. Math. 15 (1930), 301-309.
Đuro KUREPA
[1937] Une critere de distanciabilite,
Mathematica (Cluj) 13 (1937) 59-65.
[1991] Fixpoint approch in mathematics,
Constantin Caratheodory: An international Tribute, edited by T. Rasias, Singapoor 1991. 713 - 768,
[1992] General ecart,

Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, 6 (2) (1992), 373 - 379.
Mark LASONDE (Marc LASSONDE)
[1983] On use of KKM - multifunctions in fixed point theory and related topics,
J. Math. Anal. and Appl., 97 (1983), 151 - 201.
[1990] Sur le principe KKM,
C.R.Acad. Sc. Paris, t.310, Serie I (1990) 573-576.
Fon-Če LIU (Fon-Che LIU)
[1991] On a form of KKM principle and SupInfSup inequalities of von Neumann and of Ky Fan type,
J. Math. Anal. Appl. 155, No.2, 420-436 (1991).
V. E. MATUSOV
[1978] Obobščenie teoremy o nepodvižnoi točke Tihonova,
Dokl. Akad. Nauk UzSSR 2 (1978), 12-14. (Russian)
Lia MARGINEAN (Lia MARGINEAN)
[1983] Remarks on some abstract measures of noncompactness,
Seminar on fixed point theory no. 3,
"Bales-Bolyai" University (Cluj - Napoca 1981), Fac. Math. Research seminaries (1983), 135-137.
Branislav MIJAJLOVIĆ
[1990] Brauerovi stepeni u ravni, magistarski rad,
Univerzitet u Beogradu 1990, 80 strana.
[1997] Brouwerov stepen i fundamentalna grupa,
Zbornik radova UFJ 1 (1997) 267-274.
Džon fon NOJMAN (John Von NEUMANN)
[1928] Zur Theoric der Gesellschaftsspiele,
Math. Annalen, 100(1928), 295-320.
Ngujen To NHU i Le Hoang TRI (Nguyen To NHU i Le Hoang TRI)
[1994] No Roberts space is a counter-example to Schauder's conjecture,

Topology 33, No. 2 (1994) 371-378.

Ngujen To NHU (Nguyen To NHU)

[1996] The fixed point property for weakly admissible compact convex sets: searching for a solution to Schauder's conjecture,

Topology and its Applications 68 (1996) 1-12.

Či PARK (Sehie PARK)

[1989] Generaliztions of Ky Fan's Matching Theorems and their applications,

J. Math. Anal. and Appl. 141 (1989), 164-176.

[1990] Convex spaces and KKM families of subsets,

Bull. Korean Math. Soc. 27 (1990) No. 1, 11 - 14.

[1991] Variational inequalities and extermal principles,

J. Korean Math. Soc. 28 (1991) No. 1, 45 - 56.

[1992] Fixed Point theory of multifunctions in topological vector spaces,

J. Korean Math. Soc. 29 (1992) No. 1, 191-208.

[1994] Foundations of the KKM theory via coincidences of composites of upper semicontinuous maps, J. Korean Math. Soc. 31 (1994) No. 3, 493-519.

Či PARK, Jong Suk BAE i Kjung Hu KANG

(Sehie PARK, Jong Sook BAE i Kyung Hoo KANG)

[1994] Geometric proporties, Minimax inequalities, and Fixed Point theorems on convex spaces,

Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994) no. 2, 429-439.

Či PARK i Bili ROUDS (Sehie PARK i Billy RHOADES)

[1986] Comments on charaterizations for metric completeness,

Math. Japonica 31 (1986), 95-97.

Espedito De PASKALE (Espedito De PASCALE)

[1993] A finite dimensional reduction of the Schauder Conjecture,

Comment. Math. Univ. Carolinae 34 No. 3 (1993),401-404.

Espedito De PASKALE, Đ. TROMBETA i Hans WEBER

(Espedito De PASCALE, G. TROMBETTA i Hans WEBER)
[1993] Convexly totally bounded and stongly totally bounded sets. Solution of a problem of Idzik, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 20 (1993), 341-355.
L. PASICKI
On the measure of noncompactness,
Commentationes Math., 21 (1979), 203-205.
Vladimir RAKOČEVIĆ
[1994] Funkcionalna analiza, Naučna knjiga Beograd 1994, 242 strane.
S. ROLEVIĆ (S. ROLEWICZ)
Metric linear spaces, PWN, Warszawa 1972.
Jon RUS (Ioan RUS)
[1981] Compactitate si puncte fixe in spatii metrice,
Seminarul itinerant (Cluj - Napoca 1981), 349-353.
[1983] Generalized contractions,
Seminar on fixed point theory no. 3,
"Bales-Bolyai" University (Cluj - Napoca 1981), Fac. Math. Research seminaries (1983), 1-130.
Moris SION (Maurice SION)
[1958] On general minimax theorems, Pacific J. Math. 8 (1958), 171 - 178.
Zoran STOKIĆ
[1991] Princip najmanjeg dejstva,
Istorija matematičkih i mehaničkih nauka 4 (1991), 155-166.
J. ŠAUDER (J. SCHAUDER)
[1930] Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen,
Studia Math. 2 (1930), 171-180.
Mau-Ksiang ŠIH (Mau-Hsiang SHIH)
[1986] Covering properties of convex sets,
Bull. London Math. Soc. 18 (1986) 57-59.

Naoki ŠIOĐI (Naoki SHIOJI)

[1991] A futher generalization of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 111(1991), 187-195.

E. ŠPANIER (E. SPANIER)

[1966] Algebraic topology, Mc Graw-Hill, New York 1966.

Ajnat TARAFDAR (Einat TARAFDAR)

[1989] A Fixed Point Theorem Equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem, J. Math. Anal. Appl. 128 (1987), 475-479.

[1990] A fixed point theorem in H-space and related results,
Bull. Aust. Math. Soc. 42, No.1, (1990) 133-140.

Milan TASKOVIĆ

[1984] A characterization of complete metric space,
Math. Japonica 29 (1984), 107-114.

[1986a] On an equivalent of axiom of chouse and its applications,
Math. Japonica 31 (1986), 979-991.

[1986b] Teorija fiksne tačke,
Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986, 272 strane.

[1990] Minimax theorems on posets with applications,
Math. Japonica 35(1990), 805-816.

[1991] Extensions of Brouwer's theorem, Math. Japonica 36(1991), 685-693.

[1992] General convex functions, Math. Japonica 37 (1992), 367-372.

[1993a] Nelinearna funkcionalna analiza (I deo, teorijske osnove)
Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1993, 792 strane.

[1993b] On transversal points, Math. Japonica, 38(1993), 445 - 450.

[1993c] Minimax theory with transversal points, YUJOR 3(1993), 129-158.

[1997] General convex topological spaces and fixed points, Math. Moravica 1 (1997) 127-135.

Milan TASKOVIĆ i Dragoljub ARANDELOVIĆ,

[1981] Teorija funkcija i funkcionalna analiza - teoreme, zadaci i problemi,
NIRO "Knjizevne novine" Beograd, 1981.
A. TIHONOV (A. TYCHONOFF)
[1935] Ein fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935), 767-776.
Andre VEJL (Andre WAIL)
[1938] Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale,
Actualites Sci. et industr. 551, Paris 1938.
A. VILANSKI (A. WILANSKY),
[1978] Modern methods in topological vector spaces,
McGraw-Hill New York 1978.
Josif VUKOVIĆ
[1988] O jednom Njutnovom problemu optimalnosti,
Zbornik radova povodom 60-godišnjice profesora dr Luke Vujoševića Podgorica
1988., 196-207.
Kazimirž ZIMA (Kazimierz ZIMA)
[1977] On Schauder's fixed point theorem with respect to para-normed space,
Comment. Math. Prace Mat. 19 (1977), 421-423.
Bogdan ŽEPECKI (Bogdan RZEPECKI)
[1979] Remarks on Schauder's fixed point principle and its applications,
Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 27 (1979), 473-480.

SADRŽAJ