Univerzitet u Kragujevcu
Prirodno-matematički fakultet

Nebojša Ikodinović

KREGOVA INTERPOLACIONA TEOREMA U VEROVATNOSNIM LOGIKAMA

Magistarska teza

5. 01. 2000

1. M. Rašković (mentor)
2. R. Đorđević (komentor)
3. S. Prešić
4. Ž. Mijajlović (pred. komisije)
5. Z. Ognjanović

Pitanja
1. mere i distributivne mere
   i BA sa infinitarnim operacijama
2. Kaherman t. ... h.
3. a) Robinson Consistency property
   b) mon. logika
   c) Funkcionalna potpunost
   d) relevantnost
4. Modalni računi i LP(n)

Kragujevac
2000

Sadržaj

1

Uvod

Teoreme saglasnosti, potpunosti, kompaktnosti, odlučivosti, Kregova interpolaciona teorema, Robinsonova teorema neprotivrečnosti za zadatu aksiomatizaciju i klasu modela neke logike određuju najvažnija svojstva te logike i omogućuju njeno dublje proučavanje i uspešnu primenu. Ovaj rad rezultat je ispitivanja pomenutih svojstava za iskazne verovatnosne logike.

Iskazne verovatnosne logike predstavljaju konzervativna raširenja klasičnog iskaznog računa pogodna za formalizaciju stepena verovanja u iskaz (verovatnoće iskaza) odnosno opisa stanja znanja. Detaljan opis ovih logika dat je u [10] i [13]. Proučavanje ovih logika značajno je ne samo za matematičke već i za računarske nauke.

1.1 Organizacija rada

U poglavlju 2. najpre je dat je pregled najvažnijih osobina Bulovih algebri. Bulove algebre značajno mesto zauzimaju kako u matematičkoj logici tako i u verovatnoći, pa je prirodno očekivati njihov doprinos tamo gde se te dve oblasti prepliću. Posebna pažnja je posvećena merama na Bulovim algebrama. Konačno-aditivne mere na poljima skupova detaljno su proučene u [1], odakle su preuzete glavne ideje za proučavanje konačno-aditivnih mera na Bulovim algebrama. Rezultat tog proučavanja su tvrđenja iz kojih će proizaći i najvažnija svojstva iskaznih verovatnosnih logika ali i predikatske verovatnosne logike prvog reda.

U poglavlju 3. prikazane su iskazne verovatnosne logike LP i $LP(n)$, $n \in N$, pri čemu se polazi od rezultata iz [10] i [13]. Za razliku od pomenutih radova, u kojima se uvodi klasa modela koji podsećaju na modalne, ovde je posmatrana klasa takozvanih Bulovih modela koji se sastoje od Bulove algebre i konačno-aditivne mere na njoj. Ovako uvedena klasa modela, zahvaljujući rezultatima poglavlja 2. omogućiće dokazivanje najpre Robinsonove teoreme neprotivrečnosti ali i, glavnog rezultata ovog rada, Kregove interpolacione teoreme. Pošto će biti pokazano da se interpolant može naći samo u proizvoljno 'finoj' logici $LP(n)$, na kraju ovog poglavlja, dati su neki algoritmi, za nalaženje interpolanta u LP, pri čemu je glavna inspiracija proistekla iz [4] i [5].

U poglavlju 4. u kratkim crtama je prikazana predikatska verovatnosna logika prvog reda i mogućnost dokazivanja analognih rezultata kao za iskazne verovatnosne logike.

1.2 Publikovani delovi rada

Neki delovi ovog rada su prihvaćeni za štampanje u [6] i [7].

1.3 Zahvalnost

Veliki doprinos ovom radu, najpre kroz predavanja i razgovore o algebri i logici, a zatim kroz konkretne zadatke dali su profesor dr Miodrag Rašković, mentor rada i inicijator ovog istraživanja i profesor dr Radosav Đorđević, komentor ovog rada. Njihove sugestije prisutne su u mnogim delovima rada.

Pored dr Raškovića i dr Đorđevića, zahvalnost dugujem i profesorima dr Slaviši Prešiću, dr Žarku Mijajloviću i dr Zoranu Ognjanoviću na uloženom trudu oko čitanja teksta i korisnim primedbama i sugestijama.

Najzad, želim da se zahvalim i Mariji Stanić na pomoći oko kompjuterske obrade i štampanja teksta.

2

Bulove algebre

Početak teorije Bulovih algebri datira od sredine XIX veka sa radovima Džordža Bula (George Boole, 1815-1864), koji je u svom 'Istraživanju zakona mišljenja', objavljenom 1854. godine u Kembridžu, naveo spisak identiteta koji, kako je rekao, vladaju zakonima mišljenja, imajući u vidu sličnost između dvoelementne algebre tačno-netačno i algebre skupova. Aksiomatizacija Bulovih algebri pojavljuje se početkom XX veka, kada počinje i izučavanje Bulovih algebri kao klase algebarskih struktura koja zadovoljava određene identitete. Danas, značaj Bulovih rezultata svakako prevazilazi okvire same teorije Bulovih algebri.

2.1 Osnovni pojmovi i rezultati teorije Bulovih algebri

Bulova algebra je svaka algebarska struktura $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$, sa dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ na B, jednom unarnom operacijom $-$ na B i dve konstante 0 i 1 iz B takva da za sve $x, y, z \in B$ važi:

$$\begin{array}{ll}
x + (y + z) = (x + y) + z & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\
x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
x + (x \cdot y) = x & x \cdot (x + y) = x \\
x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z & x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\
x + (-x) = 1 & x \cdot (-x) = 0
\end{array}$$

U daljem izlaganju, osim ako to posebno ne naglasimo, podrazumevaćemo da u svakoj Bulovoj algebri važi i nejednakost $0 \neq 1$.

Za svaku Bulovu algebru $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ možemo definisati binarnu relaciju $\leq$ na B sa: $x \leq y$ akko $x \cdot y = x$ ili ekvivalentno $x \leq y$ akko $x + y = y$. Ovako definisana relacija je poredak na B, u odnosu na koji su 0 i 1, tim redom, najmanji i najveći elementi, a $x \cdot y$ i $x + y$ su infimum i supremum, tim redom, skupa $\{x, y\}$.

Ako je $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ Bulova algebra i $A \subseteq B$ zatvoren za operacije $+$, $\cdot$ i $-$, skup A je domen nove Bulove algebre $\mathbf{A}$. Algebra $\mathbf{A}$ je podalgebra Bulove algebre $\mathbf{B}$. Očigledno svaka podalgebra od $\mathbf{B}$ mora da sadrži elemente $0, 1 \in B$.

Primeri. Neka je $\mathcal{P}(X)$ skup svih podskupova skupa X. Struktura $\mathbf{P}(X) = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X)$ je Bulova algebra. Podalgebre ove algebre nazivaju se poljima ili algebrama skupova.

Ako je X jednoelementni skup, tada $\mathcal{P}(X)$ ima dva elementa $\emptyset$ i X koje označavamo sa 0 i 1, a skup $\mathcal{P}(X)$ sa $2 = \{0,1\}$. Operacije ove Bulove algebre date su tablicom:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$	$-x$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Lako se vidi da je dobijena algebra operacija iskaznog računa, koja pri interpretaciji 0 i 1 kao tačno i netačno predstavlja algebru iskaznih operacija: disjunkcije, konjunkcije i negacije. Inače, algebra $\mathbf{2}= (2,+,\cdot,-,0,1)$ je, do na izomorfizam jedinstvena Bulova algebra sa dva elementa.

Jedan od, možda, najznačajnijih rezultata u teoriji Bulovih algebri je Stonova teorema reprezentacije. U strukturnoj teoriji ona u potpunosti karakteriše Bulove algebre.

Teorema 2.1.1 *Svaka Bulova algebra izomorfna je nekom polju skupova.*

Prema Stonovoj teoremi sve probleme Bulovih algebri možemo svesti na probleme polja skupova, što nikako ne znači da se takvim svođenjem ovi problemi trivijalizuju. Ipak, u izvesnom smislu, Stonova teorema trivijalizuje aritmetiku Bulovih algebri.

Neka su $\mathbf{B} = (B, +_B, \cdot_B, -_B, 0_B, 1_B)$ i $\mathbf{C} = (C, +_C, \cdot_C, -_C, 0_C, 1_C)$ proizvoljne Bulove algebre. Funkcija $f : B \to C$ je homomorfizam Bulovih algebri $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, ako za sve $x, y \in B$, $f(x +_B y) = f(x) +_C f(y)$, $f(x \cdot_B y) = f(x) \cdot_C f(y)$, $f(-_B x) = -_C f(x)$, $f(0_B) = 0_C$ i $f(1_B) = 1_C$. Homomorfizam je saglasan, takođe, sa poretkom, tj. za sve $x, y \in B$, ako je $x \leq_B y$, onda je $f(x) \leq_C f(y)$. Injektivan homomorfizam je monomorfizam, sirjektivan homomorfizam je epimorfizam, a bijektivan homomorfizam je izomorfizam. Sa $\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$ označavamo da su Bulove algebre $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ izomorfne.

Neprazan skup $F \subseteq B$ je filter Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ ako za sve $x, y \in B$ važi:

(i) $1 \in F$,

(ii) $x \in F$ i $x \leq y$ implicira $y \in F$,

(iii) $x \in F$ i $y \in F$ implicira $x \cdot y \in F$.

Filter F je trivijalan filter ako je $F = \{1\}$, a pravi filter ako $0 \notin F$. Ubuduće, pod terminom filter podrazumevaćemo pravi filter. Dakle, predpostavljamo da svaki filter F zadovoljava uslov $0 \notin F$. Filter F je ultrafilter Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ ako za svako $x \in B$, $x \in F$ ili $-x \in F$, ali ne oba. Lako se može pokazati da je filter F ultrafilter ako i samo ako je maksimalan, u odnosu na inkluziju, u kolekciji svih filtera date Bulove algebre.

Neka je $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ proizvoljna Bulova algebra. Relacija ekvivalencije skupa B saglasna sa operacijama je kongruencija Bulove algebre $\mathbf{B}$. Ako je F filter

Bulove algebre B, lako se proverava da je binarna relacija $\sim_F$ skupa B definisana sa:

$$x \sim_F y \text{ akko } (x + (-y)) \cdot ((-x) + y) \in F$$

kongruencija algebre B. Za proizvoljno $x \in B$ neka je $[x]_F = \{y \in B : x \sim_F y\}$ klasa ekvivalencije elementa x, a $B/F = \{[x]_F : x \in B\}$ količnički skup u odnosu na relaciju $\sim_F$. Saglasnost operacija Bulove algebre B sa relacijom $\sim_F$ omogućava da na količničkom skupu B/F definišemo strukturu Bulove algebre: za sve $x, y \in B$,

$$[x]_F \oplus [y]_F = [x + y]_F, \ \ [x]_F \odot [y]_F = [x \cdot y]_F, \ \ \ominus [x]_F = [-x]_F.$$

Bulovu algebru $\mathrm{B}/F = (B/F, \oplus, \odot, \ominus, [0]_F, [1]_F)$ u odnosu na ovako definisane operacije nazivamo količnikom algebre B po filteru F. Treba primetiti da je $[1]_F = F$ i da je $[0]_F = \{x \in B : -x \in F\}$. Trivijalno se pokazuje da je preslikavanje $\pi : B \to B/F$ definisano sa $\pi(x) = [x]_F$, $x \in B$ homomorfizam koji često nazivamo kanonskim homomorfizmom. Takođe se lako proverava da je $\mathrm{B}/F \cong \mathbf{2}$ ako i samo ako je F ultrafilter Bulove algebre B.

Kako Bulove algebre čine varijetet, možemo definisati pojam slobodne Bulove algebre.

Bulova algebra $\mathrm{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ je slobodna nad skupom $X \subseteq B$ ako za svaku Bulovu algebru C i svako preslikavanje $f : X \to C$, postoji jedinstven homomorfizam $\overline{f} : B \to C$ koji proširuje funkciju f.

Teorema 2.1.2 *Neka su* B_1 *i* B_2 *slobodne Bulove algebre redom nad skupovima* X_1 *i* X_2. *Ako su* X_1 *i* X_2 *jednake kardinalnosti Bulove algebre* B_1 *i* B_2 *su izomorfne.*

2.2 Iskazni račun i Bulove algebre

Bulove algebre su algebarske strukture nastale iz radova Džorža Bula, koji je primenio algebarske metode u analizi tradicionalnih oblika zaključivanja. I danas, mnogi opšti koncepti kojima se bavi matematička logika mogu se interpretirati i njihov smisao razumeti u klasi ovih algebarskih struktura. Zato, iako je po svojoj prirodi teorija Bulovih algebri čisto algebarska teorija ona se ipak smatra delom matematičke logike. Mi ćemo se zadržati na vezi između iskaznog računa i Bulovih algebri.

Iskazni račun formalizuje deo logike u kojem opravdanost argumentacije zavisi samo od toga kako su rečenice konstruisane, a ne i od njihovog značenja ili unutrašnje strukture. U ovom kontekstu irelevantan je njegov smisao. Bitna je samo njegova struktura u odnosu na logičke veznike.

Skup formula $For(I)$ iskaznog računa, sa skupom iskaznih slova I, ima veoma bliska svojstva Bulovoj algebri. Implikacija je refleksivna i tranzitivna, a konjunkcija i disjunkcija imaju sva svojstva bliska binarnim bulovskim operacijama. Međutim, sam po sebi, skup formula $For(I)$ shvaćen kao slobodna algebra nad operacijama $\vee$, $\wedge$ i $\neg$ ipak nije Bulova algebra. Implikacija nije antisimetrična, pa nije poredak. Tek izjednačavanjem ekvivalentnih formula, na količničkoj strukturi dobija se Bulova algebra.

Za proizvoljne formule iskaznog računa $\varphi, \psi \in For(I)$, neka je

$$\varphi \sim \psi \text{ ako i samo ako } \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $For(I)$ i da za sve φ_1, φ_2, ψ_1, $\psi_2 \in For(I)$ važi:

(i) ako je $\varphi_1 \sim \psi_1$, onda je i $\neg\varphi_1 \sim \neg\psi_1$;

(ii) ako je $\varphi_1 \sim \psi_1$ i $\varphi_2 \sim \psi_2$, onda je i $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \sim (\psi_1 \vee \psi_2)$, kao i $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \sim (\psi_1 \wedge \psi_2)$.

Neka je za $\varphi \in For(I)$, $[\varphi] = \{\psi \in For(I) : \varphi \sim \psi\}$ klasa ekvivalencije formule φ u odnosu na relaciju $\sim$. Osobine (i) i (ii) omogućuju nam da na količničkom skupu $B(I) = For(I)/\sim = \{[\varphi] : \varphi \in For(I)\}$ definišemo sledeće operacije:

$$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi],\ [\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi],\ -[\varphi] = [\neg\varphi]$$

za proizvoljne $\varphi, \psi \in For(I)$. Ako stavimo da je $\mathbf{0} = [\theta \wedge \neg\theta]$ i $\mathbf{1} = [\theta \vee \neg\theta]$, gde je θ proizvoljna formula, lako se pokazuje da je $\mathbf{B}[I] = (B(I), +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra. Ova Bulova algebra naziva se Lindenbaumova Bulova algebra iskaznog računa, ili samo Lindenbaumova algebra. Očigledno je Bulova algebra $\mathbf{B}[I]$ generisana sa $[I] = \{[x] : x \in I\}$, jer se svaka formula može zapisati pomoću iskaznih slova i logičkih veznika. Ali važi i više, o čemu govori naredna teorema.

Teorema 2.2.1 $\mathbf{B}[I]$ *je slobodna Bulova algebra sa skupom* $[I]$ *slobodnih generatora.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{C}$ proizvoljna Bulova algebra i $f : [I] \to C$ proizvoljno preslikavanje. Definišimo preslikavanje $\overline{f} : B[I] \to C$ sa:

$$\overline{f}([p]) = f([p]), \text{ za } p \in I,$$

$$\overline{f}([\varphi] + [\psi]) = \overline{f}([\varphi]) +_C \overline{f}([\psi]),$$
$$\overline{f}([\varphi] \cdot [\psi]) = \overline{f}([\varphi]) \cdot_C \overline{f}([\psi]),$$
$$\overline{f}(-[\varphi]) = -_C \overline{f}([\varphi]),$$

za $\varphi, \psi \in For(I)$.

Za svaku formulu $\varphi \in For(I)$ ako je $\vdash \varphi$, onda je $\overline{f}([\varphi]) = 1$, što se lako pokazuje indukcijom po dužini dokaza za φ u iskaznom računu, odakle neposredno sledi da je $\overline{f}$ dobro definisano preslikavanje. Očigledno je $\overline{f}$ i homomorfizam. □

Lako se vidi da je poredak u $\mathbf{B}[I]$ definisan sa: $[\varphi] \leq [\psi]$ ako i samo ako $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$, za sve $\varphi, \psi \in For(I)$.

Za svaki $J \subseteq I$, skup $B[J] = \{[\varphi]$: sva iskazna slova koja se pojavljuju u formuli φ su iz $J\}$ je domen podalgebre algebre $\mathbf{B}[I]$.

Neka je $T \subseteq For(I)$ i $D_T = \{[\varphi] : T \vdash \varphi\}$. Može se pokazati da važi:

(1) T je neprotivrečna teorija ako i samo ako je D_T filter Bulove algebre $\mathbf{B}[I]$;

(2) T je kompletna teorija ako i samo ako je D_T ultrafilter u $\mathbf{B}[I]$.

Dakle svaki neprotivrečan skup formula $T \subseteq For(I)$ određuje jedan filter D_T Bulove algebre $\mathbf{B}[I]$, pa time i faktor algebru $\mathbf{B}[I]/D_T$. Elementi te nove Bulove algebre su skupovi formula

$$[\varphi]_T = \{\psi \in For(I) : T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi\}, \text{ za } \varphi \in For(I),$$

pri čemu je jedinica $\mathbf{1}_T$ skup D_T, a nula $\mathbf{0}_T$ skup $\{[\varphi] : T \vdash \neg\varphi\}$. Faktor algebru $\mathbf{B}[I]/D_T$ označavamo sa $\mathbf{B}_T[I]$ i nazivamo Lindenbaumovom algebrom teorije T.

Prema tvrđenju (2), za svaku kompletnu teoriju $T \subseteq For(I)$, je $\mathbf{B}_T[I] \cong \mathbf{2}$. Uopšte, postoji obostrano jednoznačna korespondencija među kompletnim raširenjima neke teorije T i ultrafiltera na $\mathbf{B}[I]$. Takođe, lako se vidi da ako su I_1 i I_2 beskonačni skupovi takvi da je $I_1 \subseteq I_2$ a $T_2 \subseteq For(I_2)$ konzervativno raširenje neprotivrečne teorije $T_1 \subseteq For(I_1)$, tada se $\mathbf{B}_{T_1}[I_1]$ može utopiti u $\mathbf{B}_{T_2}[I_2]$, tj. prva Bulova algebra se može shvatiti kao podalgebra druge, pri čemu se $[\varphi]_{T_1}$ i $[\varphi]_{T_2}$ identifikuju za sve $\varphi \in For(I_1)$.

Glavna interpretacija klasičnog iskaznog računa je Bulova algebra $\mathbf{2}$. Međutim, za interpretaciju klasičnog iskaznog računa može se uzeti ma koja Bulova algebra $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$; u tom slučaju znaci $\vee$, $\wedge$, $\neg$ interpretiraju se kao odgovarjuće operacije Bulove algebre $\mathbf{B}$, $+$, $\cdot$, $-$, dok se iskazna slova interpretiraju kao elementi skupa B. Dakle, ako je I skup iskaznih slova, tada je svaka funkcija $f : I \to B$ jedna interpretacija skupa I u algebri $\mathbf{B}$, koja se na prirodan način može proširiti do funkcije $f : For(I) \to B$, definisane na svim iskaznim formulama, indukcijom po složenosti formula:

- $f(\neg\varphi) = -f(\varphi)$,
- $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \cdot f(\psi)$,
- $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$,

za φ, $\psi \in For(I)$. Ovako definisano preslikavanje nazivamo $\mathbf{B}-$interpretacija formula skupa $For(I)$. Takođe kažemo da je $\mathbf{B}-$interpretacija $f : For(I) \to B$ model formule φ ako i samo ako je $f(\varphi) = 1$. Ako je $T \subseteq For(I)$ neprotivrečna teorija lako se vidi da je preslikavanje $f_T : For(I) \to B_T[I]$, definisano sa $f_T(\varphi) = [\varphi]_T$ model svih formula skupa T.

Kao što je već rečeno, svaka Bulova algebra se može predstaviti kao algebra skupova (Stonova teorema), ali, kako je u [2] primećeno, tvrdeći da je formulisao spisak identiteta 'koji izražavaju zakone mišljenja' Bul je možda imao u vidu sledeću reprezentaciju ovih algebri.

Teorema 2.2.2 *Za svaku Bulovu algebru* $\mathbf{B}$, *u iskaznom računu postoji teorija* $T \subseteq For(I)$, *za neki skup iskaznih slova* I, *takva da je* $\mathbf{B} \cong \mathbf{B}_T[I]$.

2.3 Mere na Bulovim algebrama

U ovom delu razmatraćemo konačno-aditivne mere na Bulovim algebrama. Definicije i teoreme u ovom odeljku uglavnom su preuzete iz [1] i [11].

Definicija. Neka je $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ Bulova algebra. Preslikavanje $\mu : B \to [0,1]$, gde je $[0,1]$ realni interval, nazivamo (konačno- aditivnom verovatnosnom) merom ako je $\mu(1) = 1$ i za sve $x, y \in B$, takve da je $x \cdot y = 0$, $\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y)$.

Teorema 2.3.1 *Neka je μ mera na nekoj Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$.*

(1) $\mu(0) = 0$.

(2) Za $x, y \in B$, $x \leq y$ implicira $\mu(x) \leq \mu(y)$.

(3) Za $x, y \in B$, $\mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y)$.

(4) Neka je $m, k \in N$, $k \leq m$, $S^{m,k}$ skup svih nizova prirodnih brojeva $(p_i)_{i \leq k}$ takvih da je $1 \leq p_1 < \ldots < p_k \leq m$. Tada za proizvoljne $b_1, \ldots, b_m \in B$ važi:

$$\sum_{k \leq m} \mu(b_k) = \sum_{k \leq m} \mu\Big(\sum_{p \in S^{m,k}} \prod_{i \leq k} b_{p_i} \Big).$$

Dokaz. Tvrđenja (1), (2) i (3) neposredno slede iz definicije. Tvrđenje (4) dokazuje se indukcijom po m, i predstavlja uopštenje poznate formule $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x+y) + \mu(x \cdot y)$. $\square$

Na svakoj Bulovoj algebri može se definisati mera. Na primer, karakteristična funkcija ultrafiltera je jedna $\{0,1\}$–vrednosna mera.

Primer 2.3.1. Kada se teorija verovatnoće izlaže intuitivno jedan od osnovnih pojmova je *događaj* i on se obično određuje kao neki skup mogućih rezultata izvesnog eksperimenta. Pri tom se podrazumeva da svaki događaj može da se desi ili da se ne desi. Takođe, u klasi svih događaja definišu se tri operacije, povezane sa logičkim veznicima '*ili*', '*i*' i '*ne*'. Ako su A i B događaji, onda su događaji i A *ili* B, koji se dešava kada se bar jedan od događaja A i B desi (ili oba), i A *i* B, koji se dešava samo kada se oba događaja A i B dese. Ako je A događaj, onda je i događaj *ne*A, koji se dešava ako i samo ako se događaj A ne desi. Uvodi se i pojam *sigurnog* događaja koji se uvek dešava i pojam *nemogućeg* događaja koji se nikada ne dešava. Dakle, ako je Ω skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta (elementi skupa Ω nazivaju se često elementarnim ishodima), svaki događaj identifikujemo sa nekim podskupom od Ω, pri čemu se podrazumeva da je kolekcija svih događaja zatvorena za uniju, presek i komplementiranje u odnosu na Ω, tj. da je 'algebra događaja' zapravo Bulova algebra skupova, gde unija skupova odgovara operaciji *ili* među događajima, presek skupova operaciji *i*, operacija komplementiranja u odnosu na Ω odgovara operaciji *ne*, skup Ω je tada *siguran* događaj, prazan skup $\emptyset$ *nemoguć* događaj, dok je verovatnoća mera na toj Bulovoj algebri. U najjednostavnijem slučaju kada je skup $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ konačan za 'algebru događaja' uzima se Bulova algebra $\mathbf{P}(\Omega)$. Verovatnoća se definiše tako što se najpre svakom elementarnom događaju ω_i pridruži realan broj $P(\omega_i) = r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ tako da je $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, pa se zatim uzima da je verovatnoća događaja $A \subseteq \Omega$, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, ako je $A \neq \emptyset$, a da je $P(\emptyset) = 0$.

Primer 2.3.2. Bul je smatrao da je centralni problem teorije verovatnoće: kako izračunati verovatnoću nekog događaja ako su poznate verovatnoće događaja 'logički povezanih' sa njim. Zapravo on je proučavao vezu između logičkih veznika *ili*, *i* i *ne* i formalnih osobina verovatnoće. Zato je umesto o događajima govorio o iskazima, a traženje verovatnoće da se izvestan događaj desi zamenio traženjem verovatnoće istinitosti odgovarajućeg iskaza, imajući u vidu prirodne veze: događaj $\leftrightarrow$ skup $\leftrightarrow$ iskaz, *ili* $\leftrightarrow \cup \leftrightarrow \vee$, *i* $\leftrightarrow \cap \leftrightarrow \wedge$, *ne* $\leftrightarrow {}^c \leftrightarrow \neg$. Za takvo proučavanje bilo je potrebno na skupu svih klasičnih iskaznih formula definisati $[0,1]-$vrednosnu funkciju koja će imati sve elementarne osobine verovatnoće. Definišimo jednu takvu funkciju na skupu formula $For(p_1,\dots,p_n)$ u kojima se pojavljuju samo iskazna slova $p_1,\dots,p_n$. Kao što je poznato svaka formula pomenutog skupa, koja nije kontradikcija, ekvivalentna je disjunkciji konjunkcija oblika ${p_1}^{\epsilon(1)} \wedge \dots \wedge {p_n}^{\epsilon(n)}$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, pri čemu je $p^0 = \neg p$ a $p^1 = p$. Da bi definisali verovatnoću na skupu $For(p_1,\dots,p_n)$, dovoljno je svakoj konjunkciji ${p_1}^{\epsilon(1)} \wedge \dots \wedge {p_n}^{\epsilon(n)}$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$ pridružiti realan broj $P({p_1}^{\epsilon(1)} \wedge \dots \wedge {p_n}^{\epsilon(n)}) = r_\epsilon \geq 0$, tako da je $\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} r_\epsilon = 1$. Dakle, ako formula $\varphi(p_1,\dots,p_n)$ nije kontradikcija, ekvivalentna je formuli oblika $\bigvee_{i=1}^{k}({p_1}^{\epsilon_i(1)} \wedge \dots \wedge {p_n}^{\epsilon_i(n)})$, za neko $k \in N$ i neke $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k \in \{0,1\}^n$, pa je njena verovatnoća $P(\varphi(p_1,\dots,p_n)) = \sum_{i=1}^{k} r_{\epsilon_k}$, a ako je $\varphi(p_1,\dots,p_n)$ kontradikcija uzima se da je $P(\varphi(p_1,\dots,p_n)) = 0$. Lako se dokazuju sledeće osobine ovako definisane funkcije P:

(i) ako je $\vdash \varphi$, onda je $P(\varphi) = 1$;

(ii) $P(\neg\varphi) = 1 - P(\varphi)$;

(iii) Ako je $\varphi \wedge \psi$ kontradikcija, onda je $P(\varphi \vee \psi) = P(\varphi) + P(\psi)$;

(iv) ako je $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$, onda je $P(\varphi) = P(\psi)$.

Pošto je osobinom (iv) utvrđeno da ekvivalentne formule imaju jednaku verovatnoću, na ovaj način je zapravo definisana mera na Lindenbaumovoj algebri $\mathbf{B}[p_1,\dots,p_n]$.

Iz prethodnih primera vidi se značaj proučavanja osobina mere na Bulovim algebrama. Od posebne važnosti biće rešavanje problema postojanja ekstenzije mere sa neke podalgebre date Bulove algebre na čitavu algebru. Prirodno je postaviti pitanje kada se data funkcija $\mu^* : A \to [0,1]$, gde je A dati podskup domena B Bulove algebre $\mathbf{B}$, može proširiti do mere $\mu : B \to [0,1]$ na $\mathbf{B}$. Očigledno, ako $1 \in A$, onda mora biti $\mu^*(1) = 1$. Pokazaćemo da od svih $[0,1]-$vrednosnih funkcija definisanih na $A \subseteq B$, pri čemu $1 \in A$, takozvane parcijalne mere na A se mogu proširiti do mere na $\mathbf{B}$.

Neka je $\mathbf{B} = (B,+,\cdot,-,0,1)$ data Bulova algebra, $B^{<\omega}$ skup svih konačnih nizova elemenata iz B, a $^\wedge$ binarna operacija dopisivanja nizova definisana na $B^{<\omega}$. Neka je, dalje za $m,k \in N$, $k \leq m$, $S^{m,k}$ skup svih nizova prirodnih brojeva $(p_i)_{i\leq k}$ takvih da je $1 \leq p_1 < \dots < p_k \leq m$. Za konačne nizove $\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ i $\langle b_1,\dots,b_m\rangle$ elemenata iz B neka je $\langle a_1,\dots,a_m\rangle \prec \langle b_1,\dots,b_m\rangle$ ako i samo ako važi:

$$\sum_{p\in S^{m,k}} \prod_{i\leq k} a_{p_i} \leq \sum_{p\in S^{m,k}} \prod_{i\leq k} b_{p_i}.$$

Na skupu $B^{<\omega}$ definišimo relaciju $\leq$ na sledeći način:
za sve $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle, \langle b_1,\ldots,b_n\rangle \in B^{<\omega}$, $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ ako i samo ako je:

$$\begin{array}{l} \langle a_1,\ldots,a_m\rangle \prec \langle b_1,\ldots,b_n\rangle, \text{ u slučaju da je } m=n, \\ \langle a_1,\ldots,a_m\rangle^\wedge \underbrace{\langle 0,\ldots,0\rangle}_{n-m} \prec \langle b_1,\ldots,b_n\rangle, \text{ u slučaju da je } m<n, \\ \langle a_1,\ldots,a_m\rangle \prec \langle b_1,\ldots,b_n\rangle^\wedge \underbrace{\langle 0,\ldots,0\rangle}_{m-n}, \text{ u slučaju da je } m>n. \end{array}$$

Navedimo najpre, bez dokaza, neke elementarne osobine upravo definisane relacije.

Teorema 2.3.2 *Neka je* **B** *proizvoljna Bulova algebra.*

(1) Relacija $\leq$ na $B^{<\omega}$ je refleksivna, tranzitivna i saglasna sa operacijom dopisivanja nizova.

(2) Za svaki niz $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \in B^{<\omega}$ i svaku permutaciju π skupa $\{1,\ldots,m\}$ je $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(m)}\rangle$.

(3) Za sve $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle, \langle b_1,\ldots,b_n\rangle \in B^{<\omega}$ i svaki $c\in B$, ako je $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle^\wedge\langle c\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle^\wedge\langle c\rangle$, tada je i $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$.

(4) Za sve $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle, \langle b_1,\ldots,b_n\rangle \in B^{<\omega}$ i svaki $c \in B$, ako je $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle^\wedge\langle c\rangle$ i $a_i\cdot c = 0$ za sve $i=1,\ldots,m$, onda je i $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$.

(5) Za sve $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \in B^{<\omega}$, ako je $b_k = \sum_{p\in S^{m,k}}\prod_{i\leq k} a_{p_i}$, $k=1,\ldots,m$, onda je $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_m\rangle \leq \langle a_1,\ldots,a_m\rangle$.

Definicija. Neka je **B** Bulova algebra i $S\subseteq B$, takav da $1\in S$. Funkcija $\mu : S \to [0,1]$ je parcijalna mera na S ako za proizvoljne $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\in S$, iz $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \leq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$, sledi da je $\sum_{i=1}^m \mu(a_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(b_i)$.

Iz definicije neposredno sledi da je restrikcija parcijalne mere na podskup takođe parcijalna mera kao i sledeća dva tvrđenja.

Teorema 2.3.3 *Neka je μ parcijalna mera na podskupu S, domena Bulove algebre* **B**, *pri čemu $1\in S$.*

(1) Ako $a,b\in S$ i $a\leq b$, onda je $\mu(a)\leq\mu(b)$.

(2) Ako $a, b, a+b, a \cdot b \in S$, *onda je* $\mu(a+b) + \mu(a \cdot b) = \mu(a) + \mu(b)$.

(3) Ako $0 \in S$, *onda je* $\mu(0) = 0$.

Dokaz. (1) Uslov $a \leq b$ je u stvari uslov $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$, pa tvrđenje sledi iz definicije.
(2) Prema prethodnom tvrđenju (5), je $\langle a, b \rangle \leq \langle a+b, a \cdot b \rangle \leq \langle a, b \rangle$
(3) Iz (2) za $a = 1$ i $b = 0$.□

Teorema 2.3.4 *Neka je* $\mathbf{B}$ *proizvoljna Bulova algebra, i* $S \subseteq B$ *zatvoren za operacije* $+$ *i* $\cdot$ *takav da* $0, 1 \in S$.

(1) Funkcija $\mu : S \to [0,1]$ *takva da je* $\mu(1) = 1$ *koja zadovoljava uslove (1)–(3) prethodne teoreme je parcijalna mera na* S.

(2) Ako je S *podalgebra od* $\mathbf{B}$, *funkcija* $\mu : S \to [0,1]$ *je parcijalna mera na* S *ako i samo ako je mera na* S.

Definicija. Neka je μ parcijalna mera na podskupu S domena Bulove algebre $\mathbf{B}$ takvom da $1 \in S$. Za svaki $b \in B$,

$$\mu_i(b) = \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu(b_j)}{k},$$

gde je supremum uzet preko svih konačnih nizova $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ elemenata iz B takvih da je

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle \leq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle ^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{k},$$

je unutrašnja mera od b u odnosu na parcijalnu meru μ skupa S.
Slično, za $b \in B$,

$$\mu_e(b) = \inf \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu(b_j)}{k},$$

gde je infimum uzet preko svih konačnih nizova $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ elemenata iz B takvih da je

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle ^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{k} \leq \langle a_1, \ldots, a_m \rangle,$$

je spoljašnja mera od b u odnosu na parcijalnu meru μ skupa S.

Teorema 2.3.5 *Neka je* μ *parcijalna mera na podalgebri* A *Bulove algebre* $\mathbf{B}$. *Za svaki* $b \in B$ *je* $\mu_i(b) = \sup\{\mu(a) : a \in A, a \leq b\}$ *i* $\mu_e(b) = \inf\{\mu(a) : a \in A, b \leq a\}$.

Dokaz. Neka je $g(b) = \sup\{\mu(a) : a \in A, a \leq b\}$. Očigledno je $\mu_i(b) \geq g(b)$. Neka je $\epsilon > 0$. Postoje nizovi $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ i $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ elemenata iz A da je

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \leq \langle b_1, \ldots, b_k \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{m}$$

i

$$m \cdot (\mu_i(b) - \epsilon) < \sum_{i=1}^{k} \mu(a_i) - \sum_{i=1}^{k} \mu(b_i).$$

Na osnovu 2.3.2 možemo pretpostaviti da je $a_i \geq a_{i+1}$, $b_i \geq b_{i+1}$, za $1 \leq i < k$. Neka je $c_i = a_i - b_i$ i $d_i = b_i - a_i$, $1 \leq i \leq k$. Tada je, takođe prema 2.3.2,

$$\langle c_1, \ldots, c_k \rangle \leq \langle d_1, \ldots, d_k \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{m}$$

i

$$\mu(c_i) - \mu(d_i) = \mu(a_i) - \mu(b_i), \text{ za } 1 \leq i \leq k.$$

Kako su elementi d_i, $1 \leq i \leq k$ disjunktni sa $c_1, \ldots, c_k$, imamo

$$\langle c_1, \ldots, c_k \rangle \leq \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{m}.$$

Neka je $e_i = \sum_{r \in S^{k,i}} \prod_{j \leq i} c_{r_i}$, za $i < \max\{k, m\}$. Tada je $e_i \leq b$ za $1 \leq i \leq m$, dok je $e_i = 0$ za $i \geq m$. Dakle,

$$\begin{aligned} m \cdot g(b) &\geq \sum_{i=1}^{k} \mu(e_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(c_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu(c_i) - \sum_{i=1}^{k} \mu(d_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu(a_i) - \sum_{i=1}^{k} \mu(b_i) > m \cdot (\mu_i(b) - \epsilon). \end{aligned}$$

Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljno, biće $g(b) \geq \mu_i(b)$, pa time i $g(b) = \mu_i(b)$.

Dokaz za μ_e je analogan. □

Teorema 2.3.6 *Neka je μ parcijalna mera na podskupu S domena Bulove algebre* **B**, *takvom da $1 \in S$.*

(1) $0 \leq \mu_i(a) \leq \mu_e(a) \leq 1$, *za sve* $a \in B$.

(2) Ako $a \in S$, *tada je* $\mu_i(a) = \mu_e(a)$.

(3) Za sve $a, b \in B$, *takve da je* $a \cdot b = 0$, *važi*

$$\mu_i(a) + \mu_i(b) \leq \mu_i(a + b) \leq \mu_i(a) + \mu_e(b) \leq \mu_e(a + b) \leq \mu_e(a) + \mu_e(b).$$

(4) Ako su $a \in S$ *i* $b \in B$ *takvi da je* $a \cdot b = 0$, *tada je*

$$\mu_i(a + b) = \mu(a) + \mu_i(b)$$

$$\mu_e(a + b) = \mu(a) + \mu_e(b).$$

(5) *Ako je $a, b \in B$, $a \cdot b = 0$ i $a + b \in S$, onda je*

$$\mu(a+b) = \mu_i(a) + \mu_e(b) = \mu_e(a) + \mu_i(b).$$

Specijalno, za sve $a \in B$, $\mu_i(a) + \mu_e(-a) = 1$.

Dokaz. (1) Za svaki $b \in S$, $\langle b \rangle \leq \langle b, a \rangle$, pa je

$$\mu_i(a) \geq \frac{\mu(b) - \mu(b)}{1} = 0.$$

Takođe je $\langle a, 1 \rangle \leq \langle 1, 1 \rangle$, pa je

$$\mu_e(a) \leq \frac{\mu(1) + \mu(1) - \mu(1)}{1} = \mu(1) = 1.$$

Neka su $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \beta = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle, \gamma = \langle c_1, \ldots, c_p \rangle$, i $\delta = \langle d_1, \ldots, d_q \rangle$ proizvoljni nizovi elemenata iz S, takvi da je $\alpha \leq \beta^\wedge \underbrace{\langle a, \ldots, a \rangle}_{k}$, za neki $k \in N$ i $\gamma^\wedge \underbrace{\langle a, \ldots, a \rangle}_{l} \leq \delta$, za neki $l \in N$. Tada sabiranjem l prvih i k drugih nejednakosti, permutacijama i skraćivanjem koordinata jednakih a, prema teoremi 2.3.1, dobijamo

$$\underbrace{\alpha^\wedge \ldots {}^\wedge \alpha}_{l}{}^\wedge \underbrace{\gamma^\wedge \ldots {}^\wedge \gamma}_{k} \leq \underbrace{\beta^\wedge \ldots {}^\wedge \beta}_{l}{}^\wedge \underbrace{\delta^\wedge \ldots {}^\wedge \delta}_{k}$$

pa je

$$l \left[\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i) \right] \leq k \left[\sum_{i=1}^{q} \mu(d_i) - \sum_{i=1}^{p} \mu(c_i) \right].$$

Kako su nizovi izabrani proizvoljno, sledi da je $\mu_i(a) \leq \mu_e(a)$.

(2) Pošto je za sve $a \in B$, $\langle a \rangle \leq \langle a \rangle$, imamo da je za sve $a \in S$, prema definiciji parcijalne mere, $\mu_i(a) = \mu_e(a)$.

(3) Neka su $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \beta = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle, \gamma = \langle c_1, \ldots, c_p \rangle$, i $\delta = \langle d_1, \ldots, d_q \rangle$ proizvoljni nizovi elemenata iz S, takvi da je $\alpha \leq \beta^\wedge \underbrace{\langle a, \ldots, a \rangle}_{k}$, za neki $k \in N$ i $\gamma \leq \delta^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{l}$, za neki $l \in N$. Tada je

$$\underbrace{\gamma^\wedge \ldots {}^\wedge \gamma}_{k}{}^\wedge \underbrace{\alpha^\wedge \ldots {}^\wedge \alpha}_{l} \leq \underbrace{\delta^\wedge \ldots {}^\wedge \delta}_{k}{}^\wedge \underbrace{\beta^\wedge \ldots {}^\wedge \beta}_{l}{}^\wedge \underbrace{\langle a+b, \ldots, a+b \rangle}_{kl}$$

pa imamo da je

$$\mu_i(a+b) \geq \frac{l \sum_{i=1}^{m} \mu(a_i) + k \sum_{i=1}^{p} \mu(c_i) - l \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i) - k \sum_{i=1}^{q} \mu(d_i)}{kl},$$

tj.

$$\mu_i(a+b) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i)}{k} + \frac{\sum_{i=1}^{p} \mu(c_i) - \sum_{i=1}^{q} \mu(d_i)}{l}$$

odakle sledi da je $\mu_i(a+b) \geq \mu_i(a) + \mu_i(b)$.

Pokažimo da je $\mu_i(a+b) \leq \mu_i(a) + \mu_e(b)$. Neka su $\alpha = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\beta = \langle b_1, \dots, b_n \rangle, \gamma = \langle c_1, \dots, c_p \rangle$, i $\delta = \langle d_1, \dots, d_q \rangle$ proizvoljni nizovi elemenata iz S, takvi da je $\alpha \leq \beta^\wedge \underbrace{\langle a+b, \dots, a+b \rangle}_{k}$, za neki $k \in N$ i $\gamma^\wedge \underbrace{\langle b, \dots, b \rangle}_{l} \leq \delta$, za neki $l \in N$. Tada je

$$\underbrace{\alpha^\wedge \dots {}^\wedge \alpha}_{l}{}^\wedge \underbrace{\gamma^\wedge \dots {}^\wedge \gamma}_{k} \leq \underbrace{\delta^\wedge \dots {}^\wedge \delta}_{k}{}^\wedge \underbrace{\beta^\wedge \dots {}^\wedge \beta}_{l}{}^\wedge \underbrace{\langle a, \dots, a \rangle}_{kl}$$

pa je

$$\mu_i(a) \geq \frac{\sum_{i=1}^m \mu(a_i) - \sum_{i=1}^n \mu(b_i)}{k} - \frac{\sum_{i=1}^q \mu(d_i) - \sum_{i=1}^p \mu(c_i)}{l}.$$

Uzimajući supremum preko $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ i k, a zatim supremum preko $\langle c_1, \dots, c_p \rangle$, $\langle d_1, \dots, d_q \rangle$ i l dobijamo $\mu_i(a) \geq \mu_i(a+b) - \mu_e(b)$, odakle sledi tražena nejednakost. Ostale nejednakosti se slično dokazuju.

(4) Sledi iz (2) i (3).

(5) Sledi iz (3). □

Sada smo u mogućnosti da opišemo uslove postojanja ekstenzije parcijalne mere do mere Bulove algebre.

Teorema 2.3.7 *Neka je μ parcijalna mera na podskupu S domena Bulove algebre* $\mathbf{B}$, *takvom da $1 \in S$, $b \in B$ proizvoljan element i μ^* $[0,1]$-vrednosna funkcija definisana na $S \cup \{b\}$ koja se poklapa sa μ na S. Funkcija μ^* je parcijalna mera na $S \cup \{b\}$ ako i samo ako je $\mu_i(b) \leq \mu^*(b) \leq \mu_e(b)$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $\mu_i(b) \leq \mu^*(b) \leq \mu_e(b)$, i neka su $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_n$ elementi iz S takvi da je

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \dots, b \rangle}_{p} \leq \langle b_1, \dots, b_n \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \dots, b \rangle}_{q}$$

za neke $p, q \in N$. Treba da pokažemo da je

$$p \cdot \mu^*(b) + \sum_{i=1}^m \mu^*(a_i) \leq q \cdot \mu^*(b) + \sum_{i=1}^n \mu^*(b_i).$$

Za $p = q$ nejednakost neposredno sledi iz 2.3.2(3). Pretpostavimo da je $q - p = r > 0$. Tada prema 2.3.2(3),

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \leq \langle b_1, \dots, b_n \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \dots, b \rangle}_{r},$$

pa je

$$r \cdot \mu^*(b) \geq r \cdot \mu_i(b) \geq \sum_{i=1}^m \mu^*(a_i) - \sum_{i=1}^n \mu^*(b_i),$$

čime je tvrđenje dokazano. Ako je $q < p$, koristimo činjenicu $\mu^*(b) \leq \mu_e(b)$.

($\Rightarrow$) Neka je μ^* parcijalna mera na $S \cup \{b\}$ i $\epsilon > 0$. Tada postoje elementi $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ iz S tako da je

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle^\wedge \underbrace{\langle b, \ldots, b \rangle}_{p} \leq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$$

i

$$p \cdot (\mu_e(b) + \epsilon) < \sum_{i=1}^{n} \mu^*(b_i) - \sum_{i=1}^{m} \mu^*(a_i).$$

Međutim,

$$p \cdot \mu^*(b) + \sum_{i=1}^{m} \mu^*(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(b_i).$$

Dakle, $\mu^*(b) < \mu_e(b) + \epsilon$ za proizvoljni $\epsilon > 0$, te je $\mu^*(b) \leq \mu_e(b)$. Slično se pokazuje $\mu^*(b) \geq \mu_i(b)$.□

Teorema 2.3.8 *Ako je μ parcijalna mera na podskupu S domena Bulove algebre* $\mathbf{B}$, *takvom da $1 \in S$, tada postoji mera na* $\mathbf{B}$ *koja je ekstenzija funkcije μ.*

Dokaz. Dokaz izvodimo pomoću principa transfinitne indukcije. Neka je $B \setminus S = \{a_\xi : \xi < \kappa\}$, gde je κ kardinalnost skupa $B \setminus S$. Za svaki ordinal $\xi < \kappa$, neka je $S_{\xi+1} = S_\xi \cup \{a_\xi\}$, pri čemu je $S_0 = S$. Ako je ξ granični ordinal, neka je $S_\xi = \cup_{\zeta<\xi} S_\zeta$. Ako je μ_ξ parcijalna mera na S_ξ, tada je funkcija $\mu_{\xi+1} : S_{\xi+1} \to [0,1]$, takva da je $\mu_{\xi+1}(a) = \mu_\xi(a)$ za $a \in S_\xi$ i $(\mu_\xi)_i(a_\xi) \leq \mu_{\xi+1}(a_\xi) \leq (\mu_\xi)_e(a_\xi)$, parcijalna mera na $S_{\xi+1}$ koja proširuje μ_ξ. Ako je ξ granični ordinal, parcijalnu meru μ_ξ na S_ξ, definišemo na sledeći način: za sve $a \in S_\xi = \cup_{\zeta<\xi} S_\zeta$, je $a \in S_\zeta$ za neki $\zeta < \xi$, pa možemo staviti da je $\mu_\xi(a) = \mu_\zeta(a)$. Očigledno, je za $\zeta < \xi < \kappa$, $\mu_\xi \lceil S_\zeta = \mu_\zeta$. Pošto je $B = \cup_{\xi<\kappa} S_\xi$, parcijalnu meru $\overline{\mu} : B \to [0,1]$ definišemo na sledeći način: za svaki $a \in B$, biće $a \in S_\xi$ za neki $\xi < \kappa$, pa stavimo $\overline{\mu}(a) = \mu_\xi(a)$. Tada je $\overline{\mu}$ tražena ekstenzija parcijalne mere μ na S. Očigledno je $\overline{\mu}$ parcijalna mera na B.□

Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ podalgebre Bulove algebre $\mathbf{B}$. Ako su μ_1 i μ_2 mere na $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$, tim redom, postavlja se pitanje, pod kakvim uslovima se može definisati mera μ na $\mathbf{B}$ koja je ekstenzija obe mere μ_1 i μ_2. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 2.3.9 *Neka su* $\mathbf{B}_1$ *i* $\mathbf{B}_2$ *podalgebre Bulove algebre* $\mathbf{B}$, *i μ_1 i μ_2 mere na* $\mathbf{B}_1$ *i* $\mathbf{B}_2$, *tim redom. Potrebni i dovoljni uslovi da postoji mera μ na* $\mathbf{B}$ *koja je zajednička ekstenzija obe mere μ_1 i μ_2 su:*

(i) $\mu_1(a) \leq \mu_2(b)$, *za sve $a \in B_1$, $b \in B_2$ takve da je $a \leq b$,*

(ii) $\mu_1(c) \geq \mu_2(d)$, *za sve $c \in B_1$, $d \in B_2$ takve da je $c \geq d$.*

Dokaz. Uslovi (i) i (ii) su očigledno potrebni. Dokažimo da su i dovoljni. Iz datih uslova neposredno sledi da za sve $a \in B_1 \cap B_2$ je $\mu_1(a) = \mu_2(a)$. Definišimo funkciju $\overline{\mu} : B_1 \cup B_2 \to [0,1]$ na sledeći način:

$$\overline{\mu}(a) = \begin{cases} \mu_1(a), & \text{ako } a \in B_1 \\ \mu_2(a), & \text{ako } a \in B_2 \end{cases}.$$

Pokažimo da je $\overline{\mu}$ parcijalna mera na $B_1 \cup B_2$. Neka su $a_1, \ldots, a_{m+n}$ i $b_1, \ldots, b_{p+q}$ proizvoljni elementi iz $B_1 \cup B_2$, takvi da je

$$\langle b_1, \ldots, b_{p+q} \rangle \leq \langle a_1, \ldots, a_{m+n} \rangle.$$

Bez gubljenja opštosti možemo predpostaviti da $a_1, \ldots, a_m \in B_1$, $a_{m+1}, \ldots, a_{m+n} \in B_2$, $b_1, \ldots, b_p \in B_1$ i $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q} \in B_2$. Tada iz gornje nejadnakosti sledi

$$\langle b_1, \ldots, b_p \rangle^\wedge \langle b_{p+1}, \ldots, b_{p+q} \rangle \leq \langle a_1, \ldots, a_m \rangle^\wedge \langle a_{m+1}, \ldots, a_{m+n} \rangle.$$

Pošto $0 \in B_1 \cap B_2$, možemo takođe predpostaviti da je i $m = p$ i $n = q$. Prema teoremi 2.3.2(2) možemo uzeti da je $a_1 \geq \ldots \geq a_m$, $a_{m+1} \geq \ldots \geq a_{m+n}$, $b_1 \geq \ldots \geq b_p$ i $b_{p+1} \geq \ldots \geq b_{p+q}$. Neka je $c_i = a_i \cdot (-b_i)$ i $d_i = b_i \cdot (-a_i)$ za $i = 1, \ldots, m$, $e_i = a_{m+i} \cdot (-b_{m+i})$i $f_i = b_{m+i} \cdot (-a_{m+i})$ za $i = 1, \ldots, n$, pa je, prema gornjoj nejednakosti

$$\langle d_1, \ldots, d_m \rangle^\wedge \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \leq \langle c_1, \ldots, c_m \rangle^\wedge \langle e_1, \ldots, e_n \rangle.$$

Primetimo da je $c_i \cdot d_j = 0$, za sve $i, j = 1, \ldots, m$ kao i $e_i \cdot f_j = 0$, za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Prema teoremi 2.3.2(2) možemo predpostaviti da je $c_1 \geq \ldots \geq c_m$, $d_1 \geq \ldots \geq d_m$, $e_1 \geq \ldots \geq e_n$ i $f_1 \geq \ldots \geq f_n$. Gornja nejednakost daje:

$$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \leq \langle c_1, \ldots, c_m \rangle \text{ i } \langle d_1, \ldots, d_m \rangle \leq \langle e_1, \ldots, e_n \rangle.$$

Pošto $c_1, \ldots, c_m$, $d_1, \ldots, d_m \in B_1$ i $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n \in B_2$ i kako je $f_i \leq c_i$ i $d_i \leq e_i$, za sve i, prema datom uslovu je

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_1(c_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_2(f_i) \text{ i } \sum_{i=1}^{n} \mu_2(e_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \mu_1(d_i).$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(c_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(e_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(d_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(f_i)$$

odakle sledi da je $\sum_{i=1}^{m+n} \overline{\mu}(a_i) \geq \sum_{i=1}^{p+q} \overline{\mu}(b_i)$. Dakle, $\overline{\mu}$ je parcijalna mera na $B_1 \cup B_2$. Prema prethodnoj teoremi postoji mera μ na $\mathbf{B}$ koja je ekstenzija parcijalne mere $\overline{\mu}$. Ovim je dokaz završen.□

Definišimo, najzad pojam strogo pozitivne mere na Bulovoj algebri.

Definicija. Mera μ Bulove algebre $\mathbf{B}$ je strogo pozitivna ako je za svaki $b \in B$, $\mu(b) = 0$ ako i samo ako je $b = 0$.

Teorema 2.3.10 *Slobodna Bulova algebra dopušta strogo pozitivnu meru.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{B}$ slobodna Bulova algebra nad skupom slobodnih generatora $X \subseteq B$. Neka je $Y \subseteq X$ i $x \in X \setminus Y$. Označimo sa $\mathbf{A}$ podalgebru generisanu sa Y, a sa $\mathbf{C}$ podalgebru generisanu sa $A \cup \{x\}$. Svako $y \in C$ je oblika $y = (a \cdot x) + (b \cdot -x)$, za neke $a, b \in A$.

Ako je μ strogo pozitivna mera na $\mathbf{A}$ i $0 < r < 1$, neka je μ^* realna funkcija na C takva da za svako $y \in C$, $\mu^*(y) = r \cdot \mu(a) + (1 - r) \cdot \mu(b)$, gde je $y = (a \cdot x) + (b \cdot -x)$, za neke $a, b \in A$.

Neposredno se proverava da je μ^* strogo pozitivna mera na $\mathbf{C}$ koja proširuje meru μ. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih strogo pozitivnih mera na podalgebrama Bulove algebre $\mathbf{B}$ koje su generisane podskupovima skupa X. U odnosu na inkluziju, $\mathcal{P}$ je parcijalno uređenje. Za svaki lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$, $\bigcup \mathcal{L}$ je gornje ograničenje za $\mathcal{L}$. Prema Zornovoj lemi, lanac $\mathcal{L}$ sadrži maksimalan element μ, koji je strogo pozitivna mera na $\mathbf{B}$. Neka je A domen mere μ. Ako je $\mathbf{A}$ prava podalgebra algebre $\mathbf{B}$, prema konstrukciji, za neko $x \in B \setminus A$ postoji proširenje mere μ na algebru generisanu skupom $A \cup \{x\}$, tj. μ nije maksimalan element u parcijalnom uređenju $(\mathcal{P}, \subseteq)$.□

U opštem slučaju strogo pozitivnu meru ne dopušta svaka Bulova algebra.

3

Iskazna verovatnosna logika

Logike LP i $LP(n)$, za $n \in N$ predstavljaju konzervativna raširenja klasičnog iskaznog računa. Ove logike uveo je profesor dr Miodrag Rašković u [13]. Polazeći od rezultata iz pomenutog rada [13] dr Zoran Ognjanović, u svojoj doktorskoj disertaciji [10], detaljno je proučio i opisao ove logike dajući za logiku LP novu beskonačnu aksiomatizaciju koja je korišćena u ovom radu. Treba naglasiti da se beskonačnost odnosi na meta jezik, tj. dokazi mogu biti beskonačni dok su formule konačne. U pomenutim radovima pokazana je saglasnost i potpunost u odnosu na klase modela u kojima su verovatnoće definisane nad mogućim svetovima. Ovi modeli podsećaju na modalne modele, s tim što je umesto modalne relacije dostižnosti svakom svetu pridružen jedan prostor mere. Taj prostor sastoji se od skupa svetova za koje se smatra da su u izvesnom smislu dostižni iz posmatranog sveta i verovatnoće definisane nad podskupovima tih dostižnih svetova. Ovde će biti pokazana saglasnost i potpunost u odnosu na klasu takozvanih Bulovih modela koji se sastoje od Bulove algebre i konačno-aditivne mere definisanje na njoj.

3.1 Logika LP

Neka je Q skup racionalnih brojeva, a $[0, 1]$ realni interval. Skup koji sadrži:

- beskonačan skup iskaznih slova I,
- logičke veznike: negaciju $\neg$, konjunkciju $\wedge$,
- listu verovatnosnih operatora: $P_{\geq s}$ za svaki $s \in [0, 1] \cap Q$,
- interpunkcijske simbole: desnu ")" i levu "(" zagradu,

naziva se jezik logike LP i označava sa $\mathcal{L}_p(I)$

Skup $For^C_{LP}(I)$ klasičnih formula, ovog jezika, je najmanji skup konačnih nizova simbola iz $\mathcal{L}_p(I)$ koji sadrži iskazna slova i zatvoren je za sledeća pravila: ako su φ i ψ klasične formule, to su i $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$. Skup $For^P_{LP}(I)$ verovatnosnih formula je najmanji skup konačnih nizova simbola iz $\mathcal{L}_p(I)$ koji zadovoljava sledeće uslove:

- ako $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ i $s \in [0, 1] \cap Q$, onda je $P_{\geq s}\varphi$ verovatnosna formula;
- ako su Φ i Ψ verovatnosne formule to su i $\neg\Phi$, $(\Phi \wedge \Psi)$.

Skup $For_{LP}(I)$ formula ovog jezika je $For^C_{LP}(I) \cup For^P_{LP}(I)$. Radi lakšeg pisanja formula usvajamo standardnu konvenciju o izostavljanju nekih od interpunkcijskih simbola. Takođe, radi preglednijeg zapisivanja formula, u ovoj logici, uvode se i sledeći verovatnosni operatori:

- $P_{<s}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_{\geq s}\varphi$,
- $P_{\leq s}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} P_{\geq 1-s}\neg\varphi$,
- $P_{>s}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_{\leq s}\varphi$,
- $P_{=s}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} P_{\geq s}\varphi \wedge \neg P_{>s}\varphi$.

Klasični iskazni veznici $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ uvode se na standardan način. Takođe, sa $\perp$ označavaćemo formulu $\Phi \wedge \neg\Phi$, za proizvoljno $\Phi \in For_{LP}(I)$.

Aksiomatski sistem, za logiku LP, sadrži sledeće shema aksiome:

(1) sve instance klasičnih iskaznih tautologija,

(2) $P_{\geq 0}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{LP}(I)$,

(3) $P_{\leq r}\varphi \Rightarrow P_{<s}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ i $s, r \in [0,1] \cap Q$ takve da je $s > r$,

(4) $P_{<s}\varphi \Rightarrow P_{\leq s}\varphi$ za sve $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ i $s \in [0,1] \cap Q$,

(5) $(P_{\geq r}\varphi \wedge P_{\geq s}\psi \wedge P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \Rightarrow P_{\geq \min\{1, r+s\}}(\varphi \vee \psi)$ za sve φ, $\psi \in For^C_{LP}(I)$, $r, s \in [0,1] \cap Q$,

(6) $(P_{\leq r}\varphi \wedge P_{<s}\psi) \Rightarrow P_{<r+s}(\varphi \vee \psi)$ za sve $\varphi, \psi \in For^C_{LP}(I)$, $s, r \in [0,1] \cap Q$ takve da je $r + s < 1$.

i pravila izvođenja:

(R1) iz Φ i $\Phi \Rightarrow \Psi$, sledi Ψ, za sve $\Phi, \Psi \in For^C_{LP}(I)$ ili $\Phi, \Psi \in For^P_{LP}(I)$,

(R2) iz φ, sledi $P_{\geq 1}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{LP}(I)$,

(R3) iz $\Phi \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\varphi$, za svaki prirodan broj $k \geq \frac{1}{s}$, sledi $\Phi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, za sve $\Phi \in For^P_{LP}(I)$, $\varphi \in For^C_{LP}(I)$

Definicija. Formula Φ je teorema aksiomatskog sistema za logiku LP, u oznaci $\vdash_{LP} \Phi$, ako postoji najviše prebrojiv niz formula $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$, takav da je svaka formula Φ_i, aksioma ili je pomoću nekog od pravila izvođenja izvedena iz prethodnih formula tog niza. Niz formula $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$ je dokaz formule Φ.

Definicija. Formula je sintaksna posledica skupa formula $T \subseteq For_{LP}(I)$ ili teorema teorije T, u oznaci $T \vdash_{LP} \Phi$, ako postoji najviše prebrojiv niz formula $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$, takav da je svaka formula Φ_i, aksioma ili pripada skupu T ili je pomoću nekog od pravila izvođenja izvedena iz prethodnih formula niza.

Indeks LP u oznakama $\vdash_{LP} \ldots$ i $T \vdash_{LP} \ldots$ nećemo navoditi kad god nema opasnosti od zabune. Oznaku $\ldots \nvdash \ldots$ koristimo sa značenjem: nije $\ldots \vdash \ldots$.

Definicija. Teorija $T \subseteq For_{LP}(I)$ je neprotivrečna ako postoji formula $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ takva da $T \nvdash_{LP} \varphi$ i postoji formula $\Phi \in For^P_{LP}(I)$ takva da $T \nvdash_{LP} \Phi$. Teorija T je maksimalno neprotivrečna ako i samo ako je T neprotivrečna teorija i važi:

– za sve $\varphi \in For^C_{LP}(I)$, ako je $T \vdash_{LP} \varphi$, onda $\varphi \in T$ i $P_{\geq 1}\varphi \in T$,

– za sve $\Phi \in For^P_{LP}(I)$, ili $\Phi \in T$ ili $\neg\Phi \in T$.

Teorema 3.1.1 *Za sve $\varphi, \psi \in For^C_{LP}(I)$ važi:*

(1) $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\psi)$.

(2) $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (P_{\geq 1}\varphi \Rightarrow P_{\geq 1}\psi)$.

(3) $\vdash P_{\geq r}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, $r > s$.

(4) $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (P_{\geq 1}\varphi \wedge P_{\geq 1}\psi)$.

(5) $\vdash (P_{\geq 1}\varphi \wedge P_{\geq 1}\psi) \Rightarrow P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi)$.

(6) $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (P_{\geq 1}\varphi \wedge P_{\geq 1}\psi)$.

Dokaz. (1) Ako je $s = 0$, tvrđenje očigledno važi. Neka je s racionalan broj iz $(0, 1]$. Primetimo najpre da je, prema pravilu izvođenja (R2),

$$\vdash P_{\geq 1}(\neg\varphi \wedge \neg\bot) \tag{1}$$

jer je $\vdash \neg\varphi \wedge \neg\bot$. Slično, iz $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\varphi$ imamo

$$\vdash P_{\geq 1}((\neg\varphi \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\varphi). \tag{2}$$

Prema aksiomi 5, imamo

$$\vdash (P_{\geq s}\varphi \wedge P_{\geq 0}\neg\bot \wedge P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \neg\bot)) \Rightarrow P_{\geq s}(\varphi \vee \bot).$$

Pošto je $\vdash P_{\geq 0}\neg\bot$, prema aksiomi 2, iz (1) sledi da je

$$\vdash P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}(\varphi \vee \bot). \tag{3}$$

Formule $P_{\geq s}(\varphi \vee \bot)$ i $\neg P_{\geq s}\neg\neg\varphi$ možemo zapisati i na sledeći način $P_{\leq 1-s}(\neg\varphi \wedge \neg\bot)$ i $P_{<s}\neg\neg\varphi$, redom. Prema aksiomi 6, imamo

$$\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\varphi \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\varphi) \Rightarrow P_{<1}((\neg\varphi \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\varphi).$$

Iz (2) dobijamo $\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\varphi \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\varphi) \Rightarrow (P_{<1}((\neg\varphi \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\varphi) \wedge \neg P_{<1}((\neg\varphi \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\varphi)$. Dakle, $\vdash P_{\leq 1-s}(\neg\varphi \wedge \neg\bot) \Rightarrow \neg P_{<s}\neg\neg\varphi$, tj.

$$\vdash P_{\geq s}(\varphi \vee \bot) \Rightarrow P_{\geq s}\neg\neg\varphi. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) dobijamo

$$\vdash P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\neg\neg\varphi. \tag{5}$$

Negacija formule $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\psi)$ ekvivalentna je sa $P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \psi) \wedge P_{\geq s}\varphi \wedge P_{<s}\psi$. Prema (5) poslednja formula implicira $P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \psi) \wedge P_{\geq s}\neg\neg\varphi \wedge$

$P_{<s}\psi$ ili, zapisano u drugom obliku, $P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \psi) \wedge P_{\leq 1-s}\neg\varphi \wedge P_{<s}\psi$. Prema aksiomi 6 je

$$\vdash P_{\leq 1-s}\neg\varphi \wedge P_{<s}\psi \Rightarrow P_{<1}(\neg\varphi \vee \psi),$$

i kako je $P_{<1}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_{\geq 1}\varphi$, imamo da je:

$$\vdash \neg(P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\psi)) \Rightarrow P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \psi),$$

što je kontradikcija. Dakle $\vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\psi)$.

(2) Posledica tvrđenja (1).

(3) Prema aksiomama 3. i 4. je $\vdash P_{\geq r}\varphi \Rightarrow P_{>s}\varphi$, za $r > s$ i $\vdash P_{>s}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, sledi da je $\vdash P_{\geq r}\varphi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, za $r > s$.

(4) Dokaz je:
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$
$\vdash P_{\geq 1}((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi)$
$\vdash P_{\geq 1}((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi)$
$\vdash P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow P_{\geq 1}\varphi$
$\vdash P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow P_{\geq 1}\psi$
$\vdash P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (P_{\geq 1}\varphi \wedge P_{\geq 1}\psi)$.

(5) Dokaz je:
$\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
$\vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$
$\vdash P_{\geq 1}\varphi \Rightarrow P_{\geq 1}(\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
$\vdash P_{\geq 1}\varphi \Rightarrow (P_{\geq 1}\psi \Rightarrow P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi))$
$\vdash (P_{\geq 1}\varphi \wedge P_{\geq 1}\psi) \Rightarrow P_{\geq 1}(\varphi \wedge \psi)$.

(6) Posledica tvrđenja (4) i (5). □

Teorema 3.1.2 (Teorema dedukcije) *Ako je T proizvoljan skup formula a Φ i Ψ obe bilo klasične, bilo verovatnosne formule takve da je $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, onda je $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$.*

Dokaz. Ako su Φ i Ψ klasične formule, dokaz je identičan kao dokaz teoreme dedukcije u klasičnom iskaznom računu.

Dokažimo da za sve verovatnosne formule Φ i Ψ iz $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ sledi $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$. Dokaz izvodimo transfinitnom indukcijom po dužini dokaza za Ψ iz $T \cup \{\Phi\}$. Ako je dužina dokaza 1, tada je formula Ψ aksioma ili $\Psi \in T$ ili je $\Psi = \Phi$. Ako je Ψ aksioma ili ako $\Psi \in T$, s obzirom da je $\Psi \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi)$ instanca klasične tautologije, koristeći pravilo (R1) dobijamo $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$. Kada je $\Psi = \Phi$, imamo da je $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$, jer je $\vdash \Phi \Rightarrow \Phi$. Pretpostavimo, dalje, da tvrđenje važi za sve formule, dokazive iz $T \cup \{\Phi\}$, čija je dužina dokaza manja od $k > 1$. Neka je k dužina dokaza za Ψ iz $T \cup \{\Phi\}$. Formula Ψ ponovo može biti aksioma ili pripadati skupu T ili je pak $\Psi = \Phi$ pri čemu je iz istih razloga kao i malopre $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$. Formula Ψ, u ovom slučaju, može biti dobijena i primenom nekog od pravila izvođenja na prethodne formule u dokazu. Pretpostavimo da je Ψ dobijeno iz $T \cup \{\Phi\}$ primenom pravila (R1) na formule Θ i $\Theta \Rightarrow \Psi$. Dokazi za Θ i $\Theta \Rightarrow \Psi$, iz $T \cup \{\Phi\}$, su kraći od k, pa na osnovu indukcijske pretpostavke je $T \vdash \Phi \Rightarrow \Theta$ i $T \vdash \Phi \Rightarrow (\Theta \Rightarrow \Psi)$. Dvostrukom primenom pravila (R1) na aksiomu $(\Phi \Rightarrow (\Theta \Rightarrow \Psi)) \Rightarrow ((\Phi \Rightarrow \Theta) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi))$ dobijamo da je $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$. Neka je $\Psi = P_{\geq 1}\varphi$ dobijeno iz $T \cup \{\Phi\}$ primenom pravila (R2) na klasičnu formulu φ. Pošto je φ klasična a Φ verovatnosna formula imamo da je $T \vdash \varphi$. Primenom pravila (R2) dobijamo da je $T \vdash P_{\geq 1}\varphi$ odnosno $T \vdash \Psi$. Primenom pravila (R1) na aksiomu $\Psi \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi)$ dobijamo da je $T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$. Konačno, neka je $\Psi = \Theta \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, za neke $\Theta \in For^P(I)$, $\varphi \in For^C(I)$ i $s \in [0,1] \cap Q$, dobijeno iz $T \cup \{\Phi\}$ primenom pravila (R3). Tada je

$T \cup \{\Phi\} \vdash \Theta \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\varphi$, za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$,

$T \vdash \Phi \Rightarrow (\Theta \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\varphi)$ za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$, prema indukcijskoj hipotezi,

$T \vdash (\Phi \wedge \Theta) \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\varphi$, za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$,

$T \vdash (\Phi \wedge \Theta) \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, primenom pravila (R3),

$T \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$.□

Teorema 3.1.3 *Svaka neprotivrečna teorija T, logike LP, može se proširiti do maksimalno neprotivrečne teorije.*

Dokaz. Neka je T neprotivrečna teorija, T^c skup svih klasičnih posledica teorije T i $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ jedno nabrajanje svih verovatnosnih formula. Definišimo niz teorija $T_0, T_1, T_2, \ldots$ na sledeći način:

1. Neka je $T_0 = T \cup T^c \cup \{P_{\geq 1}\varphi : \varphi \in T^c\}$.
2. Za svaki $i \geq 0$, ako je $T_i \cup \{\Phi_i\}$ neprotivrečan skup formula, tada je $T_{i+1} = T_i \cup \{\Phi_i\}$, inače,
3. ako je $T_i \cup \{\Phi_i\}$ protivrečan skup formula, a Φ_i formula oblika $\Psi \Rightarrow P_{\geq s}\psi$, tada za neki prirodan broj $n > \frac{1}{s}$ stavljamo da je $T_{i+1} = T_i \cup \{\Psi \Rightarrow \neg P_{\geq s-\frac{1}{n}}\psi\}$, inače,
4. $T_{i+1} = T_i$.

Skupovi formula dobijeni u koracima 1,2 i 4 su očigledno neprotivrečni. Korakom 3 takođe se dobija neprotivrečan skup formula. Ako pretpostavimo suprotno, da je $T_i \cup \{\Phi_i\}$ protivrečan skup formula i da za svaki prirodan broj $n > \frac{1}{s}$ dobijamo protivrečan skup $T_i \cup \{\Psi \Rightarrow \neg P_{\geq s-\frac{1}{n}}\psi\}$, tada imamo:

$T_i, \Phi \Rightarrow \neg P_{s-\frac{1}{n}}\psi \vdash \bot$, za svaki prirodan broj $n > \frac{1}{s}$,

$T_i \vdash \neg(\Phi \Rightarrow \neg P_{s-\frac{1}{n}}\psi)$, za svaki prirodan broj $n > \frac{1}{s}$, prema teoremi dedukcije,

$T_i \vdash \Phi \Rightarrow P_{s-\frac{1}{n}}\psi$, za svaki prirodan broj $n > \frac{1}{s}$, prema klasičnoj tautologiji $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$,

$T_i \vdash \Psi \Rightarrow P_{\geq s}\psi$, prema pravilu izvođenja (R3),

odakle sledi da je T_i protivrečan skup formula. Kontradikcija. Dakle svaki skup T_i je neprotivrečan.

Neka je $T^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. Dokažimo da je T^* deduktivno zatvoren skup formula koji je neprotivrečan, tj. ne sadrži sve formule. Ako je φ klasična formula, po definiciji skupa T_0, formule φ i $\neg\varphi$ ne mogu istovremeno pripadati skupu T_0. Slično za svaku verovatnosnu formulu Φ skup T^* ne sadrži obe formule $\Phi = \Phi_i$ i $\neg\Phi = \Phi_j$, jer bi tada $T_{\max\{i,j\}+1}$ bio protivrečan skup. Dalje, ako je φ klasična formula takva da je

$T^* \vdash \varphi$, tada, prema definiciji skupa T_0, $\varphi \in T^*$ i $P_{\geq 1}\varphi \in T^*$. Za svaku verovatnosnu formulu Φ takvu da je $T^* \vdash \Phi$ možemo dokazati da $\Phi \in T^*$. Neka je $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Phi$ dokaz za Φ iz T^*. Dovoljno je dokazati da za svaki $i \in N$, $\Psi_i \in T^*$. Lako se vidi da svaka formula čiji je dokaz iz T^* konačan mora pripadati skupu T^*. Pretostavimo da je formula Ψ_i, oblika $\Psi \Rightarrow P_{\geq s}\psi$, dobijena primenom pravila (R3) na odgovarajuće formule skupa T^*. Prema indukcijskoj hipotezi za svaki $k > \frac{1}{s}$, $\Psi \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\psi \in T^*$, pa za svaki $k > \frac{1}{s}$ postoji T_{i_k} da $\Psi \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\psi \in T_{i_k}$. Ako $\Psi_i \notin T^*$, prema koraku 3 konstrukcije, skup T_{i+1}, pa time i skup T^*, sadrži formulu $\Psi \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{n}}\psi$, za neki $n > \frac{1}{s}$, što je nemoguće jer je skup $T_{\max\{i+1,i_n\}+1}$ neprotivrečan.

Najzad, dokažimo da za svaku verovatnosnu formulu Φ, ili Φ ili $\neg\Phi$ pripada T^*. Neka je $\Phi = \Phi_i$ i $\neg\Phi = \Phi_j$. Tada je

$$T_{\max\{i,j\}}, \Phi \vdash \bot,$$

$$T_{\max\{i,j\}}, \neg\Phi \vdash \bot,$$

$$T_{\max\{i,j\}} \vdash \Phi \wedge \neg\Phi,$$

pa je $T_{\max\{i,j\}}$ protivrečna teorija. Kontradikcija.□

Definicija. Bulov model za LP logiku je svaka struktura $(\mathbf{B}, f, \mu)$, gde je $\mathbf{B}$ Bulova algebra, f $\mathbf{B}$–interpretacija skupa $For^C_{LP}(I)$ klasičnih formula a μ mera na $\mathbf{B}$.

Definicija. Neka je $(\mathbf{B}, f, \mu)$ prizvoljan Bulov model za logiku LP. Formula $\Phi \in For_{LP}(I)$ važi u modelu $(\mathbf{B}, f, \mu)$, u oznaci $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$, ako važi:

- ako $\Phi \in For^C_{LP}(I)$, onda $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$ ako i samo ako $f(\Phi) = 1$,
- ako je $\Phi = P_{\geq s}\varphi$, $\varphi \in For^C_{LP}(I)$, $s \in [0,1] \cap Q$, onda $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$ ako i samo ako $\mu(f(\varphi)) \geq s$,
- ako je $\Phi = \Psi \wedge \Theta$, $\Psi, \Theta \in For^P_{LP}(I)$, onda $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$ ako i samo ako $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Psi$ i $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Theta$,
- ako je $\Phi = \neg\Psi$, $\Psi \in For^P_{LP}(I)$, onda $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$ ako i samo ako nije $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Psi$.

Definicija. Formula Φ je zadovoljiva ako i samo ako postoji Bulov model $(\mathbf{B}, f, \mu)$, takav da $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$. Formula Φ je valjana, u oznaci $\models \Phi$, ako i samo ako je zadovoljiva u svakom Bulovom modelu. $(\mathbf{B}, f, \mu)$ je model teorije T ako i samo ako za svaku formulu $\Phi \in T$, $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi$. Oznaku $\ldots \not\models \ldots$ koristimo sa značenjem: nije $\ldots \models \ldots$.

Teorema 3.1.4 (Teorema saglasnosti) *Svaka teorija logike LP koja ima model je neprotivrečna.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da su aksiome, za LP, valjane u odnosu na klasu Bulovih modela i da pravila izvođenja čuvaju valjanost.

Lako se pokazuje da su sve aksiome valjane.

Neka su Φ i Ψ obe klasične ili obe verovatnosne formule, takve da su Φ i $\Phi \Rightarrow \Psi$ valjane. Ako pretpostavimo da $\not\models \Psi$, postojaće Bulov model $(\mathbf{B}, f, \mu)$, takav da $(\mathbf{B}, f, \mu) \not\models \Psi$. Po pretpostavci je $(\mathbf{B}, f, \mu) \models \Phi \Rightarrow \Psi$, pa je $(\mathbf{B}, f, \mu) \not\models \Phi$, što protivreči valjanosti formule Φ. Ako je $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ valjana formula, onda je za svaki Bulov model $(\mathbf{B}, f, \mu)$, $f(\varphi) = 1$ pa i $\mu(f(\varphi)) = \mu(1) = 1$, odakle sledi da je $(\mathbf{B}, f, \mu) \models P_{\geq 1}\varphi$.

Konačno, pravilo izvođenja (R3) čuva valjanost jer je uređenje realnih brojeva arhimedovsko.□

Teorema 3.1.5 (Teorema potpunosti) *Svaka neprotivrečna teorija logike LP ima Bulov model.*

Dokaz. Neka je T neprotivrečna teorija. Prema teoremi 3.1.3. postoji maksimalno neprotivrečno proširenje T^* teorije T. Neka je T^c skup svih klasičnih posledica teorije T, a $\mathbf{B}_{T^c}$ Lindenbaumova algebra teorije T^c i $f : For^C_{LP}(I) \to B_{T^c}$ kanonsko preslikavanje definisano sa $f(\varphi) = [\varphi]_{T^c}$, $\varphi \in For^C_{LP}(I)$. Neka je $\mu : B_{T^c} \to [0,1]$ definisano sa:

$$\mu([\varphi]_{T^c}) = \sup\{r \in [0,1] \cap Q : P_{\geq r}\varphi \in T^*\},\ \varphi \in For^C_{LP}(I).$$

Dokazaćemo da je μ mera na $\mathbf{B}_{T^c}$.

Prvo, dokažimo da je μ dobro definisano. Dovoljno je dokazati da za sve $\varphi, \psi \in For^C_{LP}(I)$, ako je $[\varphi]_{T^c} \leq [\psi]_{T^c}$, onda je i $\mu([\varphi]_{T^c}) \leq \mu([\psi]_{T^c})$. Zaista, ako je $[\varphi]_{T^c} \leq [\psi]_{T^c}$, biće $T^c \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ pa i $T \vdash P_{\geq 1}(\varphi \Rightarrow \psi)$. Dakle, ako $P_{\geq s}\varphi \in T^*$, onda $P_{\geq s}\psi \in T^*$, pa je $\mu([\varphi]_{T^c}) \leq \mu([\psi]_{T^c})$.

Lako se vidi da je $\mu(1) = 1$.

Najzad, pokažimo da je $\mu([\varphi]_{T^c}) + \mu([\psi]_{T^c}) = \mu([\varphi]_{T^c} + [\psi]_{T^c})$, za sve $\varphi, \psi \in For^C_{LP}(I)$ takve da je $[\varphi]_{T^c} \cdot [\psi]_{T^c} = 0$. Neka je $\mu([\varphi]_{T^c}) = r$, $\mu([\psi]_{T^c}) = s$. Tada je $r + s \leq 1$. Pretpostavimo da je $r > 0$ i $s > 0$. Zbog monotonosti, za sve racionalne brojeve $r' \in [0, r)$ i $s' \in [0, s)$ imamo da $P_{\geq r'}\varphi$, $P_{\geq s'}\psi \in T^*$. Dakle, $P_{\geq r'+s'}(\varphi \vee \psi) \in T^*$, pa je $r + s \leq \sup\{t \in [0,1] \cap Q : P_{\geq t}(\varphi \vee \psi) \in T^*\}$. Ako je $r + s = 1$, očigledno tvrđenje važi. Pretpostavimo da je $r + s < 1$. Ako je $r + s < t_0 = \sup\{t \in [0,1] \cap Q : P_{\geq t}(\varphi \vee \psi) \in T^*\}$, tada je za sve racionalne brojeve $t' \in (r + s, t_0)$, $P_{\geq t'}(\varphi \vee \psi) \in T^*$. Izaberimo racionalne brojeve $r'' > r$ i $s'' > s$ takve da $\neg P_{\geq r''}\varphi$, $P_{<r''}\varphi$, $\neg P_{\geq s''}\psi$, $P_{<s''}\psi \in T^*$ i $r'' + s'' = t' \leq 1$. Tada, imamo da $P_{\leq r''}\varphi \in T^*$ i da $P_{<r''+s''}(\varphi \vee \psi)$, $\neg P_{\geq r''+s''}(\varphi \vee \psi)$, $\neg P_{\geq t'}(\varphi \vee \psi) \in T^*$ što je nemoguće. Dakle, $\mu([\varphi]_{T^c}) + \mu([\psi]_{T^c}) = \mu([\varphi]_{T^c} + [\psi]_{T^c})$. Dokaz je sličan za $r = 0$ i $s = 0$. Dakle, μ je mera na $\mathbf{B}_{T^c}$.

Lako se vidi da je $(\mathbf{B}_{T^c}, f_{T^c}, \mu)$ Bulov model teorije T.□

Bulov model neprotivrečne teorije T konstruisan u dokazu teoreme potpunosti naziva se kanonski Bulov model.

Teorema 3.1.6 *Neka je $T \subseteq For_{LP}(I)$ maksimalno neprotivrečna teorija, a T^c skup njenih klasičnih posledica. Funkcija $\mu : B_{T^c} \to [0,1]$ definisana sa $\mu([\varphi]_{T^c}) = \sup\{r \in [0,1] \cap Q : P_{\geq r}\varphi \in T\}$, $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ je jedina mera na $\mathbf{B}_{T^c}$, takva da je $(\mathbf{B}_{T^c}, f_{T^c}, \mu)$ Bulov model za T.*

Dokaz. Neka je $T \subseteq For_{LP}(I)$ maksimalno neprotivrečna teorija, T^c skup njenih klasičnih posledica, a $\mu : B_{T^c} \to [0,1]$ mera na $\mathbf{B}_{T^c}$ takva da je $(\mathbf{B}_{T^c}, f_{T^c}, \mu)$ Bulov model za T. Neka je, dalje, $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ proizvoljna klasična formula, i $m = \sup\{r \in [0,1] \cap Q : P_{\geq r}\varphi \in T\}$. Dokažimo da je $\mu([\varphi]_{T^c}) = m$. Za svako $r \in [0,1] \cap Q$ takvo da $P_{\geq r}\varphi \in T$ je $\mu([\varphi]_{T^c}) \geq r$, pa je $\mu([\varphi]_{T^c}) \geq m$. Pretostavimo da je $\mu([\varphi]_{T^c}) > m$. Tada postoji racionalan broj q iz $[0,1]$ takav da je $\mu([\varphi]_{T^c}) \geq q > m$. Prema izboru broja m, $P_{\geq q}\varphi \notin T$. Pošto je T maksimalno neprotivrečna teorija, iz poslednjeg, sledi da $\neg P_{\geq q}\varphi \in T$, pa pošto je $(\mathbf{B}_{T^c}, f_{T^c}, \mu)$ Bulov model za T, imamo da je $\mu([\varphi]_{T^c}) < q$ što je nemoguće prema izboru broja q.□

Interesantno je pomenuti da svaka neprotivrečna teorija $T \subseteq For_{LP}(I)$ ima i Bulov model $(\mathbf{B}, f, \mu)$ sa strogo pozitivnom merom μ na $\mathbf{B}$.

Teorema 3.1.7 *Svaka neprotivrečna teorija $T \subseteq For_{LP}(I)$ ima Bulov model sa strogo pozitivnom merom.*

Dokaz. Neka je T neprotivrečna teorija, a T^* njeno maksimalno neprotivrečno proširenje. Neka je dalje $T^c = \{\varphi \in For^C_{LP}(I) : P_{\geq 1}\varphi \in T^*\}$. Pokažimo, indukcijom po dužini dokaza, da za svaku formulu $\varphi \in For^C_{LP}(I)$, ako je $T^c \vdash \varphi$, onda mora biti $\varphi \in T^c$, odakle će slediti i neprotivrečnost teorije T^c. Očigledno sve klasične tautologije pripadaju skupu T^c. Neka je formula $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ dobijena iz ψ i $\psi \Rightarrow \varphi$ primenom modus ponensa. Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $P_{\geq 1}\psi$, $P_{\geq 1}(\psi \Rightarrow \varphi) \in T^*$. Prema teoremi 3.1.1(2) je $\vdash P_{\geq 1}(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (P_{\geq 1}\psi \Rightarrow P_{\geq 1}\varphi)$, pa primenom modus ponensa, dobijamo da $P_{\geq 1}\varphi \in T^*$, pošto je T^* deduktivno zatvorena teorija. Dakle, $\varphi \in T^c$.

Neka je $\mathbf{B}_{T^c}$ Lindenbaumova algebra teorije T^c, $f : For^C_{LP}(I) \to B_{T^c}$ kanonsko preslikavanje, a $\mu : B_{T^c} \to [0,1]$ definisano sa:

$$\mu([\varphi]_{T^c}) = \sup\{r \in [0,1] \cap Q : P_{\geq r}\varphi \in T^*\},\ \varphi \in For^C_{LP}(I).$$

Kao u dokazu teoreme 3.1.5 se pokazuje da je μ mera na $\mathbf{B}_{T^c}$, kao i da je $(\mathbf{B}_{T^c}, f, \mu)$ Bulov model teorije T. Pokažimo da je μ i strogo pozitivna mera na $\mathbf{B}_{T^c}$. Ako je $\varphi \in For^C_{LP}(I)$ klasična formula takva da je $\mu([\varphi]_{T^c}) = 1$, tada se lako zaključuje da $P_{\geq 1}\varphi \in T^*$, pa $\varphi \in T^c$, tj. $[\varphi]_{T^c} = 1$.□

3.2 Logika $LP(n)$

Logika koju ćemo razmatrati u ovom odeljku je restrikcija logike LP, u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom, što ima za posledicu važenje teoreme kompaktnosti.

Neka je $n > 0$ prirodan broj i $S_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Jezik logike $LP(n)$ razlikuje se od jezika logike LP jedino u tome što su dozvoljeni samo verovatnosni operatori $P_{\geq s}$ za $s \in S_n$. Skup $For^C_{LP(n)}(I)$ klasičnih formula ove logike isti je kao za logiku LP, dok u skup $For^P_{LP(n)}(I)$ verovatnosnih formula ulaze sve verovatnosne formule $\Phi \in For^P_{LP}(I)$ u čijem građenju učestvuju samo verovatnosni operatori dozvoljeni u ovoj logici, tj. operatori $P_{\geq s}$, $s \in S_n$. Neka je $For_{LP(n)}(I) = For^C_{LP(n)}(I) \cup For^P_{LP(n)}(I)$. Primetimo da je $\bigcup_{n \in N} For_{LP(n)}(I) = For_{LP}(I)$.

Skup aksioma za logiku $LP(n)$ isti je kao za LP, uz ograničenje da instance akioma moraju biti u skladu sa pravilima za formiranje formula, tj. u verovatnosnim formulama mogu se pojavljivati samo operatori $P_{\geq s}$, $s \in S_n$. Takođe, i ovde su pravila izvođenja (R1) i (R2), dok je pravilo (R3) zamenjeno novim:

($R3_n$) za sve $\Phi \in For_{LP(n)}(I)$, $\varphi \in For^C_{LP(n)}(I)$, iz $\Phi \Rightarrow P_{>s-\frac{1}{n}}\varphi$, sledi $\Phi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, za $s \in S_n \setminus \{0\}$, a iz $\Phi \Rightarrow P_{>0}\varphi$, sledi $\Phi \Rightarrow P_{\geq \frac{1}{n}}\varphi$.

Pojmovi *teorema* i *dokaz (iz hipoteza)* definišu se na uobičajen način. Pošto beskonačno pravilo izvođenja (R3) logike LP nije uključeno u aksimatski sistem ove logike, dokazi su konačni, tj. nizovi formula u dokazima mogu biti samo konačni.

Pojam Bulovog modela za $LP(n)$ definiše se na isti način kao za LP, s tom razlikom što se za kodomen mere na odgovarajućoj Bulovoj algebri uzima skup S_n. Zadovoljivost formule u modelima pomenute klase definiše isto kao za LP, a i dokaz teoreme saglasnosti je isti. Dokaz teoreme potpunosti se sprovodi kao u prethodnom odeljku, uz jasno ograničenje da su izvođenja konačna (u konstrukciji maksimalno neprotivrečne teorije ne koristi se korak (3)), pri čemu se u kanonskom modelu, za datu neprotivrečnu teoriju $T \subseteq For_{LP(n)}(I)$, mera definiše sa:

$$\mu([\varphi]_{T^c}) = \max\{r \in S_n : P_{\geq r}\varphi \in T^*\},$$

gde je T^c skup klasičnih posledica od T, a T^* maksimalno neprotivrečna ekstenzija teorije T.

3.3 Veza između LP i $LP(n)$

Primetimo da je formula $\Phi = \Phi(p_1, \ldots, p_n)$ valjana (zadovoljiva), u LP ili u $LP(n)$, ako za svaku (neku) meru $\mu : \mathbf{B}(p_1, \ldots, p_n) \to [0,1]$ ili $\mu : \mathbf{B}(p_1, \ldots, p_n) \to S_n$ imamo da $(\mathbf{B}(p_1, \ldots, p_n), f, \mu) \models \Phi$, gde je $\mathbf{B}(p_1, \ldots, p_n)$ Lindenbaumova algebra formula u čijem građenju učestvuju samo iskazna slova skupa $\{p_1, \ldots, p_n\}$, tj. $\mathbf{B}(p_1, \ldots, p_n)$ je slobodna Bulova algebra generisana sa $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Neka je $\Phi \in For^P_{LP}(I)$ a $p_1, \ldots, p_n$ lista različitih iskaznih slova među kojima se nalaze sve promenljive koje se javljaju u formuli Φ. Atom a je svaka formula oblika $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$, gde je $\pm p_i$ ili p_i, ili $\neg p_i$. Klasičnim iskaznim rasuđivanjem može se dokazati da je formula Φ ekvivalentna, u LP a takođe i u $LP(n)$, formuli

$$DNF(\Phi) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} P_{i,j} SNDF_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$$

gde je $P_{i,j}$ operator $P_{\geq r_{ij}}$ ili $P_{<r_{ij}}$ a $SNDF_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$ je klasična formula u savršenoj disjunktivnoj normalnoj formi, tj. $SNDF_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$ je disjunkcija nekih atoma. Formula Φ je zadovoljiva ako i samo ako je bar jedan disjunkt iz $DNF(\Phi)$ zadovoljiv. Neka je x_i mera atoma a_i. Izraz $a \in SNDF_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$ označava da se atom a javlja u $SNDF_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$. Dakle, disjunkt D_i =

$\bigwedge_{j=1}^{k_i} P_{ij} SNDF_{i,j}(p_1,\ldots,p_n)$ iz $DNF(\Phi)$ je zadovoljiv ako i samo ako je zadovoljiv sledeći sistem linearnih jednačina i nejednačina:

$$\sum_{i=1}^{2^n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \text{ za } i = 1,\ldots,2^n$$

$$\sum_{a_l \in SNDF_{i,j}(p_1,\ldots,p_n)} x_l \begin{cases} \geq r_{ij}, & \text{ako } P_{i,j} = P_{\geq r_{ij}} \\ < r_{ij}, & \text{ako } P_{i,j} = P_{< r_{ij}} \end{cases} .$$

Teorema 3.3.1 *Ako je $\Phi \in For^P_{LP}(I)$, onda $\models_{LP}\Phi$ ako i samo ako $\models_{LP(n)}\Phi$ za sve $n \in N$ takve da $\Phi \in For^P_{LP(n)}$.*

Dokaz. Za svaki disjunkt $D_i, i = 1,\ldots,k$ iz $DNF(\neg\Phi)$ neka je $S(i), i = 1,\ldots,k$ odgovarajući sistem jednačina i nejednačina sa racionalnim koeficijentima.

Ako je $\models_{LP}\Phi$, tada svaki $S(i), i = 1,\ldots,k$ nema rešenja u skupu realnih brojeva R, pa ni u skupu S_n, za svaki $n \in N$. Dakle, $\models_{LP(n)}\Phi$ za sve $n \in N$, takve da $\Phi \in For^P_{LP(n)}$.

S druge strane, ako je $\models_{LP(n)}\Phi$, tada svaki sistem $S(i), i = 1,\ldots,k$ nema rešenja u S_n, za sve $n \in N$ takve da $\Phi \in For^P_{LP(n)}$, pa nema rešenja ni u skupu racionalnih brojeva Q. Pošto su koeficijenti sistema $S(i), i = 1,\ldots,k$ racionalni brojevi, svaki $S(i), i = 1,\ldots,k$ nema rešenja ni u R. Dakle, $\models_{LP}\Phi$.□

3.4 Interpolacija

Teorema 3.4.1 *Neka su $T_1 \subseteq For_{LP}(I_1)$ i $T_2 \subseteq For_{LP}(I_2)$ neprotivrečne teorije takve da je $T_1 \cap T_2 \subseteq For_{LP}(I_1 \cap I_2)$ maksimalno neprotivrečna teorija. Ako su T_1^c i T_2^c konzervativne ekstenzije teorije $(T_1 \cap T_2)^c$, a $(T_1 \cup T_2)^c$ konzervativna ekstenzija teorija T_1^c i T_2^c, gde su T_1^c, T_2^c, $(T_1 \cap T_2)^c$ i $(T_1 \cup T_2)^c$ skupovi svih klasičnih posledica redom teorija T_1, T_2, $T_1 \cap T_2$ i $T_1 \cup T_2$, tada je $T_1 \cup T_2$ neprotivrečna teorija.*

Dokaz. Neka su $(\mathbf{B}_{T_1^c}, f_{T_1^c}, \mu_1)$ i $(\mathbf{B}_{T_2^c}, f_{T_2^c}, \mu_2)$ kanonski Bulovi modeli redom teorija T_1 i T_2. Pokazaćemo da postoji mera μ na $\mathbf{B}_{(T_1\cup T_2)^c}$ takva da je $(\mathbf{B}_{(T_1\cup T_2)^c}, f_{(T_1\cup T_2)^c}, \mu)$ Bulov model za $T_1 \cup T_2$. Pošto je $(T_1 \cup T_2)^c$ konzervativna ekstenzija teorija T_1^c i T_2^c, $\mathbf{B}_{T_1^c}$ i $\mathbf{B}_{T_2^c}$ su podalgebre od $\mathbf{B}_{(T_1\cup T_2)^c}$. Slično, $\mathbf{B}_{(T_1\cap T_2)^c}$ je podalgebra kako od $\mathbf{B}_{T_1^c}$ tako i od $\mathbf{B}_{T_2^c}$. Dakle,

$$(\mathbf{B}_{(T_1\cap T_2)^c}, f_{(T_1\cap T_2)^c}, \mu_1|B_{(T_1\cap T_2)^c})$$

i

$$(\mathbf{B}_{(T_1\cap T_2)^c}, f_{(T_1\cap T_2)^c}, \mu_2|B_{(T_1\cap T_2)^c})$$

su Bulovi modeli teorije $T_1 \cap T_2$. Pošto je $T_1 \cap T_2$ maksimalno neprotivrečna teorija, imamo da je $\mu_1([\theta]) = \mu_2([\theta])$ za sve $\theta \in For^C_{LP}(I_1 \cap I_2)$.

Za sve $\varphi_1 \in For^C_{LP}(I_1)$ i sve $\varphi_2 \in For^C_{LP}(I_2)$ takve da je $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, prema teoremi interpolacije za klasičan iskazni račun, postoji formula $\varphi \in For^C_{LP}(I_1 \cap I_2)$ da je $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi$ i $\models \varphi \Rightarrow \varphi_2$. Dakle, za sve $\varphi_1 \in For^C_{LP}(I_1)$ i sve $\varphi_2 \in For^C_{LP}(I_2)$, takve da je $[\varphi_1] \leq [\varphi_2]$, biće $\mu_1([\varphi_1]) \leq \mu_1([\varphi]) = \mu_2([\varphi]) \leq \mu_2([\varphi_2])$, za neko $\varphi \in For^C_{LP}(I_1 \cap I_2)$. Prema teoremi 2.3.9 postoji mera μ na $\mathbf{B}_{(T_1 \cup T_2)^c}$ koja je zajednička ekstenzija mera μ_1 i μ_2, pa je $(\mathbf{B}_{(T_1 \cup T_2)^c}, f_{(T_1 \cup T_2)^c}, \mu)$ Bulov model teorije $T_1 \cup T_2$.□

Slično prethodnoj teoremi može se pokazati da važi i sledeće tvrđenje.

Teorema 3.4.2 *Neka su $T_1 \subsetneq For_{LP(n)}(I_1)$ i $T_2 \subsetneq For_{LP(n)}(I_2)$ neprotivrečne teorije takve da je $T_1 \cap T_2 \subsetneq For_{LP(n)}(I_1 \cap I_2)$ maksimalno neprotivrečna teorija. Ako su T_1^c i T_2^c konzervativne ekstenzije teorije $(T_1 \cap T_2)^c$, a $(T_1 \cup T_2)^c$ konzervativna ekstenzija od T_1^c i T_2^c, tada je $T_1 \cup T_2$ neprotivrečna teorija logike $LP(n)$.*

Teorema 3.4.3 (Interpolaciona teorema) *Ako je Φ verovatnosna formula, neka je $\Gamma(\Phi)$ skup svih iskaznih slova koja se pojavljuju u formuli Φ. Ako su Φ i Ψ verovatnosne formule takve da Φ nije kontradikcija, Ψ nije valjana i $\models_{LP}(\Phi \Rightarrow \Psi)$, tada za proizvoljno veliki prirodan broj $n \in N$, takav da $\Phi, \Psi \in For^P_{LP(n)}$, postoji verovatnosna formula Θ takva da je $\models_{LP(n)}\Phi \Rightarrow \Theta$, $\models_{LP(n)}\Theta \Rightarrow \Psi$ i $\Gamma(\Theta) \subseteq \Gamma(\Phi) \cap \Gamma(\Psi)$.*

Dokaz. Neka je $n_0 \in N$ prirodan broj takav da $\Phi, \Psi \in For^P_{LP(n_0)}$. Pošto Φ nije kontradikcija postoji $n_1 \in N$ i mera $\mu_1 : B(\Gamma(\Phi)) \to S_{n_1}$ takva da je $(\mathbf{B}(\Gamma(\Phi)), f, \mu_1) \models \Phi$. Slično, pošto Ψ nije valjana formula postoji $n_2 \in N$ i mera $\mu_2 : B(\Gamma(\Psi)) \to S_{n_2}$ takva da je $(\mathbf{B}(\Gamma(\Psi)), f, \mu_2) \models \neg\Psi$. Neka je $n \in N$ prirodan broj takav da je $S_{n_0}, S_{n_1}, S_{n_2} \subseteq S_n$, a $a_1, \ldots, a_{2^k}$ lista atoma iskaznih slova iz $\Gamma(\Phi) \cap \Gamma(\Psi)$. Neka je

$$A = \{(\mu(a_1), \ldots, \mu(a_{2^k})) : \mu : B(\Gamma(\Phi)) \to S_n,\ (\mathbf{B}(\Gamma(\Phi)), f, \mu) \models \Phi\}$$

i

$$B = \{(\mu(a_1), \ldots, \mu(a_{2^k})) : \mu : B(\Gamma(\Psi)) \to S_n,\ (\mathbf{B}(\Gamma(\Psi)), f, \mu) \models \neg\Psi\}.$$

Pošto je $\models_{LP}(\Phi \Rightarrow \Psi)$ biće i $\models_{LP(n)}(\Phi \Rightarrow \Psi)$, prema prethodnoj teoremi imamo da je $A \cap B = \emptyset$. Neka je $\Theta_1 = \bigwedge_{i=1}^{2^k} P_{\pi_i[A]}a_i$, gde je $\pi_i[A]$ skup i–tih koordinata 2^k–torki iz A i $P_{\pi_i[A]}a_i = \bigvee_{s \in \pi_i[A]} P_{=s}a_i$. Slično, neka je $\Theta_2 = \bigwedge_{i=1}^{2^k} P_{\pi_i[B]}a_i$, gde je $\pi_i[B]$ skup i–tih koordinata 2^k–torki iz B i $P_{\pi_i[B]}a_i = \bigvee_{s \in \pi_i[B]} P_{=s}a_i$. Tada je $\models_{LP(n)}\Phi \Rightarrow \Theta_1$ i $\models_{LP(n)}\neg\Psi \Rightarrow \Theta_2$ pa i $\models_{LP(n)}\neg\Theta_2 \Rightarrow \Psi$. Pošto je, $A \cap B = \emptyset$ imamo $\models_{LP(n)} \Theta_1 \Rightarrow \neg\Theta_2$.□

3.5 Određivanje interpolanta u nekim slučajevima

U nekim specijalnim slučajevima interpolant se može efektivno odrediti i u LP logici. Radi jednostavnijeg izražavanja, u daljem tekstu, kažemo da *netrivijalno* važi $\models \Phi \Rightarrow \Psi$ samo ako formula Φ nije kontradikcija a Ψ nije valjana formula.

Primer 3.5.1. Neka su φ i ψ klasične formule, a s i t racionalni brojevi iz $[0,1]$, $s \geq t$ tako da je netrivijalno $\models P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq t}\psi$. Primetimo najpre da je $t > 0$ i da ψ nije tautologija jer $P_{\geq t}\psi$ nije valjana formula, a pošto je $s \geq t > 0$, φ nije kontradikcija jer to nije formula $P_{\geq s}\varphi$. Takođe treba primetiti da tada netrivijalno važi i $\models \varphi \Rightarrow \psi$. Ako bi bilo $\not\models \varphi \Rightarrow \psi$, skup $\{\varphi, \neg\psi\}$ bi bio neprotivrečan, pa bi takav bio i skup $\{\varphi, \neg\psi, P_{\geq 1}\varphi, P_{\geq 1}\neg\psi\}$, u LP logici, što je nemoguće jer u modelu za poslednji skup formula ne bi važilo $P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq t}\psi$. Pošto je netrivijalno $\models \varphi \Rightarrow \psi$, prema interpolacionoj teoremi za klasičan iskazni račun postoji formula θ, koja je građena samo od iskaznih slova koja se pojavljuju i u φ i u ψ, takva da je $\models \varphi \Rightarrow \theta$ i $\models \theta \Rightarrow \psi$, odakle se lako vidi da će važiti $\models P_{\geq s}\varphi \Rightarrow P_{\geq r}\theta$ i $\models P_{\geq r}\theta \Rightarrow P_{\geq t}\phi$ za svaki racionalan broj r takav da je $s \geq r \geq t$.

Primer 3.5.2. Bulove ideje pomenute u Primeru 2.3.2 uopštio je Halperin (Theodore Hailperin) u [3] rešavajući sledeći problem: ako su $\varphi_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,$ $\varphi_m(A_1,\ldots,A_n)$, $\psi(A_1,\ldots,A_n)$ 'Bulove kombinacije' događaja (skupova, iskaza) $A_1,\ldots,A_n$ i ako je $s_i \leq P(\varphi_i(A_1,\ldots,A_n)) \leq t_i$, $i = 1,\ldots,m$, pri čemu su dati realni brojevi $s_i, t_i \in [0,1]$, $i = 1,\ldots,m$, kako odrediti verovatnoću $P(\psi(A_1,\ldots,A_n))$. Glavni rezultati ovog istraživanja sumirani su u narednom tvrđenju formulisanom u terminima teorije Bulovih algebri.

Tvrđenje *Neka su $u_1,\ldots,u_m,v$ termi jezika Bulovih algebri u kojima se pojavljuju samo promenljive $x_1,\ldots,x_n$, a $\mu : B \rightarrow [0,1]$ mera na Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (B,+,\cdot,-,0,1)$. Tada za svaku valuaciju $a_1,\ldots,a_n \in B$ promenljivih $x_1,\ldots,x_n$ postoje $2m-$arne funkcije $L^v_{u_1,\ldots,u_m}$, $D^v_{u_1,\ldots,u_m} : [0,1]^{2m} \rightarrow [0,1]$ takve da kad god je $s_i \leq \mu(u_i[a_1,\ldots,a_n]) \leq t_i$ za sve $i = 1,\ldots,m$ važi $s \leq \mu(v[a_1,\ldots,a_n]) \leq t$, gde je $L^v_{u_1,\ldots,u_m}(s_1,\ldots,s_m,t_1,\ldots,t_m) = s$ i $D^v_{u_1,\ldots,u_m}(s_1,\ldots,s_m,t_1,\ldots,t_m) = t$*

Ovaj rezultat se lepo može primeniti na ispitivanje odnosa među verovatnosnim formulama. Pre toga uvedimo sledeće oznake, koje će nam biti od koristi: ako je φ klasična iskazna formula, a s i t racionalni brojevi iz $[0,1]$, neka je $P_{[s,t]}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} P_{\geq s}\varphi \wedge P_{\leq t}\varphi$. Sada, prethodno tvrđenje ima za posledicu sledeće tvrđenje.

Tvrđenje *Neka su $\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\psi$ klasične formule. Tada postoje $2m-$arne funkcije $L^\psi_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}$, $D^\psi_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m} : [0,1]^{2m} \rightarrow [0,1]$ takve da je za $s_1,\ldots,s_m,t_1,\ldots,t_m,$ $s,t \in [0,1] \cap Q$*

$$P_{[s_1,t_1]}\varphi_1 \wedge \ldots \wedge P_{[s_m,t_m]}\varphi_m \models P_{[s,t]}\psi$$

ako i samo ako je

$$[L^\psi_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(s_1,\ldots,s_m,t_1,\ldots,t_m), D^\psi_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(s_1,\ldots,s_m,t_1,\ldots,t_m)] \subseteq [s,t].$$

Neka netrivijalno važi $\models \Phi \Rightarrow \Psi$, pri čemu je Φ ekvivalentno sa

$$\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l_i} P_{[a_j^i, b_j^i]} \varphi_j^i, \tag{$*$}$$

za neke $k, l_1, \dots, l_k \in N$, $a_j^i, b_j^i \in [0,1] \cap Q$, $\varphi_j^i \in For_{LP}^C$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l_i$. Pošto je $\models \Phi \Rightarrow \Psi$, za sve $i = 1, \dots, k$ biće $\models \bigwedge_{j=1}^{l_i} P_{[a_j^i, b_j^i]} \varphi_j^i \Rightarrow \Psi$. Neka su $p_1, \dots, p_m$ sva iskazna slova koja se pojavljuju u obe formule Φ i Ψ, a $\theta_1, \dots, \theta_{2^m}$ lista svih atoma nad promenljivim $p_1, \dots, p_m$. Za fiksirano $i \in \{1, \dots, k\}$ neka je $e_t^i = L_{\varphi_1^i, \dots, \varphi_{l_i}^i}^{\theta_t}(a_1^i, \dots, a_{l_i}^i, b_1^i, \dots, b_{l_i}^i)$, $f_t^i = D_{\varphi_1^i, \dots, \varphi_{l_i}^i}^{\theta_t}(a_1^i, \dots, a_{l_i}^i, b_1^i, \dots, b_{l_i}^i)$, $t = 1, \dots, 2^m$. Lako se vidi da tada važi $\Phi \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{t=1}^{2^m} P_{[e_t^i, f_t^i]} \theta_t$, a takođe i da je $\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{t=1}^{2^m} P_{[e_t^i, f_t^i]} \theta_t \Rightarrow \Psi$.

Prethodni postupak je neprimenljiv ukoliko formula Ψ nije ekvivalentna formuli oblika ($*$), u LP logici. Međutim, postupak se uvek može primeniti za nalaženje interpolanta u logici $LP(n)$, za svako $n \in N$, zahvaljujući pravilu izvođenja R3_n.

4

Predikatska verovatnosna logika prvog reda

U ovom poglavlju biće razmatrana logika koja je proširenje klasične logike prvog reda. Ova logika je uvedena i detaljno prikazana u [10],[13]. Definisanjem pojma Bulovog modela za predikatsku verovatnosnu logiku prvog reda mogu se i za ovu logiku dobiti analogni rezultati kao u prethodnom poglavlju, zato će samo biti pokazana teorema potpunosti za klasu Bulovih modela.

Predikatsku verovatnosnu logiku prvog reda označavaćemo sa $LFOP$.

Klasični jezik prvog reda je svaki skup $\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Const_{\mathcal{L}}$, gde su $Rel_{\mathcal{L}}$, $Fun_{\mathcal{L}}$, $Const_{\mathcal{L}}$ međusobno disjunktni skupovi. Elemente skupa $Rel_{\mathcal{L}}$ nazivaćemo relacijskim znacima, elemente skupa $Fun_{\mathcal{L}}$ operacijskim znacima a elemente skupa $Const_{\mathcal{L}}$ simbolima konstanti. Za svaki jezik $\mathcal{L}$ na skupu $Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}}$ definisana je funkcija $ar : Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \to N$, koja svakom znaku $S \in Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}}$ pridružuje neki prirodan broj $ar(S)$, takozvanu arnost ili dužina znaka S. Jezik logike $LFOP$ je svaki skup koji sadrži neki klasičan jezik prvog reda i sledeće simbole:

- klasične iskazne veznike: $\wedge$ i $\neg$;
- univerzalni kvantifikator: $\forall$;
- promenljive: $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$;
- interpunkcijske znake: zarez , desnu) i levu (zagradu;
- listu verovatnosnih operatora: $P_{\geq s}$ za svaki $s \in [0,1] \cap Q$.

Skup terama $Term_{\mathcal{L}}(LFOP)$ je najmanji skup koji sadrži promenljive i simbole konstanti i zatvoren je za pravilo: ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi u F operacijski znak arnosti n, onda je i $F(t_1, \ldots, t_n)$ term.

Zatvoren term je term koji ne sadrži promenljive.

Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi a R relacijski znak arnosti n, onda je $R(t_1, \ldots, t_n)$ atomična formula.

Skup $For^{C}_{\mathcal{L}}(LFOP)$ klasičnih formula je najmanji skup koji sadrži atomične formule i zatvoren je za pravila:

- ako su φ i ψ klasične formule, to su i $\varphi \wedge \psi$ i $\neg\varphi$;
- ako je φ klasična formula, a x promenljiva, tada je $\forall x \varphi$ klasična formula.

Skup $For^P_{\mathcal{L}}(LFOP)$ verovatnosnih formula je najmanji skup koji zadovoljava uslove:

- ako je φ klasična formula i $s \in [0,1] \cap Q$, onda je $P_{\geq s}\varphi$ verovatnosna formula;
- ako su Φ i Ψ verovatnosne formule, to su i $\Phi \wedge \Psi$ i $\neg\Phi$.

Skup formula je $For_{\mathcal{L}}(LFOP) = For^C_{\mathcal{L}}(LFOP) \cup For^P_{\mathcal{L}}(LFOP)$. Klasične veznike $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ i verovatnosne operatore $P_{>s}$, $P_{<s}$ i $P_{\leq s}$ uvodimo kao u odeljku 3.1, dok egzistencijalni kvantifikator sa $\exists x\varphi \overset{\text{def}}{=} \neg\forall x\neg\varphi$. Kako je skup formula induktivno definisan, za svaku formulu potpuno je određen skup njenih potformula. Niz susednih simbola u nekoj formuli, koji je sam po sebi formula je potformula te formule. Pojavljivanje promenljive x u formuli φ je vezano ukoliko je x pod dejstvom kvatifikatora, tj. x se pojavljuje u potformuli formule φ oblika $\forall x\psi$ ili $\exists x\psi$, inače je slobodno. Rečenica je svaka formula koja ne sadrži slobodne promenljive. Ako je t term, a φ formula, sa $\varphi(t/x)$ označavamo formulu dobijenu iz φ kada se sva slobodna pojavljivanja promenljive x u formuli φ zamene sa t. Kažemo da je term t slobodan za promenljivu x u formuli φ ako nijedna promenljiva terma t nije vezana u formuli $\varphi(t/x)$.

Aksiomatski sistem, za logiku LP, sadrži sledeće shema aksiome:

(1) sve instance klasičnih iskaznih tautologija,

(2) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$, gde x nije slobodno u φ, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$

(3) $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi(t/x)$, gde je t term slobodan za x u φ, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$

(4) $P_{\geq 0}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$,

(5) $P_{\leq r}\varphi \Rightarrow P_{<s}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$ i $s, r \in [0,1] \cap Q$ takve da je $s > r$,

(6) $P_{<s}\varphi \Rightarrow P_{\leq s}\varphi$ za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$ i $s \in [0,1] \cap Q$,

(7) $(P_{\geq r}\varphi \wedge P_{\geq s}\psi \wedge P_{\geq 1}(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \Rightarrow P_{\geq \min\{1,r+s\}}(\varphi \vee \psi)$ za sve $\varphi, \psi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$ $r, s \in [0,1] \cap Q$,

(8) $(P_{\leq r}\varphi \wedge P_{<s}\psi) \Rightarrow P_{<r+s}(\varphi \vee \psi)$ za sve $\varphi, \psi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$, $s, r \in [0,1] \cap Q$ takve da je $r + s < 1$.

i pravila izvođenja:

(R1) iz Φ i $\Phi \Rightarrow \Psi$, sledi Ψ, za sve $\Phi, \Psi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$ ili $\Phi, \Psi \in For^P_{\mathcal{L}}(LFOP)$,

(R2) iz φ, sledi $\forall x\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$,

(R3) iz φ, sledi $P_{\geq 1}\varphi$, za sve $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$,

(R4) iz $\Phi \Rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\varphi$, za svaki prirodan broj $k \geq \frac{1}{s}$, sledi $\Phi \Rightarrow P_{\geq s}\varphi$, za sve $\Phi \in For^P_{\mathcal{L}}(LFOP)$, $\varphi \in For^C_{\mathcal{L}}(LFOP)$

Pojmovi *teorema, dokaz, sintaksna posledica skupa rečenica, neprotivrečnost skupa rečenica, maksimalno neprotivrečan skup rečenica* definišu se kao odgovarajući pojmovi za LP. Skup konstanti C je *skup svedoka* teorije T, ako za svaku formulu φ takvu da $T \vdash \exists x\varphi$, postoji konstanta $c \in C$ takva da je $T \vdash \varphi(c/x)$. Na standardan način se može dokazati da za svaku neprotivrečnu teoriju T i skup novih simbola konstanti C kardinalnosti $|For_{\mathcal{L}}(LFOP)|$, postoji maksimalno neprotivrečno proširenje T^* u jeziku $\mathcal{L} \cup C$ teorije T takvo da je C skup svedoka teorije T^*.

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda i $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ kompletna Bulova algebra. $\mathbf{B}$–interpretacija jezika $\mathcal{L}$ u skupu M, gde je M neprazan skup, je svako preslikavanje $\mathcal{J}$ čiji je domen $\mathcal{L}$ da je:

- za sve $c \in Const_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{J}(c) \in M$;
- za sve $F \in Fun_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{J}(F) : M^{ar(F)} \to M$;
- za sve $R \in Rel_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{J}(R) : M^{ar(R)} \to B$.

Umesto $\mathcal{J}(S)$ pisaćemo S^M za sve $S \in \mathcal{L}$.

$\mathbf{B}$-model jezika $\mathcal{L}$ nad nepraznim skupom M je svaki par $(M, \mathcal{J})$, gde je $\mathcal{J}$ neka $\mathbf{B}$–interpretacija jezika $\mathcal{L}$ u M.

Valuacija promenljivih $Var = \{v_1, v_2, \ldots\}$ u skupu M je svako preslikavanje $\nu : Var \to M$. Za $\nu : Var \to M$ i $a \in M$ sa $\nu(x/a)$ označavamo valuaciju koja svim promenljivim dodeljuje iste vrednosti u M kao i valuacija ν, osim promenljivoj x kojoj dodeljuje vrednost $a \in M$.

Vrednost terma t jezika $\mathcal{L}$ u $\mathbf{B}$–modelu istog jezika nad skupom M za valuaciju $\nu : Var \to M$, u oznaci $t^M[\nu]$, definišemo indukcijom po složenosti terma t:

- ako je t promenljiva $x \in Var$, onda je $t^M[\nu] = \nu(x)$;
- ako je t simbol konstante $c \in Const_{\mathcal{L}}$, onda je $t^M[\nu] = c^M$;
- ako je t oblika $F(t_1, \ldots, t_n)$, pri čemu je $F \in Fun_{\mathcal{L}}$, $ar(F) = n$ i $t_1, \ldots, t_n$ termi jezika $\mathcal{L}$, onda je $t^M = F^M(t_1^M[\nu], \ldots, t_n^M[\nu])$.

$\mathbf{B}$–vrednost klasične formule φ jezika $\mathcal{L}$ u $\mathbf{B}$–modelu nad M za valuaciju $\nu : Var \to M$, u oznaci $\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}}$, definišemo indukcijom po složenosti formule φ:

- ako je φ oblika $R(t_1, \ldots, t_n)$, $R \in Rel_{\mathcal{L}}$, $ar(R) = n$ a $t_1, \ldots, t_n$ termi jezika $\mathcal{L}$, onda je $\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}} = R^M(t_1^M[\nu], \ldots, t_n^M[\nu])$;
- ako je φ oblika $\psi \wedge \theta$, za neke formule ψ i θ, onda je $\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}} = \|\psi[\nu]\|_{\mathbf{B}} \cdot \|\theta[\nu]\|_{\mathbf{B}}$;
- ako je φ oblika $\neg\psi$, za neku formulu ψ, onda je $\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}} = -\|\psi[\nu]\|_{\mathbf{B}}$;
- ako je φ oblika $\forall x \psi$, za neku formulu ψ i promenljivu x, onda je $\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}} = \prod_{a \in M} \|\psi[\nu(x/a)]\|_{\mathbf{B}}$.

$\mathbf{B}$–vrednost rečenice φ u nekom $\mathbf{B}$–modelu ne zavisi od valuacije promenljivih pa jednostavno pišemo $\|\varphi\|_{\mathbf{B}}$.

Bulov model jezika $\mathcal{L}$ za logiku $LFOP$ je svaka uređena četvorka $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu)$, gde je $\mathbf{B}$ Bulova algebra, M neprazan skup, $\mathcal{J}$ $\mathbf{B}$–interpretacija jezika $\mathcal{L}$ u M i μ mera na $\mathbf{B}$. Formula $\Phi \in For_{\mathcal{L}}(LFOP)$ važi u Bulovom modelu $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu)$, za valuaciju $\nu : Var \to M$, u oznaci $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu) \models \Phi[\nu]$, ako i samo ako je:

- ako je Φ klasična formula, $\|\Phi[\nu]\|_{\mathbf{B}} = 1$;
- ako je Φ oblika $P_{\geq s}\varphi$, za neku klasičnu formulu φ i neki $s \in [0, 1] \cap Q$, $\mu(\|\varphi[\nu]\|_{\mathbf{B}}) =\geq s$;

- ako je Φ oblika $\Psi \wedge \Theta$, za neke verovatnosne formule Ψ i Θ, $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu) \models \Psi[\nu]$ i $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu) \models \Theta[\nu]$;
- ako je Φ oblika $\neg\Psi$, za neku verovatnosnu formulu Ψ, nije $(\mathbf{B}, M, \mathcal{J}, \mu) \models \Psi[\nu]$.

Teorema saglasnosti u odnosu na ovako definisanu klasu modela lako se dokazuje.

Teorema 4.0.1 *Svaki neprotivrečan skup rečenica T ima Bulov model*

Dokaz. Neka je T^* maksimalno neprotivrečna ekstenzija skupa T sa skupm svedoka C, T^c skup svih klasičnih posledica skupa T, $\mathbf{B}_{T^c}$ Lindenbaumova algebra teorije T^c i D skup svih zatvorenih termova jezika teorije T^*. Definišimo $\mathbf{B}_{T^c}$−interpretaciju $\mathcal{J}$ datog jezika u D na sledeći način:

- za $c \in Const_{\mathcal{L}}$, neka je $\mathcal{J}(c) = c$;
- za $F \in Fun_{\mathcal{L}}$, $ar(F) = n$ i proizvoljne $t_1, \ldots, t_n \in D$, neka je $\mathcal{J}(F)(t_1, \ldots, t_n) = F(t_1, \ldots, t_n)$;
- za $R \in Rel_{\mathcal{L}}$, $ar(R) = n$ i proizvoljne $t_1, \ldots, t_n \in D$, neka je $\mathcal{J}(R)(t_1, \ldots, t_n) = [R(t_1, \ldots, t_n)]_{T^c}$.

Neka je $\mu : B_{T^c} \to [0, 1]$, preslikavanje definisano sa

$$\mu([\varphi]_{T^c} = \sup\{r \in [0, 1] \cap Q : P_{\geq r}\varphi \in T^*\}.$$

Lako se pokazuje da je μ mera na $\mathbf{B}_{T^c}$, kao i da je $(\mathbf{B}_{T^c}, D, \mathcal{J}, \mu)$ model skupa rečenica T^*, pa time i skupa T.□

Literatura

[1] Bhaskara Rao, K. P. S., Bhaskara Rao, M., Theory of charges: A study of finitely additive measures, Academic Press, 1983.

[2] Chang, C. C., Keisler, Jerome H., Model theory, Studies in logic and the foundation of mathematics, vol. 73, North-Holland, 1977.

[3] Hailperin, Theodore, Boole's logic and probability: a critical exposition from the standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory, North-Holland, 1976.

[4] Hailperin, Theodore, Best possible inequalites for the probability of a logical function of events, American Mathematical Monthly, vol.72, 343-359, 1965.

[5] Hailperin, Theodore, Probability semantics for quantifier logic, Journal of Philosophical Logic, vol.29, 207-239, 2000.

[6] Ikodinović, Nebojša, Craig interpolation for classical propositional logic with some probability operators, biće objavljeno u Publication de L'Institute Mathematique.

[7] Ikodinović, Nebojša, Completeness theorem for Boolean models with strictly positive measure, biće objavljeno u Mathematica Moravica.

[8] Kron, Aleksandar, Odnos polivalentnih logika i teorije verovatnoće, Naučna knjiga, 1967.

[9] Mijajlović, Žarko, An Introduction to Model Theory, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1987.

[10] Ognjanović, Zoran, Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu, doktorska disertacija, Kragujevac, 1999.

[11] Perović, Žikica, Bulove algebre, Univerzitet u Nišu, Niš, 1998.

[12] Prešić, Slaviša, Elementi matematičke logike, Matematička biblioteka 34, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1968.

[13] Rašković, Miodrag, Classical logic with some probability operators, Publication de L'Institute Mathematique, ns. vol. 53(67), 1-3, 1993.

[14] Rašković, Miodrag, Đorđević, Radosav, Probability quantifiers and operators, Vesta, Beograd, 1996.

[15] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, A first order probability logic-LP_Q, Publication de L'Institute Mathematique, ns. vol. 65 (79), 1-7, 1999.

[16] Vujošević, Slobodan, Matematička logika: o mogućnostima formalnog metoda, CID, Podgorica, 1996.